

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

MODELLI MULTISCALA PER ANALISI IGRO-TERMO-ELASTICA DI STRUTTURE E MATERIALI COMPOSITI ETEROGENEI



**Politecnico
di Torino**



Relatori:

Prof. Alfonso Pagani
Ing. Alberto Racionero Sánchez-Majano
Prof. Erasmo Carrera

Candidata:

Rebecca Masia

Aprile 2022

Abstract

Negli ultimi decenni l'impiego dei materiali compositi si è largamente diffuso nel settore aerospaziale, in quanto il loro utilizzo consente di ottenere un ottimo compromesso tra la necessità di riduzione di peso e l'esigenza di raggiungere elevate performance meccaniche, garantendo il mantenimento dell'integrità strutturale. Fra le strutture realizzate in composito troviamo, ad esempio, le box che contengono i costituenti elettronici e i sistemi di protezione termica, entrambi presenti nei satelliti e alcune parti delle strutture alari dei velivoli. Questi componenti sono principalmente soggetti a carichi di natura meccanica, termica ed igroscopica, che possono provocare sollecitazioni tali da comprometterne il funzionamento. Di conseguenza, è necessario sviluppare accurati modelli di simulazione strutturale in grado di predire il comportamento meccanico delle strutture al fine di valutare potenziali situazioni critiche. Come ben noto, i materiali compositi sono costituiti da due elementi fondamentali: matrice e rinforzo. Questa caratteristica li rende totalmente differenti rispetto alle leghe metalliche maggiormente utilizzate nel settore aerospaziale. In generale, si possono identificare due differenti scale di interesse. La prima è la scala microscopica, che si riferisce al livello dei costituenti. La seconda è la scala macroscopica, la quale permette di osservare il componente in composito nel suo insieme. Tale natura multi-scala introduce un notevole livello di complessità nella simulazione del comportamento meccanico dei componenti, in quanto è necessario ottenere un certo livello di coerenza tra le due scale per eseguire accurate analisi. Per quest'ultime è fondamentale estrapolare le caratteristiche effettive del materiale osservandolo a livello microscopico. Con il seguente lavoro di tesi è stato possibile implementare un codice di calcolo per un modello micromeccanico che consente di ricavare proprietà termo-elastiche di diverse tipologie di compositi, quali coefficiente di espansione termica e calore specifico, attraverso una omogeneizzazione delle proprietà dei costituenti. Per fare questo, è stata impiegata la ben nota Carrera Unified Formulation (CUF) attraverso la quale è possibile definire un modello trave unidimensionale in cui l'utilizzo delle funzioni di espansione di tipo Hierarchical Legendre Expansions (HLE) per descrivere la sezione trasversale consente di creare un modello geometrico caratterizzato da una formulazione non iso-parametrica capace di garantire un'analisi precisa e affidabile. In questo contesto la CUF viene accoppiata alla teoria del Mechanics of Structure Genome (MSG) per creare il modello micromeccanico. Inoltre, introducendo un carico meccanico e termico a livello macroscopico, un secondo step di deomogeneizzazione permette di recuperare l'andamento delle tensioni e delle deformazioni che si registrano a livello locale tra matrice e fibra. Allo stesso modo è possibile ricavare le caratteristiche di conducibilità termica omogeneizzate e il flusso di calore che si ottiene localmente a seguito di una variazione di temperatura sulla struttura. In seguito, sfruttando l'analogia tra la legge di Fourier e la legge di Fick è stato possibile implementare il calcolo delle caratteristiche igrotermiche di diffusività e ricavare il flusso di umidità locale. Infine, si è mostrata una prima applicazione di analisi multi-scala per il calcolo delle proprietà termo-elastiche inserendo i risultati dell'analisi micromeccanica all'interno del modello macroscopico.

Indice

1	Introduzione	7
1.1	Materiali compositi	7
1.2	Analisi multiscala	8
1.3	Struttura dell'elaborato di tesi	9
2	Concetti preliminari per modelli trave e piastra	11
2.1	Premessa	11
2.2	Teorie della trave classiche	15
2.2.1	Euler - Bernoulli Beam Theory (EBBT)	15
2.2.2	Timoshenko Beam Theory (TBT)	16
2.2.3	Saint Venant beam theory (SVT)	17
2.3	Modello piastra	18
3	Carrera Unified Formulation (CUF)	20
3.1	Funzioni di espansione	21
3.1.1	Espansioni di Taylor (TE)	21
3.1.2	Espansioni di Lagrange (LE)	22
3.2	Espansioni gerarchiche Legendre (HLE)	24
3.3	Mappatura della sezione trasversale	26
3.3.1	Mappatura di primo e secondo ordine	27
3.3.2	Mappatura con il metodo delle funzioni di blending	27
3.4	Approccio Component-Wise	29
4	Formulazione agli elementi finiti	31
4.1	Spostamenti generalizzati e funzioni di forma	31
4.2	Principio dei lavori virtuali	34
4.3	Nucleo fondamentale	35
4.4	Tecnica di assemblaggio CUF	36
5	Analisi micromeccanica	37
5.1	Modelli per analisi micromeccanica	37
5.2	Repeating Unit Cell (RUC)	40
5.3	Modelli di risoluzione raffinati per il RUC	41
5.4	Mappatura della sezione trasversale del RUC	42
6	Analisi micromeccanica termo-elastica	46
6.1	Variational asymptotic method per analisi termo-elastica	46
6.2	Implementazione FEM	47
6.3	Risultati numerici	50
6.3.1	Compositi rinforzati con fibre	50

6.3.2	Compositi rinforzati con particelle	51
6.3.3	Calcolo delle tensioni locali	54
7	Analisi micromeccanica delle caratteristiche igro-termiche	60
7.1	Conducibilità termica	60
7.1.1	Variational asymptotic method per la conducibilità termica	61
7.1.2	Implementazione FEM	62
7.1.3	Risultati numerici	63
7.2	Proprietà igroscopiche	68
7.2.1	Formulazione problema igroscopico	68
7.2.2	Implementazione FEM	69
7.2.3	Risultati numerici	71
8	Analisi multiscala	74
8.1	Strategia di modellazione di problemi multiscala	74
8.2	Risultati numerici multiscala	75
8.2.1	Analisi di omogeneizzazione	76
8.2.2	Analisi strutturale termo-elastica macroscopica	77
8.2.3	Analisi di deomogeneizzazione	78
9	Conclusioni	84
9.1	Sviluppi futuri	85
A	Espansioni polinomiali HLE	86
B	Matrici FN del problema termo-elastico	89
B.1	$E^{\tau sij}$	89
B.2	$D_{h\varepsilon}^{sj}$	90
B.3	$D_{h\theta}^{sj}$	90
C	Deomogeneizzazione micromeccanica termo-elastica	91
C.1	Composito square-pack B/Al	91
C.2	Composito hexa-pack glass/epoxy	92
D	Matrici FN del problema di conducibilità termica e igroscopico	93
D.1	$F^{\tau sij}$	93
D.2	$K_{h\phi}^{\tau i}$	93
E	Deomogeneizzazione analisi multiscala	94
E.1	Multiscala termo-elastica	94

Elenco delle figure

1.1	Illustrazione dei livelli di interesse di analisi multiscala di materiali compositi [35].	8
2.1	Sistema di coordinate usato per le teorie della trave.	12
2.2	Sistema di coordinate (1, 2, 3) materiale.	13
2.3	Rappresentazione trave di Eulero-Bernoulli [7].	16
2.4	Rappresentazione trave di Timoshenko [7].	17
2.5	Modello piastra [7].	19
3.1	Modellazione del modello trave attraverso le TE [7].	22
3.2	Normalizzazione di una geometria attraverso l'uso di polinomi di Lagrange L3.	23
3.3	Modellazione del modello trave attraverso le LE [7].	24
3.4	Funzioni di espansione di tipo HLE sulla sezione trasversale [8].	25
3.5	Metodo di mappatura della sezione trasversale della fibra y_1y_2 attraverso il metodo delle blending function.	28
3.6	Metodo di mappatura della sezione trasversale di un dominio completamente curvilineo.	29
3.7	Modellazione component-wise matrice e fibra di una porzione di materiale composito [17].	29
3.8	Tipologie di modelli HLE trave per strutture in composito [1].	30
4.1	Funzioni di forma Lagrange B2 e B3.	32
4.2	Funzioni di forma Lagrange B4.	33
4.3	Elemento B4 per l'approssimazione della direzione y della trave [7].	33
4.4	Modello FEM della trave con funzioni di forma N_i e funzioni di espansione F_τ [7].	33
4.5	Rappresentazione dell'approssimazione assiale usando le funzioni di forma N_iN_j e della sezione trasversale usando F_τ, F_s [13].	36
4.6	Rappresentazione della procedura di assemblaggio [7].	36
5.1	Rappresentazione di modelli RUC e RVE per analisi micromeccanica.	38
5.2	Materiale composito eterogeneo e omogeneizzato.	39
5.3	Sistemi di riferimento del materiale eterogeneo e del costituente RUC [9].	40
5.4	Sistema di coordinate locale del modello RUC square-pack.	41
5.5	Distribuzione dei domini di espansione sulla sezione trasversale per un composito rinforzato con fibra con geometria di tipo square-pack. L'esatta geometria circolare della fibra deriva dall'impiego della mappatura delle funzioni di blending.	42
5.6	Mappatura della sezione trasversale del RUC attraverso le funzioni di blending.	43

5.7	Modello microstruttura hexagonal-pack.	43
5.8	Modello trave HLE di un RUC rinforzato da particella rettangolare.	44
5.9	Modello trave HLE di un RUC rinforzato da particella cilindrica. L_i rappresenta la lunghezza dell'inclusione.	44
6.1	α_{11} materiale composito B/Al per differenti V_f e con HL8.	51
6.2	α_{22} materiale composito B/Al per differenti V_f e con HL8.	52
6.3	c_v del SiC/Cu per differenti V_f e con ottavo ordine di espansione HLE.	52
6.4	α_{11} materiale composito glass/epoxy con inclusioni particellari al variare della V_f con ottavo ordine di espansione HLE.	53
6.5	c_v materiale composito steel/Al per differenti volumi di particelle V_f	55
6.6	Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG, (c) σ_{23} Swift-Comp (d) σ_{23} CUF-MSG.	55
6.7	Modello HLE per RUC hexa-pack.	56
6.8	Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.	57
6.9	Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K (a) σ_{23} Swift-Comp (b) σ_{23} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.	57
6.10	σ_{22} risultante dall'introduzione di $\Delta T = 100$ K e una deformazione unitaria ε_{11} del composito glass/epoxy hexa-pack, diagrammata lungo la diagonale del RUC.	58
6.11	σ_{23} risultante dall'introduzione di $\Delta T = 100$ K e una deformazione unitaria ε_{11} del composito glass/epoxy hexa-pack, diagrammata lungo la diagonale del RUC.	59
7.1	Risultati analisi conducibilità termica C/Al square-pack per diverse V_f con HLE di ordine 8, confrontati con il metodo VAMUCH [38] e Hashin [21].	64
7.2	Andamento flusso di calore locale q_{22} per composito glass/polypropylene con una $V_f = 0.2$ a seguito di un gradiente di temperatura pari a -100 [K/m] in direzione y (a) CUF-MSG HL8 (b) VAMUCH [38].	65
7.3	(a) Flusso di calore q_{22} (b) Distribuzione del flusso di calore q_{22} lungo la direzione $y_2 = 0$ per il composito glass/polypropylene.	66
7.4	Risultati analisi conducibilità termica composito SiC/Al particles reinforced per differenti particle volume fraction V_f	67
7.5	Risultati analisi proprietà igrotermiche per composito C/polymide per differenti volume fraction V_f e ordine di HLE 8 confrontati con i metodi presenti in letteratura.	72
7.6	Andamento flusso di umidità locale J_{22} per composito C/polymide con una $V_f = 0.3$ a seguito di una variazione di concentrazione di umidità in direzione y pari a 1%.	73
7.7	(a) Flusso di umidità J_{22} (b) Distribuzione del flusso di umidità J_{22} lungo la direzione $y_2 = 0$ per il composito C/polymide.	73
8.1	Flow-chart analisi multiscala.	76
8.2	Caratteristiche geometriche della lamina in Carbon/Epoxy.	77
8.3	Andamento campo di tensione lungo lo spessore nel punto P della lamina per differenti mesh attraverso l'uso della tecnica LW.	79
8.4	Andamento campo di tensione lungo lo spessore nel punto P della lamina per differenti mesh attraverso l'uso della tecnica LW.	80

8.5	Andamento campo di variazione lungo lo spessore nel punto P della lamina per differenti mesh attraverso l'uso della tecnica LW.	81
8.6	Campo di tensione σ_{33} e σ_{13} locale a seguito dell'introduzione del campo di deformazione in tabella 8.7.	81
8.7	σ_{22} risultante dall'introduzione dello stato di deformazione in Tabella 8.7, diagrammata lungo la direzione y_3 del RUC.	82
8.8	Flusso di calore locale q_{22} a seguito dell'introduzione del gradiente di temperatura lungo z riportato in tabella 8.8.	82
8.9	q_{22} risultante dall'introduzione del gradiente di temperatura lungo z ∇T_z , diagrammata lungo la diagonale del RUC.	83
C.1	Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K e una deformazione $\epsilon_{11} = 1$ (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG, (c) σ_{23} Swift-Comp (d) σ_{23} CUF-MSG.	91
C.2	Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K e $\epsilon_{11} = 1$ (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.	92
C.3	Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K e $\epsilon_{11} = 1$ (a) σ_{23} Swift-Comp (b) σ_{23} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.	92
E.1	Campo di tensione (a) σ_{11} , (b) σ_{22} , (c) σ_{23} e (d) σ_{12} locale a seguito dell'introduzione del campo di deformazione in tabella 8.7.	94

Elenco delle tabelle

3.1	Polinomi TE [7].	21
3.2	Coordinate normalizzate dei tre nodi dell'elemento L3 [7].	23
5.1	Gradi di libertà delle diverse microstrutture per il problema termo-elastico, considerando diversi gradi p delle HLE.	45
5.2	Gradi di libertà delle diverse microstrutture per il problema conducibilità termica e proprietà igroscopiche, considerando diversi gradi p delle HLE.	45
6.1	Effettivi coefficienti di espansione termica del composito B/Al square-pack forniti dai risultati presenti in letteratura e confrontati con il presente approccio, considerando differenti ordini di espansione HLE, con un volume di fibra pari a 0.47.	50
6.2	Valori di lunghezza del lato dell'inclusione cubica, raggio e lunghezza del cilindro per le inclusioni cilindriche in relazione alla V_f considerata.	53
6.3	Effettivi coefficienti di espansione termica del composito glass/epoxy rinforzato con particelle, considerando ottavo ordine di espansione HLE, con un volume di particelle pari a 0.3.	54
7.1	Differenza percentuale dei risultati ottenuti con i metodi CUF-MSG e VAMUCH rispetto ai valori di soluzione esatta di Hashin lower bound per diversi valori di V_f	64
7.2	Risultati omogeneizzazione composito SiC/Al $V_f = 0.2$	67
7.3	Risultati omogeneizzazione composito C/polymide con $V_f = 0.3$ square-pack per diversi ordini di funzioni di espansione HLE confrontati con i metodi presenti in letteratura.	71
8.1	Proprietà elastiche fibra carbonio e matrice Epoxy [9].	75
8.2	Proprietà termiche fibra carbonio e matrice Epoxy [25][45][26] [5].	75
8.3	Proprietà elastiche effettive del composito Carbon/Epoxy.	76
8.4	Proprietà termiche effettive del composito Carbon/Epoxy.	77
8.5	Spostamento verticale della piastra valutato in P a $z = 0.6$ [mm] e $x = y = 0$ [mm] per differenti tipi di mesh FE. Tutti i modelli usano un'espansione di tipo LE3 per strato.	77
8.6	Stato di tensione e variazione di temperatura della piastra in P a $z = 0.6$ [mm] e $x = y = 0$ [mm] per differenti tipi di mesh FE. Tutti i modelli usano un'espansione di tipo LE3 per strato.	78
8.7	Stato di deformazione e variazione di temperatura nel sistema di riferimento locale della piastra in P a $z = 0.6$ [mm] per la mesh selezionata.	78
8.8	Stato di deformazione e variazione di temperatura locale della piastra in P a $z = 0.6$ [mm] per la mesh selezionata.	81

Capitolo 1

Introduzione

Oggigiorno i materiali compositi rappresentano un sempre più importante oggetto di ricerca, non solo per applicazioni in campo aerospaziale, ma anche in campo energetico, civile e più recentemente anche in quello biomedico. Il motivo del sempre più diffuso utilizzo dei materiali compositi è da ricercarsi nelle altissime performance che essi permettono di raggiungere. Nell'aviazione, la principale ragione del loro utilizzo risiede nella riduzione di peso che essi sono in grado di offrire, consentendo di aumentare il contenuto di combustibile trasportabile e del carico utile. In campo spaziale l'impiego dei materiali compositi consente di soddisfare i requisiti essenziali imposti dai componenti, quali la riduzione del peso e la capacità di resistere ad un ampio range di temperature senza perdere le proprietà caratteristiche. Vediamo l'utilizzo di questi materiali, ad esempio, nelle box che contengono i costituenti elettronici e i sistemi di protezione termica, entrambi presenti nei satelliti e alcune parti delle strutture alari dei velivoli. Anche se la ricerca ha già fatto numerosi passi avanti nello studio di tali materiali, il sempre più diffuso utilizzo unito alla necessità di raggiungere caratteristiche più avanzate, rende ancora necessario lo sviluppo di nuovi modelli di previsione delle performance in modo sempre più accurato, dettagliato e ottimizzato.

1.1 Materiali compositi

La ragione del rapido aumento di utilizzo e popolarità dei materiali compositi nel campo ingegneristico è da ricercarsi nelle altissime proprietà che combinano caratteristiche importanti come rigidità e resistenza ad un bassissimo peso con una elevata resistenza alla corrosione.

I materiali compositi sono costituiti da due o più fasi, tipicamente matrice rinforzo, e a volte interfaccia tra i due. Il rinforzo può essere in fibra corta o lunga, oppure in inclusioni particellari. I due costituenti presentano, singolarmente, differenti caratteristiche meccaniche e termiche, ma se combinati, permettono di ottenere proprietà completamente diverse dalle singole iniziali e che non sarebbero raggiungibili altrimenti. Questa caratteristica unica rende i materiali compositi superiori quando comparati ai singoli elementi. In generale la fibra è il componente che ha il compito di sopportare i carichi meccanici più rilevanti, mentre la matrice circostante permette sia di mantenere le fibre nella giusta posizione e orientazione, che di svolgere una funzione di protezione dai danni causati dall'alta temperatura e dalla presenza di umidità. Le fibre utilizzate in campo aerospaziale variano da fibre in vetro a fibre in carbonio, boro e carburo di silicio, che vengono incorporate nelle

matrici ceramiche (CMCs), metalliche (MMCs) e polimeriche (PMCs).

1.2 Analisi multiscala

A causa dell'intrinseca eterogeneità dei materiali compositi, e quindi della loro natura multiscala, essi vengono opportunamente studiati da due punti di vista:

- Microscala: lo studio del materiale dal punto di vista dell'interazione tra i costituenti, esaminati nella scala microscopica per determinare il loro effetto sulle proprietà del materiale;
- Macroscala: lo studio del materiale composito considerato a caratteristiche omogenee, gli effetti dei materiali costituenti sono individuati solo in termini di proprietà mediate.

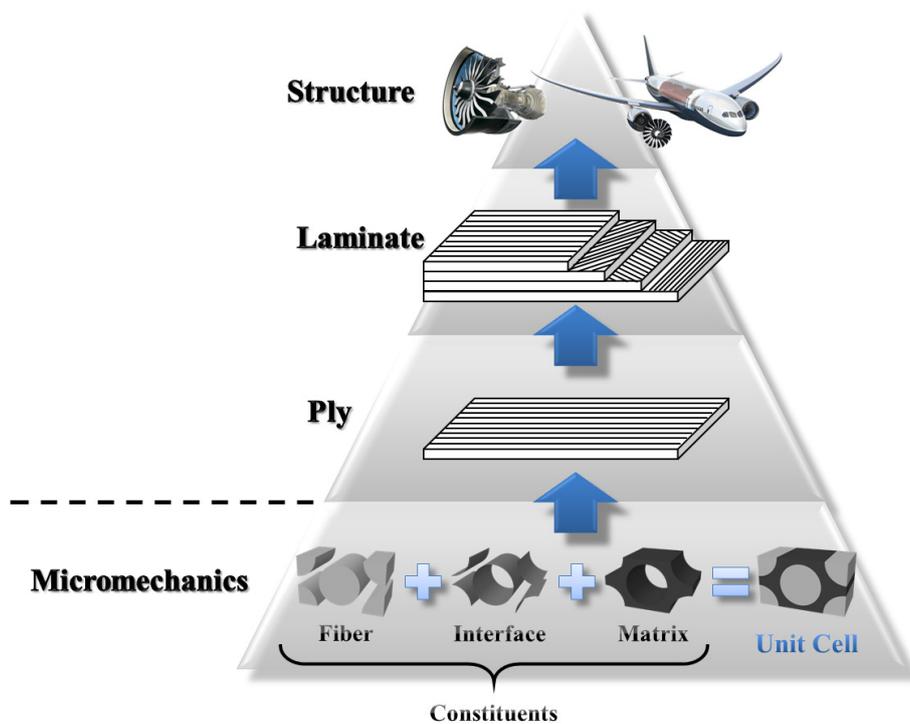


Figura 1.1: Illustrazione dei livelli di interesse di analisi multiscala di materiali compositi [35].

Un'importante pregio dell'analisi micromeccanica di materiali compositi è quello di essere in grado di predire le effettive proprietà del materiale composito a partire dalle caratteristiche dei suoi costituenti. Il tutto senza l'ausilio di tecniche sperimentali, spesso complicate e costose. Grazie a questo tipo di analisi è possibile compiere dei test virtuali che consentono anche di ridurre i costi legati ai processi sperimentali, necessari alla validazione del componente. Inoltre, essa consente di localizzare il campo delle tensioni e delle deformazioni tra le due fasi per un dato carico applicato in scala macroscopica, qualità estremamente importante quando si indagano damage e failure dei materiali.

Generalmente i metodi utilizzati in micromeccanica si basano sull'assunzione che la disposizione di fibre e particelle all'interno del volume considerato segua uno schema ordinato e periodico, identificabile come Repeating Unit Cell (RUC), definito come la minima entità

geometrica che può essere periodicamente ripetuta nello spazio per costituire la struttura macroscopica. Molti dei metodi presenti in letteratura fanno uso di risoluzioni analitiche e semi-analitiche del RUC, come ad esempio i lavori [23], [29] e [3]. Altri, invece, forniscono delle soluzioni approssimate che sono applicabili a molti casi generici. Altre tecniche largamente utilizzate sono basate sul concetto di Representative Volume Element (RVE) che consiste nell'applicare tensioni e spostamenti al contorno del volume rappresentativo e ricavarne le soluzioni locali sotto determinate condizioni al contorno periodiche.

Lo scopo generale di tutti i metodi utilizzati in micromeccanica può essere riassunto in due punti:

1. Ottenere le effettive proprietà del materiale eterogeneo RUC, utilizzabili come informazione costitutiva utilizzabile in un modello macro-scala;
2. Recuperare gli spostamenti, le tensioni e le deformazioni locali sul RUC, dato un set di output dell'analisi globale sulla struttura.

Nel seguente lavoro, il problema multiscala verrà risolto attraverso l'uso del Mechanics of Structure Genome (MSG) introdotto da W. Yu [45], per risolvere il problema sul RUC attraverso l'utilizzo di un nuovo approccio unidimensionale (1D). Tale metodo si basa sul concetto di Structure Genome (SG), definito come il più piccolo elemento matematico ottenibile della struttura, che può essere inteso come una superficie che include le due differenti fasi del materiale eterogeneo (2D). Il MSG utilizza il Variational Asymptotic Method (VAM) per risolvere i problemi che coinvolgono i parametri relativi al RUC. Eseguendo l'analisi asintotica su di esso, il VAM è in grado di ottenere le proprietà effettive e le soluzioni locali del materiale eterogeneo periodico. Attraverso la Carrera Unified Formulation (CUF) è possibile ridurre il problema tridimensionale (3D) in uno 2D o 1D che richiede un costo computazionale più basso ma allo stesso tempo garantisce altissimi livelli di accuratezza. In questo modo il RUC viene modellizzato utilizzando elementi trave nella direzione longitudinale della fibra e nelle direzioni della sezione trasversale si impiegano espansioni polinomiali di tipo Hierarchical Legendre Expansion (HLE), che generano un modello gerarchico in cui la geometria dei costituenti è perfettamente definita da una tecnica di mappatura di ordine superiore. La modellazione micromeccanica di materiali compositi multifase rappresenta una necessità sia in campo ingegneristico che nel campo della scienza dei materiali a causa del continuo bisogno di sviluppare nuovi materiali per applicazioni più innovative.

1.3 Struttura dell'elaborato di tesi

La seguente tesi si pone come obiettivo quello di mostrare un nuovo modello di calcolo multiscala per il calcolo delle caratteristiche igro-termo-elastiche di materiali compositi eterogenei. Questo prevede lo sviluppo di un'analisi microscopica basata sulla formulazione CUF accoppiata al concetto di MSG per compiere analisi micromeccaniche su diverse tipologie di compositi. Inoltre, si è mostrata una prima applicazione di analisi multi-scala per il calcolo delle proprietà termo-elastiche.

La prima parte dell'elaborato è dedicata alla presentazione dei concetti preliminari sulla trave. Inizialmente si introducono i concetti fondamentali della teoria dell'elasticità e la descrizione del campo di spostamenti, di tensione e deformazione. Successivamente, si introduce il sistema di riferimento utilizzato nella descrizione del problema e si mostra come si modifica la matrice dei coefficienti di rigidezza nel caso di materiali isotropi ed ortotropi. Quindi, si procede con la presentazione delle teorie classiche come Eulero-Bernoulli

(EBBT), Timoshenko (TBT) e Saint Venant (SVT). I modelli classici delle teorie della piastra vengono accennati in analogia alla trave, con le opportune correzioni del problema. Nel terzo capitolo viene introdotta la nota Carrera Unified Formulation (CUF) per un modello trave unidimensionale e le relative funzioni di espansione maggiormente impiegate nella descrizione della sezione trasversale, sottolineando le caratteristiche e le proprietà che ognuna di esse è in grado di raggiungere. Le funzioni di espansione utilizzate per descrivere la sezione trasversale della trave sono le Hierarchical Legendre Expansions (HLEs), delle quali è stato evidenziato il vantaggio rispetto alle espansioni Taylor Expansion (TE) e Lagrange Expansion (LE). Di tali polinomi si riporta la formulazione e, in aggiunta, nell'appendice A è possibile visionare un esempio di espansione HLE per la sezione trasversale di un modello trave fino all'ottavo ordine di espansione. Inoltre, nello stesso capitolo si presenta la procedura di mappatura della sezione trasversale sia con modelli iso-parametrici che con il metodo delle funzioni di blending, di cui si spiegano i vantaggi. Il capitolo si conclude con la presentazione dell'approccio Component Wise (CW) per la modellazione delle strutture a multicomponenti attraverso un modello unidimensionale, con il quale è possibile descrivere in modo dettagliato ogni componente della struttura.

Nel quarto capitolo si introduce il metodo agli elementi finiti (FEM) per la risoluzione dei problemi strutturali. Si usano differenti funzioni di forma per la descrizione della direzione longitudinale della trave. Inoltre, si presenta il principio dei lavori virtuali che ci consente di ricavare le equazioni di governo per le analisi. Infine, si presentano i nuclei fondamentali del problema e la tecnica di assemblaggio delle matrici generali.

Nel quinto capitolo si presentano le caratteristiche generali del modello di analisi micro-meccanica per ricavare il comportamento dei materiali compositi. Tra i vari approcci si presenta il Mechanics of Structure Genome (MSG), che accoppiato alla formulazione CUF ci consente di ottenere un modello di analisi raffinato ed affidabile. Il modello RUC viene impiegato per modellare la struttura con un approccio CW e le funzioni HLE consentono di ottenere una accurata descrizione della sezione trasversale, nella quale variano le varie fasi. L'analisi micromeccanica consente di ricavare le proprietà omogeneizzate partendo dal materiale eterogeneo e ricavare gli stress locali che si registrano tra matrice e fibra.

Nel sesto capitolo si caratterizza l'analisi microstrutturale per ricavare le caratteristiche termo-elastiche del materiale. Si introduce la formulazione FEM e si ricavano i nuclei fondamentali del problema termo-elastico. Inoltre, si mostra il recupero delle deformazioni locali tra matrice e fibra applicando carichi termo-elastici. Il metodo viene convalidato attraverso degli esempi numerici confrontati con i metodi presenti in letteratura.

Nel settimo capitolo il presente approccio viene utilizzato per ottenere le proprietà effettive di conducibilità termica e caratteristiche igroscopiche dei materiali compositi. Attraverso la legge di Fourier è possibile ricavare il flusso di calore locale che si registra a causa della presenza di un gradiente di temperatura. Sfruttando l'analogia tra la legge di Fourier e quella di Fick si può procedere allo stesso modo con il calcolo del campo locale di diffusività per il caso igroscopico. I metodi sviluppati sono stati convalidati attraverso il confronto tra alcuni risultati numerici ottenuti dal seguente approccio e altri esempi presenti in letteratura.

Nell'ottavo capitolo si mostra un'applicazione di analisi multiscala per il calcolo delle caratteristiche termo-elastiche di materiali compositi. L'analisi strutturale viene scomposta in tre analisi a differenti scale d'interesse, collegate tra loro attraverso il flusso di informazioni che costituiscono il problema strutturale. Si mostra l'applicazione al caso di un laminato in materiale composito in cui si applica una variazione di temperatura.

Capitolo 2

Concetti preliminari per modelli trave e piastra

Nel seguente capitolo si esporranno i concetti preliminari della teoria dell'elasticità, utili a introdurre le classiche teorie della trave di Eulero-Bernoulli, Timoshenko e Saint Venant, le quali consentono di ottenere dei risultati accettabili in particolari casi largamente diffusi. Successivamente si darà una breve idea delle stesse teorie classiche relative al caso di piastre. Tali argomenti possono essere approfonditi in svariati lavori tra cui il libro di E. Carrera *et al.* [14], in cui viene mostrato in modo dettagliato il confronto tra le teorie classiche e le teorie avanzate della trave, e nel lavoro [13] in cui vengono presentati i modelli classici e avanzati anche per il caso di piastre e gusci.

2.1 Premessa

Di seguito verrà considerato il modello strutturale unidimensionale trave, le cui variabili incognite dipendono dalla coordinata y assiale della struttura, come mostrato in Figura 2.1.

L'uso delle teorie classiche della trave permettono di introdurre dei modelli dimensionalmente ridotti, assumendo in modo assiomatico semplici deformazioni della sezione trasversale in modo tale da semplificare la risposta globale della struttura. In particolare queste teorie risultano più attendibili quando si impiegano strutture particolarmente snelle, così da ridurre al minimo l'errore commesso con tali approssimazioni. Al fine di introdurre le seguenti teorie si prenda come riferimento Figura 2.1.

Osservando la figura possiamo identificare l'area $\Omega = a \cdot b$ che rappresenta la sezione trasversale della trave e la direzione longitudinale y della trave lunga L . L'approssimazione di una struttura al modello trave diventa tanto più valida quanto più è rispettata la seguente relazione:

$$\frac{L}{d} \gg 1 \quad (2.1)$$

in cui d è la lunghezza caratteristica trasversale.

Sotto l'azione di sollecitazioni esterne, la trave risponde modificando la sua configurazione. Tale comportamento è descritto dal campo di spostamenti riferito al sistema di coordinate in Figura 2.1 per ogni punto:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

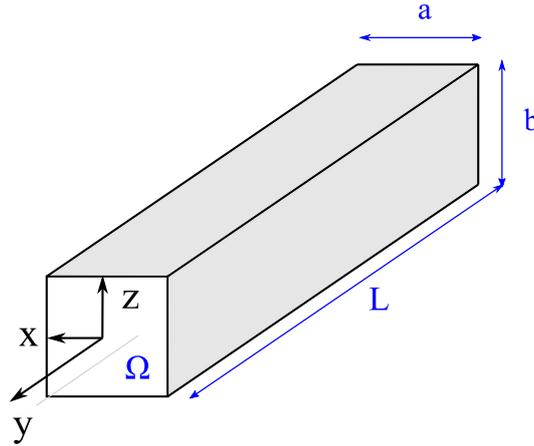


Figura 2.1: Sistema di coordinate usato per le teorie della trave.

in cui la prima e la terza componente u_x, u_z corrispondono agli spostamenti della sezione trasversale, mentre la seconda componente quella lungo la direzione longitudinale y . Per il campo di spostamenti valgono due ipotesi fondamentali:

1. Il campo di spostamenti è continuo e derivabile in ogni punto. Ovvero nel cambio di configurazione il corpo non subisce né fratture e né sovrapposizioni.
2. Nella trave si hanno solo piccole deformazioni, quindi ogni punto compie uno spostamento che è sempre molto inferiore alla lunghezza caratteristica della trave L .

Complessivamente la nuova configurazione della trave sarà la somma di un comportamento di moto di corpo rigido e di deformazione. Le equazioni che definiscono il campo di deformazioni globale sono dette equazioni cinematiche, sempre sotto l'ipotesi di piccole deformazioni. Il campo di deformazione del corpo può essere raccolto in un vettore di deformazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy} \} \quad (2.3)$$

La seguente notazione consente di evidenziare l'origine dei due componenti di deformazione, le dilatazioni specifiche e gli scorrimenti angolari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial z \\ 0 & \partial z & \partial y \\ \partial z & 0 & \partial x \\ \partial y & \partial x & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \partial x = \partial(\cdot)/\partial x \\ \partial y = \partial(\cdot)/\partial y \\ \partial z = \partial(\cdot)/\partial z \end{array} \quad (2.4)$$

In forma compatta si può scrivere:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (2.5)$$

in cui \mathbf{D} rappresenta l'operatore differenziale esplicitato in (2.4).

Le componenti di deformazione possono essere raccolte anche in forma matriciale nella matrice delle deformazioni:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A questo punto, si può definire il campo delle tensioni della trave attraverso il vettore che definisce le componenti di tensione in un generico punto della struttura in coordinate globali:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}\} \quad (2.7)$$

Si consideri ora il caso più generale in cui la direzione caratteristica del materiale della trave (ad esempio nel caso in cui si considerasse un composito in fibra lunga) risulta inclinata di un'angolo θ rispetto alla direzione y nel sistema di riferimento globale.

In questo modo si può definire un nuovo sistema di riferimento di assi (1, 2, 3) in cui l'asse 3 risulta parallelo a z , e l'asse 2 parallelo all'asse y e l'asse 1 completa il sistema destrorso come rappresentato in Figura 2.2.

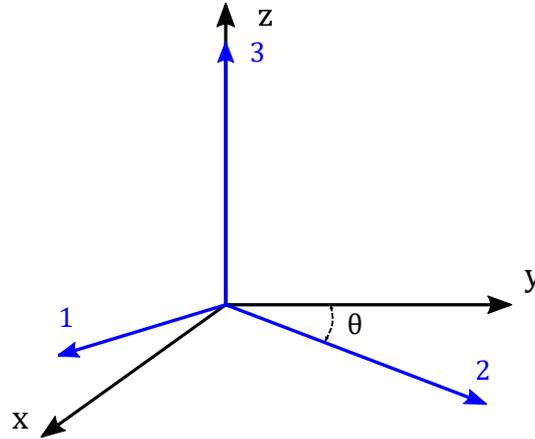


Figura 2.2: Sistema di coordinate (1, 2, 3) materiale.

Nel nuovo sistema di riferimento è possibile riscrivere il vettore delle deformazioni e delle tensioni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_m^T &= \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\gamma_{23} \quad 2\gamma_{13} \quad 2\gamma_{12}\} \\ \boldsymbol{\sigma}_m^T &= \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{23} \quad \tau_{13} \quad \tau_{12}\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le equazioni costitutive per un materiale elastico e lineare si esprimono attraverso la legge di Hooke, nel sistema di riferimento del materiale e in forma compatta si può scrivere:

$$\{\boldsymbol{\sigma}_m\} = [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_m\} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}_m\} = [\mathbf{S}] \{\boldsymbol{\sigma}_m\} \quad (2.9)$$

in cui \mathbf{C} rappresenta la matrice dei coefficienti elastici di rigidezza del materiale di dimensioni 6×6 ed è simmetrica, quindi $C_{ij} = C_{ji}$. Le 21 costanti elastiche risultano indipendenti solo nel caso di materiale anisotropo, quindi ogni coefficiente varia lungo le tre direzioni. Mentre, la matrice \mathbf{S} rappresenta la matrice compliance definita come $[\mathbf{C}]^{-1}$, in cui sono contenute le costanti ingegneristiche che caratterizzano il materiale.

Fortunatamente nella maggior parte dei casi, i materiali utilizzati presentano delle certe simmetrie che gli consentono di ridurre i termini indipendenti all'interno della matrice di rigidezza e di conseguenza delle caratteristiche ingegneristiche presenti della matrice di compliance. Nella maggior parte dei casi si hanno:

- **Materiali isotropi**

Si definisce isotropo un materiale le cui caratteristiche non dipendono dalla direzione lungo la quale vengono misurate. In questo caso la matrice dei coefficienti di rigidezza risulta:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Le costanti elastiche caratteristiche dei materiali isotropi sono due: il modulo di Young \mathbf{E} e il coefficiente di Poisson ν . I coefficienti della matrice di rigidezza possono essere scritti in funzione delle due costanti ingegneristiche indipendenti:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} &= \frac{\nu(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{44} &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

in cui G rappresenta il modulo di rigidezza a taglio del materiale.

- **Materiali ortotropi**

Si definisce ortotropo un materiale che presenta tre piani di simmetria del comportamento, per esempio (1,2), (2,3) e (3,1). Gli assi (1,2,3) sono detti assi di ortotropia. Un tipico materiale a caratteristiche ortotrope può essere individuato da un composito a fibra lunga e multistrato. In questo caso la matrice dei coefficienti di rigidezza risulta:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

si identificano 9 costanti indipendenti: i moduli di Young E_1, E_2, E_3 , i moduli di taglio G_{13}, G_{23}, G_{12} e i coefficienti di Poisson $\nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{12}$. Possiamo definire le costanti ingegneristiche come:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \quad \nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (2.13)$$

A causa della simmetria della matrice di rigidezza del materiale la seguente relazione risulta soddisfatta:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (2.14)$$

Le componenti della matrice di rigidezza assumono la forma:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= E_3 \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} & C_{22} &= E_3 \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} & C_{33} &= E_3 \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} \\
C_{12} &= E_1 \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} = E_2 \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta} = C_{21} \\
C_{13} &= E_1 \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta} = E_3 \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta} = C_{31} \\
C_{23} &= E_1 \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta} = E_3 \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta} = C_{32} \\
C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12} \\
\Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{32}\nu_{13}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

La legge di Hooke in (2.9) è riferita al sistema di coordinate del materiale, ma esiste la necessità di stabilire una relazione di trasformazione tra le tensioni e le deformazioni in tale sistema di riferimento e il sistema di riferimento fisico utilizzato per la risoluzione del problema. Per questo motivo si introducono delle relazioni di trasformazione:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}_m \\
\boldsymbol{\varepsilon}_m &= \mathbf{T}^T\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

in cui \mathbf{T} è la matrice di trasformazione. Risulta chiaro che utilizzando le relazioni appena descritte, è possibile riscrivere la legge di Hooke come:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{TCT}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.17}$$

Le \tilde{C}_{ij} sono le 9 costanti indipendenti del materiale ortotropo e includono anche le rotazioni dal sistema di riferimento materiale a quello fisico del problema. Per questioni di brevità non si riporta l'espressione della matrice che contiene i termini \tilde{C}_{ij} , consultabili in [13].

2.2 Teorie della trave classiche

A questo punto è possibile esporre le teorie classiche della trave che permettono di arrivare a delle soluzioni semplificate ma accettabili in svariati casi di studio. Verranno presentate le teorie di Eulero Bernoulli, di Timoshenko e di Saint Venant, che rappresentano le più utilizzate teorie della trave, anche se sono presenti molte altre teorie in letteratura. Tali teorie sono presentate brevemente di seguito, ma è possibile approfondire il tema in svariati lavori tra cui [13], [7] e [11].

2.2.1 Euler - Bernoulli Beam Theory (EBBT)

Il modello trave classico più semplice e diffuso è quello di Eulero - Bernoulli. In questo modello le ipotesi che vengono introdotte a priori sono:

1. la sezione trasversale si mantiene rigida nel suo piano;
2. la sezione trasversale si mantiene rettilinea a deformazione avvenuta;
3. la sezione trasversale, inizialmente perpendicolare all'asse longitudinale della trave, rimane tale a deformazione avvenuta.

di taglio. Le ipotesi della teoria di Timoshenko si discostano da quelle di Eulero-Bernoulli per la terza ipotesi assunta. In questa teoria, a seguito della deformazione, la sezione trasversale, pur rimanendo rigida e rettilinea, non si mantiene più ortogonale all'asse di riferimento della trave, ma risulta ruotata di un angolo attorno ad x e a z :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(y) \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1}(y) + x\phi_z - z\phi_x \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(y) \end{cases} \quad (2.20)$$

In cui ϕ_z e ϕ_x sono rispettivamente la rotazione della sezione trasversale rispetto a z e a x , come illustrato in Figura 2.4. In questo caso le incognite passano da essere tre (come nel caso EBBT) ad essere cinque, perché la rotazione della sezione trasversale rispetto alla verticale non ha più un angolo legato solo alla y . In questo caso, quindi, gli effetti deformativi dovuti al taglio non sono trascurati. Il campo di deformazioni può essere facilmente ottenuto sostituendo l'Eq. (2.20) in Eq. (2.4). Di seguito si riportano solo le componenti di deformazione non nulle:

$$\begin{cases} \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + x \frac{\partial \phi_z(y)}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_x(y)}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \phi_z + \frac{\partial u_{x_1}}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \phi_x + \frac{\partial u_{z_1}}{\partial y} \end{cases} \quad (2.21)$$

Anche la teoria di Timoshenko presenta dei limiti di utilizzo, infatti è in grado di prevedere

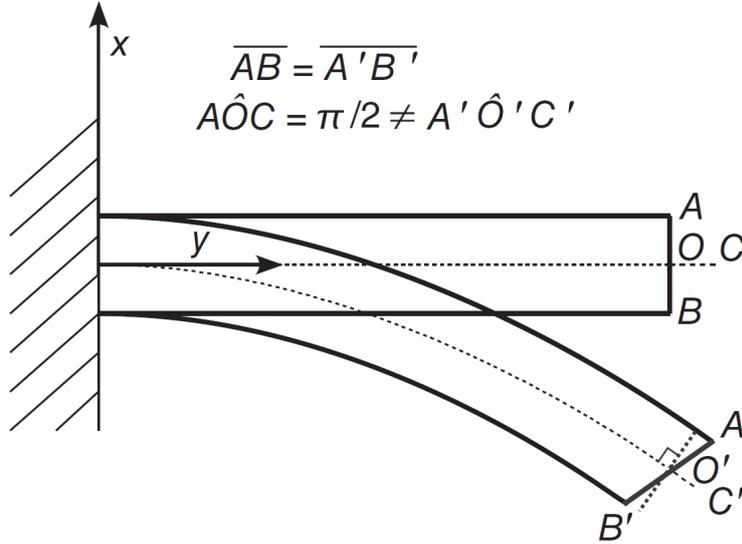


Figura 2.4: Rappresentazione trave di Timoshenko [7].

il comportamento della trave a flessione e a taglio, ma per prevedere il comportamento sotto i carichi torsionali si dovrebbero introdurre altre teorie ancora più fini e avanzate di quella appena esposta. Per questi ultimi casi si può pensare di utilizzare il modello trave di Saint Venant.

2.2.3 Saint Venant beam theory (SVT)

Rispetto alle precedenti teorie elencate, la presente teoria classica permette di studiare delle travi caricate anche con sollecitazioni a taglio e a torsione.

In questa teoria le ipotesi assiomatiche introdotte si basano non più sugli spostamenti, ma sulle tensioni. Il corpo utilizzato per introdurre questa teoria risulta avere le seguenti caratteristiche:

- la geometria cilindrica, derivante dalla traslazione di una figura piana lungo l'asse y ;
- il materiale è omogeneo a comportamento isotropo;
- le sezioni trasversali sono sempre ortogonali all'asse di riferimento y ;

Le ipotesi sulle tensioni, introdotte in modo assiomatico affermano che le forze esterne, applicate sulle basi del solido, sono tali che in ogni punto si annullino le tre componenti:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = 0 \quad (2.22)$$

per cui le tensioni incognite che caratterizzano il problema risultano $\sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}$.

Dalle componenti incognite è possibile osservare che questa teoria tiene in considerazione le tensioni di taglio in direzione ortogonale a y , presenti solo nel caso in cui il solido sia caricato a taglio o a torsione, mentre nel caso di pura flessione sarebbero assenti.

Per quanto riguarda il comportamento della geometria, possiamo assumere che ogni segmento nella sezione trasversale (x, z) ruoti in maniera rigida attorno all'asse y di un'angolo ϕ_y uguale in ogni punto della sezione. Questo significa che le sezioni ruotano una rispetto all'altra conservando la loro forma, in modo rigido.

Il campo di spostamenti può essere descritto attraverso:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = z\phi_y(y) \\ u_y(x, y, z) = \psi(x, z) \\ u_z(x, y, z) = -x\phi_y(y) \end{cases} \quad (2.23)$$

in cui ϕ_y è l'angolo di rotazione della sezione trasversale attorno all'asse y , mentre $\psi(x, z)$ rappresenta una funzione incognita caratteristica dell'ingobbamento della sezione.

Considerando che il campo di spostamenti appena proposto si riferisce ad un solido sottoposto a pura torsione, si può pensare che il modello potrebbe essere arricchito sommando anche il campo di spostamenti relativo ad una trave soggetta a pura flessione, così da poter trovare soluzione per problemi più complessi:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(y) + z\phi_y(y) \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1}(y) - x\frac{\partial u_{x_1}}{\partial y} - z\frac{\partial u_{z_1}}{\partial y} + \psi(x, z) \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(y) - x\phi_y(y) \end{cases} \quad (2.24)$$

La teoria di Saint-Venant e in generale le teorie classiche della trave sono spiegate in modo più accurato nel libro [12].

2.3 Modello piastra

Si definisce piastra una struttura bidimensionale in cui una dimensione, generalmente di spessore h , risulta essere di almeno un ordine di grandezza più piccolo rispetto alle altre due dimensioni a e b .

Questa definizione permette di ridurre un problema 3D, definito in ogni punto $P_V(x, y, z)$, in uno più gestibile 2D $P_\Omega(x, y)$, definito sulla superficie media della piastra.

La modellazione 2D delle piastre è un problema classico il cui sviluppo ha seguito quello

delle teorie della trave.

Il modello classico è basato sulle ben note ipotesi di Kirchoff-Love, analoghe alle ipotesi fatte per la trave di Eulero-Bernoulli, consultabili per esteso in [13]. La teoria classica della piastra assume che i segmenti normali alla superficie media della piastra rimangano rettilinei e perpendicolari a deformazione avvenuta. Inoltre, lo spessore della piastra si mantiene costante durante la deformazione.

Considerando il piano (x, y) , mostrato in Figura 2.5, il campo cinematico di Kirchoff-Love può essere formulato come:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_{x_1}(x, y) - z \frac{\partial u_{z_1}(x, y)}{\partial x} \\ u_y(x, y, z) = u_{y_1}(x, y) - z \frac{\partial u_{z_1}(x, y)}{\partial y} \\ u_z(x, y, z) = u_{z_1}(x, y) \end{cases} \quad (2.25)$$

in cui $u_{x_1}(x, y)$, $u_{y_1}(x, y)$, $u_{z_1}(x, y)$ sono gli spostamenti nella sezione di riferimento della piastra, mentre $\phi_y(x, y) = -\frac{\partial u_{z_1}(x, y)}{\partial x}$ e $\phi_x(x, y) = -\frac{\partial u_{z_1}(x, y)}{\partial y}$ gli angoli tra il segmento normale alla superficie media e l'asse z .

Se anche per la piastra assumessimo che $\phi_x(x, y)$ e $\phi_y(x, y)$ non corrispondano alle derivate parziali rispetto alle coordinate del piano dello spostamento trasversale, potremmo includere gli effetti di primo ordine del taglio. La cinematica risultante da queste considerazioni prende il nome di modello di Reissner-Mindlin che, analogamente alla teoria TBT, non è in grado di catturare gli effetti dell'allungamento dello spessore della piastra. Le stesse considerazioni per l'evoluzione delle teorie di ordine superiore fatte per le teorie della trave, valgono anche in questo caso.

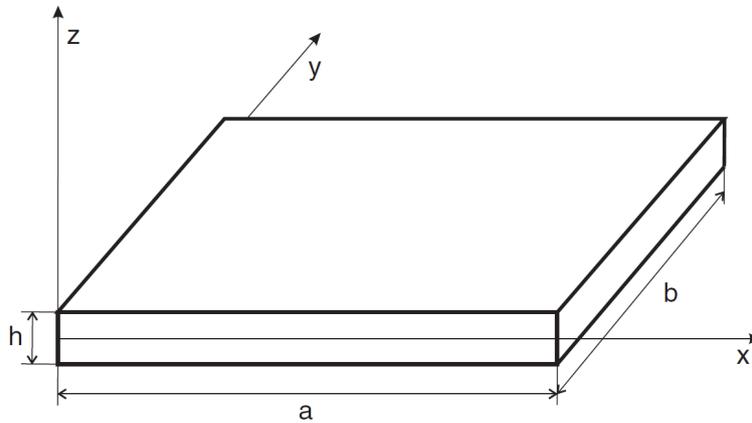


Figura 2.5: Modello piastra [7].

Capitolo 3

Carrera Unified Formulation (CUF)

Le teorie classiche della trave garantiscono dei risultati abbastanza accurati nel caso in cui si considerino strutture in cui sia presente un alto livello di snellezza, e dove i segmenti di spessore rimangano rigidi e lineari in un materiale omogeneo. Situazione non presente, ad esempio, nel problema del RUC in cui si ha la coesistenza di due materiali differenti (matrice e fibra) in un corpo corto.

Il problema delle formulazioni classiche è che molto spesso non sono sufficientemente accurate e quindi non riescono a catturare le deformazioni della sezione trasversale, molto importanti nello studio del comportamento di strutture in materiale composito. Per questo motivo diventa necessario introdurre dei modelli di ordine superiore, ovvero in cui intervengono termini di ordine superiore in grado di catturare il comportamento della trave nel caso in cui siano presenti delle condizioni al contorno complesse, oppure una geometria particolare. L'accuratezza del modello in questo caso risulta definita dall'ordine delle funzioni che si decide di utilizzare.

L'introduzione di teorie di ordine superiore è possibile attraverso l'uso della Carrera Unified Formulation (CUF), con la quale è possibile esprimere differenti modelli strutturali di ordine arbitrario attraverso una formulazione unificata. Impiegando queste formulazioni, il campo di spostamenti è completamente descritto da una singola espressione formale indipendente dall'ordine della teoria selezionato, che diventa l'input per l'analisi.

La CUF permette di ridurre un complesso problema 3D in uno più pratico 2D o 1D. In un problema 3D ogni funzione $f(x, y, z)$ è definita per ogni punto $P(x, y, z)$ del volume, invece in un problema 2D o 1D essa è definita attraverso una funzione aggiuntiva sulla superficie Ω o sulla linea l , rispettivamente.

Grazie alla CUF si introduce un modello trave avanzato, in cui le assunzioni cinematiche possono essere assunte in modo assiomatico. In questo modo si ottengono dei modelli con un più alto livello di accuratezza di quelli classici. Attraverso la formulazione unificata si introducono delle equazioni di governo espresse in modo gerarchico, ovvero, per aumentare l'ordine della teoria basta aggiungere i termini relativi all'ordine superiore.

Considerando il caso di una trave nello spazio 3D, e assegnato un generico sistema di riferimento destrorso (x, y, z) , la CUF introducono la generica funzione di espansione $F_\tau(x, z)$ che varia sulla sezione trasversale (x, z) del modello 1D considerato, per cui il generico spostamento di un punto della trave nello spazio 3D è descritto da:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_\tau(x, z)\mathbf{u}_\tau(y) \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (3.1)$$

in cui \mathbf{u}_τ rappresenta il vettore degli spostamenti generalizzati lungo la direzione y ed M è il numero dei termini della funzione di espansione, parametro arbitrario che caratterizza l'accuratezza del modello. Nell'equazione (3.1), secondo la notazione di Einstein, il pedice

τ indica una sommatoria.

Allo stesso modo è possibile utilizzare la notazione CUF per la formulazione di un modello piastra 2D come:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = F_\tau(z)\mathbf{u}_\tau(x, y) \quad (3.2)$$

Chiaramente nel caso di una piastra, gli spostamenti generalizzati sono definiti nel piano di riferimento della piastra (x, y) , mentre le funzioni di espansione sono definite lungo lo spessore della piastra (z) .

3.1 Funzioni di espansione

Sono disponibili varie classi di funzioni tra cui scegliere per definire il campo di spostamenti nella sezione trasversale F_τ , come funzioni polinomiali, trigonometriche ed esponenziali. Le più selezionate nell'applicazione della CUF sono le funzioni polinomiali, le quali risultano essere estremamente versatili. Si introducono tre classi di funzioni di espansione per la CUF 2D:

- Espansioni di Taylor (TE);
- Espansioni di Lagrange (LE);
- Espansioni gerarchiche Legendre (HLE).

Nel seguito verranno descritte le tre tipologie di funzioni di espansione. In questo modo le complicazioni legate ai termini di ordine superiore vengono affrontate in maniera sistematica per il generico ordine di espansione e per le generiche funzioni di approssimazione F_τ . Può essere interessante notare che, anche nel contesto della formulazione con il modello unificato, è possibile ottenere le teorie classiche semplicemente introducendo delle semplificazioni che riducono il problema che si vuole analizzare in uno più semplificato. Questa osservazione dimostra, quindi, la validità del metodo adottato.

3.1.1 Espansioni di Taylor (TE)

Le funzioni di espansione di Taylor sono formulate attraverso l'ausilio dei polinomi di McLaurin del tipo $F_\tau(x, z) = x^i z^j$, in cui i e j sono interi positivi che partono dal valore 0 a massimo grado del polinomio N . In tabella 3.1 sono riportate le funzioni di espansione F_τ per differenti ordini di espansione del modello TE.

Ordine (N)	N. di termini espansione (M)	Funzioni di espansione F_τ
TE1	3	$F_1 = 1, F_2 = x, F_3 = z$
TE2	6	$F_4 = x^2, F_5 = xz, F_6 = z^2$
TE3	10	$F_7 = x^3, F_8 = x^2z, F_9 = xz^2, F_{10} = z^3$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
TEN	$\frac{(N+1)(N+2)}{2}$	$F_{\frac{N^2+N+2}{2}} = x^N, F_{\frac{N^2+N+4}{2}} = x^{N-1}z, \dots, F_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}} = z^N,$

Tabella 3.1: Polinomi TE [7].

Dalla tabella 3.1 si nota che le funzioni di espansione appena introdotte sono di tipo

gerarchico, ovvero i polinomi per l'approssimazione della sezione trasversale sono ottenuti aggiungendo delle funzioni di ordine superiore al set di funzioni dell'ordine precedente. Le teorie classiche viste in precedenza possono essere ottenute come caso particolare di espansione con $N = 1$. Un generico campo di spostamenti con il modello appena descritto e con un ordine $N=2$ avrà la seguente forma:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + xu_{x_2} + zu_{x_3} + x^2u_{x_4} + xzu_{x_5} + z^2u_{x_6} \\ u_y &= u_{y_1} + xu_{y_2} + zu_{y_3} + x^2u_{y_4} + xzu_{y_5} + z^2u_{y_6} \\ u_z &= \underbrace{u_{z_1}}_{N=0} + \underbrace{xu_{z_2} + zu_{z_3}}_{N=1} + \underbrace{x^2u_{z_4} + xzu_{z_5} + z^2u_{z_6}}_{N=2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

La Figura 3.1 mostra i limiti del modello TE. Possiamo notare che l'uso dei polinomi di

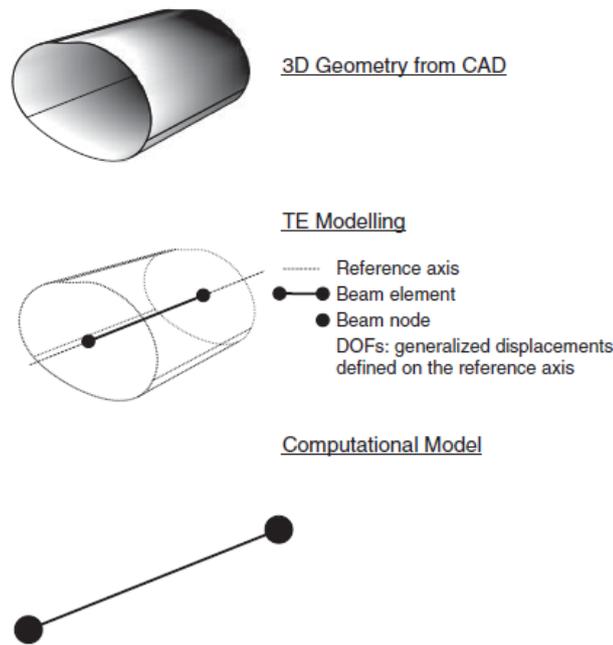


Figura 3.1: Modellazione del modello trave attraverso le TE [7].

Taylor introduce delle variabili con significato matematico (derivate rispetto all'asse della trave), i termini di ordine superiore non possono avere un significato locale, ma presentano solo le proprietà della sezione trasversale. Per questo motivo se si estendesse la formulazione a dei casi in cui sono presenti delle importanti rotazioni si incontrerebbero delle difficoltà. Per questo si introduce una nuova classe di funzioni di espansione basate sui polinomi di Lagrange.

3.1.2 Espansioni di Lagrange (LE)

I polinomi di Lagrange vengono utilizzati per interpolare il campo di spostamenti lungo la sezione trasversale della trave. A tale scopo si utilizzano polinomi di Lagrange a tre nodi, definiti come L3, quattro nodi (L4) e nove nodi (L9).

Le funzioni L3 si definiscono su un dominio triangolare identificato da tre punti e questi punti definiscono il modello di campo di spostamento utilizzato. Allo stesso modo i polinomi L4 ed L9 si definiscono attraverso domini quadrangolari.

Per l'elemento L3 le funzioni d'interpolazione sono date da

$$F_1 = 1 - r - s, \quad F_2 = r, \quad F_3 = s \quad (3.4)$$

in cui r ed s appartengono al dominio triangolare.

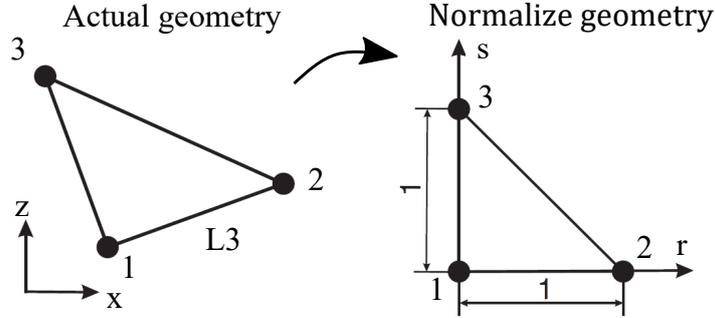


Figura 3.2: Normalizzazione di una geometria attraverso l'uso di polinomi di Lagrange L3.

Nodo	r_τ	s_τ
1	0	0
2	1	0
3	0	1

Tabella 3.2: Coordinate normalizzate dei tre nodi dell'elemento L3 [7].

Nel caso di interpolazione L9 le funzioni interpolanti diventano:

$$\begin{aligned} F_\tau &= \frac{1}{4}(r^2 + rr_\tau)(s^2 + ss_\tau), & \tau &= 1, 3, 5, 7 \\ F_\tau &= \frac{1}{2}s_\tau^2(s^2 - ss_\tau)(1 - r^2) + \frac{1}{2}r_\tau^2(r^2 - rr_\tau)(1 - s^2), & \tau &= 2, 4, 6, 8 \\ F_\tau &= (1 - r^2)(1 - s^2), & \tau &= 9 \end{aligned} \quad (3.5)$$

in cui r ed s sono definite nell'intervallo $[-1, 1]$.

Il campo di spostamenti ottenuto dall'elemento L4 è:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} + F_4 u_{x_4} \\ u_y &= F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} + F_4 u_{y_4} \\ u_z &= F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} + F_4 u_{z_4} \end{aligned} \quad (3.6)$$

in cui u_{x_1}, \dots, u_{z_4} rappresentano gli spostamenti traslazionali di ogni punto dell'elemento L4.

L'utilizzo delle LE permette di avere delle variabili che presentano un preciso significato fisico, infatti esse rappresentano gli spostamenti traslazionali. In generale l'uso delle LE in problemi che presentano delle geometrie non lineari risulta essere più indicato rispetto al caso dei polinomi di Taylor.

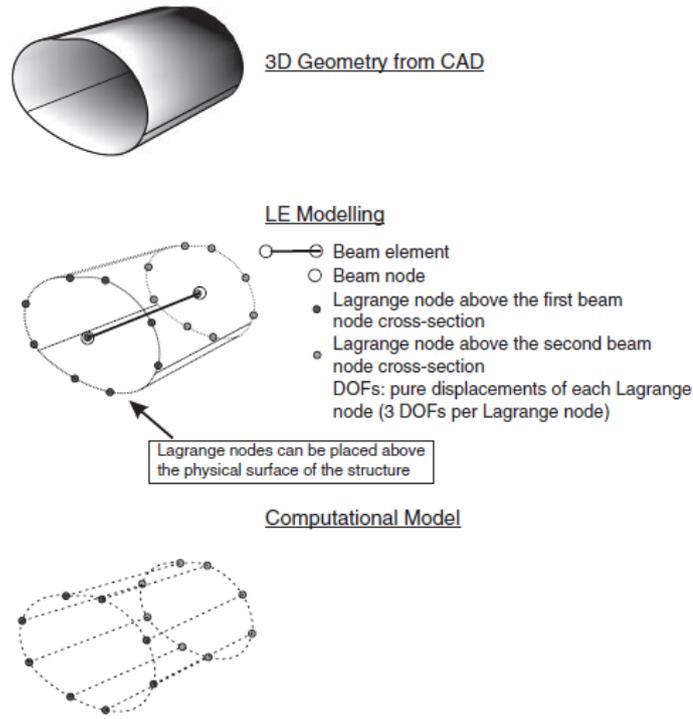


Figura 3.3: Modellazione del modello trave attraverso le LE [7].

3.2 Espansioni gerarchiche Legendre (HLE)

Le espansioni gerarchiche di Legendre HLE sono una classe di funzioni di espansione nel contesto CUF 1D, formulate esprimendo il campo di spostamenti 3D come espansione Legendre degli spostamenti generalizzati lungo gli assi della trave. Le HLE combinano i vantaggi delle TE, ovvero il carattere gerarchico dei termini di ordine superiore, con quelli delle LE, ossia l'esatta descrizione geometrica delle superfici fisiche della trave, discretizzate in sottodomini.

Possiamo definire le HLE 1D con la seguente definizione:

$$\begin{cases} L_0 \\ L_1 = x \\ L_k = \frac{2k-1}{k}xL_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k}L_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.7)$$

Questo set di polinomi rappresenta le basi ortonormali e le loro radici coincidono con i punti d'integrazione di Gauss. Un set di funzioni d'interpolazione 1D può essere scritto come:

$$\begin{cases} \tilde{L}_1(r) = \frac{1}{2}(1-r) \\ \tilde{L}_2(r) = \frac{1}{2}(1+r) \\ \tilde{L}_i(r) = \phi_{i-1}(r), \quad i = 3, 4, \dots, p+1 \end{cases} \quad (3.8)$$

in cui r rappresenta la coordinata locale nel dominio naturale $[-1, 1]$, p rappresenta il grado del polinomio, mentre $\phi_j(r)$:

$$\phi_j(r) = \sqrt{\frac{2j-1}{j}} \int_{-1}^r L_{j-1}(x) dx, \quad j = 2, 3, 4, \dots \quad (3.9)$$

Le prime due funzioni di espansione $\tilde{L}_1(r), \tilde{L}_2(r)$ sono dette i modi nodali e corrispondono ai polinomi di Lagrange 1D lineari, mentre $\tilde{L}_i(r)$ include tutti i modi interni. L'ortogonalità dei polinomi Legendre è data da:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\tilde{L}_i}{dr} \frac{d\tilde{L}_j}{dr} dx = \delta_{ij} \quad \text{per } i \geq 3 \text{ e } j \geq 1 \text{ o } i \geq 3 \text{ e } j \geq 1 \quad (3.10)$$

in cui δ_{ij} è il delta di Kronecker.

Possono essere definite le funzioni di espansione 2D semplicemente estendendo la procedura appena mostrata al dominio quadrangolare della sezione trasversale della trave, in questo caso si usano i polinomi per interpolare nodi, bordi e punti interni della sezione trasversale. In Figura 3.4 sono riportati tali polinomi fino all'ordine $N = 7$.

I modi dei vertici sono quattro in totale, uno per vertice e si annullano in tutti i nodi eccetto uno. I modi dei bordi sono nulli per tutti i lati del dominio eccetto uno ed infine, i modi interni si annullano anch'essi in tutti i lati ma sono presenti solo in espansioni dal quarto ordine in su.

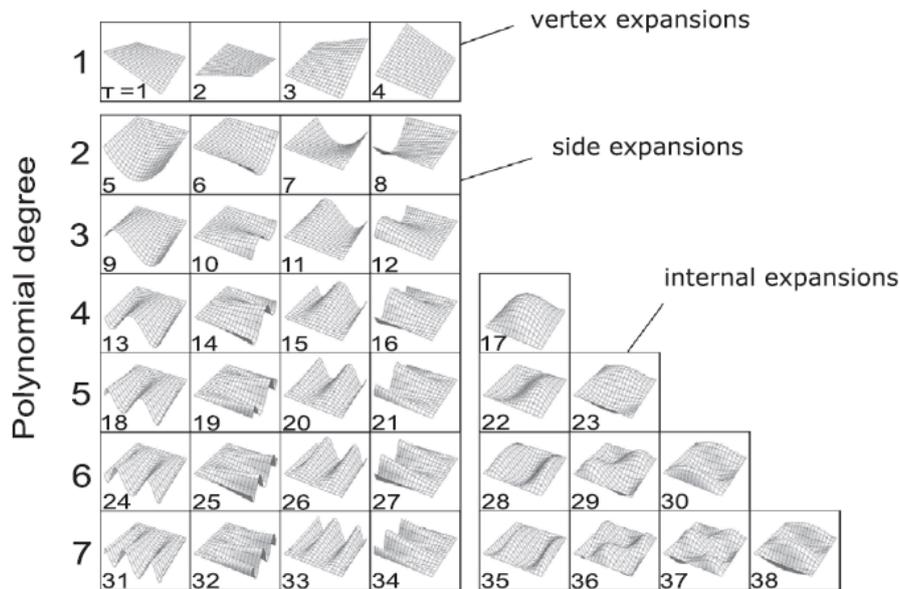


Figura 3.4: Funzioni di espansione di tipo HLE sulla sezione trasversale [8].

I tre tipi di funzioni di espansione Legendre sono:

- **Vertex:** I modi Vertex o nodali corrispondono a polinomi del primo ordine quadrangolari di Lagrange

$$F_\tau = \frac{1}{4}(1 - r_\tau r)(1 - s_\tau s) \quad \tau = 1, 2, 3, 4 \quad (3.11)$$

in cui r ed s variano tra -1 e 1 , mentre r_τ e s_τ rappresentano le coordinate dei vertici del dominio quadrangolare nel piano naturale;

- **Side:** I modi Side o dei bordi, sono definiti per $p \geq 2$, nel piano naturale

$$\begin{aligned}
 F_\tau(r, s) &= \frac{1}{2}(1 - s)\phi_{p_b}(r) & \tau &= 5, 9, 13, 18, \dots \\
 F_\tau(r, s) &= \frac{1}{2}(1 + r)\phi_{p_b}(s) & \tau &= 6, 10, 14, 19, \dots \\
 F_\tau(r, s) &= \frac{1}{2}(1 + s)\phi_{p_b}(r) & \tau &= 7, 11, 15, 20, \dots \\
 F_\tau(r, s) &= \frac{1}{2}(1 - r)\phi_{p_b}(r) & \tau &= 8, 14, 16, 21, \dots
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

in cui p rappresenta il grado del polinomio. Si noti che per come sono definite le funzioni appena riportate è garantita la continuità laterale in un dominio multiplo.

- **Internal:** Le funzioni F_τ di espansione interna si ottengono attraverso la moltiplicazione dei modi interni 1D. Ci sono $(p - 2)(p - 3)/2$ polinomi interni per $p \geq 4$ e si annullano in tutti i lati del quadrilatero. Un esempio di polinomi del sesto ordine contenente tre espansioni interne presentato in Figura 3.4 è definito come:

$$\begin{aligned}
 F_{28}(r, s) &= \phi_4(r)\phi_2(s) \\
 F_{29}(r, s) &= \phi_3(r)\phi_3(s) \\
 F_{30}(r, s) &= \phi_2(r)\phi_4(s)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Risulta importante sottolineare che il carattere gerarchico del modello è legato al fatto che il set di funzioni di un particolare ordine di espansione contiene al suo interno anche i termini degli ordini precedenti. Di conseguenza, l'accuratezza decisa per l'approssimazione può essere raggiunta aumentando l'ordine del polinomio, che porta ad una discretizzazione abbastanza ampia a livello della sezione trasversale. Da questo si arriva alla necessità di un'adeguata mappatura per sottodomini di espansione di elevate misure come quelli HLE. Riassumendo, il grande vantaggio dell'impiego delle espansioni HLE risiede nel fatto che la sezione trasversale può essere discretizzata una sola volta e la convergenza della soluzione cambia in base all'ordine del polinomio inserito p .

Per un'analisi più completa sulle funzioni appena presentate è possibile consultare numerosi lavori tra cui l'articolo di E. Carrera *et al.* [8] e il libro [7].

3.3 Mappatura della sezione trasversale

Dopo aver definito la cinematica del modello trave è necessario calcolare i parametri della sezione trasversale attraverso l'integrazione delle funzioni di espansione F_τ definite nella sezione trasversale Ω . Questo significa che, soprattutto nei casi in cui sono presenti delle geometrie complesse o curvilinee, è una quanto più corretta descrizione del problema.

In un caso generale, si impiegano elementi iso-parametrici per descrivere i contorni dei sottodomini della sezione trasversale. In questo modo la descrizione di ogni dominio avviene attraverso lo stesso set di funzioni che si è usato per interpolare le variabili del problema. Ovviamente, quando si valutano gli integrali F_τ per il calcolo dei termini della matrice di rigidezza, a causa della incapacità di questi elementi di catturare l'esatta geometria dei contorni curvi, si introducono degli errori. Nel caso in cui i domini considerati abbiano un numero di elementi elevato, la grandezza dei singoli domini è contenuta, per cui gli errori che si introducono sono contenuti ed accettabili. Se invece, come nel caso delle HLE, i sottodomini introdotti sono più estesi, l'errore commesso diventa inaccettabile. Questo rende

necessario l'utilizzo di nuove funzioni, indipendenti da quelle utilizzate nell'interpolazione del problema, per descrivere i contorni del dominio. A tal fine vengono utilizzate le funzioni blending introdotte da Gordon *et al.* [20].

Consideriamo le funzioni di mappatura Q di un certo dominio di espansione definite nella sezione trasversale (x, z) come:

$$\begin{aligned} x &= Q_x(r, s) \\ z &= Q_z(r, s) \end{aligned} \quad (3.14)$$

in cui r ed s sono le coordinate nel piano naturale del dominio quadrangolare.

3.3.1 Mappatura di primo e secondo ordine

Come accennato precedentemente, se si utilizzano dei domini di espansione iso-parametrici del primo ordine, ad esempio del tipo Lagrange L4 CUF, l'approssimazione della geometria si ottiene attraverso una mappatura lineare:

$$\begin{aligned} x &= Q_x(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)X_1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)X_2 + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)X_3 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)X_4 \\ z &= Q_z(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)Z_1 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)Z_2 + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)Z_3 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)Z_4 \end{aligned} \quad (3.15)$$

che rappresenta le funzioni di espansione di elementi quadrangolari. In forma semplificata possiamo scrivere che

$$\mathbf{x} = F_\tau(r, s)\mathbf{X}_\tau \quad \tau = 1, \dots, 4 \quad (3.16)$$

in cui $\mathbf{x} = (x \ z)^T$ è il vettore che contiene la geometria della sezione trasversale, $\mathbf{X}_\tau = (X_\tau \ Z_\tau)^T$ rappresenta i vertici del dominio quadrangolare e τ rappresenta la sommatoria. F_τ è esattamente la stessa funzione usata nella descrizione della cinematica nel problema trave usando le funzioni L4. Si noti che in questo tipo di mappatura non è possibile catturare le curvature della geometria della sezione trasversale, poiché il modello iso-parametrico usa il campo di spostamenti che ha solo funzioni lineari per descrivere la geometria. Effettuando una mappatura del secondo ordine è possibile rappresentare le curvature della geometria impiegando dei polinomi del secondo ordine come, ad esempio, L9.

La mappatura della sezione trasversale viene definita con la stessa notazione compatta (3.16), con F_τ espansione biquadratica dei polinomi di Lagrange L9. Anche in questo caso si stanno utilizzando delle funzioni iso-parametriche, ma questo tipo di espansioni consentono di rappresentare una lieve curvatura, riducendo l'errore rispetto all'uso di una mappatura del primo ordine. La procedura di mappatura della sezione trasversale può essere approfondita in [30].

3.3.2 Mappatura con il metodo delle funzioni di blending

Come accennato in precedenza, quando si utilizzano le funzioni di espansione HLE risulta di particolare importanza una rappresentazione accurata del dominio, al fine di ridurre al minimo l'errore di approssimazione. Per fare ciò si impiegano le funzioni di blending introdotte in [20], le quali consentono di descrivere l'esatta forma della sezione trasversale, attraverso l'uso di polinomi parametrici di ordine arbitrario in grado di descrivere l'esatta curvatura dei contorni. In questo modo i contorni della superficie del dominio sono descritti direttamente dalle funzioni di mappatura, in grado di non introdurre nessun errore durante tale procedura. Tali funzioni, quindi, non sono più da considerarsi iso-parametriche, poiché non corrispondono alle funzioni di espansione F_τ .

Si immagina un dominio curvo come quello mostrato in 3.5. Le coordinate del lato 2 curvo

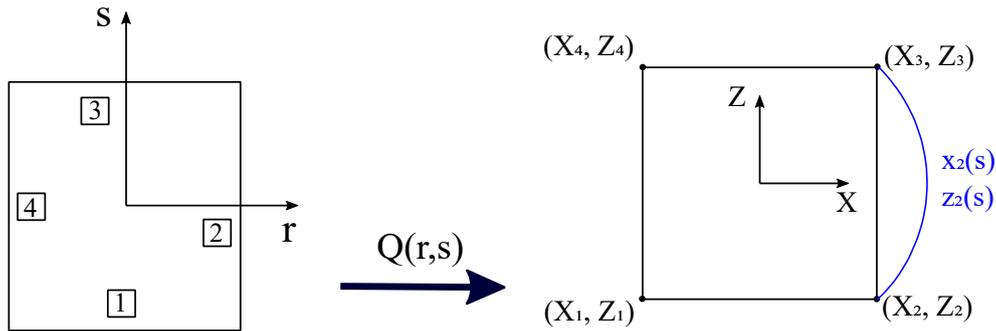


Figura 3.5: Metodo di mappatura della sezione trasversale della fibra y_1y_2 attraverso il metodo delle blending function.

sono $x = x_2(s)$ e $z = z_2(s)$. Utilizzando una parametrizzazione cubica delle funzioni di espansione, i polinomi diventano:

$$\begin{aligned} x_2(s) &= a_x + b_x s + c_x s^2 + d_x s^3 \\ z_2(s) &= a_z + b_z s + c_z s^2 + d_z s^3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si noti che tali funzioni sono definite in modo che

$$\begin{aligned} x_2(-1) &= X_2 & x_2(1) &= X_3 \\ z_2(-1) &= Z_2 & z_2(1) &= Z_3 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A questo punto, attraverso tale metodo, le funzioni di mappatura si definiscono come

$$\begin{aligned} x &= Q_x(r, s) = F_\tau(r, s)X_\tau + \left(x_2(s) - \left(\frac{1-s}{2}X_2 + \frac{1+s}{2}X_3 \right) \right) \frac{1+r}{2} \\ z &= Q_z(r, s) = F_\tau(r, s)Z_\tau + \left(z_2(s) - \left(\frac{1-s}{2}Z_2 + \frac{1+s}{2}Z_3 \right) \right) \frac{1+r}{2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

in cui $\tau = 1, \dots, 4$. Ovviamente, il primo termine corrisponde alle funzioni di mappatura lineare del primo ordine mostrate in equazione (3.15), il secondo termine indica la differenza tra le due funzioni parametriche $x_2(s)$ e $z_2(s)$ e le coordinate della linea che connette i vertici 2 e 3 del dominio quadrangolare. Infine, l'ultimo termine moltiplicativo è la funzione lineare di blending che vale 1 lungo il lato 2 e 0 lungo il lato 4, a conferma del fatto che la mappatura di un lato non influenza quella del lato opposto.

Nel caso in cui, si voglia modellare il dominio della sezione trasversale di un modello trave con fibra lunga rinforzante, come in Figura 3.6, il dominio presenterà la curvatura in tutti e quattro i lati, per cui:

$$\begin{aligned} x &= Q_x(r, s) = \frac{1}{2}(1-s)x_1(r) + \frac{1}{2}(1+r)x_2(s) + \frac{1}{2}(1+s)x_3(r) - \frac{1}{2}(1-r)x_4(s) - F_\tau(r, s)X_\tau \\ z &= Q_z(r, s) = \frac{1}{2}(1-s)z_1(r) + \frac{1}{2}(1+r)z_2(s) + \frac{1}{2}(1+s)z_3(r) - \frac{1}{2}(1-r)z_4(s) - F_\tau(r, s)Z_\tau \end{aligned} \quad (3.20)$$

Utilizzando il modello trave con le HLE è dunque possibile riprodurre l'esatta forma della geometria curva della sezione trasversale usando il minimo numero di funzioni di espansione locali.

Possiamo identificare due grandi vantaggi dell'impiego dei modelli HLE con la mappatura blending:

1. Si riduce l'errore legato all'approssimazione geometrica nel descrivere la sezione curva trasversale;

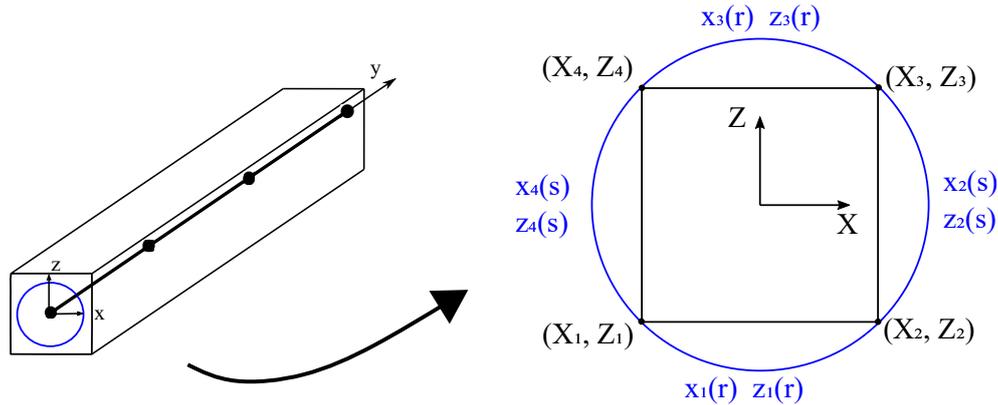


Figura 3.6: Metodo di mappatura della sezione trasversale di un dominio completamente curvilineo.

2. Si riduce il numero dei nodi, consentendo di utilizzare domini più estesi con conseguente risparmio computazionale.

3.4 Approccio Component-Wise

Uno dei problemi fondamentali derivanti dalle analisi dei materiali compositi, risiede nell'elevato costo computazionale richiesto per condurre le analisi multiscale. Le analisi multiscale sono necessarie per l'analisi di strutture in cui sia la scala macroscopica che quella microscopica giocano un ruolo fondamentale. Gli approcci multiscale solitamente sono caratterizzati da un altissimo costo computazionale, dato dall'alto numero di gradi di libertà (in alcuni casi anche centinaia di milioni [16]) richiesti per caratterizzare la struttura nelle sue scale nano micro meso e macro. Questo aspetto pregiudica l'affidabilità e l'applicabilità di queste analisi.

L'approccio Component-Wise (CW) viene introdotto per risolvere questo problema. Molte strutture possono essere considerate come strutture a multicomponenti, come le strutture alari e i già citati materiali compositi. Questa considerazione ci permette di trattare ciascun elemento singolarmente, fornendo un modello in cui ogni componente è modellato secondo una formulazione unidimensionale. In questo modo le differenti scale sono usate simultaneamente consentendoci sia di scegliere quale porzione della struttura analizzare più dettagliatamente e sia impostare l'ordine del modello strutturale che si intende utilizzare.

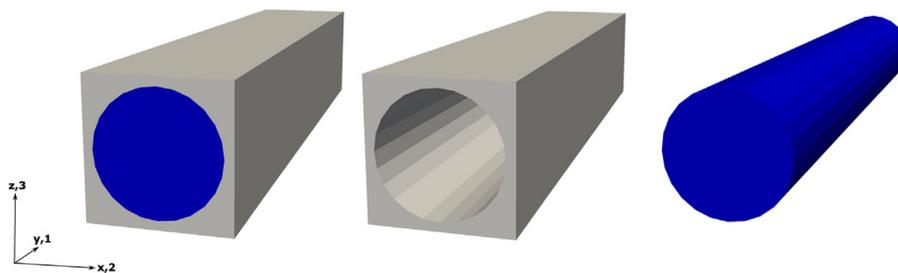


Figura 3.7: Modellazione component-wise matrice e fibra di una porzione di materiale composito [17].

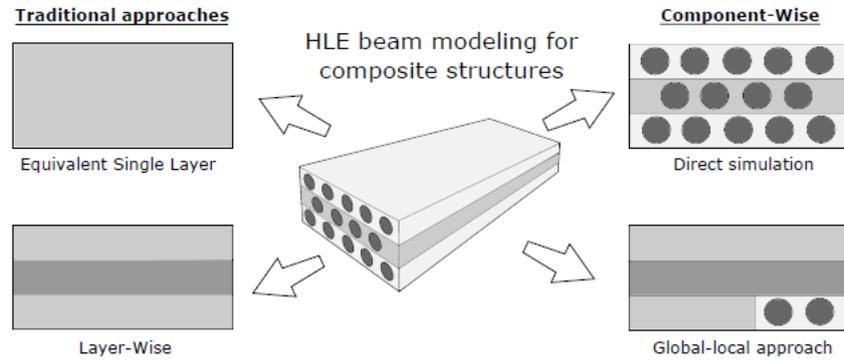


Figura 3.8: Tipologie di modelli HLE trave per strutture in composito [1].

Questo modello viene definito global-local poiché può essere utilizzato sia per modellare un modello globale, considerando l'intero laminato, sia locale permettendo di ricavare accurate distribuzioni di tensioni e deformazioni nelle singole zone. La possibilità di studiare il composito con l'approccio global-local consente di aumentare l'accuratezza del modello nelle zone a più alto interesse, riducendo lo sforzo computazionale nel resto dell'analisi. Questo modello è derivato attraverso l'uso della formulazione CUF in cui le funzioni HLE permettono di modellare i singoli costituenti attraverso un unico schema cinematico CUF 1D. Inoltre, le generiche fibre possono essere modellate singolarmente con una differente espansione HLE, come in Figura 3.6, ottenendo così un'ottimizzazione in termini computazionali del campo di tensioni nelle sezioni fibra-matrice nell'analisi dei laminati. Esistono differenti approcci che possono essere considerati per modellare i materiali compositi attraverso le espansioni HLE, osservando la Figura 3.8 :

- **Equivalent Single Layer (ESL)**. In questo modello le proprietà dei costituenti vengono riunite in un singolo strato equivalente. L'ordine del polinomio utilizzato per le funzioni HLE ne determina l'accuratezza indipendentemente dal numero degli strati che compongono il laminato considerato. In questo modello non è rispettata la continuità delle tensioni trasversali sulla lamina.
- **Layer-Wise (LW)**. Nel modello LW ogni strato viene modellato indipendentemente dagli altri attraverso espansioni HLE di tipo non-local. La continuità delle tensioni lungo la sezione trasversale è soddisfatta se si utilizzano polinomi di ordine elevato nella cinematica del modello trave. Tale modello non tiene in considerazione la presenza di gradienti di tensione tra la matrice e la fibra.
- **Component-Wise (CW)**. Utilizzando questo modello l'accuratezza desiderata può essere raggiunta in due modi: attraverso la descrizione della geometria del problema (fibre, matrice e laminato con una formulazione unificata), e attraverso l'uso di un modello cinematico a carattere gerarchico HLE, in una determinata area del dominio.

Nel contesto delle analisi CW dei laminati in composito, è possibile considerare due tipologie di approccio: il primo in cui si considerano tutte le fibre e la matrice di ogni strato ben distinte in una simulazione diretta, il secondo è l'approccio global-local che include gli strati di materiale omogeneizzato insieme a quelli con fibra e matrice distinte.

Questo tema può essere approfondito in vari lavori presenti in letteratura come [15, 1, 16].

Capitolo 4

Formulazione agli elementi finiti

Per risolvere i problemi strutturali si seleziona la formulazione agli elementi finiti (FEM) grazie alla sua incredibile versatilità rispetto agli altri metodi disponibili. In questo contesto si introduce la formulazione FEM per problemi basati sulla formulazione CUF. In letteratura sono presenti vari metodi di analisi delle strutture, il metodo FEM rappresenta solo uno di questi implementabili nel contesto delle CUF. Altri modelli prevedono, ad esempio, l'uso di soluzioni in forma chiusa, che permettono di risolvere dei problemi specifici, come nel lavoro di E. Carrera e A. Ciuffreda [10] in cui si presentano delle soluzioni analitiche in forma chiusa per analisi degli stati di tensioni su piastre multistrato soggette a carichi termici.

Chiaramente le soluzioni in forma chiusa permettono di ridurre il costo computazionale, oltre che essere molto affidabili proprio perché sviluppati per il caso desiderato, ma questo li rende utilizzabili solo per determinati problemi. Inoltre, devono essere riformulati a seconda delle geometrie e condizioni al contorno che si presentano. Questi aspetti li rendono meno interessanti per la maggior parte delle applicazioni.

Al fine di superare queste limitazioni è stato introdotto il metodo FEM, il quale prevede la risoluzione automatica del problema in forma debole. Il problema può essere discretizzato in un numero finito di domini o elementi, nei quali i modelli di risoluzione matematici sono in grado di lavorare in modo più efficiente. Il problema, in questo modo, può essere assemblato e risolto tramite codici di calcolo automatici. In questi problemi l'accuratezza del modello numerico è controllata direttamente da quanto la discretizzazione risulta raffinata. D'altro canto, una discretizzazione della struttura analizzata troppo fitta conduce a delle analisi troppo costose. Questo rende necessarie delle preliminari analisi di convergenza delle soluzioni per stabilire la qualità della soluzione che si desidera ottenere. Di seguito si mostra l'uso del modello di risoluzione FEM per risolvere problemi unidimensionali basati sulla CUF.

4.1 Spostamenti generalizzati e funzioni di forma

Si consideri un modello trave generalizzato, gli spostamenti \mathbf{u}_τ di un qualsiasi punto lungo l'asse della trave sono dati dalla combinazione lineare del loro valore dell'incognita nodale pesata in base al valore della funzione di forma N_i assegnate ai nodi lungo la trave. Questo può essere espresso attraverso la formula 4.1, in cui la notazione di Einstein indica la sommatoria

$$\mathbf{u}_\tau(y) = N_i(y)\mathbf{u}_{\tau i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

in cui l'indice i indica il numero del nodo dell'elemento ed n è il numero dei nodi totali dell'elemento selezionato. Gli spostamenti nodali si descrivono come:

$$\mathbf{u}_{\tau i} = \{u_{x\tau i} \quad u_{y\tau i} \quad u_{z\tau i}\}^T \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (4.2)$$

in cui M è il numero dei termini della funzione di espansione.

Le funzioni di forma di Lagrange utilizzate per il caso di elementi trave a due nodi sono denotate con $B2$, a tre nodi con $B3$ e a quattro nodi con $B4$ sono:

1. $B2$:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-r), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+r) \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \end{cases} \quad (4.3)$$

2. $B3$

$$N_1 = \frac{1}{2}r(1-r), \quad N_2 = \frac{1}{2}r(1+r) \quad N_3 = \frac{1}{2} - (1+r)(1-r), \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

3. $B4$

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r-1), & N_2 &= \frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r+1) \\ N_3 &= \frac{27}{16}(r+1)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r-1), & N_4 &= -\frac{27}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r + \frac{1}{3}\right)(r+1) \end{aligned} \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = +1 \\ r_3 = -\frac{1}{3} \\ r_4 = +\frac{1}{3} \end{cases} \quad (4.5)$$

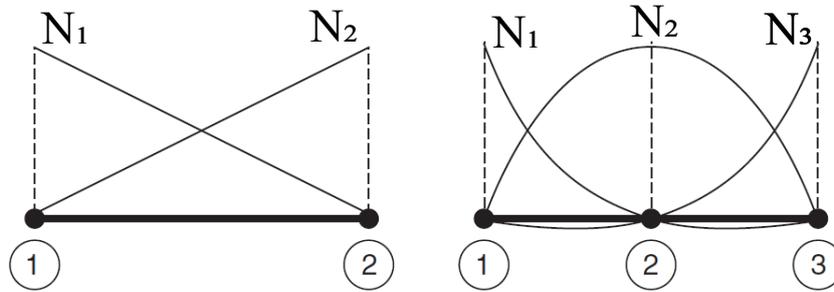


Figura 4.1: Funzioni di forma Lagrange B2 e B3.

Le coordinate naturali r hanno valore che va da -1 a $+1$, r_i indica la posizione del nodo considerato in coordinate naturali. L'ordine del modello trave selezionato è dato dall'espansione sulla sezione trasversale, mentre il numero dei nodi selezionati per l'elemento dipende dall'approssimazione lungo l'asse longitudinale della trave.

La scelta del modello, dell'elemento e della mesh per la trave determina il numero totale dei gradi di libertà (DOFs) del modello strutturale:

$$DOFs = 3 \times M \times [(n-1) \times N_B + 1] \quad (4.6)$$

in cui $3 \times M$ indica il numero di gradi di libertà per nodo, n il numero di nodi per elemento e N_B il numero totale degli elementi trave considerati.

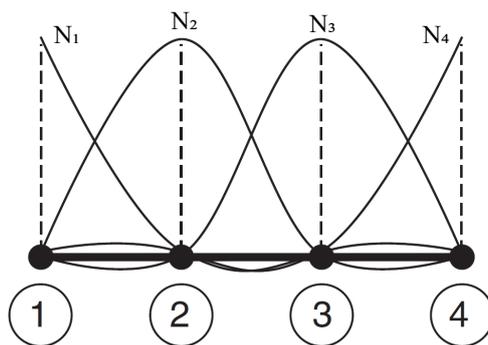
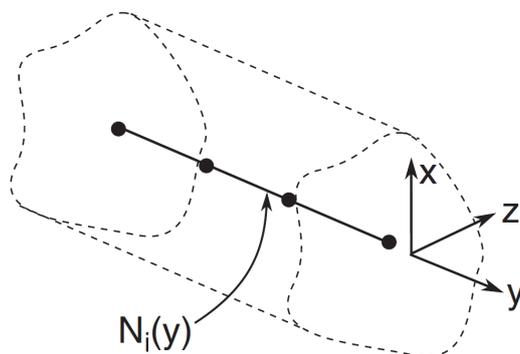
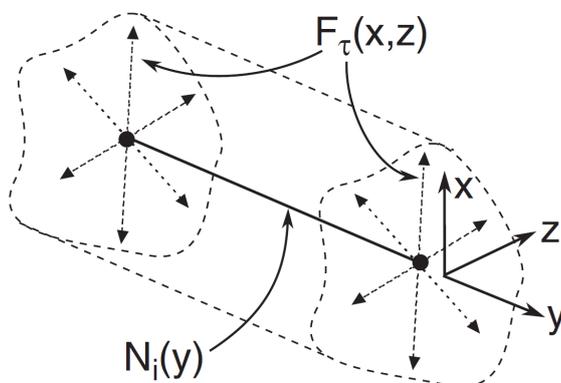


Figura 4.2: Funzioni di forma Lagrange B4.

Figura 4.3: Elemento B4 per l'approximazione della direzione y della trave [7].

Come detto in precedenza la forma debole delle equazioni di governo si può ottenere grazie all'abbinamento della tecnica FEM alla formulazione CUF. Includendo la cinematica della formulazione CUF (3.2) nell'espressione della formulazione FEM (4.1) si può ottenere il campo di spostamenti formulato con il metodo CUF combinato alla metodologia FEM:

$$\mathbf{u}_\tau(x, y, z) = N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{\tau i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (4.7)$$

Figura 4.4: Modello FEM della trave con funzioni di forma N_i e funzioni di espansione F_τ [7].

4.2 Principio dei lavori virtuali

Le analisi strutturali conducono a diversi problemi, legati ad esempio alle configurazioni di carico applicate e alle condizioni al contorno. Introducendo il Principio dei Lavori Virtuali (PVD) è possibile descrivere il problema in termini di lavoro. Questo metodo consente la derivazione delle equazioni di governo semplicemente considerando la presenza di diversi tipi di lavoro: lavoro interno ed esterno. Il lavoro interno ha origine dalla deformazione della struttura e quello esterno dai carichi applicati su essa. Nel lavoro esterno è compreso il lavoro compiuto dai carichi applicati distribuiti, concentrati e il lavoro delle forze d'inerzia, che risulta nullo nel caso statico.

Attraverso il PVD, la matrice di rigidità del problema può essere ottenuta in termini di Nucleo Fondamentale (FN), la cui forma è indipendente dall'ordine del modello selezionato. Il PVD può essere formulato con la seguente formulazione:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (4.8)$$

Il lavoro interno corrisponde all'energia di deformazione elastica definita come:

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.9)$$

in cui $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ sono definite rispettivamente in (2.3) e (2.7) e V è il volume del corpo. δL_{ext} è il lavoro delle forze esterne che può essere visto come la somma delle forze applicate sulla superficie δL_{Ω} , le forze concentrate δL_P e le forze d'inerzia δL_{ine} :

$$\delta L_{ext} = \delta L_{\Omega} + \delta L_P - \delta L_{ine} \quad (4.10)$$

In questo modo il PVD può essere riformulato come:

$$\int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u}^T dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_{\Omega} d\Omega + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} \quad (4.11)$$

in cui ρ è la densità del materiale e $\ddot{\mathbf{u}}$ il vettore delle accelerazioni. Considerando solo il caso statico, il termine inerziale si può trascurare.

Sostituendo la formulazione agli elementi finiti della notazione CUF (4.7) in (2.5) possiamo riscrivere il vettore delle deformazioni come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{D}F_{\tau}N_i)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (4.12)$$

in cui $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il vettore delle deformazioni definito in (2.3), \mathbf{D} definito in (2.4) è l'operatore differenziale che applicato a $F_{\tau}N_i$ costituisce la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{\tau}N_{i,y} & 0 \\ F_{\tau,x}N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\tau,z}N_i \\ F_{\tau,z}N_i & 0 & F_{\tau,x}N_i \\ 0 & F_{\tau,z}N_i & F_{\tau}N_{i,y} \\ F_{\tau}N_{i,y} & F_{\tau,x}N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

in cui troviamo le componenti derivate rispetto alle loro direzioni di competenza.

Allo stesso modo è possibile riscrivere la legge di Hooke in (2.9) sostituendo l'espressione del vettore di deformazione appena ottenuta in (4.12):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{D}F_{\tau}N_i)\mathbf{u}_{\tau i} \quad (4.14)$$

in cui \mathbf{C} è la matrice dei coefficienti elastici del materiale di dimensioni 6×6 .

Le funzioni di forma N_i dipendono dagli elementi selezionati. Abbiamo visto in precedenza la forma esplicita delle funzioni di forma lungo la coordinata y della trave: $B2$ che ci consente di ottenere un'espansione lineare, $B3$ un'espansione quadratica e $B4$ cubica. A queste sono legate diverse funzioni di forma che possiedono la caratteristica intrinseca di valere 1 nel nodo a cui fa riferimento e 0 in tutti gli altri. Mentre, le funzioni di espansione F_τ introdotte anch'esse nei capitoli precedenti, ci consentono di approssimare la sezione trasversale della trave (x, z) attraverso l'uso delle funzioni di Lagrange, Taylor o le funzioni Legendre, con ordine di espansione arbitrario.

4.3 Nucleo fondamentale

Dalla formulazione del principio dei lavori virtuali (Eq.(4.8)), è possibile ricavare la matrice di rigidità del problema strutturale che rappresenta uno dei nuclei fondamentali del modello CUF-FEM. Per ottenere la variazione virtuale degli spostamenti si introducono gli indici j ed s :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(F_s N_j) \delta \mathbf{u}_{sj} \quad (4.15)$$

A questo punto si può ricavare la variazione virtuale del lavoro interno sostituendo (4.15) e (4.14) in (4.9):

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \int_V \mathbf{D}(F_s N_j)^T \mathbf{C} \mathbf{D}(F_\tau N_i) dV \mathbf{u}_{\tau i} \quad (4.16)$$

Il lavoro virtuale interno può essere scritto come

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{u}_{sj}^T \mathbf{K}^{\tau s i j} \mathbf{u}_{\tau i} \quad (4.17)$$

in cui $\mathbf{K}^{\tau s i j}$ è la matrice di rigidità del problema strutturale e nucleo fondamentale di dimensioni 3×3 nel problema strutturale termo-elastico e 1×1 nel problema conducibilità termica e igroscopico.

Il nucleo fondamentale può essere riscritto considerando che le funzioni di forma $N_{i,j}$ dipendono solo dalla variabile y e le funzioni di espansione $F_{\tau s}$ solo dalla superficie trasversale della trave:

$$\mathbf{K}^{\tau s i j} = \int_l \int_\Omega \mathbf{D}(F_s N_j)^T \mathbf{C} \mathbf{D}(F_\tau N_i) dV dy \quad (4.18)$$

La forma estesa della matrice fondamentale per problemi 1D, 2D e 3D è presente nel libro [7]. La matrice del nucleo fondamentale è formalmente invariante, ovvero la sua forma non cambia con la scelta delle funzioni di forma o le funzioni di espansione. I quattro indici utilizzati sono:

- i , spostamento in termini di approssimazione FEM;
- j , la variazione virtuale dello spostamento in termini di approssimazione FEM;
- τ , lo spostamento approssimato sulla sezione trasversale;
- s , la variazione virtuale dello spostamento approssimato sulla sezione trasversale;

Gli indici i, j variano da 1 al numero dei nodi n , gli indici τ, s variano da 1 al numero dei termini delle funzioni di espansione M .

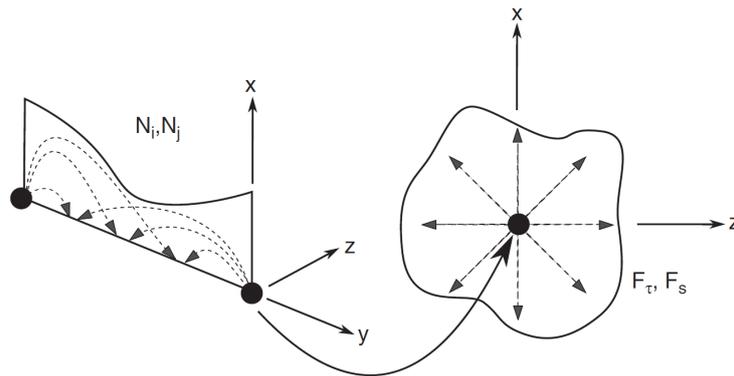


Figura 4.5: Rappresentazione dell'approssimazione assiale usando le funzioni di forma $N_i N_j$ e della sezione trasversale usando F_τ, F_s [13].

4.4 Tecnica di assemblaggio CUF

L'uso della formulazione CUF consente di assemblare le matrici in modo semplice grazie al fatto che la procedura si presta in modo efficiente all'implementazione in codici di calcolo, rendendo tale processo automatizzato. La procedura consiste in quattro cicli di calcolo sugli indici i, j, τ, s , in modo tale da ottenere un FN per ogni combinazione di questi indici. In Figura 4.6 è illustrata la procedura di assemblaggio per la matrice di rigidità globale 3×3 per un problema strutturale, tramite l'espansione del nucleo fondamentale. Si nota che il FN costituisce il nucleo di costruzione della matrice globale. Il primo ciclo sugli indici τ e s mostra la costruzione della matrice per il singolo nodo dell'elemento rappresentato da una data coppia di indici i, j , mentre il secondo ciclo sugli indici i, j crea la matrice degli elementi che costituiscono la matrice globale della struttura. Il tema dell'assemblaggio dei nuclei fondamentali e in generale della formulazione agli elementi finiti della CUF, può essere approfondito nei lavori [7, 13].

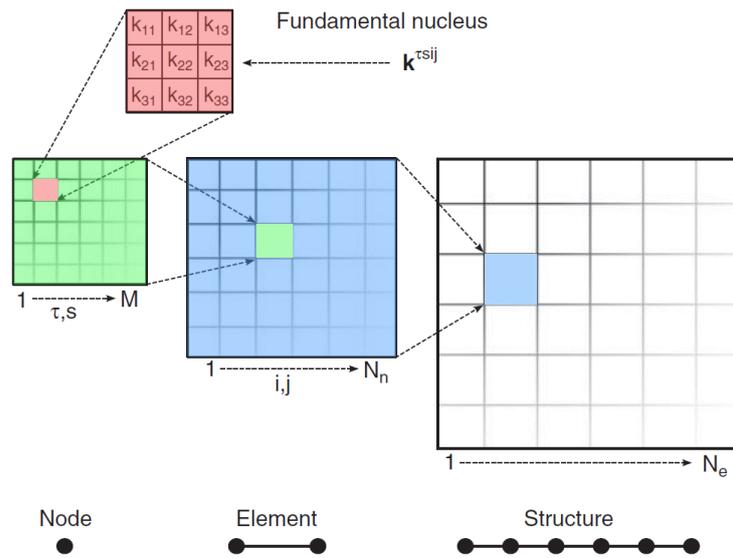


Figura 4.6: Rappresentazione della procedura di assemblaggio [7].

Capitolo 5

Analisi micromeccanica

Nel seguente capitolo si propone un innovativo approccio per condurre analisi micromeccaniche utili per il calcolo delle proprietà igro-termo-elastiche effettive di materiali compositi eterogenei. In questo metodo la descrizione della microstruttura si basa sull'uso di elementi finiti trave di ordine elevato ed estremamente accurati dal punto di vista geometrico. La Mechanics of Structure Genome (MSG) introdotta da W. Yu in [42] viene impiegata per la derivazione delle equazioni di governo per il problema del Repeating Unit Cell (RUC). Il metodo MSG consente di disaccoppiare il problema multiscala in un'analisi globale e una locale, fornendo le informazioni costitutive e il comportamento del campo locale senza il bisogno di assunzioni ad hoc. L'uso della CUF consente di ottenere dei modelli di trave ad ordine elevato in cui l'ordine della teoria diventa l'input dell'analisi, determinando l'accuratezza del modello. Come si spiegherà meglio nel corso del capitolo, la direzione principale del problema microstrutturale (la fibra) è discretizzata attraverso elementi finiti uni-dimensionali, mentre la sezione trasversale del RUC è modellata attraverso i polinomi di Legendre, introdotti nei capitoli precedenti.

5.1 Modelli per analisi micromeccanica

L'analisi micromeccanica dei materiali compositi è essenziale per capire come le caratteristiche della scala microscopica, ad esempio la posizione e il volume delle fibre, influenzano la risposta globale del componente. Le soluzioni ottenute dalle analisi micromeccaniche sono utili a risolvere i problemi microstrutturali fornendo accurati modelli costitutivi che possono poi essere usati nello studio strutturale a livello della lamina. Molti dei metodi di modellazione micromeccanica si basano sull'assunzione che la disposizione di fibre e particelle all'interno del componente, segua uno schema regolare ed ordinato. Questa ipotesi consente l'impiego di quello che viene definito il Repeating Unit Cell (RUC). Con RUC si definisce la più piccola entità geometrica che può essere periodicamente ripetuta nello spazio per costruire la struttura globale.

Nei capitoli successivi si utilizzeranno i ben noti metodi analitici per la risoluzione del problema RUC, basati, ad esempio, sulla regola delle miscele [24], il metodo Hashin-Sktrikman[22], Rosen e Hashin upper e lower bound[34] utilizzabili sia per compositi rinforzati con fibre, sia con particelle, Voigt [37] e Reuss[33] i quali si basano sull'assunzione che, rispettivamente, deformazioni e tensioni siano uniformi nel materiale e il metodo Mori-Tanaka [28] molto accurato per l'analisi di compositi rinforzati con particelle di forma qualsiasi. Questi metodi risultano limitati nella loro abilità di affrontare problemi in cui sono coinvolti materiali compositi con più di due costituenti e presentano delle limitazioni per il calcolo del campo locale.

In contrasto con queste teorie, si utilizzano anche dei modelli numerici che risultano più adattabili a un maggiore numero di casi generici, come il Method of Cells (MOC) [2] considerato un'evoluzione del MT, perché al contrario di questo è in grado di catturare le variazioni delle proprietà nel campo locale della matrice, e infine, il Generalised Method of Cells (GMC) [31] e il High-Fidelity Generalised Method of Cells (HFGMC) [4], metodi più avanzati in grado di espandere ulteriormente le abilità del MOC, e di fornire eccellenti risultati.

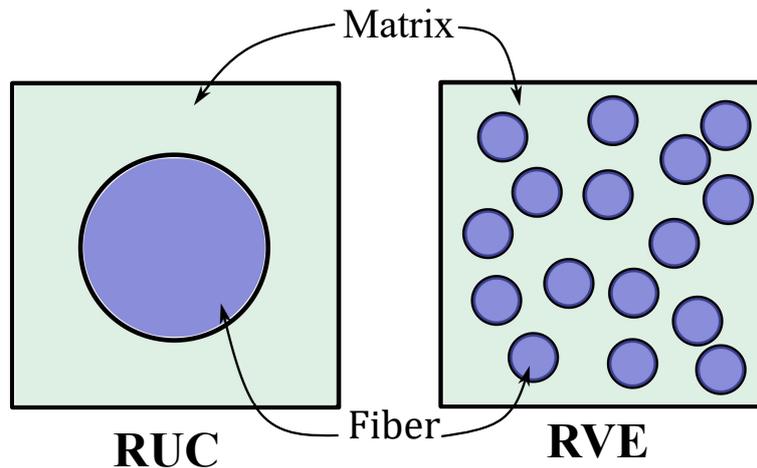


Figura 5.1: Rappresentazione di modelli RUC e RVE per analisi micromeccanica.

I modelli più conosciuti nelle analisi micromeccaniche si basano sui concetti di Representative Volume Element (RVE) e Repeating unit cell (RUC), rappresentati in Figura 5.1. La più grande differenza tra i due risiede nelle condizioni al contorno applicate nei vari sottodomini per rappresentare la risposta media dell'intero composito. I metodi basati su RVE usano spostamenti o tensioni omogenee come condizioni al contorno, mentre nei modelli basati sul concetto RUC si utilizzano condizioni al contorno periodiche o simmetriche. Tipicamente i metodi RVE utilizzano approcci che usano rappresentazioni semplificate per l'intero composito, per il quale sono raramente disponibili soluzioni analitiche per spostamenti o carichi omogenei. I metodi basati sul RUC, d'altro canto, modellano la vera microstruttura del materiale, che è assunta ripetitiva, quindi, spesso può contare su soluzioni numeriche di equazioni costitutive che usano le differenze finite oppure gli elementi finiti. Condizioni al contorno simmetriche sono tipicamente utilizzate nei modelli RUC che sono in possesso di piani di simmetria del materiale non alterati da carichi applicati. Nel caso in cui non siano presenti piani di simmetria, è necessario applicare condizioni al contorno periodiche, le quali comportano il fatto che le deformazioni sul singolo RUC rimangano compatibili con quelle dei RUC vicini.

L'uso di condizioni al contorno periodiche unito ad un'espansione asintotica multiscala del campo degli spostamenti e delle tensioni sul RUC, costituisce le basi per i metodi di omogeneizzazione per la stima delle proprietà effettive dei materiali periodicamente eterogenei. Nel seguente lavoro viene impiegato il modello RUC, ma una più dettagliata spiegazione del modello RVE è riportata negli articoli [6, 41].

Tutti i metodi precedentemente elencati hanno lo stesso scopo: il calcolo delle proprietà effettive del materiale eterogeneo. Tali proprietà rappresentano le informazioni costitutive dell'equivalente materiale omogeneizzato, utili nell'analisi macroscopica del componente. Un altro fine comune di questi metodi è il recupero degli spostamenti, deformazioni e ten-

sioni nel caso termo-elastico, flusso di calore nel caso di conducibilità termica e flusso di diffusività nel caso igroscopico.

In questo capitolo si introduce la risoluzione del problema micromeccanico in termini di MSG, introdotto da W. Yu in [42], attraverso un nuovo approccio unidimensionale.

Nel contesto MSG, il concetto di structure genome (SG) è presentato come il più piccolo blocco matematico della struttura. Ad esempio, SG può essere la fila di uno strato di laminato, la superficie che comprende i differenti costituenti del materiale eterogeneo, come compositi rinforzati con fibre o nel caso più generale può essere la microstruttura 3D caratterizzata dalla variazione delle fasi rispetto alle tre dimensioni.

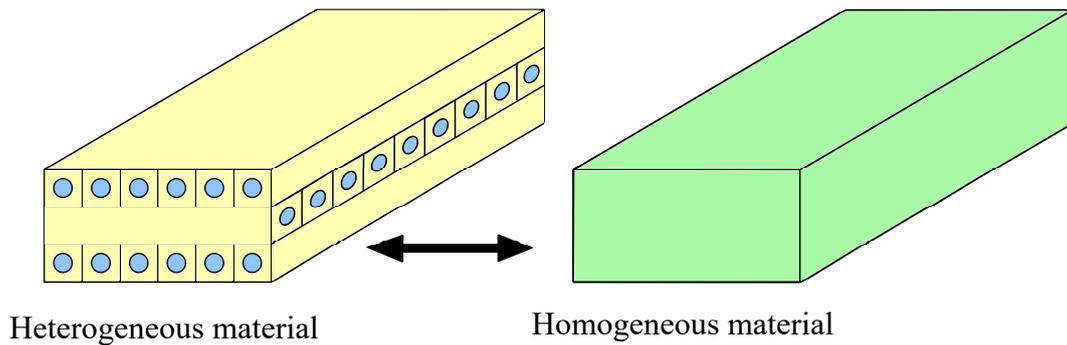


Figura 5.2: Materiale composito eterogeneo e omogeneizzato.

Il metodo MSG utilizza il Variational Asymptotic Method (VAM)[43] per risolvere i problemi che coinvolgono variabili microscopiche, dimostrando di essere efficaci per i casi che comprendono i materiali compositi. Attraverso l'uso del VAM è possibile individuare i punti stazionari di una funzione attraverso un'espansione asintotica in termini di uno o più parametri di dimensioni ridotte. Nel metodo MSG, basato sul metodo VAM, la soluzione del problema di stazionarietà si ottiene minimizzando la differenza tra le energie di deformazione del materiale eterogeneo e omogeneo. Quindi, il VAM può essere utilizzato per affrontare il problema RUC con un approccio asintotico e calcolare le proprietà omogeneizzate e le soluzioni locali del materiale periodicamente omogeneo, con estrema accuratezza ed efficienza [45, 26].

Come accennato prima, questo lavoro propone un modello unidimensionale per risolvere il problema micromeccanico. Questo si fa tramite l'uso della formulazione CUF, che permette di ridurre il problema 3D generale, in uno più computazionalmente economico 2D o 1D, pur mantenendo un'altissima accuratezza nelle soluzioni. A questo proposito è possibile introdurre delle funzioni di espansione arbitrarie per caratterizzare la sezione trasversale e lungo lo spessore, rispettivamente per problemi 1D e 2D, ottenendo dei modelli in grado di superare le limitazioni legate ai modelli classici presentati nei precedenti capitoli. Sfruttando queste caratteristiche, il RUC può essere modellato attraverso modelli 1D lungo la direzione della fibra e delle inclusioni particellari. L'uso delle HLE, invece, è utile alla descrizione dei costituenti, attraverso l'accoppiamento con le funzioni di blending per la mappatura del RUC al fine di ottenere un modello numerico non iso-parametrico di ordine elevato.

5.2 Repeating Unit Cell (RUC)

Nella maggior parte delle analisi strutturali, le equazioni costitutive si risolvono in modo esatto solo con l'introduzione di approssimazioni iniziali. In casi più complessi diventa però necessario introdurre approssimazioni anche nella soluzione (avvalendosi ad esempio di modelli FEM) per arrivare ad una soluzione approssimata che garantisca un buon grado di accuratezza.

Si consideri un materiale composito con una microstruttura periodicamente ripetuta su un definito volume. Tale microstruttura, chiamata RUC, contiene al suo interno tutte le informazioni per identificare i materiali in esso contenuti. In Figura 5.3 è possibile osservare una rappresentazione del concetto spiegato, con i relativi sistemi di riferimento globale e locale.

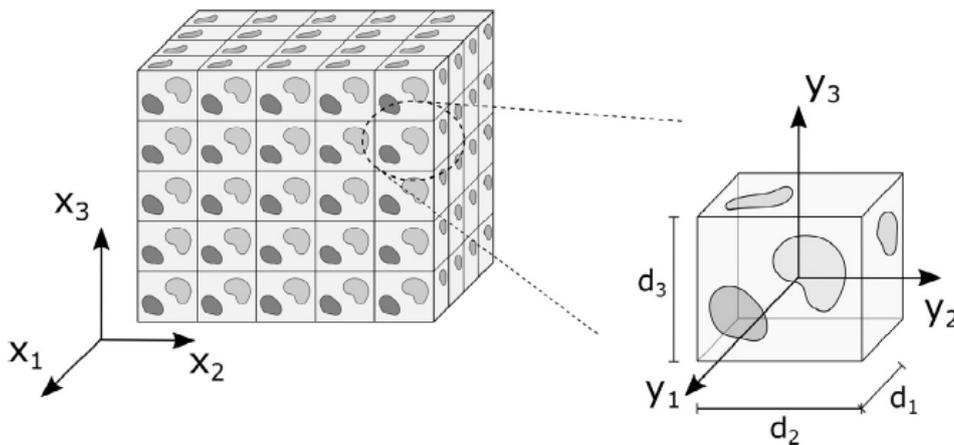


Figura 5.3: Sistemi di riferimento del materiale eterogeneo e del costituente RUC [9].

Si definiscono le proprietà macroscopiche in un sistema di riferimento globale $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$, mentre si utilizza $\mathbf{y}=\{y_1, y_2, y_3\}$ come sistema di riferimento locale del RUC, in cui y_1 rappresenta la direzione caratteristica della fibra.

Le due differenti scale sono legate dalla relazione $y_i = x_i/\delta$, in cui δ è un parametro di scala che caratterizza le dimensioni microscopiche del RUC, nel contesto di analisi multiscale. Di conseguenza, le informazioni costitutive estratte dal RUC rimangono sempre indipendenti dalla macrostruttura, che è invece caratterizzata da una geometria, condizioni al contorno e carichi applicati. In aggiunta, deve esistere il valor medio della soluzione locale e deve essere uguale alla soluzione globale del problema considerato. Considerando il campo degli spostamenti, tale affermazione si traduce con:

$$\frac{1}{V} \int_V u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV = \bar{u}_i(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

in cui V è il volume totale, u_i è lo spostamento locale che dipende da entrambe le coordinate e \bar{u}_i è lo spostamento globale nella sola coordinata globale. Stessa relazione vale nel problema conducibilità termica in cui si definisce il campo di temperatura ϕ e nel problema igroscopico il campo di umidità η . Per assicurare la continuità della quantità considerata in base al problema, ad esempio partendo dal campo di spostamenti, si introducono le

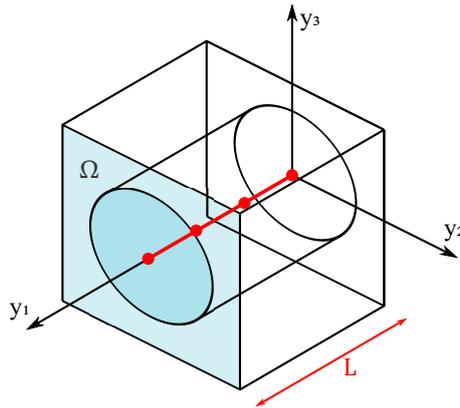


Figura 5.4: Sistema di coordinate locale del modello RUC square-pack.

condizioni al contorno periodiche sul RUC:

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3; \frac{d_1}{2}, y_2, y_3) &= u_i(x_1 + d_1, x_2, x_3; -\frac{d_1}{2}, y_2, y_3) \\
 u_i(x_1, x_2, x_3; y_1, \frac{d_2}{2}, y_3) &= u_i(x_1, x_2 + d_2, x_3; y_1, -\frac{d_2}{2}, y_3) \\
 u_i(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, \frac{d_3}{2}) &= u_i(x_1, x_2, x_3 + d_3; y_1, y_2, -\frac{d_3}{2})
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

in cui le dimensioni del RUC sono indicate con d_1, d_2, d_3 . Nel caso elastico e termo-elastico le condizioni al contorno sono legate agli spostamenti u_i , mentre nel campo di conducibilità termica si introduce il campo di temperatura ϕ_i e infine, per il campo di concentrazione di umidità, si definisce la continuità con la variabile η_i .

5.3 Modelli di risoluzione raffinati per il RUC

Grazie alle caratteristiche geometriche possedute dalla microstruttura, il metodo MSG può essere applicato per risolvere problemi 2D in cui le fasi variano nel piano della sezione trasversale. Questo avviene nella modellazione micromeccanica di materiali compositi rinforzati con fibre. Invece, nei problemi 3D in cui i differenti elementi variano lungo le tre direzioni si ha una modellazione RUC con inclusioni particellari. In Figura 5.4 è introdotto il sistema di riferimento locale del RUC, considerando il caso di una microstruttura square-pack, ovvero un blocco fondamentale in cui la fibra contenuta nella matrice è di forma cilindrica, con lunghezza della fibra L coincidente con la lunghezza del lato del cubo RUC. L'asse della trave, di lunghezza L , è scelto in modo da coincidere con l'asse y_1 della fibra, mentre gli assi y_2 e y_3 individuano la sezione trasversale del RUC di area Ω .

Per risolvere i problemi RUC, le equazioni di governo vengono risolte con le CUF 1D. Le CUF introducono un modello trave in cui le assunzioni cinematiche sono introdotte in modo assiomatico, ovvero tali assunzioni sono basate sulla particolare geometria del componente analizzato. Le funzioni di fluttuazione incognite χ possono essere espanse sulla sezione trasversale attraverso l'uso di funzioni di espansione arbitrarie F_τ , dipendenti dalle coordinate y_2 e y_3 . Le funzioni di fluttuazione incognite possono essere espresse come:

$$\chi(\mathbf{x}, y_1, y_2, y_3) = F_\tau(y_2, y_3)\chi_\tau(\mathbf{x}; y_1) \quad \tau = 1, 2, \dots, M \tag{5.3}$$

in cui χ_τ è il vettore delle fluttuazioni generalizzate della trave lungo la direzione delle fibre ed M è il numero dei termini dell'espansione assunti per il modello cinematico.

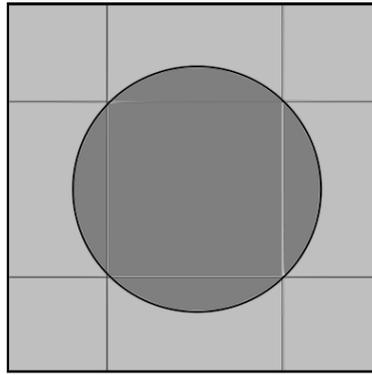


Figura 5.5: Distribuzione dei domini di espansione sulla sezione trasversale per un composito rinforzato con fibra con geometria di tipo square-pack. L'esatta geometria circolare della fibra deriva dall'impiego della mappatura delle funzioni di blending.

L'ordine del modello strutturale, e quindi anche l'accuratezza dell'analisi, può essere selezionato tramite la scelta delle funzioni di espansione F_τ .

Dunque, un'accurata soluzione micromeccanica di materiali eterogenei richiede delle specifiche caratteristiche dalle teorie unidimensionali. Ad esempio, la teoria utilizzata dovrebbe considerare il campo cinematico di ogni componente del RUC in modo indipendente, al fine di riuscire a catturare le discontinuità alle interfacce, così come la distribuzione dei gradi di libertà sulla sezione trasversale per ottenere un'adeguata applicazione delle condizioni al contorno (5.2). A questo fine, le funzioni di espansione HLE, sono accoppiate con le funzioni di blending in modo da descrivere precisamente la sezione trasversale consentendo di condurre accurate ed affidabili analisi micromeccaniche. Nel modello presentato, le equazioni di governo si risolvono con modelli basati su HLE-CW.

5.4 Mappatura della sezione trasversale del RUC

Per consentire la rappresentazione di generiche geometrie della microstruttura, la sezione trasversale può essere suddivisa in più domini di espansione. Inoltre, i differenti costituenti del RUC possono essere modellati attraverso la compatibilità degli spostamenti alle interfacce dei domini, seguendo l'approccio CW, introdotto nei capitoli precedenti. Le condizioni al contorno periodiche nel piano y_2 - y_3 possono essere modellate come:

$$\boldsymbol{\chi}_\tau^+ = \boldsymbol{\chi}_\tau^- \quad (5.4)$$

in cui $\boldsymbol{\chi}$ sono le incognite primarie del problema e con $+$ e $-$ si intendono i lati opposti della sezione trasversale.

Grazie al fatto che i polinomi di espansione HLE consentono di arrivare ad ordini elevati, risulta conveniente introdurre dei domini della sezione trasversale più estesi possibile. Per fare ciò si introduce una tecnica di mappatura non iso-parametrica per consentire di adattare i contorni dei domini HLE alle caratteristiche geometriche dei differenti costituenti della microstruttura. Questo si ottiene introducendo una parametrizzazione della geometria attraverso dei modelli numerici basati sul metodo delle funzioni di blending.

Per parametrizzare la geometria esatta del componente nel piano y_2 - y_3 all'interno del

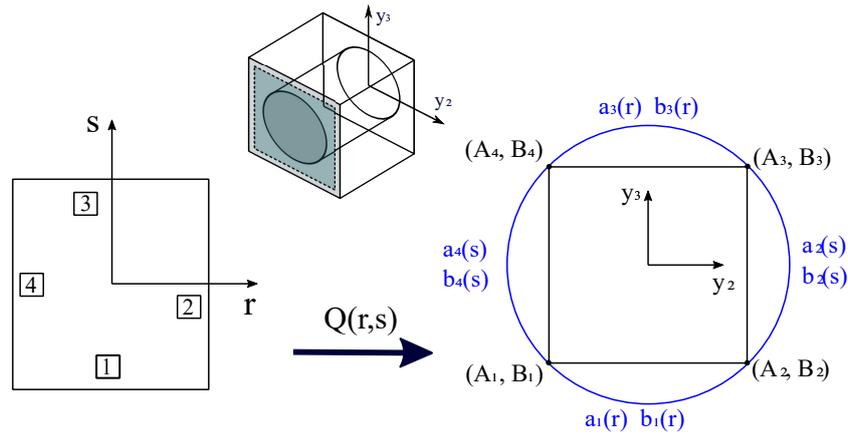


Figura 5.6: Mappatura della sezione trasversale del RUC attraverso le funzioni di blending.

modello blending si utilizzano le funzioni di mappatura \mathbf{Q} :

$$y_2 = Q_a(r, s) = \frac{1}{2}(1-s)a_1(r) + \frac{1}{2}(1+r)a_2(s) + \frac{1}{2}(1+s)a_3(r) - \frac{1}{2}(1-r)a_4(s) - F_\tau(r, s)r_\tau$$

$$y_3 = Q_b(r, s) = \frac{1}{2}(1-s)b_1(r) + \frac{1}{2}(1+r)b_2(s) + \frac{1}{2}(1+s)b_3(r) - \frac{1}{2}(1-r)b_4(s) - F_\tau(r, s)s_\tau \quad (5.5)$$

in cui $\tau = 1, \dots, 4$ e le a_τ e b_τ rappresentano le curve parametrizzate dei bordi dell'elemento, come illustrato dalla Figura 5.6. In questo modo la geometria del modello può essere introdotta all'inizio, determinando l'accuratezza dell'analisi micromeccanica attraverso la selezione dell'ordine del polinomio che si intende utilizzare senza la necessità di eseguire ogni volta una nuova mesh del modello. Grazie alle caratteristiche di questa tecnica è possibile costruire geometrie molto complesse.

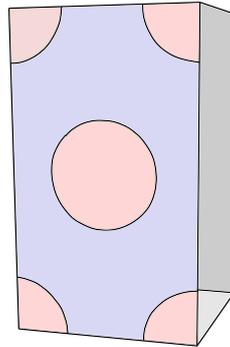


Figura 5.7: Modello microstruttura hexagonal-pack.

Come già anticipato, le microstrutture prese in considerazione nei successivi esempi saranno quattro:

1. square-pack;
2. hexagonal-pack;
3. rectangular inclusion;
4. cylindrical inclusion.

Le prime due, mostrate in Figura 5.5 e 5.7, sono dei modelli di RUC in cui l'inclusione è costituita da una fibra continua di forma cilindrica, il cui asse longitudinale è y_1 , mentre la terza e la quarta sono dei modelli di RUC in cui l'inclusione si presenta sotto forma di particella rettangolare e particella cilindrica contenuta dello spazio 3D del blocco, come apprezzabile da Figura 5.8 e Figura 5.9. Si noti che anche nel caso di inclusione l'asse di riferimento del modello trave è y_1 ma la lunghezza dell'inclusione L_i non coincide più con il lato del modello RUC. I domini della sezione trasversale cambiano a seconda che si consideri l'inclusione o la fibra. Per la fibra la sezione trasversale è modellata solo con il dominio in cui sono presenti contemporaneamente entrambi gli elementi, mostrato in 5.5. Al contrario per le inclusioni si utilizzano due modelli di sezione trasversale: il primo in cui è presente solo la fase della matrice e il secondo con entrambe le fasi, rappresentati nelle figure 5.8 e Figura 5.9, determinando l'aumento del costo computazionale dato dal modello 3D.

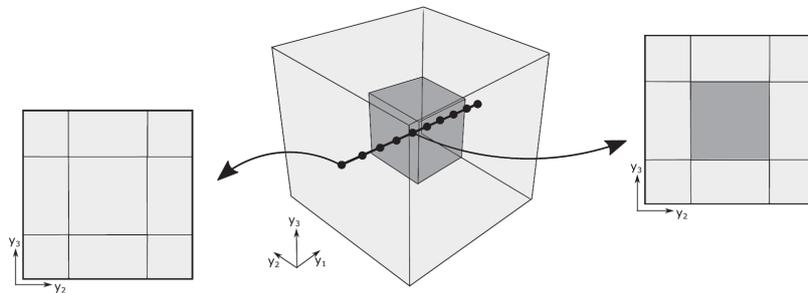


Figura 5.8: Modello trave HLE di un RUC rinforzato da particella rettangolare.

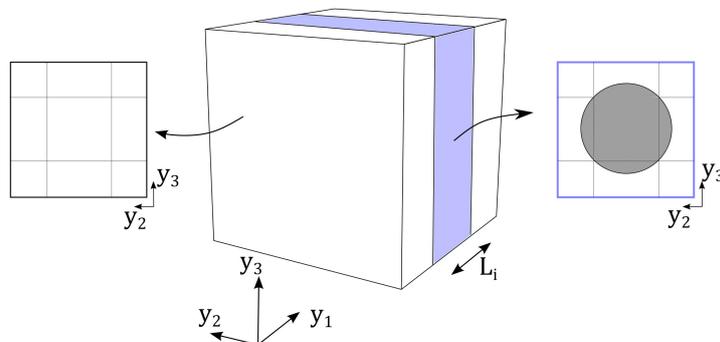


Figura 5.9: Modello trave HLE di un RUC rinforzato da particella cilindrica. L_i rappresenta la lunghezza dell'inclusione.

Nelle tabelle 5.1 e 5.2 si riporta il numero dei gradi di libertà per ogni microstruttura in base all'ordine di polinomi HLE selezionato per il caso termo-elastico e per il caso di conducibilità/igroscopico.

Per quanto appena detto, i gradi di libertà legati ai modelli con le inclusioni sono molto superiori rispetto a quelli con la fibra e in tutti i casi aumentano all'aumentare del grado del polinomio, consentendo di ottenere delle analisi più accurate. Infine, si noti che per i problemi di conducibilità termica e igroscopici i gradi di libertà risultano inferiori rispetto ai problemi termo-elastici poiché diminuiscono le dimensioni delle matrici fondamentali del problema e di conseguenza i costi computazionali.

MICROSTRUCTURE	DOFs	HL2	HL3	HL4	HL5	HL6	HL7	HL8
Square-pack		240	384	582	834	1140	1500	1914
Hexagonal-pack		372	600	918	1326	1824	2412	3090
Rectangular inclusion		2280	3648	5529	7923	10830	14250	18183
Cylindrical inclusion		2280	3648	5529	7923	10830	14250	18183

Tabella 5.1: Gradi di libertà delle diverse microstrutture per il problema termo-elastico, considerando diversi gradi p delle HLE.

MICROSTRUCTURE	DOFs	HL2	HL3	HL4	HL5	HL6	HL7	HL8
Square-pack		80	128	194	278	380	500	638
Hexagonal-pack		124	200	306	442	608	804	1030
Rectangular inclusion		760	1216	1843	2641	3610	4750	6061
Cylindrical inclusion		760	1216	1843	2641	3610	4750	6061

Tabella 5.2: Gradi di libertà delle diverse microstrutture per il problema conducibilità termica e proprietà igroscopiche, considerando diversi gradi p delle HLE.

Capitolo 6

Analisi micromeccanica termo-elastica

Molti materiali compositi sono coinvolti in ambienti caratterizzati da temperature estreme. Per questo motivo è importante condurre accurate analisi sulle proprietà termiche del materiale, come calore specifico e coefficiente di espansione termica. Nel seguente capitolo si presenterà un nuovo approccio per condurre analisi termo-elastiche micromeccaniche di materiali compositi, attraverso il metodo CUF-MSG presentato nel precedente capitolo. Per prima cosa si introduce il metodo VAM relativo alle proprietà termo-elastiche in modo da ottenere l'energia di deformazione del materiale, successivamente con l'implementazione FEM si arriva alla definizione dei nuclei fondamentali del problema che rendono possibile la risoluzione. Infine, il metodo è stato convalidato attraverso dei casi pratici.

6.1 Variational asymptotic method per analisi termo-elastica

Il metodo MSG si basa sul VAM per produrre efficienti soluzioni di problemi strutturali. Grazie al VAM è possibile ottenere dei valori stazionari compiendo una espansione asintotica in termini di uno o più parametri di piccole dimensioni. Questo approccio risulta molto utile in micromeccanica in cui, tipicamente, sono presenti una o più dimensioni più piccole di altre. Ad esempio, in problemi che contengono modelli tipo trave, la sezione trasversale è considerata più piccola rispetto alla direzione longitudinale, mentre nei problemi piastra, solitamente lo spessore è considerato trascurabile rispetto alle coordinate del piano.

Nei materiali compositi il metodo VAM è considerato un naturale approccio per l'analisi multiscala necessaria per le differenti scale che giocano un ruolo fondamentale nel problema. Nel metodo MSG, la soluzione del problema stazionario si ottiene minimizzando la differenza tra le energie di deformazione tra il materiale eterogeneo e quello omogeneizzato espresso da:

$$\Pi = \Pi_1 - \Pi_0 \quad (6.1)$$

con

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \left\langle C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2\beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + c_v \frac{\theta^2}{T_0} \right\rangle \\ \Pi_0 &= \frac{1}{2} \left(C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2\beta_{ij}^* \varepsilon_{ij} \theta + c_v^* \frac{\theta^2}{T_0} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

in cui il primo termine corrisponde all'energia di deformazione del materiale eterogeneo, mentre il secondo termine a quella del materiale omogeneizzato. Il simbolo $\langle \rangle$ rappresenta

il volume medio, C_{ijkl} è il tensore elastico del quarto ordine, ε_{ij} e ε_{kl} i tensori di deformazione del secondo ordine, β_{ij} sono le componenti del secondo ordine del tensore dei coefficienti di stress termico, c_v è il calore specifico per unità di volume, T_0 temperatura di riferimento alla quale il componente è privo di stress termici e θ rappresenta la differenza tra la temperatura corrente e quella di riferimento. Al fine di evitare di dover risolvere il problema stazionario per ogni punto nel sistema globale \mathbf{x} , è utile formulare il metodo variazionale sul RUC. Quindi, la soluzione esatta \mathbf{u} può essere espressa come somma dello spostamento del materiale omogeneo $\bar{\mathbf{u}}$ e un termine che rappresenta la differenza tra i due:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \delta \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \quad (6.3)$$

in cui $\boldsymbol{\chi}$ rappresenta il vettore delle funzioni di fluttuazione degli spostamenti globali scalate con il parametro δ .

La differenza tra i sistemi di coordinate coinvolti nel problema multiscala $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ rende necessario calcolare le derivate del tipo $f(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ come:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (6.4)$$

Allora, applicando la (6.4) alle derivate in (6.3), il campo delle deformazioni può essere espresso come:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}) + \chi_{(i,j)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \quad (6.5)$$

in cui

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \quad \chi_{(i,j)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\chi}_i(\mathbf{x})}{\partial y_j} + \frac{\partial \bar{\chi}_j(\mathbf{x})}{\partial y_i} \right) \quad (6.6)$$

Tenendo in considerazione la (5.1) si può scrivere che $\bar{u}_i = \langle u_i \rangle$, $\bar{\varepsilon}_{ij} = \langle \varepsilon \rangle$, i quali implicano automaticamente che $\langle \chi_i \rangle = 0$ e $\langle \chi_{(i,j)} \rangle = 0$.

Successivamente, utilizzando il campo di spostamenti e deformazioni rispettivamente (6.3) e (6.5) e considerando il secondo termine dell'equazione (6.2) invariante, le fluttuazioni incognite possono essere calcolate attraverso la minimizzazione del valore del seguente funzionale:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \left\langle C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i,j)}) (\bar{\varepsilon}_{kl} + \chi_{(k,l)}) + 2\beta_{ij} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i,j)}) \theta + c_v \frac{\theta^2}{T_0} \right\rangle \quad (6.7)$$

Nei precedenti lavori basati su MSG per l'omogeneizzazione del RUC, il problema era formulato per essere poi risolto attraverso l'analisi agli elementi finiti (FEA), inserito in un modello costitutivo multiscala general-purpose chiamato SwiftComp [44]. L'innovazione di questo lavoro risiede nell'efficiente modo in cui viene risolto il problema del RUC, attraverso l'uso di metodi raffinati e geometricamente accurati.

6.2 Implementazione FEM

Il metodo agli elementi finiti (FEM), è usato per risolvere il problema lungo l'asse della trave y_1 . Per fare questo, le fluttuazioni incognite generalizzate $\boldsymbol{\chi}_\tau$ sono interpolate con funzioni di forma di Lagrange:

$$\boldsymbol{\chi}_\tau(\mathbf{x}; y_1) = N_i(y_1) \boldsymbol{\chi}_{\tau i}(\mathbf{x}) \quad \tau = 1, 2, \dots, n \quad (6.8)$$

in cui $\chi_{\tau i}(\mathbf{x})$ rappresenta il vettore delle incognite nodali, \mathbf{N}_i i polinomi di Lagrange ed n il numero totale di nodi della trave.

Il vettore delle deformazioni globali espresso con la notazione di Voigt è:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \{\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\varepsilon}_{33} \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} \quad 2\bar{\varepsilon}_{12}\} \quad (6.9)$$

Le relazioni geometriche possono essere scritte come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\chi} \quad (6.10)$$

con \mathbf{D} operatore differenziale:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial y_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial y_3 \\ 0 & \partial y_3 & \partial y_2 \\ \partial y_3 & 0 & \partial y_1 \\ \partial y_2 & \partial y_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \partial y_i = \partial(\cdot)/\partial y_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.11)$$

A questo punto si può definire la legge di Hooke legata alle tensioni e alle deformazioni per il problema termo-elastico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}\theta \quad (6.12)$$

in cui \mathbf{C} è la matrice di rigidità del materiale 6×6 sintetizzata a partire dal tensore del quarto ordine C_{ijkl} e $\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}$ è la matrice 6×1 dei termini ottenuti dal tensore β_{ij} .

Il funzionale in equazione (6.7) può essere riscritto come:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_V \left[(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\chi})^T \mathbf{C} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\chi}) + 2\boldsymbol{\beta}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\chi})\theta + c_v \frac{\theta^2}{T_0} \right] dV \quad (6.13)$$

per risolvere numericamente il problema micromeccanico. Le condizioni al contorno sono posizionate nei bordi della sezione trasversale come in (5.4), e nelle sezioni ortogonali alle fibre $\chi_{\tau 1} = \chi_{\tau n}$ in cui 1 ed n rappresentano il primo e l'ultimo nodo.

Sostituendo la (6.8) nella (5.3) si ottiene l'accoppiamento del modello CUF e il modello FEM per il problema micromeccanico:

$$\chi_{\tau} = F_{\tau} \mathbf{N}_i \chi_{\tau i} \quad (6.14)$$

e sostituendo in (6.13) si ottiene il funzionale riscritto con la notazione CUF:

$$\Pi_1^* = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\chi}_{s_j}^T \mathbf{E}^{\tau s i j} \boldsymbol{\chi}_{\tau i} + 2\boldsymbol{\chi}_{s_j}^T \mathbf{D}_{h\varepsilon}^{s j} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\boldsymbol{\chi}_{s_j}^T \mathbf{D}_{h\theta}^{s j} \theta + D_{\theta\theta} \frac{\theta^2}{T_0} \right) \quad (6.15)$$

In cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\tau s i j} &= \int_{\Omega} \int_l (\mathbf{D}(F_s \mathbf{N}_j \mathbf{I}))^T \mathbf{C} \mathbf{D}(F_{\tau} \mathbf{N}_i \mathbf{I}) d\Omega dy_1 & \mathbf{D}_{h\varepsilon}^{s j} &= \int_{\Omega} \int_l (\mathbf{D}(F_s \mathbf{N}_j \mathbf{I}))^T \mathbf{C} d\Omega dy_1 \\ \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon} &= \int_V \mathbf{C} dV & \mathbf{D}_{h\theta}^{s j} &= \int_{\Omega} \int_l (\mathbf{D}(F_s \mathbf{N}_j \mathbf{I}))^T \boldsymbol{\beta} d\Omega dy_1 \\ \mathbf{D}_{\varepsilon\theta} &= \int_V \boldsymbol{\beta} dV & D_{\theta\theta} &= \int_V c_v dV \end{aligned} \quad (6.16)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità 3×3 , $\mathbf{E}^{\tau s i j}$, $\mathbf{D}_{h\varepsilon}^{s j}$ e $\mathbf{D}_{h\theta}^{s j}$ rappresentano i nuclei fondamentali del problema termo-elastico RUC, contenenti tutte le informazioni del problema strutturale.

Invece, $\mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon}$, $\mathbf{D}_{\varepsilon\theta}$ e $\mathbf{D}_{\theta\theta}$ sono rispettivamente, matrice di rigidità effettiva, matrice di rigidità termica effettiva e calore specifico effettivo del materiale. Si noti che $\mathbf{E}^{\tau sij}$ è una matrice 3×3 , $\mathbf{D}_{h\varepsilon}^{sj}$ è una 3×6 e $\mathbf{D}_{h\theta}^{sj}$ è una 3×1 . Di conseguenza, attraverso il ciclo sugli indici τsij si può assemblare \mathbf{E} , $\mathbf{D}_{h\varepsilon}$ e $\mathbf{D}_{h\theta}$ del problema RUC.

Le fluttuazioni incognite che minimizzano il precedente funzionale possono essere ottenute attraverso la risoluzione del sistema lineare:

$$\mathbf{E}^{\tau sij} \chi_{\tau i} = -\mathbf{D}_{h\varepsilon}^{sj} \bar{\varepsilon} - \mathbf{D}_{h\theta}^{sj} \theta \quad (6.17)$$

La linearità del problema impone che:

$$\chi_{\tau i}(\mathbf{x}) = \chi_{\tau i 0} \bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \chi_{\tau i \theta} \theta(\mathbf{x}) \quad (6.18)$$

per cui, si può scrivere che:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\tau sij} \chi_{\tau i 0} = -\mathbf{D}_{h\varepsilon}^{sj} \\ \mathbf{E}^{\tau sij} \chi_{\tau i \theta} = -\mathbf{D}_{h\theta}^{sj} \end{cases} \quad (6.19)$$

in cui $\chi_{\tau i 0}$ e $\chi_{\tau i \theta}$ sono rispettivamente matrici di dimensioni 3×6 e 3×1 , contenenti le soluzioni delle funzioni di fluttuazione.

Infine, sostituendo la (6.18) nell'espressione del funzionale (6.13) si può calcolare:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^T \mathbf{C}^* \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^T \bar{\beta} \theta + \frac{1}{2} \bar{c}_v \frac{\theta^2}{T_0} \quad (6.20)$$

in cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* &= \frac{1}{\Omega} (\chi_0^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} + \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon}) \\ \bar{\beta} &= \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{D}_{h\varepsilon}^T \chi_\theta + \chi_0^T \mathbf{D}_{h\theta}) + \mathbf{D}_{\varepsilon\theta} \right] \quad \bar{c}_v = \frac{1}{\Omega} (\chi_\theta^T \mathbf{D}_{h\theta} T_0 + \mathbf{D}_{\theta\theta}) \end{aligned} \quad (6.21)$$

ove \mathbf{C}^* è la matrice effettiva dei coefficienti elastici del materiale equivalente di dimensioni 6×6 , $\bar{\beta}$ contiene i coefficienti effettivi delle tensioni termiche di dimensioni 6×1 , \bar{c}_v rappresenta l'effettivo calore specifico e $\bar{\varepsilon}$ rappresenta il vettore delle deformazioni globali. Inoltre, $\mathbf{D}_{h\varepsilon}$, $\mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon}$, $\mathbf{D}_{h\theta}$, $\mathbf{D}_{\varepsilon\theta}$ e $\mathbf{D}_{\theta\theta}$ rappresentano le matrici assemblate dei nuclei fondamentali del problema.

A questo punto, chiaramente, il coefficiente di espansione termica effettivo può essere ottenuto attraverso l'espressione:

$$\bar{\alpha} = -\mathbf{C}^{*-1} \bar{\beta} \quad (6.22)$$

Il campo locale di deformazione si può calcolare reintroducendo le soluzioni di fluttuazione 6.19 nelle definizioni geometriche e costitutive:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \mathbf{D}(F_\tau N_i \chi) \quad (6.23)$$

Successivamente, le tensioni locali si ricavano ricorrendo alla legge di Hooke 6.12.

Negli esempi che seguono verrà applicato il metodo presentato a dei compositi rinforzati con fibre e particelle. Il modello è stato implementato in un codice di calcolo che consente di risolvere il problema micromeccanico attraverso due fasi di calcolo:

1. *Omogeneizzazione*: vengono ricavate le proprietà effettive del RUC a partire dalle proprietà dei singoli costituenti del composito, procedimento rappresentato in Figura 5.2;
2. *Deomogeneizzazione*: conoscendo le proprietà del materiale omogeneizzato e il carico termo-elastico applicato a livello macroscopico sulla struttura, è possibile ricavare il campo di deformazione e tensione che si registra sul RUC localmente, ovvero come si comportano la matrice e la fibra a livello locale.

Model	DOF	$\alpha_{11} \cdot 10^6$ [K ⁻¹]	$\alpha_{22} \cdot 10^6$ [K ⁻¹]
Reference solutions			
Rosen and Hashin [34]	-	10.99	16.69
VAMUCH [45]	-	10.99	16.69
Voigt [37]	-	12.09	12.09
Reuss [33]	-	16.00	16.00
MOC [2]	-	10.85	16.89
GMC [31]	-	10.85	16.88
HFGMC [4]	-	10.91	16.34
Tamma and Avila [36]	-	10.77	17.34
CUF-MSG			
HLE 2	240	11.06	16.48
HLE 4	582	11.02	16.59
HLE 6	1140	11.02	16.60
HLE 8	1914	11.02	16.61

Tabella 6.1: Effettivi coefficienti di espansione termica del composito B/Al square-pack forniti dai risultati presenti in letteratura e confrontati con il presente approccio, considerando differenti ordini di espansione HLE, con un volume di fibra pari a 0.47.

6.3 Risultati numerici

Di seguito verranno mostrati i risultati numerici selezionati per validare l'approccio presentato per il calcolo delle caratteristiche termo-elastiche effettive di materiali compositi e dimostrare le capacità di calcolo permesse dall'impiego delle HLE per un'accurata analisi del RUC. Per prima cosa verranno presentate le analisi relative al calcolo dei coefficienti di espansione termica e del calore specifico di materiali compositi rinforzati con fibre particelle, tali risultati verranno poi confrontati con quelli presenti in letteratura. Successivamente la validità del presente approccio CUF-MSG verrà validata attraverso un secondo step di recupero delle proprietà locali sul RUC e confrontato con quanto è possibile ottenere dai software esistenti. L'analisi di deomogeneizzazione è stata validata confrontando i risultati con quelli ottenuti da *SwiftComp*TM [44]. Per semplicità tutte le analisi vengono svolte impostando la T_0 a 300 K.

6.3.1 Compositi rinforzati con fibre

Per il primo esempio riportato è stato utilizzato un composito con fibra in boro e matrice in alluminio, la cui notazione sarà da ora in poi B/Al, arrangiato in una microstruttura a geometria square-pack, illustrata nel precedente capitolo in Figura 5.5. Entrambi i costituenti sono considerati isotropi, con $E = 379.3$ GPa, $\nu = 0.10$ e $\alpha = 8.1 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹ per le fibre in boro, mentre $E = 68.3$ GPa, $\nu = 0.30$ e $\alpha = 23 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹ per la matrice in alluminio [45].

In tabella 6.1 si propongono i risultati ottenuti per differenti ordini di HLE e confrontati con i risultati presenti in letteratura, per un volume di fibre pari a $V_f = 0.47$. I risultati ottenuti si dimostrano essere in buon accordo con gli altri metodi presi in considerazione. Inoltre, nei grafici 6.1 e 6.2 sono riportati i valori longitudinali e trasversali del coefficiente di espansione termica (CTE) ottenuti attraverso la presente teoria con le HLE di ottavo ordine e al variare della V_f . Ancora una volta si può osservare un ottimo accordo tra i

risultati ottenuti con CUF-MSG e i risultati dalla letteratura, anche se osservando le soluzioni Voigt e Reuss poco raffinate, si osserva una grande differenza nel risultato. Questo è dovuto al fatto che questi metodi non stabiliscono alcuna differenza tra il CTE longitudinale e trasversale, infatti il metodo Voigt risulta essere più in accordo con il valore di α longitudinale, mentre il metodo Reuss con quello trasversale, arrivando ad un ottimo accordo per valori di V_f elevati.

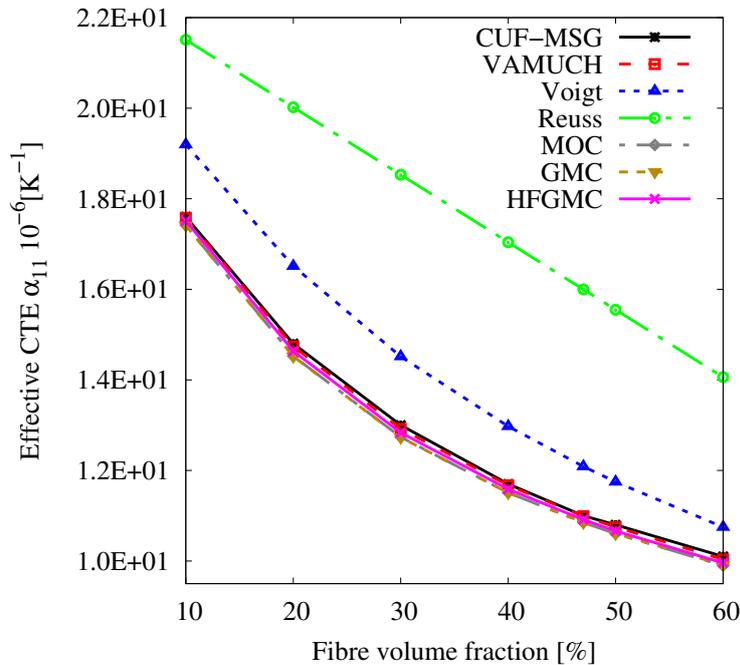


Figura 6.1: α_{11} materiale composito B/Al per differenti V_f e con HL8.

Il secondo esempio riportato mostra il calcolo dell'effettivo calore specifico c_v di un composito anisotropo in fibra di carburo di silicio e matrice in rame, al quale ci si riferisce da ora come SiC/Cu. Si considerano i due costituenti isotropi con $E = 410$ GPa, $\nu = 0.14$, $\alpha = 4.0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ e $c_v = 2327.73 \text{ kJ}/(\text{m}^3\text{K})$ per la fibra in SiC e $E = 117$ GPa, $\nu = 0.34$, $\alpha = 22.0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ e $c_v = 3485.09 \text{ kJ}/(\text{m}^3\text{K})$ per la matrice in Cu [45]. La variazione del calore specifico per il composito rinforzato con fibre SiC è mostrato in Figura 6.3.

Anche in questo caso si registra un buon accordo tra le soluzioni proposte da Rosen and Hashin [34], VAMUCH [45] e CUF-MSG. In particolare si nota che le soluzioni Rosen and Hashin tendono leggermente a divergere dalla presente all'aumentare della V_f , mentre si registra un perfetto accordo rispetto al VAMUCH.

6.3.2 Compositi rinforzati con particelle

In questa sezione verranno condotte delle analisi per mostrare l'influenza che la geometria delle particelle rinforzanti ha sulle proprietà termo-elastiche di un materiale composito eterogeneo. Verranno considerate due geometrie di particelle: cilindrica 5.9 e rettangolare 5.8. Le differenti fasi sono state modellate attraverso l'approccio CW con l'uso della formulazione CUF.

Si procede con il primo esempio di analisi di un composito in fibre di vetro e matrice in epoxy, indicato con glass/epoxy. Entrambi i costituenti sono stati considerati isotropi con fibre di vetro $E = 72.38$ GPa, $\nu = 0.20$ e $\alpha = 5.0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, e matrice epoxy $E = 2.75$

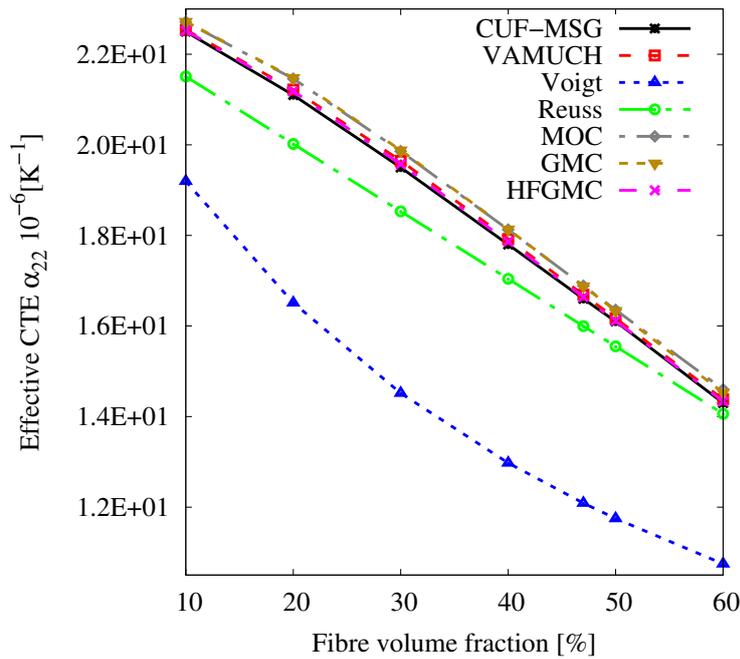


Figura 6.2: α_{22} materiale composito B/Al per differenti V_f e con HL8.

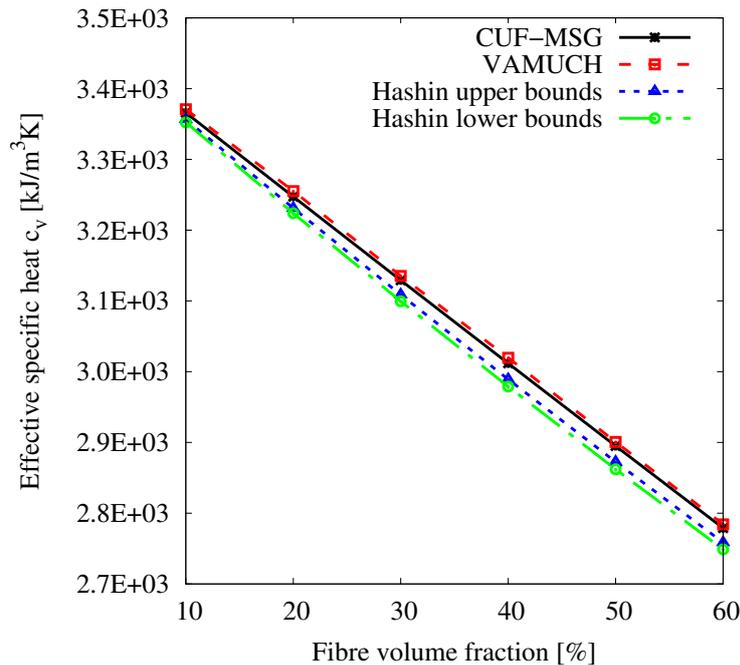


Figura 6.3: c_v del SiC/Cu per differenti V_f e con ottavo ordine di espansione HLE.

GPa, $\nu = 0.35$ e $\alpha = 54.0 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$ [45]. Gli esiti delle analisi per entrambi i tipi di inclusioni sono stati confrontati con il metodo Mori-Tanaka (MT), implementato in un codice MATLAB disponibile in [3]. Questo metodo è largamente utilizzato per il calcolo delle proprietà termo-elastiche di compositi rinforzati con particelle indipendentemente dalla forma di queste ultime.

Per le inclusioni cilindriche è stato imposto che per ogni V_f considerata il diametro del

cilindro fosse pari alla sua altezza, mentre per quelle a geometria rettangolare sono state imposte le tre dimensioni uguali, così da rendere l'inclusione cubica. I dati ottenuti per modellare le inclusioni sono riportate in tabella 6.2, in cui si nota che per le inclusioni cilindriche si è calcolato il valore del raggio e dell'altezza del cilindro, mentre per quelle dell'inclusione rettangolare semplicemente il lato del cubo.

Inclusion	$V_f =$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
Cubiche (d [m])		0.46	0.53	0.58	0.63	0.67	0.70	0.74
Cilindriche (r [m], len [m])		0.25, 0.50	0.29, 0.58	0.32, 0.63	0.34, 0.68	0.36, 0.73	0.38, 0.76	0.40, 0.80

Tabella 6.2: Valori di lunghezza del lato dell'inclusione cubica, raggio e lunghezza del cilindro per le inclusioni cilindriche in relazione alla V_f considerata.

I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 6.4. Risulta evidente che per basse V_f la differenza tra le inclusioni cilindriche e le inclusioni rettangolari risulta trascurabile, mentre andando verso alte V_f si registrano discrepanze più importanti. Inoltre, si osserva che per entrambe le geometrie, i valori di coefficiente di espansione termica calcolati con il metodo MT risultano sovrastimati.

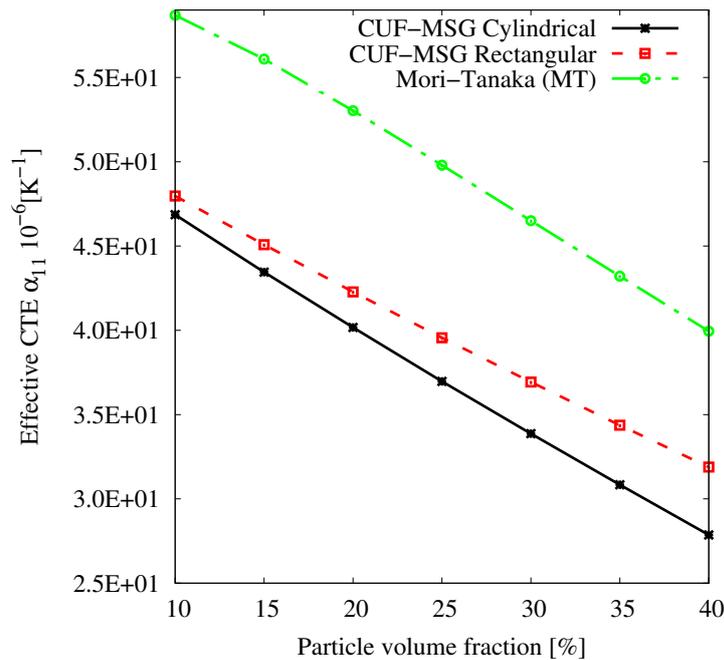


Figura 6.4: α_{11} materiale composito glass/epoxy con inclusioni particellari al variare della V_f con ottavo ordine di espansione HLE.

Si riporta ora in tabella 6.3 i risultati dell'omogeneizzazione delle proprietà termo-elastiche del composito glass/epoxy ottenute tramite il software *SwiftComp*TM in [44] e modellate come inclusioni sferiche, per $V_f = 0.3$. Dal valore ottenuto con il metodo VAMUCH, è possibile dedurre che per il CTE longitudinale il valore per una particella sferica risulta compreso tra i due cilindrico e cubico, mentre per il CTE trasversale il valore risulta essere inferiore ad entrambi.

Model		$\alpha_{11} \cdot 10^6$ [K ⁻¹]	$\alpha_{22} \cdot 10^6$ [K ⁻¹]
VAMUCH spherical [44]		35.50	34.97
Mori-Tanaka (MT) [28]		46.50	9.31
CUF-MSG Cylindrical	HLE 3	33.79	38.73
	HLE 6	33.86	38.78
	HLE 8	33.87	38.78
CUF-MSG Rectangular	HLE 3	36.85	36.80
	HLE 6	36.93	36.89
	HLE 8	36.93	36.90

Tabella 6.3: Effettivi coefficienti di espansione termica del composito glass/epoxy rinforzato con particelle, considerando ottavo ordine di espansione HLE, con un volume di particelle pari a 0.3.

Per il calcolo del c_v effettivo è stato utilizzato un composito in matrice di alluminio e rinforzo in particelle di acciaio, indicato con steel/Al. Entrambi i costituenti sono stati considerati isotropi, con $E = 200$ GPa, $\nu = 0.30$, $\alpha = 12.0 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹ e $c_v = 3609.6$ kJ/(m³K) per le particelle in acciaio e $E = 68.3$ GPa, $\nu = 0.30$, $\alpha = 23.0 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹ e $c_v = 2619.1$ kJ/(m³K) per la matrice in alluminio [45]. Gli effettivi valori di c_v calcolati per differenti V_f sono riportati in Figura 6.5. Si nota subito che non si presenta alcuna differenza tra i valori riferiti alle due geometrie calcolate con il presente metodo CUF-MSG e la geometria sferica calcolata con il metodo VAMUCH. Questo ci porta a capire che per il caso del calore specifico, la caratteristica che influenza il risultato dell'analisi non è la geometria dell'inclusione, ma il volume con cui essa è presente nella matrice, al contrario del caso precedente relativo al calcolo del CTE. Infine, si nota che la differenza tra il presente approccio e il metodo analitico Rosen and Hashin [34] mostra un accordo che tende a convergere leggermente per valori di V_f più bassi e al contrario i risultati si allontanano aumentando il volume di particelle.

6.3.3 Calcolo delle tensioni locali

Di seguito verrà eseguita una più complessa analisi in grado di ricavare in modo accurato le tensioni locali caratteristiche sul volume del RUC. Gli ultimi esempi numerici svolti ci permettono di ottenere la tensione locale che si registra tra matrice e fibra nel RUC, generata dall'applicazione di una deformazione elastica di valore unitario e un carico termico. Per il primo esempio si utilizza un composito B/Al square-pack, confrontato con lo stesso modello *SwiftComp*TM [44], sotto le stesse condizioni di carico. Il volume delle fibre è stato impostato al valore $V_f = 0.2$. Viene eseguita l'analisi sotto due condizioni di carico: la prima con un aumento di temperatura pari a 100 K e senza deformazioni elastiche applicate, la seconda con lo stesso aumento di temperatura e con una deformazione applicata lungo l'asse della fibra pari a $\varepsilon_{11} = 1$. I risultati ottenuti sono mostrati in 6.6, per il primo caso con carico termico applicato, il secondo caso con carico termico ed elastico è riportato in appendice C.1 in Figura C.1. Le figure posizionate nel lato sinistro si riferiscono ai risultati ottenuti con *SwiftComp*TM [44], mentre nel lato destro quelle ottenute dal metodo CUF-MSG.

A causa della discrepanza presente tra i coefficienti di espansione termica dei due costituenti, si presenta una differente distribuzione di tensioni termiche. Si osserva che la componente di tensione σ_{22} presenta un carattere compressivo, mentre nella componente σ_{23} si può osservare un comportamento antisimmetrico della tensione. Inoltre, si può no-

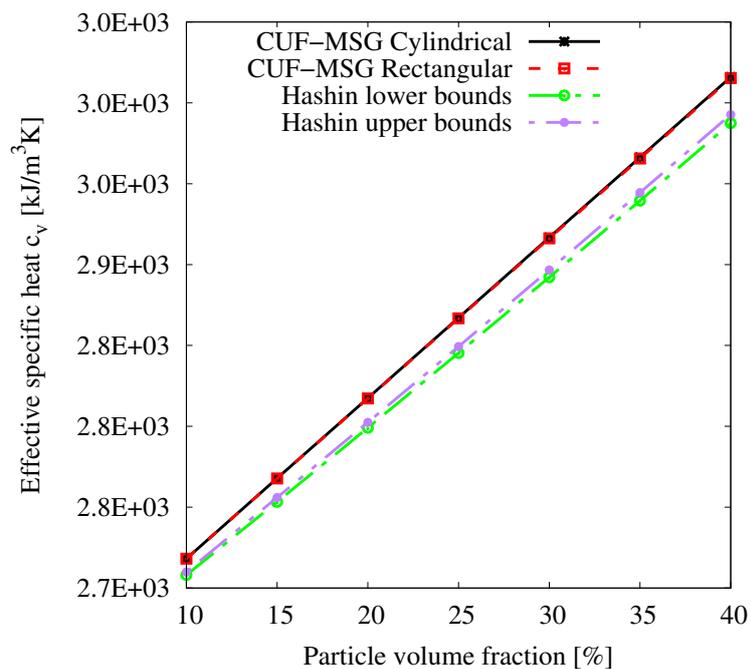


Figura 6.5: c_v materiale composito steel/Al per differenti volumi di particelle V_f .

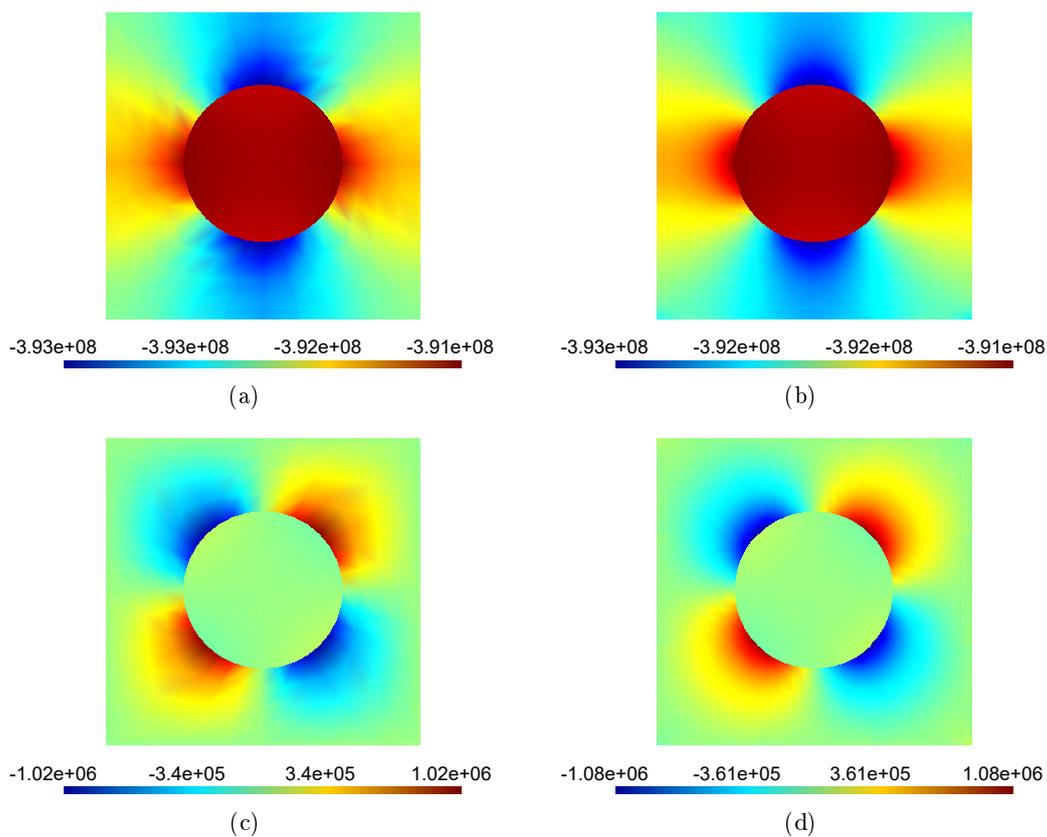


Figura 6.6: Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG, (c) σ_{23} Swift-Comp (d) σ_{23} CUF-MSG.

tare che è presente un ottimo accordo tra i risultati ottenuti, infatti, si registra solo una differenza di 0.06 MPa osservando la tensione σ_{23} in Figura 6.6.

Quando si applica anche una componente di deformazione unitaria, si aggiungono gli effetti generati a causa delle diverse caratteristiche elastiche possedute dai due componenti. Come previsto, si registrano delle tensioni più elevate sul RUC, visualizzabili in Figura C.1 nell'appendice C.1. In questo caso la tensione σ_{22} presenta un carattere a trazione a causa del modo in cui è stata applicata la deformazione lungo l'asse della fibra. Alle fibre corrisponde il più alto valore di tensione registrato nel RUC, come ci si poteva aspettare. Mentre, per quanto riguarda la componente σ_{23} , si osserva una distribuzione simile al primo caso ma con valori numerici più elevati. Anche qui è comunque presente un ottimo accordo delle due tecniche, dovuto al fatto che entrambe risultano basate sul metodo MSG. Come ultimo esempio si mostra il recupero delle tensioni locali di un composito glass/epoxy con una microstruttura hexagonal-pack.

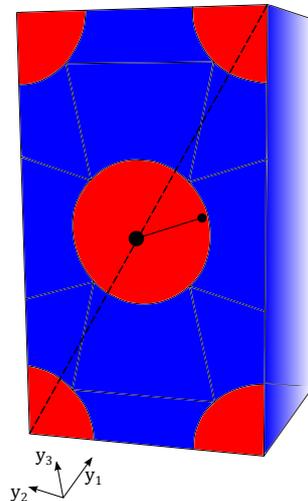


Figura 6.7: Modello HLE per RUC hexa-pack.

Le proprietà del composito glass/epoxy sono le stesse fornite negli esempi precedenti, con un volume di fibre pari a $V_f = 0.3$. La sezione trasversale è costituita da quindici sottodomini di espansione HLE, cinque per le fibre e i restanti dieci per la matrice. Si utilizzano funzioni di espansione HLE di ottavo ordine, che rappresentano il più alto grado di polinomi implementati nel codice CUF-MSG. Come per il caso precedente, si è prima introdotto un carico termico pari a 100 K lungo la fibra e nessuna deformazione assiale e successivamente, si è aggiunta anche una deformazione unitaria in direzione della fibra. I risultati dell'analisi sono riportati in Figura 6.8 e 6.9 per il primo caso e C.2 e C.3 per il secondo caso. Le immagini posizionate a sinistra si riferiscono ai risultati del metodo *SwiftComp*TM [44], mentre nella parte destra sono presenti i risultati CUF-MSG.

Osservando i risultati ottenuti si nota che per il primo caso la σ_{22} presenta un carattere a compressione. L'immagine 6.8 presenta una distribuzione di tensione in quasi perfetto accordo, ad esclusione dei quattro estremi del RUC che raggiungono un valore di compressione leggermente più alto, facendo cambiare il colore della visualizzazione, ma comunque mostrando chiaramente la perfetta corrispondenza di valore di tensione della fibra in entrambi i casi pari a $-5.01 \cdot 10^7$. Per la componente a taglio della tensione rappresentata in Figura 6.9, si nota una distribuzione antisimmetrica rispetto al piano y_1 - y_2 . Nel secondo

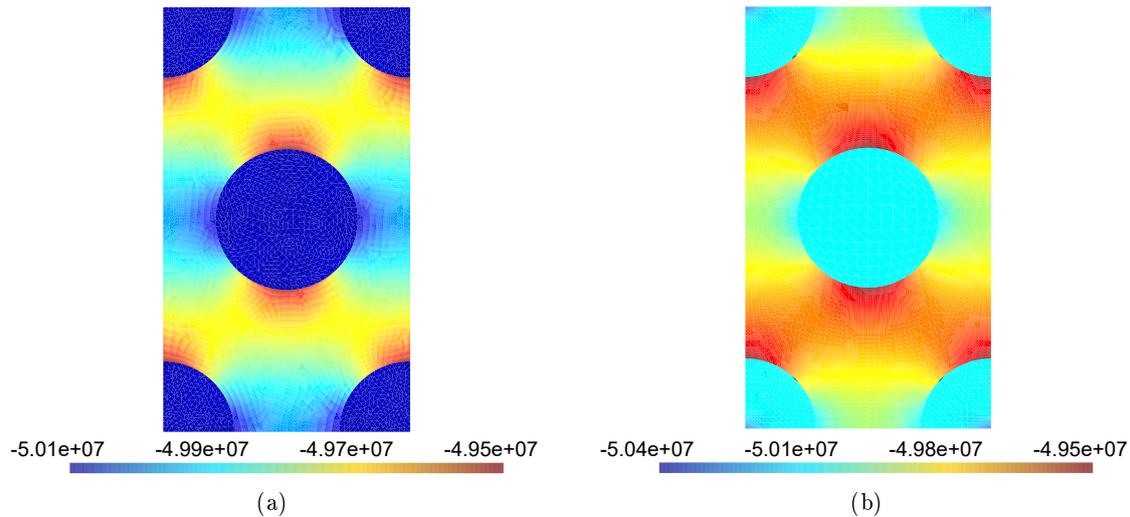


Figura 6.8: Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.

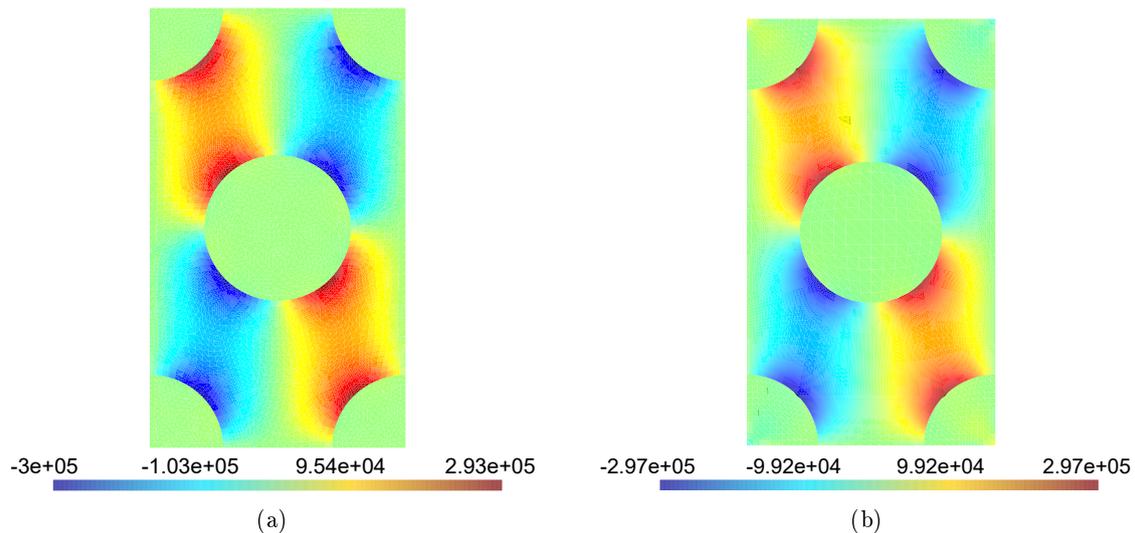
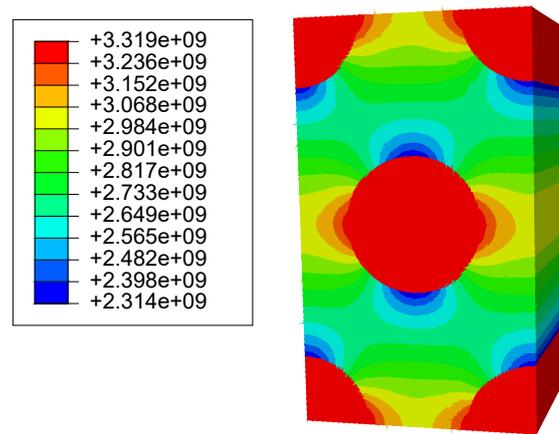


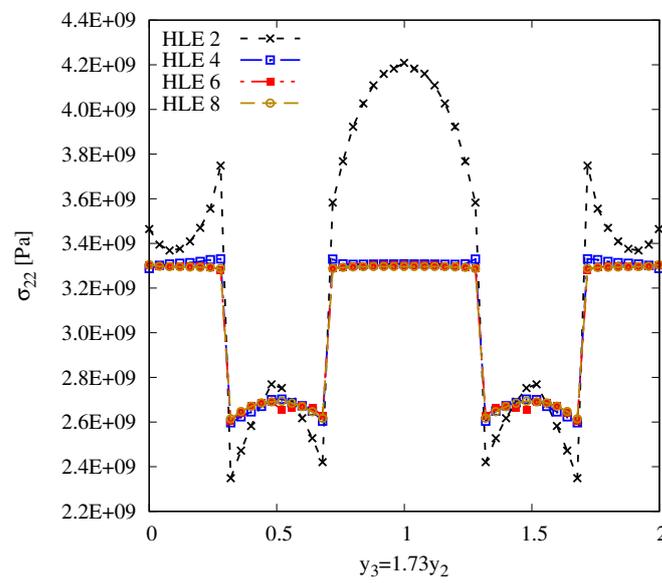
Figura 6.9: Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K (a) σ_{23} Swift-Comp (b) σ_{23} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.

caso in cui si è inserita anche la deformazione ε_{11} lungo l'asse della fibra, si registrano dei valori di tensione più elevati del caso precedente, dell'ordine 10^3 MPa. In Figura C.2 si nota come la tensione in questo caso ha un comportamento a trazione, con picchi in corrispondenza della fibra. Mentre, in Figura C.3, si osserva l'andamento antisimmetrico della tensione a taglio, con valori che presentano un elevato accordo tra i due metodi. In tutti i casi l'accordo tra i risultati risulta estremamente elevato e non si registrano differenze degne di nota.

In Figura 6.10 (b) e 6.11 (b) è diagrammato l'andamento delle tensioni lungo la diagonale, come mostrato in Figura 6.7. Questa visualizzazione degli stress di tensione e compressione rispettivamente prodotti da fibra e matrice consente di visualizzare nel dettaglio l'elevato gradiente presente tra matrice e fibra. Questa differenza è accuratamente catturata grazie all'impiego delle funzioni di espansione HLE. Il secondo caso di deomogeneizzazione del



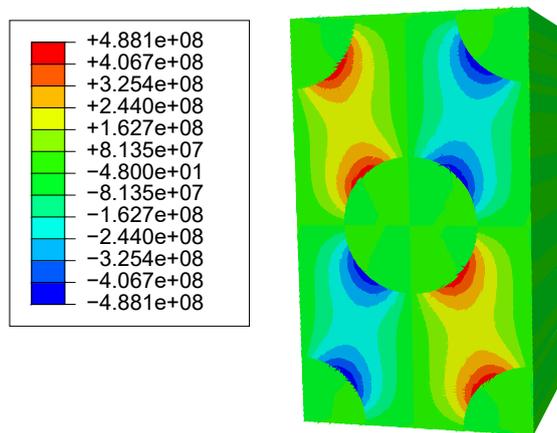
(a)



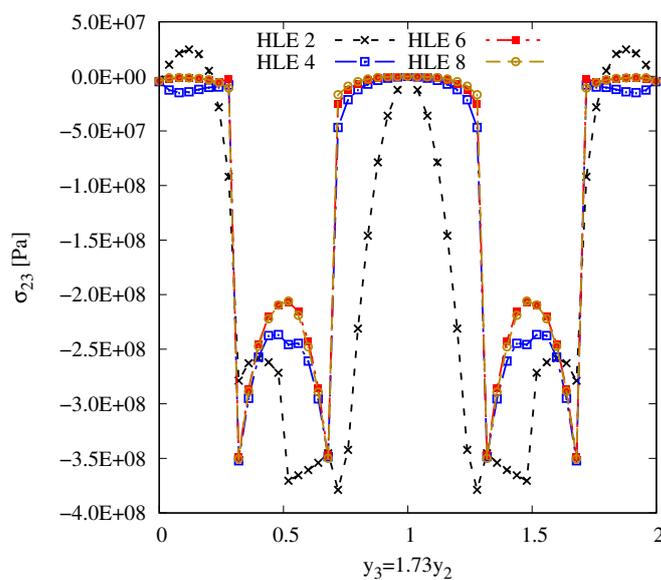
(b)

Figura 6.10: σ_{22} risultante dall'introduzione di $\Delta T = 100$ K e una deformazione unitaria ε_{11} del composito glass/epoxy hexa-pack, diagrammata lungo la diagonale del RUC.

composito glass/epoxy è visualizzabile in appendice C.2.



(a)



(b)

Figura 6.11: σ_{23} risultante dall'introduzione di $\Delta T = 100$ K e una deformazione unitaria ε_{11} del composito glass/epoxy hexa-pack, diagrammata lungo la diagonale del RUC.

Capitolo 7

Analisi micromeccanica delle caratteristiche igro-termiche

Nel seguente capitolo si introduce il calcolo delle caratteristiche effettive di conducibilità termica e delle proprietà igroscopiche per materiali compositi attraverso la precedentemente introdotta analisi micromeccanica basata sul metodo CUF-MSG.

I casi di conducibilità termica e caratteristiche igroscopiche possono essere assimilati alla stessa formulazione grazie al fatto che le dimensioni delle matrici fondamentali del problema sono le identiche e all'esistenza di una similitudine tra la legge di Fourier e la legge di Fick. Per entrambi i casi si effettuerà una distinzione riguardante le notazioni utilizzate nello specifico caso affrontato. L'obiettivo di questo capitolo è mostrare l'utilizzo della formulazione unificata per modellare il problema micromeccanico per il recupero delle proprietà di conducibilità termica e igrotermiche.

7.1 Conducibilità termica

Di seguito si mostra il metodo basato sulla formulazione unificata per risolvere il problema MSG in grado di predire le caratteristiche effettive di conducibilità termica e recupero del flusso di calore locale di un materiale composito eterogeneo. Come abbiamo visto, il successo nella progettazione dei materiali compositi, dipende dallo sviluppo di sempre più accurate tecniche di analisi che ci permettono di predirne le proprietà effettive. Molti materiali compositi sono impiegati in applicazioni in cui la temperatura rappresenta un fattore critico, che se trascurato porta a conseguenze anche disastrose. Per questo motivo, la possibilità di predire caratteristiche come la conducibilità termica, diventano rilevante per questo tipo di applicazioni.

L'effettiva conducibilità termica di un materiale composito è fortemente influenzata da numerosi parametri come: le sue proprietà, il volume di fibre, la distribuzione e l'orientazione dei costituenti. Esistono numerosi modelli analitici in grado di predire le caratteristiche di conducibilità termica. Tra i modelli utilizzati per validare il presente metodo troviamo alcuni che fruttano delle semplici regole di miscela, come il metodo sviluppato da Z. Hashin [21] e Springer-Tsai [19]. Quanto introdotto per il problema termo-elastico viene adattato al caso della conducibilità termica, in cui cambiano le matrici che costituiscono il problema del nucleo fondamentale e le loro dimensioni.

7.1.1 Variational asymptotic method per la conducibilità termica

Possiamo riscrivere l'ipotesi iniziale (5.1) come:

$$\frac{1}{V} \int_V \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV = \bar{\phi}(\mathbf{x}) \quad (7.1)$$

In cui $\bar{\phi}$ rappresenta il campo di temperatura globale nella sola coordinata globale. Si applicano le condizioni al contorno sul RUC per assicurare la continuità del campo di temperatura tra le interfacce adiacenti allo stesso modo di (5.2):

$$\begin{aligned} \phi\left(x_1, x_2, x_3; \frac{d_1}{2}, y_2, y_3\right) &= \phi\left(x_1 + d_1, x_2, x_3; -\frac{d_1}{2}, y_2, y_3\right) \\ \phi\left(x_1, x_2, x_3; y_1, \frac{d_2}{2}, y_3\right) &= \phi\left(x_1, x_2 + d_2, x_3; y_1, -\frac{d_2}{2}, y_3\right) \\ \phi\left(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, \frac{d_3}{2}\right) &= \phi\left(x_1, x_2, x_3 + d_3; y_1, y_2, -\frac{d_3}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Nell'ambito della micromeccanica termica si può scrivere il campo di temperatura in funzione della coordinata globale e locale come somma del campo di temperatura del materiale omogeneizzato e un contributo che rappresenta la differenza tra i due termini:

$$\phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \bar{\phi}(\mathbf{x}) + \delta\chi(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \quad (7.3)$$

in cui χ rappresenta le funzioni di fluttuazione scalate con δ , che si ricorda essere il parametro di scala che caratterizza le dimensioni del RUC. Derivando il campo della temperatura nelle due coordinate $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, si otterrà una derivata del tipo 6.4, il gradiente del campo di temperatura diventerà:

$$\phi_{,i}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \bar{\phi}_{,i}(\mathbf{x}) + \chi_{,i}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \quad (7.4)$$

con

$$\bar{\phi}_{,i}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial y_i} \quad \chi_{,i}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial y_i} \quad (7.5)$$

Si ricorda che nel modello MSG, la soluzione del problema stazionario si ottiene minimizzando la differenza tra le energie del materiale nella forma eterogenea e quella del rispettivo materiale omogeneo. Allora, l'energia del materiale, se si considera il termine omogeneizzato invariante, risulta essere solo quella relativa al materiale eterogeneo:

$$\Pi_1 = \left\langle \frac{1}{2} K_{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} \right\rangle \quad (7.6)$$

in cui K_{ij} è il tensore del secondo ordine che contiene le componenti di conducibilità termica del materiale eterogeneo e ϕ , rappresenta il gradiente del campo di temperatura. Sostituendo quanto ottenuto nella (7.4), posso riscrivere l'energia del materiale nella forma:

$$\Pi_1 = \left\langle \frac{1}{2} K_{ij} (\bar{\phi}_{,i} + \chi_{,i}) (\bar{\phi}_{,j} + \chi_{,j}) \right\rangle \quad (7.7)$$

Il seguente metodo, permette di risolvere il problema della conducibilità termica effettiva di un materiale in modo efficiente attraverso l'impiego di un modello risolutivo raffinato basato su funzioni di ordine elevato.

7.1.2 Implementazione FEM

Per risolvere il problema si introduce ancora una volta il metodo FEM. La direzione della fibra viene modellata attraverso elementi trave e viene interpolata tramite l'uso di funzioni di forma LE nella coordinata caratteristica y_1 :

$$\chi_\tau(\mathbf{x}; y_1) = N_i(y_1)\chi_{\tau i}(\mathbf{x}) \quad \tau = 1, 2, \dots, n \quad (7.8)$$

in cui $\chi_{\tau i}$ è il vettore delle incognite nodali, mentre n il numero delle nodi del modello trave considerato. A questo punto è possibile introdurre il vettore gradiente del campo di temperatura globale come:

$$\bar{\Phi},^T = \{\bar{\phi}_{,1} \quad \bar{\phi}_{,2} \quad \bar{\phi}_{,3}\} \quad (7.9)$$

Le relazioni geometriche si possono esprimere come:

$$\Phi, = \bar{\Phi}, + D\chi \quad (7.10)$$

con D operatore differenziale di dimensioni 3×1 :

$$D = \begin{Bmatrix} \partial y_1 \\ \partial y_2 \\ \partial y_3 \end{Bmatrix} \quad \partial y_i = \partial(\cdot)/\partial y_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.11)$$

In questo modo la (7.7) si può riscrivere come:

$$\Pi_1^* = \frac{1}{2} \int_V (\bar{\Phi}, + D\chi)^T \mathbf{K} (\bar{\Phi}, + D\chi) dV \quad (7.12)$$

La matrice di conducibilità termica K nel caso generale di materiale anisotropo può essere definita come:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Sostituendo quanto mostrato nella (7.12) e ricordando che $\chi = F_\tau N_i \chi_{\tau i}$ come visto nella (5.3), si ottiene:

$$\Pi_1^* = \frac{1}{2} (\chi_{s_j}^T F^{\tau s i j} \chi_{\tau i} + 2\chi_{s_j}^T \mathbf{K}_{h\Phi}^{s j} \bar{\Phi}, + \bar{\Phi},^T \mathbf{K}_{\Phi\Phi} \bar{\Phi},) \quad (7.14)$$

in cui:

$$F^{\tau s i j} = \int_\Omega \int_l (\mathbf{D}(F_s N_j))^T \mathbf{K} \mathbf{D}(F_\tau N_i) d\Omega dy_1 \quad (7.15)$$

$$\mathbf{K}_{h\Phi}^{\tau i} = \int_\Omega \int_l (\mathbf{D}(F_s N_j))^T \mathbf{K} d\Omega dy_1 \quad \mathbf{K}_{\Phi\Phi} = \int_\Omega \int_l \mathbf{K} d\Omega dy_1 \quad (7.16)$$

dove $F^{\tau s i j}$ di dimensioni 1×1 è tensore del quarto ordine, $\mathbf{K}_{h\Phi}^{\tau i}$ di dimensioni 1×3 è tensore del secondo ordine e sono entrambi nuclei fondamentali del problema RUC per le caratteristiche di conducibilità termica. Essi contengono le informazioni basilari alla base del modello MSG. In aggiunta $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}$ matrice di dimensioni 3×3 . Con gli indici τ ed s si intende il ciclo fatto sulle funzioni di espansione HLE relative alla sezione trasversale, mentre i e j al ciclo delle funzioni di forma LE del modello trave lungo l'asse caratteristico della fibra. Come già detto, si può generare qualsiasi ordine di discretizzazione del modello trave e della sezione trasversale, espandendo opportunamente i nuclei fondamentali in τ ,

s, i e j .

Applicando l'approccio all'energia (7.14) si ricava la soluzione che minimizza il funzionale:

$$F^{\tau sij} \chi_{\tau i} = -\mathbf{K}_{h\Phi}^{sj} \bar{\Phi}, \quad (7.17)$$

La linearità del problema impone che $\chi_{\tau i}(\mathbf{x}) = \chi_{\tau i 0} \bar{\Phi}(\mathbf{x})$ con $\chi_{\tau i 0}$ di dimensioni 1×3 , contenente le soluzioni di fluttuazione:

$$\mathbf{F}^{\tau sij} \chi_{\tau i 0} = -\mathbf{K}_{h\Phi}^{sj} \quad (7.18)$$

Risolvendo il sistema lineare in (7.18) si trovano le proprietà effettive di conducibilità termica del corrispondente materiale composito omogeneizzato, considerando che passando dal materiale eterogeneo al materiale omogeneo, l'energia rimanga invariata.

Andando a sostituire il sistema lineare (7.17) all'interno dell'equazione dell'energia in (7.14), attraverso l'equivalenza dell'energia è possibile ottenere l'effettiva matrice di conducibilità termica:

$$\mathbf{K}^* = \frac{1}{V} (\chi_{\tau i}^T \mathbf{K}_{h\Phi}^{sj} + \mathbf{K}_{\Phi\Phi}) \quad (7.19)$$

con \mathbf{K}^* di dimensioni 3×3 . A questo punto il gradiente del campo locale di temperatura può essere ricavato semplicemente introducendo l'espressione delle soluzioni di fluttuazione χ_{τ} nelle relazioni geometriche e costitutive in (7.10), ottenendo:

$$\Phi, = \bar{\Phi}, + \mathbf{D}(F_{\tau} N_i \chi) \quad (7.20)$$

Infine, è possibile ricavare il flusso di calore attraverso la legge di Fourier:

$$\mathbf{q}_i = -\mathbf{K}_{ij} \phi_{,j} \quad (7.21)$$

l'unità di misura del flusso di calore è $[\text{W}/(\text{m}^2)]$, quella della conducibilità termica è $[\text{W}/(\text{mK})]$ e quella del gradiente di temperatura è $[\text{K}/\text{m}]$.

La formulazione mostrata è stata implementata nel codice di calcolo delle caratteristiche micromeccaniche basato sul metodo CUF-MSG.

7.1.3 Risultati numerici

Il metodo CUF-MSG basato sulle capacità delle funzioni di espansione HLE unidimensionali viene validato attraverso alcuni esempi numerici, confrontati principalmente con i risultati presenti in letteratura svolti con il metodo VAMUCH presente nell'articolo [38] e nel plug-in *SwiftComp*TM in [44] oltre ai metodi analitici già menzionati Springer [19] e Hashin [21].

Prima verrà mostrata l'applicazione del metodo su un composito rinforzato con fibra lunga unidirezionale e successivamente il caso di un composito rinforzato con particelle sia cilindriche che cubiche. Infine, verrà mostrato un esempio di recupero del flusso di temperatura locale utilizzando un composito rinforzato con fibra.

Compositi rinforzati con fibre

Per il primo esempio considerato è un composito in fibre di carbonio e matrice in alluminio C/Al. Entrambi i costituenti del materiale sono considerati isotropi, con $K = 129 \text{ W}/(\text{mK})$ per le fibre di carbonio e $K = 237 \text{ W}/(\text{mK})$ per la matrice in alluminio [38]. La microstruttura utilizzata per il seguente caso è di tipo square-pack con funzioni di espansione di ottavo ordine. Viene ripetuta l'analisi variando il valore del volume di fibra V_f per

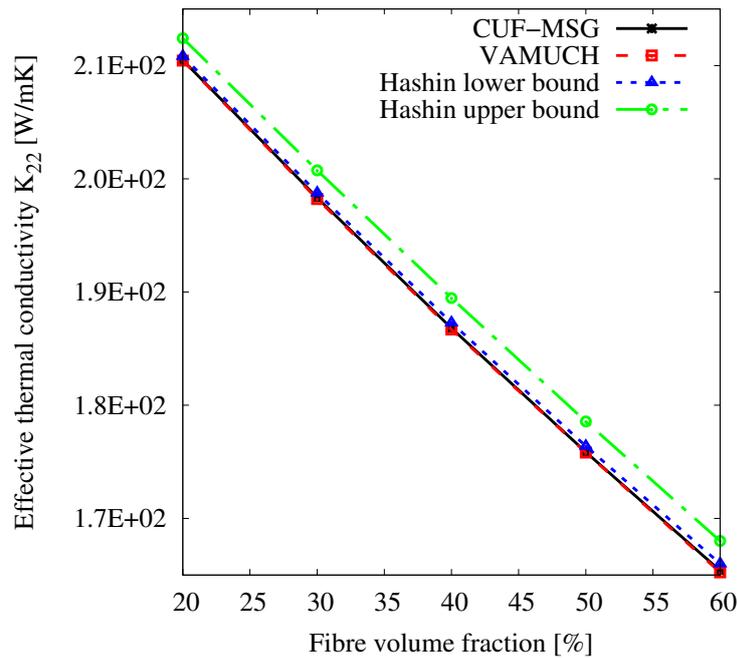


Figura 7.1: Risultati analisi conducibilità termica C/Al square-pack per diverse V_f con HLE di ordine 8, confrontati con il metodo VAMUCH [38] e Hashin [21].

mostrare come questo dato sia estremamente influente nel risultato dell'analisi. In generale le effettive proprietà di conducibilità termica lungo la fibra obbediscono alla regola della miscela, la quale viene considerata come soluzione esatta per la conducibilità termica longitudinale di compositi rinforzati a fibra lunga e con costituenti a caratteristiche isotrope. Per le caratteristiche di conducibilità termica trasversali, che generalmente non rispettano la regola della miscela, quanto ottenuto con il presente metodo è stato confrontato con i risultati Hashin per lower e upper bond [21] e anche con quanto presente in letteratura ottenuto dal metodo VAMUCH [38].

Dal grafico 7.1 è possibile osservare che i risultati CUF-MSG sono in buon accordo sia con il metodo VAMUCH che con la soluzione esatta di Hashin lower bound, mentre la soluzione individuata dal metodo Hashin upper bound risulta essere sovrastimata rispetto agli altri. Si riportano in tabella 7.1 le differenze percentuali che si registrano tra il metodo VAMUCH e il metodo CUF-MSG prendendo come riferimento la soluzione esatta fornita dal metodo Hashin. I valori ottenuti confermano l'accuratezza del metodo CUF-MSG e del metodo

Model	$V_f =$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.6
	Differenza(%)					
Hashin - VAMUCH		0,93	1,27	1,47	1,53	1,65
Hashin - CUF-MSG		0,91	1,21	1,40	1,51	1,57

Tabella 7.1: Differenza percentuale dei risultati ottenuti con i metodi CUF-MSG e VAMUCH rispetto ai valori di soluzione esatta di Hashin lower bound per diversi valori di V_f .

VAMUCH, infatti non superano mai il 2% di differenza rispetto alla soluzione esatta. Si noti come le due soluzioni divergono da quella esatta all'aumentare della V_f del materiale. Come secondo esempio si utilizza un composito rinforzato con fibra di vetro e matrice polimerica, da ora indicato come glass/polypropylene. Il volume di fibre preso in conside-

razione è pari a 0.2. Il valore della conducibilità termica per la fibra di vetro è $K = 1.05$ W/(mK), mentre per la matrice in polipropilene si ha $K = 0.2$ W/(mK) [38] con l'uso di funzioni di espansione HLE di ottavo ordine.

Il metodo CUF-MSG è in grado di ricavare il flusso di calore che si registra tra fibra e matrice a livello locale, a seguito dell'applicazione di un gradiente di temperatura pari a -100 [K/m] sulla struttura.

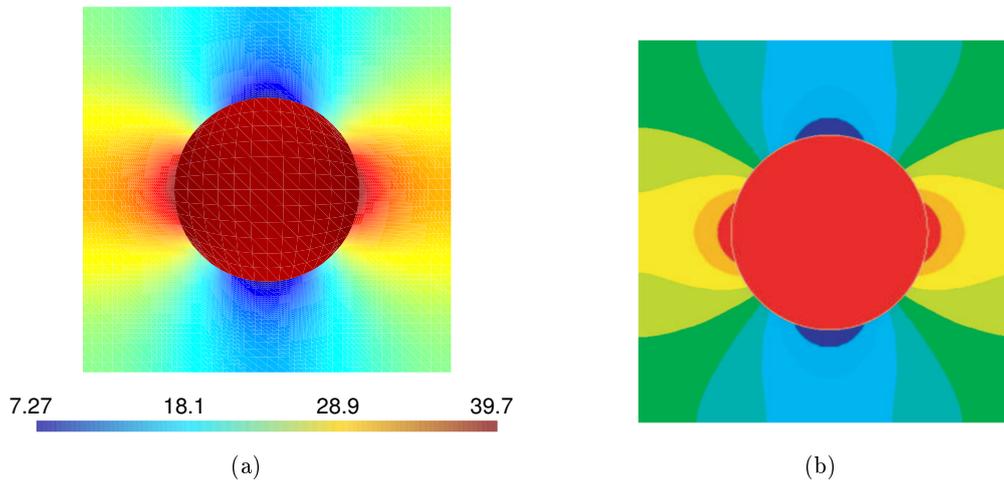


Figura 7.2: Andamento flusso di calore locale q_{22} per composito glass/polypropylene con una $V_f = 0.2$ a seguito di un gradiente di temperatura pari a -100 [K/m] in direzione y (a) CUF-MSG HL8 (b) VAMUCH [38].

A causa della differenza tra i valori di conducibilità dei due componenti del composito, il flusso di calore che si registra a seguito dell'applicazione di un gradiente pari a -100 [K/m] in direzione y_2 della fibra risulta disuniforme nel volume del RUC. In Figura 7.2 si mostra l'andamento del flusso di calore attraverso il RUC calcolato con il metodo CUF-MSG e posto a confronto con il risultato ottenuto con il metodo VAMUCH [38]. Si nota un ottimo accordo delle variazioni repentine che si registrano con i due metodi. Per una più dettagliata visualizzazione, si riporta in Figura 7.3 la distribuzione di flusso di calore locale del flusso q_{22} a $y_2 = 0$. Osservando la distribuzione locale del flusso di calore registrata lungo la verticale y_3 , si nota un eccellente accordo della soluzione ottenuta con il metodo VAMUCH e il presente metodo.

Compositi rinforzati con particelle

Quando vengono considerati materiali compositi rinforzati con particelle, i costituenti si trovano a variare rispetto alle tre direzioni, al contrario del caso di fibra lunga in cui le caratteristiche non variano nella direzione della fibra. Per tali motivi, in questi casi è necessario utilizzare un'analisi basata su celle 3D per catturare nel modo più dettagliato possibile le caratteristiche geometriche del modello, con conseguente aumento del costo computazionale.

Si utilizza l'esempio di un materiale composto isotropo con inclusioni in carburo di silicio aventi conducibilità termica $K = 120$ W/(mK) e matrice in alluminio $K = 237$ W/(mK) SiC/Al [38]. Le inclusioni sono state modellate sia come inclusioni cilindriche che come inclusioni cubiche. La tabella 6.2 riporta i valori del lato, nel caso di inclusioni cubiche,

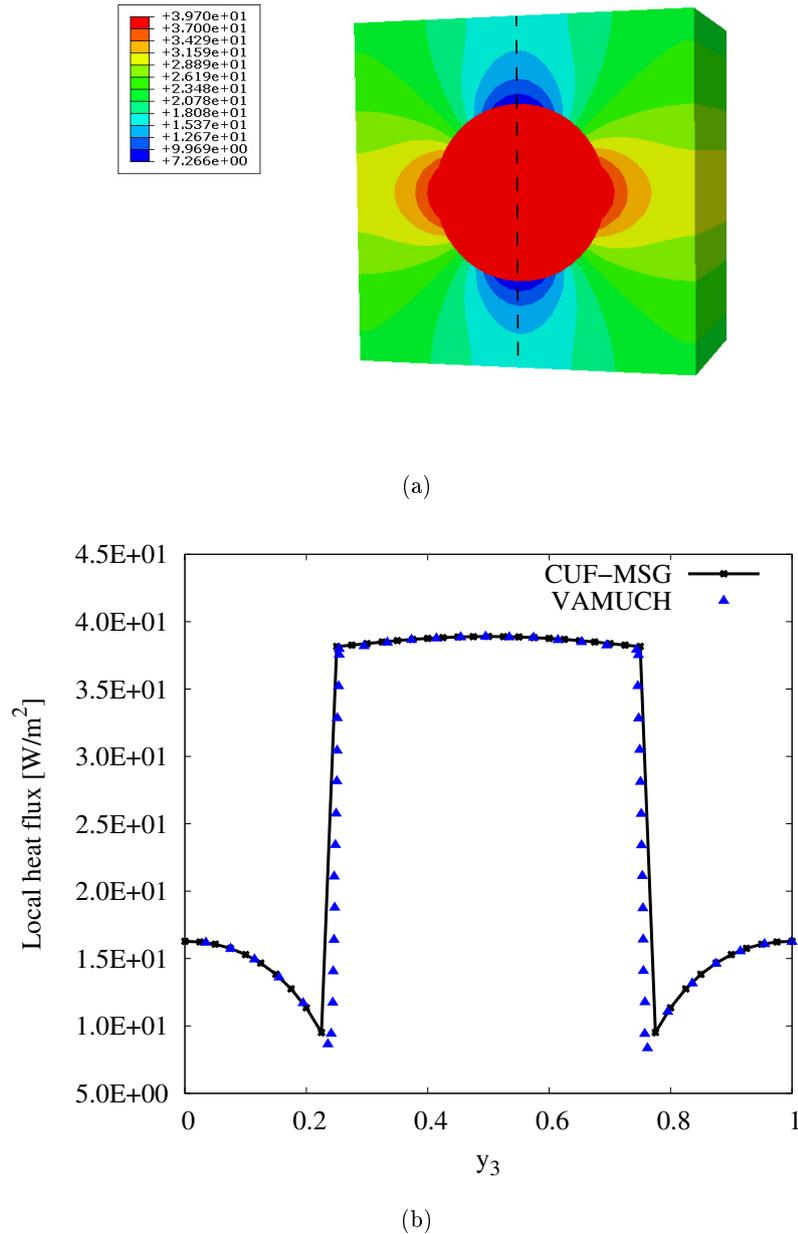


Figura 7.3: (a) Flusso di calore q_{22} (b) Distribuzione del flusso di calore q_{22} lungo la direzione $y_2 = 0$ per il composito glass/polypropylene.

mentre nel caso di inclusioni cilindriche è riportato il valore di raggio e lunghezza del cilindro. I valori sono stati modellati in modo da ottenere delle inclusioni cilindriche in cui la lunghezza del diametro coincida con l'altezza del cilindro. I valori ottenuti sono associati al volume di fibre che si intende ottenere. I risultati dell'omogeneizzazione del presente metodo sono confrontati con quelli dei metodi Hashin [21] e Springer-Tsai [19] in Figura 7.4. Nel grafico 7.4 è possibile notare che è presente un buon accordo tra le due soluzioni cilindriche e cubiche CUF-MSG, proprio per il modo in cui sono state modellate le inclusioni. Inoltre, i valori ottenuti con il metodo Hashin upper bound risultano essere molto vicini a quelli del metodo presentato, divergendo leggermente all'aumentare del volume della fibra. Infine, per quanto riguarda le soluzioni Springer-Tsai e Hashin lower bound, esse risultano rispettivamente sopra e sotto stimate rispetto a quella trovata, ed è possibile

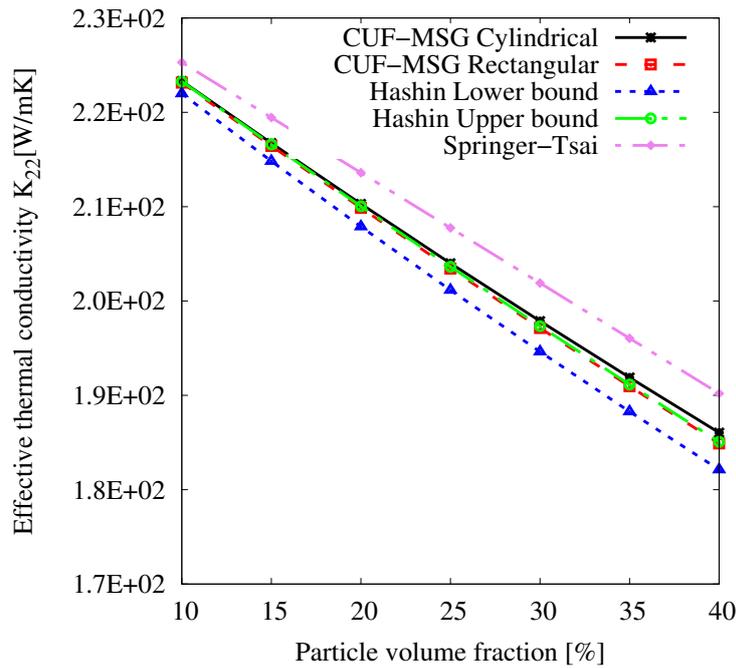


Figura 7.4: Risultati analisi conducibilità termica composito SiC/Al particle renforced per differenti particle volume fraction V_f .

notare che la differenza tra le soluzioni tende ad aumentare al crescere della V_f .

Si riportano inoltre, i valori della conducibilità termica longitudinale K in 7.2, in cui oltre ai modelli presentati nel grafico 7.4 si aggiungono i risultati relativi al modello VAMUCH ottenuti attraverso *SwiftCompTM* in [44] per inclusioni sferiche, al fine di mostrare l'andamento delle caratteristiche al variare della forma dell'inclusione, per una V_f fissata pari a 0.20. Dalla tabella 7.2 è possibile notare che, come nei casi precedenti, il valore ottenuto tende a convergere al valore esatto quando si aumenta il grado della funzione di espansione HLE utilizzata.

In questo capitolo è stato esteso il metodo CUF-MSG per predire le caratteristiche effettive di conducibilità termica di materiali compositi eterogenei.

Gli esempi mostrati hanno chiaramente dimostrato l'accuratezza del metodo sviluppato

Model	$K_{22}=K_{33}$ [W/mK]
VAMUCH sferico [44]	210.02
Hashin lower bound [21]	207.89
Hashin upper bound [21]	210.05
Springer-Tsai [19]	213.60
CUF-MSG Cubico	
HL2	210.04
HL4	209.89
HL8	209.87
CUF-MSG Cilindrico	
HL2	210.53
HL4	210.30
HL8	210.29

Tabella 7.2: Risultati omogeneizzazione composito SiC/Al $V_f = 0.2$.

grazie al confronto dei risultati con i metodi classici e con il metodo VAMUCH, basato sul metodo asintotico variazionale.

7.2 Proprietà igroscopiche

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, i materiali compositi sono spesso utilizzati in ambienti estremi, come ad esempio temperature estreme, per questo motivo abbiamo visto l'utilità di sviluppare i metodi di previsione delle proprietà termo-elastiche. Un altro ambiente molto aggressivo per i materiali compositi è rappresentato da quegli ambienti che presentano una elevata umidità relativa, che conduce a una degradazione dei materiali. Anche in questo caso gli esperimenti sono utili per testare gli effetti che un certo ambiente umido ha sui materiali, ma questi non sono del tutto esaustivi per comprendere correttamente la natura di questi cambiamenti. Per questo motivo, anche in questo caso sono necessari dei modelli di calcolo numerico per comprendere in modo più preciso e affidabile il comportamento del materiale.

Nel seguente capitolo si mostra come è stato implementato il codice basato su CUF-MSG per il calcolo delle caratteristiche igroscopiche di un materiale composito.

7.2.1 Formulazione problema igroscopico

Considerando l'analogia tra la conducibilità termica e la diffusione di umidità per un materiale, è possibile estendere la metodologia precedentemente introdotta per il problema igroscopico. Si consideri l'equazione 5.1 per il campo igroscopico:

$$\frac{1}{V} \int_V \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV = \bar{\eta}(\mathbf{x}) \quad (7.22)$$

In cui $\bar{\eta}$ rappresenta il campo di concentrazione di umidità globale nella sola coordinata globale. Per assicurare le condizioni al contorno sul RUC, si applicano le condizioni di continuità del campo della concentrazione di umidità come per 5.2:

$$\begin{aligned} \eta(x_1, x_2, x_3; \frac{d_1}{2}, y_2, y_3) &= \eta(x_1 + d_1, x_2, x_3; -\frac{d_1}{2}, y_2, y_3) \\ \eta(x_1, x_2, x_3; y_1, \frac{d_2}{2}, y_3) &= \eta(x_1, x_2 + d_2, x_3; y_1, -\frac{d_2}{2}, y_3) \\ \eta(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, \frac{d_3}{2}) &= \eta(x_1, x_2, x_3 + d_3; y_1, y_2, -\frac{d_3}{2}) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Per il caso igroscopico si scrive il campo della concentrazione di umidità in funzione della coordinata globale e locale come somma del campo di concentrazione di umidità del materiale omogeneizzato e un contributo che rappresenta la differenza tra i due termini:

$$\eta(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \bar{\eta}(\mathbf{x}) + \delta\chi(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \quad (7.24)$$

in cui χ rappresenta le funzioni di fluttuazione scalate con δ , che si ricorda essere il parametro di scala che caratterizza le dimensioni del RUC.

Derivando il campo della concentrazione nelle due coordinate $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, si otterrà una derivata del tipo 6.4, il gradiente del campo concentrazione di umidità diventerà:

$$\eta_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\eta}_{,i}(\mathbf{x}) + \chi_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7.25)$$

con:

$$\bar{\eta}_{,i}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial \eta(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial y_i} \quad \chi_{,i}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial \chi(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{\partial y_i} \quad (7.26)$$

Ricordando che nel modello MSG, la soluzione del problema stazionario si ottiene minimizzando la differenza tra le energie del materiale nella forma eterogenea e quella del rispettivo materiale omogeneo, l'energia del materiale, considerando il termine relativo al materiale omogeneizzato invariante, risulta:

$$\Pi_1 = \left\langle \frac{1}{2} D_{ij} \eta_{,i} \eta_{,j} \right\rangle \quad (7.27)$$

in cui D_{ij} è il tensore del secondo ordine che contiene le componenti della diffusività di umidità del materiale eterogeneo, mentre η , rappresenta il gradiente del campo di concentrazione di umidità.

Sostituendo quanto ottenuto nella (7.25), posso riscrivere l'energia del materiale nella forma:

$$\Pi_1 = \left\langle \frac{1}{2} D_{ij} (\bar{\eta}_{,i} + \chi_{,i}) (\bar{\eta}_{,j} + \chi_{,j}) \right\rangle \quad (7.28)$$

Il seguente metodo, come visto precedentemente, permette di risolvere il problema in modo efficiente attraverso l'impiego di un modello di risoluzione raffinato che utilizza modelli di calcolo di ordine elevato.

7.2.2 Implementazione FEM

Per risolvere il problema si introduce ancora una volta il metodo FEM.

La direzione della fibra viene modellata attraverso elementi unidimensionali e interpolata con funzioni di forma LE nella coordinata della trave y_1 .

$$\chi_\tau(\mathbf{x}; y_1) = N_i(y_1) \chi_{\tau i}(\mathbf{x}) \quad \tau = 1, 2, \dots, n \quad (7.29)$$

In cui $\chi_{\tau i}$ è il vettore delle incognite nodali, mentre n il numero delle nodi del modello trave considerato. A questo punto è possibile introdurre il vettore gradiente del campo di temperatura globale come:

$$\bar{\boldsymbol{\eta}},^T = \{\bar{\eta}_{,1} \quad \bar{\eta}_{,2} \quad \bar{\eta}_{,3}\} \quad (7.30)$$

Le relazioni geometriche si possono esprimere come:

$$\boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\chi} \quad (7.31)$$

con \mathbf{B} operatore differenziale definito in (7.11) che per comodità in questo capitolo viene chiamato \mathbf{B} . In questo modo la (7.28) si può riscrivere come:

$$\Pi_1^* = \frac{1}{2} \int_V (\bar{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\chi})^T \mathbf{D} (\bar{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\chi}) dV \quad (7.32)$$

La matrice della diffusività di umidità \mathbf{D} nel caso generale di materiale anisotropo può essere definita come:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & K_{13} \\ D_{12} & D_{22} & K_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Sostituendo quanto mostrato nella (7.32) e ricordando che $\boldsymbol{\chi} = F_\tau N_i \chi_{\tau i}$ come visto nella (5.3), si ottiene:

$$\Pi_1^* = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\chi}_{sj}^T M^{\tau sij} \chi_{\tau i} + 2 \boldsymbol{\chi}_{sj}^T \mathbf{D}_{hj}^{sj} \bar{\boldsymbol{\eta}}, + \bar{\boldsymbol{\eta}},^T \mathbf{K}_{\eta\eta} \bar{\boldsymbol{\eta}},) \quad (7.34)$$

In cui:

$$M^{\tau sij} = \int_{\Omega} \int_l (\mathbf{B}(F_s N_j))^T \mathbf{D} \mathbf{B}(F_{\tau} N_i) d\Omega dy_1 \quad (7.35)$$

$$\mathbf{D}_{h\eta}^{\tau i} = \int_{\Omega} \int_l (\mathbf{B}(F_s N_j))^T \mathbf{D} d\Omega dy_1 \quad \mathbf{D}_{\eta\eta} = \int_{\Omega} \int_l \mathbf{D} d\Omega dy_1 \quad (7.36)$$

In cui $M^{\tau sij}$ di dimensioni 1×1 è tensore del quarto ordine, $\mathbf{D}_{h\eta}^{\tau i}$ di dimensioni 1×3 è tensore del secondo ordine e sono entrambi nuclei fondamentali del problema RUC per le caratteristiche igroscopiche. Essi contengono le informazioni basilari del modello MSG. In aggiunta $\mathbf{D}_{\eta\eta}$ matrice di dimensioni 3×3 . Con gli indici τ ed s si intende il ciclo fatto sulle funzioni di espansioni HLE relative alla sezione trasversale, mentre i e j al ciclo delle funzioni di espansione LE del modello beam lungo l'asse della fibra.

Applicando il metodo VAM all'energia (7.34) si ricava la soluzione che minimizza il funzionale:

$$M^{\tau sij} \chi_{\tau i} = -\mathbf{D}_{h\eta}^{sj} \bar{\boldsymbol{\eta}}, \quad (7.37)$$

la linearità del problema impone che $\chi_{\tau i}(\mathbf{x}) = \chi_{\tau i 0} \bar{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})$ con $\chi_{\tau i 0}$ di dimensioni 1×3 , contenente le soluzioni di fluttuazione:

$$M^{\tau sij} \chi_{\tau i 0} = -\mathbf{D}_{h\eta}^{sj} \quad (7.38)$$

Risolvendo il sistema lineare in (7.37) si trovano le proprietà effettive di diffusività di umidità del corrispondente materiale composito omogeneizzato, considerando che l'energia nel passaggio tra materiale eterogeneo e omogeneo rimanga invariata. Andando a sostituire il sistema lineare (7.37) all'interno dell'equazione dell'energia in (7.34), attraverso l'equivalenza dell'energia è possibile ottenere l'effettiva matrice di conducibilità termica:

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{V} (\chi_{\tau i}^T \mathbf{D}_{h\eta}^{sj} + \mathbf{D}_{\eta\eta}) \quad (7.39)$$

in cui \mathbf{D}^* ha dimensioni 3×3 .

A questo punto il gradiente del campo locale di concentrazione di umidità può essere ricavato semplicemente introducendo l'espressione di $\boldsymbol{\chi}$ nella relazione geometrica in (7.31), ottenendo:

$$\boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{B}(F_{\tau} N_i \boldsymbol{\chi}) \quad (7.40)$$

Infine, è possibile ricavare il flusso di diffusività attraverso la legge di Fick:

$$\mathbf{J}_i = -\mathbf{D}_{ij} \boldsymbol{\eta}_{,j} \quad (7.41)$$

in cui il segno negativo sta a rappresentare il fatto che il flusso va dalle zone ad alta concentrazione verso quelle a bassa concentrazione. \mathbf{J}_i rappresenta il vettore di flusso di diffusività ed ha dimensioni $[\text{kg}/(\text{mm}^2 \text{s})]$, \mathbf{D}_{ij} matrice della diffusività di massa con dimensioni $[\text{mm}^2/\text{s}]$ ed $\boldsymbol{\eta}_{,j}$ è il vettore contenente le componenti del gradiente della concentrazione di umidità con dimensioni $[(\text{kg}/\text{mm}^3)/\text{mm}]$.

Si noti che quando il materiale è esposto ad un ambiente umido, il parametro di interesse non è la concentrazione di umidità nella sua forma dimensionale, bensì il contenuto di umidità percentuale. La forma adimensionale del contenuto percentuale di umidità M , come mostrato nell'articolo [18]:

$$\nabla M = \frac{W_{moistmaterial} - W_{drymaterial}}{W_{drymaterial}} \times 100 = \frac{\boldsymbol{\eta}_{,j}}{\rho_{dry}} \times 100 \quad (7.42)$$

in cui ∇M è il gradiente percentuale di temperatura e ρ_{dry} rappresenta la densità del materiale omogeneizzato, ottenibile applicando la regola della miscela tra matrice e fibra con la formula:

$$\rho_{dry} = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \quad (7.43)$$

in cui 1 e 2 si riferiscono ai due costituenti del materiale composito.

Dall'espressione 7.42 è possibile ricavare il gradiente di concentrazione di umidità $\eta_{,j}$ a cui corrisponde un certo gradiente di umidità percentuale, così da poter trovare il flusso di umidità locale \mathbf{J}_i attraverso la (7.41). La formulazione mostrata è stata implementata nel codice di calcolo delle caratteristiche micromeccaniche basato sul metodo CUF-MSG.

7.2.3 Risultati numerici

Esistono svariati lavori che si propongono di valutare il comportamento dei materiali sottoposti a diverse concentrazioni di umidità. Ad esempio, nel lavoro [18] viene svolta un'analisi igro-termo-elastica su piastre multistrato in materiale composito sottoposte a carichi igro-termo-elastici, mentre in [40] è possibile vedere un'analisi per investigare le caratteristiche della diffusività di umidità di un materiale composito 2D con fibre di carbonio e matrice polimerica orientate con una particolare configurazione e ad elevato V_f .

Con il metodo sviluppato CUF-MSG è possibile condurre un'analisi microstrutturale sui modelli di RUC presentati nei precedenti capitoli, per ricavare le caratteristiche igroscopiche effettive di un materiale composito. Successivamente, applicando la legge di Fick (7.41) si ricaverà il flusso di diffusività che si registra localmente tra matrice e fibra.

L'esempio considerato di seguito riguarda un materiale composito in fibra di carbonio con diffusività di umidità pari a $D = 0 \text{ mm}^2/\text{s}$ e matrice in resina poliimmidica con $D = 2 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^2/\text{s}$, da ora in poi ci si riferisce al materiale come C/polymide. I dati sono consultabili in [40].

In tabella 7.3 si riportano i valori della diffusività di umidità effettiva per il composito C/polymide per i casi Hashin upper bound [21] e Springer-Tsai [19] rispetto al metodo CUF-MSG. L'analisi di omogeneizzazione è stata svolta considerando una microstruttura square-pack con un $V_f = 0.3$ e funzioni di espansione HLE di ottavo ordine. Osservando la tabella 7.3, si nota che nel caso longitudinale si ottengono buoni risultati anche con un basso ordine di HLE, mentre nel caso trasversale si nota una leggera convergenza all'aumentare dell'ordine del metodo. I due metodi Hashin upper bound e Springer-Tsai risultano in buon accordo con il metodo CUF-MSG longitudinale, mostrando un perfetto accordo con il metodo Springer-Tsai.

Model	$D_{11} 10^{-7} [\text{mm}^2/\text{s}]$	$D_{22} = D_{33} 10^{-7} [\text{mm}^2/\text{s}]$
Hashin upper bound [21]	1.22	-
Springer-Tsai [19]	1.40	-
CUF-MSG		
HL2	1.40	1.08
HL4	1.40	1.07
HL8	1.40	1.07

Tabella 7.3: Risultati omogeneizzazione composito C/polymide con $V_f = 0.3$ square-pack per diversi ordini di funzioni di espansione HLE confrontati con i metodi presenti in letteratura.

In Figura 7.5 si riporta l'andamento del coefficiente di diffusività per il C/polymide, al variare della V_f considerata e con ottavo ordine di polinomio HLE. Dal grafico è possibile osservare che, come previsto, il valore crolla all'aumentare della V_f , poiché la fibra ha una

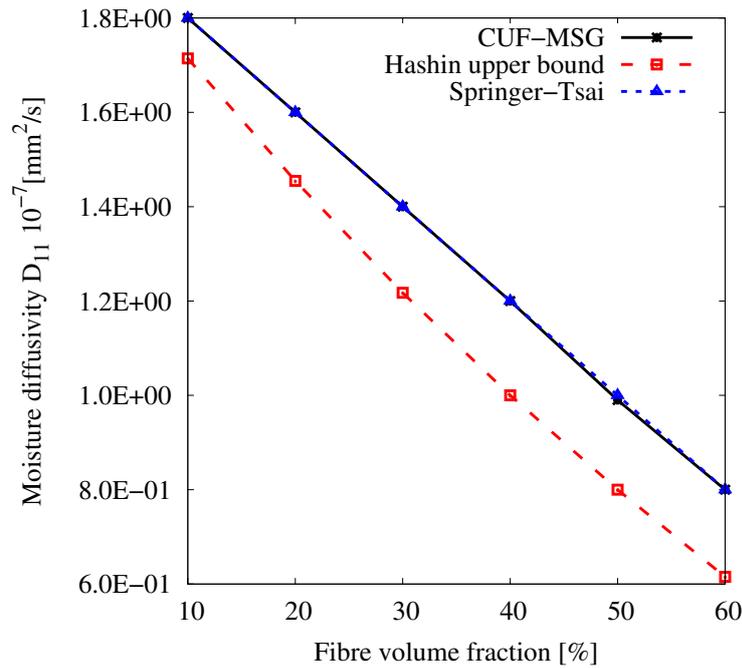


Figura 7.5: Risultati analisi proprietà igrotermiche per composito C/polimide per differenti volume fraction V_f e ordine di HLE 8 confrontati con i metodi presenti in letteratura.

diffusività nulla. I valori ottenuti sono in perfetto accordo con il metodo analitico Springer [19], mentre la soluzione Hashin [21] risulta sottostimata, pur mantenendo un buon accordo nell'andamento.

Per recuperare il flusso di umidità che si registra tra matrice e fibra localmente, si introduce una variazione di concentrazione di umidità in direzione y_2 , pari a 1%, partendo da una concentrazione di umidità globale iniziale di 0%.

La densità della fibra di carbonio asciutta è $\rho_c = 1.77 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, mentre quella della matrice $\rho_p = 1.23 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$. Con la regola della miscela riportata in (7.43) si ricava una densità complessiva del materiale composito pari a $\rho_p = 1.39 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$. Questo dato ci permette di ricavare attraverso la (7.42) il gradiente di concentrazione di umidità che corrisponde ad una variazione di umidità dell'1%. Si ottiene un valore di gradiente di concentrazione $\eta_{,j} = 1.39 \cdot 10^{-8} \text{ (kg/mm}^3\text{)/mm}$, che inserito nel codice di calcolo ci permette di ottenere il flusso di umidità locale. I risultati sono mostrati in Figura 7.6. Si noti che il range ottenuto riguarda valori molto bassi, proprio a prova del fatto che una variazione di umidità dell'1% ha conseguenze trascurabili sul materiale.

In Figura 7.7 si riporta la visualizzazione del flusso in direzione della fibra tramite *Abaqus* e il grafico dell'andamento del flusso a $y_2 = 0$ in modo tale da apprezzare le variazioni repentine che si verificano localmente tra matrice e fibra quando viene applicato un carico igroscopico.

Grazie all'analogia matematica che è presente tra il calcolo del flusso di calore, il flusso di umidità (diffusività) e le caratteristiche elettrostatiche e magnetostatiche, il seguente metodo può essere esteso al calcolo delle caratteristiche dielettriche e magnetiche di materiali compositi eterogenei.

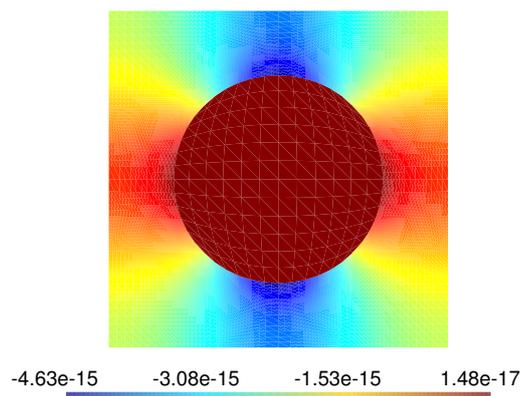


Figura 7.6: Andamento flusso di umidità locale J_{22} per composito C/polymide con una $V_f = 0.3$ a seguito di una variazione di concentrazione di umidità in direzione y pari a 1%.

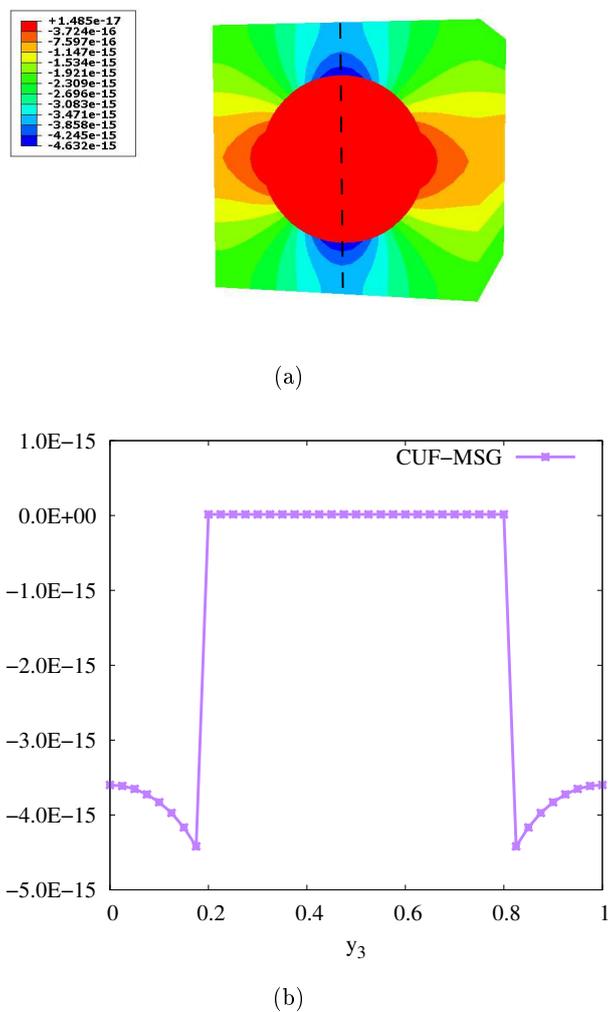


Figura 7.7: (a) Flusso di umidità J_{22} (b) Distribuzione del flusso di umidità J_{22} lungo la direzione $y_2 = 0$ per il composito C/polymide.

Capitolo 8

Analisi multiscala

Nel seguente capitolo verrà presentato un approccio di modellazione multiscala per il calcolo delle caratteristiche termo-elastiche di una struttura in materiale composito. Il problema multiscala è costituito da due analisi indipendenti atte a calcolare le caratteristiche del materiale ad entrambi i livelli di analisi. La scala macroscopica e quella microscopica vengono collegate attraverso il trasferimento delle informazioni. La caratteristica principale della seguente tecnica di analisi è l'alto grado di affidabilità delle simulazioni del comportamento termo-elastico dei materiali compositi, che porta ad una enorme riduzione dei costi legati ai test di caratterizzazione fisica delle strutture.

8.1 Strategia di modellazione di problemi multiscala

Lo sviluppo di nuovi metodi raffinati per prevedere in modo sempre più accurato il comportamento termo-elastico delle strutture in composito rappresenta una sfida per la comunità ingegneristica. Una delle strategie più interessanti riguarda l'approccio multiscala. Questo approccio, a carattere gerarchico, permette di effettuare dei test virtuali su materiali compositi e strutture sfruttando il fatto che essi sono costituiti da elementi chiaramente distinti. La chiara separazione tra le scale di interesse è una caratteristica fondamentale per un approccio multiscala, in cui le proprietà di una struttura vengono omogeneizzate per formare un modello costitutivo in grado di fornire le informazioni necessarie per il calcolo del comportamento termo-elastico della struttura. Quindi, l'analisi multiscala si basa sullo scambio di informazioni tra le differenti scale attraverso l'accoppiamento di differenti approcci di simulazione.

In questo contesto la MSG viene impiegata per sviluppare un modello multiscala a caratteristiche multifisiche per ottenere il modello costitutivo di queste strutture. In Figura 8.1 si illustrano gli step di calcolo caratteristici del problema multiscala per il calcolo delle caratteristiche termo-elastiche di strutture in composito. In questo contesto, la generale analisi strutturale viene disaccoppiata in tre step:

- CUF-MSG omogeneizzazione;
- CUF analisi strutturale macroscopica;
- CUF-MSG deomogeneizzazione.

Grazie alla decomposizione del classico problema strutturale in più problemi disaccoppiati è possibile ottenere dei livelli di efficienza più elevati mantenendo un alto grado di accuratezza. Il primo passo riguarda la scelta del modello microstrutturale da adottare per svolgere

l'analisi micromeccanica. Abbiamo visto nei capitoli precedenti che nel codice di calcolo basato su CUF-MSG sono state implementate le microstrutture di compositi in fibra lunga come square-pack e hexa-pack, mentre per le inclusioni particellari sono presenti i modelli in cui l'inclusione è di forma rettangolare e cilindrica. Dopo lo svolgimento dell'analisi di omogeneizzazione si ricavano le caratteristiche effettive del materiale che costituiscono il modello costitutivo. Nella seguente analisi le proprietà effettive sono rappresentate dalle caratteristiche elastiche, dal coefficiente di espansione termica α , dal calore specifico c_v e dal coefficiente di conducibilità termica K . Nel passo successivo di analisi macroscopica termo-elastica, è necessario stabilire il carico termico che si intende applicare sulla struttura, e attraverso il modello costitutivo è possibile ottenere la risposta della struttura in termini di tensione, deformazione e variazione di temperatura lungo lo spessore. Per completare l'analisi, a questo punto, si individua un punto di particolare interesse nella struttura in cui si valutano i valori di deformazione nel sistema di riferimento locale. Con l'ultimo passaggio è possibile ricavare l'andamento delle tensioni locali e del flusso di calore sul RUC. Il tema delle analisi multiscala può essere approfondito in vari testi presenti in letteratura, tra cui il libro di M. Petrolo [32], gli articoli di W. Yu *et al.* [39, 26] e l'articolo di J. Llorca *et al.* [27].

8.2 Risultati numerici multiscala

L'approccio multiscala per ricavare le caratteristiche termo-elastiche e di conducibilità termica presentato in questa sezione si applica ad un laminato a pianta quadrata di lato $a = b = 250$ mm in composito con matrice in epoxy e rinforzo in fibra di carbonio, indicato con Carbon/Epoxy. La lamina è costituita da 8 strati identici, ognuno dello spessore di $h_i = 0.18$ mm, per un totale di $h = 1.44$ mm, con laminazione $[0^\circ/90^\circ/-45^\circ/45^\circ]_s$, simmetrica rispetto al piano di riferimento e $V_f = 0.6$, le cui caratteristiche geometriche sono illustrate in Figura 8.2. Le proprietà del materiale sono state prese da diversi lavori presenti in letteratura: le proprietà elastiche dall'articolo [9], i valori dei coefficienti di espansione termica α da [45], i valori dei calori specifici c_v da [25] e infine, le conducibilità termiche da [26] e [5]. I valori delle proprietà elastiche e termiche sono riordinati rispettivamente nelle tabelle 8.1 e 8.4, in cui si nota che le caratteristiche elastiche della fibra sono assunte ortotrope, mentre quelle della matrice isotrope.

	E_1 [GPa]	$E_2 = E_3$ [GPa]	$G_{12} = G_{13}$ [GPa]	G_{23} [GPa]	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}
Carbon fiber	276	19.50	70	5.74	0.28	0.70
Epoxy matrix	4.76	-	-	-	0.37	-

Tabella 8.1: Proprietà elastiche fibra carbonio e matrice Epoxy [9].

	$\alpha \cdot 10^{-6}$ [K ⁻¹]	c_v [kJ/(m ³ K)]	K [W/(mK)]
Carbon fiber	-0.75	750	10.20
Epoxy matrix	54	1200	0.18

Tabella 8.2: Proprietà termiche fibra carbonio e matrice Epoxy [25][45][26] [5].

Si considera una configurazione del RUC di tipo square-pack. L'analisi viene svolta utilizzando polinomi HLE di ottavo ordine per ricavare le effettive proprietà del materiale

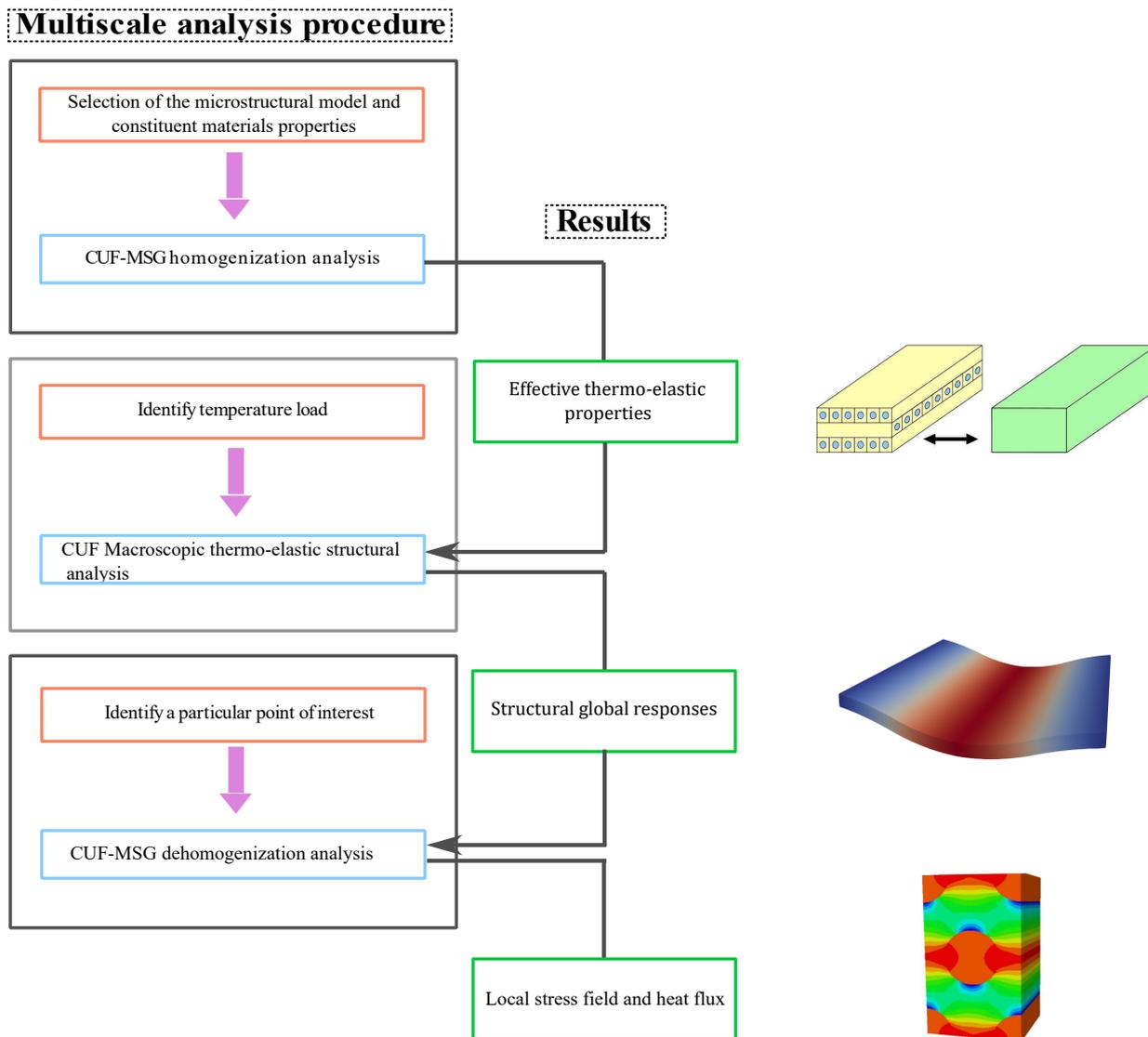


Figura 8.1: Flow-chart analisi multiscala.

omogeneizzato. Si considera come temperatura di riferimento $T_0 = 300$ K.

8.2.1 Analisi di omogeneizzazione

Per prima cosa viene svolto un primo step di omogeneizzazione attraverso l'analisi micromeccanica, che ci consente di ottenere le caratteristiche termo-elastiche del materiale omogeneizzato, riassunte in tabella 8.3 e 8.4.

	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
Carbon/Epoxy	167.77	11.41	6.80	3.09	0.31	0.58

Tabella 8.3: Proprietà elastiche effettive del composito Carbon/Epoxy.

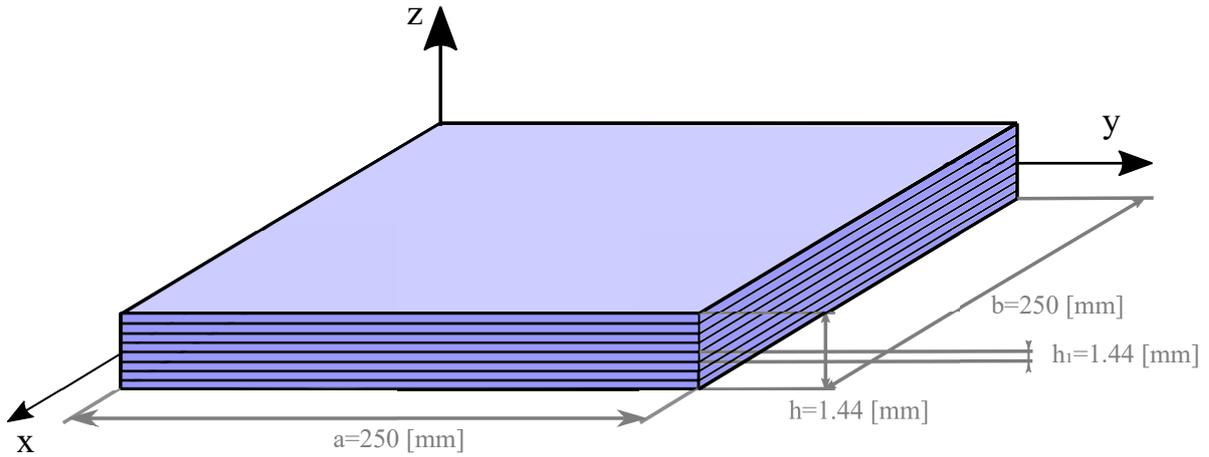


Figura 8.2: Caratteristiche geometriche della lamina in Carbon/Epoxy.

	$\alpha_1 \cdot 10^{-6} [\text{K}^{-1}]$	$\alpha_2 \cdot 10^{-6} [\text{K}^{-1}]$	$c_v [\text{kJ}/(\text{m}^3\text{K})]$	$K_1 [\text{W}/(\text{mK})]$	$K_2 [\text{W}/(\text{mK})]$
Carbon/Epoxy	0.16	12.73	925.47	6.20	0.73

Tabella 8.4: Proprietà termiche effettive del composito Carbon/Epoxy.

8.2.2 Analisi strutturale termo-elastica macroscopica

Ottenuti i primi output dall'analisi micromeccanica, essi diventano gli input dell'analisi macroscopica, insieme alle caratteristiche geometriche della lamina e alla variazione di temperatura fissata a $\Delta T = -10 \text{ K}$ nella faccia inferiore e $\Delta T = +10 \text{ K}$ in quella superiore. Il primo passaggio necessario riguarda l'analisi della convergenza, per selezionare il numero degli elementi finiti nel piano. Nelle figure 8.3, 8.4 sono mostrati gli andamenti delle tensioni di taglio e normali, per differenti tipologie di mesh con elementi quadratici a nove nodi (Q9), che variano da 36 elementi finiti per la mesh 6×6 a 400 per la 20×20 . Nella Figura 8.5 è mostrato l'andamento della variazione di temperatura lungo lo spessore z della piastra per le stesse mesh. Per ogni analisi si utilizzano elementi *LE3* per la discretizzazione lungo lo spessore, ovvero un elemento *B4* per strato, in questo modo la piastra viene modellata con approccio Layer Wise (LW).

In tabella 8.5 si mostrano gli spostamenti verticali del punto P con $z = 0.6 \text{ [mm]}$ e

Model	DOFs	$u_z \text{ [mm]}$
$6 \times 6 \text{ Q9}$	16900	1.255
$8 \times 8 \text{ Q9}$	28900	1.252
$10 \times 10 \text{ Q9}$	44100	1.250
$12 \times 12 \text{ Q9}$	62500	1.250
$14 \times 14 \text{ Q9}$	84100	1.250
$16 \times 16 \text{ Q9}$	108900	1.250
$18 \times 18 \text{ Q9}$	136900	1.250
$20 \times 20 \text{ Q9}$	168100	1.250

Tabella 8.5: Spostamento verticale della piastra valutato in P a $z = 0.6 \text{ [mm]}$ e $x = y = 0 \text{ [mm]}$ per differenti tipi di mesh FE. Tutti i modelli usano un'espansione di tipo *LE3* per strato.

$x = y = 0 \text{ [mm]}$, quindi nella parte superiore della lamina, per le differenti mesh. Mentre, in tabella 8.6 sono riportate le sei componenti di tensione della lamina e la variazione di

Model	DOFs	σ_{xx} [kPa]	σ_{yy} [kPa]	σ_{zz} [kPa]	σ_{xz} [kPa]	σ_{yz} [kPa]	σ_{xy} [kPa]	ΔT [K]
$6 \times 6 Q9$	16900	986.96	-1774.07	-20.83	-16.05	-3.62	61.81	8.33
$8 \times 8 Q9$	28900	974.17	-1911.00	-14.78	-13.38	-3.86	55.52	8.33
$10 \times 10 Q9$	44100	970.23	-1965.56	-9.89	-9.81	-3.10	53.31	8.33
$12 \times 12 Q9$	62500	969.01	-1988.98	-6.62	-7.25	-2.36	52.35	8.33
$14 \times 14 Q9$	84100	968.71	-1999.03	-4.50	-5.49	-1.80	51.87	8.33
$16 \times 16 Q9$	108900	968.78	-2002.68	-3.12	-4.23	-1.39	51.59	8.33
$18 \times 18 Q9$	136900	968.99	-2003.04	-2.22	-3.32	-1.08	51.42	8.33
$20 \times 20 Q9$	168100	969.27	-2001.68	-1.60	-2.64	-0.86	51.32	8.33

Tabella 8.6: Stato di tensione e variazione di temperatura della piastra in P a $z = 0.6$ [mm] e $x = y = 0$ [mm] per differenti tipi di mesh FE. Tutti i modelli usano un'espansione di tipo LE3 per strato.

temperatura registrate al punto P di ordinata $z = 0.6$ [mm] e $x = y = 0$ [mm]. Osservando la tabella 8.5, si nota che la convergenza per u_z è raggiunta perfettamente già con una mesh pari a 10×10 . Al contrario di quanto avviene per gli spostamenti u_z , in tabella 8.6 si può notare che la convergenza nei valori delle tensioni non si registra prima della mesh 20×20 , in modo particolare per quello che riguarda la tensione normale σ_{zz} e la tensione di taglio σ_{yz} , apprezzabili in Figura 8.4.

8.2.3 Analisi di deomogeneizzazione

Dopo aver stabilito che la convergenza delle soluzioni si ha per una mesh di $20 \times 20 Q9 LE3$, è possibile compiere lo step di deomogeneizzazione. Ora la trattazione varia a seconda che si svolga l'analisi termo-elastica o di conducibilità termica.

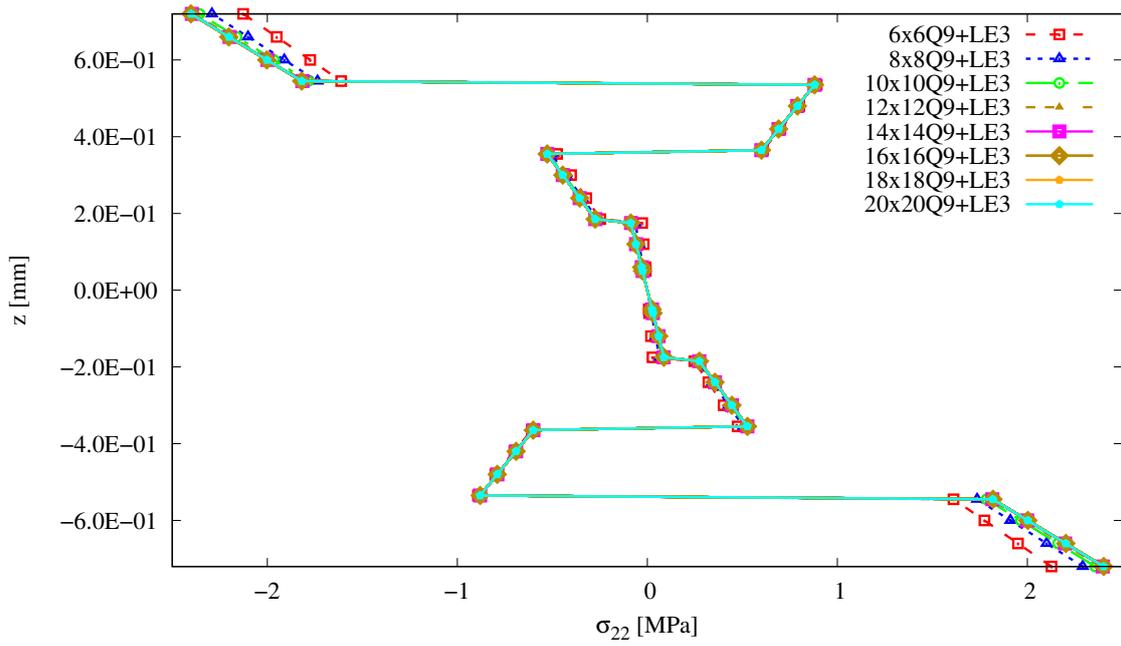
Si consideri il caso termo-elastico, come input di questa analisi è necessario inserire le caratteristiche di deformazione locale ottenute dalla precedente analisi macroscopica in un determinato punto della struttura. Si sceglie un punto specifico che si trova al centro della piastra e a $z = 0.6$ mm. Otteniamo le deformazioni ε nel sistema di riferimento locale e la variazione di temperatura in quel punto per il modello selezionato. In tabella 8.7 sono riassunti i risultati di deformazione nel sistema di riferimento locale. Inserendo le deforma-

Model	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	ε_{13}	ε_{23}	ε_{12}	ΔT [K]
$20 \times 20 Q9$	$0.90 \cdot 10^{-4}$	$0.92 \cdot 10^{-4}$	$0.60 \cdot 10^{-4}$	$-0.39 \cdot 10^{-6}$	$-0.28 \cdot 10^{-6}$	$0.75 \cdot 10^{-5}$	8.33

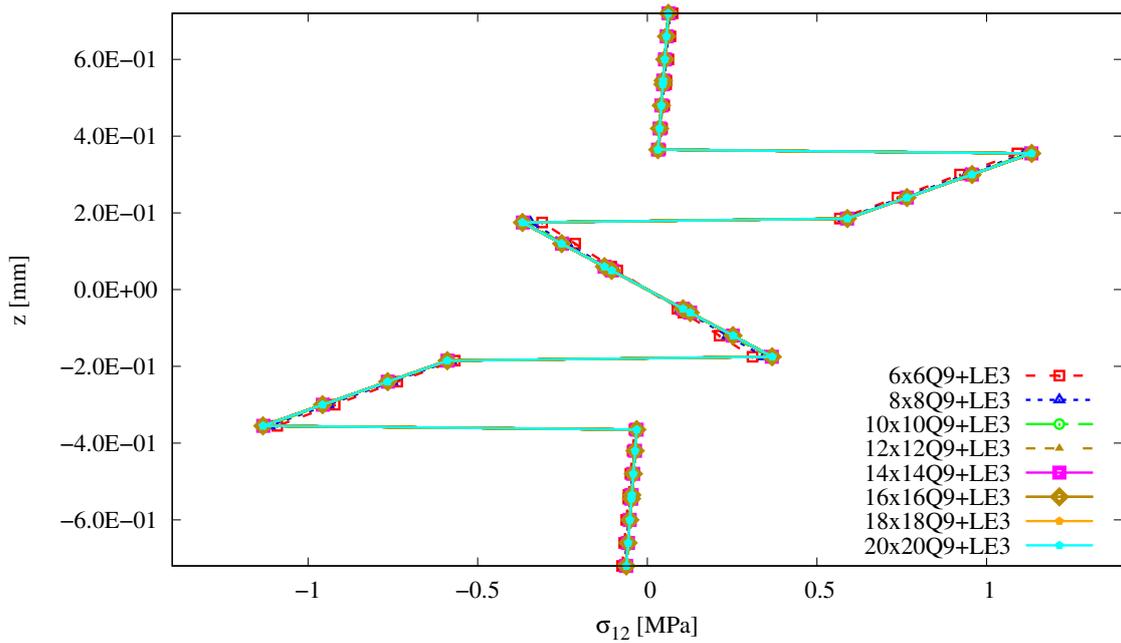
Tabella 8.7: Stato di deformazione e variazione di temperatura nel sistema di riferimento locale della piastra in P a $z = 0.6$ [mm] per la mesh selezionata.

zioni locali e la variazione di temperatura relativi al punto P si ottengono gli andamenti delle tensioni locali (a livello di fibra e matrice), che si registrano sul RUC. In Figura 8.6 sono visualizzabili gli andamenti delle tensioni σ_{33} e σ_{13} . Si nota che per il caso σ_{33} si registrano delle tensioni a carattere compressivo, con valori più elevati nella zona della fibra e lungo la verticale y_3 , mentre nel caso σ_{13} l'andamento della tensione risulta antisimmetrico con zone di compressione e trazione. Le altre tensioni riportate in Appendice E mostrano l'andamento di σ_{11} , σ_{22} , σ_{23} e σ_{12} .

A questo punto si può procedere con la deomogeneizzazione delle caratteristiche di conducibilità termica. Per svolgere questa analisi è necessario ricavare il gradiente di temperatura rispetto alla direzione dello spessore z , ottenibile utilizzando l'equazione delle differenze



(a)



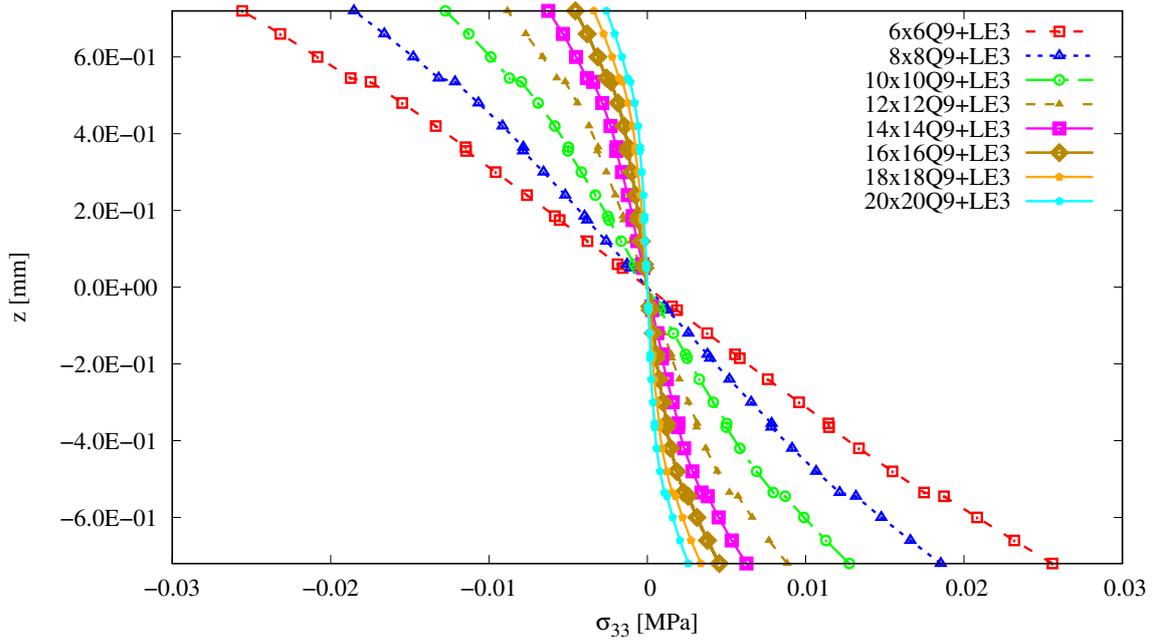
(b)

Figura 8.3: Andamento campo di tensione lungo lo spessore nel punto P della lamina per differenti mesh attraverso l'uso della tecnica LW.

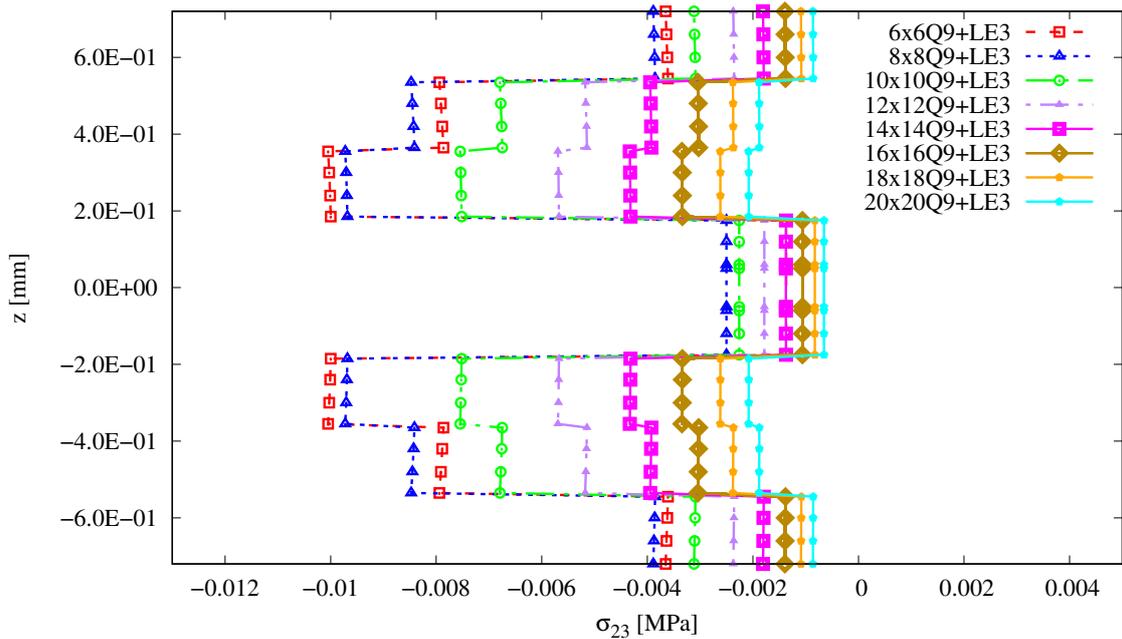
finite:

$$\nabla T_z = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\Delta T_{i+1} - \Delta T_{i-1}}{2\Delta z} \quad (8.1)$$

Scegliamo lo stesso punto P a $z_i = 0.6$ [mm], e valutiamo il valore della variazione di temperatura tra le coordinate $z_{i+1} = 0.66$ [mm] e $z_{i-1} = 0.55$ [mm], applicando la (8.1) si



(a)



(b)

Figura 8.4: Andamento campo di tensione lungo lo spessore nel punto P della lamina per differenti mesh attraverso l'uso della tecnica LW.

ottiene il valore del gradiente di temperatura che si registra lungo z , i valori ottenuti sono riportati in tabella 8.8.

Inserendo il gradiente di temperatura lungo z nel processo di deomogeneizzazione dell'analisi micromeccanica si ottengono gli andamenti del flusso di calore che si registrano localmente sul RUC. In Figura 8.8 è riportato il flusso di calore lungo la coordinata y del

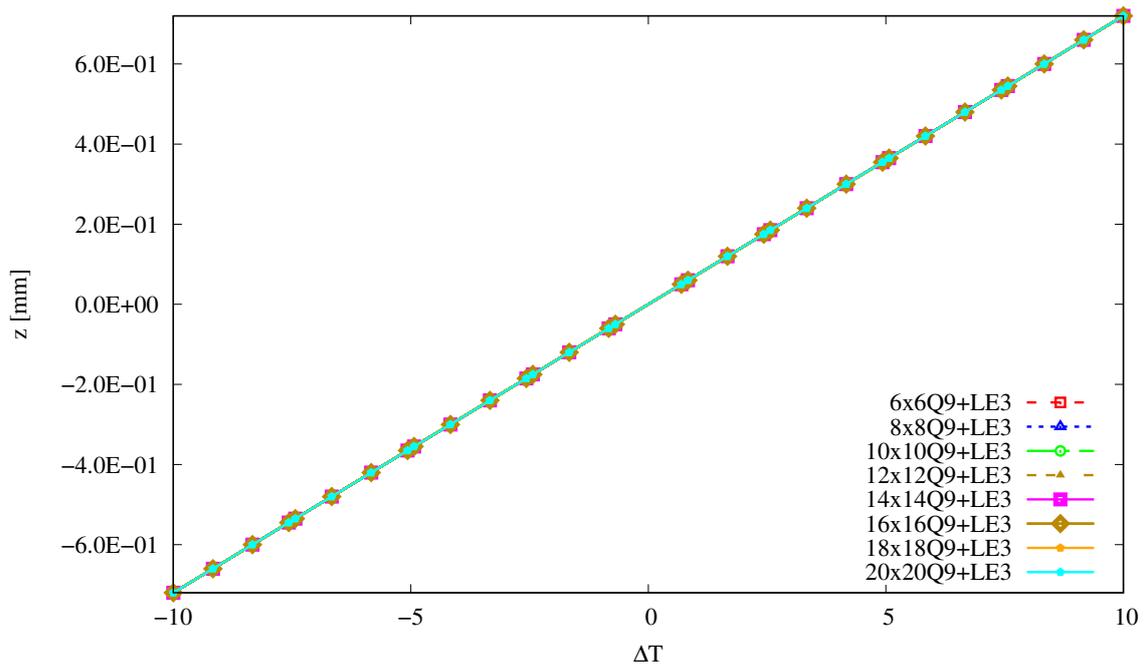


Figura 8.5: Andamento campo di variazione lungo lo spessore nel punto P della lamina per differenti mesh attraverso l'uso della tecnica LW.

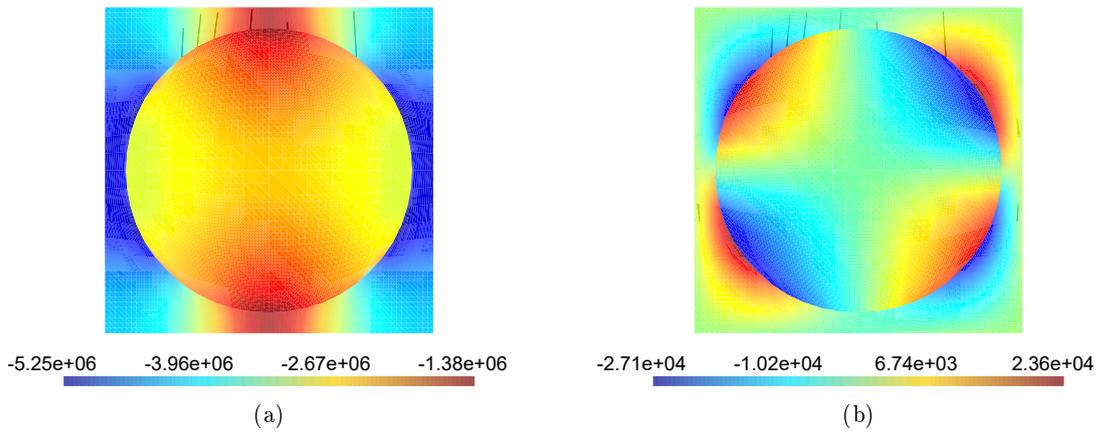
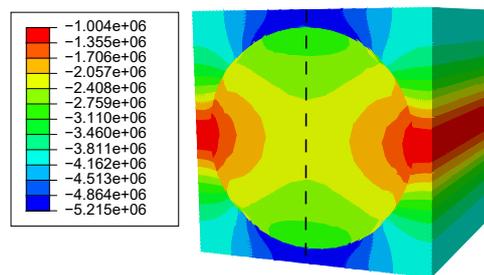


Figura 8.6: Campo di tensione σ_{33} e σ_{13} locale a seguito dell'introduzione del campo di deformazione in tabella 8.7.

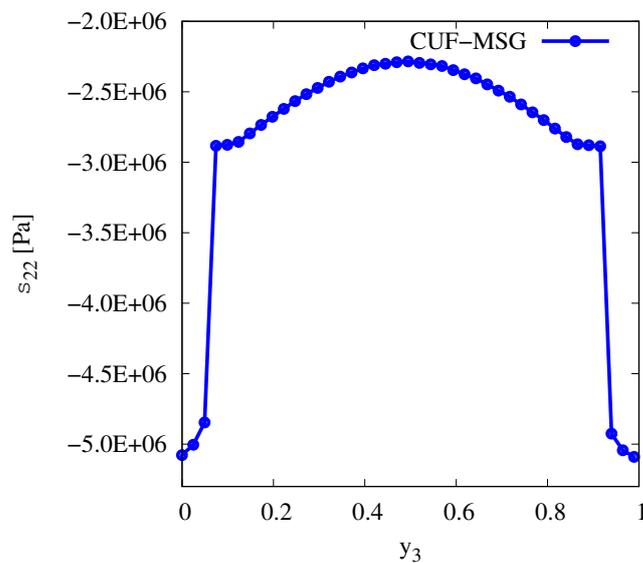
Δz [mm]	ΔT_{i-1} [K]	ΔT_{i+1} [K]	∇T_z [K/mm]
0.06	7.57	9.17	13.33

Tabella 8.8: Stato di deformazione e variazione di temperatura locale della piastra in P a $z = 0.6$ [mm] per la mesh selezionata.

RUC, l'andamento presenta delle zone a flusso positivo e negativo antisimmetriche.



(a)



(b)

Figura 8.7: σ_{22} risultante dall'introduzione dello stato di deformazione in Tabella 8.7, diagrammata lungo la direzione y_3 del RUC.

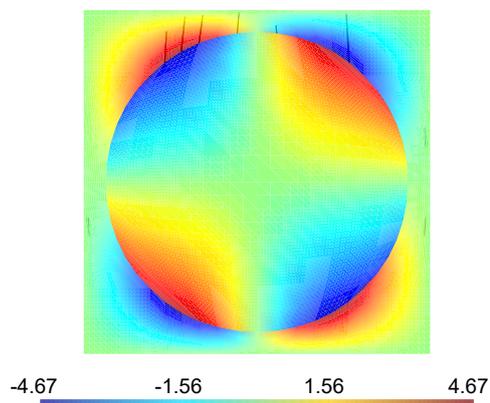
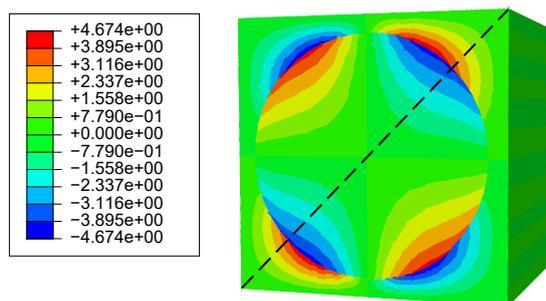
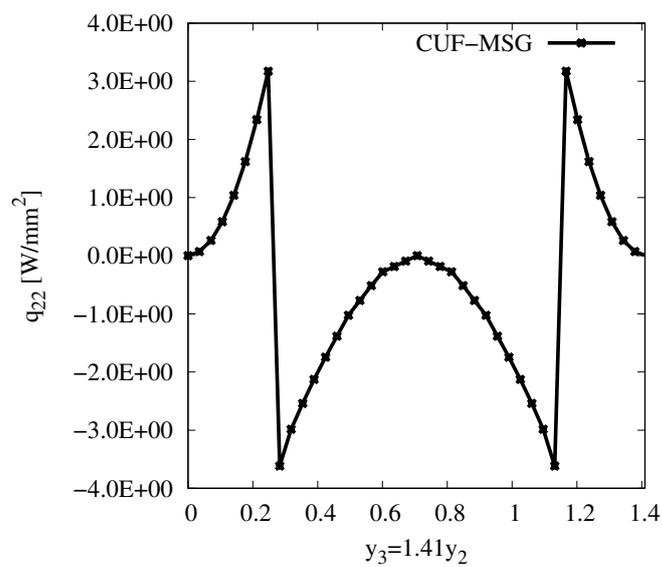


Figura 8.8: Flusso di calore locale q_{22} a seguito dell'introduzione del gradiente di temperatura lungo z riportato in tabella 8.8.



(a)



(b)

Figura 8.9: q_{22} risultante dall'introduzione del gradiente di temperatura lungo z ∇T_z , diagrammata lungo la diagonale del RUC.

Capitolo 9

Conclusioni

In questo lavoro è stata sviluppata una tecnica di calcolo basata su modelli trave avanzati per analisi micromeccaniche igro-termo-elastiche di materiali compositi eterogenei, implementata in un modello di calcolo multiscala termo-elastico.

In questo metodo di calcolo micromeccanico la direzione principale dei costituenti è discretizzata attraverso elementi finiti trave, e le altre due direzioni diventano la sezione trasversale del modello unidimensionale. Grazie alle caratteristiche MSG è possibile disaccoppiare le tradizionali analisi strutturali in modelli multiscala che comprendono un'analisi globale e una locale, in grado di fornire il set completo delle proprietà effettive di materiali anisotropi e le soluzioni relative ai campi locali con un unico lancio del codice di calcolo.

Il presente metodo basato su MSG e sulla formulazione CUF consente di omogeneizzare i costituenti del materiale composito al fine di ottenere le effettive proprietà igro-termo-elastiche, incluse le proprietà elastiche, i coefficienti di espansione termica, i calori specifici, i coefficienti di conducibilità termica e di diffusività, simultaneamente in differenti direzioni con un singolo lancio del codice. Inoltre, consente di ricavare i campi locali sulla struttura in termini di risposte globali del materiale. Il livello di accuratezza delle analisi dipende dalle funzioni di fluttuazione scelte. Questa tecnica risulta molto più efficiente rispetto a quegli approcci in cui sono richiesti molteplici analisi sotto differenti condizioni di carico per determinare le proprietà del materiale nelle diverse direzioni caratteristiche.

La seguente teoria è stata implementata in un codice di calcolo che presenta dei notevoli vantaggi, ad esempio, rispetto alle convenzionali analisi sull'RVE, in cui le proprietà effettive si ricavano attraverso delle tecniche di analisi numerica simili alle prove sperimentali mentre, il flusso di calore da un'analisi separata. Questo metodo rende superfluo ogni successivo step di postprocessing sui dati che introdurrebbe approssimazioni nei risultati. Nel presente metodo è possibile individuare delle caratteristiche uniche per le analisi sul RUC riassumibili in due punti:

- Nelle teorie trave impiegate si utilizzano le funzioni di espansione HLE di alto ordine non iso-parametriche, che permettono una tecnica di mappatura avanzata che consente di ottenere una qualsiasi descrizione matematica delle curvature presenti nel modello, e consentono di catturare la complessa distribuzione, ad esempio, di concentrazioni di tensioni che si registrano tra matrice e fibra. In questo modo si ricava una descrizione esatta dei costituenti con il minimo numero di domini necessari;
- La discretizzazione del modello è fissata, per cui la convergenza delle soluzioni è raggiunta solamente attraverso l'aumento dell'ordine dei polinomi utilizzati, che rappresenta l'unico parametro dell'analisi. Questa caratteristica consente agli utilizza-

tori di risparmiare il tempo altrimenti necessario nella fase di modellazione, evitando processi iterativi per raffinare la mesh che si intende utilizzare.

L'affidabilità delle soluzioni, sia in termini di proprietà effettive che di campi locali, è validata attraverso il confronto con il codice di calcolo basato sul metodo MSG *SwiftComp*TM [45], e con le soluzioni di riferimento presenti in letteratura.

9.1 Sviluppi futuri

In questo lavoro è stata mostrata una prima applicazione di modelli CUF 1D per modellare problemi igro-termo-elastici micromeccanici implementabili in codici di calcolo multiscala. Il lavoro rappresenta il punto di inizio di una serie di possibili sviluppi e applicazioni realizzabili in futuro, tra cui:

- Estensione del calcolo delle effettive proprietà dielettriche e magnetiche di materiali compositi eterogenei grazie alla similitudine tra i problemi relativi alla conducibilità termica e alle caratteristiche igroscopiche con le proprietà elettriche e magnetiche dei materiali;
- Implementazione di una terza fase nel codice di analisi micromeccanica. Questo è il caso, ad esempio, di compositi a matrice ceramica (CMCs) in cui spesso è previsto un terzo elemento di coating tra matrice e fibra per garantire un'interazione corretta tra le due. In questo modo è possibile trasferire la sollecitazione dalla matrice alla fibra in modo corretto;
- Estensione dell'analisi a materiali compositi della tipologia textile, ovvero che presentano una trama particolare;
- Applicazione dell'analisi multiscala sviluppata a metamateriali e compositi Variable Angle Tow (VATs).

Appendice A

Espansioni polinomiali HLE

Si riporta la forma estesa delle funzioni HLE dal primo all'ottavo. Ogni polinomio di ordine $p + 1$ contiene al suo interno i termini di ordine p :

- $p = 1$

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s) \\F_2 &= \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s) \\F_3 &= \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s) \\F_4 &= \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)\end{aligned}\tag{A.1}$$

- $p = 2$

$$\begin{aligned}F_5 &= \frac{1}{2}(1 - s)\sqrt{6}\frac{r^2-1}{4} \\F_6 &= \frac{1}{2}(1 + r)\sqrt{6}\frac{s^2-1}{4} \\F_7 &= \frac{1}{2}(1 + s)\sqrt{6}\frac{r^2-1}{4} \\F_8 &= \frac{1}{2}(1 - r)\sqrt{6}\frac{s^2-1}{4}\end{aligned}\tag{A.2}$$

- $p = 3$

$$\begin{aligned}F_9 &= \frac{1}{2}(1 - s)\sqrt{10}r\frac{r^2-1}{4} \\F_{10} &= \frac{1}{2}(1 + r)\sqrt{10}s\frac{s^2-1}{4} \\F_{11} &= \frac{1}{2}(1 + s)\sqrt{10}r\frac{r^2-1}{4} \\F_{12} &= \frac{1}{2}(1 - r)\sqrt{10}s\frac{s^2-1}{4}\end{aligned}\tag{A.3}$$

- $p = 4$

$$\begin{aligned}
F_{13} &= \frac{1}{2}(1-s)\sqrt{14}\frac{(5r^2-1)(r-1)(r+1)}{16} \\
F_{14} &= \frac{1}{2}(1+r)\sqrt{14}\frac{(5s^2-1)(s-1)(s+1)}{16} \\
F_{15} &= \frac{1}{2}(1+s)\sqrt{14}\frac{(5r^2-1)(r-1)(r+1)}{16} \\
F_{16} &= \frac{1}{2}(1-r)\sqrt{14}\frac{(5s^2-1)(s-1)(s+1)}{16} \\
F_{17} &= \frac{1}{16}\sqrt{6}(r^2-1)\sqrt{6}(s^2-1)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

- $p = 5$

$$\begin{aligned}
F_{18} &= \frac{1}{2}(1-s)3\sqrt{2}r\frac{(7r^2-3)(r-1)(r+1)}{16} \\
F_{19} &= \frac{1}{2}(1+r)3\sqrt{2}s\frac{(7s^2-3)(s-1)(s+1)}{16} \\
F_{20} &= \frac{1}{2}(1+s)3\sqrt{2}r\frac{(7r^2-3)(r-1)(r+1)}{16} \\
F_{21} &= \frac{1}{2}(1-r)3\sqrt{2}s\frac{(7s^2-3)(s-1)(s+1)}{16} \\
F_{22} &= \frac{1}{16}\sqrt{10}r(r^2-1)\sqrt{6}(s^2-1) \\
F_{23} &= \frac{1}{16}\sqrt{6}(r^2-1)\sqrt{10}s(s^2-1)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

- $p = 6$

$$\begin{aligned}
F_{24} &= \frac{1}{2}(1-s)\sqrt{22}(r-1)(r+1)\frac{(21r^4-14r^2+1)}{32} \\
F_{25} &= \frac{1}{2}(1+r)\sqrt{22}(s-1)(s+1)\frac{(21s^4-14s^2+1)}{32} \\
F_{26} &= \frac{1}{2}(1+s)\sqrt{22}(r-1)(r+1)\frac{(21r^4-14r^2+1)}{32} \\
F_{27} &= \frac{1}{2}(1-r)\sqrt{22}(s-1)(s+1)\frac{(21s^4-14s^2+1)}{32} \\
F_{28} &= \frac{1}{64}\sqrt{14}(5r^2-1)(r-1)(r+1)\sqrt{6}(s^2-1) \\
F_{29} &= \frac{1}{64}\sqrt{10}r(r^2-1)\sqrt{10}s(s^2-1) \\
F_{30} &= \frac{1}{64}\sqrt{6}(r^2-1)\sqrt{14}(5s^2-1)(s-1)(s+1)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

• $p = 7$

$$\begin{aligned}
F_{31} &= \frac{1}{2}(1-s)\sqrt{26}r(r-1)(r+1)\frac{(33r^4-30r^2+5)}{32} \\
F_{32} &= \frac{1}{2}(1+r)\sqrt{26}s(s-1)(s+1)\frac{(33s^4-30s^2+5)}{32} \\
F_{33} &= \frac{1}{2}(1+s)\sqrt{26}r(r-1)(r+1)\frac{(33r^4-30r^2+5)}{32} \\
F_{34} &= \frac{1}{2}(1-r)\sqrt{26}s(s-1)(s+1)\frac{(33s^4-30s^2+5)}{32} \\
F_{35} &= \frac{1}{64}3\sqrt{2}r(7r^2-3)(r-1)(r+1)\sqrt{6}(s^2-1) \\
F_{36} &= \frac{1}{64}\sqrt{14}(5r^2-1)(r-1)(r+1)\sqrt{10}s(s^2-1) \\
F_{37} &= \frac{1}{64}\sqrt{10}r(r^2-1)\sqrt{14}(5s^2-1)(s-1)(s+1) \\
F_{38} &= \frac{1}{64}\sqrt{6}(r^2-1)3\sqrt{2}s(7s^2-3)(s-1)(s+1)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

• $p = 8$

$$\begin{aligned}
F_{39} &= \frac{1}{2}(1-s)\sqrt{30}(r-1)(r+1)\frac{(429r^6-495r^4+135r^2-5)}{256} \\
F_{40} &= \frac{1}{2}(1+r)\sqrt{30}(s-1)(s+1)\frac{(429s^6-495s^4+135s^2-5)}{256} \\
F_{41} &= \frac{1}{2}(1+s)\sqrt{30}(r-1)(r+1)\frac{(429r^6-495r^4+135r^2-5)}{256} \\
F_{42} &= \frac{1}{2}(1-r)\sqrt{30}(s-1)(s+1)\frac{(429s^6-495s^4+135s^2-5)}{256} \\
F_{43} &= \frac{1}{128}\sqrt{22}(r-1)(r+1)(21r^4-14r^2+1)\sqrt{6}(s^2-1) \\
F_{44} &= \frac{1}{64}3\sqrt{2}r(7r^2-3)(r-1)(r+1)\sqrt{10}s(s^2-1) \\
F_{45} &= \frac{1}{256}\sqrt{14}r(5r^2-1)(r-1)(r+1)\sqrt{14}s(5s^2-1)(s-1)(s+1) \\
F_{46} &= \frac{1}{64}\sqrt{10}r(r^2-1)3\sqrt{2}s(7s^2-3)(s-1)(s+1) \\
F_{47} &= \frac{1}{128}\sqrt{6}(r^2-1)\sqrt{22}s(s-1)(s+1)(21s^4-14s^2+1)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Appendice B

Matrici FN del problema termo-elastico

B.1 $E^{\tau sij}$

Si riporta l'espressione estesa della matrice fondamentale del nucleo del problema termo-elastico $\mathbf{E}^{\tau sij}$ di dimensioni 3×3 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{11}^{\tau sij} &= C_{11} \int_l N_{i,y_1} N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau s} + C_{55} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_3^s, y_3} + C_{66} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_2^s, y_2} \\
 \mathbf{E}_{12}^{\tau sij} &= C_{21} \int_l N_{i,y_1} N_j dy_1 S_{\tau s, y_2} + C_{66} \int_l N_i N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau, y_2^s} \\
 \mathbf{E}_{13}^{\tau sij} &= C_{31} \int_l N_{i,y_1} N_j dy_1 S_{\tau s, y_3} + C_{55} \int_l N_i N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau, y_3^s} \\
 \mathbf{E}_{21}^{\tau sij} &= C_{21} \int_l N_i N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau, y_2^s} + C_{66} \int_l N_{i,y_1} N_j dy_1 S_{\tau s, y_2} \\
 \mathbf{E}_{22}^{\tau sij} &= C_{22} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_2^s, y_2} + C_{44} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_3^s, y_3} + C_{66} \int_l N_{i,y_1} N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau s} \\
 \mathbf{E}_{23}^{\tau sij} &= C_{32} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_2^s, y_3} + C_{44} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_3^s, y_2} \\
 \mathbf{E}_{31}^{\tau sij} &= C_{31} \int_l N_i N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau, y_3^s} + C_{55} \int_l N_{i,y_1} N_j dy_1 S_{\tau s, y_3} \\
 \mathbf{E}_{32}^{\tau sij} &= C_{32} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_3^s, y_2} + C_{44} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_2^s, y_3} \\
 \mathbf{E}_{33}^{\tau sij} &= C_{33} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_3^s, y_3} + C_{44} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau, y_2^s, y_2} + C_{66} \int_l N_{i,y_1} N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau s}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

in cui S rappresenta gli integrali delle espansioni sulla superficie trasversale definiti come:

$$\begin{aligned}
 S_{\tau s} &= \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega & S_{\tau, y_2^s, y_2} &= \int_{\Omega} F_{\tau, y_2} F_{s, y_2} d\Omega & S_{\tau, y_3^s, y_3} &= \int_{\Omega} F_{\tau, y_3} F_{s, y_3} d\Omega \\
 S_{\tau, y_2^s, y_3} &= \int_{\Omega} F_{\tau, y_2} F_{s, y_3} d\Omega & S_{\tau, y_3^s, y_2} &= \int_{\Omega} F_{\tau, y_3} F_{s, y_2} d\Omega & S_{\tau s, y_3} &= \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s, y_3} d\Omega \\
 S_{\tau s, y_2} &= \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s, y_2} d\Omega & S_{\tau, y_2^s} &= \int_{\Omega} F_{\tau, y_2} F_s d\Omega & S_{\tau, y_3^s} &= \int_{\Omega} F_{\tau, y_3} F_s d\Omega
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

B.2 $D_{h\varepsilon}^{sj}$

Si riporta l'espressione estesa della matrice fondamentale del nucleo del problema termoelastico $D_{h\varepsilon}^{sj}$ di dimensioni 3×6 :

$$\begin{aligned}
D_{h\varepsilon 11}^{\tau i} &= C_{11} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega & D_{h\varepsilon 12}^{\tau i} &= C_{12} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega \\
D_{h\varepsilon 13}^{\tau i} &= C_{13} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega & D_{h\varepsilon 15}^{\tau i} &= C_{55} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega \\
D_{h\varepsilon 16}^{\tau i} &= C_{66} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega \\
D_{h\varepsilon 21}^{\tau i} &= C_{12} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega & D_{h\varepsilon 22}^{\tau i} &= C_{22} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega \\
D_{h\varepsilon 23}^{\tau i} &= C_{23} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega & D_{h\varepsilon 24}^{\tau i} &= C_{44} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega \\
D_{h\varepsilon 26}^{\tau i} &= C_{66} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega \\
D_{h\varepsilon 31}^{\tau i} &= C_{13} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega & D_{h\varepsilon 32}^{\tau i} &= C_{23} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega \\
D_{h\varepsilon 33}^{\tau i} &= C_{33} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega & D_{h\varepsilon 34}^{\tau i} &= C_{44} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega \\
D_{h\varepsilon 25}^{\tau i} &= C_{55} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega
\end{aligned} \tag{B.3}$$

B.3 $D_{h\theta}^{sj}$

Si riporta l'espressione estesa della matrice fondamentale del nucleo del problema termoelastico $D_{h\theta}^{sj}$ di dimensioni 3×1 :

$$\begin{aligned}
D_{h\theta 11}^{\tau i} &= \beta_{yy} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega + \beta_{yz} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega + \beta_{xy} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega \\
D_{h\theta 21}^{\tau i} &= \beta_{xx} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega + \beta_{xz} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega + \beta_{xy} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega \\
D_{h\theta 31}^{\tau i} &= \beta_{zz} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_3} d\Omega + \beta_{xz} \int_l N_i dy_1 \int_\Omega F_{\tau,y_2} d\Omega + \beta_{yz} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_\Omega F_\tau d\Omega
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Appendice C

Deomogeneizzazione micromeccanica termo-elastica

C.1 Composito square-pack B/Al

Di seguito si riportano gli andamenti delle tensioni locali σ_{22} e σ_{23} che si registrano a seguito dell'introduzione di una variazione di temperatura pari a $\Delta T = 100$ e una deformazione locale lungo l'asse y_1 pari a 1 per il composito B/Al

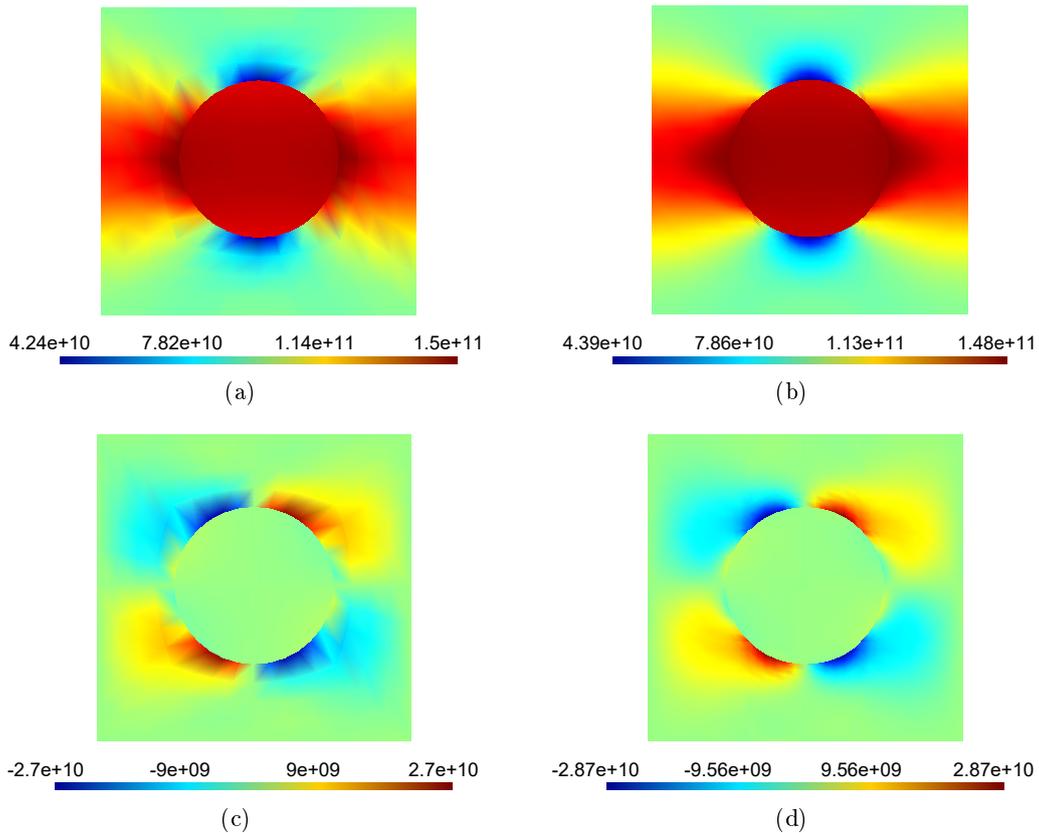


Figura C.1: Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K e una deformazione $\varepsilon_{11} = 1$ (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG, (c) σ_{23} Swift-Comp (d) σ_{23} CUF-MSG.

C.2 Composito hexa-pack glass/epoxy

Di seguito si riportano gli andamenti delle tensioni locali σ_{22} e σ_{23} che si registrano a seguito dell'introduzione di una variazione di temperatura pari a $\Delta T = 100$ K e una deformazione locale lungo l'asse y_1 pari a 1 per il composito glass/epoxy.

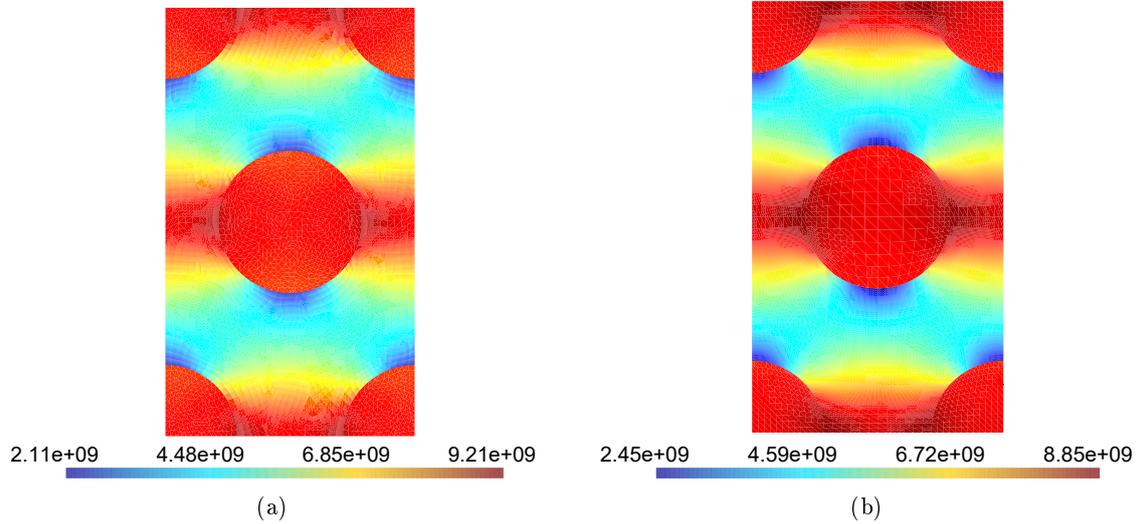


Figura C.2: Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K e $\epsilon_{11} = 1$ (a) σ_{22} Swift-Comp (b) σ_{22} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.

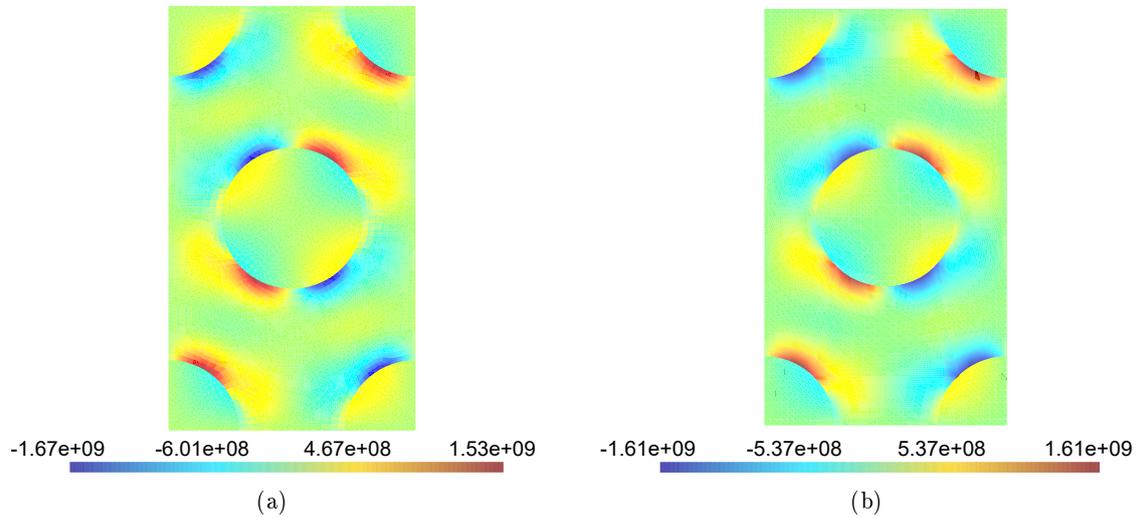


Figura C.3: Risultati con introduzione di $\Delta T = 100$ K e $\epsilon_{11} = 1$ (a) σ_{23} Swift-Comp (b) σ_{23} CUF-MSG hexagonal-pack glass/epoxy.

Appendice D

Matrici FN del problema di conducibilità termica e igroscopico

D.1 $F^{\tau sij}$

Si riporta l'espressione estesa della matrice fondamentale del nucleo del problema di conducibilità termica $F^{\tau sij}$ di dimensioni 1×1 :

$$\begin{aligned}
 F^{\tau sij} = & K_{33} \int_l N_{i,y_1} N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau s} + K_{23} \int_l N_i N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau,y_2 s} + K_{13} \int_l N_i N_{j,y_1} dy_1 S_{\tau,y_3 s} + \\
 & + K_{23} \int_l N_{i,y_1} N_j dy_1 S_{\tau s,y_2} + K_{22} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau,y_2 s,y_2} + K_{12} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau,y_3 s,y_2} + \\
 & + K_{13} \int_l N_{i,y_1} N_j dy_1 S_{\tau s,y_3} + K_{12} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau,y_2 s,y_3} + K_{11} \int_l N_i N_j dy_1 S_{\tau,y_3 s,y_3}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

in cui S rappresenta gli integrali delle espansioni sulla superficie trasversale definiti come

$$\begin{aligned}
 S_{\tau s} &= \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega & S_{\tau,y_2 s,y_2} &= \int_{\Omega} F_{\tau,y_2} F_{s,y_2} d\Omega & S_{\tau,y_3 s,y_3} &= \int_{\Omega} F_{\tau,y_3} F_{s,y_3} d\Omega \\
 S_{\tau,y_2 s,y_3} &= \int_{\Omega} F_{\tau,y_2} F_{s,y_3} d\Omega & S_{\tau,y_3 s,y_2} &= \int_{\Omega} F_{\tau,y_3} F_{s,y_2} d\Omega & S_{\tau s,y_3} &= \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,y_3} d\Omega \\
 S_{\tau s,y_2} &= \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,y_2} d\Omega & S_{\tau,y_2 s} &= \int_{\Omega} F_{\tau,y_2} F_s d\Omega & S_{\tau,y_3 s} &= \int_{\Omega} F_{\tau,y_3} F_s d\Omega
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

D.2 $K_{h\phi}^{\tau i}$

Si riporta l'espressione estesa della matrice fondamentale del nucleo del problema di conducibilità termica $K_{h\phi}^{\tau i}$ di dimensioni 1×3 :

$$\begin{aligned}
 K_{h\phi 11}^{\tau i} &= K_{33} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau} d\Omega + K_{23} \int_l N_i dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau,y_2} d\Omega + K_{13} \int_l N_i dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau,y_3} d\Omega \\
 K_{h\phi 12}^{\tau i} &= K_{23} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau} d\Omega + K_{22} \int_l N_i dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau,y_2} d\Omega + K_{12} \int_l N_i dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau,y_3} d\Omega \\
 K_{h\phi 13}^{\tau i} &= K_{13} \int_l N_{i,y_1} dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau} d\Omega + K_{12} \int_l N_i dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau,y_2} d\Omega + K_{11} \int_l N_i dy_1 \int_{\Omega} F_{\tau,y_3} d\Omega
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Per il problema delle caratteristiche igroscopiche valgono gli stessi sviluppi riportati, ricordando che le matrici fondamentali del problema diventano $M^{\tau sij}$ e $D_{h\eta}^{\tau i}$.

Appendice E

Deomogeneizzazione analisi multiscala

E.1 Multiscala termo-elastica

Di seguito si riporta l'andamento delle tensioni σ_{11} , σ_{22} , σ_{23} e σ_{12} che si registrano localmente sul RUC per il problema termo-elastico.

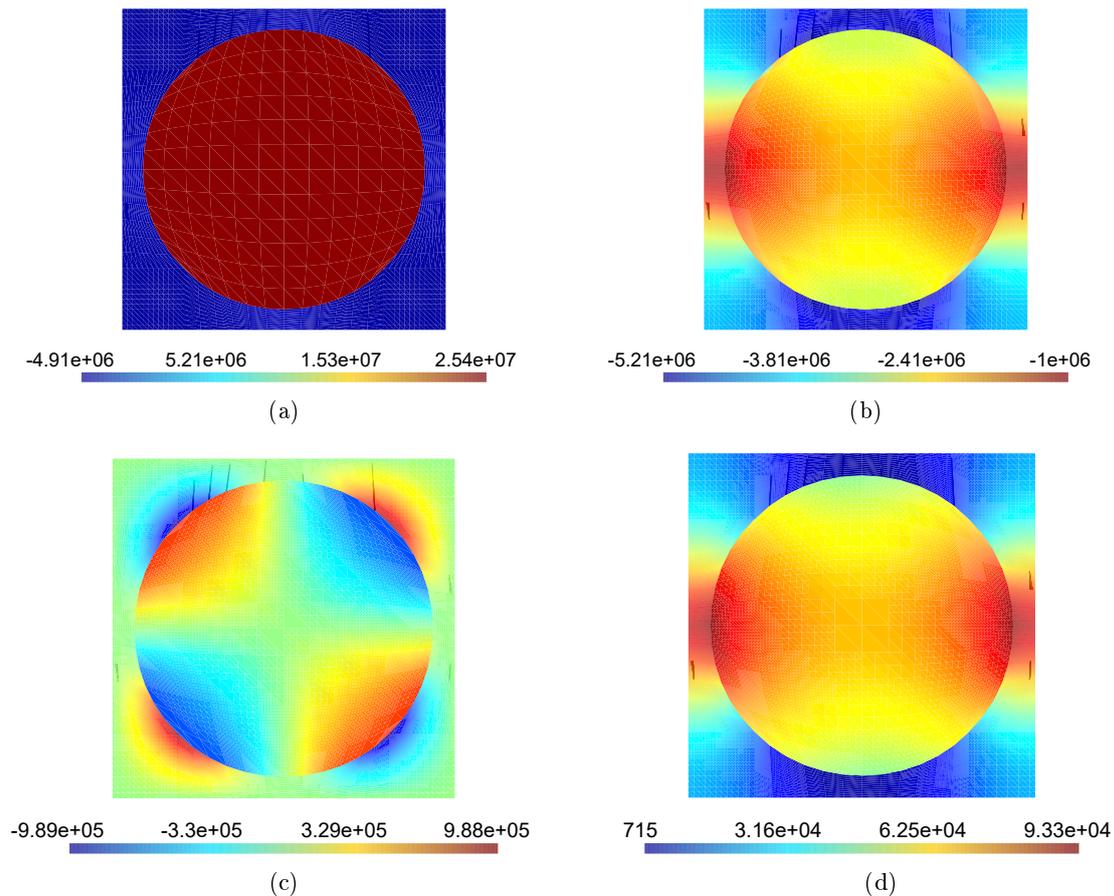


Figura E.1: Campo di tensione (a) σ_{11} , (b) σ_{22} , (c) σ_{23} e (d) σ_{12} locale a seguito dell'introduzione del campo di deformazione in tabella 8.7.

Bibliografia

- [1] E. Carrera A. Pagani, A.G. de Miguel. Component-wise analysis of laminated structures by hierarchical refined models with mapping features and enhanced accuracy at layer to fiber-matrix scales. *Mechanics Of Advanced Materials And Structures*, 2018.
- [2] J. Aboudi. A continuum theory for fiber-reinforced elastic-viscoplastic composites. *International Journal of Engineering Science*, 20(5):605–621, 1982.
- [3] J. Aboudi, S.M. Arnold, and B.A. Bednarczyk. *Practical Micromechanics of Composite Materials*. 2021.
- [4] J Aboudi, M.J. Pineda, and SM Arnold. Linear thermoelastic higher-order theory for periodic multiphase materials. *Journal of Applied Mechanics*, 68(5):697–707, 2001.
- [5] S. Biamino. *Dispense del corso di materiali per applicazioni aerospaziali*. Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Torino, 2020.
- [6] R. S. Vaidya C. T. Sun. Prediction of composite properties from a representative volume element. *Journal of Applied Mechanics*, 56:171–179, 1996.
- [7] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, and E. Zappino. *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*. 2014.
- [8] E. Carrera, A.G. de Miguel, and A. Pagani. Hierarchical theories of structures based on legendre polynomial expansions with finite element applications. *International Journal of Mechanical Sciences*, 120:286–300, 2017.
- [9] A.G. de Miguel, A. Pagani, W. Yu, and E. Carrera. Micromechanics of periodically heterogeneous materials using higher-order beam theories and the mechanics of structure genome. *Composite Structures*, 180:484–496, 2017.
- [10] A. Ciuffreda E. Carrera. Closed-form solutions to assess multilayered-plate theories for various thermal stress problems. *Journal of Thermal Stresses*, 27:1001–1031, 2004.
- [11] A. Pagani E. Carrera. Evaluation of the accuracy of classical beam fe models via locking-free hierarchically refined elements. *International Journal of Mechanical Sciences*, 100:169–179, 2015.
- [12] M. Cinefra E. Carrera. *Fondamenti di meccanica strutturale*. 2017.
- [13] M. Cinefra E. Carrera, F.A. Fazzolari. *Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells computational modelling and applications*. 2016.
- [14] M. Petrolo E. Carrera, G. Giunta. *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*. 2011.

- [15] M. Petrolo E. Carrera, M. Maiarú. Component-wise analysis of laminated anisotropic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 49:1839–1851, 2012.
- [16] M. Petrolo E. Zappino E. Carrera, A. Pagani. A component-wise approach in structural analysis. *Computational Methods for Engineering Science*, 0, 2012.
- [17] M.H. Nagaraj M. Delicata E. Carrera, M. Petrolo. Evaluation of the influence of voids on 3d representative volume elements of fiber-reinforced polymer composites using cut micromechanics. *Composite Structures*, 254, 2020.
- [18] A.J.M. Ferreira J.N. Reddy F. Moleiro, E. Carrera. Hygro-thermo-mechanical modelling and analysis of multilayered plates with embedded functionally graded material layers. *Composite Structures*, 33, 2020.
- [19] S. W. Tsai G. S. Springer. Thermal conductivities of unidirectional materials. *J. Composite Materials*, 1(2):166–173, 1967.
- [20] W.J. Gordon and C.A. Hall. Transfinite element methods: Blending-function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numerische Mathematik*, 21:109–129, 1973.
- [21] Z. Hashin. Assessment of the self consistent scheme approximation: Conductivity of particulate composites. *J. Composite Materials*, 2(3):284–300, 1968.
- [22] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(4):343–352, 1962.
- [23] B. Hassani and E. Hinton. A review of homogenization and topology optimization i—homogenization theory for media with periodic structure. *Computers & Structures*, 69(6):707–717, 1998.
- [24] R. Hill. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 65(5):349, 1952.
- [25] Qian Zhang Bohong Gu Baozhong Sun Kai Dong, Kui Liu. Experimental and numerical analyses on the thermal conductive behaviors of carbon fiber/epoxy plain woven composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 102:501–517, 2016.
- [26] X. Liu, B. Peng, and W. Yu. Multiscale modeling of the effective thermal conductivity of 2d woven composites by mechanics of structure genome and neural networks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 179:121673, 2021.
- [27] J. Llorca, C. González, J.M. Molina-Aldareguía, J. Segurado, R. Seltzer, F. Sket, M. Rodríguez, S. Sádaba, R. Muñoz, and L.P. Canal. Multiscale modeling of composite materials: a roadmap towards virtual testing. *Advanced materials*, 23(44):5130–5147, 2011.
- [28] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5):571–574, 1973.
- [29] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. 2013.

- [30] A. Pagani, A.G. de Miguel, and E. Carrera. Cross-sectional mapping for refined beam elements with applications to shell-like structures. *Computational Mechanics*, 59(6):1031–1048, 2017.
- [31] M. Paley and J. Aboudi. Micromechanical analysis of composites by the generalized cells model. *Mechanics of materials*, 14(2):127–139, 1992.
- [32] M. Petrolo. *Advances in Predictive Models and Methodologies for Numerically Efficient Linear and Nonlinear Analysis of Composites*. 2019.
- [33] András Reuß. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 9(1):49–58, 1929.
- [34] B.W. Rosen and Z. Hashin. Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 8(2):157–173, 1970.
- [35] Sungkha777. Hierarchy of micromechanics-based analysis procedure for composite structures, 2010.
- [36] KK Tamma and AF Avila. An integrated micro/macro modeling and computational methodology for high temperature composites. *Thermal Stresses*, 5:143–256, 1999.
- [37] W. Voigt. Theoretische studien über die elasticitätsverhältnisse der krystalle. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 34:3–51, 1887.
- [38] T. Tang W. Yu. A variational asymptotic micromechanics model for predicting conductivities of composite materials. *Journal of Mechanics of materials and structures*, 2(9):1813–1830, 2007.
- [39] Federico Gasco Johnathan Goodsell Xin Liu, Wenbin Yu. A unified approach for thermoelastic constitutivemodeling of composite structures. *Composites Part B*, 172:649–659, 2019.
- [40] M. Gueguen D. Tandiang M. Gigliotti Y. Sinchuk, Y. Pannier. Compute d-tomography base d modeling and simulation of moisture diffusion and induced swelling in textile composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 54:88–96, 2018.
- [41] Z. Huang Y. Wang. Analytical micromechanics models for elastoplastic behavior of long fibrous composites: A critical review and comparative study. *Materials (Basel)*, 11(10):143–256, 2018.
- [42] W. Yu. A unified theory for constitutive modeling of composites. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 11(4):379–411, 2016.
- [43] W. Yu, D.H. Hodges, and J.C. Ho. Variational asymptotic beam sectional analysis—an updated version. *International Journal of Engineering Science*, 59:40–64, 2012.
- [44] W. Yu and X. Liu. Swiftcomp, January 2017.
- [45] W. Yu and T. Tang. A variational asymptotic micromechanics model for predicting thermoelastic properties oh heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 44:7510–7525, 2007.

Ringraziamenti

Vorrei concludere con alcune parole di ringraziamento nei confronti delle persone che mi hanno supportato nella realizzazione di questo lavoro.

Ci tengo a ringraziare il Professor Alfonso Pagani per avermi dato la possibilità di approfondire gli argomenti di questa tesi e per aver creduto in me, consentendomi di trovare la mia strada. La sua professionalità e competenza sono state di estrema ispirazione.

Ringrazio Alberto Racionero Sánchez-Majano, per avermi seguito e guidato in questi mesi e per essere stato un amico indispensabile. Tutto questo lavoro non sarebbe stato possibile senza di lui.

Ringrazio immensamente i dottorandi dell'Ufficio 30, tutti i membri del *MUL*² e il Professor Erasmo Carrera, per avermi accolto nel loro gruppo e per tutti i momenti di confronto costruttivo avuti nel corso di questi mesi.

Infine, ringrazio la mia famiglia e i miei affetti più cari per avermi sostenuto in ogni momento e per avermi aiutato a diventare la persona che sono oggi.