



**Politecnico  
di Torino**



**AMET**  
*Your Engineering Partner*

Politecnico di Torino

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica | Progettazione  
Meccanica

a.a. 2021-2022

**Studio comparativo fra approccio ALE ed approccio  
SPH per la valutazione del comportamento  
strutturale di un serbatoio carburante sottoposto a  
carichi di sciabordio**

**Relatore:**

Prof. Lorenzo Peroni

**Candidato:**

Raffaele Vallone

**Relatore Aziendale:**

Ing. Alessandro Cucchi

# Indice

<b>Sommario</b>	<b>2</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>8</b>
1.1 AMET . . . . .	8
1.2 Oggetto di studio e obiettivi . . . . .	9
1.3 Il fenomeno dello sciabordio all'interno dei serbatoi di carburante . . . . .	10
<b>2 Metodo ALE</b>	<b>12</b>
2.1 Introduzione al metodo ALE . . . . .	12
2.2 Equazioni di conservazione . . . . .	14
2.3 Tensore delle tensioni . . . . .	15
2.4 Condizioni al contorno . . . . .	16
2.5 Soluzione delle equazioni di Navier-Stokes con il metodo ALE . . . . .	17
2.5.1 Fase Lagrangiana . . . . .	18
2.5.2 Equilibrio delle tensioni e interface tracking . . . . .	20
2.5.3 Fase avvettiva . . . . .	23
2.6 Equazioni per la struttura . . . . .	24
2.7 Interazione fluido-struttura . . . . .	25
2.7.1 Algoritmi di contatto . . . . .	28
2.8 Algoritmi di mesh-update . . . . .	30

---

<b>3</b>	<b>Metodo SPH</b>	<b>31</b>
3.1	Introduzione al metodo SPH . . . . .	31
3.2	Equazioni di conservazione e metodo di collocazione . . . . .	32
3.3	Distribuzione delle particelle . . . . .	34
3.3.1	Cubico a facce centrate . . . . .	34
3.3.2	Cubo Semplice . . . . .	37
3.4	Condizioni al contorno . . . . .	38
3.5	Contatto Fluido-Struttura . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Simulazione del serbatoio carburante con metodo ALE</b>	<b>41</b>
4.1	RADIOSS . . . . .	41
4.1.1	Elementi SHELL (/PROP/TYPE1) . . . . .	41
4.1.2	Elementi SOLID (/PROP/TYPE14) . . . . .	44
4.1.3	Time Step . . . . .	45
4.2	Set-up del modello ALE . . . . .	46
4.2.1	Guscio del serbatoio . . . . .	47
4.2.2	Staffe . . . . .	52
4.2.3	Tamponi . . . . .	52
4.2.4	Fluido ALE . . . . .	54
4.2.5	Materiali . . . . .	56
4.2.6	Contatti . . . . .	62
4.2.7	Condizioni al contorno . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Simulazione del serbatoio carburante con metodo SPH</b>	<b>70</b>
5.1	Set-up del modello SPH . . . . .	70
5.1.1	Fluido SPH . . . . .	70

---

5.1.2	Modello del materiale per il liquido . . . . .	72
5.1.3	Contatto fluido-struttura per il metodo SPH . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Confronto dei risultati</b>	<b>74</b>
6.1	Sciabordio del fluido all'interno del serbatoio . . . . .	74
6.2	Tensioni e deformazioni plastiche del guscio del serbatoio . . . . .	76
6.3	Tensioni e deformazioni plastiche delle staffe . . . . .	82
6.4	Energia del sistema . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>91</b>

*"During the struggle  
They will pull us down  
But please, please  
Let's use this chance  
To turn things around  
And tonight  
We can truly say  
Together we're invincible"*

***Muse, Invincible***

# Sommario

Nel settore dell'automotive, uno degli aspetti da tenere in considerazione in fase di progetto riguarda le forze idrodinamiche esercitate dal carburante sulle pareti del serbatoio contenente il carburante stesso. Tale fenomeno è noto come sciabordio (o sloshing) e le sollecitazioni che ne derivano possono generare delle tensioni in grado di deformare o, al limite, portare a cedimento le pareti del serbatoio stesso, se queste raggiungono dei valori superiori al limite di resistenza del materiale costitutivo. Per tale motivo è cruciale prevedere l'entità delle forze idrodinamiche risolvendo il problema dell'interazione fluido-struttura. L'oggetto di studio di questa Tesi riguarda proprio l'analisi di un serbatoio installato all'interno di una *supercar*, mediante due diversi approcci di calcolo: il metodo ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) e il metodo SPH (Smooth Particle Hydrodynamics). Lo studio è stato effettuato in collaborazione con AMET e l'obiettivo è quello di verificare quali siano le peculiarità dei due approcci nel risolvere problematiche di questa natura. Per entrambi gli approcci, per prima cosa è stata effettuata una fase di *pre-processing* mediante i software commerciali HyperMesh e HyperCrash, ambedue facenti parte della suite di Altair. Una volta realizzato il modello e impostati i parametri della simulazione, si è passati alla risoluzione delle equazioni che governano il fenomeno mediante il solutore RADIOSS. Infine, i risultati ottenuti dai calcoli effettuati con i due diversi approcci sono stati analizzati e confrontati tra loro.

# Elenco delle tabelle

3.1	Numero di particelle adiacenti in una distribuzione a cubo a facce centrate	35
3.2	Numero di particelle adiacenti in una distribuzione a cubo semplice .	37
4.1	Parametri di meshatura per gli elementi SHELL del serbatoio . . . . .	51
4.2	Parametri di tetramesatura . . . . .	56
4.3	Proprietà meccaniche della gomma . . . . .	57
4.4	Proprietà meccaniche dell'alluminio . . . . .	58
4.5	Proprietà meccaniche della lega 6082 . . . . .	59
4.6	Proprietà di aria e acqua . . . . .	62
5.1	Parametri del metodo SPH . . . . .	71
7.1	Confronto del costo computazionale . . . . .	88

# Elenco delle figure

1.1	Esempio di simulazione di un urto laterale realizzata da AMET . . . . .	9
1.2	Modello FEM del serbatoio . . . . .	10
1.3	Esempio di moto di sciabordio in un recipiente a forma di parallelepipedo. ("Effect of natural frequency modes on sloshing phenomenon in a rectangular tank", Jae Hwan Jung, Hyun Sik Yoon, Chang Yeol Lee, 2015) . . . . .	11
2.1	Differenze tra mesh Euleriana, Lagrangiana e ALE . . . . .	13
2.2	Rappresentazione del dominio del fluido . . . . .	17
2.3	Tracciamento dell'interfaccia in un elemento del fluido mediante il metodo di Young . . . . .	22
2.4	Dominio della struttura e condizioni al bordo . . . . .	25
2.5	Interazione fluido struttura tra i domini $\Omega^f$ e $\Omega^S$ . . . . .	26
2.6	Rappresentazione del metodo penalty nel metodo ALE . . . . .	29
3.1	Differenza tra mesh e particelle nella discretizzazione del continuo ( <a href="https://www.dive-solutions.de/articles/sph-basics">https://www.dive-solutions.de/articles/sph-basics</a> ) . . . . .	32
3.2	Spaziatura delle particelle e funzione kernel . . . . .	33
3.3	Distribuzione cubo facce centrate . . . . .	35
3.4	Distribuzione esagonale compatta . . . . .	36

3.5	Vista in prospettiva della rete cubica a facce centrate . . . . .	36
3.6	Distribuzione a cubo semplice . . . . .	37
3.7	Distribuzione delle particelle al bordo . . . . .	39
3.8	Rappresentazione del metodo penalty nel metodo SPH . . . . .	40
4.1	Elemento Shell . . . . .	42
4.2	Differenza tra una SHELL di Kirchhoff e una SHELL di Mindlin . . .	42
4.3	Elemento SHELL QEPH sotto-integrato . . . . .	43
4.4	Distribuzione della tensione normale in una SHELL nei casi di elasticità e plasticità . . . . .	43
4.5	Elemento SOLID Linear Tetrahedron . . . . .	44
4.6	Elemento SOLID Linear Hexaedron . . . . .	45
4.7	Modello FEM completo del serbatoio di carburante . . . . .	47
4.8	Guscio del serbatoio . . . . .	49
4.9	Dettaglio della zona termicamente alterata . . . . .	50
4.10	Dettaglio di uno dei sormonti: a sinistra sono visualizzate solo le super- fici mediane, a destra vengono mostrate le pareti con i propri spessori	51
4.11	Staffe . . . . .	52
4.12	Tamponi aderenti al serbatoio (in arancio) e tamponi aderenti alle staffe (in verde) . . . . .	53
4.13	Dettaglio di un tampone discretizzato con elementi HEXA . . . . .	54
4.14	Suddivisione del volume all'interno del serbatoio . . . . .	55
4.15	Dettaglio degli elementi TETRA usati per discretizzare il volume ALE	56
4.16	Curva di plasticizzazione dell'alluminio . . . . .	59
4.17	Curva di plasticizzazione della lega 6082 . . . . .	60

4.18	Contatto cinematico in RADIOSS . . . . .	62
4.19	Rappresentazione del parametro $d_{search}$ in RADIOSS . . . . .	63
4.20	Contatto tied tra guscio del serbatoio e tamponi aderenti al serbatoio, in rosso i nodi <i>slave</i> e in blu la superficie <i>master</i> . . . . .	64
4.21	Contatto tied tra staffe e tamponi aderenti alle staffe, in rosso i nodi <i>slave</i> e in blu la superficie <i>master</i> . . . . .	64
4.22	Metodo penalty in RADIOSS . . . . .	65
4.23	Contatto penalty tra guscio del serbatoio e tampone aderenti alle staffe, in rosso i nodi <i>slave</i> e in blu la superficie <i>master</i> . . . . .	66
4.24	Curva di velocità con accelerazione 12g . . . . .	67
4.25	Telaio simulato da un unico copro rigido . . . . .	68
4.26	Applicazione delle condizioni al contorno . . . . .	69
5.1	Discretizzazione del liquido mediante particelle . . . . .	71
5.2	Discretizzazione del liquido mediante particelle, vista laterale . . . . .	72
5.3	Contatto Fluido-Struttura per il metodo SPH . . . . .	73
6.1	Moto del liquido all'istante $t = 0 \text{ ms}$ . . . . .	75
6.2	Moto del liquido all'istante $t = 50 \text{ ms}$ . . . . .	75
6.3	Moto del liquido all'istante $t = 100 \text{ ms}$ . . . . .	76
6.4	Inviluppo della tensione principale massima del guscio del serbatoio . . . . .	78
6.5	Zona di rottura nel modello con SPH . . . . .	79
6.6	Inviluppo della massima deformazione plastica del guscio del serbatoio . . . . .	80
6.7	Inviluppo della tensione principale massima delle HAZ . . . . .	81
6.8	Inviluppo della massima deformazione plastica delle HAZ . . . . .	81
6.9	Inviluppo della tensione principale massima delle staffe . . . . .	83

6.10	Inviluppo della tensione principale massima delle staffe inferiori, vista dall'alto . . . . .	83
6.11	Inviluppo della massima deformazione plastica delle staffe inferiori, vista dall'alto . . . . .	84
6.12	Confronto dell'energia interna della parete frontale superiore . . . . .	85
6.13	Confronto dell'energia cinetica della parete frontale superiore . . . . .	86
6.14	Confronto dell'energia totale della parete frontale superiore . . . . .	87

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 AMET

AMET, acronimo di Applied Mechatronic Engineering Technologies, è una società di ingegneria, attiva nella progettazione e sviluppo di prodotti e processi meccanici e mecatronici, ed opera in molteplici settori tra cui quelli dell'automotive, ferroviario, aerospaziale, controlli automatici ed ECM. Fondata nel 1999 con sede principale a Torino (Italia), con il tempo è cresciuta e ad oggi vanta altre due sedi sussidiarie in Italia (Modena e Napoli), una negli Stati Uniti (Detroit), e una in Slovacchia (Kosice). L'azienda è in grado offrire un'ampia offerta in termini di analisi virtuali quali analisi strutturali e di ottimizzazione CAE (crash-test, CFD, NVH), progettazione di controlli automatici e supporto allo sviluppo prodotto (gestione dei pesi e analisi dei dati).

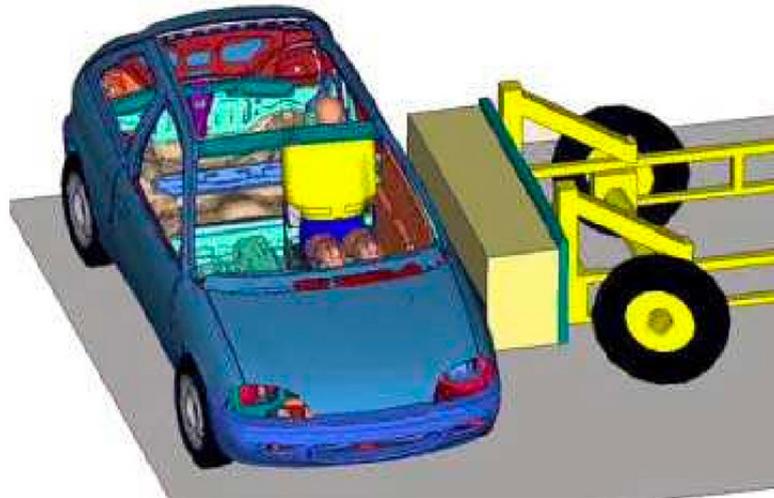


Figura 1.1: Esempio di simulazione di un urto laterale realizzata da AMET

## 1.2 Oggetto di studio e obiettivi

L'obiettivo è quello di valutare le prestazioni dei metodi numerici ALE e SPH nel risolvere il problema dell'interazione fluido-struttura che avviene durante il fenomeno del moto di sciabordio di un liquido contenuto all'interno di un serbatoio. A tal fine, entrambi i metodi verranno utilizzati per valutare il comportamento strutturale di un serbatoio automobilistico sottoposto alle sollecitazioni di sciabordio. Per entrambi i metodi, è stato prima effettuato il *set-up* del modello mediante il software commerciale HyperMesh, in seguito sono stati definiti i parametri della simulazione mediante il software commerciale HyperCrash. Entrambi i software fanno parte della suite di Altair, e ciò ha facilitato di molto la fase di *pre-processing* per via della loro diretta compatibilità. Infine la risoluzione delle equazioni è stata effettuata per mezzo di RADIOSS, un solutore adatto alla risoluzione di problemi non-lineari che prevedono

moti di grande entità, come simulazioni di crash-test, drop test, esplosioni e interazioni fluido-struttura. In figura 1.2 viene mostrato il modello FEM del serbatoio che sarà oggetto di questo studio.

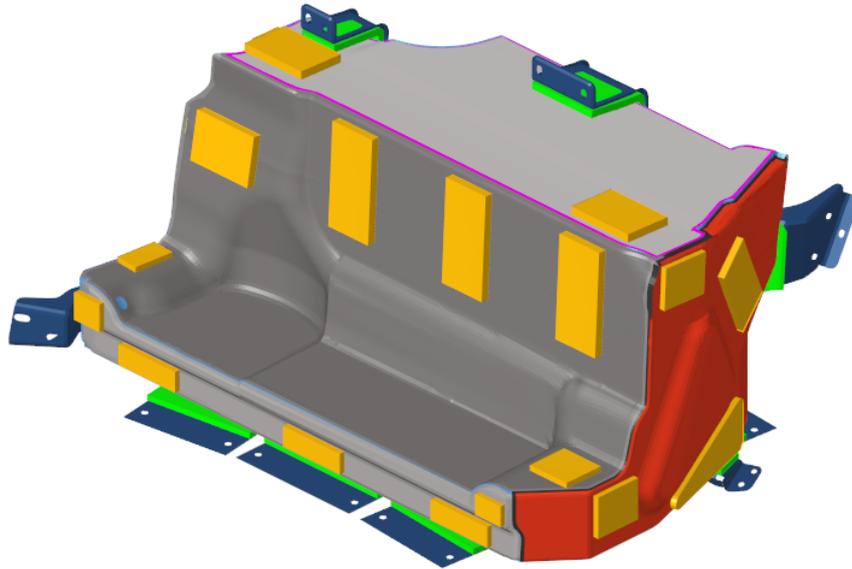


Figura 1.2: Modello FEM del serbatoio

### **1.3 Il fenomeno dello sciabordio all'interno dei serbatoi di carburante**

Lo sciabordio è il movimento della superficie libera di un liquido contenuto all'interno di un serbatoio riempito parzialmente. Tale fenomeno è tipico nei serbatoi di carburante che subiscono continue accelerazioni e decelerazioni, come i serbatoi automobilistici e aeronautici. Durante lo sciabordio, il liquido esercita una forza dinamica sul recipiente che lo contiene, ciò può causare danni al recipiente o alla struttura di supporto, con conseguente rischio di fuoriuscita del liquido dal recipiente stesso. Il moto di sciabordio è un fenomeno non lineare e casuale, dipendente da fattori quali

geometria e moto del serbatoio, livello di riempimento e proprietà del liquido.

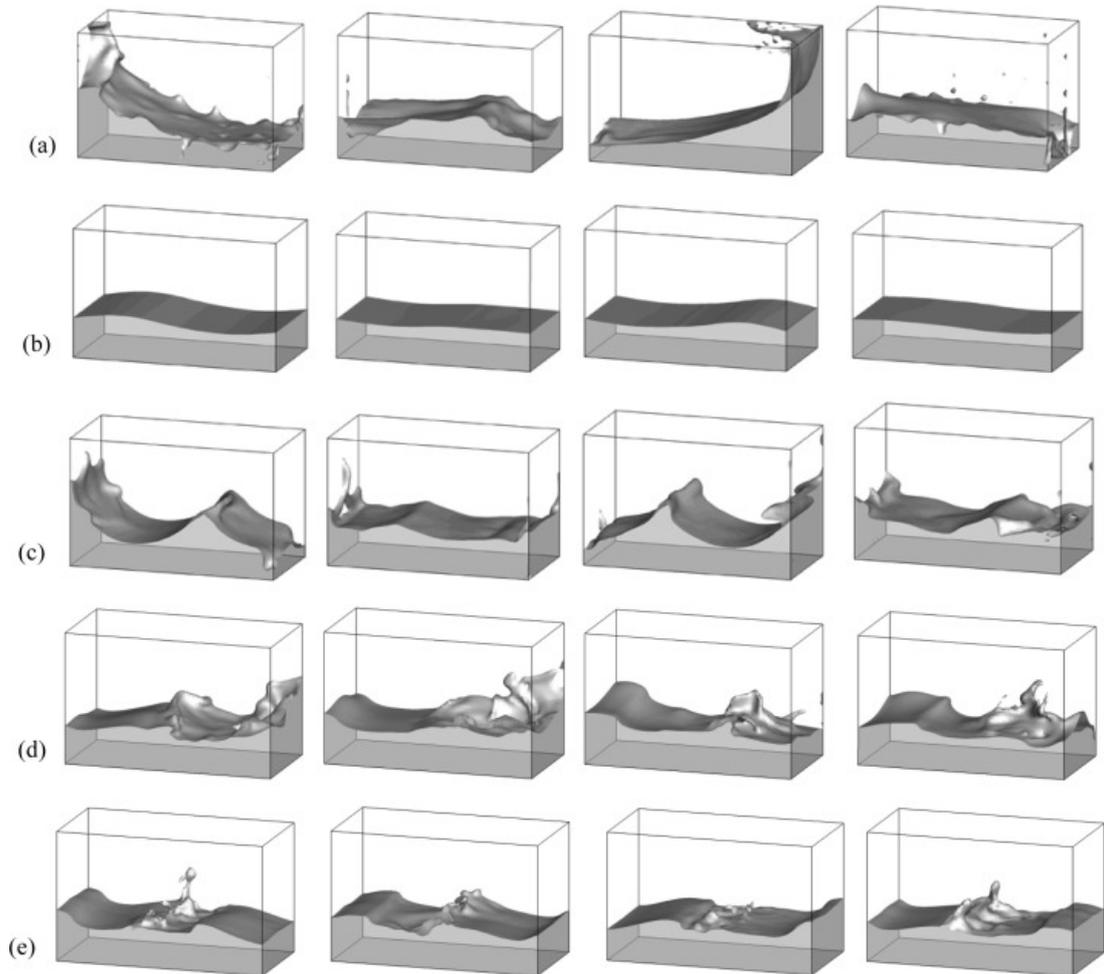


Figura 1.3: Esempio di moto di sciabordio in un recipiente a forma di parallelepipedo. ("Effect of natural frequency modes on sloshing phenomenon in a rectangular tank", Jae Hwan Jung, Hyun Sik Yoon, Chang Yeol Lee, 2015)

# Capitolo 2

## Metodo ALE

### 2.1 Introduzione al metodo ALE

Il metodo **ALE** (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), combina le migliori peculiarità delle rappresentazioni Lagrangiana ed Euleriana, ciò lo rende un algoritmo di calcolo flessibile e accurato, applicabile in diversi campi di simulazioni ingegneristiche, tra i quali, meccanica strutturale, fluidodinamica e trasferimento di calore. Il metodo **Lagrangiano** è particolarmente adatto nelle simulazioni di meccanica strutturale, in cui la mesh è aderente al materiale, per cui tale metodo è in grado di preservare le interfacce tra diversi materiali durante le simulazioni multi-materiale. Inoltre, nel metodo Lagrangiano il termine avvevativo è identicamente nullo. Di contro, tale metodo non è in grado di rappresentare elevate deformazioni dovute a taglio e vorticità poiché la mesh tende a distorcersi in maniera eccessiva, rendendo il calcolo estremamente impreciso. Il metodo **Euleriano**, invece, è adatto alle simulazioni fluidodinamiche, in cui la mesh è fissata nello spazio e il fluido si muove tra un elemento e l'altro, per cui il vantaggio principale è che la mesh non si distorce. Tuttavia, le soluzioni sono diffuse ed è difficile tracciare le interfacce tra i diversi materiali, in quanto la mesh è disaccoppiata dal materiale. I metodi Lagrangiano ed Euleriano sono, quindi, due casi particolari di rappresentazione del moto della mesh. L'idea alla base del metodo

ALE è che il moto della mesh può essere scelto arbitrariamente per ottimizzare le forme degli elementi, fornendo maggior adattabilità e precisione, mentre la mesh al livello dei bordi e delle interfacce tra i diversi domini prosegue con il materiale, al fine di tracciare in maniera precisa i bordi e le interfacce in un sistema multi-materiale. quando in uno stesso elemento sono presenti almeno due elementi, si parla allora di MMALE (Multi-Material Arbitrary Lagrangian-Eulerian). In tal caso l'algoritmo gestisce l'interfaccia che separa i diversi materiali contenuti in uno stesso elemento, in generale è ammesso un numero massimo di tre materiali diversi.

Il metodo ALE può quindi ridursi o al metodo Lagrangiano, eguagliando il movimento della mesh al movimento del materiale, o al metodo Euleriano, fissando la mesh nello spazio.

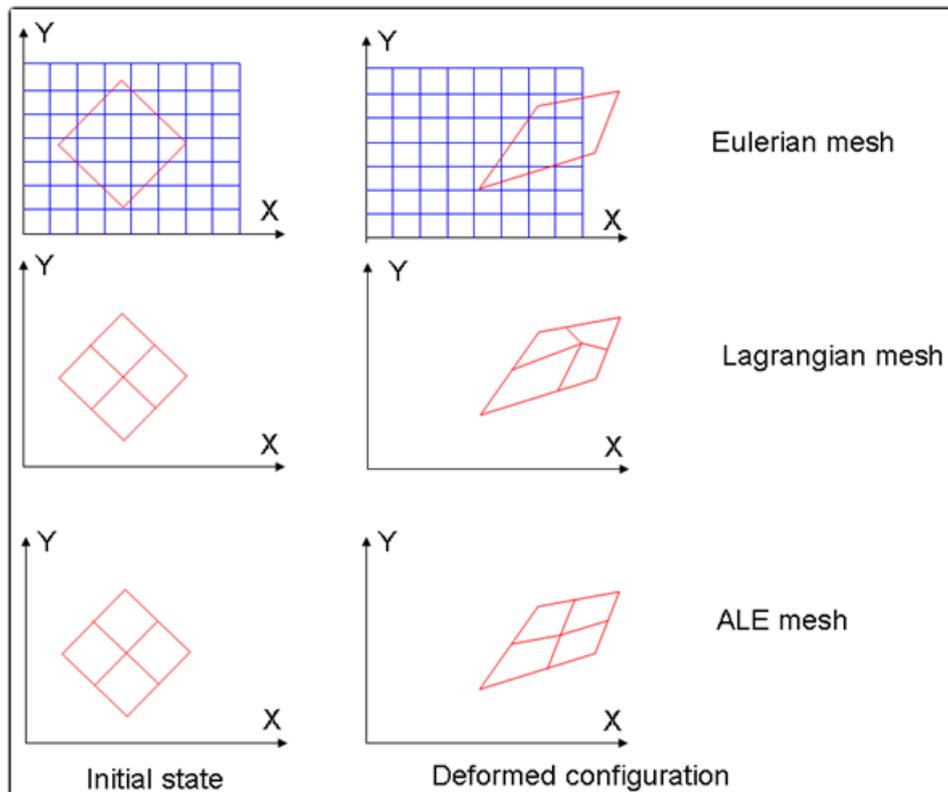


Figura 2.1: Differenze tra mesh Euleriana, Lagrangiana e ALE

Dunque, con un solo codice agli elementi finiti, sono possibili diverse simulazioni ingegneristiche.

## 2.2 Equazioni di conservazione

Il metodo ALE si basa su tre domini: la configurazione iniziale del materiale, la configurazione corrente (o deformata) del materiale, e la configurazione di riferimento, detta anche configurazione ALE. Le configurazioni iniziale e corrente insieme determinano il moto del materiale, mentre la configurazione corrente e la configurazione ALE insieme determinano il moto della mesh. Se il moto della mesh è nullo, allora la mesh viene considerata come mesh Euleriana. Negli elementi della mesh, le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia vengono integrate al centro, mentre le altre variabili vengono assegnate ai nodi. Si indica con  $\Omega^f \in R^3$  il dominio delle particelle di fluido e con  $\partial\Omega^f$  il suo bordo. Le tre equazioni di conservazione (equazioni di Navier-Stokes) per un fluido Newtoniano nel dominio  $\Omega^f$ , si possono scrivere come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} - \vec{w}) \text{grad}(\rho) = -\rho \text{div}(\vec{v}) \quad (2.2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \overline{\text{grad}}(\vec{v}) = \overline{\text{div}}(\vec{\sigma}) + \vec{f} \quad (2.2.2)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\vec{v} - \vec{w}) \overline{\text{grad}}(e) = \vec{\sigma} : \overline{\text{grad}}(\vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (2.2.3)$$

dove  $\rho$  è la densità,  $\vec{v}$  è la velocità del materiale,  $\vec{w}$  è la velocità della mesh (detta anche velocità di riferimento),  $\vec{\sigma}$  è il tensore delle tensioni di Cauchy,  $\vec{f}$  sono le forze di

volume, mentre  $e$  è l'energia interna per unità di volume. Si nota che i termini a destra dell'uguale sono espressi rispetto le coordinate del materiale nella configurazione corrente, cioè nella forma Euleriana (spaziale) classica, mentre i termini a sinistra dell'uguale sono espresse rispetto la configurazione di riferimento, cioè esprimono il moto arbitrario della mesh [5], [6] [10]. Il termine di velocità relativa  $(\vec{v} - \vec{w})$  viene chiamato **termine avvevativo**, il quale tiene conto del trasporto del materiale attraverso la mesh, ed è questo l'aspetto che rende il metodo ALE numericamnte complesso. Imponendo  $\vec{v} = \vec{w}$  (termine avvevativo nullo) si ottiene la descrizione Lagrangiana, in cui le equazioni di Navier-Stokes sono semplificate. Imponendo, invece,  $\vec{w} = 0$  si ottiene la descrizione Euleriana, in cui la configurazione di riferimento è fissa (ciò elimina il processo di rimappatura della mesh, ma non semplifica le equazioni di Navier-Stokes). Per i fluidi comprimibili, è necessaria una equazione di stato che leghi la pressione alla densità e alla energia interna.

## 2.3 Tensore delle tensioni

Il tensore delle tensioni  $\sigma_{ij}$  può essere scomposto in parte idrostatica e parte deviatorica. utilizzando la notazione degli indici di Einstein, si ha che:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (2.3.1)$$

dove  $\sigma_{kk}/3$  è la parte idrostatica, mentre  $\sigma'_{ij}$  è la parte deviatorica.  $\delta_{ij}$  è la delta di Kroneckers, la quale assume valore unitario se  $i = j$ , zero altrimenti, cioè il primo termine a secondo membro appare solo lungo le direzioni normali. Poiché la pressione  $p$  agisce lungo la normale in direzione negativa, possiamo concludere che:

$$\sigma_{kk}/3 = -p \quad (2.3.2)$$

La parte deviatorica comprende gli sforzi di taglio, e può essere definita come:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij} \quad (2.3.3)$$

dove  $\mu$  è la viscosità dinamica,  $\epsilon'_{ij}$  è il tensore di *strain rate*, definito come:

$$\epsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.4)$$

Sostituendo, si ottiene l'espressione finale per il tensore delle tensioni:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.5)$$

che in forma matriciale diventa:

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \mu(\text{grad}(\vec{v}) + \text{grad}(\vec{v})^T) \quad (2.3.6)$$

## 2.4 Condizioni al contorno

Le equazioni di Navier-Stokes 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 vengono completate da opportune condizioni al contorno. Si indica con  $\partial\Omega_1^f$  la parte del bordo a cui è assegnata una funzione alla velocità (velocità di afflusso):

$$\vec{v} = \vec{g}(t) \text{ in } \partial\Omega_1^f \quad (2.4.1)$$

Mentre, con  $\partial\Omega_2^f$  viene indicata la restante parte di bordo a cui viene assegnata una condizione di stress associata alla equazione 2.2.2:

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{h}(t) \text{ in } \partial\Omega_2^f \quad (2.4.2)$$

dove  $\vec{n}$  è il vettore normale uscente dal bordo.

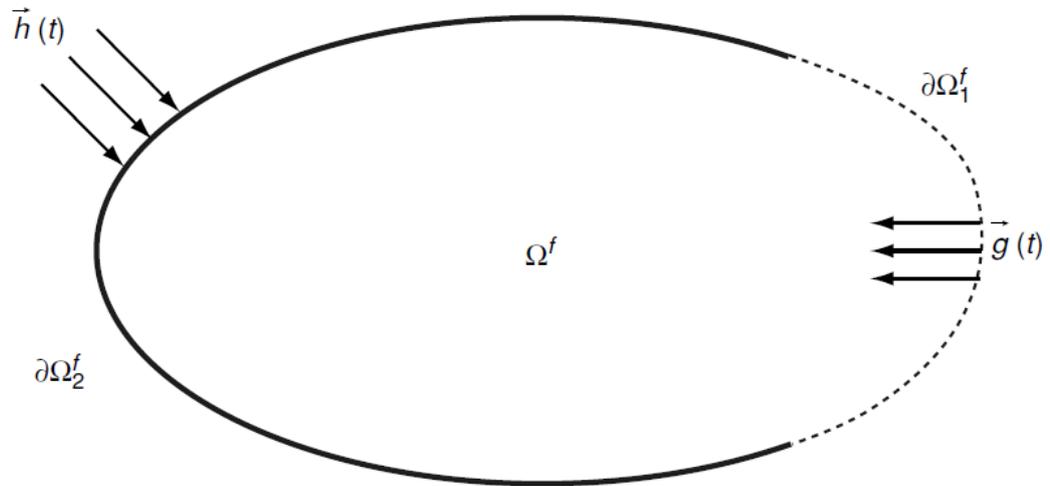


Figura 2.2: Rappresentazione del dominio del fluido

## 2.5 Soluzione delle equazioni di Navier-Stokes con il metodo ALE

Per risolvere le equazioni di Navier-Stokes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, si possono seguire due approcci. Il primo approccio consiste nel risolvere le equazioni completamente accoppiate mediante CFD<sup>1</sup>, a patto che ad ogni elemento venga associato un solo materiale. Il secondo approccio è noto come Operator Split Method, esso consiste nel suddividere il calcolo in due fasi: all'inizio vi è la fase Lagrangiana in cui viene utilizzato un metodo FEM<sup>2</sup> esplicito, in cui la mesh si muove assieme alle particelle del fluido; successivamente, segue la seconda fase in cui la mesh deformata durante la prima fase, viene ri-mappata in una mesh distorta in maniera arbitraria.

<sup>1</sup>Computational Fluid Mechanics.

<sup>2</sup>Finite Element Method

### 2.5.1 Fase Lagrangiana

La fase Lagrangiana è riferita a un problema di Stokes lineare, in cui vengono calcolate le variazioni di velocità, pressione ed energia interna per effetto delle forze interne.

In questa fase le equazioni di equilibrio sono:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div}(\bar{\sigma}) + \vec{f} \quad (2.5.1)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \bar{\sigma} : \text{grad}(\vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (2.5.2)$$

Per ottenere la densità  $\rho$ , anziché utilizzare l'equazione di continuità, è più semplice e preciso utilizzare la seguente equazione in forma integrale:

$$\rho J = \rho_0 \quad (2.5.3)$$

dove  $\rho_0$  è la densità iniziale e  $J$  è la deformazione volumetrica data dallo Jacobiano:

$$J = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.5.4)$$

Dal punto di vista della discretizzazione, le equazioni 2.5.1 e 2.5.2 vengono calcolate usando un solo punto di integrazione al fine di migliorare l'efficienza del calcolo ed evitare l'insorgere del fenomeno del *locking*<sup>3</sup>. I modi di deformazione a energia nulla (detti anche modi spuri), vengono tenuti sotto-controllo da una *hourglass viscosity*, mentre per risolvere l'onda di *shock* viene utilizzata una *shock viscosity*, contenente dei termini lineari e quadratici. Un termine di pressione viene sommato alla pressione nella equazione 2.5.2 [10]. La soluzione dell'evoluzione temporale viene affrontata con un metodo a differenze finite centrate, derivante dallo sviluppo in serie di Taylor, e

---

<sup>3</sup>Errore di approssimazione che rende l'elemento più rigido rispetto alla realtà fisica

viene utilizzato per far avanzare la posizione della mesh nel tempo utilizzando un metodo esplicito, in cui la soluzione progredisce senza alcuna interazione tra i passi temporali consecutivi. La soluzione nel tempo ha un grado di precisione del secondo ordine, ciò è garantito dal fatto che la velocità sia sfalsata rispetto allo spostamento:

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t^n u^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.5.5)$$

La variazione nel tempo della velocità dipende dalle forze nodali interne, le quali sono funzione degli stress e delle forze esterne associate alle forze di volume e alle condizioni di bordo (forze di superficie, forze di contatto, ecc.):

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n \cdot M^{-1} \cdot (F_{ext}^n + F_{int}^n) \quad (2.5.6)$$

dove,  $F_{int}$  è il vettore delle forze interne,  $F_{ext}$  è il vettore delle forze esterne e  $M$  è la matrice di massa diagonalizzata. Per ogni elemento della mesh, le forze interne vengono calcolate come segue:

$$F_{int} = \sum_{k=1}^N \int_k B^t \cdot \sigma dv \quad (2.5.7)$$

dove  $B$  è la matrice gradiente e  $N$  il numero di elementi. Essendo le differenze finite centrate un metodo esplicito, al fine di garantire la stabilità numerica è necessario che il passo temporale  $\Delta t$  sia inferiore al valore critico corrispondente al tempo in cui l'onda sonora attraversa l'elemento della mesh. Tale criterio di stabilità è noto come "condizione di Courant".

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (2.5.8)$$

dove  $\Delta x$  è la lunghezza del più piccolo elemento della mesh,  $c$  è la velocità del suono nel materiale. In un materiale solido, la velocità del suono si calcola nel seguente modo:

$$c^2 = \frac{\frac{4}{3}G + k}{\rho_0} \quad (2.5.9)$$

$$k = \rho_0 \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial P}{\partial e} \quad (2.5.10)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $G$  è il modulo elastico tangenziale,  $P(\rho, e)$  è l'equazione di stato. Nell'equazione 2.5.10, il secondo termine a destra tiene conto dell'effetto di irrigidimento dovuto all'aumento dell'energia interna quando il materiale viene compresso. Per un materiale fluido:

$$k = \rho_0 c^2 \quad (2.5.11)$$

La viscosità del fluido in genere viene trascurato nel calcolo della velocità del suono. Nei problemi di sciabordio la componente di pressione è molto maggiore rispetto la parte deviatorica del tensore delle tensioni a causa della bassa viscosità del fluido, per cui in genere la parte deviatorica viene trascurata. In seguito, viene calcolata l'interfaccia del del materiale negli elementi ALE, contenenti diversi tipi di materiali fluidi, mediante un algoritmo di *interface tracking*.

## 2.5.2 Equilibrio delle tensioni e interface tracking

Completata la fase Lagrangiana, il tensore delle tensioni, la pressione o la parte deviatorica della tensione andrebbero equilibrati, tuttavia la maggior parte delle teorie delle miscele equilibrano solo la pressione, il quale è un problema non lineare, dunque

complesso e dall'alto costo computazionale. Per non calcolare l'equilibrio delle tensioni, si assume uno *strain rate* uguale per entrambi i materiali, ciò ovviamente non è corretto nella realtà fisica. Per la maggior parte dei problemi, anche la distribuzione lineare della deformazione volumica durante la fase Lagrangiana porta a risultati non corretti. La distribuzione del volume andrebbe scalata col modulo di *bulk*<sup>4</sup> di ambedue i materiali nell'elemento durante la compressione. Ad esempio, in un elemento contenente aria e acqua, l'aria, la quale è maggiormente comprimibile, assorbirà la maggior parte della deformazione volumica. Assumendo uno strain rate o una deformazione volumica uguali scalati nella frazione di volume dell'elemento, l'acqua è costretta ad accettare la stessa entità della deformazione dell'aria, di conseguenza sarà soggetta ad elevate sollecitazioni artificiali. Il tracciamento dell'interfaccia dei materiali negli elementi ALE comprendono diversi materiali fluidi, può essere eseguito mediante il metodo VOF (Volume of Fluid) o metodo di Young<sup>5</sup>, adatto nella risoluzione di problemi non lineari di meccanica dei fluidi e dei solidi, come ad esempio lo sciabordio. Secondo questo metodo, le proprietà dei diversi materiali vengono considerate dalle rispettive frazioni di volume dell'elemento. Per un elemento multi-materiale, la frazione di volume,  $V_f$ , soddisfa la condizione:

$$V_f \leq 1 \tag{2.5.12}$$

Lo stress totale viene pesato dalla frazione di volume al fine di ottenere il campo di tensione del fluido:

---

<sup>4</sup>Definito come l'incremento di pressione necessario a causare un relativo incremento di densità, tiene conto dell'aumento di densità di un materiale con la compressione.

<sup>5</sup>Young, D.L., "Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion", Numerical Methods for Fluids Dynamics, Ed. K. W. Morton and M.J. Baines, Academic Press, New-York (1982).

$$\sigma_f = \sigma \cdot V_f \quad (2.5.13)$$

Il metodo di Young originariamente venne pensato per tracciare le interfacce in elementi contenenti due materiali per problemi bidimensionali, ma può essere esteso a problemi tridimensionali (come il problema dello sciabordio all'interno di un serbatoio), in cui il layout del materiale dipende esclusivamente dalla ripartizione del fluido nelle varie frazioni di volume negli elementi ALE. In particolare, con una linea retta, che utilizza il metodo di calcolo dell'interfaccia lineare semplice (SLIC, Simple Linear Interface Calculation) di Woodward e Collela<sup>6</sup>, viene approssimata l'interfaccia nell'elemento, come descritto nella figura 2.3.

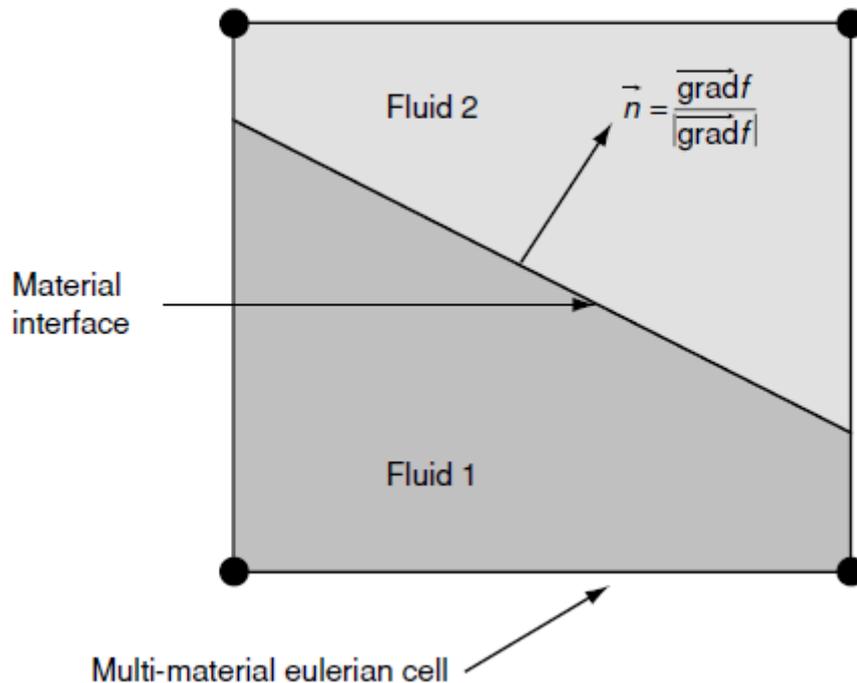


Figura 2.3: Tracciamento dell'interfaccia in un elemento del fluido mediante il metodo di Young

<sup>6</sup>Woodward, P.R., and Collela, P., "The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks", Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-86952, (1982).

Le interfacce sono inizialmente parallele alle facce degli elementi. In seguito, la frazione di volume nodale viene calcolata su ciascun nodo, in base alle frazioni di volume degli elementi che condividono lo stesso nodo. Questa ripartizione della frazione di volume nodale determina la pendenza dell'interfaccia materiale all'interno l'elemento. Il vettore normale per l'interfaccia all'interno dell'elemento è definito da:

$$\vec{n} = \frac{\vec{grad}f}{|\vec{grad}f|} \quad (2.5.14)$$

dove  $f$  è la frazione di volume nodale. La posizione dell'interfaccia viene in seguito definita, in questo modo l'elemento è diviso in due volumi corrispondenti alle frazioni volumetriche dell'elemento. La posizione dell'interfaccia viene usata per calcolare il volume del fluido che scorre attraverso i lati dell'elemento. Poiché la avvezione lungo le direzioni X,Y e Z vengono calcolate separatamente, è sufficiente considerare il flusso attraverso una sola direzione.

### 2.5.3 Fase avvettiva

La seconda fase è chiamata fase avvettita (o fase del trasporto), durante la quale viene calcolato il trasporto della massa, della quantità di moto e dell'energia attraverso il bordo degli elementi. Ciò può essere pensato come una ri-mappatura della mesh, spostata durante la fase Lagrangiana, di nuovo nella sua posizione iniziale. Le equazioni del trasporto per la fase avvettiva sono:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \vec{grad}(\phi) = 0 \quad (2.5.15)$$

$$\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0(x) \quad (2.5.16)$$

dove  $\vec{c} = \vec{v} - \vec{w}$  rappresenta il termine avvettivo. L'equazione 2.5.15 viene risolta per le variabili conservative (massa, quantità di moto ed energia) con la condizione

iniziale  $\phi_0(x)$ , la quale è la soluzione delle equazioni 2.5.1 e 2.5.2 ottenute nella fase Lagrangiana nell'istante di tempo corrente.

## 2.6 Equazioni per la struttura

Sia  $\Omega^S \in R^3$  il dominio occupato dalla struttura (che può essere ad esempio il guscio di un serbatoio o la superficie di un oggetto immerso in un fluido), e sia  $\partial\Omega^S$  il suo bordo. Si considera la formulazione FEM Lagrangiana, il moto della struttura  $\Omega^S$ , dipendente dalle coordinate del sistema di riferimento e dal tempo, si può scrivere come:

$$x_i = x_i(X, Y, Z, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.1)$$

Si scrive l'equazione della quantità di moto per la struttura:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div}(\bar{\sigma}) + \vec{f} \quad (2.6.2)$$

dove  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  è l'accelerazione  $\bar{\sigma}$  è il tensore di Cauchy,  $\rho$  è la densità,  $\vec{f}$  è la densità di forza. La soluzione della 2.6.2 soddisfa gli spostamenti imposti alla frazione di bordo  $\partial\Omega_1^S$  e le tensioni imposte alla frazione di bordo  $\partial\Omega_2^S$ :

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{D}(t) \quad \text{su } \partial\Omega_1^S \quad (2.6.3)$$

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{\tau}(t) \quad \text{su } \partial\Omega_2^S \quad (2.6.4)$$

dove  $\vec{D}(t)$  rappresenta la condizione di spostamento imposto,  $\vec{n}$  è il versore normale alla superficie  $\Omega^S$  orientato verso l'esterno,  $\vec{\tau}(t)$  rappresenta la condizione di tensione imposta.

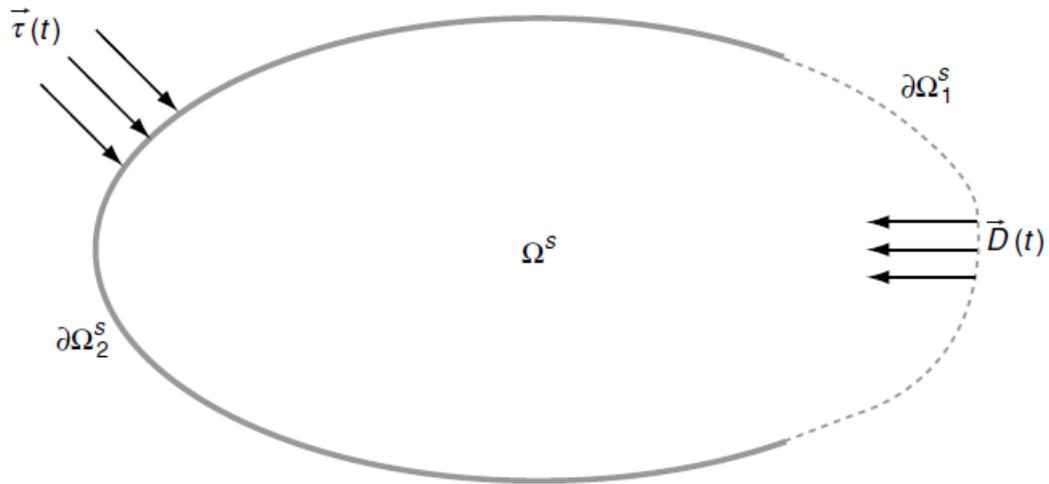


Figura 2.4: Dominio della struttura e condizioni al bordo

## 2.7 Interazione fluido-struttura

I problemi di interazione fluido-struttura riguardano il calcolo delle forze scambiate tra fluido e struttura a livello dell'interfaccia che le separa. La soluzione può essere ottenuta tramite algoritmi di contatto. Le forze scambiate tra fluido e struttura vengono imposte ai nodi del fluido e della struttura appartenenti all'interfaccia, in modo da impedire a un nodo di attraversare l'interfaccia stessa. Supponiamo che un fluido  $\Omega_f$  e una struttura  $\Omega_s$  siano in contatto, ciò vuol dire che la distanza  $d$  normale alla interfaccia comune ai due domini è nulla.

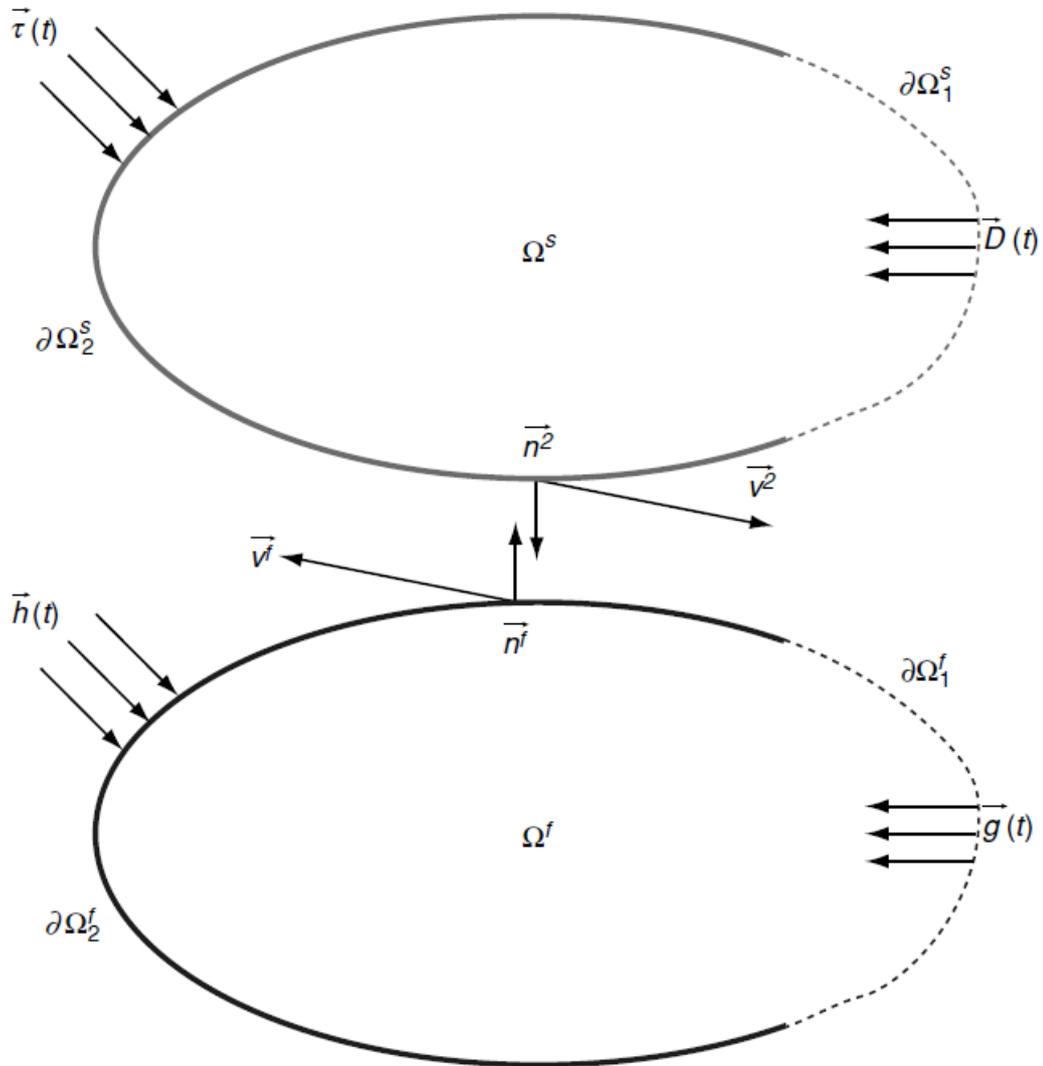


Figura 2.5: Interazione fluido struttura tra i domini  $\Omega^f$  e  $\Omega^s$

Per risolvere il problema dell'interazione fluido struttura, vengono aggiunte altre due ulteriori condizioni di bordo applicate sulla interfaccia  $\partial\Omega^C$  comune  $\partial\Omega^f_2$  e  $\partial\Omega^s_2$ . La prima condizione quella di tensione, considerando il bilancio della quantità di moto attraverso l'interfaccia fluido-struttura, poiché l'interfaccia ha massa nulla, allora la somma delle tensioni scambiate tra fluido e struttura è nulla (terzo principio della

dinamica). Se consideriamo un modello senza attrito, allora anche le tensioni tangenziali sono nulle, in questo modo la condizione sulle tensioni riguarda solo la tensione normale:

$$\bar{\sigma}^S \bar{n}^S + \bar{\sigma}^f \bar{n}^f = 0 \text{ su } \partial\Omega_2^C \quad (2.7.1)$$

dove  $\bar{\sigma}^S$  e  $\bar{\sigma}^f$  rappresentano il campo di tensioni di  $\Omega^S$  e  $\Omega^f$  rispettivamente,  $\bar{n}^S$  e  $\bar{n}^f$  sono le normali in corrispondenza del punto di contatto per  $\Omega^S$  e  $\Omega^f$  rispettivamente.

L'altra condizione è la condizione di impenetrabilità per i domini  $\Omega^S$  e  $\Omega^f$ , essa può essere espressa come:

$$\Omega^S \cap \Omega^f = 0 \text{ su } \partial\Omega_2^C \quad (2.7.2)$$

Tale condizione può essere espressa anche in termini del parametro *penetration rate*  $\dot{d}$ :

$$\dot{d} = \vec{v}^S \cdot \bar{n}^S + \vec{v}^f \cdot \bar{n}^f = (\vec{v}^S - \vec{v}^f) \cdot \bar{n}^S \leq 0 \text{ su } \partial\Omega_2^C \quad (2.7.3)$$

dove  $\vec{v}^S$  e  $\vec{v}^f$  sono le velocità di struttura e fluido rispettivamente nel punto di contatto. La condizione di impenetrabilità esprime il fatto che il fluido e la struttura devono essere a contatto ( $\dot{d} = 0$ ) o separate ( $\dot{d} < 0$ ). L'adottare un parametro di *penetration rate* potrebbe sembrare inconsistente dal momento in cui si sta imponendo una condizione di impenetrabilità, tuttavia in molti metodi numerici valori piccoli di  $\dot{d} < 0$  sono ammessi.

### 2.7.1 Algoritmi di contatto

Negli algoritmi di contatto, una superficie viene scelta come superficie *slave*, l'altra come superficie *master*. I nodi appartenenti a queste due superfici prendono il nome di nodi *slave* e *master* rispettivamente. In particolare, nei problemi di interazione fluido struttura, i nodi della superficie del liquido sono i nodi *slave*, mentre quelli della superficie della struttura sono i nodi *master*. Il fluido viene discretizzato con una mesh ALE o Lagrangiana, mentre la struttura con una mesh Lagrangiana. Vi sono due differenti approcci per risolvere il problema del contatto. Il primo approccio consiste nel realizzare un contatto cinematico, imponendo ai nodi di fluido e struttura la stessa velocità; il contatto cinematico conserva la quantità di moto totale, ma non l'energia totale. Il secondo approccio utilizza il metodo *penalty*. Tale metodo impone una forza resistente ai nodi *slave*, proporzionale alla loro penetrazione attraverso gli elementi *master*, tale forza viene applicata sia a nodi *slave* che *master* in direzioni opposte in modo da soddisfare l'equilibrio. La forza resistente applicata ai nodi *slave* viene calcolata come:

$$F_s = -k \cdot d \quad (2.7.4)$$

La forza applicata ai nodi *master* vengono scalate dalle funzioni di forma, perciò la forza sul singolo nodo dell'elemento *master* si ottiene nel seguente modo:

$$F_m^i = N_i \cdot k \cdot d \quad (2.7.5)$$

dove  $N_i$  è la funzione di forma al nodo  $i$ -esimo ( $i = 1, 2$  in 2D, e  $i = 1, 2, 3, 4$  in 3D) dell'elemento *master* in prossimità dei nodi *slave*,  $d$  è il vettore di penetrazione.

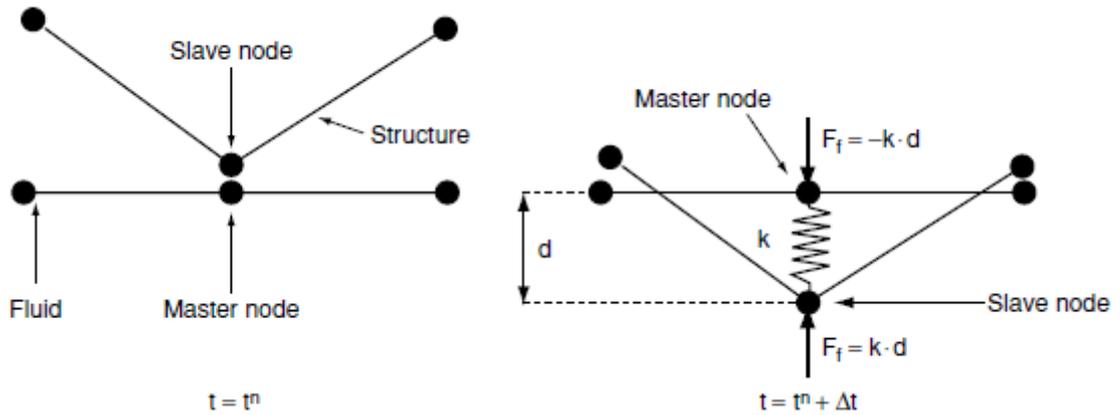


Figura 2.6: Rappresentazione del metodo penalty nel metodo ALE

Nel caso in cui un nodo *slave* coincida esattamente con un nodo *master*, ad esempio il nodo 2, si ha che:

$$F_m^2 = k \cdot d \text{ e } F_m^1 = F_m^3 = F_m^4 = 0 \quad (2.7.6)$$

Il coefficiente  $k$  rappresenta la rigidezza di una molla, infatti tale metodo lo si può intendere il come aver piazzato una molla tra tutti i nodi che penetrano la superficie di contatto. Esso viene definito dalla seguente relazione:

$$k = p_f \cdot \frac{KA^2}{V} \quad (2.7.7)$$

dove  $K$  è il modulo di bulk del materiale *master*,  $V$  il volume dell'elemento *master*,  $A$  l'area del segmento *master* e  $p_f$  è il fattore di scala della rigidezza dell'interfaccia che soddisfa la condizione:  $0 \leq p_f \leq 1$ .

## 2.8 Algoritmi di mesh-update

Il metodo ALE richiede la formulazione di una procedura di *mesh-update*, la quale assegni ai nodi della mesh le velocità e gli spostamenti ad ogni fase del calcolo, la quale può essere scandita o da step temporali o da step di carico. Vi sono due due possibili strategie di *remeshing*:

- *mesh regularization*: la quale mantiene la mesh il più regolare possibile evitando le eccessive distorsioni e l'intreccio della mesh stessa durante il calcolo. Questo approccio riduce l'errore numerico dovuto alla distorsione della mesh;
- *mesh adaptation*: la quale può essere utilizzata per concentrare gli elementi nelle zone con elevanti gradienti al fine di ridurre il costo computazionale del calcolo (il numero totale degli elementi e la loro connettività rimangono invariati durante il calcolo). In tal caso è richiesto in input un'indicazione dell'errore che può essere commesso, in questo modo la mesh viene modificata in modo tale che la distribuzione dell'errore sia equa su tutto il dominio. [5]

# Capitolo 3

## Metodo SPH

### 3.1 Introduzione al metodo SPH

Il metodo **SPH** (Smoothed Particle Hydrodynamics) è un metodo numerico utilizzato per la discretizzazione del continuo. La particolarità di tale metodo sta nel fatto che il continuo non viene discretizzato mediante una mesh, ma tramite un insieme di numerose particelle libere di muoversi e legate tra loro da forze interne. Le particelle sono dotate di proprietà di massa e di rigidità, il cui moto viene descritto tramite l'approccio Lagrangiano. Tale metodo trova largo utilizzo in campo fluidodinamico o nelle analisi di impatti a grande velocità, ove i classici metodi FEM falliscono a causa delle elevate distorsioni della mesh. Il metodo SPH è vantaggioso in quanto:

- il metodo è intrinsecamente conservativo per la massa;
- le superfici libere non richiedono particolari condizioni;
- è possibile tener conto del cambiamento di fase del fluido;

D'altra parte il metodo SPH ha dei limiti, quali:

- convergenza lenta;
- approssimazione delle condizioni di bordo;

- incapacità di modellare fenomeni turbolenti;
- elevato costo computazionale;

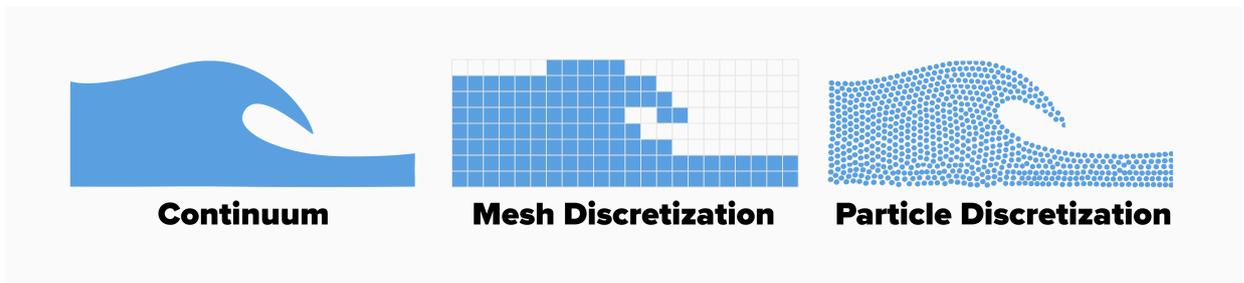


Figura 3.1: Differenza tra mesh e particelle nella discretizzazione del continuo (<https://www.dive-solutions.de/articles/sph-basics>)

## 3.2 Equazioni di conservazione e metodo di collocazione

Usando il modello di Liu et al.<sup>1</sup>, i due passaggi per rappresentare una funzione continua sono la definizione di una interpolazione integrale e la sua approssimazione tramite il **metodo kernel**. L'interpolazione viene definita come:

$$u(x_i) = \int u(y) \cdot \delta(x_i - y) dy \quad (3.2.1)$$

dove la funzione di Dirac soddisfa:

$$\delta(x_i - y) = 1 \quad x_i = y$$

$$\delta(x_i - y) = 0 \quad x_i \neq y$$

L'approssimazione dell'integrale 3.2.1 si esegue mediante la funzione kernel, la quale approssima la funzione di Dirac tramite la grandezza chiamata *smoothing length*,

<sup>1</sup>Liu M. B. and Liu G. R., "Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments" (2010), Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 25–76.

$h$ , ossia la variabile spazio-tempo dipendente che tiene conto della regione di influenza delle particelle vicine. Il supporto della funzione Kernel, o *Weigth Function*, viene definito come:

$$W(d, h) = \frac{1}{h^\alpha} \cdot \theta\left(\frac{d}{h}\right) \quad (3.2.2)$$

L'interpolazione SPH viene fornita dalla seguente equazione:

$$u(x_i) = \sum_j \omega_j \cdot u_j \cdot W(x - x'_j, h) \quad (3.2.3)$$

dove  $\omega_j = \frac{m_j}{\rho_j}$  è il volume delle particelle. La somma ottenuta dall'equazione 3.2.3 comprende le particelle all'interno del kernel, come descritto in figura 3.2 :

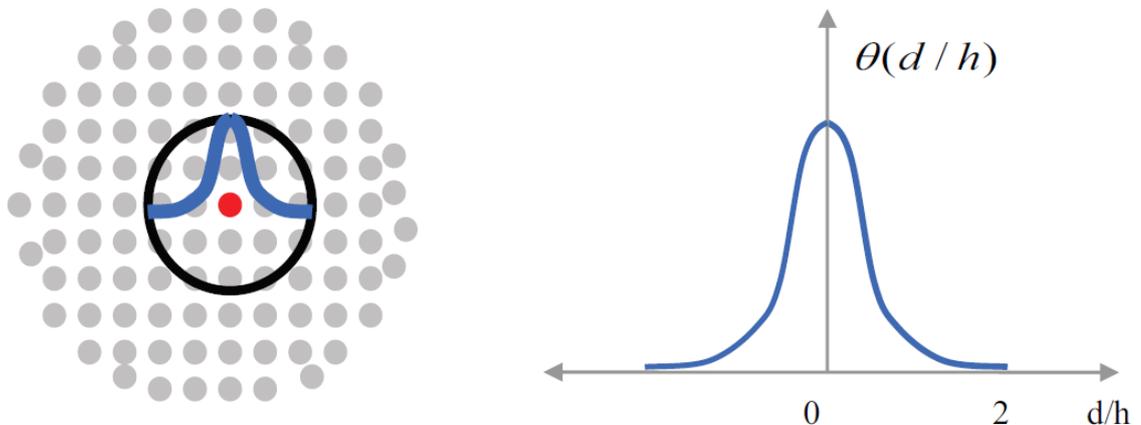


Figura 3.2: Spaziatura delle particelle e funzione kernel

Nei metodi FEM, per ottenere un set di equazioni discrete si utilizza il metodo di Galerkin in forma debole, integrando sulla mesh di volume. Nel metodo SPH, invece, non è presente la mesh, per cui si utilizza il metodo di collocazione. Con il metodo di collocazione le equazioni discrete vengono ottenute imponendo e risolvendo localmente nell'intorno definito dalla funzione  $W(d, h)$  le equazioni di conservazione

di massa, di quantità di moto e di energia per ogni particella:

$$\frac{d}{dt}\rho_i = -\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_j - v_i) A_{ij} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{d}{dt}v_i = \sum_j m_j \left( \frac{\sigma_i}{\rho_i^2} A_{ij} - \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} A_{ij} \right) \quad (3.2.5)$$

$$\frac{d}{dt}e_i = \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j (v_j - v_i) A_{ij} \quad (3.2.6)$$

dove  $m_i$ ,  $\rho_i$ ,  $v_i$ ,  $e_i$ , rappresentano rispettivamente massa, densità, velocità ed energia interna delle particelle, mentre  $P_i$  e  $\sigma_i$  rappresentano la pressione e il tensore delle tensioni di Cauchy.  $A_{ij}$  è il gradiente della funzione Kernel, definito dalla seguente equazione:

$$A_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} W(x - x_j, h) \quad (3.2.7)$$

### 3.3 Distribuzione delle particelle

È stato dimostrato che la convergenza e la stabilità del metodo SPH dipende dalla distribuzione delle particelle nel dominio. Esse possono essere organizzate in modo tale da formare delle celle con distribuzione cubica a facce centrate o a cubo semplice.

#### 3.3.1 Cubico a facce centrate

Il cubico a facce centrate rappresenta il migliore impacchettamento possibile. Le particelle sono organizzate in gruppi di 14 e sono posizionate ai vertici e al centro delle facce del cubo. Ogni particella è adiacente ad altre 12, e la massa della singola particella è pari a:

$$m_p = \frac{\rho V}{n} \quad (3.3.1)$$

dove  $V$  è il volume totale riempito dalle particelle ed  $n$  il numero delle particelle distribuite nel volume.

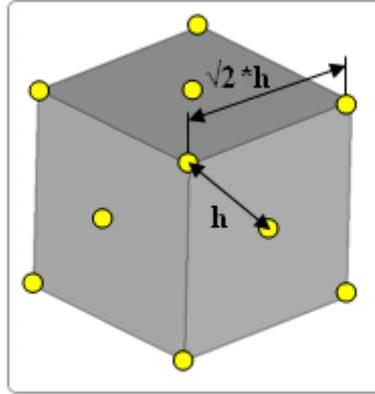


Figura 3.3: Distribuzione cubo facce centrate

Per questo tipo di distribuzione, conviene assegnare la *smoothing length*  $h$  pari alla distanza più piccola tra le particelle, ossia  $h_0$ . Si può usare una *smoothing length* inferiore a  $h_0$  solo nel caso in cui il materiale non presenta un comportamento a trazione. Se, invece, il materiale prevede un comportamento a trazione, allora si può imporre una *smoothing length* maggiore di  $h_0$  al fine di aumentare la stabilità del calcolo, ma con conseguente aumento del costo computazionale. In generale, all'aumentare di  $h$ , aumentano precisione e costo computazionale della simulazione.

Nella seguente tabella viene riportato il numero delle particelle adiacenti al variare della *smoothing length*  $h$ .

Distanza $d$	N. di particelle a distanza $d$	N. di particelle contenute nella distanza $d$
$h_0$	12	12
$\sqrt{2}h_0$	6	18
$\sqrt{3}h_0$	24	42
$2h_0$	12	54
$\sqrt{5}h_0$	24	78

Tabella 3.1: Numero di particelle adiacenti in una distribuzione a cubo a facce centrate

Una rete di cubi a facce centrate realizza una distribuzione esagonale compatta, come mostrato nelle figure 3.4 e 3.5.

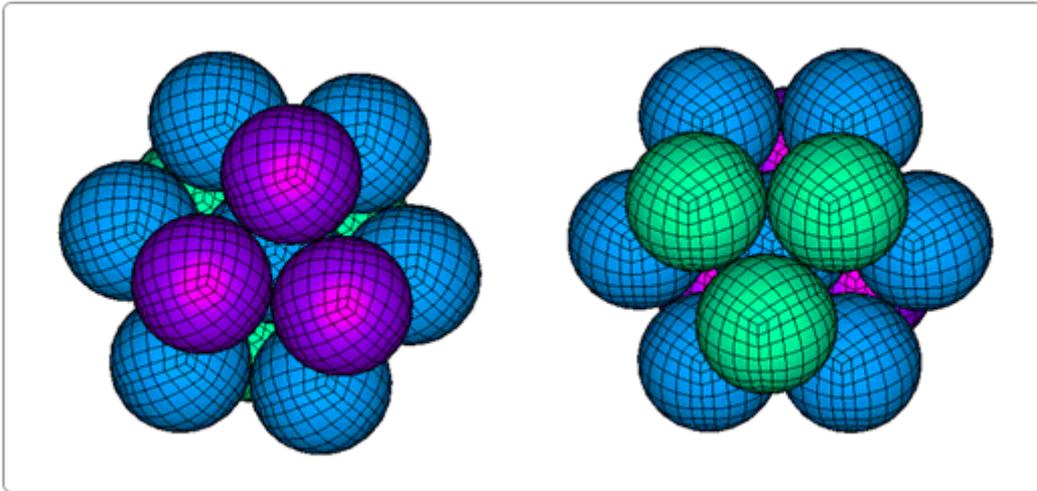


Figura 3.4: Distribuzione esagonale compatta

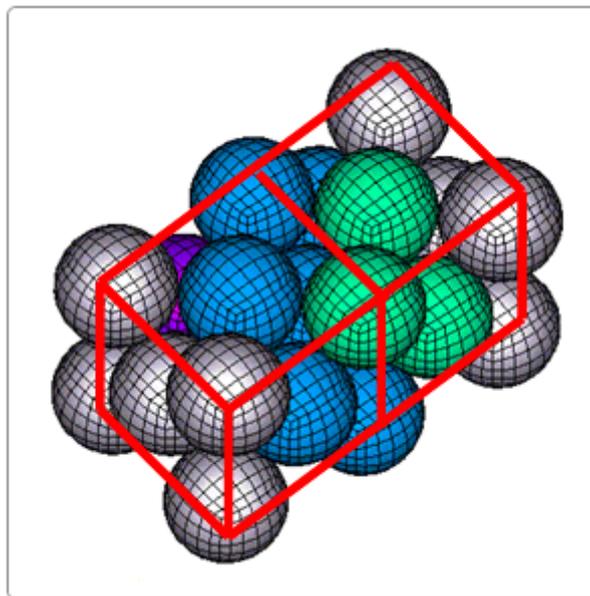


Figura 3.5: Vista in prospettiva della rete cubica a facce centrate

### 3.3.2 Cubo Semplice

Le particelle si collocano ai vertici di un cubo la cui dimensione è pari a  $c$ . La massa della singola particella  $m_p$  è legata alla densità  $\rho$  e alla lunghezza  $c$  come espresso dalla seguente equazione:

$$m_p = \rho c^3 \tag{3.3.2}$$

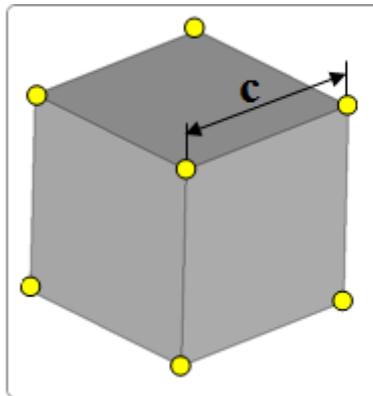


Figura 3.6: Distribuzione a cubo semplice

Distanza $d$	N. di particelle a distanza $d$	N. di particelle contenute nella distanza $d$
$c$	6	6
$\sqrt{2}c$	12	18
$\sqrt{3}c$	8	26
$2c$	6	32
$\sqrt{5}c$	24	56
$\sqrt{6}c$	24	80
$3c$	6	98

Tabella 3.2: Numero di particelle adiacenti in una distribuzione a cubo semplice

In questo caso, per risolvere i problemi di instabilità tensionale, è necessaria una *smoothing length*  $h$  maggiore rispetto a quella richiesta nell'esagonale compatto o nel cubo a facce centrate. La maggior *smoothing length* richiede un maggior costo computazionale, poiché aumenta il numero delle particelle adiacenti alla singola particella.

## 3.4 Condizioni al contorno

La gestione delle condizioni di bordo per il metodo SPH è un aspetto complesso. La presenza di una parete solida causa il troncamento del dominio delle particelle di fluido (cioè il supporto della funzione kernel) in prossimità del bordo. Ciò porta ad errori di approssimazione che influenzano l'accuratezza del calcolo numerico. Nel metodo SPH le condizioni di bordo sono dette "dinamiche" e prevedono la presenza di particelle fittizie (*dummy particles*) fissate al bordo, le quali vengono trattate come particelle di fluido, con la differenza che a queste viene assegnata la velocità della struttura. Questo metodo è conveniente, ma ha il difetto di non prevedere con precisione gli sforzi tangenziali e il gradiente di pressione. Una modifica a questo metodo è quello di Adami et.al.<sup>2</sup> in cui alle particelle del bordo vengono assegnati dei valori che tengono in considerazione le proprietà del fluido, come il campo di pressione. All'istante iniziale, le particelle di bordo hanno una loro distribuzione ben definita, e negli istanti successivi mantengono invariata la loro posizione relativa. In questo modo è possibile gestire bordi complessi con una relativa stabilità dei risultati. Il metodo utilizza quattro file di particelle che fungono da bordo della struttura, al fine di evitare l'errore numerico causato dal troncamento del dominio: il supporto del dominio delle particelle di fluido comprende le particelle di fluido e le particelle del bordo.

---

<sup>2</sup>Adami S., Hu XY, Adams NA. "A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics." (2012) J Comput Phys; 705(231): 7-7075.

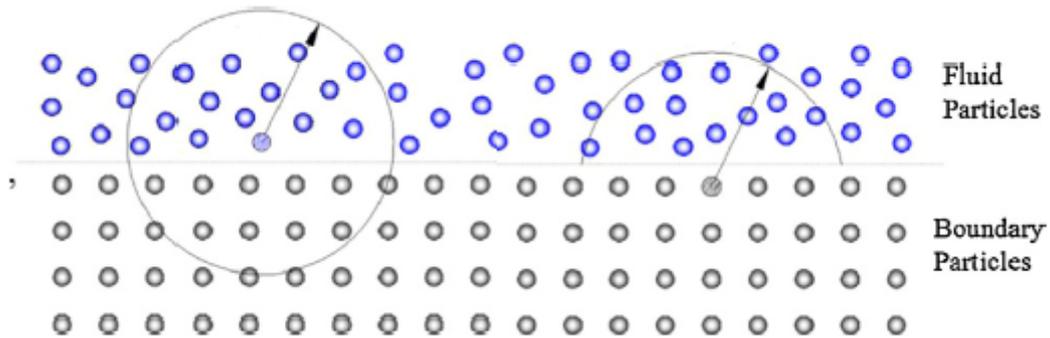


Figura 3.7: Distribuzione delle particelle al bordo

Le grandezze fisiche che caratterizzano le particelle di fluido, come densità e velocità, vengono ottenute risolvendo le equazioni 3.2.4 e 3.2.5. La densità delle particelle del bordo vengono ottenute risolvendo l'equazione di stato, mentre la pressione viene ottenuta mediante interpolazione dalle particelle del fluido adiacenti. La velocità delle particelle fittizie viene direttamente interpolata dalla velocità assegnata alle pareti del serbatoio.

### 3.5 Contatto Fluido-Struttura

Come già visto per il metodo ALE al paragrafo 2.7.1, anche nel metodo SPH l'algoritmo di contatto si basa sul metodo *penalty*, in cui la mesh Lagrangiana delle pareti è la superficie *master*, mentre gli *slave*, in questo, caso sono le particelle del fluido. Analogamente, la forza resistente applicata ai nodi *slave* è proporzionale a quanto questi penetrano nella superficie master, dove la costante di proporzionalità  $k$  rappresenta la rigidità del contatto:

$$F = -k \cdot d \quad (3.5.1)$$

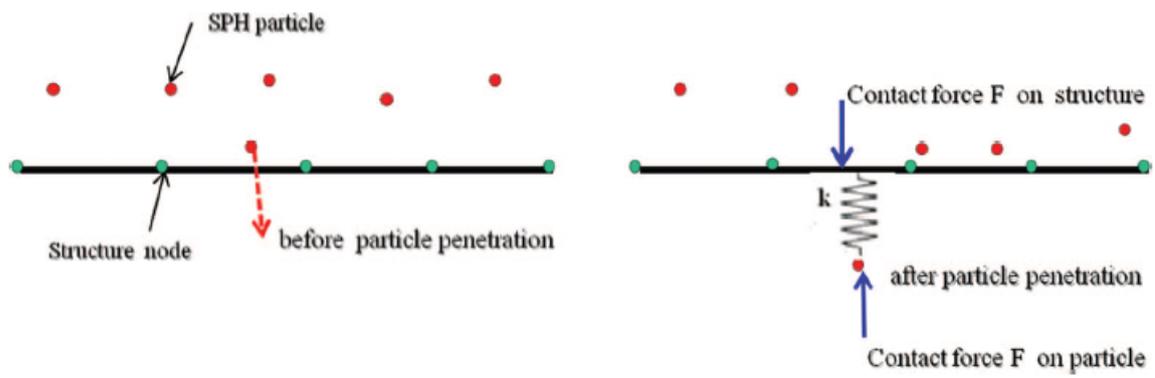


Figura 3.8: Rappresentazione del metodo penalty nel metodo SPH

# Capitolo 4

## Simulazione del serbatoio carburante con metodo ALE

### 4.1 RADIOSS

RADIOSS è un solutore numerico che risolve calcoli espliciti non lineari, ampiamente utilizzato in simulazioni strutturali e fluidodinamiche che coinvolgono sistemi con comportamento e caratteristiche dei materiali non lineari, e che prevedono ampie deformazioni geometriche e del materiale per effetto di carichi dinamici o quasi-statici.

#### 4.1.1 Elementi SHELL (/PROP/TYPE1)

In RADIOSS, gli elementi SHELL sono definiti come elementi bi-dimensionali a 3 o 4 nodi, la cui geometria è definita da una superficie curva media, il cui spessore  $h$  è molto minore rispetto le altre due dimensioni. Questi elementi si basano sulla teoria di Mindlin, per cui ammettono le deformazioni flessionale, membranale e di taglio, mentre la tensione normale lungo lo spessore è sempre nulla.

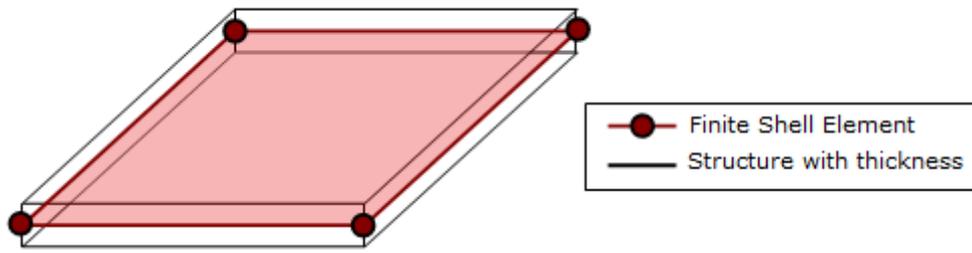


Figura 4.1: Elemento Shell

A differenza di quello che accade in un elemento di Kirchhoff (in cui non viene considerato il contributo del taglio), secondo il modello di Mindlin, le sezioni normali al piano medio non rimangono ortogonali dopo l'applicazione del carico, rendendo queste ultime più precise.

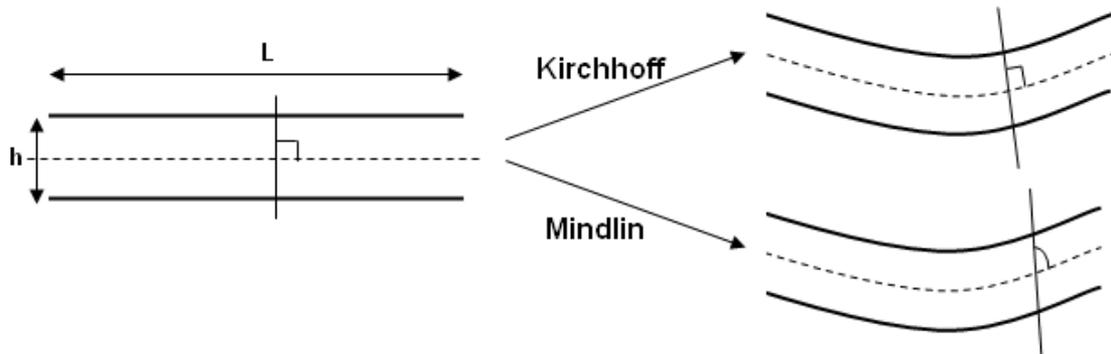


Figura 4.2: Differenza tra una SHELL di Kirchhoff e una SHELL di Mindlin

Nel modello realizzato per lo studio del serbatoio, verranno utilizzate delle SHELL con formulazione QEPH, ossia elementi sotto-integrati con un solo punto di integrazione sulla superficie, in grado di tenere sotto controllo l'errore energetico di *hourglass*<sup>1</sup>. Gli elementi 2D con questa formulazione sono il miglior compromesso tra precisione e

<sup>1</sup>E' un errore energetico legato alla presenza di modi spuri, ossia deformazioni ad energia nulla, che possono accadere in elementi sotto-integrati.

costo computazionale, per questo motivo sono ampiamente utilizzati per simulazioni di *crash*.

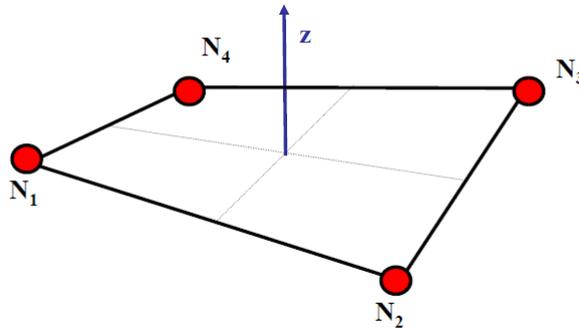


Figura 4.3: Elemento SHELL QEPH sotto-integrato

In una SHELL con comportamento elastico, la sollecitazione normale varia linearmente lungo lo spessore, mentre l'energia interna viene ricavata in maniera analitica mediante integrazione. In caso di una SHELL con comportamento plastico, la distribuzione delle tensioni diventa non-lineare e viene determinata calcolandone il valore in dei punti di integrazione aggiuntivi, mentre la stima dell'energia interna dipende dal numero dei punti di integrazione.

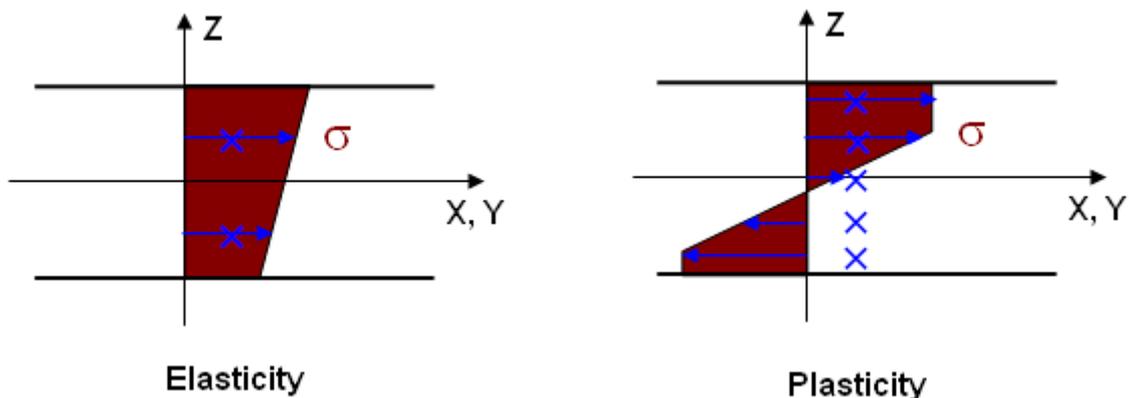


Figura 4.4: Distribuzione della tensione normale in una SHELL nei casi di elasticità e plasticità

### 4.1.2 Elementi SOLID (/PROP/TYPE14)

In RADIOSS gli elementi SOLID sono elementi tri-dimensionali la cui geometria viene definita dalla posizione dei nodi. In particolare, nel modello realizzato per lo studio del serbatoio, verranno utilizzati due tipi di elementi SOLID:

- elementi **Linear Tetrahedron** (o TETRA), costituiti da 4 facce e 4 nodi, i quali risultano i più convenienti in termini di costo computazionale in caso, per via del basso numero di punti di integrazione e dell'ampio *time step*:

$$\Delta t = \frac{L}{c} \quad (4.1.1)$$

dove  $c$  è la velocità del suono nel mezzo materiale e  $L = a\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816a$  è la grandezza caratteristica dell'elemento TETRA, essendo  $a$  la misura del segmento dell'elemento TETRA che separa due nodi. I TETRA sono particolarmente utili nel caso si debba discretizzare un volume di geometria complessa, si possono usare elementi sott-integrati per ridurre il costo computazionale, ma lo svantaggio della sotto-integrazione è l'insorgere dello *shear locking* in caso di grandi deformazioni.

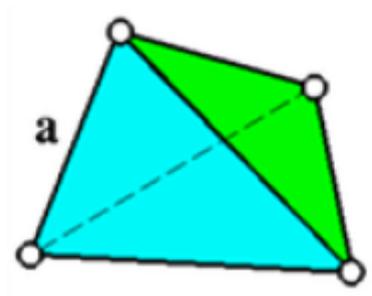


Figura 4.5: Elemento SOLID Linear Tetrahedron

- elementi **Linear Hexahedron** (o HEXA), costituiti da 6 facce e 8 nodi. La possibilità di sotto-integrazione e il grande *time step* li rende convenienti dal punto di vista del costo computazionale. Il *time step* viene calcolato mediante la 4.1.1, in questo caso  $L = \frac{Volume}{largest\ surface\ area}$ . Gli HEXA gestiscono meglio le grandi deformazioni rispetto ai TETRA, ma hanno lo svantaggio di non riuscire a discretizzare volumi dalla geometria complessa.

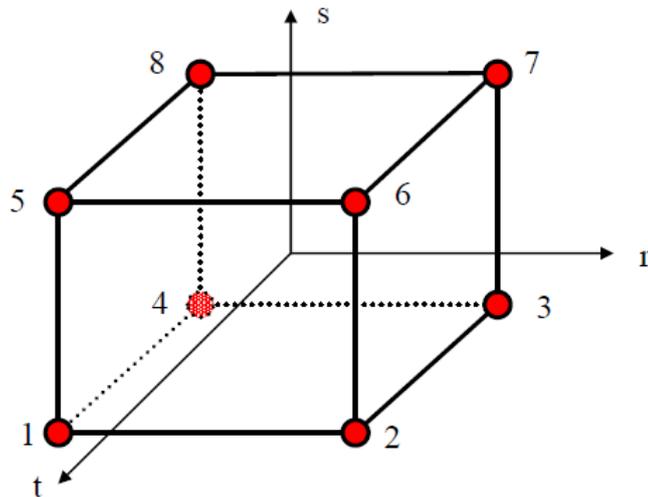


Figura 4.6: Elemento SOLID Linear Hexaedron

In conclusione, quando la geometria è semplice conviene usare gli HEXA, altrimenti, bisogna ricorrere ai TETRA.

### 4.1.3 Time Step

Per risolvere il calcolo esplicito, RADIOSS esegue dei cicli di simulazione scanditi da un determinato passo temporale, o *time step*. Minore è il *time step*, maggiore sarà la lunghezza della simulazione. RADIOSS utilizza il metodo di integrazione diretta, derivante dallo schema di integrazione temporale di Newmark. Tale metodo risolve

le equazioni *step-by-step* mediante un passo temporale  $\Delta t$  numericamente stabile. La soluzione discreta rimane stabile se il *time step* rispetta la condizione di Courant:

$$\Delta t = \frac{l_c}{c} \quad (4.1.2)$$

dove  $l_c$  è la grandezza caratteristica dell'elemento finito, e  $c$  la velocità del suono nel mezzo materiale.

## 4.2 Set-up del modello ALE

L'obiettivo è quello di analizzare il comportamento strutturale del serbatoio carburante soggetto a sciabordio durante uno scenario di urto frontale. Nella pratica, la prova sperimentale si esegue installando il serbatoio su di un simulacro (ad esempio un carrello) che sostituisce il veicolo, al quale viene imposta un'accelerazione. Il liquido inserito all'interno del serbatoio durante la prova è acqua. Il modello numerico simulerà proprio lo scenario della prova sperimentale, in cui il serbatoio sarà riempito per il 75% d'acqua, mentre il restante 25% di aria. In figura 4.7 viene mostrato il modello FEM del serbatoio di carburante nella sua interezza. Esso è costituito dai seguenti sottosistemi:

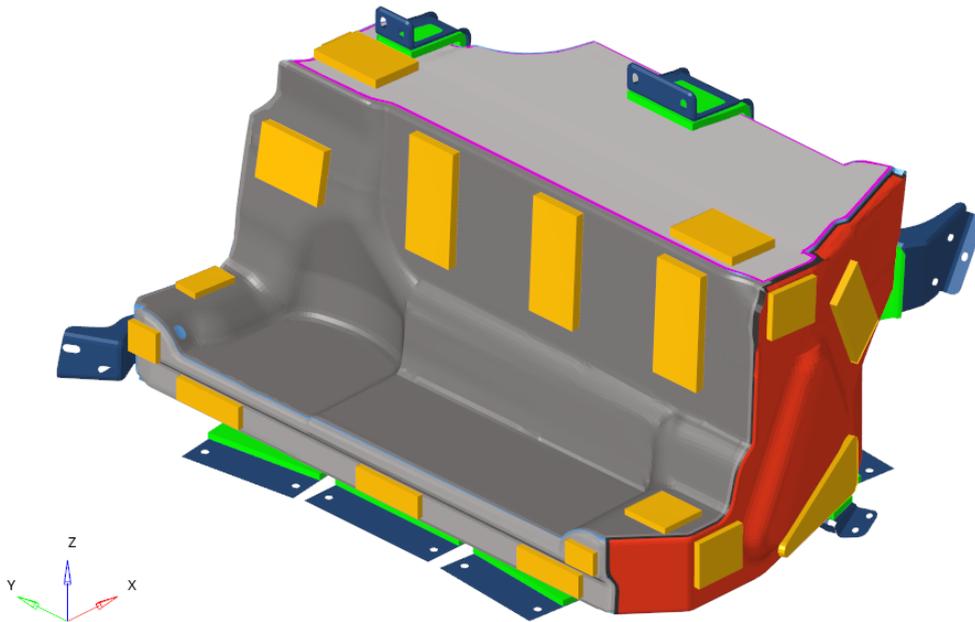


Figura 4.7: Modello FEM completo del serbatoio di carburante

Il modello è costituito dai seguenti sottosistemi:

- guscio del serbatoio;
- staffe;
- tamponi.
- fluido

Di seguito viene riportato la metodologia con la quale è stato realizzato il set-up.

#### 4.2.1 Guscio del serbatoio

Il guscio serbatoio è costituito da 7 parti (figura 4.8):

- parete superiore;
- parete laterale destra;
- parete frontale superiore;
- parete frontale inferiore;
- parete inferiore;
- parete laterale sinistra;
- parete posteriore;

Tutte le parti sopraelencate sono realizzate in alluminio e hanno uno spessore di 1.50 mm. Le diverse pareti del serbatoio non sono contigue tra loro, ma sono connesse mediante delle saldature al livello dei sormonti, per cui in prossimità del perimetro di ogni parete è presente una zona termicamente alterata (Heat Affected Zone o semplicemente HAZ), come mostrato in figura 4.9. La zona termicamente alterata rappresenta una zona di infragilimento del serbatoio, in cui il materiale è degradato e, di conseguenza, con proprietà meccaniche peggiori. Questo aspetto verrà approfondito al paragrafo 4.2.5. Per modellare correttamente i sormonti, le superfici mediane degli elementi SHELL appartenenti a due diverse pareti, sono separati da una distanza pari al semi-spessore della parete (0.75 mm), come mostrato in figura 4.10.

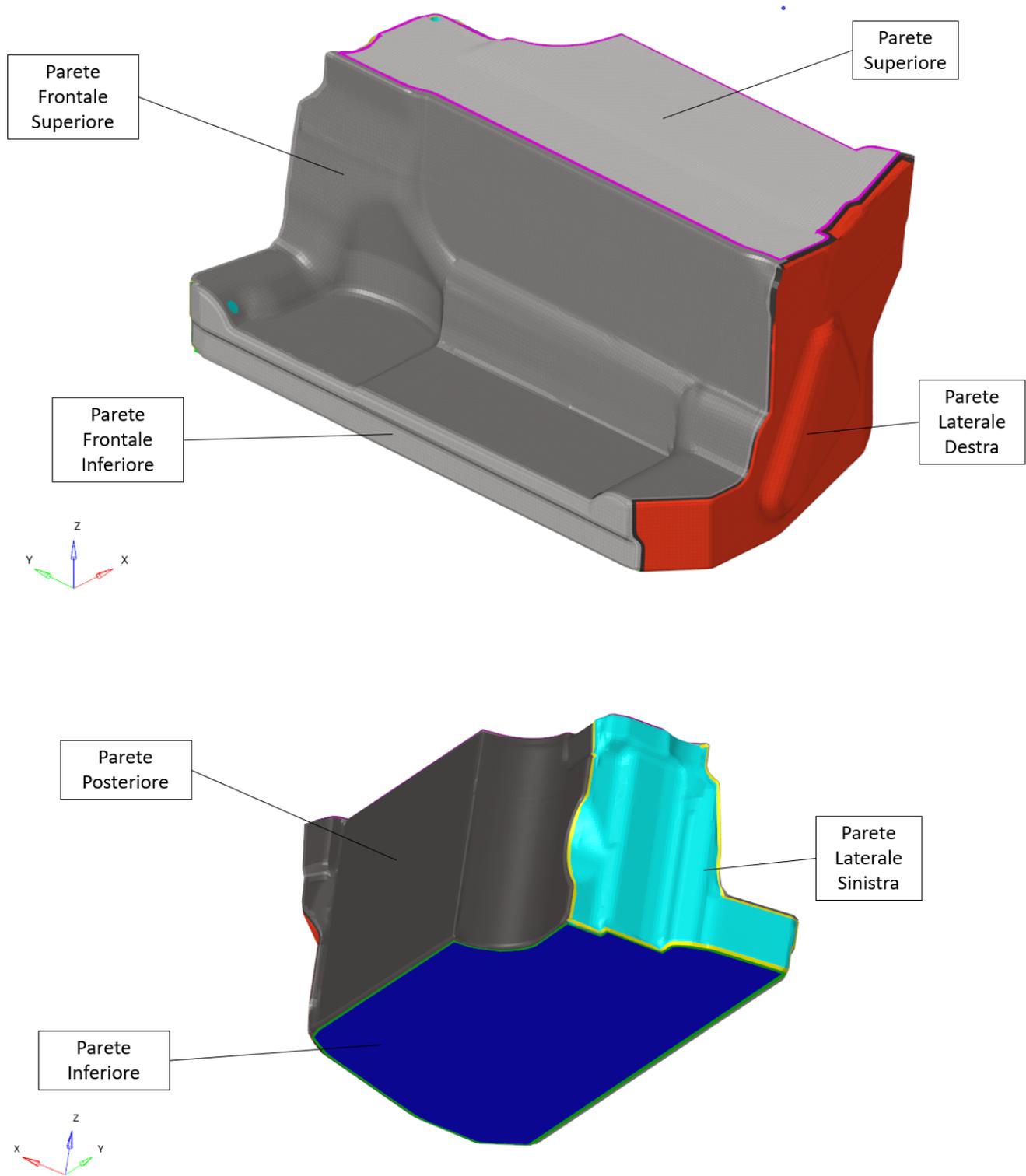


Figura 4.8: Guscio del serbatoio

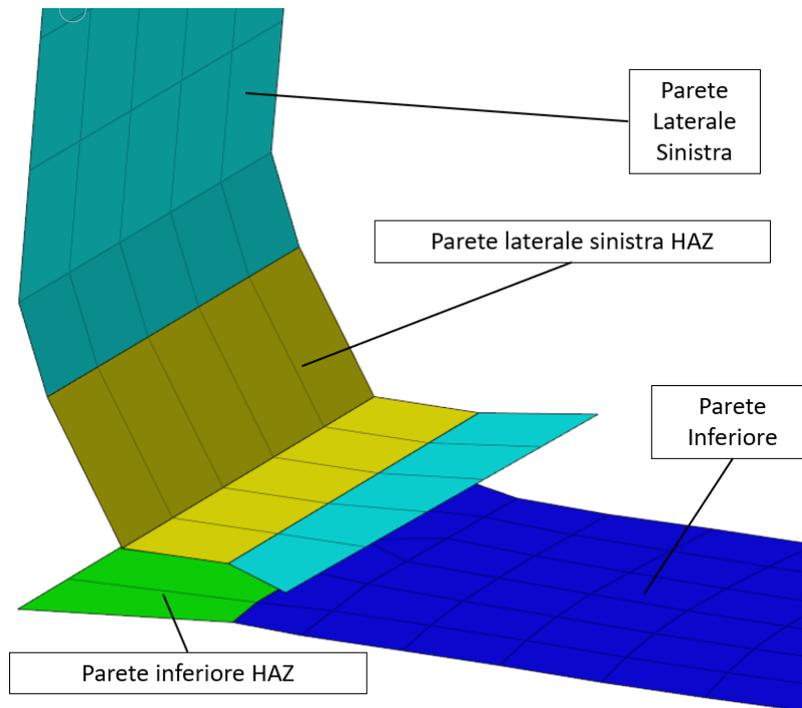


Figura 4.9: Dettaglio della zona termicamente alterata

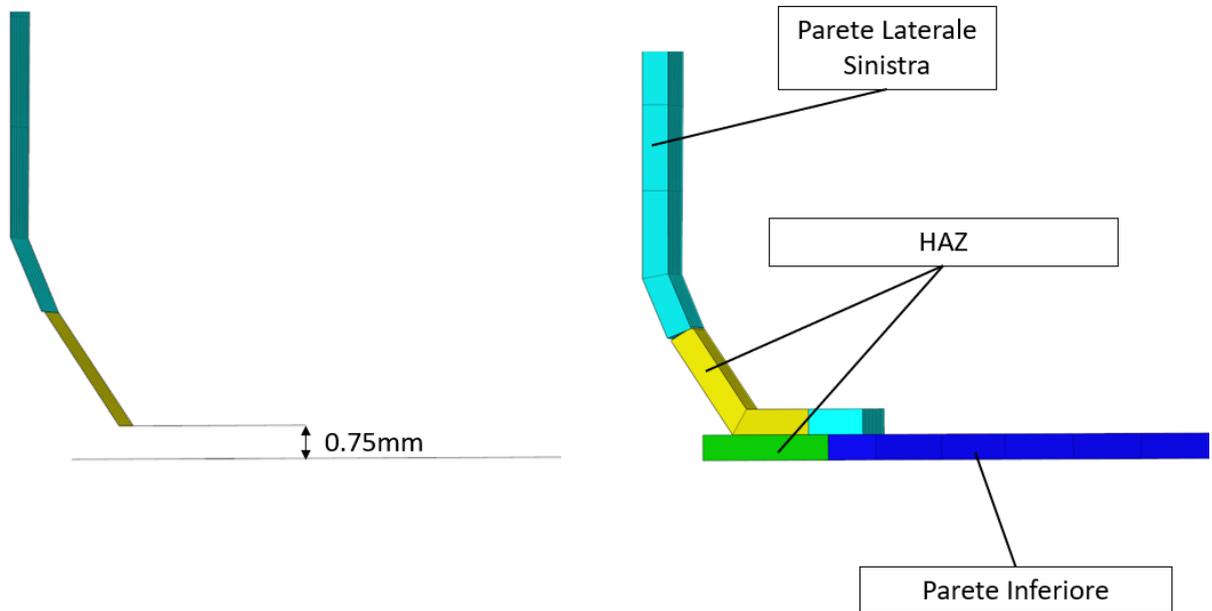


Figura 4.10: Dettaglio di uno dei sormonti: a sinistra sono visualizzate solo le superfici mediane, a destra vengono mostrate le pareti con i propri spessori

L'insieme delle pareti costituisce la superficie Lagrangiana nell'interazione fluido-struttura, quindi ognuna di esse viene discretizzata mediante una mesh bi-dimensionale costituita da elementi SHELL. Di seguito vengono riportati i parametri di meshatura utilizzati:

Medium element's size	4 mm
Minimum element's size	2 mm
Warpage	30
Jacobian	0.55
QUAD minimum angle	35°
QUAD maximum angle	145°
TRIA minimum angle	15°
TRIA maximum angle	125°

Tabella 4.1: Parametri di meshatura per gli elementi SHELL del serbatoio

### 4.2.2 Staffe

Le staffe sono elementi appartenenti al telaio, hanno uno spessore di 2.5 mm e sono realizzate in lega di alluminio. Esse sono separate dal guscio del serbatoio mediante l'interposizione di tamponi aderenti alle staffe stesse.

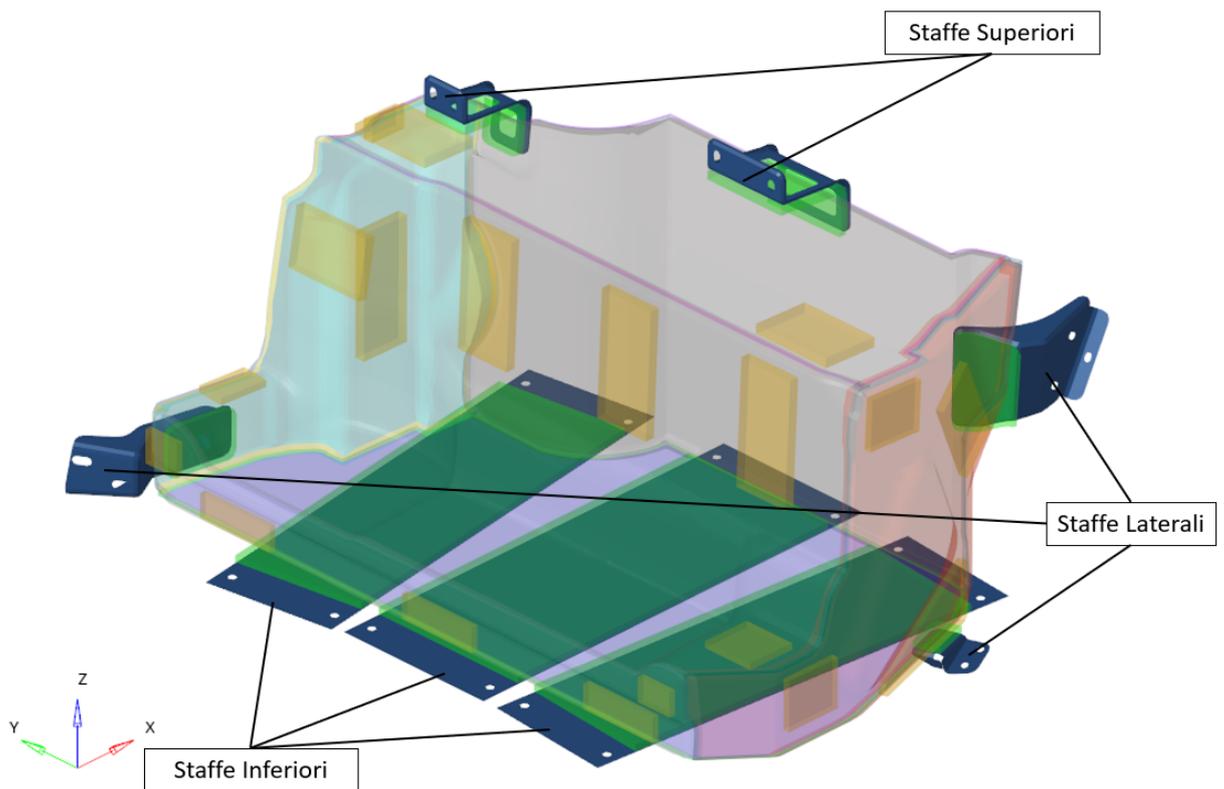


Figura 4.11: Staffe

Le staffe sono state discretizzate mediante elementi SHELL. I parametri di meshatura sono gli stessi adottati per le pareti del guscio (tabella 4.1).

### 4.2.3 Tamponi

I tamponi sono realizzati in gomma e sono interposti tra serbatoio e telaio. Il loro scopo è quello di assorbire gli urti tra il guscio del serbatoio e il telaio che lo contiene,

al fine di evitare il danneggiamento di entrambi. Nel modello distinguiamo due gruppi di tamponi (figura 4.12):

- tamponi aderenti al serbatoio;
- tamponi aderenti alle staffe.

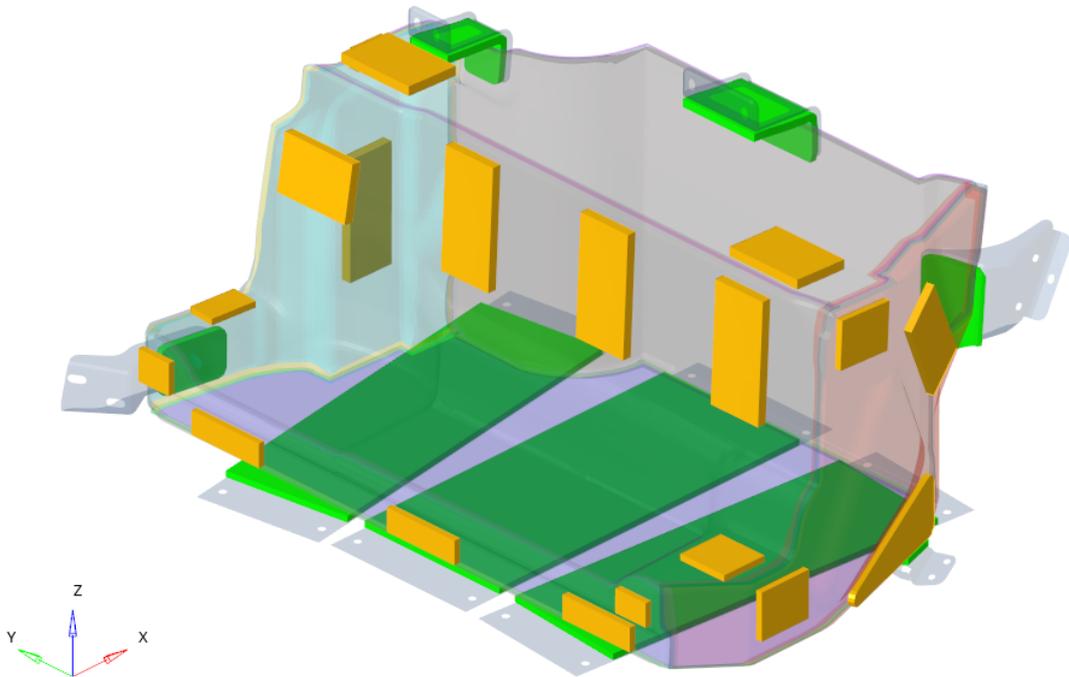


Figura 4.12: Tamponi aderenti al serbatoio (in arancio) e tamponi aderenti alle staffe (in verde)

I diversi tamponi hanno spessori compresi tra gli 8 mm e i 12 mm, troppo grandi per poterli discretizzare con elementi bi-dimensionali, per cui si ricorre agli elementi tri-dimensionali SOLID. In particolare, vista la loro geometria abbastanza semplice, si può ricorrere agli elementi HEXA.

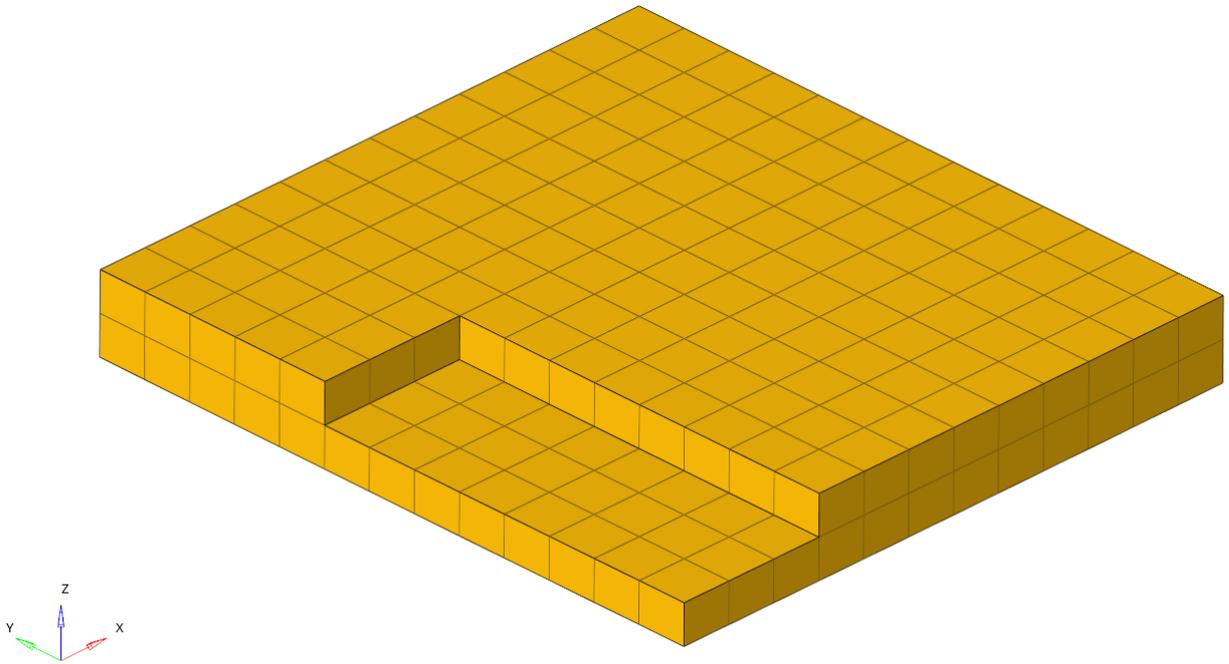


Figura 4.13: Dettaglio di un tampone discretizzato con elementi HEXA

#### 4.2.4 Fluido ALE

Il serbatoio ha un volume totale di 85 litri, che in questo modello sono suddivisi in 64 litri di acqua (75% del volume) e 21 litri di aria (25% del volume). L'intero volume di fluido viene discretizzato con una mesh ALE tri-dimensionale.

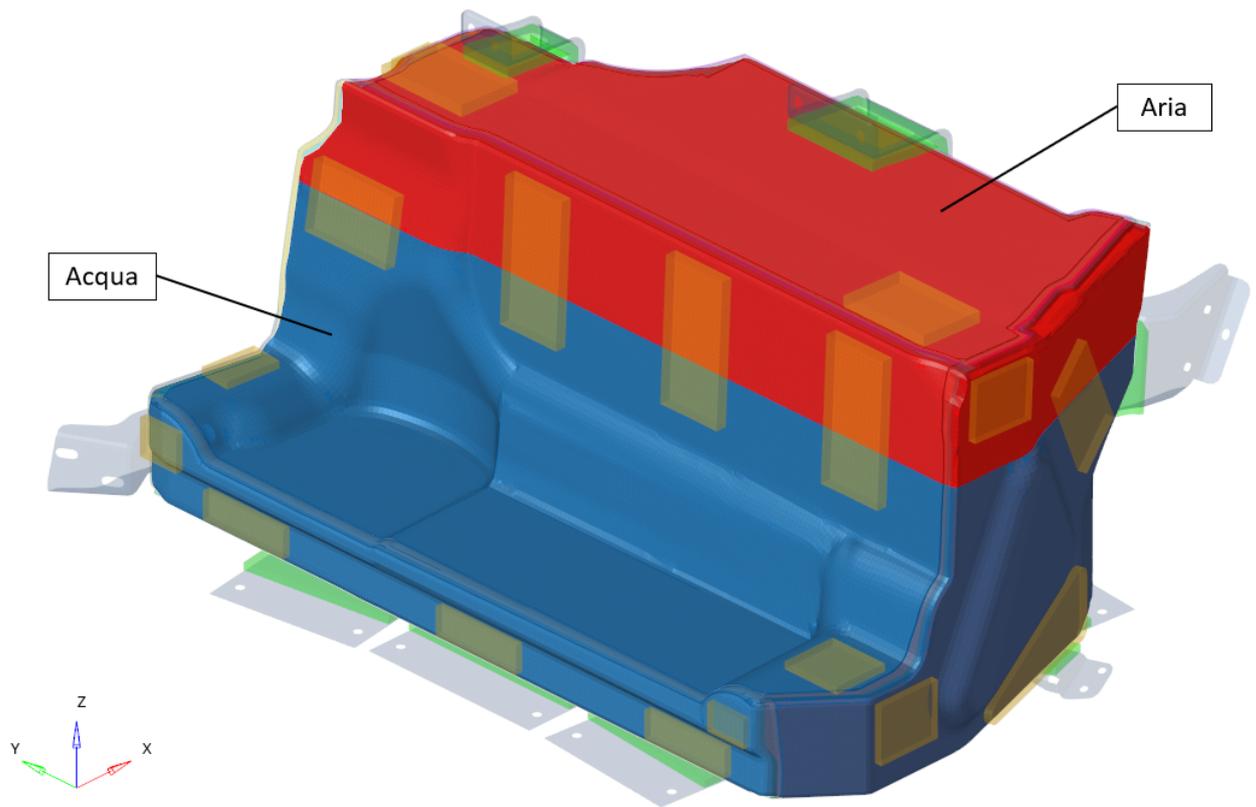


Figura 4.14: Suddivisione del volume all'interno del serbatoio

A causa della geometria complessa, si deve ricorrere agli elementi TETRA, tuttavia gli elementi TETRA sotto-integrati non sono adatti per il metodo ALE a causa della loro suscettibilità alle grandi deformazioni per via dello *shear locking*, e ciò può provocare l'interruzione del calcolo a causa di una eccessiva distorsione della mesh. Per ovviare al problema dello *shear locking*, si utilizzano elementi TETRA a 4 nodi di integrazione, con una formulazione che utilizza il metodo della pressione media nodale (attivabile su RADIOSS tramite la *keyword*  $I_{tetra4} = 3$ ). Ciò garantisce una maggior stabilità della soluzione, al costo di un maggior costo computazionale.

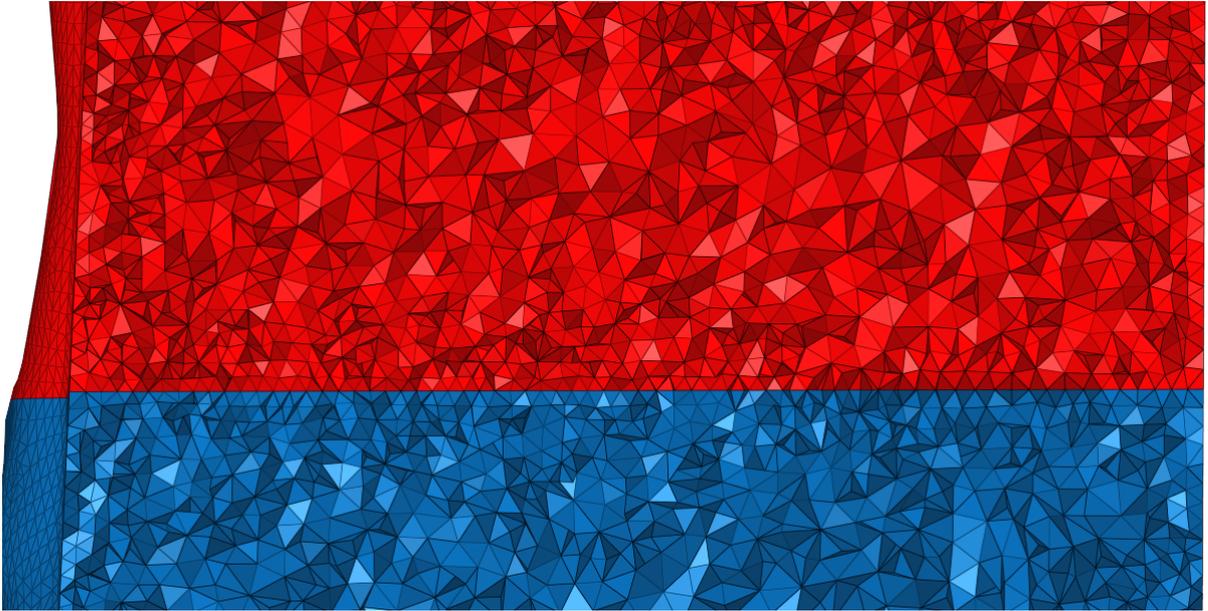


Figura 4.15: Dettaglio degli elementi TETRA usati per discretizzare il volume ALE

La tetramesatura è stata generata utilizzando i seguenti parametri:

Minimum Tetra Hegth	5.00 mm
Pyramid Transition Ratio	1.00
TETRA collapse	0.90

Tabella 4.2: Parametri di tetramesatura

#### 4.2.5 Materiali

In questo paragrafo verranno elencati i modelli dei materiali utilizzati.

##### Modello elastico lineare isotropo (/MAT/LAW1)

Questo modello prevede che il comportamento del materiale sia puramente elastico e che segua la legge di Hooke, ossia vi è un legame lineare tra stress e deformazione secondo la relazione:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (4.2.1)$$

dove  $E$  è il modulo elastico (o modulo di Young). La rigidezza del materiale è determinata da solo due valori, che ad esempio possono essere il modulo di Young e il modulo di Poisson,  $\nu$ . Infatti, il modulo elastico tangenziale può essere ricavato usando  $E$  e  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.2.2)$$

Inoltre le caratteristiche vengono considerate isotrope, ciò indipendenti dalla direzione considerata. Questo modello è stato utilizzato per definire la **gomma** con la quale sono stati realizzati i tamponi, la quale ha le seguenti caratteristiche:

Densità $\rho$	$2.0 \cdot 10^{-7} \text{ kg/mm}^3$
Modulo di young E	$3.0 \cdot 10^{-4} \text{ GPa}$

Tabella 4.3: Proprietà meccaniche della gomma

Nella realtà la gomma con la quale sono realizzati i tamponi, non ha comportamento puramente elastico, ma lo si considera tale al fine di semplificare il modello.

### Modello elasto-plastico isotropico (/MAT/LAW36)

Questo modello considera il comportamento plastico del materiale con caratteristiche isotrope. E' richiesta la definizione di una funzione che descrive l'evoluzione della plasticizzazione del materiale. Con questo modello sono stati definiti i seguenti materiali:

- **alluminio**: è il materiale costitutivo delle facce che compongono il guscio del serbatoio, le cui caratteristiche sono le seguenti:

Densità $\rho$	$2.70 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
Modulo di young E	70.0 GPa
Modulo di Poisson $\nu$	0.35
Tensione di snervamento $\sigma_y$	0.100 GPa
Tensione di rottura $\sigma_r$	0.130 GPa
Allungamento a rottura $\epsilon_{p,r}$	10.00 %

Tabella 4.4: Proprietà meccaniche dell'alluminio

In corrispondenza delle saldature, le caratteristiche meccaniche dell'alluminio subiscono un decremento dovuto all'effetto peggiorativo causato dal degrado termico, per cui la curva di plasticizzazione delle zone termicamente alterate avrà un andamento differente rispetto alle altre zone del guscio del serbatoio che non hanno subito gli effetti della saldatura, come si evince dalle curve in figura 4.16, in cui si nota che le tensioni di snervamento e rottura in corrispondenza delle HAZ scendono a 0.028 GPa e 0.078 GPa rispettivamente, mentre l'allungamento a rottura sale al 30.00 %.

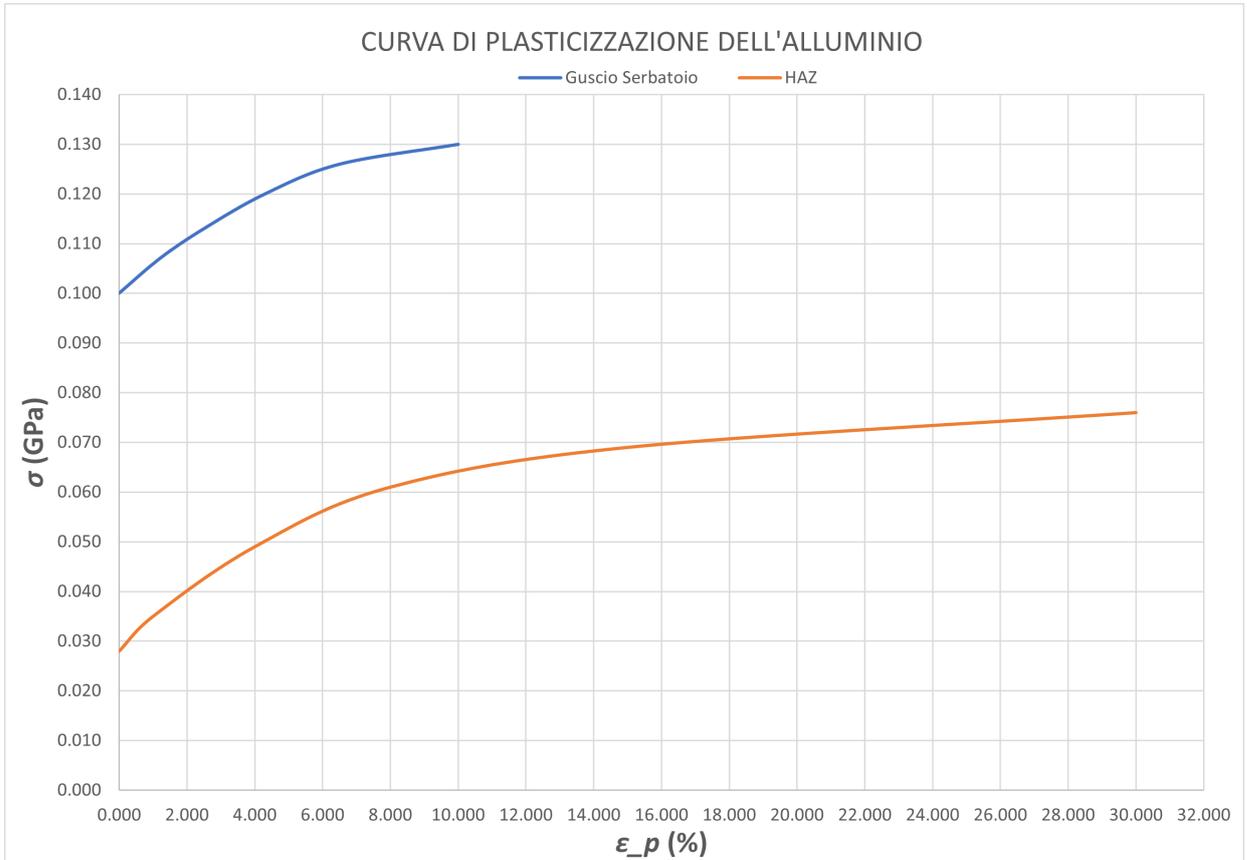


Figura 4.16: Curva di plasticizzazione dell'alluminio

- **lega d'alluminio 6082**: è il materiale costitutivo delle staffe le cui proprietà sono riportate nella seguente tabella:

Densità $\rho$	$2.69 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
Modulo di young E	70.0 GPa
Modulo di Poisson $\nu$	0.35
Tensione di snervamento $\sigma_y$	0.140 GPa
Tensione di rottura $\sigma_r$	0.240 GPa
Allungamento a rottura $\epsilon_{p,r}$	16.00 %

Tabella 4.5: Proprietà meccaniche della lega 6082

mentre la curva di plasticizzazione è la seguente:

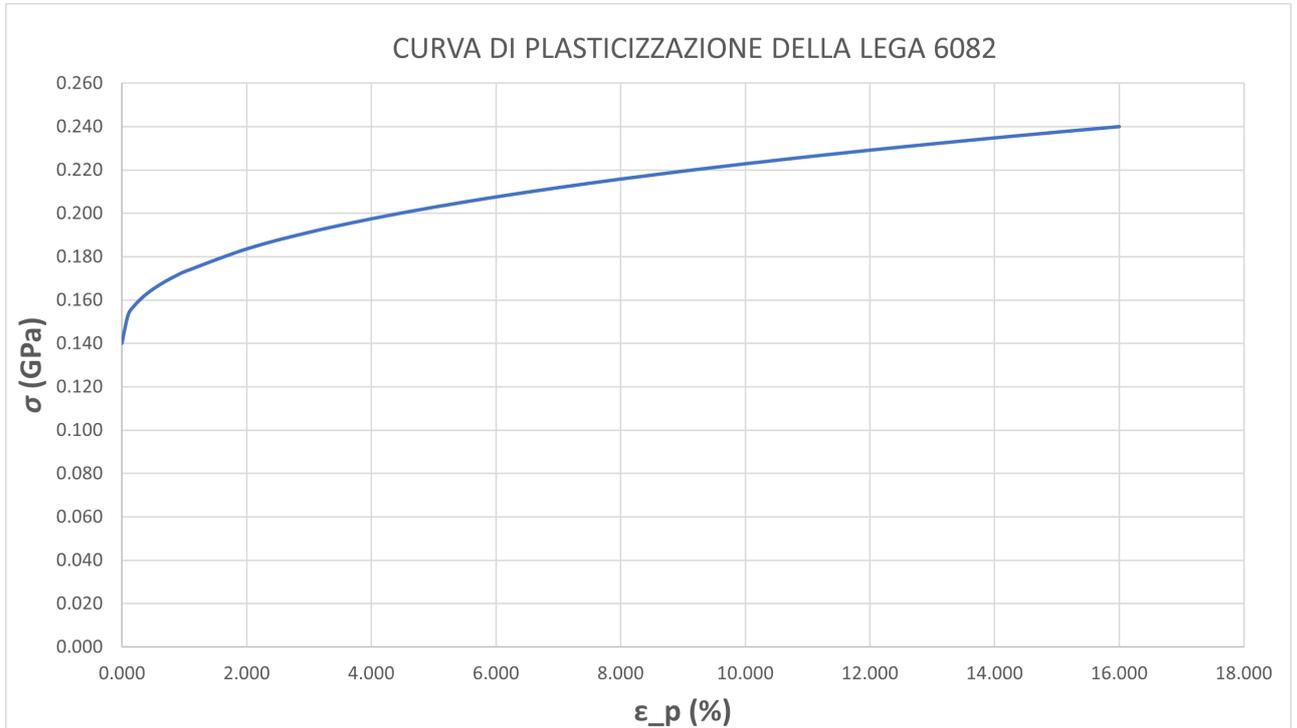


Figura 4.17: Curva di plasticizzazione della lega 6082

### Modello idrodinamico bifasico (/MAT/LAW37)

Questo modello descrive un materiale idrodinamico che comprende le due fasi liquido e gas, in RADIOSS è possibile con questo modello di materiale considerare più sostanze all'interno di un singolo elemento ALE, che nel nostro caso sono **aria** e **acqua**. L'equilibrio delle pressioni tra le due fasi viene calcolata per ogni ciclo nel seguente modo:

$$\Delta P_l = \Delta P_g \quad (4.2.3)$$

dove  $P_l$  e  $P_g$  sono rispettivamente la pressione del liquido e del gas. La funzione di stato del liquido è:

$$P_l = P_0 + C_l \mu \quad (4.2.4)$$

dove  $P_0$  è la pressione iniziale del gas,  $C_l$  è il modulo di bulk del liquido, mentre  $\mu$  è il coefficiente di viscosità dilazionale, definito come:

$$\mu = \rho_0^l (c_0^l)^2 \quad (4.2.5)$$

dove  $\rho_0^l$  è la densità iniziale del liquido e  $c_0^l$  è la velocità del suono iniziale. Per il gas, l'equazione di stato è:

$$Pv^\gamma = P_0v_0^\gamma = \text{costante} \quad (4.2.6)$$

dove  $P$  è la pressione,  $v$  è il volume specifico, è la costante dei gas perfetti pari a  $\gamma = 1.4$ .

Con questo modello l'energia interna non viene calcolata, tuttavia la condizione adiabatica:

$$dE = -P \cdot dV \quad (4.2.7)$$

viene utilizzata attraverso l'equazione della trasformazione politropica :

$$PV^\gamma = \text{costante} \quad (4.2.8)$$

Infine, il tensore delle tensioni  $\bar{\sigma}$  viene calcolato come:

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{P}} + \bar{\tau} \quad (4.2.9)$$

dove  $\bar{\bar{P}}$  è il tensore delle tensioni sferiche, mentre  $\bar{\tau}$  è il tensore delle tensioni viscosive, definito come:

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (4.2.10)$$

dove  $\lambda$  è la viscosità di taglio,  $\epsilon_{ij}$  è il tensore di *strain rate*,  $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker. Le proprietà dell'aria e dell'acqua sono:

	Aria	Acqua
Densità iniziale $\rho_0$	$1.22 \cdot 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$	$1.00 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
Modulo di bulk del liquido $C_l$	-	2.089 GPa
Viscosità di taglio $\lambda$	$1.43 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{ms}$	$1.00 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{ms}$

Tabella 4.6: Proprietà di aria e acqua

La pressione iniziale del gas è pari a  $P_0 = 1.00 \cdot 10^{-4} \text{ GPa}$ .

### 4.2.6 Contatti

In questo paragrafo verranno descritti i contatti utilizzati per simulare le interazioni tra i diversi sottosistemi del modello.

#### Contatto cinematico (/INTER/TYPE2)

Il contatto cinematico (*tied contact*) viene utilizzato per simulare due corpi aderenti tra loro e che eseguono lo stesso spostamento in maniera solidale. In particolare, i nodi *slave*, appartenenti a un corpo, vengono collegati in maniera rigida alla superficie *master* dell'altro corpo, come mostrato in figura 4.18.

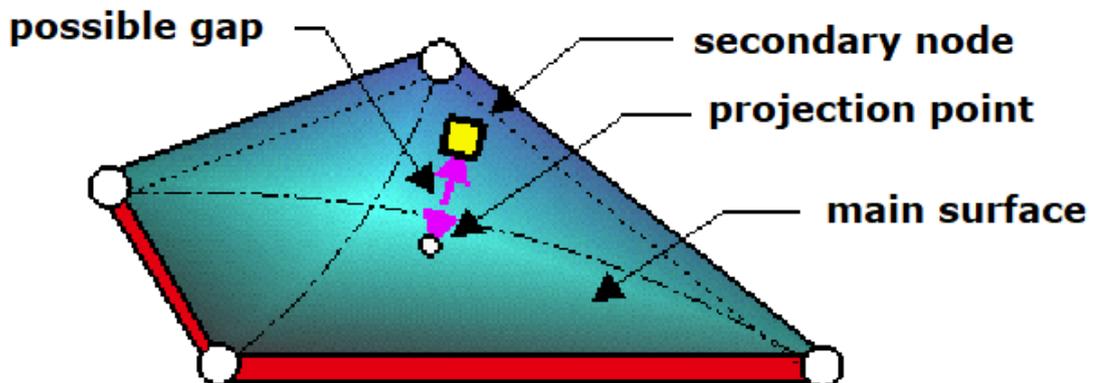


Figura 4.18: Contatto cinematico in RADIOSS

Per vincolarsi alla superficie *master*, i nodi *slave* non necessitano di giacere su quest'ultima, ma è sufficiente che si trovino all'interno di una certa tolleranza, che in RADIOSS è possibile imporre tramite il parametro  $d_{search}$ .

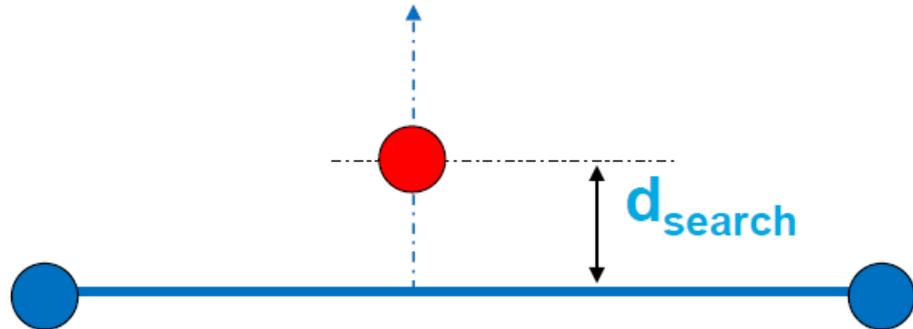


Figura 4.19: Rappresentazione del parametro  $d_{search}$  in RADIOSS

Nel modello del serbatoio, questo tipo di contatto viene utilizzato per simulare l'adesione dei tamponi al serbatoio e alle staffe, come mostrato nelle figure 4.20 e 4.21.

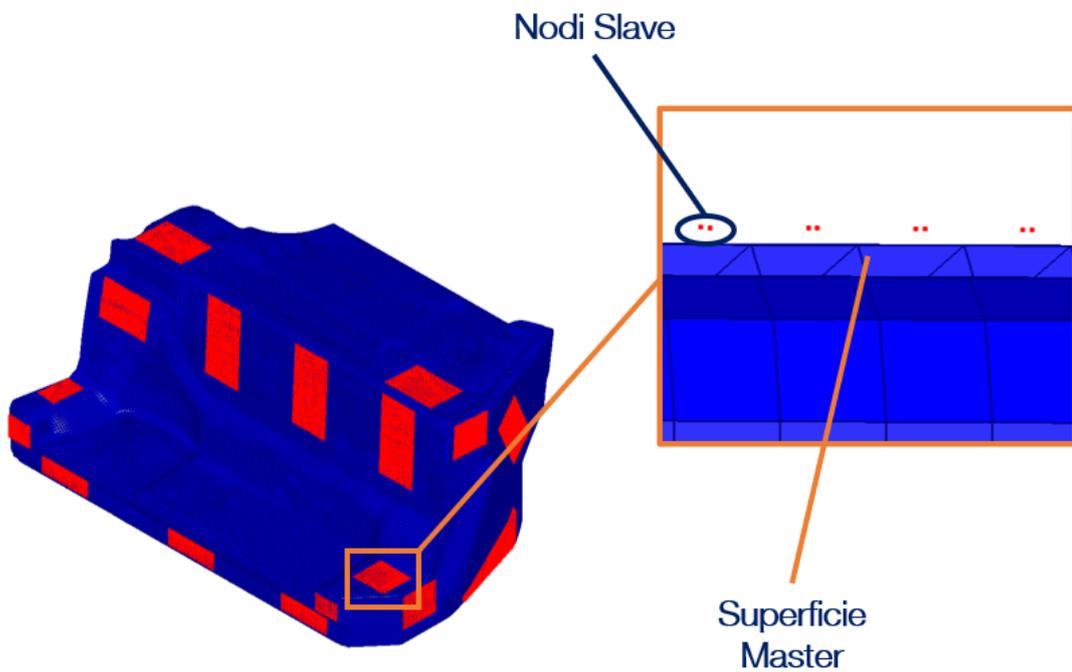


Figura 4.20: Contatto tied tra guscio del serbatoio e tamponi aderenti al serbatoio, in rosso i nodi *slave* e in blu la superficie *master*

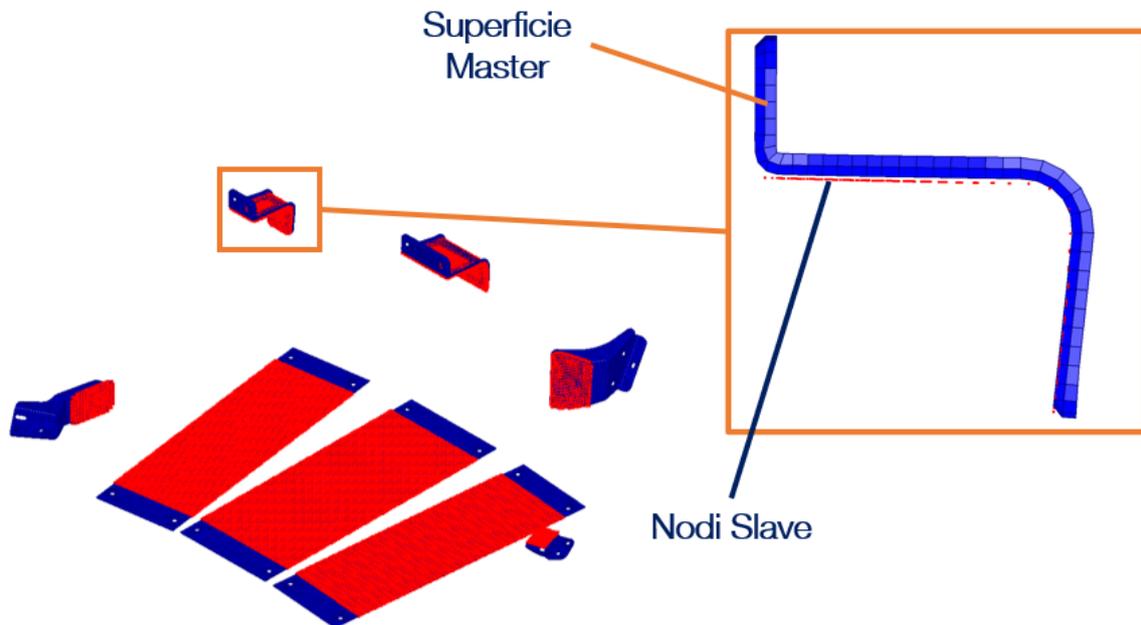


Figura 4.21: Contatto tied tra staffe e tamponi aderenti alle staffe, in rosso i nodi *slave* e in blu la superficie *master*

### Contatto multi-uso per impatti (/INTER/TYPE7)

Il contatto multiuso utilizza il metodo *penalty* descritto al paragrafo 2.7.1, e viene utilizzato per simulare il contatto tra una superficie *master* e un gruppo di nodi *slave*. In RADIOSS la forza resistente è proporzionale al parametro *gap*, ossia il grado di penetrazione dei nodi *slave* nella superficie *master*.

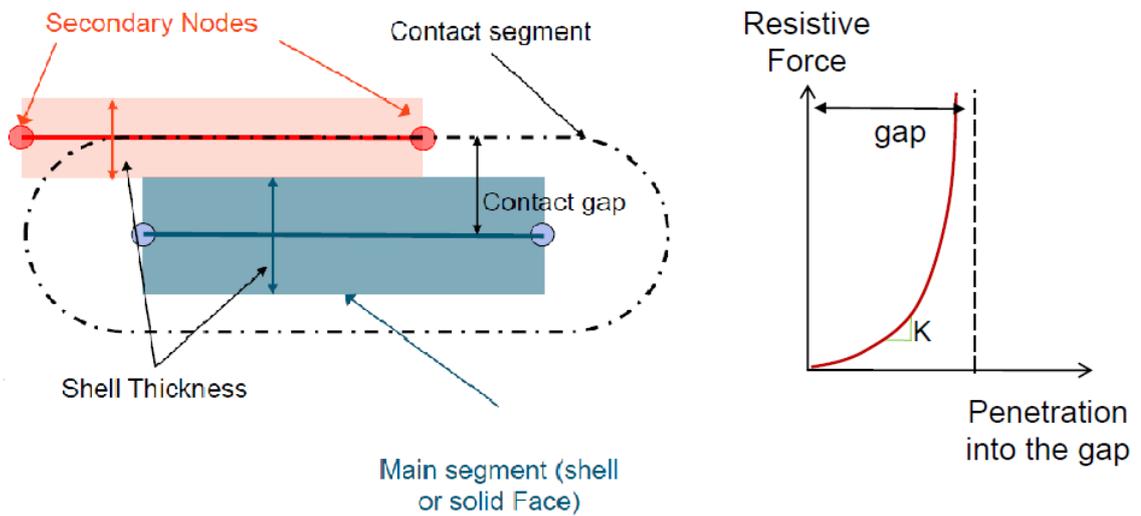


Figura 4.22: Metodo penalty in RADIOSS

Nel modello del serbatoio, questo tipo di contatto viene utilizzato per simulare l'impatto tra il guscio del serbatoio e i tamponi aderenti alle staffe, come mostrato in figura 4.23.

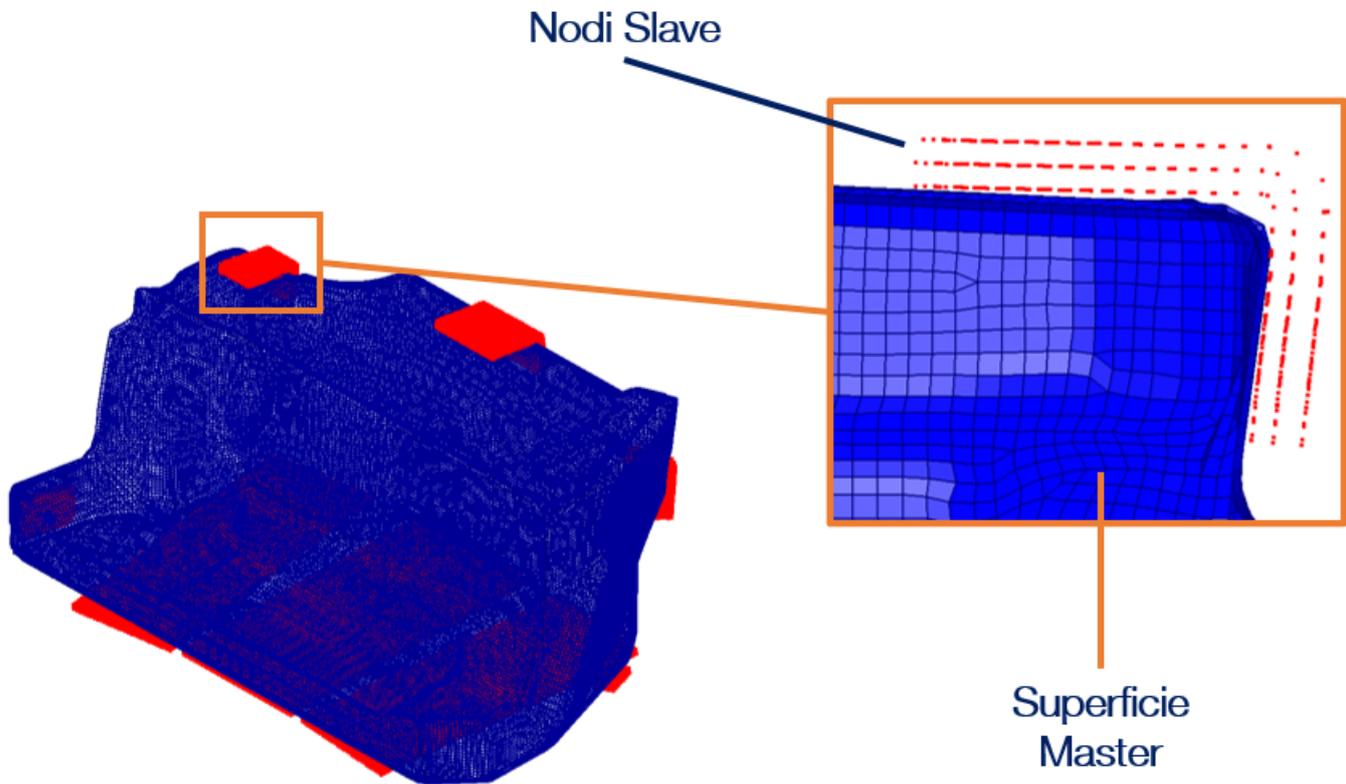


Figura 4.23: Contatto penalty tra guscio del serbatoio e tampone aderenti alle staffe, in rosso i nodi *slave* e in blu la superficie *master*

### Contatto fluido-struttura per il metodo ALE

Per simulare l'interazione tra il guscio del serbatoio (superficie Lagrangiana) e fluido (mesh di volume ALE), si usa un contatto di tipo cinematico, in cui i nodi *slave* della mesh ALE coincidono perfettamente con i nodi della superficie Lagrangiana *master* (nodi collassati). La possibilità di usare il contatto cinematico deriva dal fatto che la mesh di volume è stata ottenuta direttamente a partire dalla mesh Lagrangiana del guscio del serbatoio, ciò garantisce la perfetta sovrapposizione di nodi *slave* e *master*

### 4.2.7 Condizioni al contorno

Come accennato all'inizio, la simulazione ricostruisce lo scenario della prova sperimentale, in cui il serbatoio, fissato al simulacro, subisce una accelerazione. Il serbatoio è contenuto all'interno di un telaio, che in questo modello viene considerato come corpo rigido. Si impone, quindi, una curva di **velocità** lungo la direzione positiva di X, tale per cui l'accelerazione sia costante e pari a 12g (figura 4.24). Il corpo rigido possiede un unico nodo *master* e un certo numero di nodi *slave*, quest'ultimi sono localizzati in corrispondenza dei fori (*washer*) delle staffe e sulla superficie rivolta verso il telaio dei tamponi aderenti al serbatoio (figura 4.25).

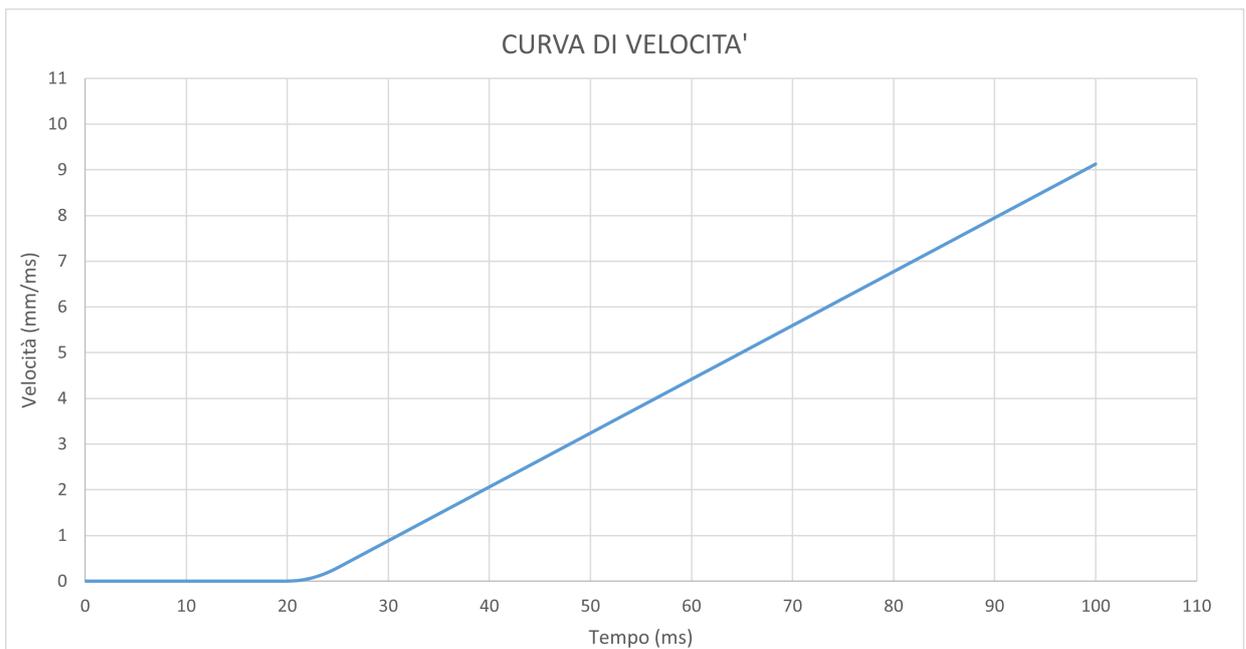


Figura 4.24: Curva di velocità con accelerazione 12g

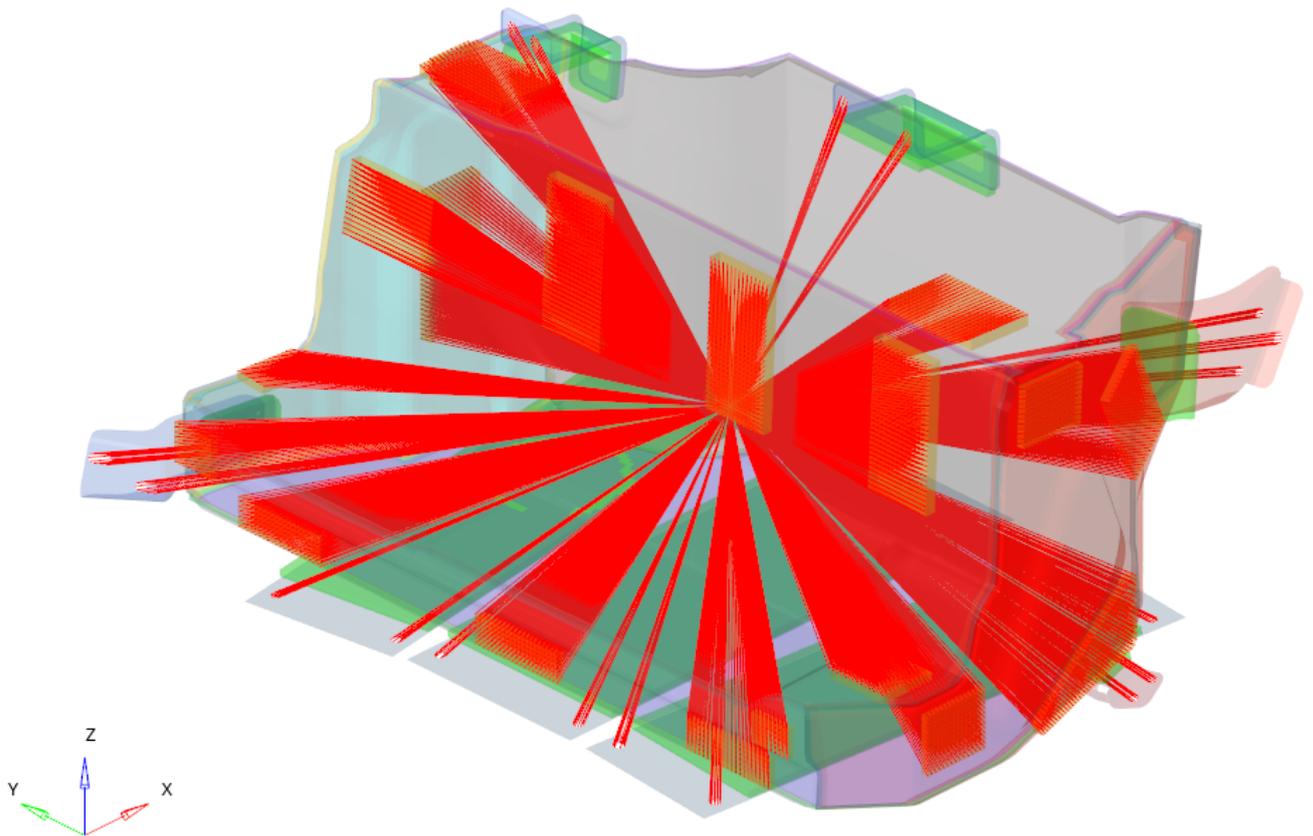


Figura 4.25: Telaio simulato da un unico copro rigido

Il sistema di movimentazione procede lungo la direzione X, per cui bisogna imporre un **vincolo alla traslazione** lungo le direzioni Y e Z, e un **vincolo alla rotazione** attorno agli assi X,Y,Z. La legge di velocità e i vincoli vengono assegnati al nodo *master* dell'insieme dei corpi rigidi 4.26. Infine, viene imposta a tutti i nodi del modello FEM un'**accelerazione** di gravità pari a  $9.81 \cdot 10^{-2} \text{ mm/ms}^2$  lungo la direzione negativa di Z.

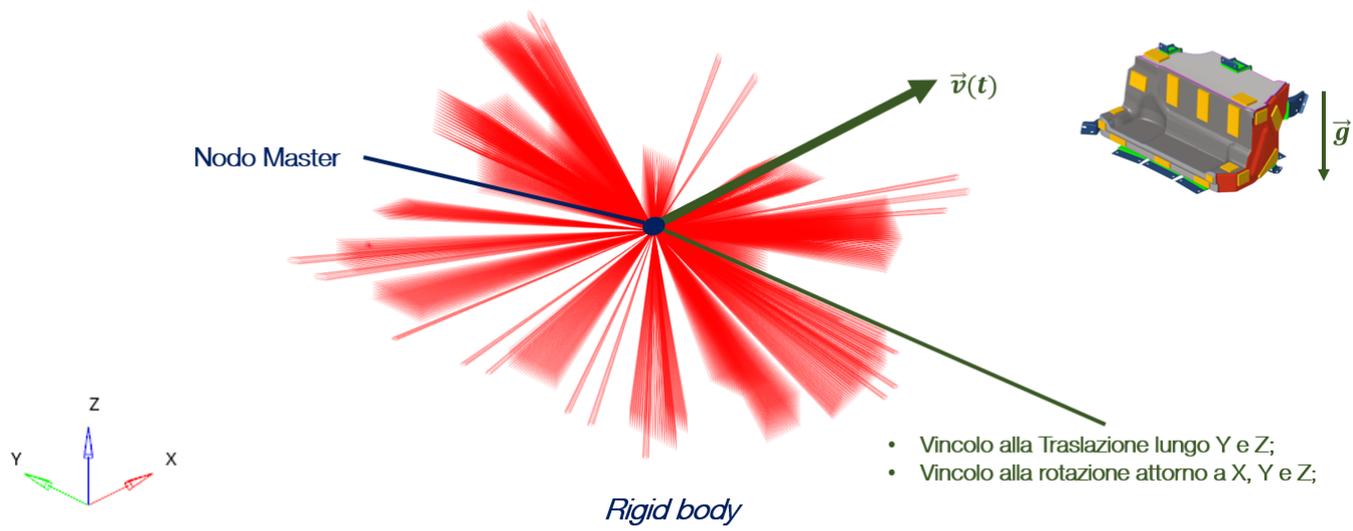


Figura 4.26: Applicazione delle condizioni al contorno

# Capitolo 5

## Simulazione del serbatoio carburante con metodo SPH

### 5.1 Set-up del modello SPH

Il set-up del modello che utilizza il metodo SPH, per la maggior parte è identico al modello che utilizza il metodo ALE, descritto già al paragrafo 4.2. In particolare, gli unici aspetti differenti sono la modellazione del volume di fluido contenuto all'interno del serbatoio e il tipo di contatto utilizzato per l'interazione fluido-struttura, tali differenze verranno descritte nei prossimi paragrafi. Mentre, tutto ciò che concerne la modellazione di guscio del serbatoio, staffe, tamponi e condizioni al contorno è identica a quanto già visto nel modello ALE.

#### 5.1.1 Fluido SPH

Come nel modello ALE, anche nel modello SPH il serbatoio ha un volume totale di 85 litri suddivisi in 64 litri di acqua (75% del volume) e 21 litri di aria (25% del volume). Con il metodo SPH non è necessario suddividere il volume in liquido e gas, ma è sufficiente modellare unicamente la porzione di volume occupata dall'acqua. Il volume del liquido viene discretizzato mediante delle particelle, l'esperienza ha indi-

viduato una distribuzione delle particelle e una parametrizzazione ottimale (Tabella 5.1)

Distribuzione delle particelle	Cubo a facce centrate
Smoothing length $h$	5 mm
Massa delle particelle $m_p$	$9.17 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$
Numero delle particelle	698288

Tabella 5.1: Parametri del metodo SPH

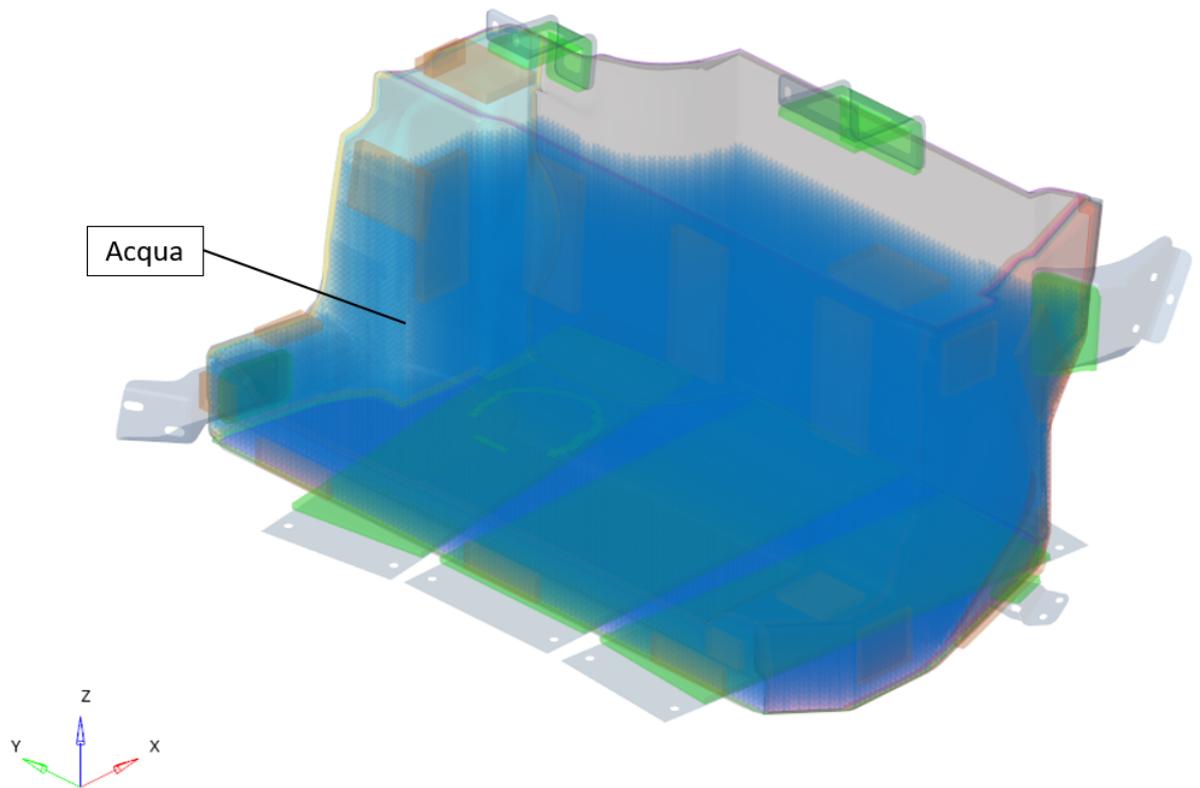


Figura 5.1: Discretizzazione del liquido mediante particelle

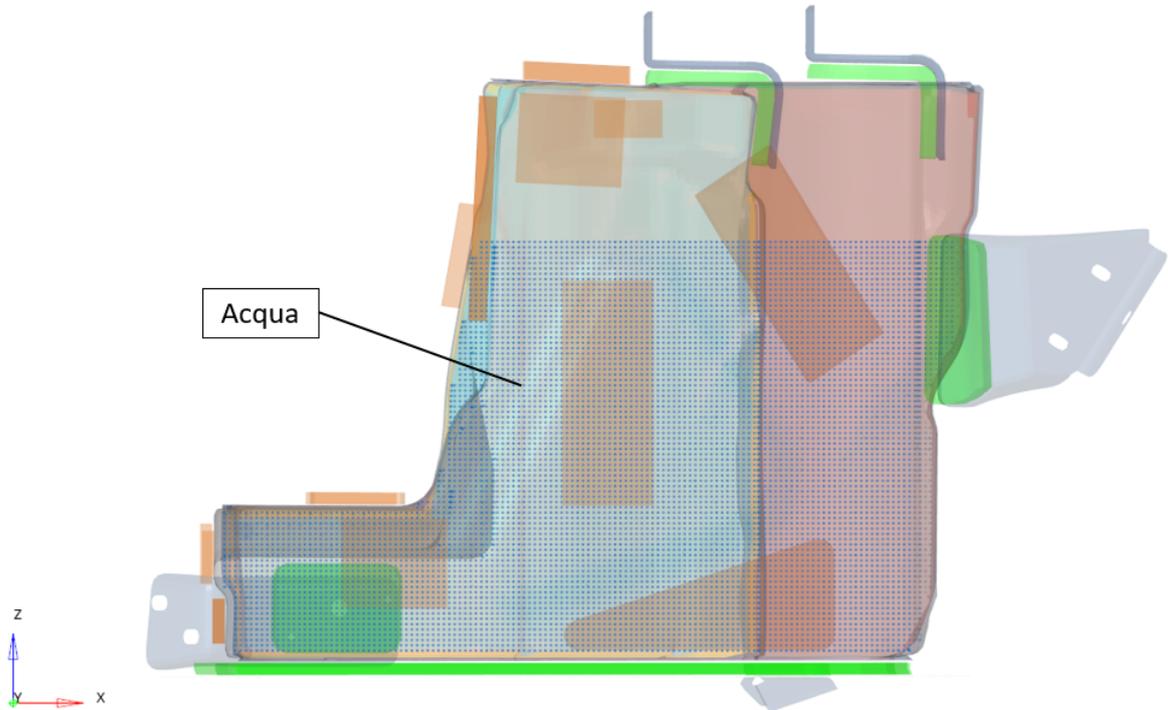


Figura 5.2: Discretizzazione del liquido mediante particelle, vista laterale

### 5.1.2 Modello del materiale per il liquido

L'acqua viene modellata come fluido idrodinamico attraverso la definizione della legge materiale /MAT/LAW6, con la quale viene calcolata la pressione mediante la definizione di una equazione di stato. Per questo modello è stata utilizzata una equazione di stato di tipo polinomiale:

$$P = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + C_3\mu^3 + (C_4 + C_5\mu)e \quad (5.1.1)$$

dove  $C_0 = C_4 = C_5 = 0$ ,  $C_1 = 1.250$ ,  $C_2 = 3.042$ ,  $C_3 = 4.163$  sono i coefficienti del polinomio,  $e = 0$  è l'energia iniziale per unità di volume,  $\mu$  è il coefficiente di

dilatazione definito da:

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \quad (5.1.2)$$

dove  $\rho$  e  $\rho_0$  sono rispettivamente la densità e la densità di riferimento. Quest'ultima è coincidente con la densità iniziale  $\rho_i = 1.00 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ . Si ha dilatazione quando  $\mu < 0$

### 5.1.3 Contatto fluido-struttura per il metodo SPH

Il contatto tra il volume di fluido, discretizzato mediante SPH, e la superficie Lagrangiana del guscio viene modellato mediante il contatto /INTER/TYPE7. Come già riportato al paragrafo 4.2.6, questa tipologia di contatto utilizza il metodo *penalty*, in cui le particelle di fluido rappresentano gli *slave* che interagiscono con la superficie Lagrangiana *master* del guscio del serbatoio. Questo aspetto è stato già descritto al paragrafo 3.5.

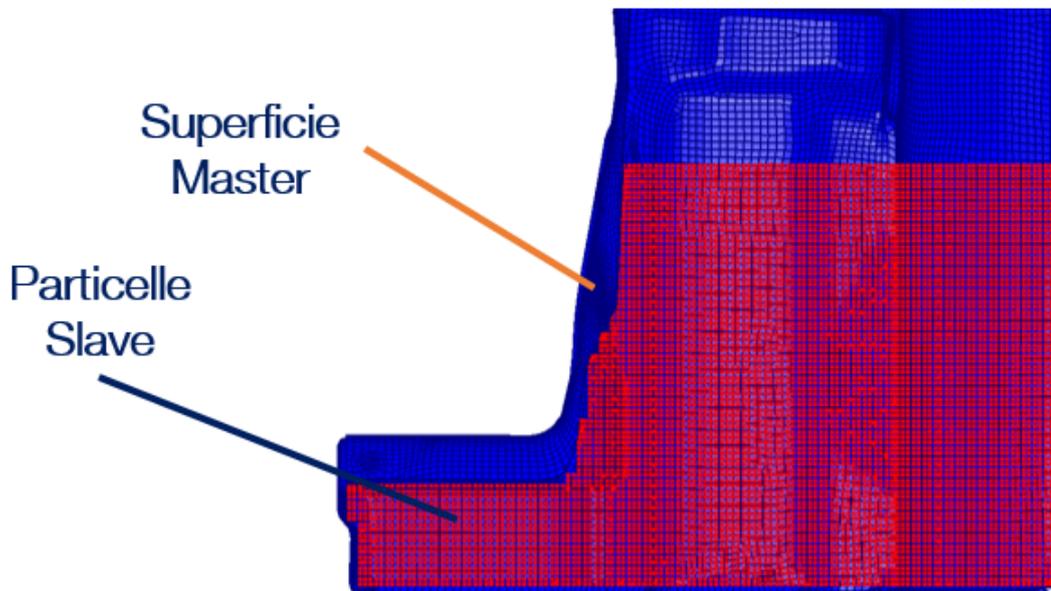


Figura 5.3: Contatto Fluido-Struttura per il metodo SPH

# Capitolo 6

## Confronto dei risultati

### 6.1 Sciabordio del fluido all'interno del serbatoio

Il serbatoio si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione  $X$  con accelerazione di  $12g$ . Ci si aspetta, quindi, che il liquido esegua il suo moto di sciabordio scorrendo nella direzione opposta  $-X$  per effetto dell'inerzia, impattando sulla parte frontale del serbatoio. Nelle figure 6.1, 6.2 e 6.3, si può vedere una sezione del serbatoio sul piano  $XZ$  agli istanti di tempo  $t = 0 \text{ ms}$ ,  $t = 50 \text{ ms}$  e  $t = 100 \text{ ms}$  rispettivamente, dalle quali si evince che il moto di sciabordio avviene effettivamente lungo la direzione prevista  $-X$ . Già all'istante  $t = 50 \text{ ms}$  si nota una differenza tra i due approcci nel comportamento del liquido: nell'approccio ALE si vede il liquido scorrere lungo le pareti senza distaccarsi eccessivamente da queste, verosimilmente a quello che ci si aspetta dal comportamento reale del liquido; nell'approccio SPH si evidenzia, invece, il distacco del liquido dalla parete posteriore del serbatoio, mostrando un comportamento meno simile a quello reale. Tale differenza si nota maggiormente alla fine della simulazione all'istante  $t = 100 \text{ ms}$ , in cui nell'approccio SPH si vede come il liquido si sia distribuito maggiormente sulla parte frontale del serbatoio, causandone ivi una maggior deformazione. Nell'approccio ALE, invece, si ha una distribuzione differente della massa del liquido, comportando di conseguenza un comportamento

diverso del serbatoio dal punto di vista delle deformazioni.

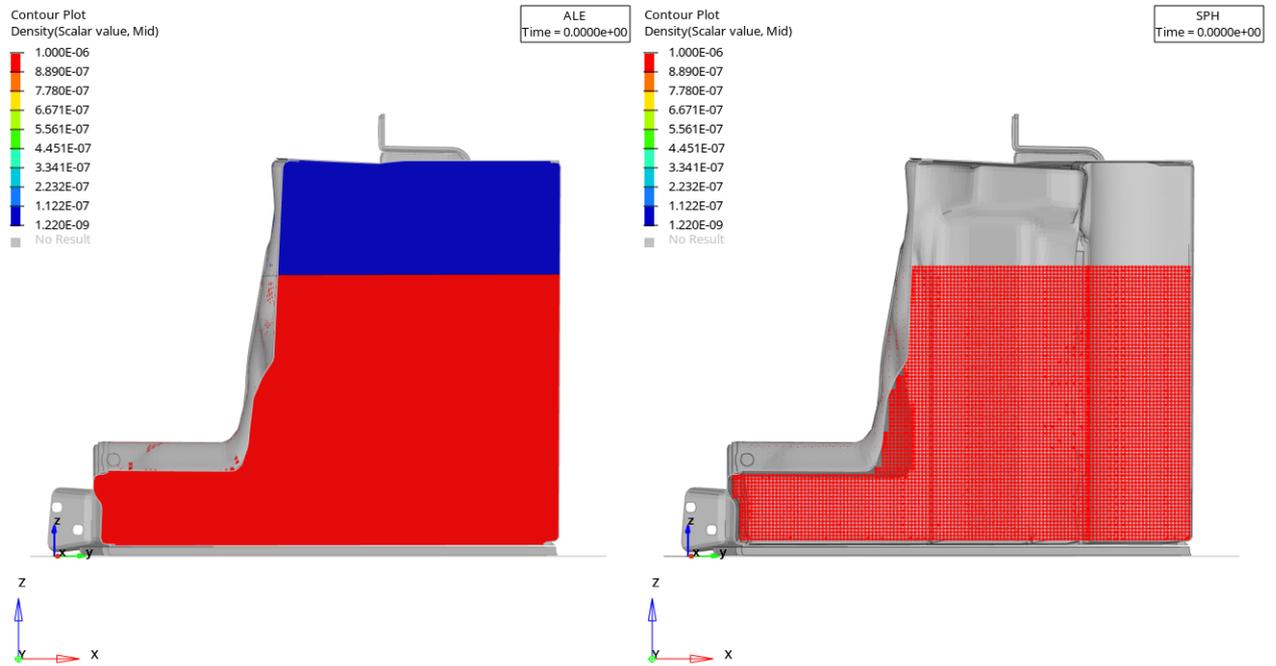


Figura 6.1: Moto del liquido all'istante  $t = 0 \text{ ms}$

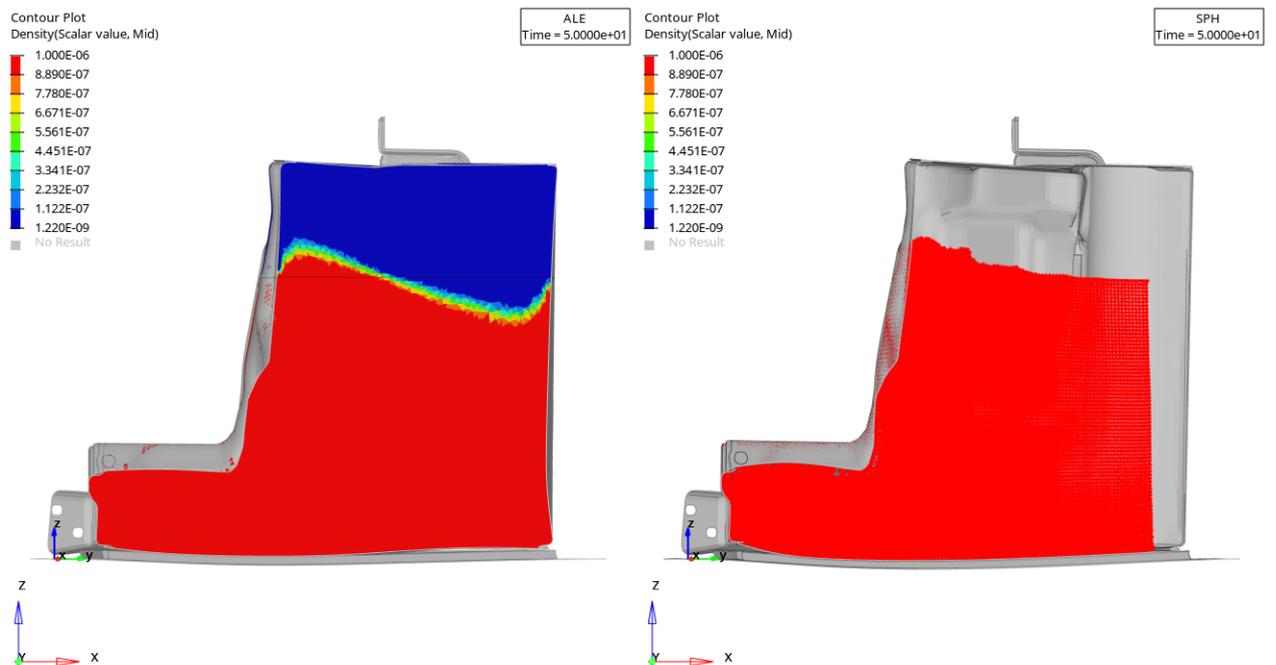


Figura 6.2: Moto del liquido all'istante  $t = 50 \text{ ms}$

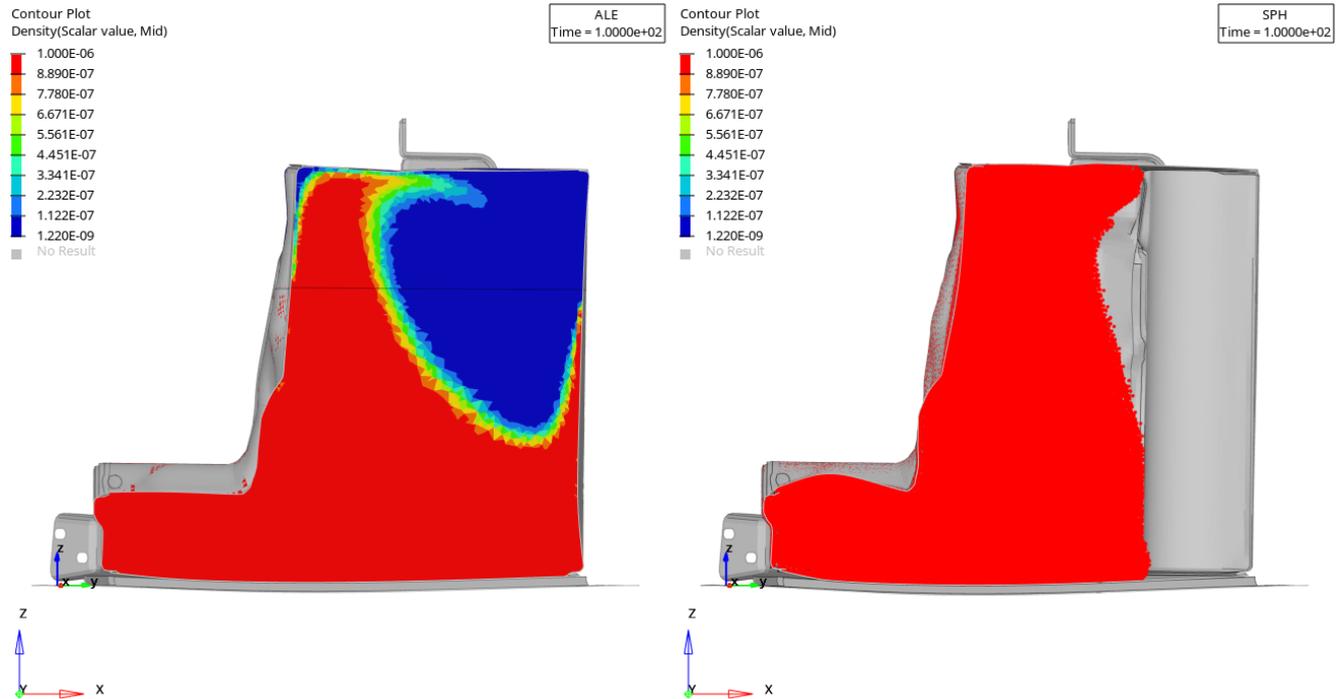


Figura 6.3: Moto del liquido all'istante  $t = 100 \text{ ms}$

In conclusione, da questo primo confronto risulta che l'approccio ALE rispetti maggiormente il comportamento reale del fluido rispetto all'approccio SPH.

## 6.2 Tensioni e deformazioni plastiche del guscio del serbatoio

Il liquido, impattando sulle pareti, sollecita il guscio del serbatoio, per cui ci si aspetta di individuare delle tensioni più elevate nella zona frontale del guscio del serbatoio. Inoltre, ci si aspetta che il differente comportamento del fluido nei due approcci, comporti delle differenze nello stato tensionale. Per prima cosa si studia la tensione principale<sup>1</sup> del guscio del serbatoio, senza considerare le HAZ: in figura 6.4

<sup>1</sup>La tensione principale in un punto è il valore della tensione su una giacitura rispetto alla quale lo stato tensionale presenta solo componenti normali e manca di componenti tangenziali. La direzione normale alla giacitura è detta direzione principale di tensione.

si osserva l'inviluppo<sup>2</sup> della tensione principale massima per entrambi gli approcci. Come ci si aspettava, coerentemente al diverso comportamento del liquido, si evidenzia una distribuzione delle tensione sulla parete frontale superiore differente nei due approcci. In particolare si nota che nell'approccio SPH il campo delle tensioni oltre il limite di snervamento ha una estensione maggiore sulla parte frontale del serbatoio, rispetto a quello che viene mostrato dall'approccio ALE. Oltre alle sollecitazioni dovute all'impatto del liquido, in entrambi gli approcci si notano delle tensioni che superano il limite di snervamento nella parete frontale inferiore, le quali sono dovute alla pressione esercitata dai tamponi aderenti in quella zona. Infatti il telaio in quel punto tende ad impattare contro il serbatoio, i tamponi ivi presenti assorbo parte dell'energia dell'impatto, ciononostante una parte dell'energia viene comunque trasmessa alla parete del serbatoio provocandone la plasticizzazione.

---

<sup>2</sup>Nell'inviluppo sono mostrati solo i valori massimi associati a ogni elemento registrati nei diversi istanti della simulazione.

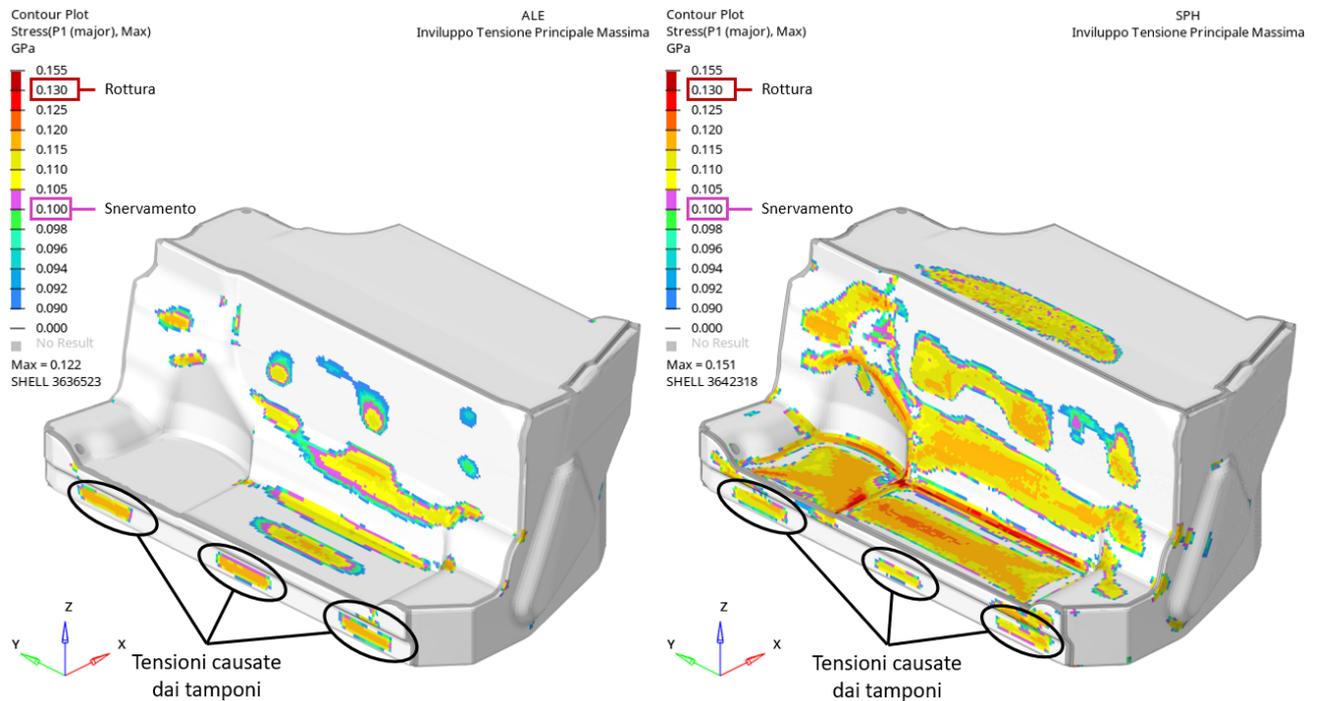


Figura 6.4: Inviluppo della tensione principale massima del guscio del serbatoio

La differenza più importante è che nell'approccio SPH si registra, in generale, un valore della tensione principale più elevato rispetto all'approccio ALE, superando addirittura il limite di resistenza a rottura del materiale in alcune zone colpite dal liquido (figura 6.5), mentre nell'approccio ALE la tensione principale resta al di sotto del carico a rottura in ogni zona.

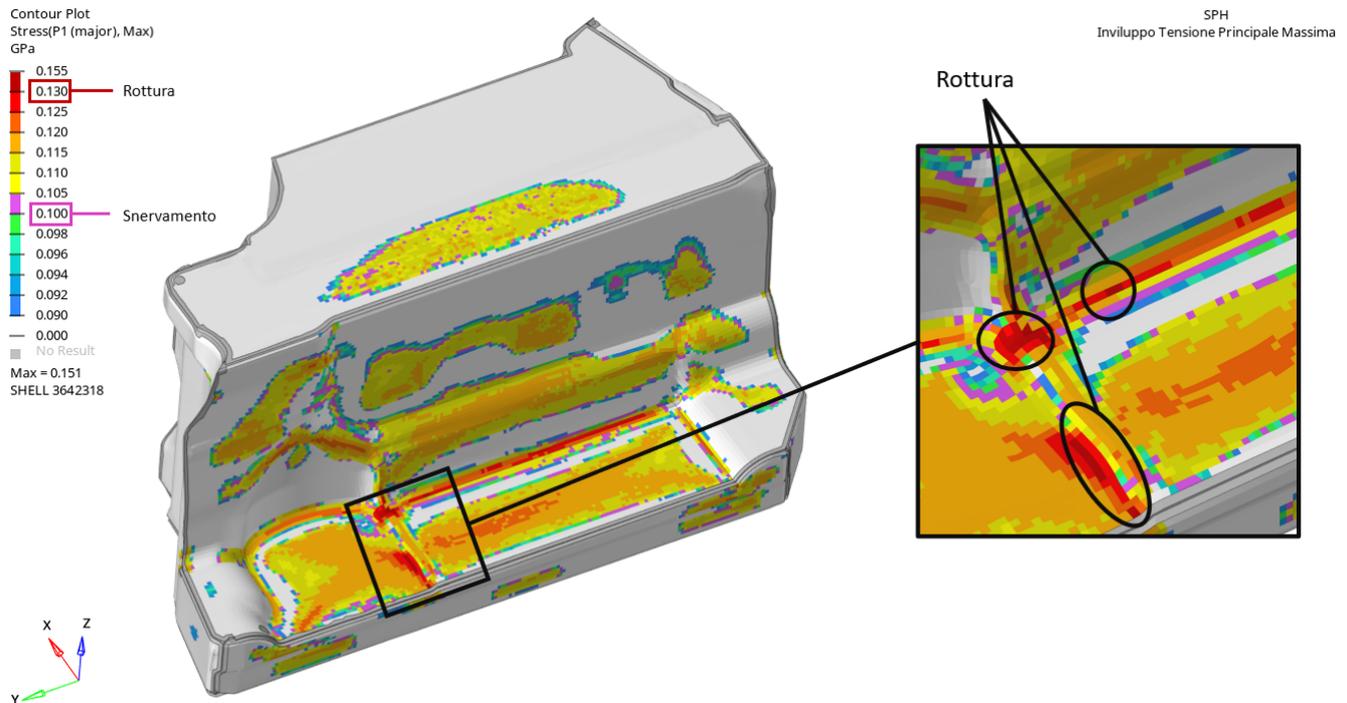


Figura 6.5: Zona di rottura nel modello con SPH

Coerentemente alla distribuzione della tensione principale, in figura 6.6 si osserva una analoga distribuzione delle deformazioni plastiche. Anche in questo caso si osservano valori di deformazione plastica più alti nell'approccio SPH rispetto all'approccio ALE e, ancora una volta, nel modello SPH si supera il limite di allungamento a rottura.

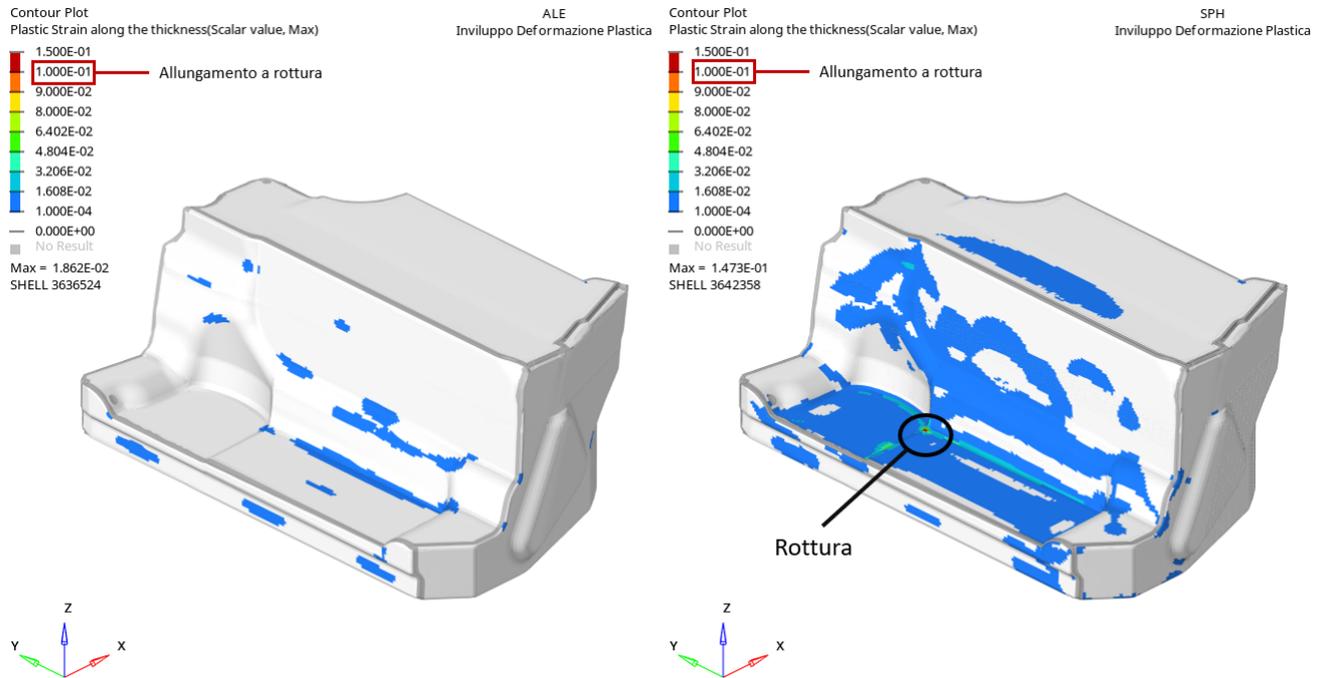


Figura 6.6: Inviluppo della massima deformazione plastica del guscio del serbatoio

In maniera analoga, si studiano gli stati di tensione e di deformazione plastica delle zone termicamente alterate. Anche in questo caso, si osserva in generale si osservano distribuzione e valore delle tensioni e delle deformazioni plastiche maggiori nell'approccio SPH rispetto all'approccio ALE. In entrambi gli approcci, nelle HAZ non sono state individuate zone in cui viene raggiunto il limite di rottura.

§6.2 Tensioni e deformazioni plastiche del guscio del serbatoio

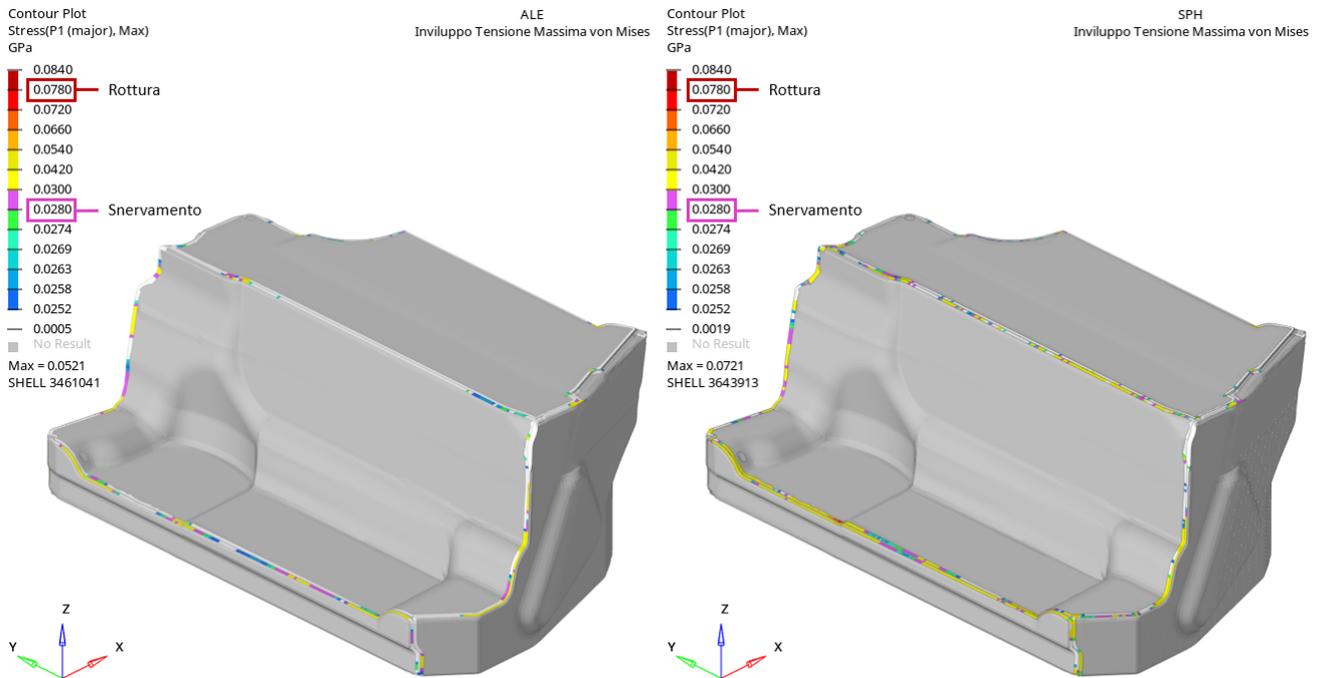


Figura 6.7: Involuppo della tensione principale massima delle HAZ

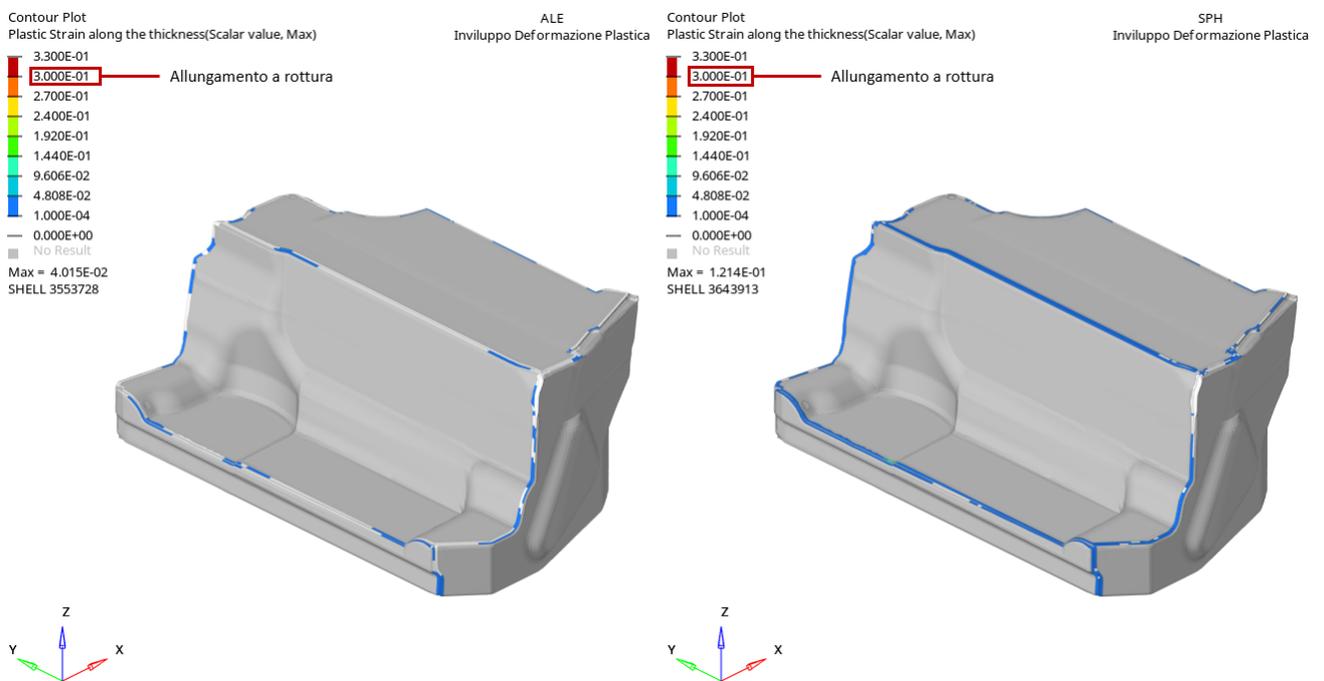


Figura 6.8: Involuppo della massima deformazione plastica delle HAZ

In conclusione, il diverso comportamento del liquido nei due approcci, comporta un differente stato di sollecitazione e in particolare, l'approccio SPH mostra sollecitazioni maggiori rispetto l'approccio ALE.

### **6.3 Tensioni e deformazioni plastiche delle staffe**

Osservando lo stato di tensione principale delle staffe in figura 6.9, si nota che in entrambi gli approcci le staffe superiori e laterali non subiscono sollecitazioni importanti e che le sollecitazioni sono localizzate unicamente in prossimità dei fori dei bulloni delle staffe inferiori. La distribuzione delle tensioni nei due approcci è simile, ma nel modello con SPH si ottengono valori delle tensioni leggermente più alti, a causa della maggior distribuzione delle particelle che discretizzano il liquido nella zona centrale e anteriore del serbatoio. Tale maggior concentrazione di massa provoca una maggiore flessione nelle sezioni di mezzeria delle staffe, aumentando il valore delle tensioni nelle zone in cui le staffe sono vincolate al telaio tramite i bulloni. Nell'ALE la distribuzione della massa di liquido è più uniforme, di conseguenza si ottengono valori delle tensioni più basse nelle staffe inferiori. Tuttavia, in questo caso possiamo concludere che le differenze nei due approcci sono trascurabili, a differenza di quello che è stato osservato per il guscio del serbatoio.

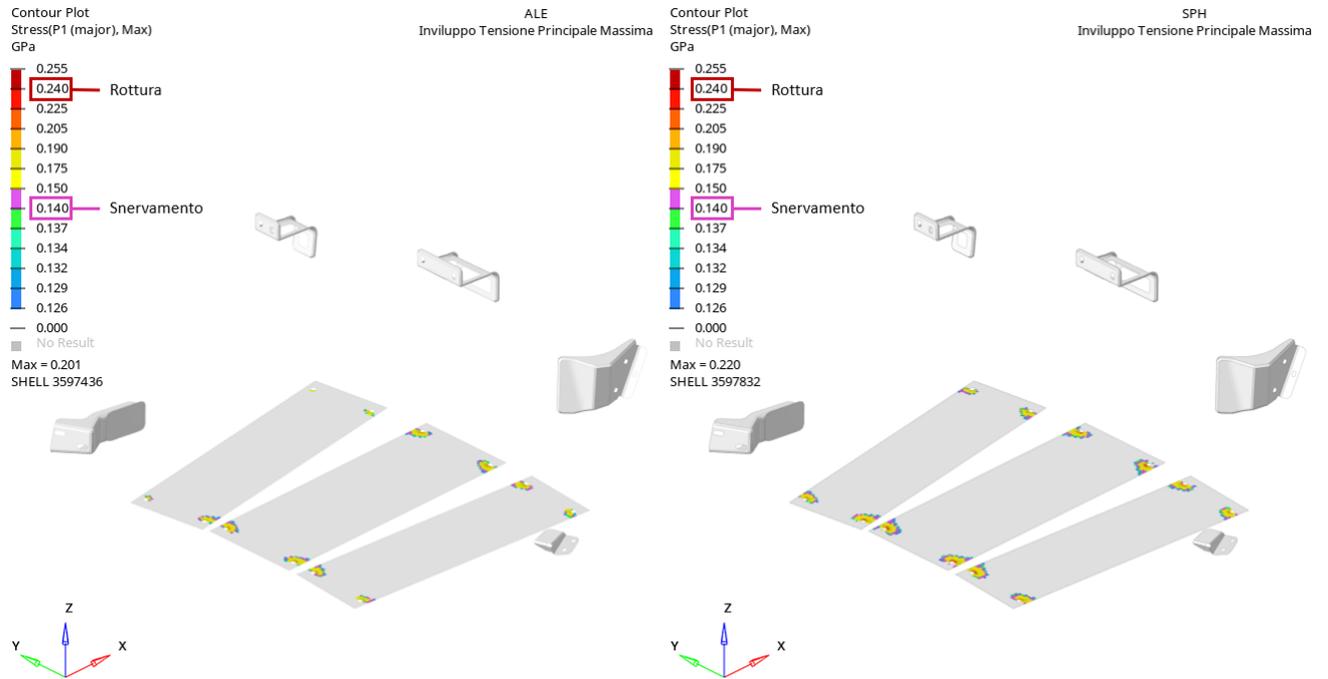


Figura 6.9: Involuppo della tensione principale massima delle staffe

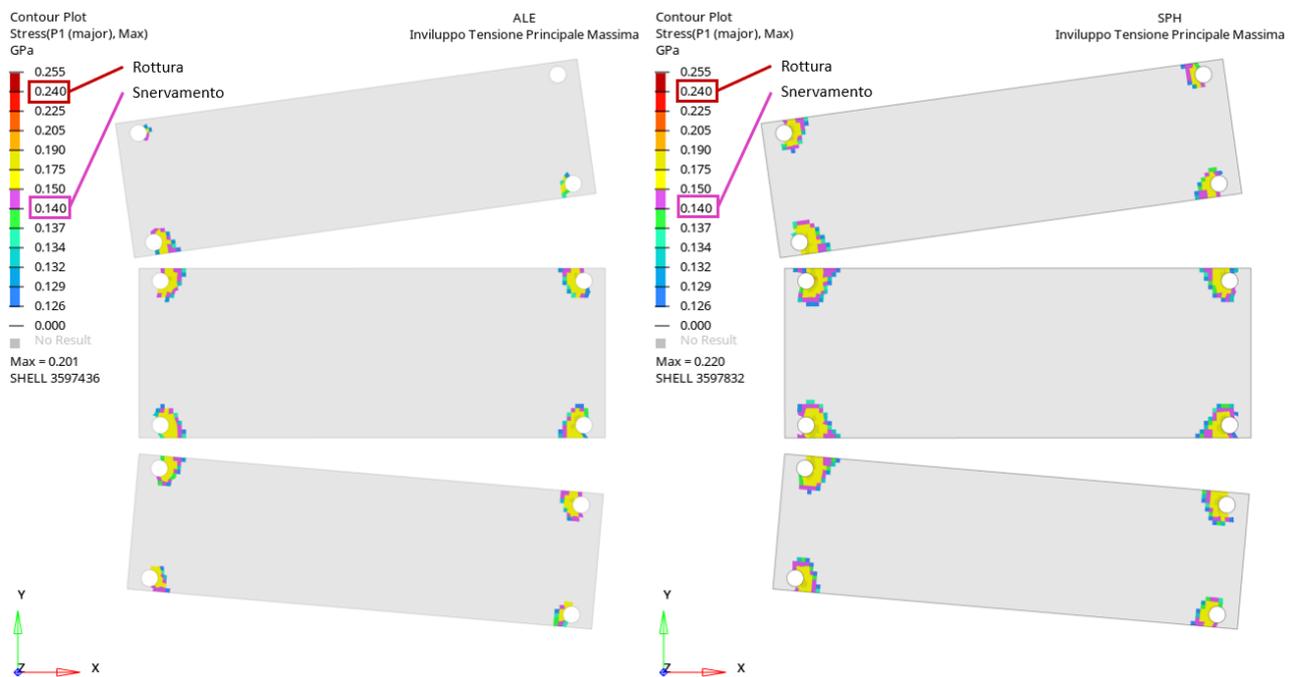


Figura 6.10: Involuppo della tensione principale massima delle staffe inferiori, vista dall'alto

Lo stesso discorso vale per le deformazioni plastiche, come mostrato in figura 6.11.

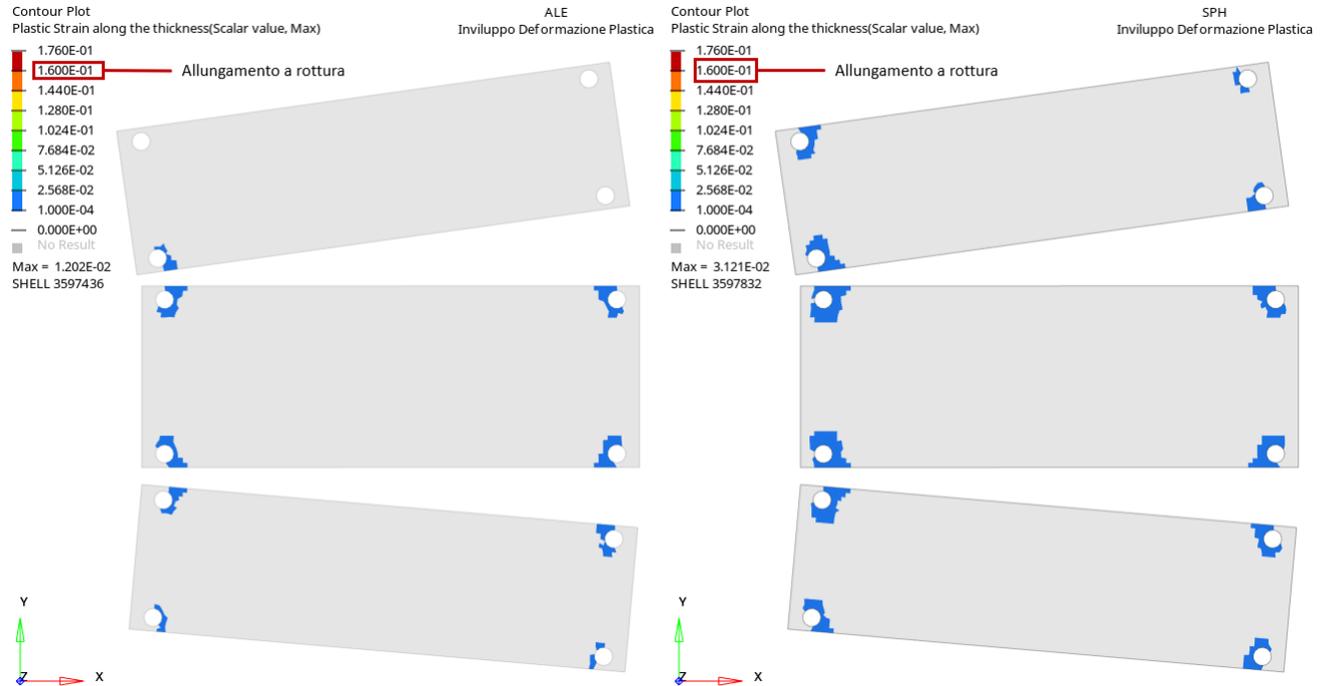


Figura 6.11: Inviluppo della massima deformazione plastica delle staffe inferiori, vista dall'alto

## 6.4 Energia del sistema

Si è visto come il differente comportamento dell'liquido nei due approcci abbia influenzato lo stato tensionale del serbatoio, in particolare per la parete frontale superiore, la quale subisce maggiormente l'impatto dell'acqua. Essendo l'energia interna legata al tensore delle tensioni, ci si aspetta che nell'approccio SPH l'energia interna della parete frontale superiore sia maggiore di quella calcolata nell'approccio ALE, in figura 6.12 si può verificare che questa previsione sia vera.

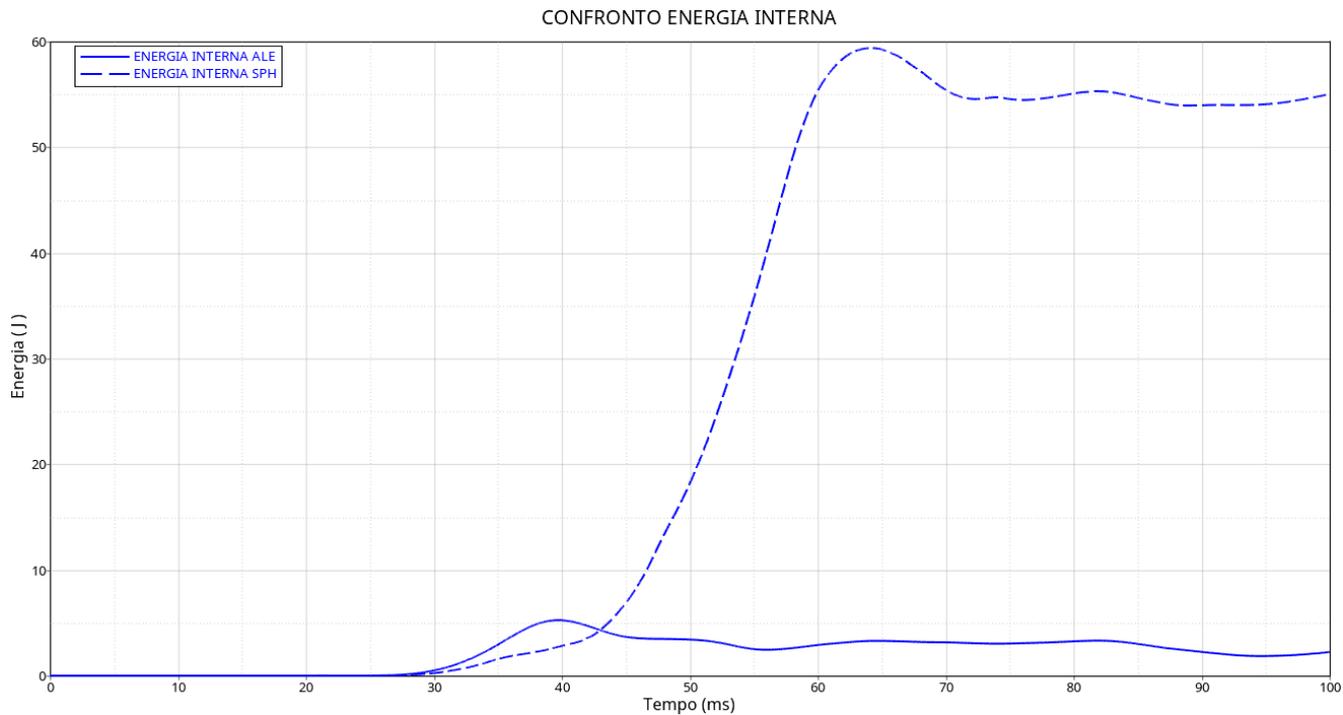


Figura 6.12: Confronto dell'energia interna della parete frontale superiore

L'energia cinetica, invece, dipende dalla massa della parete e dalla velocità con la quale questa si muove secondo la relazione:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.4.1)$$

Per cui, l'energia cinetica non è influenzata dal moto del liquido. Come si può vedere in figura 6.13 l'energia cinetica nei due approcci ha un andamento praticamente identico, a meno di qualche differenza dovuta al diverso algoritmo di calcolo.

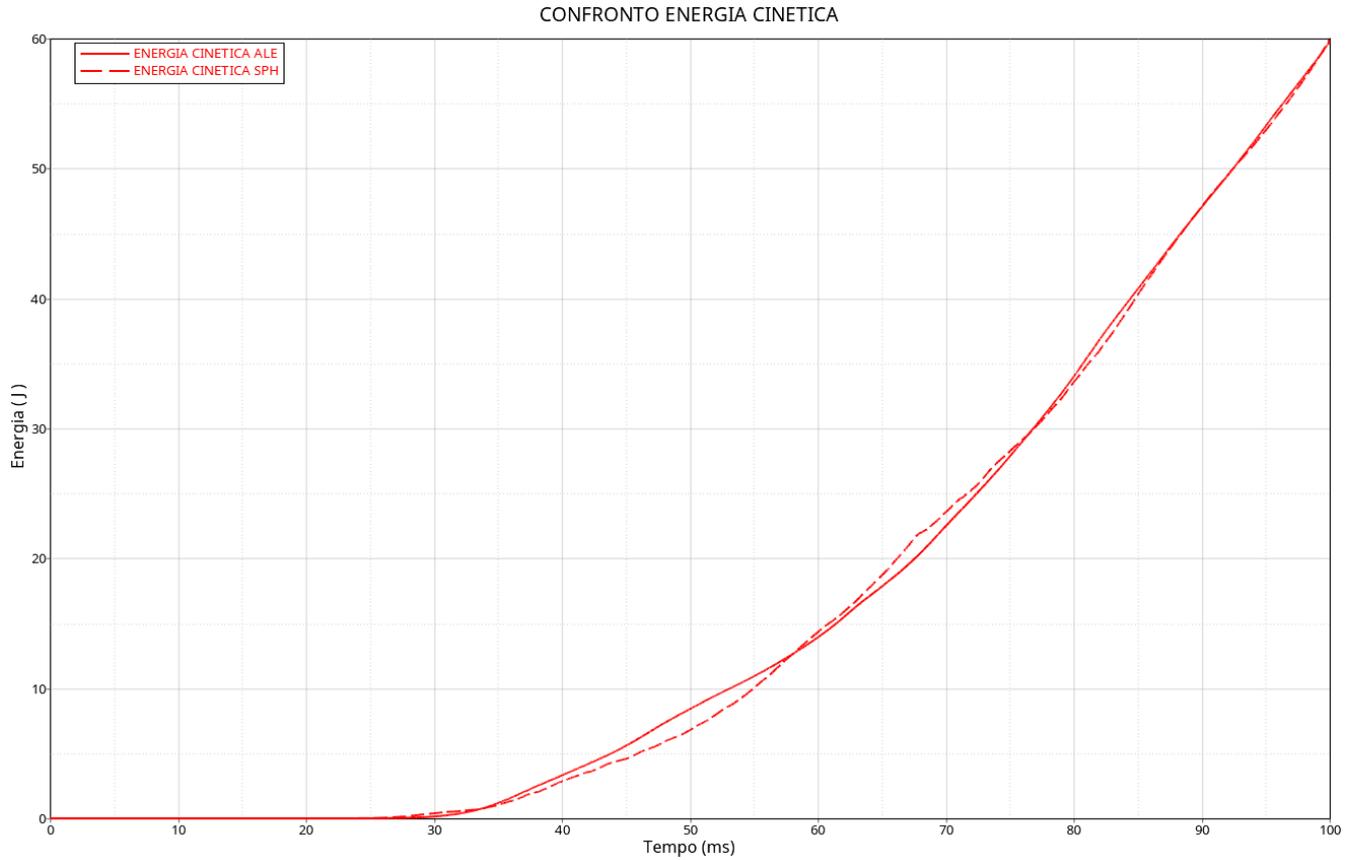


Figura 6.13: Confronto dell'energia cinetica della parete frontale superiore

Per completezza, in figura 6.14 viene mostrato il confronto dell'energia totale, ottenuta come somma tra energia interna e energia cinetica. Come ci si aspetta, nell'approccio SPH l'energia totale è maggiore di quella calcolata nell'approccio ALE, coerentemente con il fatto che, a parità di energia cinetica, l'energia interna è maggiore nell'approccio SPH.

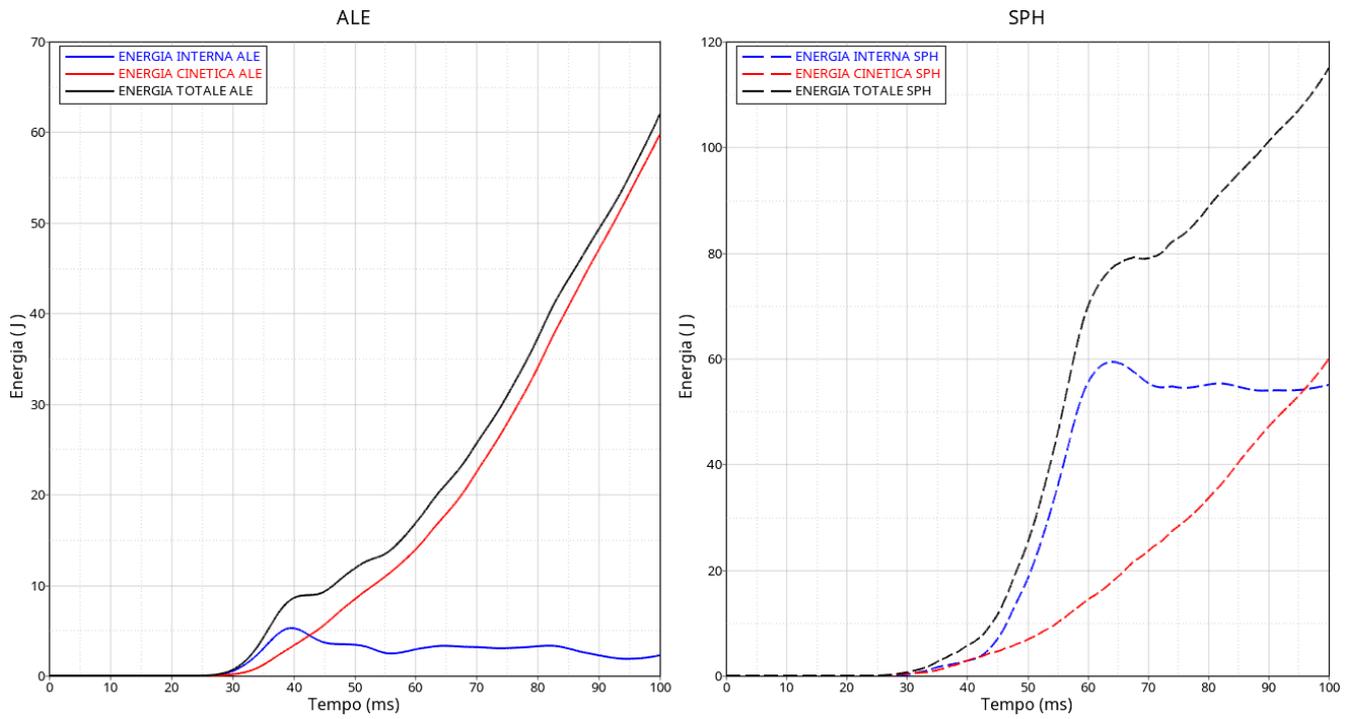


Figura 6.14: Confronto dell'energia totale della parete frontale superiore

# Capitolo 7

## Conclusioni

Per riassumere quanto è emerso dal confronto dei risultati della simulazione del serbatoio sottoposto a carichi di sciabordio, si può dire che:

- con l'approccio **ALE** si ottiene un comportamento del liquido più vicino alla realtà, mentre lo stato di sollecitazione del serbatoio è tendenzialmente più basso rispetto a quello calcolato l'approccio SPH;
- con l'approccio **SPH** si ottiene un comportamento del liquido non propriamente realistico, mentre il serbatoio presenta uno stato di sollecitazione tendenzialmente più alto rispetto a quello calcolato con l'approccio ALE.

Se aggiungiamo che l'approccio ALE ha avuto un **minor costo computazionale**, dal momento in cui, a parità di risorse di calcolo, ha impiegato circa la metà del tempo di calcolo richiesto dall'approccio SPH (tabella 7.1), si può pensare di confermare la superiorità dell'approccio ALE nei confronti dell'approccio SPH per questo tipo di analisi.

	ALE	SPH
Risorse di calcolo	72 processori da 32 GB di RAM	72 processori da 32 GB di RAM
Tempo di calcolo	06h 16m 16s.	14h 14m 24s.

Tabella 7.1: Confronto del costo computazionale

---

Tuttavia, manca un dato chiave, ossia l'**evidenza sperimentale**. Infatti, se possiamo dire che il moto del liquido all'interno del serbatoio mostrato dall'approccio ALE sia più corretto, non si può avere altrettanto la certezza sul resto dei risultati in termini di sollecitazioni ed energia. Per tale motivo, l'esecuzione di una prova sperimentale, nelle stesse condizioni con cui sono state svolte queste simulazioni, ci può dare una valutazione su quale tra i due approcci si sia avvicinato di più al risultato reale. Di fatto, quello riportato in questa Tesi è principalmente uno studio metodologico, la cui finalità è far emergere le differenze tra due diversi approcci di calcolo.

Per la fase di *pre-processing* sono stati utilizzati i software *HyperMesh* e *HyperCrash*, facenti parte della *suite* di ALTAIR. Entrambi i software sono risultati efficaci nella preparazione del modello. Durante la fase di *set-up* del modello, è stata riscontrata una maggior difficoltà nel ottenere un modello ALE adatto al calcolo. Infatti, il risultato ottenibile dall'approccio ALE è particolarmente viziato dalla forma degli elementi: se questi risultano troppo deformati, si può addirittura non ottenere alcun risultato a causa degli errori di distorsione. Da questo punto di vista, l'approccio SPH è risultato più malleabile, vista la possibilità di discretizzare con le particelle volumi anche dalla geometria molto complessa.

Nel settore dell'ingegneria, le analisi virtuali mediante software CAE<sup>1</sup> rappresentano uno strumento ormai imprescindibile per la fase di progettazione e validazione di un prodotto. La continua ricerca e sviluppo di metodi sempre più efficaci e precisi è al giorno d'oggi un tassello importante per l'innovazione tecnologica, permettendo di simulare sistemi sempre più complessi con il minor margine di errore possibile. In

---

<sup>1</sup>Computer Aided Engineering

---

questa Tesi sono stati analizzati due metodi numerici pensati per l'analisi di fenomeni complessi, mettendo in luce l'importanza di studiare approcci di calcolo sempre più efficaci al fine di prevedere potenziali fenomeni critici.

# Bibliografia

- [1] A. Gugliotta, "Elementi Finiti" (2002), Politecnico di Torino, Dipartimento di Meccanica. Turin, Italy.
- [2] Song, Guangtian, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method Investigation On Fuel Tank Strap Simulation Under Proving Ground Condition" (2016). Wayne State University Dissertations. 1593.
- [3] L. G. Margolin, "Introduction to: An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Computing Method for All Flow Speeds" (1997). Los Alamos National Laboratory. Los Alamos, New Mexico 87545.
- [4] N. Aquelet and M. Souli, "A new ALE formulation for sloshing analysis" (2003), Université de Lille, Laboratoire de Mécanique de Lille, CNRS 1441, Bd Paul Langevin Villeneuve d'Ascq, France.
- [5] Jean Donea, Antonio Huerta, J.-Ph. Ponthot<sup>1</sup> and A. Rodríguez-Ferran, "Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods" (2004), Université de Liège, Liège, Belgium Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.
- [6] Dennis Carlsson, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Simulations of a Pressure Pulse inside a Flexible Porous Fabric Bag" (2014), Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden

- [7] Stavros A. Savidis, Daniel Aubram, Frank Rackwitz, "Arbitrary Lagrange-Eulerian Finite Element Formulation for Geotechnical Construction Processes" (2008), Soil Mechanics and Geotechnical Engineering Division, Technical University of Berlin, Secr. TIB1-B7, Building 13b, 25, Gustav-Meyer-Allee 13355 Berlin, Germany
- [8] Steven J. Lind, Benedict D. Rogers and Peter K. Stansby, "Review of smoothed particle hydrodynamics: towards converged Lagrangian flow modelling" (2020), Department of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, University of Manchester, Manchester M13 9PL, UK
- [9] Jingxiao Xu<sup>1</sup>, Jason Wang<sup>1</sup> and Mhamed Souli<sup>2</sup>, "SPH and ALE formulations for sloshing tank analysis" (2015), <sup>1</sup>LSTC, Livermore Software Technology Corp. Livermore CA 94550, USA, <sup>2</sup>Université de Lille Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, France
- [10] Z. Ozdemir<sup>1,4</sup>, M. Moatamedi<sup>2</sup>, Y.M. Fahjan and<sup>3</sup> M. Souli<sup>4</sup>, "ALE and Fluid Structure Interaction for Sloshing Analysis" (2009), <sup>1</sup>Bogazici University, Kandilli Observatory, Cengelkoy, Istanbul, TURKEY, <sup>2</sup> Cranfield University, Cranfield, Bedfordshire, MK43 0AL UK, <sup>3</sup> Gebze Institute of Technology (GYTE), Cayirova Campus, Kocaeli, TURKEY, <sup>4</sup>Université de Lille, Laboratoire de Mécanique de Lille, CNRS 1441, Bd Paul Langevin Villeneuve d'Ascq, FRANCE
- [11] X.Y. Cao, F.R. Ming, A.M. Zhang, "Sloshing in a rectangular tank based on SPH simulation" (2014), College of Ship building and Ocean Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

- [12] Chen Jiang<sup>1,2</sup> , G.R. Liu<sup>2</sup>, "An Average Nodal Pressure Face-based Smoothed Finite Element Method (FS-FEM) for 3D nearly-incompressible solids" (2007),  
<sup>1</sup>College of Mechanical Engineering and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha, China. <sup>2</sup>Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, University of Cincinnati, USA
- [13] Altair Radioss User Guide 2021