

POLITECNICO DI TORINO

Corso di laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale,
Specialistica in Aerostrutture



Tesi di Laurea Magistrale

*Sensitivity-based Finite Element Model
Updating per la caratterizzazione
dinamica di una trave sandwich*

Relatori

Prof. Marco GHERLONE

Prof. Massimiliano MATTONE

Dr. Matteo SORRENTI

Candidato

Tommaso ZENGIARO

Aprile 2022

*Dedicato a
Elisa, Sofia, Luca e Damiano
i venti del mio percorso
mia imperitura riconoscenza*

Sommario

English

The evolution of aeronautical structural technology has resulted in an increase in demand for better performance and more efficient designs over the years. As a result, structural problems have begun to necessitate better approaches to the problem and more precise engineering solutions. This problem has been addressed by the development of the Finite Element Method, although its accuracy remains constrained by the technological limits of computers, mathematical restrictions and due to approximations of the solution. This thesis describes the *Finite Element Model Updating* (FEMU) based on sensitivity, which we apply to a dynamic instance of a sandwich beam at the Polytechnic of Turin's *LAQ AERMEC* laboratory. Particularly, the structural influence of the *AF163* adhesive is characterized, which links the primary components of the beam: the core and the faces. The *Penalty Function Method* approach is developed using an optimization algorithm that iteratively exploits the method's formulation with sensitivity analysis. The experimental data gathered in the laboratory through dynamic tests are compared with the data calculated by the approach, reproducing an estimate of the adhesive's progressively realistic structural properties. The method's goal is to duplicate the frequencies and patterns of vibration as closely as possible to the experimental ones using a model. The work done has recreated an estimate of the parameters that is becoming progressively close to reality, but it has also shown the significant influence of the quality of the experimental data.

Sommario

Nel corso degli anni l'avanzare delle tecnologie strutturali dell'aeronautica ha causato un incremento di richiesta di performance sempre più alte e design sempre più efficienti. Di conseguenza, i problemi strutturali hanno cominciato a richiedere migliori approcci al problema e soluzioni ingegneristiche sempre più accurate. Con l'introduzione del Metodo degli elementi finiti si è migliorato notevolmente questa problematica frenata, tuttavia, da limitazioni tecnologiche dei computer e limitazioni matematiche dovute da approssimazioni della soluzione. In questo lavoro di tesi, si introduce il *Finite Element model Updating (FEMU)* basato sulla sensitività, applicato ad un caso dinamico di una trave sandwich, presente in laboratorio *LAQ AERMEC* al Politecnico di Torino. In particolar modo, viene caratterizzata l'influenza strutturale di uno strato di adesivo di famiglia epossidica *AF163* che lega i principali componenti della trave: il cuore *Rohacell* e le facce di *ERGAL*. La metodologia, denominata *Penalty Function Method*, viene sviluppata con un algoritmo di ottimizzazione che sfrutta iterativamente la formulazione del metodo con l'analisi di sensitività. Vengono comparati i dati sperimentali rilevati mediante prove dinamiche in laboratorio con i dati stimati dal metodo e riproducendo una stima delle caratteristiche strutturali sempre più realistica dello strato di adesivo. Lo scopo del metodo è replicare con il modello le frequenze e i modi di vibrare in maniera più simile possibile a quelli sperimentali, individuando una stima di parametri strutturali medi degli strati. Il lavoro svolto ha ricostruito una stima dei parametri sempre più fedele alla realtà, ma ha evidenziato la notevole influenza della qualità dei dati sperimentali.

Parole chiave

Finite Element Model Updating, Sensitività, Trave sandwich, Analisi modale, Penalty Function Method, FEM

Ringraziamenti

I miei profondi ringraziamenti rivolti al mio mentore accademico, Professor Marco Gherlone, per avermi accompagnato non solo lungo il lavoro di tesi svolto in questi 10 mesi, ma anche durante i lunghi anni della mia carriera universitaria con estrema chiarezza, rigore professionale e umanità.

Ringrazio il Professor Massimiliano Corrado Mattone per la disponibilità e pazienza nel corso di questi mesi accompagnandomi durante le attività in laboratorio e mettendo a disposizione notevoli conoscenze in campo sperimentale.

Ringrazio il Dottorando Matteo Sorrenti per il notevole supporto nel lavoro di tesi, la pazienza e gli insegnamenti nello sviluppo della mentalità e approccio sulla ricerca scientifica.

Un sincero ringraziamento a tutti gli amici, colleghi e alla famiglia *Green House* per avermi accompagnato durante questi lunghi anni di formazione e crescita. Ringrazio profondamente per tutto il supporto e il sincero sostegno nei momenti che non ho mai potuto vivere al di fuori degli anni universitari. Ringrazio ogni momento notevole, ogni secondo speso nei miei confronti che hanno lasciato impronta significativa in questa importante fase. La mia gratitudine rimarrà indelebile tra le colonne di sostegno dell'imprescindibile compagnia di vita.

Ringrazio la mia famiglia per il sostegno e supporto determinante per la formazione e crescita personale. Ringrazio per avermi incoraggiato e sostenuto il mio futuro, permettendomi non solo ad affrontare ogni ostacolo del mio percorso, ma insegnandomi a perseverare al di là delle proprie difficoltà.

Un ringraziamento, non marginale, a tutte le persone, lavoratori, audioprotesisti, logopedisti e operatori sanitari che, inconsapevolmente o meno, hanno contribuito in maniera fondamentale al mio sostegno e supporto ad affrontare un problema integrante della mia vita. Ringrazio tutte le persone che nonostante abbiano agito nel senso del dovere, siano stati compagni d'armi per la mia battaglia contro la sordità.

Indice

Elenco delle tabelle	VI
Elenco delle figure	VII
Nomenclatura	X
1 Introduzione	2
1.1 Metodo degli elementi finiti	2
1.2 Metodi di Updating model	5
1.3 Attività sperimentale	6
1.4 Punti chiave della Tesi	8
2 Stato dell'arte	10
2.1 Introduzione	10
2.2 Metodi Globali	11
2.3 Metodi Locali	12
2.4 Metodi di correlazione	13
2.4.1 Correlazione grafica	14
2.4.2 Correlazione numerica	14
2.5 Compatibilità del modello	20
2.5.1 Riduzione di Guyan	20
2.5.2 Condensazione dinamica	22
2.5.3 IRS	23
2.5.4 SEREP	24
3 Metodologia	25
3.1 Introduzione	25
3.2 Penalty Function Method	28
3.2.1 Analisi di Sensitività	28
3.2.2 Derivazione autovalori e autovettori non smorzati	29
3.2.3 Stima dei parametri	32

3.3	Algoritmo	33
3.3.1	<i>MAIN_ALG.m</i>	34
3.3.2	<i>SENSITIVITY.m</i>	37
3.3.3	<i>dataMODEL.m</i> e <i>dataSENS.m</i>	37
4	Validazione Numerica	39
4.1	Introduzione	39
4.2	Caso 10-DOF	40
4.2.1	Modi di vibrare completi	41
4.2.2	Modi di vibrare parziali	41
4.2.3	Sistema ridotto	44
4.2.4	Confronti con Matlab	45
4.3	Caso Trave Isotropa	49
4.4	Caso trave Sandwich	53
4.4.1	Lamine	55
4.4.2	Cuore	56
4.4.3	Adesivo	56
5	Fase sperimentale/Risultati	62
5.1	Introduzione	62
5.1.1	L'Adesivo	63
5.2	Fase Sperimentale	64
5.2.1	Posizionamento di accelerometri	65
5.2.2	Stime iniziali	67
5.2.3	Forme modali	68
5.3	<i>FEMU sperimentale</i>	69
5.3.1	Gruppo ibrido Test 01	71
5.3.2	Gruppo ibrido Test 02	77
5.3.3	Gruppo Bending mode only	80
5.4	Commenti e ulteriori considerazioni	83
6	Conclusioni	87
6.1	Conclusioni	87
6.2	Raccomandazioni e Sviluppi futuri	89
A	Pseudo Codici dell'algoritmo	90
	Bibliografia	94

Elenco delle tabelle

4.1	Stima iniziale dei parametri da aggiornare del modello NDOF. . . .	41
4.2	Tabella di parametri di aggiornamento del caso 10DOF e matrice modale completa, con stima aggiornata (riga Updated) a fine processo <i>FEMU</i> e la percentuale di errore rispetto alla controparte esatta dopo 7 iterazioni.	44
4.3	Tabella di parametri di aggiornamento del caso 10DOF e matrice modale parziale.	44
4.4	Tabella di parametri di aggiornamento del caso 10DOF ridotto con condensazione statica di <i>Guyan</i>	45
4.5	Valori geometrici e strutturali della trave isotropa in acciaio	49
4.6	Parametri di aggiornamento con stima iniziale dei vari test rapportata rispetto al valore esatto.	50
4.7	Tabella dei risultati del processo <i>FEMU</i> con stima iniziale dei parametri del test 01. Le frequenze sperimentali "fittizie" (Set A) confrontate con quelle iniziali, aggiornate (Updated) dopo 7 iterazioni e le relative percentuali di errore.	51
4.8	Dati strutturali della trave sandwich.	54
5.1	Dati delle proprietà meccaniche dell'adesivo, ricavabili dai datasheet disponibili.	63
5.2	Tabella di stime iniziali pre-processo <i>FEMU</i>	68

Elenco delle figure

1.1	Dominio generico discretizzato con elementi di tipo <i>TRIA</i>	3
1.2	Esempio di quinta forma modale (III flessionale), si noti la presenza di tre nodi (colorazione blu) nel quale la struttura, in quei punti, non oscilla.	8
2.1	Correlazione grafica a 45° delle frequenze naturali di una trave isotropa.	15
2.2	<i>Modal Assurance Criterion</i>	18
3.1	Flow Chart della metodologia <i>FEMU</i>	27
3.2	Primo blocco schematico del <i>MAIN_ALG.m</i>	35
3.3	Secondo blocco schematico del <i>MAIN_ALG.m</i>	36
3.4	Terzo blocco schematico del <i>MAIN_ALG.m</i>	37
4.1	Schema di un sistema discreto a 10 gradi di libertà.	40
4.2	Aggiornamento parametri con matrice modale completa.	42
4.3	Aggiornamento parametri con matrice di autovettori parziale.	43
4.4	Aggiornamento parametri del modello con riduzione di <i>Guyan</i>	46
4.5	Confronto dei vari aggiornamenti di parametri di analisi con configurazione 01 di stima iniziale di parametri.	47
4.6	Confronto dei vari aggiornamenti di parametri di analisi con configurazione 02 di stima iniziale di parametri.	48
4.7	Modelli di trave isotropa con <i>PATRAN</i>	49
4.8	Aggiornamento parametri per la trave isotropa; la colonna di parametri a sinistra riguarda l'aggiornamento del modello con elementi <i>SHELL</i> , a destra con elementi <i>SOLID</i> . Si noti che le differenze di aggiornamento sono apparentemente uguali, questo perché entrambi modelli forniscono soluzione egualmente accurata.	52
4.9	<i>Penalty Function</i> dei processi <i>FEMU</i> della trave isotropa.	53
4.10	Trave isotropa sandwich.	54
4.11	<i>Penalty Function</i> nel caso di processo <i>FEMU</i> svolto sui parametri strutturali delle lamine della trave sandwich.	55

4.12	Aggiornamento iterativo dei parametri strutturali delle lamine della trave sandwich, la colonna a sinistra è l'aggiornamento mediante l'utilizzo di modi solo flessionali, a destra quelli ibridi.	57
4.13	<i>Penalty Function</i> nel caso di processo <i>FEMU</i> svolto sui parametri strutturali del cuore della trave sandwich.	58
4.14	Aggiornamento iterativo dei parametri strutturali del cuore della trave sandwich, la colonna a sinistra è l'aggiornamento mediante l'utilizzo di modi solo flessionali, a destra quelli ibridi.	59
4.15	<i>Penalty Function</i> nel caso di processo <i>FEMU</i> svolto sui parametri strutturali dell'adesivo della trave sandwich.	60
4.16	Aggiornamento iterativo dei parametri strutturali dell'adesivo della trave sandwich, la colonna a sinistra è l'aggiornamento mediante l'utilizzo di modi solo flessionali, a destra quelli ibridi.	61
5.1	Vista laterale della trave sandwich con la presenza dell'adesivo (strato rosso) al confine tra il cuore e le facce di lega di alluminio; si noti l'infiltrazione verso l'interno.	64
5.2	Esempio di martello strumentato con, in basso, le testine interscambiabili di varia durezza.	65
5.3	Uno schema di un tipico accelerometro piezoelettrico.	66
5.4	Uno degli accelerometri utilizzati in laboratorio; generalmente sono larghi circa $10mm$ e hanno un peso di 0.5 grammi.	67
5.5	Posizionamento degli accelerometri in diverse prove sperimentali: in alto è il posizionamento rettilineo per l'individuazione dei solo modi flessionali; in basso è il posizionamento a Zigzag per i modi Flesso-torsionali.	68
5.6	Le forme modali iniziali del modello utilizzate per valutare il residuo di autovettori.	70
5.7	La seconda forma torsionale in alto, con le quantità dei termini dell'autovalore relativo; in basso le percentuali di residuo tra modello e sperimentale; si noti che, in genere, due modelli con un buon grado di somiglianza e non aggiornati, hanno deviazioni medie intorno al 10% [4].	71
5.8	Processo iterativo <i>FEMU Test 01</i> dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 2 e in giallo dalla stima 6.	73
5.9	Andamento <i>Penalty Function</i> del processo <i>FEMU Test 01</i> con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.	74
5.10	Processo iterativo <i>FEMU Test 01</i> dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 3, in giallo dalla stima 4 e in viola dalla stima 5.	75

5.11	Andamento <i>PF</i> del processo <i>FEMU Test 01</i> con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.	76
5.12	Residui di frequenze proprie della struttura in post-processo <i>FEMU test 01</i> per ciascuna configurazione di modi di vibrare.	76
5.13	La prima forma modale flessionale, in alto, con le quantità dei coefficienti dell'autovalore relativo, in basso le percentuali di residuo tra modello e sperimentale; si noti la presenza dell'errore di misurazione al nodo 6 e al nodo 8.	77
5.14	Processo iterativo <i>FEMU Test 02</i> dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 3, in giallo dalla stima 4 e in viola dalla stima 5.	78
5.15	Andamento <i>PF</i> del processo <i>FEMU Test 02</i> con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.	79
5.16	Residui di frequenze proprie della struttura in post-processo <i>FEMU test 02</i> per ciascuna configurazione di modi di vibrare.	80
5.17	Processo iterativo <i>FEMU Bending mode</i> dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 3, in giallo dalla stima 4 e in viola dalla stima 5.	81
5.18	Andamento <i>PF</i> del processo <i>FEMU Bending mode</i> con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.	82
5.19	Residui di frequenze proprie della struttura in post-processo <i>FEMU Bending mode</i> per ciascun gruppo di modi di vibrare; in blu è la stima 1, in rosso la stima 3, in giallo la stima 4 e in viola la stima 5	83
5.20	Confronto tra autovettori del modello numerico e modello sperimentale.	85
5.21	Residui di autovettori tra modello numerico e modello sperimentale.	86

Nomenclatura

[*mm*] Millimetri

[*MPa*] Megapascal

[*tonn/mm³*] Tonnellate al millimetro cubo

COMAC COordinate Modal Assurance Criterion

DOF Degree Of Freedom

FE Finite Element

FEM Finite Element Method

FEMU Finite Element Model Updating

FDAC Frequency Domain Assurance Criterion

FRAC Frequency Response Assurance Criterion

FRF Frequency Response Function

GDL Gradi di Libertà

IRS Improved Reduced System

MAC Modal Assurance Criterion

MSF Modal Scale Factor

PF Penalty Function

PFM Penalty Function Method

SEREP System Equivalent Reduction Expansion Process

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Metodo degli elementi finiti

La metodologia degli Elementi Finiti (*Finite Element Method - FEM*) racchiude tutta una serie di formulazioni e metodologie atte a ricercare la soluzione approssimata di un problema differenziale. Un sistema continuo viene approssimato passando da una formulazione variazionale continua a una formulazione variazionale discreta, quindi, riducendo un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali in un sistema discreto con equazioni algebriche.

La semplificazione del problema avviene con la discretizzazione di un corpo fisico mediante *elementi finiti primitivi* di geometria più o meno complessa, collegati tra di loro tramite *nodi* e formando una griglia discretizzante denominata *mesh*. Quest'ultima è quindi una suddivisione finita di un dominio Ω in N sottodomini Ω_e di elementi finiti. Questa caratterizzazione, tuttavia, deve rispettare due principali criteri: non ci deve essere sovrapposizione tra i singoli elementi e deve rientrare all'interno di un dominio Ω . Con il primo criterio, l'intersezione tra due sottodomini dev'essere nullo, infatti:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (1.1)$$

dove Ω_i e Ω_j sono due sottodomini generici. Mentre con il secondo criterio, la sommatoria di tutti gli elementi finiti può essere al massimo pari a Ω :

$$\sum_{e=1}^N \Omega_e \subset \Omega \quad (1.2)$$

Discretizzare una struttura di forma irregolare comporta degli errori dovuti dalla non perfetta distribuzione degli elementi su tutto il dominio Ω , come mostrato in figura 1.1. È chiaro che una ridotta dimensione dei sottodomini consegue un inaffittimento della mesh che porta ad avere una discretizzazione più accurata e, di conseguenza, errori numerici più bassi. Con le forme curvilinee, l'approssimazione

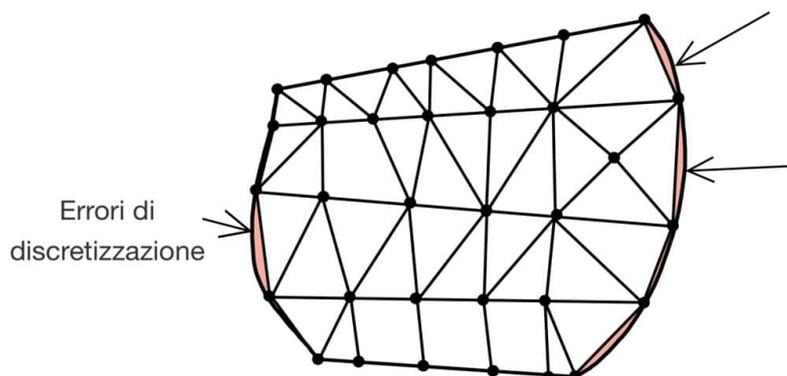


Figura 1.1: Dominio generico discretizzato con elementi di tipo *TRIA*.

avviene con forme poligonali, indipendentemente dalla dimensione e dal tipo di elemento finito scelto. Quando una mesh è distribuita con elementi finiti di dimensione uguale, si dice *regolare* o *uniforme*.

A seconda del dominio di riferimento, si possono avere diversi tipi di elementi finiti:

- **1D**, dimensione tipica dei nodi, elementi monodimensionali che connettono più elementi;
- **2D**, dimensione tipica di elementi di superficie di forme triangolari *TRIA* o quadrilateri *QUAD*;
- **3D**, dimensione di elementi come tetraedri *TET* o esaedri *HEXA*.

Su ciascun elemento di forma elementare la soluzione sarà data, a livello generale, dalla combinazione lineare delle *funzioni di forma* (o note anche come *funzioni della base*) assunte in funzione dei gradi di libertà o coordinate in ciascun nodo. Per elementi di superficie, gli elementi di forma semplice come *TRIA* e *QUAD*, approssimano facilmente i domini irregolari consentendo un agevole utilizzo delle funzioni di forma. Mentre per forme tridimensionali il discorso è più complesso, ma alla luce dell'esperienza, si può affermare che discretizzazioni con elementi più semplici forniscono risultati più accurati [1].

La scelta e l'utilizzo degli elementi è determinata dai criteri di modellazione, di considerazioni sull'aspetto dell'oggetto reale da modellare e dal suo comportamento fisico. Non solo si tiene conto delle peculiarità fisiche assunte come spessore, dimensione volumica e complessità, ma anche di quanto si può approssimare i risultati numerici. Infatti, la discretizzazione agli elementi finiti, di base, è

un'approssimazione della struttura reale e come tale comporta una soluzione approssimata del problema.

L'approssimazione genera un errore, più o meno grande, rispetto alla soluzione esatta del modello matematico. Qualunque sia la modellazione c'è sempre una certa percentuale di errore causata dal calcolo numerico e dalla non perfetta discretizzazione. Idealmente, maggiore un corpo fisico è discretizzato, e quindi con un maggior numero di elementi finiti, maggiore sarà la precisione dei risultati a scapito, però, del costo computazionale. Come detto in precedenza, essendo la soluzione una combinazione lineare di funzioni di forma degli elementi, un grande numero di elementi comporta un'importante combinazione di calcolo da effettuale.

Tuttavia, non sempre è sufficiente aumentare il numero di elementi o trovare facilmente una loro disposizione che garantisca la massima regolarità della mesh. C'è sempre un certo errore causato dalla soluzione approssimata che potrà ritenersi accettabile per valori minori del 5% rispetto ai risultati di validazione sperimentali.

Il metodo agli elementi finiti si può racchiudere nelle seguenti fasi:

1. **Modellazione**, fase di processo nel quale si cerca di rappresentare, tramite un modello, una struttura reale con le sue caratteristiche e proprietà geometriche e strutturali, sia del materiale sia della sua distribuzione globale e geometrica. In questa fase iniziano anche le prime approssimazioni nel quale si semplifica la struttura "filtrando" componenti che non hanno ruolo sulla soluzione (come sagomature, imperfezioni, componenti superficiali di dimensione contenuta ecc.);
2. **Discretizzazione**, come accennato finora, è una fase che segna il passaggio da un problema numerico continuo di infiniti gradi di libertà a un problema discreto con numero finito di gradi di libertà. Si passa quindi da un modello continuo a un modello discretizzato in tempo e spazio.
3. **Condizioni di bordo**, condizioni di contorno imposte per rappresentare correttamente la condizione statica e dinamica iniziale in cui si trova il problema. Sono determinati dalla fisica del problema e dalle condizioni operative della struttura.
4. **Analisi**, processo di calcolo numerico delle matrici di massa, di rigidità, del vettore dei carichi nodali con il conseguente assemblaggio di matrici e vettori, risoluzione del sistema algebrico con l'utilizzo di funzioni di forma e calcolo finale degli output richiesti. Quest'ultimi dipendono dal tipo di analisi che si intende effettuare con l'utilizzo del metodo come analisi lineari, non lineari, modali, transienti, di ottimizzazione ecc.

In campo ingegneristico, la metodologia agli elementi finiti trova vaste e differenti applicazioni che condividono universalmente l'approccio algebrico-differenziale della risoluzione dei problemi, tra i quali:

- Problemi termici;
- Problemi fluidodinamici;
- Problemi elettromagnetici;
- Problemi strutturali.

Il lavoro di tesi opera in campo di dinamica strutturale, pertanto, la fase di analisi viene eseguita con l'analisi modale per la determinazione delle frequenze e dei modi di vibrare del sistema.

1.2 Metodi di Updating model

Il lavoro di tesi si incentra sulla metodologia Updating model agli elementi finiti (*Finite Element Model Updating (FEMU)*) il quale racchiude una serie di operazioni di ottimizzazione numerica del modello, in funzione degli output sperimentali. Durante questa fase, mediante una serie di formulazioni matematiche, si aggiornano i parametri del modello con rilevanti incertezze, eguagliando gli output del modello con quelli sperimentali [2]. Si noti, come accennato in precedenza, gli output da eguagliare riguardano le frequenze naturali e i modi di vibrare.

Tale metodologia emerge concretamente negli anni '90 dal momento in cui si è posti il problema di un'ulteriore precisione dei modelli che rappresentano strutture molto complesse [3]. Con l'aumentare della complessità, i dati strutturali dei provini, determinati sperimentalmente a norma di legge, non sono più sufficienti a rappresentare correttamente le strutture complesse. Di conseguenza, un aumento di incertezza genera un aumento di errori e deviazioni tra i modelli. L'aumento della raffinatezza di design comporta maggiori difficoltà di modellazione, costi computazionali sempre elevati e risultati sempre meno attendibili a causa di scarsa conoscenza di dati strutturali. Si aggiunge, inoltre, la scarsa conoscenza dei valori strutturali di parti relativamente molto complesse da modellare.

Stesso discorso nasce per strutture con comportamenti non lineari, nei quali, spesso, non si possono prevedere con assoluta certezza utilizzando il modello numerico corrente. Le approssimazioni numeriche dei modelli, avendo un certo ordine di derivazione, potrebbero non essere sufficientemente accurati da fornire una soluzione coerente con la non linearità strutturale [3]. L'aggiunta di termini di ordine superiore nelle equazioni può fornire maggiore determinazione di fenomeni comportamentali di interi sistemi difficili da rilevare con ordini inferiori. Tuttavia, l'approccio di ordine superiore comporta spesso un costo computazione non indifferente.

Le discrepanze affrontate dalla metodologia *FEMU* possono quindi includere [4]:

- Errori di parametrizzazione del modello, nel quale spesso risulta difficile associare ad un determinato parametro il suo reale valore fisico qualitativo;
- Errori strutturali, come accennato in precedenza, influenzati dalla difficoltà di rappresentare parti strutturali di giunti, saldature, incollaggi o altri componenti non facilmente rappresentabili nella modellazione;
- Errori di approssimazione e ordine che spesso causano deviazioni numeriche nei comportamenti non lineari;
- Errori di misurazione sperimentale dovuti da errori di misura o esecuzioni non totalmente corretta delle procedure sperimentali.

A fronte di queste problematiche la procedura di Updating permette non solo un aggiornamento parametrico coerente con i risultati, ma concretizza la ricerca di valori di input che forniscano risultati di modello discostanti di percentuali minori di 1% rispetto a quelli sperimentali. Generalmente, i metodi possono essere racchiusi in due categorie differenti: metodi globali, o definiti anche come metodi diretti; e quelli locali, o definiti come iterativi.

I metodi globali, o diretti, eseguono il processo *FEMU* in uno step senza considerare il significato finito dei parametri aggiornati. Infatti, spesso l'aggiornamento diretto avviene mediante ogni singolo coefficiente di matrici di massa e di rigidezza, riproducendo esattamente le misurazioni effettuate sperimentalmente. Tuttavia, riproducendo i risultati sperimentali, riproduce anche gli errori degli stessi dovuti dalla qualità della strumentazione e dalle misurazioni. Inoltre, a seguito dell'aggiornamento, non è garantita la connettività tra i nodi degli elementi finiti.

I metodi iterativi, invece, eseguono un processo iterativo aggiornando continuamente i parametri fino a che non si raggiunge una configurazione corretta del set di dati, riducendo al minimo la funzione errore. Il significato fisico dei parametri di aggiornamento viene garantito durante tutti gli step di aggiornamento e alla configurazione finale di convergenza. Inoltre, viene garantita connettività ai nodi del modello FE e un'adeguata rappresentatività fisica delle matrici di massa e di rigidezza del sistema. Di contro, tuttavia, presentano un notevole costo computazionale che può risultare un ostacolo in caso di modelli complessi dal punto di vista strutturale.

1.3 Attività sperimentale

Con l'attività sperimentale si ottiene risultati, tramite test in laboratorio, simulando le condizioni fisiche e operative di una struttura oggetto di studio. I risultati sperimentali vengono poi confrontati con quelli numerici per ottenere un processo di validazione nel quale si prende atto degli errori e deviazioni numeriche.

Tuttavia, tali risultati possono manifestare errori e incertezze di vario tipo che comportano misurazioni poco attendibili e non confrontabili con il modello. Le imprecisioni possono essere legate a rumori e disturbi, mal posizionamento di trasduttori, elettronica degradata o poco affidabile, errata lettura da parte del dispositivo di misurazione o dell'operatore e così via. I rumori elettronici sono uno dei maggiori contributi di errore delle misurazioni e possono essere eliminati con una maggiore qualità dei dispositivi di misurazione, utilizzo di amplificatori e conversione del segnale da analogico a digitale.

Oltre agli errori di misurazione, ci sono gli errori dovuti dalla non perfetta rappresentabilità del caso sperimentale con il modello, in quanto quest'ultimo impone caratteristiche fisiche perfette senza alcuna imperfezione strutturale o geometrica. Un tipico esempio usuale, presente anche nel lavoro di tesi, è l'incastro perfetto: per realizzare l'incastro nel modello si impongono gli spostamenti nulli nelle condizioni di contorno, generando, nella matrice di rigidezza, coefficienti con valori tendenti a infinito; invece, nella realtà la situazione è diversa, sebbene l'incastro ha una rigidezza molto alta è comunque soggetta a spostamenti e oscillazioni, seppur in misura trascurabile.

È bene, pertanto, garantire l'esecuzione delle attività sperimentali con massimo rigore e qualità della componentistica, in modo tale da eliminare a priori gli errori che si potrebbero manifestare.

L'attività sperimentale viene eseguita in laboratorio *LAQ AERMEC-Sistemi strutturali aeromeccanici* all'interno del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino.

Le rilevazioni vengono effettuate con accelerometri piezometrici uniassiali posizionati accuratamente lungo il dorso della trave sandwich oggetto di lavoro di tesi. Come tutti i trasduttori, tali accelerometri forniscono in output una forma di energia in risposta ad un input generato da una forma di energia diversa. Infatti, tali sensori sono caratterizzati dalla presenza, al loro interno, di un cristallo piezoelettrico nel quale, sottoposto a compressione, si polarizza generando un segnale elettrico proporzionale alla deformazione. Nel caso di oscillazioni, la massa, sotto effetto di inerzia, genera una compressione sul cristallo che di conseguenza si polarizza.

Il posizionamento è una manovra molto importante, come si vedrà in seguito con la lettura, in quanto si deve tenere conto della posizione dei nodi dei modi di vibrare della struttura. I modi di vibrare sono conformazioni che la struttura assume a determinate frequenze di oscillazione, dette anche *frequenze naturali* o *frequenze di risonanza*, nel quale si manifestano maggiori sollecitazioni strutturali, come mostrato figura 1.2 a titolo di esempio.

Se un accelerometro viene posizionato in corrispondenza di un nodo, esso non riesce a rilevare l'oscillazione e di conseguenza nel diagramma di bode non risulta presente il picco di misurazione. Pertanto, prima di procedere alle misurazioni

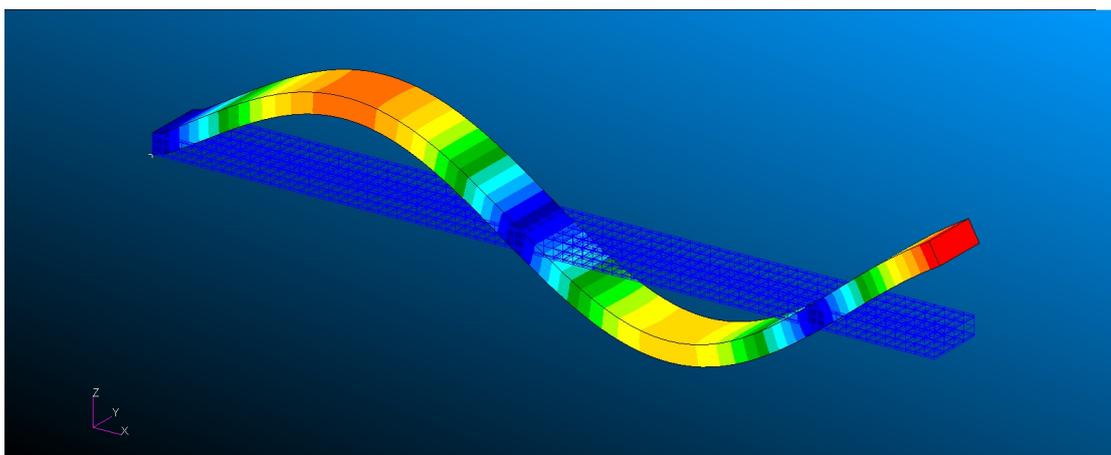


Figura 1.2: Esempio di quinta forma modale (III flessionale), si noti la presenza di tre nodi (colorazione blu) nel quale la struttura, in quei punti, non oscilla.

sperimentali è usuale determinare in anticipo, con il modello, la posizione dei suddetti nodi.

1.4 Punti chiave della Tesi

Il lavoro di tesi mira alla caratterizzazione dinamica di una trave sandwich, mediante sviluppo di un processo di *Finite Element Model Updating (FEMU)* basato sulla sensitività. Il presente documento è diviso in due parti principali: nella prima parte si discute sullo stato dell'arte della metodologia, le caratteristiche generali del *FEMU*, il suo percorso di sviluppo e, in particolar modo, la formulazione e applicazione del *Penalty Function Method*; mentre la seconda parte, presenta una serie di processi di validazione e percorsi sperimentali applicati con la metodologia mediante un algoritmo sviluppato con MATLAB.

Nel capitolo 2, inizialmente, si analizzano gli aspetti chiave del *FEMU* e la relativa preparazione del modello. In primis si riassumono le correlazioni numeriche basate sull'utilizzo del vettore calcolato con $\cos^2\vartheta$: il *Modal Assurance Criterion (MAC)* e le sue estensioni. La correlazione numerica è un passaggio importante per verificare il grado di somiglianza tra due modelli. Un successivo passaggio fondamentale è richiesto con la comparazione numerica, nel quale due modelli vengono messi in condizioni di essere sullo stesso piano numerico con i gradi di libertà.

Nel capitolo 3 si introduce la metodologia di *Penalty Function Method* con la quale, mediante la matrice di sensitività calcolata numericamente, si effettua un processo iterativo per determinare la corretta stima di parametri. Inoltre, si

presenta lo sviluppo di un algoritmo di ottimizzazione mediante MATLAB, nel quale elabora, processa e esegue analisi *FEMU* con l'ausilio di software CAE *MSC PATRAN/NASTRAN*.

Nel capitolo 4 vengono introdotti tre differenti casi strutturali nei quali si implementa l'algoritmo e il metodo matematico proposto. Si creano risultati su casistiche fittizie con il principale scopo di dimostrare l'efficacia del metodo e il corretto funzionamento dell'algoritmo.

Nel capitolo 5 si introduce la fase sperimentale e si implementa l'algoritmo con i dati ottenuti sperimentalmente. Si analizzano i dati ottenuti confrontando differenti stime iniziali e gruppi di forme modali utilizzate.

Infine, nel capitolo 6 si traggono conclusioni generali e possibili scenari futuri.

Capitolo 2

Stato dell'arte

2.1 Introduzione

Un modello idealizzato e discretizzato, introduce inevitabilmente degli errori che possono essere minimizzati con il metodo *FEMU* riducendo la deviazione tra soluzione numerica e risultati sperimentali. In fase preliminare è necessaria l'individuazione degli errori legati a determinate caratteristiche geometriche e fisiche nel quale, successivamente, si identifica i parametri da aggiornare. La localizzazione di errori del modello e l'accurata selezione dei parametri favorisce la consistenza della stima iniziale e di convergenza del processo. Un modello inconsistente è in grado di riprodurre i risultati sperimentali, tuttavia, i parametri aggiornati perdono il significato fisico e la rappresentabilità delle caratteristiche meccaniche del sistema fisico. Inoltre, non sarebbero più in grado di predire eventuali comportamenti dovuti da una loro modifica strutturale che va a inficiare non solo sui risultati ma anche su un'eventuale struttura globale che la compone [5]. La validazione del modello è richiesta come prima importante fase per effettuare una comparazione: è di fondamentale importanza per la metodologia *FEMU* che i set di dati non superino un certo livello di deviazione, difatti un modello con notevole discostamento dei risultati non è rappresentativo del caso reale e pertanto non comparabile, di conseguenza un modello non validato con il caso sperimentale richiede una nuova modellazione completa.

Per valutare il grado di corrispondenza di due set di dati si utilizzano i metodi di correlazione. Un modello validato e in fase pre-*FEMU* ha un livello di correlazione, con il set di dati sperimentale, relativamente più basso rispetto a un modello post-*FEMU*. In letteratura vengono proposti e utilizzati diversi metodi che differenziano in base ai parametri di riferimento e ai criteri di confronto. Allemang [6] discute l'utilizzo dei vari metodi di confronto e correlazione, mostrando formulazioni nel quale i parametri modali dipendono. Ewins [7] mostra non solo i metodi di

comparazione e correlazione tra due set di output modali, ma presenta anche un caso applicativo nel quale si utilizza il processo comparativo come introduzione del metodo *FEMU*. A seguito, nel paragrafo 2.4, vengono mostrati diversi criteri di correlazione tra cui il *Modal Assurance Criterion* (MAC), uno dei principali e più utilizzati criteri di correlazione in buona parte delle metodologie di confronto.

Affinché il modello sia comparabile con quello sperimentale è necessaria la compatibilità e accoppiamento corretto dei dati modali e strutturali. Il numero di gradi di libertà del modello sperimentale è strettamente legato al numero di sensori di rilevazione, mentre la controparte numerica avrà un numero di gradi di libertà notevolmente più alto e quindi non comparabile. Di conseguenza, si richiedono metodi di riduzione o espansione dei modelli nei quale si eseguono procedure analitiche atte a ridurre o espandere i set di dati rendendo compatibile gli accoppiamenti. Tali metodi permettono di eguagliare la dimensione matriciale delle quantità modali utilizzate durante il processo, riducendo i gradi di libertà del modello FE o espandendo la controparte sperimentale. Va notato che l'espansione modale equivale all'inversa della procedura di riduzione modale in quanto condividono la stessa matrice di trasformazione [8, 9].

Per l'adeguata scelta della metodologia, occorre poter distinguere con chiarezza due grandi gruppi di metodologie *FEMU*: i metodi globali e i metodi locali.

2.2 Metodi Globali

I metodi globali, o diretti, sono metodi in grado di riprodurre con esattezza i risultati in un singolo step iterativo. Computazionalmente, sono molto efficienti in quanto non richiedendo un processo iterativo ottenendo un risultato immediato. L'aggiornamento di tali metodi riguardano, principalmente, ogni singolo componente delle matrici di massa e di rigidità del sistema, riproducendo esattamente i risultati sperimentali. Tuttavia, il processo riproduce esattamente anche gli errori presenti nel test sperimentale, non fornendo una soluzione migliorata del sistema. Se, ad esempio, è presente una notevole quantità di rumore nelle misurazioni sperimentali, l'aggiornamento diretto riprodurrebbe esattamente i risultati con incluso tale errore. Le frequenze naturali della struttura sono facilmente ricavabili dalle misurazioni, mentre i modi di vibrare sono particolarmente influenzabili dall'errore delle misurazioni, pertanto è richiesta notevole qualità delle strumentazioni e dei sensori.

Un altro aspetto che va tenuto in considerazione è il significato fisico dei parametri di aggiornamento: il singolo coefficiente di una matrice di massa, o di rigidità, con un sistema, continuo o numerico, non è facilmente interpretabile fisicamente. Motivo per cui i metodi globali sono considerati generalmente obsoleti [8].

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è uno dei metodi globali comunemente utilizzati nel quale si impongono delle condizioni vincolanti, come condizioni di ortogonalità e/o simmetria matriciale, e si cerca di minimizzare delle differenze pesate tra modello iniziale e modello aggiornato. Una caratteristica notevole di questo metodo è l'utilizzo di una delle tre quantità del modello (autovettori, matrici di massa e di rigidità) assunta come referenza rispetto alle altre due che, invece, vengono aggiornate. In letteratura sono proposti diversi studi che adattano la risoluzione del problema a seconda della referenza utilizzata: Baruch [10, 11] propone l'utilizzo di tale metodo minimizzando la matrice di rigidità e gli autovettori con i moltiplicatori di Lagrange e assumendo la matrice di massa come referenza esatta; Berman [12] propone la procedura matematica analoga a Baruch, però aggiornando la matrice di massa; Berman e Nagy [13] propongono un'evoluzione dei precedenti con riferimento dei dati modali, aggiornando le matrici di massa e di rigidità.

Si tenga presente che i metodi globali possono risultare obsoleti dal momento che si considera esatta una quantità che può introdurre notevoli errori di misurazione, riducendo notevolmente la rappresentabilità fisica dei parametri aggiornati.

2.3 Metodi Locali

I metodi locali, o iterativi, sono metodi che richiedono più step di aggiornamento dei parametri andando a minimizzare il vettore residuo o una funzione obiettivo tra due modelli. Possono essere basati sia su metodi stocastici, sia su metodi basati sulla sensitività. Il vettore residuo, in genere, dipende dal tipo di metodo utilizzato e da quali variabili influenzano il processo matematico. A livello generale, i vettori residui possono essere dati dalle seguenti opzioni [8]:

- Differenza tra gli autovalori misurati e analitici;
- Differenza tra gli autovettori delle forme modali misurati e analitici;
- Differenza tra le FRF misurate e analitiche;
- Elementi di matrici diagonali miste;
- Vettori di forze residue calcolati con le equazioni per le vibrazioni libere.

La funzione obiettivo (*Penalty Function*), invece, è tipicamente un funzionale energetico o una norma vettoriale relativamente più complessa da calcolare rispetto al residuo: in letteratura [4], spesso viene utilizzata la somma del quadrato della differenza tra il set di dati misurato e quello analitico del modello. La funzione obiettivo ha il principale scopo di fornire una maggiore indicazione di correlazione tra i due modelli e dell'andamento del processo *FEMU*. La non-linearità è una

caratteristica principale della funzione perché tiene conto dell'aggiornamento di parametri che spesso non hanno influenza lineare sulla soluzione del problema. Pertanto, è necessario che il problema sia linearizzato e ottimizzato durante il processo iterativo. Questi tipi di metodi, a differenza dei precedenti, permettono una maggiore versatilità di scelta dei parametri da aggiornare, mantenendo il significato fisico a seguito del processo.

2.4 Metodi di correlazione

Il metodo *FEMU* principalmente confronta due risultati di due modelli simili aggiornando, tramite formulazione matematica, dei parametri in funzione dei risultati stessi. Pertanto, come espresso in precedenza, un aspetto fondamentale del confronto è la compatibilità tra i due modelli che deve essere garantita e mantenuta per tutto il processo. Esistono diversi metodi di correlazione, ma è possibile distinguere, inizialmente, la correlazione grafica e la correlazione numerica: la prima riguarda solamente le frequenze ed è utilizzata per verificare se i modelli non discordano eccessivamente; la seconda racchiude una serie di tecniche di comparazione che tengono conto degli autovettori delle forme modali. La correlazione numerica, generalmente, avviene con l'utilizzo di autovettori dei modi di vibrare e, di conseguenza, gli autovalori corrispondenti. La correlazione dei soli autovalori non è spesso sufficiente: nel dominio delle frequenze, due frequenze vicine, una misurata e una analitica del modello, non sono necessariamente due modi corrispondenti in quanto quest'ultimo non è esente da errori [8]. Inoltre, a seconda della geometria strutturale, si possono verificare scambi e disaccoppiamenti di forme modali che portano a un confronto non corretto delle frequenze. Gli autovettori delle forme modali sono, invece, molto più efficaci per la correlazione di due set di dati ed è fondamentale che ciascuna forma modale sia accoppiata. Pertanto la somiglianza delle forme modali può essere verificata con l'espressione di angolo vettoriale ϑ :

$$\cos\vartheta_{ij} = \frac{\phi'_{xi}}{|\phi_{xi}|} \cdot \frac{\phi'_{ai}}{|\phi_{ai}|} \quad (2.1)$$

dove ϕ_{xi} è l'autovettore della i -esima forma modale sperimentale e ϕ_{ai} la controparte analitica ottenuta dal modello FE [8]. La funzione può assumere valore tra 0 e 1, se gli autovalori accoppiati di due set sono sufficientemente correlati il valore del coseno tende a 1 (i vettori risultano paralleli), altrimenti la non-correlazione porta valori che tendono a 0.

I metodi di correlazione possono racchiudere diversi potenziali utilizzi individuati in letteratura [6, 7, 14, 3, 15], in particolare modo:

- Individuazione di errori in frequenze e forme modali della struttura modellata numericamente e sperimentalmente;

- Validazione modale del modello sperimentale con quello numerico;
- Individuazione dei danni strutturali del modello reale, confrontando sia il modello di struttura sana che quello di struttura danneggiata;
- Correlazione per verifica di accoppiamento dei modi di vibrare, un eventuale disaccoppiamento o scambio dei modi è facilmente individuabile sulla diagonale della matrice;
- Coerenza e stabilità dei parametri nell'utilizzo di algoritmi di stima;
- Verifica di stabilità e convergenza degli algoritmi *FEMU*;
- Mappatura di confronto della matrice tra dati sperimentali e dati del modello FE;

2.4.1 Correlazione grafica

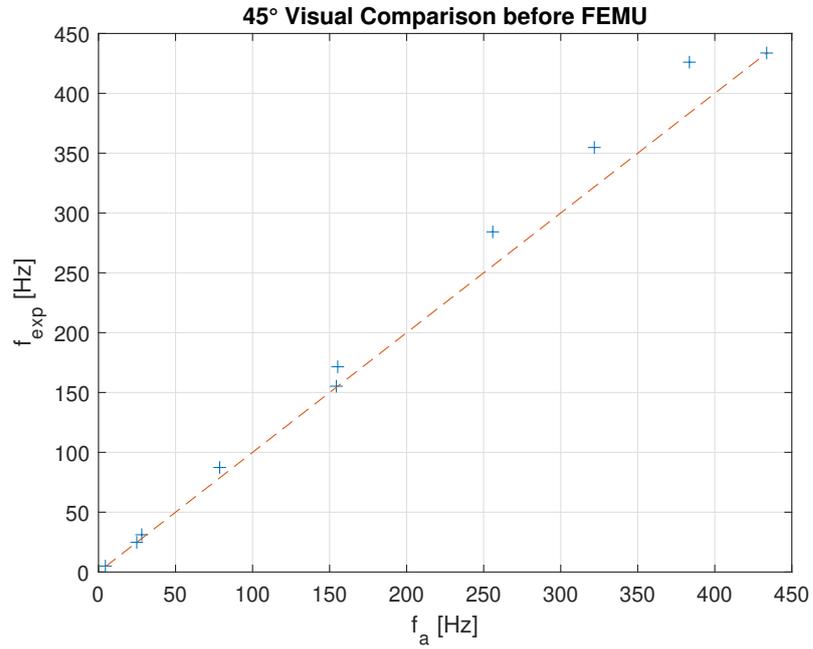
Una correlazione grafica [8] può essere effettuata per le frequenze di risonanza dei set di dati, sia sperimentali che numerici del modello FE o di due modelli del medesimo tipo. Le frequenze possono essere facilmente confrontate e rappresentate graficamente con un plot a 45° , come mostrato in figura 2.1 nel quale l'asse verticale rappresenta le frequenze del modello analitico e l'asse orizzontale quelle sperimentali.

Due modelli sufficientemente coerenti tra di loro hanno le frequenze di risonanza che si trovano in corrispondenza della diagonale a 45° . È usuale, quindi, aspettarsi frequenze lontane dalla diagonale in un modello in fase pre-*FEMU*. In figura 2.1 è mostrata la correlazione visiva delle frequenze, prima e dopo il processo *FEMU* di una trave isotropa (paragrafo 4.3).

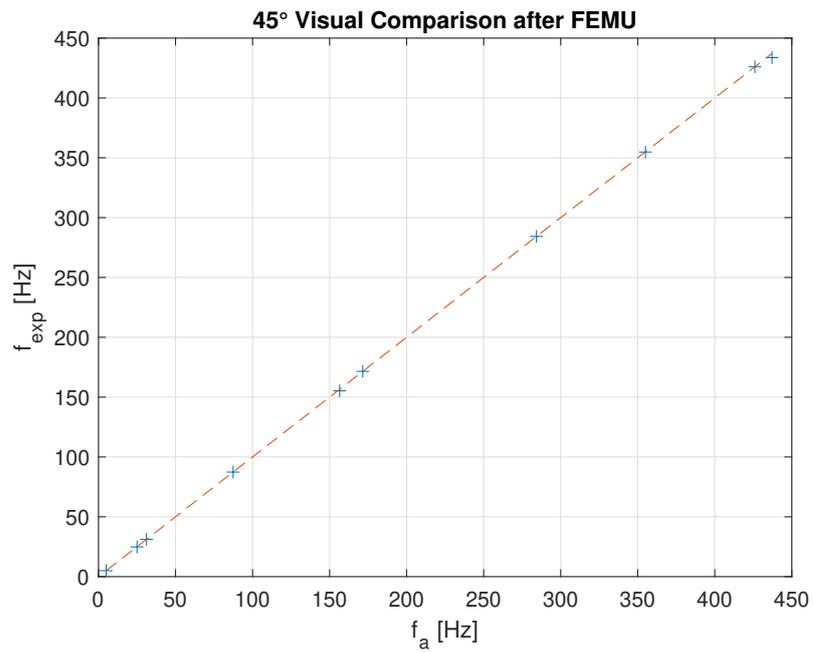
La correlazione grafica permette a grandi linee di valutare se un modello è più rigido del caso sperimentale, individuando approssimativamente una sovra-stima o sotto-stima della matrice di rigidità e di massa [8]. Tuttavia, questo tipo di correlazione non garantisce coerenza tra i modelli in quanto manca il confronto tra i modi di vibrare: un processo *FEMU* può portare a una configurazione di parametri aggiornati che fornisce correlazione di frequenze ma non di modi di vibrare, causando una convergenza "apparente". Le frequenze di risonanza forniscono una buona correlazione ma non sufficiente alla validazione, richiedendo necessariamente l'ausilio di tecniche che utilizzano le forme modali.

2.4.2 Correlazione numerica

La correlazione numerica è resa necessaria dal momento in cui si richiede la coerenza dei autovettori delle forme modali. Allemang [6] propone diverse tecniche di correlazione utilizzate, individuando i parametri richiesti e le condizioni analitiche



(a) Prima della *FEMU*.



(b) Dopo la *FEMU*.

Figura 2.1: Correlazione grafica a 45° delle frequenze naturali di una trave isotropa.

relative alle possibili combinazioni di parametri. Tutte le tecniche richiedono, ovviamente, che le dimensioni vettoriali e matriciali dei componenti modali siano della medesima dimensione.

MSF

Il *Modal Scale Factor (MSF)* è un fattore che, tenendo conto della normalizzazione, fa in modo di ottenere autovettori scalati correttamente. Se gli stessi sono normalizzati rispetto alla matrice delle masse, quelli del modello FE potrebbero risultare molto diversi da quelli sperimentali, nonostante un'elevata coerenza dei modelli [4]. Questo è imputabile alla differente distribuzione della massa tra i due modelli. Il *MSF* è ricavabile dalla seguente espressione:

$$MSF = \frac{\sum_{q=0}^N \phi_{xqj} \phi_{aqj}^*}{\sum_{q=0}^N \phi_{aqj} \phi_{aqj}^*} = \frac{\phi_{xj}^T \phi_{aj}}{\phi_{aj}^T \phi_{aj}} \quad (2.2)$$

Dove:

ϕ_{xqj} è l'autovettore sperimentale del q -esimo componente della j -esima forma modale;

ϕ_{aqj} è l'autovettore analitico del q -esimo componente del j -esima forma modale;

N è il numero di gradi di libertà sperimentale.

Moltiplicando l'autovettore sperimentale per l'*MSF* si risolve il possibile sfasamento di 180° tra i set di dati [4].

MAC

Il *Modal Assurance Criterion (MAC)* [14] è un indice di coerenza tra due modelli calcolato mediante autovettori della matrice modale e fornisce un ulteriore indice di somiglianza da diverse stime di parametri iniziali. Il *MAC* si ottiene dall'espressione 2.1 e, analogamente, assume valori compresi tra 0 e 1.

Dall'equazione 2.1 si ricava facilmente l'espressione del *MAC*:

$$MAC_{ij} = \frac{\left| \sum_{q=0}^N \phi_{xqi} \phi_{aqj}^* \right|^2}{\left(\sum_{q=0}^N \phi_{xqi} \phi_{xqi}^* \right) \left(\sum_{q=0}^N \phi_{aqj} \phi_{aqj}^* \right)} = \frac{|\phi_{xi}^T \phi_{aj}|^2}{(\phi_{xi}^T \phi_{xi})(\phi_{aj}^T \phi_{aj})} \quad (2.3)$$

Dove:

ϕ_{xqi} è l'autovettore del q -esimo componente della i -esima forma modale sperimentale;

ϕ_{aqj} è l'autovettore del q -esimo componente del j -esima forma modale del modello FE;

Si noti che, oltre all'ortogonalità, dev'essere rispettata la coerenza della normalizzazione degli autovettori.

Essendo una matrice quadrata $N \times N$, dove N sono il numero di forme modali considerate, valutando la somiglianza tra due modelli simili ci si aspetta una diagonale di valori tendenti a 1 e fuori dalla diagonale tendenti a 0. Questo perché gli autovettori sono univoci, non possono essere ottenuti con combinazione lineare di altri autovettori dato il loro principio di ortogonalità: due autovettori di due forme modali diverse sono ortogonali e quindi l'indice del *MAC* tende a zero.

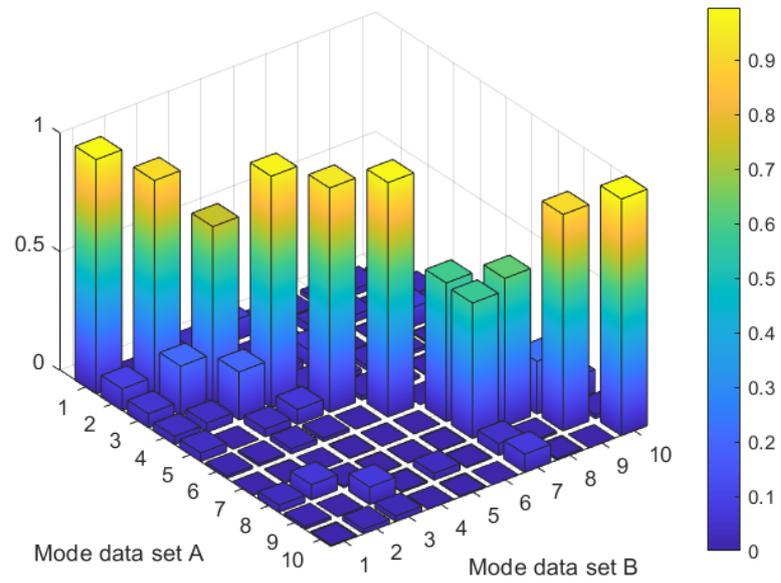
In figura 2.2 sono rappresentati i valori del *MAC* di un semplice caso a 10DOF (paragrafo 4.2) prima e dopo il processo *FEMU*. Come si può notare in figura 2.2a i due set di dati, seppur comparabili, mostrano discordanze tra le forme modali, causate da una non sufficiente coerenza tra modelli. È usuale che tra due modelli, nonostante l'errore delle frequenze rientri nell'ammissibilità del 5%, possa manifestare forme modali leggermente incoerenti. Invece, successivamente alla *FEMU*, in figura 2.2b, la coerenza tra due modelli può essere confermata con valori della diagonale prossimi a 1.

COMAC

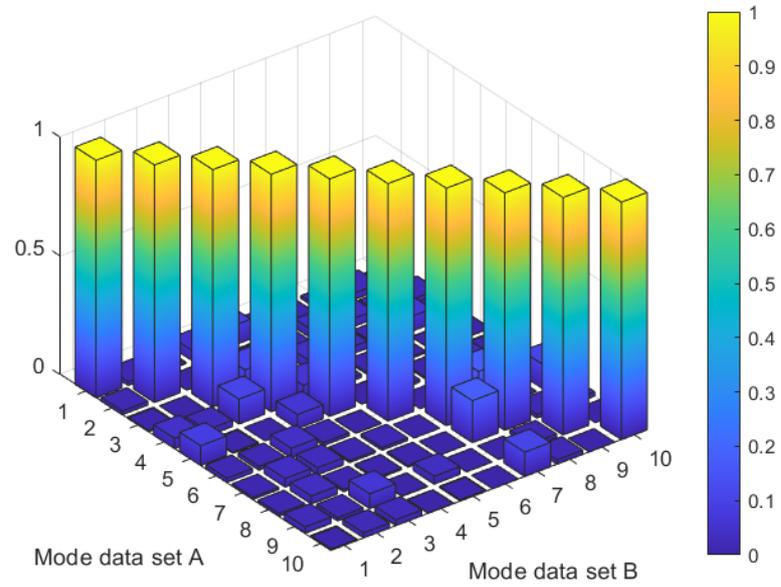
Il *COordinate Modal Assurance Criterion (COMAC)* è un'estensione del *Modal Assurance Criterion* che mette in relazione i gradi di libertà individuando quali influiscono negativamente su bassi indici di *MAC*. Per ogni q -esimo grado di libertà, il *COMAC* è esprimibile dalla seguente equazione [8]:

$$COMAC_q = \frac{\left| \sum_{i,j=0}^L \phi_{xqi} \phi_{aqj}^* \right|^2}{\left(\sum_{i,j=0}^L \phi_{xqi} \phi_{xqi}^* \right) \left(\sum_{i,j=0}^L \phi_{aqj} \phi_{aqj}^* \right)} \quad (2.4)$$

Dove L è numero massimo di forme modali sperimentali. Per ogni set di autovettori accoppiati, c'è un valore di *COMAC* che rappresenta la coerenza del set al q -esimo grado di libertà in tutto il range di frequenze. In altre parole, un q -esimo componente di autovettore del modello ϕ_a , in tutto il range di frequenze, viene messo in relazione con il medesimo componente di autovettore sperimentale ϕ_x , anch'esso calcolato in tutto il range di frequenze. Analogamente al *MAC*, per valori tendenti a 1 si ha un ottimo grado di coerenza tra i due set.



(a) Prima della *FEMU*.



(b) Dopo la *FEMU*.

Figura 2.2: *Modal Assurance Criterion*.

FRAC

Il *Frequency Response Assurance Criterion (FRAC)* [6] è un'estensione del *COMAC* utilizzando, però, le funzioni di risposta in frequenza (FRF). Si correla la funzione di risposta in frequenza del modello, relativamente al q -esimo grado di libertà, con quella sperimentale o di un altro set di dati di confronto. Per cui si ha:

$$FRAC_q = \frac{\left| \sum_{p,q=0}^l h_{xpq}(\omega_l) h_{apq}^*(\omega_l) \right|^2}{\left(\sum_{p,q=0}^l h_{xpq}(\omega_l) h_{xpq}^*(\omega_l) \right) \left(\sum_{p,q=0}^l h_{apq}(\omega_l) h_{apq}^*(\omega_l) \right)} \quad (2.5)$$

Dove:

$h_{xpq}(\omega_l)$ è la funzione FRF sperimentale calcolata alla frequenza ω_l nei gradi di libertà q e p ;

$h_{apq}(\omega_l)$ è la funzione FRF analitica calcolata alla frequenza ω_l nei gradi di libertà q e p ;

Si noti che è possibile confrontare, analogamente agli autovettori, anche le FRF parziali e le frequenze parziali.

FDAC

Il *Frequency Domain Assurance Criterion (FDAC)* [6] è un'estensione del *MAC* nel dominio delle frequenze, ed è calcolabile dalla seguente equazione:

$$FDAC_{\omega_a, \omega_x, q} = \frac{\left| \mathbf{h}_{xi}^H(\omega_x) \mathbf{h}_{aj}(\omega_a) \right|^2}{\left(\mathbf{h}_{xi}^H(\omega_x) \mathbf{h}_{xi}(\omega_x) \right) \left(\mathbf{h}_{aj}^H(\omega_a) \mathbf{h}_{aj}(\omega_a) \right)} \quad (2.6)$$

Dove:

$\mathbf{h}_{xi}(\omega_l)$ è la funzione FRF sperimentale calcolata alla frequenza ω_x in riferimento alla i -esima colonna della matrice delle FRF \mathbf{H} ;

$\mathbf{h}_{aj}(\omega_l)$ è la funzione FRF analitica calcolata alla frequenza ω_a in riferimento alla j -esima colonna della matrice delle FRF \mathbf{H} ;

In questo caso, il *FDAC* è una matrice molto più grande del *MAC* perchè è strettamente correlata dalla dimensione della FRF anziché dal numero di forme modali sperimentali.

2.5 Compatibilità del modello

Uno dei problemi più importanti che si manifestano, prima della correlazione e del processo *FEMU*, riguarda la compatibilità tra i modelli causata dall'incompletezza dei dati sperimentali. La risposta del sistema sperimentale è unicamente dipendente dalla posizione dei sensori che, inoltre, limitano il range di frequenze rilevabile [4]. Il numero di gradi di libertà sperimentali è strettamente legato dal numero e dal tipo di sensori (uniassiali, biassiali, triassiali); mentre, il numero di gradi di libertà del modello è strettamente legato alla *mesh* ed è estremamente variabile a seconda dei criteri di modellazione scelti. La differenza quantitativa di gradi di libertà tra i due modelli potrebbe variare di diversi ordini di grandezza, per cui si evidenzia la notevole discrepanza rendendo i modelli completamente incompatibili. Inoltre, sarebbe poco pratico, se non impossibile, aumentare i gradi di libertà del modello sperimentale al fine di eguagliarli con quello del modello FE: non tutti i punti della struttura reale sono accessibili dai sensori e i gradi di libertà rotazionali sono generalmente complessi da rilevare [8].

Il processo *FEMU* richiede non solo un numero (e tipo) uguale di gradi di libertà ma anche l'esatta posizione di ciascuno di essi. Per coincidere le due entità, si ricorre a metodi numerici di riduzione o espansione del modello.

2.5.1 Riduzione di Guyan

Una delle riduzioni più comuni utilizzate è la riduzione di *Guyan* [9], o condensazione statica, e rappresenta un tipo di riduzione di matrici non-diagonali nel quale l'ordine matriciale viene ridotto fino a un numero pari alla dimensione scelta del vettore dei gradi di libertà. Le matrici e i vettori si riducono fino a una dimensione notevolmente inferiore rispetto al modello completo, andando a trascurare i gradi di libertà relativamente meno importanti e influenti. Essendo un processo di approssimazione, la riduzione semplifica notevolmente il modello permettendo la compatibilità con la controparte sperimentale a discapito risultato più accurato.

Considerando un sistema dinamico, non smorzato, l'equazione di governo del moto è rappresentato dalla seguente espressione generale:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.7)$$

Dove:

\mathbf{M} e \mathbf{K} sono rispettivamente le matrici di massa e rigidezza di ordine $N \times N$;

$\ddot{\mathbf{x}}(t)$ è il vettore della risposta del sistema in termini di accelerazione nel tempo;

$\mathbf{x}(t)$ è il vettore della risposta del sistema in termini di spostamento nel tempo.

$\mathbf{f}(t)$ è il vettore delle forzanti applicate nel tempo.

Ai fini di una riduzione, si partizionano le matrici e vettori, introducendo i gradi di libertà *retained* e quelli *omitted*. Per cui l'equazione 2.7 diventa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RR} & \vdots & \mathbf{M}_{RO} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}_{OR} & \vdots & \mathbf{M}_{OO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_R \\ \dots \\ \ddot{\mathbf{x}}_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \vdots & \mathbf{K}_{RO} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{OR} & \vdots & \mathbf{K}_{OO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \dots \\ \mathbf{x}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \dots \\ \mathbf{f}_O \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Trattandosi di una condensazione statica, il sistema riduce l'equazione in forma statica nell'ipotesi che il contributo inerziale sia sufficientemente trascurabile rispetto al contributo di rigidità. Inoltre, si suppone che le forze applicate nei gradi di libertà *omitted* siano nulle perchè altrimenti si andrebbero a trascurare termini che contribuiscono notevolmente la soluzione del problema. Per cui l'equazione 2.8 diventa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \vdots & \mathbf{K}_{RO} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{OR} & \vdots & \mathbf{K}_{OO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \dots \\ \mathbf{x}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Espandendo la precedente equazione si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{RR}\mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{RO}\mathbf{x}_O = \mathbf{f}_R \\ \mathbf{K}_{OR}\mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{OO}\mathbf{x}_O = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Invertendo la seconda espressione, si possono ottenere i gradi di libertà omessi dal modello:

$$\mathbf{x}_O = -\mathbf{K}_{OO}^{-1}\mathbf{K}_{OR}\mathbf{x}_R = \mathbf{K}_{Guyan}\mathbf{x}_R \quad (2.11)$$

Tornando al vettore della risposta del sistema ai gradi di libertà del sistema, si ha:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \dots \\ \mathbf{x}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \dots \\ \mathbf{K}_{Guyan} \end{bmatrix} \mathbf{x}_R = \mathbf{T}_s \mathbf{x}_R \quad (2.12)$$

Con

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \dots \\ -\mathbf{K}_{OO}^{-1}\mathbf{K}_{OR} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

definita come matrice di trasformazione che permette il passaggio da sistema completo a quello ridotto. Se si considera, ad esempio, le energie cinetica e potenziale della struttura, per cui:

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (2.14)$$

È possibile applicare la riduzione all'equazione dell'energia, infatti [8]:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_R^T \mathbf{T}_s^T \mathbf{M} \mathbf{T}_s \dot{\mathbf{x}}_R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_R^T \mathbf{M}_{Guyan} \dot{\mathbf{x}}_R \\ \mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \mathbf{x}_R^T \mathbf{T}_s^T \mathbf{K} \mathbf{T}_s \mathbf{x}_R = \frac{1}{2} \mathbf{x}_R^T \mathbf{K}_{Guyan} \mathbf{x}_R \end{cases} \quad (2.15)$$

Dove le matrici di massa e di rigidezza del sistema ridotto sono calcolabili dalle seguenti espressioni [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{Guyan} &= \mathbf{T}_s^T \mathbf{K} \mathbf{T}_s \\ &= \mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{OR} \mathbf{K}_{OO}^{-1} \mathbf{K}_{RO}^T; \\ \mathbf{M}_{Guyan} &= \mathbf{T}_s^T \mathbf{M} \mathbf{T}_s \\ &= \mathbf{M}_{RR} - \mathbf{M}_{RO} \mathbf{K}_{OO}^{-1} \mathbf{K}_{RO}^T + \\ &\quad - (\mathbf{K}_{OO}^{-1} \mathbf{K}_{RO})^T (\mathbf{M}_{RO}^T - \mathbf{M}_{OO} \mathbf{K}_{OO}^{-1} \mathbf{K}_{RO}^T) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le equazioni 2.16 rappresentano le matrici di massa e di rigidezza del sistema ottenute tramite condensazione statica, note anche come matrici ridotte di Guyan. Questo tipo di riduzione porta una matrice di rigidezza esatta (se è rispettata la condizione di $\mathbf{f}_O = 0$) tuttavia, come detto in precedenza, la matrice delle masse risulta soltanto approssimata in quanto l'inerzia non sarà mai sufficientemente trascurabile in un caso dinamico; per cui la riduzione è valida per modi di vibrare a frequenze più basse. È consigliabile infatti, ai fini di accuratezza, avere un numero di nodi *retained* almeno il doppio rispetto al numero di modi di vibrare considerati nel problema [8].

2.5.2 Condensazione dinamica

Un'estensione della riduzione di Guyan può essere fatta senza trascurare il termine d'inerzia, tramite condensazione dinamica [16], garantendo una maggiore accuratezza a frequenze maggiori. La seconda equazione 2.10 viene estesa tenendo conto del contributo inerziale ad una fissata frequenza ω , infatti:

$$\mathbf{M}_{OR} \ddot{\mathbf{x}}_R + \mathbf{M}_{OO} \ddot{\mathbf{x}}_O + \mathbf{K}_{OR} \mathbf{x}_R + \mathbf{K}_{OO} \mathbf{x}_O = 0 \quad (2.17)$$

Dove i termini $\tilde{\mathbf{x}}$ sono esprimibili come $-\omega^2 \mathbf{x}$. Procedendo in maniera analoga alla condensazione statica si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \dots \\ \mathbf{x}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \dots \\ \mathbf{K}_d \end{bmatrix} \mathbf{x}_R = \mathbf{T}_d \mathbf{x}_R \quad (2.18)$$

Dove la matrice di condensazione dinamica è data dalla seguente espressione [4]:

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \dots \\ -(\mathbf{K}_{OO}^{-1} - \omega^2 \mathbf{M}_{OO})^{-1} (\mathbf{K}_{OR} - \omega^2 \mathbf{M}_{OR}) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice di trasformazione viene usata allo stesso modo di quella a condensazione statica, ma in un problema dinamico e con minore approssimazione ad alte frequenze. Si noti che i termini di inversa dell'equazione 2.19 richiedono un costo di calcolo, rendendo più lento il processo rispetto alla riduzione di Guyan.

2.5.3 IRS

Il metodo di *Improved Reduced System (IRS)* è stato introdotto per la prima volta da O'Callahan [17] e rappresenta un miglioramento della condensazione statica di Guyan. In questo caso, il metodo introduce una perturbazione al caso statico introducendo il termine di inerzia come forza pseudo-statica¹. È bene tenere conto che, la pseudo-forza, rappresenta una componente molto approssimata rispetto alla reale controparte del sistema completo. I risultati presentati da O'Callahan [17] forniscono una migliore compatibilità rispetto alla riduzione di Guyan, tuttavia, le matrici di massa e di rigidità risultano meno rappresentative e adatte al controllo di ortogonalità vettoriale [18]. Dall'equazione 2.8, si scompongono i termini e, applicando il teorema binomiale, si ottiene la relazione del vettore dei gradi di libertà *omitted*, infatti:

$$\mathbf{x}_O = \left[-\mathbf{K}_{OO}^{-1} \mathbf{K}_{OR} + \mathbf{K}_{OO}^{-1} (\mathbf{M}_{OR} - \mathbf{M}_{OO} \mathbf{K}_{OO}^{-1} \mathbf{K}_{OR}) \mathbf{M}_{Guyan}^{-1} \mathbf{K}_{Guyan} \right] \mathbf{x}_R \quad (2.20)$$

Con la precedente equazione si può ricavare la seguente matrice di trasformazione [18]:

$$\mathbf{T}_{IRS} = \mathbf{T}_s + \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{T}_s \mathbf{M}_{Guyan}^{-1} \mathbf{K}_{Guyan} \quad (2.21)$$

Dove

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{OO}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

¹Per forza pseudo-statica si intende una forza equivalente che rappresenta una distribuzione non uniforme delle forze d'inerzia.

Le matrici di massa e di rigidezza del sistema ridotto con il metodo *IRS* saranno quindi ricavabili in maniera analoga ai precedenti paragrafi, infatti:

$$\mathbf{K}_{IRS} = \mathbf{T}_{IRS}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{IRS} \qquad \mathbf{M}_{IRS} = \mathbf{T}_{IRS}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{IRS} \quad (2.23)$$

La matrice di trasformazione, proposta dall'equazione 2.21, potrebbe risultare relativamente comoda da utilizzare, data la sua forma matriciale. Tuttavia risulta inefficiente a livello computazionale e pertanto va effettuato un processo iterativo con il quale si rimanda l'approfondimento alla letteratura proposta da Friswell et Al. [18].

2.5.4 SEREP

Il metodo *System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)* [19] permette una riduzione del modello con partizione degli autovalori in maniera analoga alla condensazione statica, riproducendo esattamente le frequenze del modello completo. La matrice modale complessiva di un sistema può essere espressa come combinazione lineare dei componenti della matrice modale parziale [8]. Data la matrice modale complessiva del modello analitico e partizionando i modi di vibrare *retained* e *omitted*, si ottiene:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_R \\ \dots \\ \Phi_O \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Si definisce una matrice pseudo-inversa² nel seguente modo:

$$\Phi_R^+ = \left(\Phi_R^T \Phi_R \right)^{-1} \Phi_R^T \quad (2.25)$$

La matrice di trasformazione si ricava, quindi, con la seguente espressione:

$$\mathbf{T}_{SEREP} = \begin{bmatrix} \Phi_R \\ \dots \\ \Phi_O \end{bmatrix} \Phi_R^+ \quad (2.26)$$

Le matrici di massa e di rigidezza ridotte con il metodo *SEREP* si ricavano utilizzando la matrice di trasformazione, ricavata in precedenza, in maniera analoga all'equazione 2.23.

²Generalizzazione di una matrice inversa nel caso in cui quest'ultima non sia quadrata.

Capitolo 3

Metodologia

3.1 Introduzione

Come accennato in precedenza, il metodo di *Finite Element Model Updating* può essere condotto sia globalmente, che localmente. Se non vengono scelte variabili di design, il processo si manifesta globalmente con l'aggiornamento di tutti i coefficienti delle matrici. Tale approccio porta a risultati analoghi a quelli del set sperimentali in maniera esatta. Tuttavia, i metodi globali sono generalmente considerati obsoleti, in quanto non sono in grado di mantenere significato fisico delle misurazioni e delle modifiche fisiche del modello [8]; inoltre, riproducendo identicamente i risultati, con essi si accumulano anche gli errori di misurazione peggiorando il significato fisico della soluzione. La scelta di variabili è permessa solo con una procedura locale permettendo una maggiore flessibilità di risoluzione del problema.

In questo capitolo, si approfondisce dettagliatamente una metodologia basata sulla sensitività e la sua formulazione matematica applicata per il caso dinamico in esame. Si delineano i passaggi del processo iterativo definito come *Penalty Function Method (PFM)*. La metodologia su cui si basa il processo *FEMU* è riassumibile con un flowchart in figura 3.1 e si possono identificare principalmente 3 fasi nel quale vengono elaborati tutti i dati:

- **Elaborazione, correlazione e compatibilità dei dati**, fase nel quale si determinano i dati modali analitici del modello e in seguito confrontati con quelli sperimentali ottenuti sin dall'inizio del processo. A seguito del confronto di correlazione, i gradi di libertà del vengono gestiti in maniera tale da coincidere con quelli sperimentali. Nel caso in esame viene fatta una riduzione per condensazione statica di *Guyan*;
- **Analisi di sensitività**, con conseguente generazione della matrice di sensitività (o *Jacobiana*), passaggio fondamentale su cui si basa il metodo e richiede una certa attenzione nel determinare i singoli coefficienti di derivazione;

- **Updating**, fase finale di calcolo mediante formulazione di *Penalty Function Method* che permette di sommare l'incremento iterativo al k-esimo parametro.

I set di dati sono rappresentati dalla risposta dinamica del problema governata dalle frequenze naturali del sistema e dai modi di vibrare. Prima di iniziare il processo processo, si devono tenere conto di alcune caratteristiche che vanno a inficiare sulla bontà della metodologia applicata al modello, tra cui:

- Il ruolo fondamentale della matrice di sensitività, strumento che assume forma di derivazione degli autovalori e autovettori delle variabili modali;
- I ruoli delle matrici di massa e di rigidezza della formulazione matematica;
- L'utilizzo del *Penalty Function* come indicatore funzionale della compatibilità tra set di dati;
- La minimizzazione del residuo definito dalla differenza tra dati modali di due set di dati;

Lo scopo del metodo è minimizzare il *PF* basato sul residuo di autovalori e autovettori, massimizzando la correlazione tra due set di dati. Come accennato in precedenza, la funzione ha un comportamento non lineare a causa della non linearità del problema. Il metodo permette un'ampia scelta dei parametri da aggiornare, ma questo implica un complesso processo di minimizzazione di una funzione non lineare con il rischio di difficoltà di convergenza [2].

I dati modali in un'analisi dinamica sono definiti dal vettore \mathbf{z} :

$$\mathbf{z}_j = \left\{ \lambda_j \quad \boldsymbol{\phi}_j \right\}^T \quad (3.1)$$

dove λ_j e $\boldsymbol{\phi}_j$ sono rispettivamente autovalore e autovettore della j-esima forma modale. Un metodo *FEMU* basato sulla sensitività aggiorna dei parametri di design pre-selezionati, definiti con un vettore $\boldsymbol{\vartheta}$. Una qualsiasi infinitesima perturbazione produce una variazione di output definita da una sensibilità. Le equazioni di aggiornamento possono essere espresse nella seguente forma generica [8]:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial \vartheta_k} \Delta \vartheta_k \approx \Delta \mathbf{z}_i = \mathbf{z}_{up} - \mathbf{z}_i \quad (3.2)$$

dove \mathbf{z}_{up} e \mathbf{z}_i sono, rispettivamente, il vettore delle quantità aggiornate e quello iterativo corrente; n il è numero di parametri scelti.

Lo svolgimento dell'intero processo viene eseguito da un algoritmo iterativo di ottimizzazione mediante l'utilizzo di *MATLAB* e *MSC Patran/Nastran*, seguendo il flowchart in figura 3.1.

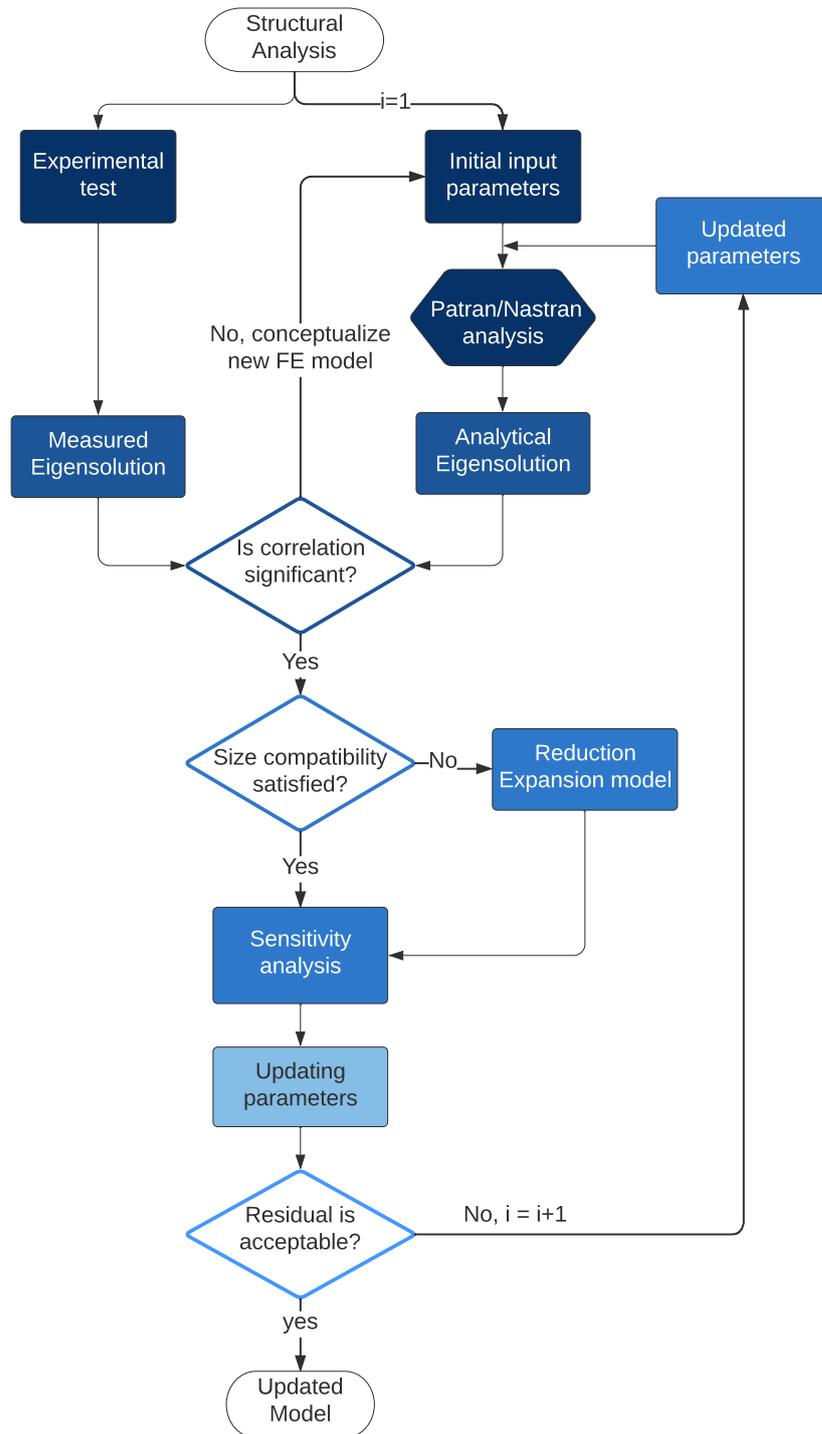


Figura 3.1: Flow Chart della metodologia *FEMU*.

3.2 Penalty Function Method

La stima dei parametri di un modello aggiornato iterativamente con il metodo *PFM* rappresenta una risoluzione del problema ai minimi quadrati. Il risultato della stima della combinazione di parametri che fornisce dati modali più veritieri possibile, nonostante siano inevitabilmente inquinati da errori di misura sperimentali [20]. Poiché, il risultato matematico esatto è difficoltoso da raggiungere, non c'è garanzia di ottenere una combinazione di parametri univoca: più la stima iniziale dei parametri è coerente con la realtà, migliore sarà la qualità della convergenza.

3.2.1 Analisi di Sensitività

Il *PFM* basato sulla sensitività linearizza un problema con la quale il rapporto tra i dati modali e i parametri strutturali sono generalmente non lineari. Pertanto, si sviluppa la formulazione da un'espansione della serie di Taylor dei dati modali troncata al primo ordine, ottenendo un'approssimazione lineare [4]:

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{S}_i \delta \boldsymbol{\vartheta} \quad (3.3)$$

dove

$\delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_i$ è la differenza tra il vettore dei dati modali misurati sperimentalmente e il vettore numerico alla i -esima iterazione, altresì definibile come residuo;

$\delta \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}_i$ è la perturbazione dei parametri di stima, $\boldsymbol{\vartheta}_i$ è il vettore dei parametri alla i -esima iterazione;

\mathbf{S}_i è la matrice di sensitività, calcolata iterativamente.

Si definisce quindi il residuo, una funzione che risulta minimizzata in prossimità di una convergenza dove le quantità modali numeriche eguagliano sempre di più a quelle misurate. Alla i -esima iterazione, il residuo è quindi determinato come [5]:

$$\mathbf{res}_i = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_i \quad (3.4)$$

Il vettore $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}(\boldsymbol{\vartheta}_i)$ è calcolato iterativamente ed è fortemente dipendente dalla stima parametrica. La matrice di sensitività può essere ottenuta partendo dall'espressione 3.2, arrangiandola per una situazione dinamica con la formulazione del vettore \mathbf{z} , si può ricavare [8]:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{z}_j}{\partial \vartheta_k} \Delta \vartheta_k \approx \Delta \mathbf{z}_i = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_i \quad (3.5)$$

dove

$\Delta\vartheta_k$ è una perturbazione del k-esimo parametro;

$\frac{\partial z_j}{\partial \vartheta_k}$ è la derivata del j-esimo componente modale in funzione del k-esimo parametro;

n il numero di parametri totali.

Poichè si assume la struttura reale possa essere rappresentata da un modello aggiornato con il processo *FEMU* e, quindi, il vettore z_{up} può essere chiaramente rimpiazzato dalla controparte sperimentale z_m . Si noti che la precedente equazione è analoga alla 3.3, ma in forma indiciale e può essere espressa in forma matriciale, infatti:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial \vartheta_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial z_2}{\partial \vartheta_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial \vartheta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial z_m}{\partial \vartheta_2} & \cdots & \frac{\partial z_m}{\partial \vartheta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\vartheta_1 \\ \Delta\vartheta_2 \\ \vdots \\ \Delta\vartheta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \vdots \\ \Delta z_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

dove la matrice presente al primo termine è nota come matrice di Sensitività S_i :

$$\mathbf{S}_i = \left(\frac{\partial z_j}{\partial \vartheta_k} \right)_{\vartheta=\vartheta_i} \quad (3.7)$$

La matrice è data dalla derivata prima del vettore \mathbf{z} contenente autovalori e autovettori in funzione dei parametri alla j-esima forma modale. La matrice viene determinata iterativamente ed è calcolata ai valori correnti dei parametri $\vartheta = \vartheta_i$ iterativamente, per cui avrà un numero di colonne pari al numero di parametri scelti di aggiornamento.

3.2.2 Derivazione autovalori e autovettori non smorzati

Il calcolo della matrice di sensitività comporta un costo computazionale notevolmente alto e data la sua complessità di calcolo è richiesto l'ausilio di metodi estremamente efficaci. Le derivazioni degli autovalori e autovettori utilizzate con metodo sono ricavate analiticamente da Fox and Kapoor [21] e ridefinite per il metodo *PFM* da Mottershead et al. [5]. L'equazione 3.7 va derivata in due formulazioni differenti: una per gli autovalori e una per autovettori. Infatti:

$$\mathbf{S}_i = \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \{ \lambda_j \quad \varphi_j \}^T \right)_{\vartheta=\vartheta_i} \quad (3.8)$$

Entrambe sono ricavante facilmente con le vibrazioni libere non smorzate.

Derivazione Autovalori

Con le equazioni di governo delle vibrazioni libere non smorzate si ha:

$$[\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}] \phi_j = \{0\} \quad (3.9)$$

Dove gli autovalori sono definiti alla i -esima iterazione come il quadrato della pulsazione propria del sistema $\lambda_j = \omega_j^2$ con $j = 1, 2, \dots, N$ modi. Le matrici \mathbf{K} e \mathbf{M} di ordine $N \times N$ sono relative alla struttura del modello FE; poichè i parametri cambiano iterativamente, vanno anch'esse determinate ed elaborate computazionalmente ad ogni iterazione: affinché il modello sperimentale e il modello FE siano comparabili, va ridotto il sistema in modo tale da eguagliare il numero di gradi di libertà e le matrici. In questo caso, è sufficiente un'opportuna riduzione di *Guyan* cosicché la dimensione della matrice sia opportunamente adeguato al numero dei gradi di libertà sperimentali.

Differenziando con derivate parziali la precedente equazione rispetto al k -esimo parametro di aggiornamento, si ottiene:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vartheta_k} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial \vartheta_k} \mathbf{M} \right] \phi_j + [\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}] \frac{\partial \phi_j}{\partial \vartheta_k} = \{0\} \quad (3.10)$$

Premoltiplicando ogni termine per l'autovettore trasposto ϕ_j^T e assumendo la normalizzazione degli stessi rispetto alla massa $\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j = 1$, si ha [3]:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \vartheta_k} = \phi_j^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vartheta_k} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k} \right] \phi_j \quad (3.11)$$

Si ottiene così la prima derivazione degli autovettori non smorzati per ogni j -esima forma modale. Si noti che la derivazione delle matrici viene effettuata mediante differenze finite. È importante tenere conto che ciascun autovalore della j -esima forma modale vada determinato con autovettori del medesimo modo. Un approccio semplice e utile per il calcolo dei termini di sensitività è perturbare il k -esimo parametro in quantità sufficientemente piccola, inducendo una variazione delle matrici di massa e di rigidità della struttura.

Derivazione degli autovettori

Analogamente si procede per gli autovettori, ma in questo caso si incorre a una diversa difficoltà in quanto i modi di vibrare non possono essere determinati in maniera diretta. I coefficienti degli autovettori tra sperimentale e analitico devono avere la medesima corrispondenza nel numero dei gradi di libertà, essere coincidenti delle rispettive coordinate e accoppiati nei j -esimi modi. Inoltre, le quantità modali sperimentali, essendo limitate dal numero di sensori, è usuale che il numero delle forme modali considerate possano essere meno di quelle del modello FE.

Matematicamente si può esprimere l'autovettore di una forma modale come combinazione lineare pesata degli autovettori dell'intero sistema, per cui:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial \vartheta_k} = \sum_{h=1}^H \alpha_{jkh} \phi_h \quad H \leq N \quad (3.12)$$

dove H è il numero di forme modali considerate sul totale N . Sostituendo quest'ultima nell'espressione 3.10 e premoltiplicando per l'autovettore trasposto ϕ_h^T , si ha [8]:

$$\phi_h^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vartheta_k} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial \vartheta_k} \mathbf{M} \right] \phi_j + \phi_h^T [\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}] \sum_{h=1}^N \alpha_{jkh} \phi_h = \{0\} \quad (3.13)$$

poiché le forme modali sono linearmente indipendenti tra di loro e data la normalizzazione rispetto alla massa:

$$\begin{cases} \phi_h^T \mathbf{K} \phi_j = 0 \\ \phi_h^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \end{cases} \quad h \neq j \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \phi_h^T \mathbf{K} \phi_j = \lambda_j \\ \phi_h^T \mathbf{M} \phi_j = 1 \end{cases} \quad h = j \quad (3.15)$$

Si semplifica l'espressione 3.13, ottenendo:

$$\phi_h^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vartheta_k} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial \vartheta_k} \mathbf{M} \right] \phi_j + [\lambda_j - \lambda_h] \alpha_{jkh} = \{0\} \quad (3.16)$$

Si può ricavare facilmente il fattore α_{jkh} che assume due espressioni in base alla h -esima forma modale considerata. Con $h \neq j$, si ha:

$$\alpha_{jkh} = \frac{\phi_h^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vartheta_k} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k} \right) \phi_j}{\lambda_j - \lambda_h}; \quad h \neq j \quad (3.17)$$

Quando invece $h = j$, il fattore può essere ottenuto dalla differenziazione della condizione di normalizzazione della massa [8], per cui:

$$\phi_j^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k} \phi_j + 2 \phi_j^T \mathbf{M} \frac{\partial \phi_j}{\partial \vartheta_k} = \{0\} \quad (3.18)$$

e quindi:

$$\alpha_{jkh} = -\frac{1}{2} \phi_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k} \right) \phi_j; \quad h = j \quad (3.19)$$

3.2.3 Stima dei parametri

Il *PFM* aggiorna iterativamente la stima dei parametri, mirando alla convergenza di un dato modello analitico iniziale in maniera tale che in output si hanno dati modali corrispondenti a quelli sperimentali. In altre parole, si cerca un'opportuna configurazione di parametri stimati in maniera tale che il modello abbia comportamento dinamico analogo alla controparte sperimentale. I parametri stimati, tuttavia, essendo inquinati da errori sperimentali casuali e sistematici, non forniscono una esatta rappresentatività della struttura reale. Idealizzando il modello iniziale, si cerca di approssimare al meglio una stima di una struttura reale.

Durante tutto il processo *FEMU* si tiene conto di minimizzare un residuo che può essere quantificato come un errore, ricavabile dall'espressione 3.3, come:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_z = \boldsymbol{\delta z} - \mathbf{S}_j \boldsymbol{\delta \vartheta} \quad (3.20)$$

Ridurre al minimo il valore di $\boldsymbol{\varepsilon}$ significa minimizzare un funzionale di costo definito come *Penalty function*, ricavabile con la seguente espressione:

$$\begin{aligned} J &= \boldsymbol{\varepsilon}_z^T \boldsymbol{\varepsilon}_z \\ &= (\boldsymbol{\delta z} - \mathbf{S}_j \boldsymbol{\delta \vartheta})^T (\boldsymbol{\delta z} - \mathbf{S}_j \boldsymbol{\delta \vartheta}) \\ &= \boldsymbol{\delta z}^T \boldsymbol{\delta z} - 2 \boldsymbol{\delta \vartheta}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\delta z} + \boldsymbol{\delta \vartheta}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\delta z} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Minimizzando adeguatamente il funzionale, si raggiunge la soluzione ai minimi quadrati, ottenuta dall'espressione 3.3 e moltiplicando entrambi in membri per la trasposta della matrice di sensitività, ottenendo una variazione parametrica [4]:

$$\boldsymbol{\delta \vartheta} = [\mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i]^{-1} \mathbf{S}_i^T \boldsymbol{\delta z} \quad (3.22)$$

oppure

$$\boldsymbol{\vartheta}_{i+1} = \boldsymbol{\vartheta}_i + [\mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i]^{-1} \mathbf{S}_i^T \boldsymbol{\delta z} \quad (3.23)$$

Minimizzare il funzionale J significa anche ridurre sempre di più aggiornamento $\boldsymbol{\delta \vartheta}$ e raggiungere il valore aggiornato richiesto. Di fatto l'equazione 3.23 permette di ottenere iterativamente il parametro ricercato dal processo *FEMU*. L'equazione è valida nel caso di sistemi sovra-determinati, nel quale il numero delle misure nel vettore \mathbf{z}_m è più alto del numero dei parametri. Nel caso in cui si ha un sistema sotto-determinato, con numero di parametri più alto, la precedente equazione può essere riscritta facilmente nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\vartheta}_{i+1} = \boldsymbol{\vartheta}_i + \mathbf{S}_i^T [\mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i]^{-1} \boldsymbol{\delta z} \quad (3.24)$$

Uno dei maggiori problemi di questo metodo è la distribuzione di peso ponderato di ogni componente del vettore \mathbf{z}_m . Con la formulazione corrente, si fornisce uguale

importanza ogni componente del vettore \mathbf{z}_m senza tenere conto dell'attendibilità o dell'affidabilità di ciascuna misura sperimentale: le frequenze misurate risultano più attendibili dei coefficienti di autovettori [4]. Un altro aspetto da tenere conto sono i termini $[\mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i]^{-1} \mathbf{S}_i^T$: essendo \mathbf{S}_i una matrice che può essere singolare, c'è il rischio di non essere invertibile e causare mal-condizionamento. Per ovviare al mal-condizionamento si può utilizzare la matrice peso che regolarizza il sistema.

Si introduce, quindi, una matrice quadrata e simmetrica \mathbf{W} che distribuisce in maniera equa il peso, tenendo conto dell'importanza di ogni singolo termine del vettore residuo. Generalmente è molto complessa da stimare, in letteratura sono individuate diverse tecniche per la costruzione di tale matrice. Mottershead et al. (2011) raccomanda la matrice peso ricavabile con la seguente espressione:

$$\mathbf{W} = [\text{diag}(\mathbf{z}_m)]^{-2} \quad (3.25)$$

Di conseguenza si può ricavare la soluzione dei minimi quadrati ponderati con la matrice peso \mathbf{W} minimizzando il funzionale J opportunamente pesato, infatti:

$$J = \boldsymbol{\varepsilon}_z^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}_z \quad (3.26)$$

Quest'ultima equazione può essere nuovamente espansa ottenendo la variazione parametrica pesata:

$$\delta \boldsymbol{\vartheta} = [\mathbf{S}_i^T \mathbf{W} \mathbf{S}_i]^{-1} \mathbf{S}_i^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z} \quad (3.27)$$

oppure

$$\boldsymbol{\vartheta}_{i+1} = \boldsymbol{\vartheta}_i + [\mathbf{S}_i^T \mathbf{W} \mathbf{S}_i]^{-1} \mathbf{S}_i^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z} \quad (3.28)$$

valida anch'essa per sistemi sovra-determinati. Nuovamente per sistemi sotto-determinati si ha:

$$\boldsymbol{\vartheta}_{i+1} = \boldsymbol{\vartheta}_i + \mathbf{S}_i^T \mathbf{W} [\mathbf{S}_i^T \mathbf{W} \mathbf{S}_i]^{-1} \delta \mathbf{z} \quad (3.29)$$

Sotto opportune assunzioni, il rango della matrice $\mathbf{S}_i^T \mathbf{W} \mathbf{S}_i$ può essere pieno (ossia $\text{rank}(S) = \min(m, n)$) e in questo caso si determinano i valori senza difficoltà. Tuttavia può verificarsi una situazione in cui il rango della matrice non è pieno principalmente per due ragioni: almeno un parametro non ha influenza sulle misurazioni [4] oppure è linearmente dipendente da un altro parametro. Questa situazione può causare mal-condizionamento del problema e richiede opportune regolarizzazioni o adeguata scelta della stima dei parametri. Pertanto, la fondamentale richiesta affinché si ottenga soluzione del problema è $\text{rank}(S) = n$, con n numero massimo di parametri.

3.3 Algoritmo

Nel lavoro di tesi è stato sviluppato un algoritmo di ottimizzazione che esegue iterativamente il processo *FEMU* alla base della formulazione del *PFM*, ampiamente

illustrato nella sezione 3.2. Un aspetto importante dell'algoritmo riguarda la gestione dei file in linguaggio di *Patran Command Language (PCL)* da parte di *MATLAB*, nel quale esegue i comandi di modellazione mediante *MSC Patran*. I calcoli numerici vengono eseguiti dal calcolatore *MSC Nastran* nel quale esegue le richieste emesse dal modello e, successivamente, emette risultati in file output. La struttura base della formulazione riconduce all'algoritmo di *Gauss-Newton*, nel quale si risolve iterativamente i problemi di minimi quadrati. Si può riassumere gli aspetti principali dell'algoritmo nei seguenti punti:

- Gestione dei file di comando scritti in linguaggio *PCL*, parte fondamentale che permette lo svolgimento del processo *FEMU* mediante un software esterno specializzato all'utilizzo degli elementi finiti;
- Elaborazione dei dati ottenuti a seguito di analisi modali eseguiti con *Nastran* mediante SOL 103. Ogni analisi genera file di risultati nei quali si possono estrarre frequenze e modi di vibrare per ciascuna *i*-esima iterazione. Tuttavia, quest'ultimi vengono espressamente richiesti da un comando mediante il quale genera un file *.rpt* dei nodi corrispondenti ai gradi di libertà sperimentali;
- Riduzione di Guyan con opportuna funzione di *Nastran* e estrapolazione delle matrici \mathbf{K} e \mathbf{M} dal file di output, con l'utilizzo della funzione *importKM.m* proposta da Wei Zhao PhD [22];
- Analisi di sensitività con la funzione *SENSITIVITY.m*, ricavando iterativamente la matrice di sensitività espressa con le formulazioni del paragrafo 3.2

3.3.1 *MAIN_ALG.m*

Il controllo di tutto il processo *FEMU* viene eseguito dal *MAIN_ALG.m* che costituisce lo scheletro principale dell'algoritmo di ottimizzazione (illustrato in pseudo-codice 1). Può essere chiaramente schematizzato dal flowchart 3.1 ed è diviso in 3 blocchi, racchiusi da un ciclo *for*, nel quale svolgono iterativamente il processo. I principali blocchi, descritti nella sezione 3.1, vengono eseguiti dall'algoritmo con una serie di procedure a seguito descritte:

- Elaborazione e gestione dei dati sia del modello, sia quelli sperimentali. I primi vengono ricavati a seguito di un'analisi modale con la stima corrente dei parametri ϑ_k . Questa fase del processo (rappresentata schematicamente dal flowchart in figura 3.2) inizia con un set di stima iniziale ϑ_{0k} , generalmente con valori presi in *datasheet* o sotto idealizzazioni di modello. I software prendono a carico le richieste del modello e forniscono a *MATLAB* i dati modali che successivamente vengono elaborati, processati e messi in forma

vettoriale tipo equazione 3.1. Si noti che la procedura computazionale di *Nastran* viene eseguita due volte per due richieste che devono essere fatte in maniera separata: il calcolo delle matrici ridotte e l'analisi modale.

Se la stima porta a risultati eccessivamente discordanti con la struttura reale o con la controparte sperimentale, si rischia di non avere sufficiente correlazione tra i due set di dati modali e di conseguenza una mancata convergenza del processo. Il processo *FEMU* dev'essere eseguito su due modelli che hanno un certo indice di somiglianza: se la stima porta a risultati non sufficientemente correlabili, si deve fornire una nuova stima o ricreare un modello più somigliante alla controparte sperimentale. La gestione e l'elaborazione dei risultati del modello sono gestiti dalle funzioni *dataMODEL.m* e *dataSENS.m*;

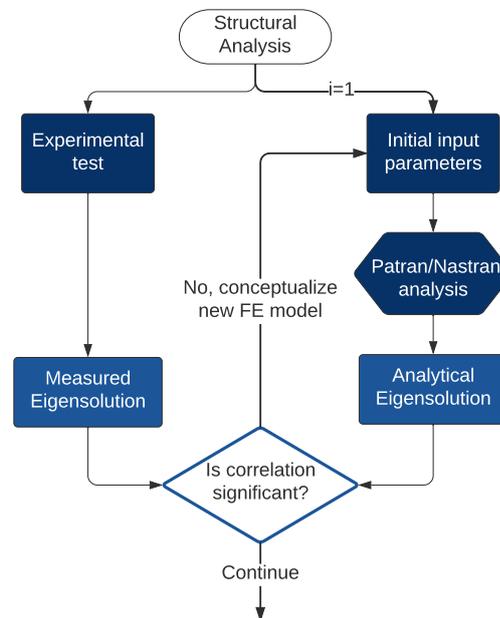


Figura 3.2: Primo blocco schematico del *MAIN_ALG.m*.

- Una volta assicurata la comparabilità tra i due modelli si procede a un ulteriore step di compatibilità (primo passaggio del secondo blocco, figura 3.3). Alla luce delle considerazioni fatte nella sezione 2.5, si rende necessaria una riduzione del modello FE mediante riduzione di matrici di massa e di rigidezza per assicurare compatibilità durante il processo. Il passaggio di riduzione viene richiesto a *Nastran* definendo un ASET1 di nodi di gradi di libertà *retained*, corrispondenti alle posizioni degli accelerometri della parte sperimentale. Definendo così il

DOF List, viene a seguito richiesto dal comando *EXTSEOUT* le matrici di massa e di rigidità di un sistema ridotto a N gradi di libertà.

- Analisi di sensitività. Garantita la compatibilità tra i due modelli, si entra nel cuore della metodologia basata sulla sensitività, interamente effettuata dalla funzione *SENSITIVITY.m*. Questa fase (schematizzato in flow-chart figura 3.3) viene eseguita da un processo iterativo con ciclo *for* chiuso al numero di parametri da aggiornare. Si perturba ogni k -esimo parametro e si determinano i dati modali e matrici nella condizione perturbata. Come è stato precedentemente descritto, la matrice di sensitività è determinata dalla espressione 3.7 ed è di dimensione $M \times N$, dove M è il numero di coefficienti del vettore dei dati modali z_j e N il numero massimo di parametri di aggiornamento.

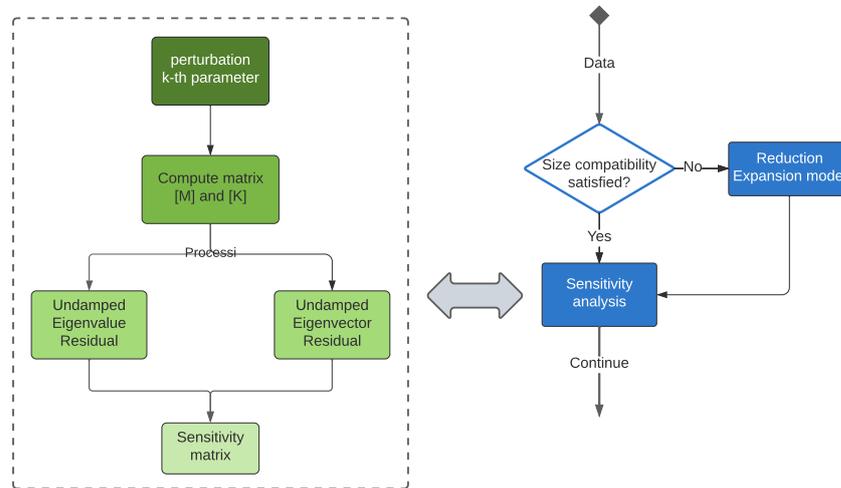


Figura 3.3: Secondo blocco schematico del *MAIN_ALG.m*.

- Calcolo con formulazione del metodo *Penalty Function Method*. Chiuso il ciclo di analisi di sensitività, si da in pasto i dati alle equazioni del metodo *PFM*, aggiornando i parametri all' i -esima iterazione con l'espressione 3.28. In questa fase (schematizzato in flow-chart figura 3.4) non solo si aggiornano i parametri, ma si determinano gli indicatori di bontà di correlazione tra due modelli, tra cui il residuo tra le frequenze e il *Penalty function*. Quest'ultimo mi permette di valutare la somiglianza tra forme modali dei set di dati: poiché esistono diverse combinazioni di stima dei parametri che possano determinare un residuo di frequenze minimo, il *PF* funge da garanzia di somiglianza tra modelli identificando solo una configurazione di stima come corretta. In altre

parole, dati N configurazioni di stima iniziale forniscono un residuo di frequenze minimo, soltanto una configurazione sarebbe accettabile.

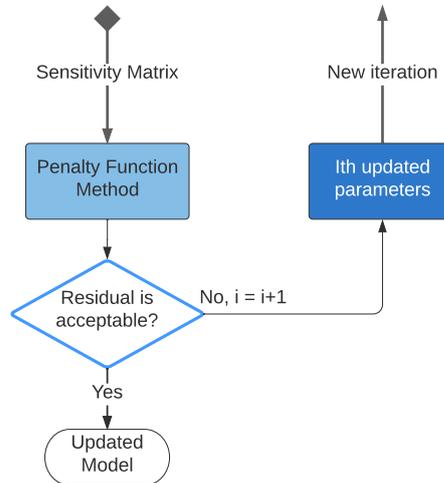


Figura 3.4: Terzo blocco schematico del *MAIN_ALG.m*.

3.3.2 *SENSITIVITY.m*

L'analisi di sensitività è il cuore pulsante dell'intero processo su cui si basa la metodologia. Viene gestita da una funzione che esegue l'analisi e genera iterativamente la suddetta matrice. La funzione, descritta in pseudo-codice 2, svolge un ciclo iterativo interno utilizzando la formulazione di sensitività discussa nel paragrafo 3.2.1.

Il ciclo della funzione, mostrato in flowchart verde in figura 3.3, introduce inizialmente una generiche perturbazione di un k-esimo parametro, lasciando imperturbati gli altri, con lo scopo di verificare la variazione di output generata. Questo passaggio è utile non solo a verificare la sensibilità, ma anche a generare matrici di massa e di rigidezza della nuova condizione strutturale assunta con il parametro perturbato. Con le matrici ottenute, si calcolano autovalori e autovettori ricavati, rispettivamente, dalle equazioni 3.11 e 3.12 in funzione del k-esimo parametro.

3.3.3 *dataMODEL.m* e *dataSENS.m*

Le funzioni *dataMODEL.m* e *dataSENS.m* svolgono processi di elaborazione e gestione dei dati del modello, generati da richieste specifiche di *PATRAN* e *NASTRAN*. Entrambe svolgono gli stessi compiti, ma la prima li svolge iterativamente

per il modello che viene aggiornato, la seconda, invece, li svolge all'interno del ciclo iterativo.

Si possono riassumere le funzioni nei seguenti step:

- Import del file *.rpt* fornito da *PATRAN*, contenente autovettori dei gradi di libertà scelti nella comparazione tra modelli;
- Costruzione dei vettori in base all'ordine dei singoli termini, gestito a discrezione dell'utente. Il software *PATRAN*, di default, ordina i termini in base all'ID del nodo dell'elemento finito;
- Separazione dei tipi di modi di vibrare, distinguendo i flessionali, i torsionali e i membranali. Questa parte è a discrezione del programmatore, in quanto i modi di vibrare sono strettamente dipendenti dalla geometria del modello;
- Costruzione del vettore z_i .

Le funzioni essendo chiaramente implementate in un processo iterativo, è di vitale importanza distinguere i modi i tipi di modi di vibrare e le relative frequenze proprie. Durante il processo iterativo, l'aggiornamento dei parametri del materiale comporta una variazione della geometria (spessore) e delle caratteristiche strutturali, inducendo scambi dell'ordine dei modi di vibrare.

Capitolo 4

Validazione Numerica

4.1 Introduzione

Prima dell'effettivo utilizzo dell'algoritmo con i dati sperimentali, si deve "collaudare" l'algoritmo per diversi modelli in ordine di complessità. Si implementano risultati esatti fittizi che vengono raggiunti partendo da stime iniziali diverse. Questo per verificare non solo la stabilità dell'algoritmo, ma anche l'efficacia della formulazione matematica proposta. Tutti i casi discussi in questa sezione sono processati con la medesima procedura *FEMU* e medesimo algoritmo. Le uniche differenze sono denotabili dalla differenza di modellazione con *MSC PATRAN/NASTRAN* ed eventuali modelli numerici con *MATLAB*. In questo capitolo vengono proposti i seguenti casi:

- **Caso 10-DOF**: classico sistema discreto massa-molla a 10 gradi di libertà con una base di incastro ad un'estremità. È il caso di validazione più semplice, ma anche l'unico in cui viene proposto un confronto tra il processo *FEMU* eseguito interamente da *MATLAB* e quello integrando *NASTRAN*;
- **Caso Trave Isotropa**: aggiornamento di due modelli di trave discretizzati con gli elementi finiti di tipo *SHELL* e di tipo *SOLID*;
- **Caso Trave Sandwich**: modello che viene poi utilizzato per la processo *FEMU* applicato sperimentalmente.

Ciascun caso presenta almeno 5 differenti test con altrettante stime iniziali di parametri, in modo tale da avere un buon numero di configurazioni da confrontare e sufficienti informazioni per verificare la convergenza. Fatta eccezione per il caso 10DOF, i parametri di aggiornamento della trave riguardano il modulo di Young, densità e spessore della struttura coinvolta nel processo. Si considerano sufficienti 7 iterazioni del processo.

4.2 Caso 10-DOF

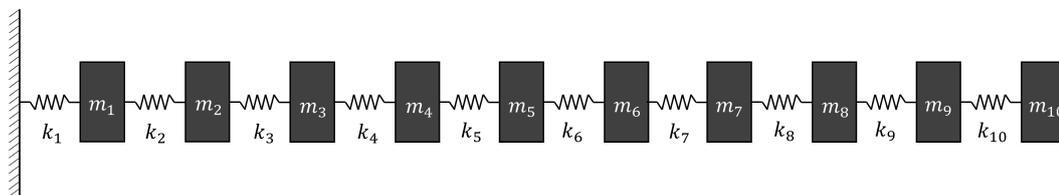


Figura 4.1: Schema di un sistema discreto a 10 gradi di libertà.

Il primo caso riguarda un sistema discreto a 10 gradi di libertà. Tipicamente rappresenta un modello di una trave discretizzata con 10 masse e 10 elementi *spring* che le connettono. Essendo un sistema a 10 gradi di libertà, sono determinabili 10 frequenze e 10 modi di vibrare corrispondenti alle vibrazioni libere assiali. Si determina il comportamento di 3 diverse condizioni:

- *FEMU* con matrice modale completa e di conseguenza l'utilizzo di 10 autovettori corrispondenti;
- *FEMU* con matrice modale parziale, in particolar modo sono scelti 7 modi casuali e 3 rimossi dall'analisi;
- *FEMU* con matrice modale parziale e sistema ridotto con condensazione statica di *Guyan* a 4 DOF.

Inoltre, si confrontano due mezzi di estrazione degli autovalori e autovettori del sistema: uno tramite l'algoritmo di *Lanczos* proposta da *NASTRAN* e l'altro la funzione *eig* di *MATLAB*. Questo criterio permette di verificare l'efficacia della metodologia a prescindere dal mezzo con cui si determinano i dati modali. Con il sistema 10DOF si verificano alcuni aspetti importanti dell'algoritmo e del processo *FEMU*:

- Verifica e validazione del processo utilizzando la soluzione proposta dal CAE per l'estrazione degli autovalori con l'algoritmo di *Lanczos*;
- Confronto della soluzione di *NASTRAN* con quella numerica calcolata con *MATLAB*;
- Verifica della convergenza del caso in cui si utilizzano meno modi di vibrare, verificando come si comporta la metodologia con dati parzialmente completi;
- Verifica di convergenza con il modello ridotto tramite condensazione statica di *Guyan*: non solo si determina l'accuratezza e convergenza del processo *FEMU* utilizzando un modello meno accurato, ma si verifica che la riduzione venga effettuata in maniera corretta e attendibile da *NASTRAN*;

- Verifica del corretto calcolo delle matrici di massa e di rigidezza del sistema e la loro corretta estrazione dal file `.pch` mediante funzione `importKM.m`.

I stime iniziali di ciascun test sono rappresentati in tabella 4.1 e sono medesime per tutte le condizioni applicate. La scelta dei parametri di aggiornamento del caso 10DOF è completamente casuale, non c'è un criterio specifico in quanto il processo *FEMU* dovrebbe, in questo caso, funzionare a prescindere dalla scelta di parametri.

Parametri	Esatta	Test 01	Test 02	Test 03	Test 04	Test 05
m_2 [Kg]	100	130	120	90	80	130
m_6 [Kg]	90	70	80	110	105	110
k_1 [MPa]	100000	90000	110000	105000	130000	70000
k_5 [MPa]	150000	160000	165000	140000	130000	170000

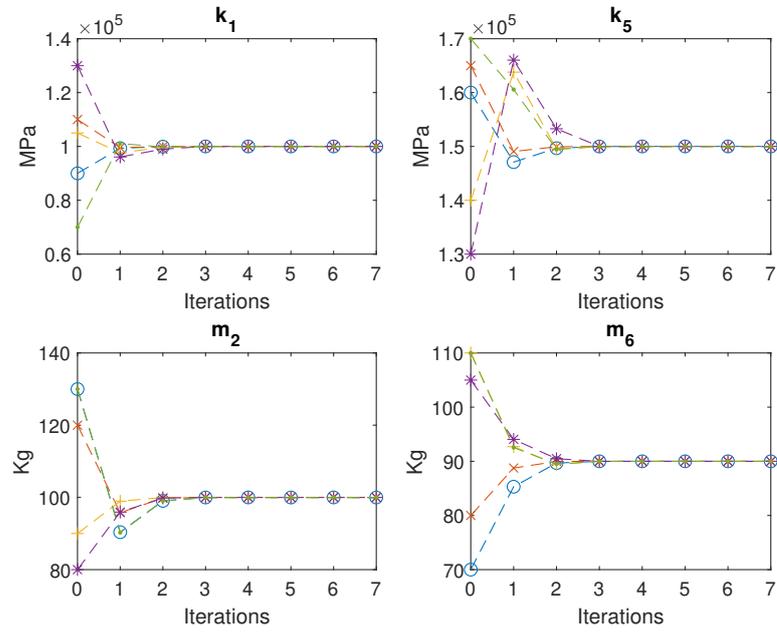
Tabella 4.1: Stima iniziale dei parametri da aggiornare del modello NDOF.

4.2.1 Modi di vibrare completi

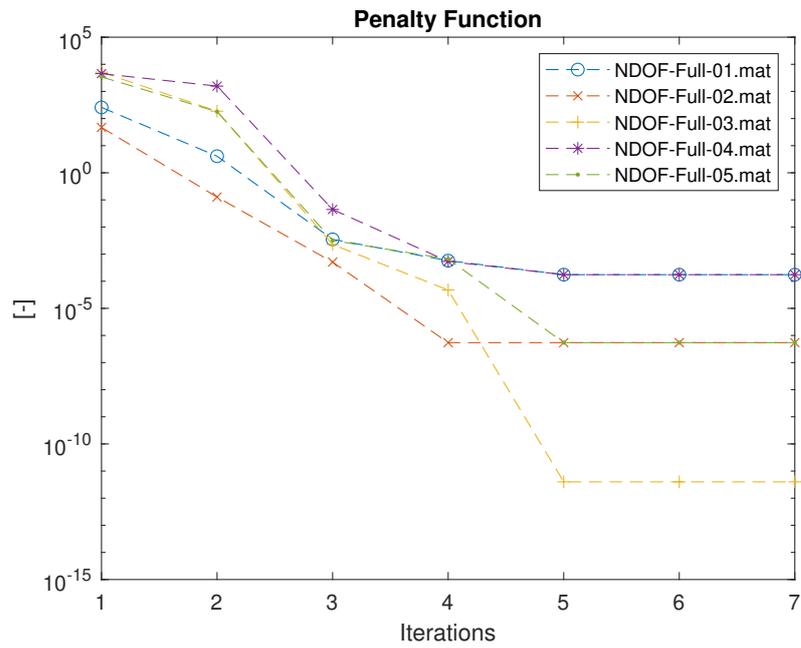
Il processo *FEMU* eseguito in condizioni di matrice modale completa porta a una convergenza sufficiente in massimo 5 iterazioni. Come si può notare in figura 4.2, la facilità di aggiornamento dei parametri con risultati che si avvicinano notevolmente alla soluzione esatta dopo circa 3 iterazioni. Un piccolo appunto si può esprimere per il parametro k_5 nel quale, nonostante si verifichi un po' di oscillazione numerica nelle prime due iterazioni, riesce comunque a convergere verso la soluzione. Tuttavia, è bene tener presente che il *Penalty Function* non ha raggiunto un minimo sufficiente per il caso, ma soltanto dalla quinta iterazione in poi può considerarsi accettabile raggiungendo valori di ordini di grandezza tra i $10e - 05$ e i $10e - 10$. In tabella 4.2 sono mostrati i risultati ottenuti per ciascun test e, come si può notare, possono essere considerati complessivamente eccellenti.

4.2.2 Modi di vibrare parziali

Con procedura analoga a prima, si è ottenuta facile convergenza per il caso 10DOF con l'utilizzo della matrice modale parziale. Le forme modali escluse in questo caso sono la quarta, la sesta e la nona. La scelta di esclusione di quest'ultime è puramente casuale in quanto non dovrebbero essere particolari differenze di scelta, tuttavia è bene tenere presente che escludere le forme modali a frequenze più basse ostacola notevolmente la convergenza. C'è una leggera differenza di aggiornamento del parametro di massa m_2 , ma complessivamente non differisce dal caso di processo con matrice modale completa. Il *Penalty Function* raggiunge anche in questo caso ordini di grandezza tra i $10e - 05$ e i $10e - 10$.

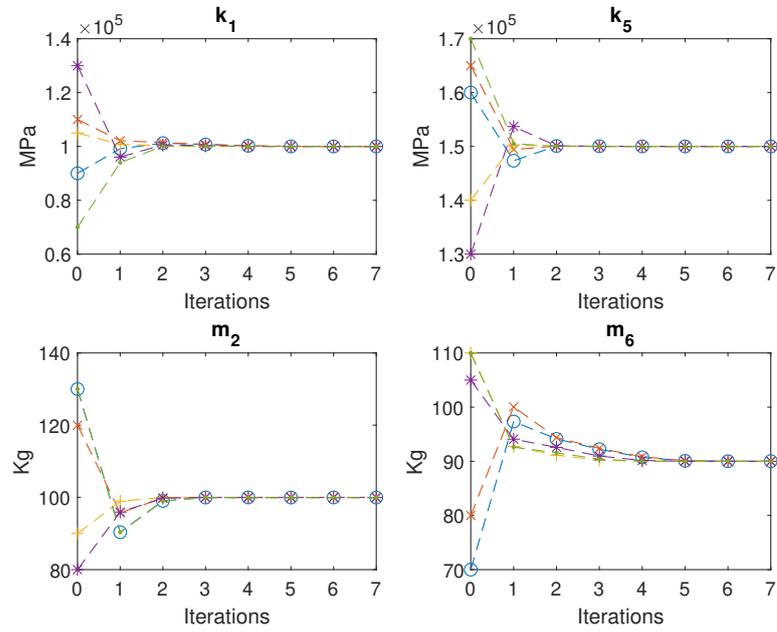


(a) Updating dei parametri.

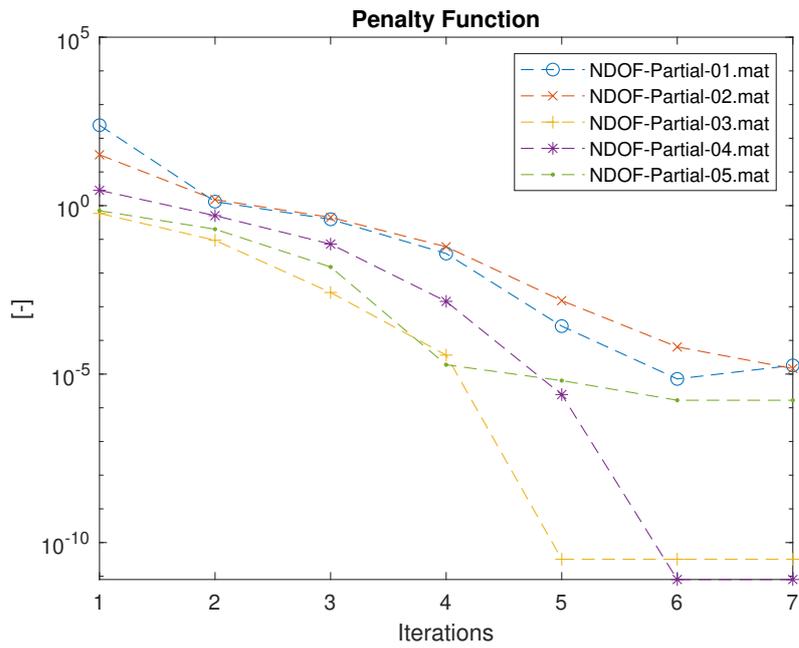


(b) Penalty Function.

Figura 4.2: Aggiornamento parametri con matrice modale completa.



(a) Updating dei parametri.



(b) Penalty Function.

Figura 4.3: Aggiornamento parametri con matrice di autovettori parziale.

Parametri		m_2 [Kg]	m_6 [Kg]	k_1 [MPa]	k_5 [MPa]
Test 01	Updated	99.98	90	100003	150004
	Err %	>0.001	0	>-0.001	>-0.001
Test 02	Updated	100	90	99997.85	150004
	Err %	0	0	>0.001	>-0.001
Test 03	Updated	100	90	100000	150000
	Err %	0	0	0	0
Test 04	Updated	99.98	90	100007	150000
	Err %	>0.001	0	>-0.001	0
Test 05	Updated	100	90	100005	150003
	Err %	0	0	>-0.001	>-0.001

Tabella 4.2: Tabella di parametri di aggiornamento del caso 10DOF e matrice modale completa, con stima aggiornata (riga Updated) a fine processo *FEMU* e la percentuale di errore rispetto alla controparte esatta dopo 7 iterazioni.

Parametri		m_2 [Kg]	m_6 [Kg]	k_1 [MPa]	k_5 [MPa]
Test 01	Updated	99.98	90.03	100005.41	150003.69
	Err %	>0.001	>-0.001	>-0.001	>-0.001
Test 02	Updated	100	90.01	99999.80	149997.91
	Err %	0	>-0.001	>0.001	>-0.001
Test 03	Updated	100	90	100000.27	149999.42
	Err %	0	0	>-0.001	>0.001
Test 04	Updated	100	90	99999.95	149999.68
	Err %	0	0	>0.001	>0.001
Test 05	Updated	99.98	90.01	100000.85	150006
	Err %	>0.001	>-0.001	>-0.001	>-0.001

Tabella 4.3: Tabella di parametri di aggiornamento del caso 10DOF e matrice modale parziale.

4.2.3 Sistema ridotto

In questa parte si introducono i risultati del processo *FEMU* con il modello ridotto mediante condensazione statica di *Guyan*, ampiamente discussa nella sezione 2.5.1.

L'obiettivo della condizione imposta mira a verificare il funzionamento del metodo nella situazione in cui i gradi di libertà di un modello siano diversi dalla controparte che si sta confrontando, in particolar modo nelle situazioni di comparazione tra dati di modelli FE e modelli sperimentali. La convergenza in tali situazioni non è sempre

scontata perché si perde accuratezza numerica che va a influenzare le prestazioni di aggiornamento. Come si può notare in figura 4.5a, la riduzione di *Guyan* ostacola maggiormente l'aggiornamento dei parametri, rispetto alle condizioni senza riduzione discusse in precedenza. In particolare modo per i parametri k_5 e m_2 , in alcune condizioni di stima iniziale, raggiungono convergenza più lentamente. In tabella 4.4 si notano valori leggermente deviati rispetto alle precedenti condizioni. Inoltre, il *Penalty Function* scende fino a ordini di grandezza non inferiori a $10e - 05$.

Nonostante una leggera perdita di accuratezza, complessivamente si ha notevole convergenza dei parametri di aggiornamento, con errori non superiori al 0.005%.

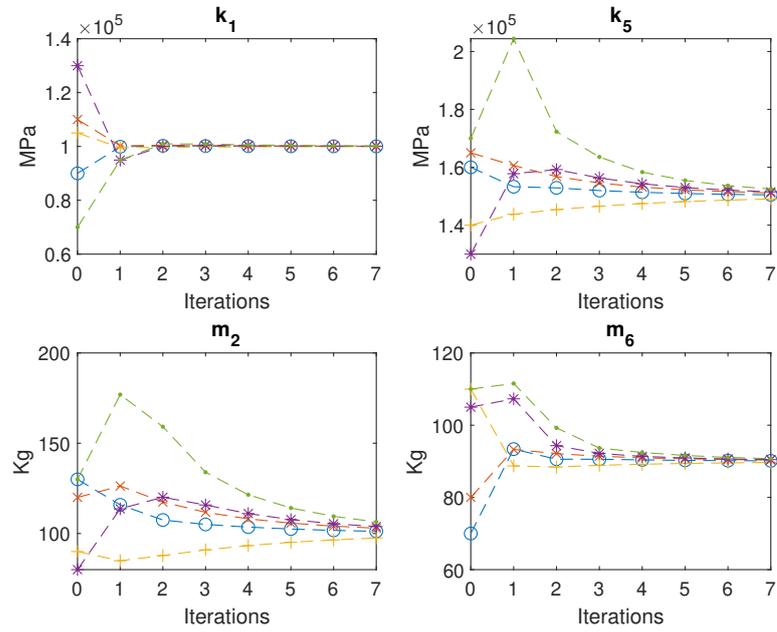
Parametri		m_2 [Kg]	m_6 [Kg]	k_1 [MPa]	k_5 [MPa]
Test 01	Updated	100,26	90,05	100004,11	150120,91
	Err %	-0,003	>-0.001	>-0.001	-0,001
Test 02	Updated	100,37	90,07	100004,17	150177,60
	Err %	-0,004	>-0.001	>-0.001	-0,001
Test 03	Updated	99,96	89,99	100002,06	149993,86
	Err %	>0.001	>0.001	>-0.001	>0.001
Test 04	Updated	100,34	90,06	100006,24	150170,92
	Err %	-0,003	>-0.001	>-0.001	-0,001
Test 05	Updated	100,48	90,07	100009,47	150224,29
	Err %	-0,005	>-0.001	>-0.001	-0,002

Tabella 4.4: Tabella di parametri di aggiornamento del caso 10DOF ridotto con condensazione statica di *Guyan*.

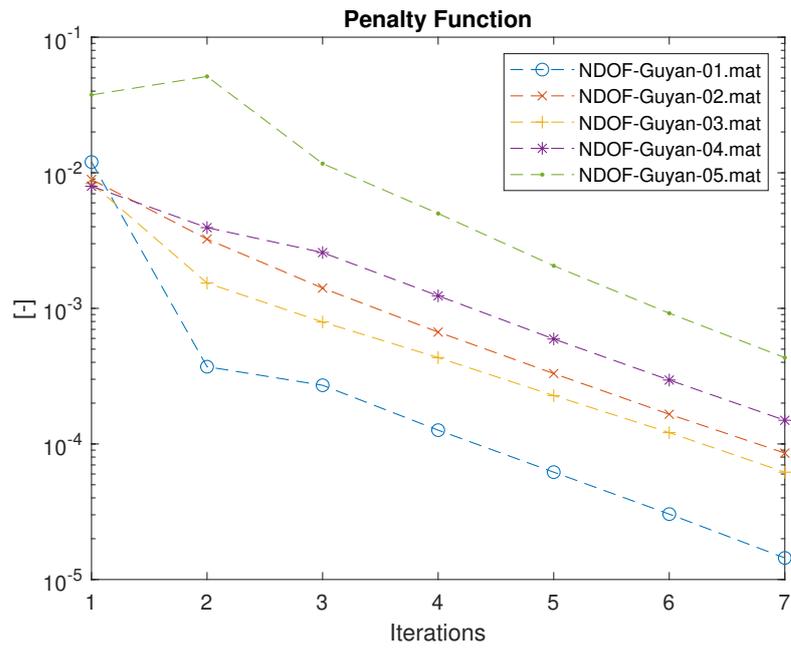
4.2.4 Confronti con Matlab

Per verificare che si ha converso in maniera corretta, si effettua un confronto con un processo *FEMU* nelle condizioni precedentemente descritte, con quello svolto interamente da MATLAB estraendo con esso dati modali mediante la funzione *eig*. In questa sezione si confrontano i risultati dei test 01 (figura 4.5) e 02 (figura 4.6).

Dai grafici risulta evidente come l'estrazione dei dati modali, mediante funzione *eig*, porti a una soluzione complessivamente più accurata di quella proposta con algoritmo di *Lanczos*. Nonostante la leggera oscillazione numerica iniziale per quasi tutti i parametri aggiornati con MATLAB, si riesce comunque a raggiungere con più accuratezza il valore esatto dei parametri. Infatti, come mostrato graficamente nelle figure 4.5b e 4.6, il *Penalty Function* raggiunge ordini di grandezza di $10e - 20$.

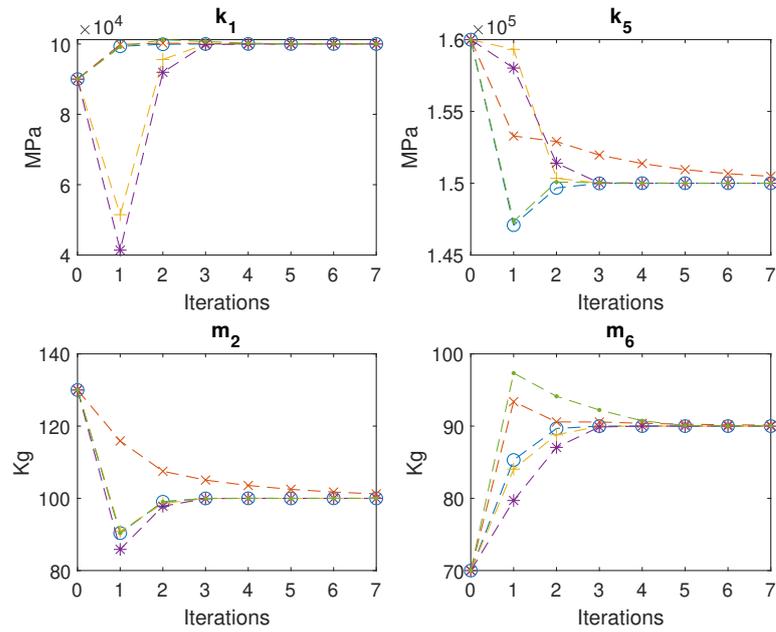


(a) Updating dei parametri.

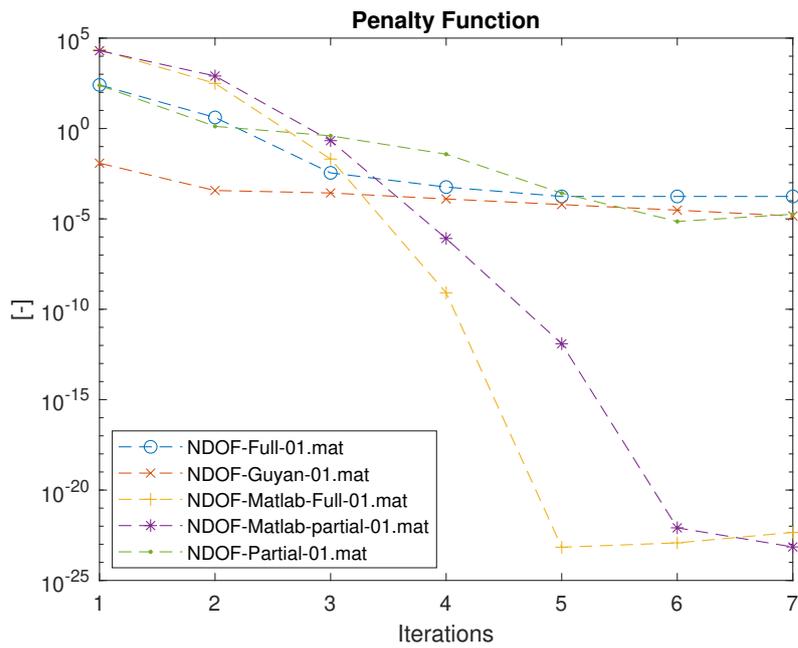


(b) Penalty Function.

Figura 4.4: Aggiornamento parametri del modello con riduzione di Guyan.

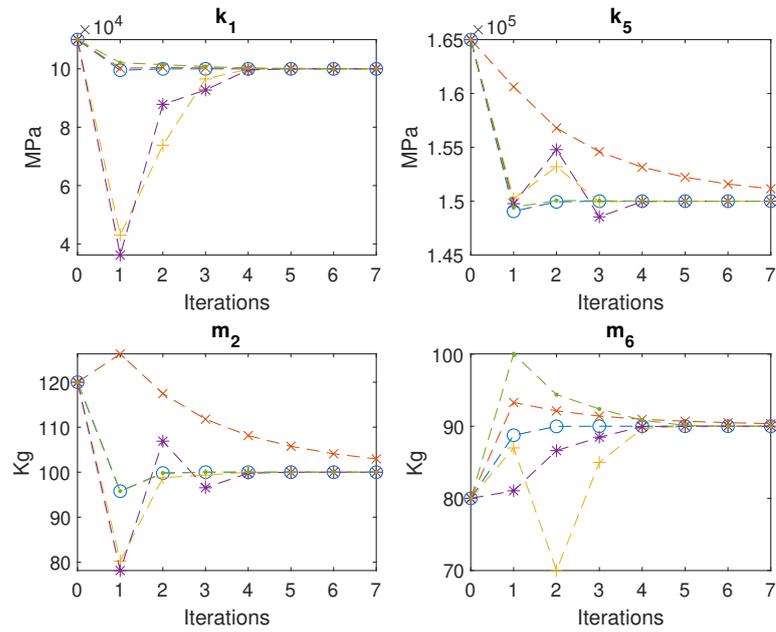


(a) Updating dei parametri.

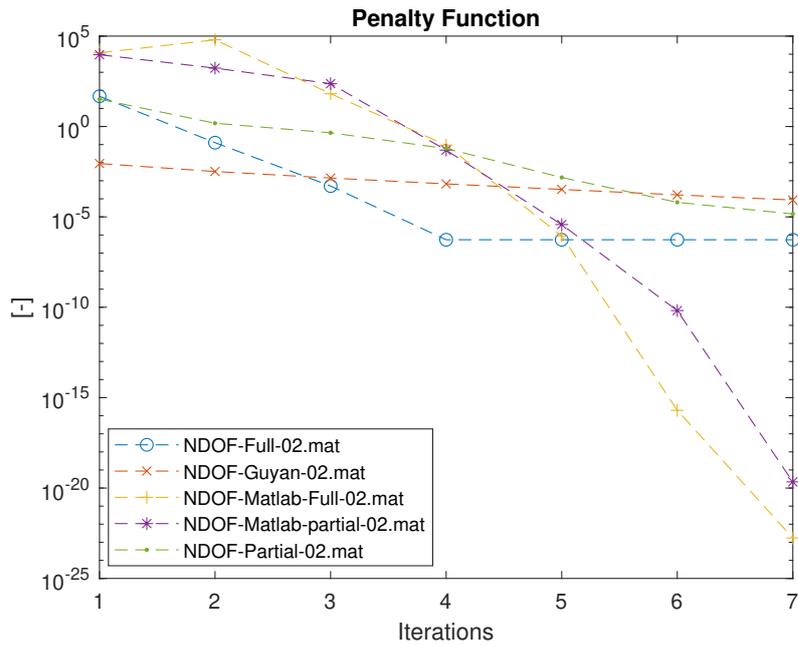


(b) Penalty Function.

Figura 4.5: Confronto dei vari aggiornamenti di parametri di analisi con configurazione 01 di stima iniziale di parametri.



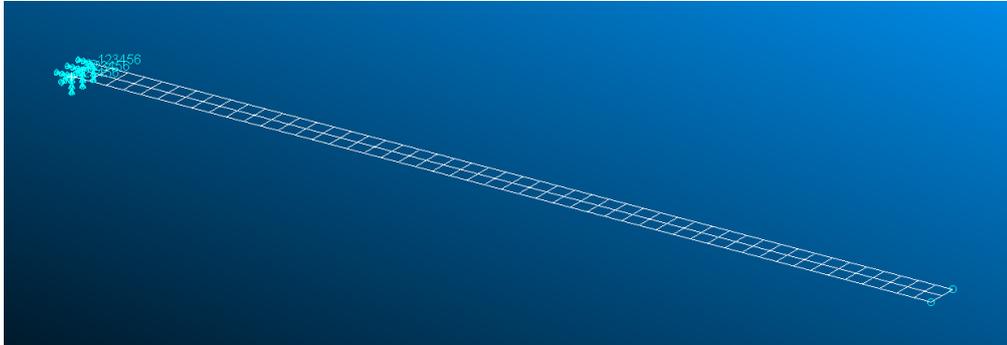
(a) Updating dei parametri.



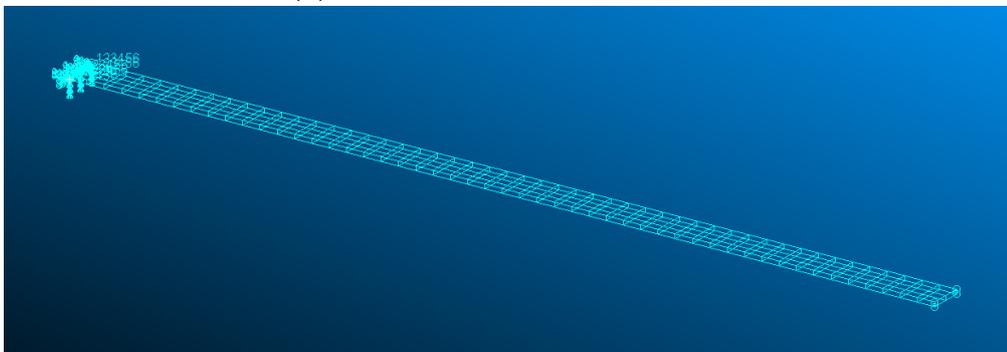
(b) Penalty Function.

Figura 4.6: Confronto dei vari aggiornamenti di parametri di analisi con configurazione 02 di stima iniziale di parametri.

4.3 Caso Trave Isotropa



(a) modello con elementi SHELL.



(b) modello con elementi SOLID.

Figura 4.7: Modelli di trave isotropa con *PATRAN*.

Il caso di Trave Isotropa rappresenta il primo caso di corpo continuo modellato agli elementi finiti. La modellazione, effettuata mediante *PATRAN*, rappresenta un modello FE di una trave in acciaio, caratterizzata dalle dimensioni mostrate in tabella 4.5. La risposta dinamica della Trave è ottenibile dalla teoria di *Timoshenko* delle travi per le vibrazioni libere trasversali [23].

Lunghezza [mm]	Larghezza [mm]	Spessore [mm]	Modulo di Young [MPa]	Densità [tonn/mm ³]
800	30	5	210000	8.7e-09

Tabella 4.5: Valori geometrici e strutturali della trave isotropa in acciaio

La stima iniziale dei parametri di aggiornamento sono riportati in tabella 4.6 e sono rapportati rispetto al valore esatto.

	Test	01	02	03	04	05
$\vartheta_{0k}/\vartheta_{ext}$	Modulo di Young	1.2	1.1	0.9	0.9	1.6
	Densità	0.8	1.1	0.9	1.3	1.2
	Spessore	1.2	1.1	0.9	1.1	0.8

Tabella 4.6: Parametri di aggiornamento con stima iniziale dei vari test rapportata rispetto al valore esatto.

Il processo *FEMU* applicato in questa casistica mira a validare la seguenti problematiche in sospeso:

- Verifica di convergenza a prescindere dal tipo di elementi finiti utilizzati nella discretizzazione del modello;
- Verifica della corretta riduzione delle matrici di massa e di rigidezza del modello per condensazione statica di *Guyan*;
- Verifica di funzionamento del processo *FEMU* per un caso di corpo strutturale continuo.

Con i risultati ottenuti, mostrati in figure 4.8 e 4.9, si può constatare l'efficacia di convergenza del metodo anche per modelli strutturali continui e discretizzati con il metodo agli elementi finiti. Tutti parametri oscillano numericamente nelle prime iterazioni, fino ad arrivare in prossimità della soluzione alla quarta iterazione. Il *Penalty Function* (figura 4.9) raggiunge nuovamente eccellenti risultati con ordini di grandezza di $10e - 10$. Non c'è particolare differenza tra entrambi modelli, tuttavia a rigor logica, la letteratura [1] insegna che è più corretto l'utilizzo di elementi finiti SHELL per travi di uno spessore sufficientemente sottile rispetto alle dimensioni complessive della struttura.

In tabella 4.7 sono mostrati a titolo di esempio i risultati in frequenze dei modelli con elementi SHELL e SOLID nelle configurazioni di stima del test 01. In condizioni iniziali, si ha una percentuale di errore media tra le frequenze del set A e le frequenze del Set B che oscilla tra -18.7% e -19.07% , rispettivamente, per modello SHELL e SOLID.

Modi	Set B SHELL 01				Set B SOLID 01				
	Set A [Hz]	Iniziale (Hz)	Error %	Updated (Hz)	Error %	Iniziale (Hz)	Error %	Updated (Hz)	Error %
1	6.219	7.5623	-21.6	6.219	0	7.5638	-21.6	6.220	-0.019
2	37.205	41.132	-10.5	37.206	-0.003	41.23	-10.8	37.293	-0.24
3	38.988	47.408	-21.6	38.988	0	47.436	-21.7	39.011	-0.059
4	109.29	132.88	-21.6	109.29	0	133.04	-21.7	109.42	-0.12
5	214.56	256.48	-19.5	214.56	0	257.09	-19.8	215.02	-0.21
6	231.99	260.86	-12.4	232	-0.004	261.42	-12.7	232.54	-0.24
7	303.31	367.08	-21	303.32	-0.003	370.83	-22.3	306.72	-1.12
8	355.61	432.31	-21.5	355.61	0	433.76	-21.9	356.81	-0.34
Med Err			-18.7		-0.011		-19.07		-0.29

Tabella 4.7: Tabella dei risultati del processo *FEMU* con stima iniziale dei parametri del test 01. Le frequenze sperimentali "fittizie" (Set A) confrontate con quelle iniziali, aggiornate (Updated) dopo 7 iterazioni e le relative percentuali di errore.

FEMU Iso Beam

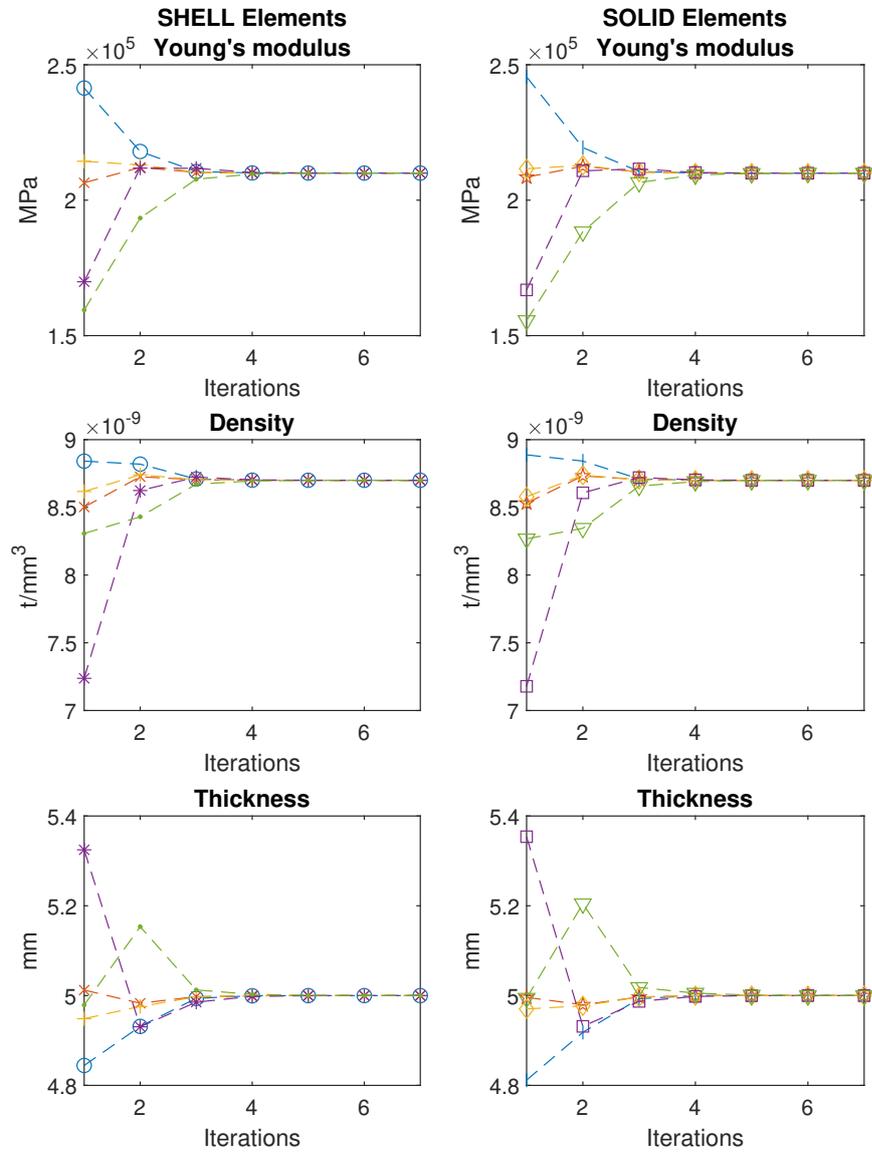


Figura 4.8: Aggiornamento parametri per la trave isotropa; la colonna di parametri a sinistra riguarda l'aggiornamento del modello con elementi SHELL, a destra con elementi SOLID. Si noti che le differenze di aggiornamento sono apparentemente uguali, questo perché entrambi modelli forniscono soluzione egualmente accurata.

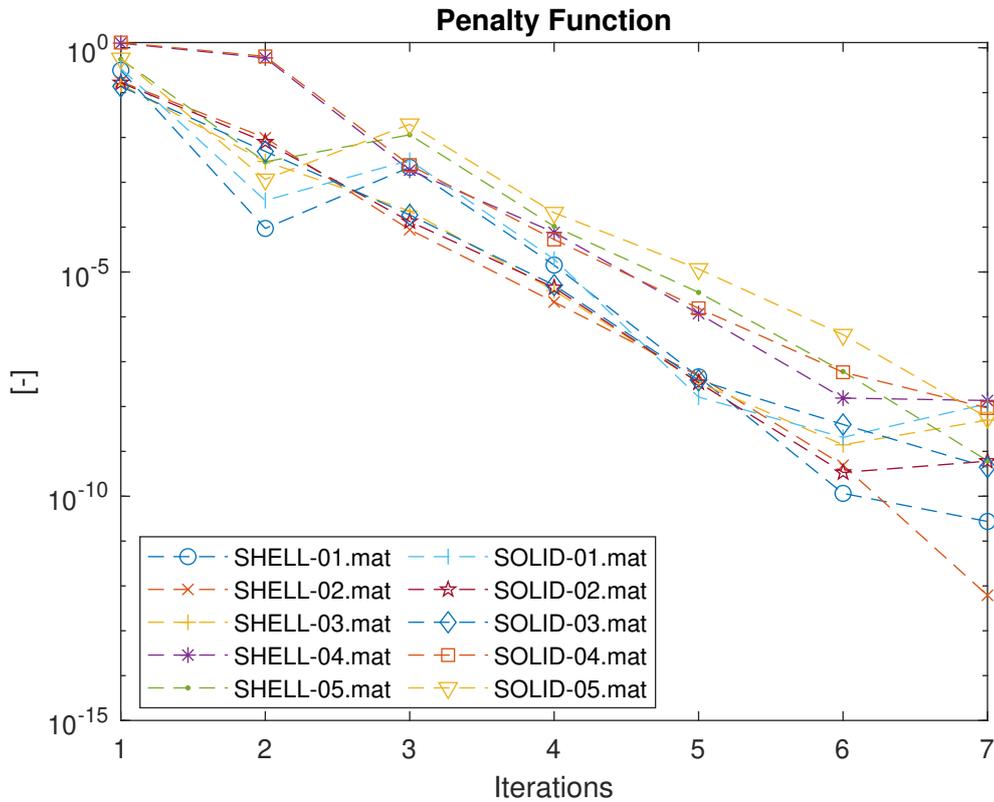


Figura 4.9: *Penalty Function* dei processi *FEMU* della trave isotropa.

4.4 Caso trave Sandwich

Il caso della trave sandwich non rappresenta solo un'applicazione per la validazione dell'algoritmo e del metodo, ma anche il modello reale della struttura oggetto del lavoro di tesi. Motivo per cui in questo paragrafo si effettua una validazione completa del metodo, verificando la corretta risposta del modello. Analogamente alla trave isotropa, anche in questo caso la risposta dinamica del sistema è determinabile dalla teoria delle travi di *Timoshenko* [24] [23].

Finora è stato eseguito il processo *FEMU* assumendo l'utilizzo di un solo tipo di forme modali (o autovettori): i modi flessionali (esempio in figura 1.2). Le forme modali sono generalmente dipendenti dalle proprietà geometriche e meccaniche della struttura. Assumendo una data trave omogenea e isotropa con sezione rettangolare, se la sua larghezza non è più trascurabile rispetto alla caratteristica geometrica più grande (per valori maggiori a $1/15$), si manifestano modi trasversali differenti: i modi torsionali. Quest'ultimi, a differenza dei flessionali, sono modi di vibrazioni non solo trasversali ma anche rotazionali attorno all'asse longitudinale della trave.

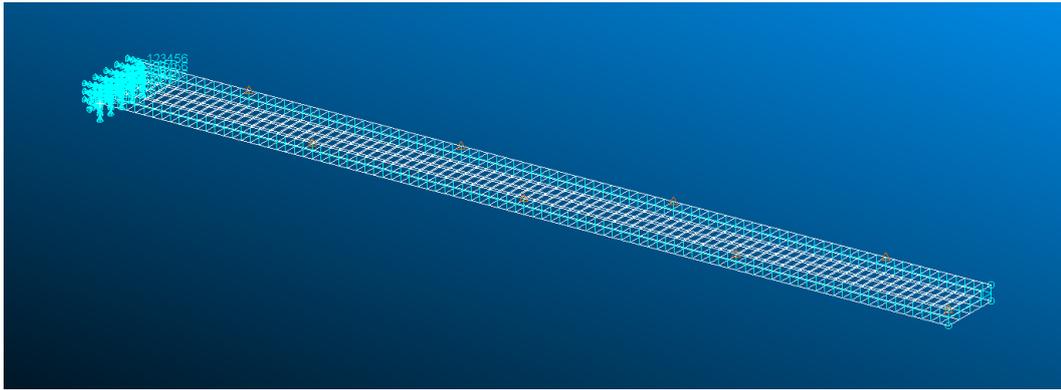


Figura 4.10: Trave isotropa sandwich.

A livello teorico, non dovrebbero esserci sostanziali differenze per il processo *FEMU*, tuttavia, come si vedrà in seguito, la scelta su quali tipi di modi di vibrare utilizzare potrebbe influenzare l'accuratezza della soluzione.

Un altro aspetto da verificare è l'utilizzo di una combinazione mista di elementi finiti, la trave sandwich è modellata in maniera diversa strato per strato:

- Elementi SOLID per il *Core*;
- Elementi SHELL per lamine e adesivo.

Alla luce delle precedenti considerazioni, in questa sezione si valutano le seguenti aspetti:

- Qualità di convergenza in funzione della scelta dei gruppi di modi di vibrare, confrontando soluzioni di *FEMU* con solo modi flessionali e soluzioni con gruppi ibridi ovvero composti da combinazione di modi;
- Verifica di convergenza di un modello con elementi finiti combinati;
- Verifica della corretta riduzione delle matrici per condensazione statica di *Guyan* su una struttura a strati.

	Modulo di Young [MPa]	Densità [tonn/mm ³]	Spessore [mm]
Lamine ERGAL	69570	2.8e-09	2
Core Rohacell WF110	195	1.12e-10	20.1
Adesivo AF163	1106.13	1.4e-09	1

Tabella 4.8: Dati strutturali della trave sandwich.

Nei seguenti paragrafi vengono mostrati i processi *FEMU* eseguiti per ogni componente della trave, validando l'efficacia del metodo indipendentemente dall'oggetto coinvolto nel processo.

4.4.1 Lamine

Il primo componente riguarda le lamine, top e bottom, della trave sandwich. La stima iniziale dei parametri è analoga a quella della trave isotropa, illustrata in tabella 4.6. Il *Penalty Function* raggiunge nuovamente ottima convergenza con valori di grandezza medi intorno a $10e - 04$ e $10e - 05$. È interessante notare la differenza di qualità di convergenza in base alla scelta di gruppi di modi di vibrare. Infatti come si può notare graficamente (figura 4.11), il *PF* raggiunto dal processo con l'utilizzo del gruppo di modi solo flessionali comprende valori tra $10e - 02$ e $10e - 6$, mentre il gruppo ibrido è distribuito su valori compresi tra $10e - 06$ e $10e - 09$.

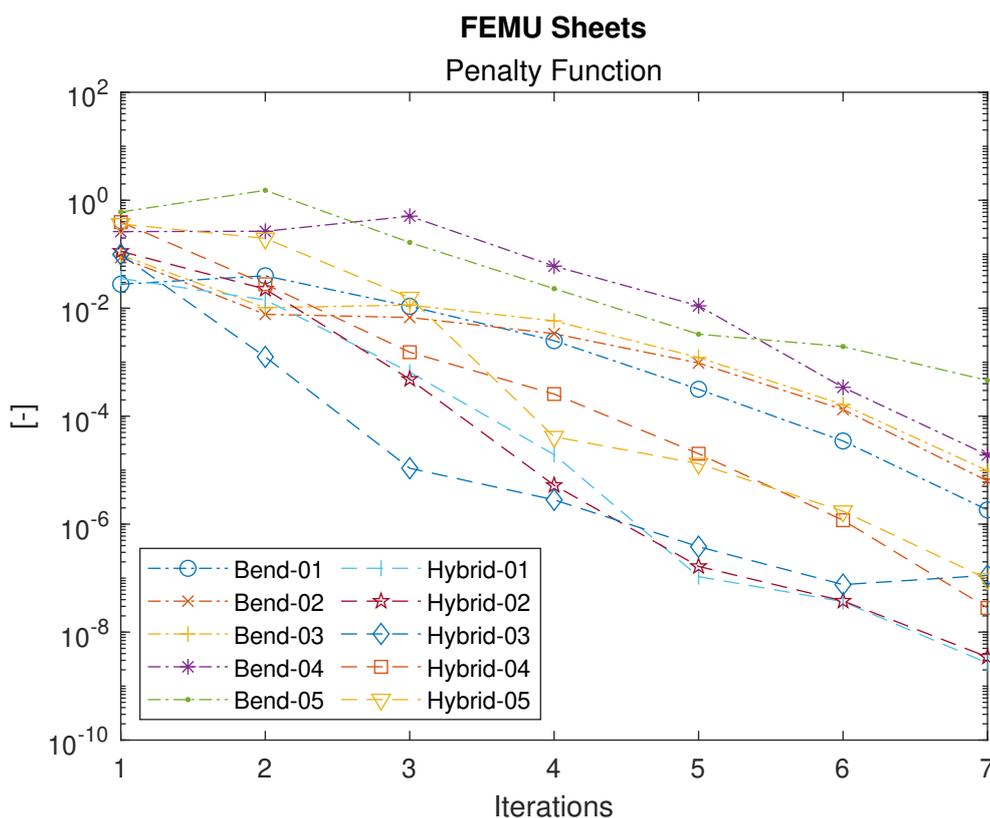


Figura 4.11: *Penalty Function* nel caso di processo *FEMU* svolto sui parametri strutturali delle lamine della trave sandwich.

I parametri, analogamente, si aggiornano in maniera corretta verso la soluzione esatta. Come si può notare in figura 4.12, la scelta del gruppo di modi influisce durante l'aggiornamento. L'aggiornamento con il gruppo di modi flessionali ha un andamento leggermente più instabile rispetto al medesimo con il gruppo ibrido. Nonostante questo, il processo converge correttamente in poche iterazioni.

4.4.2 Cuore

In maniera analoga alle lamine, si è svolta la *FEMU* con il cuore. Il *PF* (figura 4.13) raggiunge valori di convergenza analoghi al caso precedente e i parametri (figura 4.14) raggiungono la soluzione esatta con entrambi gruppi di modi.

4.4.3 Adesivo

Infine, si è nuovamente eseguito il processo per lo strato incognito di adesivo, oggetto del lavoro di tesi. I valori del *PF* (figura 4.15) sono nuovamente scesi in post-processo fino a valori compresi tra $10e - 04$ e $10e - 10$. Anche in questo caso, la scelta dei gruppi di modi ha influito notevolmente sulla qualità della convergenza. È interessante notare nell'aggiornamento dei parametri (figura 4.16), che la scelta del gruppo di modi solo flessionali risulti molto più sconsigliata rispetto alla controparte ibrida.

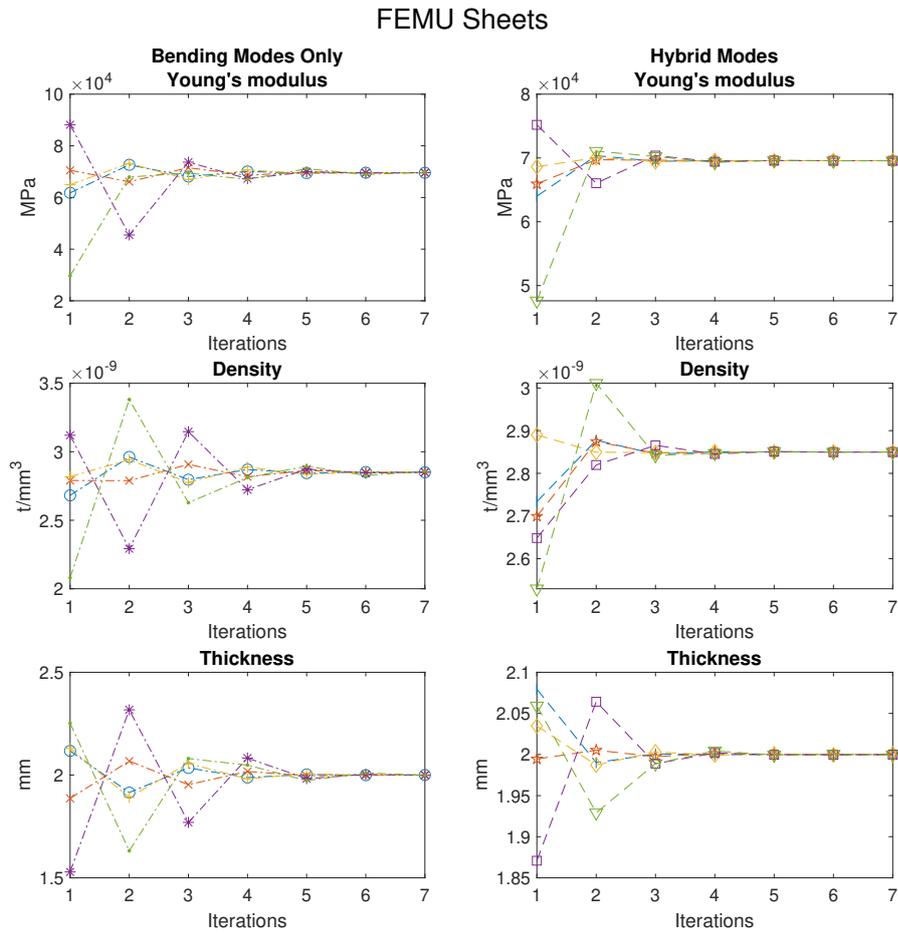


Figura 4.12: Aggiornamento iterativo dei parametri strutturali delle lamine della trave sandwich, la colonna a sinistra è l'aggiornamento mediante l'utilizzo di modi solo flessionali, a destra quelli ibridi.

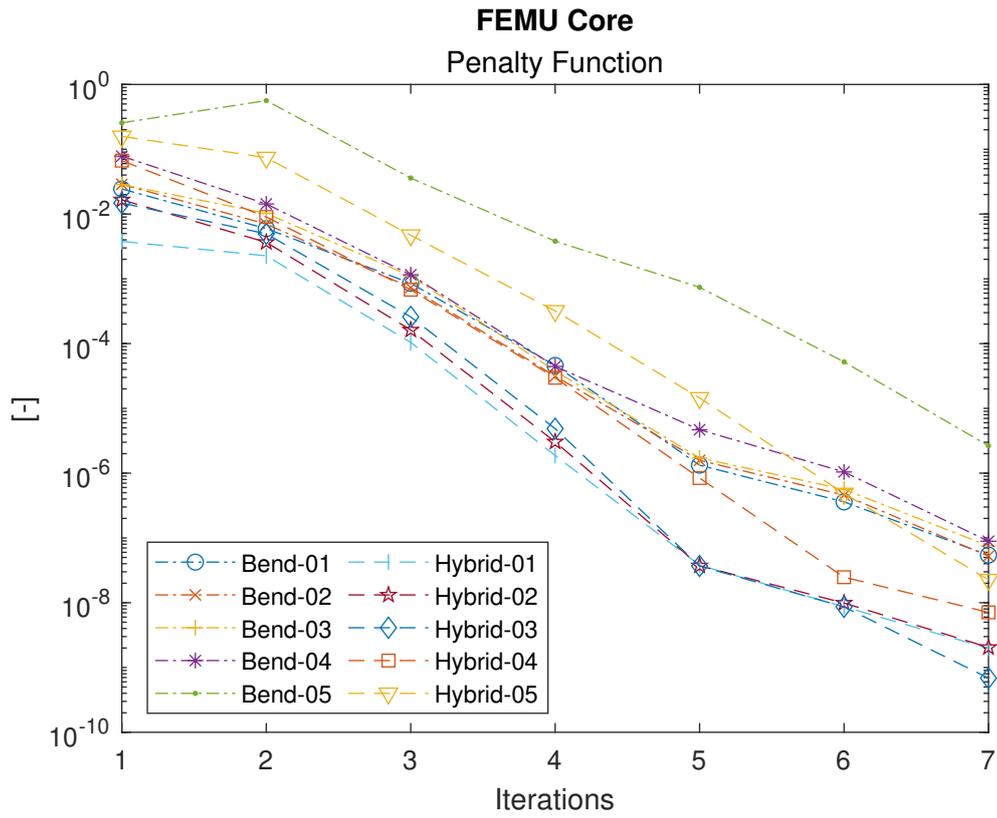


Figura 4.13: *Penalty Function* nel caso di processo *FEMU* svolto sui parametri strutturali del cuore della trave sandwich.

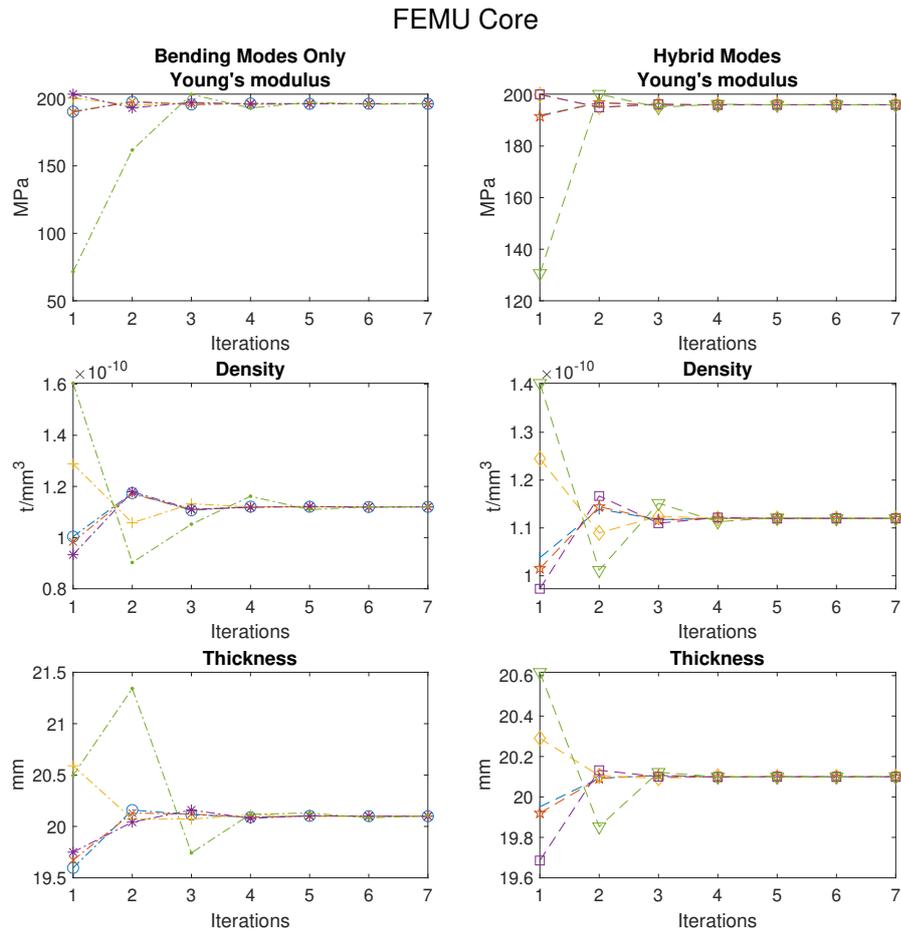


Figura 4.14: Aggiornamento iterativo dei parametri strutturali del cuore della trave sandwich, la colonna a sinistra è l'aggiornamento mediante l'utilizzo di modi solo flessionali, a destra quelli ibridi.

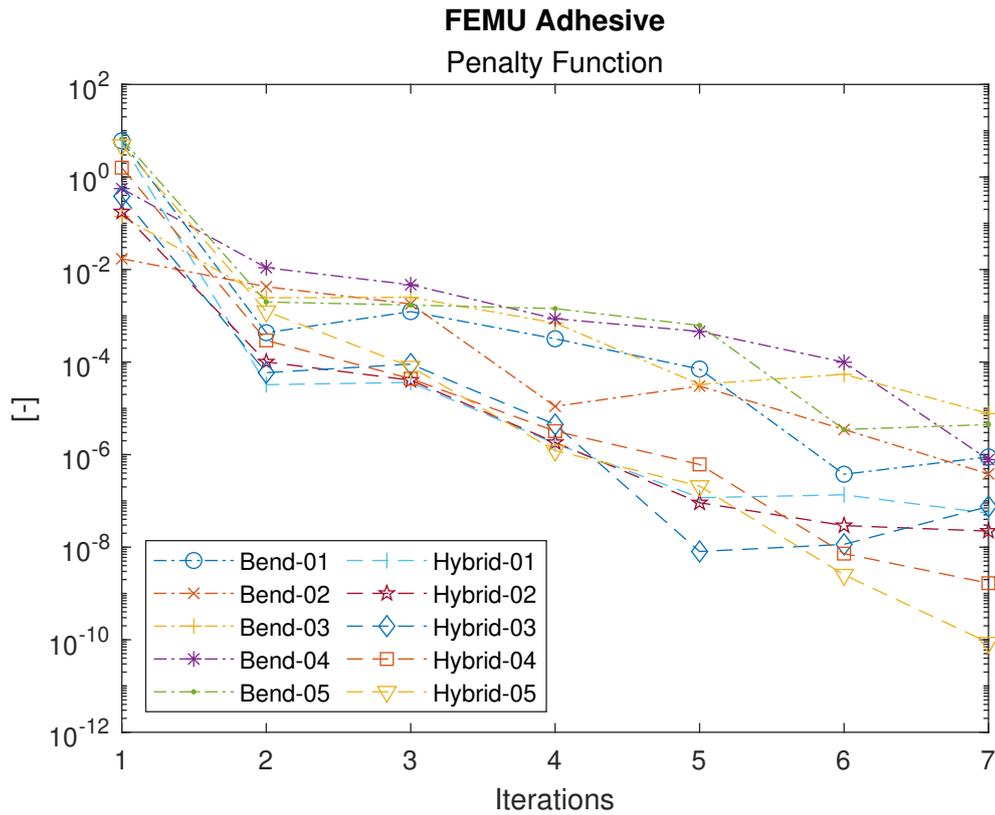


Figura 4.15: *Penalty Function* nel caso di processo *FEMU* svolto sui parametri strutturali dell'adesivo della trave sandwich.

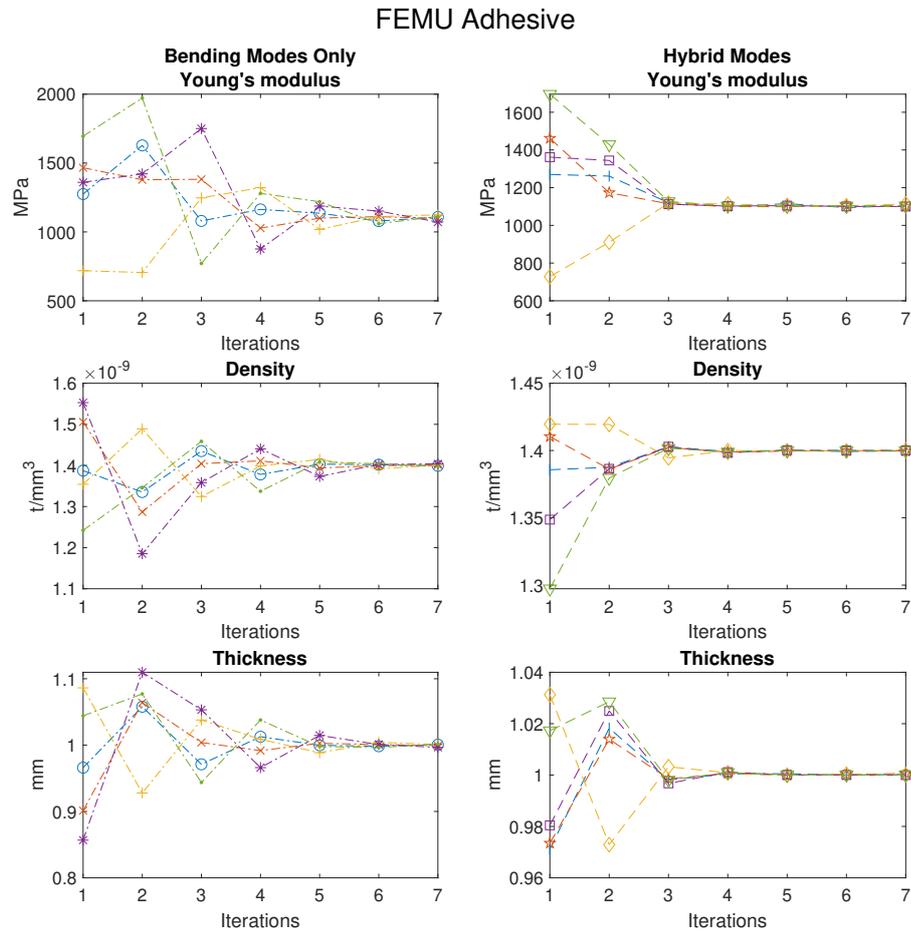


Figura 4.16: Aggiornamento iterativo dei parametri strutturali dell'adesivo della trave sandwich, la colonna a sinistra è l'aggiornamento mediante l'utilizzo di modi solo flessionali, a destra quelli ibridi.

Capitolo 5

Fase sperimentale/Risultati

5.1 Introduzione

Alla luce dei risultati di validazione ottenuti nel precedente capitolo, si possono fare le seguenti considerazioni:

- L'algoritmo è in grado di ricercare una condizione di minimo del *Penalty Function*, determinando iterativamente una corretta stima di parametri di un modello A affinché fornisca i risultati di un modello B;
- Gli strumenti CAE sono stati in grado di fornire dati modali e matrici sufficientemente precise, favorendo l'efficacia del metodo matematico;
- Le validazioni di tre casi precedenti ha fornito un'ulteriore conferma dell'efficacia della metodologia e dell'algoritmo;
- L'utilizzo di due gruppi di forme modali (o autovettori) combinati (ibridi), rispetto all'utilizzo di una sola tipologia di essi, fornisce una maggiore qualità di convergenza del processo.

In questo capitolo, si implementano i dati sperimentali ricavati da una reale struttura di trave sandwich presente in laboratorio *LAQ AERMEC* del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale del Politecnico di Torino. Lo scopo principale delle prove è determinare le frequenze proprie e i modi di vibrare dell'intera struttura e, quindi, i relativi autovalori e autovettori. I dati modali sono ricavati a seguito di una serie di prove di caratterizzazione dinamica con l'utilizzo di accelerometri piezoelettrici uniassiali e un martello strumentato. In seguito, vengono opportunamente elaborati e dati in pasto all'algoritmo.

5.1.1 L'Adesivo

La caratterizzazione dinamica riguarda, in particolar modo, la determinazione delle caratteristiche strutturali dello strato incognito che coinvolge la presenza di un adesivo che lega i diversi strati della trave. L'adesivo ha denominazione *3M™ Scotch-Weld™ Structural Adhesive Film AF 163-2* e fa parte della famiglia di resine epossidiche utilizzate come leganti di strati di materiale [25]. Il composto è disponibile in diverse varietà di peso, spessore e proprietà meccaniche determinate da varie lavorazioni e processi di produzione.

Nel caso in esame, le caratteristiche meccaniche presenti nel datasheet fornito, sono fornite in tabella 5.1.

Modulo di Young	Modulo di Taglio	Densità	Coeff. di Poisson
[MPa]	[MPa]	tonn/mm ³	[-]
1110.05	413.68	1.40e - 09	0.34

Tabella 5.1: Dati delle proprietà meccaniche dell'adesivo, ricavabili dai datasheet disponibili.

Lo strato di adesivo è la principale incognita del problema: infiltrandosi dentro il cuore (come mostrato in figura 5.1) e componendo uno strato combinato con esso, al confine delle lamine di ERGAL, assume delle proprietà strutturali incognite che vanno a influire sulla risposta dinamica della trave. Infatti, l'adesivo infiltrandosi attraverso i fori del cuore espanso, cambia le sue proprietà meccaniche, adattandosi alle nuove condizioni strutturali. La densità cala, in quanto lo strato non è più puro adesivo ma è una combinazione tra quest'ultimo e la densità del core che è circa un ordine di grandezza più basso (tabella 4.8).

Lo spessore è anch'esso incognito, non è misurabile con qualsiasi strumento, risulta sconosciuto e non chiaramente visibile l'entità di infiltrazione interna, diversamente dalla vista laterale della trave (figura 5.1). Inoltre, può variare in funzione di una serie di fattori e proprietà meccaniche ottenute durante la lavorazione.

Per quanto riguarda il modulo di Young, il valore del datasheet andrebbe interpretato secondo le particolari condizioni in cui è stato ottenuto (temperatura, pressione durante il processo di cura, etc). Il valore ricavato e presente in tabella 4.8, non è rappresentativo delle condizioni in cui si trova nella trave, ma rappresenta uno strato di adesivo puro testato nelle condizioni in laboratorio del produttore [25]. Nella fase di realizzazione della trave, può essere stato utilizzato un processo di cura leggermente differente tale da generare delle variazioni delle proprietà meccaniche.

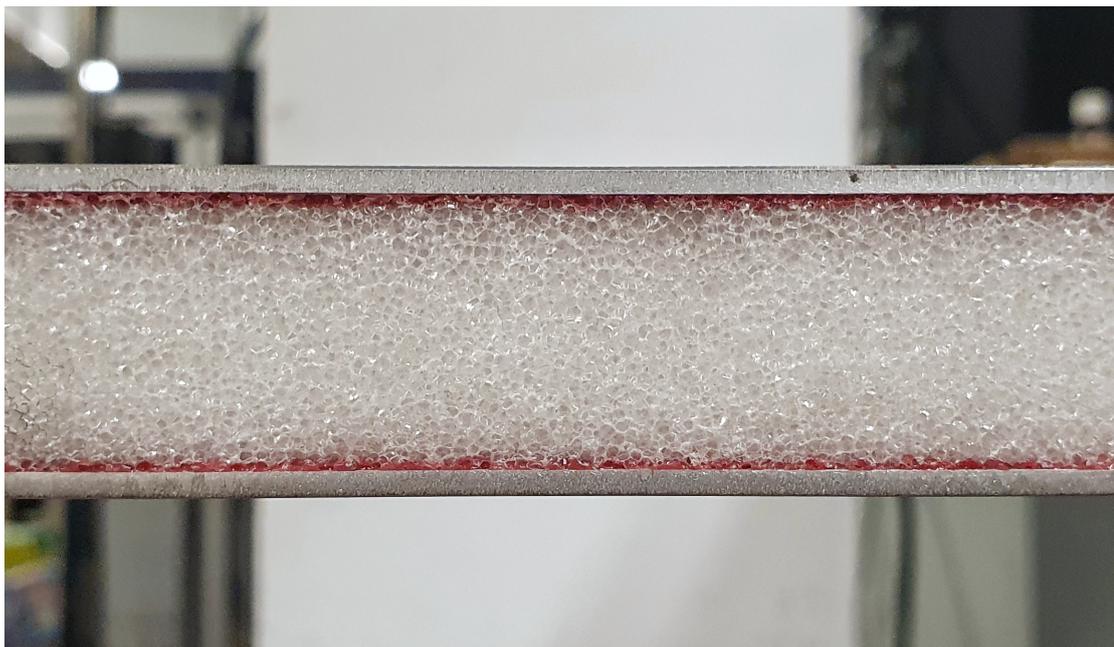


Figura 5.1: Vista laterale della trave sandwich con la presenza dell'adesivo (strato rosso) al confine tra il cuore e le facce di lega di alluminio; si noti l'infiltrazione verso l'interno.

5.2 Fase Sperimentale

La fase sperimentale è caratterizzata dall'esecuzione di prove dinamiche sulla trave sandwich presente in laboratorio *LAQ AERMEC*, con lo scopo di determinare le frequenze proprie e le forme modali dell'intera struttura. Nel caso in esame, le prove sono eseguite con una serie di *Hammer test*, ovvero prove in cui si induce eccitazione esterna mediante martello strumentato dotato di un sensore piezometrico. L'eccitazione è di tipo impulsivo e ha le caratteristiche di un Delta di Dirac δ , permettendo di ricavare la risposta ad un impulso unitario, descritta dalla seguente espressione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (5.1)$$

dove $h(\tau)$ è la funzione di risposta a impulso unitario. Il martello permette di simulare l'impulso, tuttavia, in una condizione reale, tale picco non presenta impulso infinito come il delta di Dirac ma un impulso variabile in base alla testine intercambiabili. Una maggiore durezza di una testina conferisce un impulso più intenso e in tempo stretto. Contrariamente, per una testina morbida si ha un impulso meno intenso con grande ampiezza nel tempo.



Figura 5.2: Esempio di martello strumentato con, in basso, le testine interscambiabili di varia durezza.

I sensori di rilevazione sono accelerometri piezoelettrici uniassiali (figura 5.3), posizionati lungo il dorso della trave e rappresentano gli effettivi gradi di libertà del modello sperimentale. Il loro accurato posizionamento è fondamentale per la corretta generazione di output richiesto dal processo *FEMU*. La piezoelettricità è la caratteristica principale di funzionamento: si sfrutta la polarizzazione elettrica prodotta da un cristallo interno sotto effetto di sforzo meccanico. Durante le oscillazioni, la massa di cristallo subisce forza di inerzia che deforma elasticamente la sua struttura, generando un segnale elettrico proporzionale allo sforzo. Questo effetto è denominato effetto piezoelettrico diretto. Il segnale generato attraversa un amplificatore e successivamente viene elaborato e processato opportunamente dal computer con un software.

5.2.1 Posizionamento di accelerometri

Il posizionamento degli accelerometri viene effettuato in base a due disposizioni: quella rettilinea e quella a zig zag. La prima è basata sul criterio di rilevazione dei modi di vibrare flessionali puri; la seconda invece è pensata per rilevare facilmente i modi torsionali. Tuttavia, è bene tenere in considerazione due aspetti:

- La presenza di nodi delle forme modali, ossia i punti della struttura che non oscillano o oscillano in quantità molto basse rispetto alla struttura in assenza di oscillazioni. Ciascuna forma modale ha un certo numero di nodi, più la frequenza aumenta e maggiore sarà il loro numero;

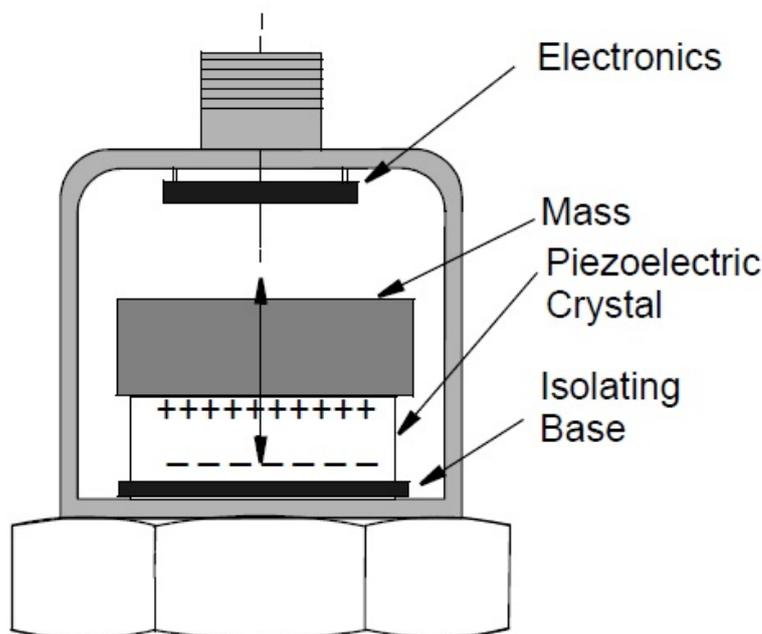


Figura 5.3: Uno schema di un tipico accelerometro piezoelettrico.

- Le matrici ridotte di massa e di rigidezza del modello FE si basano sulla posizione dei gradi di libertà considerati: *NASTRAN* costruisce una matrice che matematicamente "rappresenta" a livello strutturale un modello. Pertanto, una scorretta scelta dei gradi di libertà da utilizzare genera delle matrici ridotte poco rappresentative e ostacola la convergenza del metodo matematico.

Il primo aspetto non è stato ampiamente rispettato durante i processi di validazione dell'algoritmo e della metodologia, discussi nel capitolo 4. Questo però non ha ostacolato eccessivamente la convergenza: un componente della matrice di sensitività che tende a zero, a causa della scarsa oscillazione in prossimità del grado di libertà ad una data forma modale, non causa divergenza della soluzione.

L'approccio sperimentale consiglia di adottare ogni evenienza per ostacolare eventuali errori, pertanto, il primo aspetto viene considerato egualmente. Per quanto riguarda il secondo aspetto, si è ritenuto di maggiore importanza e influenza, motivo per cui quasi tutte i posizionamenti di accelerometri sono resi equidistanti lungo l'asse longitudinale della trave. Per considerare insieme entrambi aspetti, con una serie di tentativi si è individuato un valore di equidistanza pari a $120mm$ a partire dall'estremità libera della trave, in questo modo si cerca di evitare il maggior numero di nodi modali e di favorire la generazione matrici ridotte che rappresentano il più possibile la struttura reale.

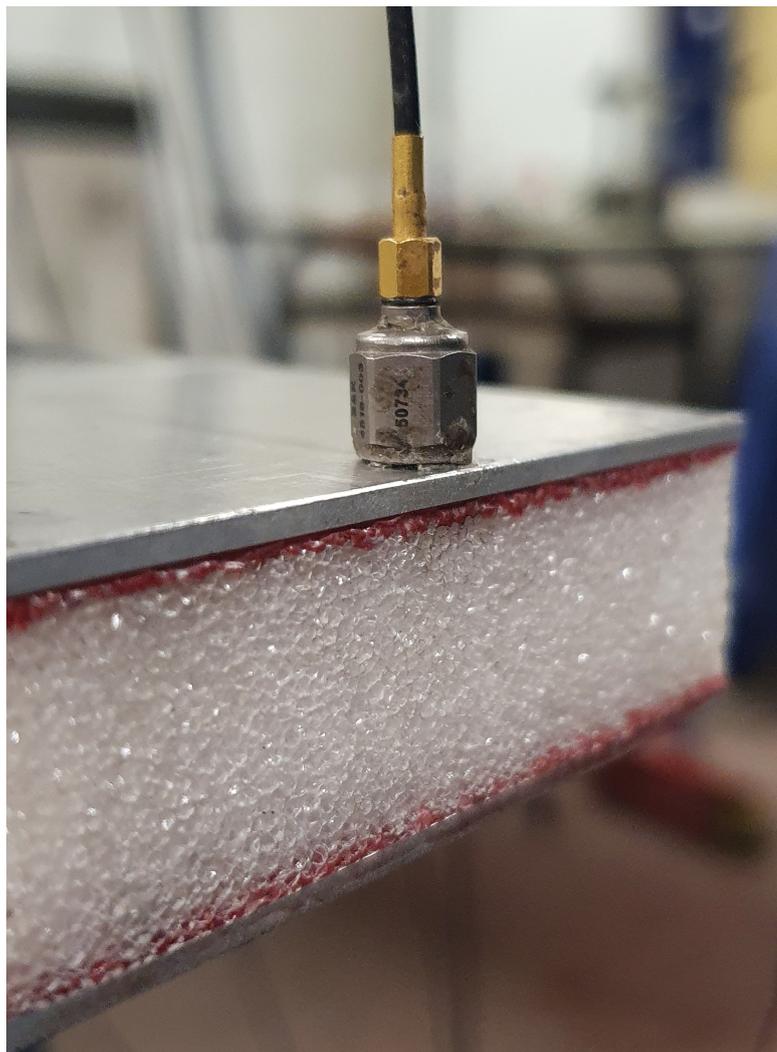


Figura 5.4: Uno degli accelerometri utilizzati in laboratorio; generalmente sono larghi circa 10mm e hanno un peso di 0.5 grammi.

5.2.2 Stime iniziali

Le stime iniziali, elencate in tabella 5.2, sono in buona parte valutate in base ai valori forniti dal datasheet. Il modulo di Young assume una stima iniziale variabile in un range compreso tra 1000MPa e 15000MPa . Essendo un valore che influisce in quantità minori secondo la matrice di sensitività, risulta avere maggiore sua incertezza in quanto una sua grande variazione in input produce una minore variazione di risultati. Per quanto riguarda la densità, si è scelto di mantenere una stima costante a causa della sua elevata sensibilità e incertezza. Una sua stima

iniziale può causare una divergenza, rendendo il modello molto meno comparabile. Infine, lo spessore, sono scelti diverse stime iniziali per coprire un campo di possibili valori mediati che può assumere lo strato incognito. Poichè è infiltrato nel cuore e non si conoscono le entità di tali infiltrazioni, il suo valore medio risulta incerto. In buona approssimazione, come mostrato dall'immagine in figura 5.1, lo strato incognito, non supera quello delle lamine che hanno spessore di $2mm$.

Config stime	1	2	3	4	5	6
Modulo di Young [MPa]	1000	6000	3000	2000	7000	15000
Densità [tonn/mm ³]	1.4e-09	1.4e-09	1.4e-09	1.4e-09	1.4e-09	1.4e-09
Spessore [mm]	1.5	1.5	2	1.25	1.75	1.5

Tabella 5.2: Tabella di stime iniziali pre-processo FEMU.



Figura 5.5: Posizionamento degli accelerometri in diverse prove sperimentali: in alto è il posizionamento rettilineo per l'individuazione dei solo modi flessionali; in basso è il posizionamento a Zigzag per i modi Flesso-torsionali.

5.2.3 Forme modali

Ciascun test sperimentale è differenziato dai valori di frequenze ottenute e dai singoli termini di autovettori. L'estrazione di queste variabili è dettato dalla scelta, in sede dei test, sulla qualità visiva della forma modale. Una distribuzione poco coerente dei gradi di libertà in una specifica forma modale denota una bassa qualità di rilevazione indotta da errori di misurazione o elaborazione dei dati. Le forme

modali utilizzate nel processo *FEMU* sono mostrate in figura 5.6 e vengono utilizzate a scelta in diversi gruppi di modi:

- 4 modi flessionali per processo di analisi per un solo tipo di forme modali;
- 4 modi flessionali e 1 torsionale;
- 3 modi flessionali e 2 torsionali;
- 3 modi flessionali e 1 torsionale.

Gli ultimi tre gruppi sono i gruppi ibridi, come mostrato nel capitolo di validazione della trave sandwich. La scelta dei gruppi viene fatta in base ai modi sperimentali a disposizione, in quanto non c'è garanzia assoluta di rilevare sperimentalmente tutti i modi utilizzati con il modelli. Infatti, durante l'esperienza in laboratorio è stato possibile notare come la quarta forma flessionale fosse molto vicina, in termini di frequenza, alla seconda forma torsionale risultando una combinazione di due modi di vibrare. Nonostante la combinazione dei modi, la seconda torsionale risulta prevalente in quanto lo spostamento di oscillazione torsionale è maggiore rispetto alla componente flessionale (figura 5.7). Solo utilizzando la disposizione rettilinea di accelerometri è possibile ricavare la quarta forma modale flessionale, Tuttavia, la purezza della seconda forma torsionale rimane "inquinata".

5.3 *FEMU sperimentale*

In questa sezione sono mostrati i risultati ottenuti nei vari test sperimentali, in differenti stime iniziali e gruppi di modi di vibrare. Sono identificati 3 diversi test basati su alcuni criteri identificati dalla qualità delle forme modali, come discusso in precedenza. I test possono essere quindi riassunti:

- **Test 01** eseguito su prove con alcuni coefficienti corretti e prime tre forme modali determinate con opportuna interpolazione polinomiale;
- **Test 02** eseguito su prove senza nessuna correzione dei singoli coefficienti e prime tre forme modali determinate con opportuna interpolazione polinomiale;
- **Test Bending mode only** dati con forme modali solo flessionali;

I primi due test forniscono tre tipi di risultati, basati sulla scelta dei gruppi di modi implementati nel processo. Entrambi hanno in comune la combinazione dei gruppi di modi e, pertanto, sono definiti test ibridi. Vengono in seguito mostrati i risultati e si evidenziano due particolari aspetti:

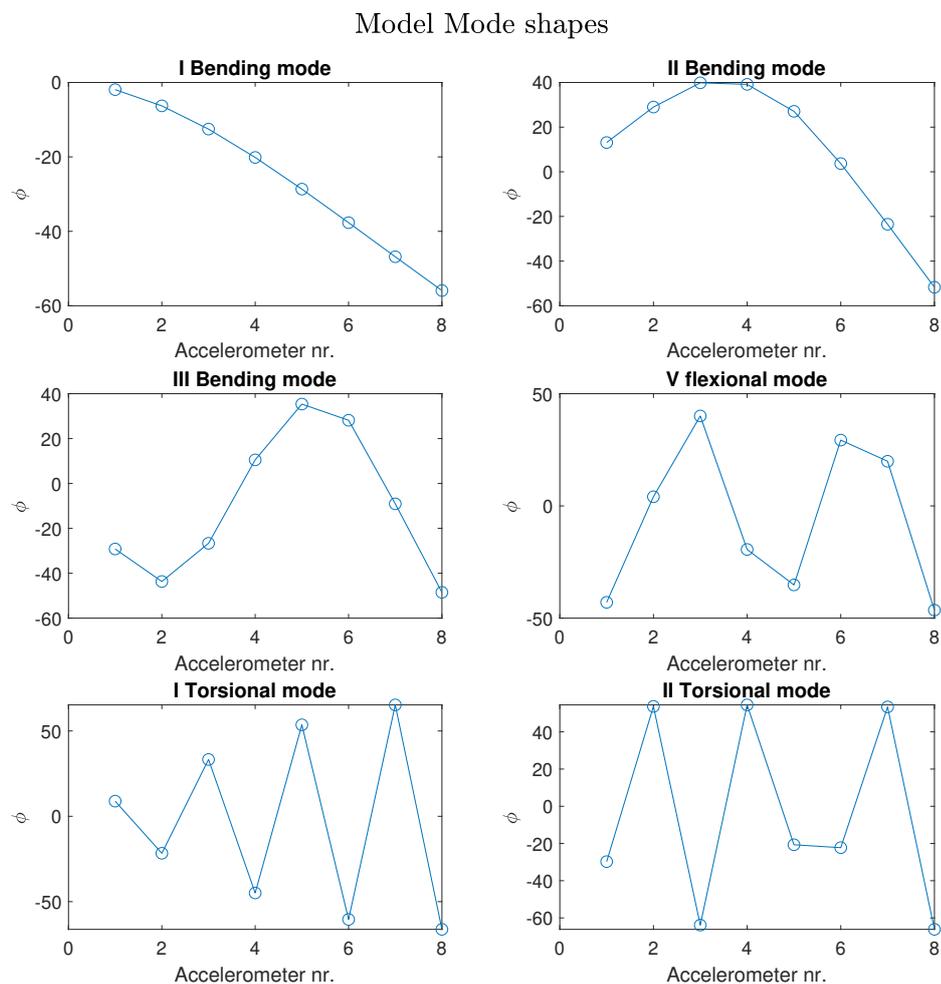


Figura 5.6: Le forme modali iniziali del modello utilizzate per valutare il residuo di autovettori.

- La presenza di minimi locali. I dati modali sperimentali non essendo totalmente esenti da errori, presentano imperfezioni locali e oscillazioni di misurazione che rendono le forme modali poco "morbide" e imperfette;
- L'influenza della stima iniziale dello spessore incognito dello strato che favorisce la presenza di tali minimi;
- La qualità di risultato in base alla scelta dei gruppi di forme modali da utilizzare e in base alla qualità dei dati sperimentali.

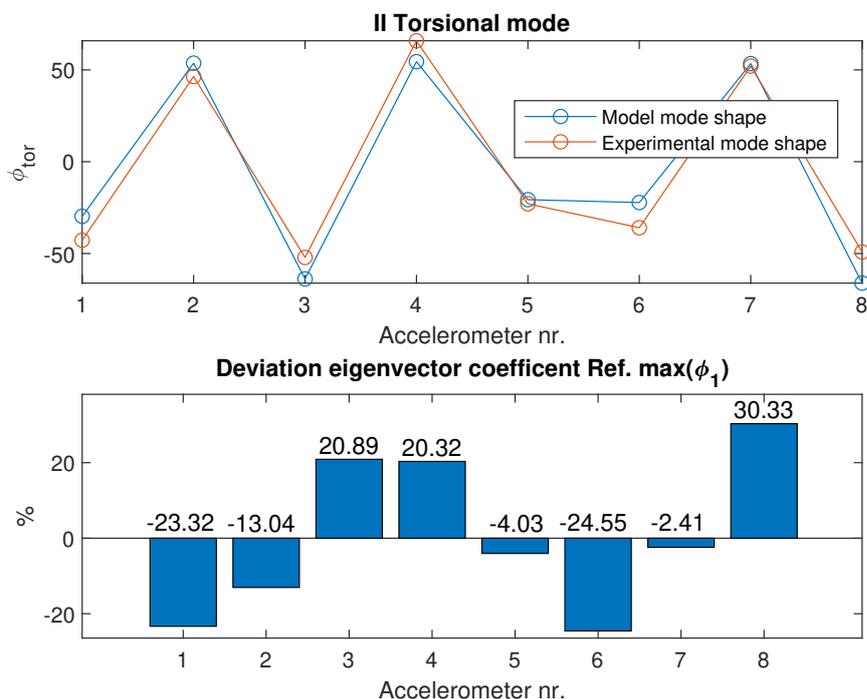


Figura 5.7: La seconda forma torsionale in alto, con le quantità dei termini dell'autovalore relativo; in basso le percentuali di residuo tra modello e sperimentale; si noti che, in genere, due modelli con un buon grado di somiglianza e non aggiornati, hanno deviazioni medie intorno al 10% [4] .

Tutti i test hanno seguito due gruppi di stima iniziale per la realizzazione dei risultati e l'interpretazione dei dati:

- Stime iniziali 1-2-6: Processo *FEMU* lasciando invariata la stima di spessore e valutando il comportamento degli altri parametri;
- Stime iniziali 1-3-4-5: Processo *FEMU* variando quattro volte lo spessore di $0.25mm$ in un intervallo compreso tra $1.25mm$ e $2mm$;

5.3.1 Gruppo ibrido Test 01

Stime iniziali 1-2-6

In prima fase sono utilizzate tre diverse stime iniziali: le stime 1, 2 e 6, presenti in tabella 5.2. Tutte e tre hanno portato a un raggiungimento di un risultato comune per tutti i parametri in ciascun gruppo di forme modali. Come mostrato in figura

5.8, oltre alla consueta oscillazione numerica iniziale, tutte le tre stime iniziali di modulo di Young portano a un risultato quasi univoco a prescindere dalle forme modali utilizzate. Complessivamente, lo Young cresce arrivando a valori intorno a $10000MPa$; la densità diminuisce fino a valori compresi tra $1e - 09tonn/mm^3$ e $1.2e - 09tonn/mm^3$; lo spessore aumenta fino a valori compresi tra circa $1.6mm$ e $1.9mm$.

Per quanto riguarda il *Penalty Function*, la questione è più complessa. Come ampiamente discusso nel capitolo 3, per raggiungere la convergenza, il funzionale dovrebbe raggiungere valori prossimi allo zero o, comunque, valori molto piccoli e trascurabili rispetto all'iterata 1. Tuttavia, questa situazione non accade: come si può notare in figura 5.9 il funzionale diminuisce fino stabilizzarsi ad un certo valore. Se ci fosse una divergenza del risultato, il funzionale crescerebbe esponenzialmente e l'algoritmo a un certo punto si potrebbe piantare.

Stime iniziali 1-3-4-5

In questa parte si presta maggiore attenzione alla differente stima dello spessore. Come mostrato in figura 5.10, gli spessori nelle varie stime assumono 4 valori iniziali compresi tra $1.25mm$ e $2mm$, in intervalli di $0.25mm$; a seguito del processo *FEMU* si può notare come raggiungano tutti un minimo locale approssimativamente compreso in un intervallo tra $1.49mm$ e $1.93mm$ per il primo gruppo di modi, $1.74mm$ e $2.14mm$ per il secondo gruppo di modi e $1.6mm$ e $2.05mm$ per il terzo. Discorso analogo avviene per gli altri parametri, nonostante la stima iniziale della densità sia sempre la stessa e il modulo di Young assuma stime non troppo discostanti come in Fase 1.

Il *PF* (figura 5.11) presenta minimi locali analoghi all'andamento dell'aggiornamento dei parametri. Tuttavia, l'andamento e il valore finale presenta differenti distacchi in base al gruppo di modi utilizzato. Se si prende ad esempio il secondo gruppo e lo si confronta con il terzo, si può notare che le differenze di convergenza sono piuttosto evidenti nonostante abbiano in comune 4 modi su 5. Il motivo è riconducibile a secondo modo torsionale: i coefficienti della forma modale sperimentale discosta notevolmente dalla seconda torsionale del modello; per cui ogni deviazione di coefficiente produce un contributo di errore che fa a pesare sul *PF*. In altre parole, quando ogni forma modale del modello che non rispecchia quella sperimentale produce un residuo di autovettore e che allontana dalla convergenza. Il funzionale energetico, essendo un unico valore indicativo della bontà di somiglianza complessiva, non fornisce indicazioni su quali siano i modi deviati.

Mentre il terzo gruppo, esegue il processo *FEMU* interamente senza utilizzare l'autovettore della seconda torsionale. Tutte le stime iniziali convergono ad un valore intorno a 0.14, tuttavia, la stima dei parametri in post-processo risulta differente in base allo spessore iniziale stimato (figura 5.10, colonna a destra).

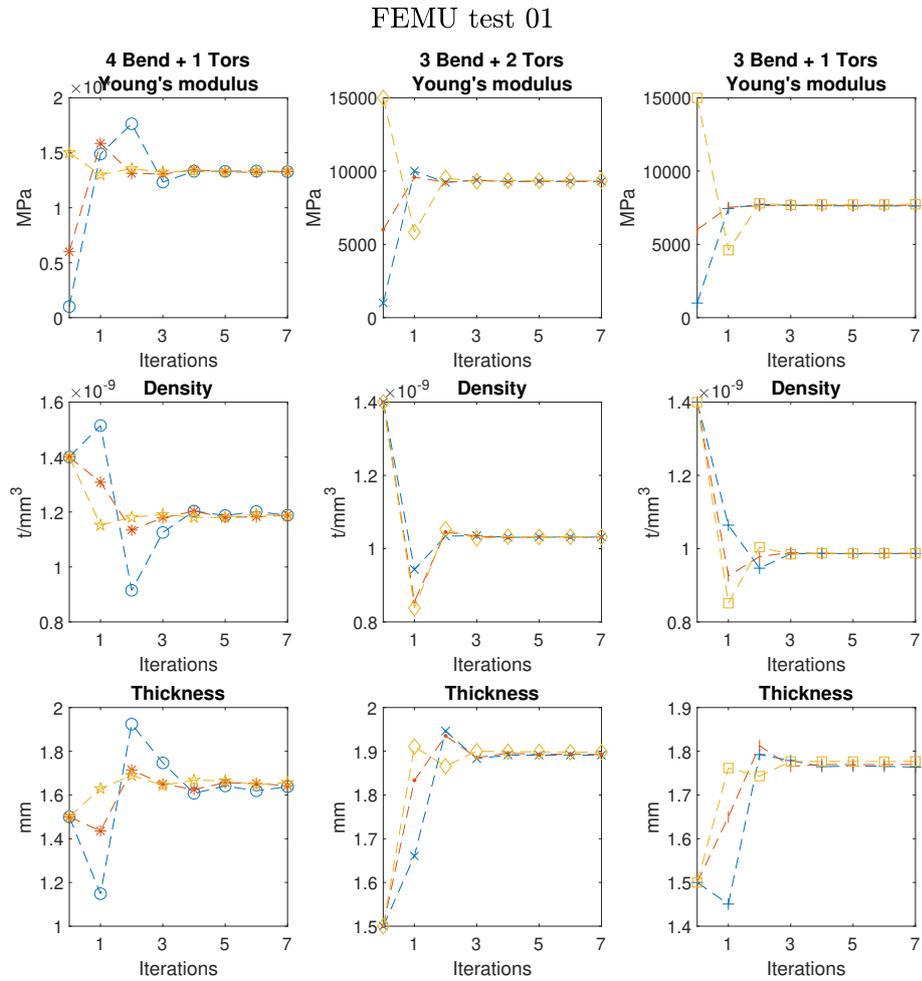


Figura 5.8: Processo iterativo *FEMU Test 01* dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 2 e in giallo dalla stima 6.

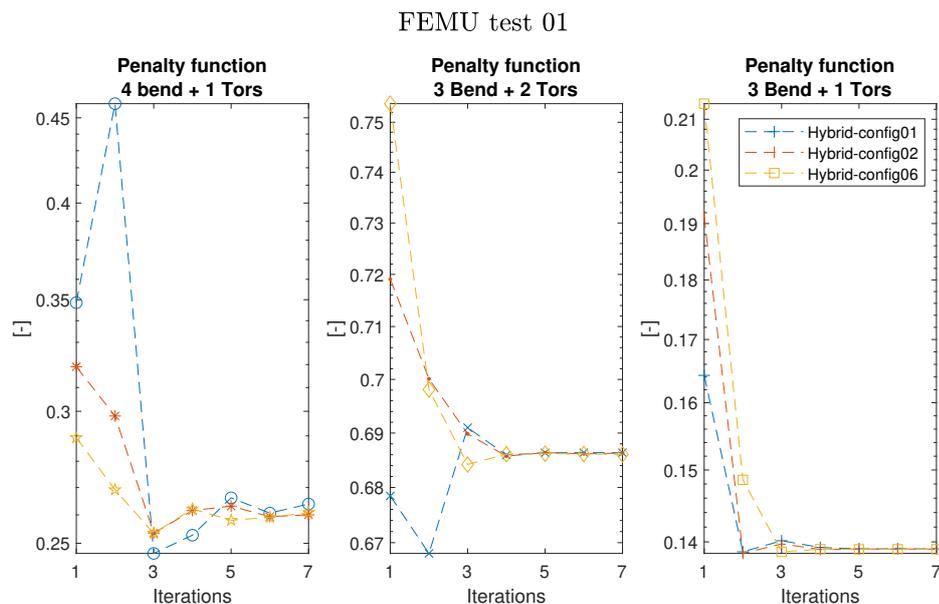


Figura 5.9: Andamento *Penalty Function* del processo *FEMU Test 01* con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.

Per quanto riguarda il residuo post-processo di frequenze 5.12, complessivamente si raggiungono percentuali minori del 5%, fatta eccezione con il primo e il quarto modo flessionale del primo gruppo di modi. Nonostante il leggero miglioramento del residuo di autovettori (denotabile con il leggero calo del *PF*), il residuo delle frequenze non è sufficientemente migliorato.

Invece con il secondo gruppo c'è un netto miglioramento delle frequenze, ciascun minimo locale porta a una diminuzione del loro residuo, tuttavia, il funzionale non decresce e non porta a un miglioramento complessivo della somiglianza (anche a causa del secondo modo torsionale), faccia eccezione per la stima numero 4.

Infine, il terzo gruppo di modi mostra buoni risultati di residuo per tutte le stime iniziali, fino a un massimo del 3.06% di deviazione. Unendo quest'ultimi residui con i bassi valori di *PF* (figura 5.11, a destra), si può riconoscere che il processo abbia nuovamente raggiunto situazioni di minimo individuando le possibili stime reali che lo strato può assumere.

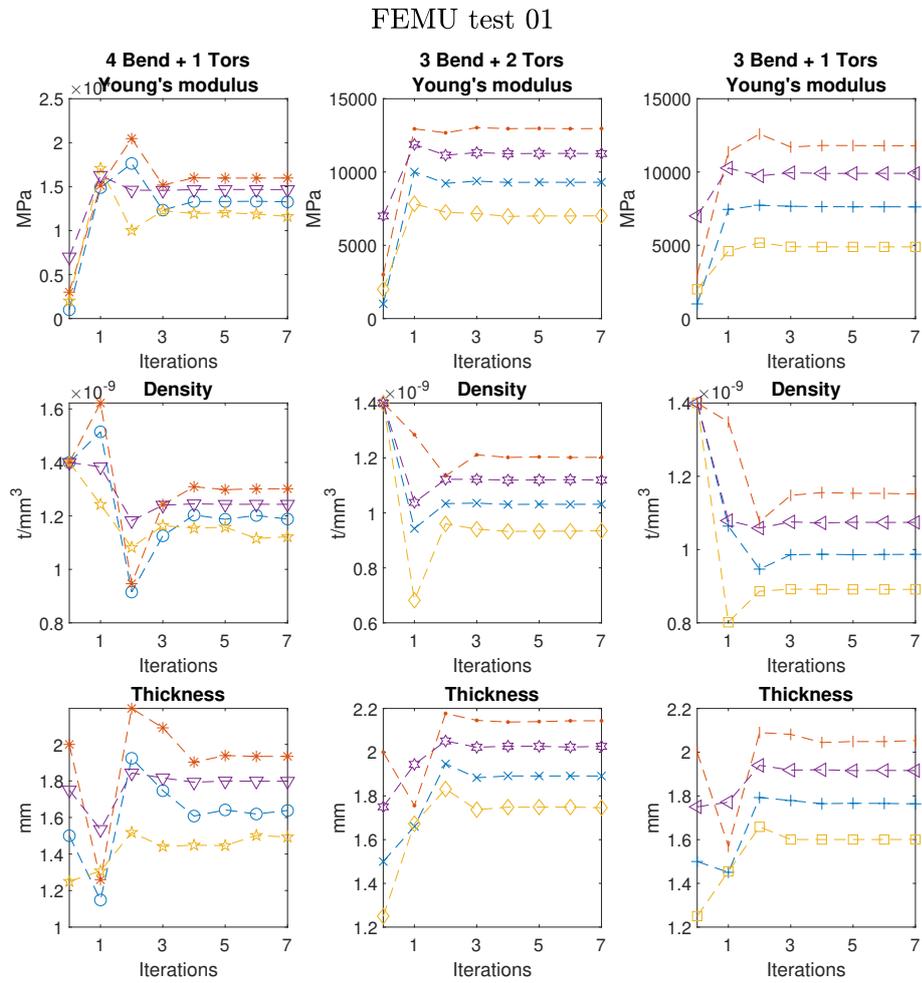


Figura 5.10: Processo iterativo *FEMU Test 01* dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 3, in giallo dalla stima 4 e in viola dalla stima 5.

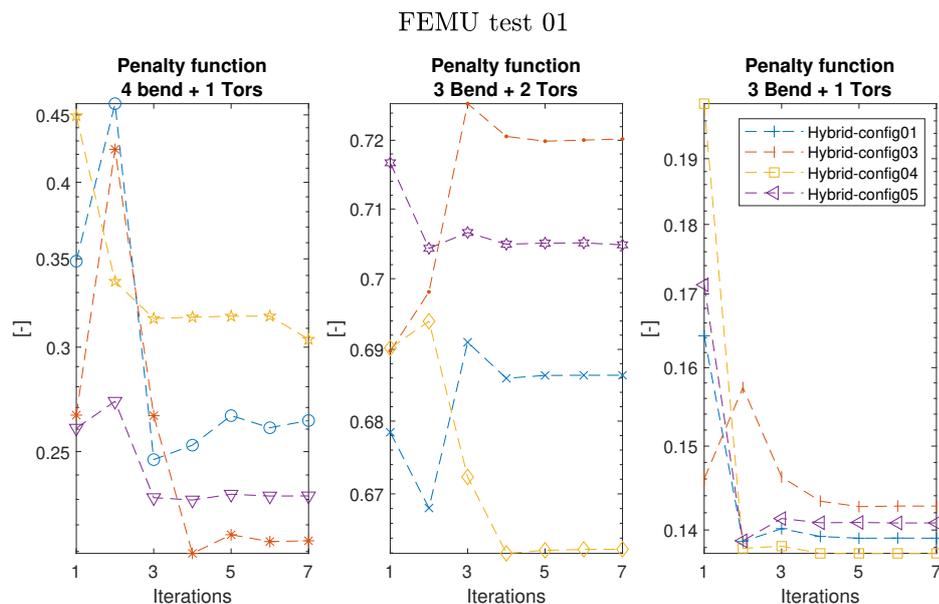


Figura 5.11: Andamento *PF* del processo *FEMU Test 01* con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.

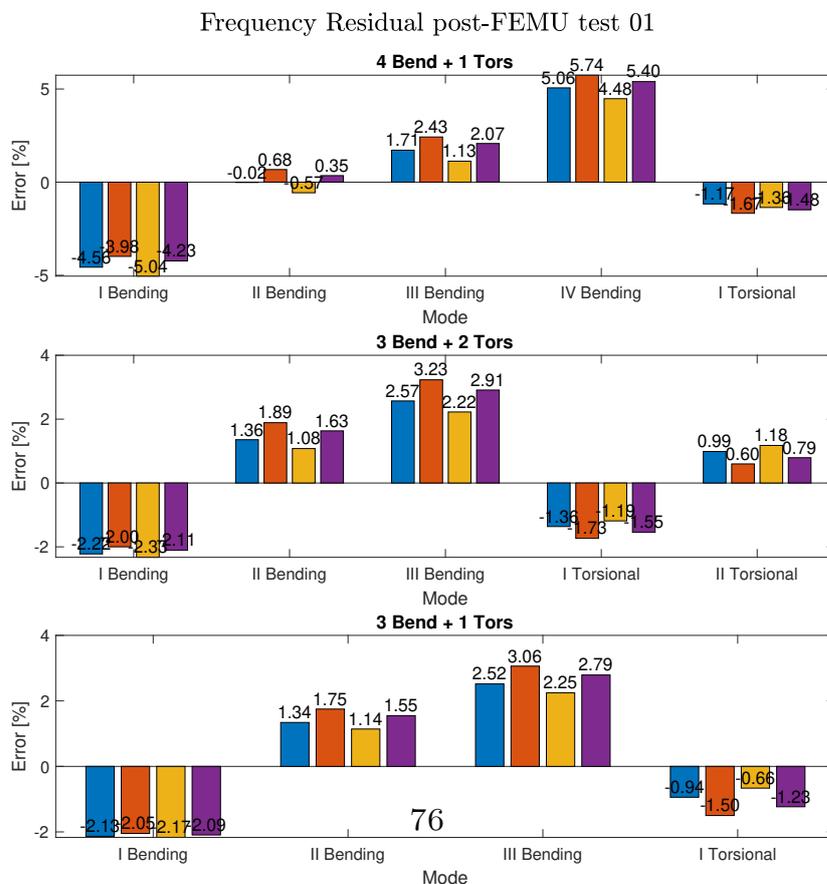


Figura 5.12: Residui di frequenze proprie della struttura in post-processo *FEMU test 01* per ciascuna configurazione di modi di vibrare.

5.3.2 Gruppo ibrido Test 02

In maniera analoga al test 01, viene eseguito il processo *FEMU* per il test 02. La principale differenza è l'assenza di correzione di un nodo della prima forma modale, come mostrato in figura 5.13. Il nodo 6 e il nodo 8 "rompono" l'andamento della forma modale rendendola anomala rispetto ad una prima forma modale classica, ostacolando l'algoritmo alla ricerca di una replica della medesima con il modello. Un'interpolazione polinomiale di secondo grado "ammorbidisce" la forma modale, aumentando tuttavia la curvatura del modo.

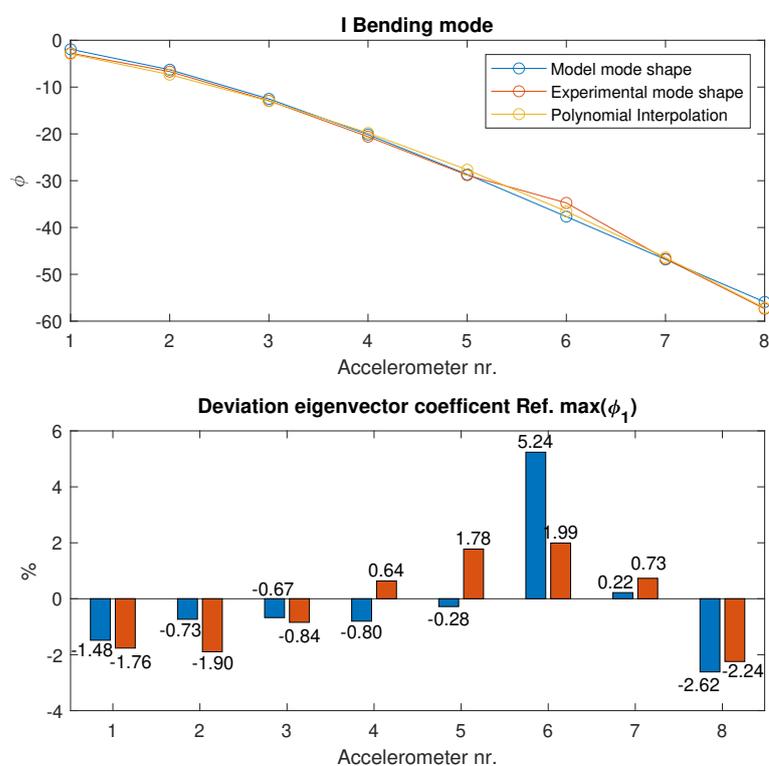


Figura 5.13: La prima forma modale flessionale, in alto, con le quantità dei coefficienti dell'autovalore relativo, in basso le percentuali di residuo tra modello e sperimentale; si noti la presenza dell'errore di misurazione al nodo 6 e al nodo 8.

Il Processo *FEMU test 02* avviene nuovamente con la presenza di minimi locali, sia con i parametri 5.14, sia con il funzionale da minimizzare 5.15.

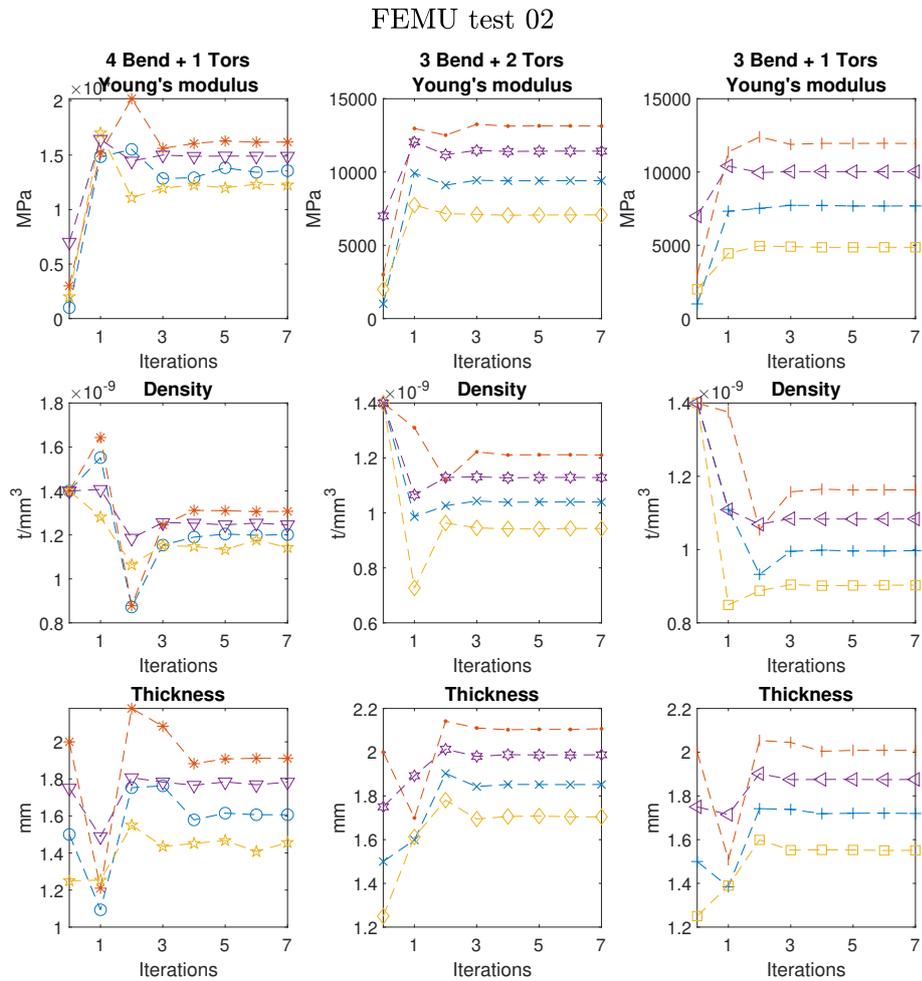


Figura 5.14: Processo iterativo *FEMU Test 02* dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 3, in giallo dalla stima 4 e in viola dalla stima 5.

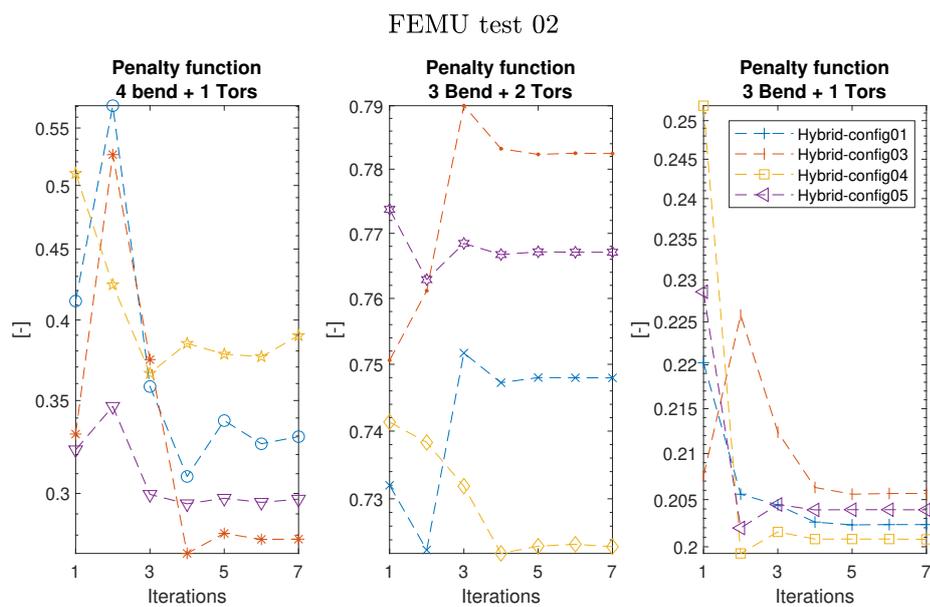


Figura 5.15: Andamento *PF* del processo *FEMU Test 02* con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.

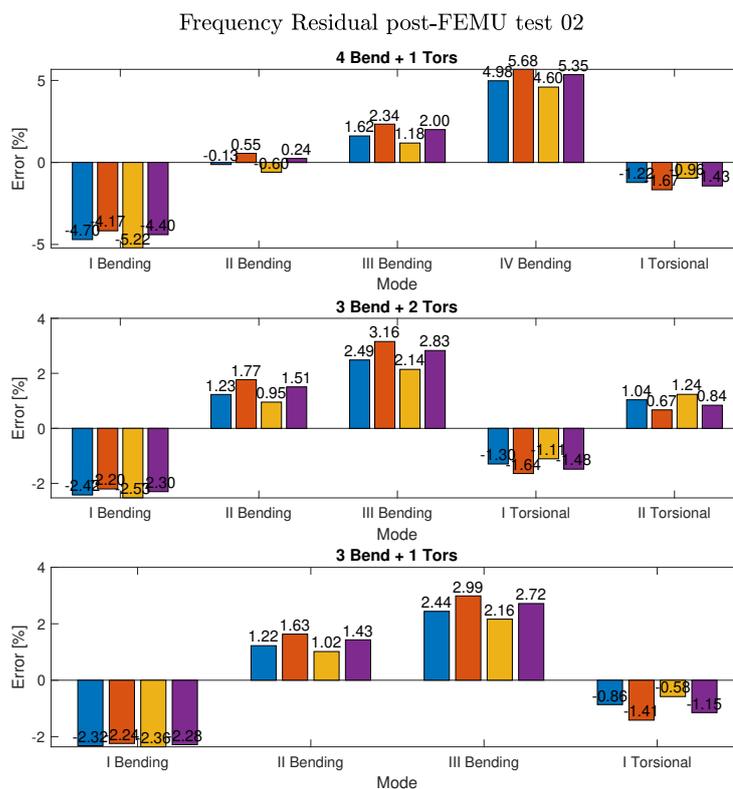


Figura 5.16: Residui di frequenze proprie della struttura in post-processo *FEMU test 02* per ciascuna configurazione di modi di vibrare.

5.3.3 Gruppo Bending mode only

In maniera analoga ai precedenti test, si sono svolte procedure sperimentali utilizzando solo i modi flessionali. L'aggiornamento dei parametri segue lo stesso percorso discusso in precedenza con i gruppi ibridi di modi, presentando le stesse caratteristiche discusse sui minimi locali. In figura 5.17 sono presenti gli andamenti iterativi della stima dei parametri per ciascuna stima iniziale. Nella colonna a sinistra, si può individuare il minimo locale su cui cadono 3 diverse stime di Modulo di Young ma con la medesima stima di spessore. Mentre nella colonna sinistra, andamenti di stima del processo partendo da stime iniziali differenti di spessore.

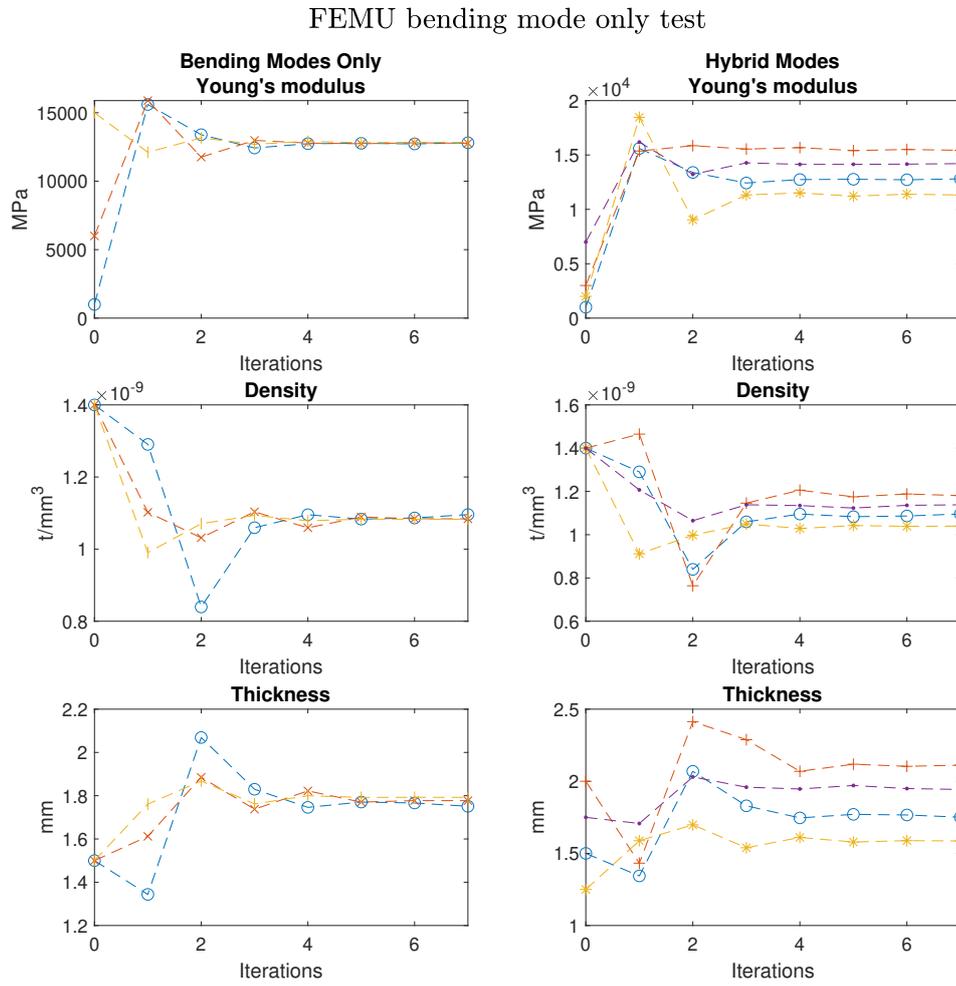


Figura 5.17: Processo iterativo *FEMU Bending mode* dei parametri; in blu è l'andamento partendo dalla stima 1, in rosso dalla stima 3, in giallo dalla stima 4 e in viola dalla stima 5.

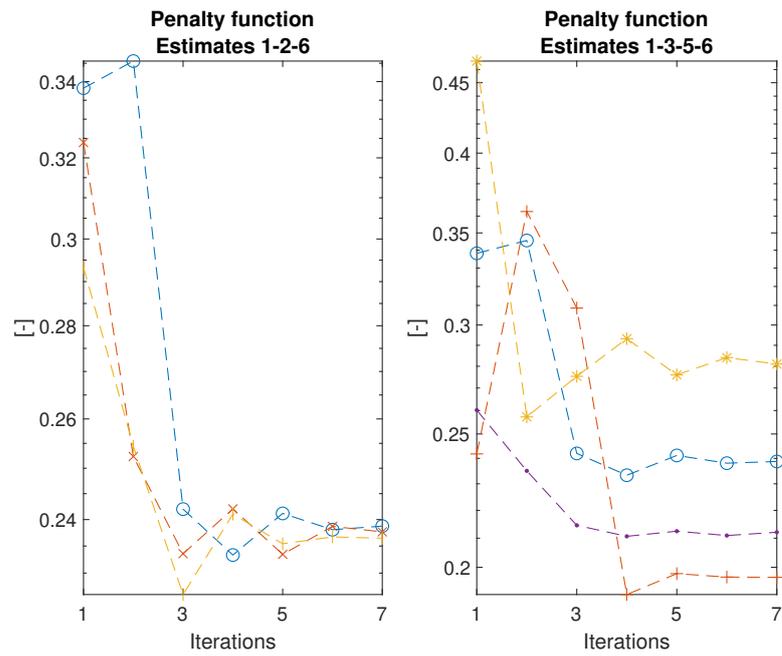


Figura 5.18: Andamento *PF* del processo *FEMU Bending mode* con l'utilizzo delle combinazioni di modi di vibrare.

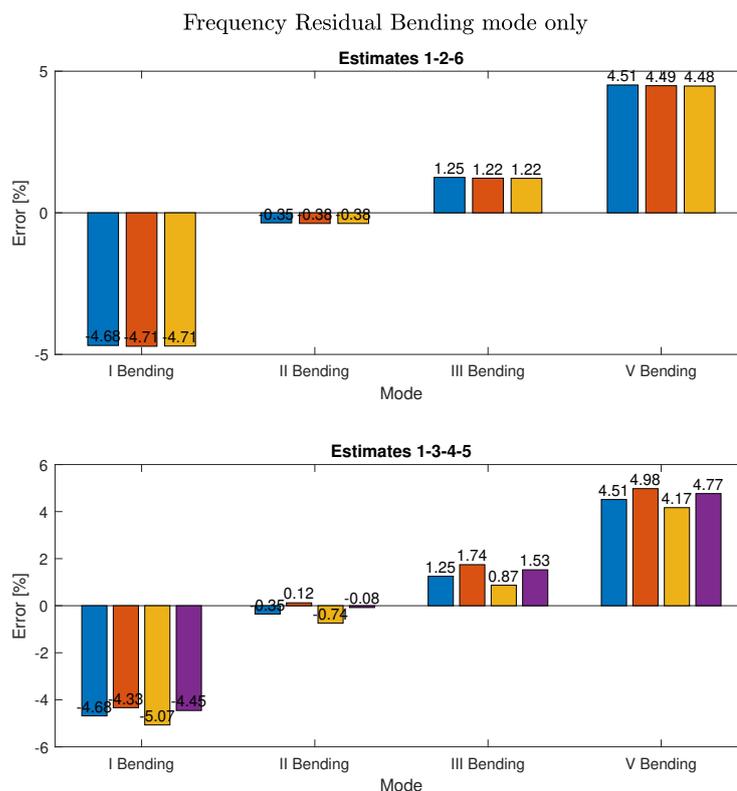


Figura 5.19: Residui di frequenze proprie della struttura in post-processo *FEMU Bending mode* per ciascun gruppo di modi di vibrare; in blu è la stima 1, in rosso la stima 3, in giallo la stima 4 e in viola la stima 5

5.4 Commenti e ulteriori considerazioni

Alla luce dei precedenti risultati si può affermare che l'algoritmo e la metodologia hanno funzionato correttamente, il processo iterativo ha raggiunto un certo livello di convergenza.

Tutti i test hanno portato a risultati molto simili e situazioni di minimo locale. Nonostante questo, solo alcuni processi sono ritenuti più rappresentativi della struttura: i risultati ottenuti con le stime iniziali 1 e 4 risultano complessivamente più coerenti con le caratteristiche della struttura. Le analisi eseguite con l'utilizzo del terzo gruppo di modi di vibrare ibridi (3 flessionali e 1 torsionale) ha fornito risultati più accurati e attendibili. Il residuo di frequenze proprie del sistema si mantiene fino a un massimo del 2.52% e *PF* nell'ordine di 0.139. Il modulo di Young si attiene con valori attendibili intorno a $7619MPa$; la densità scende intorno a

valori $9.869e - 09 \text{tonn}/\text{mm}^3$; mentre lo spessore si ritiene attendibile con valori intorno a 1.76mm .

Tuttavia, sono emerse criticità causate dalla qualità dei dati sperimentali: l'aggiornamento dei parametri incontra situazioni di minimo locale non corrispondenti al minimo assoluto del funzionale del *PF*. Le rilevazioni, seppur eseguite con meticolosità e correttezza di esecuzione, non hanno garantito assoluta linearità delle forme modali. Infatti, ciascuna di esse mostrava errori di rumore o misurazioni discontinue rispetto all'andamento dell'ampiezza della forma. Come mostrato in figura 5.20, i residui dei termini di autovettori rimangono ancora presenti in fase post-processo. Durante il processo, l'algoritmo ricerca iterativamente una configurazione di stima che fornisce un minimo dei residui di autovalori e autovettori, utilizzando i dati modali ottenibili dal modello. Nel momento in cui si trova una forma modale media comparabile con quelle sperimentali, il processo si ferma al minimo senza spostarsi e ricercare una differente stima iterativa. Inoltre, è numericamente impossibile replicare in maniera esatta i risultati sperimentali mediante la metodologia di *PFM*. I modelli hanno significato fisico che non possono replicare in maniera esatta i dati sperimentali con deviazioni numeriche indotte da errori di misurazione.

Prendendo ad esempio la prima forma modale del secondo test (figura 5.20), si può notare che una misurazione è leggermente fuori posto rispetto all'andamento della prima forma modale. La linea blu del modello, tenta di replicare numericamente la forma modale rossa, tuttavia non potrà mai replicarla in maniera esatta se non cambiando la geometria della trave stessa o diventando un altro modello strutturale totalmente differente.

Uno strumento che ha favorito l'aggiustamento di tali errori è l'utilizzo dell'interpolazione polinomiale, nel quale si approssima una serie di punti con una funzione polinomiale di grado n . In figura 5.21, si può notare come l'interpolazione riesca complessivamente a diminuire la percentuale di deviazione dei singoli termini di autovettori. In particolar modo, risulta efficace con la seconda forma flessionale, dove si riduce notevolmente l'oscillazione numerica dei dati sperimentali. Lo strumento corregge le anomalie e ammorbidisce le forme modali, ma non è sufficiente all'aumentare della frequenza e della complessità della suddetta forma. Infatti non è stato utilizzato con la seconda torsionale, in quanto risulta troppo complessa e con troppi pochi punti per essere "ammorbidita" da una semplice polinomiale.

Model Mode shapes

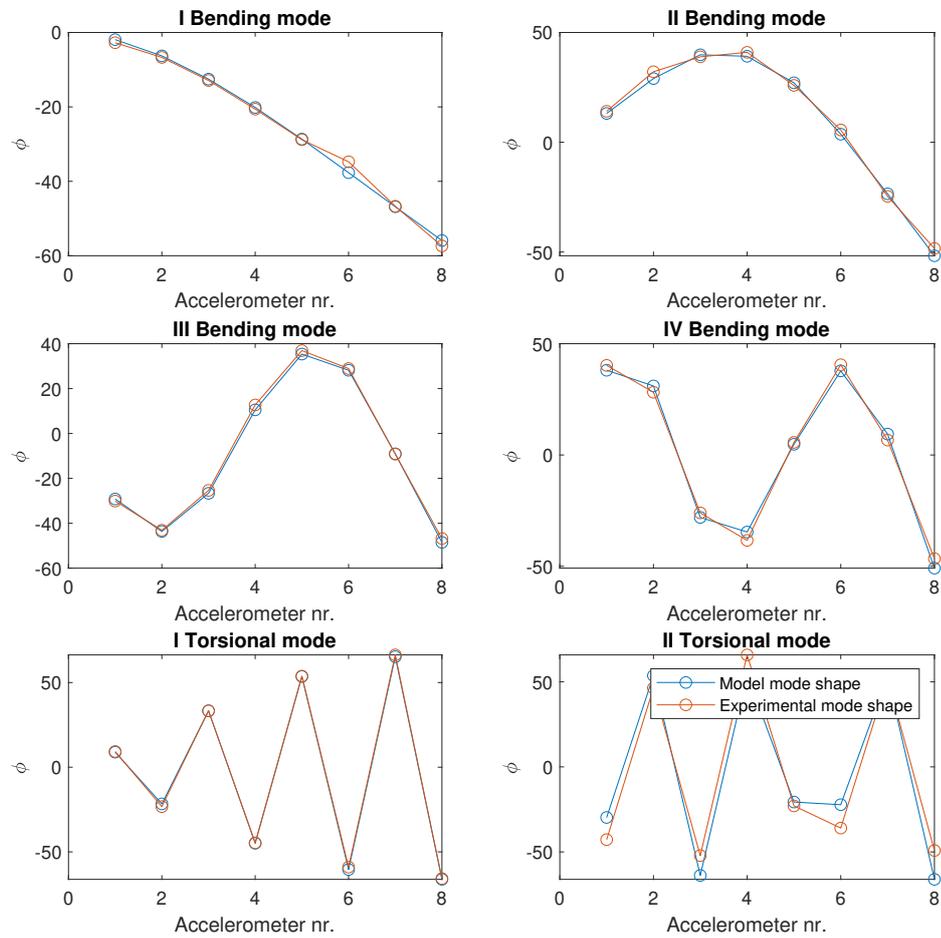


Figura 5.20: Confronto tra autovettori del modello numerico e modello sperimentale.

Deviation eigenvector coefficient (Ref. FE Model)
test 02

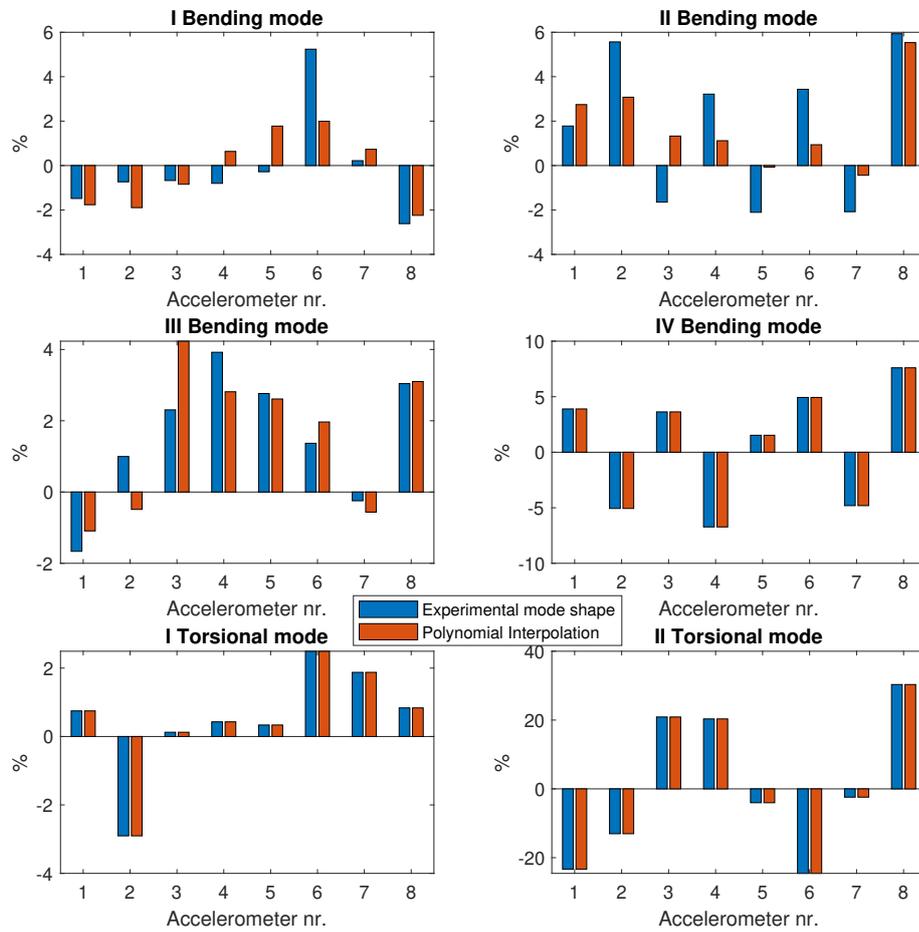


Figura 5.21: Residui di autovettori tra modello numerico e modello sperimentale.

Capitolo 6

Conclusioni

6.1 Conclusioni

Nel lavoro di tesi sono stati discussi diversi aspetti della metodologia *FEMU* e in particolar modo, del metodo di *PFM*, percorrendo gli strumenti utilizzati per il corretto svolgimento del processo. Assumendo l'assoluta precisione dei dati sperimentali, il processo *FEMU* rappresenta un ottimo strumento matematico per la determinazione di parametri difficili da determinare con semplici strumenti di modellazione agli elementi finiti.

Nell'industria aerospaziale, la precisione e le accuratezze degli strumenti e dei risultati di modelli è tutt'ora un uno degli strumenti fondamentali per la risoluzione di problemi ingegneristici. Spesso la soluzione a tali problemi non è mai esatta e, a seconda dell'approccio adottato, la si ottiene con una certa percentuale di errore. Tale errore, infatti, è indotto dalla non assoluta precisione delle misurazioni. Generalmente, le misurazioni dinamiche delle frequenze proprie naturali sono considerate sufficientemente solide rispetto alle misurazioni delle forme modali. I dati peggiori rimangono le matrici di massa e di rigidezza, in quando sono generate in funzione del numero di gradi di libertà. In un dominio spaziale, una struttura reale continua come la trave sandwich ha un infinito numero di gradi di libertà; mentre, per un modello FE, il numero di gradi di libertà è strettamente legato al numero di elementi finiti utilizzati per discretizzare la struttura. La maggior parte dei GDL del modello non viene più considerata a seguito una riduzione del modello, in contemporanea a un'identificazione dei gradi di libertà sperimentali legati al numero di sensori utilizzati. Per quanto possano essere efficaci gli strumenti di riduzione dei modelli, come la condensazione statica di *Guyan*, ridurre un modello di migliaia di gradi di libertà fino a tre ordini di grandezza in meno comporta una notevole approssimazione del modello e una minore accuratezza.

La qualità del modello è un altro aspetto importante del processo, poiché essendo

il mezzo che permette la determinazione dei parametri sperimentali incogniti della struttura reale, la sua modellazione rimane di vitale importanza per la ricerca della soluzione al problema. La stima e la parametrizzazione delle variabili incognite è parte integrante della modellazione e spesso richiede capacità e solida esperienza strutturale.

Con stato dell'arte si è potuto fare possibili considerazioni sugli aspetti più importanti del processo *FEMU* e sul possibile approccio al problema. Si è accennato come i metodi iterativi (o locali) siano l'approccio più adeguato, rispetto ai metodi diretti (o globali), per la determinazione di una corretta stima di parametri. Inoltre, si è vista la complessità e le procedure richieste per la correlazione e la comparazione numerica dei set di dati modali. In particolar modo si è resa necessaria di riduzione del modello con opportuna formulazione.

Con il capitolo 3 si è approfondito la metodologia di *Penalty Function Method* basato sulla sensitività, con gli aspetti principali, relative peculiarità e dimostrazioni matematiche. È stato sviluppando un algoritmo di ottimizzazione per determinare, mediante tale metodologia, una possibile stima di parametri in che permetta di replicare i dati modali sperimentali. La validazione dell'algoritmo mediante opportuni casi strutturali, descritti nel capitolo 4, ne ha evidenziata la stabilità e la convergenza del metodo.

Nel capitolo 5 sono stati introdotti i dati sperimentali presentando il caso reale oggetto del lavoro di tesi. Il processo *FEMU* è stato svolto a seguito di una serie di prove dinamiche sperimentali in laboratorio *LAQ AERMEC*. La serie di test ha portato a una buona convergenza dei dati e una diminuzione dell'errore relativo delle frequenze. Il processo ha portato, a livello globale, un incremento di valori del modulo di Young, un decremento dei valori di densità, giustificabile dal fenomeno di infiltrazione dell'adesivo all'interno dei fori del cuore e un aumento dei valori dello spessore dello strato incognito. Tuttavia, si sono riscontrate criticità del metodo causate dalla contenuta qualità delle misure sperimentali. Le misurazioni sperimentali hanno fornito autovettori di forme modali con piccole discontinuità dei singoli nodi, risultando come forme modali poco "morbide". Nonostante le correzioni e le interpolazioni polinomiali per uniformare le forme modali, i residui rimangono persistenti seppur con lievi miglioramenti.

Si può pertanto concludere che il processo di *Finite Element Model Updating* basato sulla sensitività è un ottimo strumento di riconciliazione matematica tra modello numerico e controparte sperimentale, auspicando però notevole qualità dei dati.

6.2 Raccomandazioni e Sviluppi futuri

A seguito delle considerazioni e delle conclusioni del lavoro, la metodologia *FEMU* lascia spazio a un esteso campo di applicazioni e ampio margine di miglioramento della convergenza.

- Una maggiore qualità dei dati sperimentali è necessaria per migliorare complessivamente i risultati e avere maggiore chiarezza sul comportamento strutturale dello strato di adesivo. Un risultato univoco non sarà mai raggiunto con totale esattezza, ma è possibile ridurre notevolmente il range di valori medi che può assumere per azzerare i residui di frequenze e forme modali, riducendo il *PF* fino a ordini di grandezza di $10e - 02$.
- Estensione del metodo con l'utilizzo della *Funzione di Risposta in Frequenza (FRF)* determinando il residuo della risposta del sistema a seguito dell'applicazione di una forzante in input. L'utilizzo dell'estensione è permesso soltanto con una maggiore qualità dei dati sperimentali, in quanto la FRF è una misurazione molto più delicata e meno flessibile rispetto all'utilizzo degli autovettori. Inoltre, con essa si introdurrebbe maggiore precisione con l'utilizzo della matrice di smorzamento del sistema;
- Maggior numero di parametri da aggiornare, in particolare modo si consiglia l'estensione del processo *FEMU* al coefficiente di Poisson. La principale difficoltà di aggiornamento di questo parametro è determinata dalla sua non-linearità e dipendenza da uno dei parametri di aggiornamento: il Modulo di Young. La convergenza non è sempre garantita, specialmente quando si introduce il coefficiente: se le misure risultano poco precise, a causa della leggera instabilità numerica iniziale, alle prime iterazioni il processo potrebbe aggiornare il coefficiente verso un valore irrealistico e privo di significato fisico, con valori superiori a 0.5 o tendenti a -1 .

Appendice A

Pseudo Codici dell'algoritmo

Algorithm 1 Main Optimization algorithm

```

1: ▷ Define Flags
2: ▷ Input file                                ▷ .ses, .xdb, .bdf, .db, .pch, ecc..
3: ▷ Set nodes configurations
4:  $\vartheta_{0k}$ 
5: Input Perturbation                          ▷ Define initial parameters estimate
6: ▷ Initialize matrices
7: ▷ Import Experimental Data

8: for Iterations  $i = 1, 2, \dots$  do
9:   Open and overwrite ith parameters  $\vartheta_{ik}$  in PAR_SES.ses
10:  Run MSC PATRAN reading .ses file
11:  Run MSC NASTRAN reading .xdb file
12:  Access result reading .bdf file
13:  ▷ Calculate ith Frequency
14:  ▷ Calculate  $(\lambda_j)_{ai}$ 
15:  FUNREADREP(.rpt file)                      ▷ Read Access_Report.ses
16:  FUNWRITEREP(.rpt file)                    ▷ Overwrite with ith frequency
17:  Access Report .rpt running MSC PATRAN reading .ses and import model
    eigenvector  $\Phi_i$ 
18:  Access DMIGPCH output .pch file
19:  ▷ Guyan Reduction of  $\mathbf{K}_i$  and  $\mathbf{M}_i$  matrices running MSC NASTRAN
20:  IMPORTKM(.pch file)                        ▷ Extract matrices from Punch file using [22]

21:  Define  $\mathbf{z}_i$  model (Eq. 3.1)
22:  Check Pairing mode shape
23:  ▷  $\mathbf{res}_i \leftarrow$  (Eq: 3.4)
24:  ▷  $\mathbf{W} \leftarrow$  (Eq: 3.25)
25:  Evaluate MAC and COMAC

26:  SENSITIVITY( $i, flag, indices, modelData, expData$ )

27:  Density correction
28:  ▷  $\vartheta_{(i+1)k} \leftarrow$  (Eq: 3.28)                ▷ Updated Parameters
29:  ▷  $J \leftarrow$  (Eq: 3.26)                        ▷ Update Penalty Function
30: end for
31: return  $\vartheta_k$ 

```

Algorithm 2 Sensitivity-based *FEMU* Function using Mottershead at al. formulation [5]

```

1: procedure SENSITIVITY(i, flag, indices, modelData, expData)
2:   ▷ Initialize sensitivity matrices

3:   for  $k = 1, 2, \dots, NParameters$  do
4:     ▷  $(\boldsymbol{\vartheta}_k)_{sens}$            ▷ Perturbate kth parameters to evaluate sensitivity
5:     Open and overwrite ith parameters  $(\boldsymbol{\vartheta}_k)_{sens}$  in PAR_SES.ses
6:     Run MSC PATRAN reading .ses file
7:     Run MSC NASTRAN reading .xdb file
8:     Access result reading .bdf file
9:     ▷ Calculate ith Frequency
10:    Access Report .rpt running MSC PATRAN reading .ses and import
    model eigenvector  $\boldsymbol{\Phi}_i$ 
11:    Access DMIGPCH output .pch file
12:    ▷ Guyan Reduction of  $\mathbf{K}_i$  and  $\mathbf{M}_i$  matrices running MSC NASTRAN
13:    IMPORTKM(.pch file)   ▷ Extract matrices from Punch file using [22]

14:    ▷  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vartheta_k}$  and  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \vartheta_k}$            ▷ Calculate using Finite differences
15:    ▷  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial \vartheta_k} \leftarrow$  (Eq: 3.11)           ▷ Undamped Eigenvalue Residual [5]
16:    ▷  $\frac{\partial \phi_j}{\partial \vartheta_k} \leftarrow$  (Eq: 3.12)           ▷ Undamped Eigenvectors Residual [5]
17:    ▷  $\mathbf{S}_j \leftarrow$  (Eq: 3.7)           ▷ Sensitivity Matrix
18:    reset  $\boldsymbol{\vartheta}_k$ 
19:  end for
20:  return  $\mathbf{S}_j$ 
21: end procedure

```

Algorithm 3 This function import and elaborate ith-data generated by FE model

```

1: procedure DATAMODEL(i, flag, file, modelData)
2:
3:   ▷ Import data from file .rpt and .f06
4:   Check sorting eigenvector coefficient by ID element
5:   if False then
6:     ▷ Sort eigenvector coefficient by ID el.
7:   else
8:     Continue
9:   end if
10:
11:   ▷ initialize  $\lambda_{ji} \Phi_i$ 
12:   while  $j < \text{number of mode considered}$  do
13:     if j-th is Torsional mode then
14:       ▷  $\lambda_j \leftarrow (\lambda_j)_{tor}$ 
15:       ▷  $\phi_j \leftarrow (\phi_j)_{tor}$ 
16:     else j-th is Flexional mode
17:       ▷  $\lambda_j \leftarrow (\lambda_j)_{flex}$ 
18:       ▷  $\phi_j \leftarrow (\phi_j)_{flex}$ 
19:     end if
20:   end while
21:   ▷  $\lambda_i \leftarrow \{(\lambda_j)_{flex} (\lambda_j)_{flex}\}^T$            ▷ i-th Model Eigenvalues
22:   ▷  $\Phi_i \leftarrow \{(\phi_j)_{flex} (\phi_j)_{tor}\}^T$        ▷ i-th Model Eigenvectors
23:   ▷  $z_i \leftarrow \{\lambda_j \phi_j\}^T$                  ▷ i-th Model modal vector
24:   ▷ Check eigenvectors signs and modify to convention mode
25: end procedure

```

Bibliografia

- [1] Salvatore Brischetto. *Appunti del corso Modellazione Numerica e tecniche di simulazione di strutture aerospaziali*. 2020 (cit. alle pp. 3, 50).
- [2] John E Mottershead e MI Friswell. «Model updating in structural dynamics: a survey». In: *Journal of sound and vibration* 167.2 (1993), pp. 347–375 (cit. alle pp. 5, 26).
- [3] Michael Friswell e John E Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*. Vol. 38. Springer Science & Business Media, 2013 (cit. alle pp. 5, 13, 30).
- [4] Michael Friswell e John E Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*. Vol. 38. Springer Science & Business Media, 1995 (cit. alle pp. 5, 12, 16, 20, 23, 28, 32, 33, 71).
- [5] John E Mottershead, Michael Link e Michael I Friswell. «The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial». In: *Mechanical systems and signal processing* 25.7 (2011), pp. 2275–2296 (cit. alle pp. 10, 28, 29, 92).
- [6] Randall J Allemang. «The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse». In: *Sound and vibration* 37.8 (2003), pp. 14–23 (cit. alle pp. 10, 13, 14, 19).
- [7] DJ Ewins. «Model validation: Correlation for updating». In: *Sadhana* 25.3 (2000), pp. 221–234 (cit. alle pp. 10, 13).
- [8] WU Yun-Xin. «Sensitivity-based finite element model updating methods with applications to electronic equipments». Tesi di dott. Faculte Polytechnique de Mons, Belgium, 1999 (cit. alle pp. 11–14, 17, 20, 22, 24–26, 28, 31).
- [9] Robert J Guyan. «Reduction of stiffness and mass matrices». In: *AIAA journal* 3.2 (1965), pp. 380–380 (cit. alle pp. 11, 20).
- [10] Menahem Baruch e Itzhack Y Bar Itzhack. «Optimal weighted orthogonalization of measured modes». In: *AIAA journal* 16.4 (1978), pp. 346–351 (cit. a p. 12).

-
- [11] Menahem Baruch. «Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests». In: *AIAA journal* 16.11 (1978), pp. 1208–1210 (cit. a p. 12).
- [12] Alex Berman. «Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes». In: *AIAA journal* 17.10 (1979), pp. 1147–1148 (cit. a p. 12).
- [13] A Berman e EJ Nagy. «Improvement of a large analytical model using test data». In: *AIAA journal* 21.8 (1983), pp. 1168–1173 (cit. a p. 12).
- [14] Miroslav Pastor, Michal Binda e Tomáš Harčarik. «Modal assurance criterion». In: *Procedia Engineering* 48 (2012), pp. 543–548 (cit. alle pp. 13, 16).
- [15] Michael Link. «Updating of analytical models—basic procedures and extensions». In: *Modal Analysis and Testing*. Springer, 1999, pp. 281–304 (cit. a p. 13).
- [16] Mario Paz. «Dynamic condensation». In: *AIAA journal* 22.5 (1984), pp. 724–727 (cit. a p. 22).
- [17] J. O’Callahan. «A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model». In: *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, NV*. (1989) (cit. a p. 23).
- [18] MI Friswell, SD Garvey e JET Penny. «Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques». In: *Journal of sound and vibration* 186.2 (1995), pp. 311–323 (cit. alle pp. 23, 24).
- [19] J. C. O’Callahan. «System Equivalent Reduction Expansion Process». In: *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, NV*. (1989) (cit. a p. 24).
- [20] Nataša Trišović. «Eigenvalue sensitivity analysis in structural dynamics». In: *FME transactions* 35.3 (2007), pp. 149–156 (cit. a p. 28).
- [21] RL Fox e MP Kapoor. «Rates of change of eigenvalues and eigenvectors.» In: *AIAA journal* 6.12 (1968), pp. 2426–2429 (cit. a p. 29).
- [22] Wei Zhao. «Optimal Design and Analysis of Bio-inspired, Curvilinearly Stiffened Composite Flexible Wings». Tesi di dott. Virginia Tech, 2017 (cit. alle pp. 34, 91, 92).
- [23] Junuthula Narasimha Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2003 (cit. alle pp. 49, 53).
- [24] Nilson Barbieri, Renato Barbieri e Luiz Carlos Winikes. «Parameters estimation of sandwich beam model with rigid polyurethane foam core». In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 24.2 (2010), pp. 406–415 (cit. a p. 53).

BIBLIOGRAFIA

- [25] *Scotch-Weld™ Structural Adhesive Film AF 163-2*. St. Paul, MN 55144-1000, USA: 3M Aerospace e Aircraft Maintenance Division, 3M Center, 2004 (cit. a p. 63).