

**POLITECNICO DI TORINO**

**INGEGNERIA MECCANICA**



**TESI DI LAUREA MAGISTRALE**

**Sviluppo di modelli di sistemi di sterzo  
servoassistiti con simulazione numerica  
della manovra di sterzata**

**RELATORI**

**Prof. ENRICO GALVAGNO**

**Prof. MAURO VELARDOCCHIA**

**CANDIDATO**

**ANTONINO COGNATA**

**AA 21/22**



# Sommario

I veicoli possono essere classificati attraverso due categorie per le loro modalità di controllo della traiettoria: veicoli guidati cinematicamente e dinamicamente. La traiettoria dei secondi viene determinata da un sistema di sterzo che variando l'angolo di deriva imprime sullo stesso veicolo le forze necessarie ad alterarne la traiettoria in curva. La coppia da applicare a questo sistema di sterzo è in costante aumento a causa dell'aumento del peso della vettura portato dal miglioramento per questioni di safety. Da ciò ne conseguono forze maggiori sviluppate tra lo pneumatico ed il suolo, e quindi per ridurre la coppia al volante applicata dal pilota vengono introdotti nel sistema di sterzo dei sistemi di servoassistenza di diversa tipologia (sia idraulica sia elettronica). Tali sistemi ricevono in input l'angolo di torsione della barra di torsione (collocata all'interno delle colonne di sterzo). Lo scopo di questo elaborato è la creazione di un modello Simulink dove vengono implementati diversi tipi di servosterzi con le relative analisi finali grazie agli output in uscita al termine delle simulazioni. Ciò è possibile a valle di un'analisi approfondita degli elementi che compongono il sistema di sterzo con rilevazione finale delle geometrie e delle proprietà fisiche. Un particolare focus è rivolto alla connessione delle colonne di sterzo per mezzo dei giunti cardanici e all'andamento del rapporto di trasmissione. Un altro sistema meccanico che viene analizzato è la sospensione. Infatti, la sua impostazione influisce sulle prestazioni del veicolo sia in curva sia nella fase di rilascio dello sterzo, come è possibile apprezzare con le modifiche effettuate sulle sue caratteristiche e con i relativi risultati dopo le simulazioni. L'insieme di tutti i sistemi descritti fornisce in output dal modello Simulink l'angolo di rotazione delle ruote frontali ma nei vari sottomodelli sono estratti tutte le grandezze che caratterizzano in particolare il sistema di sterzo ed in generale le grandezze cinematiche relative al veicolo. Per quanto concerne l'input è stata implementata la possibilità di procedere con un approccio Steer by angle o Steer by torque. La differenza dei due approcci si basa sul tipo di manovra che si vuole simulare: lo Steer by angle viene usato per simulare manovre lente in velocità dove in gioco vi sono alti valori di angolo di sterzo (es: manovra di parcheggio); invece lo Steer by torque è un approccio ideale per velocità alte e angoli di sterzo limitati (es: correzione del volante in rettilineo). Nella parte finale del documento è

presente la descrizione e l'analisi di un modello di sistema di sterzo semplificato. La soluzione della condizione di stabilità di quest'ultimo sistema può essere trovata in forma chiusa procedendo con un metodo esclusivamente analitico. Quindi segue un confronto tra i due sistemi di sterzo (semplificato lineare e complesso non lineare) così da verificare se è possibile applicare la condizione di stabilità analitica in modelli di sterzi automobilistici più articolati e realistici, ed entro quali limiti tale condizione è valida.

# Ringraziamenti

Mi è doveroso dedicare questo spazio del mio elaborato alle persone che hanno contribuito alla realizzazione dello stesso.

In primis, un sentito grazie al mio relatore Prof. Galvagno Enrico per la sua disponibilità, per la sua pazienza, per i suoi indispensabili consigli pratici, e soprattutto per la professionalità trasmessa durante i corsi. Grazie ancora per il materiale fornitomi utile alla stesura dell'elaborato.

Un ringraziamento anche al mio corelatore Prof. Velardocchia Mauro per tutte le conoscenze insegnatomi nel corso di "Meccanica del veicolo".

Un grazie al Prof. Sorli Massimo per avermi permesso di applicare attraverso il tirocinio curriculare un primo approccio totalmente pratico durante lo svolgimento dello stesso. I prossimi ringraziamenti vanno di diritto al dott. Bertolino Antonio e al dott. Gaidano Matteo per il costante supporto durante le attività di tirocinio. Grazie alle ore passate insieme ho sviluppato maggiormente la mia capacità di analisi e di problem solving.

Grazie a tutti gli amici per essere stati sempre presenti in questi cinque anni. Grazie per aver ascoltato i miei sfoghi, grazie per tutti i momenti di spensieratezza. Grazie a loro il peso degli studi è stato più lieve.

Un grazie a tutti i miei colleghi con cui ho condiviso l'intero percorso universitario. Grazie a voi ed ai vostri consigli per avermi aiutato nel superamento degli esami. Grazie per aver condiviso insieme a me questo periodo, per aver gioito insieme importanti traguardi. Senza di loro non ce l'avrei mai fatta! Essenziale per me il loro incoraggiamento, sin dall'inizio.

Non posso non menzionare la mia famiglia che da sempre mi sostiene nella realizzazione dei miei progetti. Non finirò mai di ringraziarla per avermi concesso l'opportunità di partire ed iniziare questo cammino. Mi è stata sempre accanto

con tanta pazienza affinché io potessi superare i momenti più difficili. Con la sua sconfinata fiducia ho affrontato al meglio i primi momenti di sconforto.

Grazie a tutte le persone menzionate. Questo percorso e questo progetto sono soltanto dedicati a loro e a mia nonna che non ha potuto essere accanto a me in questa fase della mia carriera ma che ha permesso in qualche modo che io arrivassi fin qui.



# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	IX
<b>Elenco delle figure</b>	X
<b>Glossario</b>	XVI
<b>1 Stato dell'arte</b>	1
1.1 Caratteristiche del meccanismo di sterzata . . . . .	1
1.2 Electronic Power System (EPS) . . . . .	2
1.3 Hydraulic power steering (HPS) . . . . .	3
1.4 La colonna di sterzo . . . . .	3
1.5 Sistemi di sterzo a rapporto variabile . . . . .	4
1.6 Sistemi 4WS a sterzata integrale . . . . .	5
<b>2 Sistema di sterzo</b>	7
2.1 Componenti del sistema di sterzo . . . . .	7
2.2 Modello meccanico . . . . .	13
2.2.1 Barra di torsione nella colonna inferiore . . . . .	16
2.2.2 Barra di torsione nella colonna superiore . . . . .	22
2.2.3 Analisi delle colonne di sterzo . . . . .	25
2.3 Modelli di servo-assistenza . . . . .	35
2.3.1 Modello di assistenza idraulica . . . . .	35
2.3.2 Modello di assistenza elettrica . . . . .	37
2.4 Parametri . . . . .	43
2.4.1 Parametri del modello meccanico . . . . .	43
2.4.2 Parametri del modello di assistenza idraulico . . . . .	44
2.4.3 Parametri del modello di assistenza elettrico . . . . .	44
<b>3 Asse di sterzo e tirante</b>	46
3.1 Momento attorno all'asse di sterzo della ruota destra . . . . .	49
3.2 Momento attorno all'asse di sterzo della ruota sinistra . . . . .	52

3.3	Forza sulla cremagliera . . . . .	55
3.4	Sterzata delle ruote . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Descrizione modello Simulink</b>	<b>63</b>
4.1	Layout complessivo . . . . .	63
4.1.1	Approccio Steer by Torque . . . . .	64
4.1.2	Approccio Steer by Angle . . . . .	64
4.2	Modello dello Sterzo e della Servoassistenza . . . . .	66
4.2.1	Modello meccanico . . . . .	66
4.3	Modello della Servoassistenza . . . . .	71
4.3.1	Modello EPS alla colonna . . . . .	71
4.3.2	Modello EPS al pignone . . . . .	74
4.3.3	Modello HPS . . . . .	76
4.4	Modello della Sospensione . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Risultati delle simulazioni</b>	<b>83</b>
5.1	Simulazioni con input di coppia . . . . .	83
5.1.1	Taratura dei sistemi di servosterzo . . . . .	84
5.1.2	Cremagliera . . . . .	86
5.1.3	Asse di sterzo . . . . .	89
5.1.4	Servosistema idraulico HPS . . . . .	91
5.1.5	Servosistema elettrici EPS . . . . .	95
5.1.6	Barra di torsione . . . . .	99
5.2	Simulazioni con input di angolo . . . . .	105
5.2.1	<i>Ramp steer</i> . . . . .	105
5.2.2	<i>Sine steer</i> . . . . .	107
5.2.3	<i>Sine sweep</i> . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Influenza del sistema di sterzo sulla dinamica del veicolo</b>	<b>122</b>
6.1	Modello del sistema di sterzo . . . . .	122
6.2	Angolo di sterzo imposto . . . . .	124
6.2.1	Modello Simulink Steer by angle . . . . .	127
6.3	Coppia di sterzo imposta . . . . .	130
6.3.1	Modello Simulink Steer by torque . . . . .	131
6.4	Confronto con il modello complesso non lineare . . . . .	137
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>149</b>

# Elenco delle tabelle

2.1	Angoli caratteristici degli alberi di sterzo visibili in fig. 2.22 . . . . .	27
2.2	Coefficienti della relazione 2.16 per $\lambda = \gamma = 0^\circ$ . . . . .	28
2.3	Dati della colonna di sterzo e della barra di torsione . . . . .	43
2.4	Dati della cremagliera . . . . .	43
2.5	Dati del modello di assistenza HSP . . . . .	44
2.6	Dati dei modelli EPS . . . . .	44
2.7	Dati del modello EPSapa soltanto . . . . .	45
3.1	Componenti longitudinali e trasversali del braccetto e del tirante . .	60
4.1	Parametri dell'asse di sterzo . . . . .	80
6.1	Parametri del modello semplificato <i>Steer by Angle</i> da [9] . . . . .	127
6.2	Parametri del modello semplificato <i>Steer by Torque</i> . . . . .	131
6.3	Parametri del modello complesso inseriti nel modello semplificato .	137

# Elenco delle figure

1.1	Schema del HPS presente in [2]	4
1.2	Geometria del sistema pignone-cremagliera da [4]	5
1.3	Sterzata in fase ed in controfase ad angolo dipendente	6
2.1	Colonna di sterzo presente in [4]	7
2.2	Smorzatore torsionale presente in [4]	8
2.3	Albero intermedio presente in [4]	8
2.4	Schema del collegamento tra gli alberi presente in [6]	9
2.5	Cremagliera in [4]	10
2.6	Sistema di sterzo in [4]	10
2.7	Barra di torsione con sensori magnetici in [4]	11
2.8	Collocazione superiore della barra di torsione in [4]	12
2.9	Collocazione inferiore della barra di torsione in [4]	12
2.10	Sistema di sterzo nel caso di barra di torsione nella colonna inferiore	14
2.11	Sistema di sterzo nel caso di barra di torsione nella colonna superiore	15
2.12	Diagramma di corpo libero della colonna superiore per barra di torsione inferiore	16
2.13	Diagramma di corpo libero della colonna inferiore comprendente la barra di torsione	17
2.14	Diagramma di corpo libero della cremagliera per barra di torsione inferiore	18
2.15	Caratteristica del momento di attrito applicato alla colonna superiore	20
2.16	Caratteristica del momento di attrito applicato alla barra di torsione	20
2.17	Caratteristica della forza di attrito applicata sulla cremagliera	21
2.18	Diagramma di corpo libero della colonna superiore comprendente la barra di torsione	22
2.19	Diagramma di corpo libero della colonna inferiore per barra di torsione superiore	23
2.20	Diagramma di corpo libero della cremagliera per barra di torsione superiore	24
2.21	Angoli caratteristici del sistema di sterzo presente in [4]	26

2.22	Geometria 2D delle colonne di sterzo . . . . .	27
2.23	Rapporto $\frac{\delta_{lc}}{\delta_{uc}}$ per $\beta_1 = 18.5^\circ$ , $\beta_2 = 10^\circ$ , $\lambda = 0^\circ$ , $\gamma = 0^\circ$ . . . . .	29
2.24	Sensività di $\lambda$ . . . . .	30
2.25	Sensività di $\gamma$ . . . . .	31
2.26	Tuning di $\lambda$ con $\beta_1 = \beta_2 = 10^\circ$ e $\gamma = 10^\circ$ . . . . .	32
2.27	Tuning di $\lambda$ con $\beta_1 = 18.5^\circ$ , $\beta_2 = 10^\circ$ e $\gamma = 10^\circ$ . . . . .	32
2.28	Tuning di $\lambda$ con $\beta_1 = 18.5^\circ$ , $\beta_2 = 10^\circ$ e $\gamma = 20^\circ$ . . . . .	33
2.29	Tuning di $\lambda$ con $\beta_1 = 18.5^\circ$ , $\beta_2 = 10^\circ$ e $\gamma = 30^\circ$ . . . . .	34
2.30	Tuning di $\lambda$ con $\beta_1 = 18.5^\circ$ , $\beta_2 = 10^\circ$ e $\gamma = 45^\circ$ . . . . .	34
2.31	Modello semplificato del cilindro pneumatico nel sistema di assistenza idraulica . . . . .	35
2.32	<i>Hydraulic boost curve</i> . . . . .	37
2.33	<i>Electrical boost curve</i> . . . . .	38
2.34	Disegno del meccanismo cinghia-sfere . . . . .	39
3.1	Asse della sterzata . . . . .	46
3.2	Sistemi di riferimento per angolo volante nullo . . . . .	48
3.3	Asse di sterzo in una sospensione McPherson . . . . .	48
3.4	Forza longitudinale nella ruota destra . . . . .	49
3.5	Forza trasversale nella ruota destra . . . . .	50
3.6	Forza verticale nella ruota destra . . . . .	50
3.7	Forza longitudinale nella ruota sinistra . . . . .	52
3.8	Forza trasversale nella ruota sinistra . . . . .	53
3.9	Forza verticale nella ruota sinistra . . . . .	53
3.10	Sistema di riferimento dell'asse di sterzo XYZ . . . . .	55
3.11	Diagramma di corpo libero dell'asse di sterzo . . . . .	56
3.12	Schema del tirante e del braccio di sterzo per ricavare il diagramma di corpo libero . . . . .	57
3.13	Diagramma di corpo libero del tirante (sx) e del braccio di sterzo (dx) . . . . .	57
3.14	Disegno del tirante e del braccetto . . . . .	58
3.15	Schema del tirante e del braccetto . . . . .	58
3.16	Andamento dell'angolo di sterzo $\delta$ nel tempo per valori di $y_r$ positivi . . . . .	61
3.17	Andamento dell'angolo di sterzo $\delta$ nel tempo per valori di $y_r$ negativi . . . . .	61
3.18	Andamento degli angoli della ruota interna ed esterna . . . . .	62
4.1	Layout generale del modello . . . . .	64
4.2	Controllo PID per modalità Steer By Angle . . . . .	65
4.3	I <i>Variant Subsystem</i> implementati . . . . .	66
4.4	Modello meccanico Parte 1 . . . . .	67
4.5	Equazione di equilibrio della colonna superiore . . . . .	67
4.6	Momento di torsione della colonna superiore . . . . .	68

4.7	Modello meccanico parte 2 . . . . .	69
4.8	Equazione di equilibrio della colonna inferiore . . . . .	69
4.9	Giunto cardanico . . . . .	70
4.10	Momento di torsione associato agli elementi elastici presenti nella colonna inferiore . . . . .	70
4.11	Equazione di equilibrio della cremagliera . . . . .	71
4.12	Modello EPSc alla colonna . . . . .	71
4.13	Momento fornito dal motore elettrico - <i>Electrical Boost Curve</i> (fig.2.33) + Eq.2.25 . . . . .	72
4.14	Equilibrio dell'albero motore - Eq.2.27 . . . . .	72
4.15	Momento relativo all'elasticità della cinghia - Eq.2.34 . . . . .	73
4.16	Rapporto di trasmissione - Eq.2.35 . . . . .	73
4.17	Modello EPSc al pignone . . . . .	74
4.18	Momento fornito dal motore elettrico - <i>Electrical Boost Curve</i> (fig.2.33) + Eq.2.25 . . . . .	74
4.19	Equilibrio dell'albero motore - Eq.2.27 . . . . .	75
4.20	Momento relativo all'elasticità della cinghia - Eq.2.32 . . . . .	75
4.21	Rapporto di trasmissione - Eq.2.33 . . . . .	75
4.22	Layout generale del modello HPS . . . . .	76
4.23	Hydraulic boost curve con impostazione della pressione stazionaria uguale a 1 bar . . . . .	76
4.24	Implementazione delle equazioni 2.21, 2.22 e 2.23 per ricavare la pressione impostata sulla camera di destra del cilindro . . . . .	77
4.25	Forza di attrito aggiuntiva dovuta agli attriti tra il pistone ed il cilindro . . . . .	77
4.26	Forza di assistenza derivante dal modello HPS - eq.2.24 . . . . .	77
4.27	Modello Sospensione . . . . .	78
4.28	Tirante destro . . . . .	79
4.29	Asse di sospensione - Eq.3.5, eq.3.6, eq.3.15 ed eq.3.18 . . . . .	81
4.30	Cremagliera - Eq.3.19 . . . . .	82
5.1	Momento di sterzo $M_S$ in input . . . . .	84
5.2	Angolo di rotazione delle ruote frontali . . . . .	85
5.3	Momento di sterzo $M_S$ con rilascio . . . . .	86
5.4	Forza $F_{rack}$ e spostamento $y_r$ . . . . .	87
5.5	Forza $F_{rack}$ e spostamento $y_r$ per velocità diverse . . . . .	88
5.6	Asse di sterzo SX . . . . .	89
5.7	Asse di sterzo DX . . . . .	89
5.8	Pressioni e portate nell'attuatore idraulico . . . . .	91
5.9	Forze dell'attuatore pneumatico . . . . .	92
5.10	Tuning dell'orifizio . . . . .	93

5.11	Sistema HPS con tuning dell'orifizio . . . . .	94
5.12	Forza di assistenza generata da EPSapa . . . . .	95
5.13	Momento di assistenza degli EPS nelle colonne e corrente elettrica dei tre sistemi EPS . . . . .	96
5.14	Rotazione e velocità angolare dell'albero motore . . . . .	97
5.15	Angolo di torsione della barra nei sistemi EPS . . . . .	98
5.16	Curve di sottosterzo con sensitività della rigidezza della barra di torsione . . . . .	99
5.17	Stati del motore elettrico con sensitività di $k_{tb}$ . . . . .	100
5.18	Rapporto di sterzo tra sterzo e ruota con sensitività di $k_{tb}$ . . . . .	101
5.19	Relazione tra angolo e momento del volante . . . . .	102
5.20	Momenti per barra di torsione superiore . . . . .	103
5.21	Momenti per barra di torsione inferiore . . . . .	103
5.22	Ramp steer input . . . . .	106
5.23	Andamento delle grandezze cinematiche per una manovra di Ramp steer . . . . .	106
5.24	Sine steer input . . . . .	107
5.25	Relazione tra $M_s$ e $\delta_s$ . . . . .	108
5.26	Grandezze cinematiche del veicolo durante la manovra di <i>sine steer</i> . . . . .	108
5.27	Relazione tra $M_s$ e $\delta_s$ con sensitività dei bracci a terra . . . . .	109
5.28	Guadagno e fase di $a_y$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 120$ km/h	111
5.29	Guadagno e fase di $\delta_F$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 120$ km/h	111
5.30	Guadagno e fase di $\beta$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 120$ km/h	112
5.31	Guadagno e fase di $\theta$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 120$ km/h	112
5.32	Guadagno e fase di $\dot{\psi}$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 120$ km/h	113
5.33	Guadagno e fase di $M_S$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 120$ km/h	113
5.34	Guadagno e fase di $a_Y$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 60 - 120$ km/h . . . . .	114
5.35	Guadagno e fase di $\delta_F$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 60 - 120$ km/h . . . . .	115
5.36	Guadagno e fase di $\beta$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 60 - 120$ km/h . . . . .	115
5.37	Guadagno e fase di $\theta$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 60 - 120$ km/h . . . . .	116
5.38	Guadagno e fase di $\dot{\psi}$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 60 - 120$ km/h . . . . .	116
5.39	Guadagno e fase di $M_S$ rispetto a $\delta_S$ con $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$ e $V = 60 - 120$ km/h . . . . .	117
5.40	Funzione di coerenza - $a_y$ . . . . .	118
5.41	Funzione di coerenza - $\delta_F$ . . . . .	119
5.42	Funzione di coerenza - $M_s$ . . . . .	119

5.43	Funzione di coerenza - $\beta$ . . . . .	120
5.44	Funzione di coerenza - $\theta$ . . . . .	120
5.45	Funzione di coerenza - $\psi_P$ . . . . .	121
6.1	Modello del sistema di sterzo . . . . .	123
6.2	Schema a blocchi per il modello con angolo imposto . . . . .	127
6.3	Variazione del braccio $\epsilon$ . . . . .	128
6.4	Variazione della rigidezza $k_c$ . . . . .	128
6.5	Schema a blocchi per il modello con coppia imposta . . . . .	131
6.6	Rilascio dello sterzo al variare della velocità del veicolo . . . . .	132
6.7	Andamento dell'angolo di sterzo nella fase di rilascio per $V = 50$ km/h	133
6.8	Andamento dell'angolo di sterzo nella fase di rilascio per $V = 75$ km/h	133
6.9	Andamento dell'angolo di sterzo nella fase di rilascio per $V = 75$ e 76 km/h . . . . .	134
6.10	Rilascio dello sterzo al variare della coppia volante ( $V = 50$ km/h, $\epsilon$ $= 40$ mm) . . . . .	135
6.11	Rilascio dello sterzo al variare della coppia volante nella condizione di instabilità ( $V = 76$ km/h, $\epsilon = 20$ mm) . . . . .	135
6.12	Velocità critiche al variare di $\epsilon$ . . . . .	136
6.13	Velocità critiche al variare di $\epsilon$ per la condizione di stabilità complessa con i parametri usati nel primo modello lineare . . . . .	140
6.14	Velocità critiche al variare di $\epsilon$ per la condizione di stabilità complessa con i parametri caratteristici del modello complesso . . . . .	141
6.15	Andamento nel tempo dell'angolo di sterzo del modello non lineare per la verifica del grafico di stabilità al variare della velocità . . . . .	142
6.16	Andamento nel tempo dell'angolo di sterzo del modello non lineare per la verifica del grafico di stabilità al variare del braccio longitudinale	143
6.17	Angolo di rotazione anteriore per $V = 100$ km/h e $b_l = 35$ mm . . . . .	144
6.18	Angolo di rotazione anteriore per $V = 150$ km/h e $b_l = 5$ mm . . . . .	144
6.19	Input per il confronto tra i due modelli . . . . .	146



# Glossario

$a$	Semipasso anteriore [ $m$ ]
$\alpha$	Angolo di deriva [ $rad$ ]
$A$	Area [ $m^2$ ]
$B$	Coefficiente di attrito viscoso nel motore elettrico [ $N \cdot m \cdot s$ ]
$b$	Braccio a terra [ $m$ ] - Semipasso posteriore [ $m$ ]
$\beta$	Modulo di compressibilità dell'olio [ $N/m^2$ ] - Angolo di assetto del veicolo [ $rad$ ]
$\dot{\beta}$	Velocità di assetto del veicolo [ $rad/s$ ]
$\beta_1, \beta_2$	Angoli formati dagli alberi in ingresso ed uscita dei giunti di Cardano [ $rad$ ]
$C$	Rigidezza di deriva [ $N \cdot m/rad$ ]
$C_e$	Coefficiente di efflusso [/]
$\delta$	Spostamento angolare [ $rad$ ]

$\dot{\delta}$	Velocità angolare [ $rad/s$ ]
$\ddot{\delta}$	Accelerazione angolare [ $rad/s^2$ ]
$d$	Coefficiente di smorzamento [ $N \cdot s/m$ ] - Distanza [ $m$ ]
$e$	Distanza longitudinale tra la cremagliera e l'asse di sterzo [ $m$ ] - Parametro di rigidità [/]
$\epsilon$	Braccio a terra longitudinale totale [ $m$ ]
$F$	Forza [ $N$ ]
$\gamma$	Angolo formato dai piani dei giunti [ $rad$ ]
$I$	Rapporto di trasmissione [ $m/rad$ ] o [/]
$i$	Corrente elettrica [ $A$ ]
$J$	Momento di inerzia [ $kg \cdot m^2$ ]
$k_{ESF}$	Rigidità dell'attrito molla-esponenziale [ $N \cdot m/rad$ o $N/m$ ]
$k_t$	Costante di coppia del motore elettrico [ $N \cdot m/A$ ]
$L$	Passo del veicolo [ $m$ ]
$l$	Lunghezza del tirante di sterzo [ $m$ ]

$\lambda$	Sfasamento angolare tra le forcelle dei giunti [ <i>rad</i> ] - Angolo di incidenza trasversale [ <i>rad</i> ]
$M$	Coppia [ <i>N · m</i> ]
$m$	Massa [ <i>kg</i> ]
$\nu$	Angolo di incidenza longitudinale [ <i>rad</i> ]
$\omega$	Frequenza [ <i>rad/s</i> ]
$p$	Pressione [ <i>bar</i> ]
$\phi$	Angolo di rotazione del braccetto di sterzo attorno all'asse di sterzo [ <i>rad</i> ]
$Q$	Portata [ <i>m<sup>3</sup>/s</i> ]
$r$	Lunghezza del braccetto di sterzo [ <i>m</i> ] - Velocità di imbardata del veicolo [ <i>rad/s</i> ]
$\rho$	Densità dell'olio [ <i>kg/m<sup>3</sup></i> ]
$\theta$	Angolo di rotazione del tirante [ <i>rad</i> ]
$V$	Volume [ <i>m<sup>3</sup></i> ] - Velocità del veicolo [ <i>m/s<sup>2</sup></i> ]
$y$	Spostamento lineare in direzione trasversale al veicolo [ <i>m</i> ]

$\dot{y}$

Velocità lineare [ $m/s$ ]

$\ddot{y}$

Accelerazione lineare [ $m/s^2$ ]

**bn**

Ball nut

**c**

Colonna

**EPS**

Electronic Power System

**EPSapa**

Electronic Power System Axial PARallel drive

**EPSc**

Electronic Power System at Column

**EPSp**

Electronic Power System at Pinion

**ESF**

Exponential Spring Friction

**F**

Friction

**f**

Frontale

**4WS**

Four Wheel Steering

**HPS**

Hydraulic Power System

## **KGT**

Codice del sistema vite-madrevite nel EPSapa

**l**

Longitudinale

**lc**

Lower Column

**lim**

Limite

**p**

Pignone

**r**

Rack

**s**

Sterzo

**SA**

Steering Arm

**t**

Trasversale

**tb**

Torsion Bar

**uc**

Upper Column

**v**

Volante

# Capitolo 1

## Stato dell'arte

### 1.1 Caratteristiche del meccanismo di sterzata

La costante crescita per migliorare la sicurezza ha portato ad un aumento di massa generale in tutti i segmenti di auto, nonostante l'applicazione di materiali leggeri e il design mirato alla diminuzione del peso. Questo aumento di massa ha incrementato le forze sviluppate tra i pneumatici e il suolo e, di conseguenza, anche la coppia da applicare direttamente allo sterzo. La riduzione della coppia al volante fino a livelli ergonomicamente accettabili è stato ottenuto applicando dei sistemi di servoassistenza ai già esistenti sistemi meccanici. La servoassistenza più utilizzata in passato è stata quella idraulica, a volte integrata da dispositivi elettroidraulici. Tali sistemi idraulici agiscono direttamente sulla cremagliera. Invece l'assistenza puramente elettrica sta cominciando ad essere applicata alle auto di piccole e medie dimensioni e ai veicoli elettrici e ibridi [1].

I parametri che caratterizzano il meccanismo di sterzata del veicolo sono: la coppia allo sterzo, la risposta al gradino, la precisione, il mantenimento della corsia e il ritorno dello sterzo [2].

- La coppia allo sterzo da applicare dipende dalla geometria della sospensione anteriore, dagli pneumatici (dimensioni, pressione, ecc.), dal rapporto di trasmissione dello sterzo e, ovviamente, dall'effetto del servosterzo attivo. Un volante ideale dovrebbe essere leggero quando il veicolo è fermo o manovra a bassa velocità ma reagire con una coppia proporzionale al grip laterale dello pneumatico a velocità più elevate. Per questo motivo sarebbe sbagliato ridurre la coppia sul volante il più possibile perché ciò potrebbe compromettere gravemente la sensibilità del guidatore nelle manovre ad alta velocità.
- La risposta al gradino indica la risposta in curva del veicolo a improvvisi input di sterzata. Il tempo trascorso tra l'angolo di picco dello sterzo e l'accelerazione

laterale massima viene misurato quando si applica un input di gradino al volante: più breve è il tempo e più reattivo è il sistema di sterzo.

- La precisione dipende da come il veicolo può essere guidato su una curva a raggio costante senza bisogno di correzioni, anche in presenza di dossi stradali.
- Il mantenimento della corsia è la capacità del sistema di sterzo di mantenere un percorso rettilineo senza correzioni frequenti, anche con dossi stradali. La precisione e il mantenimento della corsia sono correlati alla geometria della sospensione (adeguate variazioni dell'angolo di convergenza possono contrastare la spinta laterale causata da dossi), agli attriti nel meccanismo dello sterzo e ai giochi nei tiranti dello sterzo.
- Il ritorno dello sterzo è la capacità delle ruote di ritornare spontaneamente nella posizione iniziale mentre il veicolo è in movimento; dipende dal rapporto di trasmissione dello sterzo, dall'attrito e angoli caratteristici della sospensione anteriore.

## 1.2 Electronic Power System (EPS)

I sistemi di servosterzo elettrico EPS sono molto diffusi ai giorni d'oggi. Operano tramite un motore elettrico che aggiunge una coppia alla colonna dello sterzo o direttamente al pignone nella scatola dello sterzo oppure una forza di assistenza sulla cremagliera. Il motore elettrico è azionato da un controller elettronico che ha la funzione di generare una coppia o una forza proporzionale alla coppia applicata allo sterzo. Il controllo del sistema include sensori in grado di misurare la coppia sterzante, la velocità del veicolo, la velocità della sterzata e l'angolo delle ruote. Questi dati vengono utilizzati per calcolare la coppia ottimale che deve essere applicata dal motore. L'assistenza è aumentata laddove vi sono ampi angoli di sterzata, tipici di manovre di parcheggio e di traiettorie con curve strette, dove la velocità di azionamento è quindi più importante della sensibilità. Questa coppia ottimale viene applicata nella direzione corretta, data dall'angolo di sterzata acquisito. Il motore è una semplice unità a corrente continua con magneti permanenti, il quale guida una scatola di ingranaggi. Questo sistema presenta una serie di vantaggi rispetto ad un convenzionale unità idraulica [2]:

- viene eliminata la circolazione dell'olio, con la conseguente semplificazione del layout del compartimento del motore;
- la sicurezza attiva è aumentata, perché l'assistenza è disponibile anche quando il motore di propulsione si blocca o è spento;
- esiste la possibilità di progettare un controllo di coppia più sofisticato rispetto ai sistemi idraulici.

### 1.3 Hydraulic power steering (HPS)

Questi sistemi sfruttano la pressione di un flusso d'olio generato da una pompa azionata dal motore che deve sempre poter funzionare. Per questo motivo, se il motore a combustione interna deve essere arrestato di tanto in tanto, come nei veicoli ibridi o quando si utilizzano dei dispositivi di avviamento e di arresto del consumo di carburante, si preferisce adottare il servosterzo elettrico.

Il sistema comprende un serbatoio di olio e una pompa azionata dalla cinghia del motore. Uno scambiatore di calore è compreso anche nel circuito idraulico per il raffreddamento: un inadeguato raffreddamento può consentire all'olio di avvicinarsi al punto di ebollizione, con scarsa efficienza e pericolo di cavitazione. A causa delle valvole di strozzamento e di altre perdite del circuito, questo sistema presenta alcune proprietà di smorzamento, con benefici sul ritorno del volante e sulle vibrazioni. E' un sistema relativamente semplice, ma ha un impatto negativo sul consumo di carburante; per limitare questo effetto negativo, sono stati sviluppati alcuni sistemi nei quali la pompa dell'olio è azionata da un motore elettrico e alimenta un accumulatore di pressione. Questo sistema ha anche il vantaggio di consentire un'installazione più flessibile della pompa in vani motore di piccole auto con problemi di spazio ma ha avuto una vita più breve ed è stata abbandonata a favore di impianti elettrici più semplici. Come mostrato in figura 1.1, un cilindro idraulico a doppio effetto è integrato nella scatola sterzo per spostare la cremagliera. M e R sono le luci di ingresso del flusso dell'olio, il quale esce per andare nella camera S o D per spostare il cassetto e assistere la sterzata verso sinistra o destra. La forza di pressione è aggiunta a quelle applicate alla cremagliera dal volante e dalla forza agente dalle sospensioni anteriori [2].

### 1.4 La colonna di sterzo

La colonna di sterzo non è unica e non giace nemmeno sullo stesso asse, ma è divisa in tre parti: la colonna superiore, la colonna inferiore e l'albero intermedio. Tale sistema nasce dai vincoli degli ingombri che non permettono in qualsiasi vettura di avere una disposizione lineare. Quindi per collegare i tre alberi si usano due giunti cardanici con un layout complessivo che deve garantire una trasmissione di velocità costante: gli alberi devono giacere nello stesso piano.

Inoltre la posizione inclinata dell'albero intermedio è funzionale anche per una questione di sicurezza. Difatti, tale configurazione permette allo sterzo di non arretrare dentro l'abitacolo in caso di incidenti stradali violenti [3].

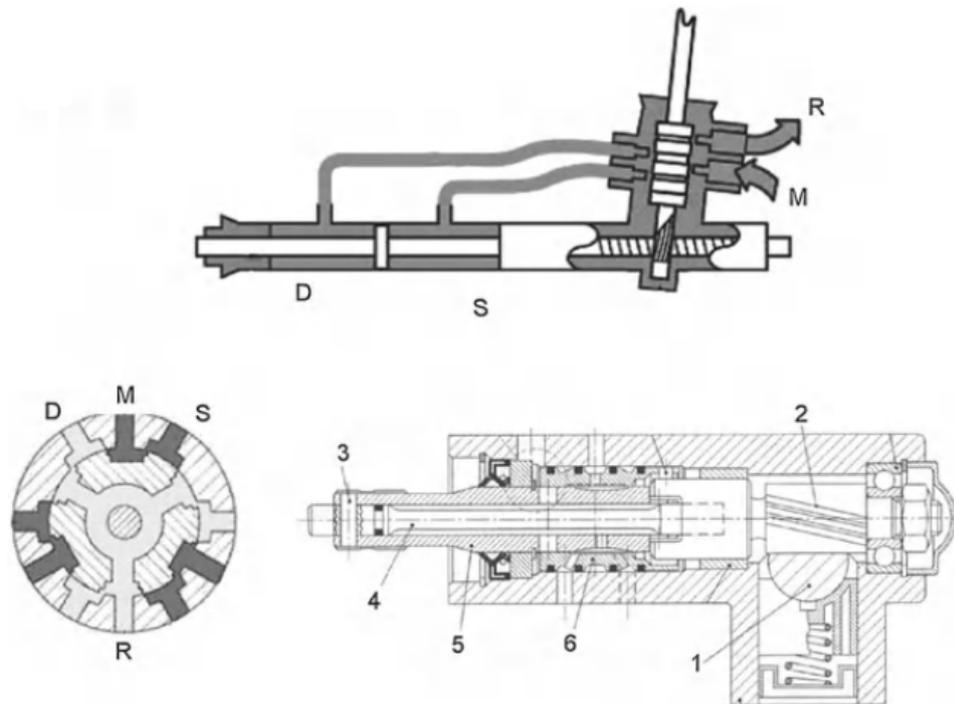


Figura 1.1: Schema del HPS presente in [2]

## 1.5 Sistemi di sterzo a rapporto variabile

La maggior parte delle autovetture integra un sistema di sterzo che nella parte inferiore presenta un meccanismo cremagliera-pignone. Questo offre un'ottima efficienza meccanica, grazie ad un'usura limitata sui fianchi dei denti, che permette al guidatore di avere un buon feeling delle forze esercitate sulla ruota poiché la coppia di spunto sullo sterzo viene ridotta notevolmente.

La geometria del sistema di sterzo influisce sul rapporto di trasmissione ma il raggio primitivo del pignone ha un peso specifico maggiore.

Uno svantaggio di tale applicazione è il limitato rapporto di trasmissione che non può crescere ulteriormente a causa della dimensione dei denti. La dimensione del pignone segue la seguente relazione [3]:

$$d = d_b / \cos \theta \quad (1.1)$$

Dove:

- $\theta$ , l'angolo di pressione dell'utensile da taglio che genera il dente;
- $d$ , il diametro primitivo del pignone;

- $d_b$ , il diametro base del pignone.

Diminuendo l'angolo di pressione dei denti della cremagliera è possibile aumentare il raggio primitivo all'aumentare dell'angolo di sterzo: l'angolo di pressione minimo si troverà nei denti ove i valori di angolo di sterzo sono elevati. Da ciò si ricava un controllo di sterzo immediato ad alte velocità (angoli di sterzo piccoli) e una riduzione della coppia di sterzo durante le manovre di parcheggio (angoli di sterzo grandi). La figura 1.2 mostra come le dimensioni del diametro primitivo del pignone  $d_i$  crescono proporzionalmente con l'aumento del passo tangenziale  $p_{t_i}$  della cremagliera causando un aumento del guadagno tra spostamento della cremagliera e angolo di rotazione del pignone.

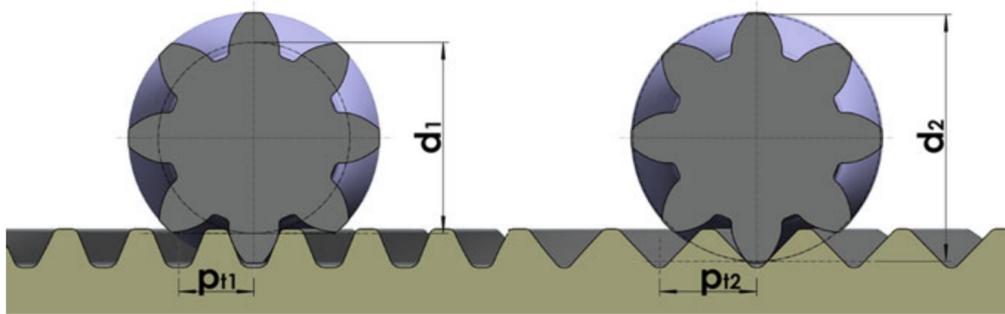


Figura 1.2: Geometria del sistema pignone-cremagliera da [4]

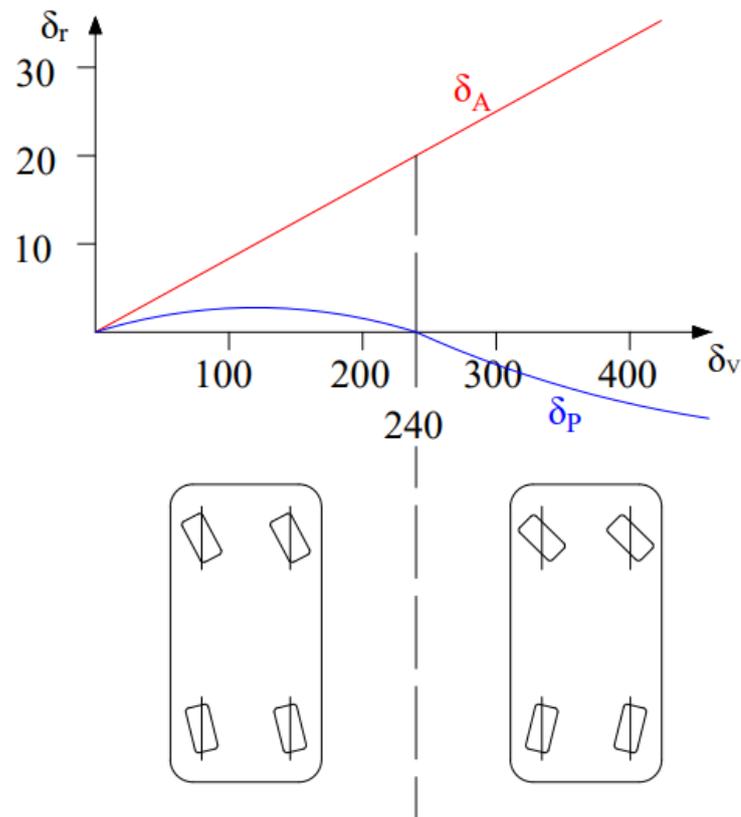
## 1.6 Sistemi 4WS a sterzata integrale

La dinamica di un veicolo può essere migliorata (diminuendo i transitori e aumentando la precisione nel seguire una traiettoria) attraverso dei sistemi di controllo. Un esempio è l'applicazione dei sistemi di controllo per aggiungere o togliere angoli di sterzo al veicolo nei sistemi 4WS, quattro ruote sterzanti. Quest'ultimi sistemi agiscono in funzione di vari parametri: l'angolo di sterzo frontale, la velocità del veicolo, la velocità di imbardata e l'accelerazione laterale.

L'aggiunta della sterzata posteriore con angoli opposti rispetto a quelli della sterzata frontale permette una migliore manovrabilità a basse velocità poiché si riduce il raggio di curvatura. Invece, ad alte velocità il vantaggio è l'incremento di stabilità applicando angoli di sterzo posteriori concordi con gli angoli di sterzo frontali: la velocità di imbardata diminuisce così come la velocità di assetto. Tra i diversi tipi di sistemi 4WS i più semplici sono quelli ad *angolo dipendente* oppure a *velocità dipendente*. Nei primi l'angolo di sterzo posteriore è funzione di quello anteriore: quando questo supera una certa soglia (tra i  $200^\circ$  e i  $250^\circ$ ), allora l'angolo di sterzo posteriore cambia di segno per agevolare le manovre a bassa velocità.

Invece, nei secondi l'angolo di sterzo posteriore è funzione anche della velocità attraverso un coefficiente che moltiplica l'angolo di sterzo anteriore [3].

Nell'immagine in figura 1.3 sono mostrate in modo qualitativo una sterzata in fase ed una in controfase ad angolo dipendente. Difatti è possibile notare che dopo i  $240^\circ$  di angolo al volante le ruote posteriori ruotano in controfase rispetto a quelle anteriori mentre per angoli inferiori le ruote dell'assale posteriore ed anteriori sono in fase. La curva rossa rappresenta un andamento qualitativo dell'angolo di rotazione delle ruote anteriori ( $\delta_A$ ) e quella blu invece è relative alle ruote posteriore ( $\delta_P$ ). Sull'asse delle ascisse vi è  $\delta_V$ , angolo al volante, e sulle ordinate  $\delta_r$ , angolo di rotazione delle ruote. Tutti gli angoli sono riportati con l'unità dei gradi.



**Figura 1.3:** Sterzata in fase ed in controfase ad angolo dipendente

# Capitolo 2

## Sistema di sterzo

Il modello di sterzo Pfeffer [5] che viene preso come riferimento per la costruzione successiva del modello in Simulink prevede a sua volta due modelli, uno meccanico relativo alle parti meccaniche del sistema di sterzo e uno di assistenza utile alla generazione dell'assistenza di tipo idraulica (HPS) o di tipo elettrica (EPS).

### 2.1 Componenti del sistema di sterzo

Prima di analizzare il modello meccanico è opportuno collegare i vari parametri concentrati quali la rigidità, lo smorzamento e l'inerzia ai componenti presenti lungo la linea di sterzo e nella cremagliera.

Nella parte superiore il collegamento tra la colonna di sterzo e il telaio del veicolo è realizzato tramite due cuscinetti in serie, come possibile vedere in figura 2.1. Questi permettono la dissipazione verso terra e quindi il drenaggio per mezzo di componenti viscosi: vi sarà attrito viscoso direttamente proporzionale con la velocità angolare dell'albero.

Nell'immagine il corpo in giallo serve per il bloccaggio dello sterzo collegato con sistema opportuno.

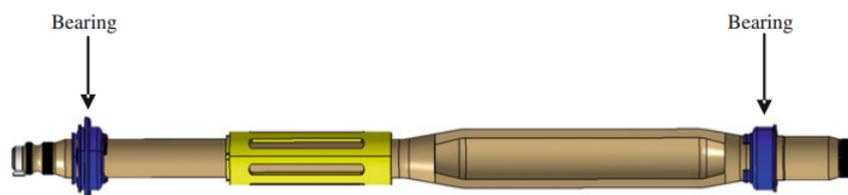
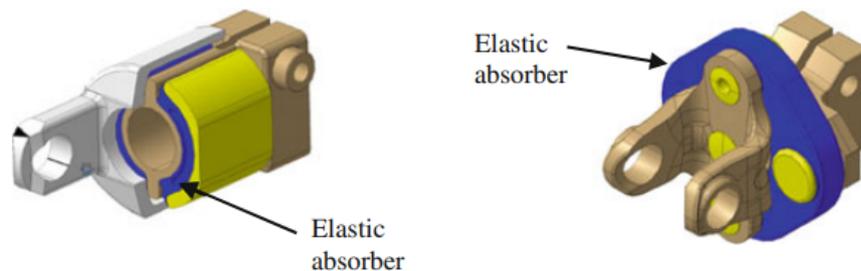


Figura 2.1: Colonna di sterzo presente in [4]

La continuità della trasmissione dall'albero superiore a quello intermedia è interrotta dalla presenza di elementi chiamati *Torsion Damper*, visibili in figura 2.2. Questi possono essere di due tipologie: la prima prevede la presenza di un corpo elastico tra un tubo interno ed uno esterno in modo concentrico (figura di sinistra), ad esempio: il tubo interno è il corpo direttamente collegato con il volante e l'altro esterno è il corpo che giunge nel giunto cardanico; invece la seconda tipologia è più semplice con il corpo elastico che collega i due tubi (figura di destra). Tali corpi elastici presentano proprietà elastiche ed isteretiche essendo fatti di elastomeri a cui si collegano le rigidità sia dell'albero superiore sia di quello inferiore. La funzione di questi elementi è smorzare le vibrazioni longitudinali e soprattutto torsionali che dall'assale anteriore arrivano al volante. Con alti valori di rigidità si conserva un buon feedback delle forze esterne sul volante; invece con bassi valori si ha un buon filtraggio delle vibrazioni provenienti sulla strada.



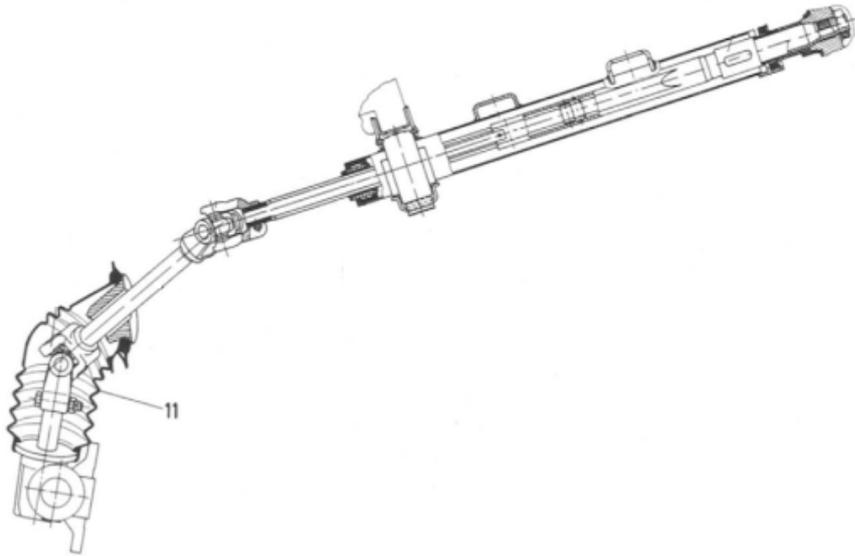
**Figura 2.2:** Smorzatore torsionale presente in [4]

Dagli smorzatori appena descritti la trasmissione passa attraverso due o tre giunti cardanici che vengono analizzati approfonditamente a seguire in questo capitolo. Se ne riporta un'immagine reale in 2.3 dell'albero intermedio con due giunti di Cardano centralizzati in rosso. Nel corpo in bianco è affidata la compensazione della lunghezza per rispettare le tolleranze e regolare la lunghezza dell'albero. L'elemento in arancione invece serve per assicurare il collegamento con la cuffia di tenuta (elemento 11 di figura 2.4) ove è presente il lubrificante per lubrificare il sistema pignone e cremagliera.



**Figura 2.3:** Albero intermedio presente in [4]

Si allega la seguente immagine 2.4 per chiarire il collegamento degli alberi descritti sinora.



**Figura 2.4:** Schema del collegamento tra gli alberi presente in [6]

L'ultimo componente da descrivere è la cremagliera sulla quale il pignone collegato all'albero inferiore trasmette la coppia per mezzo del suo raggio. Quindi sulla cremagliera agirà una forza derivante dalla coppia di sterzo e altre forze esterne. Una di queste può essere ricondotta all'attrito viscoso causato dal grasso od olio presente nella cuffia tenuta che contiene al suo interno il collegamento tra il tirante e la cremagliera stessa; si ha quindi una forza di natura viscosa che si oppone al movimento della cremagliera con un modulo direttamente proporzionale alla velocità dello stesso corpo.

E' presente anche una forza di attrito che viene successivamente modellata con un modello molla-esponenziale. Tale forza è attribuita all'attrito presente tra il pignone e la cremagliera nel contatto dei denti e anche all'attrito che si viene a creare dallo scorrimento della cremagliera sulla propria guida.

Un altro elemento che compare sulla cremagliera sono le due boccole che definiscono la corsa della cremagliera relativamente alla guida su cui poggia. Si allega un'immagine reale del sistema appena descritto in figura 2.5 e di seguito anche un completo sistema di sterzo reale che comprende tutti gli elementi discussi nella suddetta sezione (figura 2.6).

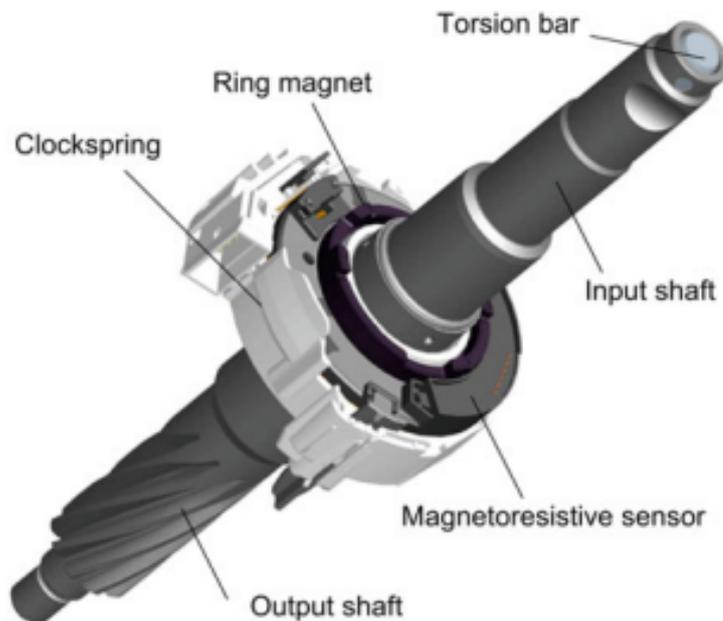


**Figura 2.5:** Cremagliera in [4]



**Figura 2.6:** Sistema di sterzo in [4]

All'interno della colonna superiore o di quella inferiore si trova una barra di torsione; questa permette attraverso la misura della sua torsione di dare l'input ai sistemi di servoassistenza presenti nel sistema di sterzo. Se il sistema di servoassistenza è elettronico ed agisce sulla colonna superiore (EPSc alla colonna) allora la barra di torsione si colloca all'interno della colonna superiore di sterzo; altrimenti questa viene collocata a ridosso del pignone, all'interno della colonna inferiore. L'angolo di torsione viene misurato da sensori di varia tipologia (ottici, magnetici, ecc ...) posti negli alberi che avvolgono e vincolano la barra. Tale misura dell'angolo viene inviata al sistema di servoassistenza che erogherà la coppia o la forza supplementare. Generalmente la rigidità associata alla barra di torsione si aggira sui 2 Nm/deg e l'angolo di torsione massimo è di 5°. Se l'angolo di torsione raggiungesse il limite allora la rigidità aumenterebbe fino a ordini di 200 Nm/deg. Si mostra in figura 2.7 un sistema di misura della torsione con sensori magnetici, un sistema immediato ed efficace dotato di alta risoluzione. E' possibile vedere la barra di torsione vincolata da due alberi che appartengono alla colonna superiore o inferiore. A seguire si riportano le due possibili posizioni che può occupare la barra. La figura 2.8 è relativa ad un sistema di assistenza EPSc alla colonna e quella 2.9 ad un sistema EPSapa.



**Figura 2.7:** Barra di torsione con sensori magnetici in [4]



**Figura 2.8:** Collocazione superiore della barra di torsione in [4]



**Figura 2.9:** Collocazione inferiore della barra di torsione in [4]

## **2.2 Modello meccanico**

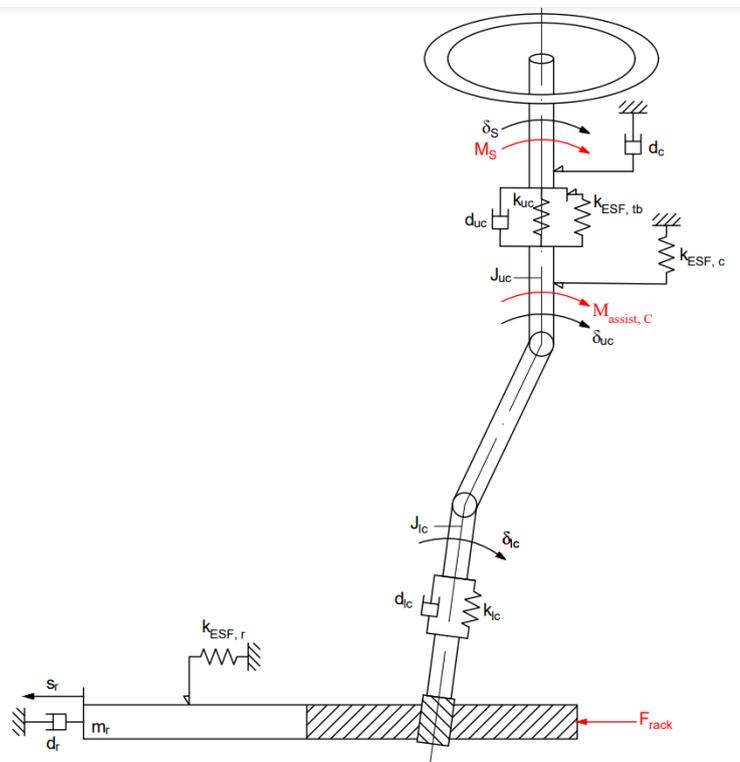
Nelle figure della pagina successiva sono illustrati tutti gli elementi presenti nel modello meccanico del sistema di sterzo. Sono riportate le forze e i momenti esterni applicati, gli spostamenti e le rotazioni dei vari elementi, gli elementi viscosi ed elastici e gli attriti presenti.

Vengono riportati due schemi poiché la barra di torsione, con la quale si rilevano gli input da inviare al sistema della servoassistenza, si può collocare nella colonna inferiore o in quella superiore. Nel primo caso la servoassistenza può essere idraulica o elettrica applicata al pignone o alla cremagliera. Invece il secondo caso si riferisce ad un'assistenza elettrica applicata nella colonna superiore.

A seconda della tipologia di sistema di assistenza vi saranno diverse equazioni di equilibrio da analizzare nei vari elementi del modello meccanico. Si riportano nelle immagini 2.10 e 2.11 delle pagine a seguire il disegno del sistema di sterzo per entrambi i casi.



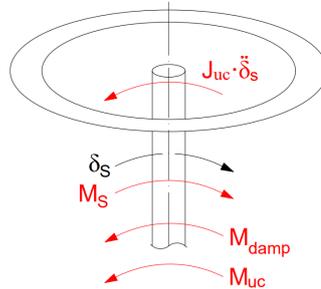
- $k_{ESF,c}$ : rigidezza della molla implementata nel modello di attrito molla-esponenziale che simula l'attrito presente tra la colonna superiore e il vincolo che la collega al telaio;
- $d_{lc}$  e  $k_{lc}$ : coefficiente di smorzamento e rigidità elastica concentrati relativi alle proprietà della barra di torsione;
- $k_{ESF,r}$ : rigidezza della molla implementata nel modello di attrito molla-esponenziale che simula l'attrito presente tra la cremagliera e la propria guida più l'attrito tra pignone e cremagliera;
- $d_r$ : coefficiente di attrito viscoso che si oppone alla cremagliera per la presenza di olio/grasso nella cuffia di tenuta del tirante.



**Figura 2.11:** Sistema di sterzo nel caso di barra di torsione nella colonna superiore

### 2.2.1 Barra di torsione nella colonna inferiore

Si ricavano le equazioni dei vari componenti con riferimento ai grafici riportati.



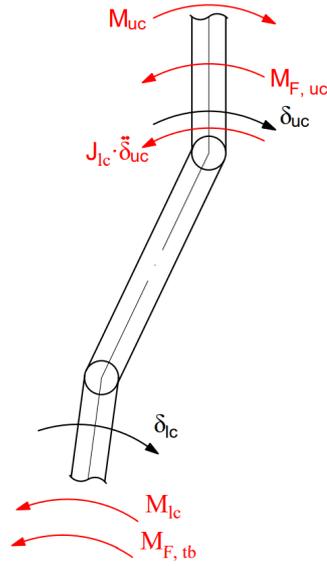
**Figura 2.12:** Diagramma di corpo libero della colonna superiore per barra di torsione inferiore

La seguente equazione fa riferimento al diagramma in figura 2.12:

$$J_{uc}\ddot{\delta}_s + M_{uc} + M_{damp} = M_S \quad (2.1)$$

Dove:

- $J_{uc}$ : inerzia della colonna superiore;
- $\ddot{\delta}_s$ : accelerazione angolare dello sterzo;
- $M_{uc}$ : momento di torsione tra la colonna superiore e lo sterzo;
- $M_{damp}$ : momento viscoso causato dalla presenza di uno smorzatore vicino il volante associato al supporto realizzato mediante un cuscinetto;
- $M_S$ : momento di sterzo applicato allo sterzo. E' l'input del modello per un uso *Steer by torque*.



**Figura 2.13:** Diagramma di corpo libero della colonna inferiore comprendente la barra di torsione

In riferimento alla figura 2.13 si trova l'equazione 2.3 tramite un l'equilibrio di potenze di ingresso e di uscita. In alternativa si potrebbero trasporre i momenti che agiscono sulla parte superiore del sistema analizzato nella parte inferiore moltiplicandoli per il rapporto di trasmissione, poiché è diverso da 1.

Equilibrio di potenza  $P_{in} = P_{out}$ :

$$\left( M_{uc} - J_{lc} \ddot{\delta}_{uc} - M_{F,uc} \right) \cdot \dot{\delta}_{uc} = \left( M_{lc} + M_{F,tb} \right) \cdot \dot{\delta}_{lc} \quad (2.2)$$

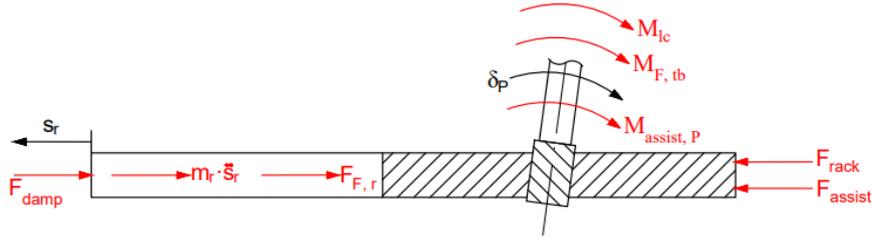
$$J_{lc} \ddot{\delta}_{uc} + M_{F,uc} + \left( M_{lc} + M_{F,tb} \right) \cdot \frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}} = M_{uc} \quad (2.3)$$

Dove:

- $J_{lc}$ : inerzia della colonna inferiore e che comprende anche l'albero intermedio;
- $\ddot{\delta}_{uc}$ : accelerazione angolare della colonna superiore;
- $M_{F,uc}$ : momento di attrito molla-esponenziale tra la colonna superiore e i vincoli;
- $M_{lc}$ : momento di torsione tra la colonna inferiore e il pignone;
- $M_{F,T}$ : momento di attrito nella barra di torsione inferiore;
- $\dot{\delta}_{lc}$ : velocità angolare della colonna inferiore;

- $\dot{\delta}_{uc}$ : velocità angolare della colonna superiore.

Si dimostrerà nelle pagine dedicate all'analisi delle colonne di sterzo la funzione del rapporto  $\delta_{lc} = f(\delta_{uc})$ .



**Figura 2.14:** Diagramma di corpo libero della cremagliera per barra di torsione inferiore

In riferimento alla figura 2.14

$$m_r \ddot{y}_r + F_{F,r} + F_{damp} = \frac{(M_{assist,P} + M_{F,tb} + M_{lc})}{I_{pin}} + F_{assist} + F_{rack} \quad (2.4)$$

Dove:

- $m_r$ : massa della cremagliera;
- $\ddot{y}_r$ : accelerazione della cremagliera;
- $F_{F,r}$ : forza di attrito molla-esponenziale tra la cremagliera e i vincoli e tra il pignone e la cremagliera;
- $F_{damp}$ : forza di attrito viscosa presente agli estremi della cremagliera;
- $M_{assist,P}$ : coppia di assistenza applicata al pignone dalla servo-assistenza elettrica;
- $I_{pin}$ : rapporto di trasmissione tra la cremagliera e il pignone;
- $F_{assist}$ : forza di assistenza applicata alla cremagliera dalla servo-assistenza idraulica o quella elettrica;
- $F_{rack}$ : forza generata sulla cremagliera dai momenti applicati agli assi di sterzo derivanti dalle forze sviluppate tra lo pneumatico e il terreno.

A seconda del tipo di assistenza esistente solo una delle tre assistenze che compaiono nelle formule è calcolata, mentre le altre due sono nulle.

Le tre equazioni ricavate vengono riassunte nel seguente sistema che sarà implementato nei capitoli successivi in ambiente Simulink:

$$\begin{cases} J_{uc}\ddot{\delta}_s + M_{uc} + M_{damp} = M_S \\ J_{lc}\ddot{\delta}_{uc} + M_{F,uc} + \left(M_{lc} + M_{F,tb}\right) \cdot \frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}} = M_{uc} \\ m_r\ddot{y}_r + F_{F,r} + F_{damp} = \frac{(M_{assistP} + M_{F,tb} + M_{lc})}{I_{pin}} + F_{assist} + F_{rack} \end{cases} \quad (2.5)$$

Si definiscono la forza di attrito viscoso, i momenti di torsione e di attrito viscoso che compaiono nelle equazioni del sistema 2.5:

$$F_{damp} = d_{rack} \cdot \dot{y}_r \quad (2.6)$$

$$M_{uc} = k_{uc}(\delta_S - \delta_{uc}) + d_{uc}(\dot{\delta}_S - \dot{\delta}_{uc}) \quad (2.7)$$

$$M_{lc} = k_{lc}(\delta_{lc} - \delta_p) + d_{lc}(\dot{\delta}_{lc} - \dot{\delta}_p) \quad (2.8)$$

$$M_{damp} = d_c \cdot \dot{\delta}_{uc} \quad (2.9)$$

Con  $M_{uc}$  si indica il momento di torsione che considera la flessibilità dei componenti dell'albero superiore e con  $M_{lc}$  il relativo momento per l'albero inferiore. Se le rigidità e gli smorzamenti fossero infiniti allora gli angoli  $\delta_{uc}$  e  $\delta_p$  sarebbero uguali rispettivamente agli angoli  $\delta_S$  e  $\delta_{lc}$ . Invece  $M_{F,uc}$ ,  $M_{F,tb}$  e  $F_{F,r}$  sono le coppie e la forza di attrito calcolate assumendo un modello di attrito esponenziale:

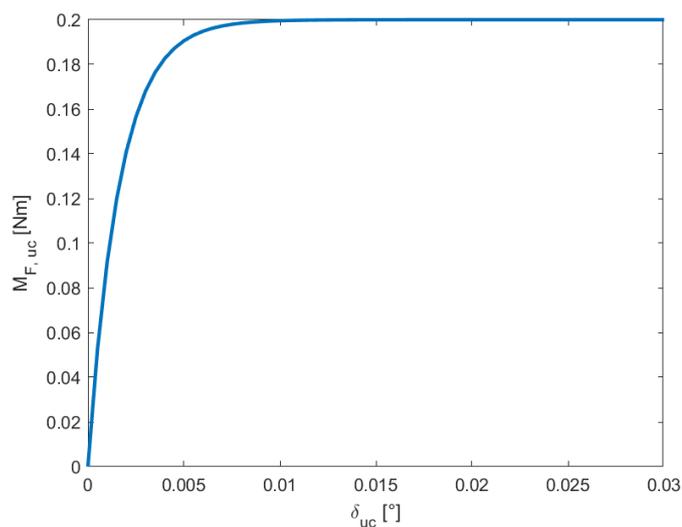
$$F_{ESF} = F_{lim}(1 - e^{-f_{ESF} \cdot x}) \quad (2.10)$$

Con  $f_{ESF} = k_{ESF}/F_{lim}$ .

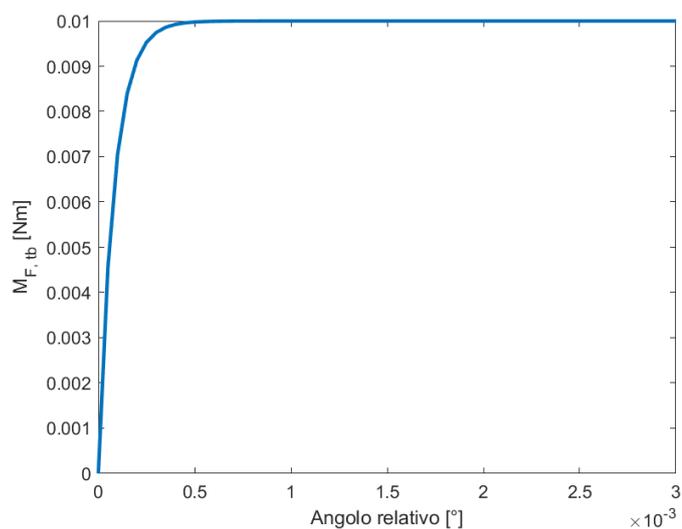
La caratteristica di attrito ha quindi un andamento esponenziale. Nel tratto crescente caratterizzato dai valori di  $K_{ESF}$  si lavora con attrito statico, vi è la deformazione degli elementi a contatto senza strisciamento effettivo. Invece, quando si raggiunge la saturazione della curva si innesta l'attrito dinamico con strisciamento.

Vengono riportati i grafici relativi alle caratteristiche di attrito.

Dalla figura 2.15 si vede l'angolo di rotazione della colonna superiore che innesta l'attrito dinamico:  $\delta_{uc} = 0.01^\circ$



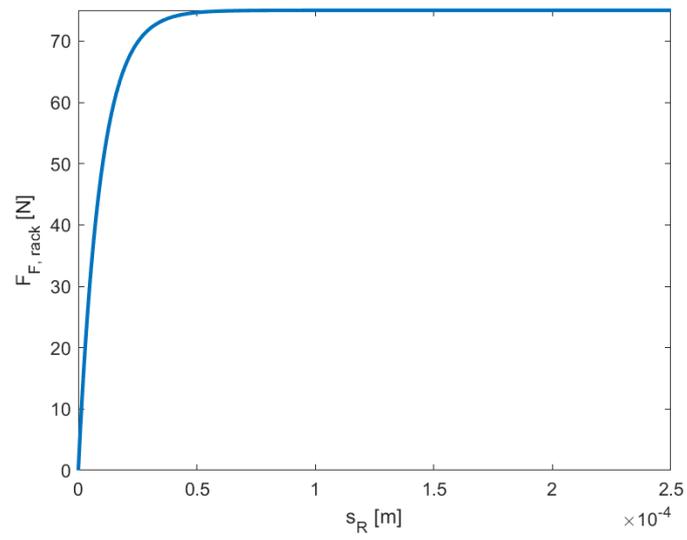
**Figura 2.15:** Caratteristica del momento di attrito applicato alla colonna superiore



**Figura 2.16:** Caratteristica del momento di attrito applicato alla barra di torsione

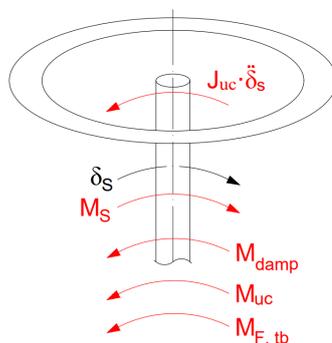
L'angolo relativo della barra di torsione che permette di passare all'attrito dinamico è uguale a  $0.5^\circ e^{-3}$  (figura 2.16).

Relativamente all'attrito sulla cremagliera, per avere attrito dinamico lo spostamento della cremagliera deve essere  $0.5e^{-4}$  m (figura 2.17).



**Figura 2.17:** Caratteristica della forza di attrito applicata sulla cremagliera

## 2.2.2 Barra di torsione nella colonna superiore

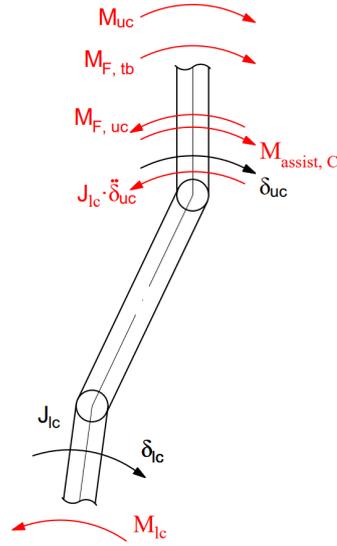


**Figura 2.18:** Diagramma di corpo libero della colonna superiore comprendente la barra di torsione

E' possibile notare che il momento di attrito presente nella barra di torsione viene spostato nell'equazione dell'equilibrio della colonna superiore (2.18).

$$J_{uc} \ddot{\delta}_s + M_{uc} + M_{damp} + M_{F, tb} = M_S \quad (2.11)$$

Dove  $M_{F, tb}$  è il momento di attrito all'interno della barra di torsione presente nella colonna superiore.



**Figura 2.19:** Diagramma di corpo libero della colonna inferiore per barra di torsione superiore

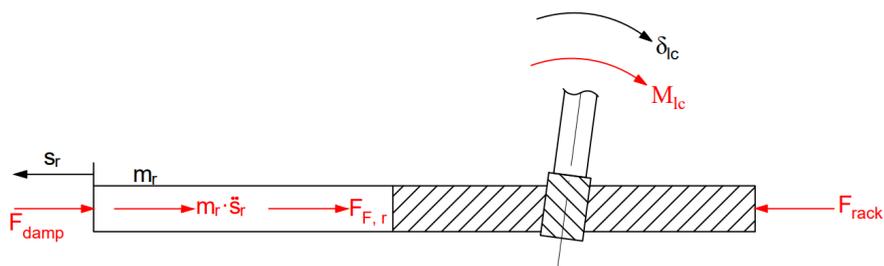
Come nel caso analizzato in precedenza tramite un l'equilibrio delle potenze di ingresso e di uscita ricavate dai momenti rappresentati nella figura 2.19 si trova l'equazione 2.13.

Equilibrio di potenza  $P_{in} = P_{out}$ :

$$\left( M_{uc} + M_{F, tb} + M_{assist, C} - J_{lc} \ddot{\delta}_{uc} - M_{F, uc} \right) \cdot \dot{\delta}_{uc} = M_{lc} \cdot \dot{\delta}_{lc} \quad (2.12)$$

$$J_{lc} \ddot{\delta}_{uc} + M_{F, uc} + M_{lc} \cdot \frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}} = M_{uc} + M_{F, tb} + M_{assist, C} \quad (2.13)$$

$M_{assist, C}$  è la coppia di assistenza applicata alla colonna superiore dalla servo-assistenza elettrica.



**Figura 2.20:** Diagramma di corpo libero della cremagliera per barra di torsione superiore

In riferimento alla figura 2.20:

$$m_r \ddot{y}_r + F_{F,r} + F_{damp} = \frac{M_{lc}}{r_{pin}} + F_{rack} \quad (2.14)$$

Si uniscono le tre equazioni principali appena analizzate nel sistema 2.15 che sarà poi implementato nel modello Simulink.

$$\begin{cases} J_{uc} \ddot{\delta}_s + M_{uc} + M_{damp} + M_{F,tb} = M_S \\ J_{lc} \ddot{\delta}_{uc} + M_{F,uc} + M_{lc} \cdot \frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}} = M_{uc} + M_{F,tb} + M_{assist,C} \\ m_r \ddot{y}_r + F_{F,r} + F_{damp} = \frac{M_{lc}}{r_{pin}} + F_{rack} \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Analisi delle colonne di sterzo

La coppia volante generata dal pilota si trasferisce al pignone, e quindi poi alla cremagliera, per mezzo di colonne di sterzo e giunti cardanici. Generalmente vi possono essere due o tre giunti cardanici nel sistema di sterzo; infatti nei veicoli commerciali leggeri è comune usare fino a tre giunti per ovviare ai ridotti spazi a disposizione e quindi si aumenta la flessibilità della trasmissione a causa dell'aumento del numero di alberi. La seguente analisi cinematica prende come riferimento un sistema di sterzo composto da tre alberi: la colonna superiore, l'albero intermedio e la colonna inferiore; quindi si fanno considerazioni sulla presenza di due giunti. Con l'aiuto della figura 2.21 è possibile ricavare la relazione matematica (eq. 2.16) del rapporto tra l'angolo dell'albero in ingresso (colonna superiore) e quello dell'albero in uscita (colonna inferiore).

$$\delta_{lc} = \arctan\left(\frac{c_1 \tan \delta_{uc}}{c_2 + c_3 \tan \delta_{uc}}\right) \quad (2.16)$$

Dove:

- $c_1 = \cos(\beta_2)(1 + \tan^2(\lambda - \gamma))$ ;
- $c_2 = \cos(\beta_1)(1 + \cos^2(\beta_2) \tan^2(\lambda - \gamma))$ ;
- $c_3 = (\sin^2(\beta_2)) \tan(\lambda - \gamma)$ .

Definizione delle lettere che compaiono nello schema del sistema di sterzo 2.21:

- A: centro del volante, intersezione della colonna superiore con il volante;
- B: posizione del primo giunto, intersezione tra colonna superiore e albero intermedio;
- C: posizione del secondo giunto, intersezione tra albero intermedio e colonna inferiore;
- D: posizione del pignone, intersezione della colonna inferiore con la cremagliera.

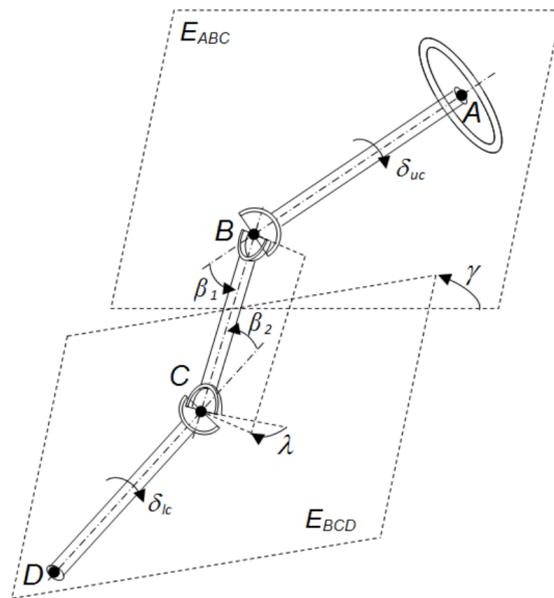
Gli angoli  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono gli angoli formati dagli assi degli alberi in ingresso e quelli in uscita del singolo giunto di Cardano.

$\gamma$  è l'angolo formato tra i due piani dei giunti,  $E_{ABC}$  e  $E_{BCD}$  e viene imposto dalla geometria e dall'ingombro presente. Può essere calcolato da considerazioni geometriche nello spazio note le coordinate dei punti A, B, C e D.

Il parametro  $\lambda$  individua lo sfasamento angolare tra i piani contenenti le forcelle dei giunti di Cardano sull'albero intermedio. In particolare è calcolabile come la differenza tra l'angolo del piano della forcella in uscita dal primo giunto e l'angolo del piano della forcella in ingresso al secondo giunto. Questo parametro

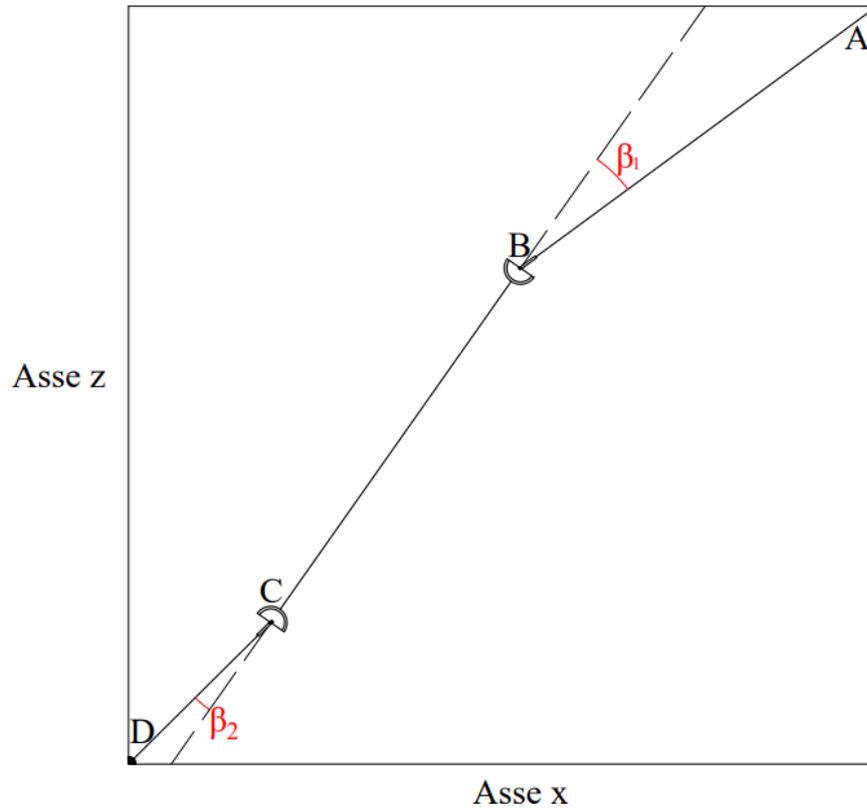
che può essere modificato ruotando il secondo giunto di Cardano rispetto al primo viene tarato per ridurre l'errore di trasmissibilità. E' opportuno infatti osservare che la sequenza di due giunti di questo tipo, spesso impiegata nei sistemi di sterzo automobilistici, non garantisce necessariamente una trasmissione omocinetica (errore di trasmissione nullo) a meno che non si verifichino determinate condizioni geometriche, difficilmente ottenibili per ragioni di spazio che obbligano la colonna di sterzo a seguire percorsi più tortuosi. La taratura dell'angolo  $\lambda$  consente di minimizzare l'errore di trasmissione, rendendo quindi il rapporto di sterzo circa costante.

Quindi definisce la non complanarità delle forcelle dell'albero intermedio: per  $\lambda = 0^\circ$  le forcelle confluirebbero nello stesso piano.



**Figura 2.21:** Angoli caratteristici del sistema di sterzo presente in [4]

Nell'immagine 2.22 si mostra la geometria dello sterzo che verrà implementato nel modello Simulink del capitolo 5. Le lettere corrispondono a quelle presenti in figura 2.21 e gli angoli  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono rappresentati in rosso.



**Figura 2.22:** Geometria 2D delle colonne di sterzo

Angolo	Valore
$\beta_1$	$18.5^\circ$
$\beta_2$	$10^\circ$
$\lambda$	$0^\circ$
$\gamma$	$0^\circ$

**Tabella 2.1:** Angoli caratteristici degli alberi di sterzo visibili in fig. 2.22

Ipotizzando che i valori degli angoli  $\lambda$  e  $\gamma$  siano uguali a zero si ottengono i coefficienti  $c_i$  in tabella 2.2. Si tratta di un'ipotesi "forte" poiché è difficile che durante l'installazione si trovi un piano dove passano i due giunti, quindi tali valori non saranno mai uguali a zero in un sistema reale. Inserendo tali coefficienti nell'equazione 2.16 si ottiene l'eq.2.17.

Coefficiente	
$c_1$	$\cos \beta_2$
$c_2$	$\cos \beta_1$
$c_3$	0

**Tabella 2.2:** Coefficienti della relazione 2.16 per  $\lambda = \gamma = 0^\circ$

$$\delta_{lc} = \arctan\left(\frac{\cos \beta_2 \tan \delta_{uc}}{\cos \beta_1}\right) \quad (2.17)$$

Tale espressione si può dimostrare più facilmente rispetto alla 2.16 con le equazioni cinematiche dei due giunti riportate sotto.

$$\tan \delta_{int} = \frac{\tan \delta_{uc}}{\cos \beta_1} \quad (2.18)$$

$$\tan \delta_{int} = \frac{\tan \delta_{lc}}{\cos \beta_2} \quad (2.19)$$

Con  $\delta_{int}$  corrispondente all'angolo di rotazione dell'albero intermedio.

Uguagliando queste due ultime equazioni ed isolando a primo membro  $\delta_{lc}$  si ottiene l'equazione 2.17.

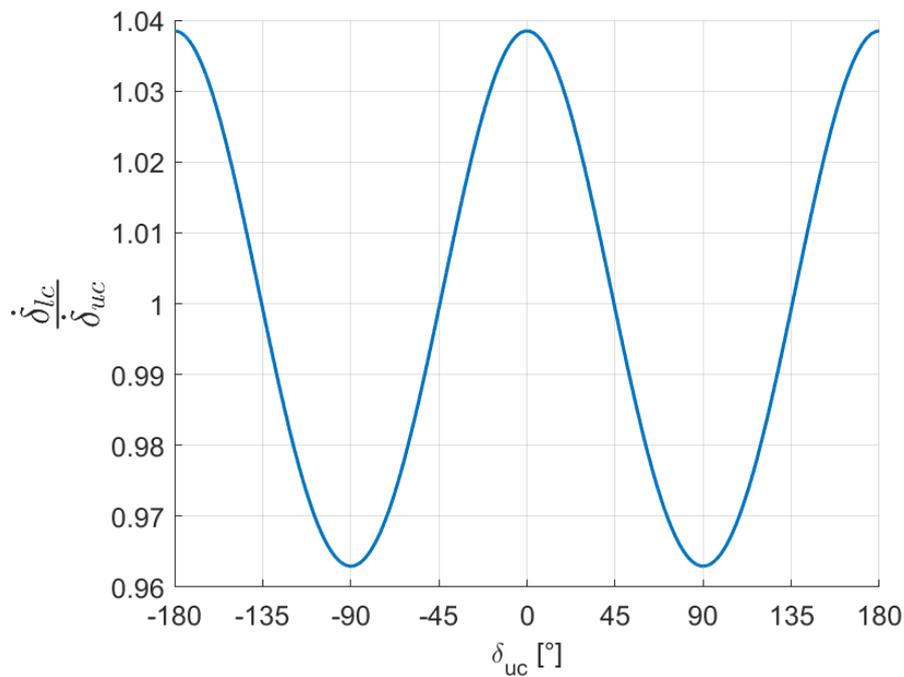
Derivando le equazioni 2.18 e 2.19 ed uguagliandole si ottiene il rapporto di trasmissione  $\frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}}$  nella condizione di  $\lambda = \gamma = 0^\circ$  e :

$$\frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \left\{ \frac{1 + \tan^2 \delta_{uc}}{1 + \tan^2 \left[ \arctan\left(\frac{\cos \beta_2 \tan \delta_{uc}}{\cos \beta_1}\right) \right]} \right\} \quad (2.20)$$

Si rappresenta l'andamento di tale rapporto in funzione dell'angolo di rotazione  $\delta_{uc}$  nel grafico in figura 2.23. Questo si ricava tramite gli angoli presenti in tabella 2.1, i quali sono ricavati dalla geometria di un sistema di sterzo reale presente nel software AdamsCar.

Il periodo dell'oscillazione è di  $180^\circ$ : il rapporto di trasmissione ha una frequenza doppia rispetto all'angolo di rotazione in input,  $\delta_{uc}$ . Si nota che ad ogni  $90^\circ$  di rotazione della colonna superiore corrisponde un minimo oppure un massimo alternativamente del rapporto di trasmissione. I valori di quest'ultimo sono compresi tra 0.9630 e 1.0385; invece per la condizione  $\delta_{uc} = \pi \left(\frac{1+4k}{4}\right)$  con  $k = \pm(1, 2, 3, \dots)$  si ha omocineticità tra i due alberi ( $\dot{\delta}_{lc} = \dot{\delta}_{uc}$ ).

L'albero superiore e quello inferiore sarebbero omocineticici in ogni istante di tempo



**Figura 2.23:** Rapporto  $\frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}}$  per  $\beta_1 = 18.5^\circ$ ,  $\beta_2 = 10^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$ ,  $\gamma = 0^\circ$

nel caso gli angoli  $\beta_1$  e  $\beta_2$  fossero uguali tra di loro.

Quest'ultima espressione sarebbe valida se gli angoli  $\lambda$  e  $\gamma$  rimanessero uguali a zero, se così non fosse allora non si avrebbe la condizione di omocineticità ma un distacco dal valore unitario di trasmissione denominato *errore di trasmissione del giunto*. Normalmente tale errore è sempre presente e nella progettazione del sistema di sterzo si assume un target massimo da non superare corrispondente al 3-4%.

Per comprendere la sensibilità degli angoli  $\gamma$  e  $\lambda$  nella determinazione del rapporto di trasmissione si riportano una serie di grafici dove:

- $\beta_1 = \beta_2 = 10^\circ$ ;
- $\lambda$  varia con valori compresi tra  $0^\circ$  a  $90^\circ$  mentre  $\gamma = 0^\circ$  (figura 2.24);
- $\gamma$  assume anch'esso i valori da  $0^\circ$  a  $90^\circ$  mentre  $\lambda = 0^\circ$  (figura 2.25).

All'aumentare dell'angolo  $\lambda$  si rileva uno scostamento maggiore dalla condizione di omocineticità tra l'albero in ingresso e quello in uscita accompagnato da una curva sempre meno asimmetrica rispetto allo zero di riferimento  $\delta_{uc} = 0^\circ$ ; infatti per piccoli valori di  $\lambda$  la curva presenta asimmetria massima e ampiezza minima.

Allo stesso modo anche con  $\gamma$  diverso da zero si ha asimmetria nell'andamento del rapporto di trasmissione. Questa viene annullata portando l'angolo al valore di  $90^\circ$  ma non si può raggiungere mai tale valore nell'installazione dei giunti cardanici a causa dell'ingombro che circonda l'intero sistema. Anche in questo caso l'errore di non uniformità tra le velocità angolari di ingresso ed uscita cresce all'aumentare di  $\gamma$ . Da notare che gli stessi valori adottati per  $\lambda$  e poi per  $\gamma$  portano ad asimmetrie opposte: quindi con una opportuna correzione è possibile ottenere la simmetria della curva, la quale permette di avere lo stesso comportamento e lo stesso rapporto indipendentemente dal verso di rotazione del volante.

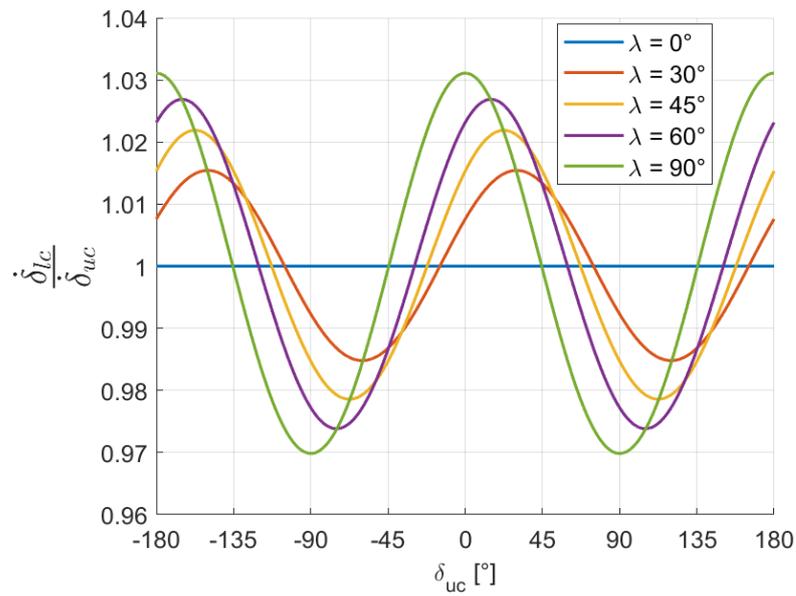
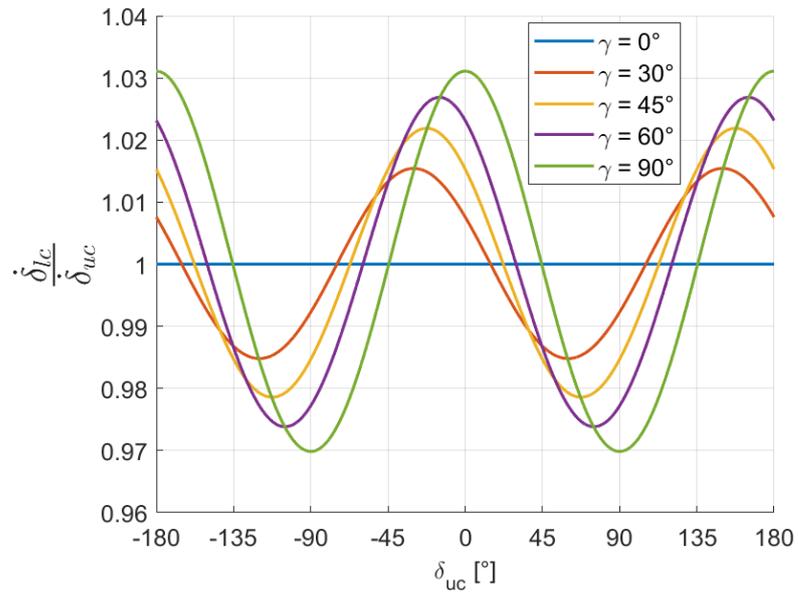
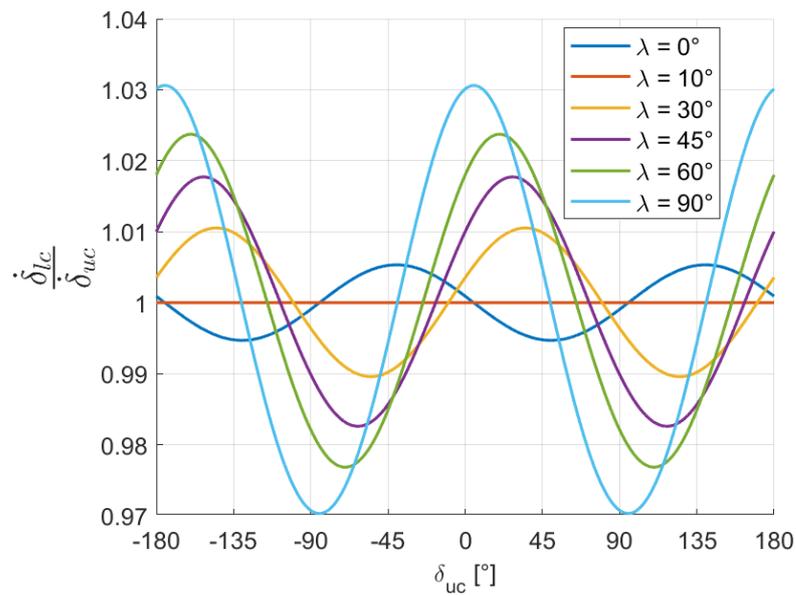


Figura 2.24: Sensività di  $\lambda$

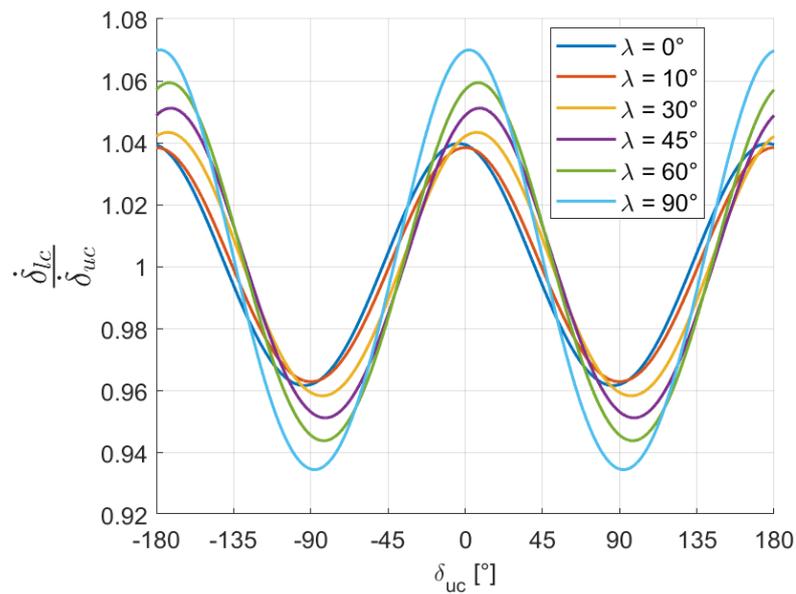


**Figura 2.25:** Sensività di  $\gamma$

Di particolare interesse risultano i seguenti grafici dove i valori degli angoli per realizzare i grafici sono assunti vicino alla condizione reale, cioè angoli di qualche grado e al più uguali a  $10^\circ$ . Nel primo grafico 2.26 si assumono uguali gli angoli  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ; invece nel secondo 2.27 si simula una condizione più reale dove gli angoli  $\beta$  sono differenti ed uguali a quelli in tabella 2.1.



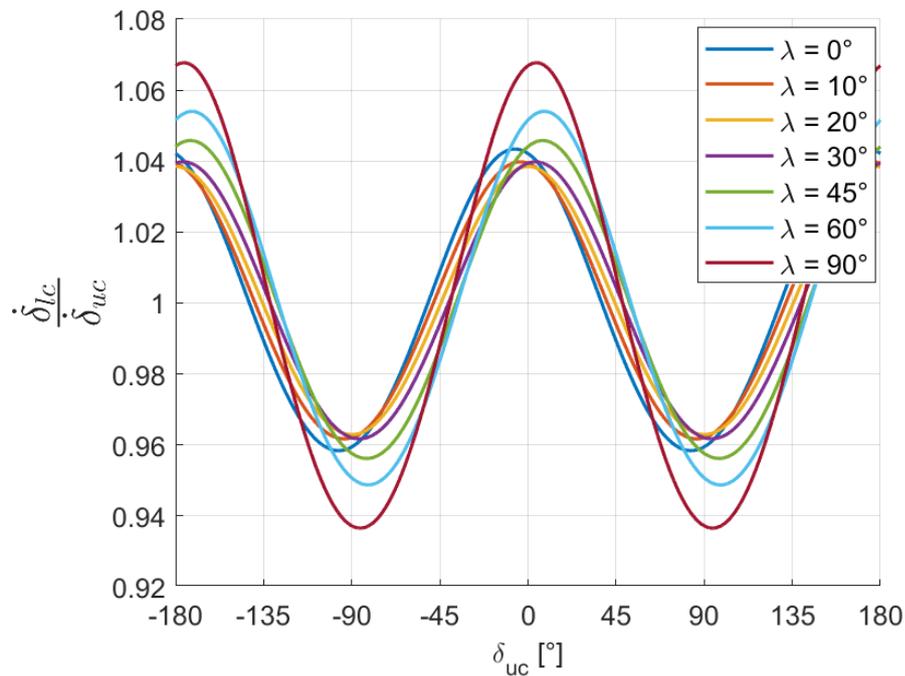
**Figura 2.26:** Tuning di  $\lambda$  con  $\beta_1 = \beta_2 = 10^\circ$  e  $\gamma = 10^\circ$



**Figura 2.27:** Tuning di  $\lambda$  con  $\beta_1 = 18.5^\circ$ ,  $\beta_2 = 10^\circ$  e  $\gamma = 10^\circ$

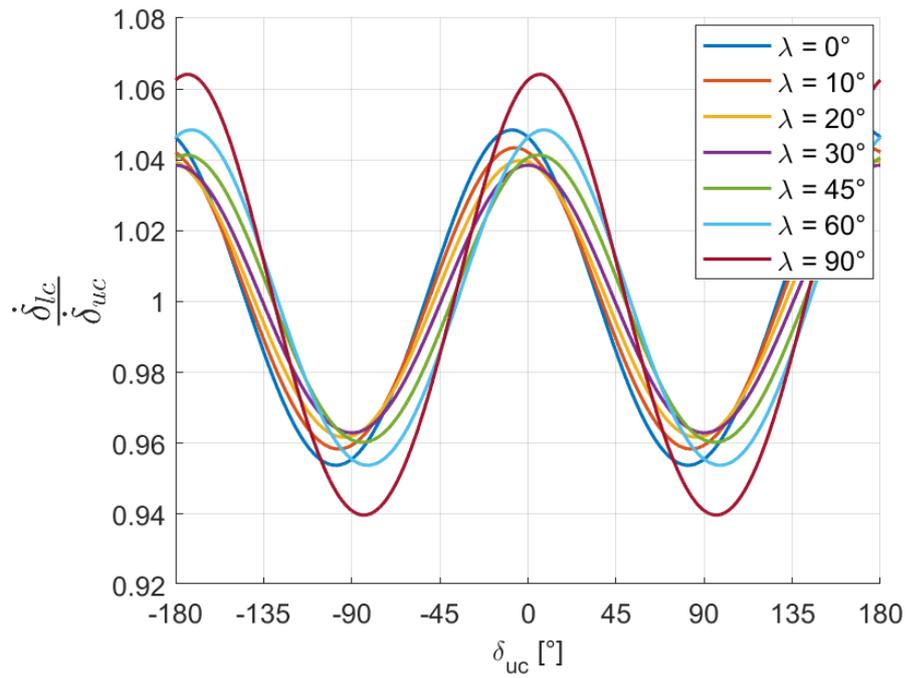
Nel caso più ideale con gli angoli  $\beta$  uguali, l'angolo  $\gamma$  causa asimmetria e quindi un comportamento diverso a seconda del verso dello sterzo. Inoltre anche l'omocinecità viene annullata. Impostando l'angolo  $\lambda$  uguale al valore di  $\gamma$  si recupera sia la simmetria sia l'omocinecità tra gli alberi.

Nel secondo caso con angoli  $\beta$  differenti si ha sempre asimmetria a causa dell'angolo  $\gamma$  diverso da zero. In ugual modo uguagliando  $\lambda$  a  $\gamma$  si riesce ad annullare l'asimmetria. Ne risulta inoltre una trasmissione più omocinetica con un rapporto che diminuisce la propria ampiezza ma gli alberi non saranno ovviamente sempre omocinetici. Tale grafico è utile per verificare l'effetto di lambda il quale si tara per ridurre l'errore di trasmissione a fronte di un angolo gamma imposto dalla posizione dei giunti e degli alberi. Nella condizione di  $\lambda = \gamma$  si ha sempre il minimo errore di trasmissione possibile per una definita configurazione; a tal proposito si allegano le figure 2.28, 2.29 e 2.30 per dimostrare la validità della condizione appena descritta.

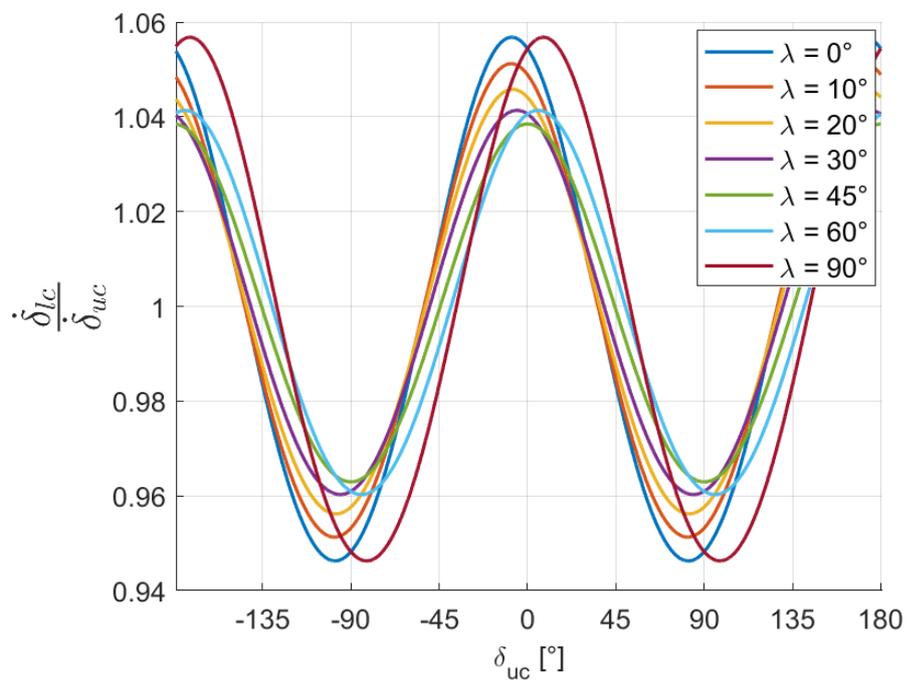


**Figura 2.28:** Tuning di  $\lambda$  con  $\beta_1 = 18.5^\circ$ ,  $\beta_2 = 10^\circ$  e  $\gamma = 20^\circ$

Aumentando  $\lambda$  fino a raggiungere  $\gamma$  si ha una diminuzione dell'errore di non uniformità tra le velocità angolari degli alberi e simultaneamente una curva sempre più simmetrica. Invece se l'angolo  $\lambda$  supera l'angolo  $\gamma$  si ha un aumento dell'errore con una curva che recupera parte della simmetria per valori di angoli uguali ai  $90^\circ$ .



**Figura 2.29:** Tuning di  $\lambda$  con  $\beta_1 = 18.5^\circ$ ,  $\beta_2 = 10^\circ$  e  $\gamma = 30^\circ$



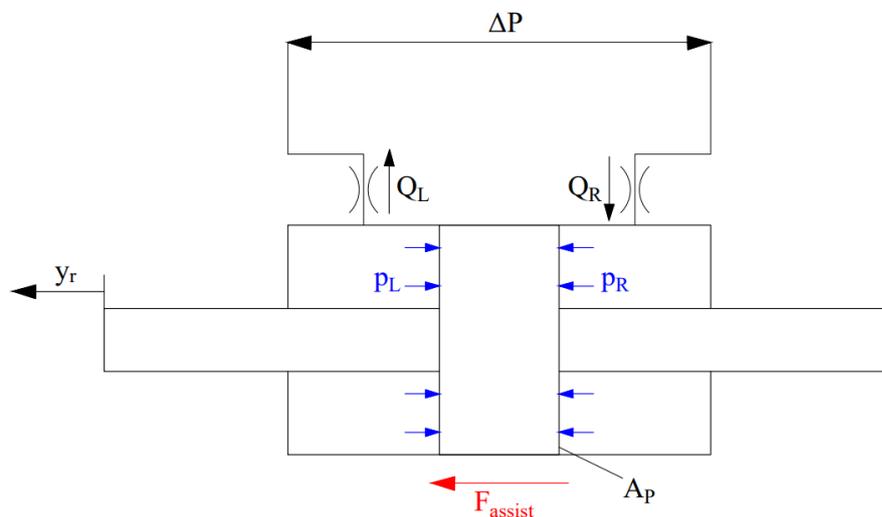
**Figura 2.30:** Tuning di  $\lambda$  con  $\beta_1 = 18.5^\circ$ ,  $\beta_2 = 10^\circ$  e  $\gamma = 45^\circ$

## 2.3 Modelli di servo-assistenza

### 2.3.1 Modello di assistenza idraulica

In figura 2.31 vi è un modello semplificato dell'HSP. Solo una camera è in pressione e dipende dal segno dell'angolo di torsione della barra di torsione. Supponendo che sia positivo allora la pressione nella camera di destra coincide con il  $\Delta P$  che si ricava dalla mappa "Hydraulic boost curve", e la pressione nella camera di sinistra è uguale alla pressione atmosferica di un bar [7].

Unendo l'equazione del moto turbolento nell'orifizio e l'equazione della compressibilità del fluido si ricava un'equazione dalla quale è possibile ricavare l'andamento della pressione in una delle due camere.



**Figura 2.31:** Modello semplificato del cilindro pneumatico nel sistema di assistenza idraulica

Equazione del moto turbolento nell'orifizio per la camera di destra:

$$\Delta P - p_R = \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{Q_R}{C_e \cdot A_o} \right)^2 \quad (2.21)$$

Dove:

- $\Delta P$ , pressione ricavata dall'Hydraulic boost curve;

- $p_R$ , pressione della camera destra nel tempo;
- $\rho$ , densità dell'olio;
- $Q_R$ , portata di olio che entra nella camera;
- $C_e$ , coefficiente di efflusso;
- $A_o$ , area dell'orifizio.

Equazione della compressibilità del fluido per la camera destra:

$$\frac{V_R}{\beta} \cdot \frac{dp_R}{dt} = Q_R - \dot{y}_R \cdot A_P \quad (2.22)$$

Dove:

- $V_0$ , volume iniziale della camera;
- $\beta$ , modulo di compressibilità dell'olio;
- $\dot{y}_R$ , velocità della cremagliera. Si ricava dall'equazione di equilibrio delle forze sulla cremagliera.

Mettendo a sistema le equazioni 2.21 e 2.22 si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{V_0}{\beta} \cdot \frac{dp_R}{dt} = C_q \cdot A_o \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}(\Delta P - p_R)} - \dot{y}_R \cdot A_P \quad (2.23)$$

Dall'equazione ricavata 2.23 si trova appunto la pressione  $p_R$  con la quale si calcola la forza di assistenza  $F_{assist}$  (che agisce sulla cremagliera riducendo lo sforzo sullo sterzo) tramite l'altra pressione  $p_L$  e la superficie della camera  $A_P$  dove agiscono le forze di pressione:

$$F_{assist} = \Delta P \cdot A_P \quad (2.24)$$

Dove  $\Delta P$  è la differenza di pressione tra le due camere nel tempo ( $p_R - p_L$ ) che si ricava in funzione dell'angolo di torsione della barra di torsione presente vicino il pignone.

Entrando in ingresso con l'angolo di torsione nella curva in figura 2.32 è possibile ricavare la differenza di pressione tra le camere nelle ordinate. Tale curva è denominata *Hydraulic boost curve*.

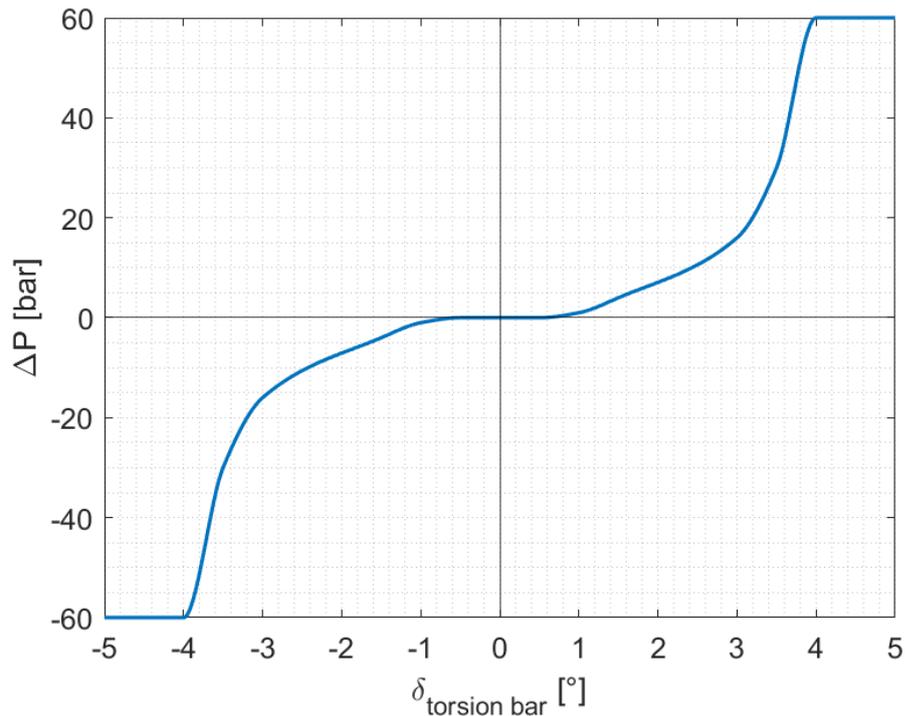


Figura 2.32: *Hydraulic boost curve*

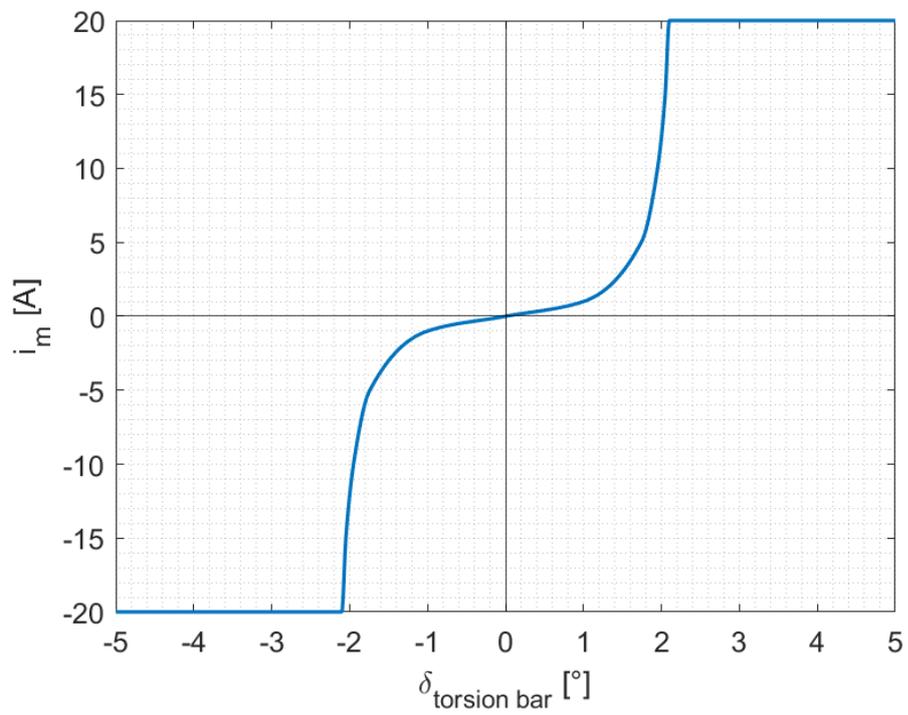
### 2.3.2 Modello di assistenza elettrica

Esistono tre tipi tipologie di assistenza elettrica relative al posizionamento del motore elettrico: assistenza alla colonna di sterzo, al pignone e alla cremagliera.

#### EPSapa

EPSapa (Electronic Power System axial parallel drive) è una tipologia di servoassistenza che applica la forza direttamente sulla cremagliera tramite un meccanismo costituito da una cinghia e da un sistema vite-madrevite con all'interno un ricircolo di sfere.

La misura dell'angolo di torsione della barra di torsione permette di ricavare la corrente che alimenta il motore elettrico grazie alla curva in figura 2.33, denominata *Electrical boost curve*.



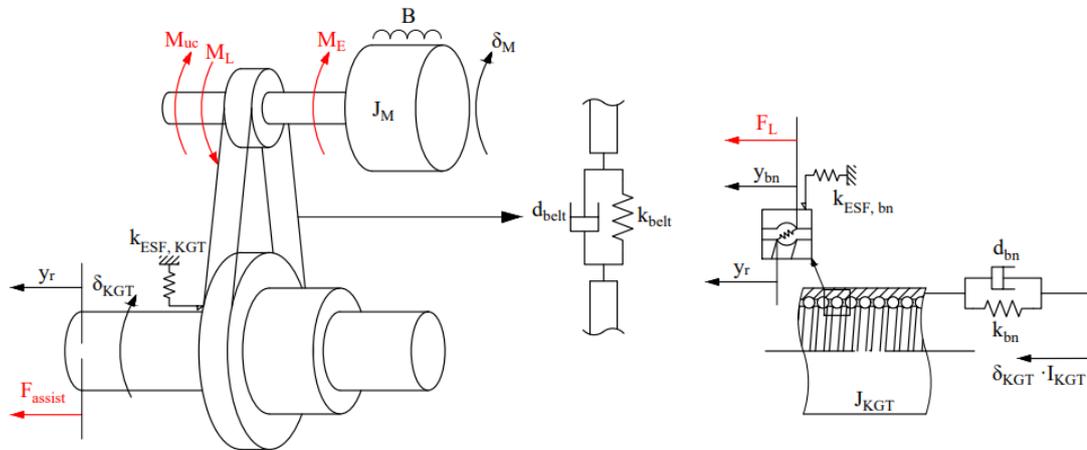
**Figura 2.33:** *Electrical boost curve*

La corrente ricavata dal grafico in figura 2.33 viene moltiplicata per un costante di coppia per calcolare la coppia applicata all'albero motore del motore elettrico:

$$M_E = i_M \cdot k_t \quad (2.25)$$

Dove:

- $M_E$ , la coppia elettrica applicata all'albero motore
- $i_m$ , la corrente elettrica
- $k_t$ , la costante di coppia del motore elettrico



**Figura 2.34:** Disegno del meccanismo cinghia-sfere

Seguono altre equazioni di equilibrio riguardanti le varie parti del sistema.

$$M_L = k_{belt}(\delta_M - \delta_{KGT} \cdot I_{belt}) + d_{belt}(\dot{\delta}_M - \dot{\delta}_{KGT} \cdot I_{belt}) \quad (2.26)$$

Dove:

- $M_L$ , la coppia trasmessa dall'albero collegato al motore elettrico alla madrevite
- $k_{belt}$ , la rigidità della cinghia
- $\delta_M$ , l'angolo di rotazione dell'albero motore
- $\delta_{KGT}$ , l'angolo di rotazione della madrevite
- $I_{belt}$ , il rapporto di trasmissione tra le due pulegge dato dal rapporto dei relativi diametri

- $d_{belt}$ , il coefficiente di smorzamento della cinghia
- $\dot{\delta}_M$ , la velocità di rotazione dell'albero motore
- $\dot{\delta}_{KGT}$ , la velocità di rotazione della madrevite

$$J_M \cdot \ddot{\delta}_M + M_L + \dot{\delta}_M \cdot B = M_E + M_{E,ext} \quad (2.27)$$

Dove:

- $J_M$ , l'inerzia del motore
- $\ddot{\delta}_M$ , l'accelerazione angolare del motore
- $M_{E,ext}$ , un'eventuale coppia elettrica applicata sull'albero motore da sistemi esterni
- $B$ , il coefficiente di attrito viscoso presente all'interno del motore elettrico

$$F_L = k_{bn}(\delta_{KGT} \cdot I_{KGT} - y_{bn}) + d_{bn}(\dot{\delta}_{KGT} \cdot I_{KGT} - \dot{y}_{bn}) \quad (2.28)$$

Dove:

- $F_L$ , la forza ricavata dalla madrevite
- $k_{bn}$ , la rigidità della madrevite
- $I_{KGT}$ , il rapporto di trasmissione del sistema di ricircolo di sfere, cioè il rapporto tra lo spostamento della vite e la rotazione della madrevite
- $y_{bn}$ , lo spostamento assiale della madrevite
- $d_{bn}$ , il coefficiente di smorzamento della madrevite
- $\dot{y}_{bn}$ , la velocità assiale della madrevite

$$J_{KGT} \cdot \ddot{\delta}_{KGT} + M_{F,KGT} + F_L \cdot I_{KGT} = M_L \cdot I_{belt} \quad (2.29)$$

Dove:

- $J_{KGT}$ , l'inerzia della madrevite
- $M_{F,KGT}$ , il momento di attrito presente tra la madrevite e i relativi vincoli

$$F_{assist} = k_{KGT}(y_{bn} - y_r) + d_{KGT}(\dot{y}_{bn} - \dot{y}_r) \quad (2.30)$$

Dove:

- $F_{assist}$ , la forza di assistenza sulla cremagliera
- $k_{KGT}$ , la rigidità delle sfere in ricircolo
- $d_{KGT}$ , il coefficiente di smorzamento delle sfere in ricircolo

$$m_{bn} \cdot \ddot{y}_{bn} + F_{F,bn} + F_{assist} = F_L \quad (2.31)$$

Dove:

- $m_{bn}$ , la massa della madre vite
- $F_{F,bn}$ , La forza di attrito presente tra la madre vite e i relativi vincoli
- $F_{assist}$ , la forza che agisce sulla cremagliera diminuendo lo sforzo per sterzare

## EPSc

Il sistema denominato EPSc è usato per assistere la sterzata tramite una coppia aggiuntiva che può agire sulla colonna di sterzo ( $M_{assistC}$ ) o sul pignone ( $M_{assistP}$ ). Nel primo caso la barra di torsione è presente nella colonna di sterzo superiore, altrimenti questa è inserita nella parte finale in prossimità del pignone che ingrana la cremagliera.

Riprendendo le equazioni che riguardano il motore elettrico viste in precedenza, si entra sempre in ingresso con la misura dell'angolo di torsione della barra per trovare la corrente e successivamente la coppia all'albero del motore elettrico (come nel modello EPSapa). Quindi si ricava la rotazione dell'albero motore dall'equazione 2.27.

### EPSc al pignone

$$M_L = k_{belt}(\delta_M - y_R \cdot I_{belt}/I_{pin}) + d_{belt}(\dot{\delta}_M - y_R \cdot I_{belt}/I_{pin}) \quad (2.32)$$

I termini che compaiono nell'equazione sono già noti. La trasmissione della coppia avviene per mezzo di una cinghia che collega l'albero del motore elettrico con quello del pignone.

$$M_{assistP} = M_L \cdot I_{belt} \quad (2.33)$$

$M_{assistP}$  corrisponde alla coppia di assistenza al pignone.

### EPSc alla colonna

Per la coppia di assistenza alla colonna:

$$M_L = k_{belt}(\delta_M - \delta_{uc}) + d_{belt}(\dot{\delta}_M - \dot{\delta}_{uc}) \quad (2.34)$$

Anche qui i termini dell'equazione sono noti dai paragrafi precedenti. Questa volta la cinghia è collegata all'albero del motore elettrico e alla colonna superiore.

$$M_{assistC} = M_L \cdot I_{belt} \quad (2.35)$$

Dove  $M_{assistC}$  è la coppia di assistenza alla colonna.

Se non vi fossero elementi smorzanti ed elastici la coppia applicata ai relativi elementi sarebbe quella calcolata con l'*Electrical boost curve*.

## 2.4 Parametri

### 2.4.1 Parametri del modello meccanico

Vengono elencati tutti i parametri che caratterizzano le equazioni di equilibrio viste nel modello meccanico. Tali valori sono letti dal manuale di CarMaker [4].  
Dati relativi al sistema colonna-barra di torsione dello sterzo (tabella ):

Parametro	Valore	Nota
$J_{uc}$	$0.026 \text{ kgm}^2$	
$J_{lc}$	$0.001 \text{ kgm}^2$	
$k_{uc}$	$12 \text{ Nm/deg}$	Assistenza diversa da EPSc alla colonna
$k_{uc}$	$2 \text{ Nm/deg}$	Assistenza EPSc alla colonna
$k_{lc}$	$12 \text{ Nm/deg}$	Assistenza EPSc alla colonna
$k_{lc}$	$2 \text{ Nm/deg}$	Assistenza diversa da EPSc alla colonna
$k_{ESF,c/tb}$	$7000 \text{ Nm/rad}$	
$F_{lim,c}$	$\pm 0.2 \text{ Nm}$	
$F_{lim,tb}$	$\pm 0.1 \text{ Nm}$	
$d_c$	$0.06 \text{ Nms/rad}$	
$d_{tb}$	$0.6 \text{ Nms/rad}$	
$\delta_{lim}$	$5 \text{ deg}$	
$k_{tb}$	$200 \text{ Nms/deg}$	

**Tabella 2.3:** Dati della colonna di sterzo e della barra di torsione

Parametro	Valore
$m_r$	$3 \text{ kg}$
$y_{r,lim}$	$0.08 \text{ m}$
$k_{ESF,r}$	$8 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
$F_{lim,r}$	$\pm 75 \text{ N}$
$d_r$	$550 \text{ Ns/m}$

**Tabella 2.4:** Dati della cremagliera

### 2.4.2 Parametri del modello di assistenza idraulico

Da [5] è possibile tabulare anche i parametri relativi ai modelli di assistenza che saranno implementati nel software Simulink per poter simulare i comportamenti dello sterzo.

Parametro	Valore
$d_i$	0.03 m
$d_o$	0.05 m
$p_{min}$	1 bar
$C_e$	0.5
$A_o$	$8 \cdot 10^{-6} m^2$
$L$	0.2 m
$\rho$	800 kg/m <sup>3</sup>
$\beta$	$3 \cdot 10^7 N/m^2$

**Tabella 2.5:** Dati del modello di assistenza HSP

### 2.4.3 Parametri del modello di assistenza elettrico

Di seguito invece vi è l'elenco dei parametri usati nei tre modelli di assistenza elettrico [5].

Parametro	Valore
$K_t$	0.3 Nm/A
$I_{belt}$	2.5
$J_M$	$1.5 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$
$B$	0.02 Nms
$k_{belt}$	120 Nm/rad
$d_{belt}$	0.1 Nms/rad

**Tabella 2.6:** Dati dei modelli EPS

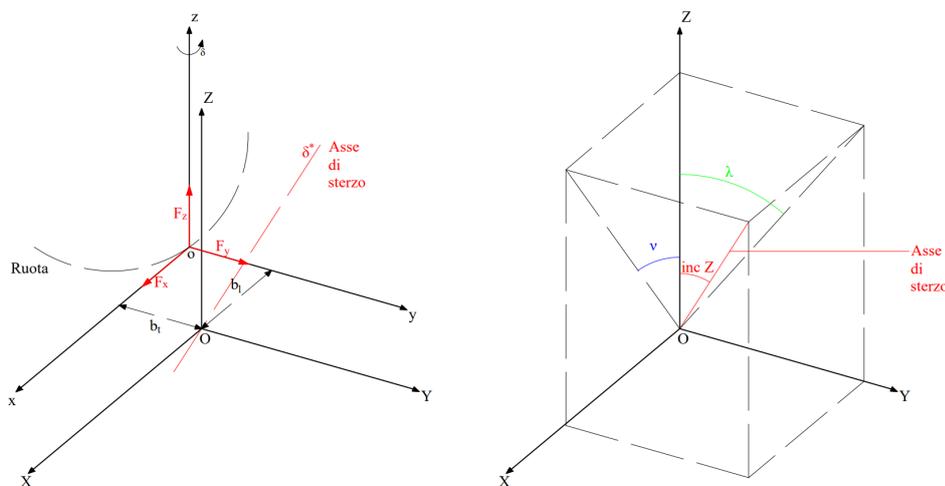
Parametro	Valore
$I_{KGT}$	$1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m/rad}$
$m_{bn}$	$1 \text{ kg}$
$J_{KGT}$	$3 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$k_{KGT}$	$1 \cdot 10^7 \text{ N/m}$
$d_{KGT}$	$1 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}$
$k_{ESF,KGT}$	$2 \text{ Nm/rad}$
$F_{lim,KGT}$	$\pm 0.02 \text{ Nm}$
$k_{ESF,bn}$	$1 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
$F_{lim,bn}$	$\pm 60 \text{ N}$
$k_{bn}$	$3 \cdot 10^5 \text{ N/m}$
$d_{bn}$	$1.5 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}$

**Tabella 2.7:** Dati del modello EPSapa soltanto

## Capitolo 3

# Asse di sterzo e tirante

Le ruote sterzanti di un autoveicolo ruotano intorno ad un proprio asse, detto *asse di sterzata*. Tale asse non è nè perpendicolare al suolo nè passa per il centro dell'orma di contatto, ma viene caratterizzato da quattro parametri: gli angoli *caster*  $\nu$  e *king-pin*  $\lambda$ , e i bracci a terra longitudinale  $b_l$  e trasversale  $b_t$  [8]. La figura 3.1 in basso è riportata per evidenziare tali parametri.



**Figura 3.1:** Asse della sterzata

L'angolo di king-pin è l'angolo tra l'asse di sterzo della ruota e il piano verticale longitudinale. Questo angolo è utile nell'autoallineamento del sistema di sterzo. Invece l'angolo di caster è l'angolo tra l'asse di sterzo e il piano verticale perpendicolare al piano di simmetria del veicolo. Anche questo angolo aiuta l'autoallineamento grazie all'offset delle forze laterali agenti sulle ruote [3].

Se l'asse di sterzata fosse ortogonale al suolo ( $\nu = \lambda = 0$ ) e non vi fosse alcun braccio a terra ( $b_l = b_t = 0$ ), il momento agente sulla ruota intorno all'asse di sterzata a causa dell'interazione ruota-suolo sarebbe semplicemente il momento di autoallineamento.

In realtà il momento intorno all'asse di sterzata è dato dalla somma di quattro contributi:

- $M_{Z_{F_x}}$ , Momento dovuto alle forze longitudinali ed al braccio a terra trasversale
- $M_{Z_{F_y}}$ , Momento dovuto alle forze laterali ed al braccio a terra longitudinale
- $M_{X_{F_z}}$  e  $M_{Y_{F_z}}$ , Momenti dovuti alle forze verticali ed ai bracci a terra longitudinale e trasversale
- $M_Z$ , Momento di autoallineamento

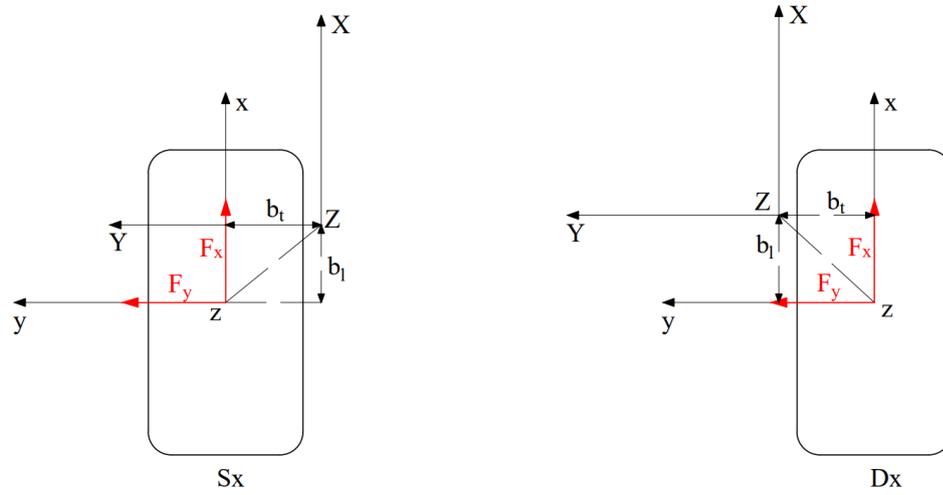
Per ricavare il momento totale sull'asse di sterzata è possibile ricavare i vari momenti lungo gli assi di un sistema di riferimento (X,Y,Z) centrato all'intersezione tra l'asse di sterzata e il suolo e con gli assi paralleli a quelli del sistema di riferimento veicolo, trasferendoli poi sull'asse di sterzo considerando gli angoli di incidenza.

L'asse di sterzata non cambia la propria posizione nello spazio al variare di  $\delta$ , e di conseguenza anche gli angoli di incidenza rimangono costanti. La variazione dell'angolo di sterzo determina invece le dimensioni dei bracci a terra della sospensione. E' anche vero che la posizione e l'orientamento dell'asse di sterzo cambiano con lo scuotimento verticale della ruota per effetto della cedevolezza della sospensione.

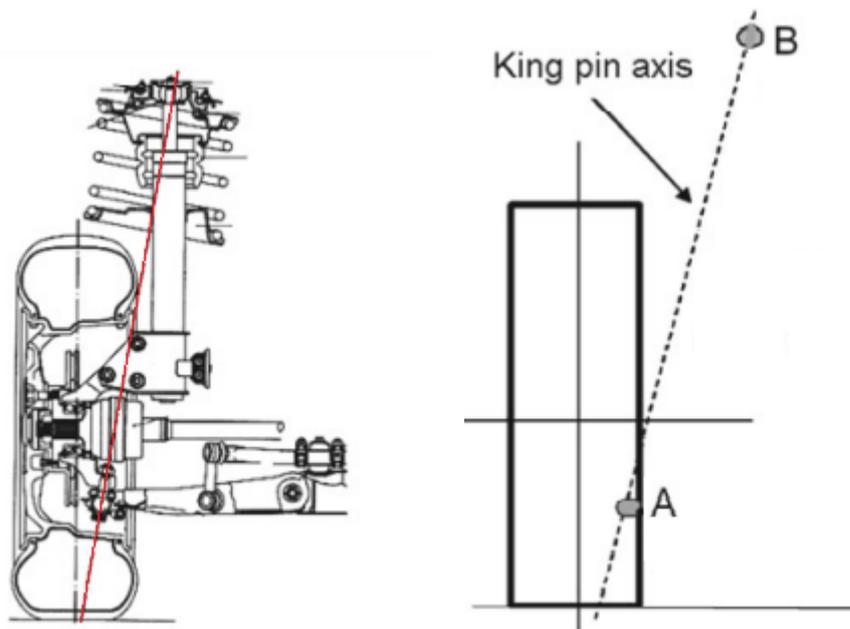
Come è possibile notare in figura 3.2, vi sono due sistemi di riferimento: uno è solidale con il veicolo con il relativo centro posto nell'intersezione tra l'asse di sterzo e il terreno (XYZ) e l'altro è solidale con la ruota con il centro nell'orma di contatto (xyz).

L'asse di sterzo rappresenta nelle sospensioni una linea che congiunge due punti caratteristici della sospensione. La posizione nello spazio è visibile nelle immagini in figura 3.3. A sinistra è presente una sospensione McPherson, generalmente usata negli assali anteriori e raramente in quelli posteriori. Questa è dotata di un ammortizzatore che collega il portaruota e il telaio, con il quale si eliminano due dei cinque gradi di libertà del portaruota. Gli altri elementi costituenti la sospensione sono il braccetto di sterzo e il braccio a tre punti a forma di forcella. L'asse di sterzo è rappresentato con la linea rossa nel disegno di sinistra e viene riportato con una linea tratteggiata in quello di destra, dove è possibile rilevare i punti caratteristici che determinano l'asse: cioè il punto A e il punto B.

Il punto A rappresenta il collegamento tra il portaruota e il braccio a tre punti; invece B è il punto di contatto tra il punto superiore dell'ammortizzatore e il telaio.



**Figura 3.2:** Sistemi di riferimento per angolo volante nullo



**Figura 3.3:** Asse di sterzo in una sospensione McPherson

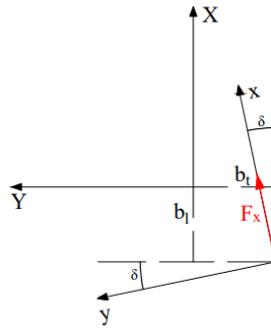
### 3.1 Momento attorno all'asse di sterzo della ruota destra

Le forze longitudinali (figura 3.4) generano un momento intorno all'asse verticale:

$$M_{Z_{F_{x_{dx}}}} = F_{x_{dx}} \cdot (b_t \cos \delta - b_l \sin \delta) \quad (3.1)$$

Dove:

- $M_{Z_{F_{x_{dx}}}}$ , il momento sull'asse verticale dovuto alla forza longitudinale;
- $F_{x_{dx}}$ , la forza longitudinale agente sulla ruota (negativa in frenata, positiva in trazione);
- $b_t$ , il braccio a terra trasversale;
- $b_l$ , il braccio a terra longitudinale.



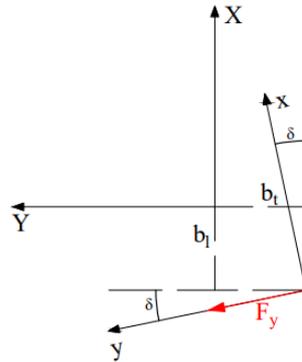
**Figura 3.4:** Forza longitudinale nella ruota destra

Il momento attorno all'asse z dovuto alle forze laterali (figura 3.5) è:

$$M_{Z_{F_{y_{dx}}}} = F_{y_{dx}} \cdot (-b_l \cos \delta - b_t \sin \delta) \quad (3.2)$$

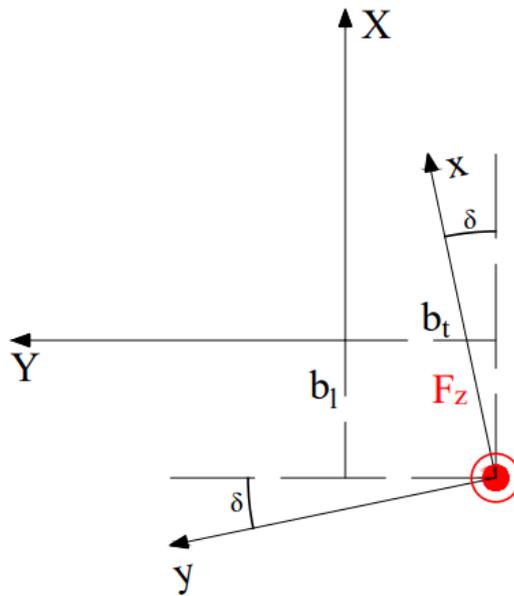
Dove:

- $M_{Z_{F_{y_{dx}}}}$ , il momento sull'asse verticale dovuto alla forza laterale;
- $F_{y_{dx}}$ , la forza laterale agente sulla ruota;
- $b_t$ , il braccio a terra trasversale;
- $b_l$ , il braccio a terra longitudinale.



**Figura 3.5:** Forza trasversale nella ruota destra

La forza verticale 3.6 genera due momenti, uno attorno all'asse x e l'altro attorno all'asse y:



**Figura 3.6:** Forza verticale nella ruota destra

$$M_{X_{Fz_{dx}}} = -Fz_{dx} \cdot b_t \quad (3.3)$$

$$M_{Y_{Fz_{dx}}} = Fz_{dx} \cdot b_l \quad (3.4)$$

Dove:

- $M_{X_{Fz}}$ , il momento sull'asse longitudinale dovuto alla forza verticale;
- $M_{Y_{Fz}}$ , il momento sull'asse trasversale dovuto alla forza verticale;
- $Fz_{dx}$ , la forza verticale agente sulla ruota;
- $b_t$ , il braccio a terra trasversale;
- $b_l$ , il braccio a terra longitudinale.

Il momento sull'asse di sterzo della ruota destra è dato dalla somma dei momenti precedentemente calcolati e moltiplicati ognuno per il coseni dei rispettivi angoli d'incidenza come mostra l'equazione 3.6.

$$\begin{cases} M_{Z_{Fxdx}} = Fx_{dx} \cdot (b_t \cos \delta - b_l \sin \delta) \\ M_{Z_{Fydx}} = Fy_{dx} \cdot (-b_l \cos \delta - b_t \sin \delta) \\ M_{X_{Fzdx}} = -Fz_{dx} \cdot b_t \\ M_{Y_{Fzdx}} = Fz_{dx} \cdot b_l \end{cases} \quad (3.5)$$

$$M_{s_{dx}} = M_{Z_{dx}} \cos(\text{inc}Z_{dx}) + M_{X_{dx}} \cos(\text{inc}X_{dx}) + M_{Y_{dx}} \cos(\text{inc}Y_{dx}) \quad (3.6)$$

Dove gli angoli di incidenza sono calcolati come:

$$\begin{cases} \text{incidenza}X_{dx} = \arctan\left(\frac{1}{\cos \lambda \cdot \tan \nu}\right) \\ \text{incidenza}Y_{dx} = \arctan\left(\frac{1}{\cos \nu \cdot \tan \lambda}\right) \\ \text{incidenza}Z_{dx} = \arctan\left(\sqrt{\tan^2 \lambda + \tan^2 \nu}\right) \end{cases} \quad (3.7)$$

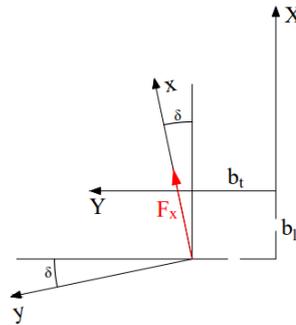
## 3.2 Momento attorno all'asse di sterzo della ruota sinistra

Le forze longitudinali (figura 3.7) generano un momento intorno all'asse verticale:

$$M_{Z_{F_{x_{sx}}}} = -F_{x_{sx}} \cdot (b_t \cos \delta + b_l \sin \delta) \quad (3.8)$$

Dove:

- $M_{Z_{F_{x_{sx}}}}$ , il momento sull'asse verticale dovuto alla forza longitudinale;
- $F_{x_{sx}}$ , la forza longitudinale agente sulla ruota;
- $b_t$ , il braccio a terra trasversale;
- $b_l$ , il braccio a terra longitudinale.



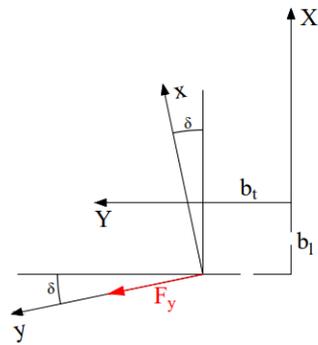
**Figura 3.7:** Forza longitudinale nella ruota sinistra

Il momento attorno all'asse z dovuto alle forze laterali (figura 3.8) è:

$$M_{Z_{F_{y_{sx}}}} = -F_{y_{sx}} \cdot (b_l \cos \delta - b_t \sin \delta) \quad (3.9)$$

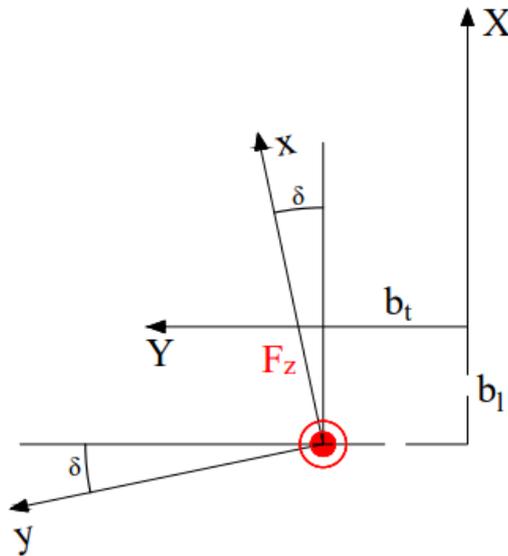
Dove:

- $M_{Z_{F_{y_{sx}}}}$ , il momento sull'asse verticale dovuto alla forza laterale;
- $F_{y_{sx}}$ , la forza laterale agente sulla ruota;
- $b_t$ , il braccio a terra trasversale;
- $b_l$ , il braccio a terra longitudinale.



**Figura 3.8:** Forza trasversale nella ruota sinistra

La forza verticale (figura 3.9) genera due momenti, uno attorno all'asse x e l'altro attorno all'asse y:



**Figura 3.9:** Forza verticale nella ruota sinistra

$$M_{X_{Fz_{sx}}} = Fz_{sx} \cdot b_t \quad (3.10)$$

$$M_{Y_{Fz_{sx}}} = Fz_{sx} \cdot b_l \quad (3.11)$$

Dove:

- $M_{X_{Fz_{sx}}}$ , il momento sull'asse longitudinale dovuto alla forza verticale;

- $M_{Y_{Fz_{dx}}}$ , il momento sull'asse trasversale dovuto alla forza verticale;
- $Fz_{sx}$ , la forza verticale agente sulla ruota;
- $b_t$ , il braccio a terra trasversale;
- $b_l$ , il braccio a terra longitudinale.

Come per il caso della ruota destra anche per questo il momento sull'asse di sterzo della ruota sinistra (eq.3.13) si calcola tramite gli angoli di incidenza (3.14).

$$\begin{cases} M_{Z_{Fxsx}} = -Fx_{sx} \cdot (b_t \cos \delta + b_l \sin \delta) \\ M_{Z_{Fysx}} = -Fy_{sx} \cdot (b_l \cos \delta - b_t \sin \delta) \\ M_{X_{Fz_{sx}}} = Fz_{sx} \cdot b_t \\ M_{Y_{Fz_{sx}}} = Fz_{sx} \cdot b_l \end{cases} \quad (3.12)$$

$$M_{s_{sx}} = M_{Z_{sx}} \cos(\text{inc}Z_{sx}) + M_{X_{sx}} \cos(\text{inc}X_{sx}) + M_{Y_{sx}} \cos(\text{inc}Y_{sx}) \quad (3.13)$$

Gli angoli di incidenza sono:

$$\begin{cases} \text{incidenza}X_{sx} = \text{incidenza}X_{dx} \\ \text{incidenza}Y_{sx} = -\text{incidenza}Y_{dx} \\ \text{incidenza}Z_{sx} = \text{incidenza}Z_{dx} \end{cases} \quad (3.14)$$

### 3.3 Forza sulla cremagliera

Con i momenti calcolati attorno all'asse di sterzo è possibile trovare la forza che viene applicata dapprima perpendicolarmente al braccetto di sterzo e poi tramite il tirante trasferita alla cremagliera per mezzo delle equazioni di equilibrio dei momenti che agiscono sull'asse di sterzo in direzione verticale:

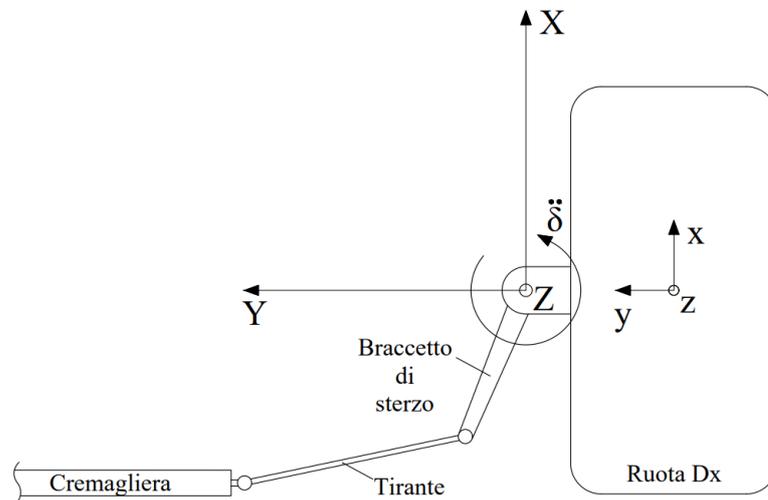
$$J_{r_{dx}} \cdot \ddot{\delta} - M_{s_{Z-dx}} = F_{SA,t_{dx}} \cdot d_{SA} \quad (3.15)$$

$$J_{r_{sx}} \cdot \ddot{\delta} - M_{s_{Z-sx}} = F_{SA,t_{sx}} \cdot d_{SA} \quad (3.16)$$

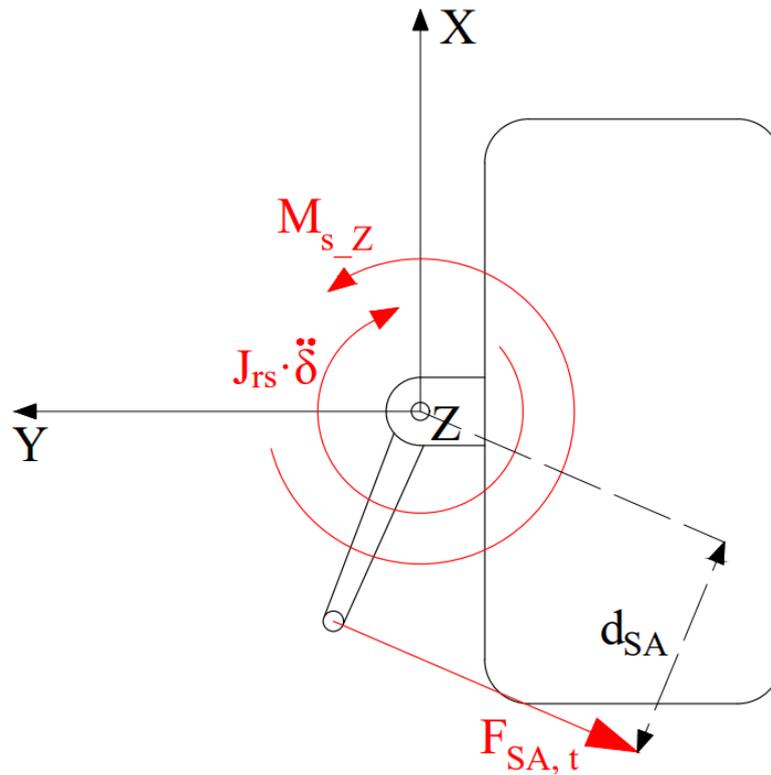
Dove:

- $J_r$ , il momento di inerzia della ruota per una rotazione intorno all'asse di sterzo;
- $F_{SA,t}$ , la forza che agisce in direzione perpendicolare all'asse del braccetto di sterzo;
- $M_{s_z}$ , il momento di sterzo attorno all'asse di sterzo;
- $d_{SA}$ , la lunghezza del braccetto di sterzo.

Al fine di comprendere meglio le equazione sopra riportate si allegano le immagini 3.10 e 3.11 relative al diagramma di corpo libero degli assi di sterzo.

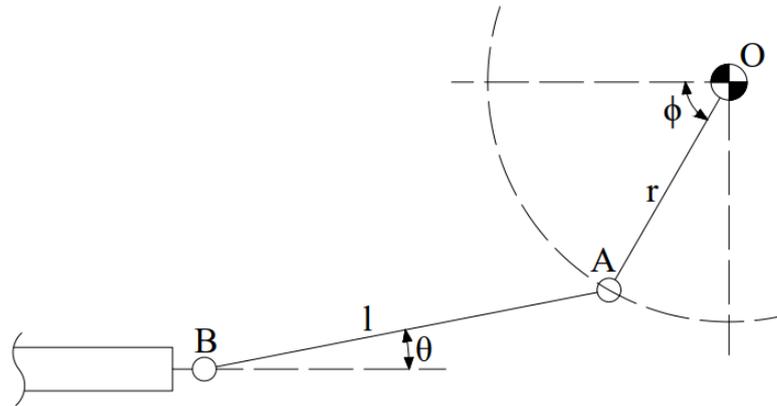


**Figura 3.10:** Sistema di riferimento dell'asse di sterzo XYZ

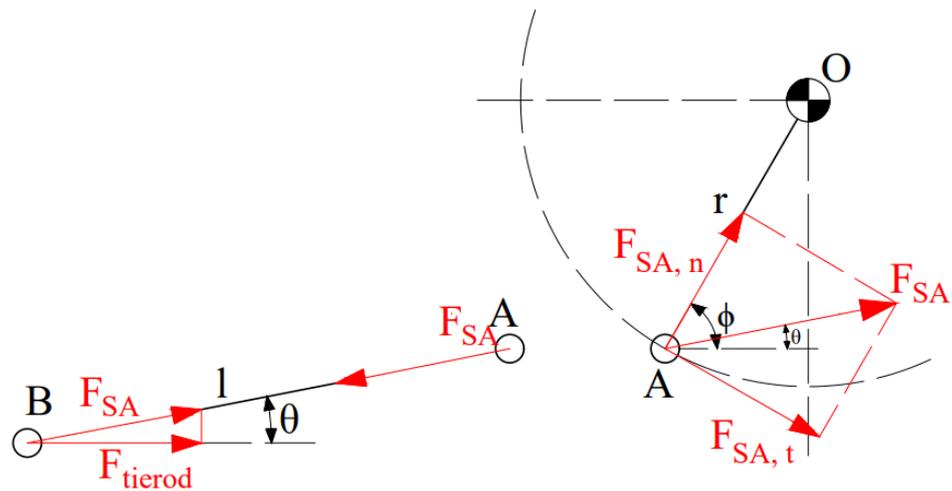


**Figura 3.11:** Diagramma di corpo libero dell'asse di sterzo

Dalla forza perpendicolare al braccio di sterzo  $F_{SA,t}$  è possibile ricavare la forza scambiata tra tirante e braccetto, denominata  $F_{SA}$ , grazie all'equazione 3.17. Proiettando quest'ultima sulla asse orizzontale si ottiene la forza generata dalle forze sviluppate dello pneumatico e che si trasmette sulla cremagliera (eq.3.18). Ovviamente bisogna sommare le due forze dal lato destro e sinistro per ottenere la forza totale sulla cremagliera (eq.3.19). Lo schema e il diagramma di corpo libero del tirante e del braccetto di sterzo sono sotto riportati nelle immagini in figura 3.12 e 3.13



**Figura 3.12:** Schema del tirante e del braccio di sterzo per ricavare il diagramma di corpo libero



**Figura 3.13:** Diagramma di corpo libero del tirante (sx) e del braccio di sterzo (dx)

Equazioni in sequenza per ricavare la forza sulla cremagliera:

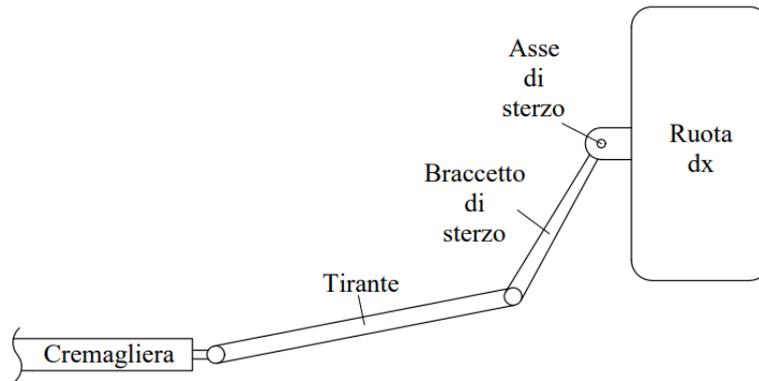
$$F_{SA} = \frac{F_{SA,t}}{\sin(\phi - \theta)} \quad (3.17)$$

$$F_{tierod} = F_{SA} \cdot \cos \theta = \frac{F_{SA,t}}{\sin(\phi - \theta)} \cdot \cos \theta \quad (3.18)$$

$$F_{rack} = F_{tierod_{dx}} + F_{tierod_{sx}} \quad (3.19)$$

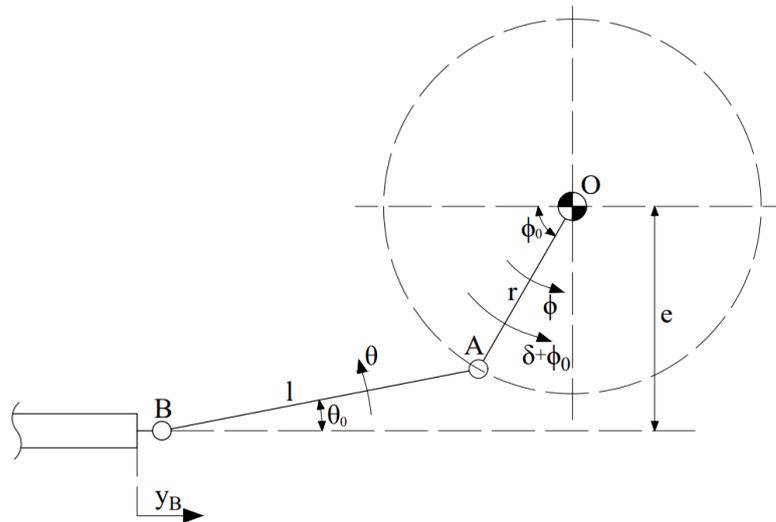
### 3.4 Sterzata delle ruote

L'angolo di sterzo delle ruote  $\delta$  si trova con lo spostamento della cremagliera attraverso le dimensioni del tirante e del braccetto di sterzo. Si allega la figura 3.15 rappresentante il disegno del sistema di sterzata.



**Figura 3.14:** Disegno del tirante e del braccetto

Dalla figura sovrastante si ricava lo schema con le definizioni usate nelle equazioni che porteranno al calcolo dell'angolo di interesse. In figura 3.15 si nota la somiglianza con uno schema di un sistema biella manovella eccentrico, infatti la cremagliera corrisponde al pistone che scorre all'interno cilindro e la manovella al braccetto di sterzo che determina la rotazione della ruota.



**Figura 3.15:** Schema del tirante e del braccetto

La risoluzione del sistema è articolata in più step, determinando inizialmente l'angolo di rotazione del tirante  $\theta$  e lo spostamento della cremagliera  $y_r = y_B$ .

Dati dello schema:

- O: posizione dell'asse di sterzo;
- A: accoppiamento tra il tirante e il braccetto di sterzo;
- B: accoppiamento tra la cremagliera e il tirante
- $\phi_0$ : angolo formato tra l'asse trasversale  $y$  e il braccetto di sterzo nella condizione iniziale di riposo ( $y_r = y_B = 0$ );
- $\phi$ : angolo di rotazione del braccetto di sterzo attorno all'asse di sterzo;
- $\theta$ : angolo di rotazione del tirante;
- $\theta_0$ : angolo formato tra l'asse trasversale  $y$  e il tirante di sterzo nella condizione iniziale di riposo;
- $r$ : braccetto di sterzo
- $l$ : tirante di sterzo
- $e$ : distanza longitudinale tra B ed O (tra cremagliera e asse di sterzo)

Da proiezioni geometriche l'angolo  $\theta$  risulta essere:

$$e = l \cdot \sin \theta + r \cdot \sin \phi$$

↓

$$\theta = \arcsin \left( \frac{e - r \cdot \sin \phi}{l} \right) \quad (3.20)$$

Lo spazio percorso dalla cremagliera vale:

$$y_B = (l \cdot \cos \theta - l \cdot \cos \theta_0) + (r \cdot \cos \phi_0 - r \cdot \cos \phi) \quad (3.21)$$

Mettendo a sistema le equazioni 3.20 e 3.21 si ottiene l'angolo  $\phi$ .

$$\phi = \arccos \left( \frac{-y_B + l \cdot \cos \theta - l \cdot \cos \theta_0 + r \cdot \cos \phi_0}{r} \right) \quad (3.22)$$

Grazie a questo ultimo angolo è possibile calcolare l'angolo di rotazione delle ruote  $\delta$  sottraendogli l'angolo iniziale  $\phi_0$ .

$$\delta = \phi - \phi_0 \quad (3.23)$$

I parametri geometrici del sistema appena descritto vengono ricavati dalla geometria di una sospensione McPherson attraverso il software AdamsCar.

Con le componenti sopraelencate nella tabella 3.1 si ricavano le grandezze che compaiono nelle equazioni.

$r_x$	150 mm
$r_y$	86 mm
$l_x$	57 mm
$l_y$	290 mm

**Tabella 3.1:** Componenti longitudinali e trasversali del braccetto e del tirante

- $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = 172.9$  mm.
- $l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 295.5$  mm.
- $\phi_0 = \arctan \frac{r_x}{r_y} = 60^\circ$ .
- $\theta_0 = \arctan \frac{l_x}{l_y} = 11^\circ$ .

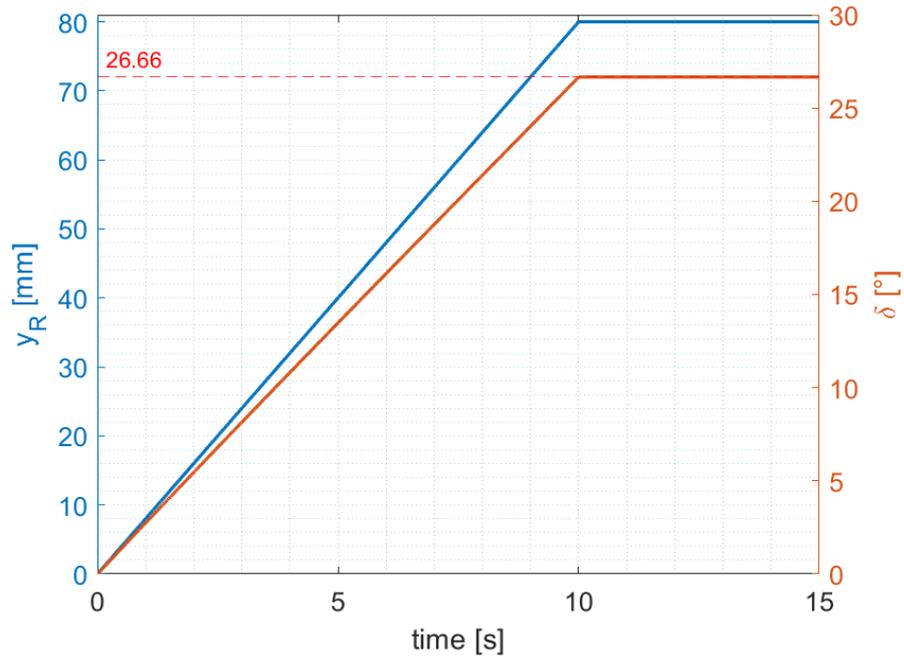
I seguenti grafici illustrano l'andamento dell'angolo  $\delta$  della ruota destra durante il range di spostamento della cremagliera. Questo, come è possibile vedere dalla tabella 2.4, presenta un valore limite a 0.08m a meno di piccolissime deformazioni presenti a fine corsa. Si specifica che le figure si riferiscono alla ruota destra poiché come si può notare a seconda del verso dello spostamento della cremagliera e della posizione della ruota variano i valori dell'angolo di rotazione  $\delta$ .

Dalle figure 3.16 e 3.17 si nota un comportamento non lineare da parte dell'angolo di rotazione: infatti a fronte dell'input relativo allo spostamento  $y_r$  che ha un andamento lineare la curva  $\delta$  diventa sempre meno che lineare riducendo il proprio coefficiente angolare locale.

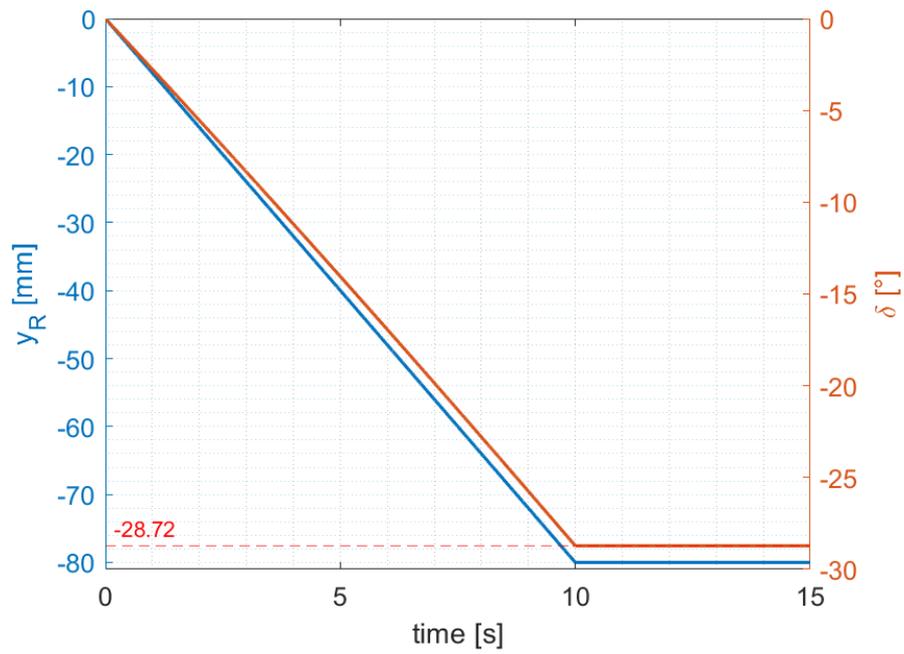
A regime, quando la cremagliera raggiunge il suo fine corsa ( $y_r = 0.08$  m) gli angoli di rotazione massimi in valore assoluto nelle due condizioni di spostamento negativo e positivo presentano la maggior differenza:  $28.72^\circ - 25.66^\circ = 2.06^\circ$ .

In generale gli angoli nelle due condizioni sono sempre differenti, seppur di pochi gradi. Questa condizione può essere adattata per il confronto tra la ruota destra e quella sinistra: infatti per uno spostamento positivo si ha nella ruota destra un angolo di rotazione positivo e in quella sinistra un angolo di rotazione negativo prendendo come riferimento la convenzione in figura 3.15. Si può associare allo spostamento negativo della figura 3.17 l'angolo di rotazione della ruota sinistra in modulo assoluto.

Con le stesse considerazioni fatte sopra si ricavano angoli differenti tra la ruota destra e quella sinistra nella manovra di sterzo. Quindi, per una sterzata verso sinistra la ruota di sinistra ha angoli maggiori (più guadagno dalla cremagliera); invece la ruota di destra sterza di meno perdendo guadagno dalla cremagliera. In

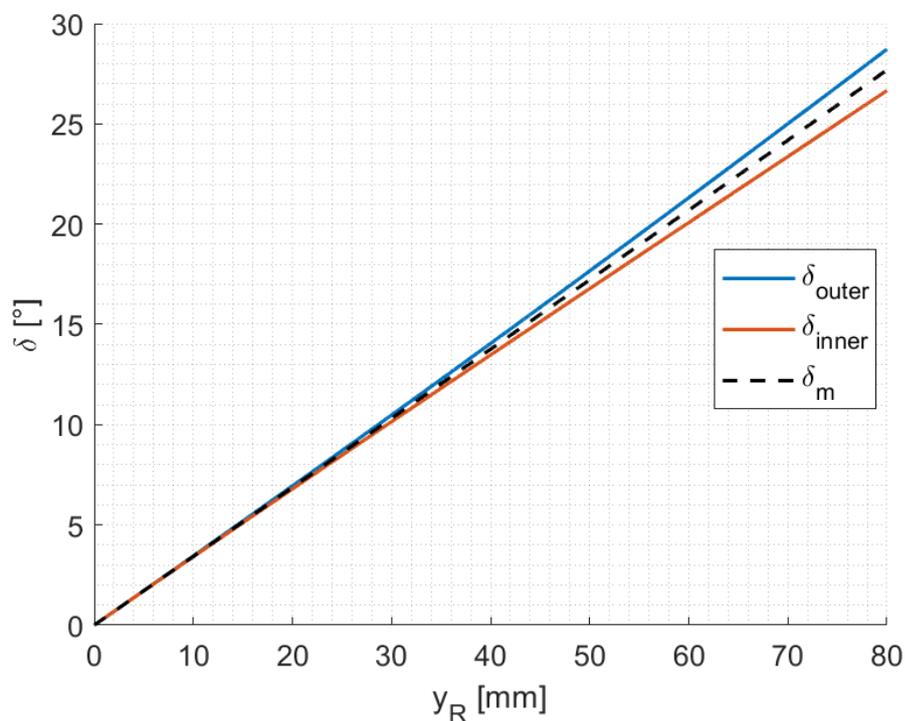


**Figura 3.16:** Andamento dell'angolo di sterzo  $\delta$  nel tempo per valori di  $y_r$  positivi



**Figura 3.17:** Andamento dell'angolo di sterzo  $\delta$  nel tempo per valori di  $y_r$  negativi

generale, la ruota interna al centro di curvatura presenta sempre angoli di rotazione più grandi rispetto quelli della ruota esterna.



**Figura 3.18:** Andamento degli angoli della ruota interna ed esterna

Il valore medio degli angoli di sterzo della ruota interna e di quella esterna è mostrato in figura 3.18 con una linea nera e tratteggiata e verrà utilizzato come angolo di sterzo nel modello a bicicletta implementato nel modello Simulink.

## Capitolo 4

# Descrizione modello Simulink

### 4.1 Layout complessivo

Il modello che descrive la dinamica laterale (fig.4.1) è costituito da cinque sistemi: "Pilota", "Motore e trasmissione", "Veicolo e terreno", "Sterzo e servoassistenza" e "Sospensione". Gli ultimi due sono i sistemi implementati grazie al lavoro svolto in questo documento di tesi, invece i restanti sono estrapolati da un modello di dinamica laterale progettato in precedenza. All'interno di questo modello è presente un modello di pneumatico realizzato mediante la formula magica di Pacejka; precisamente questa si riferisce al modello di Pacejka '96, un ottimo modello per il calcolo delle forze sviluppate tra lo pneumatico e il terreno che prevede l'effetto delle campanature, il carico combinato e i momenti residui. Inoltre il modello è caratterizzato da un numero elevato di gradi di libertà: vi sono tre g.d.l. nel piano più uno relativo all'angolo di rollio, un g.d.l. per ogni ruota (4) e tre g.d.l. analizzati precedentemente nella parte riguardante l'analisi del sistema di sterzo. La sterzata è affidata solamente all'assale anteriore e anche la trazione è garantita dalle ruote anteriori (FWD). Il modello riceve in ingresso i valori della coppia di sterzo (*Steer by Torque*) o dell'angolo di sterzo (*Steer by Angle*) a seconda dell'approccio scelta e la velocità del veicolo ad inizio manovra, la quale è garantita da un controllo velocità all'interno del sistema "Pilota".

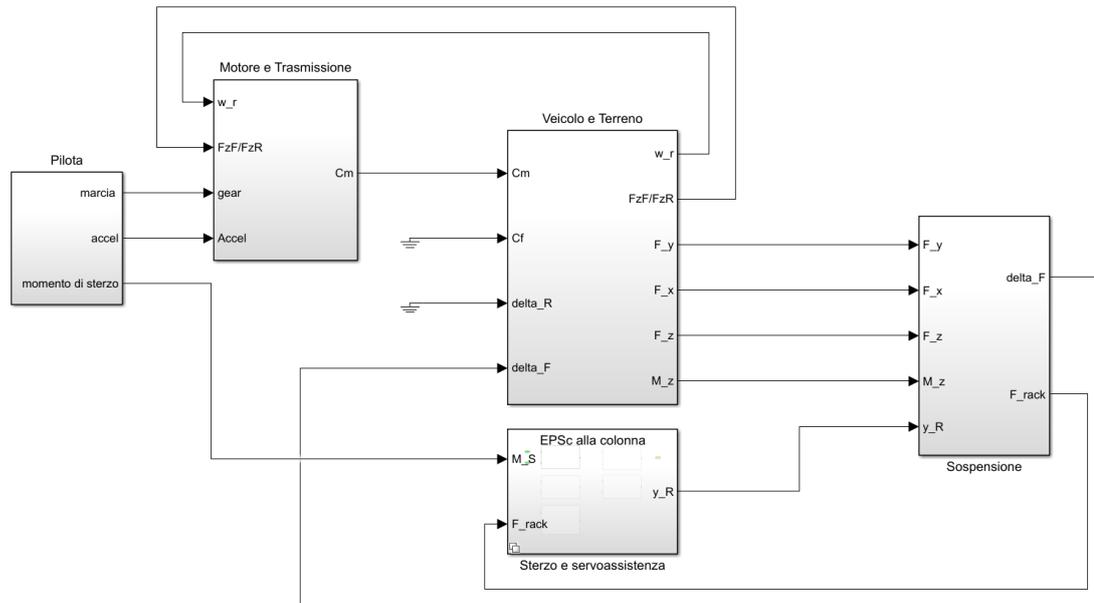


Figura 4.1: Layout generale del modello

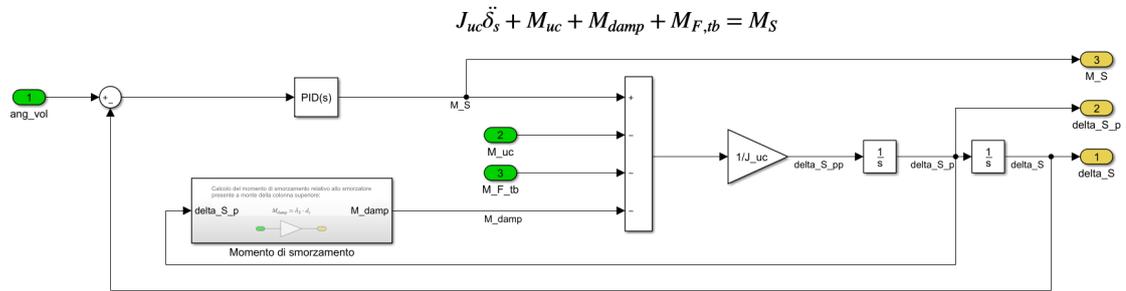
### 4.1.1 Approccio Steer by Torque

Dallo script di Matlab si inserisce il valore del momento di sterzo  $M_S$  con il quale si vuole eseguire la manovra. Quindi tale segnale dal blocco "Pilota" entra in quello relativo allo Sterzo, il quale contiene le equazioni di equilibrio dei componenti del sistema di sterzo e dalle quali si estrae in output lo spostamento della cremagliera  $y_R$ . A sua volta quest'ultima grandezza entra nel modello della sospensione per poter calcolare l'angolo di rotazione delle ruote anteriori  $\delta_f$ . Nel modello dello sterzo entra anche la forza applicata sulla cremagliera  $F_{rack}$  che viene calcolata dal modello della sospensione. Questo riceve le forze sviluppate dallo pneumatico e ricavate dal modello di Pacejka '96 implementato in "Veicolo e terreno".

### 4.1.2 Approccio Steer by Angle

L'input principale che riceve il modello è il valore di angolo di sterzata  $\delta_f$  che il veicolo raggiunge durante la manovra. Il segnale contenente l'angolo di sterzo nel tempo entra nel sottosistema dello sterzo e attraverso un controllo PID permette il calcolo del momento di sterzo necessario per eseguire la manovra. Dalla figura 4.2 è mostrato come si effettua il controllo dell'angolo: l'errore derivante dalla differenza tra l'angolo di set e quello in retroazione permette di ricavare il momento di sterzo con un opportuno *PID Controller* parametrizzato con alcune iterazioni affinché il

feedback segui fedelmente il set. Ad eccezione di questo blocco, tutti gli altri sono uguali a quelli usati per la modalità con coppia in ingresso.



**Figura 4.2:** Controllo PID per modalità Steer By Angle

## 4.2 Modello dello Sterzo e della Servoassistenza

Questo modello è caratteristico per ogni tipologia di servoassistenza poichè cambia la posizione della barra di torsione e quindi la posizione delle coppie e delle forze scambiate tra gli elementi. Per poter al meglio implementare le varie tipologie si adotta la funzione dei *Variant Subsystem*: si crea un sottosistema per ogni assistenza che verrà attivato esclusivamente da una specifica variabile fornita prima della soluzione. I restanti quattro sottosistemi rimangono così inutilizzati con un calcolo computazionale molto ridotto. In figura 4.3 si mostrano i cinque sottosistemi che si possono simulare.



**Figura 4.3:** I *Variant Subsystem* implementati

### 4.2.1 Modello meccanico

La seguente descrizione riguarda il modello meccanico del sistema di sterzo, ed in particolare si descrive un modello meccanico adatto per la servoassistenza EPSc alla colonna. In seguito si riporteranno i modelli relativi a ciascuna tipologia di servoassistenza.

Si riporta una prima parte del modello (figura 4.4) contenente i sottosistemi relativi

alla colonna superiore, al momento di torsione della colonna superiore e al modello di attrito implementato nella barra di torsione (superiore).

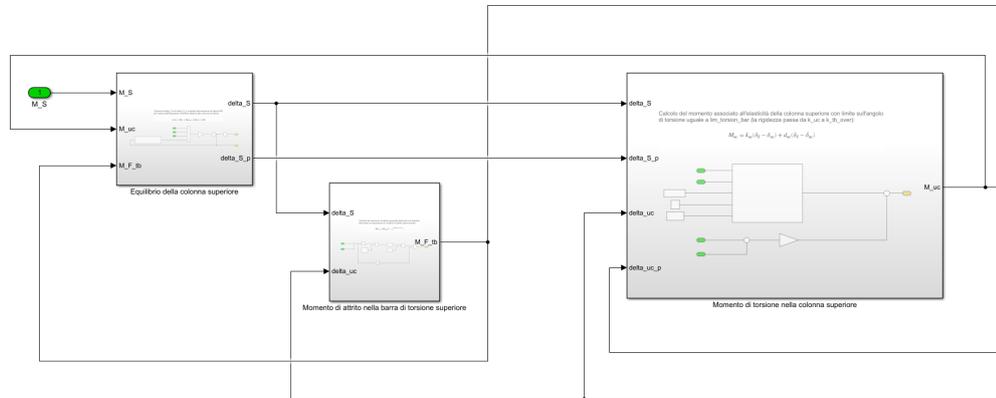


Figura 4.4: Modello meccanico Parte 1

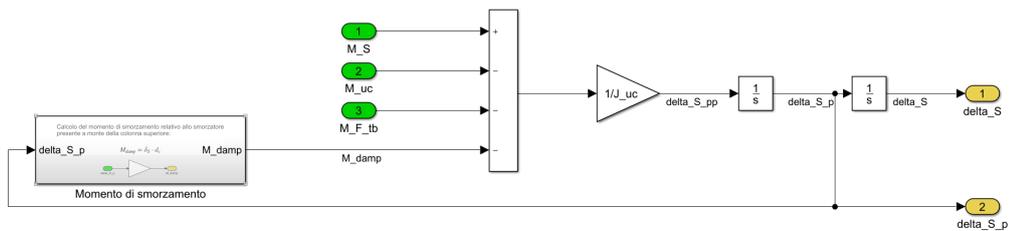


Figura 4.5: Equazione di equilibrio della colonna superiore

A partire dal momento di sterzo e tramite gli altri momenti calcolati in altri sottosistemi si ricava la rotazione  $\delta_s$  dello sterzo (figura 4.5).

Per simulare l'irrigidimento della barra torsione quando la relativa rotazione consentita si utilizza una *Matlab function*, il quale script viene allegato di seguito.

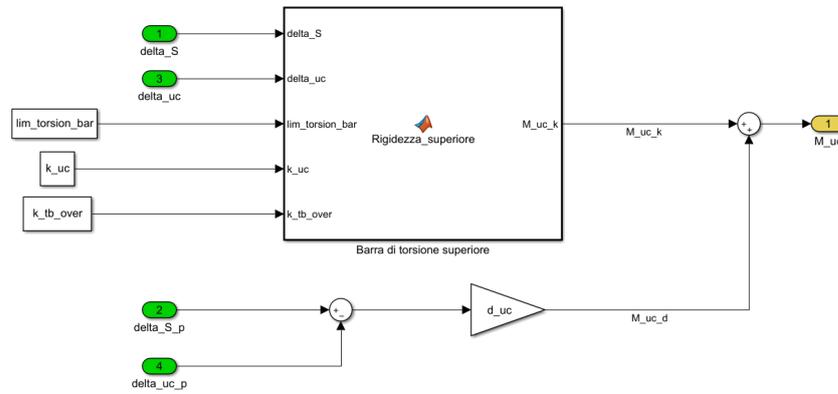
```

1 function [M_uc_k, k_upper] = Rigidezza_superiore(delta_S,
2     delta_uc, lim_torsion_bar, k_uc, k_tb_over)
3     if abs(delta_S - delta_uc) > lim_torsion_bar
4         k_upper = k_tb_over;
5     else
6         k_upper = k_uc;
7     end
8     M_uc_k = (delta_S - delta_uc) * k_upper;
9 end

```

Tale funzione prevede a restituire in output il momento elastico associato alla molla concentrata nella colonna superiore considerando il cambio di rigidità

$$M_{uc} = k_{uc}(\delta_S - \delta_{uc}) + d_{uc}(\dot{\delta}_S - \dot{\delta}_{uc})$$



**Figura 4.6:** Momento di torsione della colonna superiore

quando si raggiunge la condizione limite, cioè: il modulo della differenza tra l'angolo di sterzo e quello della colonna superiore è superiore a 5°. In tal caso la rigidezza passa da 2 Nm/deg a 200 Nm/deg.

Di seguito la seconda parte del modello (figura 4.7) comprendenti i restanti sottosistemi del modello meccanico.

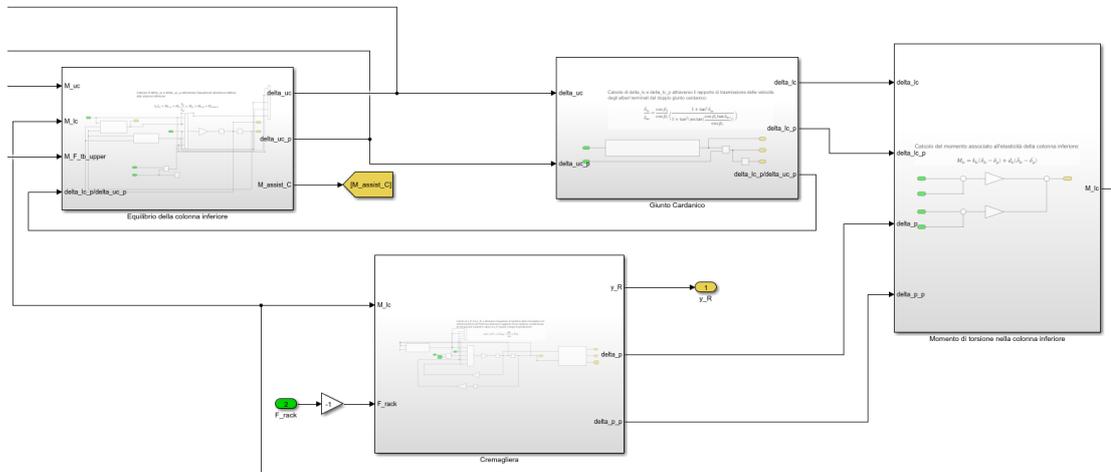


Figura 4.7: Modello meccanico parte 2

$$J_{ic}\delta_{uc}'' + M_{F,uc} + M_{ic}\frac{\dot{\delta}_{ic}}{\delta_{uc}} = M_{uc} + M_{F,ib} + M_{assist,C}$$

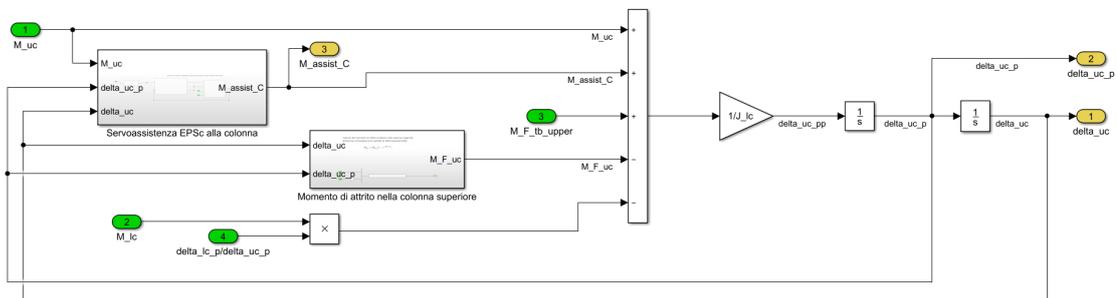


Figura 4.8: Equazione di equilibrio della colonna inferiore

In questa parte (figura 4.8) compare il sottosistema che restituisce il momento di assistenza elettrico alla colonna.

A partire da questo momento e da altri due derivanti dalla colonna superiore si ricavano le grandezze relative alla colonna superiore,  $\delta_{uc}$  e  $\dot{\delta}_{uc}$ .

Nell'equazione precedente dell'equilibrio della colonna inferiore è necessario il rapporto di trasmissione tra gli alberi dei giunti di Cardano e quindi si implementa l'equazione (figura 4.9) ricavata nel capitolo 2, eq.2.20.

Con l'angolo di rotazione  $\delta_{uc}$  si ricava prima il rapporto di trasmissione e poi le grandezze relative alla colonna inferiore,  $\delta_{ic}$  e  $\dot{\delta}_{ic}$ .

$$\frac{\dot{\delta}_{lc}}{\dot{\delta}_{uc}} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \left( \frac{1 + \tan^2 \delta_{uc}}{1 + \tan^2 \left( \arctan \left( \frac{\cos \beta_2 \tan \delta_{uc}}{\cos \beta_1} \right) \right)} \right)$$

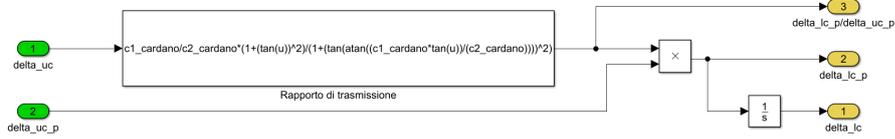


Figura 4.9: Giunto cardanico

Una volta ricavato l'angolo di rotazione della colonna inferiore è possibile calcolare il momento di torsione generato dagli elementi elastici in essa presenti. Si necessita nel calcolo anche la conoscenza dell'angolo di rotazione del pignone che si ricava dall'equilibrio della cremagliera. Quindi si mostra il calcolo del momento di torsione (fig.4.10) seguito dalla figura 4.11 che rappresenta le forze agenti sulla cremagliera.

$$M_{lc} = k_{lc}(\delta_{lc} - \delta_p) + d_{lc}(\dot{\delta}_{lc} - \dot{\delta}_p)$$

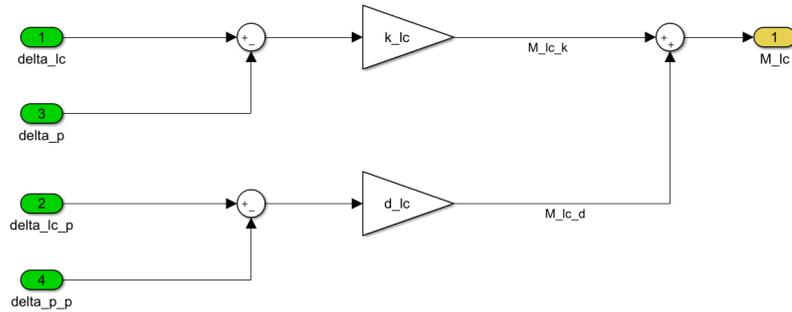
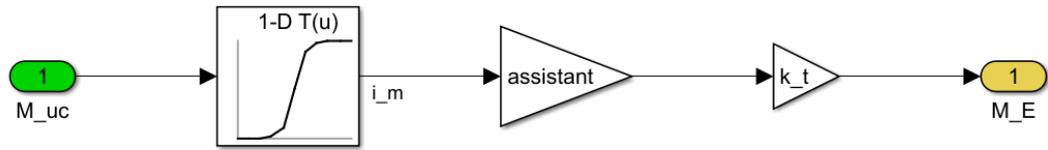


Figura 4.10: Momento di torsione associato agli elementi elastici presenti nella colonna inferiore

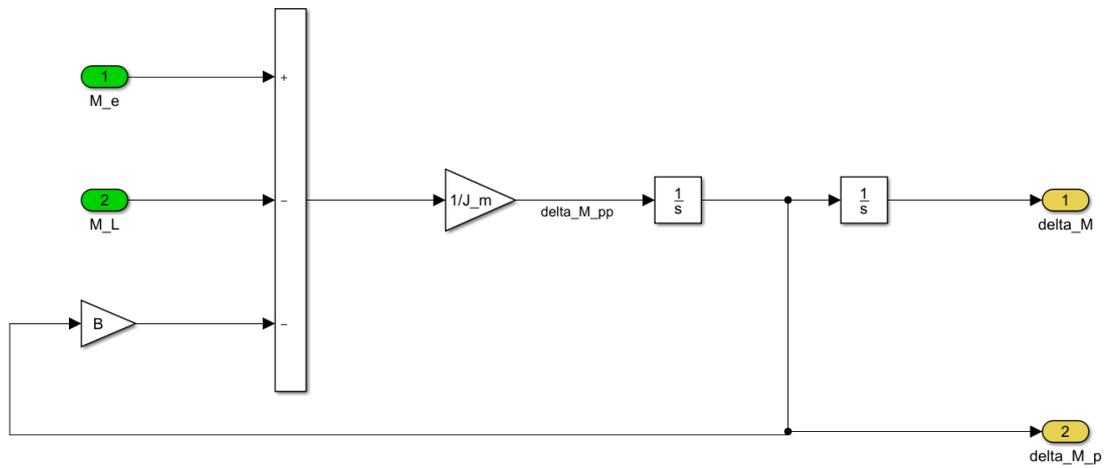
Nel modello della cremagliera entrano in ingresso la forza derivante dagli pneumatici  $F_{rack}$  e il momento di torsione nella colonna inferiore  $M_{lc}$ , il quale agisce sulla cremagliera per mezzo del rapporto di trasmissione  $I_{pin}$  descritto in dettaglio successivamente. In output vi sono lo spostamento della cremagliera  $y_r$ , l'angolo di rotazione del pignone  $\delta_p$  e la sua velocità  $\dot{\delta}_p$ .

Gli ultimi due output citati sono ricavati tramite un blocco denominato "pignone-cremagliera" che riceve in input lo spostamento della cremagliera per poi calcolare l'angolo di rotazione del pignone grazie ad un rapporto di trasmissione fisso,  $ratio_0$ .





**Figura 4.13:** Momento fornito dal motore elettrico - *Electrical Boost Curve* (fig.2.33) + Eq.2.25



**Figura 4.14:** Equilibrio dell'albero motore - Eq.2.27

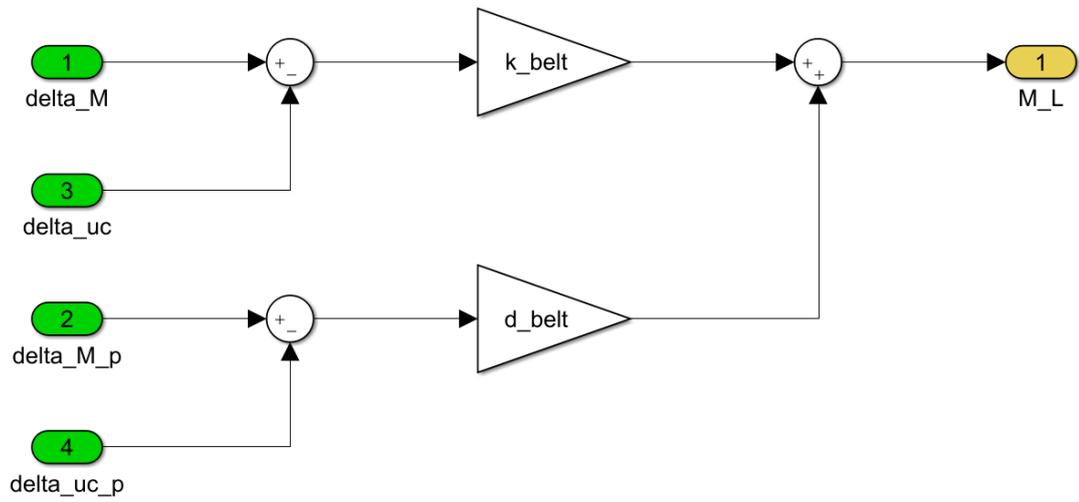


Figura 4.15: Momento relativo all'elasticità della cinghia - Eq.2.34

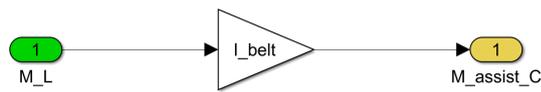


Figura 4.16: Rapporto di trasmissione - Eq.2.35

### 4.3.2 Modello EPSc al pignone

Tale assistenza compare nell'equazione di equilibrio della cremagliera, e infatti permette di avere un momento aggiuntivo a quello applicato dal pilota sullo sterzo che agisce sulla cremagliera per mezzo del pignone. L'input del modello l'angolo di torsione della barra di torsione, collocata in questo caso nella parte inferiore dello sterzo. Come si può vedere nelle seguenti immagini presenta delle similitudini con il "modello EPSc alla colonna".

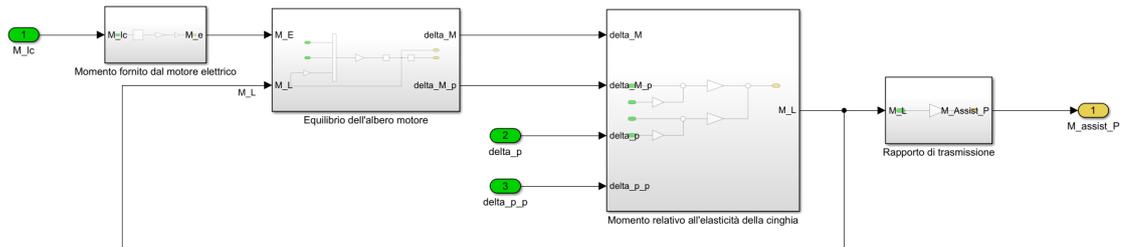


Figura 4.17: Modello EPSc al pignone

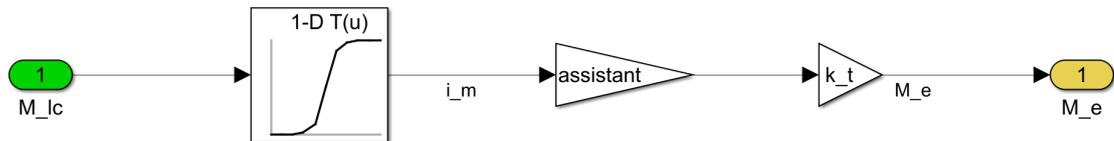


Figura 4.18: Momento fornito dal motore elettrico - *Electrical Boost Curve* (fig.2.33) + Eq.2.25

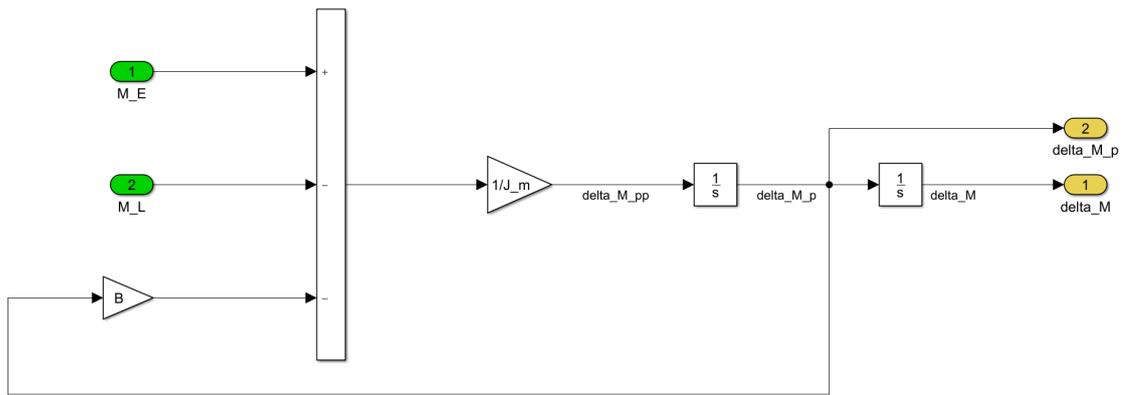


Figura 4.19: Equilibrio dell'albero motore - Eq.2.27

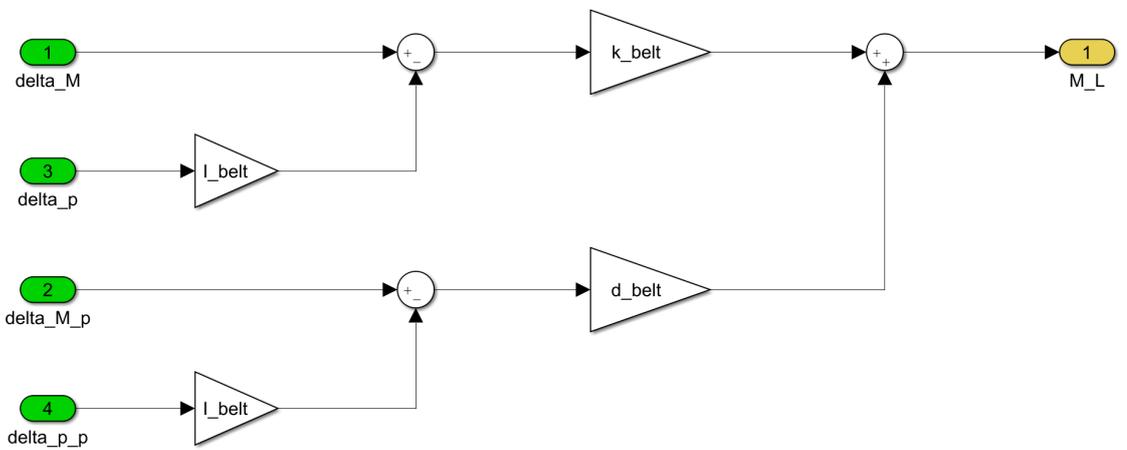


Figura 4.20: Momento relativo all'elasticità della cinghia - Eq.2.32

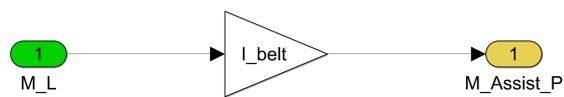


Figura 4.21: Rapporto di trasmissione - Eq.2.33

### 4.3.3 Modello HPS

Anche per questo modello di servoassistenza l'input è relativo all'angolo di torsione della barra di torsione collocata nella colonna di sterzo inferiore. Tramite la *Hydraulic Boost Curve* viene ricavata la pressione da mandare alle camere del cilindro pneumatico, i quali agiranno per imporre l'opportuna forza di assistenza.

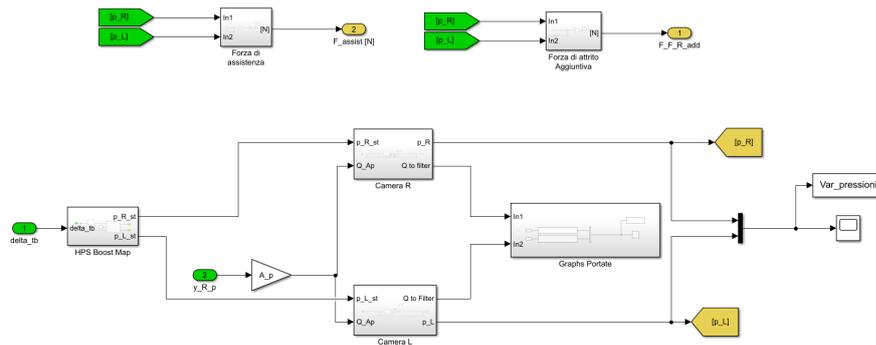


Figura 4.22: Layout generale del modello HPS

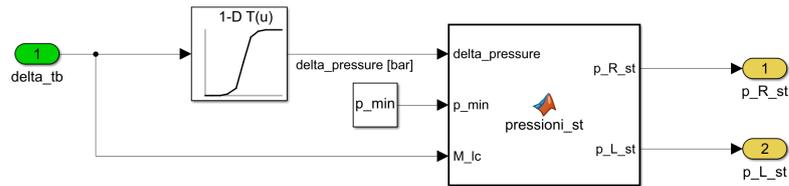
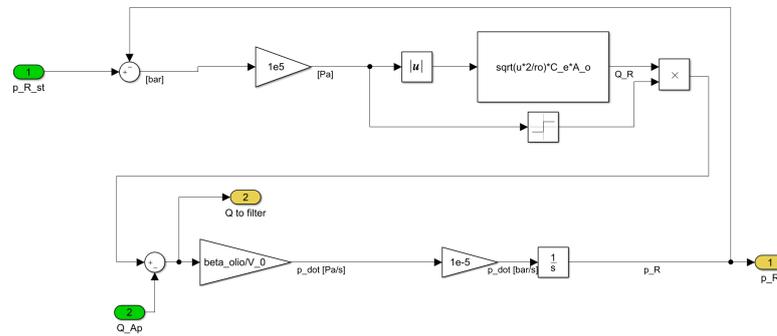
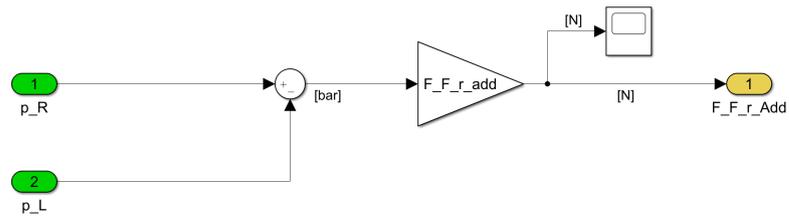


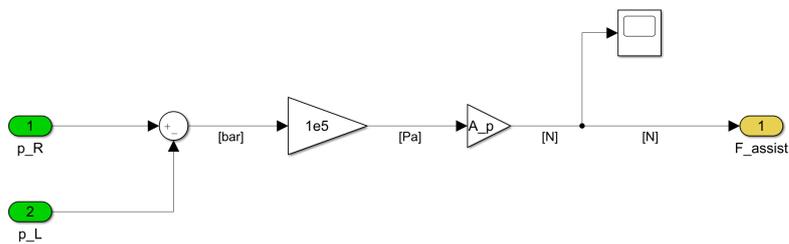
Figura 4.23: Hydraulic boost curve con impostazione della pressione stazionaria uguale a 1 bar



**Figura 4.24:** Implementazione delle equazioni 2.21, 2.22 e 2.23 per ricavare la pressione impostata sulla camera di destra del cilindro



**Figura 4.25:** Forza di attrito aggiuntiva dovuta agli attriti tra il pistone ed il cilindro



**Figura 4.26:** Forza di assistenza derivante dal modello HPS - eq.2.24

## 4.4 Modello della Sospensione

Il modello "Sospensione" implementa le equazioni descritte al terzo capitolo: quindi partendo dalla cinematica della cremagliera si ricava l'angolo di rotazione di ruote e la forza che agisce sulla stessa cremagliera generata dalle forze sviluppate dallo pneumatico e che si trasferiscono per mezzo degli assi di sterzo, cioè gli assi attorno a cui ruotano le ruote. Il modello complessivo è mostrato in figura 4.27.

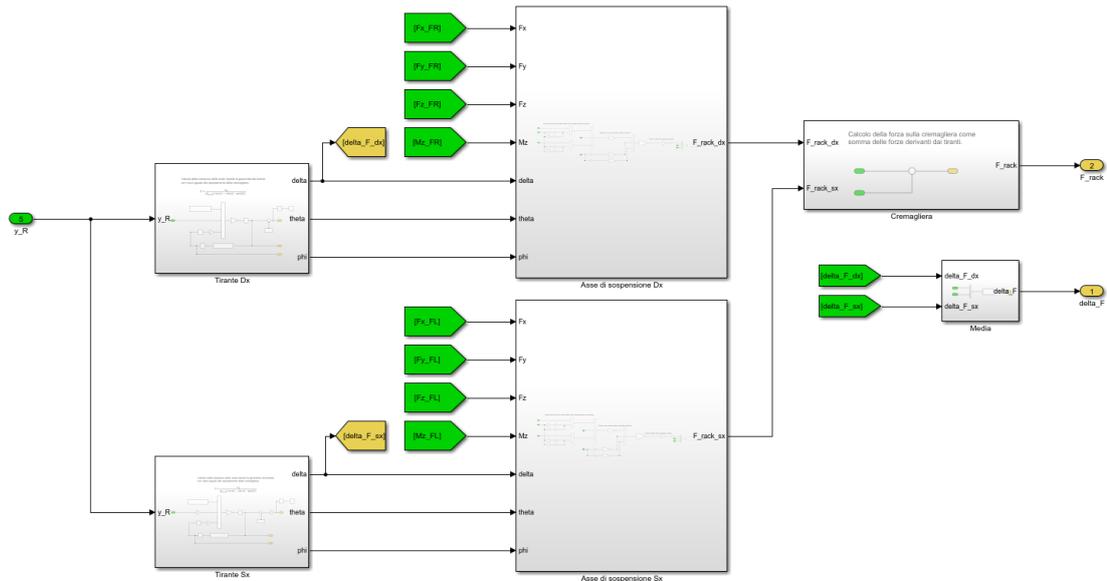


Figura 4.27: Modello Sospensione

Il modello della sospensione riceve in input lo spostamento della cremagliera dal modello dello sterzo e calcola attraverso la geometria del tirante e del braccetto di sterzo la rotazione delle due ruote. In figura 4.28 è presente il *lookup table* tramite il quale viene ricavato l'angolo delta relativo alla rotazione della ruota destra. Stessi blocchi sono realizzati per la ruota sinistra.

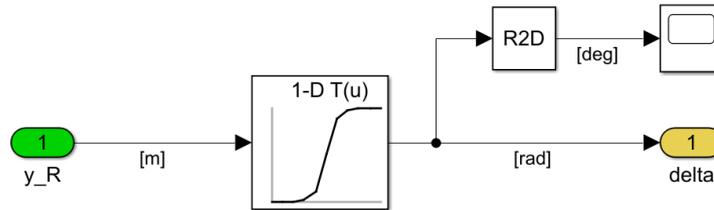


Figura 4.28: Tirante destro

Di seguito viene mostrato il codice per il calcolo della mappa implementata in figura 4.28:

---

```

1 e = e_tierod;
2 r = OA;
3 l = AB;
4
5 y_R_lut = linspace(-0.081, 0.081, 1600);
6 delta_lut = zeros(length(y_R_lut),1);
7
8 for i = 1 :length(y_R_lut)
9     fun = @(x) l*(cos(asin((e-r*sin(x + phi_0))/(l)))-cos(
10         theta_0))+r*(cos(phi_0)-cos(x + phi_0))-y_R_lut(i);
11     delta_lut(i) = fzero(fun, 0);
12 end

```

---

Uno degli output del modello in descrizione, l'angolo  $\delta_F$ , entra a sua volta nel modello "Veicolo e Terreno" solo dopo essere stato calcolato come la media tra le rotazioni della ruota destra e quella sinistra. Quindi influenza il calcolo delle forze sviluppate a terra  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ ; queste forze entrano come input nel modello della Sospensione per calcolare la forza sulla cremagliera. Quindi si mostra l'implementazione di varie equazioni utili al fine di ricavare il momento attorno all'asse di sterzo e poi la forza risultante dal tirante in figura 4.29.

La forza sulla cremagliera uscente dall'ultimo sistema entra nel modello Sterzo e Servo-assistenza e più precisamente nel sottosistema relativo all'equilibrio sulla cremagliera facendo da retroazione influenzando la dinamica e la cinematica di quest'ultima.

Tutti i dati necessari alla determinazione dell'asse di sterzo si ricavano da simulazioni sul software AdamsCar dove si sono simulate varie prove con una vettura Sedan FWD provvista di una sospensione MacPherson. Quindi si estrapolano dei dati con cui trovano dei valori medi per poi essere tenuti costanti durante la simulazione

sul modello Simlunk. I quattro parametri ricavati sono elencati nella tabella 4.1.

Parametro	Valore medio
$b_l$	35 mm
$b_t$	62.5 mm
$\lambda$	11.25°
$\nu$	7.75°

**Tabella 4.1:** Parametri dell'asse di sterzo

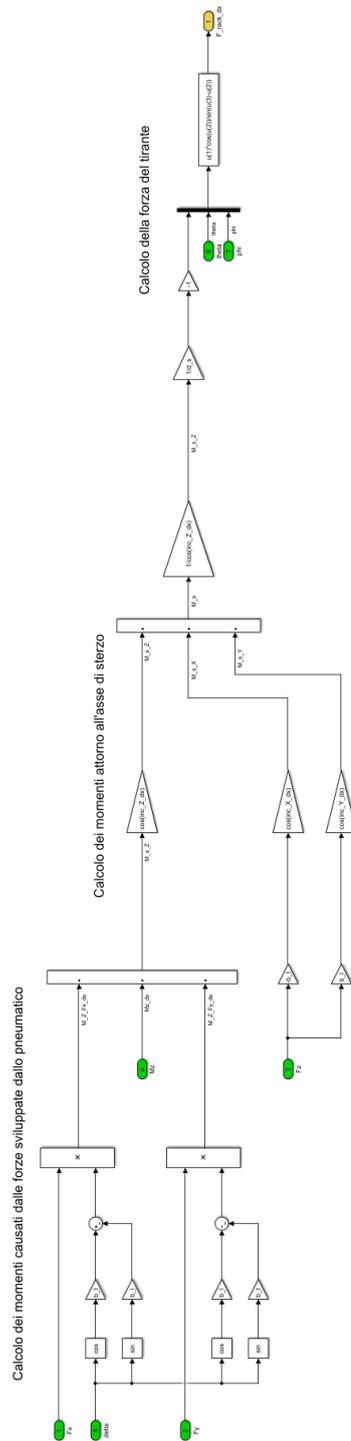
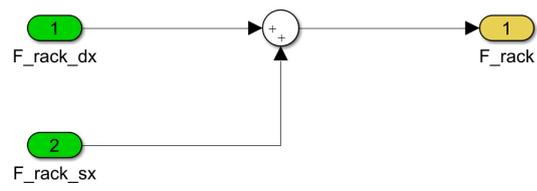


Figura 4.29: Asse di sospensione - Eq.3.5, eq.3.6, eq.3.15 ed eq.3.18



**Figura 4.30:** Cremagliera - Eq.3.19

# Capitolo 5

## Risultati delle simulazioni

In questo capitolo si riportano i risultati commentati delle varie simulazioni effettuate tramite i software Simulink e Matlab. In quest'ultimo si inseriscono i valori dei parametri inseriti nel modello e si danno gli input utili per avviare le simulazioni. Queste si differenziano in due tipologie a seconda della natura dell'input scelto per il modello: il primo prevede un input di coppia, relativa al momento applicato al volante (approccio "Steer by torque"), e la seconda prevede in input direttamente l'angolo di sterzo al volante (approccio "Steer by angle").

L'approccio *Steer by torque* serve per ricavare il feedback sul volante ed è adatto per correggere le manovre ad alte velocità. Invece l'approccio *Steer by angle* si esegue quando vi sono grandi angoli di sterzata a basse velocità, come le manovre di parcheggio; infatti a basse velocità la preoccupazione del guidatore è di correggere la traiettoria correggendo a sua volta l'angolo. Per alte velocità la correzione della traiettoria sposta l'attenzione sul controllo di coppia trascurando l'angolo con il quale di sterza; è importante dare degli input di coppia senza considerare un angolo preciso.

Nel caso di controllo di angolo il focus delle simulazioni è rivolto sullo studio della dinamica del veicolo, mentre per il controllo di coppia il focus passa agli stati interni al sistema di sterzo. Poiché il sistema di sterzo reale prevede un utilizzo misto dei metodi descritti, nel modello vengono implementati entrambi gli approcci.

### 5.1 Simulazioni con input di coppia

Le simulazioni con questo input vengono divise e rappresentate in base alla variabile indipendente: nella prima parte vengono mostrati dei grafici relativi agli stati dello sterzo per poi passare nella seconda parte con la descrizione e l'analisi della manovra di rilascio sterzo. Quindi si studiano anche le varie sensibilità degli elementi che costituiscono lo sterzo.

### 5.1.1 Taratura dei sistemi di servosterzo

Prima di leggere i vari grafici estrapolati dalle simulazioni si provvede alla taratura di ogni modello di assistenza affinché con lo stesso input di coppia si abbiano spostamenti uguali sulla cremagliera e quindi stessa rotazione delle ruote. Si inserisce quindi un guadagno a valle dalle mappe elettriche di servoassistenza viste precedentemente così da poter variare la corrente del motore elettrico e avere lo stesso comportamento a regime tra i vari modelli. Questo processo simula la sostituzione del modello idraulico con uno di tipo elettrico in modo che si abbia lo stesso effetto a regime; è un processo ragionevole poiché i sistemi elettrici sono sistemi attivi che si possono mappare liberamente. Con tale metodo i risultati delle simulazioni saranno affetti soltanto dalle varie differenze fisiche dei sistemi piuttosto che dalle diverse mappe che si possono modificare.

Si riporta una manovra eseguita a 90 km/h con momento di sterzo a regime uguale a 3 Nm e inclinazione di 1 Nm/s. L'input di sterzo è visibile in figura 5.1, invece nella figura successiva 5.2 sono rappresentati le rotazioni delle ruote frontali causati dalle varie tipologie di servoassistenza.

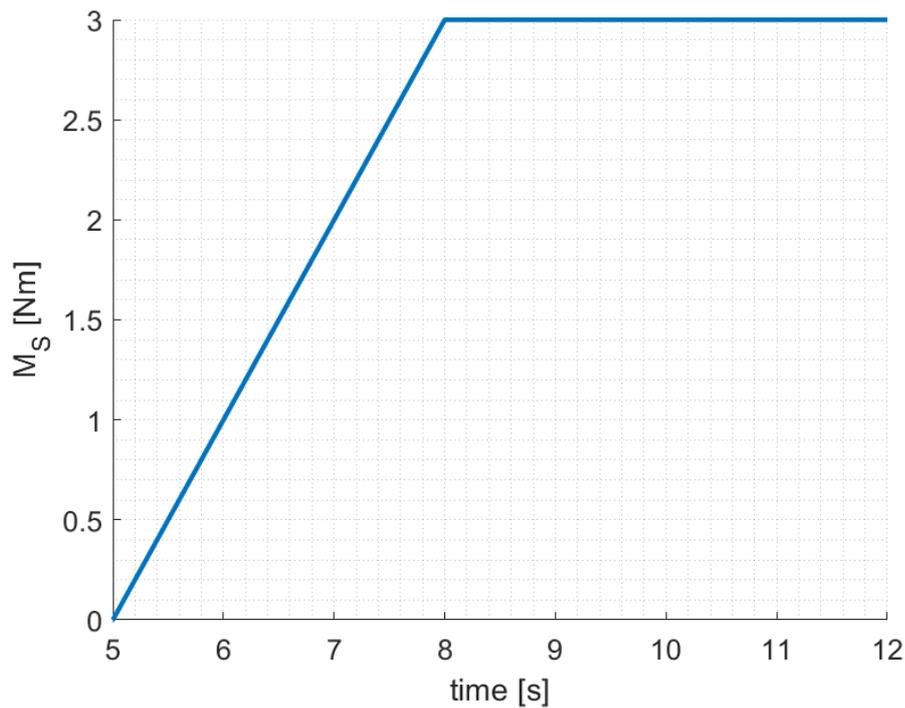
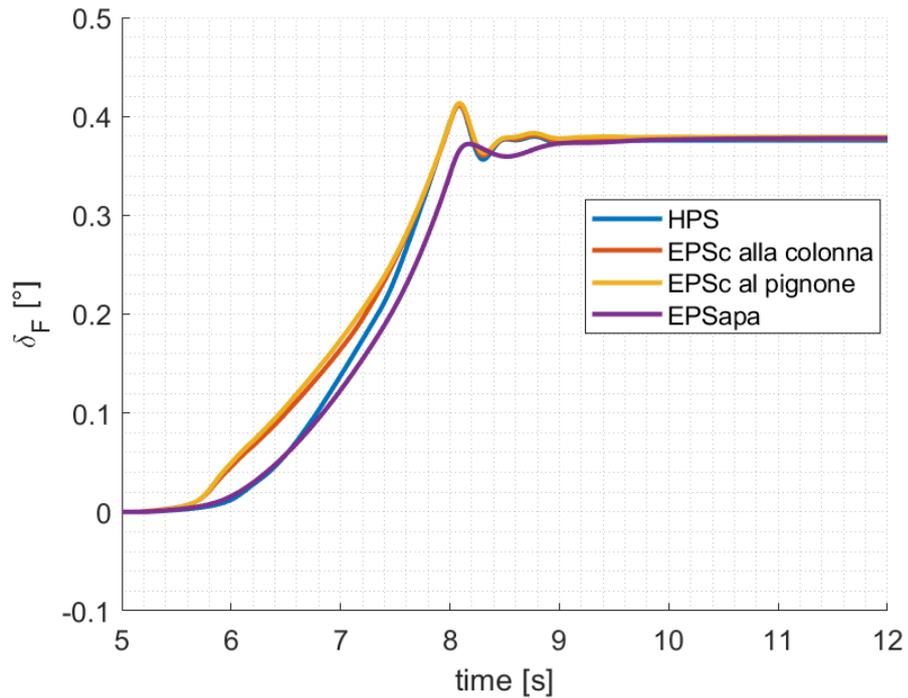


Figura 5.1: Momento di sterzo  $M_S$  in input



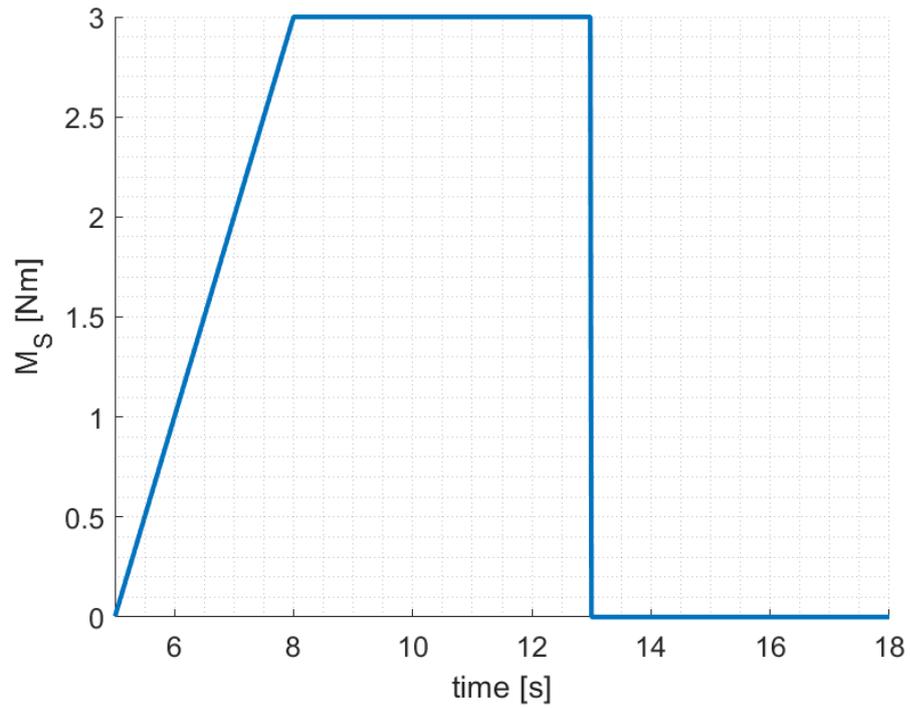
**Figura 5.2:** Angolo di rotazione delle ruote frontali

L'andamento delle curve in figura 5.2 segue più o meno fedelmente l'input di coppia seppur con angoli di rotazione piccoli. I sistemi di servoassistenza elettrici alle colonne risultano più reattivi all'input rispetto a quelli applicati sulla cremagliera ma di contro presentano elevate oscillazioni quando si raggiunge la saturazione della coppia (nel tempo la coppia imposta è tenuta costante). Tra questi il sistema EPSapa ha un andamento più regolare con piccolissime oscillazioni e senza mostrare alcun overshoot. I sistemi elettrici alla colonna di sterzo e al pignone sono gli unici che presentano quasi perfettamente la stessa curva per tutta la durata della manovra.

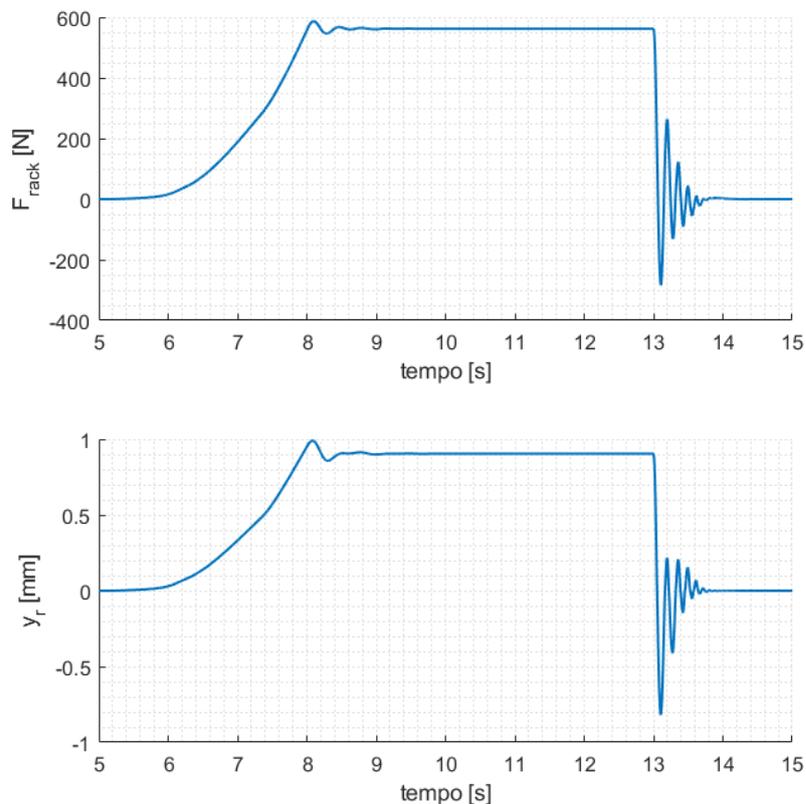
La taratura dei sistemi elettrici ha permesso di avere lo stesso valore a regime per tutte e quattro le curve, come si può vedere nel tratto superiore ai 10 secondi.

### 5.1.2 Cremagliera

Per evidenziare lo spostamento della cremagliera e la forza che su essa agisce dall'asse di sterzo si simula una manovra di rilascio sterzo. Il momento di sterzo a regime è 3 Nm con un'inclinazione di 1 Nm/s e il rilascio eseguito dopo 5 secondi dal raggiungimento del valore di regime come mostrato in figura 5.3.



**Figura 5.3:** Momento di sterzo  $M_S$  con rilascio



**Figura 5.4:** Forza  $F_{rack}$  e spostamento  $y_r$

In figura 5.4 è mostrato l'andamento della posizione della cremagliera nel tempo oltre che alla forza derivante dalle forze sviluppate allo pneumatico e che si trasmettono sulla cremagliera.

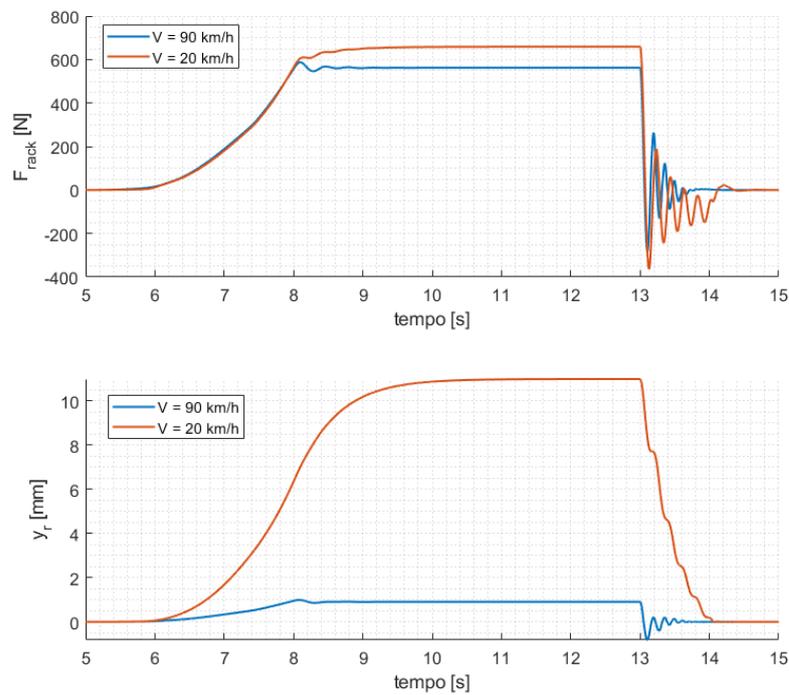
A fronte di una salita lineare da parte del momento di sterzo la cremagliera, così come la rotazione delle ruote viste prima, presenta una curva che diventa più ripida all'aumentare del momento di sterzo. Tra i 5 e gli 8 secondi del grafico si ha lo spostamento della cremagliera, la quale rimarrà ferma tra gli 8 e i 13 secondi. Dopodichè tornerà nella posizione centrale (0 mm in ordinata). Il rilascio istantaneo provoca delle oscillazioni che si andranno a smorzare dopo un transitorio. Nella realtà il veicolo non presenta tali oscillazioni ma il modello restituisce questi risultati per la mancanza dell'implementazione di alcuni elementi smorzanti, soprattutto nel sistema dell'asse di sterzo della sospensione.

La forza  $F_{rack}$  ha un andamento simile e presenta pure le oscillazioni discusse prima. Il picco massimo raggiunto per questa manovra di 3 Nm si attesta sui 600 N.

Nel grafico in fig.5.5 si aggiungono alle precedenti curve anche quelle relative ad una

velocità di 20 km/h. Le oscillazioni sulla forza sono persistenti, al contrario della posizione della cremagliera che non raggiunge mai valori negativi e che presenta delle irregolarità durante la fase di ritorno nella posizione iniziale.

Le oscillazioni in fase di rilascio potrebbero essere recuperati degli smorzamenti trascurati nella modellazione. Infatti nella valutazione del momento attorno all'asse di sterzo l'equilibrio non considera il momento di inerzia di tutto quello che si muove nello spazio attorno allo stesso asse (per esempio: montante, sospensione, ruota). Anche la presenza di attriti interni tra i sistemi collegati all'asse di sterzo e gli smorzamenti nelle boccole sono assenti. Inoltre e' possibile aggiungere anche una parte che consideri l'elasticità dei tiranti e dei braccetti di sterzo.



**Figura 5.5:** Forza  $F_{rack}$  e spostamento  $y_r$  per velocità diverse

### 5.1.3 Asse di sterzo

Dopo aver mostrato la forza agente sulla cremagliera a causa delle forze sviluppate dallo pneumatico è opportuno analizzare i momenti da queste prodotti: quindi gli andamenti nel tempo e come si genera la forza  $F_{rack}$  durante la manovra di sterzo. Per meglio comprendere i seguenti si specifica che la manovra è relativa alla figura 5.1: quindi il momento di sterzo cresce a partire dai 5 secondi per saturare ad 8 secondi.

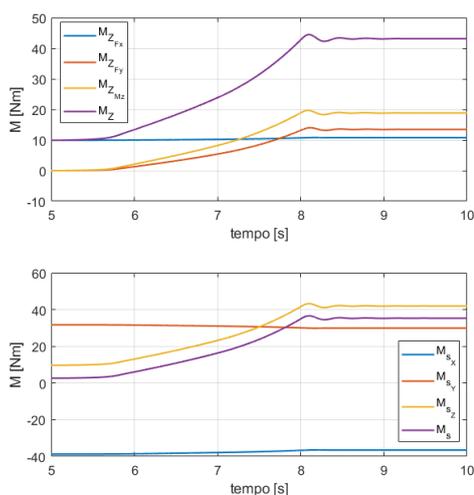


Figura 5.6: Asse di sterzo SX

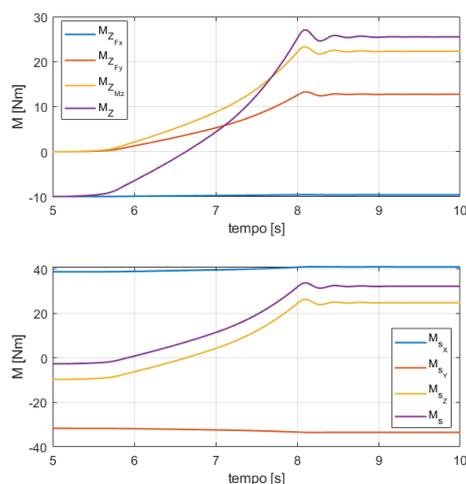


Figura 5.7: Asse di sterzo DX

L'analisi inizia dalle figure riportate nella parte superiore, le quali si riferiscono ai momenti intorno all'asse Z causati dalle forze sviluppate dallo pneumatico. Avendo come sistema di riferimento quello indicato in 3.2 le forze longitudinali  $F_x$  causano momenti verticali opposti in verso ma uguali in modulo (10 Nm) dai quali ne conseguono effetti diversi. Nell'asse di sterzo della ruota sinistra il momento  $M_{Z_{F_x}}$  aumenta il momento totale verticale  $M_{Z_{S_x}}$  mentre in quello della ruota destra si ha una diminuzione del momento totale verticale  $M_{Z_{D_x}}$ . Tale considerazione rimane valida affinché il veicolo è nella condizione di trazione; se fosse in frenata i segni sarebbe opposti.

Nonostante quanto appena descritto, l'andamento di  $M_Z$  è dovuto sostanzialmente alle altre due componenti che provengono dallo pneumatico: la forza laterale  $F_y$  e il momento di autoallineamento  $M_z$ .

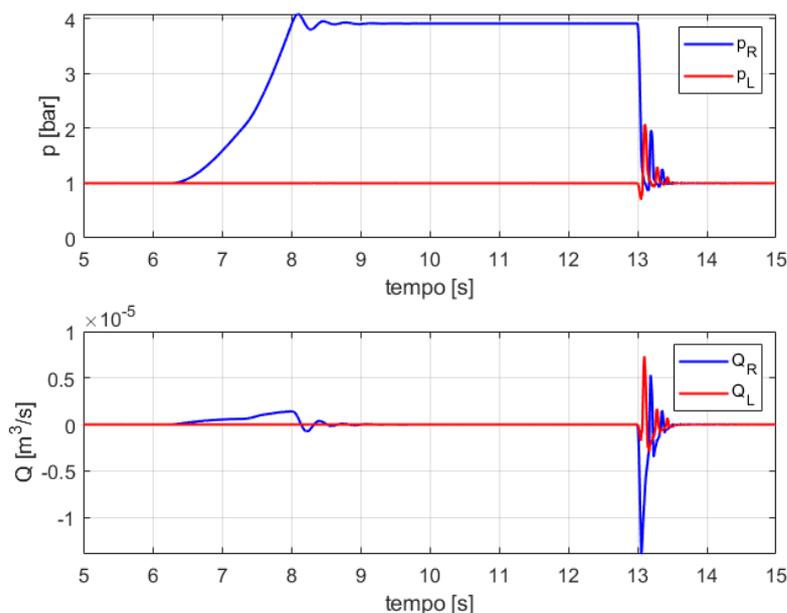
Nella manovra simulata di sterzata verso sinistra si ha la ruota destra più caricata della sinistra in termini di forza verticale  $F_z$  e ciò provoca un maggiore momento di autoallineamento nella ruota di destra.

Nelle figure in basso vi sono i momenti che agiscono direttamente sull'asse di sterzo.

Le curve in rosso e in blu si sommano e quindi si compensano nel calcolo della forza sulla cremagliera totale. Quindi la curva che definisce il momento di sterzo totale è quella in viola che come si può vedere è simile a quella in giallo (componente verticale del momento verticale): ciò è molto ragionevole e attendibile a causa dell'inclinazione degli assi di sterzo quasi totalmente verticale.

### 5.1.4 Servosistema idraulico HPS

Lo spostamento della cremagliera assistito dal servosistema idraulico avviene grazie alla generazione di pressione esclusivamente in una delle due camere dell'attuatore idraulico. Si riportano quindi sia le pressioni sia le portate per la stessa manovra descritta in figura 5.3.



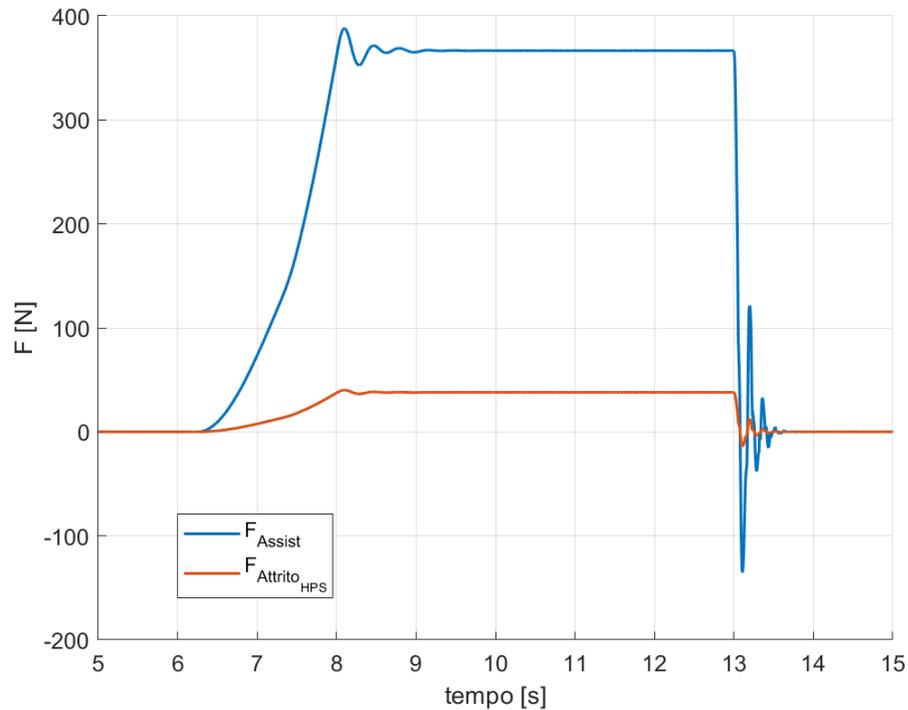
**Figura 5.8:** Pressioni e portate nell'attuatore idraulico

Nella fase di sterzata (con centro di rotazione a sinistra del veicolo) la camera di destra va in pressione mentre nell'altra di sinistra è presente la pressione ambiente. Durante la salita e lo stabilimento a regime del momento la pressione della camera di destra ha un andamento simile al momento grazie alla *Hydraulic Boost Curve* che restituisce il valore della pressione. Nella fase di rilascio si creano delle oscillazioni sia di pressione che di portata la quale è imposta dalla differenza di pressione tra la pressione che arriva dalla pompa e la pressione presente nella camera; infatti a regime la portata sarà uguale a zero poichè la pressione si è stabilizzata. Quando la pressione crolla a zero, dopo un transitorio di oscillazioni, la portata è negativa poichè viene imposta una pressione uguale a quella atmosferica mentre la pressione in camera è ancora al di sopra di tale valore.

E' da notare una pressione minore al bar da parte della camera di sinistra nella fase di rilascio a causa della velocità elevata dell'attuatore che incrementa all'improvviso il volume della camera. Oltre a questo evento si registra un andamento negativo della portata di destra per valori positivi di pressione poichè la stessa  $p_R$  non è

ancora a regime ma oscilla quando il tempo di simulazione è di 8 secondi ( $M_S$  a regime) e quindi vi è differenza positiva e negativa alternativamente tra le pressioni nella camera e quelle in arrivo dalla pompa.

Dalla differenza di pressione ne deriva la forza di assistenza che si trasmette sulla cremagliera collegata assialmente con il cilindro pneumatico. Tale forza si calcola tramite l'area su cui agiscono le pressioni ed ha un andamento simile a quello delle pressioni. Sovrapposto all'andamento di questa forza viene riportato anche quello della forza di attrito aggiuntiva a quella già pre-esistente negli altri modelli di servoassistenza. Anche questa forza è proporzionale alla differenza delle due pressioni nelle camere ma viene moltiplicata per un guadagno fisso di 13 N/bar. Come si vede in figura 5.9 entrambi le forze hanno identico andamento a quello della pressione nella camera di destra, essendo principalmente questa a spingere l'attuatore durante la sterzata.



**Figura 5.9:** Forze dell'attuatore pneumatico

### Tuning dell'orifizio

Le oscillazioni che compaiono nei precedenti grafici sono dovute a dinamiche di smorzamento assenti nel sistema di sterzo e, in modo più critico, nella dinamica dell'attuatore idraulico. Per ovviare in qualche modo si può agire tramite un tuning delle dimensioni degli orifizi delle valvole presenti nell'attuatore o su altri parametri fisici. La seguente figura 5.10 dimostra che al diminuire dell'area dell'orifizio le oscillazioni risultano più ridotte in ampiezze. La linea blu rappresenta l'andamento delle rotazioni delle ruote frontali con i parametri originali del modello; invece quella rossa è relativa ad una dimensione dell'orifizio ridotta al 20% rispetto al precedente. La diminuzione dell'area provoca minor portata in entrata ed in uscita a parità di differenza di pressione, e ciò è mostrato anche nella figura 5.11.

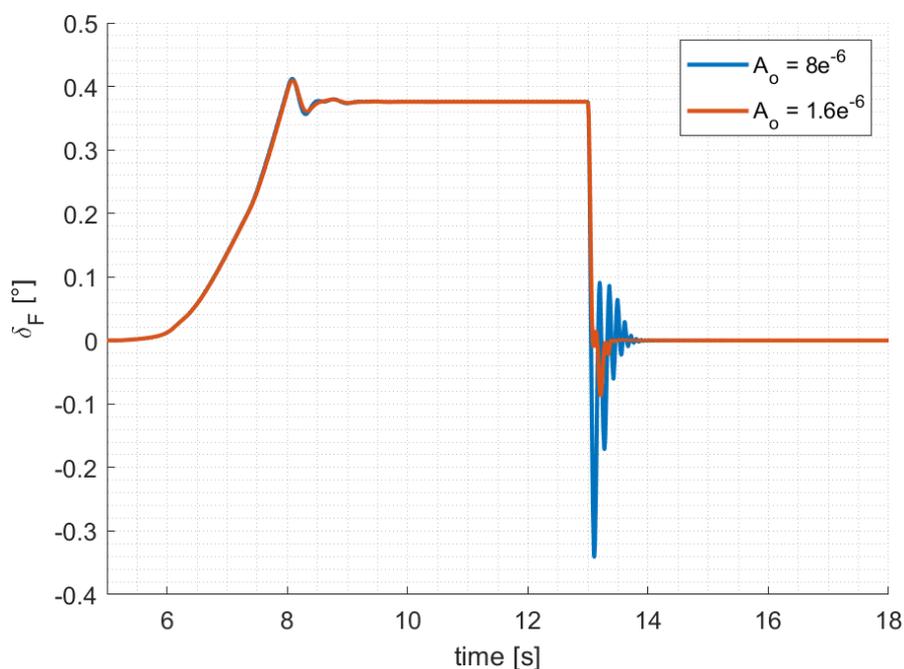
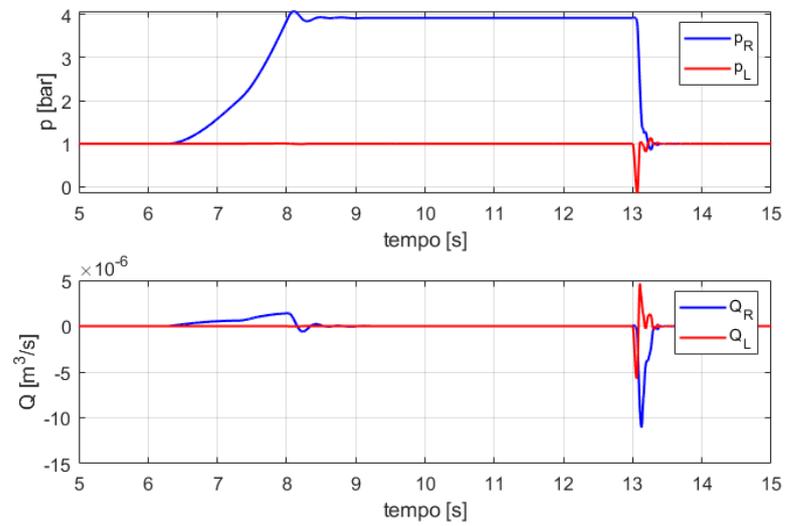


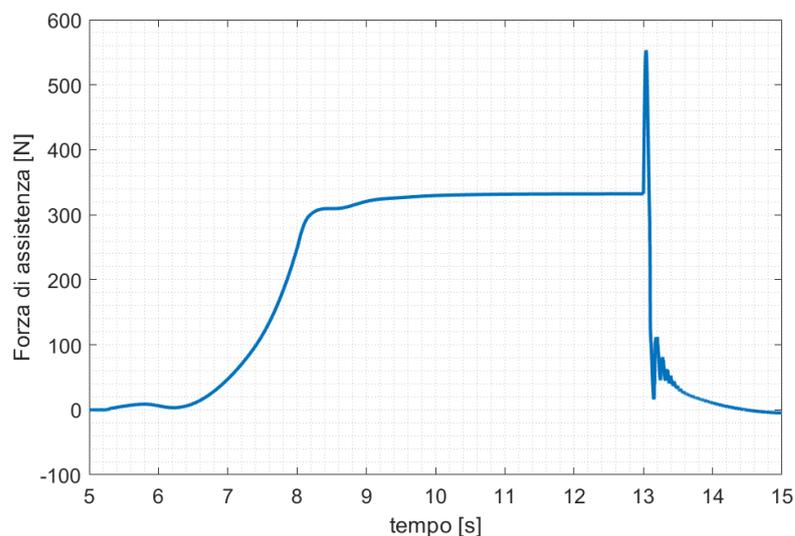
Figura 5.10: Tuning dell'orifizio



**Figura 5.11:** Sistema HPS con tuning dell'orifizio

### 5.1.5 Servosistema elettrici EPS

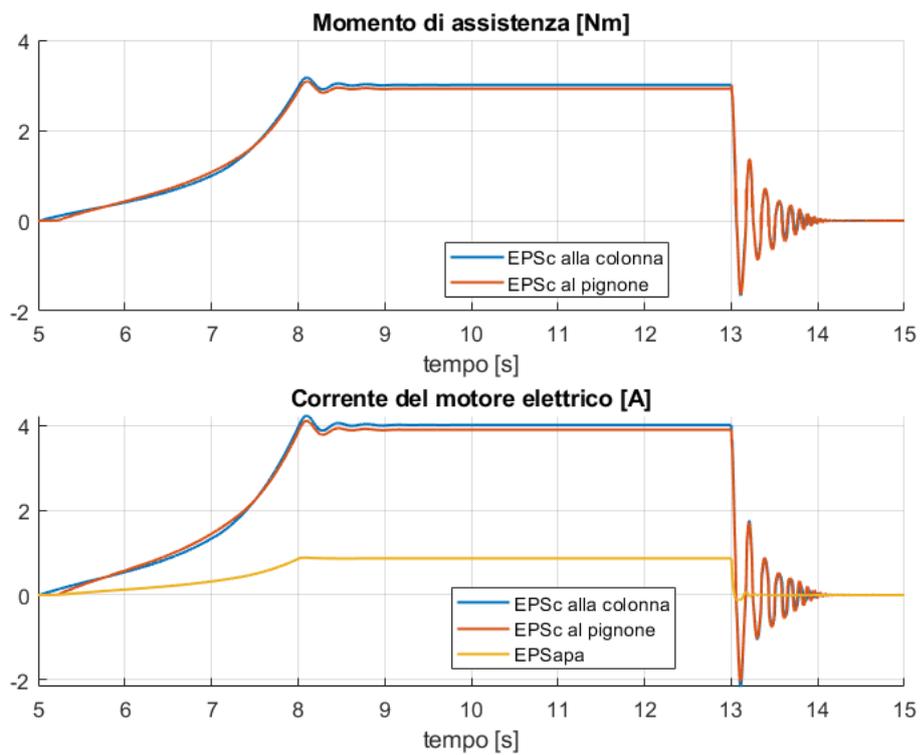
Tra gli stati caratterizzanti i sistemi elettrici vi sono: la corrente, la forza o il momento di assistenza e la cinematica dell'albero motore. Tali vengono riportati a seguire per confrontare le caratteristiche dei sistemi implementati nel modello grazie a delle simulazioni effettuate con l'input di coppia in figura 5.3.



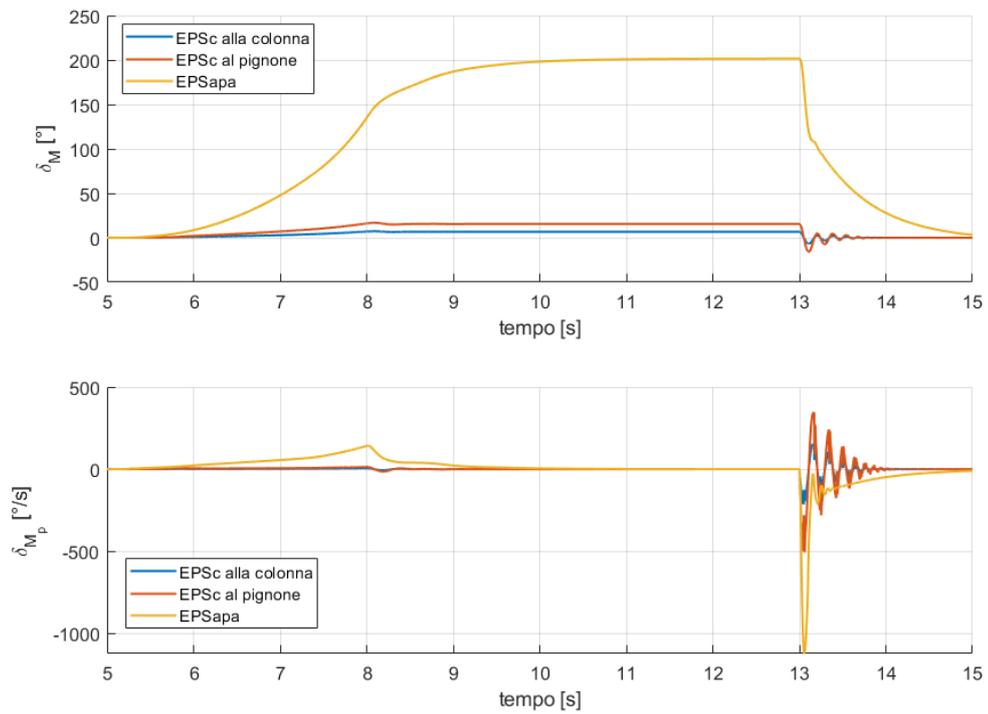
**Figura 5.12:** Forza di assistenza generata da EPSapa

La forza di assistenza generata dal servosistema EPSapa, fig.5.12, è paragonabile come entità a quella che agisce sulla cremagliera per mezzo del sistema idraulico HPS; entrambe infatti hanno modulo che oscilla dai 330 ai 350 N con forza maggiore rilevata nel sistema HPS. Invece il sistema EPSapa presenta un overshoot di forza all'istante del rilascio e meno oscillazioni a seguire.

Nei sistemi EPSa alle colonne si ha stesso modulo del momento, fig.5.13, e anche stessa corrente elettrica nel motore ma differiscono dell'angolo di rotazione del motore a causa di un rapporto di trasmissione presente nel sistema posizionato nel pignone poichè il collegamento avviene tramite una cinghia; invece l'accoppiamento tra motore elettrico e colonna superiore avviene direttamente senza corpi intermedi con un rapporto quindi unitario. Da notare la grande differenza della cinematica di questi ultimi due con la cinematica del sistema EPSapa (fig.5.14) causata dalla differenza fisica tra i sistemi; infatti l'EPSapa agisce tramite un sistema a ricircolo di sfere e implementa più rapporti di trasmissione (due) per trasferire la coppia dal motore elettrico fino alla forza sulla cremagliera.

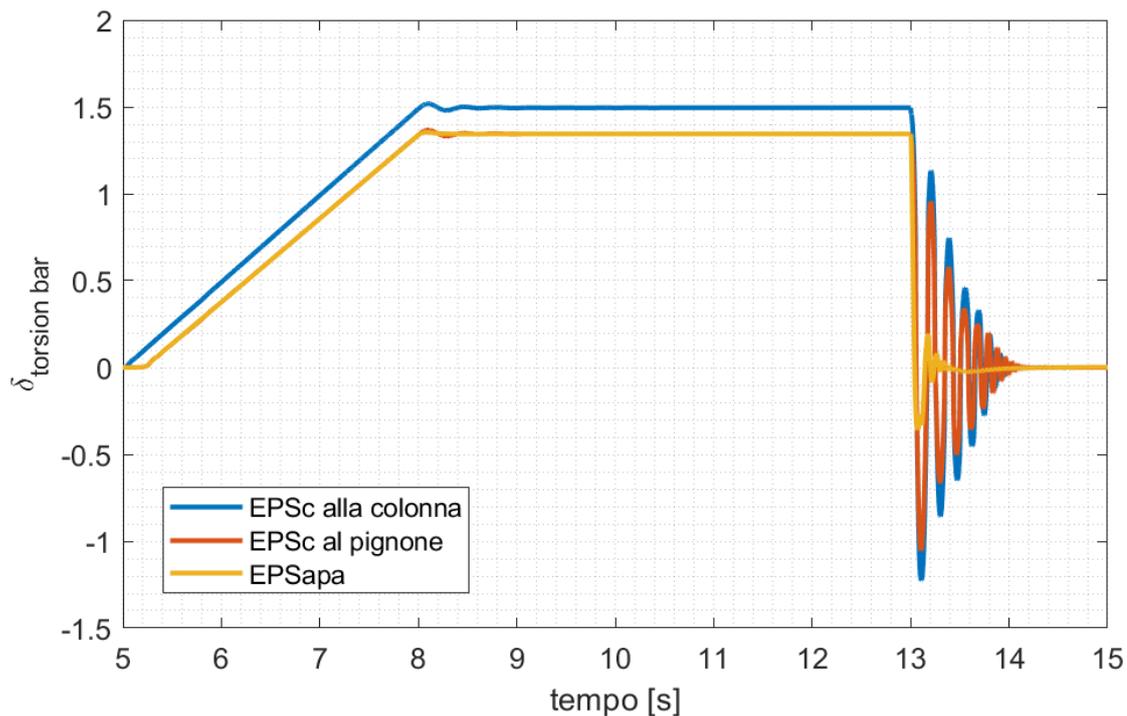


**Figura 5.13:** Momento di assistenza degli EPS nelle colonne e corrente elettrica dei tre sistemi EPS



**Figura 5.14:** Rotazione e velocità angolare dell'albero motore

Si riporta l'andamento dell'angolo di torsione nella barra in figura 5.15 per evidenziare che a parità di angolo tra il sistema EPSc al pignone ed EPSapa si hanno due diversi valori di corrente nello stesso istante di tempo e stesso comportamento a regime dello sterzo. Ciò è possibile grazie alla taratura effettuata a valle delle *Electrical Boost Curve* che mappa perfettamente la corrente per avere appunto stesso andamento della cremagliera e quindi della rotazione delle ruote a regime, come già visto in precedenza.

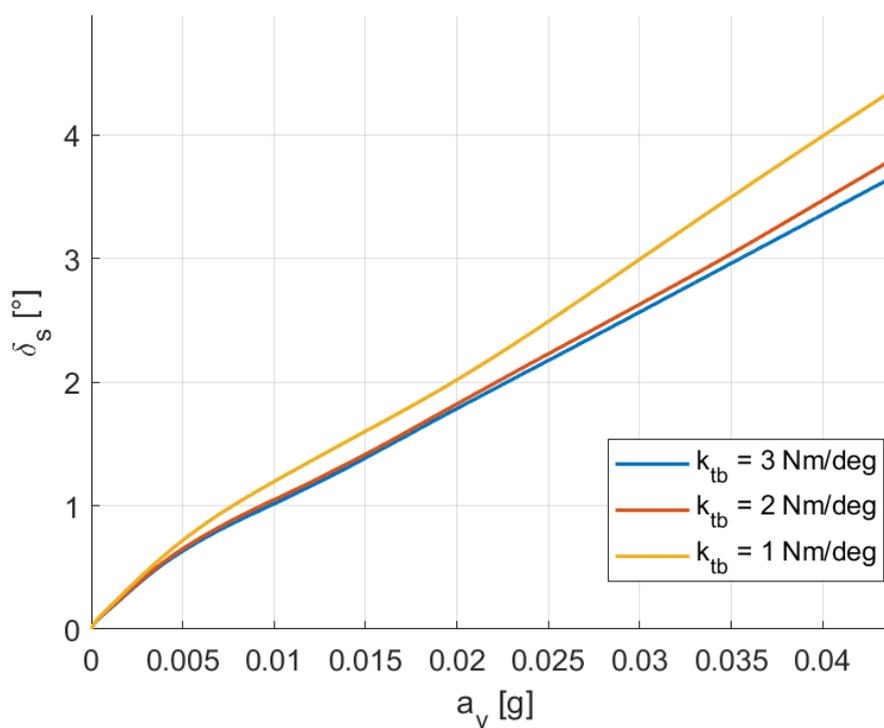


**Figura 5.15:** Angolo di torsione della barra nei sistemi EPS

### 5.1.6 Barra di torsione

Nel precedente paragrafo si è parlato dell'angolo di torsione della barra, quindi si procede con un tuning della rigidità della stessa barra per vedere gli effetti che questa ha sul comportamento del veicolo. Questo tuning è un'operazione che può essere realmente effettuata per la semplicità ed il basso costo della sostituzione della barra di torsione in un sistema di sterzo. Il corpo più elastico presente nel sistema è appunto la barra di torsione, ed è quindi conveniente agire su questo parametro per stabilire il comportamento direzionale del veicolo. Tra i principali effetti di questo cambio vi è la variazione della curva di sottosterzo e del rapporto di sterzo.

Per le simulazioni di questo capitolo si utilizza un sistema EPSc alla colonna (barra di torsione nella colonna superiore) ma si potrebbe usare anche un sistema con barra di torsione inferiore poiché gli aspetti qualitativi rimangono invariati.



**Figura 5.16:** Curve di sottosterzo con sensibilità della rigidità della barra di torsione

Le curve di sottosterzo in figura 5.16 mostrano un comportamento più sottosterzante del veicolo al diminuire della rigidità della barra di torsione implementata nella colonna di sterzo e, di conseguenza, un aumento dell'angolo volante per avere la stessa accelerazione laterale. Tale variazione di comportamento è meno evidente

passando dai 2 ai 3 Nm/deg.

Per  $k_{tb} = 1$  Nm si ha una diminuzione della momento associato agli elementi elastici della colonna superiore accompagnato dal maggiore angolo di torsione della barra stessa. Ciò provoca la saturazione della corrente al limite massimo raggiungibile e quindi delle successive ampie oscillazioni in uscita dal motore elettrico che si ripercuotono su tutto il comportamento dei vari elementi dello sterzo. A dimostrazione di quanto descritto si riportano gli stati del motore elettrico in figura 5.17.

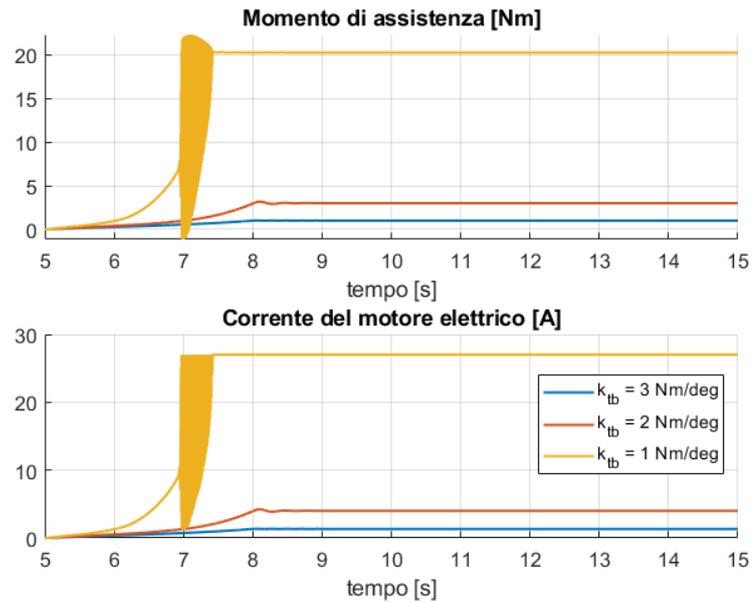
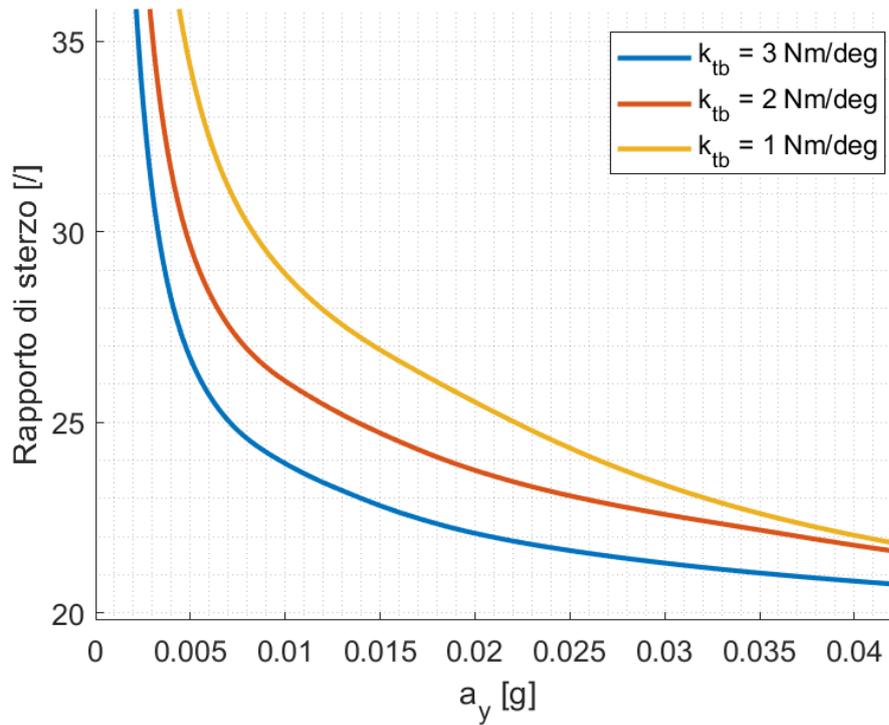


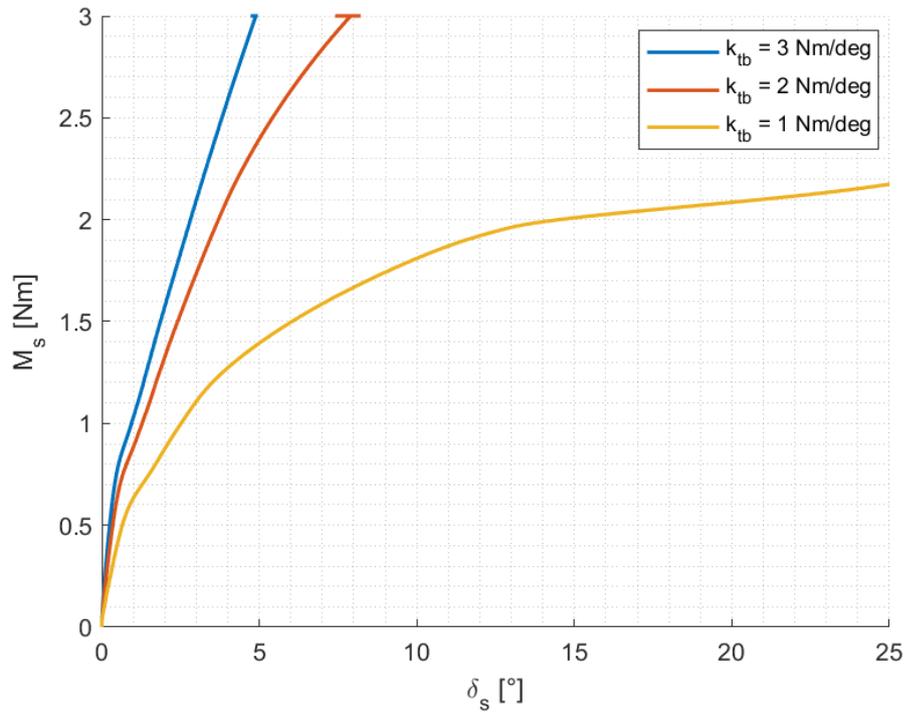
Figura 5.17: Stati del motore elettrico con sensitività di  $k_{tb}$

Un altro principale effetto della variazione della rigidezza della barra di torsione è la variazione del rapporto di sterzo, soprattutto a basse accelerazioni laterali. Infatti il rapporto di sterzo risulta determinato in gran parte dalla cedevolezza della barra di torsione essendo l'elemento più elastico. Questa influenza è sempre meno evidente all'aumentare di  $a_y$ . Dalla figura 5.18 si vede che tutte le curve si portano alla stesso valore dopo un intervallo iniziale di accelerazione.



**Figura 5.18:** Rapporto di sterzo tra sterzo e ruota con sensitività di  $k_{tb}$

Un grafico interessante sulla coppia impressa al volante è quello sottostante, in figura 5.19. Qui si mostra la coppia necessaria da applicare al volante per avere un minimo di angolo di sterzo e si vede che per raggiungere un dato angolo volante la coppia che bisogna applicare è maggiore all'aumentare della rigidità della barra. La restante parte del grafico per valori più alti di  $a_y$  è stata omessa poiché all'aumentare della coppia l'angolo volante presenta curve irregolari per bassi valori di rigidità.



**Figura 5.19:** Relazione tra angolo e momento del volante

Le prossime due figure riportano gli andamenti dei momenti associati agli elementi elastici presenti nella colonna superiore e in quella inferiore nel caso di barra di torsione presente nelle due disposizioni possibili.

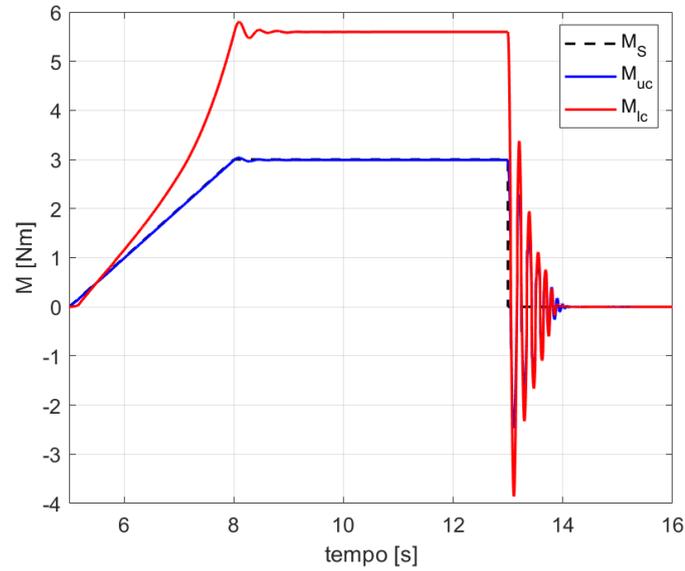


Figura 5.20: Momenti per barra di torsione superiore

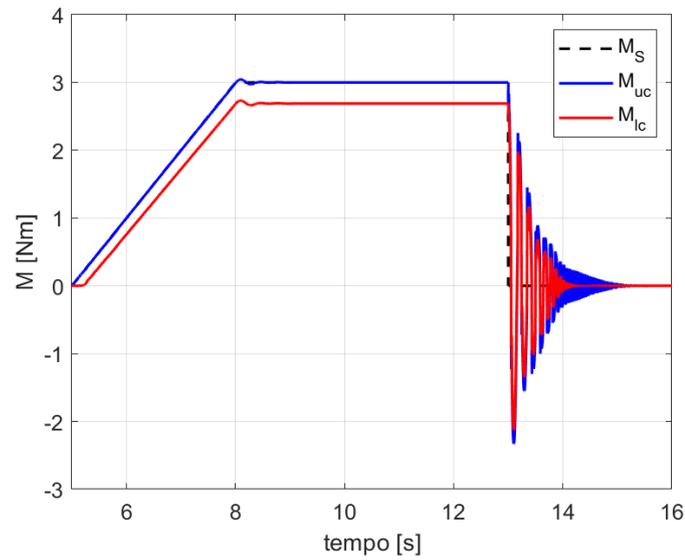


Figura 5.21: Momenti per barra di torsione inferiore

Nella prima figura 5.20 la barra di torsione è implementata all'interno della colonna superiore. Ne consegue un momento di torsione nella colonna superiore  $M_{uc}$  che segue fedelmente il momento di sterzo  $M_S$  imposto, ad eccezione della fase di rilascio sterzo dove sono presenti delle oscillazioni. Il momento inferiore  $M_{lc}$  si distacca di molto ed è quasi il doppio degli altri due rappresentati nella fase di crescita e nella fase di saturazione del momento di sterzo; invece nella fase di rilascio i momenti associati alle colonne di sterzo sono pressoché uguali. Una situazione leggermente differente si nota nella figura 5.21 dove la barra di torsione è presente nella colonna inferiore: in questo caso i momenti differiscono di poco e hanno stesso andamento. Le oscillazioni hanno frequenza maggiore e si verificano per più tempo in questo caso, soprattutto per la curva riguardante  $M_{uc}$ .

## 5.2 Simulazioni con input di angolo

Una volta descritti i comportamenti dei vari sistemi di sterzo fisici implementati è interessante riportare alcuni andamenti cinematici che riguardano l'intero veicolo. A tal fine non è più necessario un input di momento al volante ma il modello può prevedere un input di angolo di sterzo bypassando la prima equazione riguardante l'equilibrio al volante.

Per descrivere al meglio il comportamento del veicolo i grafici che verranno riportati interessano:

- $\beta$ , l'angolo di assetto del veicolo;
- $\psi$ , la velocità di imbardata;
- $a_y$ , l'accelerazione laterale;
- $\theta$ , l'angolo di rollio.

Queste grandezze presentano differenze irrilevanti con il tipo di servoassistenza adottato, e quindi per maggior chiarezza verranno riportati grafici di simulazioni effettuate soltanto con un modello EPSc alla colonna.

Le manovre simulate con il modello sono di tipo "in anello aperto": cioè viene applicato un angolo di sterzo che non viene influenzato dalla risposta del veicolo. Le manovre in anello chiuso non sono risulterebbero valide poichè non è stata prevista la retroazione della traiettoria nel modello implementato.

### 5.2.1 *Ramp steer*

La manovra di ramp steer aiuta a caratterizzare il veicolo dal comportamento in rettilineo fino alla curvatura con angolo di sterzo costante. Questa analisi riguarda principalmente la velocità di imbardata e l'accelerazione laterale.

La manovra viene eseguita per una velocità di 20 km/h e poi di 30 km/h, con angoli di sterzo al volante variabili fino a 100°. La figura 5.22 è relativa all'input delle prove per questa manovra; invece quella 5.23 mostra gli andamenti delle grandezze cinematiche. E' evidente che queste aumentano all'aumentare dell'angolo di sterzo arrivando a stabilizzarsi dopo qualche istante che lo stesso angolo ha raggiunto un valore stabile a regime. L'accelerazione laterale presenta un piccolo overshoot che viene smorzato molto rapidamente.

In entrambi i grafici è possibile apprezzare come l'aumento di velocità porti all'aumento di entrambe le grandezze (velocità di imbardata ed accelerazione laterale) a parità di angolo di sterzo.

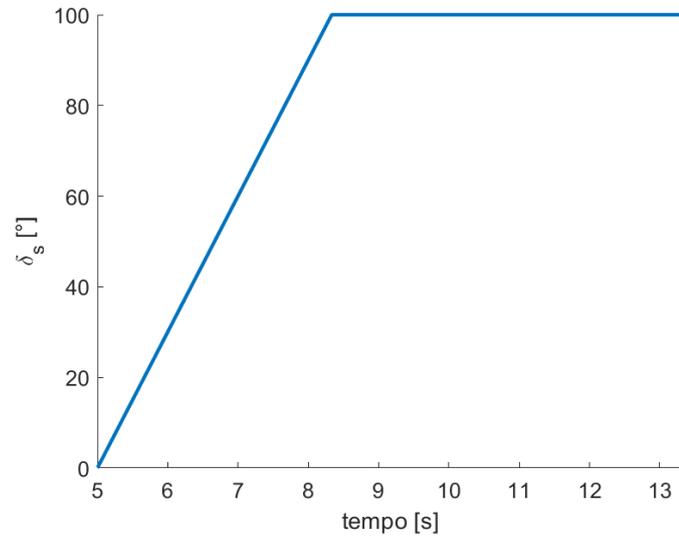


Figura 5.22: Ramp steer input

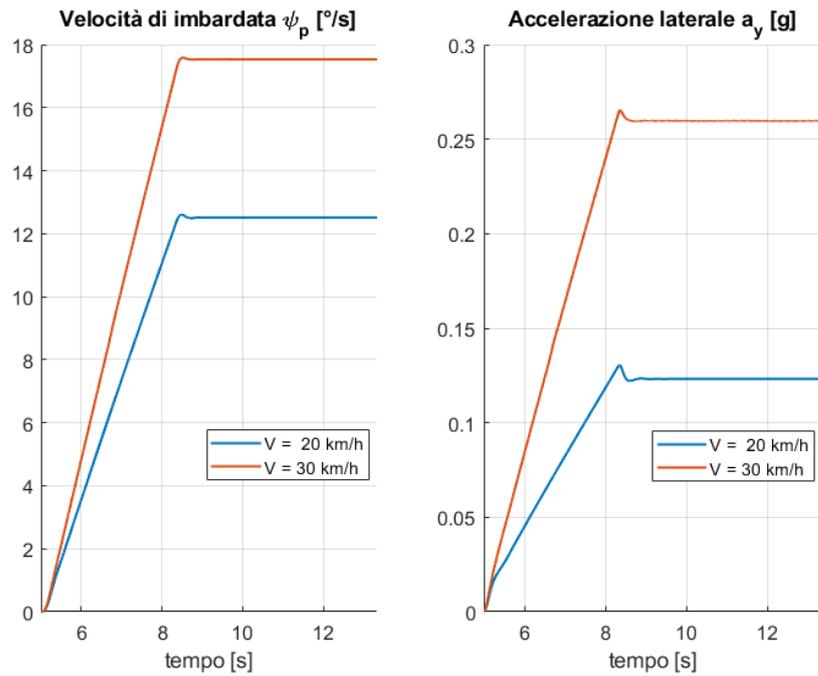
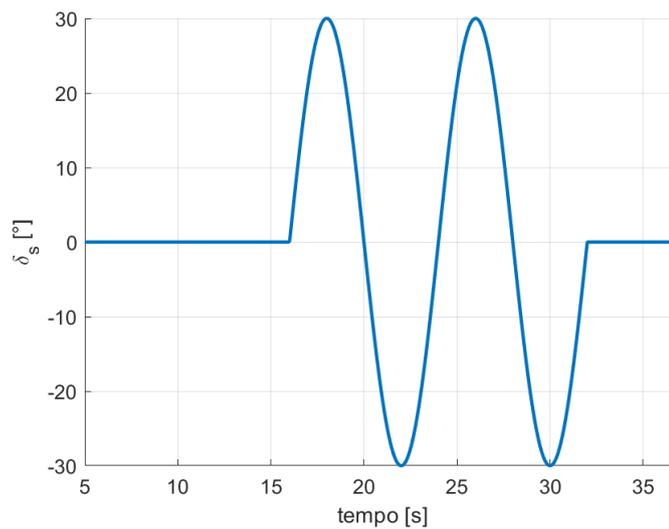


Figura 5.23: Andamento delle grandezze cinematiche per una manovra di Ramp steer

### 5.2.2 Sine steer

Questa manovra è utile al fine di valutare la sterzata attorno al punto di zero dello sterzo. Una volta impostata la velocità (20 km/h e 30 km/h) si eseguono le simulazioni con l'angolo di sterzo che oscilla in modo sinusoidale con una certa ampiezza ( $30^\circ$ ) e una certa frequenza ( $\pi/4$  Hz). Le analisi riguardano l'angolo di sterzo alle ruote, la coppia volante oltre che le grandezze fondamentali del veicolo. L'input di questa manovra è rappresentato nel grafico in figura 5.24.



**Figura 5.24:** Sine steer input

Un volta ricevuto questo segnale di input, il modello restituisce i seguenti grafici dove le curve in blu sono relative ad una manovra effettuata a 20 km/h e quelle in rosso a 30 km/h.

La figura 5.24 mostra l'andamento del momento di sterzo necessario a compiere questa manovra. Tra le due simulazioni quella con velocità maggiore evidenzia un momento di sterzo di spunto lievemente maggiore. All'aumentare dell'angolo di sterzo la differenza tra le due curve diventa più marcata: per velocità maggiore il momento di sterzo aumenta anche di 0.5 Nm. Altre differenze si riscontrano nelle pendenze che sono più rigide nella curva in rosso.

Proseguendo l'analisi si allega la figura 5.26 che mostra le grandezze cinematiche del veicolo. Queste sono riportate con l'ascissa uguale all'accelerazione laterale  $a_y$ : variabile indipendente di rilievo rispetto al tempo in queste applicazioni. In tutti e quattro i grafici è evidente l'aumento di accelerazione laterale massima raggiungibile all'aumentare della velocità. Tale aumento ha portato ad un aumento complessivo del valore massimo raggiunto dalle grandezze durante la manovra di *sine steer* ad eccezione dell'angolo di assetto che presenta un valore massimo ridotto, seppur di

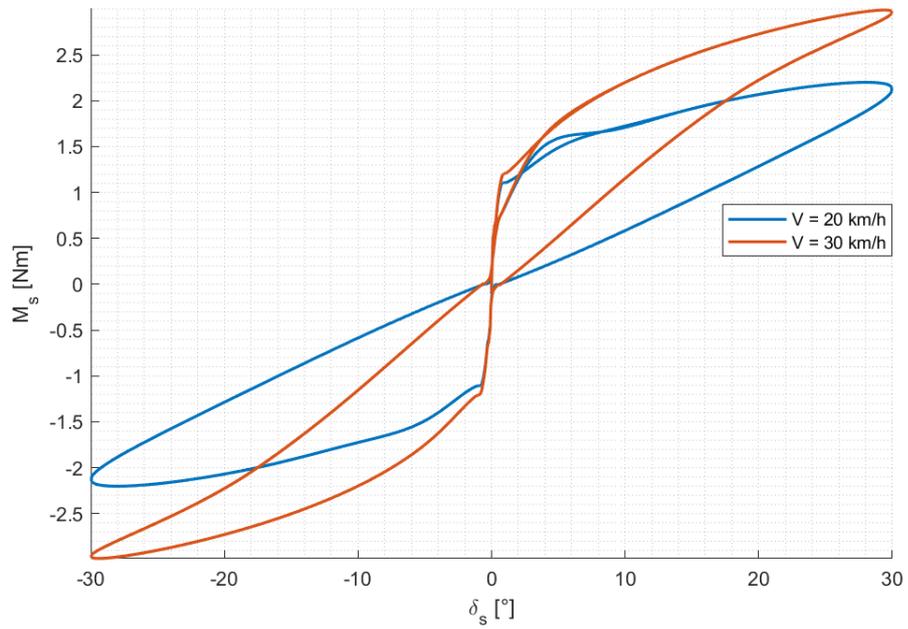


Figura 5.25: Relazione tra  $M_s$  e  $\delta_s$

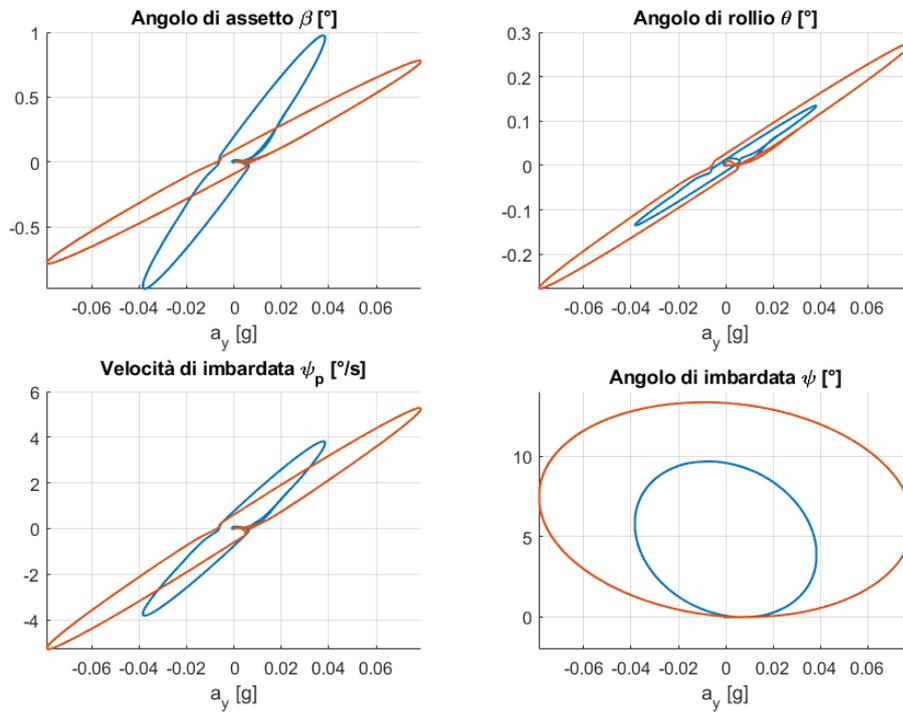


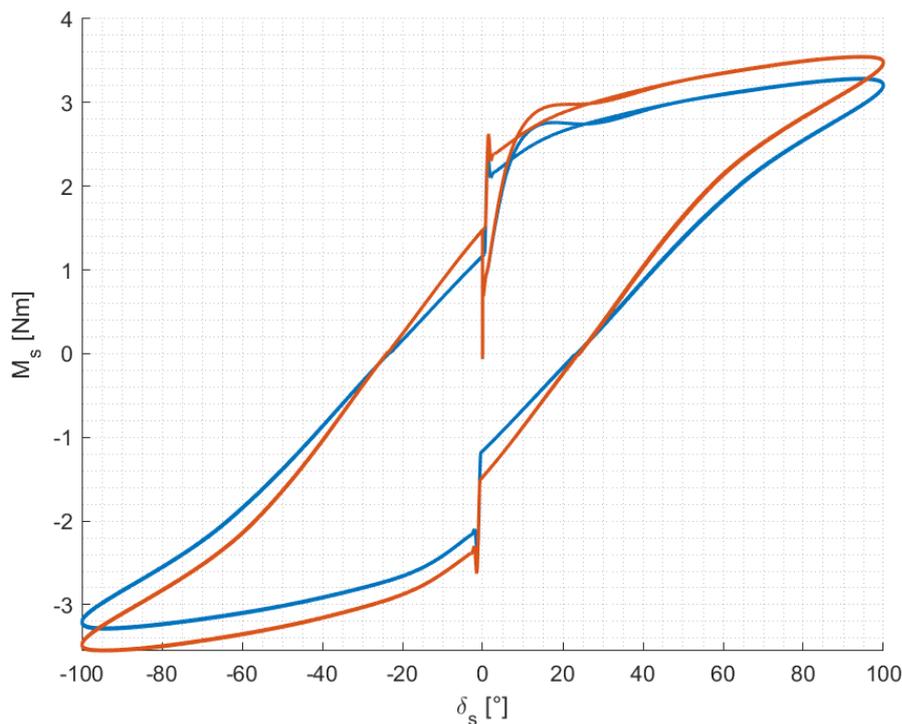
Figura 5.26: Grandezze cinematiche del veicolo durante la manovra di *sine steer*

poco.

Tra le grandezze, invece, quella che risente maggiormente del cambio di velocità è l'angolo di imbardata  $\phi$ : difatti l'area descritta dalla curva aumenta sia lungo l'asse delle ascisse e sia lungo quello delle ordinate.

### Sensività dei bracci a terra

Con lo stesso grafico appena visto sulla relazione tra coppia al volante e angolo di sterzo è possibile apprezzare la sensitività dei bracci a terra delle sospensioni, le cui lunghezze sono caratteristiche della stabilità del veicolo. Infatti all'aumentare di questi il veicolo ne risulterà più stabile nel rettilineo, ma di contro aumenterà anche la coppia che il pilota deve applicare al volante per raggiungere lo stesso angolo di sterzo. Quest'ultimo comportamento è evidenziato nel grafico seguente in figura 5.27, realizzato con una simulazione caratterizzata da una velocità di 20 km/h ed un'ampiezza di oscillazione uguale 100°. La curva in blu è quella relativa ad una simulazione con bracci a terra dimezzati rispetto alla curva in rosso. E' dimostrato quindi che all'aumentare delle lunghezze dei bracci ne deriva un aumento di coppia al volante, sia nella fase di spunto sia nella fase di angolo di sterzo crescente.



**Figura 5.27:** Relazione tra  $M_s$  e  $\delta_s$  con sensitività dei bracci a terra

### 5.2.3 *Sine sweep*

In questo paragrafo vengono riportati i diagrammi di Bode relativi alle risposte in frequenza di diverse grandezze del veicolo, quali: l'accelerazione laterale, l'angolo di sterzo delle ruote frontali, l'angolo di assetto, l'angolo di rollio, la velocità angolare di imbardata e la coppia applicata al volante. Tutti i diagrammi sono realizzati a partire da un input comune: l'angolo di sterzo  $\delta_s$ .

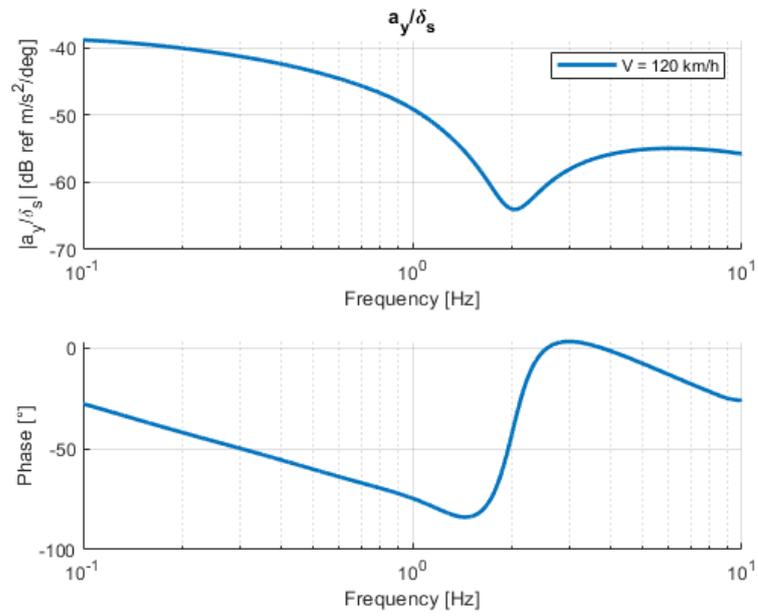
Tale input coinvolge il sistema attraverso multiple manovre sinusoidali, con una frequenza che varia da 0.1 Hz a 10 Hz. Per un'analisi più completa sono state effettuate due simulazioni diverse per velocità iniziale del veicolo: 60 e 120 km/h.

#### **Diagrammi di Bode**

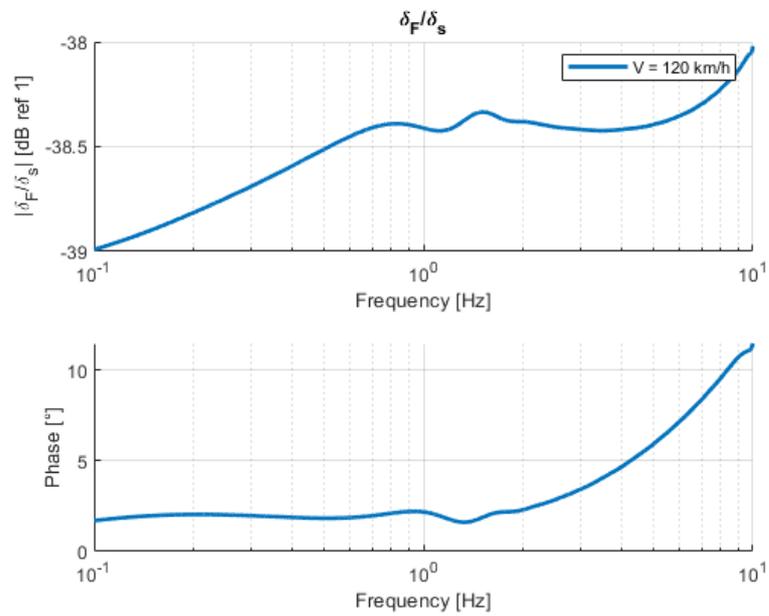
Le funzioni di uscita dei diagrammi di Bode con condizione di angolo di sterzo massimo uguale a  $20^\circ$  e velocità iniziale di 120 km/h sono attenuazione rispetto alla funzione di ingresso per tutto il range di frequenza considerato. Ad eccezione del momento di sterzo che presenta un andamento decrescente e poi crescente in due range diversi, i diagrammi delle altre ampiezze hanno in comune una decrescita del guadagno generale con accentuazione maggiore nel range di frequenza maggiore di 1 Hz. Invece, per frequenze più piccole le ampiezze hanno un guadagno quasi statico. In realtà l'andamento del momento di sterzo cambia di poco durante tutto il range e può essere considerato costante. Infatti la scala delle ordinate usata nel grafico per evidenziare l'andamento in modo più preciso è elevata.

Stesso discorso può essere fatto per la sua fase: in crescita nel range con piccoli valori. Per le altre grandezze invece la fase diminuisce costantemente anche se nel grafico RFR dell'accelerazione laterale e dell'angolo di rollio si ha un flesso in corrispondenza di un picco nel relativo grafico delle ampiezze.

Questo picco può essere dovuto non solo alla dinamica complessa del sistema ma anche ai parametri impostati per calcolare i guadagni e le fasi nel calcolatore numerico (simulink). Questi parametri corrispondono al *window* e al *noverlap*.



**Figura 5.28:** Guadagno e fase di  $a_y$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{Smax} = 20^\circ$  e  $V = 120$  km/h



**Figura 5.29:** Guadagno e fase di  $\delta_F$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{Smax} = 20^\circ$  e  $V = 120$  km/h

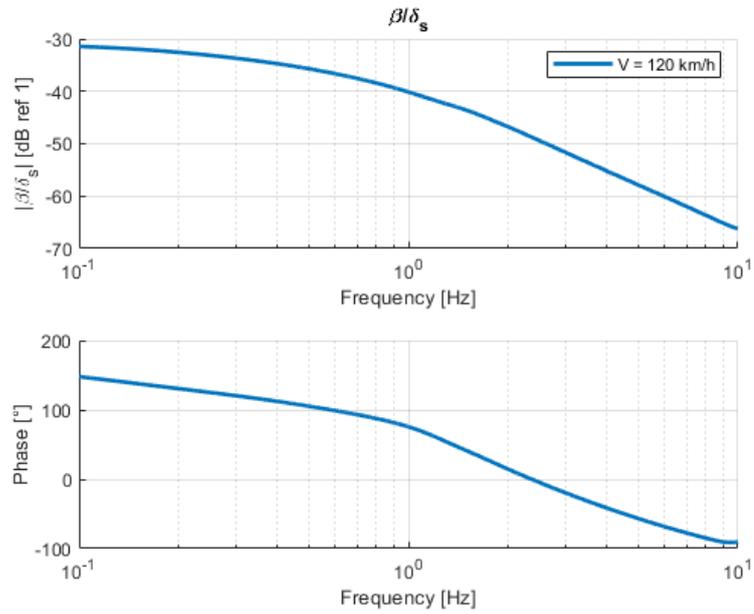


Figura 5.30: Guadagno e fase di  $\beta$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 120$  km/h

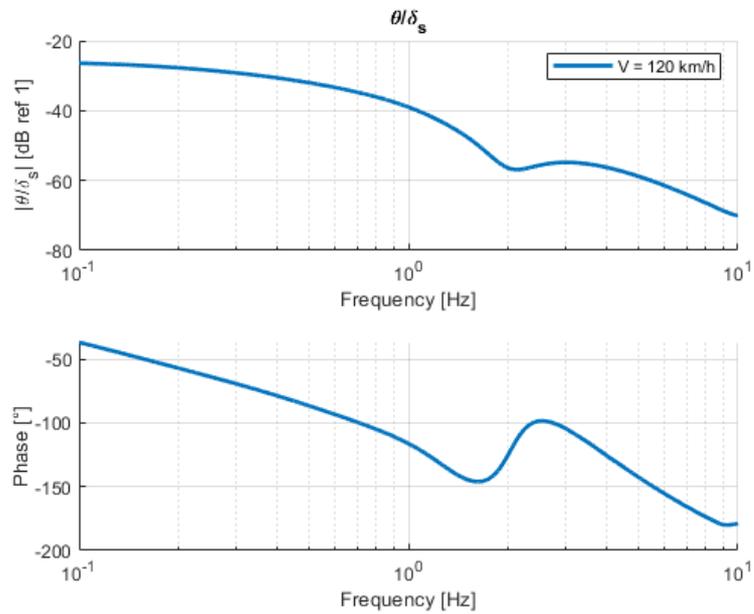
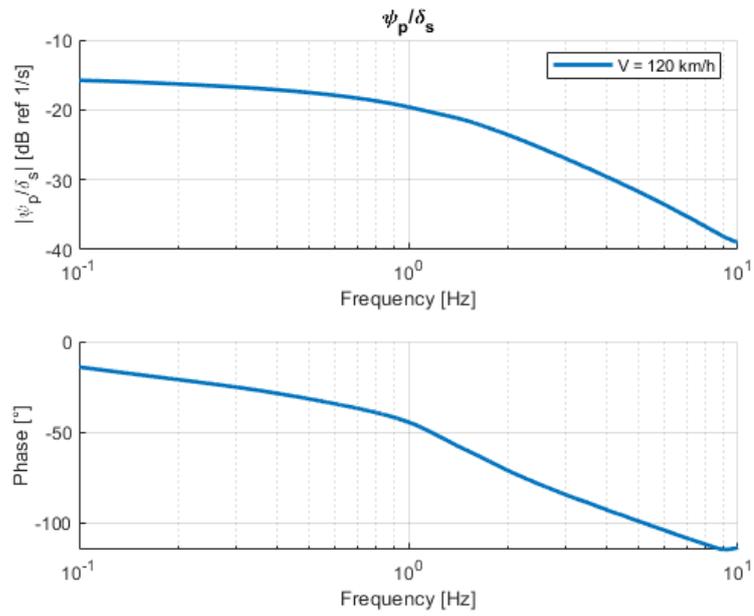
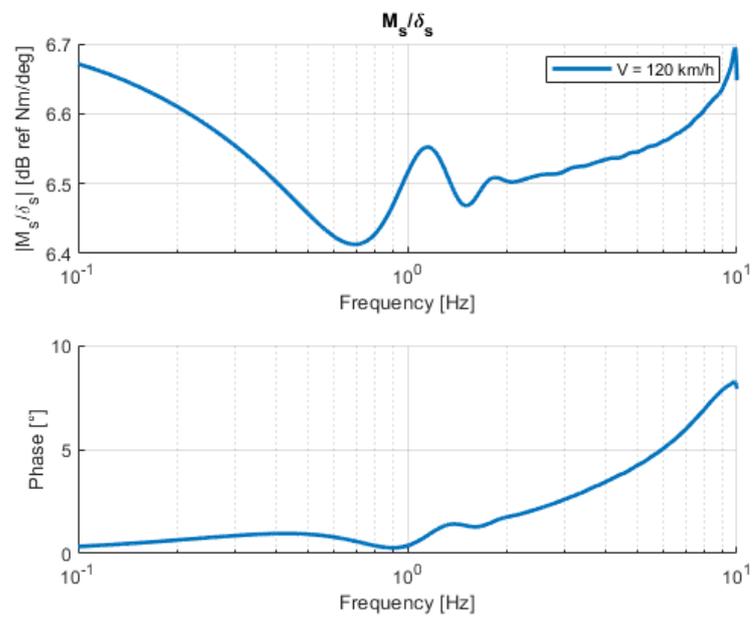


Figura 5.31: Guadagno e fase di  $\theta$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 120$  km/h



**Figura 5.32:** Guadagno e fase di  $\dot{\psi}$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 120$  km/h



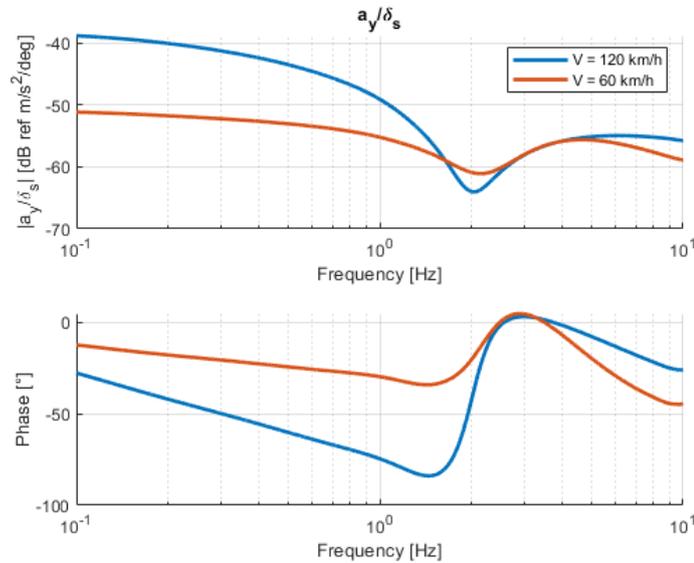
**Figura 5.33:** Guadagno e fase di  $M_S$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 120$  km/h

### Diagrammi di Bode per $\delta_{Smax} = 20^\circ$ , $V = 60$ km/h e $V = 120$ km/h

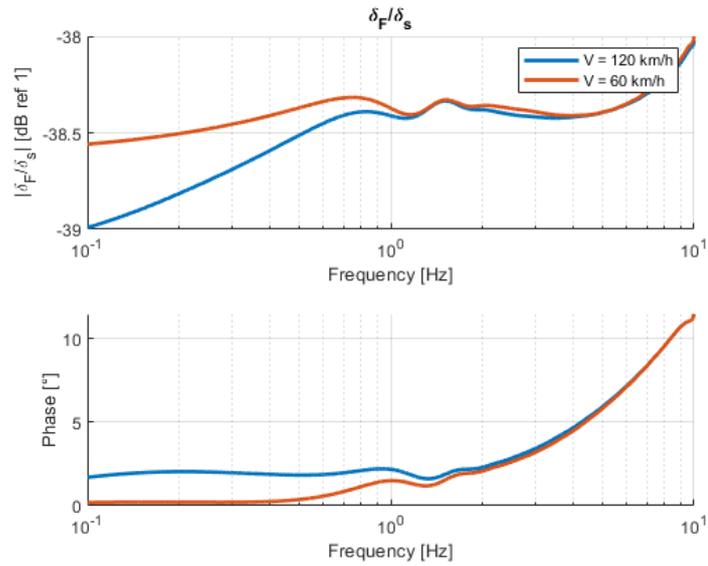
L'aumento di velocità dai 60 km/h ai 120 km/h causa un'incremento generale dei guadagni statici. Invece, l'andamento ad alta frequenza non cambia più di tanto per le due curve.

Nei grafici dove è presente il picco descritto nel paragrafo precedente si hanno i segnali delle due velocità congiunti per un breve periodo di frequenze.

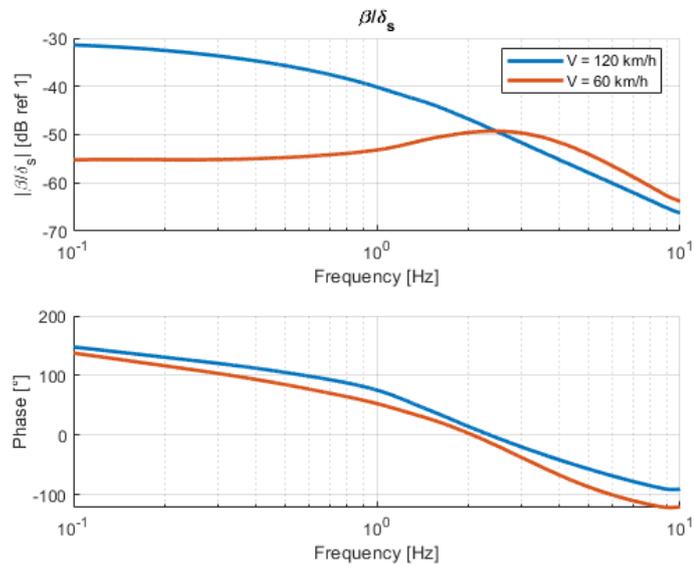
Relativamente alle fasi gli sfasamenti vengono ridotti come valore assoluti e sono presenti delle curve più smorzate al diminuire della velocità. Tra tutti i grafici si evidenziano il bode dei segnale della rotazione delle ruote frontali e del momento di sterzo,  $\delta_F$  e  $M_S$ . Questi hanno una fase prossima a zero per gran parte del range considerato: segnali di input ed output in fase tra di loro per tutta la manovra simulata. In entrambi i bode è adottata una scala grande dove si nota l'andamento particolare dei due segnali ma entrambi i guadagni possono essere considerati statici.



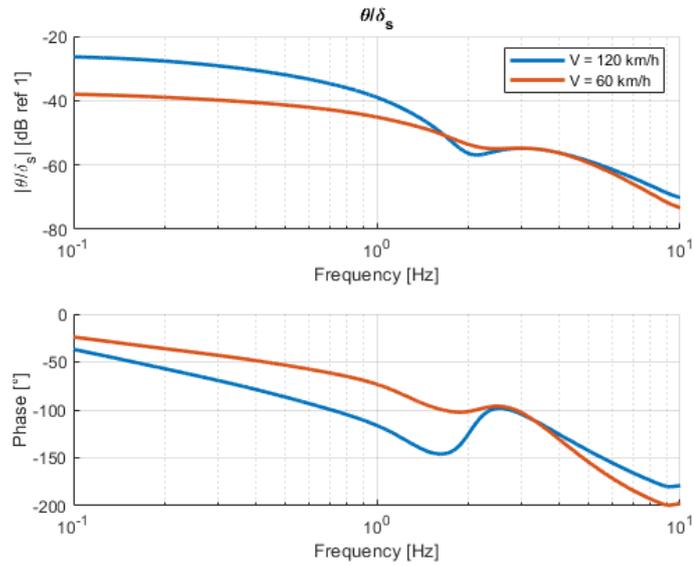
**Figura 5.34:** Guadagno e fase di  $a_Y$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{Smax} = 20^\circ$  e  $V = 60 - 120$  km/h



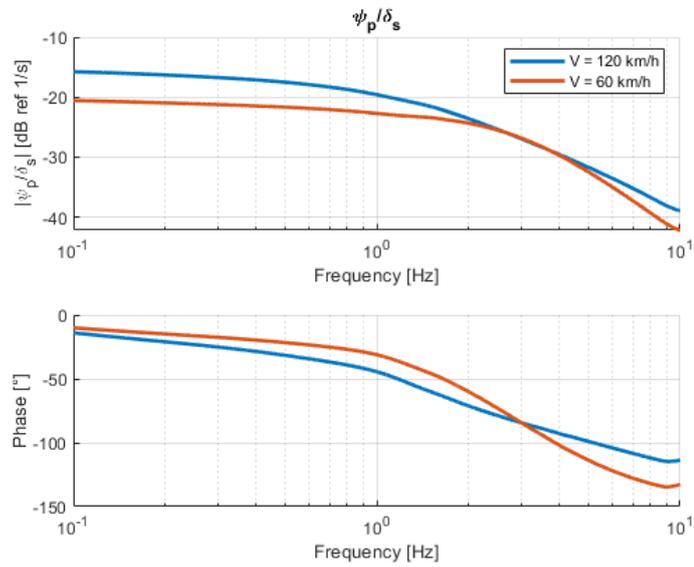
**Figura 5.35:** Guadagno e fase di  $\delta_F$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 60 - 120$  km/h



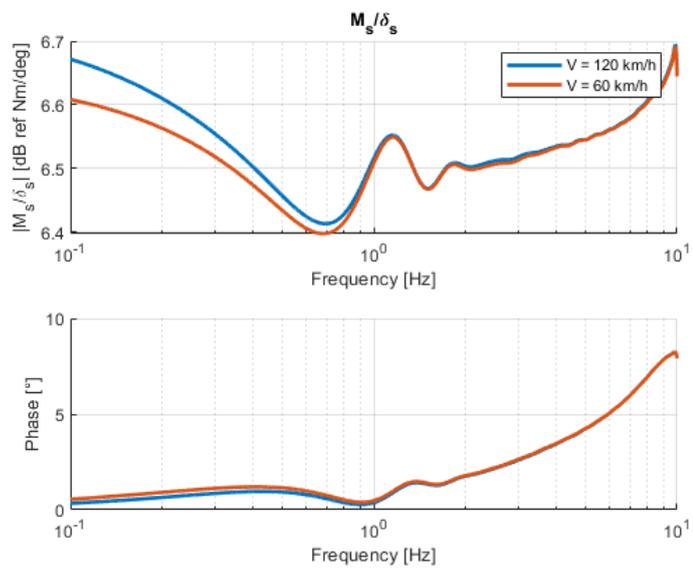
**Figura 5.36:** Guadagno e fase di  $\beta$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 60 - 120$  km/h



**Figura 5.37:** Guadagno e fase di  $\theta$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 60 - 120$  km/h



**Figura 5.38:** Guadagno e fase di  $\dot{\psi}$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 60 - 120$  km/h



**Figura 5.39:** Guadagno e fase di  $M_S$  rispetto a  $\delta_S$  con  $\delta_{S_{max}} = 20^\circ$  e  $V = 60 - 120$  km/h

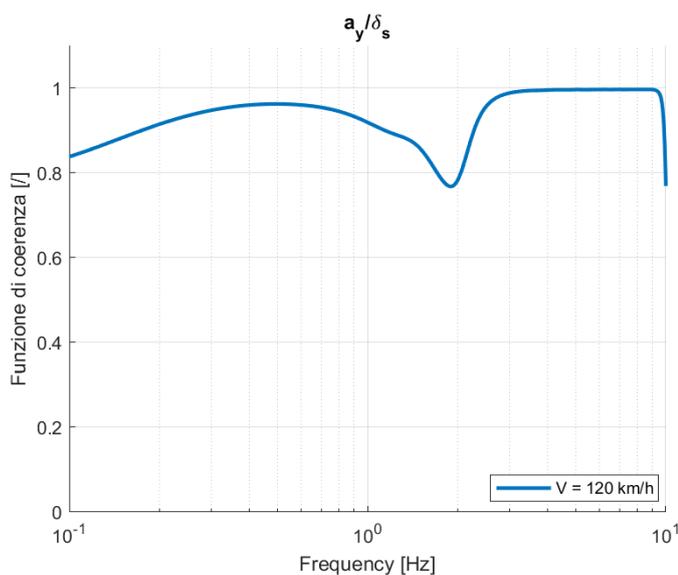
### Verifica lineare del sistema di sterzo

In questo paragrafo sono rappresentate le funzioni di coerenza (rapporto di due stime del rapporto in frequenze, H1 e H2, che tengono conto dei rumori in ingresso ed in uscita rispettivamente) relative alle funzioni di trasferimento delle grandezze descritte precedentemente attraverso i diagrammi di Bode.

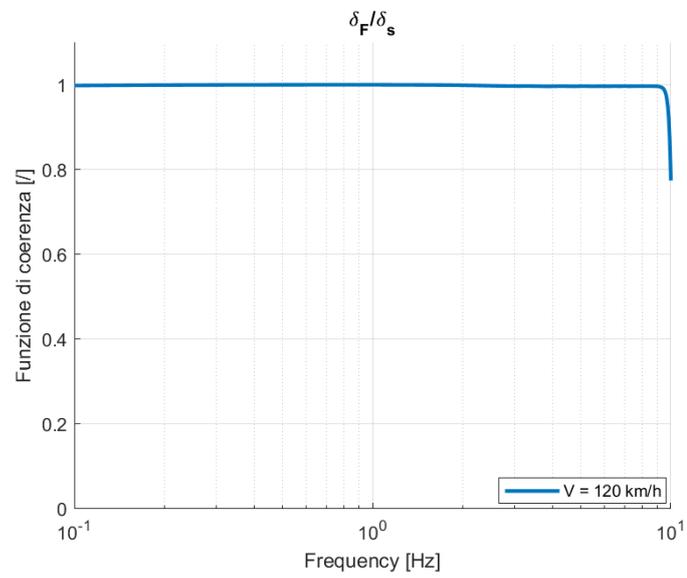
Ad alte frequenze tutte le funzioni raggiungono il valore unitario dimostrando l'influenza del rumore (interferenza di altri segnali al di fuori dell'angolo di sterzo) trascurabile rispetto al rapporto di causalità tra il segnale di ingresso e di quello di uscita. Per tre grandezze ( $\psi_P$ ,  $M_S$  e  $\delta_F$ ) questa funzione è costante per tutte il range di frequenze considerato, 0.1-10 Hz, e sempre uguale ad 1.

Invece per le altre tre grandezze a basse frequenze si ha una certa incidenza del rumore che tende ad accuirsi intorno ai 6/7 Hz fino ad diventare trascurabile per le alte frequenze.

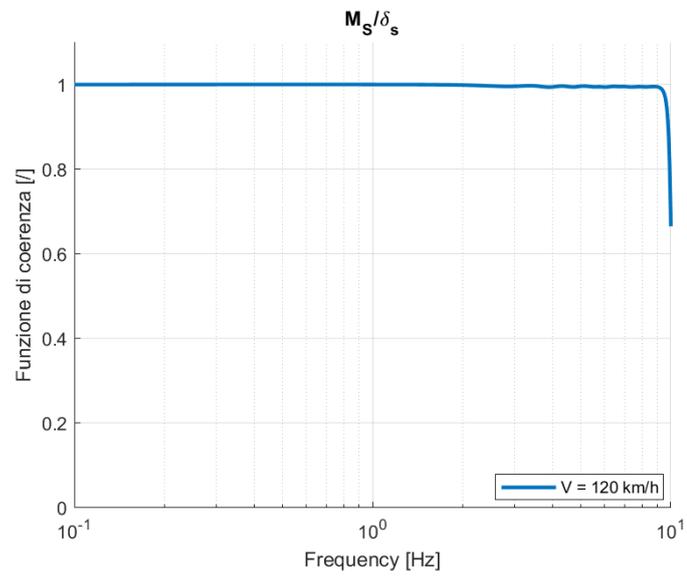
Una possibile causale dei rumori riscontrati può essere imputata al tipo di campionamento usato o a possibili errori numerici. In generale il sistema si comporta in modo lineare poichè la coerenza ricavata è verosimilmente alta, circa 1, su tutto il range di frequenza eccitato durante la simulazione.



**Figura 5.40:** Funzione di coerenza -  $a_y$



**Figura 5.41:** Funzione di coerenza -  $\delta_F$



**Figura 5.42:** Funzione di coerenza -  $M_s$

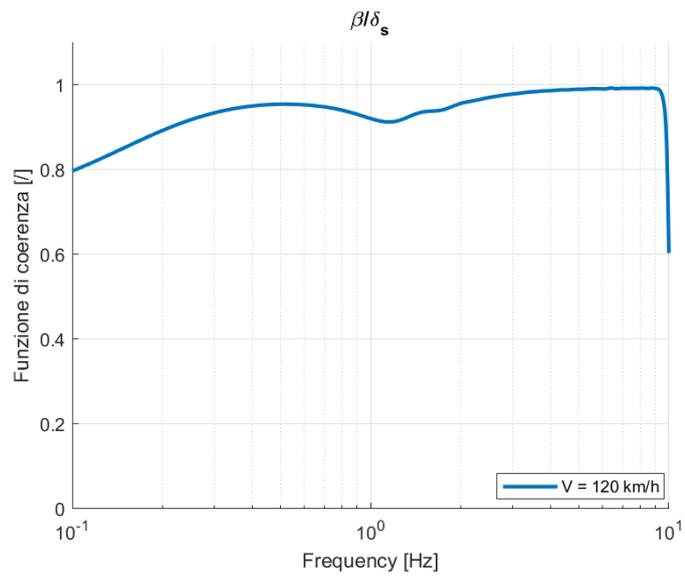


Figura 5.43: Funzione di coerenza -  $\beta$

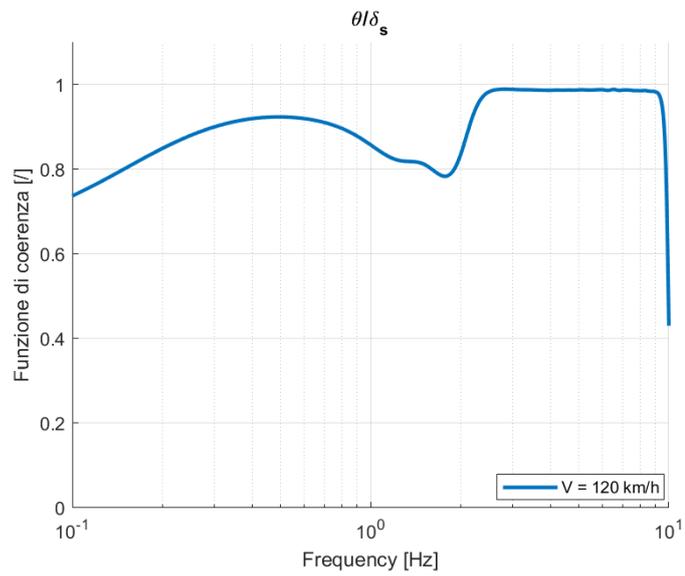
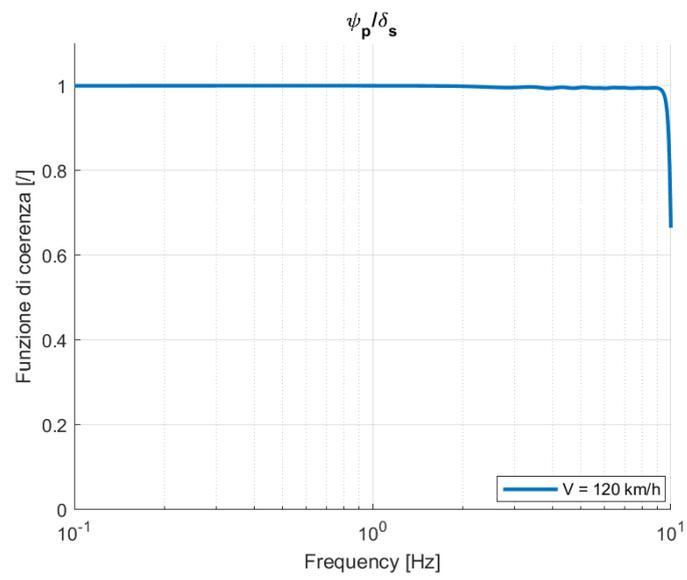


Figura 5.44: Funzione di coerenza -  $\theta$



**Figura 5.45:** Funzione di coerenza -  $\psi_P$

## Capitolo 6

# Influenza del sistema di sterzo sulla dinamica del veicolo

### 6.1 Modello del sistema di sterzo

Il sistema di sterzo [9] studiato in questo capitolo viene modellato (come è possibile vedere nella figura 6.1) attraverso un corpo rotante relativo al volante collegato ad un altro corpo rotante relativo alla ruota equivalente che condensa le due ruote anteriori. Il collegamento avviene per mezzo di un albero rotante dotato di una certa elasticità  $k_c$ . Inoltre a monte e a valle dell'elasticità dell'albero sono presenti degli smorzatori ( $d_{uc}$  e  $d_{lc}$ ).

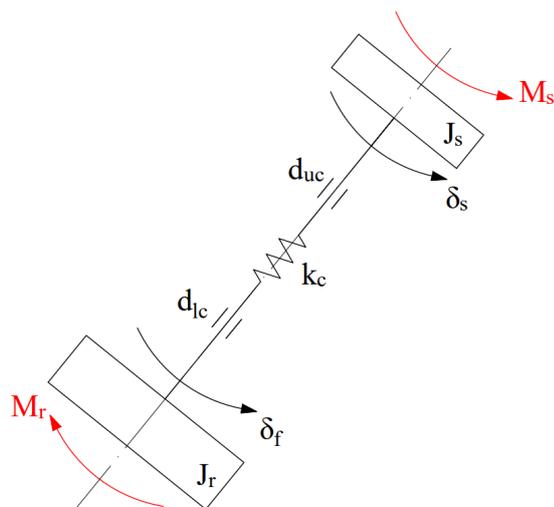
A causa dell'elasticità la rotazione dello sterzo  $\delta_s$  è diversa da quella delle ruote  $\delta_f$ , quindi il sistema presenta due gradi di libertà. La coppia  $M_s$  è applicata dal pilota e rappresenta l'input esterno che modifica implicitamente l'angolo di deriva delle ruote sterzanti a valle del sistema di sterzo implementato.

Le forze che agiscono sul veicolo durante la sterzata si ricavano tramite un modello a bicicletta il quale raggruppa le ruote dello stesso assale in un'unica ruota equivalente. Ciò è possibile poiché gli angoli di deriva sono molto simili. La forza laterale dell'assale presenta così un andamento direttamente proporzionale all'angolo di deriva per mezzo della rigidità dell'assale equivalente.

In relazione al solo assale che viene trattato in questo capitolo (quello frontale):

$$F_y = C_f \cdot \alpha_f \quad (6.1)$$

Il punto di applicazione della forza laterale è spostato indietro rispetto al centro dell'orma dello pneumatico e ciò causa un momento di autoallineamento attorno



**Figura 6.1:** Modello del sistema di sterzo

all'asse di sterzo. Il braccio di tale momento è dovuto alla somma del braccio pneumatico  $b_p$  e del braccio a terra longitudinale  $b_l$ . Quindi la coppia resistente  $M_r$  attorno all'asse di sterzo è data dalla seguente equazione dove il termine  $\epsilon$  rappresenta la somma dei due bracci sopraccitati:

$$|M_r/2| = |F_y \cdot \epsilon| = |\epsilon \cdot C_\alpha \cdot \alpha| \quad (6.2)$$

Sostituendo l'angolo di deriva  $\alpha_f$  con l'espressione che si ricava con un'analisi cinematica della sterzata dinamica si ottiene l'espressione finale:

$$M_r = 2 \cdot \epsilon \cdot C_f \cdot \alpha_f = 2 \cdot \epsilon \cdot C_f \cdot \left( \beta + \frac{a \cdot r}{V} - \delta_f \right) \quad (6.3)$$

I termini visti finora sono i seguenti:

- $F_y$ , la forza laterale che agisce sull'assale frontale;
- $C_f$ , la rigidità di deriva dell'assale frontale;
- $\alpha_f$ , l'angolo di deriva della ruota equivalente frontale;
- $M_r$ , il momento attorno all'asse di sterzo;
- $\epsilon$ , il braccio totale del momento;
- $\beta$ , l'angolo di assetto;
- $a$ , il semipasso anteriore;

- $r$ , la velocità di imbardata;
- $V$ , la velocità del veicolo;
- $\delta_f$ , la rotazione delle ruote frontali.

Ipotizzando che l'accelerazione di imbardata sia trascurabile rispetto alle accelerazioni angolari dello sterzo e delle ruote, le equazioni di equilibrio della massa associata a ciò che c'è a monte e a valle dell'elasticità diventano:

$$J_s \cdot \ddot{\delta}_s + d_{uc} \cdot \dot{\delta}_s + k_c \cdot (\delta_s - \delta_f) = M_s \quad (6.4)$$

$$J_r \cdot \ddot{\delta}_f + d_{lc} \cdot \dot{\delta}_f - k_s \cdot (\delta_s - \delta_f) = 2 \cdot \epsilon \cdot C_f \cdot \left( \beta + \frac{a \cdot r}{V} - \delta_f \right) \quad (6.5)$$

Dove:

- $J_s$ , l'inerzia della massa a monte dell'elasticità dell'albero;
- $d_{uc}$ , il coefficiente di smorzamento dello smorzatore a monte dell'elasticità dell'albero;
- $k_c$ , la rigidità della colonna di sterzo;
- $M_s$ , la coppia imposta dal pilota al volante;
- $J_r$ , l'inerzia della massa a valle dell'elasticità dell'albero;
- $d_{lc}$ , il coefficiente di smorzamento dello smorzatore a valle dell'elasticità dell'albero.

Le equazioni sopra riportate che presentano termini inerziali, smorzanti ed elastici possono essere usate per analizzare il sistema di sterzo sia con un approccio ad angolo imposto (*steer by Angle*) sia con uno ad angolo non imposto (*steer by Torque*).

## 6.2 Angolo di sterzo imposto

In questa sezione si studia l'effetto del sistema di sterzo sul veicolo trattando l'angolo di sterzo  $\delta_h$  come se fosse costante. Si riportano le equazioni di equilibrio del veicolo per un modello a bicicletta.

$$mV\dot{\beta} + 2(C_f + C_r) \cdot \beta + \left[ mV + \frac{2}{V} \cdot (aC_f - bC_r) \right] \cdot r = 2C_f\delta_f \quad (6.6)$$

$$2(aC_f - bC_r) \cdot \beta + J_z\dot{r} + \frac{2(a^2C_f - b^2C_r)}{V} = 2aC_f\delta \quad (6.7)$$

Dove:

- $m$ , la massa del veicolo;
- $V$ , la velocità del veicolo;
- $C_f$ , la rigidità dell'assale anteriore;
- $C_r$ , la rigidità dell'assele posteriore;
- $J_z$ , l'inerzia del veicolo lungo il relativo asse verticale;
- $\dot{\beta}$ , la velocità di assetto;
- $a$ , il semipasso anteriore;
- $b$ , il semipasso posteriore;
- $r$ , la velocità dell'imbardata.

In regime stazionario si ottiene la relazione tra l'angolo di rotazione delle ruote e l'angolo di sterzo così da valutare l'effetto della rigidità sulla risposta del sistema:

$$\delta_f = \frac{k_c}{k_c + 2\epsilon C_f} \cdot \delta_s + \left(1 - \frac{k_c}{k_c + 2\epsilon C_f}\right) \left(\beta + \frac{a \cdot r}{V}\right) \quad (6.8)$$

Il rapporto  $e = \frac{k_c}{k_c + 2\epsilon C_f}$  viene sostituito da  $e$ , detto "parametro di rigidità". Se tale parametro fosse uguale ad 1 allora  $\delta_s$  sarebbe uguale a  $\delta_f$ ; ciò è possibile quando la rigidità dell'albero è infinita. Quindi l'equazione 6.8 diventa:

$$\delta_f = e \cdot \delta_s + (1 - e) \left(\beta + \frac{a \cdot r}{V}\right) \quad (6.9)$$

Quindi si sostituisce l'equazione 6.9 nelle due equazioni sopra riportate sulla dinamica del veicolo:

$$mV\dot{\beta} + 2(\epsilon C_f + C_r) \cdot \beta + \left[mV + \frac{2}{V} \cdot (aeC_f - bC_r)\right] \cdot r = 2\epsilon C_f \delta_f \quad (6.10)$$

$$2(aeC_f - bC_r) \cdot \beta + J_z \dot{r} + \frac{2(a^2\epsilon C_f - b^2C_r)}{V} \cdot r = 2aeC_f \delta_f \quad (6.11)$$

Dato che il termine  $e$  è sempre minore di 1 a causa dell'elasticità dell'albero si ha la riduzione della rigidità frontale ( $\epsilon C_f < C_f$ ). Ridurre la rigidità frontale vuol dire aumentare di conseguenza il parametro di sottosterzo  $k_{US}$  poichè:

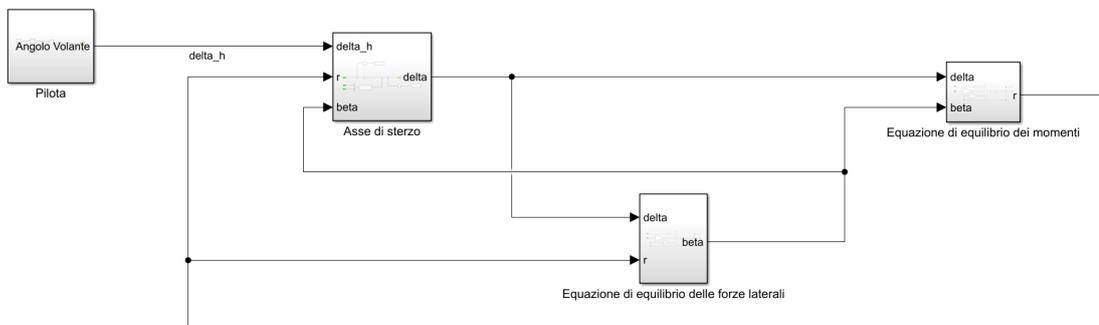
$$K_{US} = \left(\frac{m_f}{C_f} - \frac{m_r}{C_r}\right).$$

Quindi le caratteristiche di sottosterzo dipendono anche dai parametri propri

del sistema di sterzo ( $k_c$  e  $\epsilon$ ), i quali rientrano nel calcolo di  $e$ . Per avere un comportamento più sottosterzante è opportuno diminuire appunto il parametro di rigidità  $e$  progettando un sistema di sterzo con una rigidità dell'albero  $k_c$  più grande o con un braccio a terra  $\epsilon$  più grande.

### 6.2.1 Modello Simulink Steer by angle

Si è costruito un modello Simulink (figura 6.2) che implementa le tre equazioni principali descritte sopra (6.9, 6.10, 6.11) al fine di analizzare l'influenza dei parametri del sistema di sterzo.



**Figura 6.2:** Schema a blocchi per il modello con angolo imposto

In questo modello si utilizzano i valori in tabella 6.1:

Grandezza	Valore
$\epsilon$	35 mm
$C_f$	8e4 N/rad
$C_r$	6e4 N/rad
$k_c$	10e3 Nm/rad
$m$	1500 kg
$a$	1.1 m
$b$	1.6 m

**Tabella 6.1:** Parametri del modello semplificato *Steer by Angle* da [9]

Grazie al modello riportato precedentemente si effettuano delle simulazioni, le quali differiscono per il valore della rigidezza  $k_c$  e del braccio  $\epsilon$  e da cui si estraggono i grafici delle pagine a seguire.

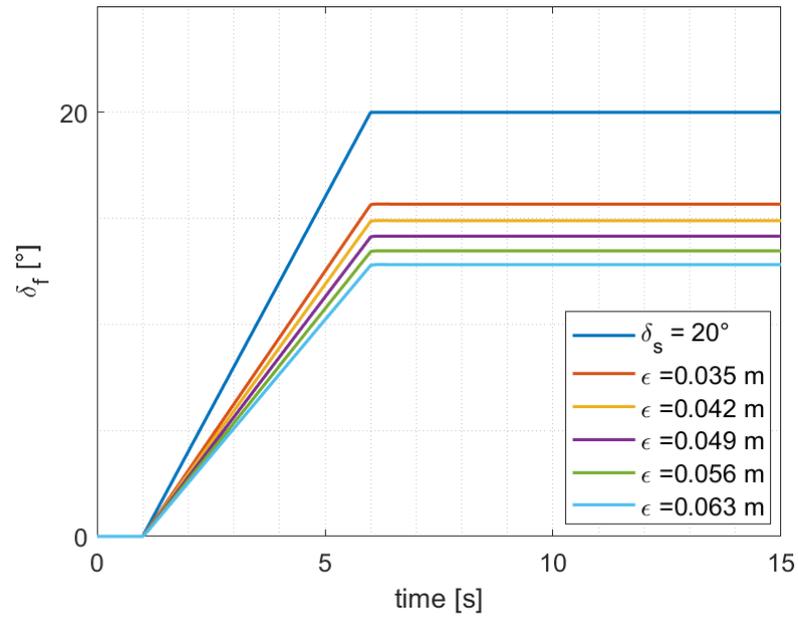


Figura 6.3: Variazione del braccio  $\epsilon$

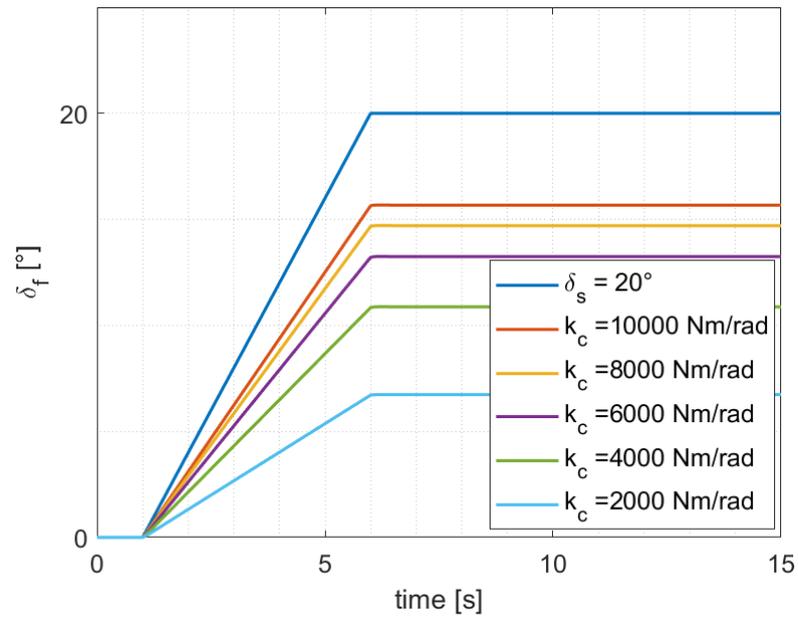


Figura 6.4: Variazione della rigidezza  $k_c$

L'input del modello è l'angolo volante (linea blu,  $\delta_s$ ) che entra tramite un blocco di rampa per poi essere saturato ad un valore fornito nella Command Window del software Matlab. Nei grafici visti sopra la velocità del veicolo e l'angolo volante a regime sono assunti uguali a 50 km/h e a 20°. È possibile notare che al diminuire della rigidità (figura 6.4) l'angolo di rotazione delle ruote differisce sempre di più dall'angolo volante. Lo stesso fenomeno accade all'aumentare del braccio del momento di autoallineamento (figura 6.3) ma in maniera meno evidente variando con le stesse proporzioni. Quindi se si desidera avere un comportamento più sottosterzante è meglio agire sul braccio piuttosto che sulla rigidità dell'albero.

## 6.3 Coppia di sterzo imposta

Questo approccio è utile allo studio della dinamica del veicolo nella situazione di rilascio delle mani dal veicolo ( $M_s = 0$ ) e quindi successivo ritorno dello sterzo nella condizione iniziale ( $\delta_s = 0$ ).

Ancora una volta si considera la relazione:  $\delta_f = e\delta_s + (1 - e) \cdot (\beta + \frac{ar}{V})$  alla quale si aggiungono ulteriori ipotesi.

- $C_f = C_r = C$
- $a = b = L/2$
- $J_z = mL^2/4 = m \cdot a \cdot b$
- $e = 1$  ( $k_c \rightarrow \infty$ ), e quindi  $\delta_s = \delta_f$

Sostituendo nelle precedenti equazioni questi coefficienti si ricavano le seguenti espressioni:

$$mV\dot{\beta} + 4C\beta + mVr - 2C\delta_s = 0 \quad (6.12)$$

$$\frac{mL^2\dot{r}}{4} + \frac{CL^2r}{V} = LC\delta_s \quad (6.13)$$

$$\ddot{\delta}_s + \omega_s^2\delta_s - \frac{2\epsilon C\beta}{J_s} - \frac{\epsilon LCr}{J_s V} = \frac{M_s}{J_s} \quad (6.14)$$

Dove  $\omega_s^2 = \frac{2\epsilon C_f}{J_s}$ , è la frequenza naturale del sistema di sterzo.

Per studiare il sistema si ricava la seguente disequazione (dalla 6.14 per mezzo delle trasformate di Laplace prima e del criterio di stabilità di Routh poi) che esprime la condizione di stabilità:

$$\frac{32C^2}{m^2V^2} + \omega_s^2 - \frac{16C}{mL} > 0 \quad (6.15)$$

Il criterio di stabilità citato sopra definisce anche che il braccio  $\epsilon$  può essere solo positivo affinché si possa avere stabilità, ma non è sufficiente. Infatti si esprime  $\omega_y$  come una sorta di "frequenza naturale di imbardata",  $\omega_y^2 = \frac{4CL}{J_z}$ .

Quindi:

- se  $\omega_s^2 > \omega_y^2$  il moto del veicolo è stabile;
- se  $\omega_s^2 < \omega_y^2$  invece il veicolo è stabile solo se la sua velocità è inferiore a quella critica.

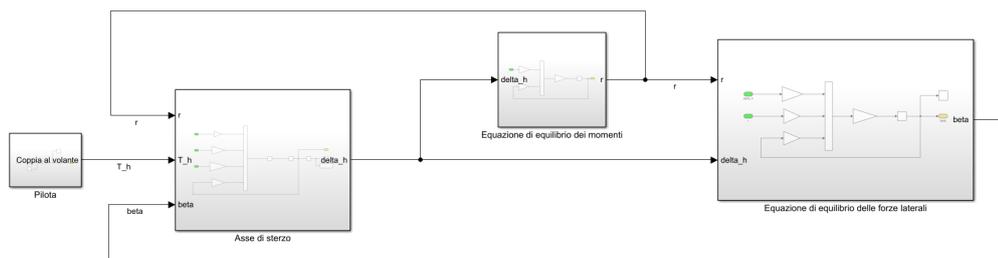
La velocità critica appena citata si ricava ponendo a zero la 6.15 ed è uguale a:

$$V_{CR} = \sqrt{\frac{2CL}{m} \cdot \frac{1}{1 - (\omega_s/\omega_y)^2}} \quad (6.16)$$

La frequenza  $\omega_s$  dipende fortemente dal braccio  $\epsilon$ . E' opportuno che tale grandezza sia più grande possibile, così come anche la rigidezza  $C$ . Invece i valori di inerzia del volante  $J_s$  devono essere bassi per avere una frequenza  $\omega_s$  più alta. Infatti una  $\omega_s$  grande consegue una velocità critica maggiore e quindi la stabilità del sistema di sterzo per un range di velocità più lungo.

### 6.3.1 Modello Simulink Steer by torque

Per analizzare la stabilità del sistema di sterzo si implementa il modello Simulink riportato in basso nella figura 6.5. L'input del modello è la coppia applicata al volante che dopo un periodo di stazionarietà viene rilasciata istantaneamente a zero così da analizzare il comportamento dello sterzo durante il ritorno nella posizione iniziale.



**Figura 6.5:** Schema a blocchi per il modello con coppia imposta

I parametri inizialmente adottati [9] durante le simulazioni sono elencati in tabella 6.2:

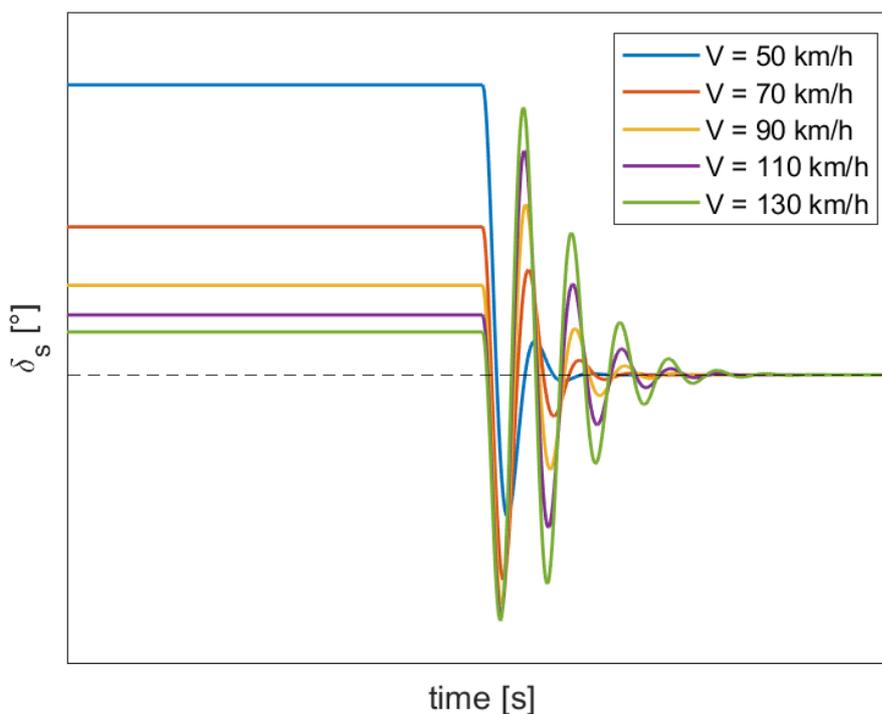
Grandezza	Valore
$\epsilon$	40 mm
$C$	6e4 N/rad
$m$	1500 kg
$a, b$	1.35 m
$J_s$	20 kg · m <sup>2</sup>

**Tabella 6.2:** Parametri del modello semplificato *Steer by Torque*

Con i valori sopraelencati risulta verificata la condizione  $\omega_s^2 > \omega_y^2$ . Infatti le frequenze sono:

- $\omega_s^2 = 240 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ ;
- $\omega_y^2 = 237 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ .

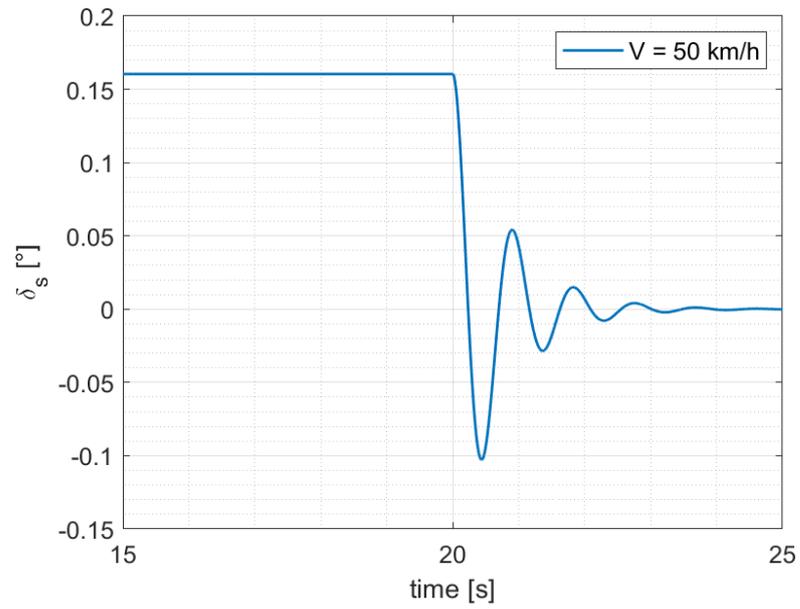
Nel grafico riportato a seguire in figura 6.6 si nota che indifferentemente dalla velocità del veicolo lo sterzo ritorna nella posizione iniziale.



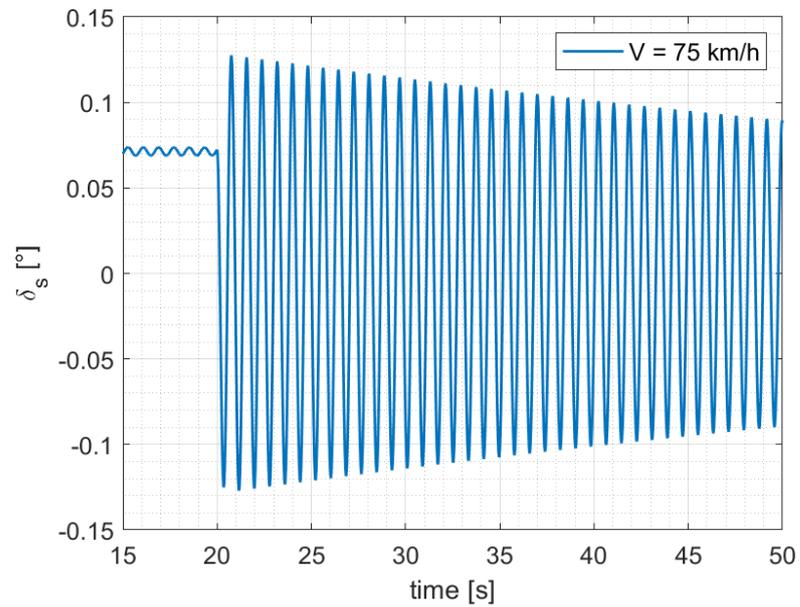
**Figura 6.6:** Rilascio dello sterzo al variare della velocità del veicolo

All'aumentare della velocità del veicolo e a parità di coppia iniziale imposta dal pilota (3 Nm) si riduce l'angolo di sterzo  $\delta_s$  (differenza visibile nel tratto iniziale a regime stazionario). Al rilascio del volante, e quindi senza controllo ( $M_s = 0$ ), il volante torna con un transitorio direttamente proporzionale alla velocità del veicolo nella condizione di riposo. Oltre che al periodo delle oscillazione aumentano anche le relative ampiezze.

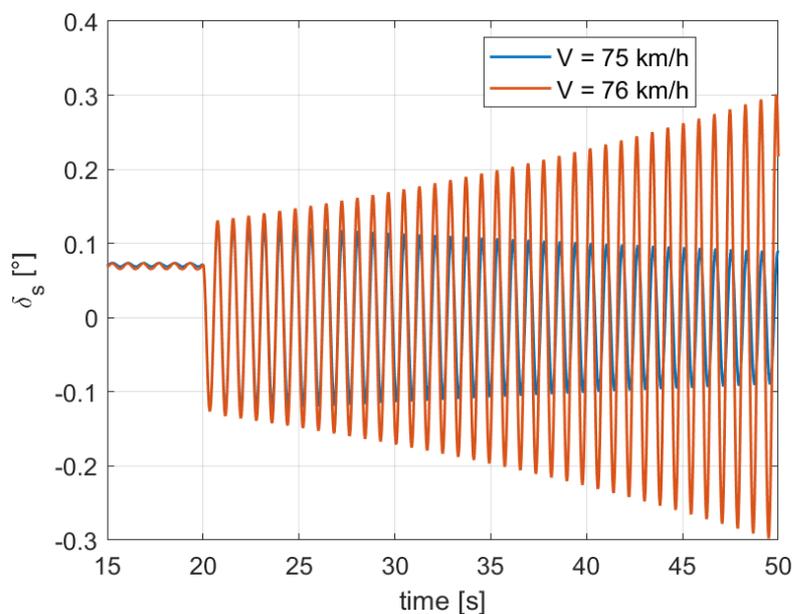
Nei grafici a seguire (figure 6.7, 6.8, 6.9) cambia il braccio  $\epsilon$ , diminuito della metà ( $\epsilon = 0.020 \text{ m}$ ) per analizzare il comportamento dello sterzo in una condizione dove la velocità influisce nella stabilità, poiché con tale valore risulta che  $\omega_s^2 < \omega_y^2$ . Infatti,  $\omega_s^2 = 120 \text{ rad}^2/\text{s}^2$  mentre  $\omega_y^2$  rimane uguale a quella del caso precedente poiché non varia con il braccio  $\epsilon$ .



**Figura 6.7:** Andamento dell'angolo di sterzo nella fase di rilascio per  $V = 50$  km/h



**Figura 6.8:** Andamento dell'angolo di sterzo nella fase di rilascio per  $V = 75$  km/h



**Figura 6.9:** Andamento dell'angolo di sterzo nella fase di rilascio per  $V = 75$  e  $76$  km/h

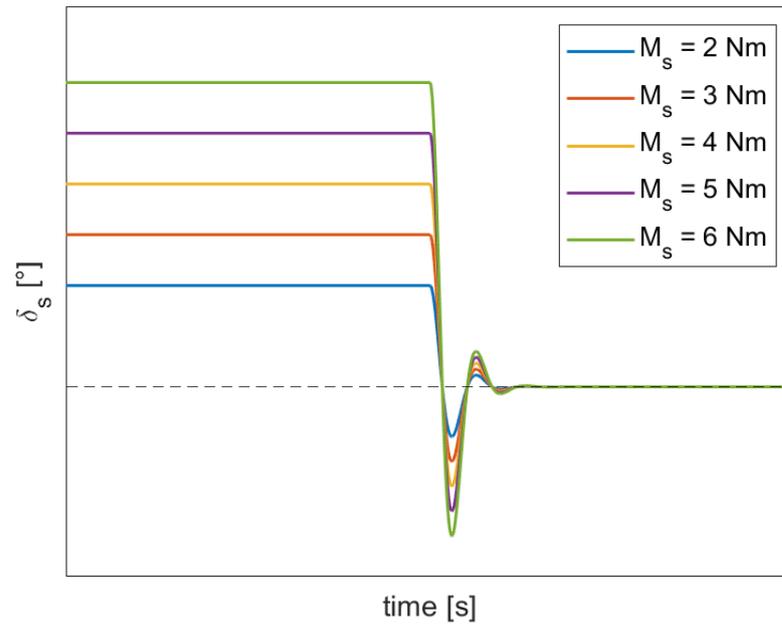
Quando la velocità è limitata fino a  $50$  km/h lo sterzo non presenta instabilità e si comporta come nei casi visti prima.

Invece per un velocità uguale a  $75$  km/h si hanno delle oscillazioni che dopo un tempo transitorio si esauriscono fino ad andare a zero. Inoltre nel primo tratto a coppia imposta diversa da zero si hanno comunque delle oscillazione che prima non erano presenti poiché la velocità è prossima a quella critica. Esattamente tale velocità critica (per  $\epsilon = 0.02$  m) corrisponde a  $75.3$  km/h.

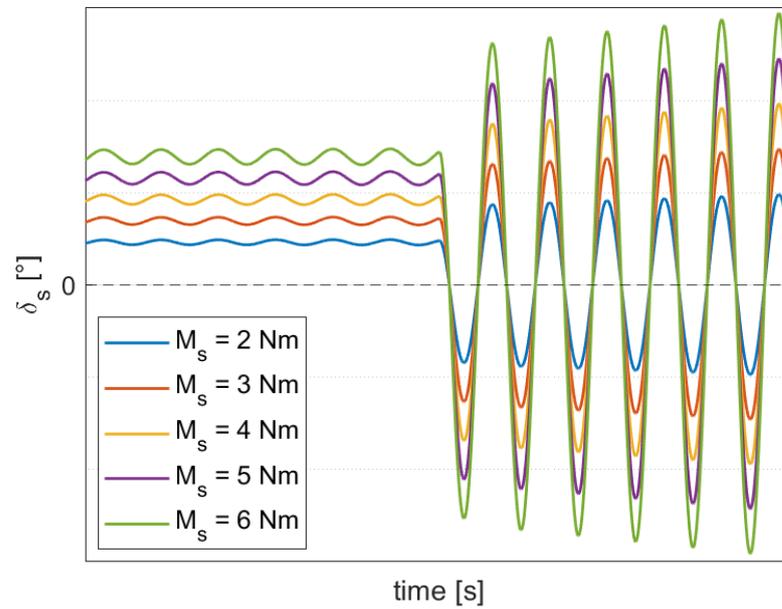
Quindi nel terzo grafico si riporta l'andamento dello sterzo per una velocità imposta a  $76$  km/h (oltre quella limite). Ne risulta che a questa condizione il sistema è instabile: le oscillazioni al rilascio dello sterzo aumentano notevolmente con il tempo senza mai esaurirsi.

Al fine di dimostrare che la stabilità del sistema non dipende dalla coppia al volante inserita dal pilota si illustra l'andamento dell'angolo di sterzo al variare della stessa coppia nella figura 6.10: il tempo transitorio che intercorre tra il rilascio dello sterzo e il ritorno nella posizione di zero è uguale ed indipendente dal coppia al volante. Questa influisce solo sull'ampiezza dell'angolo di sterzo sia nella fase stazionaria sia nell'oscillazione seguente il rilascio.

Riguardo le ampiezze di oscillazione al rilascio si può vedere nella figura 6.11 la loro dipendenza dal valore di coppia imposto anche nelle condizioni di instabilità  $\omega_s^2 < \omega_y^2$  e  $V > V_{CR}$ .

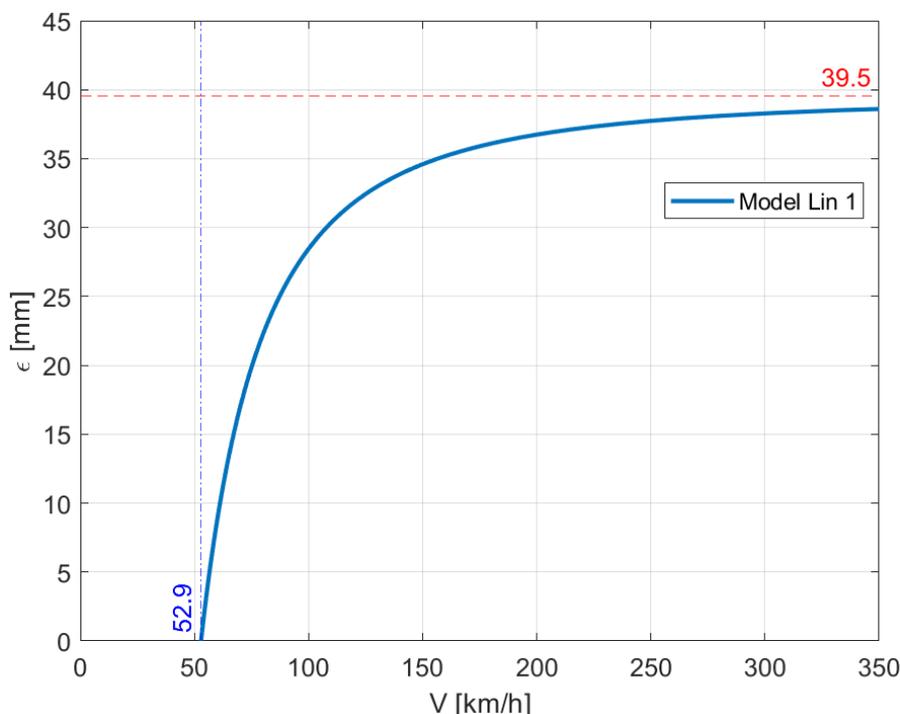


**Figura 6.10:** Rilascio dello sterzo al variare della coppia volante ( $V = 50$  km/h,  $\epsilon = 40$  mm)



**Figura 6.11:** Rilascio dello sterzo al variare della coppia volante nella condizione di instabilità ( $V = 76$  km/h,  $\epsilon = 20$  mm)

I valori di velocità che portano all'instabilità dello sterzo durante la condizione di  $\omega_s^2 < \omega_y^2$  si ricavano dall'equazione 6.16, la quale rappresenta il legame tra  $V_{CR}$  e  $\epsilon$ , il quale a sua volta influisce su  $\omega_s$ . Nel grafico che segue in figura 6.12 si mostra il valore di velocità limite che si può raggiungere per non causare instabilità per un certo braccio  $\epsilon$ .



**Figura 6.12:** Velocità critiche al variare di  $\epsilon$

Per non avere instabilità è necessario lavorare nella zona al di sopra della curva blu. Per valori di  $\epsilon$  maggiori di 39.51 mm il sistema di sterzo è sempre stabile a prescindere dai valori di velocità, invece per valori minori si potrà avere instabilità a seconda della velocità del veicolo. Se è inferiore a 52.91 km/h non si avrà mai instabilità anche se il braccio  $\epsilon$  è piccolissimo; invece si potranno avere soltanto delle oscillazioni (anche in condizione di regime nel tratto iniziale) che aumentano proporzionalmente con il valore di coppia imposto.

Il valore di  $\epsilon$  oltre il quale si ha sempre stabilità si trova esplicitando il termine del braccio dall'equazione 6.16 e svolgendo il limite per la velocità critica che va ad infinito. Seguono i vari passaggi per trovare l' $\epsilon_{limite}$ .

Dalla 6.16, portando a primo membro  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{1}{J_z} \cdot \left( 2J_s L - \frac{4CL^2 J_s}{mV_{CR}^2} \right) \quad (6.17)$$

Quindi si svolge il limite per  $V_{CR} \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{V_{CR} \rightarrow \infty} \epsilon = \frac{2J_s L}{J_z} = \epsilon_{lim} \quad (6.18)$$

Questo limite è uguale a 39.51 mm assumendo i parametri della tabella 6.2 e dipende dall'inerzia della massa rotante a monte dell'elasticità dell'albero, dal passo del veicolo e dall'inerzia del veicolo lungo l'asse verticale z; da questi tre termini quindi viene condizionata la stabilità del veicolo e del sistema di sterzo.

Invece, ponendo  $\epsilon$  uguale a zero nell'equazione 6.16 è possibile trovare il valore della velocità minima con cui il sistema presenta instabilità. Tale valore è uguale a 52.91 km/h, come visibile anche nella figura 6.12.

## 6.4 Confronto con il modello complesso non lineare

Il modello semplificato è stato creato per poter procedere con un metodo analitico e trovare una soluzione in forma chiusa essendo relativamente limitate le formule che vengono implementate rispetto al modello più articolato. La formula più interessante da studiare in questo modello semplificato è quella relativa alla condizione di stabilità dello sterzo ricavata e analizzata precedentemente. Per capire se questo criterio di stabilità si può estendere ai modelli più complessi, come quello che sta alla base di questo documento, si tolgono i parametri usati nel modello semplificato lineare adottando quelli usati nel modello complesso non lineare. I parametri sostituiti sono quelli elencati in tabella 6.3.

Grandezza	Valore
$C_f$	$1.68e^5 \text{ N/rad}$
$C_r$	$1.22e^5 \text{ N/rad}$
$m$	$1600 \text{ kg}$
$a$	$1.04 \text{ m}$
$b$	$1.56 \text{ m}$
$L$	$2.6 \text{ m}$
$J_s$	$10.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_z$	$2860 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$k_c$	$4.58e^4 \text{ Nm/rad}$
$\epsilon$	$38.5 \text{ mm}$

**Tabella 6.3:** Parametri del modello complesso inseriti nel modello semplificato

Quindi per avere un modello ancora relativamente semplificato e che restituisce una condizione di stabilità analitica si trascurano alcune ipotesi, quali: colonna

di sterzo infinitamente rigida (cioè  $k_c = \infty$ ,  $e = 1$ ), rigidzze di deriva degli assali frontali e posteriori uguali, semipassi uguali. Infatti tali ipotesi usate nel modello semplificato precedente difficilmente sono realizzabili in un veicolo reale.

Le rigidzze di deriva  $C$  degli assali si trovano svolgendo delle simulazioni con il modello complesso, quindi sommando le relative forze laterali del singolo assale ( $Fy_{dx} + Fy_{sx}$ ) e riportandole con asse delle ascisse uguale alla media degli angoli di deriva  $\alpha$  della singola ruota dell'assale ( $\frac{\alpha_{dx} + \alpha_{sx}}{2}$ ). La rigidzza di deriva è uguale alla pendenza di questi grafici per valori di angoli di deriva medi intorno allo zero. Per il calcolo dell'inerzia dello sterzo e della rigidzza della colonna di sterza si usa il rapporto di sterzo  $\tau$  tra il volante e la ruota che corrisponde a 20 per il modello complesso analizzato; poichè si devono trasporre queste grandezze dall'asse della colonna di sterzo all'asse di sterzo del sistema di sospensione, detto anche *king-pin axis*, che è la direzione attorno al quale effettua l'equilibrio dei momenti. Quindi:

$$J_s = (J_{uc} + J_{lc}) \cdot \tau^2 = (0.026 + 0.001)kgm^2 \cdot 20^2 = 10.8 kgm^2 \quad (6.19)$$

$$K_c = k_{tb} \cdot \tau^2 = 2 Nm/deg \cdot 20^2 = 4.58e^4 Nm/rad \quad (6.20)$$

Per il braccio a terra  $\epsilon$  si procede con la somma del braccio a terra longitudinale  $b_l$  e del braccio pneumatico  $b_p$ :

$$\epsilon = b_l + b_p = (35 + 3.5)mm = 38.5 mm \quad (6.21)$$

Con queste nuove condizioni le equazioni 6.12, 6.13 e 6.14 presentano un'espressione letterale più lunga che causano la perdita della semplicità della disequazione di stabilità. Ne consegue che l'unico modo per studiare la stabilità rimane l'utilizzo di un calcolatore numerico (quale Matlab) con il quale è possibile inserire i vari coefficienti delle equazioni e poi tramite l'ausilio delle trasformate di Laplace e della condizione di stabilità di Routh ricavare appunto la stabilità del sistema di sterzo. Si procede innanzitutto riportando le nuove equazioni più complesse:

$$mV \cdot \dot{\beta} + 2(eC_f + C_r) \cdot \beta + \left[ mV + \frac{2}{V}(aeC_f - bC_r) \right] \cdot r - 2eC_f \cdot \delta_s = 0 \quad (6.22)$$

$$\left[ 2(aeC_f - bC_r) \right] \cdot \beta + J_z \cdot \dot{r} + \left[ \frac{2}{V}(a^2eC_f + b^2C_r) \right] \cdot r - 2aeC_f \cdot \delta_s = 0 \quad (6.23)$$

$$-\omega_s^2 \cdot \beta - \omega_s^2 \frac{a}{V} \cdot r + \ddot{\delta}_s + \omega_s^2 \cdot \delta_s = M_s/J_s \quad (6.24)$$

Nell'equazione 6.24 compare ancora la frequenza dello sterzo  $\omega_s$  la quale contiene stavolta anche il parametro di rigidzza  $e$ . Infatti è uguale a:

$$\omega_s^2 = \frac{2\epsilon e C_f}{J_s} \quad (6.25)$$

Per semplicità si raccolgono alcuni termini nei coefficienti seguenti che poi verranno nella matrice dinamica A del sistema.

- $B = 2(eC_f + C_r)$
- $C = \left[ mV + \frac{2}{V}(aeC_f - bC_r) \right]$
- $D = -2eC_f$
- $E = \left[ 2(aeC_f - bC_r) \right]$
- $F = \left[ \frac{2}{V}(a^2eC_f + b^2C_r) \right]$
- $G = -2aeC_f$
- $H = -\omega_s^2$
- $I = -\omega_s^2 \frac{a}{V}$
- $J = \omega_s^2$

Matrice dinamica A:

$$\begin{vmatrix} mVs + B & C & D \\ E & J_zs + F & G \\ H & I & s^2 + J \end{vmatrix}$$

Con il calcolo del determinante della matrice si trova l'equazione caratteristica del quarto ordine contraddistinta dai seguenti coefficienti  $A_i$ .

- $A_0 = FBJ - GIB - EJC + GHC + DEI - HFD$
- $A_1 = mVFJ - mVGI + J_zJB - DHJ_z$
- $A_2 = mVJ_zJ + FB - CE$
- $A_3 = mVF + BJ_z$
- $A_4 = mVJ_z$

Lo step finale è applicare la condizione di stabilità di Routh per sistemi con equazioni del quarto ordine. Tale condizione prevede tre disequazioni, le quali sono riportate in basso.

$$A_0 > 0 \tag{6.26}$$

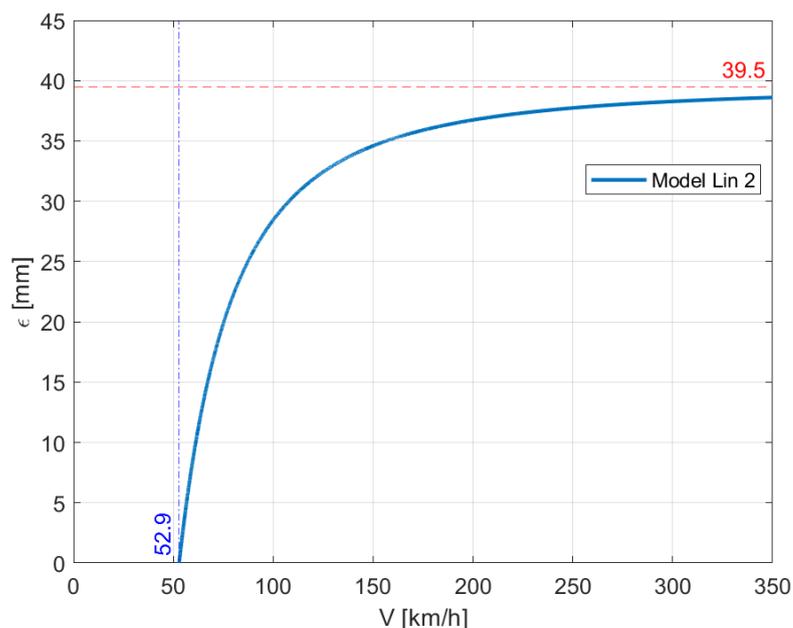
$$A_4 > 0 \tag{6.27}$$

$$A1 \cdot A2 \cdot A3 - A0 \cdot (A3^2) - (A1^2) \cdot A4 \geq 0 \quad (6.28)$$

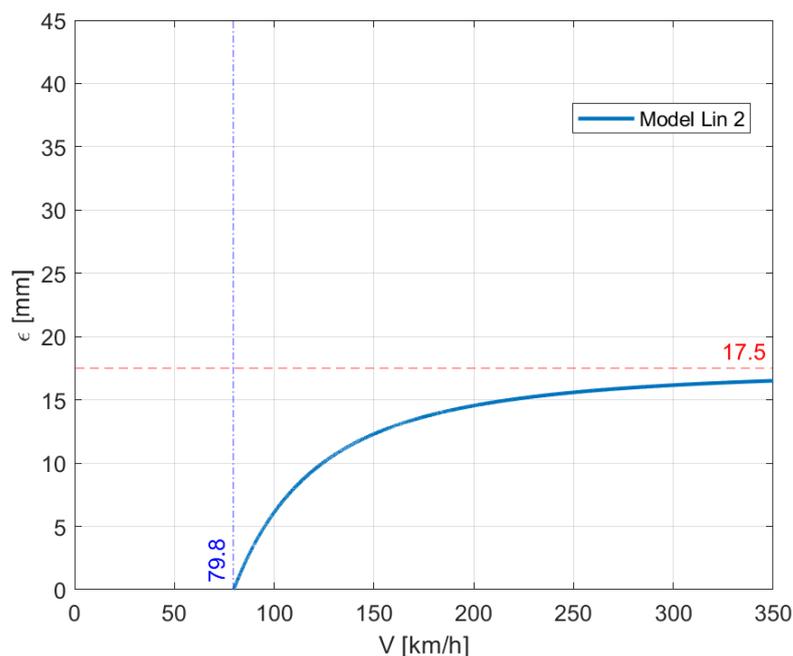
Come descritto in precedenza il criterio di stabilità non è facilmente realizzabile seguendo la formula analitica ricavata dalle semplificazioni adottate dal modello semplificato. Quindi si riportano nel software Matlab i parametri e i coefficienti delle equazioni riportate in questo paragrafo per valutare se le espressioni 6.26, 6.27 e 6.28 sono verificate. E' possibile realizzare un grafico con le velocità critiche per i diversi valori di  $\epsilon$  per poter determinare la stabilità dello sterzo.

Per verificare la correttezza dei coefficienti ricavati precedentemente si usano i parametri usati nel primo modello lineare così da confrontare i grafici delle velocità critiche per le due diverse condizioni di stabilità (una analitica e una numerica). Come è possibile vedere di seguito, il grafico 6.13 è uguale al grafico in figura 6.12: ciò dimostra che l'ultima condizione di stabilità ricavata è corretta.

Successivamente si riporta in figura 6.13 il grafico delle velocità critiche attraverso la condizione di stabilità con i parametri più realistici relativi al modello complesso, tabella 6.3.



**Figura 6.13:** Velocità critiche al variare di  $\epsilon$  per la condizione di stabilità complessa con i parametri usati nel primo modello lineare

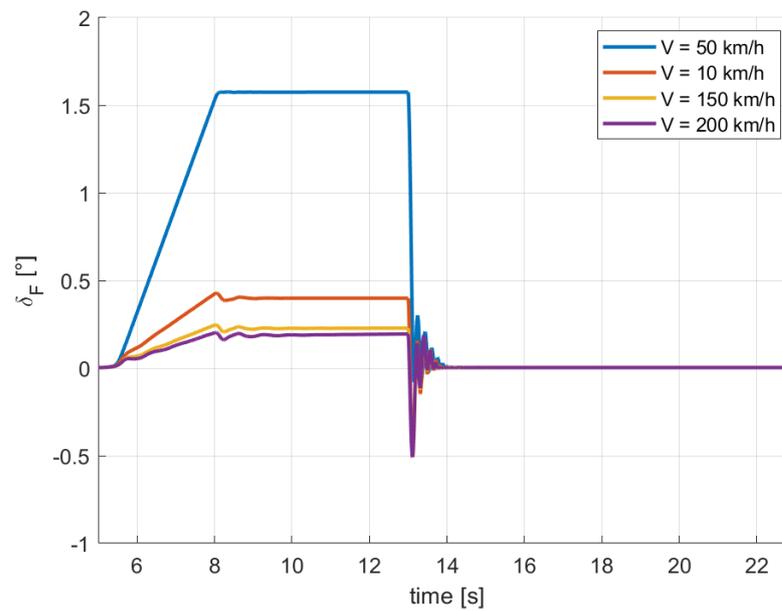


**Figura 6.14:** Velocità critiche al variare di  $\epsilon$  per la condizione di stabilità complessa con i parametri caratteristici del modello complesso

Relativamente al grafico in figura 6.14, in rosso e in blu sono rappresentati i limiti della stabilità del sistema di sterzo: per una velocità inferiore ai 79.8 km/h il sistema non andrà mai in instabilità a prescindere dal valore del braccio  $\epsilon$ ; invece per un braccio maggiore di 17.5 mm non esiste velocità che possa causare instabilità. Per validare l'ultima condizione di instabilità ricavata vengono effettuate delle simulazioni con il modello non lineare e ben più articolato prendendo come riferimento per caratterizzare la manovra i dati della figura 6.14.

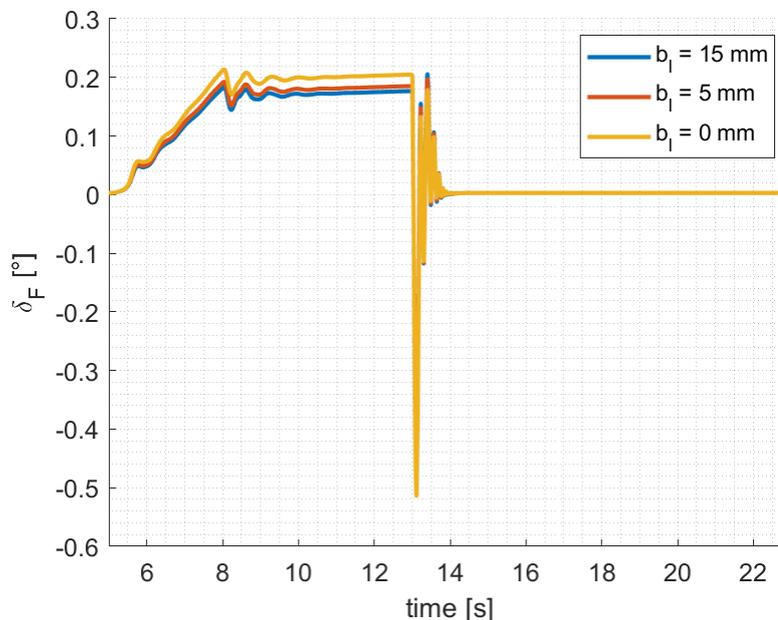
Le simulazioni con il modello non lineare vengono effettuate senza l'implementazione di sistemi di servoassistenza per avere un responso più affidabile della condizione di instabilità.

Procedendo con la verifica della condizione di stabilità vengono effettuate delle simulazioni caratterizzate da un braccio a terra longitudinale uguale a 5 mm e velocità variabile da 50 a 200 km/h. In figura 6.15 è possibile apprezzare come al rilasciare dello sterzo lo stesso non presenti instabilità ma rimane stabile nel tempo al contrario di quanto descrive il grafico 6.14 ricavato dalla condizione di stabilità del modello lineare con i parametri uguagliati a quelli del non lineare. All'aumentare della velocità sono soltanto e sempre più rilevanti le oscillazioni causate dal rilascio dello sterzo.



**Figura 6.15:** Andamento nel tempo dell'angolo di sterzo del modello non lineare per la verifica del grafico di stabilità al variare della velocità

Un'ulteriore verifica è stata eseguita con il variare del braccio a terra mantenendo una velocità considerevolmente alta di 200 km/h. Il braccio varia da 15 a 0 mm invece. I risultati sono visibili in figura 6.16.



**Figura 6.16:** Andamento nel tempo dell'angolo di sterzo del modello non lineare per la verifica del grafico di stabilità al variare del braccio longitudinale

Anche questo grafico, come il precedente, evidenzia la mancanza di instabilità per le condizioni indicate e ricavate dall'equazione del modello lineare.

A seguire sono riportati ulteriori due grafici che mostrano il confronto qualitativo tra i due modelli (lineare e non lineare) in due condizioni differenti: in base al grafico 6.14 è stata simulata una manovra in condizione di stabilità (fig.6.17) ed una in condizione di instabilità (fig.6.18). Le simulazioni sono caratterizzate dallo stesso input: momento di sterzo saturato a 3 Nm con pendenza di 1 Nm/s (vedi fig.6.19).

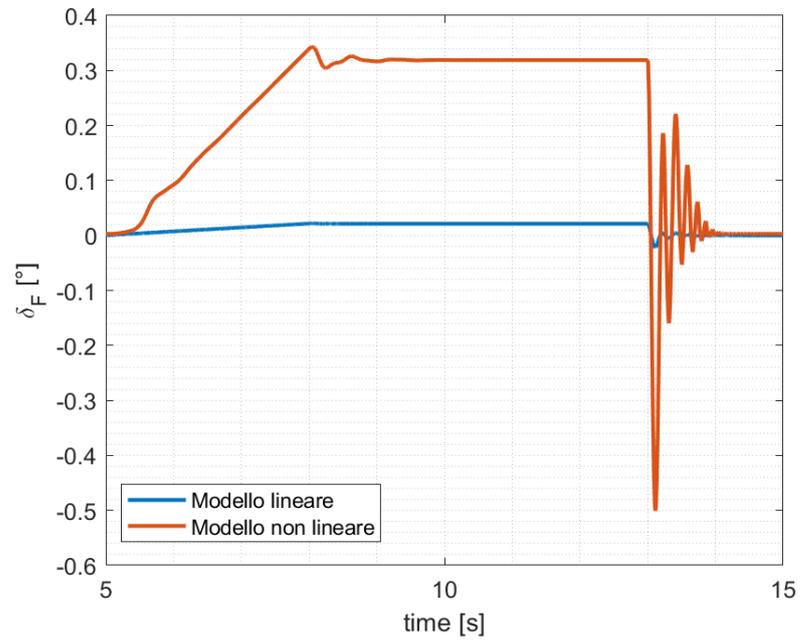


Figura 6.17: Angolo di rotazione anteriore per  $V = 100 \text{ km/h}$  e  $b_l = 35 \text{ mm}$

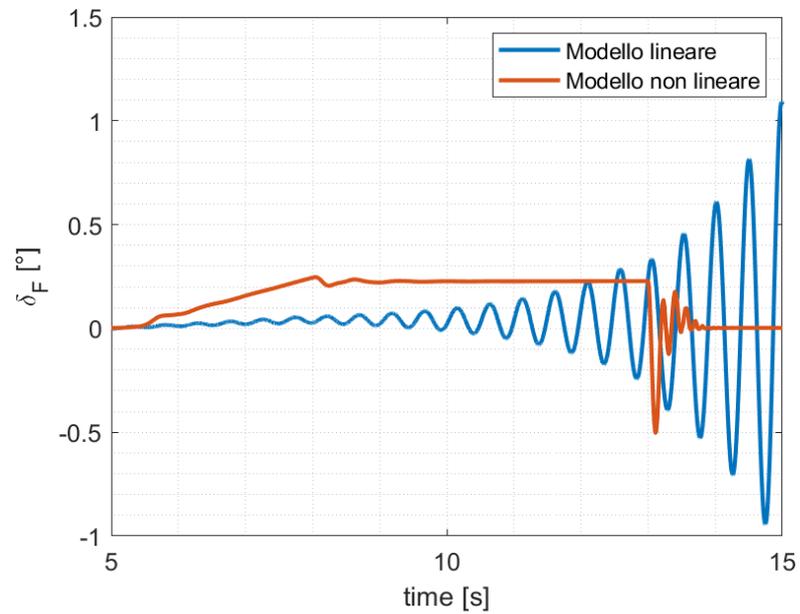


Figura 6.18: Angolo di rotazione anteriore per  $V = 150 \text{ km/h}$  e  $b_l = 5 \text{ mm}$

Il segnale relativo al modello lineare presenta dei valori che si discostano molto da quelli riscontrati con il modello non lineare. Questa considerazione è valida per entrambe le figure durante il periodo di rampa e poi di saturazione al momento massimo. Invece al rilascio dello sterzo il segnale rosso (modello non lineare) presenta sempre un comportamento stabile per tutto il periodo al contrario di quello blu (modello lineare) che nella seconda condizione è instabile. Tale instabilità conferma i valori del grafico 6.14 e la condizione di stabilità complessa ma solo per il modello lineare (quello più semplice modellisticamente).

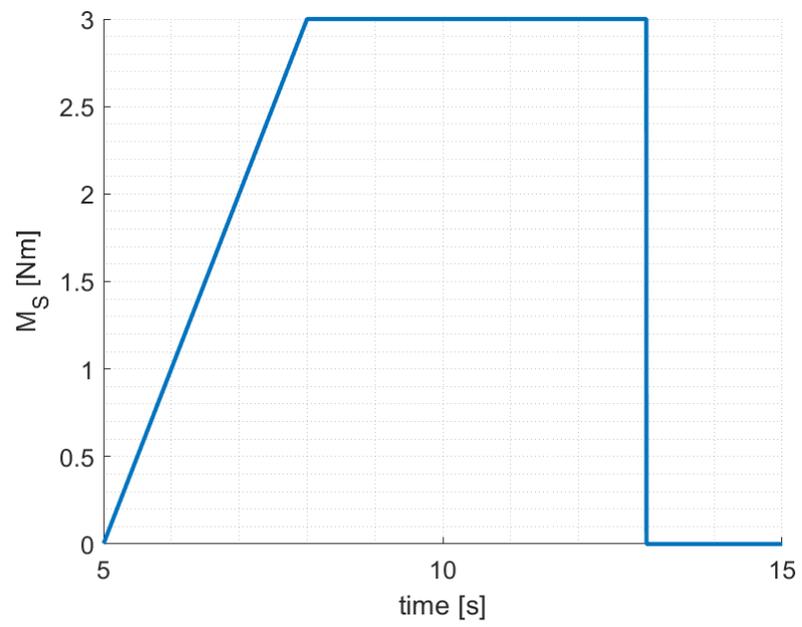
Quindi i risultati ottenuti dal confronto emergono solo in via qualitativa.

Alle luce di questi considerazioni il grafico di stabilità con le velocità critiche e i valori di braccio a terra non può essere considerato valido, e quindi nemmeno la condizione di stabilità complessa (eq.6.28). Perciò non è possibile attraverso il modello lineare costruire cogliere immediatamente le possibili dinamiche di instabilità che possono presentarsi nello sterzo (quali l'effetto di Shimmy).

Per migliorare la descrizione dell'instabilità e avvicinare le curve dei risultati finali dei due modelli progettati si potrebbero inserire nel modello lineare delle considerazioni circa la lunghezza di rilassamento e la rivalutazione dell'equazione dinamica attorno all'asse di sterzo.

La prima è una grandezza cui si fa riferimento per tenere in conto del transitorio di generazione e variazione della forza (sia per la forza laterale sia quella longitudinale anche se nel modello lineare è presente solo la forza laterale). Invece, la rivalutazione potrebbe essere fatta sull'inerzia, sulle rigidità e sugli smorzamenti che caratterizzano l'intero asse di sterzo.

In aggiunta a quanto appena descritto, nel calcolo della condizione di instabilità potrebbero essere inserite altre equazioni dinamiche relative ad altri sottosistemi, quali per esempio la sospensione (con cui entrano in gioco anche le forze longitudinali) e i giunti cardanici (tra i principali causali della variabilità del rapporto di trasmissione).



**Figura 6.19:** Input per il confronto tra i due modelli

# Capitolo 7

## Conclusioni

L'elaborato ha preso in esame lo studio e la modellazione di vari sistemi sterzi implementati nel software MATLAB/Simulink.

L'estrazione dei grafici delle varie simulazioni effettuate ha permesso una considerazione qualitativa e quantitativa dell'andamento di tutte le grandezze che sono in gioco durante la manovra di sterzata.

Una modellazione più approfondita con l'aggiunta di altri elementi smorzanti (masse rotante attorno all'asse di sterzo, elasticità dei tiranti e dei braccetti) e di altri elementi di attrito (boccole) potrebbe portare all'eliminazione delle oscillazioni a valle del rilascio dello sterzo tanto quanto l'avvicinamento dei risultati a valori più reali appartenenti ad una manovra di sterzata reale.

Il modello si è rivelato di grande utilità nella considerazione di tutto ciò che è parte di un sistema di sterzo e di come questo influisca sul resto dei sottosistemi e non solo. Infatti, i vari tuning proposti hanno permesso di monitorare anche l'intera cinematica del veicolo la quale è risultata dipendente dai sistemi implementati.

Fondamentali, inoltre, le simulazioni effettuate con il modello non lineare per avere un confronto con il secondo modello più semplice. Quest'ultimo ha permesso un primo studio di stabilità per un modello che si discosta per modellazione e analisi da un sistema di sterzo reale.

Quindi si è reso noto che il modello lineare (certamente meno affidabile per i risultati ottenuti e per le ipotesi di modellazione con le quali è stato creato) non è adeguato a descrivere in modo pratico ed analitico i fenomeni di instabilità che partendo dallo sterzo influenzano l'intero veicolo e la sua dinamica.

Il miglioramento della condizione di instabilità parte dal considerare alcune aggiunte quali l'inserimento della lunghezza di rilassamento e di sottosistemi meccanici (sospensione, giunti cardanici), oltre ad una rivalutazione generale della dinamica dell'asse di sterzo. Però, questi porteranno sicuramente ad espressioni letterali più complesse con la perdita della comodità di poter usare una condizione di instabilità immediata ed analitica, motivo fondante della creazione del modello lineare.



# Bibliografia

- [1] G. Genta. *Meccanica dell'autoveicolo*. LevrottoBella, 2000 (cit. a p. 1).
- [2] G. Genta L. Morello, F. Cavallino e L. Filtri. *The Motor Car. Past, Present and Future*. Mechanical Engineering Series. Springer, 2014. ISBN: 9789400785519 (cit. alle pp. 1–4).
- [3] G. Genta e L. Morello. *The Automotive Chassis. Volume 1: Components Design. Second Edition*. Mechanical Engineering Series. Springer, 2020. ISBN: 9783030356347 (cit. alle pp. 3, 4, 6, 46).
- [4] M.Harrer e P.Pfeffer. *Steering Handbook*. Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-05448-3 (cit. alle pp. 5, 7, 8, 10–12).
- [5] *CarMaker, Reference Manual Version 9.0.2*. IPG Automotive Group, 2020 (cit. alle pp. 7, 44).
- [6] J.Reimpell, H.Stoll e W.Betlzer. *The Automotive Chassis: Engineering Principles*. ButterWoth Heinemann, 2001. ISBN: 0 7506 5054 0 (cit. a p. 9).
- [7] P.Pfeffer, M.Harrer e D.Johnston. *Modelling of a Hydraulic Steering System*. ButterWoth Heinemann, 2006 (cit. a p. 35).
- [8] M. Velardocchia. *Appunti del corso di Meccanica del veicolo*. Politecnico di Torino, 2020 (cit. a p. 46).
- [9] Masato Abe. *The Vehicle Handling Dynamics, Theory and Application*. Elsevier, 2015 (cit. alle pp. 122, 127, 131).