



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Ingegneria Meccanica magistrale  
A.a. 2018/2019  
Sessione di Laurea Dicembre 2021

# **Modellazione dinamica di carrozzina sportiva**

Relatori:  
Prof. Ing. Giuseppe Quaglia  
Correlatori:  
Ing. Paride Cavallone  
Ing. Luigi Tagliavini

Candidato:  
Francesco Bongiorno

## Sommario

Abstract .....	5
1. Introduzione .....	6
2. Modello dinamico.....	8
2.1 Impostazione modello dinamico .....	8
2.1.1 Sistemi di riferimento.....	8
2.1.2 Variabili dinamiche .....	13
2.1.3 Parametri geometrici e dinamici .....	15
2.2. Modellazione in MSC Adams.....	17
2.2.1 Coppie rotoidali .....	17
2.2.2 Motion .....	18
2.2.3 Forze .....	19
2.2.4 Variabili misurate .....	19
2.3 Modelli di contatto ruota-terreno.....	20
2.3.1 Modello di Coulomb .....	20
2.3.2 Brush Model .....	21
2.3.3 Single track model .....	22
2.3.4 Rotta's model .....	24
3. Risultati.....	26
3.1 Analisi statica.....	26
3.1.1 Coppia di sterzo .....	27
3.1.2 Coppia di sterzo da simulazione in Adams .....	30
3.2 Analisi parametrica.....	32
3.2.1 Analisi parametrica al variare del rake "o" .....	33
3.2.2 Analisi parametrica al variare di $\beta$ .....	34
3.3 Analisi dinamica.....	35
3.3.1 Traiettoria rettilinea .....	35
3.3.2 Traiettoria curvilinea .....	39
4. Discussione .....	42
4.1 Analisi risultati su traiettoria rettilinea .....	42
4.2 Analisi risultati su traiettoria curvilinea .....	44
4.2.1 Analisi dinamica lungo la direzione normale al piano stradale .....	44
4.2.2 Analisi dinamica longitudinale.....	45
4.2.3 Analisi dinamica trasversale .....	47

4.2.4 Risultati simulazioni su traiettoria curvilinea .....	48
5. Conclusioni .....	59
Bibliografia.....	60

Ringrazio il prof. Ing. Giuseppe Quaglia per avermi dato la possibilità di svolgere la tesi su un argomento di grande interesse, ringrazio i dottorandi Ing. Paride Cavallone e Ing. Luigi Tagliavini per la loro disponibilità e per i preziosi consigli che mi hanno dato durante questo percorso.

Ringrazio la mia famiglia per avermi sempre sostenuto in questi anni e per essermi sempre stata vicina.

Ringrazio di cuore tutti gli amici lontani, ma vicini.

Ringrazio Rebecca per avermi supportato, ma soprattutto sopportato in questo lungo e difficile percorso.

Ringrazio l'azienda Brembo S.p.a. per avermi dato la possibilità di svolgere il tirocinio e di approfondire tematiche molto interessanti.

## Abstract



Figura 1: Immagine della carrozzina sportiva oggetto di studio (1)

L'obiettivo del lavoro svolto è stato quello di analizzare e modellare una carrozzina sportiva, del tipo rappresentato in figura 1. Inizialmente è stata fatta una ricerca bibliografica relativa alla nomenclatura dei vari componenti della carrozzina. Poi sono stati descritti tutti i sistemi di riferimento che descrivono il modello e sono state ricavate le matrici di rotazione per passare da un sistema di riferimento all'altro.

Successivamente è stata fatta una ricerca bibliografica relativamente a modelli di contatto ruota-terreno, concentrandosi principalmente su modelli utilizzati per lo studio del comportamento di biciclette.

Il passo successivo è stato realizzare un modello dinamico di carrozzina tramite il software MSC Adams in modo da poter confrontare poi i risultati ottenuti in modo analitico tramite l'ausilio di Matlab con ciò che è stato ottenuto dalle simulazioni.

Dopodiché è stata svolta un'analisi cinematica dell'avantreno, relativamente alla traiettoria del punto di contatto della ruota anteriore in modo da poter definire poi tramite un'analisi quasi-statica come varia la coppia di sterzo in funzione dell'angolo di sterzo. Dopo aver ottenuto dei risultati convergenti tra modello Adams e calcoli analitici, è stata svolta un'analisi parametrica facendo variare la geometria dell'avantreno per valutare il comportamento della coppia di sterzo nelle varie configurazioni.

Poi è stata fatta un'analisi dinamica, prima su traiettoria rettilinea e poi su traiettoria curvilinea, per poter valutare lo slittamento e la deriva delle ruote confrontando il raggio cinematico calcolato analiticamente con la traiettoria ottenuta dalle simulazioni.

Infine sono state analizzate le forze di attrito agenti su ogni ruota del veicolo sia in direzione trasversale che longitudinale, e, sono state ricavate le curve parametriche al variare della velocità del veicolo e dell'angolo di sterzo che descrivono la coppia da applicare sullo sterzo.

## 1. Introduzione

Praticare sport è fondamentale per tutti in quanto genera una sensazione di benessere psicofisico, nelle persone con disabilità lo sport ha ancora maggior importanza in quanto è un modo per conoscere il proprio corpo e muoversi in maniera autonoma con l'ausilio di strumenti come ad esempio le carrozzine.

Questo lavoro di tesi si concentra sulla modellazione dinamica di una carrozzina sportiva per valutare la coppia di sterzo a diverse velocità del veicolo e per diversi angoli di sterzo. Il lavoro svolto si collega al progetto "Handwheelchair.q: Innovative Manual Wheelchair for Sport" (2) che tratta la progettazione di un innovativo sistema di propulsione per carrozzine sportive. Questa idea nasce dopo che alcuni studi (3) hanno dimostrato che i movimenti ripetuti delle braccia per muovere la carrozzina possono portare a problemi all'arto, in particolar modo tendiniti, lesioni e danni ai legamenti soprattutto per quel che riguarda l'articolazione della spalla.

Tuttavia per progettare un nuovo sistema per muovere la carrozzina in direzione longitudinale descritto in (2) è utile sapere la coppia di sterzo che serve per percorrere traiettorie curvilinee, questo è l'obiettivo principale di questo lavoro di tesi.

Inizialmente è stata fatta una ricerca bibliografica riguardo modelli matematici utilizzati per descrivere la dinamica delle biciclette; il più semplice trovato è il "Carvallo-Whipple Bicycle Model" (4) in cui la bicicletta è modellata come un insieme di 4 corpi rigidi:

- Ruota posteriore;
- Telaio;
- Forcella;
- Ruota anteriore.

Dove il guidatore è modellato come una massa concentrata solidale al telaio nel centro di massa. Le ipotesi alla base di questo modello sono:

- Nessun moto relativo del guidatore rispetto al telaio;
- Coppie rotoidali ideali senza nessun attrito;
- Modelli di contatto ruota-terreno ideali, ovvero puro rotolamento;

Questo modello è utile per capire la cinematica e la dinamica del problema e per una prima fase di impostazione del modello dinamico.

Dopodiché è stata posta l'attenzione sui modelli di contatto ruota-terreno per biciclette, sapendo che gli pneumatici per biciclette, molto simili a quelli utilizzati per le carrozzine, a differenza di quelli per automobili o motocicli hanno un'area di contatto sottile e allungata che semplifica il problema dal punto di vista meccanico.

Il primo e più semplice modello di contatto ruota-terreno utilizzato è il "modello di Coulomb" con coefficienti di attrito gomma-asfalto presi da (5) pari a  $\mu_s = 0.5$  e  $\mu_d = 0.4$ .

Un modello, anch'esso semplice, ma molto utilizzato per modellare biciclette è il "Brush Model" (6) (ovvero modello spazzola) in cui lo pneumatico è modellato come un insieme di setole elastiche una

in fila all'altra con l'estremo superiore della setola solidale al cerchione e l'estremo inferiore a contatto col terreno.

Un modello di contatto ruota-terreno più complesso è descritto in (7). Il modello è costituito da tre sotto-modelli:

- Il modello verticale è stato sviluppato considerando il profilo stradale, lo spostamento verticale del centro delle ruote, le forze normali in statica e la rigidità verticale della bici.
- Nel modello longitudinale viene considerata l'aderenza (attrito) delle ruote della bici con la strada.
- Il modello laterale considera l'effetto del side slip angle e della rigidità laterale delle ruote.

Infine l'ultimo modello di contatto ruota-terreno analizzato è il "Rotta model" (8), in cui lo pneumatico è diviso in tante sezioni trasversali infinitesimali e analizzando il comportamento di una sola di queste sezioni è possibile poi prevedere il comportamento dell'intero pneumatico.

## 2. Modello dinamico

### 2.1 Impostazione modello dinamico

In questo capitolo sono descritti tutti i parametri e i sistemi di riferimento utili alla modellazione e allo studio della carrozzina sportiva.

#### 2.1.1 Sistemi di riferimento

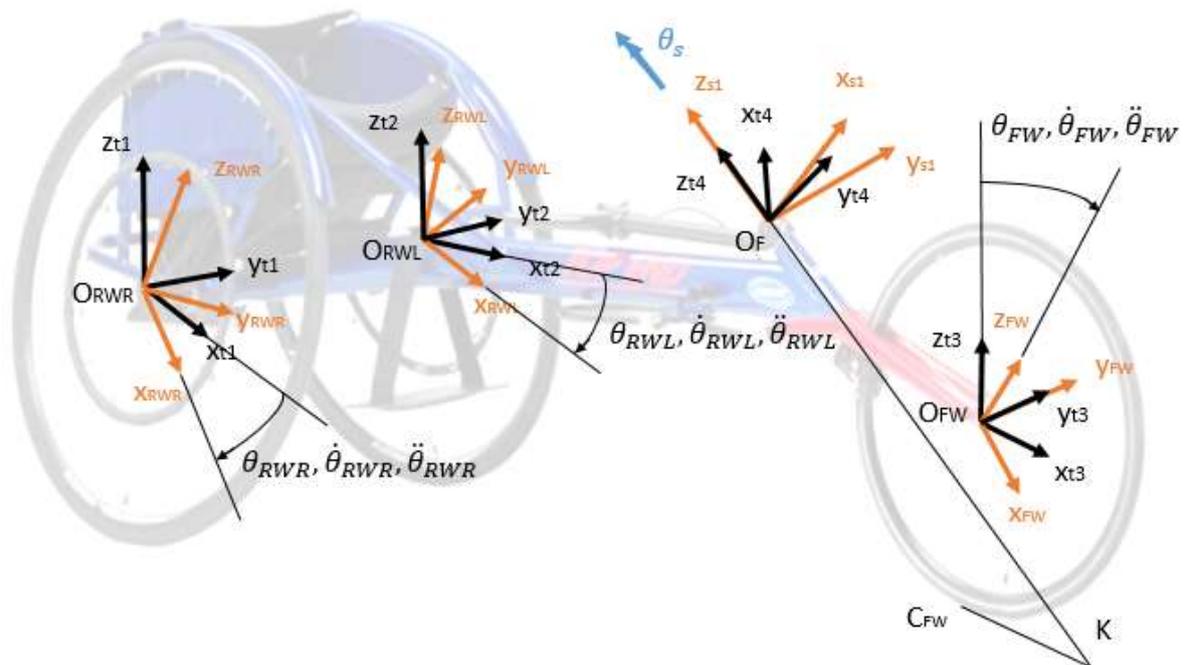


Figura 2: sistemi di riferimento

I sistemi di riferimento della carrozzina sportiva oggetto di studio sono definiti in figura 2 con le relative variabili cinematiche che sono descritte in tabella 1:

Tabella variabili cinematiche			
Simbolo	Nome	Descrizione	Unità di misura
$\Theta_{RWR}$	Theta rear wheel right	Angolo di rotazione della ruota posteriore destra rispetto al telaio	rad
$\Theta_{RWL}$	Theta rear wheel left	Angolo di rotazione della ruota posteriore sinistra rispetto al telaio	rad
$\Theta_{FW}$	Theta front wheel	Angolo di rotazione della ruota anteriore rispetto al telaio	rad
$X_{WC}$	x wheel-chair	Posizione del baricentro della carrozzina	m

$\Theta_S$	Theta steering	Angolo di rotazione dello sterzo rispetto al telaio	rad
$\dot{\theta}_{RWR}$	Theta dot rear wheel right	Velocità angolare della ruota posteriore destra rispetto al telaio	rad/s
$\dot{\theta}_{RWL}$	Theta dot rear wheel left	Velocità angolare della ruota posteriore sinistra rispetto al telaio	rad/s
$\dot{\theta}_{FW}$	Theta dot front wheel	Velocità angolare della ruota anteriore rispetto al telaio	rad/s
$\dot{x}_{WC}$	x dot wheel-chair	Velocità del baricentro della carrozzina	m/s
$\dot{\theta}_S$	Theta dot steering	Velocità angolare dello sterzo rispetto al telaio	rad/s
$\ddot{\theta}_{RWR}$	Theta double dots rear wheel right	Accelerazione angolare della ruota posteriore destra rispetto al telaio	rad/s <sup>2</sup>
$\ddot{\theta}_{RWL}$	Theta double dots rear wheel left	Accelerazione angolare della ruota posteriore sinistra rispetto al telaio	rad/s <sup>2</sup>
$\ddot{\theta}_{FW}$	Theta double dots front wheel	Accelerazione angolare della ruota anteriore rispetto al telaio	rad/s <sup>2</sup>
$\ddot{x}_{WC}$	x double dots wheel-chair	Accelerazione del baricentro della carrozzina	m/s <sup>2</sup>
$\ddot{\theta}_S$	Theta double dots steering	Accelerazione angolare dello sterzo rispetto al telaio	rad/s <sup>2</sup>

Tabella 1: variabili cinematiche

Il modello analizzato è costituito da 5 corpi rigidi:

- Telaio
- Forcella
- Ruota anteriore
- Ruota posteriore destra
- Ruota posteriore sinistra

Sono state ricavate le matrici di rotazione per rappresentare la posa di ogni sistema di riferimento solidale ai corpi rigidi considerati rispetto agli altri:

### 2.1.1.1 Ruote posteriori

In figura 3 è rappresentata la vista laterale delle ruote posteriori con i relativi sistemi di riferimento: t1 solidale al telaio e posizionato in  $O_{RWR}$  (centro della ruota) e RWR solidale alla ruota e centrato anch'esso in  $O_{RWR}$  ruotato di  $\theta_{RWR}$  intorno a y rispetto a t1; t2 solidale al telaio e posizionato in  $O_{RWL}$  (centro della ruota) e RWL solidale alla ruota e centrato anch'esso in  $O_{RWL}$  ruotato di  $\theta_{RWL}$  intorno a y rispetto a t2. Mentre in figura 4 si vede la vista frontale delle ruote posteriori destra e sinistra in cui si nota che il sistema di riferimento RWR è ruotato dell'angolo di camber  $\alpha$  intorno a x rispetto al sistema di riferimento t1, stessa cosa per RWL rispetto a t2.

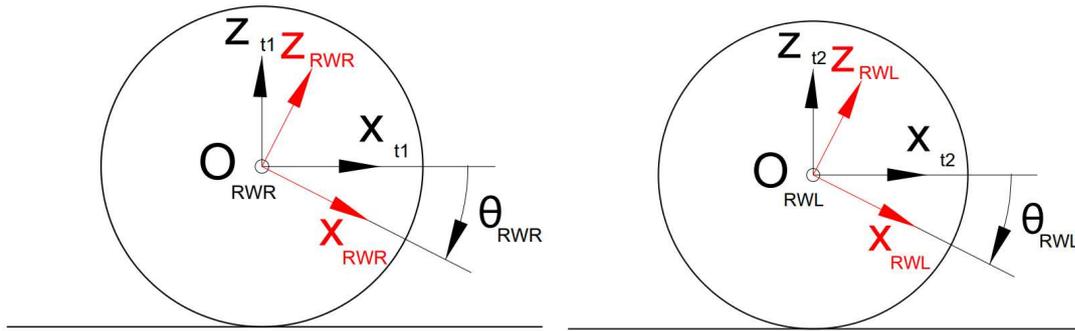


Figura 3: vista laterale delle ruote posteriori

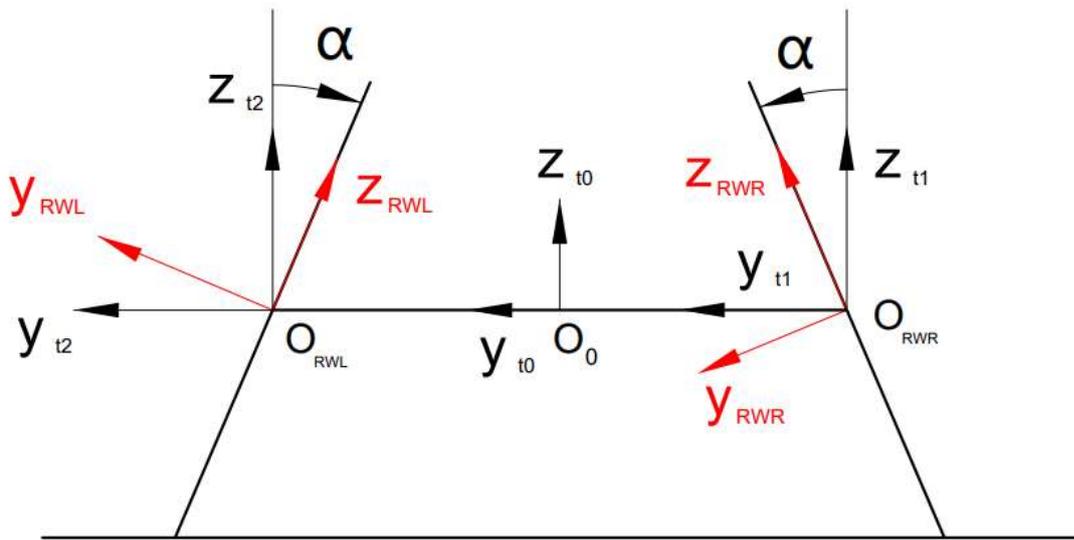


Figura 4: vista frontale delle ruote posteriori

Dopo aver definito i sistemi di riferimento è possibile ricavare le matrici di rotazione per passare da un sistema di riferimento all'altro:

$$\begin{aligned}
 R_{RWR}^{t1} &= Rot(x, -\alpha) \cdot Rot(y, \vartheta_{RWR}) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{RWR} & 0 & \sin \vartheta_{RWR} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta_{RWR} & 0 & \cos \vartheta_{RWR} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{RWR} & 0 & \sin \vartheta_{RWR} \\ -\sin \alpha \cdot \sin \vartheta_{RWR} & \cos \alpha & \sin \alpha \cdot \cos \vartheta_{RWR} \\ -\cos \alpha \cdot \sin \vartheta_{RWR} & -\sin \alpha & \cos \vartheta_{RWR} \cdot \cos \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Equazione 1: matrice di rotazione tra il sistema di riferimento telaio 1 e il sistema di riferimento ruota posteriore destra

$$R_{RWL}^{t2} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{RWL} & 0 & \sin \vartheta_{RWL} \\ \sin \alpha \cdot \sin \vartheta_{RWL} & \cos \alpha & -\sin \alpha \cdot \cos \vartheta_{RWL} \\ -\cos \alpha \cdot \sin \vartheta_{RWL} & \sin \alpha & \cos \vartheta_{RWL} \cdot \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Equazione 2: matrice di rotazione tra il sistema di riferimento telaio 2 e il sistema di riferimento ruota posteriore sinistra

Quindi le matrici omogenee che definiscono la posa dei sistemi di riferimento RWR e RWL rispetto al sistema di riferimento t0 (posizionato sul telaio tra le due ruote posteriori) sono definite nelle equazioni 3 e 4 dove "c" rappresenta la carreggiata.

$$A_{RWR}^{t0} \begin{bmatrix} R_{RWR}^{t1} & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{RWL}^{t0} \begin{bmatrix} R_{RWL}^{t1} & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equazione 3 e 4: posa dei sistemi di riferimento ruota posteriore destra e sinistra rispetto al sistema di riferimento telaio t0

### 2.1.1.2 Avantreno

In figura 5 è rappresentata la vista laterale dell'avantreno costituito da asse di sterzo e ruota anteriore e i sistemi di riferimento: t3 solidale al telaio e posizionato in  $O_{FW}$  (centro della ruota), FW solidale alla ruota e centrato anch'esso in  $O_{FW}$  ruotato di  $\theta_{FW}$  intorno a y rispetto a t3, t4 solidale al telaio e posizionato in  $O_F$ , con l'asse  $z_{t4}$  che ha la stessa direzione dell'asse di sterzo e il sistema di riferimento s1 solidale all'asse di sterzo e posizionato in  $O_F$ . Sono indicati in figura il trail (distanza a terra tra il prolungamento dell'asse di sterzo e il punto di contatto) t e il rake (distanza tra asse di sterzo e centro della ruota) o.

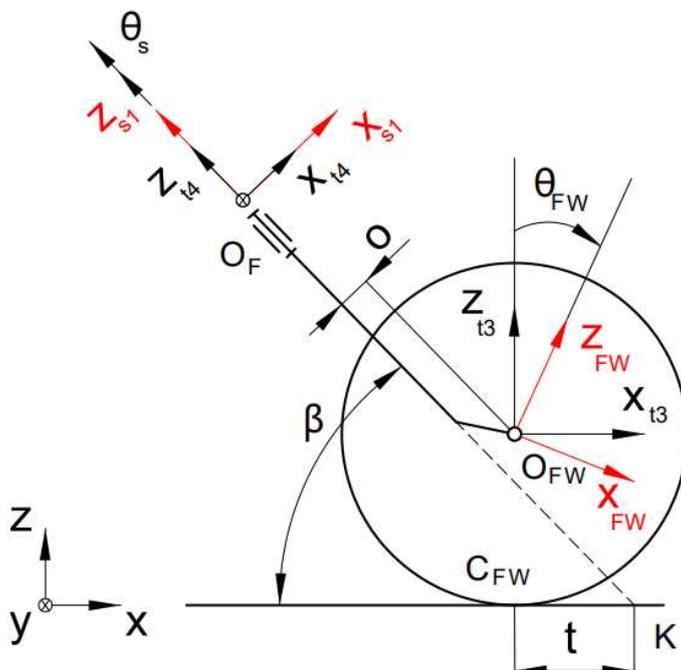


Figura 5: vista laterale avantreno

Ipotizzando una rotazione antioraria di  $\theta_s$  intorno a z del sistema di riferimento s1 solidale all'asse di sterzo rispetto al sistema di riferimento t4 solidale al telaio, si ha:

$$R_{t4}^{s1} = Rot(z, -\theta_s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \vartheta_s & \sin \vartheta_s & 0 \\ -\sin \vartheta_s & \cos \vartheta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mentre per passare dal sistema di riferimento t4 al sistema di riferimento t3 si ha la matrice di rotazione:

$$R_{t3}^{t4} = Rot\left(y, \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \beta & 0 & \sin \beta \end{bmatrix}$$

Infine la matrice di rotazione per passare dal sistema di riferimento t3 solidale al telaio al sistema di riferimento FW solidale alla ruota anteriore è:

$$R_{FW}^{t3} = Rot(y, \theta_{FW}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{FW} & 0 & \sin \vartheta_{FW} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta_{FW} & 0 & \cos \vartheta_{FW} \end{bmatrix}$$

### 2.1.2 Variabili dinamiche

In questo paragrafo sono definite tutte le variabili dinamiche che saranno utili nell'analisi statica e dinamica del modello:

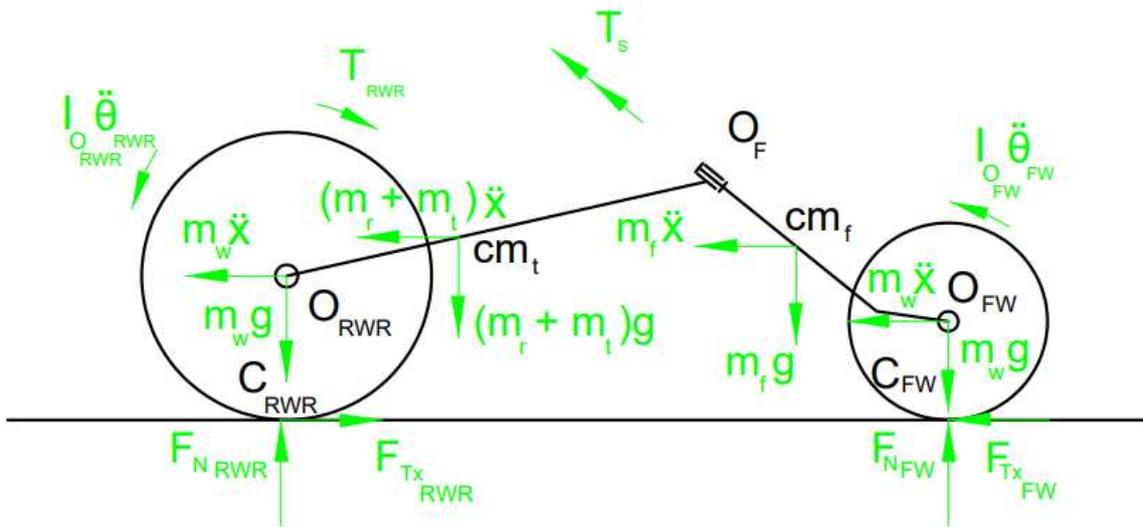


Figura 6: diagramma di corpo libero della carrozzina sul piano laterale xz

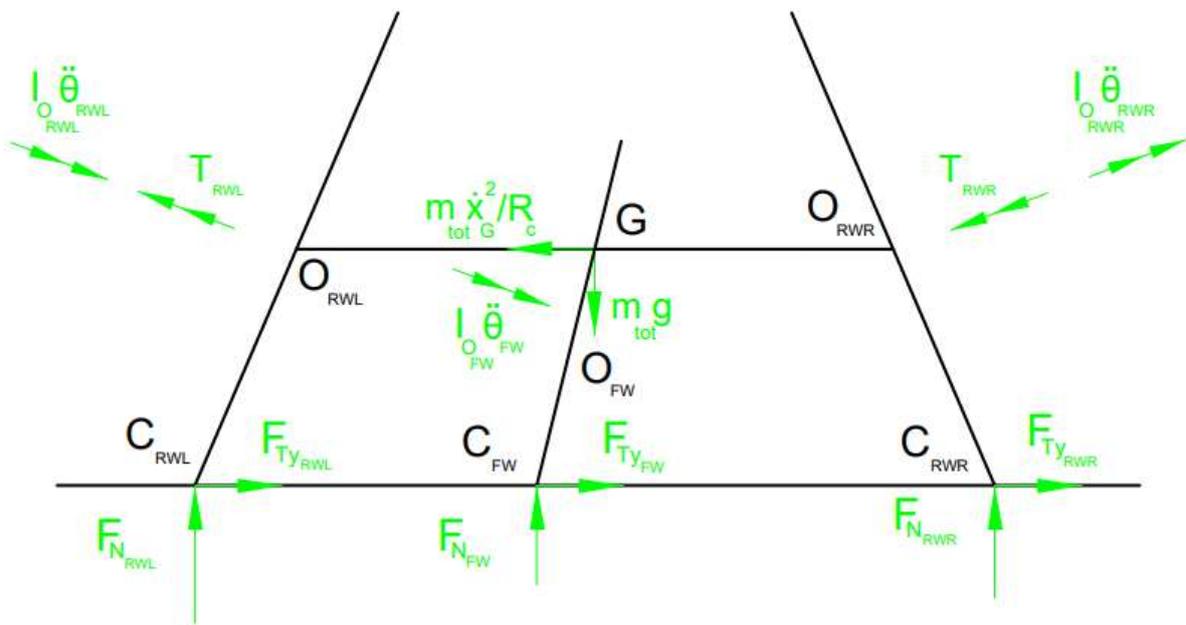


Figura 7: diagramma di corpo libero della carrozzina sul piano frontale

Nome	Descrizione	Unità di misura
$F_{NFW}$	Forza normale agente sulla ruota anteriore	N
$F_{NRW}$	Forza normale agente sulle ruote posteriori	N
$F_{NRWR}$	Forza normale agente sulla ruota posteriore dx	N
$F_{NRWL}$	Forza normale agente sulla ruota posteriore sx	N
$T_S^z$	Coppia di sterzo intorno all'asse z del sistema di riferimento t4 solidale al telaio	N·m
$F_{NFW}^{x,s1}$	Componente della forza normale sulla ruota anteriore lungo l'asse x del sistema di riferimento s1 solidale alla forcella	N
$F_{NFW}^{y,s1}$	Componente della forza normale sulla ruota anteriore lungo l'asse y del sistema di riferimento s1	N
$F_{NFW}^{z,s1}$	Componente della forza normale sulla ruota anteriore lungo l'asse z del sistema di riferimento s1	N
$T_{RWL}^y$	Coppia motrice ruota posteriore sx	N·m
$T_{RWR}^y$	Coppia motrice ruota posteriore dx	N·m
$F_{TxRWR}$	Forza longitudinale di attrito su ruota posteriore dx	N
$F_{TxRWL}$	Forza longitudinale di attrito su ruota posteriore sx	N
$F_{TxFW}$	Forza trasversale di attrito su ruota anteriore	N
$F_{TyRWR}$	Forza trasversale di attrito su ruota posteriore dx	N
$F_{TyRWL}$	Forza trasversale di attrito su ruota posteriore sx	N
$F_{TyFW}$	Forza trasversale di attrito su ruota anteriore	N
$R_{RW}^x$	Reazione vincolare lungo x tra asse ruote posteriori e telaio	N
$R_{RW}^z$	Reazione vincolare lungo z tra asse ruote posteriori e telaio	N
$R_{RWR}^x$	Reazione vincolare lungo x tra ruota posteriore dx e telaio	N
$R_{RWR}^z$	Reazione vincolare lungo z tra ruota posteriore dx e telaio	N
$R_{RWL}^x$	Reazione vincolare lungo x tra ruota posteriore sx e telaio	N
$R_{RWL}^z$	Reazione vincolare lungo z tra ruota posteriore sx e telaio	N
$R_{FW}^x$	Reazione vincolare lungo x tra forcella e ruota anteriore	N
$R_{FW}^z$	Reazione vincolare lungo z tra forcella e ruota anteriore	N

Tabella 2: variabili dinamiche

### 2.1.3 Parametri geometrici e dinamici

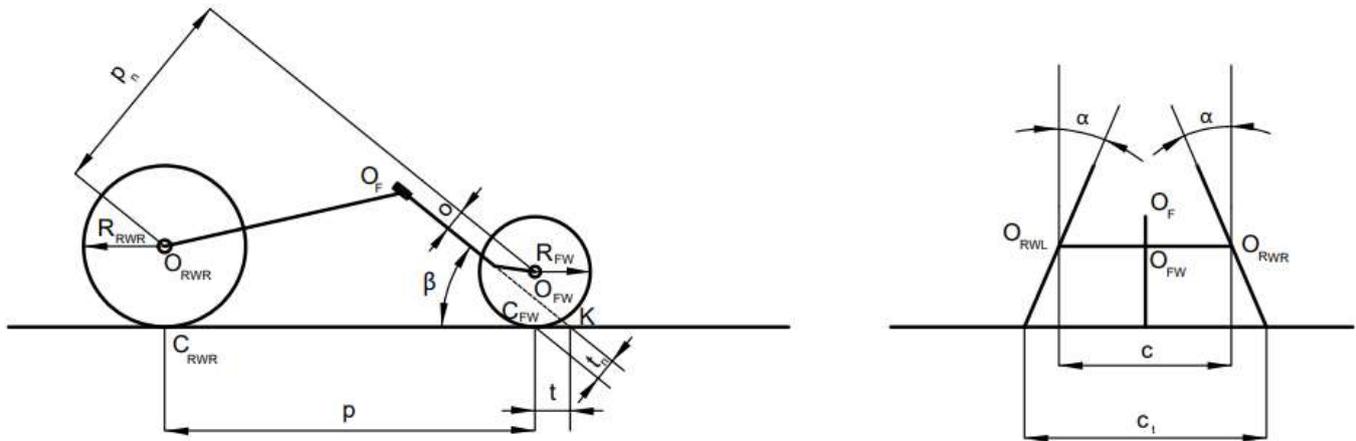


Figura 8: vista laterale e frontale della carrozzina

La geometria della carrozzina è definita nella figura 8 mentre il valore dei parametri geometrici è descritto nella tabella 3:

Tabella parametri			
Nome	Descrizione	Valore	Unità di misura
t	Trail (o avancorsa)	200	mm
o	Offset (o rake)	40	mm
$R_{FW}$	Raggio front wheel	230	mm
$R_{RW}$	Raggio rear wheel	300	mm
p	passo	1300	mm
$p_n$	Passo normale	852.877	mm
$t_n$	Avancorsa normale	130	mm
$\beta$	Angolo di inclinazione della forcella rispetto al piano orizzontale	41.45	deg
$X_{CM_t}$	Coordinata x del centro di massa del telaio	0.15	m
$Y_{CM_t}$	Coordinata y del centro di massa del telaio	0	m
$Z_{CM_t}$	Coordinata z del centro di massa del telaio	0.025	m
$X_{CM_f}$	Coordinata x del centro di massa della forcella	1.133	m
$Y_{CM_f}$	Coordinata y del centro di massa della forcella	0	m
$Z_{CM_f}$	Coordinata z del centro di massa della forcella	0.036	m
$X_{O_{FW}}$	Coordinata x di del centro di massa della ruota anteriore	1.3	m
$Y_{O_{FW}}$	Coordinata y del centro di massa della ruota anteriore	0	m

$Z_{O\_FW}$	Coordinata z del centro di massa della ruota anteriore	-0.063	m
$X_{O\_RWR}$	Coordinata x del centro di massa della ruota posteriore destra	0	m
$Y_{O\_RWR}$	Coordinata y del centro di massa della ruota posteriore destra	-0.275	m
$Z_{O\_RWR}$	Coordinata z del centro di massa della ruota posteriore destra	0	m
$X_{O\_RWL}$	Coordinata x del centro di massa della ruota posteriore sinistra	0	m
$Y_{O\_RWL}$	Coordinata y del centro di massa della ruota posteriore sinistra	0.275	m
$Z_{O\_RWL}$	Coordinata z del centro di massa della ruota posteriore sinistra	0	m
$X_G$	Coordinata x del centro di massa della carrozzina	0.184	m
$Y_G$	Coordinata y del centro di massa della carrozzina	0	m
$Z_G$	Coordinata z del centro di massa della carrozzina	0.031	
$m_w$	Massa ruota	1	kg
$m_s$	Massa forcella	2	kg
$m_t$	Massa telaio	3	kg
$m_r$	Massa rider	75	kg
$m_{tot}$	Massa totale	83	kg
$g$	Accelerazione di gravità	9.81	$m/s^2$
$I_{O_{RWR}}$	Momento d'inerzia ruota posteriore dx	0.045	$kg \cdot m^2$
$I_{O_{RWL}}$	Momento d'inerzia ruota posteriore sx	0.045	$kg \cdot m^2$
$I_{O_{FW}}$	Momento d'inerzia ruota anteriore	0.02645	$kg \cdot m^2$
$c$	carreggiata	550	mm
$c_t$	Carreggiata a terra	674.7	mm
$\alpha$	Angolo di campanatura (o camber)	12	deg

Tabella 3: parametri geometrici

Tutte le coordinate dei centri di massa e del baricentro sono riferite al sistema di riferimento  $t_0$  posizionato sul telaio al centro tra le due ruote posteriori.

## 2.2. Modellazione in MSC Adams

Il software MSC Adams permette di effettuare analisi dinamiche multibody di sistemi meccanici. La carrozzina sportiva oggetto di studio è stata modellata a partire dai corpi rigidi che la costituiscono:

- Le due ruote posteriori sono state modellate come un cilindro di raggio 30 cm e lungo 0.1 cm con il centro posizionato in  $O_{RWR}$  e sono state nominate rispettivamente “rear\_wheel\_right” e “rear\_wheel\_left”;
- Il telaio è stato modellato tramite 2 link uniti con il comando “Boolean: unite two solids” ed è stato nominato “frame” nel modello Adams; dove il primo link collega i due centri delle ruote posteriori ed ha, quindi, una lunghezza pari alla carreggiata, mentre il secondo link collega l’origine del sistema di riferimento  $t_0$  posizionato al centro tra le due ruote posteriori con il punto  $O_F$  intorno a cui ruota l’asse di sterzo;
- La forcella (o asse di sterzo) è stata anch’essa modellata tramite due link uniti dal comando “Boolean” visto precedentemente in modo da collegare il punto  $O_F$  al centro della ruota anteriore  $O_{FW}$  ed è stato nominato “steering”;
- La ruota anteriore è stata modellata come un cilindro di raggio 23 cm e lungo 0.1 cm con il centro posizionato in  $O_{FW}$  ed è stata nominata “front\_wheel”;
- La strada è stata, infine, modellata come un parallelepipedo (comando “Box”) ed è stata nominata “road”.

Dopo aver definito la geometria del modello, sono state definite alcune “design variables” in modo da rendere parametrico il modello:

- La carreggiata è stata definita dalla variabile “Wheeltrack”;
- Il passo è stato definito dalla variabile “wheelbase”;
- Il rake è stato definito dalla variabile “offset”;
- L’avancorsa è stata definita dalla variabile “trail”;
- L’angolo di inclinazione dell’asse di sterzo è stato definito dalla variabile “beta”;
- L’angolo di campanatura è stato definito dalla variabile “camber”;
- I raggi delle ruote posteriori sono stati definiti dalla variabile “Radius\_RW”;
- Il raggio della ruota anteriore è stato definito dalla variabile “Radius\_FW”.

Ogni sistema di riferimento che costituisce il modello è stato parametrizzato a partire da queste design variables considerando come sistema di riferimento principale  $t_0$ , ovvero quello con origine posizionata al centro tra le due ruote posteriori.

### 2.2.1 Coppie rotoidali

Le coppie rotoidali sono state modellate tramite il comando Connectors --> revolute joint:

- La coppia rotoidale che collega la ruota posteriore destra al telaio è stata posta in corrispondenza del centro della ruota  $O_{RWR}$  con asse di rotazione corrispondente a  $y_{RWR}$

inclinato di un angolo  $\alpha = 12^\circ$  (camber) intorno a x rispetto al sistema di riferimento principale t0 ed è stata nominata "O\_RWR";

- La coppia rotoidale che collega la ruota posteriore sinistra al telaio è stata posta in corrispondenza del centro della ruota  $O_{RWL}$  con asse di rotazione corrispondente a  $y_{RWL}$  inclinato di un angolo  $\alpha = 12^\circ$  (camber) intorno a x rispetto al sistema di riferimento principale t0 ed è stata nominata "O\_RWL";
- La stessa cosa è stata fatta per la ruota anteriore, ponendo una coppia rotoidale tra ruota e forcella, posizionandola in  $O_{FW}$  con asse di rotazione corrispondente con  $y_{FW}$  ed è stata nominata "O\_FW";
- L'ultima coppia rotoidale che collega telaio e forcella è stata posizionata in  $O_F$  con asse di rotazione corrispondente a  $z_{s1}$  inclinato di un angolo  $\beta = 41.45^\circ$  intorno a y rispetto al sistema di riferimento principale ed è stata nominata "O\_F".

### 2.2.2 Motion

Per ognuna delle due ruote posteriori sono stati aggiunti due "motion" tramite il comando "rotational joint motion" attraverso l'equazione definita nel "function builder":

$$\theta = \omega * \text{time} * 180d/\text{PI}$$

dove  $\omega$  rappresenta la velocità angolare in [rad/s] ed è stata fatta la conversione in  $^\circ$  moltiplicando per  $180d/\pi$ :

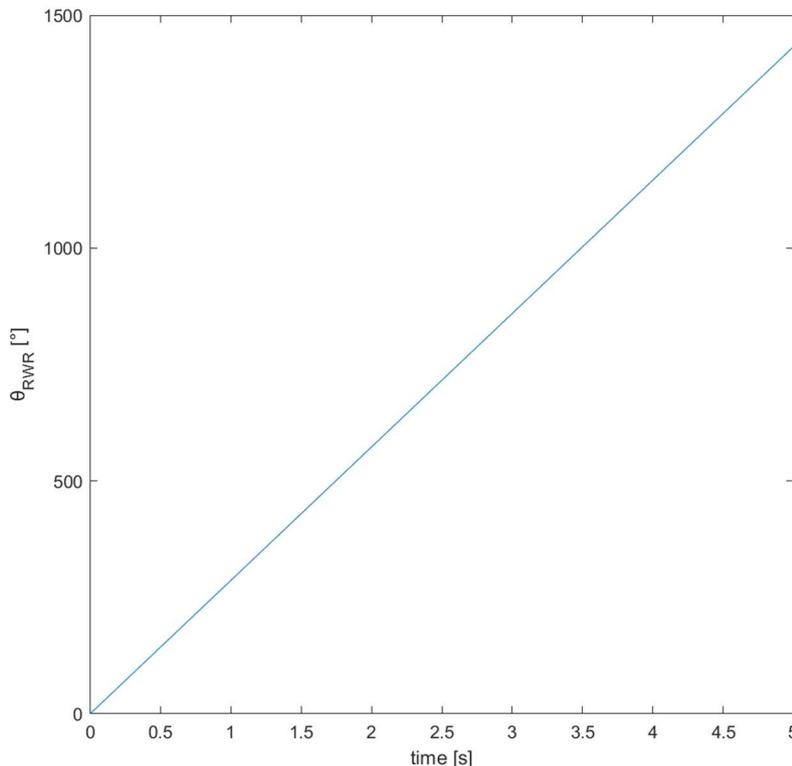


Figura 9:  $\vartheta_{RWR}(t)$  con  $\omega = 5 \text{ rad/s}$

Per quello che riguarda la coppia rotoidale è stato aggiunto un "rotational joint motion" definito in modo che l'angolo di sterzo  $\theta_s$  abbia un andamento lineare tra  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$  per quel che riguarda

l'analisi statica mentre per l'analisi dinamica è stato utilizzato la funzione step per far variare l'angolo di sterzo e la velocità angolare delle ruote posteriori.

### 2.2.3 Forze

Tramite il comando Forces --> Create a contact sono state aggiunti i 3 contatti ruota terreno: in prima approssimazione è stato considerato sufficiente un modello Coulombiano. Dove i coefficienti di attrito statico e dinamico sono stati determinati a partire dall'attrito gomma-asfalto (5).

### 2.2.4 Variabili misurate

Tramite il comando "measures" sono state definite le variabili da misurare:

- L'angolo di sterzo  $\theta_s$  tra il sistema di riferimento solidale al telaio t4 e il sistema di riferimento solidale alla forcella s1 intorno all'asse z che coincide con l'asse di sterzo;
- L'angolo  $\theta_{RWR}$  tra il sistema di riferimento solidale al telaio t1 e il sistema di riferimento solidale alla ruota posteriore destra RWR intorno all'asse  $y_{RWR}$ ;
- L'angolo  $\theta_{RWL}$  tra il sistema di riferimento solidale al telaio t2 e il sistema di riferimento solidale alla ruota posteriore sinistra RWL intorno all'asse  $y_{RWL}$ ;
- L'angolo  $\theta_{FW}$  tra il sistema di riferimento solidale al telaio t3 e il sistema di riferimento solidale alla ruota anteriore FW intorno all'asse  $y_{FW}$ ;
- La componente  $T_z$  della coppia di sterzo tra i sistemi di riferimento s1 della forcella e t4 del telaio;
- La componente  $T_x$  della coppia di sterzo tra i sistemi di riferimento s1 della forcella e t4 del telaio;
- Le coordinate  $x_G$  e  $y_G$  del baricentro tra i sistemi di riferimento t0 e il sistema di riferimento fisso solidale alla strada;
- Le forze di attrito longitudinali agenti sulle ruote posteriori destra e sinistra e nominate "RWR\_Fx" e "RWL\_Fx";
- Le forze di attrito trasversali agenti sulle ruote posteriori destra e sinistra e nominate "RWR\_Fy" e "RWL\_Fy";
- Le forze di attrito longitudinali e trasversali agenti sulla ruota anteriore e nominate "FW\_Fx" e "FW\_Fy";
- Le forze normali agenti su ogni ruota nominate "RWR\_Fz", "RWL\_Fz" e "FW\_Fz".

## 2.3 Modelli di contatto ruota-terreno

In questo capitolo sono analizzati tutti i modelli di contatto ruota-terreno che possono essere utilizzati per il problema oggetto di studio.

### 2.3.1 Modello di Coulomb

Il modello di Coulomb (9) rappresenta lo strumento più semplice per descrivere il contatto ruota-terreno. Ipotizzando di considerare lo pneumatico come un disco ideale di raggio  $R$  in moto di puro rotolamento a cui è applicata una coppia motrice  $C$ , si ha che la reazione  $N$  è spostata in avanti di una quantità  $f_v \cdot R$  rispetto al punto di contatto  $P$  per includere il fenomeno di resistenza al rotolamento. Dove  $R$  è il raggio dello pneumatico e  $f_v$  è detto attrito volante.

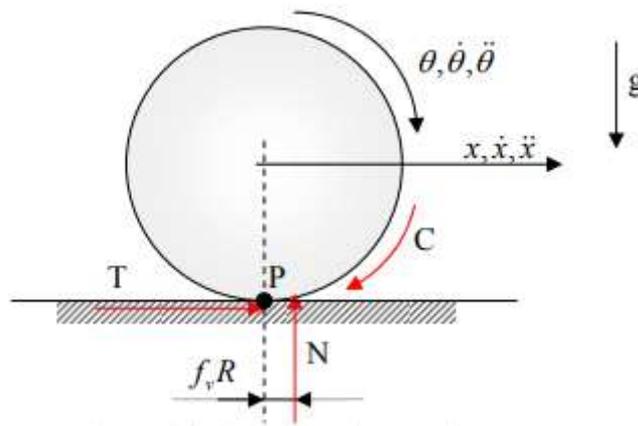


Figura 10: diagramma di corpo libero di uno pneumatico a cui è applicata una coppia motrice (9)

Dato questo DCL si possono scrivere le seguenti equazioni:

$$C - I \cdot \ddot{\theta} - T \cdot R - N \cdot f_v \cdot R = 0 \quad (1)$$

$$T - m \cdot \ddot{x} = 0 \quad (2)$$

$$N - m \cdot g = 0 \quad (3)$$

Per avere un moto di puro rotolamento senza strisciamento deve valere la relazione:

$$\left| \frac{T}{N} \right| \leq \mu_s \quad (4)$$

Quindi sostituendo la (2) e la (3) nella (4) si ha:

$$|\ddot{x}| \leq \mu_s \cdot g$$

Quindi, in statica, la massima accelerazione ottenibile senza avere slittamento è definita dal coefficiente di attrito statico.

Nel caso in cui non fosse rispettata la precedente disequazione il punto di contatto P non sarebbe istantaneamente fermo ma si sposterebbe all'indietro come da relazione (5):

$$\dot{x}_p = \dot{x} - R \cdot \dot{\theta} < 0 \quad (5)$$

### 2.3.2 Brush Model

Le ipotesi alla base del modello (9) sono:

- La velocità del baricentro dello pneumatico  $V$  e la sua velocità angolare  $\Omega$  sono entrambe costanti;
- Per effetto del carico normale  $N$  applicato nel baricentro dello pneumatico si genera un'impronta di contatto di lunghezza pari a  $2 \cdot a$ ;
- Nell'impronta di contatto si genera una distribuzione di forze per unità di lunghezza normali al contatto con andamento parabolico come da figura 10 e una distribuzione di forze tangenti al contatto;

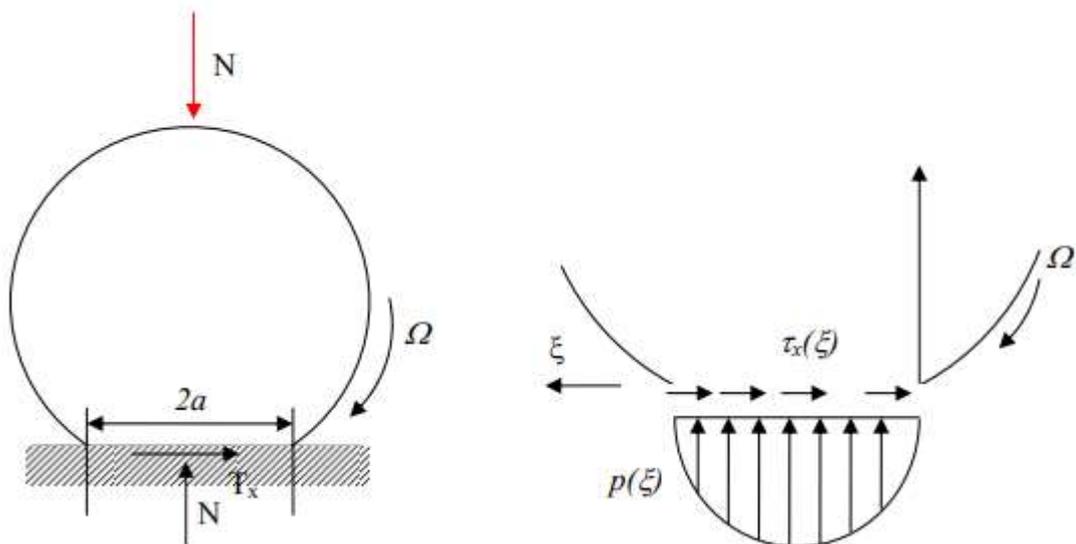


Figura 11: distribuzione di forze tangenziali e normali allo pneumatico (9)

- Il battistrada è modellato come una serie di setole con caratteristiche uniformi che possono deformarsi in direzione longitudinale;

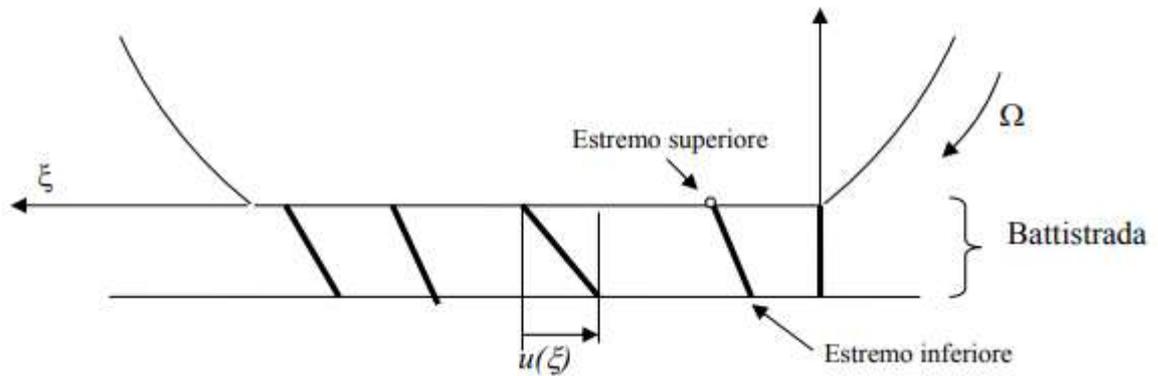


Figura 12: spostamento longitudinale delle setole del battistrada (9)

- Si assume che la relazione tra forza di attrito per unità di lunghezza tangenziale e spostamento della setola sia lineare:

$$\tau_x = C_{kx} \cdot u$$

Con  $C_{kx}$  rigidità longitudinale per unità di lunghezza del battistrada.

### 2.3.3 Single track model

Un terzo modello di contatto ruota-terreno considerato è stato ricavato da (7) ed è suddiviso in tre sotto-modelli:

#### Modello verticale

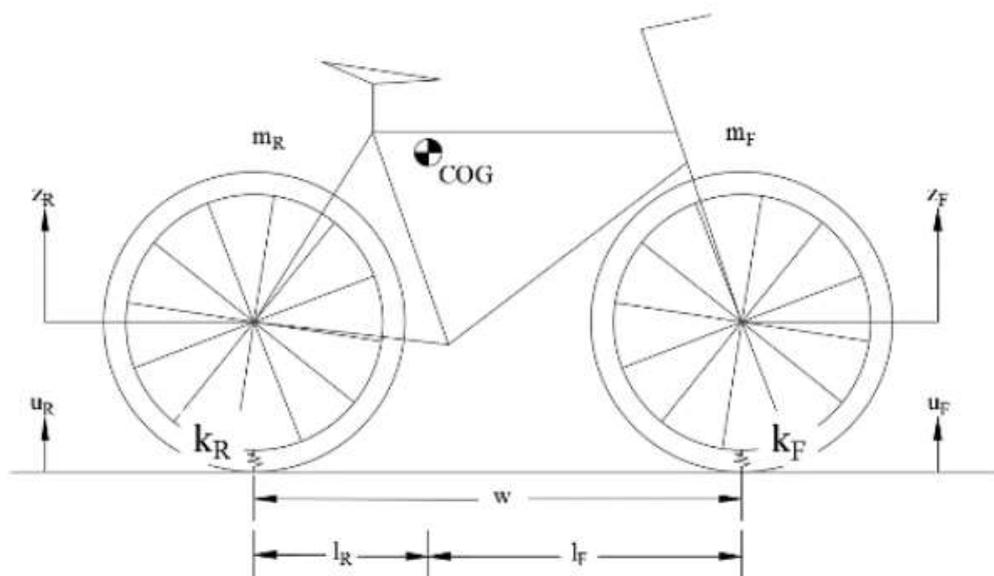


Figura 13: vista laterale del veicolo per definire i parametri del modello verticale (7)

Gli pneumatici anteriori e posteriori sono modellati come una molla di rigidità  $K_F$  e  $K_R$  e la loro massa è  $m_F$  e  $m_R$ .

Il profilo stradale, la resistenza allo slittamento, il raggio di curvatura sono considerati input per il modello. Dove il profilo stradale è rappresentato dalla variabile  $u$ , e il pitch è trascurato.

Le accelerazioni verticali delle ruote sono:

$$\ddot{z}_F = \frac{-k_F \cdot z_F + k_F \cdot u_F}{m_F}$$

$$\ddot{z}_R = \frac{-k_R \cdot z_R + k_R \cdot u_R}{m_R}$$

Per ottenere  $z_R$  e  $z_F$  bisogna integrare due volte. Le forze normali saranno:

$$F_{nF} = F_{CF} + k_F \cdot (u_F - z_F) \quad (1)$$

$$F_{nR} = F_{CR} + k_R \cdot (u_R - z_R) \quad (2)$$

Con  $F_{CF}$  e  $F_{CR}$  forze statiche dovute alla massa del veicolo. Lo smorzamento è stato trascurato.

### Modello laterale

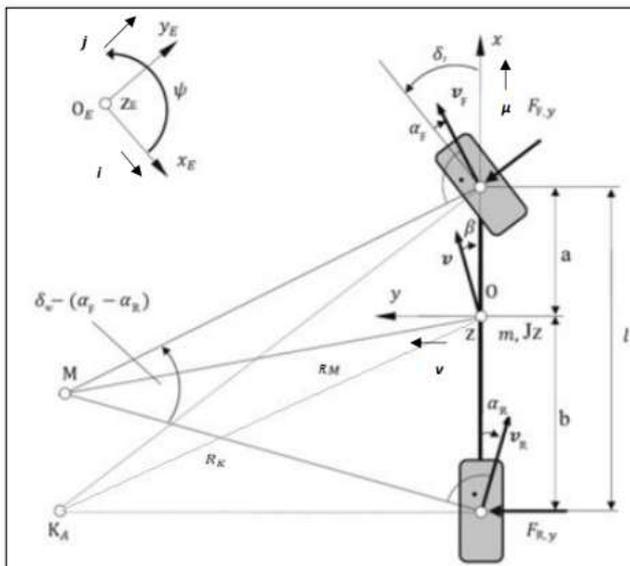


Figura 14: vista dall'alto del veicolo per definire i parametri del modello laterale (10)

Per definirlo sono necessari:

- Slittamento delle ruote
- Angoli di deriva delle ruote e del veicolo
- Coefficiente di attrito

Dove l'angolo di deriva per la ruota anteriore e per la ruota posteriore sono:

$$\alpha_F = -\beta + \delta - \frac{l_F \cdot \dot{\Psi}}{v_{COG}}$$

$$\alpha_R = -\beta + \frac{l_R \cdot \dot{\Psi}}{v_{COG}}$$

Con  $\beta$  angolo di deriva del veicolo,  $\delta_W$  angolo di sterzo e  $v_{COG}$  è la velocità.

$\dot{\Psi}$  è il tasso di imbardata e R è il raggio di curvatura.

Quindi la forza laterale per ruota posteriore e ruota anteriore è:

$$F_{\gamma F} = \alpha_F \cdot C_\gamma$$

$$F_{\gamma R} = \alpha_R \cdot C_\gamma$$

Con  $C_\gamma$  rigidezza laterale dello pneumatico.

### Modello longitudinale

Le forze di attrito longitudinali possono essere calcolate dai coefficienti di attrito:

$$F_{xF} = \mu \cdot F_{ZF} \cdot \cos \alpha_F$$

$$F_{xR} = \mu \cdot F_{ZR} \cdot \cos \alpha_R$$

Nella direzione longitudinale x e  $F_{ZR}$  e  $F_{ZF}$  sono le forze verticali applicate alle ruote posteriore e anteriore.

#### 2.3.4 Rotta's model

Dividendo lo pneumatico in infinitesime sezioni trasversali Rotta (8) ha sviluppato un modello 2D per definire il comportamento di una singola sezione. Il modello, rappresentato in figura 14, è formato da

un segmento che rappresenta il cerchione e un filo inestensibile che unisce i due estremi del segmento e rappresenta lo pneumatico con all'interno una pressione  $p_0$  pari a quella atmosferica:

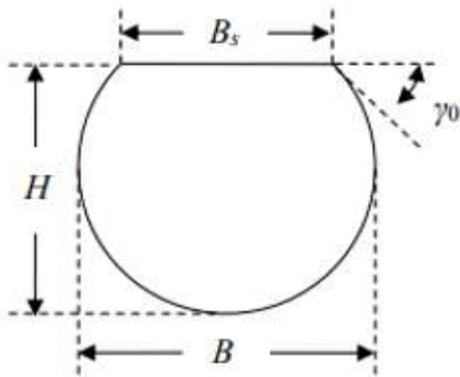


Figura 15: sezione trasversale dello pneumatico non in contatto col terreno (8)

Lo pneumatico ha spessore pari a  $B$  e un'altezza quando non compresso pari a  $H$  mentre il cerchione ha spessore pari a  $B_s$  e l'angolo  $\gamma_0$  è pari a:

$$\sin(\gamma_0) = \frac{B_s}{B}$$

Ipotizzando di posizionare lo pneumatico sul terreno, esso si deformerà come da figura 15:

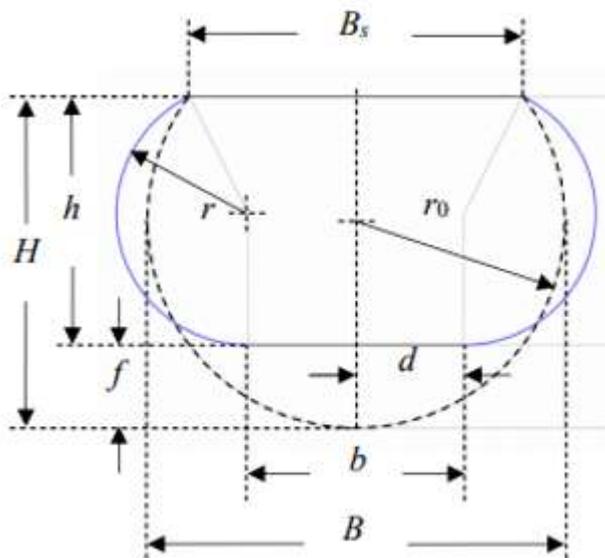


Figura 16: sezione trasversale dello pneumatico in contatto col terreno (8)

Si ipotizza che l'orma di contatto dello pneumatico col terreno sia lunga  $b$  e che poi segua un arco circolare fino a raggiungere gli estremi del segmento lungo  $B_s$  che rappresenta il cerchione. Avendo ipotizzato che la lunghezza del filo inestensibile che rappresenta la carcassa dello pneumatico sia rimasta costante. Questo vale per ogni sezione dello pneumatico.

### 3. Risultati

#### 3.1 Analisi statica

E' stata fatta un'analisi statica per determinare l'andamento della coppia di sterzo al variare dell'angolo di sterzo. Inizialmente è stato definito il carico normale sulle tre ruote dovuto alla massa del guidatore e alla massa dei 5 componenti del modello dopo aver ipotizzato il guidatore come un corpo solidale al telaio la cui massa sia concentrata nel baricentro del telaio.

Sotto queste ipotesi, il carico normale totale agente sulle tre ruote è dato da:

$$F_N = (3 \cdot m_W + m_t + m_f + m_r) \cdot g = 813.9 \text{ N}$$

Quindi, la coordinata x del baricentro della carrozzina è:

$$x_G = \frac{2 \cdot m_W \cdot x_{CM_{RW}} + (m_r + m_t) \cdot x_{CM_t} + m_W \cdot x_{CM_{FW}} + m_f \cdot x_{CM_f}}{3 \cdot m_W + m_r + m_t + m_s} = 184 \text{ mm}$$

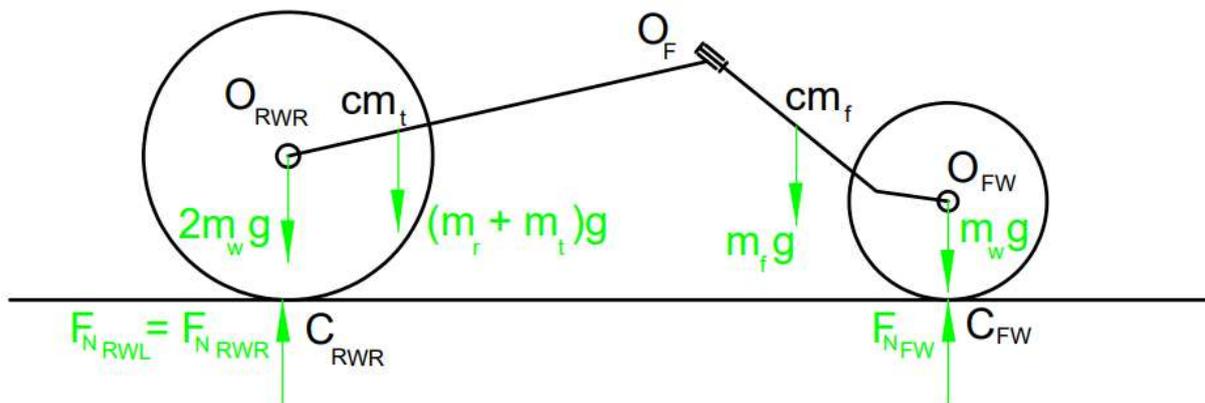


Figura 17: analisi statica carrozzina

Per calcolare la forza normale agente sull'asse posteriore e la forza normale agente sulla ruota anteriore applico la seconda equazione cardinale della statica intorno al punto  $O_{RW}$ :

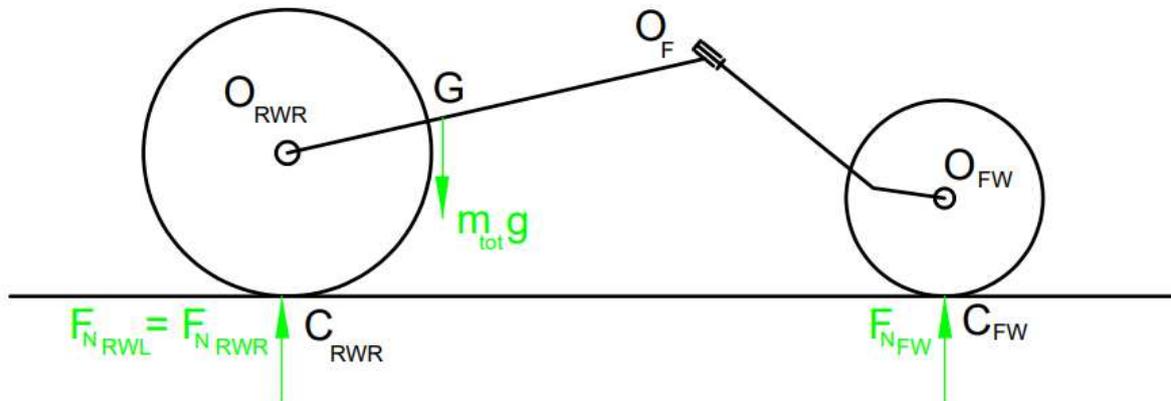


Figura 18: rappresentazione delle forze agenti in statica

$$m_{tot} \cdot g \cdot x_G - F_{N_{FW}} \cdot x_{C_{M_{FW}}} = 0$$

Quindi  $F_{N_{FW}} = 115.162 \text{ N}$ , poi ricavo il carico agente sull'asse posteriore e quindi sulle due ruote posteriori equamente diviso (in statica):

$$F_{N_{RW}} = 813.9 - 115.162 = 698.738 \text{ N} \rightarrow F_{N_{RWR}} = F_{N_{RWL}} = 349.369 \text{ N}$$

### 3.1.1 Coppia di sterzo

Ipotizzando che la carrozzina sia ferma e che lo sterzo ruoti in modo quasi-statico tra  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ , si vuole determinare come varia la coppia di sterzo al variare dell'angolo di sterzo. In questa condizione l'unica forza che genera coppia resistente è la forza peso agente sulla ruota anteriore che è stata calcolata precedentemente. Nella figura sottostante sono rappresentate anche le componenti lungo  $x_{s1}$ ,  $y_{s1}$  e  $z_{s1}$ :

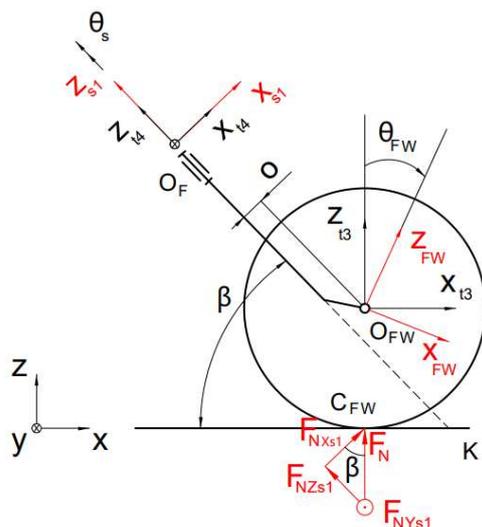


Figura 19: rappresentazione dell'avantreno con dettaglio relativo a  $F_N$

Quindi bisogna determinare l'espressione della forza normale alla ruota anteriore nel sistema di riferimento s1 solidale alla forcella, per fare ciò è stata utilizzata la matrice di rotazione  $R_{s1}^{t3}$  (ovvero dal sistema di riferimento telaio 3 al sistema di riferimento forcella 1):

$$R_{s1}^{t3} = R_{t4}^{t3} \cdot R_{s1}^{t4} = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & -\cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \beta & 0 & \sin \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta_s & -\sin \vartheta_s & 0 \\ \sin \vartheta_s & \cos \vartheta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \vartheta_s \cdot \sin \beta & -\sin(\beta) \cdot \sin \vartheta_s & -\cos \beta \\ \sin \vartheta_s & \cos \vartheta_s & 0 \\ \cos \vartheta_s \cdot \cos \beta & -\sin \vartheta_s \cdot \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{Bmatrix} F_{N_{FW}}^{x_{s1}} \\ F_{N_{FW}}^{y_{s1}} \\ F_{N_{FW}}^{z_{s1}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_s \cdot \sin \beta & \sin \vartheta_s & \cos \vartheta_s \cdot \cos \beta \\ -\sin \vartheta_s \cdot \sin \beta & \cos \vartheta_s & -\sin \vartheta_s \cdot \cos \beta \\ -\cos \beta & 0 & \sin \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{N_{FW}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +F_{N_{FW}} \cdot \cos(\theta_s) \cdot \cos(\beta) \\ -F_{N_{FW}} \cdot \sin(\theta_s) \cdot \cos(\beta) \\ F_{N_{FW}} \cdot \sin(\beta) \end{Bmatrix}$$

Dopo aver calcolato le forze che generano la coppia, bisogna determinare il braccio, e quindi la traiettoria del punto di contatto  $C_{FW}$  al variare dell'angolo di sterzo.

Per ricavare la traiettoria del punto di contatto della ruota anteriore, scrivo l'equazione della circonferenza che rappresenta la ruota anteriore nel sistema di riferimento s1 solidale alla forcella, sapendo che il centro della ruota ha coordinate:

$$O_{FW}(o, 0, -\overline{O_F K} + o \cdot \tan(\beta) + \frac{t}{\cos(\beta)})$$

Quindi:

$$(x - o)^2 + (z - (-\overline{O_F K} + o \cdot \tan(\beta) + \frac{t}{\cos(\beta)}))^2 = R_{FW}^2$$

Dopodiché ricavo l'equazione del piano  $z = 0$  (piano stradale) nel sistema di riferimento s1 tramite la matrice di rotazione  $R_{s1}^{t3}$  e ottengo:

$$x \cdot \cos(\theta_s) \cdot \cos(\beta) - y \cdot \sin(\theta_s) \cos(\beta) + z \cdot \sin(\beta) + \overline{O_F K} \cdot \sin(\beta) = 0$$

Quindi, mettendo a sistema le due equazioni e  $y=0$  si ottiene:

$$z^2 \cdot \left(1 + \frac{\tan^2(\beta)}{\cos^2(\theta_s)}\right) + 2 \cdot z \cdot \left(\frac{\tan^2(\beta)}{\cos^2(\theta_s)} \cdot \overline{O_F K} + o \cdot \frac{\tan(\beta)}{\cos(\theta_s)} + \overline{O_F K} - \left(o \cdot \tan(\beta) + \frac{t}{\cos(\beta)}\right)\right) + \frac{\tan^2(\beta)}{\cos^2(\theta_s)} \cdot \overline{O_F K}^2 + 2 \cdot \overline{O_F K} \cdot o \cdot \frac{\tan(\beta)}{\cos(\theta_s)} + t^2 - 2 \cdot \overline{O_F K} \cdot \left(o \cdot \tan(\beta) + \frac{t}{\cos(\beta)}\right) + \overline{O_F K}^2 = 0$$

Calcolo il  $\Delta$  e lo pongo uguale a 0 in modo che la circonferenza sia tangente al piano:

$$\Delta = \left( \frac{\tan^2(\beta)}{\cos^2(\theta_s)} \cdot \overline{O_F K} + o \cdot \frac{\tan(\beta)}{\cos(\theta_s)} + \overline{O_F K} - \left( o \cdot \tan(\beta) + \frac{t}{\cos(\beta)} \right) \right)^2 - \left( 1 + \frac{\tan^2(\beta)}{\cos^2(\theta_s)} \right) \cdot \left( \frac{\tan^2(\beta)}{\cos^2(\theta_s)} \cdot \overline{O_F K}^2 + 2 \cdot \overline{O_F K} \cdot o \cdot \frac{\tan(\beta)}{\cos(\theta_s)} + t^2 - 2 \cdot \overline{O_F K} \cdot \left( o \cdot \tan(\beta) + \frac{t}{\cos(\beta)} \right) + \overline{O_F K}^2 \right) = 0$$

Si ipotizza che l'angolo di inclinazione dell'asse di sterzo  $\beta$  resti costante e si ricava quindi come varia il trail in figura 20.

Poi sostituendo  $t$  nel sistema, si ottiene la  $x$  e la  $z$  del punto di contatto nel sistema di riferimento  $s_1$ , figure 21 e 22.

E tramite la matrice di rotazione ottengo l'andamento del punto di contatto nel sistema di riferimento solidale al telaio  $t_3$ , figura 23.

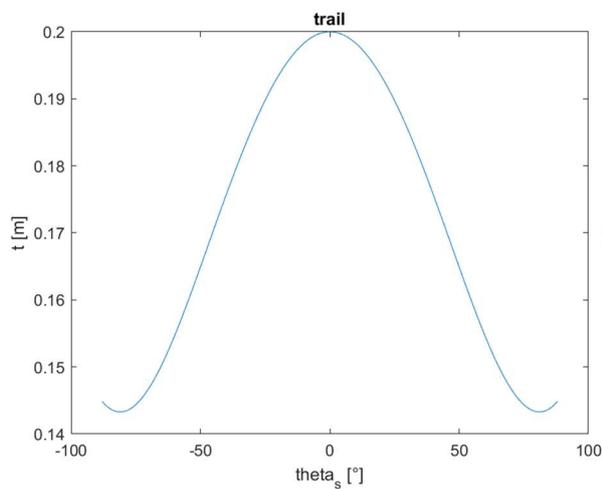


Figura 20: andamento del trail in funzione di  $\theta_s$

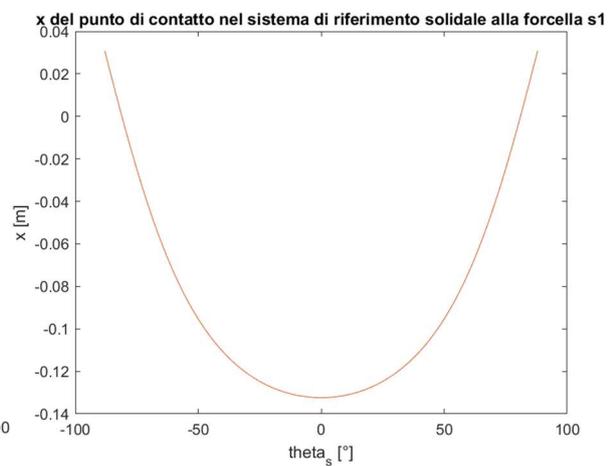


Figura 21:  $x$  del punto di contatto nel sistema di riferimento  $s_1$

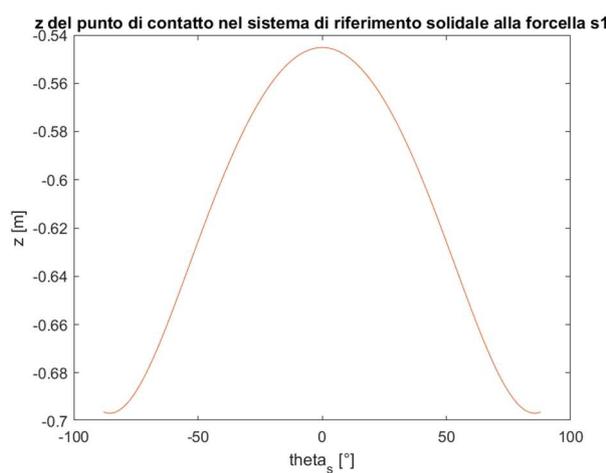


Figura 22:  $z$  del punto di contatto nel sistema di riferimento  $s_1$

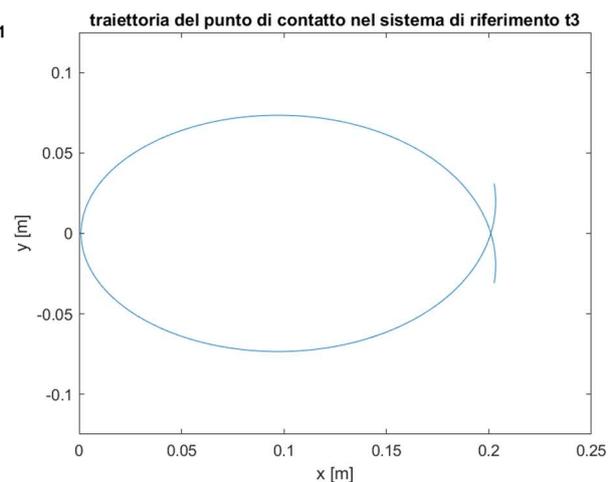


Figura 23: traiettoria del punto di contatto nel sistema di riferimento  $t_3$

Quindi la coppia di sterzo sarà:

$$\vec{T}_S^{s1} = \vec{C}_{FW}O_F^{s1} \wedge \vec{F}_N^{s1}$$

E la coppia attorno all'asse  $z_{s1}$  sarà:

$$T_S^{z-s1} = F_{N\_FW} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta_s) \cdot (x_{C_{FW}})_{s1}$$

La forza  $F_{N\_FW}^{y-s1} = F_{N\_FW} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta_s)$  è stata considerata con segno positivo perché si sta valutando la coppia resistente per contrastare l'effetto della forza peso sulla ruota anteriore, e si ottiene infatti un grafico in cui la coppia di sterzo ha segno opposto rispetto a quello dell'angolo di sterzo.

### 3.1.2 Coppia di sterzo da simulazione in Adams

Dopo aver determinato la coppia di sterzo in modo analitico tramite Matlab, si vogliono confrontare i risultati ottenuti con quelli determinati in Adams tramite simulazione.

L'angolo di sterzo è stato fatto variare in Adams in modo quasi statico tramite una funzione lineare:

Quindi l'equazione utilizzata è:

$$\theta_s = \frac{1}{5}t - 90 \text{ [}^\circ\text{]}$$

Facendo variare  $t$  nell'intervallo [0 900] s.

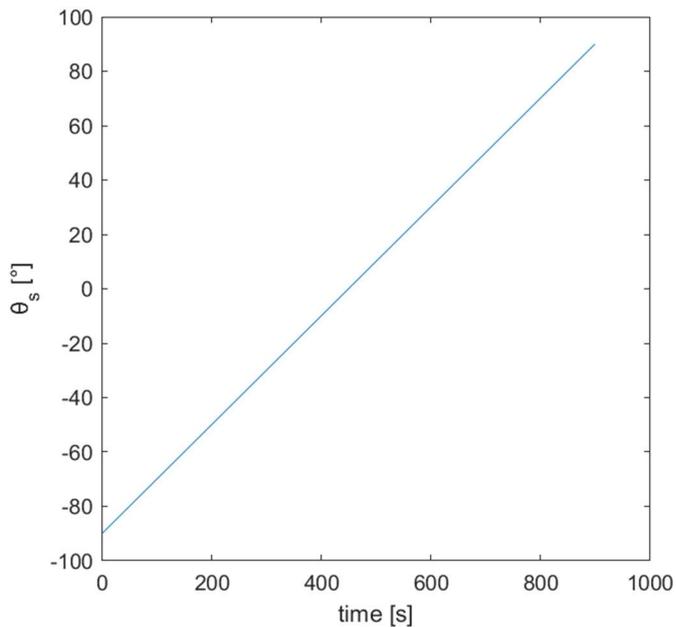


Figura 24: andamento di  $\vartheta_s$  nel tempo

Dopo aver estrapolato i risultati relativi alla coppia di sterzo ottenuti in Adams tramite il PostProcessor, è stato possibile confrontarli con i valori ottenuti dall'analisi cinematica fatta nel paragrafo precedente:

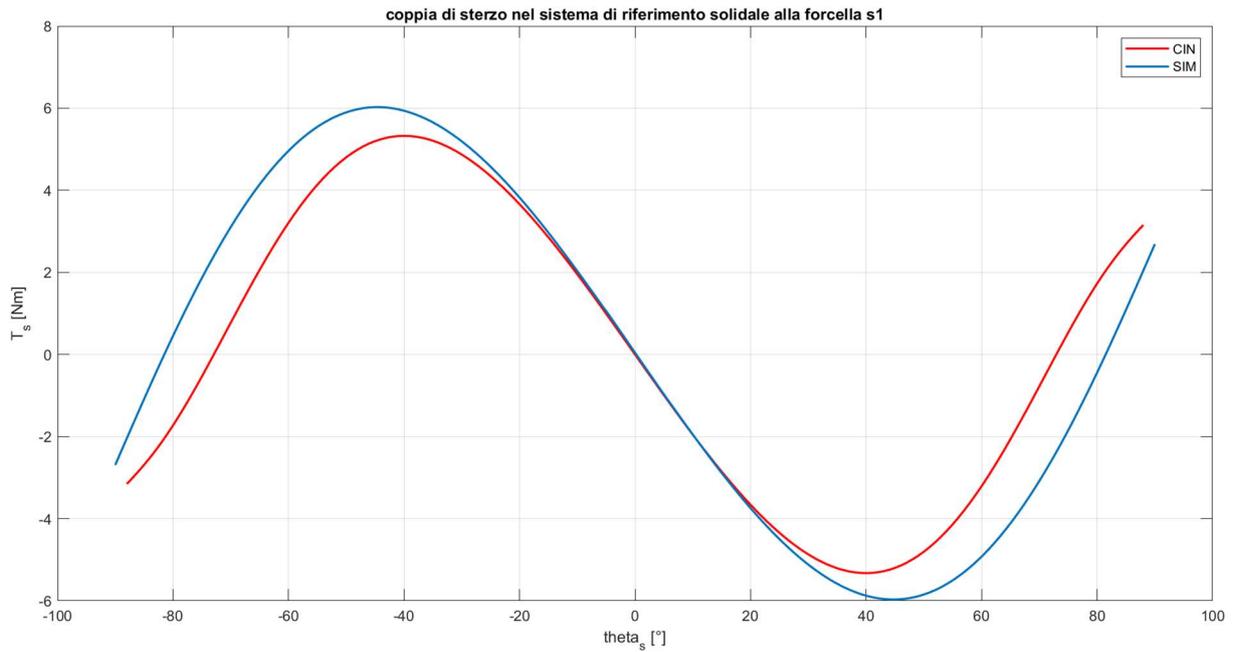


Figura 25: confronto tra simulazione e analisi cinematica

I risultati ottenuti tramite un'analisi cinematica e tramite Adams sono convergenti sia dal punto di vista qualitativo sia dal punto di vista quantitativo nella parte centrale del grafico ovvero per angoli di sterzo compresi tra  $-20^\circ$  e  $+20^\circ$ . Mentre per angoli di sterzo maggiori si nota come ci sia un offset di circa 0.7 Nm tra curva simulata e curva cinematica che è probabilmente dovuto a:

- ipotesi fatte relativamente all'angolo di inclinazione dello sterzo  $\beta$  che è stato considerato costante;
- accelerazione, seppur minima, con cui ruota lo sterzo nel modello Adams che genera degli effetti inerziali;
- geometria del modello Adams (spessore ruota).

### 3.2 Analisi parametrica

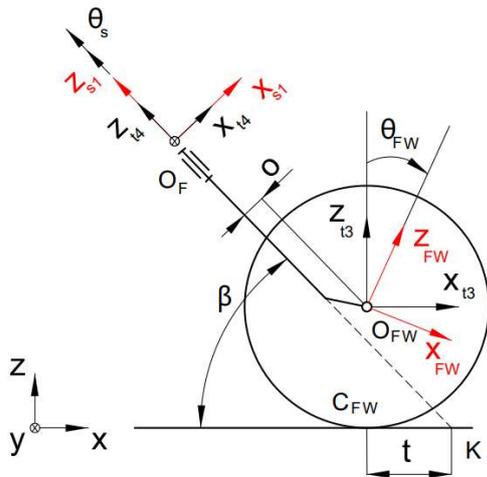


Figura 26: vista laterale dell'avantreno

Il passo successivo consiste nello svolgere un'analisi parametrica al variare dei parametri:

- Angolo di inclinazione dello sterzo  $\beta$ ;
- Offset (o rake) "o".

Sono stati fatti variare solo questi due parametri, in quanto il trail nominale dipende direttamente da questi parametri:

$$t_{nom} = \frac{R_{FW}}{\tan(\beta)} - \frac{o}{\sin(\beta)}$$

I test svolti sono descritti in tabella:

	Parametri	
	Rake "o" [m]	Ang. Di inclinazione $\beta$ [°]
Test 1	0.0	41.45°
Test 2	0.04	41.45°
Test 3	0.08	41.45°
Test 4	0.12	41.45°
Test 5	0.04	0°
Test 6	0.04	10°
Test 7	0.04	30°
Test 8	0.04	60°
Test 9	0.04	80°

Tabella 4: test svolti per l'analisi parametrica

### 3.2.1 Analisi parametrica al variare del rake "o"

Sono stati fatti i test 1:4, mantenendo l'angolo di inclinazione dello sterzo costante e variando il rake. I risultati ottenuti sono mostrati in figura, in particolare si è visto come varia la traiettoria del punto di contatto della ruota anteriore e la coppia di sterzo:

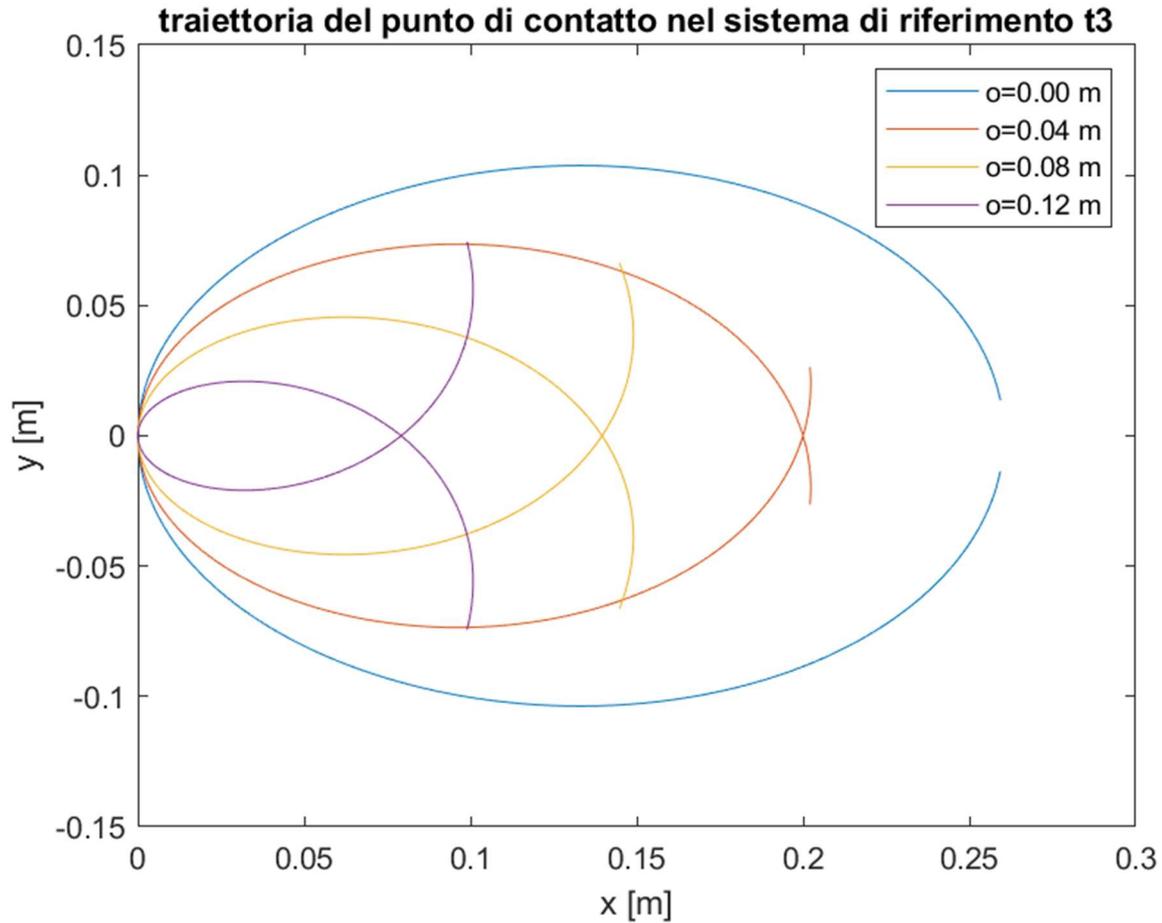


Figura 27: traiettoria del punto di contatto nel sistema di riferimento t3 al variare del rake

Come ipotizzato la traiettoria è ellittica, e il trail diminuisce sempre più all'aumentare del rake, essendo il trail nominale (a  $\theta_s = 0$ ) pari a:

$$t_{nom} = \frac{R_{FW}}{\tan(\beta)} - \frac{o}{\sin(\beta)}$$

Quindi la coppia di sterzo diminuirà all'aumentare del rake perché il braccio diminuisce.

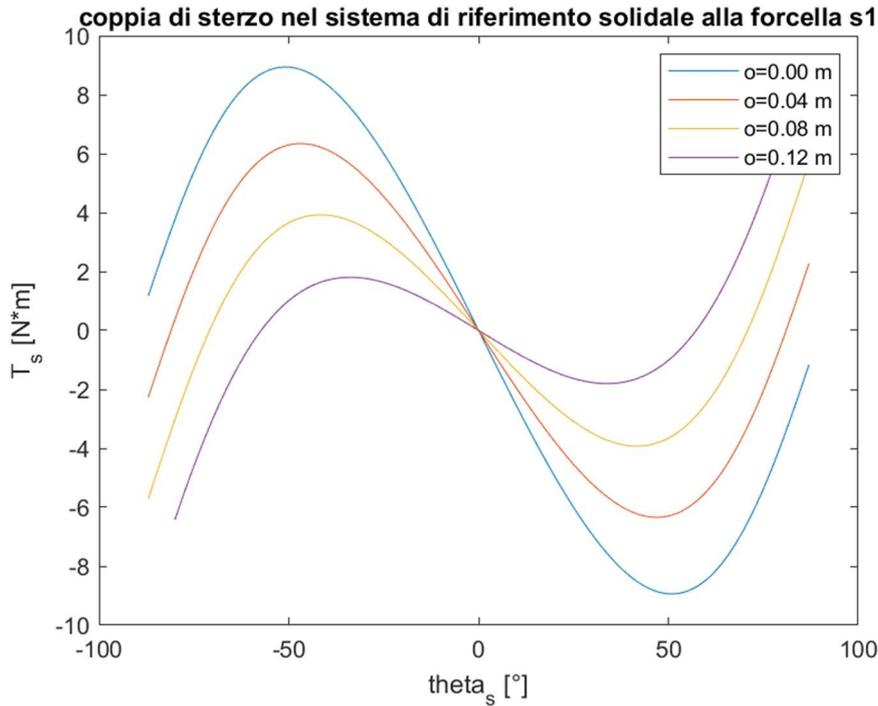


Figura 28: coppia di sterzo al variare del rake

Per cui potrebbe essere utile aumentare leggermente il rake per diminuire la coppia allo sterzo in modo da ottenere una maggiore manovrabilità del veicolo in curva. Tuttavia bisogna tener presente che esiste un valore massimo del rake oltre il quale il trail diventa negativo e questo cambia totalmente la fisica del problema.

### 3.2.2 Analisi parametrica al variare di $\beta$

Poi sono stati fatti i test 6:9, facendo variare l'angolo di inclinazione dello sterzo  $\beta$  e mantenendo costante il rake  $\sigma = 0.04$  m.

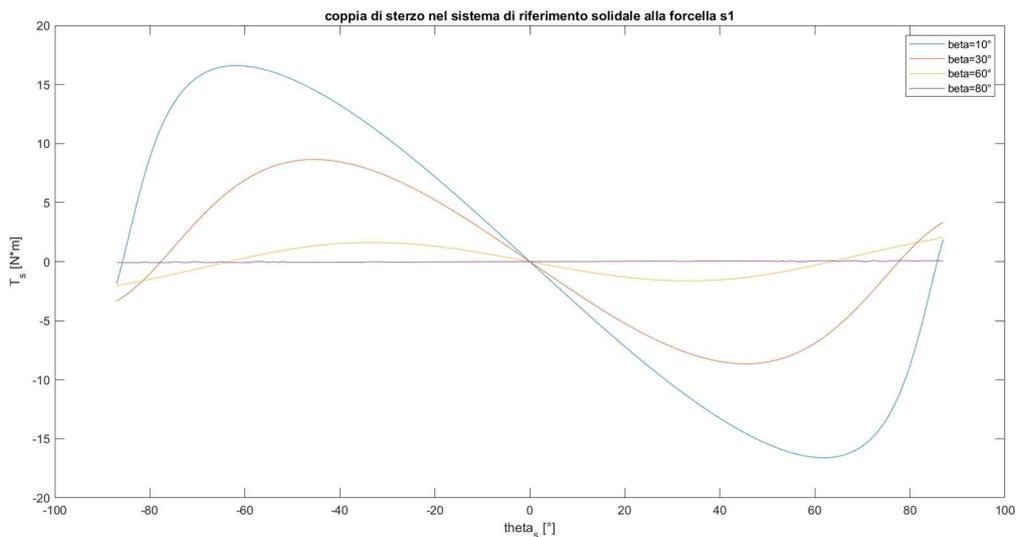


Figura 29: coppia di sterzo al variare di beta

Come ipotizzato, il trail diminuisce rapidamente all'aumentare di  $\beta$  e di conseguenza anche la coppia di sterzo diminuisce. Quindi rendendo sempre più verticale l'asse di sterzo aumenta notevolmente la manovrabilità del veicolo, tuttavia con assi di sterzo troppo verticali il veicolo potrebbe essere troppo sensibile ad una perturbazione proveniente dall'esterno che fa muovere lo sterzo e di conseguenza fa sterzare il veicolo. Per questo motivo si cerca un compromesso tra manovrabilità e stabilità del veicolo.

### 3.3 Analisi dinamica

Partendo dai risultati ottenuti tramite l'analisi statica, è stata fatta un'analisi dinamica tramite vari test sintetizzati in tabella, per valutare su traiettoria rettilinea lo slittamento delle ruote, ovvero la differenza tra traiettoria cinematica e traiettoria simulata:

	Parametri		
	Accelerazione angolare max delle ruote posteriori $\ddot{\theta}_{RW}$ [rad/s <sup>2</sup> ]	Velocità angolare ruote posteriori a regime [rad/s]	Angolo di sterzo $\theta_s$ [°]
Test 1	2.935	10	0°
Test 2	5	10	0°
Test 3	5.865	20	0°
Test 4	4.4	30	0°

Tabella 5: tabella test analisi dinamica su traiettoria rettilinea

#### 3.3.1 Traiettoria rettilinea

Le ipotesi che sono state fatte per i primi 4 test su strada rettilinea ad accelerazioni differenti riguardano il modello di contatto ruota-terreno: è stato implementato nel software MSC Adams il modello di Coulomb con coefficienti di attrito (5) (attrito gomma-asfalto):

$$\mu_s = 0.5 \quad \mu_d = 0.4$$

Per ogni test è stata definita un diagramma delle velocità di tipo cubico tramite la funzione "step" in Adams. Dopodiché, derivando e integrando sono stati ottenuti, rispettivamente i diagrammi delle accelerazioni e delle alzate:

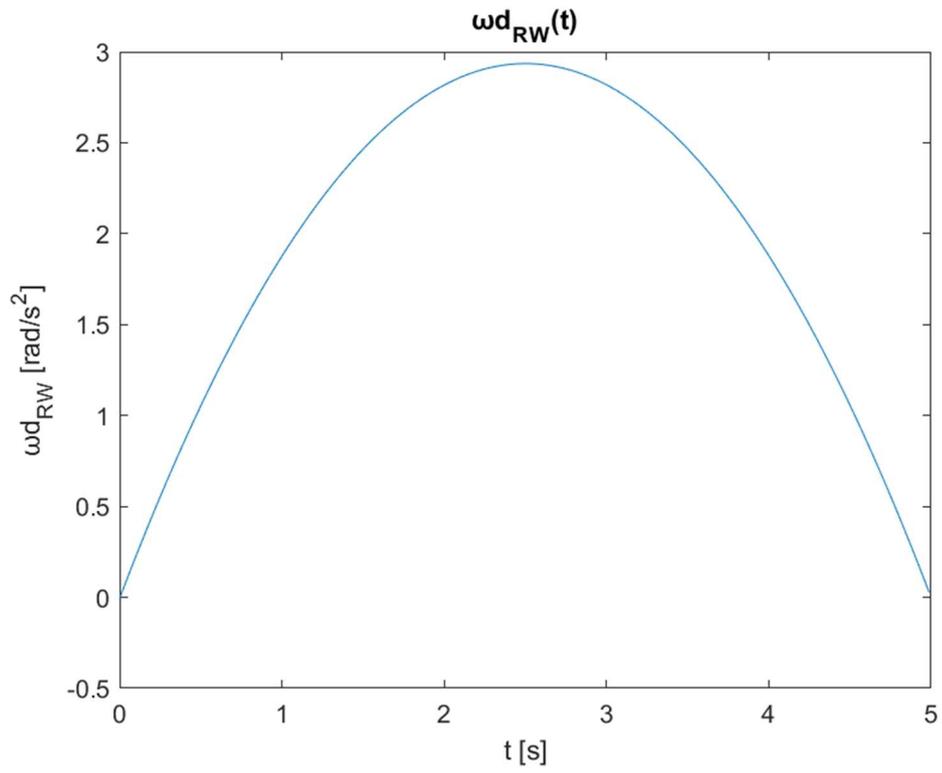


Figura 30: diagramma delle accelerazioni

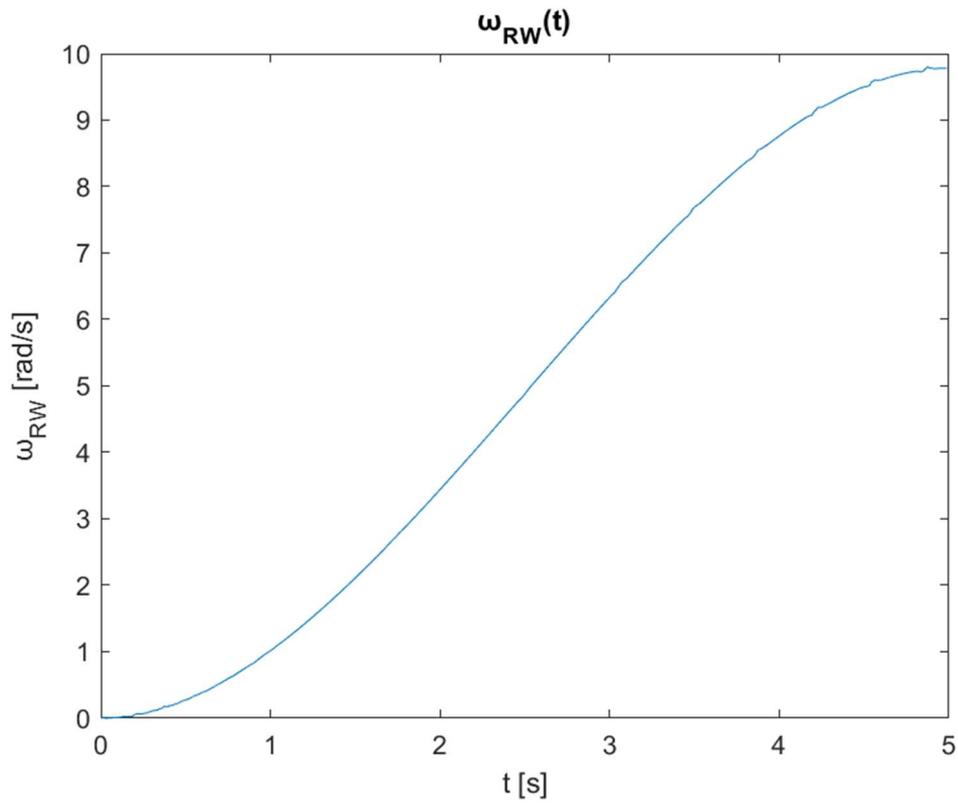


Figura 31: diagramma delle velocità di tipo cubico

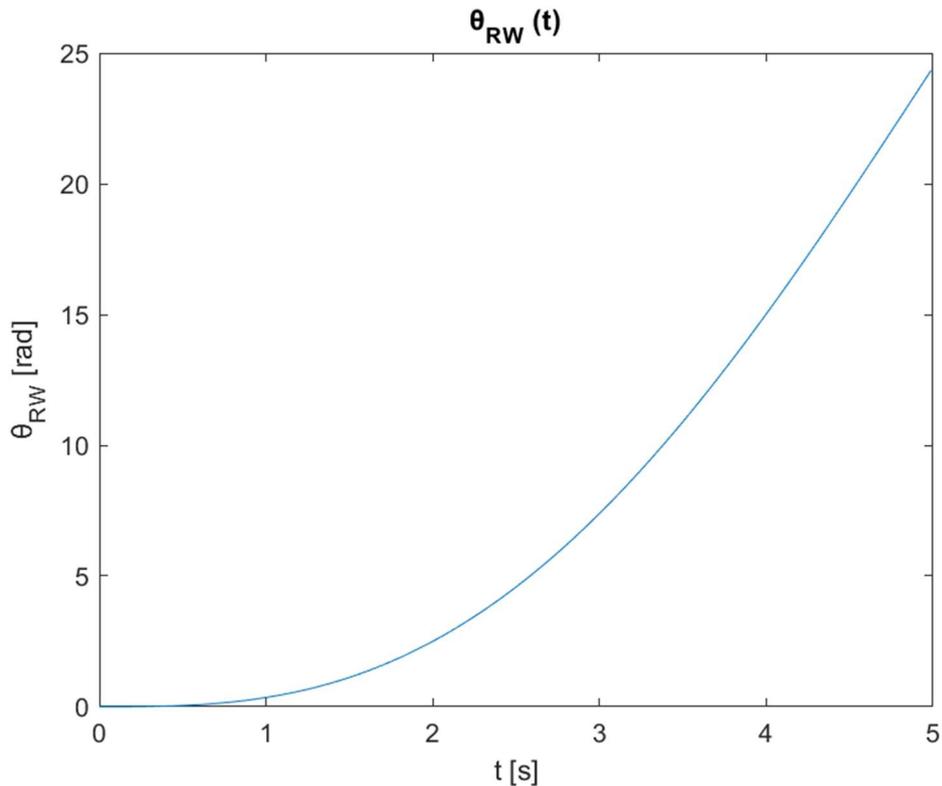


Figura 32: diagramma delle alzate

Mentre dal punto di vista analitico è stato considerato un modello di pure rotolamento in cui lo spostamento lungo x è stato calcolato come:

$$x = \theta_{RW} \cdot R_{RW} \quad [m]$$

Quindi, sono stati confrontati, per ognuno dei primi 4 test, la pendenza della curva simulata in Adams con quella calcolata analiticamente tramite Matlab:

#### Test 1 e 2:

I primi due test sono stati svolti alla stessa velocità angolare a regime, ma a differenti accelerazioni angolari. Si nota come i grafici simulati e analitici coincidano in entrambi i casi in quanto le accelerazioni angolari in questi casi sono inferiori all'accelerazione angolare massima (calcolata nel paragrafo [4.1]) oltre il quale si ha perdita di aderenza e slittamento. Nella figura sottostante è stata analizzata la porzione di grafico relativa ai primi 5 secondi di simulazione, ovvero il transitorio, e si nota come all'aumentare dell'accelerazione aumenta più velocemente la pendenza della curva che rappresenta la velocità angolare delle ruote posteriori.

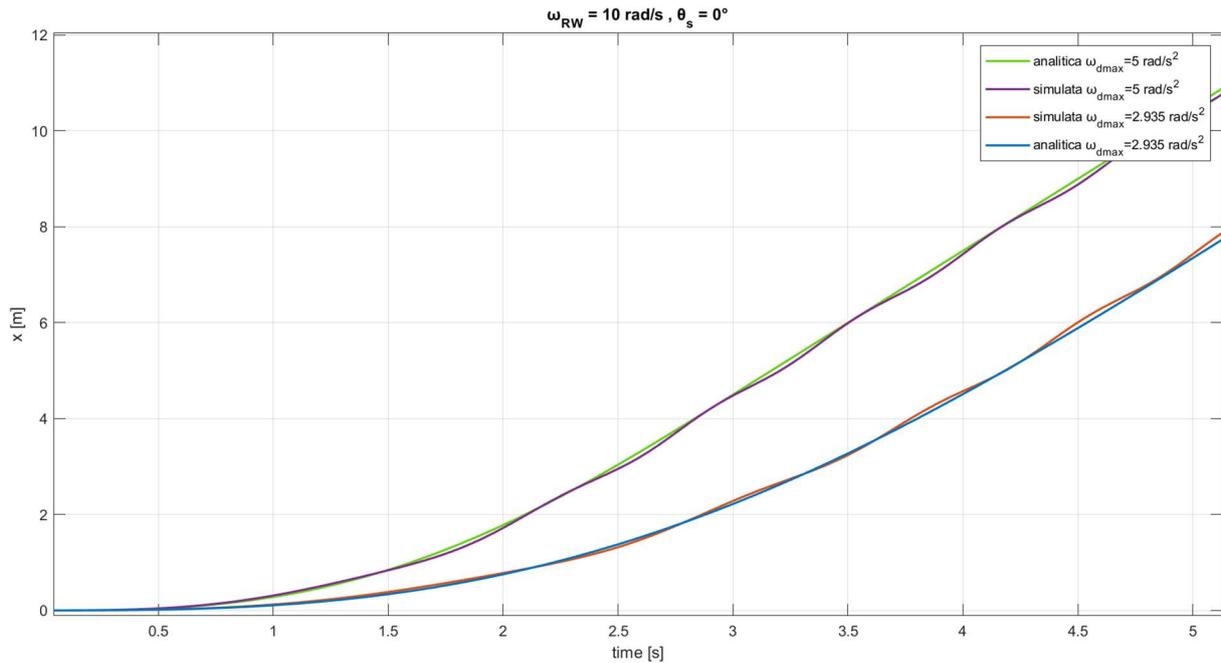


Figura 33: confronto tra curva simulata e curva calcolata analiticamente a  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  a diverse accelerazioni angolari

### Test 2, 3 e 4

Dopo aver analizzato come varia il transitorio nei primi due test, è possibile confrontare i test svolti a velocità angolari differenti in modo da vedere come varia la pendenza delle curve all'aumentare della velocità:

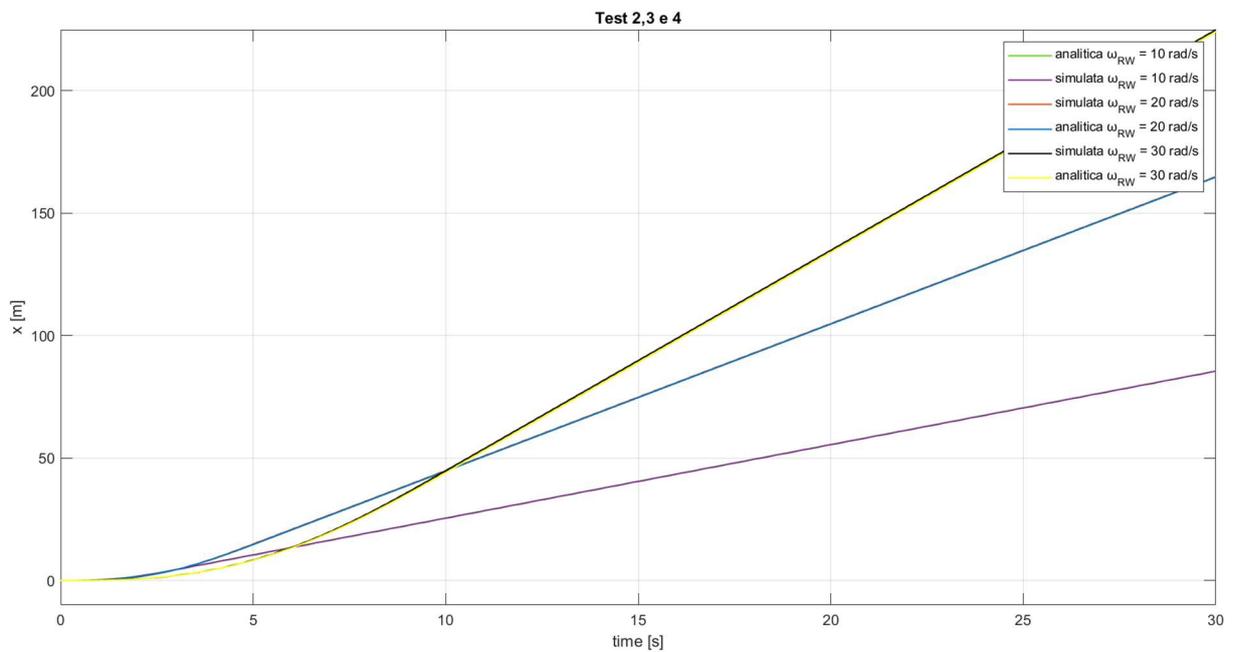


Figura 34: confronto tra curva simulata e curva calcolata analiticamente a  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  e  $\omega = 30 \text{ rad/s}$

La pendenza delle curve aumenta all'aumentare della velocità, inoltre si nota nel grafico che è stato impostato un transitorio di durata maggiore per il test 4 in modo da evitare di raggiungere accelerazioni angolari elevate che avrebbero potuto provocare lo slittamento delle ruote.

### 3.3.2 Traiettoria curvilinea

Per i successivi test è stato inizialmente calcolato il raggio cinematico in modo analitico:

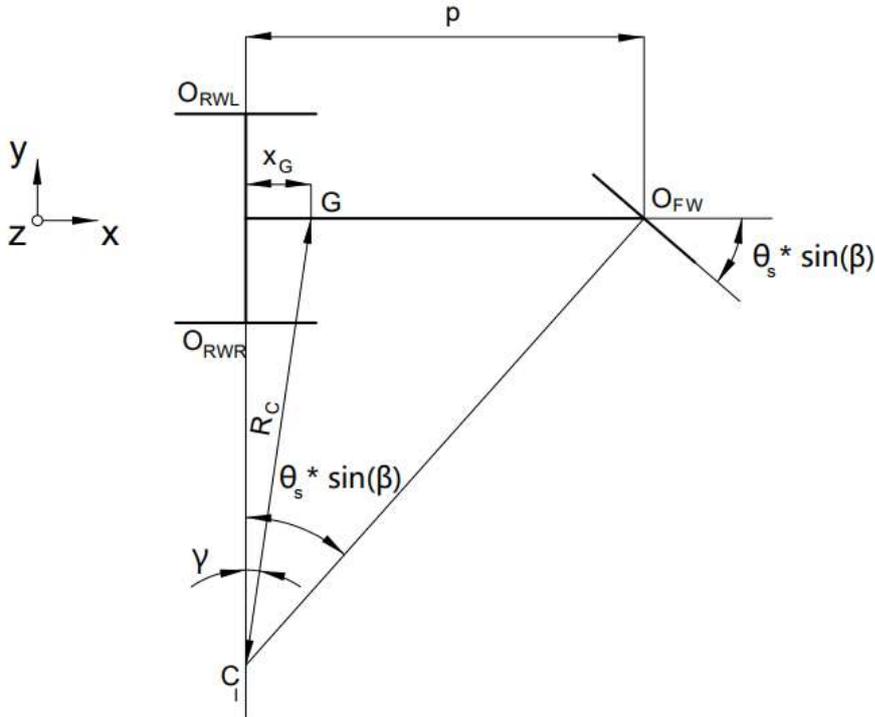


Figura 35: vista dall'alto della carrozzina

Dato un angolo di sterzo  $\theta_s$  intorno all'asse  $z_{s1}$  nel sistema di riferimento solidale alla forcella, tramite la matrice di rotazione:

$$R_{s1}^{t3} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_s \cdot \sin \beta & -\sin(\beta) \cdot \sin \vartheta_s & -\cos \beta \\ \sin \vartheta_s & \cos \vartheta_s & 0 \\ \cos \vartheta_s \cdot \cos \beta & -\sin \vartheta_s \cdot \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}$$

È possibile ottenere:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{s,x}^{t3} \\ \theta_{s,y}^{t3} \\ \theta_{s,z}^{t3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_s \cdot \sin \beta & -\sin(\beta) \cdot \sin \vartheta_s & -\cos \beta \\ \sin \vartheta_s & \cos \vartheta_s & 0 \\ \cos \vartheta_s \cdot \cos \beta & -\sin \vartheta_s \cdot \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_s \cdot \cos \beta \\ 0 \\ \theta_s \cdot \sin \beta \end{Bmatrix}$$

Quindi si ottiene una rotazione intorno a z del sistema di riferimento principale di  $\theta_s \cdot \sin \beta$  indicata in figura 35.

Quindi il raggio di curvatura cinematico sarà dato da:

$$R_C = \sqrt{\left(\frac{p}{\tan(\theta_s \cdot \sin \beta)}\right)^2 + x_G^2}$$

Quindi la traiettoria del baricentro sarà descritta dalla circonferenza di equazione:

$$(x - x_G)^2 + \left(y - \frac{p}{\tan(\theta_s \cdot \sin \beta)}\right)^2 = R_C^2$$

Mentre l'angolo  $\gamma$  è pari a:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{x_G}{R_C}\right)$$

Dopo aver definito tutti i parametri è stato possibile svolgere le simulazioni e confrontarle con quanto ricavato analiticamente. Le simulazioni svolte sono riassunte in tabella:

Parametri		
	Velocità angolare ruote posteriori a regime [rad/s]	Angolo di sterzo $\theta_s$ [°]
Test 1	3.3333	8°
Test 2	6.6666	8°
Test 3	10	8°
Test 4	3.3333	14°
Test 5	6.6666	14°
Test 6	10	14°

Tabella 6: test analisi dinamica su traiettoria curvilinea

### Test 1,2 e 3:

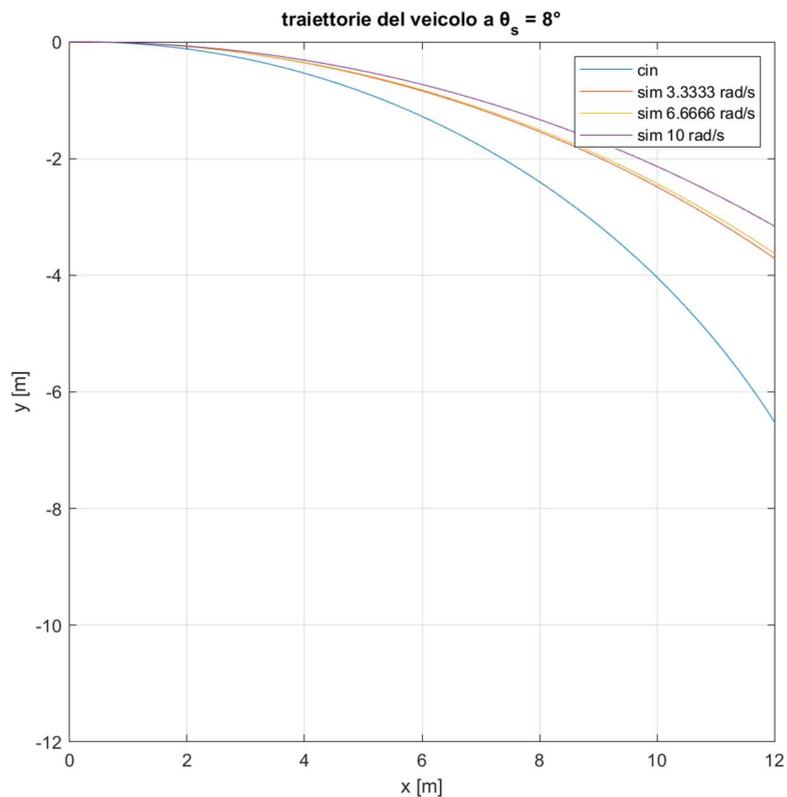


Figura 36: confronto tra traiettoria simulata e traiettoria cinematica a  $\theta_s=8^\circ$  e a diverse velocità del veicolo

Si nota dal grafico che a parità di angolo di sterzo la traiettoria si discosta maggiormente dalla traiettoria cinematica all'aumentare della velocità in quanto aumento lo slittamento laterale delle ruote, ovvero la deriva.

**Test 4,5 e 6:**

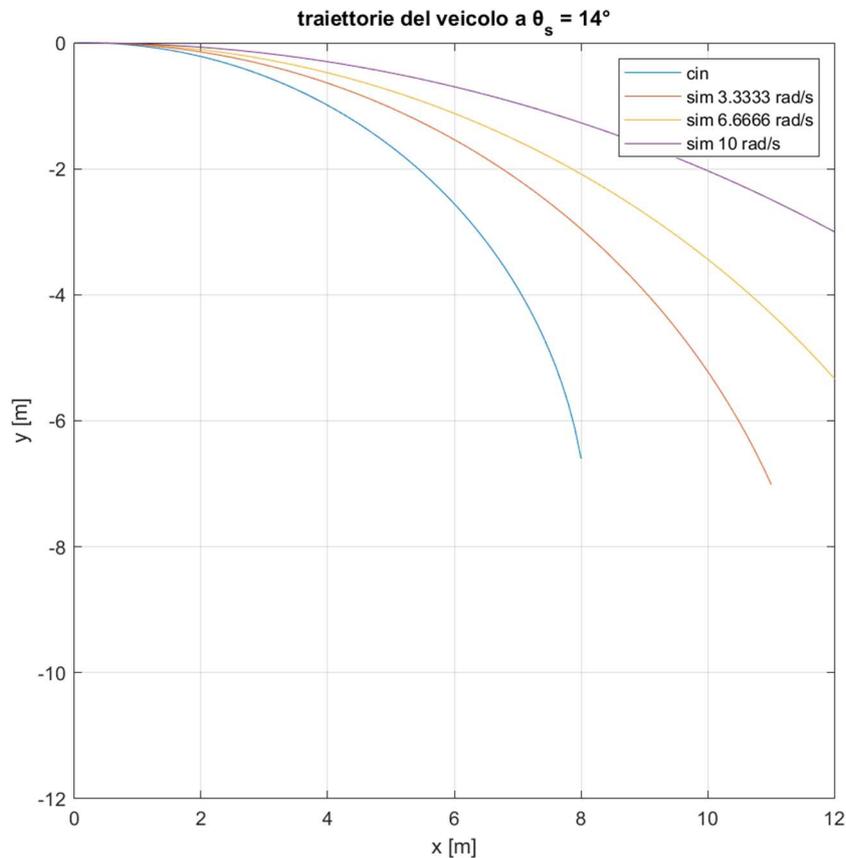


Figura 37: confronto tra traiettoria simulata e traiettoria cinematica a  $\theta_s=14^\circ$  e a diverse velocità del veicolo

Anche in questo caso si rileva in modo più accentuato quanto visto nel grafico precedente con una differenza sempre più netta tra traiettoria cinematica e traiettoria simulata.

Sono stati calcolati i raggi di curvatura cinematici nei due casi a  $\theta_s = 8^\circ$  e a  $\theta_s = 14^\circ$  e i raggi di curvatura ricavati dalle 6 simulazioni effettuate, i dati sono riassunti nella tabella sottostante:

	Parametri		
	Velocità angolare ruote posteriori a regime [rad/s]	Angolo di sterzo $\theta_s$ [°]	Raggio di curvatura [m]
Test 1	3.3333	8°	20.76
Test 2	6.6666	8°	21.16
Test 3	10	8°	23.78
Test 4	3.3333	14°	11.90
Test 5	6.6666	14°	15.83
Test 6	10	14°	24.89
cinematico		8°	14.03
cinematico		14°	7.80

Tabella 7: raggi di curvatura

## 4. Discussione

### 4.1 Analisi risultati su traiettoria rettilinea

Per analizzare i risultati ottenuti su traiettoria rettilinea, si ricava il diagramma di corpo libero di una delle due ruote posteriori rappresentato in figura 44, avendo ipotizzato, in questa prima fase, di utilizzare un modello di contatto ruota-terreno di tipo Coulombiano (9).

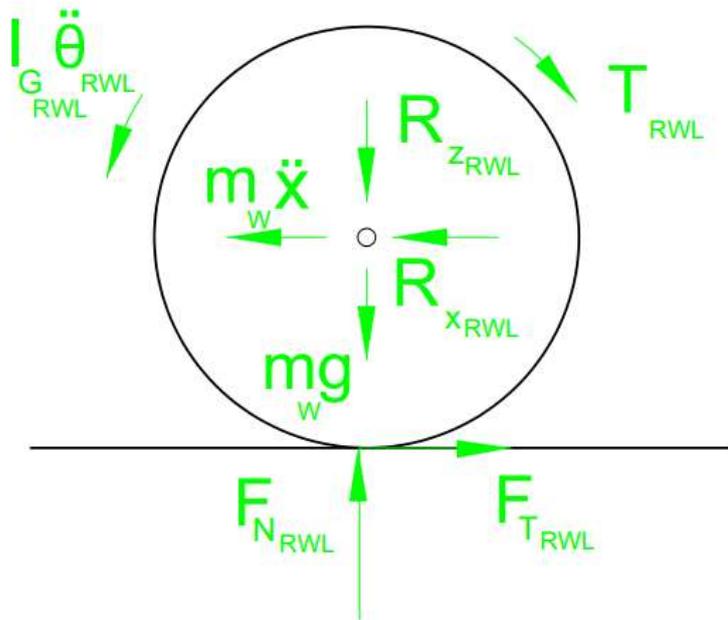


Figura 38: diagramma di corpo libero ruota posteriore sinistra

Dato questo DCL, è possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al centro della ruota  $O_{RWL}$  e le due equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\rightarrow: F_{T_{RWL}} - R_{x_{RWL}} - m_w \cdot \ddot{x} = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: F_{N_{RWL}} - m_w \cdot g - R_{z_{RWL}} = 0 \quad (2)$$

$$T_{RWL} - I_{G_{RWL}} \cdot \ddot{\theta}_{RWL} - F_{T_{RWL}} \cdot R_{RWL} = 0 \quad (3)$$

Avendo ipotizzato l'attrito volvente trascurabile.

Dove la forza  $F_{N_{RWL}}$  è stata ricavata nell'analisi statica. E dalla (2) si ottiene  $R_{z_{RWL}}$ .

In questo modello di contatto ruota-terreno per non avere slittamento deve essere verificato che:

$$\left| \frac{F_T}{F_N} \right| \leq \mu_s$$

Quindi la condizione di incipiente slittamento si ha quando:

$$F_T = \mu_s \cdot F_N$$

Facendo il diagramma di corpo libero del telaio e della forcella nel piano xz si ricava l'incognita  $R_{x\_RWL}$ :

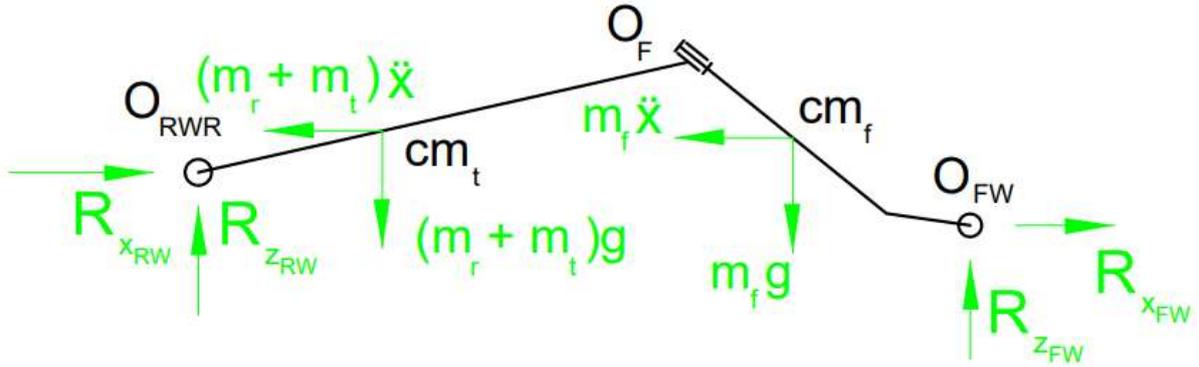


Figura 39: diagramma di corpo libero di telaio e forcella nel piano x-z

Da cui si possono ricavare le tre equazioni di equilibrio, le prime due per l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale, la terza per l'equilibrio alla rotazione intorno a  $O_{RWR}$ :

$$\rightarrow: R_{x_{RW}} + R_{x_{FW}} - (m_r + m_t) \cdot \ddot{x} - m_f \cdot \ddot{x} = 0 \quad (4)$$

$$\uparrow: R_{z_{RW}} + R_{z_{FW}} - (m_r + m_t) \cdot g - m_f \cdot g = 0 \quad (5)$$

$$(m_r + m_t) \cdot \ddot{x} \cdot z_{cm_t} - (m_r + m_t) \cdot g \cdot x_{cm_t} - m_f \cdot g \cdot x_{cm_f} + m_f \cdot \ddot{x} \cdot z_{cm_f} + R_{z_{FW}} \cdot x_{O_{FW}} + R_{x_{FW}} \cdot |z_{O_{FW}}| = 0 \quad (6)$$

Dopo aver ricavato  $R_{x_{FW}}$  dalla (6), si ricava dalla (4) l'espressione di  $R_{x_{RW}}$ , e, ipotizzando che questa forza si distribuisca in modo uguale sulle due ruote posteriori si ha per ognuna:

$$R_{x_{RWL}} = R_{x_{RWR}} = \frac{R_{x_{RW}}}{2}$$

Sostituendo nella (1) l'espressione di  $R_{x_{RWL}}$  e  $F_{T\_RWL} = \mu_s F_{N\_RWL}$  si ricava l'accelerazione massima lungo x che si può ottenere senza avere slittamento delle ruote:

$$\ddot{x} = 2.36 \text{ m/s}^2$$

Ovvero:

$$\ddot{\theta}_{RWL} = \frac{\ddot{x}}{R_{RWL}} = 7.87 \text{ rad/s}^2$$

Una volta ottenuta l'accelerazione angolare massima delle ruote posteriori, si nota come i valori di accelerazione angolare massima utilizzati nei primi 4 test siano inferiori, infatti, non è stato osservato il fenomeno dello slittamento nei primi secondi di accelerazione, infatti si nota come il grafico simulato e il grafico ricavato da calcoli analitici siano perfettamente sovrapposti nei test svolti.

Inoltre sono stati ipotizzati trascurabili le resistenze al moto dovute a effetti aerodinamici, attrito volvente, pendenza della strada nulla. Per cui anche nella fase a velocità costante i due andamenti coincidono perfettamente.

## 4.2 Analisi risultati su traiettoria curvilinea

Per poter analizzare il comportamento dinamico della carrozzina su traiettoria curvilinea, sono stati ricavati i diagrammi di corpo libero dei componenti della carrozzina e della carrozzina stessa ed è stata fatta un'analisi dinamica nelle tre direzioni:

- Normale al piano stradale;
- Longitudinale;
- Trasversale.

Lungo la direzione normale al piano stradale è stato valutato come la forza normale sulle ruote posteriori si distribuisce al variare della velocità longitudinale della carrozzina (ovvero la velocità angolare delle ruote posteriori) e al variare dell'angolo di sterzo.

Lungo la direzione longitudinale si è visto come varia la componente longitudinale della forza di attrito tra ruote e terreno in modo da poter valutare lo slittamento.

Infine lungo la direzione trasversale è stato rilevato il comportamento della componente trasversale della forza di attrito in modo da poter valutare lo slittamento laterale delle ruote.

### 4.2.1 Analisi dinamica lungo la direzione normale al piano stradale

Ipotizzando di avere un angolo di sterzo  $\theta_s$  negativo, ovvero che si sta sterzando verso destra, si ha allora il diagramma di corpo libero rappresentato in figura.

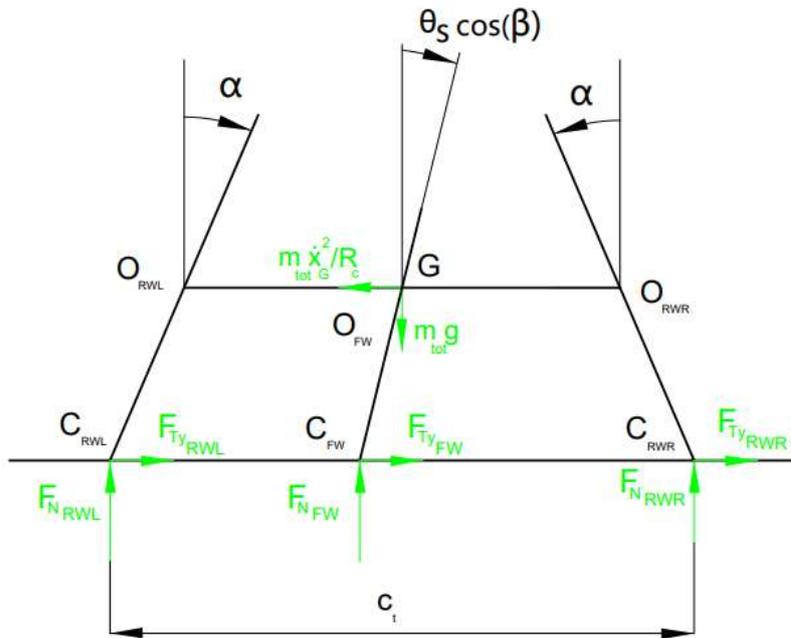


Figura 40: diagramma di corpo libero sul piano frontale

Scrivendo la seconda equazione cardinale della dinamica intorno al punto di contatto della ruota posteriore sinistra  $C_{RWL}$ , ipotizzando di essere in condizioni stazionarie e di poter quindi trascurare qualunque effetto inerziale si ottiene:

$$F_{N_{RWR}} = \frac{m_{tot} \cdot g \cdot \frac{c_t}{2} - \frac{m_{tot} \cdot \dot{x}_G^2}{R_C} \cdot R_{RWR} \cdot \cos(\alpha) - F_{N_{FW}} \cdot \left(\frac{c_t}{2} - R_{FW} \cdot \sin(\theta_s \cdot \cos(\beta))\right)}{c_t}$$

$$F_{N_{RWL}} = m_{tot} \cdot g - F_{N_{FW}} - F_{N_{RWR}}$$

Si nota subito come la ruota più caricata sia quella più esterna e in particolare quando  $F_{N_{RWR}} = 0$  si ha il ribaltamento della carrozzina. Quindi le forze normali sono funzione di:

- velocità longitudinale del veicolo;
- raggio di curvatura del veicolo e quindi angolo di sterzo.

La forza normale agente sulla ruota anteriore  $F_{N_{FW}}$  è stata ipotizzata costante in condizioni stazionarie e pari a 115.16 N come è stato calcolato nell'analisi statica.

#### 4.2.2 Analisi dinamica longitudinale

Dopo aver ottenuto l'espressione delle forze normali agenti su ogni ruota è possibile ricavare dal modello di attrito di Coulomb (9) l'espressione delle forze di attrito in direzione longitudinale:

$$F_{T_{xRWR}} = \mu_s \cdot F_{N_{RWR}}$$

$$F_{T_{xRWL}} = \mu_s \cdot F_{N_{RWL}}$$

$$F_{T_{xFW}} = \mu_s \cdot F_{N_{FW}}$$

Per poter valutare lo slittamento si ricava il diagramma di corpo libero di una delle due ruote posteriori:

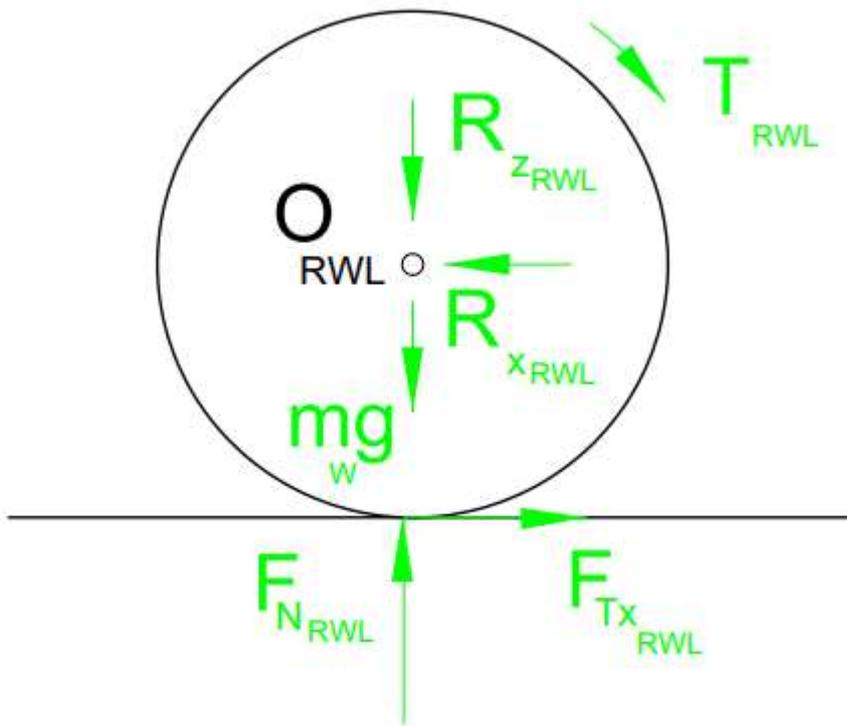


Figura 41: diagramma di corpo libero ruota posteriore sinistra

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a  $O_{RWL}$ , ipotizzando di poter trascurare le inerzie perché si è in condizioni stazionarie:

$$T_{RWL} - F_{T_{x_{RWL}}} \cdot R_{RWL} = 0$$

Si ha che la condizione di puro rotolamento è verificata se:

$$T_{RWL} \leq F_{T_{x_{RWL}}} \cdot R_{RWL}$$

Per la ruota posteriore destra vale la stessa condizione:

$$T_{RWR} \leq F_{T_{x_{RWR}}} \cdot R_{RWR}$$

Quindi, se si ipotizza di sterzare verso destra ad esempio, si avrà che la forza normale agente sulla ruota posteriore sinistra sarà maggiore di quella agente sulla ruota posteriore destra, per cui quest'ultima, a parità di coppia motrice, inizierà a slittare a velocità inferiori rispetto all'altra.

#### 4.2.3 Analisi dinamica trasversale

Partendo dal diagramma di corpo libero rappresentato in figura, si possono ottenere le espressioni delle forze agenti sulle ruote in direzione trasversale:

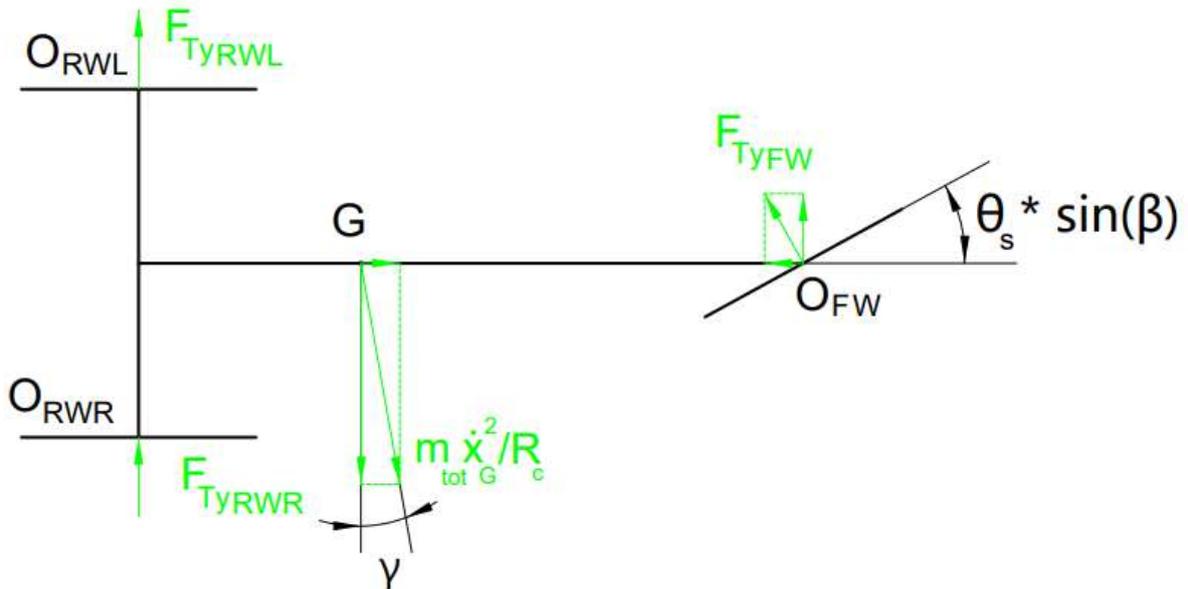


Figura 42: diagramma di corpo libero della carrozzina sul piano xy

Per ricavare la componente lungo y della forza agente sulla ruota anteriore si scrive la seconda equazione della dinamica intorno a  $O_{RWR}$  e si ottiene:

$$F_{TyFW} = \frac{\frac{m_{tot} \cdot \dot{x}_G^2}{R_c} \cdot \cos(\gamma) \cdot \frac{x_G}{p}}{\cos(\theta_s \cdot \sin(\beta))}$$

Dopodiché, ipotizzo che  $F_{TyRWL} = F_{TyRWR}$  e quindi si ottiene:

$$F_{TyRWL} = F_{TyRWR} = \frac{\frac{m_{tot} \cdot \dot{x}_G^2}{R_c} \cdot \cos(\gamma) - F_{TyFW} \cdot \cos(\theta_s \cdot \sin(\beta))}{2}$$

Confrontando queste forze con le forze di attrito trasversali agenti su ogni ruota si può ipotizzare, in prima approssimazione, quando si ha lo scivolamento laterale delle ruote ovvero la deriva.

#### 4.2.4 Risultati simulazioni su traiettoria curvilinea

Sono state effettuate alcune simulazioni su traiettoria curvilinea con l'ausilio del software MSC Adams, al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori, in modo da osservare come varia la coppia di sterzo in funzione di questi due parametri. I test svolti sono sintetizzati in tabella:

Test	$\dot{\theta}_{RWR}$ [rad/s]	$\dot{\theta}_{RWL}$ [rad/s]	$\dot{x}_G$ [m/s]	$\theta_s$ [°]
1	3.3333	3.3333	1	2
2	3.3333	3.3333	1	4
3	3.3333	3.3333	1	6
4	3.3333	3.3333	1	8
5	3.3333	3.3333	1	10
6	3.3333	3.3333	1	12
7	3.3333	3.3333	1	14
8	3.3333	3.3333	1	16
9	3.3333	3.3333	1	18
10	3.3333	3.3333	1	20
11	3.3333	3.3333	1	22
12	3.3333	3.3333	1	24
13	3.3333	3.3333	1	26
14	3.3333	3.3333	1	28
15	3.3333	3.3333	1	30
16	6.6666	6.6666	2	2
17	6.6666	6.6666	2	4
18	6.6666	6.6666	2	6
19	6.6666	6.6666	2	8
20	6.6666	6.6666	2	10
21	6.6666	6.6666	2	12
22	6.6666	6.6666	2	14
23	6.6666	6.6666	2	16
24	6.6666	6.6666	2	18
25	6.6666	6.6666	2	20
26	6.6666	6.6666	2	22
27	6.6666	6.6666	2	24
28	10	10	3	2
29	10	10	3	4

30	10	10	3	6
31	10	10	3	8
32	10	10	3	10
33	10	10	3	12
34	10	10	3	14
35	10	10	3	16
36	10	10	3	18
37	10	10	3	20
38	13.3333	13.3333	4	2
39	13.3333	13.3333	4	4
40	13.3333	13.3333	4	6
41	13.3333	13.3333	4	8
42	13.3333	13.3333	4	10
43	13.3333	13.3333	4	12
44	13.3333	13.3333	4	14
45	13.3333	13.3333	4	16
46	13.3333	13.3333	4	18
47	13.3333	13.3333	4	20
48	13.3333	13.3333	4	22
49	13.3333	13.3333	4	24
50	16.6666	16.6666	5	2
51	16.6666	16.6666	5	4
52	16.6666	16.6666	5	6
53	16.6666	16.6666	5	8
54	16.6666	16.6666	5	10
55	16.6666	16.6666	5	12
56	16.6666	16.6666	5	14
57	16.6666	16.6666	5	16
58	20	20	6	2
59	20	20	6	4
60	20	20	6	6
61	20	20	6	8
62	20	20	6	10
63	20	20	6	12
64	20	20	6	14

Tabella 8: test su traiettoria curvilinea

La velocità del veicolo è stata fatta variare tra 3.6 km/h e 21.6 km/h mentre l'angolo di sterzo tra 2° e 30° a basse velocità e tra 2° e 14° ad alte velocità.

La velocità angolare delle ruote posteriori varia nei primi 5 secondi di simulazione tra 0 rad/s e la velocità desiderata, tramite la funzione “step” di Adams che rappresenta una funzione cubica come rappresentato in figura:

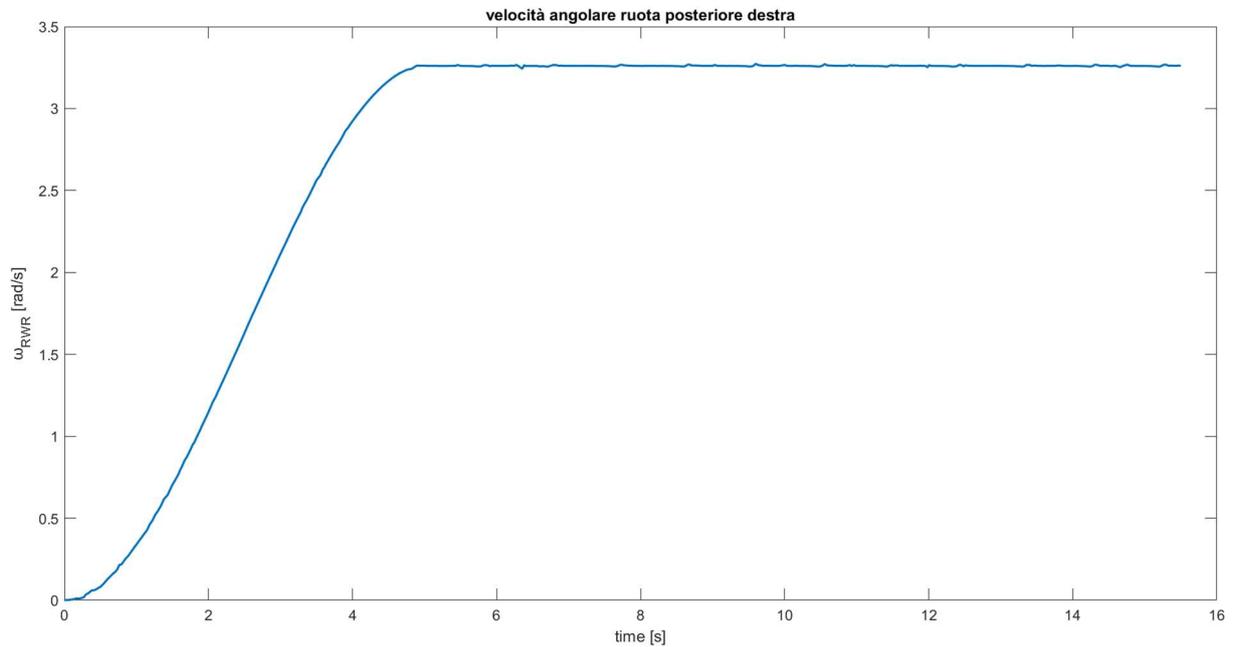


Figura 43: velocità angolare ruota posteriore destra

Mentre l’angolo di sterzo è stato fatto variare nell’intervallo compreso tra 6 e 10 s di ogni simulazione, tramite la funzione “step” descritta precedentemente.

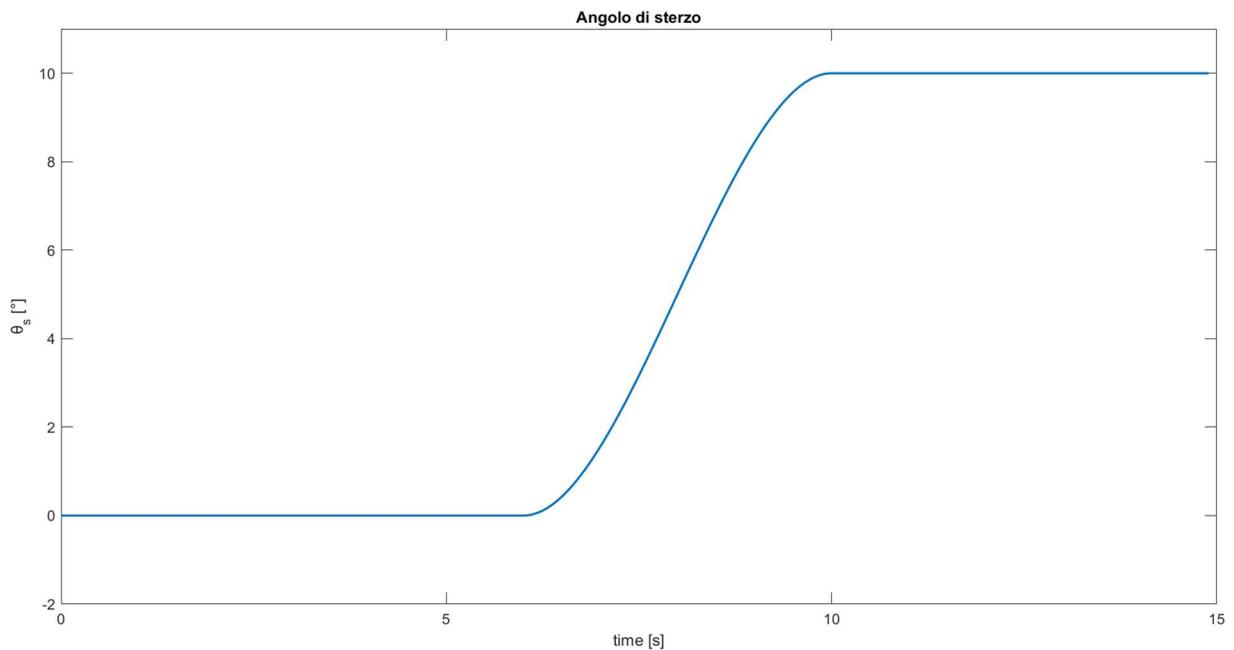


Figura 44: angolo di sterzo in funzione del tempo

Quindi sono state rilevate le forze normali e le forze di attrito longitudinale e trasversale agenti su ogni ruota, e infine la coppia di sterzo. L'analisi è stata svolta in condizioni stazionarie, quindi ogni segnale è stato rilevato a partire dai 10 s della simulazione, ovvero una volta trascorso il transitorio.

I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella sottostante:

$\dot{\theta}_{RW}$ [rad/s]	$\theta_s$ [°]	$F_{N_{RWR}}$ [N]	$F_{N_{RWL}}$ [N]	$F_{Tx_{RWR}}$ [N]	$F_{Ty_{RWR}}$ [N]	$F_{Tx_{RWL}}$ [N]	$F_{Ty_{RWL}}$ [N]	$F_{N_{FW}}$ [N]	$F_{Tx_{FW}}$ [N]	$F_{Ty_{FW}}$ [N]	$T_s$ [Nm]
3.3333	2	349.57	349.13	10.51	7.8	10.77	3.15	115.16	0.05	2.62	-0.41
3.3333	4	349.8	348.9	21.11	9.44	21.35	0.13	115.16	0.17	5.32	-0.82
3.3333	6	350	348.7	31.4	11.45	32.2	0.05	115.16	0.36	7.89	-1.2
3.3333	8	350.25	348.45	41.33	13.88	42.78	0.27	115.16	0.69	10.54	-1.6
3.3333	10	351.34	347.36	51.09	15.52	53.48	2.53	115.16	1.03	12.96	-1.97
3.3333	12	351.27	347.43	60.52	17.73	64.05	4.36	115.16	1.52	15.38	-2.31
3.3333	14	352.25	346.45	69.74	19.54	74.22	5.78	115.16	2.06	17.48	-2.65
3.3333	16	353.06	345.64	78.32	21.27	84.01	8.99	115.16	2.73	19.43	-2.96
3.3333	18	353.09	345.61	86.08	22.87	93.46	13.09	115.16	3.51	21.14	-3.18
3.3333	20	353.5	345.2	92.94	24.02	101.9	18.15	115.16	4.35	22.24	-3.33
3.3333	22	353.45	345.25	97.41	24.6	107.86	19.78	115.16	5.38	22.46	-3.34
3.3333	24	353.23	345.47	96.79	24.19	107.84	19.95	115.16	6.39	19.51	-2.94
3.3333	26	352.5	346.2	95.41	23.47	107.18	20.24	115.16	7.58	16.44	-2.5
3.3333	28	351.66	347.04	93.87	22.55	106.31	20.69	115.16	8.83	13.23	-2.04
3.3333	30	351.4	347.3	92.28	21.62	105.06	21.01	115.16	10.18	10.03	-1.62
6.6666	2	351.42	347.28	21.1	16.25	21.32	8.7	115.16	0.06	8.6	-1.39
6.6666	4	353.64	345.06	41.37	19.36	42.49	4.4	115.16	0.17	17	-2.76
6.6666	6	355.73	342.97	60.51	23.24	62.49	1.38	115.16	0.38	24.88	-4.06
6.6666	8	357.56	341.14	78.24	27.09	81.49	0.94	115.16	0.7	32.07	-5.24
6.6666	10	358	340.7	93.24	28.87	98.16	4.37	115.16	1.11	38.21	-6.26
6.6666	12	360.1	338.6	100.34	29.75	106.71	6.06	115.16	1.6	39.72	-6.55
6.6666	14	362.15	336.55	99.69	28.84	106.58	6.75	115.16	2.19	36.32	-6.05
6.6666	16	367.32	331.38	97.83	28.23	105.73	6.92	115.16	2.87	32.84	-5.53
6.6666	18	366.07	332.63	95.92	26.43	104.61	8.24	115.16	3.7	29.29	-4.98
6.6666	20	364.92	333.78	94.08	26.21	103.71	8.08	115.16	4.55	25.27	-4.37
6.6666	22	363.93	334.77	91.3	24.26	101.09	9	115.16	5.52	21.18	-3.77
6.6666	24	362.43	336.27	88.87	23.47	99.44	9.27	115.16	6.56	16.99	-3.13
10	2	354.63	344.07	31.3	24.6	31.7	15.93	115.16	0.05	14.7	-2.55
10	4	359.47	339.23	60.25	28.01	61.47	11.53	115.16	0.19	28.57	-4.95

10	6	364.67	334.03	85.74	33.98	87.58	11.01	115.16	0.62	41.45	-7.28
10	8	367.36	331.34	98.86	33.58	104.01	7.6	115.16	0.71	46.09	-8.1
10	10	367.87	330.83	97.05	34.49	102.76	8.5	115.16	1.09	42.81	-7.67
10	12	366.92	331.78	95.21	31.71	102.03	6.35	115.16	1.62	39.73	-7.13
10	14	367.28	331.42	93.77	33.33	100.31	7.9	115.16	2.24	35.67	-6.6
10	16	366.45	332.25	91.1	32.79	99.47	8.08	115.16	2.82	30.17	-5.64
10	18	365.93	332.76	87.6	30.54	96.27	6.2	115.16	3.67	25.98	-5
10	20	365.3	333.4	84.5	27.64	92.98	4.36	115.16	4.63	21.54	-4.34
13.3333	2	358.9	339.8	41	29.87	40.78	21.9	115.16	0.38	21.41	-3.95
13.3333	4	367.71	330.99	76.9	36.51	78.66	22.43	115.16	0.29	39.89	-7.4
13.3333	6	373.72	324.98	96.94	38.16	100.55	21.33	115.16	0.49	51.16	-9.54
13.3333	8	374.64	324.06	95.83	35.04	99.94	19.04	115.16	0.72	46.55	-8.83
13.3333	10	374.69	324.01	93.85	38.14	99.68	21.94	115.16	1.15	41.99	-8.13
13.3333	12	374.19	324.51	90.49	33.26	95.57	17.46	115.16	1.67	37.82	-7.53
13.3333	14	372.69	326.01	85.46	31.25	92.46	15.9	115.16	2.22	32.83	-6.59
13.3333	16	371.57	327.13	82.16	30.43	89.54	15.78	115.16	2.86	27.48	-5.82
13.3333	18	371.12	327.58	78.42	29.75	85	14.61	115.16	3.84	23.5	-5.29
13.3333	20	370.24	328.46	76.07	28.23	82.86	13.75	115.16	4.47	17.34	-4.22
13.3333	22	368.9	329.8	72.67	26.53	79.76	13.23	115.16	5.47	13.19	-3.5
13.3333	24	369.54	329.16	73.19	24.47	80.54	10.79	115.16	6.57	9.9	-3
16.6666	2	364.34	334.36	50.81	34.47	50.33	28.81	115.16	0.32	27.49	-5.32
16.6666	4	376.68	322.02	89.18	33.07	92.07	26.09	115.16	0.37	50.49	-9.69
16.6666	6	383.09	315.61	95.06	31.76	96.3	25.32	115.16	0.42	50.12	-10.2
16.6666	8	381.98	316.72	93.19	32.41	96.3	26.41	115.16	0.96	49.04	-9.8
16.6666	10	381.91	316.79	87.51	32.19	90.93	25.65	115.16	1.2	41.69	-8.78
16.6666	12	378.64	320.06	83.07	30.61	87.74	23.77	115.16	1.75	36.48	-7.66
16.6666	14	378	320.7	79.56	31.52	84.54	24.88	115.16	2.28	30.3	-6.61
16.6666	16	377.58	321.12	75.13	28.74	80.37	22.71	115.16	2.79	23.6	-5.6
20	2	370.07	328.63	57.86	34.33	56.82	34.69	115.16	0.3	33.02	-6.69
20	4	385.8	312.9	91.59	29.69	92.12	34.43	115.16	0.5	59.08	-12.03
20	6	388.02	310.68	91.75	30.31	93.25	33.43	115.16	0.56	51.63	-11.04
20	8	386.83	311.87	87.61	27.99	90.27	30.79	115.16	0.81	46.22	-10
20	10	385.55	313.15	81.39	31.72	85.35	34.38	115.16	1.11	39.22	-8.75
20	12	383.51	315.19	78.75	35.19	80.94	35.71	115.16	1.83	35.95	-8.38
20	14	381.01	317.69	74.36	24.88	77.54	25.55	115.16	2.52	31.27	-7.32

Tabella 9: risultati delle simulazioni fatte su Adams

Dopodiché sono stati rappresentati, tramite Matlab, come curve parametriche al variare della velocità angolare delle ruote posteriori in funzione dell'angolo di sterzo:

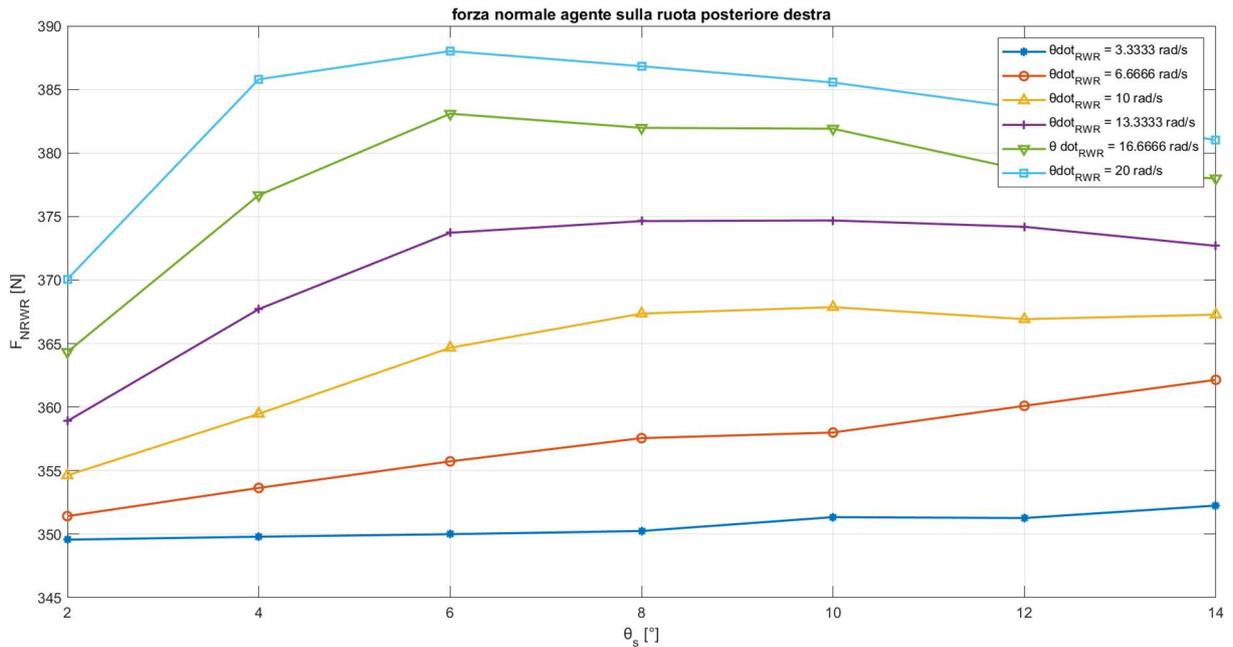


Figura 45: forza normale RWR al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

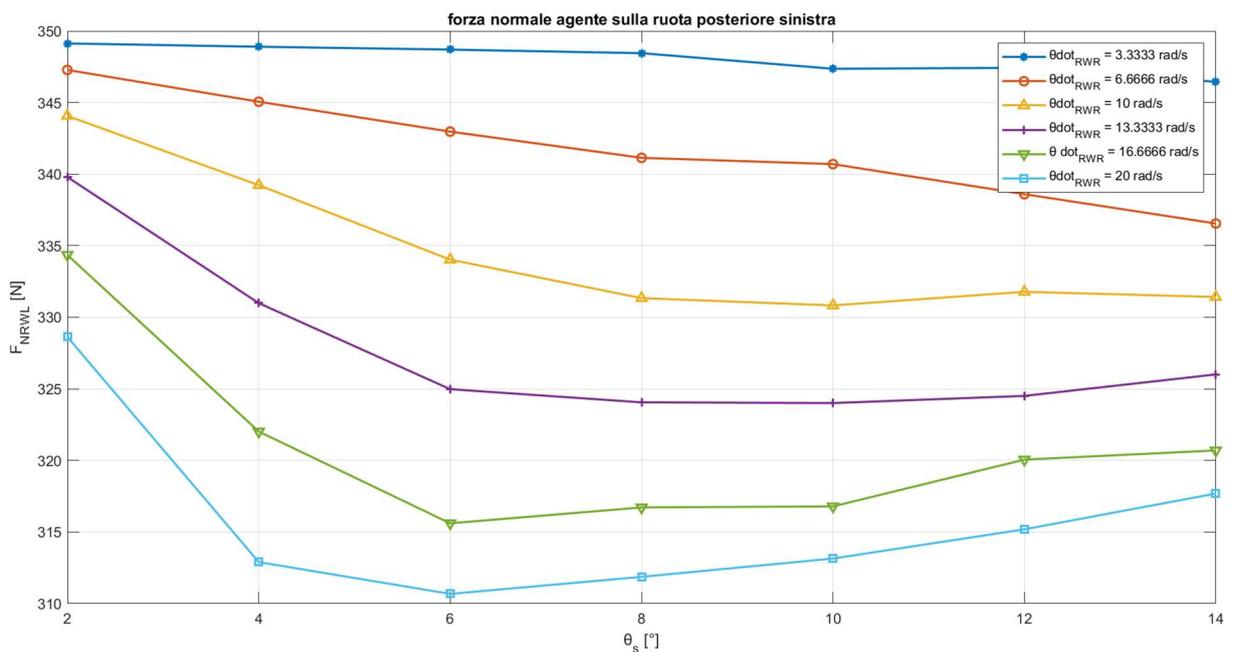


Figura 46: forza normale RWL al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

Inizialmente sono state analizzate le forze normali agenti sulle ruote posteriori, si nota come per piccoli angoli di sterzo si ha un aumento graduale della forza normale agente sulla ruota posteriore destra (avendo ipotizzato di sterzare verso sinistra) sia a basse velocità che ad alte velocità angolari. Tuttavia ad alte velocità angolari e per valori maggiori dell'angolo di sterzo si rileva una diminuzione della differenza tra le due forze normali, probabilmente ciò è dovuto al fatto che ad elevate velocità e ad elevati angoli di sterzo aumenta sempre più lo slittamento laterale delle ruote.

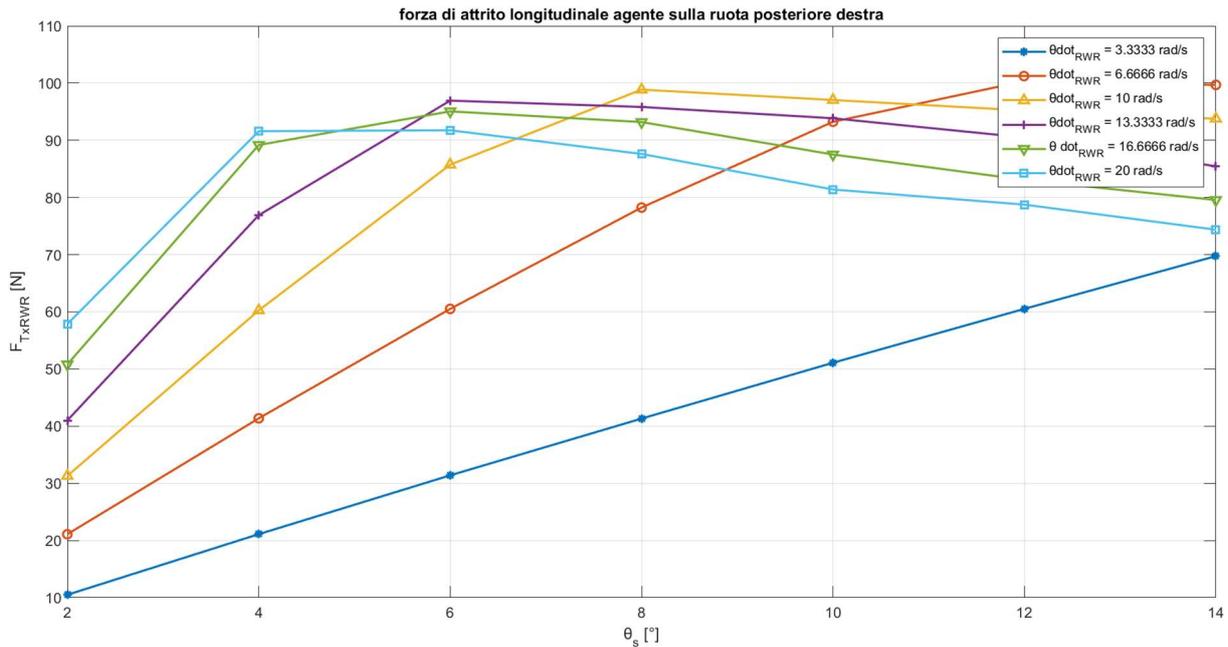


Figura 47: forza di attrito longitudinale su RWR al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

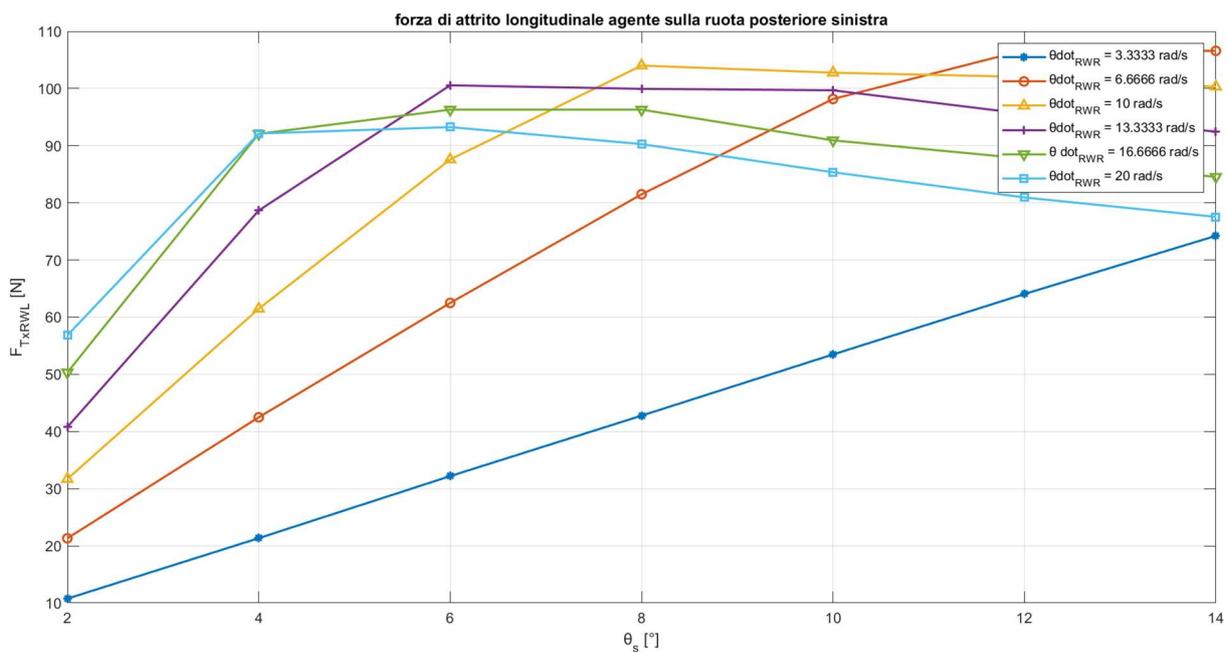


Figura 48: forza di attrito longitudinale su RWL al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

Le forze di attrito longitudinale su entrambe le ruote presentano un massimo sempre più spostato verso angoli di sterzo minori all'aumentare della velocità del veicolo perché si ha meno slittamento e quindi il coefficiente di attrito è maggiore come descritto in (11). Al diminuire della velocità del veicolo i massimi sono sempre più spostati verso angoli di sterzo maggiori. Inoltre si nota un piccolo  $\Delta F_{Tx}$  tra la ruota sinistra e la destra probabilmente dovuto al fatto che nel modello Adams le velocità angolari delle ruote posteriori sono uguali, ma la ruota più esterna dovrà percorrere più strada della ruota più interna e ciò provocherà un coefficiente di slittamento negativo per la ruota più esterna e positivo per la ruota più interna. Avendo definito il coefficiente di scorrimento (slip) come:

$$\sigma = \frac{\dot{\theta}_{RWR} \cdot R_{RWR} - \dot{x}_G}{\dot{x}_G}$$

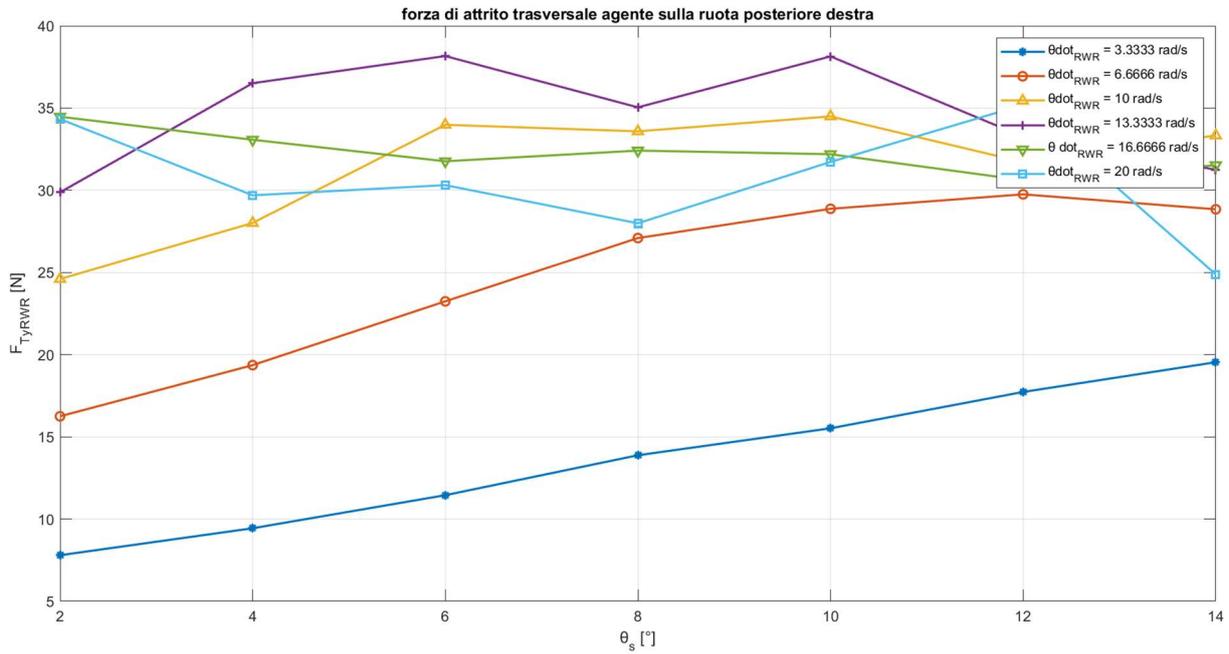


Figura 49: forza di attrito trasversale su RWR al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

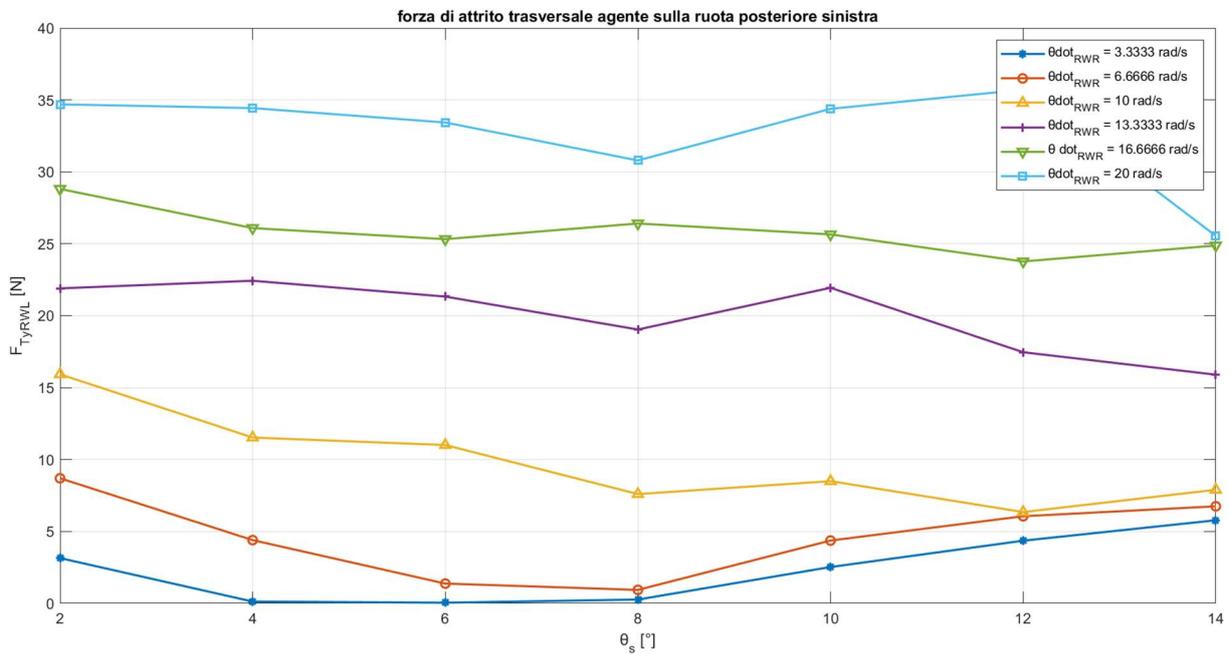


Figura 50: forza di attrito trasversale su RWL al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

I risultati relativi alla forza di attrito trasversale sulle due ruote posteriori sono meno interpretabili dal punto di vista qualitativo, soprattutto per alti angoli di sterzo e velocità del veicolo maggiori, mentre dal punto di vista quantitativo si nota un piccolo aumento delle forze di attrito trasversali all'aumentare di angolo di sterzo e velocità del veicolo.

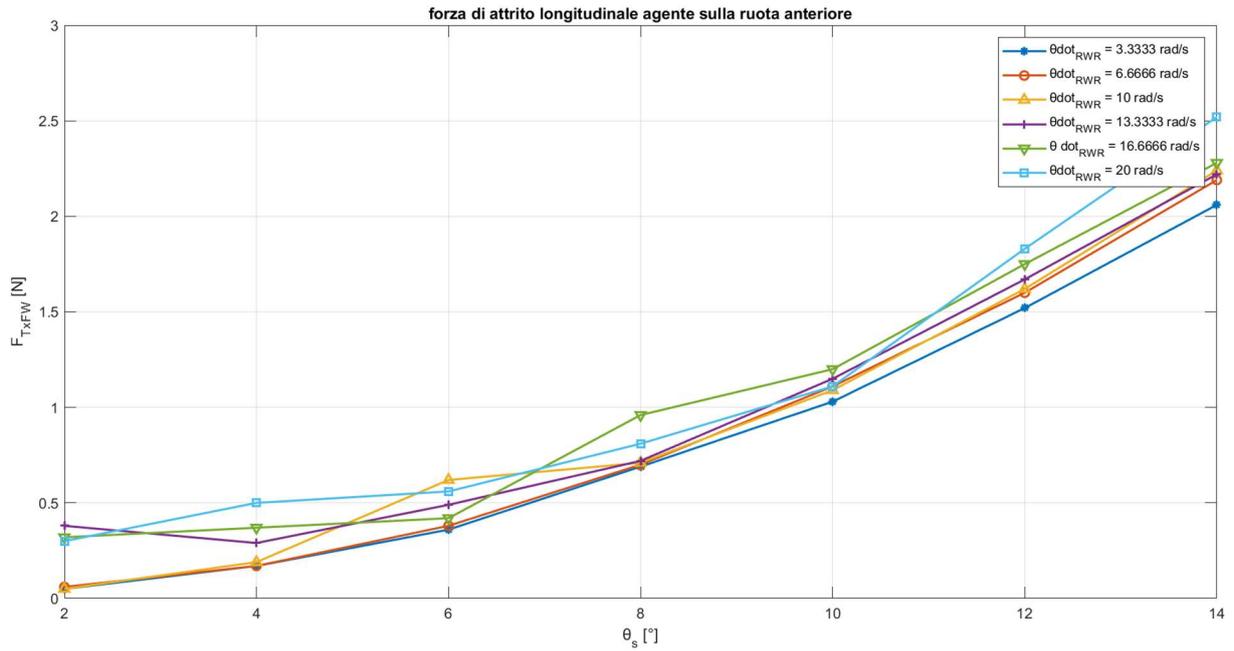


Figura 51: forza di attrito longitudinale sulla ruota anteriore al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

La forza di attrito longitudinale agente sulla ruota anteriore presenta un andamento lineare con valori molto bassi in quanto su di essa non è applicata una coppia motrice.

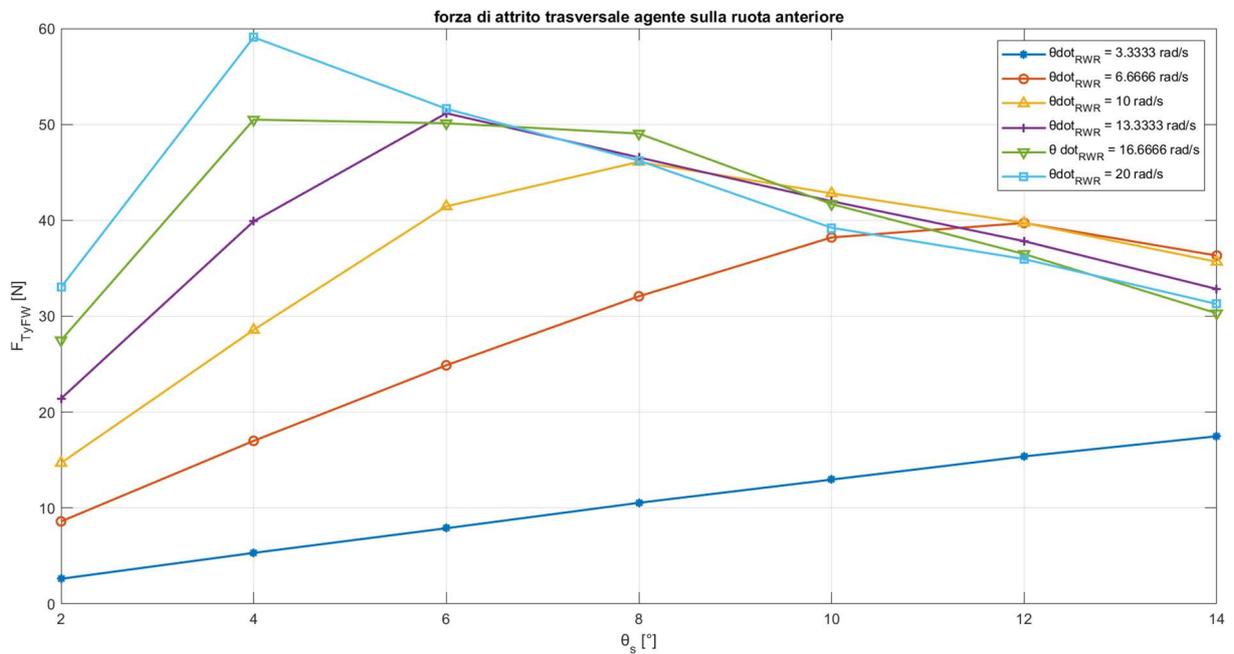


Figura 52: forza di attrito trasversale sulla ruota anteriore al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

La forza di attrito trasversale agente sulla ruota anteriore presenta un massimo che si sposta sempre più verso angoli di sterzo minori all'aumentare della velocità del veicolo e ciò è dovuto allo slittamento laterale del veicolo che aumenta all'aumentare della velocità del veicolo provocando una diminuzione del coefficiente di attrito come visto precedentemente (11).

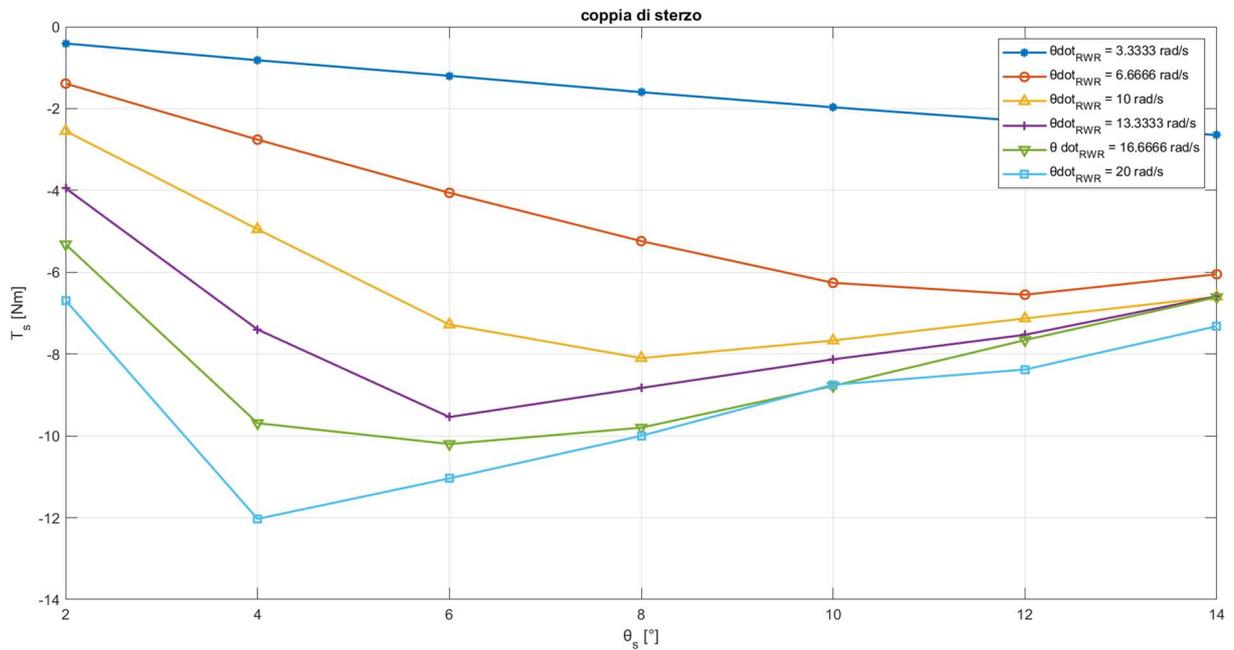


Figura 53: coppia di sterzo al variare dell'angolo di sterzo e della velocità angolare delle ruote posteriori

I risultati relativi alla coppia di sterzo seguono sia dal punto di vista qualitativo che dal punto di vista quantitativo ciò che è stato ottenuto per la forza trasversale di attrito sulla ruota anteriore. Nella figura seguente è rappresentato il grafico che mostra l'andamento della coppia di sterzo in funzione della forza di attrito trasversale sulla ruota anteriore:

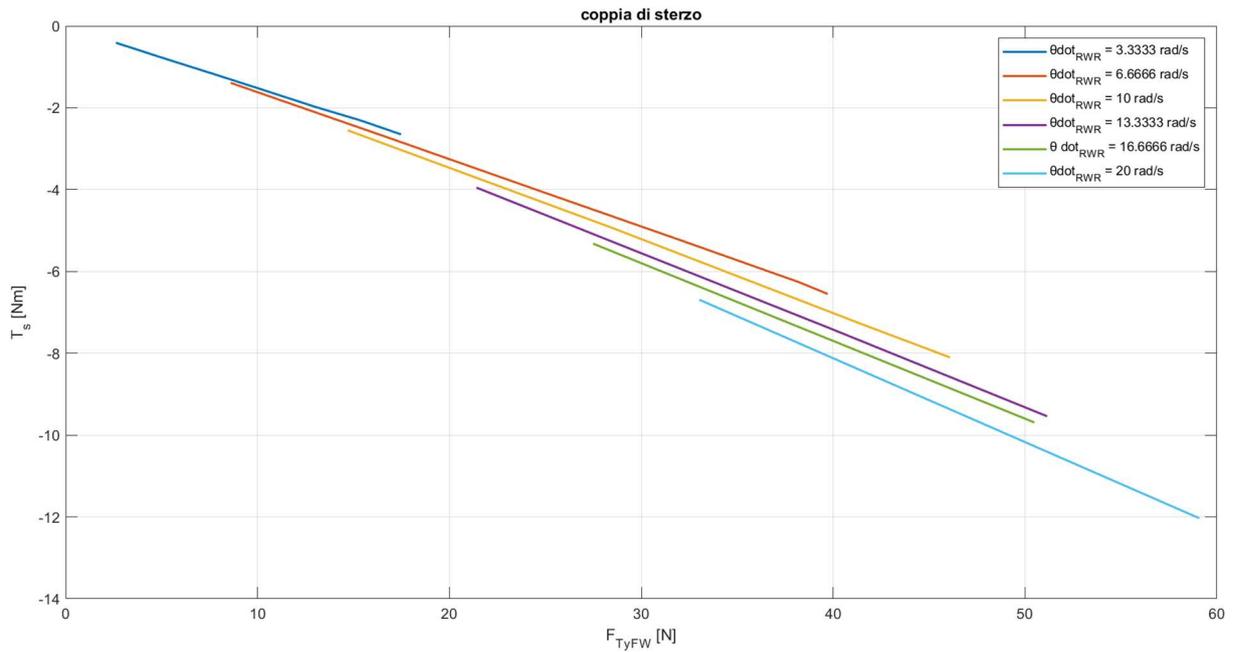


Figura 54: coppia di sterzo in funzione della forza di attrito trasversale sulla ruota anteriore

Come si nota dal grafico c'è un rapporto lineare tra coppia di sterzo e forza di attrito trasversale sulla ruota anteriore. Quindi si potrebbe modellare questo comportamento come un sistema costituito da una molla di costante elastica  $K = \frac{T_s}{F_{TyFW}}$ . E si nota come K aumenti all'aumentare della velocità del veicolo.

## 5. Conclusioni

L'obiettivo iniziale di questo lavoro di tesi era quello di modellare una carrozzina sportiva in modo da poter ricavare la coppia da applicare all'asse di sterzo per percorrere traiettorie curvilinee. I risultati ottenuti tramite la modellazione in Adams si possono ritenere attendibili dopo averli confrontati con quanto è stato ricavato analizzando il problema dal punto di vista fisico. Nell'analisi statica i risultati sono convergenti sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo con quanto calcolato analiticamente.

L'analisi dinamica svolta ha messo in luce i fenomeni relativi a deriva e slittamento che sono sempre più influenti all'aumentare della velocità del veicolo e dell'angolo di sterzo, infatti ad alte velocità e ad elevati angoli di sterzo i risultati sono meno confrontabili dal punto di vista fisico e potrebbe essere utile confrontare i risultati ottenuti con il modello di contatto ruota-terreno di tipo Coulombiano con un altro modello tra quelli descritti nel capitolo [2.3].

I risultati ottenuti nell'analisi dinamica su traiettoria curvilinea sono in condizioni stazionarie quindi ad angolo di sterzo e velocità costanti. Potrebbe essere interessante analizzare il transitorio per capire quale coppia di sterzo imprimere per raggiungere un determinato angolo di sterzo in un determinato intervallo di tempo.

Per cui come sviluppi futuri di questo lavoro di tesi si potrebbe:

- implementare nel modello Adams diversi modelli di contatto ruota-terreno e confrontare i risultati ottenuti;
- analizzare il veicolo durante il transitorio su traiettoria curvilinea;
- fare dei test sperimentali su una carrozzina con parametri geometrici simili in modo da poter confrontare i risultati con ciò che è stato ottenuto dalle simulazioni.

## Bibliografia

1. <https://www.sportaid.com/invacare-top-end-eliminator-osr-standard.html>. [Online]
2. Giuseppe Quaglia, Elvio Bonisoli, Paride Cavallone. *Handwheelchair.q: Innovative Manual Wheelchair for Sport*.
3. Lewis, A.R., Phillips, E.J., Robertson, W.S.P., Grimshaw, P.N., Portus, M. *Injury prevention of elite wheelchair racing athletes using simulation approaches*. 12th Conference of the International Sports Engineering Association, Brisbane : s.n.
4. M., Carvallo. *Theorie de mouvement du monocycle et de la bicyclette*.
5. [https://www.ordineingegneri.fi.it/commissioni/comm\\_forense/relazione\\_commissione\\_per\\_publicazione\\_14.4.18.pdf](https://www.ordineingegneri.fi.it/commissioni/comm_forense/relazione_commissione_per_publicazione_14.4.18.pdf). [Online]
6. *Tire and Vehicle Dynamics*. Pajacka, H.
7. *Modelling and Simulation of Bicycle Dynamics*. Murad Shoman, Hocine Imine.
8. *Nonlinear Brush Formulation for a Bicycle Tire Based on Rotta Model*. Andrew Dressel, Jim Papadopoulos.
9. [https://moodle2.units.it/pluginfile.php/409938/mod\\_resource/content/1/ContattoRuotavia.pdf](https://moodle2.units.it/pluginfile.php/409938/mod_resource/content/1/ContattoRuotavia.pdf). [Online]
10. Mari, Gianluca. *Modelli e controlli per veicoli autonomi*.
11. *Identification of the mechanical properties of bicycle tyres for modelling of bicycle dynamics*. Alberto Doria, Mauro Tognazzo , Gianmaria Cusimano , Vera Bultink , Adrian Cooke & Bart Koopman.