



**Politecnico  
di Torino**

Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2021/2022

Aprile 2022

# **Ottimizzazione di trasferte in LEO per la rimozione di detriti orbitali in presenza dell'effetto $J_2$**

**Relatore:**

Prof. Lorenzo Casalino

**Candidato:**

Giuseppe Azzarelli



## Sommario

Ogni anno centinaia di nuovi satelliti vengono immessi in orbita bassa terrestre principalmente per scopi scientifici e commerciali. Ad oggi il numero di tali corpi ha raggiunto un valore allarmante, e il continuo sovrappopolamento delle orbite operative porta a rischi sempre più elevati di probabili collisioni gli uni con gli altri. Gli eventi del 2007 e del 2009 hanno dimostrato che la singola collisione tra due satelliti porta generalmente alla formazione di migliaia di detriti spaziali, ognuno dei quali possiede delle lunghezze caratteristiche che spaziano dall'ordine del millimetro fino al centimetro. Il generico detrito spaziale potrebbe causare delle successive collisioni a cascata che portano ad un aumento esponenziale del numero degli stessi. Questo è quanto afferma la cosiddetta sindrome di Kessler, la quale descrive la formazione di una nuvola di detriti attorno alla Terra molto difficile da oltrepassare, rendendo difficoltosa l'immissione di nuovi satelliti geocentrici nonché l'espulsione di sonde interplanetarie. Allo scopo di ridurre il numero di detriti orbitali, oltre ai metodi passivi che riguardano l'autodistruzione dei satelliti in alta atmosfera o il loro inserimento in *disposal orbits* al termine delle loro missioni operative, sono stati pensati dei metodi attivi che prevedono invece una fase di *rendezvous* tra il chaser e il generico detrito, seguita dalla cattura e distruzione in atmosfera. In questa tesi vengono presentati dei metodi attivi di ottimizzazione dei costi di trasferta tra orbite circolari o quasi circolari di tipo LEO, avvalendosi di una trasferta del tipo *thrust-coast-thrust* in cui sono presenti due fasi propulse estreme separate da una di *coasting* intermedia. Nello specifico, i metodi proposti affondano le radici sulle leggi della meccanica orbitale e sulle solide teorie matematiche dell'*optimal control*, rivisitando l'approccio proposto da Edelbaum in merito alle trasferte a propulsione elettrica tramite l'aggiunta del controllo attivo sull'ascensione retta del nodo ascendente (*RAAN*) e dell'effetto perturbativo dovuto alla non sfericità terrestre (armonica  $J_2$ ). I risultati mostrano che per la riduzione dei costi di trasferta, oltre ai controlli attivi di semiasse maggiore e inclinazione, è opportuno considerarne uno anche sulla RAAN, poiché esso permette di alleviare le variazioni orbitali attribuite ai due precedenti e sfruttare al meglio l'effetto  $J_2$ . Inoltre, se il tempo a disposizione per concludere la trasferta è sufficientemente grande, potrebbe essere conveniente privare quest'ultima della prima fase propulsa e aspettare l'allineamento delle linee dei nodi (*waiting time*), per poi completare la manovra tramite l'unico impulso al tempo finale, il quale deve essere comunque fornito entro certi range temporali nell'intorno del *waiting time*. In più, se la differenza iniziale di RAAN tra le due orbite cresce, allora il minimo di costo si sposta verso tempi più grandi. Infine, tramite il valore di costo minimo ottenuto è possibile effettuare una prima stima del *thrust-to-mass ratio* del propulsore, e fornire così un'idea di base su quale adottare.

## Abstract

Every year hundreds of new satellites are sent into Low-Earth Orbit for scientific and commercial purposes. Nowadays, the number of those bodies has reached an alarming value, and the incessant overpopulation of operational orbits is leading to more and more higher risks of collisions with one another. The 2007 and 2009 events have demonstrated that a single collision between two satellites generally leads to the creation of thousands of space debris, each having their own lengths which varies from millimeters to centimeters. A space debris may cause further collisions cascade, causing their exponential rise. That is what ‘Kessler syndrome’ exposes, which describes the formation of a debris cloud all over the Earth hard to cross, making difficult both the input of new geocentric satellites and the ejection of interplanetary probes. In addition to passive methods regarding either self-destruction satellites in high atmosphere or their insertion in disposal orbits at the end of their operational missions, different active methods were thought to reduce the number of orbital debris. The methods involve a rendezvous phase between the chaser and the target debris, followed by its capture and destruction in the atmosphere. In this thesis active methods are presented in order to optimize transfer costs between circular or near-circular orbits in LEO, making use of *thrust-coast-thrust* transfers, which include two propelled phases at their extremes divided by an intermediate coasting one. More precisely, the methods here presented are based on orbital mechanic laws and mathematic theories of the optimal control. Edelbaum’s approach has been adjusted by including an active control on the RAAN and the perturbative effect due to Earth oblateness ( $J_2$  harmonic). The results show that to reduce the transfer costs, it is useful to consider active control on the RAAN too, since it lets the orbital variations on semi-major axis and inclination to be reduced to better use the  $J_2$  effect. Moreover, if time remaining to conclude the transfer is big enough, it could be convenient to deprive the transfer of the first propelled phase and wait the alignment of the nodes line (waiting time). In this case, to complete the transfer, a single impulse at the final time is used, which is needed within a specific time range which includes the waiting time. Furthermore, if the initial RAAN gap between the two orbits rises, then the minimum of cost shifts to larger times. Lastly, it is possible to estimate the thruster thrust-to-mass ratio by using the obtained minimum cost value, thus it can be given a basic idea about which thruster is more suitable to be used.

## **Ringraziamenti**

Ringrazio la mia famiglia, e in particolare i miei genitori e mia nonna, per il continuo e fondamentale supporto durante l'intero percorso di studio, per aver reso possibile tutto ciò e per l'enorme sacrificio condiviso finora.

Un ringraziamento speciale va ad Alessia, per l'indispensabile e insostituibile aiuto e sostegno fornitomi in qualsiasi momento, per essermi sempre stata vicino nonostante la distanza che ci divideva e per avermi sopportato nei momenti più difficili degli ultimi anni.

Un pensiero va ai miei colleghi di università, con i quali ho condiviso giornate dense di felicità e rabbia: li ringrazio per il reciproco aiuto e per tutti i bei momenti passati insieme.

Vorrei, inoltre, ringraziare il mio relatore, il professore Lorenzo Casalino, per la sua grande disponibilità nel fornire chiarimenti e per il tempo dedicatomi nel corso della stesura.

# INDICE

<b>Indice delle figure .....</b>	<b>6</b>
<b>Indice delle tabelle .....</b>	<b>10</b>
<b>Introduzione .....</b>	<b>12</b>
<b><i>Capitolo 1</i></b>	
<b>Idea di approccio al problema .....</b>	<b>16</b>
<b>Assunzioni adottate per l'analisi .....</b>	<b>17</b>
<b><i>Capitolo 2</i></b>	
<b>Cenni di meccanica del volo spaziale.....</b>	<b>18</b>
Orbite e traiettorie.....	18
Parametri orbitali classici o kepleriani .....	19
<b><i>Capitolo 3</i></b>	
<b>Perturbazioni orbitali .....</b>	<b>23</b>
Presenza di un terzo corpo.....	24
Resistenza aerodinamica.....	26
Pressione solare .....	27
Non sfericità della Terra: effetto $J_2$ .....	28
Regressione della linea dei nodi.....	33
Esempi numerici dell'effetto $J_2$ .....	36
<b><i>Capitolo 4</i></b>	
<b>Cenni di teoria del controllo ottimale e ottimo di costo per le manovre combinate.....</b>	<b>37</b>
Metodi di ottimizzazione implementati .....	40
Metodo <i>ai - transfer</i> .....	41
Metodo <i>ai<math>\Omega</math> - transfer</i> .....	43
Osservazioni sui parametri $s_x$ , $s_y$ e $s_z$ .....	44
Importanza e significato della quantità $\Delta x$ .....	44
<b><i>Capitolo 5</i></b>	
<b>Approcci al metodo <i>ai<math>\Omega</math> - transfer</i>: <i>pseudo-ottimale e attendista</i>.....</b>	<b>50</b>
Waiting time .....	51

## **Capitolo 6**

<b>Risultati del confronto dei metodi <i>base</i> .....</b>	<b>53</b>
Costo globale di trasferta .....	54
Costi necessari al cambio orbitale .....	58
Ripartizione delle variazioni del semiasse maggiore.....	59
Ripartizione delle variazioni dell'inclinazione .....	61
Ripartizione delle variazioni della RAAN e $\Delta x$ .....	63
Coefficienti di ripartizione.....	65
Confronto tra prestazioni del propulsore e costi di manovra.....	66
Comportamento asintotico della procedura di calcolo .....	69

## **Capitolo 7**

<b>Risultati del confronto dei due approcci al metodo <i>ai<math>\Omega</math> - transfer</i> .....</b>	<b>71</b>
Costo globale di trasferta .....	71
Costi necessari al cambio orbitale .....	74
Ripartizione delle variazioni del semiasse maggiore.....	74
Ripartizione delle variazioni dell'inclinazione .....	76
Ripartizione delle variazioni della RAAN e $\Delta x$ .....	76
Coefficienti di ripartizione.....	78
Confronto tra prestazioni del propulsore e costi di manovra.....	79
Quadro sinottico dei risultati di calcolo .....	82

## **Capitolo 8**

<b>Impatto della <math>\Delta\Omega</math> di tempo zero.....</b>	<b>93</b>
Impatto sui costi di trasferta .....	94
Impatto sui singoli costi necessari al cambio orbitale .....	99
Impatto sulle variazioni del semiasse maggiore .....	101
Impatto sulle variazioni dell'inclinazione .....	103
Impatto sulle variazioni della RAAN .....	105
Impatto sul tempo di spinta.....	107
<b>Conclusioni .....</b>	<b>110</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>113</b>
<b>Sitografia.....</b>	<b>114</b>

# Indice delle figure

## INTRODUZIONE

- Figura 0.1:** Andamento temporale del numero di oggetti spaziali in orbita geocentrica. .... 13  
**Figura 0.2:** Distribuzione dei corpi in orbita geocentrica in funzione del semiasse maggiore e dell'inclinazione della loro orbita operativa. .... 13  
**Figura 0.3:** Rappresentazione dell'impatto dei due satelliti artificiali (in alto) con relativa dispersione dei detriti dopo 180 minuti dalla collisione (in basso). .... 14

## CAPITOLO 2

- Figura 2.1:** Rappresentazione grafica delle coniche a stesso periastro. .... 19  
**Figura 2.2:** Schema di una generica orbita ellittica con i relativi parametri orbitali. .... 19  
**Figura 2.3:** Schematizzazione del satellite (in grigio) e degli angoli di anomalia media (M), eccentrica (E) e vera ( $v$ ). .... 22

## CAPITOLO 3

- Figura 3.1:** Confronto dei diversi metodi d'integrazione usati, con le relative informazioni in merito alla velocità, stabilità ed errori di approssimazione accumulati dal metodo numerico. .... 24  
**Figura 3.2:** Schema generale dei tre corpi e delle distanze relative riferite ad un sistema di riferimento inerziale. .... 25  
**Figura 3.3:** *Aerobraking orbits* percorse dal *Mars Reconnaissance Orbiter* durante la fase di aerofrenaggio. .... 27  
**Figura 3.4:** Esempio di una rappresentazione in scala cromatica dell'ondulazione del geoide terrestre (10k scale - EGM2008). .... 29  
**Figura 3.5:** Rappresentazione matematica del potenziale gravitazionale tramite le armoniche sferiche. .... 30  
**Figura 3.6:** Rappresentazione tridimensionale del generico satellite (in blu) che percorre la propria orbita (in rosso), e le relative grandezze angolari. .... 32  
**Figura 3.7:** Andamenti di  $\Omega$  in funzione dell'inclinazione e dell'eccentricità, parametrizzati tramite il semiasse maggiore. .... 35  
**Figura 3.8:** Andamento del peso di eccentricità (in nero) e del termine che compone il *RAAN rate* (in rosso) in funzione dell'eccentricità stessa. .... 35

## CAPITOLO 4

- Figura 4.1:** Andamenti di  $\Delta\Omega_{tot}$ ,  $\Delta\Omega_{J_2}$  e  $\Delta\Omega_{imp}$  in funzione del tempo finale di trasferta. .... 46  
**Figura 4.2:** Andamento del costo di cambio RAAN ( $x$ ) in funzione del tempo finale di trasferta. .... 47  
**Figura 4.3:** Andamento di  $\Delta\Omega(t)$  in funzione del tempo finale di trasferta. .... 47  
**Figura 4.4:** Andamenti delle variazioni attive di RAAN in funzione del tempo finale di trasferta per il metodo pseudo-ottimale. .... 48  
**Figura 4.5:** Andamenti delle variazioni attive di RAAN in funzione del tempo finale di trasferta per il metodo attendista. .... 48  
**Figura 4.6:** Confronto del guadagno di costo per i tre metodi di ottimizzazione proposti. .... 49

## CAPITOLO 5

- Figura 5.1:** Andamento delle leggi di variazione dell'orbita iniziale e finale per il caso A (a sinistra) e per il caso B (a destra). .... 52

## CAPITOLO 6

<b>Figura 6.1:</b> Visualizzazione tridimensionale delle orbite in esame al tempo zero. ....	53
<b>Figura 6.2:</b> Andamenti dei singoli impulsi per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	55
<b>Figura 6.3:</b> Andamenti del costo globale per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	56
<b>Figura 6.4:</b> Andamenti dell'Impulse Fraction per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	56
<b>Figura 6.5:</b> Andamenti dell'Impulse Ratio per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	57
<b>Figura 6.6:</b> Andamenti dei costi richiesti dalla trasferta al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale in esame. ....	58
<b>Figura 6.7:</b> Ripartizione delle variazioni di semiasse maggiore per la configurazione orbitale in esame al variare del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	60
<b>Figura 6.8:</b> Andamento del RAAN rate dell'orbita di coasting al variare del tempo finale, per il metodo ai - transfer. ....	60
<b>Figura 6.9:</b> Andamento del RAAN rate dell'orbita di coasting al variare del tempo finale, per il metodo ai $\Omega$ - transfer. ....	61
<b>Figura 6.10:</b> Ripartizione delle variazioni di inclinazione per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	62
<b>Figura 6.11:</b> Ripartizione delle variazioni di RAAN per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	64
<b>Figura 6.12:</b> Andamenti di $\Delta x$ in funzione del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	64
<b>Figura 6.13:</b> Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo della RAAN al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	65
<b>Figura 6.14:</b> Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo del semiasse maggiore al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	65
<b>Figura 6.15:</b> Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo dell'inclinazione al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	66
<b>Figura 6.16:</b> Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore, al variare del tempo finale. ....	68
<b>Figura 6.17:</b> Andamenti del tempo di spinta al variare del tempo finale di trasferta per il primo metodo (linea continua) e per il secondo (linea tratteggiata). ....	68
<b>Figura 6.18:</b> Dettaglio del tempo di spinta al variare del tempo finale per un propulsore con un TMR pari a 0.3 mN/kg. ....	69

## CAPITOLO 7

<b>Figura 7.1:</b> Andamenti dei singoli impulsi per ciascun metodo in esame. ....	72
<b>Figura 7.2:</b> Andamenti del costo globale per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	73
<b>Figura 7.3:</b> Dettaglio del costo globale per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	73
<b>Figura 7.4:</b> Andamenti dei costi richiesti dalla trasferta al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale in esame. ....	74
<b>Figura 7.5:</b> Ripartizione delle variazioni di semiasse maggiore per la configurazione orbitale in esame al variare del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	75
<b>Figura 7.6:</b> Andamento del RAAN rate dell'orbita di coasting al variare del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	75
<b>Figura 7.7:</b> Ripartizione delle variazioni di inclinazione per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	76
<b>Figura 7.8:</b> Ripartizione delle variazioni di RAAN per ciascun metodo in esame. ....	77
<b>Figura 7.9:</b> Andamenti di $\Delta x$ in funzione del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	78

<b>Figura 7.10:</b> Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo della RAAN al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	78
<b>Figura 7.11:</b> Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo del semiasse maggiore al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	79
<b>Figura 7.12:</b> Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo dell'inclinazione al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione. ....	79
<b>Figura 7.13:</b> Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore, al variare del tempo finale. ....	80
<b>Figura 7.14:</b> Andamenti del tempo di spinta al variare del tempo finale di trasferta per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata). ....	81
<b>Figura 7.15:</b> Dettaglio del tempo di spinta al variare del tempo finale per un propulsore con un TMR pari a 0.3 mN/kg, per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).....	81

## CAPITOLO 8

<b>Figura 8.1:</b> Andamenti del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a 140.05° per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto). ....	95
<b>Figura 8.2:</b> Dettaglio del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a 140.05° per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto). ....	95
<b>Figura 8.3:</b> Andamenti del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione a 136.05° tramite metodo attendista. ....	96
<b>Figura 8.4:</b> Andamenti del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione a 136.05° tramite metodo pseudo-ottimale. ....	96
<b>Figura 8.5:</b> Dettaglio del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione a 136.05° tramite il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).....	97
<b>Figura 8.6:</b> Andamenti dell'Impulse Fraction al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a 140.05° per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto). ....	97
<b>Figura 8.7:</b> Andamenti dell'Impulse Fraction al variare del tempo finale, per la configurazione a 136.05° tramite il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata). ....	98
<b>Figura 8.8:</b> Andamenti dell'Impulse Ratio al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a 140.05° per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto). ....	98
<b>Figura 8.9:</b> Andamenti dell'Impulse Ratio al variare del tempo finale, per la configurazione a 136.05° tramite il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata). ....	99
<b>Figura 8.10:</b> Andamenti dei costi di cambio RAAN richiesti dalla trasferta al variare del tempo finale, per la configurazione base (in blu) e a 140.05° (in arancione). ....	100
<b>Figura 8.11:</b> Andamento dei costi di cambio RAAN al variare del tempo finale per la configurazione a 136.05°. ....	100
<b>Figura 8.12:</b> Andamenti delle variazioni del semiasse maggiore al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a 140.05° per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto). ....	102
<b>Figura 8.13:</b> Andamenti delle variazioni del semiasse maggiore per la configurazione a 136.05° sfruttando il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata). ....	102
<b>Figura 8.14:</b> Andamenti delle variazioni dell'inclinazione al variare del tempo finale per la configurazione base (linea continua), per quella a 140.05° per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto). ....	104

<b>Figura 8.15:</b> Andamenti delle variazioni dell'inclinazione al variare del tempo finale, per la configurazione a $136.05^\circ$ tramite metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata). .....	104
<b>Figura 8.16:</b> Andamenti delle variazioni della RAAN al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a $140.05^\circ$ per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto). .....	105
<b>Figura 8.17:</b> Andamenti delle variazioni della RAAN al variare del tempo finale, per il metodo attendista con configurazione orbitale a $136.05^\circ$ .....	106
<b>Figura 8.18:</b> Andamenti delle variazioni della RAAN al variare del tempo finale, per il metodo pseudo-ottimale con configurazione orbitale a $136.05^\circ$ . .....	106
<b>Figura 8.19:</b> Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale a $140.05^\circ$ . .....	107
<b>Figura 8.20:</b> Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale a $136.05^\circ$ . .....	108
<b>Figura 8.21:</b> Andamenti del tempo di spinta in funzione del tempo finale, al variare del TMR per la configurazione a $136.05^\circ$ per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata). .....	108
<b>Figura 8.22:</b> Andamenti del tempo di spinta in funzione del tempo finale, al variare del TMR per la configurazione a $140.05^\circ$ , per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata). .....	109

# Indice delle tabelle

## CAPITOLO 2

<b>Tabella 2.1:</b> Quadro riassuntivo delle coniche e delle relative caratteristiche. ....	18
<b>Tabella 2.2:</b> Quadro sinottico dei parametri orbitali kepleriani. ....	22

## CAPITOLO 3

<b>Tabella 3.1:</b> Rappresentazione quaternaria e senaria delle armoniche zonali pari nella tipica notazione. ....	31
---	----

## CAPITOLO 4

<b>Tabella 4.1:</b> Parametri orbitali della configurazione di tempo zero presa in esame per la trattazione. ....	46
---	----

## CAPITOLO 5

<b>Tabella 5.1:</b> Eventuali casistiche al variare dei parametri orbitali al tempo zero. ....	51
--	----

## CAPITOLO 6

<b>Tabella 6.1:</b> Valori di costo minimo al variare del metodo utilizzato, per la configurazione orbitale in esame. ....	57
<b>Tabella 6.2:</b> Variazioni del <i>RAAN rate</i> relativo a seguito delle variazioni iniziali di $a$ e $i$ , per la configurazione trattata e per il tempo considerato. ....	62
<b>Tabella 6.3:</b> Tempi di spinta richiesti per entrambi i metodi riferiti al caso di ottimo. ....	69
<b>Tabella 6.4:</b> Valori asintotici ottenuti estendendo nel tempo la procedura di calcolo. ....	70

## CAPITOLO 7

<b>Tabella 7.1:</b> Valori di costo minimo al variare del metodo utilizzato. ....	72
<b>Tabella 7.2:</b> Tempi di spinta richiesti per ciascun metodo per il caso di ottimo. ....	80
<b>Tabella 7.3:</b> Sinossi dei tempi e del minimo di costo per tutti i metodi. ....	82
<b>Tabella 7.4:</b> Valori assunti dai costi di trasferta, parametri di ripartizione e di ottimizzazione al variare del tempo finale di trasferta. ....	85
<b>Tabella 7.5:</b> Valori assunti dai singoli impulsi e dal costo totale al variare del tempo finale di trasferta. ....	87
<b>Tabella 7.6:</b> Valori assunti dalle variazioni dei singoli parametri orbitali al variare del tempo di trasferta. ....	92

## CAPITOLO 8

<b>Tabella 8.1:</b> Configurazioni orbitali considerate per lo studio. ....	93
<b>Tabella 8.2:</b> Quadro sinottico dello stile grafico utilizzato per la visualizzazione delle diverse curve. ....	94
<b>Tabella 8.3:</b> Valori di costo minimo per tutte le configurazioni orbitali prese in esame, al variare del metodo utilizzato. ....	99
<b>Tabella 8.4:</b> Tempi riferiti alle due configurazioni orbitali presentate. ....	101
<b>Tabella 8.5:</b> Variazioni del <i>RAAN rate</i> relativo a seguito del primo impulso al waiting time per tutte le configurazioni in esame. ....	103
<b>Tabella 8.6:</b> Tempi di spinta richiesti al variare della configurazione orbitale, per ciascun metodo riferito al tempo di ottimo. ....	109



## Introduzione

Ad oggi, il numero di detriti spaziali ha raggiunto valori decisamente allarmanti. Ogni anno centinaia di satelliti vengono inseriti in orbite geocentriche, sia per missioni prettamente scientifiche (e.g. *remote sensing*) sia per missioni legate principalmente ad aspetti commerciali (e.g. telecomunicazioni), nonché per il servizio pubblico in sé (e.g. servizi meteorologici, navigazione, etc.). Per la prima tipologia di missione, tali orbite sono spesso le cosiddette *LEO* (*Low Earth Orbit*), ovvero quelle che si estendono fino a circa 2000 km dal suolo; per le altre tipologie le orbite si possono estendere fino alle *GEO* (*Geosynchronous Equatorial Orbit*), per le quali competono quote di oltre 30000 km. Da qui è possibile capire come una grande porzione del volume spaziale geocentrico sia costantemente occupato da oggetti che orbitano con velocità che spazzano nominalmente da circa 3 km/s fino a 7.7 km/s per le orbite più basse, raggiungendo picchi decisamente più elevati al momento di eventuali collisioni tra i corpi in orbita. A tali velocità, l'urto tra un satellite e un detrito dell'ordine di un millimetro di diametro comporta, oltre che ingenti danni, anche un notevole aumento del successivo numero di detriti orbitanti (vedi Figura 0.1<sup>[14]</sup>). Tutto ciò, esteso nel tempo, porta alla genesi di un'enorme volume degli stessi che, oltre a rendere difficoltoso l'attraversamento della suddetta zona e l'inserimento di nuovi satelliti in orbita a causa dell'eccessivo popolamento delle più operative (vedi Figura 0.2<sup>[13]</sup>), determina il raggiungimento del volume limite previsto dalla *sindrome di Kessler*. Difatti, secondo quest'ultima, quando il volume dei detriti raggiunge il valore critico, la singola collisione tra due *oggetti spaziali*, per quanto possa essere ritenuta insignificante di per sé, porta a successive collisioni a cascata che comportano un aumento esponenziale del numero di detriti spaziali.

Da molto tempo si parla di *space debris*, e per questo si sono studiati, e si studiano e approfondiscono tutt'ora, metodi utili alla loro rimozione, o quantomeno riduzione. Gli studi in questo settore divennero sempre più importanti a partire dal 11 gennaio 2007, quando fu effettuato un test missilistico anti-satellitare cinese che portò alla distruzione del satellite *Fengyun-1C*, il quale generò migliaia di detriti molti dei quali ancora oggi in orbita<sup>[5]</sup>. Difatti, il giorno 11 novembre 2021, per evitare potenziali collisioni con la *Stazione Spaziale Internazionale*, i detriti prodotti da suddetta collisione hanno reso necessario una manovra di emergenza che cambiasse sufficientemente l'orbita della stessa<sup>[20]</sup>. Questo evento mette a fuoco un altro aspetto cruciale che riguarda i relativi sviluppi nel tempo. Basti pensare che una collisione avvenuta nel 2007 ha avuto potenziali sviluppi disastrosi quasi 15 anni dopo. Altri due eventi che hanno portato a peggiorare la situazione furono la collisione accidentale tra il satellite *Iridium 33* e il satellite *Cosmos 2251* avvenuta il 10 febbraio 2009 (Figura 0.3<sup>[6]</sup>) e il recente test missilistico anti-satellitare russo del 15 novembre 2021, il quale portò alla formazione di ulteriori detriti spaziali<sup>[21]</sup>.

Con il passare del tempo, per limitare il numero di detriti spaziali in orbita, si pensarono e svilupparono metodi passivi e attivi che, a seconda dei casi e delle specifiche situazioni, è possibile attuare o meno. In merito ai primi, le normative prevedono che entro e non oltre 25 anni dal termine della missione, il satellite in questione debba deorbitare e bruciare in alta atmosfera (qualora si parli di LEO) o raggiungere le cosiddette *disposal orbit*, ovvero delle orbite sufficientemente distanti da quelle operative comuni, in cui il satellite orbiterà senza alto rischio (qualora si parli di GEO)<sup>[15]</sup>. Per quanto riguarda i metodi attivi, essi prevedono una fase di *rendezvous* tra uno specifico satellite *chaser* e il generico detrito *target*, seguita dalla cattura e infine dal rientro con successiva disintegrazione in alta atmosfera. Da ciò è possibile dedurre che tale approccio è limitato alla rimozione di detriti nella fascia LEO, e porta con sé alcune problematiche relative alla vera e propria messa in pratica di tali metodi.

Questi ultimi, a differenza dei metodi passivi, prevedono ovviamente dei costi decisamente più elevati, poiché si dovrà tenere in considerazione l'intera progettazione della missione, la quale non riguarda esclusivamente aspetti ingegneristici, ma anche amministrativi e logistici. Uno degli aspetti più critici della suddetta progettazione è quello che riguarda l'ottimizzazione dei costi di trasferta, e conseguentemente il design dell'*Attitude & Orbit Control System (AOCS)* che verrà adoperato per il satellite in questione.

Lo scopo della seguente trattazione sarà dunque quello di sviluppare e approfondire alcuni dei metodi attivi, mettendone in luce gli aspetti più importanti e le rispettive criticità, presentando gli andamenti grafici e i valori numerici delle variabili e dei parametri di ottimizzazione.

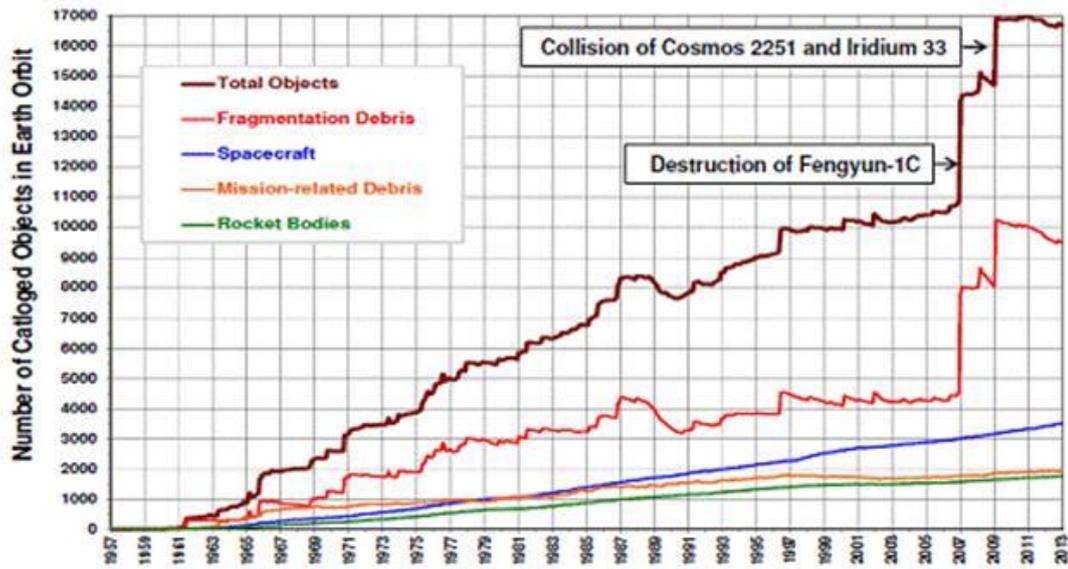


Figura 0.1: Andamento temporale del numero di oggetti spaziali in orbita geocentrica.

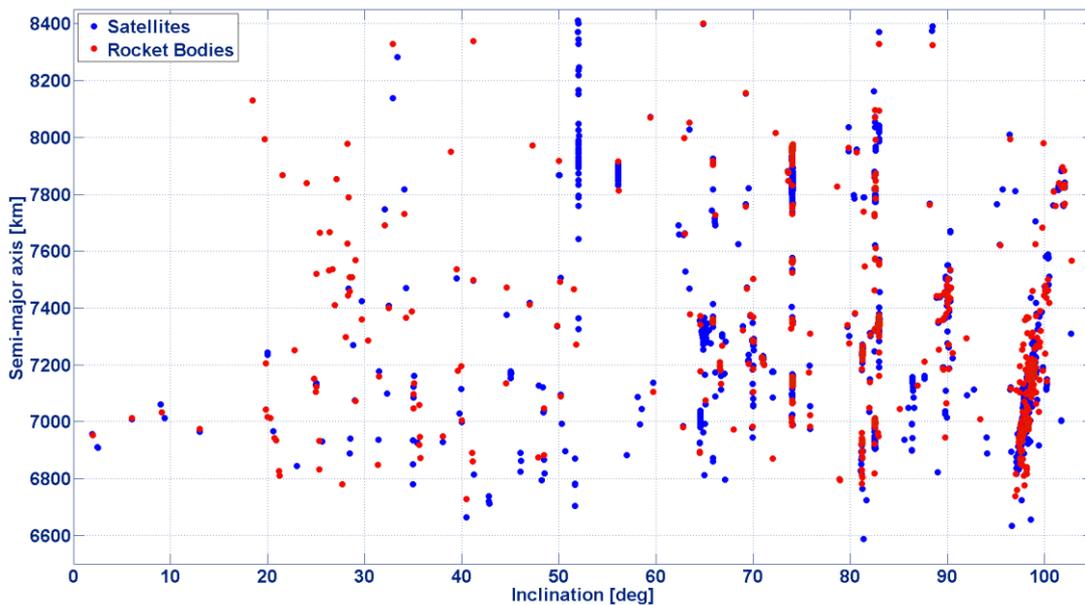
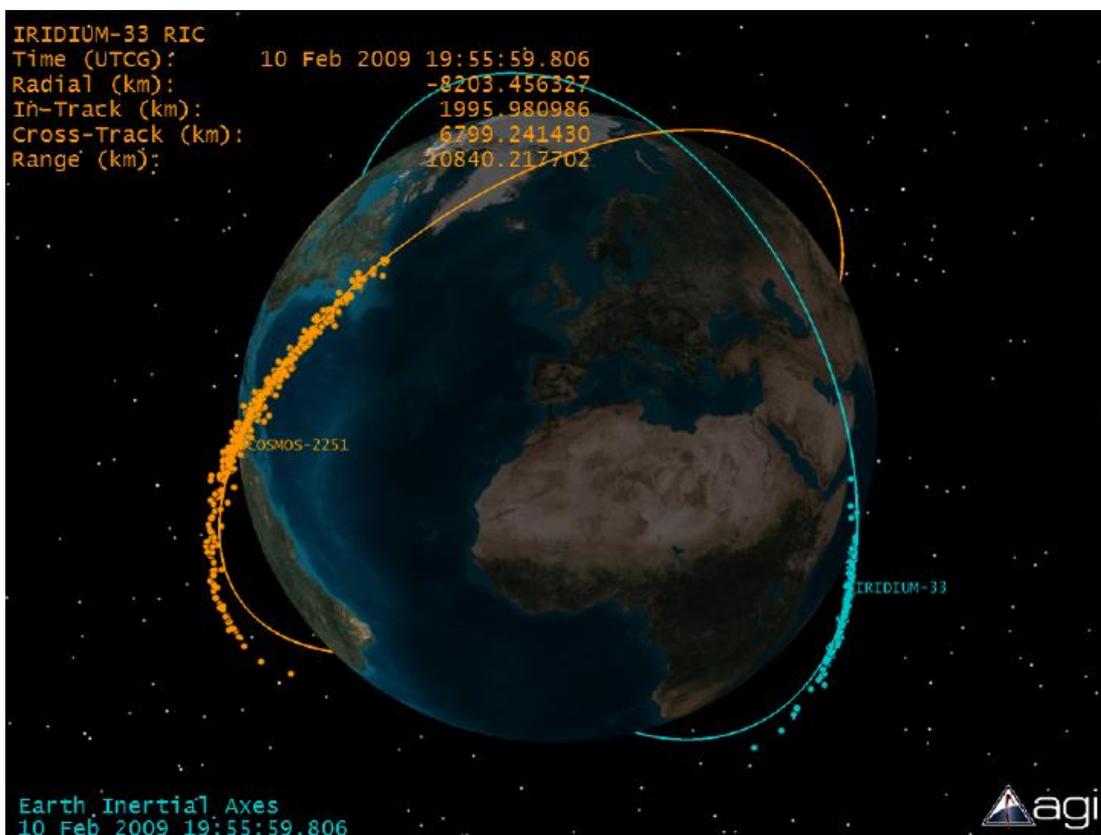
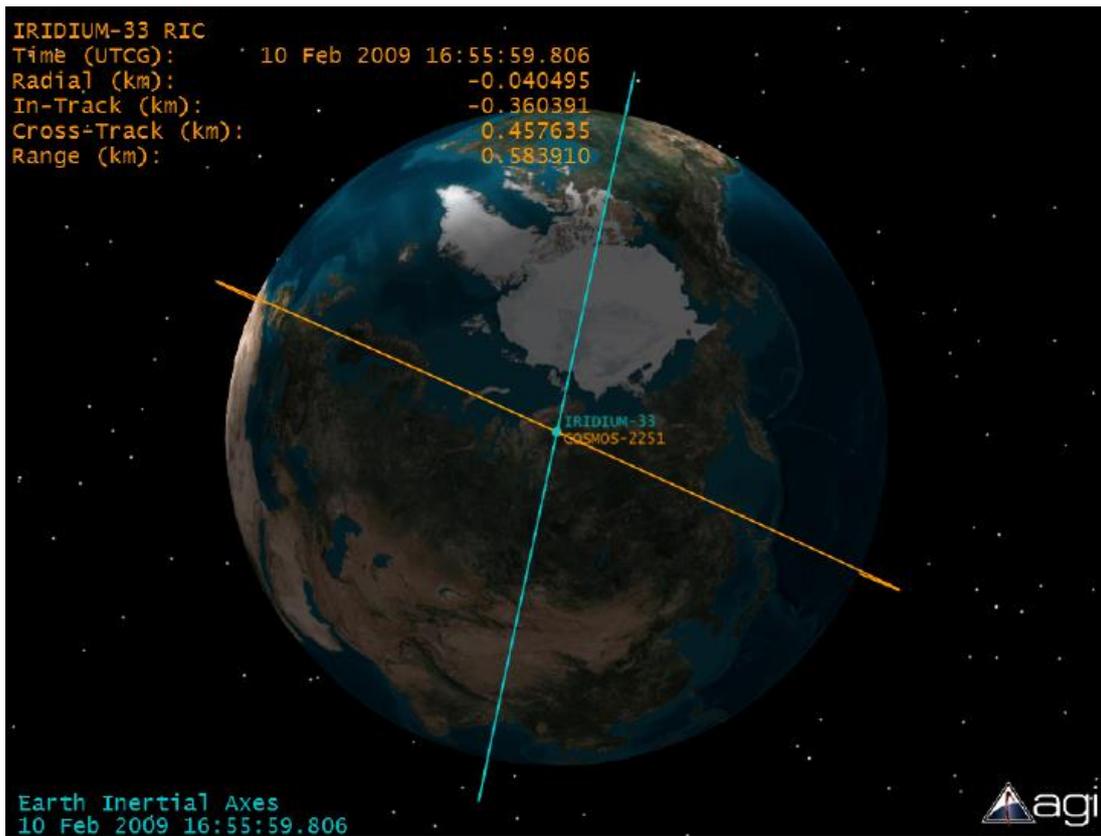


Figura 0.2: Distribuzione dei corpi in orbita geocentrica in funzione del semiasse maggiore e dell'inclinazione della loro orbita operativa.



*Figura 0.3: Rappresentazione dell'impatto dei due satelliti artificiali (in alto) con relativa dispersione dei detriti dopo 180 minuti dalla collisione (in basso).*



# Capitolo 1

## Idea di approccio al problema

Il problema in esame è quello di minimizzare i costi di trasferta *low-thrust* per effettuare un *rendezvous* tra il *chaser*, il quale si trova inizialmente nella sua orbita, da qui in poi detta *iniziale* o *di partenza*, e il generico detrito spaziale che orbita in LEO attorno a quella che, da qui in poi, viene detta *orbita finale* o *di arrivo*. Le coppie di orbite sono caratterizzate dall'aver piccole differenze tra parametri orbitali e questo permette di gettare le basi dei metodi proposti per l'ottimizzazione dei costi, i quali mostrano come si possa partire dall'approccio di Edelbaum caratterizzato da una propulsione elettrica, ad uno più complesso che, a differenza di quest'ultimo, tenga conto di due aspetti fondamentali per l'analisi: l'effetto  $J_2$  e un controllo attivo<sup>1</sup> sulla RAAN<sup>[9]</sup>. Quest'ultimo, in base ai livelli di spinta forniti dal propulsore e ai tempi di missione disponibili, può essere più o meno determinante. Nell'ottica di ottimizzare i costi, entrambi i metodi sfruttano il *RAAN rate*  $\dot{\Omega}$  indotto dall'effetto  $J_2$ , al fine di compensare, o del tutto annullare, i costi del controllo attivo della RAAN stessa, traendo inoltre vantaggi dal controllo attivo del semiasse maggiore e dell'inclinazione. Proprio alla base di quest'ultima affermazione, le trasferte descritte dal *chaser*, e quindi i metodi di ottimizzazione in sé, si presentano nella forma *thrust-coast-thrust*, ovvero l'approccio caratterizzato da una fase iniziale propulsa, seguita da una intermedia libera durante la quale si sfrutta a pieno l'effetto  $J_2$ , e una fase finale, anch'essa propulsa, utile a completare l'allineamento orbitale. Tali metodi saranno qui indicati sotto il nome di *ai-transfer*, per il quale è previsto un controllo attivo solo sul semiasse maggiore e sull'inclinazione, e *ai $\Omega$ -transfer*, per il quale è previsto un controllo attivo anche sulla RAAN.

Nello specifico, l'approccio standard del metodo *ai $\Omega$ -transfer* prevede dunque che vengano impartiti due impulsi: uno al tempo iniziale e uno al tempo finale. Tuttavia, per qualsiasi coppia di orbite è possibile definire un *tempo ottimale* per il quale conviene privare la trasferta del primo impulso, aspettare che le rispettive linee dei nodi coincidano, e poi fornire l'unico impulso utile al completamento della manovra. Così facendo viene sfruttato a pieno l'effetto  $J_2$ , traendone dunque tutti i benefici che portano alla diminuzione dei costi di missione. Per ovvi motivi, tale approccio è estendibile solo ai casi in cui i tempi di missione a disposizione siano sufficientemente lunghi, fermo restando che l'ottimo è comunque da ricercare nell'intorno del suddetto tempo ottimale. Difatti, come si vedrà più avanti, per tempi successivi a tale istante di tempo, l'approccio standard a due impulsi risulterà essere via via più costoso di quello appena descritto.

Per fissare bene le idee, i due approcci appena presentati, i quali verranno approfonditi in seguito, saranno d'ora in poi definiti come:

- **Pseudo-ottimale.** La manovra si presenta esattamente nella forma *thrust-coast-thrust* poc'anzi definita, presentando dunque le due fasi propulse.
- **Attendista.** La manovra è priva della prima fase propulsa e si presenta nella forma *coast-thrust*.

---

<sup>1</sup> Con l'espressione "controllo attivo" si vuole intendere la possibilità del propulsore di fornire un impulso  $\Delta V_k$  utile a cambiare il generico parametro orbitale  $k$  di una quantità pari a  $\Delta k$ . Nello specifico, si parla di  $\Delta V_\Omega$  e quindi di  $\Delta\Omega$ .

## Assunzioni adottate per l'analisi

Le assunzioni adottate per l'analisi, e quindi per l'intera trattazione, sono relative alle:

- **Orbite.** Le orbite prese in analisi sono circolari, o al più, quasi-circolari. Tutto ciò è dovuto al fatto che la maggior parte delle LEO sono appunto circolari. In più, questo permetterà di semplificare il calcolo dei costi di trasferta, poiché le velocità orbitali non dipenderanno dalla posizione esatta del *chaser*. Inoltre, il *RAAN rate* indotto dalla non sfericità terrestre, che in origine dipende anche dall'eccentricità orbitale, sarà funzione esclusivamente del semiasse maggiore (o equivalentemente il raggio orbitale) e dell'inclinazione. Infine, l'eccentricità nulla porta ad avere un argomento del periastro indefinito, e quindi non occorrerà preoccuparsi della precessione della linea degli absidi dovuta al medesimo effetto perturbativo.
- **Perturbazioni.** In relazione al modello dinamico semplificato<sup>2</sup>, l'unica perturbazione considerata e aggiunta all'analisi è quella prodotta dalla non sfericità della Terra legata all'armonica  $J_2$ . Verranno dunque trascurati gli effetti dovuti alla pressione solare, alla resistenza atmosferica e alla presenza di un terzo corpo, che per i casi specifici sarebbe la Luna. Inoltre, è importante sottolineare che non verrà considerata la precessione dell'anomalia media, garantendo ai corpi orbitanti esclusivamente il loro moto medio, e che la regressione della linea dei nodi porterà ad una variazione della RAAN lineare nel tempo, poiché l'inclinazione orbitale e il semiasse maggiore saranno supposti stazionari.
- **Variazioni dei parametri orbitali.** Le differenze di parametri orbitali da coprire con i dovuti impulsi sono piccole, per cui si parlerà di qualche grado per l'inclinazione e la RAAN e di qualche chilometro per il semiasse maggiore<sup>3</sup>.
- **Manovre.** Le manovre considerate sono *combinatae*, e quindi le variazioni dei parametri orbitali ( $a$ ,  $i$  e  $\Omega$ ) vengono totalmente condensate nei singoli impulsi della fase propulsa iniziale e finale della trasferta.

Tutte queste assunzioni permetteranno di portare avanti un'analisi relativamente semplice, ma non semplicistica del problema in esame, in maniera tale da definire e consolidare gli aspetti più cruciali e importanti, senza perdere generalità e soprattutto senza commettere grandi errori numerici.

---

<sup>2</sup> In questo caso si fa riferimento ai *Simplified Perturbations Models*, ovvero i cinque modelli perturbativi che vengono implementati per la determinazione della posizione e della velocità (in termini vettoriali) dei corpi in esame, tenendo in considerazione le opportune perturbazioni orbitali.

<sup>3</sup> In merito al semiasse maggiore, le piccole variazioni sono da ritenersi sempre relative al raggio terrestre.

# Capitolo 2

## Cenni di meccanica del volo spaziale

### Orbite e traiettorie

Qualsiasi corpo nello spazio segue delle specifiche *strade*, e queste sono previste e descritte dalle leggi della *meccanica celeste*. A rigore, queste “strade”, facendo riferimento al *problema dei due corpi*<sup>4</sup>, sono dette *orbite* quando esse sono chiuse e *traiettorie* quando invece sono aperte. Nello spazio, qui inteso con la dovuta accezione, i corpi non sono liberi di muoversi come sulla Terra, poiché essi devono obbedire alle leggi della *meccanica celeste*, che li vincola a seguire le orbite e/o traiettorie descritte dalle innumerevoli forze centrali di attrazione gravitazionale. Come indicato da Roger R. Bate, Donald D. Mueller e Jerry E. White<sup>[1]</sup>, nonché da Howard D. Curtis<sup>[3]</sup>, entrambe le famiglie sono univocamente ottenute dalla soluzione dell’equazione del moto:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1)$$

dove  $\vec{r}$  è il *vettore posizione* che, come si vede dalla Figura 2.2<sup>[8]</sup>, ha origine nel fuoco dell’orbita, dove è posto il corpo primario, e punta sul corpo secondario in movimento, permettendo così di determinare la posizione dello stesso, istante per istante;  $\mu$  è il *parametro gravitazionale* dato dal prodotto tra la costante di gravitazione universale  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$  e la massa del corpo principale; il *punto* è la notazione usata per indicare la derivata della generica variabile rispetto al tempo. La soluzione dell’equazione (2.1) si presenta nella seguente forma:

$$r(t) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v(t)} \quad (2.2)$$

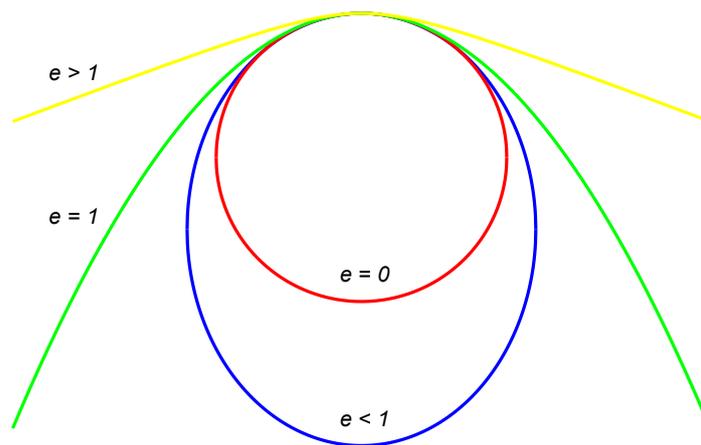
dove  $a$  è il semiasse maggiore dell’orbita,  $e$  rappresenta la sua eccentricità e  $v$  l’anomalia vera, i quali verranno approfonditi successivamente.

Da un punto di vista matematico, la (2.2) è l’equazione generica di una *conica* che, come si vede in Figura 2.1, al variare di  $e$  descrive un’ellisse, una parabola o un’iperbole, nonché una circonferenza, anche se a rigore quest’ultima è da intendere come il caso degenero della prima. Nello specifico, è possibile costruire così la sottostante Tabella 2.1, in cui vengono inoltre aggiunte delle informazioni in merito a due quantità che si discuteranno più avanti.

<i>Conica</i>	<i>Eccentricità</i>	<i>Energia meccanica</i>	<i>Semiasse maggiore</i>
<i>Ellisse</i>	$e < 1$	$E_m < 0$	$a > 0$
<i>Circonferenza</i>	$e = 0$	$E_m < 0$	$a > 0$
<i>Parabola</i>	$e = 1$	$E_m = 0$	$a \rightarrow +\infty$
<i>Iperbole</i>	$e > 1$	$E_m > 0$	$a < 0$

Tabella 2.1: Quadro riassuntivo delle coniche e delle relative caratteristiche.

<sup>4</sup> Il *problema dei due corpi* si preoccupa di studiare il moto relativo non perturbato tra lo *spacecraft* e il *corpo principale*. Mentre il primo è l’oggetto dell’analisi e rappresenta il corpo di cui si vuole studiare il moto relativo (e.g. un satellite, un detrito, un asteroide, etc.), l’ultimo rappresenta il corpo attorno cui orbita lo *spacecraft*, e governa l’attrazione gravitazionale nonché il modello potenziale da usare.

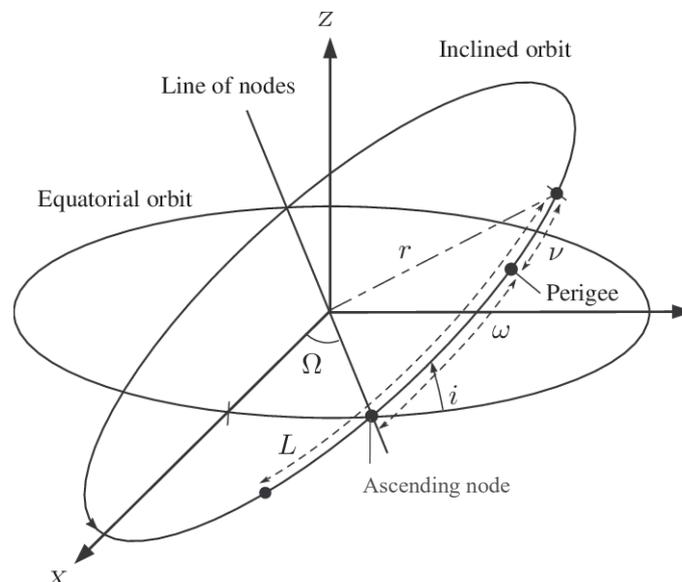


**Figura 2.1:** Rappresentazione grafica delle coniche a stesso periastro.

Facendo riferimento al discorso fatto poc'anzi, e considerando la Figura 2.1, è facile capire come si possa parlare solo di *orbite ellittiche* o *circolari* e di *traiettorie iperboliche* o *paraboliche*.

## Parametri orbitali classici o kepleriani

Nello spazio, le orbite e le traiettorie appena descritte possono assumere infinite *posizioni*, *orientazioni* e *dimensioni*, per cui diventa importante, se non indispensabile, introdurre un set di parametri che ne rendono univoca la descrizione: i cosiddetti *parametri orbitali*<sup>[11]</sup>. Facendo riferimento alla Figura 2.2, questi parametri sono sei, e ciascuno di essi fornisce importanti informazioni sull'orbita, le quali sono riassunte nella Tabella 2.2.



**Figura 2.2:** Schema di una generica orbita ellittica con i relativi parametri orbitali.

Il primo tra questi è il **semiasse maggiore** ( $a$ ), e rappresenta numericamente la semi-distanza che intercorre tra apoastro e periastro, ovvero rispettivamente il punto dell'orbita più distante e il più vicino al corpo principale. È chiaro come tale distinzione perda di significato quando si parla di orbite circolari, e a maggior ragione di come si possa parlare propriamente solo di periastro nel caso in cui si considerino delle traiettorie. In ogni caso, suddetto parametro

fornisce informazioni in merito alla *dimensione* dell'orbita, poiché tanto più grande è  $a$ , tanto più grande sarà l'orbita, garantendo inoltre le proprietà energetiche descritte tramite l'*equazione dell'energia meccanica*:

$$E_m = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.3)$$

dove,  $r$  rappresenta la distanza dal corpo principale,  $V$  la velocità scalare del corpo orbitante in tale posizione, e  $\mu$  il già noto parametro gravitazionale.

Questa quantità, assieme al *momento specifico della quantità di moto* così definito:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} \quad (2.4)$$

rappresentano gli *integrali primi* della generica orbita o traiettoria, ovvero delle quantità che rimangono costanti durante il moto dello *spacecraft*. Nello specifico, l'equazione (2.3) afferma che lungo l'orbita, la differenza specifica tra l'energia cinetica e l'energia potenziale del *chaser* si mantiene costante e pari ad un valore che dipende esclusivamente dalla dimensione dell'orbita e dalle proprietà gravitazionali del corpo centrale. Dall'altro lato, l'equazione (2.4) mette in luce un altro aspetto cruciale che riguarda la *planarità* dell'orbita, ovvero il fatto che essa è contenuta interamente in un piano noto come *piano orbitale*. Difatti, le due quantità vettoriali a secondo membro sono sempre contenute nello stesso piano, e come conseguenza di ciò, il vettore  $\vec{h}$  risulterà essere costantemente perpendicolare a quest'ultimo. In più, visto che il momento specifico della quantità di moto è stazionario, esso manterrà costante la direzione e il verso, dimostrando così la planarità anticipata poc'anzi e l'immutabilità del piano orbitale<sup>[11]</sup>.

Il secondo parametro orbitale è quello rappresentato dal rapporto tra la semi-distanza focale e il semiasse maggiore, ovvero l'*eccentricità* ( $e$ ), la quale permette di quantificare quanto è appiattita l'orbita, e fornisce inoltre informazioni in merito alla *forma geometrica* della stessa (vedi Tabella 2.1<sup>5</sup>). Note la dimensione e la forma dell'orbita, occorre capire come essa sia *orientata* nello spazio, e per questo si sfruttano tre parametri orbitali angolari: l'*inclinazione* ( $i$ ), l'*ascensione retta del nodo ascendente* ( $\Omega$ ) e l'*argomento del periastro* ( $\omega$ ).

Il primo dei tre rappresenta l'angolo compreso tra il piano orbitale e il piano di riferimento, e permettere di distinguere tra orbite e traiettorie:

- *Prograde*: qualora l'inclinazione permetta un moto di rotazione del *chaser* che, in verso, è uguale a quello del corpo principale.
- *Retrograde*: qualora l'inclinazione permetta un moto di rotazione del *chaser* che, in verso, è opposto a quello del corpo principale.
- *Polari*: qualora l'inclinazione fosse, a rigore, esattamente  $90^\circ$ .
- *Equatoriali*: qualora l'inclinazione fosse, a rigore, esattamente nulla.

---

<sup>5</sup> È da notare che l'informazione sulla forma della conica può essere dedotta anche dal segno dell'energia meccanica a partire dal semiasse maggiore. Tuttavia, a meno di altre informazioni, non sarebbe possibile distinguere un'ellisse da una circonferenza.

Il piano di riferimento poc' anzi accennato può essere potenzialmente un piano qualsiasi, ma generalmente si preferiscono dei piani specifici, i quali possiedono particolari caratteristiche, come il *piano dell'eclittica*<sup>6</sup> se il corpo principale è il Sole o il *piano equatoriale*<sup>7</sup> se ci si riferisce invece ad un altro corpo principale.

Il secondo parametro, che per piani geocentrici equatoriali è spesso abbreviato tramite la sigla *RAAN* (*Right Ascension of the Ascending Node*), rappresenta l'angolo contenuto tra il vettore che punta al nodo ascendente<sup>8</sup> e la direzione del *Punto Vernale*<sup>9</sup>. Tale parametro permette di comprendere di quanto è ruotata l'orbita attorno alla direzione dell'asse  $\vec{z}$  terrestre (per lo studio in esame) mostrata in Figura 2.2, e rimane indefinito per orbite equatoriali, per le quali non è appunto definita alcuna linea dei nodi.

Il terzo ed ultimo parametro dei tre è rappresentato dall'angolo compreso tra il vettore che punta al nodo ascendente e quello che punta al periastro, e permette di determinare univocamente la posizione di quest'ultimo, qualora fosse definito, all'interno dell'orbita. Difatti, come anticipato precedentemente, per le orbite circolari non è possibile definire il punto *più vicino* al corpo primario, nonché alcun punto *più lontano*.

Infine, il sesto e ultimo parametro è l'**anomalia vera** ( $v$ ), ovvero l'angolo che, a partire dal periastro, vede la fine sullo S/C, permettendo così di determinare la posizione univoca dello stesso all'interno dell'orbita, per qualsiasi istante di tempo. In meccanica orbitale, per far fronte al *problema di tempo diretto e indiretto*<sup>10</sup> si considera la cosiddetta **anomalia media** ( $M$ ), ovvero l'angolo tale per cui, in relazione alla Figura 2.3, l'area del settore circolare POB è pari all'area del settore ellittico SAB moltiplicata per il rapporto tra semiasse maggiore e semiasse minore dell'orbita ellittica<sup>[11]</sup>.

Indicando inoltre con  $E$  l'*anomalia eccentrica*, l'anomalia media è matematicamente determinabile come segue:

$$M = E - e \sin E \quad (2.5)$$

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - e \sin E) \quad (2.6)$$

$$E = a \cos \left( \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} \right) \quad (2.7)$$

In più, tramite le equazioni (2.6) e (2.7) è possibile legare le diverse quantità in gioco, permettendo di risolvere i due *problemi* poc' anzi accennati.

È importante evidenziare come l'anomalia vera, così come quella media, siano gli unici parametri orbitali variabili nel tempo. Difatti la (2.1), priva di qualsiasi perturbazione orbitale, permette di affermare un aspetto cruciale e determinante: l'orbita imperturbata, così come la

---

<sup>6</sup> Il *piano dell'eclittica* è definito come il piano geometrico all'interno del quale la Terra compie il suo moto orbitale attorno al Sole.

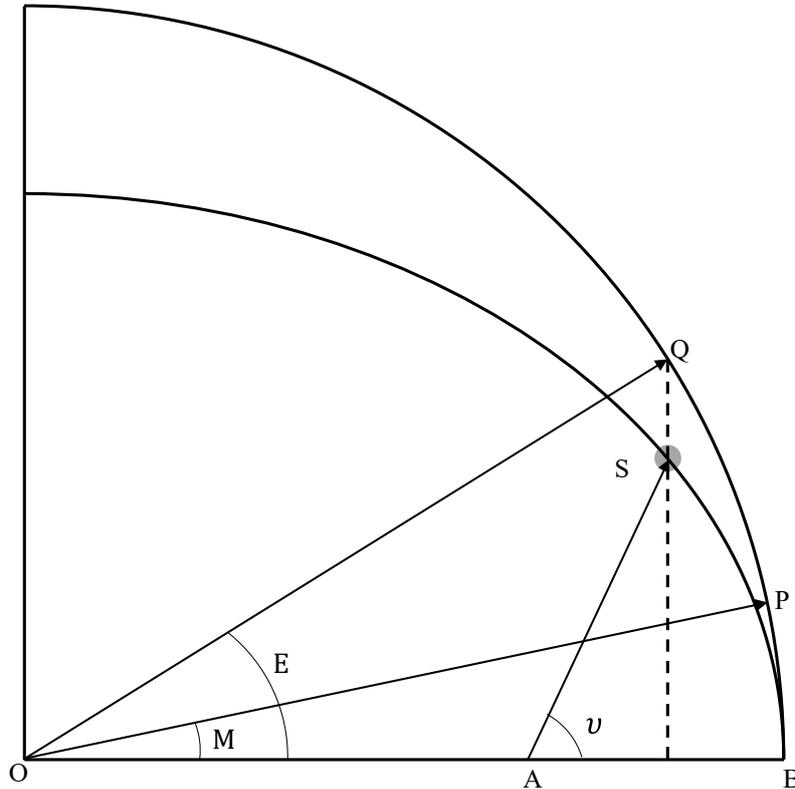
<sup>7</sup> Per un generico corpo celeste di cui è definita la linea equatoriale, il *piano equatoriale* è definito come il piano contenente tale linea.

<sup>8</sup> Il *nodo ascendente* è il punto di intersezione tra l'orbita e il piano di riferimento, attraverso il quale lo spacecraft passa dal *basso* verso l'*alto*. L'altro punto di intersezione, il quale vede lo spacecraft seguire il verso opposto, è definito *nodo discendente*, e la linea che unisce i suddetti punti è detta *linea dei nodi* (vedi Figura 2.2).

<sup>9</sup> Il *Punto Vernale* è definito come il punto a cui mira il vettore Sole-Terra al momento dell'equinozio di primavera, ed è da ritenersi fisso.

<sup>10</sup> I *problemi di tempo* diretto e indiretto sono i problemi che si preoccupano di determinare rispettivamente il tempo necessario per spazzare una data anomalia vera e viceversa.

generica traiettoria, è immutabile nel tempo, poiché tutti i parametri orbitali risultano essere stazionari, salvo  $\nu$  che descrive la posizione angolare del corpo in movimento. Tuttavia, come si approfondirà successivamente, in presenza di perturbazioni orbitali, la dimensione, la forma e l'orientazione dell'orbita, possono variare nel tempo, generando così un moto irregolare e sicuramente *non kepleriano* del *chaser*, il quale porterà addirittura l'orbita a non chiudersi esattamente su sé stessa<sup>[11]</sup>.



**Figura 2.3:** Schematizzazione del satellite (in grigio) e degli angoli di anomalia media ( $M$ ), eccentrica ( $E$ ) e vera ( $\nu$ ).

In conclusione, la seguente tabella mostra sinotticamente gli aspetti più importanti sui parametri orbitali, evidenziandone inoltre i valori *matematici* che essi possono assumere a livello teorico, senza soffermarsi sull'aspetto pratico.

<i>Nome</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Tipologia di informazione</i>	<i>Valori ammissibili</i>
Semiassse maggiore	$a$	Dimensione	$[\mathbb{R}^{11}, +\infty)$
Eccentricità	$e$	Forma	$[0, +\infty)$
Inclinazione	$i$	Orientazione	$[0, \pi]$
Ascensione retta del nodo ascendente	$\Omega$		$[0, 2\pi]$
Argomento del periastro	$\omega$		$[0, 2\pi]$
Anomalia vera (o media)	$\nu$ (o $M$ )	Posizione relativa dello S/C	$[0, 2\pi]$

**Tabella 2.2:** Quadro sinottico dei parametri orbitali kepleriani.

<sup>11</sup> Supponendo di considerare la Terra perfettamente sferica come corpo principale, la quantità  $R$  indica il raggio terrestre, il quale è da intendere però come un mero limite matematico, poiché per ovvi motivi, a livello pratico non saranno mai ammissibili orbite così basse.

# Capitolo 3

## Perturbazioni orbitali

Come anticipato nel capitolo precedente, in meccanica celeste lo studio delle perturbazioni orbitali gioca un ruolo fondamentale, sia per l'eventualità di sfruttarne a proprio vantaggio gli effetti, sia per comprendere a pieno la dinamica dei corpi celesti. Quanto detto finora si riferisce alle *orbite e traiettorie kepleriane*, ovvero quelle prive di qualsiasi perturbazione che renderebbe i parametri orbitali non stazionari. Tali perturbazioni sono classificate in relazione al loro sviluppo temporale, difatti è possibile suddividerle in<sup>[1]</sup>:

- **Secolari.** Quelle che si possono ritenere proporzionali al tempo, causando così un aumento o una diminuzione del parametro orbitale più o meno lineare.
- **Periodiche di lungo periodo.** Quelle agenti sul singolo parametro orbitale a causa dell'influenza delle variazioni temporali degli altri parametri orbitali.
- **Periodiche di corto periodo.** Quelle che si ripetono per ogni periodo orbitale a causa di un generico fenomeno esterno.

Volendo ora valutare gli effetti della generica perturbazione, si rende necessaria la modifica dell'equazione del moto, la quale assumerà ora la generica forma:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} + \vec{a}_p \quad (3.1)$$

dove il termine aggiuntivo  $\vec{a}_p$  rappresenta l'accelerazione indotta sul *chaser* dalla generica perturbazione presa in esame. Inoltre, questo nuovo addendo porta a dover adottare un approccio prettamente numerico, poiché non esisterà più una vera e propria soluzione analitica in forma chiusa al problema, ma solo soluzioni approssimate figlie delle necessarie assunzioni e semplificazioni al problema<sup>[1]</sup>. I metodi usati per la risoluzione dell'*equazione perturbata del moto* sono mostrati in Figura 3.1<sup>[1]</sup>, i quali si raggruppano in due grandi famiglie<sup>[1][11]</sup>:

- *General Perturbation Methods (GPM)*, nei quali l'accelerazione  $\vec{a}_p$  si riscrive sotto forma di espansione in serie, dopodiché si integra a tratti nel tempo l'equazione (3.1).
- *Special Perturbation Methods (SPM)*, nei quali si integra direttamente l'equazione in oggetto a partire dalle condizioni iniziali, finché l'errore sulla posizione non supera una certa tolleranza, oltre la quale occorrerà ridefinire le condizioni iniziali e integrare nuovamente.

Noti, dunque, i metodi da implementare per risolvere l'equazione del moto perturbata, occorre ora passare in rassegna le più importanti cause di perturbazioni che devono essere necessariamente incluse nell'analisi al fine di ottenere risultati attendibili e il più possibile prossimi alla realtà, e da valutarne gli effetti per lo più numerici utili a implementare delle manovre correttive.

**COMPARISON OF INTEGRATION METHODS**  
(From NASA SP-33, Vol 1, Part 1)<sup>7</sup>

Method of Numerical Integration	Truncation Error	Ease of Changing Step-Size	Speed	Stability	Round-off Error Accumulation
<b>Single Step Methods</b> Runge-Kutta Runge-Kutta-Gill Bowie	$h^5$ $h^5$ $h^3$	* * Trivial (step-size varied by error control)	Slow Slow Fast	Stable Stable Stable	Satisfactory Satisfactory Satisfactory
<b>Fourth Order Multi-Step Predictor-Corrector</b> Milne Adams-Moulton	$h^5$ $h^5$	Excellent Excellent	Very fast Very fast	Unstable Unconditionally stable	Poor Satisfactory
<b>Higher Order Multi-Step</b> Adams Backward Difference Gauss-Jackson**  Obrechhoff	Arbitrary  Arbitrary  $h^7$	Good  Awkward and expensive Excellent	Very fast  Fast  ***	Moderately stable Stable  Stable	Satisfactory  Excellent  Satisfactory
<b>Special Second Order Equations</b> [ $\ddot{z} = f(t,z)$ ] Special Runge-Kutta Milne-Stormer	$h^5$ $h^6$	* Excellent	Slow Very fast	Stable Moderately stable	Satisfactory Poor
*R-K (single-step) trivial to change steps, very difficult to determine proper size. **Gauss-Jackson is for second order equations. ***Speed of Obrechhoff depends on complexity of the higher order derivatives required; it could be very fast.					

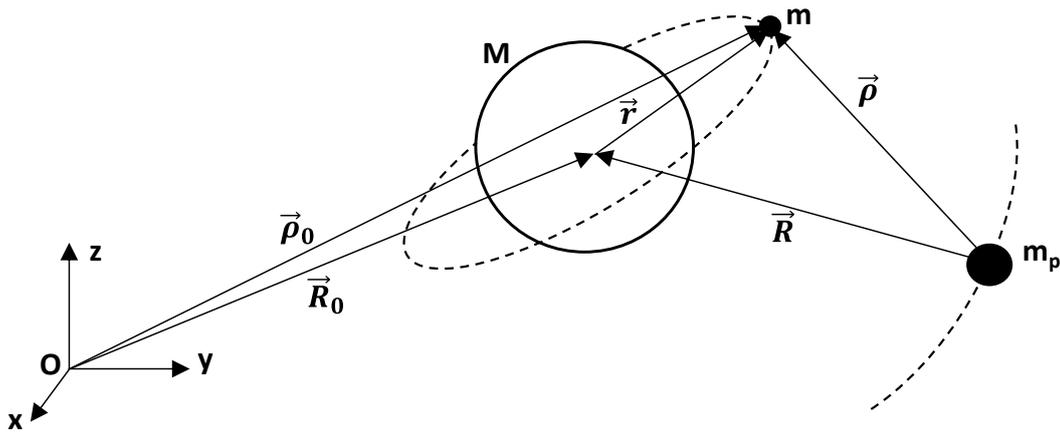
*Figura 3.1: Confronto dei diversi metodi d'integrazione usati, con le relative informazioni in merito alla velocità, stabilità ed errori di approssimazione accumulati dal metodo numerico.*

## Presenza di un terzo corpo

Il problema dei due corpi si preoccupa di studiare la dinamica relativa dello S/C rispetto al corpo attorno cui orbita, altrimenti detto corpo principale. A rigore, per qualsiasi corpo che viaggia nello spazio, bisognerebbe tenere in considerazione la risultante di tutte le forze di attrazione gravitazionale che agiscono sul corpo stesso. Difatti, se ad esempio si volesse costruire la vera e propria orbita (o traiettoria) di un qualsiasi asteroide che viaggia nel sistema solare, occorrerebbe valutare istante per istante la risultante delle forze gravitazionali che esercita ogni singolo corpo celeste su di esso, a partire dai pianeti fino agli altri asteroidi erranti. Tuttavia, un approccio del genere, oltre che essere molto costoso a livello computazionale, è anche molto complesso da portare avanti, poiché richiederebbe la conoscenza della posizione relativa dell'asteroide preso in esame rispetto a ciascun altro corpo celeste, per ogni istante di tempo. Generalmente, per ovviare a tale problema si escludono dall'analisi tutti quei corpi la cui attrazione gravitazionale risulta essere trascurabile se paragonata a quella prodotta da altri corpi più influenti.

Ritornando all'esempio fatto poc'anzi, nell'ottica di dover studiare l'orbita (o traiettoria) dell'asteroide in esame, si andranno a considerare le perturbazioni dei soli pianeti, trascurando quindi quella dovuta agli altri asteroidi e corpi minori. Così facendo, la traiettoria risultante non sarà mai quella reale, ma l'errore commesso a causa della semplificazione risulta essere comunque accettabile per una prima stima. Tuttavia, in alcuni casi la presenza di un terzo corpo può diventare non trascurabile<sup>12</sup>, e questo porta a dover modificare le equazioni in gioco al fine di considerare opportunamente il contributo gravitazionale del nuovo corpo in esame<sup>[11]</sup>. Per far ciò, si può prendere come riferimento la situazione mostrata nella Figura 3.2, dove si indica con  $M$  la massa del corpo principale, con  $m$  quella del corpo in esame (e.g. spacecraft, asteroide, etc.) e con  $m_p$  quella del corpo perturbatore<sup>[11]</sup>.

<sup>12</sup> Per esempio, nei casi di trasferte Terra-Luna, visto che il Satellite è interamente contenuto nella sfera di influenza terrestre, non sarà possibile separare lo studio di attrazione dei due corpi.



**Figura 3.2:** Schema generale dei tre corpi e delle distanze relative riferite ad un sistema di riferimento inerziale.

Procedendo nell'analisi, e considerando il lavoro in ref. [11], dallo schema dei vettori è dunque possibile scrivere che:

$$\vec{r} = \vec{\rho}_0 - \vec{R}_0 \quad (3.2)$$

Successivamente occorre scrivere l'equazione del moto per il corpo di massa  $m$  e per quello di massa  $M$ , entrambi riferiti ad un sistema di riferimento inerziale  $Oxyz$ . Dopodiché, effettuando la differenza membro a membro delle due equazioni, e considerando la (3.2), si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{\rho}}_0 - \ddot{\vec{R}}_0 = -G \frac{(M+m)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - G \frac{m_p}{\rho^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho} + G \frac{m_p}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \quad (3.3)$$

Ricordando che  $M \gg m$  e indicando con  $\mu_p$  il parametro gravitazionale del terzo corpo, la (3.3) si può riscrivere come:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\mu_p}{\rho^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho} + \frac{\mu_p}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \quad (3.4)$$

Infine, confrontando quest'ultima equazione con la (3.1) si ricava che:

$$\vec{a}_p = -\frac{\mu_p}{\rho^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho} + \frac{\mu_p}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \quad (3.5)$$

Dalla (3.5) è possibile notare che, come ci si aspettava, l'azione perturbativa del corpo di massa  $m_p$  si ripercuote sul corpo di massa  $m$  per via diretta (primo addendo), e cosa non scontata, anche per via indiretta, ovvero perturbando il corpo principale di massa  $M$  (secondo addendo).

In conclusione, è possibile notare come la stessa trattazione, ma più nello specifico le equazioni (3.2), (3.3) e (3.4), possa essere estesa indefinitamente per la presenza di  $n$  corpi. Questa assunzione porta alla definizione del *problema degli n-corpi* di cui si è discusso precedentemente, e permette di avere un'ottica completa e ben definita dell'orbita (o traiettoria) del satellite di cui si vuole studiare il moto relativo. Tuttavia, per quanto possa essere completo e ben definito, questo approccio porta le ineluttabili complicazioni di calcolo

legate al fatto che non esistono delle soluzioni analitiche in forma chiusa, ma solo approssimazioni numeriche ottenute mediante specifici codici di calcolo, i quali, tenendo in considerazione l'accumularsi degli errori di integrazione, adottano le dovute misure<sup>[11]</sup>.

## Resistenza aerodinamica

Un'altra causa perturbativa di cui tenere un'opportuna considerazione è quella legata alla resistenza aerodinamica dovuta alla presenza dell'atmosfera. Quest'ultima gioca un ruolo essenziale per le orbite basse, dove raggiunge il suo picco per quote di circa 200 km, per poi diminuire in maniera monotona fino a sparire quasi del tutto per quote superiori a 1000 km<sup>[12]</sup>.

Considerando un satellite geocentrico in *LEO*, è importante sottolineare che la resistenza esercitata sullo stesso, sia in termini di forza e sia in termini di accelerazione, risulta essere molto piccola in modulo<sup>[12]</sup>. Da qui è possibile dedurre che ciò che rende importante tale effetto è la ripetuta esposizione dello S/C in tale ambiente *resistivo*, il quale porta all'accumularsi di queste piccole perturbazioni che diventano via via sempre più grandi e sempre meno trascurabili. Occorre ricordare che tanto più basse sono le orbite, tanto più la perturbazione e il processo si intensificano, perché sia la densità sia le velocità orbitali crescono.

Per quantificare l'impatto che la resistenza atmosferica ha sullo S/C è possibile sfruttare un parametro noto come *coefficiente balistico*, il quale è definito come segue:

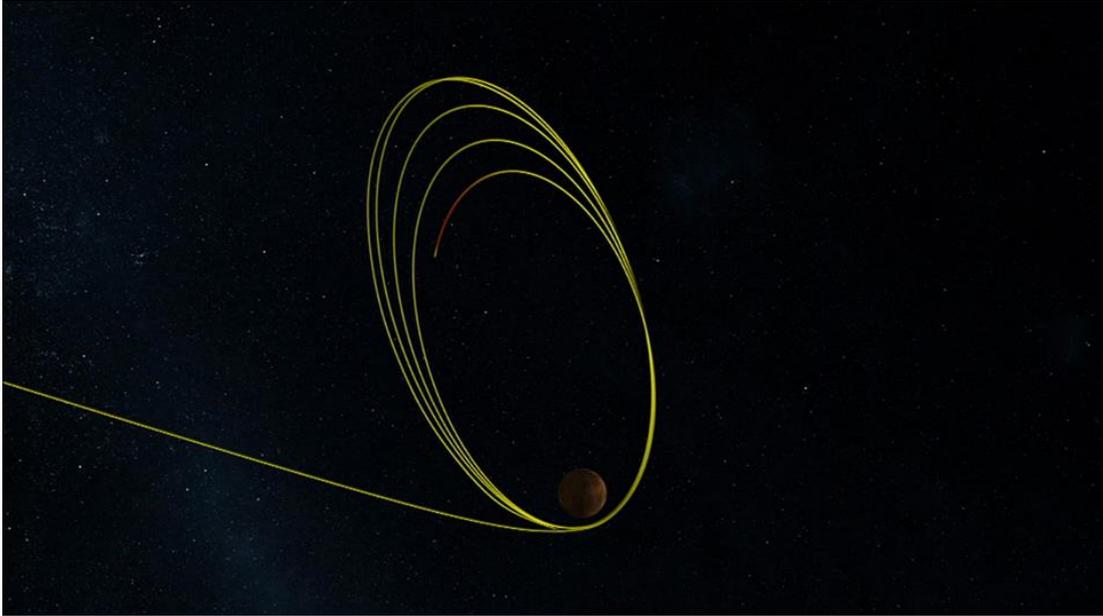
$$BC = \frac{m}{S C_D} \quad (3.6)$$

dove,  $m$  indica la massa dello spacecraft,  $S$  la sua *wet area*<sup>13</sup>, e  $C_D$  il coefficiente di resistenza che per applicazioni spaziali è tipicamente posto pari a 2.2. Tanto più  $BC$  è alto, tanto più il corpo riesce a vincere la decelerazione indotta dalla resistenza aerodinamica, e perciò occorre ridurre il più possibile la superficie esposta  $S$ , la quale dipende strettamente dalla geometria e dalla configurazione del satellite (e.g. presenza di pannelli solari dispiegati, etc.), nonché dal suo assetto in orbita. Tutto ciò è comunque da rapportare alla massa del satellite stesso, difatti la maggior inerzia garantisce una minor decelerazione.

Infine, a titolo di esempio, nella Figura 3.3<sup>[19]</sup> vengono mostrati gli effetti dell'atmosfera marziana sulle orbite percorse dal *Mars Reconnaissance Orbiter* durante la fase di aerofrenaggio, la quale venne sfruttata principalmente per ridurre la quota orbitale della sonda. Si può notare come, in relazione alla natura della resistenza atmosferica e alle manovre orbitali utili a modificare il semiasse maggiore, si registri un abbassamento dell'apoareo a periareo circa costante. Questo perché l'accelerazione indotta dalla resistenza è sempre opposta al vettore velocità ed è massima dove quest'ultima è massima (a parità del resto), ovvero in prossimità del periareo.

---

<sup>13</sup> La *wet area* rappresenta la superficie dello S/C che concorre alla genesi della resistenza, o in altre parole, quella che viene lambita dal flusso aerodinamico.



*Figura 3.3: Aerobraking orbits percorse dal Mars Reconnaissance Orbiter durante la fase di aerofrenaggio.*

## Pressione solare

Un'altra perturbazione che potrebbe complicare non poco il problema di studio è la pressione solare. Come noto, il Sole emette delle forti radiazioni, che viaggiando nello spazio, seppur possa essere molto distante, colpendo il corpo portano ad uno scambio di quantità di moto non indifferente, il quale si traduce in una vera e propria forza agente sul corpo stesso. Ragionando in termini di accelerazione, su un corpo di massa  $m$  la cui superficie esposta alla radiazione è  $S$ , la pressione solare  $p$  genera un'accelerazione pari a:

$$a_p = p \frac{S}{m} \quad (3.7)$$

con,

$$p = p_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2$$

dove le quantità con pedice 0 indicano la distanza di riferimento posta pari ad un'unità astronomica dal Sole e la pressione solare a tale distanza, per cui  $r_0 = 1 AU$  e  $p_0 = 4.5 N/km^2$ <sup>[1]</sup>. La distanza  $r$ , anch'essa espressa in  $AU$ , indica invece la distanza tra il corpo in esame e il Sole, ed è evidente che tanto più il corpo è vicino al Sole, tanto più grande sarà la perturbazione in oggetto.

In termini assoluti, i valori assunti da tale accelerazione sono di per sé molto piccoli<sup>[1]</sup>, ma come visto per la resistenza aerodinamica, anche in questo caso si può facilmente dedurre che la continua esposizione alla radiazione solare gioca un ruolo fondamentale, poiché nel tempo porta ad avere significative variazioni orbitali.

Nonostante la grande importanza del contributo della pressione solare, il processo di determinazione dello stesso risulta essere molto più complesso di quello appena esposto, poiché occorrerebbe valutare la vera quantità di radiazione che nel tempo colpisce lo S/C. Essa non è da ricercare esclusivamente in quella proveniente dal Sole, poiché al netto di questa, la restante parte è legata a quella che viene riflessi dai corpi celesti presenti nelle vicinanze dello

spacecraft. Quest'ultimo contributo è fortemente dipendente dall'*albedo* dei suddetti corpi, ovvero il parametro che indica la quantità di radiazione solare incidente riflessa dalla superficie degli stessi, la quale dipende fortemente dalla tipologia della superficie esposta.

## Non sfericità della Terra: effetto $J_2$

Fino ad ora qualsiasi corpo celeste preso in esame è stato considerato perfettamente sferico, sia in termini di forma, sia in termini di massa, portando una notevole semplificazione alla trattazione, senza però farne troppo perdere la generalità. Tuttavia, supponendo di voler immettere in orbita geocentrica un satellite, con la forte necessità che questo debba orbitare in un modo specifico, allora diviene indispensabile tenere in considerazione la *non sfericità* della Terra (Figura 3.4<sup>[16]</sup>) e l'*eterogenea distribuzione di massa* al suo interno, nonché i vari disturbi finora discussi. Concentrandosi ora sui primi, è evidente come il *modello potenziale*<sup>14</sup> dovrà essere opportunamente rivalutato, poiché è essenziale che esso modelli matematicamente la corretta distribuzione di massa (*non sfericità di massa*) e la reale forma del Pianeta (*non sfericità di forma*). Conseguentemente a ciò, il *potenziale gravitazionale* sarà dunque calcolato in maniera ponderata a questi due fenomeni, e per questo si sfrutta un'espansione in serie che tenga conto dei singoli contributi al potenziale al variare della latitudine e della longitudine terrestre<sup>[11]</sup>. Indicando con  $R$  il raggio equatoriale medio terrestre e con  $r$  la distanza radiale dal centro della Terra, l'equazione in esame è la seguente<sup>[10]</sup>:

$$E_{gp} = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left(\frac{R}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \phi) + \sum_{m=1}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\theta) + S_{nm} \sin(m\theta)) \right] \right\} \quad (3.8)$$

in cui, indicando con  $\lambda$  una generica variabile<sup>[11]</sup>:

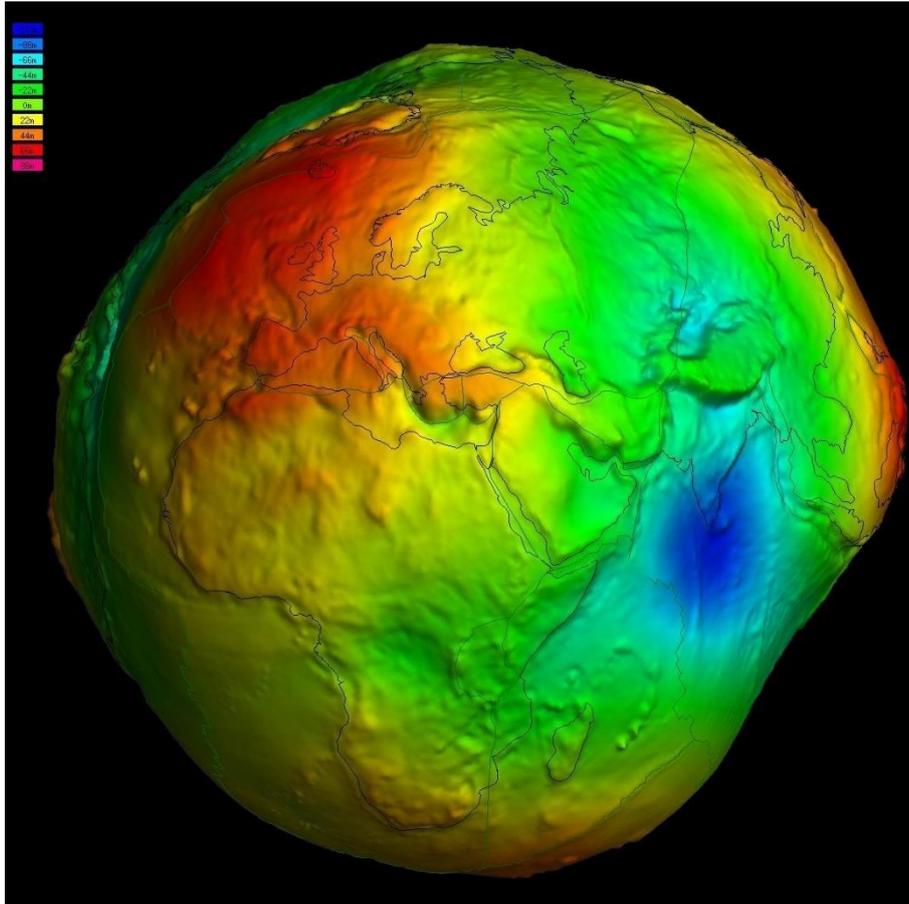
$$P_n(\lambda) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [(\lambda^2 - 1)^n]$$

$$P_{nm}(\lambda) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - \lambda^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{d\lambda^{n+m}} [(1 - \lambda^2)^n]$$

dove<sup>[10]</sup>:

- $\phi$  e  $\theta$  indicano la latitudine e la longitudine terrestre rispettivamente.
- $n$  e  $m$  indicano rispettivamente il grado e l'ordine delle armoniche.
- $J_n$  indica le *armoniche zonali* di ordine nullo;
- $C_{n,m}$  indica le *armoniche tesserali* ( $n \neq m$ );
- $S_{n,m}$  indica le *armoniche settoriali* ( $n = m$ );
- $P_n$  indica il generico *polinomio di Legendre* di grado  $n$  e ordine nullo;
- $P_{nm}$  indica il generico *polinomio associato di Legendre* di grado  $n$  e ordine  $m$ ;

<sup>14</sup> Il *modello potenziale* è da intendersi come la rappresentazione matematica della distribuzione dell'energia potenziale specifica associata al pianeta Terra, in funzione della generica posizione del satellite e di altri eventuali parametri.

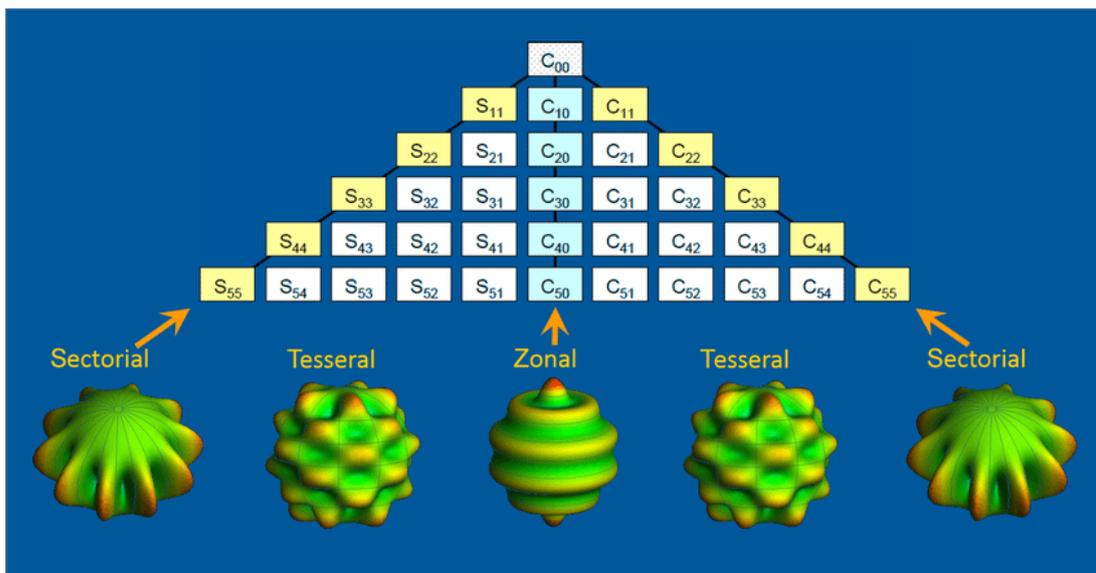


**Figura 3.4:** Esempio di una rappresentazione in scala cromatica dell'ondulazione del geoide terrestre (10k scale - EGM2008).

Le armoniche  $J_n$ ,  $C_{n,m}$  e  $S_{n,m}$  sono dei valori costanti che rappresentano i coefficienti dell'espansione in serie del potenziale, e si definiscono *zonali*, *tesserali* e *settoriali* rispettivamente. Ciascuna di esse possiede delle caratteristiche importanti che le contraddistinguono dalle altre, e dalla Figura 3.5<sup>[4]</sup> si può osservare che in base ai valori assunti dai pedici  $n$  e  $m$  (in  $\mathbb{N}$ ) si possono avere simmetrie e asimmetrie della relativa superficie.

Data la forte dipendenza da latitudine e longitudine, ciascun parametro incide pesantemente in una certa zona della Terra, mentre può risultare del tutto trascurabile in altri punti<sup>[11]</sup>. Da ciò si possono dunque trarre due aspetti molto importanti:

- In generale, l'effetto che conta davvero non è dato dalla singola armonica in sé, bensì dall'insieme di tutti questi parametri, i quali, aggiunti in maniera ponderata, restituiscono il contributo globale dell'eterogenea distribuzione di massa e di forma del pianeta che occorrerà inglobare nell'analisi.
- L'effetto della singola armonica gioca un ruolo essenziale qualora il satellite transiti nella specifica latitudine e longitudine di interesse. Difatti, pensando ad un generico satellite geostazionario, esso rimarrà fermo relativamente alla sua proiezione a terra, per cui sarà influenzato principalmente dalle armoniche caratterizzanti l'intorno del punto di proiezione.



**Figura 3.5:** Rappresentazione matematica del potenziale gravitazionale tramite le armoniche sferiche.

Tornando all'aspetto più pratico e di interesse, riferendosi al testo di Marcel J. Sidi<sup>[10]</sup>, se si volesse semplificare il problema posto dalla geodesia, e quindi l'equazione (3.8), questo sarebbe giustificato dal fatto che si ha sempre:

$$R < r \quad \forall \phi, \theta$$

per cui, al crescere di  $n$  la quantità  $(R/r)^n$  sarà via via più piccola, rendendo sempre meno determinanti i contributi delle armoniche successive. Ciò significa che per scopi ingegneristici, quest'ultime possono essere ritenute trascurabili senza commettere gravi errori. Tuttavia, come evidenzia il lavoro sulle armoniche zonali pari svolto da D. G. King-Hele e G. E. Cook<sup>[7]</sup>, occorre prestare molta attenzione quando si tronca la serie che esprime il potenziale terrestre, poiché la scelta del numero di armoniche da includere nelle equazioni influenzerà i valori che esse stesse assumeranno. La Tabella 3.1 mostra i risultati ottenuti dai due autori nella tipica notazione, e si può osservare come varino le singole armoniche passando da una rappresentazione quaternaria ad una senaria.

Come detto precedentemente, l'idea alla base della rappresentazione in serie del potenziale è quella di modellare matematicamente lo stesso in relazione alla distribuzione di massa e di forma della Terra. È dunque ovvio che tanti più termini vengano aggiunti all'espressione, tanto migliore sarà l'approssimazione effettuata, fino ad avere un errore esattamente nullo per un numero infinito di termini. In merito a ciò, i due autori poc'anzi citati sottolineano anche che i satelliti analizzati per la determinazione delle armoniche sarebbero meglio descritti dalla rappresentazione senaria, proprio per il motivo appena descritto. Tuttavia, essi concludono il discorso scrivendo che occorre attenzionare il fatto che i valori di tale rappresentazione non possono essere considerati definitivi, poiché i residui ottenuti dalla procedura di calcolo portata avanti per lo scopo risultano essere insensibili alle variazioni delle armoniche stesse, evidenziando come non sia possibile apprezzare un distinto e definitivo comportamento degli stessi, il quale permetterebbe di ottenere la soluzione migliore. Per cui, gli autori stessi affermano che la rappresentazione "migliore" dell'espansione in serie è quella quaternaria<sup>[7]</sup>.

<i>Armonica</i>	<i>Rappr. quaternaria</i>	<i>Rappr. senaria</i>
$10^6 J_2$	1082.64	1082.68
$10^6 J_4$	-1.52	-1.61
$10^6 J_6$	0.57	0.71
$10^6 J_8$	0.44	0.13
$10^6 J_{10}$	-	0.09
$10^6 J_{12}$	-	-0.31

**Tabella 3.1:** Rappresentazione quaternaria e senaria delle armoniche zonali pari nella tipica notazione.

Nonostante tutto, a prescindere dalla rappresentazione utilizzata, la tabella soprastante mostra l'enorme divario che si presenta tra la prima armonica zonale ( $J_2$ ) e le restanti, facendo così emergere quanto valga il suo contributo rispetto alle altre. Proprio per questo motivo, e in aggiunta a quanto detto precedentemente, per valutare in prima analisi gli effetti perturbativi sui parametri orbitali è possibile tenere in considerazione la sola armonica  $J_2$ , di modo da studiare così l'omonimo effetto e determinare l'effettivo contributo. Proseguendo nell'analisi, riferendosi al lavoro svolto da Marcel J. Sidi, si semplifica la (3.8) andando a trascurare le piccole variazioni del potenziale rispetto alle armoniche di grado e ordine maggiore, così da ottenere un'equazione del potenziale perturbato relativamente più semplice da trattare<sup>[10]</sup>:

$$U(r, \phi) = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\phi) \right] \quad (3.9)$$

la quale, arrestando la serie al secondo termine e determinando la quantità  $P_2(\sin\phi)$  come indicato precedentemente, fornisce:

$$U(r, \phi) = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu J_2 R^2}{2r^3} (3\sin^2\phi - 1) = -\frac{\mu}{r} + U_{J_2}(r, \phi) \quad (3.10)$$

dove con il termine  $U_{J_2}(r, \phi)$  si è indicato l'intero contributo della sola armonica  $J_2$ .

Si immagini ora di avere un satellite che percorra un'orbita ellittica riferita ad un sistema di riferimento geocentrico con piano equatoriale coincidente con quello generato dai versori  $\hat{I}$ , posto in direzione vernale (vedi nota 9), e  $\hat{J}$  (Figura 3.6). Si può notare come lo *spacecraft* (cerchio blu), percorrendo la propria orbita (curva in rosso), generi l'ipotenusa del triangolo sferico ABS. Applicando il teorema dei seni a suddetto triangolo è possibile ricavare che:

$$\sin \phi = \sin(i) \sin(\omega + \nu) \quad (3.11)$$

da cui, tramite opportune sostituzioni nella (3.10), è possibile esprimere il termine  $U_{J_2}$  in funzione dei soli parametri orbitali, svincolandosi così dalla latitudine:

$$U_{J_2}(a, i, e) = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{J_2}{(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i\right) \quad (3.12)$$

A partire dalla (3.12) e sfruttando le *equazioni di Lagrange*<sup>15</sup> qui omesse, è possibile ricavare la variazione temporale dell'intero set di parametri orbitali adottando un potenziale perturbato che inglobi l'effetto  $J_2$ . Procedendo nel calcolo, risulta che le variazioni medie temporali di  $a$ ,  $e$  e  $i$  sono nulle, per cui gli unici parametri orbitali a subire una variazione temporale sono  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ , i quali variano secondo le seguenti leggi<sup>[10]</sup>:

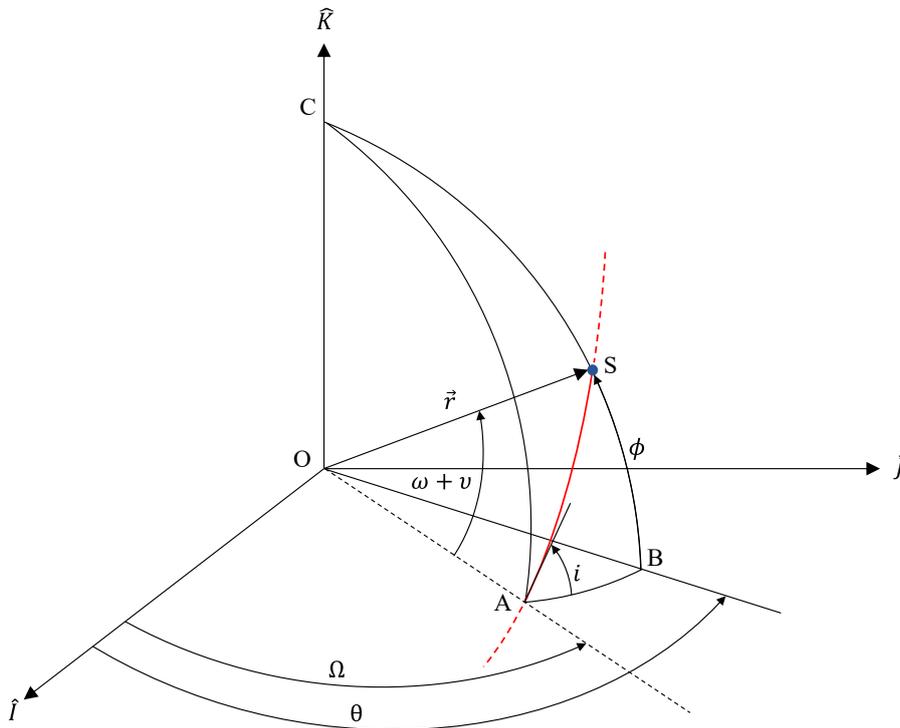
$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 \cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \quad (3.13)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 (5 \cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \quad (3.14)$$

$$\frac{dM}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{J_2 (3 \cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \right] \quad (3.15)$$

Queste tre equazioni mostrano gli effetti della prima armonica zonale pari ( $J_2$ ) sui parametri orbitali, e dimostrano così l'esistenza di moti di *regressione* e *precessione*. Nello specifico si parla di: *regressione della linea dei nodi* e *precessione della linea degli apsidi*.

In relazione alle assunzioni fatte, si approfondirà di seguito la sola variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente tramite l'equazione (3.13), valutando di massima l'impatto dei singoli parametri orbitali sul *RAAN rate* dell'orbita del *chaser*.



**Figura 3.6:** Rappresentazione tridimensionale del generico satellite (in blu) che percorre la propria orbita (in rosso), e le relative grandezze angolari.

<sup>15</sup> Tali equazioni sono il risultato della semplificazione delle più generali *equazioni di Gauss* per casi in cui agiscono solo forze conservative come quelle gravitazionali, e permettono di ricavare le variazioni temporali dei sei parametri orbitali in funzione delle derivate parziali del potenziale perturbato rispetto agli stessi<sup>[10]</sup>.

## Regressione della linea dei nodi

Come si è appena visto, la non sfericità della Terra porta ad avere una cosiddetta *regressione* ( $\dot{\Omega} < 0$ ) o *progressione* ( $\dot{\Omega} > 0$ ) della linea dei nodi, a seconda che l'orbita in questione sia progradata o retrogradata rispettivamente. In ogni caso, si tratta di una continua rotazione della linea dei nodi attorno all'asse normale al piano di riferimento. Dalla (3.13), al netto delle costanti, si può scrivere il *RAAN rate* in funzione dei soli parametri orbitali che vi compaiono:

$$\frac{d\Omega}{dt} \propto -a^{-7/2} (1 - e^2)^{-2} \cos i$$

da cui, considerandone il valore assoluto, è possibile notare l'impatto dei diversi parametri orbitali presi singolarmente. Si assuma come riferimento il caso presentato nella Figura 3.7, dove le curve mostrano l'andamento del *RAAN rate* in funzione dell'eccentricità, dell'inclinazione e del semiasse maggiore, considerando a titolo di esempio delle orbite con semiasse maggiore variabile tra 10400, 14400 e 22400 km.

I tre *fogli di andamento* mostrano l'impatto del semiasse maggiore, il cui aumento porta alla diminuzione di  $|\dot{\Omega}|$ , sottolineando così il fatto che a parità di eccentricità e inclinazione, un'orbita più piccola subirà delle variazioni di RAAN in modulo maggiori rispetto ad un'orbita più grande. Stesso discorso va fatto in merito all'inclinazione, per la quale partendo dal valore nullo<sup>16</sup>, un suo continuo incremento porta ad una monotona diminuzione del modulo di  $\dot{\Omega}$ , raggiungendo un minimo assoluto nullo per orbite polari ( $i = 90^\circ$ ), per poi cominciare a crescere per valori superiori. In questi casi bisogna attenzionare moltissimo il segno di  $\dot{\Omega}$ , a seconda della distinzione fatta precedentemente in merito ai concetti di *progressione* e *regressione* della linea dei nodi. Questo comportamento, unito a quanto accade per orbite polari, porta alla nascita della *curva di  $\dot{\Omega}$ -intersezione*<sup>17</sup>, ovvero la curva comune a tutti i fogli di andamento. Per quanto concerne l'eccentricità, un suo costante aumento porta ad un relativo aumento del modulo di  $\dot{\Omega}$ , raggiungendo un asintoto per  $e \rightarrow 1$  (traiettoria parabolica) per poi diminuire nuovamente e raggiungere asintoticamente lo zero (traiettoria iperbolica). Questi aspetti verranno comunque approfonditi successivamente, ma concentrandosi esclusivamente sulle orbite.

In ogni caso, proseguendo con l'analisi, è necessario determinare la variazione di  $\dot{\Omega}$  rispetto alla  $\dot{\Omega}$  stessa, in modo da poter apprezzare l'impatto ponderato delle singole variazioni di ciascun parametro sul *RAAN rate*, e per questo è utile valutare il differenziale della suddetta quantità<sup>[9]</sup>. Lo scopo è quindi trovare una relazione del tipo:

$$\frac{\Delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = f(\Delta a, \Delta i, \Delta e)$$

per cui si passa alla determinazione del differenziale di  $\dot{\Omega}$  nella forma:

$$d\dot{\Omega} = \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial a} da + \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial i} di + \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial e} de \quad (3.16)$$

<sup>16</sup> Anche se matematicamente ammissibile, dall'equazione (3.13) si capisce come considerare un'orbita equatoriale faccia perdere di significato la trattazione sul *RAAN rate*, anche in vista di una possibile manovra di cambio di piano, poiché in quel caso la linea dei nodi sarà univocamente definita al momento dello sparo (assunta una manovra impulsiva).

<sup>17</sup> La *curva di k-intersezione* è qui definita come il luogo dei punti per i quali la generica variabile  $k$  presa in considerazione si annulla.

dove le derivate parziali presenti sono presto determinate a partire dalla (3.13):

$$\frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial a} = \frac{21}{4} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 \cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{1}{a} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial i} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 \sin i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial e} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2 \cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{4e}{1-e^2} \quad (3.19)$$

Sostituendo le equazioni (3.17), (3.18) e (3.19) nella (3.16) si ottiene:

$$d\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{J_2}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left[ -\frac{7}{2} \cos i \frac{da}{a} - \sin i di + \frac{4e}{1-e^2} \cos i de \right] \quad (3.20)$$

da cui, assumendo di avere piccole perturbazioni, è possibile passare dalle variazioni infinitesime alle differenze finite e rapportarla alla (3.13), in modo da ottenere:

$$\frac{\Delta \dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = -\frac{7}{2} \frac{\Delta a}{a} - \tan i \Delta i + \frac{4e}{1-e^2} \Delta e \quad (3.21)$$

La (3.21), trattando più propriamente le orbite e supponendo di considerare perturbazioni isolate per i diversi parametri orbitali, a parità di  $\dot{\Omega}$  permette di concludere che:

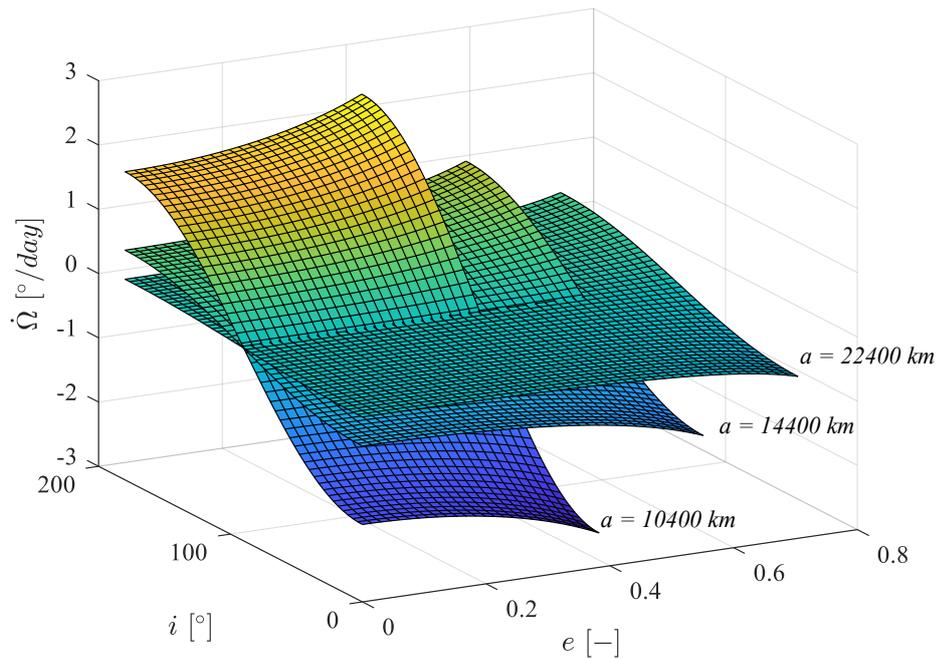
- **Semiassse maggiore.** Più grande è il semiassse maggiore, meno incidenza avrà la relativa perturbazione su  $\dot{\Omega}$ . Nello specifico, variazioni positive di  $a$  ( $\Delta a > 0$ ) portano a variazioni negative di *RAAN rate* e viceversa. A titolo di esempio, si consideri la stessa situazione mostrata in Figura 3.3, ma estesa ad un satellite in orbita geocentrica: l'accoppiamento delle due perturbazioni porta macroscopicamente ad una continua diminuzione del semiassse maggiore a causa della resistenza aerodinamica, e contemporaneamente ad un continuo aumento del *RAAN rate* a causa dell'effetto  $J_2$ .
- **Inclinazione.** Per orbite prossime ad essere equatoriali, l'impatto della perturbazione  $\Delta i$  risulterà essere sempre meno determinante, mentre nel caso di orbite pressoché polari, anche piccole variazioni di inclinazione possono causare grandi variazioni sul *RAAN rate*, fino a raggiungere la singolarità per orbite polari<sup>18</sup>.
- **Eccentricità.** Definendo *peso di eccentricità* la quantità che nella (3.21) moltiplica  $\Delta e$ , concordemente alla Figura 3.8, in merito all'eccentricità occorre distinguere il comportamento in base al tipo di orbita trattata:
  - **Orbita circolare.** Per quanto grande possa essere la perturbazione  $\Delta e$ , il suo impatto è reso sterile dall'annullarsi del peso di eccentricità. Ciò permette di concludere che, in vista di variazioni di eccentricità, la generica orbita circolare riesce a preservare il suo *RAAN rate*<sup>19</sup>. Inoltre, riprendendo l'esempio fatto al punto precedente, qualora la quota di perigeo lo permetta,

<sup>18</sup> Contestualmente alla trattazione, il termine "singolarità" si riferisce al fatto di avere delle variazioni di *RAAN rate* potenzialmente infinite anche per variazioni infinitesime dell'inclinazione. Questa apparente problematica è in realtà dovuta al fatto che per orbite polari il *RAAN rate* è esattamente nullo (eq. (3.13)), per cui lo studio in questo caso perde di significato.

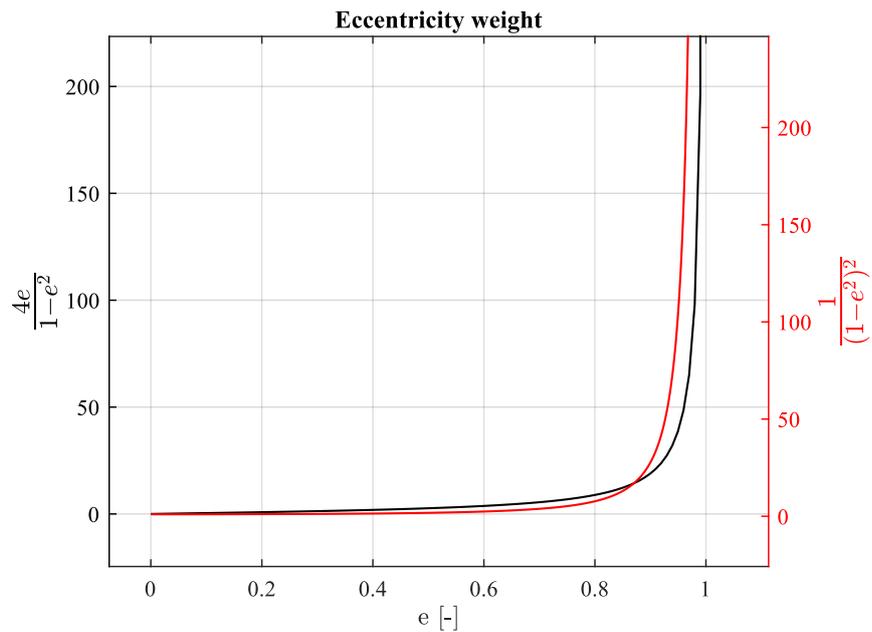
<sup>19</sup> Chiaramente, se si operasse una manovra di cambio eccentricità a partire da un'orbita circolare o se questa avesse già subito delle perturbazioni, quest'ultima possederebbe un'eccentricità non nulla, portando il *RAAN rate* a essere influenzato da successive perturbazioni  $\Delta e$ . Stesso discorso va fatto per le perturbazioni  $\Delta i$  a partire da orbite equatoriali.

quando l'orbita tenderà ad essere circolare il contributo di  $e$  al  $RAAN$  rate sarà tendente a zero.

- **Orbita ellittica.** Tanto più grande è l'eccentricità, tanto più grande sarà il relativo peso, e questo comporta un impatto maggiore della relativa perturbazione. È inoltre importante notare che per eccentricità minori di circa 0.95 il peso varia relativamente poco, per poi registrare un brusco aumento per eccentricità prossime all'unità. Ciò significa che, ad esempio, l'orbita molniya su cui è posto il satellite Cosmos 2510 sarà decisamente più perturbabile dell'orbita, quasi circolare, della ISS<sup>[17]</sup>.



**Figura 3.7:** Andamenti di  $\dot{\Omega}$  in funzione dell'inclinazione e dell'eccentricità, parametrizzati tramite il semiasse maggiore.



**Figura 3.8:** Andamento del peso di eccentricità (in nero) e del termine che compone il  $RAAN$  rate (in rosso) in funzione dell'eccentricità stessa.

## Esempi numerici dell'effetto $J_2$

Verranno ora presentati due semplici esempi che permettono di apprezzare quantitativamente ciò che finora è stato espresso solo teoricamente.

### Caso orbita GEO

Si consideri un'orbita geosincrona<sup>20</sup> con un'inclinazione pari a  $10^\circ$ . Il *RAAN rate* in questione risulta essere pari a:

$$\frac{d\Omega}{dt} \cong -0.0131 \text{ }^\circ/\text{giorno}$$

Da un semplice calcolo si può concludere che la linea dei nodi regredisce di  $1^\circ$  ogni 75g 16h 43m circa, e da qui la necessità di effettuare manovre di *station keeping*<sup>21</sup> che mantengano i parametri orbitali nell'intorno dei valori ottimali per la missione.

### Caso orbita LEO

Si consideri in questo caso l'orbita percorsa dal *HST* (*Hubble Space Telescope*), la quale è caratterizzata dall'aver<sup>[17]</sup>:

$$\begin{aligned} a &\cong 6914.51 \text{ km} \\ i &\cong 28.4703^\circ \\ e &\cong 0.002592 \end{aligned}$$

che porta ad un *RAAN rate* pari a:

$$\frac{d\Omega}{dt} \cong -6.6033 \text{ }^\circ/\text{giorno}$$

da cui si registra che, per ogni periodo orbitale (circa 95 minuti), la linea dei nodi regredisce di circa  $0.44^\circ$ . Dal confronto dei due esempi ciò che salta subito all'occhio sono i valori dei diversi ratei di variazione, i quali confermano quanto detto prima: essi risultano essere in modulo decisamente più grandi per le orbite LEO e meno importanti per le orbite GEO. Questo, come descritto matematicamente in precedenza, è dovuto al fatto che la perturbazione dovuta alla non sfericità della Terra diventa sempre più determinante quanto più le orbite diventano *piccole*. Ciò giustifica il fatto che per minimizzare i costi di trasferta è possibile sfruttare l'effetto  $J_2$ , ma i maggiori benefici si registrano principalmente per orbite LEO.

---

<sup>20</sup> Un'orbita *geosincrona* è un'orbita circolare che possiede un semiasse maggiore tale da rendere il periodo orbitale pari al giorno terrestre.

<sup>21</sup> Le manovre di *station keeping*, come indica il nome stesso, sono quelle utili alla correzione dei parametri orbitali, al fine di garantire, in conformità ai requisiti di missione, le condizioni operative orbitali ottimali.

## Capitolo 4

### Cenni di teoria del controllo ottimale e ottimo di costo per le manovre combinate

Alla base dei metodi implementati vi è l'ottimizzazione effettuata tramite la *teoria del controllo ottimale*, che affonda le sue radici sul *calcolo variazionale*<sup>[9][2]</sup>. Di questi aspetti verranno presentati solo i concetti più importanti facendo riferimento a ref. [2] e ref. [9], senza approfondire ulteriormente la trattazione.

Secondo queste teorie è possibile descrivere il generico sistema da ottimizzare tramite il *vettore delle variabili di stato*  $\mathbf{x}$ , e dalle equazioni differenziali che ne descrivono l'andamento nel tempo in funzione dei valori assunti dal *vettore di controllo*  $\mathbf{u}$ , dal tempo  $t$ , e dal vettore  $\mathbf{x}$  stesso. Il problema è dunque ascrivibile nella generica forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.1)$$

Inoltre, per rendere matematicamente ben posto il problema, è necessario aggiungere le dovute *condizioni al contorno*, le quali impongono sia i valori di  $\mathbf{x}$  sia quelli di tempo. Nella maggior parte dei casi queste condizioni sono non-lineari, e si possono scrivere nella forma:

$$\chi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.2)$$

Per l'applicazione in questione è più conveniente dividere l'intero intervallo temporale in  $n$  distinti sotto-intervalli, detti anche *archi*. Per cui, indicando con “+” e “-” i valori assunti subito prima e subito dopo il punto considerato, il  $j$ -esimo sotto-intervallo inizia all'istante  $t_{(j-1)+}$  e termina a  $t_{j-}$ . Sebbene una suddivisione temporale omogenea potrebbe portare a semplificazioni numeriche, è bene far coincidere la fine di un arco, e quindi l'inizio del successivo, con un evento particolare, quale ad esempio una manovra impulsiva, un distacco di uno stadio, l'immissione in una sfera d'influenza planetaria, e così via, escludendo così l'imposizione di una distribuzione omogenea. Così facendo è possibile garantire la continuità delle variabili all'interno di ciascun sotto-intervallo e concentrare le eventuali discontinuità agli estremi dello stesso, di modo da generare sistematicamente nuove condizioni al bordo per l'intervallo successivo (riferendosi alle condizioni interne). Sulla base di ciò, le condizioni al contorno si riscrivono come segue:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

La vera ottimizzazione del problema la si affronta nel momento stesso in cui viene definito il *funzionale*  $J$  del problema, allo scopo di determinarne i valori estremali, o in altre parole, i massimi o i minimi. Tale quantità tiene conto di due contributi: il primo è quello che dipende strettamente dai valori assunti da  $\mathbf{x}$  e dal tempo  $t$  agli estremi dell'intervallo, e si indica con  $\varphi$ ; il secondo quantifica invece l'intera evoluzione di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  nel tempo che trascorre all'interno del  $j$ -esimo sotto-intervallo, per gli  $n$  sotto-intervalli, e si indica con  $\Phi$ . È dunque possibile definire  $J$  tramite la (4.4):

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)_+}, \mathbf{x}_{j_-}, t_{(j-1)_+}, t_{j_-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Successivamente, per proseguire nell'analisi diviene fondamentale introdurre i moltiplicatori di Lagrange  $\boldsymbol{\mu}$  e le variabili aggiunte  $\boldsymbol{\lambda}$ , in modo da garantire la stazionarietà del funzionale scegliendo opportunamente i loro valori. Quest'ultimo sarà dunque riscritto come segue:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} [\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] dt \quad j = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

Dall'equazione (4.5) è possibile ricavare la *variazione prima*  $\delta J^*$  del funzionale (qui omessa), la cui stazionarietà impone il suo annullarsi a prescindere dai valori assunti dalle variazioni che vi compaiono. Annullando i coefficienti che moltiplicano le variazioni del vettore di stato ( $\delta x$ ) e del vettore dei controlli ( $\delta u$ ) è possibile ottenere le *equazioni differenziali di Eulero-Lagrange* per le variabili aggiunte e le *equazioni algebriche* per i controlli. Omettendo i vari passaggi, le equazioni poc'anzi discusse si presentano rispettivamente nella seguente forma:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (4.6)$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (4.7)$$

dove  $H$  indica l'*Hamiltoniano* del sistema, ovvero la quantità così definita:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (4.8)$$

Noto l'Hamiltoniano, in presenza di vincoli espliciti e costanti sui controlli è possibile determinare l'ottimo tramite il *Principio di Massimo di Pontryagin*, secondo il quale l'ottimo del controllo, in ogni punto della traiettoria in esame, è quello che massimizza o minimizza, a seconda dello studio da effettuare, l'Hamiltoniano in ogni punto. Dal momento che il valore di ottimo del controllo potrebbe matematicamente assumere qualsiasi valore, relativamente al fatto che questo rientri o meno nel *dominio di ammissibilità*<sup>22</sup>, si procede come segue: l'ottimo, se rientra nel dominio, è fornito dall'equazione (4.7), altrimenti assume il valore massimo o minimo del dominio (estremi) a seconda dell'estremale da ricercare.

Definito l'approccio al problema, e noti gli strumenti matematici di base per la determinazione dell'ottimo di costo, prima di definire il metodo di implementazione è utile, se non addirittura necessario, determinare l'equazione che permette il calcolo del costo di trasferta nel caso di manovre combinate. Nella generica situazione orbitale, la manovra combinata prevede il cambio contemporaneo di inclinazione, semiasse maggiore e RAAN, ovvero, sotto le assunzioni fatte, gli unici parametri orbitali che caratterizzano la singola orbita. Lo scopo è dunque quello di determinare un'equazione nella forma:

---

<sup>22</sup> Il *dominio di ammissibilità* è l'insieme dei valori che il controllo, in questo caso, può liberamente assumere. Per le applicazioni alle trasferte orbitali, il *controllo* potrebbe essere rappresentato dalla spinta  $T$  fornita dal propulsore, la quale è legata dall'impulso  $\Delta V$  che si riesce a garantire. Inoltre, essendo limitato ad un valore massimo teorico ( $T_{max}$ ), quest'ultimo potrebbe rappresentare il *vincolo* del problema.

$$\Delta V = g(\Delta a, \Delta i, \Delta \Omega) \quad (4.9)$$

dove con  $\Delta a$ ,  $\Delta i$  e  $\Delta \Omega$  si indicano rispettivamente le variazioni di semiasse maggiore, inclinazione e RAAN da coprire.

Indicando con  $\beta$  il *thrust angle*, il quale rappresenterà l'unico parametro di controllo, e con  $\gamma$  il modulo del vettore accelerazione fornito dal propulsore, le equazioni che descrivono il sistema in esame sono<sup>[9]</sup>:

$$\frac{di}{dt} = \frac{2\gamma \sin \beta \cos u'}{\pi V} \quad (4.10)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\gamma \sin \beta \sin u'}{\pi V \sin i} \quad (4.11)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma \cos \beta \quad (4.12)$$

dove  $V$  indica il modulo della velocità e  $u'$  l'argomento della latitudine. Dalle equazioni (4.10), (4.11) e (4.12), tramite la (4.8) è possibile determinare l'Hamiltoniano del sistema e trovare dunque l'ottimo seguendo la procedura descritta precedentemente. Indicando con il pedice  $0$  il generico parametro orbitale dato dalla media tra quelli dell'orbita iniziale e finale,  $H$  è presto determinato come segue:

$$H = \lambda_i \left( \frac{2\gamma \sin \beta \cos u'}{\pi V} \right) + \lambda_\Omega \left( \frac{2\gamma \sin \beta \sin u'}{\pi V \sin i_0} \right) + \lambda_V (-\gamma \cos \beta) \quad (4.13)$$

Inoltre, è necessario considerare le *equazioni aggiuntive* al problema, per cui tramite la (4.6) si ottiene:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial i} = 0 \quad (4.14)$$

$$\dot{\lambda}_\Omega = -\frac{\partial H}{\partial \Omega} = 0 \quad (4.15)$$

$$\dot{\lambda}_V = -\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{2\gamma \sin \beta \cos u'}{\pi V^2} \lambda_i + \frac{2\gamma \sin \beta \sin u'}{\pi V^2 \sin i_0} \lambda_\Omega \quad (4.16)$$

Da qui, grazie al principio di massimo di Pontryagin e ricordando che il solo parametro di controllo è  $\beta$ , dalla (4.7) è possibile determinare la condizione di ottimo tramite:

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \quad (4.17)$$

la quale porta ad avere:

$$\tan \beta = -\frac{2}{\pi V \sin i_0} \frac{\lambda_\Omega}{\lambda_V} \sin u' - \frac{2}{\pi V} \frac{\lambda_i}{\lambda_V} \cos u' \quad (4.18)$$

Successivamente, omettendo i diversi passaggi, si definisce la funzione  $\varphi = -t_f$  e si pone la *condizione di trasversalità* su  $H$ , le quali, insieme alla (4.17), permette in seconda battuta di integrare l'equazione (4.12), e da qui la (4.10) e (4.11). Dalle tre è infine possibile determinare l'equazione del costo combinato di trasferta nella forma voluta:

$$\Delta V = V_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \Delta i\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \sin i_0 \Delta \Omega\right)^2} \quad (4.19)$$

La (4.19) mostra come determinare il costo *combinato* di trasferta da un'orbita iniziale ad un'orbita finale, per la quale occorre coprire le differenze dei parametri orbitali  $\Delta a$ ,  $\Delta i$  e  $\Delta \Omega$ .

## Metodi di ottimizzazione implementati

La variabile che nella trattazione gioca un ruolo fondamentale è il *tempo*, seguito dai diversi parametri orbitali iniziali. Chiaramente, quando la differenza di *RAAN* al *tempo zero*<sup>23</sup> risulta essere grande, i costi di trasferta tendono ad aumentare diventando addirittura proibitivi per certi casi, a maggior ragione in LEO, dove le velocità orbitali sono mediamente più alte rispetto alla maggior parte di altre orbite geocentriche. In questi casi, un modo utile per ridurre i costi di trasferta è quello di sfruttare opportunamente il  $\Delta \Omega_{J_2}$ , ovvero la *RAAN* che l'orbita iniziale, relativamente all'orbita finale, riesce a coprire grazie alla perturbazione dovuta all'effetto  $J_2$ <sup>[9]</sup>. In quest'ottica diviene importante lo studio fatto in merito alla regressione della linea dei nodi, il quale, mostrando l'impatto dei singoli parametri orbitali sul *RAAN rate*, permette di trarre opportune conclusioni relativamente al valore ottimale di  $\dot{\Omega}$  che la procedura determinerà per lo scopo. Difatti, in base alla configurazione iniziale delle due orbite, queste possiedono generalmente parametri orbitali diversi, e quindi  $\Omega$  e  $\dot{\Omega}$  diverse, da cui seguono due distinte leggi di variazione: per la generica orbita, in relazione alle assunzioni fatte, la *legge di variazione* è qui definita come:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \dot{\Omega} (t - t_0) \quad (4.20)$$

e si evince che, a parità di tempo, le coppie di orbite raggiungeranno due *RAAN* finali tra loro differenti.

L'idea è dunque quella di far variare opportunamente i parametri orbitali ( $a$  e  $i$ ) dall'orbita iniziale, in modo da ottenere il *RAAN rate* ideale. Noto il nuovo  $\dot{\Omega}$ , l'orbita del *chaser* ruoterà più velocemente o più lentamente, in base alla configurazione orbitale iniziale, permettendo alla *RAAN* finale di raggiungere specifici valori, i quali possono annullare i relativi costi o quantomeno permettere che essi vengano coperti tramite costi ragionevoli.

Alla luce di quanto detto finora, i due metodi proposti, che verranno approfonditi a breve, sfruttano i valori dei singoli costi di trasferta di ciascun parametro orbitale. Da qui, indicando con il pedice  $k$  il parametro orbitale del generico detrito, dall'analisi precedente le variazioni di velocità richieste sono<sup>[9]</sup>:

$$x = \frac{\pi}{2} V_0 \sin i_0 [\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)] \quad (4.21)$$

$$y = \frac{a_{k+1} - a_k}{2a_0} V_0 \quad (4.22)$$

$$z = \frac{\pi}{2} (i_{k+1} - i_k) V_0 \quad (4.23)$$

<sup>23</sup> Con l'espressione "*tempo zero*" s'intende, e s'intenderà sempre, l'istante iniziale di trasferta per il quale si considereranno i parametri orbitali iniziali per entrambe le orbite in esame.

dove:

$$a_0 = \frac{a_{k+1} + a_k}{2}, \quad i_0 = \frac{i_{k+1} + i_k}{2}, \quad V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0}}$$

Dalle equazioni (4.21), (4.22) e (4.23) è importante notare e sottolineare diversi punti essenziali:

- Le quantità  $y$  e  $z$  dipendono esclusivamente dai parametri orbitali di tempo zero, e ciò significa che essi prescindono sia dal metodo utilizzato sia dal tempo a disposizione per il completamento della manovra, sottolineando così quanto esse siano variabili intrinseche della configurazione orbitale di tempo zero.
- La quantità  $x$ , come le precedenti, dipende anch'essa dai parametri orbitali di tempo zero, ma vi è inoltre una forte dipendenza dal tempo. I metodi proposti, così come l'intera trattazione, affondano le radici proprio su questo aspetto, il quale permetterà di ridurre i costi di trasferta.

### Metodo *ai* – *transfer*

In relazione a quanto detto prima in merito alla natura della trasferta, essa è caratterizzata da due fasi propulse, tra le quali si interpone una fase silente. Il metodo *ai-transfer* prevede i soli cambi attivi di semiasse maggiore e inclinazione, i quali vengono partizionati tra le due fasi propulse dette prima. Per cui, l'idea alla base del primo metodo è quella di coprire i costi  $y$  e  $z$  sfruttando una prima fase propulsa, la quale creerà un'orbita di trasferimento (*coasting orbit*) a partire da quella iniziale, e caratterizzerà la fase di *coasting*. Quest'orbita possiederà gli specifici parametri orbitali che garantiscono il *RAAN rate* utile, durante il *transfer time*  $t_t$ <sup>24</sup>, ad annullare del tutto il costo  $x$  di cambio RAAN. Trascorso il tempo  $t_t$ , la fase propulsa finale vede la linea dei nodi già allineata e compete alla conclusione della manovra garantendo l'allineamento orbitale in termini di  $a$  e  $i$ . In relazione a ciò, il primo impulso lo si può scrivere come segue<sup>[9]</sup>:

$$\Delta V_a = \sqrt{(s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (4.24)$$

dove  $s_y$  e  $s_z$  sono i *parametri di ripartizione* che permettono di quantificare sia la ripartizione stessa, sia l'entità numerica dell'impulso. Inoltre, grazie a quest'ultimo, durante il *transfer time* si genera una differenza  $\Delta x$  che, al tempo finale, coprirà interamente il costo  $x$ , da cui la condizione:

$$x + \Delta x = 0 \quad (4.25)$$

La quantità  $\Delta x$  dipende strettamente dal tempo e dai costi  $y$  e  $z$ , ed è valutabile a partire dalle equazioni (3.21), (4.22) e (4.23) come segue:

$$\Delta x = m s_y y + n s_z z \quad (4.26)$$

con:

$$m = \frac{\pi}{2} 7 \dot{\Omega}_0 \sin i_0 t \quad (4.27)$$

<sup>24</sup> Esso rappresenta la differenza tra l'istante iniziale di trasferta  $t_0$ , qui posto a zero, e l'istante finale  $t_f$ .

$$n = \dot{\Omega}_0 \tan i_0 \sin i_0 t \quad (4.28)$$

dove  $\dot{\Omega}_0$  e  $i_0$  sono i valori medi di *RAAN rate* e inclinazione determinati a partire da quelli riferiti all'orbita iniziale e finale rispettivamente.

In merito al secondo impulso, esso sarà determinato a partire dai complementari dei singoli costi dell'impulso precedente, ed è dunque calcolabile come segue:

$$\Delta V_b = \sqrt{(y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.29)$$

Noti i due impulsi, il costo totale è dato dalla semplice somma algebrica dei due, e per ottimizzarne il valore è necessario trovare i valori dei parametri di ripartizione  $s_y$  e  $s_z$  tali per cui si registra il minimo assoluto. Imponendo la stazionarietà della quantità e proseguendo nel calcolo, si noterà che trovare i suddetti parametri in forma chiusa è molto difficile. Per ovviare a ciò, si semplifica l'espressione da minimizzare, e nello specifico, anziché ottimizzare la quantità  $\Delta V = \Delta V_a + \Delta V_b$ , si ottimizzerà il suo quadrato trascurando il termine misto  $2\Delta V_a \Delta V_b$ , ovvero  $\Delta V^*$ . Ciò permette di eliminare le radici quadrate senza commettere grandi errori di approssimazione<sup>[9]</sup>:

$$\Delta V^{*2} = \Delta V_a^2 + \Delta V_b^2 \quad (4.30)$$

Procedendo all'ottimizzazione, si sfrutta il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, il quale necessita la costruzione della *funzione lagrangiana L* espressa come segue:

$$L = \Delta V^{*2} + \mu (x + \Delta x) \quad (4.31)$$

Occorre dunque valutare i punti di stazionarietà della (4.31) rispetto ai parametri  $s_y$  e  $s_z$ , nonché rispetto al moltiplicatore  $\mu$ . Per cui, imponendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial s_y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial s_z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \end{cases}$$

si risolve il sistema di equazioni univocamente determinato e si ricavano così i parametri voluti, i quali sono però espressi nella forma  $y s_y$  e  $z s_z$  tramite le (4.32) e (4.33). Il motivo di ciò è legato al fatto che i valori di  $y$  e  $z$  possono assumere valori nulli<sup>25</sup>, e tale forma permette di eliminare le eventuali singolarità che porterebbero ad infinito i valori di  $s_y$  e  $s_z$ .

$$y s_y = - \frac{2mx - n^2 y + mnz}{2(m^2 + n^2)} \quad (4.32)$$

$$z s_z = - \frac{2nx - m^2 z + mny}{2(m^2 + n^2)} \quad (4.33)$$

---

<sup>25</sup> Basti pensare alle configurazioni orbitali di tempo zero che presentano la coincidenza di un parametro orbitale: questi casi fortuiti portano all'annullamento del relativo costo orbitale, causando così la singolarità di cui si parla.

Infine, un aspetto di tale metodo che merita attenzione è la divergenza dei valori per tempi prossimi allo zero. Come si nota dalle equazioni (4.27) e (4.28), per tali istanti di tempo i valori di  $m$  e  $n$  tendono ad essere nulli, e questi sostituiti nelle (4.32) e (4.33) portano alla divergenza dei parametri di ripartizione. Come conseguenza di ciò, sia i costi di trasferta, sia le variazioni dei parametri orbitali, tendono a valori molto grandi, perdendo il loro aspetto prettamente fisico e pratico.

## Metodo ai $\Omega$ - transfer

Il secondo metodo di ottimizzazione è molto simile al primo appena descritto, e per questo ne erediterà molte peculiarità. Tuttavia, esso prevede un cambio attivo della RAAN che trascina all'interno dell'analisi il parametro  $s_x$  e dà nuova vita alla quantità  $\Delta x$ . Da ciò si capisce che la differenza principale tra i due metodi giace nell'avidità dell'uso dell'effetto  $J_2$ : mentre il primo lo sfrutta per coprire interamente il costo  $x$ , il secondo lo sfrutta con parsimonia, andando a trovare lo specifico valore di  $s_x$  che ottimizza il costo totale.

Procedendo nell'analisi, lo scopo è lo stesso di prima, ovvero la determinazione dei parametri  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  che minimizzano il costo totale, il quale è costituito dai due impulsi così definiti:

$$\Delta V_a = \sqrt{(s_x x)^2 + (s_y y)^2 + (s_z z)^2} \quad (4.34)$$

$$\Delta V_b = \sqrt{(x - s_x x + \Delta x)^2 + (y - s_y y)^2 + (z - s_z z)^2} \quad (4.35)$$

Portando avanti la procedura descritta precedentemente, si ricercheranno i valori dei parametri  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  che contemporaneamente rendono stazionaria la funzione lagrangiana  $L$ . Si omettono qui i calcoli e si presentano le equazioni finali volute nella stessa forma delle precedenti:

$$x s_x = \frac{2x + my + nz}{(4 + m^2 + n^2)} \quad (4.36)$$

$$y s_y = - \frac{2mx + mnz - (4 + n^2)y}{2(4 + m^2 + n^2)} \quad (4.37)$$

$$z s_z = - \frac{2nx + mny - (4 + m^2)z}{2(4 + m^2 + n^2)} \quad (4.38)$$

Il metodo appena discusso, come si vedrà successivamente, permette di ottenere dei costi di trasferta minori rispetto al metodo precedente. Sebbene possa sembrar strano, l'introduzione di un controllo attivo sulla RAAN, che precedentemente era del tutto assente, può diminuire il costo totale  $\Delta V$ . Questo è legato al fatto che nel primo metodo l'impulso iniziale deve necessariamente garantire il *RAAN rate* da sfruttare per far coincidere le linee dei nodi al tempo finale, e questo a prescindere dalla differenza iniziale di RAAN. Per cui, l'apparente risparmio dovuto dall'assenza del controllo attivo sulla  $\Omega$ , riversa una notevole responsabilità sul controllo attivo di  $a$  e  $i$ , il quale sarà costretto a far fronte a tale mancanza. Il secondo metodo, garantendo il controllo attivo sulla RAAN, permette ai costi per il cambio di  $a$  e  $i$  di essere contenuti, poiché il semiasse maggiore e l'inclinazione potranno assumere valori diversi, e nonostante tutto, garantire il *RAAN rate* che porta alla corretta conclusione della manovra.

## Osservazioni sui parametri $s_x$ , $s_y$ e $s_z$

Prima di procedere nell'analisi, occorre approfondire l'importanza dei *parametri di ripartizione* dei costi di cambio orbita. Come detto in precedenza, essi permettono di suddividere nella maniera ottimale i costi  $x$ ,  $y$  e  $z$  tra l'impulso iniziale e quello finale, ma la costruzione e la derivazione dei metodi non impongono alcun limite sui valori che essi possono assumere. Questo significa che i metodi proposti si avvantaggiano del fatto che  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  possono assumere qualsiasi valore, sia esso grande o piccolo, con il solo scopo di sfruttare il più possibile l'effetto  $J_2$ , così da minimizzare il costo totale<sup>[9]</sup>.

Un altro aspetto che richiede attenzione è quello che coinvolge la coincidenza di uno o due parametri orbitali tra le due orbite al tempo zero. Questi casi fortuiti portano all'annullarsi dei relativi costi ( $x$ ,  $y$  o  $z$ ), causando così una singolarità nelle equazioni (4.32), (4.33), (4.36), (4.37) e (4.38) che, come già noto, è stata eliminata portando avanti la procedura di calcolo trattando le quantità  $xs_x$ ,  $ys_y$  e  $zs_z$  anziché  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ .

Infine, i parametri di ripartizione permettono inoltre di valutare quantitativamente le ripartizioni delle variazioni  $\Delta a$ ,  $\Delta i$  e  $\Delta \Omega$  tra il primo e il secondo impulso, e le equazioni in questione sono ricavabili a partire dalle (4.21), (4.22) e (4.23), e hanno la seguente forma:

$$\begin{array}{ll} \textit{Primo impulso} & \textit{Secondo impulso} \\ \Delta\Omega_a = \frac{2}{\pi} \frac{xs_x}{V_0 \sin i_0} & \Delta\Omega_b = \frac{2}{\pi} \frac{(x - xs_x + \Delta x^{26})}{V_0 \sin i_0} \end{array} \quad (4.39)$$

$$\Delta a_a = \frac{2a_0}{V_0} ys_y \quad \Delta a_b = \frac{2a_0}{V_0} (y - ys_y) \quad (4.40)$$

$$\Delta i_a = \frac{2}{\pi V_0} zs_z \quad \Delta i_b = \frac{2}{\pi V_0} (z - zs_z) \quad (4.41)$$

## Importanza e significato della quantità $\Delta x$

La ripartizione dei costi la si può esprimere matematicamente scrivendo:

$$\begin{cases} (ys_y) + (y - ys_y) = y \\ (zs_z) + (z - zs_z) = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (s_y) + (1 - s_y) = 1 \\ (s_z) + (1 - s_z) = 1 \end{cases} \quad (4.42)$$

Queste relazioni sono valide per entrambi i metodi, ma per *ai $\Omega$  - transfer* occorre aggiungere anche:

$$(s_x) + (1 - s_x) - \Delta x/x = 1 \quad (4.43)$$

la quale, nel metodo *ai - transfer*, è sostituita dalla (4.25).

Le relazioni (4.42), al di là della loro ovvietà logica, sottolineano come il semiasse maggiore e l'inclinazione non vengano in alcun modo perturbati, e che le relative variazioni siano dunque strettamente legate ai due impulsi, che vengono palesati dai due addendi presenti. Il discorso non si estende invece per la (4.43), la quale evidenzia invece il ruolo cruciale che ha l'effetto  $J_2$  nel caso di un controllo attivo sulla RAAN. Difatti, la quantità  $\Delta x$  è strettamente legata alla differenza di RAAN  $\Delta\Omega_{J_2}$  che si riesce a guadagnare dalla perturbazione in

<sup>26</sup> L'addendo  $\Delta x$  viene aggiunto esclusivamente per il metodo *ai $\Omega$  - transfer*, poiché esso permette di considerare opportunamente il contributo dato dall'effetto  $J_2$  al momento del controllo attivo della RAAN.

questione, e diviene indispensabile per la corretta conclusione della trasferta<sup>27</sup>. Nello specifico, per le diverse configurazioni orbitali, a prescindere dal metodo implementato, è possibile scrivere che:

$$\Delta\Omega_{\text{tot}} = \Delta\Omega_{\text{imp}} - \Delta\Omega_{J_2} \quad (4.44)$$

dove  $\Delta\Omega_{\text{tot}}$  indica la differenza di RAAN globale da coprire e  $\Delta\Omega_{\text{imp}}$  quella che si copre tramite i due impulsi, la quale tiene opportunamente conto della perturbazione. Il secondo contributo lo si può determinare tramite la seguente relazione:

$$\Delta\Omega_{J_2} = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta x}{V_0 \sin i_0} \quad (4.45)$$

In generale, supponendo di fissare la configurazione orbitale di tempo zero, dalla (4.21) è possibile scrivere:

$$x \propto [\Omega_{k+1}(t) - \Omega_k(t)] \rightarrow x \propto \Delta\Omega(t)$$

dove  $\Delta\Omega(t)$  rappresenta la differenza di RAAN globale da coprire al variare del tempo di missione a disposizione, la quale coincide con la quantità espressa dalla (4.44). Dalla Figura 4.2, in relazione alle assunzioni fatte, si può apprezzare come il costo  $x$  risulti direttamente proporzionale al tempo, difatti a parità di orbita iniziale e finale i valori di  $a_0$  e  $i_0$  risultano essere fissati. Inoltre, visto il dominio di valori ammissibili per l'inclinazione (Tabella 2.2),  $x$  e  $\Delta\Omega(t)$  risulteranno essere sempre concordi in segno.

Considerando ora, a titolo di esempio, i valori presentati nella sottostante Tabella 4.1 (rivista da ref. [9]), ed estendendo il calcolo per poco più di 18 giorni, la Figura 4.1 mostra l'andamento di  $\Delta\Omega(t)$  (coincidente con  $\Delta\Omega_{\text{tot}}$ ) e delle quantità  $\Delta\Omega_{\text{imp}}$  e  $\Delta\Omega_{J_2}$  al variare del tempo finale di trasferta, nonché la vera e propria rappresentazione grafica dell'equazione (4.44). In più, ricordando le definizioni date ai due approcci al metodo *aiΩ-transfer*, la Figura 4.4 e la Figura 4.5 mostrano gli andamenti dei valori che il metodo di ottimizzazione alloca ai due impulsi, e confrontando questi con l'andamento presentato in Figura 4.3 è possibile trarre due importanti conclusioni:

- **Metodo attendista.** Rappresenta il caso in cui vengano imposti nulli i valori di  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ . Ciò implica il completamento della trasferta unicamente tramite la fase di *coasting* iniziale e lo sparo finale. Ciò comporta l'assenza delle variazioni iniziali  $\Delta a$  e  $\Delta i$  che porterebbero alla genesi di  $\Delta x$ : le orbite seguono indisturbate le loro leggi di variazione fino all'impulso finale, difatti la Figura 4.6 mostra un andamento di  $\Delta x$  identicamente nullo al variare del tempo finale di trasferta. A livello grafico tutto ciò si traduce nella perfetta coincidenza dell'andamento in Figura 4.3 con quello in Figura 4.5 e nell'annullamento del primo impulso per ogni istante di tempo.
- **Metodo pseudo-ottimale.** È il caso in cui non vengano imposti i valori di  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ , e come si nota dal confronto, le due curve risultano essere notevolmente diverse. Il motivo è da ricercare nel fatto che, a differenza del precedente, in questo caso vi è la

---

<sup>27</sup> Come si paleserà più avanti, è fondamentale sottolineare che ciò, assieme alla (4.45), resta concettualmente valido solo in presenza di un impulso iniziale. Difatti, per il metodo *attendista*, dove verrà a mancare il primo impulso, sebbene l'andamento di  $\Delta x$  resterà costantemente nullo, sarà comunque presente un  $\Delta\Omega_{J_2}$  non nullo ottenuto sfruttando il *RAAN rate* dell'orbita di partenza. Alla luce di ciò, è dunque da tenere a mente che per i metodi che sfruttano un impulso iniziale, la quantità  $\Delta x$  è profondamente legata al servirsi di un *RAAN rate* diverso da quello di partenza, mentre per quello che ne sarà privo, la  $\Delta\Omega_{J_2}$  che si guadagnerà dall'omonimo effetto è avulsa dal valore di  $\Delta x$ .

forte presenza del  $\Delta x$  generato dal primo impulso (Figura 4.6), e questo significa che l'andamento presentato nella Figura 4.4 tiene conto delle variazioni in  $\Omega$  ottenute sfruttando le variazioni  $\Delta a$  e  $\Delta i$ .

Al netto di tutto, ciò che si vuole evidenziare con questo esempio sono due aspetti ovvi, ma non scontati, che meritano attenzione: il primo è che ovviamente l'andamento di  $x$  prescinde dai valori di  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  poiché come detto precedentemente dipende solo dalla  $\Delta\Omega$  di tempo zero; il secondo è che la quantità di RAAN che si guadagna dagli impulsi è fortemente influenzata da quella che si guadagna tramite l'effetto  $J_2$ .

	Orbita iniziale	Orbita finale	Variazione
Quota [km]	779.3	733.8	-45.5
Velocità [m/s]	7462.6	7486.4	23.8
Inclinazione [°]	98.64	97.45	-1.19
RAAN rate [%/g]	1.0035	0.8857	-0.1178
RAAN iniziale [°]	137.59	138.05	0.46

Tabella 4.1: Parametri orbitali della configurazione di tempo zero presa in esame per la trattazione.

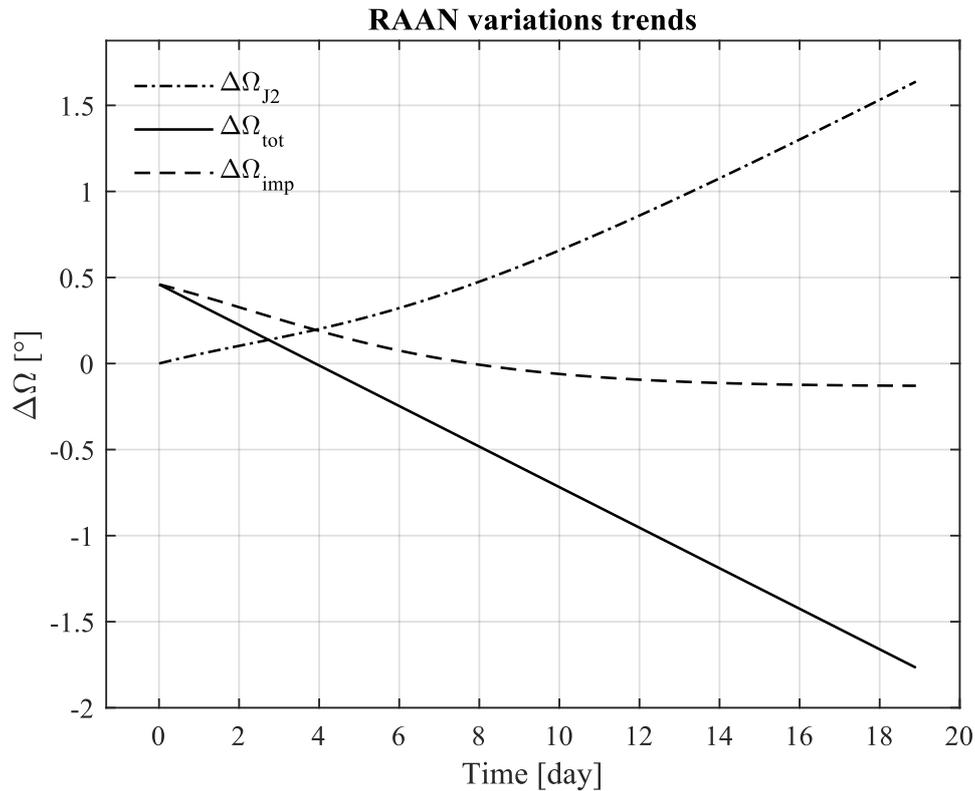


Figura 4.1: Andamenti di  $\Delta\Omega_{tot}$ ,  $\Delta\Omega_{J_2}$  e  $\Delta\Omega_{imp}$  in funzione del tempo finale di trasferta.

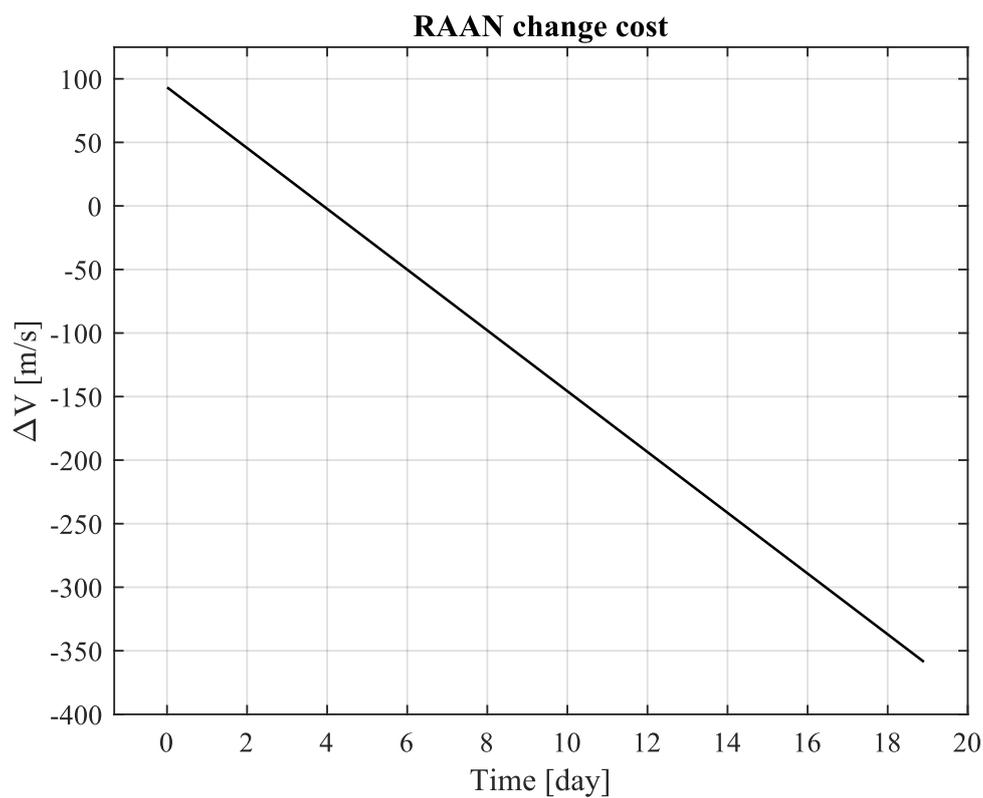


Figura 4.2: Andamento del costo di cambio RAAN ( $x$ ) in funzione del tempo finale di trasferta.

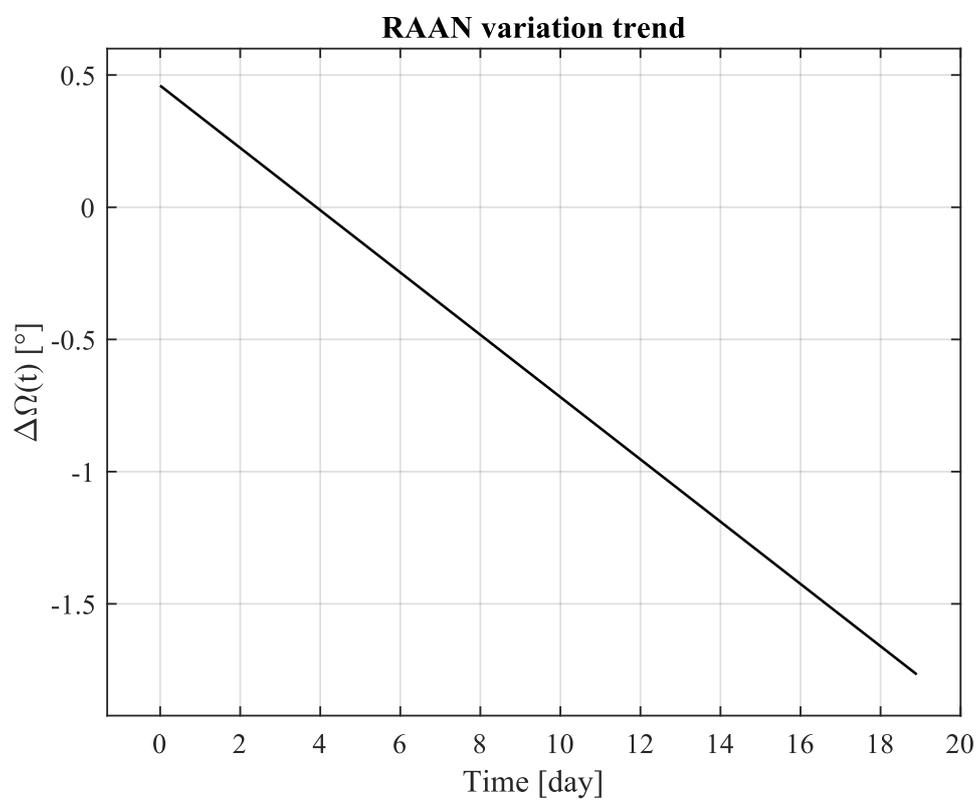
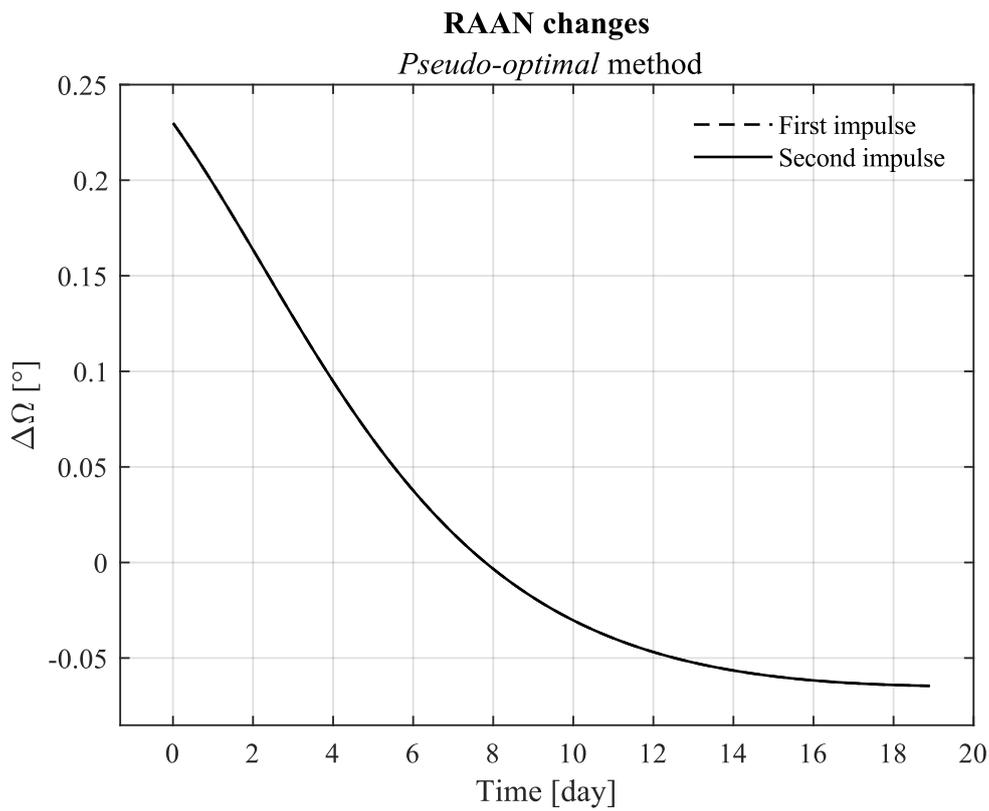
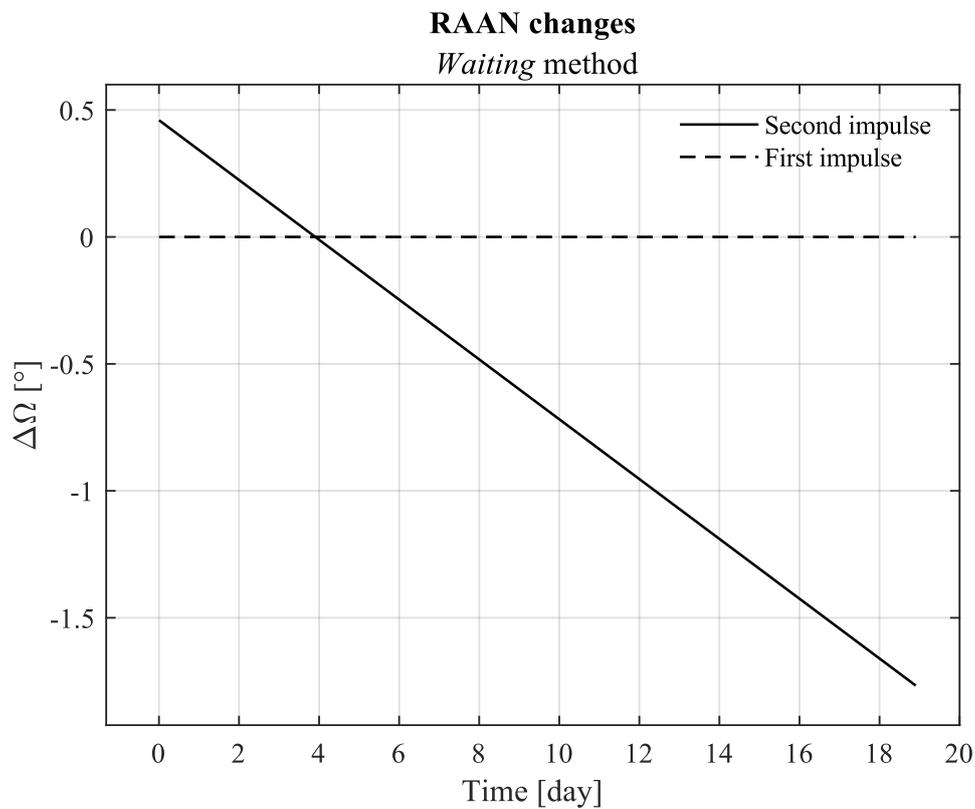


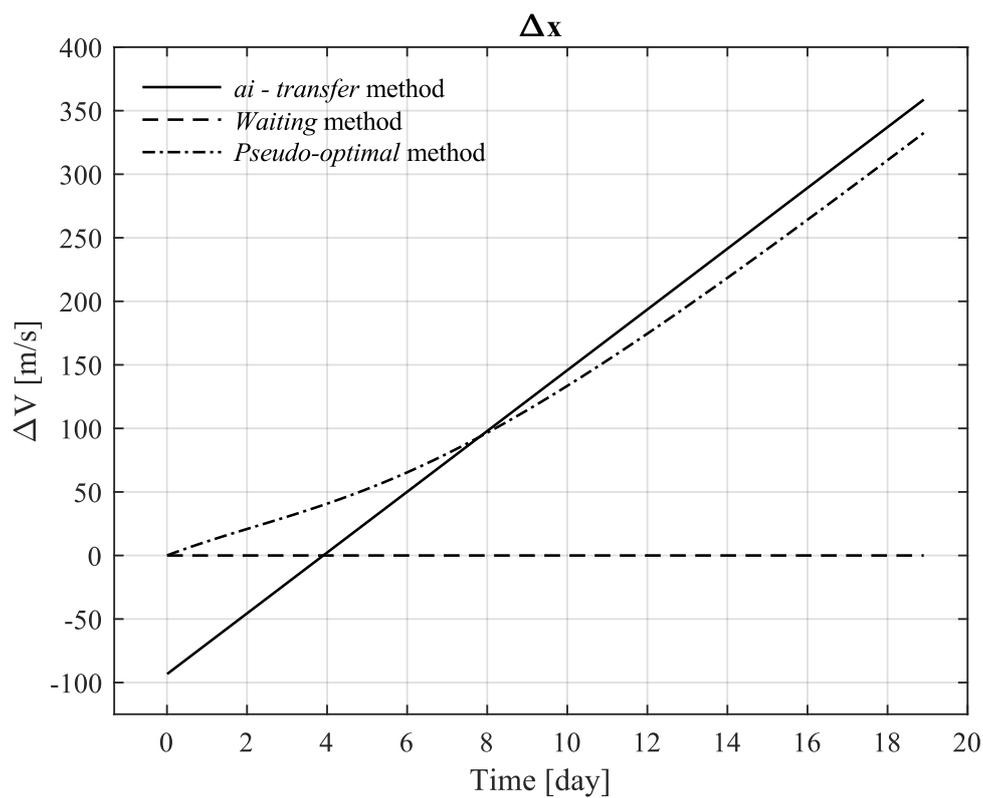
Figura 4.3: Andamento di  $\Delta\Omega(t)$  in funzione del tempo finale di trasferta.



**Figura 4.4:** Andamenti delle variazioni attive di RAAN in funzione del tempo finale di trasferta per il metodo pseudo-ottimale.



**Figura 4.5:** Andamenti delle variazioni attive di RAAN in funzione del tempo finale di trasferta per il metodo attendista.



**Figura 4.6:** Confronto del guadagno di costo per i tre metodi di ottimizzazione proposti.

## Capitolo 5

### Approcci al metodo $ai\Omega$ - transfer: pseudo-ottimale e attendista

Il primo capitolo anticipa un'idea promettente per la riduzione dei costi di missione, ovvero quella di attendere che le due orbite in questione allineino le loro linee dei nodi per poi erogare il dovuto impulso al fine di accomodare i valori di  $a$  e  $i$ . Questo permette di annullare del tutto il costo  $x$  e concentrarsi sul cambio di semiasse maggiore e inclinazione. Tuttavia, sebbene questa idea possa sembrare quella decisiva, vi è un vincolo che soffoca l'approccio, ovvero il tempo che si ha a disposizione per concludere la trasferta, e cioè quello che precedentemente è stato definito *transfer time*  $t_t$ . Se dovesse essere relativamente piccolo, allora si rischierebbe che esso non basti per sfruttare il *RAAN rate* indotto dall'effetto  $J_2$ ; in caso contrario sarebbe invece possibile trarne tutti i relativi vantaggi.

È bene ricordare che con il termine *pseudo-ottimale* si indicherà sempre il metodo in cui i parametri di ripartizione saranno liberi di assumere i valori dettati dalla procedura di calcolo, mentre con il termine *attendista* quello in cui i suddetti parametri siano posti nulli a prescindere dalla procedura stessa. Dal momento che annullare i parametri di ripartizione per il metodo *ai - transfer* ne fa perdere totalmente significato, quanto detto è da riferirsi sempre e solo al metodo *ai $\Omega$ -transfer*. Inoltre, è fondamentale sottolineare come l'unico modo che si ha per avere contemporaneamente nulli i valori di  $s_x, s_y$  e  $s_z$  è proprio quello di imporli "manualmente"<sup>28</sup>, e ciò è dovuto al fatto che, per qualsiasi valore di  $x, y$  e  $z$ , che sono generalmente tutti diversi da zero, dalle equazioni (4.36), (4.37) e (4.38) avere nulli tali parametri equivale a trovare una soluzione reale al sistema (5.1). Esso è infatti costituito da tre equazioni non-lineari nelle due incognite  $m$  e  $n$ , e di seguito verrà dimostrato che non possiede alcuna soluzione reale.

Procedendo alla dimostrazione, il sistema di cui si vuole determinare la soluzione è il seguente:

$$\begin{cases} 2x + my + nz = 0 \\ 2mx + mnz - (4 + n^2)y = 0 \\ 2nx + mny - (4 + m^2)z = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Dalla prima si ottiene che:

$$nz = -2x - my \quad (5.2)$$

la quale, sostituita nella seconda, porta a:

$$y(m^2 + n^2 + 4) = 0 \quad (5.3)$$

Da cui è possibile concludere che, nell'ipotesi di avere  $y \neq 0$ , non esiste alcuna coppia  $(m, n)$  tale per cui il sistema (5.1) sia soddisfatto. Supposto adesso per assurdo che qualsiasi coppia di orbite al tempo zero porti ad avere  $y = 0$ , allora l'equazione appena trovata si ritroverà soddisfatta per qualsiasi valore di  $m$  ed  $n$ , e il sistema si riduce ad essere:

---

<sup>28</sup> È chiaro come non abbia alcun senso considerare il caso in cui  $x, y$  e  $z$  siano contemporaneamente nulli.

$$\begin{cases} 2x + nz = 0 \\ 2mx + mnz = 0 \\ 2nx - (4 + m^2)z = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Dalla prima, supposto per il motivo di cui prima che  $z \neq 0$ , si ricava che:

$$n = -2\frac{x}{z} \quad (5.5)$$

la quale, sostituita nella terza, porta a:

$$m = \pm \sqrt{n\frac{2x}{z} - 4} = \pm \sqrt{-n^2 - 4} \quad (5.6)$$

Dunque, anche per i casi particolari in cui  $y$  risulta nullo il sistema non ammette soluzioni, confermando quanto detto prima. Si può procedere analogamente percorrendo un'altra strada, ovvero ricavando  $my$  dalla prima equazione del sistema (5.1) e sostituirla nella terza, così da ritrovare una situazione simmetrica a quella esposta.

Infine, è importante notare che per il metodo attendista, dalle equazioni (4.34) e (4.35) risulta che:

$$\Delta V_a = 0 \quad \Delta V_b = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \rightarrow \quad \Delta V_{tot} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

per cui il costo totale sarà funzione esclusivamente dei singoli costi necessari  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mostrando così che dipenderà, oltre che dalla configurazione orbitale di tempo zero, dal tempo a disposizione per concludere la missione. Difatti, come ampiamente discusso, la quantità  $x$  da cui dipende  $\Delta V_{tot}$  è fortemente correlata alla posizione relativa delle linee dei nodi delle due orbite, la quale varia continuamente nel tempo in relazione alle relative leggi di variazione.

## Waiting time

Supposto di voler sfruttare l'idea proposta e che il tempo  $t_t$  sia sufficientemente lungo, occorre dunque valutare il cosiddetto *waiting time*  $t_w$ , ovvero il tempo necessario affinché le due orbite allineino le loro linee dei nodi. Indicando con il pedice “ $i$ ” e “ $f$ ” ciò che si riferisce all'orbita iniziale e finale rispettivamente, dalle equazioni (4.20) e (4.21) il tempo d'attesa è calcolabile come:

$$t_w = \frac{\Omega_{0_i} - \Omega_{0_f}}{\dot{\Omega}_f - \dot{\Omega}_i} = - \frac{\Delta\Omega_0}{\dot{\Omega}_f - \dot{\Omega}_i} \quad (5.7)$$

dove con  $\Delta\Omega_0$  si indica la differenza di RAAN al tempo zero.

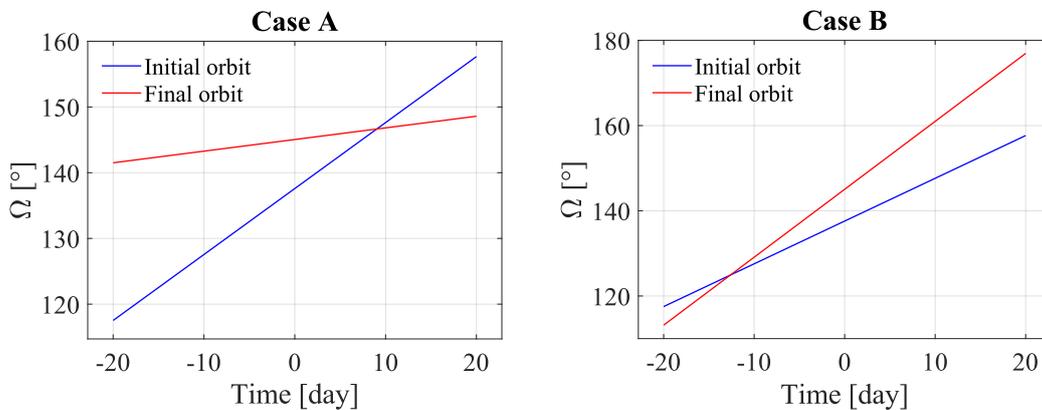
In base ai valori assunti dai parametri orbitali al tempo zero, si possono presentare le quattro casistiche riassunte nella seguente tabella.

<b>Caso A</b>	$\Omega_{0_i} \leq \Omega_{0_f}$	$\dot{\Omega}_f < \dot{\Omega}_i$
<b>Caso B</b>		$\dot{\Omega}_f > \dot{\Omega}_i$
<b>Caso C</b>	$\Omega_{0_i} > \Omega_{0_f}$	$\dot{\Omega}_f < \dot{\Omega}_i$
<b>Caso D</b>		$\dot{\Omega}_f > \dot{\Omega}_i$

**Tabella 5.1:** Eventuali casistiche al variare dei parametri orbitali al tempo zero.

Definite le casistiche, è ora possibile studiare i casi di *soluzione immaginaria*, ovvero quelli per i quali risulta un  $t_w$  negativo, e quindi i casi *B* e *C*. Nonostante essi rappresentino fisicamente situazioni diverse, a livello matematico non fa alcuna differenza analizzare i casi *A* e *B* piuttosto che i casi *C* e *D*, per cui si considererà ora l'eventualità per cui  $\Omega_{0i} \leq \Omega_{0f}$ . Tale disuguaglianza porta ad avere i primi due casi, per i quali vengono tracciate le plausibili leggi di variazione mostrate in Figura 5.1. Dagli andamenti si deduce quanto segue.

- **Caso A.** In questa eventualità il tempo  $t_w$  risulta essere positivo; infatti, l'orbita con RAAN di tempo zero minore possiede un *RAAN rate* maggiore. Nello specifico, questo si traduce nel fatto che l'orbita iniziale riesce a “raggiungere” l'orbita finale e allineare così la propria linea dei nodi con quest'ultima.
- **Caso B.** Rispetto a prima, il tempo d'attesa risulta essere negativo, e mentre il punto di vista matematico parla da sé, a livello fisico accade che l'orbita iniziale è in ritardo di un giro completo rispetto all'orbita finale. Questo comporta la cosiddetta *correzione del waiting time*.



**Figura 5.1:** Andamento delle leggi di variazione dell'orbita iniziale e finale per il caso A (a sinistra) e per il caso B (a destra).

A livello matematico, per il problema in esame, il *waiting time* potrebbe assumere valori negativi, ma per ovvi motivi ciò è inammissibile poiché il tempo fisico è necessariamente positivo. Proprio per questo motivo nasce la necessità di correggerlo in maniera opportuna, distinguendo i casi in cui si parla di *ritardo* o di *anticipo* dell'orbita iniziale rispetto a quella finale. Per le casistiche presentate nella Tabella 5.1, il caso *B* porta ad un ritardo, e quindi si dovrà aggiungere l'angolo giro alla RAAN dell'orbita iniziale; il caso *C* descrive invece un anticipo, e quindi si dovrà aggiungere la medesima quantità alla RAAN dell'orbita finale. Così facendo, il numeratore della (5.7) terrà conto della correzione e valuterà il “vero” *waiting time*, considerando la corretta posizione relativa delle due orbite in questione. Infine, è importante notare l'impatto dell'assunzione di piccole variazioni dei parametri orbitali sul  $t_w$ . Difatti, a causa di ciò, le due orbite presenteranno valori di  $a$  e  $i$  molto simili tra loro, e quindi per l'equazione (3.13) si avrà una differenza di *RAAN rate* relativamente piccola. Tale valore, essendo al denominatore della (5.7), si ripercuoterà sul *waiting time*, il quale assumerà valori decisamente elevati. Dal punto di vista pratico tutto ciò si traduce nell'avere due orbite con linee dei nodi molto vicine tra loro, le quali ruotano a velocità molto simili. Per cui, se dovessero presentarsi il caso *B* o il caso *C* appena descritti, le due orbite necessiterebbero di molto più tempo per allinearsi nuovamente, portando a problematiche non di poco conto.

## Capitolo 6

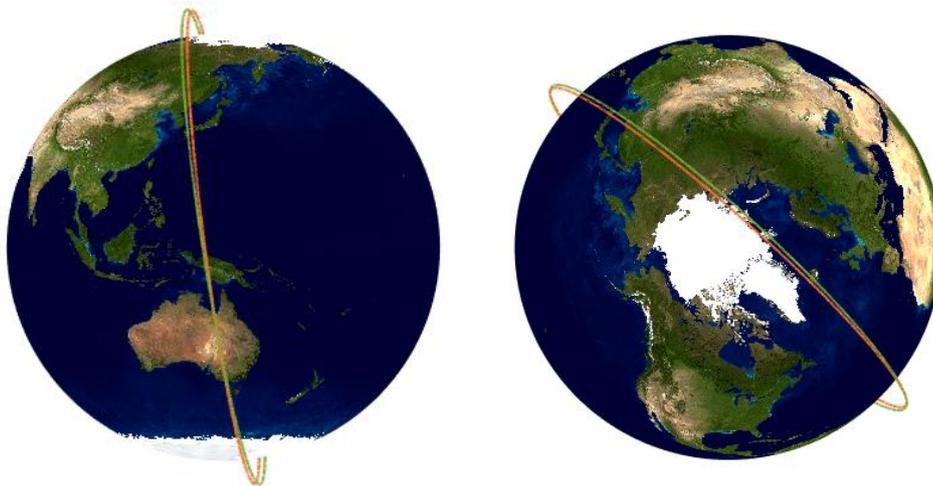
### Risultati del confronto dei metodi *base*

Definite le basi matematiche su cui si fonda l'intero procedimento di calcolo, verranno ora mostrati i risultati nati dal confronto dei due metodi *base*, ovvero il metodo *ai-transfer* e *ai $\Omega$ -transfer*<sup>29</sup>. La configurazione orbitale di tempo zero che si prende come riferimento è quella già mostrata in Tabella 4.1, dove vengono riassunti i parametri orbitali e i relativi *RAAN rate* delle due orbite. Inoltre, in Figura 6.1<sup>[18]</sup> vengono invece visualizzate, sotto due diversi punti di vista, l'orbita iniziale in verde e quella finale in arancione. Dal confronto si può notare come le due orbite siano molto simili tra loro e differiscano di piccole variazioni dei parametri orbitali, in accordo alle assunzioni fatte inizialmente.

Lo scopo sarà dunque quello di far combaciare le due orbite all'istante di tempo finale  $t_f$ , il quale sarà la variabile cuore del calcolo. Difatti, prima di presentare i risultati del confronto, è molto importante sottolineare che la variabile indipendente nelle ascisse è proprio il tempo  $t_f$ . Per cui, gli andamenti mostrati di seguito saranno dati dall'unione dei risultati determinati portando avanti l'intera procedura di calcolo per ogni singolo tempo finale<sup>30</sup>. Inoltre, i grafici presenteranno lo stesso codice dei *markers*, i quali si dividono in:

- **Quadrato.** Usato per indicare ogni valore relativo al tempo che annulla il costo  $x$ , ovvero il *waiting time*.
- **Rombo.** Usato per indicare ogni valore relativo al tempo in cui si presenta il minimo di costo totale ottenuto sfruttando il metodo *ai-transfer*.
- **Croce.** Usato per indicare ogni valore relativo al tempo in cui si presenta il minimo di costo totale ottenuto sfruttando il metodo *ai $\Omega$ -transfer*.

Infine, i valori numerici di ogni iterazione di calcolo verranno raccolti e presentati al termine del prossimo capitolo (Tabella 7.3 - Tabella 7.4 - Tabella 7.5), così da includere anche i valori ottenuti tramite il metodo attendista.



**Figura 6.1:** Visualizzazione tridimensionale delle orbite in esame al tempo zero.

<sup>29</sup> Il metodo *ai $\Omega$ -transfer* che verrà qui presentato, in relazione alla distinzione fatta sulla base dei parametri di ripartizione, è da intendersi *pseudo-ottimale*.

<sup>30</sup> È bene tenere a mente che nella scala dei tempi, quello iniziale di trasferta è stato considerato nullo, per cui ogni valore di tempo finale corrisponde alla vera e propria durata di trasferta.

## Costo globale di trasferta

Dagli andamenti dei singoli impulsi mostrati in Figura 6.2 è possibile apprezzare in che modo vengano ripartiti i costi di missione tra primo e secondo impulso a seconda del metodo usato, in modo da comprendere quale tra i due spari sia più dispendioso al variare del tempo finale. Inoltre, è possibile notare il già discusso comportamento asintotico del metodo *ai – transfer* per tempi finali prossimi a quello iniziale (qui posto pari a zero).

In merito al costo totale di manovra dato dalla somma dei due impulsi, la Figura 6.3 ne mostra gli andamenti per entrambi i metodi, permettendo così di concludere che:

- A partire da tempi finali piccoli, i costi di entrambi i metodi tendono a diminuire, presentando una maggiore rapidità e ripidità per il primo metodo, fino a raggiungere un minimo per lo stesso istante di tempo, per poi crescere nuovamente.
- Il costo del metodo pseudo-ottimale risulta sempre minore di quello del primo metodo, palesando così quanto sia il migliore tra i due.
- I costi tendono ad addensarsi per il tempo di minimo, raggiungendo valori molto simili tra loro (vedi Tabella 6.1).
- Il minimo di costo del metodo *aiΩ – transfer* si presenta per lo stesso istante di tempo per il quale le variazioni attive di RAAN risultano essere nulle (vedi Figura 6.11): per tale tempo finale di trasferta le due orbite andranno dunque a coincidere sfruttando le sole variazioni iniziali di *a* e *i*, analogamente al metodo *ai – transfer*.

Inoltre, gli andamenti di  $\Delta V_{tot}$  sottolineano un aspetto fondamentale che è stato anticipato all'inizio della trattazione: il tempo a disposizione per il completamento della missione gioca un ruolo fondamentale, poiché il costo globale che la missione richiede varia nel tempo, e questo assieme alle prestazioni del propulsore a bordo può addirittura rendere proibitiva la trasferta.

Si definisca ora *Impulse Fraction IF* la quantità data dal rapporto tra l'entità del primo impulso e il costo totale valutato per lo stesso istante di tempo, e *Impulse Ratio IR* il rapporto tra primo e secondo impulso valutati sempre per lo stesso istante di tempo. Matematicamente i due parametri sono espressi come segue:

$$IF = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_a + \Delta V_b} = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_{tot}} \quad (6.1)$$

$$IR = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_b} \quad (6.2)$$

Questi due parametri forniscono informazioni in merito a due aspetti legati agli andamenti dei singoli impulsi e del costo totale.

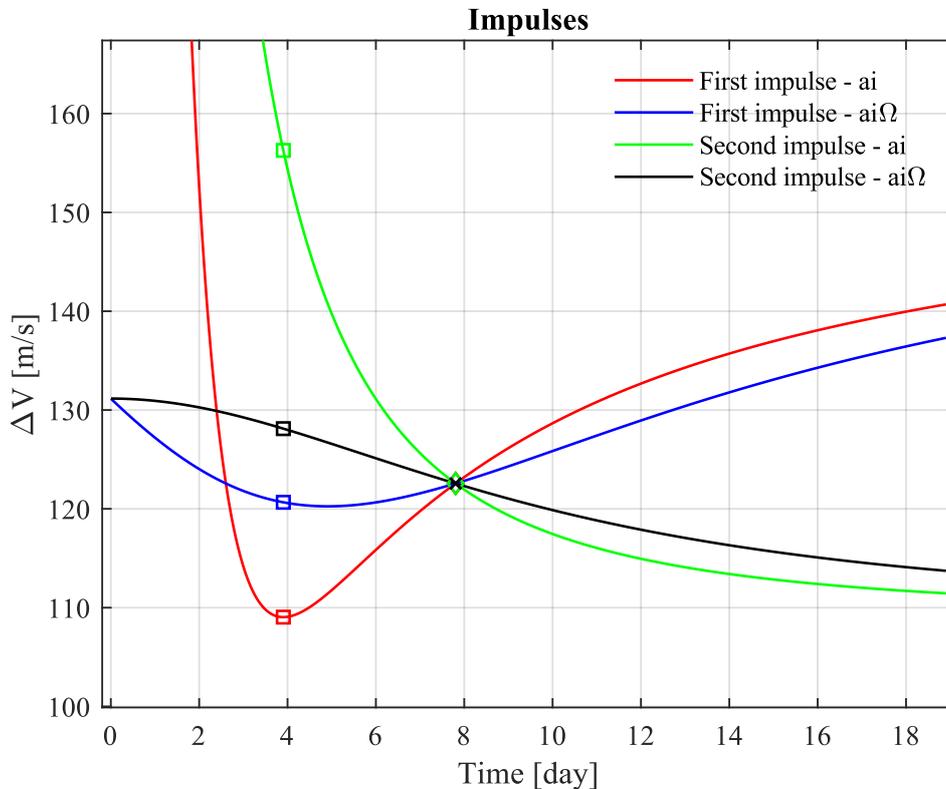
- **Impulse Ratio.** Esso fornisce informazioni in merito al confronto dei due impulsi, permettendo così di quantificare al variare del tempo finale di trasferta il rapporto tra il primo impulso e il secondo.
- **Impulse Fraction.** Esso permette di apprezzare l'impatto del primo impulso sul costo totale, e per estrapolazione anche quello relativo al secondo impulso.

Gli andamenti dei due parametri introdotti poc'anzi sono mostrati nella Figura 6.4 e nella Figura 6.5 e si osserva come i valori estremali assoluti si presentino per il metodo *ai – transfer*, rimarcando ancora una volta l'importanza del secondo metodo. In merito all'IR, i valori estremali sono di 0.61 e 0.94 circa per il metodo *ai – transfer* e *aiΩ – transfer* rispettivamente, mentre per l'IF essi risultano essere di 0.37 e 0.48. Dai suddetti valori si capisce quanto siano

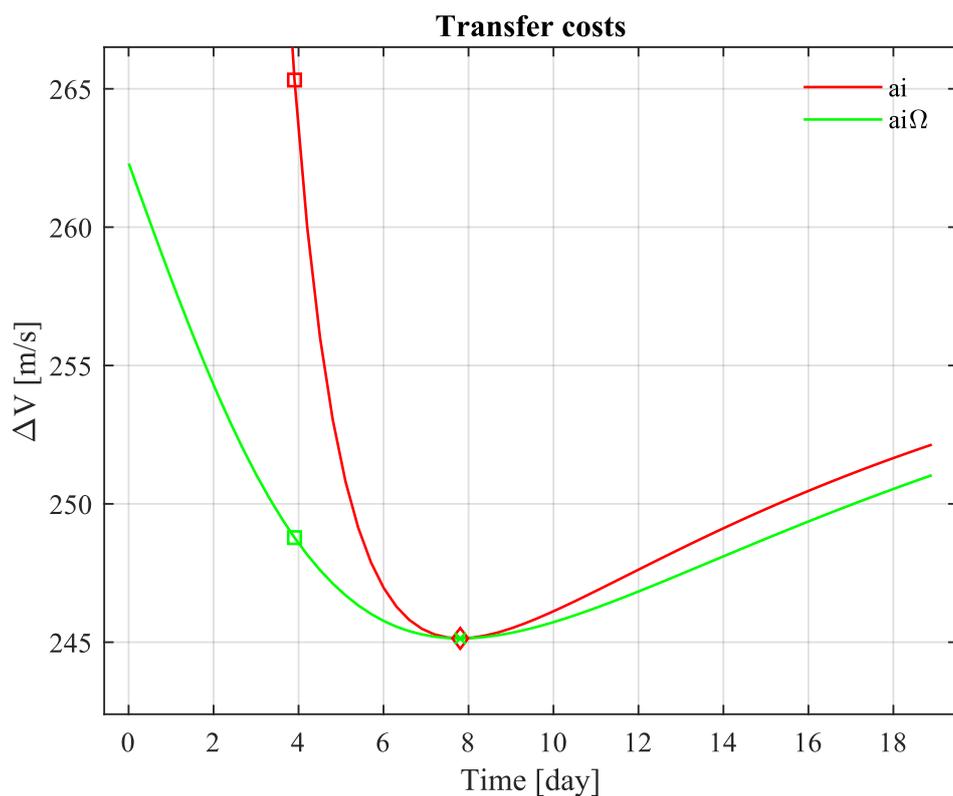
“consistenti” gli impulsi del metodo  $ai\Omega$  – *transfer* rispetto a quelli del primo metodo. Difatti, nel secondo metodo essi risultano essere molto simili tra loro, senza presentare grandi differenze. Stesso discorso non può essere fatto per il primo metodo, il quale presenta un impulso iniziale meno incidente per tempi piccoli, per poi acquisire sempre più rilevanza verso tempi maggiori. In ogni caso, per entrambi i parametri in questione i valori relativi al secondo metodo risultano essere sempre più contenuti rispetto al primo, sottolineando così l’importanza del metodo  $ai\Omega$  – *transfer*.

Infine, a titolo di esempio, per valutare numericamente tali quantità, e successivamente gli effetti di  $\Delta a$  e  $\Delta i$  sul *RAAN rate*, si considererà per ovvi motivi una trasferta *thrust-coast-thrust* con tempo di arrivo pari al *waiting time*. Tale situazione è quella che prevede un impulso iniziale al tempo zero e uno finale al tempo in cui  $x = 0$  (quadrato nelle diverse figure). Tuttavia, anche se l’istante finale è quello relativo al tempo che annulla  $x$ , occorre osservare che il primo impulso porta a ridefinire la condizione iniziale, poiché le variazioni iniziali di  $a$ ,  $i$  e di  $\Omega$ , qualora prevista, portano ad un’orbita con una diversa legge di variazione. Ciò implica il fatto che l’istante  $t_f$  in esame deve essere considerato come un mero istante finale, e non come quello che realmente annulla  $x$ , poiché suddetto istante di tempo verrà ridefinito al momento del primo sparo. Procedendo al calcolo, per suddetto istante di tempo risultano dunque un IF del 41.1% e del 48.5%, nonché un IR del 69.8% e del 94.2% per i *metodi ai - transfer* e  $ai\Omega$  - *transfer* rispettivamente, evidenziando ancora una volta quanto detto poc’anzi.

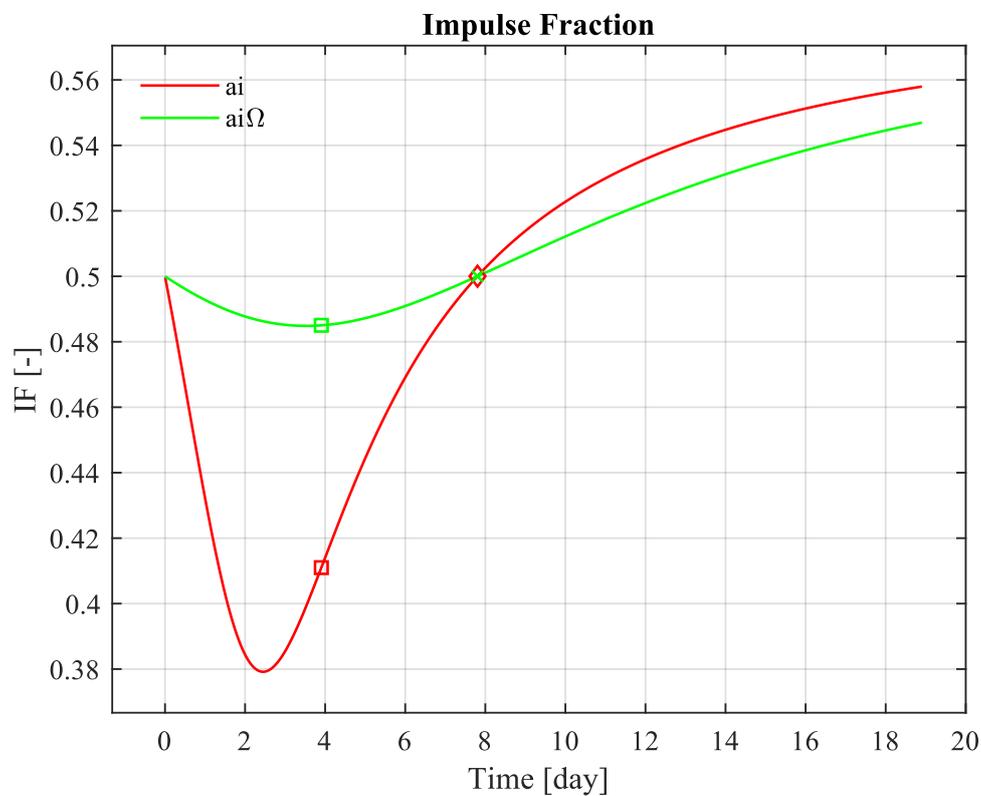
Proseguendo nell’analisi, è utile discutere gli andamenti dei singoli costi di cambio parametro orbitale, e tramite le equazioni presentate in precedenza, valutare le suddivisioni delle variazioni degli stessi tra primo e secondo impulso, così da apprezzare eventuali particolarità negli andamenti e nei rispettivi comportamenti al variare del tempo.



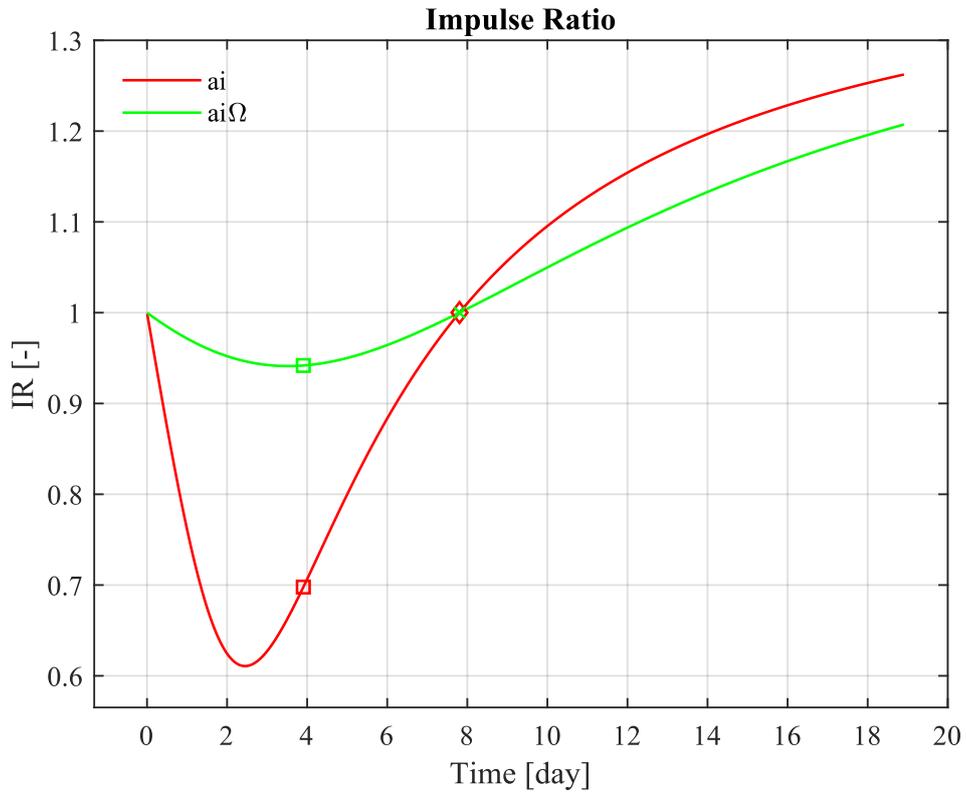
**Figura 6.2:** Andamenti dei singoli impulsi per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



**Figura 6.3:** Andamenti del costo globale per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



**Figura 6.4:** Andamenti dell'Impulse Fraction per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



**Figura 6.5:** Andamenti dell'Impulse Ratio per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

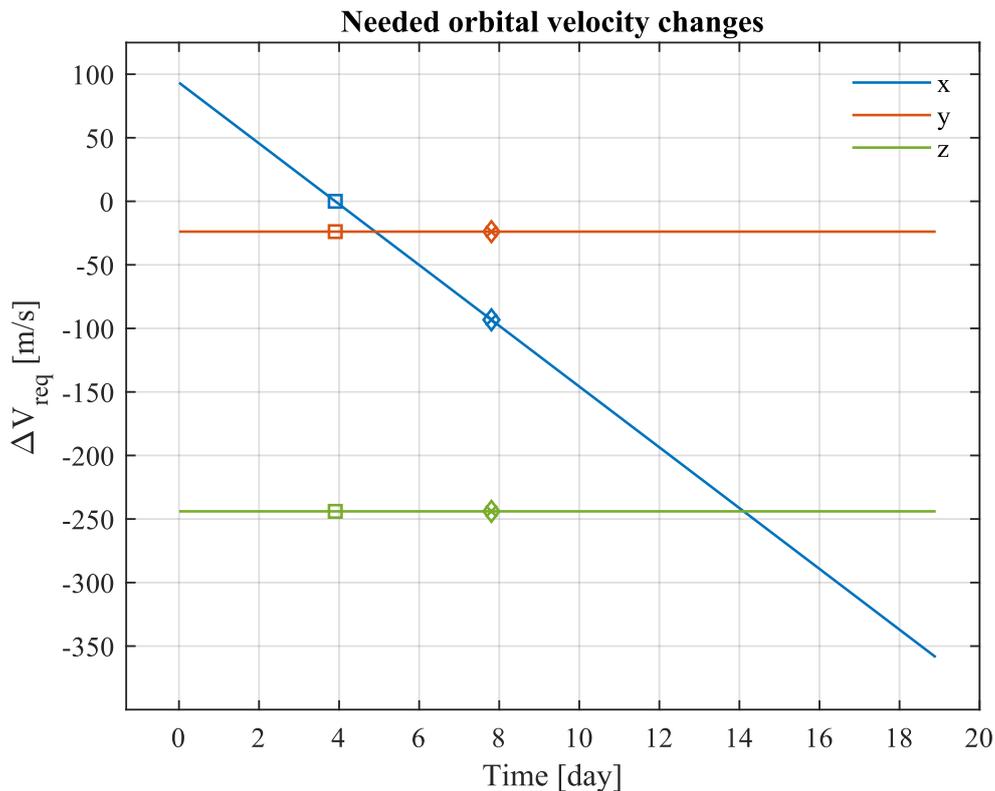
<b>Metodo</b>	<b><math>\Delta V_{min}</math> [m/s]</b>
<i>ai - transfer</i>	245.138434014326
<i>aiΩ - transfer (Pseudo-ottimale)</i>	245.138433778663

**Tabella 6.1:** Valori di costo minimo al variare del metodo utilizzato, per la configurazione orbitale in esame.

## Costi necessari al cambio orbitale

Per la configurazione orbitale scelta, dalla Tabella 4.1 si evince che la manovra dovrà coprire i costi legati alla diminuzione della quota di 45.5 km e dell'inclinazione di 1.19°, mentre per la RAAN essa dipende dal tempo considerato. Al tempo zero, le due orbite sono separate da un  $\Delta\Omega_0$  pari a 0.46°, e visti i relativi *RAAN rate*, esse tendono ad avvicinarsi fino ad un tempo di circa 4 giorni (*waiting time*), per il quale si registra l'annullamento della quantità  $x$  (qualora non venga erogato alcun impulso iniziale). Oltre tale valore di tempo, le due orbite tenderanno dunque ad allontanarsi, mantenendo in ogni caso costanti i valori di inclinazione e semiasse maggiore, in accordo alle assunzioni fatte.

Tramite la Figura 6.6 è possibile apprezzare i costi relativi al cambio del singolo parametro orbitale al variare del tempo finale, nonché i valori assunti dai suddetti per il *waiting time* (quadrati nelle figure). Come detto in precedenza in merito alle equazioni (4.21), (4.22) e (4.23), i singoli valori di  $x$ ,  $y$  e  $z$  dipendono esclusivamente dalla configurazione orbitale di tempo zero, ad eccezione del primo che dipende anche dal tempo di trasferta  $t_t$ . Infatti, al crescere del tempo finale le orbite varieranno la propria RAAN secondo la relativa legge di variazione, portando così a costi diversi a seconda del tempo di trasferta considerato. Inoltre, si può notare come gli andamenti prescindano giustamente dall'approccio utilizzato, presentando dunque gli stessi valori. Infine, è da notare come l'andamento della quantità  $x$  segua pedissequamente quello della differenza totale di RAAN da coprire al variare del tempo mostrato in Figura 4.3.



**Figura 6.6:** Andamenti dei costi richiesti dalla trasferta al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale in esame.

## Ripartizione delle variazioni del semiasse maggiore

Prendendo in considerazione gli andamenti delle variazioni del semiasse maggiore (Figura 6.7), a prescindere dall'approccio sfruttato, è possibile notare la simmetria degli andamenti rispetto al valore pari alla metà della differenza totale da coprire ( $-20.25 \text{ km}$  in questo caso). Tutto ciò è fortemente legato al discorso fatto in precedenza in merito alla ripartizione delle variazioni dei parametri orbitali, per cui si palesa così l'ovvietà del vincolo di coprire l'intera differenza totale.

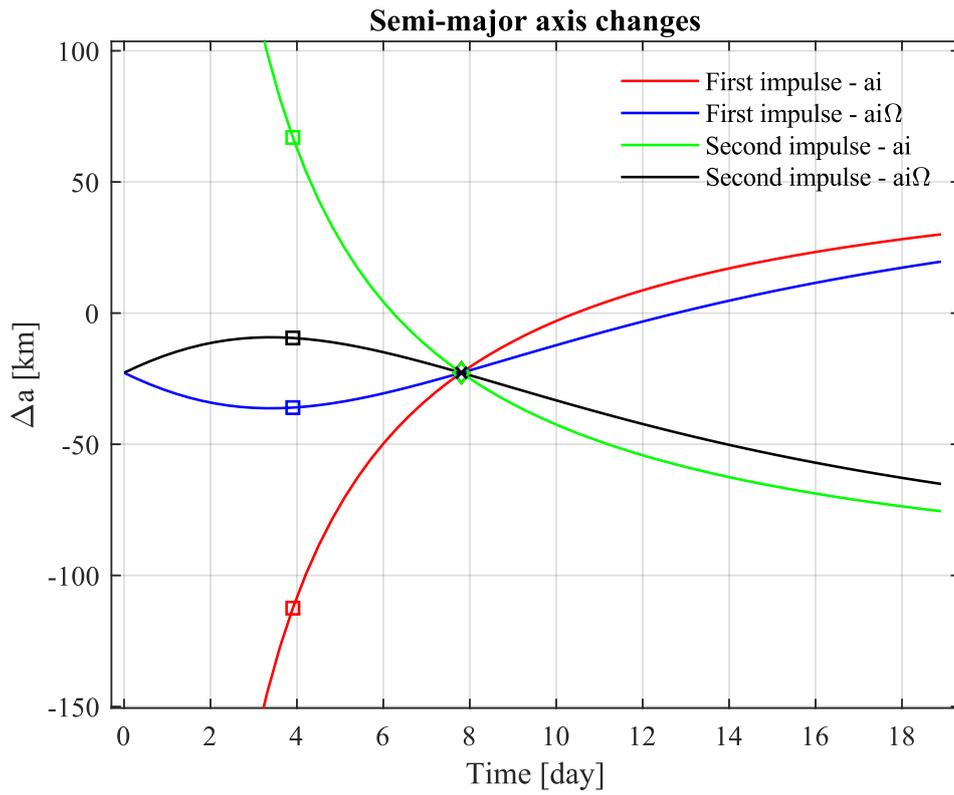
Procedendo nell'analisi, in merito al metodo *ai – transfer* si nota che all'aumentare del tempo finale, a seguito del primo impulso, si ha una diminuzione decrescente del semiasse maggiore fino a 10.5 giorni circa, oltre i quali si ha un successivo incremento dello stesso sebbene ad un rateo minore. Per quanto concerne il metodo *ai $\Omega$  – transfer*, si registra una diminuzione crescente del semiasse maggiore, che raggiunge un minimo assoluto per poi presentare diminuzioni decrescenti fino ad avere continui incrementi per tempi successivi a 13 giorni circa. Dal confronto dei due metodi, si può notare come il secondo, prevedendo un controllo attivo sulla RAAN, permetta di raggiungere orbite più piccole in termini di  $a$ , difatti le variazioni dovute a tale metodo risultano essere in modulo sempre minori rispetto a quelle del metodo *ai – transfer*.

Gli andamenti discussi poc'anzi sono fortemente interconnessi a quelli dei *RAAN rates* mostrati nella Figura 6.8 e Figura 6.9, poiché la procedura di calcolo, restituendo in output le già note ripartizioni del semiasse maggiore, ritiene che queste, nonché gli andamenti dei *RAAN rates* appena citati, siano quelli ottimali per il generico tempo finale considerato. Infatti, dalla Figura 6.8 si può osservare come per il metodo *ai – transfer* suddetta quantità decresca in maniera monotona, garantendo il maggior rateo negli istanti in cui l'orbita iniziale risulta ancora eccessivamente arretrata rispetto a quella finale, mentre per tempi successivi, dove l'orbita iniziale supera quella finale, l'andamento del *RAAN rate* risulta lievemente decrescente, quasi costante, di modo che le orbite non si allontanino troppo. Il metodo *ai $\Omega$  – transfer* presenta, a differenza del precedente, e in relazione agli andamenti delle rispettive variazioni di  $a$ , un punto estremo di massimo per lo stesso tempo mostrato in Figura 6.7. Per cui, raggiunto il massimo valore di *RAAN rate*, l'andamento acquisisce un carattere monotono decrescente, il quale però assume valori comunque contenuti e minori dell'unità. In questo caso si deve dunque preferire l'inserimento del chaser in un'orbita di coasting che possiede un *RAAN rate* minore di quello iniziale, anche se l'orbita di partenza risulta essere già in ritardo per il tempo zero, in modo da sfruttare al meglio le variazioni  $\Delta a$  e  $\Delta i$  (come si vedrà a breve), per poi coprire questa apparente contro intuizione tramite il controllo attivo sulla  $\Omega$ .

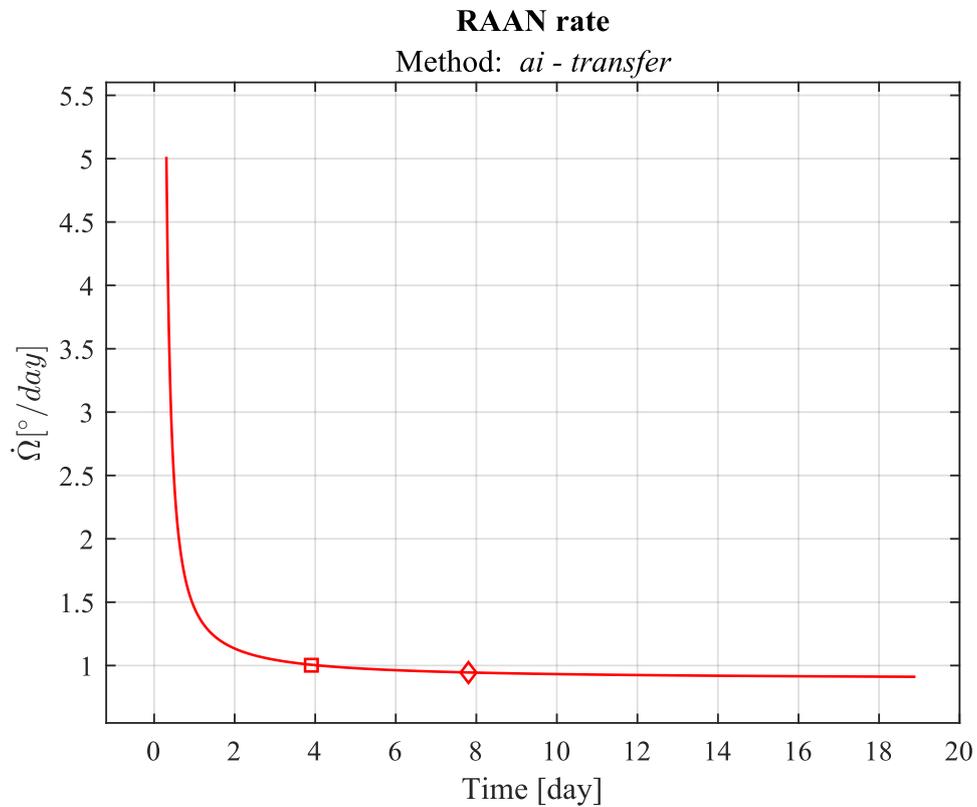
Volendo valutare quantitativamente l'impatto del semiasse maggiore sul *RAAN rate*, in accordo all'equazione (3.21) e all'istante di tempo finale considerato per lo studio<sup>31</sup>, le variazioni  $\Delta a$  dovute al primo impulso portano ad una variazione relativa del *RAAN rate* di circa 5.51% per il metodo *ai – transfer* e 1.76% per quello *ai $\Omega$  – transfer*. Ciò sottolinea il fatto che, per garantire il valore ottimale di *RAAN rate* a quello specifico istante di tempo finale serva un incremento del semiasse maggiore, il quale contribuirà ad avere  $\dot{\Omega}_{ai} > \dot{\Omega}_{ai\Omega}$ , in accordo a quanto detto prima in merito alle orbite più “contenute” per il secondo metodo di calcolo.

---

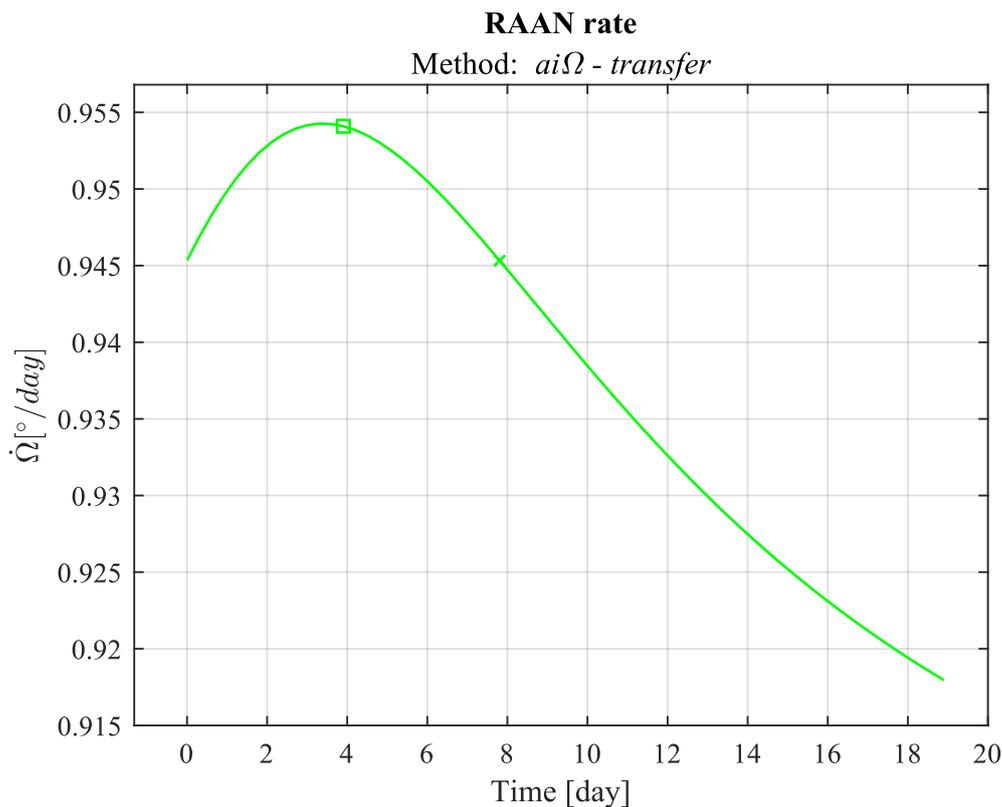
<sup>31</sup> Si intende il *waiting time*, con la dovuta accortezza discussa precedentemente.



**Figura 6.7:** Ripartizione delle variazioni di semiasse maggiore per la configurazione orbitale in esame al variare del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



**Figura 6.8:** Andamento del RAAN rate dell'orbita di coasting al variare del tempo finale, per il metodo *ai - transfer*.



**Figura 6.9:** Andamento del RAAN rate dell'orbita di coasting al variare del tempo finale, per il metodo *aiΩ - transfer*.

### Ripartizione delle variazioni dell'inclinazione

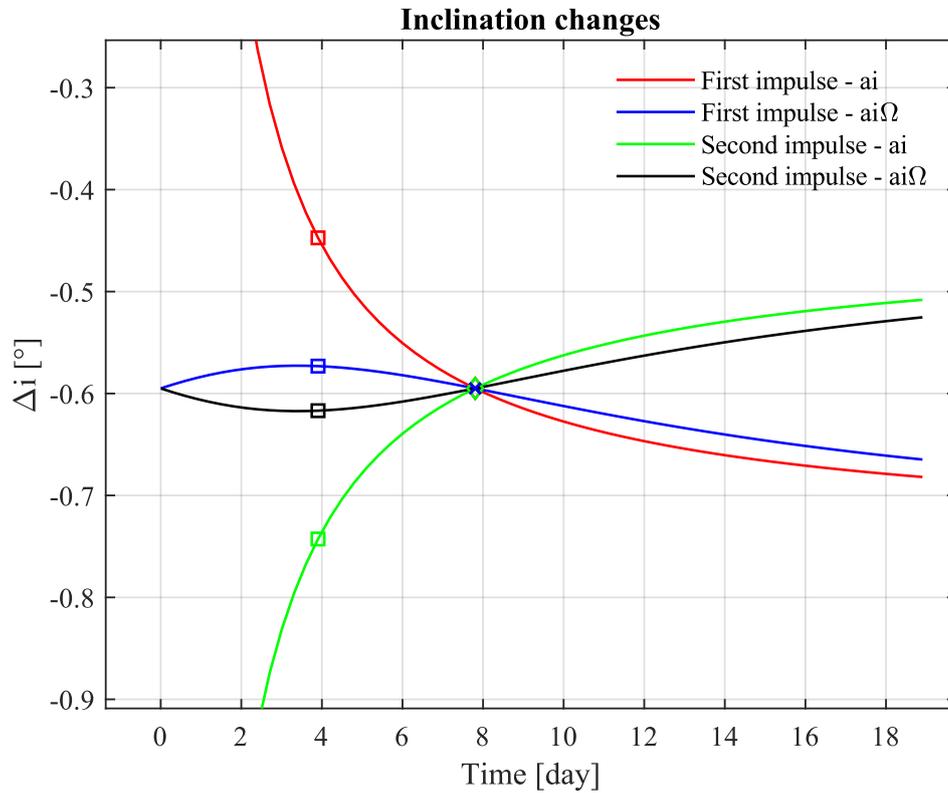
In merito alle variazioni di inclinazione (Figura 6.10), per la configurazione orbitale trattata, a prescindere dal metodo usato gli impulsi porteranno sempre ad una diminuzione di inclinazione. Inoltre, mentre per il metodo *ai - transfer* al crescere del tempo finale il primo impulso porta a diminuzioni monotone sempre più marcate, per il metodo *aiΩ - transfer* si raggiunge un minimo di diminuzione per un tempo poco minore del waiting time (quadrato in figura), per poi registrare diminuzioni sempre più grandi all'aumentare del tempo. È da notare anche come il tempo in cui si registrano i punti estremali del secondo metodo sia uguale a quello discusso nella sezione precedente in merito al semiasse maggiore e al *RAAN rate*.

In relazione allo studio fatto precedentemente in merito alla regressione della linea dei nodi e tenendo in considerazione il fatto che l'orbita di partenza è retrograda, il *RAAN rate* subirà un'opportuna diminuzione se vista esclusivamente in termini di inclinazione. Il motivo, come detto in un capitolo precedente, è da ricercare nel valore ottimale di  $\dot{\Omega}$ . Considerando lo stesso tempo finale presentato nel paragrafo precedente, in accordo all'equazione (3.21), la variazione di inclinazione causata dal primo impulso porta ad una variazione relativa del RAAN rate di circa -5.14% per il metodo *ai - transfer* e -6.58% per quello *aiΩ - transfer*. Confrontando tali percentuali con quelle prodotte dai  $\Delta a$  si può apprezzare numericamente quanto descritto in precedenza tramite lo studio dei pesi di inclinazione e semiasse maggiore: l'orbita iniziale, essendo prossima ad una di tipo polare, porta a grandi variazioni di  $\dot{\Omega}$  anche se si registrano variazioni di inclinazione relativamente piccole. In conclusione, sommando i contributi netti dovuti ai due parametri orbitali, si ottiene una variazione relativa netta di circa 0.37% per il primo metodo e di -4.82% per il secondo. Tali valori, i quali sono raccolti nella sottostante Tabella 6.2, portano a concludere che per la configurazione orbitale e il tempo

finale scelti, a prescindere dal metodo utilizzato, occorrerà porsi in un'orbita intermedia caratterizzata da un minore semiasse maggiore e da una minore inclinazione orbitale. Tuttavia, nel caso in cui non fosse previsto un cambio attivo di RAAN, la combinazione dei parametri orbitali porta ad un lieve incremento del *RAAN rate*, utile ad accorciare la distanza che separa fin dal principio le due orbite, "accelerando" leggermente quella iniziale. Nel caso in cui invece fosse previsto un cambio attivo di RAAN, gli impulsi  $\Delta V_{\Omega}$  permetteranno il completamento della manovra senza portare i restanti parametri orbitali ( $a$  e  $i$ ) ad assumere valori relativamente grandi.

<i>Metodo</i>	<i>Contributo di <math>\Delta a</math></i>	<i>Contributo di <math>\Delta i</math></i>	<i>Contributo netto</i>
<i>ai - transfer</i>	0.055055057347734	-0.051374943138062	0.003680114209672
<i>ai<math>\Omega</math> - transfer</i>	0.017634463889492	-0.065832254169710	-0.048197790280219

**Tabella 6.2:** Variazioni del RAAN rate relativo a seguito delle variazioni iniziali di  $a$  e  $i$ , per la configurazione trattata e per il tempo considerato.



**Figura 6.10:** Ripartizione delle variazioni di inclinazione per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

## Ripartizione delle variazioni della RAAN e $\Delta x$

Si considerino ora le variazioni dell'ultimo parametro orbitale mostrate in Figura 6.11, le quali presentano caratteristiche lievemente diverse rispetto agli andamenti presentati precedentemente. Dal momento che il tempo di arrivo è fissato, la procedura di calcolo determina il singolo tempo finale a prescindere dall'entità del primo sparo. Ciò comporta il fatto che la variazione  $\Delta\Omega$  residua al tempo finale dipende dalle variazioni  $\Delta a$  e  $\Delta i$  ottenute tramite il primo sparo. Mentre per il metodo *ai-transfer*, il quale non necessiterà di ulteriori approfondimenti, tale variazione residua, per la natura stessa del metodo, è sempre nulla a prescindere dal tempo finale, per il metodo *ai $\Omega$ -transfer* essa dovrà essere coperta tramite il controllo attivo. Oltre a tutto ciò, per il secondo metodo sono da notare due punti molto importanti, i quali verranno successivamente richiamati per il metodo attendista.

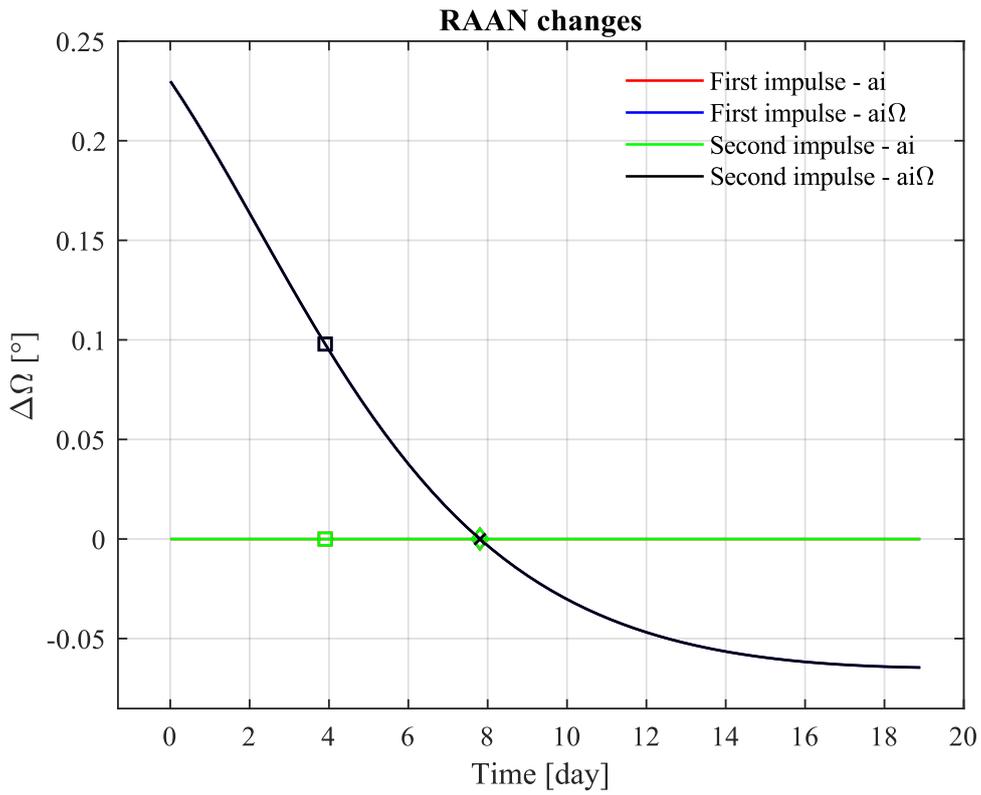
- **La pendenza istantanea della curva.** Essa risulta essere variabile nel tempo, e nello specifico, al crescere del tempo finale, la curva in Figura 6.11 vede un decremento del modulo della pendenza istantanea. Ciò è dovuto al fatto che l'andamento tiene in considerazione l'evoluzione della quantità  $\Delta\Omega_{J_2}$ , ovvero la differenza di RAAN che si guadagna sfruttando l'effetto  $J_2$ , che come già noto è fortemente legata all'andamento di  $\Delta x$  mostrato in Figura 6.12 ed è anche la causa della mancata simmetria delle curve tra primo e secondo impulso.
- **I punti per cui le variazioni  $\Delta\Omega$  si annullano.** A rigor di logica le variazioni  $\Delta\Omega$  dovrebbero annullarsi esattamente per il tempo d'attesa  $t_w$ , ma come si è detto in precedenza, il primo impulso porta a ridefinire le condizioni iniziali che saranno proprie della fase di coasting. Questo porta a concludere che, per la generica configurazione orbitale, le variazioni  $\Delta\Omega$  si annullano quando il tempo di arrivo risulta tale da poter garantire delle variazioni iniziali di  $a$  e  $i$  che portano ad un *RAAN rate* tale da coprire completamente il costo  $x$  durante il tempo previsto, senza dunque scomodare il controllo attivo di RAAN come accade per il primo metodo. Per avere maggior conferma e chiarezza di quanto detto, basti considerare i valori di  $x$  (Figura 6.6) e  $\Delta x$  (Figura 6.12) per suddetto valore di tempo finale: essi risulteranno identici in modulo, e soddisferanno, solo per tale istante di tempo, la condizione (4.25) come accade per il metodo *ai-transfer*.

Infine, tenendo conto quanto detto nella nota 27, in merito all'andamento di  $\Delta x$  (Figura 6.12) è importante sottolineare diversi punti:

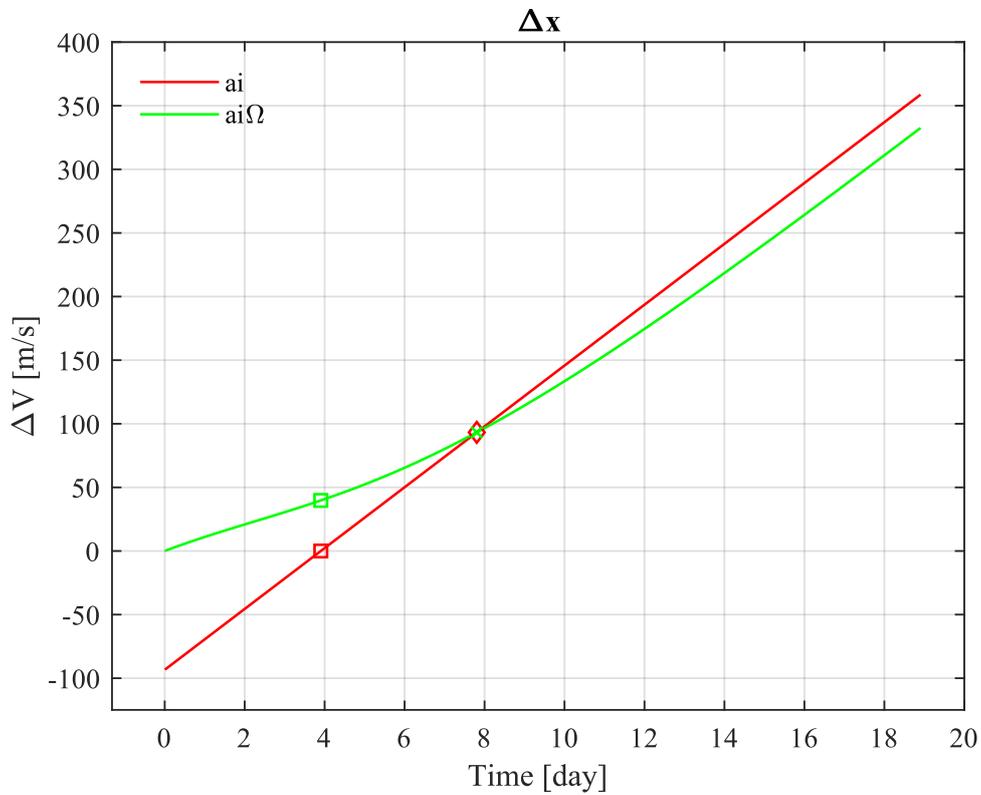
- **Metodo *ai $\Omega$ -transfer*.** Come anticipato poc'anzi, l'andamento è correlato al  $\Delta\Omega_{J_2}$  che si guadagna spostando il *chaser* dalla sua orbita ad una di *coasting* che possiede un *RAAN rate* ottimale per la specifica configurazione orbitale e per lo specifico tempo finale considerato. L'andamento mostra che per tempi finali crescenti la variazione  $\Delta\Omega$  guadagnata tramite l'effetto  $J_2$  ( $\Delta\Omega_{J_2}$ ) cresce, mentre quella ottenuta tramite gli impulsi ( $\Delta\Omega_{imp}$ ) decresce (vedi anche Figura 4.1). Tale comportamento, per fissare le idee, può essere visualizzato per la situazione prettamente teorica per cui il tempo finale è pari a quello iniziale: la quantità  $\Delta x$ , e quindi  $\Delta\Omega_{J_2}$ , è nulla, mentre la variazione attiva  $\Delta\Omega_{imp}$  risulta essere pari a circa  $0.46^\circ$ , ovvero la  $\Delta\Omega_0$ .
- **Metodo *ai-transfer*.** Visto che esso non può contare su un controllo attivo della RAAN, anche per tempi di arrivo prossimi a quelli di partenza, la procedura di calcolo converge al valore di  $\Delta x$ , non nullo e pari al relativo valore di  $x$ , che rende vera la (4.25). Ciò implica il fatto che il *chaser* si trasferirà sempre su un'orbita di coasting diversa da quella di partenza, la quale possiederà i parametri orbitali ideali<sup>32</sup> per la corretta conclusione della trasferta.

---

<sup>32</sup> Qui intesi come quelli che minimizzano il costo di trasferta.



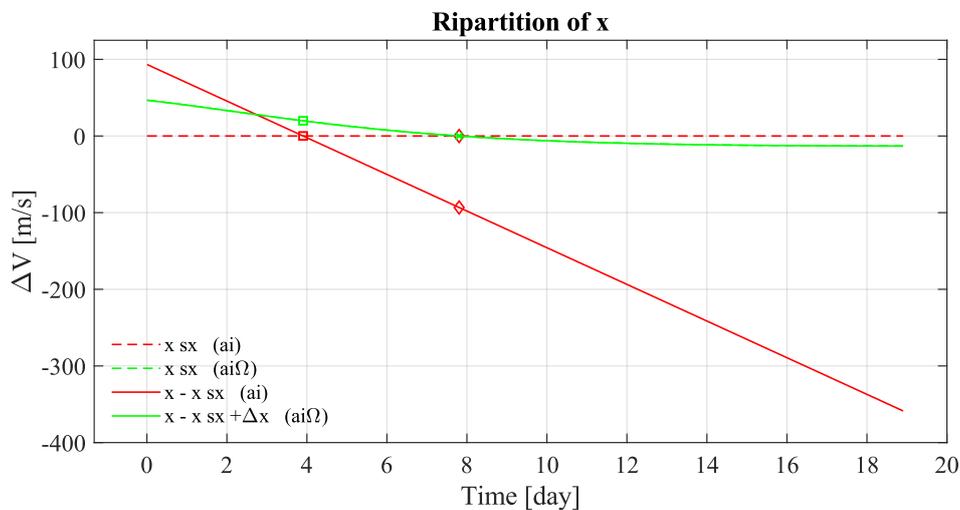
**Figura 6.11:** Ripartizione delle variazioni di RAAN per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



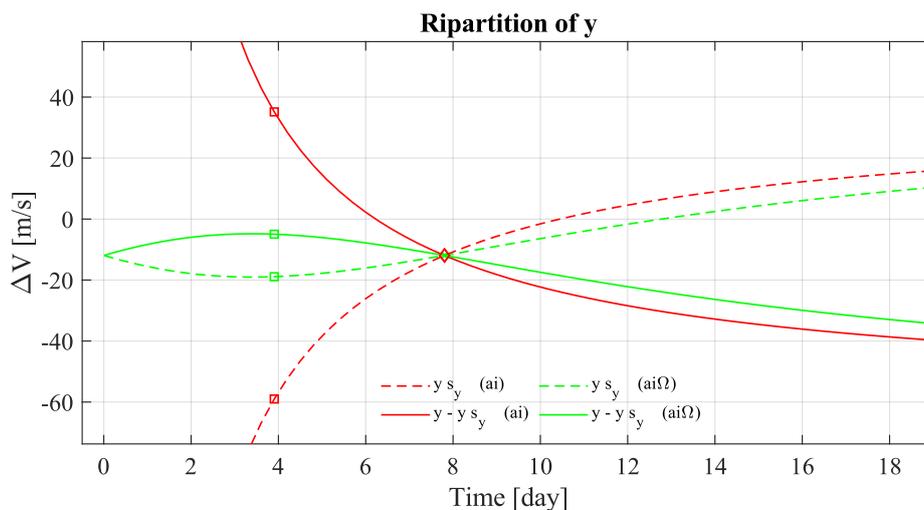
**Figura 6.12:** Andamenti di  $\Delta x$  in funzione del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

## Coefficienti di ripartizione

Di seguito vengono mostrati gli andamenti dei coefficienti di ripartizione  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  con i relativi complementari (Figura 6.13 - Figura 6.14 - Figura 6.15). Come si osserva dalle equazioni (4.39), (4.40) e (4.41), la forma degli andamenti in questione sarà identica a quella delle rispettive variazioni dei parametri orbitali, poiché le altre quantità in gioco che vi compaiono ( $V_0$ ,  $a_0$  e  $i_0$ ) risultano essere stazionarie e dipendenti esclusivamente dalla configurazione orbitale di tempo zero. È da osservare anche la già nota simmetria delle curve che riguarda la ripartizione del semiasse maggiore e dell'inclinazione, ma che per il motivo discusso prima non si estende al caso della RAAN. Infine, è possibile notare come i valori dei suddetti parametri spazii all'interno di range molto vasti e diversi tra loro, dando conferma a quanto detto in precedenza in merito alle osservazioni sui tre parametri di ripartizione.



**Figura 6.13:** Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo della RAAN al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



**Figura 6.14:** Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo del semiasse maggiore al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

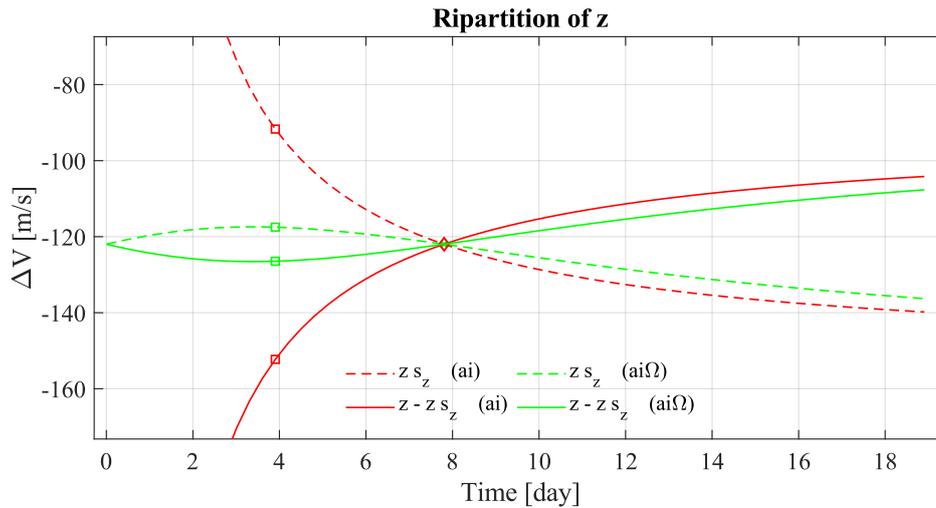


Figura 6.15: Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo dell'inclinazione al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

### Confronto tra prestazioni del propulsore e costi di manovra

Come ampiamente discusso in precedenza, le prestazioni del propulsore installato a bordo del satellite *chaser* giocano un ruolo fondamentale nella riuscita della missione. Per quantificare suddetta *prestazione* si è sfruttato il cosiddetto *thrust-to-mass ratio* (*TMR*), ovvero il rapporto tra la spinta che il propulsore riesce a fornire e la massa dello stesso. Dal momento che si tratta la propulsione elettrica, i livelli di spinta risultano essere relativamente bassi rispetto a quelli tipici della propulsione chimica, e a conferma di ciò per i propulsori in questione tale coefficiente di prestazione anziché essere misurato in  $N/kg$  è invece espresso in  $mN/kg$ .

Per lo scopo, la Figura 6.16 mostra l'andamento del costo di missione, determinato sfruttando i diversi metodi presentati finora, e il budget fornito dal propulsore, determinato tramite il prodotto tra il tempo e il *TMR*. In merito a quest'ultimo, è stato considerato un *fascio di prestazione*, ovvero diversi valori di *TMR* che portano al ventaglio di rette in nero. Come si può notare, al crescere del *TMR* il propulsore, a parità di tempo, riesce a garantire un  $\Delta V$  maggiore. Inoltre, a fissato *TMR*, al crescere del tempo a disposizione per la manovra, il  $\Delta V$  fornito dal propulsore cresce linearmente, poiché la tipologia di propulsione, non essendo impulsiva bensì continua, è distribuita nell'intero arco di spinta durante il quale il propulsore resta necessariamente acceso. Oltre a tutto ciò, la Figura 6.16 permette di concludere anche che, supposto ad esempio che il tempo massimo a disposizione per il completamento della manovra sia di circa 19 giorni, un propulsore con un *thrust-to-mass ratio* di  $0.1 mN/kg$  non è in grado di coprire i costi, a prescindere dal tempo a disposizione. Tuttavia, considerando per fissare le idee le sole curve in figura, un *thruster* con un *TMR* di  $0.3 mN/kg$  permette il completamento della missione, senza però coprire il minimo di costo, il quale, per esempio, è invece garantito con un *thrust-to-mass ratio* di  $0.9 mN/kg$ . Il motivo di questo comportamento è da imputare alla tipologia di propulsione: affinché il propulsore sia in grado di coprire interamente il costo di missione, esso necessita di uno specifico lasso di tempo detto *thrust time* durante il quale esso deve costantemente rimanere acceso. Indicando con  $\Delta V_{req}$  il costo di missione richiesto, il tempo di spinta è calcolabile come:

$$t_{thrust} = \frac{\Delta V_{req}}{TMR} \quad (6.3)$$

È chiaro come suddetto tempo debba essere minore del tempo disponibile per la trasferta, poiché se così non fosse, tali casistiche si presenterebbero come la curva a 0.1 mN/kg descritta poc'anzi, ovvero caratterizzanti una condizione proibitiva. Da questa affermazione è possibile concludere che per dimensionare opportunamente il propulsore, una prima stima del minimo valore di *thrust-to-mass ratio* ammissibile può essere ottenuta invertendo l'equazione (6.3), noto il costo di missione e ponendo il tempo di spinta pari al tempo a disposizione.

La Figura 6.17 mostra gli andamenti del tempo di spinta parametrizzati tramite il TMR (espresso in mN/kg) al variare del tempo finale di manovra, indicando con il tratto continuo i valori del metodo *ai – transfer* e con quello tratteggiato quelli riferiti al metodo *aiΩ – transfer*. Gli andamenti richiamano ovviamente quelli di costo globale presentati nella precedente Figura 6.3, presentando i relativi markers per gli stessi istanti di tempo. Anche se per valori di TMR maggiori di 0.1 mN/kg gli andamenti risultano di difficile interpretazione, basta sapere che essi hanno stessa forma di quelli, invece più distinguibili, ottenuti per un valore pari a 0.3 mN/kg (Figura 6.18). Ciò che evidenzia la figura è l'impatto del TMR sui relativi andamenti del tempo di spinta, e nello specifico come il passaggio da 0.1 mN/kg a 0.3 mN/kg segni un enorme diminuzione del tempo medio di spinta, passando da 28 giorni a 10 giorni circa. Tuttavia, è importante notare che al crescere del TMR del propulsore tale impatto risulta essere sempre meno marcato, ed infatti le curve tendono ad addensarsi sempre più verso tempi mediamente minori, raggiungendo al limite il valore nullo per un TMR infinito.

Per la configurazione orbitale trattata, la Tabella 6.3 mostra i tempi di spinta (espressi in giorni) richiesti per ciascun metodo proposto, considerando a titolo di esempio un propulsore che abbia un TMR pari a 0.1 mN/kg e supponendo di operare la trasferta al minimo costo. In ogni caso, tramite la (6.3), è possibile estendere abbastanza facilmente i calcoli anche per specifici valori di *thrust-to-mass ratio* e di costo.

Quanto detto finora, è da riferirsi sempre alle limitazioni intrinseche del propulsore, le quali non sono state qui considerate. Tra queste, vi sono ad esempio:

- Gli effettivi *livelli di spinta* forniti, al netto delle perdite di disallineamento o altro.
- Il *quantitativo di propellente* disponibile a bordo, il quale, non potendo per ovvi motivi assumere valori indefinitamente grandi, limita il tempo di spinta.
- Gli *algoritmi del controllo di spinta*, i quali sono generalmente scanditi da tempi di accensione in cui il propulsore può effettivamente fornire spinta, e tempi di spegnimento, durante il quale deve invece restare spento. Questo porta a definire un *tempo massimo di spinta*, ovvero il più ampio lasso di tempo di accensione, che deve auspicabilmente essere il più grande possibile.

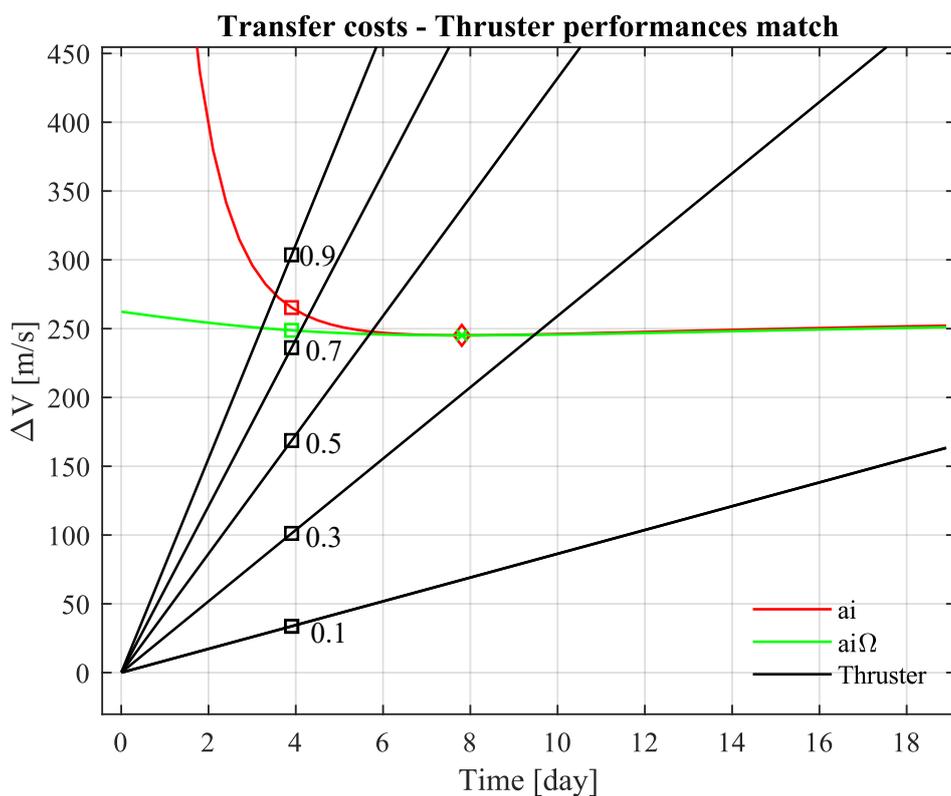


Figura 6.16: Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore, al variare del tempo finale.

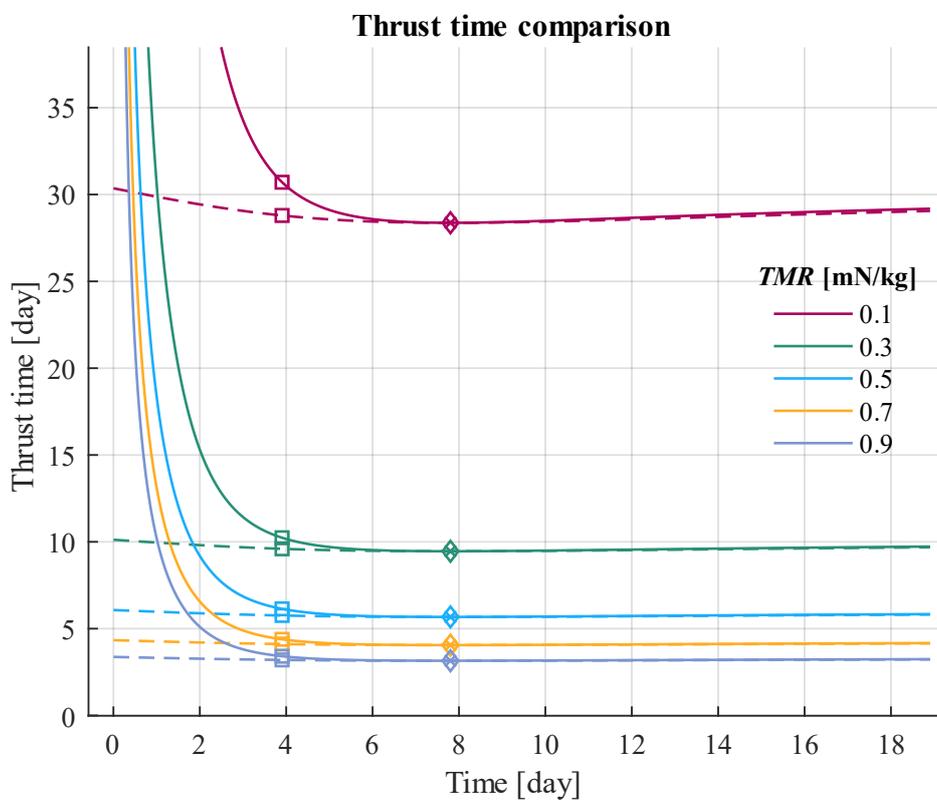


Figura 6.17: Andamenti del tempo di spinta al variare del tempo finale di trasferta per il primo metodo (linea continua) e per il secondo (linea tratteggiata).

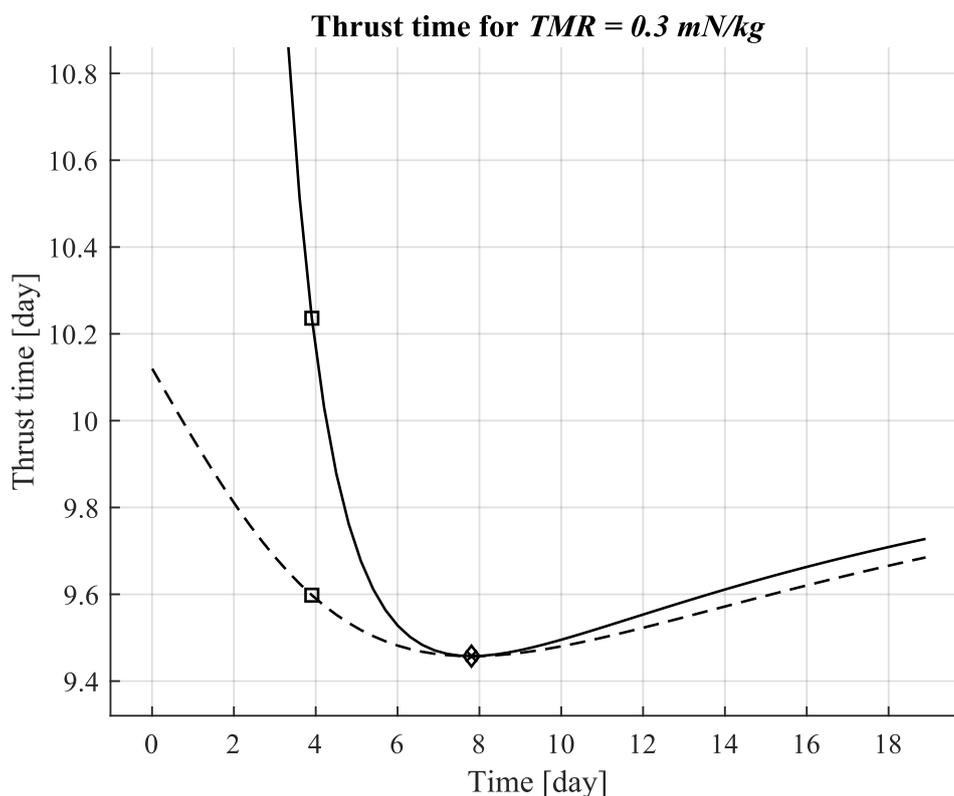


Figura 6.18: Dettaglio del tempo di spinta al variare del tempo finale per un propulsore con un TMR pari a 0.3 mN/kg.

<i>Metodo</i>	<i>Tempo di spinta [day]</i>
<i>ai - transfer</i>	28.372503936843241
<i>aiΩ - transfer</i>	28.372503909567524

Tabella 6.3: Tempi di spinta richiesti per entrambi i metodi riferiti al caso di ottimo.

### Comportamento asintotico della procedura di calcolo

Allo scopo di osservare il comportamento degli andamenti per tempi lunghi, anche se non vi è alcun aspetto pratico cruciale, si può estendere la procedura di calcolo per tempi più grandi, che per lo scopo sono stati fissati nell'ordine di qualche decina di anni. Così facendo, mentre le variazioni di semiasse maggiore e inclinazione tendono a valori asintotici non nulli, quelle riferite alla RAAN si avvicinano allo zero. Questo comportamento è dovuto al fatto che, avendo sempre più tempo a disposizione, si preferisce omettere il controllo attivo sulla RAAN e sfruttare al massimo l'enorme tempo a disposizione per beneficiare del contributo dell'effetto  $J_2$  a seguito delle variazioni di  $a$  e  $i$  introdotte dal primo impulso. Si può dunque apprezzare come il metodo *ai - transfer* e *aiΩ - transfer* tendano a coincidere per tempi sempre più grandi, sottolineando così come la procedura di calcolo tenga intrinsecamente conto dei benefici dell'effetto  $J_2$ , andando, come di dovere, a minimizzare i costi in relazione al tempo a disposizione per il completamento della missione. In ogni caso, è bene tenere a mente che il metodo *ai - transfer* è sempre meno conveniente del secondo metodo, a meno che non si abbia un  $\Delta\Omega$  pari a zero, che è proprio ciò che accade per  $t \rightarrow +\infty$ .

In merito ai costi, quello relativo al primo impulso è di circa 156 m/s, mentre quello del secondo impulso è di 109 m/s, per un totale di costo asintotico pari a circa 265 m/s, il quale risulta essere decisamente elevato rispetto al minimo assoluto. Infine, la seguente tabella mostra le diverse variazioni in questione, da intendere comunque approssimative, sebbene presentino sufficiente affidabilità.

	$\Delta\alpha$ [km]	$\Delta i$ [°]	$\Delta\Omega$ [°]	$\Delta V$ [m/s]
<b>Primo impulso</b>	67	-0.74	0	156
<b>Secondo impulso</b>	-112.5	-0.45	0	109

**Tabella 6.4:** Valori asintotici ottenuti estendendo nel tempo la procedura di calcolo.

## Capitolo 7

### Risultati del confronto dei due approcci al metodo $ai\Omega$ - *transfer*

Dal capitolo precedente, tramite il confronto dei due metodi base si è vista e approfondita l'importanza dell'effetto  $J_2$  e dei benefici che esso porta alle trasferte LEO. Il metodo  $ai - transfer$  dimostra che, fornendo opportunamente un impulso combinato iniziale di tipo  $ai$ , e quindi variando solamente il semiasse maggiore e l'inclinazione, è possibile modificare opportunamente il valore del *RAAN rate* a cui è soggetta l'orbita del *chaser* per coprire interamente il costo del relativo parametro orbitale ( $x$ ), così da allineare le due linee dei nodi.

Il secondo metodo proposto mostra invece l'impatto del cambio attivo di RAAN sulla trasferta, il quale porta ad una ulteriore riduzione dei costi, che tuttavia si affievolisce per istanti di tempo prossimi a quelli di ottimo (vedi Figura 6.3). Nonostante tutto, sebbene tale metodo sia quello ideale, tale affermazione risulta vera solo a livello teorico, poiché nel momento in cui si semplifica la procedura di ottimizzazione tramite la (4.30), il metodo  $ai\Omega - transfer$  restituirà dei costi affetti dagli inevitabili errori di approssimazione, che non rendono il metodo il più conveniente in assoluto. Proprio a causa di ciò, al fine di ridurre ulteriormente i costi, è possibile trattare la trasferta tramite un approccio diverso, ovvero quello che è stato precedentemente definito *attendista*.

In questo capitolo verranno dunque confrontati i due diversi approcci al metodo  $ai\Omega - transfer$ , escludendo d'ora in poi il metodo  $ai - transfer$  per i motivi di cui prima. Inoltre, si considererà la stessa configurazione orbitale di partenza (vedi Tabella 4.1), così da evidenziare gli aspetti più cruciali e valutare numericamente la vera e propria riduzione dei costi. Si sfrutterà lo stesso schema di presentazione del capitolo precedente, nonché lo stesso codice grafico dei diversi *markers*, i quali ne vedranno uno nuovo utile a indicare tutti i valori numerici relativi al tempo di ottimo del metodo  $ai\Omega - transfer$  attendista: l'*asterisco*.

#### Costo globale di trasferta

Dagli andamenti dei singoli impulsi mostrati in Figura 7.1 è possibile notare l'enorme divario che si presenta tra i due metodi, che troverà maggiore conferma negli andamenti di  $\Delta a$ ,  $\Delta i$  e  $\Delta \Omega$ . Il metodo attendista, avvalendosi di un solo impulso, dovrà coprire tutti i costi senza possibilità di suddividerli in due tempi diversi tra loro, portando così a variazioni mediamente più grandi in modulo e ad un impulso che risulterà essere nettamente superiore ai singoli impulsi del primo metodo. Inoltre, il nuovo metodo porta a *Impulse Fraction* e *Impulse Ratio* costantemente nulli.

Dalla somma dei due impulsi si ricavano gli andamenti del costo totale mostrati in Figura 7.2, di cui viene mostrato un dettaglio in Figura 7.3, e da queste è possibile concludere che:

- Il metodo attendista risulta più conveniente rispetto allo pseudo-ottimale, e a maggior ragione del metodo  $ai - transfer$ , ma solo per tempi finali di trasferta non troppo distanti al *waiting time*<sup>33</sup> (quadrato nelle figure), oltre i quali subisce un notevole incremento che rende inutile l'attesa dell'allineamento delle orbite (in termini di RAAN).

---

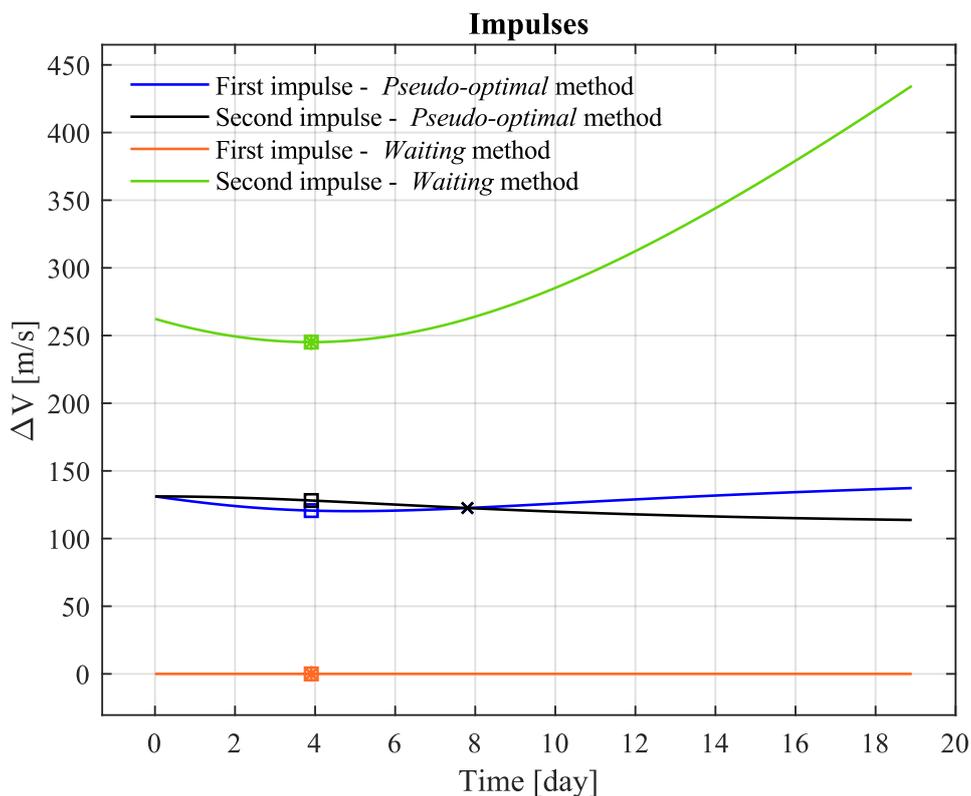
<sup>33</sup> In riferimento a quanto detto in merito al *waiting time*, per il metodo attendista esso è "realmente" il tempo che annulla  $x$ , poiché vi è l'assenza del primo impulso.

- Per tempi finali più grandi, il mancato impulso iniziale grava enormemente sul costo totale a causa del fatto che la differenza di RAAN da coprire con il controllo attivo cresce sempre più (vedi Figura 7.8), rendendo di conseguenza necessario l'impulso al tempo zero come mostra l'andamento del metodo pseudo-ottimale.
- Il costo minimo del metodo attendista (asterisco azzurro nelle figure) si presenta per un tempo finale pari al *waiting time* (quadrati nelle figure), sottolineando l'aspetto cruciale attorno cui gravita il vantaggio del metodo attendista: se il tempo a disposizione per il completamento della trasferta è abbastanza grande conviene attendere che le due orbite allineino le proprie RAAN in modo da annullare il costo  $x$ , e successivamente completare la manovra sfruttando l'impulso finale.

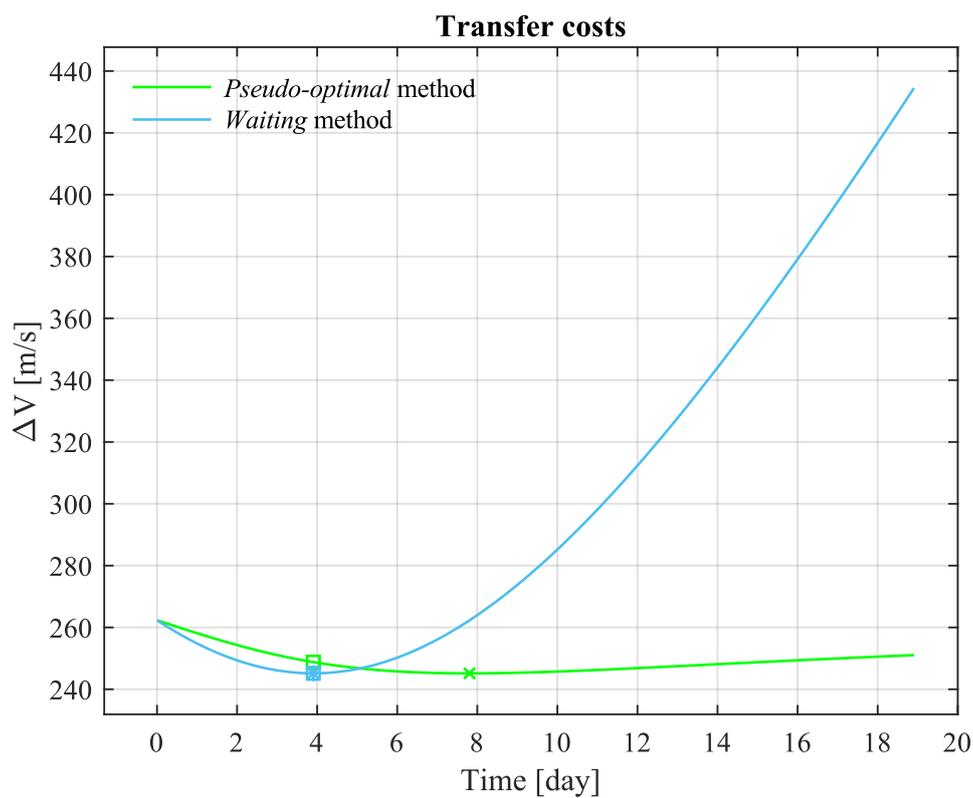
Infine, la sottostante Tabella 7.1 mostra i valori numerici relativi ai minimi di costo per entrambi i metodi.

<i>Metodo</i>	$\Delta V_{min}$ [m/s]
Pseudo-ottimale	245.138433778663
Attendista	245.138433567045

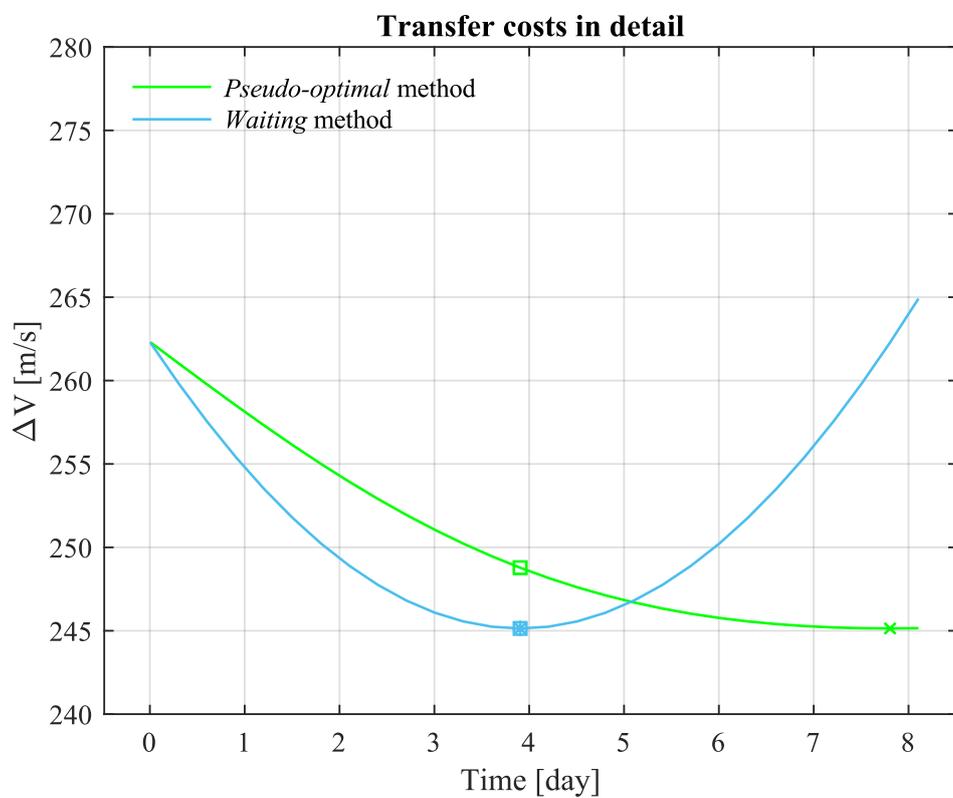
**Tabella 7.1:** Valori di costo minimo al variare del metodo utilizzato.



**Figura 7.1:** Andamenti dei singoli impulsi per ciascun metodo in esame.



**Figura 7.2:** Andamenti del costo globale per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



**Figura 7.3:** Dettaglio del costo globale per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

## Costi necessari al cambio orbitale

Considerando i costi necessari per passare dall'orbita iniziale a quella finale mostrati in Figura 7.4, si nota come essi siano identici a quelli presentati nel capitolo precedente (Figura 6.6), sottolineando ancora una volta come i valori di  $x$ ,  $y$  e  $z$  siano indipendenti da tutto ciò che non riguarda intrinsecamente la configurazione orbitale di tempo zero. L'unica differenza sostanziale riguarda i valori di ottimo (asterischi in figura), i quali si spostano verso il tempo che annulla il costo di cambio RAAN. Questo comportamento, dal momento che si ripresenterà ovviamente per i successivi grafici, a meno che non si renderà necessario, non verrà più sottolineato.

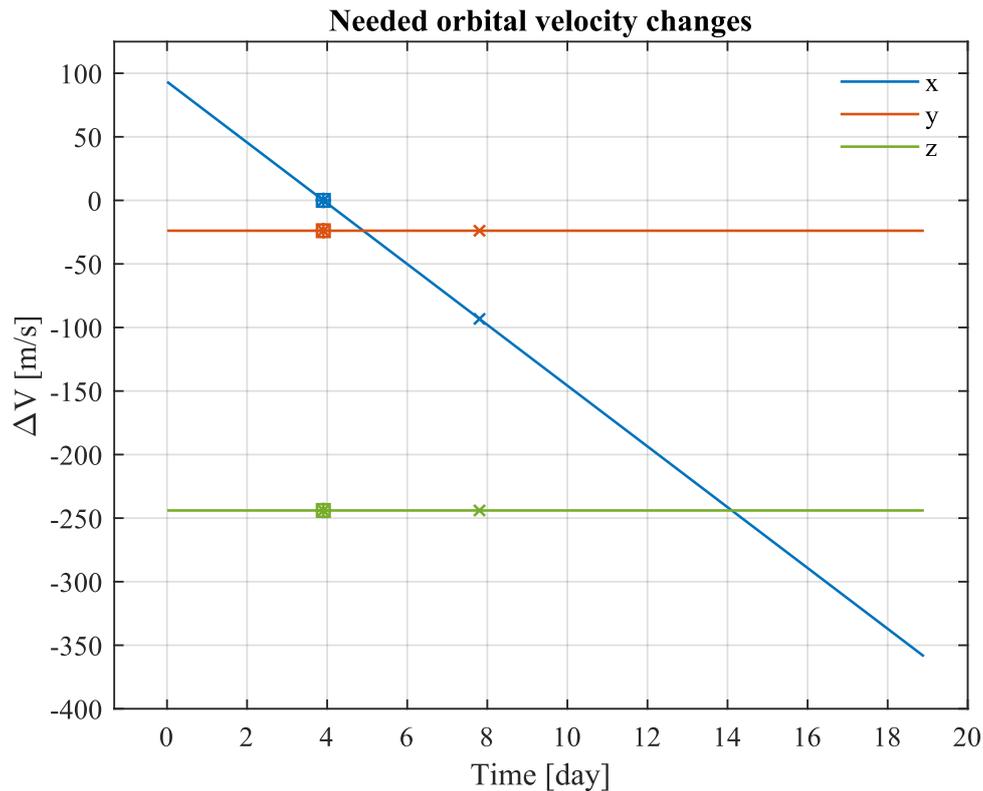
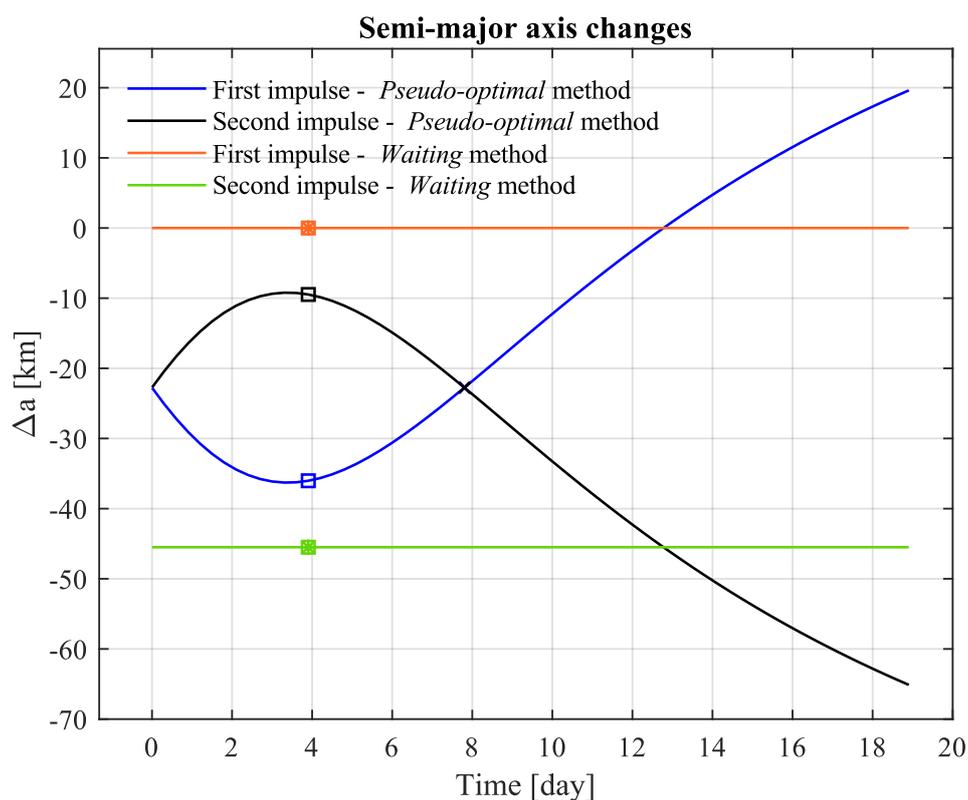


Figura 7.4: Andamenti dei costi richiesti dalla trasferta al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale in esame.

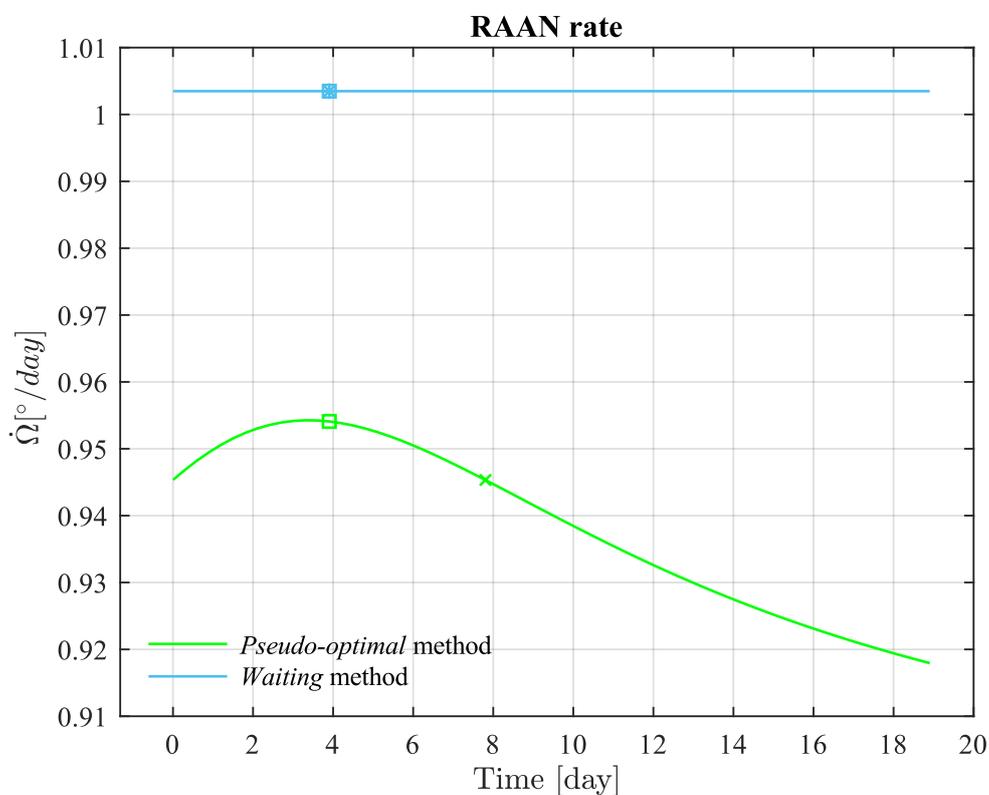
## Ripartizione delle variazioni del semiasse maggiore

Osservando gli andamenti presentati in Figura 7.5, così come accadrà per i successivi grafici che riguardano le ripartizioni dei parametri orbitali, dal momento che il metodo  $ai\Omega - transfer$  attendista è privato del primo impulso, l'intera variazione del generico parametro orbitale è demandata all'unico impulso finale. Come già detto, salvo ciò che accade per la RAAN, questo comporta andamenti costanti nel tempo, di cui il primo è sempre nullo, mentre il secondo presenta dei valori in modulo mediamente più alti di quelli relativi al metodo pseudo-ottimale.

Considerando l'esempio fatto per la valutazione numerica del  $RAAN$  rate, per il nuovo metodo in esame tutto ciò perde di significato, poiché il mancato impulso iniziale porta l'orbita di partenza ad essere essa stessa l'orbita di *coasting*, e da qui il fatto che il  $RAAN$  rate risulta essere costantemente pari a quello iniziale, a prescindere dal tempo finale (vedi Figura 7.6).



**Figura 7.5:** Ripartizione delle variazioni di semiasse maggiore per la configurazione orbitale in esame al variare del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione.



**Figura 7.6:** Andamento del RAAN rate dell'orbita di coasting al variare del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

## Ripartizione delle variazioni dell'inclinazione

Gli andamenti delle ripartizioni del cambio di inclinazione in Figura 7.7 evidenziano ancora una volta in maniera lampante quanto detto precedentemente: a causa del vincolo di coprire l'intera variazione, il modulo dell'unico impulso del metodo attendista risulta essere decisamente più grande rispetto a quelli del metodo pseudo-ottimale.

Le teorie della meccanica orbitale dimostrano come le manovre orbitali di cambio inclinazione siano tra le più costose in assoluto, e nonostante questo, unito all'affermazione precedente e al fatto che si parla di variazioni di qualche grado, possa sembrare in contrasto alla riduzione e ottimizzazione dei costi, è da ricordare che il costo globale sarà dato dalla combinazione dei singoli contributi, i quali permettono così di attenuare l'impatto dei  $\Delta V_i$  sul costo  $\Delta V_{tot}$ .

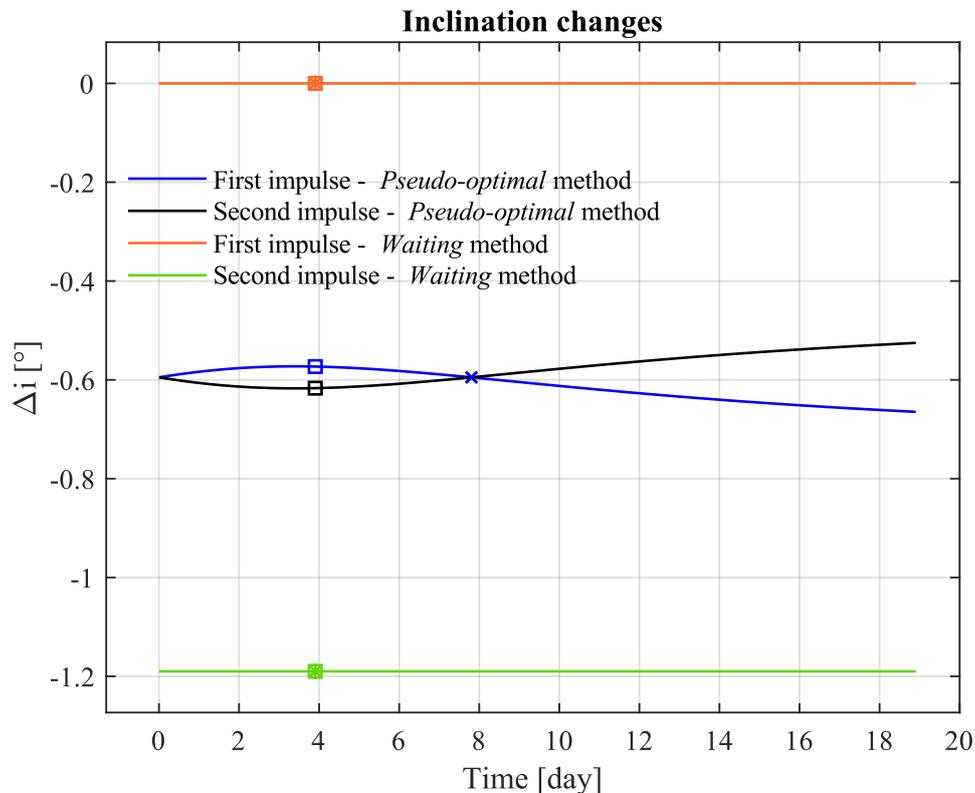


Figura 7.7: Ripartizione delle variazioni di inclinazione per la configurazione orbitale in esame, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

## Ripartizione delle variazioni della RAAN e $\Delta x$

Come anticipato in precedenza, l'impulso per il cambio di RAAN del metodo attendista non sarà mai costante nel tempo, poiché le due orbite in esame varieranno continuamente la loro RAAN nel tempo, seguendo la rispettiva legge di variazione espressa dalla (4.20).

Osservando la Figura 7.8, è da notare come l'andamento relativo al secondo impulso del metodo attendista (curva in verde) si annulli, e presenti l'ottimo, esattamente per il tempo in cui  $x$  è pari a zero, dove appunto si affida il compito di coprire l'intera variazione all'effetto  $J_2$ .

Richiamando i due punti fondamentali delle curve di ripartizione della RAAN, mentre per il metodo pseudo-ottimale si è già ampiamente discusso nel capitolo precedente, per quanto riguarda quello attendista il mancato impulso iniziale porta a due conseguenze.

- **La pendenza istantanea della curva.** A differenza del metodo pseudo-ottimale, essa risulta essere costante nel tempo, portando l'andamento in verde a seguire l'andamento di  $x$  mostrato in Figura 7.4, presentando inoltre dei valori in modulo decisamente più grandi in media rispetto al metodo pseudo-ottimale. Ciò è dovuto al fatto che per il metodo attendista la variazione attiva  $\Delta\Omega$ , ottenuta tramite l'unico impulso al tempo finale, è tale da coprire interamente la differenza residua al tempo di arrivo tra la RAAN dell'orbita target e quella di partenza.
- **Il punto in cui la variazione  $\Delta\Omega$  si annulla.** Per il metodo in questione esso cade esattamente per il *waiting time* (quadrato verde), poiché come anticipato prima il mancato impulso iniziale non porta ad alcuna ridefinizione iniziale della fase di *coasting*. Lo scopo di tale metodo si fonda proprio su questa affermazione, e quindi sul voler sfruttare al massimo la perturbazione terrestre per l'allineamento completo delle linee dei nodi delle due orbite in esame.

In merito all'andamento di  $\Delta x$  (Figura 7.9), per il metodo attendista, imponendo nulli i valori di  $s_y$  e  $s_z$ , dalla (4.26) risulta un andamento costantemente nullo. Ciò sottolinea il fatto che per il suddetto metodo, durante la fase di *coasting* il *chaser* non sfrutterà un'orbita di transizione a RAAN rate diverso, ma si avvicinerà al target sulla propria orbita. In particolare, per il punto di ottimo, dove le variazioni attive della RAAN sono esattamente nulle, la differenza totale  $\Delta\Omega$  è coperta interamente tramite l'effetto  $J_2$  anche se  $\Delta x$  è nullo (vedi nota 27).

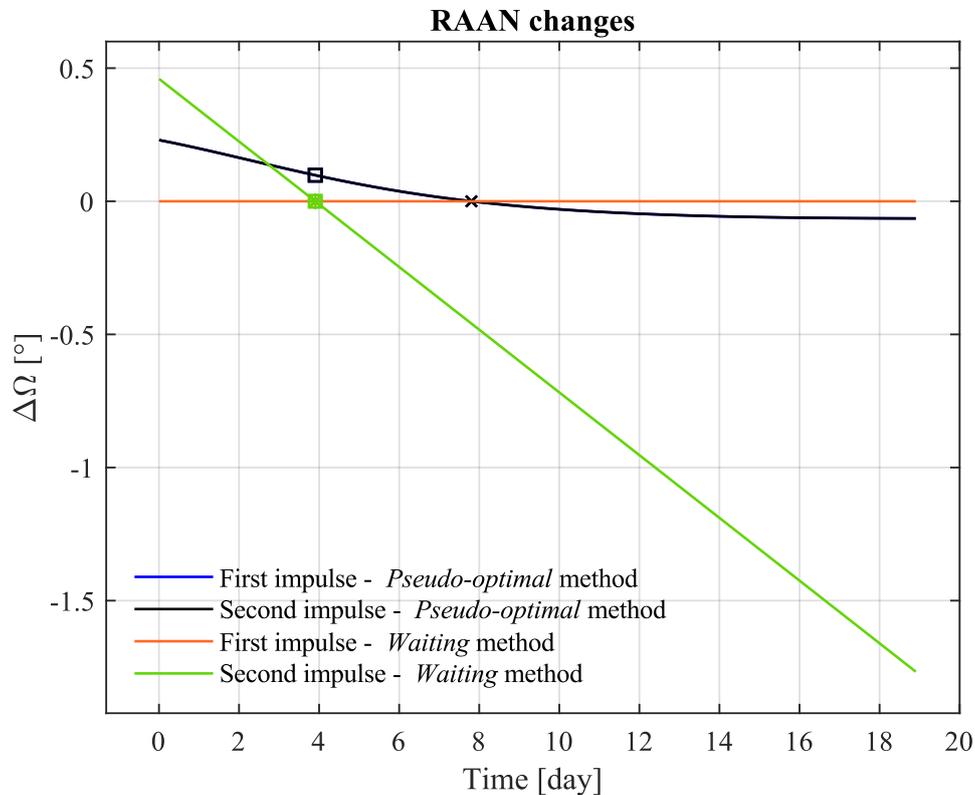


Figura 7.8: Ripartizione delle variazioni di RAAN per ciascun metodo in esame.

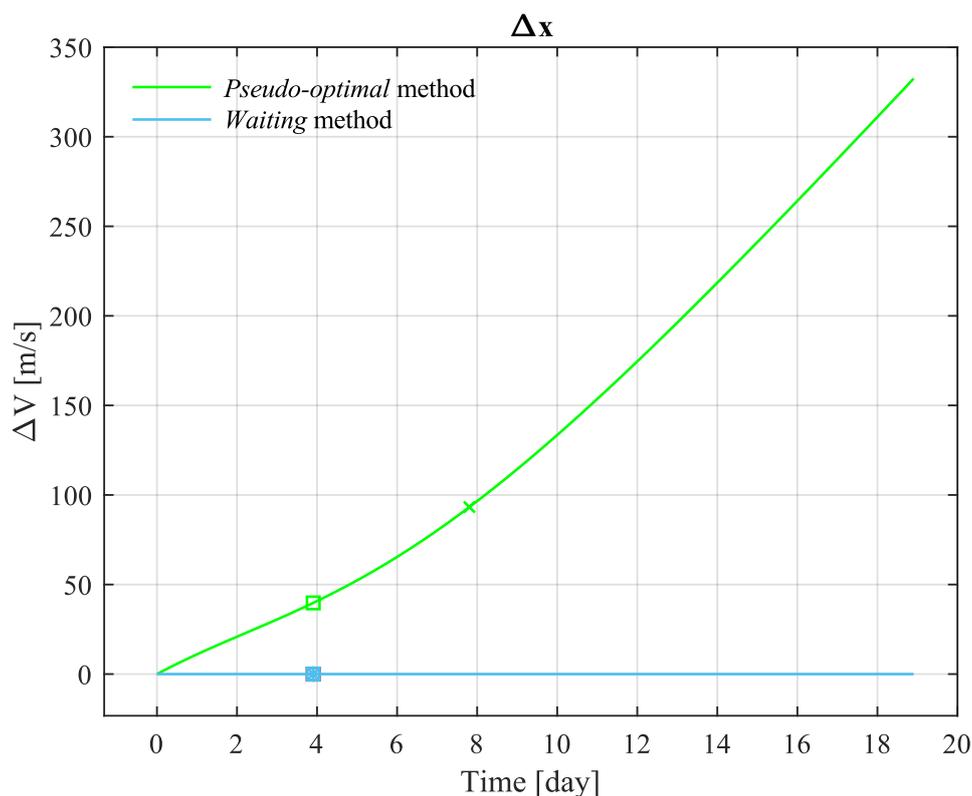


Figura 7.9: Andamenti di  $\Delta x$  in funzione del tempo finale, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

### Coefficienti di ripartizione

Per quanto riguarda gli andamenti dei parametri di ripartizione non c'è nulla di diverso da dire rispetto a quanto detto nel capitolo precedente, ma bisogna ricordare il discorso fatto in merito alla simmetria degli andamenti dei coefficienti  $s_y$  e  $s_z$  (Figura 7.11 - Figura 7.12), nonché il fatto che essi, data la natura delle equazioni (4.39), (4.40) e (4.41), riprendono gli andamenti delle curve delle rispettive ripartizioni dei parametri orbitali.

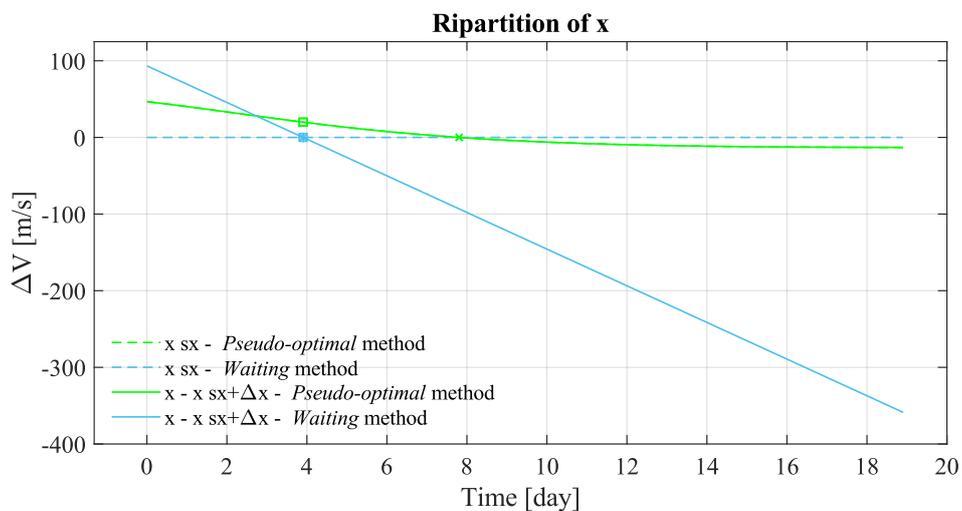


Figura 7.10: Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo della RAAN al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

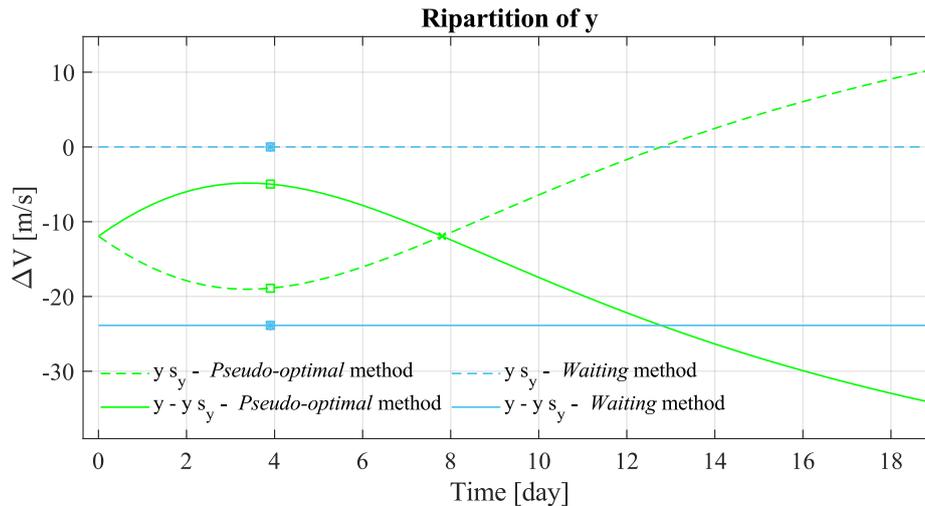


Figura 7.11: Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo del semiasse maggiore al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

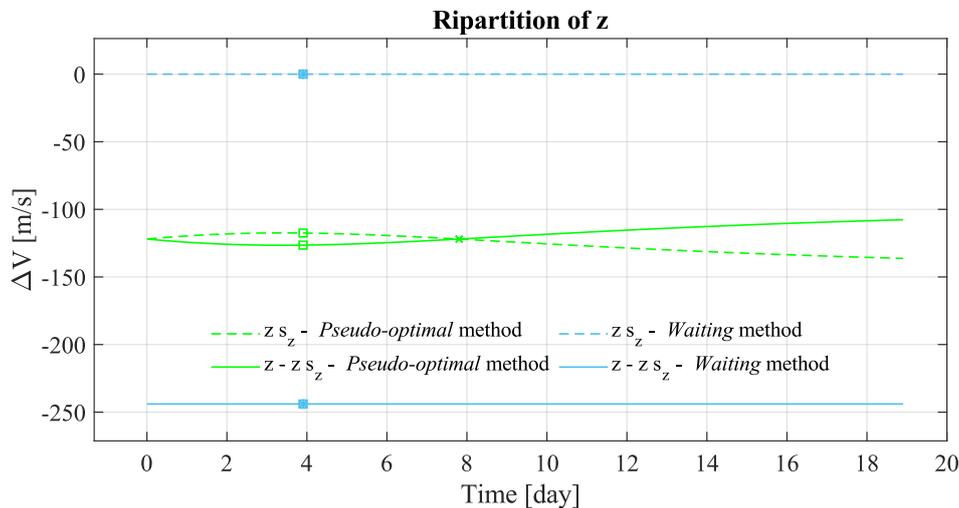


Figura 7.12: Andamenti del coefficiente di ripartizione del costo dell'inclinazione al variare del tempo finale di trasferta, per entrambi i metodi di ottimizzazione.

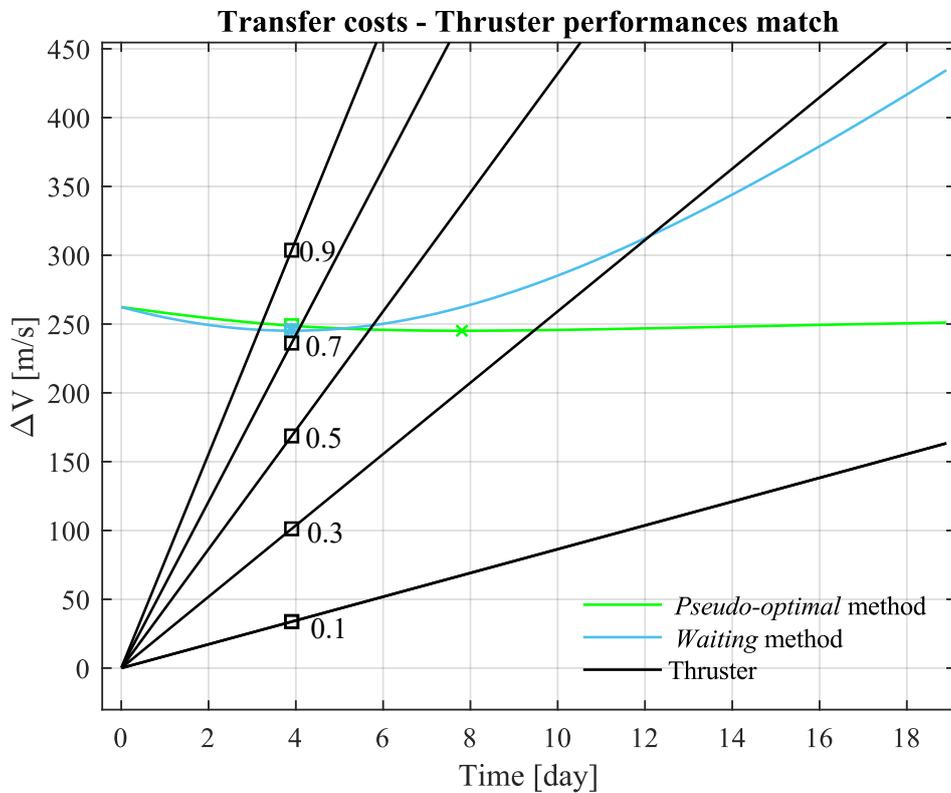
## Confronto tra prestazioni del propulsore e costi di manovra

In conclusione, per quanto riguarda gli andamenti del confronto tra il costo di manovra e l'impulso fornito dal propulsore, nonché quelli tra i tempi di spinta e i tempi a disposizione, al variare del TMR e del tempo finale essi presentano le caratteristiche già discusse nel capitolo precedente. Le curve del tempo di spinta ereditano i loro andamenti da quelli di costo totale, e per fissare le idee è possibile concentrarsi sul dettaglio in Figura 7.15 ottenuto considerando un *thrust-to-mass ratio* di 0.3 mN/kg. Si può osservare come superato un tempo di circa 5 giorni, il tempo di spinta del metodo attendista cresca enormemente, fino a raggiungere un valore massimo di 17 giorni circa (supposti i tempi finali in figura). Inoltre, dalla Figura 7.14 è possibile apprezzare come questo incremento repentino diminuisca all'aumentare del TMR, ovvero al crescere delle prestazioni del propulsore scelto.

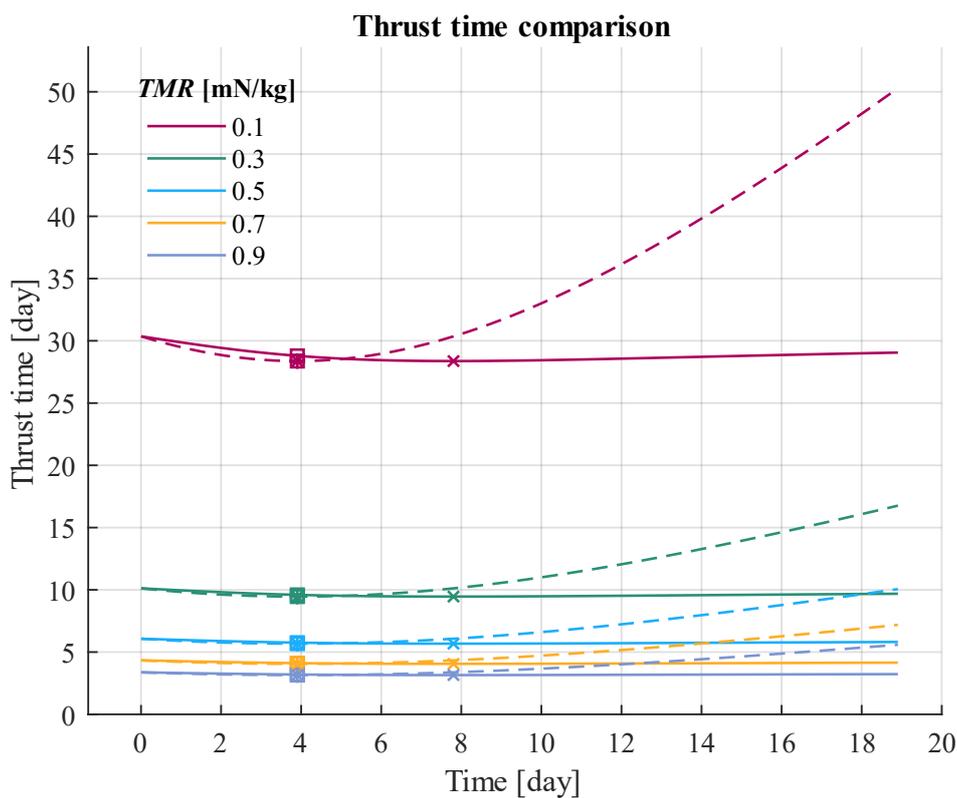
Infine, la Tabella 7.2 mostra i valori numerici, espressi in *giorni*, dei tempi di spinta richiesti per ciascun metodo considerando un TMR di 0.1 mN/kg, mentre le tabelle a chiusura del capitolo creano un quadro sinottico di tutti i valori numerici relativi alle quantità più importanti ottenuti tramite i tre metodi presentati (Tabella 7.3 - Tabella 7.4 - Tabella 7.5).

<i>Metodo</i>	<i>Tempo di spinta [day]</i>
Pseudo-ottimale	28.372503909567524
Attendista	28.372503885074629

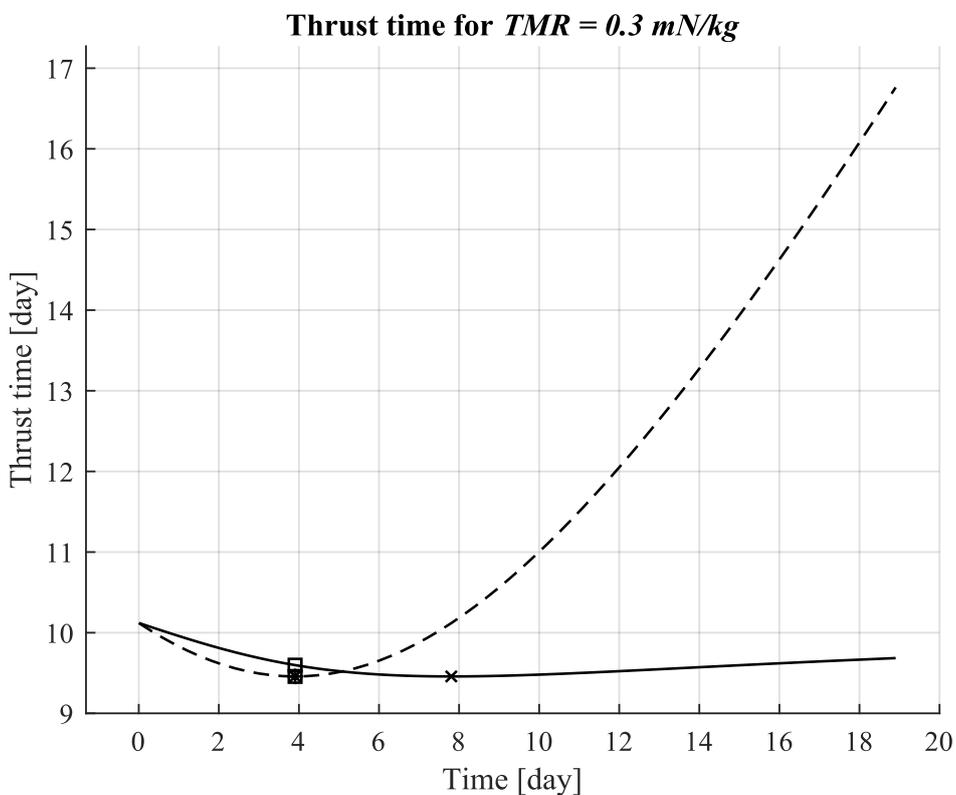
**Tabella 7.2:** Tempi di spinta richiesti per ciascun metodo per il caso di ottimo.



**Figura 7.13:** Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore, al variare del tempo finale.



**Figura 7.14:** Andamenti del tempo di spinta al variare del tempo finale di trasferta per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).



**Figura 7.15:** Dettaglio del tempo di spinta al variare del tempo finale per un propulsore con un TMR pari a  $0.3 \text{ mN/kg}$ , per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).

## Quadro sinottico dei risultati di calcolo

Di seguito verranno mostrati i vari risultati, espressi opportunamente in *gradi*, *giorni* e *m/s*, prodotti dalle diverse iterate di calcolo, allo scopo di evidenziare i diversi valori assunti dalle variabili di ottimizzazione, dalle variazioni dei parametri orbitali e dai costi al variare del tempo finale di trasferta nell'intorno del *waiting time*. Per la presentazione è stato usato lo stesso codice cromatico presentato per i precedenti grafici: su sfondo rosso viene descritto il metodo *ai - transfer*, su sfondo verde il metodo *aiΩ - transfer pseudo-ottimale* e su sfondo azzurro il metodo *aiΩ - transfer attendista*.

Metodo	$t_{x=0}^{34}$	$t_{\Delta V_{min}}$	$t_{thrust}$	$\Delta V_{min}$
<i>ai - transfer</i>	3.904946730657	7.8019467306570	28.3725039368432	245.13843401432
<i>Pseudo-ottimale</i>	3.904946730657	7.8019467306570	28.3725039095675	245.13843377866
<i>Attendista</i>	3.904946730657	3.9049467306570	28.3725038850746	245.13843356704

Tabella 7.3: Sinossi dei tempi e del minimo di costo per tutti i metodi.

Iter.	Time	x	y	z	x s <sub>x</sub>	y s <sub>y</sub>	z s <sub>z</sub>	x-x s <sub>x</sub> (+Δx)	y-y s <sub>y</sub>	z-z s <sub>z</sub>	Δx	m	n
1 <sup>a</sup>	0.005	93.263	-23.869	-243.974	0	-74342	47705	93.263	74318	-47949	-93.263	0.001	-0.001
		93.263	-23.869	-243.974	46.661	-11.955	-121.973	46.661	-11.914	-122.000	0.059	0.001	-0.001
		93.263	-23.869	-243.974	0	0	0	93.263	-23.869	-243.974	0	0.001	-0.001
2 <sup>a</sup>	0.305	86.089	-23.869	-243.974	0	-1171.312	624.009	86.089	1147.443	-867.982	-86.089	0.055	-0.035
		86.089	-23.869	-243.974	44.818	-13.161	-121.198	44.818	-10.708	-122.776	3.548	0.055	-0.035
		86.089	-23.869	-243.974	0	0	0	86.089	-23.869	-243.974	0	0.055	-0.035
3 <sup>a</sup>	0.605	78.915	-23.869	-243.974	0	-572.981	239.015	78.915	549.111	-482.989	-78.915	0.109	-0.070
		78.915	-23.869	-243.974	42.892	-14.263	-120.488	42.892	-9.606	-123.485	6.869	0.109	-0.070
		78.915	-23.869	-243.974	0	0	0	78.915	-23.869	-243.974	0	0.109	-0.070
4 <sup>a</sup>	0.905	71.741	-23.869	-243.974	0	-371.356	109.281	71.741	347.487	-353.255	-71.741	0.162	-0.105
		71.741	-23.869	-243.974	40.894	-15.256	-119.850	40.894	-8.613	-124.124	10.048	0.162	-0.105
		71.741	-23.869	-243.974	0	0	0	71.741	-23.869	-243.974	0	0.162	-0.105
5 <sup>a</sup>	1.205	64.566	-23.869	-243.974	0	-270.130	44.148	64.566	246.261	-288.122	-64.566	0.216	-0.139
		64.566	-23.869	-243.974	38.838	-16.135	-119.284	38.838	-7.735	-124.689	13.110	0.216	-0.139
		64.566	-23.869	-243.974	0	0	0	64.566	-23.869	-243.974	0	0.216	-0.139
6 <sup>a</sup>	1.505	57.392	-23.869	-243.974	0	-209.262	4.982	57.392	185.392	-248.956	-57.392	0.270	-0.174
		57.392	-23.869	-243.974	36.738	-16.897	-118.794	36.738	-6.973	-125.179	16.083	0.270	-0.174
		57.392	-23.869	-243.974	0	0	0	57.392	-23.869	-243.974	0	0.270	-0.174
7 <sup>a</sup>	1.805	50.218	-23.869	-243.974	0	-168.627	-21.164	50.218	144.758	-222.810	-50.218	0.324	-0.208
		50.218	-23.869	-243.974	34.606	-17.540	-118.380	34.606	-6.329	-125.594	18.995	0.324	-0.208
		50.218	-23.869	-243.974	0	0	0	50.218	-23.869	-243.974	0	0.324	-0.208
8 <sup>a</sup>	2.105	43.044	-23.869	-243.974	0	-139.575	-39.857	43.044	115.706	-204.116	-43.044	0.378	-0.243
		43.044	-23.869	-243.974	32.458	-18.066	-118.042	32.458	-5.803	-125.932	21.871	0.378	-0.243
		43.044	-23.869	-243.974	0	0	0	43.044	-23.869	-243.974	0	0.378	-0.243
9 <sup>a</sup>	2.405	35.870	-23.869	-243.974	0	-117.771	-53.887	35.870	93.902	-190.087	-35.870	0.432	-0.278
		35.870	-23.869	-243.974	30.304	-18.475	-117.778	30.304	-5.394	-126.195	24.738	0.432	-0.278
		35.870	-23.869	-243.974	0	0	0	35.870	-23.869	-243.974	0	0.432	-0.278
10 <sup>a</sup>	2.705	28.696	-23.869	-243.974	0	-100.803	-64.805	28.696	76.934	-179.169	-28.696	0.486	-0.312
		28.696	-23.869	-243.974	28.159	-18.770	-117.588	28.159	-5.099	-126.385	27.621	0.486	-0.312
		28.696	-23.869	-243.974	0	0	0	28.696	-23.869	-243.974	0	0.486	-0.312
11 <sup>a</sup>	3.005	21.522	-23.869	-243.974	0	-87.224	-73.542	21.522	63.354	-170.431	-21.522	0.539	-0.347
		21.522	-23.869	-243.974	26.033	-18.955	-117.469	26.033	-4.914	-126.504	30.544	0.539	-0.347
		21.522	-23.869	-243.974	0	0	0	21.522	-23.869	-243.974	0	0.539	-0.347

<sup>34</sup> Tali valori sono stati valutati considerando la configurazione orbitale di tempo zero.

12 <sup>a</sup>	3.305	14.348	-23.869	-243.974	0	-76.109	-80.694	14.348	52.240	-163.280	-14.348	0.593	-0.382
		14.348	-23.869	-243.974	23.937	-19.035	-117.418	23.937	-4.835	-126.555	33.527	0.593	-0.382
		14.348	-23.869	-243.974	0	0	0	14.348	-23.869	-243.974	0	0.593	-0.382
13 <sup>a</sup>	3.605	7.174	-23.869	-243.974	0	-66.845	-86.655	7.174	42.976	-157.319	-7.174	0.647	-0.416
		7.174	-23.869	-243.974	21.881	-19.014	-117.432	21.881	-4.855	-126.542	36.589	0.647	-0.416
		7.174	-23.869	-243.974	0	0	0	7.174	-23.869	-243.974	0	0.647	-0.416
14 <sup>a</sup>	3.905	0	-23.869	-243.974	0	-59.004	-91.700	0	35.135	-152.273	0	0.701	-0.451
		0	-23.869	-243.974	19.874	-18.899	-117.505	19.874	-4.970	-126.468	39.747	0.701	-0.451
		0	-23.869	-243.974	0	0	0	0	-23.869	-243.974	0	0.701	-0.451
15 <sup>a</sup>	4.205	-7.174	-23.869	-243.974	0	-52.282	-96.026	-7.174	28.413	-147.948	7.174	0.755	-0.486
		-7.174	-23.869	-243.974	17.921	-18.698	-117.635	17.921	-5.172	-126.338	43.016	0.755	-0.486
		-7.174	-23.869	-243.974	0	0	0	-7.174	-23.869	-243.974	0	0.755	-0.486
16 <sup>a</sup>	4.505	-14.348	-23.869	-243.974	0	-46.455	-99.775	-14.348	22.586	-144.199	14.348	0.809	-0.520
		-14.348	-23.869	-243.974	16.030	-18.415	-117.817	16.030	-5.454	-126.157	46.408	0.809	-0.520
		-14.348	-23.869	-243.974	0	0	0	-14.348	-23.869	-243.974	0	0.809	-0.520
17 <sup>a</sup>	4.805	-21.522	-23.869	-243.974	0	-41.356	-103.056	-21.522	17.487	-140.918	21.522	0.862	-0.555
		-21.522	-23.869	-243.974	14.205	-18.060	-118.045	14.205	-5.809	-125.928	49.932	0.862	-0.555
		-21.522	-23.869	-243.974	0	0	0	-21.522	-23.869	-243.974	0	0.862	-0.555
18 <sup>a</sup>	5.105	-28.696	-23.869	-243.974	0	-36.856	-105.951	-28.696	12.987	-138.022	28.696	0.916	-0.590
		-28.696	-23.869	-243.974	12.450	-17.638	-118.317	12.450	-6.231	-125.657	53.595	0.916	-0.590
		-28.696	-23.869	-243.974	0	0	0	-28.696	-23.869	-243.974	0	0.916	-0.590
19 <sup>a</sup>	5.405	-35.870	-23.869	-243.974	0	-32.856	-108.525	-35.870	8.986	-135.448	35.870	0.970	-0.624
		-35.870	-23.869	-243.974	10.767	-17.157	-118.626	10.767	-6.712	-125.347	57.405	0.970	-0.624
		-35.870	-23.869	-243.974	0	0	0	-35.870	-23.869	-243.974	0	0.970	-0.624
20 <sup>a</sup>	5.705	-43.044	-23.869	-243.974	0	-29.276	-110.829	-43.044	5.407	-133.145	43.044	1.024	-0.659
		-43.044	-23.869	-243.974	9.159	-16.624	-118.969	9.159	-7.245	-125.004	61.363	1.024	-0.659
		-43.044	-23.869	-243.974	0	0	0	-43.044	-23.869	-243.974	0	1.024	-0.659
21 <sup>a</sup>	6.005	-50.218	-23.869	-243.974	0	-26.054	-112.902	-50.218	2.185	-131.072	50.218	1.078	-0.694
		-50.218	-23.869	-243.974	7.627	-16.045	-119.342	7.627	-7.824	-124.632	65.473	1.078	-0.694
		-50.218	-23.869	-243.974	0	0	0	-50.218	-23.869	-243.974	0	1.078	-0.694
22 <sup>a</sup>	6.305	-57.392	-23.869	-243.974	0	-23.139	-114.778	-57.392	-0.731	-129.196	57.392	1.132	-0.728
		-57.392	-23.869	-243.974	6.171	-15.426	-119.740	6.171	-8.443	-124.233	69.734	1.132	-0.728
		-57.392	-23.869	-243.974	0	0	0	-57.392	-23.869	-243.974	0	1.132	-0.728
23 <sup>a</sup>	6.605	-64.566	-23.869	-243.974	0	-20.488	-116.483	-64.566	-3.381	-127.490	64.566	1.186	-0.763
		-64.566	-23.869	-243.974	4.790	-14.774	-120.160	4.790	-9.096	-123.814	74.146	1.186	-0.763
		-64.566	-23.869	-243.974	0	0	0	-64.566	-23.869	-243.974	0	1.186	-0.763
24 <sup>a</sup>	6.905	-71.741	-23.869	-243.974	0	-18.068	-118.040	-71.741	-5.801	-125.933	71.741	1.239	-0.797
		-71.741	-23.869	-243.974	3.483	-14.093	-120.598	3.483	-9.776	-123.376	78.706	1.239	-0.797
		-71.741	-23.869	-243.974	0	0	0	-71.741	-23.869	-243.974	0	1.239	-0.797
25 <sup>a</sup>	7.205	-78.915	-23.869	-243.974	0	-15.849	-119.468	-78.915	-8.020	-124.506	78.915	1.293	-0.832
		-78.915	-23.869	-243.974	2.249	-13.389	-121.051	2.249	-10.480	-122.923	83.413	1.293	-0.832
		-78.915	-23.869	-243.974	0	0	0	-78.915	-23.869	-243.974	0	1.293	-0.832
26 <sup>a</sup>	7.505	-86.089	-23.869	-243.974	0	-13.808	-120.781	-86.089	-10.061	-123.192	86.089	1.347	-0.867
		-86.089	-23.869	-243.974	1.087	-12.667	-121.516	1.087	-11.203	-122.458	88.262	1.347	-0.867
		-86.089	-23.869	-243.974	0	0	0	-86.089	-23.869	-243.974	0	1.347	-0.867
27 <sup>a</sup>	7.805	-93.263	-23.869	-243.974	0	-11.924	-121.994	-93.263	-11.946	-121.980	93.263	1.401	-0.901
		-93.263	-23.869	-243.974	-0.007	-11.930	-121.990	-0.007	-11.939	-121.984	93.250	1.401	-0.901
		-93.263	-23.869	-243.974	0	0	0	-93.263	-23.869	-243.974	0	1.401	-0.901
28 <sup>a</sup>	8.105	-100.437	-23.869	-243.974	0	-10.179	-123.117	-100.437	-13.691	-120.857	100.437	1.455	-0.936
		-100.437	-23.869	-243.974	-1.033	-11.183	-122.470	-1.033	-12.686	-121.503	98.370	1.455	-0.936
		-100.437	-23.869	-243.974	0	0	0	-100.437	-23.869	-243.974	0	1.455	-0.936
29 <sup>a</sup>	8.405	-107.611	-23.869	-243.974	0	-8.558	-124.159	-107.611	-15.311	-119.814	107.611	1.509	-0.971
		-107.611	-23.869	-243.974	-1.996	-10.429	-122.955	-1.996	-13.440	-121.018	103.620	1.509	-0.971
		-107.611	-23.869	-243.974	0	0	0	-107.611	-23.869	-243.974	0	1.509	-0.971

30 <sup>a</sup>	8.705	-114.785	-23.869	-243.974	0	-7.050	-125.130	-114.785	-16.820	-118.844	114.785	1.562	-1.005
		-114.785	-23.869	-243.974	-2.897	-9.672	-123.443	-2.897	-14.197	-120.531	108.992	1.562	-1.005
		-114.785	-23.869	-243.974	0	0	0	-114.785	-23.869	-243.974	0	1.562	-1.005
31 <sup>a</sup>	9.005	-121.959	-23.869	-243.974	0	-5.642	-126.036	-121.959	-18.228	-117.938	121.959	1.616	-1.040
		-121.959	-23.869	-243.974	-3.739	-8.913	-123.931	-3.739	-14.956	-120.043	114.482	1.616	-1.040
		-121.959	-23.869	-243.974	0	0	0	-121.959	-23.869	-243.974	0	1.616	-1.040
32 <sup>a</sup>	9.305	-129.133	-23.869	-243.974	0	-4.324	-126.884	-129.133	-19.545	-117.090	129.133	1.670	-1.075
		-129.133	-23.869	-243.974	-4.525	-8.156	-124.418	-4.525	-15.713	-119.556	120.083	1.670	-1.075
		-129.133	-23.869	-243.974	0	0	0	-129.133	-23.869	-243.974	0	1.670	-1.075
33 <sup>a</sup>	9.605	-136.307	-23.869	-243.974	0	-3.089	-127.678	-136.307	-20.780	-116.295	136.307	1.724	-1.109
		-136.307	-23.869	-243.974	-5.258	-7.403	-124.903	-5.258	-16.467	-119.071	125.792	1.724	-1.109
		-136.307	-23.869	-243.974	0	0	0	-136.307	-23.869	-243.974	0	1.724	-1.109
34 <sup>a</sup>	9.905	-143.481	-23.869	-243.974	0	-1.929	-128.425	-143.481	-21.940	-115.549	143.481	1.778	-1.144
		-143.481	-23.869	-243.974	-5.940	-6.655	-125.384	-5.940	-17.215	-118.589	131.601	1.778	-1.144
		-143.481	-23.869	-243.974	0	0	0	-143.481	-23.869	-243.974	0	1.778	-1.144
35 <sup>a</sup>	10.205	-150.655	-23.869	-243.974	0	-0.837	-129.127	-150.655	-23.032	-114.846	150.655	1.832	-1.179
		-150.655	-23.869	-243.974	-6.574	-5.914	-125.861	-6.574	-17.956	-118.113	137.507	1.832	-1.179
		-150.655	-23.869	-243.974	0	0	0	-150.655	-23.869	-243.974	0	1.832	-1.179
36 <sup>a</sup>	10.505	-157.829	-23.869	-243.974	0	0.193	-129.790	-157.829	-24.062	-114.184	157.829	1.886	-1.213
		-157.829	-23.869	-243.974	-7.164	-5.181	-126.332	-7.164	-18.688	-117.641	143.502	1.886	-1.213
		-157.829	-23.869	-243.974	0	0	0	-157.829	-23.869	-243.974	0	1.886	-1.213
37 <sup>a</sup>	10.805	-165.003	-23.869	-243.974	0	1.165	-130.416	-165.003	-25.034	-113.558	165.003	1.939	-1.248
		-165.003	-23.869	-243.974	-7.710	-4.458	-126.798	-7.710	-19.411	-117.176	149.583	1.939	-1.248
		-165.003	-23.869	-243.974	0	0	0	-165.003	-23.869	-243.974	0	1.939	-1.248
38 <sup>a</sup>	11.105	-172.177	-23.869	-243.974	0	2.085	-131.008	-172.177	-25.954	-112.966	172.177	1.993	-1.283
		-172.177	-23.869	-243.974	-8.217	-3.746	-127.256	-8.217	-20.124	-116.718	155.744	1.993	-1.283
		-172.177	-23.869	-243.974	0	0	0	-172.177	-23.869	-243.974	0	1.993	-1.283
39 <sup>a</sup>	11.405	-179.351	-23.869	-243.974	0	2.956	-131.568	-179.351	-26.826	-112.405	179.351	2.047	-1.317
		-179.351	-23.869	-243.974	-8.685	-3.045	-127.707	-8.685	-20.825	-116.267	161.980	2.047	-1.317
		-179.351	-23.869	-243.974	0	0	0	-179.351	-23.869	-243.974	0	2.047	-1.317
40 <sup>a</sup>	11.705	-186.525	-23.869	-243.974	0	3.783	-132.100	-186.525	-27.653	-111.873	186.525	2.101	-1.352
		-186.525	-23.869	-243.974	-9.119	-2.356	-128.150	-9.119	-21.514	-115.823	168.288	2.101	-1.352
		-186.525	-23.869	-243.974	0	0	0	-186.525	-23.869	-243.974	0	2.101	-1.352
41 <sup>a</sup>	12.005	-193.699	-23.869	-243.974	0	4.569	-132.606	-193.699	-28.438	-111.368	193.699	2.155	-1.386
		-193.699	-23.869	-243.974	-9.519	-1.679	-128.586	-9.519	-22.190	-115.388	174.662	2.155	-1.386
		-193.699	-23.869	-243.974	0	0	0	-193.699	-23.869	-243.974	0	2.155	-1.386
42 <sup>a</sup>	12.305	-200.873	-23.869	-243.974	0	5.316	-133.087	-200.873	-29.185	-110.887	200.873	2.209	-1.421
		-200.873	-23.869	-243.974	-9.887	-1.016	-129.012	-9.887	-22.853	-114.961	181.099	2.209	-1.421
		-200.873	-23.869	-243.974	0	0	0	-200.873	-23.869	-243.974	0	2.209	-1.421
43 <sup>a</sup>	12.605	-208.048	-23.869	-243.974	0	6.028	-133.545	-208.048	-29.897	-110.429	208.048	2.262	-1.456
		-208.048	-23.869	-243.974	-10.227	-0.366	-129.431	-10.227	-23.504	-114.543	187.594	2.262	-1.456
		-208.048	-23.869	-243.974	0	0	0	-208.048	-23.869	-243.974	0	2.262	-1.456
44 <sup>a</sup>	12.905	-215.222	-23.869	-243.974	0	6.706	-133.981	-215.222	-30.575	-109.992	215.222	2.316	-1.490
		-215.222	-23.869	-243.974	-10.539	0.271	-129.840	-10.539	-24.140	-114.133	194.144	2.316	-1.490
		-215.222	-23.869	-243.974	0	0	0	-215.222	-23.869	-243.974	0	2.316	-1.490
45 <sup>a</sup>	13.205	-222.396	-23.869	-243.974	0	7.354	-134.398	-222.396	-31.223	-109.576	222.396	2.370	-1.525
		-222.396	-23.869	-243.974	-10.825	0.894	-130.241	-10.825	-24.763	-113.732	200.745	2.370	-1.525
		-222.396	-23.869	-243.974	0	0	0	-222.396	-23.869	-243.974	0	2.370	-1.525
46 <sup>a</sup>	13.505	-229.570	-23.869	-243.974	0	7.973	-134.796	-229.570	-31.842	-109.177	229.570	2.424	-1.560
		-229.570	-23.869	-243.974	-11.087	1.503	-130.633	-11.087	-25.373	-113.340	207.395	2.424	-1.560
		-229.570	-23.869	-243.974	0	0	0	-229.570	-23.869	-243.974	0	2.424	-1.560
47 <sup>a</sup>	13.805	-236.744	-23.869	-243.974	0	8.565	-135.177	-236.744	-32.434	-108.796	236.744	2.478	-1.594
		-236.744	-23.869	-243.974	-11.327	2.099	-131.017	-11.327	-25.968	-112.957	214.089	2.478	-1.594
		-236.744	-23.869	-243.974	0	0	0	-236.744	-23.869	-243.974	0	2.478	-1.594

48 <sup>a</sup>	14.105	-243.918	-23.869	-243.974	0	9.132	-135.542	-243.918	-33.001	-108.432	243.918	2.532	-1.629
		-243.918	-23.869	-243.974	-11.546	2.681	-131.391	-11.546	-26.550	-112.582	220.825	2.532	-1.629
		-243.918	-23.869	-243.974	0	0	0	-243.918	-23.869	-243.974	0	2.532	-1.629
49 <sup>a</sup>	14.405	-251.092	-23.869	-243.974	0	9.675	-135.891	-251.092	-33.544	-108.082	251.092	2.586	-1.664
		-251.092	-23.869	-243.974	-11.746	3.250	-131.757	-11.746	-27.119	-112.217	227.601	2.586	-1.664
		-251.092	-23.869	-243.974	0	0	0	-251.092	-23.869	-243.974	0	2.586	-1.664
50 <sup>a</sup>	14.705	-258.266	-23.869	-243.974	0	10.196	-136.227	-258.266	-34.065	-107.747	258.266	2.639	-1.698
		-258.266	-23.869	-243.974	-11.927	3.805	-132.114	-11.927	-27.674	-111.859	234.413	2.639	-1.698
		-258.266	-23.869	-243.974	0	0	0	-258.266	-23.869	-243.974	0	2.639	-1.698
51 <sup>a</sup>	15.005	-265.440	-23.869	-243.974	0	10.696	-136.549	-265.440	-34.566	-107.425	265.440	2.693	-1.733
		-265.440	-23.869	-243.974	-12.091	4.347	-132.463	-12.091	-28.216	-111.511	241.259	2.693	-1.733
		-265.440	-23.869	-243.974	0	0	0	-265.440	-23.869	-243.974	0	2.693	-1.733
52 <sup>a</sup>	15.305	-272.614	-23.869	-243.974	0	11.177	-136.858	-272.614	-35.046	-107.116	272.614	2.747	-1.768
		-272.614	-23.869	-243.974	-12.239	4.876	-132.803	-12.239	-28.745	-111.170	248.137	2.747	-1.768
		-272.614	-23.869	-243.974	0	0	0	-272.614	-23.869	-243.974	0	2.747	-1.768
53 <sup>a</sup>	15.605	-279.788	-23.869	-243.974	0	11.639	-137.155	-279.788	-35.508	-106.818	279.788	2.801	-1.802
		-279.788	-23.869	-243.974	-12.372	5.392	-133.135	-12.372	-29.261	-110.838	255.044	2.801	-1.802
		-279.788	-23.869	-243.974	0	0	0	-279.788	-23.869	-243.974	0	2.801	-1.802
54 <sup>a</sup>	15.905	-286.962	-23.869	-243.974	0	12.084	-137.441	-286.962	-35.953	-106.532	286.962	2.855	-1.837
		-286.962	-23.869	-243.974	-12.491	5.895	-133.459	-12.491	-29.764	-110.514	261.980	2.855	-1.837
		-286.962	-23.869	-243.974	0	0	0	-286.962	-23.869	-243.974	0	2.855	-1.837
55 <sup>a</sup>	16.205	-294.136	-23.869	-243.974	0	12.512	-137.717	-294.136	-36.381	-106.257	294.136	2.909	-1.872
		-294.136	-23.869	-243.974	-12.598	6.386	-133.775	-12.598	-30.255	-110.198	268.941	2.909	-1.872
		-294.136	-23.869	-243.974	0	0	0	-294.136	-23.869	-243.974	0	2.909	-1.872
56 <sup>a</sup>	16.505	-301.310	-23.869	-243.974	0	12.925	-137.982	-301.310	-36.794	-105.991	301.310	2.962	-1.906
		-301.310	-23.869	-243.974	-12.692	6.865	-134.083	-12.692	-30.734	-109.890	275.926	2.962	-1.906
		-301.310	-23.869	-243.974	0	0	0	-301.310	-23.869	-243.974	0	2.962	-1.906
57 <sup>a</sup>	16.805	-308.484	-23.869	-243.974	0	13.323	-138.239	-308.484	-37.192	-105.735	308.484	3.016	-1.941
		-308.484	-23.869	-243.974	-12.775	7.332	-134.384	-12.775	-31.202	-109.590	282.934	3.016	-1.941
		-308.484	-23.869	-243.974	0	0	0	-308.484	-23.869	-243.974	0	3.016	-1.941
58 <sup>a</sup>	17.105	-315.658	-23.869	-243.974	0	13.707	-138.486	-315.658	-37.576	-105.488	315.658	3.070	-1.975
		-315.658	-23.869	-243.974	-12.848	7.788	-134.677	-12.848	-31.657	-109.296	289.963	3.070	-1.975
		-315.658	-23.869	-243.974	0	0	0	-315.658	-23.869	-243.974	0	3.070	-1.975
59 <sup>a</sup>	17.405	-322.832	-23.869	-243.974	0	14.078	-138.724	-322.832	-37.947	-105.249	322.832	3.124	-2.010
		-322.832	-23.869	-243.974	-12.911	8.232	-134.963	-12.911	-32.101	-109.011	297.011	3.124	-2.010
		-322.832	-23.869	-243.974	0	0	0	-322.832	-23.869	-243.974	0	3.124	-2.010
60 <sup>a</sup>	17.705	-330.006	-23.869	-243.974	0	14.436	-138.955	-330.006	-38.305	-105.019	330.006	3.178	-2.045
		-330.006	-23.869	-243.974	-12.965	8.665	-135.242	-12.965	-32.535	-108.732	304.077	3.178	-2.045
		-330.006	-23.869	-243.974	0	0	0	-330.006	-23.869	-243.974	0	3.178	-2.045
61 <sup>a</sup>	18.005	-337.180	-23.869	-243.974	0	14.782	-139.177	-337.180	-38.651	-104.796	337.180	3.232	-2.079
		-337.180	-23.869	-243.974	-13.010	9.088	-135.514	-13.010	-32.957	-108.460	311.160	3.232	-2.079
		-337.180	-23.869	-243.974	0	0	0	-337.180	-23.869	-243.974	0	3.232	-2.079
62 <sup>a</sup>	18.305	-344.354	-23.869	-243.974	0	15.117	-139.393	-344.354	-38.986	-104.581	344.354	3.286	-2.114
		-344.354	-23.869	-243.974	-13.048	9.500	-135.779	-13.048	-33.369	-108.195	318.259	3.286	-2.114
		-344.354	-23.869	-243.974	0	0	0	-344.354	-23.869	-243.974	0	3.286	-2.114
63 <sup>a</sup>	18.605	-351.529	-23.869	-243.974	0	15.441	-139.601	-351.529	-39.310	-104.372	351.529	3.339	-2.149
		-351.529	-23.869	-243.974	-13.078	9.902	-136.037	-13.078	-33.771	-107.936	325.373	3.339	-2.149
		-351.529	-23.869	-243.974	0	0	0	-351.529	-23.869	-243.974	0	3.339	-2.149
64 <sup>a</sup>	18.905	-358.703	-23.869	-243.974	0	15.755	-139.803	-358.703	-39.624	-104.170	358.703	3.393	-2.183
		-358.703	-23.869	-243.974	-13.101	10.294	-136.290	-13.101	-34.163	-107.684	332.500	3.393	-2.183
		-358.703	-23.869	-243.974	0	0	0	-358.703	-23.869	-243.974	0	3.393	-2.183

*Tabella 7.4: Valori assunti dai costi di trasferta, parametri di ripartizione e di ottimizzazione al variare del tempo finale di trasferta.*

<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta V_a$	$\Delta V_b$	$\Delta V_{tot}$	<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta V_a$	$\Delta V_b$	$\Delta V_{tot}$
<i>1<sup>a</sup></i>	0.005	88332	88444	176777	<i>17<sup>a</sup></i>	4.805	111.044	141.999	253.043
		131.140	131.161	262.301			120.261	126.860	247.121
		0	262.280	262.280			0	246.081	246.081
<i>2<sup>a</sup></i>	0.305	1327.162	1438.756	2765.918	<i>18<sup>a</sup></i>	5.105	112.179	138.632	250.810
		129.887	131.138	261.026			120.270	126.426	246.696
		0	259.816	259.816			0	246.812	246.812
<i>3<sup>a</sup></i>	0.605	620.834	731.301	1352.136	<i>19<sup>a</sup></i>	5.405	113.390	135.746	249.136
		128.688	131.075	259.763			120.343	125.988	246.331
		0	257.527	257.527			0	247.749	247.749
<i>4<sup>a</sup></i>	0.905	387.102	495.516	882.618	<i>20<sup>a</sup></i>	5.705	114.630	133.255	247.885
		127.550	130.970	258.521			120.474	125.549	246.022
		0	255.420	255.420			0	248.889	248.889
<i>5<sup>a</sup></i>	1.205	273.714	379.023	652.738	<i>21<sup>a</sup></i>	6.005	115.869	131.090	246.959
		126.481	130.827	257.308			120.657	125.110	245.767
		0	253.499	253.499			0	250.229	250.229
<i>6<sup>a</sup></i>	1.505	209.321	310.402	519.723	<i>22<sup>a</sup></i>	6.305	117.087	129.198	246.285
		125.488	130.645	256.133			120.887	124.673	245.560
		0	251.767	251.767			0	251.767	251.767
<i>7<sup>a</sup></i>	1.805	169.950	265.705	435.655	<i>23<sup>a</sup></i>	6.605	118.271	127.535	245.806
		124.575	130.428	255.003			121.160	124.240	245.399
		0	250.229	250.229			0	253.499	253.499
<i>8<sup>a</sup></i>	2.105	145.154	234.630	379.784	<i>24<sup>a</sup></i>	6.905	119.415	126.067	245.482
		123.748	130.177	253.925			121.469	123.811	245.280
		0	248.889	248.889			0	255.420	255.420
<i>9<sup>a</sup></i>	2.405	129.514	212.015	341.529	<i>25<sup>a</sup></i>	7.205	120.515	124.764	245.278
		123.010	129.895	252.905			121.810	123.389	245.199
		0	247.749	247.749			0	257.527	257.527
<i>10<sup>a</sup></i>	2.705	119.837	194.988	314.825	<i>26<sup>a</sup></i>	7.505	121.568	123.602	245.170
		122.361	129.584	251.946			122.179	122.974	245.153
		0	246.812	246.812			0	259.816	259.816
<i>11<sup>a</sup></i>	3.005	114.090	181.826	295.915	<i>27<sup>a</sup></i>	7.805	122.575	122.563	245.138
		121.803	129.248	251.052			122.572	122.567	245.138
		0	246.081	246.081			0	262.280	262.280
<i>12<sup>a</sup></i>	3.305	110.924	171.433	282.357	<i>28<sup>a</sup></i>	8.105	123.537	121.630	245.167
		121.336	128.890	250.226			122.984	122.168	245.152
		0	245.558	245.558			0	264.916	264.916
<i>13<sup>a</sup></i>	3.605	109.441	163.083	272.524	<i>29<sup>a</sup></i>	8.405	124.454	120.789	245.243
		120.957	128.512	249.468			123.413	121.779	245.192
		0	245.243	245.243			0	267.718	267.718
<i>14<sup>a</sup></i>	3.905	109.043	156.274	265.317	<i>30<sup>a</sup></i>	8.705	125.328	120.028	245.356
		120.663	128.117	248.780			123.855	121.399	245.254
		0	245.138	245.138			0	270.681	270.681
<i>15<sup>a</sup></i>	4.205	109.336	150.652	259.987	<i>31<sup>a</sup></i>	9.005	126.162	119.338	245.500
		120.453	127.708	248.160			124.307	121.029	245.336
		0	245.243	245.243			0	273.801	273.801
<i>16<sup>a</sup></i>	4.505	110.059	145.957	256.016	<i>32<sup>a</sup></i>	9.305	126.957	118.710	245.667
		120.320	127.288	247.608			124.767	120.669	245.436
		0	245.558	245.558			0	277.071	277.071

33 <sup>a</sup>	9.605	127.716	118.137	245.853	49 <sup>a</sup>	14.405	136.235	113.168	249.403
		125.232	120.319	245.551			132.319	116.043	248.362
		0	280.486	280.486			0	350.913	350.913
34 <sup>a</sup>	9.905	128.439	117.613	246.053	50 <sup>a</sup>	14.705	136.608	113.004	249.611
		125.701	119.979	245.681			132.706	115.847	248.553
		0	284.042	284.042			0	356.082	356.082
35 <sup>a</sup>	10.205	129.130	117.133	246.263	51 <sup>a</sup>	15.005	136.967	112.849	249.816
		126.171	119.650	245.822			133.085	115.659	248.743
		0	287.732	287.732			0	361.319	361.319
36 <sup>a</sup>	10.505	129.790	116.691	246.481	52 <sup>a</sup>	15.305	137.313	112.703	250.017
		126.641	119.332	245.973			133.455	115.477	248.932
		0	291.553	291.553			0	366.621	366.621
37 <sup>a</sup>	10.805	130.421	116.285	246.706	53 <sup>a</sup>	15.605	137.648	112.566	250.214
		127.110	119.023	246.133			133.818	115.301	249.119
		0	295.498	295.498			0	371.987	371.987
38 <sup>a</sup>	11.105	131.024	115.909	246.933	54 <sup>a</sup>	15.905	137.972	112.435	250.407
		127.576	118.724	246.300			134.172	115.132	249.304
		0	299.563	299.563			0	377.412	377.412
39 <sup>a</sup>	11.405	131.602	115.562	247.163	55 <sup>a</sup>	16.205	138.284	112.312	250.597
		128.038	118.436	246.474			134.519	114.969	249.487
		0	303.743	303.743			0	382.895	382.895
40 <sup>a</sup>	11.705	132.155	115.240	247.395	56 <sup>a</sup>	16.505	138.586	112.196	250.782
		128.496	118.157	246.653			134.858	114.811	249.669
		0	308.033	308.033			0	388.434	388.434
41 <sup>a</sup>	12.005	132.685	114.941	247.626	57 <sup>a</sup>	16.805	138.879	112.085	250.964
		128.948	117.887	246.836			135.189	114.659	249.848
		0	312.430	312.430			0	394.025	394.025
42 <sup>a</sup>	12.305	133.193	114.663	247.856	58 <sup>a</sup>	17.105	139.162	111.981	251.143
		129.395	117.627	247.022			135.513	114.512	250.024
		0	316.927	316.927			0	399.666	399.666
43 <sup>a</sup>	12.605	133.680	114.405	248.085	59 <sup>a</sup>	17.405	139.437	111.881	251.318
		129.835	117.376	247.210			135.829	114.370	250.199
		0	321.522	321.522			0	405.356	405.356
44 <sup>a</sup>	12.905	134.149	114.163	248.312	60 <sup>a</sup>	17.705	139.702	111.787	251.489
		130.268	117.133	247.401			136.138	114.233	250.371
		0	326.210	326.210			0	411.093	411.093
45 <sup>a</sup>	13.205	134.599	113.937	248.536	61 <sup>a</sup>	18.005	139.960	111.697	251.657
		130.693	116.899	247.593			136.440	114.101	250.541
		0	330.987	330.987			0	416.873	416.873
46 <sup>a</sup>	13.505	135.032	113.726	248.758	62 <sup>a</sup>	18.305	140.210	111.611	251.821
		131.112	116.673	247.785			136.735	113.973	250.708
		0	335.850	335.850			0	422.697	422.697
47 <sup>a</sup>	13.805	135.448	113.528	248.976	63 <sup>a</sup>	18.605	140.453	111.530	251.982
		131.522	116.456	247.978			137.023	113.850	250.872
		0	340.794	340.794			0	428.562	428.562
48 <sup>a</sup>	14.105	135.849	113.342	249.192	64 <sup>a</sup>	18.905	140.688	111.452	252.140
		131.925	116.246	248.170			137.304	113.730	251.035
		0	345.816	345.816			0	434.466	434.466

Tabella 7.5: Valori assunti dai singoli impulsi e dal costo totale al variare del tempo finale di trasferta.

<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$	<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$
<i>1<sup>a</sup></i>	0.005	-141713	232.688	0	<i>8<sup>a</sup></i>	2.105	-266.060	-0.194	0
		141668	-233.878	0			220.560	-0.996	0
		-22.789	-0.595	0.230			-34.438	-0.576	0.160
		-22.711	-0.595	0.230			-11.062	-0.614	0.160
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	0.459			-45.500	-1.190	0.212
<i>2<sup>a</sup></i>	0.305	-2232.774	3.044	0	<i>9<sup>a</sup></i>	2.405	-224.497	-0.263	0
		2187.274	-4.234	0			178.997	-0.927	0
		-25.088	-0.591	0.221			-35.218	-0.574	0.149
		-20.412	-0.599	0.221			-10.282	-0.616	0.149
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	0.424			-45.500	-1.190	0.177
<i>3<sup>a</sup></i>	0.605	-1092.225	1.166	0	<i>10<sup>a</sup></i>	2.705	-192.153	-0.316	0
		1046.725	-2.356	0			146.653	-0.874	0
		-27.189	-0.588	0.211			-35.780	-0.574	0.139
		-18.311	-0.602	0.211			-9.720	-0.616	0.139
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	0.389			-45.500	-1.190	0.141
<i>4<sup>a</sup></i>	0.905	-707.885	0.533	0	<i>11<sup>a</sup></i>	3.005	-166.267	-0.359	0
		662.385	-1.723	0			120.767	-0.831	0
		-29.081	-0.585	0.201			-36.133	-0.573	0.128
		-16.419	-0.605	0.201			-9.367	-0.617	0.128
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	0.353			-45.500	-1.190	0.106
<i>5<sup>a</sup></i>	1.205	-514.927	0.215	0	<i>12<sup>a</sup></i>	3.305	-145.081	-0.394	0
		469.427	-1.405	0			99.581	-0.796	0
		-30.756	-0.582	0.191			-36.284	-0.573	0.118
		-14.744	-0.608	0.191			-9.216	-0.617	0.118
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	0.318			-45.500	-1.190	0.071
<i>6<sup>a</sup></i>	1.505	-398.898	0.024	0	<i>13<sup>a</sup></i>	3.605	-127.421	-0.423	0
		353.398	-1.214	0			81.921	-0.767	0
		-32.208	-0.579	0.181			-36.245	-0.573	0.108
		-13.292	-0.611	0.181			-9.255	-0.617	0.108
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	0.283			-45.500	-1.190	0.035
<i>7<sup>a</sup></i>	1.805	-321.439	-0.103	0	<i>14<sup>a</sup></i>	3.905	-112.474	-0.447	0
		275.939	-1.087	0			66.974	-0.743	0
		-33.436	-0.577	0.170			-36.026	-0.573	0.098
		-12.064	-0.613	0.170			-9.474	-0.617	0.098
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	0.247			-45.500	-1.190	0

<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$	<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$
<i>15<sup>a</sup></i>	4.205	-99.661	-0.468	0	<i>22<sup>a</sup></i>	6.305	-44.107	-0.560	0
		54.161	-0.722	0			-1.393	-0.630	0
		-35.642	-0.574	0.088			-29.406	-0.584	0.030
		-9.858	-0.616	0.088			-16.094	-0.606	0.030
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.035			-45.500	-1.190	-0.283
<i>16<sup>a</sup></i>	4.505	-88.553	-0.487	0	<i>23<sup>a</sup></i>	6.605	-39.055	-0.568	0
		43.053	-0.703	0			-6.445	-0.622	0
		-35.104	-0.575	0.079			-28.162	-0.586	0.024
		-10.396	-0.615	0.079			-17.338	-0.604	0.024
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.071			-45.500	-1.190	-0.318
<i>17<sup>a</sup></i>	4.805	-78.833	-0.503	0	<i>24<sup>a</sup></i>	6.905	-34.441	-0.576	0
		33.333	-0.687	0			-11.059	-0.614	0
		-34.426	-0.576	0.070			-26.864	-0.588	0.017
		-11.074	-0.614	0.070			-18.636	-0.602	0.017
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.106			-45.500	-1.190	-0.353
<i>18<sup>a</sup></i>	5.105	-70.255	-0.517	0	<i>25<sup>a</sup></i>	7.205	-30.212	-0.583	0
		24.755	-0.673	0			-15.288	-0.607	0
		-33.623	-0.577	0.061			-25.522	-0.590	0.011
		-11.877	-0.613	0.061			-19.978	-0.600	0.011
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.141			-45.500	-1.190	-0.389
<i>19<sup>a</sup></i>	5.405	-62.630	-0.529	0	<i>26<sup>a</sup></i>	7.505	-26.321	-0.589	0
		17.130	-0.661	0			-19.179	-0.601	0
		-32.706	-0.579	0.053			-24.145	-0.593	0.005
		-12.794	-0.611	0.053			-21.355	-0.597	0.005
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.177			-45.500	-1.190	-0.424
<i>20<sup>a</sup></i>	5.705	-55.806	-0.541	0	<i>27<sup>a</sup></i>	7.805	-22.729	-0.595	0
		10.306	-0.649	0			-22.771	-0.595	0
		-31.689	-0.580	0.045			-22.741	-0.595	0
		-13.811	-0.610	0.045			-22.759	-0.595	0
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.212			-45.500	-1.190	-0.459
<i>21<sup>a</sup></i>	6.005	-49.664	-0.551	0	<i>28<sup>a</sup></i>	8.105	-19.403	-0.601	0
		4.164	-0.639	0			-26.097	-0.589	0
		-30.585	-0.582	0.038			-21.317	-0.597	-0.005
		-14.915	-0.608	0.038			-24.183	-0.593	-0.005
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.247			-45.500	-1.190	-0.495

<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$	<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$
<i>29<sup>a</sup></i>	8.405	-16.314	-0.606	0	<i>36<sup>a</sup></i>	10.505	0.367	-0.633	0
		-29.186	-0.584	0			-45.867	-0.557	0
		-19.881	-0.600	-0.010			-9.876	-0.616	-0.035
		-25.619	-0.590	-0.010			-35.624	-0.574	-0.035
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.530			-45.500	-1.190	-0.777
<i>30<sup>a</sup></i>	8.705	-13.438	-0.610	0	<i>37<sup>a</sup></i>	10.805	2.221	-0.636	0
		-32.062	-0.580	0			-47.721	-0.554	0
		-18.437	-0.602	-0.014			-8.498	-0.618	-0.038
		-27.063	-0.588	-0.014			-37.002	-0.572	-0.038
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.565			-45.500	-1.190	-0.813
<i>31<sup>a</sup></i>	9.005	-10.754	-0.615	0	<i>38<sup>a</sup></i>	11.105	3.974	-0.639	0
		-34.746	-0.575	0			-49.474	-0.551	0
		-16.991	-0.604	-0.018			-7.140	-0.621	-0.040
		-28.509	-0.586	-0.018			-38.360	-0.569	-0.040
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.601			-45.500	-1.190	-0.848
<i>32<sup>a</sup></i>	9.305	-8.243	-0.619	0	<i>39<sup>a</sup></i>	11.405	5.636	-0.642	0
		-37.257	-0.571	0			-51.136	-0.548	0
		-15.547	-0.607	-0.022			-5.804	-0.623	-0.043
		-29.953	-0.583	-0.022			-39.696	-0.567	-0.043
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.636			-45.500	-1.190	-0.883
<i>33<sup>a</sup></i>	9.605	-5.889	-0.623	0	<i>40<sup>a</sup></i>	11.705	7.212	-0.644	0
		-39.611	-0.567	0			-52.712	-0.546	0
		-14.111	-0.609	-0.026			-4.491	-0.625	-0.045
		-31.389	-0.581	-0.026			-41.009	-0.565	-0.045
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.671			-45.500	-1.190	-0.919
<i>34<sup>a</sup></i>	9.905	-3.677	-0.626	0	<i>41<sup>a</sup></i>	12.005	8.709	-0.647	0
		-41.823	-0.564	0			-54.209	-0.543	0
		-12.685	-0.612	-0.029			-3.201	-0.627	-0.047
		-32.815	-0.578	-0.029			-42.299	-0.563	-0.047
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.707			-45.500	-1.190	-0.954
<i>35<sup>a</sup></i>	10.205	-1.596	-0.630	0	<i>42<sup>a</sup></i>	12.305	10.133	-0.649	0
		-43.904	-0.560	0			-55.633	-0.541	0
		-11.273	-0.614	-0.032			-1.937	-0.629	-0.049
		-34.227	-0.576	-0.032			-43.563	-0.561	-0.049
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-0.742			-45.500	-1.190	-0.990

<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$	<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$
<i>43<sup>a</sup></i>	12.605	11.490	-0.651	0	<i>50<sup>a</sup></i>	14.705	19.436	-0.664	0
		-56.990	-0.539	0			-64.936	-0.526	0
		-0.697	-0.631	-0.050			7.253	-0.644	-0.059
		-44.803	-0.559	-0.050			-52.753	-0.546	-0.059
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.025			-45.500	-1.190	-1.272
<i>44<sup>a</sup></i>	12.905	12.783	-0.654	0	<i>51<sup>a</sup></i>	15.005	20.390	-0.666	0
		-58.283	-0.536	0			-65.890	-0.524	0
		0.516	-0.633	-0.052			8.286	-0.646	-0.060
		-46.016	-0.557	-0.052			-53.786	-0.544	-0.060
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.060			-45.500	-1.190	-1.308
<i>45<sup>a</sup></i>	13.205	14.018	-0.656	0	<i>52<sup>a</sup></i>	15.305	21.306	-0.668	0
		-59.518	-0.534	0			-66.806	-0.522	0
		1.704	-0.635	-0.053			9.294	-0.648	-0.060
		-47.204	-0.555	-0.053			-54.794	-0.542	-0.060
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.096			-45.500	-1.190	-1.343
<i>46<sup>a</sup></i>	13.505	15.198	-0.657	0	<i>53<sup>a</sup></i>	15.605	22.187	-0.669	0
		-60.698	-0.533	0			-67.687	-0.521	0
		2.866	-0.637	-0.055			10.278	-0.649	-0.061
		-48.366	-0.553	-0.055			-55.778	-0.541	-0.061
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.131			-45.500	-1.190	-1.378
<i>47<sup>a</sup></i>	13.805	16.327	-0.659	0	<i>54<sup>a</sup></i>	15.905	23.034	-0.670	0
		-61.827	-0.531	0			-68.534	-0.520	0
		4.001	-0.639	-0.056			11.237	-0.651	-0.062
		-49.501	-0.551	-0.056			-56.737	-0.539	-0.062
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.166			-45.500	-1.190	-1.414
<i>48<sup>a</sup></i>	14.105	17.407	-0.661	0	<i>55<sup>a</sup></i>	16.205	23.851	-0.672	0
		-62.907	-0.529	0			-69.351	-0.518	0
		5.111	-0.641	-0.057			12.173	-0.652	-0.062
		-50.611	-0.549	-0.057			-57.673	-0.538	-0.062
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.202			-45.500	-1.190	-1.449
<i>49<sup>a</sup></i>	14.405	18.443	-0.663	0	<i>56<sup>a</sup></i>	16.505	24.637	-0.673	0
		-63.943	-0.527	0			-70.137	-0.517	0
		6.195	-0.643	-0.058			13.086	-0.654	-0.063
		-51.695	-0.547	-0.058			-58.586	-0.536	-0.063
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.237			-45.500	-1.190	-1.484

<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$	<i>Iter.</i>	<i>Time</i>	$\Delta a$	$\Delta i$	$\Delta\Omega$
<b>57<sup>a</sup></b>	16.805	25.396	-0.674	0	<b>61<sup>a</sup></b>	18.005	28.178	-0.679	0
		-70.896	-0.516	0			-73.678	-0.511	0
		13.977	-0.655	-0.063			17.323	-0.661	-0.064
		-59.477	-0.535	-0.063			-62.823	-0.529	-0.064
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.520			-45.500	-1.190	-1.661
<b>58<sup>a</sup></b>	17.105	26.128	-0.675	0	<b>62<sup>a</sup></b>	18.305	28.816	-0.680	0
		-71.628	-0.515	0			-74.316	-0.510	0
		14.845	-0.657	-0.063			18.109	-0.662	-0.064
		-60.345	-0.533	-0.063			-63.609	-0.528	-0.064
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.555			-45.500	-1.190	-1.696
<b>59<sup>a</sup></b>	17.405	26.835	-0.677	0	<b>63<sup>a</sup></b>	18.605	29.434	-0.681	0
		-72.335	-0.513	0			-74.934	-0.509	0
		15.692	-0.658	-0.064			18.875	-0.664	-0.064
		-61.192	-0.532	-0.064			-64.375	-0.526	-0.064
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.590			-45.500	-1.190	-1.732
<b>60<sup>a</sup></b>	17.705	27.518	-0.678	0	<b>64<sup>a</sup></b>	18.905	30.032	-0.682	0
		-73.018	-0.512	0			-75.532	-0.508	0
		16.518	-0.660	-0.064			19.622	-0.665	-0.065
		-62.018	-0.530	-0.064			-65.122	-0.525	-0.065
		0	0	0			0	0	0
		-45.500	-1.190	-1.626			-45.500	-1.190	-1.767

*Tabella 7.6: Valori assunti dalle variazioni dei singoli parametri orbitali al variare del tempo di trasferta.*

## Capitolo 8

### Impatto della $\Delta\Omega$ di tempo zero

Finora la variabile cuore dell'analisi è stata il tempo utile al completamento della manovra, che, dal momento che l'istante iniziale è posto a zero, coincide con il tempo finale di trasferta. In realtà vi è anche un'altra variabile che ha un forte impatto sui costi e sui tempi di trasferta, e quindi sulla missione in sé, ovvero la differenza di RAAN iniziale delle due orbite in esame ( $\Delta\Omega_0$ ). È chiaro come anche i valori di semiasse maggiore e inclinazione al tempo iniziale giocano un ruolo importante, poiché riversano il loro contributo direttamente sui costi di trasferta e sui *RAAN rate* orbitali, nonché sull'evoluzione temporale delle due orbite in questione. Tuttavia, in relazione alle assunzioni iniziali fatte, non verranno qui presentati i risultati dell'impatto di  $\Delta a_0$  e  $\Delta i_0$ , ma solo della quantità  $\Delta\Omega_0$ . In ogni caso gli effetti sono intuibili tenendo in considerazione i risultati mostrati a breve e gli impatti di  $a$  e  $i$  sul *RAAN rate* visti in precedenza.

Per lo scopo si sono dunque fissati i valori di semiasse maggiore e inclinazione di entrambe le orbite ai valori mostrati nella Tabella 4.1, nonché la RAAN dell'orbita iniziale, e si è considerato uno scostamento di  $\pm 2^\circ$  dal valore base dell'orbita finale, così da ottenere due nuove configurazioni orbitali a seconda del valore di  $\Omega_f$ :  $136.05^\circ$  e  $140.05^\circ$  (Tabella 8.1). Per cui, quando si parlerà di “diversa configurazione orbitale di tempo zero” s'intenderà sempre la differenza dovuta alla sola RAAN dell'orbita finale.

La prima configurazione permetterà di valutare gli effetti del ritardo dell'orbita finale su quella iniziale e il relativo allontanamento, apprezzando così gli effetti sulla correzione del tempo d'attesa; la seconda evidenzierà gli effetti di una più ampia variazione iniziale di RAAN sui costi e sulle variazioni dei parametri orbitali, fungendo da *sample case* per configurazioni orbitali a più grandi  $\Delta\Omega_0$ , con l'accortezza di avere un occhio di riguardo alle assunzioni dell'analisi.

Prima di presentare i diversi grafici è doveroso ricordare che la correzione dei tempi di cui si avvarrà la procedura di calcolo porterà ad avere una notevole traslazione di questi, e proprio per questo motivo i grafici dei due casi verranno presentati separatamente, di modo da poterne apprezzare i relativi andamenti. Allo scopo di avere maggiore chiarezza grafica, per il motivo poc'anzi descritto, la configurazione base verrà inserita solo considerandone il metodo pseudo-ottimale ed esclusivamente per il confronto a  $\Omega_f$  pari a  $140.05^\circ$ . Per tutto ciò verrà usato il codice di stile grafico riassunto nella Tabella 8.2.

	$\Omega_i$ [°]	$\Omega_f$ [°]	$\Delta\Omega_0$ [°]
<b>Configurazione base</b>	137.59	138.05	0.46
<b>Prima configurazione</b>	137.59	136.05	-1.54
<b>Seconda configurazione</b>	137.59	140.05	2.46

Tabella 8.1: Configurazioni orbitali considerate per lo studio.

$\Omega_f$ [°]	Tipologia linea	Marker <sup>35</sup>	
		$t_{\Delta V_{min}}$	$t_{x=0}$
140.05°	Pseudo-ottimale: tratteggiata. Attendista: tratto-punto.	x	□
138.05°	Pseudo-ottimale: continua.		
136.05°	Pseudo-ottimale: continua. Attendista: tratteggiata.		

Tabella 8.2: Quadro sinottico dello stile grafico utilizzato per la visualizzazione delle diverse curve.

## Impatto sui costi di trasferta

Osservando gli andamenti di costo per il metodo  $ai\Omega$  – *transfer pseudo-ottimale* (Figura 8.1 - Figura 8.2), si può notare come per tempi maggiori di 25 giorni circa, la trasferta della configurazione base risulti più costosa della trasferta a  $\Omega_f = 140.05^\circ$ , nonostante quest'ultima abbia una RAAN finale maggiore. Ciò anticipa il fatto che l'incremento  $\Delta\Omega_0$  porta ad uno spostamento delle curve verso tempi maggiori, così come i tempi di ottimo.

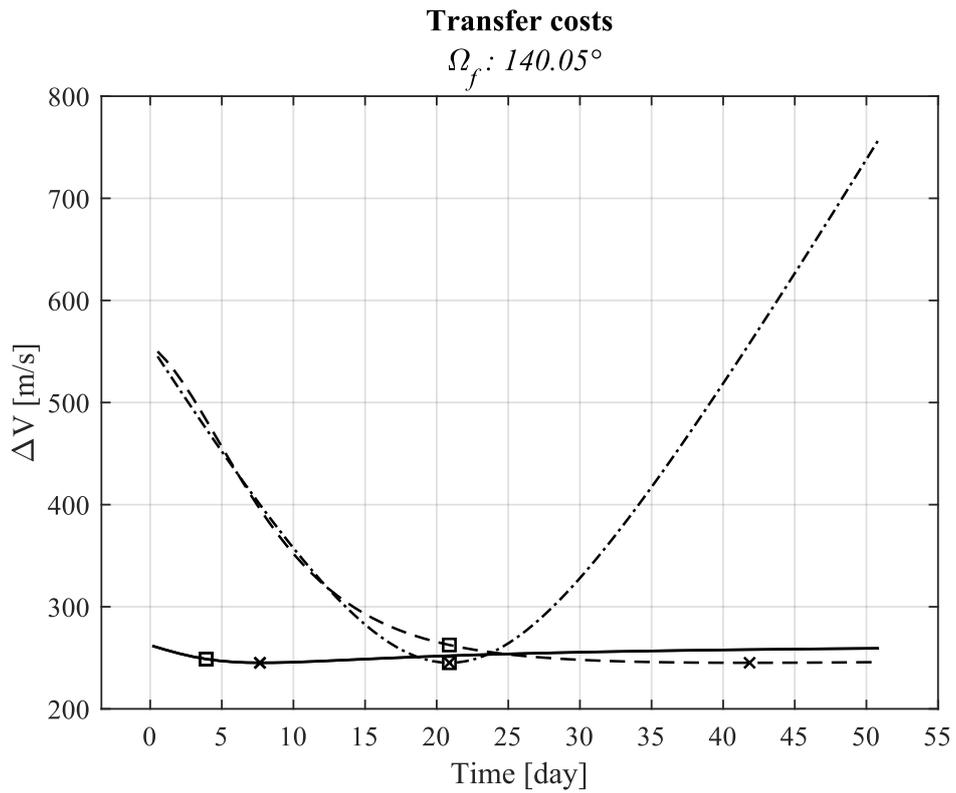
Il metodo attendista presenta invece dei costi relativamente minori ai due precedenti, ma solo per tempi minori dell'istante già citato, oltre il quale risulta essere invece non conveniente, poiché questi diventano sempre più grandi e il mancato impulso iniziale non permette di sfruttare al meglio l'effetto perturbativo. Confrontando i due metodi si nota dunque la stessa peculiarità anticipata dalla Figura 7.2: la presenza di uno specifico intervallo di tempo in cui il metodo attendista risulta essere più vantaggioso del primo. Questo comporta che al crescere del  $\Delta\Omega_0$  sia più conveniente attendere l'allineamento delle linee dei nodi solo se l'impulso verrà erogato all'interno di questi specifici range di tempo, con la consapevolezza del fatto che tanto più grande è  $|\Delta\Omega_0|$ , tanto più tali range si spostano verso tempi maggiori<sup>36</sup>. Questo fenomeno diventa ancora più evidente per la configurazione a  $136.05^\circ$  valutata tramite il metodo attendista (Figura 8.3), per il quale il costo di missione risulta essere decisamente elevato per trasferte di questo genere, e presenta valori accettabili solo nell'intorno del *waiting time* (3043 giorni circa). Osservando invece l'andamento valutato tramite il metodo pseudo-ottimale (Figura 8.4), si palesa l'enorme divario rispetto ai costi poc'anzi descritti, nonché un comportamento totalmente diverso: l'impulso iniziale permette di accomodare il miglior *RAAN rate*, in modo da sfruttare al meglio il grande tempo a disposizione.

Dalla Figura 8.6 alla Figura 8.9 è possibile apprezzare gli andamenti dell'*Impulse Ratio* e dell'*Impulse Fraction* al variare del tempo finale di trasferta per le diverse configurazioni orbitali trattate, le quali portano a comportamenti simili tra loro. Dal momento che, per i motivi già discussi, si devono trattare tempi maggiori, se si ha abbastanza tempo a disposizione sarà possibile sfruttare maggiormente l'effetto  $J_2$  a seguito delle variazioni iniziali  $\Delta a$ ,  $\Delta i$  e  $\Delta\Omega$ . Come conseguenza di ciò, mentre il costo del primo impulso risulta essere mediamente più contenuto rispetto a quello relativo alla configurazione base, quello del secondo impulso risulta essere invece più alto. Difatti, i maggiori tempi di trasferta, e quindi l'uso più assiduo dell'effetto  $J_2$ , permettono di attenuare le variazioni iniziali di  $a$ ,  $i$  e  $\Omega$ , mentre le variazioni residue al tempo finale saranno successivamente coperte da un impulso più costoso.

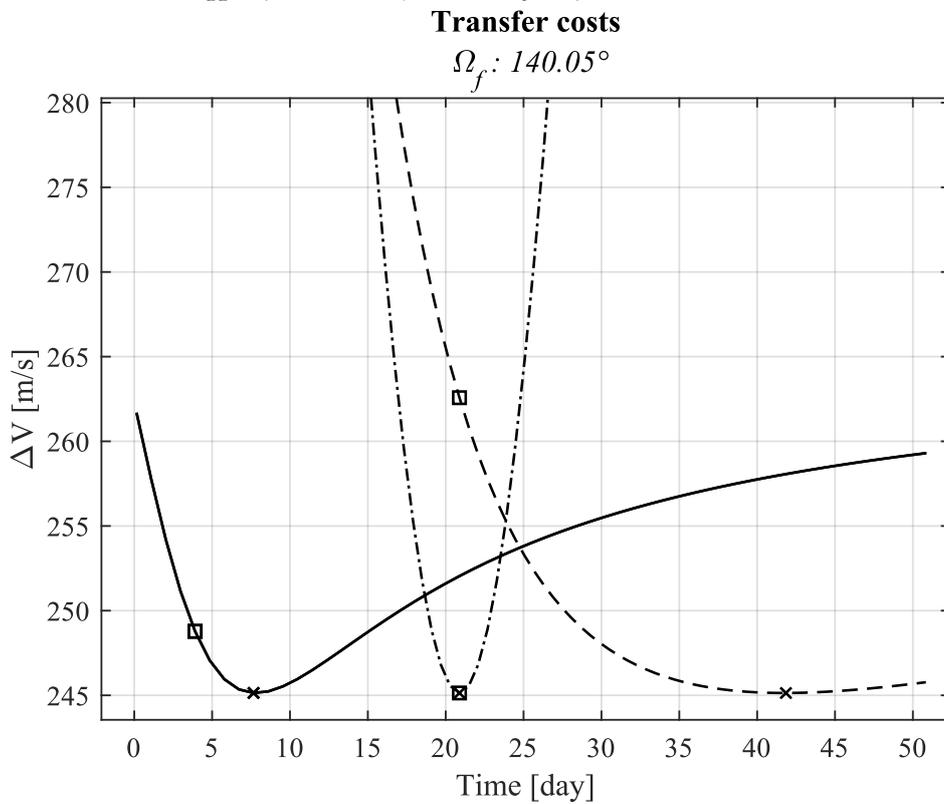
Infine, la Tabella 8.3 riassume i valori di costo minimo calcolati tramite ciascun metodo per ciascuna configurazione orbitale presa in esame.

<sup>35</sup> Si fa riferimento al valore della generica variabile per l'istante di tempo in questione.

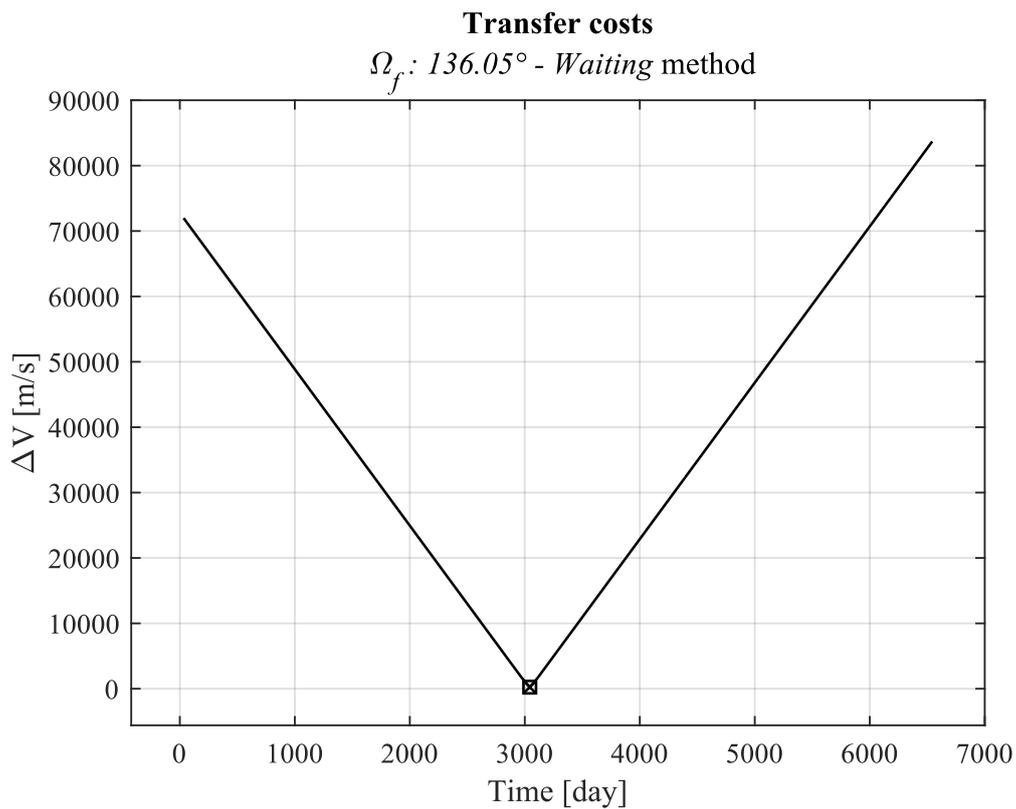
<sup>36</sup> È chiaro che, per la trattazione in esame, tale affermazione è da ritenersi valida solo sotto le già note assunzioni adottate per i metodi di ottimizzazione.



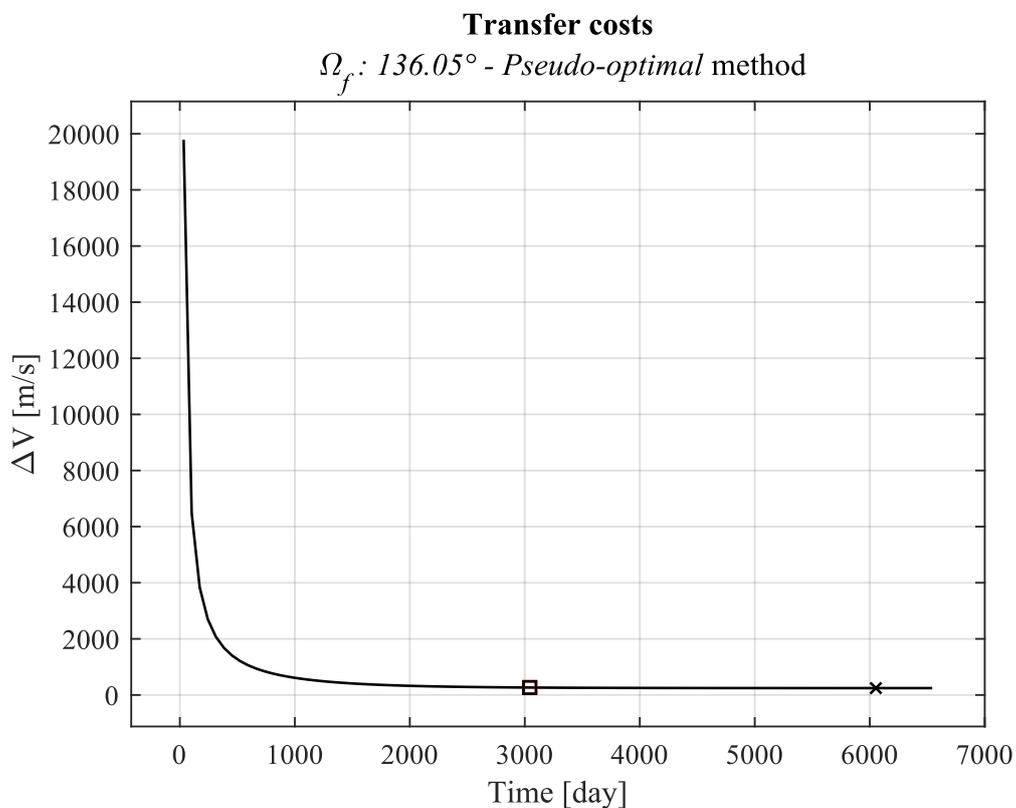
**Figura 8.1:** Andamenti del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a  $140.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto).



**Figura 8.2:** Dettaglio del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a  $140.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto).



**Figura 8.3:** Andamenti del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione a  $136.05^\circ$  tramite metodo attendista.



**Figura 8.4:** Andamenti del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione a  $136.05^\circ$  tramite metodo pseudo-ottimale.

### Transfer costs in detail

$$\Omega_f: 136.05^\circ$$

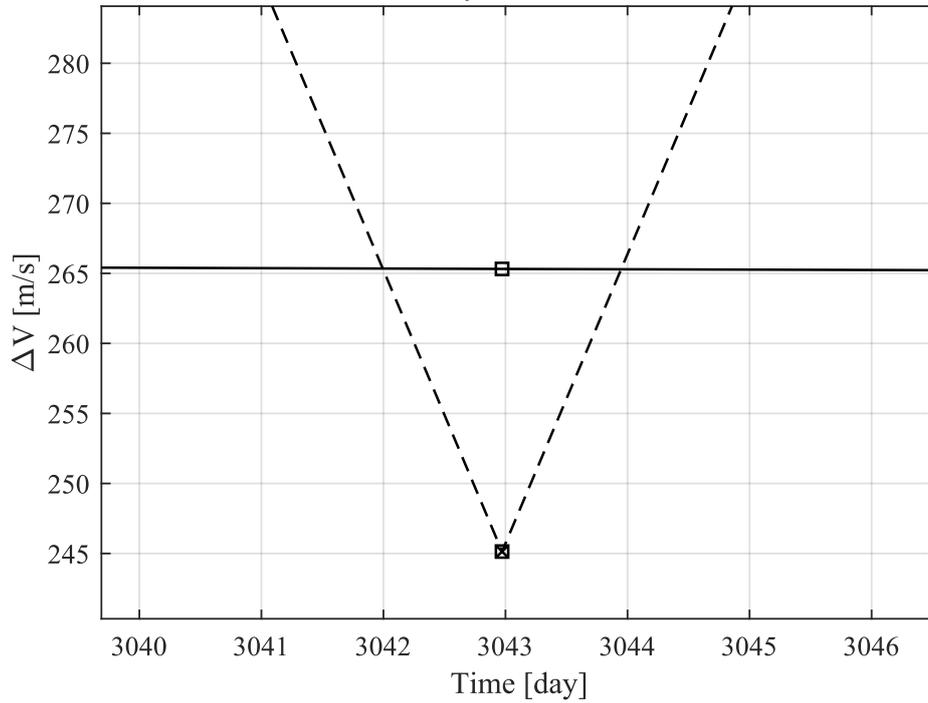


Figura 8.5: Dettaglio del costo totale al variare del tempo finale, per la configurazione a  $136.05^\circ$  tramite il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).

### Impulse Fraction

$$\Omega_f: 140.05^\circ$$

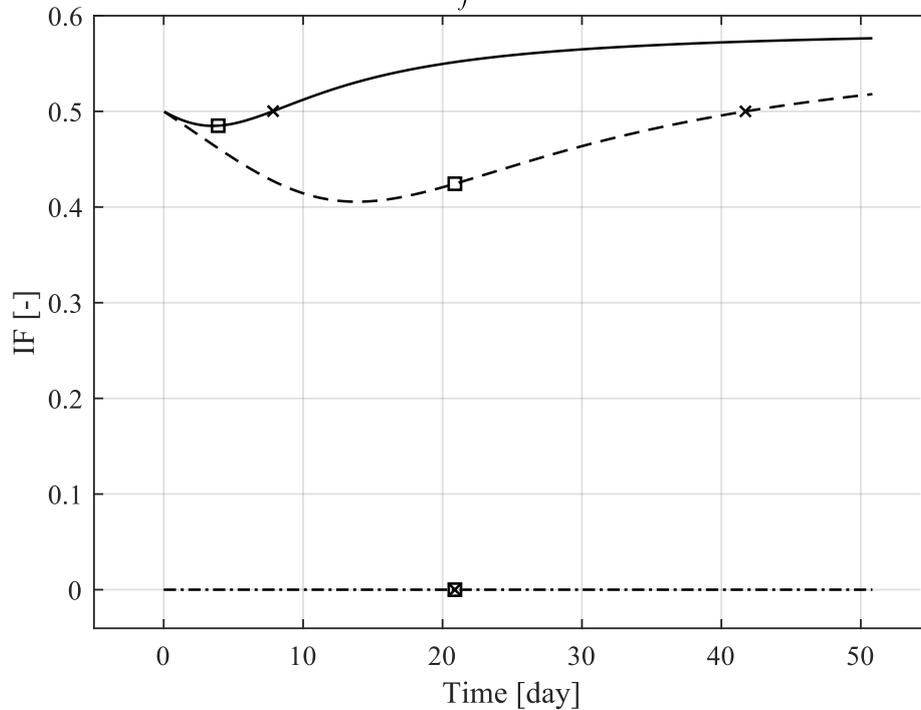
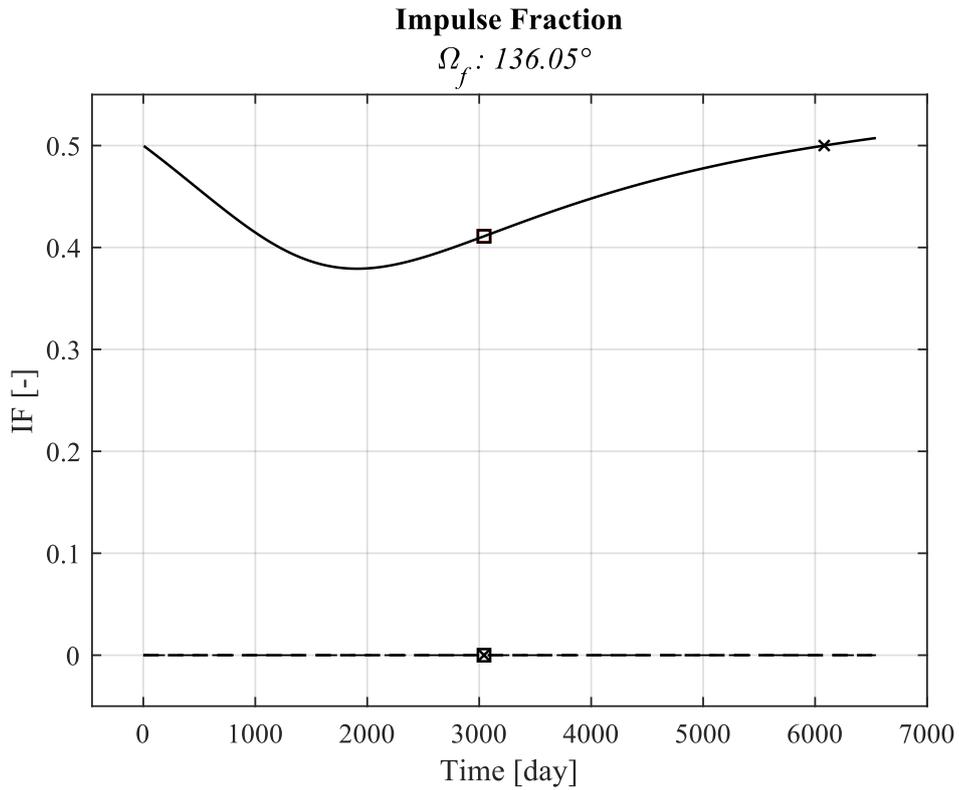
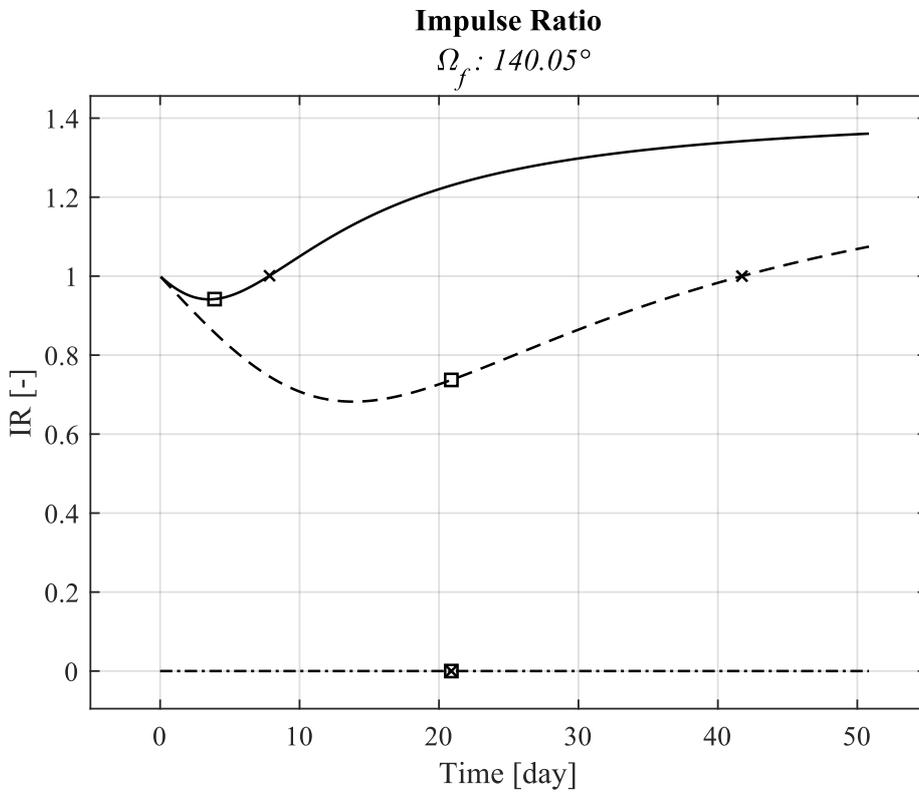


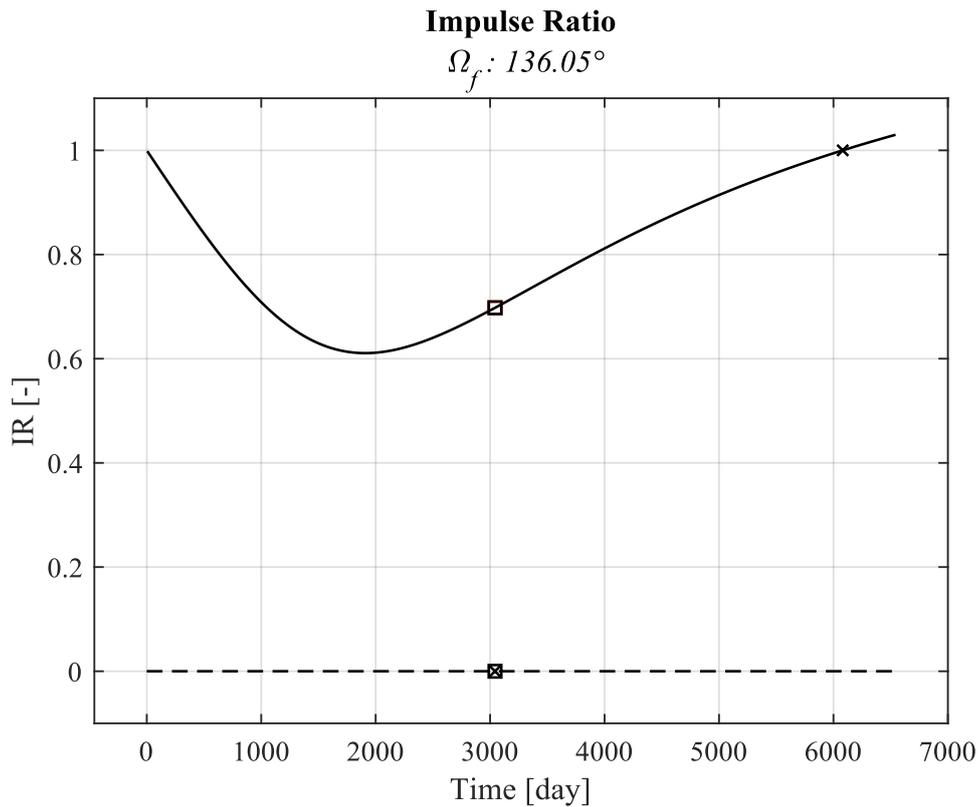
Figura 8.6: Andamenti dell'Impulse Fraction al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a  $140.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto).



**Figura 8.7:** Andamenti dell'Impulse Fraction al variare del tempo finale, per la configurazione a  $136.05^\circ$  tramite il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).



**Figura 8.8:** Andamenti dell'Impulse Ratio al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a  $140.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto).



**Figura 8.9:** Andamenti dell'Impulse Ratio al variare del tempo finale, per la configurazione a  $136.05^\circ$  tramite il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).

<b>Configurazione orbitale</b>	<b>Metodo</b>	<b>Costo minimo [m/s]</b>
$136.05^\circ$	<i>Pseudo-ottimale</i>	245.138433622536
	<i>Attendista</i>	245.138433567045
$138.05^\circ$	<i>Pseudo-ottimale</i>	245.138433778663
	<i>Attendista</i>	245.138433567045
$140.05^\circ$	<i>Pseudo-ottimale</i>	245.138433590833
	<i>Attendista</i>	245.138433567045

**Tabella 8.3:** Valori di costo minimo per tutte le configurazioni orbitali prese in esame, al variare del metodo utilizzato.

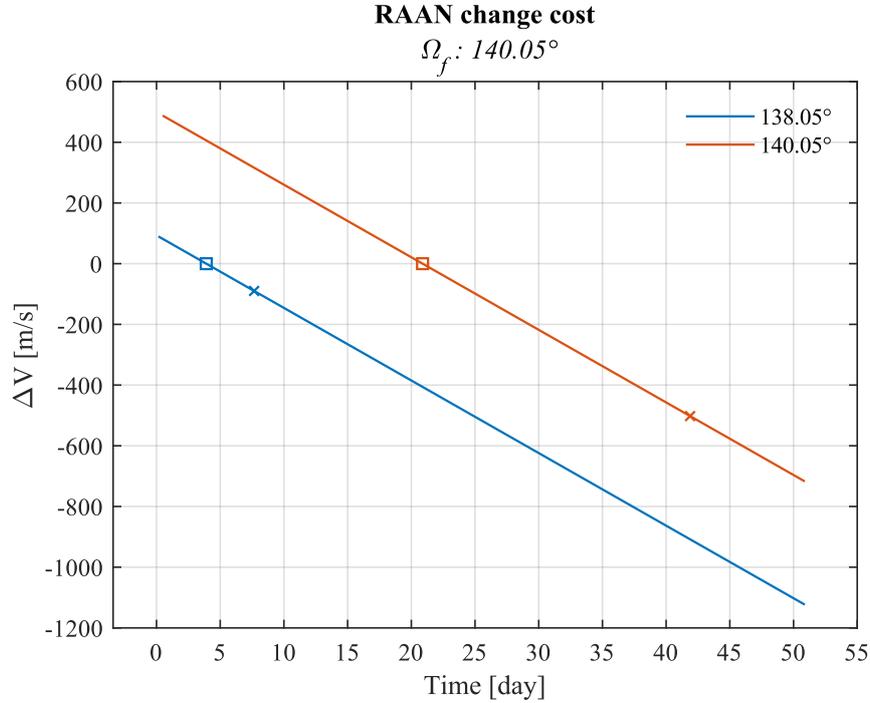
### Impatto sui singoli costi necessari al cambio orbitale

Per quanto riguarda gli effetti di  $\Delta\Omega_0$  sui valori di  $x$ ,  $y$  e  $z$ , le equazioni (4.21), (4.22) e (4.23) dimostrano come gli ultimi due non vengono in alcun modo intaccati. Stessa cosa non può dirsi del costo  $x$ , il quale aumenterà notevolmente al variare del tempo utile, soprattutto per la configurazione a  $136.05^\circ$  (Figura 8.10 - Figura 8.11). Tale comportamento ovviamente è da riferirsi al fatto che tanto più le orbite sono tra loro distanti in termini di RAAN, tanto più elevato sarà il costo da coprire.

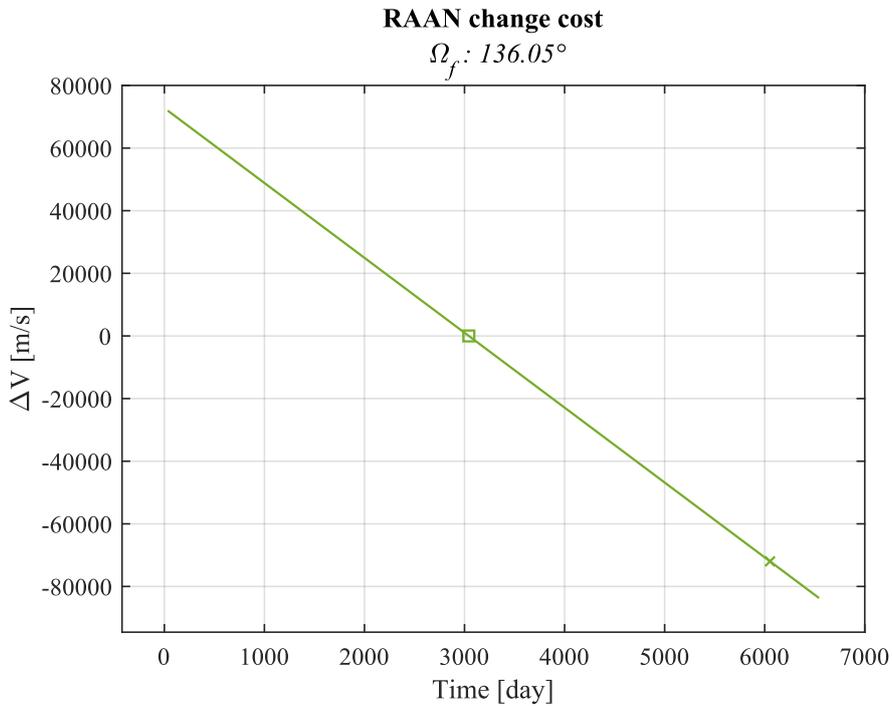
Un'altra caratteristica che evidenziano le due figure è il discorso fatto in precedenza in merito alla traslazione dei tempi: all'aumentare di  $|\Delta\Omega_0|$  tutti i *markers* tendono ad allontanarsi dal tempo zero, registrando così i valori espressi in *giorni* presentati in Tabella 8.4. Confrontando tutti gli andamenti è possibile concludere che per i casi in cui si necessita

della correzione dei tempi (configurazione a  $136.05^\circ$ ) i valori di  $x$  tendono ad essere notevoli, proprio perché essi soffrono della forte dipendenza dal tempo.

Infine, sono da notare anche i rami precedenti al *waiting time* (quadrati nelle figure): essi aumentano in lunghezza in relazione al maggior tempo che le nuove configurazioni orbitali richiedono per l'allineamento delle linee dei nodi.



**Figura 8.10:** Andamenti dei costi di cambio RAAN richiesti dalla trasferta al variare del tempo finale, per la configurazione base (in blu) e a  $140.05^\circ$  (in arancione).



**Figura 8.11:** Andamento dei costi di cambio RAAN al variare del tempo finale per la configurazione a  $136.05^\circ$ .

<i>Configurazione orbitale</i>	<i>Metodo</i>	$t_{x=0}$ [day]	$t_{\Delta V_{min}}$ [day]
<b>136.05°</b>	Pseudo-ottimale	3042.97218493755	6080.97218493755
	Attendista	3042.97218493755	3042.97218493755
<b>140.05°</b>	Pseudo-ottimale	20.8829759943827	41.7281927022924
	Attendista	20.8829759943827	20.8829759943827

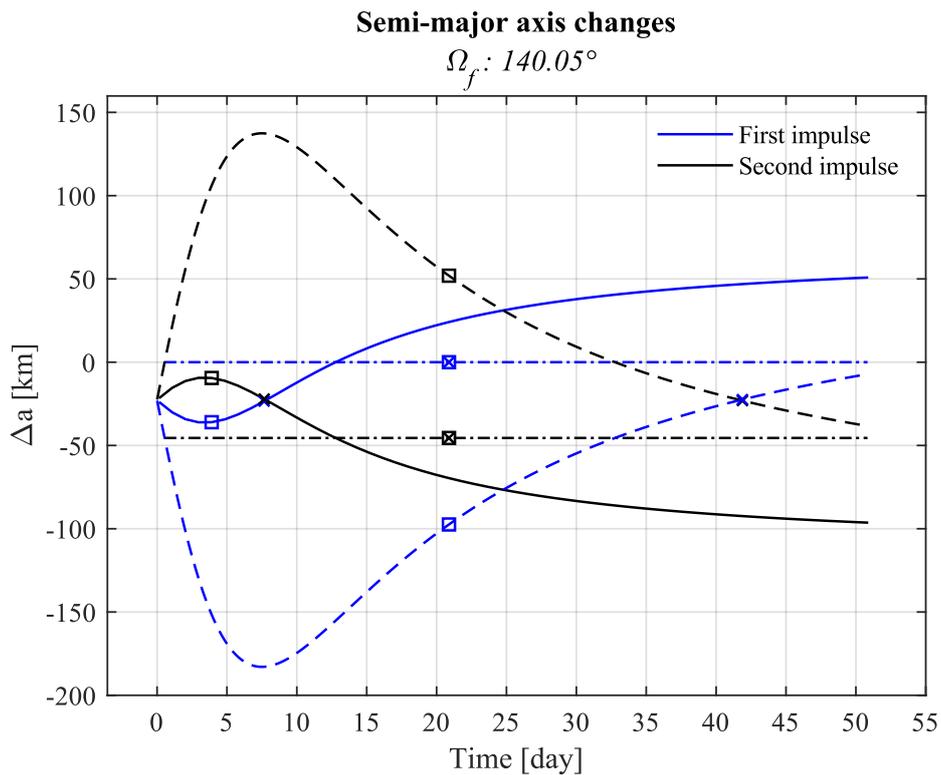
*Tabella 8.4: Tempi riferiti alle due configurazioni orbitali presentate.*

### **Impatto sulle variazioni del semiasse maggiore**

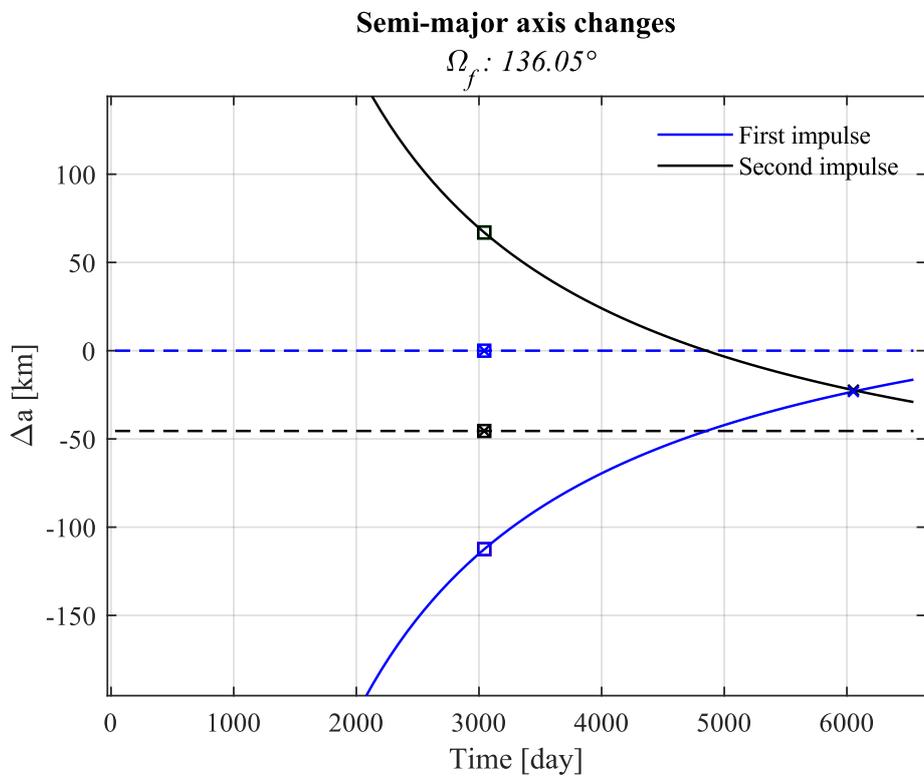
Si considerino ora le variazioni del semiasse maggiore a seguito dei due impulsi. Per la configurazione a 140.05° (Figura 8.12), rispetto alla configurazione base si registrano delle variazioni più grandi in modulo, raggiungendo dei picchi di circa -182.9 km per il primo impulso del metodo  $ai\Omega$  – *transfer pseudo-ottimale*. È da notare anche che, a differenza del caso base, il caso ad  $\Omega_f$  incrementata porta il suddetto metodo ad avere un secondo impulso che incrementa il semiasse maggiore ( $\Delta a_b > 0$ ). Il motivo è legato al fatto che per la ricerca del *RAAN rate* ideale dell'orbita di *coasting*, si necessita sempre di diminuire notevolmente il semiasse maggiore (curva tratteggiata in blu), e visto che la variazione globale da coprire è comunque pari a  $\Delta a = -45.5$  km, il secondo impulso dovrà modificarsi di conseguenza, ed essere positivo quando necessario. Per quanto riguarda i tempi fondamentali, come visto in precedenza, essi migrano verso valori più grandi, e in merito al metodo  $ai\Omega$  – *transfer attendista*, visto che la  $\Delta\Omega_0$  non ha alcun impatto sui valori del semiasse maggiore, gli andamenti saranno identici a quelli presentati nel capitolo precedente (Figura 7.5).

Per quanto riguarda la configurazione orbitale a 136.05°, si registrano gli andamenti monotoni in Figura 8.13 che, per tempi finali prossimi a quelli iniziali (valore nullo in questo caso), raggiungono valori considerevoli. Ciò è dovuto al fatto che, al poco tempo a disposizione per concludere la trasferta si unisce il ritardo iniziale dell'orbita di partenza su quella di arrivo, e questo porta il controllo attivo del semiasse maggiore a dover garantire l'intera variazione per tempi brevissimi. Come si vedrà a breve, questo comportamento si presenterà anche per il controllo attivo dell'inclinazione, ed entrambi si ripercuoteranno sul controllo della RAAN, poiché in tali situazioni non verrà sfruttato adeguatamente l'effetto  $J_2$ .

In merito alla valutazione degli effetti sul *RAAN rate*, si considererà la stessa situazione presentata precedentemente, ovvero una trasferta *thrust-coast-thrust* con istante finale pari al *waiting time*, con l'accortezza di tenere bene a mente ciò che si è detto nei capitoli precedenti in merito a questa situazione. A seguito del solo controllo attivo di  $a$ , mentre per la configurazione a 140.05° il primo impulso porta ad avere un incremento relativo del *RAAN rate* pari a 4.77% circa, per la configurazione a 136.05° suddetto valore si aggira intorno a 5.51%. I valori appena esposti sono riassunti nella Tabella 8.5.



**Figura 8.12:** Andamenti delle variazioni del semiasse maggiore al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a  $140.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto).



**Figura 8.13:** Andamenti delle variazioni del semiasse maggiore per la configurazione a  $136.05^\circ$  sfruttando il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).

## Impatto sulle variazioni dell'inclinazione

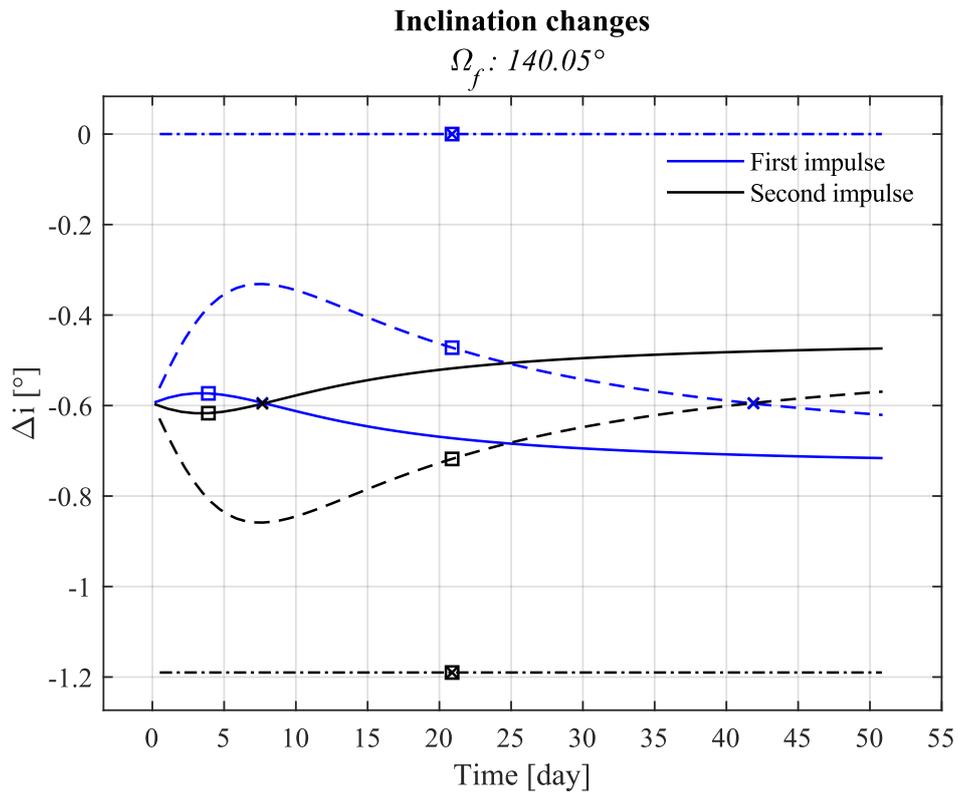
A prescindere dal valore di RAAN finale, come per le variazioni del semiasse maggiore, quelle dell'inclinazione subiscono sorti analoghe: per il motivo detto prima il metodo attendista presenta un andamento identico a quello della configurazione base (Figura 7.7), e stesso discorso si ha per il caso pseudo-ottimale, il quale registra variazioni più grandi in modulo e comunque sempre negative (Figura 8.14).

Volendo valutare gli effetti sul *RAAN rate*, per la stessa situazione in esame, la configurazione a  $140.05^\circ$ , a causa della variazione di inclinazione dovuta al primo impulso, porta ad una variazione del *RAAN rate* relativo pari a circa  $-5.42\%$ , mentre per la configurazione a  $136.05^\circ$  tali valori si aggirano intorno a  $-5.14\%$ .

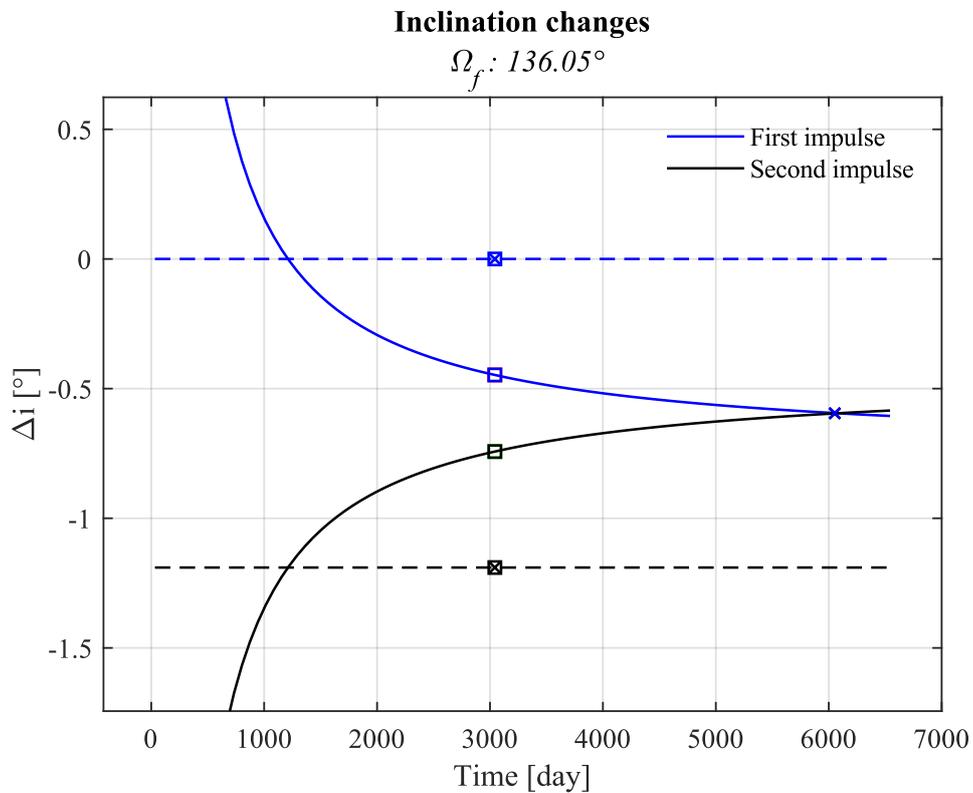
Osservando la Tabella 8.5, dove per completezza si ripropongono anche i valori della configurazione base, è possibile confrontare l'intero set di valori per tutte le configurazioni orbitali in esame. Considerando l'ultima colonna della tabella, si può apprezzare come le variazioni subiscano delle sostanziali differenze, e ciò conferma quanto finora è stato dato solo per scontato: i valori forniti dalla (3.21) sono fortemente influenzati dalle variazioni di  $\Omega$  dovute ai due impulsi. Difatti, in relazione alle diverse variazioni  $\Delta\Omega$  ottenute tramite i due impulsi, si palesano valori notevolmente diversi tra loro. Infine, è da notare come il contributo netto sia sempre negativo per le configurazioni orbitali che prevedono un avvicinamento delle orbite, mentre come risulti positivo per quelle che prevedono un allontanamento.

<i>Configurazione</i>	<i>Contributo di <math>\Delta a</math></i>	<i>Contributo di <math>\Delta i</math></i>	<i>Contributo netto</i>
$136.05^\circ$	0.055054640884406	-0.051375104037164	0.003679536847242
$138.05^\circ$	0.017634463889492	-0.065832254169710	-0.048197790280219
$140.05^\circ$	0.047694260868912	-0.054218760253195	-0.006524499384283

*Tabella 8.5: Variazioni del RAAN rate relativo a seguito del primo impulso al waiting time per tutte le configurazioni in esame.*



**Figura 8.14:** Andamenti delle variazioni dell'inclinazione al variare del tempo finale per la configurazione base (linea continua), per quella a  $140.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto).



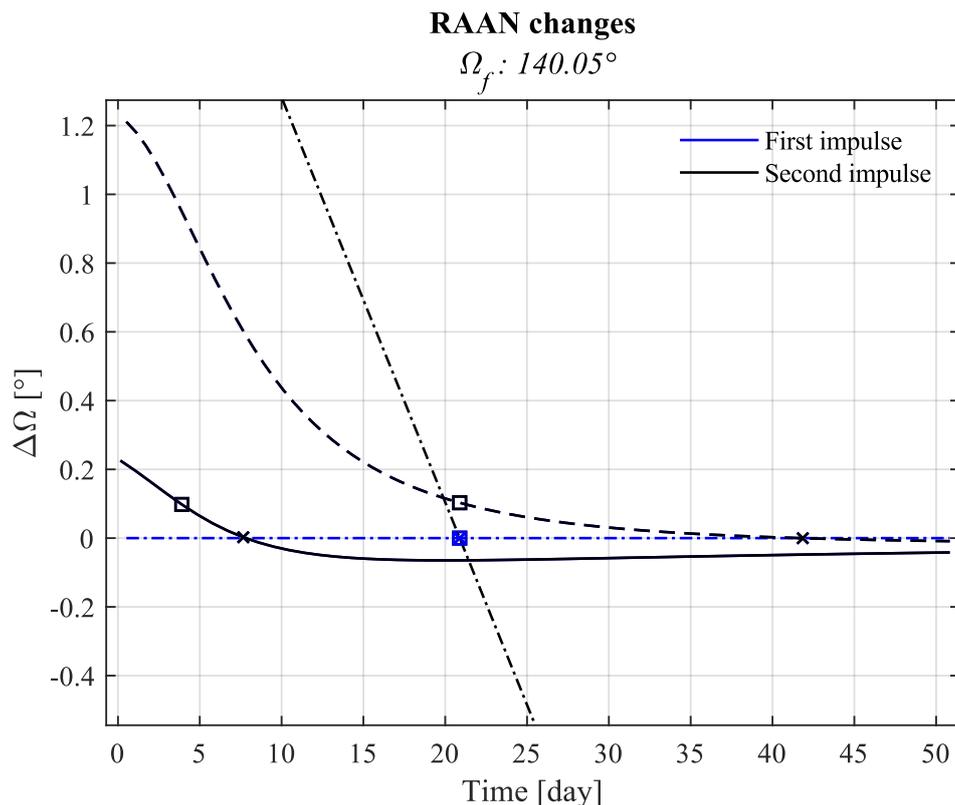
**Figura 8.15:** Andamenti delle variazioni dell'inclinazione al variare del tempo finale, per la configurazione a  $136.05^\circ$  tramite metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).

## Impatto sulle variazioni della RAAN

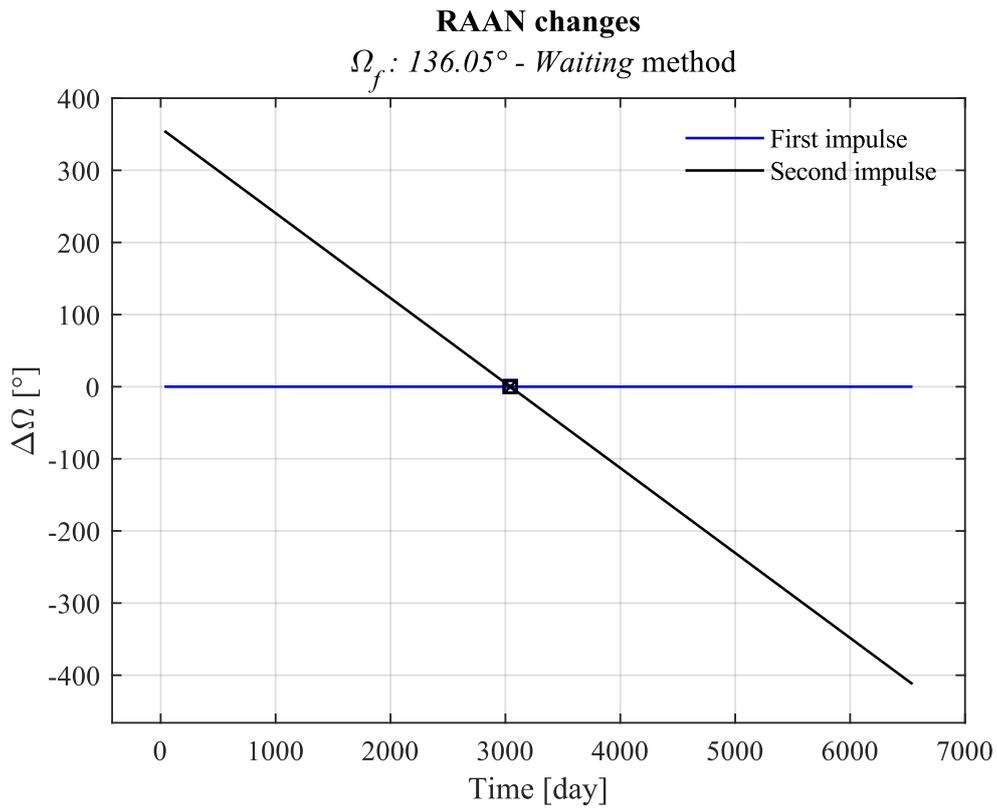
Considerando adesso le variazioni della RAAN per la configurazione a  $140.05^\circ$ , a prescindere dal valore di  $\Omega_f$ , il primo impulso del caso attendista resta costantemente nullo, mentre il secondo impulso segue giustamente l'andamento di  $x$  come visto nel capitolo precedente, sviluppandosi linearmente a partire da un massimo di  $2.5^\circ$  fino ad un minimo di circa  $-3.5^\circ$ , annullandosi per il tempo esatto di waiting time ( $20.88$  giorni circa).

In merito al metodo pseudo-ottimale gli andamenti partono da un massimo, il quale, per ovvi motivi, è esattamente la metà della variazione globale da coprire, per poi diminuire in maniera monotona tendendo al valore nullo per tempi via via più grandi. Ciò si trova perfettamente in accordo al fatto che conviene sfruttare il più possibile l'effetto  $J_2$ , a maggior ragione per tempi lunghi, per i quali l'eliminazione del primo impulso porterà a situazioni controproducenti. Questa affermazione è in accordo agli andamenti del costo globale di trasferta presentati in Figura 8.1, ed è da intendersi sempre relativamente ai tempi a disposizione per la trasferta.

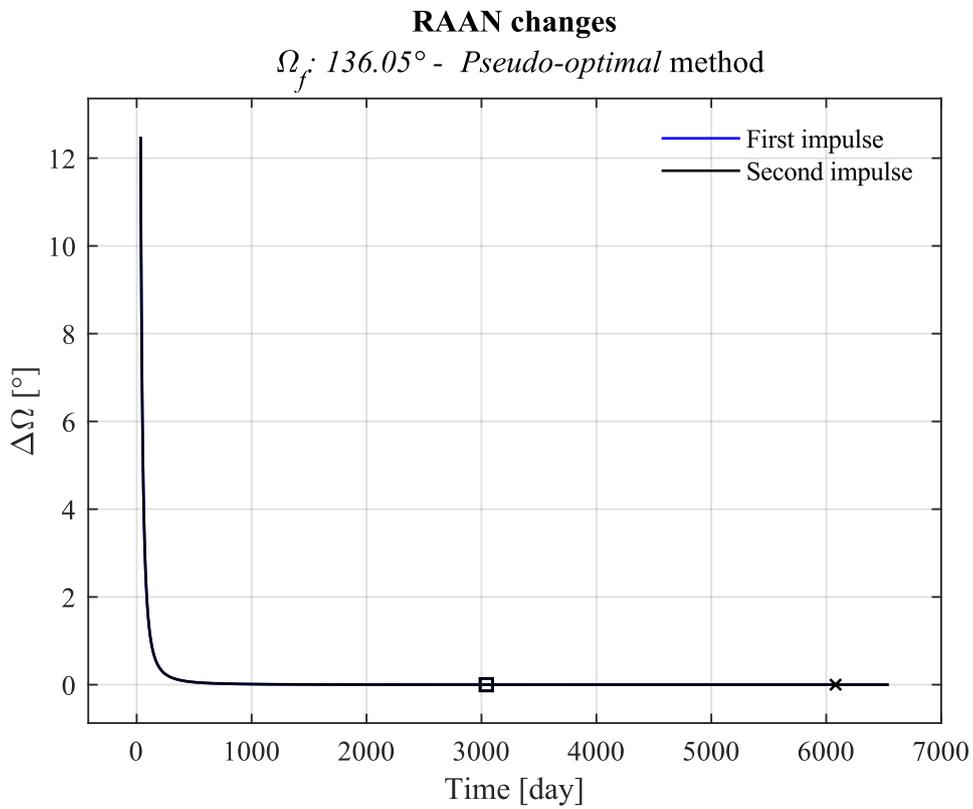
Per quanto riguarda la configurazione a  $136.05^\circ$ , il caso attendista (Figura 8.17) presenta un impulso finale che diventa proibitivo per qualsiasi istante di tempo che non ricada nell'intorno del *waiting time*, mentre il metodo pseudo-ottimale (Figura 8.18) presenta dei valori decisamente più accettabili, i quali tendono fin da subito al valore nullo.



**Figura 8.16:** Andamenti delle variazioni della RAAN al variare del tempo finale, per la configurazione base (linea continua), per quella a  $140.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea tratteggiata) e attendista (linea tratto-punto).



**Figura 8.17:** Andamenti delle variazioni della RAAN al variare del tempo finale, per il metodo attendista con configurazione orbitale a  $136.05^\circ$ .

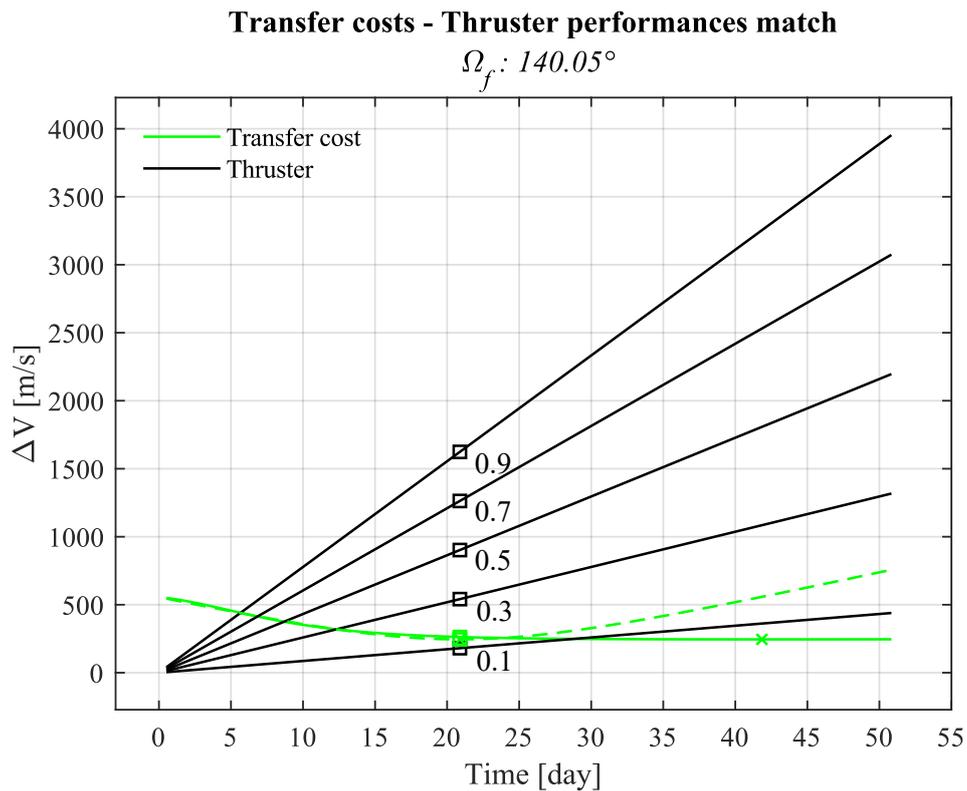


**Figura 8.18:** Andamenti delle variazioni della RAAN al variare del tempo finale, per il metodo pseudo-ottimale con configurazione orbitale a  $136.05^\circ$ .

## Impatto sul tempo di spinta

Come per la configurazione base, per il propulsore è stato considerato lo stesso ventaglio di prestazione, e sono state valutate le curve di confronto tra questo e il costo totale di missione (Figura 8.19 - Figura 8.20). Confrontando entrambe le figure con quella presentata per la configurazione base (Figura 7.13), si osserva fin da subito l'impatto del tempo a disposizione: mentre per la configurazione a  $138.05^\circ$  si riesce a coprire il costo minimo (entro il tempo di minimo) solo con un propulsore che possiede un TMR minimo pari a  $0.5 \text{ mN/kg}$  (supposti i TMR in figura), per le due in esame si riesce a coprire i costi con prestazioni meno esigenti. Più precisamente, per la configurazione a  $136.05^\circ$  è sufficiente un TMR di  $0.1 \text{ mN/kg}$ , mentre per la seconda ne basta uno di  $0.3 \text{ mN/kg}$ <sup>37</sup>. Ciò significa che valori di TMR maggiori di  $0.5 \text{ mN/kg}$  portano a propulsori, che per le manovre in esame, risultano essere eccessivamente sovradimensionati. Inoltre, è importante notare come in entrambi i casi vengano coperti anche i costi minimi del metodo attendista (linee tratteggiate in verde).

In merito ai tempi di spinta (Figura 8.21 - Figura 8.22), entrambe le configurazioni tramandano le caratteristiche già note dal caso base (Figura 7.14), addensandosi verso tempi di spinta minori al crescere del TMR, e presentando i rispettivi minimi in corrispondenza dei minimi di costo.



**Figura 8.19:** Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale a  $140.05^\circ$ .

<sup>37</sup> Tale affermazione è da ritenersi valida solo se considerati i valori di TMR presentati in figura, poiché chiaramente potranno, e dovranno, essere considerati dei valori intermedi.

### Transfer costs - Thruster performances match

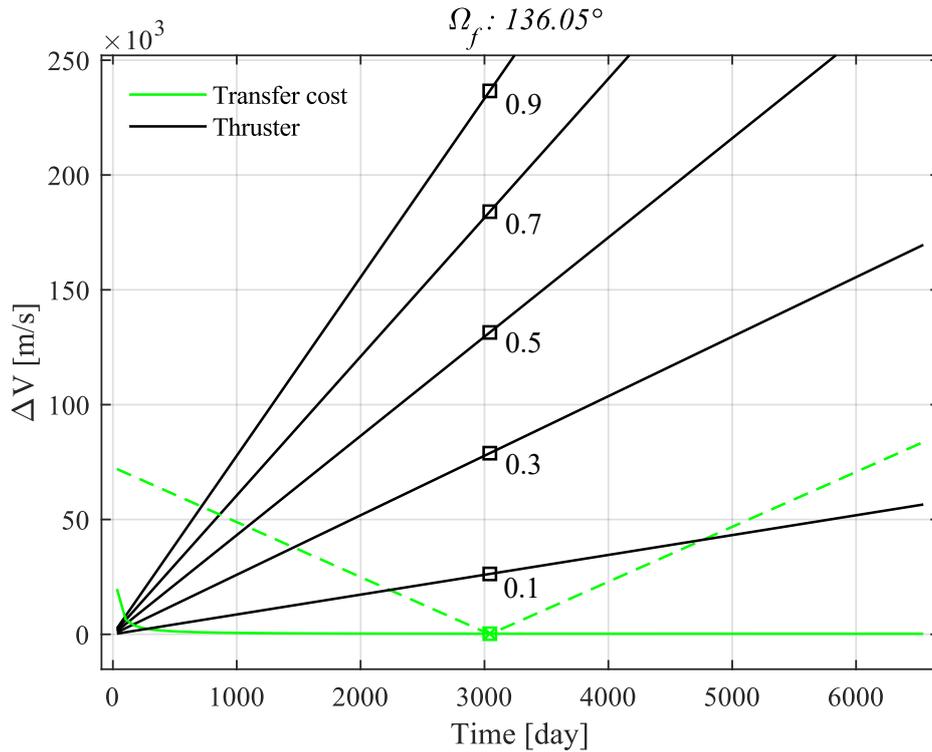


Figura 8.20: Confronto grafico tra il costo richiesto dalla trasferta tramite i due metodi e l'impulso fornito dal propulsore al variare del tempo finale, per la configurazione orbitale a  $136.05^\circ$ .

### Thrust time comparison

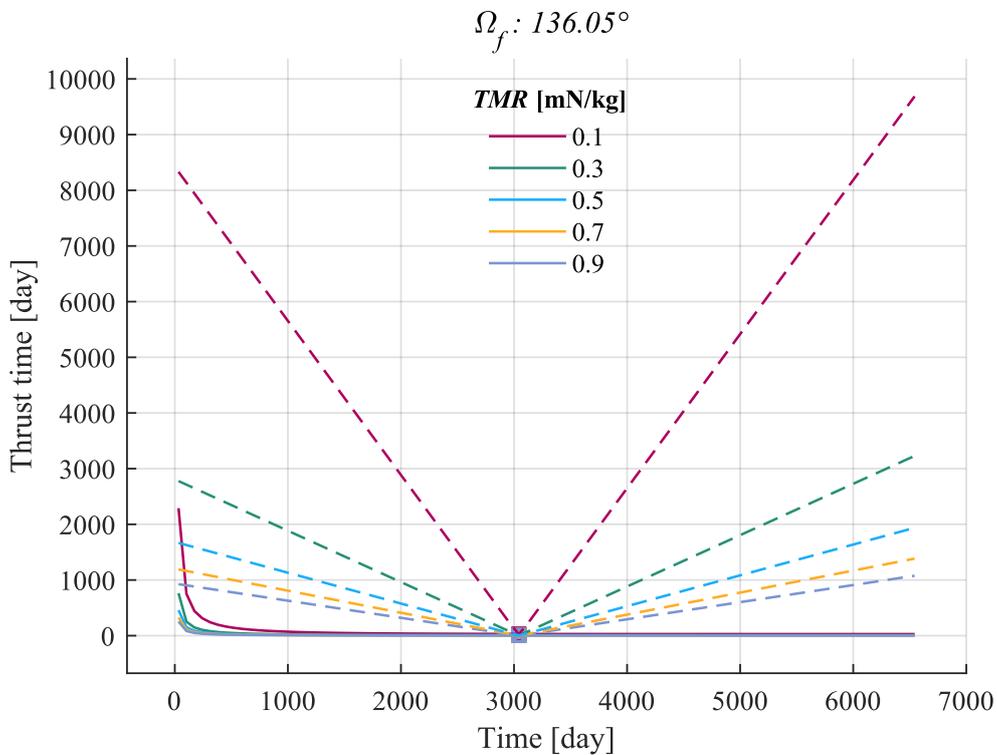
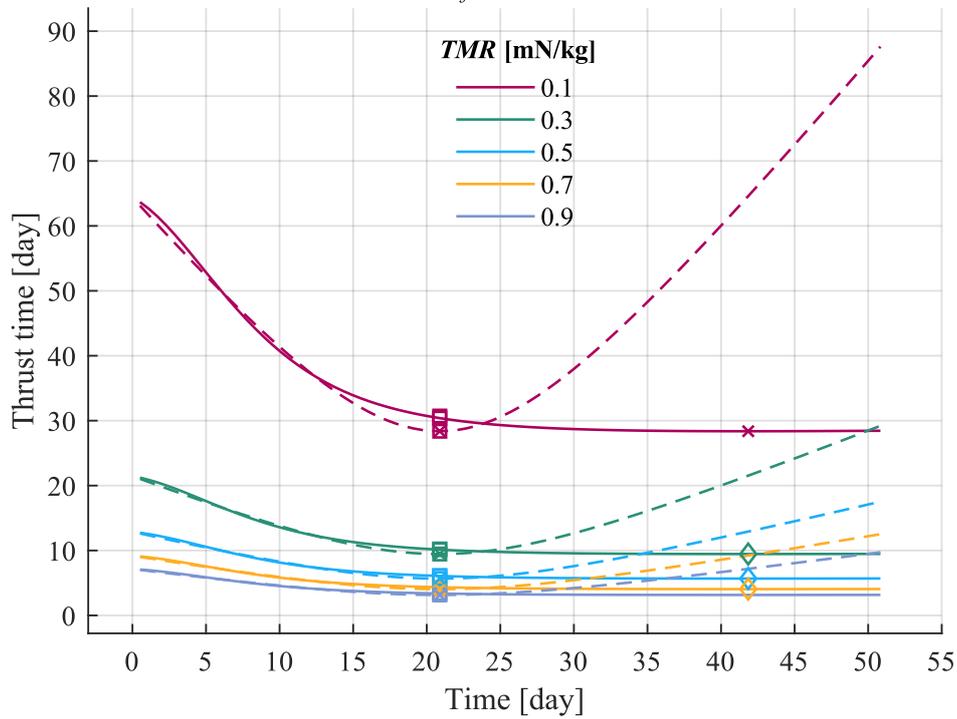


Figura 8.21: Andamenti del tempo di spinta in funzione del tempo finale, al variare del TMR per la configurazione a  $136.05^\circ$  per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).

### Thrust time comparison

$$\Omega_f: 140.05^\circ$$



**Figura 8.22:** Andamenti del tempo di spinta in funzione del tempo finale, al variare del TMR per la configurazione a  $140.05^\circ$ , per il metodo pseudo-ottimale (linea continua) e attendista (linea tratteggiata).

<b>Configurazione orbitale</b>	<b>Metodo</b>	<b>Tempo di spinta [day]</b>
136.05°	Pseudo-ottimale	28.372503891497164
	Attendista	28.372503885074629
138.05°	Pseudo-ottimale	28.372503909567524
	Attendista	28.372503885074629
140.05°	Pseudo-ottimale	28.372503887827925
	Attendista	28.372503885074629

**Tabella 8.6:** Tempi di spinta richiesti al variare della configurazione orbitale, per ciascun metodo riferito al tempo di ottimo.

## Conclusioni

Dai risultati presentati nel corso della trattazione si capisce come il solo controllo attivo sul semiasse maggiore e sull'inclinazione sia estendibile solo a casi in cui il tempo a disposizione per la trasferta sia sufficientemente lungo a coprire i costi di cambio RAAN (**metodo  $ai - transfer$** ). Difatti, al fine di coprire la variazione globale  $\Delta\Omega$  si sfrutta esclusivamente l'effetto  $J_2$  dovuto all'eterogenea distribuzione di forma terrestre, e quindi il *RAAN rate* dell'orbita di *coasting* lungo cui si svolge la trasferta.

La mancanza del controllo attivo sulla RAAN, e di conseguenza il relativo costo, possono indurre a pensare che tale metodo sia quello ideale al fine di minimizzare i costi di trasferta. Tuttavia, dal confronto con il metodo  $ai\Omega - transfer$  si è visto come in realtà il primo metodo porti a costi maggiori per qualsiasi tempo finale di trasferta, poiché l'assenza del controllo attivo sulla RAAN "obbliga" i parametri orbitali  $a$  e  $i$  ad assumere dei valori che accomodino nel migliore dei modi il valore ideale del *RAAN rate* discusso poc'anzi, senza troppo "concentrarsi" sulle effettive variazioni  $\Delta a$  e  $\Delta i$  da coprire. Il secondo metodo ( **$ai\Omega - transfer$  pseudo-ottimale**), garantendo il controllo attivo sulla RAAN è invece in grado di "scorporare" parzialmente l'ottimizzazione dei costi di  $\Omega$ ,  $a$  e  $i$ , coprendo su due spari parte della variazione globale  $\Delta\Omega$ , e la residua tramite l'effetto  $J_2$ . Così facendo, è possibile attenuare le variazioni iniziali  $\Delta a$  e  $\Delta i$ , portando ad una diminuzione del costo totale di trasferta (vedi Figura 6.3). Fermo restando che il metodo  $ai\Omega - transfer$  pseudo-ottimale sia migliore di quello  $ai - transfer$ , è da notare sia come i minimi di costo ottenuti da entrambi siano molto simili tra loro, sia come essi si registrino per lo stesso valore di tempo finale.

Volendo ottimizzare ulteriormente i costi, e i relativi tempi in cui si presentano, è possibile eliminare del tutto il primo impulso e attendere l'allineamento delle linee dei nodi, per poi completare la trasferta preoccupandosi di accomodare soltanto i valori di  $a$  e  $i$  al tempo finale (**metodo  $ai\Omega - transfer$  attendista**). Tale approccio permette appunto di ridurre i costi di trasferta, ma la sua applicazione è conveniente solo sotto determinate condizioni:

- A. L'orbita del *chaser* e del *target* devono essere in condizioni di *avvicinamento* (casi A e D in Tabella 5.1). Se così non fosse, affinché le due orbite allineino le loro linee dei nodi occorrerà un *waiting time* maggiore, il quale potrebbe entrare in conflitto con il:
  - **Tempo a disposizione** per concludere la trasferta. È chiaro che esso debba risultare maggiore, al più uguale, al tempo d'attesa, altrimenti il metodo risulterà inefficace e inefficiente.
  - **Tempo di spinta**. Esso è definito come il tempo necessario affinché il propulsore riesca a fornire l'impulso voluto, e deve necessariamente essere minore del tempo d'attesa. Proprio da questo confronto si rafforza l'importanza di un corretto dimensionamento del propulsore, il quale dovrà possedere il *thrust-to-mass ratio* ideale allo scopo: né tanto grande, in modo da evitare un sovradimensionamento, né tanto piccolo, in modo da garantire l'impulso in condizioni ottimali.
- B. Il tempo finale in cui viene fornito l'unico impulso deve necessariamente essere contenuto all'interno di uno *specifico range ottimale* (vedi Figura 7.2 - Figura 7.3). Se l'istante finale dovesse essere talmente grande da cadere all'esterno di tale range, l'assenza dell'impulso al tempo iniziale graverebbe pesantemente sul costo totale, poiché la differenza di RAAN da coprire crescerebbe sempre più, al punto di rendere totalmente inefficiente il metodo.

Inoltre, dallo studio dell’impatto della differenza di RAAN al tempo zero, si può concludere che al crescere di  $|\Delta\Omega_0|$  si ha:

- C. Uno **spostamento dei tempi verso valori più grandi**. Come si è detto prima, tanto più le orbite sono inizialmente distanti tra loro, tanto più grande sarà il tempo necessario all’allineamento delle loro linee dei nodi. Di conseguenza, affinché si sfrutti correttamente l’effetto  $J_2$ , il tempo finale in cui si eroga l’impulso conclusivo si sposta verso valori maggiori. Ciò diventa ancora più limitante per il metodo attendista, che vede migrare lo specifico range di tempo discusso poc’anzi verso valori più grandi.
- D. Un **aumento medio dei costi di trasferta**. Al variare delle RAAN al tempo zero, anche a fissati semiasse maggiore e inclinazione, le due orbite possono trovarsi in condizioni di avvicinamento o allontanamento (vedi Tabella 5.1). Ciò si riversa anche sui costi di trasferta. Difatti, mediamente essi aumentano, e in misura maggiore nelle situazioni di allontanamento, dove per tempi finali molto distanti dal *waiting time* raggiungono valori decisamente proibitivi (vedi Figura 8.3 – Figura 8.4 – Figura 8.5).

A prescindere dal valore di  $\Delta\Omega_0$ , tenendo in considerazione i diversi metodi esposti, il minimo assoluto si presenta sempre per il metodo attendista. Anche se ciò sembra in conflitto con quanto appena detto, fermo restando quanto discusso ai punti B, C e D, la variabile che forza la scelta ad uno dei due metodi è il tempo a disposizione per concludere la trasferta, il quale dovrà sempre essere confrontato con il *waiting time* e il *thrust time*, come detto al punto A.

In merito alla determinazione della sequenza dei detriti da eliminare, al fine di ridurre i tempi necessari allo scopo, i punti C e D confermano come sia ovviamente conveniente mettere in sequenza orbite con RAAN simili tra loro e che non siano in condizioni di allontanamento. Difatti, per tali casi privare la trasferta del primo impulso porta a variazioni di RAAN proibitive per qualsiasi istante di tempo che non ricada nell’intorno del *waiting time*, per cui il metodo pseudo-ottimale diventa indispensabile per ridurre i costi di trasferta qualora i tempi a disposizione per concludere la manovra non siano sufficientemente lunghi. In tali condizioni, al netto del secondo impulso, la prima fase propulsa permette di coprire una parte della  $\Delta\Omega$  totale e di porre il *chaser* su una *coasting orbit* a diverso *RAAN rate*, il quale consentirà di sopperire passivamente al costo di trasferta tramite l’effetto  $J_2$ .

Inoltre, la sequenzialità dei detriti dovrà tenere in conto anche i tempi di trasferta ottimali proposti dalla procedura, poiché la durata ottimale per la singola configurazione è quella che porta all’allineamento delle linee dei nodi, così da lasciare all’effetto  $J_2$  il compito di far fronte al cambio di  $\Omega$ . È inutile far notare come, per tempi a disposizione maggiori della suddetta durata ottimale, sia conveniente attendere tale allineamento per poi effettuare lo sparo e sfruttare il tempo di scarto nel migliore dei modi, quale ad esempio accomodare il *chaser* per la successiva rimozione qualora sia prevista.

In conclusione, come si osserva dalla Tabella 8.3, a prescindere dalla  $\Delta\Omega_0$  tutti i metodi presentati portano a dei costi minimi molto simili tra loro, senza presentare grandi differenze. A questo proposito si potrebbe avanzare l’idea di evitare il controllo attivo della RAAN e considerare il solo metodo *ai – transfer*, senza preoccuparsi in alcun modo del problema dell’allineamento delle linee dei nodi e del *waiting time*. Tuttavia, è importante tenere a mente che lo scopo della generica missione spaziale in considerazione è quello di rimuovere i detriti orbitali in LEO, e che nei casi in cui questi siano di piccole dimensioni in genere essa possiede tempi di sviluppo abbastanza lunghi. Proprio per questo motivo, i “salti” da un’orbita ad

un'altra saranno molto frequenti, e immaginando di operare esclusivamente in condizioni di ottimo, il risparmio sul costo, sebbene sia piccolo tra un metodo ed un altro, si accumulerà nel tempo diventando così un fattore determinante e dimensionante.

## Bibliografia

- [1] Bate, R.R., Mueller, D.D., White, J.E., *Fundamentals of astrodynamics*, New York, Dover Publications, Inc, 1971, 1<sup>st</sup> ed, pp. 1-26, 387, 420.
- [2] Bryson, A. E., Ho, Y.-C., *Applied Optimal Control*, Revised printing, Washington, DC, Hemisphere Publishing Co., 1975.
- [3] Curtis H.D., *Orbital mechanics for engineering students*, s.l., Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005, 1<sup>st</sup> ed., pp. 33-73.
- [4] Ince, E.S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., Schuh, H., *ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans*, Earth System Science Data, Volume 11, Issue 2, pp. 647–674, May 15, 2019.
- [5] Kan, S., *China's Anti-Satellite Weapon Test*, CRS Report for Congress, Defense Technical Information Center, April 23, 2007.
- [6] Kelso, T.S., *Analysis of the Iridium 33 - Cosmos 2251 Collision*, ResearchGate, September 1, 2009.
- [7] King-Hele, D. G., Cook, G. E., *The Even Zonal Harmonics of the Earth's Gravitational Potential*, Geophysical Journal International, Volume 10, Issue 1, pp. 17–29, September 1, 1965.
- [8] Leomanni, M., Bianchini, G., Garulli, A., Giannitrapani, A., *A Class of Globally Stabilizing Feedback Controllers for the Orbital Rendezvous Problem*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Wiley InterScience, Volume 27, Issue 18, pp. 4607– 4621, March 31, 2017.
- [9] Shen, H-X., *Explicit Approximation for J2-Perturbed Low-Thrust Transfers between Circular Orbits*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Aerospace Research Central, Volume 44, Issue 8, pp. 1525-1531, August, 2021.
- [10] Sidi, M.J., *Spacecraft Dynamics and Control. A Practical Engineering Approach*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997, 1<sup>st</sup> ed, pp. 34-36.
- [11] Appunti del corso di *Meccanica del volo spaziale* tenuto dalla Prof.ssa Manuela Battipede, Politecnico di Torino, a.a. 2020-2021.
- [12] Appunti del corso di *Dinamica e controllo di veicoli spaziali* tenuto dalla Prof.ssa Elisa Capello, Politecnico di Torino, a.a. 2020-2021.

## Sitografia

- [13] Anselmo, L., Pardini, C., *Rimozione attiva di detriti spaziali con moduli a propulsione ibrida*, Consiglio Nazionale delle Ricerche, s.d., ultimo accesso: 18 Dic 2021.  
<https://www.cnr.it/it/focus/074-23/rimozione-attiva-di-detriti-spaziali-con-moduli-a-propulsione-ibrida>
- [14] ASI, Ambiente Spaziale, *Registro nazionale degli oggetti lanciati nello spazio*, ultimo accesso: 17 Dic 2021.  
<https://www.asi.it/agenzia/facilities/registro-nazionale-degli-oggetti-lanciati-nello-spazio/ambiente-spaziale-2/>
- [15] ESA, Safety & Security, Space Debris, *Mitigating space debris generation*, ultimo accesso: 16 Mar 2022.  
[https://www.esa.int/Safety\\_Security/Space\\_Debris/Mitigating\\_space\\_debris\\_generation](https://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/Mitigating_space_debris_generation)
- [16] Ince, E. S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., and Schuh, H., *ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans*, Earth Syst. Sci. Data, 11, 647–674, <https://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>, 2019, *Visualization of Gravity Field Models and their Differences*, ultimo accesso: 13 Gen 2022.  
<http://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/longtime>
- [17] Kelso, T.S., *CelesTrak*, ultimo accesso: 16 Gen 2022.  
<https://www.celestrak.com/NORAD/elements/>
- [18] Kis, T., *3D Earth and Celestial Bodies (planet3D)*, version 5.0.4, MathWorks, ultimo accesso: 18 Dic 2021.  
<https://it.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/86483-3d-earth-and-celestial-bodies-planet3d>
- [19] NASA, *MARS Reconnaissance Orbiter*, Mission Timeline, Aerobraking, ultimo accesso: 14 Gen 2022.  
<https://mars.nasa.gov/mro/mission/timeline/mtaerobraking/>
- [20] Rigby, M., Carter, B., *A chunk of Chinese satellite almost hit the International Space Station. They dodged it – but the space junk problem is getting worse*, The Conversation, November 12, 2021, ultimo accesso: 17 Dic 2021.  
<https://theconversation.com/a-chunk-of-chinese-satellite-almost-hit-the-international-space-station-they-dodged-it-but-the-space-junk-problem-is-getting-worse-171735>
- [21] Whitman Cobb, W., *Russian anti-satellite weapon test: What happened and what are the risks?*, The Conversation, November 16, 2021, ultimo accesso: 17 Dic 2021.  
<https://theconversation.com/russian-anti-satellite-weapon-test-what-happened-and-what-are-the-risks-172016>

