

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

## Modelli matematici per sistemi multiagente con applicazioni alle dinamiche delle folle e alla modellizzazione delle opinioni



**Relatore**

prof. Adriano Festa

**Correlatore**

prof. Andrea Tosin

**Candidato**

Matteo Marino

Anno Accademico 2021-2022

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equazioni cinetiche</b>	<b>5</b>
2.1	L'equazione di Boltzmann e i sistemi multiagente . . . . .	5
2.2	Derivazione dell'equazione di tipo Boltzmann da un modello binario di interazione lineare . . . . .	8
2.3	Il limite delle interazioni quasi invarianti e l'equazione di Fokker-Planck	11
<b>3</b>	<b>Metodi numerici per equazioni cinetiche e fenomeni di trasporto</b>	<b>15</b>
3.1	Tecniche di tipo Monte Carlo . . . . .	15
3.2	Schema semi-Lagrangiano . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Un modello di Crowd Motion</b>	<b>24</b>
4.1	Descrizione di tipo Boltzmann per una popolazione di pedoni . . . . .	24
4.2	Simulazioni numeriche . . . . .	29
4.3	Il limite delle interazioni quasi invarianti . . . . .	32
4.4	Simulazioni numeriche . . . . .	33
4.5	Descrizione di tipo Boltzmann per due popolazioni di pedoni . . . . .	35
4.6	Simulazioni numeriche . . . . .	41
4.7	Il limite delle interazioni quasi invarianti per due popolazioni di pedoni .	43
4.8	Simulazioni numeriche . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Un modello di dinamica delle opinioni su network</b>	<b>47</b>
5.1	Descrizione di tipo Boltzmann per una dinamica delle opinioni su network	49
5.2	Limite delle interazioni quasi invarianti ed equazione di Fokker-Planck .	51
5.3	Simulazioni numeriche . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusione e sviluppi futuri</b>	<b>62</b>

# 1. Introduzione

Una definizione comunemente accettata di agente è quella di una qualunque entità in grado di percepire l'ambiente che lo circonda attraverso dei sensori e capace di esibire determinati comportamenti e azioni nell'ambiente che lo circonda. Da tale prospettiva, si presume che un agente debba essere in grado di ragionare su come raggiungere i suoi obiettivi, agire per raggiungerli attraverso l'applicazione di qualche principio di razionalità, percepire il suo ambiente e interagire con gli altri agenti che lo circondano in quel determinato ambiente. I sistemi multi-agente sono un caso particolare di sistema distribuito e la loro particolarità sta nel fatto che gli agenti del sistema tendono ad essere autonomi e cercano di soddisfare i propri obiettivi. In letteratura la descrizione di tali sistemi ha guadagnato interesse crescente nelle varie branche della scienza come biologia, matematica e fisica. Un'altra caratteristica che contraddistingue questo tipo di sistemi da altri è la loro tendenza a raggiungere un comportamento collettivo ben definito solo attraverso le reciproche interazioni fra gli agenti di cui essi sono formati. Nell'ambito della ricerca, l'obiettivo è quello di studiare l'evoluzione del sistema al fine di spiegare come tali interazioni determinino l'emergere spontaneo di un'organizzazione collettiva. Poiché questi sistemi sono formati da un numero elevato di agenti, è ragionevole identificare le regole con cui essi interagiscono attraverso la costruzione di modelli matematici che seguono le metodologie delle teorie cinetiche dei gas. In particolare, poiché risolvere le equazioni che governano il moto di ogni singola particella risulta essere oneroso ed a volte impossibile, si predilige una descrizione in forma statistica delle caratteristiche principali del sistema.

Il principale modello cinetico è rappresentato dall'equazione di Boltzmann, sia per le sue recenti applicazioni, sia per motivi storici; grazie alla sua struttura infatti, essa risulta essere adattabile per lo studio di numerosi sistemi tra cui quelli multiagente. In particolare in questo elaborato si tratteranno due principali applicazioni, una riguardante la descrizione cinetica di pedoni interagenti in una singola folla (e successivamente in due folle differenti che interagiscono fra loro) e l'altra riguardante la dinamica di opinioni su un social Network.

Per quanto riguarda le dinamiche delle folle, sono state proposte in letteratura numerose classi di modelli a livello microscopico, mesoscopico e macroscopico. Un esempio di tali modelli è rappresentato dal modello di forza sociale [4], basato sulle leggi della dinamica di Newton. Altri modelli in ambito differente come automi cellulari [5] o controlli stocastici ottimali [6], sono stati studiati nell'ambito della dinamica delle folle. I modelli microscopici sono basati sul cambiamento della posizione e della velocità dell'individuo causato dalle interazioni con gli altri agenti del sistema. Per i motivi precedentemente esposti, attraverso l'utilizzo dell'equazione di Boltzmann, si predilige uno studio dell'evoluzione in tempo della distribuzione della folla rispetto alle posizioni

e velocità microscopiche dei pedoni. Nello studio macroscopico invece, un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) descrive la folla come un continuo con una certa densità e le interazioni al suo interno a livello di campo medio, studiando l'evoluzione del sistema in spazio e tempo [7, 8]. Gli esperimenti confermano che la caratteristica principale del pedone in una folla risulta quella di provare ad evitare la collisione con gli altri agenti del sistema orientandosi verso la sua direzione desiderata. Dunque, in accordo con tali esperimenti, questo elaborato presenterà una descrizione cinetica in questo senso, si veda [9].

Per quanto riguarda l'applicazione della dinamica di opinioni su Social Network invece è noto come al giorno d'oggi i social media sono sia un'importante veicolo di informazione, che un valido strumento al fine di influenzare vari aspetti delle caratteristiche del consumatore quali opinione, atteggiamento e comportamento d'acquisto, si veda [10-12]. In letteratura sono presenti alcuni studi relativi a modelli cinetici di formazione dell'opinione in un sistema multiagente, caratterizzati anche da altri parametri, [13, 14]. In questi articoli la variabile opinione è accoppiata a un'altra variabile che rappresenta la persuasività di un agente (elevata persuasività di un determinato agente indica una forte influenza della sua opinione rispetto a quella degli altri). È stato studiato l'effetto di quest'altra variabile accoppiata a quella dell'opinione principalmente in modelli di dinamiche delle opinioni correlate alla formazione del consenso, alle dinamiche di voto, ai modelli di teoria dei giochi e diffusione di innovazioni [15-19]. In questo elaborato verrà trattata la dinamica di opinioni in un Network, dove la persuasività dell'agente viene identificata con la connettività che l'agente possiede nel Network, che può essere ragionevolmente misurata in termini di numero di followers. Gli agenti che hanno una connettività alta sono identificati come influencers, perché, grazie al loro gran numero di seguaci, le loro opinioni possono raggiungere e influenzare molti altri utenti del social media, [20]. Dunque si presuppone che l'opinione degli agenti con alta connettività, ovvero con un gran numero di followers, risulta più convincente di quella degli agenti con un basso numero di seguaci. Partendo da questo presupposto, si costruisce un modello cinetico caratterizzato principalmente da due processi: uno di interazione, dove due agenti quando interagiscono tendono a modificare la loro opinione anche in base alle rispettive connettività; l'altro processo è caratterizzato da una fluttuazione stocastica che tiene conto della propensione dell'agente a mantenere la propria opinione.

Questo elaborato si articola in 4 capitoli che seguono questa introduzione. Nello specifico il Capitolo 2 tratta l'equazione di Boltzmann, che come anticipato rappresenta il principale modello cinetico nella teoria dei gas, e le sue applicazioni ai sistemi multiagente in generale; in particolare nella Sezione 2.2 si mostra come tale equazione può essere utilizzata per passare da un modello binario di interazione lineare ad una descrizione cinetica aggregata per il sistema. Dopo aver ricavato l'equazione di tipo Boltzmann, in Sezione 2.3 essa verrà studiata in un particolare regime (quello delle interazioni quasi invarianti), che permette di descrivere il sistema attraverso un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE), detta Equazione di Fokker-Planck. Il Capitolo 3 tratta le principali tecniche di tipo Montecarlo utili per simulare numericamente sia l'equazione di Boltzmann (Algoritmo di tipo Nanbu e Bird) che l'equazione di Fokker-Planck (Schema semi-Lagrangiano). Nei Capitoli 4 e 5 vengono trattate le due applicazioni prima citate; nello specifico il Capitolo 4 tratta di un modello di dinamica della folla in cui dapprima si studia, in Sezione 4.1, il modello microscopico nel caso di una folla singola di pedoni interagenti, dove ogni agente cerca di evitare la collisione

orientandosi verso la propria direzione desiderata  $\theta_d$ ; nella stessa sezione viene studiato il sistema, sotto l'ipotesi di omogeneità spaziale (ovvero agenti ben mescolati nello spazio) attraverso la descrizione di tipo Boltzmann. Successivamente vengono studiate le condizioni sotto le quali i pedoni tendono a raggiungere un consenso, ovvero a raggiungere la stessa direzione dopo un certo periodo di tempo; tale direzione risulterà essere  $\theta_d$ , ovvero quella desiderata dai pedoni nella folla. In Sezione 4.2 si effettuano varie simulazioni numeriche che confermano i risultati teorici ottenuti precedentemente. In Sezione 4.3 e 4.4 si studia rispettivamente il limite delle interazioni quasi invarianti e si simula l'equazione di Fokker-Planck confermando, in questo particolare regime, i risultati ottenuti nella descrizione di tipo Boltzmann. Successivamente viene trattato il caso di due folle di pedoni interagenti ripercorrendo una struttura simile al caso di una folla singola; le due folle avranno direzioni desiderate differenti ( $\theta_d, \omega_d$ ) e per semplicità si assume che solo pedoni di folle opposte possano interagire fra loro. I risultati ottenuti mostrano che anche in questo caso, sotto opportune ipotesi, si ha la tendenza per tempi molto lunghi a raggiungere un consenso (differente all'interno delle due folle). In questo caso tuttavia il consenso nelle due folle non è dato dalle semplici direzioni desiderate nelle due folle  $\theta_d$  e  $\omega_d$ , ma da una loro media pesata. Il Capitolo 5 tratta invece un modello di dinamica delle opinioni su un Network. Anche in questo caso si studia dapprima il modello microscopico per poi passare all'equazione di tipo Boltzmann associata (Sezione 5.1). Come anticipato il modello microscopico, oltre a tener conto del processo di interazione degli agenti, presenta al suo interno un termine di fluttuazione stocastica; al fine di studiare la soluzione dell'equazione di Fokker-Planck, in Sezione 5.2, verrà effettuata una scelta particolare del coefficiente di diffusione che quantifica il peso della fluttuazione stocastica nel modello; tale scelta permetterà di avere una forma esplicita della soluzione nel regime di interazioni quasi invarianti. I risultati ottenuti mostrano come, a seconda del peso che si dà alle interazioni rispetto alla fluttuazione stocastica, gli agenti tendano a dividersi tra due opinioni estreme oppure a mediare le loro opinioni iniziali, concentrandosi attorno all'opinione media iniziale del sistema. Infine in Sezione 5.3 sono messe a confronto le principali soluzioni ottenute in maniera analitica, attraverso la simulazione dell'equazione di tipo Boltzmann in un regime quasi invariante e attraverso lo schema semi-Lagrangiano.

## 2. Equazioni cinetiche

### 2.1 L'equazione di Boltzmann e i sistemi multiagente

Nel 1872 Ludwig E. Boltzmann introdusse un'equazione integro-differenziale (2.1) con l'obiettivo di descrivere, attraverso le leggi della meccanica classica, le proprietà macroscopiche dei gas composti da un gran numero di particelle, in uno stato di non equilibrio termodinamico. Tale equazione, oltre al movimento delle particelle, tiene anche conto delle loro possibili collisioni. Al fine di avere una descrizione macroscopica, essa utilizza degli strumenti statistici attribuendo alle possibili posizioni e velocità che ogni particella può assumere una certa probabilità. L'equazione è la seguente:

$$\frac{\partial f(x, v, t)}{\partial t} = -v \cdot \nabla_x f(x, v, t) + \mathcal{Q}(f, f)(x, v, t) \quad (2.1)$$

dove  $f(x, v, t) > 0$  è la densità delle particelle al tempo  $t > 0$  in posizione  $x \in \mathbb{R}^3$  con velocità  $v \in \mathbb{R}^3$ . Si noti come tale equazione sia composta da due termini:

- $-v \cdot \nabla_x f(x, v, t)$  rappresenta l'effetto della dinamica delle particelle ed è quindi detto *termine di trasporto*;
- $\mathcal{Q}(f, f)(x, v, t)$  rappresenta l'interazione tra le particelle ed è detto *termine di collisione*.

Il termine di trasporto può essere trascurato sotto l'ipotesi di omogeneità spaziale; tale ipotesi può essere considerata valida quando le particelle sono ben mescolate fra loro. In tal caso la distribuzione  $f = f(v, t)$  soddisfa

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \mathcal{Q}(f, f)(v, t). \quad (2.2)$$

Il termine  $\mathcal{Q}$  tiene conto di tutte le possibili collisioni binarie che rispondono a particolari leggi di interazione; nel caso dei gas un possibile esempio di leggi di interazione microscopica e del termine di collisione è il seguente:

$$\begin{cases} v^* = \frac{1}{2}(v + w + |v - w| n) \\ w^* = \frac{1}{2}(v + w - |v - w| n) \end{cases} \quad (2.3)$$

con  $v$  e  $w$  velocità pre-collisione,  $v^*$  e  $w^*$  velocità post-collisione ed  $n$  vettore unitario;

$$\mathcal{Q}(f, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B((v - w) \cdot n) [f(v^*)g(w^*) - f(v)g(w)] dw dn \quad (2.4)$$

dove  $B(\cdot)$  è la frequenza di collisione e  $S^2$  è la superficie della sfera unitaria. Si definiscono rispettivamente l'operatore di guadagno e l'operatore di perdita come segue

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^+(f, g)(v) &= \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B((v-w) \cdot n) f(v^*) g(w^*) dw dn, \\ \mathcal{Q}^-(f, g)(v) &= \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B((v-w) \cdot n) f(v) g(w) dw dn.\end{aligned}$$

Si noti che  $\mathcal{Q}^+$  rappresenta il numero medio di particelle che dopo l'interazione hanno velocità  $v^*$ , mentre  $\mathcal{Q}^-$  il numero medio di particelle con velocità  $v$ . È dunque possibile riscrivere l'operatore di collisione in funzione dei due operatori appena definiti,

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ - \mathcal{Q}^- . \quad (2.5)$$

**Osservazione.** Se l'operatore  $\mathcal{Q}$  è definito come in (2.4), è possibile semplificare la descrizione cinetica (2.2) dando una rappresentazione statistica delle interazioni tramite la distribuzione di Maxwell con massa  $\rho(x, t)$ , velocità  $U(x, t)$  e temperatura  $T(x, t)$ :

$$M(x, v, t) = \rho(x, t) \frac{1}{(2\pi T(x, t))^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{|v - U(x, t)|^2}{2T(x, t)} \right\}. \quad (2.6)$$

Si noti infatti che la distribuzione di Maxwell annulla l'operatore di collisione, ovvero  $\mathcal{Q}(M, M) = 0$ . Quindi tale distribuzione fornisce una rappresentazione esplicita della soluzione che in generale non può essere sempre ottenuta (nel caso dei sistemi multiagente, che verranno trattati in seguito, questo non è sempre possibile). Inoltre, sotto le ipotesi di omogeneità spaziale, è possibile ricavare la forma lineare dell'equazione (2.2) per una distribuzione  $f = f(v, t)$ , come segue

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \mathcal{Q}(f, M)(v, t) . \quad (2.7)$$

Il significato delle equazioni (2.2) e (2.7) è profondamente differente. Nella prima le particelle del gas interagiscono fra loro e il processo di interazione segue le leggi di collisione interne; nella seconda invece le particelle interagiscono con un background esterno (la Maxwelliana  $M$ ) e il processo di interazione segue leggi di collisione che descrivono le interazioni tra le particelle distribuite con densità  $f$  e quelle distribuite con densità di Maxwell.

Poiché il numero di particelle in un gas è molto elevato, non è necessario tener conto di ogni singola interazione tra le particelle, ma ci si concentra su una descrizione aggregata del sistema sulla base di una singola interazione tra due generiche particelle, ovvero ipotizzando il cosiddetto *ansatz di Boltzmann* (si veda (2.21)).

In tutti i casi in cui le assunzioni enunciate non siano restrittive per il sistema che si vuole descrivere, l'operatore di collisione di Boltzmann può essere considerato un punto di partenza per descrivere il processo di interazione fra le particelle. Un famoso esempio di tali sistemi è dato dai *sistemi multiagente*, ovvero i sistemi che hanno la tendenza a raggiungere un comportamento collettivo ben definito solo attraverso le reciproche interazioni fra gli *agenti* da cui sono formati (alcuni esempi sono stormi di uccelli, banchi di pesce, traffico veicolare, folle di individui). In tale contesto, grazie alla struttura dell'equazione (2.1), si ha una dualità dal punto di vista concettuale: le

*molecole* sono identificate come *agenti*, le *collisioni* corrispondono a generiche *interazioni* e le *velocità* delle particelle si traducono in *stati* degli agenti. È dunque possibile generalizzare ai sistemi multiagente l'equazione (2.2) introducendo l'operatore  $I(f)$ , che descrive la variazione della distribuzione

$$f(v, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$$

dovuta alle interazioni fra gli agenti del sistema. Per semplicità si studia il caso monodimensionale  $v \in \mathbb{R}$  e generalizzando (2.2) ai sistemi multiagente si ottiene

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = I(f)(v, t). \quad (2.8)$$

Affinché tale equazione sia ben posta, nel senso che essa mappi una funzione di densità non negativa con una determinata massa in un'altra densità non negativa con la stessa massa della precedente, bisogna imporre che l'operatore  $I(f)(v, t)$  soddisfi due proprietà:

- (i)  $\int_{\mathbb{R}} I(f)(v, t) dv = 0 \quad \forall t \geq 0$  (conservazione della massa) ,
- (ii)  $I(f)(v, t) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0$  .

Possiamo quindi definire la densità iniziale del sistema che rimane costante in ogni istante di tempo

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(v) dv := \int_{\mathbb{R}} f(v, 0) dv \quad (2.9)$$

Imponendo dunque che la densità  $f_0(v)$  abbia massa pari a uno, la soluzione dell'equazione (2.8) sarà una densità di probabilità per ogni istante di tempo  $t \geq 0$ ; è quindi possibile imporre che tale densità, la cui evoluzione è data dalla (2.8), sia quella di un processo stocastico  $X(t)$ .

Si definisce *osservabile macroscopica del sistema* ogni funzione del tipo

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi = \varphi(v)$$

Se si conosce la densità di probabilità  $f(v)$  di una variabile aleatoria  $X$  è possibile calcolare la media di ogni funzione  $\varphi(v)$  come segue

$$\langle \varphi(X) \rangle = \langle \varphi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f(v) dv \quad (2.10)$$

Si noti che se  $\varphi(v) = |v|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  allora la (2.10) definisce il momento di ordine  $\alpha$  della variabile aleatoria  $X$ . Un caso importante per l'analisi dell'evoluzione in tempo della soluzione di (2.8) risulta essere quello in cui alcuni momenti della soluzione stessa sono limitati uniformemente in tempo.

Gli osservabili macroscopici del sistema sono utili per ricavare una formulazione debole di (2.8); a tal fine si introduce lo spazio di tutte le densità di probabilità con momento di ordine  $\alpha > 0$  finito

$$\mathcal{P}_\alpha := \left\{ f \in \mathcal{P} : \int_{\mathbb{R}} |v|^\alpha f(v) dv < +\infty, \alpha \geq 0 \right\} \quad (2.11)$$

È possibile ricavare da (2.8) l'equazione in forma debole corrispondente ad una densità iniziale  $f_0(v) \in \mathcal{P}_\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ ; per ogni funzione osservabile  $\varphi$  risultano facilmente derivabili le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f(v, t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) I(f)(v, t) dv \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f(v, t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f_0(v) dv. \end{cases} \quad (2.12)$$

## 2.2 Derivazione dell'equazione di tipo Boltzmann da un modello binario di interazione lineare

Come anticipato nella Sezione 2.1, il punto di partenza per ricavare una descrizione di tipo Boltzmann del sistema è quello di considerare una singola interazione rappresentativa tra due generici agenti, per poi ricavare una descrizione aggregata dell'intero sistema. Si consideri il caso mono-dimensionale e spazialmente omogeneo in cui gli stati microscopici degli agenti sono dati dalle velocità. In questo contesto, il caso più generale di interazione binaria è quella in cui le velocità post-interazione  $v^*, w^* \in \mathbb{R}_+$  hanno una dipendenza lineare da quelle pre-interazione  $v, w \in \mathbb{R}_+$ , come riportato di seguito:

$$\begin{cases} v^* = p_1 v + q_1 w \\ w^* = p_2 v + q_2 w \\ p_i, q_i > 0, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.13)$$

A seconda del problema che si vuole studiare, i parametri  $p_1, p_2, q_1, q_2$  possono essere delle costanti oppure variabili aleatorie.

Di seguito sono riportate alcune notazioni che saranno utili per esporre il procedimento di derivazione dell'equazione di tipo Boltzmann basata sulle leggi di interazione (2.13).

- $f = f(v, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  è la densità di probabilità dello stato microscopico  $v$  al tempo  $t$ ; si noti quindi che il termine  $f(v, t)dv$  rappresenta la probabilità che una generica particella abbia, al tempo  $t$ , uno stato microscopico compreso tra  $v$  e  $v + dv$ ;
- $X(t)$  e  $Y(t)$  sono due processi stocastici con stessa densità  $f(v, t)$  che denotiamo con

$$X(t), Y(t) \sim f(v, t) .$$

$X(t)$  descrive il numero di particelle con velocità  $v$  al tempo  $t$  e tale processo è generato dalle interazioni fra le particelle di stessa legge (per tale motivo si è definito  $Y(t)$ ). In termini di processi  $X(t)$  e  $Y(t)$  le leggi (2.13) possono essere riscritte come segue

$$\begin{cases} X^* = p_1 X + q_1 Y \\ Y^* = p_2 X + q_2 Y \\ p_i, q_i > 0, \quad i = 1, 2 . \end{cases} \quad (2.14)$$

Si noti che con queste notazioni  $v, w$  sono due possibili realizzazioni di  $X(t)$  e  $Y(t)$ , rispettivamente.

- $T \sim Be(\mu\Delta t)$  è la variabile aleatoria di Bernoulli che indica se avviene ( $T = 1$ ) o meno ( $T = 0$ ) l'interazione nell'intervallo di tempo  $[t, t + \Delta t]$ ; il parametro  $\mu > 0$  rappresenta la frequenza di interazione tra le particelle. Si noti che la probabilità di interazione è direttamente proporzionale a  $\Delta t$  e quindi più l'intervallo in cui si osserva l'interazione fra le particelle è ampio, più la probabilità che essa avvenga aumenta. Affinché il parametro della Bernoulli risulti essere una probabilità, bisogna imporre che  $\mu\Delta t \leq 1$  da cui  $\Delta t \leq \frac{1}{\mu}$ . Inoltre, si ipotizza per semplicità, che tale probabilità non dipenda dallo stato microscopico delle particelle al tempo  $t$ , ovvero <sup>1</sup>

$$T \perp\!\!\!\perp X(t), Y(t). \quad (2.15)$$

Tale ipotesi risulta essere valida, ad esempio, in tutti i casi in cui gli agenti non possono scegliere se interagire o meno con un altro agente sulla base dei rispettivi stati microscopici pre-interazione.

È dunque possibile descrivere il processo stocastico di interazione, che segue le leggi (2.14), attraverso la seguente equazione

$$X(t + \Delta t) = (1 - T)X(t) + TX^*(t) \quad (2.16)$$

e dunque utilizzando la definizione di media data in (2.10), per ogni osservabile  $\varphi(\cdot)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \varphi(X(t + \Delta t)) \rangle &= \langle \varphi((1 - T)X(t) + TX^*(t)) \rangle \\ &= \langle \varphi(X(t)) \rangle P(T = 0) + \langle \varphi(X^*(t)) \rangle P(T = 1) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$= (1 - \mu\Delta t)\langle \varphi(X(t)) \rangle + \mu\Delta t\langle \varphi(X^*(t)) \rangle \quad (2.18)$$

dove per ricavare (2.17) è stata utilizzata l'ipotesi (2.15).

Con alcuni passaggi algebrici è possibile riscrivere l'equazione (2.18) come segue

$$\frac{\langle \varphi(X(t + \Delta t)) \rangle - \langle \varphi(X(t)) \rangle}{\Delta t} = \mu \left[ \langle \varphi(X^*(t)) \rangle - \langle \varphi(X(t)) \rangle \right]$$

e passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0^+$  si ottiene, in termini di processi stocastici, l'equazione di tipo Boltzmann in forma debole del sistema:

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi(X(t)) \rangle = \mu \left[ \langle \varphi(X^*(t)) \rangle - \langle \varphi(X(t)) \rangle \right] \quad (2.19)$$

Dalle leggi (2.14) è possibile notare che  $X^*(t)$  è funzione della coppia  $(X(t), Y(t))$ , da ciò segue

$$\langle \varphi(X^*(t)) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi(v^*) \rangle f_2(v, w, t) dv dw \quad (2.20)$$

dove  $f_2(v, w, t)$  è la densità congiunta dei processi  $X(t)$  e  $Y(t)$ .

Ricordando che  $X(t) \sim f(v, t)$  e sostituendo la (2.20) in (2.19) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f(v, t) dv = \mu \left[ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi(v^*) \rangle f_2(v, w, t) dv dw - \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f(v, t) dv \right].$$

<sup>1</sup>Con il simbolo  $\perp\!\!\!\perp$  si indica l'indipendenza fra variabili aleatorie; in questo caso si sta ipotizzando che la variabile aleatoria di Bernoulli  $T$  sia indipendente dai due processi stocastici  $X(t)$  e  $Y(t)$ .

Al fine di ottenere un'equazione in forma chiusa e in termini di  $f(v, t)$  si ipotizza il cosiddetto Ansatz di Boltzmann

$$X(t) \perp\!\!\!\perp Y(t) \implies f_2(v, w, t) = f(v, t)f(w, t) \quad (2.21)$$

cioè si ipotizza che, tra due interazioni successive di due determinati agenti del sistema, essi abbiano un elevato numero di interazioni con altri agenti in modo tale da rendere i loro stati statisticamente indipendenti. Sotto tale ipotesi si ottiene la forma debole, in termini della sola densità  $f(v, t)$ , dell'equazione di tipo Boltzmann che risponde alle leggi di interazione (2.13),

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f(v, t) dv = \mu \left\langle \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(v^*) - \varphi(v)) f(v, t) f(w, t) dv dw \right\rangle. \quad (2.22)$$

Si noti che il termine  $\varphi(v^*) - \varphi(v)$  rappresenta la variazione dell'osservabile  $\varphi(\cdot)$  in una singola interazione rappresentativa; dunque in media la variazione in tempo dell'osservabile  $\varphi(\cdot)$  è dovuta alla sua variazione media in una generica interazione microscopica binaria. Tale procedura può essere attuata anche per il processo stocastico  $Y(t)$ , ricavando dunque l'equazione di Boltzmann in termini di  $f(w, t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(w) f(w, t) dw = \mu \left\langle \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(w^*) - \varphi(w)) f(w, t) f(v, t) dw dv \right\rangle. \quad (2.23)$$

**Osservazione.** Al fine di ricavare un'equazione che tenga in considerazione i due processi stocastici è sufficiente sommare le equazioni (2.22) e (2.23); ciò è possibile grazie all'ipotesi (2.21) che permette di valutare facilmente la media  $\varphi((X + Y)(t))$  come  $\varphi(X(t)) + \varphi(Y(t))$ . Dunque, sommando le due equazioni, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) f(v, t) dv = \frac{\mu}{2} \left\langle \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(v^*) + \varphi(w^*) - \varphi(v) - \varphi(w)) f(v, t) f(w, t) dv dw \right\rangle. \quad (2.24)$$

È possibile ricavare una forma più compatta scegliendo  $\varphi(\cdot) = \delta_0(v - \cdot)$  in (2.24), dove  $\delta_0(\cdot)$  indica la Delta di Dirac. Cambiando le variabili di integrazione con  $v_1$  e  $v_2$  si ottiene

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \left\langle \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (\delta_0(v - v_1^*) + \delta_0(v - v_2^*)) f(v_1, t) f(v_2, t) dv_1 dv_2 \right\rangle - f(v, t), \quad (2.25)$$

dove le leggi di interazione microscopiche espresse in termini delle due nuove variabili sono

$$v_1^* = p_1 v_1 + q_1 v_2, \quad v_2^* = p_2 v_1 + q_2 v_2; \quad p_i, q_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

## Il caso simmetrico delle interazioni

Un caso particolare del modello binario introdotto nella Sezione 2.1 è il caso simmetrico, ovvero il caso in cui, nelle leggi di interazione (2.13), si ha  $p_1 = p_2 = p$  e  $q_1 = q_2 = q$ .

Senza perdita di generalità, è possibile supporre  $p > q > 0$  e che la densità iniziale  $f_0$  soddisfi le seguenti condizioni

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(v) dv = 1 ; \quad m(0) := \int_{\mathbb{R}} v f_0(v) dv = 0 \quad \int_{\mathbb{R}} v^2 f_0(v) dv = 1 . \quad (2.26)$$

Considerando l'equazione (2.22), attraverso la scelta di particolari osservabili è possibile ricavare alcune proprietà del sistema considerato. Scegliendo  $\varphi(v) = v$  e  $\varphi(v) = v^2$  si ottiene rispettivamente lo stato medio e l'energia del sistema

$$m(t) := \int_{\mathbb{R}} v f(v, t) dv = m(0) \exp \{ (p + q - 1)t \} , \quad (2.27)$$

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}} v^2 f(v, t) dv = \exp \{ (p^2 + q^2 - 1)t \} . \quad (2.28)$$

quindi, poiché  $f_0$  deve soddisfare (2.26),  $m(t) = 0 \forall t \geq 0$ . L'energia del sistema non è conservata eccetto nel caso in cui  $p^2 + q^2 = 1$ , negli altri casi a seconda del segno di  $p^2 + q^2 - 1$  l'energia può crescere all'infinito o decrescere a zero.

### 2.3 Il limite delle interazioni quasi invarianti e l'equazione di Fokker-Planck

Quando si costruisce un modello per descrivere l'evoluzione in tempo della densità di un sistema multiagente, uno dei principali obiettivi risiede nello studio delle caratteristiche del sistema e in particolare nel calcolo della distribuzione stazionaria (ovvero lo studio della densità degli agenti ad un istante di tempo sufficientemente grande  $t_\infty$  dove le interazioni non hanno più una elevata influenza per far variare la densità negli istanti di tempo successivi). Per questo motivo è opportuno studiare alcune proprietà della soluzione del modello non lineare associato all'equazione (2.22). A tale scopo si scala la densità degli agenti attraverso la seguente legge

$$g(v, t) := \sqrt{E(t)} f(v \sqrt{E(t)}, t). \quad (2.29)$$

Si noti che, grazie al termine  $\sqrt{E(t)}$  che moltiplica la densità  $f$ ,  $g(v, t)$  rimane una densità di probabilità e  $\int_{\mathbb{R}} v^2 g(v, t) dv = 1 \forall t \geq 0$ . Inoltre  $g(v, t)$  soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) g(v, t) dv - \frac{1}{2} (p^2 + q^2 - 1) \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) \frac{\partial}{\partial v} (v g) dv \\ = \mu \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(v^*) - \varphi(v)) g(v, t) g(w, t) dv dw. \end{aligned}$$

Assumendo  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  e a supporto compatto in  $\mathbb{R}$  è possibile integrare per parti il secondo integrale presente a primo membro, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) g(v, t) dv + \frac{1}{2} (p^2 + q^2 - 1) \int_{\mathbb{R}} \varphi'(v) v g(v) dv \\ = \mu \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(v^*) - \varphi(v)) g(v, t) g(w, t) dv dw. \end{aligned} \quad (2.30)$$

**Osservazione.** A differenza dell'equazione (2.22), l'equazione (2.30) soddisfatta da  $g$ , definita in (2.29), contiene il termine

$$D(g) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 1) \frac{\partial(vg(v))}{\partial v}. \quad (2.31)$$

Quando il coefficiente dell'operatore  $D(\cdot)$  è positivo allora esso è detto operatore di drift (anti-drift altrimenti). Si noti che il coefficiente  $\frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 1)$  è collegato all'energia del sistema: se tale coefficiente è positivo l'energia aumenta, altrimenti diminuisce. Dato che scalando con (2.29) si forza il momento secondo di  $g$  ad essere costante, l'operatore  $D(\cdot)$  agisce come bilanciamento per l'energia del sistema; quando l'equazione bilineare (2.30) è tale da aumentare il momento secondo della soluzione, l'operatore di drift agisce contrastando tale aumento e mantenendo costante il momento secondo di  $g$ .

L'equazione (2.30) permette, sotto opportune ipotesi, di calcolare la soluzione stazionaria in una forma esplicita. A tal fine uno dei metodi conosciuti è quello di studiare l'equazione (2.30) in un particolare regime, ovvero per una particolare scelta dei parametri  $p, q$  e  $\mu$ . L'obiettivo è quello di imporre un regime in cui gli stati post-interazione degli agenti sono simili a quelli pre-interazione. Dunque si considera  $p \rightarrow 1$  e  $q \rightarrow 0$  (in tale regime lo stato medio del sistema è conservato), tuttavia svolgendo questo limite in (2.30) si deduce che la distribuzione statistica iniziale  $f_0$  assegnata non varia per ogni  $t \geq 0$ ; è dunque necessario bilanciare l'invarianza delle interazioni con un'opportuna scelta della loro frequenza,

$$\mu = \frac{1}{q^2}. \quad (2.32)$$

Dunque se da un lato le interazioni contribuiscono a variare di poco gli stati post-interazione degli agenti, dall'altro sono più frequenti; per questo motivo tale regime è detto *regime di interazioni quasi invarianti*.

Si noti che fino a questo punto è stato sufficiente richiedere che  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$  e che sia a supporto compatto in  $\mathbb{R}$ ; tuttavia è necessario richiedere  $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$  al fine di sviluppare la differenza  $\varphi(v^*) - \varphi(v)$  tramite sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine

$$\begin{aligned} \varphi(v^*) - \varphi(v) &= ((p-1)v + qw)\varphi'(v) + \frac{1}{2}((p-1)v + qw)^2\varphi''(v) \\ &\quad + \frac{1}{6}((p-1)v + qw)^3\varphi'''(\bar{v}), \quad \bar{v} \in [\min\{v, v^*\}, \max\{v, v^*\}] \end{aligned} \quad (2.33)$$

e sostituendo nell'operatore di interazione si ottiene

$$\begin{aligned} \mu \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi(v^*) - \varphi(v))g(v, t)g(w, t) dv dw = \\ \mu \int_{\mathbb{R}^2} g(v)g(w)((p-1)v + qw)\varphi'(v) dv dw \\ + \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^2} g(v)g(w)((p-1)v + qw)^2\varphi''(v) dv dw \\ + R_\mu(p, q), \end{aligned}$$

dove

$$R_\mu(p, q) := \frac{\mu}{6} \int_{\mathbb{R}^2} ((p-1)v + qw)^3\varphi'''(\bar{v})g(v)g(w) dv dw \quad (2.34)$$

Ricordando che  $g$  deve soddisfare (2.26) si ottiene

$$\begin{aligned} \mu \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi(v^*) - \varphi(v))g(v, t)g(w, t) dv dw &= \mu(p-1) \int_{\mathbb{R}} g(v)\varphi'(v) dv \\ &+ \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}} g(v)((p-1)^2v^2 + q^2)\varphi''(v) dv dw \\ &+ R_\mu(p, q) , \end{aligned}$$

dove il termine di resto è stato ridotto alla seguente forma

$$R_\mu(p, q) = \frac{\mu}{6} \left[ \int_{\mathbb{R}} ((p-1)^3v^3 + 3(p-1)vq^2)\varphi'''(\bar{v})g(v) dv + \int_{\mathbb{R}^2} q^3w^3\varphi'''(\bar{v})g(v)g(w) dv dw \right] .$$

Sostituendo in (2.30) e raggruppando i termini, è possibile concludere che  $g(v, t)$  soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v)g(v, t) dv + \frac{1}{2}((p-1)^2 + q^2) \int_{\mathbb{R}} \varphi'(v) vg(v) dv \\ = \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}} g(v)((p-1)^2v^2 + q^2)\varphi''(v)dv + R_\mu(p, q). \end{aligned}$$

Quindi imponendo la condizione (2.32) sulla frequenza di interazione  $\mu$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v)g(v, t) dv + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{p-1}{q} \right)^2 + 1 \right) \int_{\mathbb{R}} \varphi'(v) vg(v) dv \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( \left( \frac{p-1}{q} \right)^2 v^2 + 1 \right) \varphi''(v)g(v)dv + R_{1/q^2}(p, q) \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove

$$R_{1/q^2}(p, q) := \frac{1}{6} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{(p-1)^3}{q^2}v^3 + 3(p-1)v \right) \varphi'''(\bar{v})g(v) dv + q \int_{\mathbb{R}^2} w^3\varphi'''(\bar{v})g(v)g(w) dv dw \right] .$$

Si consideri  $p = p(q)$  tale che per  $\lambda > 0$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{p(q) - 1}{q} = \lambda. \quad (2.36)$$

Svolgendo ora il limite per  $p \rightarrow 1$  e per  $q \rightarrow 0$  il termine  $R_{1/q^2}(p, q) \rightarrow 0$  e l'equazione (2.35) si riduce alla seguente equazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v)g(v, t) dv + \frac{1}{2}(\lambda^2 + 1) \int_{\mathbb{R}} \varphi'(v) vg(v) dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g(v)(\lambda^2v^2 + 1)\varphi''(v)dv. \quad (2.37)$$

L'equazione (2.37) è la forma debole dell'equazione di Fokker-Planck

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}(\lambda^2 + 1) \frac{\partial}{\partial v} (vg) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} ((1 + \lambda^2v^2)g) . \quad (2.38)$$

A secondo membro il primo addendo è detto *termine di trasporto* e descrive le interazioni a livello di campo medio, mentre il secondo è detto *termine di diffusione*. In tale regime

si noti che è possibile calcolare la soluzione in maniera esplicita, infatti l'unica soluzione stazionaria con massa unitaria risulta essere

$$M_\lambda(v) = c_\lambda \left( \frac{1}{1 + \lambda^2 v^2} \right)^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2\lambda^2}}. \quad (2.39)$$

**Osservazione.** Si noti che il modello appena esposto può essere considerato sia come un'approssimazione dell'equazione di Boltzmann (come equazione iperbolica), ma anche come un modello a sé. Infatti il modo di scalare le interazioni non è unico, tuttavia rendendo le interazioni più frequenti e meno forti si giunge ad un modello macroscopico che spiega con successo i fenomeni derivanti da molti tipi sistemi a cui viene applicato.

# 3. Metodi numerici per equazioni cinetiche e fenomeni di trasporto

## 3.1 Tecniche di tipo Monte Carlo

In questa sezione si descrive come applicare i metodi di tipo Monte Carlo al fine di approssimare il valore di un integrale definito. Per poter utilizzare le tecniche di questo tipo si esprime l'integrale che si vuole approssimare come valore atteso di un'opportuna variabile aleatoria.

Si supponga che l'integrale che si vuole approssimare abbia la seguente struttura

$$I[g] := \int_{\Omega} g(x)f(x) dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad d > 1, \quad (3.1)$$

dove  $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$  e  $f$  una densità di probabilità in  $\mathbb{R}^d$ . Si consideri il vettore aleatorio  $X$  con densità di probabilità  $f(x)$ . Per definizione di valore atteso di una variabile aleatoria si ha che  $E(g(X)) = I[g]$ ; in particolare, sia  $X_n$  una sequenza di  $N$  campioni con probabilità  $f(x)$ , allora

$$\bar{I}_N[g] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i), \quad E(\bar{I}_N[g]) = I[g]. \quad (3.2)$$

Dunque  $\bar{I}_N[g]$  è uno stimatore consistente di  $I[g]$ , infatti per la legge debole dei grandi numeri

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left( |\bar{I}_N[g] - I[g]| > \epsilon \right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (3.3)$$

Una situazione tipica è quella dove si è interessati a stimare il momento  $k$ -esimo di  $f(x)$ , ovvero

$$M^k[f] := I[x^k] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)x^k dx, \quad d, k \geq 1, \quad (3.4)$$

e il suo stimatore di tipo Monte Carlo risulta essere

$$\bar{M}_N^k[f] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i)^k. \quad (3.5)$$

É possibile stimare l'ordine di grandezza dell'errore che si commette nell'approssimazione, infatti per il teorema del limite centrale  $(\bar{I}_N[g] - I[g]) / (\sigma_g N^{-1/2})$ , dove

$$\sigma_g^2 := \int_{\Omega} (g(x) - I[g])^2 f(x) dx, \quad (3.6)$$

approssimativamente ha una distribuzione normale standard e dunque l'errore nell'integrazione di tipo Monte Carlo è  $O(\sigma_g N^{-1/2})$ .

**Teorema 3.1.** *Si definisca l'errore nell'integrazione di tipo Monte Carlo come*

$$\epsilon_N[g] = I[g] - \bar{I}_N[g]. \quad (3.7)$$

Allora si ha che

$$E((\epsilon_N[g])^2) = \sigma_g^2 N^{-1}. \quad (3.8)$$

**Dim.** Sia  $X_n$  una sequenza di  $N$  campioni indipendenti e con probabilità  $f(x)$ , si definisce la sequenza  $Y_n = (I[g] - g(X_n))/\sigma_g$ . Si osservi che le variabili  $Y_i$  sono indipendenti e per  $i = 1, \dots, N$  si ha

$$E(Y_i) = 0; \quad E(Y_i^2) = \int_{\Omega} \frac{(I[g] - g(x))^2 f(x)}{\sigma_g^2} dx = 1; \quad E(Y_i Y_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Si consideri la media campionaria della sequenza  $Y_n$

$$\bar{Y}_N[g] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{\epsilon_N[g]}{\sigma_g}.$$

Utilizzando nuovamente l'indipendenza delle variabili aleatorie della sequenza  $Y_n$  si ottiene

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\epsilon_N[g]^2}{\sigma_g^2}\right) &= E(\bar{Y}_N^2[g]) = E\left(\frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N Y_i\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{N^2} \left[ E\left(\sum_{i=1}^N Y_i^2\right) + E\left(\sum_{i \neq j} Y_i Y_j\right) \right] \\ &= \frac{1}{N^2} (N + 0) = \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Da cui si deduce

$$E(\epsilon_N[g]^2) = \frac{\sigma_g^2}{N}.$$

□

La costruzione di metodi per accelerare la convergenza delle tecniche di tipo Monte Carlo rappresenta uno dei principali aspetti nello sviluppo di metodi numerici efficienti. Dal Teorema (3.1) si deduce  $N = O(\sigma_g^2/\epsilon_N^2)$  e quindi un modo per avere un'accuratezza maggiore nell'approssimazione risulta quello di aumentare il numero  $N$  di campioni utilizzati; tuttavia in tal modo si aumenta il tempo computazionale (perché proporzionale a  $N$ ). Dunque, per un dato numero di campioni, la stima (3.8) mostra che un altro modo per ridurre l'errore dell'approssimazione è quello di ridurre la varianza  $\sigma^2$  del campione utilizzato.

## Algoritmo di tipo Monte Carlo per un modello di interazione binaria

I metodi di tipo Monte Carlo rappresentano dei validi strumenti per la simulazione numerica delle soluzioni di equazioni cinetiche. Si consideri il modello trattato nella Sezione 2.3 e al fine di ricavare un algoritmo di tipo Monte Carlo risulta conveniente utilizzare l'equazione di Boltzmann espressa tramite l'utilizzo delle delta di Dirac:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^2} f(v_1, t) f(v_2, t) (\delta_0(v - v_1^*) + \delta_0(v - v_2^*)) dv_1 dv_2 - f(v, t), \quad (3.9)$$

dove

$$v_1^* = p_1 v_1 + q_1 v_2, \quad v_2^* = p_2 v_1 + q_2 v_2.$$

Tramite un cambiamento di variabili è possibile ottenere

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(v_1) f(v_2) \delta_0(v - v_1^*) dv_1 dv_2 &= \frac{1}{q_1} \int_{\mathbb{R}^2} f(v_1) f\left(\frac{v_1^* - p_1 v_1}{q_1}\right) \delta_0(v - v_1^*) dv_1 dv_2 \\ &= \frac{1}{q_1} \int_{\mathbb{R}} f(v_1) f\left(\frac{v - p_1 v_1}{q_1}\right) dv_1 \\ &= \frac{1}{p_1} \int_{\mathbb{R}} f(v_2) f\left(\frac{v - q_1 v_2}{p_1}\right) dv_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove per semplificare la notazione si è omesso la dipendenza dal tempo. Analogamente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(v_1) f(v_2) \delta_0(v - v_2^*) dv_1 dv_2 &= \frac{1}{q_2} \int_{\mathbb{R}} f(v_1) f\left(\frac{v - p_2 v_1}{q_2}\right) dv_1 \\ &= \frac{1}{p_2} \int_{\mathbb{R}} f(v_2) f\left(\frac{v - q_2 v_2}{p_2}\right) dv_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si osservi che se  $f(v, t)$  è una densità di probabilità e  $v_1, v_2$  due variabili aleatorie indipendenti allora (3.10) e (3.11) sono le densità di probabilità delle variabili aleatorie  $v_1^*$  e  $v_2^*$ , rispettivamente.

Si consideri il dato iniziale  $f(v, 0) := f_0(v)$ , con  $f_0(v)$  una densità di probabilità. É possibile riscrivere il modello (3.9) come segue

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \mu \left( \mathcal{Q}^+(f, f)(v, t) - f(v, t) \right), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{Q}^+(f, f)(v, t) = \frac{1}{2} (\mathcal{Q}_1^+(f, f)(v) + \mathcal{Q}_2^+(f, f)(v))$$

dove  $\mathcal{Q}^+(f, f)(v, t)$  (detto *operatore di guadagno*) è una densità di probabilità e

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1^+(f, f)(v) &= \frac{1}{q_1} \int_{\mathbb{R}} f(v_1) f\left(\frac{v - p_1 v_1}{q_1}\right) dv_1, \\ \mathcal{Q}_2^+(f, f)(v) &= \frac{1}{p_2} \int_{\mathbb{R}} f(v_2) f\left(\frac{v - q_2 v_2}{p_2}\right) dv_2 \end{aligned}$$

sono le densità di probabilità di  $v_1^*$  e  $v_2^*$ , rispettivamente. Considerando l'equazione cinetica (3.12), si utilizza il metodo di Eulero in avanti con passo  $\Delta t$ , ottenendo

$$f(v, \Delta t) = f_0(v) + \mu \Delta t \left( \mathcal{Q}^+(f_0, f_0)(v) - f_0(v) \right).$$

Riordinando i termini e scrivendo l'operatore di guadagno in funzione di  $\mathcal{Q}_1^+$  e  $\mathcal{Q}_2^+$  si ha

$$f(v, \Delta t) = (1 - \mu\Delta t)f_0(v) + \frac{\mu}{2}\Delta t\mathcal{Q}_1^+(f_0, f_0)(v) + \frac{\mu}{2}\Delta t\mathcal{Q}_2^+(f_0, f_0)(v) .$$

Si noti che, se  $\mu\Delta t \leq 1$ , il coefficiente che moltiplica  $f_0(v)$  è positivo e dunque  $f(v, \Delta t)$  risulta essere una densità di probabilità perché combinazione convessa di densità di probabilità. Inoltre dando un'interpretazione probabilistica a quest'equazione è possibile notare che gli agenti interagiscono assumendo stato post-interazione  $v_1^*$  (oppure stato  $v_2^*$ ) con probabilità  $(\mu/2)\Delta t$ , mentre non interagiscono con probabilità  $1 - \mu\Delta t$ . Dunque l'algoritmo di tipo Monte Carlo per il modello trattato risulta quello descritto nell'Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Monte Carlo per un modello di interazione binaria

---

- 1: Dati  $N$  campioni  $V_i^0, i = 1, \dots, N$ , dalla distribuzione iniziale  $f_0(v)$ .
  - 2: Per ogni campione  $V_i^0$
  - 3:     (a) con probabilità  $\mu\Delta t$  si seleziona un indice  $j$  uniformemente tra
  - 4:         l'insieme di indici  $1, \dots, N$ ;
  - 5:         i. con probabilità  $\mu\Delta t/2$  si impone  $V_i = p_1V_i^0 + q_1V_j^0$ .
  - 6:         ii. altrimenti  $V_i = p_2V_i^0 + q_2V_j^0$ .
  - 7:     (b) altrimenti si impone  $V_i = V_i^0$ .
- 

Se si considera il caso simmetrico, ovvero  $p_1 = q_2 = p$  e  $q_1 = p_2 = q$ , si ha  $\mathcal{Q}_1^+(f, f) = \mathcal{Q}_2^+(f, f)$  e dunque si ottiene una semplificazione dell'algoritmo poiché ad ogni interazione è sufficiente modificare, secondo le leggi di interazione simmetriche, gli stati della coppia di agenti che interagisce con probabilità  $\mu\Delta t$ . Inoltre, come visto in Sezione 2.2, per il caso simmetrico si ha la conservazione dello stato medio del sistema se  $p + q = 1$ . Sotto tale ipotesi è opportuno modificare il metodo di tipo Monte Carlo in modo che il momento primo della soluzione sia conservato anche a livello di campioni statistici. Si noti che le proprietà di conservazione sono una diretta conseguenza del modello microscopico di interazione binaria ed è dunque sufficiente riformulare l'algoritmo in modo che il cambiamento degli stati degli agenti avvenga a coppie e non individualmente (si veda l'Algoritmo 2).

---

**Algoritmo 2** Monte Carlo per un modello di interazione binaria simmetrica

---

- 1: Dati  $N$  campioni  $V_i^0, i = 1, \dots, N$ , dalla distribuzione iniziale  $f_0(v)$ .
  - 2: Sia  $N_c = \lfloor \mu\Delta t N/2 \rfloor_S$ .
  - 3: Si selezionano  $N_c$  coppie di campioni  $(V_i^0, V_j^0)$  uniformemente e senza ripetizioni tra tutte le possibili coppie;
  - 4: Si impone  $V_i = pV_i^0 + qV_j^0$  e  $V_j = qV_i^0 + pV_j^0$ .
  - 5: Si impone  $V_h = V_h^0$  per i rimanenti  $N - N_c$  campioni.
- 

Con il simbolo  $\lfloor X \rfloor_S$  si è indicato l'arrotondamento stocastico della variabile aleatoria

$X$  definito come segue <sup>[1]</sup>

$$\lfloor X \rfloor_S := \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{con probabilità } \lfloor x \rfloor + 1 - x, \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{con probabilità } x - \lfloor x \rfloor. \end{cases} \quad (3.13)$$

Infine si noti che questo approccio introduce una correlazione tra i campioni dovuta al fatto che l'estrazione delle coppie è stato effettuato senza ripetizione, al fine di permettere più di un cambiamento per ogni campione (come accade nel caso non simmetrico).

## Monte Carlo per un modello multi-dimensionale

In questa sezione viene mostrato come estendere il metodo Monte Carlo alle equazioni cinetiche di tipo Boltzmann nel caso multi-dimensionale. A tal fine, si consideri il modello di Cucker-Smale [2], utilizzato per studiare i fenomeni di allineamento in una popolazione di uccelli che si muovono in  $\mathbb{R}^3$ . Di seguito riportiamo il modello per una distribuzione  $f(x, v, t)$  di uccelli con posizione  $x \in \mathbb{R}^n$  e velocità  $v \in \mathbb{R}^n$  al tempo  $t \geq 0$ ,  $n \geq 1$ ; due agenti con posizione e velocità  $(x, v)$  e  $(y, w)$  modificano i loro stati in accordo con le seguenti leggi di interazione microscopiche

$$\begin{aligned} v^* &= (1 - \gamma H(x - y))v + \gamma H(x - y)w, \\ w^* &= (1 - \gamma H(x - y))w + \gamma H(x - y)v, \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove  $0 < \gamma < 1/2$  quantifica la forza dell'interazione, mentre la funzione  $H$  è detta *communication rate*,

$$H(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \beta \geq 0,$$

ed essa tiene conto di come ogni uccello influenza l'altro, indipendentemente dal numero totale  $N$  di agenti nella popolazione. Procedendo come in Sezione 2.2 si può ottenere l'equazione di tipo Boltzmann in forma debole per la distribuzione  $f(x, v, t)$ ; per ogni osservabile  $\varphi(x, v)$  e  $t \geq 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x, v) f(x, v, t) dv dx + \int_{\mathbb{R}^{2n}} (v \cdot \nabla_x \varphi(x, v)) f(x, v, t) dv dx \\ = \mu \int_{\mathbb{R}^{4n}} (\varphi(x, v^*) - \varphi(v, x)) f(x, v, t) f(y, w, t) dv dx dw dy, \end{aligned} \quad (3.15)$$

da cui segue la forma forte

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \right) (x, v, t) = \mathcal{Q}(f, f)(x, v, t). \quad (3.16)$$

Nella teoria cinetica classica dei gas rarefatti il matematico A.Y. Povzner [3] propose un operatore di collisione di tipo Boltzmann modificato,

$$\mathcal{Q}_p(f, f)(x, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} B \left( \frac{1}{J} f(x, v_*) f(y, w_*) - f(x, v) f(y, w) \right) dw dy. \quad (3.17)$$

---

<sup>1</sup>Con il simbolo  $\lfloor x \rfloor$  si indica la parte intera di  $x \in \mathbb{R}$ .

Il termine  $B = B(x - y, v - w)$  è detto *kernel di collisione*, mentre  $J$  è lo Jacobiano delle seguenti leggi di interazione

$$\begin{aligned} v^* &= (1 - A(|x - y|))v + A(|x - y|)w , \\ w^* &= (1 - A(|x - y|))w + A(|x - y|)v , \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove  $A$  è una matrice  $d \times d$  e  $I$  la matrice identità. Si noti che le leggi (3.18) implicano la conservazione dello stato medio del sistema, infatti  $v^* + w^* = v + w$ . Si noti inoltre che il secondo membro dell'equazione (3.15) può essere espresso tramite l'operatore di Povzner scegliendo  $A(|x - y|) = \gamma H(x - y)I$ ,  $B = \mu$  e  $J = (1 - 2\gamma H(x - y))^d$ .

Si consideri l'equazione (3.16) con distribuzione iniziale  $f(x, v, 0) = f_0(x, v)$ ,  $x, v \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  e  $\mathcal{Q}(f, f)$  un generico operatore di collisione. In questo caso al fine di ricavare un algoritmo di tipo Monte Carlo si disaccoppia l'equazione (3.16) in una che tiene conto del trasporto degli agenti e una che tiene conto delle loro interazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \cdot \nabla_x f , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{Q}(f, f).$$

Quindi se  $(X_i^0, V_i^0)$ ,  $i = 1, \dots, N$  sono le posizioni e le velocità iniziali delle particelle in  $\mathbb{R}^d$ , durante il trasporto in un intervallo di tempo  $\Delta t$  le posizioni vengono modificate secondo la legge

$$X_i = X_i^0 + V_i^0 \Delta t.$$

Come operatore collisionale si consideri l'operatore di Povzner (3.17) e per semplicità si assume  $B = \mu > 0$ . Si noti che tale operatore può essere riscritto come somma tra la sua parte di guadagno e di perdita come segue

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{Q}_P^+(f, f) - \mu \rho f , \quad (3.19)$$

dove

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x, v, t) dx dv , \quad \mathcal{Q}_P^+ = \mu \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{J} f(x, v_*) f(y, w_*) dw dy.$$

Senza perdita di generalità, di seguito si ipotizza  $\rho = 1$ .

Come nel caso mono-dimensionale precedentemente trattato, si applica il metodo di Eulero in avanti all'equazione (3.19) ottenendo

$$f(x, v, \Delta t) = (1 - \mu \Delta t) f_0(x, v) + \mu \Delta t \mathcal{Q}_P^+(f_0, f_0)(x, v), \quad (3.20)$$

dove, per la conservazione della massa e poiché  $f_0$  è una densità di probabilità,  $\mathcal{Q}_P^+$  è una densità di probabilità. Se  $\mu \Delta t \leq 1$  allora anche  $f(x, v, \Delta t)$  è una distribuzione di probabilità perché combinazione convessa di densità di probabilità (si veda l'Algoritmo 3). Analogamente al caso di interazione binaria trattato precedentemente, anche in questo caso è possibile modificare l'Algoritmo 3 adattandolo al caso simmetrico e in modo da conservare lo stato medio del sistema. Ipotizzando una frequenza di interazione  $\mu = 1$ , si ottiene l'Algoritmo 4.

Al fine di permettere interazioni multiple in un dato intervallo di tempo è possibile modificare l'Algoritmo 4 introducendo il cosiddetto *time counter* locale (uno per ogni

---

**Algoritmo 3** Nanbu-like method per un modello multi-dimensionale

---

- 1: Dati  $N$  campioni  $(X_i^0, V_i^0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dalla distribuzione iniziale  $f_0(x, v)$ .
  - 2: Per ogni campione  $(X_i^0, V_i^0)$ :
  - 3: (a) con probabilità  $\mu\Delta t$  si seleziona un indice  $j$  uniformemente tra tutti i possibili agenti con stato  $(X_k^0, V_k^0)$ ,  $k \neq i$ ;
  - 4:       i. si calcola  $A(|X_i - X_j|)$ .
  - 5:       ii. si impone  $V_i^* = (I - A(|X_i - X_j|))V_i^0 + A(|X_i - X_j|)V_j^0$ .
  - 6: (b) altrimenti si impone  $V_i^* = V_i^0$ .
- 

---

**Algoritmo 4** Nanbu-like method per un modello multi-dimensionale simmetrico

---

- 1: Dati  $N$  campioni  $(X_i^0, V_i^0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dalla distribuzione iniziale  $f_0(x, v)$ .
  - 2: Sia  $N_c = \lfloor \Delta t N / 2 \rfloor_S$ .
  - 3: Si selezionano  $N_c$  coppie di campioni di indici  $(i, j)$  uniformemente e senza ripetizioni tra tutte le possibili coppie;
  - 4: (a) Si calcola  $A(|X_i - X_j|)$ .
  - 5: (b) Si calcolano i seguenti cambiamenti di velocità
$$V_i^* = (I - A(|X_i - X_j|))V_i^0 + A(|X_i - X_j|)V_j^0$$
$$V_j^* = (I - A(|X_i - X_j|))V_j^0 + A(|X_i - X_j|)V_i^0.$$
  - 6: (c) Si impone  $(X_i, V_i) = (X_i^0 + V_i^0 \Delta t, V_i^*)$ ,  $(X_j, V_j) = (X_j^0 + V_j^0 \Delta t, V_j^*)$ .
  - 7: Si impone  $(X_h, V_h) = (X_h^0, V_h^0)$  per i rimanenti  $N - N_c$  agenti.
- 

agente) che gestisce il tempo di interazione per ogni agente. Si noti che il modello [\(3.12\)](#) può essere equivalentemente riscritto come segue

$$\frac{\partial(f(v, t)e^t)}{\partial t} = \mathcal{Q}^+(f, f)(v, t)e^t .$$

Integrando ambi i membri nell'intervallo  $[0, t]$  è possibile ricavare una rappresentazione integrale della soluzione

$$\begin{aligned} f(v, t) &= f_0(v)e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} \mathcal{Q}^+(f, f)(v, s) ds \\ &= f_0(v)e^{-t} + (1 - e^{-t}) \int_0^t \lambda_t(s) \mathcal{Q}^+(f, f)(v, s) ds , \end{aligned}$$

dove,  $\forall s \in (0, t)$ ,  $\lambda_t(s) = e^{-(t-s)}/(1 - e^{-t})$  è una densità esponenziale sull'intervallo  $[0, t]$ ; dunque gli intervalli di tempo in cui avvengono le interazioni binarie fra gli agenti del sistema sono distribuiti esponenzialmente. Per  $N$  agenti si introduce un time counter locale distribuito come un esponenziale di parametro  $\lambda = N$  (ciò implica un tempo medio di interazione per ogni agente pari a  $1/N$ ); indicando con  $U$  una variabile aleatoria distribuita uniformemente sull'intervallo  $[0, 1]$ , il time counter è calcolato come segue

$$\Delta t_c = -\frac{\ln(U)}{N}.$$

In maniera equivalente è possibile considerare un time counter costante  $\Delta t_c$  che corrisponde al tempo medio fra le interazioni. Sia  $N_c = N\Delta t$  il numero medio di interazioni nell'intervallo di tempo  $[0, \Delta t]$  allora

$$\Delta t_c = \frac{\Delta t}{N_c} = \frac{1}{N}.$$

Quindi il nuovo passo di tempo che si utilizza per osservare la dinamica risulta essere  $[0, \Delta t_c]$  con  $\Delta t_c = \Delta t/n_t$ , dove  $n_t$  è il numero medio di interazioni nell'intervallo  $[0, \Delta t]$ , si veda l'Algoritmo 5.

---

**Algoritmo 5** Bird-like method per un modello multi-dimensionale simmetrico

---

- 1: Dati  $N$  campioni  $(X_i^0, V_i^0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dalla distribuzione iniziale  $f_0(x, v)$ .
- 2: Si calcola  $n_t = N\Delta t$ .
- 3: For  $k = 0, \dots, n_t$ :
- 4: (a) Si seleziona una coppia  $(V_i, V_j)$  uniformemente tra tutte le possibili coppie.
- 5: (b) Si calcolano i seguenti cambiamenti di velocità

$$\begin{aligned} V_i &= (I - A(|X_i - X_j|))V_i^0 + A(|X_i - X_j|)V_j^0 \\ V_j &= (I - A(|X_i - X_j|))V_j^0 + A(|X_i - X_j|)V_i^0. \end{aligned}$$


---

### 3.2 Schema semi-Lagrangiano

Si consideri la seguente equazione di Fokker-Planck

$$\begin{cases} \partial_t f + \partial_v (H[f]f) = 0 & (v, t) \in A \times (0, T] \\ f(0, v) = f_0(v) & v \in A \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.21)$$

dove  $T > 0$  e  $H[f] = H[f](t, v) : (0, T] \times A \mapsto \mathbb{R}$  una funzione sufficientemente regolare. Si divide  $(0, T]$  in  $N$  intervalli di lunghezza  $\Delta t > 0$  in modo che  $T = N\Delta t$ ; si indica inoltre lo step temporale  $n$ -esimo con  $t_n := n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . In (3.21) si moltiplica la prima equazione per una funzione test sufficientemente regolare  $\psi : A \mapsto \mathbb{R}$ , a supporto compatto in  $A$  e integrando per parti rispetto a  $v$  sull'insieme  $A \times [t_n, t_{n+1}]$  si ottiene

$$\int_A \psi(v) f(t_{n+1}, v) dv = \int_A \psi(v) f(t_n, v) dv + \int_A \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi'(v) H[f](t, v) f(t, v) dt dv.$$

Si noti che è possibile approssimare al primo ordine l'integrale doppio a secondo membro utilizzando il metodo di Eulero in avanti

$$\int_A \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi'(v) H[f](t, v) f(t, v) dt dv = \int_A \psi'(v) H[f](t_n, v) f(t_n, v) \Delta t dv + o(\Delta t);$$

sostituendo si ottiene

$$\int_A \psi(v) f(t_{n+1}, v) dv = \int_A \left( \psi(v) + \psi'(v) H[f](t_n, v) \right) f(t_n, v) \Delta t dv + o(\Delta t).$$

Considerando lo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine

$$\psi(v + H[f](t_n, v) f(t_n, v) \Delta t) = \psi(v) + \psi'(v) H[f](t_n, v) \Delta t + o(\Delta t),$$

si deduce

$$\int_A \psi(v) f(t_{n+1}, v) dv = \int_A \psi(\Phi^n(v)[f](v)) f(t_n, v) v dv + o(\Delta t), \quad (3.22)$$

dove si è indicato la cosiddetta *flow map* a tempo discreto definita da

$$\Phi^n[f](v) := v + H[f](t_n, v) \Delta t. \quad (3.23)$$

Al fine di approssimare gli integrali in (3.22) con il metodo degli elementi finiti, si costruisce una griglia uniforme nello spazio degli stati. Si considerano gli stati  $v_i := v_0 + i\Delta v$ ,  $i = 1, \dots, M$ , dove  $v_0 \in A \subset \mathbb{R}$  e  $\Delta v = \frac{2\pi}{M+1}$  è scelto in modo che  $\theta_{M+1} = \theta_0 \text{ mod } 2\pi$ . Si definiscono dunque le celle della griglia e la media della funzione  $f$  al tempo  $t_n$  su una cella generica, rispettivamente

$$E_i := \left[ v_i - \frac{\Delta v}{2}, v_i + \frac{\Delta v}{2} \right), \quad f_i^n := \frac{1}{\Delta v} \int_{E_i} f(t_n, v) dv, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Si osservi che per il teorema della media integrale si ha  $f_i^n \approx f(t_n, v)$  per  $\Delta v$  sufficientemente piccolo. Dunque utilizzando il metodo degli elementi finiti in (3.22) e trascurando il termine  $o(\Delta v)$  si ottiene

$$\sum_{i=1}^M \psi(v_i) f_i^{n+1} = \sum_{i=1}^M \psi(\Phi^n[f](v_i)) f_i^n, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Per ricavare lo schema semi-Lagrangiano esplicito in tempo, si scelgono come funzioni test in quest'ultima equazione le funzioni  $\{\beta_i(v)\}_{i=1}^M$  associate agli stati  $\{v_i\}_{i=1}^M$ :

$$\beta_i(v) := \left( 1 - \frac{|v - v_i|}{\Delta v} \right) \chi_{[v_{i-1}, v_{i+1}]}(v), \quad \beta_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi si ricava il seguente schema per l'approssimazione dell'equazione di Fokker-Planck (3.21)

$$\begin{cases} f_i^{n+1} = \sum_{j=1}^M \beta_i(\Phi^n[f](v_j)) f_j^n, & i \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, \dots, N \\ f_i^0 := f_0(v_i) \approx \frac{1}{\Delta v} \int_{E_i} f_0(v) dv, & i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.24)$$

dove  $f_0$  è la condizione iniziale definita in (3.21).

## 4. Un modello di Crowd Motion

In questa sezione si tratterà un modello di dinamica della folla dapprima per una sola popolazione di pedoni interagenti, seguendo il modello esposto in [9], per poi estendere la trattazione al caso più generale di due popolazioni che interagiscono fra loro. Si studia in primis il modello microscopico di interazione fra due generici agenti e, al fine di arrivare ad una descrizione statistica aggregata del sistema, si utilizzano le equazioni di tipo Boltzmann e quella di Fokker-Planck.

Il modello microscopico che si andrà ad analizzare è basato sul cambiamento, dovuto alle interazioni, dei vettori posizione e velocità associati ad ogni singolo agente. In particolare lo stato di ogni agente è rappresentato dalla coppia  $(x_i, v_i)$ , dove  $x_i, v_i \in \mathbb{R}^2$  rappresentano la posizione e la velocità del pedone  $i$ -esimo. Al fine di ridurre la complessità analitica e computazionale del modello (si noti che la dimensione dello spazio degli stati è pari a 4) si assume che ogni pedone cammini a velocità costante

$$|v_i| = V_0 > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Tale assunzione permette di ridurre di un grado di libertà lo stato di ogni agente; infatti è possibile descrivere le velocità di ogni pedone tramite l'utilizzo di coordinate polari

$$v_i = V_0(e_1 \cos(\theta_i) + e_2 \sin(\theta_i)) ,$$

dove  $e_1, e_2$  sono i vettori unitari degli assi cartesiani in  $\mathbb{R}^2$  e  $\theta_i \in \mathbb{R}$  rappresenta l'angolo dato dall'orientamento del vettore  $v_i$ . Dunque lo stato microscopico di ogni agente è completamente determinato dalla coppia  $(x_i, \theta_i) \in \mathbb{R}^3$ . Inoltre, in accordo con [4, 21, 22], è possibile assumere  $V_0 = 1$ , poiché in condizioni normali la velocità standard in modulo di ogni pedone risulta essere un  $O(1m/s)$ .

***Osservazione.** Poiché l'angolo  $\theta_i$  è  $2\pi$ -periodico si considera  $\theta_i \in A \subset \mathbb{R}$  tale che la lunghezza dell'intervallo  $A$  sia pari a  $2\pi$ ; in particolare in questa trattazione si assume*

$$A := [-\pi + \theta_d, \pi + \theta_d)$$

dove  $\theta_d \in [-\pi, \pi]$  corrisponde alla direzione desiderata dai pedoni (si veda Figura [4.1](#)).

### 4.1 Descrizione di tipo Boltzmann per una popolazione di pedoni

In accordo con quanto riportato nel Capitolo 2, si considera dapprima il modello di interazione microscopico per poi ricavare una descrizione di tipo Boltzmann della cinetica

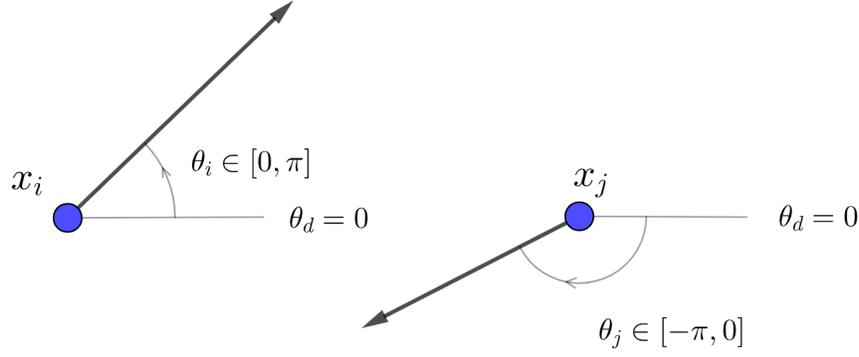


Figura 4.1: In figura sono mostrate le velocità di due agenti generici con posizioni  $x_i$  e  $x_j$  e direzione desiderata  $\theta_d = 0$ .

del sistema in questione. Si consideri una popolazione di pedoni in cui ogni agente, con una certa probabilità, interagisce con i propri vicini variando la sua direzione a seconda di determinate leggi di interazione microscopica; in questo caso le leggi che regolano le direzioni post-interazione fra due generici agenti con stato  $(x, \theta)$  e  $(y, \omega)$  sono

$$\begin{cases} \theta^* = \theta + \gamma \mathcal{I}(x, y, \theta, \omega) + 2\ell\pi, \\ \omega^* = \omega + \gamma \mathcal{I}(y, x, \omega, \theta) + 2m\pi \end{cases} \quad \ell, m \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

con

$$\mathcal{I}(x, y, \theta, \omega) = P(x, y, \theta, \omega; \rho)(\omega - \theta) + (1 - P(x, y, \theta, \omega; \rho))(\theta_d - \theta)$$

dove i termini  $\gamma, \mu > 0$  rappresentano rispettivamente la forza delle interazioni e la loro frequenza,  $\rho$  la densità totale della popolazione, mentre  $\ell, m \in \mathbb{Z}$  sono scelti in modo che gli angoli post-interazione  $\theta^*, \omega^*$  siano tali che

$$\theta^*, \omega^* \in A := [-\pi + \theta_d, \pi + \theta_d]. \quad (4.2)$$

Si noti che  $\theta_d$  rappresenta la *direzione desiderata* che i pedoni tendono ad assumere in assenza di interazioni con altri agenti; il termine  $P(x, y, \theta, \omega; \rho)$  rappresenta la probabilità che un agente ha di interagire ed essa dipende dagli stati microscopici della coppia interagente e anche dalla densità macroscopica  $\rho$  della folla.

**Osservazione.** Assumendo  $\gamma = 1$ , si noti che le leggi di interazione microscopiche (4.1) possono essere riscritte come

$$\begin{cases} \theta^* = P(x, y, \theta, \omega; \rho)\omega + (1 - P(x, y, \theta, \omega; \rho))\theta_d + 2\ell\pi, \\ \omega^* = P(y, x, \omega, \theta; \rho)\omega + (1 - P(y, x, \omega, \theta; \rho))\theta_d + 2m\pi. \end{cases}$$

Quindi ogni agente della popolazione con probabilità  $P(\cdot)$  copia la direzione della velocità dell'agente con cui sta interagendo, mentre con probabilità  $1 - P(\cdot)$  allinea la sua velocità con la direzione desiderata  $\theta_d$ .

Si definisce

$$f = f(x, \theta, t) : \mathbb{R}^2 \times A \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$$

la funzione di distribuzione degli agenti della popolazione considerata. Si noti che il termine  $f(x, \theta, t)dx d\theta$  rappresenta la frazione di pedoni che al tempo  $t$  sono nel volume infinitesimo  $dx$  centrato in  $x$  e con direzione compresa tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ . Si definisce dunque la densità della popolazione

$$\rho(x, t) := \int_A f(x, \theta, t) d\theta .$$

Ripercorrendo una procedura simile a quella esposta in Sezione 2.2 è possibile ottenere l'equazione di tipo Boltzmann in forma debole per l'evoluzione in tempo di  $f = f(x, \theta, t)$  che fa riferimento alle leggi di interazione microscopiche (4.1); per ogni funzione test  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times A \mapsto \mathbb{R}$  sufficientemente regolare e a supporto compatto nella variabile  $x$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_A \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \theta) f(x, \theta, t) dx d\theta + \int_A \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla_x \varphi(x, \theta) f(x, \theta, t) dx d\theta \\ &= \mu \int_A \int_A \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi(x, \theta^*) - \varphi(x, \theta)) f(x, \theta, t) f(y, \omega, t) dx dy d\theta d\omega. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tramite un opportuno cambio di variabili è possibile ottenere la forma forte dell'equazione (4.3),

$$\partial_t f(x, \theta, t) + v \cdot \nabla_x f(x, \theta, t) = \mu Q(f, f)(x, \theta, t) , \quad (4.4)$$

dove l'operatore di collisione a secondo membro descrive le interazioni binarie tra coppie di pedoni all'interno della stessa popolazione,

$$Q(f, f)(x, \theta, t) = \int_A \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{|J|} f(x, \theta, t) f(y, \omega, t) - f(x, \theta^*, t) f(y, \omega^*, t) \right) dy d\omega^* . \quad (4.5)$$

Il termine  $|J|$  rappresenta il determinante Jacobiano della trasformazione che porta dall'equazione di Boltzmann in forma debole a quella forte. Si noti che in accordo con (4.1), le leggi di interazione microscopiche portano ad una variazione della direzione delle velocità ma non della posizione di ogni agente, che invece cambia a causa del termine di trasporto presente a primo membro dell'equazione (4.4).

## Il caso spazialmente omogeneo

Nel caso spazialmente omogeneo si assume che nella popolazione i pedoni siano ben mescolati fra loro e dunque ciò implica che la distribuzione delle direzioni delle velocità possa essere considerata costante in ogni punto del piano; dunque sotto tale ipotesi  $f = f(\theta, t)$  e l'equazione cinetica in forma debole (4.3) diviene

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta = \mu \int_A \int_A (\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta)) f(\theta, t) f(\omega, t) d\theta d\omega . \quad (4.6)$$

Si noti che, in questo caso, per quanto riguarda la funzione test  $\varphi : A \mapsto \mathbb{R}$  non è necessario richiedere che sia sufficientemente regolare e a supporto compatto. Al fine di evitare tecnicismi causati dalla periodicità delle condizioni di bordo, si ipotizza che le

funzioni test siano estese periodicamente su  $\mathbb{R}$  (con periodo  $2\pi$ ). Si osservi che scegliendo la funzione test  $\varphi(\theta) = 1$ , la densità macroscopica

$$\rho(t) := \int_A f(\theta, t) d\theta$$

risulta essere costante in tempo, poiché il termine a secondo membro dell'equazione (4.6) si annulla. Ciò implica che la densità microscopica può essere trattata come un parametro del modello ed è direttamente determinata dalle condizioni iniziali scelte:

$$\rho := \int_A f_0(\theta) d\theta, \quad f_0 := f(\theta, 0). \quad (4.7)$$

Annullando il termine  $v \cdot \nabla_x f$  nell'equazione (4.4), l'assunzione di omogeneità spaziale permette di effettuare uno studio più semplificato delle leggi di interazione microscopiche che ora sono espresse come

$$\theta^* = \theta + \gamma \mathcal{I}(\theta, \omega) + 2\ell\pi, \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (4.8)$$

con

$$\mathcal{I}(\theta, \omega) = P(\theta, \omega; \rho)(\omega - \theta) + (1 - P(\theta, \omega; \rho))(\theta_d - \theta). \quad (4.9)$$

## L'allineamento asintotico dato dalle leggi di interazioni binarie

In questa sezione verranno studiate, sotto l'ipotesi di omogeneità spaziale, le condizioni sotto le quali le interazioni fra gli agenti nella popolazione portano i pedoni a muoversi nella stessa direzione; questo fenomeno è detto *allineamento* e può essere considerato una forma di *consenso* [23-25]. Nel caso specifico che si sta trattando, l'allineamento verso la stessa direzione all'interno della popolazione viene raggiunto quando la distribuzione  $f$  converge asintoticamente in tempo a una distribuzione della forma  $\rho \delta_\alpha$  dove con  $\delta_\alpha$  si è indicato la delta di Dirac centrata in  $\theta = \alpha \in A$ . Di seguito per non appesantire la notazione, nella probabilità di interazione  $P(\theta, \omega; \rho)$  si sottintenderà la dipendenza dagli stati degli agenti; si indica quindi con  $P(\rho) \in [0, 1]$  la probabilità di interazione fra due generici agenti con stato  $\theta$  e  $\omega$ .

Di seguito si riportano alcune definizioni e notazioni che verranno utilizzate successivamente:

- Sia  $\mathcal{M}_+^{\tilde{\rho}}(I)$  lo spazio di tutte le misure positive su  $I \subseteq \mathbb{R}$  con massa  $\tilde{\rho} > 0$ ;
- Sia  $W_1(\mu, \nu)$  la metrica 1-*Wasserstein* [26] per  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{\tilde{\rho}}(I)$ , definita come

$$\mathcal{W}(\mu, \nu) := \inf_{\lambda \in \Pi(\mu, \nu)} \iint_{I^2} |\theta - \omega| d\lambda(\theta, \omega), \quad (4.10)$$

dove  $\Pi(\mu, \nu)$  indica l'insieme delle misure su  $I^2$  con marginali  $\mu$  e  $\nu$ .

Di seguito si studiano le condizioni sotto le quali, partendo da una distribuzione iniziale  $f_0 \in \mathcal{M}_+^{\rho_f}(A)$  si ha un allineamento delle velocità degli agenti verso la direzione desiderata  $\theta_d \in A$ .

**Proposizione 4.1.** *Una distribuzione della forma  $\rho\delta_\alpha \in \mathcal{M}_+^p(A)$ , con  $\rho > 0$ ,  $\alpha \in A$  e  $P(\rho) \in [0, 1)$ , è una soluzione stazionaria di (4.6) se e soltanto se  $\alpha = \theta_d$ .*

*Dim.* Sostituendo  $f = \rho\delta_{\theta_d}$  in (4.6), tenendo conto delle leggi di interazione (4.8) e ricordando che le funzioni test sono state estese periodicamente su  $\mathbb{R}$  con periodo  $2\pi$ , si ottiene

$$\varphi(\alpha + \mathcal{I}(\alpha, \alpha)) - \varphi(\alpha) = 0 .$$

Osservando che  $I(\alpha, \alpha) = (1 - P(\rho))(\theta_d - \alpha)$  e che l'equazione precedente vale per ogni funzione test si ha

$$\alpha + (1 - P(\rho))(\theta_d - \alpha) - \alpha = 0 ,$$

da cui segue  $\alpha = \theta_d$ , poiché  $P(\rho) \in [0, 1)$ . □

La proposizione appena esposta afferma che, sotto opportune ipotesi, esiste un'unica direzione di allineamento ( $\theta = \theta_d$ ) verso cui le velocità di tutti gli agenti tendono, se si raggiunge un consenso. Di seguito vengono discusse le condizioni sotto le quali la dinamica converge all'unico consenso possibile.

**Teorema 4.1.** *Sia  $\rho := \int_A f(\theta, 0) d\theta > 0$  la densità della popolazione e  $P(\rho)$  la probabilità di interazione. Si definisce inoltre*

$$\bar{\theta}(t) := \frac{1}{\rho} \int_A |\theta - \theta_d| f(\theta, t) d\theta \quad \forall t \geq 0. \quad (4.11)$$

Allora se  $P(\rho) < 1$  le velocità della popolazione tendono ad un consenso verso la direzione  $\theta = \theta_d$ .

*Dim.* Preliminarmente si osservi che la condizione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\theta}(t) = 0 \quad (4.12)$$

implica la tesi, perché la densità congiunta  $f(\theta, t) \otimes \rho\delta_{\theta_d} \in \Pi(f(t), \rho\delta_{\theta_d})$  e quindi

$$\begin{aligned} W_1(f(t), \rho\delta_{\theta_d}) &\leq \int_A \int_A |\theta - \omega| d(f(\theta, t) \otimes \delta_{\theta_d}(\omega)) \\ &= \int_A |\theta - \theta_d| f(\theta, t) d\theta = \rho\bar{\theta}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 . \end{aligned}$$

Dunque la condizione (4.12) risulta essere una condizione sufficiente per l'allineamento delle velocità verso la direzione  $\theta = \theta_d$ .

Considerando nell'equazione in forma debole (4.6), una frequenza e forza di interazione unitari ( $\gamma = \mu = 1$ ) e scegliendo come funzione test  $\varphi(v) = \frac{1}{\rho}|\theta - \theta_d|$  si ottiene

$$\frac{d}{dt} \bar{\theta}(t) \leq \frac{1}{\rho} \int_A \int_A (|\theta^* - \theta_d| - |\theta - \theta_d|) f(\theta, t) g(\omega, t) d\theta d\omega. \quad (4.13)$$

Si noti che dalle leggi (4.8) segue

$$|\theta^* - \theta_d| = |\theta + \mathcal{I}(\theta, \omega) + 2\ell\pi - \theta_d| \leq |\theta + \mathcal{I}(\theta, \omega) - \theta_d| ,$$

infatti il valore di  $\ell \in \mathbb{Z}$  è scelto, come anticipato in (4.2), in modo che  $\theta + \mathcal{I}(\theta, \omega) + 2\ell\pi \in A$ ; utilizzando dunque la disuguaglianza triangolare è possibile maggiorare la differenza dei moduli presente a secondo membro della (4.13)

$$\begin{aligned} |\theta^* - \theta_d| - |\theta - \theta_d| &\leq |\theta + P(\rho)(\omega - \theta) + (1 - P(\rho))(\theta_d - \theta) - \theta_d| - |\theta - \theta_d| \\ &= P(\rho)|\omega - \theta_d| - |\theta - \theta_d| \end{aligned}$$

e sostituendo si ottiene

$$\frac{d}{dt}\bar{\theta}(t) \leq (P(\rho) - 1)\rho\bar{\theta}(t) .$$

Risolvendo l'equazione associata si può dedurre che

$$\bar{\theta}(t) \leq \bar{\theta}(0)e^{(P(\rho)-1)\rho t}$$

e dunque, osservando che per definizione  $\bar{\theta}(t) \geq 0$ ,  $\forall t \geq 0$  e per ipotesi  $P(\rho) < 1$ , si ottiene per  $t \rightarrow \infty$  la condizione sufficiente (4.12) per l'allineamento delle velocità degli agenti verso la direzione desiderata  $\theta = \theta_d$ . □

## 4.2 Simulazioni numeriche

In questa sezione vengono confermati i risultati ottenuti in Sezione 4.1 attraverso simulazioni numeriche. Per semplicità si sceglie la probabilità di interazione uguale alla densità della popolazione  $P(\rho) = \rho$ ; inoltre si sceglie come angolo desiderato  $\theta_d = \pi/3$  e dunque l'intervallo dei possibili stati di un agente sarà  $A = [-2\pi/3, 4\pi/3]$ . Si risolve (4.6) attraverso l'algoritmo Bird-like method simmetrico (Algoritmo 5, Sezione 3.1) con un time counter esponenziale di media unitaria, un numero di agenti pari a  $N = 10^4$ , un passo temporale  $\Delta t = 1/5$  ed osservando la dinamica fino a un tempo finale  $t = 15$ . Per quanto riguarda la condizione iniziale è stata scelta una distribuzione uniforme di massa  $\rho < 1$  sull'intervallo  $A$ :

$$f_0(\theta) = \frac{\rho}{2\pi}, \quad \theta \in A \tag{4.14}$$

In Figura 4.2, simulando la dinamica attraverso l'algoritmo Bird-like method con i parametri elencati precedentemente, sono riportate al tempo iniziale e finale le posizioni (campionate all'istante iniziale da una distribuzione normale bidimensionale sull'intervallo  $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$  con marginali di media nulla e varianza 1/2) e le velocità degli agenti corrispondenti alle direzioni campionate da (4.14) con densità  $\rho = 2/3$ . La Figura 4.2 oltre a mostrare l'allineamento al tempo  $t = 15$ , illustra anche la regione del piano in cui la densità dei pedoni è maggiore evidenziandola con un colore blu; si noti come all'istante iniziale gli agenti si concentrino nella zona centrale (in accordo con la distribuzione iniziale scelta per le posizioni degli agenti), mentre all'istante finale tale regione sia traslata in accordo con la legge

$$x_i^* = x_i + v_i^* \cdot dt$$

dove  $x_i, x_i^*, v_i^*$  rappresentano rispettivamente la posizione pre- e post-interazione e velocità post-interazione dell'agente  $i$ -esimo. Secondo tale legge dunque le posizioni degli

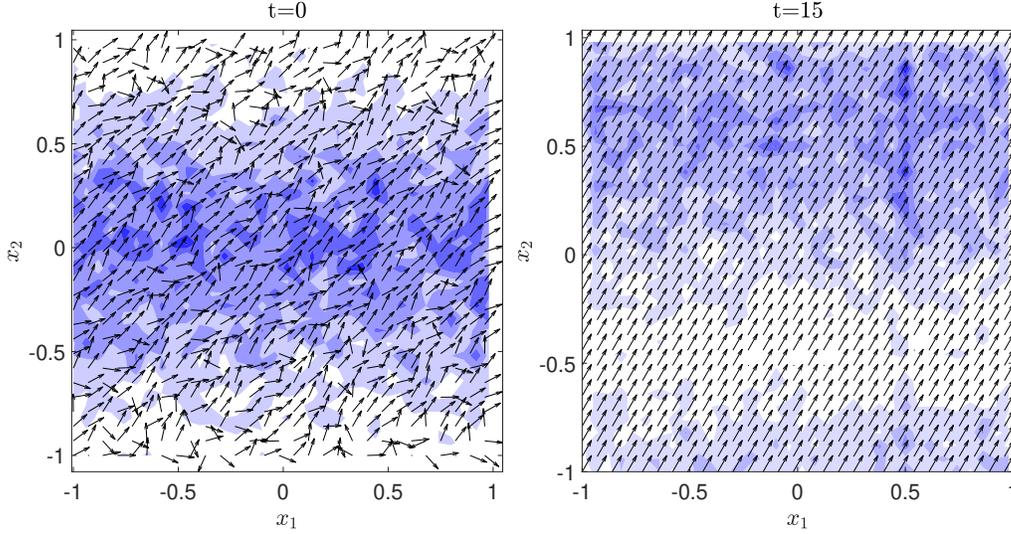


Figura 4.2: Allineamento delle velocità di  $N = 10^4$  agenti lungo la direzione desiderata  $\theta_d = \pi/3$ . A sinistra le direzioni delle velocità sono distribuite secondo (4.14) con  $P(\rho) = \rho = 2/3$ ; a destra è stata simulata la dinamica fino al tempo  $t = 15$  con Algoritmo Bird-like method (con time counter esponenziale associato agli agenti di media 1).

agenti traslano seguendo una direzione che ad ogni passo temporale tende verso quella di allineamento; in questo caso essendo la direzione desiderata pari a  $\theta_d = \pi/3$  si ha una traslazione della zona evidenziata verso l'alto (nel caso in cui si scelga  $\theta_d = 0$  la zona evidenziata rimarrà pressoché invariata dall'istante iniziale a quello finale).

Successivamente si analizza la convergenza attraverso lo studio del decadimento (4.11) precedentemente definito nel Teorema 4.1; a tal fine in Figura 4.3 si mostra l'andamento della sua approssimazione di tipo Montecarlo ricavata con la tecnica (3.2) da cui si ottiene

$$\bar{\theta}_{MC}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\Theta_i(t) - \theta_d|, \quad (4.15)$$

dove  $\Theta_i(t)$  rappresenta l' $i$ -esimo sample ottenuto dal campionamento di  $\frac{1}{\rho}f(t, \theta)$ . Le figure (a) e (b) rappresentano la mappa  $t \mapsto \bar{\theta}_{MC}(t)$  al variare della probabilità di interazione  $P(\rho) = \rho$  e simulando la dinamica attraverso l'algoritmo Bird-like method con gli stessi parametri utilizzati in Figura 4.2; in figura (a) per le direzioni iniziali delle velocità degli agenti è stata utilizzata la distribuzione iniziale (4.14), mentre in figura (b) la distribuzione iniziale è una normale di massa  $\rho$  sull'intervallo  $A$ :

$$f_0(\theta) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \theta \in A \quad (4.16)$$

dove  $\mu = \theta_d$  e  $\sigma = \pi/2$ .

Si noti come per tutti i valori della densità (eccetto per il caso  $\rho = 1$ ) si abbia un decadimento verso lo zero con una velocità che diminuisce al crescere del valore della

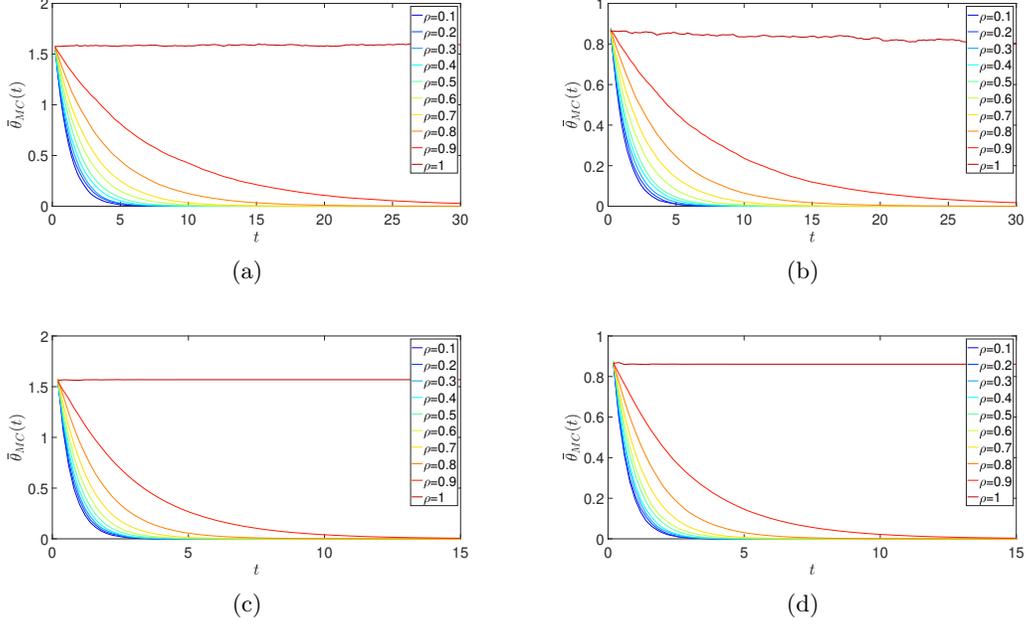


Figura 4.3: Le figure rappresentano le simulazioni del decadimento (4.15) al variare della probabilità di interazione  $P(\rho) = \rho$ , ottenute sopra con metodo Bird-like invece sotto con metodo Nanbu; a sinistra sono state utilizzate le condizioni iniziali (4.14), invece a destra le (4.16) .

probabilità di interazione. Nel caso  $\rho = 1$  invece non si raggiunge un consenso nella popolazione, infatti il Teorema 4.1 garantisce l'allineamento delle velocità verso la direzione desiderata quando la probabilità di interazione è strettamente minore di uno. Inoltre si noti come il decadimento, a parità del valore della densità, abbia lo stesso comportamento indipendentemente dalla distribuzione iniziale scelta, eccetto che per l'istante iniziale  $t = 0$ . Le figure (c) e (d) invece sono state ottenute simulando la dinamica attraverso l'algoritmo Nanbu-like method (Algoritmo 4, Sezione 3.1) e scegliendo un numero di coppie di pedoni interagenti  $N_c = \Delta t N = 2 \cdot 10^3$  ad ogni passo temporale  $\Delta t = 1/5$ . Si noti come in questo caso il decadimento tenda a zero più velocemente rispetto alle figure (a) e (b) e questo è dovuto a come vengono gestite le interazioni nei due algoritmi; nell'algoritmo di tipo Nanbu ad ogni passo temporale interagiscono deterministicamente  $N_c$  coppie di agenti mentre per l'algoritmo di tipo Bird utilizzato è possibile calcolare la probabilità di interazione fra coppie di agenti che in questo caso è pari a

$$P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \simeq 0.18$$

dove  $T$  rappresenta il time counter distribuito come un esponenziale di parametro  $\lambda = 1$ ; dunque in questo caso le coppie interagenti in media sono pari a

$$N \cdot P(T < \Delta t) \simeq 1.8 \cdot 10^3 < N_c .$$

### 4.3 Il limite delle interazioni quasi invarianti

In questa sezione si studia, sotto l'ipotesi di omogeneità spaziale, il limite delle interazioni quasi invarianti precedendo in maniera simile a quanto esposto in Sezione 2.3; dunque anche in questo caso l'idea di base è quella di assumere all'interno della popolazione che le interazioni facciano variare di poco gli stati post-interazione degli agenti ( $\gamma \rightarrow 0^+$ ) e parallelamente rendere tali interazioni più frequenti ( $\mu = 1/\gamma$ ). Di seguito si ricava l'equazione di Fokker-Planck per la folla la cui distribuzione è indicata con  $f = f(\theta, t)$ .

Sostituendo  $\mu = 1/\gamma$  nell'equazione in forma debole (4.6) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta = \frac{1}{\gamma} \int_A \int_A (\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta)) f(\theta, t) f(\omega, t) d\theta d\omega. \quad (4.17)$$

dove ora si ipotizza  $\varphi \in C^3(A)$  con  $\varphi(\pm\pi + \theta_d) = 0$  ancora  $2\pi$ -periodica sull'intera retta reale.

Poiché siamo interessati a studiare il regime in cui  $\gamma \rightarrow 0^+$ , si espande in serie di Taylor arrestato al terzo ordine la differenza  $\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta)$  e tenendo conto delle leggi (4.8) si ha

$$\begin{aligned} \varphi(\theta^*) - \varphi(\theta) &= \gamma \varphi'(\theta) (P(\theta, \omega; \rho)(\omega - \theta_d) + \theta_d - \theta) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2} \varphi''(\theta) (P(\theta, \omega; \rho)(\omega - \theta_d) + \theta_d - \theta)^2 \\ &\quad + \frac{\gamma^3}{6} \varphi'''(\bar{\theta}) (P(\theta, \omega; \rho)(\omega - \theta_d) + \theta_d - \theta)^3, \end{aligned}$$

dove  $\bar{\theta} \in [\min\{\theta, \theta^*\}, \max\{\theta, \theta^*\}]$ . Si noti che il termine  $2\ell\pi$  presente in (4.8) è stato ignorato poiché la funzione test  $\varphi$  è  $2\pi$ -periodica. Per semplificare la notazione si definisce

$$\mathcal{P}(\theta, \omega; \rho) := \theta^* - \theta = \theta_d - \theta + P(\theta, \omega; \rho)(\omega - \theta_d) \quad (4.18)$$

e sostituendo lo sviluppo in (4.17) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta &= \int_A \varphi'(\theta) \left( \int_A \mathcal{P}(\theta, \omega; \rho) f(\omega, t) d\omega \right) f(\theta, t) d\theta \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \int_A \varphi''(\theta) \left( \int_A \mathcal{P}^2(\theta, \omega; \rho) f(\omega, t) d\omega \right) f(\theta, t) d\theta \quad (4.19) \\ &\quad + R(\gamma), \quad (4.20) \end{aligned}$$

dove, considerato che  $|\mathcal{P}(\theta, \omega; \rho)| \leq \pi$  perché le condizioni (4.2) implicano  $(\theta^* - \theta) \in [-\pi, \pi)$ , il termine (4.19) e il resto (4.20) entrambi in modulo soddisfano rispettivamente

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} \left| \int_A \varphi''(\theta) \left( \int_A \mathcal{P}^2(\theta, \omega; \rho) f(\omega, t) d\omega \right) f(\theta, t) d\theta \right| &\leq \frac{\gamma}{2} \|\varphi''\|_\infty \pi^2 \rho^2, \\ \frac{\gamma^2}{6} \left| \int_A \int_A \varphi'''(\bar{\theta}) \mathcal{P}^3(\theta, \omega; \rho) f(\theta, t) f(\omega, t) d\theta d\omega \right| &\leq \frac{\gamma^2}{6} \|\varphi'''\|_\infty \pi^3 \rho^2. \end{aligned}$$

Quindi svolgendo il limite per  $\gamma \rightarrow 0^+$  i due termini di cui sopra si annullano e l'equazione in forma debole risulta essere

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta = \int_A \varphi'(\theta) H[f](\theta) f(\theta, t) d\theta, \quad (4.21)$$

dove, tenendo conto del termine (4.18), si definisce

$$\begin{aligned} H[f](\theta) &:= \int_A \mathcal{P}(\theta, \omega; \rho) f(\omega, t) d\omega \\ &= \theta_d - \theta + \int_A P(\theta, \omega; \rho) (\omega - \theta_d) f(\omega, t) d\omega. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dunque (4.21) risulta essere la forma debole della seguente equazione di Fokker-Planck

$$\partial_t f + \partial_\theta (H[f] f) = 0, \quad (4.23)$$

che rappresenta una legge di conservazione non lineare del termine di flusso globale  $-\partial_\theta (H[f] f)$ . Si noti che il secondo addendo in (4.23) da un contributo di trasporto della distribuzione  $f = f(\theta, t)$  nello spazio degli stati microscopici  $\theta$  attraverso il peso (4.22). Inoltre si sta effettuando una descrizione delle interazioni a livello di campo medio, infatti il peso presente nel termine di trasporto può essere riscritto come segue

$$H[f](\theta) = \int_A \mathcal{I}(\theta, \omega) f(\omega, t) d\omega,$$

dove  $\mathcal{I}(\theta, \omega)$  è la funzione di interazione definita in (4.9).

## 4.4 Simulazioni numeriche

In questa sezione, tramite l'utilizzo dello schema semi-Lagrangiano esposto in Sezione 3.3, si simula numericamente la soluzione dell'equazione di Fokker-Planck (2.38) per una popolazione di pedoni con probabilità di interazione  $P(\theta, \omega; \rho) = P(\rho) = \rho$ . Si noti che in base al termine di trasporto (4.22) la flow-map  $\Phi^n[f](\theta) := \theta + H[f](t_n, \theta) \Delta t$  presente in (3.24) può essere approssimata come segue

$$\Phi^n[f](\theta_j) \approx \theta_j + \left[ (\theta_d - \theta_j) + \sum_{k=1}^M \rho(\theta_k - \theta_d) f_k^n \Delta t \right] \Delta t,$$

dove  $\theta_k \in A$ , per  $k = 1, \dots, M$ .

Si consideri la distribuzione iniziale uniforme (4.14),  $P(\rho) = \rho = \frac{2}{3}$  e  $\theta_d = \frac{\pi}{3}$ . Come mostra la Figura 4.4 (a) la distribuzione degli agenti converge verso una delta centrata nella direzione desiderata  $\theta_d$  (si mostrano le distribuzioni al variare del tempo, fino all'istante finale  $t = 5$ ). In modo analogo scegliendo la distribuzione iniziale (4.16) la dinamica converge alla direzione desiderata (come mostrato in Figura 4.4 (b)). Nelle figure (c) e (d) invece si mostra come la distribuzione  $f(t, \theta)$  cambi al variare della probabilità di interazione  $P(\rho) = \rho$  e ad un istante fissato  $t = 2.5$ . Si noti come la distribuzione degli agenti sia meno concentrata attorno alla direzione desiderata all'aumentare del valore della densità (indipendentemente dal fatto che la distribuzione iniziale sia uniforme, caso (c), oppure normale, caso (d)).

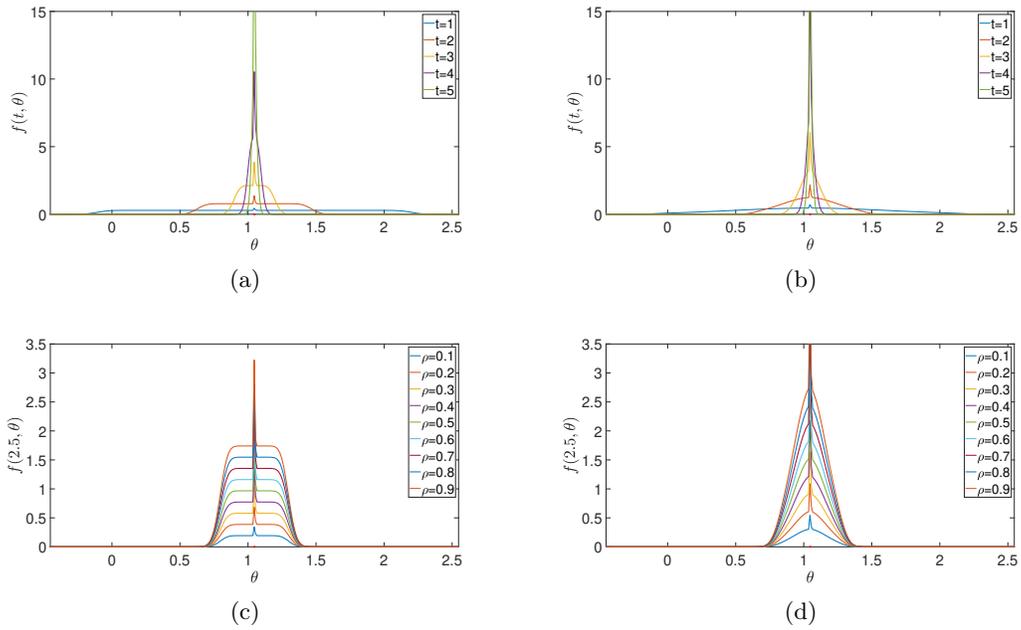


Figura 4.4: Scegliendo la direzione desiderata  $\theta_d = \pi/3$ , nelle figure sulla sinistra sono state utilizzate le condizioni iniziali (4.14) mentre per sulla destra le (4.16); le figure (a) e (b) mostrano l'evoluzione della distribuzione  $f(t, \theta)$  fino ad un tempo finale  $t = 5$  e con una densità  $\rho = 2/3$ . Le figure (c) e (d) invece mostrano come varia la distribuzione degli agenti al variare della densità  $\rho$  e ad un istante di tempo fissato  $t = 2.5$ .

## 4.5 Descrizione di tipo Boltzmann per due popolazioni di pedoni

In questa sezione si estende la trattazione precedente al caso di due popolazioni differenti di pedoni in cui ogni agente interagisce con quelli della popolazione opposta (il modello può essere adattato al caso in cui sono ammesse anche interazioni all'interno della stessa popolazione). Siano

$$\begin{aligned} f &= f(x, \theta, t) : \mathbb{R}^2 \times A \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \\ g &= g(y, \omega, t) : \mathbb{R}^2 \times B \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

le funzioni di distribuzione degli agenti delle due popolazioni dove  $(x, \theta)$  e  $(y, \omega)$  rappresentano gli stati microscopici degli agenti delle due folle, mentre gli intervalli  $A, B \in \mathbb{R}$  sono definiti successivamente in (4.29). Si noti che il termine  $f(x, \theta, t)dx d\theta$  rappresenta la frazione di pedoni della prima popolazione che al tempo  $t$  sono nel volume infinitesimo  $dx$  centrato in  $x$  e con direzione compresa tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  (in modo analogo si può interpretare il termine  $g(y, \omega, t)dy d\omega$  per la frazione di agenti della seconda popolazione). Si definiscono le densità delle due popolazioni rispettivamente

$$\rho_f(x, t) := \int_A f(x, \theta, t) d\theta , \quad (4.24)$$

$$\rho_g(y, t) := \int_B g(y, \omega, t) d\omega . \quad (4.25)$$

Anche in questo caso le due densità risulteranno costanti nel tempo (come si mostrerà nella sezione successiva), dunque per non appesantire la notazione di seguito verranno indicate con  $\rho_f$  e  $\rho_g$ .

Il modello di interazioni binarie fra coppie di agenti rispettivamente con stati microscopici  $(x, \theta)$  e  $(y, \omega)$  si assume essere il seguente

$$\begin{cases} \theta^* = \theta + \gamma \mathcal{I}(x, y, \theta, \omega) + 2\ell\pi, \\ \omega^* = \omega + \gamma \mathcal{K}(y, x, \omega, \theta) + 2m\pi \end{cases} \quad \ell, m \in \mathbb{Z} \quad (4.26)$$

con funzioni di interazione

$$\mathcal{I}(x, y, \theta, \omega) = P_f(x, y, \theta, \omega; \rho_g)(\omega - \theta) + (1 - P_f(x, y, \theta, \omega; \rho_g))(\theta_d - \theta) , \quad (4.27)$$

$$\mathcal{K}(y, x, \omega, \theta) = P_g(y, x, \omega, \theta; \rho_f)(\theta - \omega) + (1 - P_g(y, x, \omega, \theta; \rho_f))(\omega_d - \omega) , \quad (4.28)$$

dove i termini  $\gamma, \mu > 0$  rappresentano rispettivamente la forza delle interazioni e la loro frequenza, mentre gli indici  $\ell, m \in \mathbb{Z}$  sono scelti in modo che gli angoli post-interazione  $\theta^*, \omega^*$  siano tali che

$$\begin{aligned} \theta^* &\in A := [-\pi + \theta_d, \pi + \theta_d] , \\ \omega^* &\in B := [-\pi + \omega_d, \pi + \omega_d] . \end{aligned} \quad (4.29)$$

I termini  $\theta_d$  e  $\omega_d$  rappresentano le *direzioni desiderate* che i pedoni delle due popolazioni tendono ad assumere in assenza di interazioni con pedoni della popolazione opposta. I termini  $P_f(x, y, \theta, \omega; \rho_g)$ ,  $P_g(x, y, \omega, \theta; \rho_f)$  rappresentano rispettivamente le probabilità

di interazione degli agenti nella popolazione con distribuzione  $f$  e  $g$ . Si noti che entrambe dipendono dagli stati microscopici della coppia di pedoni che interagisce e anche dalle due densità macroscopiche  $\rho_f$ ,  $\rho_g$  delle due folle; nello specifico un agente della popolazione con distribuzione  $f(x, \theta, t)$  ha una probabilità di interazione che dipende dalla densità della popolazione opposta  $\rho_g$ , poiché si ammettono solo interazioni fra pedoni di popolazioni opposte (in modo analogo la probabilità di interazione presente in  $\mathcal{K}(y, x, \omega, \theta)$  dipende da  $\rho_f$ ).

**Osservazione.** Si noti che nel caso in cui si ammettano anche interazioni all'interno delle due popolazioni, le probabilità di interazione  $P_f$  e  $P_g$  dipenderanno dalla densità totale  $\rho_f + \rho_g$  e le funzioni di interazione  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{K}$  risulteranno una la simmetrica dell'altra.

Ripercorrendo una procedura simile a quella esposta in Sezione 2.2 è possibile ottenere l'equazione di tipo Boltzmann in forma debole per l'evoluzione in tempo di  $f = f(x, \theta, t)$  (in maniera simmetrica è possibile ricavare le equazioni cinetiche per la distribuzione  $g = g(y, \omega, t)$  di agenti della popolazione opposta) che fa riferimento alle leggi di interazione microscopiche (4.26); per ogni funzione test  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times A \mapsto \mathbb{R}$  sufficientemente regolare e a supporto compatto nella variabile  $x$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_A \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \theta) f(x, \theta, t) dx d\theta + \int_A \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla_x \varphi(x, \theta) f(x, \theta, t) dx d\theta \\ &= \mu \int_A \int_A \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi(x, \theta^*) - \varphi(x, \theta)) f(x, \theta, t) g(y, \omega, t) dx dy d\theta d\omega. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tramite un opportuno cambio di variabili è possibile ottenere la forma forte dell'equazione (4.3),

$$\partial_t f(x, \theta, t) + v \cdot \nabla_x f(x, \theta, t) = \mu \mathcal{Q}(f, g)(x, \theta, t), \quad (4.31)$$

dove l'operatore di collisione a secondo membro descrive le interazioni binarie tra coppie di pedoni appartenenti a popolazioni opposte,

$$\mathcal{Q}(f, g)(x, \theta, t) = \int_B \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{|J|} f(x, \theta, t) g(y, \omega, t) - f(x, \theta^*, t) g(y, \omega^*, t) \right) dy d\omega^*.$$

Il termine  $|J|$  rappresenta il determinante Jacobiano della trasformazione che porta dall'equazione di Boltzmann in forma debole a quella forte. Si noti che a differenza del termine di collisione (4.5) per il caso di una popolazione di pedoni, in questo caso nell'integrale compare la distribuzione della popolazione opposta  $g(y, \omega, t)$  (e dunque si integra sull'intervallo  $B$  delle direzioni della popolazione interagente).

## Il caso spazialmente omogeneo per due popolazioni di pedoni

Nel caso spazialmente omogeneo le distribuzioni delle direzioni delle velocità risultano costanti in ogni punto dello piano e dunque le distribuzioni delle due popolazioni risultano essere  $f = f(\theta, t)$  e  $g = g(\omega, t)$ . L'equazione cinetica in forma debole (4.3) diviene

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta = \mu \int_B \int_A (\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta)) f(\theta, t) g(\omega, t) d\theta d\omega. \quad (4.32)$$

Per quanto riguarda l'equazione in forma debole della popolazione con distribuzione  $g = g(y, \omega, t)$  si ha

$$\frac{d}{dt} \int_B \varphi(\omega) g(\omega, t) d\omega = \mu \int_A \int_B (\varphi(\omega^*) - \varphi(\omega)) g(\omega, t) f(\theta, t) d\omega d\theta \quad (4.33)$$

Anche in questo caso si ipotizza che le funzioni test siano estese periodicamente su  $\mathbb{R}$  (con periodo  $2\pi$ ). Si osservi che scegliendo la funzione test  $\varphi(\theta) = 1$  in entrambe le equazioni (4.32) e (4.33), le densità macroscopiche

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &:= \int_A f(\theta, t) d\theta \\ \rho_g(t) &:= \int_B g(\omega, t) d\omega \end{aligned}$$

risultano essere costanti in tempo (come già anticipato in Sezione 4.5), poiché i termini a secondo membro delle due equazioni (4.32) e (4.33) si annullano. Ciò implica che le densità microscopiche delle due popolazioni possono essere trattate come parametri del modello, denotate con  $\rho_f$  e  $\rho_g$ , ed esse sono direttamente determinati dalle condizioni iniziali scelte.

Sotto l'ipotesi di omogeneità spaziale le leggi di interazione microscopiche (4.26) possono essere riscritte come segue

$$\begin{cases} \theta^* = \theta + \gamma \mathcal{I}(\theta, \omega) + 2\ell\pi, & \ell \in \mathbb{Z} \\ \omega^* = \omega + \gamma \mathcal{K}(\omega, \theta) + 2m\pi, & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.34)$$

con

$$\mathcal{I}(\theta, \omega) = P_f(\theta, \omega; \rho_g)(\omega - \theta) + (1 - P_f(\theta, \omega; \rho_g))(\theta_d - \theta), \quad (4.35)$$

$$\mathcal{K}(\omega, \theta) = P_g(\omega, \theta; \rho_f)(\theta - \omega) + (1 - P_g(\omega, \theta; \rho_f))(\omega_d - \omega). \quad (4.36)$$

## L'allineamento asintotico dato dalle interazioni binarie fra due popolazioni

In questa sezione verranno studiate, sotto l'ipotesi di omogeneità spaziale, le condizioni sotto le quali le interazioni fra gli agenti delle due popolazioni portano i pedoni a muoversi nella stessa direzione all'interno di ognuna delle due folle. Nel caso specifico che si sta trattando, l'allineamento verso le stesse direzioni all'interno delle due popolazioni viene raggiunto quando la distribuzione  $f$  converge asintoticamente in tempo alla distribuzione della forma  $\rho_f \delta_\alpha$ , mentre  $g$  alla distribuzione  $\rho_g \delta_\beta$ , dove con  $\delta_\alpha$  e  $\delta_\beta$  si sono indicate rispettivamente le delta di Dirac centrate in  $\theta = \alpha \in A$  e  $\omega = \beta \in B$ . Di seguito per non appesantire la notazione, nelle probabilità di interazione  $P_f(\theta, \omega; \rho_g)$  e  $P_g(\omega, \theta; \rho_f)$  si sottintenderà la dipendenza dagli stati degli agenti; si indicheranno quindi con  $P_f(\rho_g), P_g(\rho_f) \in [0, 1]$  le probabilità di interazione fra due generici agenti con stato  $\theta$  e  $\omega$ .

Con le stesse notazioni utilizzate nel caso di una popolazione, di seguito si studiano le condizioni sotto le quali, partendo da una distribuzione iniziale  $f_0 \in \mathcal{M}_+^{\rho_f}(A)$  per la

prima popolazione e  $g_0 \in \mathcal{M}_+^{\rho_g}(B)$  per la seconda, in ognuna delle due folle si ha un allineamento delle direzioni associate alle velocità degli agenti rispettivamente verso le direzioni  $\tilde{\theta}_d \in A$  e  $\tilde{\omega}_d \in B$ , definite nella seguente proposizione.

**Proposizione 4.2.** *Le distribuzioni della forma  $\rho_f \delta_\alpha \in \mathcal{M}_+^{\rho_f}(A)$  e  $\rho_g \delta_\beta \in \mathcal{M}_+^{\rho_g}(B)$ , con  $\rho_f, \rho_g > 0$ ,  $\alpha \in A$ ,  $\beta \in B$  e  $P_f(\rho_g), P_g(\rho_f) \in [0, 1)$ , sono due soluzioni stazionarie del sistema formato da (4.32) e (4.33) se e soltanto se*

$$\begin{aligned} \alpha &= p_1 \theta_d + (1 - p_1) \omega_d, & p_1 &:= \frac{1 - P_f(\rho_g)}{1 - P_g(\rho_f) P_f(\rho_g)} \\ \beta &= p_2 \omega_d + (1 - p_2) \theta_d, & p_2 &:= \frac{1 - P_g(\rho_f)}{1 - P_g(\rho_f) P_f(\rho_g)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

*Dim.* Siano  $f = \rho_f \delta_\alpha$  e  $g = \rho_g \delta_\beta$  con  $\alpha \in A$  e  $\beta \in B$ , sostituendo in (4.32) e (4.33), tenendo conto delle leggi di interazione (4.34) e ricordando che le funzioni test sono state estese periodicamente su  $\mathbb{R}$  con periodo  $2\pi$ , si ottiene il seguente sistema valido per ogni funzione test

$$\begin{cases} \varphi(\alpha + \mathcal{I}(\alpha, \beta)) - \varphi(\alpha) = 0 \\ \varphi(\beta + \mathcal{K}(\beta, \alpha)) - \varphi(\beta) = 0. \end{cases}$$

Osservando inoltre che  $\mathcal{I}(\alpha, \beta) = P_f(\rho_g)\beta + (1 - P_f(\rho_g))\theta_d - \alpha$  e  $\mathcal{K}(\beta, \alpha) = P_g(\rho_f)\alpha + (1 - P_g(\rho_f))\omega_d - \beta$  si ha

$$\begin{cases} P_f(\rho_g)\beta + (1 - P_f(\rho_g))\theta_d - \alpha = 0 \\ P_g(\rho_f)\alpha + (1 - P_g(\rho_f))\omega_d - \beta = 0, \end{cases}$$

da cui risolvendo il sistema e ricordando l'ipotesi  $P_f(\rho_g), P_g(\rho_f) \in [0, 1)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{P_f(\rho_g)(1 - P_g(\rho_f))\omega_d + (1 - P_f(\rho_g))\theta_d}{1 - P_g(\rho_f)P_f(\rho_g)} \\ \beta &= \frac{P_g(\rho_f)(1 - P_f(\rho_g))\theta_d + (1 - P_g(\rho_f))\omega_d}{1 - P_g(\rho_f)P_f(\rho_g)}, \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.  $\square$

**Osservazione.** *Nel caso particolare in cui le probabilità di interazione sono  $P_f(\rho_g) = \rho_g$  e  $P_g(\rho_f) = \rho_f$  le due delta di Dirac stazionarie nelle due popolazioni sono centrate in*

$$\begin{aligned} \alpha &= p_1 \theta_d + (1 - p_1) \omega_d \\ \beta &= p_2 \omega_d + (1 - p_2) \theta_d, \end{aligned}$$

dove  $p_1 := (1 - \rho_g)/(1 - \rho_f \rho_g)$  e  $p_2 := (1 - \rho_f)/(1 - \rho_f \rho_g)$ . Dunque in questo caso le direzioni di consenso nelle due popolazioni sono il risultato di una media pesata delle due direzioni desiderate  $\theta_d$  e  $\omega_d$ . Inoltre si osservi che se la densità  $\rho_g \rightarrow 1$  allora  $\alpha \rightarrow \omega_d$  e, in modo simmetrico, se  $\rho_f \rightarrow 1$  allora  $\beta \rightarrow \theta_d$ .

**Teorema 4.2.** Siano  $\rho_f := \int_A f(\theta, 0) d\theta > 0$  e  $\rho_g := \int_B g(\omega, 0) d\omega > 0$ , con  $A, B \subset \mathbb{R}$  le densità delle due popolazioni e  $P_f(\theta, \omega; \rho_g) = P_f(\rho_g)$ ,  $P_g(\omega, \theta; \rho_f) = P_g(\rho_f)$  le probabilità di interazione nelle due popolazioni. Si definiscono inoltre  $\forall t \geq 0$

$$\bar{\theta}(t) := \frac{1}{\rho_f} \int_A |\theta - \theta_d| f(\theta, t) d\theta , \quad (4.38)$$

$$\bar{\omega}(t) := \frac{1}{\rho_g} \int_B |\omega - \omega_d| g(\omega, t) d\omega . \quad (4.39)$$

Allora se  $P_f(\rho_g), P_g(\rho_f) < 1$  le velocità delle due popolazioni tendono ad un consenso rispettivamente verso le direzioni

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_d &= \frac{P_f(\rho_g)(1 - P_g(\rho_f))\omega_d + (1 - P_f(\rho_g))\theta_d}{1 - P_g(\rho_f)P_f(\rho_g)} \\ \tilde{\omega}_d &= \frac{P_g(\rho_f)(1 - P_f(\rho_g))\theta_d + (1 - P_g(\rho_f))\omega_d}{1 - P_g(\rho_f)P_f(\rho_g)} . \end{aligned}$$

*Dim.* Preliminarmente si osservi che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

implica la tesi; infatti se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\theta} = 0$ , poiché la densità congiunta  $f(\theta, t) \otimes \rho_f \delta_{\tilde{\theta}_d} \in \Pi(f(t), \rho_f \delta_{\tilde{\theta}_d})$ , allora

$$\begin{aligned} W_1(f(t), \rho_f \delta_{\tilde{\theta}_d}) &\leq \int_A \int_B |\theta - \omega| d(f(\theta, t) \otimes \delta_{\tilde{\theta}_d}(\omega)) \\ &= \int_A |\theta - \tilde{\theta}_d| f(\theta, t) d\theta = \rho_f \bar{\theta}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 . \end{aligned}$$

In modo analogo si mostra che se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\omega}(t) = 0$  allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W_1(g(t), \rho_g \delta_{\tilde{\omega}_d}) = 0 .$$

Dunque la condizione (4.40) risulta essere una condizione sufficiente per l'allineamento delle direzioni delle due popolazioni verso  $\tilde{\theta}_d$  e  $\tilde{\omega}_d$ .

Considerando una frequenza e forza di interazione unitari ( $\gamma = \mu = 1$ ) nell'equazione in forma debole (4.32) e scegliendo come funzione test  $\varphi(v) = \frac{1}{\rho_f \rho_g} |\theta - \tilde{\theta}_d|$  si ottiene

$$\frac{d}{dt} \bar{\theta}(t) \leq \frac{1}{\rho_f \rho_g} \int_A \int_B (|\theta^* - \tilde{\theta}_d| - |\theta - \tilde{\theta}_d|) f(\theta, t) g(\omega, t) d\theta d\omega . \quad (4.41)$$

Si noti che dalle leggi (4.34) segue

$$|\theta^* - \tilde{\theta}_d| = |\theta + \mathcal{I}(\theta, \omega) + 2\ell\pi - \tilde{\theta}_d| \leq |\theta + \mathcal{I}(\theta, \omega) - \tilde{\theta}_d| ,$$

infatti il valore di  $\ell \in \mathbb{Z}$  è scelto, come anticipato in (4.29), in modo che  $\theta + \mathcal{I}(\theta, \omega) + 2\ell\pi \in A$ ; è dunque possibile maggiorare la differenza dei moduli presente a secondo membro dell'equazione di Boltzmann in forma debole ottenendo

$$\begin{aligned} |\theta^* - \tilde{\theta}_d| - |\theta - \tilde{\theta}_d| &\leq P_f(\rho_g) \left| \omega - \left( \theta_d - \frac{\theta_d + \tilde{\theta}_d}{P_f(\rho_g)} \right) \right| - |\theta - \tilde{\theta}_d| \\ &= P_f(\rho_g) |\omega - \tilde{\omega}_d| - |\theta - \tilde{\theta}_d| \end{aligned} \quad (4.42)$$

poiché tra le direzioni di allineamento vale la seguente relazione

$$\theta_d - \frac{\theta_d + \tilde{\theta}_d}{P_f(\rho_g)} = \tilde{\omega}_d ; \quad (4.43)$$

infatti

$$\theta_d - \frac{\theta_d + \tilde{\theta}_d}{P_f(\rho_g)} = \frac{[p_1 - (1 - P_f(\rho_g))] \theta_d + p_2 P_f(\rho_g) \omega_d}{P_f(\rho_g)}$$

ed osservando che

$$p_1 - (1 - P_f(\rho_g)) = p_1 \rho_f \rho_g = (1 - p_2) \rho_g ,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è utilizzato la proprietà  $\rho_f p_1 = 1 - p_2$ , si ottiene la (4.43).

Sostituendo (4.42) nell'equazione (4.41) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \bar{\theta}(t) \leq -\bar{\theta}(t) + P_f(\rho_g) \bar{\omega}(t) .$$

Con una procedura simile è possibile ottenere la seguente disequazione per la distanza media dalla direzione di allineamento della seconda popolazione:

$$\frac{d}{dt} \bar{\omega}(t) \leq P_g(\rho_f) \bar{\theta}(t) - \bar{\omega}(t) .$$

Dunque il sistema di disequazioni da studiare risulta essere

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} (t) \leq \begin{pmatrix} -1 & P_f(\rho_g) \\ P_g(\rho_f) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{pmatrix} .$$

Se si dimostra che gli autovalori della matrice a secondo membro sono tutti strettamente negativi allora vale (4.40), da cui segue la tesi; si calcola il polinomio caratteristico

$$(-1 - \lambda)^2 - P_f(\rho_g) P_g(\rho_f) = 0 ,$$

da cui gli autovalori cercati sono

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm P_f(\rho_g) P_g(\rho_f) .$$

Infine si noti che essi sono strettamente negativi perché  $0 \leq P_f(\rho_g), P_g(\rho_f) < 1$ .

□

## 4.6 Simulazioni numeriche

In questa sezione vengono confermati i risultati ottenuti nelle sezioni precedenti attraverso simulazioni numeriche. In modo analogo a quanto fatto per una sola popolazione di pedoni, si analizza il caso in cui le probabilità delle due popolazioni sono uguali alle densità delle popolazioni opposte, ovvero  $P_f(\rho_g) = \rho_g$  e  $P_g(\rho_f) = \rho_f$ . Per simulare l'allineamento nelle due popolazioni si scelgono le direzioni desiderate delle velocità  $\theta_d = 2\pi/3$  e  $\omega_d = -2\pi/3$  e dunque i due intervalli dei possibili stati degli agenti delle due popolazioni saranno  $A = [-\pi/3, 5\pi/3]$  e  $B = [-5\pi/3, \pi/3]$ . Si risolvono (4.32) e (4.33) attraverso l'algoritmo Bird-like method simmetrico (Algoritmo 5, Sezione 3.1) con un time counter esponenziale di media  $\lambda = 1$ , un numero di agenti nelle due popolazioni pari a  $10^4/2$ , un passo temporale  $\Delta t = 1/5$  e osservando la dinamica fino a un tempo finale  $t = 25$ . Per quanto riguarda le condizioni iniziali sono state scelte due distribuzioni normali rispettivamente di massa  $\rho_f < 1$  e  $\rho_g < 1$  sugli intervalli  $A$  e  $B$ :

$$f_0(\theta) = \frac{\rho_f}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \mu_f}{\sigma_f}\right)^2}, \quad \theta \in A, \quad (4.44)$$

$$g_0(\omega) = \frac{\rho_g}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \mu_g}{\sigma_g}\right)^2}, \quad \omega \in B, \quad (4.45)$$

dove  $\mu_f = \theta_d$ ,  $\sigma_f = \pi/2$  e  $\mu_g = \omega_d$ ,  $\sigma_g = \pi/2$ .

In Figura 4.5, simulando la dinamica attraverso l'algoritmo Bird-like method con i parametri elencati precedentemente, sono riportate al tempo iniziale e finale le posizioni (campionate all'istante iniziale come nel caso di una sola popolazione) e le velocità degli agenti corrispondenti alle direzioni campionate dalle distribuzioni normali di cui sopra, con densità  $\rho_f = 2/3$  e  $\rho_g = 3/4$ . La Figura 4.5 mostra l'allineamento al tempo  $t = 25$  nelle due popolazioni verso le direzioni  $\theta_d = 0$  e  $\tilde{\omega}_d = -2\pi/9$ ; anche in questo caso in blu si evidenzia la regione del piano in cui la densità dei pedoni è maggiore.

Successivamente si analizza la convergenza attraverso lo studio dei decadimenti (4.38) e (4.39); a tal fine in Figura 4.6 si mostrano le approssimazioni di tipo Montecarlo ricavate con la tecnica (3.2) da cui si ottiene

$$\bar{\theta}_{MC}(t) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} |\Theta_i(t) - \theta_d|, \quad (4.46)$$

$$\bar{\omega}_{MC}(t) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N/2} |\Omega_j(t) - \omega_d| \quad (4.47)$$

dove  $N = 10^4$ ,  $\Theta_i(t)$  e  $\Omega_j(t)$  rappresentano l' $i$ -esimo e il  $j$ -esimo sample ottenuti rispettivamente dal campionamento di  $\frac{1}{\rho_f}f(\theta, t)$  e di  $\frac{1}{\rho_g}g(\omega, t)$ . Le due figure rappresentano le mappe  $t \mapsto \bar{\theta}_{MC}(t)$  a sinistra e  $t \mapsto \bar{\omega}_{MC}(t)$  a destra, ottenute al variare delle probabilità di interazione  $P_f(\rho_g) = \rho_g$  e  $P_g(\rho_f) = \rho_f$  in modo che  $\rho_g + \rho_f = 1$  e simulando la dinamica attraverso l'algoritmo Bird-like method con gli stessi parametri e distribuzioni iniziali utilizzate in Figura 4.5. Si noti che, in accordo con le funzioni di interazione

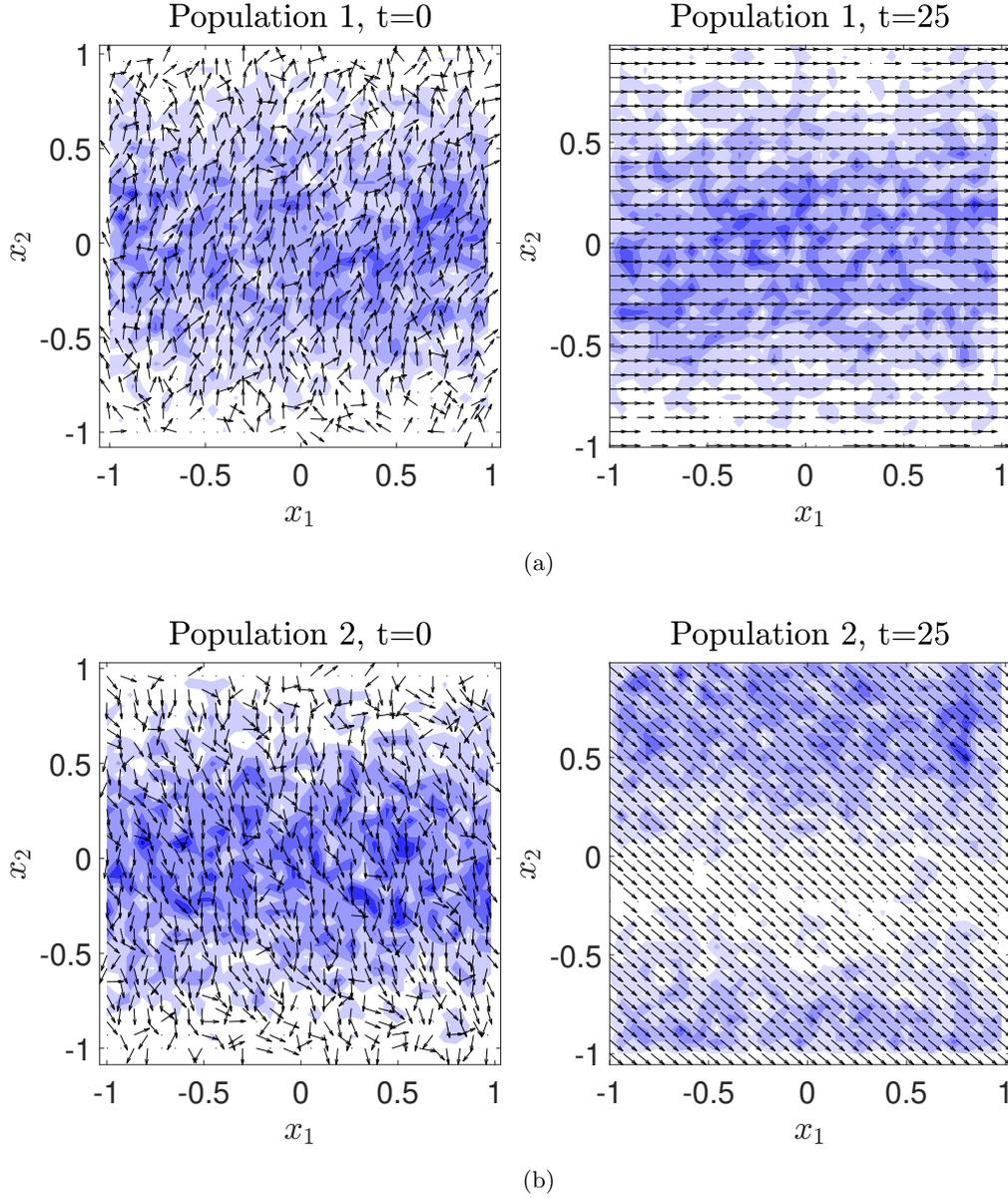


Figura 4.5: Allineamento delle velocità nelle due popolazioni di  $N = 10^4/2$  agenti ognuna, lungo le direzioni  $\tilde{\theta}_d = 0$  e  $\tilde{\omega}_d = -2\pi/9$ . All'istante iniziale le direzioni delle velocità sono distribuite secondo (4.44) e (4.45) con  $\rho_f = 2/3$  e  $\rho_g = 3/4$  (figure a sinistra); a destra è stata simulata la dinamica fino al tempo  $t = 25$  con Algoritmo Bird-like method (time counter esponenziale associato agli agenti di media 1).

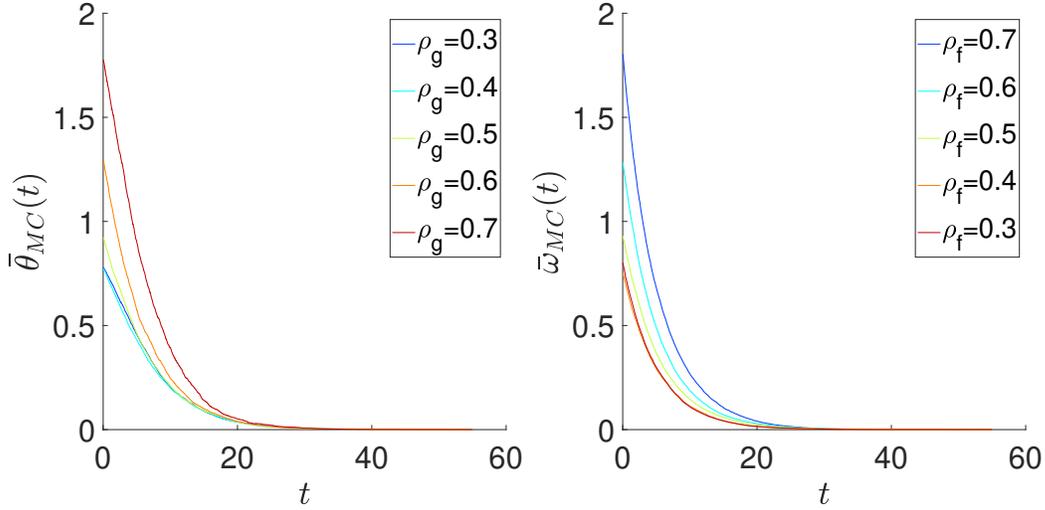


Figura 4.6: Le figure rappresentano le simulazioni dei decadimenti (4.46) e (4.47) al variare delle probabilità di interazione  $P_f(\rho_g) = \rho_g$  e  $P_g(\rho_f) = \rho_f$ , ottenute con il metodo Bird-like; le condizioni iniziali utilizzate sono: a sinistra la (4.44), invece a destra la (4.45).

(4.35) e (4.36), la dinamica in una popolazione tende al consenso con una velocità che è inversamente proporzionale al valore della densità della popolazione opposta.

## 4.7 Il limite delle interazioni quasi invariati per due popolazioni di pedoni

In questa sezione si studia, sotto l'ipotesi di omogeneità spaziale, il limite delle interazioni quasi invariati procedendo in maniera simile a quanto esposto in Sezione 2.3; dunque si assume, in ognuna delle due popolazioni, che le interazioni facciano variare di poco gli stati post-interazione degli agenti ( $\gamma \rightarrow 0^+$ ) e parallelamente si rendono tali interazioni più frequenti ( $\mu = 1/\gamma$ ). Di seguito si ricava l'equazione di Fokker-Planck per la popolazione con distribuzione  $f = f(\theta, t)$  e direzione desiderata  $\theta_d$  (la procedura che verrà esposta è valida anche per la popolazione con distribuzione  $g = g(\omega, t)$  e direzione desiderata  $\omega_d$ ). Sostituendo  $\mu = 1/\gamma$ , l'equazione in forma debole (4.32) diviene

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta = \frac{1}{\gamma} \int_B \int_A (\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta)) f(\theta, t) g(\omega, t) d\theta d\omega. \quad (4.48)$$

dove ora si ipotizza  $\varphi \in C^3(A)$  con  $\varphi(\pm\pi + \theta_d) = 0$  ancora  $2\pi$ -periodica sull'intera retta reale.

Si espande in serie di Taylor arrestato al terzo ordine la differenza  $\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta)$  e tenendo

conto delle leggi (4.34) si ottiene

$$\begin{aligned}\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta) &= \gamma \varphi'(\theta)(P_f(\theta, \omega; \rho_g)(\omega - \theta_d) + \theta_d - \theta) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2} \varphi''(\theta)(P_f(\theta, \omega; \rho_g)(\omega - \theta_d) + \theta_d - \theta)^2 \\ &\quad + \frac{\gamma^3}{6} \varphi'''(\bar{\theta})(P_f(\theta, \omega; \rho_g)(\omega - \theta_d) + \theta_d - \theta)^3,\end{aligned}$$

dove  $\bar{\theta} \in [\min\{\theta, \theta^*\}, \max\{\theta, \theta^*\}]$ . Si noti che il termine  $2\ell\pi$  presente in (4.8) non appare in questo calcolo poiché la funzione test  $\varphi$  è  $2\pi$ -periodica. Per semplificare la notazione si definisce

$$\mathcal{P}_f(\theta, \omega; \rho) := \theta^* - \theta = \theta_d - \theta + P_f(\theta, \omega; \rho_g)(\omega - \theta_d) \quad (4.49)$$

e sostituendo lo sviluppo in (4.48) si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta &= \int_A \varphi'(\theta) \left( \int_B \mathcal{P}_f(\theta, \omega; \rho_g) g(\omega, t) d\omega \right) f(\theta, t) d\theta \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \int_A \varphi''(\theta) \left( \int_B \mathcal{P}_f^2(\theta, \omega; \rho_g) g(\omega, t) d\omega \right) f(\theta, t) d\theta\end{aligned} \quad (4.50)$$

$$+ R(\gamma), \quad (4.51)$$

dove, dato che  $|\mathcal{P}_f(\theta, \omega; \rho_g)| \leq \pi$  poiché le condizioni (4.29) implicano  $(\theta^* - \theta) \in [-\pi, \pi]$ , il termine (4.50) e il resto (4.51) entrambi in modulo soddisfano rispettivamente

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{2} \left| \int_A \varphi''(\theta) \left( \int_B \mathcal{P}_f^2(\theta, \omega; \rho_g) g(\omega, t) d\omega \right) f(\theta, t) d\theta \right| &\leq \frac{\gamma}{2} \|\varphi''\|_\infty \pi^2 \rho_f \rho_g, \\ \frac{\gamma^2}{6} \left| \int_B \int_A \varphi'''(\bar{\theta}) \mathcal{P}_f^3(\theta, \omega; \rho_g) f(\theta, t) g(\omega, t) d\theta d\omega \right| &\leq \frac{\gamma^2}{6} \|\varphi'''\|_\infty \pi^3 \rho_f \rho_g.\end{aligned}$$

Quindi svolgendo il limite per  $\gamma \rightarrow 0^+$  i due termini di cui sopra si annullano e l'equazione in forma debole risulta essere

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(\theta) f(\theta, t) d\theta = \int_A \varphi'(\theta) H[g](\theta) f(\theta, t) d\theta, \quad (4.52)$$

dove, tenendo conto del termine (4.49), si definisce

$$\begin{aligned}H[g](\theta) &:= \int_B \mathcal{P}_f(\theta, \omega; \rho_g) g(\omega, t) d\omega \\ &= \theta_d - \theta + \int_B P_f(\theta, \omega; \rho_g)(\omega - \theta_d) g(\omega, t) d\omega.\end{aligned} \quad (4.53)$$

Dunque l'equazione (4.52) risulta essere la forma debole della seguente equazione di Fokker-Planck

$$\partial_t f + \partial_\theta (H[g]f) = 0. \quad (4.54)$$

Si noti che il secondo addendo in (4.54), come nel caso di una sola popolazione, da un contributo di trasporto della distribuzione  $f = f(\theta, t)$  nello spazio degli stati microscopici  $\theta \in A$  attraverso il peso (4.53); esso, a differenza del termine (4.22), presenta un integrale sull'intervallo  $B$  dei possibili stati degli agenti della popolazione opposta proprio perché si ammettono solo interazioni fra pedoni appartenenti a folle differenti. Con una procedura analoga può essere ricavata l'equazione di Fokker-Planck per la popolazione con distribuzione  $g = g(\omega, t)$  e direzione desiderata  $\omega_d$  ottenendo il seguente sistema formato da due PDEs per il sistema considerato

$$\begin{cases} \partial_t f + \partial_\theta(H[g]f) = 0 , \\ \partial_t g + \partial_\omega(H[f]g) = 0 , \end{cases} \quad (4.55)$$

dove

$$\begin{aligned} H[f](\omega) &:= \int_A \mathcal{P}_g(\omega, \theta; \rho_f) f(\theta, t) d\theta \\ &= \omega_d - \omega + \int_A \mathcal{P}_g(\omega, \theta; \rho_f) (\theta - \omega_d) f(\theta, t) d\theta . \end{aligned}$$

## 4.8 Simulazioni numeriche

In questa sezione si simula numericamente la soluzione dell'equazione di Fokker-Planck (4.55) tramite l'utilizzo dello schema semi-Lagrangiano esposto in Sezione 3.3, con direzioni desiderate  $\theta_d = \pi/3$  e  $\omega_d = -\pi/5$  e probabilità di interazione  $P_f(\rho_g) = \rho_g = 3/4$  e  $P_g(\rho_f) = \rho_f = 2/3$ . Le condizioni iniziali scelte sono le seguenti distribuzioni di tipo uniforme sugli intervalli  $A$  e  $B$

$$f_0(\theta) = \frac{\rho_f}{2\pi} , \quad \theta \in A , \quad (4.56)$$

$$g_0(\omega) = \frac{\rho_g}{2\pi} , \quad \omega \in B . \quad (4.57)$$

Come mostra la Figura 4.7 le distribuzioni delle due popolazioni convergono verso due delta di Dirac centrate in  $\theta_d = \pi/15$  (a sinistra) e  $\tilde{\omega}_d = -\pi/45$  (a destra), simulando la dinamica fino all'istante finale  $t = 5$ . Successivamente si mostra come le distribuzioni  $f(\theta, t)$  e  $g(\omega, t)$  cambino al variare delle probabilità di interazione  $P_f(\rho_g) = \rho_g$  e  $P_g(\rho_f) = \rho_f$  (scelte in modo che  $\rho_f + \rho_g = 1$ ) ad un istante fissato  $t = 3.5$ . Ad esempio, si noti come la distribuzione  $f(\theta, t)$  tenda a concentrarsi verso la direzione desiderata  $\omega_d = -\pi/5$  quando la densità  $\rho_g$  tende ad assumere un valore vicino ad uno (in modo analogo anche la distribuzione  $g(\omega, t)$  si concentra verso la direzione  $\theta_d = \pi/3$  quando  $\rho_f \rightarrow 1$ ).

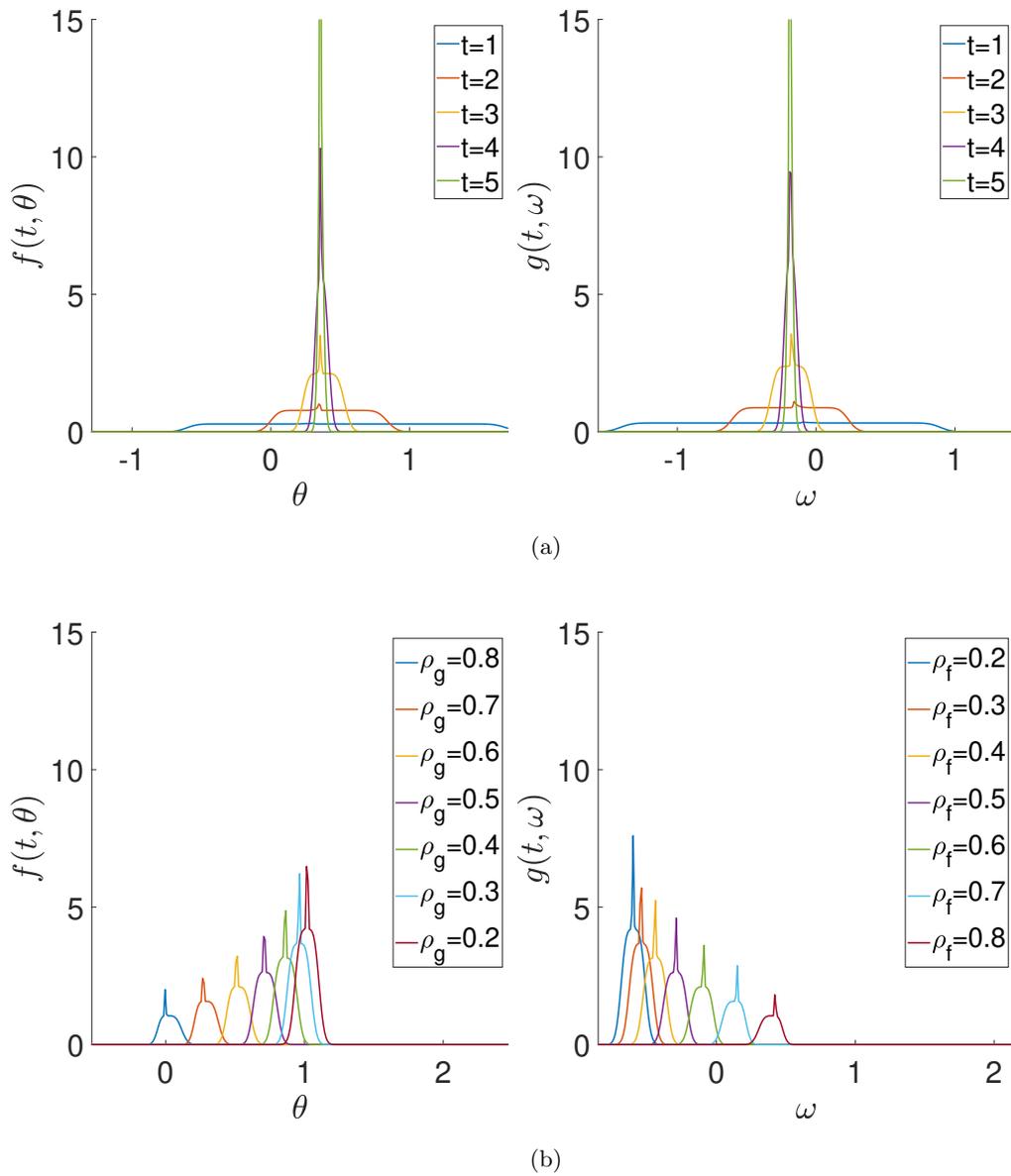


Figura 4.7: Scegliendo le direzioni desiderate  $\theta_d = \pi/3$  e  $\omega_d = -\pi/5$ , partendo dalle condizioni iniziali (4.56) e (4.57), con densità  $\rho_f = 2/3$  e  $\rho_g = 3/4$ , la figura (a) mostra l'evoluzione delle distribuzioni  $f(\theta, t)$  e  $g(\omega, t)$  fino ad un tempo finale  $t = 5$ . La figura (b) invece mostra come variano le distribuzioni degli agenti al variare delle densità  $\rho_f$  e  $\rho_g$  ad un istante di tempo fissato a  $t = 3.5$ .

## 5. Un modello di dinamica delle opinioni su network

In questa sezione si andrà a studiare un modello di dinamica delle opinioni su un network studiando il modello esposto in [27] e seguendo una struttura analoga a quella utilizzata nel capitolo precedente; dunque dapprima si studia il modello microscopico del sistema che regola le interazioni fra due singoli individui. Una procedura standard per modellare l'opinione in una popolazione di agenti risulta quella di rappresentare l'opinione del singolo attraverso un numero reale, così come la sua connettività nel network. Nello specifico lo stato microscopico di ogni agente è rappresentato dalla coppia  $(w, c)$  dove la variabile reale  $w \in A = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$  rappresenta l'*opinione* e i valori di bordo dell'intervallo rappresentano le due opinioni estreme opposte. Si noti che nel caso si scegliesse di far variare l'opinione in un intervallo non limitato questo comporterebbe delle difficoltà nella descrizione della dinamica, poiché la principale ipotesi su cui si basa il processo di scambio delle opinioni è quello secondo cui ogni agente possa influenzare individui che hanno opinione non troppo lontana dalla sua. La variabile  $c \in \mathbb{R}_+$  indica la *connettività* dell'agente nel Social Network ed essa rappresenta la credibilità di ogni agente; quando due agenti interagiscono l'opinione dell'agente a cui è associato un valore di  $c$  minore sarà influenzata maggiormente da quella dell'agente con connettività maggiore (per tale motivo questi ultimi tipi di agenti vengono denominati *influencers*). In questa trattazione si suppone inoltre che la distribuzione della connettività vari molto lentamente nel tempo, rispetto a quella dell'opinione, e quindi essa può essere considerata costante in tempo.

Il modello microscopico di interazione tra due generici agenti è basato su due aspetti principali della formazione dell'opinione. Il primo è un processo di compromesso che due agenti raggiungono dopo essersi scambiate le loro opinioni. Il secondo è un processo di diffusione che permette all'individuo di cambiare la propria opinione in maniera stocastica; tale termine tiene conto della possibilità che ogni individuo possa cambiare opinione non solo a causa dell'interazione con altri agenti ma anche attraverso l'accesso ad informazioni esterne oppure possa mantenere la propria opinione perché confida in essa (questa caratteristica è detta *autostima* dell'agente). Il modello di interazione binaria che si considera modifica le opinioni pre-interazione  $w, w_* \in A$  rispettivamente nelle opinioni post-interazione  $w'$  e  $w'_*$  tramite il sistema di equazioni

$$\begin{cases} w' = w + \gamma \mathcal{I}(c, c_*, w, w_*) + D(w, c)\eta \\ w'_* = w_* + \gamma \mathcal{I}(c_*, c, w_*, w) + D(w_*, c_*)\eta_* \end{cases} \quad (5.1)$$

dove  $\gamma \in [0, 1] \subset \mathbb{R}_+$  è il coefficiente che quantifica il peso dell'interazione. Il processo di interazione è descritto dalla funzione di interazione definita come segue

$$\mathcal{I}(c, c_*, w, w_*) = k(c, c_*)(w_* - w) \quad (5.2)$$

dove la funzione  $0 \leq k(c, c_*) \leq 1 \quad \forall c, c_* \in \mathbb{R}_+$ , indica il livello di fiducia che l'agente di opinione  $w$  ripone nell'agente con opinione  $w_*$ . Se ad un agente è associata una connettività con un valore maggiore rispetto a quella dell'agente con cui sta interagendo allora la sua opinione risulterà essere maggiormente influente e dunque la funzione  $k(c, c_*)$  dovrà soddisfare le seguenti proprietà

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0^+ \\ c_* \rightarrow 0^+}} k(c, c_*) = 1, \quad \lim_{\substack{c \rightarrow +\infty \\ c_* \rightarrow +\infty}} k(c, c_*) = 0.$$

Scelte possibili della funzione  $k(c, c_*)$  che rispettano le due proprietà appena citate sono

$$k(c, c_*) = \frac{1}{1 + \frac{c}{c_*}}, \quad (5.3)$$

$$k(c, c_*) = e^{-\frac{c}{c_*}} (1 - e^{-\frac{c_*}{c}}). \quad (5.4)$$

Il processo di diffusione in (5.1) è rappresentato dalle variabili aleatorie  $\eta$  e  $\eta_*$  indipendenti e identicamente distribuite con media nulla e varianza  $\sigma^2 > 0$  e dal coefficiente  $D(w, c)$ . Tale coefficiente quantifica il peso della fluttuazione stocastica nell'interazione e per semplicità si impone che esso fattorizzi in un termine che dipende solo dall'opinione in modulo e un altro dipendente solo dalla connettività, ovvero

$$D(|w|, c) = \beta(c)D(|w|), \quad \beta(c) \geq 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}_+. \quad (5.5)$$

Affinché il modello non perda la sua ammissibilità fisica bisogna imporre che le opinioni post-interazione appartengano ancora all'intervallo  $A = [-1, 1]$ . Di seguito in (5.7) verranno esposte le condizioni di ammissibilità fisica per l'agente con stato  $(w, c)$ ; in maniera simmetrica è possibile ottenere anche le condizioni per l'agente di opinione  $w_*$  e connettività  $c_*$ . Avendo imposto  $\gamma \in [0, 1]$  e  $0 \leq k(c, c_*) \leq 1$  e considerando solo il processo dovuto alle interazioni ( $D(w, c) \equiv 0$ ) si ottiene

$$w' = (1 - \gamma k(c, c_*))w + \gamma k(c, c_*)w_* \in A \quad (5.6)$$

Quest'ultima relazione afferma che il processo di interazione modifica le opinioni pre-interazione della coppia interagente calcolando una media pesata fra le loro opinioni, con un peso pari a  $\gamma k(c, c_*)$ . Per ottenere le condizioni di ammissibilità fisica anche sulla parte di fluttuazione stocastica è sufficiente imporre prima  $w' \leq 1$  (ricordando che  $w_* \leq 1$ ), poi  $w' \geq -1$  (ricordando che  $w_* \geq -1$ ). Le condizioni sufficienti affinché  $|w'| \leq 1$  per  $a > 0$  risultano essere

$$\begin{cases} |\eta| \leq \frac{a}{\beta_\infty} (1 - \gamma \alpha_\infty), & \beta_\infty := \sup_{c \in \mathbb{R}_+} \beta(c), \quad \alpha_\infty := \sup_{c, c_* \in \mathbb{R}_+} k(c, c_*) \\ D(|w|) \leq \frac{1}{a} \min \{1 + w, 1 - w\} \\ D(|w|) \geq 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Si osservi come la condizione su  $\eta$  non sia in conflitto con l'ipotesi  $\langle \eta \rangle = 0$ , poiché

impone che il supporto sia simmetrico rispetto a zero; si noti inoltre che tale condizione potrebbe richiedere anche la compattezza del suo supporto. Tuttavia vedremo che al fine di ricavare l'equazione di Fokker-Planck non entra in gioco direttamente il tipo di distribuzione di  $\eta$ , ma solo la sua varianza e il coefficiente  $D^2(w, c)$ ; quindi la trattazione che verrà proposta in Sezione 5.2 sarà valida per qualsiasi distribuzione statistica di  $\eta$  con media nulla e varianza  $\sigma^2$ . Per quanto riguarda la condizione su  $D(w, c)$ , si noti come essa includa che la funzione si annulli in corrispondenza delle due opinioni estreme; infatti è ragionevole pensare che se un agente ha un'opinione estrema, egli sarà meno propenso a cambiarla e dunque  $D(w, c)$  dovrà annullarsi per  $|w| \rightarrow 1$ ; inoltre è opportuno supporre che esso sia non crescente in  $|w|$ .

## 5.1 Descrizione di tipo Boltzmann per una dinamica delle opinioni su network

In accordo con quanto riportato nel Capitolo 2, dopo aver esposto il modello di interazione microscopico tra due generici agenti si passa ad una descrizione aggregata del sistema, ricavando l'equazione di tipo Boltzmann della cinetica del sistema in questione. Si definisce

$$p = p(w, c, t) : A \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$$

la funzione di distribuzione degli agenti della popolazione considerata, dove  $A = [-1, 1]$ . Si noti che il termine  $p(w, c, t)dw dc$  rappresenta la frazione di individui che al tempo  $t$  hanno opinione e connettività rispettivamente comprese tra  $w$  e  $w + dw$  e tra  $c$  e  $c + dc$ .

Ripercorrendo una procedura simile a quella esposta in Sezione 2.2 è possibile ottenere l'equazione di tipo Boltzmann in forma debole per l'evoluzione in tempo di  $p = p(w, c, t)$  che fa riferimento alle leggi di interazione microscopiche (5.1); utilizzando la notazione (2.10) per la media di una variabile aleatoria, per ogni funzione test  $\phi : A \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  sufficientemente regolare e a supporto compatto nella variabile  $c$ , si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \int_A \phi(w, c) p(t, w, c) dw dc \\ &= \left\langle \mu \int_{\mathbb{R}_+} \int_A \int_{\mathbb{R}_+} \int_A [\phi(w') - \phi(w)] p(t, w, c) p(t, w_*, c_*) dw dc dw_* dc_* \right\rangle, \end{aligned}$$

dove  $\mu$  rappresenta la frequenza di interazione. Al fine di semplificare la descrizione cinetica si suppone che la distribuzione della connettività vari molto lentamente rispetto a quella dell'opinione e dunque essa può essere considerata costante in tempo. Si ipotizza inoltre che la distribuzione degli agenti della popolazione fattorizzi in un termine che dipende solo alla connettività ed uno dipendente dall'opinione nel tempo, ovvero  $p(t, w, c) = f(t, w)g(c)$ . A livello intuitivo infatti non c'è alcun motivo per il quale una certa opinione sia espressa da agenti con una data connettività e viceversa. Una diretta conseguenza di tale ipotesi risiede nel fatto che l'osservabile del sistema  $\phi(w, c) = \varphi(w)\psi(c)$ ; dunque tali assunzioni permettono di semplificare l'equazione di tipo Boltzmann in forma debole scritta precedentemente, ottenendo

$$\Psi \frac{d}{dt} \int_A \varphi(w) f(t, w) dw = \left\langle \mu \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \psi(c) \Phi(t, c, c_*) g(c) g(c_*) dc dc_* \right\rangle \quad (5.8)$$

dove

$$\begin{aligned}\Psi &:= \int_{\mathbb{R}_+} \psi(c)g(c) dc , \\ \Phi(t, c, c_*) &:= \int_A \int_A [\varphi(w') - \varphi(w)] f(t, w) f(t, w_*) dw dw_*\end{aligned}$$

Tramite la scelta di particolari osservabili in (5.8) è possibile ricavare alcune proprietà della dinamica; per  $\psi(c) = \varphi(w) = 1$  si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_A f(t, w) dw = 0 ,$$

cioè vale la conservazione della massa in tempo. Inoltre sia  $M(t) := \int_A wf(t, w) dw$  l'opinione media della popolazione, scegliendo  $\varphi(w) = w$  e  $\psi(c) = 1$  nell'equazione di tipo Boltzmann (5.8) e ricordando il modello microscopico (5.1) con funzione di interazione (5.2), si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{dM(t)}{dt} &= \gamma\mu\frac{\mathcal{C}}{2} \left[ \left( \int_A w_* f(t, w_*) dw_* \right) - \left( \int_A wf(t, w) dw \right) \right] \\ &= \gamma\mu\frac{\mathcal{C}}{2} (m - m) = 0 ,\end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{C} := 2 \left( \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} k(c, c_*)g(c)g(c_*) dc dc_* \right) \leq 2 . \quad (5.9)$$

Dunque l'opinione media si conserva nel tempo ed essa può essere trattata come un parametro del modello, determinata direttamente dalle condizioni iniziali scelte

$$M := \int_A wf_0(w)dw , \quad f_0 := f(0, w) . \quad (5.10)$$

Tramite un opportuno cambio di variabili e ricordando che l'equazione (5.8) è valida per ogni funzione test è possibile ricavare l'equazione di tipo Boltzmann in forma forte

$$\partial_t f = \mu \mathcal{Q}(f, f)(t, w) , \quad (5.11)$$

dove

$$\mathcal{Q}(f, f)(t, w) := \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} \int_A \frac{1}{J} f(t, w) f(t, w_*) g(c'_*) dw'_* dc'_* \right\rangle - f$$

rappresenta l'operatore di collisione che descrive le interazioni binarie tra coppie di pedoni all'interno della stessa popolazione; il termine  $|J|$  rappresenta il determinante Jacobiano della trasformazione che porta dall'equazione di Boltzmann in forma debole a quella forte.

## 5.2 Limite delle interazioni quasi invarianti ed equazione di Fokker-Planck

In questa sezione si studierà l'equazione debole di tipo Boltzmann (5.8) nel regime delle interazioni quasi invarianti, con l'obiettivo di studiare la distribuzione statistica degli stati microscopici che emerge spontaneamente dalle interazioni dopo che il sistema abbia raggiunto un sostanziale equilibrio.

Si procede in maniera simile a quanto esposto in Sezione 2.3 e dunque anche in questo caso l'idea di base è quella di aumentare la frequenza delle interazioni e parallelamente assumere all'interno della popolazione delle interazioni che fanno variare di poco gli stati post-interazione degli agenti. Si noti che in questo caso nel modello microscopico (5.1), oltre al processo di interazione fra gli agenti, è presente un termine di fluttuazione stocastica che contribuisce a modificare l'opinione della coppia interagente. Dunque la scelta è quella di avere un peso delle interazioni tendente a zero, così come per la varianza della fluttuazione stocastica, cioè  $\gamma, \sigma^2 \rightarrow 0^+$ ; nello specifico si impone che esse siano due infinitesimi dello stesso ordine, ovvero

$$\lim_{\sigma^2, \gamma \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^2}{\gamma} = \lambda, \quad \lambda > 0. \quad (5.12)$$

Parallelamente si rendono più frequenti tali interazioni imponendo

$$\mu = \frac{1}{\gamma}. \quad (5.13)$$

Sostituendo tale frequenza di interazione in (5.8) e supponendo che

$$\varphi \in T := \{\varphi \in C^3(-1, 1) : \varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0\}, \quad \psi(c) = 1,$$

con le stesse notazioni usate precedentemente, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(w) f(t, w) dw = \left\langle \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi(t, c, c_*) g(c) g(c_*) dc dc_* \right\rangle, \quad (5.14)$$

dove

$$\Phi(t, c, c_*) := \int_A \int_A [\varphi(w') - \varphi(w)] f(t, w) f(t, w_*) dw dw_*.$$

Poiché siamo interessati a studiare il regime in cui  $\gamma \rightarrow 0^+$  si espande in serie di Taylor arrestato al terzo ordine la differenza  $\varphi(\theta^*) - \varphi(\theta)$  presente in  $\Phi(t, c, c_*)$  ottenendo

$$\begin{aligned} \varphi(w') - \varphi(w) &= \varphi'(w)(w' - w) + \frac{1}{2} \varphi''(w)(w' - w)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \varphi'''(\bar{w})(w' - w)^3, \quad \bar{w} \in [\min\{w, w'\}, \max\{w, w'\}]; \end{aligned}$$

sostituendo in (5.14) e tenendo conto delle leggi di interazione (5.1) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(w) f(t, w) dw = \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{C}}{2} \int_A \int_A \varphi'(w)(w_* - w)f(t, w)f(t, w_*) dw dw_* \\
& + \frac{\gamma \mathcal{C}_2}{2} \int_A \int_A \varphi''(w)(w_* - w)^2 f(t, w)f(t, w_*) dw dw_* \\
& + \frac{\sigma^2}{2\gamma} \int_{\mathbb{R}_+} \int_A \varphi''(w)D^2(w, c)f(t, w)g(c) dw dc \\
& + R(t, \varphi) ,
\end{aligned}$$

dove il termine  $\mathcal{C}$  è stato definito in (5.9) e

$$\mathcal{C}_2 := 2 \left( \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} k^2(c, c_*)g(c)g(c_*) dc dc_* \right) ,$$

mentre il termine relativo al resto di Lagrange nello sviluppo è

$$\begin{aligned}
R(t, \varphi) & := \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{A \times A} \varphi'''(\bar{w})H(w, w_*, c, c_*)f(t, w)f(t, w_*)g(c)g(c_*) dw dw_* dc dc_* , \\
H(w, w_*, c, c_*) & := \gamma^2 k^3(c, c_*)(w_* - w)^3 + 3k(c, c_*)(w_* - w)D^2(w, c)\sigma^2 + \frac{D^3(w, c)}{\gamma} \langle \eta^3 \rangle .
\end{aligned}$$

Si noti come tutti gli addendi della funzione  $H(w, w_*, c, c_*)$  si annullino per  $\gamma, \sigma^2 \rightarrow 0^+$ . Di seguito si discute solo il limite per l'ultimo addendo; si definisce la variabile  $Y$  come la variabile aleatoria di fluttuazione stocastica  $\eta$  standardizzata, ovvero

$$Y := \frac{\eta}{\sqrt{\sigma^2}} \implies \langle Y \rangle = 0 , \quad \langle Y^2 \rangle = 1 ,$$

da cui si ottiene

$$\eta = Y\sqrt{\sigma^2} \implies \langle \eta^3 \rangle = \langle Y^3 \rangle (\sigma^2)^{3/2} .$$

Utilizzando l'ipotesi (5.12), si mostra che

$$\lim_{\sigma^2, \gamma \rightarrow 0^+} D^3(w, c) \langle Y^3 \rangle \sigma^2 \frac{\sigma}{\gamma} = 0 .$$

Svolgendo dunque il limite per  $\gamma, \sigma \rightarrow 0^+$  in (5.15) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_A \varphi(w)f(t, w) dw = \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{C}}{2} \int_A \int_A \varphi'(w)(w_* - w)f(t, w)f(t, w_*) dw dw_* \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \int_A \varphi''(w)D^2(w, c)f(t, w)g(c) dw dc . \end{aligned}$$

L'equazione di Fokker-Planck è la forma forte dell'equazione (5.16); per ricavarla è sufficiente integrare per parti il secondo membro e ricordando che  $\varphi \in T$  si ottiene

$$\partial_t f = \frac{\lambda}{2} \partial_w^2 \left[ \mathcal{D}(w)f \right] + \frac{\mathcal{C}}{2} \partial_w \left[ (w - M)f \right] , \quad (5.17)$$

dove l'opinione media  $M$  e la costante  $\mathcal{C}$  sono state definite rispettivamente in (5.10) e (5.9), mentre l'intensità della fluttuazione stocastica è definita da

$$\mathcal{D}(w) := \int_{\mathbb{R}_+} D^2(w, c)g(c) dc . \quad (5.18)$$

L'equazione di Fokker-Planck (5.17) mostra come la variazione nel tempo della distribuzione delle opinioni  $f = f(t, w)$  è data dalla somma di due termini che sono strettamente collegati ai due processi presenti nel modello microscopico (5.1) di interazione deterministica e di fluttuazione stocastica. Infatti il termine di fluttuazione stocastica  $\eta$  presente a livello microscopico si traduce, in un regime delle interazioni quasi invariati, in un termine diffusivo a livello aggregato

$$\frac{\lambda}{2} \partial_w^2 \left[ \mathcal{D}(w)f \right] .$$

Invece la parte deterministica delle interazioni rappresentata dalla funzione di interazione  $\mathcal{I}(w, w_*, c, c_*)$  passando al limite quasi invariante da un contributo di trasporto della distribuzione  $f$  nello spazio degli stati microscopici  $(w, c)$  attraverso il termine

$$\mathcal{C}(M - w) = \int_A \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{I}(w, w_*, c, c_*)f(t, w_*, c_*) dw_* dc_* ;$$

si noti come questo termine rappresenti il peso medio delle iterazioni che l'agente di stato  $(w, c)$  ha con tutti gli altri agenti. Dunque passando dall'equazione di tipo Boltzmann (5.11) a quella di Fokker-Planck (5.17) si conserva una traccia delle caratteristiche microscopiche principali (deterministica e stocastica) che guidano l'evoluzione di  $f$  nel tempo, nonostante si sia passati in un particolare regime.

Di seguito si risolve l'equazione di Fokker-Planck (5.17); si definisce la distribuzione asintotica di equilibrio

$$f^\infty(w) := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, w) ; \quad (5.19)$$

si osservi come essa risolva ancora l'equazione Fokker-Planck perché è ancora una distribuzione. Sostituendo  $f^\infty$  in (5.17) si ottiene

$$0 = \frac{\lambda}{2} \partial_w \left[ \mathcal{D}(w)f^\infty \right] + \frac{\mathcal{C}}{2} \left[ (w - M)f^\infty \right] ,$$

da cui si ottiene la soluzione in forma generale

$$f^\infty(w) = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{D}(w)} \exp\left(\frac{\mathcal{C}}{\lambda} \int_A \frac{M-w}{\mathcal{D}(w)} dw\right), \quad (5.20)$$

dove  $\mathcal{K} > 0$  è una costante di normalizzazione scelta in modo che l'integrale su  $A$  della funzione  $f^\infty$  sia unitario.

Si noti come la soluzione dipenda in particolare dalla scelta del coefficiente di diffusione  $D(w, c)$  presente nel termine  $\mathcal{D}(w)$  definito in (5.18). Di seguito dunque si studia l'equazione (5.17) per una scelta particolare del coefficiente di diffusione che permette di calcolare la soluzione in maniera esplicita. In accordo con l'ipotesi (5.5), si consideri

$$D(|w|, c) = \beta(c)D(|w|) = \beta(c)(1 - w^2)^q, \quad q > 0. \quad (5.21)$$

Si osservi come la funzione risulti essere non crescente in  $|w|$  e tenda ad annullarsi nelle opinioni estreme  $w = \pm 1$ . Si noti che per questa scelta l'intensità di diffusione

$$\mathcal{D}(w) = \mathcal{B}(1 - w^2)^{2q}, \quad q > 0,$$

dove

$$\mathcal{B} := \int_{\mathbb{R}_+} \beta^2(c)g(c) dc \geq 0. \quad (5.22)$$

Dunque l'integrale presente nell'esponentiale della soluzione generale (5.20) converge se  $0 < q \leq 1/2$ . Quindi è sufficiente restringere lo studio della soluzione dell'equazione di Fokker-Planck per tali valori dell'esponente  $q$  presente in (5.21).

Di seguito si studia il caso particolare dove il coefficiente di diffusione scelto è quello in (5.21) con  $q = 1/2$ , ovvero

$$D(w, c) = \beta(c)\sqrt{1 - w^2}. \quad (5.23)$$

**Osservazione.** Il coefficiente di diffusione deve soddisfare le condizioni di ammissibilità fisica (5.7) e in particolare la condizione

$$D(|w|) \leq \frac{1}{a} \min\{1 + w, 1 - w\}, \quad a > 0. \quad (5.24)$$

Dunque se si vuole descrivere la dinamica attraverso l'equazione di tipo Boltzmann (5.8) è necessario modificare la scelta del coefficiente di diffusione (5.23) in maniera che esso dipenda dal coefficiente di interazione  $\gamma \in [0, 1]$  e dal parametro  $p > 0$ ,

$$D_\gamma(w) := \sqrt{[1 - (1 + \gamma^p)w^2]_+}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma^p}{1 + \gamma^p}}; \quad (5.25)$$

il parametro  $a > 0$  è stato calcolato imponendo la condizione di tangenza tra la funzione  $D_\gamma(w)$  e il secondo membro della condizione (5.24), si veda la Figura 5.1. Tuttavia si noti che nello svolgere il limite di Fokker-Planck, in particolare per  $\gamma \rightarrow 0^+$ , il coefficiente di diffusione  $D_\gamma(w)$  in (5.25) tende uniformemente al coefficiente di diffusione (5.23), nell'intervallo  $A = [-1, 1]$ . Quindi nell'equazione in forma debole di tipo Boltzmann è sufficiente considerare la funzione  $D_\gamma(|w|)$  (che rispetta la condizione di ammissibilità fisica (5.24) per  $\gamma \in [0, 1]$  fissato) e successivamente nel ricavare l'equazione di

Fokker-Planck il processo stesso di passaggio al limite mostra che è possibile ritenere ammissibile il coefficiente  $D(|w|)$ . Si noti infatti che le condizioni di ammissibilità fisica (5.7) sono una conseguenza del modello microscopico, ma quando si passa al limite nell'equazione di Fokker-Planck viene perso di vista il dettaglio delle interazioni microscopiche e dunque in tale regime non è necessario che il coefficiente di diffusione soddisfi le condizioni (5.7).

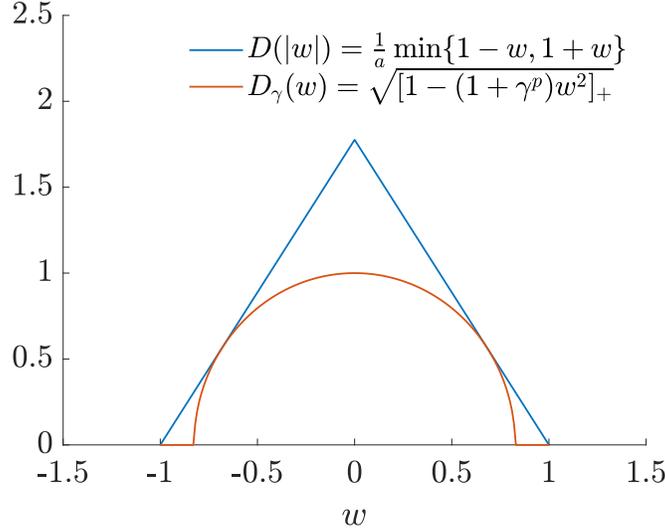


Figura 5.1: In blu è mostrata la regione di bordo della condizione (5.24), mentre in rosso il coefficiente di diffusione (5.25), dove  $\gamma = 0.1$  e  $p = 1/3$ .

Sostituendo (5.23) in (5.20) ed esplicitando la costante  $\mathcal{K}$  la distribuzione asintotica risulta essere

$$f^\infty(w) = \frac{(1+w)^{[\mathcal{C}(1+M)/2\lambda\mathcal{B}]-1} (1-w)^{[\mathcal{C}(1-M)/2\lambda\mathcal{B}]-1}}{2^{(\mathcal{C}/\lambda\mathcal{B})-1} B\left(\frac{\mathcal{C}(1+M)}{2\lambda\mathcal{B}}, \frac{\mathcal{C}(1-M)}{2\lambda\mathcal{B}}\right)}, \quad (5.26)$$

dove il parametro  $\mathcal{B}$  è stato definito in (5.22), mentre  $B(x, y)$  è la funzione beta di Eulero

$$B(x, y) := \frac{1}{2^{x+y-1}} \int_{-1}^1 (1+w)^{x-1} (1-w)^{y-1} dw.$$

**Osservazione (1).** La (5.26) è una distribuzione Beta, infatti è sufficiente osservare che se  $U \sim \text{Beta}(a, b)$  allora la trasformazione lineare  $W = 2U - 1$  è ancora una Beta, rispettivamente con media e varianza

$$\mathbb{E}[W] = 2\mathbb{E}[U] - 1, \quad \text{Var}[W] = 4\text{Var}[U].$$

Quindi dato che in questo caso

$$a = \frac{\mathcal{C}(1+M)}{2\lambda\mathcal{B}}, \quad b = \frac{\mathcal{C}(1-M)}{2\lambda\mathcal{B}}$$

si ha che (5.26) è una distribuzione Beta di media  $M$  e varianza  $\frac{1-M^2}{\lambda\mathcal{B}+1}$ .

**Osservazione (2).** La soluzione (5.26) dipende dall'opinione media  $M$ , infatti essendo costante nel tempo essa deve comparire nella distribuzione limite; quindi a seconda del valore dell'opinione media della distribuzione iniziale degli agenti si potranno avere forme diverse della configurazione di equilibrio  $f^\infty$ . Ad esempio, se  $M = \pm 1$  allora  $f^\infty(w) = \delta_0(w \mp M)$ ; ciò si giustifica osservando che essendo  $M$  costante nel tempo, se essa risulta essere coincidente ad una delle due opinioni estreme si ha che all'istante iniziale tutti gli agenti hanno tale opinione e, per quanto detto, tutti gli agenti all'equilibrio presenteranno tale opinione; dunque la distribuzione finale in questo caso sarà una delta di Dirac concentrata nell'opinione media iniziale degli agenti.

Si noti come la forma della distribuzione (5.26) dipenda dal valore del rapporto

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} k(c, c_*) g(c) g(c_*) dc dc_*}{\int_{\mathbb{R}_+} \beta^2(c) g(c) dc} .$$

Tale rapporto indica quanto peso si da alle interazioni rispetto alla fluttuazione stocastica. Se il rapporto è minore di uno, si sta dando più peso alla fluttuazione stocastica e quindi all'autostima dell'agente che, se di opinione iniziale estrema, tende a rimanere tale anche nella configurazione di equilibrio; se invece il rapporto è maggiore di uno, si da più peso all'interazione e quindi si avrà una distribuzione più concentrata attorno all'opinione media, proprio perché gli agenti sono più propensi a mediare le loro opinioni tramite interazione.

Con un approccio più analitico è possibile validare le deduzioni precedenti. Si noti come la distribuzione Beta in (5.26) vari a seconda dei parametri  $a$  e  $b$ ; è possibile distinguere in tre casi significativi

(i)  $a \geq 1$  ,  $b \geq 1$  ;

(ii)  $a \leq 1$  ,  $b > 1$  oppure  $a > 1$  ,  $b \leq 1$  ;

(iii)  $a < 1$  ,  $b < 1$  .

Riscrivendo tali condizioni in funzione dei termini  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{B}$ , i tre casi principali risultano essere

(i)  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} \geq \max \left\{ \frac{2\lambda}{1+M} , \frac{2\lambda}{1-M} \right\}$  ,

(ii)  $\min \left\{ \frac{2\lambda}{1+M} , \frac{2\lambda}{1-M} \right\} \leq \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} < \max \left\{ \frac{2\lambda}{1+M} , \frac{2\lambda}{1-M} \right\}$  ,

(iii)  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} < \min \left\{ \frac{2\lambda}{1+M} , \frac{2\lambda}{1-M} \right\}$  .

In Figura 5.2 è possibile avere un riscontro delle deduzioni fatte in precedenza, nel caso specifico in cui  $M = 1/4$  e  $\lambda = 1$ ; infatti si noti come, più il rapporto  $\mathcal{C}/\mathcal{B}$  cresca, più la distribuzione finale tenda a concentrarsi attorno all'opinione media; viceversa  $f^\infty(w)$  tende verso le due opinioni estreme.

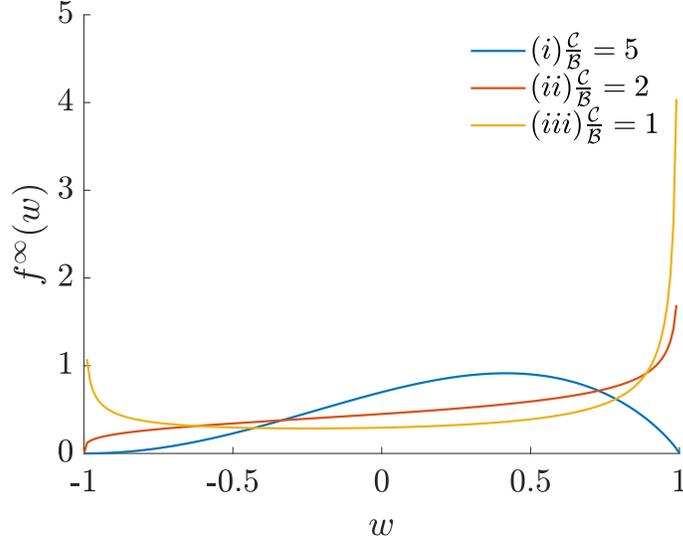


Figura 5.2: Grafico relativo alla soluzione (5.26) con  $M = \frac{1}{4}$  e  $\lambda = 1$  al variare del rapporto  $C/B$ .

### 5.3 Simulazioni numeriche

In questa sezione verrà simulata numericamente la soluzione dell'equazione di tipo Boltzmann (5.11) attraverso il metodo Nanbu-like (Algoritmo 3, Capitolo 3); al fine di effettuare un confronto con la soluzione analitica di Fokker-Planck (5.26), tale simulazione sarà effettuata in un regime quasi invariante e quindi scegliendo un valore del coefficiente  $\gamma$  sufficientemente piccolo. Ricordando l'equazione (3.20), una coppia di agenti interagisce con probabilità  $\mu\Delta t$  mentre con probabilità  $(1 - \mu\Delta t)$  non si ha interazione; dunque scegliendo un passo temporale pari a  $\Delta t = 1/\mu$  tutti gli agenti interagiscono fra loro ad ogni passo di tempo, aumentando la velocità di convergenza del metodo. Si noti tuttavia che al fine di simulare l'equazione di tipo Boltzmann in un regime di interazioni quasi invarianti è necessario scegliere  $\Delta t = 1/\mu = \gamma$  e pertanto in questo modo la velocità di convergenza diminuisce. Per rimediare a ciò, oltre a far interagire ad ogni passo di tempo le particelle, effettueremo un numero di passi temporali in cui c'è interazione pari a  $n_{max}$ ; dunque la distribuzione finale degli agenti verrà osservata ad un tempo  $t^\infty = n_{max}\gamma$ .

In Figura 5.4 sono riportate le simulazioni numeriche nei tre casi principali ricavate analiticamente nel regime di interazione quasi invarianti (mostrate in Figura 5.2). Per quanto riguarda la distribuzione iniziale  $p(0, w, c) = f(0, w)g(c)$ , al fine di confrontare i risultati analitici ricavati da Fokker-Planck, si è scelto

$$f(0, w) := \chi_{(0, \frac{1}{2})}, \quad (5.27)$$

ovvero una distribuzione uniforme sull'intervallo  $[0, 1/2]$  con media  $M = 1/4$ . Invece per la distribuzione delle connettività si è scelto una distribuzione esponenziale con media uno,

$$g(c) = e^{-c}. \quad (5.28)$$

Tale scelta è anche giustificata dal fatto che in un Social Network solo una minoranza di agenti è identificata come influencers, ovvero come agenti con una connettività molto alta rispetto alla media.

Come anticipato, il parametro  $\gamma$  è stato scelto sufficientemente piccolo al fine di simulare un regime di interazioni quasi invariante ( $\gamma = 10^{-2}$ ), mentre per la funzione che quantifica il peso delle connettività nell'interazione

$$k(c, c_*) = \frac{1}{1 + \frac{c}{c_*}} ,$$

in accordo con (5.3). Si noti che con queste scelte di  $k(c, c_*)$  e  $g(c)$  si ottiene  $\mathcal{C} = 1$  (si ricordi la definizione in (5.9)).

Il termine diffusivo  $D_\gamma(w, c) = \beta(c)D_\gamma(w)$  dove  $D_\gamma(w)$  è stato scelto in accordo con (5.25) in modo da rispettare la condizione di ammissibilità fisica (5.24); invece per quanto riguarda il termine legato alla connettività si considera  $\square$

$$\beta(c) := K \exp\left(-\frac{c^2}{2d^2}\right), \quad c \geq 0, \quad d > 0, \quad (5.29)$$

$$K := rd^2 + sd + u, \quad r, s, u \in \mathbb{R} . \quad (5.30)$$

Questa scelta è dovuta al fatto che più un agente ha una connettività alta, più esso sarà meno propenso a cambiare la propria opinione; è dunque ragionevole associare ad un agente un termine diffusivo inversamente proporzionale alla sua connettività. Nello specifico, si osservi che tale espressione di  $\beta(c)$  rappresenta la parte di una funzione Gaussiana (non normalizzata) che occupa il primo quadrante, si veda la Figura 5.3. In generale la costante  $K$  non garantisce che l'integrale della funzione su  $\mathbb{R}_+$  sia unitario per ogni scelta dei parametri  $r, s, u$ , tuttavia fa in modo che i vincoli di ammissibilità fisica per  $\eta$  permettano di effettuare una scelta semplice per tale variabile aleatoria. Il parametro  $d > 0$  è stato fatto variare al fine di simulare le tre casistiche proposte in Figura 5.2; si ricordi infatti che la scelta della funzione  $\beta(c)$  influenza il calcolo dell'integrale  $\mathcal{B}$  in accordo con la definizione (5.22). Di seguito si riportano le varie scelte del parametro  $d$  in ognuno dei tre casi in Figura 5.2:

- (a)  $d = 20 \implies \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = 1$
- (b)  $d = 10 \implies \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = 2$
- (c)  $d = 8.7 \implies \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = 5$

Come anticipato, con le scelte fatte fino ad ora, i vincoli di ammissibilità fisica permettono che la scelta della variabile aleatoria sia la più semplice possibile, nello specifico una distribuzione uniforme sull'intervallo  $[-\sqrt{3\lambda\gamma}, \sqrt{3\lambda\gamma}]$ ; si noti come grazie alla scelta di questi estremi  $\eta$  abbia media nulla, come richiesto dai vincoli di ammissibilità fisica (5.7).

Infine in Figura 5.5 sono state effettuate le simulazioni tramite il metodo semi-Lagrangiano

---

<sup>1</sup>Dopo aver effettuato la scelta per il parametro  $d$  nelle tre casistiche in Figura 5.2, i parametri  $r, s, u$  vengono calcolati in modo tale che il rapporto  $\mathcal{C}/\mathcal{B}$  sia quello desiderato nei tre casi analizzati. Nelle simulazioni effettuate i parametri risultano essere  $r = -0.0188$ ,  $s = 0.6162$ ,  $u = -3.6994$ .

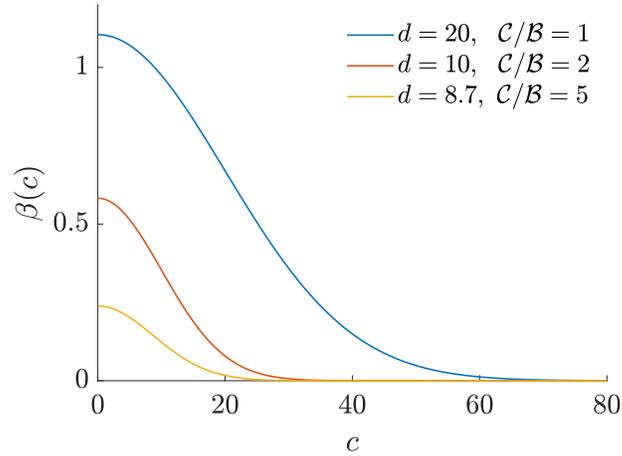


Figura 5.3: Grafici relativi alla funzione definita in (5.29) che quantifica il peso della connettività nella fluttuazione stocastica nei tre casi principali della soluzione di Fokker-Planck; i parametri utilizzati nella costante  $K$  definita in (5.30) sono:  $r = -0.0188$ ,  $s = 0.6162$ ,  $u = -3.6994$ .

(si veda [28]) della soluzione dell'equazione di Fokker-Planck (5.17) nei tre casi principali. Partendo dalla condizione iniziale (5.27) per la distribuzione delle opinioni e dall'equazione (5.28) per le connettività, è stata simulata la dinamica con un passo temporale pari a  $\Delta t = 0.02$  fino a un tempo finale  $T = 4$ . Si noti come le simulazioni riescano ad approssimare in maniera adeguata la soluzione analitiche nelle tre casistiche principali (riportate in Figura 5.1).

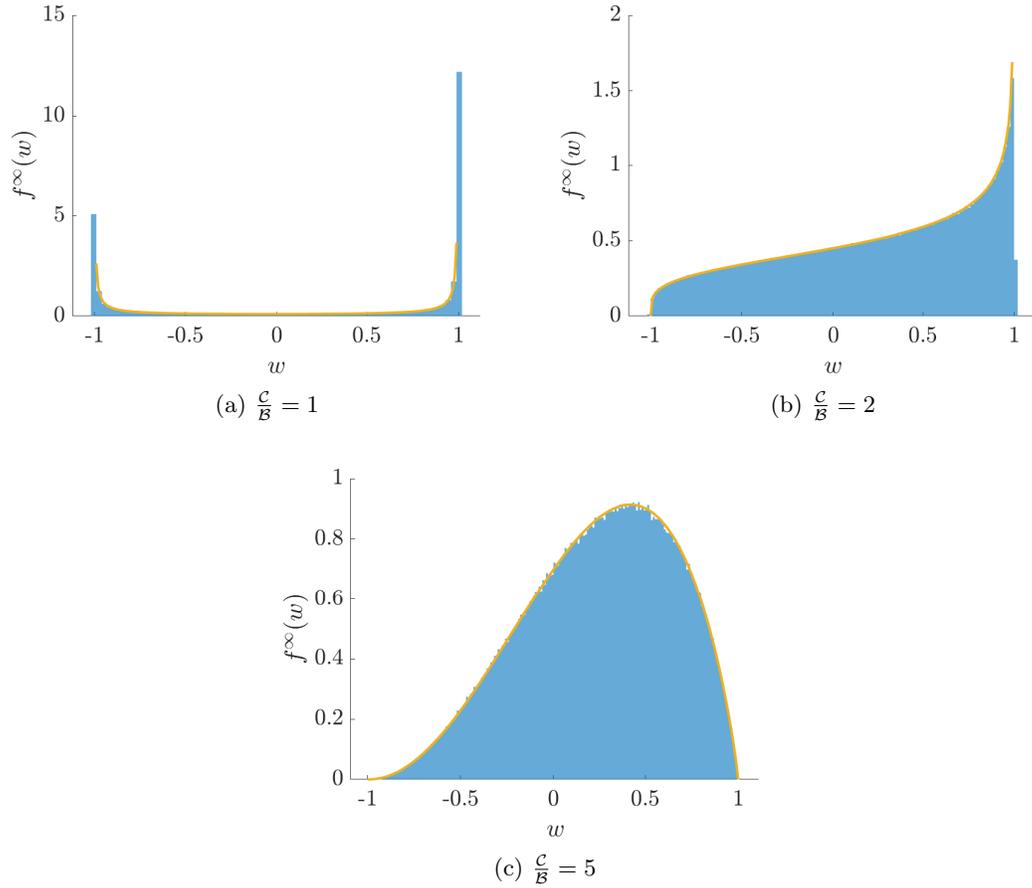


Figura 5.4: Le tre simulazioni in blu sono state effettuate per un numero di agenti pari a  $N = 10^6$ , al variare del rapporto  $C/B$ , con  $M = 1/4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\gamma = 10^{-2}$ ; la distribuzione finale è stata osservata al tempo  $t^\infty = 10$ , ( $n_{max} = 10^3$ ) partendo da una distribuzione iniziale  $f(0, w) = \chi(w \in [0, 1/2])$ ,  $g(c) = e^{-c}$ . Si noti come le simulazioni approssimino in maniera adeguata la soluzione analitica dell'equazione di Fokker-Planck (5.17) riportata in giallo.

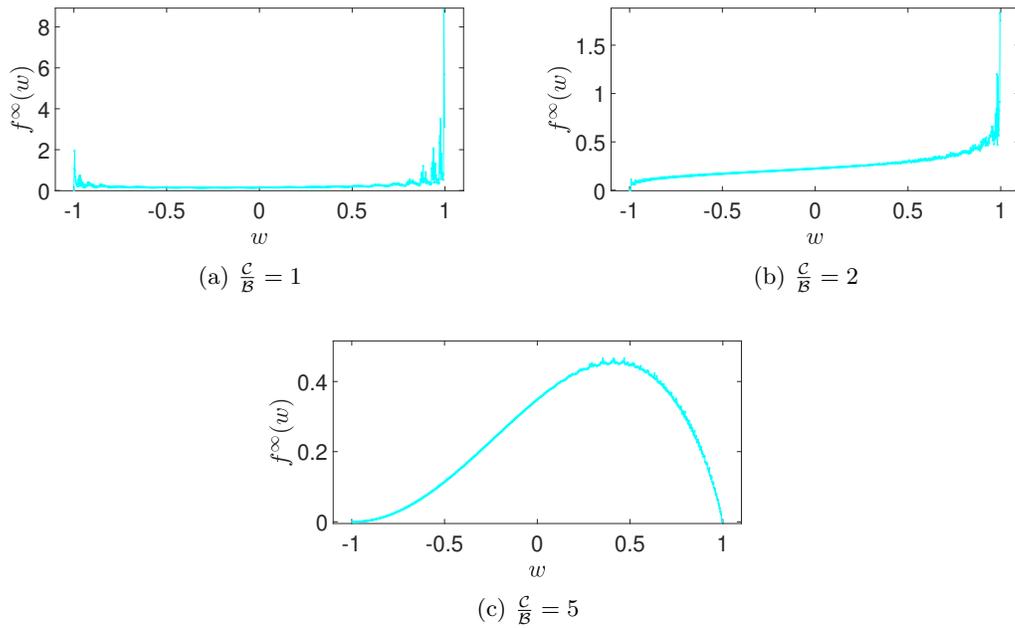


Figura 5.5: Partendo dalla condizione iniziale (5.27), sono state effettuate le simulazioni dei tre casi principali della soluzione dell'equazione di Fokker-Planck (5.17); le simulazioni sono state ottenute tramite il metodo semi-Lagrangiano con passo temporale  $\Delta t = 0.02$  e riportando la distribuzione nei tre casi ad un tempo finale  $T = 4$ .

## 6. Conclusione e sviluppi futuri

In questo elaborato sono stati introdotti dei modelli matematici di tipo cinetico al fine di descrivere dei particolari tipi di sistemi, detti multiagente. Nello specifico, sono state utilizzate delle equazioni di tipo Boltzmann per studiare i fenomeni derivanti da due tipi di sistemi: folle di individui interagenti e scambi di opinione su un Social Network. In entrambe le applicazioni la descrizione matematica è stata effettuata in tre passi principali. Attraverso un modello microscopico binario è stata ottenuta una descrizione dell'interazione fra due agenti generici del sistema considerato. Successivamente è stata ricavata l'equazione di tipo Boltzmann, ottenendo in tal modo una descrizione in forma statistica delle caratteristiche principali del sistema considerato. Infine, tale equazione è stata studiata nel regime di interazioni quasi invariante, che ha permesso di descrivere il sistema come un continuo, attraverso l'equazione di Fokker-Planck.

Per quanto riguarda le folle è stato osservato che, sotto opportune ipotesi, i pedoni tendono a raggiungere una direzione comune all'interno della loro popolazione di appartenenza; tale fenomeno è stato osservato sia nel caso di una folla singola, sia nel caso di due popolazioni interagenti fra loro. In tal senso è stata confermata la tendenza di questo tipo di sistemi nel raggiungere un'organizzazione collettiva ben definita solo attraverso le interazioni fra gli agenti da cui sono formati. Nei due sistemi di folle considerati si è preso in considerazione una probabilità di interazione fra due agenti del sistema pari alla densità della folla di appartenenza, nel caso di folla singola, mentre nel caso di due folle interagenti pari alla densità della popolazione opposta; è possibile ampliare la trattazione scegliendo diversi tipi di probabilità di interazione che, oltre a dipendere dalla densità della popolazione, dipendono anche dalla posizione dei due agenti che interagiscono o dal loro tempo di collisione.

Per la seconda applicazione, si è considerato il problema della formazione dell'opinione in un Social Network, dove il cambiamento di opinione dipende anche dalla connettività degli agenti. In particolare si è assunto, in accordo con la letteratura, che gli agenti con bassa connettività siano più inclini ad essere influenzati da quelli con connettività più alta (detti influencers). I risultati ottenuti hanno evidenziato il ruolo centrale del Social Network per la promozione di diverse forme di equilibrio per la distribuzione dell'opinione nel sistema. Questa trattazione può costituire una base formale per l'analisi del problema di diffusione della popolarità di un determinato prodotto, indotto dalla dinamica di opinione descritta nel Capitolo 5, si veda [27].

# Bibliography

- [1] L. Pareschi and G. Toscani, *Interacting Multiagent Systems: Kinetic Equations and Monte Carlo Methods* (Oxford University Press, New York, 2013).
- [2] Cucker F. and Smale S. . Emergent behavior in flocks. *IEEE Trans. Automat. Control*, 52 (2007), 852-862.
- [3] Povzner A.Y. . The Boltzmann equation in Kinetic theory of gases. *Amer Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 47 (1962), 193-216.
- [4] D. Helbing and P. Molnàr, Social force model for pedestrian dynamics, *Phys. Rev. E*, 51 (1995), 4282-4286.
- [5] C. Burstedde, K. Klauck, A. Schadschneider and J. Zittartz, Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton, *Phys. A*, 295 (2001), 507-525.
- [6] S. Hoogendoorn and P. Bovy, Pedestrian route-choice and activity scheduling theory and models, *Transport. Res. B-Meth.*, 38 (2004), 169-190.
- [7] R. Borsche, R. M. Colombo, M. Garavello and A. Meurer, Differential equations modeling crowd interactions, *J. Nonlinear Sci.*, 25 (2015), 827-859.
- [8] R. M. Colombo, M. Garavello and M. Lécureux-Mercier, A class of non-local models for pedestrian traffic, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22 (2012), 1150023 (34 pages).
- [9] A. Festa, A. Tosin and M.-T. Wolfram, Kinetic Description of Collision Avoidance in Pedestrian Crowds by Sidestepping, in *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, Osaka, Japan, 11 (2018), 491-520.
- [10] G. W. Mangold and D. J. Faulds, Social media: The new hybrid element of the promotion mix, *Bus. Horizons* 52, 357 (2009).
- [11] S. Redner, How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution, 4, 131 (1998).
- [12] S. Sinha and S. Raghavendra, Hollywood blockbusters and longtailed distributions, 42, 293 (2004).

- [13] B. Düring and M.-T. Wolfram, Opinion dynamics: Inhomogeneous Boltzmann-type equations modeling opinion leadership and political segregation, *Proc. R. Soc. A* 471, 20150345 (2015).
- [14] B. Düring, P. A. Markowich, J. F. Pietschmann, and M.-T. Wolfram, Boltzmann and Fokker-Planck equations modeling opinion formation in the presence of strong leaders, *Proc. R. Soc. A* 465, 3687 (2009).
- [15] S. Biswas, Mean-field solutions of kinetic-exchange opinion models, *Phys. Rev. E* 84, 056106 (2011).
- [16] A. Lipowski, D. Lipowska, and A. L. Ferreira, Agreement dynamics on directed random graphs, *J. Stat.Mech. Theory Exp.* (2017) 063408.
- [17] M.Pérez-Llanos, J. P. Pinasco, N. Saintier, and A. Silva, Opinion formation models with heterogeneous persuasion and zealotry, 1 (2018), 1803-10114.
- [18] A. Waagen, G. Verma, K. Chan, A. Swami, and R. D’Souza, Effect of zealotry in high-dimensional opinion dynamics models, *Phys. Rev. E* 91, 022811 (2015).
- [19] J. Xie, S. Sreenivasan, G. Korniss, W. Zhang, C. Lim, and B. K. Szymanski, Social consensus through the influence of committed minorities, *Phys. Rev. E* 84, 011130 (2011).
- [20] K. Freberg, K. Graham, K. McGaughey, and L. A. Freberg, Who are the social media influencers? A study of public perceptions, *Public Relat. Rev.* 37, 90 (2011).
- [21] A. Polus, J. Schofer and A. Ushpiz, Pedestrian flow and level of service, *J. Transp. Eng.*, 109 (1983), 46-56.
- [22] U. Weidmann, *Transporttechnik der Fussgänger*, Technical report, ETH, Zurich, 1992.
- [23] G. Albi, L. Pareschi and M. Zanella, Boltzmann-type control of opinion consensus through leaders, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 372 (2014), 20140138, 18 pp.
- [24] C. Canuto, F. Fagnani and P. Tilli, An Eulerian approach to the analysis of Krause’s consensus models, *SIAM J. Control Optim.*, 50 (2012), 243-265.
- [25] S. Motsch and E. Tadmor, Heterophilious dynamics enhances consensus, *SIAM Rev.*, 56 (2014), 577-621.
- [26] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhauser Verlag, Basel, 2008.
- [27] G. Toscani, A. Tosin and M. Zanella, Opinion modeling on social media and marketing aspects, *Physical Review E* 98, 022315 (2018).
- [28] E. Carlini and F.J. Silva, A Semi-Lagrangian scheme for the Fokker-Planck equation, *IFAC-PapersOnLine* 49-8 (2016) 272–277.