# **POLITECNICO DI TORINO**

Corso di Laurea Magistrale in

Architettura per il restauro e valorizzazione del

patrimonio

## Tesi di Laurea Magistrale

## Studio statico della cupola della Basilica di Superga



Relatori prof. Giuseppe Lacidogna prof. Alessandro Grazzini

Candidato Marco Maria Stefano Bernardini

Anno Accademico 2020/2021

## Indice

In	troduzione	5
1	Introduzione sulle strutture a cunola	7
1	1.1 Evoluzione della struttura a cupola	· · · · · / 7
	1.2 Teoria statica della cupola	/
	1.2 Teolia Statica della Cupola	12
		12
2	Inquadramento storico artistico	19
	2.1 Evoluzione progettuale	22
	2.2 Analisi dell'architettura nella conformazione definitiva	30
3	Inquadramento scientifico	36
4	Modello cupola di Superga	40
	4.1 Struttura della cupola juvarriana di Superga	43
5	Calcoli statici di Filippo Juvarra	53
6	Analisi statica della cupola di Superga	59
	6.1 Analisi membranale per carichi verticali dovuti al peso proprio	60
	6.2 Analisi con il programma di calcolo PRO SAP	90
	6.2.1 Costruzione del modello tridimensionale	91
	6.2.2 Risultati numerici della modellazione	99
Co	onclusioni	.108
Bi	ibliografia	110

## Introduzione

Il presente studio ha come oggetto l'analisi statica della cupola della Basilica di Superga, progettata nel 1715 dall'architetto Filippo Juvarra, al fine di studiarne il comportamento strutturale.

L'analisi del comportamento statico degli edifici è un prezioso strumento per lo studio e la conoscenza dell'edilizia storica finalizzata a pianificare interventi di restauro, di tutela del patrimonio e della sua valorizzazione.

Al fine di conoscere l'edificio oggetto di studio, l'analisi è preceduta da un inquadramento della struttura a cupola e del manufatto architettonico. Si parte con un'introduzione generale sulle strutture a cupola in modo da conoscere l'evoluzione delle cupole e la teoria per il calcolo statico. Segue uno studio storico sulla Basilica di Superga per conoscere:

- le idee alla base del progetto che ha portato alla costruzione dell'edificio;
- il processo di evoluzione del progetto di Filippo Juvarra;
- la sua composizione architettonica;
- la struttura della basilica e della cupola.

Tramite questo studio preliminare consente di avere un'ottima conoscenza dell'edificio utile alla successiva fase di analisi.

Imprescindibile ad una conoscenza storica del manufatto architettonico è l'inquadramento scientifico dei metodi di analisi del passato, metodi ovviamente antecedenti agli attuali.

Dopo un quadro sull'edificio e la sua storia è stato inserito un capitolo sull'architettura e la struttura della cupola di Superga, per una più approfondita conoscenza. La comprensione della cupola è supportata dall'elaborazione di un modello tridimensionale sviluppato dal sottoscritto in AutoCad.

A seguito dello studio sulla cupola si trova una sezione in cui vengono mostrati i possibili calcoli statici di Filippo Juvarra, metodi di calcolo storico impiegati nel Settecento.

L'analisi statica è stata condotta su un modello completo tridimensionale della cupola da me costruito all'interno di PRO\_SAP, il programma di calcolo impiegato nel presente studio. Nell'elaborazione del modello tridimensionale in PRO\_SAP e nell'analisi dei dati all'interno di questo programma, mi è stato prezioso il supporto dell'assistenza degli ingegneri della 2S.I. Software e Servizi per l'Ingegneria a cui va il mio ringraziamento. L'analisi è composta da una prima parte di calcolo manuale seguita dai risultati ottenuti con il programma, e dal successivo confronto dei valori ottenuti con i due metodi.

Questo mio lavoro di tesi ha avuto l'obiettivo di studiare il comportamento statico della struttura a cupola di Superga impiegando strumenti di calcolo manuali e informatici, ma può risultare utile a future analisi statiche nel campo degli studi della conservazione dei beni architettonici.

## **1** Introduzione sulle strutture a cupola

Le strutture a cupola esistono sin dai tempi antichi con un fortissimo sviluppo a partire dal Rinascimento italiano. Lungo i secoli sono state studiate e sviluppate innumerevoli soluzioni di questa struttura avente in sé una peculiare valenza estetica, di significato, per il suo carattere di universalità, e di utilità in quanto particolarmente adatta a coprire vaste superfici. Le strutture a cupola, nonostante la varietà di soluzioni, presentano elementi che ricorrono costantemente: la cupola, il tamburo e i pennacchi, questi ultimi non sempre vi sono.

Nel presente capitolo si vogliono dare alcuni cenni cronologici sull'evoluzione della struttura a cupola moderna dal Rinascimento al Settecento, periodo di costruzione della cupola della Basilica di Superga, così da inquadrarla in una linea evolutiva; sarà oggetto del capitolo successivo lo studio in dettaglio dell'edificio. Inoltre si analizzerà il metodo di calcolo teorico della statica di una struttura a cupola. In questo modo viene presentato un quadro generale sulla struttura a cupola sia dal punto di vista storico che tecnico.

#### 1.1 Evoluzione della struttura a cupola

La cupola è una struttura architettonica di grande fascino negli edifici, in grado di coprire grandi luci maestosamente. Il motivo tecnico è accompagnato dal carattere divino della cupola cristiana negli edifici

religiosi dal Rinascimento nei secoli successivi; è una struttura che con la sua ampiezza e verticalità permette di congiungere il cielo e la terra. Inoltre la verticalità insita in sé suggerisce le peculiarità di elemento emergente nella struttura urbana (Benvenuto, 2018), e nel paesaggio.

Le due caratteristiche di spazio aggregativo collegato con l'elemento divino e la verticalità si riscontrano nella struttura a doppio guscio. La soluzione a doppio involucro oltre ad alleggerire i carichi permette di offrire uno slancio verticale molto accentuato.

Nella cupola progettata da Filippo Brunelleschi per Santa Maria del Fiore a Firenze (Fig. 1.1) vi è presente la soluzione a doppia calotta, con l'involucro interno visibile internamente e quello esterno slanciato dagli archi a sesto acuto ai vertici della pianta ottagonale (Benvenuto, 2018).



Figura 1.1: Disegno di sezione della cupola di Santa Maria del Fiore (1430 circa). Fonte: Antonio Natali, Il cielo abita a Firenze, pag. 65

Nei secoli successivi la struttura a doppia calotta continua ad essere presente nella Basilica di San Pietro in Vaticano (Fig. 1.2).



Figura 1.2: Prospetto e sezione della cupola della Basilica di San Pietro con vista della doppia calotta. Fonte: https://www.vatican.va/various/basiliche/san\_pietro/it/cupola/cenni\_storici.htm#thumb Consultazione: 12-11-2021

Successivamente si può considerare nel panorama dell'evoluzione delle cupole verso profili più slanciati, anche una cupola a cui Filippo Juvarra non si è ispirato, ma presenta una soluzione a doppio guscio per accentuare la verticalità come nella cupola della Basilica di Superga che è a doppia calotta: la cupola della chiesa della Sorbona a Parigi del 1635-1656 (Figura 1.3). Essa è composta da una calotta interna in muratura e da una esterna sorretta da un'impalcatura reticolare lignea.

Le cupole fin qui indicate sono preesistenti a quella di Superga (Fig. 1.4) e si denota uno sviluppo della doppia calotta che permette alla struttura di essere più slanciata.



Figura 1.3: Sezione cupola della Sorbona con vista del doppio involucro. Fonte: http://www.annesophiegeay.com/ sorbonne-university-paris Consultazione: 12-11-2021



Figura 1.4: Sezione Basilica di Superga con vista del doppio involucro in muratura. Fonte: Rudolf Wittkower, Arte e architettura in Italia. 1600-1750, pag. 367

#### 1.2 Teoria statica della cupola

La cupola può avere la forma di una semisfera o essere prodotta dalla rotazione di una curva diversa. La rotazione di una curva differente va a formare la volta a cupola proprio come indicava Pierre Bouguer nel 1734 il quale sosteneva nella sua memoria *Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en dôme*: "Io mostrerò che un'infinità di linee curve sono appropriate a formare questa sorta di volte".

Dall'epoca del Bouguer a oggi si è assistito ad un'evoluzione del calcolo della distribuzione degli sforzi agenti lungo i meridiani e i paralleli delle cupole. Nel Settecento gli studiosi questo tipo di volta la pensavano composta da unghie che si appoggiavano reciprocamente l'una all'altra, secondo questa modalità lo studio della cupola era rimandato allo studio dell'arco. Tramite il funzionamento ad arco vi era uno stato di sforzo secondo i paralleli. Vi era inoltre uno sforzo secondo i meridiani della cupola e ciò gli studiosi settecenteschi lo spiegavano tramite il mutuo sostegno degli archi formanti la calotta (Olivito, 2009).

Attualmente la distribuzione di questi due tipi di sforzi è spiegata con la teoria delle membrane di rivoluzione applicata alle cupole.

Le membrane sono strutture composte da una superficie di spessore molto sottile avente la proprietà di essere prive a rigidezza flessionale e torsionale. La superficie della membrana è soggetta in ogni suo punto a sollecitazioni che appartengono al piano tangente alla superficie. In questo tipo di strutture a membrana la deformazione elastica non è tale da modificare la forma della membrana e non influisce sulle caratteristiche di

sollecitazioni interne, quindi è inestensibile. Queste caratteristiche della membrana valgono solo se ha uno spessore trascurabile. Le sollecitazioni della membrana si calcolano tramite le equazioni di equilibrio. La prima definizione dell'equilibrio di una struttura membranale è opera di Claude-Louis Navier che considera la membrana come un tessuto di fili tesi. Studia la membrana nel peculiare caso in cui tutti i fili hanno la medesima tensione N e sia sollecitata da pressione normale p omogenea su ciascun parallelo (Benvenuto, 2018)

### 1.2.1 Calcolo degli sforzi membranali

Seguiamo la deduzione di Navier partendo dall'ipotesi di una membrana avente la simmetria di forma e distribuzione dei carichi. Lo studio del calcolo per determinare le sollecitazioni di membrana è propedeutico per i calcoli della cupola: se consideriamo l'ipotesi che lo spessore della calotta è molto piccolo rispetto al suo diametro alla base, il calcolo della statica della cupola può essere lo stesso di quello della membrana. Infatti la cupola può essere considerata una membrana generata dalla rotazione di una determinata curva, e il suo spessore, confrontato con la dimensione del diametro all'imposta, è molto sottile così da essere soggetta in ogni suo punto a sollecitazioni appartenenti a piani tangenti per ciascun punto. Si parla di cupole sottili e il relativo calcolo per determinare le sollecitazioni servirà in questo studio per calcolare gli sforzi agenti nella cupola della basilica di Superga. Indichiamo con  $R_1$  il raggio di curvatura dell'arco meridiano e con  $R_2$  l'altro raggio principale di curvatura, come si può vedere in fig. 1.6.



Figura 1.5: Membrana di rivoluzione con le caratteristiche. Fonte: Edoardo Benvenuto, La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico, pag. 606



Figura 1.6: Elemento infinitesimo con indicati gli sforzi. Fonte: Edoardo Benevenuto, La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico, pag. 606

Considerando l'elemento infinitesimo di lati  $dl_p$  e  $dl_m$ , l'equilibrio locale presenta la seguente condizione:

$$p \, dl_{\rm p} \cdot dl_{\rm m} - 2S \, dl_{\rm p} \, \frac{d\theta}{2} - 2S \, dl_{\rm m} \, \frac{d\varphi}{2} = 0 \tag{1.1}$$

Le caratteristiche di sollecitazioni normali agenti sui lati  $dl_p$  e  $dl_m$  dell'elemento infinitesimo in fig. 1.6, le denominiamo rispettivamente  $S_1$  e  $S_2$ , conseguentemente l'equilibrio dell'elemento secondo la sua normale si esprime:

$$p \, dl_{\rm p} \cdot dl_{\rm m} - 2S_1 \, dl_{\rm p} \, \frac{d\theta}{2} - 2S_2 \, dl_{\rm m} \, \frac{d\varphi}{2} = 0 \tag{1.2}$$

Arrivati all'equazione (1.2) si hanno le due incognite  $S_1$  e  $S_2$ , quindi occorre un'ulteriore condizione al fine di risolvere il problema.

Consideriamo la membrana e immaginiamo di sezionarla orizzontalmente con un piano generico (Fig. 1.7), sulla sezione inseriamo la caratteristica  $S_1$ che è costante su tutta la circonferenza del parallelo. L'equilibrio alla traslazione verticale della porzione superiore della membrana alla sezione orizzontale, soggetta ai carichi esterni Q e agli sforzi meridiani  $S_1$ , conduce alla seguente relazione:

$$2\pi r S_1 \sin \theta + Q = 0 \tag{1.3}$$

in cui Q è la risultante di tutte le forze esterne agenti sulla parte inferiore della membrana, pari alla risultante delle componenti verticali degli sforzi  $S_1$ , e r è il raggio del parallelo della quota a cui si è effettuata la sezione orizzontale.



Figura 1.7: Sforzi meridiani. Fonte: Edoardo Benvenuto, La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico, pag. 608

L'equazione di equilibrio verticale sarà:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \, \text{sen}\,\theta} \tag{1.4}$$

La caratteristica  $S_1$  è indipendente dallo sforzo  $S_2$  lungo i paralleli. Lo sforzo meridiano risulta di compressione. Per raggiungere l'equilibrio dell'elemento  $dl_p dl_m$  (Fig. 1.8) in direzione della normale ad esso, la somma delle componenti in direzione **n** degli sforzi deve essere uguale e contraria alla componente delle forze esterne.



Figura 1.8: Sforzi agenti sull'elemento di lati dlp e dlm. Fonte: Edoardo Benvenuto, La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico, pag. 606

I lati dell'elemento *dl*<sub>p</sub>*dl*<sub>m</sub> valgono:

$$dl_{\rm p} = R_2 \sin \theta \, d\psi \tag{1.5}$$
$$dl_{\rm m} = R_1 \, d\theta \tag{1.6}$$

L'equazione di equilibrio secondo **n** si esprime:

$$S_1 R_2 \sin \theta \, d\psi \, d\theta + S_2 R_1 \, d\theta \sin \theta \, d\psi = p R_1 \, d\theta R_2 \sin \theta \, d\psi \tag{1.7}$$

in cui S1 R2 sin  $\theta d\psi d\theta = S_1 dl_p d\theta e S_2 R_1 d\theta sin \theta d\psi = S_2 dl_m sin \theta d\psi$ sono le componenti in direzione **n** degli sforzi; mentre  $p R_1 d\theta R_2 sin \theta d\psi = p dl_m dl_p$  è la componente delle forze esterne.

Si divide la 1.7 per sin  $\theta d\psi d\theta$  ricavando la seguente relazione:

$$S_1 R_2 + S_2 R_1 = p R_1 R_2$$
(1.8)  
che conduce alla:

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p \tag{1.9}$$

Tramite la 1.9 possiamo determinare lo sforzo parallelo noto lo sforzo meridiano:

$$S_2 = R_2(p - \frac{S_1}{R_1})$$
 (1.10)

Gli sforzi membranali calcolati costituiscono il regime di membrana e sono presenti per tutti i punti della membrana sino al bordo.

I calcoli impiegati su una membrana di rivoluzione si possono applicare alle cupole considerandole come membrane se si effettua l'ipotesi che lo spessore della calotta è molto piccolo rispetto al diametro alla base.

La cupola è soggetta a delle sollecitazioni di compressione e trazione a seconda della quota considerata. Ogni particella nella cupola è sottoposta a sollecitazioni meridiane  $\sigma_1$  e parallele  $\sigma_2$ . Le prime sono sempre di compressione in quanto procedendo dalla sommità verso l'imposta aumenta il peso della struttura e il materiale in questa direzione è soggetto ad un progressivo aumento di compressione. Le sollecitazioni lungo la direzione dei paralleli invece hanno un cambiamento di andamento: sopra una certa quota (parallelo in cui si annullano gli sforzi) le sollecitazioni sono di compressione. Queste sollecitazioni vengono spiegate da William Dunn in *The Principles of Dome Construction*:

«The stresses on the upper and lower faces, which we shall call parallels, are always compressions whatever be the section of the dome; the stresses on the planes *abc*, *dbe*, which we shall call meridians, are either tensions or compressions, or zero, varying in the nature and amount with the section of the dome and



Figura 1.9: Cupola con indicati gli sforzi che agiscono sui meridiani e i paralleli. Fonte: William Dunn, The Principles of Dome Construction, pag. 64

the position of the particle in question [A]. These stresses are frequently called hoop tensions and hoop compressions. The stresses on the parallels may be called direct thrusts».

La compressione nella direzione dei paralleli è massima alla sommità della cupola, in seguito, scendendo di quota,  $\sigma_2$  ha una diminuzione progressiva di compressione sino ad arrivare alla quota di annullamento delle sollecitazioni (Fig. 1.10). Al di sotto di questa quota aumentano progressivamente gli sforzi di trazione arrivando al massimo del loro valore all'imposta. La presenza di sole sollecitazioni di trazione, nella direzione dei paralleli, sotto una certa quota è determinato dall'aumento del peso della porzione sovrastante che comprime la muratura e, di conseguenza, i mattoni sono sottoposti a trazione. Se sotto la quota del punto zero la cupola non fornisce la necessaria resistenza a trazione, sui piani meridiani si aprono delle lesioni che dividono questa porzione di calotta in segmenti separati a forma di lunetta che sono come una serie di archi sostenenti la porzione superiore.



*Figura 1.10: Schema delle sollecitazioni lungo i paralleli. Fonte: William Dunn, The Principles of Dome Construction, pag. 65* 

## 2 Inquadramento storico artistico

La Basilica di Superga, opera architettonica del celebre architetto messinese Filippo Juvarra, Primo Architetto Civile del Re di Sicilia dal 1714, si erge superbamente sulle colline sopra Torino integrandosi perfettamente nel paesaggio, frutto di un progetto mirante ad un'unione totale tra architettura e ambiente. La struttura del complesso basilicale è composta da varie parti: la chiesa a pianta centrale e l'annessa struttura del convento. Due entità chiaramente differenziate dal diverso trattamento delle superfici all'interno di una scala gerarchica di valori: il luminoso intonaco proprio dell'esterno della chiesa e il mattone a vista del convento a sottolineare l'austerità della vita monastica; quest'ultimo prosegue la tradizione architettonica piemontese del Barocco e si collega con l'utilizzo dell'intonaco tipicamente settecentesco.

Strutturalmente la chiesa è l'edificio più complesso, in particolare la cupola oggetto del presente studio. La cupola è frutto di continui studi di F. Juvarra a partire dal 1707, anno in cui è nominato Accademico di Merito all'Accademia di San Luca, e rientra nella corrente tracciata da Filippo Brunelleschi e Michelangelo Buonarroti con le più recenti esperienze di Francesco Borromini e Carlo Fontana.

Lo studio delle peculiarità statiche della cupola di Superga non può prescindere da una preliminare conoscenza del progetto di F. Juvarra e dei riferimenti da egli considerati, ovvero da un adeguato inquadramento

storico, e da un utile inquadramento scientifico al fine di comprendere lo stato attuale della ricerca.

Filippo Juvarra in Piemonte trova l'ambiente perfetto per sperimentare le sue soluzioni artistiche e tecniche in quanto non ci sono rivalità e può materializzare le sue idee grazie ad una profonda intesa con i Savoia. Quindi ha campo libero per esprimere le ambizioni di Vittorio Amedeo II e mettere concretamente a frutto i suoi precedenti studi al fine di realizzare un progetto esuberante. Infatti appena F. Juvarra prende l'incarico per la costruzione della Basilica di Superga nel 1715, con l'approvazione di Vittorio Amedeo, cambia il sito di edificazione dal lato della collina, meno isolato, come aveva proposto Antonio Bertola precedentemente, alla cima. Una posizione di dominio assoluto sulla città sottostante e il paesaggio che evidenzia il nuovo potere e l'inizio del consolidamento dei Savoia in Europa.

Nella genesi della Basilica di Superga lo studio del paesaggio è fattore determinante in quanto costituisce un dispositivo atto a valorizzare le peculiarità naturali delle Alpi e colline contornanti la città di Torino. Il fulcro del progetto a scala paesaggistica sarà Superga, inserita entro la tendenza settecentesca di raccordare sito e architettura. La prospettiva è il mezzo che permette di unire spazi grandissimi e ne forza la percezione contribuendo ad esaltare il manufatto architettonico nelle sue forme, rendendolo visibile a distanze chilometriche. Il complesso di Superga si inserisce in un sistema prospettico tramite la sua posizione lungo una linea retta ideale, prosecuzione del viale rettilineo di 12 km di Corso Francia voluto nel 1711 da Vittorio Amedeo II. F. Juvarra costruisce quindi una

prospettiva di 19 km tra Rivoli e Superga, al limite della percezione dell'occhio umano, evidenziando l'idea di monumento funebre della famiglia sabauda e contemporaneamente manifestazione delle sue ambizioni a seguito della vittoria contro la Francia del Re Sole nel 1706. Il motivo principale per la costruzione di Superga fu un ringraziamento offerto da Vittorio Amedeo II per l'aiuto dato dalla Vergine nella vittoria contro i francesi.

Filippo Juvarra coglie le potenzialità dei dislivelli tra Rivoli e Superga: una collina posta in asse con il viale rettilineo. Dalla quota di Rivoli sita a 354 m sul livello del mare si scende alla città in pianura per poi spingersi fino al culmine della cupola di 75 m sopra i 670 m del colle di Superga.

Il castello di Rivoli e il complesso di Superga sono collegati visivamente tramite una linea retta ideale e formano uno scenografico cordone visivo tra le Alpi e le colline torinesi, andando a costituire uno spettacolo architettonico inedito. La posizione dell'edificio religioso è ruotato di 13 gradi rispetto alla retta ideale in modo da metterne in risalto la massa volumetrica e orientarne la facciata verso la città.

Il progetto paesaggistico si inserisce, come scrive Donato Severo in "una cultura che fa della rappresentazione dell'universo uno dei motivi della metafora dello spazio prospettico e dei contenuti allegorici dell'architettura, sia laica che religiosa". Si è dinnanzi ad una architettura dell'eccesso che moltiplica all'infinito le prospettive del paesaggio e del territorio, ovvero "cattura l'infinito" nello spazio finito della percezione dell'uomo, secondo l'espressione di Benevolo.

#### 2.1 Evoluzione progettuale

Il cantiere occupa F. Juvarra dall'inizio dei lavori nel 1716 sino alla sua partenza per Madrid nel 1735 ultimando ancora dei dettagli. Lavora a una prima versione producendo agli inizi del 1716 alcuni disegni e commissiona al falegname C. M. Ugliengo un modello ligneo. Questo modellino rappresenta la basilica di Superga in base al primo progetto ad eccezione della cupola la quale è rappresentata nel suo progetto definitivo ed è stata realizzata nell'intervento di restauro integrativo del 1961.

La planimetria è impostata su un grande chiostro rettangolare: sul lato a ponente è aggregato il corpo della chiesa, generato da un ottagono irregolare attorno a cui si raccolgono spazi geometrici differenti. Questa disposizione del complesso architettonico è rimasta la medesima tra la prima e la seconda versione del progetto juvarriano, con le eccezioni delle modifiche planimetriche nel convento e nel pronao del tempio.

Esternamente la chiesa presenta una peculiare conformazione volumetrica composta da un cilindro, sostenente la cupola, a cui si aggancia anteriormente il vestibolo tetrastilo a pianta quadrata.

La conformazione definitiva appena accennata è il risultato di numerose modifiche compositive dalla fase progettuale lungo tutto il decorso del cantiere. Quindi è opportuno comprendere attraverso quali passaggi F. Juvarra sia giunto al disegno finale.

Le idee di Superga erano partite molto tempo prima del 1715, precisamente nel periodo romano con il progetto di una ipotetica chiesa a pianta centrale (Fig. 2.1) con cupola inquadrata tra due campanili,

presentato come omaggio all'Accademia di San Luca per la sua nomina come Accademico di Merito nel 1707.

Senza questo progetto ideale non potrebbe esistere la Basilica di Superga. Si può dire che prese da questo progetto "nel suo cassetto" per il lavoro commissionato dai Savoia, rielaborando ed approfondendo aspetti. alcuni Il



*Figura 2.1: Filippo Juvarra: progetto del 1707 di Chiesa a pianta centrale, Roma, Accademia di San Luca. Fonte: www.bollettinodarte.beniculturali.it Consultazione: 21-04-2021* 

progetto del 1707 si basa sullo studio di Sant'Agnese in Agone di Francesco Borromini per la composizione della facciata, della cupola e dei campanili. Si notano elementi che preludono ai futuri sviluppi di Superga quali il pronao, le colonne libere nel tamburo con le edicole, le aperture ovali alla base della cupola, i campanili curvi che cominciano ad essere uniti alla struttura della chiesa.

La pianta che predilige l'architetto è quella centrale preceduta dal pronao secondo il modello del Pantheon. F. Juvarra ha unito in un unico edificio i due tipi di struttura a cupola del Pantheon e della croce greca. Il primo per la cupola che si innalza dal corpo cilindrico e il secondo per la pianta ottagonale ottenuta da una croce greca con pilastri smussati. La soluzione della pianta evidenzia un collegamento con Sant'Agnese a Roma nella quale ci sono pilastri smussati con colonne nelle rientranze. Nel pronao F. Juvarra prende spunto dalle chiese di piazza del Popolo a Roma per l'intercolumnio con il sistema dell'eustylos vitruviano: Vitruvio lo raccomanda come molto indicato per gli edifici di culto e si compone di una distanza di due diametri e un quarto di colonna, ma l'intercolumnio mediano è di tre diametri.

Siccome F. Juvarra aveva acquisito esperienza nello studio di Carlo Fontana, prese spunto da un suo progetto: interessante sono da notare

alcune affinità compositive con la chiesa dell'Anfiteatro Flavio per un analogo schema in alzato della cupola attorniata da una coppia di campanili, con la differenza che mentre per il Fontana esistevano delle limitazioni spaziali a causa della natura del sito all'interno del Colosseo, Juvarra aveva una completa libertà in altezza e lungo gli assi.

Le ricerche romane confluiscono a Superga sviluppandosi e articolandosi in momenti successivi.

I primi studi corrispondono al 1715 e si riscontra la traccia nei suoi "pensieri", ovvero schizzi che illustrano di volta in



Figura 2.2: Filippo Juvarra: "pensiero" embrionale per il santuario di Superga. Fonte: Nino Carboneri, La reale chiesa di Superga di Filippo Juvarra, tav. VI b

volta i cambiamenti. Nell'elaborazione iniziale, prima dell'avvio dei cantieri, servivano per sviluppare le idee utili alla stesura del progetto del 1716; i successivi per apportare modifiche in corso d'opera.

In un pensiero iniziale (Fig. 2.2) si può cogliere come pensasse alla fabbrica: la chiesa non occupava ancora uno spazio esteso in quanto si estendeva per poco più di un quarto sull'intera superficie del complesso; l'area conventuale si sviluppava attorno a due cortili, di cui quello più piccolo a pianta quadrata costituirà il germe iniziale per l'assetto definitivo. Dallo schizzo si deduce come dapprima pensasse ad una pianta ellittica per poi correggerla immediatamente con una circolare. Lo sviluppo planimetrico si connette con la croce inscritta bramantesca e sulle bisettrici degli angoli nati dall'incrocio degli assi si aprono gli spazi per i campanili che serrano la cupola. Questa in alzato risulta più bassa e risente di influenze ravennate, mentre per i campanili sussistono reminiscenze padane del Filarete. Chiaramente questo pensiero iniziale è profondamente differente dall'assetto che il manufatto assumerà in seguito, ma risulta utile analizzarlo al fine di individuare come alcune soluzioni fossero, seppur in forma molto embrionale, già sussistenti.

Successivamente si passa al progetto del 1716, molto simile alla configurazione attuale.

Nell'evoluzione progettuale il primo elaborato ad essere realizzato è il modello ligneo del 1716 realizzato dal falegname C.M. Ugliengo, seguito dai disegni e per ultime le incisioni del 1738.

Il modello ligneo bisogna studiarlo assieme agli elaborati grafici del primo progetto, in particolare una pianta e una sezione longitudinale. Il pronao

tetrastilo non ha ancora la profondità volumetrica della soluzione finale, ma presenta una singola fila di quattro colonne con rispettive lesene proiettate sulla parete di facciata.

Dal disegno della pianta (Fig. 2.3) si vede la presenza di ulteriori due colonne ai lati del pronao (non più presenti nel modello) aventi lo scopo di raccordarlo con le pareti curve dell'ordine inferiore del tempio. Delle cappelle interne non si riscontra esternamente la traccia in quanto le pareti curve sono uniformi con la sola presenza di lesene: la presente disposizione planimetrica serra ai lati la pianta circolare e permette un prolungamento dell'asse centrale su cui sono posti l'ingresso, il presbiterio e il coro; qui l'architetto riprende lo schema planimetrico della chiesa all'Anfiteatro Flavio del maestro C. Fontana in cui era presente una



*Figura 2.3: Equipe Filippo Juvarra: Pianta del piano terra secondo il primo progetto del 1716. Fonte: Gianfranco Gritella, Juvarra. L'architettura, pag. 215* 



Figura 2.4: Sezione longitudinale della chiesa e convento di Superga secondo il primo progetto del 1716. Fonte: Nino Carboneri, La reale chiesa di Superga di Filippo Juvarra, tav. VIII a

tensione all'infinito in senso longitudinale. Esaminando la sezione (Fig. 2.4) la soluzione di F. Juvarra di passaggio dalla pianta ottagonale al tamburo circolare è geniale: in luogo dei classici pennacchi si ergono otto possenti colonne scanalate sostenenti una continua trabeazione circolare. Il compito di sorreggere il tamburo è però affidato ai possenti contrafforti ai vertici dell'ottagono. La composizione cilindrica di base rimanda al Pantheon. Il tamburo della cupola non ha più il ricco movimento della primordiale soluzione romana, ma un trattamento molto più severo con semplici paraste binate e finestre rettangolari con timpani curvi e triangolari alternati. I campanili sono fatti arretrare in modo da esaltare la

massa della cupola e raccordati alla base con l'edificio conventuale ora a pianta quadrata.

Ma il progetto appena analizzato subirà mutamenti a seguito dell'elaborazione di ulteriori ipotesi, infatti esiste una pianta successiva all'altezza del primo ordine, con tratti sezionati di quote superiori, in cui si riscontra esternamente l'inserimento di colonne binate nel tamburo e internamente delle colonnine con basamenti disposti di spigolo ai lati delle finestre sugli assi. Si assiste inequivocabilmente ad una nuova vibrazione plastica dell'edificio di culto.

A seguito del progetto del 1716, il 20 luglio 1717 è posta la prima pietra della futura basilica a cui fanno seguito i primi lavori sugli zoccoli e le basi delle colonne nel 1718 e la costruzione dei muri sino alla sommità del primo ordine entro la fine del 1719. Nel 1721 il cantiere arriva all'imposta delle volte, l'anno seguente è costruito il tamburo e nel 1725 le due calotte della cupola. Entro il 1726 sono concluse le principali strutture della chiesa, mentre i lavori dal 1727 al 1730 riguardano il pronao. La configurazione attuale a pianta quadrata del pronao è progettata dopo il 1719. Nell'intervallo di anni tra il 1719 e il 1721 Superga assume l'aspetto definitivo che possiamo vedere oggi.

La basilica è aperta al culto nel 1731 all'epoca del regno di Carlo Emanuele III, ma i lavori su alcuni dettagli continuano fino al marzo 1735, momento in cui F. Juvarra, in partenza per Madrid, è ancora occupato nell'ultimazione di alcune parti del progetto. Il profondo attaccamento e devozione per questo edificio da parte del suo autore è dimostrato dalla sua volontà, espressa nel testamento, di aver la possibilità di esservi seppellito

nel caso fosse morto a Torino. Il suo desiderio però, non si è mai concretizzato in quanto la morte lo colse a Madrid nel gennaio 1736, nel periodo in cui lavora per la monarchia spagnola. In particolare Filippo II di Spagna gli affida l'incarico della costruzione di una nuova reggia al posto della precedente distrutta da un incendio, risalente all'epoca di Carlo V. Secondo la volontà del sovrano, la nuova reggia deve seguire lo stile italiano e di Versailles. L'architetto, come aveva tradotto in Superga le aspirazioni assolutiste sabaude, anche a Madrid intende esaltare la monarchia tramite la concezione di un nuovo edificio con un impianto grandioso: il palazzo era circondato da giardini e fontane e doveva sorgere in un nuovo sito, ritenuto più salubre, il Parco della Moncloa. Nonostante la localizzazione originaria fosse vicino al centro cittadino, in una zona poco salubre nei pressi dei quartieri popolari con lo scarico delle acque nere all'aria aperta, Filippo II non voleva cambiare il sito per la nuova opera in modo da rimarcare la propria autorità regia e garantire una continuità col centro del potere dei secoli passati, dai palazzi musulmani ai cristiani. Conseguentemente i tempi si allungano e F. Juvarra muore, secondo alcuni di malinconia mentre osservava il plastico del suo progetto incompiuto. Le sue spoglie vennero seppellite nella parrocchia di San Martin, nei pressi della sua casa. Purtroppo oggi i suoi resti sono stati persi a seguito delle confische e modifiche urbanistiche fatte da Giuseppe Bonaparte nel 1810, una grave perdita per un illustre architetto come Juvarra.

## 2.2 Analisi dell'architettura nella conformazione definitiva



*Figura 2.5: Pianta del piano terra secondo il progetto definitivo. Fonte: Gianfranco Gritella, Juvarra. L'architettura, pag. 225* 

Ritornando sulla sua opera, il disegno dell'esterno della chiesa che è possibile ammirare oggi è frutto dell'ispirazione dai modelli del Pantheon e di Santa Agnese del Borromini. Il primo per il corpo cilindrico dell'edificio, la seconda per la soluzione della cupola inquadrata da una coppia di campanili, con la differenza che qui, in luogo della concavità del Borromini, abbiamo una poderosa convessità suggerita dalla vastità dello spazio. La soluzione permette una compenetrazione del manufatto architettonico con lo spazio e culmina nel pronao tetrastilo che si libra nel paesaggio. Il pronao si innesta al corpo della chiesa e ne emerge nettamente assumendo pianta quadrata con funzione di emergenza prospettica. Le sue peculiarità suggeriscono affinità palladiane, anche se per la compenetrazione degli spazi e la posizione emergente si lega

maggiormente con le soluzioni barocche. L'idea del pronao F. Juvarra la prende dal Pantheon ed è peculiare del suo tardo barocco classicheggiante. Egli va oltre il modello di riferimento del Pantheon nella riduzione del numero delle colonne in modo da soddisfare le indicazioni di Vitruvio di avere intercolumni di maggiore ampiezza al centro, e di costruire una struttura più leggera e luminosa propria degli ideali del Settecento.

Lo spazio interno della chiesa ruota attorno alla figura geometrica dell'ottagono, individuato dai vertici delle colonne corinzie addossate ai pilastri angolari. La soluzione di pilastri smussati con colonne nelle rientranze si collega con Sant'Agnese. I suddetti pilastri costituiscono la struttura portante del tamburo della cupola. Sul perimetro dello spazio ottagonale si innestano una serie di ambienti funzionali all'adempimento degli svolgimenti liturgici: lungo le direzioni ortogonali vi sono due cappelle laterali di pianta rettangolare e il vestibolo di ingresso; lungo gli assi diagonali sono presenti quattro cappelle mistilinee. Tutte le cappelle sono unite tramite un percorso periferico che inoltre permette di raggiungere la sagrestia e il coro. La presente successione di cappelle vicendevolmente ellittiche e rettangolari, collocate agli estremi degli assi diagonali, rendono dinamico il progetto juvarriano ortogonali e distinguendosi dalle composizioni planimetriche più rigide delle chiese gemelle di Piazza del Popolo, Santa Maria di Montesano e Santa Maria dei Miracoli, e di Santa Agnese a Piazza Navona a Roma. Una doppia struttura costruttiva permette il passaggio dalla pianta ottagonale al tamburo circolare della cupola: il tamburo e una trabeazione circolare indipendente dal tamburo, sorretta dalle colonne corinzie. Invece il

tamburo è sorretto dai fulcri in muratura ai vertici dell'ottagono della pianta. Sopra il tamburo si erge la massa della cupola con una accentuata verticalità e come contrappunto alla massa orizzontale della fabbrica, una verticalità dettata da influssi guariniani e mansardiani e ottenuta con un'eguale altezza di corpo cilindrico di base, tamburo e cupola. Il disegno rimanda profondamente a San Pietro in quanto F. Juvarra vuole mantenersi entro la tradizione di cupole brunelleschiane e michelangiolesche nella struttura. Come nel disegno michelangiolesco di San Pietro vi è una continuazione verticale dei pilastri nelle colonne del tamburo sino a giungere ai costoloni della cupola. La cupola è costituita da due calotte in laterizio: una esterna a sezione costante e una interna rastremantesi verso l'alto. L'esterna ha la funzione di proteggere la calotta interna dagli agenti atmosferici, come in Santa Maria del Fiore a Firenze e seguendo le raccomandazioni di Fontana. Le due calotte sono collegate tra loro mediante sedici arconi in coppia a due a due, aventi sezione variabile, e alleggeriti da grandi oculi ellittici nella porzione superiore. I setti, visibili esternamente, servono a trasmettere le sollecitazioni oblique ai contrafforti, quindi costituiscono i canali privilegiati delle forze scaricanti verso il basso. I contrafforti proseguono al piano terra dietro le otto colonne corinzie scanalate dell'interno. Alla base dell'imposta della cupola esiste una doppia cinturazione metallica avente la funzione di contrastare le spinte radiali determinate dai carichi della massa della cupola e della lanterna.

La struttura a doppia calotta della cupola con la presenza di costoloni garantisce, oltre alla protezione dagli agenti atmosferici della calotta

interna grazie a quella esterna, anche vantaggi costruttivi, strutturali e compositivi. Vantaggi costruttivi in quanto, nella realizzazione del manufatto architettonico, sono stati costruiti prima i costoloni in laterizio i quali servivano da guida nella costruzione della calotta interna. Tramite la doppia calotta la cupola viene alleggerita e la spinta viene fatta diminuire; le due calotte sono collegate da un sistema di costoloni meridiani. Ai vantaggi costruttivi si unisce la risoluzione del problema formale della conformazione interna ed esterna della cupola. Costruendo due calotte, l'esterna può essere più slanciata in modo da garantire l'inserimento prospettico dell'edificio nel paesaggio.

Formalmente la cupola è movimentata all'esterno dalla successione di colonne binate, dalle forature ellittiche alla base della cupola e dalla vista dei costoloni. Il materiale delle colonne binate del tamburo e di quelle della lanterna sono in marmo di Gassino, mentre i capitelli corinzi e compositi in marmo di Bronasco.

Internamente si nota come le sorgenti di luce crescono con l'altezza, scelta motivata dal significato intrinseco della cupola, di origini nel mondo antico: la cupola come simbolo della volta celeste e quindi contenitore di luce. La luce, traslata in termini biblici, è vita e ha la sua vittoria contro l'oscurità ossia il peccato. F. Juvarra vuole rendere tangibile, con i mezzi dell'architettura, il passaggio dalla condizione di peccato in cui l'uomo è immerso, alla sua giustificazione dinanzi a Dio. Un percorso di purificazione che conduce alla luce e si ha in quell'ambiente alto, luminoso, ampio del tamburo e della cupola enfatizzato dalla scelta del progettista di impiegare tonalità sul pastello, assenza di affreschi, presenza

di soli motivi ornamentali atti a sottolineare l'ossatura strutturale. Lo studio dell'apparato decorativo interno è possibile coglierlo dal disegno di una sezione verticale della cupola, realizzata da F. Juvarra; in questo elaborato si può inoltre osservare la struttura della doppia calotta. L'impianto e il sistema costruttivo della basilica di Superga diverranno famosi in tutta Europa e prototipo per successive opere: la cattedrale di Madrid e le cupole di Covadonga e Valladolid. Ad est della basilica si sviluppa l'edificio del convento di pianta rettangolare attorno a un chiostro centrale porticato. Le funzioni erano distribuite lungo le maniche nord e sud. La manica nord ospitava gli spazi di rappresentanza e collettivi, il refettorio con le cucine, la biblioteca e la sala di riunione. Un corridoio permette un passaggio dalla chiesa, attraverso le maniche del convento, agli appartamenti del Re sul lato est. Nel corpo di fabbrica a sud vi erano gli alloggi dei religiosi e del personale di servizio. Il trattamento delle facciate corrisponde alle diverse funzioni: a nord l'ordine gigante suddivide la facciata in cinque campate, con un finestrone in quella centrale. A sud una uniforme tessitura delle aperture è segnata dai marcapiani e dai pilastri giganti negli angoli. Sul lato opposto alla chiesa è presente un corpo edilizio incompiuto ospitante la residenza reale costituita da due appartamenti simmetrici e da un salone centrale. La massa dell'edificio è modulata da quattro paraste e ha ampio terrazzo convesso con un forte basamento. Dalle strutture del convento si dipartono due campanili ai lati della cupola. Il progetto juvarriano contribuisce a delle innovazioni di vitale importanza al tema di derivazione classica del campanile, di cui Bernini e Borromini avevano largamente contribuito a sviluppare le potenzialità. La sua peculiarità risiede in due elementi: la posizione delle torri campanarie e la loro struttura architettonica e costruttiva. Filippo Juvarra infatti ottiene un effetto di grande dinamismo facendo retrocedere le torri campanarie rispetto alla cupola e inglobandone la parte del basamento nella struttura del convento. La struttura portante dei campanili è costituita da un cilindro in laterizio che si sviluppa fino alla cella campanaria. La torre ha una serie di differenti configurazioni a partire dal basamento, con schema poligonale impostato sul quadrato, seguito dal corpo principale. La trabeazione finale è costituita da una andamento mistilineo.

La chiesa di Superga si basa su una lunga attività di ricerca acquisita dalla collaborazione nello studio di Carlo e Francesco Fontana nel 1704, proseguita con viaggi e studio delle architetture di Brunelleschi, Michelangelo, Pietro da Cortona, Bernini e Borromini e dei trattati teorici dell'architettura di Vitruvio, Palladio, Andrea Pozzo e Vignola.

## **3** Inquadramento scientifico

Studiata la genesi e le idee che sottendono l'edificio religioso in analisi, utili per una più completa comprensione, si può passare ad una successiva conoscenza della letteratura scientifica sugli studi della struttura a cupola. Passaggio fondamentale per giungere all'analisi statica della cupola oggetto del presente studio.

Nella progettazione della struttura della cupola di Superga Filippo Juvarra impiega un sistema avente origine nel tipo di cupola di Filippo Brunelleschi del Duomo di Firenze. Sul manufatto brunelleschiano sono state svolte analisi e studi da diversi secoli sino agli ultimi importanti contributi al fine di scoprirne il funzionamento statico. Le recenti ricerche sono state effettuate con l'ausilio di codici di calcolo atti a dimostrare matematicamente le intuizioni avanzate.

Gli studi susseguitisi relativamente alla cupola di Brunelleschi sono stati dettati dal problema del quadro fessurativo, generatosi poco tempo dopo il suo completamento. Essendosi formate da subito delle lesioni probabilmente la cupola non ha funzionato come struttura a cupola per l'impossibilità del chiudersi delle azioni orizzontali.

La prima documentazione sullo stato delle lesioni è del 1639 con l'architetto Gherardo Silvani che in una relazione riporta come esse permettano il passaggio dell'aria e dei venti. In seguito Giovan Battista Nelli, della Commissione Viviani, nel 1695 propone di impiegare quattro catene di ferro per la cerchiatura, ma non viene realizzato in quanto fortemente criticato. Nel secolo successivo Leonardo Ximenes effettua un
rilievo dettagliato del quadro fessurativo (1757) che andrà a costituire il documento più esaustivo sui dissesti prima del Novecento.

Nel 1934 la Commissione Nervi indaga sui rapporti tra temperatura dell'aria e dilatazioni delle lesioni, spingendo la commissione a sostenere che la causa dei dissesti era da riscontrarsi nei movimenti di carattere termico.

Negli anni '80 si arriva ad una interpretazione definitiva delle cause dei dissesti con il professor Andrea Chiarugi, dimostrando come le cause siano da individuarsi nella geometria stessa della cupola. La struttura è composta da un doppio guscio con 8 vele raccordate da costoloni agli spigoli . Questi sproni angolari sono connessi tra di loro da 18 arconi nel piano dei



Figura 3.1: Modello semplificato con costruzione rete F.E., 1983. Fonte: www.eperiodica.ch, http://doi.org/10.5169/seals-35847 Consultazione: 11-11-2021

paralleli per ogni vela, distribuiti su 9 livelli. Ogni vela ha 3 sproni raccordanti gli arconi. A sorreggere la cupola vi è il tamburo che appoggia

alternativamente su piloni e arconi.

La suddetta geometria è generatrice di due comportamenti che, combinati, provocano l'insorgere delle lesioni: il comportamento a cupola con i paralleli sotto una certa latitudine, sottoposti a trazione; l'altro è di trave anulare proprio del tamburo che può essere considerato come una trave continua su più appoggi (piloni e arconi) con vincoli a differente rigidezza (maggiore per la parte sostenuta dai piloni, minore per quella sostenuta dagli archi). Nella porzione sostenuta dai pilastri si ha una sollecitazione di momento negativo che tende le fibre superiori, mentre nella parte sopra gli archi nascono superiore compressioni nella parte trazioni inferiormente. e Sovrapponendo i due meccanismi si sommano le trazioni nei paralleli sopra i piloni e il controbilanciamento delle tensioni lungo i paralleli posti sopra gli archi, andando a causare la nascita delle fessure.

Le intuizioni di Andrea Chiarugi hanno trovato conferma nel modello numerico ad elementi finiti della cupola realizzato con il codice di calcolo FIESTA, dell'ENEL-CRIS Milano. Nello studio il materiale era presunto con caratteristiche meccaniche ideali di un solido isotropico elastico, omogeneo. La ricerca intendeva valutare gli effetti del peso proprio e delle variazioni termiche sinusoidali annuali. La geometria definita del modello della cupola era simmetrica su base ottagonale, regolare, con doppio guscio ideale (Fig. 3.1). Il modello di un quarto di cupola e tamburo sottostante (Fig. 3.2) era composto da una mesh di 428 elementi e 2667 nodi; erano stati applicati vincoli completi alla base del tamburo.

Il risultato confermava le ricerche di A. Chiarugi: si assisteva a una distorsione nelle tensioni orizzontali al centro dei pannelli causata dalla differente rigidità tra pannelli sostenuti dai pilastri e pannelli sostenuti dagli archi. Dagli esiti del codice di calcolo si evinceva che la struttura

38

possiede una naturale propensione alla nascita di fessure proprio sulle porzioni sostenute dai supporti a pilastro (Fig. 3.3), partendo dagli occhi del tamburo e seguendo percorsi verticali sino ai due terzi dell'altezza della cupola.

L'impiego dei codici di calcolo ha permesso di studiare con un grado approfondito i comportamenti statici della struttura a cupola di Brunelleschi, aiutando a comprendere le cause scatenanti il sistema di fessure che si era generato da secoli. E' stata la conformazione geometrica peculiare della cupola sotto il peso proprio a formare le lesioni.



Figura 3.2: Mesh F.E. del tamburo, 1983. Fonte: www.e-periodica.ch, http://doi.org/10.5169/seals-35847 Consultazione: 11-11-2021



Figura 3.3: visualizzazione con il codice di calcolo delle principali tensioni, 1983. Fonte: www.eperiodica.ch, http://doi.org/10.5169/seals-35847 Consultazione: 11-11-2021

### 4 Modello cupola di Superga

Visti i contributi con l'impiego delle nuove tecnologie ad opera di Andrea Chiarugi per la cupola di Brunelleschi si può analizzare la struttura a cupola di Filippo Superga. Juvarra parte della dall'analisi struttura brunelleschiana, che aveva avuto modo di studiare dal suo viaggio a Firenze nel giugno 1714, e dalla cupola di San Pietro di Michelangelo, proseguita da Giacomo Della Porta.

Nel progetto della cupola del santuario di Superga, F. Juvarra compie una sintesi delle tradizioni architettoniche precedenti, migliorando alcune soluzioni tecniche.

L'opera di F. Brunelleschi è composta da un doppio guscio in laterizi con costoloni angolari raccordanti le calotte che arrivano sino alla lanterna, trasformando la costruzione in una struttura autoportante (Fig. 4.1). Nel



Figura 4.1: Spaccato assonometrico della cupola di Filippo Brunelleschi, 1420. Fonte: Peter J. Gärtner, Filippo Brunelleschi. 1377-1446, pag. 94



Figura 4.2: Grafico illustrante il sistema di forze di compressione e trazione nella struttura cupola. Fonte: www.academia.edu, https://www.academia.edu/28814136/LA\_CUP OLA\_DI\_SAN\_PIETRO.\_RESTAURO\_DEL\_X VIII\_SECOLO\_Consultazione: 21-04-2021

capitolo precedente è stato osservato il sistema strutturale delle vele aventi anch'esse costoloni interni.

La struttura a doppia calotta, oltre a servire a concorrere alla protezione dagli agenti atmosferici del guscio interno, risolve soprattutto il problema statico proprio della cupola in muratura. Il problema presente i1 è riscontrasi in essa dell'avvio di sollecitazioni di trazione lungo i paralleli nelle zone tese raggiungenti valori prossimi alla scarsa resistenza a trazione della muratura, con la



Figura 4.3: Sezione della basilica e cupola di San Pietro in Vaticano con la vista della doppia calotta, secondo il progetto di Michelangelo, in un'incisione di Etienne Dupérac del 1569. Fonte: Wolfgang Lotz, Architettura in Italia, pag. 99

conseguente comparsa di lesioni sui meridiani che annullano l'azione cerchiante dei paralleli. Quindi la costruzione di due calotte irrigidite da un sistema di costoloni permettono di rendere più salda la struttura.

Il sistema a doppia calotta è stato utilizzato anche da Michelangelo in San Pietro in cui lo sdoppiamento avviene al giro dei mezzanini e si presenta come una struttura raccordata con sedici setti disposti secondo i meridiani. Le calotte e i setti sono costituiti interamente in laterizi e sono presenti cinque livelli di cerchiature in ferro composte da catene collegate tra loro, ciascuna delle quali ha un occhio in un'estremità e due dall'altra al fine di garantire il mutuo incastro e il sigillo con un paletto. Un analogo sistema di cerchiatura è presente nella cupola di Superga come documentato da G. Gritella, con una doppia cinturazione in modo da opporsi alle spinte radiali date dai carichi della massa della struttura a cupola e della lanterna.

#### 4.1 Struttura della cupola juvarriana di Superga

Il sistema strutturale è composto, come per Santa Maria del Fiore e San Pietro, da due calotte in laterizi. Nella cupola di Superga i due gusci si sdoppiano al giro dei mezzanini poco sopra le ellittiche dell'attico forature del tamburo, come si evince da un disegno di una sezione verticale realizzato da F. Juvarra (Fig. 4.5). Questo disegno rappresenta l'idea iniziale di F. Juvarra di realizzare un doppio guscio; si differenzia da quanto effettivamente realizzato nella presenza di oculi circolari in luogo delle attuali finestre ellittiche nell'attico la sopra trabeazione del tamburo. Secondo questo disegno le aperture circolari erano percorse nell'emiciclo superiore da una cornice continua che collegava aperture, seguendo l'idea tutte le presente nei progetti presentati da F. Juvarra la ammissione per sua all'Accademia di San Luca il 3 aprile



Figura 4.4: Basilica di Superga con vista del tamburo posto sul corpo cilindrico di base e della cupola. Foto scattata nel sopralluogo del 21 aprile 2019



Figura 4.5: Sezione verticale della cupola con la vista della struttura a doppia calotta, disegno di F. Juvarra. Fonte: Nino Carboneri, La reale chiesa di Superga di Filippo Juvarra

43

1707. Le due calotte sono raccordate da 16 setti meridiani in muratura, con la presenza di ampie aperture ellittiche



Figura 4.6: Cupola della Basilica di Superga: si notino nel tamburo i piloni, individuati dalle colonne binate, sostenenti le calotte e i costoloni meridiani sull'estradosso della cupola. Foto scattata da Elisa Dipré nel sopralluogo del 14 ottobre 2021

nella loro porzione superiore in modo da alleggerirli. La cupola è alta 24,40 m. All'imposta la cupola presenta uno spessore di 2,50 m, prima dello sdoppiamento al livello del giro di mezzanino. La calotta esterna ha lo stesso spessore di 0,60 m in tutto il suo sviluppo verso la lanterna, mentre il guscio interno si rastrema verso l'alto: alla base di 0,80 m, alla sommità di 0,54 m. I costoloni meridiani, ben visibili esternamente nell'estradosso della calotta superficiale, vanno a costituire i canali privilegiati dei flussi statici che si scaricano sui piloni del tamburo. A differenza della cupola di Brunelleschi nella quale il tamburo funzionava come trave continua anulare su più appoggi, con vincoli differenti di rigidità (piloni e arcate della navata centrale e delle cappelle radiali) causanti l'aprirsi di lesioni verticali e inclinate di 60°, a Superga invece Juvarra affida il sostegno strutturale delle calotte ai piloni, alti 21 m, inseriti nel tamburo, i quali conseguentemente permettono lo scarico delle forze ai fulcri in muratura di 27,45 m di altezza, posizionati ai vertici dell'ottagono della pianta della chiesa, dietro alle colonne corinzie sostenenti la trabeazione circolare.

I piloni del tamburo sono individuati esternamente dalle colonne binate di marmo di Gassino a capitelli compositi sostenenti la trabeazione che corre lungo tutta la circonferenza (Fig. 4.6). Il sistema strutturale della cupola con i 16 setti meridiani, ricorda a scala molto più piccola la cupola michelangiolesca, importante base di studio per Juvarra.

Ai fini dell'analisi statica della struttura della cupola di Superga, ho costruito in ambiente CAD il modello tridimensionale.

45

Partendo dai disegni delle piante, prospetti e sezione ho fatto un rilievo architettonico della pianta del tamburo e una sezione-prospetto in AutoCad (Figg. 4.11 e 4.12) propedeutici a costruire il modello 3D. A questo punto ho potuto tracciare un modello 3D della cupola in cui è mostrata la doppia calotta con i setti meridiani, forati da aperture ellittiche di alleggerimento, e il tamburo con i piloni individuati dalle colonne binate (Figg. 4.13 e 4.14). Il disegno è essenzialmente realizzato per scopi di analisi strutturale, quindi l'apparato decorativo risulta assai semplificato.

Sarà però in ambiente del programma PRO\_SAP in cui si costruirà un modello puramente strutturale per effettuare le dovute analisi. Il modello in CAD vuole rendere visibili la conformazione tridimensionale del manufatto architettonico con le sue parti portanti.



Figura 4.7: Vista dei piloni sostenenti i setti meridiani, individuati dalle colonne binate. Foto scattata da Elisa Dipré nel sopralluogo del 14 ottobre 2021



Figura 4.8: Interno basilica: vista delle colonne scanalate corinzie sostenenti la trabeazione circolare, elemento di passaggio dalla pianta poligonale alla circolare del tamburo senza l'impiego dei pennacchi. Foto scattata da Elisa Dipré nel sopralluogo del 14 ottobre 2021



*Figura 4.9: Interno della basilica: vista dell'altare laterale e della cupola. Foto scattata da Elisa Dipré nel sopralluogo del 14 ottobre 2021* 



Figura 4.10: Interno della basilica: vista della cupola con la decorazione nell'intradosso individuante un costolone meridiano per coppia. Foto scattata da Elisa Dipré nel sopralluogo del 14 ottobre 2021



Figura 4.11: Rilievo architettonico pianta del tamburo della cupola



Figura 4.12: Rilievo architettonico sezione-prospetto della cupola



Figura 4.13: Modello 3D della cupola di Superga elaborato in AutoCad con vista dei costoloni e della doppia calotta



Figura 4.14: Modello 3D che ho elaborato in ambiente AutoCad con vista dei 16 costoloni e della doppia calotta

### 5 Calcoli statici di Filippo Juvarra

Nell'inquadramento scientifico sono stati esposti i metodi di calcolo applicati alla struttura a cupola realizzati con il calcolatore negli anni 1980 sulla base delle intuizioni statiche di Andrea Chiarugi.

Al fine della comprensione della cupola di Superga è utile indagare sui possibili calcoli che Filippo Juvarra avrebbe potuto impiegare per la statica della struttura.

A inizio Settecento negli ambienti scientifici circolavano le soluzioni relative alla struttura a cupola di Pierre Bouguer, matematico che elabora la prima teoria statica sulle cupole.

Infatti prima dell'elaborazione di P. Bouguer le strutture a cupola erano costruite, ma non esisteva una teoria statica a riguardo. Le teorie presenti fino al Settecento riguardavano solo le strutture ad arco e le volte.

Il 19 maggio 1734 P. Bouguer presenta all'Académie la teoria elaborata sulla struttura a cupola intitolata Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en dôme, in cui sostiene che un'infinità di linee curve vanno a costituire la cupola. La cupola è generata dalla rotazione di una determinata curva opportunamente scelta; questa curva può essere considerata come una catenaria rovesciata. Il calcolo dell'arco a forma di catenaria rovesciata gode della proprietà che aveva individuato Giacomo Bernoulli nel 1704. Egli aveva dimostrato che la struttura di un arco di forma catenaria rovesciata resiste avente al peso proprio. Conseguentemente se l'arco a forma di catenaria, generatore della struttura per rotazione attorno all'asse verticale della cupola, resiste al peso proprio,

allora tutta la struttura a cupola avrà questa proprietà in quanto generata dall'arco.

Pierre Bouguer ha elaborato una teoria in forma scritta che già circolava negli ambienti scientifici dei primi decenni del Settecento come è stato detto.

La sua teoria parte dall'equazione differenziale di una catenaria:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+{y'}^2}} = \frac{q}{P}$$
(5.1)

L'equazione della catenaria deriva dall'applicazione delle equazioni di Bernoulli le quali risolvono il problema dell'equilibrio di una fune flessibile soggetta a una qualunque distribuzione di forze tangenziali e normali.

Le equazioni generali sono state ottenute da Bernoulli negli anni 1697-98. Bernoulli nel processo analitico per trovare le equazioni considera una fune AB nel piano (z, y) sulla quale agiscono le forze  $\mathbf{f}(s) \equiv (f_z(s), f_y(s))$  in cui s è l'ascissa curvilinea che rappresenta la linea assunta a causa del carico agente.



Figura 5.1: Fune flessibile. Fonte: Edoardo Benvenuto, La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico, pag. 188

E' considerato l'intervallo infinitesimo a-b che ha una lunghezza ds in cui agiscono le forze normali  $N_a$  e  $N_b$  nelle direzioni delle tangenti alla curva nei punti a e b. Si pone:

$$N_b = -N_a + dN \tag{5.2}$$

L'equazione di equilibrio è  $N_b + N_a + fds = 0$ , da cui si ottiene

$$dN + fds = 0 \tag{5.3}$$

Ritenendo la forza normale N tangente al filo, l'unica equazione indefinita che permette l'equilibrio in ogni elemento infinitesimo ds è la seguente:

$$\frac{dN}{ds} + f = 0 \tag{5.4}$$

Tramite questa formula Bernoulli definisce le condizioni locali di equilibrio secondo la tangente e la normale alla curva in un qualsiasi punto. Quindi le componenti di f sono  $f_t$  e  $f_n$ . Considerate queste due direzioni e l'equazione  $\frac{dN}{ds} + f = 0$ , si arriva all'equazione di equilibrio secondo la tangente:

$$\frac{dN}{ds} + f_t = 0 \tag{5.5}$$

L'equazione lungo la normale sarà:  $\frac{N}{r} = f_n$ Le equazioni  $\frac{dN}{ds} + f_t = 0$  e la  $\frac{N}{r} = f_n$  sono le equazioni di Bernoulli le quali risolvono l'equilibrio di una fune flessibile. Le equazioni di Bernoulli servono per ottenere l'equazione differenziale di una catenaria.

Ora si ritorna al Bouguer il quale nella sua teoria statica delle cupole parte dall'equazione differenziale di una catenaria.

L'equazione è la seguente:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+{y'}^2}} = \frac{q}{P}$$
(5.1)

P è una costante la quale rappresenta la forza di compressione agente sulla sommità A della cupola, come mostrato nella seguente figura:



Figura 5.2: Forza di compressione agente sulla sommità. Fonte: Edoardo Benvenuto, La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico, pag. 340 Considerando che la porzione ds è uguale a

 $ds = \sqrt{1+{y'}^2} dz$ 

l'equazione differenziale della catenaria la si può scrivere come

Pdy' = qds da cui si ottiene  $Pdy' = \int_{0}^{z} qds$ 

L'espressione  $\int_{0}^{s} qds$  indica il peso Q della porzione di arco compresa tra il punto A e una sezione generica M di coordinate z, y.

La superficie della cupola, composta da zone infinitesime pesanti caricate, nasce dalla rotazione di una determinata curva in cui il peso di ogni elemento dell'unghia infinitesima cresce con z e si esprime in modo proporzionale a zdQ.



Figura 5.3: Superficie di una cupola che nasce dalla rotazione di una curva scelta. Fonte: Edoardo Benvenuto, La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico, pag. 341

Quindi il peso dell'unghia AMm sarà proporzionale a  $\int_{0}^{\infty} z dQ$ .

Se si considera che tutte le singole faccette componenti la cupola hanno tutte lo stesso peso unitario o il medesimo carico agente, dQ dipenderà dall'elemento lineare ds della curva dalla quale per rotazione si genera la cupola.

Quindi si avrà come equazione della curva la seguente:

$$P \quad y' = \int_{0}^{z} z ds \tag{5.6}$$

Questa equazione differenziata porge:

 $P \, dy' = z ds = z \, \sqrt{1 + {y'}^2} dz$  (5.7)

da cui abbiamo: 
$$zdz = \frac{Pdy'}{\sqrt{1+{y'}^2}}$$
 (5.8)

A questo punto Bouguer integra l'equazione appena trovata per serie, in modo da poter descrivere per punti questa curva la quale permette di ottenere la superficie della cupola omogenea equilibrata.

P. Bouguer elabora una teoria statica traducendo in forma scritta conoscenze che circolavano negli ambienti scientifici dei primi decenni del Settecento e probabilmente Filippo Juvarra nei calcoli della cupola di Superga può aver utilizzato il sistema appena trattato.

## 6 Analisi statica della cupola di Superga

L'analisi statica effettuata in questo capitolo permette di studiare il comportamento statico della cupola della Basilica di Superga dopo aver analizzato nei precedenti capitoli la struttura architettonica e i metodi di calcolo dell'epoca del manufatto. Quindi si può entrare nell'analisi con una base di conoscenza dei calcoli delle cupole e dell'edificio. L'analisi statica è composta da due parti:

- 1) analisi membranale;
- 2) risultati numerici;
- 3) confronto risultati.

Nell'analisi membranale si applica al caso specifico oggetto di studio la teoria membranale studiata nel capitolo 1, al fine di studiare le tensioni agenti nella calotta. Il calcolo si svolge manualmente e i risultati sono compendiati in un diagramma degli sforzi.

I risultati numerici si ottengono dalla modellazione tridimensionale della cupola all'interno del programma di calcolo PRO\_SAP tramite delle interrogazioni mirate e supportate dalla teoria membranale.

Successivamente all'impiego dei metodi si confrontano i risultati ottenuti al fine di mostrarne la veridicità.

# 6.1 Analisi membranale per carichi verticali dovuti al peso proprio

Materiali:	muratura in mattoni pieni e malta di calce $\gamma = 1800 \text{ kg/m}^3$
Geometria:	diametro interno D <sub>int</sub> = 28.66 m
	spessore $s = 0.81$ m
	raggio meridiano $R_1 = 17.01$ m
	raggio lanterna $R_L = 2.38$ m
	angolo d'intersezione tra cupola e lanterna $\theta_L = 17^{\circ}$



Figura 6.1: Sezione cupola

Si analizza lo stato tensionale della cupola in alcuni punti lungo i paralleli alle quote z considerate:

1)  $P_1 = (x = 2.40 \text{ m}; z = 0.0087 \text{ m})$  r = 2.40 m  $R_2 = 8.04 \text{ m}$  $\theta = 17^{\circ}$ 

Si calcola il peso locale della cupola:

qcupola =  $\gamma \cdot s$ 

 $q_{cupola} = 1800 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.81 \text{ m} = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Peso porzione sovrastante di cupola il parallelo 1:

Pcupola = qcupola · Scupola

dove *Scupola* è la superficie della porzione di cupola sovrastante il parallelo 1.

Il valore di  $S_{cupola}$  si determina tramite il prodotto della porzione di arco generatore della parte di cupola sovrastante il parallelo 1 (*AB*) con la circonferenza del parallelo considerato:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r$ 

considerando che la porzione di arco del parallelo 1, *AB*, risulta di 0.02 m, la superficie di porzione di cupola considerata è pari a:

 $S_{cupola} = 0.30 \text{ m}^2.$ 

Ora si può determinare il valore di Pcupola:

Pcupola = qcupola · Scupola

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 0.30 \text{ m}^2 = 437.4 \text{ kg}$ 

Si possono determinare gli sforzi di membrana  $S_1$  e  $S_2$ , rispettivamente lungo i meridiani e i paralleli.

Prima si determina lo sforzo *S*<sup>1</sup> in corrispondenza del parallelo 1 tramite l'equazione di equilibrio in direzione verticale della parte di cupola superiore al parallelo considerato:

$$S_1 = - \frac{Q}{2 \pi r \sin \theta}$$

con Q che è la risultante di tutte le forze esterne agenti sulla parte sottostante della cupola.

$$S_1 = - \frac{437.4}{2 \pi 2.40 \sin \theta} = -111.58 \text{ kg/m}$$

in cui il segno negativo denota la compressione.

Avendo il valore dello sforzo meridiano  $S_1$ , si può determinare lo sforzo lungo i paralleli  $S_2$  tramite la seguente relazione:

$$S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right]$$

 $S_2 = -11200.76 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali si calcolano le tensioni di membrana  $\sigma_1$ e  $\sigma_2$  tramite le seguenti relazioni:

$$\sigma_1 = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_2 = \frac{S2}{s}$$

 $\sigma_1 = -137.75 \text{ kg/m}^2 = -0.013 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_2 = -13828.09 \text{ kg/m}^2 = -1.38 \text{ kg/cm}^2.$ 

Ora si procede con la stessa modalità nel calcolo degli sforzi membranali e delle tensioni di membrana nei paralleli alle altre quote procedendo verso l'imposta della cupola.

2)  $P_2 = (x = 3.57 \text{ m}; z = 0.42 \text{ m})$  r = 3.57 m  $R_2 = 9.71 \text{ m}$  $\theta = 22^{\circ}$ 

Si calcola il peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s$ 

 $q_{cupola} = 1800 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.81 \text{ m} = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 1.26 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 2:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 28.26 \text{ m}^2.$ 

Ora si può determinare il valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 28.26 \text{ m}^2 = 41203.08 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

Q = 41203.08 kgLo sforzo meridiano *S*<sub>1</sub> risulta:

$$S_1 = - \frac{Q}{2 \pi r \sin \theta}$$

$$S_1 = - \frac{41203.08}{2 \pi 3.57 \sin \theta} = -5428.6 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 [q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1}] = -10221.32 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -6701.97 \text{ kg/m}^{2} = -0.67 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = -12618.91 \text{ kg/m}^{2} = -1.26 \text{ kg/cm}^{2}.$$
3) P<sub>3</sub> = (x = 4.73 m; z = 0.93 m)  
r = 4.73 m  
R\_{2} = 10.86 m  
 $\theta = 26^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 2.53 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 3:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 75.19 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$  $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 75.19 \text{ m}^2 = 109627.02 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 109627.02 kg

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -9290.42 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = -8600 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 = \frac{S1}{s}$$

 $\sigma_1 = -11469.65 \text{ kg/m}^2 = -1.14 \text{ kg/cm}^2$ 

$$\sigma_2 = \frac{S2}{s}$$

 $\sigma_2 = -10617.28 \text{ kg/m}^2 = -1.06 \text{ kg/cm}^2.$ 4) P4 = (x = 5.85 m; z = 1.52 m) r = 5.85 m $R_2 = 11.66 \text{ m}$  $\theta = 30^\circ$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 3.80 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 4:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 139.67 \text{ m}^2.$ Determinazione del valore di  $P_{cupola}$ :

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$  $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 139.67 \text{ m}^2 = 203638.86 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 203638.86 kg

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -12208.56 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = -6778.65 \text{ kg/m.}$ Determinati gli sforzi membranali S1 e S2 si ricavano le tensioni di

membrana  $\sigma_1 e \sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -15072.29 \text{ kg/m}^{2} = -1.50 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = -8368.70 \text{ kg/m}^{2} = -0.83 \text{ kg/cm}^{2}.$$

5) 
$$P_5 = (x = 6.93 \text{ m}; z = 2.20 \text{ m})$$
  
 $r = 6.93 \text{ m}$   
 $R_2 = 12.26 \text{ m}$   
 $\theta = 34^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 5.07 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 5:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 220.76 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

Pcupola = qcupola · Scupola

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 220.76 \text{ m}^2 = 321868.08 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 321868.08 kg

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

 $S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -14524.73 \text{ kg/m}.$ 

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

$$S_2 = -R_2 [q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1}] = -4917.11 \text{ kg/m}.$$

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S_{1}}{s}$$

$$\sigma_{1} = -17931.76 \text{ kg/m}^{2} = -1.79 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S_{2}}{s}$$

$$\sigma_{2} = -6070.50 \text{ kg/m}^{2} = -0.60 \text{ kg/cm}^{2}.$$

6) 
$$P_6 = (x = 7.95 \text{ m}; z = 2.96 \text{ m})$$
  
 $r = 7.95 \text{ m}$ 

 $R_2 = 12.72 \text{ m}$  $\theta = 39^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:  $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 6.34 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 6:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 316.69 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 316.69 \text{ m}^2 = 461374.02 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 461374.02 kg

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

 $S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -16077 \text{ kg/m}.$ 

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = -3150.99 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -19848.14 \text{ kg/m}^{2} = -1.98 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = -3890.11 \text{ kg/m}^{2} = -0.38 \text{ kg/cm}^{2}.$$
7) P<sub>7</sub> = (x = 8.91 m; z = 3.79 m)  
r = 8.91 m  
R\_{2} = 13.07 m  
 $\theta = 43^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 7.61 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 7:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 426.03 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 426.03 \text{ m}^2 = 621151 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

$$Q = 621151$$
 kg.

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -17747.17 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

$$S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = -1235.50 \text{ kg/m}.$$

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S_{1}}{s}$$

$$\sigma_{1} = -21910.08 \text{ kg/m}^{2} = -2.19 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S_{2}}{s}$$

$$\sigma_{2} = -1525.30 \text{ kg/m}^{2} = -0.15 \text{ kg/cm}^{2}.$$

8) 
$$P_8 = (x = 9.80 \text{ m}; z = 4.69 \text{ m})$$
  
 $r = 9.80 \text{ m}$   
 $R_2 = 13.35 \text{ m}$   
 $\theta = 47^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 8.88 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 8:  $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 546.78 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 546.78 \text{ m}^2 = 797205.24 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 797205.24 kg.

Lo sforzo meridiano *S*<sup>1</sup> risulta:

 $S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -19237.57 \text{ kg/m}.$ 

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 701.80 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :
$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -23750.08 \text{ kg/m}^{2} = -2.37 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 866.41 \text{ kg/m}^{2} = 0.08 \text{ kg/cm}^{2}.$$
9) P\_{9} = (x = 10.63 m; z = 5.65 m)  
r = 10.63 m  
R\_{2} = 13.58 m  
\theta = 52°

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 10.15 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 9:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 677.92 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 677.92 \text{ m}^2 = 988407.36 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -20304.17 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:  $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 2656.24 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -25066 \text{ kg/m}^{2} = -2.50 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 3279.30 \text{ kg/m}^{2} = 0.32 \text{ kg/cm}^{2}.$$
10) P<sub>10</sub> = (x = 11.38 m; z = 6.68 m)

$$r = 11.38 \text{ m}$$
  
 $R_2 = 13.76 \text{ m}$ 

 $\theta = 56^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 11.42 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 10:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 816.56 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di  $P_{cupola}$ :  $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 816.56 \text{ m}^2 = 1190544.48 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -21610.89 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 4693.53 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -26680.11 \text{ kg/m}^{2} = -2.66 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 5794.48 \text{ kg/m}^{2} = 0.57 \text{ kg/cm}^{2}.$$

$$11) P_{11} = (x = 12.06 \text{ m}; z = 7.75 \text{ m})$$

r = 12.06 m

 $R_2 = 13.91 \text{ m}$ 

$$\theta = 60^{\circ}$$

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 12.69 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 11:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 961.58 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 816.56 \text{ m}^2 = 1401983.64 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

$$Q = 1401983.64$$
 kg.

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -22870.85 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 6781.95 \text{ kg/m.}$ Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -28235.61 \text{ kg/m}^{2} = -2.82 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 8372.77 \text{ kg/m}^{2} = 0.83 \text{ kg/cm}^{2}.$$

$$12) P_{12} = (x = 12.65 \text{ m}; z = 8.87 \text{ m})$$

$$r = 12.65 \text{ m}$$

 $R_2 = 14.03 \text{ m}$ 

 $\theta = 64^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 13.96 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 12:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 1109.57 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 1109.57 \text{ m}^2 = 1617753.06 \text{ kg}.$ Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 1617753.06 kg.

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -24109.58 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 8925.04 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -29764.91 \text{ kg/m}^{2} = -2.97 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 11018.56 \text{ kg/m}^{2} = 1.10 \text{ kg/cm}^{2}.$$

$$13) P_{13} = (x = 13.16 \text{ m}; z = 10.04 \text{ m})$$

$$r = 13.16 \text{ m}$$

$$R_{2} = 13.76 \text{ m}$$

 $\theta = 69^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 15.23 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 13:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 1259.31 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 1259.31 \text{ m}^2 = 1836073.98 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -25127.58 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 10938.92 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -31021.70 \text{ kg/m}^{2} = -3.10 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 13504.83 \text{ kg/m}^{2} = 1.35 \text{ kg/cm}^{2}.$$

$$14) P_{14} = (x = 13.57 \text{ m}; z = 11.24 \text{ m})$$

$$r = 13.57 \text{ m}$$

 $\theta = 73^{\circ}$ 

 $R_2 = 14.20 \text{ m}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 16.50 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 14:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 1406.83 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

Pcupola = qcupola · Scupola

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 1406.83 \text{ m}^2 = 2051158.14 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è: Q = 2051158.14 kg.

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -26384.43 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 13517.69 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -32590.65 \text{ kg/m}^{2} = -3.25 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 16688.50 \text{ kg/m}^{2} = 1.66 \text{ kg/cm}^{2}.$$

15)  $P_{15} = (x = 13.90 \text{ m}; z = 12.46 \text{ m})$  r = 13.90 m  $R_2 = 14.26 \text{ m}$  $\theta = 77^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:  $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 17.77 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 15:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 1551.96 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 1551.96 \text{ m}^2 = 2262757.68 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -27699.32 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 [q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1}] = 15872.09 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S1}{s}$$

$$\sigma_{1} = -34196.69 \text{ kg/m}^{2} = -3.41 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S2}{s}$$

$$\sigma_{2} = 19595.17 \text{ kg/m}^{2} = 1.95 \text{ kg/cm}^{2}.$$

16)  $P_{16} = (x = 14.14 \text{ m}; z = 13.71 \text{ m})$ 

r = 14.14 m

 $R_2 = 14.30 \text{ m}$ 

 $\theta = 81^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 19.04 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 16:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 1691.59 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$ 

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 1691.59 \text{ m}^2 = 2466338.22 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 2466338.22 kg.

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

 $S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -29046.49 \text{ kg/m}.$ 

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

 $S_2 = -R_2 [q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1}] = 18288.27 \text{ kg/m}.$ 

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S_{1}}{s}$$

$$\sigma_{1} = -35859.86 \text{ kg/m}^{2} = -3.58 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S_{2}}{s}$$

$$\sigma_{2} = 22578.11 \text{ kg/m}^{2} = 2.25 \text{ kg/cm}^{2}.$$

17)  $P_{17} = (x = 14.28 \text{ m}; z = 14.97 \text{ m})$ 

r = 14.28 m

$$R_2 = 14.32 \text{ m}$$

$$\theta = 86^{\circ}$$

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 20.31 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 17:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 1822.29 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

 $P_{cupola} = q_{cupola} \cdot S_{cupola}$  $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 1822.29 \text{ m}^2 = 2656898.82 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 2656898.82 kg.

Lo sforzo meridiano *S*<sup>1</sup> risulta:

$$S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -30343.75 \text{ kg/m}.$$

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

$$S_2 = -R_2 [q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1}] = 20990.54 \text{ kg/m}.$$

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1} = \frac{S_{1}}{s}$$

$$\sigma_{1} = -37461.41 \text{ kg/m}^{2} = -3.74 \text{ kg/cm}^{2}$$

$$\sigma_{2} = \frac{S_{2}}{s}$$

$$\sigma_{2} = 25914.24 \text{ kg/m}^{2} = 2.59 \text{ kg/cm}^{2}.$$

Imposta cupola)  $P_i = (x = 14.33 \text{ m}; z = 16.24 \text{ m})$ 

$$r = 14.33 \text{ m}$$
  
 $R_2 = 14.33 \text{ m}$   
 $\theta = 90^{\circ}$ 

Peso locale della cupola:

 $q_{cupola} = \gamma \cdot s = 1458 \text{ kg/m}^2.$ 

Con AB = 21.58 m si determina la superficie della porzione sovrastante il parallelo 17:

 $S_{cupola} = AB \cdot 2\pi r = 1943.02 \text{ m}^2.$ 

Determinazione del valore di Pcupola:

Pcupola = qcupola · Scupola

 $P_{cupola} = 1458 \text{ kg/m}^2 \cdot 1943.02 \text{ m}^2 = 2832923.16 \text{ kg}.$ 

Il peso Q della parte sovrastante il parallelo considerato è:

*Q* = 2832923.16 kg.

Lo sforzo meridiano S1 risulta:

 $S_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -31859.23 \text{ kg/m}.$ 

Lo sforzo parallelo S2 quindi risulta:

$$S_2 = -R_2 \left[ q_{cupola} \cdot \cos \theta + \frac{S_1}{R_1} \right] = 23571.27 \text{ kg/m}.$$

Determinati gli sforzi membranali  $S_1$  e  $S_2$  si ricavano le tensioni di membrana  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{s}$$
  

$$\sigma_1 = -39332.38 \text{ kg/m}^2 = -3.93 \text{ kg/cm}^2$$
  

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{s}$$

 $\sigma_2 = 29100.33 \text{ kg/m}^2 = 2.91 \text{ kg/cm}^2.$ 



## Combinazione di carico

## Peso struttura (Tabella 1)

	σ1	σι	σ2	σ2
Combinazione	Compr. Max.	Traz. max	Comp. max.	Traz. max.
	$(kg/cm^2)$	$(kg/cm^2)$	$(kg/cm^2)$	$(kg/cm^2)$
Peso struttura	-3.93	/	-1.38	2.91

## 6.2 Analisi con il programma di calcolo PRO\_SAP

I risultati di compressione e trazione in tabella 1 sono stati ottenuti tramite il procedimento di calcolo della teoria membranale con la visualizzazione degli sforzi meridiani e paralleli in forma di diagramma. Notiamo che la struttura oggetto di studio presenta il tipico comportamento a cupola: aumento degli sforzi di compressione lungo i meridiani procedendo dalla sommità verso l'imposta; invece lungo i paralleli si assiste dapprima ad una diminuzione progressiva degli sforzi di compressione scendendo di quota. In seguito arrivando tra le quote dei paralleli n°7 e n°8 vi è l'annullamento degli sforzi di compressione e inizia la trazione che aumenta progressivamente verso l'imposta della cupola. Ouesto comportamento è determinato dall'aumento del peso della struttura gravante sui paralleli con l'abbassarsi della quota. Il peso sovrastante preme sulla porzione muraria inferiore della calotta e genera un movimento di trazione nella struttura di mattoni.

E' il tipico comportamento di una struttura a cupola, come possiamo vedere chiaramente nei grafici di William Dunn in *The Principles of Dome Construction*.

Tramite i calcoli teorici effettuati notiamo che il tipico comportamento di una cupola, lo riscontriamo anche nella calotta della Basilica di Superga.

I risultati ottenuti per mezzo del calcolo manuale, ora li andiamo a confrontare con i risultati numerici emersi dalla modellazione con il programma di calcolo.

90

#### 6.2.1 Costruzione del modello tridimensionale

Il programma di calcolo che ho impiegato nella mia analisi statica della cupola della Basilica di Superga è PRO\_SAP, un programma di analisi delle strutture.

Partendo da un primo rilievo effettuato della cupola, ho modellato la forma tridimensionale tramite AutoCad al fine di conoscere la

conformazione

volumetrica della struttura.

Successivamente a questa fase di



Figura 6.2: Particolare costruttivo della cupola a doppia calotta con individuati i laterizi. Fonte: Gianfranco Gritella, Juvarra. L'architettura, pag. 241

conoscenza della conformazione del manufatto edilizio ho modellato la struttura all'interno del programma di analisi strutturale PRO\_SAP.

Ho modellato la struttura nel programma seguendo i disegni del rilievo tracciati da me.

Prima di iniziare la modellazione ho impostato il materiale basandomi sullo studio della cupola di Superga di Gianfranco Gritella in cui è indicato che le calotte e i setti meridiani sono composti da laterizi (Fig. 6.2).

2 🥁 🖣	Ş 📚 📢	2
lateriale corrent	e	
	Construction of the second file.	disalara (Cha
Muratura in mat n7/2019-muratu 1.500e+04	ira E = 1.500e+0	14-muratura E =
Muratura in mat n7/2019-muratu 1.500e+04 Copia	ioni pieni e maita ira E = 1.500e+C	or carde - Circ. 14-muratura E =

Figura 6.3: Dati di input materiale struttura

Il materiale inserito "muratura in mattoni pieni e malta di calce" risponde ai sensi della Circolare n. 7 del 2019.

I passaggi successivi sono composti dalla costruzione del modello 3D: tamburo e costoloni, calotta interna e calotta esterna.

Il modello eseguito tramite il programma di calcolo è costituito da elementi denominati Solidi in quanto permettono di cogliere lo stato tensionale della calotta.



Figura 6.4: Prospetto cupola in modalità Vista solida e vista Filo di ferro con vincoli (punti blu) alla base

E' costituito da 12719 elementi Solidi connessi tra di loro tramite 19604 nodi (Fig. 6.4).

Questo modello fatto da me riproduce in dettaglio la struttura della cupola nelle sue parti che la compongono:

- il tamburo sostenente la cupola, traforato dalle aperture;
- i 16 costoloni meridiani;
- le calotte interna ed esterna.



Figura 6.5: Fasi di costruzione del modello: a) tamburo e setti meridiani; b) calotta interna



Figura 6.6: Fasi di costruzione del modello: c) calotta esterna. Sezione verticale del modello con vista della doppia calotta



Figura 6.7: Viste del modello: a) estradosso calotta esterna; b) intradosso calotta interna; c) prospetto; d) assonometria

Il presente modello permette di studiare i comportamenti statici della struttura.

Tramite il modello si possono mappare le tensioni agenti sulle calotte.

Il modello 3D realizzato permette lo studio della statica della struttura grazie alla corrispondenza ai rilievi e al modello elaborato in AutoCad.

Il procedimento della sua costruzione parte dalla definizione della struttura del tamburo in cui vi sono i piloni su cui scaricano le forze trasmesse dai setti meridiani. I costoloni sono 16 e disposti a coppia (Fig. 6.8) e individuano gli otto spicchi della cupola, sia della calotta interna che di quella esterna.

La calotta interna presenta spessore di 0.80 m e si aggancia ai costoloni

meridiani disposti in coppia. I costoloni visibili sono all'estradosso esternamente della calotta di protezione internamente esterna, mentre non sporgono ma una decorazione individua un costolone per ogni coppia: in questo modo all'interno della chiesa osservando la cupola è come se ci fossero solo 8 costoloni.

Tra la calotta interna e l'esterna è presente un'intercapedine con un'apertura alla sommità della cupola.



Figura 6.8: Evidenziati il pilastro inserito nel tamburo e la sovrastante coppia di costoloni

Il compito della calotta esterna, il cui spessore è di 0.60 m, è duplice:

- proteggere dalle intemperie la calotta interna;
- garantire l'effetto visivo di slancio verticale della cupola in modo che domini il paesaggio circostante e sia visibile dall'imbocco della Val di

Susa, pensato nel Settecento come monito ai francesi della loro sconfitta nell'assedio di Torino del 1706.

Il modello può essere utilizzato per effettuare interrogazioni specifiche al fine di studiare lo stato tensionale.

Alla base del modello sono applicati i vincoli rigidi (Fig. 6.9) in modo che la struttura composta da tamburo e cupola, sia considerata agganciata alla struttura sottostante della chiesa.

**I**1 modello può essere per studiare utilizzato i flussi delle forze analizzando le forze di compressione e trazione. Le individuabili forze sono interrogando la struttura con



Figura 6.9: Assonometria a filo di ferro del modello con vista dei vincoli (punti blu) alla base

lo strumento azioni "vettore" per analizzare le tensioni di trazione/compressione lungo la direzione del meridiano/parallelo.

I setti meridiani sono visibili con una piccola sporgenza all'estradosso della calotta esterna, seguendo la reale conformazione della cupola.

Il modello è utile per le analisi numeriche delle tensioni. Infatti quando si utilizza il comando Tensioni Solidi, tenendo la struttura in modalità Filo di ferro, essa si colora con una mappatura cromatica e compare una legenda in cui ogni colore corrisponde ad un intervallo di valori.

Il tipo di modello è puramente costruito a fini di calcolo strutturale: è elaborata la struttura portante con gli elementi elencati sopra.

Le colonne binate in marmo di Gassino individuanti i contrafforti immersi nel tamburo e le colonne nella parte interna non sono modellate, in quanto non portanti. Non sono state modellate le decorazioni dei cornicioni.

Il presente 3D elaborato in PRO\_SAP può essere preso come modello quasi replicabile per l'analisi di altre strutture in quanto permette di indagare il comportamento strutturale.

Un modello strutturale chiaro è condizione necessaria per analizzare correttamente il comportamento tensionale. Quando lo spessore degli elementi delle strutture è notevole come in questo edificio oggetto di studio e nel panorama dell'edilizia storica, è fondamentale modellare con elementi solidi in quanto permettono di formulare risultati più accurati in termini tensionali.

### 6.2.2 Risultati numerici della modellazione

Modellata la struttura essa ha un peso proprio, il carico *Ggk*. All'interno del programma di calcolo si visualizzano le tensioni di compressione e di trazione agenti sui meridiani e i paralleli. I valori risultati dall'analisi con il programma di calcolo saranno confrontati con i valori del calcolo teorico. Essendo la struttura della cupola assialsimmetrica si può ragionare su porzioni ridotte del modello.

Si considera uno spicchio di calotta interna (Fig. 6.10) e su di esso verrà effettuata un'interrogazione col calcolatore dalla quale emergeranno i risultati tensionali.



Figura 6.10: Porzione di calotta interna della cupola oggetto di analisi

La porzione di calotta considerata è composta da 160 elementi solidi di spessore di 0.80 m disposti in 16 meridiani e 10 paralleli. E' individuata da due costoloni ai bordi.



Figura 6.11: A sinistra: porzione di calotta considerata; a destra: vista dei meridiani e paralleli componenti lo spicchio

Per ottenere le tensioni di trazione e compressione lungo la direzione del meridiano/parallelo si utilizzano le azioni "vettore" all'interno della pagina di controllo risultati disponibili in "Tensioni Solidi" e si definisce di volta in volta la direzione del vettore da considerare.

Nell'analisi della porzione di calotta in esame si interroga il programma secondo i meridiani e i paralleli ottenendo una mappatura cromatica in cui ogni colore indica un intervallo di valori di tensione. Il segno negativo denota la compressione, il positivo le tensioni di trazione. Si procede secondo la direzione dei meridiani ottenendo una mappa cromatica (Fig. 6.12) che individua le tensioni  $\sigma_1$ .



Figura 6.12: Mappa cromatica delle tensioni meridiane

Ogni meridiano è composto da 10 elementi solidi, numerati progressivamente dalla sommità all'imposta.

Analizzando i risultati del programma, le tensioni  $\sigma_1$  mostrano un aumento della compressione verso l'imposta: alla sommità si ha un intervallo di valori compreso tra -0.92 daN/cm<sup>2</sup> e -1.84 daN/cm<sup>2</sup>. Questo andamento prosegue sino all'elemento n°4; all'elemento solido successivo aumenta la

compressione in quanto vi è il passaggio all'intervallo successivo con valori compresi tra -1.84 daN/cm<sup>2</sup> e -2.76 daN/cm<sup>2</sup>. Scendendo gradualmente verso l'imposta aumenta la compressione dal solido n°9 con valori tra -2.76 daN/cm<sup>2</sup> e -3.68 daN/cm<sup>2</sup> fino all'ultimo elemento dell'imposta.

Complessivamente si può constatare lungo i meridiani un progressivo aumento dei valori di compressione tipico della teoria statica delle strutture a cupola.

Ora si confrontano tramite una tabella i risultati ottenuti tramite il calcolo teorico e i risultati del programma di calcolo.

Nelle righe agli elementi solidi del programma PRO\_SAP corrispondono le relative quote di sezione della cupola dell'analisi membranale. Confronto tra i risultati ottenuti con analisi membranale e con PRO\_SAP (Tabella 2)

	Analisi membranale	Analisi PRO_SAP	
	$\sigma_1 (kg/cm^2)$	$\sigma_1 (kg/cm^2)$	
Solido 1	P1 (-0.013) P2 (-0.67)	(-0.92; -1.84)	
Solido 2	P3 (-1.14)	(-0.92; -1.84)	
Solido 3	P4 (-1.50) P5 (-1.79)	(-0.92; -1.84)	
Solido 4	P6 (-1.98)	(-0.92; -1.84)	
Solido 5	P7 (-2.19) P8 (-2.37)	(-1.84; -2.76)	
Solido 6	P9 (-2.50) P10 (-2.66)	(-1.84; -2.76)	
Solido 7	P11 (-2.82)	(-1.84; -2.76)	
Solido 8	P12 (-2.97) P13 (-3.10)	(-1.84; -2.76)	
Solido 9	P14 (-3.25) P15 (-3.41)	(-1.84; -2.76) (-2.76; -3.68)	
Solido 10	P16 (-3.58) P17 (-3.74) Pi (-3.93)	(-1.84; -2.76) (-2.76; -3.68)	

Confrontando i risultati delle tensioni meridiane  $\sigma_1$  in tabella, si denota un accordo tra i valori ottenuti tramite l'analisi membranale e l'analisi effettuata col programma di calcolo PRO\_SAP. La cupola della Basilica di

Superga presenta il tipico comportamento di aumento delle tensioni di compressione lungo i meridiani.

Ora si studiano le tensioni  $\sigma_2$  lungo i paralleli della cupola tramite il programma di calcolo per poi confrontarle con i risultati di calcolo manuale. Si procede secondo la direzione dei paralleli ottenendo una mappa cromatica (Fig. 6.13) che individua le tensioni  $\sigma_2$ .



Figura 6.13: Mappa cromatica delle tensioni parallele

La numerazione degli elementi solidi che compongono il meridiano è la medesima impiegata nell'analisi per individuare le tensioni  $\sigma_1$ ; ogni elemento solido è posto su un parallelo.

Il modello della cupola lo interroghiamo nella direzione dei paralleli e otteniamo la mappatura cromatica come in Fig. 6.13.

Analizzando i risultati si nota come nella porzione superiore dello spicchio della calotta vi sono tensioni di compressione in un intervallo di valori compreso tra -3.93 daN/cm<sup>2</sup> e -1.58 daN/cm<sup>2</sup> alle quote degli elementi n°1 e n°2. Scendendo di quota la compressione secondo la direzione dei paralleli diminuisce in quanto aumenta il peso della porzione sovrastante di cupola e in ciò segue l'andamento delle tensioni secondo la teoria statica della cupola. La diminuzione delle tensioni di compressione è manifesta dal cambio di intervallo che, tra gli elementi solidi dal n°3 al n°6, comprende i valori tra -1.58 daN/cm<sup>2</sup> e 0.77 daN/cm<sup>2</sup>, intervallo in cui si assiste al passaggio dalle tensioni di compressione a quelle di trazione. L'annullamento dei valori di compressione e l'inizio delle trazioni agenti nella porzione inferiore della cupola, si ha in quest'ultimo intervallo di valori e ciò è confermato anche dall'analisi membranale effettuata che indica il passaggio dalle tensioni di compressione a quelle di trazione nell'elemento solido n°5 quindi tra il n°3 e il n°6.

Scendendo progressivamente di quota le tensioni di trazione aumentano e si passa all'intervallo successivo con valori che oscillano tra 0.77 daN/cm<sup>2</sup> e 3.12 daN/cm<sup>2</sup> nei solidi che vanno sino all'imposta della cupola.

I risultati vengono esposti nella tabella 3 confrontandoli con l'analisi membranale.

Dal confronto dei risultati dei due metodi di calcolo si denota un accordo: i valori dell'analisi membranale sono all'interno degli intervalli dei risultati del programma o vicini. Nelle tabelle 4 e 5 vengono indicati e confrontati

105

i valori massimi di tensione di compressione e trazione secondo i meridiani e i paralleli in base ai due metodi di calcolo dell'analisi membranale e con il programma.

Confronto tra i risultati ottenuti con analisi membranale e con PRO\_SAP (Tabella 3)

	Analisi membranale	Analisi PRO_SAP	
	$\sigma_2 (kg/cm^2)$	$\sigma_2 (kg/cm^2)$	
Solido 1	P1 (-1.38) P2 (-1.26)	(-3.93; -1.58)	
Solido 2	P3 (-1.06)	(-3.93; -1.58)	
Solido 3	P4 (-0.83) P5 (-0.60)	(-1.58; 0.77)	
Solido 4	P6 (-0.38)	(-1.58; 0.77)	
Solido 5	P7 (-0.15) P8 (0.08)	(-1.58; 0.77)	
Solido 6	P9 (0.32) P10 (0.57)	(-1.58; 0.77)	
Solido 7	P11 (0.83)	(0.77; 3.12)	
Solido 8	P12 (1.10) P13 (1.35)	(0.77; 3.12)	
Solido 9	P14 (1.66) P15 (1.95)	(0.77; 3.12)	
Solido 10	P16 (2.25) P17 (2.59) Pi (2.91)	(0.77; 3.12)	

# Confronto analisi membranale e analisi PRO\_SAP

Tension	i meridiane	σ1 (	Tabella	4)

	Analisi	Analisi	Analisi	Analisi
	membranale	PRO_SAP	membranale	PRO_SAP
	Compr. max. ( <i>kg/cm<sup>2</sup></i> )	Compr. max ( <i>kg/cm<sup>2</sup></i> )	Traz. max. $(kg/cm^2)$	Traz. max. $(kg/cm^2)$
Peso struttura	-3.93	-4.01; -4.77	/	/

Tensioni parallele  $\sigma_2$  (Tabella 5)

	Analisi	Analisi	Analisi	Analisi
	membranale	PRO_SAP	membranale	PRO_SAP
	Compr. max.	Compr. max	Traz. max.	Traz. max.
	$(kg/cm^2)$	$(kg/cm^2)$	$(kg/cm^2)$	$(kg/cm^2)$
Peso struttura	-1.38	-2.44	2.91	2.54

## Conclusioni

L'obiettivo della mia tesi è stata l'analisi statica della cupola della Basilica di Superga considerando il peso proprio della struttura. Lo scopo dell'analisi statica è di studiare a fondo l'edificio nella sua componente strutturale al fine di pianificare e valutare al meglio futuri restauri e garantire un'ottimale conservazione del bene architettonico.

Un'analisi statica deve essere preceduta da una approfondita conoscenza storica e architettonica del manufatto edilizio. Nella prima parte di questo mio lavoro l'analisi storica ha permesso di conoscere non solo la conformazione dell'edificio, ma anche la genesi del suo progetto: dalle prime idee di Filippo Juvarra nel periodo romano all'applicazione pratica nella commissione per l'edificazione della Basilica di Superga, con le variazioni in corso d'opera.

In seguito all'analisi storica e architettonica completa dell'edificio e a un approfondimento dei calcoli impiegati nel Settecento, lo studio ha approfondito la conoscenza della cupola della basilica nella sua architettura e struttura. In questo processo di studio, propedeutico alla successiva fase di analisi statica, ha svolto un ruolo di grande importanza il modello 3D da me costruito in Auto Cad il quale ha permesso di cogliere gli aspetti di funzionamento strutturale della cupola.

La costruzione di questo primo modello in AutoCad è stata tappa fondamentale per la realizzazione del modello nel programma di calcolo strutturale PRO\_SAP.
La fase successiva è stata costituita da due fasi distinte:

- applicazione a questo specifico oggetto di studio della teoria membranale della scienza delle costruzioni: il calcolo teorico ha permesso di ottenere i valori delle sollecitazioni agenti nella calotta e di studiarne il comportamento soggetta a peso proprio;

 interrogazione mirata con gli strumenti vettoriali del modello costruito in PRO\_SAP per valutarne lo stato tensionale.

I risultati ottenuti tramite i due metodi sono stati confrontati in apposite tabelle e si è riscontrato un soddisfacente accordo nei valori. I due metodi impiegati simultaneamente permettono di studiare e approfondire il comportamento strutturale della cupola e di costituire un'ottima verifica dei risultati tensionali.

Il metodo impiegato permette di studiare a fondo gli aspetti strutturali dell'edificio tramite l'utilizzo sinergico di una base teorica e l'analisi numerica nel programma di calcolo strutturale PRO\_SAP.

Questo mio lavoro di tesi ha avuto l'obiettivo di applicare il metodo di analisi statica teorico e con il software di calcolo al caso specifico della cupola della Basilica di Superga, e può costituire un contributo per futuri studi nel campo dell'analisi, del restauro e della conservazione dei beni architettonici.

## **Bibliografia**

Alpuente M., Madrid 360°, Priuli & Verlucca Editori, Torino 2006.

Borri C., Betti M., Bartoli G. (2010), "La statica della Cupola di Santa Maria del Fiore. Il contributo di Andrea Chiarugi", Galileo, n.195, pp.6-11.

Benvenuto E., *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Edizioni di storia e letteratura, Roma 2010.

Bonaccorso G. e Moschini F. (a cura di), *Carlo Fontana 1638-1714*. *Celebrato Architetto. Atti del convegno internazionale*, Roma 22-24 ottobre 2014.

Carboneri N., *La reale chiesa di Superga di Filippo Juvarra*, Edizioni Ages Arti Grafiche, Torino 1979.

Carusi M. (2010), "La struttura portante della cupola di Della Porta: 1588-2010", Annali di architettura, n.22, pp.125-150.

Comoli Mandracci V. e Griseri A. (a cura di), *Filippo Juvarra. Architetto delle capitali da Torino a Madrid 1714-1736*, Fabbri Editori, Torino 1995.

Dunn W., *The Principles of Dome Construction*, in *The Architectural review*, London, Vol. 23 (134), 1908, p. 63.

Gärtner P. J., Filippo Brunelleschi. 1377-1446, Könemann, Köln 1998.

Gritella G., Juvarra. L'architettura, I, Franco Cosimo Panini, 1993.

Liuzzi M., *Juvarra e l'architettura del regno*, Castelnuovo E. (a cura di), in *La reggia di Venaria e i Savoia. Arte, magnificenza e storia di una corte europea*, Torino, Umberto Allemandi & C., 2008, pp. 190-191.

Lotz W., Architettura in Italia. 1500-1600, Rizzoli, Milano 1997.

Natali N., *Il cielo abita a Firenze*, in *Luoghi dell'infinito*, 251 (2020), pp. 63-66.

Olivito R., *Statica e stabilità delle costruzioni murarie*, Pitagora Editrice, Bologna 2009.

Severo D. (a cura di), Filippo Juvarra, Zanichelli Editore, Bologna 1996.

Wittkower R., Arte e architettura in Italia. 1600-1750, Einaudi, Torino 1993.

## Sitografia

Chiarugi A., Fanelli M., Giuseppetti G. (1983), "Analysis of a Brunelleschi-type dome including thermal loads", Group: Session 3: Mathematical and physical models, 30-10-2019, www.e-periodica.ch, http://doi.org/10.5169/seals-35847 (ultimo accesso: 11-11-2021), file PDF.

Kulishenko E. (2015), "La cupola di San Pietro. Restauro del XVIII secolo", www.academia.edu, https://www.academia.edu/28814136/LA\_CUPOLA\_DI\_SAN\_PIETRO.\_ RESTAURO\_DEL\_XVIII\_SECOLO (ultimo accesso: 21-04-2021), file PDF.

Oechslin W., "Un Tempio di Mosè. I disegni offerti da B. A. Vittone all'Accademia di San Luca nel 1733", www.bollettinodarte.beniculturali.it, http://www.bollettinodarte.beniculturali.it/opencms/multimedia/BollettinoArtelt/documents/ 1508334582711 06 Oechslin 167.pdf (ultimo accesso: 21-04-2021), file PDF.

*"Basilica di Superga e convento"*, www.museotorino.it, https://www.museotorino.it/view/s/7b73067f33c14621a60614484ce17d09 (ultimo accesso: 31-05-2021). http://www.annesophiegeay.com/sorbonne-university-paris (ultimo accesso: 12-11-2021).

https://www.vatican.va/various/basiliche/san\_pietro/it/cupola/ cenni\_storici.htm#thumb (ultimo accesso: 12-11-2021).