

**POLITECNICO DI TORINO**

**Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale**



**Tesi di Laurea Magistrale**

**Escape maneuvers from Moon-Earth  
Lagrangian point**

**Relatore**

**Prof. Lorenzo CASALINO**

**Candidato**

**Simona D'AGOSTINO**

**Aprile 2022**



# Sommario

In questa tesi si considera l'ottimizzazione di traiettorie di evasione dal punto EML2. Il Punto Lagrangiano  $L_2$  del sistema Terra-Luna è di grande interesse in questo periodo storico per le future missioni verso la Luna, in particolare per il programma Artemis.

Questo studio è stato fatto attraverso l'utilizzo di un codice in Fortran 90, sviluppato per risolvere i problemi di ottimizzazione con opportune subroutine, che descrivono il modello gravitazionale e la perturbazione lunisolare. Il codice prende in esame le manovre di escape che deve affrontare un satellite provvisto di propulsori Hall, che staziona nel punto  $L_2$ , per sfuggire dalla sfera di influenza della Terra.

Il metodo utilizzato è l'ottimizzazione con metodi indiretti, che fornisce equazioni di Eulero-Lagrange con variabili aggiuntive e condizioni al contorno per l'ottimizzazione di un indice di prestazione, in questo caso la massa finale che deve essere massima essendo un parametro influente sui costi di missione.

# Summary

In this thesis, an attempt has been made to take extra steps regarding the optimization of evasion trajectories from the EML2 point. The L2 point of the Earth-Moon system is of great interest at this time in history for future missions to the Moon, particularly for the Artemis program. This study was done through the use of a code in Fortran 90, developed to solve optimization problems, and describes the gravitational model and lunisolar perturbation. The code examines the escape maneuvers faced by a satellite equipped with Hall thrusters. The method used is optimization by indirect methods which provides Euler-Lagrange equations with additional variables and boundary conditions for the optimization of a performance index which, in this case, is the final mass. The latter must be maximum since it is an influential parameter on mission costs.

# Indice

|  |     |
|--|-----|
| <b>Elenco delle tabelle</b>  | VI  |
| <b>Elenco delle figure</b>   | VII |
| <b>1 Missioni dal sistema Terra-Luna</b>   | 1   |
| 1.1 Missioni passate . . . . .   | 2   |
| 1.2 Missioni future . . . . .  | 5   |
| <b>2 Fondamenti di meccanica orbitale</b>  | 8   |
| 2.1 Problema circolare dei tre corpi ristretto . . . . .                                     | 8   |
| 2.1.1 Punti Lagrangiani . . . . .  | 11  |
| 2.2 Missioni interplanetarie . . . . .   | 16  |
| 2.2.1 Manovre di evasione . . . . .  | 16  |
| <b>3 Metodo di ottimizzazione indiretta</b>  | 21  |
| 3.1 Teoria del controllo ottimale – OTC . . . . .  | 21  |
| 3.1.1 Problema differenziale ai limiti . . . . .   | 25  |
| <b>4 Problema dinamico</b>   | 30  |
| 4.1 Modello dinamico . . . . .   | 30  |
| 4.1.1 Variabili di stato e variabili aggiuntive . . . . .                                    | 32  |
| 4.1.2 Perturbazioni . . . . .  | 34  |
| 4.1.3 Quantità Adimensionali . . . . .   | 39  |
| <b>5 Risultati</b>   | 41  |
| 5.1 Manovra di evasione da L2 del sistema Terra-Luna . . . . .                               | 41  |
| 5.1.1 Manovra di evasione con $C_3$ fissato . . . . .  | 43  |
| 5.1.2 Manovra di evasione sul piano della traiettoria lunare, con<br>$C_3$ fissato . . . . . | 49  |
| 5.1.3 Confronto fra la manovra di evasione libera o vincolata su<br>un piano . . . . .       | 55  |

|                      |           |
|----------------------|-----------|
| <b>6 Conclusioni</b> | <b>57</b> |
| <b>Bibliografia</b>  | <b>59</b> |

# Elenco delle tabelle

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5.1  | Tempo adimensionale utilizzato per la data di partenza. . . . .   | 42 |
| 5.2  | Valori di massa finale ed arco propulsivo con $t_0$ fissato e $C_3$ lasciato libero. . . . .                                      | 42 |
| 5.3  | Missioni con durata di 80 giorni. . . . .   | 44 |
| 5.4  | Missione con durata di 85 giorni. . . . .   | 44 |
| 5.5  | Missione con durata di 90 giorni. . . . .   | 45 |
| 5.6  | Missione con durata di 95 giorni. . . . .   | 46 |
| 5.7  | Missione con durata di 100 giorni. . . . .  | 47 |
| 5.8  | Confronto del valore massimo della $m_f$ per ogni missione con differente durata. . . . .   | 48 |
| 5.9  | Missione con durata di 80 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .   | 50 |
| 5.10 | Missione con durata di 85 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .   | 50 |
| 5.11 | Missione con durata di 90 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .   | 51 |
| 5.12 | Missione con durata di 95 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .   | 52 |
| 5.13 | Missione con durata di 100 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .  | 53 |
| 5.14 | Confronto del valore massimo della $m_f$ per ogni missione con differente durata, per missioni con componente $u_z = 0$ . . . . . | 54 |
| 5.15 | Confronto dei risultati dei due casi presi in esame. . . . .  | 56 |

# Elenco delle figure

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Punti Lagrangiani nel sistema Terra-Luna. . . . .  | 2  |
| 1.2  | Ricostruzione della traiettoria del programma Artemis-P1 . . . . .   | 3  |
| 1.3  | Ricostruzione della traiettoria della missione Chang'e 5-T1 . . . . .  | 4  |
| 1.4  | Ricostruzione della missione Queqiao . . . . .   | 5  |
| 1.5  | Ricostruzione del Programma Artemis . . . . .  | 6  |
| 1.6  | Ricostruzione dell'orbita del Lunar Gateway . . . . .  | 6  |
| 2.1  | Rappresentazione del Problema dei tre corpi . . . . .  | 9  |
| 2.2  | Punti Lagrangiani nel sistema Terra-Luna. . . . .  | 13 |
| 2.3  | Posizione dei punti di Lagrange del sistema Terra-Luna. . . . .  | 15 |
| 2.4  | Manovra di evasione verso un pianeta esterno. . . . .  | 19 |
| 2.5  | Manovra di evasione verso un pianeta interno. . . . .  | 20 |
| 4.1  | Non sfericità della Terra. . . . .   | 36 |
| 4.2  | Schema geometrico della perturbazione gravitazionale. . . . .  | 37 |
| 4.3  | Schema geometrico del cono d'ombra. . . . .  | 39 |
| 5.1  | Missioni con durata di 80 giorni. . . . .  | 44 |
| 5.2  | Missioni con durata di 85 giorni. . . . .  | 45 |
| 5.3  | Missioni con durata di 90 giorni. . . . .  | 46 |
| 5.4  | Missioni con durata di 95 giorni. . . . .  | 47 |
| 5.5  | Missioni con durata di 100 giorni. . . . .   | 48 |
| 5.6  | Confronto del valore massimo della $m_f$ per ogni missione con diffe-<br>rente durata. . . . .                                     | 49 |
| 5.7  | Missioni con durata di 80 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .  | 50 |
| 5.8  | Missioni con durata di 85 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .  | 51 |
| 5.9  | Missioni con durata di 90 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .  | 52 |
| 5.10 | Missioni con durata di 95 giorni, con $u_z = 0$ . . . . .  | 53 |
| 5.11 | Missioni con durata di 100 giorni, componente $u_z = 0$ . . . . .  | 54 |
| 5.12 | Confronto del valore massimo della $m_f$ per ogni missione con diffe-<br>rente durata, per missioni componente $u_z = 0$ . . . . . | 55 |

|  |    |
|--|----|
| 5.13 Confronto fra missioni diverse. . . . . | 56 |
|--|----|



# Capitolo 1

## Missioni dal sistema Terra-Luna

Il “problema dei tre corpi” tratta di problemi della dinamica, relativi alla meccanica classica. Esso consiste nel calcolare l’evoluzione del sistema dei tre corpi note la posizione iniziale, la massa e la velocità dei corpi soggetti all’influsso della reciproca attrazione gravitazionale. Questo problema, semplificato considerando il moto reciproco circolare, e considerando uno dei tre corpi con massa trascurabile rispetto agli altri due, è stato risolto per la prima volta da Lagrange. La soluzione prevede la presenza di 5 punti di equilibrio nel sistema Terra-Luna, nel quale una piccola massa riesce ad orbitare con uno schema costante insieme alle due masse più grandi. In questi punti, chiamati quindi Punti Lagrangiani, la forza gravitazionale, esercitata dalle masse maggiori su un oggetto, si bilancia con la forza centripeta richiesta per far sì che questo piccolo oggetto si muova con esse. Il problema matematico sarà discusso più avanti.

I punti Lagrangiani sono oggetto di grande interesse per la comunità scientifica, e in particolare il punto  $L_2$ ; punto che si trova a circa 60000 km dalla Luna. In questo capitolo si vuole dare una breve panoramica di alcune missioni che occupano il punto  $L_2$ : prendendo in considerazione le missioni passate, successivamente considerando missioni future.

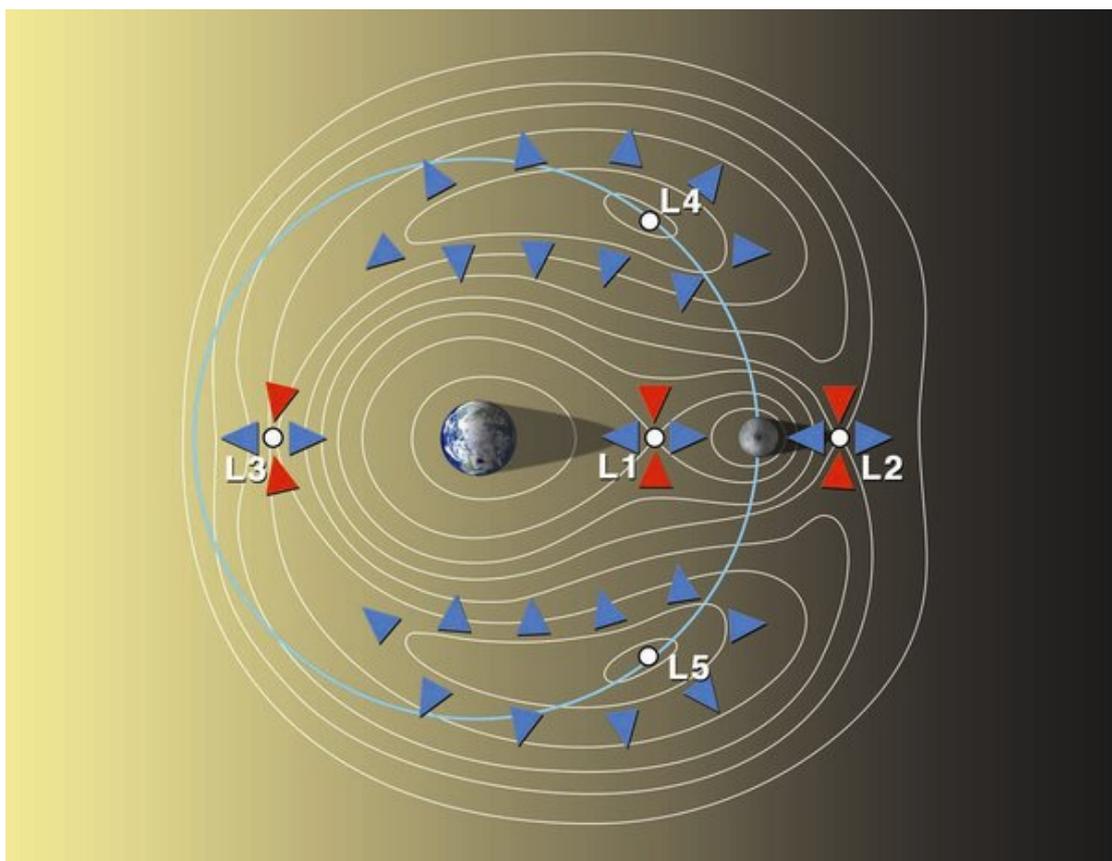


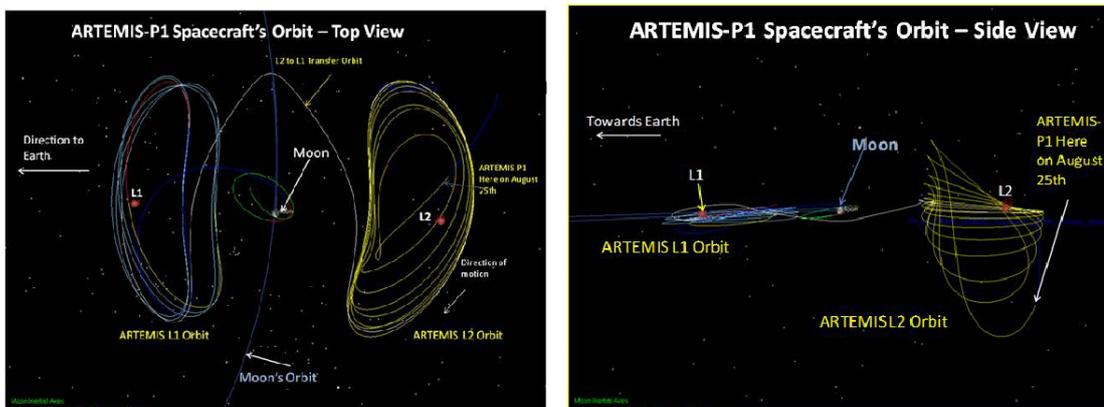
Figura 1.1: Punti Lagrangiani nel sistema Terra-Luna.

## 1.1 Missioni passate

Prima di analizzare il problema preso in esame in questa tesi, cioè la manovra di evasione dalla sfera di influenza della Terra partendo dal punto  $L_2$  del sistema Terra-Luna, si è guardato al passato, cioè ad alcune delle missioni riguardanti il punto Lagrangiano  $L_2$  già avvenute.

*Artemis P1.* La missione Artemis P1 è iniziata nel luglio 2009, associata alla missione Artemis P2, destinata però ad arrivare nel punto  $L_1$ . In un anno e mezzo è arrivata a destinazione, cioè nel punto di Lagrange  $L_2$ , ed è stata la prima missione che ha permesso ad un veicolo spaziale di entrare in orbita attorno a un libration point Terra-Luna. Artemis P1 è entrata con successo nell'orbita lunare, con un'orbita iniziale di  $3.543 \times 27.000$  chilometri, in data 27 giugno 2011. Nel momento in cui entrambi i veicoli spaziali si sono trovati in orbita, hanno iniziato

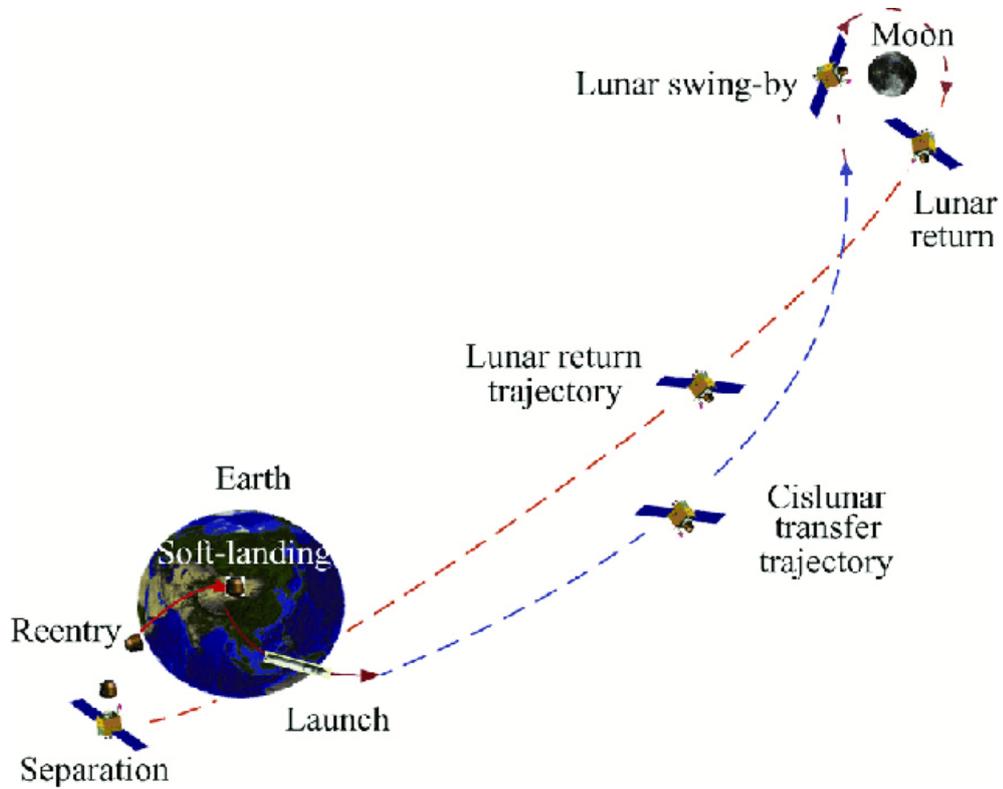
a fornire misurazioni 3D del campo magnetico lunare, per determinarne l'influenza del vento solare sulle particelle dei satelliti, in base alla zona presa in esame. [1]



**Figura 1.2:** Ricostruzione della traiettoria del programma Artemis-P1

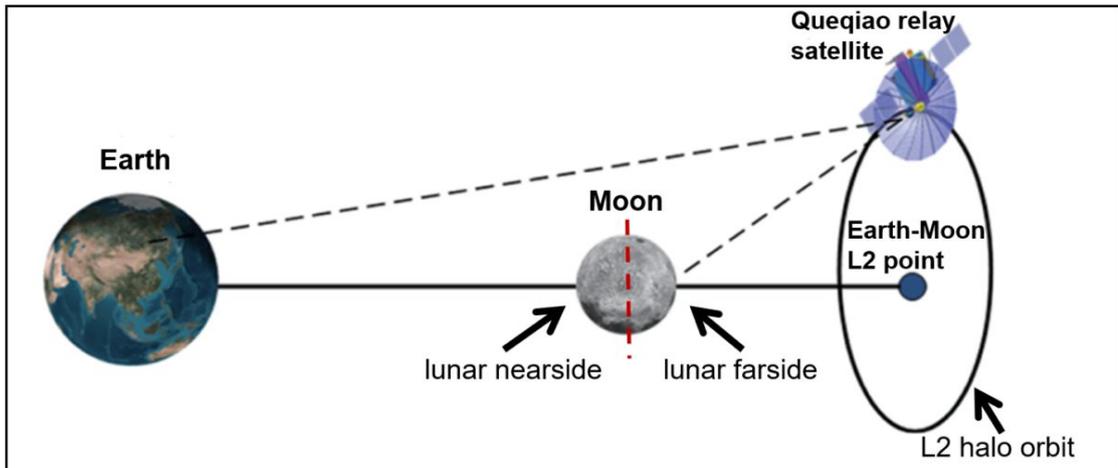
*Chang'e 5-T1.* Chang'e 5-T1 è una sonda spaziale sperimentale, lanciata nell'ottobre del 2014 dall'Agenzia spaziale cinese (CNSA), con lo scopo di verificare le funzionalità della capsula di rientro che sarà utilizzata nella missione Chang'e 5, destinata alla raccolta di campioni lunari, quindi il suo ritorno è fondamentale ai fini della missione. La sonda in questione, perciò, ha percorso una traiettoria di ritorno libero, ovvero procedendo direttamente verso la Luna, eseguendo un giro dietro di essa e facendo ritorno verso la Terra. Così facendo, è stato possibile eseguire la prova del sistema di rientro ad alta velocità. La sonda non era equipaggiata di strumenti scientifici, ma era dotata di fotocamere utilizzate per verificare che il dispiegamento dei pannelli fotovoltaici fosse svolto nel modo corretto. Queste fotocamere sono state anche sfruttate per raccogliere alcuni scatti, in particolare, della faccia nascosta della Luna, della Terra e del sistema Terra-Luna. Il 31 ottobre 2014 la capsula si è separata dal modulo di servizio, a 5000 km di altitudine dalla Terra, per poi atterrire nella Mongolia Interna. Il modulo di servizio, invece, ha evitato il rientro eseguendo una correzione di rotta che l'ha posto su un'orbita geocentrica. Passando per il perigeo il 17 novembre, la sonda è transitata in prossimità della Luna il 23 novembre, per poi raggiungere il punto lagrangiano  $L_2$ , immettendosi in un'orbita di Lissajous che ha mantenuto fino al 4 gennaio 2015. Il 10 gennaio la sonda è entrata in un'orbita attorno alla Luna con periastro alla quota di 200 km e apoastro di 5300 km. La missione è continuata in un'orbita che

è stata successivamente circolarizzata. [2]



**Figura 1.3:** Ricostruzione della traiettoria della missione Chang'e 5-T1

*Queqiao*. Queqiao è il satellite per le comunicazioni per la missione lunare Chang'e 4. Lanciato il 21 maggio 2018 dall'Agenzia spaziale cinese (CNSA), il 4 marzo 2019 è arrivato in un'orbita Halo attorno al Punto di Lagrange  $L_2$  del sistema Terra-Luna. Da quella posizione consente le comunicazioni tra il lander Chang'e 4 e la Terra. Il veicolo spaziale è dotato di un'antenna parabolica di  $4.2m$ , e trasporta anche il Netherlands-China Low Frequency Explorer (NCLE), che è un esperimento di radioastronomia progettato per misurare le emissioni radio nell'universo primordiale, studiare la meteorologia spaziale e osservare l'ambiente radio nelle vicinanze della Terra e della Luna. [3]



**Figura 1.4:** Ricostruzione della missione Queqiao

## 1.2 Missioni future

Per quanto riguarda le missioni future si è scelto di citare la più importante, cioè il programma spaziale che prevede il ritorno dell'uomo sulla Luna: il programma Artemis.

Il programma Artemis è un programma di volo spaziale con equipaggio in fase di sviluppo principalmente dalla NASA, da aziende private statunitensi e dai partner internazionali: ESA, JAXA e Canadian Space Agency (CSA). L'obiettivo è quello di portare entro il 2024 "la prima donna e il prossimo uomo" sulla Luna, in particolare nella regione del polo sud lunare.

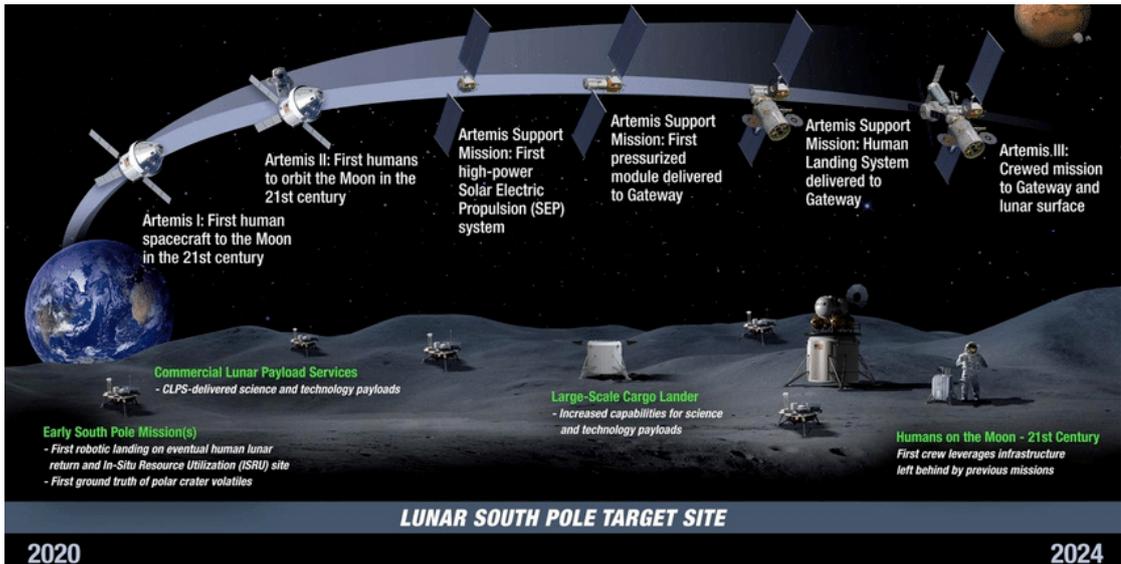


Figura 1.5: Ricostruzione del Programma Artemis

Il programma Artemis è uno dei motivi per cui, in questo momento storico, il punto  $L_2$  del sistema Terra-Luna è di grande interesse, perché questo programma prevede l'avamposto nelle vicinanze di EML2, il Lunar Orbital Platform-Gateway (LOP-G) in un sinodico meridionale 9:2 Near Rectilinear Halo Orbit (NRHO), il quale è una posizione ottimale per minimizzare le manovre di station keeping e per eliminare le eclissi quasi completamente.

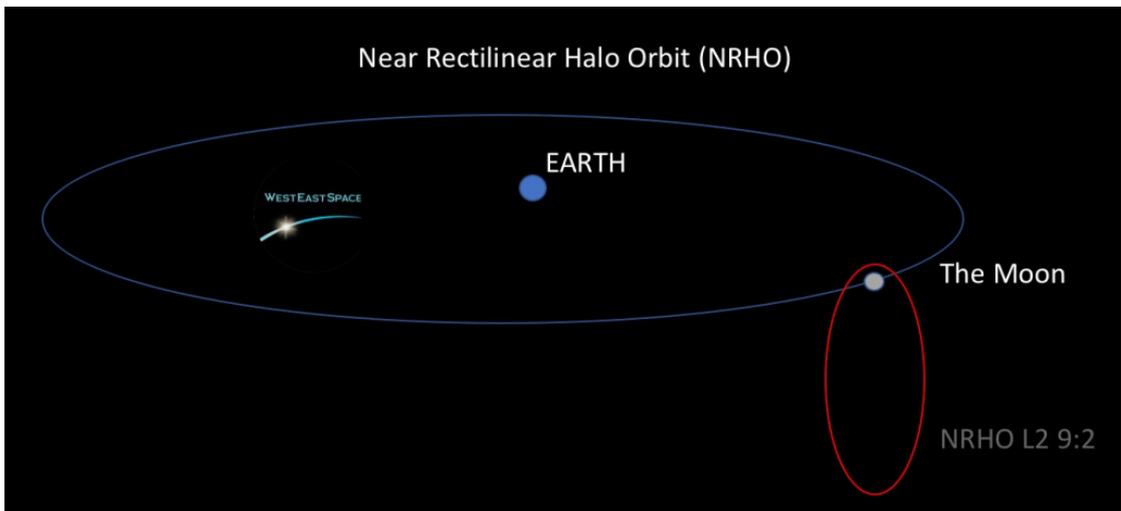


Figura 1.6: Ricostruzione dell'orbita del Lunar Gateway

Gli obiettivi a lungo termine del programma sono quelli di permettere una presenza autosufficiente sulla Luna, quindi di rendere l'esplorazione lunare più accessibile, di sviluppare nuove tecnologie, di testare le attività spaziali in un ambiente più ostile dell'orbita terrestre bassa, di gettare le basi per spedizioni umane su Marte, e, più in generale, semplificare l'esplorazione dello spazio profondo.

[4]

## Capitolo 2

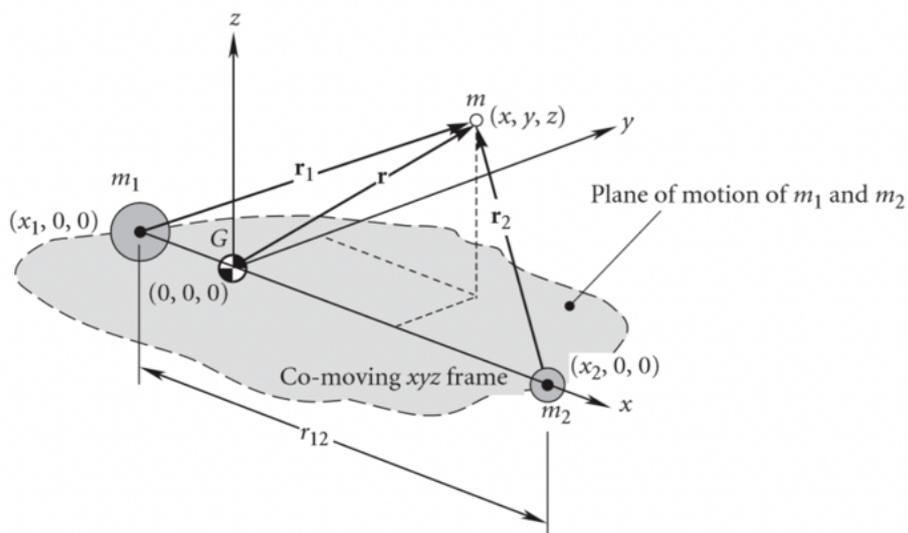
# Fondamenti di meccanica orbitale

In questo capitolo si vogliono dare le basi per poi affrontare il problema dinamico preso in esame in questo lavoro di tesi. Infatti, prima di affrontare il problema dinamico, è necessario dare una panoramica della meccanica del volo spaziale, analizzando il modello utilizzato. In particolare analizzando il problema dei tre corpi ristretto, andando ad approfondire la soluzione di Lagrange al problema, e le missioni interplanetarie con uno zoom sulle manovre di evasione.

### 2.1 Problema circolare dei tre corpi ristretto

Introduciamo, adesso, il problema circolare dei tre corpi ristretto (Restricted Three-Body Circular Problem, R3BCP) per analizzare la soluzione di Lagrange, in particolare per spiegare cosa sia il punto EML2, punto di partenza della traiettoria studiata. Il problema circolare dei tre corpi ristretto è basato su due ipotesi principali:

- si considerano due corpi principali, del quale uno ha massa trascurabile rispetto all'altro, ed un terzo corpo, anch'esso con massa trascurabile e che non influenzerà gli altri due corpi con interazioni gravitazionali.
- i corpi principali percorrono delle traiettorie circolari attorno al centro di massa del sistema.



**Figura 2.1:** Rappresentazione del Problema dei tre corpi

Il sistema Terra-Luna-Satellite viene modellizzato e studiato tramite le ipotesi del R3BCP. Si definiscono due costanti:

$$M = m_1 m_2 \quad (2.1)$$

$$\mu = \frac{m_2}{M} \quad (2.2)$$

In cui  $m_1$  ed  $m_2$  corrispondono alle masse dei due corpi principali, e hanno posizione rispetto al centro di massa del sistema, schematizzato in figura 2.1:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} -\mu r_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} (1 - \mu)r_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La posizione del terzo corpo,  $m$ , sarà definita dai vettori  $r_1$  ed  $r_2$ :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} (x + \mu)r_{12} \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} (x - (1 - \mu))r_{12} \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Il sistema di riferimento non inerziale, ruota con velocità angolare  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM^3}{r_{12}}} \quad (2.3)$$

L'equazione del moto sarà quindi:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) + 2\omega \wedge \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}(F_1 + F_2) \quad (2.4)$$

In cui  $F_1$  ed  $F_2$  sono le forze gravitazionali che i due corpi esercitano sul satellite:

$$F_1 = -G \frac{(1 - \mu)Mm}{r_1^3} r_1 \quad (2.5)$$

$$F_2 = -G \frac{\mu Mm}{r_2^3} r_2 \quad (2.6)$$

L'equazione del moto nelle tre coordinate sarà:

$$\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega \dot{y} = -GM \frac{1 - \mu}{r_1^3} (x + \mu r_{12}) - GM \frac{\mu}{r_2^3} [x + (1 - \mu)r_{12}] \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega \dot{x} = -GM \frac{1 - \mu}{r_1^3} y - GM \frac{\mu}{r_2^3} y \quad (2.8)$$

$$\ddot{z} = -GM \frac{1 - \mu}{r_1^3} z - GM \frac{\mu}{r_2^3} z \quad (2.9)$$

Facendo delle opportune sostituzioni, queste equazioni si possono scrivere nella forma adimensionale. Le sostituzioni sono le seguenti:

$$\rho = \frac{r}{r_{12}} \rightarrow \xi = \frac{x}{r_{12}}, \quad \eta = \frac{y}{r_{12}}, \quad \zeta = \frac{z}{r_{12}} \quad (2.10)$$

$$\tau = t\omega \rightarrow \frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau} \quad (2.11)$$

Applicando le sostituzioni, le equazioni del moto 2.7, 2.8, 2.9 si riscrivono nel seguente modo:

$$\xi'' - \xi - 2\eta' = -(1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} \quad (2.12)$$

$$\eta'' - \eta - 2\xi' = -(1 - \mu)\frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu\frac{\eta}{\rho_2^3} \quad (2.13)$$

$$\zeta'' = -(1 - \mu)\frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu\frac{\zeta}{\rho_2^3} \quad (2.14)$$

Introduciamo adesso il potenziale gravitazionale:

$$U = G\frac{m_1}{r_1} + G\frac{m_2}{r_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.15)$$

che in forma adimensionale si scrive:

$$u = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \quad (2.16)$$

Derivando il potenziale rispetto alle coordinate adimensionali e sostituendo nelle equazioni del moto, si ricavano le nuove equazioni:

$$\xi'' - 2\eta' = \frac{\delta u}{\delta \xi} \quad (2.17)$$

$$\eta'' - 2\xi' = \frac{\delta u}{\delta \eta} \quad (2.18)$$

$$\zeta'' = \frac{\delta u}{\delta \zeta} \quad (2.19)$$

### 2.1.1 Punti Lagrangiani

Dalla trattazione del R3BCP, sviluppata nel precedente paragrafo, si identificano 5 posizioni particolari nello spazio, in cui le interazioni gravitazionali e quelle inerziali sono in equilibrio. Questi punti, chiamati Punti Lagrangiani, sono molto importanti nel momento in cui un veicolo spaziale si trova in uno di essi, infatti, ciò permette al veicolo di ruotare solidalmente al sistema. Essi sono caratterizzati dalle seguenti condizioni:

$$\xi' = 0, \quad \xi'' = 0 \quad (2.20)$$

$$\eta' = 0, \quad \eta'' = 0 \quad (2.21)$$

$$\zeta' = 0, \quad \zeta'' = 0 \quad (2.22)$$

Le equazioni del moto in questi punti saranno descritte da:

$$\frac{\delta u}{\delta \xi} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\delta u}{\delta \eta} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\delta u}{\delta \zeta} = 0 \quad (2.25)$$

Da qui si ricava che i punti Lagrangiani sono quei punti in cui si definisce il minimo della funzione potenziale nel sistema a tre corpi. Per soddisfare le equazione 2.25 si dovrà anche scrivere:

$$\zeta = 0 \quad (2.26)$$

Tutti i punti Lagrangiani, per definizione, giacciono sullo stesso piano. Questi punti posso essere divisi in due categorie in base alla loro posizione sul piano. La prima categoria comprende i punti collineari, che sono caratterizzati dalla loro instabilità; la seconda categoria comprende i punti equilateri che sono caratterizzati, invece, dalla stabilità.

Le condizioni grazie alle quali si ottengono i punti Collineari, chiamati così per il fatto che giacciono sulla stessa retta, come mostrato in figura 2.3, sono le seguenti:

$$\zeta = 0 \quad (2.27)$$

$$\eta = 0 \quad (2.28)$$

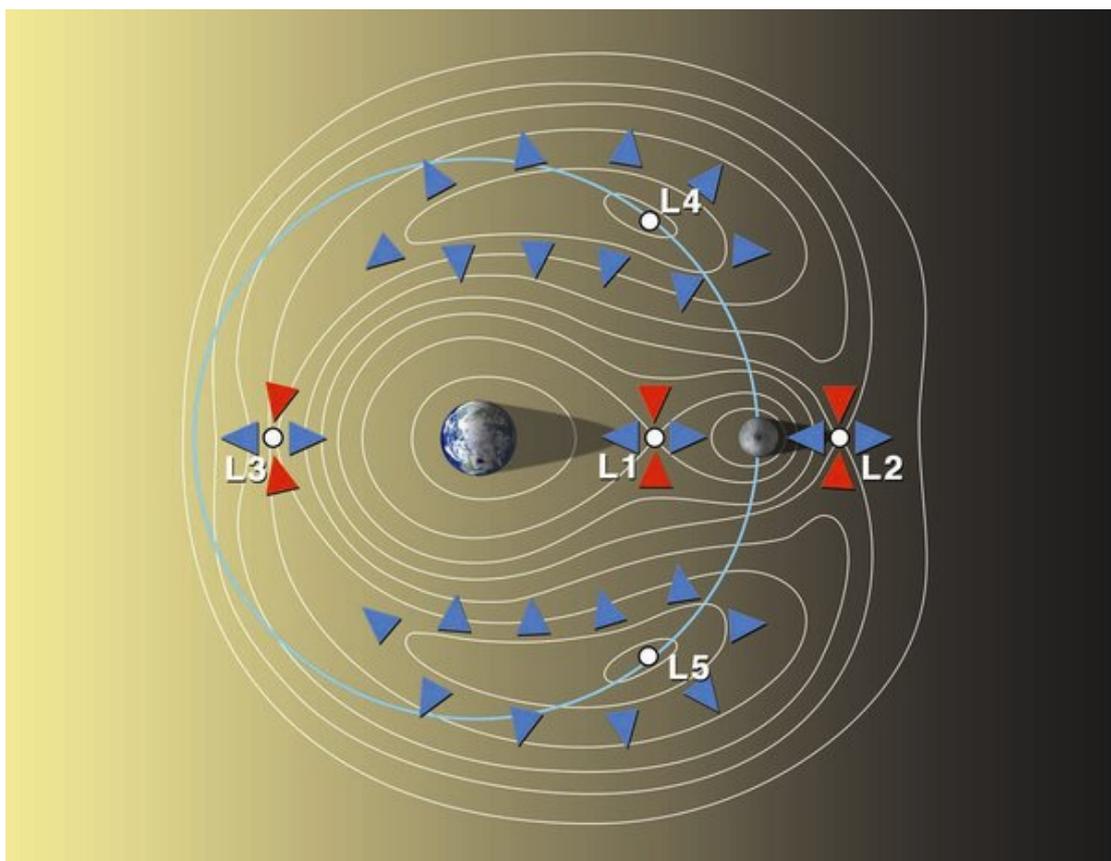
Come detto precedentemente, questi punti sono, nella realtà, delle zone di equilibrio instabile; infatti se c'è una perturbazione esterna che agisce sul satellite, sufficientemente intensa da riuscire a spostarlo esso continuerà ad allontanarsi dal punto lagrangiano dove stazionava. Quindi, se l'obiettivo della missione fosse quello di mantenere il veicolo spaziale in uno di questi punti lagrangiani collineari, saranno necessarie manovre di station keeping.

I punti Collineari sono tre:

- Punto Lagrangiano  $L_1$

Lo si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 = 1 \end{cases}$$



**Figura 2.2:** Punti Lagrangiani nel sistema Terra-Luna.

ed imponendo:

$$-\mu < \xi < (1 - \mu) \quad (2.29)$$

Esso è caratterizzato da:

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \quad (2.30)$$

- Punto Lagrangiano  $L_2$

Lo si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_1 - \rho_2 = 1 \end{cases}$$

ed imponendo:

$$\xi > (1 - \mu) \quad (2.31)$$

Esso è caratterizzato da:

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} \quad (2.32)$$

ma in direzione opposta rispetto al punto  $L_1$ .

- Punto Lagrangiano  $L_3$

Lo si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu) \frac{\xi + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{\xi - (1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0 \\ \rho_2 - \rho_1 = 1 \end{cases}$$

ed imponendo:

$$\xi > -\mu \quad (2.33)$$

Esso è caratterizzato da:

$$\rho_1 = 1 \quad (2.34)$$

$$\rho_2 = 2 \quad (2.35)$$

Le condizioni per le quale, invece, si ottengono i punti Equilaterali, chiamati così per il fatto che sono localizzati alla stessa distanza dalle due masse principali del sistema, sono le seguenti:

$$\zeta = 0 \quad (2.36)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 0 \quad (2.37)$$

I due punti equilaterali si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \xi - (1 - \mu)(\xi + \mu) - \mu[\xi - (1 - \mu)] = 0 \\ \eta - (1 - \mu)\eta - \eta\mu = 0 \end{cases}$$

I punti sono:

- Punto Lagrangiano  $L_4$

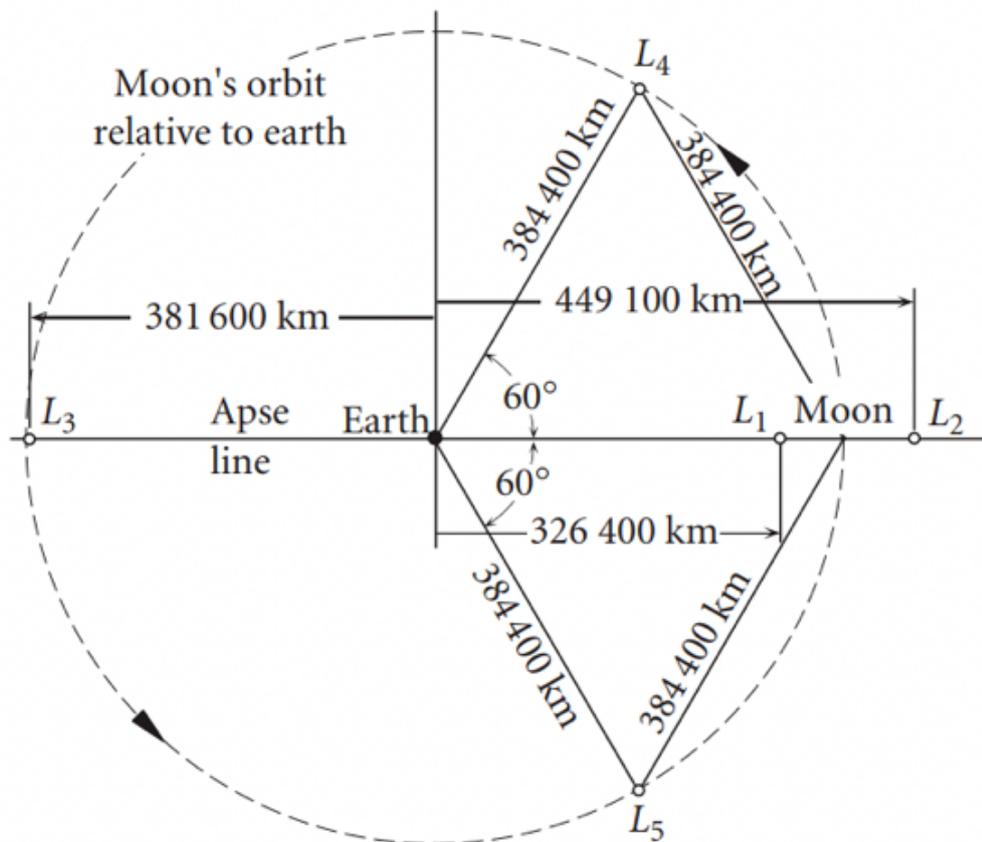
$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} - \mu \\ \eta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- Punto Lagrangiano  $L_5$

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} - \mu \\ \eta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

I punti equilaterali sono situati ai vertici di due triangoli equilateri; sugli altri due vertici si trovano le due masse principali del sistema. Infatti, i due punti ruotano sulla stessa orbita della massa  $m_2$  intorno a  $m_1$ , con  $L_4$  che anticipa la seconda massa di  $60^\circ$  mentre  $L_5$  segue  $m_2$  della stessa distanza angolare. I punti equilaterali sono punti di equilibrio stabile; quindi, se una perturbazione agisse sul veicolo spaziale situato in questi due punti, esso tornerebbe nella sua posizione originaria senza alcun consumo di propellente.

Nel sistema reale i punti Lagrangiani non sono puntiformi ma rappresentano delle zone in cui il terzo corpo, il veicolo spaziale, è in equilibrio. Tuttavia, date le nostre ipotesi, li consideriamo puntiformi nel sistema.



**Figura 2.3:** Posizione dei punti di Lagrange del sistema Terra-Luna.

Riferendosi alla figura 2.3 è più semplice capire il posizionamento di questi punti nel sistema.

## 2.2 Missioni interplanetarie

In questa sezione si vuole fare un'introduzione sulle caratteristiche generali delle missioni interplanetarie. Si parte quindi con la presentazione del metodo delle Patched Conics (PCM), basato sull'ipotesi che lo spazio può essere considerato come l'insieme di zone, dette sfere di influenza, e ogni zona è associata ad un corpo. La sfera di influenza di un corpo è la porzione di spazio attorno allo stesso, in cui uno spacecraft interagisce solamente con esso. Per quanto riguarda le coniche, esse sono prese in considerazione come traiettorie dal momento che le orbite kepleriane sono sezioni coniche con il fuoco nel corpo attrattore. Ciò significa che in ogni sfera d'influenza sarà studiata una diversa traiettoria, derivata dalla sezione conica. Per questo, le traiettorie interplanetarie possono essere suddivise in tre fasi: la manovra di evasione dalla sfera di influenza dal corpo di partenza; la traiettoria eliocentrica; la manovra di ingresso nella sfera di influenza del corpo di arrivo.

È impossibile descrivere in modo generale la traiettoria eliocentrica, per questo il più delle volte questa traiettoria è studiata come un arco di un trasferimento di Hohmann, a motori spenti, tra i due corpi, anche se questa descrizione va bene solo se prendiamo in considerazione manovre impulsive, e non è il nostro caso. Considerando la Terra come corpo principale e la Luna come corpo secondario è possibile calcolare la sfera di influenza della Luna come segue:

$$r \simeq \left( \frac{m_{moon}}{m_{\oplus}} \right)^{\frac{2}{5}} r_{moon-\oplus} \simeq 66,1 * 10^3 km \quad (2.38)$$

dove  $m_{moon}$  e  $m_{\oplus}$  sono le masse di Luna e Terra, e  $r_{moon-\oplus}$  è la distanza media tra questi due corpi. Nel momento in cui un veicolo spaziale è all'interno della sfera di influenza di uno dei corpi si può identificare la traiettoria che percorrerà.

### 2.2.1 Manovre di evasione

Per sfuggire all'attrazione gravitazionale di un pianeta, e quindi uscire dalla sua sfera di influenza, lo spacecraft dovrà percorrere una traiettoria che gli permetta di avere una velocità relativa  $v_{\infty}$  diversa da zero.  $v_{\infty}$  viene definita velocità iperbolica in eccesso, ed può essere trovata tramite la formula:

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2} - 1} \quad (2.39)$$

Generalmente, per una manovra di evasione si parte da un'orbita di parcheggio circolare intorno al corpo di partenza. Il raggio dell'orbita di parcheggio sarà il periastro  $r_p$  dell'iperbole di partenza.

Si scrive il momento angolare:

$$h = \frac{\mu_1 \sqrt{e^2 - 1}}{v_\infty} \quad (2.40)$$

La definizione del periastro sarà allora:

$$r_p = \frac{h^2}{\mu_{moon}} \frac{1}{1 + e} \quad (2.41)$$

L'eccentricità, in funzione di  $r_p$  e  $v_\infty$ , si scrive:

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_{moon}} \quad (2.42)$$

Sostituendo nell'espressione del momento angolare 2.40 l'eccentricità:

$$h = r_p \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_{moon}}{r_p}} \quad (2.43)$$

La velocità iperbolica in eccesso è una specifica dei requisiti di missione, da ciò si procede con la scelta del corretto  $r_p$ , che, come abbiamo visto dalle relazioni 2.43 e 2.42, è fondamentale per le definizioni dell'eccentricità e del momento angolare della traiettoria di partenza. Per calcolare il  $\Delta v$  necessario per eseguire correttamente la manovra di escape, sono necessarie la velocità al periapside e la velocità circolare dell'orbita di parcheggio:

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_{moon}}{r_p}} \quad (2.44)$$

$$v_c = \frac{\mu_{moon}}{r_p} \quad (2.45)$$

Calcolando così il  $\Delta v$  come:

$$\Delta v = v_p - v_c = v_c \left( \sqrt{2 + \left(\frac{v_\infty}{v_c}\right)^2} - 1 \right) \quad (2.46)$$

Allo stesso modo, è altrettanto importante scegliere quando applicare il  $\Delta v$ , quindi decidere dove sarà il periapside. Per questo sarà necessario introdurre il parametro

$\beta$ , che indica l'orientamento della linea degli absidi dell'iperbole rispetto al vettore velocità eliocentrica del pianeta:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_{moon}}}\right) \quad (2.47)$$

La manovra di evasione dipende dalla posizione del pianeta di arrivo, che può essere o un pianeta "esterno" o uno "interno". Se un veicolo spaziale deve svolgere un trasferimento da un pianeta esterno a un pianeta interno (figura 2.4), la traiettoria sfruttata farà uscire il satellite dalla sfera di influenza del pianeta dal suo lato posteriore, con la velocità  $v_\infty$  in direzione opposta a  $V_\oplus$ , e la velocità eliocentrica del veicolo spaziale  $V_D$  inferiore alla velocità circolare del pianeta di partenza  $V_C$ . Se, al contrario, un veicolo spaziale deve svolgere un trasferimento da un pianeta interno a un pianeta esterno (figura 2.5), dovrà allora emergere dal lato anteriore della sfera d'influenza, perché il  $v_\infty$  punterà nella stessa direzione di  $V_C$  per raggiungere una velocità eliocentrica  $V_D$  maggiore, e necessaria per raggiungere un pianeta esterno.

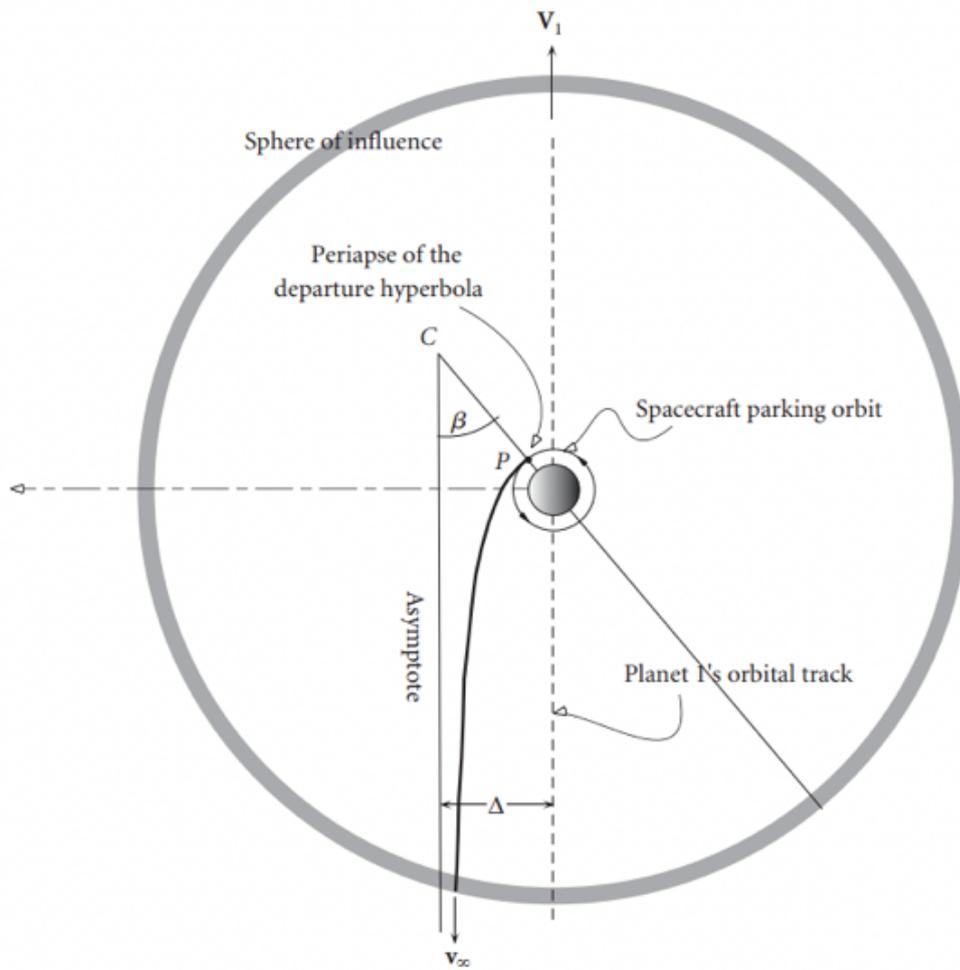


Figura 2.4: Manovra di evasione verso un pianeta esterno.

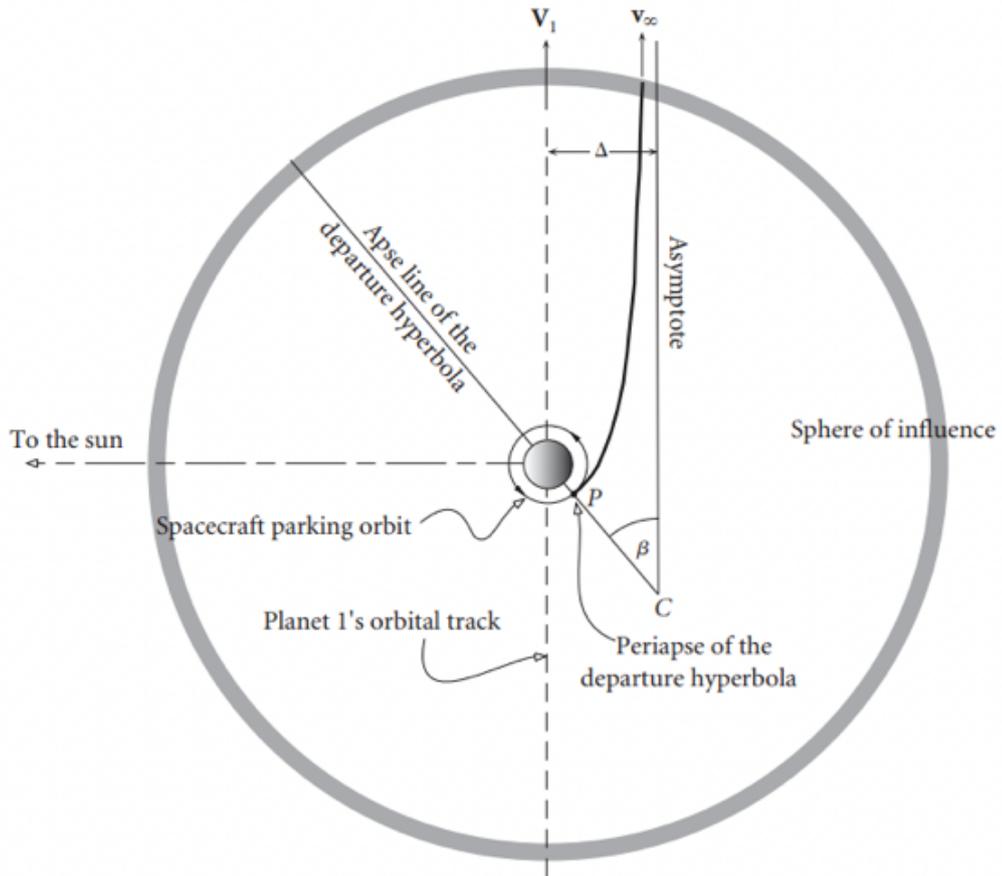


Figura 2.5: Manovra di evasione verso un pianeta interno.

## Capitolo 3

# Metodo di ottimizzazione indiretta

In questo capitolo si va ad affrontare il metodo di ottimizzazione utilizzato in questa tesi. I metodi di ottimizzazione servono nei casi in cui si cerca una legge di controllo che massimizza, o minimizza, un particolare indice di prestazione.

Nel caso preso in esame, l'indice da massimizzare è la massa finale di propellente, essendo influente sui costi di missione. Il problema di ottimo è quindi la ricerca del trasferimento orbitale che rende massima la massa a fine manovra. Per soluzioni significative, questo problema deve essere risolto o con metodi numerici o con soluzioni approssimate. Tratteremo qui la soluzione tramite metodi numerici, in particolare l'ottimizzazione indiretta.

Questi argomenti sono stati studiati dagli articoli [5], [6] e [7].

### 3.1 Teoria del controllo ottimale – OTC

La teoria del controllo ottimale è basata sui principi del calcolo variazionale. Si considera un generico sistema descritto da un vettore di variabili di stato  $\mathbf{x}$  e le equazioni differenziali, che descrivono la sua evoluzione tra i contorni esterni, e che sono funzioni di  $\mathbf{x}$ , del vettore dei controlli  $\mathbf{u}$  e del tempo, che è una variabile indipendente. Queste funzioni hanno la generica forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.1)$$

Nel caso preso in esame, la traiettoria che dovrà percorrere il satellite viene suddivisa in  $n$  archi, nei quali ogni variabile è continua. Ogni intervallo ( $j$ -esimo) inizia al tempo  $t_{(j-1)+}$  e termina al tempo  $t_{j-}$  e i valori che le variabili assumono ai suoi estremi sono  $\mathbf{x}_{(j-1)+}$  e  $\mathbf{x}_{j-}$ , dove i segni meno e più indicano rispettivamente i valori assunti subito prima o dopo il punto considerato. In questo modo si tiene conto delle possibili discontinuità delle variabili ed è anche possibile far assumere espressioni diverse al secondo membro dell'equazione 3.1. Inoltre, vengono imposte condizioni al contorno miste, che coinvolgono sia le variabili di stato che il tempo ai contorni, esterni ed interni. Esse sono non lineari e vengono espresse come

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (3.2)$$

Il problema di ottimo consiste nel cercare i massimi o i minimi relativi di un funzionale, del tipo:

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Nel quale si sommano la funzione  $\varphi$  e l'integrale della funzione  $\Phi$  esteso a tutta la traiettoria. Grazie ai moltiplicatori di Lagrange,  $\mu$  e  $\lambda$ , è possibile ridurre l'equazione o alla formulazione di Lagrange,  $\varphi = 0$ , oppure alla formulazione di Mayer,  $\Phi = 0$ . Le costanti,  $\mu$ , sono associate alle condizioni al contorno, invece le variabili,  $\lambda$ , sono associate alle equazioni di stato.

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})) dt, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Si integra per parti, e si differenzia  $J^*$ , ottenendo così la prima variazione del funzionale che non dipende dalle derivate nel tempo di  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$ .

$$\begin{aligned} J^* = & \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T \mathbf{x}_{(j-1)+} - \boldsymbol{\lambda}_{j-}^T \mathbf{x}_{j-}) + \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x})) dt, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 \delta J^* = & (-H_{(j-1)_+} + \frac{\delta\varphi}{\delta t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta t_{(j-1)_+}}) \delta t_{(j-1)_+} + \\
 & + (-H_{j_-} + \frac{\delta\varphi}{\delta t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta t_{j_-}}) \delta t_{j_-} + \\
 & + (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T [\frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta \mathbf{x}_{(j-1)_+}}]) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} + \\
 & + (-\boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T [\frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta \mathbf{x}_{j_-}}]) \delta \mathbf{x}_{j_-} + \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} ((\frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T) \delta \mathbf{x} + \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}) \delta t, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Con H

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (3.7)$$

È necessaria la stazionarietà del funzionale per la condizione di ottimo, quindi per qualsiasi variazione compatibile si deve annullare la sua variazione prima. Ciò lo si fa con l'opportuna scelta delle variabili e costanti aggiuntive. Annullando i coefficienti di  $\delta \mathbf{x}$  e  $\delta \mathbf{u}$  all'interno dell'integrale per ogni punto della traiettoria si ottengono, rispettivamente, le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -(\frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}})^T \quad (3.8)$$

E le equazioni algebriche per i controlli

$$(\frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}})^T = 0 \quad (3.9)$$

I controlli possono appartenere a un dato dominio di ammissibilità, e questo è un vincolo che rende massimo o minimo l'Hamiltoniano in quel punto tramite il valore ottimale. Si hanno in pratica due possibilità: o il valore ottimale del controllo è quello fornito dall'equazione 3.9 se rientra nel dominio di ammissibilità e quindi il vincolo non interviene in quel punto (controllo localmente "non vincolato"); oppure, il valore ottimale è agli estremi del dominio, cioè il controllo assume il valore massimo o minimo, se quello fornito dall'equazione 3.9 non rientra nel dominio di ammissibilità (controllo "vincolato"). Conveniente riferirsi al  $j$ -esimo contorno, per le condizioni al contorno mancanti, e considerarlo come estremo finale del  $(j-1)$ -esimo sottointervallo o come estremo iniziale del  $j$ -esimo sottointervallo. Annullando, nell'ordine, i coefficienti di  $\delta x_{j-}$ ,  $\delta x_{j+}$ ,  $\delta t_{j-}$ ,  $\delta t_{j+}$  nell'espressione 3.6,

si ottiene:

$$-\lambda_{j-}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta\mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta\mathbf{x}_{j-}} \right] = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

$$\lambda_{j+}^T + \frac{\delta\varphi}{\delta\mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta\mathbf{x}_{j+}} \right] = 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.11)$$

$$H_{j-} + \frac{\delta\varphi}{\delta t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta t_{j-}} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

$$-H_{j+} + \frac{\delta\varphi}{\delta t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\delta\boldsymbol{\chi}}{\delta t_{j+}} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.13)$$

Le equazioni 3.10 e 3.12 non hanno significato all'inizio della traiettoria ( $j = 0$ ), mentre le equazioni 3.11 e 3.13 non hanno significato al termine ( $j = n$ ). Per avere le condizioni di ottimo bisogna eliminare le costanti aggiunte  $\mu$  dalle equazioni appena ricavate:

$$\boldsymbol{\sigma}((\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}, \boldsymbol{\lambda}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-})) = 0 \quad (3.14)$$

così facendo si ottiene il sistema differenziale completo, dato dalle equazione 3.1 e 3.8. Le equazioni 3.10 e 3.11 forniscono delle condizioni di ottimo specifiche se una generica variabile di stato  $x$ , viene sottoposta a condizioni al contorno per la variabile aggiunta corrispondente  $\lambda_x$ :

- se  $x$  assegnata è all'istante iniziale (il vettore delle condizioni imposte  $\chi$  contiene l'equazione  $x_0 - a = 0$  con  $a$  valore assegnato), sulla corrispondente variabile aggiunta non ci sono condizioni ( $\lambda_{x_0}$  "libera"); stessa situazione al tempo finale se la variabile è assegnata lì;
- se  $x_0$  non compare né nella funzione  $\varphi$  né nelle condizioni al contorno, la corrispondente variabile aggiunta è nulla all'istante iniziale ( $\lambda_{x_0} = 0$ ); anche questo caso va bene per un'analogia situazione al tempo finale;
- se una variabile di stato è continua e non assegnata al punto interno  $i$  ( $\chi$  contiene l'equazione  $x_{j+} = x_{j-}$ ), la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua ( $\lambda_{x_{j+}} = \lambda_{x_{j-}}$ );
- se una variabile di stato è continua e assegnata esplicitamente a un contorno interno, ( $\chi$  contiene le equazioni  $x_{j+} = x_{j-} = a$ ), la corrispondente variabile

aggiunta ha una discontinuità detta libera, cioè il valore di  $\lambda_{x_{j+}}$  è indipendente da  $\lambda_{x_{j-}}$  e deve essere determinato dalla procedura di ottimizzazione.

Condizioni al contorno particolari, per  $\lambda_x$ , si possono ricavare dalle equazioni 3.12 e 3.13, nel caso in cui  $H$  non è esplicitamente dipendente dal tempo:

- se  $t_0$  non compare esplicitamente né nella funzione  $\varphi$  né nelle condizioni al contorno, l'Hamiltoniano è nullo all'istante iniziale ( $H_0 = 0$ ); analogamente, l'Hamiltoniano si annulla al tempo finale se questo non interviene esplicitamente in  $\chi$  e  $\varphi$ ;
- se il tempo generico  $t_j$  non compare esplicitamente nella funzione  $\varphi$ , (l'unica condizione in  $\chi$  che lo coinvolge è la continuità del tempo  $t_{j+} = t_{j-}$ ) l'Hamiltoniano è continuo in  $j$  ( $H_{j+} = H_{j-}$ );
- se il tempo  $t_j$  è esplicitamente assegnato, (in  $\chi$  compaiono le equazioni  $t_{j+} = t_{j-} = a$ ) l'Hamiltoniano ha, in quel punto, una discontinuità libera.

### 3.1.1 Problema differenziale ai limiti

Applicando la teoria di controllo ottimale al sistema di equazioni 3.1 che ha condizioni al contorno dipendenti dal tipo di orbita scelta per la trasferta, si ha un nuovo sistema di equazioni differenziali ai limiti (BVP). Per risolvere questo problema bisogna trovare i valori iniziali che consentono di soddisfare le condizioni di ottimo. Il problema di ottimo è soggetto a vincoli differenziali e algebrici, diventa così un problema differenziale ai limiti, con equazioni differenziali 3.1 e 3.8, con controlli determinati da 3.9, supportate da condizioni al contorno imposte e di ottimo, 3.2 e 3.14. Vi sono alcune precisazioni da fare:

- nei sottointervalli in cui è suddiviso l'intervallo di integrazione si possono avere differenti espressioni delle equazioni differenziali;
- è incognita la durata del sottointervallo;
- le condizioni al contorno possono coinvolgere sia i valori delle variabili ai contorni esterni che a quelli interni, e possono anche essere non-lineari;
- le variabili ai soli contorni interni possono essere discontinue, e dopo la discontinuità possono essere incognite.

La soluzione a questo tipo di problema è ciò che rende difficile l'utilizzo delle tecniche di ottimizzazione indiretta, per questo è fondamentale il metodo da utilizzare. La soluzione del BVP si ottiene riducendolo a una successione di problemi ai valori iniziale, portata a convergenza con il metodo di Newton. In ciascun sotto intervallo la durata è incognita, quindi si sostituisce la variabile indipendente  $t$  con una nuova variabile  $\epsilon$  definita nel  $j$ -esimo intervallo:

$$\epsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (3.15)$$

La variabile  $\tau$  è la durata incognita del sotto intervallo. Usando questa sostituzione, i contorni risulteranno fissati e corrisponderanno ai valori interni consecutivi di  $\epsilon$ . Adesso quindi, si avrà un problema differenziale nelle variabili  $y(x, \lambda)$ :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (3.16)$$

Appaiono anche parametri costanti, perciò bisogna riferirsi ad un nuovo vettore  $\mathbf{z} = (y, c)$  che contiene le variabili di stato, le variabili aggiunte e il nuovo vettore  $c$  dei parametri costanti. Si applica poi un cambio di variabile indipendente, e il sistema assume la forma:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\epsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \epsilon) \quad (3.17)$$

Esplicitando il secondo membro delle equazioni 3.17:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\epsilon} = \tau_j \frac{d\mathbf{y}}{dt} \quad (3.18)$$

I parametri costanti, invece, saranno:

$$\frac{dc}{d\epsilon} = 0 \quad (3.19)$$

Le condizioni al contorno saranno espresse come:

$$\Psi(\mathbf{s}) = 0 \quad (3.20)$$

con  $\mathbf{s}$  che è un vettore che contiene i valori assunti dalle variabili ai contorni e i parametri incogniti.

$$\mathbf{s} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{c}) \quad (3.21)$$

I valori iniziali di alcune delle variabili sono generalmente incogniti, quindi la ricerca della soluzione consiste nel determinare, attraverso delle iterazioni, quali valori devono assumere per soddisfare le equazioni 3.20. La procedura suppone che nessuno dei valori iniziali sia noto. Le iterazioni iniziano con l'integrazione delle equazioni 3.17 con i valori iniziali  $p^r$  trovati al termine della iterazione precedente. Si fissa

$$z(0) = p^r \quad (3.22)$$

Integrando le equazioni lungo tutta la traiettoria tenendo conto delle discontinuità ai contorni interni (bisogna scegliere valori di tentativo  $p^1$  per la prima iterazione). In ogni contorno si individua il valore delle variabili di stato e, finita l'integrazione, si calcola l'errore sulle condizioni al contorno  $\Psi^r$  alla r-esima iterazione. Con la variazione  $\Delta p$  si varia l'errore sulle condizioni al contorno di una quantità, con solo i termini del primo ordine, pari a:

$$\Delta \Psi = \left[ \frac{\delta \Psi}{\delta p} \right] \Delta p \quad (3.23)$$

Volendo ottenere  $\Delta \Psi = -\Psi^r$ , quindi annullare l'errore sulle condizioni al contorno, fino a che non si verificano le condizioni al contorno 3.20 con una certa precisione, i valori iniziali vengono così corretti ad ogni iterazione:

$$\Delta p = p^{r+1} - p^r = - \left[ \frac{\delta \Psi}{\delta p} \right]^{-1} \Psi^r \quad (3.24)$$

La matrice  $\frac{\delta \Psi}{\delta p}$  è il risultato del prodotto di altre due matrici:

$$\left[ \frac{\delta \Psi}{\delta p} \right] = \left[ \frac{\delta \Psi}{\delta s} \right] \left[ \frac{\delta s}{\delta p} \right] \quad (3.25)$$

Queste due matrici sono ricavate in modo diverso. La prima derivando le condizioni al contorno rispetto alle grandezze che vi compaiono. La seconda, invece, contiene le derivate dei valori delle variabili ai contorni rispetto ai valori iniziali. Quindi, per essa, sono assunti i valori ai contorni dalla matrice:

$$\left[ \frac{\delta z}{\delta p} \right] = [g(\epsilon)] \quad (3.26)$$

che è ottenuta integrando il sistema di equazioni differenziali ricavato a sua volta derivando il sistema principale 3.17 rispetto ad ogni valore iniziale:

$$[g] = \frac{d}{d\epsilon} \left[ \frac{\delta z}{\delta p} \right] = \left[ \frac{\delta}{\delta p} \left( \frac{dz}{d\epsilon} \right) \right] = \left[ \frac{\delta f}{\delta p} \right] \quad (3.27)$$

dove la derivata di  $g$  è rispetto alla nuova variabile  $\epsilon$ . Si esplicita poi lo Jacobiano del sistema principale 3.17, e la precedente equazione diventa:

$$[\mathbf{g}] = \left[ \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{z}} \right] \left[ \frac{\delta \mathbf{z}}{\delta \mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}] \quad (3.28)$$

Per questo sistema omogeneo, i valori iniziali si ottengono derivando la relazione 3.22, ottenendoo in questo modo la matrice identica:

$$[\mathbf{g}(0)] = \left[ \frac{\delta \mathbf{z}(0)}{\delta \mathbf{p}} \right] = [\mathbf{I}] \quad (3.29)$$

Così facendo, si possono trattare anche discontinuità nelle variabili. Quindi, per una discontinuità nel punto  $i$  bisogna aggiornare il vettore  $z$  e la matrice  $g$ , grazie alla relazione  $h$  che lega prima e dopo la discontinuità i valori delle variabili:

$$\mathbf{z}_{i+} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{i-}) \quad (3.30)$$

$$[\mathbf{g}_{i+}] = \left[ \frac{\delta \mathbf{h}}{\delta \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}_{i-}] \quad (3.31)$$

Nel caso in cui certi valori iniziali delle variabili fossero noti, il vettore  $p$  si ridurrebbe alle componenti incognite di  $z(0)$ , invece il vettore  $\Psi$  alle condizioni al contorno non esplicitate al tempo iniziale. La matrice  $\left[ \frac{\delta \Psi}{\delta p} \right]$  si può anche valutare nel seguente modo: l' $i$ -esima riga si ottiene variando la  $i$ -esima componente di  $p$  di una quantità  $\Delta p$  e poi integrando le equazioni 3.17. Questa procedura, che nella maggior parte dei casi semplifica la soluzione del BVP, non è però sempre in grado di garantire la convergenza, essendo il metodo meno accurato. Nello studio specifico che si andrà a sviluppare nei prossimi capitoli, è richiesto un errore massimo,  $E_{max} = \max_i(\Psi_i)$ , sulle condizioni al contorno inferiore a  $10^{-7}$ . Linearizzando, nel calcolo della correzione  $\Delta p$ , si sono introdotti degli errori che potrebbero aumentare l'errore sulle condizioni al contorno, e quindi, ostacolare la convergenza. Per migliorare, perciò, la procedura:

- la correzione è una frazione di quella determinata:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p} \quad (3.32)$$

con  $K_1 = 0.1 : 1$ , determinato empiricamente;

- ad ogni iterazione si confronta l'errore massimo con quello ottenuto in precedenza, e se l'errore massimo è inferiore ad un multiplo di quello precedente ( $E_{max}^{r+1} < K_2 E_{max}^r$ , con  $K_2 = 2 : 3$ ) si procede con le iterazioni;
- se l'errore è troppo grande rispetto all'iterazione precedente, si applica la bisezione alla correzione apportata:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \frac{\Delta \mathbf{p}}{2} \quad (3.33)$$

e si ripete poi il confronto tra errori. Se è necessario, si ripete allora la bisezione, fino ad un massimo di 5 volte, in questo caso, se il procedimento dovesse arrestarsi, vorrebbe dire che la soluzione tentativo non riesce ad arrivare a convergenza.

# Capitolo 4

## Problema dinamico

In questo capitolo si vuole descrivere il modello dinamico preso in esame, al quale viene applicata la teoria del controllo ottimale. ([8], [5])

### 4.1 Modello dinamico

Si adotta, come modello, il problema dei due corpi, e si introducono le equazioni del moto del satellite:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \frac{T}{m} + \mathbf{a}_p \quad (4.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (4.3)$$

Le variabili utilizzate sono:

- $\mathbf{r}$ : vettore posizione;
- $\mathbf{v}$ : vettore velocità del satellite;
- $T$ : vettore spinta;
- $c$ : velocità effettiva di scarico;
- $\mathbf{a}_p$ : accelerazione di perturbazione.

La traiettoria è controllata dal vettore velocità, invece la  $c$  è assunta costante. Il termine  $a_p$  comprende tre contributi:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_{lsg} + \mathbf{a}_{srp} \quad (4.4)$$

che corrispondono alle accelerazioni:

- $\mathbf{a}_j$ : accelerazione dovuta all'asfericità della Terra;
- $\mathbf{a}_{lsp}$ : accelerazione dovuta alla gravità luni-solare;
- $\mathbf{a}_{srp}$ : accelerazione dovuta alla pressione solare.

La teoria del controllo ottimale ci fornisce la relazione:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (4.5)$$

e combinandola con l'equazione di stato avremo:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_V^T \left( -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{T}}{m} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} + \mathbf{a}_p \quad (4.6)$$

Si introduce adesso la definizione di Switching Function:

$$S_F = \frac{\boldsymbol{\lambda}_V^T \mathbf{T}}{mT} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.7)$$

Si sostituisce all'interno dell'equazione 4.6 ottenendo l'Hamiltoniana:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_V^T \left( -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - TS_F + \mathbf{a}_p \quad (4.8)$$

Uno degli obiettivi della teoria del controllo ottimale è quello di ottimizzare l'Hamiltoniana, ottenendo la soluzione ottimale, portano quindi ad avere la spinta parallela al vettore  $\lambda_v$ , è quindi possibile definire la switching function come:

$$S_F = \frac{\lambda_V}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (4.9)$$

Definendo la Switching Function, e il suo segno, si definisce di conseguenza la strategia che permette di massimizzare l'Hamiltoniana.

$$S_F < 0 \implies T = 0 \quad (4.10)$$

$$S_F > 0 \implies T = T_{max} \quad (4.11)$$

Si sceglie un sistema di riferimento ottimale, sul quale proiettare le equazioni vettoriali che descrivono la traiettoria del veicolo spaziale. Viene scelto quindi un sistema inerziale dove non si tiene conto delle accelerazioni inerziali e dell'accelerazione di Coriolis. Questo sistema di riferimento è il Earth Mean Equator and Equinox of Epoch J2000 dove  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  sono i versori lungo gli assi di EME2000. Nel modello considerato, nutazione e precessione sono trascurate. Si definisce il vettore posizione in coordinate sferiche, in funzione del raggio  $r$ , l'ascensione retta  $\theta$  e l'angolo di inclinazione  $\phi$ :

$$\mathbf{r} = r \cos\theta \cos\phi \mathbf{I} + r \sin\theta \cos\phi \mathbf{J} + r \sin\phi \mathbf{K} \quad (4.12)$$

Introduciamo il sistema di riferimento topocentrico, con  $\mathbf{i}$  che è il vettore unitario in direzione radiale,  $\mathbf{j}$  che punta verso est, e  $\mathbf{k}$  verso nord. Il vettore posizione lo si può scrivere rispetto al sistema topocentrico tramite la matrice rotazionale. Partendo dall'Eq. 4.12, segue che  $\mathbf{r} = r\mathbf{i}$  e il vettore velocità può essere scritto come:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (4.13)$$

#### 4.1.1 Variabili di stato e variabili aggiuntive

Definiamo il vettore di stato iniziale come  $\mathbf{x} = [r, \theta, \phi, u, v, w, m]$ , e le componenti della spinta come  $T_u = T \sin\gamma_T$ ,  $T_v = T \cos\gamma_T \cos\psi_T$ ,  $T_w = T \cos\gamma_T \sin\psi_T$ , con  $\psi_T$  è l'angolo di prua e  $\gamma_T$  è l'angolo di elevazione della spinta. Si proietta, adesso, l'Equazione di stato sul sistema di riferimento scelto, ottenendo così le seguenti relazioni:

$$\frac{dr}{dt} = u \quad (4.14)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r \cos\phi} \quad (4.15)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{w}{r} \quad (4.16)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{T_u}{m} + (a_p)_u \quad (4.17)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-uv + v w \tan\phi}{r} + \frac{T_v}{m} + (a_p)_v \quad (4.18)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-uv + v^2 \tan \phi}{r} + \frac{T_w}{m} + (a_p)_w \quad (4.19)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{m} \quad (4.20)$$

Si può anche riformulare l'Hamiltoniana come:

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r \cos \phi} + \lambda_\phi \frac{w}{r} + \\ & + \lambda_u \left( -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v^2}{r} + \frac{w^2}{r} + \frac{T}{m} \sin \gamma_T \right) + \\ & + \lambda_v \left( \frac{uv}{r} + \frac{vw}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \cos \psi_T \right) + \\ & + \lambda_w \left( -\frac{uw}{r} - \frac{v^2}{r} \tan \phi + \frac{T}{m} \cos \gamma_T \sin \psi_T \right) + \\ & - \lambda_m \frac{T}{c} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Imponendo le derivate parziali dell'Hamiltoniano a zero, si ottengono i valori ottimo di  $\gamma_T$  e di  $\psi_T$ , che definiscono la direzione della spinta. Si può anche scrivere:

$$\left( \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (4.22)$$

con il vettore di controllo pari a  $\mathbf{u} = [\gamma_T, \psi_T]$ . Si arriva, quindi, alle Equazioni Algebriche di Controllo:

$$\sin \gamma_T = \frac{\lambda_u}{\lambda_V} \quad (4.23)$$

$$\cos \psi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_v}{\lambda_V} \quad (4.24)$$

$$\sin \psi_T \cos \gamma_T = \frac{\lambda_w}{\lambda_V} \quad (4.25)$$

dove  $\lambda_V$  si esprime, in modulo:

$$\lambda_V = \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2 + \lambda_w^2} \quad (4.26)$$

Il vettore principale  $\lambda_V$  è parallelo alla direzione ottimale della spinta. Per definire le equazioni differenziali per le variabili aggiunte  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_m]$

vengono utilizzate le equazioni di Eulero-Lagrange. Le equazioni di Eulero Lagrange in questo caso saranno scritte:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\left(\frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}}\right)^T \quad (4.27)$$

con componenti:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = & \frac{1}{r^2} \left[ \lambda_\theta \frac{v}{\cos\phi} + \lambda_\phi w + \lambda_u \left( -\frac{2}{r} + v^2 + w^2 \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_v (-uv + vw \tan\phi) + \lambda_w (-uw - v^2 \tan\phi) \right] + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dr} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (4.29)$$

$$\dot{\lambda}_\phi = \frac{1}{r \cos^2\phi} (\lambda_\theta v \sin\phi - \lambda_v v w + \lambda_w v^2) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{d\phi} \quad (4.30)$$

$$\dot{\lambda}_u = \frac{1}{r} (-\lambda_r r + \lambda_v v + \lambda_w w) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{du} \quad (4.31)$$

$$\dot{\lambda}_v = \frac{1}{r} \left[ -\lambda_\theta \frac{1}{\cos\theta} - 2\lambda_u v - \lambda_v (u - w \tan\phi) + 2\lambda_w v \tan\phi \right] + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dv} \quad (4.32)$$

$$\dot{\lambda}_w = \frac{1}{r} (-\lambda_\phi - 2\lambda_u w - \lambda_v (v \tan\phi + \lambda_w u)) + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dw} \quad (4.33)$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{T}{m^2} \lambda_V + \frac{dH}{da_p} \frac{da_p}{dm} \quad (4.34)$$

## 4.1.2 Perturbazioni

Nel modello adottato, si considerano tre perturbazioni grazie alle quali si riesce a descrivere in un modo più corretto l'ambiente in cui si svolgerà la missione del veicolo spaziale. Per questo problema dinamico, le tre perturbazioni prese in considerazione, e quindi che verranno approfondite sono: accelerazione dovuta all'asfericità della Terra,  $\mathbf{a}_j$ ; accelerazione dovuta alla gravità luni-solare,  $\mathbf{a}_{lsp}$ ; accelerazione dovuta alla pressione solare,  $\mathbf{a}_{srp}$ .

## Modello Potenziale della Terra

La Terra non è un corpo sferico perfetto, ma bensì un geoide. Per questo motivo per descrivere il potenziale terrestre viene usato il Earth Gravitational Model EGM2008 che fornisce i coefficienti armonici normalizzati per il potenziale gravitazionale terrestre. In questo lavoro di tesi è stato utilizzato il sistema "Tide Free" ma con la possibilità di implementare il sistema "Zero Tide" se fosse necessario nel caso in cui il sistema di marea variasse. Si può, allora, esprimere il potenziale della Terra come:

$$\Phi = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^N \left(\frac{r_E}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin\phi) \quad (4.35)$$

in cui  $\mu$  è il parametro gravitazionale della Terra,  $r_E$  è l'asse semimaggiore dell'ellissoide terrestre, ed  $N$  ha il suo valore fissato a 8. Viene utilizzata la forma non normalizzata, sfruttando le funzioni associate di Legendre  $P_{nm} \sin\phi$  e i coefficienti armonici sferici  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  al fine di ridurre il tempo di calcolo.

Trascurando la nutazione, la latitudine terrestre coinciderà con l'angolo di declinazione  $\phi$ . Mentre, trascurando la precessione della Terra, la longitudine terrestre sarà:

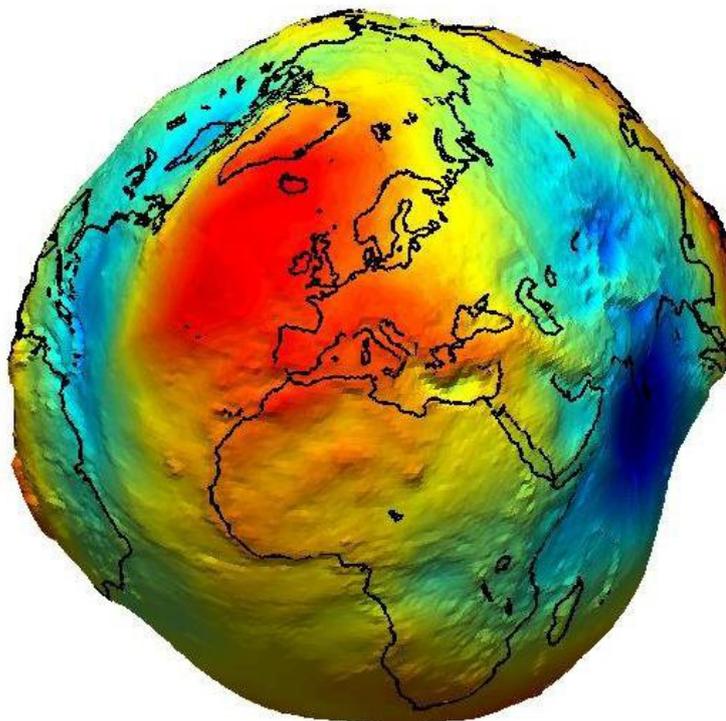
$$\lambda = \theta - \theta_{Gre} - \omega_E(t - t_{ref}) \quad (4.36)$$

dove  $\theta_{Gre}$  è la posizione dell'ascensione retta di Greenwich al tempo di riferimento  $t_{ref}$ , e  $\omega_E$  è la velocità di rotazione della Terra valutata sul giorno siderale, . Calcolando il gradiente di  $-\Phi$  si trova così l'accelerazione di perturbazione dovuta all'asfericità della Terra. Nel sistema topocentrico, si scrive:

$$(a_j)_u = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (4.37)$$

$$(a_j)_v = -\frac{\partial\Phi/\partial\theta}{\partial r \cos\phi} \quad (4.38)$$

$$(a_j)_w = -\frac{\partial\Phi/\partial\phi}{r} \quad (4.39)$$



**Figura 4.1:** Non sfericità della Terra.

### Perturbazione Luni-Solare

Sole e Luna esercitano, entrambe, un'attrazione gravitazionale sul satellite in orbita, e ciò dà vita alla perturbazione Luni-Solare. Le posizioni della Luna e del Sole sono valutate tramite le effemeridi DE405 JPL, grazie alle quali viene fornita la posizione del corpo in coordinate rettangolari  $x_b$ ,  $y_b$  e  $z_b$  (con il pedice  $b$  che viene sostituito opportunamente nel seguente modo:  $b = s$  per il Sole;  $b = l$  per la Luna) rispetto alla Terra nel sistema di riferimento Celeste Internazionale, e quindi, approssimando, nel sistema EME2000. I due corpi avranno, allora, parametro gravitazionale  $\mu_b$  e vettore posizione rispetto alla Terra:

$$\mathbf{r}_b = x_b \mathbf{I} + y_b \mathbf{J} + z_b \mathbf{K} \quad (4.40)$$

L'accelerazione di perturbazione dovuta a questi due corpi è data dalla differenza delle accelerazioni gravitazionali che il corpo provoca sul veicolo spaziale e sulla Terra:

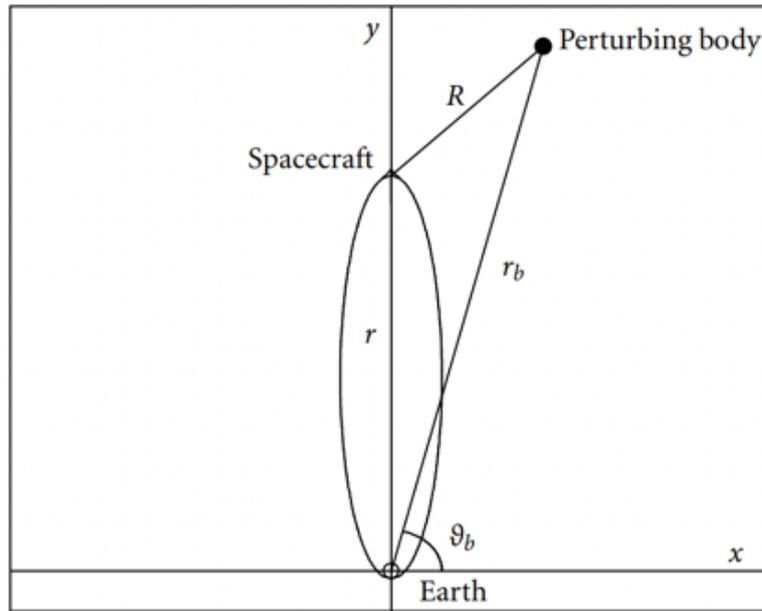
$$\mathbf{a}_{bg} = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right)\mathbf{R} - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right)\mathbf{r}_b \quad (4.41)$$

dove  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b$  è la posizione relativa del satellite rispetto al corpo perturbante. L'accelerazione di perturbazione, proiettata sul sistema topocentrico viene scritta come:

$$(a_{bg})_u = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right)[(r_b)_u - r] - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right)(r_b)_u \quad (4.42)$$

$$(a_{bg})_v = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right)(r_b)_v - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right)(r_b)_v \quad (4.43)$$

$$(a_{bg})_w = -\left(\frac{\mu_b}{R^3}\right)(r_b)_w - \left(\frac{\mu_b}{r_b^3}\right)(r_b)_w \quad (4.44)$$



**Figura 4.2:** Schema geometrico della perturbazione gravitazionale.

calcolando R come:  $R = \sqrt{[r - (r_b)_u]^2 + (r_b)_v^2 + (r_b)_w^2}$ . Esplicitando le componenti della posizione del corpo perturbante nel sistema topocentrico:

$$(r_b)_u = x_b \cos \theta \cos \phi + y_b \sin \theta \cos \phi + z_b \sin \phi \quad (4.45)$$

$$(r_b)_v = -x_b \sin \theta + y_b \cos \theta \quad (4.46)$$

$$(r_b)_w = -x_b \cos \theta \sin \phi - y_b \sin \theta \sin \phi + z_b \cos \phi \quad (4.47)$$

La perturbazione Luni-Solare è quindi la somma del contributo dovuto alla Luna e al Sole.

### Pressione della Radiazione Solare

L'accelerazione dovuta all'azione perturbante della Radiazione Solare è causata, più nello specifico, dall'emissione di fotoni del Sole. I fotoni, avendo una certa velocità, impattando con il satellite gli trasferiscono la loro quantità di moto, andando così ad aumentare la velocità nella direzione Sole-Spacecraft. Ad una certa distanza  $R$  dal Sole, la pressione del fotone sarà:

$$p = \frac{L_s}{4\pi R^2 c_{light}} \quad (4.48)$$

dove  $c_{light}$  è la velocità della luce e  $L_s$  è la potenza totale irradiata. In generale, la pressione fotonica, a distanza  $R^* = 1AU$ , è di  $p^* = 4.55682 * 10^{-6} N/m^2$ . Si assume come coefficiente di riflettività  $\eta = 0.7$ , e si calcola l'accelerazione di perturbazione su di un corpo di massa  $m$ , avente sezione trasversale  $S$ , come:

$$\mathbf{a}_{sp} = (1 + \eta)p^* \left(\frac{R^*}{R}\right)^2 \left(\frac{S}{m}\right) \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\Gamma \mathbf{R}}{mR^3} \quad (4.49)$$

Con componenti, nel sistema di riferimento topocentrico:

$$(a_{srp})_u = \left[\frac{\Gamma}{mR^3}\right] [(r_s)_u - r] \quad (4.50)$$

$$(a_{srp})_v = \left[\frac{\Gamma}{mR^3}\right] (r_s)_v \quad (4.51)$$

$$(a_{srp})_w = \left[\frac{\Gamma}{mR^3}\right] (r_s)_w \quad (4.52)$$

Questa accelerazione dipende dal quadrato della distanza fra i due corpi come l'accelerazione di gravità solare; queste due accelerazioni sono parallele ma con direzioni opposte; Essendo anche con simile forma è possibile trattarle in contemporanea. Nel momento in cui la Terra si interpone fra il satellite e il Sole, viene considerato un cono d'ombra della Terra, cioè viene determinata un'eclisse se  $(r_s)_u < 0$ . Per determinare il cono d'ombra si considera il semiangolo  $\gamma_{shadow} = \arcsin\left(\frac{r_E}{r_s}\right)$ .

La navicella viene posta, nel sistema, sulla superficie di un cono centrato sul Sole, con l'asse sulla linea di collegamento Terra-Sole, avente semiangolo

$\gamma = \arcsin(r \sin \delta / R)$ , in cui l'angolo  $\delta$  è l'angolo tra i vettori centrati sulla Terra che puntano al satellite e al Sole, calcolato come  $\delta = \arccos[(r_s)_u / r_s]$ . Il veicolo spaziale è dentro il cono d'ombra della Terra nel momento in cui  $(r_s)_u < 0$  e  $\gamma < \gamma_{shadow}$ .

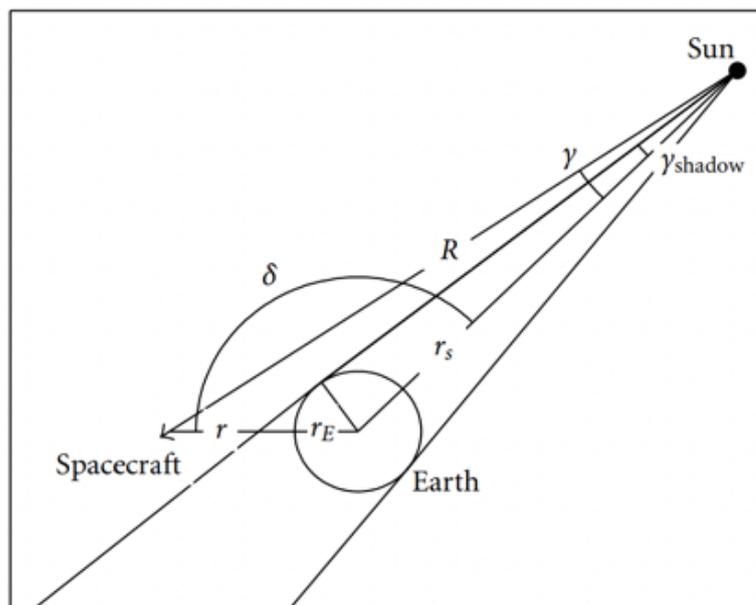


Figura 4.3: Schema geometrico del cono d'ombra.

### 4.1.3 Quantità Adimensionali

Dato il problema, vengono utilizzate le quantità adimensionali per trattarlo nella sua forma più generale. Le quantità sono le seguenti:

- Distanza: se si considera una traiettoria geocentrica, la distanza è vista come un multiplo del semiasse maggiore dell'ellissoide terrestre

$$a_{\oplus} = 6378.1363 km = r_{conv} \quad (4.53)$$

- Velocità: considerando sempre una traiettoria geocentrica, la velocità verrà vista come multiplo della velocità circolare

$$v_{conv} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_{conv}}} = 7.90537 Km/s \quad (4.54)$$

- Tempo: riferendosi ai valori precedentemente calcolati, il tempo sarà di conseguenza calcolato come il rapporto fra le due precedenti grandezze

$$t_{conv} = \frac{r_{conv}}{v_{conv}} \quad (4.55)$$

Per definire la data da utilizzare, in modo univoco, è necessario definire una data da cui si misura il tempo. La scelta ricade su J2000, che è la data di riferimento più utilizzata nelle analisi delle missioni spaziali, e corrisponde al 12 UT 1/1/2000.

- Accelerazione: l'accelerazione avrà la forma dell'accelerazione centripeta

$$a_{conv} = \frac{v_{conv}^2}{r_{conv}} = 9,7983 * 10^{-3} Km/s^2 \quad (4.56)$$

- Massa: la massa iniziale è posta pari a  $m_{initial} = 850Kg$ . Questo valore viene messo in relazione con la massa finale. Il loro rapporto all'inizio della missione sarà pari a 1, con il proseguire della missione questo rapporto sarà inferiore ad uno.

$$m_{ratio} = \frac{m_{final}}{m_{initial}} \quad (4.57)$$

# Capitolo 5

## Risultati

In questo capitolo vengono mostrati i risultati della manovra di evasione dalla sfera di influenza della Terra, partendo dal punto Lagrangiano  $L_2$  del sistema Terra-Luna. Questo studio prende in considerazione il problema dinamico analizzato nel precedente capitolo, alla quale è stata applicata la teoria del controllo ottimale, anch'essa discussa precedentemente. Viene, quindi, studiato come varia la massa finale di un satellite che svolge la manovra di evasione a seconda di come varia la sua durata, la data di partenza della missione, o al variare di  $C_3$ , al fine di ottimizzarla, e dunque di rendere minimi i consumi.

### 5.1 Manovra di evasione da L2 del sistema Terra-Luna

Il primo passo per lo studio dell'ottimizzazione, è stato quello di scegliere come far variare la durata e la data di partenza della missione.

Come valore iniziale per la durata viene scelto 80 giorni; la data di partenza viene espressa con il tempo adimensionale  $t_0$ , e il valore iniziale scelto è 170.1, che corrisponde al 27/01/2027.

Si è scelto di variare la durata tramite passi di 5 giorni, fino al valore di 100 giorni. La data di partenza, invece, viene variata con passi di 0.1. Si varia  $t_0$  di questa quantità fino al valore  $t_0 = 170,5$  per il periodo sinodico della luna, che dura quasi 29 giorni, e corrispondono, infatti, a 0,5 del tempo adimensionale. Ciò

implica una periodicità nei risultati, con intervalli 0,5. Quindi, i risultati trovati utilizzando  $t_0 = 170$  dovrebbero essere quasi gli stessi che per  $t_0 = 170,5$ .

| $t_0$ | Data     |
|-------|----------|
| 170,1 | 27/01/27 |
| 170,2 | 02/02/27 |
| 170,3 | 07/02/27 |
| 170,4 | 13/02/27 |
| 170,5 | 19/02/27 |

**Tabella 5.1:** Tempo adimensionale utilizzato per la data di partenza.

Andando, poi, a confrontare missioni con stessa durata ma data di partenza differente, si nota un'oscillazione nel valore della massa finale, per questo, per proseguire l'analisi, si sceglie come valore  $t_0 = 170.1$ , che corrisponde ad un massimo della massa finale, cioè ad un minimo di quella utilizzata. Scelta la data di partenza, che ci permette di avere minima massa consumata, si è fatta variare la durata della missione da 80 a 100 giorni, lasciando libera la  $C_3$ . Confrontando queste missioni si può notare come varia la massa consumata anche in relazione all'arco propulsivo (5.2). Si nota infatti che per missioni da realizzare con tempi più lunghi, si utilizza meno spinta e perciò si avrà un minor consumo.

| Durata [giorni] | $m_f$ [kg] | Arco propulsivo [giorni] |
|-----------------|------------|--------------------------|
| 80              | 848,24236  | 4,55047                  |
| 85              | 848,56259  | 3,18819                  |
| 90              | 848,81632  | 2,10882                  |
| 95              | 829,15964  | 85,72975                 |
| 100             | 849,19057  | 0,51673                  |

**Tabella 5.2:** Valori di massa finale ed arco propulsivo con  $t_0$  fissato e  $C_3$  lasciato libero.

Questi valori sono stati calcolati per una struttura della manovra a due fasi, T-C, e lasciando libero il valore di  $C_3$ . La manovra presa in esame è divisa inizialmente in due fasi, la prima è un arco propulsivo e cerca di dare la corretta posizione al satellite per la seconda fase. La seconda fase è una fase di coasting dove il satellite

sfrutta l'influenza dei corpi presenti nel sistema per accelerarsi fino alla fine della sfera d'influenza terrestre.

In certe missioni, però, secondo il target da raggiungere, può essere necessario un valore di  $C_3$  all'escape specifico, generalmente vengono specificati il modulo e la direzione della velocità di evasione. Imponendo questo valore, si può verificare un cambio della struttura della soluzione essendo, dunque, necessario un secondo arco di spinta, quindi la nuova struttura sarà del tipo T-C-T.

Con  $C_3$  calcolata come:

$$C_3 = u_f^2 + v_f^2 + w_f^2 - \frac{2\mu_{\oplus}}{r_f} \quad (5.1)$$

dove  $r_f$  corrisponde al raggio della sfera di influenza della Terra, cioè  $925 * 10^3$  Km.

### 5.1.1 Manovra di evasione con $C_3$ fissato

Si è analizzato come varia la massa finale quando la velocità all'escape viene imposta, e confrontato i risultati con la variazione della massa finale ottenuta per l'escape libero. L'altra differenza fra le missioni a confronto è proprio la sua struttura: la prima con  $C_3$  libero avrà struttura T-C, la seconda a confronto avrà  $C_3$  fissato e una struttura composta di tre fasi, T-C-T.

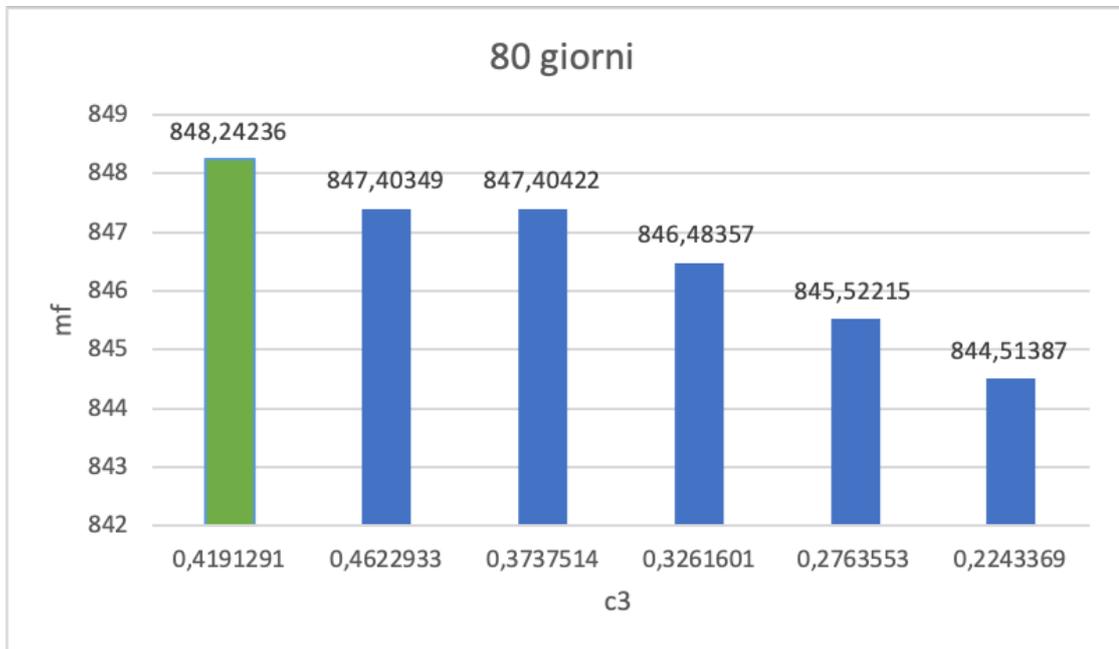
In particolare, la velocità di escape imposta è il risultato del prodotto fra le componenti  $u_f$ ,  $v_f$  e  $w_f$  trovate lasciando l'escape libera, e i valori seguenti: 0.95, 1.05, 1.1, 1.15 e 1.2. Non in tutti i casi, però, le subroutine arrivano a convergenza con i valori alterati.

Di seguito vengono riportate le tabelle che mettono in relazione i valori di  $C_3$  imposti con la rispettiva massa finale, e ogni tabella corrisponde ad una specifica durata della missione.

I grafici sono la rappresentazione grafica dei valori espressi nelle tabelle, ma il primo valore indicato in verde è quello trovato senza modificare le componenti di  $C_3$  e con struttura a due fasi.

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,4622933 | 847,40349 |
| 0,3737514 | 847,40422 |
| 0,3261601 | 846,48357 |
| 0,2763553 | 845,52215 |
| 0,2243369 | 844,51387 |

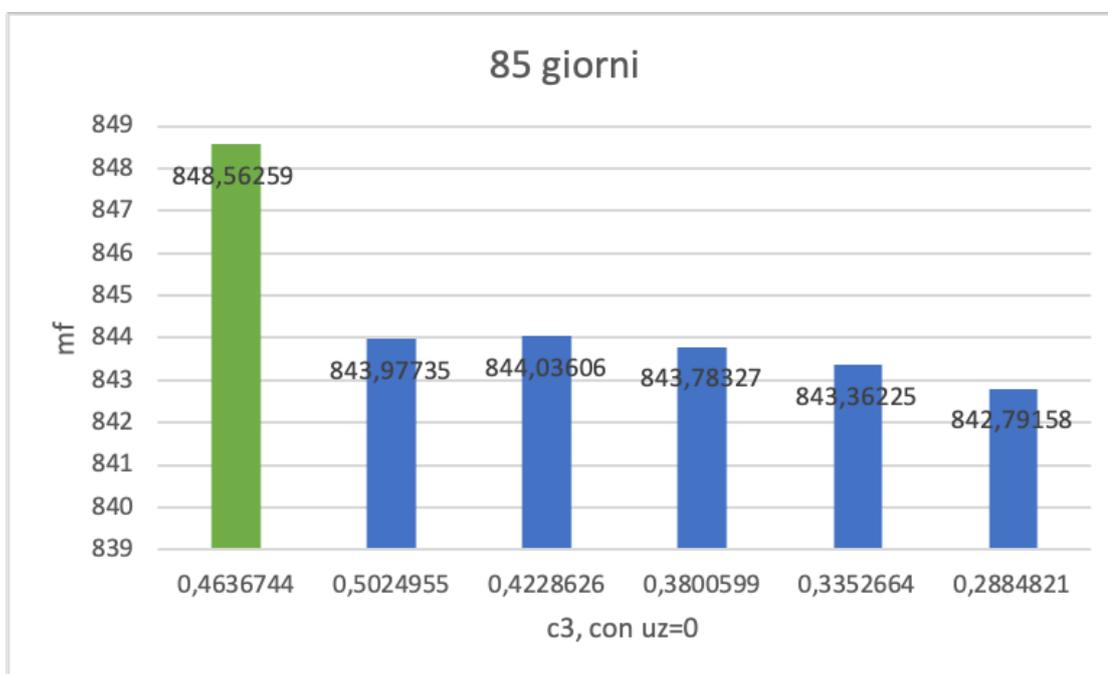
**Tabella 5.3:** Missioni con durata di 80 giorni.



**Figura 5.1:** Missioni con durata di 80 giorni.

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,4750844 | 847,76473 |
| 0,389377  | 847,76384 |
| 0,3433093 | 846,86045 |
| 0,295099  | 843,84325 |
| 0,2447459 | 844,92675 |

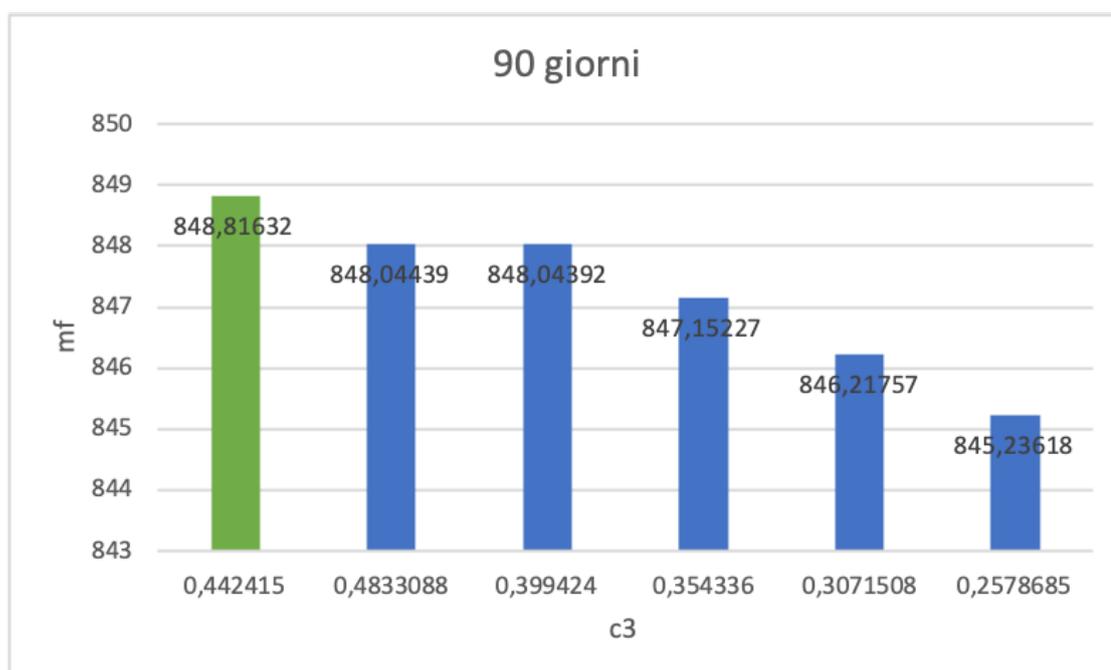
**Tabella 5.4:** Missione con durata di 85 giorni.



**Figura 5.2:** Missioni con durata di 85 giorni.

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,4833088 | 848,04439 |
| 0,399424  | 848,04392 |
| 0,354336  | 847,15227 |
| 0,3071508 | 846,21757 |
| 0,2578685 | 845,23618 |

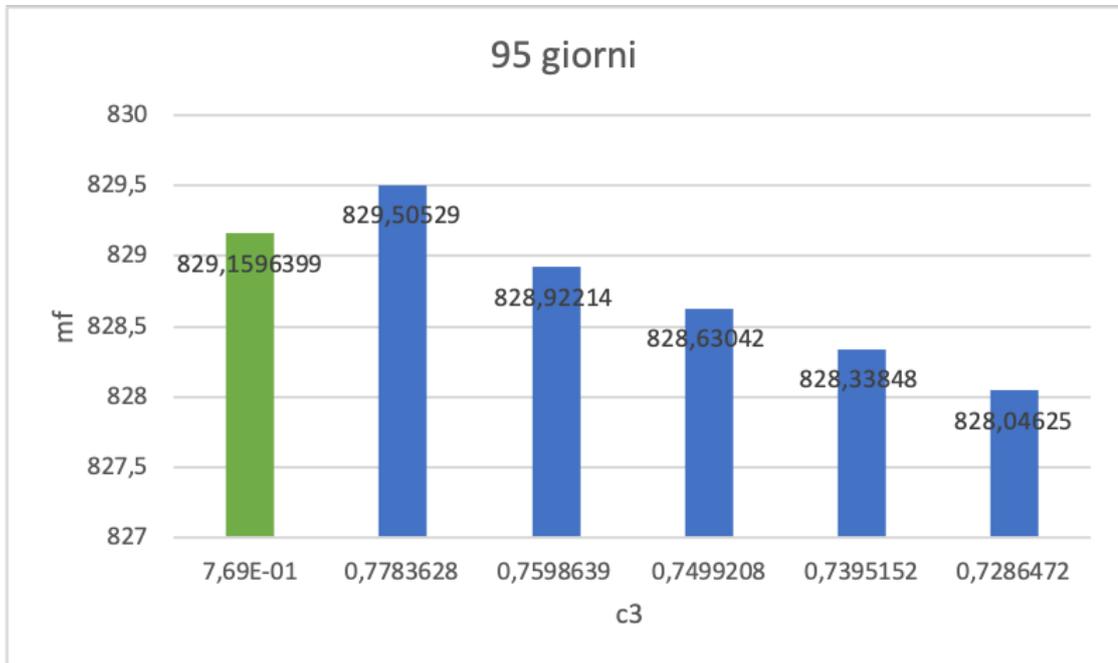
**Tabella 5.5:** Missione con durata di 90 giorni.



**Figura 5.3:** Missioni con durata di 90 giorni.

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,7783628 | 829,50529 |
| 0,7598639 | 828,92214 |
| 0,7499208 | 828,63042 |
| 0,7395152 | 828,33848 |
| 0,7286472 | 828,04625 |

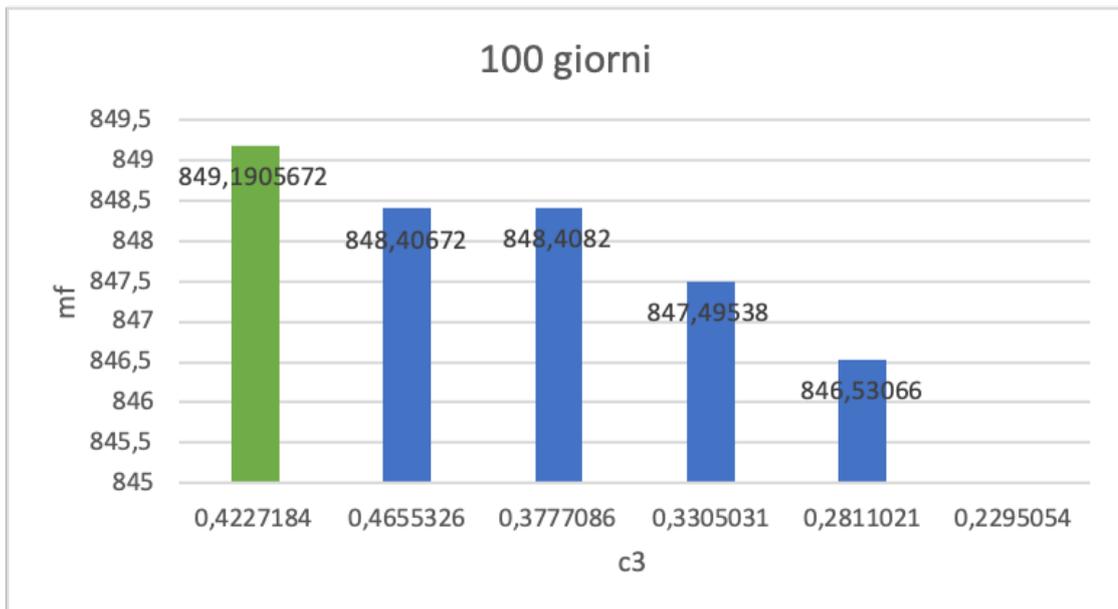
**Tabella 5.6:** Missione con durata di 95 giorni.



**Figura 5.4:** Missioni con durata di 95 giorni.

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,4655326 | 848,40673 |
| 0,3777086 | 848,40807 |
| 0,3305031 | 847,49551 |
| 0,2811021 | 846,53066 |
| 0,2295054 | -         |

**Tabella 5.7:** Missione con durata di 100 giorni.

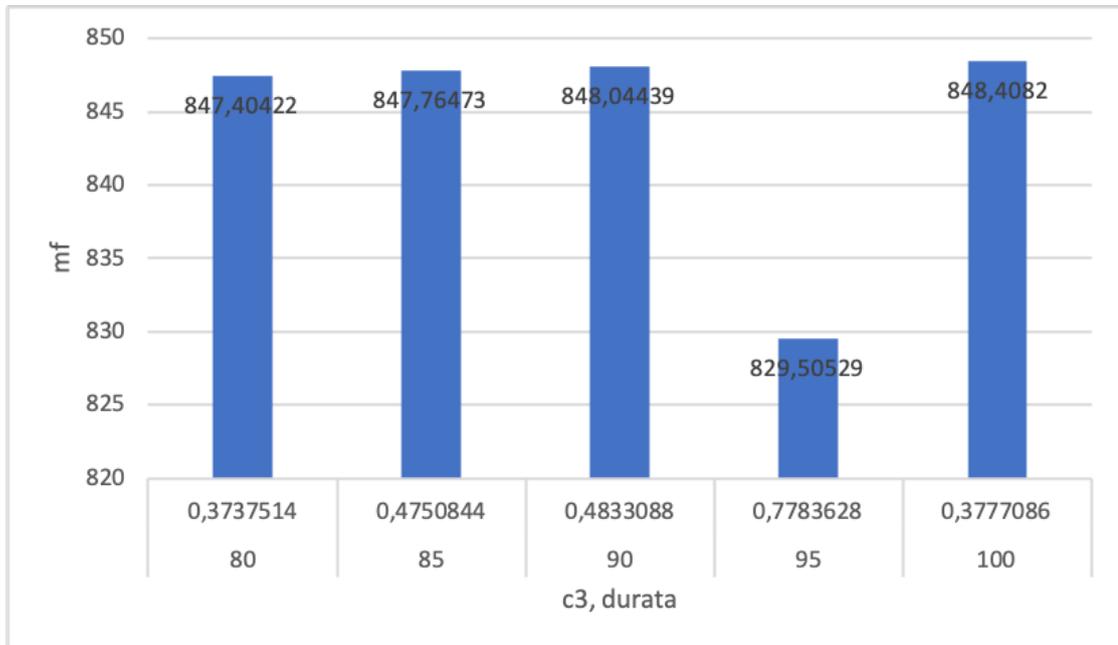


**Figura 5.5:** Missioni con durata di 100 giorni.

Le missioni con migliori valori di massa finale sono quelle con durata della missione di 90 giorni. Solo nel caso di missioni di durata di 95 giorni vi è un effettivo miglioramento nei consumi, rispetto alla mavovra a due fasi. Nonostante ciò, spesso si preferisce comunque intraprendere la scelta delle tre fasi per questo tipo di manovre. Per questo, presi in considerazione i valori che corrispondono alla massa finale maggiore di ogni sottogruppo di missioni suddivise per stessa durata, si sono messi a confronto per indagare su quale fosse la durata che riesce a massimizzare la massa in modo migliore. Di seguito, nella tabella 5.8, si trovano questi valori a confronto.

| Durata | $C_3$     | $m_f$     |
|--------|-----------|-----------|
| 80     | 0,3737514 | 847,40422 |
| 85     | 0,4750844 | 847,76473 |
| 90     | 0,4833088 | 848,04439 |
| 95     | 0,7783628 | 829,50529 |
| 100    | 0,3777086 | 848,4082  |

**Tabella 5.8:** Confronto del valore massimo della  $m_f$  per ogni missione con differente durata.



**Figura 5.6:** Confronto del valore massimo della  $m_f$  per ogni missione con differente durata.

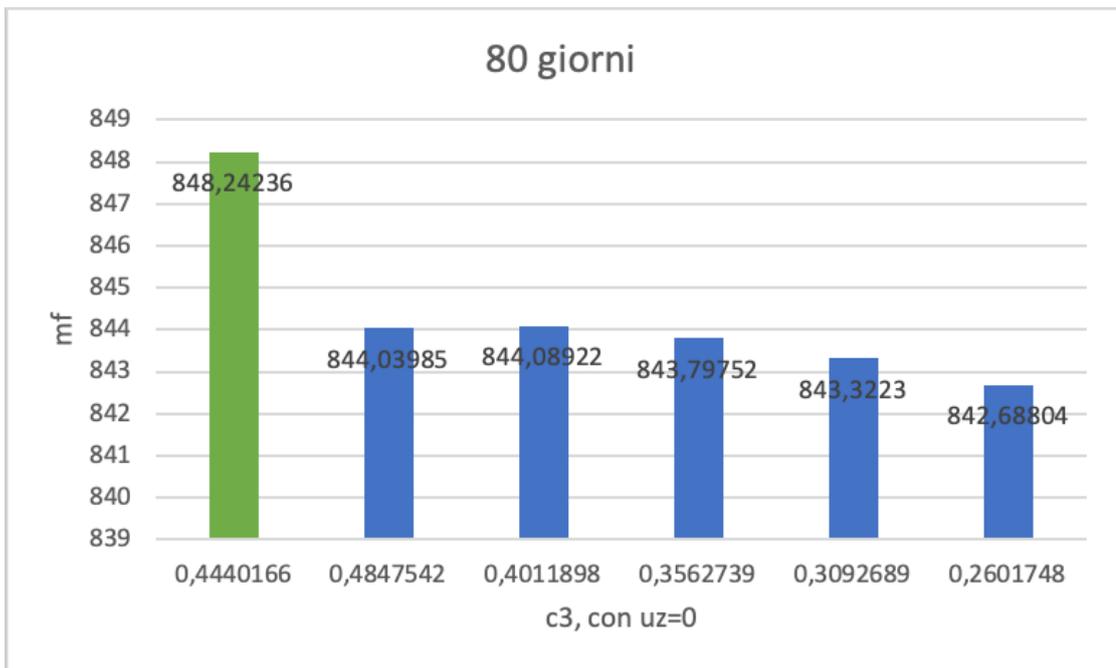
Si può notare dal grafico 5.6, come la missioni di durata di 100 e 90 giorni siano da preferire rispetto alle altre missioni con differente durata, in quanto la massa finale è maggiore rispetto agli altri casi, e ciò permette un livello di consumo migliore, o in alternativa di trasportare un maggior carico in termini di payload.

### 5.1.2 Manovra di evasione sul piano della traiettoria lunare, con $C_3$ fissato

Si è poi preso in esame un altro caso, cioè quello in cui la manovra di evasione viene svolta sul piano della traiettoria lunare, cioè annullando la componente  $u_z$ , requisito richiesto in alcune missioni interplanetarie. Si sono quindi ripetute le analisi già svolte, sostituendo, però, al valore di  $u_z$  precedente il valore zero. Tabelle e grafici seguono la logica indicata in precedenza.

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,4847542 | 844,03985 |
| 0,4011898 | 844,08922 |
| 0,3562739 | 843,79752 |
| 0,3092689 | 843,32231 |
| 0,2601748 | 842,68804 |

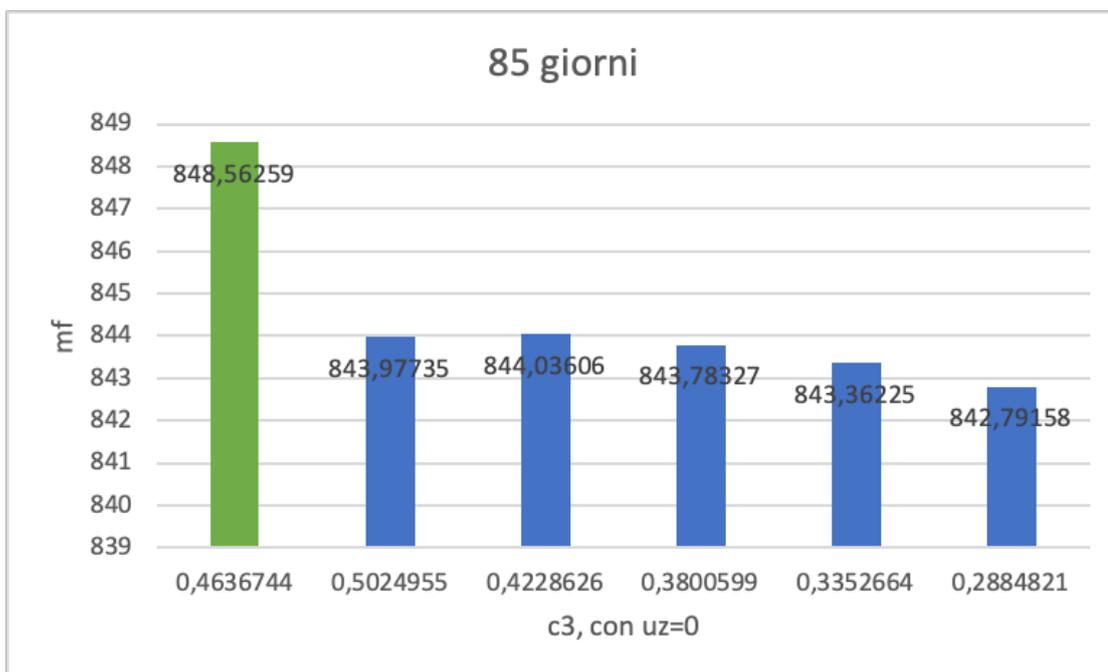
**Tabella 5.9:** Missione con durata di 80 giorni, con  $u_z = 0$ .



**Figura 5.7:** Missioni con durata di 80 giorni, con  $u_z = 0$ .

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,5024955 | 843,97735 |
| 0,4228626 | 844,03606 |
| 0,3800599 | 843,78327 |
| 0,3352664 | 843,36225 |
| 0,2884821 | 842,79158 |

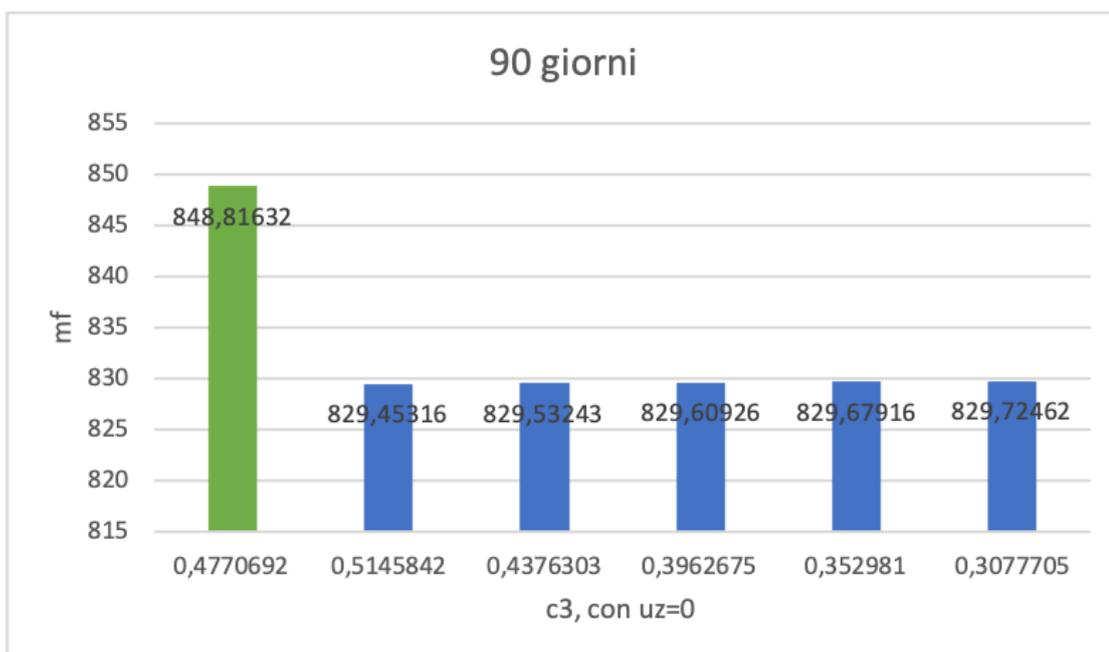
**Tabella 5.10:** Missione con durata di 85 giorni, con  $u_z = 0$ .



**Figura 5.8:** Missioni con durata di 85 giorni, con  $u_z = 0$ .

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,5145842 | 829,45321 |
| 0,4376303 | 829,53243 |
| 0,3962675 | 829,60926 |
| 0,352981  | 829,67916 |
| 0,3077705 | 829,72462 |

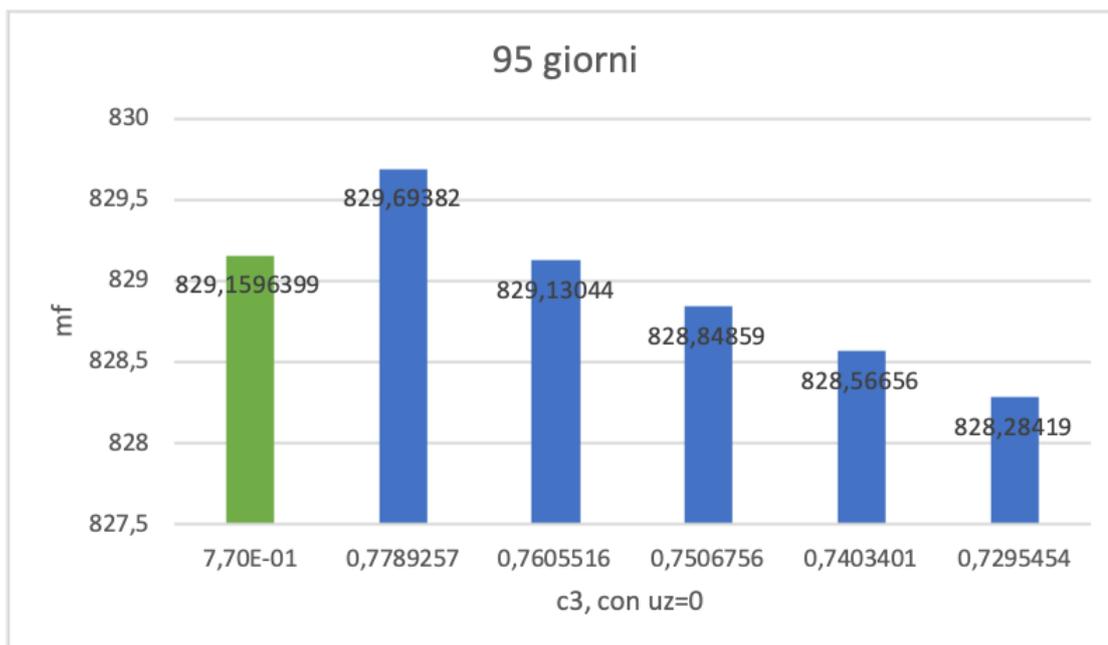
**Tabella 5.11:** Missione con durata di 90 giorni, con  $u_z = 0$ .



**Figura 5.9:** Missioni con durata di 90 giorni, con  $u_z = 0$ .

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,7789257 | 829,69382 |
| 0,7605516 | 829,13044 |
| 0,7506756 | 828,84859 |
| 0,7403401 | 828,56656 |
| 0,7295454 | 828,28419 |

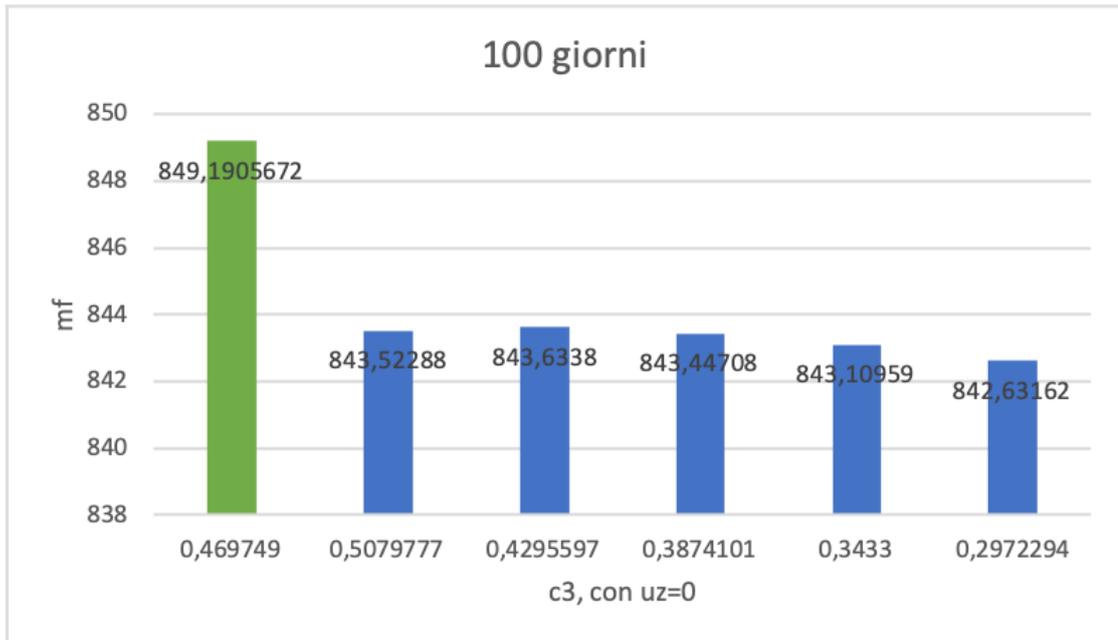
**Tabella 5.12:** Missione con durata di 95 giorni, con  $u_z = 0$ .



**Figura 5.10:** Missioni con durata di 95 giorni, con  $u_z = 0$ .

| $C_3$     | $m_f$     |
|-----------|-----------|
| 0,5079777 | 843,52288 |
| 0,4295597 | 843,6338  |
| 0,3874101 | 843,44708 |
| 0,3433    | 843,10959 |
| 0,2972294 | 842,63162 |

**Tabella 5.13:** Missione con durata di 100 giorni, con  $u_z = 0$ .

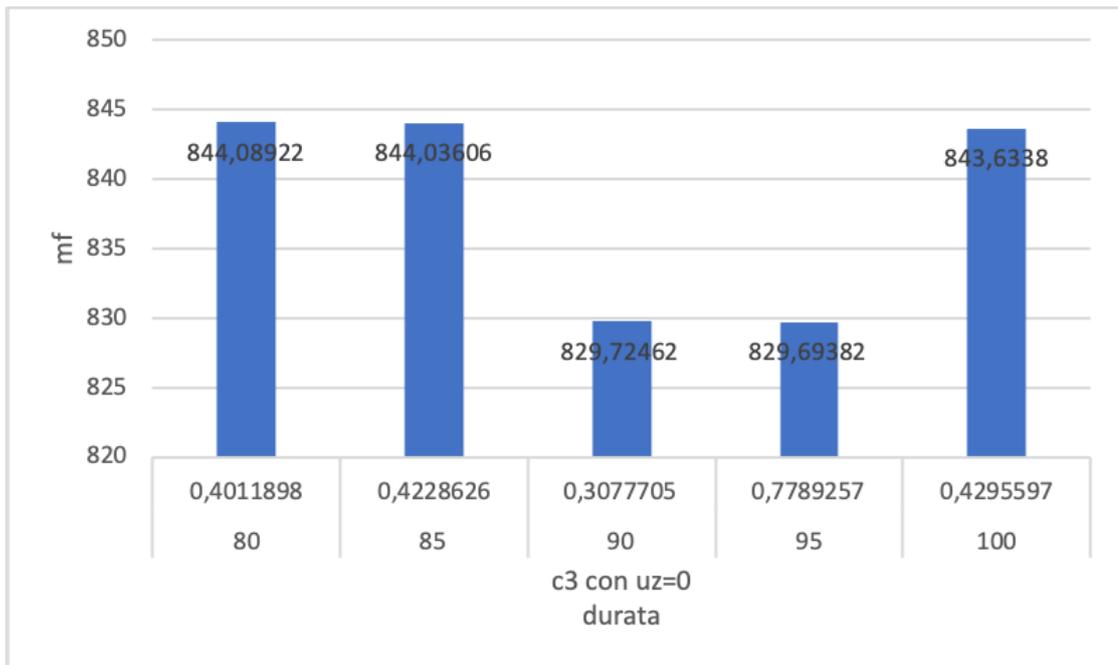


**Figura 5.11:** Missioni con durata di 100 giorni, componente  $u_z = 0$ .

In molti casi le subroutin non arrivano a convergenza, nonostante tutto è comunque possibile analizzare questo tipo di missione. Anche in questo caso, solo per le di missioni di durata di 95 giorni vi è un effettivo miglioramento nei consumi, rispetto alla mavovra a due fasi. Nonostante ciò, spesso è necessaria comunque una manovra a tre fasi. Prendendo, dunque, i valori che corrispondono alla massa finale maggiore di ogni sottogruppo di missioni suddivise per stessa durata, si sono messi a confronto nella tabella 5.14.

| Durata | $C_3$     | $m_f$     |
|--------|-----------|-----------|
| 80     | 0,4011898 | 844,08922 |
| 85     | 0,4228626 | 844,03606 |
| 90     | 0,3077705 | 829,72462 |
| 95     | 0,7789257 | 829,69382 |
| 100    | 0,4295597 | 843,63382 |

**Tabella 5.14:** Confronto del valore massimo della  $m_f$  per ogni missione con differente durata, per missioni con componente  $u_z = 0$ .



**Figura 5.12:** Confronto del valore massimo della  $m_f$  per ogni missione con differente durata, per missioni componente  $u_z = 0$ .

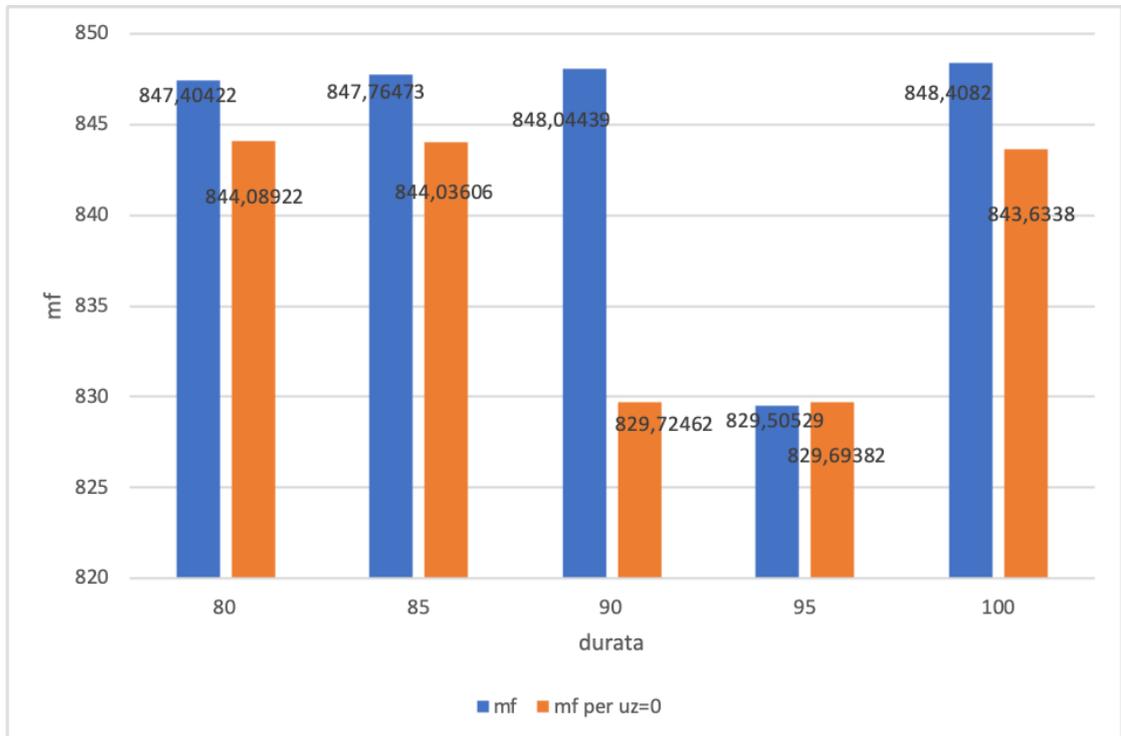
Le missioni con la durata di 80,85 e 100 giorni sono quelle da preferire in termini di consumo, essendo la massa finale maggiore rispetto agli altri casi, nel caso di manovra di escape sul piano della traiettoria lunare.

### 5.1.3 Confronto fra la manovra di evasione libera o vincolata su un piano

Si è voluto poi confrontare i valori delle masse finali delle due missioni, cioè i risultati ottenuti annullando la componente in  $z$ , svolgendo la missione sul piano della traiettoria lunare, con il caso precedente (tutte le componenti di  $C_3$  non nulle).

| durata | $m_f$     | $m_f$ per $u_z=0$ |
|--------|-----------|-------------------|
| 80     | 847,40422 | 844,08922         |
| 85     | 847,76473 | 844,03606         |
| 90     | 848,04439 | 829,72462         |
| 95     | 829,50529 | 829,69382         |
| 100    | 848,4082  | 843,6338          |

**Tabella 5.15:** Confronto dei risultati dei due casi presi in esame.



**Figura 5.13:** Confronto fra missioni diverse.

Da questo grafico 5.13 si evince che il caso migliore è quello della missione con durata di 100 giorni, con la componente  $u_z$  non nulla, quindi svolgendo la missione senza un piano vincolato. Negli altri casi la differenza dei consumi fra le due diverse missioni porterebbe a scegliere la missione svolta non esclusivamente sul piano della traiettoria lunare, per i suoi migliori consumi, a meno di altri requisiti.

## Capitolo 6

# Conclusioni

In questo capitolo si vuole dare una panoramica dei concetti affrontati, e fornire degli input per sviluppi futuri.

In questo lavoro di tesi sono state studiate alcune manovre di evasione che deve compiere un satellite per sottrarsi dall'influenza della Terra, avendo come punto di inizio della manovra il punto Lagrangiano  $L_2$ .

Partendo dalla soluzione di Lagrange al problema dei tre corpi circolare ristretto, con uno zoom sui Punti Lagrangiani, si è arrivati all'esplicazione del problema dinamico vero e proprio, al quale si è applicata la teoria ottimale di controllo per la massimizzazione di un parametro, in questo caso la massa finale.

I risultati trovati permettono di affermare che la manovra di escape dalla sfera di influenza della Terra è possibile sia con una struttura della manovra a due fasi sia con una a tre fasi. Nel caso di struttura T-C-T, avendo due archi propulsivi, i consumi saranno maggiori rispetto alla manovra con struttura T-C. Nonostante ciò, prendendo in esame le manovre T-C-T con  $C_3$  fissato, ma senza un piano vincolato, i consumi sono accettabili, non superando, nella maggior parte dei casi, i 5 kg di propellente consumato. L'unica eccezione è la missione con durata di 95 giorni, fortemente sconsigliata, avendo dei consumi elevati rispetto alle altre. Talvolta, si può avere come requisito quello di svolgere la missione su di un piano specifico. Si è analizzata quindi la manovra che deve essere svolta sul piano della traiettoria lunare. Con questo ulteriore vincolo si è visto come i consumi tendono ad aumentare, senza compromettere la riuscita della missione. Da questa analisi le missioni da prendere in considerazione sono quelle con durata 80, 85 e 100 giorni,

a meno di requisiti più stringenti.

Questo studio può essere portato avanti in vari modi. Uno di questi potrebbe essere l'analisi della variazione delle traiettorie ottenuta modificando l'eccesso di energia iperbolica, e di conseguenza il consumo di propellente, andando ad integrare nell'analisi lo sviluppo di nuove tecnologie. Tenendo in considerazione che il valore dell'eccesso di velocità iperbolica non è l'unico parametro importante da soddisfare per eseguire una missione interplanetaria, si potrebbe implementare lo studio andando a stabilire la direzione che il satellite deve avere una volta raggiunto il raggio finale della sfera di influenza della Terra, essendo questo parametro fondamentale per la corretta esecuzione della fase eliocentrica e il successivo arrivo sul target.

# Bibliografia

- [1] Vassilis Angelopoulos. «The ARTEMIS mission». In: *The ARTEMIS mission*. Springer, 2010, pp. 3–25 (cit. a p. 3).
- [2] Shanhong Liu, Jianguo Yan, Jianfeng Cao e Jean-Pierre Barriot. «Orbit determination of the Chang'E-5 Test 1 and a new gravity field model». In: () (cit. a p. 4).
- [3] LiHua ZHANG, Liang XIONG, Ji SUN, Shan GAO, XiaoLei WANG e Ai-Bing ZHANG. «Technical characteristics of the relay communication satellite “Queqiao” for Chang’e-4 lunar farside exploration mission». In: *SCIENTIA SINICA Technologica* 49.2 (2019), pp. 138–146 (cit. a p. 4).
- [4] Marshall Smith, Douglas Craig, Nicole Herrmann, Erin Mahoney, Jonathan Krezel, Nate McIntyre e Kandyce Goodliff. «The artemis program: An overview of nasa’s activities to return humans to the moon». In: *2020 IEEE Aerospace Conference*. IEEE. 2020, pp. 1–10 (cit. a p. 7).
- [5] Francesco Simeoni, Lorenzo Casalino, Alessandro Zavoli e Guido Colasurdo. «Indirect optimization of satellite deployment into a highly elliptic orbit». In: *International Journal of Aerospace Engineering* 2012 (2012) (cit. alle pp. 21, 30).
- [6] Alessandro Zavoli. «Ottimizzazione Indiretta di una Missione DV-EGA a Spinta Finita nel Problema Ristretto dei Tre Corpi». Tesi di dott. Master’s thesis, Sapienza-Universita di Roma, 2009 (cit. a p. 21).
- [7] Guido Colasurdo e Lorenzo Casalino. «Tentative Solutions for Indirect Optimization of Spacecraft Trajectories». In: *Space Engineering*. Springer, 2016, pp. 87–102 (cit. a p. 21).
- [8] Luigi Mascolo e Lorenzo Casalino. «ESCAPE TRAJECTORIES FROM LAGRANGIAN POINTS WITH ELECTRIC PROPULSION». In: () (cit. a p. 30).