

# POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



**Politecnico  
di Torino**

Tesi Magistrale

## Influenza della Riparazione delle Pale sulla Risposta Dinamica di un Disco Palettato

Relatori

Prof. TERESA BERRUTI

Prof. BIAO ZHOU

Candidato

DAVIDE BORGIA

APRILE 2022



# Abstract

Nell'industria aeronautica un'importante porzione di *failures* della componentistica è dovuta alla *HCF* (*High Cycle Fatigue*). Le rotture a fatica rappresentano una buona parte dei costi manutentivi dell'industria.

Nel contesto dei motori aeronautici e, in particolare, delle schiere di dischi palettati, i componenti più sollecitati sono proprio le palette (soggette a forti carichi strutturali e centrifughi). Riuscire a ripararle nel modo più efficiente possibile significa ottenere grandi vantaggi dal punto di vista dei tempi e dei costi di manutenzione.

In questo *framework* si inserisce il *blade repair*, ossia quella tecnica di riparazione delle pale che consente di ripristinare il componente senza estrarre la schiera dal motore e trasportarla in una *facility* dedicata. La palette è riparata sul posto asportando una porzione di materiale che comprende la *crack*.

In questo modo si evita di sostituire la pala in officine lontane dalle basi operative, con grandi risparmi di tempo e costi per la manutenzione. L'inconveniente risiede nel fatto di ritrovarsi con palette dalla geometria alterata.

Si ritiene dunque importante studiare quali sono le influenze del *blade repair* sulle caratteristiche aerodinamiche, strutturali, dinamiche e aeroelastiche della schiera, per comprendere se e quando questo tipo di riparazione risulta conveniente oppure no.

Questo lavoro di tesi si focalizza proprio sull'indagine dell'influenza dinamica di una riparazione per asportazione su un disco palettato di applicazione aeronautica. Si progetterà un disco palettato adatto al *testing* sperimentale e se ne studieranno le proprietà dinamiche per mezzo di *software* commerciali agli elementi finiti (*ANSYS*). Su questo *bladed-disk* si praticherà un *blend* (riparazione per asportazione di materiale) e si valuteranno numericamente le principali differenze nella dinamica, come lo *shift* in frequenza, la distorsione delle forme modali e l'alterata ampiezza della risposta forzata.

Infine si proporrà un metodo per la *crack detection* sfruttando proprio le differenze nella dinamica tra un disco palettato integro e uno sul quale è stato praticato un *blend*.



# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	VI
<b>Elenco delle figure</b>	VII
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 Contesto . . . . .	1
1.2 Struttura della Tesi . . . . .	3
<b>2 Definizione del Problema</b>	5
2.1 Stato dell'Arte . . . . .	5
2.2 Richiami Teorici . . . . .	8
2.2.1 Dinamica dei Dischi Palettati . . . . .	10
2.2.2 Mistuning . . . . .	30
2.3 Obiettivi della Tesi . . . . .	33
<b>3 Progetto del Disco Palettato</b>	35
3.1 Requisiti e Vincoli di Progetto . . . . .	35
3.2 Influenza dei Parametri Geometrici sulle Frequenze Proprie . . . . .	36
3.3 Scelta della Geometria . . . . .	37
3.3.1 Profilo Rettangolare . . . . .	38
3.3.2 Profilo a Doppio Arco di Cerchio . . . . .	40
3.3.3 Profilo Trapezoidale . . . . .	41
3.3.4 Effetto della Corona sulla Dinamica . . . . .	42
3.3.5 Geometria a Larghezza Non Costante . . . . .	43
3.3.6 Accorgimenti Finali . . . . .	46
<b>4 Analisi del Blend</b>	50
4.1 Selezione del Blend . . . . .	50
4.1.1 Effetto della Posizione del Blend . . . . .	51
4.1.2 Effetto della Dimensione del Blend . . . . .	53
4.1.3 Considerazioni Finali sulla Selezione del Blend . . . . .	54

4.2	Studio della Dinamica del Blend . . . . .	56
4.2.1	Analisi Modale . . . . .	56
4.2.2	Confronto delle Forme Modali . . . . .	59
4.2.3	Analisi della Risposta Forzata . . . . .	64
4.3	Metodo della Crack-Detection . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>70</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>

# Elenco delle tabelle

4.1	Modelli di <i>blend</i> candidati alla selezione: sono raccolte le loro dimensioni e la loro posizione relativa rispetto all'attacco pala . . .	52
4.2	<i>Modal Assurance Criterion (MAC)</i> tra <i>Model 1</i> e <i>Model 2</i> . . . . .	61
4.3	<i>Modal Assurance Criterion (MAC)</i> tra <i>Model 1</i> e <i>Model 2</i> e tra <i>Model 1</i> e <i>Model 3</i> . . . . .	63

# Elenco delle figure

1.1	Esempi di dischi palettati danneggiati da impatti . . . . .	1
1.2	Alcuni dettagli della prova sperimentale svolta all'università di Resovia, in Polonia [2] . . . . .	2
1.3	Modello <i>FEM</i> di pala riparata con <i>blend repair</i> [5] . . . . .	2
1.4	Dipendenza della frequenza propria di pala dalla dimensione del danno [2] . . . . .	3
2.1	(a) Schema di un'estremità di pala di turbina provvista di cavità ( <i>squealer rim</i> ) con dettaglio sulla sezione ipoteticamente riparata e (b) schema della testa del <i>LDED</i> ( <i>Laser Directed Energy Deposition</i> ) con deposito coassiale di materiale ( <i>powder</i> ) [11] . . . . .	6
2.2	Linea guida per un <i>blend</i> di forma ellittica [6] . . . . .	7
2.3	Esempio di <i>blend limits</i> per le diverse aree della pala [8] . . . . .	8
2.4	(a) Disco palettato con 3 pale riparate per <i>blending</i> e (b) dettagli dei <i>blend</i> sulle 3 pale [6] . . . . .	9
2.5	Effetti del <i>blend repair</i> sulla dinamica di un disco palettato [6] . . . . .	9
2.6	Modello <i>FEM</i> di un disco palettato (sinistra) e di un settore fondamentale (destra) [14] . . . . .	10
2.7	Struttura circonferenzialmente periodica a $N$ settori [15] . . . . .	11
2.8	3 settori di disco palettato modellati a parametri concentrati ( $J = 2$ ) [16] . . . . .	12
2.9	Modi di un vibrare di una struttura circonferenzialmente periodica per diversi diametri nodali $h$ [17] . . . . .	21
2.10	Modi di un disco palettato <i>tuned</i> a $N = 28$ settori [14] . . . . .	22
2.11	Esempio di forzanti aerodinamiche sinusoidali . . . . .	25
2.12	Diagramma di Campbell per un disco palettato [18] . . . . .	27
2.13	Diagramma di Campbell con possibili risonanze (cerchiate in rosso) [19] . . . . .	30
2.14	Forme modali di un disco palettato in assenza e in presenza di <i>mistuning</i> [20] . . . . .	31

2.15	Risposta in frequenza di 3 pale eccitate da un <i>engine order</i> $eo = 6$ , risultati per un'analisi completa <i>FEM</i> e una tramite riduzione <i>FMM</i> [22] . . . . .	33
3.1	Modello <i>FEM</i> di una pala a larghezza non costante . . . . .	37
3.2	Settore di disco palettato con profilo rettangolare, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	38
3.3	Famiglie modali del disco palettato con profilo rettangolare, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	39
3.4	Analisi strutturale disco palettato con profilo rettangolare, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	39
3.5	Settore di disco palettato con profilo a doppio arco di cerchio, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	40
3.6	Famiglie modali del disco palettato con profilo a doppio arco di cerchio, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	40
3.7	Analisi strutturale disco palettato con profilo a doppio arco di cerchio, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	41
3.8	Settore di disco palettato con profilo trapezoidale, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	41
3.9	Famiglie modali del disco palettato con profilo trapezoidale, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	42
3.10	Analisi strutturale disco palettato con profilo trapezoidale, <i>crowned</i> e <i>uncrowned</i> . . . . .	42
3.11	Modello <i>Solidworks</i> del disco palettato finale . . . . .	44
3.12	Famiglie modali del disco palettato con profilo rettangolare a sezione non costante. Nel diagramma sono presenti: la prima famiglia flessionale (in blu), la prima famiglia torsionale (in rosso) e la seconda famiglia flessionale (in giallo) . . . . .	45
3.13	Analisi strutturale disco palettato con profilo rettangolare a sezione non costante, versione <i>crowned</i> . . . . .	45
3.14	Modello <i>Solidworks</i> del disco palettato con <i>stagger angle</i> di $30^\circ$ . . . . .	47
3.15	Differenze nella dinamica tra disco palettato con <i>stagger angle</i> di $45^\circ$ ( <i>Model 1</i> ) e disco palettato con <i>stagger angle</i> di $30^\circ$ rispetto all'asse macchina ( <i>Model 2</i> ) . . . . .	47
3.16	Messa in tavola del disco palettato con <i>stagger angle</i> di $30^\circ$ (rispetto all'asse macchina) candidato alla costruzione in officina . . . . .	48
3.17	Cuneo di supporto agli elettromagneti . . . . .	49
4.1	Esempio di <i>blend</i> parametrizzato . . . . .	51
4.2	<i>Model 2.8</i> con un <i>blend</i> di $d = 4$ mm e $R_d = 0.8$ . . . . .	52
4.3	Effetto della posizione relativa del <i>blend</i> rispetto all'attacco pala $R_d$ , per 3 diverse profondità di asportazione $d$ . . . . .	53
4.4	Effetto sulle frequenze della profondità del <i>blend</i> $d$ . . . . .	54

4.5	Modello agli elementi finiti del candidato definitivo ( <i>Model 2</i> ) (a) e variazioni in frequenza dovute al <i>blend</i> praticato (b) . . . . .	55
4.6	Modelli agli elementi finiti dei tre dischi palettati completi . . . . .	57
4.7	Diagramma frequenza-diametro nodale per i 2 modelli di disco palettato: <i>pristine</i> (a) e 18 <i>blended sectors</i> . . . . .	58
4.8	Variazione in frequenza tra i due dischi palettati <i>Model 1</i> e <i>Model 2</i>	58
4.9	Diagramma frequenza-diametro nodale per i 3 modelli di disco palettato: diagramma completo (a) con dettaglio sulla prima famiglia flessionale (b) . . . . .	59
4.10	Modi selezionati per il confronto delle forme modali . . . . .	59
4.11	Nodo selezionato per il confronto delle forme modali . . . . .	60
4.12	Forme modali del disco palettato <i>Model 3</i> . In evidenza (in rosso) i diametri nodali . . . . .	62
4.13	Confronto tra forme modali flessionali e torsionali a $ND = 3$ . . . .	63
4.14	Forzanti rotanti applicate sull'intero disco palettato per due diversi <i>engine order</i> . . . . .	64
4.15	Nodo di applicazione della forzante (in rosso) e nodi di lettura della risposta (in giallo) . . . . .	64
4.16	Risposta forzata per <i>engine order</i> $eo = [2\ 3]$ letta su due nodi di <i>output</i> (punto di applicazione della forzante e <i>tip</i> della pala) per i due dischi palettati <i>pristine</i> ( <i>Model 1</i> ) e con singolo <i>blend</i> ( <i>Model 3</i> )	66
4.17	<i>Isolation index</i> per i modi del disco palettato . . . . .	68
4.18	<i>Crack-sensitivity index</i> per i modi del disco palettato . . . . .	69



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Contesto

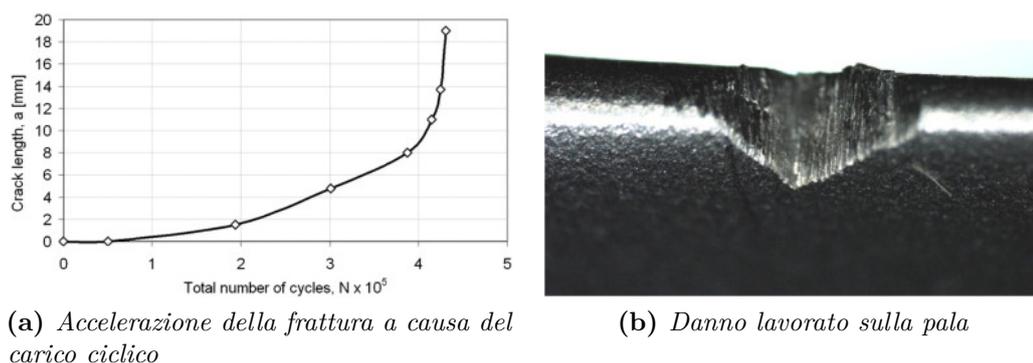
I dischi palettati dei motori aeronautici sono vittime di impatti con oggetti, esterni (*foreign object impact* o *FOD*) o interni al motore (contatto col *casing* statorico). Il *bird strike*, per esempio, rappresenta ben il 90% degli eventi *FOD* [1].

Questi impatti (Figura 1.1) compromettono le prestazioni aerodinamiche e aeroelastiche della schiera, riducendone inoltre la vita a fatica.

Una prova sperimentale dell'università di Resovia [2], in Polonia, mostra come la propagazione di un danno da impatto è fortemente accelerata dalle sollecitazioni cicliche tipiche di una schiera di pale (Figura 1.2 (a)). Per questa prova è stata lavorata una frattura "a V" (*V-notch*) su una pala (Figura 1.2 (b)), che simula il danno da impatto.



**Figura 1.1:** Esempi di dischi palettati danneggiati da impatti

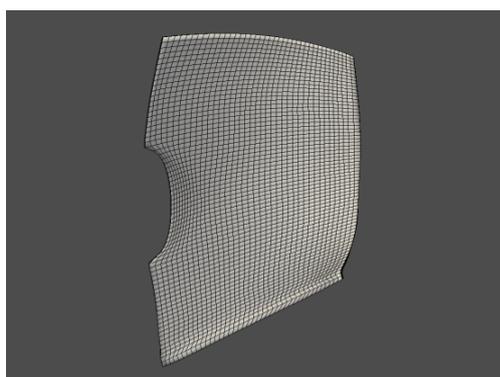


**Figura 1.2:** Alcuni dettagli della prova sperimentale svolta all'università di Resovia, in Polonia [2]

Queste tipologie di danni, certamente non le uniche che affliggono i motori aeronautici, riducono la durata dei componenti. In questi casi si parla spesso di fatica ad alto numero di cicli (*high cycle fatigue* o *HCF*).

Di tutto il disco palettato, la parte più sollecitata è senza dubbio la pala: oltre dai *FOD* essa è interessata da carichi centrifughi e da forti gradienti termici. Uno studio rileva infatti che il 42% delle rotture in un disco palettato è *blade-related* [3]. Se consideriamo che, nel solo 1998, il 55% delle *failures* e il 30% delle spese di manutenzione dei caccia della *U.S. Air Force* erano riconducibili alla *HCF* [4], possiamo concludere che la gestione di un danno, da impatto e non, è di fondamentale importanza per il contenimento dei costi di manutenzione.

In questo contesto si inserisce il *blade repair*, ossia quella tecnica che evita la sostituzione di una pala danneggiata asportando il danno insieme a del materiale aggiuntivo (Figura 1.3). L'asportazione per *blending* presenta una forma smussata, in modo da ridurre l'effetto di intaglio e prolungare la vita a fatica del componente.



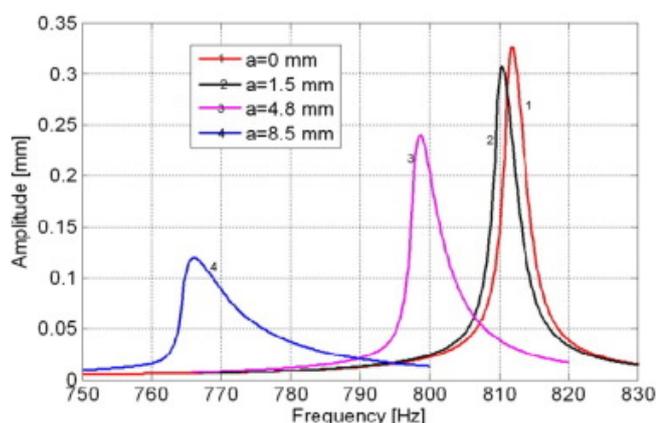
**Figura 1.3:** Modello *FEM* di pala riparata con *blend repair* [5]

La posizione, la forma, la profondità e l'*aspect ratio* del *blend* alterano l'aerodinamica, l'aeroelasticità e la dinamica della schiera, come dimostrato dal lavoro di Keller [6]. Risulta quindi importante studiare l'effetto della riparazione sulle prestazioni, che devono essere preservate il più possibile.

Nell'ambito più specifico della dinamica dei dischi palettati, l'analisi della risposta forzata permette di individuare possibili risonanze ed evitare vibrazioni critiche per l'integrità del componente. Come rappresentato in Figura 1.4, la sperimentazione polacca [2] mette in evidenza la variazione della frequenza propria della pala con la dimensione del danno.

Se a progetto si erano desintonizzate le frequenze proprie dalle frequenze delle forzanti, adesso ciò potrebbe non essere più vero in presenza di un danno.

Il *blade repair* è una valida soluzione a questo problema, applicata con successo nell'industria, a patto che si studi correttamente la sua influenza sulla dinamica del disco palettato.



**Figura 1.4:** Dipendenza della frequenza propria di pala dalla dimensione del danno [2]

## 1.2 Struttura della Tesi

In questo primo capitolo introduttivo è stato illustrato il contesto in cui si sviluppa il lavoro di tesi, giustificando l'importanza del *blade repair* all'interno dell'industria aeronautica.

Nel Capitolo 2 sarà definito in modo più appropriato il problema da affrontare.

Si descriverà l'attuale stato dell'arte del *blade repair* e si richiameranno elementi di teoria della dinamica dei dischi palettati, come l'analisi modale e l'analisi della risposta forzata nell'ipotesi di simmetria ciclica. Speciale attenzione si porrà al fenomeno del *mistuning*, strettamente legato alla realtà di *bladed-disk* danneggiati. Infine sarà definito in modo chiaro l'obiettivo di questo lavoro di tesi, insieme ai

risultati da esso attesi.

Nel Capitolo 3 si descriverà il processo decisionale che accompagna il progetto di un disco palettato semplificato. Esso sarà costruito ed utilizzato in laboratorio per studiare l'effetto del *blend repair* sulla dinamica del disco palettato. Le simulazioni sono effettuate tramite il software *ANSYS* sfruttando analisi agli elementi finiti (*FEM*). Alcuni importanti requisiti sono richiesti al *bladed-disk* (relativi al comportamento dinamico) e alcuni vincoli (derivanti principalmente dai banchi di prova) sono da tenere in conto in fase di progetto.

Definito il disco palettato finale, nel Capitolo 4 si praticherà un *blend* su una o più pale e se ne calcoleranno gli effetti sulla dinamica. Si cercheranno quindi le dimensioni, la forma e la posizione del *blend* che più amplificano le variazioni della dinamica. In questo modo si troverà la riparazione più adatta da applicare sul vero disco sperimentale.

Si procederà poi allo studio delle proprietà dinamiche del disco palettato con *blend* e saranno confrontate con quelle del disco palettato integro, al fine di determinare l'influenza del *blade repair* sulle frequenze proprie, sulle forme modali e sulla risposta forzata.

Come ultima considerazione, si studierà il metodo della *crack detection*, utile per capire quale pala presenta un danno su un disco palettato reale a partire dalle ampiezze di risposta forzata.

Infine, nel Capitolo 5, saranno tratte le principali conclusioni di questo lavoro di tesi, alla luce dei risultati ottenuti.

## Capitolo 2

# Definizione del Problema

### 2.1 Stato dell'Arte

Durante la vita operativa di un motore aeronautico, le schiere di pale potrebbero danneggiarsi in diversi modi. Un esempio di danno potrebbe essere quello dovuto a *bird strike*, come già citato in Sezione 1.1.

Considerando l'intera vita operativa del componente, è importante capire se conviene, dal punto di vista dei costi, riparare la pala danneggiata oppure sostituirla. Una linea guida utilizzata per questa decisione prevede che il costo di riparazione non debba superare il  $65 \div 70\%$  del costo di sostituzione [7].

Poiché questo lavoro di tesi si focalizza sul recupero delle pale, assumiamo che la riparazione sia la scelta più *cost-effective*.

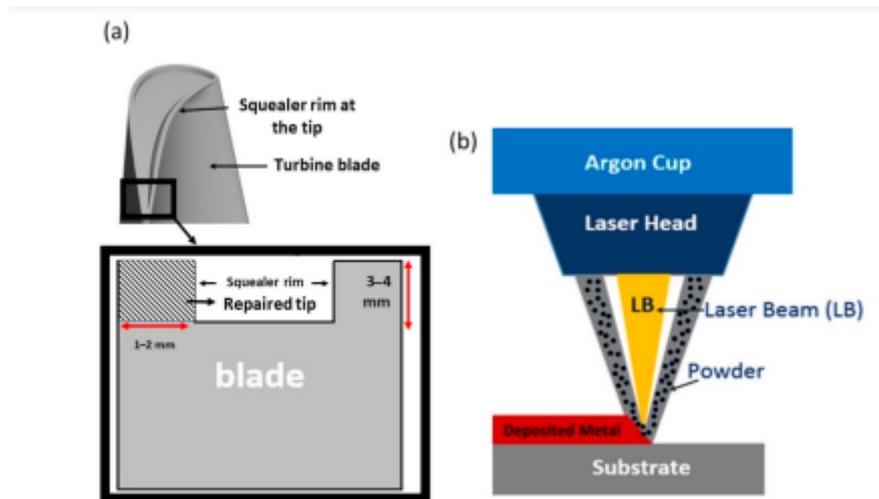
In generale, esistono due modi diversi di riparare una pala [8]. Il primo consiste nel rimuovere dal motore l'intera schiera rotorica, di compressore o turbina, e di portarla in una *facility* dedicata. Questa è la tipologia di riparazione più onerosa, sia in termini di tempo che di costi.

Alcuni esempi di questa prima tipologia di interventi sono la *fusion welding*, il *solid state diffusion bonding* e il *conventional brazing*. Una nuova e promettente tecnologia, il *wide gap brazing (WGP)*, riduce fortemente la durata di questi trattamenti [9].

Ulteriori miglioramenti si ottengono quando più tecniche sono applicate insieme, ad esempio trattamenti ibridi di *brazing* e *coating*.

Infine, sia difetti superficiali che danni da impatto più profondi, sono trattabili tramite laser (Figura 2.1) che depositano materiale al fine di occludere il difetto [10].

Le tecnologie appena citate sono da praticarsi necessariamente in *facilities* esterne, allungando le tempistiche di manutenzione.



**Figura 2.1:** (a) Schema di un'estremità di pala di turbina provvista di cavità (*squealer rim*) con dettaglio sulla sezione ipoteticamente riparata e (b) schema della testa del LDED (*Laser Directed Energy Deposition*) con deposito coassiale di materiale (*powder*) [11]

L'ideale però sarebbe riuscire a riparare le pale senza rimuovere le schiere dal motore. Per fare ciò si sono previste delle aperture nel *casing* del motore che permettono l'intervento sulle schiere.

Una riparazione di questa seconda tipologia è senza dubbio la più desiderabile, in quanto riduce i costi e i tempi della manutenzione.

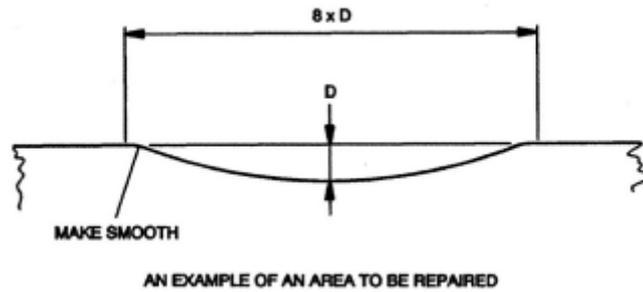
Tutti i trattamenti elencati in precedenza hanno in comune il riempimento del danno con del materiale. Invece una tecnologia affermata nell'industria, che si fonda sul principio opposto e che si applica direttamente alla pala montata nel motore, è il *blend repair*.

Immaginiamo che una schiera rotorica di *fan* sia soggetta a *FOD*. Una delle sue pale potrebbe presentare un danno come in Figura 1.2 (b).

Il *blend repair* per questa pala consiste nell'asportazione del danno e del materiale ad esso adiacente. Il *blend* deve tale da includere il difetto e deve essere sufficientemente smussato per evitare concentrazioni di tensioni da intaglio.

Esistono delle guide linea che stabiliscono la geometria e la forma del *blend*. Uno di questi suggerimenti è rappresentato in Figura 2.2.

La lavorazione di un *blend* è soggetta ad un'accurata pianificazione. Non è detto che la riparazione sia sempre la scelta più opportuna per il componente e, a volte, proseguire con la sostituzione della pala danneggiata potrebbe essere la decisione giusta, seppur da evitare il più possibile per tempi e costi di manutenzione elevati. Esclusi i costi, su questa scelta pesano due fattori importanti: la storia del componente e i limiti del *blend* [8].



**Figura 2.2:** Linea guida per un *blend* di forma ellittica [6]

Una pala già riparata più volte è spesso destinata alla sostituzione, mentre una pala fino ad allora integra conviene che sia sottoposta a *blend repair*. Chi si occupa della manutenzione deve tenere conto sia della storia della schiera in esame e sia di quella dei componenti ad essa fortemente collegati. Conoscere il numero di cicli effettuati dal motore al momento del danno e la tipica durata dei componenti, permette una scelta più consapevole del tipo di intervento.

Se la pala risulta idonea alla riparazione, nasce il bisogno di definire la forma e la dimensione del *blend*. Queste sono suggerite da algoritmi basati su modelli statistici ed empirici, fornite le dimensioni, la tipologia e la posizione del danno.

Questi modelli forniscono in *output* le dimensioni e la forma del *blend*, nonché gli effetti sulla vita a fatica e sulle prestazioni della schiera (ad esempio stallo e *pressure ratio*).

Data una certa posizione del *blend*, esistono dei limiti alle dimensioni dello stesso (un esempio di questi limiti è mostrato in Figura 2.3). Se i modelli generano geometrie dalle dimensioni non accettabili, la pala dovrà essere sostituita.

Nella pianificazione della riparazione, l'effetto che il *blend* ha sulle prestazioni è da tenere fortemente in considerazione.

Una pala danneggiata vede compromesse le sue proprietà aerodinamiche, specialmente se il danno è vicino al bordo d'attacco (caso molto probabile per eventi *FOD*). In particolare, lo stallo della schiera potrebbe verificarsi in anticipo rispetto al componente integro [12].

Giebmanns [13] ha studiato l'effetto aerodinamico del *blend* su una pala di *fan*. Rispetto alla pala danneggiata, la riparazione agevola il ripristino delle prestazioni aerodinamiche, allontanando la schiera dallo stallo.

Dallo studio di Keller [6] sul disco palettato in Figura 2.4 si evince che il *blend* altera non solo l'aerodinamica della pala, ma anche le sue caratteristiche aeroelastiche e dinamiche, come rappresentato in Figura 2.5.

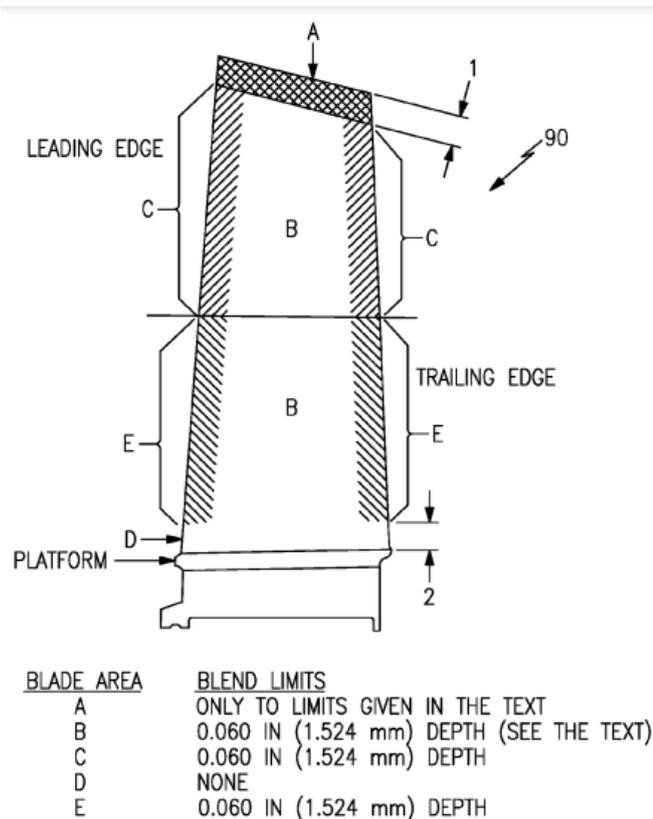


Figura 2.3: Esempio di *blend limits* per le diverse aree della pala [8]

Il *blade repair* ha quindi una grande influenza sulle prestazioni della schiera in molteplici campi. La definizione della forma e delle dimensioni del *blend* deve tenere conto di tutti questi effetti sulle caratteristiche della pala.

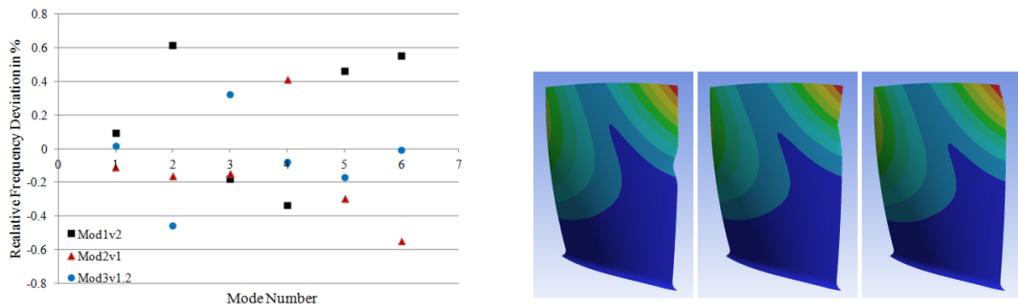
Un processo di ottimizzazione delle dimensioni del *blend* è stato suggerito da Brown [5]. Se linee guida basate su approcci statistici e conservativi hanno limitato le dimensioni del *blend* (profondità e *aspect ratio*), adesso metodologie numeriche avanzate possono ridefinire in modo più opportuno questi limiti, alla luce di specifici vincoli sulle frequenze e sulle forme modali.

## 2.2 Richiami Teorici

Si rende necessario richiamare alcuni elementi di teoria riguardo la dinamica dei dischi palettati. Si descriveranno l'analisi modale e l'analisi della risposta forzata di sistemi *tuned* a  $J$  gradi di libertà, per i quali è possibile effettuare l'ipotesi di simmetria ciclica.



**Figura 2.4:** (a) Disco palettato con 3 pale riparate per *blending* e (b) dettagli dei *blend* sulle 3 pale [6]



**(a)** Variazione delle frequenze proprie del disco palettato a causa della riparazione **(b)** Forme modali delle 3 pale riparate per *blending*

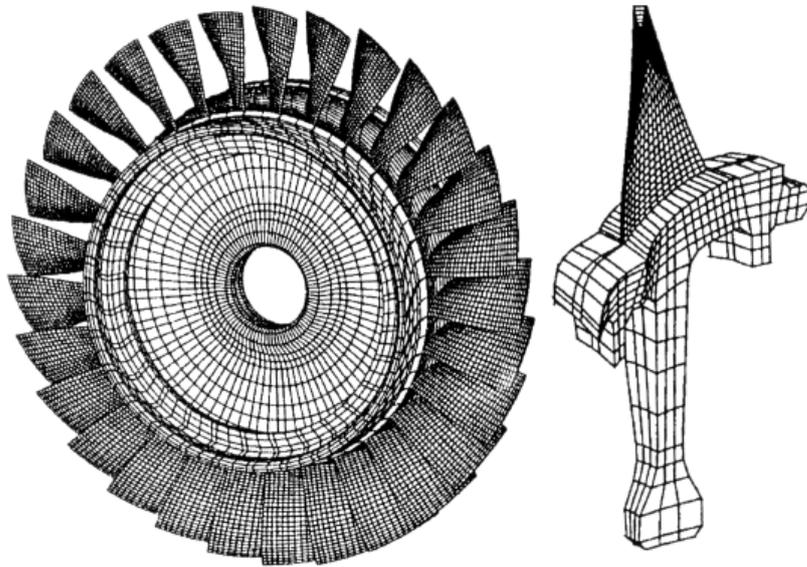
**Figura 2.5:** Effetti del *blend repair* sulla dinamica di un disco palettato [6]

Per gli obiettivi di questa tesi, sarà invece fondamentale considerare il *mistuning* del disco palettato, ossia la presenza di difetti in uno o più settori. L'ipotesi di simmetria ciclica verrà meno e le forme modali del sistema *tuned* saranno alterate: si parlerà in questo caso di *localizzazione* dei modi.

### 2.2.1 Dinamica dei Dischi Palettati

I dischi palettati (Figura 2.13) sono componenti molto ricchi dal punto di vista dinamico. In intervalli ridotti di frequenze sono presenti numerose forme modali. Studiare la dinamica di un disco palettato risulta fondamentale nella fase di progetto di una turbomacchina per applicazioni aeronautiche. L'analisi modale permette l'individuazione delle frequenze proprie del componente, invece l'analisi della risposta forzata determina quali sono le possibili risonanze.

Nel caso in cui le frequenze eccitanti coincidessero con quelle proprie del sistema, nascerebbero vibrazioni pericolose per la sicurezza del componente. L'analisi della risposta forzata permette di comprendere l'entità di queste oscillazioni in risonanza e aiuta nell'allontanamento da queste frequenze in caso di vibrazioni non accettabili. L'elevata densità modale in un disco palettato rende più difficoltoso il processo di desintonizzazione dalle frequenze di risonanza.



**Figura 2.6:** Modello *FEM* di un disco palettato (sinistra) e di un settore fondamentale (destra) [14]

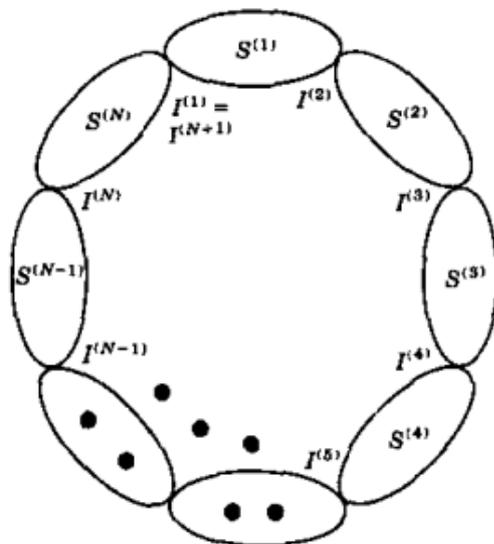
### Ipotesi di Simmetria Ciclica

Sia  $J$  il numero di gradi di libertà in cui è suddiviso il nostro componente.  $J$  coincide col numero di frequenze proprie  $\omega_j$  (con  $j = 1, 2, \dots, J$ ) risultanti dall'analisi modale.

Nel caso di  $J$  molto elevati, la complessità del problema agli autovalori, e quindi la dimensione del sistema ad esso associato diventa molto importante.

Modellizzare un disco palettato semplificato permette una più agevole analisi modale, sacrificando un po' di accuratezza. Invece un'analisi modale effettuata tramite *FEM* riesce a gestire un elevatissimo numero di gradi di libertà in tempi di calcolo ragionevolmente ridotti.

Se diversi modelli di disco palettato si sono susseguiti nel corso degli anni, una considerazione in particolare ha permesso un'enorme semplificazione del problema. Si può pensare al disco palettato come una serie di  $N$  settori fondamentali identici  $S^{(n)}$ , con  $n = 1, 2, \dots, N$ , posti circonferenzialmente l'uno accanto all'altro [15]. Ogni settore copre un'ampiezza angolare di  $\phi = 2\pi/N$ . Settori adiacenti  $S^{(n)}$  e  $S^{(n+1)}$  condividono l'interfaccia  $I^{(n+1)}$  (Figura 2.7). Questa considerazione prende il nome di ipotesi di simmetria ciclica.



**Figura 2.7:** Struttura circonferenzialmente periodica a  $N$  settori [15]

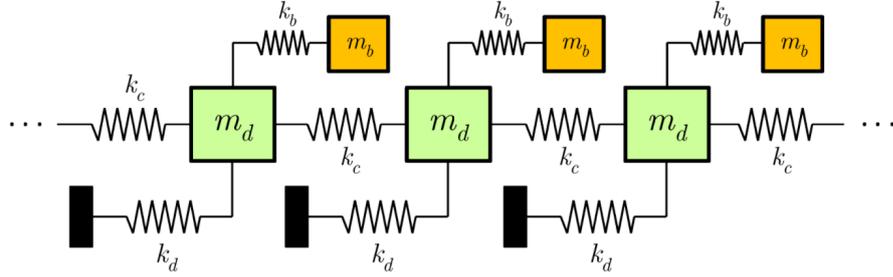
Immaginiamo per semplicità che un settore fondamentale di disco palettato  $S^{(n)}$  sia modellizzabile con  $J = 2$  gradi di libertà. Parliamo in questo caso di modello a parametri concentrati.

Questa scelta permette un'analisi preliminare dei due componenti principali del settore fondamentale: la pala ed il settore angolare di disco.

Sia  $m_j$  la massa del generico *GDL* e sia, nello specifico,  $m_1$  la massa concentrata del settore di disco e sia  $m_2$  la massa concentrata della pala.

Nasce ora il bisogno di modellare opportunamente le connessioni tra settori adiacenti, ma anche tra pala e porzione di disco. Sia allora  $k_1$  il collegamento tra disco e *terra*, sia  $k_2$  quello tra disco e pala e sia  $k_c$  quello tra settori adiacenti.

Una rappresentazione di alcuni settori fondamentali a  $J = 2$  gradi di libertà è illustrata in Figura 2.8.



**Figura 2.8:** 3 settori di disco palettato modellati a parametri concentrati ( $J = 2$ ) [16]

Assumendo una configurazione *cantilevered* del disco palettato, le uniche connessioni tra settori adiacenti sono quelle tra settori di disco (rigidezza  $k_c$ ).

Ipotizzando che la numerazione dei settori  $S^{(n)}$  sia antioraria, è possibile scrivere le equazioni dinamiche del moto per i  $J = 2$  *GDL*:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1^{(n)} + k_1 x_1^{(n)} + k_2 (x_1^{(n)} - x_2^{(n)}) + k_c (x_1^{(n)} - x_1^{(n+1)}) + k_c (x_1^{(n)} - x_1^{(n-1)}) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2^{(n)} + k_2 (x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Qui  $x_1^{(n)}$  e  $x_2^{(n)}$  sono gli spostamenti dei *GDL* relativi a disco e pala del settore  $n$ -esimo,  $\ddot{x}_1^{(n)}$  e  $\ddot{x}_2^{(n)}$  sono le accelerazioni associate, mentre  $x_1^{(n+1)}$  e  $x_1^{(n-1)}$  sono gli spostamenti dei *GDL* di disco dei settori adiacenti  $n + 1$  ed  $n - 1$ .

È possibile condensare le Equazioni 2.1 attraverso una notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1^{(n)} \\ \ddot{x}_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_c & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n-1)} \\ x_2^{(n-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.2)$$

$$\left[ m^{(n)} \right] \left\{ \ddot{x}^{(n)} \right\} + \left[ k^{(n)} \right] \left\{ x^{(n)} \right\} + \left[ k_c^{(n)} \right] \left\{ x^{(n+1)} \right\} + \left[ k_c^{(n)} \right] \left\{ x^{(n-1)} \right\} = \left\{ 0 \right\}. \quad (2.3)$$

$\left[ m^{(n)} \right]$ ,  $\left[ k^{(n)} \right]$  e  $\left[ k_c^{(n)} \right]$  sono, rispettivamente, le matrici di massa, di rigidità e di accoppiamento del settore  $n$ -esimo (dimensioni  $J \times J$ ), mentre  $\left\{ x^{(n)} \right\}$ ,  $\left\{ x^{(n+1)} \right\}$  e  $\left\{ x^{(n-1)} \right\}$  raggruppano gli spostamenti dei  $J$  gradi di libertà dei settori  $n$ ,  $n+1$  ed  $n-1$  (dimensioni  $J \times 1$ ). Infine  $\left\{ \ddot{x}^{(n)} \right\}$  contiene le accelerazioni dei  $GDL$  del settore  $n$ -esimo (dimensione  $J \times 1$ ).

Questa formulazione, inizialmente pensata per un settore a  $J = 2$   $GDL$ , è in realtà valida per un settore con un numero arbitrario di  $GDL$ . Quindi da adesso sarà trattato il caso più generale possibile.

Un'equazione matriciale come 2.3 può essere scritta per tutti i settori  $S^{(n)}$ , con  $n = 1, 2, \dots, N$ :

$$\begin{cases} \left[ m^{(1)} \right] \left\{ \ddot{x}^{(1)} \right\} + \left[ k^{(1)} \right] \left\{ x^{(1)} \right\} + \left[ k_c^{(1)} \right] \left\{ x^{(2)} \right\} + \left[ k_c^{(1)} \right] \left\{ x^{(N)} \right\} = \left\{ 0 \right\} \\ \left[ m^{(2)} \right] \left\{ \ddot{x}^{(2)} \right\} + \left[ k^{(2)} \right] \left\{ x^{(2)} \right\} + \left[ k_c^{(2)} \right] \left\{ x^{(3)} \right\} + \left[ k_c^{(2)} \right] \left\{ x^{(1)} \right\} = \left\{ 0 \right\} \\ \vdots \\ \left[ m^{(n)} \right] \left\{ \ddot{x}^{(n)} \right\} + \left[ k^{(n)} \right] \left\{ x^{(n)} \right\} + \left[ k_c^{(n)} \right] \left\{ x^{(n+1)} \right\} + \left[ k_c^{(n)} \right] \left\{ x^{(n-1)} \right\} = \left\{ 0 \right\} \\ \vdots \\ \left[ m^{(N-1)} \right] \left\{ \ddot{x}^{(N-1)} \right\} + \left[ k^{(N-1)} \right] \left\{ x^{(N-1)} \right\} + \\ + \left[ k_c^{(N-1)} \right] \left\{ x^{(N)} \right\} + \left[ k_c^{(N-1)} \right] \left\{ x^{(N-2)} \right\} = \left\{ 0 \right\} \\ \left[ m^{(N)} \right] \left\{ \ddot{x}^{(N)} \right\} + \left[ k^{(N)} \right] \left\{ x^{(N)} \right\} + \left[ k_c^{(N)} \right] \left\{ x^{(1)} \right\} + \left[ k_c^{(N)} \right] \left\{ x^{(N-1)} \right\} = \left\{ 0 \right\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

In forma compatta otteniamo un sistema di equazioni di questo tipo:

$$\left[ M \right] \left\{ \ddot{x} \right\} + \left[ K \right] \left\{ x \right\} = \left\{ 0 \right\}, \quad (2.5)$$

con

$$\left[ M \right] = \begin{bmatrix} \left[ m^{(1)} \right] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[ m^{(2)} \right] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \left[ m^{(n)} \right] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \left[ m^{(N-1)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \left[ m^{(N)} \right] \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

matrice di massa del disco palettato (dimensione  $NJ \times NJ$ ),

$$[K] = \begin{bmatrix} [k_c^{(1)}] & [k_c^{(1)}] & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ [k_c^{(2)}] & [k_c^{(2)}] & [k_c^{(2)}] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & [k_c^{(n)}] & [k_c^{(n)}] & [k_c^{(n)}] & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [k_c^{(N-1)}] & [k_c^{(N-1)}] & [k_c^{(N-1)}] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & [k_c^{(N)}] & [k_c^{(N)}] \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

matrice di rigidezza del disco palettato (dimensione  $NJ \times NJ$ ),

$$\{x\} = \begin{pmatrix} \{x^{(1)}\} \\ \{x^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{x^{(n)}\} \\ \vdots \\ \{x^{(N-1)}\} \\ \{x^{(N)}\} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

vettore degli spostamenti dei gradi di libertà del disco palettato (dimensione  $NJ \times 1$ )  
e

$$\{\ddot{x}\} = \begin{pmatrix} \{\ddot{x}^{(1)}\} \\ \{\ddot{x}^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\ddot{x}^{(n)}\} \\ \vdots \\ \{\ddot{x}^{(N-1)}\} \\ \{\ddot{x}^{(N)}\} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

vettore delle accelerazioni dei gradi di libertà del disco palettato (dimensione  $NJ \times 1$ ).

Se per l'ipotesi di simmetria ciclica abbiamo settori identici, allora le matrici di massa, di rigidezza e di accoppiamento  $n$ -esime sono uguali per ogni  $n = 1, 2, \dots, N$ :

$$[m^{(1)}] = [m^{(2)}] = \dots = [m^{(n)}] = \dots = [m^{(N-1)}] = [m^{(N)}] = [m]; \quad (2.10)$$

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \dots = [k^{(n)}] = \dots = [k^{(N-1)}] = [k^{(N)}] = [k]; \quad (2.11)$$

$$[k_c^{(1)}] = [k_c^{(2)}] = \dots = [k_c^{(n)}] = \dots = [k_c^{(N-1)}] = [k_c^{(N)}] = [k_c]. \quad (2.12)$$

Questa considerazione permette la riscrittura delle Equazioni 2.6 e 2.7:

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & [m] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & [m] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & [m] \end{bmatrix}; \quad (2.13)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [k] & [k_c] & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ [k_c] & [k] & [k_c] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & [k_c] & [k] & [k_c] & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [k_c] & [k] & [k_c] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & [k_c] & [k] \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

$[M]$  è una matrice *diagonale a blocchi*. I blocchi sono identici tra loro e di dimensione  $J \times J$ .  $[K]$  è una matrice *circolante a blocchi*. Da riga a riga, ogni blocco di dimensione  $J \times J$  si sposta sulla colonna alla sua destra.

L'Equazione 2.5 rappresenta la dinamica del disco palettato in simmetria ciclica. È un sistema di dimensione  $NJ \times NJ$ , il cui problema agli autovalori associato permette di calcolare le  $NJ$  frequenze naturali del sistema e determinare le forme modali del componente.

L'ipotesi di simmetria ciclica ha permesso la generazione di matrici di massa e rigidezza a blocchi. Per elevati  $J$ , la matrice di massa e la matrice di rigidezza sono praticamente vuote, esclusi gli elementi vicino alla diagonale. Una configurazione delle matrici di questo tipo rende il problema agli autovalori computazionalmente più economico rispetto ad un approccio in cui la simmetria ciclica non era stata prevista, con matrici più piene.

### Proprietà Modali di un Disco Palettato

Descritto il vantaggio principale dell'ipotesi di simmetria ciclica, analizziamo le principali proprietà modali di un disco palettato.

Per fare ciò introduciamo

$$\{\Phi\} = \begin{pmatrix} \{\Phi^{(1)}\} \\ \{\Phi^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\Phi^{(n)}\} \\ \vdots \\ \{\Phi^{(N-1)}\} \\ \{\Phi^{(N)}\} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

ossia il vettore contenente le forme modali del sistema. Si tratta di un vettore di dimensione  $NJ \times 1$ , dove ogni componente (dimensione  $J \times 1$ ) contiene i modi propri del singolo settore.

Si enuncia ora una proprietà fondamentale dei modi propri in sistemi in simmetria ciclica:

**Proprietà 1** *Un modo proprio ruotato di un angolo  $\phi = 2\pi/N$ , pari all'ampiezza di un settore, rimane un modo proprio.*

Quali tipi di forme modali soddisfano questa proprietà?

1. Forme modali uguali in ogni settore:  $\{\Phi^{(n)}\} = \{\Phi^{(n+1)}\}$ ;
2. Forme modali uguali, ma di segno opposto:  $\{\Phi^{(n)}\} = \{-\Phi^{(n+1)}\}$ ;
3. Forme modali

$$\{\Phi\} = \left\{ \left\{ \{\Phi^{(1)}\} \quad \{\Phi^{(2)}\} \quad \dots \quad \{\Phi^{(n)}\} \quad \dots \quad \{\Phi^{(N-1)}\} \quad \{\Phi^{(N)}\} \right\} \right\}^T$$

associate alla pulsazione naturale  $\omega_n$  che, ruotate di un angolo  $\phi = 2\pi/N$ , sono ancora forme modali del sistema

$$\{\Phi'\} = \left\{ \left\{ \{\Phi^{(N)}\} \quad \{\Phi^{(1)}\} \quad \dots \quad \{\Phi^{(n)}\} \quad \dots \quad \{\Phi^{(N-2)}\} \quad \{\Phi^{(N-1)}\} \right\} \right\}^T,$$

associate alla stessa  $\omega_n$ .

Quest'ultima tipologia di modi propri è quella su cui ci focalizziamo ora.

Quando si effettua una rotazione rigida, non è detto che  $\{\Phi\}$  e  $\{\Phi'\}$  siano ortogonali.

Però si può dire che  $\{\Phi'\}$  è un autovettore, combinazione lineare di  $\{\Phi\}$  e di un autovettore  $\{\bar{\Phi}\}$ , ortogonale a  $\{\Phi\}$ :

$$\{\Phi'\} = c\{\Phi\} + s\{\bar{\Phi}\}, \quad (2.16)$$

con  $c$  ed  $s$  coefficienti di combinazione lineare.

Poiché è possibile dimostrare che l'autovettore ortogonale  $\{\bar{\Phi}\}$  è ancora associato alla pulsazione naturale  $\omega_n$ , allora possiamo concludere che, dati due autovettori  $\{\Phi\}$  e  $\{\bar{\Phi}\}$ , associati alla stessa pulsazione naturale  $\omega_n$  e ortogonali tra loro, la loro combinazione lineare  $\{\Phi'\}$  è un modo proprio del sistema.

Con un ragionamento simile si può dire che esiste anche un autovettore  $\{\bar{\Phi}'\}$ , ortogonale a  $\{\Phi'\}$  tale per cui:

$$\{\bar{\Phi}'\} = -s\{\Phi\} + c\{\bar{\Phi}\}. \quad (2.17)$$

Si può inoltre dimostrare che  $c = \cos(\phi)$  ed  $s = \sin(\phi)$ , per cui si ottiene la seguente relazione matriciale che lega coppie di autovettori ortogonali tra loro ruotati di un angolo  $\phi = 2\pi/N$ :

$$\begin{Bmatrix} \{\Phi'\} \\ \{\bar{\Phi}'\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{NJ}] \cos(\phi) & [I_{NJ}] \sin(\phi) \\ -[I_{NJ}] \sin(\phi) & [I_{NJ}] \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi\} \\ \{\bar{\Phi}\} \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

dove  $[I_{NJ}]$  è la matrice identità di dimensione  $NJ \times NJ$ .

Partendo da una coppia di autovettori ortogonali, otteniamo una seconda coppia di autovettori, associati allo stesso autovalore  $\omega_n^2$ , attraverso una rotazione rigida. Nulla ci vieta di effettuare una seconda rotazione rigida e ottenere:

$$\begin{Bmatrix} \{\Phi''\} \\ \{\bar{\Phi}''\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{NJ}] \cos(\phi) & [I_{NJ}] \sin(\phi) \\ -[I_{NJ}] \sin(\phi) & [I_{NJ}] \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi'\} \\ \{\bar{\Phi}'\} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

con  $\{\Phi''\}$  e  $\{\bar{\Phi}''\}$  ruotati di  $2\phi$  rispetto a  $\{\Phi\}$  e  $\{\bar{\Phi}\}$ .

Qualunque sia il numero di rotazioni rigide effettuate, tutte sono riconducibili solamente alla prima coppia di autovettori  $\{\Phi\}$  e  $\{\bar{\Phi}\}$ . Questa terza tipologia di forme modali è a molteplicità doppia: gli unici modi indipendenti sono  $\{\Phi\}$  e  $\{\bar{\Phi}\}$  e sono sufficienti per effettuare tutte le rotazioni rigide possibili.

È possibile riscrivere l'Equazione 2.18 solo per il primo blocco di dimensione  $J \times J$ , relativo al primo settore ( $n = 1$ ):

$$\begin{Bmatrix} \Phi^{(N)} \\ \bar{\Phi}^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{NJ} \cos(\phi) & I_{NJ} \sin(\phi) \\ -I_{NJ} \sin(\phi) & I_{NJ} \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

Noto il campo di spostamenti del settore  $n = 1$ , è possibile trovare lo stesso modo riferito al settore  $n = N$ .

Riscrivendo per il generico settore  $n$ -esimo, otteniamo:

$$\begin{Bmatrix} \Phi^{(n-1)} \\ \bar{\Phi}^{(n-1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{NJ} \cos(\phi) & I_{NJ} \sin(\phi) \\ -I_{NJ} \sin(\phi) & I_{NJ} \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^{(n)} \\ \bar{\Phi}^{(n)} \end{Bmatrix} = [R_\phi] \begin{Bmatrix} \Phi^{(n)} \\ \bar{\Phi}^{(n)} \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

con

$$[R_\phi] = \begin{bmatrix} I_{NJ} \cos(\phi) & I_{NJ} \sin(\phi) \\ -I_{NJ} \sin(\phi) & I_{NJ} \cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Tramite la matrice di rotazione  $[R_\phi]$  è possibile calcolare gli spostamenti di un settore, noti quelli del settore adiacente.

Effettuando questo procedimento  $N$  volte, si ottiene il campo di spostamenti di ogni settore, e quindi di tutto il disco palettato, a partire da quelli del primo settore.

All' $N$ -esima iterazione, deve però valere che:

$$\begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(1)} \end{Bmatrix} = \prod_{n=1}^N [R_\phi] \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \bar{\Phi}^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

poiché il disco palettato è un componente chiuso in direzione circonferenziale.

Da questi ragionamenti ricaviamo due importanti considerazioni.

La prima vede ancora al centro l'ipotesi di simmetria ciclica: scopriamo infatti che non è più necessario calcolare le forme modali di ogni singolo settore. Note le forme modali del primo settore, è possibile ruotarle tramite la matrice  $[R_\phi]$  ed ottenere quelle dell'intero disco.

La seconda conclusione risiede nel fatto che non tutte le rotazioni rigide  $\phi$  sono ammissibili, ma solo quelle che soddisfano l'Equazione 2.23.

Al fine di proseguire nello studio delle proprietà modali di un disco palettato, si ritiene opportuno introdurre una notazione alternativa per le forme modali sfruttando i numeri complessi.

In particolare, dati gli autovettori ortogonali tra loro  $\{\Phi\}$  e  $\{\bar{\Phi}\}$  e gli autovettori ortogonali tra loro  $\{\Phi'\}$  e  $\{\bar{\Phi}'\}$  ruotati di  $\phi = 2\pi/N$ , possiamo definire:

$$\{\Theta\} = \{\Phi\} + i \{\bar{\Phi}\}; \quad (2.24)$$

$$\{\Theta'\} = \{\Phi'\} + i \{\bar{\Phi}'\}. \quad (2.25)$$

$\{\Theta\}$  e  $\{\Theta'\}$  sono autovettori complessi sfasati di  $\phi$  ed è possibile scrivere la relazione che intercorre tra di essi, equivalente all'Equazione 2.18:

$$\{\Theta'\} = \{\Theta\} e^{-i\phi}; \quad (2.26)$$

$$\begin{pmatrix} \{\Theta^{(N)}\} \\ \{\Theta^{(1)}\} \\ \vdots \\ \{\Theta^{(n-1)}\} \\ \vdots \\ \{\Theta^{(N-2)}\} \\ \{\Theta^{(N-1)}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\Theta^{(1)}\} \\ \{\Theta^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{\Theta^{(n)}\} \\ \vdots \\ \{\Theta^{(N-1)}\} \\ \{\Theta^{(N)}\} \end{pmatrix} e^{-i\phi}. \quad (2.27)$$

Per il singolo settore varrebbe:

$$\{\Theta^{(n-1)}\} = \{\Theta^{(n)}\} e^{-i\phi}. \quad (2.28)$$

Analogamente alla notazione reale, definiamo il campo di spostamenti del settore adiacente in funzione del campo di spostamenti del settore precedente. Se scegliessimo di adottare la notazione complessa, invece di quella reale, otterremmo ancora la forma modale di tutto il sistema, a partire da quella di un settore di riferimento. Ci interroghiamo adesso sul significato fisico di un modo complesso. I modi reali identificano una deformata. Qui i punti vibrano in fase tra loro, raggiungendo contemporaneamente i massimi, i minimi e gli attraversamenti dello zero.

Con i modi complessi ciò non accade. Ad esempio, si potrebbe facilmente dimostrare come i *GDL* attraversano lo zero, raggiungono il massimo o il minimo in momenti differenti. I modi complessi rappresentano una deformata con sfasamenti tra *GDL* diversi, parliamo infatti di *onda rotante*.

Sia per modi complessi (Equazione 2.28), che per modi reali (Equazione 2.22), è possibile effettuare un numero arbitrario di rotazioni per ottenere le forme modali per ogni settore del disco palettato. Non tutti gli angoli di rotazione sono però ammissibili, poiché devono rispettare la chiusura circonferenziale del disco (Equazione 2.23).

La condizione necessaria per avere rotazioni  $\phi$  ammissibili deve essere tale per cui

$$N\phi = 2\pi h, \quad (2.29)$$

ossia un'applicazione di  $N$  rotazioni  $\phi$  deve avere come risultato un numero intero  $h$  di numeri giri.  $h$  è detto indice armonico (*harmonic index*) oppure diametro nodale.

Gli indici armonici permessi, dato un certo numero di settori  $N$  sono:

$$h = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 2, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 2, N - 1 \quad (2.30)$$

per  $N$  pari;

$$h = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} - 2, \frac{N-1}{2} - 1, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} + 1, \frac{N-1}{2} + 2, \dots, N-2, N-1 \quad (2.31)$$

per  $N$  dispari.

Ad ogni  $h$  corrisponde un *Inter-Blade Phase Angle (IBPA)*:

$$\phi = \frac{2\pi h}{N}. \quad (2.32)$$

Se  $h = 0$ , lo sfasamento tra settori adiacenti è nullo. Le pale vibrano tutte in fase: è il caso di modi di Tipo 1.

Quando  $h = N/2$ , lo sfasamento è pari a  $\phi = \pi$ . Questo caso corrisponde a modi di Tipo 2, dove pale consecutive vibrano in controfase. A differenza dei modi di Tipo 1, i modi di Tipo 2 esistono solamente se il numero di settori  $N$  è pari.

Per tutti gli altri valori ammissibili di  $h$  (e di  $\phi$ ), abbiamo modi di Tipo 3, che abbiamo visto essere modi complessi. Si può dimostrare come, coppie di indici armonici (1 e  $N-1$ , 2 e  $N-2$ , 3 e  $N-3$ , etc...) sono associate alla stessa frequenza naturale. Sono coppie di modi complessi e coniugati, ossia due onde controrotanti alla stessa pulsazione.

Per indagare il significato fisico dell'indice armonico  $h$ , si considera la seguente espressione, ottenuta dopo diversi passaggi, di un modo proprio riferito al settore  $n+1$  e ad un singolo grado di libertà  $j$ :

$$\Phi_j^{(n+1)} = A_j \left[ \cos \left( 2\pi h \frac{n}{N} + \delta_j \right) \right], \quad (2.33)$$

con

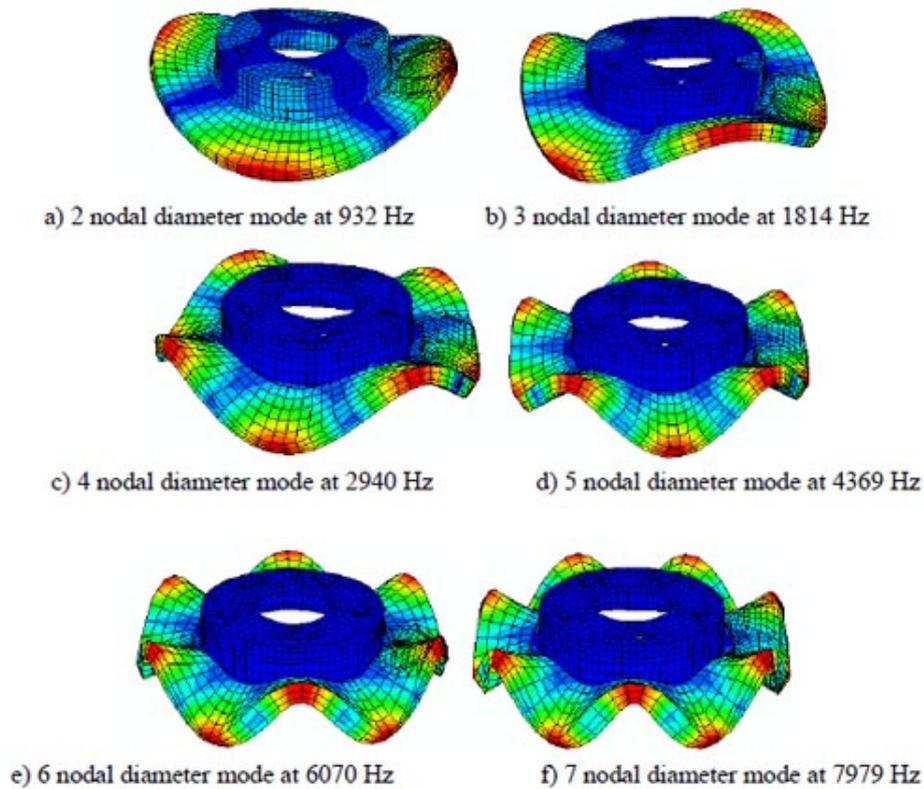
$$A_j = \sqrt{\Phi_j^{(1)2} + \overline{\Phi}_j^{(1)2}} \quad (2.34)$$

e  $\delta_j$  tale che

$$\cos(\delta_j) = \frac{\Phi_j^{(1)}}{A_j} \quad \text{oppure} \quad \sin(\delta_j) = \frac{\overline{\Phi}_j^{(1)}}{A_j}. \quad (2.35)$$

Per uno stesso *GDL*  $j$ , noto il modo proprio del settore di riferimento  $n=1$  e il suo modo ortogonale, è possibile calcolare, per ogni indice armonico  $h$ , il modo proprio relativo ad un qualsiasi settore  $n+1$ , similmente (ma più specificatamente) all'Equazione 2.21.

I modi reali  $\Phi_j^{(n+1)}$ , associati a modi complessi di indice armonico  $h$ , possiedono un andamento armonico in direzione circonferenziale.  $h$  è l'ordine della funzione armonica che modula l'ampiezza  $A_j$  proprio in questa direzione. Esisteranno  $h$  linee diametrali caratterizzate da spostamento nullo. L'indice armonico  $h$  è per questo motivo anche detto diametro nodale.

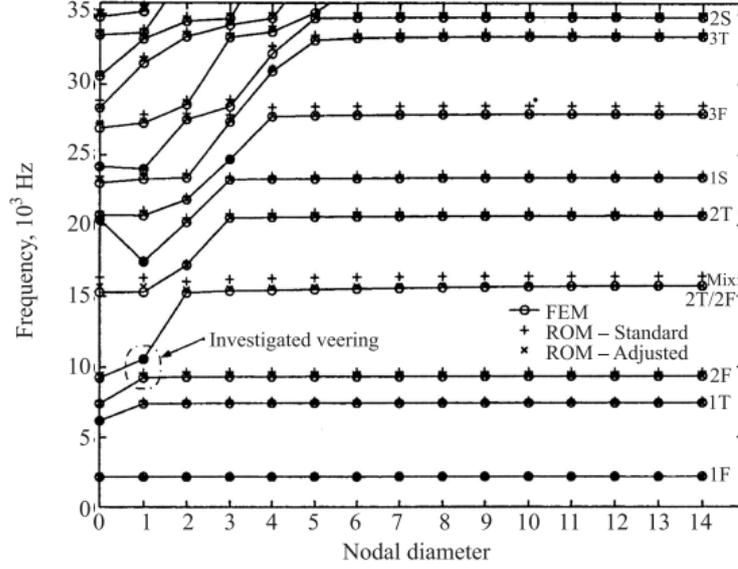


**Figura 2.9:** Modi di un vibrare di una struttura circonferenzialmente periodica per diversi diametri nodali  $h$  [17]

Note le frequenze proprie di un disco palettato in simmetria ciclica a  $N$  settori, è possibile tracciare un diagramma (Figura 2.10) che vede in ordinata le frequenze proprie del sistema e in ascissa il diametro nodale  $h$ . Ipotizzando  $N$  pari, in questi diagrammi  $h$  va da 0 a  $N/2$ , poiché i modi complessi e coniugati sono accorpati nell'intervallo  $1 < h < N/2 - 1$ .

Si possono distinguere diverse *famiglie modali*, ognuna associata ad un tipo di vibrazione diverso (flessionale, torsionale, etc...). Fissata la famiglia, all'aumentare di  $h$ , aumenta il numero di linee diametrali su cui lo spostamento è nullo. Più  $h$  è alto, meno il disco palettato avrà modo di vibrare, risultando in un irrigidimento del componente. Ciò comporta un aumento della frequenza, che tende a quella di una singola pala *cantilevered* (ipotizzando un disco infinitamente rigido).

Da ciò si evince come, diagrammi che vedono un'importante variazione in frequenza, presentano un disco fortemente flessibile e che partecipa alla dinamica del sistema (almeno per quella specifica famiglia di vibrazioni), mentre diagrammi praticamente a frequenza costante denotano un disco molto rigido che non influenza il comportamento dinamico del *bladed-disk*.



**Figura 2.10:** Modi di un disco palettato *tuned* a  $N = 28$  settori [14]

### Analisi Modale

Descritte le principali proprietà modali di un disco palettato, si procede all'applicazione delle conoscenze appena acquisite per effettuare l'analisi modale di un *bladed-disk* in simmetria ciclica. Grazie a questo tipo di analisi, svolta senza dubbio numericamente, è possibile tracciare diagrammi *frequenze-diametro nodale*, come quello di Figura 2.10, fondamentali per il riconoscimento delle proprietà dinamiche del sistema.

Per fare ciò, si ricorda l'espressione dell'*IBPA* (Equazione 2.32) e la si sostituisce nell'Equazione 2.28. Esplicitando  $\{\Theta^{(n)}\}$  si ottiene:

$$\{\Theta^{(n)}\} = \{\Theta^{(n-1)}\} e^{ih\frac{2\pi}{N}}. \quad (2.36)$$

Tornando all'esempio con il settore fondamentale a  $J = 2$  gradi di libertà, si sostituiscono le coordinate  $\{x(t)\} = \{\bar{x}\} e^{i\omega t}$  nelle equazioni dinamiche del moto (Equazioni 2.1):

$$\begin{cases} -\omega^2 m_1 \bar{x}_1^{(n)} + k_1 \bar{x}_1^{(n)} + k_2 (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_2^{(n)}) + \\ \quad + k_c (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_1^{(n+1)}) + k_c (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_1^{(n-1)}) = 0 \\ -\omega^2 m_2 \bar{x}_2^{(n)} + k_2 (\bar{x}_2^{(n)} - \bar{x}_1^{(n)}) = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Si sfrutta ora la relazione di simmetria ciclica applicata alle coordinate  $\bar{x}_1$ :

$$\bar{x}_1^{(n)} = \bar{x}_1^{(n-1)} e^{ih\frac{2\pi}{N}} \text{ e } \bar{x}_1^{(n+1)} = \bar{x}_1^{(n)} e^{ih\frac{2\pi}{N}}. \quad (2.38)$$

Sostituendo nelle Equazioni 2.37, si ottengono relazioni con grandezze del solo settore  $n$ -esimo:

$$\begin{cases} -\omega^2 m_1 \bar{x}_1^{(n)} + k_1 \bar{x}_1^{(n)} + k_2 (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_2^{(n)}) + \\ \quad + k_c (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_1^{(n)} e^{ih \frac{2\pi}{N}}) + k_c (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_1^{(n)} e^{-ih \frac{2\pi}{N}}) = 0 \\ -\omega^2 m_2 \bar{x}_2^{(n)} + k_2 (\bar{x}_2^{(n)} - \bar{x}_1^{(n)}) = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

In forma matriciale otteniamo:

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_c - k_c e^{ih \frac{2\pi}{N}} - k_c e^{-ih \frac{2\pi}{N}} & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^{(n)} \\ \bar{x}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.40)$$

$$\left( -\omega^2 [m_{SC}^{(h)}] + [k_{SC}^{(h)}] \right) \{\bar{x}^{(n)}\} = \{0\}. \quad (2.41)$$

Applicare l'ipotesi di simmetria ciclica significa ottenere matrici di massa e rigidità dipendenti dall'indice armonico  $h$ . Attribuendo ad  $h$  tutti i valori ammissibili, è possibile calcolare tutte le pulsazioni naturali e determinare tutti i modi propri del sistema.

Torniamo al caso di settore fondamentale a  $J$  gradi di libertà generici. Se  $\{\bar{x}^{(n)}\}$  è il vettore degli spostamenti dei *GDL* (dimensione  $J \times 1$ ), esso è suddivisibile nel seguente modo:

$$\{\bar{x}^{(n)}\} = \left\{ \begin{Bmatrix} \{\bar{x}_D^{(n)}\} \\ \{\bar{x}_I^{(n)}\} \\ \{\bar{x}_S^{(n)}\} \end{Bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{Bmatrix} \{\bar{x}_D^{(n)}\} \\ \{\bar{x}_I^{(n)}\} \\ \{\bar{x}_D^{(n+1)}\} \end{Bmatrix} \right\}. \quad (2.42)$$

$\{\bar{x}_D^{(n)}\}$  sono i *GDL* dell'interfaccia di destra (dimensione  $J_D \times 1$ ),  $\{\bar{x}_I^{(n)}\}$  sono i *GDL* interni (dimensione  $J_I \times 1$ ) e  $\{\bar{x}_S^{(n)}\}$  sono i *GDL* dell'interfaccia di sinistra (dimensione  $J_S \times 1$ ). Poiché settori adiacenti possiedono le interfacce in comune, vale che  $\{\bar{x}_S^{(n)}\} = \{\bar{x}_D^{(n+1)}\}$ .

Si procede ora all'applicazione delle condizioni al contorno in simmetria ciclica

$$\{\bar{x}_D^{(n+1)}\} = \{\bar{x}_D^{(n)}\} e^{ih \frac{2\pi}{N}}. \quad (2.43)$$

Sostituendo nell'Equazione 2.42, otteniamo:

$$\{\bar{x}^{(n)}\} = \left\{ \begin{Bmatrix} \{\bar{x}_D^{(n)}\} \\ \{\bar{x}_I^{(n)}\} \\ \{\bar{x}_D^{(n+1)}\} \end{Bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} [I_D] & 0 \\ 0 & [I_I] \\ [I_D] e^{ih \frac{2\pi}{N}} & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \{\bar{x}_D^{(n)}\} \\ \{\bar{x}_I^{(n)}\} \end{Bmatrix} \right\} = [\bar{T}^{(h)}] \{\bar{x}_{SC}^{(n)}\}. \quad (2.44)$$

$[I_D]$  è la matrice identità di dimensione  $J_D \times J_D$ ,  $[I_I]$  è la matrice identità di dimensione  $J_I \times J_I$ ,

$$[\bar{T}^{(h)}] = \begin{bmatrix} [I_D] & 0 \\ 0 & [I_I] \\ [I_D] e^{ih\frac{2\pi}{N}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

è una matrice di trasformazione dipendente dall'indice armonico  $h$  (dimensione  $2J_D + J_I \times J_D + J_I$ ) e  $\{\bar{x}_{SC}^{(n)}\}$  è il vettore degli spostamenti dei gradi di libertà con condizioni al contorno in simmetria ciclica (dimensione  $J_D + J_I \times 1$ ).

Sia

$$(-\omega^2 [m^{(n)}] + [k^{(n)}]) \{\bar{x}^{(n)}\} = \{0\} \quad (2.46)$$

l'equazione dinamica di equilibrio senza le condizioni al contorno di simmetria ciclica. Se ad essa applichiamo la matrice di trasformazione  $[\bar{T}^{(h)}]$  otteniamo:

$$[\bar{T}^{(h)}]^T (-\omega^2 [m^{(n)}] + [k^{(n)}]) [\bar{T}^{(h)}] \{\bar{x}^{(n)}\} = \{0\}; \quad (2.47)$$

$$(-\omega^2 [m_{SC}^{(h)}] + [k_{SC}^{(h)}]) \{\bar{x}_{SC}^{(n)}\} = \{0\}, \quad (2.48)$$

dove

$$[m_{SC}^{(h)}] = [\bar{T}^{(h)}]^T [m^{(n)}] [\bar{T}^{(h)}] \quad (2.49)$$

e

$$[k_{SC}^{(h)}] = [\bar{T}^{(h)}]^T [k^{(n)}] [\bar{T}^{(h)}] \quad (2.50)$$

sono la matrice di massa e la matrice di rigidità del sistema con condizioni al contorno di simmetria ciclica, dipendenti dall'indice armonico  $h$ .

Risolvere il sistema di Equazioni 2.48, per tutti i valori ammissibili di  $h$ , permette il calcolo di tutte le frequenze naturali del sistema e la determinazione di tutte le forme modali.

### Analisi della Risposta Forzata

Note le frequenze naturali del disco palettato e le sue forme modali, si rende necessario comprendere quali sono le possibili risonanze (se presenti), in modo da poterle eventualmente evitare.

L'elevata densità modale di un disco palettato rende particolarmente critico questo processo di desintonizzazione, ma uno studio preliminare della risposta forzata facilita questo lavoro, in quanto non è detto che tutte le frequenze eccitanti provochino in una risonanza.

Per fare ciò si introduce la tipica forzante aerodinamica in un disco palettato, ipotizzando che il campo di pressioni sia costante nel tempo e nello spazio in una

certa sezione del motore.

A monte e a valle di una schiera rotorica che ruota a velocità angolare  $\Omega$  è presente una schiera statorica. Possiamo pensare che, quando la singola paletta rotorica passa dietro ad una paletta statorica, essa avverte una certa pressione, mentre, quando si trova davanti al condotto libero, ne avverte un'altra.

Poiché il campo di pressioni è pensato come stazionario, compiuto un giro completo, la pala rotorica avverte la stessa pressione iniziale.

In Figura 2.11 (a) è rappresentato l'andamento della forza aerodinamica  $F(t)$  sulla schiera.  $F$  si presenta come periodica, con un numero di picchi pari al numero di pale statoriche. Tutti i settori del rotore sono sollecitati allo stesso modo, con un ritardo di

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega N} \quad (2.51)$$

tra due settori consecutivi.

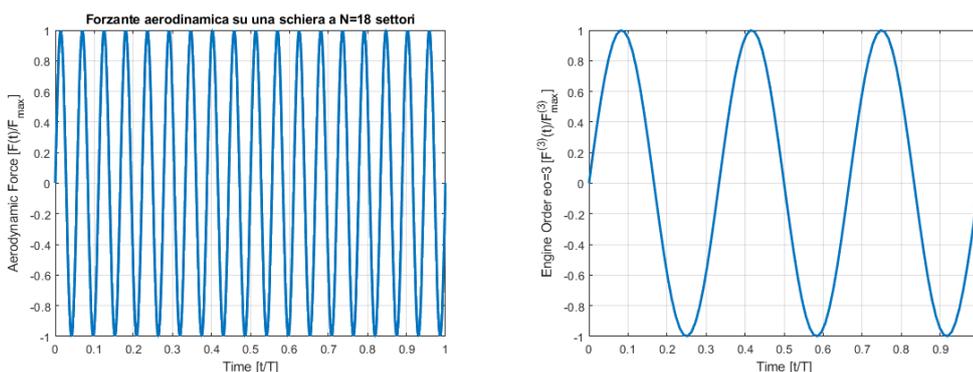
Se ipotizziamo che la velocità di rotazione del rotore  $\Omega$  sia costante, allora la distribuzione spaziale della forza aerodinamica  $F(\alpha) = F(\Omega t)$  è anch'essa periodica. In quanto periodica, è possibile sviluppare  $F(\alpha)$  in serie di Fourier:

$$F(\alpha) = F_0 + \sum_{eo} F^{(eo)} \cos(eo \cdot \alpha + \delta), \quad (2.52)$$

dove  $F_0$  è una costante e  $\delta$  è un angolo di fase.  $F^{(eo)}$  è la generica componente della forzante, detta *engine order*.

Si studia ora l'effetto di un singolo *engine order*, ricordando che è possibile poi applicare la sovrapposizione degli effetti.

In Figura 2.11 (b) è rappresentato un *engine order*  $eo = 3$ , caratterizzato da 3 periodi all'interno di un angolo giro  $2\pi$ .



(a) Forzante sinusoidale su un disco palettato a  $N = 18$  pale (b) Singola armonica con engine order 3 ( $eo = 3$ )

**Figura 2.11:** Esempio di forzanti aerodinamiche sinusoidali

Il settore  $n$ -esimo avverte una forza variabile nel tempo che come modulo ha  $\{F^{(eo)}\}$  e come pulsazione  $\omega = eo \cdot \Omega$ :

$$\{F^{(n)}(t)\} = \{F^{(eo)}\} \cos(\omega t + \delta). \quad (2.53)$$

$\{F^{(n)}(t)\}$  ha dimensioni  $J \times 1$ , dove  $J$  è il numero di gradi di libertà del settore  $n$ -esimo.

Le eccitanti in un *bladed-disk* sono infatti dette sincrone, ossia possiedono una pulsazione  $\omega$  che è multiplo della velocità di rotazione  $\Omega$ .

Il settore successivo avverte la stessa forza, ma con un ritardo di  $\Delta t$ :

$$\{F^{(n+1)}(t)\} = \{F^{(eo)}\} \cos[\omega(t - \Delta t) + \delta] = \{F^{(eo)}\} \cos(\omega t - \psi + \delta). \quad (2.54)$$

Dato un certo *engine order*, le forze che agiscono su due settori consecutivi sono sfasate di

$$\psi = \omega \Delta t = eo \cdot \frac{2\pi}{N}. \quad (2.55)$$

Si può passare ad una notazione complessa delle forzanti sui settori  $n$  ed  $n + 1$  (Equazioni 2.53 e 2.54):

$$\{\overline{F}^{(n)}\} = \{F^{(eo)}\} e^{i\omega t} e^{i\delta} = \{\overline{F}^{(eo)}\} e^{i\omega t}; \quad (2.56)$$

$$\{\overline{F}^{(n+1)}\} = \{F^{(eo)}\} e^{i\omega t} e^{-i\psi} e^{i\delta} = \{\overline{F}^{(eo)}\} e^{i\omega t} e^{-i\psi} = \{\overline{F}^{(n)}\} e^{-i\psi}; \quad (2.57)$$

con

$$\{\overline{F}^{(eo)}\} = \{F^{(eo)}\} e^{i\delta}. \quad (2.58)$$

Ripetendo la rotazione  $N - 1$  volte, si ottiene il vettore delle forzanti dell'intero disco:

$$\{F_{eo}\} = \begin{bmatrix} [I_J] \\ [I_J] e^{-i\psi} \\ \vdots \\ [I_J] e^{-i(n-1)\psi} \\ \vdots \\ [I_J] e^{-i(N-2)\psi} \\ [I_J] e^{-i(N-1)\psi} \end{bmatrix} \{\overline{F}^{(n)}\} = [\overline{T}_F] \{\overline{F}^{(n)}\}. \quad (2.59)$$

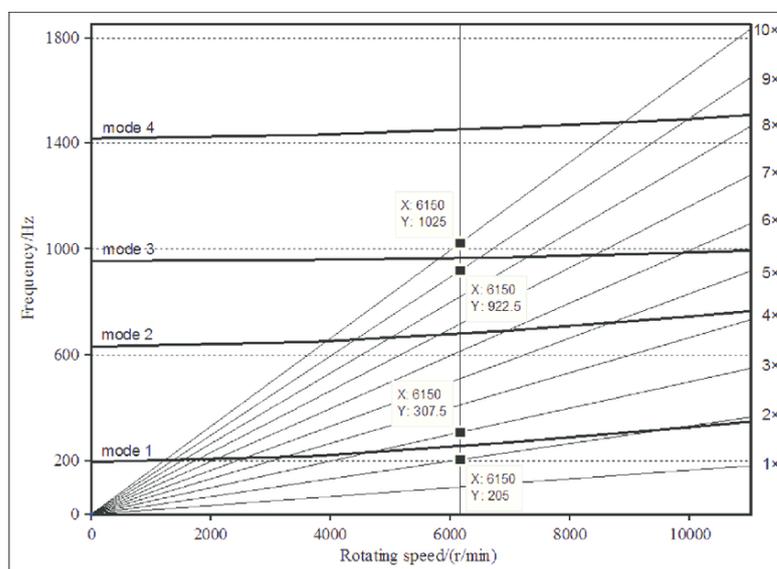
Per ogni *engine order* ( $eo$  e quindi  $\psi$ ) derivante dall'analisi di Fourier, dato il solo vettore delle forzanti del settore fondamentale  $\{\overline{F}^{(n)}\}$ , è possibile conoscere il vettore delle forzanti su ogni settore del disco palettato.  $\{F_{eo}\}$  è un vettore di

dimensione  $NJ \times 1$ , mentre  $[\bar{T}_F]$  è una matrice  $NJ \times J$ .

In Figura 2.12 è proposto il diagramma di Campbell. Esso vede sulle ascisse la velocità di rotazione del rotore  $\Omega$ , mentre in ordinata le frequenze, pulsazioni naturali  $\omega_j$  del disco palettato oppure pulsazioni  $\omega$  della forzante. All'aumentare di  $\Omega$  possiamo notare un irrigidimento del sistema, quindi un innalzamento delle frequenze.

Le pulsazioni dell'eccitante sono rette uscenti dall'origine con pendenza che aumenta con l'*engine order*, infatti  $\omega = eo \cdot \Omega$ .

Immaginiamo anche che la turbomacchina abbia un ben preciso range di funzionamento, tra  $\Omega_{min}$  e  $\Omega_{max}$ . Sembra che tutte le intersezioni tra rette delle eccitanti e curve delle frequenze naturali siano possibili risonanze. Qui si nota proprio l'enorme problema di desintonizzazione da queste frequenze: la densità modale è elevatissima e le intersezioni all'interno del range di funzionamento sono numerose.



**Figura 2.12:** Diagramma di Campbell per un disco palettato [18]

Una considerazione preliminare permette però la semplificazione di questo processo di identificazione delle possibili risonanze. Infatti è vero che la condizione  $\omega = \omega_j$  debba essere necessaria affinché ci sia risonanza, ma non è sufficiente. Per un sistema a  $J$  gradi di libertà, si può scrivere la seguente equazione del moto sfruttando le variabili complesse:

$$[-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]] \{\bar{x}\} = \{\bar{F}\}, \quad (2.60)$$

dove  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  sono le matrici di massa, di smorzamento e di rigidità del

sistema,  $\{\bar{x}\}$  è il vettore degli spostamenti dei *GDL* ed  $\{\bar{F}\}$  è il vettore delle forze applicate ad essi.

Se  $[\Phi]$  è la matrice contenente i modi propri del sistema, si può definire un vettore degli spostamenti modali  $\{\bar{q}\}$  tale che:

$$\{\bar{x}\} = [\Phi] \{\bar{q}\}. \quad (2.61)$$

Si può così scrivere la seguente equazione del moto in coordinate modali:

$$[\Phi]^T [-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]] [\Phi] \{\bar{q}\} = [\Phi]^T \{\bar{F}\}; \quad (2.62)$$

$$diag [\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega c_j] \{\bar{q}\} = [\Phi]^T \{\bar{F}\}, \quad (2.63)$$

con  $c_j$  coefficienti di smorzamento modali del sistema.

L'Equazione 2.63 è caratterizzata da una matrice di rigidità dinamica diagonale, permettendo un calcolo di autovalori e autovettori più economico dal punto di vista computazionale.

Si può ora trovare la risposta modale del modo  $j$ -esimo:

$$\bar{q}_j = \frac{\{\Phi\}_j^T \{\bar{F}\}}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega c_j}. \quad (2.64)$$

Da questa espressione si può notare come una condizione necessaria per la risonanza è sicuramente  $\omega = \omega_j$ , ma essa non è sufficiente.

Deve anche essere che

$$\{\Phi\}_j^T \{\bar{F}\} \neq 0, \quad (2.65)$$

altrimenti senza questa componente di forzante il sistema non vibrerebbe.

Bisogna quindi verificare, nel diagramma di Campbell, quali incroci soddisfano la condizione 2.65.

Consideriamo quindi un generico incrocio tra *engine order eo* e forma modale di indice armonico  $h$ . Immaginiamo un caso in cui la forza sia concentrata in un unico grado di libertà  $j = P$ .

Nota la forza  $F_P^{(1)}$  agente sul *GDL P* del primo settore, è possibile calcolare l'intero vettore di forze agenti sul disco, tramite l'Equazione 2.59:

$$\{F_P\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\psi} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\psi} \\ \vdots \\ e^{-i(N-2)\psi} \\ e^{-i(N-1)\psi} \end{Bmatrix} F_P^{(1)}. \quad (2.66)$$

Se  $\bar{\Theta}_P^{(1)}$  è lo spostamento modale del *GDL*  $P$  nel settore  $n = 1$ , dall'analisi modale sappiamo che (Equazione 2.28 applicata a cascata):

$$\{\bar{\Theta}_P\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\phi} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\phi} \\ \vdots \\ e^{-i(N-2)\phi} \\ e^{-i(N-1)\phi} \end{Bmatrix} \bar{\Theta}_P^{(1)}, \quad (2.67)$$

dove  $\phi = 2\pi h/N$  è l'*IBPA*.

Sostituendo 2.66 e 2.67 nella condizione 2.65, si giunge alla seguente espressione del prodotto scalare:

$$\{\bar{\Theta}_P\}^T \{\bar{\Theta}_P\} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(h-eo)\frac{2\pi}{N}}. \quad (2.68)$$

Se questa sommatoria è nulla, non ho risonanza, altrimenti sì. Limitiamoci al caso in cui  $0 < eo < N$ . Quando

$$h = eo, \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(h-eo)\frac{2\pi}{N}} = N : \quad (2.69)$$

l'*engine order* eccita.

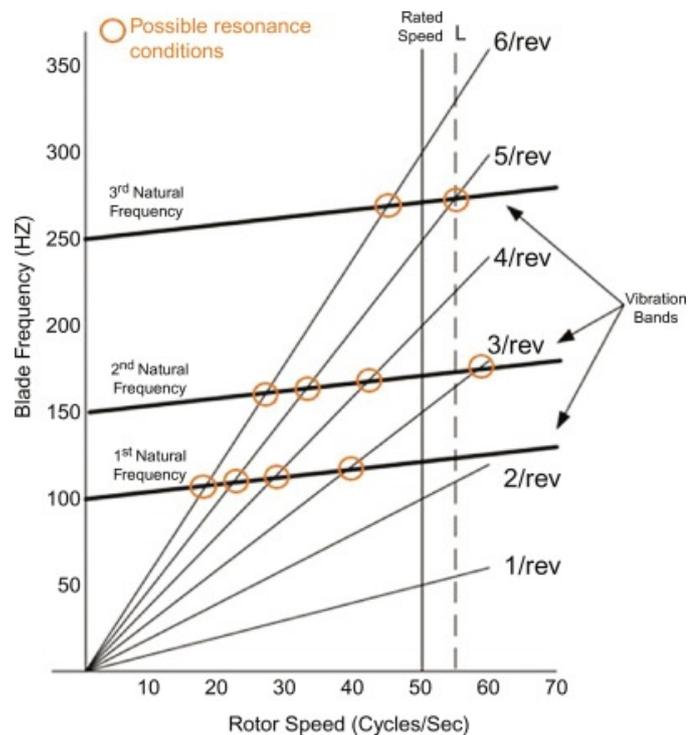
Se

$$h \neq eo, \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(h-eo)\frac{2\pi}{N}} = 0 : \quad (2.70)$$

l'*engine order* non eccita. Non esiste alcuna forza modale che agisce su questo grado di libertà  $P$ .

Possiamo allora concludere che un certo *engine order* eccita solamente i modi con indici armonici pari allo stesso *engine order* (Figura ??). Questa considerazione preliminare permette di focalizzarsi immediatamente sulle sole forzanti che soddisfano questa condizione.

Individuate le frequenze che provocano risonanza all'interno del range di funzionamento del motore, si procede al calcolo delle ampiezze di vibrazione che esse provocano. Se queste ampiezze superano i valori consentiti, bisognerà desintonizzare in modo opportuno il disco palettato da queste pericolose frequenze.



**Figura 2.13:** Diagramma di Campbell con possibili risonanze (cerchiate in rosso) [19]

## 2.2.2 Mistuning

Effettuare l'ipotesi di simmetria ciclica ha concesso enormi vantaggi dal punto di vista computazionale, sia per l'analisi modale che per l'analisi della risposta forzata di dischi palettati. I risultati ottenuti su un singolo settore di *bladed-disk* potevano essere estesi al disco completo con relativa facilità.

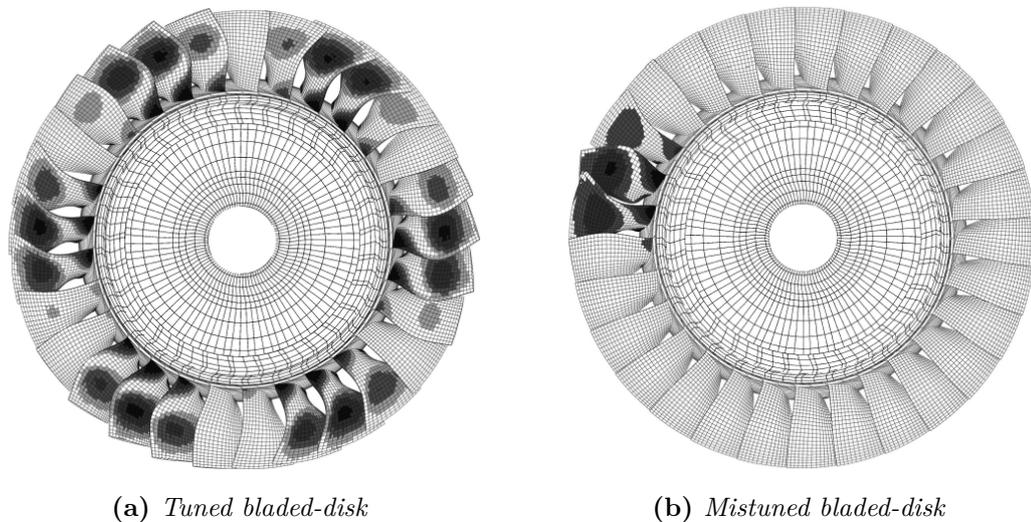
Putroppo l'ipotesi di simmetria ciclica è nella realtà troppo restrittiva. Pensare che ogni settore sia perfettamente identico agli altri è utopico, infatti esistono molteplici cause per cui i settori sono diversi l'uno dall'altro.

Tolleranza di lavorazione, non omogeneità del materiale, montaggio, usura e danneggiamento delle palette (ad esempio per eventi *FOD*) sono solo alcuni dei motivi per i quali queste differenze tra settori, dette proprio *mistuning*, esistono.

Il *mistuning* ha 3 principali conseguenze sulla dinamica del disco palettato:

1. Le forme modali di Tipo 3 subiscono uno sdoppiamento delle frequenze. Le coppie di modi, che nel sistema *tuned* erano a molteplicità doppia, adesso non lo sono più;

2. Le forme modali sono distorte: non è più presente un andamento armonico in direzione circonferenziale, come previsto dall'Equazione 2.33;
3. A causa della distorsione delle forme modali, la risposta risulta localizzata (Figura 2.14 (b)): alcune palette vibrano con un'ampiezza maggiore di altre. Inoltre queste vibrazioni risultano essere maggiori rispetto a quelle calcolate in simmetria ciclica.



**Figura 2.14:** Forme modali di un disco palettato in assenza e in presenza di *mistuning* [20]

I calcoli di Castanier [20] mostrano come le vibrazioni di un sistema *mistuned* raggiungono anche il 150% di quelle del corrispondente sistema *tuned*, per alcuni *pattern* di *mistuning* ed *engine order*. Ciò significa che un'opportuna analisi del *mistuning* è necessaria per garantire la sicurezza dei dischi palettati.

Il *mistuning* è inoltre un fenomeno completamente casuale: esistono infinite tipologie di difetti, con forma, posizione e dimensione diversa, e possono verificarsi in diverso numero e su diversi settori. Un'enorme quantità di *pattern* di *mistuning* può essere generata per prevedere più casi diversi possibili, ognuno con differenti risultati sulla dinamica, perciò il numero di analisi da svolgere diventa grandissimo.

Specialmente per *bladed-disk* di forma complessa, per i quali i modelli *FEM* richiedono milioni di gradi di libertà, l'analisi di migliaia di *pattern* di *mistuning* diventa impensabile.

Per questo motivo sono stati sviluppati modelli di ordine ridotto (*reduced order models* o *ROMs*) partendo dai modelli completi agli elementi finiti. Segue una

breve descrizione di tre dei più conosciuti *ROMs*, evidenziando vantaggi e svantaggi degli stessi.

**Metodi Component-Mode-Synthesis** Questa tipologia di metodi di riduzione, in breve *CMS*, è stata la prima ad essere sviluppata.

Questo approccio si basa sul calcolo separato dei modi di ogni componente. Per i *bladed-disk* completi la separazione vede come componenti il disco e le singole  $N$  palette.

I metodi *CMS* si dividono in *free-interface* e *fixed-interface*, a seconda delle condizioni al contorno utilizzate per il calcolo dei modi dei singoli componenti. Nel caso di *fixed-interface* è incluso un *set* di forme statiche, per catturare il moto delle interfacce.

Il modello finale *CMS* è sintetizzato tramite opportune equazioni di compatibilità alle interfacce tra componenti.

Questa tecnica permette enormi risparmi computazionali: *ROMs* di ordine  $10N$  sono sufficienti a modellare in modo soddisfacente un disco palettato. Per questo motivo metodologie *CMS* sono adatte allo studio di *pattern* di *mistuning*.

In questo lavoro di tesi sarà adottato proprio un metodo di riduzione *CMS*, in particolare quello di Craig-Bampton (*CB*), di tipologia *fixed-interface*.

**Metodi System-Mode-Based** Nel 2001, Yang e Griffin [21] hanno osservato che un ben determinato *set* di modi del sistema *tuned* offre un'ottima base per rappresentare le vibrazioni del disco palettato *mistuned*, se questo è sufficientemente contenuto.

Il metodo derivante da questa considerazione è stato da loro chiamato *Subset of Nominal Modes (SNM) Method*. Esso prevede una normale analisi modale in un range di frequenze che contiene una famiglia di modi *blade-dominated*. A questo punto viene incluso il *mistuning*, modellando le matrici strutturali delle pale *mistuned* e utilizzando una trasformazione di coordinate per esprimere il *mistuning* in coordinate modali.

Il metodo *SNM* ha così dimostrato che non è necessario adottare i *CSM* per descrivere il *mistuning*.

Questo metodo ha l'indiscusso vantaggio di essere il *ROM* di ordine più piccolo in grado di analizzare il *mistuning*: esso genera un modello a  $N$  gradi di libertà.

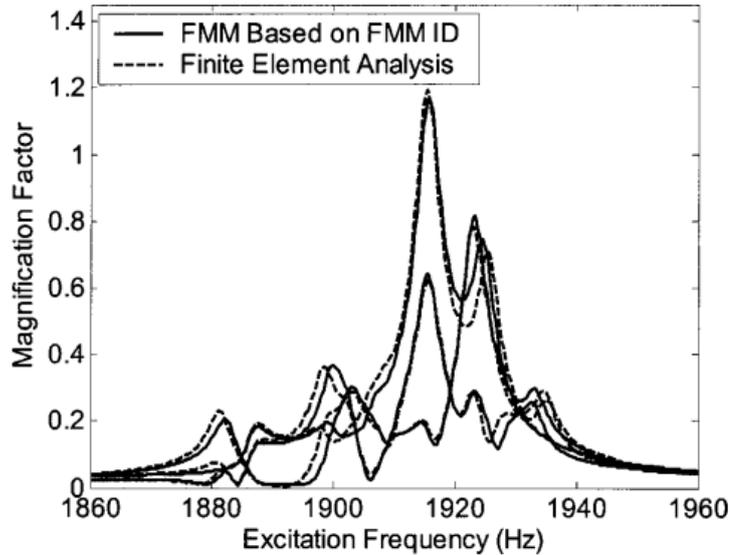
**Fundamental Model of Mistuning** Feiner e Griffin [22] hanno successivamente sviluppato una versione semplificata del *SNM*.

Il loro metodo prevede come input un *set* di frequenze naturali del sistema *tuned* e le variazioni di frequenza delle pale isolate dovute al *mistuning*. Le matrici di massa e di rigidità del modello agli elementi finiti non sono necessarie.

Proprio per la semplicità del modello, esso è stato battezzato come *Fundamental Model of Mistuning (FMM)*.

Il *FMM* è applicabile solamente a famiglie isolate di modi, ma sia la prima famiglia flessionale che la prima torsionale rispettano spesso questo requisito.

In Figura 2.15 è possibile notare come i risultati della *FMM* siano molto vicini a quelli di una simulazione *FEM* non ridotta.



**Figura 2.15:** Risposta in frequenza di 3 pale eccitate da un *engine order*  $eo = 6$ , risultati per un'analisi completa *FEM* e una tramite riduzione *FMM* [22]

## 2.3 Obiettivi della Tesi

Questo lavoro di tesi si inserisce pienamente nel *framework* del *blade repair*, come giustificato in Sezione 1.1.

Nell'ottica di una futura attività sperimentale per studiare l'influenza della riparazione per asportazione sulla dinamica dei dischi palettati, si ritiene opportuno progettare e costruire un *bladed-disk* semplificato.

Questo *bladed-disk* sarà posto su due diversi banchi di prova nel laboratorio del *DIMEAS* (Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale) al Politecnico di Torino. Il primo banco è chiamato *TWE Test Rig* e consiste in una piattaforma ad eccitazione magnetica per dischi palettati. Qui i magneti sono posti a vicino contatto con le palette, permettendo un'eccitazione e una misurazione della risposta di pala. Il secondo banco di prova è chiamato *Spinning Rig*, dove è possibile porre in rotazione il disco palettato e studiarne la dinamica in presenza di carichi centrifughi.

Il disco palettato dovrà essere progettato pensando al suo opportuno montaggio su entrambi i banchi di prova e ciò comporterà stringenti vincoli geometrici, ma anche dinamici. È perciò fondamentale affiancare al progetto accurate simulazioni numeriche per soddisfare i requisiti dinamici del componente.

In questo lavoro di tesi, assieme al progetto del disco palettato, si penserà ad una proposta di *blend* da applicare poi sul componente fisico. Anche per questo scopo specifico la lavorazione dovrà soddisfare alcuni requisiti, in particolare dovrà avere un notevole impatto sulle proprietà dinamiche del *bladed-disk*.

Superata questa fase di progettazione, sia del disco palettato che del *blend*, si effettueranno analisi numeriche di confronto tra disco integro e disco riparato, utili da affiancare in futuro a risultati sperimentali.

## Capitolo 3

# Progetto del Disco Palettato

### 3.1 Requisiti e Vincoli di Progetto

Al fine di realizzare un disco palettato adatto al *testing* sulla *TWE Test Rig* e sulla *Spinning Rig*, si delineano alcuni requisiti di progetto.

Prima di tutto si desidera un disco palettato a  $N = 18$  pale di semplice geometria, per facilitarne la costruzione e ridurre i costi. Si è pertanto scelto di focalizzarsi su profili di pala rettangolari, a doppio arco di cerchio, oppure trapezoidali. Senza dubbio profili di questo tipo sono poco rappresentativi di profili reali, ma la semplicità e i costi guidano, in questo caso, le scelte di progetto.

Inoltre, nell'ottica di verificare gli effetti *blend repair*, risulta fondamentale la risposta dinamica prima e dopo l'asportazione per *blending*. La geometria, rappresentativa della realtà o no, è molto meno importante, proprio perché non ricerchiamo particolari prestazioni da questo disco palettato.

Un fondamentale requisito di progetto riguarda le forme modali. Si desidera avere modi sufficientemente separati in frequenza, al fine di eccitarli singolarmente. Ciò si traduce in una dinamica in cui abbiamo un buon contributo del disco, perciò un disco abbastanza flessibile.

Per riassumere, si progetta un disco palettato che sia semplice, poco costoso e dal disco flessibile per separare le forme modali.

Il montaggio sulla *Spinning Rig* comporta una serie di vincoli per il progetto.

In particolare abbiamo un vincolo sull'ingombro diametrale di  $D_{lim} = 450$  mm, per garantire il corretto montaggio del disco palettato sulla *Spinning Rig*.

Un secondo vincolo, relativo alla *TWE Test Rig*, senza dubbio il più stringente, è quello di mantenere la prima frequenza flessionale e la prima frequenza torsionale sotto i 270 Hz. Se si eccitasse il disco palettato con frequenze più alte di queste, gli elettromagneti si surriscalderebbero e si genererebbero degli errori nelle simulazioni. Inoltre, la curva di taratura del magnete non è disponibile per frequenze sopra

i 300 Hz. Essa rappresenta la funzione di trasferimento tra pala e magnete: per evitare che il magnete vada in risonanza con la pala è opportuno eccitare frequenze dove la curva di taratura è definita e se ne conosce il fattore di amplificazione. Infine le pale devono presentare uno *stagger angle* di  $45^\circ$ , al fine di essere correttamente posizionate sui magneti che le ecciteranno.

## 3.2 Influenza dei Parametri Geometrici sulle Frequenze Proprie

Per iniziare il progetto, ci si è concentrati sull'analisi di pale *cantilevered* isolate in *ANSYS*, in modo da trovare le dimensioni che soddisfacessero il vincolo sulle frequenze minori di 270 Hz.

Utilizzando un profilo di pala rettangolare per semplicità, si sono tratte le seguenti conclusioni:

- all'aumentare della lunghezza  $L$  della pala le frequenze si riducono;
- all'aumentare della larghezza  $S$  della pala le frequenze si riducono;
- al diminuire dello spessore  $t$  della pala le frequenze si riducono.

Quindi sembra che basti seguire queste indicazioni per raggiungere frequenze inferiori ai 270 Hz.

Purtroppo  $L$  è legata al vincolo sull'ingombro diametrico di  $D_{lim} = 450$  mm: fissato il diametro  $D$  del disco,  $L$  è limitata.

$S$  invece non può essere troppo grande per due motivi. Il primo è che una pala troppo larga rischia di toccare la base dei magneti, il secondo è che non possiamo avere *aspect ratio*  $AR$  troppo bassi. Infatti va bene non avere un profilo rappresentativo di una pala reale, però discostarci troppo anche dal punto di vista delle proporzioni potrebbe non essere un'ottima idea.

Alla fine dei conti si è cercato di mantenere un  $AR$  congruente con quelli che si trovano nel *fan* di un motore aeronautico.

Anche ridurre a piacimento lo spessore  $t$  potrebbe generare dei problemi. Pale troppo sottili potrebbero rompersi in fase di costruzione. È stato quindi imposto uno spessore limite di 2.5 mm.

Applicando questi accorgimenti, fissato un certo diametro del disco  $D$ , è stato possibile portare senza troppi problemi la prima frequenza flessionale sotto i 270 Hz. Invece la prima frequenza torsionale è risultata ancora troppo elevata, nonostante fossero stati raggiunti i valori limite su  $L$ ,  $S$  e  $t$ .

Si è allora pensato di complicare leggermente la geometria della pala nel seguente modo:

- avere la porzione superiore di pala a sezione costante di larghezza massima  $S_{tip}$ ;
- avere la porzione inferiore di pala a sezione variabile da  $S_{tip}$  ad  $S_{hub}$ .

Una configurazione di questo tipo, rappresentata in Figura 3.1, permette di portare la prima frequenza torsionale sotto i 270 Hz, con lo svantaggio di essere penalizzata strutturalmente per via della ridotta sezione alla radice.

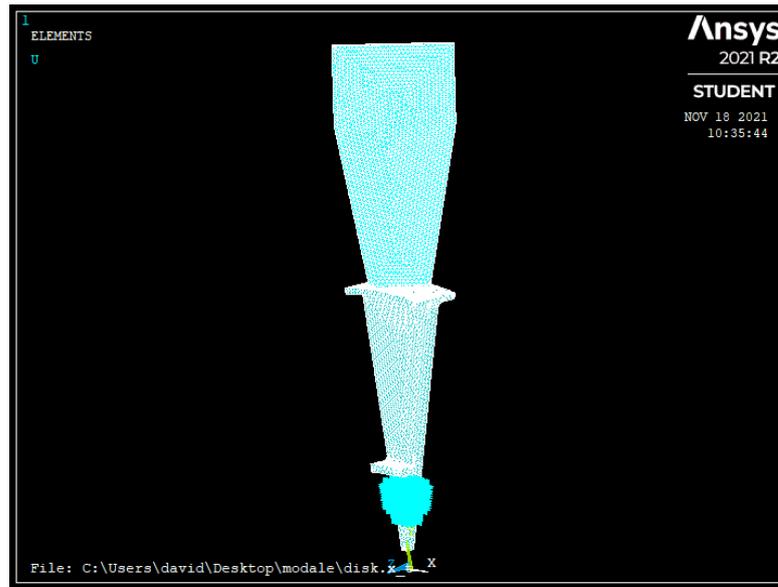


Figura 3.1: Modello *FEM* di una pala a larghezza non costante

### 3.3 Scelta della Geometria

Svolta l'analisi su pale *cantilevered* a sezione rettangolare, si sono trovate le seguenti dimensioni che garantiscono il soddisfacimento dei vincoli sulle frequenze:

- $L = 108$  mm;
- $S = 30$  mm;
- $t = 2.5$  mm.

Si procede ora all'analisi del disco palettato completo per studiarne le forme modali. In questa fase distinguiamo 2 principali casistiche: disco con corona (*crowned*) e disco senza corona (*uncrowned*).

Per entrambe le possibilità sono stati provati 3 profili differenti: rettangolare, doppio arco di cerchio e trapezoidale.

Nel caso *crowned* il disco assume un diametro di  $D = 230$  mm, con una corona spessa  $L_{crown} = 5$  mm e larga  $S_{crown} = 25$  mm, mentre nel caso *uncrowned* abbiamo un disco di  $D = 240$  mm, con una lunghezza sovrapposta di disco e pala di  $L_{over} = 5$  mm.

In entrambe le configurazioni lo spessore del disco è imposto pari a  $t_D = 4$  mm, una dimensione che garantisce una buona flessibilità dello stesso (requisito di progetto). Spessori del disco minori di  $t_D$  sono sconsigliati in quanto potrebbero provocare la rottura del pezzo in fase di costruzione.

Per ogni caso sono state calcolate le frequenze proprie della struttura: oggetto di analisi sono stati il grafico che rappresenta i diametri nodali in ascissa e le frequenze dei modi in ordinata. Si sono individuate le famiglie di modi, si è verificato che i vincoli sulle frequenze fossero rispettati e si è controllato che i modi fossero sufficientemente separati in frequenza.

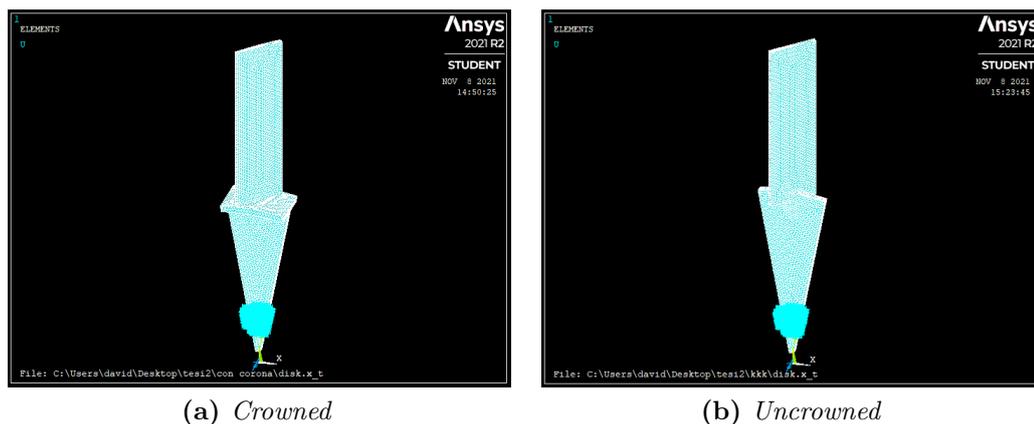
Inoltre è stata effettuata un'analisi statica per verificare la sicurezza del *bladed-disk*, assumendo come materiale un acciaio da bonifica (tensione di snervamento  $R_e = 550$  MPa).

Inizialmente la pala è assunta a sezione costante, riservando il diritto di essere modificata come descritto in Sezione 3.2.

### 3.3.1 Profilo Rettangolare

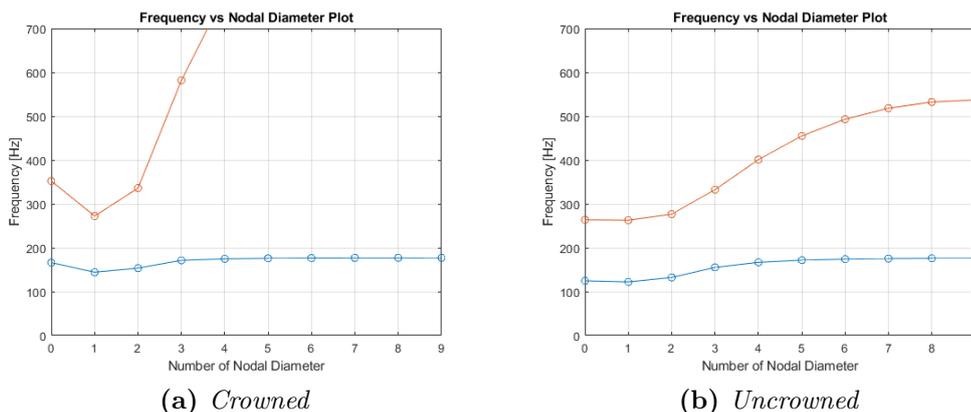
Come primo tentativo si è provato il profilo rettangolare per entrambe le configurazioni *crowned* ed *uncrowned*.

Questo disco palettato (Figura 3.2) è senza dubbio il più semplice ed economico da realizzare e rappresenta un buon compromesso tra complessità e risultati raggiunti.



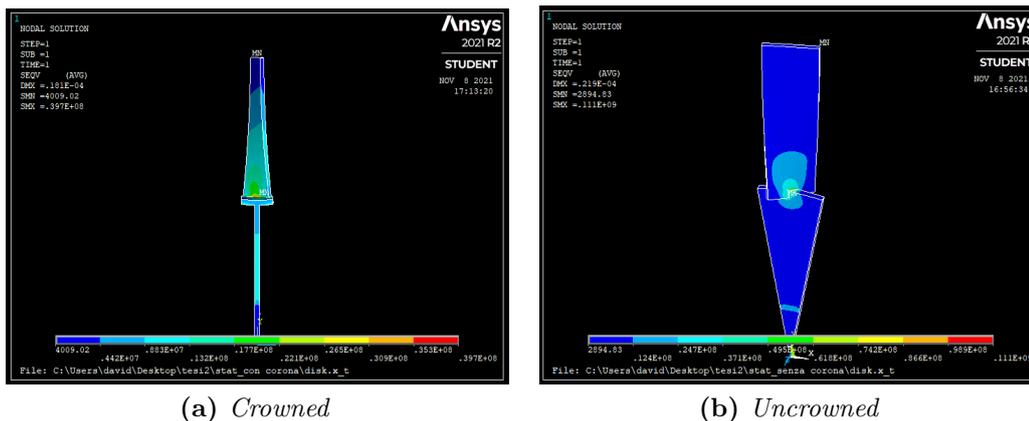
**Figura 3.2:** Settore di disco palettato con profilo rettangolare, *crowned* e *uncrowned*

Per quanto riguarda le forme modali, si può notare in Figura 3.3 come la prima famiglia flessionale sia sufficientemente separata in frequenza nel caso *uncrowned*, specialmente per bassi diametri nodali. L'aggiunta di una corona riduce questa separazione, in quanto rende il disco più rigido.



**Figura 3.3:** Famiglie modali del disco palettato con profilo rettangolare, *crowned* e *uncrowned*

Dal punto di vista strutturale, come da Figura 3.4, la configurazione senza corona è senza dubbio meno sicura di quella con corona. Abbiamo rispettivamente un coefficiente di sicurezza pari a  $SF_{uncrowned} = 3.15$  e  $SF_{crowned} = 8.75$ , per *uncrowned* e *crowned*.



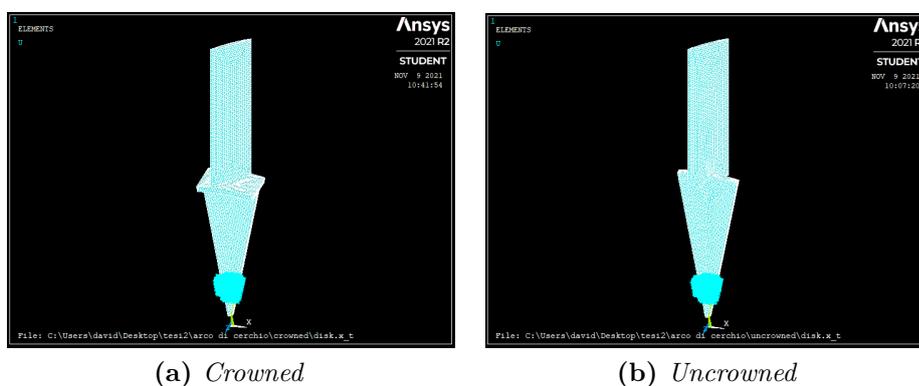
**Figura 3.4:** Analisi strutturale disco palettato con profilo rettangolare, *crowned* e *uncrowned*

### 3.3.2 Profilo a Doppio Arco di Cerchio

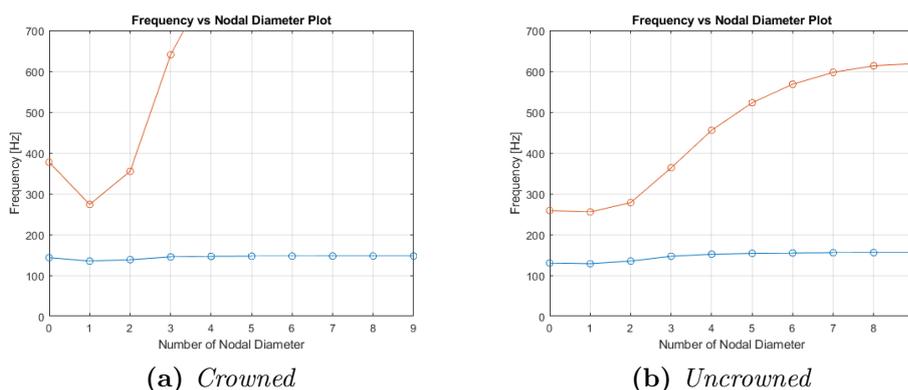
Il profilo ad arco di cerchio presenta uno spessore massimo  $t = 2.5$  mm e una larghezza di  $S = 30$  mm.

Il disco palettato che ne deriva, rappresentato in Figura 3.5, non risulta essere migliore di quello con profilo rettangolare. I risultati ottenuti (Figura 3.6 e Figura 3.7) non giustificherebbero la complessità e i costi aggiuntivi di realizzazione. La struttura è più sicura rispetto al caso precedente ( $SF_{uncrowned} = 5.22$  e  $SF_{crowned} = 12.9$ ), ma le forme modali sono troppo piatte, impedendo una corretta separazione in frequenza dei modi.

Si sceglie allora di escludere il profilo ad arco di cerchio dalle successive analisi.



**Figura 3.5:** Settore di disco palettato con profilo a doppio arco di cerchio, *crowned* e *uncrowned*



**Figura 3.6:** Famiglie modali del disco palettato con profilo a doppio arco di cerchio, *crowned* e *uncrowned*

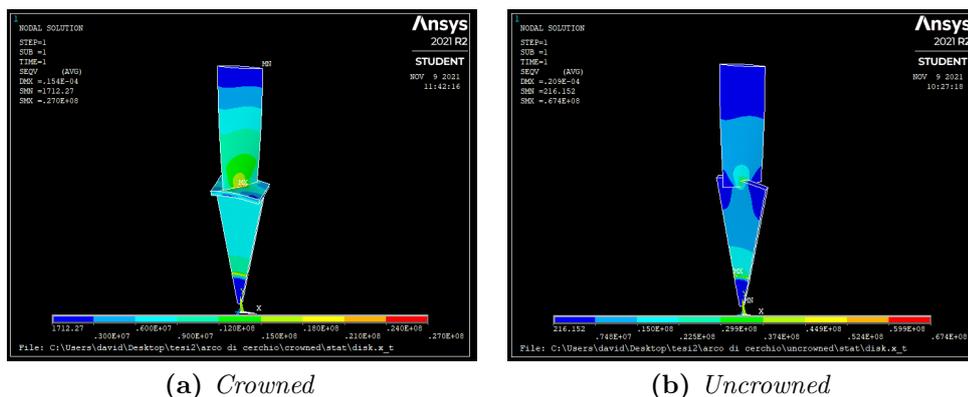


Figura 3.7: Analisi strutturale disco palettato con profilo a doppio arco di cerchio, *crowned* e *uncrowned*

### 3.3.3 Profilo Trapezoidale

Il terzo e ultimo profilo da analizzare è un profilo trapezoidale. Esso possiede uno spessore minimo di  $t_{min} = 2.5$  mm e uno spessore massimo  $t_{max} = 4$  mm. Il profilo è ancora largo  $S = 30$  mm.

L'analisi di questo disco palettato (Figura 3.8) risulta particolarmente interessante in quanto fornisce famiglie di modi molto separati in frequenza (Figura 3.9). La configurazione con corona riduce la separazione dei modi, ma porta il coefficiente di sicurezza da  $SF_{uncrowned} = 2.09$  a  $SF_{crowned} = 6.03$  (Figura 3.10).

Senza dubbio questo profilo è più difficile da realizzare, ma è tenuto ugualmente in considerazione per la scelta finale.

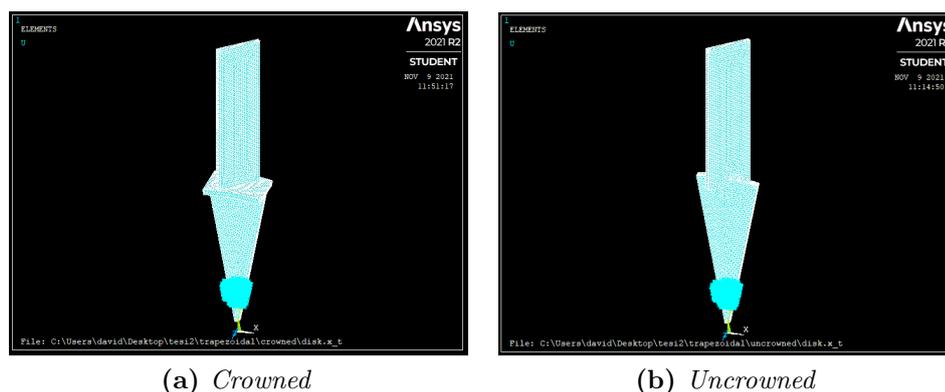


Figura 3.8: Settore di disco palettato con profilo trapezoidale, *crowned* e *uncrowned*

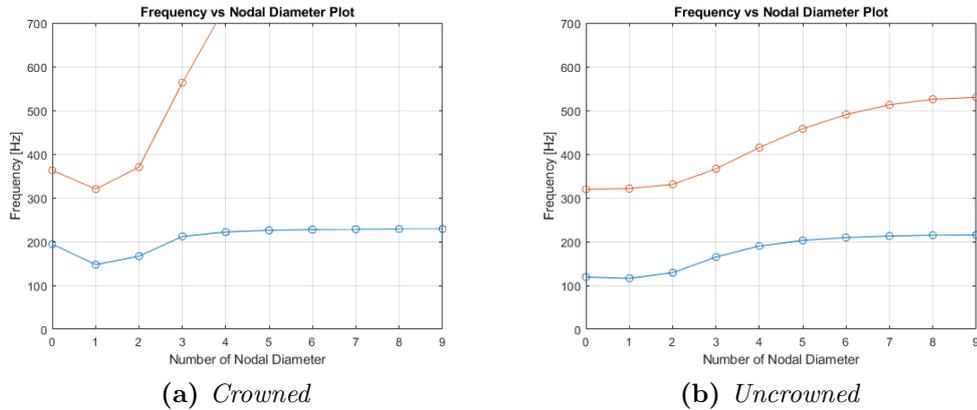


Figura 3.9: Famiglie modali del disco palettato con profilo trapezoidale, *crowned* e *uncrowned*

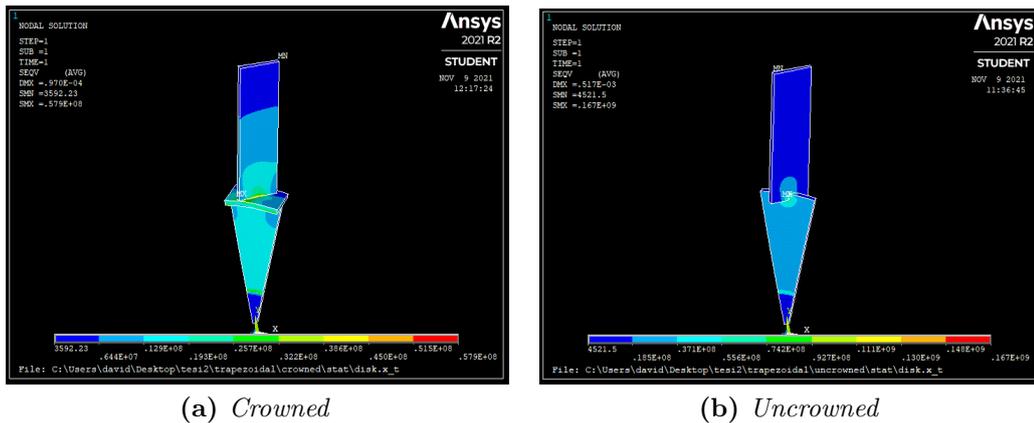


Figura 3.10: Analisi strutturale disco palettato con profilo trapezoidale, *crowned* e *uncrowned*

### 3.3.4 Effetto della Corona sulla Dinamica

La presenza o l'assenza della corona circolare, spessa  $L_{crown} = 5$  mm e larga  $S_{crown} = 25$  mm, influenza pesantemente la dinamica del disco palettato. Come evidente nelle Figure 3.3, 3.6 e 3.9, la corona appiattisce le forme modali, irrigidendo il disco e riducendone il contributo alla dinamica complessiva. Per i nostri requisiti di progetto, desiderando un grande contributo del disco alla dinamica, si preferirebbe non avere una corona circolare così irrigidente. Allo stesso tempo si vuole costruire un disco sicuro che resista alle sollecitazioni

centrifughe nella *Spinning Rig* e i coefficienti di sicurezza, specialmente nel caso del profilo trapezoidale ( $SF_{uncrowned} = 2.09$ ) non sono poi così alti.

Si è preferito quindi ammettere la presenza di una corona nel disco palettato, al fine di ottenere un disco molto sicuro, sacrificando un po' di separazione nei modi. Così facendo l'eccitazione tramite magneti potrebbe avvenire intervenendo sui modi con diametro nodale  $ND = [2\ 3]$ , dove è ancora presente sufficiente separazione.

### 3.3.5 Geometria a Larghezza Non Costante

Scartato il profilo a doppio arco di cerchio ed esclusa la possibilità di avere un disco senza corona, i due candidati migliori risultano essere le versioni *crowned* con profilo rettangolare e trapezoidale.

Il profilo rettangolare è senza dubbio il più semplice da realizzare e sicuramente il meno costoso. Esso riesce anche a mantenere una discreta separazione in frequenza dei modi, risultando un ottimo compromesso che soddisfa tutti i requisiti di progetto. Il profilo trapezoidale sarebbe il candidato perfetto: la separazione dei modi è ottima ed è sufficientemente sicuro. Però è anche vero che un profilo di questo tipo è più complesso da realizzare in officina e i costi potrebbero essere più elevati.

Sfortunatamente, guardando in modo più attento le Figure 3.3 (a) e 3.9 (a), si nota che la prima frequenza torsionale è, per ogni diametro nodale, sopra i 270 Hz.

Come anticipato in Sezione 3.2, è possibile modificare la pala per ridurre la frequenza torsionale. In particolare si mantiene la porzione superiore di pala a sezione costante, di larghezza  $S_{tip}$ . Da una certa coordinata  $H$ , misurata a partire dall'attacco pala, si riduce linearmente la sezione da  $S_{tip}$  ad  $S_{hub}$ . In questo procedimento lo spessore della pala sarà sempre costante e pari a  $t$ .

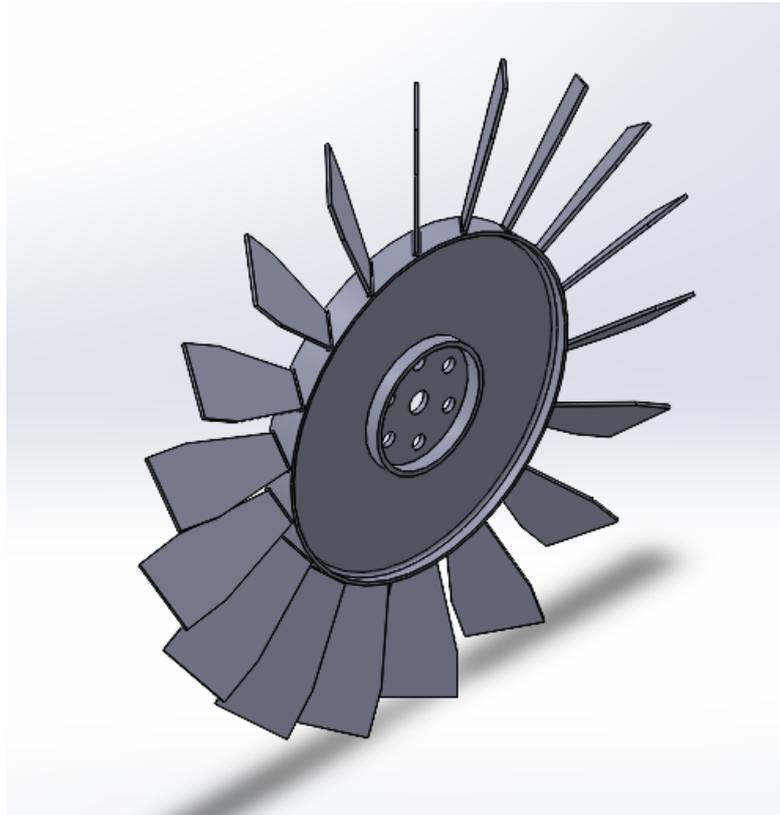
Così facendo si ottengono dei benefici dal punto di vista delle frequenze: sia la prima frequenza flessionale che la prima frequenza torsionale sono ridotte, rendendo possibile il rispetto del vincolo di 270 Hz.

Nel nostro caso particolare, dopo svariati tentativi, si riesce a portare la prima frequenza torsionale sotto i 270 Hz, almeno per diametri nodali bassi (che saranno quelli eccitati).

Scartato il profilo trapezoidale per la sua complessità, il disco palettato finale (Figura 3.11) è con profilo rettangolare dalle dimensioni ora descritte.

La lunghezza della pala è di  $L = 103$  mm: ci si può permettere una pala leggermente più corta perché le frequenze sono abbattute dalla geometria a sezione non costante. In questo modo si riescono a guadagnare 10 mm sul diametro del disco che diventa così più flessibile.

$S_{tip} = 50$  mm è la larghezza massima della pala. Poiché la radice pala è adesso molto ridotta, è possibile guadagnare 20 mm di larghezza nella porzione a sezione costante. In questo modo le frequenze sono ulteriormente ridotte, garantendo comunque una sufficiente *clearance* con la base dei magneti.



**Figura 3.11:** Modello *Solidworks* del disco palettato finale

$S_{hub} = 25 \text{ mm}$  è la larghezza della pala alla radice. Non si può scendere molto con questo valore se ci si vuole assicurare una buona sicurezza strutturale.

$H = 69 \text{ mm}$  è la porzione di pala a sezione non costante. Una ripartizione di questo tipo garantisce la massima diminuzione della prima frequenza torsionale.

$L - H = 103 \text{ mm} - 69 \text{ mm} = 34 \text{ mm}$  è la lunghezza della porzione di pala a sezione costante.

Lo spessore della pala è ancora di  $t = 2.5 \text{ mm}$  per le considerazioni effettuate in Sezione 3.2.

Per quanto riguarda il disco, abbiamo un diametro di  $D = 240 \text{ mm}$ . In questo modo si sfrutta tutto lo spazio disponibile e si ottiene il disco più ampio e flessibile che si possa realizzare. Il vincolo sull'ingombro diametrico è abbondantemente rispettato:

$$2L + D = 2 \cdot 103 \text{ mm} + 240 \text{ mm} = 446 \text{ mm} < 450 \text{ mm} = D_{lim}. \quad (3.1)$$

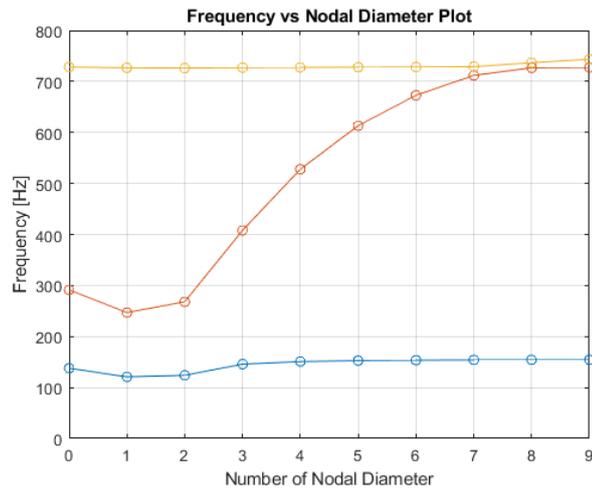
Per i vantaggi sulla flessibilità il disco è ancora spesso  $t_D = 4 \text{ mm}$ .

Inoltre si sceglie di ridurre il più possibile le dimensioni della corona circolare, in modo da mantenere separati i modi garantendo una sufficiente sicurezza strutturale.

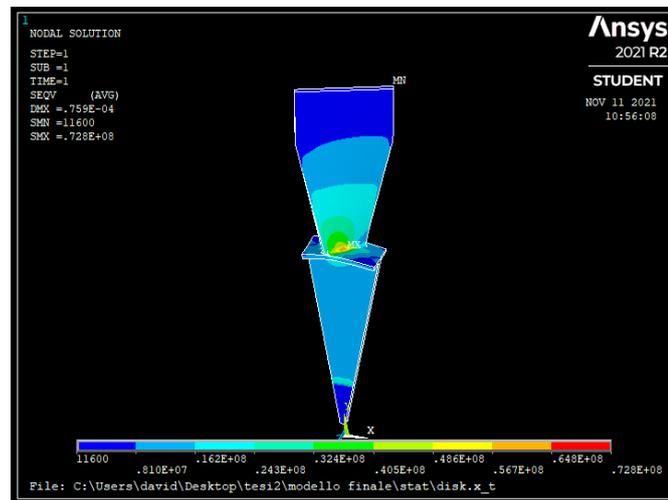
Adesso la corona è spessa  $L_{crown} = 2.5$  mm e larga  $S_{crown} = 22.5$  mm.

Effettuate le analisi, modale (Figura 3.12) e statica (Figura 3.13), si ottiene una buona separazione in frequenza dei modi e un coefficiente di sicurezza pari a  $SF_{crowned} = 6.96$ .

Si ritiene che questo disco palettato sia idoneo alla costruzione in officina, soddisfacendo i requisiti e rispettando i vincoli del progetto.



**Figura 3.12:** Famiglie modali del disco palettato con profilo rettangolare a sezione non costante. Nel diagramma sono presenti: la prima famiglia flessionale (in blu), la prima famiglia torsionale (in rosso) e la seconda famiglia flessionale (in giallo)



**Figura 3.13:** Analisi strutturale disco palettato con profilo rettangolare a sezione non costante, versione *crowned*

### 3.3.6 Accorgimenti Finali

Per completezza si descrivono qui alcuni accorgimenti volti al completamento del progetto del disco palettato.

Prima di tutto si rende necessaria l'introduzione di raccordi tra pala e corona e tra corona e disco. Il primo raccordo è di raggio  $R_{p/c} = 1$  mm, mentre il secondo è di raggio  $R_{c/d} = 2.5$  mm. Questi raccordi irrigidiscono la struttura incrementando il coefficiente di sicurezza.

Lungo una circonferenza di diametro  $D_{circ} = 60$  mm si praticano 6 fori di diametro  $D_{f2} = 10.5$  mm per il montaggio sulla *TWE Test Rig*. Sempre per garantire il corretto montaggio, si pratica un ulteriore foro passante al centro del disco, di diametro  $D_{f1} = 16$  mm.

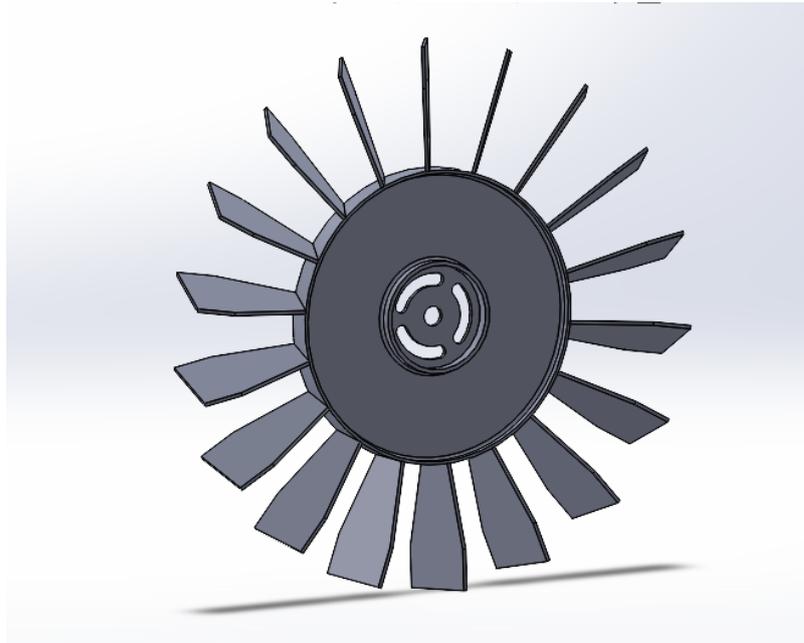
Per garantire il montaggio per centraggio, sia per la *TWE Test Rig* che per la *Spinning Rig*, si introduce al diametro  $D_f = 85$  mm una flangia circolare alta  $H_f = 10$  mm e spessa 3.5 mm.

Queste modifiche sono presenti nella Figura 3.11 e comportano variazioni trascurabili alla dinamica del disco palettato.

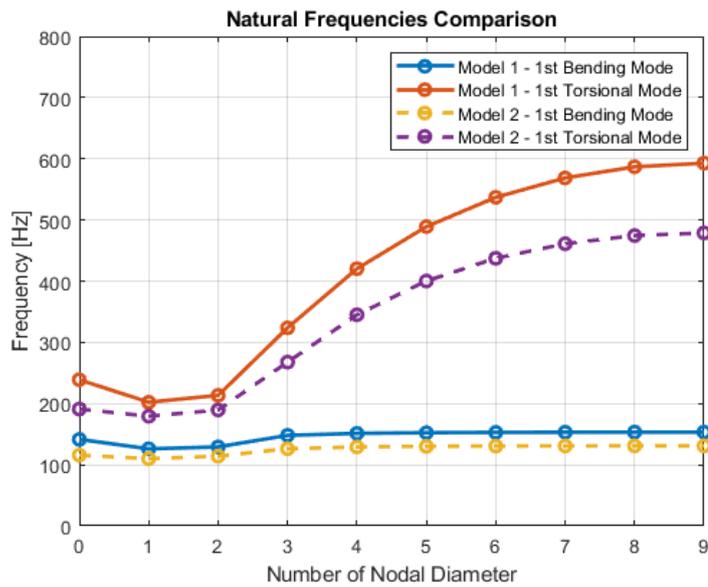
La configurazione di disco appena definita e accuratamente descritta è quella utilizzata per le analisi del Capitolo 4. Tuttavia, in fase di confronto con l'officina incaricata della costruzione del disco, si sono dovute modificare diverse caratteristiche geometriche del *bladed-disk* per permettere la corretta manifattura del pezzo. La più importante differenza riguarda lo *stagger angle*. Le pale non possono più essere calettate a  $45^\circ$  rispetto all'asse disco, ma dovranno essere poste a  $30^\circ$  rispetto al suddetto asse. Questa modifica ha comportato l'intera variazione delle proprietà dinamiche del disco palettato (frequenze e contributo del disco alla dinamica). Ulteriori accorgimenti (in particolare alla dimensione della corona) sono state effettuate per permettere ai requisiti di progetto di essere nuovamente rispettati.

In Figura 3.14 è riportato il modello *Solidworks* del disco palettato finale con pale a  $30^\circ$  rispetto all'asse del disco. In Figura 3.15 sono rappresentate le proprietà dinamiche del *bladed-disk* per l'officina confrontate col *bladed-disk* precedente. In Figura 3.16 è rappresentata la messa in tavola definitiva del disco palettato che è stata inviata in officina per la realizzazione.

A causa della diversa orientazione delle pale, le estremità polari dei magneti (inclinate a  $45^\circ$ ) non sono più parallele alla pala. Si è perciò ritenuto necessario il progetto di un cuneo di supporto che riallineasse i magneti al nuovo disco palettato. Il cuneo (Figura 3.17) presenta una doppia pendenza per compensare il disallineamento.



**Figura 3.14:** Modello *Solidworks* del disco palettato con *stagger angle* di 30°



**Figura 3.15:** Differenze nella dinamica tra disco palettato con *stagger angle* di 45° (*Model 1*) e disco palettato con *stagger angle* di 30° rispetto all'asse macchina (*Model 2*)

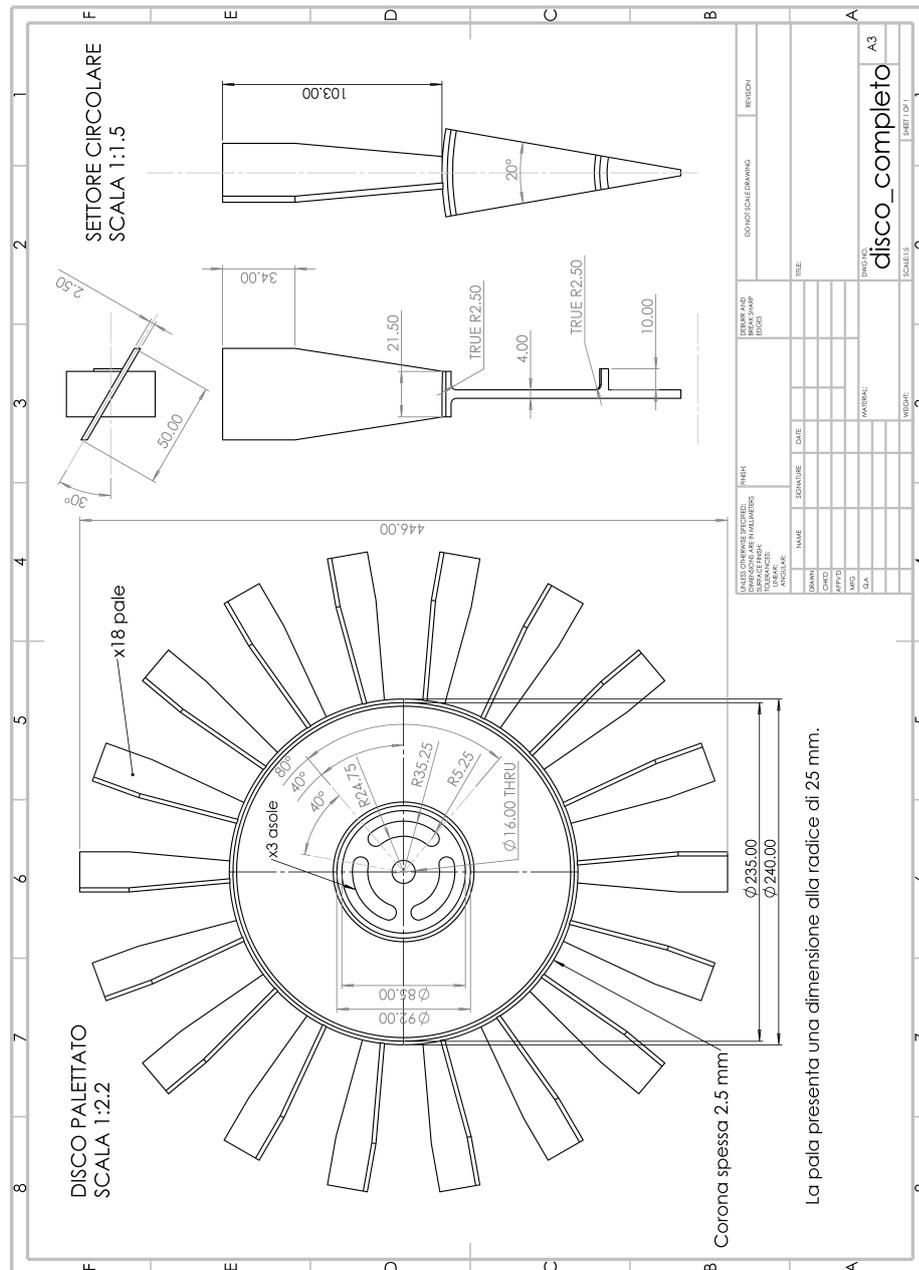
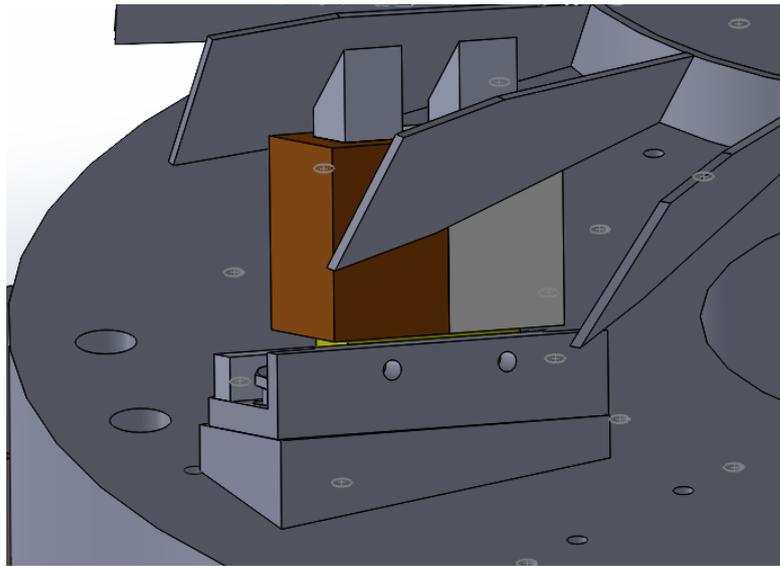


Figura 3.16: Messa in tavola del disco palettato con *stagger angle* di 30° (rispetto all'asse macchina) candidato alla costruzione in officina



**Figura 3.17:** Cuneo di supporto agli elettromagneti

# Capitolo 4

## Analisi del Blend

Definita la geometria del disco palettato e delineate le sue proprietà dinamiche, si procede alla realizzazione di un *blend* per verificare la sua influenza sulla dinamica del *bladed-disk*.

### 4.1 Selezione del Blend

Si chiami *Model 1* il settore fondamentale di disco palettato integro (*pristine*) e si chiami invece *Model 2* il settore fondamentale sul quale è stato ricavato un *blend*. Di tutti i *blend* realizzabili, solo uno sarà praticato sul disco palettato. Il candidato perfetto deve fare in modo che:

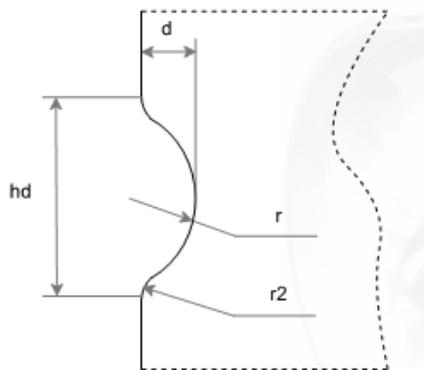
1. l'influenza sulla dinamica del *bladed-disk* sia apprezzabile;
2. non interferisca con gli effetti geometrici del disco palettato.

Il requisito 1 si traduce nel trovare la forma, le dimensioni e la posizione del *blend* che più amplifichino le differenze dinamiche col disco originale e il requisito 2 comporta la scelta di un *blend* che sia posizionato sulla porzione di pala a larghezza costante.

In Sottosezione 3.3.5 si è studiato l'effetto di una porzione di pala a larghezza  $S$  decrescente verso la radice. Questa modifica ha provocato l'abbassamento delle frequenze naturali di pala, in particolar modo della frequenza flessionale. Il *blend* non dovrebbe trovarsi su questa parte di pala per evitare conflitti dinamici di dubbia interpretazione: non sapremmo se lo *shift* nelle frequenze è dovuto al *blend* oppure alla modifica geometrica.

Delineate queste premesse, si illustra in Figura 4.1 la tipologia di *blend* che si vuole testare in questo lavoro di tesi. Si tratta di un *blend* parametrico, dove, fissata la profondità  $d$  dell'asportazione, le rimanenti dimensioni sono univocamente determinate. In particolare, sia  $h_d = 8d$  l'estensione del *blend*, sia  $r_1 = 10d$  il raggio

con la quale è praticata l'asportazione (la forma del *blend* è quindi determinata) e sia  $r_2 = 5$  mm il raggio di raccordo, di dimensione standard, tra *blend* e bordo pala. Sia invece  $R_d = L_d/L$  la posizione relativa del blend, misurata a partire dall'attacco pala.



**Figura 4.1:** Esempio di *blend* parametrizzato

Sono stati selezionati 3 diversi valori di  $d = [2 \text{ mm } 3 \text{ mm } 4 \text{ mm}]$  e, per ogni valore di  $d$ , sono state provate tre diverse posizioni  $L_d$  ( $R_d = [0.6 \ 0.8 \ 0.9]$ ). In Tabella 4.1 sono raccolte le 9 riparazioni testate (la numero 10 sarà discussa in seguito) dove ad ognuna di esse è stato assegnato un nome specifico al quale si farà riferimento per il commento dei risultati.

Si rende noto che le analisi modali effettuate coinvolgono i 9 modelli di settore fondamentale studiati isolatamente, senza considerare la simmetria ciclica del modello.

In Figura 4.2 è illustrato il *Model 2.8*, che fa riferimento ad un *blend* di profondità  $d = 4$  mm e posizione relativa rispetto all'attacco pala di  $R_d = 0.8$ .

#### 4.1.1 Effetto della Posizione del Blend

In Figura 4.3 si trovano raccolti i risultati delle analisi modali sui 9 settori fondamentali con *blend*.

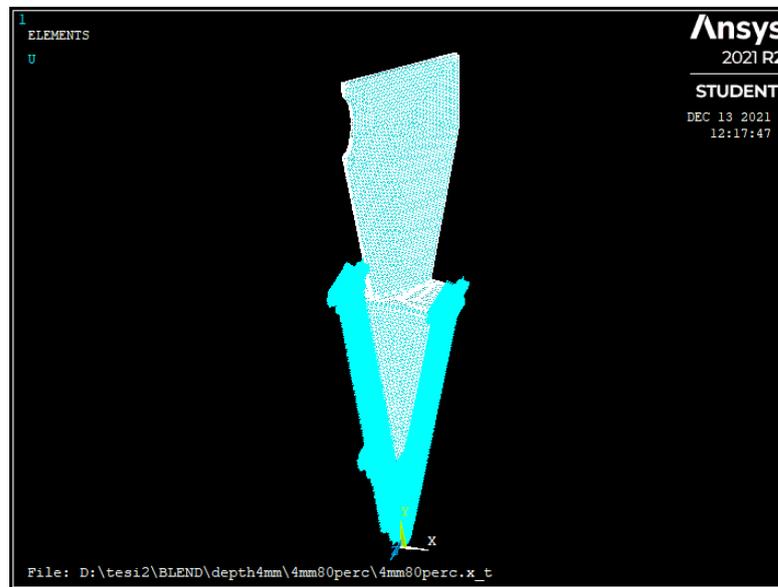
Qualsiasi sia la profondità  $d$  della lavorazione, più  $R_d$  è vicino ad 1, più le variazioni in frequenza sono elevate. La presenza di un *blend* nella zona del *tip* della pala altera le frequenze di diversi punti percentuale.

Perciò, tenendo in considerazione il requisito 1 per la scelta del *blend*, asportazioni praticate ad alti  $R_d$  sono da preferirsi.

Delle 9 configurazioni testate, non tutte però sono da ritenersi utilizzabili. Alcune di esse, come il *Model 2.6*, il *Model 2.7* o il *Model 2.9*, presentano una lavorazione

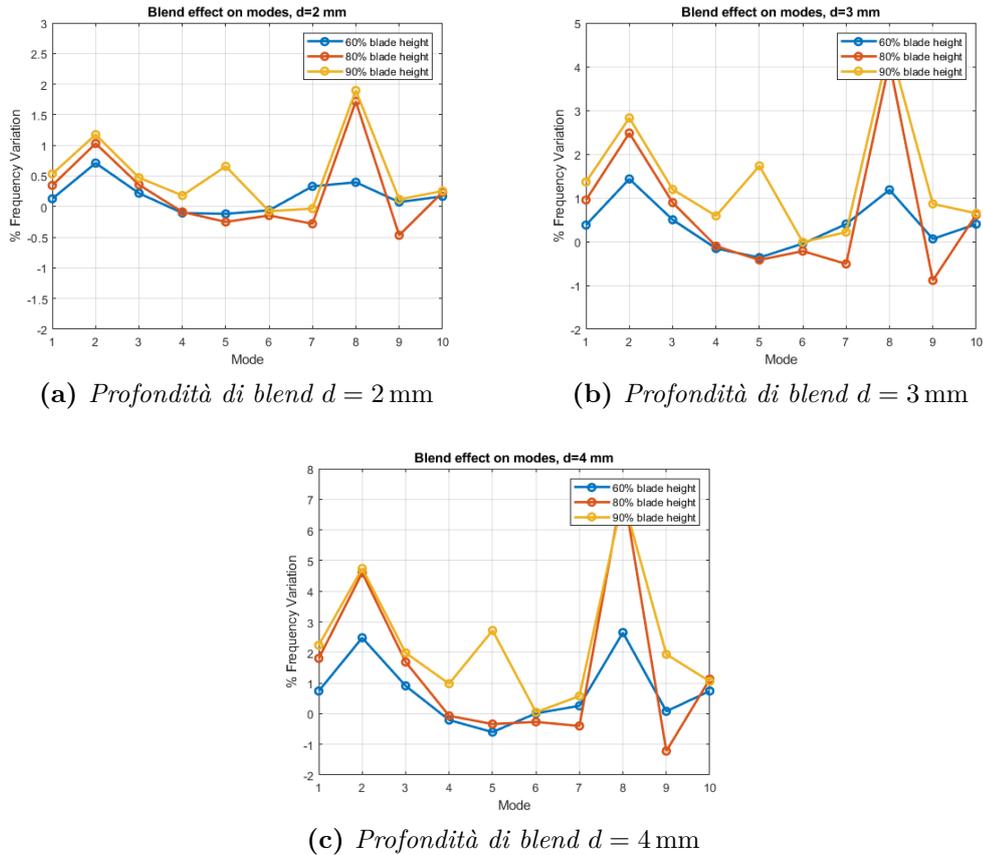
	$d$ [mm]	$r_1$ [mm]	$h_d$ [mm]	$R_d$
<i>Model 2.1</i>	2	20	16	0.6
<i>Model 2.2</i>	2	20	16	0.8
<i>Model 2.3</i>	2	20	16	0.9
<i>Model 2.4</i>	3	30	24	0.6
<i>Model 2.5</i>	3	30	24	0.8
<i>Model 2.6</i>	3	30	24	0.9
<i>Model 2.7</i>	4	40	32	0.6
<i>Model 2.8</i>	4	40	32	0.8
<i>Model 2.9</i>	4	40	32	0.9
<i>Model 2.10</i>	3	30	24	0.85

**Tabella 4.1:** Modelli di *blend* candidati alla selezione: sono raccolte le loro dimensioni e la loro posizione relativa rispetto all'attacco pala



**Figura 4.2:** *Model 2.8* con un *blend* di  $d = 4$  mm e  $R_d = 0.8$

che raggiunge il *tip* oppure la porzione a larghezza non costante della pala. Come illustrato nel requisito 2, non si ritiene opportuno scegliere *blend* i cui effetti possono confondersi con quelli della geometria intrinseca del modello. Infatti i grafici in Figura 4.3 (b) e (c) presentano dei trend non perfettamente distinguibili, dove questi molteplici effetti (*blend* e geometria) potrebbero essersi sovrapposti.



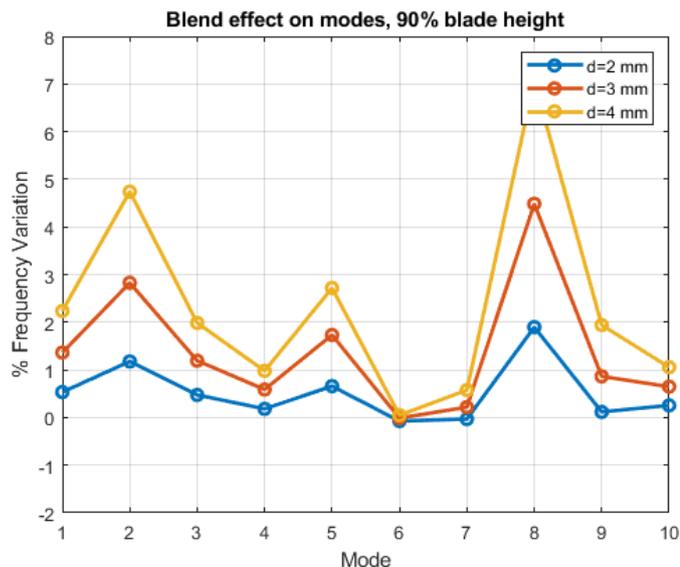
**Figura 4.3:** Effetto della posizione relativa del *blend* rispetto all'attacco pala  $R_d$ , per 3 diverse profondità di asportazione  $d$

### 4.1.2 Effetto della Dimensione del Blend

Ipotizzando di aver selezionato solo quei modelli il cui *blend* è posto al 90% dell'altezza pala ( $R_d = 0.9$ ), in Figura 4.4 si confronta l'effetto delle 3 diverse profondità di asportazione  $d$ .

Si può immediatamente notare come lavorazioni più grandi provochino *shift* in frequenza più ampi, fino al 7% per il modo 8. Inoltre è evidente la non linearità di questo fenomeno. Per il modo 2, una lavorazione di  $d = 2$  mm provoca uno *shift* di circa 1%, mentre un *blend* di  $d = 4$  mm porta a variazioni quasi del 5%.

*Blend* più grandi sono quindi da preferirsi, in accordo col requisito 1.



**Figura 4.4:** Effetto sulle frequenze della profondità del *blend*  $d$

### 4.1.3 Considerazioni Finali sulla Selezione del Blend

Escludendo i modelli con profondità  $d = 2$  mm (*Model 2.1*, *Model 2.2* e *Model 2.3*) in quanto provocano *shift* in frequenza irrisori, la nostra attenzione si focalizza sui modelli con  $d = 3$  mm e  $d = 4$  mm.

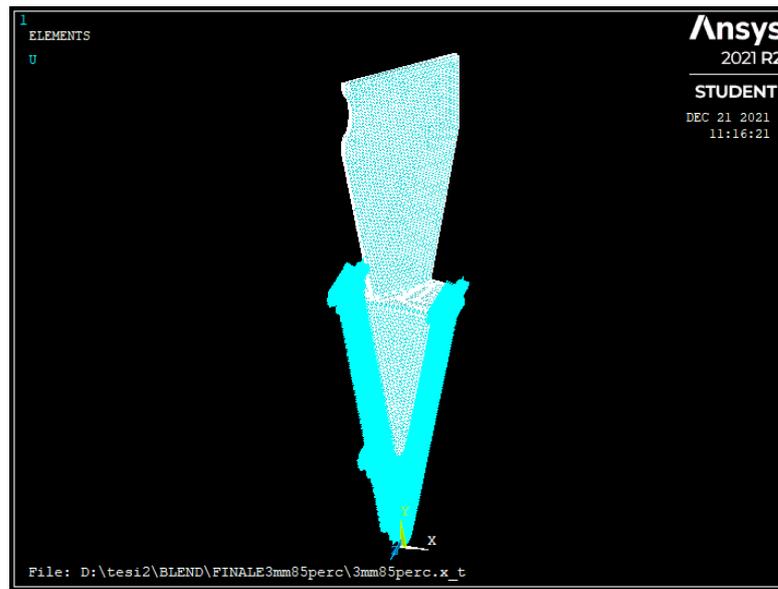
Di queste 6 configurazioni, 3 (*Model 2.6*, *Model 2.7*, *Model 2.9*) le escludiamo per i motivi descritti in Sottosezione 4.1.1.

Anche il *Model 2.8* è escluso per ragioni simili alle precedenti: il blend è pericolosamente vicino al *tip* della pala, seppur non interferisca con esso.

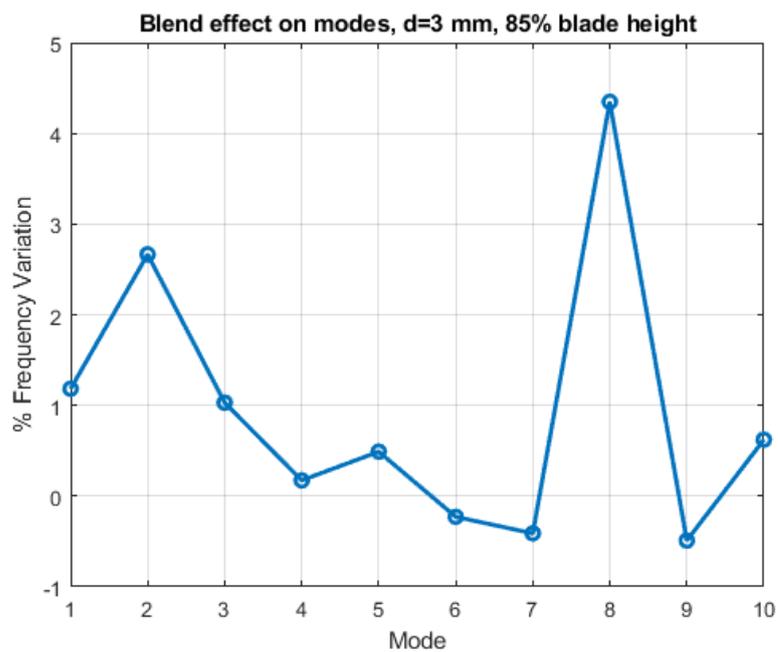
Rimanenti allora il *Model 2.4* e il *Model 2.5*, ossia con  $d = 3$  mm e  $R_d = [0.6 \ 0.8]$ , si propone un'ulteriore configurazione che risulta migliore di queste ultime due.

Sia il *Model 2.10* un settore fondamentale di disco palettato identico al *Model 1* originale, sul quale è praticato un *blend* di dimensione  $d = 3$  mm, posizionato all'85% dell'altezza pala ( $R_d = 0.85$ ).

In Figura 4.5 (a) è rappresentato il *Model 2.10*, che da ora in poi sarà denominato più semplicemente *Model 2*. In Figura 4.5 (b) si trovano gli *shift* in frequenza del *Model 2* rispetto all'originale *Model 1*. Le variazioni importanti, fino al 4% circa, giustificano la scelta di questa lavorazione per gli scopi del lavoro di tesi.



(a) Modello FEM del Model 2



(b) Effetto del blend sulle frequenze proprie

**Figura 4.5:** Modello agli elementi finiti del candidato definitivo (*Model 2*) (a) e variazioni in frequenza dovute al *blend* praticato (b)

## 4.2 Studio della Dinamica del Blend

Definite le dimensioni, la forma e la posizione del blend, si procede allo studio delle differenze dinamiche tra *Model 1* e *Model 2*. Se in Sezione 4.1 si erano studiate le proprietà dinamiche dei singoli settori fondamentali, adesso si studieranno quelle degli interi dischi palettati.

Per questo motivo, quando faremo riferimento al *Model 1* intenderemo il settore fondamentale *pristine* espanso in simmetria ciclica. Il *Model 2* sarà anch'esso il settore fondamentale con *blend* espanso in simmetria ciclica. In questa configurazione in tutti e 18 i settori è praticato un blend. Questo modello rappresenta una specie di *worst case*, dove ci aspettiamo la più grande variazione della dinamica rispetto al disco *pristine*. Seppur poco rappresentativo di una riparazione reale, il *Model 2* è particolarmente comodo in quanto può sfruttare l'analisi in simmetria ciclica.

Infine chiameremo *Model 3* un disco palettato sul quale è praticato un solo *blend*. Questo modello, sicuramente più vicino ad un caso reale di *blade repair*, non potrà sfruttare l'ipotesi di simmetria ciclica.

Si effettueranno 3 diverse tipologie di analisi, comparando i risultati tra i 3 diversi modelli:

- analisi modale;
- confronto delle forme modali;
- analisi della risposta forzata.

In Figura 4.6 sono rappresentati i modelli *FEM* delle 3 configurazioni di disco palettato, dove sono evidenti le differenze descritte sopra.

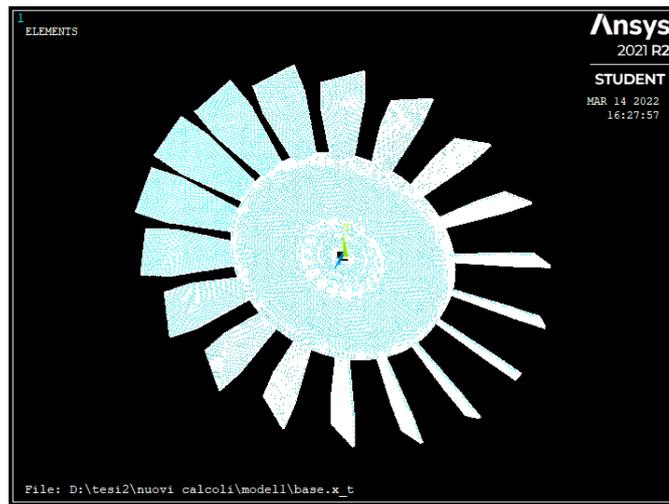
### 4.2.1 Analisi Modale

Come primo studio si è effettuata un'analisi modale dei dischi palettati rappresentati dal *Model 1*, *Model 2* e *Model 3*.

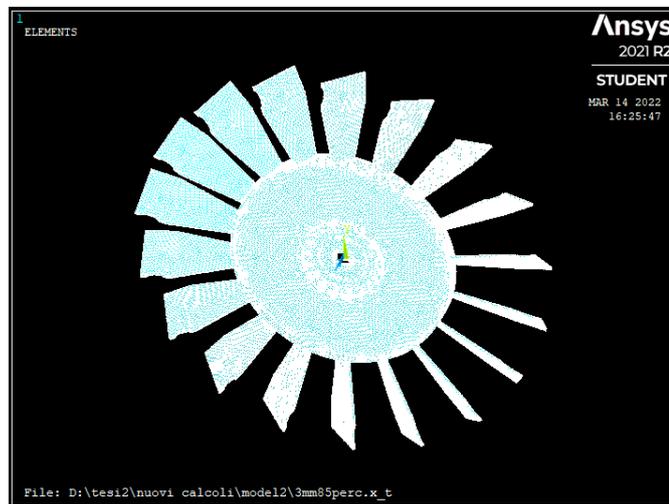
Se per il *Model 1* e per il *Model 2* è stato possibile sfruttare l'ipotesi di simmetria ciclica, per il *Model 3* ciò non è stato possibile.

In Figura 4.7 sono rappresentati i diagrammi frequenza-diametro nodale dei *Model 1* e *Model 2*. È chiaro come la presenza di 18 settori con *blend* non alteri il comportamento dinamico del disco: i modi dominati dal disco restano tali, come quelli dominati dalla pala. La separazione tra modi rimane pressoché intatta e le uniche variazioni apprezzabili sono quelle delle singole frequenze.

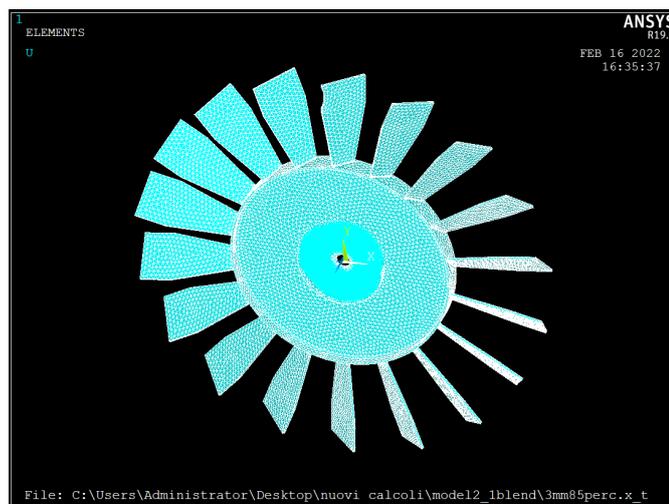
In Figura 4.8 si mette in evidenza lo *shift* in frequenza tra *Model 1* e *Model 2*. Si può notare come la prima famiglia flessionale presenti variazioni comprese tra l'1% e l'1.5%, mentre la prima famiglia torsionale raggiunge variazioni più elevate, fino al 2.5% per  $ND = [8\ 9]$ .



(a) Modello FEM del Model 1

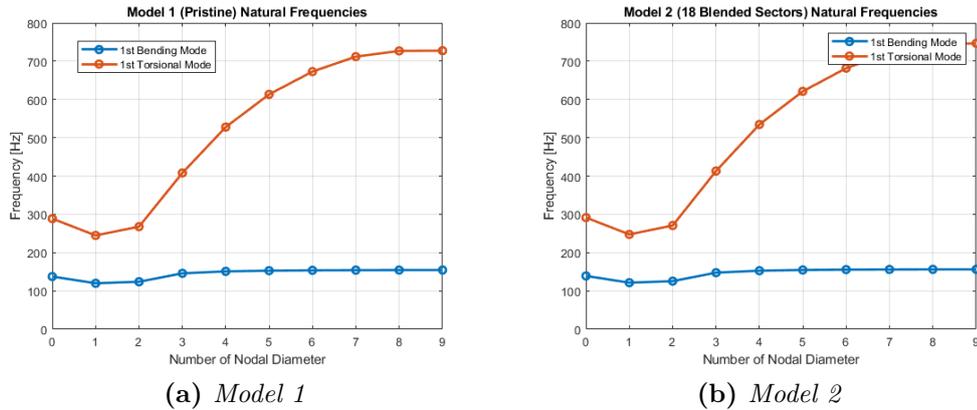


(b) Modello FEM del Model 2

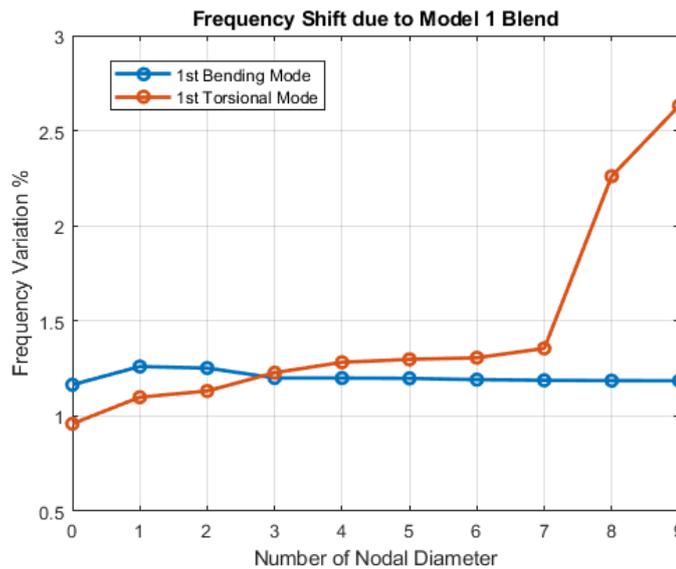


(c) Modello FEM del Model 3

Figura 4.6: Modelli agli elementi finiti dei tre dischi palettati completi



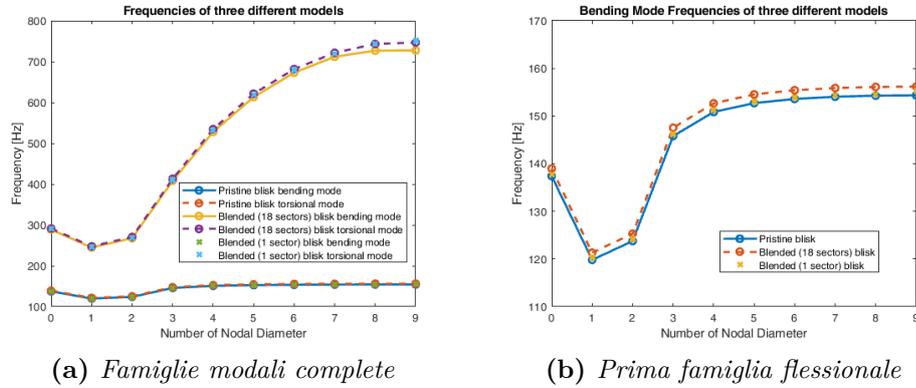
**Figura 4.7:** Diagramma frequenza-diametro nodale per i 2 modelli di disco palettato: *pristine* (a) e *18 blended sectors*



**Figura 4.8:** Variazione in frequenza tra i due dischi palettati *Model 1* e *Model 2*

Il disco palettato con un solo blend (*Model 3*) non può essere studiato in simmetria ciclica: come conseguenza principale, dal punto di vista delle frequenze, notiamo uno sdoppiamento dei modi complessi e coniugati. In Figura 4.9 è riproposto il diagramma frequenza-diametro nodale al quale sono state aggiunte le frequenze relative al *Model 3*. Esse, a causa della perdita della simmetria ciclica, sono in realtà sdoppiate, con valori che si discostano poco tra loro. Come prevedibile, le

frequenze si pongono tra quelle del modello *pristine* e tra quelle del modello con 18 *blend*, mentre il comportamento dinamico risulta ancora identico.

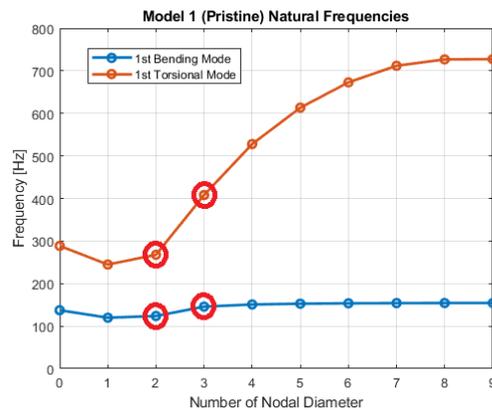


**Figura 4.9:** Diagramma frequenza-diametro nodale per i 3 modelli di disco palettato: diagramma completo (a) con dettaglio sulla prima famiglia flessionale (b)

#### 4.2.2 Confronto delle Forme Modali

Per lo studio delle forme modali si ritiene opportuno effettuare tre considerazioni preliminari.

La prima è funzionale alla semplificazione dell'analisi. Si restringe l'esplorazione delle forme modali ai soli diametri nodali  $ND = [2\ 3]$  delle prime famiglie flessionali e torsionali poiché sono quelli che probabilmente saranno eccitati in fase sperimentale. In Figura 4.10 sono evidenziati i modi analizzati.



**Figura 4.10:** Modi selezionati per il confronto delle forme modali

La seconda riflessione si basa sulla scelta del nodo sul quale rilevare la risposta modale, fondamentale per costruire i modi propri della schiera. Un nodo al *tip* della pala è sicuramente ottimo per registrare gli spostamenti flessionali della pala, più o meno in direzione assiale. Un nodo al *tip* della pala, a metà della stessa, seppur buono per gli spostamenti assiali, potrebbe trovarsi vicino all'asse di torsione della pala e rendere difficilmente distinguibili gli spostamenti dovuti alla torsione. Si sceglie allora un nodo al tip della pala ma al bordo della stessa, in modo che sia adatto per registrare gli spostamenti dovuti sia a flessione che a torsione. In Figura 4.11 è evidenziato il nodo selezionato.



**Figura 4.11:** Nodo selezionato per il confronto delle forme modali

La terza e ultima considerazione verte sull'ipotesi di simmetria ciclica. Ci aspettiamo che il *Model 1* e il *Model 2* abbiano forme modali pressoché identiche, poiché la simmetria ciclica è conservata tra i due modelli. A tal proposito non si rende necessario visualizzare graficamente le forme modali perché la struttura con diametri nodali si crede ancora presente. Per assumere ciò, basti pensare che sul grafico frequenza-diametro nodale la dinamica sia praticamente la stessa (a parte lo shift in frequenza) tra *Model 1* e *Model 2*.

A ulteriore conferma di questa assunzione, si sono ottenute le forme modali della famiglia flessionale e torsionale (per  $ND = [2\ 3]$ ) dei due modelli. Si è poi effettuato un confronto tra famiglie modali analoghe computando il *MAC*, ossia il *Modal Assurance Criterion*, che permette di stabilire quanto due forme modali sono vicine

tra loro.

Poiché in questa analisi si sono considerate solo 4 forme modali, esse sono confrontate effettuando un prodotto scalare normalizzato, ipotizzando che ogni forma modale sia completamente indipendente dalle altre.

Se  $\{\phi_{(i,j)}^{(1)}\}$  è la forma modale a  $ND = i$  della famiglia  $j$ -esima della configurazione *pristine* (*Model 1*) e  $\{\phi_{(i,j)}^{(2)}\}$  è la forma modale a  $ND = i$  della famiglia  $j$ -esima della configurazione a 18 settori con *blend* (*Model 2*), si computa il *Modal Assurance Criterion* per la forma modale a  $ND = i$  della famiglia  $j$ -esima come:

$$MAC_{(i,j)} = \frac{\{\phi_{(i,j)}^{(1)}\}}{\max(\{\phi_{(i,j)}^{(1)}\})} \cdot \frac{\{\phi_{(i,j)}^{(2)}\}}{\max(\{\phi_{(i,j)}^{(2)}\})}. \quad (4.1)$$

Più il valore di  $MAC_{(i,j)}$  è vicino a 1, più la forma modale a  $ND = i$  della famiglia  $j$ -esima del *Model 1* è vicina alla sua omologa del *Model 2*.

Attribuendo a  $j = 1$  la prima famiglia flessionale e a  $j = 2$  la prima famiglia torsionale, in Tabella 4.2 sono raccolti i valori del *MAC* che confrontano le forme modali del *Model 1* con le forme modali del *Model 2*, assieme alle frequenze associate ai diversi modi.

$j$	$i$	$\omega_{(i,j)}^{(1)}$ [Hz]	$\omega_{(i,j)}^{(2)}$ [Hz]	$MAC_{(i,j)}$
1	2	123.77	125.32	0.9996
1	3	145.79	147.54	1.0000
2	2	267.67	270.70	0.9994
2	3	408.00	413.01	0.9874

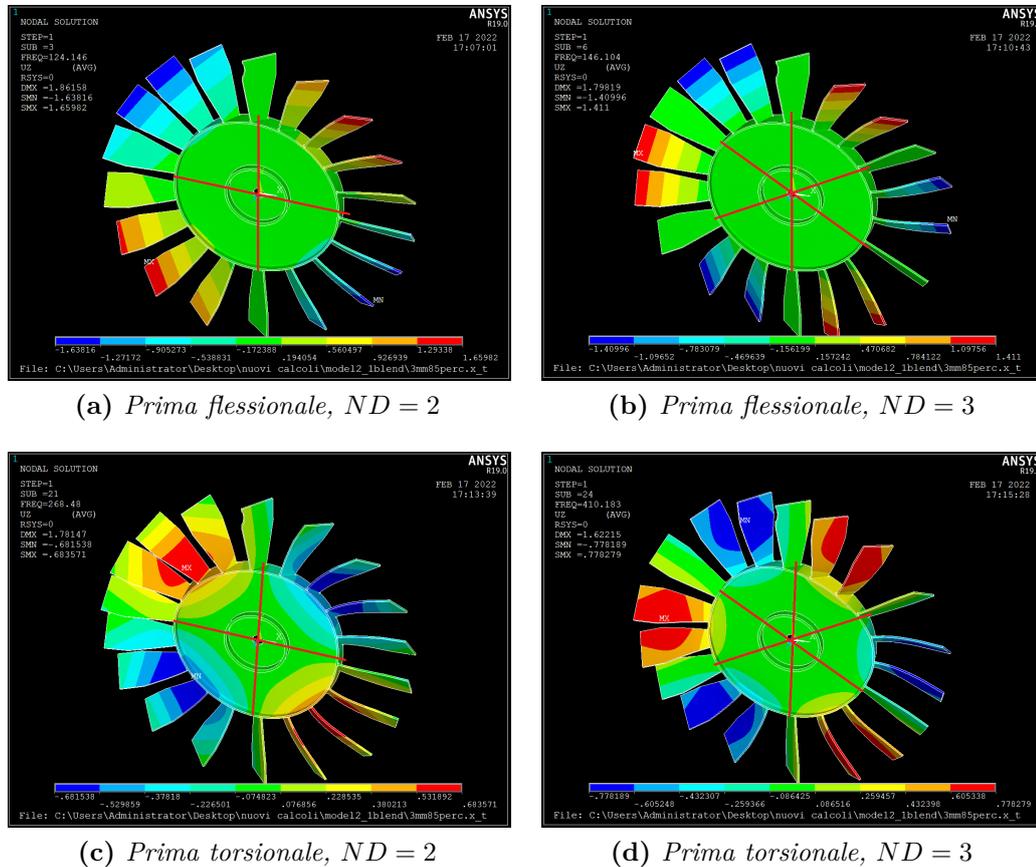
**Tabella 4.2:** *Modal Assurance Criterion (MAC)* tra *Model 1* e *Model 2*

Si può concludere che l'effetto sulle forme modali è trascurabile quando si passa tra due configurazioni a simmetria ciclica dove l'unica differenza è una piccola asportazione di materiale come quella di un *blend*. L'effetto sulle frequenze è invece non trascurabile e delle entità descritte nella Sottosezione precedente.

Molto più interessante è il confronto tra *Model 1* e *Model 3*. Infatti un solo settore con asportazione per *blend* comporta la perdita della simmetria ciclica. Si è già discusso l'effetto di sdoppiamento delle frequenze dei modi complessi e coniugati, mentre ora ci si interroga se è ancora presente una struttura con diametri nodali evidenti.

In questo caso una rappresentazione grafica delle forme modali permette l'immediata visualizzazione dei diametri nodali ed è perciò suggerita in Figura 4.12. Si può notare come la perdita della simmetria ciclica non ha influito sulla presenza dei diametri nodali nelle forme modali: il singolo *blend* non è sufficiente per

alterare significativamente la struttura delle forme modali del disco palettato *pristine*.



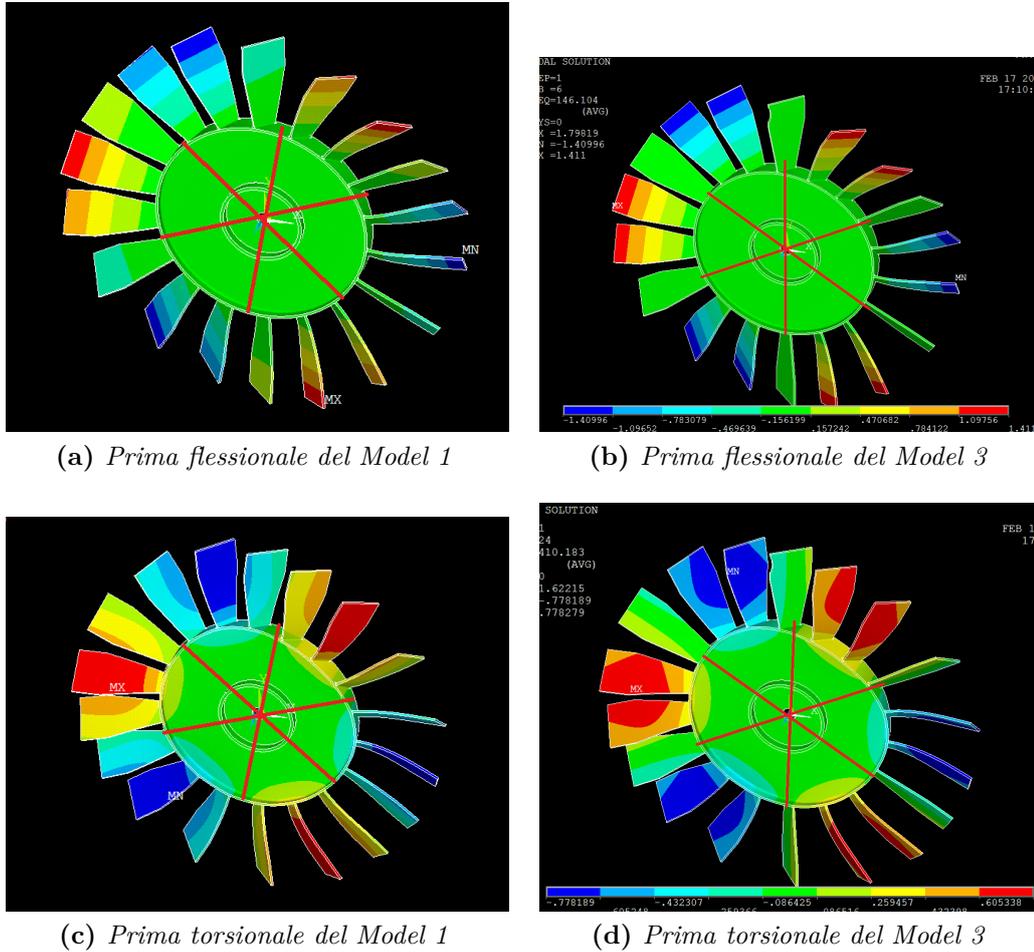
**Figura 4.12:** Forme modali del disco palettato *Model 3*. In evidenza (in rosso) i diametri nodali

In Figura 4.13 è presente un confronto grafico tra le famiglie flessionali e torsionali a  $ND = 3$  per le due configurazioni *Model 1* e *Model 3*.

A prima vista le forme modali sono molto simili, ma si procede al calcolo del *MAC* per trarre delle conclusioni più precise.

In Tabella 4.3 sono riportati i valori del *MAC*, assieme alle frequenze dei modi selezionati. Si può notare come le frequenze dei modi del *Model 3* siano sdoppiate, mentre per il *Model 1* e per il *Model 2* abbiamo modi doppi alla stessa frequenza. Rispetto al *Model 2* con 18 *blended sectors*, riscontriamo valori del *MAC* più piccoli nel caso del *Model 3* con un unico *blend*. Nonostante il numero di settori con differenze geometriche sia adesso minore, la simmetria ciclica non è più conservata e ciò si traduce in forme modali che si allontanano da quelle del modello *pristine*

più di quanto facesse il *Model 2* in simmetria ciclica.



**Figura 4.13:** Confronto tra forme modali flessionali e torsionali a  $ND = 3$

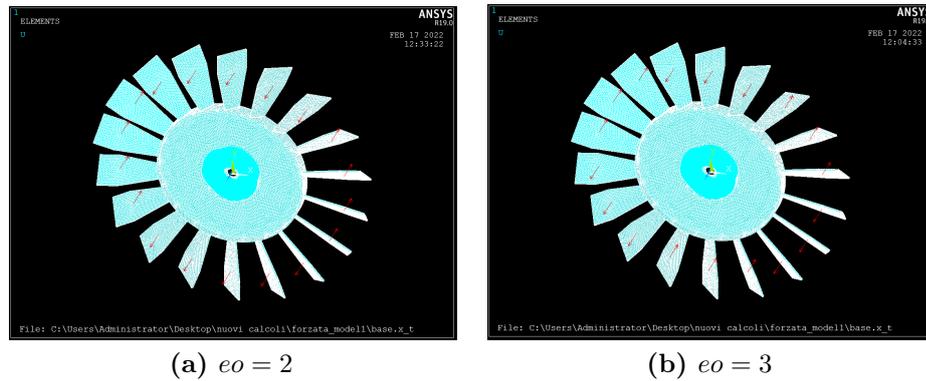
$j$	$i$	$\omega_{(i,j)}^{(1)}$ [Hz]	$\omega_{(i,j)}^{(2)}$ [Hz]	$\omega_{(i,j)}^{(3)}$ [Hz]	MAC (1 e 2)	MAC (1 e 3)
1	2	123.77	125.32	124.15/124.29	0.9996	0.9994
1	3	145.79	147.54	146.10/146.27	1.0000	0.9833
2	2	267.67	270.70	268.48/268.74	0.9994	0.9847
2	3	408.00	413.01	410.18/410.57	0.9874	0.9245

**Tabella 4.3:** Modal Assurance Criterion (MAC) tra *Model 1* e *Model 2* e tra *Model 1* e *Model 3*

### 4.2.3 Analisi della Risposta Forzata

Effettuato il confronto tra i diversi modelli nell'ambito dell'analisi modale, in termini sia di frequenza che di forme modali, si conclude lo studio con un'analisi della risposta forzata tra *Model 1* e *Model 3*.

Poiché i modi a  $ND = [2\ 3]$  risultano essere i più isolati (e per questo motivo adatti ad essere eccitati dal magnete), si selezionano gli *engine order*  $eo = [2\ 3]$  per la risposta forzata. La forzante è applicata a centro pala (Figura 4.14) e la risposta è letta su due nodi: il punto di applicazione della forza e il *tip* della pala (Figura 4.15).



**Figura 4.14:** Forzanti rotanti applicate sull'intero disco palettato per due diversi *engine order*



**Figura 4.15:** Nodo di applicazione della forzante (in rosso) e nodi di lettura della risposta (in giallo)

Per l'analisi armonica si è selezionato un intervallo di frequenze che comprendesse l'intera prima famiglia flessionale, in particolare da 110 Hz a 170 Hz. Si è applicato uno smorzamento di 0.001 Hz per tutti i 100 modi estratti dalla precedente analisi modale.

In Figura 4.16 sono riportate le ampiezze di risposta forzata per i casi  $eo = [2\ 3]$  dei due dischi palettati (con e senza *blend*) lette su i due noti di *output*.

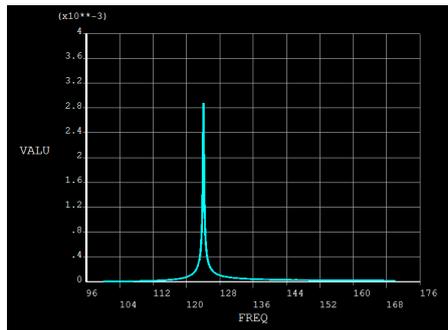
La prima considerazione da effettuare riguarda la frequenza di risonanza. Come previsto dalla teoria, un certo *engine order*  $eo$  eccita il modo a diametro nodale  $ND = eo$ , alla frequenza associata a quel modo. Nel caso del disco palettato con *blend* si può notare un secondo picco in corrispondenza di frequenze relative a diametri nodali più elevati.

Le frequenze di questa seconda piccola risonanza corrispondono a quei modi *blade-dominated*, a frequenza praticamente costante e relativi alla pala isolata. Il motivo per il quale questo secondo picco si presenta unicamente nel caso di modello con *blend* è di duplice interpretazione:

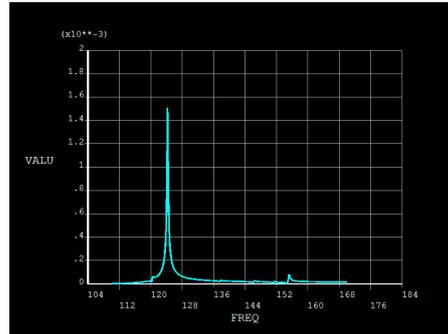
1. la presenza di un *blend* modifica la distribuzione di energia nei modi e provoca l'azionamento di modi a  $ND$  elevati nonostante la forzante sia di  $eo = [2\ 3]$ .  
Le simulazioni per i due modelli hanno come grande differenza l'applicabilità della simmetria ciclica. Nel caso del *Model 3* sappiamo bene che le frequenze dei modi complessi e coniugati sono sdoppiate.  
A causa di ciò è ragionevole pensare che i risultati teorici della risposta forzata in simmetria ciclica non siano più perfettamente validi nel caso del *Model 3*;
2. a causa della differente *mesh* tra pala integra e pala con *blend*, non è stato possibile selezionare un nodo di applicazione della forzante perfettamente analogo a quello delle pale integre. In particolare si è selezionato un nodo praticamente alla stessa posizione angolare, ma a raggio leggermente più esterno. Questa differenza potrebbe aver generato un secondo picco nel grafico di risposta forzata a causa di un'eccitante applicata in modo differente rispetto alle altre.

La prima causa sembra quella più plausibile, infatti abbiamo visto come il modello con *blend* presenti delle forme modali e delle frequenze leggermente diverse da quelle del modello *pristine*. Queste differenze sono piccole perché il *blend* è di dimensioni contenute. Aspettarsi una risposta forzata minimamente diversa è quindi ragionevole. Infatti il secondo picco di risonanza è di entità trascurabile rispetto al picco principale.

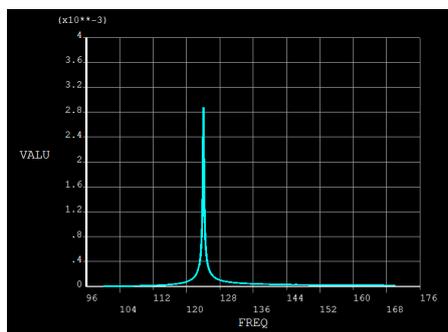
La seconda causa si ritiene meno influente sui risultati ottenuti. Infatti si pensa che selezionare un nodo pochi decimi di millimetro distante dagli omologhi non possa provocare alcuna differenza apprezzabile nella simulazione.



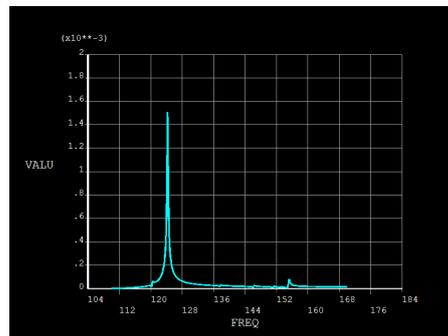
(a) Model 1, mid-node,  $eo = 2$



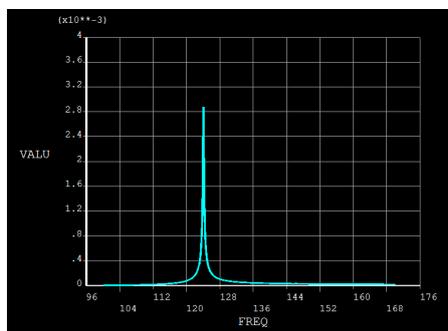
(b) Model 3, mid-node,  $eo = 2$



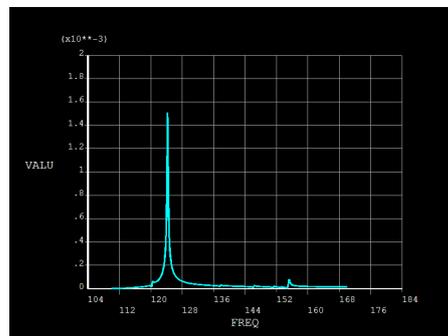
(c) Model 1, tip-node,  $eo = 2$



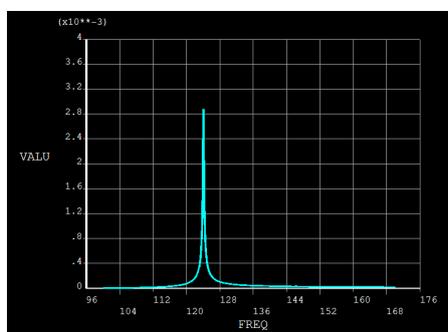
(d) Model 3, tip-node,  $eo = 2$



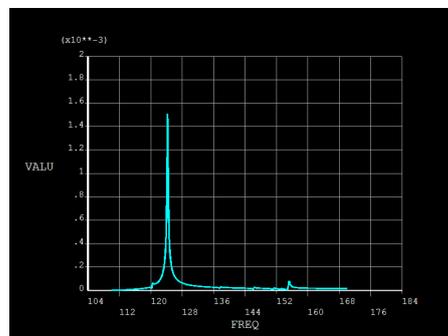
(e) Model 1, mid-node,  $eo = 3$



(f) Model 3, mid-node,  $eo = 3$



(g) Model 1, tip-node,  $eo = 3$



(h) Model 3, tip-node,  $eo = 3$

**Figura 4.16:** Risposta forzata per  $engine\ order\ eo = [2\ 3]$  letta su due nodi di *output* (punto di applicazione della forzante e *tip* della pala) per i due dischi palettati *pristine* (Model 1) e con singolo *blend* (Model 3)

Effettuate queste considerazioni sulla frequenza di risonanza, per quanto riguarda le ampiezze si nota una differenza sostanziale tra *Model 1* e *Model 3*. Le ampiezze del *Model 3* sono più basse, sia per il nodo di applicazione della forza, sia per il nodo al *tip* della pala.

Se si crede che la perdita della simmetria ciclica abbia portato ad una minima redistribuzione dell'energia che attiva leggermente anche quei modi *blade-dominated* ad alta densità modale, sembra sensato concludere che le ampiezze siano diminuite per favorire quelle dei modi ad alto *ND*.

### 4.3 Metodo della Crack-Detection

Nel contesto industriale e manutentivo è importante comprendere se e quale pala di un disco palettato presenta un danno. Per fare ciò si sottopone la schiera ad un test di analisi forzata e si studiano le ampiezze di oscillazione. Sappiamo che, in presenza di *mistuning*, la risposta è localizzata. In particolare, la linea di massima ampiezza si pone proprio sulla cricca. Ciò permette l'immediata individuazione del difetto che ad occhio nudo non si poteva scoprire.

In presenza di *small mistuning*, ossia di tutti quei difetti geometrici dovuti alla manifattura del pezzo e alla sua usura, diventa difficile individuare la presenza di una cricca tramite il metodo appena descritto, perché le forme modali del *bladed-disk* sono già distorte a causa dello *small mistuning*.

Un innovativo metodo proposto da Zucca [23] permette di individuare la pala con cricca in un disco palettato dove è presente *small mistuning* sfruttando la risposta forzata su un unico punto per pala. Ciò è molto vantaggioso perché è sufficiente la lettura dell'ampiezza di oscillazione su un unico punto per pala al fine di individuare quella danneggiata. Inoltre non è nemmeno necessario conoscere le intere forme modali del disco palettato *tuned* perché esse sono calcolabili analiticamente. Metodi precedenti richiedevano invece la risposta su molteplici punti per pala e la conoscenza delle forme modali del disco palettato *tuned*.

L'applicabilità di questo metodo è vincolata a due proprietà dei modi del disco palettato:

1. Il modo da eccitare deve essere isolato;
2. Il modo da eccitare deve essere *crack-sensitive*.

In questa Sezione si studierà l'applicabilità del metodo di *crack-detection* per il disco palettato progettato nel Capitolo 3 sul quale è stato praticato il *blend* definito in Sezione 4.1.

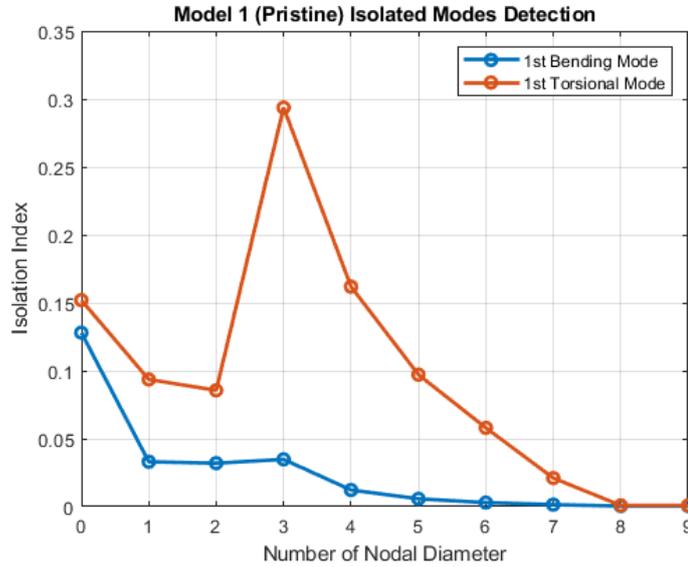
Il primo requisito per la *crack-detection* è quello di disporre di un modo isolato. Si

definisce *isolation index* del modo  $j$ -esimo

$$I_j = \frac{\min(\omega_{T,j} - \omega_{T,j-1}, \omega_{T,j+1} - \omega_{T,j})}{\omega_{T,j}}, \quad (4.2)$$

dove  $\omega_{T,j}$  è la  $j$ -esima frequenza naturale del disco palettato *tuned* (senza *small mistuning*) e *pristine* (senza cricche).

In Figura 4.17 sono rappresentati gli *isolation index* relativi al *Model 1*. Si può notare come i modi più isolati ( $ND = [3 \ 4 \ 5]$ ) siano proprio quelli utilizzati per l'eventuale eccitazione magnetica. Inoltre sarebbero da preferire i modi torsionali rispetto a quelli flessionali poiché possiedono un grado di isolamento maggiore.



**Figura 4.17:** *Isolation index* per i modi del disco palettato

Il secondo requisito per la *crack-detection* è quello di sfruttare modi *crack-sensitive*. Si definisce *crack-sensitivity index* del modo  $j$ -esimo

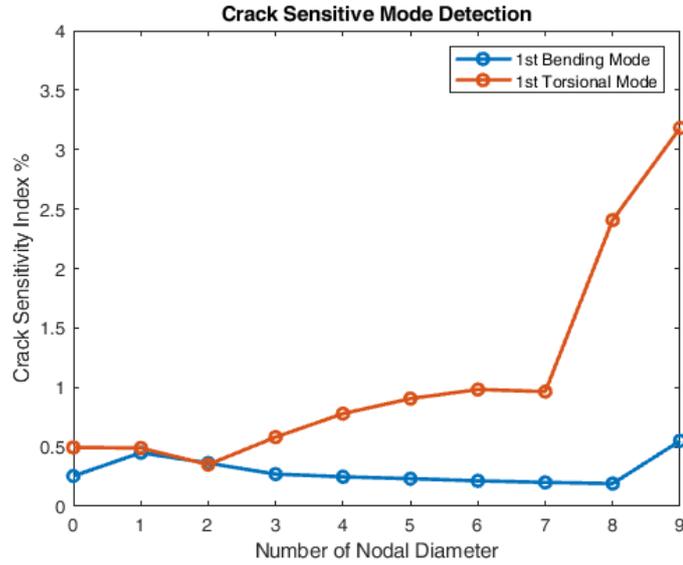
$$S_j = \left| \frac{\omega_{C,j} - \omega_{T,j}}{\omega_{T,j}} \right|, \quad (4.3)$$

dove  $\omega_{T,j}$  è la  $j$ -esima frequenza naturale del disco palettato *tuned* (senza *small mistuning*) e *pristine* (senza cricche) ed  $\omega_{C,j}$  è la  $j$ -esima frequenza naturale del disco palettato *tuned* (senza *small mistuning*) ma con cricca (*Model 3*).

Si presenta in Figura 4.18 il *crack-sensitivity index* per il disco palettato progettato in questo lavoro di tesi. Si nota come sono i diametri nodali elevati ad avere un

buon  $S_j$ .

In una futura verifica numerica o sperimentale di questo metodo, i modi torsionali a medio  $ND$  (4, 5 o 6) si ritengono i più adatti per la *crack-detection*. Infatti essi sono discretamente separati in frequenza e possiedono un buona sensibilità al danno.



**Figura 4.18:** *Crack-sensitivity index* per i modi del disco palettato

## Capitolo 5

# Conclusioni

Il *blade repair* si conferma un'ottima pratica manutentiva, conveniente da un punto di vista sia dei costi che dei tempi. Si ritiene che la sua applicazione sia da preferire ogni volta che sia possibile, considerati i suoi innumerevoli vantaggi e le pochissime note negative.

Il *blend* selezionato per questo lavoro di tesi è una lavorazione di dimensioni maggiori rispetto alle asportazioni che si praticerebbero realmente su un disco di applicazione reale. Ciò significa che le influenze del *blend* sulla dinamica (*shift* in frequenza, distorsione delle forme modali e amplificazione della risposta forzata) sono ancora minori rispetto a quelle calcolate nel Capitolo 4.

Il *blade repair* non solo garantisce l'integrità strutturale della pala (vista la forma smussata della lavorazione), ma ne conserva anche le proprietà dinamiche. Se si erano disallineate pericolose frequenze di risonanza, queste rimangono disallineate. E se si erano previsti certi modi di vibrare del disco palettato, questi sono ancora presenti.

Le variazioni in frequenza si sono stimate dell'ordine del punto percentuale e perciò sarebbero facilmente prevedibili anche a progetto. Si potrebbe pensare a priori che un futuro disco palettato sia adatto al *blade repair* oppure no. Nel *worst case* (cricca importante vicino all'attacco pala) ci si aspetta una variazione massima in frequenza dovuta al *blend* più invasivo, ad esempio, dell'1.5%. Le nuove frequenze proprie si avvicinerebbero a quelle di un certo *engine order*?

Domande e risposte di questo tipo renderebbero il progetto del disco ancora più sicuro e l'applicazione del *blade repair* avrebbe conseguenze largamente prevedibili a progetto.

La forma, la dimensione e la posizione del *blend* influenzano le variazioni sulla dinamica in modo diverso. In questo lavoro di tesi si sono studiate diverse dimensioni del *blend* e diverse posizioni rispetto all'attacco pala, però la forma dell'asportazione è stata stabilita a priori e così fissata. In futuro si potrebbero testare diverse forme e tipologie di *blend* per studiare la loro influenza sulla dinamica del disco palettato.

Infine potrebbe essere interessante esplorare la possibilità di un numero arbitrario di *blend* presenti sulla stessa pala o su pale diverse. Fino a che punto la dinamica del disco originale è conservata? Quante riparazioni si possono effettuare prima che si perda la struttura a diametri nodali? Queste sono alcune delle domande alle quali si potrebbe rispondere in futuri lavori di ricerca per quanto riguarda l'asportazione per *blend*.

Per quanto concerne invece il progetto del disco palettato sperimentale, si evince quanto i requisiti e i vincoli iniziali influenzino e limitino le scelte progettuali.

Come molte delle scelte progettuali in ambito ingegneristico, anche quelle di questo disco palettato si sono rivelate scelte di compromesso. Ad esempio, più si desiderava un disco palettato flessibile e quindi buono per la separazione in frequenza dei modi, più si adottavano spessori ridotti e più si andava verso un componente meno sicuro strutturalmente. Saper scegliere tra sicurezza e soddisfacimento pieno dei requisiti è stata la più comune pratica di compromesso (e non di certo l'unica) in questo progetto.

In conclusione, si ritiene che questo lavoro di tesi sia stato utile per comprendere le principali influenze della riparazione per asportazione sulla dinamica di un disco palettato. In futuro si potrebbero esplorare più dettagliatamente alcuni aspetti di questo lavoro, come la forma del *blend* e la sua numerosità sulle pale, nonché un'analisi più approfondita delle forme modali e della risposta forzata.

# Bibliografia

- [1] R. Hedayati e M. Sadighi. *Bird Strike: an Experimental, Theoretical and Numerical Investigation*. Cambridge, UK: Woodhead Publishing Limited, 2015 (cit. a p. 1).
- [2] L. Witek, A. Bednarz e F. Stachowicz. «Fatigue Analysis of Compressor Blade with Simulated Foreign Object Damage». In: *Engineering Failure Analysis* 58 (2015), pp. 229–237 (cit. alle pp. 1–3).
- [3] A. M. Abdelrhman, M. S. Leong, S. A. M. Saeed e S. M. Al Obiadi. «A Review of Vibration Monitoring as a Diagnostic Tool for Turbine Blade Faults». In: *Appl. Mech. Mater.* 229 (2012), pp. 1459–1463 (cit. a p. 2).
- [4] D. E. Thomson e J. T. Griffin. «The National Turbine Engine High Cycle Fatigue Program». In: *Global Gas Turbine News* 39 (1999), pp. 14–17 (cit. a p. 2).
- [5] J. M. Brown, A. A. Kaszynski, D. L. Gillaugh, E. B. Carper e J. A. Beck. «Optimization of Airfoil Blend Limits with As-Manufactured Geometry Finite Element Models». In: *Proc. ASME Turbo Expo 2020: Turbomachinery Technical Conference and Exposition (GT2020)*. Virtual, Online, set. 2020 (cit. alle pp. 2, 8).
- [6] C. Keller, A. Kellersmann, J. Friedrichs e J. R. Seume. «Influence of Geometric Imperfections on Aerodynamic and Aeroelastic Behavior of a Compressor Blisk». In: *Proc. ASME Turbo Expo 2017: Turbomachinery Technical Conference and Exposition (GT2017)*. Charlotte, NC, US, giu. 2017 (cit. alle pp. 3, 7, 9).
- [7] J. W. Underhill. «Refurbishment of Superalloy Components». In: *Materials Science and Technology* 29 (ago. 1985), pp. 604–607 (cit. a p. 5).
- [8] R. J. Morris, A. R. Parente, F. M. Schwarz e C. D. Sidwell. «Customized Blend Limit for Gas Turbine Engine Airfoils». 15/191,885 (Farmington, Connecticut, US). Dic. 2017 (cit. alle pp. 5, 6, 8).

- 
- [9] X. Huang e W. Miglietti. «Wide Gap Braze Repair of Gas Turbine Blades and Vanes — A Review». In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134 (gen. 2012) (cit. a p. 5).
- [10] I. Alfred, M. Nicolaus, J. Hermsdorf, S. Kaierle, K. Möhwald, H.-J. Maier e V. Weslinga. «Advanced high pressure turbine blade repair technologies». In: *10th CIRP Conference on Photonic Technologies (LANE 2018)*. 2018, pp. 214–217 (cit. a p. 5).
- [11] M. K. Keshavarz, A. Gontcharov, P. Lowden, A. Chan, D. Kulkarni e M. Brochu. «Turbine Blade Tip Repair by Laser Directed Energy Deposition Additive Manufacturing Using a Rene 142–MERL 72 Powder Blend». In: *Journal of Manufacturing and Materials Processing* 21 (mag. 2021) (cit. a p. 6).
- [12] B. Bohari e A. Sayma. «CFD Analysis of Effects of Damage due to Bird Strike on Fan Performance». In: *ASME Turbo Expo 2010: Power for Land, Sea, and Air*. 2010, pp. 173–181 (cit. a p. 7).
- [13] A. Giebmanns, R. Schnell, W. Steinert, A. Hergt, E. Nicke e C. Werner-Spatz. «Analyzing and Optimizing Geometrically Degraded Transonic Fan Blades by means of 2D and 3D Simulations and Cascade Measurements». In: *ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition, American Society of Mechanical Engineers*. 2012, pp. 279–2887 (cit. a p. 7).
- [14] A. S. Rangwala. *Structural dynamics of turbo-machines*. New Delhi, India: New Age International, 2009 (cit. alle pp. 10, 22).
- [15] I.Y. Shen. «Vibration of Rotationally Periodic Structures». In: *Journal of Sound and Vibration* 172 (apr. 1994), pp. 459–470 (cit. a p. 11).
- [16] S. Bornassi, C. M. Firrone e T. M. Berruti. «Vibration Parameters Estimation by Blade Tip-Timing in Mistuned Bladed Disks in Presence of Close Resonances». In: *Applied Sciences* 10 (2020), p. 5930 (cit. a p. 12).
- [17] A. R. Abu-Bakar e H. Ouyang. «Recent Studies of Car Disk Brake Squeal». In: *New Research on Acoustics* (2008), pp. 159–198 (cit. a p. 21).
- [18] Haifeng Gao e Guangchen Bai. «Reliability analysis on resonance for low-pressure compressor rotor blade based on least squares support vector machine with leave-one-out cross-validation». In: *Advances in Mechanical Engineering* 7 (apr. 2015). DOI: 10.1177/1687814015578351 (cit. a p. 27).

- [19] Hiyam Farhat. «Chapter 2 - Critical gas turbine components: Blades and vanes». In: *Operation, Maintenance, and Repair of Land-Based Gas Turbines*. A cura di Hiyam Farhat. Elsevier, 2021, pp. 31–62. ISBN: 978-0-12-821834-1. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-821834-1.00001-0>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128218341000010> (cit. a p. 30).
- [20] M. P. Castanier e C. Pierre. «Modeling and Analysis of Mistuned Bladed Disk Vibration: Status and Emerging Directions». In: *Journal of Propulsion and Power* 22 (mar. 2006), pp. 384–396 (cit. a p. 31).
- [21] M.T. Yang e J.H.Griffin. «A Reduced-Order Model of Mistuning Using a Subset of Nominal System Modes». In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123 (2001), pp. 893–900 (cit. a p. 32).
- [22] D. M. Feiner e J. H. Griffin. «Mistuning Identification of Bladed Disks Using a Fundamental Mistuning Model—Part I: Theory». In: *ASME. J. Turbomach.* 126 (2004), pp. 150–158 (cit. alle pp. 32, 33).
- [23] S. Zucca e B. I. Epureanu. «Detection of a Blade Crack in Bladed Disks: Methodology and Validation». In: *ISMA 2014*. 2014, pp. 2851–2866 (cit. a p. 67).