POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Modelli avanzati per strutture composite FFF con fibre ad angolo variabile

Relatori
prof. Alfonso Pagani
prof. Enrico Zappino
prof. Erasmo Carrera
ing. Racionero Sánchez-Majano Alberto

Candidato
Pasquale Viola

Anno Accademico 2021-2022

Sommario

Le macchine per la deposizione automatica delle fibre hanno reso possibile la genesi del processo di *Fused Filament Fabrication (FFF)*, ovvero una tecnologia di *Additive Manufacturing (AM)* in grado di produrre materiali polimerici rinforzati mediante fibre. Tale processo amplia di gran lunga le possibilità dell'AM poiché permette di ottenere componenti localmente rinforzati appositamente progettati.

Questo nuovo tipo di struttura composita avanzata, cioè i compositi con fibre ad angolo variabile *(Variable Angle Tow)*, presenta il vantaggio, rispetto a casi più tradizionali, di una rigidità adattabile rispetto ai punti più sollecitati *(VSCL)*; permettono inoltre di migliorare le prestazioni strutturali in termini di capacità di carico a compressione *(buckling)* e comportamento post-critico mantenendo il rapporto tra rigidità e massa molto elevato.

Questo metodo di produzione può anche generare regioni di sovrapposizione o vuoti tra percorsi di deposizione successivi. In ricerche precedenti sono state tenute in considerazione tali tipologie di difetti e sono state presentate diverse soluzioni che mirano a modellare componenti affetti da tali imperfezioni in modo da prevedere più realisticamente il comportamento del materiale.

Gli approcci di modellazione di queste strutture hanno la limitazione che la variazione dell'angolo deve essere espressa come un'equazione matematica, ad esempio con una variazione lineare. A causa di questi vincoli, spesso, è difficile modellare i percorsi di deposizione progettati utilizzando semplici espressioni numeriche, in particolare quando sono previste più variazioni all'interno della stessa lamina. Una ulteriore difficoltà nello studio questi materiali è rappresentata dal fatto che non è possibile prevedere l'andamento effettivo di deformazioni e tensioni con le tecniche di modellazione classiche.

In questa tesi vengono presentati diversi risultati riguardanti l'instabilità di alcune strutture composite VAT ottenuti con la *Carrera Unified Formulation (CUF)* implementata attraverso il codice sviluppato dal Gruppo di Ricerca MUL^2 del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino.

Questa teoria permette di ottenere soluzioni bidimensionali (piastra e guscio) e monodimensionali (trave) che superano quelle classiche (come quelle di Eulero, Kirchhoff e Mindlin) utilizzando una notazione condensata ed esprimendo i campi di spostamento sulla sezione trasversale (caso della trave) e lungo lo spessore (casi della piastra e del guscio) con funzioni la cui forma e ordine sono arbitrari.

Inizialmente, i risultati di queste analisi sono stati confrontati positivamente con dei risultati bibliografici. In seguito, è stata svolta un'approfondita analisi per ottenere indicazioni sull'interazione tra l'orientamento delle fibre e la variazione dei modi propri del materiale e dei corrispondenti carichi critici. Infine, verranno presentate alcune capacità di progettazione avanzata del metodo di modellazione a elementi finiti i cui risultati saranno comparati ad alcuni risultati sperimentali.

Indice

Elenco delle tabelle V

Elenco delle figure VII

1 Introduzione 1

1.1 I materiali compositi 2

1.2 Processi di produzione dei compositi 5

1.2.1 Automated Tape Laying (ATL) e Automated Fiber Placement (AFP) 7

1.2.2 Fused Deposition Modeling e stampa 3D 11

1.2.3 Continuous Fibre Fabrication 14

1.3 Variable Angle Tow 15

1.3.1 Limiti e difetti dei VAT 17

1.4 Stato dell'arte 23

1.5 Contenuto di questo lavoro di tesi 27

2 VAT 29

2.1 Modelli per l'analisi macro-meccanica 32

2.2 Modelli per l'analisi micro-meccanica 33

2.3 Incertezza sui VAT 34

3 Elementi finiti avanzati 36

3.1 Il problema elastico 38

3.1.1 Equazioni di equilibrio 40

3.1.2 Condizioni al contorno 41

3.1.3 Relazione deformazioni-spostamenti 41
3.1.4 Legge di Hooke 42
3.2 Il principio dei lavori virtuali 45
3.2.1 Forma forte 45
3.2.2 Forma debole 47
3.3 Formulazione unificata CUF 49
3.3.1 Espansioni di Taylor 52
3.3.2 Espansioni di Lagrange 52
3.4 Elementi finiti per strutture laminate 53
3.4.1 Modello ESL 53
3.4.2 Modello LW 54
3.4.3 Modello Zig-Zag 55
3.5 Elementi finiti per laminati VAT 56
3.5.1 Equazioni costitutive per VAT 56
3.5.2 Formulazione agli elementi finiti 57
3.5.3 Principio degli spostamenti virtuali 58
3.5.4 Analisi statica 59
3.5.5 Analisi di buckling linearizzata 60

4 Risultati numerici 61
4.1 Analisi statica di una piastra VAT 62
4.2 Analisi di Free Vibration per strutture VAT 73
4.3 Analisi di buckling di piastre VAT 74
4.3.1 Introduzione 74
4.3.2 Struttura e Materiale analizzati 75
4.3.3 Analisi di convergenza della mesh 76
4.3.4 Analisi di convergenza dell'espansione 79
4.3.5 Confronto approcci ESL e LW 80
4.3.6 Analisi dei carichi critici al variare di T0 e T1 83
4.4 Prove di trazione di piastre VAT 86
4.4.1 Piastra con laminato classico 87
4.4.2 Piastra con laminato VAT 89

5 Conclusioni 93

Elenco delle tabelle

1.1 Panoramica di componenti prodotti con ATL e AFP per velivoli attualmente in uso 8
4.1 Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Spostamenti valutati per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h}$ = -0.5 65
4.2 Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Spostamenti valutati per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h} = 0.5$ 65
4.3 Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Sollecitazioni valutate per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h}$ = -0.5 66
4.4 Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Sollecitazioni valutate per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h} = 0.5$ 66
4.5 Caratteristiche delle piastre studiate. 73
4.6 Parametri caratteristici dei layer costituenti il composito in esame . 73
4.7 Risultati dell'analisi di free vibration e confronto con la letteratura di quattro casi studio 74
4.8 Proprietà dei materiali utilizzati 76
4.9 Gradi di libertà e primi 5 carichi critici della struttura in esame con mesh 10x10Q9 e numero di elementi beam variabili 78
4.10 Gradi di libertà del modello numerico e primi 5 carichi critici con mesh 8B4 e numero di elementi a quattro nodi variabili nello spessore 79
4.11 Gradi di libertà del modello numerico e primi 5 carichi critici con mesh 8B4 e numero di elementi a nove nodi variabili nello spessore . 79

4.12 Confronto tra i risultati ottenuti con l'approccio ESL e quelli ottenuti utilizzando un approccio LW con una mesh 10x10Q4-8B4 . . . 80
4.13 Variazioni massime ottenute modificando il primo layer e scostamento percentuale rispetto alla configurazione originale 85
4.14 Variazioni massime ottenute modificando il secondo layer e scostamento percentuale rispetto alla configurazione originale 86
4.15 Variazioni massime ottenute modificando il terzo layer e scostamento percentuale rispetto alla configurazione originale 86
4.16 Proprietà dei materiali utilizzati 87

Elenco delle figure

1.1 Processo produttivo con ATL 9
1.2 Sezione anteriore della fusoliera di un Boeing 787 Dreamliner prodotta con tecnologia AFP. Source: *CW/Photo - Thomas Sloan* . . . 9
1.3 Macchina per AFP. Source:*National Composites Centre* 10
1.4 Modello semplificato del robot a sei assi per AFP con stampante 3D integrata per riempire le lacune con compositi termoplastici. . . 11
1.5 GroFi 11
1.6 Esempio di stampa 3D 12
1.7 Estrusore in dettaglio 14
1.8 Componenti coinvolti in un processo di stampa 3D con tecnologia FDM 14
1.9 Organizzazione tipica di un laminato in materiale composito 16
1.10 Configurazioni per sfruttare a pieno le proprietà dei materiali compositi 16
1.11 Esempio di deviazioni dell'angolo della fibra 18
1.12 Esempio di un percorso di deposizione 19
1.13 Deviazione tra due deposizioni successive 20
1.14 Schematizzazione di ondulazioni nel piano e fuori dal piano 21
1.15 Differenza tra i difetti primari nei VAT 21
1.16 Fibra twisted all'interno di uno strato 22
1.17 Schematizzazione dei difetti di bridging e crowning 23
1.18 Diversi percorsi di deposizione delle fibre 27
2.1 Esempio di definizione di un percorso di deposizione della fibra che varia linearmente lungo la lunghezza caratteristica 31
3.1 Dominio tridimensionale generico 39

3.2 Tensioni normali e tangenziali su un elemento del dominio 40
3.3 Rappresentazione della procedura di assemblaggio 51
3.4 Procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza con modello ESL 54
3.5 Procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza con modello LW 55
3.6 Orientamento delle fibre in un VAT 56
4.1 Struttura analizzata in questo lavoro 62
4.2 Rappresentazione schematica delle fibre all'interno dei layer utilizzati per la realizzazione del pezzo in esame 62
4.3 Confronto con la letteratura e analisi di convergenza della mesh per gli spostamenti 63
4.4 Confronto con la letteratura e analisi di convergenza della mesh per gli stress 64
4.5 Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per gli spostamenti fissata una mesh di elementi Q9 9x9 e 4 elementi beam con numero di nodi variabile 67
4.6 Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per gli stress fissata una mesh di elementi Q9 9x9 e 4 elementi beam con numero di nodi variabile 68
4.7 Confronto con la letteratura per le variabili di spostamento calcolate per un laminato classico (*case 1*) ed uno VAT (*case 4*) utilizzando una mesh 9x9Q9-4B4 69
4.8 Confronto con la letteratura per le variabili di sollecitazioni calcolate per un laminato classico (*case 1*) ed uno VAT (*case 4*) utilizzando una mesh 9x9Q9-4B4 70
4.9 Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per gli spostamenti, fissata una mesh 9x9Q9-4B4 71
4.10 Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per le sollecitazioni, fissata una mesh 9x9Q9-4B4 72
4.11 Piastre VAT oggetto dell'analisi. A sinistra la configurazione sottile, a destra quella spessa 73
4.12 Struttura analizzata 75
4.13 Dimensioni della piastra oggetto delle analisi 76
4.14 Schematizzazione degli elementi finiti usati in questa analisi 77

4.15 Disposizione degli elementi finiti all'interno della struttura 77
4.16 Forme modali ottenute per una piastra sottile compressa modellata con la mesh 10x10Q9-8B4 78
4.17 Forme modali ottenute con modello TE1 81
4.18 Forme modali ottenute con modello TE2 81
4.19 Forme modali ottenute con modello TE3 82
4.20 Forme modali ottenute con modello TE4 82
4.21 Cella elementare di un laminato VAT e nomenclatura adottata per gli strati di materiale 83
4.22 Carichi critici al variare dei parametri T0 e T1 nel primo layer . . . 84
4.23 Carichi critici al variare dei parametri T0 e T1 nel secondo layer . . 84
4.24 Carichi critici al variare dei parametri T0 e T1 nel terzo layer . . . 85
4.25 Storia di carico della trave 87
4.26 Stacking sequence del laminato classico 0/90 87
4.27 Elongazione della trave 88
4.28 Deformazioni su x e y lungo l'asse della trave 88
4.29 Displacement lungo le direzioni x ed y per un laminato classico . . . 89
4.30 Stacking sequence del laminato VAT $[0 \pm < 0{,}45 >]_s$ 89
4.31 Layers del laminato VAT $[0 \pm < 0{,}45 >]_s$ 90
4.32 Elongazione della trave 90
4.33 Displacement lungo le direzioni x ed y per un laminato VAT 91
4.34 Deformazioni su x e y lungo l'asse della trave 92
4.35 Deformazioni su x e y lungo l'asse della trave 92

Capitolo 1

Introduzione

1.1 I materiali compositi

La ricerca e lo sviluppo di materiali con indici di performance sempre più alti è dovuto specialmente alla necessità costante in campo aeronautico e spaziale di ridurre il rapporto fra il peso e le caratteristiche meccaniche dei componenti rispetto ai materiali di uso comune.

Secondo la definizione tradizionale del termine, i materiali compositi sono caratterizzati da una struttura non omogenea risultante dall'unione di diverse fasi aventi proprietà chimiche e fisiche differenti tra loro che, in base alla funzione, prende il nome di rinforzo o matrice. Questi materiali, essendo l'unione di più fasi, riescono ad ottenere caratteristiche più vantaggiose di ciascuna delle componenti prese individualmente. Al contrario di quanto si possa pensare, le proprietà finali di un composito non sono influenzate solo dalle proprietà meccaniche dei materiali che lo compongono, ma anche dal modo in cui le fibre vengono disposte all'interno della matrice.

Infatti, più in generale, le proprietà di un materiale composito dipendono certamente dalle proprietà dei materiali che lo costituiscono ma anche dalla geometria desiderata e dalla distribuzione delle fasi all'interno del volume. Uno dei parametri più importanti è il volume percentuale del rinforzo rapportato al volume totale. Quanto meno omogeneo è il rinforzo, tanto più eterogeneo è il materiale, tanto maggiore è la probabilità di rottura nelle zone più deboli. D'altra parte, la geometria e l'orientamento del rinforzo, influenzano l'anisotropia del sistema.

Due grandezze su cui si presta particolare attenzione sono l'allineamento delle fibre e la pressione che si ha nel processo di lavorazione infatti, calibrando opportunamente questi due parametri si potrà aumentare la frazione di volume della fibra, migliorando quindi le proprietà meccaniche del pezzo finito.

Le fasi del composito ricoprono ruoli diversi a seconda del tipo e dell'implementazione del composito. Nel caso di materiali compositi a basse o medie prestazioni, il rinforzo (solitamente fibre corte) conferisce un certo irrigidimento ma rinforza solo localmente il materiale. La matrice invece, costituisce il principale costituente per sostenere i carichi e definisce le caratteristiche meccaniche del materiale. Invece, nel caso di materiali compositi ad alte prestazioni, il rinforzo consiste normalmente di fibre continue e lunghe, e determina le proprietà di rigidezza e

resistenza nella direzione della fibra. Invece, in questi casi, la matrice fornisce la protezione dall'ambiente esterno, il sostegno per le fibre ed il trasferimento degli sforzi tra le fibre.

A seconda della loro dimensione, le fibre vengono disposte nel composito o collocate parallelamente (nel caso di fibre lunghe), o disposte con orientazione casuale (nel caso di fibre corte) o, ancora, possono essere tessute seguendo trama per poi essere impregnate con la matrice.

Esistono molti modi per produrre parti in composito pertanto questi devono essere valutati accuratamente nelle fasi iniziali della progettazione per scegliere quale di essi è ottimale a seconda dell'applicazione. Tra i fattori che determinano il processo di produzione di un componente in materiale composito troviamo: il costo dei materiali e del pezzo finale, le attrezzature necessarie per la produzione, le proprietà richieste ed il numero di parti da produrre.

Come detto in precedenza, grazie alle loro dimensioni, le fibre hanno delle caratteristiche strutturali fuori dall'ordinario. Questo aspetto, unito alle proprietà dei materiali che costituiscono un composito, garantisce:

- elevata resistenza meccanica;

- elevato modulo elastico;

- peso specifico molto basso;

- comportamento elastico lineare fino alla rottura.

Le fibre più utilizzate nella produzione di materiali compositi sono le fibre di vetro, carbonio o anche fibre organiche. Solitamente, le fibre più usate in applicazioni strutturali sono quelle di vetro per la loro caratteristica di avere delle buone proprietà con un peso contenuto. Però, sebbene abbiano discrete caratteristiche rapportate al peso, presentano un modulo di elasticità abbastanza basso.

Il principale concorrente delle fibre di vetro sono le fibre di carbonio. Esse presentano delle elevate proprietà meccaniche derivanti dalla struttura cristallina della grafite. In generale, la struttura cristallina è un indicatore delle caratteristiche finali del materiale, pertanto una struttura cristallina elevata è segno di elevate caratteristiche. In commercio è possibile trovare sia fibre di carbonio ad alto modulo, penalizzate nella resistenza, sia a basso modulo e alta resistenza. I due

tipi sono detti rispettivamente HM («High Modulus», alto modulo) e HS («High Strength», alta resistenza a trazione).

Le fibre di carbonio, rispetto a quelle di vetro, presentano tre vantaggi:

- un modulo elastico molto alto;

- una densità bassa;

- un coefficiente di dilatazione termico molto basso.

Esse perciò stanno sostituendo man mano le fibre di vetro in tutti quei campi in cui è richiesta un'alta rigidità o una stabilità al variare della temperatura (dispositivi ottici, radar ecc.). Le elevate proprietà meccaniche giustificano la diffusione che queste fibre stanno riscuotendo sebbene i costi di produzione siano molto più alti rispetto alle fibre di vetro.

Tra le fibre più utilizzate ritroviamo anche il kevlar. Il kevlar è una fibra aramidica sintetica. La sua caratteristica principale è la grande resistenza alla trazione, tanto che arriva ad essere 5-10 volte più resistente dell'acciaio a parità di massa. Le applicazioni di questa fibra sono le più disparate, esse partono dalla realizzazione di componenti di velivoli ad alte prestazioni, fino ad arrivare a giubbotti antiproiettile, tavole da surf e sistemi di protezione per sport estremi. La possibilità di avere delle applicazioni così diverse nascono dal fatto che il kevlar può essere utilizzato sia come tessuto sia come materiale composito. In forma composita, il Kevlar viene utilizzato per produrre strutture che forniscono delle ottime caratteristiche di resistenza agli urti e all'abrasione. Un inconveniente delle parti realizzate in composito di Kevlar è che necessitano di essere verniciate poiché tale materiale si degrada nel tempo se esposto ai raggi UV ed alla luce solare.

Entrambe le fibre (carbonio e kevlar) sono ampiamente utilizzate nell'industria aerospaziale, per le automobili di lusso, le attrezzature militari, e fondamentalmente in qualsiasi settore in cui si desidera proteggere i componenti sensibili da alta pressione, alto calore, o sostanze chimiche pericolose.

Una delle prime differenze tra i due è il processo di modellatura e taglio. Le fibre aramidiche sono tagliate più facilmente con laser il che conferisce estrema precisione e ripetibilità.

L'aspetto negativo dell'espansione termica è molto simile tra le due fibre, ma il kevlar è caratterizzato da una resistenza a compressione leggermente inferiore

affiancata da una maggiore resistenza agli urti. Questo non produce una differenza considerevole nella maggior parte delle applicazioni, ma è da tenere in conto in alcune implementazioni particolari, ad esempio quando si producono scudi di sicurezza per la propulsione aeronautica.

1.2 Processi di produzione dei compositi

Ad oggi esistono numerose le tecnologie di fabbricazione di elementi in materiale composito. Come già anticipato precedentemente, le tecnologie di produzione devono essere scelte in fase progettuale in funzione della forma, dimensione e proprietà che dovrà avere il pezzo finito. A seconda delle caratteristiche che si vogliono ottenere, della necessità o meno di riprodurre il componente in elevate quantità, la scelta può ricadere tra tecnologie in cui si impiegano stampi chiusi o stampi aperti, tecnologie manuali e automatizzate.

Nell'ambito della produzione di componenti con stampo aperto è bene notare che tale tecnologia consente l'ottenimento di un componente che presenta una sola superficie con finitura controllata in modo dettagliato. Questi processi si prestano solitamente alla fabbricazione di parti molto ingombranti poiché sarebbe poco pratico disporre stampi chiusi dato il peso eccessivo. Le inevitabili bolle d'aria che si creano tra gli strati vengono eliminate eseguendo una rullatura o, qualora siano richiesti componenti con un grado di difettologia minore, si può ricorrere ad un sacco in cui viene creato il vuoto.

Questa tecnologia di produzione presenta però degli inconvenienti rispetto a quelle più avanzate. Dato che questa presuppone un'impregnazione a mano, è possibile prevedere che venga utilizzato utilizza un quantitativo di resina superiore a quello strettamente necessario, e sarebbe difficile, eliminare la parte in eccesso, per cui il componente finale sarà caratterizzato da una qualità superficiale minore.

I processi produttivi più diffusi di questa tipologia sono:

- stesura manuale;

- filament winding;

- vacuum infusion (RIFT);

- resin transfer molding (RTM);

- pultrusione;

- produzione in autoclave.

L'industria manifatturiera di componenti in materiale composito si adatta molto bene alla stampa 3D o Additive Manufacturing (AM), a differenza di quella di componenti in materiale "tradizionale" che si basa su fasi di produzione per sottrazione di materiale. Questo è possibile in quanto, la produzione di compositi e l'AM hanno in comune la filosofia per la quale il processo prevede aggiunta di materiale. Grazie alla possibilità intrinseca dei materiali compositi di poter consentire una fabbricazione strato dopo strato sfruttando le caratteristiche dipendenti dall'orientazione delle fibre che lo costituiscono, è possibile progettare accuratamente componenti per svariate applicazioni. Ad esempio, la necessità di ridurre il peso delle strutture mantenendo delle proprietà meccaniche elevate, porta il settore aerospaziale ad impiegare ampiamente strutture in composito. Come visto all'inizio di questo capitolo, secondo le tecniche di fabbricazione tradizionali, i materiali compositi vengono prodotti disponendo delle fibre per ogni strato, siano esse fibre lunghe, corte o tessuti. La ricerca costante di ottimizzazione dei processi ha portato di recente allo sviluppe di nuove tecnologie di produzione che sfruttano l'AM. Tra queste tecnologie ritroviamo:

- Automated Fiber Placement (AFP)

- Automated Tape Laying (ATL)

- Fused Deposition Modeling (FDM)

- Fused Filament Fabrication (FFF)

- Continuous Fibre Fabrication (CFF)

- Continuous Tow Shearing (CTS)

Tutte queste prevedono la deposizione di fibre continue lunghe con percorsi curvilinei progettati ad-hoc che hanno il vantaggio principale, rispetto a quelle classiche, di permettere di migliorare rigidezza e resistenza nei punti maggiormente

sollecitati assicurando la leggerezza implicita dei materiali compositi offrendo la capacità di avere soluzioni progettuali più efficienti con design non convenzionali. Con il loro sviluppo hanno reso possibile il superamento dei limiti classici della produzione di strutture composite con tecnologie tradizionali. La possibilità di utilizzare questi materiali per applicazioni strutturali ha comportato la nascita di un nuovo tipo di materiali compositi detti Variable Angle Tow (VAT) che verranno meglio descritti in seguito.

1.2.1 Automated Tape Laying (ATL) e Automated Fiber Placement (AFP)

In questo paragrafo verranno analizzate due tecnologie che negli ultimi anni hanno rivoluzionato la produzione di strutture composite nell'industria aerospaziale. Nel dettaglio queste sono le tecnologie di Automated Tape Laying (ATL) e Automated Fiber Placement (AFP). Questi due processi nascono dalla necessità di ridurre i costi di fabbricazione e, seppur molto simili tra loro, sono utilizzati in modo diverso per ottenere obiettivi specifici e fornire resistenza o rigidità dove richiesto. La filosofia di produzione prevede la deposizione di materiali pre-preg (pre-impregnati) composti cioè da fibre precedentemente unite alla matrice. Entrambe le tecniche impiegano macchine a controllo numerico molto simili, esse sfruttano una testa di posizionamento che pone il nastro (tape) su uno stampo (mandrino) per costruire il layup del componente da realizzare. In tabella 1.1 è mostrato un breve resoconto dei componenti attualmente in uso da svariate case produttrici realizzate con le tecniche che verranno introdotte a breve.

La tecnologia ATL utilizza nastri pre-impregnati larghi e li dispone su una superficie rimuovendo automaticamente al contempo il supporto dello strato. Essa è solitamente utilizzata per la produzione di parti di geometria relativamente semplice dotate di bassa curvatura e grandi dimensioni, ad esempio il rivestimento delle ali di un aereo. I nastri sono dotati di rinforzo unidimensionale ed hanno dimensioni che variano tra i 75 mm (3 pollici) ed i 300 mm (12 pollici) a seconda dell'applicazione e della macchina usata per il layup. Il limite principale di questa tecnologia è il rapporto tra larghezza del nastro utilizzato ed il raggio di curvatura

Produttore	Velivolo	Componenti
Boeing	777-787, V-22 Osprey	wing, empennage, fuselage
Airbus	A319/A320/A321, A330/A340, A350, A380, A400M	wing, empennage, fuselage
Bombardier	C-Series	fuselage
Fairchild Dornier	Do 728	empennage
Gulfstream Aerospace	Gulfstream IV	wing
Dassault Aviation	Dassault Falcon	empennage
Hawker Beechcraft Corporation	Premier 1, Hawker 4000	fuselage
Northrop	B-2	wing
Grumman Aerospace Corporation	A-6 Intruder	wing
Vought Aircaft	C-17	empennage
Lockheed Martin	F-22, F-35, C-130	wing, empennage
Eurofighter	Eurofighter Typhoon	wing

Tabella 1.1: Panoramica di componenti prodotti con ATL e AFP per velivoli attualmente in uso. [22]

del percorso curvilineo che la macchina segue per la deposizione. Infatti, al crescere delle dimensioni del nastro, si dovranno tenere necessariamente dei raggi di curvatura più ampi altrimenti si generano inevitabilmente difetti come il tow gap (distanza tra due deposizioni successive di nastro) e tow overlap (sovrapposizione del nastro). Al fine di evitare difettologie e garantire una maggiore adesione tra i nastri l'ugello che depone il nastro dispone anche di un dispositivo di riscaldamento che aumenta la temperatura dei pre-impregnati.

La tecnologia AFP è stata uno strumento di ricerca e sviluppo per molti anni prima di passare alla produzione di pezzi commerciali, essa utilizza una macchina a controllo numerico per posizionare automaticamente e ad alta velocità la fibra preimpregnata su un mandrino. La differenza sostanziale con l'ATL è quella che l'AFP posiziona fibre pre-impregnate più strette, la cui dimensione può oscillare tra circa 32 mm ($\frac{1}{8}$ di pollice) e circa 125 mm (mezzo pollice). L'utilizzo di nastri

Figura 1.1: Processo produttivo con ATL

Figura 1.2: Sezione anteriore della fusoliera di un Boeing 787 Dreamliner prodotta con tecnologia AFP. Source: *CW/Photo - Thomas Sloan*

più stretti, consente più facilmente la realizzazione di superfici curve, e permette la produzione di geometrie molto più complesse. Una buona qualità del layup è il risultato della scelta ottimale di svariati parametri che regolano il processo, tra

i quali ritroviamo sicuramente la temperatura di riscaldamento del materiale, la pressione durante il processo di compattazione e la velocità con cui la macchina posiziona il pre-preg. Sebbene negli anni siano state adottate regole di progettazione per ottimizzare le traiettorie di deposizione al fine di assicurare le massime proprietà meccaniche al pezzo finito, ciò è ancora insufficiente a garantire la produzione di componenti privi di difetti. Peraltro, si possono introdurre ulteriori imperfezioni nel processo di ottimizzazione della traiettoria della macchina.

Figura 1.3: Macchina per AFP. Source:*National Composites Centre*

Un approccio innovativo [37] è mostrato in figura 1.4 e consiste nel combinare l'AFP con l'AM. Questa tecnologia prevede l'implementazione di sensori ottici che rilevano la presenza di eventuali vuoti lasciati tra due strati di nastro e vengono riempiti dalla stampante 3D montata sul braccio del robot attraverso l'impiego di Carbon Continuous-Fibre Reinforced Plastic (CFRP), ovvero fibre continue di carbonio con matrice polimerica. I componenti così prodotti presentano un grado di omogeneità maggiore e mantengono un peso contenuto in quanto non sono richiesti strati superflui di materiale per compensare i vuoti degli strati sottostanti.

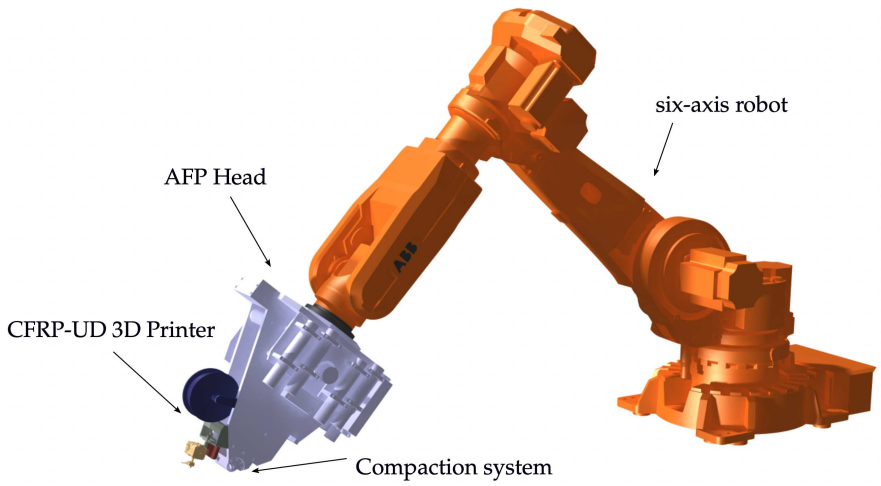


Figura 1.4: Modello semplificato del robot a sei assi per AFP con stampante 3D integrata per riempire le lacune con compositi termoplastici. [37]

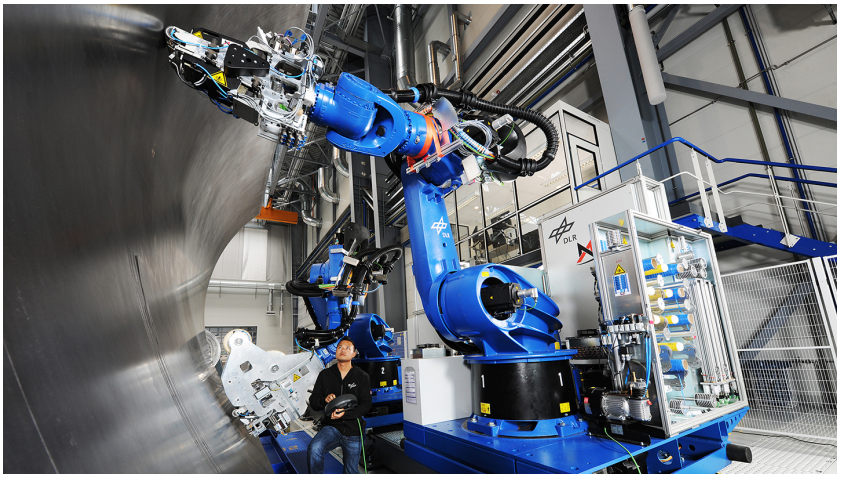


Figura 1.5: GroFi: struttura di ricerca gestita dal Centro per la tecnologia di produzione leggera del Centro Aerospaziale tedesco a Stade. [27]

1.2.2 Fused Deposition Modeling e stampa 3D

Fused Deposition Modeling (FDM) o, in modo equivalente, Fused Filament Fabrication (FFF) è un processo di stampa 3D che utilizza la deposizione di polimeri termoplastici o elastomeri che vengono trasformati in filamenti per estrusione ed è

utilizzata maggiormente per produrre prototipi o piccole parti di assiemi. Durante il processo di stampa, viene creata una sezione trasversale bidimensionale del modello e strato dopo strato si genera il pezzo finito come mostrato nella figura 1.8. Solitamente, per geometrie meno convenzionali sono richiesti dei supporti, come è possibile vedere nella figura 1.8, che vengono facilmente rimossi per la maggior parte dei materiali una volta completata la stampa. In seguito verranno analizzati i principali componenti di una stampante 3D convenzionale. In generale una stampante è costituita da un elemento principale che è l'estrusore (che trasla parallelamente al piano), un piatto di costruzione (che ha la possibilità di traslare in verticale e fornisce una base di appoggio su cui viene effettuata la stampa) e delle bobine di materiale polimerico già presenti sotto forma di filamenti.

Con questa tecnica, è possibile realizzare oggetti caratterizzati da una precisione estremamente accurata (fino a 0,050 mm [1], determinata dal diametro della punta, cioè l'ugello di estrusione) e che possono assumere forme non convenzionali. In alcuni casi di geometrie troppo complesse, si utilizzano supporti solubili, garantendo tolleranze molto basse dal punto di vista dimensionale.

Dopo il processo di stampa è possibile intravedere, sulla superficie dell'oggetto, gli strati di materiale depositati dall'estrusore. Laddove necessario, essi possono essere parzialmente o totalmente eliminati tramite un lavoro di finitura non invasivo.

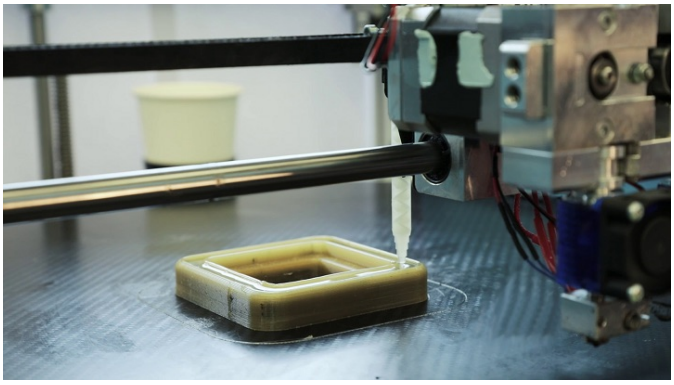


Figura 1.6: Esempio di stampa 3D. [2]

Secondo la visione comune, questa tecnologia è considerata economica in quanto facile da replicare e comoda per applicazioni da ufficio. In realtà questa tecnologia

è utilizzata anche da macchine molto professionali per applicazioni industriali che si avvalgono di materiali molto specifici ed anche molto costosi.

Il processo di stampa

Il processo di costruzione del componente prevede che un filamento plastico passi attraverso un estrusore, già ad alta temperatura, che rende il materiale fluido, questo viene poi "depositato" sul piatto di stampa in modo da costituire gli strati (layer) che, come già detto in precedenza, vengono sovrapposti ai precedenti. Più in generale esso può essere diviso in tre fasi:

- preparazione del modello 3D;

- fase di stampa;

- rimozione dei supporti ed eventuali trattamenti superficiali.

Preparazione del modello 3D
Questa fase prevede la modellazione CAD con una conseguente previsione di dove si renderanno necessari dei supporti per il sostegno delle parti sporgenti ed infine una divisione in layer della geometria totale del modello.

Fase di stampa
In questa fase, sotto il controllo della macchina a controllo numerico, l'estrusore deposita il filamento muovendosi nel piano parallelo al piatto di stampa. Esso è composto da una serie di resistenze, sotto forma di bobine, che riscaldano il materiale e lo fondono in modo tale che quando depositato sullo strato formato in precedenza si genera un'unione stabile. Come mostrato in figura 1.7 esso contiene anche un meccanismo solitamente composto da ruote dentate che servono a fornire un apporto costante di filamento alla punta che lo riscalda e poi lo deposita. Creato uno strato, il piatto si abbassa, e l'estrusore genera il successivo.

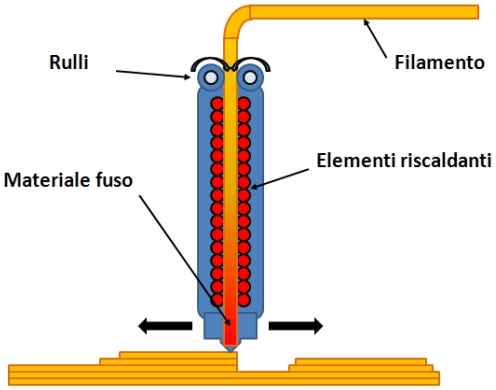


Figura 1.7: Estrusore in dettaglio

Rimozione dei supporti ed eventuali trattamenti superficiali
Una volta completata la stampa è sufficiente rimuovere i supporti ed eventualmente, per migliorare le superfici del componente, eseguire delle operazioni di smussatura o levigatura. A seconda del materiale utilizzato per la stampa è poi possibile eseguire anche la verniciatura del prodotto.

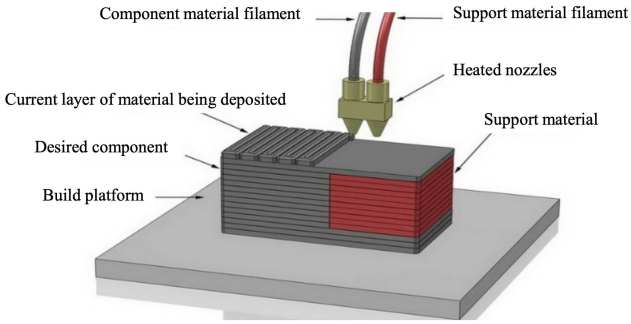


Figura 1.8: Componenti coinvolti in un processo di stampa 3D con tecnologia FDM [6]

1.2.3 Continuous Fibre Fabrication

Il processo additivo descritto nel paragrafo precedente causa una differenza sostanziale tra le proprietà meccaniche del componente nel piano rispeto a quelle nel piano oltre a conferire un comportamento ortotropo. Di recente, è stata introdotto da Markforged® uno sviluppo della tecnologia di FDM che va sotto il nome di Continuous Fibre Fabrication (CFF). Questa tecnica di AM consente la stampa

di materiali compositi già dotati di un rinforzo che si presenta solitamente sotto forma di fibre continue lunghe (carbonio, vetro, kevlar..).

Questa nuova tecnologia è molto conveniente e competitiva in quanto unisce un aumento sostanziale delle proprietà meccaniche (indotto dall'inserimento delle fibre all'interno del componente) ad una libertà di realizzare geometrie non convenzionali (tra le caratteristiche di punta dell'AM). A differenza delle altre stampanti, in questo caso è previsto un estrusore specifico che deposita il materiale termoplastico (ad esempio Nylon, Onyx), che compone lo strato esterno del pezzo e le parti di matrice, ed allo stesso tempo deposita un filamento continuo di rinforzo (fibra di carbonio, kevlar o fibra di vetro). In questo modo è possibile ottenere componenti che presentano dei rinforzi ad hoc, all'occorrenza anche solo puntualmente, con caratteristiche meccaniche paragonabili a pezzi in metallo lavorati a macchina. Negli ultimi anni la progettazione di componenti a rigidità variabile (Variable Stiffness Design - VSD) è oggetto di attenzione dalla comunità scientifica e industriale per la sua capacità di sfruttare al meglio il potenziale dell'AM nella realizzazione di strutture composite, nel seguito verrà meglio investigata al fine di caratterizzare componenti ottenuti con questa filosofia di realizzazione.

1.3 Variable Angle Tow

Negli ultimi decenni, nel settore aerospaziale e dell'aviazione generale, i compositi maggiormente adoperati coinvolgono polimeri plastici rinforzati con fibra di carbonio (Carbon Fiber-Reinforced Plastic Polymer - CFRP) e sono stati utilizzati anche per la fabbricazione di strutture primarie. Tipicamente, le fibre che costituiscono il composito presentano angoli costanti per ogni strato, perlopiù 0°, ± 45° e 90°, al fine di ottenere un laminato che soddisfi al meglio i requisiti di rigidezza, resistenza e costi. Inoltre, un tipico laminato composito è realizzato sovrapponendo una pluralità di strati di fibra di diverse direzioni. Per ridurre il carico di lavoro di progettazione e costruzione, per evitare l'accoppiamento di diversi strati e per assimilare le proprietà della struttura del materiale composito ad una struttura metallica viene utilizzata una simmetria nella realizzazione degli strati del laminato. Le prestazioni meccaniche di questo tipo di laminati sono determinate dallo spessore e dalla direzione delle fibre di ogni strato. Premesso che

l'orientamento della fibra è costante in ogni strato, le proprietà meccaniche della struttura del materiale composito nei metodi di progettazione convenzionali sono realizzate modificando l'angolo di ogni strato e la sequenza di laminazione [47].

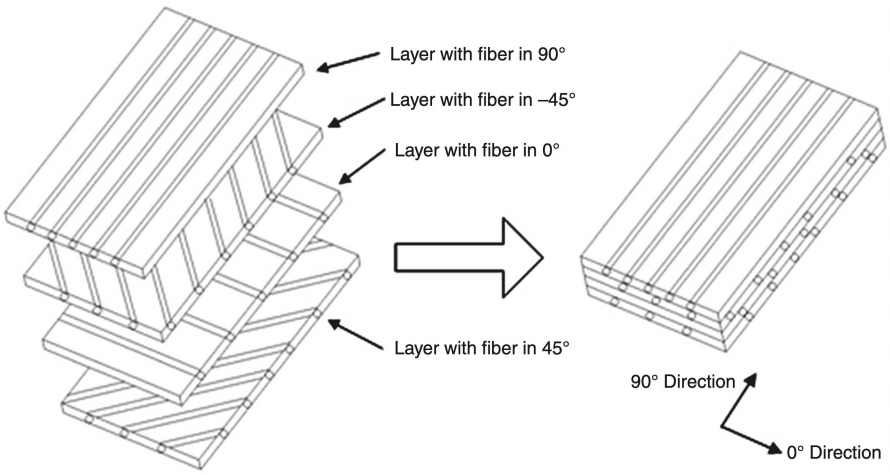


Figura 1.9: Organizzazione tipica di un laminato in materiale composito [47]

Tuttavia, in senso più ampio, il potenziale dei materiali compositi, ed in particolare di quelli CFRP, non è ancora pienamente utilizzato a causa della loro forte anisotropia. A tal fine, ci sono diversi metodi di realizzazione di materiali compositi che vengono proposti, come rappresentato nella figura 1.10 [47].

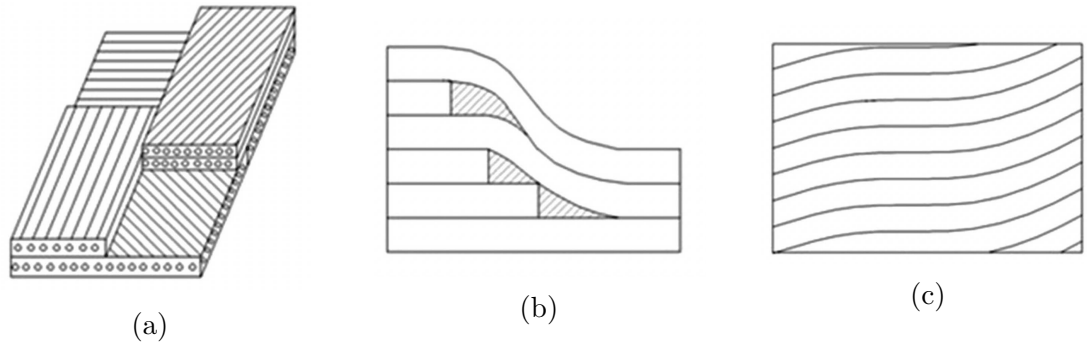


Figura 1.10: Configurazioni per sfruttare a pieno le proprietà dei materiali compositi. Laminati con patches con direzioni diverse (a), laminati con più strati nei punti di interesse (b), fibre disposte con traiettorie curvilinee nel piano (c) [47]

L'ultimo tipo di laminazione permette sia di orientare le fibre secondo la direzione voluta sia di mantenere le fibre di rinforzo continue, senza creare discontinuità

di comportamento che invece sono presenti nelle altre due configurazioni. Questo nuovo metodo di progettazione, definito come Variable Stiffness Design (VSD), prevede che le fibre vengano disposte lungo traiettorie curve e la loro orientazione può essere liberamente definita a seconda dell'applicazione e della risposta al carico desiderata.

Le tecnologie introdotte finora hanno permesso la nascita dei Variable Angle Tow (VAT). L'introduzione di percorsi di deposizione delle fibre ad angolo variabile rende possibile una variazione delle proprietà del composito a livello puntuale che nella fase di progetto possono fare la differenza. I principali vantaggi che si hanno nell'utilizzo di compositi VAT rispetto a quelli tradizionali sono:

- maggiori prestazioni meccaniche;
- migliore risposta a carichi di buckling e comportamento in post-buckling;
- risposta dinamica alla vibrazione libera più efficace;
- ottimizzazione di peso e spessore del componente finito.

1.3.1 Limiti e difetti dei VAT

Il processo automatizzato AFP, introdotto in precedenza, ha reso possibile la realizzazione di strutture di grandi dimensioni e geometrie non convenzionali con alta qualità e bassi tempi di realizzazione. Sebbene tale processo sia altamente accurato e riproducibile, esso non è esente da imperfezioni indotte nella fase di produzione.

La tecnologia di produzione per AFP è molto flessibile grazie alla combinazione delle capacità del FW (Filament Winding) di produrre singoli fasci di fibre e della tecnologia di ATL di fermare, tagliare e riavviare singoli fasci di fibre. In sostanza, è quindi in grado di combinare i vantaggi di avvolgimento e taping. I sistemi ATL sono in grado di raggiungere tassi di deposizione più elevati e sono più economici rispetto alle tecnologie di deposizione classiche. Questo metodo può essere utilizzato per fabbricare strutture curve complesse e dirigere le fibre secondo percorsi portando alla nascita le strutture VSCL (Variable Stiffness Composite Laminate).

Gli attuali sistemi AFP funzionano con un massimo di 32 cosiddetti tows realizzati con materiale in fibra, che può essere secca o pre-impregnato, di larghezze

variabile. La complessità geometrica ed il raggio di curvatura desiderato determinano la larghezza effettiva del percorso. La deposizione controllata di fibre su geometrie complesse non è esente da difetti, infatti, le imperfezioni indotte dalla produzione (imperfezioni primarie e secondarie) sono inevitabili. Le imperfezioni primarie sono il risultato diretto di deviazioni durante la produzione (ad esempio, una deviazione di posizionamento del materiale in fibra) e potrebbero comportare imperfezioni secondarie (ad esempio, una deviazione di posizionamento del materiale in fibra provoca lacune e/o sovrapposizioni che si verificano all'interno dello strato). Naturalmente, la qualità del layup dipende in modo significativo dalla quantità e dalla dimensione di queste imperfezioni.

In seguito verrà presentata una rassegna di diverse tipologie di imperfezioni più o meno impattanti all'interno del laminato già presentata in letteratura da Heinecke and Willberg [22].

Deviazione dell'angolo di deposizione

La complessità della geometria e del layup determinano essenzialmente la deviazione dall'angolo di deposizione delle fibre, come è possibile vedere in figura 1.11. Di solito, il software di stampa esegue una pianificazione per la deposizione di fibre ed utilizza curve di riferimento per mettere a punto i singoli percorsi di stampa. Queste curve spesso corrispondono alla linea centrale del tow, evidenziata in figura 1.12.

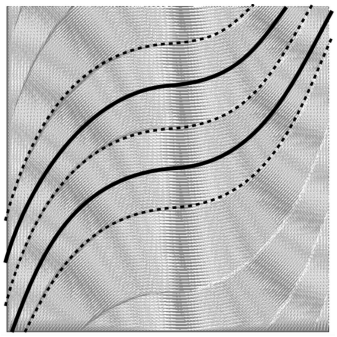


Figura 1.11: Esempio di deviazioni dell'angolo della fibra [22]

In particolare la curvatura imposta al nastro composito provoca raggi diversi ai bordi esterni di un percorso, che portano a significative deviazioni dell'angolo

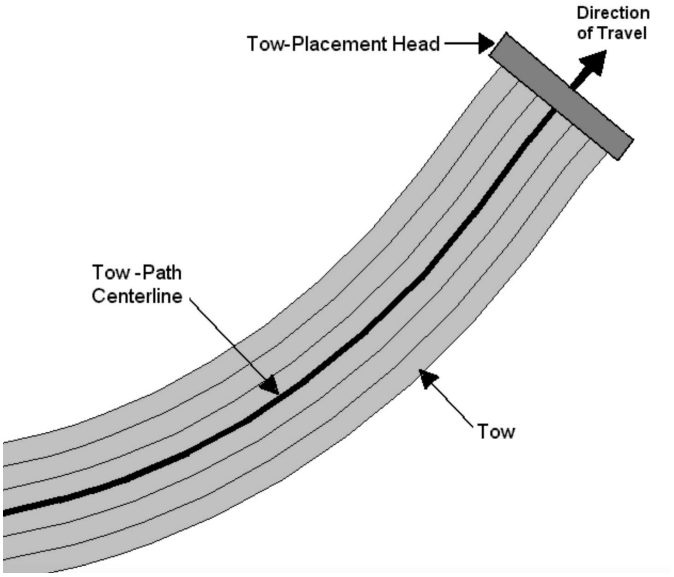


Figura 1.12: Esempio di un percorso di deposizione [28]

desiderato. Questo porta ad una difficoltà nella pianificazione della deposizione di fibre. La regolazione della larghezza di deposizione influisce sull'entità delle deviazioni dell'angolo. Una maggiore larghezza della fibra aumenta la deviazione dell'angolo della fibra. Al contempo, se l'angolo varia troppo da quello desiderato, possono generarsi altre difettologie come ad esempio gaps e overlaps (lacune e sovrapposizioni, vedremo in seguito) il cui numero tende ad aumentare. Al fine di ridurre il numero di difetti che si verificano bisognerebbe ridurre la larghezza del materiale depositato. Questa diminuzione di larghezza comporta che il tasso di deposizione di fibra si riduce il che determina un aumento del tempo per la creazione di una ply e quindi del pezzo finale.

Disallineamento delle fibre

Il disallineamento è dovuto principalmente alle caratteristiche cinematiche della macchina AFP e al suo controllo. Gli effetti di inerzia del robot sotto carico, uniti alla velocità di deposizione, influenzano la precisione di posizionamento [36]. Ulteriori fattori che incentivano l'insorgere di disallineamenti nella deposizione della fibra sono la lavorabilità del materiale e la complessità dello strato. Inoltre, la necessità di avere una fibra curva provoca ulteriori deviazioni nel posizionamento.

I fasci di fibre che sono costretti a deviare dal percorso non possono più essere posizionati con precisione. Il raggio di curvatura della fibra e la lunghezza minima del materiale depositato determinano l'entità dello scostamento dal percorso ideale. Anche in questo caso possono nascere fenomeni secondari come lacune e sovrapposizioni tra depositi di fibre adiacenti.

Figura 1.13: Deviazione tra due deposizioni successive [22]

Ondulazioni

Questo tipo di difetto non è caratteristico solo dei componenti ottenuti con tecnologie ATL/AFP. Infatti, è inerente anche ai compositi che presentano il rinforzo sotto forma di tessuto. In sostanza, a causa di curvature o geometrie troppo spinte, si verificano ondulazioni della fibra all'interno del materiale che possono essere nel piano o fuori dal piano di deposizione.

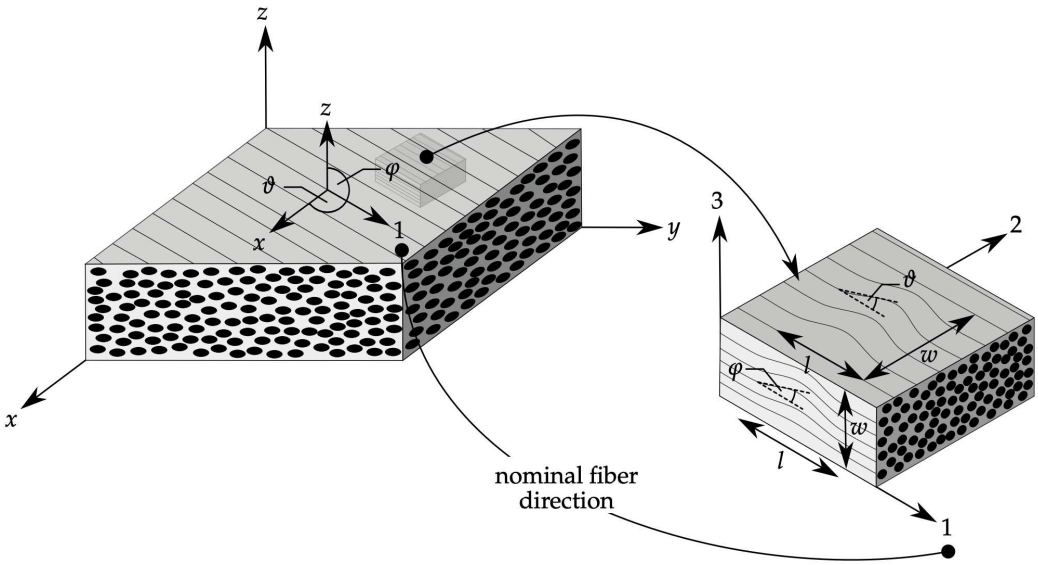


Figura 1.14: Schematizzazione di ondulazioni nel piano e fuori dal piano [22]

Gap e Sovrapposizioni

Tra le difettologie maggiormente osservabili, quelle più frequenti sono:

- Tow gap, ovvero spazi vuoti tra due tow successivi in cui non vengono deposte fibre data la curvatura locale richiesta per la deposizione;
- Tow overlap, difetto che si presenta all'aumentare della curvatura di deposizione, può succedere che due tow successivi possano sovrapporsi non consentendo la corretta deposizione delle fibre.

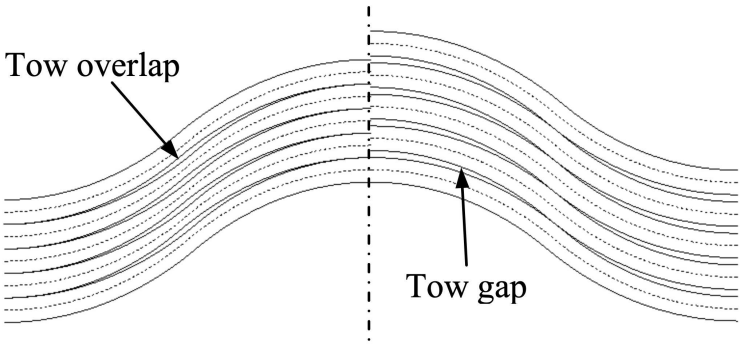


Figura 1.15: Differenza tra i difetti primari nei VAT [26]

Twisting

Questo tipo di difetto può avvenire sia all'interno del sistema di alimentazione del materiale o dell'estrusore sia nel momento della stampa, a causa del movimento della macchina, in corrispondenza di variazioni di geometria o curvature troppo spinte. Nelle immediate vicinanze si verificano lacune come imperfezioni secondarie in quanto si genera una mancanza di materiale in quella zona come è possibile vedere nella figura 1.16.

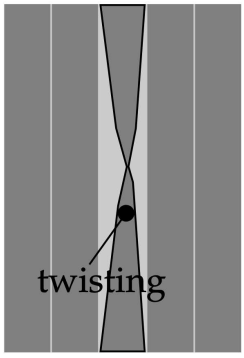


Figura 1.16: Fibra twisted all'interno di uno strato [22]

L'effetto di twisting è stato affrontato in letteratura solo da Croft et al. [13] i quali hanno svolto delle prove sperimentali per capire quanto i parametri di resistenza e rigidezza fossero impattati da questa imperfezione. È bene notare che al giorno d'oggi questo tipo di processo di produzione utilizza materiali di alta qualità ed è caratterizzato da un processo molto controllato, pertanto questa imperfezione non si verifica di frequente.

Bridging e crowning

Queste imperfezioni si generano dalla capacità della tecnologia AFP di posizionare il materiale in fibra su superfici concave e convesse. Questa operazione è resa possibile eliminando quasi completamente la pre-tensione all'interno dei fasci. A seconda che la superficie interessata dalla deposizione sia concava o convessa si può parlare di bridging o crowning.

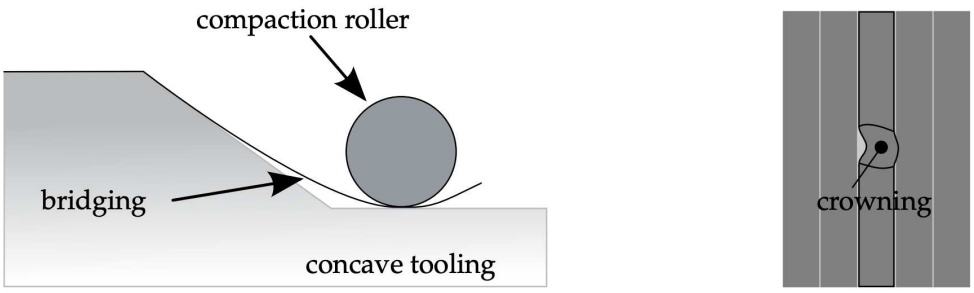


Figura 1.17: Schematizzazione dei difetti di bridging e crowning [22]

Tra le imperfezioni meno frequenti possiamo inserire:

- Tow wrinkling, ovvero ondulazioni del materiale depositato che si presentano quando non c'è una completa adesione tra fibre e matrice;

- Vuoti e inclusioni, negativi ai fini della resistenza e del comportamento a fatica del componente;

- Stress residui e deformazioni indotte dal processo di deposizione.

Nel processo AFP le imperfezioni di produzione sono inevitabili, tuttavia rimane un degno sostituto della produzione manuale di strutture composite. Esso offre precisione, ripetibilità, produttività e flessibilità.

1.4 Stato dell'arte

Come discusso precedentemente, grazie alle nuove tecnologie di deposizione delle fibre è possibile ottenere dei laminati a rigidità variabile grazie alla variazione dell'angolo di orientamento della fibra nel piano del laminato, al contrario dei laminati classici ove le fibre vengono disposte con un angolo costante all'interno dello strato. Per essere studiate, le strutture costituite da laminati con fibra curvilinea, e quindi rigidità variabile, richiedono un modello più complesso rispetto a quelle formate da laminati tradizionali a fibra diritta. Questo si traduce in una complicazione ulteriore per il processo di ottimizzazione. Al fine di semplificare l'ottimizzazione, uno dei requisiti classici della produzione è che l'orientamento della fibra sia una

funzione continua che cambia gradualmente all'interno della lamina. A questo fine si sono resi necessari gli sviluppi di metodi coerenti per la progettazione dei percorsi di stampa, poiché anche con un metodo convenzionale, esistono infinite possibilità di orientamento delle fibre.

Più nello specifico, soprattutto per il campo aerospaziale, sono di primario interesse per i componenti realizzati in materiale composito le performance che riguardano i fenomeni di instabilità (buckling) delle strutture quando sono soggette a determinati carichi. Per come sono stati concepiti, i compositi VAT consentono un approccio "tailoring" al problema del buckling. Questa capacità nasce dalla possibilità di variare l'orientamento delle fibre secondo direzioni opportunamente valutate per la resistenza all'instabilità.

Gurdal et al. [20], attraverso svariate indagini, sono stati tra i primi a studiare il comportamento dei VAT sottoposti a carichi di buckling. In particolare essi hanno dimostrato che, disponendo le fibre perpendicolarmente alla direzione del carico applicato, il carico si ri-distribuiva all'interno del pannello migliorando la resistenza al buckling. Come risultato dello studio è stato verificato che utilizzando una disposizione curvilinea delle fibre in un pannello con foro centrale, i carichi massimi di buckling possono essere incrementati del 60%.

Nel loro studio, Chen et al. [11], hanno sviluppato un modello analitico per studiare il comportamento di instabilità di pannelli compositi VAT in presenza di una delaminazione qualora fossero sottoposti a carichi di compressione. È stato dimostrato che i carichi di instabilità diminuiscono con un aumento della dimensione della delaminazione. I laminati VAT con delaminazione fuori dal piano se sottoposti ad un carico possono presentare un aumento della delaminazione, che riduce ulteriormente i carichi di instabilità. Infine, è stato studiato in uno studio parametrico il meccanismo di sfruttare i laminati VAT per migliorare le prestazioni di instabilità delle piastre composite delaminate. Questo studio mostra che la resistenza residua di instabilità delle piastre composite delaminate può essere migliorata significativamente utilizzando la tecnologia di progettazione VAT.

Hyer e Lee [24] hanno condotto le prime ricerche sull'ottimizzazione dei laminati a rigidità variabile in fibra curvilinea. Il primo obiettivo della loro analisi era quello di massimizzare il carico di instabilità senza agire sugli orientamenti delle fibre. Per massimizzare il carico di instabilità è stata fatta un'analisi di un

pannello con un foro centrale. Per prima cosa è stata creata una mesh usando 18 elementi finiti. In ogni elemento l'orientamento delle fibre era costante. Infine, gli angoli di orientamento delle fibre in ogni elemento, sono diventati le variabili di progettazione e sono stati fatti variare. In particolare, è stato fatto variare l'angolo degli strati posti a 0° in un laminato $(\pm 45{,}0)_s$.

È stata quindi determinata la sensibilità del carico di instabilità di ogni elemento alle variazioni dell'orientamento delle fibre nei 18 elementi. Per ogni elemento esisteva un angolo capace di massimizzare il carico di instabilità. Scegliere i 18 angoli dall'analisi di sensibilità sarebbe un compito molto semplice, se non per il fatto che la risposta in ogni elemento dipende dall'orientamento in ogni altro elemento. La soluzione a questo problema è stata cercata con una ricerca tramite gradiente che simultaneamente trattava ciascuno degli orientamenti della fibra dell'elemento come variabile. È importante notare che questo metodo non dà necessariamente il massimo globale ma trova il massimo locale più vicino ai valori iniziali indicati.

Come è stato spiegato in precedenza, senza vincoli sugli angoli di ogni elemento, i risultati iniziali hanno portato ad una configurazione impossibile da fabbricare. In ottica di avere un design più fattibile, il problema è stato riformulato in modo tale che gli angoli di orientamento delle fibre negli elementi adiacenti fossero continui. Inoltre, è stata esaminata la risposta delle configurazioni ottenute ai carichi di trazione producendo un progetto finale con un miglioramento del 30% del carico di instabilità e un miglioramento del 35% del carico massimo di trazione.

Nagendra et al. [30] hanno condotto ulteriori ricerche nell'area dell'ottimizzazione dei laminati a rigidità variabile in fibra curvilinea. Come accennato in precedenza, l'orientamento del fiberpath è descritto da una curva progettata tramite un insieme di punti di definizione, noti come "punti di controllo". Per l'ottimizzazione è stato utilizzato un metodo basato su funzioni di forma.

Questo approccio forma un percorso di fibra finale basato su una combinazione lineare di curve di base predefinite. Le variabili di progettazione, in questo caso, sono un insieme di coefficienti che vengono moltiplicati nelle funzioni di forma di base. Quando i coefficienti sono moltiplicati per le funzioni di forma, viene creato un nuovo insieme di punti di controllo che definisce il percorso di traino di riferimento. Da questo percorso, sono stati costruiti ulteriori percorsi di traino paralleli in modo tale che non vi fosse sovrapposizione tra i percorsi adiacenti.

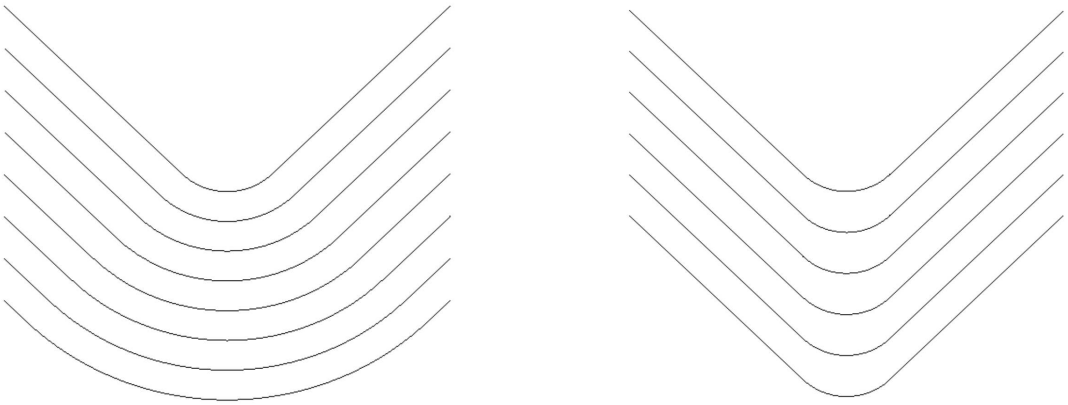
L'ottimizzazione è stata effettuata utilizzando il criterio di rottura di Tsai-Wu [29] con un criterio di Hashin [43] modificato. Questa formulazione ha permesso di esaminare anche le modalità di rottura. La formulazione ha portato ad un aumento del 72% del carico di instabilità per un pannello con un foro centrale. Questi risultati sono simili ai risultati ottenuti da Hyer e Lee [24] su un problema simile.

Wu et al. [45] hanno proposto una nuova definizione matematica per rappresentare la variazione generale dell'orientamento delle fibre nelle piastre VAT. In questa definizione, i coefficienti dei polinomi sono direttamente uguali agli angoli delle fibre nei punti di controllo preselezionati. Un approccio Rayleigh-Ritz viene utilizzato per determinare la distribuzione dei carichi di prebuckling e il carico critico di instabilità delle piastre VAT. Rispetto ad altre soluzioni numeriche, questo approccio fornisce un mezzo più efficiente per valutare il carico di instabilità dei laminati VAT. Successivamente, viene effettuata l'ottimizzazione delle piastre VAT per il carico massimo di instabilità utilizzando la variazione non lineare degli angoli delle fibre. Infine, per dimostrare la fattibilità della strategia di modellazione proposta, sono state studiate piastre VAT con un bordo libero e gli altri semplicemente appoggiati.

In seguito, Wu et al. [46], hanno studiato un efficiente schema di ottimizzazione a due livelli, per la progettazione di piastre VAT, che utilizza i parametri di laminazione come variabili di progetto. Sono state utilizzate nuove matrici di rigidità con termini di invarianti del materiale e parametri di laminazione. Inoltre, è stata usata una serie di espressioni esplicite in forma chiusa per definire la regione di realizzabilità di due parametri di laminazione nel piano e due fuori dal piano utilizzati per la progettazione di laminati ortotropi. Infine, vengono proposti esempi numerici di piastre sottoposte a carico di compressione con diverse condizioni al contorno. Il tutto si conclude con delle soluzioni affidabili che dimostrano la robustezza e l'efficienza computazionale della metodologia di ottimizzazione proposta.

Grazie ai loro studi, Waldhart et al. [42] hanno dimostrato che è possibile ottenere notevoli guadagni in termini di carico di instabilità e rigidità nel piano utilizzando percorsi di deposizione parallelo o shifted 1.18. In particolare, il metodo di deposizione shifted ha prodotto i migliori risultati ma produce un effetto

secondario inaspettato che non è stato affrontato nella ricerca. I percorsi adiacenti si sovrappongono causando variazioni di spessore. Questo effetto secondario si traduce in una geometria complessa che non può essere accuratamente modellata e risolta in forma chiusa.



(a) (b)

Figura 1.18: Diversi percorsi di deposizione delle fibre: (a) parallel method, (b) shifting method [26]

Nella loro ricerca, Gurdal and Olmedo [20] hanno ottenuta la soluzione del problema dell'elasticità nel piano per un pannello composito laminato simmetrico con orientamenti delle fibre variabili nello spazio. Gli gli angoli delle fibre sono stati fatti variare lungo la lunghezza del laminato composito, dando luogo a proprietà di rigidità che cambiano in funzione della posizione. In particolare, questo lavoro presenta un'analisi della variazione di rigidità e dei suoi effetti sulla risposta elastica del pannello. La risposta nel piano di un pannello a rigidità variabile è governata da un sistema di equazioni differenziali parziali ellittiche accoppiate. La soluzione numerica è stata ottenuta utilizzando una tecnica iterativa. Infine hanno presentato le soluzioni corrispondenti a tre serie di condizioni al contorno.

1.5 Contenuto di questo lavoro di tesi

Come visto nel paragrafo precedente, ci sono varie evidenze scientifiche che dimostrano che i laminati a rigidità variabile hanno un grande potenziale nella progettazione di strutture composite ed in particolare, come dimostrato da Waldhart

et al. [42], offrono la possibilità di ottenere guadagni considerevoli in termini di carichi di instabilità. Questo perché la combinazione delle tecnologie di stampa di fibre curvilinee con le macchine per la fabbricazione additiva, sempre più all'avanguardia, consente una vasta gamma di soluzioni per la progettazione di materiali ad-hoc. In questo modo, la variazione spaziale della rigidità può essere sfruttata a vantaggio delle modalità di assorbimento del carico e dei modelli di distribuzione della rigidità. Uno degli effetti particolarmente rilevanti in cui la curvatura delle fibre ha dimostrato la sua efficacia è il miglioramento dei carichi di instabilità nei pannelli compositi. D'altra parte, la maggiore libertà di progettazione aumenta anche la complessità e richiede nuovi approcci a molti problemi comuni nell'ingegneria dei laminati compositi. Molte ricerche precedenti hanno utilizzato i coefficienti delle espressioni analitiche che regolano le variazioni dell'angolo delle fibre come variabili di progetto. In alternativa, sono stati utilizzati come variabili di progetto gli angoli di flessione locali.

L'obiettivo di questa ricerca è quello di caratterizzare il comportamento dei laminati compositi a rigidezza variabile quando sottoposti a carichi critici, ovvero di studiare a fondo il loro buckling. In primo luogo, verrà presentata una replica dei risultati ottenuti in studi precedenti da Demasi et al. [15], da Viglietti et al. [41] e una riproduzione dei risultati sperimentali ottenuti da Ciliberti [12]. Infine, con l'utilizzo del software sviluppato dai ricercatori del MUL2® del Politecnico di Torino, verrà effettuato uno studio approfondito dei carichi critici che caratterizzano alcune configurazioni di strutture sottili sottoposte a un carico di compressione sul lato libero ed incastrate sull'altro.

Capitolo 2

VAT

Un aspetto innovativo della tecnologia AFP, come già ampiamente discusso nel capitolo precedente, è la capacità di produrre compositi non convenzionali con caratteristiche di rigidità variabile. I compositi a rigidità variabile (VSC), noti anche come **Variable Angle Tow (VAT)**, sono ottenuti disponendo le fibre secondo un percorso curvilineo. La progettazione della procedura di disposizione delle fibre all'interno dello strato è nota anche come tailoring. Orientare le fibre in modo opportuno può influenzare positivamente la distribuzione delle sollecitazioni sulla VSC, ottenendo migliori prestazioni di buckling e proprietà di rigidità rispetto ai compositi convenzionali composti da fibre a percorso rettilineo. Per questo motivo, l'adattamento delle tele viene ottimizzato per massimizzare le prestazioni del componente. Nonostante i numerosi calcoli teorici, non tutti i modelli ottimizzati possono essere effettivamente prodotti a causa delle limitazioni della macchina, come ad esempio il raggio di curvatura minimo.

Il software che gestisce la macchina per AFP prevede la definizione di linee guida come riferimento per il posizionamento delle fibre. I VSC sono realizzati traslando i percorsi curvilinei perpendicolarmente alla direzione di variazione della linea di riferimento. Per semplicità, è comune utilizzare delle linee a curvatura costante come riferimento per il percorso della fibra. A tale scopo, la funzione di orientamento della fibra viene definita prendendo come riferimento un punto A arbitrario. Pertanto, l'equazione dell'orientamento della fibra, tra un generico punto A e un altro punto B è:

$$\theta(x') = \phi + T_0 + \frac{T_1 - T_0}{d}|x'| \tag{2.1}$$

in cui $x' = xcos\phi + ysin\phi$. T_0 e T_1 indicano l'orientamento dell'angolo della fibra nei punti A e B, rispettivamente. La lunghezza d corrisponde alla distanza tra i due punti ed è solitamente definita per le piastre quadrate e rettangolari come metà della lunghezza del lato del laminato. L'angolo ϕ specifica una rotazione nell'orientamento degli assi. Con le fibre a curvatura costante è possibile definire il percorso delle fibre su uno strato semplicemente definendo i valori di ϕ, T_0 e T_1 e può essere espresso come:

$$[\phi < T_0, T_1 >] \tag{2.2}$$

Il simbolo ± può essere aggiunto all'equazione 2.2 quando il layup consiste in due strati adiacenti con lo stesso valore di T_0 e T_1 ma di segno opposto. Inoltre, può essere aggiunta una s, talvolta preceduta da un valore numerico, che sta ad indicare che vengono aggiunti altre lamine con un orientamento delle fibre ruotato per ottenere una struttura simmetrica.

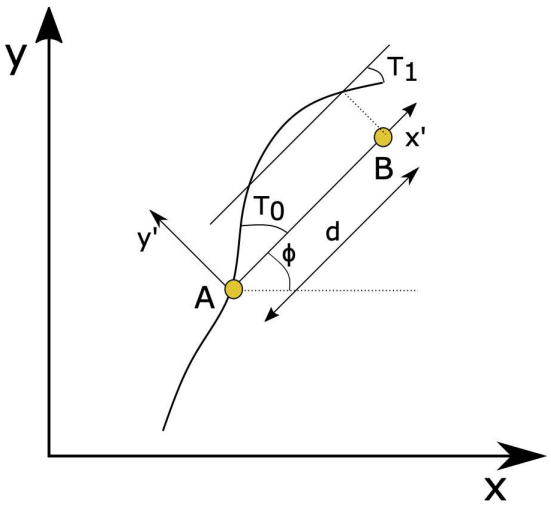


Figura 2.1: Esempio di definizione di un percorso di deposizione della fibra che varia linearmente lungo la lunghezza caratteristica [32]

In alcuni casi vengono utilizzate funzioni non lineari per l'orientamento della fibra. Ciò significa che il raggio di curvatura non è costante lungo la fibra. Alcuni dei metodi per definire le funzioni di percorso per i casi non lineari coinvolgono i polinomi di Lobatto, le curve di Bezier o i polinomi di Lagrange [50]. Un esempio tratto dalla letteratura di equazione di orientamento della fibra non lineare con polinomi di Lagrange è:

$$\theta(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} T_{mn} \prod_{m\neq i}\left(\frac{x-x_i}{x_m-x_i}\right)\prod_{n\neq j}\left(\frac{y-y_i}{y_m-y_i}\right) \tag{2.3}$$

L'uso di VSC comporta vantaggi dal punto di vista delle prestazioni. Tuttavia, è necessario prestare attenzione in quanto l'orientamento delle fibre è incline a generare difetti sulla struttura, come già visto in dettaglio nel capitolo precedente.

2.1 Modelli per l'analisi macro-meccanica

Molti autori hanno condotto indagini per capire come le prestazioni meccaniche dei VAT siano influenzate dai difetti indotti dalla produzione. Sono stati eseguiti test virtuali applicando i metodi agli elementi finiti (FEM) per l'analisi macromeccanica dei compositi VAT, includendo nel modello alcuni difetti come il disallineamento delle fibre, le discontinuità dell'angolo di deposizione, le lacune e le sovrapposizioni. Queste ultime due sono le più comunemente studiate in letteratura.

Autori come Blom et al. [7] hanno modellato le aree interessate dai difetti per lacune e sovrapposizioni utilizzando una mesh molto raffinata per catturare completamente le dimensioni dei difetti. Tuttavia, questo metodo ha comportato un elevato costo computazionale a causa della grande quantità di elementi. Altri autori, come Noevere and Collier [31], hanno applicato una metodologia in cui lo spessore degli elementi del modello è stato adattato per includere l'effetto di lacune e sovrapposizioni. Questa procedura, tuttavia, ha sovrastimato la resistenza della VSC quando si studiano le sovrapposizioni.

Un altro approccio, applicato da D.S. Cairns and Walker [16], raddoppia la rigidità delle aree di sovrapposizione e assegna le proprietà della resina alle aree dove sono presenti i gap.

Nel lavoro di Fayazbakhsh et al. [18], sono state implementate routine Matlab per rilevare le aree di gap e di sovrapposizione sugli strati di composito. Questi difetti sono stati introdotti nel modello utilizzando il Defect Layer Method (DLM), più efficiente dal punto di vista computazionale rispetto ai lavori precedenti. Il DLM altera le proprietà degli elementi del modello a seconda dell'area percentuale del difetto. Per le sovrapposizioni, lo spessore del modello viene aumentato proporzionalmente a quest'area, mentre le fessure dovute ai gap vengono modellate scalando le proprietà dei materiali dell'elemento. L'analisi condotta ha concluso che le sovrapposizioni possono favorire le prestazioni del VSC, mentre le lacune ne riducono la resistenza.

Gli autori Falcó et al. [17] e Pagani and Sanchez-Majano in [32] e [33] hanno effettuato analisi in grado di includere difetti a livello di meso-scala, modellando ogni strato in modo indipendente. Nel primo caso, sono stati utilizzati i raggi X per individuare i difetti. Il lavoro svolto ha analizzato i meccanismi di rottura dei VSC

con e senza intaglio, giungendo alla conclusione che l'effetto gap è più incisivo per le piastre senza intaglio. D'altra parte, in [32] e [33], gli autori hanno implementato la formulazione unificata di Carrera per la modellazione delle VSC. Il composito è stato definito utilizzando teorie layer-wise (LW) che consente di modellare ogni strato in modo indipendente, introducendo dettagli alla meso-scala, ad esempio le imperfezioni indotte dalla fabbricazione. L'approccio è stato implementato per studiare l'influenza dei disallineamenti delle fibre nelle trazioni del VSC sulle sue prestazioni di instabilità e sui meccanismi di rottura. In conclusione, si afferma che i modelli LW sono obbligatori per tenere pienamente conto dell'effetto dei difetti su meso-scala.

2.2 Modelli per l'analisi micro-meccanica

Lo studio dei VSC a livello di micro-meccanica è motivato dalla necessità di ottenere le sue proprietà effettive in base alla disposizione della fibra e alla frazione di volume delle due fasi costituenti. Molti modelli sono stati sviluppati per studiare la microstruttura della matrice e ottenere le proprietà del materiale che possono essere applicate all'analisi su macroscala.

Hashin and Rosen [21] hanno proposto il modello del cilindro concentrico (Concentric Cylinder Model - CCM). Questo modello analitico ha ricavato i moduli elastici efficaci per fibre circolari cave parallele, contenute in una porzione cilindrica di composito, mediante un metodo variazionale. La procedura è stata in grado di sviluppare le espressioni di alcuni moduli elastici efficaci.

Altri lavori semi-analitici sono stati in grado di fornire non solo i moduli elastici, ma anche i carichi locali a livello dei costituenti. In molti di questi studi, viene definito un elemento di volume rappresentativo (Representative Volume Element - RVE), ovvero una specifica porzione di materiale ripetuta lungo la struttura del VSC. Successivamente, vengono impiegati metodi numerici per stimare le proprietà dei materiali del RVE omogeneizzato. Questo è il caso dei modelli sviluppati da Aboudi in [4], [35], [3]. Nel primo, l'autore ha presentato il Metodo delle Celle (Method of Cells - MOC). Consisteva nello studio di un array quadrato periodico diviso in quattro sottocelle. Una corrisponde alla fibra e l'altra alla matrice. Il

modello era in grado di prevedere con precisione la risposta ineslastica dei compositi. In altri lavori dell'autore, il MOC è stato esteso al metodo generalizzato delle celle (Generalized Method of Cells - GMC), vedi [35], e al metodo generalizzato ad alta fedeltà delle celle (High Fidelity Generalized Method of Cells - HFGMC), in [3]. Queste teorie ulteriormente sviluppate risolvono i campi locali a livello di cella, calcolano le proprietà effettive dei materiali della RVE omogeneizzata e sono in grado di ottenere risultati accurati per l'analisi non lineare e dei cedimenti.

In [44], Williams ha sviluppato il metodo Elasticity based Cell Method (ECM). Discretizzava le celle in otto sottoregioni e approssimava il campo di spostamento mediante autofunzioni tronche del quinto ordine.

Altri autori, come Sun and Vaidya, hanno previsto le proprietà del composito dalla RVE utilizzando il FEM, il teorema di Gauss e i principi di equivalenza delle deformazioni [39]. Kaleel et al. hanno utilizzato la formulazione unificata di Carrera per sviluppare un approccio basato sui componenti per lo studio della RVE. Il metodo può essere sfruttato per ottenere con precisione campi e spostamenti 3D all'interno della cella, interpolando il comportamento della sezione trasversale della struttura utilizzando polinomi di tipo lagrangiano come funzioni di espansione.

Analogamente, i lavori di de Miguel et al. impiegano modelli basati sulla Formulazione Unificata di Carrera insieme alla meccanica della struttura. Questo approccio è stato in grado di catturare le proprietà effettive della cellula omogeneizzata e di calcolare i campi a livello di microscala implementando il metodo asintotico variazionale. In questo modo si minimizza la perdita di informazioni tra la cellula eterogenea e quella omogeneizzata risultante. Ulteriori informazioni sui modelli a microscala per lo studio dei compositi sono disponibili in [23].

2.3 Incertezza sui VAT

La maggior parte degli sforzi per sviluppare e studiare i VSC utilizza un approccio deterministico che non tiene conto della presenza di incertezze nei compositi [50]. Tuttavia, i materiali compositi sono soggetti a incertezze variabili in funzione dello spazio, dovute al processo di fabbricazione e ai fattori ambientali [19]. Queste incertezze possono manifestarsi in varie forme. Ad esempio, disallineamenti, ondulazioni, aspect ratio o frazione di volume sono alcune delle proprietà delle fibre

che ne risentono. Nella prospettiva deterministica, la presenza dell'incertezza è mitigata dall'applicazione di elevati fattori di sicurezza, che in alcuni casi possono essere compresi tra 8 e 10, ottenendo progetti molto conservativi. Invece di grandi fattori di sicurezza, la presa in considerazione delle incertezze nell'analisi consente di ottenere progetti robusti e affidabili. Il processo di ottimizzazione per progettare componenti relativamente insensibili alle incertezze è chiamato anche ottimizzazione robusta della progettazione (Robust Design Optimization - RDO) [50].

Poiché le incertezze generano una variabilità delle proprietà dei VSC difficile da controllare, di solito si utilizzano campi casuali dipendenti dallo spazio e metodi basati su simulazioni stocastiche con insiemi di dati casuali. Guimarães et al. [19] hanno utilizzato un campo casuale per modellare l'incertezza sulle proprietà dei materiali dei VSC. In questo caso, la proprietà studiata era la frazione volumetrica delle fibre all'interno della struttura fibra-matrice. L'incertezza è stata propagata utilizzando le espansioni di Karhunen-Loeve Expansions (KLE) e ha influenzato la massa e la rigidità dei compositi, variabili nello spazio.

Zhou et al. [50] hanno introdotto la variabilità delle condizioni di carico, considerate come variabili casuali che seguono una distribuzione normale. Scarth et al. [38] hanno proposto un campo casuale la cui funzione di covarianza si basa sulla distanza geodetica tra punti di superfici curve. Questo campo casuale ha definito le proprietà dei materiali variabili in base ai punti del loro modello, che è stato sottoposto a un'analisi di buckling. Altri lavori di Zhou and Gosling [49] hanno applicato metodi stocastici agli elementi finiti per modellare le proprietà del materiale e la variazione dell'angolo delle fibre. Pagani and Sanchez-Majano [32] hanno impiegato la tecnica della decomposizione della matrice di covarianza (Covariance Matrix Decomposition CMD) per ottenere un campo casuale per modellare il disallineamento delle fibre e studiare le prestazioni di buckling dei VSC.

In molti lavori [32], [19], [38], [49], la quantificazione dell'incertezza è stata effettuata mediante la tecnica della simulazione Monte Carlo. Questo metodo calcola i risultati più volte utilizzando per ogni simulazione un diverso insieme di valori stocastici. I dati in uscita possono quindi essere analizzati per ottenere parametri statistici dei risultati e distribuzioni di probabilità che possono aiutare a comprendere gli effetti dell'incertezza sui fattori indagati.

Capitolo 3

Elementi finiti avanzati

Questo capitolo presenta le premesse teoriche su cui si basa l'analisi numerica che verrà svolta in seguito.

Per analisi strutturale si intende lo studio del campo di sollecitazioni, deformazioni e spostamenti della struttura (sottoposta alle più svariate configurazioni di carichi e vincoli esterni), valutandone la risposta con il fine di poter verificare che resista alle condizioni di vita di servizio, sia in termini di sforzi di rottura che in termini di vita a fatica. Più nel dettaglio, l'analisi può essere suddivisa in due tipologia a seconda del carico applicato; l'analisi statica prevede la presenza di carichi costanti nel tempo, e dinamica, che invece vede la struttura sottoposta a carichi variabili.

In questo caso, l'analisi è stata eseguita con un tool numerico sviluppato dal gruppo di ricerca MUL2® del Politecnico di Torino, presentato di seguito, che opera in base al metodo degli elementi finiti ed implementa le equazioni della Carrera Unified Formulation (CUF).

Il metodo agli elementi finiti è stato ideato per risolvere problemi governati da equazioni differenziali riducendoli a sistemi di equazioni lineari. Questo metodo prevede che il dominio di interesse venga discretizzato in diversi elementi, ciascuno formato da punti chiamati nodi. L'insieme degli spostamenti è calcolato da una combinazione lineare degli spostamenti nei singoli nodi moltiplicati per le funzioni di forma, che vengono scelte nella fase di discretizzazione iniziale in base al grado di approssimazione desiderato per l'analisi. Queste funzioni di forma assumono il valore 1 nel nodo considerato e zero negli altri. L'analisi con questo metodo prevede essenzialmente tre fasi:

- suddivisione della struttura in un numero finito di elementi;
- analisi di ogni sottodominio per calcolare la soluzione;
- formulazione di una soluzione complessiva assemblando le soluzioni dei singoli elementi.

Per discretizzare le strutture si possono utilizzare diversi elementi e la scelta dipende dal dominio in esame, dall'analisi da condurre e dal costo computazionale dell'analisi. Nel caso di strutture 1D, come aste o travi, si impiegheranno elementi 1D, ciascuno delimitato da due nodi; nel caso di corpi 2D, invece, si potranno

impiegare elementi 2D triangolari (a 3 nodi) o 2D quadrangolari (a 4 nodi), la cui forma può variare a seconda del tipo di struttura da discretizzare; per i domini 3D, si costruiranno esaedri e tetraedri, con un numero di nodi molto più elevato rispetto ai casi precedenti. Va detto che più il grado di discretizzazione è elevato, più la soluzione sarà accurata. Aumentando il numero di elementi, tuttavia, aumenta anche il costo computazionale. Spesso è possibile eseguire un'analisi di convergenza della maglia, che consente di determinare il numero minimo di elementi necessari per ottenere un risultato quasi esatto. Tra le funzioni di forma per i nodi più comunemente utilizzate vi sono i polinomi di Lagrange; tuttavia, essi sono indipendenti dal tipo di elemento utilizzato; la formula dei polinomi per un caso monodimensionale è:

$$L_i{}^N = \prod_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \tag{3.1}$$

Nella formula:

- N è il numero di nodi in cui si assume nota la funzione; all'aumentare dei nodi aumenterà anche il grado del polinomio p, che viene calcolato come p=N-1; al crescere di questo valore, la soluzione sarà sempre più accurata;
- ξ a è la variabile adimensionale derivata dal rapporto tra la variabile locale e la lunghezza dell'elemento;

La congruenza degli spostamenti e l'equilibrio dei carichi ai nodi devono essere considerati nell'assemblaggio dei risultati, poiché la struttura, sebbene analizzata in modo discreto, è continua e non può presentare discontinuità negli spostamenti o nei carichi. In seguito, vengono presentate diverse formulazioni teoriche alla base del metodo degli elementi finiti, a partire dal problema elastico, che fornisce le equazioni necessarie per l'analisi.

3.1 Il problema elastico

L'obiettivo principale dell'analisi strutturale è quello di determinare il campo di tensioni, deformazioni e spostamenti del corpo in esame. Il problema elastico rappresenta la relazione fra le grandezze incognite con il contributo dei vincoli e carichi

esterni e definisce il sistema di equazioni necessarie da risolvere. L'ipotesi alla base della teoria che ci permette di legare, attraverso la legge di Hooke, spostamenti e deformazioni con le tensioni è quella dei piccoli spostamenti.

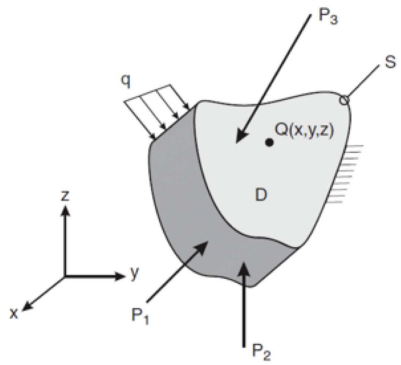


Figura 3.1: Dominio tridimensionale generico [10]

Nella risoluzione del caso più generale, mostrato anche nella Figura 3, si considera un concio elementare tridimensionale soggetto a forze di volume, superficie, linea e punto. Tutte le grandezze sono riferite a un sistema di riferimento cartesiano xyz. I carichi applicati genereranno delle sollecitazioni sulla struttura, che possono essere scomposte in una componente normale alla faccia su cui agiscono e in una componente tangenziale, contenuta nel piano della faccia, che a sua volta può essere scomposta lungo le due direzioni degli assi cartesiani che definiscono le coordinate della faccia. Il tensore delle sollecitazioni sarà quindi costituito da 9 componenti:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

In accordo con l'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \tau_{xz} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \tau_{yz} \end{cases} \tag{3.3}$$

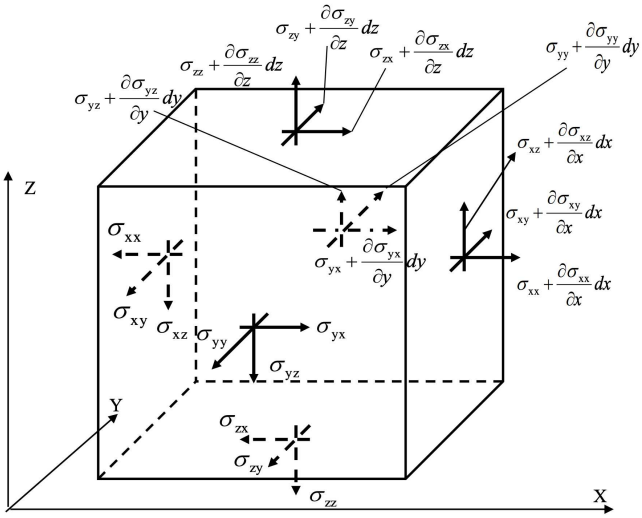


Figura 3.2: Tensioni normali e tangenziali su un elemento del dominio

Pertanto, le tensioni incognite da calcolare saranno sei, tre normali e tre tangenziali.

3.1.1 Equazioni di equilibrio

In riferimento al concio elementare in figura 3.2, si ottengono le equazioni di equilibrio alla traslazione per le tensioni lungo le tre direzioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = g_x \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = g_y \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = g_z \end{cases} \tag{3.4}$$

Ove g_x, g_y e g_z sono le componenti lungo i tre assi cartesiani del vettore delle forze di volume. Introducendo il vettore b:

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Si può scrivere la forma matriciale delle equazioni di equilibrio:

$$b^T \sigma = g \tag{3.6}$$

Con σ vettore contenente le sei componenti di tensione.

3.1.2 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno sono definite sulla superficie del corpo. Esse possono essere meccaniche, ottenute dall'applicazione di carichi superficiali, o geometriche, dovute alla presenza di vincoli sugli spostamenti o di spostamenti noti a priori in una determinata regione. Va sottolineato, tuttavia, che non si possono assegnare sia le sollecitazioni che gli spostamenti sulla stessa superficie, quindi bisogna scegliere dove utilizzare un tipo di condizione al contorno e dove l'altro. Le condizioni al contorno meccaniche sono rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = p_x \\ \tau_{xy} l + \sigma_{yy} m + \tau_{yz} n = p_y \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_{zz} n = p_z \end{cases} \tag{3.7}$$

p_x, p_y, p_z sono le componenti del vettore dei carichi per unità di superficie $\vec{p}$. l,m,n sono le componenti del vettore $\vec{n}$ normale alla superficie, rispettivamente lungo x,y,z, su cui sono imposte le condizioni al contorno. Qualora fosse necessario, è possibile imporre delle condizioni al contorno geometriche assegnando alla superficie spostamenti noti; ad esempio, indicando con $\bar{u}$ il vettore degli spostamenti assegnati, bisogna imporre che:

$$u = \bar{u} \tag{3.8}$$

3.1.3 Relazione deformazioni-spostamenti

Dal momento che per ipotesi abbiamo imposto la condizione dei piccoli spostamenti, la configurazione deformata non è troppo distante dalla configurazione indeformata, pertanto è facile definire la relazione tra deformazioni e spostamenti. Si può scrivere:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = u_{x,x} \\ \epsilon_{yy} = u_{y,y} \\ \epsilon_{zz} = u_{z,z} \\ \gamma_{xz} = u_{x,z} + u_{z,x} \\ \gamma_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} \\ \gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \end{cases} \tag{3.9}$$

Al primo membro delle equazioni troviamo le sei componenti di deformazione, di cui le prime tre sono relative alle sollecitazioni normali mentre le restanti tre sono relative alle sollecitazioni tangenziali; al secondo membro troviamo le componenti di spostamento derivate. Per semplificare la notazione, la derivata parziale viene indicata con un pedice, dopo la componente considerata (x,y,z), la variabile su cui è derivata seguita da una virgola. $u_{x,x}$, ad esempio, indica la derivata parziale della componente u_x dello spostamento rispetto a x, e così via. In forma compatta, queste relazioni appaiono come segue:

$$\epsilon = bu \tag{3.10}$$

3.1.4 Legge di Hooke

Dal momento che stiamo lavorando sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti, tensioni e deformazioni sono legate tramite una matrice, C, chiamata matrice di rigidezza; la sua inversa, S, è detta matrice di deformabilità. Poiché i vettori visti finora hanno 6 componenti, sia C che la sua inversa S sono delle matrici 6x6. La matrice C si presenta come segue:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Pertanto, indicando con:

$$\sigma^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}) \tag{3.12}$$

$$\epsilon^T = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}) \tag{3.13}$$

Si possono scrivere le relazioni:

$$\sigma = C\epsilon \tag{3.14}$$

$$\epsilon = S\sigma \tag{3.15}$$

La matrice C dei coefficienti elastici ha 36 componenti nel caso più generale, ma se il materiale presenta particolari simmetrie, il numero di coefficienti al suo interno diminuisce e le relazioni si semplificano. Considerando un materiale ortotropo, ad esempio, le componenti non nulle della matrice rimangono 9 e la matrice si presenta come segue:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Nelle ipotesi che ci hanno portato alla definizione di queste grandezze, si possono definire altri coefficienti:

- Modulo di Young

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} \quad i = x, y, z \tag{3.17}$$

- Modulo di Taglio

$$G_i = \frac{\tau_{ij}}{\gamma ij} \quad i, j = x, y, z \;\; i \neq j \tag{3.18}$$

Si definisce inoltre il coefficiente di Poissono (detto anche coefficiente di contrazione trasversale) ν_{ij} della struttura, che è legato ai moduli di Young e di taglio come segue:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \tag{3.19}$$

Con queste quantità è possibile scrivere le componenti della matrice C. In questo caso le scriveremo solo per due classi di materiali:

- Isotropi. Questi materiali hanno proprietà elastiche identiche in tutte le direzioni e tutti i coefficienti di C sono funzione di due sole costanti elastiche E e ν. In questo caso, i termini della matrice C sono calcolati come segue:

$$\begin{aligned}
&C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
&C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_{21} = C_{31} = C_{32} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
&C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

- Ortotropi. Le proprietà elastiche di questo tipo di materiali presentano due piani di simmetria. Per definire completamente il materiale, sono necessarie nove costanti elastiche. Si tratta di tre moduli di Young (E1, E2, E3), tre moduli di taglio (G12, G13, G23) e tre rapporti di Poisson ($\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$). I coefficienti C si ottengono quindi con le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
&C_{11} = \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\beta}; C_{12} = \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})}{\beta}; C_{13} = \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\beta}; \\
&C_{21} = \frac{E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32})}{\beta}; C_{22} = \frac{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\beta}; C_{23} = \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\beta}; \\
&C_{31} = \frac{E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})}{\beta}; C_{32} = \frac{E_3(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21})}{\beta}; C_{33} = \frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\beta}; \\
&C_{44} = G_{21}; C_{55} = G_{31}; C_{66} = G_{23};
\end{aligned} \tag{3.21}$$

il coefficiente β è così calcolato:

$$\beta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \tag{3.22}$$

Grazie alle proprietà di simmetria ortogonale, sono soddisfatte le seguenti relazioni:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \;\rightarrow\; C_{12} = C_{21},\; C_{13} = C_{31},\; C_{23} = C_{32} \tag{3.23}$$

3.2 Il principio dei lavori virtuali

3.2.1 Forma forte

Al fine di risolvere il problema elastico, è possibile utilizzare il principio dei lavori virtuali. Secondo questo principio, se i vincoli geometrici di un sistema meccanico sono in equilibrio con le forze applicate allora, per qualsiasi spostamento virtuale infinitesimo, la somma di tutti i lavori virtuali conseguenti a forze esterne ed interne è pari a zero.

Nella risoluzione del problema elastico, tramite l'espressione delle equazioni con solo gli spostamenti come incognite, si ha che il principio dei lavori virtuali viene anche chiamato Principio degli spostamenti virtuali (PVD). Dal teorema si può ricavare una formulazione matematica chiamata forma forte. Questa formulazione, oltre ad essere indispensabile per la risoluzione del problema, permette di determinare la forma debole, che è la base del metodo degli elementi finiti. Secondo la definizione del principio dei lavoro virtuali:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \tag{3.24}$$

Il simbolo δ anteposto a queste quantità sta ad indicare che stiamo operando con variazioni infinitesime. I due lavori possono essere espressi come segue:

$$\delta L_{int} = \int_V (\sigma_{xx}\delta\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\epsilon_{zz} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dV \tag{3.25}$$

$$\delta L_{ext} = \int_V \delta u^T g dV + \int_S \delta u^T \rho dS + \int_L \delta u^T q dy + u_Q^T P \tag{3.26}$$

Nella formula 3.26 compaiono i termini:

- il primo termine rappresenta il contributo delle forze di volume;

- il secondo termine rappresenta le forze di superficie;

- il terzo termine è il contributo delle forze di linea;

- il quarto termine contiene le forze puntuali.

Il lavoro interno può essere riformulato esprimendolo in termini di spostamenti:

$$\delta L_{int} = -\int_V \delta u^T (b^T \sigma) dV + \int_S \delta u^T (I_n^T \sigma) dS \tag{3.27}$$

In questa formula, I_n^T rappresenta la matrice dei coseni direttori. Eguagliando le formule 3.26 e 3.27 si ottiene:

$$-\int_V \delta u^T (b^T \sigma) dV + \int_S \delta u^T (I_n^T \sigma) dS = \delta L_{ext} = \int_V \delta u^T g dV + \int_S \delta u^T \rho dS + \int_L \delta u^T q dy + u_Q^T P \tag{3.28}$$

che rappresenta la forma completa del principio dei lavori virtuali.

Da questa espressione si possono ottenere le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno. Eguagliando i termini integrati sul volume si ottiene:

$$-b^T \sigma = g \tag{3.29}$$

Che è proprio l'equazione di equilibrio.

Eguagliando invece i termini espressi tramite integrali di superficie si ottengono le condizioni al contorno meccaniche:

$$I_n^T = p \tag{3.30}$$

Dall'equazione di equilibrio appena formulata, utilizzando la legge di Hooke e le leggi geometriche, la formulazione forte del principio dei lavori virtuali può essere espressa come segue:

$$-b^T C^T bu = g \tag{3.31}$$

Possiamo definire k la matrice di rigidezza:

$$k = -b^T C^T b \tag{3.32}$$

Da questa definizione si può scrivere:

$$k\sigma = g \tag{3.33}$$

Ovvero la formulazione finale della forma forte del principio dei lavori virtuali. Da questa si può ricavare la forma debole, che è alla base del principio dei lavori virtuali. Sebbene la forma debole fornisca una soluzione approssimata del problema, presenta maggiori vantaggi risolutivi ed è applicabile a quasi tutti i casi poiché, a differenza della forma forte, che richiede che la soluzione sia verificata sull'intero dominio del corpo continuo, lasciandola inefficace per le condizioni al contorno più complesse, questa rimane utilizzabile anche per discretizzazioni del dominio che semplificano il problema.

3.2.2 Forma debole

Partendo da un'approssimazione già presentata parlando del metodo agli elementi finiti si può ottenere la forma debole del principio dei lavori virtuali. Infatti, in questa formulazione, lo spostamento è definito come prodotto tra gli spostamenti nei nodi e le funzioni di forma Infatti, lo spostamento viene definito come:

$$u = UN \tag{3.34}$$

Nell'equazione compaiono:

- U = vettore degli spostamenti nodali;

- N = vettore delle funzioni di forma.

Il numero delle componenti, uguale per entrambi, dipende dal numero di nodi scelti, ovvero un numero finito di punti tramite il quale viene discretizzata la

struttura di partenza in più sottodomini aventi i nodi come vertici. Con questa approssimazione è possibile riscrivere sia la legge di Hooke che le relazioni geometriche presentate nelle formule 3.14 e 3.15

$$\epsilon = bu = BNU = BU \tag{3.35}$$

$$\sigma = C\epsilon = CBU \tag{3.36}$$

Allo stesso modo possono essere riviste le formulazioni per il lavoro interno ed il lavoro esterno:

$$\delta L_{ext} = \delta U^T P \tag{3.37}$$

con P vettore dei carichi nodali che ha egual numero di componenti del vettore degli spostamenti nodali. Il lavoro interno invece diventa:

$$\delta L_{int} = \delta U^T (\int_V B^T C B dV) U = \delta U^T K U \tag{3.38}$$

ove K è la matrice di rigidezza per la formulazione debole. Per quanto già detto per il principio dei lavori virtuali, eguagliando le due espressioni del lavoro interno ed esterno si ottiene l'equazione di equilibrio in forma debole:

$$\delta U^T K U = \delta U^T P \tag{3.39}$$

ottenendo in conclusione:

$$KU = P \tag{3.40}$$

Il metodo degli elementi finiti si basa per la sua risoluzione proprio su questa forma. Se la matrice di rigidità K è non singolare e quindi invertibile, si possono determinare da essa gli spostamenti nodali e, date le funzioni di forma adottate per il problema in esame, si può calcolare, dal prodotto tra il vettore degli spostamenti nodali e il vettore delle funzioni di forma, il campo degli spostamenti.

3.3 Formulazione unificata CUF

La Formulazione unificata, elaborata dal professor Erasmo Carrera del Politecnico di Torino, conosciuta anche come CUF (Carrera Unified Formulation), consiste in un nuovo approccio per il calcolo delle matrici per il metodo agli elementi finiti [9]. Questa formulazione risulta essere particolarmente utile per strutture laminate multistrato in quanto, in questi casi, è molto difficile derivare le matrici di rigidezza. Questo metodo di risoluzione riesce a risolvere le difficoltà che si incontrano basandosi sul concetto di nuclei fondamentali ed utilizzando un sistema indiciale già applicato per rendere più compatte le scritture per le procedure degli elementi finiti.

Ad esempio, considerando un elemento asta mondodimensionale, gli spostamenti approssimati si possono anche scrivere in forma indiciale come:

$$u_x = N_i U_{xi} = \sum_{i=1}^{N_{NE}} (N_i U_{xi}) \tag{3.41}$$

Ove NE che indica il numero di nodi scelti per la struttura. Grazie a questa scrittura, la notazione viene semplificata e si può ricostruire iterando sull'indice i. In modo del tutto analogo si può ripetere per la scrittura delle equazioni per le variazioni virtuali, utilizzando ad esempio un altro indice per differenziarle.

Di conseguenza, le deformazioni introdotte nel paragrafo precedente, possono essere riscritte come:

$$\epsilon = N_{i,x} U_{xi} \tag{3.42}$$

$$\delta\epsilon = N_{j,x} \delta U_{xi} \tag{3.43}$$

Pertanto, il lavoro interno diventa:

$$\delta L_{int} = \delta U_{xj}^T \left(\int_V N_{j,x} E N_{i,x} dV \right) U_{xi} = \delta U_{xj} k^{ij} U_{xi} \tag{3.44}$$

la matrice k^{ij} che compare nell'ultimo termine dell'equazione è una matrice di rigidezza particolare, infatti essa è detta nucleo fondamentale. Il calcolo delle sue componenti può essere facilmente eseguito con delle iterazioni sugli indici i e j

sostituendo volta per volta le funzioni di forma scelte per l'approssimazione. Da queste considerazioni si può già evincere come, con questo tipo di notazione, è possibile semplificare formulazioni e calcoli, soprattutto quando si tratta di assemblare grandi matrici di rigidezza.

In un caso generale, sono introdotte delle funzioni di espansione F_τ per approssimare gli spostamenti nelle direzioni non dominanti della struttura e per tenere conto della natura tridimensionale del campo di spostamento. Pertanto, se utilizziamo un'asta come esempio, lo spostamento lungo l'asse x sarà sempre approssimato da funzioni di forma, ma sarà anche accompagnato da funzioni di espansione per le altre due direzioni. Di conseguenza si scrive:

$$u(x, y, z) = N_i(x)F_\tau(y, z)u_{\tau i} \tag{3.45}$$

Lo stesso vale per le variazioni virtuali, cambiando l'indice delle funzioni di espansione con l'indice s della notazione. Quindi, ricavando gli spostamenti per calcolare le deformazioni e utilizzando la legge di Hooke con queste ultime, si ottiene di conseguenza l'espressione per le sollecitazioni:

$$\sigma(x, y, z) = CbN_i(x)F_\tau(y, z)U_{\tau i} \tag{3.46}$$

Una volta eseguiti gli stessi passaggi per le variazioni virtuali delle tensioni, è possibile riscrivere il lavoro interno:

$$\delta L_{int} = \delta U_{sj}^T \left(\int_V F_s N_j b^T C b N_i F_\tau dV \right) U_{\tau i} = \delta U_{sj} k^{\tau sij} U_{\tau i} \tag{3.47}$$

$k^{\tau sij}$ è il nucleo fondamentale della struttura e, attraverso iterazioni sugli indici, si possono ottenere le matrici di rigidezza prima dei singoli elementi e poi dell'intera struttura. Come emerge da questo estratto, la CUF rende l'assemblaggio di matrici di rigidezza anche molto grandi e complesse un processo iterativo ma più semplice. Il processo di assemblaggio della matrice di rigidezza della struttura prevede quattro cicli di iterazioni, due interni sugli indici τ e s, con cui si determinano le componenti della matrice di un dato elemento con determinati indici i e j, e due esterni che si ottengono iterando i e j per costruire la matrice di rigidezza complessiva assemblando quelle dei singoli elementi.

Benché per brevità sia stato riportato solo il caso per l'asta, in cui la dimensione principale è una sola, questa formulazione può essere applicata anche ai casi bidimensionali e tridimensionali scegliendo adeguatamente le funzioni di forma, che approssimano, a seconda del caso, due e tre direzioni principali e di conseguenza anche le funzioni di espansione. Per completezza, si riportano di seguito le formulazioni degli spostamenti rispettivamente per i casi 2D e 3D:

$$u(x, y, z) = N_i(x, y)F_\tau(z)u_{\tau i} \tag{3.48}$$

$$u(x, y, z) = N_i(x, y, z)u_{\tau i} \tag{3.49}$$

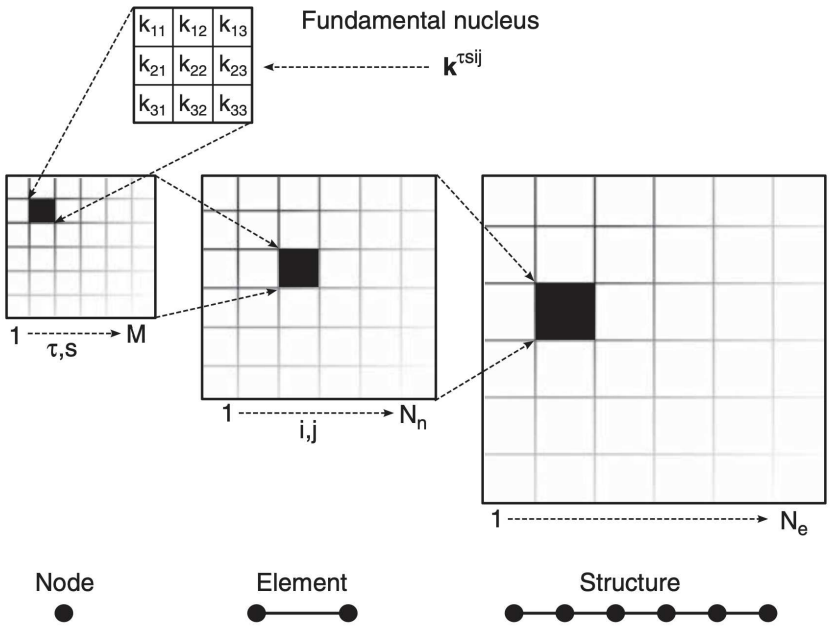


Figura 3.3: Rappresentazione della procedura di assemblaggio: FN è il nucleo, i cicli iterativi su τ e s costruiscono la matrice per una data coppia di i e j, le iterazioni su i e j danno la matrice degli elementi ed i cicli sugli elementi danno la matrice di rigidità globale [10]

3.3.1 Espansioni di Taylor

I modelli TE utilizzano polinomi 2D del tipo $x^i z^j$ come $F_\tau(x, z)$. È importante sottolineare che i campi cinematici di molte teorie classiche della trave (ad esempio Eulero-Bernouilli e Timoshenko) possono essere definiti come casi particolari del modello TE del primo ordine (TE1):

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + x u_{x2} + z u_{x3} \\ u_y &= u_{y1} + x u_{y2} + z u_{y3} \\ u_z &= u_{z1} + x u_{z2} + z u_{z3} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Per brevità è riportato solo il modello per il promo ordine. I modelli di ordine superiore possono essere ottenuti aggiungendo termini al campo di spostamento dell'equazione 3.50 in modo gerarchico [10].

3.3.2 Espansioni di Lagrange

Nel caso di LE, i polinomi di Lagrange sono utilizzati come funzioni generiche sulla sezione trasversale. Pertanto, la sezione trasversale è suddivisa in un certo numero di sottodomini di espansione locale, il cui grado del polinomio dipende dal tipo di espansione di Lagrange utilizzata. I polinomi lineari a tre nodi L3, a quattro nodi bilineari L4, a nove nodi quadratici L9 e a sedici nodi L16 possono essere utilizzati, ad esempio, per formulare teorie raffinate delle travi. A titolo di esempio, le funzioni di interpolazione di un insieme di espansione L9 sono definite come:

$$\begin{aligned} F_\tau &= \frac{1}{4}(r^2 + r r_\tau)(s^2 + s s_\tau) \ if \ \tau = 1{,}3{,}5{,}7 \\ F_\tau &= \frac{1}{2} s^2{}_\tau (s^2 - s s_\tau)(1 - r^2) + \frac{1}{2} r^2{}_\tau (r^2 - r r_\tau)(1 - s^2) \ if \ \tau = 2{,}4{,}6{,}8 \\ F_\tau &= (1 - r^2)(1 - s^2) \ if \ \tau = 9 \end{aligned} \tag{3.51}$$

dove r e s assumono valori da -1 a +1 e r_τ e s_τ rappresentano le posizioni delle radici. Pertanto, il campo cinematico della teoria della trave L9 può essere espresso

come:

$$
\begin{aligned}
u_x &= F_1 u_{x1} + F_2 u_{x2} + F_3 u_{x3} + F_4 u_{x4} + F_5 u_{x5} + F_6 u_{x6} + F_7 u_{x7} + F_8 u_{x8} + F_9 u_{x9} \\
u_y &= F_1 u_{y1} + F_2 u_{y2} + F_3 u_{y3} + F_4 u_{y4} + F_5 u_{y5} + F_6 u_{y6} + F_7 u_{y7} + F_8 u_{y8} + F_9 u_{y9} \\
u_z &= F_1 u_{z1} + F_2 u_{z2} + F_3 u_{z3} + F_4 u_{z4} + F_5 u_{z5} + F_6 u_{z6} + F_7 u_{z7} + F_8 u_{z8} + F_9 u_{z9}
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

I modelli trave più raffinati possono essere ottenuti adottando polinomi di Lagrange di ordine superiore o utilizzando una combinazione di polinomi di Lagrange su sezioni trasversali multidominio. Si noti che i modelli LE utilizzano incognite di spostamento puro. Questo aspetto rende l'espansione di Lagrange particolarmente vantaggiosa nell'implementazione di modelli layerwise, perché la continuità degli spostamenti interlaminari può essere soddisfatta automaticamente.

3.4 Elementi finiti per strutture laminate

A causa della presenza di diversi sottodomini, in cui il materiale presenta proprietà e orientamenti delle fibre diversi, l'analisi strutturale delle strutture laminate multistrato è particolarmente difficile, poiché devono essere garantite le condizioni di equilibrio, nonché la continuità delle sollecitazioni trasversali e degli spostamenti. Di seguito vengono presentati i principali modelli per l'analisi di queste strutture, evidenziandone pregi e difetti sulla base del lavoro svolto da Carrera et al. [10] e Tarditi S. [40].

3.4.1 Modello ESL

Il modello Equivalent Single Layer (ESL) è il meno oneroso dal punto di vista computazionale ed è anche il più semplice. Si fonda sul principio di considerare l'intera struttura come un singolo strato, di prendere un numero di incognite indipendente dal numero di strati e di valutare i coefficienti di rigidezza come una media ponderata di quelli dei vari strati. La formula di approssimazione degli spostamenti adottata in questo modello è:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2u_2(x, y) + ... + z^N u_N(x, y) \tag{3.53}$$

dove N è l'ordine dell'espansione.

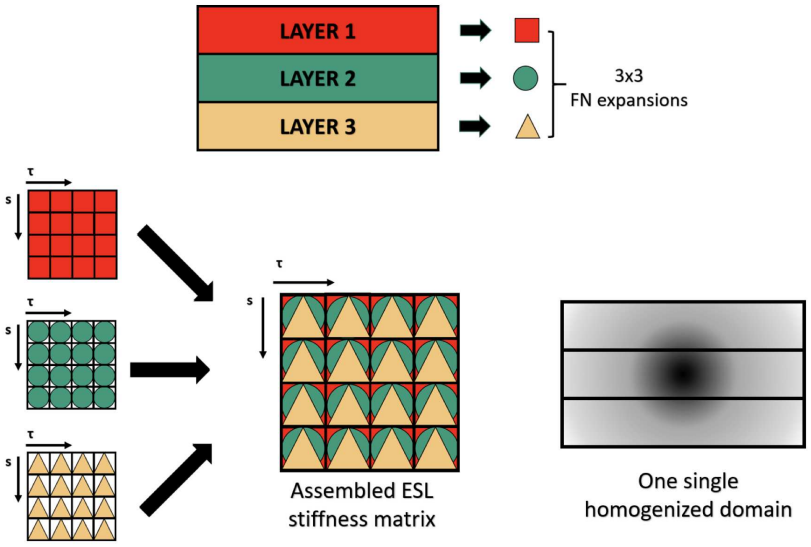


Figura 3.4: Procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza con modello ESL [48]

Sebbene questo modello possa fornire risultati accettabili per alcune analisi globali, risulta inadeguato per definire il campo di tensione tridimensionale perché non garantisce continuità delle tensioni all'interfaccia tra i vari layer. Il basso costo computazionale dovuto al ridotto numero di incognite del modello unito a dei risultati accettabili per il campo di spostamento fanno si che esso venga adottato in alcuni software commerciali.

3.4.2 Modello LW

Utilizzando il modello Layer Wise (LW), o modello di Lagrange, ogni strato può essere studiato separatamente come se fosse indipendente, ma applicando delle condizioni alle facce di interfaccia tra gli strati per garantire che il campo di spostamento rimanga continuo. Utilizzando i polinomi di Lagrange possiamo rappresentare e approssimare la cinematica di ogni strato. Rispetto al modello ESL,

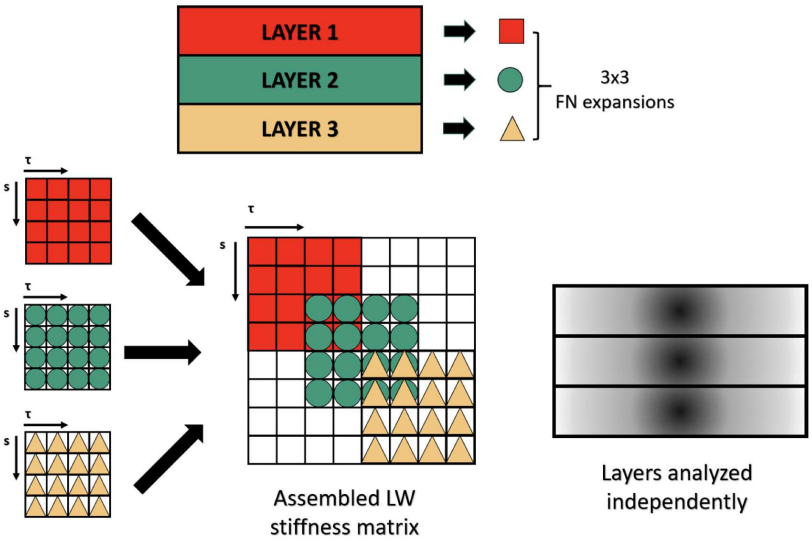


Figura 3.5: Procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza con modello LW [48]

il costo computazionale di questo modello è molto più alto e sale notevolmente all'aumentare delle ply di materiale che compongono il pezzo modellizzato poiché da essi dipendono il numero di incognite da calcolare ma i risultati compensano quasi totalmente la mancanza di continuità all'interfaccia dei risultati ottenuti con il modello ESL. Nell'articolo [34], Pagani et al. hanno presentato un approccio alternativo grazie al quale si possono combinare i modelli ESL e LW tramite i polinomi di Legendre; questo modello ibrido si propone di risolvere alcuni strati con il modello ESL mentre in altri, in cui è richiesta una risoluzione più accurata, è usato il modello LW.

3.4.3 Modello Zig-Zag

Questo tipo di modello si presenta come una modifica del modello ESL e mira a risolvere i problemi analitici di quest'ultimo mantenendo basso il costo computazionale. A tal fine, viene introdotta la funzione Murakami:

$$(-1)^k \zeta_k u_Z \tag{3.54}$$

$\zeta = \frac{2z_k}{h_k}$ è una variabile adimensionale che è funzione del rapporto tra z e h, la

coordinata e lo spessore dello strato k-esimo. Questa funzione porta a un'inversione del segno degli spostamenti all'interfaccia tra i vari strati; pertanto il campo di spostamenti non sarà più semplicemente continuo, ma continuo a tratti e si genererà una discontinuità nelle deformazioni in corrispondenza delle superfici di contatto. Grazie a questa discontinuità nelle deformazioni, la discontinuità nel campo di sollecitazioni viene compensata e, di conseguenza, l'errore sull'approssimazione della soluzione si riduce notevolmente, il tutto mantenendo un costo computazionale molto più basso rispetto al caso del modello Layer wise.

3.5 Elementi finiti per laminati VAT

3.5.1 Equazioni costitutive per VAT

Nel caso dei laminati VAT, l'angolo di orientamento della fibra varia in modo puntiforme all'interno dello strato. Pertanto, l'angolo della fibra può essere espresso come una funzione delle coordinate cartesiane del piano del laminato, come mostrato nella figura 3.6. Per questo motivo, anche la matrice di rotazione dipende dalle coordinate del punto.

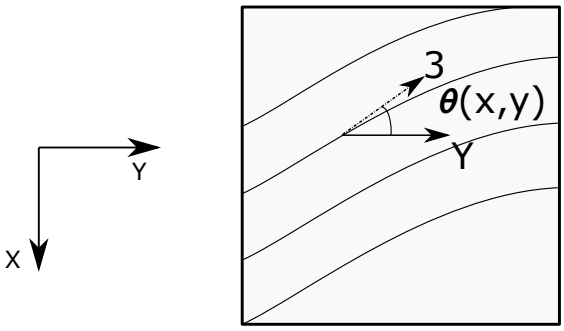


Figura 3.6: Orientamento delle fibre in un VAT

In tutti i casi esaminati finora, la matrice di rigidezza è definita utilizzando il sistema di riferimento del materiale. Per tradurre la matrice nel quadro di riferimento globale sono necessari due angoli, θ e ϕ. Questi angoli corrispondono alla rotazione degli assi del materiale in relazione agli assi globali. In questo lavoro, l'asse materiale 3 è definito sempre parallelo all'orientamento della fibra, mentre 1 e 2 definiscono le direzioni fuori dal piano e dentro il piano della sezione trasversale

della fibra. I vettori delle sollecitazioni e delle deformazioni possono essere tradotti da un sistema di riferimento a un altro utilizzando una matrice di trasformazione T:

$$\begin{aligned} \sigma &= T\sigma_m \\ \epsilon &= T\epsilon_m \end{aligned} \tag{3.55}$$

in cui i termini dei coefficienti della matrice T sono funzione degli angoli θ e ϕ. Pertanto la legge di Hooke può essere riscritta come:

$$\sigma = TCT^T\epsilon = \overline{C}\epsilon \tag{3.56}$$

Poiché l'angolo di orientazione della fibra in un composito VAT varia puntualmente all'interno del laminato, queste equazioni devono essere ancora modificate. Esprimendo $\theta = \theta$(x,y) l'equazione 3.56 può essere ridefinita come:

$$\sigma = T(x,y)CT^T(x,y)\epsilon = \overline{C}(x,y)\epsilon \tag{3.57}$$

Per brevità la matrice $\overline{C}$ non è riportata nel presente documento ma la scrittura completa della matrice è riportata da Carrera and Filippi [8].

3.5.2 Formulazione agli elementi finiti

In questa tesi è stata scelta la formulazione a elementi finiti (FE) per l'analisi delle strutture VSD. È stato dimostrato che l'accoppiamento di teorie FE e CUF 1D costituisce un potente strumento di analisi per i laminati compositi VAT [33], [8], [15], [41]. Utilizzando il FEM, lo spostamento generalizzato in qualsiasi punto dell'asse 1D può essere descritto come:

$$u_\tau(y) = N_i(y)u_{\tau i}, \quad i = 1,2,...,ne, \tag{3.58}$$

dove N_i è una funzione di forma 1D, n_e è il numero di nodi per elemento e il vettore nodale incognito $u_{\tau i}$ è definito come:

$$\mathbf{u}_{\tau i} = \{u_{x\tau i}, u_{y\tau i}, u_{z\tau i}\}^T \tag{3.59}$$

Per definire le funzioni di forma applicate all'asse della trave, detto anche asse longitudinale, si utilizzano solitamente elementi di trave di Lagrange. I polinomi che descrivono questo tipo di elementi si ottengono con la formula:

$$N_i(\xi) = \prod_{j=1, j\neq i}^{r_b} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad \begin{cases} j = 1, ..., ne \\ -1 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \tag{3.60}$$

ove r_b è l'ordine o il polinomio di Lagrange. Una proprietà importante di questi polinomi è che le radici (ξ_i) sono equidistanti. Le funzioni di forma di Lagrange per elementi di trave a due nodi (B2), tre nodi (B3) e quattro nodi (B4) sono [10]:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \; N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \tag{3.61}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad N_2 = \frac{1}{2}r(\xi + 1), \quad N_3 = -(1 + \xi)(1 - \xi) \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} N_1 = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \quad N_2 = \frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi + 1), \\ N_3 = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \quad N_4 = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - 1) \end{aligned} \tag{3.63}$$

Analogamente a quanto scritto nella 3.64 possiamo riscrivere il campo di spostamenti come:

$$u(x, y, z) = F_\tau(x, z)N_i(y)u_{\tau i}, \quad \tau = 1,2, ..., M \quad i = 1,2, ..., n_e \tag{3.64}$$

3.5.3 Principio degli spostamenti virtuali

Le equazioni che governano il problema FE si ottengono mediante il principio degli spostamenti virtuali (PVD). Il PVD afferma che una condizione necessaria per l'equilibrio di una struttura è che la variazione virtuale del lavoro interno sia uguale alla variazione virtuale del lavoro delle forze esterne e alla variazione virtuale delle forze inerziali di volume. Questa uguaglianza può essere scritta come:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} + \delta L_{line} \tag{3.65}$$

Tutti i termini dell'equazione possono essere scritti con delle notazioni compattate come segue:

$$\begin{aligned}
&\delta L_{int} = \delta u_{sj}^T K^{\tau sij} u_{\tau i}, \\
&\delta L_{ext} = -\delta u_{sj}^T M^{\tau sij} \ddot{u}_{\tau i} \quad \tau = 1,2,..,M \;\; i = 1,2,..,n_e \\
&\delta L_{line} = \delta u_{sj}^T P^{sj}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

dove $K^{\tau sij}$ è una matrice 3 x 3 che costituisce il FN della matrice di rigidezza, $M^{\tau sij}$ corrisponde al FN della matrice di massa della FE, P^{sj} è un vettore che contiene le componenti delle forze esterne concentrate su ciascun elemento e $\ddot{u}_{\tau i}$ è il vettore dei valori di accelerazione nodale. È importante sottolineare che i termini $K^{\tau sij}$ sono indipendenti dal tipo e dall'ordine della teoria strutturale scelta, essendo questo uno dei principali vantaggi dell'applicazione della CUF. Sostituendo la 3.66 nella 3.65 si ottiene:

$$\delta u_{sj}^T K^{\tau sij} u_{\tau i} + \delta u_{sj}^T M^{\tau sij} \ddot{u}_{\tau i} = \delta u_{sj}^T P^{sj} \tag{3.67}$$

3.5.4 Analisi statica

L'analisi statica è il primo problema agli elementi finiti che verrà considerato. Lo stato di equilibrio della struttura implica che il vettore accelerazione nodale $\ddot{u}_{\tau i}$, sia nullo. Tenendo conto di ciò, il problema da risolvere può essere scritto come:

$$\delta u_{sj}^T K^{\tau sij} u_{\tau i} = \delta u_{sj}^T P^{sj} \tag{3.68}$$

il termine δu_{sj}^T può essere semplificato:

$$K^{\tau sij} u_{\tau i} = P^{sj} \tag{3.69}$$

ottenendo in conclusione le incognite dell'analisi ovvero il vettore degli spostamenti:

$$u_{\tau i} = K^{\tau sij^{-1}} P^{sj} \tag{3.70}$$

3.5.5 Analisi di buckling linearizzata

La seconda analisi presentata è un'analisi di instabilità linearizzata. Anche le equazioni che governano questa analisi sono ottenute dal PVD. La seguente espressione si ottiene dal termine L_{int} dell'equazione 3.66:

$$\delta^2(L_{int}) = \delta u_{sj}^T K_T^{\tau sij} \delta u_{\tau i} \tag{3.71}$$

dove $K_T^{\tau sij}$ corrisponde alla matrice di rigidezza della struttura in esame. Per arrivare alla soluzione del problema del buckling è necessario cercare i punti stazionari dello stato di equilibrio. In altre parole, bisogna risolvere il seguente problema:

$$|K_T| = 0 \tag{3.72}$$

Linearizzando il problema si ottiene:

$$\delta^2(L_{int}) \simeq \delta u_{sj}^T (K_0^{\tau sij} + K_\sigma^{\tau sij}) \delta u_{\tau i} \tag{3.73}$$

ove $K_0^{\tau sij}$ e $K_\sigma^{\tau sij}$ sono rispettivamente i FNs della matrice di rigidità lineare e geometrica. Infine, applicando l'approccio linearizzato, il problema dell'instabilità è definito come:

$$|K_0 + \lambda K_\sigma| = 0 \tag{3.74}$$

La risoluzione del sistema fornisce i carichi critici di instabilità, λ_{cr}. Più avanti in questo in questo lavoro di tesi, si analizzerà sia l'effetto dei parametri caratteristici del laminato VAT sia della numerica sui carichi critici caratteristici di una struttura presa in esame.

Capitolo 4

Risultati numerici

4.1 Analisi statica di una piastra VAT

Questa sezione riassume il lavoro svolto per la riproduzione dei risultati presentati da Demasi et al. [15]. La struttura analizzata, mostrata nella figura 4.1, è una piastra quadrata fissata su tutti i bordi con uno spessore h = 0,1 m e consiste in due strati di uguale spessore. Il materiale è un composito con matrice epossidica e rinforzo in grafite con le proprietà riportate nella figura 4.1. La piastra è caricata con una pressione normale $P_z = 10$ kPa applicata sulla superficie superiore.

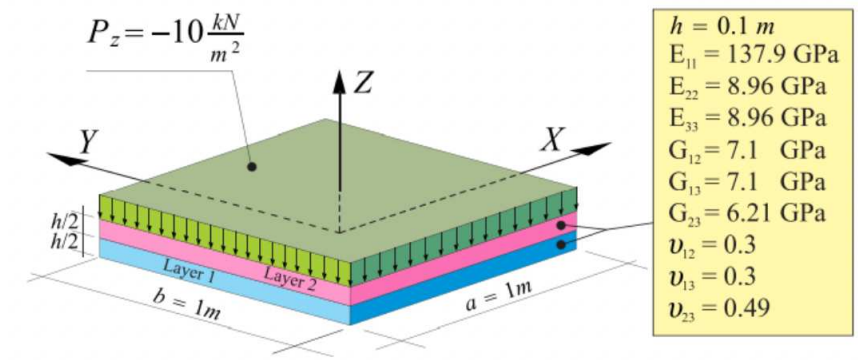


Figura 4.1: Struttura analizzata in questo lavoro. Figura estrapolata da [15]

Nella figura 4.2 è mostrato schematicamente come le fibre sono disposte all'interno dei due strati che compongono il laminato in esame. Riguardo il primo layer è stata realizzata una laminazione con parametri caratteristici $T_0 = 90$ e $T_1 = 45$ mentre per il secondo layer $T_0 = 0$ e $T_1 = 45$.

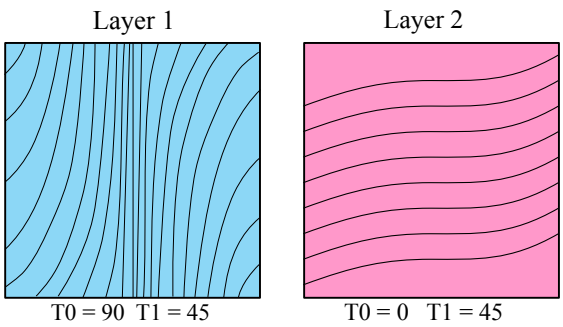


Figura 4.2: Rappresentazione schematica delle fibre all'interno dei layer utilizzati per la realizzazione del pezzo in esame [15]

Per replicare questi risultati, sono state effettuate diverse analisi al fine di trovare la mesh, l'espansione e l'approssimazione numerica ottimali per modellare al meglio la struttura VAT oggetto delle analisi. In seguito sono stati confrontati due diversi casi studio proposti da Demasi et al. con il fine di mostrare le differenze di risposta ai carichi tra un laminato classico ed un VAT.

Nelle figure 4.3 e 4.4 sono mostrati i confronti tra i risultati ottenuti da Demasi et al. e quelli ottenuti utilizzando delle mesh con numero di elementi bidimensionali a nove nodi Q9 variabili da 4x4 a 12x12 nel piano X-Y e quattro elementi beam a quattro nodi *B4* lungo Z.

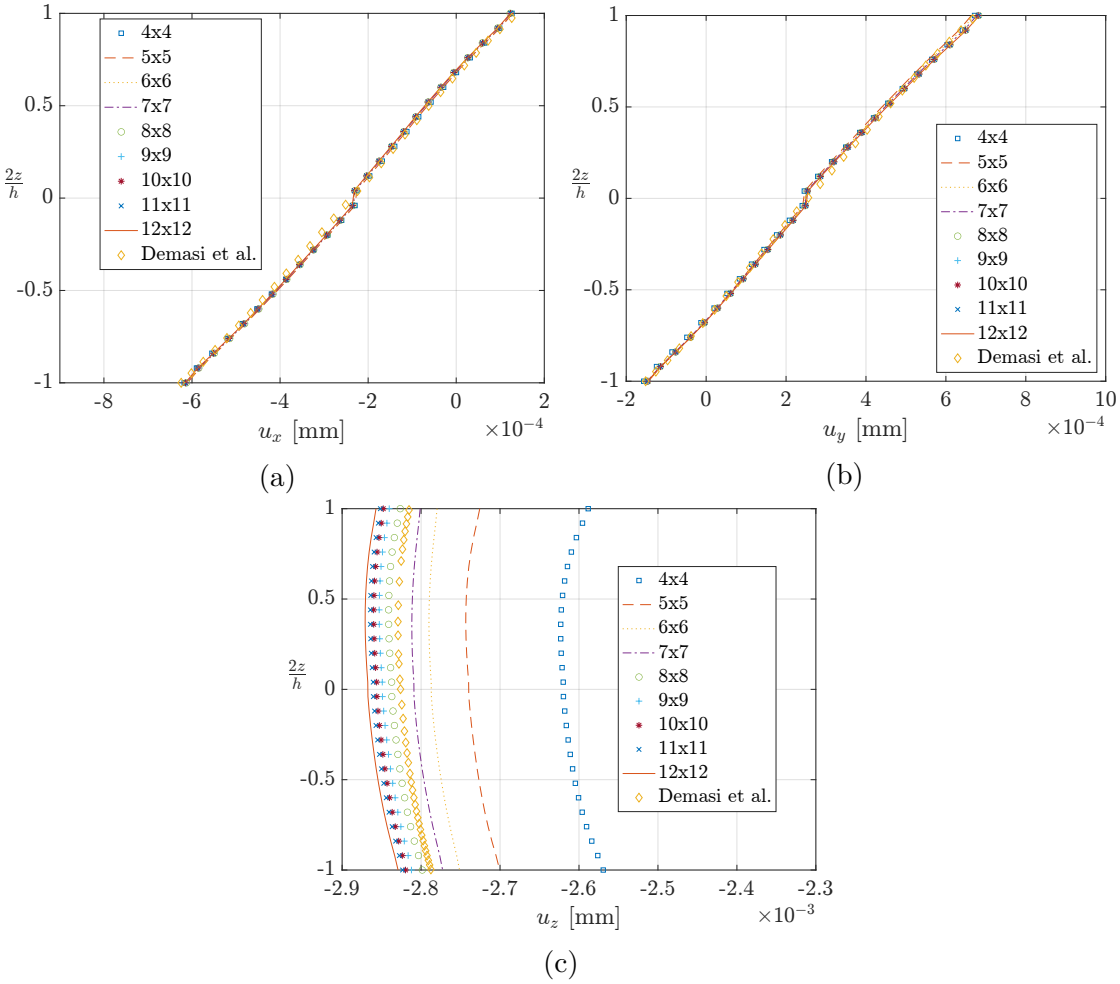


Figura 4.3: Confronto con la letteratura e analisi di convergenza della mesh per gli spostamenti

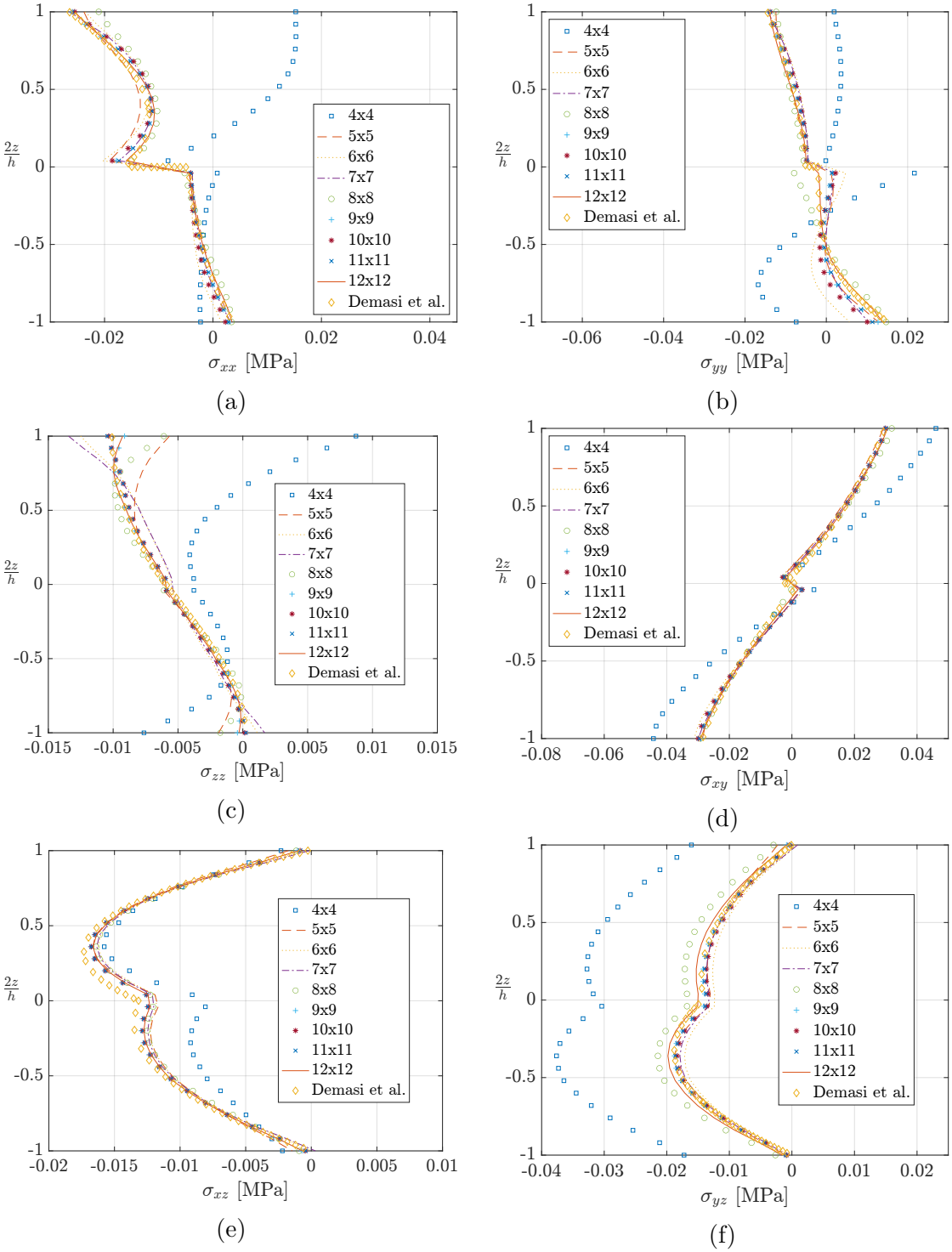


Figura 4.4: Confronto con la letteratura e analisi di convergenza della mesh per gli stress

Per una migliore comprensione dei risultati, le seguenti tabelle mostrano i valori delle variabili di sollecitazione e deformazione per due valori adimensionali dello spessore confrontati a quelli presentati da Demasi et al. [15].

mesh	u_x	u_y	u_z
Demasi et al.	-4.1818e-7	6.2165e-8	-2.8128e-6
4x4	-4.1956e-7	5.2115e-8	-2.6046e-6
5x5	-4.1378e-7	5.8766e-8	-2.7261e-6
6x6	-4.1573e-7	5.9788e-8	-2.7738e-6
7x7	-4.1651e-7	5.9454e-8	-2.7957e-6
8x8	-4.1632e-7	6.0799e-8	-2.8240e-6
9x9	-4.1679e-7	6.1358e-8	-2.8360e-6
10x10	-4.1795e-7	6.1499e-8	-2.8431e-6
11x11	-4.1844e-7	6.1477e-8	-2.8472e-6
12x12	-4.1836e-7	6.1860e-8	-2.8539e-6

Tabella 4.1: Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Spostamenti valutati per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h}$ = -0.5

mesh	u_x	u_y	u_z
Demasi et al.	-6.2482e-8	4.5580e-7	-2.8286e-6
4x4	-5.7332e-8	4.5477e-7	-2.6208e-6
5x5	-5.8003e-8	4.4880e-7	-2.7426e-6
6x6	-6.1334e-8	4.5346e-7	-2.7894e-6
7x7	-6.2063e-8	4.5706e-7	-2.8109e-6
8x8	-6.3595e-8	4.5882e-7	-2.8408e-6
9x9	-6.3427e-8	4.5890e-7	-2.8527e-6
10x10	-6.3850e-8	4.6009e-7	-2.8597e-6
11x11	-6.3957e-8	4.6094e-7	-2.8637e-6
12x12	-6.4240e-8	4.6126e-7	-2.8702e-6

Tabella 4.2: Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Spostamenti valutati per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h}$ = 0.5

mesh	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{xz}	σ_{yz}	σ_{xy}
Demasi et al.	-2.1248e+3	-2.1149e+2	-1.8075e+4	-1.1239e+4	-1.7632e+4	-1.6069e+4
4x4	-1.9839e+3	-1.1445e+4	-1.1819e+3	-7.9340e+3	-3.6442e+4	-2.6347e+4
5x5	-1.5771e+3	-4.0207e+2	-1.7907e+3	-1.0404e+4	-1.7729e+4	-1.6629e+4
6x6	-3.2854e+3	-3.1908e+3	-2.3383e+3	-1.0343e+4	-1.6194e+4	-1.7345e+4
7x7	-2.1556e+3	2.2100e+1	-2.1360e+3	-1.0453e+4	-1.6852e+4	-1.6076e+4
8x8	-1.3437e+3	9.8856e+1	-1.5879e+3	-1.0427e+4	-2.0377e+4	-1.6814e+4
9x9	-2.2850e+3	-8.5858e+2	-1.8665e+3	-1.0826e+4	-1.7715e+4	-1.6635e+4
10x10	-2.6447e+3	-1.5621e+3	-1.9543e+3	-1.0690e+4	-1.7295e+4	-1.6835e+4
11x11	-2.0565e+3	-4.5167e+2	-1.8519e+3	-1.0674e+4	-1.7548e+4	-1.6468e+4
12x12	-1.7607e+3	7.7579e+1	-1.9725e+3	-1.0754e+4	-1.8647e+4	-1.6548e+4

Tabella 4.3: Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Sollecitazioni valutate per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h}$ = -0.5

mesh	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{xz}	σ_{yz}	σ_{xy}
Demasi et al.	-1.3057e+4	-8.1394e+3	-9.0376e+3	-1.6238e+4	-1.1761e+4	1.6939e+4
4x4	1.2257e+4	3.5474e+3	-1.9917e+3	-1.4673e+4	-2.9447e+4	2.7262e+4
5x5	-1.4082e+4	-8.6815e+3	-8.3627e+3	-1.5592e+4	-1.1320e+4	1.6634e+4
6x6	-1.2116e+4	-6.8053e+3	-8.0461e+3	-1.5262e+4	-1.0300e+4	1.7168e+4
7x7	-1.2051e+4	-7.0596e+3	-8.0608e+3	-1.5350e+4	-1.1236e+4	1.7417e+4
8x8	-1.1415e+4	-9.0964e+3	-9.6528e+3	-1.5277e+4	-1.4418e+4	1.8126e+4
9x9	-1.2342e+4	-7.9402e+3	-9.1470e+3	-1.5677e+4	-1.1360e+4	1.7694e+4
10x10	-1.1974e+4	-7.4481e+3	-8.7721e+3	-1.5610e+4	-1.0978e+4	1.7708e+4
11x11	-1.2174e+4	-7.7998e+3	-8.8111e+3	-1.5621e+4	-1.1265e+4	1.7830e+4
12x12	-1.2245e+4	-8.7867e+3	-9.0681e+3	-1.5524e+4	-1.2508e+4	1.7870e+4

Tabella 4.4: Convergenza dei risultati e confronto con la letteratura. Sollecitazioni valutate per un valore della coordinata adimensionale dello spessore $\frac{2z}{h}$ = 0.5

Come si può notare da un'analisi preliminare dei valori, si ottiene una convergenza all'aumentare del numero di elementi della mesh scelti per modellare la piastra. All'aumentare del grado di approssimazione crescono però anche i DOFs

(*Degrees of Freedom*) ed il tempo computazionale necessario all'analisi. Scegliendo una mesh 9x9 si ottengono valori accettabili di approssimazione con un costo computazionale adeguato. Pertanto tale mesh verrà utilizzata nelle prossime analisi.

La seconda parte di questo lavoro ha lo scopo di trovare l'espansione (ovvero il tipo di elementi lungo Z) ottimale per modellare il problema in esame. Come per la mesh, le sollecitazioni e le deformazioni sono mostrate in funzione del tipo di elementi utilizzati. Gli elementi usati per l'analisi sono quattro elementi beam a 2, 3 e 4 nodi.

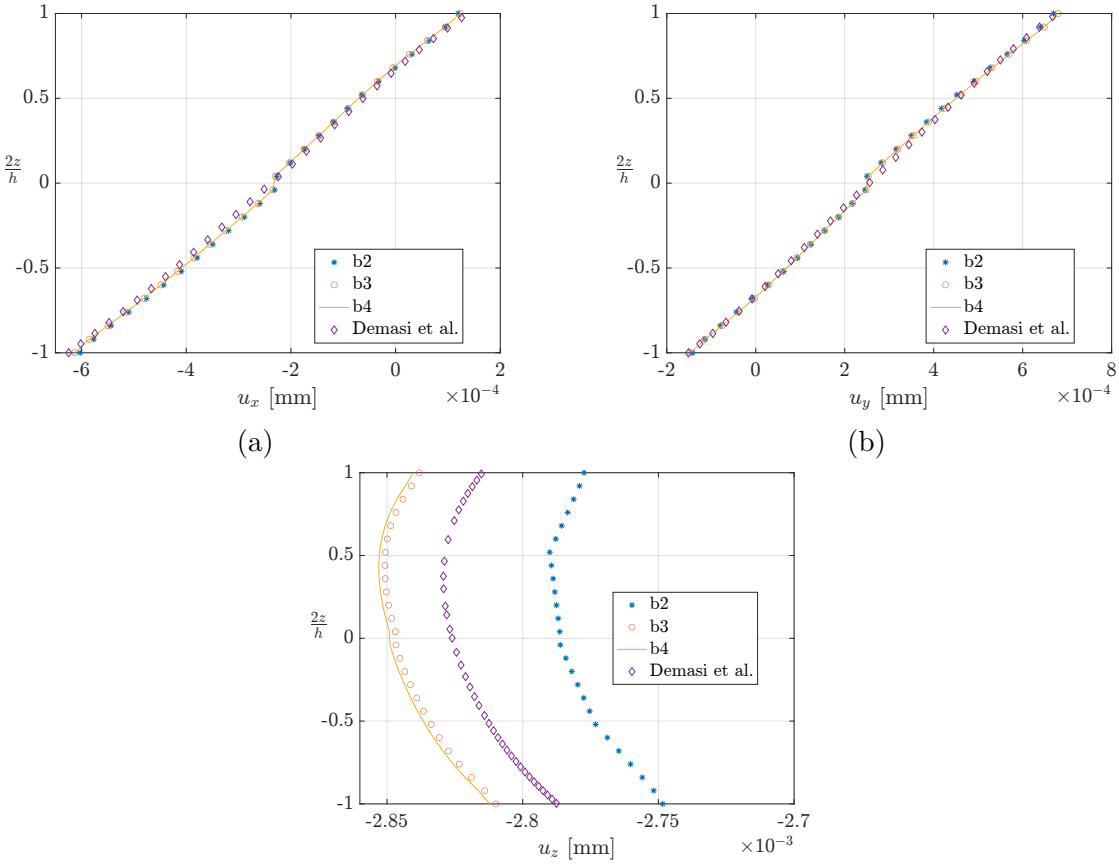


Figura 4.5: Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per gli spostamenti fissata una mesh di elementi Q9 9x9 e 4 elementi beam con numero di nodi variabile

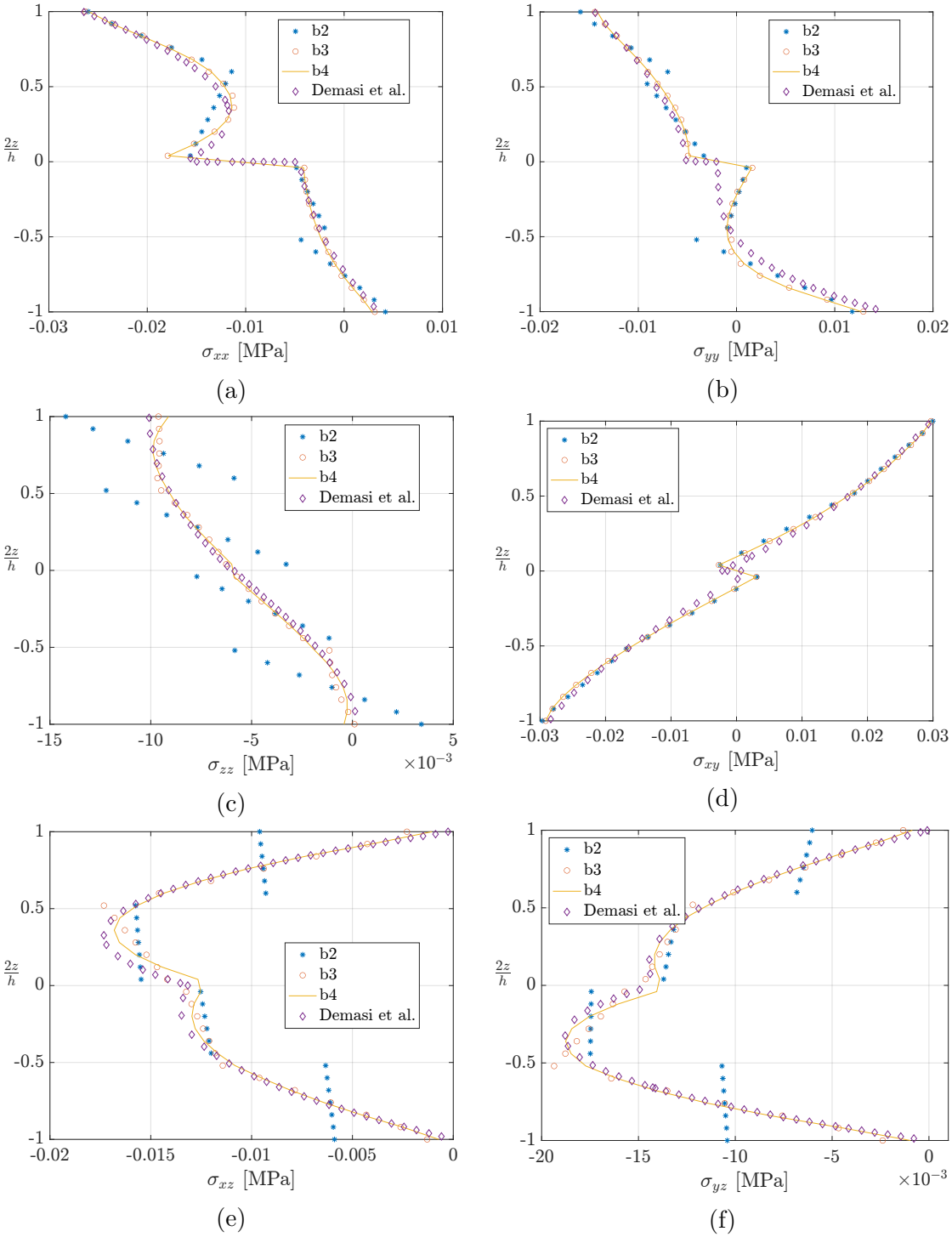


Figura 4.6: Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per gli stress fissata una mesh di elementi Q9 9x9 e 4 elementi beam con numero di nodi variabile

Analogamente a quanto osservato per i casi precedenti, nelle figure appena mostrate si può osservare un miglioramento dell'approssimazione con l'aumentare del grado di espansione.

Dopo questo studio, è stato effettuato un confronto tra due laminati realizzati con due diverse logiche di produzione per mostrare come questi due materiali reagiscono a un carico esterno. Uno è un laminato classico 0/90 (caso 1 Demasi et al.), l'altro è un laminato VAT (caso 4 Demasi et al.), lo stesso utilizzato per le analisi presentate finora, in cui lo strato 1 ha T0 = 90 e T1 = 45 e lo strato 2 con T0 = 0 e T1 = 45. Le dimensioni della piastra e le proprietà del materiale rimangono quelle mostrate all'inizio di questo paragrafo.

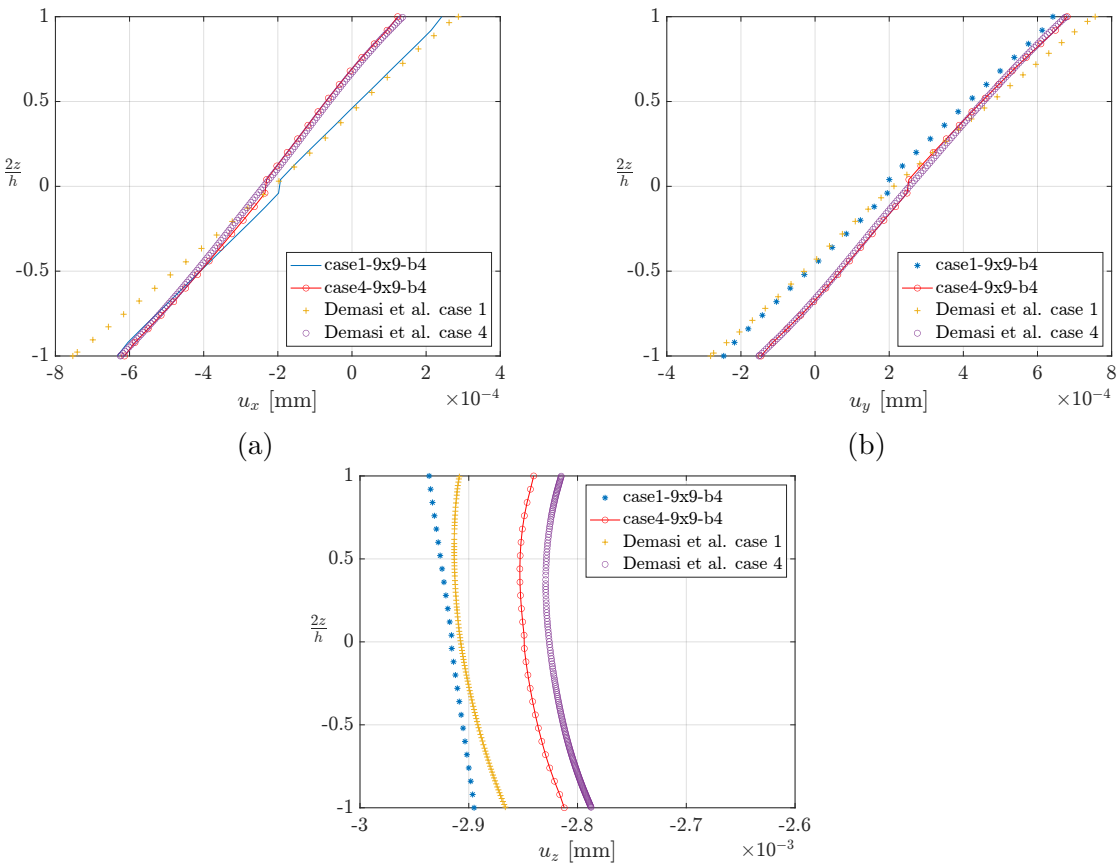


Figura 4.7: Confronto con la letteratura per le variabili di spostamento calcolate per un laminato classico (*case 1*) ed uno VAT (*case 4*) utilizzando una mesh 9x9Q9-4B4

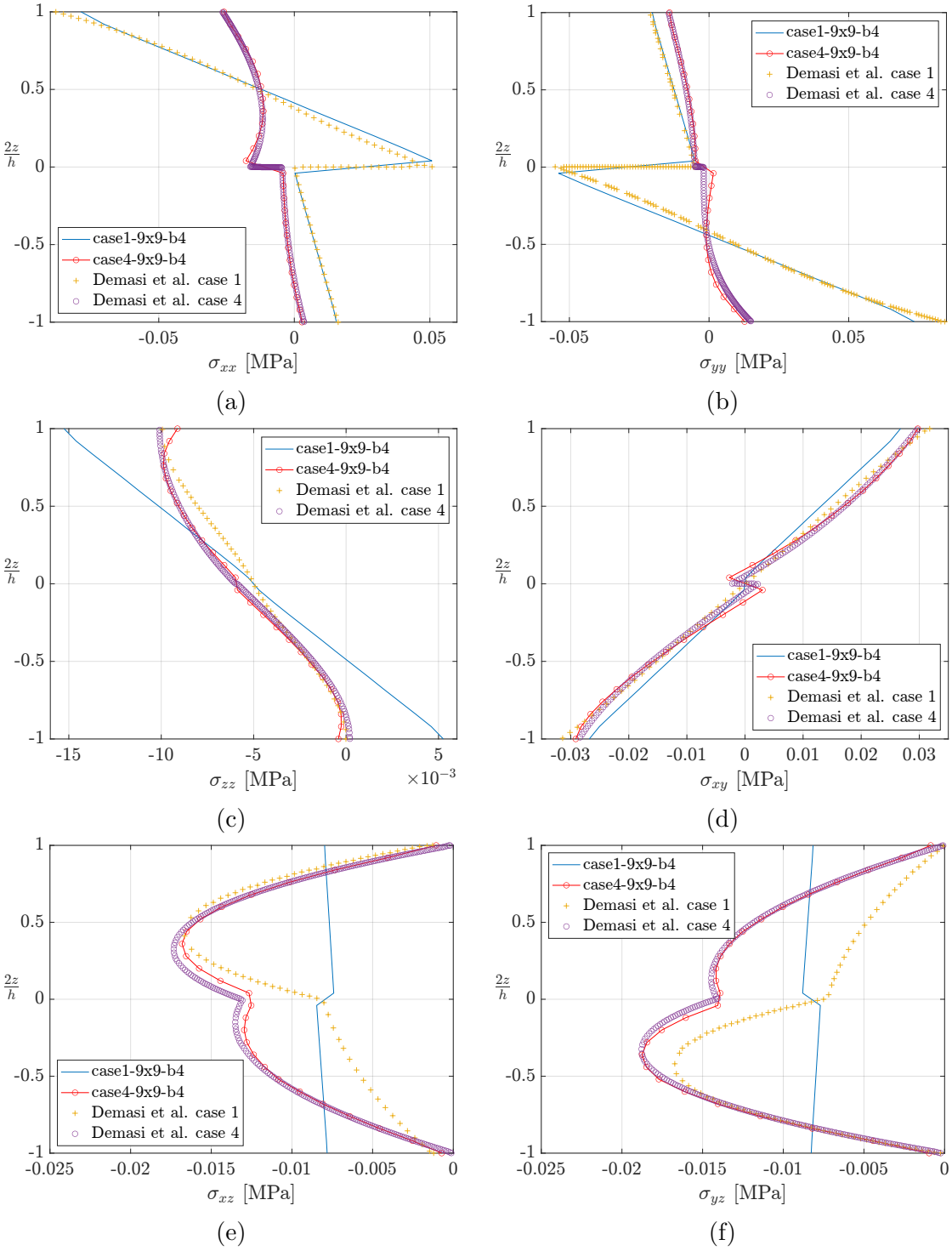


Figura 4.8: Confronto con la letteratura per le variabili di sollecitazioni calcolate per un laminato classico (*case 1*) ed uno VAT (*case 4*) utilizzando una mesh 9x9Q9-4B4

I casi visti finora erano stati analizzati con un'espansione di tipo Lagrange (LE) all'interno dello spessore, nelle figure successive verrà invece mostrato un confronto tra quattro diversi gradi di espansione di tipo Taylor (TE).

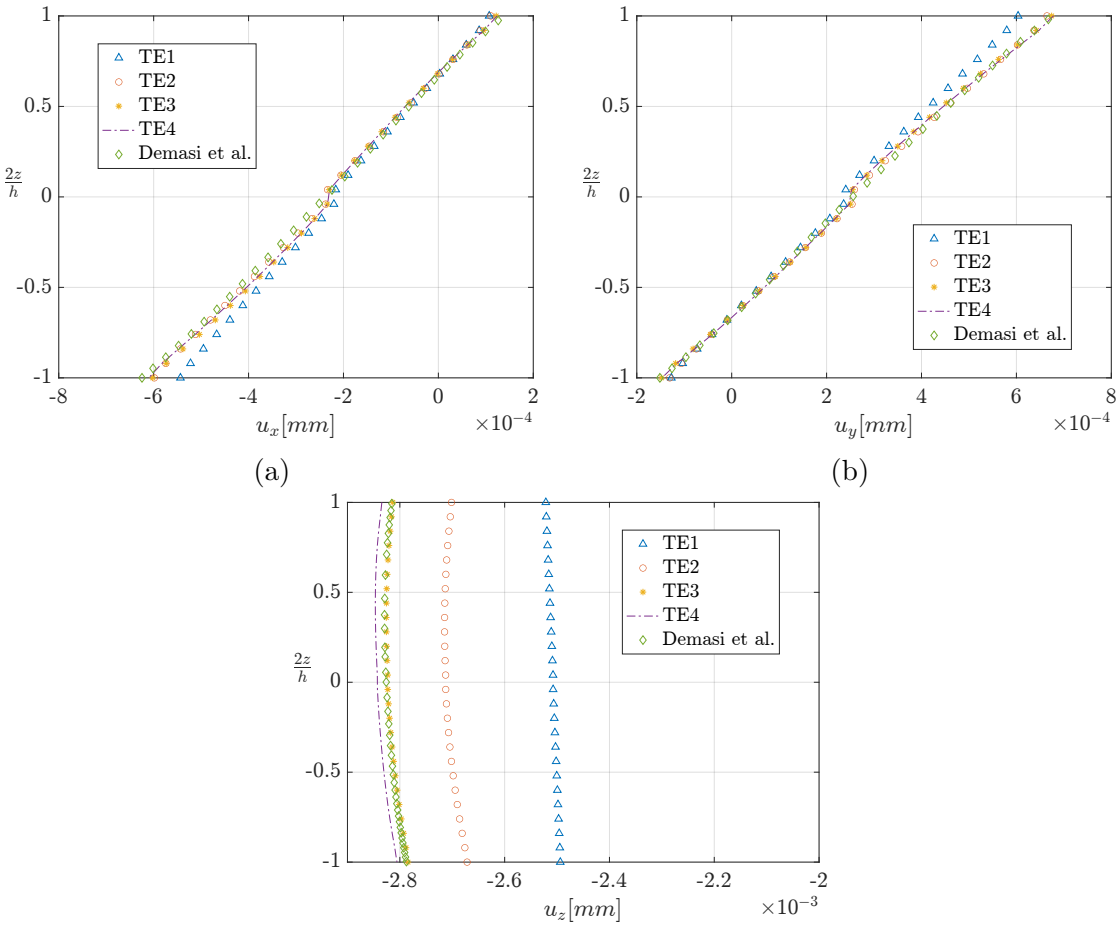


Figura 4.9: Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per gli spostamenti, fissata una mesh 9x9Q9-4B4

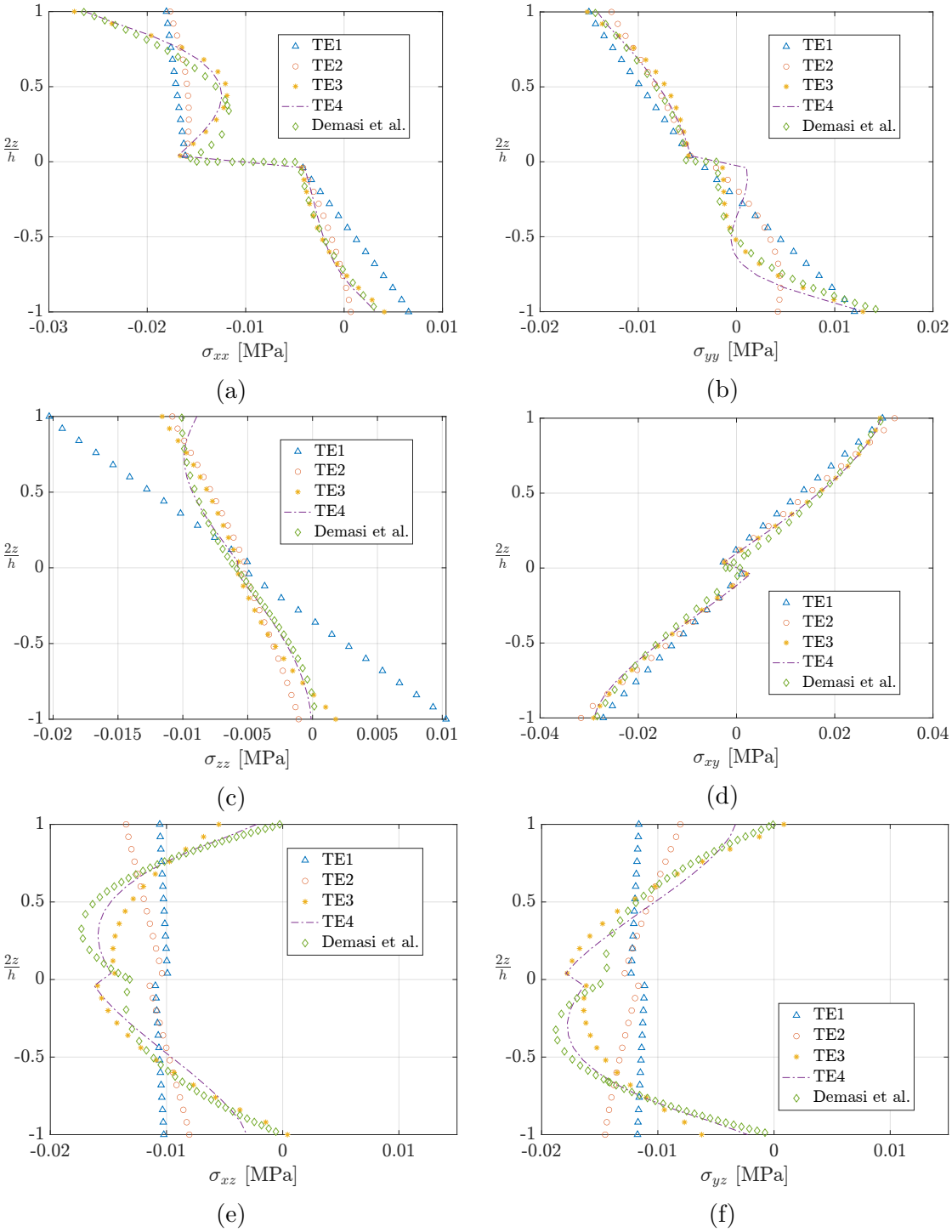
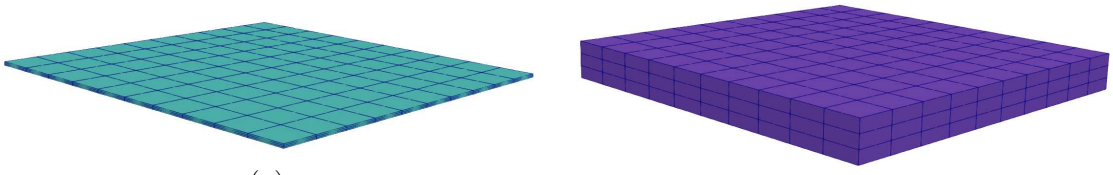


Figura 4.10: Confronto con la letteratura e analisi di convergenza dell'espansione per le sollecitazioni, fissata una mesh 9x9Q9-4B4

4.2 Analisi di Free Vibration per strutture VAT

In questa sezione sono mostrati i modi naturali di vibrare di laminati compositi risultanti delle analisi di free vibration su delle strutture VAT. Nel dettaglio, è mostrato un confronto tra due laminati con proprietà uguali ma di spessore differente costituiti da tre layer. I riferimenti utilizzati come confronto sono tratti dai lavori di Viglietti et al. [41] e Akhavan and Ribeiro [5]. Il caso studiato riguarda una piastra quadrata con lati: a = b = 1 m e spessori h = 0,01 m e 0,1 m rispettivamente per studiare lastre sottili e spesse.



(a) (b)

Figura 4.11: Piastre VAT oggetto dell'analisi. A sinistra la configurazione sottile, a destra quella spessa

a[m]	b[m]	h[m]	E_1 $[GPa]$	E_2 $[GPa]$	E_3 $[GPa]$	G_{12} $[GPa]$	G_{13} $[GPa]$	G_{23} $[GPa]$	ν	$\rho[\frac{Kg}{m^3}]$
1	1	0.1	173	7.2	7.2	3.76	3.76	3.76	0.29	1540
1	1	0.01	173	7.2	7.2	3.76	3.76	3.76	0.29	1540

Tabella 4.5: Caratteristiche delle piastre studiate, ref.[5]

La piastra è un laminato a tre strati, e la laminazione di ogni strato sarà espressa come <T0 T1>, dove T0 e T1 sono:

	a		b	
	T_0	T_1	T_0	T_1
Layer 1	0	45	90	45
Layer 2	-45	-60	60	30
Layer 3	0	45	90	45

Tabella 4.6: Parametri caratteristici dei layer costituenti il composito in esame

Nella tabella seguente, sono mostrati i primi nove modi delle piastre sottili e spesse. Come si può vedere, i risultati dell'analisi effettuata con questo lavoro si avvicinano molto ai modi ottenuti nei lavori di Viglietti et al. [41] e Akhavan and Ribeiro [5]. Lo scostamento dai valori utilizzati come confronto è inferiore al 5% pertanto i valori ottenuti in questo lavoro possono essere ritenuti accettabili. Nel dettaglio possiamo notare, in entrambi i laminati, l'aumento dei modi per piastre spesse il che proviene dall'effettivo maggiore assorbimento di carichi esterni (e quindi maggiore rigidità) da parte di questa configurazione di piastra.

h/a		**Mode 1**	**Mode 2**	**Mode 3**	**Mode 4**	**Mode 5**	**Mode 6**	**Mode 7**	**Mode 8**	**Mode 9**
[<0,45><-45,60><0,45>]										
0.01	Present analysis	92.95	128.18	190.75	247.55	281.48	282.68	347.02	393.91	451.56
	Akhavan and Ribeiro	92.26	130.82	195.19	237.86	274.99	282.67	340.09	389.1	431.02
	LE Model Viglietti et al.	94.44	135.36	206.4	247.05	287.67	307.89	361.64	433.83	476.36
	3D Model Viglietti et al.	92.65	131.5	196.86	239.23	276.76	286.34	342.84	395.43	436.74
0.1	Present analysis	593.16	859.67	1202.83	1257.95	1435.87	1538.94	1688.67	1868.21	1915.68
	Akhavan and Ribeiro	614.11	909.55	1233.02	1338.63	1485.64	1798.6	1932.28	1965.59	2152.26
	LE Model Viglietti et al.	609.79	903.63	1216	1328.41	1469.33	1774.84	1930.15	1931.36	2113.88
	3D Model Viglietti et al.	607.24	897.04	1208.4	1314.14	1458.18	1753.52	1916.57	1904.91	2096.64
[<90,45><60,30><90,45>]										
0.01	Present analysis	114.32	148.93	223.18	279.60	303.81	332.47	381.38	425.47	507.55
	Akhavan and Ribeiro	113.18	145.25	212.66	269.06	292.47	316.49	362.78	392.79	465.04
	LE Model Viglietti et al.	114.32	148.92	223.15	279.6	303.8	332.45	381.32	425.44	507.54
	3D Model Viglietti et al.	113.02	145.21	212.99	269.67	292.7	315.84	358.88	393.29	465.73
0.1	Present analysis	672.72	909.10	1270.16	1301.12	1442.09	1690.48	1904.76	1943.30	1951.23
	Akhavan and Ribeiro	682.2	917.49	1304.68	1313.59	1466.64	1714.97	1920.8	1991.02	2001.1
	LE Model Viglietti et al.	672.68	909.02	1270.07	1301.02	1441.95	1690.38	1904.58	1943.18	1943.44
	3D Model Viglietti et al.	670.27	904.11	1264.63	1291.94	1433.44	1678.67	1883.04	1931.44	1947.36

Tabella 4.7: Risultati dell'analisi di free vibration e confronto con la letteratura di quattro casi studio

4.3 Analisi di buckling di piastre VAT

4.3.1 Introduzione

L'attività descritta all'interno di questa sezione riassume il lavoro svolto per la modellizzazione di una struttura composita sottile incastrata-libera caricata a compressione con un carico di 20KPa e la successiva analisi dei carichi critici di buckling. La prima parte del lavoro è destinata alla ricerca della mesh e dell'espansione

ottimali per la modellizzazione di tale problema, mentre la seconda parte prevede di intervenire sulle ply e, tramite la modifica dei parametri che le definiscono, verificare se i carichi critici di buckling possono essere massimizzati. A titolo di esempio verrà anche proposto un confronto tra i due approcci maggiormente utilizzati per l'analisi di materiali compositi ovvero Equivalent Single Layer (ESL) e Layer Wise (LW). Nella Figura 4.12 è riportata la schematizzazione del problema studiato.

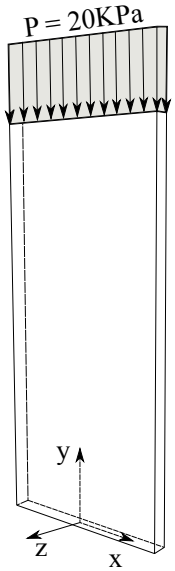


Figura 4.12: Struttura analizzata

4.3.2 Struttura e Materiale analizzati

La struttura oggetto delle analisi è una schematizzazione di una struttura reale realizzata con la stampante 3D Markforged Mark Two in dotazione al dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino. Questa struttura è ottenuta dalla sovrapposizione di più layer di materiale composito VAT formato da fibre di carbonio e onyx le cui proprietà sono raccolte nella tabella 4.8. Il software di stampa fornito con la stampante permette di scegliere tra 0.1, 0.125 e 0.2 mm per lo spessore degli strati. Tuttavia, se si decide di utilizzare le fibre prodotte dalla casa madre, deve essere impostato uno spessore pari a 0.125 mm per tutti gli strati. Più nel dettaglio, la struttura è composta da 8 layer e segue

una sequenza di laminazione $[0\pm < 45{,}60 >]_{2s}$ che forma un laminato simmetrico ed equilibrato. Queste proprietà di simmetria (quando per ogni lamina orientata di θ, ad una certa distanza dal piano di simmetria, ce n'è un'altra uguale dall'altra parte) e di equilibrio (cioè ad ogni lamina orientata di un angolo $-\theta$ corrisponde una orientata di $+\theta$) fanno si che le matrici caratteristiche del laminato si possano semplificare. Nel dettaglio, un laminato composto da più strati ortotropi che sono disposti simmetricamente, sia dal punto di vista del materiale che delle proprietà geometriche intorno al piano mediano del laminato, non presenta accoppiamento tra flessione ed estensione il che semplifica notevolmente le equazioni di governo.

Materiale	Modulo di Young [GPa]	Modulo di Poisson	Modulo di taglio [GPa]	Densità $[\frac{g}{cm^3}]$
Carbonio	50.2	0.38	18.2	1.2
Onyx	2.4	0.3		1.2

Tabella 4.8: Proprietà dei materiali utilizzati

A questi strati, la stampante prevede di aggiungere degli strati aggiuntivi che compongono i cosiddetti layer "roof" e "bottom" di spessore variabile in base allo spessore del core. In questo caso sono stati scelti quattro strati di onyx per ognuno (di spessore 0.125mm ciascuno) che portano quindi lo spessore totale a 2mm. Nella Figura 4.13 sono riassunte le dimensioni della piastra nelle altre direzioni.

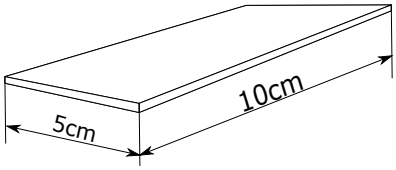


Figura 4.13: Dimensioni della piastra oggetto delle analisi

4.3.3 Analisi di convergenza della mesh

In primo luogo è stata effettuata un'analisi di convergenza della mesh, ovvero, fissato il tipo ed il numero di elementi (provvisori) nello spessore si è variato il numero di elementi beam lungo l'asse della trave per cercare una convergenza sui risultati ottenuti. Per quanto riguarda gli elementi all'interno dello spessore, per ogni layer sono stati usati 10 elementi bidimensionali a 9 nodi Q9 (figura 4.14a), mentre per la mesh sono stati usati degli elementi beam a 4 nodi Q4 (figura

4.14b). È bene notare che, nel corso di tutte le analisi presentate anche in seguito, il numero degli elementi utilizzati nello spessore varierà solo nella direzione x e non nella direzione z. Infatti, si è deciso di utilizzare un solo elemento per strato. Inoltre, è stato utilizzato un solo elemento per gli strati del "roof" e del "bottom", data la natura del materiale. Pertanto, lungo l'asse z il numero di elementi rimarrà invariato uguale a 10.

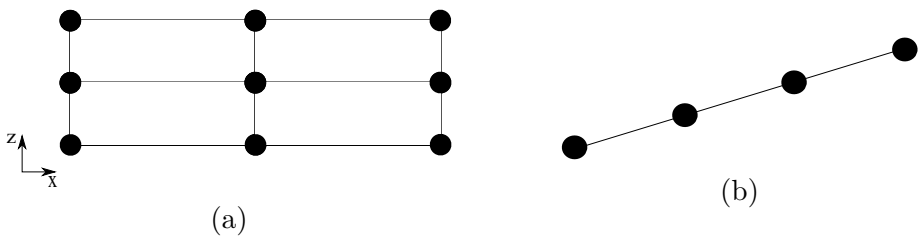


Figura 4.14: Schematizzazione degli elementi finiti usati in questa analisi. A sinistra un elemento bidimensionale a nove nodi *Q9* a destra un elemento beam a quattro nodi *B4*

A titolo di esempio è riportata nella figura 4.15 una cella che presenta tre elementi beam a quattro nodi (B4) nella direzione y e 4 elementi bidimensionali a 9 nodi (Q9) nella direzione x.

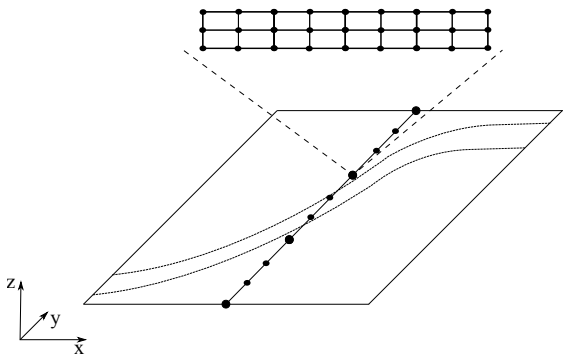


Figura 4.15: Disposizione degli elementi finiti all'interno della struttura

Nella tabella 4.9 sono riportati i primi 5 carichi critici da instabilità ottenuti nelle analisi. Da una prima analisi dei risultati, è possibile notare una convergenza dei risultati al crescere del numero degli elementi utilizzati per la modellizzazione. Per proseguire con gli scopi dell'attività è stato scelto il modello 8B4 poiché unisce una buona approssimazione dei risultati con dei ragionevoli tempi di calcolo ed un

numero di DOFs contenuti. Nella figura 4.16 sono riportate le forme modali della struttura modellata con la mesh 10x10Q9-8B4.

Mesh	**DOFs**	**Load 1 [N]**	**Load 2 [N]**	**Load 3 [N]**	**Load 4 [N]**	**Load 5 [N]**
3B4	14553	1304.27	2512.93	3124.68	4124.60	5936.01
4B4	18522	1287.29	2510.70	3112.61	4102.15	6224.62
5B4	22491	1277.51	2473.13	3092.09	4048.64	5009.72
6B4	26460	1276.91	2472.36	3090.08	4044.41	4986.87
7B4	30429	1277.64	2470.28	3089.57	4040.43	4965.12
8B4	34398	1276.77	2466.60	3087.81	4034.69	4942.29
9B4	38367	1276.81	2466.93	3087.74	4035.31	4947.37
10B4	42336	1277.75	2469.85	3088.97	4038.63	4952.05

Tabella 4.9: Gradi di libertà e primi 5 carichi critici della struttura in esame con mesh 10x10Q9 e numero di elementi beam variabili

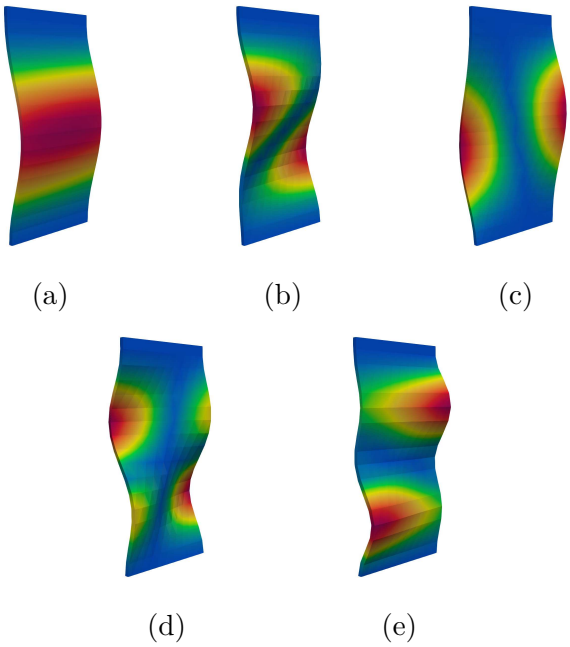


Figura 4.16: Forme modali ottenute per una piastra sottile compressa modellata con la mesh 10x10Q9-8B4. (a) Primo modo, (b) Secondo modo, (c) Terzo modo, (d) Quarto modo, (e) Quinto modo

4.3.4 Analisi di convergenza dell'espansione

Nell'analisi descritta di seguito sono state messe a confronto due configurazioni, nella prima saranno usati degli elementi bidimensionali a 4 nodi mentre nella seconda saranno usati degli elementi bidimensionali a 9 nodi (figura 4.14a). Come risultato dell'analisi precedente, sono stati adottati 8 elementi beam B4 lungo l'asse della struttura. Nelle tabelle 4.10 e 4.11 sono presentati i risultati ottenuti.

Expansion	**DOFs**	**Load 1 [N]**	**Load 2 [N]**	**Load 3 [N]**	**Load 4 [N]**	**Load 5 [N]**
10x2Q4	2574	1288.23	2527.67	3392.58	4450.03	5032.22
10x4Q4	4290	1286.20	2517.58	3324.63	4358.98	5009.02
10x6Q4	6006	1284.41	2507.78	3265.22	4278.44	4991.72
10x8Q4	7722	1283.01	2499.61	3220.33	4217.92	4980.21
10x10Q4	9438	1281.92	2493.22	3188.20	4174.65	4972.45
10x12Q4	11154	1281.09	2488.33	3165.38	4143.85	4967.05
10x14Q4	12870	1280.45	2484.58	3148.95	4121.65	4963.15

Tabella 4.10: Gradi di libertà del modello numerico e primi 5 carichi critici con mesh 8B4 e numero di elementi a quattro nodi variabili nello spessore

Expansion	**DOFs**	**Load 1 [N]**	**Load 2 [N]**	**Load 3 [N]**	**Load 4 [N]**	**Load 5 [N]**
10x2Q9	8190	1279.76	2478.37	3143.01	4088.92	4963.03
10x4Q9	14742	1278.07	2471.07	3104.85	4047.62	4948.98
10x6Q9	21294	1277.47	2468.80	3094.49	4039.19	4945.26
10x8Q9	27846	1277.03	2467.37	3089.81	4036.06	4943.33
10x10Q9	34398	1276.77	2466.60	3087.81	4034.69	4942.29
10x12Q9	40950	1276.57	2466.11	3086.92	4034.14	4941.55
10x14Q9	47502	1276.40	2465.74	3086.45	4033.80	4940.95

Tabella 4.11: Gradi di libertà del modello numerico e primi 5 carichi critici con mesh 8B4 e numero di elementi a nove nodi variabili nello spessore

All'aumentare del numero di elementi nelle lamine, si ha una convergenza dei risultati, ma allo stesso tempo anche un aumento significativo dei DOF, pertanto è stata scelta una mesh 10x10Q4-8B4 perché combina una buona approssimazione dei risultati con un numero ridotto di gradi di libertà e quindi tempi di calcolo ridotti.

4.3.5 Confronto approcci ESL e LW

Come già visto nel paragrafo 3.4, gli approcci maggiormente utilizzati nell'ambito delle analisi di materiali compositi sono le teorie Equivalent Single Layer (ESL - basato sulle espansioni di Taylor) e Layer Wise (LW - che adotta delle espansioni di Lagrange). Le differenze tra le due teorie portano al risultato che la teoria ESL mostra dei risultati accurati in termini di risposta globale ma è spesso imprecisa per le distribuzioni di stress rispetto alla metodologia LW. La tabella 4.12 mostra un confronto tra i risultati ottenuti in precedenza (con un approccio LW) con quelli ottenuti impiegando la teoria ESL.

Mesh	**DOFs**	**Load 1** [N]	**Load 2** [N]	**Load 3** [N]	**Load 4** [N]	**Load 5** [N]
TE1	234	1293.96	2602.13	4959.92	7285.90	10479.82
TE2	468	1193.04	2363.87	3367.47	4331.32	4808.65
TE3	780	1255.94	2455.21	3249.61	4270.71	4929.28
TE4	1170	1212.45	2360.01	3086.09	3966.39	4735.17
10x10Q4-8B4	9438	1281.92	2493.22	3188.20	4174.65	4972.45

Tabella 4.12: Confronto tra i risultati ottenuti con l'approccio ESL e quelli ottenuti utilizzando un approccio LW con una mesh 10x10Q4-8B4

I risultati di queste analisi mostrano che, come ci si poteva aspettare, con l'approccio ESL si ottengono dei risultati insoddisfacenti. Infatti, in alcuni casi lo scostamento percentuale dal caso preso come confronto supera anche il 10%. In particolare, in alcuni casi i carichi vengono sovrastimati mentre in altri sottostimati e, soprattutto, non sembra esserci una convergenza al crescere del grado di approssimazione. Per le motivazioni appena esposte, benché ci sia una notevole diminuzione dei gradi di libertà, è da escludere tale approssimazione per il modello oggetto del caso di studio ma si considereranno i risultati solo come confronto rispetto alla teoria adottata nel resto delle analisi. Di seguito sono riportati i primi 5 modi ottenuti con i modelli sopra analizzati.

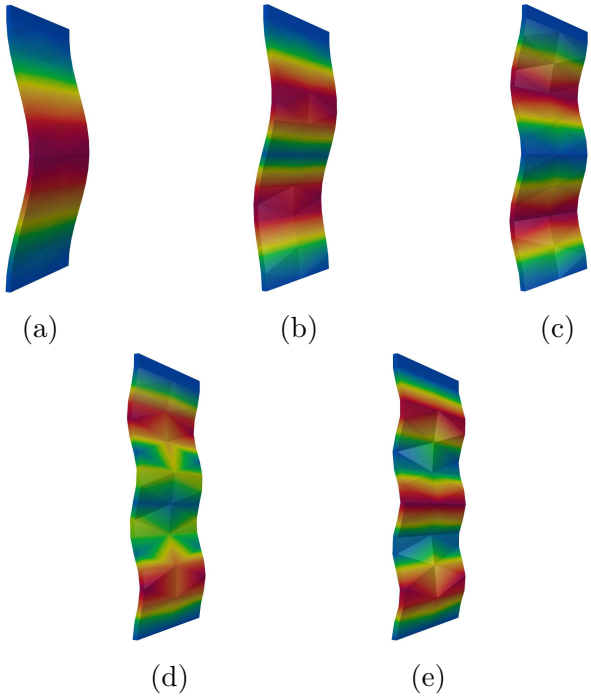


Figura 4.17: Forme modali ottenute con modello TE1

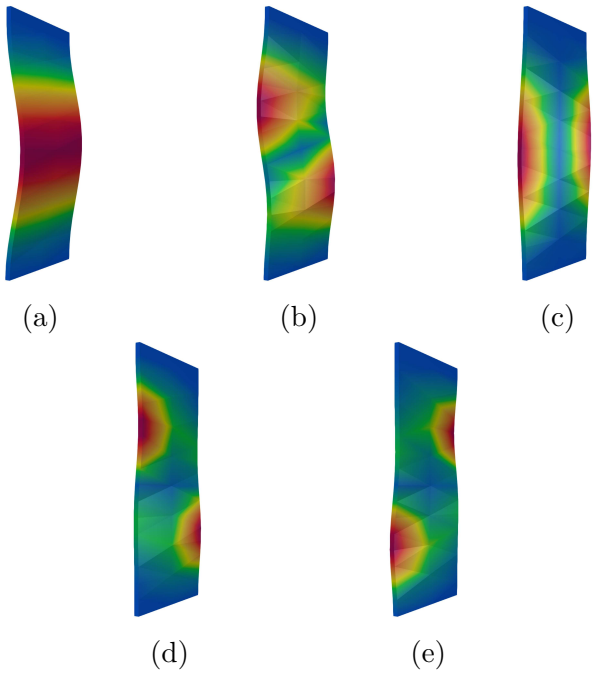


Figura 4.18: Forme modali ottenute con modello TE2

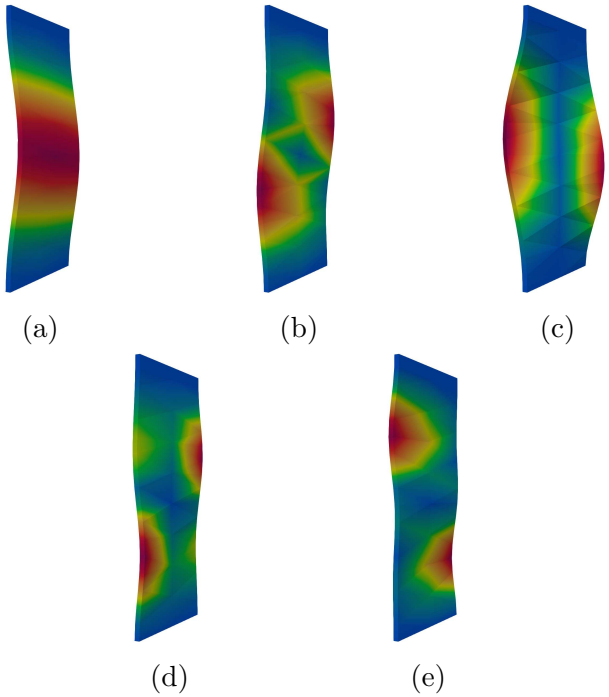


Figura 4.19: Forme modali ottenute con modello TE3

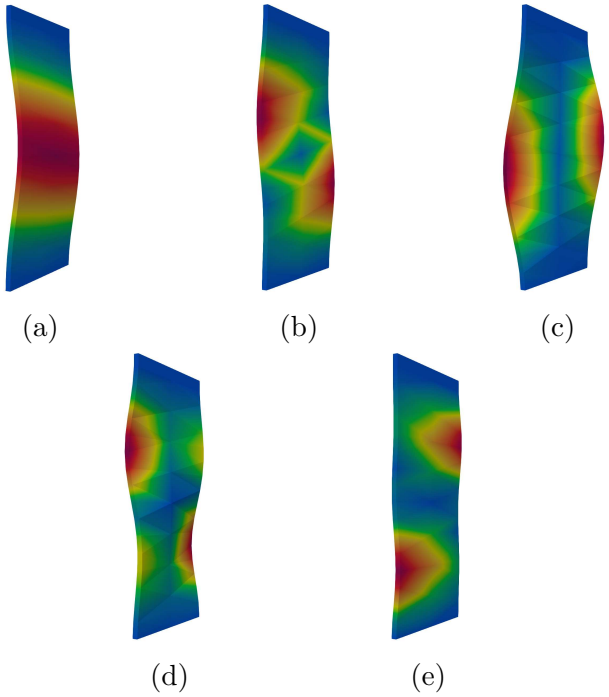


Figura 4.20: Forme modali ottenute con modello TE4

4.3.6 Analisi dei carichi critici al variare di T0 e T1

La possibilità di adattamento alle sollecitazioni offerta dalle strutture composite laminate modificando localmente l'angolo delle fibre e lo spessore degli strati offre un'opportunità unica per sfruttare appieno le proprietà dei materiali compositi. Questo porta al risultato che spesso i parametri di laminazione sono utilizzati come variabili di progetto. In particolare, per ottenere la massima resistenza ai carichi di instabilità, l'angolo di orientamento delle fibre è un parametro fondamentale e quindi diventa il parametro di progettazione aumentando notevolmente la complessità del processo di design dei componenti. IJsselmuiden et al. [25] hanno condotto studi sul massimo carico di instabilità utilizzando gli angoli di laminazione come parametri di progettazione ottenendo un aumento significativo del carico di instabilità dei pannelli VAT rispetto ai pannelli con lo stesso numero di strati ma con laminazione classica. Proprio con il fine di studiare la variabilità dei carichi critici con l'angolo delle fibre del laminato, dopo aver agito sul modello della struttura, il passo successivo in questo lavoro di tesi è stato un'analisi che vedeva come oggetto la variazione dei parametri caratteristici del composito, ovvero T0 e T1. Nel corso delle analisi riportate di seguito, questi parametri sono stati fatti variare di $\pm 20\,\mathrm{deg}$, ottenendo quindi i seguenti intervalli di variazione: $T0 = [25; 65]$ e $T1 = [40; 80]$. Tali parametri indicano l'inclinazione della fibra, misurata rispetto l'asse y, all'interno della cella elementare. Nella figura 4.21a è mostrata una schematizzazione di questo elemento.

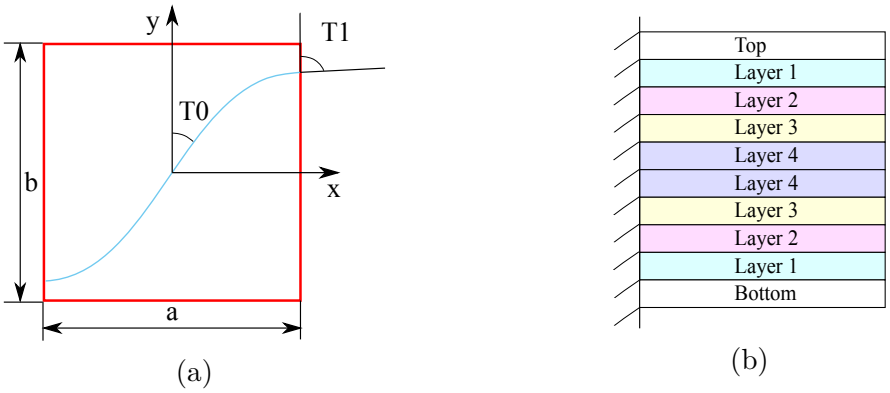


Figura 4.21: Cella elementare di un laminato VAT e nomenclatura adottata per gli strati di materiale

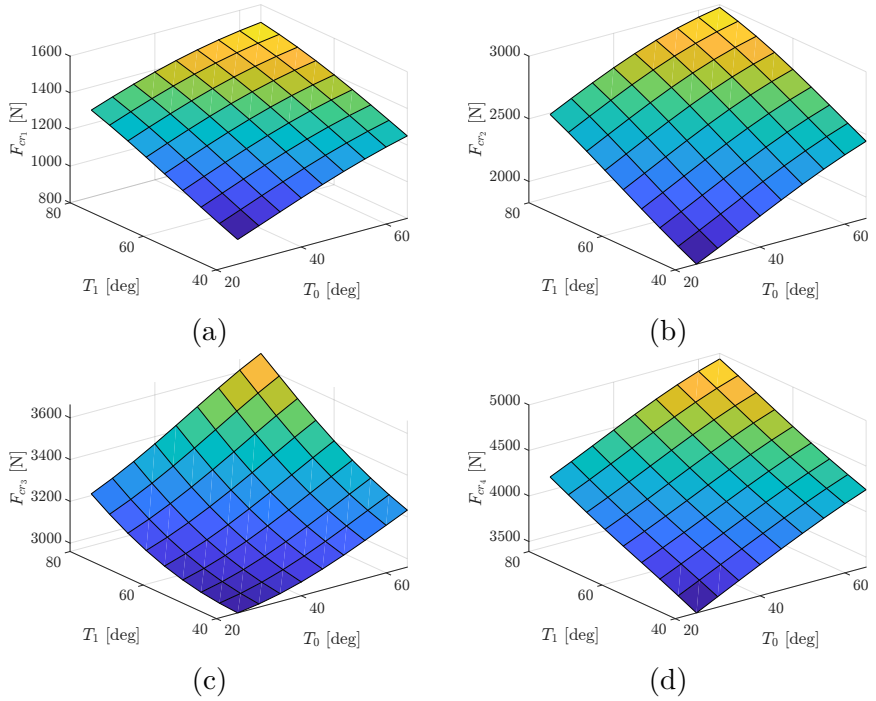


Figura 4.22: Carichi critici al variare dei parametri T0 e T1 nel primo layer

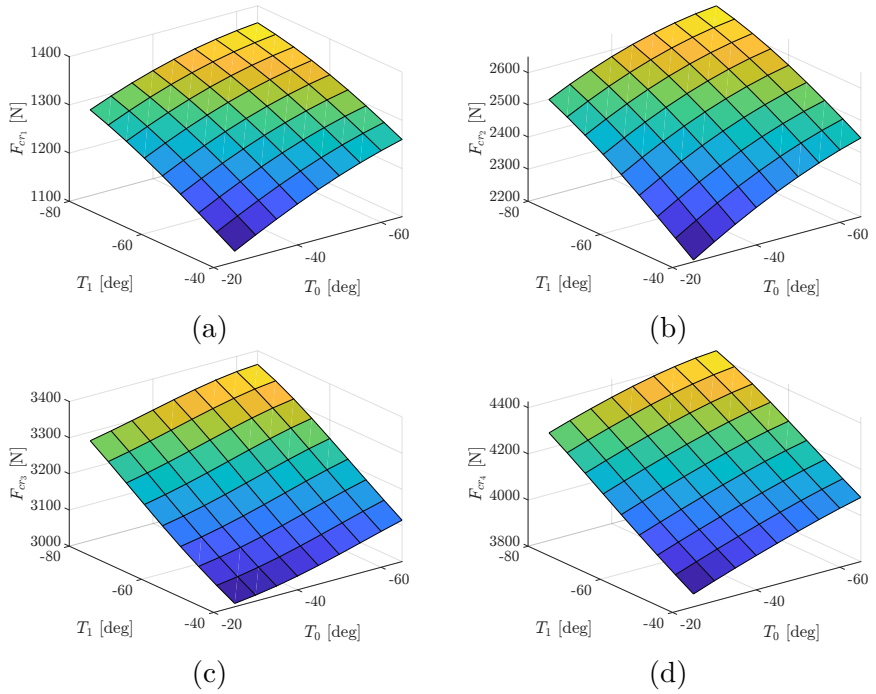


Figura 4.23: Carichi critici al variare dei parametri T0 e T1 nel secondo layer

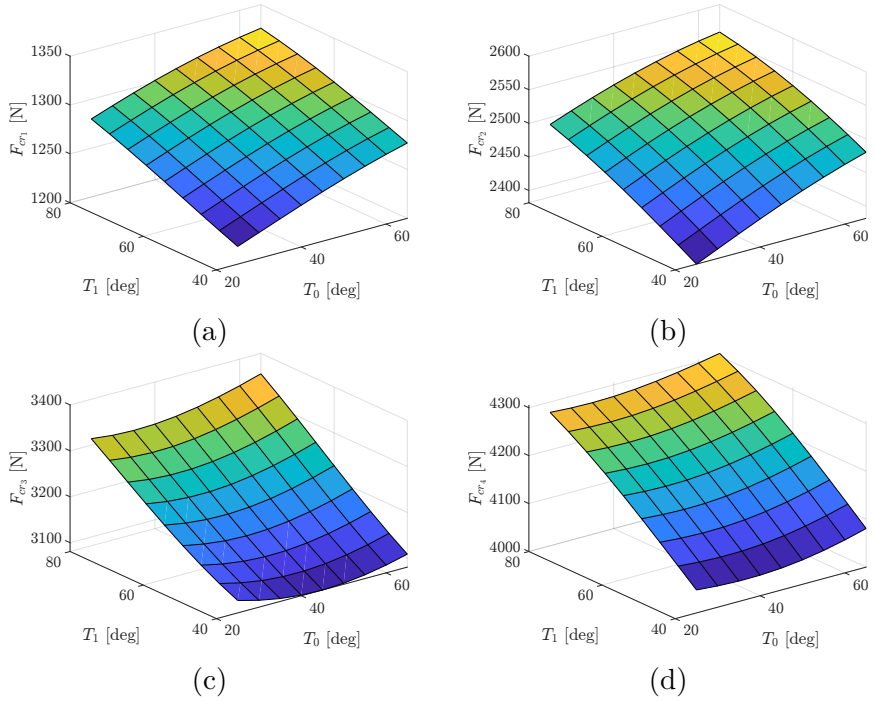


Figura 4.24: Carichi critici al variare dei parametri T0 e T1 nel terzo layer

T0 **T1**	**25** **40**	**45** **60**	**65** **80**
Load 1 [N]	934.29 (-27%)	1281.92	1503.47 (+17%)
Load 2 [N]	1830.32 (-26%)	2493.22	2978.33 (+19%)
Load 3 [N]	2959.74 (-7%)	3188.20	3661.54 (+15%)
Load 4 [N]	3389.95 (-19%)	4174.65	4939.38 (+18%)

Tabella 4.13: Variazioni massime ottenute modificando il primo layer e scostamento percentuale rispetto alla configurazione originale

I risultati grafici mostrano un notevole aumento dei carichi critici al crescere degli angoli caratteristici delle fibre all'interno del laminato VAT. Per comprendere meglio le effettive variazioni dei carichi sono riportate le tabelle 4.13, 4.14, 4.15 in cui, per brevità, sono mostrate le variazioni massime (che corrispondono agli estremi degli intervalli di variazione di T0 e T1) ottenute rispetto alla configurazione originale. Da una prima analisi dei risultati ottenuti con queste variazioni per il primo layer si hanno delle variazioni più significative, dell'ordine del 20%,

T0 **T1**	**-25** **-40**	**-45** **-60**	**-65** **-80**
Load 1 [N]	1122.26 (-12%)	1281.92	1364.94 (+6%)
Load 2 [N]	2206.04 (-11%)	2493.22	2649.97 (+6%)
Load 3 [N]	3009.17 (-5%)	3188.20	3362.22 (+5%)
Load 4 [N]	3855.31 (-7%)	4174.65	4426.55 (+6%)

Tabella 4.14: Variazioni massime ottenute modificando il secondo layer e scostamento percentuale rispetto alla configurazione originale

T0 **T1**	**25** **40**	**45** **60**	**65** **80**
Load 1 [N]	1218.13 (-5%)	1281.92	1325.90 (+3%)
Load 2 [N]	2381.89 (-4%)	2493.22	2559.18 (+2%)
Load 3 [N]	3107.92 (-2%)	3188.20	3355.59 (+5%)
Load 4 [N]	4047.82 (-3%)	4174.65	4305.88 (+3%)

Tabella 4.15: Variazioni massime ottenute modificando il terzo layer e scostamento percentuale rispetto alla configurazione originale

mentre per il secondo queste non superano mai il 10% e per il terzo si mantengono sotto il 5%. Per tale motivo si è ritenuto superfluo svolgere le analisi anche per il quarto layer.

4.4 Prove di trazione di piastre VAT

In questa ultima sezione verranno mostrati i risultati ottenuti dal confronto di alcune prove sperimentali di trazione con un modello numerico. Le prove di trazione sono state svolte nel Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino e la letteratura completa è raccolta in [12]. Nel dettaglio, la prova di trazione ha seguito una storia di carico riportata nella figura 4.25. In particolare, le analisi che verranno mostrate si riferiscono tutte allo step 1 per evitare tutte le non linearità che potrebbero sopraggiungere nello step 2 dovute alla natura intrinseca del materiale.

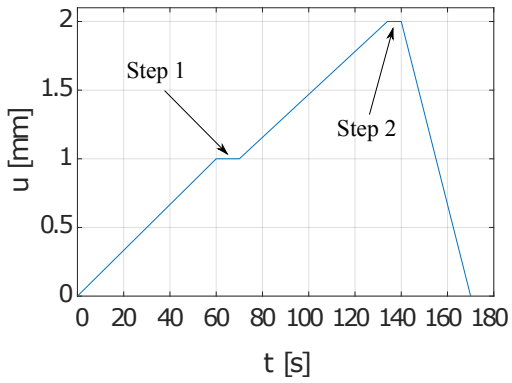


Figura 4.25: Storia di carico della trave

In entrambi i casi riportati ci si riferisce ad un composito Onyx-Kevlar, le cui proprietà sono riportate nella tabella 4.16

Materiale	Modulo di Young [GPa]	Modulo di Poisson	Modulo di taglio [GPa]	Densità $[\frac{g}{cm^3}]$
Kevlar	27.0	0.35	10.0	1.2
Onyx	2.4	0.3		1.2

Tabella 4.16: Proprietà dei materiali utilizzati

4.4.1 Piastra con laminato classico

La prima prova che è stata replicata numericamente ha come oggetto una piastra in laminato classico, simmetrico, 0/90 di dimensioni 78x25x3.2 mm la cui sequenza di laminazione è riportata nella figura 4.26.

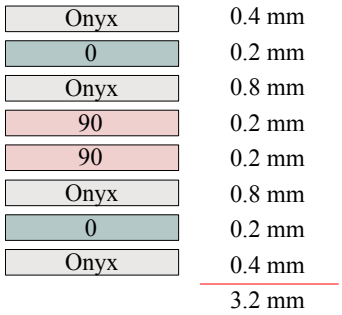


Figura 4.26: Stacking sequence del laminato classico 0/90

Per la modellizzazione di questa struttura è stata utilizzata una mesh 6B4 lungo l'asse della trave e 5x12Q9 nello spessore. Nella figura 4.27 possiamo vedere

la perfetta replica tra gli spostamenti ottenuti sperimentalmente lungo l'asse della trave e quelli ottenuti numericamente con un'elongazione complessiva della trave di circa 0.7 mm.

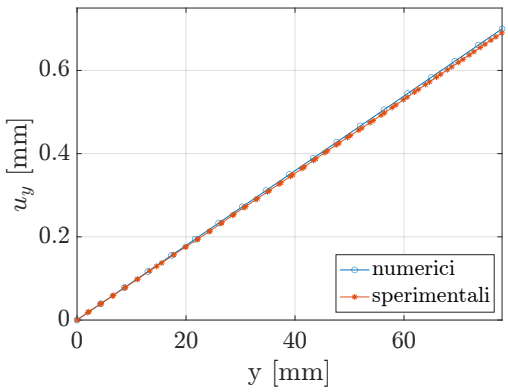
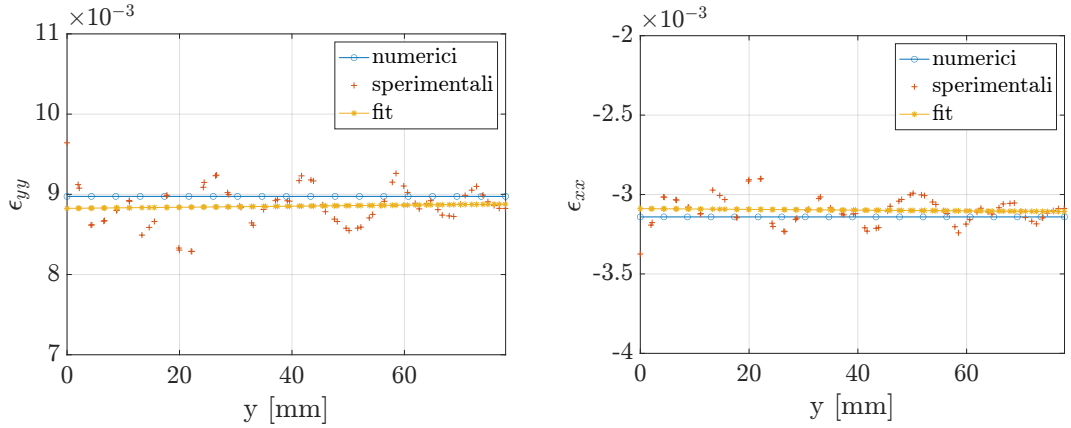


Figura 4.27: Elongazione della trave

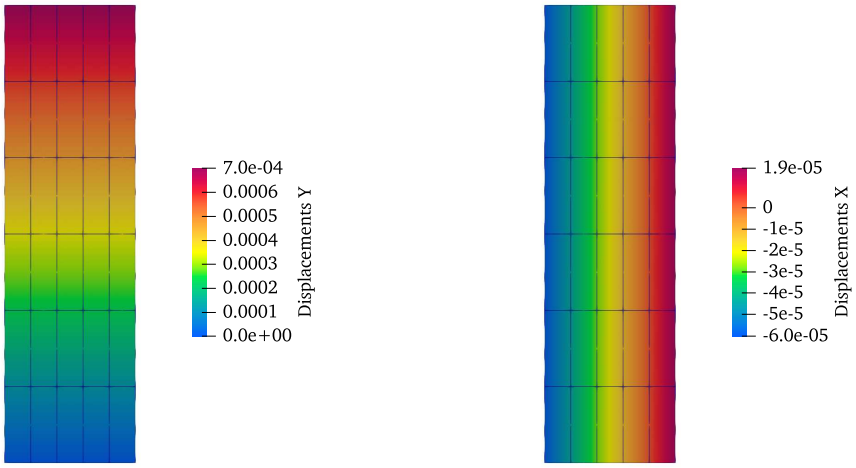
La trazione della struttura comporta delle deformazioni che sono raccolte nella figura 4.28. Anche in questo caso, troviamo una sovrapposizione quasi perfetta tra il modello numerico ed i risultati sperimentali. Per una migliore visualizzazione, viene mostrata un'interpolazione dei risultati sperimentali, in quanto le variazioni che si possono notare possono essere il risultato di lievi errori nel meccanismo di acquisizione; infatti, si può notare che la loro oscillazione è molto bassa rispetto al fit.



(a) (b)

Figura 4.28: Deformazioni su x e y lungo l'asse della trave

Per una migliore comprensione dei risultati, vengono mostrate anche due visualizzazioni della deformazione a cui è sottoposta la trave in seguito alla trazione. In particolare, si può notare, come accade fisicamente, che la trave si allunga lungo il suo asse e si restringe in larghezza.



(a) (b)

Figura 4.29: Displacement lungo le direzioni x ed y per un laminato classico

4.4.2 Piastra con laminato VAT

La seconda struttura su cui è stato condotto un confronto è caratterizzata da un laminato VAT che segue una sequenza di laminazione $[0 \pm < 0{,}45 >]_s$ ed ha dimensioni 94x25x3.2 mm la cui stacking sequence è riportata nella figura 4.30. Anche in questo caso si tratta di un composito Onyx-Kevlar, le cui proprietà sono riportate nella tabella 4.16.

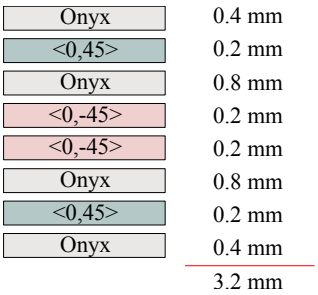
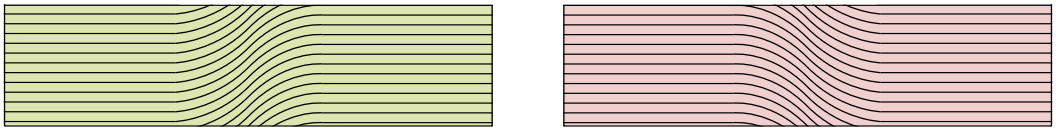


Figura 4.30: Stacking sequence del laminato VAT $[0 \pm < 0{,}45 >]_s$

Nella figura 4.31 sono riportate le schematizzazioni dei layers che compongono il laminato oggetto delle analisi.



(a) (b)

Figura 4.31: Layers del laminato VAT $[0 \pm < 0{,}45 >]_s$

Per la modellazione di questa struttura è stata utilizzata una mesh composta da 5x12Q9 nello spessore e da 20 elementi beam B4 lungo l'asse. Sebbene ciò comporti un notevole aumento dei DOFs e del costo computazionale, si è ritenuto necessario utilizzare questo numero di elementi per discretizzare meglio gli effetti reali che interessano la struttura. La figura 4.32 mostra l'allungamento della trave in seguito alla trazione. Ciò che risalta è la flessione della curva nella zona centrale della struttura. Tale fenomeno è dovuto alla configurazione interna del laminato; è in questa zona che si verifica la variazione dell'angolo delle fibre. Inoltre, si può notare che l'escursione di questa flessione ottenuta dai dati sperimentali è maggiore di quella ottenuta con i risultati numerici.

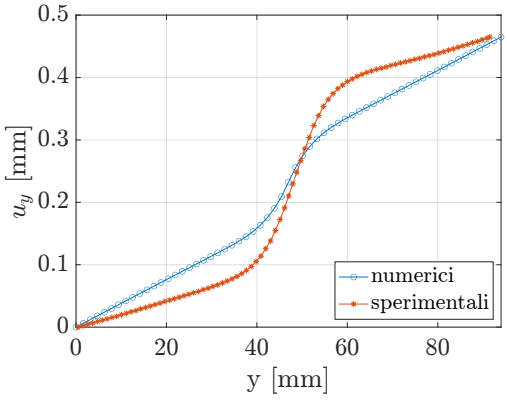
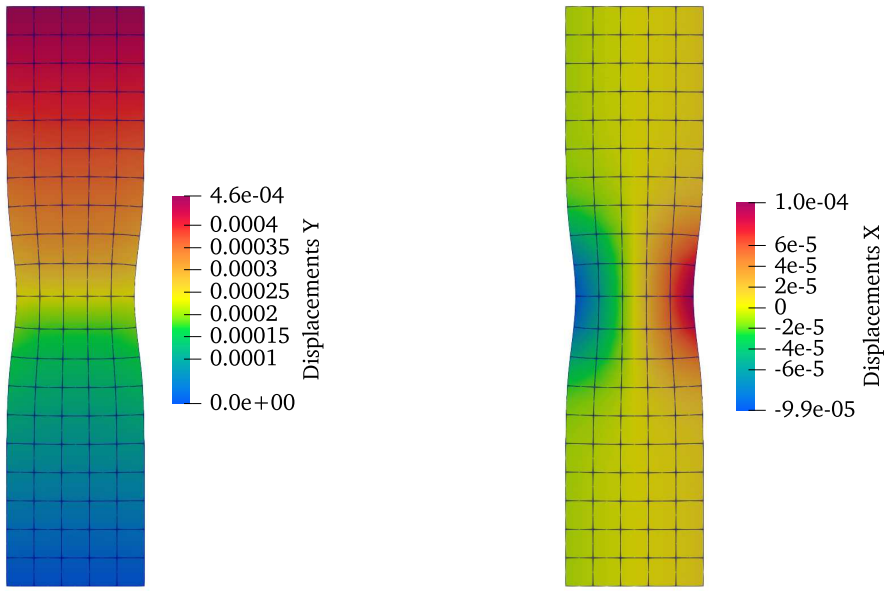


Figura 4.32: Elongazione della trave

Purtroppo, ciò è dovuto alla variabilità delle proprietà dei laminati VAT. Infatti,

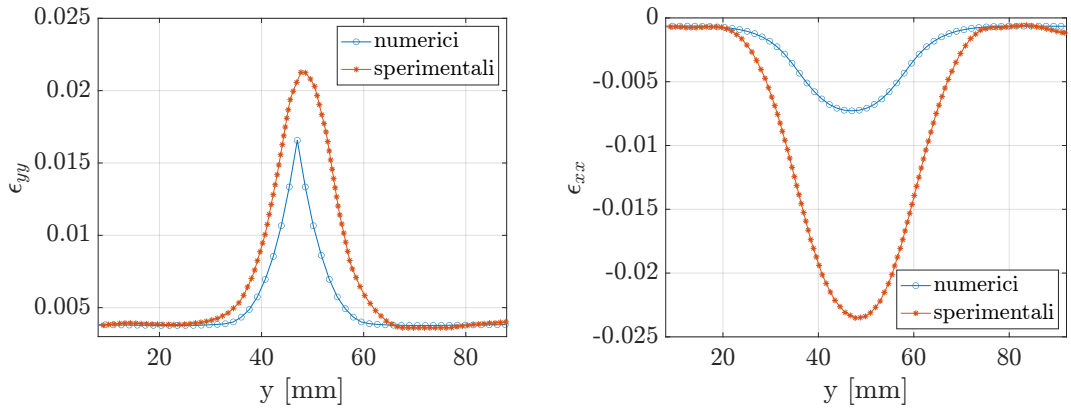
il parametro principale nell'intorno della zona centrale della trave è il coefficiente di Poisson, che per queste analisi è stato il risultato di un trade-off per la ricerca dell'ottimo. Nella figura 4.33 possiamo vedere che il modello numerico replica esattamente ciò che ci si aspetta da una prova di trazione, infatti il provino si allunga in direzione dell'asse principale e si restringe al centro.



(a) (b)

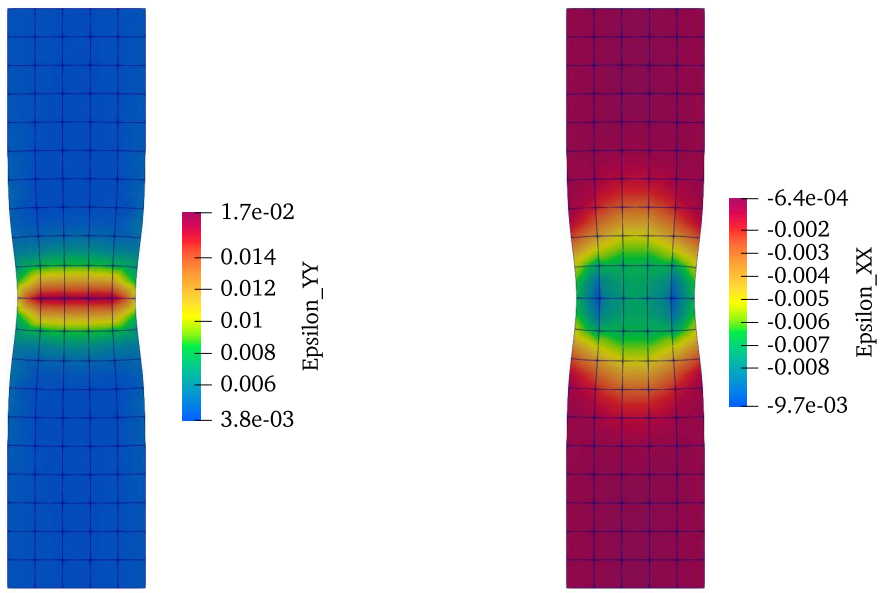
Figura 4.33: Displacement lungo le direzioni x ed y per un laminato VAT

Confrontando i risultati ottenuti numericamente, si nota che questi non corrispondono perfettamente ai valori ottenuti sperimentalmente. In particolare, nella figura 4.34 si notano dei valori delle deformazioni ϵ_{xx} e ϵ_{yy} più bassi in valore assoluto. Ciò è dovuto al fatto che il materiale utilizzato per la stampa dei provini, e quindi per la modellazione, non ha proprietà meccaniche note e questo influenza nella zona centrale della struttura dove si verifica la variabilità dell'angolo delle fibre. Nelle altre zone invece, dove il laminato è un laminato classico posto a zero gradi, il modello replica perfettamente i valori ottenuti sperimentalmente. Come già accennato precedentemente, per migliorare questo modello sarebbe opportuno effettuare dei test per la caratterizzazione meccanica di questi materiali in modo da ottenere dati più accurati in termini di modulo di Poisson.



(a) (b)

Figura 4.34: Deformazioni su x e y lungo l'asse della trave



(a) (b)

Figura 4.35: Deformazioni su x e y lungo l'asse della trave

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono stati utilizzati vari modelli basati sulla Carrera Unified Formulation (CUF) implementata attraverso il codice sviluppato dal Gruppo di Ricerca MUL^2 del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino. L'utilizzo di questa teoria permette di ottenere soluzioni bidimensionali (piastra e guscio) e monodimensionali (trave) utilizzando una notazione compatta ed esprimendo i campi di spostamento sulla sezione trasversale e lungo lo spessore con funzioni arbitrarie.

In particolare, si è lavorato alla ricerca di modelli in grado di simulare la risposta a varie configurazioni di carico di diverse tipologie di piastre realizzate con compositi innovativi in grado di offrire una rigidezza variabile nel composito grazie alla possibilità di poter progettare ad hoc il percorso delle fibre all'interno del laminato (Variable Stiffness Composite Laminate). Questi materiali costituiscono i cosiddetti compositi VAT con fibre ad angolo variabile (Variable Angle Tow), che combinano la possibilità di personalizzare le fibre con elevati rapporti resistenza-peso.

Per la validazione del modello sono stati analizzati alcuni casi ampiamente studiati in letteratura ottenendo risultati del tutto sovrapponibili. Il primo caso proponeva l'analisi di una piastra quadrata sottoposta a compressione, il secondo era un'analisi di free vibration di diverse configurazioni di laminati VAT. Infine, sono stati replicati con risultati soddisfacenti anche una serie di risultati ottenuti da prove di trazione sperimentali di un laminato composito. Se presenti, le eventuali differenze tra i risultati di riferimento e quelli presentati in questo lavoro sono dovute alla natura della formulazione utilizzata ed alla variabilità delle caratteristiche dei materiali impiegati.

Nel dettaglio, riguardo il caso studio adottato per questa tesi, dopo aver svolto svariate analisi di convergenza sulla mesh e sulle espansioni, è stato dimostrato che, a differenza di una formulazione Equivalent Single Layer (ESL), quando si impiega una formulazione Layer Wise (LW), si può garantire una stima più accurata dell'instabilità di laminati compositi. In conclusione, sulla base di un modello strutturale LW e con una mesh derivante da diverse analisi di convergenza, sono stati studiati anche gli effetti di diversi percorsi delle fibre sui carichi critici di un laminato VAT. I risultati confermano che un design appropriato dei laminati può essere utilizzato per migliorare le prestazioni rispetto ai carichi critici, ovvero per

ottenere soluzioni progettuali innovative.

Gli studi futuri potrebbero incentrarsi sul presentare strutture di varie forme con geometrie, carichi e condizioni al contorno diverse ed esplorare maggiormente l'influenza dei parametri T0 e T1 sulle risposte ai carichi di laminati a rigidità variabile. Inoltre, sarebbe opportuno provare ad effettuare una caratterizzazione meccanica del materiale utilizzato in configurazioni VAT al fine di conoscere le sue prestazioni in ambito di modellizzazione per effettuare delle previsioni precise del comportamento di tali laminati.

Bibliografia

[1] FDM (Fused Deposition Modeling) – Modellazione a deposizione fusa, shorturl.at/uxlo9.

[2] Uno studio fondamentale del processo di produzione additivo regolabile parametrico basato sul processo FDM, shorturl.at/dntoz.

[3] J. Aboudi, M.-J. Pindera, and S. M. Arnold. Linear thermoelastic higher-order theory for periodic multiphase materials. *Journal of Applied Mechanics*, 68 (5):697–707, feb 2001. doi: 10.1115/1.1381005. URL https://doi.org/10.1115%2F1.1381005.

[4] Jacob Aboudi. Micromechanical analysis of composites by the method of cells. *Applied Mechanics Reviews*, 42(7):193–221, jul 1989. doi: 10.1115/1.3152428. URL https://doi.org/10.1115%2F1.3152428.

[5] Hamed Akhavan and Pedro Ribeiro. Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers. *Composite Structures*, 93(11):3040–3047, oct 2011. doi: 10.1016/j.compstruct.2011.04.027. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compstruct.2011.04.027.

[6] Hayden T. Black, Mathias C. Celina, and James R. McElhanon. Additive manufacturing of polymers: Materials opportunities and emerging applications. doi: 10.2172/1561754. URL https://www.osti.gov/biblio/1561754.

[7] Adriana W. Blom, Claudio S. Lopes, Peter J. Kromwijk, Zafer Gurdal, and P.P. Camanho. A theoretical model to study the influence of tow-drop areas on the stiffness and strength of variable-stiffness laminates. *Journal of Composite*

Materials, 43(5):403–425, jan 2009. doi: 10.1177/0021998308097675. URL https://doi.org/10.1177%2F0021998308097675.

[8] E. Carrera and M. Filippi. Variable kinematic one-dimensional finite elements for the analysis of rotors made of composite materials. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 136(9), apr 2014. doi: 10.1115/1.4027192. URL https://doi.org/10.1115%2F1.4027192.

[9] E. Carrera and V. V. Zozulya. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. i. higher order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 29(6):773–795, aug 2020. doi: 10.1080/15376494.2020.1793241. URL https://doi.org/10.1080%2F15376494.2020.1793241.

[10] Erasmo Carrera, Maria Cinefra, Marco Petrolo, and Enrico Zappino. *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons, Nashville, TN, September 2014.

[11] Xiaodong Chen, Zhangming Wu, Guojun Nie, and Paul Weaver. Buckling analysis of variable angle tow composite plates with a through-the-width or an embedded rectangular delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 138:166–180, may 2018. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.01.010. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.ijsolstr.2018.01.010.

[12] Amerigo Ciliberti. Caratterizzazione numerica e sperimentale di strutture rinforzate con fibre curvilinee.

[13] Kaven Croft, Larry Lessard, Damiano Pasini, Mehdi Hojjati, Jihua Chen, and Ali Yousefpour. Experimental study of the effect of automated fiber placement induced defects on performance of composite laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 42(5):484–491, may 2011. doi: 10.1016/j.compositesa.2011.01.007. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compositesa.2011.01.007.

[14] A.G. de Miguel, A. Pagani, W. YU, and E. Carrera. Micromechanics modeling of unit cells using CUF beam models and the mechanics of structure genome. In *American Society for Composites 2017*. DEStech Publications,

Inc., nov 2017. doi: 10.12783/asc2017/15300. URL https://doi.org/10.12783%2Fasc2017%2F15300.

[15] Luciano Demasi, Giacomo Biagini, Federico Vannucci, Enrico Santarpia, and Rauno Cavallaro. Equivalent single layer, zig-zag, and layer wise theories for variable angle tow composites based on the generalized unified formulation. *Composite Structures*, 177:54–79, oct 2017. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.06.033. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compstruct.2017.06.033.

[16] L.B. Ilcewicz D.S. Cairns and T. Walker. Response of automated tow placed laminates to stress concentrations. , Third NASA Advanced Composites Technology Conference (ACT), 1993.

[17] O. Falcó, C.S. Lopes, F. Naya, F. Sket, P. Maimí, and J.A. Mayugo. Modelling and simulation of tow-drop effects arising from the manufacturing of steered-fibre composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 93:59–71, feb 2017. doi: 10.1016/j.compositesa.2016.11.015. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compositesa.2016.11.015.

[18] Kazem Fayazbakhsh, Mahdi Arian Nik, Damiano Pasini, and Larry Lessard. Defect layer method to capture effect of gaps and overlaps in variable stiffness laminates made by automated fiber placement. *Composite Structures*, 97:245–251, mar 2013. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.10.031. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compstruct.2012.10.031.

[19] Thiago A. M. Guimarães, Higor L. Silva, Domingos A. Rade, and Carlos E. S. Cesnik. Aeroelastic stability of conventional and tow-steered composite plates under stochastic fiber volume. *AIAA Journal*, 58(6):2748–2759, jun 2020. doi: 10.2514/1.j059106. URL https://doi.org/10.2514%2F1.j059106.

[20] Zafer Gurdal and Reynaldo Olmedo. In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations - variable stiffness concept. *AIAA Journal*, 31(4):751–758, apr 1993. doi: 10.2514/3.11613. URL https://doi.org/10.2514%2F3.11613.

[21] Zvi Hashin and B. Walter Rosen. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics*, 31(2):223–232, jun 1964. doi: 10.1115/1.3629590. URL `https://doi.org/10.1115%2F1.3629590`.

[22] Falk Heinecke and Christian Willberg. Manufacturing-induced imperfections in composite parts manufactured via automated fiber placement. *Journal of Composites Science*, 3(2):56, jun 2019. doi: 10.3390/jcs3020056. URL `https://doi.org/10.3390%2Fjcs3020056`.

[23] Carl T. Herakovich. Mechanics of composites: A historical review. *Mechanics Research Communications*, 41:1–20, apr 2012. doi: 10.1016/j.mechrescom.2012.01.006. URL `https://doi.org/10.1016%2Fj.mechrescom.2012.01.006`.

[24] M.W. Hyer and H.H. Lee. The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes. *Composite Structures*, 18(3):239–261, jan 1991. doi: 10.1016/0263-8223(91)90035-w. URL `https://doi.org/10.1016%2F0263-8223%2891%2990035-w`.

[25] Samuel T. IJsselmuiden, Mostafa M. Abdalla, and Zafer Gurdal. Optimization of variable-stiffness panels for maximum buckling load using lamination parameters. *AIAA Journal*, 48(1):134–143, jan 2010. doi: 10.2514/1.42490. URL `https://doi.org/10.2514%2F1.42490`.

[26] Byung Chul Kim, Kalyan Hazra, Paul Weaver, and Kevin Potter. Limitations of fibre placement techniques for variable angle tow composites and their process-induced defects. 08 2011.

[27] Christian Krombholz, Felix Kruse, and Martin Wiedemann. GroFi: Large-scale fiber placement research facility. *Journal of large-scale research facilities JLSRF*, 2, mar 2016. doi: 10.17815/jlsrf-2-93. URL `https://doi.org/10.17815%2Fjlsrf-2-93`.

[28] Patrick Tyler Langley. *Finite Element Modeling of Tow-Placed Variable-Stiffness Composite Laminates*. Master of science in engineering mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University.

[29] Shuguang Li, Elena Sitnikova, Yuning Liang, and Abdul-Salam Kaddour. The tsai-wu failure criterion rationalised in the context of UD composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 102:207–217, nov 2017. doi: 10.1016/j.compositesa.2017.08.007. URL `https://doi.org/10.1016%2Fj.compositesa.2017.08.007`.

[30] S Nagendra, Srinivas Kodiyalam, Jonathan Davis, and V Parthasarathy. Optimization of tow fiber paths for composite design. In *36th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, apr 1995. doi: 10.2514/6.1995-1275. URL `https://doi.org/10.2514%2F6.1995-1275`.

[31] August Noevere and Craig Collier. Mapping manufacturing data for stress analysis of automated fiber placement structures. In *2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, jan 2018. doi: 10.2514/6.2018-0228. URL `https://doi.org/10.2514%2F6.2018-0228`.

[32] A. Pagani and A. R. Sanchez-Majano. Influence of fiber misalignments on buckling performance of variable stiffness composites using layerwise models and random fields. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 29(3): 384–399, jun 2020. doi: 10.1080/15376494.2020.1771485. URL `https://doi.org/10.1080%2F15376494.2020.1771485`.

[33] A. Pagani and A.R. Sanchez-Majano. Stochastic stress analysis and failure onset of variable angle tow laminates affected by spatial fibre variations. *Composites Part C: Open Access*, 4:100091, mar 2021. doi: 10.1016/j.jcomc.2020.100091. URL `https://doi.org/10.1016%2Fj.jcomc.2020.100091`.

[34] Alfonso Pagani, Stefano Valvano, and Erasmo Carrera. Analysis of laminated composites and sandwich structures by variable-kinematic MITC9 plate elements. *Journal of Sandwich Structures &amp Materials*, 20(1):4–41, may 2016. doi: 10.1177/1099636216650988. URL `https://doi.org/10.1177%2F1099636216650988`.

[35] M. Paley and J. Aboudi. Micromechanical analysis of composites by the generalized cells model. *Mechanics of Materials*, 14(2):127–139, dec

1992. doi: 10.1016/0167-6636(92)90010-b. URL https://doi.org/10.1016%2F0167-6636%2892%2990010-b.

[36] M. Perner, S. Algermissen, R. Keimer, and H.P. Monner. Avoiding defects in manufacturing processes: A review for automated CFRP production. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 38:82–92, apr 2016. doi: 10.1016/j.rcim.2015.10.008. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.rcim.2015.10.008.

[37] Mohammad Rakhshbahar and Michael Sinapius. A novel approach: Combination of automated fiber placement (AFP) and additive layer manufacturing (ALM). *Journal of Composites Science*, 2(3):42, jul 2018. doi: 10.3390/jcs2030042. URL https://doi.org/10.3390%2Fjcs2030042.

[38] Carl Scarth, Sondipon Adhikari, Pedro Higino Cabral, Gustavo H.C. Silva, and Alex Pereira do Prado. Random field simulation over curved surfaces: Applications to computational structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 345:283–301, mar 2019. doi: 10.1016/j.cma.2018.10.026. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.cma.2018.10.026.

[39] C.T. Sun and R.S. Vaidya. Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology*, 56(2):171–179, jan 1996. doi: 10.1016/0266-3538(95)00141-7. URL https://doi.org/10.1016%2F0266-3538%2895%2900141-7.

[40] Simone Tarditi. Analisi global/local di pannelli sandwich in materiale composito.

[41] A. Viglietti, E. Zappino, and E. Carrera. Analysis of variable angle tow composites structures using variable kinematic models. *Composites Part B: Engineering*, 171:272–283, aug 2019. doi: 10.1016/j.compositesb.2019.03.072. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compositesb.2019.03.072.

[42] C. Waldhart, Z. Gurdal, and C. Ribbens. Analysis of tow placed, parallel fiber, variable stiffness laminates. In *37th Structure, Structural Dynamics and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, apr 1996. doi: 10.2514/6.1996-1569. URL https://doi.org/10.2514%2F6.1996-1569.

[43] Chun H. Wang and Cong N. Duong. Failure criteria. In *Bonded Joints and Repairs to Composite Airframe Structures*, pages 21–45. Elsevier, 2016. doi: 10.1016/b978-0-12-417153-4.00002-5. URL https://doi.org/10.1016%2Fb978-0-12-417153-4.00002-5.

[44] Todd O. Williams. A three-dimensional, higher-order, elasticity-based micromechanics model. *International Journal of Solids and Structures*, 42(3-4):971–1007, feb 2005. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.06.056. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.ijsolstr.2004.06.056.

[45] Zhangming Wu, Paul M. Weaver, Gangadharan Raju, and Byung Chul Kim. Buckling analysis and optimisation of variable angle tow composite plates. *Thin-Walled Structures*, 60:163–172, nov 2012. doi: 10.1016/j.tws.2012.07.008. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.tws.2012.07.008.

[46] Zhangming Wu, Gangadharan Raju, and Paul M. Weaver. Framework for the buckling optimization of variable-angle tow composite plates. *AIAA Journal*, 53(12):3788–3804, dec 2015. doi: 10.2514/1.j054029. URL https://doi.org/10.2514%2F1.j054029.

[47] Zhibo Xin, Yugang Duan, Wu Xu, Tianyu Zhang, and Ben Wang. Review of the mechanical performance of variable stiffness design fiber-reinforced composites. *Science and Engineering of Composite Materials*, 25(3):425–437, apr 2018. doi: 10.1515/secm-2016-0093. URL https://doi.org/10.1515%2Fsecm-2016-0093.

[48] Ignacio Sanchez Zarate. Uncertainty analysis of variable stiffness laminates.

[49] Xiao-Yi Zhou and P.D. Gosling. Towards an understanding of variations in the buckling of tailored variable angle tow composite plates. *Composite Structures*, 203:797–809, nov 2018. doi: 10.1016/j.compstruct.2018.07.061. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compstruct.2018.07.061.

[50] Xiao-Yi Zhou, Xin Ruan, and P.D. Gosling. Robust design optimization of variable angle tow composite plates for maximum buckling load in the presence of uncertainties. *Composite Structures*, 223:110985, sep 2019. doi:

10.1016/j.compstruct.2019.110985. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.compstruct.2019.110985.