POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in

Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea magistrale

Calcolo delle condizioni di massima risposta forzata di dischi palettati di turbina con non linearità di contatto



Relatore Prof. Stefano Zucca **Candidato** Roberto Tufilli

Anno Accademico 2021/2022

Alla mia famiglia E a quanti mi vogliono bene

Sommario

La seguente tesi si pone lo scopo di sviluppare in ambiente MATLAB un programma in grado di tracciare le curve di risonanza di un disco palettato attraverso l'implementazione del metodo della fase di risonanza. Per il raggiungimento di tale scopo sono stati studiati in primo luogo sistemi semplici a 2 gradi di libertà implementanti due diversi modelli di contatto (smorzamento per attrito e contatto intermittente), al fine di evidenziare i limiti e le proprietà di tale metodo. Si è quindi passati allo studio di un disco palettato con tettuccio ed elemento di contatto Jenckins 2D con un carico normale variabile. La scrittura del programma è stata effettuata considerando due diversi approcci, quello di sistema statico/dinamico accoppiato e quello disaccoppiato, verificandone il funzionamento in presenza di carichi concentrati e distribuiti.

Indice

Elenco delle figure	V
Elenco delle tabelle	VII
1 Introduzione	1
2 Metodologia	_ 2
 2.1 Metodo del bilancio armonico 2.1.1 Equazioni di governo per un sistema generico 2.1.2 Equazioni di governo per un disco palettato 2.1.3 Simmetria ciclica	2 2 4 7
2.2 Modello di contatto	9
2.3 Metodo della fase di risonanza	12
2.4 Sviluppo del software	15
3 Applicazione a sistemi 1D	_ 18
3.1 Sistema 1D con smorzamento per attrito	18
3.2 Sistema 1D con contatto intermittente	26
3.3 Influenza della gdl di riferimento	30
3.4 Influenza della vicinanza delle pulsazioni naturali	34
4 Risultati per un disco palettato	_ 39
4.1 Caso di studio	39
4.2 Approccio HBM accoppiato	41
4.3 Approccio HBM disaccoppiato	45
4.4 Errore di approssimazione del sistema	48
4.5 Carico distribuito	50
4.6 Limite di applicazione	53
5 Conclusioni	_ 56
Bibliografia	_ 58

Elenco delle figure

Fig. 2. 1 (a) Disco palettato con contatto sullo shroud (b) Settore fondamentale del dis (c) Schematizzazione della notazione di simmetria ciclica	со 5	
Fig. 2. 2 Rappresentazione schematica del settore fondamentale del disco	6	
Fig. 2. 3 Elemento di contatto Jeckins 2D con carico normale variabile	. 9	
Fig. 2. 4 Schematizzazione del modello di contatto intermittente	. 11	
Fig. 2. 5 Schematizzazione del modello di contatto con smorzamento per attrito	11	
Fig. 2. 6 Schematizzazione del metodo AFT	12	
Fig. 2. 7 (a) Andamento dell'ampiezza in prossimità della risonanza (b) Andamento de ritardo di fase in prossimità della risonanza	əl 14	
Fig. 2. 8 Diagramma di flusso del software	16	
Fig. 2. 9 Diagramma di flusso del solutore non lineare	17	
Fig. 3. 1 Schematizzazione del Sistema 1	18	
Fig. 3. 2 Curva di risposta in frequenza del Sistema 1 nel caso lineare		
Fig. 3. 3 Ampiezza e frequenza di risonanza in funzione del precarico per il Sistema 1	20	
Fig. 3. 4 Curve di risposta in frequenza in funzione del precarico per le masse M1 e M del Sistema 1	12 21	
Fig. 3. 5 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione del precarico per il Sistema 1	22	
Fig. 3. 6 Ampiezza e frequenza di risonanza in funzione della forzante per il Sistema I	1 23	
Fig. 3. 7 Curve di risposta in frequenza in funzione della forzante per le masse M1 e N del Sistema 1	Л2 24	
Fig. 3. 8 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione della forzante per il Sistema 1	25	
Fig. 3. 9 Schematizzazione del Sistema 2	26	
Fig. 3. 10 Curva di risposta in frequenza del Sistema 2 nel caso lineare	27	
Fig. 3. 11 Ampiezza e frequenza di risonanza in funzione del divario iniziale per il Sistema 2	28	
Fig. 3. 12 Curve di risposta in frequenza in funzione del divario iniziale per le masse M1 e M2 del Sistema 2	29	
Fig. 3. 13 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione del divario iniziale po il Sistema 2	er 30	
Fig. 3. 14 Errore relativo in ampiezza e in frequenza al variare della fase per il Sistema 1 (precarico)	a 32	

Fig. 3. 15 Errore relativo in ampiezza e in frequenza al variare della fase per il Sistem 1 (forzante)	a 33
Fig. 3. 16 Errore relativo in ampiezza e in frequenza al variare della fase per il Sistem 2	a 34
Fig. 3. 17 Curva di risposta in frequenza del Sistema 1 nel caso lineare ($\alpha = 1.2$)	35
Fig. 3. 18 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione di α	36
Fig. 3. 19 Fasi di risonanza del caso lineare e del caso di studio in funzione di α	37
Fig. 3. 20 Fase di risonanza lineare in funzione di α	38
Fig. 4. 1 Modello agli elementi finiti di un settore del disco, con condizioni al contorn	10 40
Fig. 4. 2 (a) Disposizione degli elementi di contatto (b) Rappresentazione del modello contatto tra due nodi	o di 40
Fig. 4. 3 Risposta in frequenza del caso lineare	41
Fig. 4. 4 Curva di risonanza per approccio accoppiato	42
Fig. 4. 5 Curve di risposta in frequenza per approccio accoppiato con utilizzo della matrice Jacobiana analitica	42
Fig. 4. 6 Errore relativo in ampiezza e frequenza per approccio accoppiato	43
Fig. 4. 7 Curve di risposta in frequenza per approccio accoppiato senza utilizzo della matrice Jacobiana analitica	44
Fig. 4. 8 Curva di risonanza per approccio disaccoppiato	45
Fig. 4. 9 Curve di risposta in frequenza per approccio disaccoppiato con utilizzo della matrice Jacobiana analitica	46
Fig. 4. 10 Errore relativo in ampiezza e frequenza per approccio disaccoppiato	47
Fig. 4. 11 Errore relativo in ampiezza e frequenza per i nodi fisici del sistema risolto o approccio accoppiato	con 48
Fig. 4. 12 Errore relativo in ampiezza e frequenza per i nodi fisici del sistema risolto e approccio disaccoppiato	con 49
Fig. 4. 13 Curve di risposta in frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio accoppiato	50
Fig. 4. 14 Errore relativo in ampiezza e frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio accoppiato	51
Fig. 4. 15 Curve di risposta in frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio disaccoppiato	52
Fig. 4. 16 Errore relativo in ampiezza e frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio accoppiato	53
Fig. 4. 17 Casi di convergenza errata	54
Fig. 4. 18 Fase dei risultati errati	55

Elenco delle tabelle

Tab. 3. 1 Dati del Sistema 1	19
Tab. 3. 2 Dati del Sistema 2	26
Tab. 3. 3 Fasi di risonanza lineare del Sistema 1	31
Tab. 3. 4 Fasi di risonanza lineare del Sistema 2	31
Tab. 3. 5 Dati del problema considerato per lo studio dell'influenza della vicina pulsazioni naturali	anza delle 35
Tab. 4. 1 Dati del disco palettato utilizzato come test case	39

Capitolo 1

Introduzione

Nel processo di progettazione di un disco palettato di turbina è spesso importante prevedere il comportamento delle vibrazioni all'interno di determinati range dei parametri di funzionamento. Tra tutti i fenomeni riguardanti le vibrazioni, risulta di particolare importanza il fenomeno della risonanza, che può verificarsi nel momento in cui il sistema meccanico è sottoposto ad una forzante esterna sostenuta. In questo caso le vibrazioni possono raggiungere livelli elevati e causare di conseguenza danni strutturali e rumore. Risulta pertanto importante prevedere le frequenze di risonanza e le ampiezze di vibrazione ad esse associate per un dato sistema e studiare l'influenza che i diversi parametri del sistema hanno sul fenomeno della risonanza, al fine di operare le opportune modifiche del sistema stesso o limitare il range di frequenze di utilizzo così da evitare risonanze e garantire che il livello delle vibrazioni rimanga all'interno di un intervallo tollerabile.

Essendo il comportamento dinamico del disco palettato governato da equazioni differenziali non lineari a causa della presenza di contatto e attrito tra le diverse pale, la risoluzione del sistema e la determinazione delle condizioni di massima risposta forzata potrebbe risultare particolarmente onerosa e complessa dal punto di vista computazionale. Se poi si considera che tale analisi debba essere ripetuta per diversi valori dei parametri di progetto all'interno di un determinato range per determinarne l'influenza, allora il costo computazionale diventa davvero proibitivo.

Pertanto, lo scopo di questa tesi è quello di implementare in ambiente MATLAB un metodo di risoluzione approssimato delle equazioni di equilibrio del sistema in grado di determinare direttamente le condizioni di risonanza di un dato sistema senza calcolare le curve di risposta in frequenza, così da ridurre notevolmente i tempi di calcolo. Tra i due principali metodi presenti in letteratura, quello della tangente orizzontale proposto da Petrov [1] e quello della fase di risonanza proposto da Förster e Krack [2], si è scelto di utilizzare il secondo in quanto, non richiedendo il calcolo di derivate, permette di ottenere ulteriori risparmi computazionali, anche se a discapito di una minore accuratezza dei risultati. Si mostra nel capitolo successivo la metodologia di implementazione di questo metodo.

Capitolo 2 Metodologia

Lo scopo di questo capitolo è quello di descrivere in dettaglio la metodologia HBM (metodo del bilanciamento armonico) in relazione alla dinamica di un disco palettato con contatto sul tettuccio, in simmetria ciclica e caratterizzato da un elemento Jenkins 2D con un modello di contatto del carico normale variabile. Si mostra successivamente il metodo della fase di risonanza come metodo di calcolo delle curve di risonanza al variare di differenti parametri di progetto del sistema.

2.1 Metodo del bilanciamento armonico

Il metodo del bilanciamento armonico è una tecnica utilizzata per risolvere un insieme di equazioni differenziali ordinarie non lineari nel dominio del tempo, convertendo queste ultime in equazioni algebriche mediante l'espressione degli spostamenti e delle forze come serie di Fourier troncate. Quando si considera solo l'armonica fondamentale, si parla di HBM classico, ma in presenza di forti non linearità, come quelle considerate in questo lavoro, è necessario considerare più armoniche, pertanto si parla di multi-HBM. Le sezioni seguenti mostrano questa metodologia applicandola inizialmente ad un sistema generico, per poi estenderla ai dischi palettati includendo la condizione al contorno di simmetria ciclica e studiando solamente il settore fondamentale.

2.1.1 Equazioni di governo per un sistema generico

Un sistema generico a N gradi di libertà (gdl) è governato dal seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$M\ddot{Q}(t) + C\dot{Q}(t) + KQ(t) = F(t) + F_c(Q(t), \dot{Q}(t), t)$$
(2.1)

dove M è la matrice di massa, C è la matrice di smorzamento, K è la matrice di rigidezza e dove $M, C, K \in \mathbb{R}^{N \times N}$; $Q(t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è il vettore degli spostamenti nodali; $\dot{Q}(t) \in \ddot{Q}(t)$ sono le derivate nel tempo di Q(t); $F(t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è il vettore delle forze eccitanti e $F_c(Q(t), \dot{Q}(t), t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è il vettore delle forze di contatto non lineari. Le componenti del vettore spostamento Q sono date da:

$$Q = [q_c^T \ q_r^T \ q_a^T]^T \tag{2.2}$$

dove q_c , q_r e q_a sono rispettivamente gli spostamenti dei nodi dell'interfaccia di contatto del tettuccio della pala, detto anche shroud, dei nodi di riferimento, su cui sono definiti gli input e gli output del problema, e degli altri nodi del sistema. Poiché i gradi di libertà di contatto e di riferimento sono molto meno numerosi rispetto agli altri, allora prima di calcolare la soluzione non lineare viene in genere eseguita una riduzione della dimensione del modello non lineare. Tra i diversi metodi di riduzione del sistema

dinamico disponibili in letteratura, in questo lavoro si è scelto di applicare il classico metodo di Craig Bampton [3], mantenendo i gradi di libertà dell'interfaccia di contatto e di riferimento come coordinate fisiche, e aggiungendo un certo numero di forme modali η . Il vettore degli spostamenti ridotto può essere quindi scritto come:

$$q = [q_c^T q_r^T \eta^T]^T$$
(2.3)

dove $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $n \ll N$. L'equazione 2.1 può essere riscritta in seguito alla riduzione del sistema come:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = f(t) + f_c(q(t), \dot{q}(t), t)$$
(2.4)

dove *m* è la matrice di massa, *c* è la matrice di smorzamento, *k* è la matrice di rigidezza e dove *m*, *c*, *k* $\in \mathbb{R}^{n \times n}$; $q(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ è il vettore degli spostamenti nodali; $f(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ è il vettore delle forze eccitanti e $f_c(q(t), \dot{q}(t), t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ è il vettore delle forze di contatto non lineari, tutti ottenuti dopo l'applicazione del metodo di riduzione di Craig Bampton. Per risolvere l'equazione 2.4 mediante il metodo HBM [4] bisogna esprimere gli spostamenti e le forze come serie di Fourier troncate all'ordine armonico *H*:

$$q \approx \sum_{h=0}^{H} \bar{q}^{(h)} e^{ih\omega t}$$

$$f \approx \sum_{h=0}^{H} \bar{f}^{(h)} e^{ih\omega t}$$

$$f_c \approx \sum_{h=0}^{H} \bar{f}_c^{(h)} e^{ih\omega t}$$
(2.5)

Il numero di armoniche H è scelto in modo da approssimare con sufficiente precisione la dinamica dello stato stazionario della struttura. Derivando il vettore degli spostamenti rispetto al tempo si ricavano i vettori delle velocità e delle accelerazioni:

$$\dot{q} \cong \sum_{h=1}^{H} ih\omega \bar{q}^{(h)} e^{ih\omega t}$$

$$\ddot{q} \cong -\sum_{h=1}^{H} h\omega^2 \bar{q}^{(h)} e^{ih\omega t}$$
(2.6)

Attraverso l'applicazione del metodo di Galerkin [5] l'equazione differenziale non lineare si trasforma in un'equazione algebrica non lineare a coefficienti di Fourier.

Poiché negli sviluppi di Fourier sono stati operati dei troncamenti, allora si genera un residuo *RES* e l'equazione di equilibrio diventa:

$$RES = -m\sum_{h=1}^{H} h\omega^2 \bar{q}^h e^{ih\omega t} + ic\sum_{h=1}^{H} h\omega \bar{q}^{(h)} e^{ih\omega t} + k\sum_{h=0}^{H} \bar{q}^{(h)} e^{ih\omega t} -\sum_{h=0}^{H} \bar{f}_c^{(h)} e^{ih\omega t} -\sum_{h=0}^{H} \bar{f}_c^{(h)} e^{ih\omega t}$$

$$(2.7)$$

Il residuo risulta tanto minore quanto maggiore è l'ordine armonico H. L'equazione 2.7 può essere riscritta in forma compatta come:

$$RES^{(h)} = d^{(h)}\bar{q}^{(h)} - \bar{f}^{(h)} - \bar{f}^{(h)}_c \quad con \ h = 0, \dots, H$$
(2.8)

dove $d^{(h)} = -(h\omega)^2 m + ih\omega c + k$ è la matrice di rigidezza dinamica relativa all'hesima armonica. L'equazione 2.8 descrive sia il caso statico (h = 0), sia i diversi casi dinamici (h = 1, ..., H). Risolvendo tale equazione per ogni armonica, si ricavano i coefficienti di Fourier degli spostamenti e di conseguenza l'ampiezza degli spostamenti per i diversi gradi di libertà. Nel caso di sistemi non lineari, come quello di nostro interesse, la risoluzione avviene tramite un processo iterativo, nel quale partendo da una configurazione degli spostamenti iniziale si calcola il vettore delle forze di contatto e si risolve il sistema di equazioni ottenendo un nuovo vettore degli spostamenti. Questo si ripete fino a quando il vettore dei residui non assume valori al di sotto di una tolleranza opportunamente fissata.

All'interno del metodo HBM si possono distinguere due differenti approcci di risoluzione: accoppiamento e disaccoppiamento statico/dinamico. La differenza consiste nel fatto che nel primo modo le equazioni di equilibrio statico vengono risolte insieme a quelle dinamiche, mentre nel secondo sono studiate in maniera indipendente.

2.1.2 Equazioni di governo per un disco palettato

Le equazioni di governo scritte per un sistema generico possono essere riscritte per un disco palettato con contatto sulle interfacce dello shroud. Un disco palettato è un sistema composto da N_s settori fondamentali identici tra di loro e disposti in modo ciclico. In Fig. 2.1 sono mostrati un disco palettato con pale identiche, un settore fondamentale del disco e una schematizzazione della notazione di simmetria ciclica.

L'equazione di equilibrio dinamico di un generico settore del disco palettato è ottenuta modificando l'equazione 2.1 nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
M\ddot{Q}_{(n)}(t) + C\dot{Q}_{(n)}(t) + KQ_{(n)}(t) \\
&= F_{(n)}(t) + F_{c,l_{(n)}}(\Delta q_{c,l}, \Delta \dot{q}_{c,l}, t) + F_{c,r_{(n)}}(\Delta q_{c,r}, \Delta \dot{q}_{c,r}, t)
\end{aligned}$$
(2.9)

dove $n = 1, ..., N_s$ è il numero del settore considerato; $M, C \in K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidezza dell'n-esimo settore isolato; $Q_{(n)}(t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è il vettore degli spostamenti; $F_{(n)}(t) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ è il vettore delle

Capitolo 2 – Metodologia

forzanti agenti sul settore; $F_{c,l}(\Delta q_{c,l}, \Delta \dot{q}_{c,l}, t) \in F_{c,r}(\Delta q_{c,r}, \Delta \dot{q}_{c,r}, t) \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ sono i vettori delle forze non lineari di contatto, agenti rispettivamente sulle interfacce di contatto di sinistra e di destra, funzione degli spostamenti e delle velocità relativi.



Fig. 2. 1 (a) Disco palettato con contatto sullo shroud (b) Settore fondamentale del disco (c) Schematizzazione della notazione di simmetria ciclica

Nota la schematizzazione del settore isolato riportata in Fig. 2.2, il vettore degli spostamenti può essere riscritto come:

$$Q = \left[q_{d,l_{(n)}}^{T} q_{d,r_{(n)}}^{T} q_{r_{(n)}}^{T} q_{c,l_{(n)}}^{T} q_{c,r_{(n)}}^{T} q_{a_{(n)}}^{T} \right]^{T}$$
(2.10)

dove $q_{d,l_{(n)}} e q_{d,r_{(n)}}$ sono rispettivamente gli spostamenti nodali delle interfacce di sinistra e di destra del disco; $q_{c,l_{(n)}} e q_{c,r_{(n)}}$ sono gli spostamenti dei nodi di contatto dei lati di sinistra e di destra dello shroud; $q_{r_{(n)}}$ sono gli spostamenti dei nodi di riferimento e $q_{a_{(n)}}$ sono gli spostamenti dei restanti nodi che costituiscono l'n-esimo settore.



Fig. 2. 2 Rappresentazione schematica del settore fondamentale del disco

Poiché si è interessati alla risoluzione di tale sistema mediante il metodo del bilanciamento armonico, gli spostamenti e le forze sono espresse mediante serie di Fourier troncate all'ordine armonico H:

$$Q_{(n)} \cong \sum_{h=0}^{H} \bar{Q}_{(n)}^{(h)} e^{ih\omega t}$$

$$F_{(n)} \cong \sum_{h=0}^{H} \bar{F}_{(n)}^{(h)} e^{ih\omega t}$$

$$F_{c,l_{(n)}} \cong \sum_{h=0}^{H} \bar{F}_{c,l_{(n)}}^{(h)} e^{ih\omega t}$$

$$F_{c,r_{(n)}} \cong \sum_{h=0}^{H} \bar{F}_{c,r_{(n)}}^{(h)} e^{ih\omega t}$$
(2.11)

Applicando il metodo di Galerkin l'equazione non lineare definita nel dominio del tempo è trasformata in un'equazione algebrica:

$$D^{(h)}\bar{Q}^{(h)}_{(n)} = \bar{F}^{(h)}_{(n)} + \bar{F}^{(h)}_{c,l}_{(n)} + F^{(h)}_{c,r}_{c,r}_{(n)} \operatorname{con} h = 0, \dots, H$$
(2.12)

dove $D^{(h)} = (-(h\omega)^2 M + ih\omega C + K)$ è la matrice di rigidezza dinamica relativa all'h-esima armonica. L'equazione 2.12 descrive sia il caso statico (h = 0), sia i diversi casi dinamici (h = 1, ..., H) dell'n-esimo settore. Poiché le forze di contatto dipendono dagli spostamenti e dalle velocità relativi, allora potrebbe sembrare che tutti i settori siano interdipendenti gli uni dagli altri e quindi che il sistema sia risolvibile solo complessivamente. In realtà, come vedremo nella sezione successiva, in condizioni di simmetria ciclica lo studio dell'intero sistema può essere ridotto allo studio di un singolo settore.

2.1.3 Simmetria ciclica

Per un'analisi più approfondita del disco palettato di turbina si considera che esso sia eccitato da un'eccitazione del tipo ad onda mobile, si veda [$\underline{6}$, $\underline{7}$] per una spiegazione dettagliata. L'inter-blade phase angle (IBPA) è definito come:

$$\phi = \frac{2\pi}{N_s} EO \tag{2.13}$$

dove N_s è il numero di pale ed EO è l'engine order. Poiché il disco palettato subisce un'eccitazione di questo tipo, nel caso di assenza di mistuning, si presume che anche la risposta del sistema rappresenti un'onda mobile. Ciò si traduce nella seguente relazione tra i vettori degli spostamenti nodali di settori consecutivi:

$$\bar{Q}_{(n)}^{(h)} = \bar{Q}_{(n-1)}^{(h)} e^{-ih\phi}$$
(2.14)

Questa condizione di vincolo è applicata in un primo momento ai nodi di interfaccia del disco e successivamente ai nodi di contatto al fine di ridurre il numero di gdl del sistema.

Data la condizione di assenza di spostamenti relativi tra i nodi del disco, l'equazione 2.14 può essere riscritta per questi nodi come:

$$\bar{q}_{d,l}^{(h)}{}_{(n)} = \bar{q}_{d,r}^{(h)}{}_{(n)}e^{-ih\phi}$$
(2.15)

Si definisce quindi il vettore degli spostamenti ridotto per l'h-esima componente armonica e l'n-esimo settore come:

$$\bar{Q}_{rid(n)}^{(h)} = T_{CS\,rid}^{(h)} \bar{Q}_{(n)}^{(h)}$$
(2.16)

$$T_{rid}^{(h)} = \begin{bmatrix} I(e^{-ih\phi}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$
(2.17)

dove $T_{rid}^{(h)}$ è la matrice dei vincoli di simmetria ciclica per l'h-esima componente armonica; *I* è la matrice di identità di una dimensione appropriata corrispondente alla dimensione del sistema fisico. Il vettore degli spostamenti ridotto è definito come segue:

$$\bar{Q}_{rid}^{(h)} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{d,r}^{(h)T} & \bar{q}_{a}^{(h)T} & \bar{q}_{c,l}^{(h)T} & \bar{q}_{c,r}^{(h)T} & \bar{q}_{a}^{(h)T} \end{bmatrix}^{T}$$
(2.18)

Moltiplicando tutti i membri dell'equazione 2.12 per la matrice $T_{CS}^{(h)}$ a destra e per la sua complessa coniugata trasposta a sinistra si ottiene il sistema algebrico ridotto:

$$D_{rid}^{(h)}\bar{Q}_{(n)}^{(h)} = \bar{F}_{rid}^{(h)}_{(n)} + \bar{F}_{c,l\,rid}^{(h)}_{(n)} + \bar{F}_{c,r\,rid}^{(h)}_{(n)} \ con\ h = 0, \dots, H$$
(2.19)

dove $D_{rid}^{(h)} = (-(h\omega)^2 M^{(h)} + ih\omega C^{(h)} + K^{(h)})$ è la matrice di rigidezza dinamica del sistema ridotto riferita all'armonica h-esima. Si noti che le matrici $M^{(h)}$, $C^{(h)}$, $K^{(h)} \in \mathbb{C}^{j(H+1)xj(H+1)}$, rispettivamente di massa, smorzamento e rigidezza, sono matrici Hermitiane a causa dell'applicazione dei vincoli di simmetria ciclica e $\overline{F}_{rid}^{(h)}_{(n)}$, $\overline{F}_{c,rrid}^{(h)}$, $\overline{F}_{c,rrid}^{(h)} \in \mathbb{C}^{j(H+1)x1}$, dove j < N causa dell'eliminazione dei nodi appartenenti all'interfaccia di confine di sinistra.

Un'ulteriore riduzione del sistema è realizzata considerando gli spostamenti relativi dei nodi di contatto al posto di quelli assoluti in quanto sono essi ad influenzare le forze non lineari. Applicando il vincolo di simmetria ciclica (Eq. 2.14) a questi nodi, si ottengono gli spostamenti relativi e le forze di contatto:

$$\Delta \bar{q}_{c,r\ (n)}^{(h)} = \bar{q}_{c,r\ (n)}^{(h)} - \bar{q}_{c,l\ (n-1)}^{(h)}$$

$$\Delta \bar{q}_{c,r\ (n)}^{(h)} = \bar{q}_{c,r\ (n)}^{(h)} - \bar{q}_{c,l\ (n)}^{(h)} e^{ih\phi}$$

$$\bar{f}_{c,r\ (n)}^{(h)} = -\bar{f}_{c,l\ (n)}^{(h)} e^{ih\phi}$$
(2.20)

Il nuovo vettore degli spostamenti che si ottiene è il seguente:

$$\bar{Q}_{rel(n)}^{(h)} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{d,r(n)}^{(h)^T} & \bar{q}_{a(n)}^{(h)^T} & \Delta \bar{q}_{c,r(n)}^{(h)^T} & \bar{q}_{a(n)}^{(h)^T} \end{bmatrix}^T$$
(2.21)

Anche in questo caso è possibile definire una matrice di trasformazione della simmetria ciclica [8] e l'equazione di bilancio 2.19 può essere riscritta come:

$$D_{rel}^{(h)}\bar{Q}_{(n)}^{(h)} = \bar{F}_{rel\ (n)}^{(h)} + \bar{F}_{c,r\ rel\ (n)}^{(h)}\ con\ h = 0, \dots, H$$
(2.22)

Dove $D_{rel}^{(h)} \in \mathbb{C}^{k(H+1)xk(H+1)}$ e $\overline{F}_{rel(n)}^{(h)}$, $\overline{F}_{c,r\,rel(n)}^{(h)} \in \mathbb{C}^{k(H+1)x1}$ dove k < j. Mediante queste due operazioni si è ridotto della metà sia il numero dei nodi all'interfaccia del disco, sia di quelli all'interfaccia di contatto. Poiché a questo punto il numero di nodi di contatto dello shroud, dei nodi all'interfaccia del disco e dei nodi di riferimento è molto inferiore al numero totale dei nodi che costituiscono il singolo settore, analogamente a quanto fatto per il sistema generico, il sistema è ulteriormente ridotto applicando il metodo di Craig-Bampton, in cui vengono mantenute come coordinate fisiche i nodi dell'interfaccia destra del disco, i nodi dell'interfaccia destra di contatto allo shroud e i nodi di riferimento, e viene aggiunto un certo numero di forme modali η :

$$\bar{q}_{(n)}^{(h)} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{d,r}^{(h)T} & \bar{q}_{a}^{(h)T} & \Delta \bar{q}_{c,r}^{(h)T} & \eta_{(n)}^T \end{bmatrix}^T$$
(2.23)

dove $\bar{q}_{(n)}^{(h)} \in \mathbb{C}^{m(H+1)x_1}$ e $m \ll k$. L'equazione 2.22 è quindi riformulata tenendo conto del nuovo vettore degli spostamenti:

$$d^{(h)}\bar{q}^{(h)}_{(n)} = \bar{f}^{(h)}_{(n)} + \bar{f}^{(h)}_{c(n)} \quad con \ h = 0, \dots, H$$
(2.24)

Poiché gli sviluppi di Fourier sono troncati all'armonica H, la riscrittura dell'equazione 2.24 determina l'introduzione di un residuo:

$$RES^{(h)} = d^{(h)}\bar{q}^{(h)}_{(n)} + \bar{f}^{(h)}_{(n)} + \bar{f}^{(h)}_{c(n)} \quad con \ h = 0, \dots, H$$
(2.25)

Tale relazione è risolta in ambiente MATLAB tramite la funzione fsolve. Poiché questa funzione è applicabile solo a equazioni in forma reale, le equazioni 2.8 e 2.26, scritte informa complessa, sono riscritte distinguendo la parte reale e la parte immaginaria:

$$RES = \left[RES^{(0)}, Re(RES^{(1)}), Im(RES^{(1)}), \dots, Re(RES^{(H)}), Im(RES^{(H)})\right]^{T} (2.26)$$

2.2 Modello di contatto

Volendo studiare sistemi non lineari, risulta necessario definire un modello di contatto mediante il quale calcolare le forze di contatto. In questo lavoro si è scelto di utilizzare un elemento di contatto Jenckins 2D con un carico normale variabile, mostrato in Fig. 2.3. Questo elemento di contatto è caratterizzato da due molle lineari in direzione tangenziale e normale, con rigidità di contatto tangenziale (k_t) e normale (k_n) . Ogni coppia di nodi è in grado di caratterizzare e simulare durante un ciclo di vibrazione tre differenti stati di contatto: adesione, strisciamento e separazione.



Fig. 2. 3 Elemento di contatto Jeckins 2D con carico normale variabile

Per ciascun elemento, le forze di contatto tangenziali T(t) e normali N(t) dipendono dagli spostamenti tangenziali e normali relativi della coppia di nodi corrispondente, ovvero u(t) e v(t) [9]. Il modello di attrito a cui si fa riferimento è rappresentato dalla

legge di Coulomb, la quale definisce il limite di attrito come $\mu N(t)$, dove μ è il coefficiente di attrito. Fin quando la forza di contatto tangenziale è minore o uguale al limite di attrito il cursore rimane fermo e la forza di contatto è funzione dello spostamento relativo, mentre quando la forza di contatto diventa maggiore del limite di attrito, il cursore inizia a muoversi e la forza di contato rimane invariata e pari al valore limite. Lo scorrimento tra i nodi, dato dallo spostamento del cursore, è indicato come w(t). La forza di contatto normale è definita come:

$$N(t) = \max(k_n v(t), 0) \tag{2.27}$$

Quando v(t) è negativo non è consentita alcuna forza di contatto normale e si verifica la separazione. Affinché sia nota la forza di contatto nominale risulta necessario conoscere lo spostamento relativo normale v(t).

La forza di contatto tangenziale dipende invece dallo stato di contatto ed è definita come:

$$T(t) = \begin{cases} k_t[u(t) - w(t)] & \text{stato di adesione} \\ \mu N(t) sign(w) & \text{stato di strisciamento} \\ 0 & \text{separazione} \end{cases}$$
(2.28)

Le forze di contatto tangenziali sono calcolate mediante la logica predittore-correttore [5]. Ad ogni istante t viene eseguita una fase predittiva assumendo che il contatto sia in stato di adesione e considerando lo scorrimento all'istante precedente:

$$T^{P}(t) = k_{t}[u(t) - w(t - \Delta t)]$$
(2.29)

dove Δt è l'intervallo temporale. Successivamente viene eseguita la correzione, nella quale $T^{P}(t)$ viene confrontato con la forza limite $\mu N(t)$ per determinare lo stato di contatto e di conseguenza definire T(t) all'stante considerato, come:

$$T(t) = \begin{cases} T^{P}(t) & stato \ di \ adesione \\ \mu N(t) sign(T^{P}(t)) & stato \ di \ strisciamento \\ 0 & stato \ di \ separazione \end{cases}$$
(2.30)

Noto lo stato di contatto e la forza tangenziale, lo scorrimento del cursore w(t) è definito come:

$$w(t) = \begin{cases} w(t - \Delta t) & \text{stato di adesione} \\ u(t) - \mu N(t) \text{sign}(T(t)) / k_t & \text{stato di strisciamento} \\ 0 & \text{stato di separazione} \end{cases}$$
(2.31)

Nel caso di sistemi 1D il modello di contatto si riduce a due diversi modelli più semplici, ciascuno dei quali è ottenuto considerando solamente una delle due direzioni del modello di contatto 2D. Se si considera la direzione normale, il modello di contatto diventa quello di contatto intermittente, mentre se si considera la direzione tangenziale, si ricade nel contatto con smorzamento per attrito.

Capitolo 2 – Metodologia

Nel modello di contatto intermittente i due nodi possono assumere solo due differenti stati di contatto: contatto e separazione. Il passaggio da uno stato all'altro è determinato dal divario iniziale tra i due nodi g_0 . In Fig. 2.4 è mostrata la schematizzazione del contatto intermittente.



Fig. 2. 4 Schematizzazione del modello di contatto intermittente

La forza di contatto è definita come:

$$F_{c}(t) = \begin{cases} k_{c}[g_{0} - x(t)] & \text{stato di contatto} \\ 0 & \text{stato di separazione} \end{cases}$$
(2.32)

Anche nel modello di smorzamento per attrito i due nodi possono assumere solo due differenti stati di contatto: adesione e strisciamento. Il passaggio da uno stato all'altro è determinato dal precarico N_0 e dal coefficiente d'attrito μ . La schematizzazione del contatto con smorzamento per attrito è riportata in Fig. 2.5.



Fig. 2. 5 Schematizzazione del modello di contatto con smorzamento per attrito

In questo caso la forza di contatto è definita come segue:

$$F_{c}(t) = \begin{cases} k_{t}[x(t) - y(t)] & \text{stato di adesione} \\ \mu N_{0} sign(y) & \text{stato di strisciamento} \end{cases}$$
(2.33)

Poiché la letteratura mostra che le forze non lineari sono calcolate in modo più accurato nel dominio del tempo, ma allo stesso tempo si è visto che lo studio delle vibrazioni di un sistema è ben risolvibile nel dominio della frequenza, allora risulta necessario definire un metodo per poter passare da un dominio all'altro. A tale scopo si utilizza il metodo Alternate Frequency/Time (AFT) proposto da Cameron e Griffin [10], nel quale attraverso l'applicazione dell'inversa della trasformata di Fourier si convertono gli spostamenti relativi dal dominio della frequenza al dominio del tempo, così da poter calcolare le forze di contatto, per poi riconvertire queste ultime nel dominio della frequenza mediante lo sviluppo di Fourier troncato al numero di armoniche scelto e risolvere le equazioni di equilibrio del sistema. In Fig 2.6 è riportato uno schema esplicativo.



Fig. 2. 6 Schematizzazione del metodo AFT

2.3 Metodo della fase di risonanza

Il metodo HBM appena descritto permette di ricavare con una buona approssimazione la curva di risposta in frequenza per un determinato disco palettato. Essendo però interessati alle condizioni di massima risposta forzata al variare di un determinato parametro di progetto del sistema, tale metodo risulta estremamente oneroso dal punto di vista computazionale. Si è quindi scelto di utilizzare il metodo della fase di risonanza al fine di ottenere una buona approssimazione delle condizioni cercate senza avere dei costi computazionali proibitivi.

Il metodo appena citato è stato proposto da Förster e Krack [2] e permette di individuare direttamente la condizione di risonanza, senza tracciare l'intera curva di risposta in

frequenza, semplicemente aggiungendo alle equazioni di equilibrio dinamico ottenute mediante il metodo HBM una condizione di risonanza che lega l'ampiezza delle vibrazioni alla frequenza. In questo modo, a differenza dell'analisi forzata convenzionale in cui la pulsazione ω è una grandezza specificata, questa diventa un'incognita del sistema ω_{ris} .

Poiché in un sistema a più gradi di libertà non tutti raggiungono la loro ampiezza massima alla stessa frequenza, è importante in questo metodo specificare un grado di libertà rappresentativo per il quale definire in modo univoco la risonanza. Inoltre, poiché in un sistema multiarmonico l'ampiezza di oscillazione di un nodo dipende dalla composizione di tutte le armoniche, per semplicità si considerano solo quei sistemi per i quali l'ampiezza è ben approssimabile con quella dell'armonica principale. Affinché questa condizione sia soddisfatta, è necessario che i regimi siano debolmente non lineari e che le forzanti esterne siano caratterizzate solamente dalla prima armonica, quindi $F_0 = 0$ e $\overline{F}^{(n)} = 0$ per ogni n > 1. Allo stesso tempo per sistemi a più gradi di libertà si fa riferimento a sistemi leggermente smorzati e con modalità ben distanziate, così da avere una condizione di risonanza particolarmente critica e quindi di facile individuazione.

Nel metodo della fase di risonanza la condizione di risonanza si basa sullo sfasamento $\Delta \varphi$ tra la risposta del sistema e l'eccitante. Per sistemi lineari e senza smorzamento tale sfasamento è facile da calcolare. Si può notare dalla Fig. 2.7 come in questo caso esso subisca una variazione di 180° in prossimità della risonanza e assuma un valore pari a - 90° nelle condizioni di risonanza. Per quanto riguarda invece un sistema non lineare, non è facile ricavare una definizione algebrica della fase e di conseguenza non risulta possibile calcolarla analiticamente. Si fa quindi riferimento a regimi debolmente non lineari attorno ad una risonanza isolata, per i quali si può supporre che lo sfasamento sia approssimabile a quello del caso lineare:

$$\Delta \varphi(\omega_{\rm ris}) \approx \Delta \varphi_{\rm ris,lin} \tag{2.35}$$

Poiché la fase assoluta dell'eccitante è invariante per definizione, invece di imporre esplicitamente una condizione sullo sfasamento tra risposta ed eccitazione, è sufficiente considerare la fase assoluta φ della risposta. La condizione di risonanza per la frequenza di risonanza ω_{ris} può essere quindi espressa come:

$$\varphi(\omega_{\rm ris}) \approx \varphi_{\rm ris,lin} \tag{2.36}$$

Questa approssimazione introduce nel sistema un certo livello di imprecisione. Poiché però il ritardo di fase subisce un rapido cambiamento nell'intorno della risonanza, specialmente per sistemi leggermente smorzati, allora un errore finito introdotto dal valore di $\varphi_{ris,lin}$ considerato porta ad un errore relativamente piccolo nelle ω_{ris} previste.



Fig. 2. 7 (a) Andamento dell'ampiezza in prossimità della risonanza (b) Andamento del ritardo di fase in prossimità della risonanza

Per imporre la condizione di risonanza mostrata, risulta necessario calcolare la fase di risonanza del sistema lineare. Il sistema lineare si ottiene trascurando le forze di contatto e considerando solo la prima armonica. In queste condizioni si traccia la curva di risposta in frequenza e si ricava il vettore degli spostamenti $\bar{Q}_{lin}^{(1)}$ e la pulsazione di risonanza $\omega_{ris,lin}$ risolvendo il sistema:

$$D^{(1)}\bar{Q}^{(1)} = \bar{F}^{(1)} \tag{2.37}$$

Essendo \bar{Q} un vettore di numeri complessi, la fase relativa ad un dato gdl è calcolata come:

$$\varphi_{ris,lin} = \arctan\left(\frac{Im(\bar{Q}^{(1)})}{Re(\bar{Q}^{(1)})}\right)$$
(2.38)

Per sistemi a più gradi di libertà la fase può differire da coordinata a coordinata. Se però le frequenze naturali sono ben distinte e lo smorzamento è sufficientemente debole, allora le fasi di risonanza dei diversi gradi di libertà risultano vicine tra loro e quindi i risultati ottenuti attraverso l'applicazione di questo metodo non dovrebbero dipendere in modo significativo dal grado di libertà di riferimento scelto.

Affinché il metodo della fase sia applicabile ad un sistema matriciale, la condizione di risonanza viene scritta nella stessa forma, definendo un residuo:

$$r = g^T X \tag{2.39}$$

dove *X* è il vettore esteso delle incognite:

$$X = \left[\bar{Q}^{(0)^{T}}, Re\left(\bar{Q}^{(1)^{T}}\right), Im\left(\bar{Q}^{(1)^{T}}\right), \dots, Re\left(\bar{Q}^{(H)^{T}}\right), Im\left(\bar{Q}^{(H)^{T}}\right), \omega_{ris}\right]^{T}$$
(2.40)

e g^T è definito come segue:

$$1 \cdots N+k \cdots 2N+k \cdots (2H+1) \cdot N+1$$
$$g^{T} = \begin{pmatrix} 0 \cdots -\tan(\varphi_{ris,lin}) \cdots 1 \cdots 0 \end{pmatrix}$$
(2.41)

Il residuo relativo alla condizione di risonanza va ad aggiungersi al residuo relativo all'equilibrio dinamico definendo così un residuo complessivo:

$$R = [RES^T, r]^T (2.42)$$

Il sistema di equazioni così definito è risolto in ambiente MATLAB tramite la funzione fsolve. Essendo interessati al tracciamento delle curve di risonanza, tale funzione è implementata all'interno di un ciclo in cui viene fatto variare il valore del parametro di progetto, a partire dal valore per cui le forze non lineari sono nulle. Ad ogni iterazione del ciclo la condizione iniziale X_0 fornita al solutore è pari al vettore esteso X soluzione dell'iterazione precedente, a parte la prima iterazione in cui viene fornita la soluzione del sistema lineare:

$$\begin{array}{ll} X_{0} = X_{lin} & per \ i = 1 \\ X_{0} = X(i-1) & per \ i = 2, \dots, N_{p} \end{array} \tag{2.43}$$

dove N_p è il numero di valori assunti dalla variabile di progetto, $i = 1, ..., N_p$ è l'iterazione del ciclo, X_{lin} è il vettore esteso ottenuto risolvendo il sistema lineare e X(i-1) è il vettore esteso ottenuto come risultato del sistema studiato all'iterazione precedente.

Per ridurre il costo computazionale dovuto alla risoluzione del problema non lineare tramite il solutore, si può calcolare analiticamente la matrice Jacobiana. Le derivate $\frac{\partial RES^T}{\partial \tilde{Q}^T}, \frac{\partial RES^T}{\partial \omega}, \frac{\partial r}{\partial \tilde{Q}^T} e \frac{\partial r}{\partial \omega}$ sono definite come segue:

$$\frac{\partial RES^{T}}{\partial \tilde{Q}^{T}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{Q}^{T}} \left(D\tilde{Q} + \tilde{F}_{nl} - \tilde{F} \right) = D + \frac{\partial \tilde{F}_{nl}}{\partial \tilde{Q}^{T}}$$
$$\frac{\partial RES^{T}}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(D\tilde{Q} + \tilde{F}_{nl} - \tilde{F} \right) = \frac{\partial D}{\partial \omega} \tilde{Q} + \frac{\partial \tilde{F}_{nl}}{\partial \omega}$$
$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{Q}^{T}} = g^{T}$$
$$\frac{\partial r}{\partial \omega} = 0$$
(2.47)

dove \tilde{F} e \tilde{F}_{nl} sono i vettori contenenti le parti reali e immaginarie dei coefficienti di Fourier raccolti nei vettori F e F_{nl} e disposti come nel vettore X.

2.4 Sviluppo del software

Si riportano in questo sotto capitolo le schematizzazioni del diagramma di flusso implementato nel codice MATLAB. Nel primo schema, in Fig. 2.8, si mostra in maniera generale in che modo si giunge dai parametri di input a quelli di output, mettendo in evidenza soprattutto i dati necessari all'esecuzione dell'analisi non lineare. Invece, nel secondo schema, riportato in Fig. 2.9, si descrive in maniera più dettagliata il processo di risoluzione del sistema non lineare, mostrando i cicli presenti al suo interno. Il metodo HBM è implementato direttamente all'interno della funzione che viene fornita a fsolve per il calcolo del residuo.



Fig. 2. 8 Diagramma di flusso del software



Fig. 2. 9 Diagramma di flusso del solutore non lineare

Capitolo 3 Applicazione a sistemi 1D

In questo capitolo sono riportati i risultati relativi al calcolo delle condizioni di massima risposta forzata mediante il metodo della fase di risonanza per sistemi 1D a 2 gdl. Queste analisi sono state effettuate al fine di comprendere bene il funzionamento del metodo di approssimazione scelto ed evidenziarne i limiti applicativi.

Poiché, per quanto visto nel paragrafo 2.2, per sistemi di questo tipo, l'elemento di contatto Jenkins 2D dà origine a due diversi modelli di contatto, si è scelto di effettuare le stesse analisi su due differenti sistemi, ciascuno dei quali caratterizzato da uno dei due modelli di contatto 1D. Per ciascuno di essi si è messo in evidenza l'ordine di grandezza dell'errore di approssimazione generato e come questo sia influenzato dalla scelta del grado di libertà di riferimento e dalla distanza delle pulsazioni naturali del sistema.

3.1 Sistema 1D con smorzamento per attrito

Il sistema caratterizzato dal modello di contatto con smorzamento per attrito e preso come caso di studio è descritto mediante lo schema riportato in Fig. 3.1 e i valori delle singole grandezze riportate in Tab. 3.1. Si denomina questo sistema come "Sistema 1".



Fig. 3. 1 Schematizzazione del Sistema 1

α · 1	1 0			• .	· 1 D
('omito		A 19 19	10071010	$\alpha \alpha $	<u>~ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 </u>
(anno	10 N -	ADD		е а сістен	
Cupito	10 5	I I P P	Inculion		
1		11			

Parametro	Valore
M1	2 kg
M_2	1 kg
K_1	188.5 N/m
K_2	188.5 N/m
C_1	2.037 N s/m
C_2	1.037 N s/m
K _c	$10^4 \mathrm{N/m}$
μ	0.5

Tab. 3. 1 Dati del Sistema 1

Per questo sistema lo studio delle condizioni di massima risposta forzata è stato effettuato al variare di due differenti parametri di progetto: il precarico N_0 e la forzante esterna *F*. Poiché entrambi questi parametri influenzano la risposta forzata del sistema, sono stati svolti due studi separati, in ciascuno dei quali un parametro è stato considerato variabile, mentre l'altro fisso. In entrambe le analisi si è scelta la massa M₁ come gdl di riferimento.

Guardando la curva di riposta in frequenza nel caso lineare, riportata in Fig. 3.2, si può notare come la prima condizione di risonanza sia sufficientemente isolata dall'altra e facilmente individuabile, pertanto, per quanto detto nella descrizione del metodo di approssimazione scelto, ci si aspetta che esso fornisca dei risultati coerenti.



Fig. 3. 2 Curva di risposta in frequenza del Sistema 1 nel caso lineare

Studio al variare del precarico

Per l'analisi svolta considerando il precarico come variabile di studio, si sono scelte forzanti di intensità $F_1 = 1$ N e $F_2 = 2$ N. In Fig. 3.3 sono riportate le ampiezze delle vibrazioni e le frequenze delle condizioni di massima risposta forzata ottenute.



Fig. 3. 3 Ampiezza e frequenza di risonanza in funzione del precarico per il Sistema 1

Per valutate il grado di accuratezza dei risultati, si sono calcolate le condizioni di risonanza reali tracciando le curve di risposta in frequenza, riportate in Fig. 3.4.



Fig. 3. 4 Curve di risposta in frequenza in funzione del precarico per le masse M_1 e M_2 del Sistema 1

Si può notare come al variare del parametro di progetto le curve di risposta in frequenza si modificano, in quanto il sistema diventa progressivamente più rigido. Si possono distinguere due condizioni limite, quella del sistema lineare in cui le forze di contatto sono nulle, e quella del sistema in completa adesione in cui le forze di contatto assumono il valore massimo definito dal modello di contatto di Coulomb.

Il grado di accuratezza dei risultati è calcolato in termini di errore relativo:

$$\epsilon_{relativo} = \frac{|x_{reale} - x_{approssimata}|}{|x_{reale}|} \tag{3.1}$$

dove x_{reale} è l'ampiezza o la frequenza di risonanza definita tramite il calcolo della curva di risposta in frequenza, mentre e $x_{approssimata}$ è l'ampiezza o la frequenza di risonanza calcolata tramite il metodo della fase di risonanza. Gli andamenti degli errori relativi in ampiezza e in frequenza sono riportati graficamente in Fig. 3.5.



Fig. 3. 5 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione del precarico per il Sistema 1

Scegliendo di considerare come limite di accettazione un errore relativo pari all'1%, si può notare come in questo caso i risultati ottenuti siano largamente accettabili.

Studio al variare della forzante

Per quanto riguarda, invece, lo studio al variare dell'intensità delle forzanti esterne, si è scelto un precarico $N_0 = 50$ N e si è considerata la seguente relazione tra le forzanti:

$$F_1 = 2F_2$$

In Fig. 3.6 sono riportati i risultati ottenuti in termini di ampiezza e frequenza di risonanza.



Fig. 3. 6 Ampiezza e frequenza di risonanza in funzione della forzante per il Sistema 1

Si nota come un aumento della forzante, a parità di precarico, comporti una riduzione della rigidezza del sistema e un aumento delle ampiezze delle vibrazioni.

Anche in questo caso si sono tracciate le curve di risposta in frequenza, riportate in Fig. 3.7, al fine di determinare le condizioni di risonanza reali. Gli errori relativi di approssimazione sono mostrati in Fig. 3.8.



Fig. 3. 7 Curve di risposta in frequenza in funzione della forzante per le masse M_1 e M_2 del Sistema 1



Fig. 3. 8 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione della forzante per il Sistema 1

Si nota come anche al variare della forzante l'errore di approssimazione risulta inferiore al limite stabilito e quindi i risultati possono essere considerati accettabili.

3.2 Sistema 1D con contatto intermittente

Per quanto riguarda invece il sistema caratterizzato da contatto intermittente, esso è descritto dallo schema riportato in Fig. 3.9 e dai dati riportati in Tab. 3.2. Si denomina questo sistema come "Sistema 2".



Fig. 3. 9 Schematizzazione del Sistema 2

Parametro	Valore
M1	1 kg
M_2	2 kg
K_1	188.5 N/m
K_2	188.5 N/m
\mathbf{C}_1	1.037 N s/m
C_2	2.037 N s/m
\mathbf{F}_1	3000 N
F_2	1000 N
K _c	10^{4}

Tab. 3. 2 Dati del Sistema 2

L'analisi della risonanza per questo tipo di sistema è stata effettuata solamente al variare del divario iniziale g_0 , per evitare ridondanza di risultati. Anche in questo caso si è scelta la massa M₁ come gdl di riferimento. Come si può vedere dal grafico della risposta in frequenza del sistema lineare riportato in Fig. 3.10, anche il seguente sistema presenta una prima condizione di risonanza ben marcata e ben individuabile, pertanto, ci si aspetta di ottenerne dei risultati accurati tramite il metodo implementato.



Fig. 3. 10 Curva di risposta in frequenza del Sistema 2 nel caso lineare

In Fig. 3.11 sono riportate i risultati in ampiezza e in frequenza delle condizioni di massima risposta forzata del sistema al variare della forzante. Si può notare come al ridursi della distanza iniziale tra la massa M_2 e la parete di contatto il sistema diventa sempre più rigido e come le ampiezze di oscillazione si riducono.



Fig. 3. 11 Ampiezza e frequenza di risonanza in funzione del divario iniziale per il Sistema 2

Tracciando le curve di risposta in frequenza, riportate in Fig 3.12, si sono determinate le condizioni di risonanza corrette e si è calcolato l'errore di approssimazione del metodo per questo tipo di sistema. Quest'ultimo è riportato in forma grafica in Fig 3.13. Poiché le curve di risposta in frequenza non rappresentano delle funzioni, il loro calcolo è stato effettuato attraverso l'utilizzo della tecnica predittore-correttore.



Fig. 3. 12 Curve di risposta in frequenza in funzione del divario iniziale per le masse M_1 e M_2 del Sistema 2



Fig. 3. 13 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione del divario iniziale per il Sistema 2

Si nota che anche per il Sistema 2 il metodo di analisi utilizzato permette di determinare le condizioni di risonanza con una buona approssimazione. Pertanto si può affermare che per sistemi semplici con 2 gdl il metodo della fase di risonanza permette di calcolare le condizioni di massima risposta forzata con una buona accuratezza.

3.3 Influenza della gdl di riferimento

Per quanto affermato nella descrizione del metodo della fase, la condizione di risonanza prende come riferimento un solo grado di libertà tra tutti quelli presenti all'interno del sistema. Si è quindi verificato che per sistemi con frequenze naturali ben distinte e

smorzamento sufficientemente debole, come quelli studiati, le fasi di risonanza dei diversi gradi di libertà risultino vicine tra loro e che i risultati ottenuti non dipendano in modo significativo dal grado di libertà di riferimento scelto. Per fare questo si sono svolte le stesse analisi dei paragrafi precedenti, ma questa volta considerando come gdl di riferimento la massa M₂.

Si riportano, rispettivamente in Tab. 3.3 e Tab. 3.4, le fasi di risonanza lineare delle due masse per i due sistemi considerati.

Parametro	Valore
φ_1	-1.602
φ_2	-1.601

Tab. 3. 3 Fasi di risonanza lineare del Sistema 1

Parametro	Valore
φ_1	-1.528
φ_2	-1.541
Tah 3 4 Easi di risona	nza lineare del Sistema ?

°ab. 3. 4 Fasi di risonanza lineare del Sistema 2

Si nota che in entrambi i casi le fasi risultano molto vicine tra loro. Si riportano rispettivamente in Fig 3.14, Fig. 3.15 e Fig. 3.16 gli errori relativi in termini di ampiezza e di frequenza per il sistema 1 con precarico variabile, per il sistema 1 con forzante variabile e per il sistema 2.



Fig. 3. 14 Errore relativo in ampiezza e in frequenza al variare della fase per il Sistema 1 (precarico)



Fig. 3. 15 Errore relativo in ampiezza e in frequenza al variare della fase per il Sistema 1 (forzante)



Fig. 3. 16 Errore relativo in ampiezza e in frequenza al variare della fase per il Sistema 2

Si nota che indipendentemente dal grado di libertà scelto come riferimento, l'errore risulta dello stesso ordine di grandezza, pertanto si è verificato come per sistemi con smorzamento sufficientemente debole e pulsazioni naturali ben distinte, la scelta del grado di libertà di riferimento non influisce particolarmente sui risultati.

3.4 Influenza della vicinanza delle pulsazioni naturali

Si è infine studiato come la vicinanza delle pulsazioni naturali influisca sull'efficacia del metodo della fase di risonanza. A tal fine, si è preso in considerazione come punto di partenza il Sistema 1 e si sono costruiti di volta in volta sistemi dinamici aventi stessi

modi di vibrare del sistema di partenza, ma pulsazioni naturali sempre più vicine, in cui la pulsazione naturale maggiore era espressa in funzione di quella minore:

$$\omega_{n,2} = \alpha \omega_{n,1}$$

dove α è un fattore di proporzionalità. Questa analisi è stata svolta mantenendo fissi i parametri di progetto del sistema, i cui valori sono riportati in Tab. 3.5, e considerando la massa M₁ come gdl di riferimento.

Parametro	Valore
F ₁	1 N
F_2	2 N
N_0	3 N

Tab. 3. 5 Dati del problema considerato per lo studio dell'influenza della vicinanza delle pulsazioni naturali

Al ridursi del fattore di proporzionalità α i picchi di risonanza si avvicinano, fino a coincidere. Si riportano in Fig. 3.17 le curve di risposta in frequenza per il caso lineare per $\alpha = 1.2$. tramite un confronto con le curve riportate in Fig. 3.2 e relativa al caso $\alpha = 2.5$, si può notare come le condizioni di risonanza siano più difficili da distinguere.



Fig. 3. 17 Curva di risposta in frequenza del Sistema 1 nel caso lineare ($\alpha = 1.2$)

La variazione dell'errore di approssimazione in funzione di α è stata valutata tracciando per ogni sistema le curve di risposta in frequenza e determinando le condizioni di risonanza corrette. In Fig. 3.18 se ne graficano gli andamenti.



Fig. 3. 18 Errore relativo in ampiezza e in frequenza in funzione di a

Si può notare come la maggiore vicinanza delle pulsazioni naturali del sistema comporti una riduzione dell'accuratezza dei risultati. Dal punto di vista del metodo di calcolo implementato, questo nasce dal fatto che all'aumentare della vicinanza tra i picchi di del grafico di risposta in frequenza, la condizione di risonanza imposta dal metodo risulta meno vera, in quanto la fase della condizione di massima ampiezza del caso lineare diventa sempre meno rappresentativa di quella del caso di studio. Si riportano in Fig. 3.19 gli andamenti di queste due fasi in funzione di α .



Fig. 3. 19 Fasi di risonanza del caso lineare e del caso di studio in funzione di a

Inoltre, come si può notare dalla Fig. 3.20, maggiore è la vicinanza tra le pulsazioni naturali, maggiore è la variazione tra le fasi di risonanza relative al caso lineare dei diversi gdl. Di conseguenza questo determina una perdita di arbitrarietà nella scelta del gdl di riferimento per il metodo di calcolo implementato.



Fig. 3. 20 Fase di risonanza lineare in funzione di α

Risultati analoghi si sono ricavati per sistemi ottenuti a partire dal Sistema 2. Per entrambi i sistemi studiati si è riscontato che ci sono condizioni di carico per cui l'andamento dell'errore e delle fasi non è monotono al variare di α come nel caso riportato.

Capitolo 4 Risultati per un disco palettato

In questo capitolo si riportano i risultati ottenuti dal calcolo delle condizioni di massima risposta forzata mediante il metodo della fase di risonanza per un disco palettato. Definito il banco di prova, questo è stato studiato mediante i due approcci HBM (accoppiato e disaccoppiato). Per ciascuna di essi si è valutata l'accuratezza dei risultati ottenuti in termini di errore relativo in ampiezza e in frequenza, in primis per il gdl di riferimento scelto e successivamente per tutti i nodi del sistema, tramite il confronto con le curve di risposta in frequenza. Successivamente si è studiato lo stesso caso di studio considerando però questa volta una forzante distribuita e con fase variabile.

4.1 Caso di studio

Si è scelto come banco di prova il disco palettato di turbina studiato da L. R. Tamatam [11], in modo tale da poter partire da un sistema già ridotto e poter sfruttare la matrice Jacobiana analitica da lui implementata per tracciare le curve di risposta in frequenza. In Tab 4.1 sono riportati i dati caratteristici del disco, mentre in Fig. 4.1 è mostrata la geometria di un settore fondamentale.

Parametro	Valore
Materiale	Acciaio
Modulo di Young	210 GPa
Densità	7860 kg/m ³
N° settori	40
Dimensione area di contatto	20mm x 30mm
N° elementi di contatto	20 per ogni interfaccia di contatto
Rigidezza tangenziale di contatto	93 N/μm
Rigidezza normale di contatto	113 N/µm
Coefficiente d'attrito	0.5
Carico statico	60 kN
Forzante esterna	5 kN

Tab. 4. 1 Dati del disco palettato utilizzato come test case

Nel caso di studio considerato si assume che il settore fondamentale sia costituito da una sola pala con condizioni al contorno di simmetria ciclica per ridurre la dimensione del problema per l'analisi non lineare. Si presume che il disco sia infinitamente rigido e quindi alla radice della pala vengono applicate condizioni al contorno fisse. In questo modo, la simmetria ciclica opera solo attraverso l'accoppiamento delle pale in corrispondenza dello shroud. A ciascun settore sono applicate due forze statiche $F_{stastica}$ per simulare l'effetto di torsione dovuto alla forza centrifuga agente sulle pale

rotanti e tali da determinare il precarico statico sulle superfici di contatto. Inoltre, si considera una forza esterna di eccitazione $F_{eccitante}$ periodica, concentrata, applicata ad un nodo a metà campata del profilo aerodinamico e diretta in direzione circonferenziale. Ciascuna superficie di contatto dello shroud è composta da 20 elementi di contatto disposti in modo tale da formare una griglia 5x4, come mostrato in Fig. 4.2(a). La distribuzione 2D degli elementi di contatto Jenkins tra la zona di contatto destra e la zona di contatto sinistra della pala adiacente è mostrato in Fig. 4.2(b).



Fig. 4. 1 Modello agli elementi finiti di un settore del disco, con condizioni al contorno



Fig. 4. 2 (a) Disposizione degli elementi di contatto (b) Rappresentazione del modello di contatto tra due nodi

Per lo studio dinamico del sistema si utilizzano le matrici di massa e di rigidezza ridotte ricavate da L. R. Tamatam mediante il programma ANSYS. Tali matrici sono state ottenute applicando il metodo di riduzione di Craig Bampton e considerando come nodi master gli spostamenti nelle tre direzioni dei 40 nodi di contatto e dei 10 nodi di riferimento, a cui sono stati aggiunti 20 modi di vibrare. Essendo il metodo della fase di risonanza applicabile a sistemi con forzanti esterne caratterizzate soltanto dalla prima armonica, si considera un valore di engine order unitario.

Osservando l'andamento della curva di risposta in frequenza del problema lineare per i diversi gdl del sistema, si nota come la prima condizione di risonanza sia sempre ben distinta dalle altre, pertanto, in accordo con quanto verificato nel capitolo precedente, ci si aspetta che il metodo implementato riesca a ricavare risultati accettabili anche per questo tipo di sistema. Si riporta in Fig. 4.3, la curva di risposta in frequenza del problema lineare per un gdl di riferimento.



Fig. 4. 3 Risposta in frequenza del caso lineare

4.2 Approccio HBM accoppiato

Il sistema è stato studiato inizialmente considerando l'approccio HBM con accoppiamento statico/dinamico, nel quale la variabile di progetto è rappresentata dai carichi statici. Nell'implementazione del metodo della fase di risonanza si è considerato come gdl di riferimento quello relativo allo spostamento in direzione circonferenziale di un nodo di riferimento dello shroud. Tutti i grafici riportati in questa sezione sono relativi ad esso. In Fig. 4.4 è riportata la curva di risonanza ottenuta.



Fig. 4. 4 Curva di risonanza per approccio accoppiato

Si può notare dall'andamento della curva di risonanza, come essa assuma un andamento qualitativamente corretto. Al fine di determinare l'accuratezza del metodo di calcolo utilizzato si sono cercate le condizioni reali di massima risposta forzata tracciando le curve di risposta in frequenza. Essendo questo un calcolo oneroso dal punto di vista computazionale, si è scelto di utilizzare inizialmente la matrice Jacobiana analitica implementata da L. R. Tamatam. I grafici ottenuti sono riportati in Fig. 4.5.



Fig. 4. 5 Curve di risposta in frequenza per approccio accoppiato con utilizzo della matrice Jacobiana analitica

Si può notare come il sistema dinamico sia ben risolvibile per carichi statici ridotti, dove prevale la risposta lineare, mentre per carichi maggiori l'analisi richiede un numero proibitivo di iterazioni e quindi non si giunge a convergenza. Pertanto, solo nel primo caso si ottengono le condizioni di risonanza cercate e risulta possibile effettuare una verifica dei risultati. In Fig. 4.6 sono riportati in forma grafica gli errori relativi in termini di ampiezza e frequenza in queste condizioni di carico.



Fig. 4. 6 Errore relativo in ampiezza e frequenza per approccio accoppiato

Si può notare come in questo range di variazione del parametro di studio il metodo di approssimazione dia dei risultati sufficientemente accurati.

Volendo però verificare tutto il range di variazione del parametro di studio, si sono calcolate nuovamente le curve di risposta in frequenza, ma questa volta senza l'utilizzo della matrice Jacobiana analitica, al fine di verificare se questo potesse aiutare la convergenza del programma. In questo caso, data la notevole lentezza di calcolo del programma si è limitato l'intervallo di frequenze studiato ad un opportuno intorno della frequenza di risonanza ottenuta con il metodo di calcolo. I risultati ottenuti sono riportati in Fig. 4.7.



Fig. 4. 7 Curve di risposta in frequenza per approccio accoppiato senza utilizzo della matrice Jacobiana analitica

Si può notare come anche in questo caso il programma non riesce a giungere a convergenza per carichi statici elevati, pertanto, continuano a poter essere valutati solo i risultati relativi a condizioni di carico minori, per i quali si ottengono gli stessi errori visti in precedenza.

Il fatto che il calcolo delle curve di risposta in frequenza continui a non convergere anche senza l'utilizzo della matrice Jacobiana analitica permette di affermare che ciò è dovuto alla natura stessa del problema. Infatti, per problemi non lineari risolti con approccio accoppiato, all'aumentare delle forze statiche applicate, aumenta l'ampiezza delle oscillazioni in direzione assiale e quindi cresce l'intensità dei precarichi nei nodi di contatto. Questo comporta una maggiore interdipendenza tra gli spostamenti circonferenziali e quelli assiali, e quindi una maggiore complessità del sistema.

Data l'impossibilità di valutare pienamente l'applicabilità del metodo a questo sistema se studiato con approccio HBM accoppiato, allora si è scelto di effettuare le stesse analisi considerando l'approccio disaccoppiato.

4.3 Approccio HBM disaccoppiato

Nell'approccio HBM disaccoppiato viene trascurata l'analisi statica del sistema e il precarico diviene la variabile di progetto. Si è considerato in questo caso un precarico uniforme su tutti i nodi di contatto, il quale, per come definito il modello di contatto, può assumere valori sia positivi che negativi. Anche in questo caso si è scelto come gdl di riferimento quello relativo allo spostamento in direzione circonferenziale di un nodo di riferimento dello shroud e tutti i grafici riportati in questa sezione sono relativi ad esso. La Fig. 4.8 mostra la curva di risonanza al variare del precarico.



Fig. 4. 8 Curva di risonanza per approccio disaccoppiato

Anche in questo caso, la curva assume un andamento qualitativamente corretto, il cui grado di accuratezza è stato calcolato tracciando le curve di riposta in frequenza e determinando le condizioni di risonanza corrette, mostrate in Fig. 4.9. Al fine di ridurre i tempi di calcolo si è utilizzata la Jacobiana analitica.

Capitolo 4 - Risultati per un disco palettato



Fig. 4. 9 Curve di risposta in frequenza per approccio disaccoppiato con utilizzo della matrice Jacobiana analitica

Si può notare come, a differenza dell'approccio accoppiato, in questo caso il programma è riuscito a tracciare le curve di risposta in frequenza con una buona approssimazione nel dominio di interesse per tutti i valori del parametro di progetto scelti. È quindi possibile definire le condizioni di risonanza corrette e calcolare gli errori relativi in termini di ampiezza di oscillazione e di frequenza per ciascuno di essi. I risultati sono riportati in Fig. 4.10.





Fig. 4. 10 Errore relativo in ampiezza e frequenza per approccio disaccoppiato

Si nota come per questo tipo di approccio i risultati ottenuti con il metodo della fase di risonanza rappresentano una buona approssimazione delle condizioni di risonanza reali. Per completezza le curve di risposta in frequenza sono state calcolate anche senza l'utilizzo della matrice Jacobiana, ma in questo caso non si evidenzia nessun vantaggio in termini di accuratezza delle condizioni di risonanza corrette, bensì uno svantaggio dovuto al prolungamento dei tempi di calcolo. Le stesse analisi sono state ripetute considerando anche altri gdl di riferimento, ma l'ordine di grandezza degli errori di approssimazione non è variato. Questo conferma quanto affermato nella descrizione del metodo di approssimazione scelto e verificato per sistemi a 2 gdl, secondo cui per sistemi poco smorzati, appartenenti ad un regime debolmente non lineare e con la prima risonanza isolata la scelta del gdl di riferimento risulta poco influente.

4.4 Errore di approssimazione del sistema

Essendo il sistema dinamico composto da più gradi di libertà, affinché il metodo di approssimazione risulti efficiente, l'errore di approssimazione deve essere valutato sull'intero sistema. Pertanto, si è studiato come varia l'errore relativo per i diversi gdl del sistema ridotto per un fissato valore del parametro di progetto.

Nel caso del sistema risolto con approccio HBM accoppiato si sono considerate forze statiche di intensità pari a 60000 N, per le quali è stato possibile definire con buona accuratezza le condizioni di risonanza reali. Si riportano in Fig. 4.11 gli errori relativi riferiti ai soli nodi fisici.



Fig. 4. 11 Errore relativo in ampiezza e frequenza per i nodi fisici del sistema risolto con approccio accoppiato

Si può notare come entrambi gli errori risultano assumere valori differenti in base alla direzione del gdl, rimanendo però sempre al di sotto del limite di accettazione fissato.

Per quanto riguarda invece il sistema risolto con approccio HBM disaccoppiato si sono considerati precarichi di intensità pari a -30000 N. Anche in questo caso è stato possibile definire le condizioni di risonanza reali. Gli errori relativi riferiti ai soli nodi fisici sono riportati in Fig. 4.12.



Fig. 4. 12 Errore relativo in ampiezza e frequenza per i nodi fisici del sistema risolto con approccio disaccoppiato

Anche in questo caso entrambi gli errori risultano assumere valori variabili legati alla direzione del gdl, rimanendo al di sotto del valore limite dell'1%. Sia nell'approccio

accoppiato, sia in quello disaccoppiato, si nota che risultati relativi ai gdl diretti nella stessa direzione del gdl di riferimento risultano in genere caratterizzati da una maggiore accuratezza.

Poiché per entrambi gli approcci sono stati ottenuti risultati simili al variare del parametro di studio, si può affermare che l'errore calcolato per il gdl di riferimento in una specifica condizione di studio descrive bene in prima approssimazione l'errore medio dell'intero sistema.

4.5 Carico distribuito

Il test case considerato finora presenta una forza esterna concentrata applicata su ogni settore. Nella realtà però le forze aerodinamiche agenti sulle pale di una turbina sono distribuite su tutta la sua superficie e, a causa della rotazione del disco e geometria della pala stessa, possono presentare intensità e fase variabile da punto a punto. Pertanto, si è studiato come il grado di approssimazione delle curve di risonanza vari nel caso di carico forzante distribuito. Il sistema fisico è stato modificato applicando ad ogni nodo non di contatto una forzante, con fase e intensità specifica, in direzione circonferenziale.

Per quanto riguarda il sistema risolto con approccio HBM accoppiato, si confrontano direttamente i risultati ottenuti con le curve di risposta in frequenza tracciate senza l'utilizzo della matrice Jacobiana. I risultati ottenuti per un gdl di riferimento sullo shroud sono riportati in Fig. 4.13.



Fig. 4. 13 Curve di risposta in frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio accoppiato

Come visto per il sistema con forzante concentrata, l'analisi dinamica giunge difficilmente a convergenza per condizioni di carico statico elevate, pertanto, per essi

non è possibile eseguire una verifica dei risultati ottenuti. Ci si limita quindi alla valutazione dei risultati solo per quei valori della variabile di gioco per cui la curva di risposta in frequenza permette di ricavare le condizioni di risonanza reali. Gli errori relativi in ampiezza e frequenza sono riportati in forma grafica in Fig. 4.14.



Fig. 4. 14 Errore relativo in ampiezza e frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio accoppiato

Si nota come l'errore è aumentato rispetto al sistema con carico concentrato e per alcuni valori della variabile di progetto risulta maggiore del limite di accettazione dell'1%.

Le stesse analisi sono state svolte per il sistema di equazioni ottenuto con approccio HBM disaccoppiato. In Fig. 4.15 sono riportate le curve di risposta in frequenza ottenute senza l'utilizzo della matrice Jacobiana analitica.

Capitolo 4 - Risultati per un disco palettato



Fig. 4. 15 Curve di risposta in frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio disaccoppiato

In questo caso le curve permettono di individuare con buona sicurezza le condizioni di massima risposta forzata su tutto l'intervallo di studio, pertanto, è possibile eseguire un confronto di tutti i risultati. Si riportano in Fig. 4.16 in forma grafica gli errori relativi in ampiezza e in frequenza.



Fig. 4. 16 Errore relativo in ampiezza e frequenza per sistema con carico distribuito risolto con approccio accoppiato

Si nota che anche in questo caso l'errore di approssimazione è in genere aumentato rispetto al sistema con forzante concentrata, rimanendo però al di sotto del limite di accettazione considerato. Si può quindi affermare che all'aumentare della complessità del sistema, l'accuratezza del metodo della fase di risonanza si riduce.

4.6 Limite di applicazione

Fino a questo momento abbiamo considerato di utilizzare il metodo della fase di risoluzione per tracciare le curve di risonanza al variare di un dato parametro di progetto. Nulla vieta però dal punto di vista concettuale che tale metodo sia utilizzato

per determinare una sola condizione di massima risposta forzata per un preciso valore della variabile di progetto. L'esecuzione di analisi di questo tipo per entrambi gli approcci HBM ha messo in evidenza come questo non sia automatico. Infatti, si è riscontrato che per alcuni valori del parametro di progetto, il metodo converge nel punto giusto se ad essere studiato è un range di valori che li comprende, mentre converge in un punto sbagliato se sono studiati singolarmente. In Fig. 4.17 sono riportate le condizioni di risonanza per diversi valori del parametro di studio ricavati singolarmente sia con approccio accoppiato che disaccoppiato, tra i quali ve ne sono alcuni che convergono in un punto sbagliato.



Fig. 4. 17 Casi di convergenza errata

Dato che l'errore si verifica solo quando si analizza un solo valore del parametro di progetto, allora si comprende che l'origine di questo errore risiede nel vettore iniziale fornito al solutore. Infatti, nel caso di studio di un range di valori, il vettore iniziale è costituito dalla soluzione del sistema studiato all'iterazione precedente, mentre nel caso di singola analisi dalla soluzione del sistema lineare. In merito a questo fenomeno, ciò che risulta di particolare interesse è che il metodo della fase giunga a convergenza anche per questi valori del parametro di progetto, anche se la fase della risonanza trovata non soddisfa la condizione di risonanza imposta dal metodo implementato, come si può vedere dai grafici riportati in Fig. 4.18. Questo rappresenta un risultato inaspettato che non è stato approfondito, ma che potrebbe essere di interesse per comprendere ancor meglio il funzionamento del metodo della fase di risonanza.



Fig. 4. 18 Fase dei risultati errati

Capitolo 5 Conclusioni

Le prove effettuate nello svolgimento di questa tesi, volte a valutare il funzionamento e l'applicabilità del metodo della fase di risonanza per il calcolo delle condizioni di massima risposta forzata al variare di determinati parametri di progetto, hanno fornito dei risultati in linea di massima coerenti con la teoria studiata.

Lo studio dei diversi sistemi a 2 gdl ha permesso di verificare come il metodo di approssimazione scelto dia dei buoni risultati se il picco di risonanza è sufficientemente isolato e marcato, quindi, se la condizione di risonanza cercata è ben individuabile, e che in queste condizioni l'accuratezza dei risultati è influenzata in modo trascurabile dalla scelta del gdl di riferimento. Allo stesso tempo si è verificato come la vicinanza dei picchi di risonanza del sistema determini una perdita di accuratezza dei risultati e un aumento della dipendenza dei risultati dal nodo scelto per la definizione della condizione di risonanza.

L'indipendenza dal gdl di riferimento nel calcolo delle curve di risonanza per sistemi con il primo picco di risonanza ben delineato è stata convalidata anche dai risultati relativi al disco palettato di turbina.

In merito a questo sistema, i risultati ottenuti hanno mostrato in primis come per il sistema risolto con approccio accoppiato il metodo della fase sia verificabile solo per valori delle forze statiche sufficientemente ridotte, in quanto solo per esse è possibile determinare le condizioni di risonanza corrette, mentre con approccio disaccoppiato esso sia verificabile per tutti i valori del range di studio.

Noto questo limite, che però non ha nulla a che vedere con il metodo implementato, si è riscontrato che per entrambi gli approcci HBM il metodo della fase di risonanza perde di accuratezza all'aumentare della complessità del sistema. Infatti, si è visto come gli errori di approssimazione siano ridotti per il sistema con carico esterno concentrato, mentre aumentano per il sistema con carico distribuito e fasi diverse.

L'analisi del disco palettato ha permesso inoltre di mostrare che anche per sistemi complessi, come per quelli a 2 gdl, l'errore di approssimazione risulta all'incirca dello stesso ordine di grandezza per tutti i gdl del sistema. In questo caso però, essendo un problema 3D, si è messo in evidenza che l'errore è ancora meno variabile tra gdl diretti nella stessa direzione e che in generale le risonanze dei gdl diretti nella stessa direzione del gdl di riferimento sono calcolate con una maggiore accuratezza.

Si è infine riscontrato come nel caso in cui si volesse utilizzare questo approccio per determinare una singola condizione di risonanza per un dato valore di progetto, c'è la possibilità che questo dia un risultato sbagliato. Tale condizione risulta non soddisfare pienamente la condizione di risonanza imposta dal metodo utilizzato. Essendo noi però interessati alla curva di risposta in frequenza, non si è approfondita la natura di questo errore, il cui studio però potrebbe essere di interesse per una descrizione più approfondita del metodo della fase di risonanza.

Nonostante il buon funzionamento del programma implementato, esso presenta ancora del margine di miglioramento dato in primis dalla possibilità di definire la matrice Jacobiana analitica del sistema comprendente la condizione di risonanza, così da ottenere un'ulteriore riduzione dei tempi di calcolo.

Bibliografia

- [1] E. P. Petrov. Direct parametric analysis of resonance regimes for nonlinear vibrations of bladed discs. J Turbomach 2006
- [2] M. Krack, L. Panning-von Scheidt and J. Wallaschek. A high-order harmonic balance method for systems with distinct states. J Sound Vib 2013
- [3] R. R. Craig and M. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. AIAA Journal 1968
- [4] M. Krack and J. Gross. Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems. Springer 2019
- [5] M. Urabe. Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. Arch Ration Mech Anal 1965
- [6] C. Siewert, L. Panning, J. Wallaschek, and C. Richter. Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power 2010
- [7] E. P. Petrov. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks. Journal of Turbomachinery 2004
- [8] S. M. Pourkiaee and S. Zucca. A Reduced Order Model for Nonlinear Dynamics of Mistuned Bladed Disks with Shroud Friction Contacts. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power 2019
- [9] C. M. Firrone and S. Zucca. Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks. P. J. Awrejcewicz, 2011
- [10] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. Journal of Applied Mechanics 1989
- [11] L. R. Tamatam. Effect of wear on the dynamics of structures with friction contacts. Politecnico di Torino 2021