



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale

In ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Carico critico di pannello irrigidito mediante FEM:
effetto della presenza di un de-bonding e analisi dello
stato tensionale all'apice del difetto.

Relatore

Prof. Giacomo Frulla

Correlatore

Prof. Enrico Cestino

Candidato

Federico Ausili

Anno accademico 2021/2022

Sommario

1. Introduzione	2
1.1. Background.....	2
1.2. Analisi dello stato dell'arte.....	3
2. Richiami teorici.....	6
2.1. Carico critico di Eulero.....	6
2.2. Carico critico dei pannelli.....	10
2.3. Metodo delle rigidezze spalmate	19
3. Analisi preliminari.....	23
3.1. Calcolo carico di buckling dell'elemento ripetitivo	23
3.2. Calcolo del carico critico in presenza di debonding.....	25
3.3. Confronto dei risultati.....	27
3.4. Carico critico pannello irrigidito	28
4. Analisi pannello integro	31
4.1. Modello con elementi solidi	32
4.1.1. Geometria	32
4.1.2. Mesh	32
4.1.3. Vincoli e carichi	34
4.1.4. Analisi di buckling e analisi non lineare	34
4.2. Modello con elementi solidi e shell.....	39
4.2.1. Geometria	39
4.2.2. Mesh	40
4.2.3. Vincoli e carichi	41
4.2.4. Analisi di buckling e analisi non lineare	41
4.3. Conclusioni.....	46

5.	Analisi pannello con debonding.....	48
5.1.	Effetto del debonding sul carico critico.....	49
5.2.	Analisi non lineare.....	52
6.	Conclusioni.....	63
7.	Riferimenti	66

1. Introduzione

1.1. Background

Nelle applicazioni aeronautiche, i pannelli irrigiditi sono ampiamente utilizzati nelle strutture primarie, ali e fusoliera, viste le elevate prestazioni strutturali, in termini di capacità di carico e rigidità, a fronte di un peso ridotto. Queste prestazioni vengono raggiunte facendo operare i pannelli irrigiditi in campo postcritico, quando la struttura va in instabilità, infatti, continua a sopportare il carico ridistribuendolo negli irrigidimenti.

Un pannello irrigidito è costituito da una lamina a cui vengono aggiunte dei rinforzi, irrigidimenti, per aumentarne le caratteristiche strutturali. Uno dei metodi più utilizzati per unire gli elementi è l'utilizzo di adesivi aeronautici, visti i vantaggi di un incollaggio rispetto alle altre forme di fissaggio meccanico. Questi vantaggi sono già stati studiati in precedenza e per questo i fissaggi mediante adesivi vengono ad oggi utilizzati per unire anche strutture metalliche. Questo tipo di giunzione garantisce, tra le altre cose, una distribuzione di stress uniforme nell'area di incollaggio, come anche una maggiore resistenza agli effetti ambientali.

La presenza di un difetto in questi incollaggi può, però, indurre delle variazioni nelle proprietà del pannello irrigidito. In particolare, una delle caratteristiche di maggiore rilevanza è il carico critico di instabilità della struttura, che identifica il livello di carico per cui la struttura va in instabilità.

Lo scopo di questa tesi è andare ad analizzare tramite l'utilizzo di un modello agli elementi finiti, un pannello irrigidito in materiale isotropo in cui viene inserito un difetto di debonding, e di osservare gli effetti che comporta la presenza del difetto, e delle sue dimensioni, sul carico critico del pannello stesso. Inoltre, viene condotto uno studio sulle distribuzioni di tensioni in prossimità degli apici del difetto al variare della dimensione di quest'ultimo.

Con questo obiettivo, dopo un primo calcolo analitico mediante la teoria del carico critico di Eulero, sono stati realizzati due modelli ad elementi finiti. In primo luogo, il pannello irrigidito

di interesse è stato realizzato integro, ovvero in assenza di difetti, in questo modo si ottiene un'idea generale del comportamento della struttura sotto la configurazione di carico in esame.

In secondo luogo, viene inserito nei modelli il difetto e si procede con lo studio del comportamento della struttura in presenza di un debonding. Ci si concentra in particolare sull'andamento del carico critico di instabilità. In fine, si vanno a studiare gli stati tensionali sull'adesivo in presenza del difetto per dei valori significativi della sua dimensione andando ad evidenziare in particolare ciò che accade all'apice del difetto.

1.2. Analisi dello stato dell'arte

Vista l'elevato utilizzo dei pannelli irrigiditi in campo aeronautico, negli ultimi anni sono state svolte numerose ricerche su questi elementi strutturali, volte alla ricerca di metodi per valutare le caratteristiche strutturali, tra cui l'instabilità globale e locale dei pannelli, il carico ultimo di rottura e le risposte di buckling e post-buckling. Tutte queste ricerche sono state raccolte da Osama K. Bedair [1] e da Prusty e Hellier [2]. Il primo oltre a svolgere una *review* degli studi svolti, presenta anche una formulazione teorica per l'analisi di stabilità dei pannelli irrigiditi sottoposti a compressione uniforme, derivando prima le equazioni differenziali di governo e successivamente utilizzando un approccio basato sulle energie. Il secondo invece mostra in maniera più ampia lo stato dell'arte degli anni compresi tra il 2000 e 2012, andando a concentrarsi sugli studi, sia analitici che sperimentali, riguardanti il comportamento delle strutture in materiale isotropo e materiale composito in condizione di buckling e post-buckling.

Esiste, invece, un numero ridotto di studi che investiga su pannelli irrigiditi che presentano un difetto all'interfaccia tra piastra ed elemento resistivo, ovvero un'imperfezione sull'adesivo utilizzato per unire i due elementi, la maggior parte dei quali è stata effettuata per pannelli in materiale composito. Per i pannelli in alluminio, D.S. Zarouchas e R.C. Alderiesten [3] presentano uno studio parametrico mediante modelli ad elementi finiti che accoppia un'analisi di buckling non lineare ed una valutazione della *strain energy release rate* critica, su pannelli con irrigidimenti a J sottoposti a compressione. Lo studio è stato condotto applicando il difetto di debonding variandone posizione e dimensioni ed osservandone l'effetto sia sulla capacità di carico della struttura sia sul meccanismo che provoca la propagazione del difetto.

Nei pannelli in materiale composito è stato studiato il meccanismo di distacco tra skin ed irrigidimento [4,5]. È stato osservato, confrontando prove sperimentali con modelli ad elementi finiti, come la presenza di un difetto o di un danno all'interno di un pannello irrigidito conduca ad una riduzione della resistenza della struttura e vada ad influenzare il meccanismo di rottura che porta a cedimento. Altri studi sono stati condotti sull'effetto che un danno di debonding può avere sulla risposta in post-buckling della struttura [6]. Utilizzando uno strumento numerico è stato analizzato il comportamento strutturale del pannello irrigidito in campo postcritico e la sua interazione al variare dei parametri del danno. È stato osservato come la propagazione del difetto avviene in seguito ad una interazione tra instabilità locale, dovuta ad una riduzione locale della rigidezza nella zona danneggiata, ed instabilità globale del pannello irrigidito. È stata anche valutata sperimentalmente la perdita di resistenza in pannelli con difetti di fabbricazione (*embedded defects*) e difetti conseguenti ad impatto (*impact damage*) [7], osservando una diminuzione della capacità di carico della struttura fino al 29% rispetto alla condizione integra. Studi analoghi sono stati svolti sui pannelli sottoposti a differenti condizioni di carico, in particolare, carichi ciclici [8], affiancando dati sperimentali e numerici, andando a studiare il fenomeno della fatica in campo di post-buckling.

2. Richiami teorici

In questo capitolo vengono riprese delle teorie analitiche utilizzate per studiare il comportamento di buckling di strutture semplici riprese da [12]. Viene inizialmente esposta la teoria del carico critico euleriano applicato ad un'asta appoggiata semplicemente compressa. Successivamente si va ad analizzare il carico critico dei pannelli, anche questi nel caso di estremi semplicemente appoggiati e sottoposti a carico di compressione. Ed infine, viene trattata brevemente la teoria delle rigidezze spalmate, utile a ricondurre un pannello irrigidito ad una piastra piana.

2.1. Carico critico di Eulero

Si consideri un'asta ad asse perfettamente rettilineo, a sezione costante, compressa assialmente da un carico $\bar{P} = \lambda \bar{P}^0$ (dove \bar{P}^0 è un valore di riferimento e λ un parametro variabile) avente retta d'azione coincidente con l'asse dell'asta, il quale a sua volta coincide con l'asse x , di modo che il piano (y,z) coincida con il piano della sezione trasversale dell'asta; inoltre, il piano (x,z) coincida con il piano di inflessione dell'asta, *figura 2.1*. Utilizzando il metodo degli equilibri adiacenti, andiamo a studiare la stabilità dell'asta.

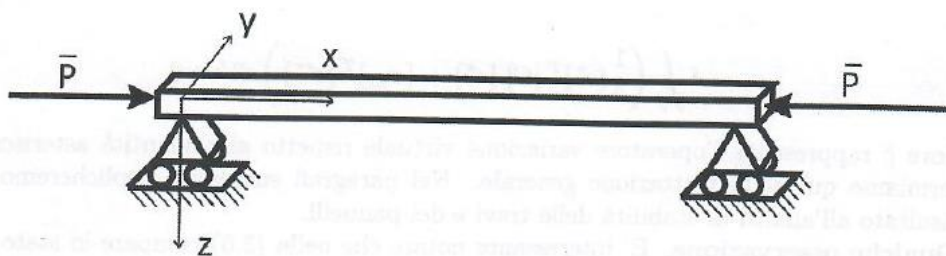


Figura 2.1 Asta caricata a compressione semplice

Indichiamo con u_{eq}, v_{eq} e w_{eq} il campo di spostamenti corrispondente alla condizione di equilibrio di cui si vuole studiare la stabilità (configurazione iniziale) e con $\epsilon u^*, \epsilon v^*$ e ϵw^* le componenti di perturbazione, in modo che:

$$\begin{aligned}
u &= u_{eq} + \epsilon u^* \\
v &= v_{eq} + \epsilon v^* \\
w &= w_{eq} + \epsilon w^*
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

Ovvero in forma matriciale e con ovvio significato dei simboli, possiamo scrivere il campo di spostamenti corrispondente alla configurazione di equilibrio perturbata, C_a , come

$$\{s\} = \{s_{eq}\} + \epsilon \{s^*\} \tag{2.2}$$

Indichiamo poi il sistema di carichi agenti sulla porzione S_p della superficie esterna S che delimita il volume V occupato dalla struttura con:

$$\{p\}^T = [\bar{p}_x \quad \bar{p}_y \quad \bar{p}_z]$$

Se le due configurazioni di equilibrio sono soggette alle stesse condizioni di vincolo, risulta $u^* = 0$ su S_u , la restante porzione S su cui sono assegnati gli spostamenti. Sotto queste ipotesi, supposte nulle le forze di massa, il principio dei lavori virtuali per lo stato adiacente assume la forma seguente:

$$\int_V \{\sigma\}^T \delta\{\epsilon\} dV = \int_{S_p} \{\bar{p}\}^T \delta\{s\} dS \quad (\text{Segnaposto1}) \tag{2.3}$$

Come ben noto, nell'ambito della teoria delle travi di Eulero-Bernoulli si assume nulla la componente v e le altre due componenti indipendenti dalla coordinata assiale y ; più specificatamente, si assume il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u(x, z) = u^{(0)} - z w_{,x}^{(0)} \\
w(x, y, z) &= w^{(0)}
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

Dove $u^{(0)}(x)$ e $w^{(0)}(x)$ rappresentano le componenti di spostamento di un punto inizialmente appartenente all'asse x (asse dell'asta indeformata). Il campo di deformazioni vale¹

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + w_{,x}^2) = u_{,x}^{(0)} - z w_{,xx}^{(0)} + \frac{1}{2} w_{,x}^{(0)2} \\
\epsilon_y &= \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0
\end{aligned}$$

¹ Poiché l'inflessione avviene nel piano (x,z) , appare ragionevole assumere il quadrato di $u_{,x}$ trascurabile rispetto a $u_{,x}$ e $w_{,x}^2$. Inoltre, poiché siamo nell'ambito della teoria delle travi di Eulero-Bernoulli, si assumono nulli la dilatazione lungo z e lo scorrimento nel piano (x,z) .

Sostituendo queste espressioni nel principio dei lavori virtuali (2.3) ed integrando per parti, si ottiene (tralasciando l'apice per semplicità di scrittura)

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^L \left\{ N_{x,x} \delta u + \left[M_{x,xx} + (N_x w_{,x})_{,x} \right] \delta w \right\} dx + \int_0^L (N_x \delta u)_{,x} dx - \int_0^L (M_x \delta w_{,x})_{,x} dx + \\
 & + \int_0^L \left[(M_x + N_x w_{,x})_{,x} \delta w \right]_{,x} dx = \bar{P} \delta u(0) - \bar{P} \delta u(L)
 \end{aligned}$$

Da cui si ottengono agevolmente le equazioni di equilibrio per lo stato iniziale

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} &= 0 \\
 M_{x,xx} + (N_x w_{,x})_{,x} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

e le relative condizioni al contorno. Per esempio, nel caso di estremi semplicemente appoggiati, si ha

$$\begin{aligned}
 x = 0 : w = M_x = 0; N_x &= -\bar{P} = -\lambda \bar{P}^0 \\
 x = L : w = M_x = 0; N_x &= -\bar{P}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dalla prima equazione di equilibrio si ricava che

$$N_x = \text{cost.} = -\bar{P} = -\lambda \bar{P}^0 \tag{2.6}$$

Che sostituito nella seconda, fornisce

$$M_{x,xx} - \bar{P} w_{,xx} = 0 \tag{2.7}$$

Per il caso di asta in materiale omogeneo ed isotropo avente modulo di elasticità longitudinale E e di inerzia della sezione trasversale dell'asta rispetto all'asse normale al piano di inflessione I , l'equazione diventa

$$EI w_{,xxxx} + \lambda \bar{P}^0 w_{,xx} = 0 \tag{2.8}$$

Ricordando che I è il momento e

Analogamente per la condizione perturbata si può ottenere l'equazione di stabilità

$$EI w_{,xxxx}^* + \lambda \bar{P}^0 w_{,xx}^* = 0 \tag{2.9}$$

E le relative condizioni al contorno per il caso considerato, ovvero $w_{eq} = 0$:

$$x = 0, L : w^* = M_x^* = N_x^* = 0 \tag{2.10}$$

L'equazione di stabilità per la condizione perturbata ammette come soluzione

$$w^* = W_m^* \sin \alpha_m x \quad (2.11)$$

Dove $\alpha_m = m\pi/L$, essendo m il numero di semionde del modo di buckling. Sostituendo le opportune derivate della (2.11) nella (2.9) e semplificando si ottiene:

$$(EI\alpha_m^2 - \lambda\bar{P}^0)W_m^* = 0 \quad (2.12)$$

La quale risulta soddisfatta per $W_m^* = 0$, ovvero non esiste lo stato di equilibrio adiacente, oppure per $\lambda = \frac{EI\alpha_m^2}{\bar{P}^0}$. Al variare del parametro m , questa soluzione restituisce i valori del carico di compressione in corrispondenza dei quali accanto alla configurazione di equilibrio iniziale dell'asta, caratterizzata da asse rettilineo, è possibile una configurazione adiacente in cui l'asse dell'asta si inflette assumendo la forma di una senoide avente numero di semionde m ed ampiezza W_m^* indeterminata. Il valore minimo si ottiene per $m = 1$ viene detto carico critico euleriano e vale:

$$\bar{P}_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2} \quad (2.13)$$

Ricordando che si può scrivere $I = S\rho^2$, dove S è l'area della sezione trasversale dell'asta e ρ il suo raggio di inerzia, possiamo scrivere introducendo la tensione critica

$$\sigma_{cr} = \frac{\bar{P}_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{A^2} \quad (2.14)$$

Dove è stata introdotta la *snellezza dell'asta*, $A = \frac{L}{\rho}$. Poiché nel ricavare la formulazione per la tensione critica è stata supposta valida la legge di Hooke, risulta valida per $\sigma_{cr} \leq \sigma_p$, ovvero per valori della tensione critica minori della tensione limite di proporzionalità. È quindi possibile determinare la cosiddetta *snellezza limite* A' , cioè, il valore della snellezza al di sopra del quale si può applicare la formulazione ottenuta (campo delle aste lunghe):

$$\sigma_{cr} = \sigma_p = \frac{\pi^2 E}{A'^2} \quad \text{da cui} \quad A' = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

Si noti come il valore della snellezza limite è funzione solo delle caratteristiche meccaniche del materiale di cui è fatta l'asta (modulo di Young, E , e tensione limite di proporzionalità, σ_p). Poiché oltre il carico critico \bar{P}_{cr} l'equilibrio ad asse rettilineo è instabile e l'asta si inflette

arrivando rapidamente al collasso, \bar{P}_{cr} rappresenta normalmente il carico massimo di compressione a cui si fa lavorare una data asta.

Nel caso di aste lunghe diversamente vincolate alle estremità, si dimostra che vale ancora la formula di Eulero con $A = \frac{l}{\rho}$, essendo l la lunghezza libera di inflessione dell'asta, definita come la distanza tra due flessi consecutivi nel modo di deformazione critico (modo di buckling).

In *figura 2.2* sono date alcune condizioni di vincolo ed i relativi valori della lunghezza libera di inflessione.

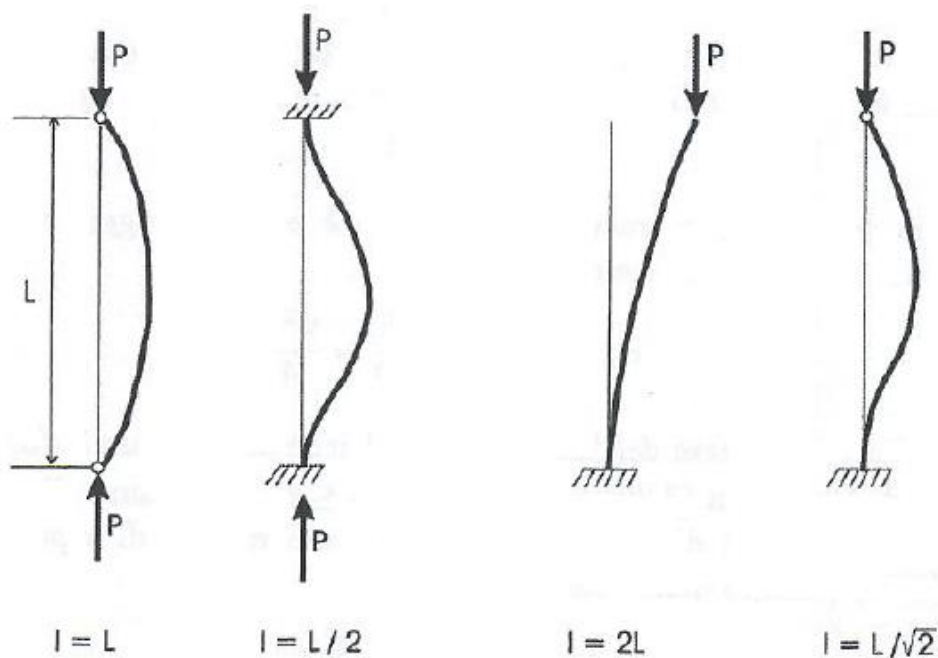


Figura 2.2 Valori della lunghezza libera di inflessione per differenti condizioni di vincolo

2.2. Carico critico dei pannelli

Il pannello è un elemento strutturale bidimensionale, intendendo con ciò dire che esso è caratterizzato dall'aver due dimensioni grandi rispetto alla terza, che prende il nome di spessore. Esso può essere piano o curvo, a pianta rettangolare, trapezia, triangolare, circolare, ecc. Il pannello rettangolare è l'elemento strutturale tipico dei fasciami e delle anime dei longheroni. I due stati di sollecitazione fondamentali nei riguardi della stabilità dei pannelli

sono: compressione e taglio nel piano di riferimento del pannello. Anche se molto spesso questi due stati di sollecitazione coesistono, è possibile scindere i due casi di sollecitazione e studiarli separatamente, andando così a semplificare la matematica del problema.

Si consideri ora un pannello piano rettangolare di dimensioni in pianta a e b , e spessore s , figura 2.3. Il piano (x,y) viene assunto coincidente col piano medio del pannello e l'asse z normale ad esso, di modo che la terna (x,y,z) sia destrorsa, i lati del pannello paralleli all'asse y (lunghezza a) sono caricati da un carico $\bar{P}_x = \lambda \bar{P}_x^0$ parallelo all'asse x e da un carico $\bar{P}_{xy} = \lambda \bar{P}_{xy}^0$ parallelo all'asse y . I lati del pannello paralleli all'asse x (lunghezza b) siano caricati da un carico $\bar{P}_y = \lambda \bar{P}_y^0$ parallelo all'asse y e da un carico $\bar{P}_{xy} = \lambda \bar{P}_{xy}^0$ parallelo all'asse x . I carichi sono positivi quando agiscono con il verso indicato in figura 2.3.

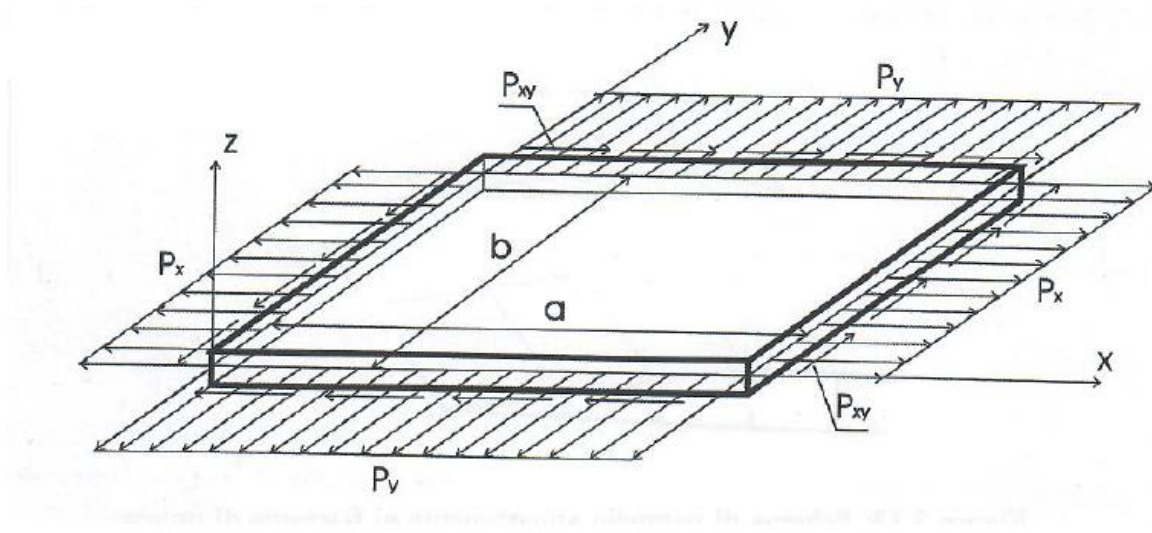


Figura 2.3 Distribuzione dei carichi e segni positivi per il pannello

Si ammette inoltre che il sistema di carichi venga fatto crescere mantenendo invariata la sua distribuzione spaziale, individuata dall'apice (0) . In tal modo, è possibile caratterizzare la distribuzione effettiva dei carichi mediante il parametro variabile λ .

Nell'ambito della teoria delle piastre di Kirchhoff si assume il seguente campo di spostamenti

$$\begin{aligned}
 u &= u^{(0)} - z w_{,x}^{(0)} \\
 v &= v^{(0)} - z w_{,y}^{(0)} \\
 w &= w^{(0)}
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Dove $u^{(0)} = u^{(0)}(x, y)$, $v^{(0)} = v^{(0)}(x, y)$, $w^{(0)} = w^{(0)}(x, y)$ sono le componenti di spostamento di un punto giacente sul piano medio del pannello. Per quel che riguarda il campo di deformazioni, si utilizzano le espressioni di von Kàrman (moderate rotazioni) che vengono scritte tralasciano l'apice ⁽⁰⁾ per semplicità

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= u_{,x} - zw_{,xx} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \epsilon_y &= v_{,y} - zw_{,yy} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} + w_{,x}w_{,y}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Sostituendo nel principio dei lavori virtuali, si ottiene

$$\begin{aligned}& \int_0^a \int_0^b \{ (N_{x,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{y,y})\delta v + [M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} \\ & \quad + M_{y,yy} + (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y})_{,x} + (N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y})_{,y}] dw \} dx dy + \\ & - \int_0^a [(N_{xy} - \bar{P}_{xy})\delta u + (N_y - \bar{P}_y)\delta v + (M_{xy,x} + N_{xy} w_{,x} + M_{y,y} + N_y w_{,y})\delta w - M_{xy}\delta w_{,x} \\ & \quad - M_y \delta w_{,y}]_0^b dx + \\ & - \int_0^b [(N_x - \bar{P}_x)\delta u + (N_{xy} - \bar{P}_{xy})\delta v + (M_{x,x} + N_x w_{,x} + M_{xy,y} + N_{xy} w_{,y})\delta w - M_x \delta w_{,x} \\ & \quad - M_{xy} \delta w_{,y}]_0^a dy = 0\end{aligned}\tag{2.17}$$

Da cui scaturiscono le equazioni di equilibrio per lo stato iniziale

$$\begin{aligned}N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y})_{,x} + (N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y})_{,y} &= 0\end{aligned}\tag{2.18}$$

E le relative condizioni al contorno, che per il caso di pannello semplicemente appoggiato sui quattro lati sono:

$$\begin{aligned}x = 0, a : w = M_x = 0; \quad N_x = \lambda \bar{P}_x^0; \quad N_{xy} = \lambda \bar{P}_{xy}^0 \\ y = 0, b : w = M_y = 0; \quad N_y = \lambda \bar{P}_y^0; \quad N_{xy} = \lambda \bar{P}_{xy}^0\end{aligned}\tag{2.19}$$

Unendo le equazioni di equilibrio per lo stato iniziale (2.18) si ottiene la seguente forma

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} = 0 \quad (2.20)$$

Per quel che riguarda le equazioni di stabilità, esprimendo all'interno delle deformazioni non lineari il generico spostamento come somma dei due contributi, si ottiene:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x,eq} \\ \epsilon_{y,eq} \\ \gamma_{xy,eq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{eq,x} - z w_{eq,xx} + \frac{1}{2} (w_{eq,x})^2 \\ v_{eq,y} - z w_{eq,yy} + \frac{1}{2} (w_{eq,y})^2 \\ u_{eq,y} + v_{eq,x} - 2z w_{eq,xy} + w_{eq,x} w_{eq,y} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\{\epsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^* \\ \epsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^* - z w_{,xx}^* + w_{eq,x} w_{,x}^* \\ v_{,y}^* - z w_{,yy}^* + w_{eq,y} w_{,y}^* \\ u_{,y}^* + v_{,x}^* - 2z w_{,xy}^* + w_{eq,x} w_{,y}^* + w_{,x}^* w_{eq,y} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\{\epsilon^{**}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{**} \\ \epsilon_y^{**} \\ \gamma_{xy}^{**} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} (w_{,x}^*)^2 \\ \frac{1}{2} (w_{,y}^*)^2 \\ w_{,x}^* w_{,y}^* \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Sostituendo queste espressioni nel principio dei lavori virtuali scritto per la configurazione di equilibrio adiacente ed effettuando le opportune integrazioni per parti, si ottengono le *equazioni linearizzate di stabilità per i pannelli sollecitati da soli carichi membranali agenti sul contorno e le relative condizioni al contorno (omogenee)*. Si omettono i passaggi e si riportano direttamente le equazioni finali:

$$\begin{aligned} N_{x,x}^* + N_{xy,y}^* &= 0 \\ N_{xy,x}^* + N_{y,y}^* &= 0 \\ M_{x,xx}^* + 2M_{xy,xy}^* + M_{y,yy}^* + (N_{x,eq} w_{,x}^* + N_{xy,eq} w_{,y}^*)_{,x} + (N_{xy,eq} w_{,x}^* + N_{y,eq} w_{,y}^*)_{,y} \\ &+ (N_x^* w_{eq,x} + N_{xy}^* w_{eq,y})_{,x} + (N_{xy}^* w_{eq,x} + N_y^* w_{eq,y})_{,y} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ovvero, ricordando che (N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*) e $(N_{x,eq}, N_{y,eq}, N_{xy,eq})$ soddisfano le rispettive equazioni di stabilità e di equilibrio nel piano, allora si può riscrivere

$$\begin{aligned} M_{x,xx}^* + 2M_{xy,xy}^* + M_{y,yy}^* + N_{x,eq} w_{,xx}^* + 2N_{xy,eq} w_{,xy}^* + N_{y,eq} w_{,yy}^* + N_x^* w_{eq,xx} + 2N_{xy}^* w_{eq,xy} \\ + N_y^* w_{eq,yy} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Si osserva come il modello non lineare di von K arman porti ad avere gli effetti dovuti ai carichi membranali presenti nel pannello nello stato di buckling incipiente solo nella terza equazione (equazione di stabilit  nella direzione trasversale).

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} x = 0, a : w^* = M_x^* = N_x^* = N_{xy}^* = 0 \\ y = 0, b : w^* = M_y^* = N_{xy}^* = N_y^* = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nelle equazioni precedenti sono state introdotte le risultanti $\{N\}$ ed i momenti risultanti $\{M\}$ delle tensioni $\{\sigma\}$ definite nel modo usuale. Per le quantit  asteriscate avremo:

$$\{N^*\} = [A]\{\epsilon_m^*\} + [B]\{\kappa^*\}; \quad \{M^*\} = [B]\{\epsilon_m^*\} + [D]\{\kappa^*\} \quad (2.27)$$

Dove

$$\{\epsilon_m^*\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{mx}^* \\ \epsilon_{my}^* \\ \epsilon_{mxy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^* + w_{eq,x} w_{,x}^* \\ v_{,y}^* + w_{eq,y} w_{,y}^* \\ u_{,y}^* + v_{,x}^* + w_{eq,x} w_{,y}^* + w_{,x}^* w_{eq,y} \end{Bmatrix}; \quad \{\kappa^*\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx}^* \\ w_{,yy}^* \\ 2w_{,xy}^* \end{Bmatrix}$$

e $[A]$, $[B]$ e $[D]$ sono le usuali matrici di rigidezza membranale, di accoppiamento e flesso torsionale, rispettivamente.

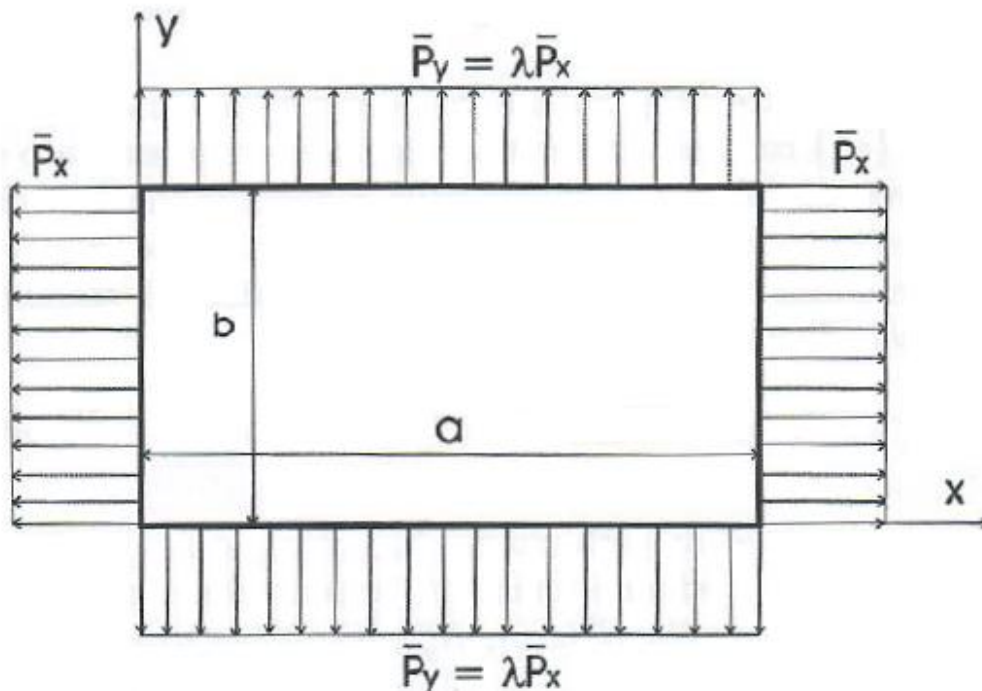


Figura 2.4 Pannello piano rettangolare sollecitato da carichi membranali uniformemente distribuiti

Consideriamo ora una piastra costituita da un laminato cross-ply simmetrico, semplicemente appoggiata sui 4 lati e sollecitata nel proprio piano da carichi uniformemente distribuiti, $\lambda\bar{P}_x^0$ e $\lambda\bar{P}_y^0$, perpendicolari ai suoi lati, *figura 2.4*. Le relazioni costitutive si riducono a:

$$\{N\} = [A]\{\epsilon_m\}; \quad \{M\} = [D]\{\kappa\} \quad (2.28)$$

Assumendo una soluzione per l'equilibrio iniziale del tipo $w_{eq}(x, y) = 0$ e che siano $N_{x,eq}(x, y) = \lambda\bar{P}_x^0$; $N_{y,eq}(x, y) = \lambda\bar{P}_y^0$; $N_{xy,eq}(x, y) = 0$, allora le equazioni di equilibrio e le relative condizioni al contorno risultano identicamente soddisfatte. Questo è lo stato di prebuckling del pannello ed è anche lo stato che abbiamo chiamato iniziale e di cui vogliamo studiare la stabilità andando ad indagare se esista una configurazione prossima di equilibrio sotto il medesimo carico esterno (configurazione di equilibrio adiacente).

Per quanto riguarda le equazioni di stabilità, invece, abbiamo:

$$\begin{aligned} N_{x,x}^* + N_{xy,y}^* &= 0 \\ N_{xy,x}^* + N_{y,y}^* &= 0 \\ M_{x,xx}^* + 2M_{xy,xy}^* + M_{y,yy}^* + \lambda(\bar{P}_x^0 w_{,xx}^* + \bar{P}_y^0 w_{,yy}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Che in termini di componenti di spostamento risultano essere:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{,xx}^* + A_{66}u_{,yy}^* + (A_{12} + A_{66})v_{,xy}^* &= 0 \\ (A_{12} + A_{66})u_{,xy}^* + A_{66}v_{,xx}^* + A_{22}v_{,yy}^* &= 0 \\ D_{11}w_{,xxxx}^* + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy}^* + D_{22}w_{,yyyy}^* - \lambda(\bar{P}_x^0 w_{,xx}^* + \bar{P}_y^0 w_{,yy}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si tratta di un problema di ricerca di autovalori ed autofunzioni in quanto sia le equazioni di campo che le condizioni al contorno sono omogenee. Gli autovalori rappresentano il carico critico (di biforcazione) e le autofunzioni i corrispondenti modi di buckling. Ipotizzando una soluzione del tipo

$$\begin{aligned} u^* &= U_{mn}^* \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = U_{mn}^* \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ v^* &= V_{mn}^* \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = V_{mn}^* \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ w^* &= W_{mn}^* \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = W_{mn}^* \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si può dimostrare che la forma assunta per il campo di spostamenti generalizzati soddisfa identicamente le condizioni al contorno. Sostituendo la soluzione assunta nelle equazioni di stabilità, si ottiene un sistema di tre equazioni algebriche omogenee nelle ampiezze incognite U_{mn}^* , V_{mn}^* e W_{mn}^* e nel parametro λ , ed introducendo $R_y = \bar{P}_y^0 / \bar{P}_x^0$, otteniamo

$$\begin{aligned} (\alpha_m^2 A_{11} + \beta_n^2 A_{66}) U_{mn}^* + \alpha_m \beta_n (A_{12} + A_{66}) V_{mn}^* &= 0 \\ \alpha_m \beta_n (A_{12} + A_{66}) U_{mn}^* + (\alpha_m^2 A_{66} + \beta_n^2 A_{22}) V_{mn}^* &= 0 \\ [D_{11} \alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_{22} \beta_n^4 - \lambda(\alpha_m^2 + R_y \beta_n^2)] W_{mn}^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

in cui la terza risulta disaccoppiata dalle prime due e dovendo questa essere verificata per qualsiasi valore di W_{mn}^* , si ricava dunque

$$\lambda_{cr} = \frac{\alpha_m^2 \left[D_{11} + 2 \left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^4 D_{22} \right]}{\bar{P}_x^0 \left[1 + R_y \left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 \right]} \quad (2.33)$$

Si fa notare come al variare del parametro R_y , si possono ottenere tutte le possibili configurazioni di carico nel piano del pannello e va inoltre sottolineato che l'equazione così ricavata ha senso solo se

$$1 + R_y \left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 > 0$$

Nel caso particolare di pannelli in materiale isotropo ed omogeneo, si ha

$$D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Da cui la formulazione per carico critico e, di conseguenza, la tensione critica

$$\bar{P}_{x,cr} = \frac{D \left(\alpha_m + \frac{\beta_n^2}{\alpha_m} \right)^2}{1 + R_y \left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2}; \quad \sigma_{x,cr} = \frac{\bar{P}_{x,cr}}{h} = K_{x,cr} E \left(\frac{h}{b} \right)^2 \quad (2.34)$$

Dove $K_{x,cr}$ è detto *parametro di carico critico* e vale

$$K_{x,cr} = \frac{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{m}{r} + \frac{rn^2}{m} \right)^2}{1 + R_y \frac{n^2 r^2}{m^2}} \quad (2.35)$$

e $r = a/b$ la *snellezza in pianta*. Il parametro di carico critico dipende dalle caratteristiche del materiale, dal numero di semionde m e n del modo di buckling, dalle dimensioni a e b del pannello e dal valore del parametro di carico R_y .

Nel caso specifico di pannello compresso su due soli lati paralleli, si ha

$$\bar{P}_x = \bar{P}; \quad \bar{P}_y = 0; \quad R_y = 0; \quad K_{x,cr} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{m}{r} + \frac{rn^2}{m} \right)^2$$

In *figura 2.5* si riporta l'andamento del parametro $K_{x,cr}$ in funzione della snellezza in pianta r , per diverse configurazioni di vincolo del pannello.

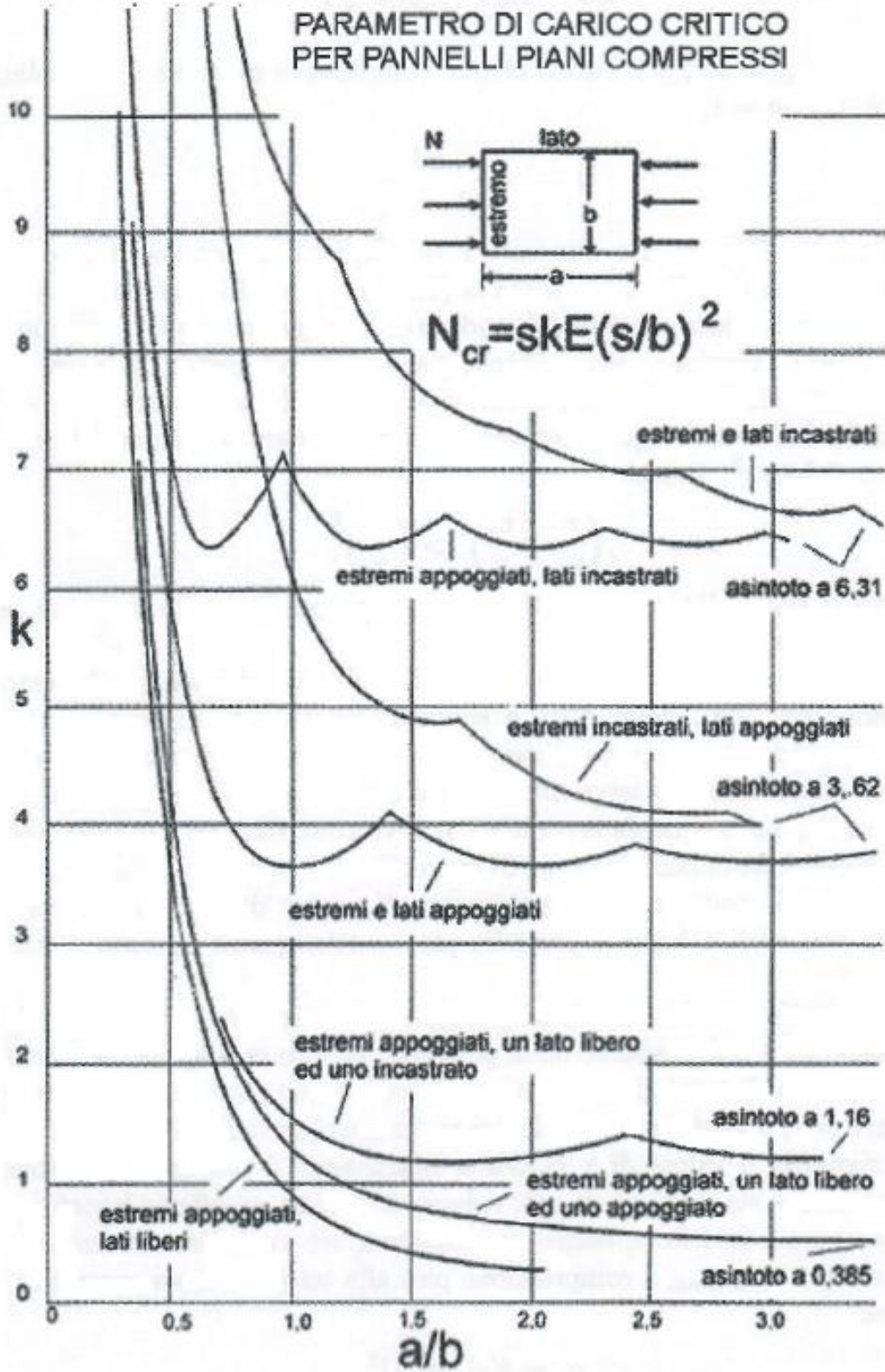


Figura 2.5 Parametro di carico critico per pannelli in compressione uniassiale

2.3. Metodo delle rigidzze spalmate

Il metodo delle rigidzze spalmate utilizzato per i pannelli irrigiditi consiste nello “spalmare” gli irrigidimenti su tutta la piastra. In questo modo si ottiene una piastra con uno spessore equivalente, in modo tale da creare una similitudine con la piastra irrigidita effettiva.

Ipotizziamo che la piastra equivalente segua il modello della piastra di Kirchhoff, quindi, per la piastra il campo degli spostamenti sarà

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} - zw_{,x}^{(0)} \\ v &= v^{(0)} - zw_{,y}^{(0)} \\ w &= w^{(0)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Se valgono le ipotesi della piastra di Kirchhoff, tutti i punti di una sezione della piastra hanno lo stesso spostamento lungo l’asse z, questo vale anche per il corrente di irrigidimento. Scriviamo quindi il campo di spostamenti dell’irrigidimento

$$\begin{aligned} u_c &= u^{(0)} - zw_{,x}^{(0)} \\ w_c &= w^{(0)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Derivando ricaviamo il campo delle deformazioni dell’irrigidimento

$$\epsilon_x^c = u_{,x}^{(0)} - zw_{,xx}^{(0)} = \epsilon_x^{(0)} + zk_x \quad (2.38)$$

Possiamo adesso andare a scrivere le equazioni costitutive dei correnti, utilizzando la legge di Hooke valida per materiali omogenei e isotropi, e risultano:

$$\begin{aligned} N_{x,i}^c &= \int_{A_c} \sigma_{x,i}^c dA = E_c A_c \epsilon_x^{(0)} + E_c A_c e_c k_x \\ M_{x,i}^c &= \int_{A_c} \sigma_{x,i}^c dA = E_c A_c e_c \epsilon_x^{(0)} + E_c (I_{G_e} + e_c^2 A_c) k_x \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dove $E_c A_c$ è la rigidzza assiale del corrente i-esimo, $E_c A_c e_c$ è la rigidzza di accoppiamento, I_{G_e} è il momento di inerzia baricentrico del corrente e $e_c^2 A_c$ è il momento di trasporto.

Per quanto riguarda la piastra le equazioni costitutive sono le classiche

$$\begin{aligned}\{N\} &= [A]\{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [B]\{\kappa\} \\ \{M\} &= [B]\{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [D]\{\kappa\}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Per poter unire le equazioni costitutive dei due elementi strutturali è necessario scrivere le equazioni del corrente in una forma coerente con quella della piastra, ovvero in forma matriciale e dividendole per la lunghezza del lato su cui il carico effettivo agisce. In questo caso, infatti, indicando con $\{N^t\}$ lo sforzo normale assorbito dall'intera piastra irrigidita è dato dalla somma degli sforzi normali assorbiti dai correnti e dal rivestimento. Sarà quindi:

$$\{\tilde{N}_x^c\}_i = \begin{Bmatrix} \frac{N_{x,i}^c}{b} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_c A_c}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}_{c,i} + \begin{bmatrix} \frac{E_c A_c e_c}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_{c,i} \quad (2.41)$$

In modo analogo si ricavano:

$$\{\tilde{N}_y^c\}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{N_{y,j}^c}{a} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_c A_c}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}_{c,j} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_c A_c e_c}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_{c,j} \quad (2.42)$$

$$\{\tilde{M}_x^c\}_i = \begin{Bmatrix} \frac{M_{x,i}^c}{b} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_c A_c e_c}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}_{c,i} + \begin{bmatrix} \frac{E_c (I_{G_e} + e_c^2 A_c)}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_{c,i}$$

$$\{\tilde{M}_y^c\}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_{y,j}^c}{a} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_c A_c e_c}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}_{c,j} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_c (I_{G_e} + e_c^2 A_c)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}_{c,j}$$

Riscrivendole in modo più compatto:

$$\begin{aligned}\{\tilde{N}_x^c\}_i &= [A_x^c]_i \{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [B_x^c]_i \{\kappa\} \\ \{\tilde{N}_y^c\}_j &= [A_y^c]_j \{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [B_y^c]_j \{\kappa\} \\ \{\tilde{M}_x^c\}_i &= [B_x^c]_i \{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [D_x^c]_i \{\kappa\} \\ \{\tilde{M}_y^c\}_j &= [B_y^c]_j \{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [D_y^c]_j \{\kappa\}\end{aligned}\quad (2.43)$$

Possiamo quindi calcolare per l'intera piastra:

$$\begin{aligned}\{N^t\} &= \{N\} + \sum_{i=1}^I \{\widetilde{N}_x^c\}_i + \sum_{j=1}^J \{\widetilde{N}_y^c\}_j = [A^t]\{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [B^t]\{\kappa\} \\ \{M^t\} &= \{M\} + \sum_{i=1}^I \{\widetilde{M}_x^c\}_i + \sum_{j=1}^J \{\widetilde{M}_y^c\}_j = [B^t]\{\epsilon_\gamma^{(0)}\} + [D^t]\{\kappa\}\end{aligned}\tag{2.44}$$

Dove:

$$\begin{aligned}[A^t] &= [A] + \sum_{i=1}^I [A_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [A_y^c]_j; \quad [B^t] = [B] + \sum_{i=1}^I [B_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [B_y^c]_j; \\ [D^t] &= [D] + \sum_{i=1}^I [D_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [D_y^c]_j\end{aligned}\tag{2.45}$$

3. Analisi preliminari

In questo capitolo vengono svolte delle analisi preliminari sull'elemento ripetitivo che costituisce il pannello irrigidito studiando successivamente, facendo uso delle teorie richiamate nel capitolo precedente. In particolare, viene utilizzata la teoria del carico critico di Eulero applicandola all'elemento ripetitivo del pannello irrigidito poi viene calcolato il carico critico della parte difettata del pannello al variare della dimensione del danno. Infine, vengono posti a confronto i risultati ottenuti.

3.1. Calcolo carico di buckling dell'elemento ripetitivo

In *tabella 1* vengono riportati i dati sulla geometria dell'elemento ripetitivo e sul materiale ed in *figura 3.1*, la geometria dell'elemento ripetitivo.

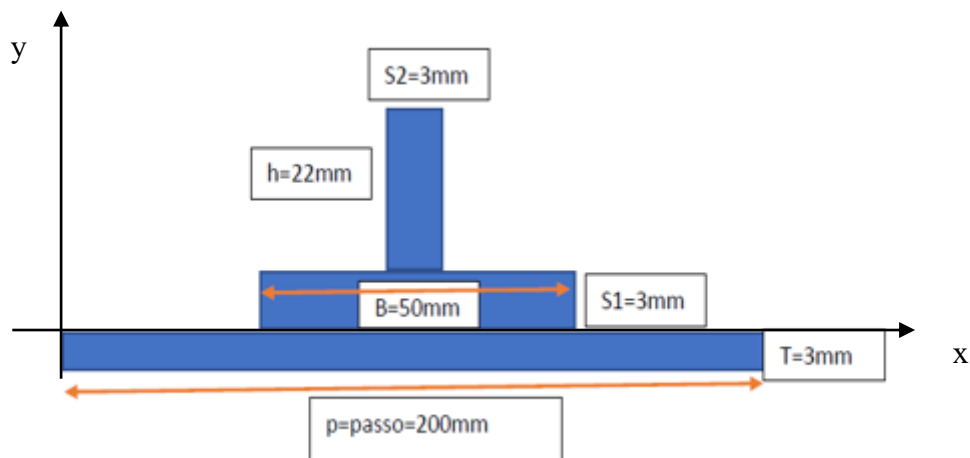


Figura 3.1 Geometria elemento ripetitivo

N	5	t [mm]	3	E [MPa]	70000
L [mm]	1000	b [mm]	50	v	0,3
B [mm]	1000	s1, s2 [mm]	3		
p [mm]	200	h [mm]	22		

Tabella 1

È possibile utilizzare la formula di Eulero per il carico critico di un'asta anche per questo caso, in particolare la formula, ipotizzando di avere le estremità appoggiate ed i lati liberi, diventa:

$$N_{x,cr} = \frac{\pi^2}{l^2} D_{cc}$$

Dove D_{cc} è la rigidezza flessionale dell'elemento ripetitivo determinata rispetto ad un asse baricentrico. Questo asse per la geometria in considerazione si calcola:

$$y_G = \frac{-pt \frac{t}{2} + bs_1 \frac{s_1}{2} + hs_2 \left(s_1 + \frac{h}{2}\right)}{pt + bs_1 + hs_2} = 0.305 \text{ mm}$$

A questo punto è possibile calcolare la rigidezza flessionale:

$$D_{cc} = \frac{t^3}{12} E \left[1 + 12 \left(\frac{1}{2} + \frac{y_G}{t}\right)^2 + \frac{b s_1^3}{p t^3} + 12 \frac{b s_1^3}{p t^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{y_G}{s_1}\right)^2 + \frac{h^3 s_2}{t^3 p} + 12 \frac{h^3 s_2}{t^3 p} \left(\frac{s_1}{h} + \frac{1}{2} - \frac{y_G}{h}\right)^2 \right] = 6220206,43 \text{ N} * \text{mm}$$

Ed infine il carico critico per unità di lunghezza:

$$N_{x,cr} = \frac{\pi^2}{l^2} D_{cc} = \frac{3.14^2}{1000^2} 6220206,43 = 61.33 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Questo è il valore del carico critico per cui l'elemento ripetitivo va in instabilità globale.

Si possono poi determinare i contributi al carico critico globale dovuto ai singoli elementi dell'elemento ripetitivo, e si ha:

$$N_{x,SKIN} = N_{x,cr} \frac{pt}{pt + bs_1 + hs_2} = 45.09 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$N_{x,FLANGIA-O} = N_{x,cr} \frac{bs_1}{pt + bs_1 + hs_2} = 11.27 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$N_{x,FLANGIA-V} = N_{x,cr} \frac{hs_2}{pt + bs_1 + hs_2} = 4.96 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

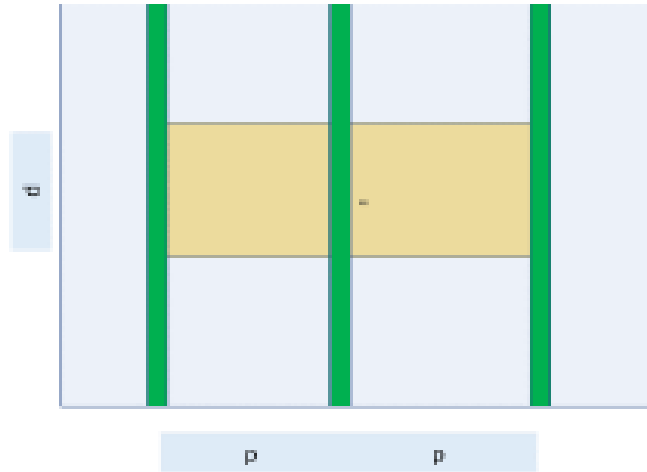


Figura 3.2 Rappresentazione debonding nel corrente centrale del pannello irrigidito

3.2. Calcolo del carico critico in presenza di debonding

A questo punto, si inserisce un difetto, di lunghezza d , nel pannello e si va a calcolare il carico critico del pannello nella zona difettata. Il calcolo è stato effettuato variando la dimensione del difetto, ed, in particolare, si è partiti da un difetto iniziale di 100 mm fino ad un massimo di 260 mm, con un passo di 20 mm.

Per il pannello nella zona del difetto si ha:

$$N_{x-SKIN-DB} = \frac{\pi^2}{(2p)^2} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{m}{r} + r \frac{n^2}{m} \right)^2$$

Dove m e n rappresentano il numero di semionde che costituiscono la deformata fuori dal piano nelle due direzioni del piano, x e z ; ed $r = d/2p$. Posti:

$$D_{skin} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 173076.92 \text{ N} * \text{mm}; \quad m = 1; \quad n = 1;$$

Possiamo riscrivere:

$$N_{x-SKIN-DB} = \frac{\pi^2}{d^2} D_{skin} (1 + r^2)^2$$

In *tabella 2* vengono riportati i risultati ottenuti al variare della lunghezza d del difetto.

d [mm]	r	$N_{x-SKIN-DB}$ [N/mm]
100	0,25	171,78
120	0,3	119,69
140	0,35	88,32
160	0,4	68,00
180	0,45	54,11
200	0,5	44,22
220	0,55	36,95
240	0,6	31,48
260	0,65	27,27

Tabella 2

3.3. Confronto dei risultati

Dal confronto dei risultati ottenuti nel carico critico del pannello nella zona del difetto con quello dell'elemento ripetitivo, osserviamo che per valori del difetto minori di 180 mm, il primo è superiore al secondo. Questo significa che il buckling globale del avviene prima del locale e non si ha un effetto significativo del difetto sulla struttura. Per valori del difetto pari o superiori a 180 mm, il carico critico del pannello nella zona difettata risulta inferiore al carico critico dell'elemento ripetitivo. In questo caso quindi si ha un ingobbamento del difetto prima che il pannello entri in condizione critica globale con un effetto importante.

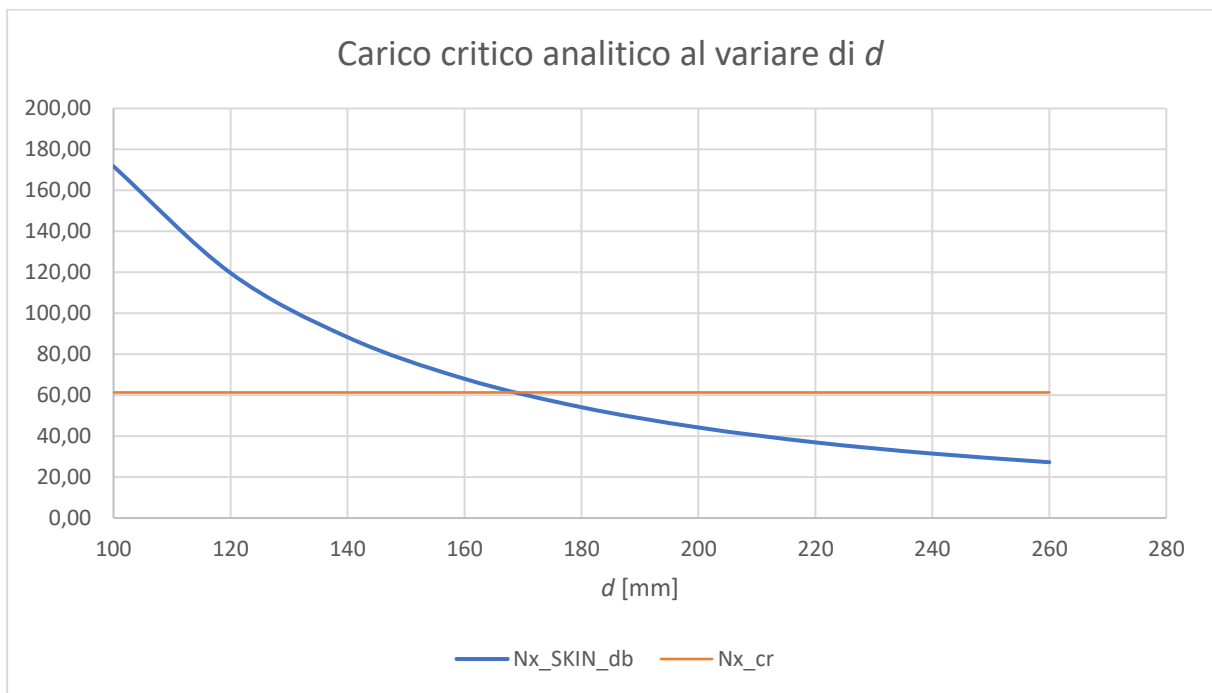


Figura 3.3 Andamento del carico critico teorico al variare della dimensione del difetto d

3.4. Carico critico pannello irrigidito

Usando il metodo delle rigidezze spalmate è possibile riportare il pannello irrigidito ad una configurazione di pannello piano semplice.

La matrice di rigidezza flessionale della piastra risulta essere:

$$D_{piastra} = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173076.92 & 51923.08 & 0 \\ 51923.08 & 173076.92 & 0 \\ 0 & 0 & 60576.92 \end{bmatrix}$$

A questa vanno sommati i contributi relativi agli irrigidimenti calcolati con la (2.45₃) e si ha:

$$D_{flangia} = \begin{bmatrix} \frac{E_{fl}(I_{G_e} + e_{fl}^2 A_{fl})}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102375 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{anima} = \begin{bmatrix} \frac{E_{an}(I_{G_e} + e_{an}^2 A_{an})}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1296295 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per ottenere la matrice delle rigidezze flessionali finale si applica la (2.45), ottenendo:

$$[D^t] = \begin{bmatrix} 7166426.92 & 51923.08 & 0 \\ 51923.08 & 173076.92 & 0 \\ 0 & 0 & 60576.92 \end{bmatrix}$$

A questo punto si calcola il rapporto:

$$\frac{a}{b} \left(\frac{D_{22}}{D_{11}} \right)^{\frac{1}{4}} = 0.3942$$

Osservando il diagramma della normativa *ESDU-80023*, riportato in *figura 3.4*, considerando la curva relativa al caso di estremità incastrate e lati semplicemente appoggiati, si nota che per il valore del rapporto calcolato si esce dal diagramma. Viene quindi ipotizzato che sia $k_0 = 200$, e quindi il carico critico si calcola:

$$N_{x,cr} = \frac{k_0(D_{11}D_{22})^2}{b^2} + \frac{C\pi^2 D_0}{b^2} = 226.15 \frac{N}{mm}$$

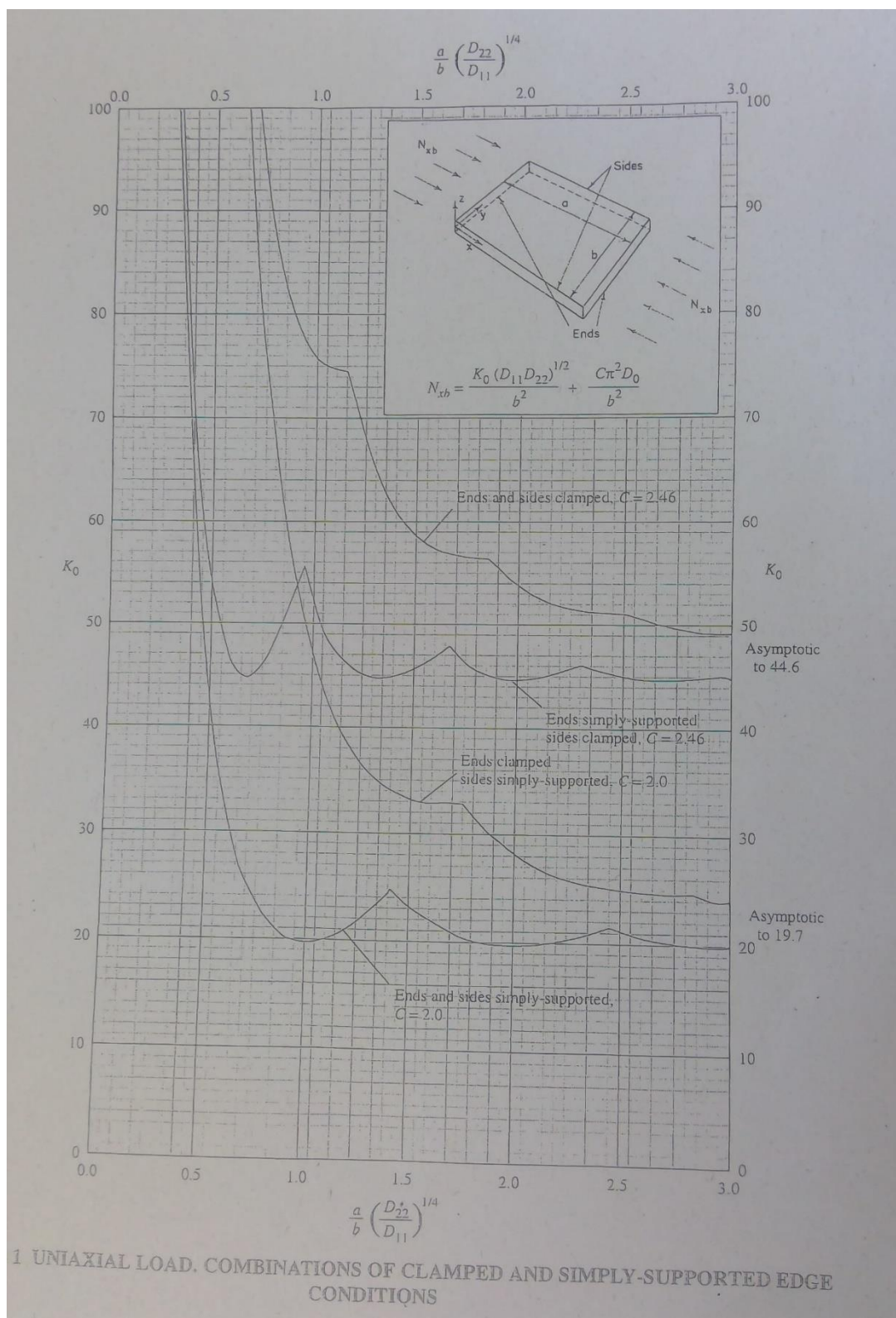


Figura 3.4 Diagramma per il calcolo per parametro di carico critico K_0 , ESDU-80023

4. Analisi pannello integro

Il pannello irrigidito da realizzare è costituito da una piastra quadrata di 1000mm di lato e spessore 3mm, con 5 irrigidimenti a T rovesciata incollati sulla faccia superiore come riportato in *figura 4.1*. Gli irrigidimenti hanno spessore di 3 mm, una larghezza del tratto orizzontale pari a 50mm e un'altezza complessiva di 25mm (*figura 4.2*).

Il pannello è sottoposto ad un carico di compressione e le condizioni di vincolo sono di semplice appoggio per i lati del pannello paralleli agli irrigidimenti e di incastro per i lati perpendicolari. Infine, tra gli irrigidimenti e la piastra è interposto uno strato di adesivo dello spessore di 0.02mm.

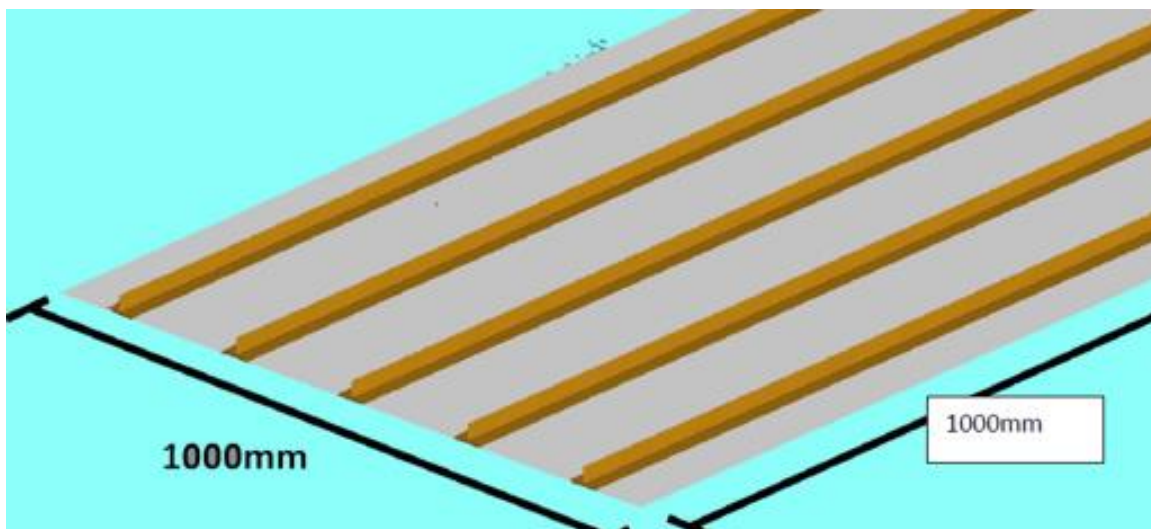


Figura 4.1 Configurazione pannello irrigidito

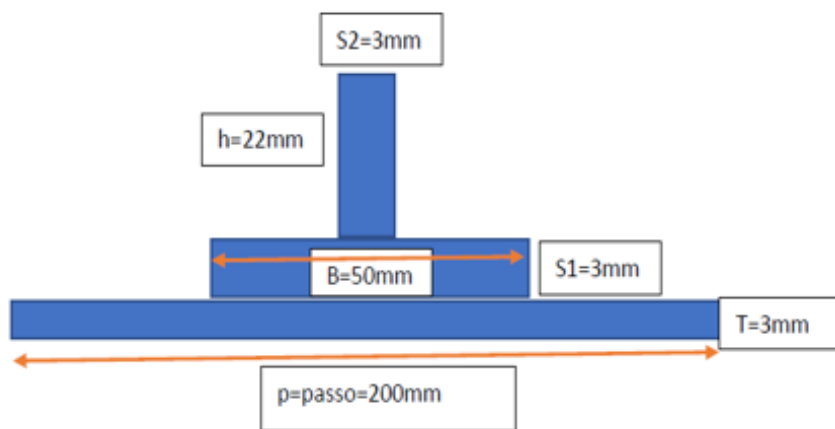


Figura 4.2 Dettaglio elemento ripetitivo

Sono stati realizzati due modelli ad elementi finiti, il primo composto interamente da elementi solidi ed il secondo che schematizza la piastra e gli irrigidimenti con elementi shell, mentre utilizza elementi solidi per l'adesivo.

I modelli sono stati realizzati inizialmente privi di difetto per poter verificare che tra i due ci fosse congruenza e poter condurre delle prime analisi per indagare sul comportamento in instabilità della configurazione studiata.

4.1. Modello con elementi solidi

4.1.1. Geometria

In questo caso la geometria realizzata riproduce esattamente la geometria del pannello irrigidito. Sono state generate prima delle superfici e poi attraverso il comando di estrusione sono stati creati i solidi come *isomeshable*.

Il piano individuato dagli assi x e y coincide con la superficie inferiore del pannello irrigidito e l'asse z rappresenta la direzione normale al piano della piastra. l'origine del sistema di riferimento coincide con uno degli angoli della piastra.

Nel modello, all'interfaccia tra irrigidimenti e piastra sono stati inseriti dei solidi dello spessore di 0.02mm come rappresentazione dell'adesivo strutturale, schematizzato sempre mediante l'utilizzo di elementi solidi.

La geometria così ottenuta è riportata in *figura 4.3*.

4.1.2. Mesh

In questo caso, è stata realizzata una mesh isoparametrica composta da elementi Hex8, ovvero elementi cubici con 8 nodi, che rappresentano bene il problema in questione. Inizialmente era stata utilizzata una dimensione caratteristica degli elementi di 25mm, questo però portava a dei problemi nelle analisi in quanto il rapporto tra il lato più lungo ed il lato più corto del generico elemento risultava troppo elevato. Per risolvere questo problema è stato necessario ridurre la dimensione caratteristica degli elementi a 5mm, inoltre, affinando la mesh si ottengono risultati più accurati a discapito di un aumento del costo computazionale del modello.

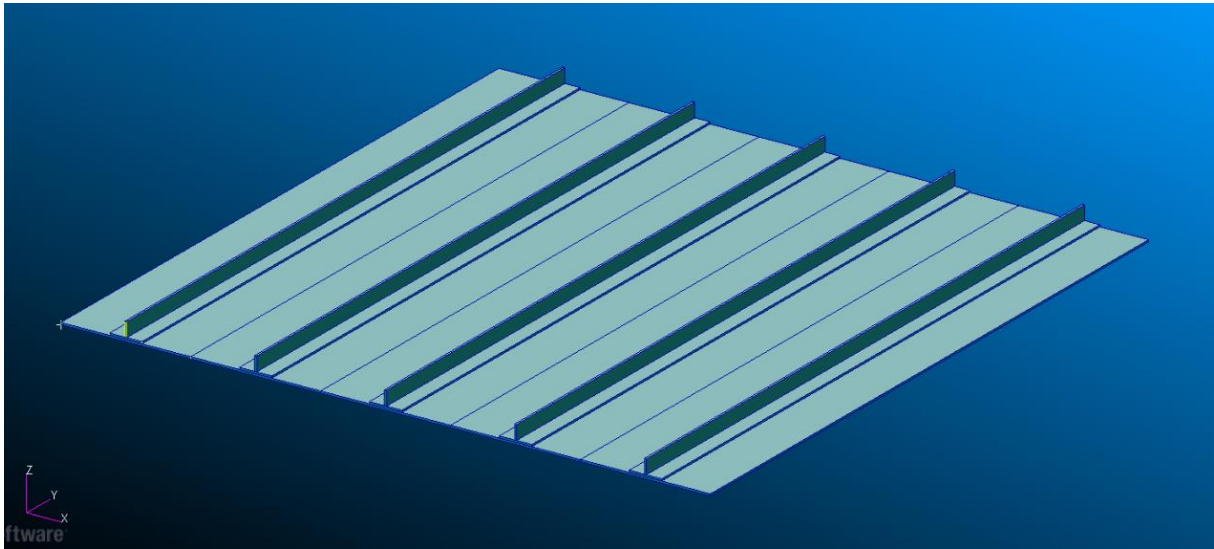


Figura 4.3 Geometria finale modello con elementi solidi

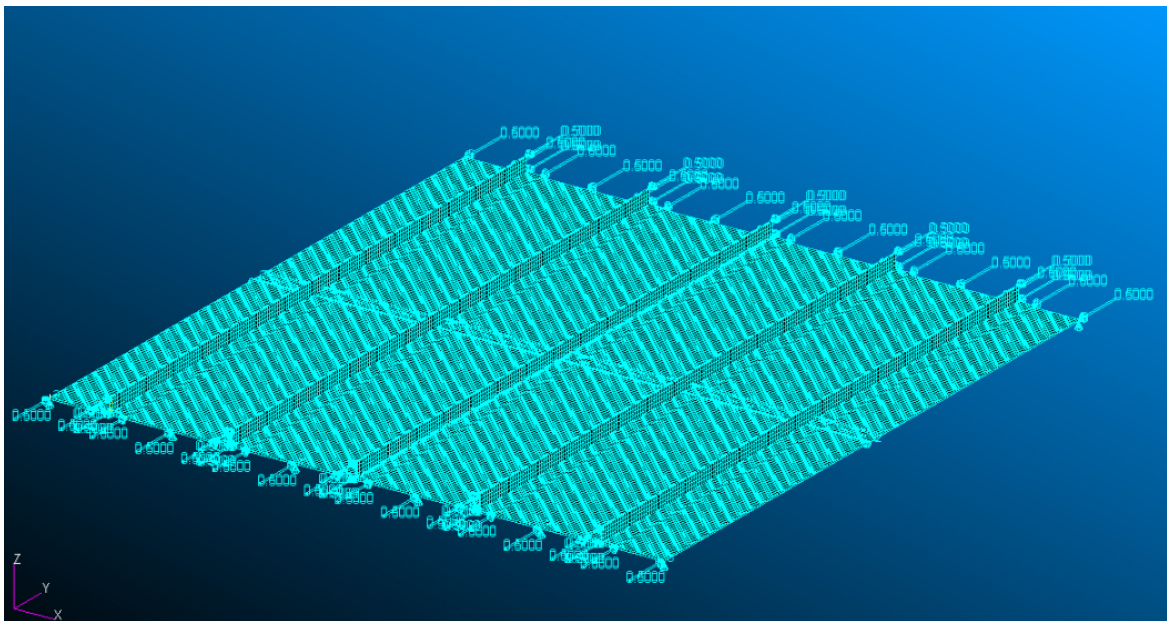


Figura 4.4 Mesh finale, carichi e vincoli modello con elementi solidi

Per confermare che i risultati fossero sufficientemente accurati, è stato prodotto in questo caso anche un modello con elementi di dimensione caratteristica pari a 2,5mm. I risultati ottenuti evidenziano che non c'è un miglioramento significativo della qualità dei risultati, per questo è stato deciso di portare avanti il modello precedente che prevede un costo computazionale inferiore

4.1.3. Vincoli e carichi

L'intenzione era quella di rappresentare un pannello incastrato agli estremi ed appoggiato ai lati. Per ottenere questa condizione di vincolo, al pannello è stato bloccato lo spostamento normale al piano della piastra sul perimetro inferiore della stessa. Inoltre, sono stati bloccati gli spostamenti nel piano, di alcuni nodi sulla faccia inferiore della piastra per evitare che la struttura risultasse labile. In particolare, risultando il problema simmetrico, lo spostamento lungo la coordinata x è stato vincolato per tutti i nodi con coordinate $(x, z) = (500, 0)$, mentre lo spostamento in direzione y è stato vincolato per tutti i nodi con coordinate $(y, z) = (500, 0)$.

Il carico di compressione è stato imposto come spostamento delle sezioni di estremità del pannello irrigidito per un totale di due millimetri (0.5 mm per estremità).

4.1.4. Analisi di buckling e analisi non lineare

Mediante il programma è stata svolta un'analisi di buckling (*SOL105*) per andare ad indagare sui modi di instabilità del pannello in esame. Il pannello irrigidito in questa configurazione presenta un primo modo di buckling globale, *figura 4.6*, con un fattore di carico pari a $F1=0.84206$. Si riportano a titolo informativo anche il secondo ed il terzo modo di instabilità, *figura 4.7* e *figura 4.8*, che presentano un numero di ingobbamenti maggiore, ma sono sempre modi di instabilità globale del pannello. L'analisi con la *SOL105* è una soluzione linearizzata che non vede il verso reale della deformata, ma solo l'autovettore relativo al carico critico associato.

Per apprezzare la vera deflessione sotto carico del pannello è necessario un calcolo non lineare implementato nella *SOL400*. È stata quindi effettuata l'analisi non lineare, per verificare che il modello fosse corretto e che l'effettiva deformazione del pannello coincidesse con il primo modo di instabilità. Nell'analisi non lineare il carico viene suddiviso in determinati intervalli,

load steps. In questo caso sono stati utilizzati 20 step di carico che rappresentavano un giusto compromesso tra costo computazionale e precisione dei risultati.

Il risultato riportato in *figura 4.9* rappresenta il pannello allo stato ultimo di carico e si nota come non si verifichi nessuna deformazione fuori dal piano. Questo perché, al calcolatore, il modello risulta perfetto, ovvero privo di imperfezioni, cosa che non si verifica mai nella realtà. È stata quindi necessaria l'aggiunta di una imperfezione in modo tale da ottenere una deformazione più realistica. In particolare, è stato sufficiente aggiungere una forza di piccola entità che rappresentasse una perturbazione dallo stato di equilibrio della struttura, la presenza dell'imperfezione aggiunta non va ad influenzare né i modi di buckling del pannello né i fattori di carico ad essi associati.

Dall'analisi non lineare con l'imperfezione aggiunta, *figura 4.10*, è possibile apprezzare come il pannello, superato il livello di carico corrispondente al carico critico di instabilità si deforma fuori dal piano andando in instabilità secondo il primo modo di buckling. In *figura 4.5* viene riportato il diagramma di carico-spostamento² estrapolato nel nodo posto esattamente al centro del pannello irrigidito e appartenente alla faccia inferiore dello skin. È possibile osservare come per valori del carico inferiori al carico critico, lo spostamento è pressoché nullo. Avvicinandosi al carico critico, la curva si stacca leggermente dall'asse, questo effetto è dovuto alla presenza della forza applicata per simulare l'imperfezione. Dopo il livello di carico critico è possibile osservare come la deformazione aumenta molto più rapido all'aumentare del carico, condizione di instabilità.

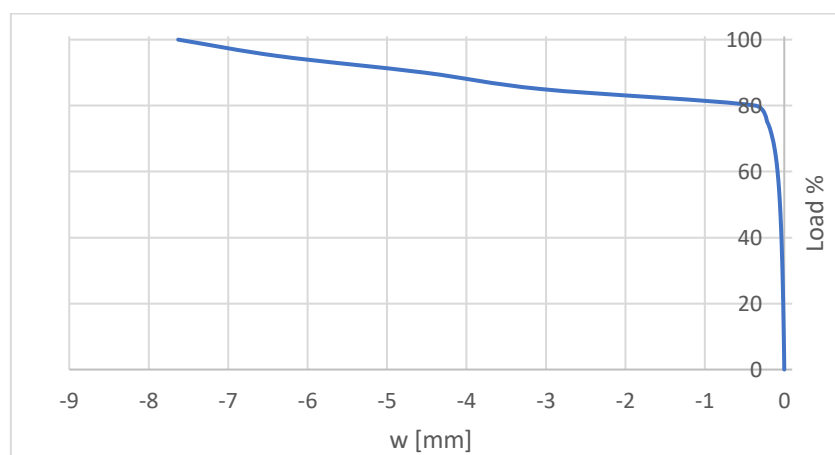


Figura 4.5 Diagramma carico spostamento del nodo centrale della faccia inferiore dello skin

² Lo spostamento nel grafico è di segno negativo in quanto il pannello si deforma verso il basso, ovvero in direzione opposta al verso positivo dell'asse perpendicolare al piano del pannello irrigidito.

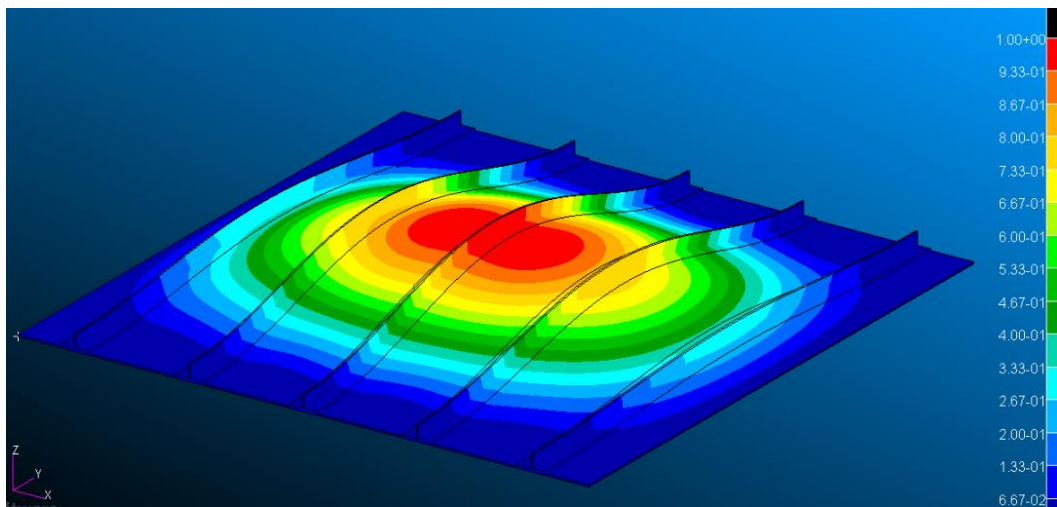


Figura 4.6 Primo modo di buckling - modello con elementi solidi

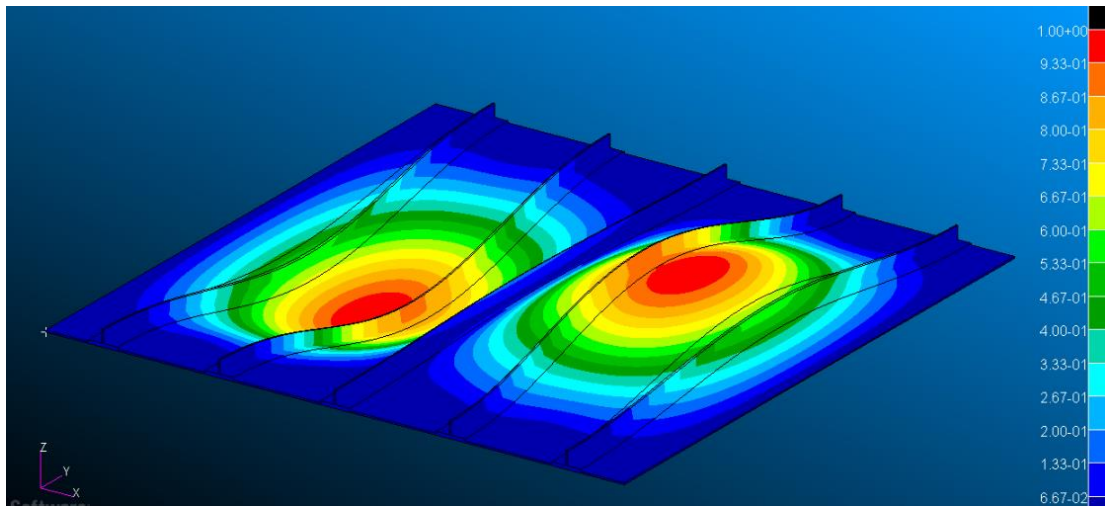


Figura 4.7 Secondo modo di buckling - modello con elementi solidi

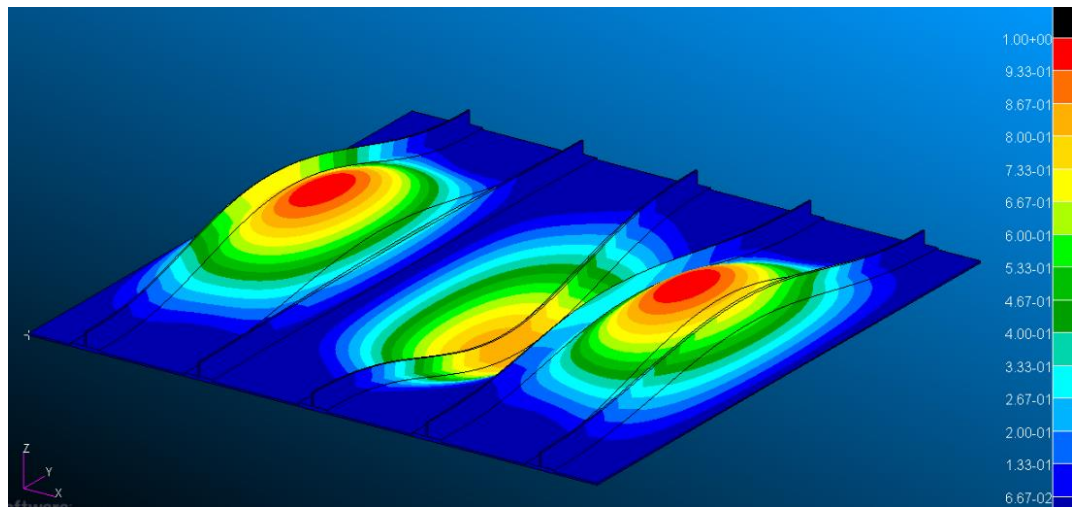


Figura 4.8 Terzo modo di buckling - modello con elementi solidi

Avendo applicato alla struttura il carico di compressione come uno spostamento, sfruttando la legge di Hooke è possibile calcolare il carico relativo allo spostamento critico, e si ha:

$$\sigma = E\epsilon \rightarrow P = \frac{\sigma}{A} = \frac{E\epsilon}{A} = \frac{E\Delta l}{AL} \rightarrow P_{cr} = \frac{E}{AL} \Delta l_{cr} = 239,9 \text{ kN}$$

Il valore ottenuto è confrontabile con il valore di carico critico ottenuto con il metodo delle rigidezze spalmate, infatti è stato calcolato:

$$N_{x,cr} = 226.15 \frac{N}{mm} \rightarrow P_{xr} = N_{x,cr} * L = 226.15 \text{ kN}$$

Otteniamo dei valori confrontabili nei due casi, dimostrando così la validità del modello realizzato.

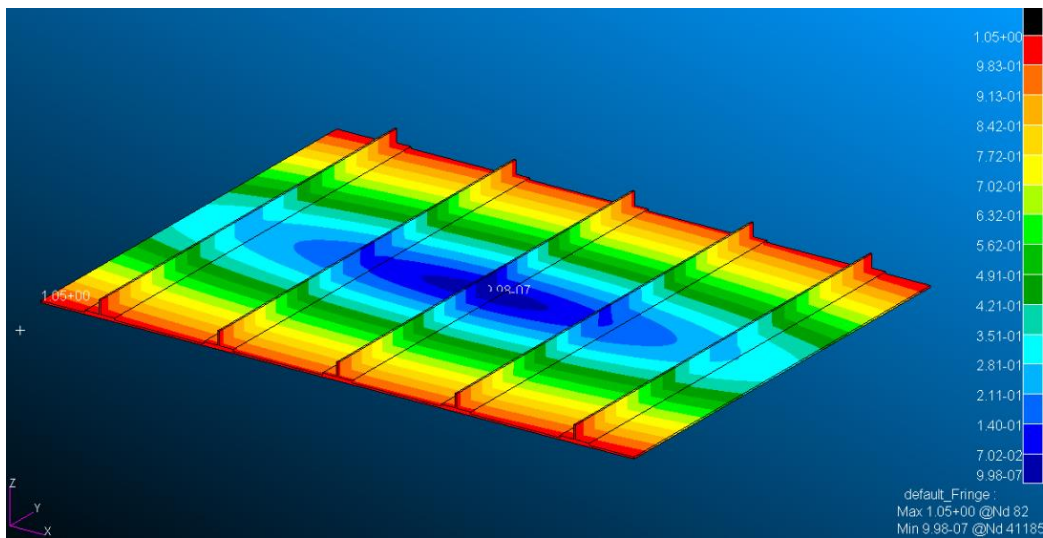


Figura 4.9 Deformata analisi non lineare - modello elementi solidi senza imperfezione

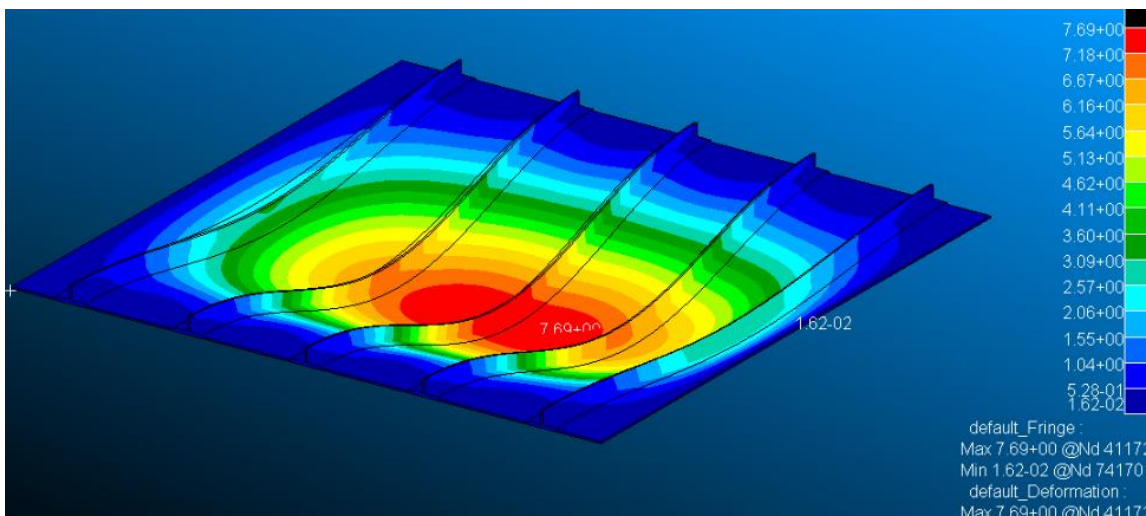


Figura 4.10 Deformata analisi non lineare - modello elementi solidi con imperfezione

Un'ulteriore valutazione del carico critico di instabilità della struttura può essere fatta estrapolando i valori di carico applicati alla struttura direttamente dal modello FEM. Dall'analisi lineare svolta automaticamente con la *SOL105*, sono state ricavate le reazioni vincolari dei nodi nella sezione di estremità con coordinata $y=0$ mm. Di queste è stata poi fatta una media, che moltiplicata poi per il numero di nodi giacenti sulla sezione, restituisce il valore di carico applicato corrispondente allo spostamento massimo di 1 mm applicato e si ha:

$$P_{x,medio} = 512.77 \text{ N}; P_{x,1mm} = P_{x,medio} * n_{nodi} = 512.77 * 557 = 285.61 \text{ kN}$$

A questo punto è necessario moltiplicare il valore del carico massimo ottenuto per il fattore di carico fornito dall'analisi di buckling e si ottiene così il carico applicato alla struttura corrispondente allo spostamento critico, ovvero il carico critico di instabilità.

$$P_{cr} = P_{x,1mm} * 0.84 = 239.91 \text{ kN}$$

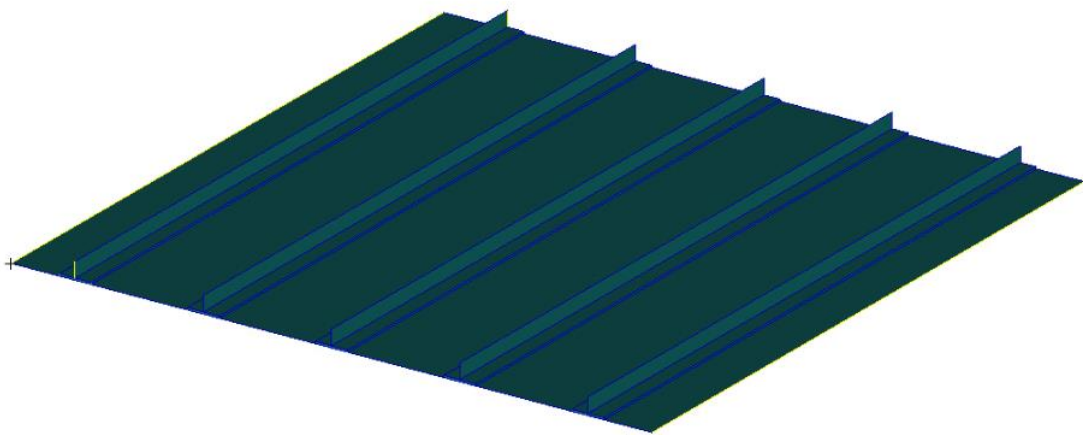
Ancora una volta ritroviamo un valore del carico critico confrontabile con quelli precedentemente ottenuti.

4.2. Modello con elementi solidi e shell

4.2.1. Geometria

In questo secondo modello realizzato, la piastra viene schematizzata come un'unica superficie coincidente con la superficie media. Allo stesso modo, vengono schematizzate anche le flange verticali e orizzontali degli irrigidimenti, ovvero con delle superfici coincidenti con le rispettive superfici medie, a cui poi viene assegnato uno spessore.

Lo strato di adesivo è stato invece schematizzato come solido in due modi differenti: il primo, dove lo spessore è pari allo spessore utilizzato nel modello con elementi solidi, 0.02 mm, ed è stato associato un offset alle superfici rappresentative degli elementi strutturali per evitare la sovrapposizione delle parti. Il secondo, dove lo spessore dello strato di adesivo è pari alla distanza effettiva che c'è tra il piano medio della piastra e della flangia orizzontale degli irrigidimenti, 3 mm, rappresentato in *figura 4.11*; in questo modo si riesce a garantire il collegamento degli elementi che compongono la struttura senza andare a variarne la rigidezza, in quanto l'adesivo ha generalmente caratteristiche meccaniche inferiori rispetto agli elementi strutturali.



7

Figura 4.11 Geometria pannello con elementi shell e solidi



Figura 4.12 Dettaglio elemento ripetitivo del pannello irrigidito

4.2.2. Mesh

In entrambi i modelli con elementi misti, le superfici sono state meshate con elementi Quad4, che sono elementi *shell* con 4 nodi ai vertici ampiamente utilizzati per le schematizzazioni di elementi strutturali in parete sottile. Come già detto, nel primo modello (spessore adesivo pari a 0.02 mm) alle superfici ottenute è stato assegnato un offset pari alla metà dello spessore della piastra e della flangia orizzontale dello stiffener. Ciò poiché, nella geometria così realizzata, le superfici non coincidono con il piano medio degli elementi strutturali che vanno a rappresentare. Senza offset quindi, si andrebbe a realizzare un modello differente rispetto a quello desiderato. Nel secondo modello con elementi misti, l'assegnazione dell'offset non è necessaria, in quanto assegnando all'adesivo uno spessore pari alla distanza tra le superfici medie degli elementi che unisce, abbiamo la coincidenza tra la geometria e le superfici medie.

Per la dimensione caratteristica degli elementi si è utilizzato 5 mm per uniformità con il modello ad elementi solidi e perché garantisce una maggiore accuratezza dei risultati.

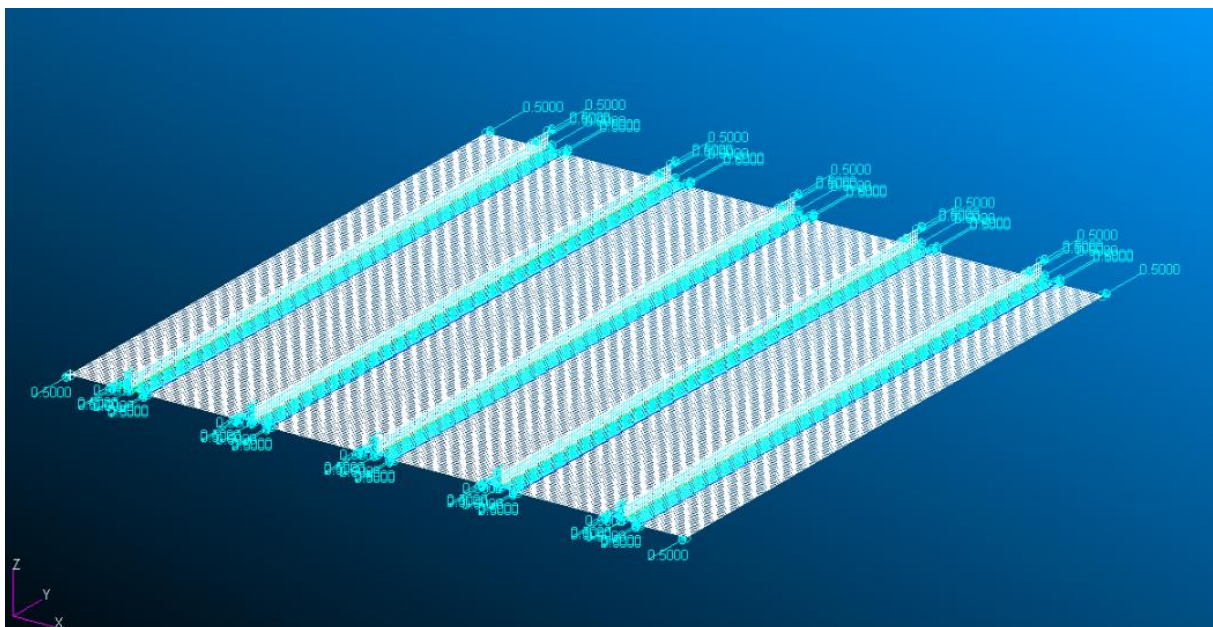


Figura 4.13 Modello con elementi shell e solidi - mesh e vincoli

4.2.3. Vincoli e carichi

Per ottenere la condizione di carico desiderata, ovvero estremi incastrati, lati appoggiati e carico di compressione, anche qui come nel modello con elementi solidi è stato vincolato lo spostamento in direzione normale al piano del pannello sui bordi della superficie che rappresenta la piastra. Per evitare labilità nel modello, sono stati vincolati anche lo spostamento lungo la coordinata x per tutti i nodi con coordinate $(x, z) = (500, 0)$ e lo spostamento in direzione y per tutti i nodi con coordinate $(y, z) = (500, 0)$.

Il carico è stato invece applicato come spostamento sui bordi delle superfici e sulle superfici dei solidi in corrispondenza delle sezioni di estremità.

4.2.4. Analisi di buckling e analisi non lineare

Mediante il programma è stata svolta un'analisi di buckling (*SOL105*) su entrambi i modelli realizzati per andare ad indagare sui modi di instabilità.

È subito evidente dai risultati di questa prima analisi come, la deformata statica del pannello con spessore della colla pari a 0.02mm e offset per le superfici, assuma un comportamento anomalo. In particolare, si deforma fuori dal piano ed inoltre, presenta delle ingobbature vicino agli estremi del pannello, come mostrato in *figura 4.14*. Questa deformazione anomala è stata attribuita all'offset della piastra inferiore, infatti, rimuovendo quest'ultimo, si ottiene una deformazione conforme con risultati conseguentemente diversi, in quanto la geometria del problema risulta in questo caso differente. Non essendo riuscito a trovare una soluzione al problema, questo modello è stato abbandonato.

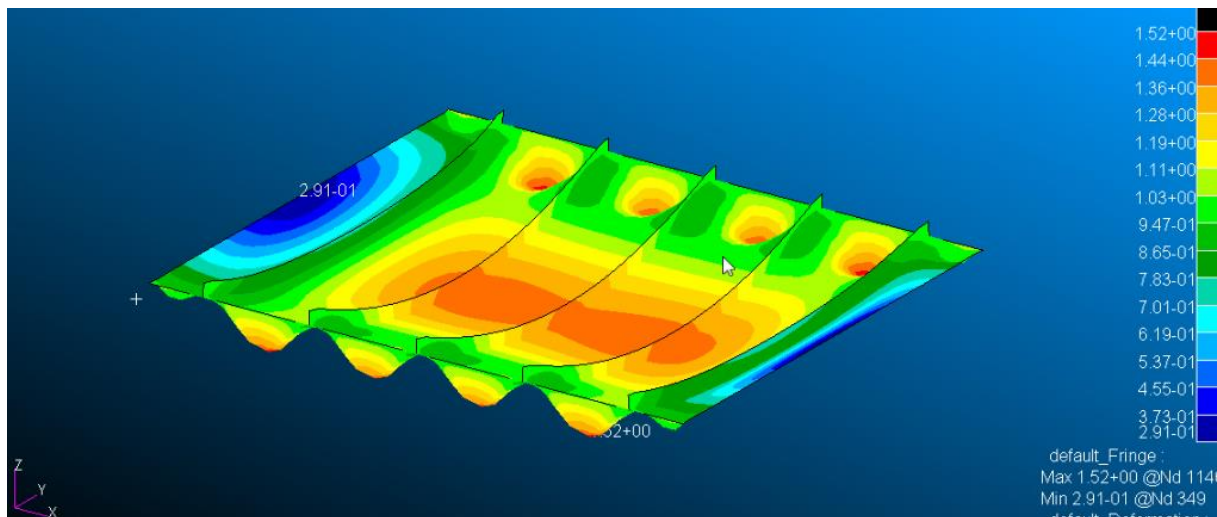


Figura 4.14 Deformata statica modello con offset delle superfici

Per quanto riguarda invece il modello con spessore dello strato di adesivo pari alla distanza tra le superfici medie degli elementi strutturali, la deformata statica in assenza dell'imperfezione già citata risulta essere quella che ci si aspettava, ovvero, con una deformazione nel piano. Si riportano, come fatto per il caso ad elementi solidi, i primi tre modi di instabilità del modello, che risultano equivalenti a quelli ottenuti precedentemente. Il fattore di carico per il primo modo in questo caso risulta essere pari a $F1=0.80936$, con una differenza dal caso analizzato precedentemente dello 0,04%.

Successivamente, sono state condotte le analisi non lineari in assenza ed in presenza dell'imperfezione. Anche in questo caso il carico applicato è stato suddiviso in 20 step di carico, che rappresentano un giusto compromesso tra costo computazionale e precisione dei risultati.

Il risultato riportato in *figura 4.18* rappresenta il pannello allo stato ultimo di carico e si nota come non si verifichi nessuna deformazione fuori dal piano. Mentre in *figura 4.19* si riporta l'ultimo step di carico dell'analisi con imperfezione. Si ricorda che la presenza dell'imperfezione, in quanto di entità trascurabile, non va ad influenzare né i modi di buckling del pannello né i fattori di carico ad essi associati. Anche qui, è possibile apprezzare come il pannello, superato il livello di carico corrispondente al carico critico di instabilità, si deforma fuori dal piano andando in instabilità secondo il primo modo di buckling.

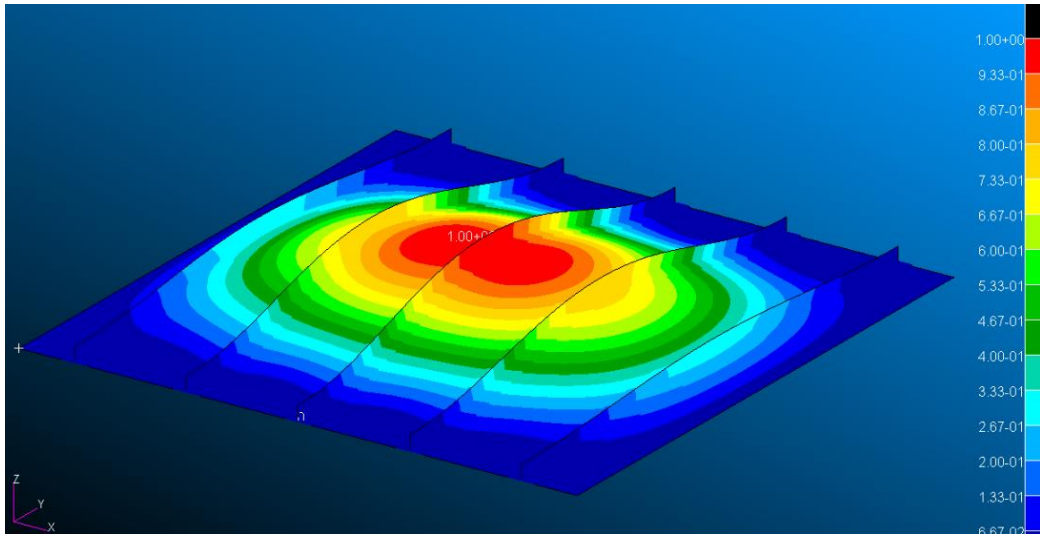


Figura 4.15 Primo modo di buckling - modello con elementi shell e solidi

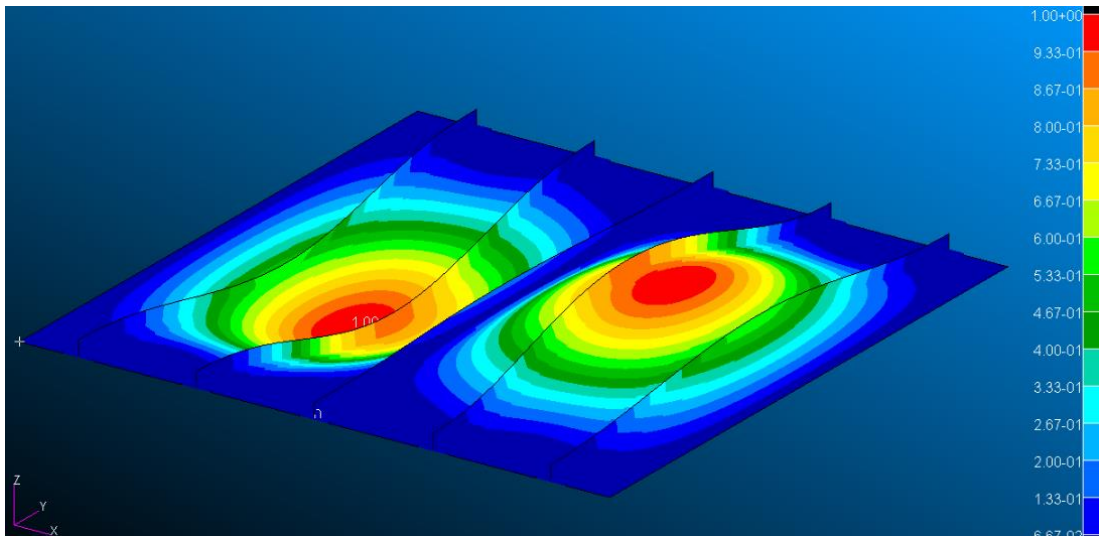


Figura 4.16 Secondo modo di buckling - modello con elementi shell e solidi

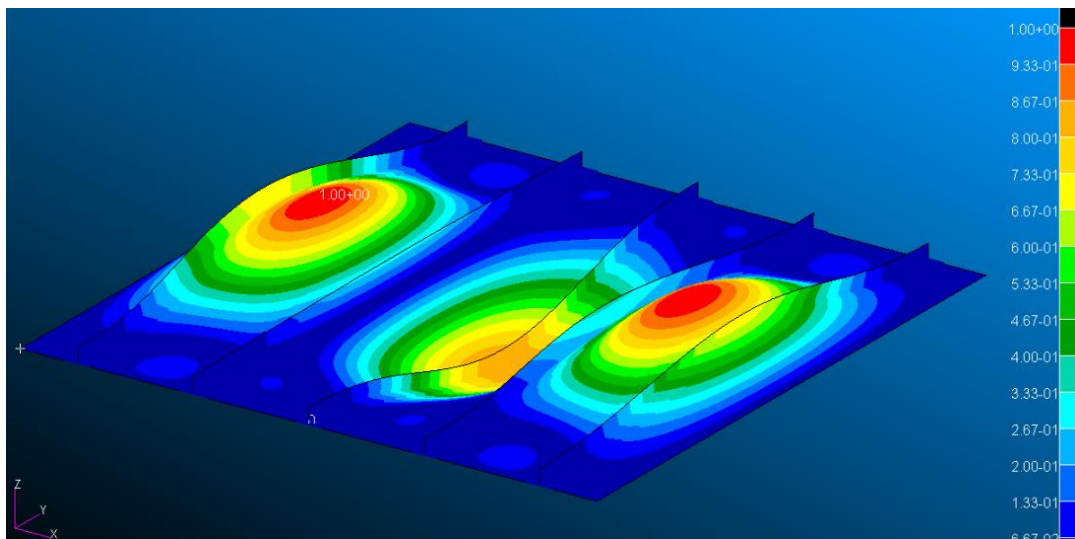


Figura 4.17 Terzo modo di buckling - modello con elementi shell e solidi

Analogamente a quanto fatto per il modello precedente viene riportato il diagramma di carico-deformazione relativo al nodo posizionato al centro della piastra appartenente allo skin, *figura 4.18*. È possibile fare le stesse considerazioni fatte per il modello precedente, anche qui infatti si può notare che lo spostamento al centro del pannello è ridotto fino al livello di carico critico, dopo il quale, invece, aumenta considerevolmente.

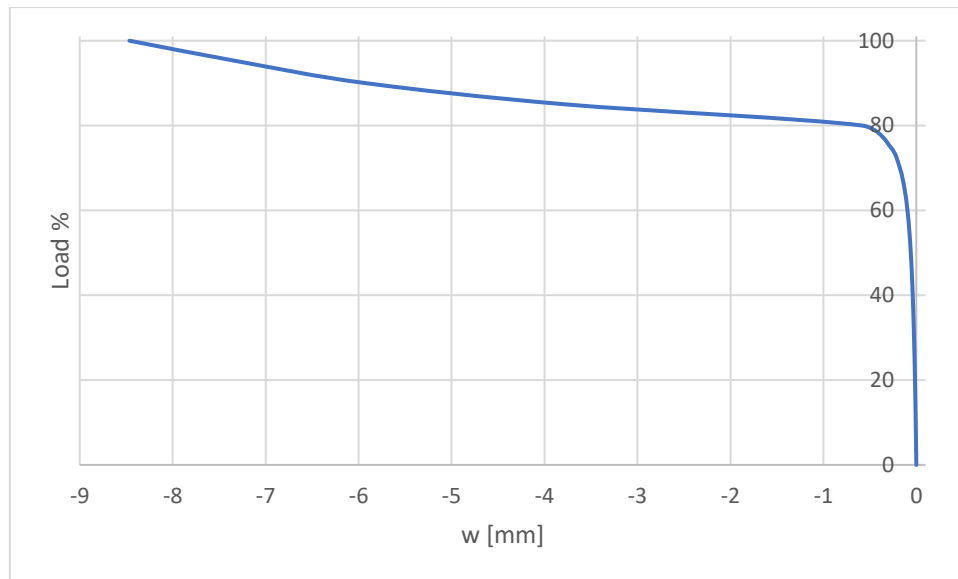


Figura 4.18 Diagramma carico-spostamento nel nodo centrale dello skin

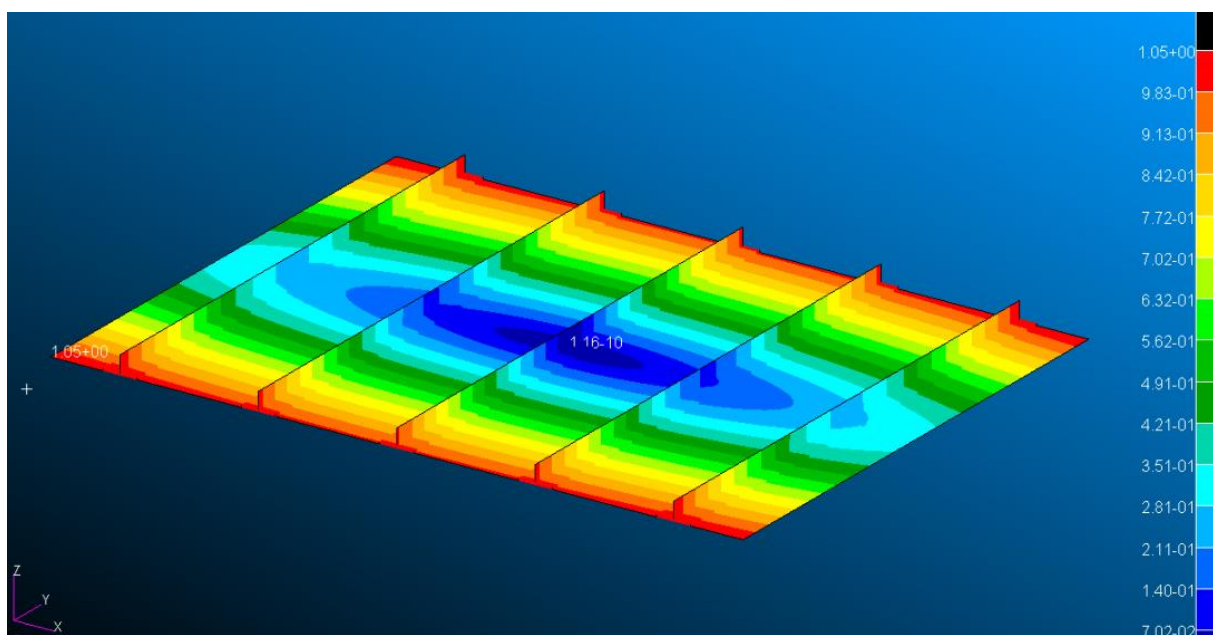


Figura 4.19 Risultati analisi non lineare modello con elementi shell e solidi senza imperfezione

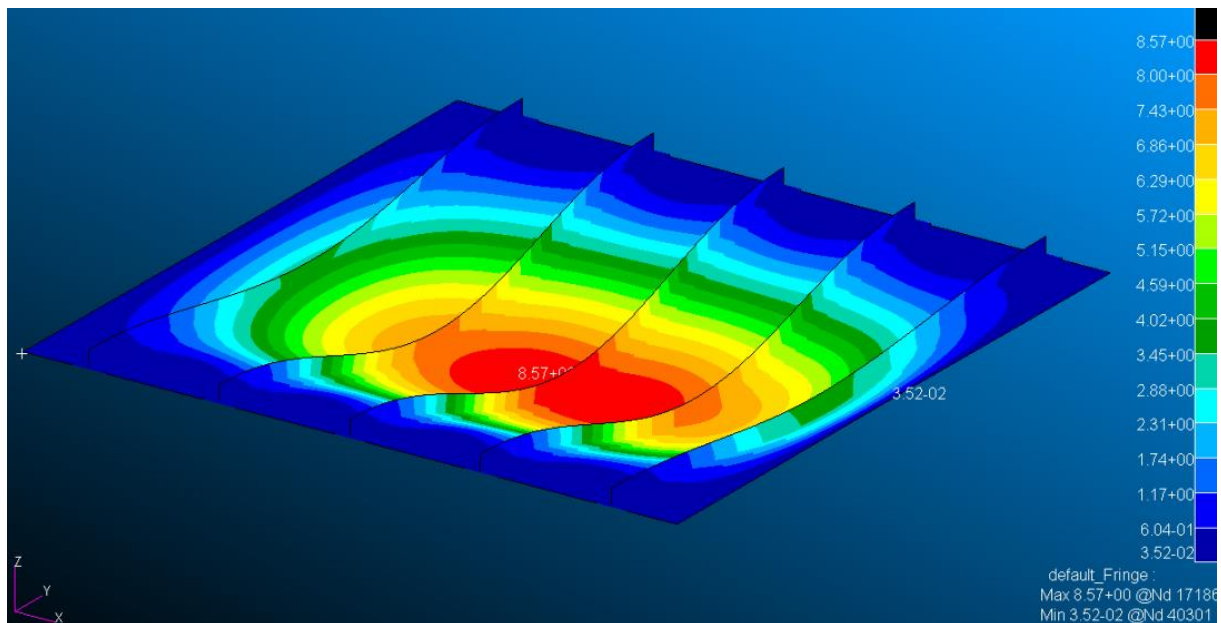


Figura 4.20 Risultati analisi non lineare modello con elementi shell e solidi con imperfezione

Avendo applicato alla struttura il carico di compressione come uno spostamento, sfruttando la legge di Hooke è possibile calcolare il carico relativo allo spostamento critico, e si ha:

$$\sigma = E\epsilon \rightarrow P = \frac{\sigma}{A} = \frac{E\epsilon}{A} = \frac{E\Delta l}{AL} \rightarrow P_{cr} = \frac{E}{AL}\Delta l_{cr} = 231,05 \text{ kN}$$

Il valore ottenuto è confrontabile con il valore di carico critico ottenuto con il metodo delle rigidezze spalmate, infatti è stato calcolato:

$$N_{x,cr} = 226.15 \frac{N}{mm} \rightarrow P_{xr} = N_{x,cr} * L = 226.15 \text{ kN}$$

Otteniamo dei valori confrontabili nei due casi, dimostrando così la validità del modello realizzato.

4.3. Conclusioni

Dai risultati ottenuti finora, i modelli sono comparabili. Infatti, si ottengono gli stessi modi di buckling della struttura, che va in instabilità globale, e con valori del carico critico confrontabili. Lo stesso vale per le deformate ottenute mediante le analisi non lineari.

Si nota che in generale il modello con elementi misti (shell e solidi) presenta dei valori del carico di buckling più bassi ed uno spostamento massimo maggiore nell'analisi non lineare. Questa variazione dei risultati è probabilmente dovuta ad una riduzione della rigidità della struttura causata dalle semplificazioni introdotte nella formulazione degli elementi shell.

Inoltre, confrontando i diagrammi di carico-spostamento ottenuti dalle analisi non lineari, è possibile notare che nel tratto post-critico, il modello con solo elementi solidi presenta un comportamento lievemente irregolare. Al contrario il modello con elementi shell ha un andamento più regolare. Questo poiché, trattandosi di una struttura in parete sottile, il calcolatore riesce a simularne meglio il comportamento attraverso gli elementi shell piuttosto che gli elementi solidi.

5. Analisi pannello con debonding

In questa parte, si va ad inserire la presenza del difetto, debonding, all'interno del pannello. Per ottenere il difetto ci sono varie possibilità, una ad esempio è intervenire sulla mesh. Ovvero, partendo dal modello integro, si vanno a cancellare gli elementi della mesh creata in corrispondenza del difetto. In questa particolare applicazione è stato preferito invece agire direttamente sulla geometria, si è quindi partiti dalla geometria del modello integro ed è stato rimosso il solido dell'adesivo in corrispondenza del difetto. È stata fatta questa scelta perché il programma utilizzato svolge in automatico i comandi che vengono scritti su dei file di testo, chiamati *file sessione*, che vengono dati in input al programma. Tramite l'uso dei file sessione, si facilita notevolmente la realizzazione di modelli dove varia un unico parametro, in questo caso la dimensione del difetto, in quanto è sufficiente parametrizzare le grandezze di interesse e variarle nel file di testo piuttosto che creare ogni volta un modello da zero o piuttosto che modificare sempre lo stesso modello.

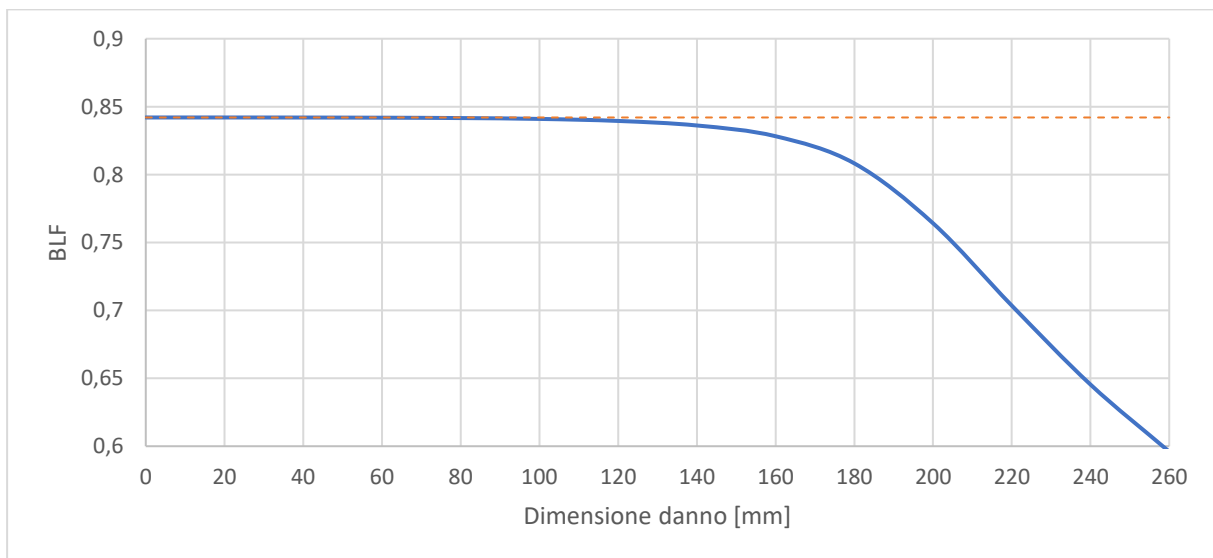


Figura 5.1 Andamento del BLF del modello con elementi solidi

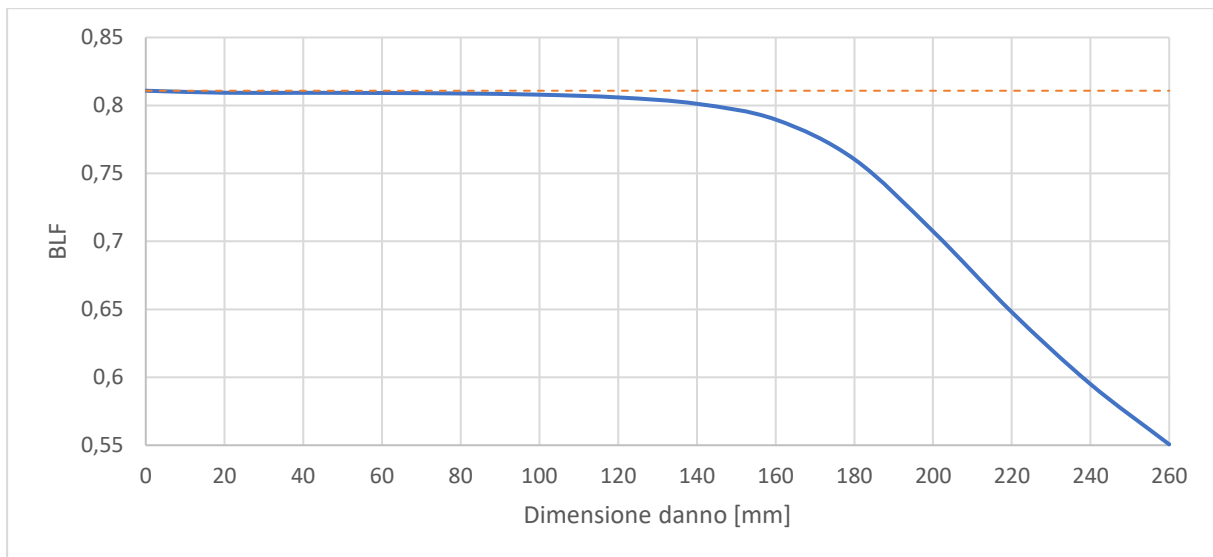


Figura 5.2 Andamento del BLF del modello con elementi solidi e shell

5.1. Effetto del debonding sul carico critico

Per poter studiare come varia il fattore di carico critico al variare della dimensione longitudinale del debonding sono state condotte delle analisi di buckling (*SOL105*) sul pannello difettato. Sono quindi stati realizzati dei modelli con dimensione del difetto crescente, partendo da una dimensione iniziale di 20 mm fino ad una massima di 260 mm, con step di 20 mm.

In *Tabella 1* si riportano i valori di carico critico, anche detto *buckling load factor (BLF)*, ottenuti dalle analisi svolta sia sul modello con solo elementi solidi, sia da quelle sul modello con elementi solidi e shell. Inoltre, in *figura 5.1* e *figura 5.2*, sono riportati rispettivamente gli andamenti dei due modelli. Si nota come c'è corrispondenza sull'effetto che il debonding sul carico critico. In particolare, per valori della dimensione del difetto inferiori a 140mm, la variazione del *BLF* può considerarsi trascurabile. Resta quindi prossima al valore del carico critico che porta la struttura ad instabilità globale, e, come possiamo apprezzare dall'esempio riportato in *figura 5.3*, la deformata è conforme a quella del modello integro.

Dimensione del danno [mm]	BLF modello con elementi solidi	BLF modello con elementi misti
0	0,84202	0,81082
20	0,84202	0,80934
40	0,84198	0,8093
60	0,84186	0,80916
80	0,8416	0,8088
100	0,84096	0,80792
120	0,83948	0,8059
140	0,83614	0,8012
160	0,82822	0,78962
180	0,80824	0,76042
200	0,76414	0,70736
220	0,70354	0,64794
240	0,64538	0,59494
260	0,596	0,5506

Tabella 3 Risultati numerici analisi di buckling (SOL105)

Per valori della dimensione del difetto superiori a 140 mm, il valore del carico critico comincia a diminuire in maniera più marcata e la curva che rappresenta l'andamento mostra una variazione di pendenza. In questo caso, il pannello irrigidito nel complesso continua ad andare in instabilità globale, ma la deformazione si concentra in modo più evidente nella zona della piastra coincidente con il debondig. Possiamo osservare in *figura 5.4* come la deformazione della piastra sia maggiore di quella del corrente³.

Infine, per difetti superiori a 220 mm, la deformazione si presenta quasi esclusivamente sulla sezione di piastra coincidente con il difetto, *figura 5.5*. A questo punto, la struttura non va più in instabilità globale, ma si è passati ad una instabilità locale della piastra. Ovvero, sotto l'effetto del carico, andrà in instabilità prima la zona difettata piuttosto che il pannello.

³ Si fa notare che la piastra passa attraverso l'irrigidimento in quanto nella SOL105 non è stato possibile inserire il contatto tra i vari elementi della struttura, cosa che sarà invece implementata nell'analisi non lineare SOL400. Il programma non è quindi in grado di elaborare l'interazione tra gli elementi ottenendo così questi risultati.

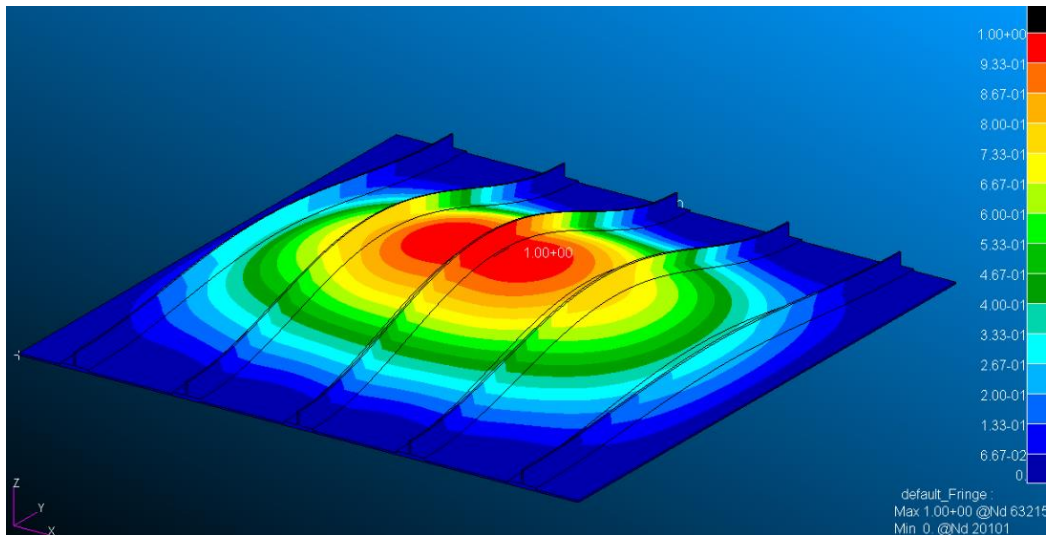


Figura 5.3 Deformata pannello irrigidito con debonding di lunghezza 40 mm

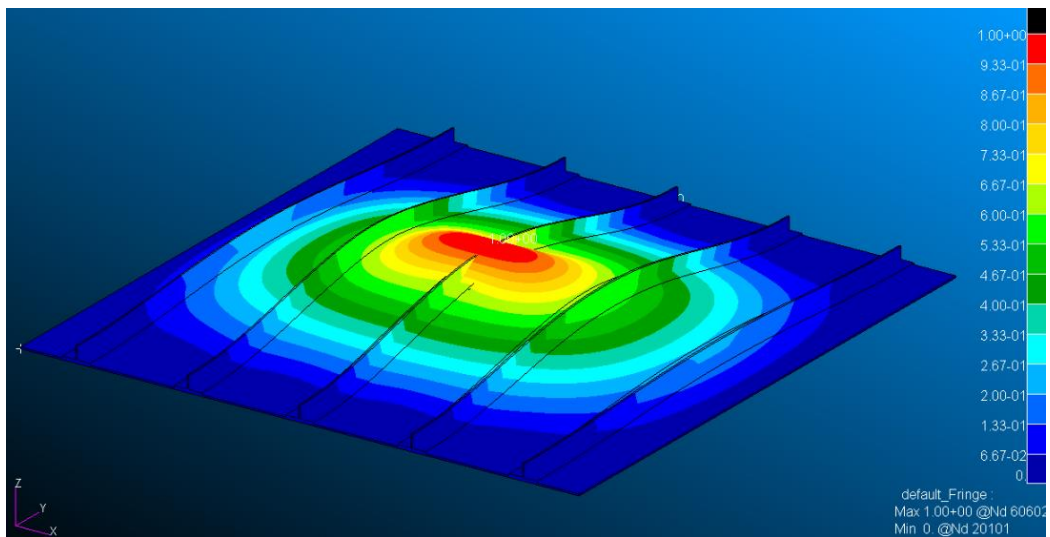


Figura 5.4 Deformata pannello irrigidito con debonding di lunghezza 180 mm

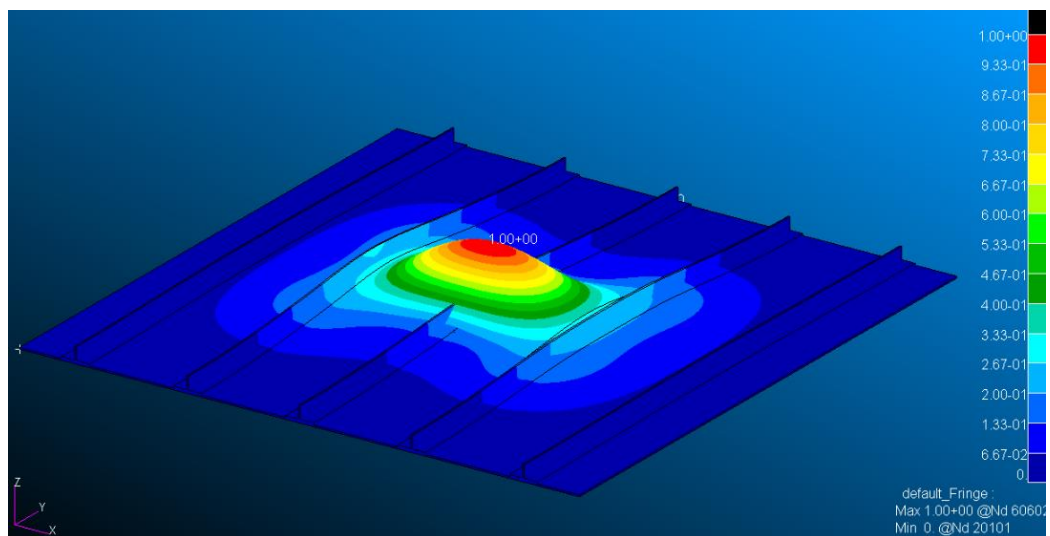


Figura 5.5 Deformata pannello irrigidito con debonding di lunghezza 260 mm

5.2. Analisi non lineare

A questo punto si sono svolte le analisi non lineari sui modelli realizzati con l'obiettivo di confermare in primo luogo, per verificare il comportamento della struttura in campo non lineare al variare del difetto di debonding. In secondo luogo, per studiare la distribuzione delle tensioni agli apici del difetto in corrispondenza dello strato di colla.

Partendo dai modelli realizzati per l'analisi di buckling, si sono scelti tre casi rappresentativi per i tre comportamenti osservati, in particolare sono stati scelti i modelli con un difetto pari a 100 mm, 180 mm e 260 mm. In questa fase è stato inserito il contatto nei modelli per evitare che tra le parti della struttura ci fosse compenetrazione. Per fare, questo l'intera struttura è stata caratterizzata come un unico *deformable body*, a cui poi è stato assegnato la capacità di riconoscere sé stessa, *self contact*. In questo modo, la struttura riconosce le altre parti di se stessa e non si incorre nel problema riscontrato nelle analisi di buckling.

Come possiamo osservare dalle *figure 5.6, 5.7 e 5.8*, il comportamento del pannello al variare della dimensione del difetto corrisponde a quanto ottenuto dalle analisi di buckling. Infatti, notiamo che per una dimensione del debonding pari a 100 mm, la struttura va in instabilità globale e non risente della presenza del difetto. Nel secondo caso, lunghezza del difetto di 180 mm, la struttura comincia a sentire l'effetto del debonding e le deformazioni si concentrano principalmente nella zona di pannello sottostante il difetto, ma l'instabilità è sempre di tipo globale. Nell'ultimo caso, le deformazioni sono concentrate completamente nella zona difettata e la restante parte della struttura è soggetta a deformazioni trastrurabili.

Dimensione del danno [mm]	BLF modello con elementi solidi	BLF modello con elementi misti
100	0,84096	0,80792
180	0,80824	0,76042
260	0,596	0,5506

Tabella 4 Valori del carico critico per i casi rappresentativi

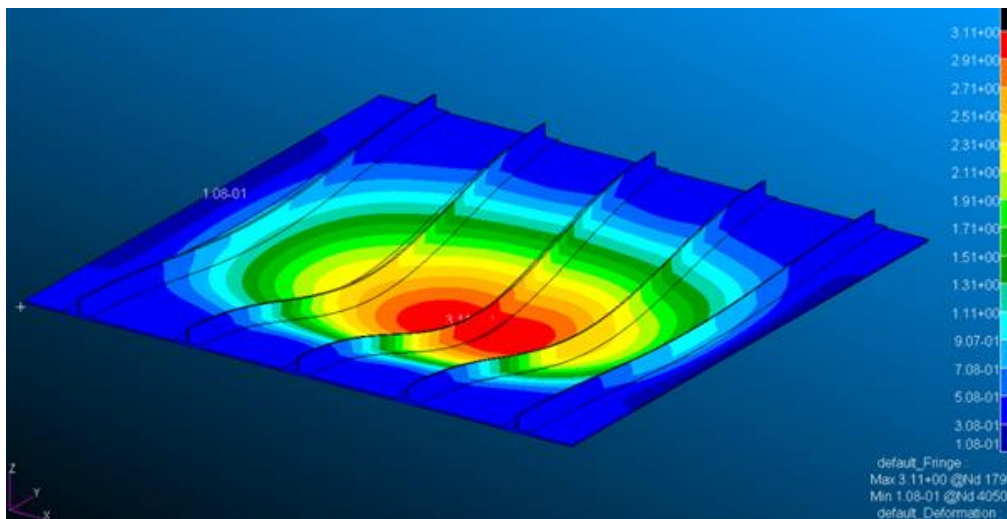


Figura 5.6 Analisi non lineare pannello irrigidito con debonding di 100 mm

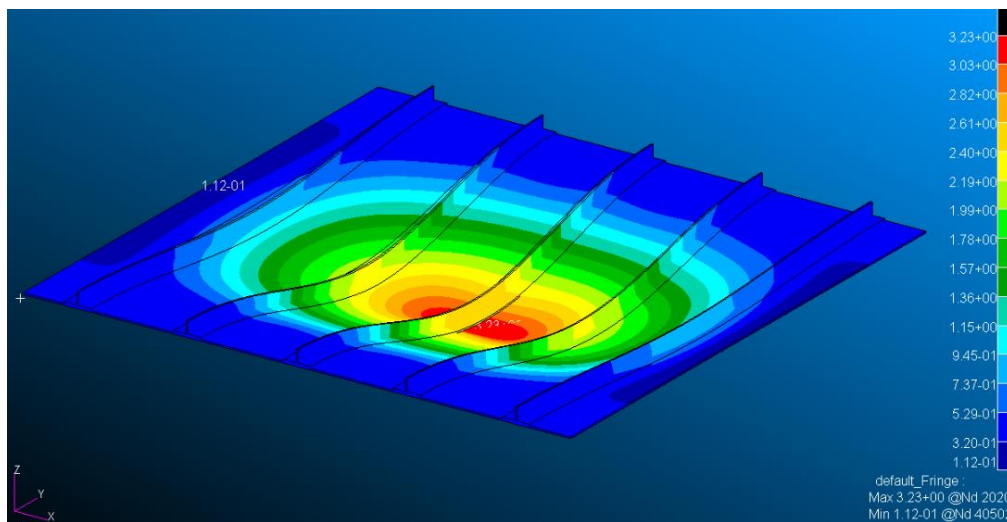


Figura 5.7 Analisi non lineare pannello irrigidito con debonding di 180 mm

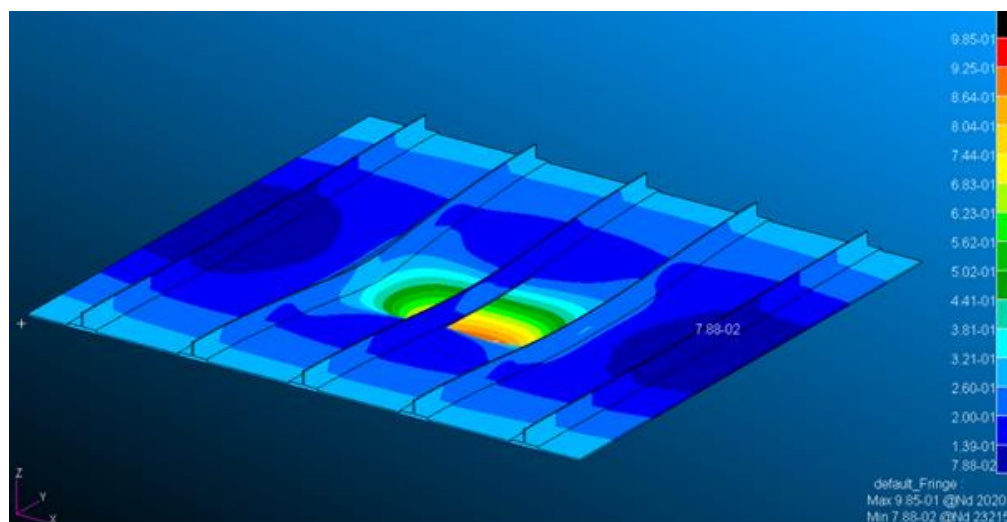


Figura 5.8 Analisi non lineare pannello irrigidito con debonding di 260 mm

Per quanto riguarda l'analisi sulle tensioni all'apice del difetto, invece, vogliamo indagare sulla distribuzione di tensioni di peeling e di sforzi di taglio nel piano longitudinale. Nello specifico, andiamo ad estrapolare dalle analisi svolte gli andamenti della σ_z e della τ_{yz} sia sui bordi esterni⁴ dell'adesivo sia in mezzeria.

Dalle prime analisi svolte, si può notare che in tutti e tre i casi analizzati, la variazione delle tensioni all'apice del difetto è concentrata in un unico elemento della mesh. Questo, porta con sé un abbassamento della precisione dei risultati e quindi una ridotta affidabilità. Se ne riporta uno come esempio in *figura 5.9*.

Per ottenere una precisione maggiore dei risultati, è stato quindi necessario andare a modificare la mesh dei modelli. In particolare, rendendola più fitta in prossimità dell'apice del difetto. Viceversa, la mesh nelle zone distanti dal difetto è stata ingrandita, poiché di poco interesse in questa fase. In questo modo, è stato possibile aumentare la precisione dei risultati ottenuti senza andare ad influire eccessivamente sul peso computazionale dei modelli.

Nella zona di interesse troviamo quindi degli elementi di dimensioni ridotte (0.5mm) che consentono al programma di fornire risultati più affidabili, *figura 5.10*.

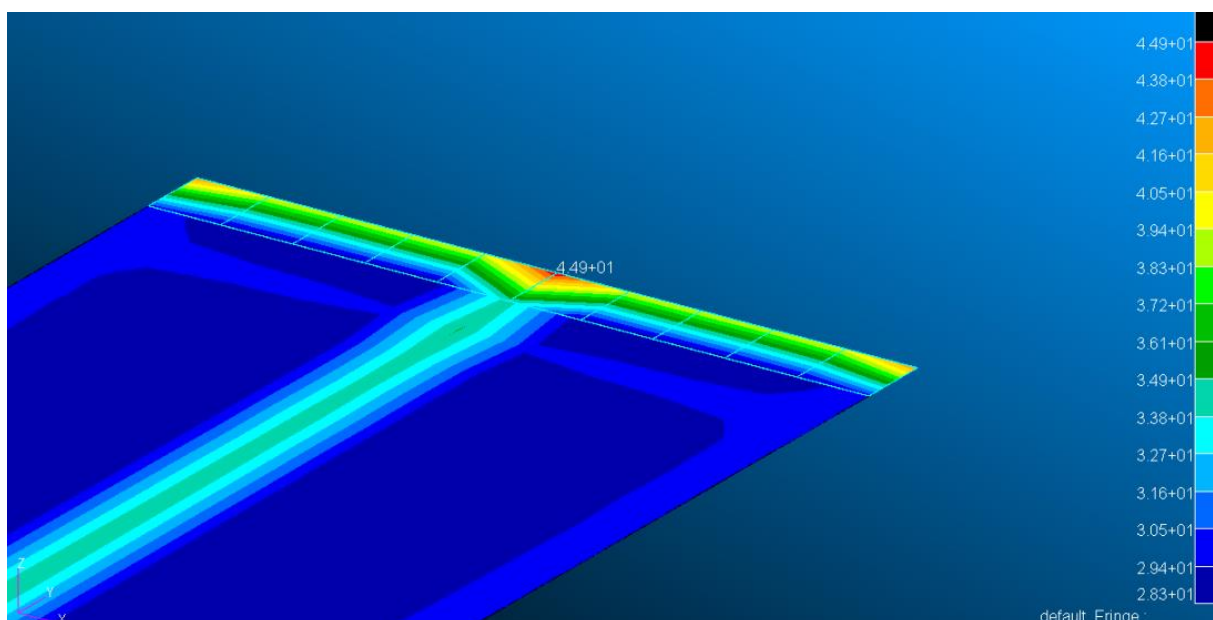


Figura 5.9 Distribuzione delle tensioni all'apice del difetto di 100 mm, particolare dell'apice del difetto

⁴ Si fa notare che essendo il problema simmetrico, gli andamenti delle tensioni ai lati destro e sinistro dello strato di adesivo sono equivalenti. Nella trattazione si è quindi scelto di riportare i risultati relativi ad uno solo dei lati.

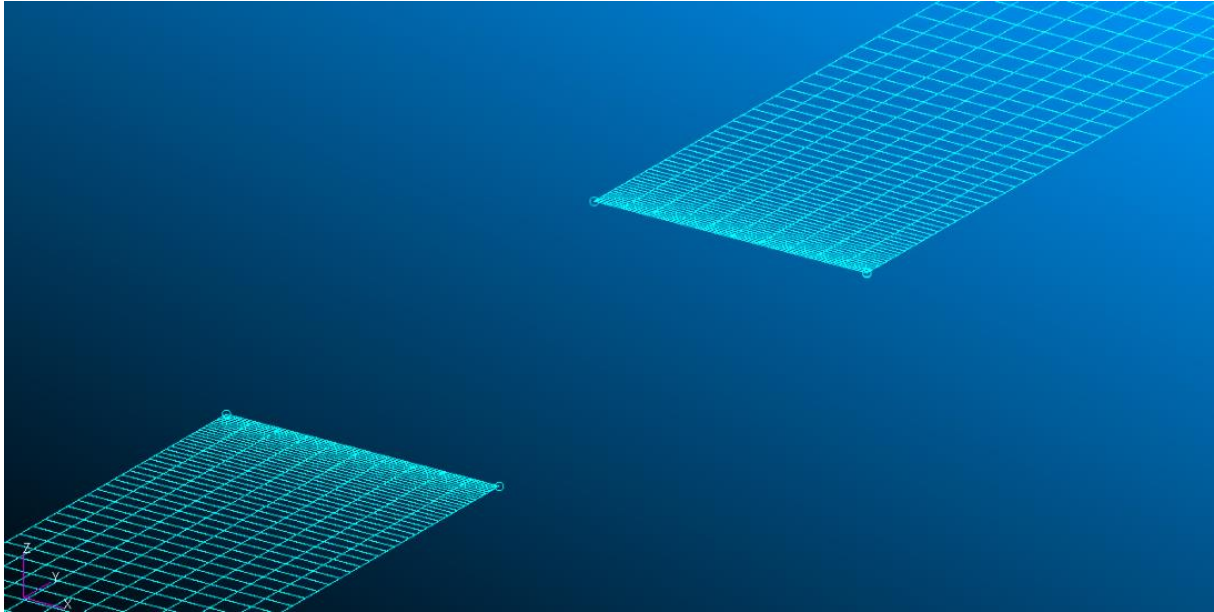


Figura 5.10 Dettaglio mesh all'apice del difetto con mesh più fitta

In *figura 5.11*, sono riportati gli andamenti delle tensioni di peeling, ottenuti dai risultati delle analisi non lineari svolte sui modelli. Si può notare come l'andamento sia pressoché lo stesso in tutti e tri i casi. Ovvero, le tensioni si mantengono circa nulle nell'adesivo del corrente centrale e presentano un aumento improvviso all'apice del difetto. Si nota inoltre, che la tensione agli apici del difetto aumenta in modulo con l'aumentare della dimensione del debonding. Viceversa, le tensioni nella restante parte di adesivo si riducono sempre più. Questo perché, ingrandendo il difetto, aumenta la differenza tra il carico critico del pannello nella zona difettata e quello globale del pannello irrigidito. Di conseguenza la zona di pannello priva di difetto si deforma sempre meno e le tensioni si riducono, tanto che sono praticamente nulle.

Le stesse considerazioni si possono fare per le tensioni di taglio. Infatti, osservando la *figura 5.12* che ne riporta gli andamenti lungo l'adesivo del corrente centrale al variare della dimensione del difetto, notiamo che si ripresentano gli stessi effetti visti nella tensione di taglio. Ovvero, nel primo caso il valore delle tensioni è basso ed è apprezzabile un picco in prossimità dell'apice del difetto ed una distribuzione di tensioni anche sulla restante parte di adesivo. All'aumentare della dimensione del difetto, le tensioni ai margini dell'adesivo si riducono, tendendo sempre più allo zero. Al contrario, le tensioni all'apice del difetto aumentano.

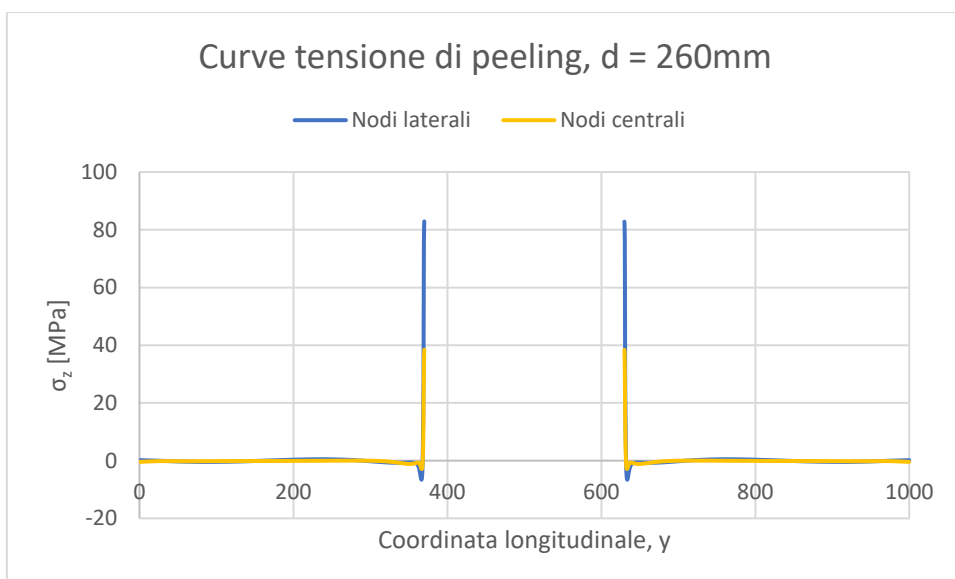
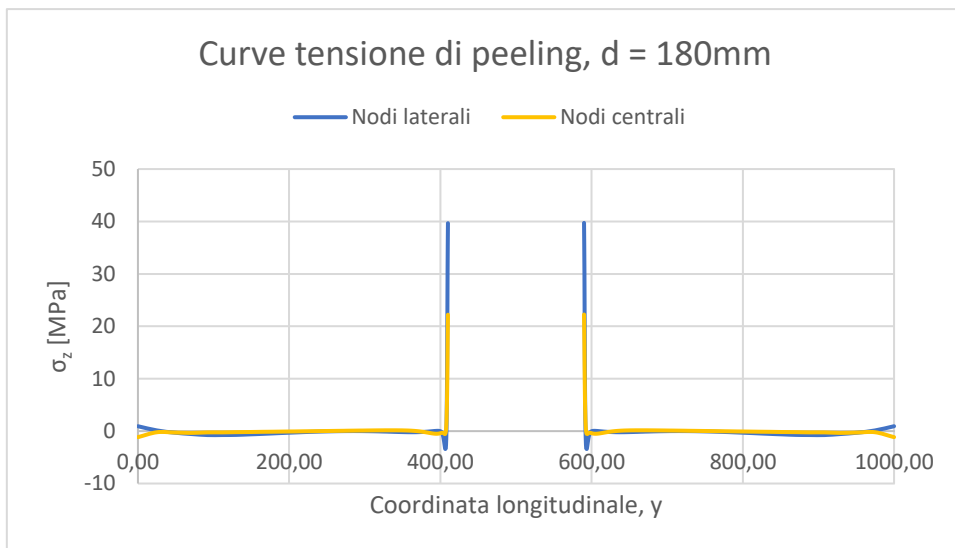
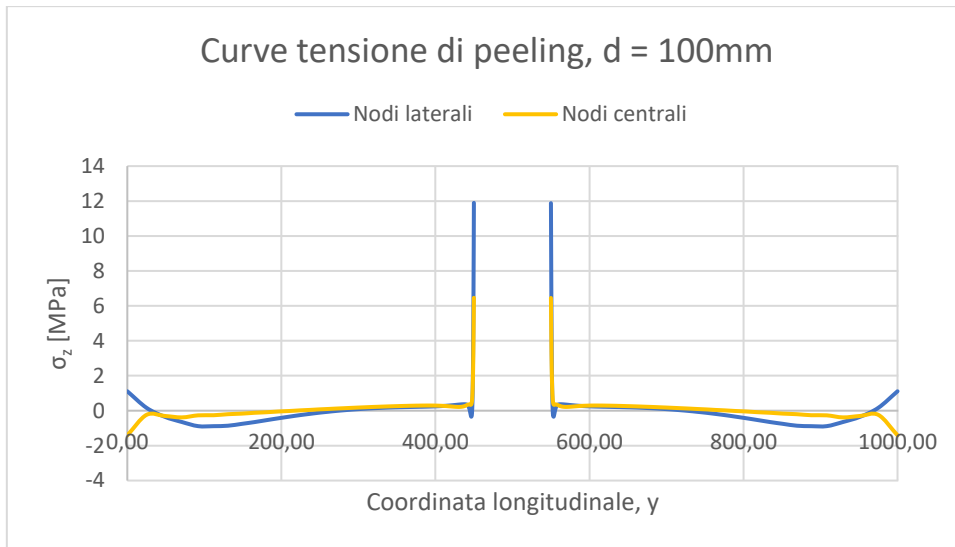


Figura 5.11 Distribuzione della tensione di peeling sull'adesivo al variare della lunghezza del debonding

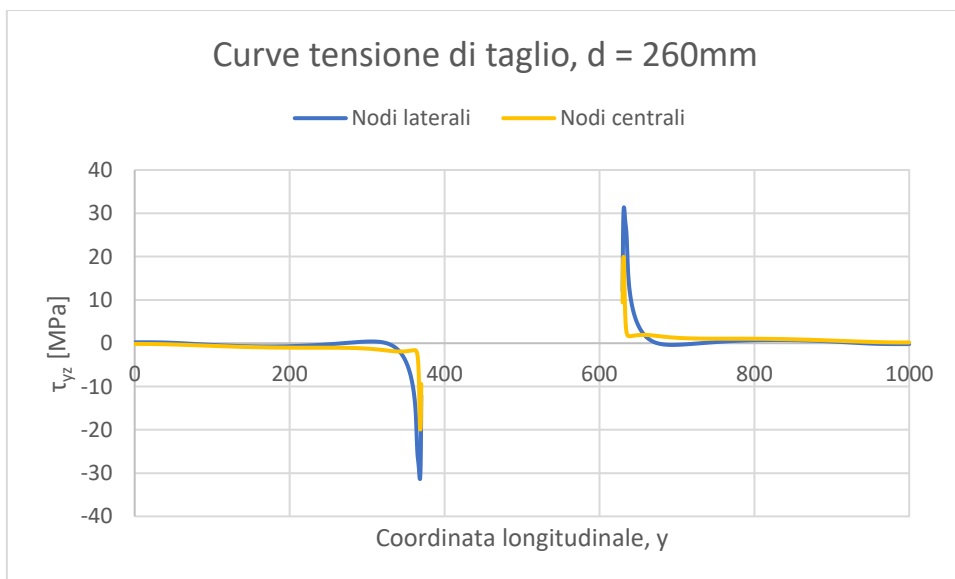
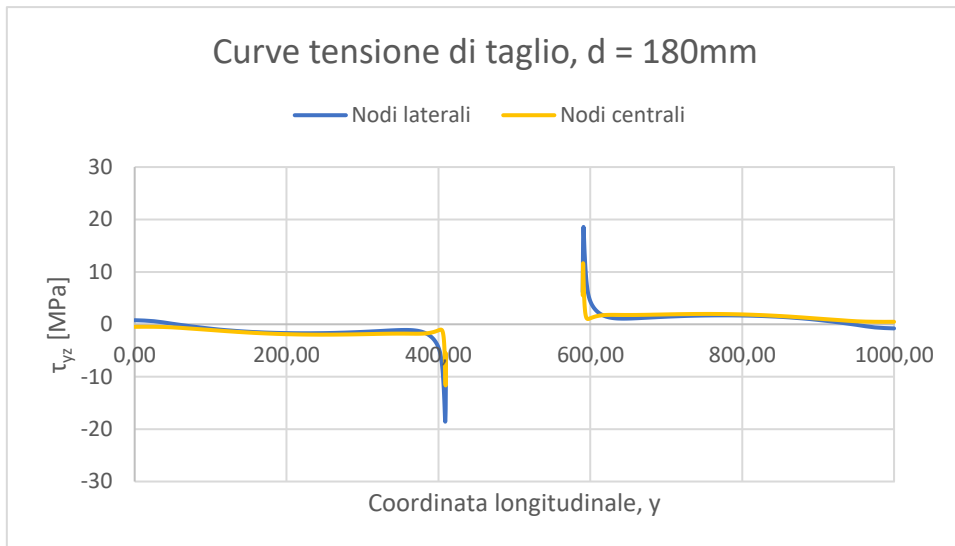
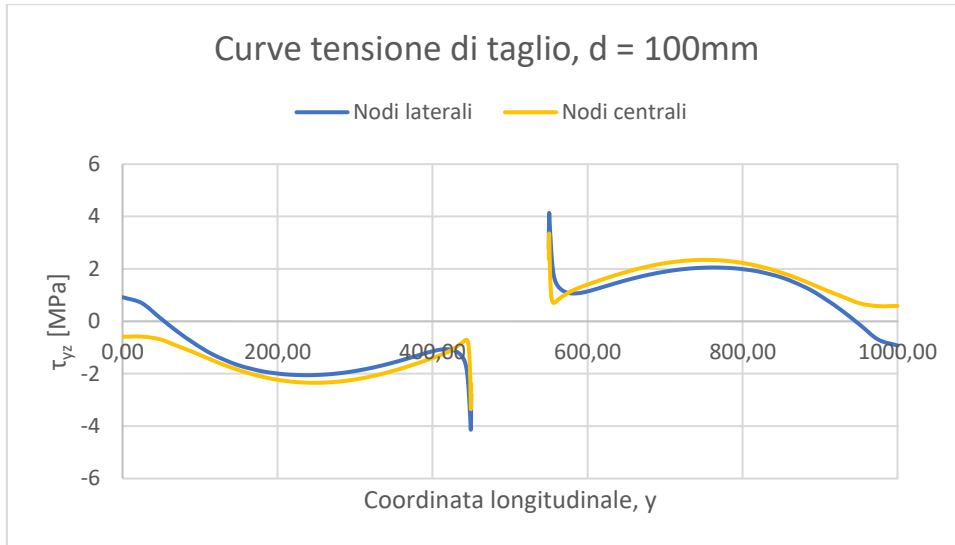


Figura 5.12 Distribuzione della tensione di taglio sull'adesivo al variare della lunghezza del debonding

Dagli andamenti ottenuti si evince, inoltre, che sia per lo sforzo di peeling sia per la tensione di taglio all'aumentare della dimensione del difetto segue un aumento delle tensioni di apice. Ad ogni modo, per avere un'idea più chiara della variazione dello stato tensionale sull'adesivo, sono stati adimensionalizzati i risultati ottenuti in rapporto al carico critico della struttura in presenza del difetto, *Figura 5.13 e 5.14*, i cui valori sono riportati in *Tabella 5*.

Dimensione del danno [mm]	BLF modello con elementi solidi	BLF modello con elementi misti	σ_{cr} [MPa]
100	0,84096	0,80792	58,8672
180	0,80824	0,76042	56,6048
260	0,596	0,5506	41,72

Tabella 5 Valori di carico critico per i tre casi studiati

Si nota come gli andamenti rispecchiano quelli dei grafici non adimensionalizzati. I picchi di tensione agli apici del difetto risultano sempre inferiori al carico critico di instabilità rispettivo, tranne che per il valore della tensione di peeling nei nodi laterali del modello che presenta un difetto di lunghezza pari a 260 mm. In questo caso particolare, la tensione raggiunta supera notevolmente il carico critico della struttura.

Inoltre, in tutti i casi analizzati i valori di picco delle tensioni risultano maggiori nelle file di nodi laterali piuttosto che nelle file dei nodi centrali.

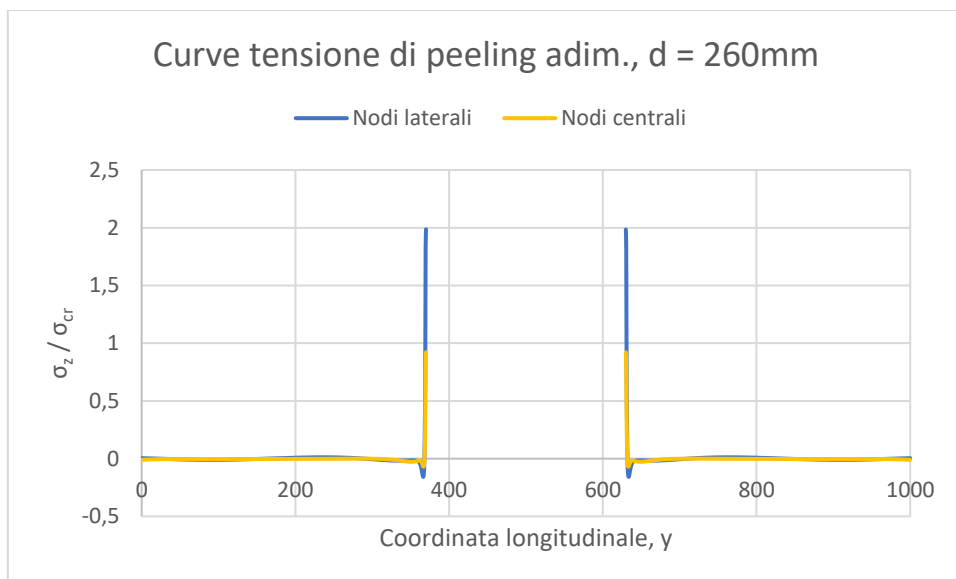
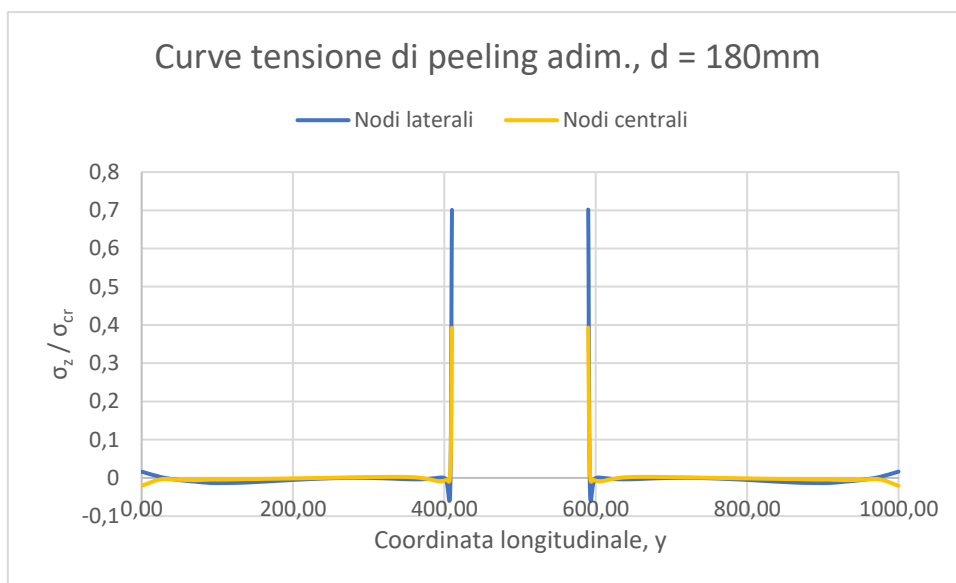
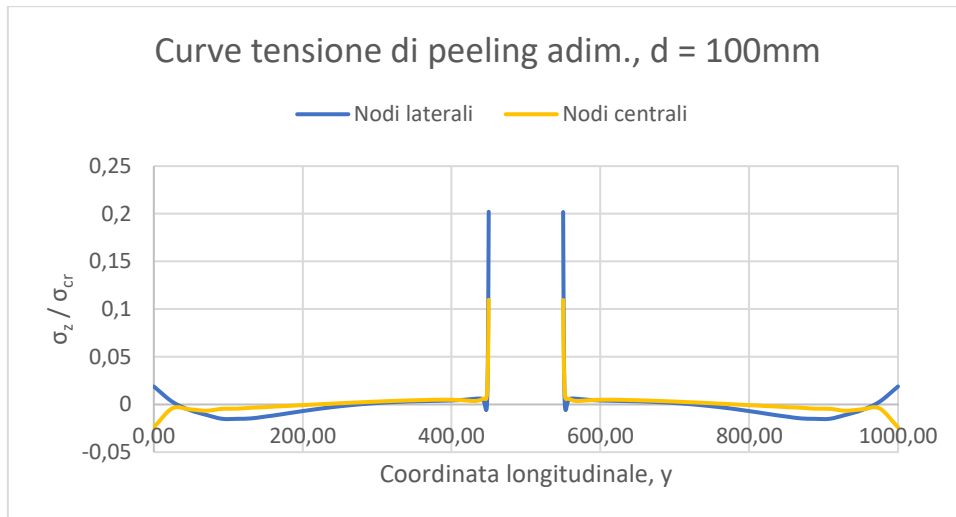


Figura 5.13 Distribuzione della tensione di peeling sull'adesivo, adimensionalizzata, al variare della lunghezza del debonding

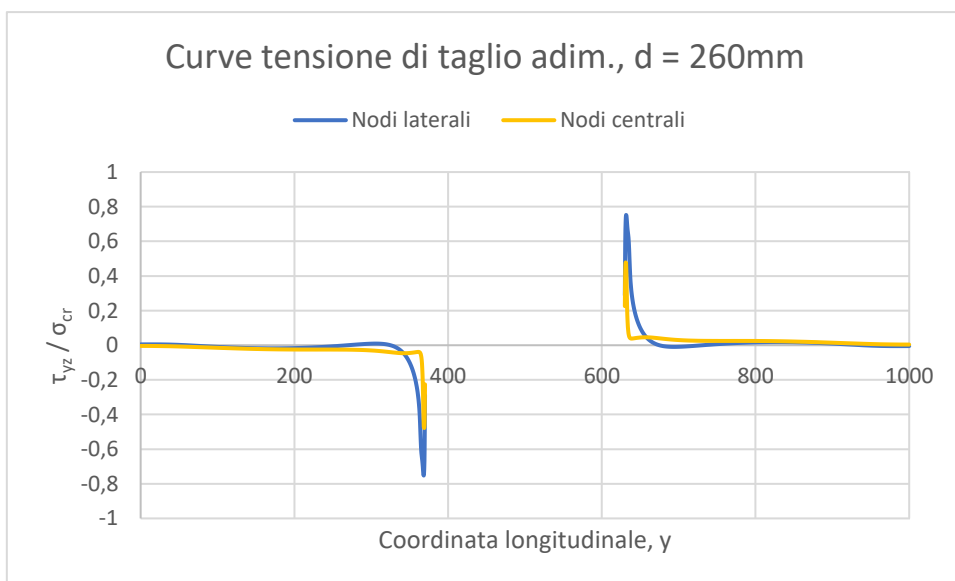
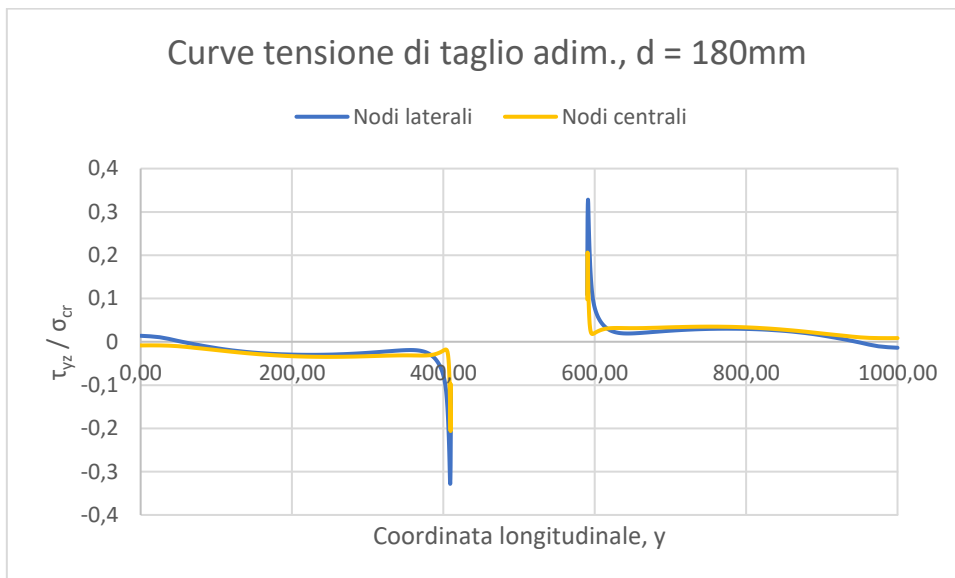
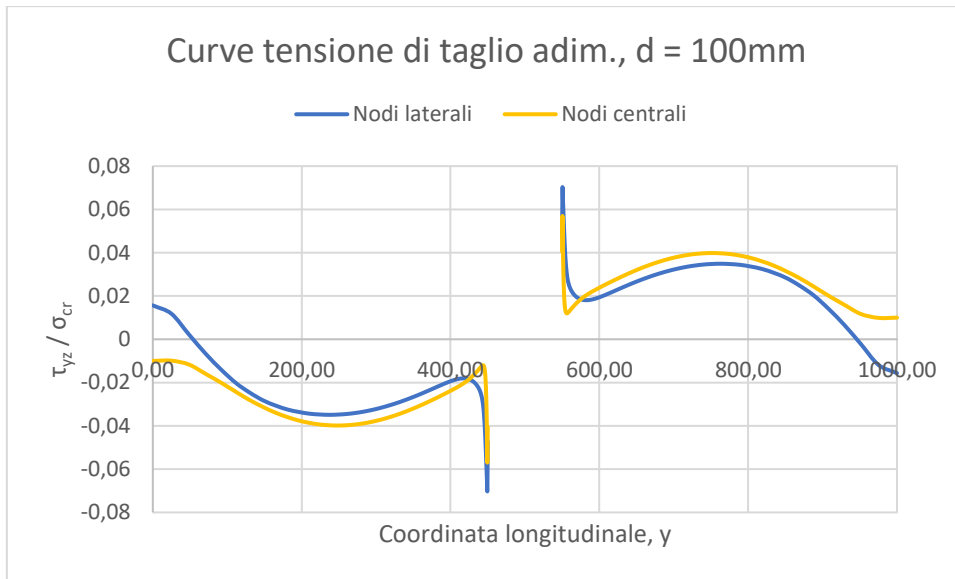


Figura 5.14 Distribuzione della tensione di taglio sull'adesivo, adimensionalizzata, al variare della lunghezza del debonding

Come già osservato, le tensioni di picco agli apici del difetto aumentano all'aumentare della dimensione del debonding presente nel pannello irrigidito. In *Figura 5.15* vengono riportati gli andamenti dei picchi di tensione in funzione della lunghezza del difetto presente nella struttura. L'andamento sempre crescente delle tensioni di peeling e di taglio, lascia intuire che esiste un valore critico della dimensione del difetto per cui si raggiungono i valori critici di rottura dell'adesivo strutturale applicato, portando così al cedimento strutturale.

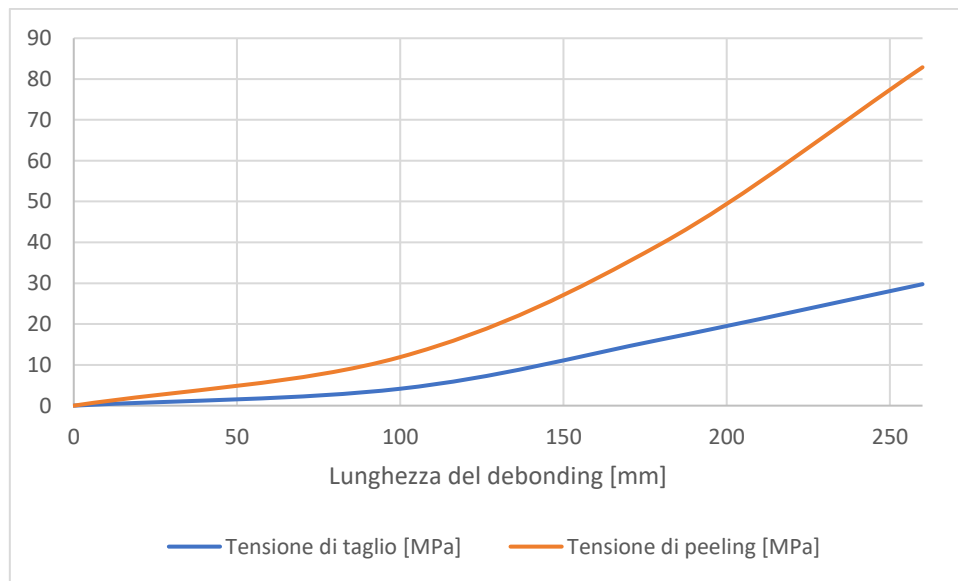


Figura 5.15 Andamento dei picchi di tensione agli apici del difetto al variare della lunghezza del difetto

6. Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è quello di analizzare il comportamento di un pannello irrigidito, rappresentativo di quelli utilizzati in campo aeronautico, sottoposto a compressione uniforme che presenta un danneggiamento all'interfaccia tra skin ed irrigidimento. L'attenzione è volta in particolare all'effetto che ha il difetto sul carico critico di instabilità del pannello, alla sua variazione in funzione della dimensione del danno, e sullo stato tensionale sullo strato di adesivo.

Con questo scopo sono stati realizzati due modelli ad elementi finiti rappresentanti la struttura di interesse, la cui differenza risiedeva nel tipo di elementi utilizzato per la schematizzazione degli elementi strutturali che costituiscono il pannello irrigidito.

Dal lavoro svolto è stato possibile osservare come per dimensioni relativamente piccole del difetto, il carico critico di instabilità della struttura non varia, così come il modo di buckling, che si presenta come modo di instabilità globale del pannello.

All'aumentare della dimensione del difetto, il carico critico si riduce e si ha una prima zona in cui la riduzione del carico critico è lieve, questa zona è caratterizzata da un modo di buckling che presenta sia instabilità locale che instabilità globale. Si ha poi una seconda zona, in cui l'andamento del carico critico risulta quasi lineare con la dimensione del difetto. In questa zona, si presenta solo un modo di instabilità locale, si deforma quindi solo la parte di struttura in corrispondenza del difetto, mentre la restante parte non presenta quasi alcuna deformazione.

Per quanto riguarda lo stato tensionale sull'adesivo, è stata osservata la presenza di un valore di picco delle tensioni in prossimità dell'apice del difetto in tutti i modelli analizzati. I valori di picco aumentano all'aumentare della dimensione del difetto, rendendo quindi critico il fenomeno. Infatti, è ipotizzabile un valore critico del difetto per cui si raggiungono valori di tensioni di picco pari alle tensioni massime sopportate dall'adesivo strutturale, portando quindi al cedimento del pannello irrigidito.

Inoltre, per dimensioni significative del difetto, si può osservare che lo stato tensionale sulla parte di adesivo lontana dal difetto tende ad appiattirsi. Mentre per valori più bassi, l'andamento delle tensioni lungo la lunghezza dell'adesivo presenta una variabilità più marcata.

I risultati ottenuti in questa tesi dimostrano l'importanza di proseguire gli studi sull'effetto che eventuali difetti o danneggiamenti presenti negli elementi strutturali possono avere sulle caratteristiche meccaniche di questi ultimi, ponendo particolare attenzione sui picchi di tensione raggiunti agli apici del difetto e ponendosi come obiettivo la ricerca del valore critico del difetto per cui si giunge a cedimento strutturale.

7. Riferimenti

- [1] Osama K. Bedair, A contribution to the stability of stiffened plates under uniform compression. *Computers & Structures* Vol. 66, No 5, pp. 535-570, 1998.
- [2] X-Y Ni, B. G. Prusty e A. K. Hellier, Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: a review on analysis and experiment (2000-2012). *Trans RINA*, Vol 157, part A1, *Intl J Maritime Eng.* Jan-Mar 2015.
- [3] D. S. Zarouchas, R. C. Alderliesten, The effect of disbonds on stability aspects of adhesively bonded aluminum panels during compression loading. *Thin-walled structures* 96 (2015) 372-382.
- [4] Charlotte Meeks, Emile Greenhalgh, Brian G. Falzon, Stiffener debonding mechanisms in post-buckled CFRP aerospace panels. *Composites: Part A* 36 (2005) 934-946.
- [5] Jeff W.H. Yap, Murray L. Scott, Rodney S. Thomson, Dieter Hachenberg, The analysis of skin-to-stiffener debonding in composite aerospace structures. *Composite Structures* 57 (2002) 425-435.
- [6] Jeff W.H. Yap, Rodney S. Thomson, Murray L. Scott, Dieter Hachenberg; Influence of post-buckling behaviour of composite stiffened panels on the damage criticality. *Composite Structures* 66 (2004) 197-206
- [7] Emile Greenhalgh, Charlotte Meeks, Andrew Clarke, James Thatcher; The effect on the performance of post-buckled CFRP stringer-stiffened panels. *Composites: Part A* 34 (2003) 623-633.
- [8] Carlos G. Dávila, Frank A. Leone, Cheryl A. Rose, William M. Johnston; Initiation and Propagation of Skin/stiffener Separation in Postbuckled Structures Subjected to Cyclic Loads. NASA Langley Research Center, 2021.
- [9] Ruixue Ji, Libin Zhao, Kangkang Wang, Fengrui Liu, Yu Gong, Jianyu Zhang; Effects of debonding defects on the postbuckling and failure behaviours of composite stiffened panel under uniaxial compression. *Composite structures* 256 (2021)
- [10] MD Nastran R3 Quick Reference Guide, Revision 0. April 24, 2008. MSC Software Corporation.
- [11] MSC Nastran Implicit Non-Linear User's Guide, Revision 1. December 3, 2013. MSC Software Corporation.
- [12] Marco Di Sciuva, Testi coordinati di analisi strutturale, Quaderno N. 3, Appunti per gli allievi Ingegneri aerospaziali del Politecnico di Torino.