

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi global/local di pannelli sandwich in materiale composito



Relatori

prof. Alfonso Pagani
prof. Riccardo Augello
prof. Erasmo Carrera
ing. Enea Marco

Candidato

Simone Tarditi

Anno Accademico 2021-2022

Alla mia famiglia

Sommario

Questo lavoro propone un'analisi global/local su pannelli sandwich costituiti da materiali compositi.

Il tipo di analisi in oggetto parte da un primo studio globale lineare della struttura, inizialmente modellizzata come una piastra bidimensionale stratificata. Questo viene effettuato grazie al programma commerciale Femap che utilizza un metodo di risoluzione agli elementi finiti. Successivamente, vengono studiati gli andamenti delle tensioni normali e tangenziali lungo lo spessore del pannello tramite un'analisi locale tridimensionale che parte dai risultati di quella globale e poi, per determinati elementi della struttura scelti perché considerati più critici, ne approfondisce l'analisi. Per questa seconda parte, viene utilizzato il plug-in MUL2@GL, sviluppato al Politecnico di Torino. Si pone infine particolare attenzione agli indici di failure ed alle loro variazioni negli elementi della struttura considerati più sensibili, in maniera tale da comprenderne il comportamento a rottura e verificarne l'effettiva resistenza ai carichi cui è sottoposta.

Vengono riportati risultati di questo approccio per un pannello a 3 strati in materiale composito, un pannello sandwich laminato a 5 strati, soggetto a carichi di pressione distribuita ma anche di compressione su uno dei lati, ed infine un pannello solare per uso spaziale.

Indice

Elenco delle figure	4
Elenco delle tabelle	7
1 Introduzione	9
1.1 Materiali	10
1.1.1 Laminati	10
1.1.2 Schiume e Honeycomb	10
1.2 Pannelli solari	12
1.2.1 Cenni storici	13
1.2.2 Struttura della cella e dei pannelli	15
1.2.3 Soluzioni di installazione	18
2 Elementi finiti avanzati	21
2.1 Problema elastico	23
2.1.1 Equazioni di equilibrio	24
2.1.2 Condizioni al contorno	25
2.1.3 Relazione deformazioni-spostamenti	26
2.1.4 Legge di Hooke	26
2.2 Principio dei lavori virtuali	28
2.2.1 Forma forte	28
2.2.2 Forma debole	29
2.3 Formulazione unificata di Carrera	31
2.4 Elementi avanzati per strutture laminate	33
2.4.1 Modello Equivalent single layer (ESL)	34
2.4.2 Modello Layer wise (LW)	34
2.4.3 Modello zig-zag	34
3 Omogeneizzazione dei core dei pannelli	37
3.1 Metodo energetico	38
3.1.1 Altezza della cella molto piccola	39

3.1.2	Altezza della cella molto grande	40
4	Analisi Global-Local	43
4.1	Software utilizzati	45
4.1.1	Femap	45
4.1.2	MUL2@GL	46
5	Risultati	49
5.1	Pannello a 3 strati in materiale composito	49
5.1.1	Dati iniziali	50
5.1.2	Analisi globale	51
5.1.3	Analisi locale	53
5.2	Pannello sandwich in materiale composito a 5 strati	58
5.2.1	Dati iniziali	58
5.2.2	Creazione del modello e analisi globale	60
5.2.3	Analisi locale	67
5.2.4	Analisi di failure	80
5.3	Pannello solare	89
5.3.1	Scenario iniziale	89
5.3.2	Analisi globale	92
5.3.3	Analisi locale	96
5.3.4	Analisi di failure	103
6	Conclusioni	111
	Bibliografia	113

Elenco delle figure

1.1	Struttura honeycomb con celle esagonali	11
1.2	Dipinto raffigurante gli specchi progettati da Archimede come arma	13
1.3	Satellite Nimbus1, lanciato nel 1964	14
1.4	Rappresentazione di una cella solare a singola giunzione n-p	16
1.5	Rappresentazione di una cella a tripla giunzione	17
1.6	Satellite con pannelli Body-mounted	18
1.7	Stazione Spaziale Internazionale con pannelli dispiegati	19
2.1	Dominio tridimensionale con carichi applicati	23
2.2	Tensioni normali e tangenziali applicate	24
2.3	Schema della suddivisione della matrice di rigidità in funzione dei vari indici; quello evidenziato in nero è il nucleo fondamentale di un singolo elemento, caratterizzato da indici propri e diversi da ogni altro nucleo	33
3.1	Volume rappresentativo equivalente (sulla sinistra) e porzione di cella con riferimenti cartesiani (sulla destra)	39
4.1	Rappresentazione schematica dell'processo di analisi global/local	45
4.2	Sistemi di riferimento dell'analisi locale per l'elemento CQUAD4	47
5.1	Layup del pannello a 3 strati	50
5.2	Deformazione del pannello a 3 strati soggetto ad una pressione costante in una zona centrale	52
5.3	Convergenza dello spostamento massimo del pannello a 3 strati sottoposto ad una pressione nella zona centrale	53
5.4	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 321 nel sistema materiale	54
5.5	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 321 nel sistema locale	55
5.6	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 321 nel sistema globale	56
5.7	Confronto per la tensione tangenziale σ_{xz}	57
5.8	Layup della piastra	59

5.9	Risultati dell'analisi con mesh 48x48 per una piastra soggetta ad un carico distribuito	61
5.10	Convergenza dello spostamento massimo per un carico distribuito	62
5.11	Convergenza del valore massimo di tensione σ_{yz}	63
5.12	Risultati dell'analisi con mesh 48x48 per una piastra soggetta ad un carico a compressione su un lato	64
5.13	Convergenza dello spostamento massimo per un carico a compressione su un lato	65
5.14	Grafico della convergenza locale della tensione σ_{yz} per il caso di carico a compressione su un lato	66
5.15	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1654 nel sistema materiale	68
5.16	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1654 nel sistema globale	69
5.17	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1654 nel sistema locale	70
5.18	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1519 nel sistema materiale	71
5.19	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1519 nel sistema di riferimento globale	72
5.20	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1519 nel sistema di riferimento locale	73
5.21	Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1219 nel sistema di riferimento materiale	74
5.22	Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1219 nel sistema di riferimento globale	75
5.23	Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1219 nel sistema di riferimento locale	76
5.24	Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1777 nel sistema materiale	77
5.25	Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1777 nel sistema globale	78
5.26	Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1777 nel sistema locale	79
5.27	Indici di failure per tensione e compressione nel caso di carico distribuito	83
5.28	Analisi globale di failure per il pannello caricato con un carico distribuito uniforme	84
5.29	Andamento dell'indice di failure per l'elemento 1715, posto nella zona di massima sollecitazione del pannello	85
5.30	Indici di failure per tensione e compressione nel caso di carico a compressione su un lato	86

5.31	Analisi globale di failure per il pannello caricato con un carico a compressione	87
5.32	Andamento dell'indice di failure calcolato per l'elemento 1098 con il criterio di Hoffman	88
5.33	Layup del pannello solare	90
5.34	Deformazione del pannello solare soggetto ad una pressione distribuita sulla faccia superiore	92
5.35	Convergenza dello spostamento massimo al variare della mesh	93
5.36	Convergenza del valore massimo di σ_{xz} all'aumentare del numero di elementi	94
5.37	Convergenza del valore massimo di σ_{xx} all'aumentare del numero di elementi	95
5.38	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1419 del pannello solare nel sistema materiale	97
5.39	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1419 del pannello solare nel sistema globale	98
5.40	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1419 del pannello solare nel sistema locale	99
5.41	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1695 del pannello solare nel sistema di riferimento materiale	100
5.42	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1695 del pannello solare nel sistema di riferimento globale	101
5.43	Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1695 del pannello solare nel sistema di riferimento locale	102
5.44	Andamento dell'indice di failure calcolato per l'elemento 1716 con il criterio di Hoffman	104
5.45	Analisi globale di failure per il pannello solare	105
5.46	Indici di failure per tensione e compressione per il pannello solare con criterio Hashin 3D	107
5.47	Indici di failure per tensione e compressione per il pannello solare con criterio LaRC05	109

Elenco delle tabelle

5.1	Moduli elastici, moduli di taglio e coefficiente di Poisson del materiale	51
5.2	Spostamenti massimi e tempi richiesti per l'analisi del pannello a 3 strati	52
5.3	Moduli elastici, moduli di taglio e coefficiente di Poisson dei materiali	59
5.4	Spostamenti massimi e tempi richiesti per l'analisi nel caso di carico distribuito	61
5.5	Tensioni tangenziali σ_{yz} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente	62
5.6	Spostamenti massimi e tempi richiesti per l'analisi nel caso di carico a compressione	65
5.7	Tensioni tangenziali σ_{yz} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente	66
5.8	Ammissibili dei due materiali utilizzati	80
5.9	Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura nel caso di carico distribuito	83
5.10	Confronto tra i risultati dell'analisi di failure con Nastran e quella successiva locale col plug-in MUL2 per il caso di carico distribuito	85
5.11	Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura nel caso di carico a compressione	86
5.12	Confronto tra i risultati dell'analisi di failure con Nastran e quella successiva locale col plug-in MUL2 per il caso di carico a compressione	88
5.13	Moduli elastici, di taglio e coefficienti di Poisson dei materiali del pannello solare	91
5.14	Spostamenti massimi e tempi richiesti per l'analisi globale sul pannello solare	93
5.15	Tensioni tangenziali σ_{yz} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente per il caso del pannello solare	94

5.16	Tensioni normali σ_{xx} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente per il caso del pannello solare . . .	95
5.17	Ammissibili dei tre materiali utilizzati nel pannello solare	103
5.18	Confronto tra i risultati dell'analisi di failure con Nastran e quella successiva locale col plug-in MUL2 per il pannello solare	105
5.19	Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura Hashin 3D nel pannello solare	106
5.20	Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura LaRC05 nel pannello solare	108

Capitolo 1

Introduzione

I pannelli sandwich sono strutture in materiale composito in grado di garantire ottime prestazioni di resistenza e rigidità associate ad un peso molto ridotto. Si compongono di due parti:

- Le facce, o pelli, costituite generalmente da materiale composito ad alta resistenza e rigidità, hanno il compito di resistere a flessione e trazione;
- Il core, in materiale a bassa densità e con ridotte proprietà meccaniche, che svolge il compito di trasferire gli sforzi di taglio fra le facce ed aumenta la resistenza flessionale della struttura.

Sono presenti inoltre due strati di materiale adesivo, tra facce e core, che servono a far aderire le due componenti della struttura e permettono di prevenire fratture dovute a sollecitazioni tangenziali fra le due. Lo spessore è costante per ogni parte della struttura, la quale presenta delle facce molto sottili ed un cuore con uno spessore decisamente più elevato per minimizzare notevolmente il peso senza penalizzare le proprietà meccaniche [1].

In svariati campi dell'ingegneria si possono rintracciare applicazioni di strutture sandwich, come ad esempio nel rivestimento di particolari imbarcazioni, sia in ambito militare che civile, nel rivestimento di pannelli interni e flap per grandi aerei come l'Airbus A380 nonché come copertura di edifici. Inoltre, è opportuno sottolineare come uno dei suoi principali impieghi sia quello dei pannelli solari, protagonisti di buona parte del lavoro di analisi qui presentato.

Nelle sezioni successive vengono discusse le caratteristiche principali dei materiali che generalmente compongono un pannello sandwich e viene inoltre approfondito il tema dei pannelli solari.

1.1 Materiali

1.1.1 Laminati

Le facce delle strutture sandwich sono in genere costituite da materiali compositi che garantiscono loro elevate proprietà meccaniche.

I materiali compositi sono caratterizzati dalla presenza di un componente detto matrice, che costituisce la maggior parte del materiale, ed almeno un secondo componente che svolge la funzione di rinforzo. La coesione di due elementi diversi permette di ottenere un materiale finale che garantisce proprietà di resistenza e rigidità molto elevate senza pregiudicare troppo negativamente il peso della struttura [2].

In genere, come materiali di rinforzo si utilizzano fibre, solitamente di vetro, kevlar o carbonio. Questi elementi, di forma allungata, vengono opportunamente orientati nei vari strati del pannello per garantire le adeguate proprietà e definiscono così una struttura di tipo laminato.

La matrice permette invece di mantenere le fibre correttamente orientate, di impedire le propagazioni di cricche potenzialmente dannose ed inoltre permettono di trasferire i carichi alle fibre tramite azioni di taglio. Generalmente le matrici sono costituite da resine.

Negli attuali pannelli sandwich, le resine di cui sono impregnate facce e core svolgono anche la funzione di adesivo.

1.1.2 Schiume e Honeycomb

I core dei pannelli sandwich devono svolgere il compito di aumentare lo spessore della struttura per aumentarne la resistenza a flessione ed allo stesso tempo trasferire gli sforzi di taglio da una pelle all'altra mantenendo così la struttura omogenea. Per mantenere basso il peso della struttura inoltre, devono essere costituiti di materiali a bassa densità, i quali possono comunque avere basse caratteristiche meccaniche ma comunque buona resistenza al taglio. Sono generalmente utilizzate due classi diverse di materiali [3]:

- Schiume, generalmente più economiche e di più facile lavorazione, hanno però proprietà meccaniche più scadenti;
- Honeycomb, più moderne ed efficienti ma anche più costose.

Le seconde sono strutturalmente più interessanti e sono le più utilizzate al momento. Sono strutture con celle a nido d'ape, caratterizzate da buone proprietà meccaniche ma densità molto basse perché costituite appunto da celle vuote

al loro interno. Forma e spessore delle celle dipendono dalle caratteristiche desiderate; le più diffuse sono a forma esagonale.

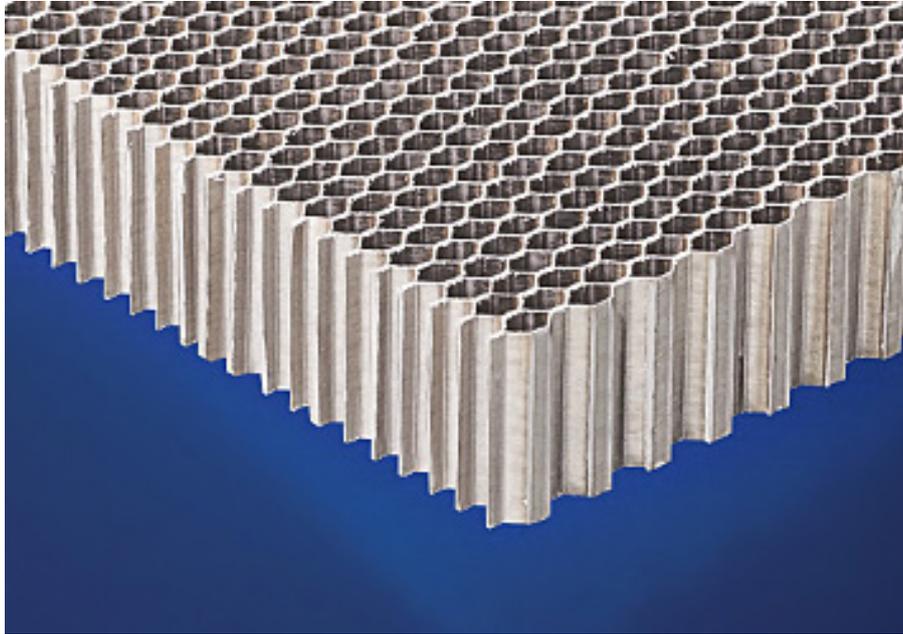


Figura 1.1: Struttura honeycomb con celle esagonali

Il materiale più usato per le honeycomb è il Nomex, un polimero rinforzato con fibre aramidiche, ma è diffuso anche l'utilizzo di materiali metallici, ed in particolare l'alluminio.

Il core in honeycomb è inoltre impregnato di resina per rendere più facile anche l'incollaggio con le facce, essendo quest'ultimo passaggio di costruzione più problematico rispetto al caso con core in schiuma.

1.2 Pannelli solari

In quest'ultima sezione introduttiva vengono presentati gli aspetti costruttivi e funzionali dei pannelli solari, analizzandone anche l'evoluzione nel tempo, con alcuni cenni storici, ed il loro utilizzo nei più svariati ambiti.

Il pannello solare è una struttura che sfrutta l'effetto fotovoltaico per produrre energia elettrica a partire solamente dalla luce solare e dall'energia dei fotoni. L'elemento fondamentale è rappresentato dalle celle solari, componenti solitamente costruite in silicio che vengono collegate fra loro in serie e parallelo a formare il pannello. La potenza per unità di volume generata si può calcolare con la formula seguente:

$$P_{out} = P_{in} * \eta * \cos(\theta) \quad (1.1)$$

Con, in particolare:

- P_{in} : potenza solare per unità di volume. Dipende dalla distanza dal Sole e, nel caso di un satellite in orbita attorno alla Terra vale circa 1367 W/m^2 ;
- η : rendimento delle celle solari, generalmente per i pannelli attualmente in commercio non supera il 40
- θ : angolo di incidenza dei raggi rispetto alla perpendicolare; essendoci, nell'equazione, il coseno di θ , questo termine comporta delle perdite che si annullano solo quando i raggi sono perpendicolari al pannello.

Attualmente si stanno facendo numerosi studi per trovare soluzioni in grado di aumentare il rendimento dei pannelli, il quale non supera il 40% (e si raggiunge questo valore solo in soluzioni sperimentali più moderne). Pertanto, il loro utilizzo al momento trova meno spazio nell'uso quotidiano civile perché vengono preferite forme di produzione di energia più efficienti; in ambito spaziale invece è la soluzione più utilizzata per satelliti e veicoli spaziali che operano nel sistema solare perché garantiscono energia pressoché illimitata. In ogni caso, offrono comunque prestazioni insoddisfacenti nel sistema Solare esterno alla fascia di asteroidi e quindi si preferiscono altre soluzioni come i generatori a radioisotopi.

1.2.1 Cenni storici

Fin dall'antichità si è sempre fatto uso di sistemi che convogliassero l'energia solare per poterla sfruttare nei più svariati ambiti, basti pensare ai sistemi di specchi già utilizzati da antichi Greci e Romani per concentrare i raggi in un punto preciso così da accendere grandi fuochi celebrativi, ma anche fiamme più piccole per cucinare; le leggende attribuiscono addirittura ad Archimede l'invenzione di uno strumento bellico per poter affondare le navi nemiche che utilizzava dei particolari scudi di bronzo per concentrare tutti i raggi solari in un unico punto e generare così una sorta di "raggio laser" [4].



Figura 1.2: Dipinto raffigurante gli specchi progettati da Archimede come arma

Fu poi nel 1837 Edmon Becquerel, un fisico francese, a scoprire l'effetto fotovoltaico determinando come un elettrodo metallico, all'interno di una soluzione conduttiva, emettesse più corrente se esposto alla luce. Sulla base di questa scoperta ed anche grazie alle ricerche di Willoughby Smith, Richard Evans Day e William Grylls Adams sul selenio fotoconduttore, nel 1883 Charles Fritz, inventore statunitense, costruì il primo pannello solare in selenio. Successivamente, nel 1954 Gerald Pearson, Daryl Chapin e Calvin Fuller, grazie anche alle ricerche di inizio XX secolo di Einstein su effetto fotoelettrico e energia dei fotoni, crearono la prima cella solare in silicio, molto più efficiente e pratica dell'antenata in Selenio (anche per la maggior reperibilità del silicio) [5]. Con la corsa allo spazio degli anni '50 e '60, i pannelli solari trovarono subito impiego in ambito spaziale perché comodi, efficienti ed economici come generatori di energia per l'apparecchiatura di bordo. Grazie anche a questo loro utilizzo, fu dato molto spazio alla ricerca per migliorarli e renderli più efficienti.



Figura 1.3: Satellite Nimbus1, lanciato nel 1964

Dagli anni '70 poi, grazie anche alla decisione del presidente statunitense Carter di installare i pannelli solari sul tetto della Casa Bianca, iniziarono ad essere utilizzati sempre maggiormente anche in ambito civile, diventando una concorrente ecologica ai combustibili fossili per la produzione.

Dagli anni 2000 in poi l'interesse verso la produzione di energia elettrica tramite celle solari è sempre aumentato, portando di conseguenza ad una intensa ricerca per aumentarne l'efficienza e ridurre i costi, così da renderle competitive anche sotto il punto di vista economico con i combustibili fossili.

1.2.2 Struttura della cella e dei pannelli

L'elemento fondamentale dei pannelli solari, costruiti collegando in serie più celle solari, sono gli strati di materiale semiconduttore che, in accordo con la teoria dell'effetto fotovoltaico, venendo colpiti dai fotoni carichi di energia, liberano degli elettroni i quali lasciano delle lacune nel materiale e tendono a muoversi in conseguenza ad una differenza di potenziale. Il movimento di questi elettroni genera un'energia elettrica proporzionale all'energia dei fotoni incidenti. Il materiale più diffuso per la costruzione di celle solari è il silicio, sia nella versione policristallina che in quella monocristallina, con quest'ultima che ha rendimenti maggiori ma costi più elevati [6].

Un'altra soluzione più economica prevede l'uso di un film sottile che però comporta rendimenti notevolmente più bassi (8%-11% contro il 10%-25% del silicio [7]) e soprattutto è riservata esclusivamente all'uso terrestre e non è qualificata per l'uso nello spazio.

Più moderno è invece l'utilizzo dell'Arseniuro di Gallio (GaAs) che garantisce prestazioni molto più elevate, fino al 40% di rendimento (ottenuto solo sperimentalmente) per celle a tripla giunzione, ma comporta costi decisamente più elevati anche a causa della rarità della maggior rarità dei materiali per la loro costruzione [8].

Come mostrato in Figura 1.4, la struttura di una cella fotovoltaica prevede, dall'alto verso il basso:

- Un vetro protettivo per proteggere la cella (non rappresentato in figura);
- Una griglia metallica che rappresenta il contatto superiore del circuito;
- Un rivestimento antiriflesso che serve a massimizzare la quantità di luce che raggiunge gli strati di semiconduttore;
- Gli strati di semiconduttore;
- Una piastra metallica che rappresenta il contatto inferiore del circuito;
- Un substrato che compone la struttura.

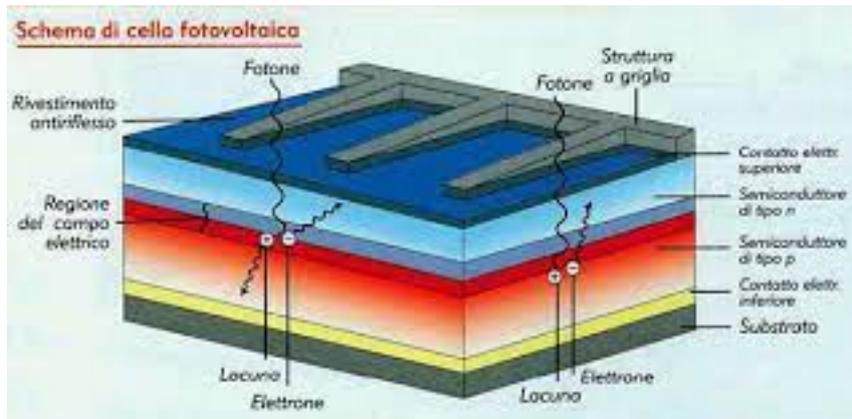


Figura 1.4: Rappresentazione di una cella solare a singola giunzione n-p

Come è possibile vedere dall'immagine, affinché avvenga un'accelerazione degli elettroni conseguentemente alla generazione di un campo elettrico, devono essere presenti almeno due strati di materiale semiconduttore collegati fra loro con una giunzione, di cui uno, lo strato di tipo n, è stato drogato in maniera tale di avere un numero maggiore di elettroni e viene posto di solito superiormente, mentre l'altro, lo strato di tipo p, avrà un numero maggiore di lacune. La cella si comporterà pertanto come un diodo e il campo elettrico che si genererà fra questi due strati favorirà l'accelerazione degli elettroni liberati grazie all'effetto fotovoltaico e quindi porterà alla generazione di una corrente.

Per aumentare ulteriormente il rendimento, sono state progettate delle celle solari all'Arseniuro di Gallio a tripla giunzione che prevedono appunto l'uso di tre diversi strati di materiali semiconduttori, ognuno con una giunzione n-p e collegati fra loro da diodi tunnel, preposti all'assorbimento dell'energia di diverse bande dello spettro solare. In particolare:

- lo strato superiore è in Fosforo di Indio Gallio ed assorbe la luce blu;
- lo strato intermedio, in Arseniuro di Gallio, assorbe lo spettro del visibile;
- lo strato più inferiore, costruito in Germanio, assorbe la radiazione infra-rossa.



Figura 1.5: Rappresentazione di una cella a tripla giunzione

La congiunzione in serie di più celle solari va a costituire il vero e proprio pannello solare, la cui dimensione dipende dalla quantità di energia richiesta ma anche dalla quantità di energia che può produrre ogni singola cella; un pannello costituito da celle con alti rendimenti, come quelle a tripla giunzione poco fa presentate, a parità di energia prodotta risulterà essere più compatto e leggero rispetto ad un pannello costituito da celle al silicio a singola giunzione, poiché ogni singola cella avrà prestazioni molto più elevate e quindi ne serviranno meno per produrre lo stesso quantitativo di energia.

Facendo riferimento infine alla struttura dei pannelli, vengono utilizzati solitamente strutture sandwich come supporto per le celle solari, per garantire una soluzione adeguatamente rigida e leggera. Una soluzione moderna, che tenta di minimizzare ulteriormente il peso strutturale senza comprometterne le caratteristiche meccaniche, prevede l'utilizzo delle celle solari stesse come elemento strutturale all'interno di una struttura sandwich in composito, come presentato negli articoli [9] e [10]. Quindi, anziché progettare una struttura sandwich di supporto per il pannello, si prevede la costruzione di un pannello sandwich asimmetrico con una faccia in polimero rinforzato in fibra di carbonio (CFRP), la faccia superiore in silicio monocristallino ed infine un cuore più spesso in Nomex. Questo tipo di soluzione garantisce prestazioni strutturali più elevate ed anche pesi minori perché le celle diventano parte integrante della struttura e non solo un elemento aggiuntivo funzionale ma pesante.

1.2.3 Soluzioni di installazione

A differenza dei pannelli ad uso terrestre, installati nella totalità dei casi su strutture fisse in zone esposte al Sole per lungo tempo, nell'ambito spaziale si sono diffuse due soluzioni di installazione diverse, entrambe con vantaggi e svantaggi:

- Body-mounted, con i pannelli installati direttamente sulla superficie del veicolo spaziale e fissi;
- Sun-tracking, con pannelli dispiegabili e rotanti per mantenersi sempre perpendicolari ai raggi solari.

La prima soluzione è ovviamente quella più economica e strutturalmente semplice perché non prevede la progettazione di meccanismi di dispiegamento e di rotazione per i pannelli. Va però detto che presenta prestazioni ovviamente minori perché l'assetto dei pannelli rispetto ai raggi solari è dipendente dall'assetto del veicolo. Inoltre, è necessaria la disponibilità di una grande porzione di superficie dello spacecraft per poter installare quanti più pannelli possibili in quanto, in molte situazioni, parte di questi saranno in ombra, non produrranno energia ed avranno anche notevoli perdite per la non perpendicolarità dei raggi solari.

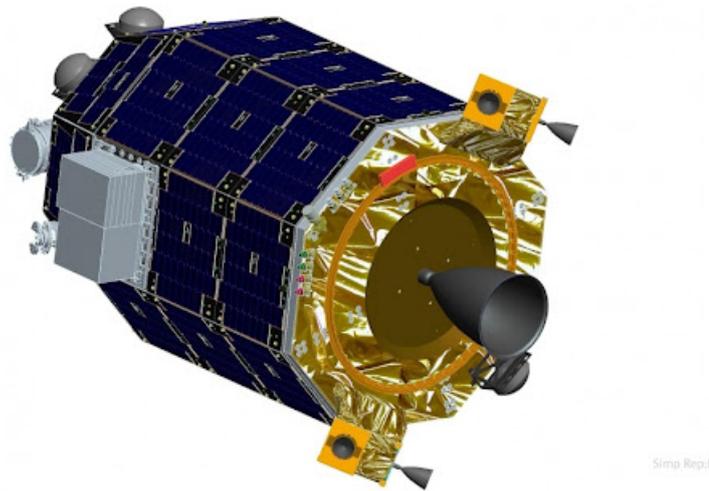


Figura 1.6: Satellite con pannelli Body-mounted

La seconda soluzione risulta essere quella con le prestazioni più alte ed è preferita soprattutto negli spacecraft che richiedono grandi quantità di energia, come la Stazione Spaziale Internazionale. In questo caso, i pannelli sono ripiegati

all'interno della struttura al momento del lancio, per poi dispiegarsi con un meccanismo quando si è raggiunta l'orbita operativa. Inoltre, sono dotati di due gradi di libertà, per poter rimanere sempre perpendicolari ai raggi solari e minimizzare le perdite per disallineamento conseguenti allo spostamento del satellite sull'orbita ed altri suoi cambi d'assetto.

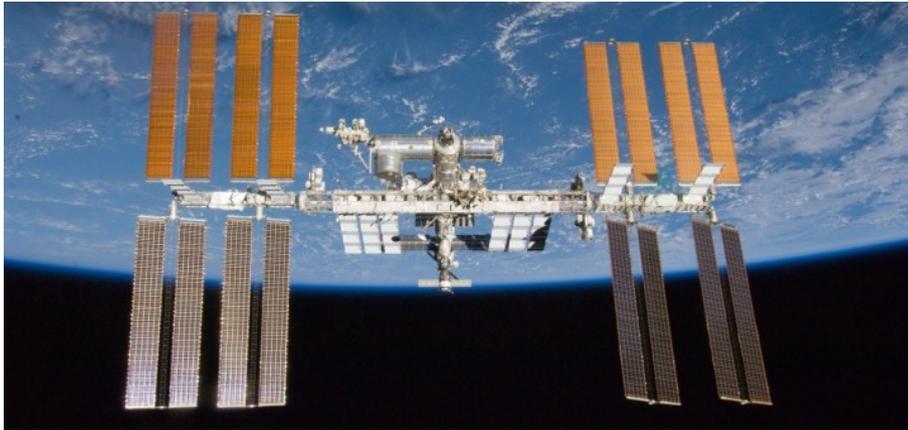


Figura 1.7: Stazione Spaziale Internazionale con pannelli dispiegati

Inevitabilmente, questo secondo tipo di installazione comporta costi più elevati e rischi maggiori perché la complessità, legata alla progettazione di meccanismi per rotazione e dispiegamento e ad un sistema di controllo, è indubbiamente più alta.

Capitolo 2

Elementi finiti avanzati

In questo capitolo vengono presentati i fondamenti teorici su cui si basa l'analisi effettuata, frutto di una rielaborazione delle fonti [11] [12] [13] [14].

Con analisi strutturale si intende lo studio del campo di tensioni, deformazioni e spostamenti della struttura soggetta a carichi esterni e vincoli, valutandone la risposta per poter verificare che sopporti le condizioni di vita operativa, sia in termini di tensioni di rottura che in relazione alla fatica. L'analisi si può dividere in statica, che prevede la presenza di carichi costanti nel tempo, e dinamica che invece vede la struttura soggetta a carichi variabili.

In questo caso l'analisi globale è stata effettuata con il programma Femap, presentato in seguito, che opera basandosi sul metodo agli elementi finiti. Questo metodo di risoluzione di problemi strutturali è alla base di gran parte dei software commerciali usati nel calcolo strutturale.

Il metodo degli elementi finiti è stato inventato per poter risolvere problemi governati da equazioni differenziali riducendoli a sistemi di equazioni lineari. Si basa sulla discretizzazione del dominio di interesse in più sottodomini, detti elementi, ciascuno delimitato da punti, detti nodi. Il campo di spostamenti verrà calcolato con una combinazione lineare degli spostamenti nei singoli nodi moltiplicati per le cosiddette funzioni di forma, le quali vengono scelte a priori sulla base del grado di approssimazione voluto per l'analisi ed assumono il valore 1 nel nodo considerato e zero in tutti gli altri. L'analisi con questo metodo prevede essenzialmente tre fasi:

1. Suddivisione della struttura in un numero finito di elementi;
2. Analisi di ogni sottodominio e calcolo della soluzione;
3. Assemblaggio delle soluzioni dei singoli elementi e formulazione della soluzione globale.

Ci sono vari tipi di elementi utilizzabili per la discretizzazione della struttura e la scelta si basa sia sul dominio in esame che sull'analisi che si vuole condurre e sul costo computazionale della stessa. Per strutture 1D come aste o travi, verranno usati elementi 1D, ciascuno delimitato da due nodi; nel caso invece di corpi 2D, come nei casi in esame in questo lavoro, si possono utilizzare sia elementi 2D triangolari (a 3 nodi) che elementi 2D quadrangolari (a 4 nodi), la cui forma dipende dal tipo di struttura da discretizzare; per domini 3D si costruiranno invece esaedri o tetraedri, con un numero ben più alto di nodi dei casi precedenti. Va detto che questo metodo fornisce soluzioni approssimate che saranno tanto più vicine a quella esatta quanto maggiore sarà il numero di elementi in cui è discretizzata la struttura. L'aumento del numero di elementi però comporta anche un costo computazionale sempre più alto. Pertanto risulta spesso necessario svolgere un'analisi di convergenza della mesh, con la quale si può determinare qual è il numero minimo di elementi necessario per ottenere un risultato che si può considerare pressoché esatto.

Per quanto riguarda invece le funzioni di forma utilizzate per i nodi, queste sono indipendenti dal tipo di elemento utilizzato; tra le più utilizzate vi sono i polinomi di Lagrange; di seguito viene riportata la formula dei polinomi per un caso unidimensionale :

$$L_i^N = \prod_{j=1, i \neq j}^N \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (2.1)$$

Nella formula:

- N: numero di nodi in cui si assume nota la funzione; all'aumentare di N aumenterà anche p, grado del polinomio, che viene calcolato come $p=N-1$; l'approssimazione risulterà sempre più precisa all'aumentare del grado del polinomio;
- ξ : variabile adimensionale data dal rapporto fra la variabile x e la lunghezza dell'elemento L;

Nella fase di assemblaggio dei risultati degli elementi, bisogna tenere conto dei fattori di congruenza degli spostamenti ai nodi e di equilibrio dei carichi ai nodi in quanto la struttura, per quanto analizzata in maniera discreta, è continua e non può presentare discontinuità di spostamenti o carichi.

Nelle sezioni successive vengono presentate le formulazioni teoriche alla base del metodo degli elementi finiti, a partire dal problema elastico che fornisce le equazioni necessarie all'analisi.

2.1 Problema elastico

L'analisi strutturale pone come obiettivo quello di determinare il campo di tensioni, deformazioni e spostamenti del corpo in esame. Le equazioni necessarie vengono definite tramite il problema elastico che presenta le relazioni fra le grandezze ricercate con anche il contributo di vincoli e carichi esterni. Viene formulata come ipotesi quella dei piccoli spostamenti così da poter relazionare in campo lineare spostamenti e deformazioni e, tramite la legge di hooke, quest'ultime con le tensioni.

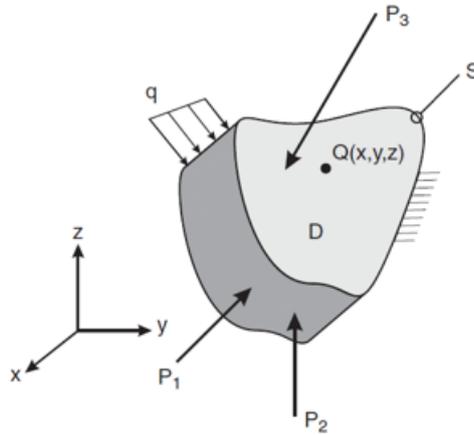


Figura 2.1: Dominio tridimensionale con carichi applicati

Per il caso più generale, presentato anche in Figura 2.1, viene preso in considerazione un concio elementare 3D soggetto a forze di volume, di superficie, di linea e puntuali. Tutte le grandezze vengono riferite ad un sistema di riferimento cartesiano xyz . I carichi applicati genereranno sulla struttura delle tensioni, scomponibili in una componente normale alla faccia su cui agiscono ed una tangenziale, contenuta nel piano della faccia, che a sua volta si può scomporre lungo le due direzioni degli assi cartesiani che definiscono le coordinate della faccia. Il tensore degli sforzi si comporrà così di 9 componenti:

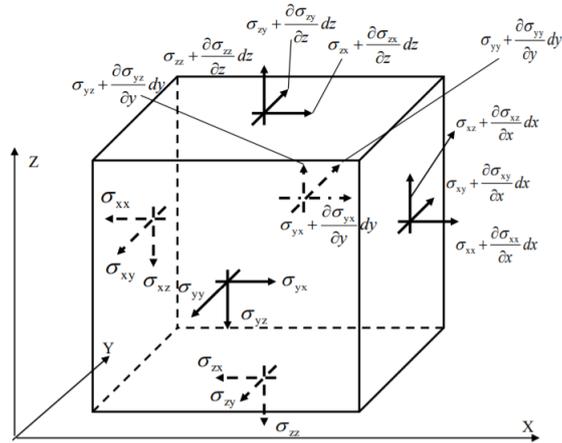


Figura 2.2: Tensioni normali e tangenziali applicate

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

In accordo con l'equilibrio alla rotazione però, si avrà che:

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \tau_{xz} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \tau_{yz} \end{cases} \quad (2.3)$$

Pertanto, le tensioni incognite calcolabili saranno sei, tre normali e tre tangenziali.

2.1.1 Equazioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni di equilibrio alla traslazione per le tensioni, in riferimento al concio elementare in Figura 2.2, si ottiene lungo le tre direzioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = g_x \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = g_y \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = g_z \end{cases} \quad (2.4)$$

Con g_x , g_y e g_z si denotano le componenti lungo i tre assi cartesiani del vettore g delle forze di volume. Introducendo il vettore b :

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Si può scrivere la forma compatta matriciale delle equazioni di equilibrio:

$$b^T \sigma = g \quad (2.6)$$

Con σ vettore contenente le sei componenti di tensione.

2.1.2 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno vengono definite sulla superficie del corpo. Queste possono essere sia di tipo meccanico, ottenute ponendo dei carichi superficiali, sia di tipo geometrico, grazie alla possibilità di imporre vincoli agli spostamenti o considerare noti gli spostamenti in una determinata regione.

Bisogna però sottolineare come non si possa assegnare sulla stessa superficie sia tensioni che spostamenti, pertanto è opportuno scegliere dove utilizzare un tipo di condizioni al contorno e dove l'altro. Le condizioni al contorno meccaniche sono rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = p_x \\ \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{yz}n = p_y \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n = p_z \end{cases} \quad (2.7)$$

l, m, n sono le componenti rispettivamente lungo x, y, z del vettore normale alla superficie su cui sono imposte le condizioni al contorno: $n = (l, m, n)$. Al secondo membro delle equazioni si hanno le componenti del vettore dei carichi per unità di superficie: $p = (p_x, p_y, p_z)$. Per quanto riguarda le condizioni al contorno di tipo geometrico invece, si ottengono assegnando degli spostamenti noti alla superficie; pertanto, indicando con \bar{u} il vettore degli spostamenti assegnati, si avrà:

$$u = \bar{u} \quad (2.8)$$

2.1.3 Relazione deformazioni-spostamenti

Essendo stata fatta l'ipotesi dei piccoli spostamenti, si può definire facilmente la relazione tra deformazioni e spostamenti, essendo la configurazione deformata non troppo dissimile da quella indeformata; pertanto, si può scrivere:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = u_{x,x} \\ \epsilon_{yy} = u_{y,y} \\ \epsilon_{zz} = u_{z,z} \\ \gamma_{xz} = u_{x,z} + u_{z,x} \\ \gamma_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} \\ \gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \end{cases} \quad (2.9)$$

In questo sistema si hanno le sei componenti di deformazione, di cui le prime tre sono legate agli sforzi normali mentre le altre tre agli sforzi tangenziali; a secondo membro delle equazioni vi sono le componenti di spostamento derivate; per rendere la notazione più di leggera, la derivata parziale di ogni componente viene indicata con a pedice, dopo l'indicazione della componente considerata (x,y,z), la variabile sulla quale viene fatta la derivata posta dopo una virgola. Per esempio, $u_{x,x}$ indicherà la derivata parziale della componente u_x dello spostamento rispetto ad x e così via. Queste relazioni possono essere presentate anche in forma compatta:

$$\epsilon = bu \quad (2.10)$$

Con b che è la matrice già definita nella (2.5). Nella sottosezione finale verrà presentata la legge che lega le tensioni alle deformazioni e, di conseguenza, agli spostamenti, completando la formulazione del problema.

2.1.4 Legge di Hooke

Avendo ipotizzato piccoli spostamenti, tensioni e deformazioni sono legate grazie ad una matrice, C, chiamata matrice dei coefficienti elastici di rigidezza; la sua inversa, S, è detta matrice dei coefficienti di deformabilità. C ed anche la sua inversa sono matrici 6x6, mentre i vettori di sforzi e deformazioni sono vettori colonna a 6 componenti:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\sigma^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}) \quad (2.12)$$

$$\epsilon^T = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}) \quad (2.13)$$

Le relazioni saranno pertanto:

$$\sigma = C\epsilon \quad (2.14)$$

$$\epsilon = S\sigma \quad (2.15)$$

La matrice dei coefficienti elastici, nel caso più generale, ha 36 componenti ma, in caso di materiali con particolari simmetrie, il numero di coefficienti presenti al suo interno diminuiscono e le relazioni si semplificano.

Nel caso di materiale ortotropo ad esempio, le componenti della matrice diverse da zero rimangono 9:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Sempre in questo caso si possono anche calcolare i moduli di Young (E_i), i moduli di taglio (G_{ij}) ed i coefficienti di Poisson (ν_{ij}) della struttura; nel caso di materiale ortotropo tridimensionale, si hanno tre moduli di Young, tre di taglio e tre coefficienti di poisson. Si ricavano dalle formule:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} \quad (2.17)$$

con $i=x,y,z$

$$G_i = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad (2.18)$$

con $i=x,y,z; j=x,y,z; i$ e j diversi

2.2 Principio dei lavori virtuali

2.2.1 Forma forte

Per poter risolvere il problema elastico è possibile utilizzare il principio dei lavori virtuali, secondo il quale se un sistema meccanico presenta un equilibrio fra le forze applicate ed i suoi vincoli geometrici, allora la somma di tutti i lavori virtuali conseguenti a forze esterne ed interne è pari a zero per qualsiasi spostamento virtuale infinitesimo.

Per il caso di risoluzione del problema elastico, esprimendo le equazioni con solo gli spostamenti come incognite, si ha che il principio dei lavori virtuali viene anche chiamato Principio degli spostamenti virtuali (PVD). Partendo dal teorema, si può ottenere una formulazione matematica denominata forma forte che risulta essere indispensabile per la risoluzione del problema oltre che per la derivazione della forma debole, che sta alla base del metodo agli elementi finiti. Partendo dalla definizione di Principio dei lavori virtuali stesso infatti si può scrivere che:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (2.19)$$

Dove il simbolo δ davanti ai lavori indica che si sta operando con variazioni infinitesime e i due lavori, interno ed esterno, sono esprimibili come:

$$\delta L_{int} = \int_V (\sigma_{xx}\delta\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\epsilon_{zz} + \tau_{xz}\delta\epsilon_{xz} + \tau_{yz}\delta\epsilon_{yz} + \tau_{xy}\delta\epsilon_{xy})dV \quad (2.20)$$

$$\delta L_{ext} = \int_S \delta u^T g dV + \int_S \delta u^T \rho dV + \int_L \delta u^T q dy + u_Q^T P \quad (2.21)$$

Il lavoro interno può essere riscritto esprimendolo in termini di spostamenti ed integrando per parti:

$$\delta L_{int} = - \int_V \delta u^T (b^T \sigma) dV + \int_S \delta u^T (I_n^T \sigma) dS \quad (2.22)$$

Con I_n^T che rappresenta la matrice dei coseni direttori.

Nella formula (2.21) invece:

- Il primo termine rappresenta il contributo delle forze di volume;
- il secondo termine rappresenta le forze di superficie;
- il terzo termine aggiunge il contributo delle forze di linea;
- Il quarto termine contiene le forze puntuali.

Eguagliando (2.22) e (2.21), si ottiene il principio dei lavori virtuali nella sua forma completa:

$$-\int_V \delta u^T (b^T \sigma) dV + \int_S \delta u^T (I_n^T \sigma) dS = \delta L_{ext} = \int_S \delta u^T g dV + \int_S \delta u^T \rho dV + \int_L \delta u^T q dy + u_Q^T P \quad (2.23)$$

Da questa si possono ottenere le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno eguagliando i termini integrati sullo stesso dominio; pertanto, eguagliando i termini integrati sul volume si ottiene:

$$-b^T \sigma = g \quad (2.24)$$

Che è proprio l'equazione di equilibrio. Eguagliando invece i termini integrati sulla superficie si ottengono le condizioni al contorno meccaniche:

$$I_n^T = p \quad (2.25)$$

La forma forte del principio dei lavori virtuali si può ottenere dall'equazione di equilibrio appena formulata tenendo conto della legge di Hooke e delle leggi geometriche; pertanto si può scrivere che:

$$-b^T C^T b u = g \quad (2.26)$$

Definendo la matrice di rigidezza k come:

$$k = -b^T C^T b \quad (2.27)$$

Si ottiene l'espressione finale della forma forte del principio dei lavori virtuali:

$$k \sigma = g \quad (2.28)$$

Da questa si ricava poi la forma debole che risulta essere alla base del principio dei lavori virtuali. La forma debole fornisce una soluzione approssimata al problema, però presenta più vantaggi risolutivi ed è applicabile a quasi ogni caso in quanto, a differenza della forma forte che richiede che la soluzione sia verificata su tutto il dominio del corpo continuo, e quindi risulta inefficace in caso di condizioni al contorno più complesse, questa rimane applicabile anche per discretizzazioni del dominio atte a semplificare il problema.

2.2.2 Forma debole

La forma debole del principio dei lavori virtuali si può ottenere partendo un'approssimazione degli spostamenti già presentata precedentemente parlando del

metodo degli elementi finiti. Infatti, lo spostamento viene definito come prodotto fra gli spostamenti nodali U e le funzioni di forma contenute nel vettore N :

$$u = UN \quad (2.29)$$

Quest'equazione ha carattere matriciale e presenta due vettori, U ed N , il cui numero di componenti, uguale per entrambi, dipende dal numero di nodi scelti. Con nodi si intende un numero finito di punti della struttura nei quali si possono calcolare gli spostamenti e tramite i quali il dominio può essere discretizzato in più sottodomini aventi i nodi come vertici.

Grazie a questa approssimazione, possono essere riscritte sia la legge di Hooke che le relazioni geometriche:

$$\epsilon = bu = BNU = BU \quad (2.30)$$

$$\sigma = C\epsilon = CBU \quad (2.31)$$

Le equazioni di lavoro interno e lavoro esterno, già formulate precedentemente per poter ottenere la forma forte, si possono rivedere per il caso da noi considerato. Nello specifico, l'equazione del lavoro esterno assumerà la forma:

$$\delta L_{ext} = \delta U^T P; \quad (2.32)$$

Con P vettore dei carichi nodali, che avrà lo stesso numero di componenti del vettore degli spostamenti nodali.

Il lavoro interno invece, tenendo conto anche delle equazioni (2.30) e (2.31), diventa:

$$\delta L_{int} = \delta U^T \left(\int_V (B^T C B dV) U \right) = \delta U^T K U \quad (2.33)$$

Con K definita come la matrice di rigidezza per la forma debole.

Eguagliando i due, in accordo col principio dei lavori virtuali, si ottiene la cosiddetta equazione di equilibrio in forma debole:

$$\delta U^T K U = \delta U^T P \quad (2.34)$$

$$K U = P \quad (2.35)$$

Il metodo degli elementi finiti basa la sua risoluzione proprio su questa forma. Se la matrice di rigidezza K non è singolare e quindi invertibile, si possono determinare da questa gli spostamenti nodali e, note le funzioni di forma definite per il problema in esame, calcolare, dal prodotto fra vettore degli spostamenti nodali e vettore delle funzioni di forma, il campo di spostamenti.

2.3 Formulazione unificata di Carrera

Un nuovo approccio nel calcolo delle matrici per il metodo agli elementi finiti è rappresentato dalla Formulazione unificata, elaborata dal professor Carrera del Politecnico di Torino e conosciuta anche come CUF, Carrera Unified Formulation [15].

In scenari più complessi, come il caso di strutture laminate multistrato, risulta essere particolarmente difficile derivare le matrici di rigidezza per le strutture complete. La soluzione è rappresentata proprio da questo metodo che si basa sul concetto di nuclei fondamentali ed utilizza un sistema indiciale che viene applicato anche alle teorie strutturali oltre che per rendere più compatte le scritture le procedure degli elementi finiti.

Prendendo ad esempio per semplicità un elemento asta monodimensionale, le approssimazioni degli spostamenti si possono anche scrivere in forma indiciale come:

$$u_x = N_i U_{xi} = \sum_{i=1}^{N_{NE}} (N_i U_{xi}) \quad (2.36)$$

Con NE che indica il numero di nodi scelti per la struttura.

In questo modo la notazione viene semplificata e si può ricostruire iterando sull'indice i. Stesso tipo di procedimento può essere fatto per le variazioni virtuali, utilizzando un altro indice per differenziarle, j.

Le deformazioni possono di conseguenza essere riscritte in forma indiciale:

$$\epsilon = N_{i,x} U_{xi} \quad (2.37)$$

$$\delta\epsilon = N_{j,x} \delta U_{xj} \quad (2.38)$$

Riscrivendo poi il lavoro interno in questa forma, si ottiene:

$$\delta L_{int} = \delta U_{xj}^T \left(\int_V N_{j,x} E N_{i,x} dV U_{xi} = \delta U_{xj} k^{ij} U_{xi} \right) \quad (2.39)$$

la matrice di rigidezza con gli indici k^{ij} è detta nucleo fondamentale. Il calcolo delle componenti della matrice di rigidezza può essere facilmente eseguito con iterazioni sugli indici i e j, andando a sostituire di volta in volta le funzioni di forma considerate. Da qui già si può vedere come questo tipo di notazione permetta formulazioni e calcoli semplificati, soprattutto nel caso di assemblaggio di grandi matrici di rigidezza.

Per tenere conto della tridimensionalità del campo di spostamenti in un caso generale, vengono introdotte delle funzioni di espansione F_τ che approssimano gli spostamenti nelle direzioni non predominanti della struttura. Prendendo ad esempio sempre un'asta quindi, lo spostamento lungo la direzione principale x

sarà approssimato sempre da delle funzioni di forma, ma ad esso verrà affiancata una funzione di espansioni per le altre due direzioni.

Di conseguenza si potrà scrivere:

$$u(x, y, z) = N_i(x)F_\tau(y, z)u_{\tau i} \quad (2.40)$$

Come precedentemente, si può fare lo stesso tipo di discorso per le variazioni virtuali, cambiando l'indice delle funzioni di espansione, τ , con l'indice s .

Derivando poi gli spostamenti per ottenere le deformazioni e applicando la legge di Hooke con quest'ultime, si ottiene l'espressione per le tensioni:

$$\sigma(x, y, z) = CbN_i(x)F_\tau(y, z)U_{\tau i} \quad (2.41)$$

Dove C e b sono state definite nelle (2.16) e (2.5), presentate nelle sezioni precedenti.

Dopo aver fatto gli stessi passaggi per le variazioni virtuali delle tensioni, si può riscrivere il lavoro interno:

$$\delta L_{int} = \delta U_{sj}^T \left(\int_V F_s N_j b^T C b N_i F_\tau dV \right) U_{\tau i} = \delta U_{sj} k^{\tau sij} U_{\tau i} \quad (2.42)$$

$k^{\tau sij}$ è il nucleo fondamentale della struttura e, attraverso i cicli sugli indici si possono ottenere le matrici di rigidezza dei singoli elementi prima e dell'intera struttura poi. Come si è potuto constatare la CUF rende l'assemblaggio di matrici di rigidezza anche molto grandi e complesse, un procedimento più semplice ed iterativo. Il processo di assemblaggio della matrice di rigidezza della struttura passa dalle iterazioni di quattro cicli, due interni sugli indici τ ed s , mediante i quali si può determinare le componenti della matrice di un determinato elemento con determinati indici i e j , e due esterni, ottenuti facendo iterare i e j per costruire la matrice di rigidezza complessiva assemblando quelle dei singoli elementi.

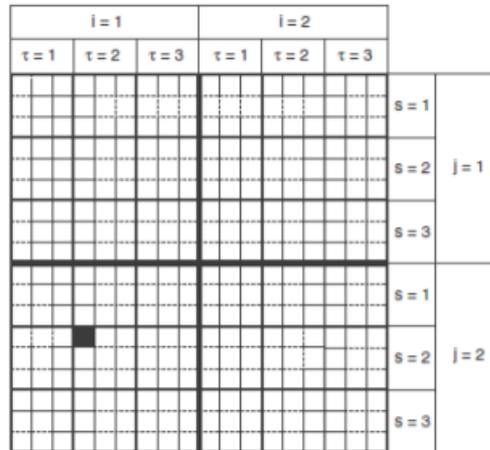


Figura 2.3: Schema della suddivisione della matrice di rigidezza in funzione dei vari indici; quello evidenziato in nero è il nucleo fondamentale di un singolo elemento, caratterizzato da indici propri e diversi da ogni altro nucleo

Nonostante per brevità sia stato presentato un caso asta, in cui la dimensione predominante è una sola, questa formulazione può essere applicata anche a casi bidimensionali e tridimensionali scegliendo opportunamente le funzioni di forma, che approssimeranno rispettivamente due e tre direzioni predominanti, e di conseguenza anche le funzioni di espansione. Di seguito vengono riportate per completezza le formulazioni degli spostamenti rispettivamente per i casi 2D e 3D:

$$u(x, y, z) = N_i(x, y)F_\tau(z)u_{\tau i} \quad (2.43)$$

$$u(x, y, z) = N_i(x, y, z)u_{\tau i} \quad (2.44)$$

2.4 Elementi avanzati per strutture laminate

L'analisi strutturale di strutture laminate multistrato con il metodo agli elementi finiti risulta essere particolarmente complicata poiché la presenza di più sottodomini, nei quali il materiale assume proprietà ed orientamenti delle fibre diversi, porta l'analisi ad incorrere in problematiche risolutive alle interfacce di contatto tra i vari strati, dove dovrebbero essere garantite le condizioni di equilibrio e pertanto, si dovrebbe verificare la continuità delle tensioni trasversali e degli spostamenti.

Di seguito sono presentati i principali modelli utilizzati per l'analisi di questo tipo di strutture, evidenziandone pregi e difetti [16].

2.4.1 Modello Equivalent single layer (ESL)

IL modello Equivalent single layer risulta essere il meno oneroso dal punto di vista computazionale ed anche il più semplice. Si basa sul considerare la struttura nella sua interezza come se fosse un singolo strato, prendendo un numero di incognite indipendente dal numero di strati e valutando i coefficienti di rigidezza come media pesata di quelli dei vari strati.

Il modello adotta la seguente formula di approssimazione degli spostamenti:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2u_2(x, y) + \dots + z^Nu_N(x, y) \quad (2.45)$$

Con N ordine dell'espansione. Questo modello può fornire risultati accettabili per alcune analisi globali ma, nel complesso, risulta inadeguato per definire il campo di tensione tridimensionale perché non garantisce continuità delle tensioni alle interfacce.

Viene utilizzato in alcuni software commerciali perché il ridotto numero di incognite del modello garantisce costi computazionali bassi permette comunque ottenere risultati accettabili per il campo di spostamenti.

2.4.2 Modello Layer wise (LW)

Detto anche modello Lagrange, il modello Layer wise permette di studiare separatamente ogni singolo strato come se fosse indipendente dagli altri, imponendo però delle condizioni sulle facce di contatto per comunque garantire la continuità del campo di spostamenti. La cinematica degli strati viene così adeguatamente rappresentata ed approssimata utilizzando dei polinomi di Lagrange.

Questo modello garantisce risultati decisamente più verosimili e compensa quasi totalmente il problema delle discontinuità del campo di tensioni alle interfacce. Il suo costo computazionale risulta essere però molto elevato e sale notevolmente all'aumentare del numero di strati perché da essi dipende il numero di incognite.

Un approccio alternativo è rappresentato dal modello Variable Kinematic, illustrato nell'articolo [17], il quale prevede di combinare i modelli ESL e LW grazie ai polinomi di Legendre; il modello prevede di definire alcuni strati tramite il modello LW, omogeneizzandone le proprietà, mentre di usare un modello ESL più accurato in altri.

2.4.3 Modello zig-zag

Questo tipo di modello nasce come modifica del modello ESL e si propone di risolvere i problemi analitici di quest'ultimo mantenendo comunque basso il costo computazionale.

Per fare ciò, si introduce la funzione di Murakami:

$$(-1)^k \zeta_k u_Z \tag{2.46}$$

$\zeta = \frac{2z_k}{h_k}$ è una variabile adimensionale funzione del rapporto fra z ed h , coordinata e spessore dello strato k -esimo. Questa funzione comporta un'inversione di segno degli spostamenti all'interfaccia fra i vari strati; pertanto il campo di spostamenti risulterà non più semplicemente continuo ma continuo a tratti e si genererà una discontinuità nelle deformazioni nelle facce di contatto. Grazie a questa discontinuità delle deformazioni, viene compensata la discontinuità del campo di tensioni e, di conseguenza, si riduce notevolmente l'errore sull'approssimazione della soluzione, il tutto mantenendo un costo computazionale decisamente più basso rispetto al caso di modello Layer wise.

Capitolo 3

Omogeneizzazione dei core dei pannelli

Come visto nel capitolo precedente, un tipo di struttura attualmente molto utilizzata per la costruzione dei core dei pannelli sandwich è la honeycomb, costituita da celle esagonali a nido d'ape, che rappresenta un ottimo compromesso fra buone proprietà meccaniche ed una bassissima densità.

Dal punto di vista dell'analisi strutturale però, la complessità di questi core e la loro eterogeneità porta inevitabilmente a costi computazionali elevatissimi e non fruttuosi a livello di risultati. Pertanto, prima di eseguire l'analisi agli elementi finiti, si preferisce seguire un approccio di semplificazione del problema, attuando tecniche di omogeneizzazione le quali, partendo da quelle che sono le caratteristiche strutturali del core, calcolano le proprietà di un materiale continuo omogeneo equivalente ad esso.

I metodi più usati per l'omogeneizzazione rintracciabili in letteratura sono:

- metodo dei campi medi;
- approccio energetico;
- espansione asintotica.

Tutti i metodi prevedono di effettuare l'analisi separatamente in due problemi sequenziali; il primo, denominato micro-problema, permette di determinare il volume rappresentativo equivalente della singola cella e, da questo, di stabilire le proprietà globali della struttura; mentre il secondo, il macro-problema, parte da queste proprietà globali per determinare il comportamento della struttura sotto i carichi a cui è soggetta.

In particolare, l'omogeneizzazione tramite la costruzione di campi medi, studiata approfonditamente da Gibson ed Asbhy [18], prevede di utilizzare le grandezze medie di deformazione e tensione e le equazioni costitutive che le legano per determinare il campo della singola cella, tramite il quale poter calcolare il comportamento globale della struttura.

L'approccio energetico invece è incentrato sul calcolo della densità di energia di una singola cella approssimandola con una distribuzione lineare e poi, da questa, sulla determinazione delle proprietà globali del materiale equivalente continuo [19].

L'ultimo metodo si basa sulla definizione di un'espansione asintotica dei campi cinematici, utile per determinare le proprietà del continuo omogeneizzato partendo dallo studio della cella del corpo discreto [20].

Nelle sezioni successive, vengono presentati i fondamenti dell'omogeneizzazione tramite equivalenza energetica facendo riferimento a più studi [21] [22] [23] condotti sui materiali periodici e sulla ricerca delle loro proprietà equivalenti in caso di materiale omogeneo.

3.1 Metodo energetico

Facendo riferimento al caso in esame, e cioè quello di un pannello sandwich, bisogna innanzitutto ipotizzare che le deformazioni del core siano vincolate dalle facce, le quali hanno una rigidezza più alta; pertanto i moduli di elasticità della struttura saranno proporzionali a t/l , con t spessore delle pareti delle celle ed l lunghezza dei lati delle celle.

Il primo passo per poter eseguire l'analisi è quello di definire un volume rappresentativo equivalente (REV), tramite il quale calcolare tensioni e deformazioni. Come si può vedere tratteggiato in rosso in Figura 3.1, il REV coincide con una singola cella; questo perché il core viene considerato come composto da celle esagonali tutte uguali e sono trascurate le eventuali irregolarità e si può effettuare l'analisi sulla singola cella per poi estendere i risultati a tutto il corpo.

All'interno della stessa cella si può individuare un'ulteriore simmetria che permetterebbe di limitare il calcolo ad $1/8$ di REV.

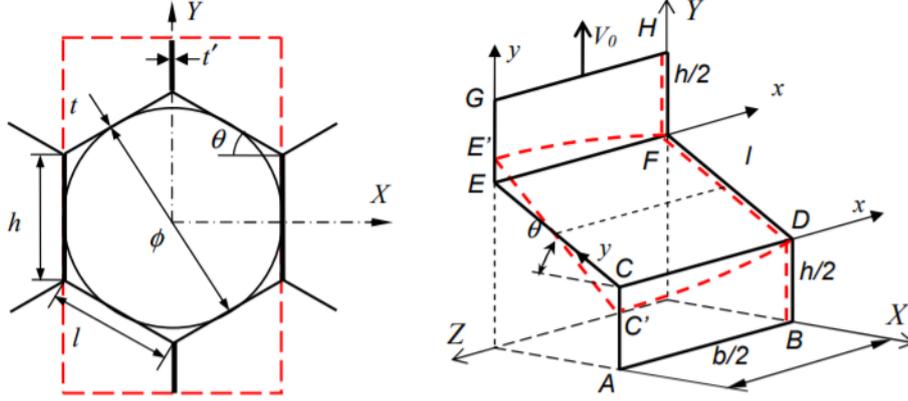


Figura 3.1: Volume rappresentativo equivalente (sulla sinistra) e porzione di cella con riferimenti cartesiani (sulla destra)

In questa trattazione si tiene conto anche dell'effetto dell'altezza della cella sul comportamento della struttura, distinguendo due diversi casi per il calcolo dell'omogeneizzazione.

3.1.1 Altezza della cella molto piccola

Nel caso in cui h sia molto piccola, si può pensare che i punti della cella abbiano lo stesso comportamento dei rispettivi punti sulle facce; ciò comporta che la deformazione costante ottenuta sulle facce è la medesima che si presenterà sulle pareti della cella.

L'energia di deformazione calcolata nel dominio di calcolo rappresentato dal REV si può esprimere come:

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \frac{E}{1 - \nu^2} bth (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{1}{2} \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_l^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_l) \quad (3.1)$$

ϵ_l è la tensione normale ai lati obliqui mentre E è il modulo di Young del materiale e ν è il coefficiente di Poisson.

Supponendo di avere assegnata una deformazione lungo y ϵ_y , la deformazione ϵ_l si può calcolare come:

$$\epsilon_l = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta \nu) \epsilon_y = \beta \epsilon_y \quad (3.2)$$

Sostituendo quest'espressione nell'equazione dell'energia e minimizzando quest'ultima rispetto ad ϵ_y , si può calcolare anche ϵ_x come:

$$\epsilon_x = -\frac{\nu((h + l\alpha))}{(h + l)} \epsilon_y \quad (3.3)$$

Ottenute le deformazioni è possibile calcolare l'energia di deformazione della cella, la quale deve essere uguale a quella del solido equivalente omogeneizzato.

Di quest'ultimo sono inoltre determinabili le tensioni, indicate con l'apice * per distinguerle da quelle della cella reale:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \end{Bmatrix} = 1/(1 - \nu_{xy}^* \nu_{yx}^*) \begin{bmatrix} E_x^* & \nu_{xy}^* E_y^* \\ \nu_{yx}^* E_x^* & E_y^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

In questa equazione compaiono anche i moduli elastici (E_x ed E_y) ed i coefficienti di Poisson del solido equivalente.

Questi si possono determinare dalla combinazione dell'equazione per le tensioni e di quella dell'energia di deformazione elastica.

Nel caso in cui fosse la ϵ_x ad essere assegnata, si svolgerebbe il procedimento in maniera analoga ma definendo le altre due deformazioni precedentemente presentate in funzione di quest'unica assegnata.

3.1.2 Altezza della cella molto grande

Nel secondo caso, data l'altezza grande, i punti sulle pareti della cella non hanno lo stesso comportamento dei corrispondenti punti sulle facce ma si verifica una ridistribuzione di deformazione e tensioni su lati verticali ed inclinati.

Supponendo uno spostamento di esempio V_0 in direzione y , le deformazioni possono essere riscritte come:

$$\epsilon_y = \frac{V_0}{h + l \sin \theta} \quad (3.5)$$

$$\epsilon_x = -\nu \epsilon_y \quad (3.6)$$

Inoltre, lo spostamento U lungo x si può scrivere come:

$$U = \epsilon_x l \cos \theta = -\nu \frac{V_0 l \cos \theta}{h + l \sin \theta} \quad (3.7)$$

Si può determinare pertanto una deformazione dei lati verticali ϵ_h ed una dei lati inclinati ϵ_l :

$$\epsilon_h = \frac{1}{h}(V_0 - V); \epsilon_l = \frac{1}{l}(U \cos \theta - V \sin \theta); \quad (3.8)$$

Fatte queste considerazioni, la formula per il calcolo dell'energia di deformazione diventa:

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} E b t (\epsilon_h^2 h + \epsilon_l^2 l) \quad (3.9)$$

Per calcolare lo spostamento incognito V da quest'equazione si determina il minimo di energia facendone la derivata parziale in funzione di V stesso. Dopodiché, calcolati tutti i parametri incogniti, si può calcolare l'energia stessa e procedere analogamente al caso precedente. Anche in caso di spostamento iniziale U_0 in direzione x , il procedimento di risoluzione sarà analogo nonostante cambino leggermente le definizioni delle deformazioni (sarà ϵ_y ad essere in funzione di ϵ_x e non viceversa).

Capitolo 4

Analisi Global-Local

Le analisi strutturali eseguite con il metodo agli elementi finiti possono diventare estremamente complicate e costose computazionalmente se fatte su strutture reali, sia per la complessità strutturale delle stesse che per i materiali che le compongono trattandosi attualmente, soprattutto in campo aerospaziale, di materiali compositi e laminati, usati spesso per le loro elevate proprietà meccaniche con pesi contenuti.

Pertanto, risulta spesso impossibile o comunque poco utile effettuare analisi globali di strutture con modelli tanto accurati come potrebbe essere quello Layer wise per i laminati. Si cerca quindi di considerare approcci meno costosi ma adeguatamente affidabili, magari cercando di raggiungere un compromesso adeguato fra le necessità di analisi accurate ed allo stesso tempo di costi computazionali non esagerati.

Questa ricerca ha portato alla concezione di un approccio global/local, il giusto compromesso fra accuratezza e basso costo computazionale. Questo tipo di metodo, presentato in questo capitolo facendo riferimento agli articoli [24], [25] e [26], parte dall'esecuzione di una prima analisi globale, di tipo lineare, molto approssimata della struttura per poi effettuare uno studio locale, più accurato, sugli elementi che necessitano di maggior attenzione, magari perché critici per il comportamento della struttura a rottura o a fatica.

Nell'analisi globale generalmente si utilizzano elementi piastra bidimensionali, molto meno onerosi rispetto a quelli tridimensionali, che però non forniscono una soluzione completa 3D del campo di tensioni e soprattutto non forniscono un quadro dettagliato sugli effetti dei carichi lungo lo spessore dei corpi analizzati, sia perché non permettono di studiare adeguatamente il comportamento ad esempio in prossimità di cricche interne alla struttura, sia perché non evidenziano alcuni effetti, come il free edge, presenti nei laminati. Da un'analisi globale di questo tipo però, si possono già individuare quali sono gli elementi di maggior

interesse per uno studio più accurato. Su questi è possibile effettuare l'analisi locale tridimensionale con elementi avanzati layer-wise, molto più accurati, che evidenzia il comportamento della regione considerata anche in funzione del suo spessore.

Le analisi Global/local possono essere divise essenzialmente in tre gruppi principali che si differenziano per il diverso approccio usato per migliorare l'analisi sugli elementi di maggior interesse [27] [28]:

- il primo gruppo prevede di raffinare la mesh esclusivamente nelle regioni critiche della struttura, mantenendo una discretizzazione grezza in aree meno sensibili;
- Il secondo gruppo utilizza un approccio multi-model, pertanto effettua una prima analisi globale con un determinato modello più grezzo, per poi utilizzarne uno molto più accurato e costoso per l'analisi locale di alcuni elementi;
- L'ultimo gruppo è basato sulla suddivisione della struttura in super elementi, macro regioni processate in maniera individuale con un numero ridotto di matrici.

L'analisi globale permette di ottenere il comportamento ai nodi che delimitano gli elementi scelti per un'analisi più accurata; questi primi risultati verranno utilizzati per definire le opportune condizioni al contorno dell'analisi locale. Queste sono prevalentemente di tipo geometrico, quindi ottenute imponendo gli spostamenti e le rotazioni all'interfaccia, i quali permettono di vincolare il sistema e di effettuare subito l'analisi locale. Le condizioni di tipo meccanico invece vengono molto meno utilizzate in questa metodologia di analisi perché non rendono il sistema vincolato e quindi si rende necessario un approccio ulteriore per la risoluzione, chiamato "Inertia relief".

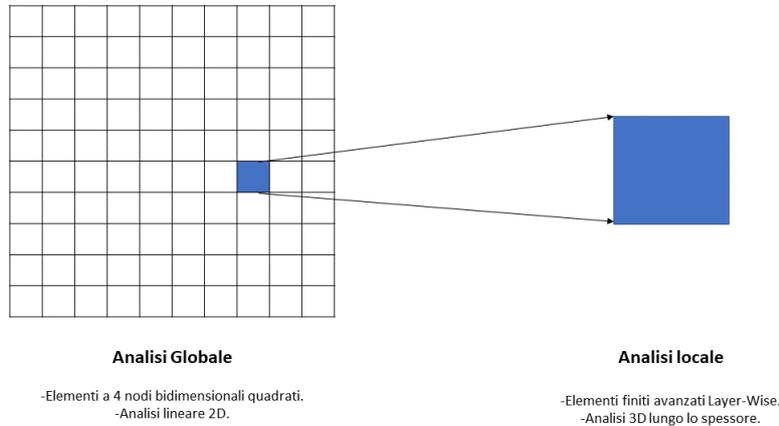


Figura 4.1: Rappresentazione schematica dell'processo di analisi global/local

4.1 Software utilizzati

in questa sezione vengono presentati i software rivelatisi necessari per le analisi global/local presentate in seguito. In particolare, si fa riferimento a Femap, utilizzato per l'analisi globale e, per quella locale, a MUL2@GL.

4.1.1 Femap

Femap è un software commerciale molto usato per analisi ingegneristiche effettuate su modelli agli elementi finiti.

Il software permette di costruire modelli anche complessi al suo interno e studiarne i comportamenti negli scenari di carico previsti, per poi visualizzarne i risultati direttamente al suo interno con molte opzioni di studio post-processing. Per l'analisi strutturale dei corpi si appoggia a Nastran, in esso integrato ma può venire associato anche ad altri solutori e permette l'importazione di modelli CAD.

Nel caso di pertinenza, all'interno di Femap è stata eseguita l'analisi globale delle strutture in esame, modellizzate come piastre bidimensionali caratterizzate da struttura sandwich, proprietà dei laminati e materiali compositi. Il corpo è stato assunto 2D per non incorrere in costi computazionali troppo alti nell'analisi globale; gli effetti sullo spessore si sono studiati poi nell'analisi locale. Nonostante questo però, i risultati permettono comunque di avere una visione

del comportamento della struttura nella sua completezza e di individuare quali elementi necessitano di un'analisi più accurata.

4.1.2 MUL2@GL

Il software MUL2@GL è stato sviluppato al Politecnico di Torino e viene usato come plug-in di altri software per l'analisi strutturale, quali Abaqus o, come in questo caso, Femap [29] [30].

Il plug-in permette di eseguire accurate analisi locali su elementi selezionati dalla struttura modellizzata in Femap. Grazie ai bulk data files generati dalla creazione del modello infatti, il software può ricavare i dati di proprietà, materiali e spessori degli strati dell'elemento scelto e considerarli nell'analisi.

A partire poi dai risultati dell'analisi globale, contenuti negli output files, vengono definite le condizioni al contorno geometriche che interessano spostamenti e rotazioni dei nodi delimitanti l'elemento.

L'analisi viene effettuata utilizzando un modello layer wise che permette di ottenere le distribuzioni di tensioni lungo lo spessore dell'elemento.

Il software permette di studiare i risultati dell'analisi in tre sistemi di riferimento:

1. Sistema di riferimento globale, coincidente con quello definito in Femap;
2. Sistema di riferimento locale, nel quale l'asse x giace sulla congiungente di primo e secondo nodo dell'elemento e punta verso il secondo; l'asse y è perpendicolare al precedente e giace nel piano; l'asse z è normale al piano dell'elemento;
3. Sistema allineato all'orientamento delle fibre; l'asse x sarà sulla direzione dell'orientamento considerato a zero gradi delle fibre; l'asse y sarà perpendicolare a questo e nel piano; l'asse z, è sempre normale al piano.

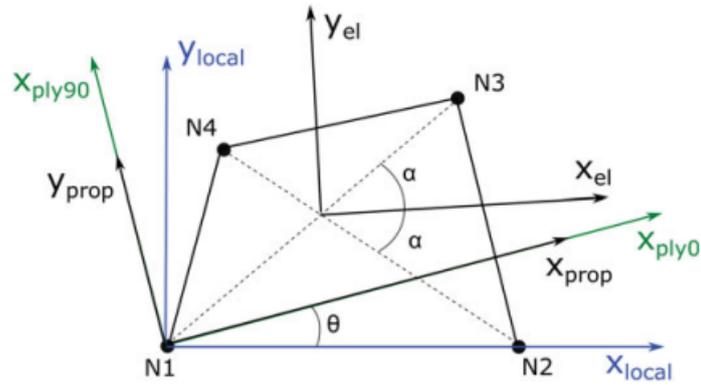


Figura 4.2: Sistemi di riferimento dell'analisi locale per l'elemento CQUAD4

In figura 4.2, con il pedice "local" è indicato il sistema locale mentre con "prop" il sistema orientato con le fibre del materiale: viene anche riportato il sistema dell'elemento, con il pedice "EL".

Capitolo 5

Risultati

Vengono ora presentati i risultati dell'analisi global/local effettuata per tre diversi casi distinti:

- Un pannello a tre strati dello stesso materiale;
- Un pannello sandwich a 5 strati, analizzato sia nel caso di carico distribuito su una faccia che di carico a compressione su un lato;
- Un Pannello solare, soggetto a carichi termici modellizzati come pressioni distribuite.

Nel primo caso i risultati sono successivamente stati confrontati con quelli presi in letteratura, mentre per gli altri due ciò non è stato possibile ma, a differenza del primo, viene anche condotta in ultima istanza un'analisi di failure per verificare che la struttura possa sopportare i carichi a cui è sottoposta e per osservare l'andamento degli indici di failure.

5.1 Pannello a 3 strati in materiale composito

Il primo caso qui presentato prevede l'analisi Global/local di un pannello a 3 strati in materiale composito semplicemente appoggiato sui 4 lati e caricato in una zona centrale con una pressione costante. Per questo specifico scenario è anche possibile fare un confronto con un'analisi simile riscontrata in letteratura [31].

5.1.1 Dati iniziali

Geometria

La struttura in esame si presenta come una piastra quadrata di lato 0.1m e spessore 0.01m. La porzione di pannello caricata effettivamente consiste in una zona quadrata con i lati di 0.02m posta centralmente alla piastra.

Il layup, visibile in Figura 5.1, si compone di tre strati dello stesso materiale, con i due più esterni di 0.003m ed uno centrale di 0.004m. Le fibre sono orientate secondo la sequenza $0^\circ/90^\circ/0^\circ$.

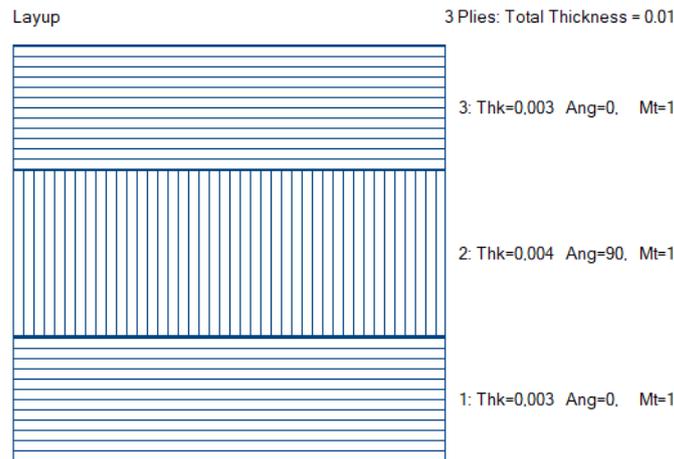


Figura 5.1: Layup del pannello a 3 strati

Materiali

Tutta la struttura è composta da un unico materiale ortotropo, con l'unica differenza fra gli strati determinata dall'orientamento delle fibre. In Tabella 5.1 sono riportati i moduli elastici, di taglio ed il coefficiente di Poisson del materiale utilizzato.

	CFRP
E_x	132.5[GPa]
E_y	10.8[GPa]
E_z	132.5[GPa]
G_{xy}	5.7[GPa]
G_{yz}	3.4[GPa]
G_{xz}	3.4[GPa]
ν	0.24

Tabella 5.1: Moduli elastici, moduli di taglio e coefficiente di Poisson dei materiale

Carichi e vincoli

Il pannello risulta essere semplicemente appoggiato sui lati, pertanto questo vincolo permette delle rotazioni degli estremi vincolati ma non delle traslazioni. Il carico a cui è sottoposto invece, è una pressione costante di 1MPa in direzione normale alla superficie della piastra e con verso opposto all'asse z , distribuita su una porzione di 0.0004 m^2 posta centralmente alla faccia del pannello.

5.1.2 Analisi globale

La struttura è stata inizialmente discretizzata con una mesh 10×10 di elementi bidimensionali quadrati e se n'è studiato sia il comportamento globale che quello locale. Successivamente è stata definita una discretizzazione più raffinata a 400 elementi (mesh 20×20) la quale viene identificata da un'analisi di convergenza ed anche dai riferimenti in letteratura che hanno basato questo primo studio, come quella computazionalmente meno onerosa a fornire risultati esatti. Mesh più raffinate infatti, non darebbero risultati più accurati e presenterebbero anche costi computazionali più alti.

Andando ad osservare i risultati dell'analisi globale in termini di spostamento, si può osservare come i valori massimi vengano raggiunti nella zona centrale del pannello dove è stato effettivamente posto il carico. Il massimo spostamento misurato è di $0.1880 \times 10^{-3} \text{ m}$. La precedente mesh 10×10 invece presentava un massimo di $0.1884 \times 10^{-3} \text{ m}$, valore vicino alla soluzione corretta ma non perfettamente congruente.

In Figura 5.2, è mostrata la piastra deformata sotto l'azione del carico ed è perfettamente visibile la distribuzione dello spostamento e dove questo raggiunge il valore massimo.

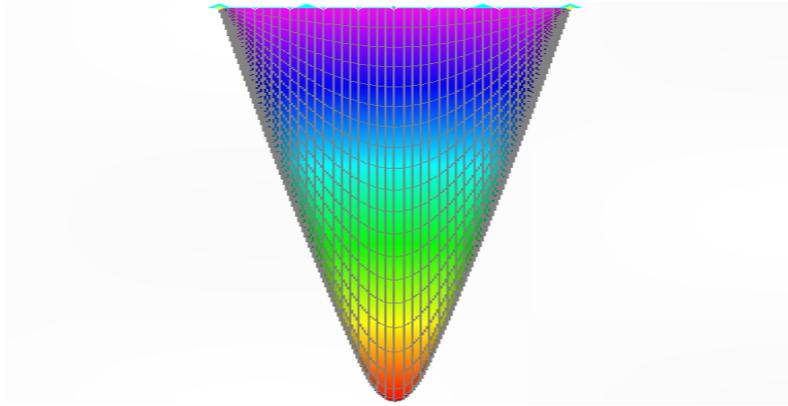


Figura 5.2: Deformazione del pannello a 3 strati soggetto ad una pressione costante in una zona centrale

Analisi di convergenza L'analisi di convergenza, mediante la quale si è scelto di utilizzare la mesh 20x20 per l'analisi di questa struttura, è stata condotta raffinando progressivamente la discretizzazione partendo da una mesh 10x10 fino ad una 40x40 e mostra come i risultati convergano a partire dalla discretizzazione 20x20 appunto che quindi risulta la scelta ottimale per limitare il costo computazionale.

In Tabella 5.2 sono mostrati gli spostamenti massimi misurati per ogni mesh ed il tempo necessario all'analisi. La Figura 5.3 mostra invece la convergenza dei risultati.

Mesh	Max spostamento [mm]	Tempo di risoluzione [s]
10x10	0.1884×10^{-3}	0.261
20x20	0.1880×10^{-3}	315
40x40	0.1880×10^{-3}	508
80x80	0.1880×10^{-3}	1.406

Tabella 5.2: Spostamenti massimi e tempi richiesti per l'analisi del pannello a 3 strati

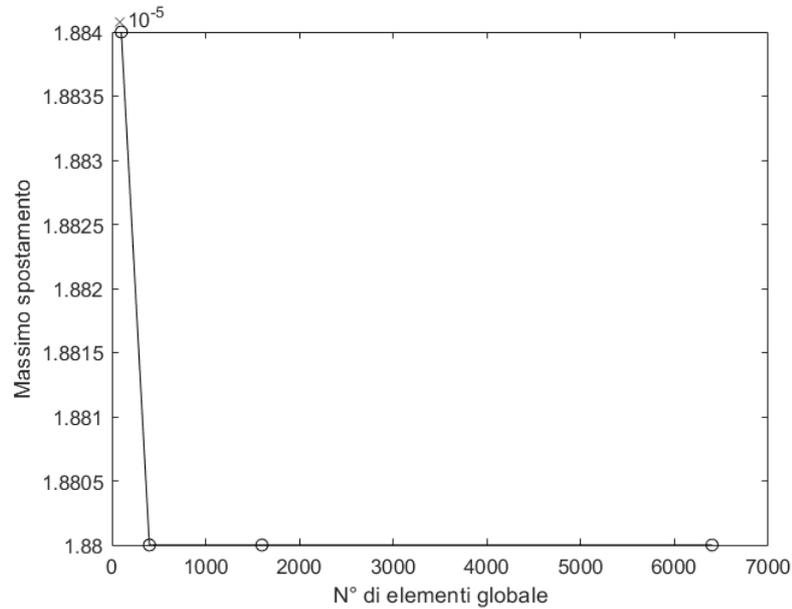


Figura 5.3: Convergenza dello spostamento massimo del pannello a 3 strati sottoposto ad una pressione nella zona centrale

5.1.3 Analisi locale

Una volta effettuata l'analisi statica lineare globale, è stato possibile individuare un elemento nella zona più sollecitata su cui effettuare la successiva analisi locale tridimensionale, condotta mediante il plug-in MUL2. Questo approccio ci permette di ottenere dati molto accurati negli elementi di maggior interesse, senza dover condurre un'analisi 3D su tutta la struttura, la quale sarebbe eccessivamente onerosa dal punto di vista computazionale. I risultati di questo secondo studio permettono di osservare l'andamento delle tensioni normali e tangenziali lungo lo spessore della piastra in maniera dettagliata ed anche di confrontarli con quelli reperiti in letteratura per poterne determinare l'effettiva bontà. Tutte le tensioni vengono riportate sia nel sistema di riferimento materiale che in quelli globale e locale ed inoltre si è scelto di mostrare anche gli andamenti ottenuti con la mesh 6x6 per evidenziarne le differenze.

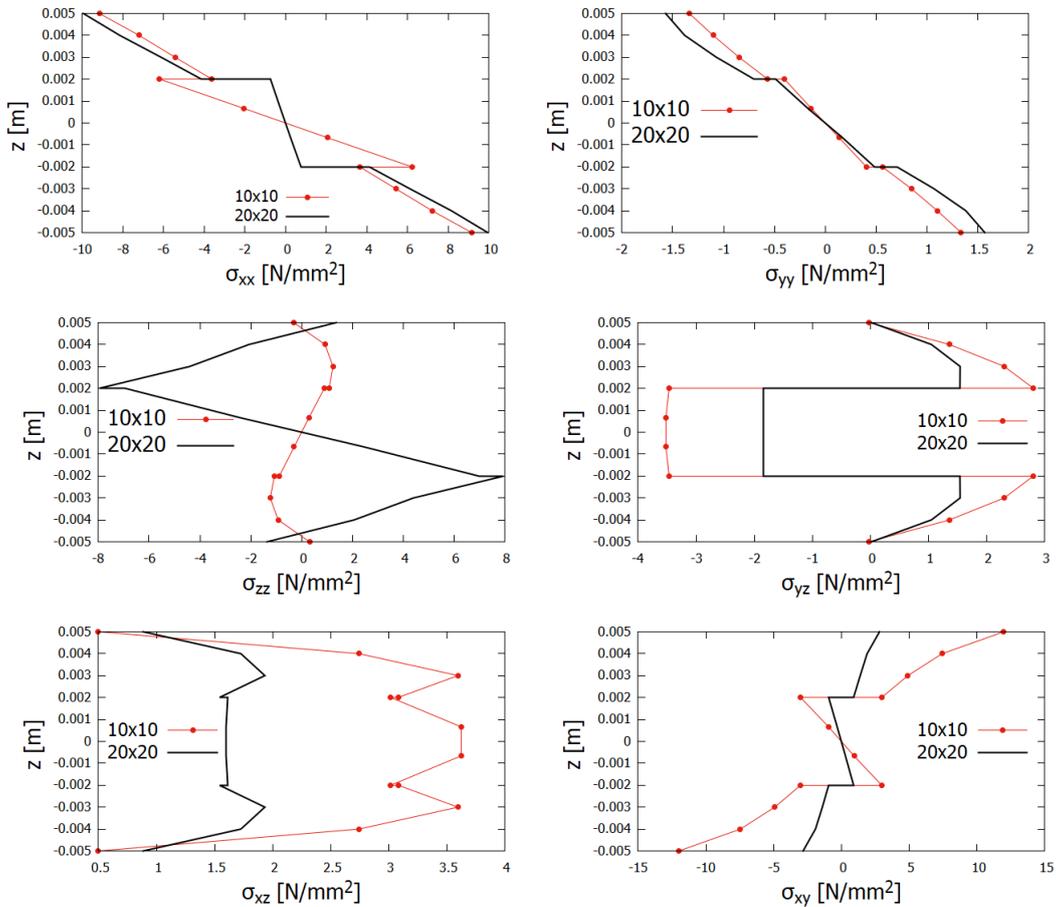


Figura 5.4: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 321 nel sistema materiale

L'elemento analizzato è il 321, situato nella porzione centrale del pannello. In Figura 5.4, sono riportati i risultati nel sistema di riferimento materiale. Si può notare come le tensioni normali σ_{xx} e σ_{yy} assumano valori negativi nel primo strato che quindi, come prevedibile dallo scenario, risulta essere in compressione, mentre sono positive nell'ultimo che quindi è in trazione.

Inoltre, per tutte le tensioni gli andamenti calcolati con una mesh 10x10 differiscono da quelli 20x20, dimostrando come i risultati ottenuti con una discretizzazione a 100 elementi siano approssimati, e quindi vicini alla soluzione corretta ma mai perfettamente coincidenti.

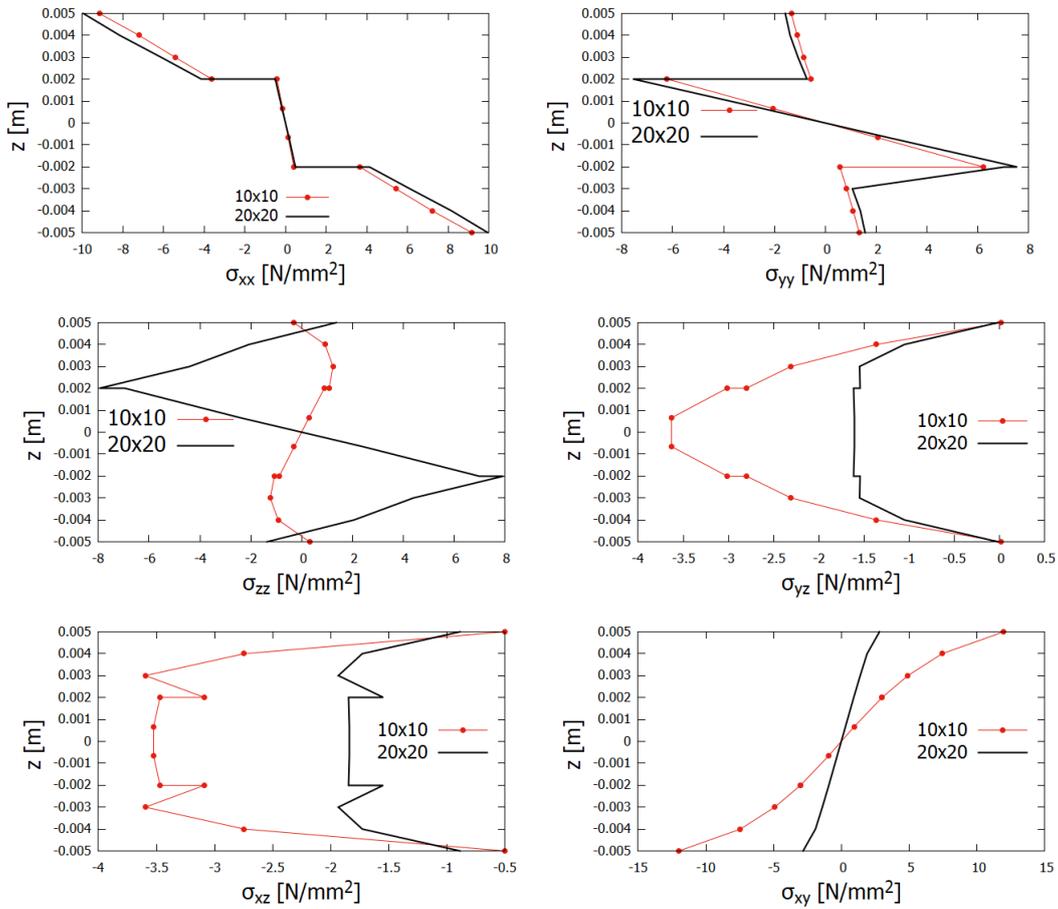


Figura 5.5: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 321 nel sistema locale

In Figura 5.6 e 5.5, sono invece riportate le tensioni nei sistemi di riferimento globale e locale. Come si può constatare dai grafici, i risultati per questi ultimi due sistemi sono pressoché coincidenti, probabilmente perché i due coincidono nel modello creato in Femap. Confrontandoli però con quelli del sistema materiale, possono essere sottolineate alcune differenze. Le tensioni σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} hanno andamenti diversi anche se comunque sono uguali i segni negli strati; σ_{xz} e σ_{yz} hanno andamenti opposti, essendo entrambe positive nel sistema materiale e negative negli altri due; l'unica che coincide in tutti e tre è la σ_{zz} .

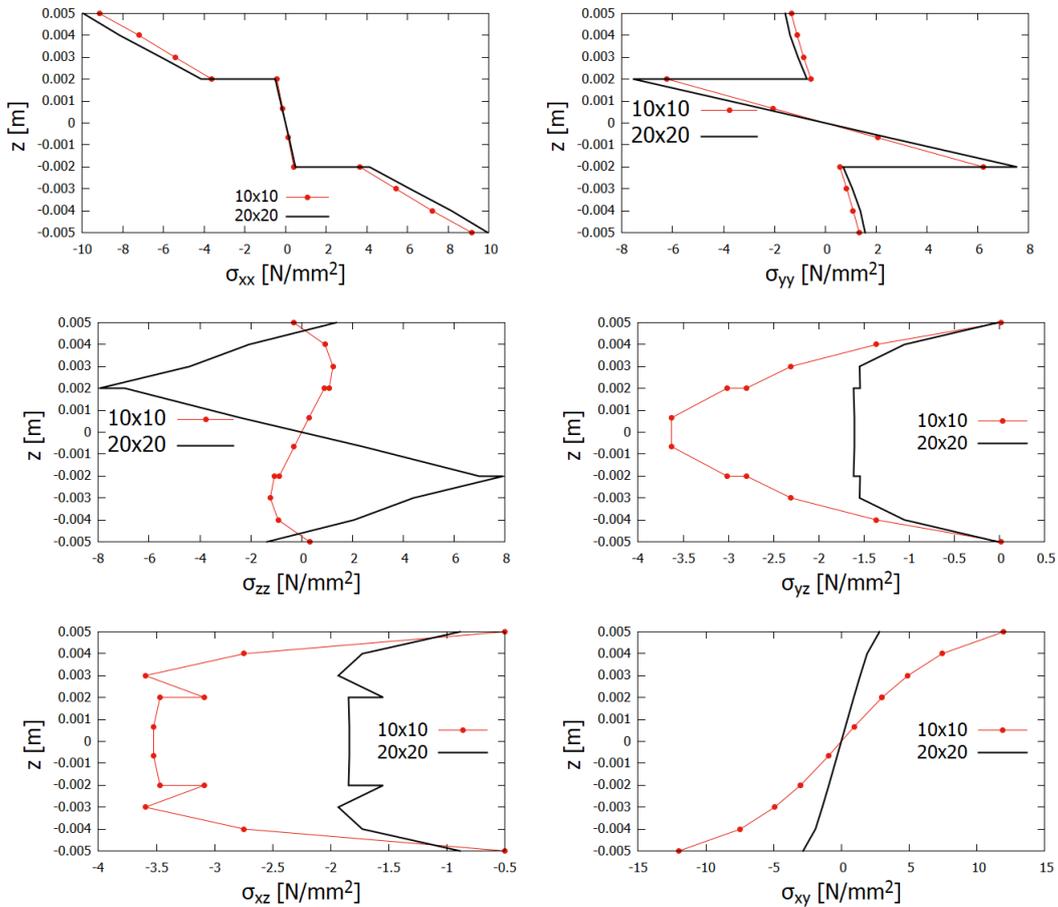


Figura 5.6: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 321 nel sistema globale

In Figura 5.7, viene infine confrontata la σ_{xz} con quella mostrata nella fonte precedentemente citata.

Osservando nel grafico l'andamento della tensione tangenziale del caso preso dalla letteratura, si osservano delle analogie con i risultati ottenuti in questa analisi; in particolare, si denota un massimo dei valori in corrispondenza di $z=-0.003$ e $z=0.003$, con un andamento crescente delle σ_{xz} nello strato inferiore ed in quello superiore, mentre in quello centrale la tensione si assesta su un valore quasi costante inferiore rispetto ai massimi misurati negli altri due strati.

Ci sono altresì delle differenze, soprattutto nei valori raggiunti, dovute probabilmente al numero di nodi considerati lungo lo spessore o al modello utilizzato per l'elemento.

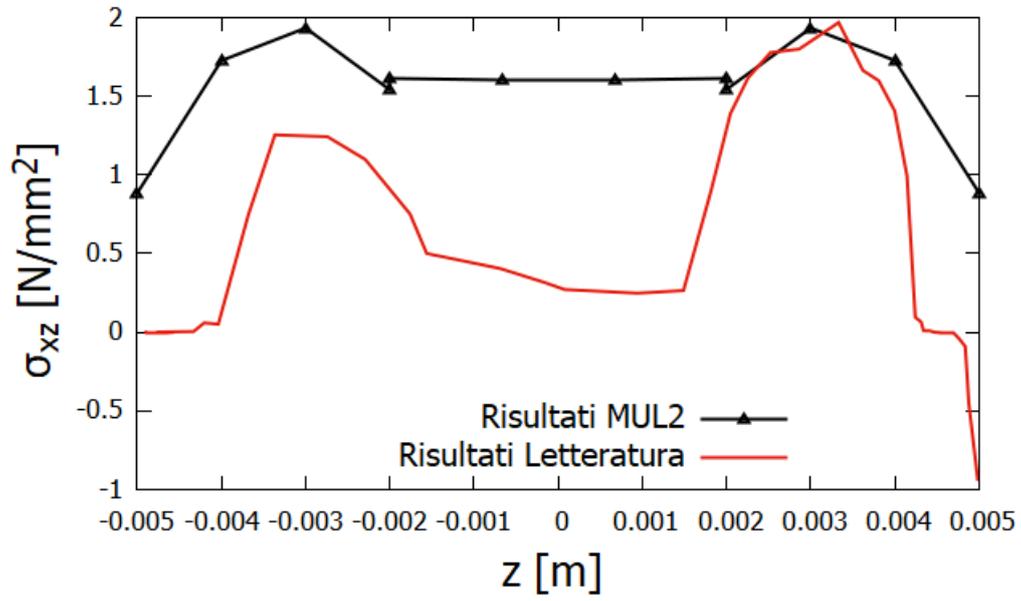


Figura 5.7: Confronto per la tensione tangenziale σ_{xz}

5.2 Pannello sandwich in materiale composito a 5 strati

In questa sezione viene presentata l'analisi Global/local condotta su una piastra sandwich a 5 strati, realizzata in materiale composito. La piastra si compone di 4 strati in fibra di carbonio più un core centrale in Nomex con struttura honeycomb. Sono state valutate due diverse condizioni di carico applicato:

- Carico distribuito costante sulla faccia superiore;
- Carico di compressione su un lato della piastra.

Per quanto riguarda i vincoli, in tutti i casi la piastra è presentata semplicemente appoggiata sui lati, con l'unica differenza che, nel caso di carico a compressione, il lato caricato risulta libero e non appoggiato.

Inizialmente è stata fatta una discretizzazione tramite una mesh 6x6, per poi aumentare progressivamente il numero di elementi così da ottenere un'analisi sempre più precisa anche se computazionalmente più costosa.

5.2.1 Dati iniziali

Costruzione della geometria

Per poter effettuare le analisi strutturali, si è inizialmente partiti con la definizione della geometria della piastra, modellata in Femap come una superficie 2D quadrata di lato $a=1\text{m}$.

Succeivamente, essendo quella in esame una struttura laminata, è stato definito il suo layup, che si compone di 4 facce in fibra di carbonio di spessore $0,0005\text{m}$ ed un core in nomex di spessore $0,008\text{m}$ ed ha pertanto uno spessore totale di $0,01\text{m}$. L'orientamento delle fibre delle facce segue la sequenza $0^\circ/90^\circ/-90^\circ/0^\circ$ come mostrato in Figura 5.8.

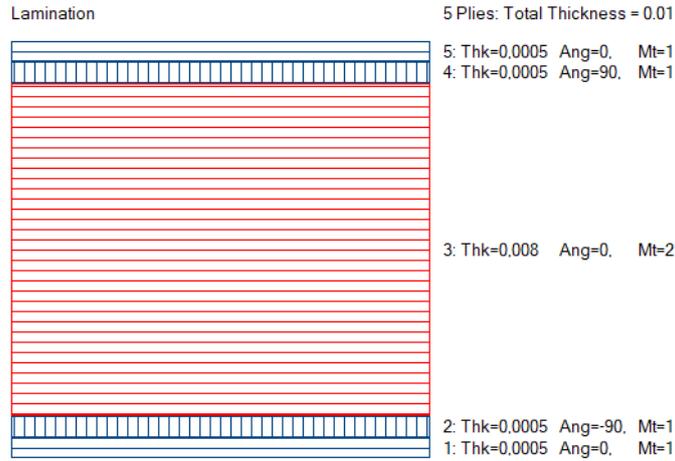


Figura 5.8: Layup della piastra

Materiali e proprietà

Dopo aver modellizzato la piastra ed il suo layup, sono stati definiti i materiali usati tramite i loro moduli elastici, moduli di taglio e coefficiente di Poisson. Come mostrato in Tabella 5.3, riportante i valori dei vari moduli per la fibra di carbonio e per il Nomex, il materiale delle facce presenta valori molto più alti essendo a loro richiesta una più elevata resistenza e rigidità.

	CFRP	Nomex
E_x	110[GPa]	1[Mpa]
E_y	9[GPa]	1[MPa]
E_z	9[GPa]	138[Mpa]
G_{xy}	3.58[GPa]	19[Mpa]
G_{yz}	4.5[GPa]	19[Mpa]
G_{xz}	3.58[GPa]	31[Mpa]
ν	0.25	0.25

Tabella 5.3: Moduli elastici, moduli di taglio e coefficiente di Poisson dei materiali

Le proprietà attribuite alla piastra invece, necessarie per effettuare l'analisi, sono quelle di una piastra laminata e sono caratterizzate dal layup precedentemente modellizzato all'interno del programma.

Carichi e vincoli

Nel primo caso in esame si è modellizzato un vincolo di appoggio sui quattro lati, il quale consente rotazioni ma non traslazioni, ed il carico al quale è sottoposta la piastra è distribuito sulla faccia superiore con unica componente $F_z = -10\text{N}$ (si tratta di una pressione agente sulla faccia superiore).

Il secondo caso invece presenta la piastra appoggiata su tre lati e caricata, sul lato non appoggiato, con un carico a compressione $F_x = 50\text{N}$.

I due carichi considerati sono bassi per il pannello in esame, ma permettono di ottenere comunque risultati utili per osservare l'andamento delle sollecitazioni. Per ottenere risultati più validi nell'analisi di failure, questi verranno successivamente aumentati.

5.2.2 Creazione del modello e analisi globale

L'analisi statica della piastra viene condotta, all'interno di Femap, con il metodo agli elementi finiti. Pertanto, definiti geometria, materiali, carichi e vincoli, la struttura è stata discretizzata con elementi quadrati 2D, a 4 nodi. Il numero di elementi nei quali è stata discretizzata la struttura è stato progressivamente aumentato per rendere più precisa la soluzione ottenuta, con costi computazionali però inevitabilmente più alti.

Per valutare il giusto compromesso, è stata condotta un'analisi di convergenza che ha permesso di determinare quale fosse il numero minimo di elementi in cui suddividere la struttura per ottenere un risultato esatto.

Carico distribuito sulla faccia superiore

Si è partiti da una discretizzazione con 36 elementi per poi aumentarne il numero progressivamente per raffinare le analisi effettuate. Tramite il comando "refine", che permette di raffinare la mesh generando quattro elementi più piccoli per ogni elemento facente parte della discretizzazione precedente, si è arrivati ad ottenere ed analizzare una mesh 48×48 (2304 elementi). Facendo riferimento agli spostamenti dovuti alla pressione sulla faccia superiore, si può osservare come il massimo spostamento si verifichi sempre nella parte centrale della piastra mentre si ha spostamento nullo in corrispondenza dei lati, dove sono stati posti i vincoli. Avendo inoltre, il carico solo componente z negativa, si avrà uno spostamento solo lungo l'asse z . In Figura 5.9 è mostrata la deformazione della piastra soggetta al carico.

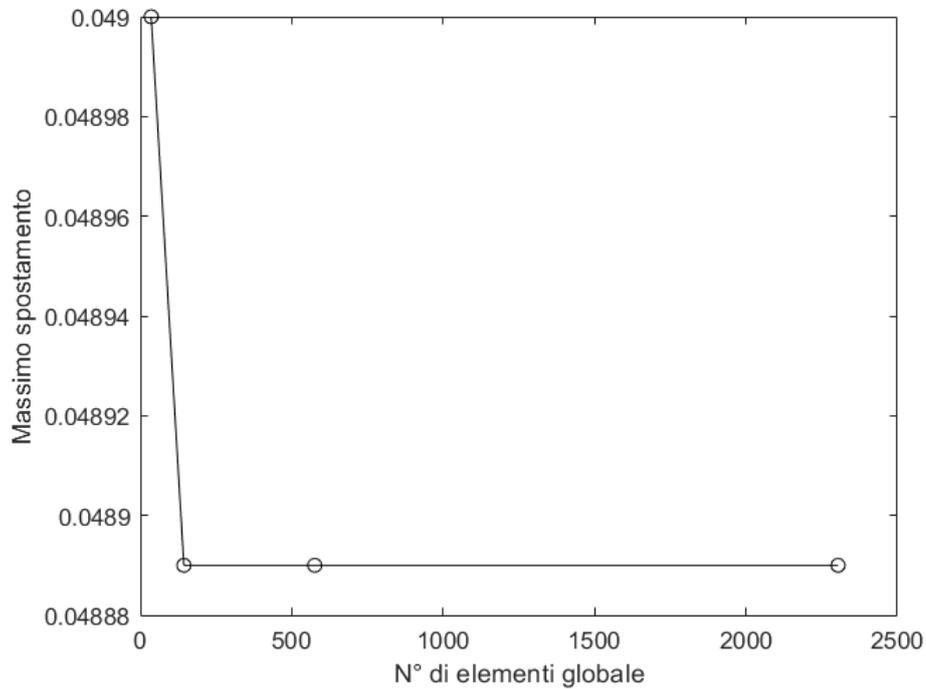


Figura 5.10: Convergenza dello spostamento massimo per un carico distribuito

L'analisi di convergenza viene effettuata anche localmente, verificando la variazione della tensione tangenziale σ_{yz} in un sistema di riferimento globale; i risultati, riportati in Figura 5.11, mostrano una convergenza, anche se non perfetta, del valore di massima tensione verso quello calcolato con una mesh 48x48. Sono anche riportati i valori misurati per le varie mesh e la loro differenza $\Delta\sigma$ rispetto alla mesh precedente

Mesh	σ_{yz} massima [N/mm ²]	$\Delta\sigma$
6x6	74.12392	-
12x12	112.9726	38.80208
24x24	135.4656	22.493
48x48	135.6888	0.2232

Tabella 5.5: Tensioni tangenziali σ_{yz} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente

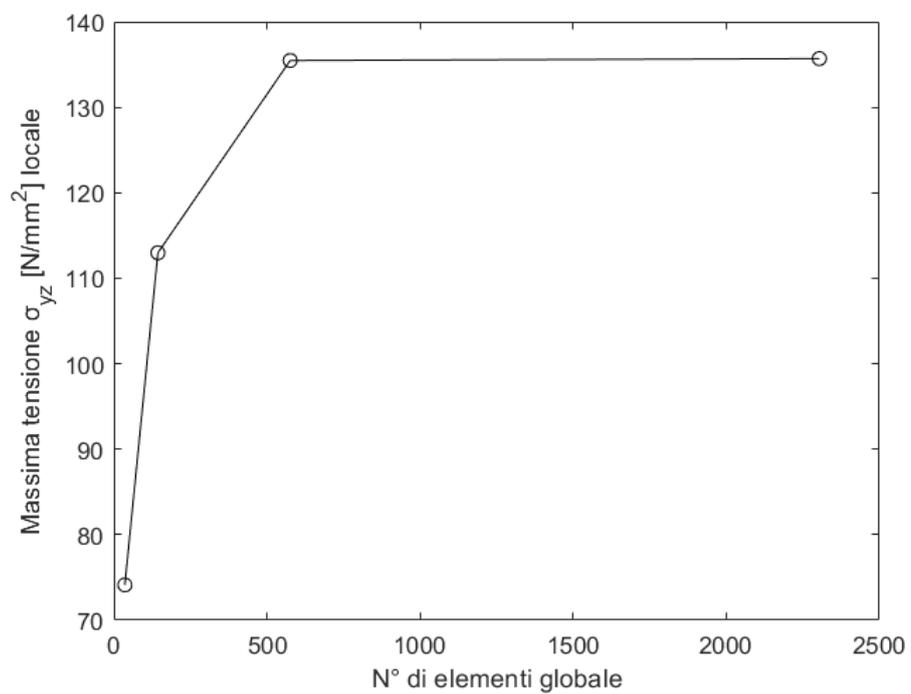


Figura 5.11: Convergenza del valore massimo di tensione σ_{yz}

Carico a compressione su uno dei lati

In figura 5.12 si possono vedere graficamente i risultati, in termini di spostamenti, dell'analisi condotta con una mesh 48x48. La piastra, caricata a compressione su un lato con un carico $F_x=50\text{N}$ e appoggiata sugli altri tre, mostra uno spostamento massimo in direzione x nell'area centrale del lato caricato, con lo spostamento che tende ad annullarsi spostandosi verso gli elementi sui lati appoggiati. Come per i precedenti casi, la prima discretizzazione effettuata prevedeva l'uso di 36 elementi ed è stata successivamente raffinata fino ad una mesh 48x48.

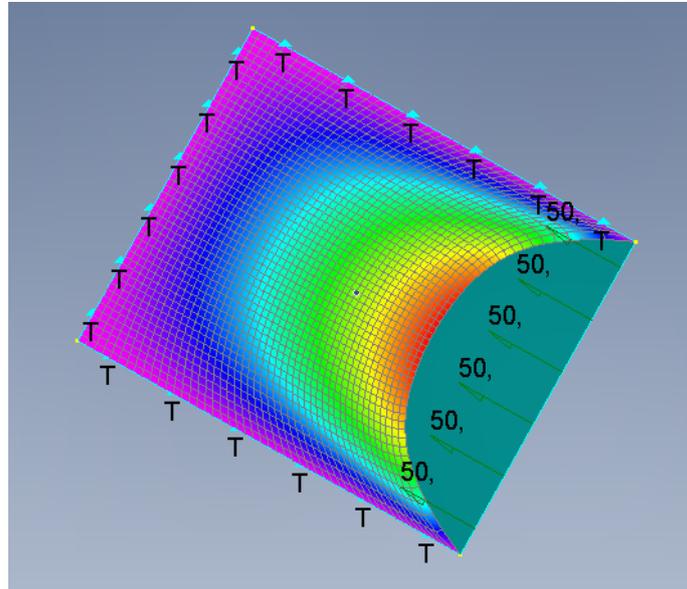


Figura 5.12: Risultati dell'analisi con mesh 48x48 per una piastra soggetta ad un carico a compressione su un lato

Analisi di convergenza Per il caso di carico a compressione su un lato, si è utilizzato lo stesso metodo di studio di convergenza visto nelle due situazioni precedenti e, come è possibile vedere in Tabella 5.6, il valore di massimo spostamento converge a 0.0003952 mm a partire dalla discretizzazione con mesh 24x24 che risulta essere quindi la migliore perché la meno costosa a fornire un risultato esatto.

Mesh	Max spostamento [mm] $\times 10^3$	Tempo di risoluzione [s]
6x6	0.3996	0.303
12x12	0.3958	0.319
24x24	0.3952	0.366
48x48	0.3952	0.680

Tabella 5.6: Spostamenti massimi e tempi richiesti per l'analisi nel caso di carico a compressione

Di seguito viene presentato anche il grafico che mostra la convergenza del valore di spostamento massimo misurato.

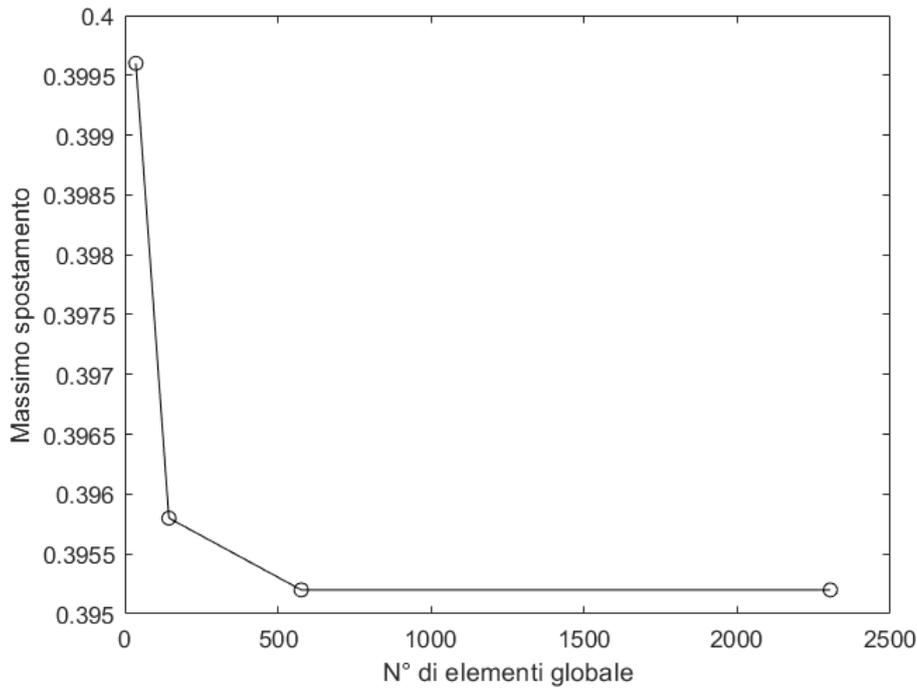


Figura 5.13: Convergenza dello spostamento massimo per un carico a compressione su un lato

Successivamente è stata effettuata un'analisi di convergenza anche locale, confrontando la massima tensione tangenziale σ_{yz} in modulo, misurata in un sistema di riferimento globale in una delle due facce superiori, per elementi siti nella stessa posizione della piastra ad un raffinamento progressivo della mesh.

I risultati di queste analisi non forniscono in realtà una convergenza esatta del valore considerato ma, come si può vedere in Figura 5.14 e nello scarto fra le

tensioni presente in Tabella 5.7 per il caso di carico a compressione su un lato, si ha un progressivo assestamento del valore di tensione misurato con una riduzione della variazione rispetto alla mesh precedente, con piccole variazioni che potrebbero essere conseguenti ad una localizzazione dell'elemento non perfettamente uguale col raffinamento della mesh; ogni elemento di una mesh infatti, viene suddiviso in 4 ulteriori elementi nella mesh successiva.

Mesh	σ_{yz} massima [N/mm ²]	$\Delta\sigma$
6x6	-1.723542	-
12x12	-1.138032	0.58551
24x24	-0.9422885	0,1957435
48x48	-0.8586286	0.0837599
96x96	-0.8010557	0.0575729

Tabella 5.7: Tensioni tangenziali σ_{yz} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente

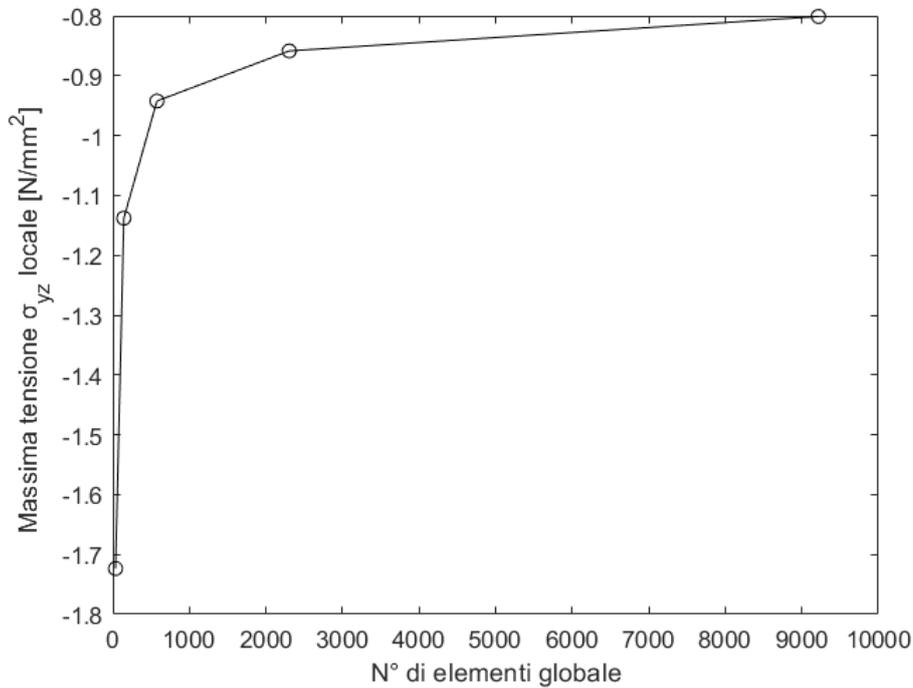


Figura 5.14: Grafico della convergenza locale della tensione σ_{yz} per il caso di carico a compressione su un lato

5.2.3 Analisi locale

Effettuata un'analisi statica lineare globale nelle due situazioni, sono stati individuati alcuni elementi su cui effettuare un'analisi locale. Per fare ciò, è stato utilizzato il plug in "MUL2@Global-Local" che, prendendo in input i risultati dell'analisi globale effettuata con Nastran e l'ID dell'elemento considerato, ha calcolato le tensioni normali e di taglio dell'elemento lungo il suo spessore.

Risulta così possibile ottenere un'analisi più dettagliata e 3D unicamente degli elementi di maggior interesse, risparmiando in termini di costo computazionale.

Sia per il caso di carico distribuito sulla faccia superiore che per quello di carico a compressione su un lato, sono stati considerati vari elementi nelle zone in cui risultano essere massime le tensioni, dove si verificano gli spostamenti massimi ma anche ad un quarto della piastra, dove le condizioni di spostamento e tensioni sono intermedie.

I risultati, in termini di tensioni, sono riportati di seguito sia in un sistema di riferimento materiale che in quello globale ed in quello locale.

I risultati sono riportati in entrambi i casi per diverse mesh dalla 6x6 alla 48x48, in maniera tale da poter anche mostrare le differenze sulle tensioni misurate e la loro convergenza verso una soluzione corretta che è rappresentata dalla discretizzazione a 2304 elementi.

Piastra con carico distribuito sulla faccia superiore

Nel primo caso analizzato, sono stati considerati due elementi:

- il primo nella zona dove si riscontrano tensione e spostamento massimi;
- il secondo ad un quarto di piastra, dove i valori sono intermedi.

Elemento con massimo spostamento Nella Figura 5.15, sono riportate le tensioni normali e tangenziali misurate nel sistema di riferimento materiale dell'elemento 1654, posto nella zona di massimo spostamento della piastra. Si può notare come, in linea con i risultati previsti, le σ_{xx} e σ_{yy} siano negative nelle facce superiori, che pertanto risultano essere in compressione, mentre hanno valori positivi negli strati inferiori in trazione.

Il core presenta valori di tensioni normali σ_{xx} e σ_{yy} costanti e nulli come ipotizzato per questo tipo di struttura.

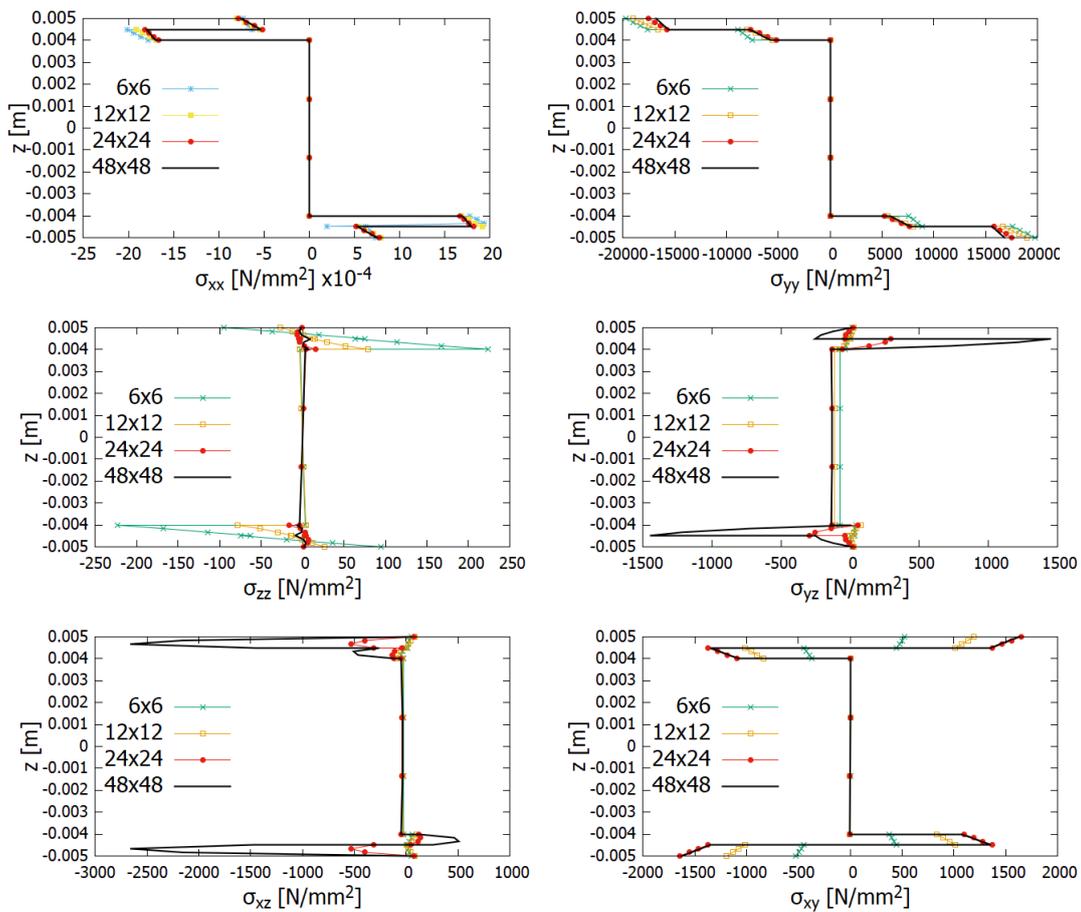


Figura 5.15: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1654 nel sistema materiale

Confrontando questi risultati con quelli negli altri sistemi di riferimento, in Figura 5.16 e 5.17, si può notare come questi ultimi due siano coincidenti mentre sono presenti delle differenze con quelli misurati nel sistema materiale.

In particolare, gli andamenti di σ_{xx} e σ_{yy} risultano invertiti fra loro, le σ_{xz} hanno un andamento opposto mentre σ_{yz} e σ_{xy} mostrano risultati diversi, soprattutto per quanto riguarda il secondo e quarto strato. Una analogia completa è presente solo per le σ_{zz} .

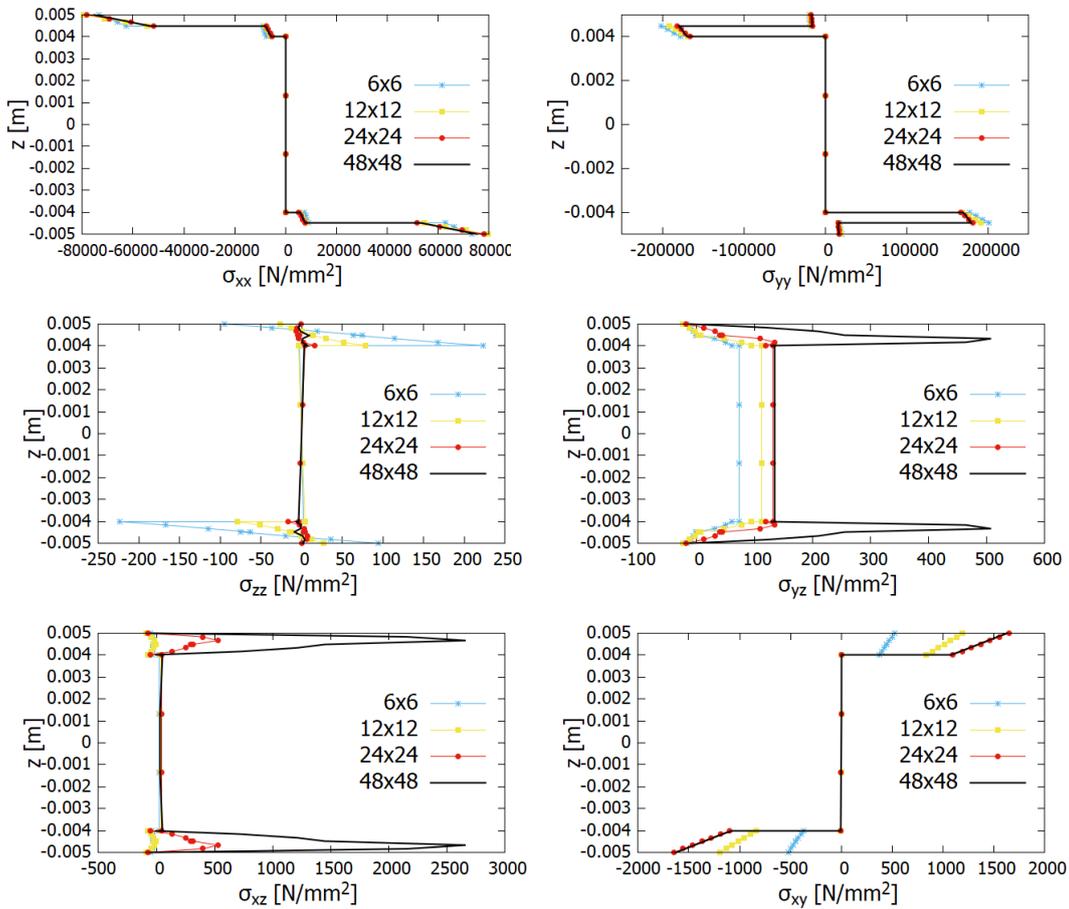


Figura 5.16: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1654 nel sistema globale

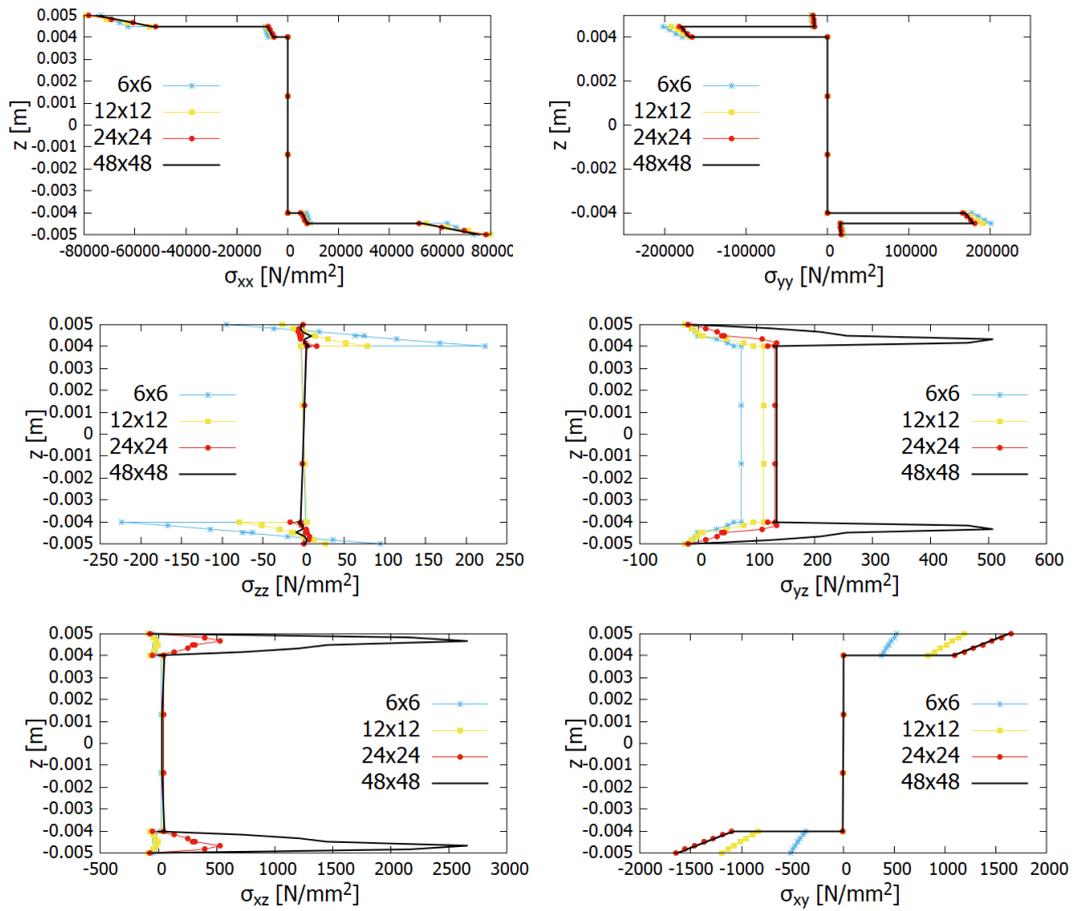


Figura 5.17: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1654 nel sistema locale

Elemento con valori intermedi Di seguito vengono riportati i risultati dell'analisi locale per l'elemento 1519, situato ad un quarto della piastra. In figura 5.18 sono riportate le tensioni misurate nel sistema di riferimento materiale. Si può notare come questo elemento mostri un comportamento analogo, in termini di tensioni normali, a quello analizzato in precedenza, con valori di tensione comunque più bassi. Le tensioni tangenziali mostrano invece un andamento opposto.

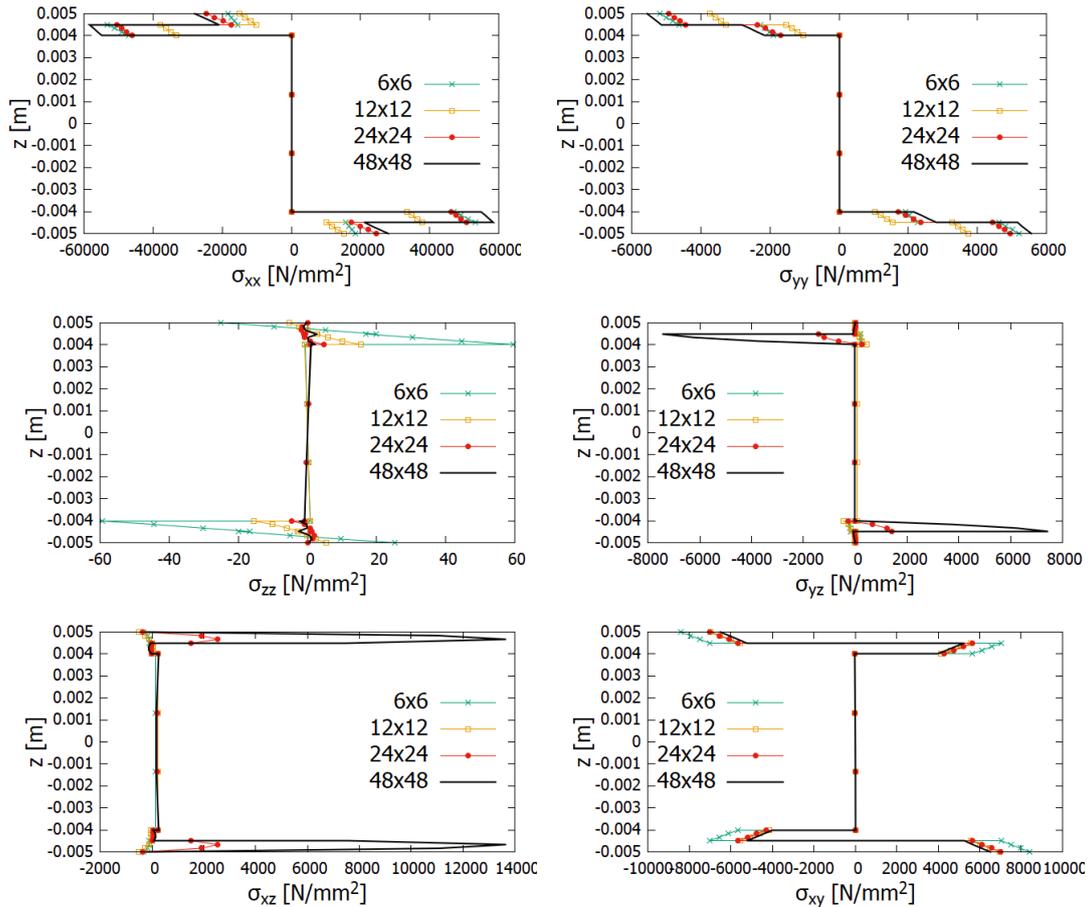


Figura 5.18: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1519 nel sistema materiale

Nelle figure seguenti invece, vengono presentati i risultati nei sistemi di riferimento globale, Figura 5.19, e locale, Figura 5.20.

Queste ultime due figure mostrano risultati pressoché identici fra loro, con solo piccole differenze su alcuni valori misurati. Prendendo in considerazione anche i risultati nel sistema materiale, si possono trarre le stesse conclusioni dell'elemento precedente, in quanto l'andamento della σ_{zz} coincide per i tre sistemi

di riferimento, mentre le altre due tensioni normali hanno andamenti invertiti e sono presenti dei risultati completamente diversi per la tensione tangenziale σ_{yz} la quale, per i sistemi globale e locale mostra differenze più marcate tra la mesh 6x6 e quella più raffinata 48x48 ma inoltre presenta valori positivi sia per le facce superiori che per quelle inferiori e valori non nulli per il core. Per il sistema materiale invece, il core assume valori nulli e solo gli strati inferiori presentano tensioni σ_{yz} positive, mentre quelli superiori negative.

Guardando infine la σ_{xz} , si vede che nel sistema materiale ha andamento esattamente opposto rispetto agli altri due.

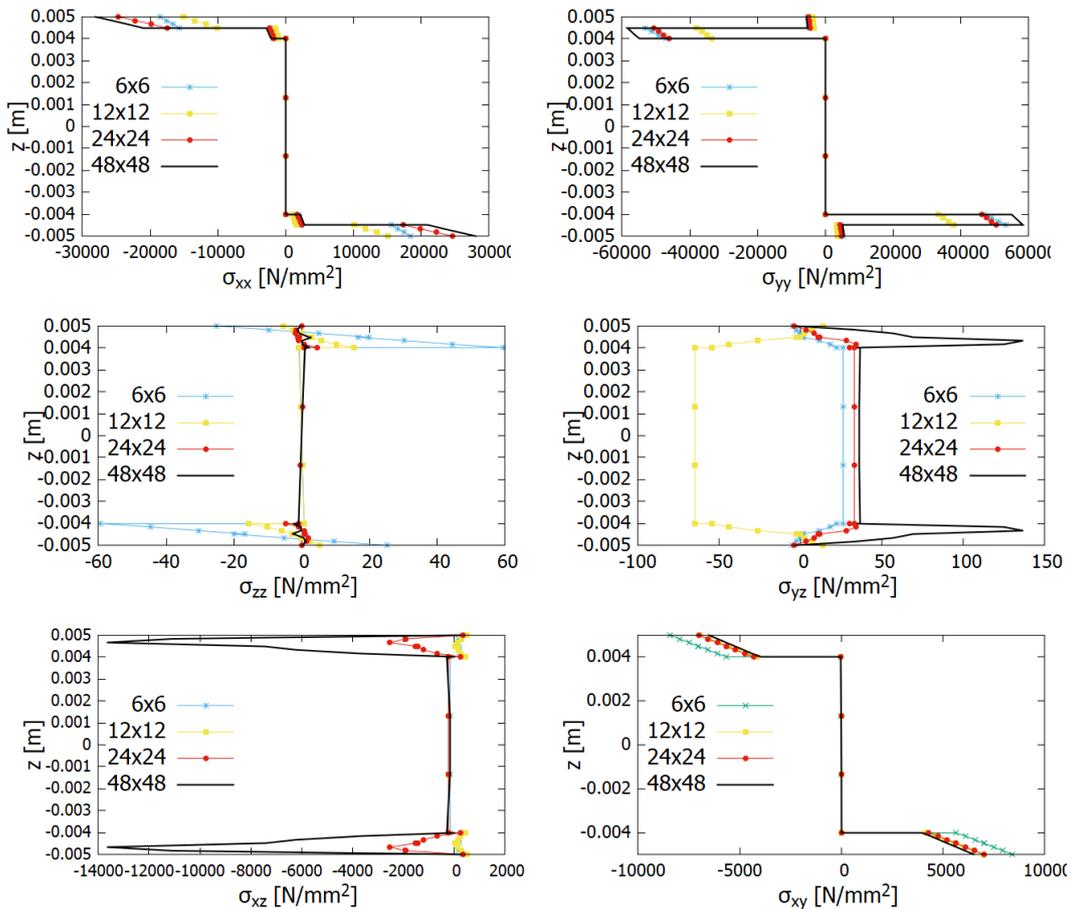


Figura 5.19: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1519 nel sistema di riferimento globale

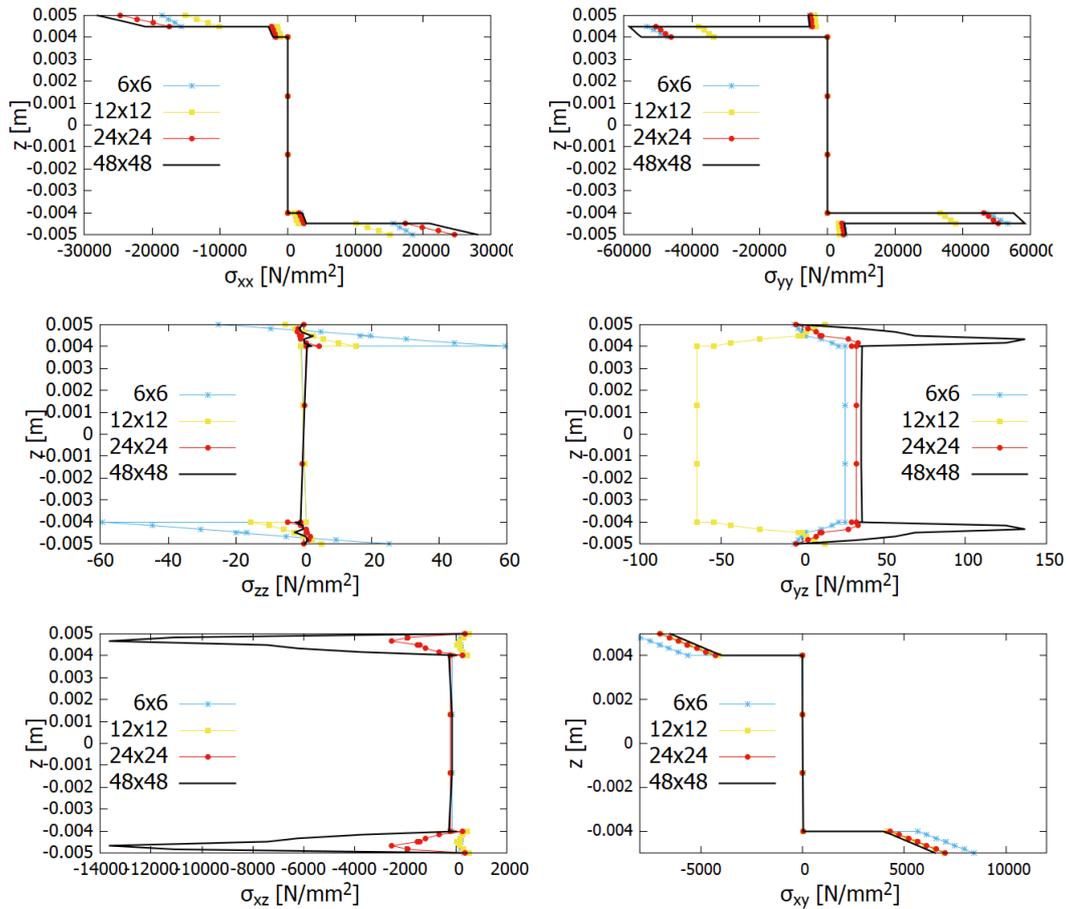


Figura 5.20: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1519 nel sistema di riferimento locale

Piastra con carico a compressione su un lato

Anche in questo caso, sono stati analizzati due diversi elementi:

- un elemento con valori di tensione e spostamento intermedi;
- un elemento dove si ha lo spostamento massimo.

Vengono di seguito presentati gli andamenti delle tensioni lungo lo spessore i quali, per entrambi gli elementi, presentano comportamenti analoghi con valori diversi. Per ogni sollecitazione, si è inoltre riportato il suo andamento calcolato a diverse mesh, partendo da quella più grezza 6x6 fino ad una mesh 48x48.

Elemento con valori intermedi Vengono presentate le tensioni normali dell'elemento 1219 che si trova ad un quarto della piastra. I valori, calcolati tramite nastran per σ_{xx} e σ_{yy} , coincidono con quelli in Figura 5.21, ottenuti da quest'ultima analisi locale nel sistema di riferimento materiale. Essi mostrano dei valori di tensione costanti all'interno dei vari strati con, in particolare, valori negativi della σ_{xx} , a confermare una compressione, per i due strati esterni con le fibre orientate in direzione x.

Inoltre, è possibile notare come i risultati convergano raffinando la mesh e la differenza tra i valori calcolati per due mesh consecutive diminuisca più si aumenta il numero di elementi, fino alla mesh 48x48 che fornisce degli andamenti considerabili pressoché esatti.

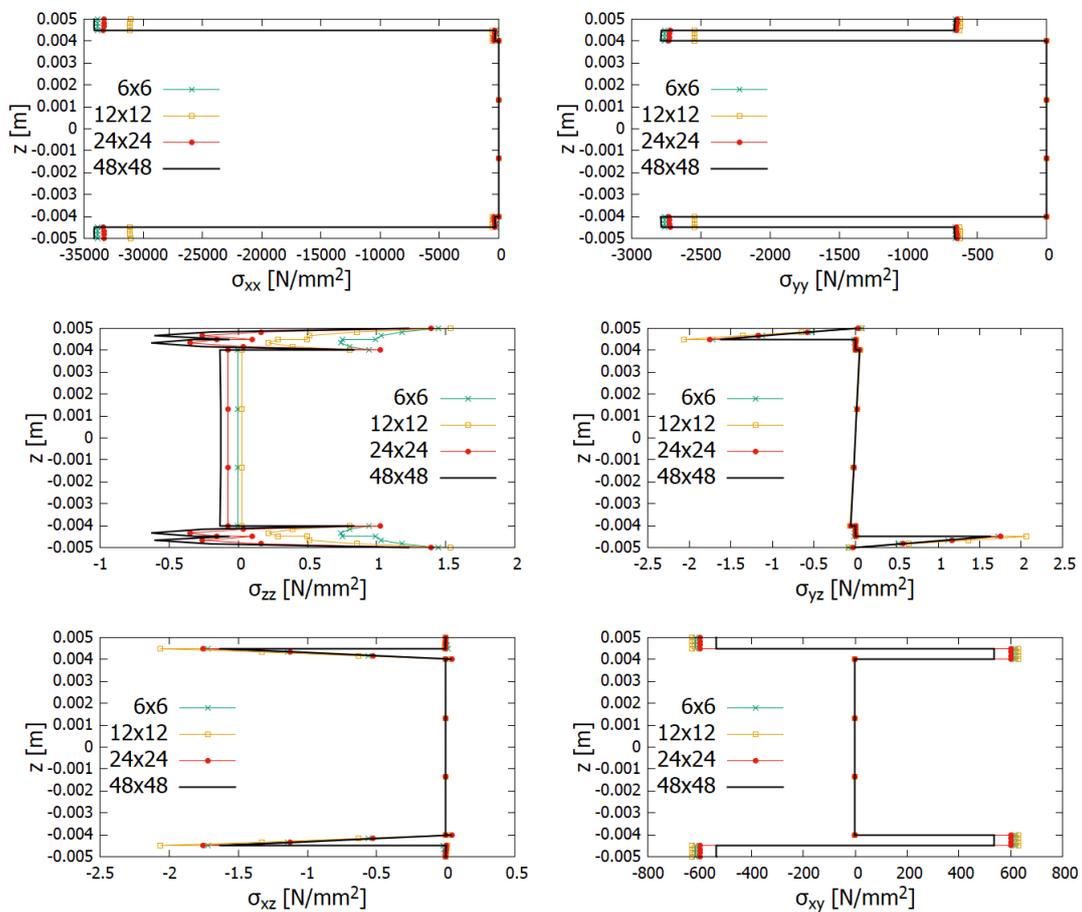


Figura 5.21: Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1219 nel sistema di riferimento materiale

In Figura 5.22 e Figura 5.23 sono rappresentate le tensioni calcolate rispettivamente nel sistema di riferimento globale ed in quello locale. Le due figure

mostrano risultati analoghi, sia negli andamenti che per i valori, se non per qualche piccola variazione. Facendo però riferimento alle tensioni nel sistema materiale prima descritte, si vede come questa analogia dei risultati permanga solo per la σ_{zz} . Le σ_{xx} e σ_{xy} hanno andamenti simili, ma differiscono per i valori misurati nel secondo e nel quarto strato del pannello, in quanto nel sistema materiale questi presentano valori σ_{xy} positivi mentre, negli altri due, hanno circa la stessa tensione delle delle altre due facce in CFRP.

Infine, le σ_{yz} hanno andamento opposto, mentre quello delle σ_{xz} differisce completamente.

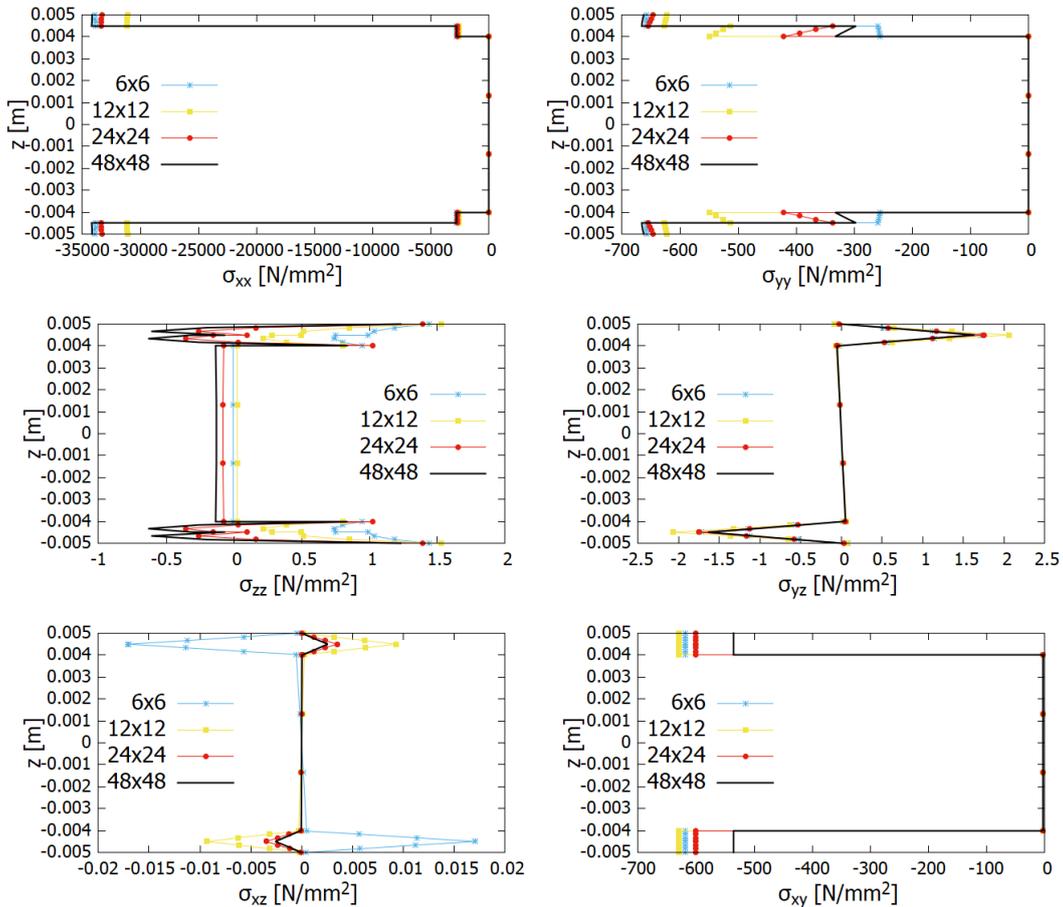


Figura 5.22: Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1219 nel sistema di riferimento globale

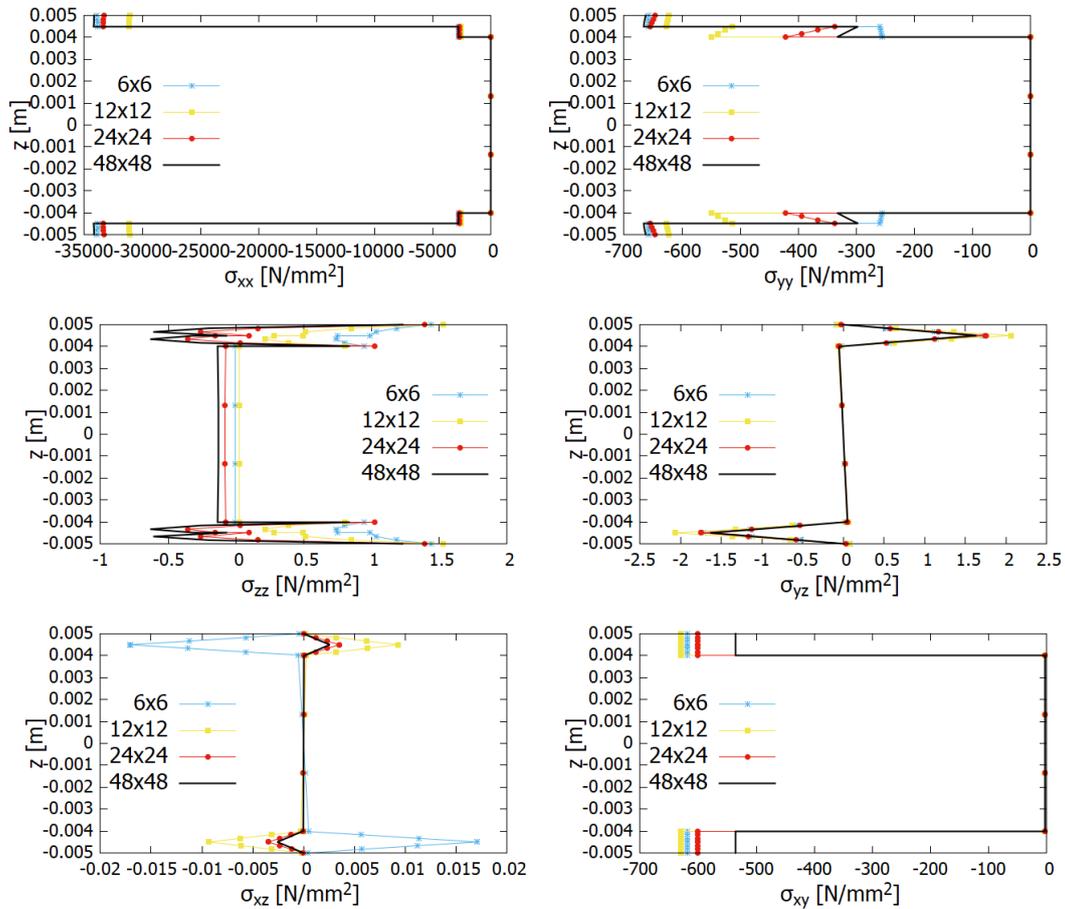


Figura 5.23: Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1219 nel sistema di riferimento locale

Elemento con massimo spostamento I grafici in Figura 5.24 delle tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1777, sito nella zona dove si ha lo spostamento più alto della piastra, mostrano i risultati in un sistema di riferimento materiale. Questi presentano andamenti analoghi a quelli dell'elemento precedentemente riportato, con valori di tensione che, in modulo, risultano essere maggiori e, in particolare per la σ_{xx} , mostrano una compressione più alta delle facce esterne. Anche in questo caso i valori calcolati con nastran corrispondono ai risultati di questa analisi locale.

Come visto anche per l'elemento precedente si può notare una convergenza dei valori calcolati con le diverse mesh, con un'approssimazione che diminuisce procedendo col raffinamento e degli andamenti finali per la mesh 48x48, rappresentati in nero, che sono considerabili come quelli esatti.

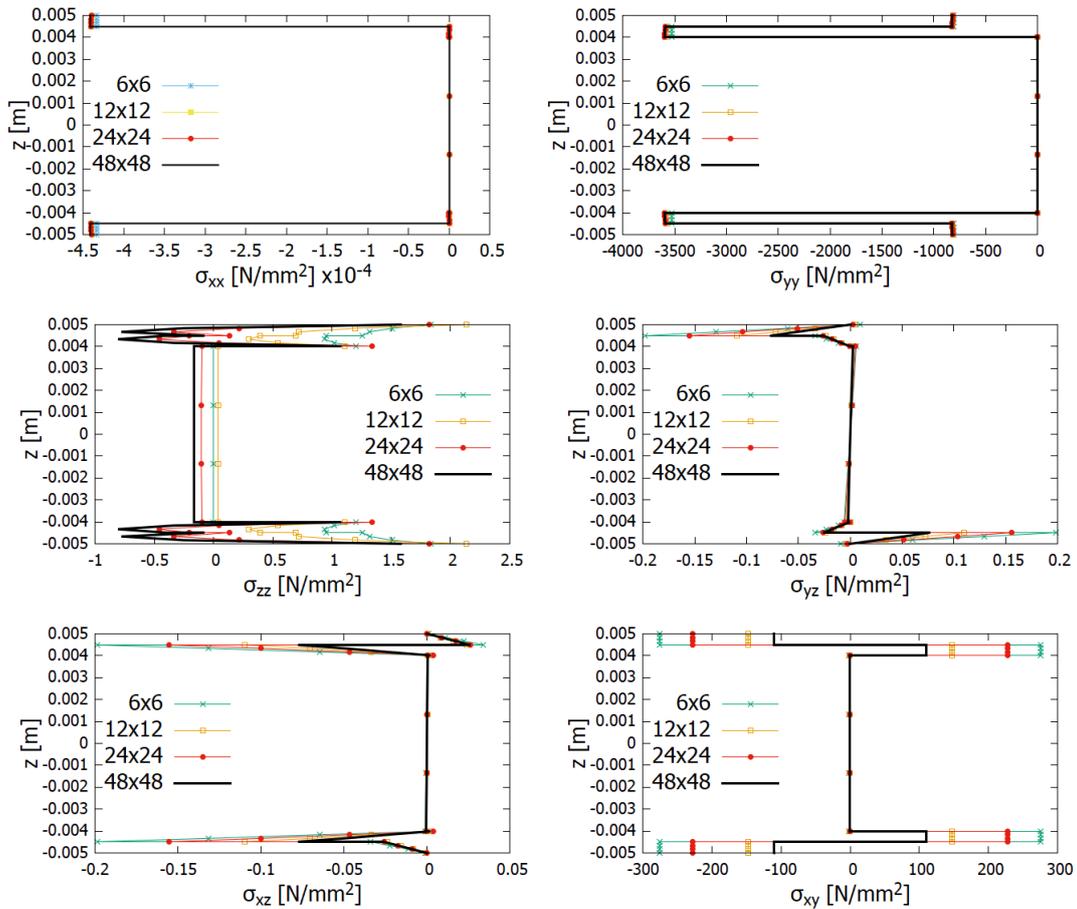


Figura 5.24: Tensioni normali e tangenziali dell'elemento1777 nel sistema materiale

Per quanto riguarda i risultati negli altri due sistemi di riferimento, riportati in Figura 5.25 ed in Figura 5.26, si possono riscontrare le stesse differenze viste nell'elemento precedente, anche se ovviamente in questo caso sono più alti. Pertanto, nonostante i risultati per i sistemi globale e locale coincidano quasi del tutto, questi presentano congruenze con quello materiale solo negli andamenti della σ_{zz} e, in parte della σ_{xx} , mentre la σ_{yz} presenta un andamento opposto. Le altre due tensioni tangenziali e la σ_{yy} mostrano delle differenze dovute anche in questo caso principalmente al diverso orientamento del sistema di riferimento.

In ogni caso, confrontando questi grafici con quelli dell'elemento 1219 presentato in precedenza, si può notare affinità tra i risultati nei vari sistemi per quanto riguarda gli andamenti delle tensioni, anche se ovviamente i valori assunti da quest'ultime sono diversi perché l'elemento 1777 è stato preso in una zona del pannello più sollecitata.

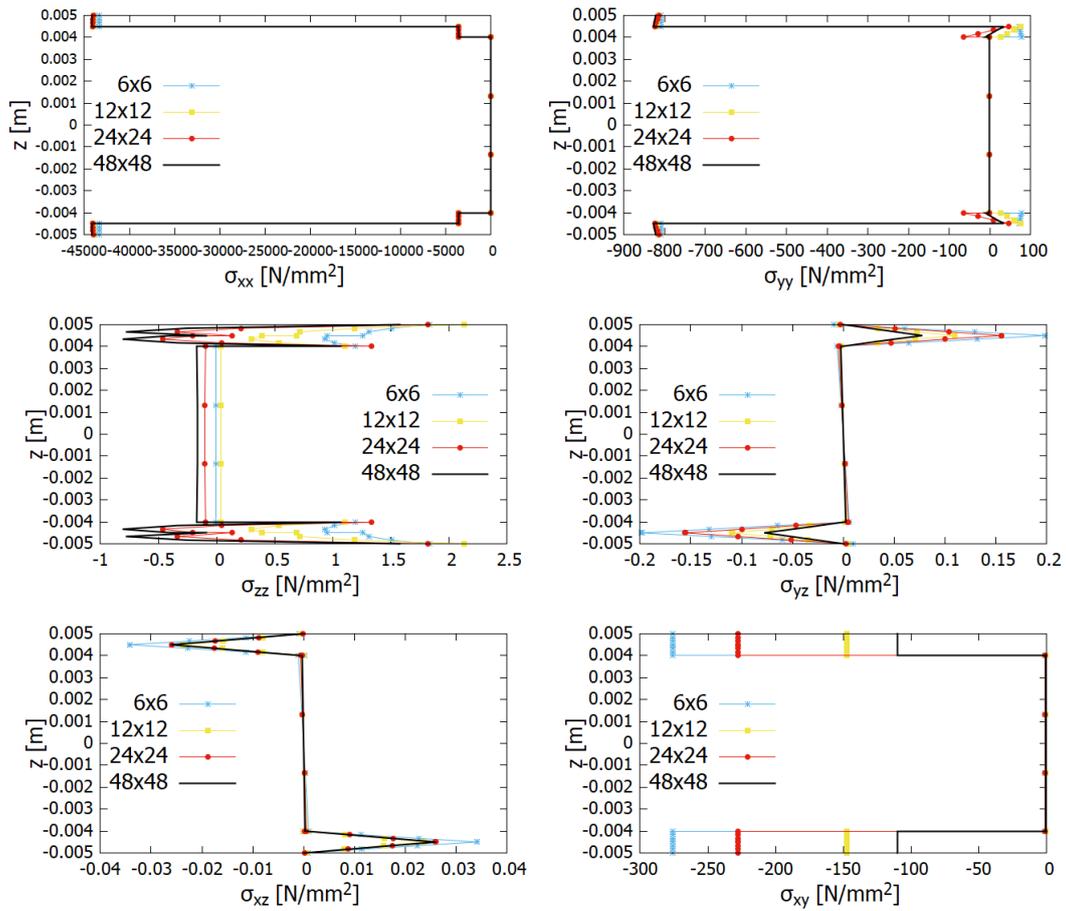


Figura 5.25: Tensioni normali e tangenziali dell'elemento1777 nel sistema globale

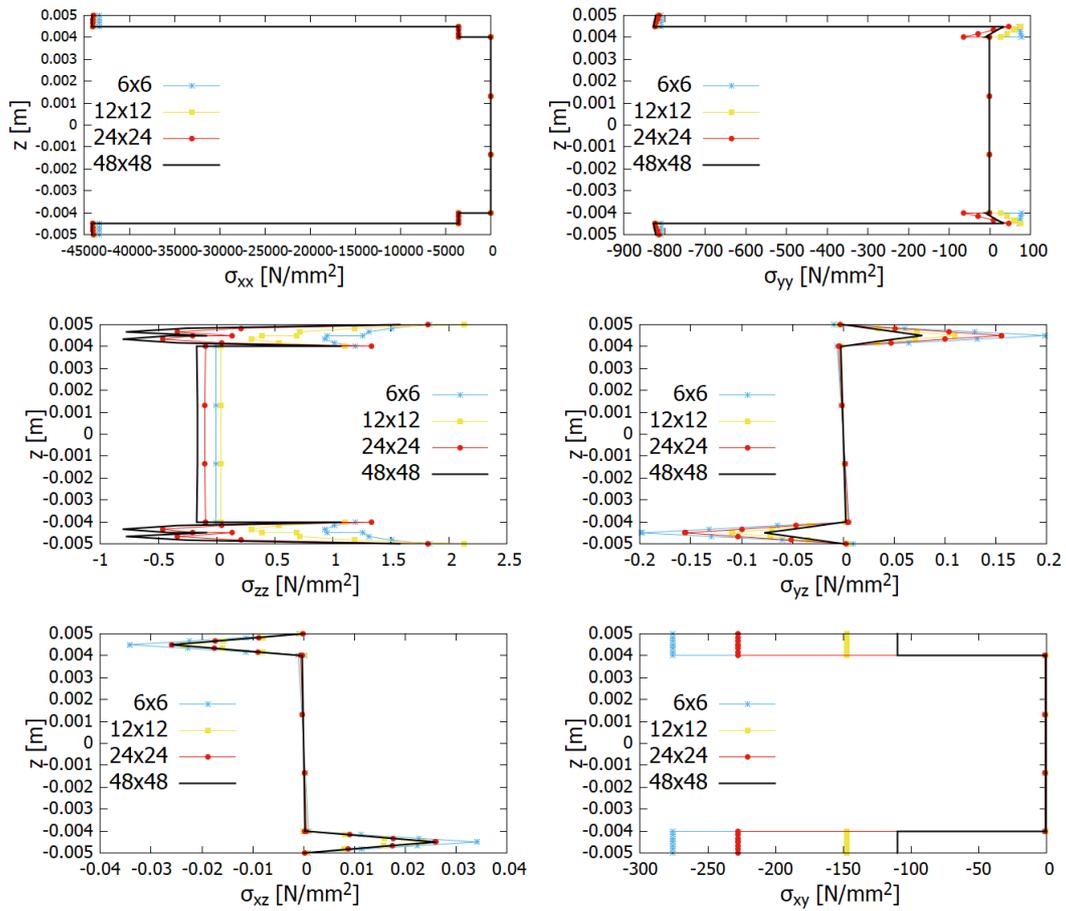


Figura 5.26: Tensioni normali e tangenziali dell'elemento 1777 nel sistema locale

5.2.4 Analisi di failure

Per concludere adeguatamente l'analisi del pannello sandwich, è necessario verificare che le tensioni a cui è soggetto, conseguenza dei carichi applicati, siano adeguatamente sopportate dai materiali e non comportino una failure della struttura.

Per poter ottenere dei risultati meglio analizzabili, si è scelto di aumentare i carichi a cui è sottoposto il pannello; pertanto, si è passati dai carichi di prova precedentemente impiegati, che comunque permettevano di apprezzare adeguatamente la risposta in termini di tensioni della struttura, a dei carichi di 1000 N per il caso di carico di pressione distribuito e di 10000 N per il caso di carico a compressione su un lato. Così facendo, si sono potuti calcolare dei valori più adeguati per gli indici di failure, per quanto comunque la struttura non vada lo stesso incontro a rottura.

Il plug-in permette di svolgere un'accurata analisi sugli indici di failure, calcolati a partire dagli ammissibili dei materiali, quali ad esempio la resistenza a trazione o a compressione.

Affinché si possano considerare adeguati la geometria della struttura ed il sistema di carichi posti, i failure index calcolati devono essere minori dell'unità. In caso contrario, va riconsiderato lo scenario di analisi perché la struttura così definita, con anche quel determinato layup di materiali, non sarebbe in grado di resistere alle sollecitazioni e andrebbe incontro ad una failure.

Vengono di seguito riportati gli ammissibili per i materiali costituenti il pannello in esame [32] [33]. In particolare:

- con X ed il pedice t o c, sono indicate le resistenze a trazione e compressione nella direzione delle fibre;
- con Y sono invece indicate le resistenze in direzione perpendicolare alle fibre;
- XY e XZ sono le resistenze a taglio longitudinale alle fibre; XY è uguale a XZ e possono essere indicate con S_L ;
- YZ è la resistenza a taglio trasversale alle fibre indicabile anche con S_T .

Materiale	X_t	X_c	Y_t	Y_c	XY	XZ	YZ
CFRP	2560	1590	73	185	90	90	57
Nomex	1.93	2.24	1.93	2.24	1.26	1.26	0.62

Tabella 5.8: Ammissibili dei due materiali utilizzati

Il criterio utilizzato, già implementato all'interno del plug-in, è stato l'Hashin3D. Questo, a partire dai 7 ammissibili del materiale, definisce separatamente 4 modi di failure, di cui due legati alla rottura delle fibre, per compressione e per trazione, e due alla matrice. Facendo riferimento all'articolo [34], le formule per calcolare i 4 indici di failure per ogni punto della struttura presentano i rapporti tra le tensioni normali e tangenziali e le tensioni di rottura proprie dei materiali; pertanto, valori degli indici superiori o uguali ad 1 mettono in evidenza delle tensioni all'interno della struttura superiori a quelle sopportabili dai materiali impiegati.

Le equazioni per calcolarli sono:

$$FI_{Fibertension} = \left(\frac{\sigma_{xx}^2}{X_T}\right)^2 + \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2}{S_L^2} \quad (5.1)$$

$$FI_{Fibercompression} = \left(\frac{\sigma_{xx}^2}{X_C}\right)^2 \quad (5.2)$$

$$FI_{Matrixtension} = \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2}{S_L^2} + \frac{\sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2}{Y_T^2} + \frac{\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz}}{S_T^2} \quad (5.3)$$

$$FI_{Matrixcompression} = \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{Y_C}\right) + \frac{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2}{S_L^2} + \frac{\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz}}{S_T^2} + \frac{(\sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2)^2}{4S_T^2} \quad (5.4)$$

Gli indici della fiber tension e della matrix tension tengono conto della resistenza a trazione del materiale e, nel secondo modo di rottura anche delle resistenze a taglio perpendicolare e longitudinale alle fibre. Gli altri due modi invece, per completezza, sono legati alla resistenza a compressione. Come sarà evidente dai grafici riportati successivamente, gli indici di failure legati alla trazione saranno presenti solo per gli strati del pannello sollecitati a trazione e viceversa per quelli a compressione.

Per questa analisi, si è scelto di prendere in considerazione per entrambi i casi l'elemento nella zona di massima sollecitazione e massimo spostamento del pannello, già oggetto anche dell'analisi locale.

Viene inoltre presentata un'analisi di failure globale, eseguita con Nastran, in maniera tale da evidenziare gli elementi più sollecitati del pannello, i quali presenteranno un indice di failure più alto, e controllare che questo rimanga comunque inferiore ad uno, cosicché non si verifichi una rottura nella piastra. I risultati vengono poi confrontati con quelli del plug-in ottenuti da un'analisi con lo stesso criterio.

Per eseguire quest'ultima analisi, sono stati inseriti gli ammissibili dei materiali all'interno della definizione di quest'ultimi in Femap ed è stato scelto il criterio di failure attribuendolo alle proprietà del pannello.

In questo specifico caso, è stato usato il criterio di Hoffman il quale, a differenza dell'Hashin 3D, come spiegato nella guida di Nastran [35], permette di calcolare un singolo indice di failure, senza fare distinzioni tra i diversi modi di rottura, ma limitandosi a distinguere con un segno se lo strato in questione si avvicina alla rottura per trazione (segno positivo) o compressione (segno negativo).

In particolare, l'indice viene calcolato con la seguente formula:

$$FI = \left(\frac{1}{X_T - X_C}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{1}{Y_T - Y_C}\right)\sigma_{yy} + \frac{\sigma_{xx}^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_{yy}^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_{xy}^2}{S_L^2} + \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{X_T X_C} \quad (5.5)$$

Nell'equazione compaiono le resistenze a trazione e compressione in direzione delle fibre (X_T e X_C) ed in direzione trasversale, (Y_T e Y_C), la resistenza a taglio longitudinale S_L (uguale a XY ed XZ precedentemente enunciate) nonché le tensioni normali nel piano calcolate in un sistema di riferimento materiale.

Caso di carico distribuito

Come è possibile vedere dai grafici, nessuno degli indici calcolati lungo lo spessore del pannello supera il valore unitario, nè per le facce nè per il core, pertanto si può che nessuna parte della struttura andrà incontro a rottura in questa condizione.

I failure index associati alla tensione di fibre e matrice raggiungono i valori più alti nelle facce inferiori, le quali risultano appunto sollecitate a trazione; per quanto riguarda la compressione invece, i valori più alti si riscontrano ovviamente nelle facce superiori.

Nel complesso, i valori degli indici nel core risultano essere minori di quelli calcolati per le facce.

A differenza del caso precedente, gli indici sono simmetrici nella loro distribuzione lungo lo spessore, cosiccome lo erano le tensioni calcolate nella precedente analisi locale.

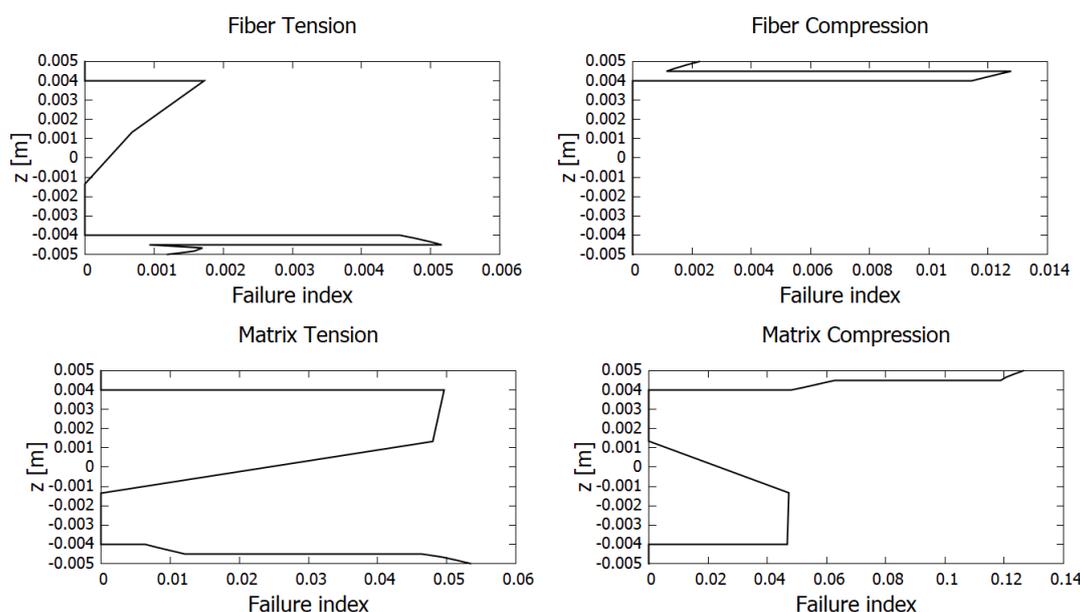


Figura 5.27: Indici di failure per tensione e compressione nel caso di carico distribuito

Si riporta infine una tabella contenente i valori massimi raggiunti dagli indici nei 4 diversi casi.

Modo di rottura	Valore massimo
Fiber Tension	0.5160363×10^{-2}
Fiber compression	0.01277062
Matrix tension	0.05342889
Matrix compression	0.1264486

Tabella 5.9: Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura nel caso di carico distribuito

Analisi globale L'analisi di failure effettuata con Nastran mostra come la zona che presenta gli indici di failure maggiori rimanga quella centrale del pannello, dove si hanno anche le sollecitazioni più alte e lo spostamento massimo. Il valore massimo raggiunto rimane comunque inferiore all'unità, essendo l'indice $FI=0.1776$ nell'area centrale. Pertanto, nessun elemento della piastra sembra incorrere in una rottura se sottoposto al carico considerato. In Figura 5.28. Vengono mostrati gli andamenti dell'indice di failure massimo, con una scala cromatica che vede i valori minimi alle estremità della piastra ed una progressiva crescita spostandosi verso il centro del pannello.

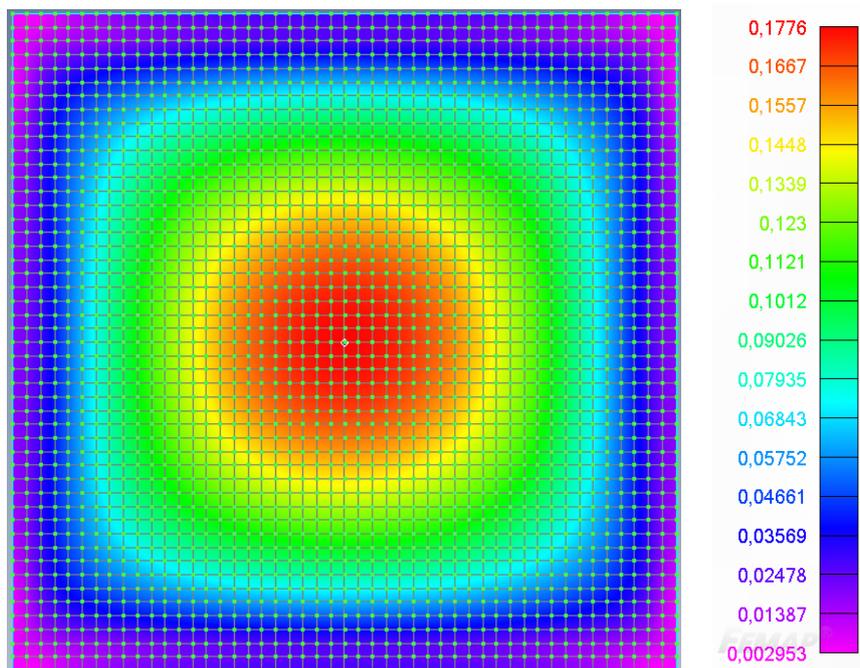


Figura 5.28: Analisi globale di failure per il pannello caricato con un carico distribuito uniforme

I vari strati presentano comunque valori massimi dell'indice diversi e si può osservare come il massimo di questi sia osservabile nel primo strato, il quale quindi risulta essere il più sollecitato.

I valori di failure index del core non sono stati calcolati con nastran e risultano essere uguali a 0 per ogni elemento, probabilmente perché comunque molto più bassi rispetto a quelli delle facce.

Si possono confrontare questi valori con gl'indici calcolati tramite il plug-in, i quali comunque sono i risultati di un'analisi condotta con un criterio di Hoffman 3D e non bidimensionale come nel caso di Nastran.

Come mostrato in Tabella 5.10 dove sono raccontati i massimi failure index per strato, i risultati di Nastran sono vicini a quelli di MUL2, con i secondi che risultano essere tendenzialmente leggermente più bassi ma allo stesso tempo più accurati perché frutto di un'analisi tridimensionale più precisa. Lo stesso indice massimo misurato è quasi uguale nei due casi, essendo quello ottenuto dal plug-in pari a 0.1713955.

Si riporta un'immagine con l'andamento del failure index per un elemento posto nella zona di massima sollecitazione.

Strato	Massimo FI Nastran	Massimo FI MUL2
1	0.1776	0.1713955
2	0.0444	0.04162633
3	0	0.428424×10^{-3}
4	0.008524	0.008846561
5	0.1169	0.1115434

Tabella 5.10: Confronto tra i risultati dell'analisi di failure con Nastran e quella successiva locale col plug-in MUL2 per il caso di carico distribuito

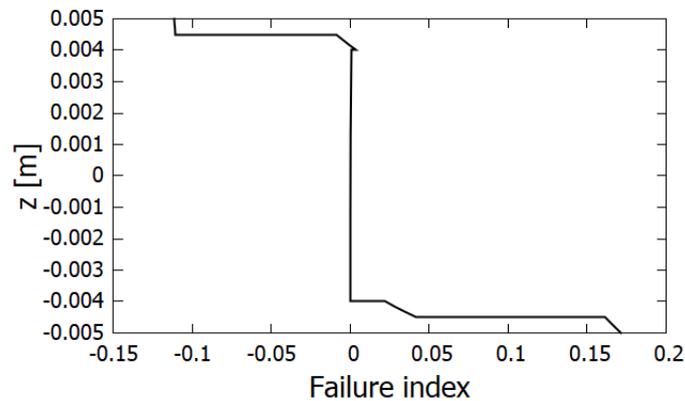


Figura 5.29: Andamento dell'indice di failure per l'elemento 1715, posto nella zona di massima sollecitazione del pannello

Caso di carico a compressione su un lato

Anche il caso con carico a compressione non presenta criticità legate alla failure, essendo tutti gli indici calcolati molto minori di 1. In particolare, si può notare come gli indici legati alla Fiber tension siano dell'ordine di 10^{-6} , tre ordini di grandezza minori di quelli legati alla fiber compression; il rischio di rottura a trazione degli strati così sollecitati è pertanto molto bassa. Facendo invece riferimento agli indici legati alla matrice, compaiono solamente quelli per la compressione, i quali assumono valori più alti dei due modi sopracitati, ma comunque molto minori di 1. Quelli legati alla trazione invece non sono stati calcolati nella simulazione.

Si può anche notare come gli indici calcolati nel core risultano essere più bassi rispetto a quelli calcolati nelle facce.

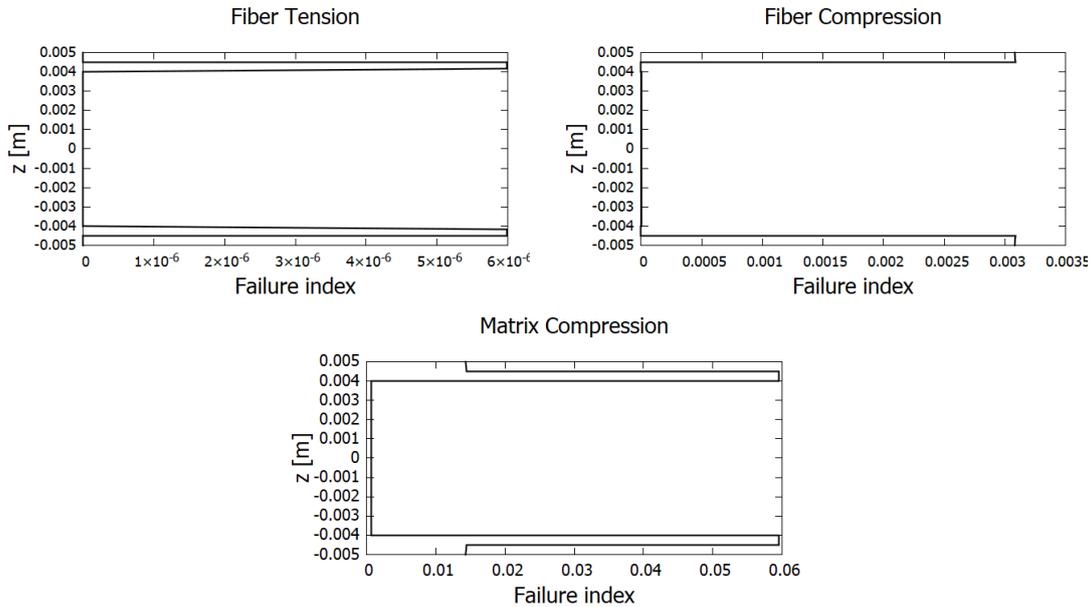


Figura 5.30: Indici di failure per tensione e compressione nel caso di carico a compressione su un lato

Vengono infine riportati anche i valori massimi assunti dai failure index in questo caso.

Modo di rottura	Valore massimo
Fiber Tension	0.5985709×10^{-5}
Fiber compression	0.3085099×10^{-2}
Matrix compression	0.05954343

Tabella 5.11: Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura nel caso di carico a compressione

Analisi globale Anche per questo caso, è stata effettuata un analisi di failure globale, usando il criterio di Hoffman per determinare l'indice di failure dei vari elementi del pannello. I risultati sono stati poi confrontati con quelli ottenuto dal plug-in con Hoffman. Come è possibile vedere in Figura 5.31, dove viene riportata un'immagine della piastra con una scala cromatica che rappresenta l'andamento dell'indice di failure, le zone più sollecitate e che quindi presenti gli indici più alti, sono le estremità del lato caricato a compressione (a sinistra), vicino ai due lati contigui che invece risultano essere vincolati con un appoggio semplice. Fatta eccezione per queste due piccole porzioni, le zone centrali della piastra presentano indici maggiori rispetto alle aree vicine ai lati appoggiati,

con gli indici che diminuiscono progressivamente anche allontanandosi dal lato caricato.

In ogni caso, il massimo failure index misurato ha un valore di $FI=0.1558$, inferiore all'unità, quindi si può concludere che nessuna zona del pannello rischia la rottura sotto questo tipo di carico.

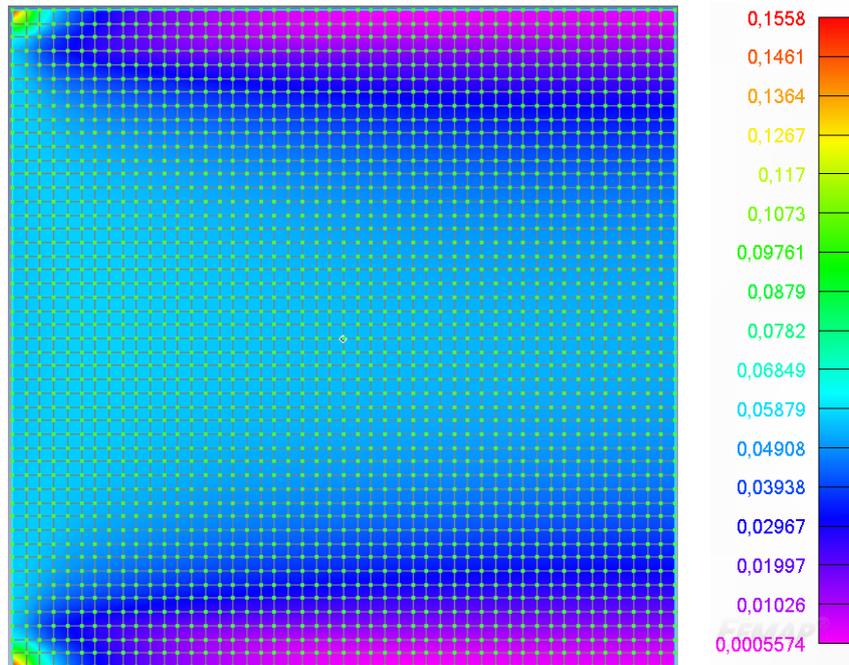


Figura 5.31: Analisi globale di failure per il pannello caricato con un carico a compressione

Analizzando i valori dell'indice per i vari strati del pannello, si può osservare che i massimi valori vengono raggiunti nel primo ed ultimo strato. Inoltre, vi è una simmetria degli indici nei vari strati. Nel core, strato numero 3, si raggiungono valori comunque più bassi rispetto a quelli raggiunti nelle facce.

Di seguito sono riportati i massimi valori di indice di failure nelle facce e nel core misurati sia con Nastran che con MUL2. Si nota come i valori sono pressoché congruenti nei due casi, pertanto già l'analisi globale bidimensionale condotta con Nastran fornisce risultati attendibili. Lo stesso indice massimo calcolato con Nastran ($FI=0.1558$) coincide con quello calcolato col plu-gin ($FI=0.1558$). In Figura 5.32, viene infine riportato l'andamento del failure index calcolato con MUL2 ed il criterio Hoffman per l'elemento 1098, situato nella zona più sollecitata.

Strato	Massimo FI Nastran	Massimo FI MUL2
1	0.1558	0.1558345
2	0.0412	0.03137990
3	0.01021	0.01024954
4	0.0412	0.03137990
5	0.1558	0.1558345

Tabella 5.12: Confronto tra i risultati dell'analisi di failure con Nastran e quella successiva locale col plug-in MUL2 per il caso di carico a compressione

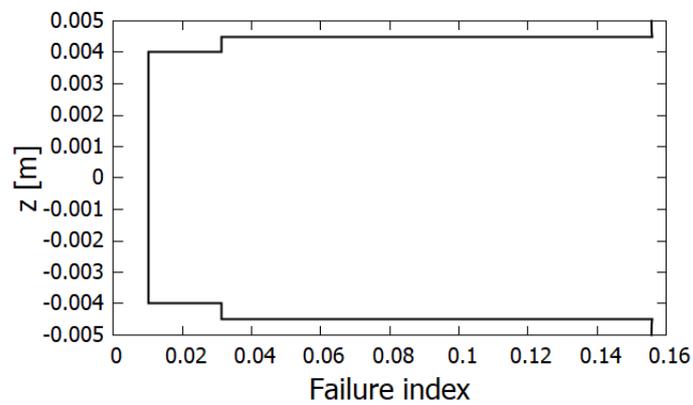


Figura 5.32: Andamento dell'indice di failure calcolato per l'elemento 1098 con il criterio di Hoffman

5.3 Pannello solare

Dopo aver discusso i risultati dell'analisi applicata ad un pannello sandwich a cinque strati, verrà ora studiato il comportamento di un pannello solare usato in ambito spaziale come convertitore di energia solare in energia elettrica per i satelliti.

Il pannello in esame è composto da:

- uno strato di semiconduttore in silicio monocristallino;
- un substrato sandwich con funzioni strutturali che permette al pannello di resistere ai carichi cui è sottoposto.

Il pannello è generalmente soggetto a sollecitazioni termiche, conseguenti alla sua continua esposizione alla luce solare. Per questo specifico caso, si è deciso di supporre il carico termico come equivalente ad una pressione distribuita sulla faccia superiore.

5.3.1 Scenario iniziale

Geometria

Il pannello è stato modellizzato all'interno di Femap come una piastra bidimensionale quadrata di lato 1m.

Per quanto riguarda la definizione del layup della struttura invece, si è scelto di modellizzare un pannello solare a singola giunzione in silicio; pertanto, sono stati individuati quattro diversi strati, dei quali i tre inferiori compongono il substrato. In particolare, partendo dal substrato posto inferiormente, questo risulta essere un pannello sandwich, con facce di spessore pari a 0.6mm ed un core in alluminio con struttura honeycomb, di spessore pari ad 3.8mm.

Posta superiormente al substrato, vi è lo strato di silicio monocristallino di spessore 0.3mm, a cui è effettivamente imputato il compito di convertire l'energia dei fotoni in energia elettrica.

In Figura 5.33 è riportato il layup del pannello completo.

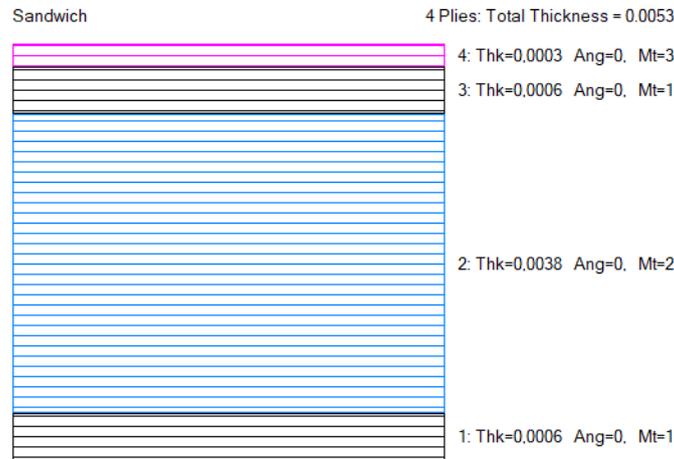


Figura 5.33: Layup del pannello solare

Materiali

Il pannello solare in esame è costituito da tre materiali:

- silicio monocristallino, usato per lo strato funzionale;
- alluminio Al5056, impiegato nella realizzazione del core del substrato, con celle a nido d'ape;
- materiale composito in fibra di carbonio per le facce del substrato.

I tre materiali sono scelti in funzione del compito che devono svolgere; il silicio è un materiale semiconduttore molto utilizzato nelle celle dei pannelli solari, mentre l'alluminio è stato impiegato per le sue buone proprietà meccaniche unite ad un peso ridotto; il composito in carbonio infine, ha elevate proprietà meccaniche che, essendo impiegato per le facce del sandwich, permettono di garantire alla struttura un'elevata resistenza ai carichi. Di seguito vengono riportate i moduli elastici e di taglio, nonché i coefficienti di poisson dei tre materiali [36] [37]:

	CFRP	Al5056	Si monocristallino
E_x	110 [GPa]	71 [GPa]	131 [GPa]
E_y	9 [GPa]	71 [GPa]	131 [GPa]
E_z	9 [GPa]	71 [GPa]	131 [GPa]
G_{xy}	3.58 [GPa]	25.9 [GPa]	64.1 [GPa]
G_{yz}	4.5 [GPa]	25.9 [GPa]	64.1 [GPa]
G_{xz}	3.58 [GPa]	25.9 [GPa]	64.1 [GPa]
ν	0.25	0.33	0.28

Tabella 5.13: Moduli elastici, di taglio e coefficienti di Poisson dei materiali del pannello solare

Carichi e vincoli

Come già anticipato, l'analisi sul pannello solare viene eseguita caricandolo con una pressione costante distribuita sulla faccia superiore, modellizzata come equivalente ad un carico termico costante sulla faccia attiva del pannello, esposta alla luce solare.

Pertanto, è stato scelto un carico di 1000N con sola componente F_z che permettesse di ottenere risultati utili per comprendere l'andamento delle tensioni nel pannello, nonché le deformazioni e gli spostamenti conseguenti.

Per quanto riguarda i vincoli invece, il pannello risulta semplicemente appoggiato sui quattro lati, impedendone così la traslazione ma non la rotazione attorno ai vincoli.

5.3.2 Analisi globale

L'analisi globale è stata condotta in Femap con il metodo agli elementi finiti. Il pannello è stato discretizzato con elementi bidimensionali a 4 nodi di forma quadrata. Per valutare il corretto numero di elementi affinché si potesse ottenere una soluzione accurata minimizzando il costo computazionale, anche in questo caso è stata condotta un'analisi di convergenza.

I risultati presentano, come nel caso di carico distribuito esposto nella sezione precedente, uno spostamento massimo in corrispondenza della zona centrale del pannello, con una progressiva diminuzione dello stesso spostandosi verso i lati nei quali, essendoci i vincoli, si ha uno spostamento nullo. Lo spostamento massimo w misurato con una mesh 48x48, la quale risulta essere la meno costosa tra quelle che forniscono un risultato esatto, come spiegato successivamente parlando dell'analisi di convergenza, è di 0.04468m, quindi di 4,468 cm, lungo l'asse z . In Figura 5.34, si può apprezzare la deformazione della piastra ed anche l'andamento dello spostamento precedentemente descritto.

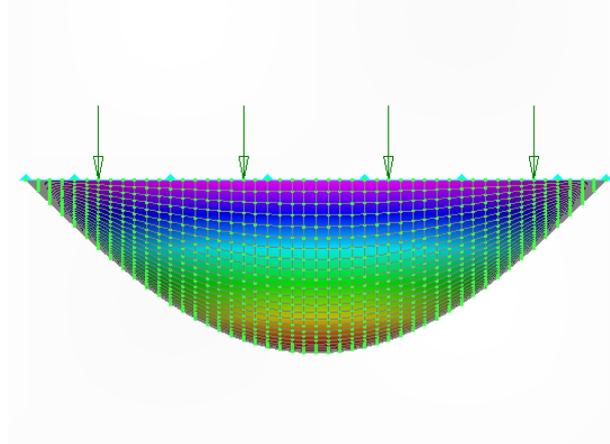


Figura 5.34: Deformazione del pannello solare soggetto ad una pressione distribuita sulla faccia superiore

Analisi di convergenza

La prima discretizzazione effettuata sul pannello ha previsto l'uso di una mesh 6x6 composta quindi di 36 elementi.

Questa è poi stata progressivamente raffinata tramite il comando refine di Femap, il quale permette di suddividere in due ulteriori nuovi elementi ogni elemento della mesh.

Per ogni mesh è stato valutato lo spostamento massimo ed è stato confrontato con quello delle mesh successive per osservare quando la soluzione sarebbe

arrivata a convergenza. Come è possibile vedere in Tabella 5.14, la prima mesh che fornisce risultati uguali a quella successiva più raffinata è la mesh 48x48, con 2304 elementi.

Pertanto si è deciso di utilizzare questa per l'analisi poiché fornisce un risultato esatto col minor costo computazionale possibile.

Nella tabella seguente, sono riportati anche i tempi necessari a svolgere le analisi con le diverse mesh.

Mesh	Max spostamento [mm]	Tempo di risoluzione [s]
6x6	0.004809	0.337
12x12	0.004776	0.425
24x24	0.004758	0.528
48x48	0.004752	0.775
96x96	0.004752	2.002

Tabella 5.14: Spostamenti massimi e tempi richiesti per l'analisi globale sul pannello solare

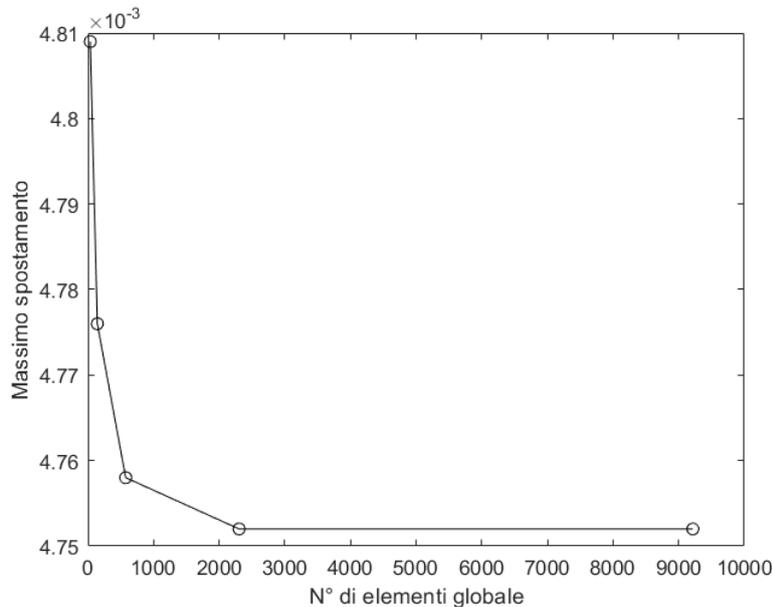


Figura 5.35: Convergenza dello spostamento massimo al variare della mesh

Per poter determinare ulteriormente la bontà della mesh utilizzata in termini di risultati, è stata condotta anche un'analisi di convergenza locale, eseguita confrontando i risultati ottenuti con diverse mesh analizzando, tramite MUL2, un elemento del pannello.

In particolare, è stata osservata la variazione del valore massimo di tensione tangenziale σ_{xz} , misurata in un sistema di riferimento globale, di un elemento posto nella zona centrale, più sollecitata, del pannello.

Come è possibile vedere sia dai dati in Tabella 5.15 che dal grafico in Figura 5.15, il valore di tensione massima converge pressoché del tutto a partire dal risultato ottenuto con la mesh 48x48, essendo questo valore molto vicino a quello trovato con la successiva mesh 96x96.

Pertanto, si può confermare quanto è stato constatato con l'analisi di convergenza effettuata sui risultati dell'analisi globale, e cioè che la mesh 48x48 risulta essere la migliore in termini di accuratezza e basso costo computazionale.

Mesh	σ_{xz} massima [N/mm ²]	$\Delta\sigma$
12x12	24190.96	-
24x24	31591.76	7400.8
48x48	34986.88	3395.12
96x96	35086.83	99.95

Tabella 5.15: Tensioni tangenziali σ_{yz} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente per il caso del pannello solare

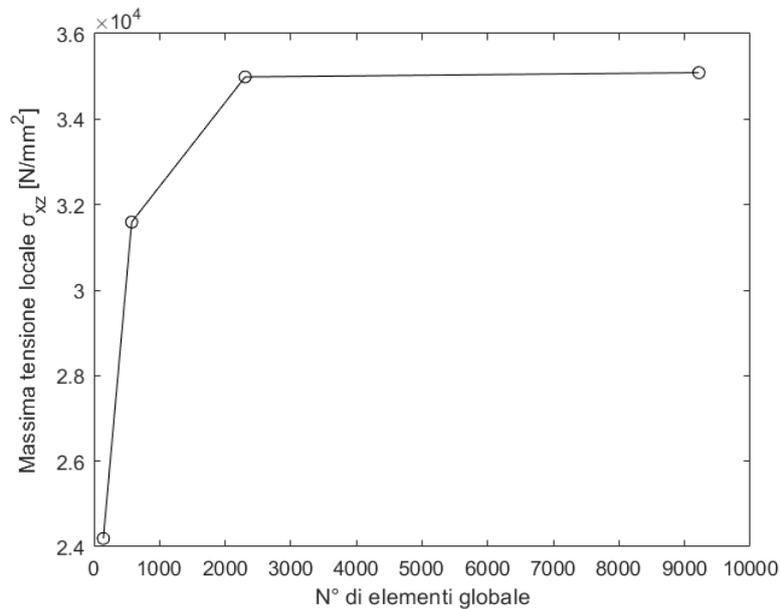


Figura 5.36: Convergenza del valore massimo di σ_{xz} all'aumentare del numero di elementi

Osservando anche le tensioni normali σ_{xx} , sempre misurate in un sistema di riferimento globale, queste confermano la convergenza dei risultati con la mesh 48x48. Il valore massimo misurato per la mesh 96x96 infatti, si discosta molto poco da quello misurato con la mesh precedente, scelta per effettuare l'analisi.

Comunque, alcune piccole variazioni nei valori misurati raffinando la discretizzazione, sono dovute al fatto che le misure ottenute su un elemento sono la media dei risultati ottenuti sui quattro elementi che lo compongono nella mesh successiva più raffinata, pertanto è difficile che nell'analisi locale si ottengano gli stessi precisi valori cambiando la discretizzazione.

Mesh	σ_{xx} massima [N/mm ²]	$\Delta\sigma$
12x12	119274.20	-
24x24	120548.80	1274.60
48x48	123372.90	2824.10
96x96	123504.50	131.60

Tabella 5.16: Tensioni normali σ_{xx} massime e differenze $\Delta\sigma$ rispetto a quella ottenuta dalla mesh precedente per il caso del pannello solare

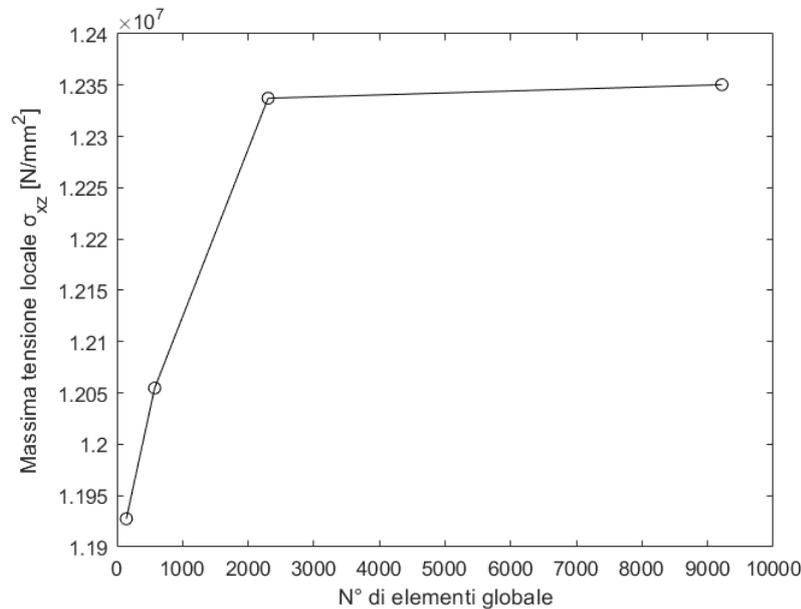


Figura 5.37: Convergenza del valore massimo di σ_{xx} all'aumentare del numero di elementi

5.3.3 Analisi locale

L'analisi globale ha permesso di individuare le zone più sollecitate della piastra, le quali meritano un'analisi più approfondita per valutarne le tensioni normali e tangenziali generate dal carico a cui è sottoposto il pannello.

Per fare ciò, è stato utilizzato anche in questo caso il plug-in MUL2 che ha permesso di effettuare un'analisi tridimensionale locale sugli elementi d'interesse partendo dai risultati dell'analisi 2D di Nastran effettuata su tutta la piastra.

Sono stati scelti due elementi diversi per poter valutare l'andamento delle sollecitazioni in due zone differenti del pannello. In particolare, è stato scelto un elemento nella zona centrale, dove sono presenti il massimo spostamento e la massima sollecitazione, ed uno ad un quarto della piastra, dove si riscontrano valori intermedi. I risultati vengono presentati per tre discretizzazioni diverse, 12x12, 24x24 e 48x48, in maniera tale da mostrare anche la variazione dei valori all'aumento del numero di elementi e la loro eventuale convergenza.

Le tensioni riportate nelle successive sottosezioni sono valutate sia in un sistema di riferimento materiale che in quelli globale e locale.

Elemento con valori intermedi

In Figura 5.38 sono raffigurate le tensioni normali e quelle tangenziali, misurate nel sistema di riferimento materiale, dell'elemento 1419, situato ad un quarto di pannello, in una zona dove anche lo spostamento misurato nell'analisi globale è intermedio fra i valori massimi centrali e quelli nulli dei lati.

Come previsto ed in analogia con il caso di carico distribuito sul pannello a 5 strati presentato nella sezione precedente, si può notare come le tensioni σ_{xx} e σ_{yy} assumono valori negativi nei primi strati, fino circa a metà del core del substrato, i quali pertanto andranno in compressione, mentre assume valori positivi nella seconda parte del core e nell'ultimo strato, che invece andranno in trazione. I massimi valori di queste due tensioni (in valore assoluto) sono raggiunti nel primo strato in silicio.

Nel caso delle tensioni tangenziali σ_{xz} e σ_{zx} , il massimo si ritrova nel centro del pannello, pertanto nello strato di core, e poi le due tendono a diminuire fino ad annullarsi spostandosi verso la faccia superiore e quella inferiore.

Per la σ_{xy} si possono fare considerazioni analoghe a quelle precedenti sulle due tensioni normali.

La σ_{zz} invece ha un andamento molto variabile e si vede anche una notevole differenza nei risultati per mesh diverse, anche se si può notare una certa convergenza in quanto i risultati per la 24x24 sono molto più vicini alla 48x48 rispetto a quanto non siano quelli della 12x12.

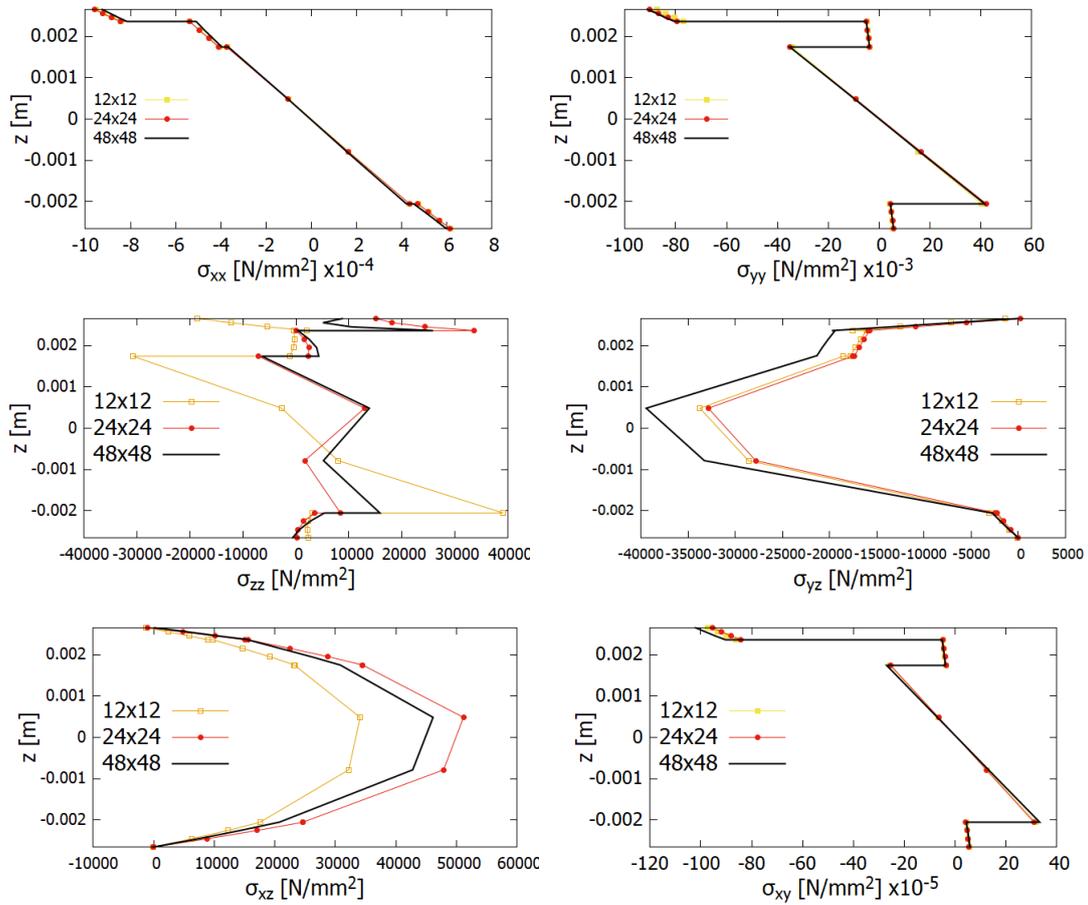


Figura 5.38: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1419 del pannello solare nel sistema materiale

In Figura 5.39 sono riportati invece i grafici delle tensioni misurate nel sistema di riferimento globale. Come è possibile vedere confrontandoli con i precedenti, per quanto riguarda le tensioni normali e la σ_{xy} non sono riscontrabili differenze nell'andamento ma solo piccole variazioni nei valori; le tensioni σ_{xz} e σ_{yz} hanno invece andamento esattamente opposto.

Infine, in Figura 5.40, sono riportati i risultati nel sistema di riferimento locale. Confrontandoli con quelli della figura riguardante le tensioni nel sistema globale, si nota come siano pressoché identici, se non per piccole differenze sui valori. Probabilmente queste similitudini sono dovute ad una coincidenza quasi totale dei tre sistemi di riferimento nel caso in esame qui presentato. Di conseguenza, ci si aspetta tali congruenze anche per l'elemento seguente.

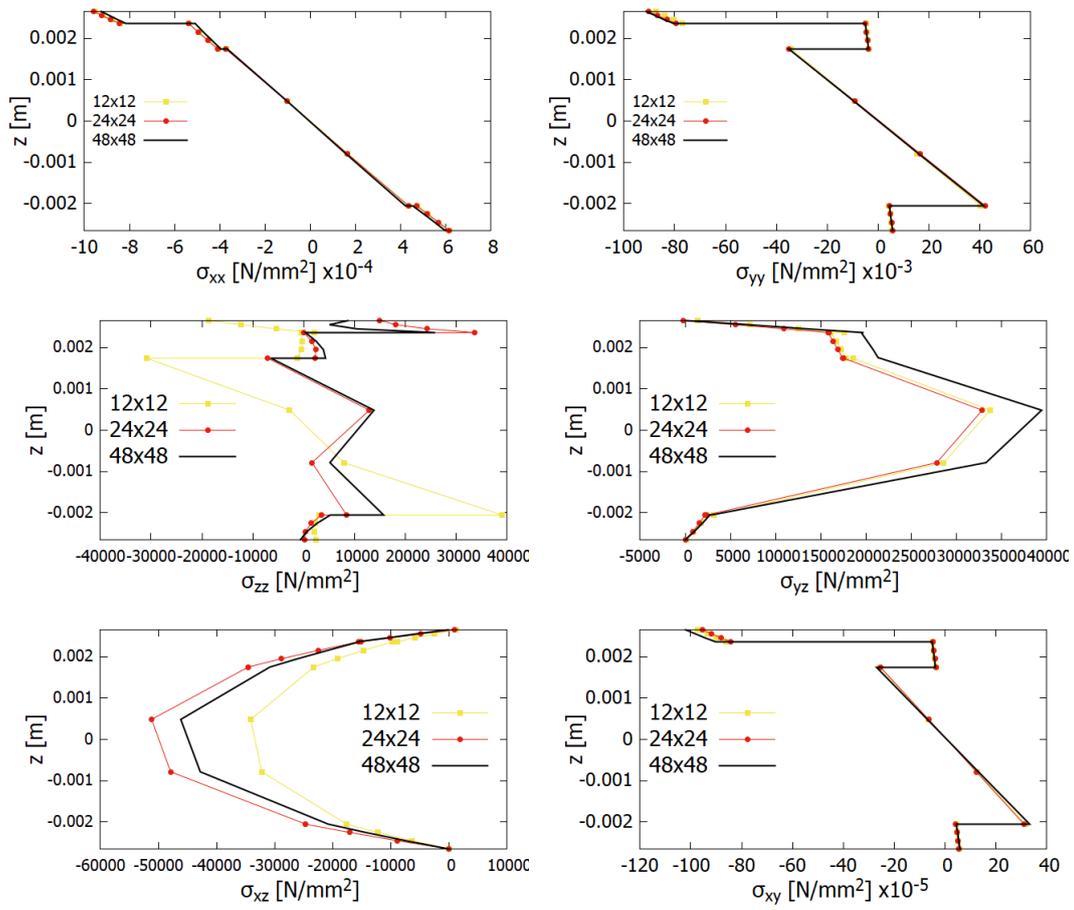


Figura 5.39: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1419 del pannello solare nel sistema globale

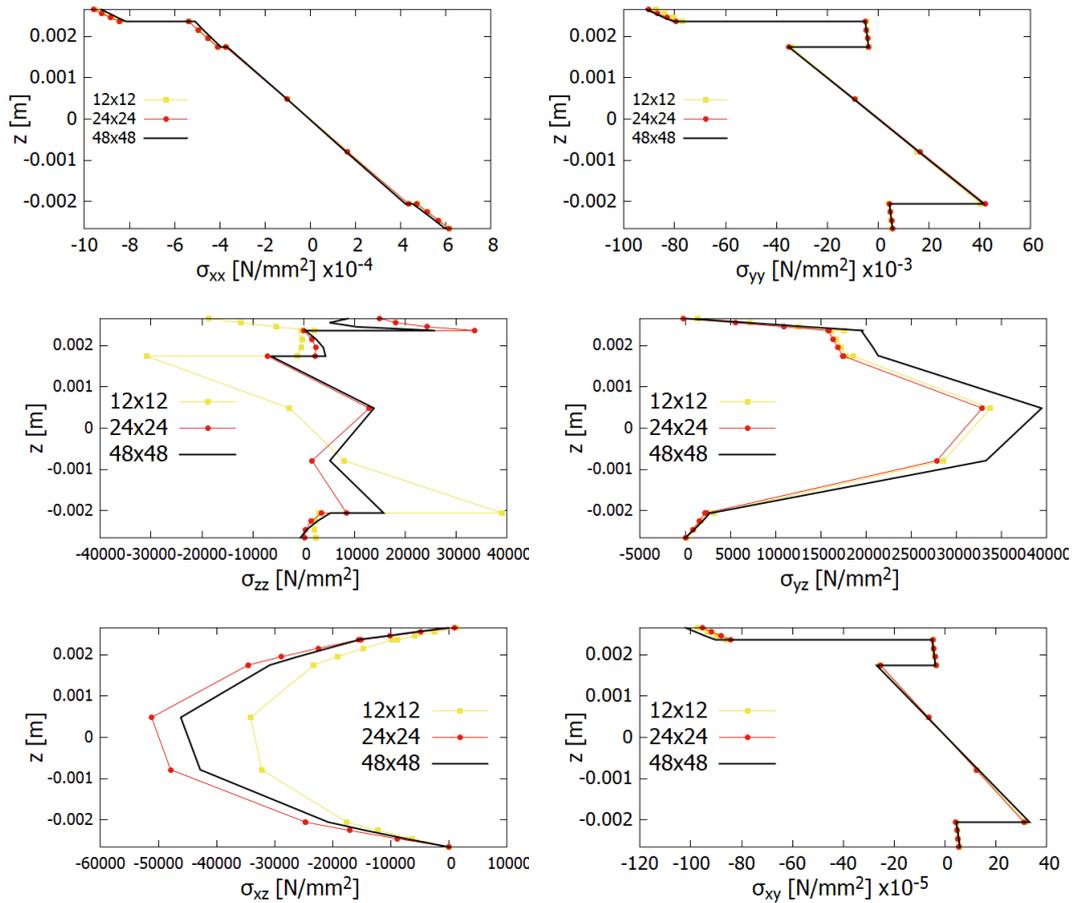


Figura 5.40: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1419 del pannello solare nel sistema locale

Elemento nella zona di massimo spostamento

Per valutare i risultati nella zona centrale dove si sono riscontrati gli spostamenti maggiori, l'analisi locale è stata svolta sull'elemento 1695. In Figura 5.41 sono riportati i risultati misurati in un sistema di riferimento materiale.

Gli andamenti delle tensioni normali sono analoghi a quelli visti nell'elemento precedente, anche se comunque sono raggiunti dei valori maggiori.

Lo stesso discorso può essere fatto per le σ_{yz} , anche se per questo elemento risultano essere decisamente più basse.

Le altre due tensioni tangenziali invece, mostrano un comportamento opposto. Facendo riferimento alle σ_{xz} , si vede che anche se il massimo si raggiunge comunque verso il centro del pannello, nel core, questa tensione è negativa lungo tutto lo spessore, mentre era complessivamente positiva per l'elemento ad un

quarto di piastra. Anche la σ_{xy} ha un andamento opposto rispetto al caso precedente, con valori di tensione positivi laddove prima erano risultati negativi e viceversa.

Questa differenza nelle tensioni tangenziali tra i due elementi considerati era già stata riscontrata per la piastra sandwich caricata con un carico distribuito, anche se comunque gli andamenti erano diversi perché presentava materiali diversi, un'altra laminazione ed una stratificazione differente, simmetrica, a 5 strati e con altri spessori, mentre nel caso del pannello solare si hanno solo 4 strati e manca la simmetria lungo lo spessore.

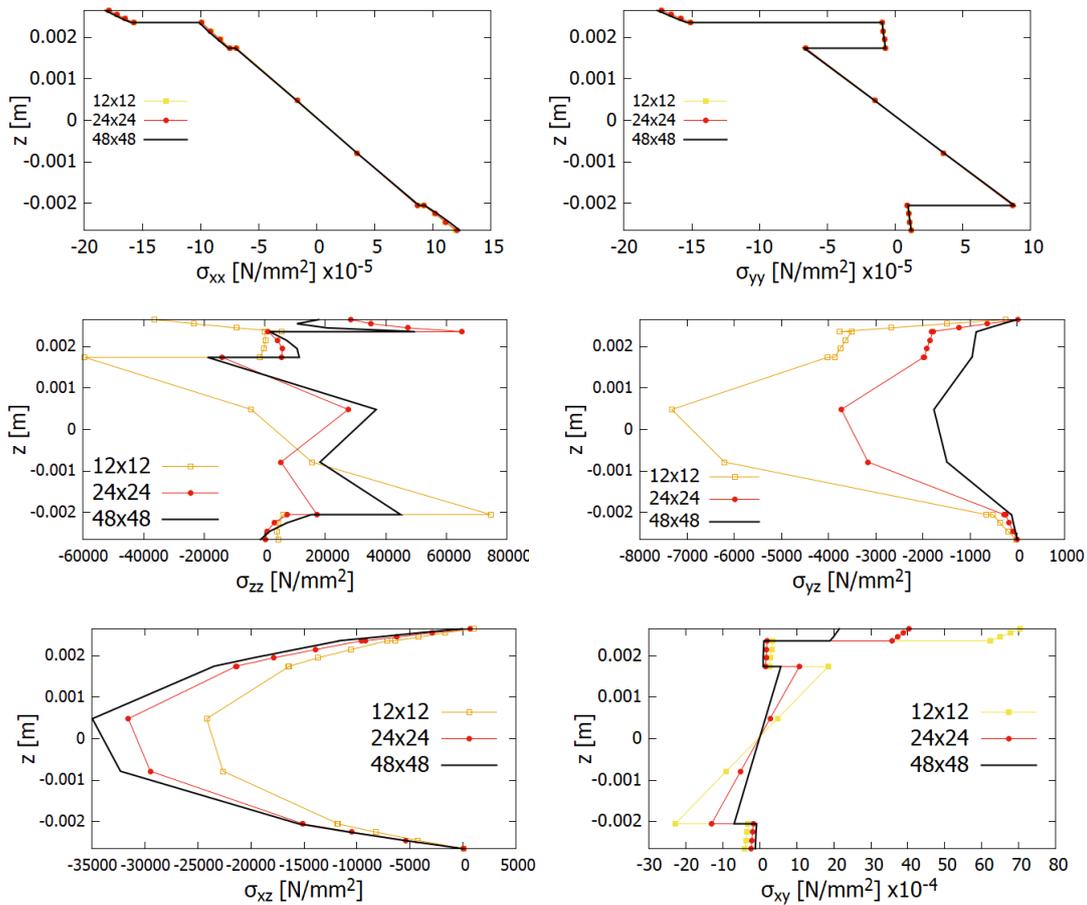


Figura 5.41: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1695 del pannello solare nel sistema di riferimento materiale

Si può fare anche in questo caso un confronto con gli altri due sistemi di riferimento, i cui risultati sono mostrati in Figura 5.42 e Figura 5.43.

Gli andamenti per il sistema locale e per quello globale non mostrano sostanziali differenze anche in questo caso. Inoltre, come per l'elemento precedente, si può constatare un'analogia tra i risultati delle tre tensioni normali e della σ_{xy} . Le σ_{xz} e le σ_{yz} mostrano invece un andamento opposto nel sistema materiale rispetto agli altri due per quanto comunque l'ordine di grandezza dei valori sia lo stesso.

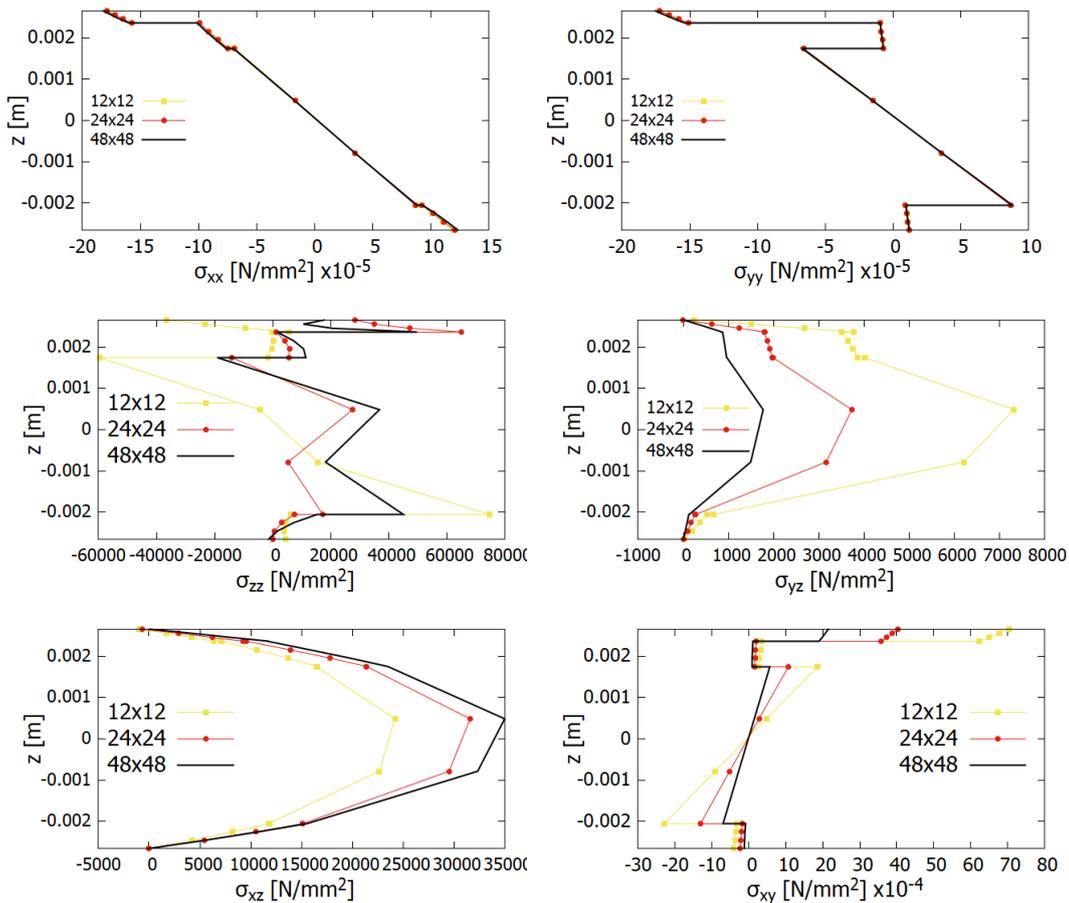


Figura 5.42: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1695 del pannello solare nel sistema di riferimento globale

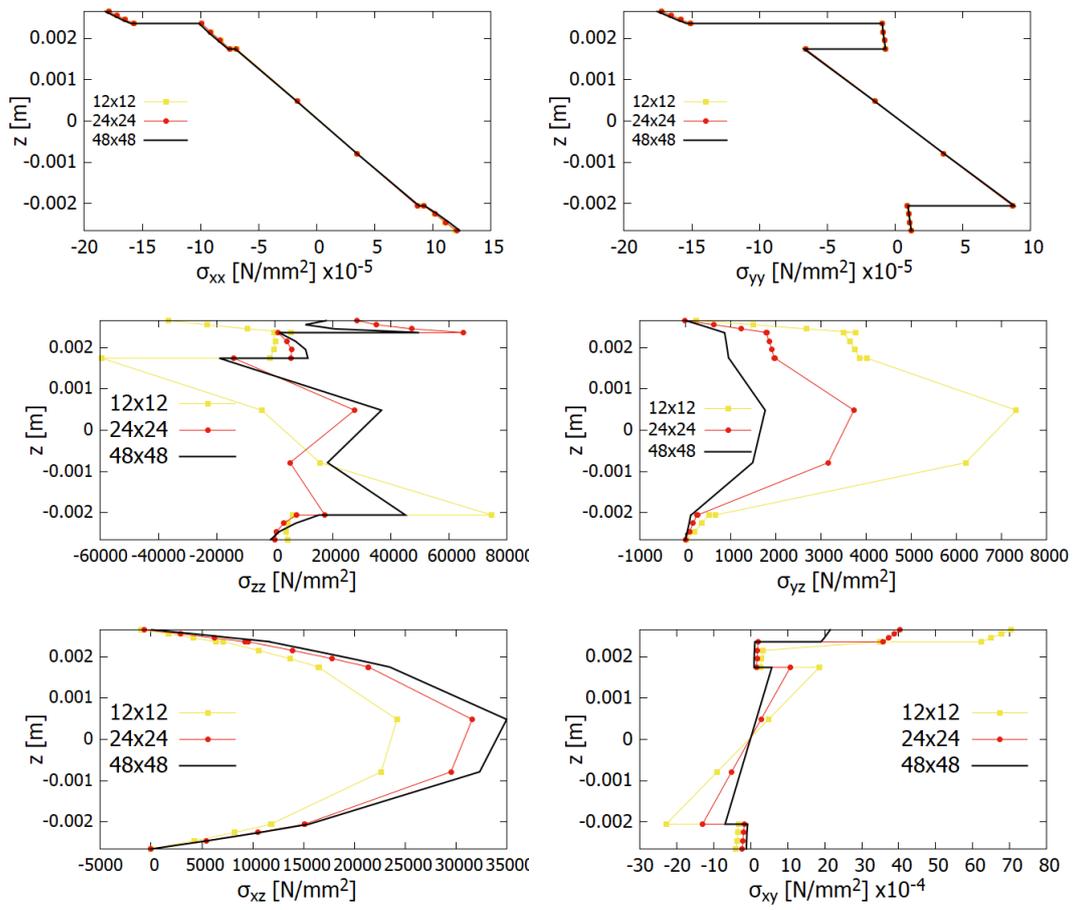


Figura 5.43: Tensioni normali e tangenziali per l'elemento 1695 del pannello solare nel sistema di riferimento locale

5.3.4 Analisi di failure

Per completare l'analisi strutturale del pannello solare, è necessario verificare che il carico a cui è soggetto venga adeguatamente sopportato e nessuno dei componenti della piastra vada incontro a rottura. Per fare ciò, si adotta lo stesso approccio visto in precedenza per il pannello sandwich, valutando per ogni strato i suoi indici di failure ed accertandosi che questi non superino il valore unitario.

In questo caso si sono utilizzati tre diversi criteri per effettuare l'analisi di cui due, Hoffman e Hashin 3D, sono già stati presentati precedentemente. Il terzo, LARC05, verrà in seguito descritto.

I tre metodi forniranno risultati diversi perché prendono in considerazione diversamente i modi di rottura ma forniscono comunque tutti quanti indicazioni utili per determinare un eventuale rottura del materiale.

Vegono presentate in Tabella 5.17 le tensioni ammissibili dei tre materiali utilizzati [38] [39]. Le resistenze a compressione e trazione nel piano sono indicate rispettivamente con X_c , Y_c e X_t , Y_t . Con XY e XZ sono indicate le resistenze di taglio longitudinale al piano, uguali fra loro, e con YZ la resistenza di taglio trasversale al piano. Infine, con K è indicato il kinking angle.

Tutti i valori sono espressi in Mpa, tranne ovviamente i kinking angles che sono in gradi.

Materiale	X_t	X_c	Y_t	Y_c	XY	XZ	YZ	K
CFRP	2560	1590	73	185	90	90	57	52
Al5056	290	280	290	280	179	179	95	45
Nomex	165	3200	165	3200	209	209	97,4	45

Tabella 5.17: Ammissibili dei tre materiali utilizzati nel pannello solare

Hoffman

Il primo criterio utilizzato per verificare gli indici di failure della struttura è quello di Hoffman.

Come già spiegato nella sezione dedicata alla piastra sandwich a 5 strati, questo modello permette il calcolo di un singolo indice che raggruppa al suo interno sia il modo di rottura a trazione che quello a compressione, differenziandoli con il segno dell'indice (negativo per la compressione e positivo per la trazione) e non prende in considerazione il comportamento della matrice ma solo quello delle fibre. In Figura 5.44 è possibile vedere l'andamento dell'indice lungo lo spessore del pannello. Come prevedibile già osservando le tensioni generate nel pannello, lo strato in silicio e la faccia superiore del substrato sandwich presentano indici che fanno presupporre un rischio maggiore di rottura a compressione, mentre lo strato inferiore è sottoposto ad una trazione; il core del substrato presenta un comportamento intermedio, con valori comunque ben più bassi rispetto agli altri strati.

I failure index più alti sono raggiunti nello strato in silicio, nel quale si raggiunge un FI massimo in modulo di 0.2240759 e pertanto risulta essere il più sollecitato. In ogni caso, questo valore è inferiore all'unità, quindi nessuna parte del pannello rischia la rottura se sottoposta al carico considerato nell'analisi.

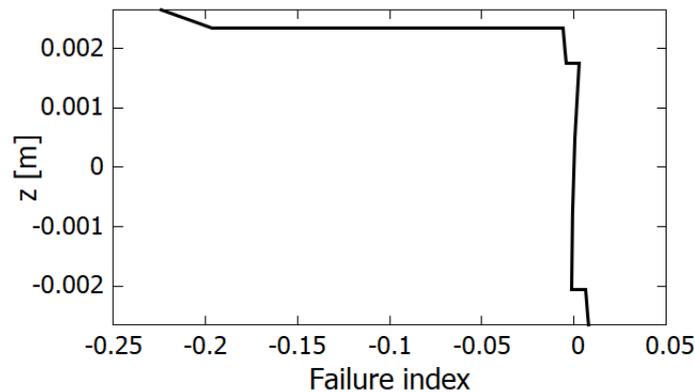


Figura 5.44: Andamento dell'indice di failure calcolato per l'elemento 1716 con il criterio di Hoffman

Questi risultati possono essere confrontati con quelli derivanti da un'analisi globale con Nastran. Da quest'ultima, si osserva che l'indice massimo di 0.2173 viene raggiunto nella porzione centrale della piastra con una sua progressiva diminuzione, come anche mostrato in scala cromatica in Figura 5.45, spostandosi verso i lati.

Gli indici massimi per ogni strato misurati nei due casi, riportati in Tabella 5.18, sono molto vicini fra loro e mostrano comunque una discreta attendibilità dell'analisi bidimensionale di Nastran, che rimane ovviamente meno precisa di quella 3D ottenuta col plug-in ma fornisce degli indici di failure comunque verosimili.

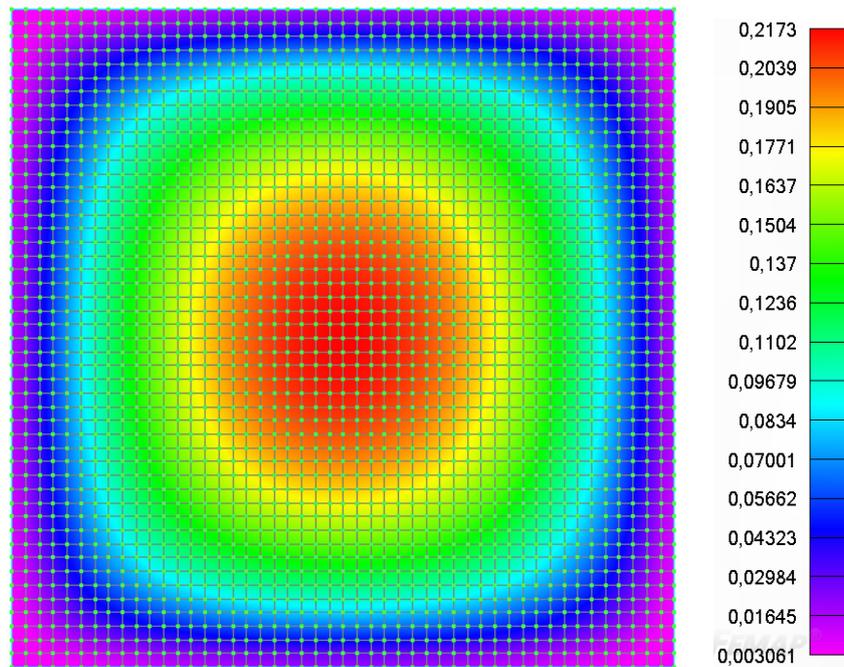


Figura 5.45: Analisi globale di failure per il pannello solare

Strato	Massimo FI Nastran	Massimo FI MUL2
1	0.2173	0.2240759
2	0.005357	0.0059877
3	0.002512	0.00253683
4	0.007047	0.007888

Tabella 5.18: Confronto tra i risultati dell'analisi di failure con Nastran e quella successiva locale col plug-in MUL2 per il pannello solare

Hashin 3D

Di seguito viene presentata anche un'analisi di failure effettuata con il criterio Hashin 3D, metodo anch'esso tridimensionale per il calcolo degli indici di failure e già discusso nella sezione precedente.

Come visto per il pannello a 5 strati, questo metodo permette di fare una distinzione fra 4 modi di rottura, due per le fibre e due per la matrice, verificandone il comportamento sia a trazione che a compressione. In Figura 5.46 si possono apprezzare i risultati dell'analisi e si può immediatamente osservare come nessuno degli indici calcolati superi l'unità, pertanto si può concludere che anche con questo tipo di calcolo si conferma la resistenza della struttura al carico cui è sottoposta.

Osservando meglio i valori calcolati, si può concludere che i valori massimi di failure index per i modi di rottura a trazione si raggiungono nella porzione di core del substrato soggetto a trazione, mentre i valori misurati nella strato più inferiore in fibra di carbonio sono inferiori e risultano ovviamente nulli quelli dei due strati superiori, rispettivamente in silicio e fibra di carbonio, e della parte superiore del core, che sono soggetti a compressione.

Stesso discorso può essere fatto per il modo di rottura Fiber compression, il quale mostra i valori massimi nella porzione compressa dello strato in alluminio, valori più bassi nei due strati superiori e nulli nella faccia inferiore del substrato e nella parte inferiore del core.

Osservando invece la Matrix compression, si può constatare come il massimo indice è raggiunto dallo strato in silicio. Questo valore di $FI=0.1608091$ è anche il massimo calcolato in tutta l'analisi, a conferma del fatto che sia la zona più sollecitata di tutto il pannello.

In Tabella 5.19 sono riportati i massimi indici di failure per ogni modo di rottura.

Modo di rottura	Valore massimo
Fiber Tension	0.1122671×10^{-2}
Fiber compression	0.7459289×10^{-3}
Matrix tension	0.1074178×10^{-2}
Matrix compression	0.1608091

Tabella 5.19: Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura Hashin 3D nel pannello solare

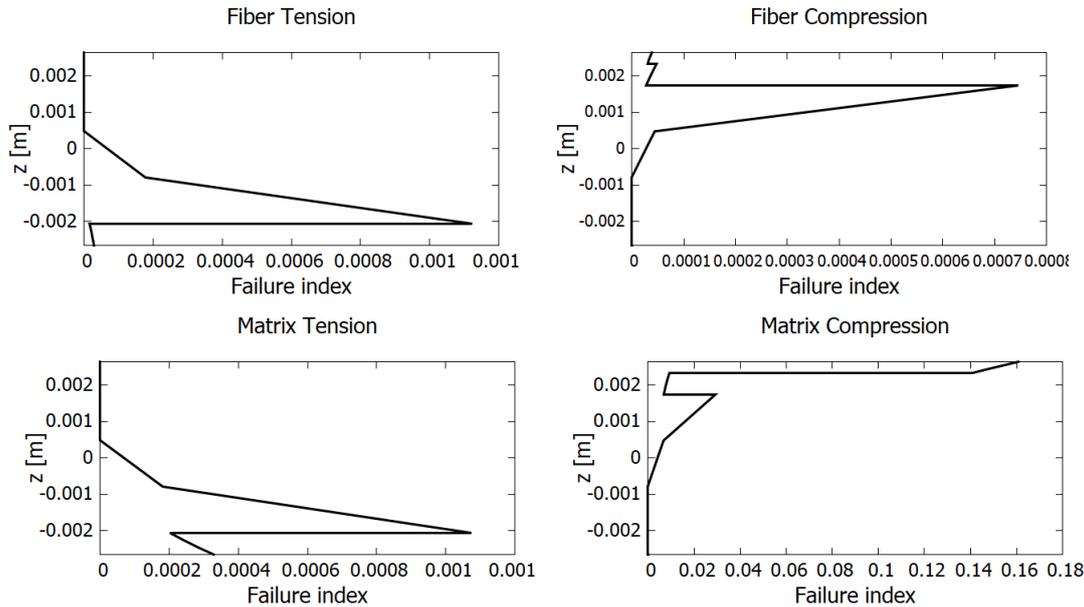


Figura 5.46: Indici di failure per tensione e compressione per il pannello solare con criterio Hashin 3D

LaRC05

Quest'ultimo criterio utilizzato nell'analisi, del quale si fa una spiegazione dettagliata nella fonte [40], è frutto di una continua evoluzione di un metodo di failure analysis, condotta dal Second World-Wide Failure Exercise, e supera in accuratezza i suoi predecessori (LaRC02, LaRC03, LaRC04) seppur condividendone i principi di analisi. Esso si concentra maggiormente sui fenomeni micromeccanici che comportano la failure della struttura distinguendo, come nel caso dell'Hashin 3D, tra diversi modi di rottura, dei quali due caratterizzano le fibre descrivendone il comportamento a tensione e compressione ed un terzo invece si concentra sul failure della matrice.

Quest'ultimo modo racchiude diversi tipi di rottura del materiale, tra i quali si può citare lo splitting, che descrive il fenomeno di scissione tra matrice e fibre, ed il kinking, il quale invece tiene conto del possibile buckling strutturale.

Il failure index relativo alla matrice viene calcolato con la seguente formula:

$$FI_{MatrixFailure} = \left(\frac{\tau_T}{S_T - \eta_T \sigma_N}\right)^2 + \left(\frac{\tau_L}{S_L - \eta_L \sigma_N}\right)^2 + \left(\frac{\langle \sigma_N \rangle}{Y_T}\right)^2 \quad (5.6)$$

I termini usati nell'equazione sono:

- S_L : resistenza a taglio trasversale alle fibre;

- σ_N , τ_T e τ_L : tensioni normali e tangenziali nel sistema di riferimento materiale;
- η_T e η_L : coefficienti di attrito;
- Y_T : resistenza a trazione longitudinale in direzione perpendicolare alle fibre;
- $\langle \sigma_N \rangle$: massima tensione normale.

In Figura 5.47 si possono osservare gli andamenti degli indici di failure per i tre modi di rottura spiegati precedentemente.

Innanzitutto è possibile notare come i valori siano molto inferiori all'unità ma anche tendenzialmente inferiori a quelli calcolati con i precedenti due criteri. In ogni caso è confermato anche da questo metodo che la struttura è in grado di sopportare i carichi a cui è sottoposta nell'analisi qui riportata.

Osservando nello specifico i valori, i cui massimi sono specificati in Tabella 5.20, si può notare come gli indici più alti vengano calcolati nella parte inferiore del core del substrato, soggetta a trazione, mentre gli strati superiori in silicio e fibra di carbonio, compressi, mostrano valori inferiori. Inoltre, i valori riscontrati per la Matrix failure sono inferiori rispetto a quelli determinati per le fibre.

Questo risultato sembra in realtà discordare con quello ottenuto col criterio Hashin 3D, per quanto comunque può essere dovuto alle differenti formulazioni degli indici di failure.

Modo di rottura	Valore massimo
Fiber Tension	0.01330590
Fiber compression	0.4434800×10^{-3}
Matrix failure	0.7029125×10^{-3}

Tabella 5.20: Valori massimi del failure index per i diversi modi di rottura LaRC05 nel pannello solare

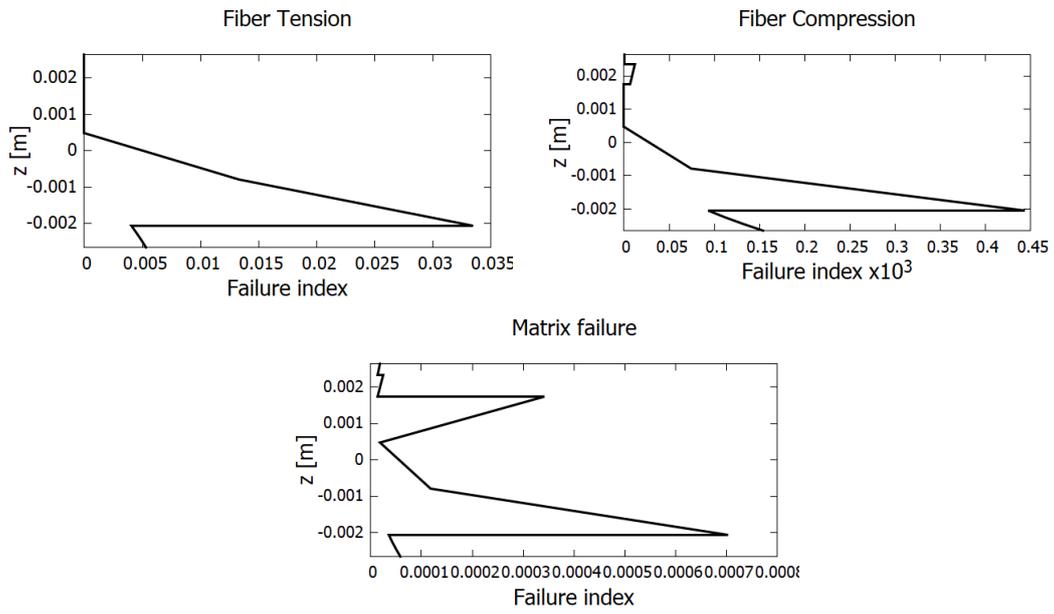


Figura 5.47: Indici di failure per tensione e compressione per il pannello solare con criterio LaRC05

Capitolo 6

Conclusioni

Il principale obiettivo di questo studio è stato quello di analizzare pannelli sandwich in materiale composito con diversi layup, utilizzando un metodo innovativo rappresentato dall'analisi global/local.

Questo tipo di approccio costituisce una svolta nel campo dell'analisi strutturale perché riduce notevolmente il costo computazionale relativo allo studio stesso, senza però compromettere l'accuratezza dei risultati per gli elementi considerati più critici. Pertanto, ha permesso di dedicare più attenzione a determinate parti strutturali individuate grazie ad una prima analisi globale 2D approssimativa, la quale sicuramente non ha permesso di ottenere un quadro completo dello stato tensionale del pannello, ma comunque ha fornito informazioni indispensabili sul comportamento della struttura soggetta ai carichi prescritti.

Lo studio ha permesso di ottenere importanti risultati sul comportamento globale nei casi proposti ma anche sul loro stato tensionale tridimensionale per alcuni elementi scelti. Nel caso del pannello a tre strati, essendo ispirato ad un caso già analizzato e rintracciato in letteratura, è stato possibile effettuare anche un confronto dei risultati con quelli già in possesso, così da testare anche l'effettiva correttezza dei processi di analisi messi in atto.

I casi del pannello sandwich a 5 strati, sia per un carico a compressione su un lato che per un carico distribuito sulla faccia superiore, e del pannello solare soggetto ad una pressione costante non sono effettivamente confrontabili con dati della letteratura, ma potrebbero fornire spunti per futuri studi analoghi, fornendo infatti informazioni dettagliate sull'andamento del campo di tensioni nella struttura.

Per questi ultimi due casi è stata determinante anche l'indagine finale condotta sugli indici di failure per verificare l'effettiva resistenza strutturale alla rottura.

Per l'utilizzo di materiali compositi è indispensabile conoscerne e prevederne i loro modi di rottura, verificando in fase di progettazione che non si verifichi nessun tipo di failure. Sono stati sviluppati numerosi criteri di failure analysis, sia bidimensionale che tridimensionale, per permettere di condurre ogni verifica necessaria. Alcuni di questi, il LaRC05, l'Hashin 3D e l'Hoffman 2D e 3D, sono stati effettivamente utilizzati per ottenere risultati indispensabili per i pannelli analizzati, per capirne meglio il comportamento a rottura e per confermarne la resistenza ai carichi cui sono sottoposti.

Questo studio potrebbe diventare un punto di partenza per eventuali analisi future incentrate sul miglioramento delle proprietà meccaniche strutturali dei pannelli, indagando diverse soluzioni anche i termini di materiali, per diminuire l'impatto del peso e dei costi sul progetto senza però comprometterne le proprietà e la resistenza ai carichi. Inoltre, sarebbe importante migliorare la comprensione del comportamento a rottura delle strutture mostrate, concentrando l'analisi su questo aspetto così da prevedere e prevenire ogni tipo di eventuale failure in caso di impiego e come evitarle in maniera efficace minimizzando i costi connessi alla sicurezza strutturale.

Bibliografia

- [1] Mattia Ionni e Dott Ing Vincenzo Massarelli. «CARATTERIZZAZIONE MECCANICA DI UN PANNELLO SANDWICH PER L'INTERNO DI UN AEROMOBILE». Tesi di dott.
- [2] Brando Tuberosa et al. «Proprietà meccaniche a trazione di compositi polimerici rinforzati con fibre lunghe di carbonio di interesse per il settore auto motive». Tesi di dott. Tesi di Laurea 2011-2012, 2012.
- [3] TN Bitzer. *Honeycomb technology: materials, design, manufacturing, applications and testing*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [4] *History of solar energy: Who Invented solar panels?* URL: <https://www.vivintsolar.com/learning-center/history-of-solar-energy>.
- [5] Allen Chodos. «April 25, 1954: Bell labs demonstrates the first practical silicon solar cell». In: *APS News-This month in Physics history* (2009).
- [6] Zhou Liang e Qu Hua-Min. «Mechanical research and development of a monocrystalline silicon neutron beam window for CSNS». In: *Chinese Physics C* 39.9 (2015), p. 096001.
- [7] Xueping Li et al. «Mechanical properties of mono-crystalline silicon thin films measured by different methods». In: *2006 IEEE International Symposium on MicroNanoMechanical and Human Science*. IEEE. 2006, pp. 1–6.
- [8] Sabrina Corpino. *ELECTRICAL POWER SYSTEM*. <https://file.didattica.polito.it/download/MATDID/32993565>. Materiale didattico; corso di Sistemi aerospaziali.
- [9] Julien Rion et al. «Ultra-light asymmetric photovoltaic sandwich structures». In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 40.8 (2009), pp. 1167–1173.
- [10] Thomas Keller, Anastasios P Vassilopoulos e Behzad D Manshadi. «Thermomechanical behavior of multifunctional GFRP sandwich structures with encapsulated photovoltaic cells». In: *Journal of composites for construction* 14.4 (2010), pp. 470–478.

-
- [11] Erasmo Carrera et al. *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons, 2014.
- [12] ASL Chan. «Variational Methods in Elasticity and Plasticity. K. Washizu. Pergamon, Oxford, 1968. 350 pp. Illustrated. 120s.» In: *The Aeronautical Journal* 72.694 (1968), pp. 889–889.
- [13] Prof. Marco Di Sciuva. *FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF ELASTICITY*. <https://file.didattica.polito.it/download/MATDID/32984789>. Materiale didattico; corso di Strutture aeronautiche.
- [14] Alfonso Pagani. *ELEMENTI FINITI AVANZATI*. <https://file.didattica.polito.it/download/MATDID/33090129>. Materiale didattico; corso di Strutture per veicoli spaziali.
- [15] E Carrera e VV Zozulya. «Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (2020), pp. 1–23.
- [16] Maria Cinefra e Prof. Erasmo Carrera. «Analisi Termo-meccanica di Piastre e Gusci FGM».
- [17] Alfonso Pagani, Stefano Valvano e Erasmo Carrera. «Analysis of laminated composites and sandwich structures by variable-kinematic MITC9 plate elements». In: *Journal of Sandwich Structures & Materials* 20.1 (2018), pp. 4–41.
- [18] Michael F Ashby e Lorna J Gibson. «Cellular solids: structure and properties». In: *Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, UK* (1997), pp. 175–231.
- [19] Rajesh S Kumar e David L McDowell. «Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids». In: *International Journal of Solids and Structures* 41.26 (2004), pp. 7399–7422.
- [20] Jacob Fish e Wen Chen. «Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem». In: *Journal of engineering mechanics* 127.12 (2001), pp. 1223–1230.
- [21] Stefan Soroohan et al. «In-plane homogenization of commercial hexagonal honeycombs considering the cell wall curvature and adhesive layer influence». In: *International Journal of Solids and Structures* 156 (2019), pp. 87–106.
- [22] Stefano Gonella e Massimo Ruzzene. «Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices». In: *International Journal of Solids and Structures* 45.10 (2008), pp. 2897–2915.

-
- [23] MP Hoang et al. «Analytical homogenization of honeycomb with skin and height effects in sandwich plates». In: *ECCM16, Seville, Spain* (2014).
- [24] KM Mao e CT Sun. «A refined global-local finite element analysis method». In: *International journal for numerical methods in engineering* 32.1 (1991), pp. 29–43.
- [25] SR Voleti, N Chandra e JR Miller. «Global-local analysis of large-scale composite structures using finite element methods». In: *Computers & structures* 58.3 (1996), pp. 453–464.
- [26] E Carrera et al. «A global/local approach based on CUF for the accurate and efficient analysis of metallic and composite structures». In: *Engineering Structures* 188 (2019), pp. 188–201.
- [27] Ahmed K Noor. «Global-local methodologies and their application to non-linear analysis». In: *Finite Elements in Analysis and Design* 2.4 (1986), pp. 333–346.
- [28] Enrico Zappino. *GLOBAL-LOCAL ANALYSIS TECHNIQUES FOR METALLIC AND COMPOSITE STRUCTURES*. <https://www.aidaa.it/wp-content/uploads/2021/09/Zappino.pdf>.
- [29] Erasmo Carrera et al. «MUL2@GL user’s manual». In: (2019).
- [30] Erasmo Carrera et al. «Global-local plug-in for high-fidelity composite stress analysis in ABAQUS». In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 28.14 (2021), pp. 1445–1450.
- [31] Stefano Valvano e Erasmo Carrera. «Multilayered plate elements with node-dependent kinematics for the analysis of composite and sandwich structures». In: *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* 15.1 (2017), pp. 1–30.
- [32] A Zinno et al. «Experimental characterization of phenolic-impregnated honeycomb sandwich structures for transportation vehicles». In: *Composite structures* 93.11 (2011), pp. 2910–2924.
- [33] Bing Yan et al. «Stability and failure of the edge-closed honeycomb sandwich panels with face/core debonding». In: *Applied Sciences* 10.21 (2020), p. 7457.
- [34] Zvi Hashin. «Failure criteria for unidirectional fiber composites». In: (1980).
- [35] PLM Siemens. «Software Inc». In: *NX Nastran User’s Guide* (2008).
- [36] WJ Zhang et al. «Electronic and mechanical properties of monocrystalline silicon doped with trace content of N or P: A first-principles study». In: *Solid State Sciences* 120 (2021), p. 106723.

-
- [37] *Aluminum 5056-O - MatWeb*. URL: [/www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=4001c91f1bce4477b5c31c6204f0239e&ckck=1](http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=4001c91f1bce4477b5c31c6204f0239e&ckck=1).
- [38] RJ Bucci. «Selecting aluminum alloys to resist failure by fracture mechanisms». In: *Engineering Fracture Mechanics* 12.3 (1979), pp. 407–441.
- [39] *A Background to Silicon and its Applications*. URL: www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=599.
- [40] Amedeo Grasso. «Implementation of classical and advanced failure criteria for composite layered structures in FEMAP and assessment of results». Tesi di dott. Politecnico di Torino, 2018.
- [41] SS Reddy, C Yuvraj e KP Rao. «Design, analysis, fabrication and testing of CFRP with CNF composite cylinder for space applications». In: *International Journal of Composite Materials* 5.5 (2015), pp. 102–128.
- [42] Isaac M Daniel et al. *Engineering mechanics of composite materials*. Vol. 1994. Oxford university press New York, 2006.
- [43] Erasmo Carrera. «Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells». In: *Appl. Mech. Rev.* 56.3 (2003), pp. 287–308.
- [44] Cheuk-Yu Lee, Hui Wang e Qing-Hua Qin. «Method of fundamental solutions for 3D elasticity with body forces by coupling compactly supported radial basis functions». In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 60 (2015), pp. 123–136.
- [45] Xiang-rong Fu et al. «Characteristic equation solution strategy for deriving fundamental analytical solutions of 3D isotropic elasticity». In: *Applied Mathematics and Mechanics* 33.10 (2012), pp. 1253–1264.
- [46] *THE EVOLUTION OF SOLAR PANELS*. URL: <https://www.clearwaycommunitysolar.com/blog/understanding-community-solar/evolution-solar-panels/>.
- [47] *Electro optical technologies*. URL: http://www.eot.it/italpage_1/doctecnica/Materiali/silicio.html.
- [48] Michael Scheerer, Zoran Djinovic e Martin Schueller. «Fiber optic system for deflection and damage detection in morphing wing structures». In: vol. 8692. Apr. 2013, 86922Q. DOI: [10.1117/12.2009256](https://doi.org/10.1117/12.2009256).
- [49] Youssef Taraz Jamshidi, Soroush Sadeghnejad e Mojtaba Sadighi. «Static and Dynamic Study of Sandwich Panels with Composite Skins and Nomex™ Honeycomb Core». In: apr. 2014.
- [50] Victor Munoz Cuartas et al. «Determination of the elastic properties in CFRP composites: comparison of different approaches based on tensile tests and ultrasonic characterization». In: *Advances in aircraft and spacecraft science* 2.3 (2014), pp–249.

- [51] Prof. Marco Di Sciuva. *THREE-NODE MEMBRANE TRIANGULAR ELEMENT*. <https://file.didattica.polito.it/download/MATDID/33022512>. Materiale didattico; corso di Strutture aeronautiche.
- [52] Prof. Marco Di Sciuva. *FOUR-NODE RECTANGULAR KIRCHHOFF PLATE ELEMENT*. <https://file.didattica.polito.it/download/MATDID/33036078>. Materiale didattico; corso di Strutture aeronautiche.
- [53] Marco Zecchetto. «Omogeneizzazione ed indentazione in honeycomb auxetici». In: (2013).