

# POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



**Politecnico  
di Torino**

Tesi di Laurea Magistrale

## Dinamica Non Lineare di Giunti Dovetail

Relatore

Prof. Daniele BOTTO

Candidato

Federica CUCCOVILLO

Anno Accademico 2020/2021



*Alla mia famiglia,  
Alla procrastinazione,  
A tutti coloro che iniziano male  
e finiscono peggio*

# Sommario

I fenomeni coinvolti nel funzionamento ad alti regimi dei motori aeronautici producono uno stato tensionale complesso e largamente dipendente dallo stato di vibrazione del sistema. Al fine di preservare l'integrità strutturale dei componenti rotorici, l'industria aeronautica ha sviluppato numerose soluzioni deputate allo smorzamento delle vibrazioni che si generano in condizioni operative. L'introduzione di questi componenti porta con sé la creazione di forze di contatto altamente non lineari che necessitano di soluzioni e metodi ad-hoc al fine di estrapolarne i parametri di rigidità e attrito al contatto necessari al dimensionamento a fatica. Il presente lavoro parte da un consolidamento dello stato dell'arte, ne formalizza i fenomeni coinvolti mediante un approccio *bottom-up* fino a formulare un modello *time-dependent* non lineare che simuli il comportamento delle superfici di contatto di un giunto di tipo *dovetail*. Gli output ottenuti, in termini di spostamento e velocità del nodo target, sono stati confrontati con i risultati ottenuti dalla campagna sperimentale confermandone la consistenza.

# Abstract

*The phenomena involved in the turbomachines that operate in high frequency working conditions produce a very complex stress state due to the system's vibrational conditions mainly. In order to preserve the structural safety of the rotor's components, aerospace industry has developed several solutions focused on dampers to disable the negative stress-states induced by vibrations . The introduction of these components introduce non-linear behaviours due to contact forces that born on contact interfaces. Solving these non linearity requires solutions and ad hoc methods to identify contact parameters in terms of tangential and normal stiffness and friction coefficient needed to develop solution techniques suitable for fatigue issues. Current work starts from the consolidation of the state of the art to the development of a non-linear contact model enable to describe the contact surfaces behaviours involved in dovetail joints. The outcomes obtained, as displacement and velocity, have been compared with experimental ones to validate the solutions performed.*



# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	VIII
<b>Elenco delle figure</b>	IX
<b>Acronimi</b>	XIII
<b>1 Teoria del Contatto</b>	<b>3</b>
1.1 Modelli di Contatto . . . . .	3
1.1.1 Modello di contatto 1D con carico normale costante . . . . .	3
1.1.2 Modello di contatto 2D con carico normale variabile . . . . .	4
1.2 Integrazione numerica . . . . .	5
<b>2 Modelli Numerici</b>	<b>7</b>
2.1 Modello numerico con 2 gradi di libertà . . . . .	7
2.1.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo . . . . .	8
2.1.2 Risultati . . . . .	12
2.2 Modello Numerico con 4 gradi di libertà e carico normale costante .	33
2.2.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo . . . . .	34
2.2.2 Definizione Condizioni Iniziali . . . . .	38
2.2.3 Risultati . . . . .	39
2.3 Modello numerico con 4 gradi di libertà e una interfaccia di contatto	56
2.3.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo . . . . .	56
2.3.2 Risultati . . . . .	60
2.4 Modello numerico con 10 gradi di libertà e 4 interfacce di contatto .	68
2.4.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo . . . . .	68
2.4.2 Risultati . . . . .	71
2.5 Modello Numerico M-Dofs . . . . .	96
2.5.1 Modello agli Elementi Finiti . . . . .	96
2.5.2 Riduzione Craig-Bampton . . . . .	96
2.5.3 Assemblaggio Superelementi . . . . .	99

2.5.4	Analisi Modale di un sistema con M-Dofs con rigidezza infinita o giunto fisso . . . . .	100
<b>3</b>	<b>Ricerca dei parametri di contatto</b>	<b>106</b>
3.1	DTI del M-dof in presenza di contatto . . . . .	106
3.1.1	Analisi del primo modo flessionale . . . . .	107
3.1.2	Analisi del secondo modo flessionale . . . . .	110
3.2	Confronto con i dati sperimentali . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Algoritmi</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>

# Elenco delle tabelle

2.1	Parametri del sistema a 2 gradi di libertà . . . . .	12
2.2	Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e spettrale . . .	13
2.3	Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e spettrale . . .	24
2.4	Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e spettrale . . .	32
2.5	Parametri del sistema a 4 gradi di libertà . . . . .	39
2.6	Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e grafica . . . . .	44
2.7	Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e grafica . . . . .	52
2.8	Parametri del sistema a 4 gradi di libertà . . . . .	60
2.9	Parametri globali del sistema . . . . .	71

# Elenco delle figure

1	Architetture dell'interfaccia di contatto [3] . . . . .	1
1.1	Modello di contatto con carico normale costante . . . . .	4
1.2	Modello di contatto con carico normale variabile . . . . .	5
2.1	Modello 2Dofs con carico normale costante . . . . .	7
2.2	Diagramma di corpo libero per massa 1 . . . . .	8
2.3	Diagramma di corpo libero per massa 1 . . . . .	9
2.4	Time History dello spostamento tangenziale relativo del nodo di contatto . . . . .	13
2.5	Time History della forza di contatto . . . . .	14
2.6	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_1$ . .	15
2.7	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_2$ . .	16
2.8	Time History dello spostamento del nodo di contatto . . . . .	17
2.9	Storia temporale degli spostamenti . . . . .	18
2.10	Time History dello strisciamento relativo $w$ . . . . .	19
2.11	Time History della forza di contatto . . . . .	20
2.12	Ciclo di isteresi . . . . .	21
2.13	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_1$ . .	22
2.14	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_2$ . .	23
2.15	Storia temporale degli spostamenti . . . . .	24
2.16	Time History dello spostamento tangenziale relativo del nodo di contatto . . . . .	26
2.17	Time History dello spostamento del nodo di contatto . . . . .	27
2.18	Time History della forza di contatto . . . . .	28
2.19	Ciclo di isteresi . . . . .	29
2.20	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_1$ . .	30
2.21	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_2$ . .	31
2.22	Modello 4Dofs con carico normale costante . . . . .	33
2.23	Diagramma di corpo libero per massa 1 . . . . .	34
2.24	Diagramma di corpo libero per massa 2 . . . . .	35
2.25	Diagramma di corpo libero per massa 3 . . . . .	35

2.26	Diagramma di corpo libero per massa 4 . . . . .	36
2.27	Time History della velocità e dello spostamento per la massa 1 . . .	40
2.28	Time History della velocità e dello spostamento per la massa 4 . . .	41
2.29	Time History della velocità e dello spostamento per la massa 2 . . .	42
2.30	Time History della velocità e dello spostamento per la massa 3 . . .	43
2.31	Time History della forza di contatto . . . . .	44
2.32	Time History dello spostamento del nodo di contatto . . . . .	45
2.33	Time History dello spostamento tangenziale relativo al contatto . .	46
2.34	Ciclo di isteresi . . . . .	47
2.35	Time History per ogni spostamento . . . . .	48
2.36	Time History per ogni spostamento . . . . .	49
2.37	Time History per ogni spostamento . . . . .	50
2.38	Time History per ogni spostamento . . . . .	51
2.39	Time History della forza di contatto . . . . .	52
2.40	Time History dello spostamento del nodo di contatto . . . . .	53
2.41	Time History dello spostamento tangenziale relativo al contatto . .	54
2.42	Ciclo di isteresi . . . . .	55
2.43	Modello 4Dofs con carico normale variabile . . . . .	56
2.44	Diagramma di corpo libero per massa 1 . . . . .	57
2.45	Diagramma di corpo libero per massa 2 . . . . .	57
2.46	Diagramma di corpo libero per massa 3 . . . . .	58
2.47	Diagramma di corpo libero per massa 4 . . . . .	58
2.48	Zoom della zona di contatto . . . . .	59
2.49	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_1$ . .	61
2.50	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_2$ . .	62
2.51	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_3$ . .	63
2.52	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_4$ . .	64
2.53	Forza di contatto tangenziale . . . . .	65
2.54	Forza di contatto normale . . . . .	66
2.55	Ciclo di isteresi . . . . .	67
2.56	Modello 10 Dofs con 4 interfacce di contatto . . . . .	68
2.57	Diagramma di corpo libero del sistema . . . . .	69
2.58	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_3$ . .	72
2.59	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_2$ . .	73
2.60	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_4$ . .	74
2.61	Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa $m_1$	75
2.62	Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa $m_1$ .	76
2.63	Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa $m_5$	77
2.64	Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa $m_5$ .	78
2.65	Time History degli spostamenti relativi dei nodi di contatto nel sistema di riferimento locale . . . . .	79

2.66	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 1 . . . . .	80
2.67	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 2 . . . . .	81
2.68	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 3 . . . . .	82
2.69	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 4 . . . . .	83
2.70	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_3$ . .	84
2.71	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_2$ . .	85
2.72	Time History della velocità e dello spostamento per la massa $m_4$ . .	86
2.73	Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa $m_1$	87
2.74	Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa $m_1$ .	88
2.75	Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa $m_5$	89
2.76	Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa $m_5$ .	90
2.77	Time History degli spostamenti relativi dei nodi di contatto nel sistema di riferimento locale . . . . .	91
2.78	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 1 . . . . .	92
2.79	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 2 . . . . .	93
2.80	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 3 . . . . .	94
2.81	Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 4 . . . . .	95
2.82	Modello FE Setup Sperimentale . . . . .	97
2.83	Interfaccia di Contatto . . . . .	97
2.84	Matrice di massa globale . . . . .	100
2.85	Matrice di rigidezza globale . . . . .	101
2.86	Matrice di massa globale con giunto fisso . . . . .	102
2.87	Matrice di rigidezza globale con giunto fisso . . . . .	102
2.88	Matrice di massa globale con giunto fisso vincolata . . . . .	103
2.89	Matrice di rigidezza globale con giunto fisso vincolata . . . . .	104
2.90	Confronto andamento numerico e sperimentale per il primo modo flessionale . . . . .	105
2.91	Confronto andamento numerico e sperimentale per il secondo modo flessionale . . . . .	105
3.1	Time-history dello spostamento del nodo target per 1B . . . . .	107
3.2	Time-history della velocità del nodo target per 1B . . . . .	108
3.3	Analisi del segnale filtrato per 1B . . . . .	109
3.4	Time-history dello spostamento del nodo target per 2B . . . . .	110
3.5	Time-history della velocità del nodo target per 2B . . . . .	111
3.6	Analisi del segnale filtrato per 2B . . . . .	112
3.7	Andamento della velocità al variare del loss factor per 1B . . . . .	113
3.8	Zoom sulle ampiezze . . . . .	114
A.1	Flow Chart per calcolo della forza di contatto . . . . .	119



# Acronimi

**HCF**

High Cycle Fatigue

**FEM**

Finite Element Method

**dof**

Degree of Freedom

**DTI**

Direct Time Integration

**ODE**

Ordinary Differential Equation

**1B**

First Bending Mode

**2B**

Second Bending Mode

# Introduzione

Il funzionamento ad alti regimi delle turbomacchine determina delle condizioni di stress meccanico decisamente elevate e complesse, anche in virtù delle numerose componenti che costituiscono le interfacce rotoriche-statoriche delle turbine aeronautiche, [1] propone un'ampio articolo di review che ne sviscera i numerosi aspetti. Oltre alla verifica della struttura soggetta a sollecitazioni meccaniche, uno dei campi di maggior interesse è costituito dalla progettazione a fatica ad numero di cicli (HCF) dei giunti pala-disco, la letteratura in tal senso è ampia e se ne trova un esempio in [2].

La rotazione del corpo rotorico determina la creazione di forze centrifughe tendendo a mettere in vibrazione la pala, per poter ridurre gli stress che si generano, in fase progettuale si inseriscono degli smorzatori al fine di preservare l'integrità strutturale dei componenti. Tuttavia, l'introduzione di questi elementi, che possono essere di differenti tipi, tra i quali: giunti disco-pala, *shrouds*, *underplatform dampers* e *ring dampers*; determina la creazione di forze di contatto che si oppongono al moto indotto dalla vibrazione.



**Figura 1:** Architetture dell'interfaccia di contatto [3]

La dissipazione energetica cercata è ad opera di forze di attrito che, ai fini della progettazione, devono essere quantificabili. Ad oggi, i codici commerciali a disposizione dei progettisti, basati principalmente sul FEM, ne consentono la risoluzione a scapito del costo computazionale, infatti la loro natura intrinsecamente non lineare richiede soluzioni di tipo time-domain particolarmente onerose. Sulla base di quanto detto, risulta ovvio che la fase di progettazione preliminare non può sobbarcarsi di

un tale costo preferendo modelli semplificati a parametri concentrati che formalizzino i fenomeni coinvolti nelle interfacce disco-pala. Il presente lavoro si inserisce in questo frangente elaborando dapprima un'attenta descrizione e implementazione di modelli di tipo time-domain, sviluppando algoritmi d'integrazione temporale di sistemi non lineari, salvo poi confluire il know-how sviluppato nell'elaborazione del modello complessivo. I risultati tendono a dimostrare la solidità del metodo mediante confronto con prove sperimentali precedenti ed estemporanee.

# Capitolo 1

## Teoria del Contatto

La complessità intrinseca del tema sviluppato lungo tutto il lavoro di tesi poggia su basi teoriche ben consolidate, le quali si differenziano sostanzialmente nell'elaborazione del modello di contatto primitivo e nelle tecniche di integrazione numerica.

### 1.1 Modelli di Contatto

Il presente capitolo si pone l'obiettivo di analizzare i modelli di contatto utilizzati all'interno di questo lavoro di tesi, differenziandoli in funzione del numero di gradi di libertà del nodo di contatto. Si opererà un'ulteriore discriminazione relativa alla natura della forza normale sviluppata al contatto, che nel presente elaborato potrà essere costante oppure variabile in funzione dello spostamento relativo in direzione normale tra i nodi delle superfici di contatto.

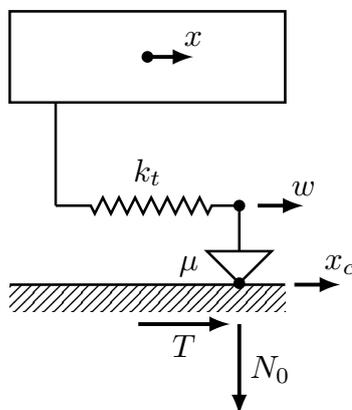
#### 1.1.1 Modello di contatto 1D con carico normale costante

L'analisi dei contatti mira a risolvere le problematiche inerenti lo stato di deformazione locale dovuto al contatto stesso tra le superfici. Per poter predire il comportamento delle superfici di contatto in presenza di forze di attrito, in prima analisi è possibile implementare un modello semplificato unidimensionale, riportato in Fig.1.1, che inserisce una rigidità di contatto  $k_t$ , come descritto in [4].

Lo stato del contatto, slittamento o adesione, qualifica la formulazione della forza tangenziale  $T$  che si sviluppa al contatto. In particolare, in caso di adesione, la forza tangenziale è di tipo elastico; alternativamente, in una situazione di slittamento, la forza tangenziale in modulo è pari al limite di Coulomb, mentre il suo verso è funzione della velocità di scorrimento [3],[5].

$$T(t) = \begin{cases} k_t (x(t) - w(t)) & \text{stick} \\ \mu N_0 \operatorname{sgn}(\dot{w}_c(t)) & \text{slip} \end{cases} \quad (1.1)$$

Il sistema di equazioni 1.1 riporta alternativamente la formulazione analitica della forza tangenziale di contatto quando il sistema si trova in slip o in stick. Nel caso dello stick, la forza  $T$  è funzione dello spostamento relativo tra lo spostamento del corpo e lo spostamento relativo tra il nodo di contatto e il ground, moltiplicati per la rigidità tangenziale di contatto  $k_t$ ; invece, quando il sistema è in slittamento, la forza tangenziale si calcola come la forza di attrito statico,  $\mu N_0$ , e la funzione segno della velocità relativa tra il nodo di contatto e il ground.



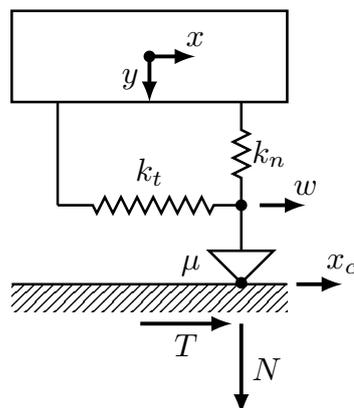
**Figura 1.1:** Modello di contatto con carico normale costante

### 1.1.2 Modello di contatto 2D con carico normale variabile

Nel caso in esame, per simulare la forza normale al contatto, dipendente dallo spostamento relativo normale delle superfici di contatto, si inserisce una rigidità normale  $k_n$ , come riportato in Fig.1.2.

Anche in questo caso, la forza tangenziale è funzione dello stato del contatto, ed è ottenibile come in eq.1.2.

$$T(t) = \begin{cases} k_t(x(t) - w(t)) & \text{stick} \\ \mu N(t) \operatorname{sgn}(\dot{w}(t)) & \text{slip} \\ 0 & \text{lift off} \end{cases} \quad (1.2)$$



**Figura 1.2:** Modello di contatto con carico normale variabile

In cui  $N(t)$  è:

$$N(t) = \begin{cases} N_0 + k_n y(t) & \text{se } y(t) \geq -N_0/k_n \\ 0 & \text{se } y(t) < -N_0/k_n \end{cases} \quad (1.3)$$

La forza normale, come calcolato in 1.3 varia tra un valore massimo pari alla somma tra la forza di precarico normale, se presente, e la forza elastica sviluppata dal contatto in direzione normale, e 0; quest'ultimo valore indica la condizione detta di *lift-off*, ovvero la separazione tra i corpi. Le formulazioni fin qui proposte costituiscono la base per la cinematica del contatto e sono state implementate in numerose applicazioni scientifiche, un compendio non esaustivo è disponibile in [6], [7] e [8].

## 1.2 Integrazione numerica

I parametri che caratterizzano al cinematica e la dinamica dei contatti, ai fini della progettazione strutturale a fatica, sono ottenibili mediante tecniche di integrazione numerica nel tempo. All'interno del presente lavoro di tesi è stato sviluppato e implementato un approccio d'integrazione nello stato degli spazi. Questa tecnica di integrazione trova un estensivo uso in letteratura, sebbene il problema non sia totalmente specializzato [9] e [10].

L'approccio *state-space* consente di non inficiare particolarmente le equazioni di governo ad eccezione della matrice della dinamica del sistema, che assuma la forma di:

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La DTI di un sistema caratterizzato da una forte non linearità, come quello presentato in questo lavoro, rende la simulazione particolarmente gravosa dal punto di vista computazionale [11]. Tuttavia, l'accuratezza dei risultati rende questa tecnica quasi indispensabile per un'accurata validazione dei modelli tramite raffronto con prove sperimentali.

## Capitolo 2

# Modelli Numerici

L'analisi dinamica di un giunto di tipo dovetail può essere schematizzata seguendo molteplici rappresentazioni, in questo elaborato si è seguito un approccio di tipo *bottom-up* in cui si sono aggiunti via via ulteriori livelli di complessità.

In prima istanza, al fine di verificare la correttezza del modello di contatto in esame, ampiamente descritto in Cap. 1, il giunto è stato ridotto a un sistema a parametri concentrati a due gradi di libertà e successivamente a quattro gradi di libertà.

### 2.1 Modello numerico con 2 gradi di libertà

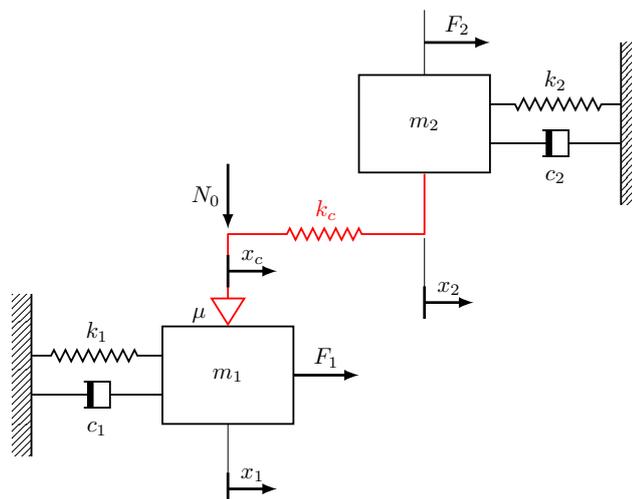


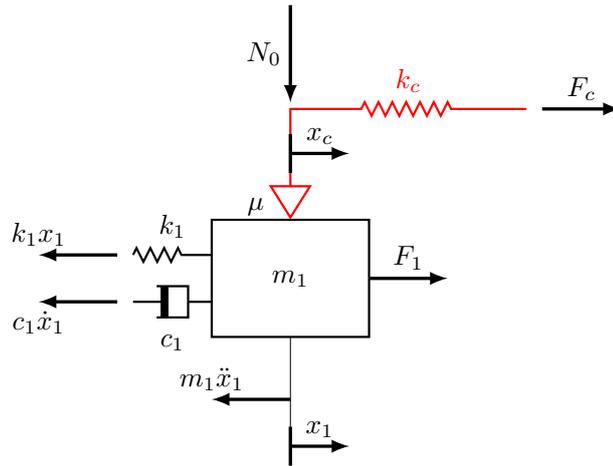
Figura 2.1: Modello 2Dofs con carico normale costante

Come si può notare in Fig. 2.1, il contatto è rappresentato mediante un elemento di Jenkins, in rosso nell'immagine, costituito da un corpo elastico di rigidezza  $k_c$ . Sul contatto agisce una forza  $N_0$  di precarico ed è sottoposto ad uno spostamento  $x_c$  che risente dell'attrito tra le superfici di contatto, riassunto nel coefficiente di attrito  $\mu$ .

La formulazione analitica del contatto implementata in questa sezione, fa riferimento a quanto riportato in Eq. 1.1. Per completezza la si riporta anche nel seguito.

$$T(t) = \begin{cases} k_t (x_2(t) - x_c(t)) & \text{stick} \\ \mu N_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_c(t)) & \text{slip} \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.1.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo

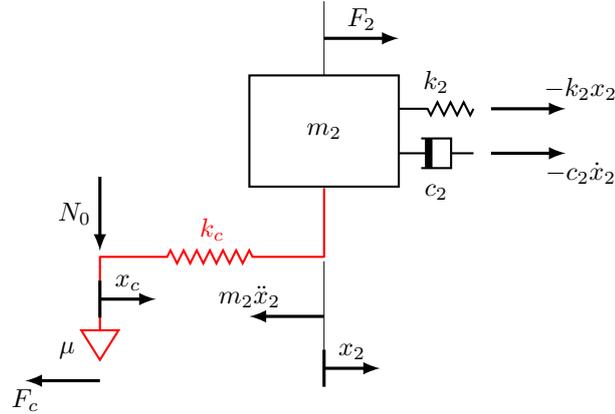


**Figura 2.2:** Diagramma di corpo libero per massa 1

L'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_1$ , rappresentato in fig:2.2, in direzione x restituisce la seguente equazione:

$$-m_1\ddot{x}_1 - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + F_c(x, \dot{x}) + F_1 = 0 \quad (2.2)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - F_c(x, \dot{x}) - F_1 = 0 \quad (2.3)$$



**Figura 2.3:** Diagramma di corpo libero per massa 1

Analogamente, in Fig. 2.3 è riportato l'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_2$  lungo  $x$ , l'equazione risultante è la seguente:

$$-m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 - F_c(x, \dot{x}) + F_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + F_c(x, \dot{x}) - F_2 = 0 \quad (2.5)$$

Si ottiene quindi il sistema di equazioni completo:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - F_c(x, \dot{x}) - F_1 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + F_c(x, \dot{x}) - F_2 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F_c(x, \dot{x}) \\ F_c(x, \dot{x}) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

In forma compatta:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} + \{F_c(x, \dot{x})\} - \{F\} = \{0\} \quad (2.8)$$

L'analisi in esame ha lo scopo di calcolare l'evoluzione temporale del nodo di contatto al fine di tarare il modello ed analizzare il comportamento dell'intero

sistema quando sottoposto ad un carico isteretico.

Il sistema di equazione differenziali di secondo ordine 2.8 viene risolto utilizzando il solutore standard di MATLAB per le equazioni differenziali ordinarie (ODE), in particolare la funzione ode45 che implementa il metodo Runge-Kutta con un passo temporale variabile.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.9)$$

L'equazione 2.9, rappresenta il prototipo di soluzione per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, in cui  $t$  rappresenta la variabile indipendente,  $x$  è il vettore delle variabili dipendenti e  $f(t, x)$  è una funzione di  $t$  e  $x$ . Il problema è definito quando è nota la dipendenza della funzione  $f$  da  $t$  e  $x$  e le condizioni iniziali,  $x = x_0$  al tempo  $t_0$  sono assegnate.

Il sistema di equazioni 2.8, in cui la dipendenza dal tempo non è esplicitata, per poter essere riportato all'eq. 2.9 necessita di un'ulteriore manipolazione. Infatti, è necessario riscrivere il sistema come un sistema del primo ordine, diminuendone quindi il grado di complessità ma aumentando il numero di equazioni.

A tale scopo, è necessario imporre le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Il sistema di equazione può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = (-c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + F_c(x, \dot{x}) + F_1)m_1^{-1} \\ \ddot{x}_2 = (-c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 - F_c(x, \dot{x}) + F_2)m_2^{-1} \\ \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Di conseguenza, il problema è definito come segue:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = (-c_1v_1 - k_1x_1 + F_c(x, \dot{x}) + F_1)m_1^{-1} \\ \dot{v}_2 = (-c_2v_2 - k_2x_2 - F_c(x, \dot{x}) + F_2)m_2^{-1} \\ \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

In forma matriciale diventa:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left( \left[ \begin{array}{cc|cc} -c_1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & -k_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F_c(x, \dot{x}) \\ F_c(x, \dot{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left[ \begin{array}{cc|cc} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^{-1} \quad (2.13)$$

E' possibile riscriverlo in forma compatta:

$$\{\dot{z}\} = ([\hat{A}] \{z\} - \{\hat{F}_c\} + \{\hat{F}\}) [\hat{M}]^{-1} \quad (2.14)$$

dove

$$\{\dot{z}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{v}\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix}, \quad \{z\} = \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{F}_c\} = \begin{Bmatrix} \{F_c\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{F}\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$[\hat{A}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} -[C] & & -[K] & \\ \hline [I] & & & [0] \end{array} \right], \quad [\hat{M}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} [M] & & [0] & \\ \hline [0] & & [0] & \end{array} \right]$$

Per poter risolvere il sistema di equazioni 2.14 è necessario assegnare la condizione iniziale  $z = z_0$  al tempo  $t_0$ . In particolare  $z_0$  è un vettore costituito dalle condizioni iniziali relative alle velocità e allo spostamento all'istante iniziale per tutti i gradi di libertà del sistema, ordinati come in equazione 2.16:

$$\{z_0\} = \begin{Bmatrix} \{v_0\} \\ \{x_0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}_0\} \\ \{x_0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t_0)\} \\ \{x(t_0)\} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

## 2.1.2 Risultati

In questa sezione sono presenti i risultati relativi alle simulazioni condotte sul sistema a due masse al variare delle condizioni iniziali e dello smorzamento. Il sistema è caratterizzato dai seguenti parametri riportati in tab. 2.1.

Parametri	Valori
$m_1$ [kg]	1
$m_2$ [kg]	1
$k_1$ [N/m]	3.55e04
$k_2$ [N/m]	3.55e04
$c_1$ [N/m/s]	$\emptyset$
$c_2$ [N/m/s]	$\emptyset$
$k_c$ [N/m]	1e4
$\mu$ ( <i>friction coefficient</i> )	0.5
$N_0$ [N]	50
$F_1$ [N]	$\emptyset$
$F_2$ [N]	$\emptyset$

**Tabella 2.1:** Parametri del sistema a 2 gradi di libertà

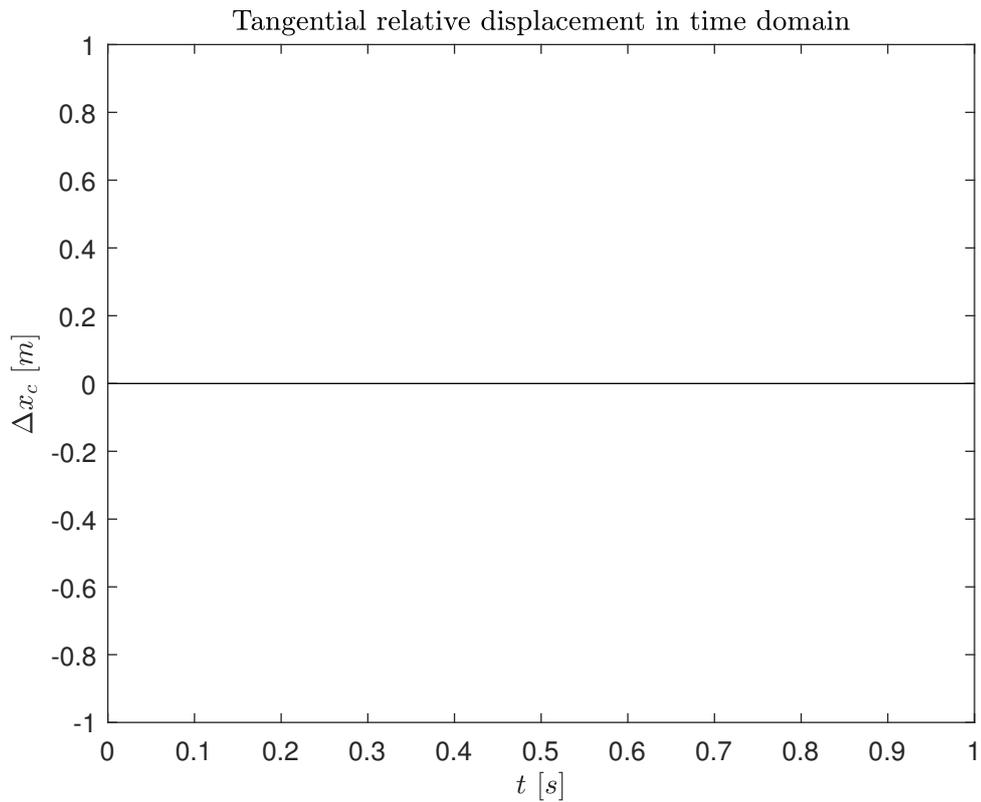
**Caso 1 - Traslazione Rigida** Condizioni iniziali assegnate:

- $\dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_2(t_0) = 0$  m/s,
- $x_1(t_0) = x_2(t_0) = \mu N_0/k_c$  m.

In questo caso si è voluto testare il modello nel caso in cui questo sia sottoposto a una traslazione rigida, ottenuta imponendo uno spostamento uguale in modulo e verso ad entrambe le masse. Il sistema, se sottoposto a queste condizioni, non dovrebbe consentire l'attivazione del contatto.

Come si può notare in Figg. 2.4, 2.5, quando il sistema è soggetto alle condizioni iniziali precedentemente descritte subisce una traslazione rigida e il contatto non si attiva. Infatti, sia lo spostamento relativo  $\Delta x_c$  e di conseguenza la forza di contatto,  $F_c$ , sono pari a zero.

In Figg. 2.6, 2.7 si riportano le time-history di spostamento e velocità dei due corpi. Si nota come, in dipendenza delle condizioni iniziali assegnate, gli spostamenti siano in fase tra di loro.



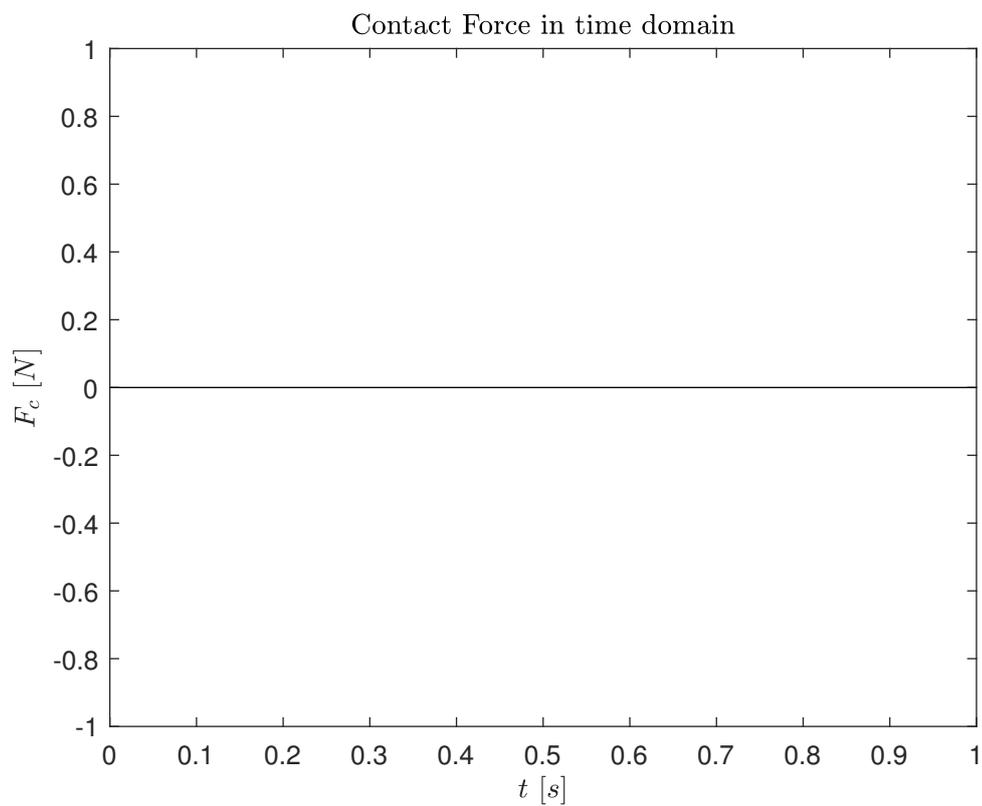
**Figura 2.4:** Time History dello spostamento tangenziale relativo del nodo di contatto

In Fig. 2.9 si nota come gli spostamenti delle due masse e del nodo di contatto siano perfettamente sovrapposti. Ciò implica che, in base alle condizioni iniziali assegnate, l'intero sistema si sposta come un unico corpo rigido.

Al fine di verificare la corrispondenza, in termini di comportamento dinamico, tra analisi modale e time-history ottenuta, si è proceduto ad un confronto basato su un metodo grafico. In sostanza, si sono contati i picchi intercorsi in un secondo per ottenere la frequenza di vibrazione del modello numerico.

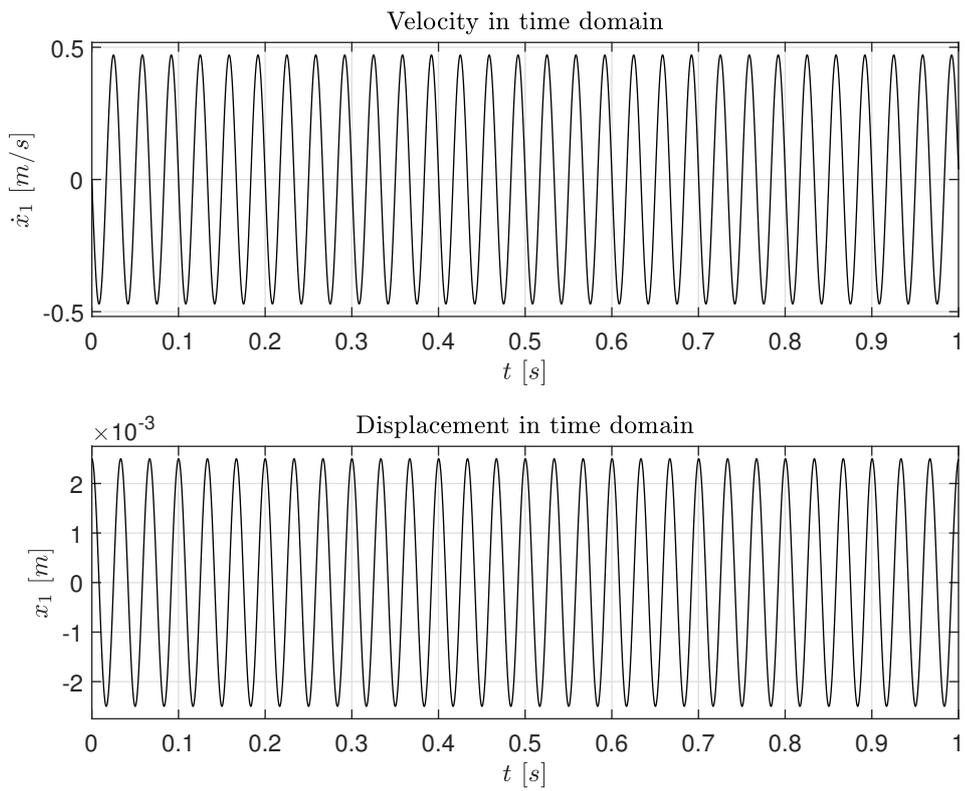
Frequenza	
Analisi Modale	Metodo Grafico
$f_1 = 30$ Hz	$f_1(x_i) = 30$ Hz con $i = 1,2$
$f_2 = 38$ Hz	$f_2(x_i) = \emptyset$ Hz con $i = 1,2$

**Tabella 2.2:** Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e spettrale

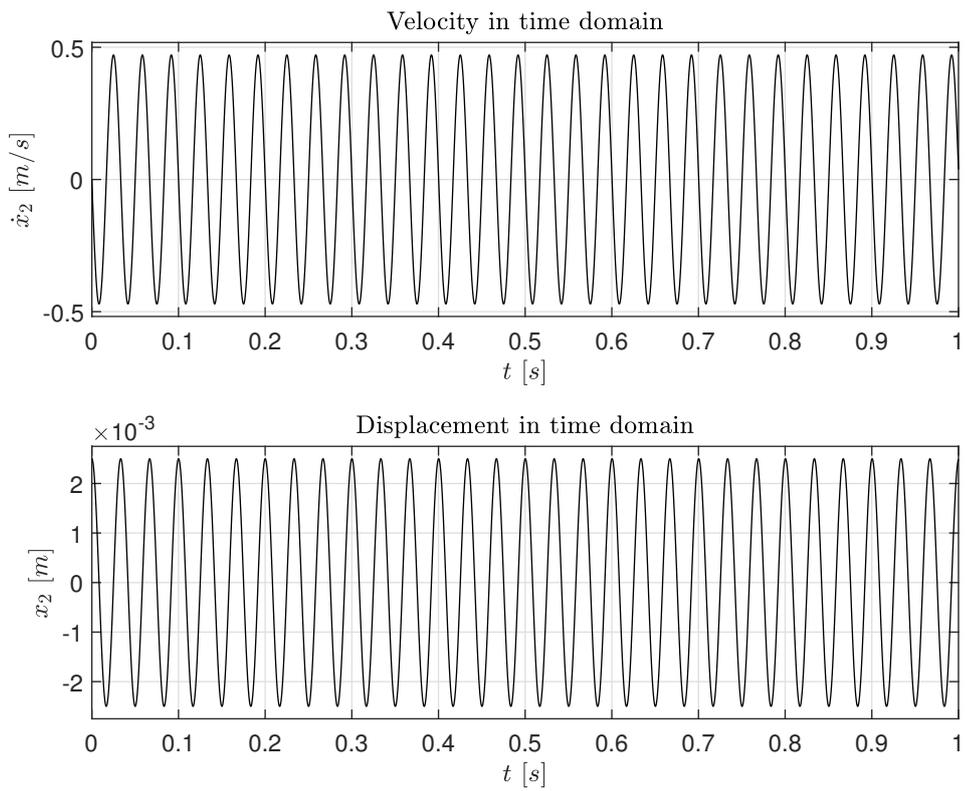


**Figura 2.5:** Time History della forza di contatto

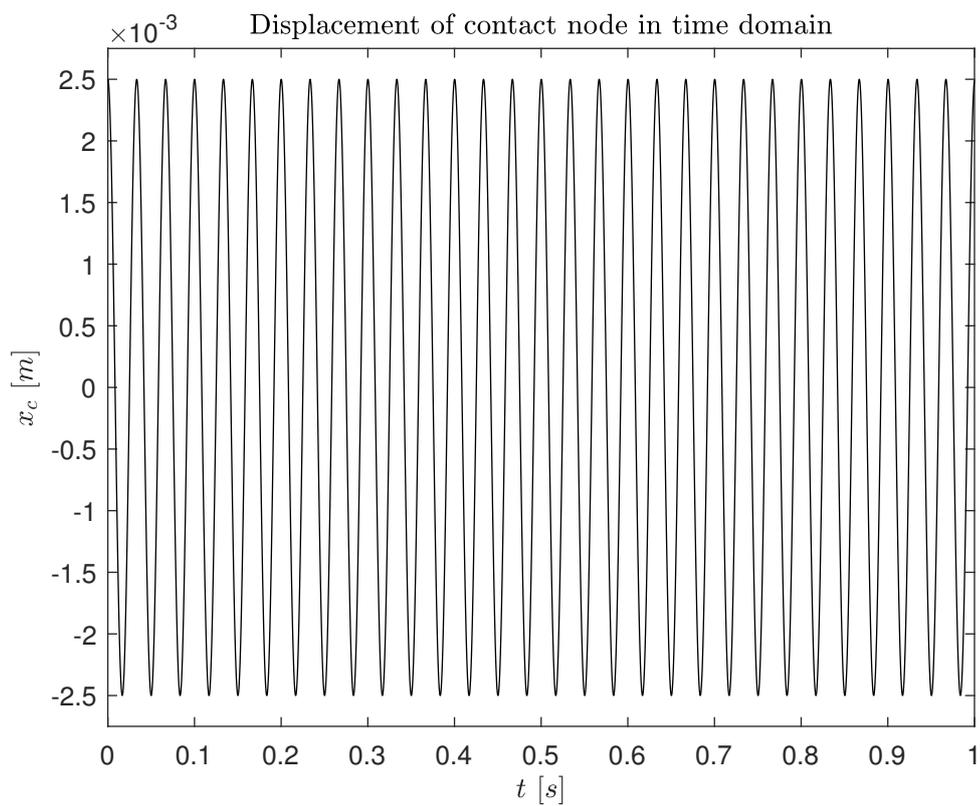
In tab.2.2 sono stati riportati i risultati ottenuti dall'analisi in frequenza del sistema in esame, si nota come l'analisi spettrale non riporti un valore per la seconda frequenza. Questo è imputabile al fatto che il sistema è stato forzato, tramite l'imposizione delle condizioni iniziali, a vibrare alla prima frequenza naturale.



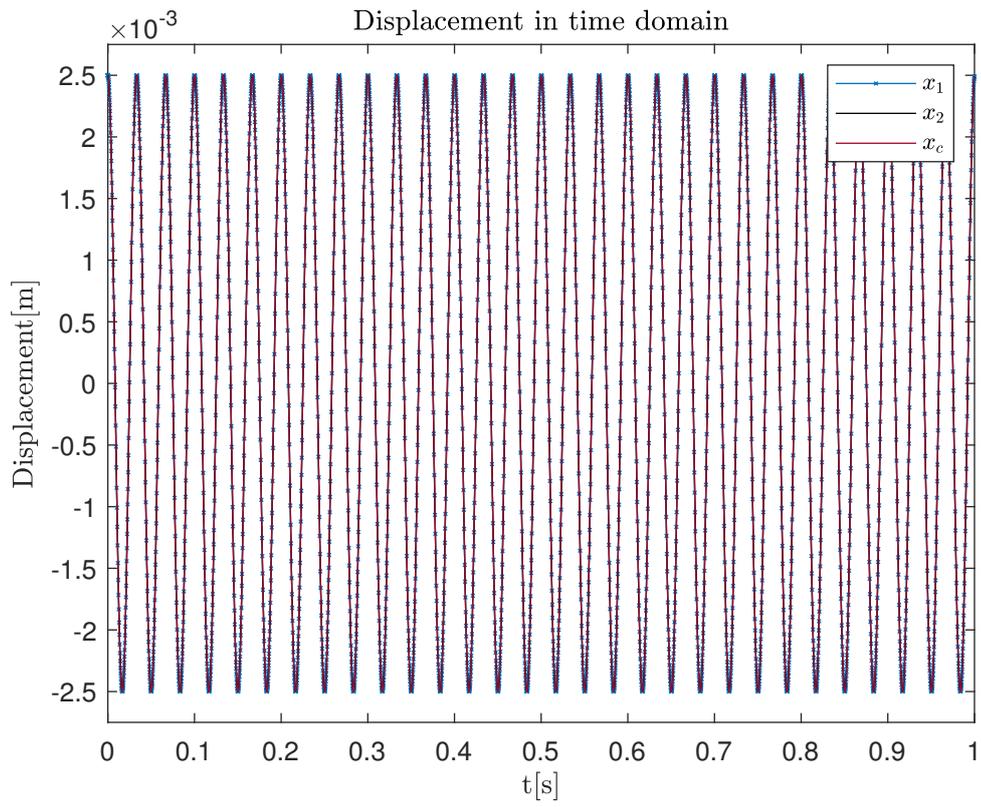
**Figura 2.6:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_1$



**Figura 2.7:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_2$



**Figura 2.8:** Time History dello spostamento del nodo di contatto



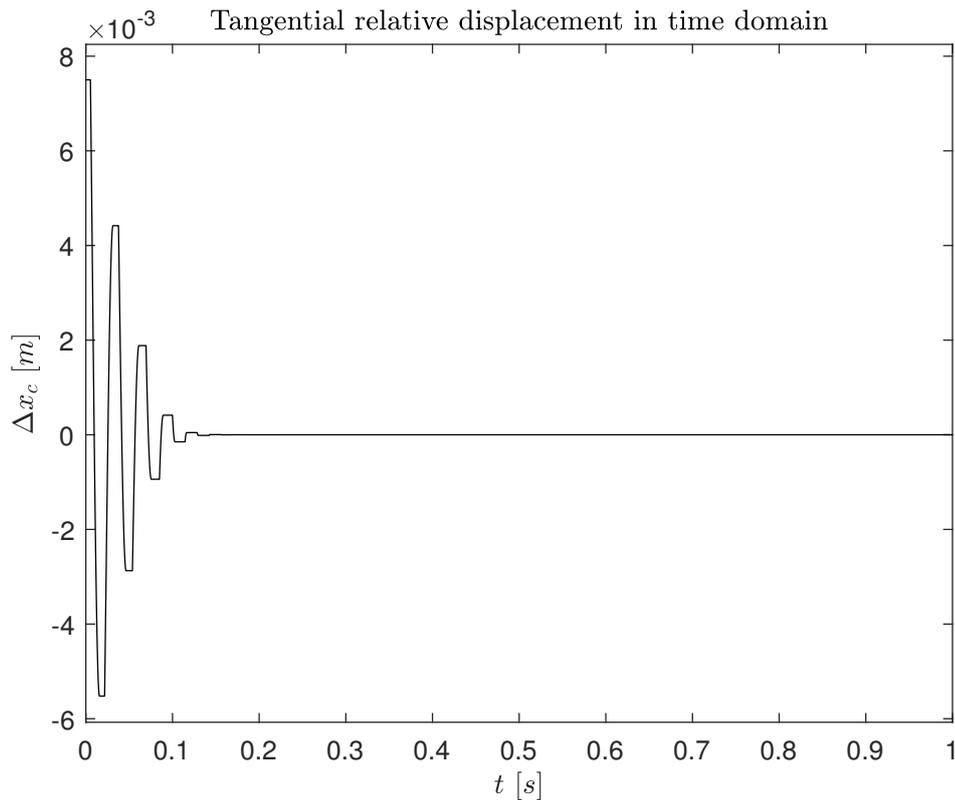
**Figura 2.9:** Storia temporale degli spostamenti

**Caso2a** Le condizioni assegnate in questo paragrafo tendono volutamente a far vibrare il sistema in opposizione di fase, al fine di poter verificare la presenza della seconda frequenza propria. Infatti, nel caso precedente il sistema era stato forzato a muoversi come un unico corpo, con il risultato che la seconda frequenza naturale risultasse non visibile.

Le condizioni iniziali assegnate risultano essere:

- $\dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_2(t_0) = 0$  m/s,
- $x_1(t_0) = -2 \mu N_0/k_c$  m,
- $x_2(t_0) = 2 \mu N_0/k_c$  m.

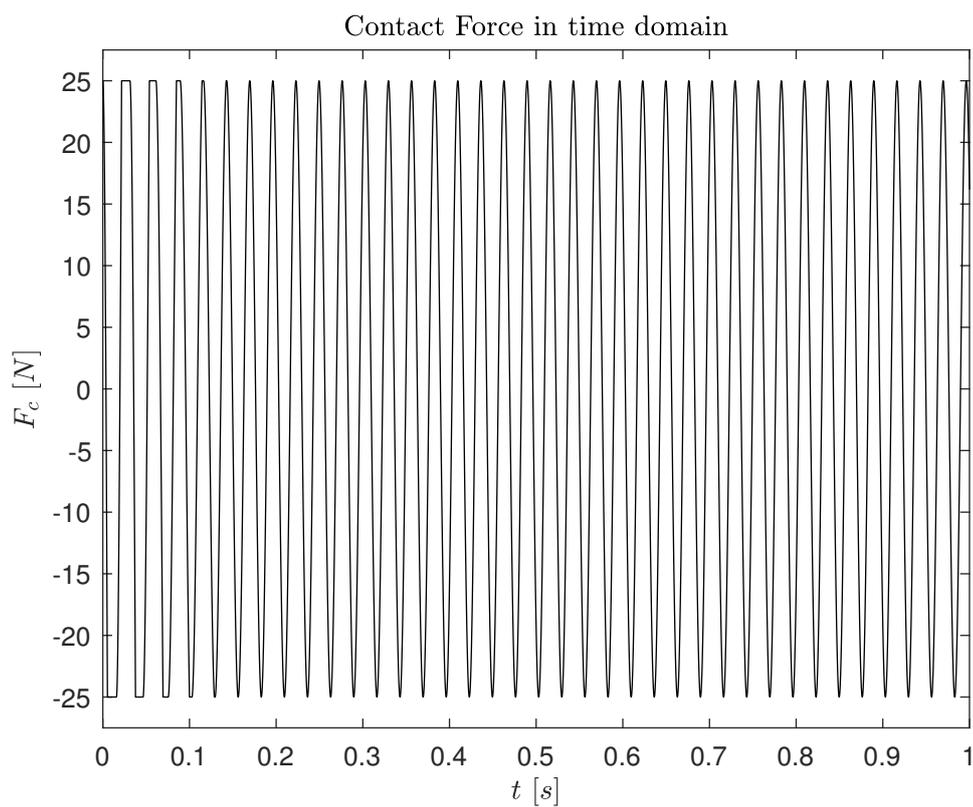
Date le condizioni iniziali imposte, che avevano l'obiettivo di far attivare il contatto, si può notare in Fig. 2.10 come l'andamento dello spostamento tangenziale relativo  $\Delta x_c$  sia caratterizzato da un transitorio iniziale in cui si alternano stati di strisciamento e adesione; in particolare quest'ultimo si manifesta tramite un valore di spostamento costante.



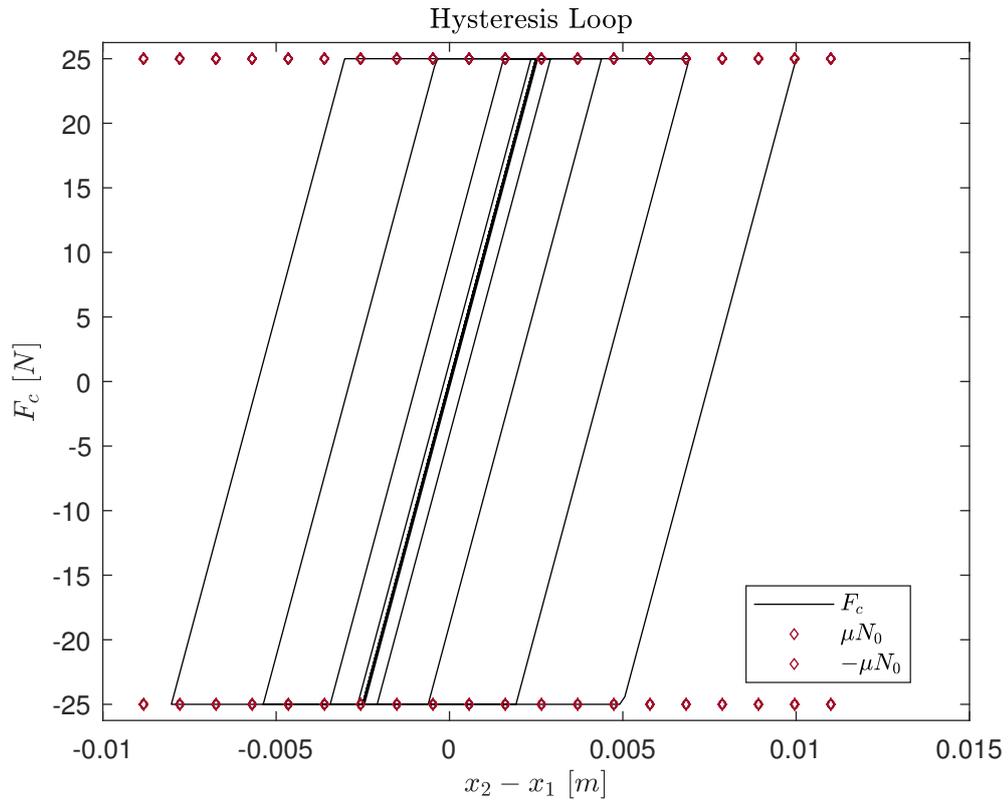
**Figura 2.10:** Time History dello strisciamento relativo w

Analogamente, l'andamento della forza di contatto  $F_c$  si associa allo stato del contatto, infatti quando si ha una situazione di adesione la forza di contatto è armonica; mentre quando il contatto è in uno stato di slip, la forza di contatto risulta essere costante e pari al valore limite di Coulomb in funzione del suo segno.

$$\begin{cases} F_c = \mu N_0 & \text{Positive Slip} \\ F_c = -\mu N_0 & \text{Negative Slip} \end{cases} \quad (2.17)$$

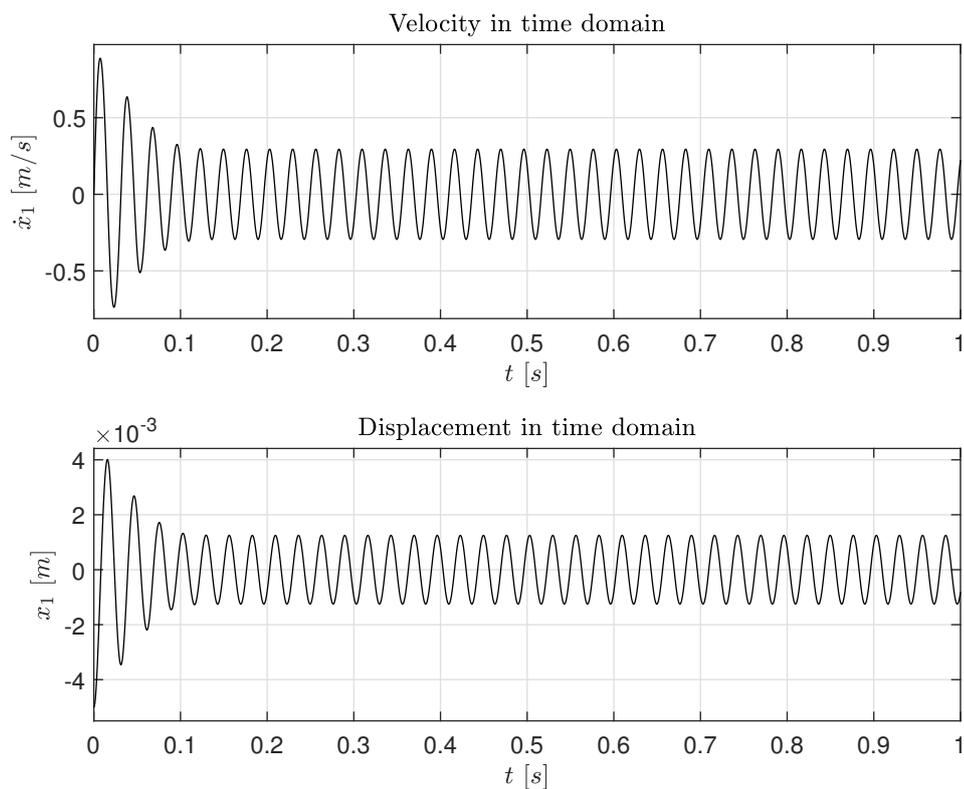


**Figura 2.11:** Time History della forza di contatto



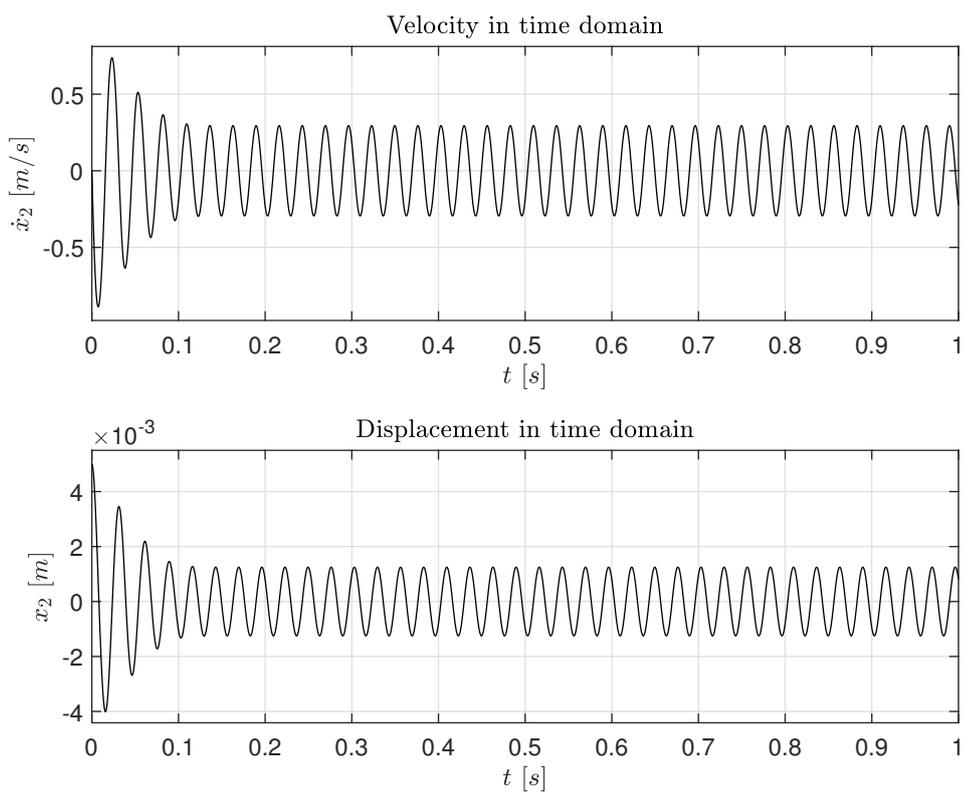
**Figura 2.12:** Ciclo di isteresi

La Fig. 2.12 riporta il diagramma d'isteresi della forza di contatto  $F_c$ , si nota che i tratti costanti indicano una condizione di slip, che può essere positivo o negativo, alternativamente i tratti lineari determinano la condizione di stick. Il diagramma rappresenta quindi un andamento ciclico della forza che è funzione dello spostamento relativo tra le masse, infatti quando questo diminuisce, anche l'ampiezza del ciclo diminuisce a causa della presenza dello smorzamento per attrito. Dal diagramma d'isteresi si può ottenere il valore di rigidità del contatto che è rappresentato dalla pendenza dei tratti rettilinei.

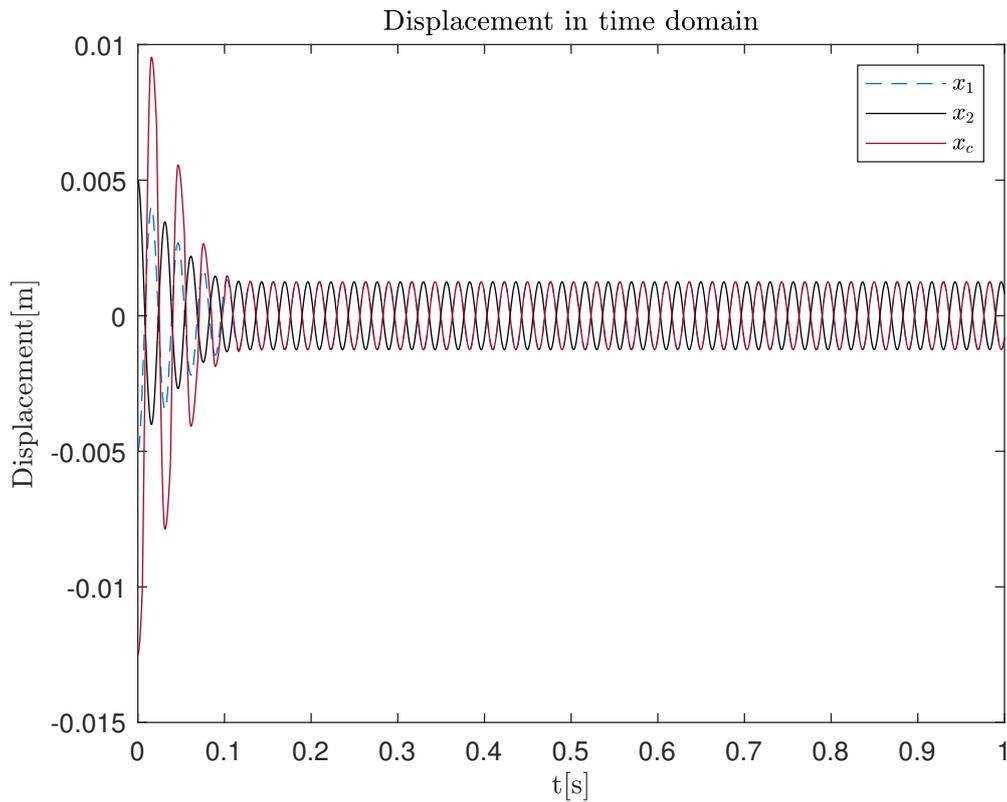


**Figura 2.13:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_1$

In Figg. 2.13, 2.14 si riportano le storie temporali degli spostamenti delle due masse. Si nota come le ampiezze vengano smorzate a causa della presenza dell'attrito al contatto.



**Figura 2.14:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_2$



**Figura 2.15:** Storia temporale degli spostamenti

In Fig. 2.15 sono rappresentati gli spostamenti relativi alle masse e al nodo di contatto, si può notare come gli spostamenti delle due masse siano in controfase, in virtù delle condizioni iniziali imposte, mentre il nodo di contatto presenti un transitorio caratterizzato da ampiezze maggiori dovute al fatto che si alternino stati di adesione e di slittamento.

Frequenza	
Analisi Modale	Analisi Spettrale
$f_1 = 29.99 \text{ Hz}$	$f_1(x_i) = \emptyset \text{ Hz con } i = 1,2$
$f_2 = 37 \text{ Hz}$	$f_2(x_i) = 39 \text{ Hz con } i = 1,2$

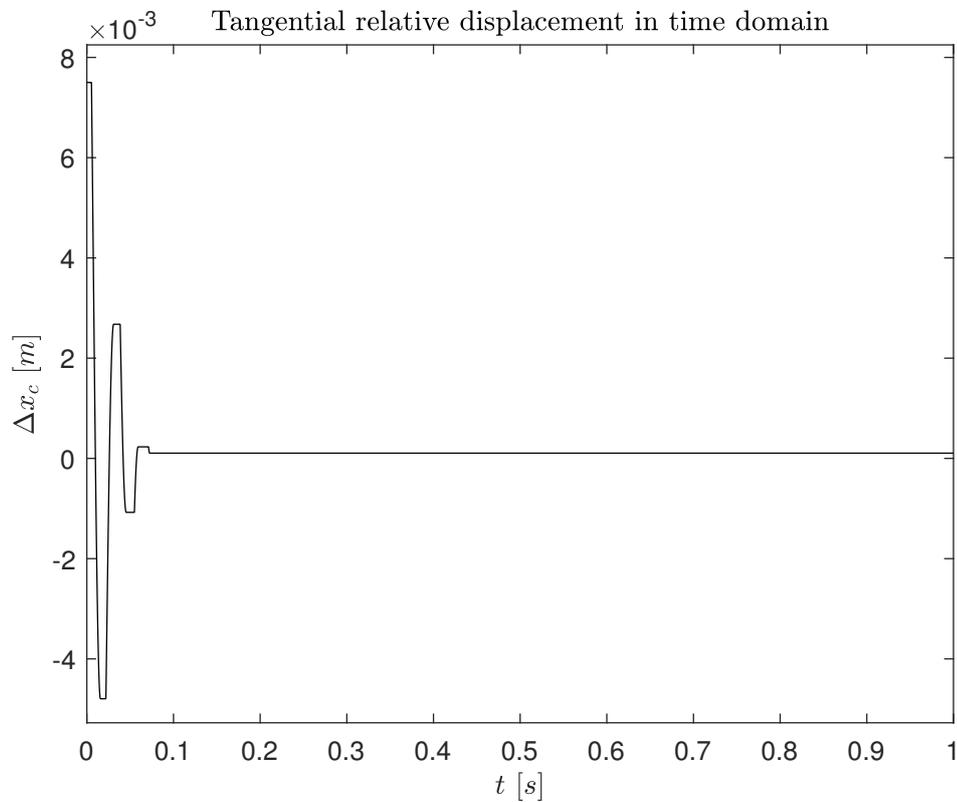
**Tabella 2.3:** Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e spettrale

Rispetto ai risultati discussi nel paragrafo 2.1.2, in tab.2.3 sono stati riportati i risultati ottenuti dall'analisi del periodo di oscillazione del sistema in esame, in questo caso l'analisi restituisce una frequenza compatibile con il secondo modo di

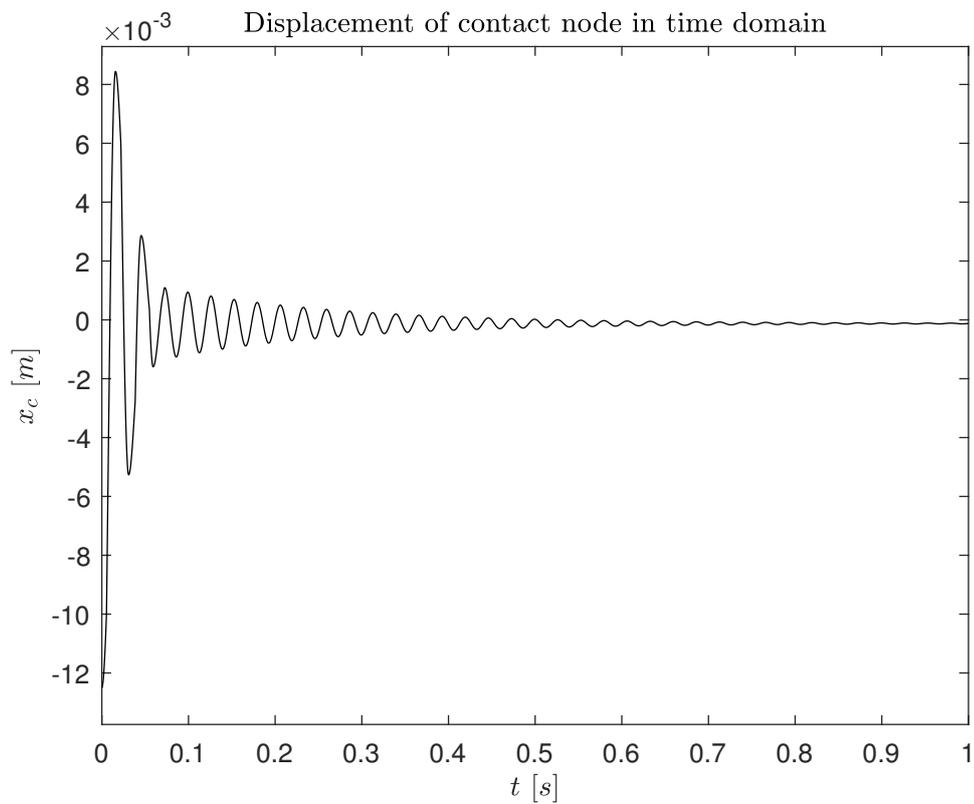
vibrare. Questo comportamento deriva dal fatto che le condizioni iniziali forzano il sistema ad oscillare attorno alla seconda frequenza propria.

**Caso2b - Sistema con smorzamento viscoso** Il presente paragrafo tratta un'evoluzione del sistema riportato in 2.1.2, infatti lo scopo dell'analisi è valutare gli andamenti temporali e lo stato del contatto in presenza di smorzamento viscoso. Si riportano i parametri del sistema e le condizioni iniziali:

- $\dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_2(t_0) = 0$  m/s,
- $x_1(t_0) = -2 \mu N_0/k_c$  m,
- $x_2(t_0) = 2 \mu N_0/k_c$  m,
- $c_1 = c_2 = 10$  N/m/s.

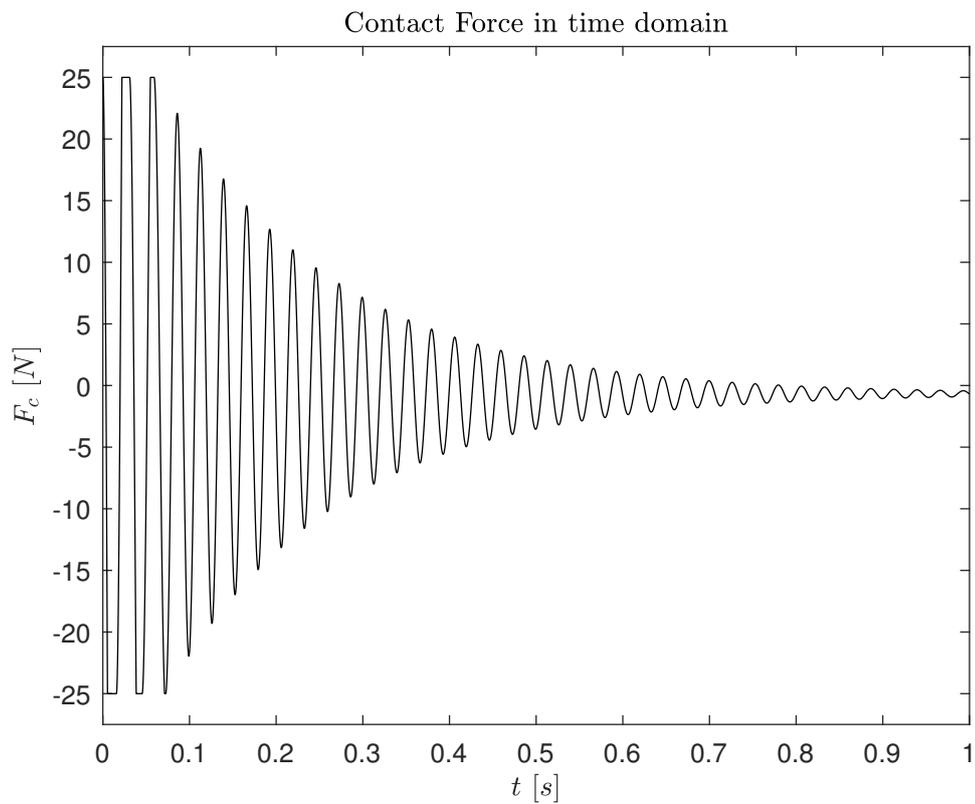


**Figura 2.16:** Time History dello spostamento tangenziale relativo del nodo di contatto



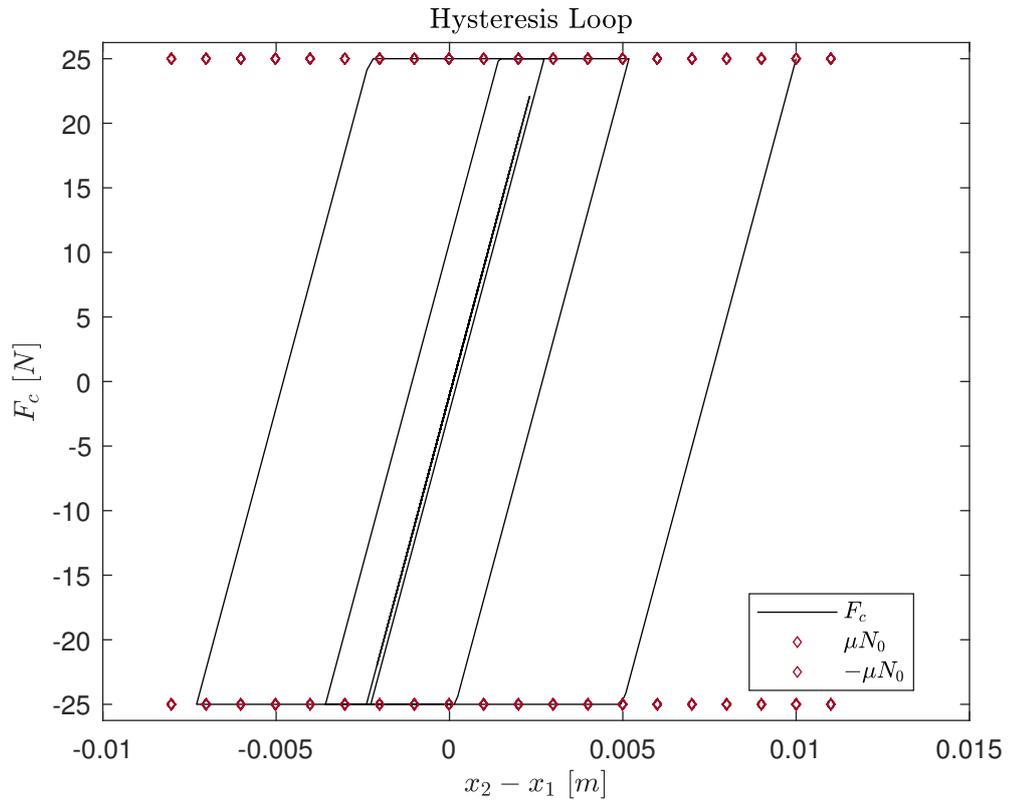
**Figura 2.17:** Time History dello spostamento del nodo di contatto

Data la presenza dello smorzamento viscoso, che si aggiunge a quello per attrito generato dal contatto, l'ampiezza dell'oscillazione dello spostamento del nodo di contatto decresce drasticamente una volta conclusosi il transitorio, come si può desumere dalla Fig. 2.17



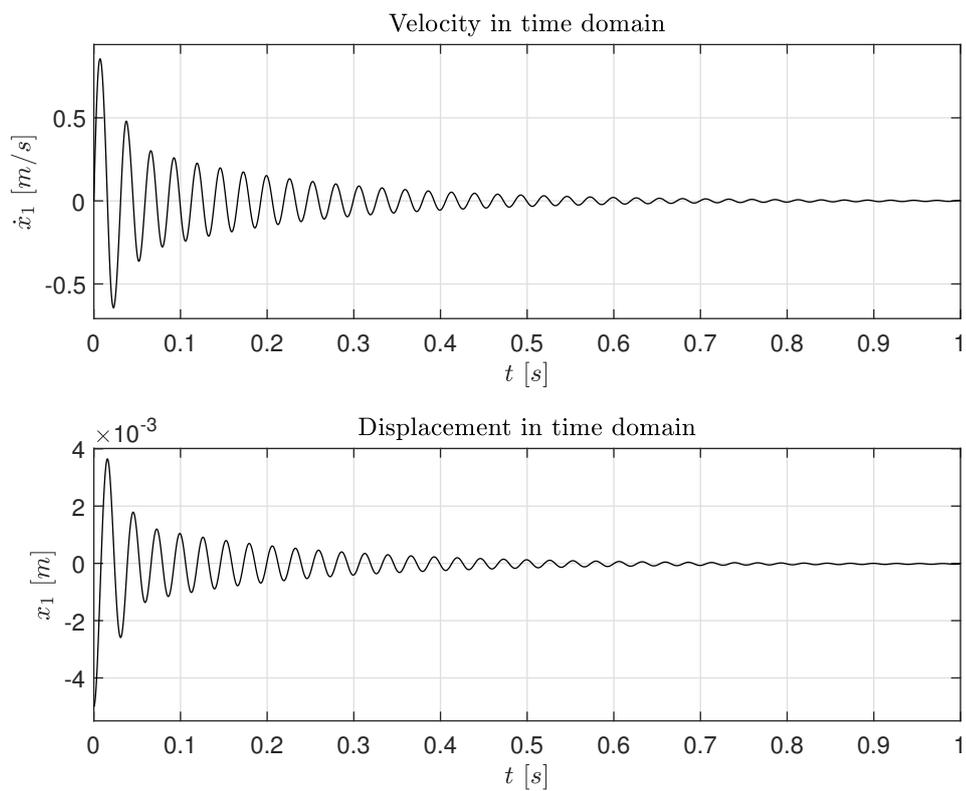
**Figura 2.18:** Time History della forza di contatto

Analogamente con quanto visto in precedenza, la forza di contatto  $F_c$  risente dello stato del contatto, in questo caso la presenza dello smorzamento rende ancor più manifesta la transizione dallo stato di slip-stick a quello di solo stick.

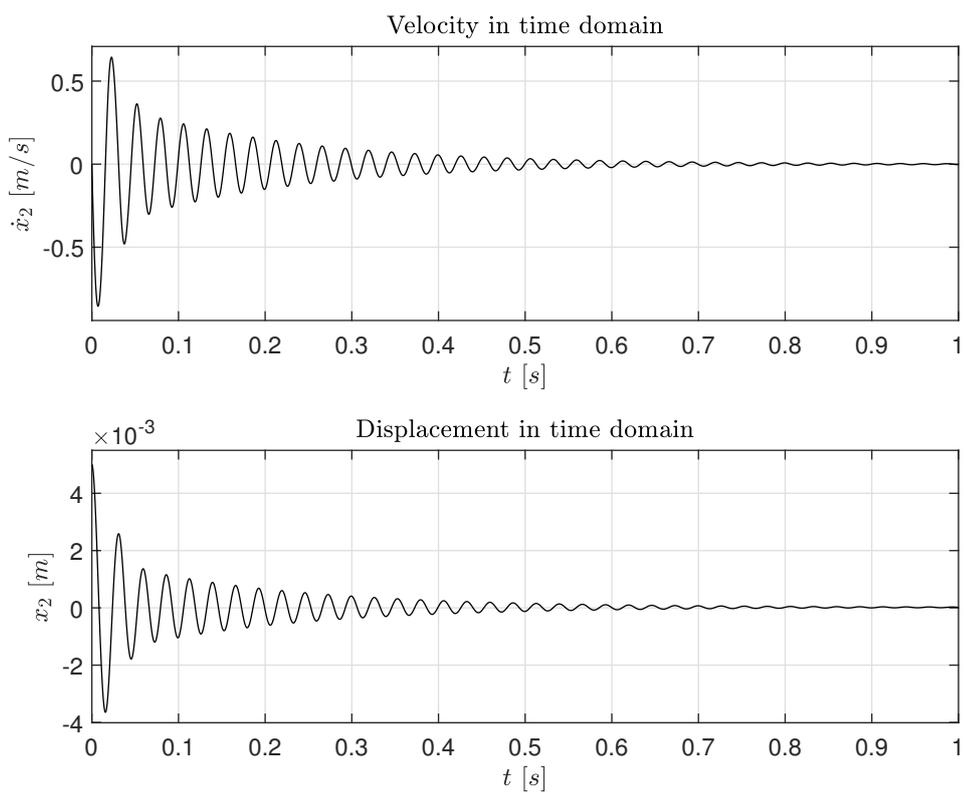


**Figura 2.19:** Ciclo di isteresi

Il ciclo di isteresi riportato in Fig. 2.19 sottolinea la presenza dello smorzamento viscoso, infatti l'ampiezza del ciclo decresce molto più velocemente rispetto ai casi non smorzati.



**Figura 2.20:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_1$



**Figura 2.21:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_2$

In Tab. 2.4 sono riportati i risultati ottenuti mediante analisi grafica della frequenza di oscillazione, si nota immediatamente l'analogia con il paragrafo precedente, caso in cui la prima frequenza era oscurata dalle condizioni iniziali imposte al sistema, tuttavia in questo caso la frequenza calcolata è nettamente inferiore sia a quella ottenuta nelle analisi precedenti sia rispetto ai risultati dell'analisi modale. Ciò è dovuto al fatto che in questo caso la frequenza calcolata non corrisponde alla frequenza naturale  $\omega_n$  ma alla frequenza smorzata del sistema  $\omega_d$ , calcolata come:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta}$$

In cui  $\zeta$  è il coefficiente di smorzamento del sistema.

Frequenza	
Analisi Modale	Analisi Spettrale
$f_1 = 29.99$ Hz	$f_{1d}(x_i) = \emptyset$ Hz con $i = 1,2$
$f_2 = 37.5$ Hz	$f_{2d}(x_i) = 33$ Hz con $i = 1,2$

**Tabella 2.4:** Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e spettrale

## 2.2 Modello Numerico con 4 gradi di libertà e carico normale costante

La presente sezione contiene l'introduzione di un ulteriore livello di complessità nella modellazione numerica del problema in esame. L'aggiunta di due corpi si prefigge lo scopo di rappresentare, incrementandone il livello di dettaglio, la distribuzione di massa lungo la pala, la quale, essendo un elemento strutturale continuo, presenta delle caratteristiche inerziali non sempre ascrivibili a un punto materiale.

Come anticipato precedentemente, il sistema in figura 2.22 è costituito da 4 masse con 1 grado di libertà in direzione orizzontale  $x_i(t)$ . Le masse  $m_1$  e  $m_4$  sono connesse a terra, rispettivamente, attraverso una molla di rigidezza  $k_1$  e  $k_4$  e uno smorzatore viscoso  $c_1$  e  $c_4$  mentre sono connesse alle masse  $m_2$  e  $m_3$  attraverso delle molle di rigidezza  $k_2$  e  $k_3$  e degli smorzatori viscosi  $c_2$  e  $c_3$ . A seguito di uno spostamento iniziale della massa  $m_1$ , la massa  $m_2$  entra in contatto con la massa  $m_3$ , esercitando una forze di contatto non lineare in direzione tangenziale  $T(t)$ . Per tener conto dell'attrito che si sviluppa tra le superfici di contatto, tra la massa  $m_2$  e la massa  $m_3$  viene inserito un elemento di Jenkins, costituito da una molla di rigidezza  $k_t$  e uno slider che obbedisce alle legge di attrito di Coulomb con il coefficiente di attrito  $\mu$ .

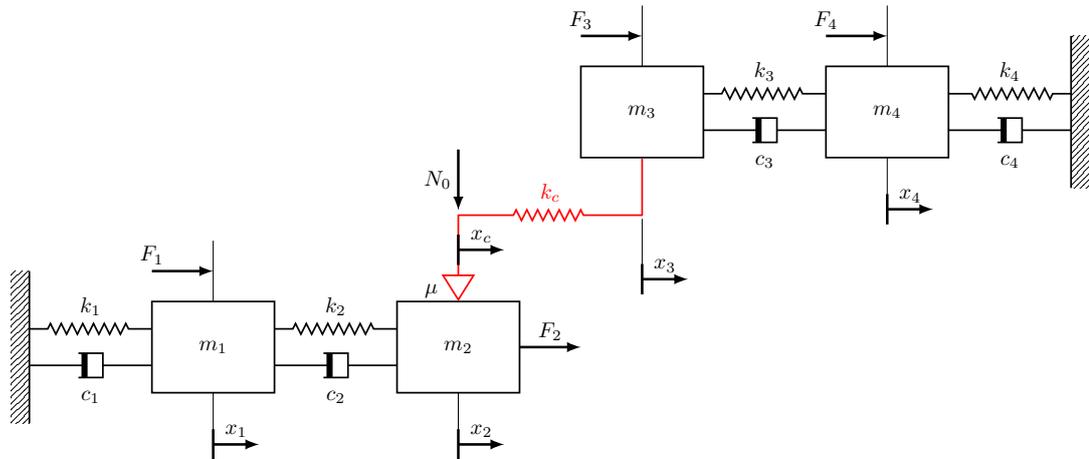


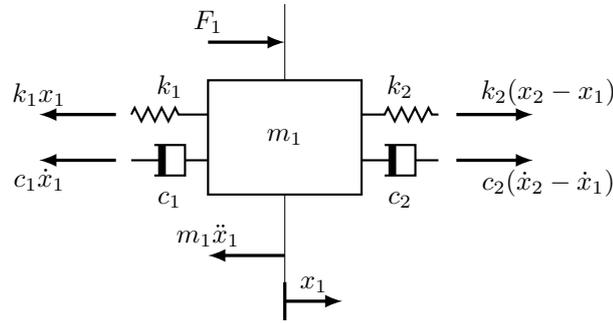
Figura 2.22: Modello 4Dofs con carico normale costante

### 2.2.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo

Una pala vibrante, sottoposta ad un carico normale e vincolata ai suoi estremi mediante contatto con due slot, è descrivibile tramite la formalizzazione di un problema dinamico, il quale richiede una soluzione nel tempo.

La risoluzione degli equilibri dinamici per ogni grado di libertà considerato si traduce nella scrittura di un sistema di equazioni differenziali, nel dominio del tempo, risolvibile mediante il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine.

Le forze agenti sulla massa  $m_1$  ad un generico istante temporale sono riportate in figura 2.23. L'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_1$  in direzione



**Figura 2.23:** Diagramma di corpo libero per massa 1

x porta alla seguente equazione:

$$-m_1\ddot{x}_1 - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + F_1 = 0 \quad (2.18)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) - F_1 = 0 \quad (2.19)$$

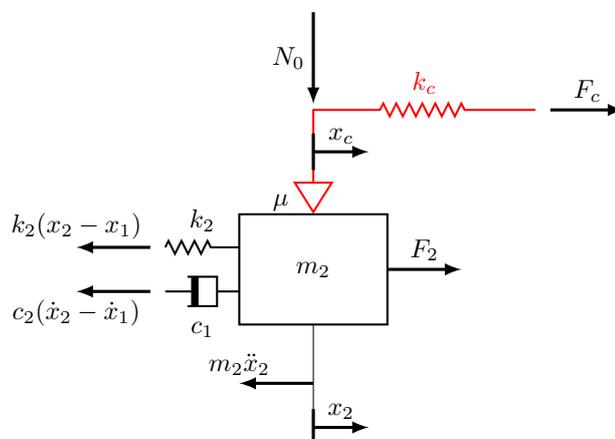
$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - F_1 = 0 \quad (2.20)$$

Le forze agenti sulla massa  $m_2$  ad un generico istante temporale sono riportate in figura 2.24. L'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_2$  in direzione x porta alla seguente equazione:

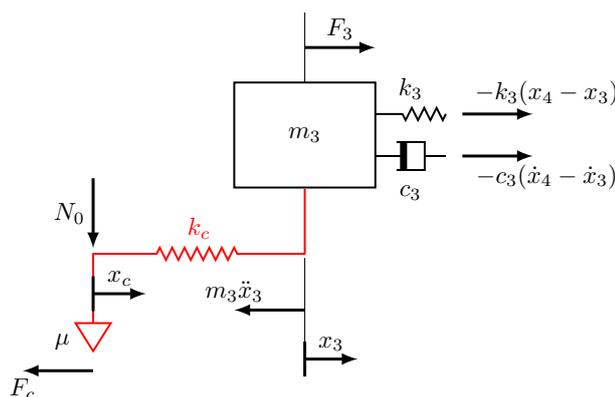
$$-m_2\ddot{x}_2 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) + F_c(x, \dot{x}) + F_2 = 0 \quad (2.21)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) - F_c(x, \dot{x}) - F_2 = 0 \quad (2.22)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 - F_c(x, \dot{x}) - F_2 = 0 \quad (2.23)$$



**Figura 2.24:** Diagramma di corpo libero per massa 2



**Figura 2.25:** Diagramma di corpo libero per massa 3

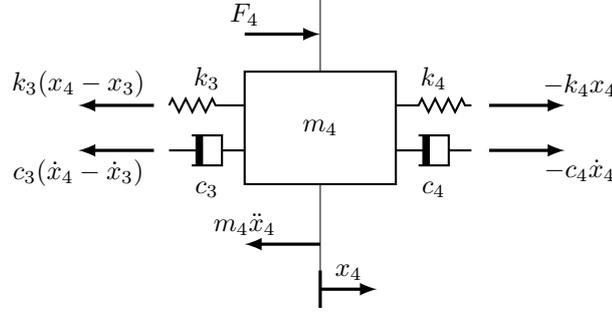
Le forze agenti sulla massa  $m_3$  ad un generico istante temporale sono riportate in figura 2.25. L'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_3$  in direzione  $x$  porta alla seguente equazione:

$$-m_3\ddot{x}_3 + c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + k_3(x_4 - x_3) - F_c(x, \dot{x}) + F_3 = 0 \quad (2.24)$$

$$m_3\ddot{x}_3 - c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_3(x_4 - x_3) + F_c(x, \dot{x}) - F_3 = 0 \quad (2.25)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 - c_3\dot{x}_4 + k_3x_3 - k_3x_4 + F_c(x, \dot{x}) - F_3 = 0 \quad (2.26)$$

Le forze agenti sulla massa  $m_4$  ad un generico istante temporale sono riportate in figura 2.26. L'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_4$  in direzione x



**Figura 2.26:** Diagramma di corpo libero per massa 4

porta alla seguente equazione:

$$-m_4\ddot{x}_4 - c_4\dot{x}_4 - k_4x_4 - c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_3(x_4 - x_3) + F_4 = 0 \quad (2.27)$$

$$m_4\ddot{x}_4 + c_4\dot{x}_4 + k_4x_4 + c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + k_3(x_4 - x_3) - F_4 = 0 \quad (2.28)$$

$$m_4\ddot{x}_4 - c_3\dot{x}_3 + (c_3 + c_4)\dot{x}_4 - k_3x_3 + (k_3 + k_4)x_4 - F_4 = 0 \quad (2.29)$$

Il sistema di equazioni completo è:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - F_1 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 - F_c(x, \dot{x}) - F_2 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 - c_3\dot{x}_4 + k_3x_3 - k_3x_4 + F_c(x, \dot{x}) - F_3 = 0 \\ m_4\ddot{x}_4 - c_3\dot{x}_3 + (c_3 + c_4)\dot{x}_4 - k_3x_3 + (k_3 + k_4)x_4 - F_4 = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_c(x, \dot{x}) \\ F_c(x, \dot{x}) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

In forma compatta:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{F_c(x, \dot{x})\} - \{F\} = \{0\} \quad (2.32)$$

La forza di contatto  $F_c(x, t)$  deriva dal modello di contatto utilizzato che, nella configurazione in esame, è un modello di contatto unidimensionale con spostamento relativo tangenziale  $\Delta x_c$  e una forza di precarico normale  $N_0$  costante (sec:1.1.1). Inoltre, la forza di contatto dipende dallo stato in cui si trova il contatto a un certo istante temporale e si può individuare come segue:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = 0 \Rightarrow w(t) = \text{cost} & \text{stick} \\ \dot{w}(t) \neq 0 & \text{slip} \end{cases} \quad (2.33)$$

Di conseguenza, la forza di contatto  $F_c(x, t)$  vale:

$$F_c(x, t) = \begin{cases} k_t(x_3 - x_2 - \Delta x_c) & \text{stick} \\ \mu N_0 \text{sgn}(\Delta \dot{x}_c(t)) & \text{slip} \end{cases} \quad (2.34)$$

Come si può notare in 2.34 la forza di contatto  $F_c$  mostra una dipendenza sia dal tempo che dallo spazio mediante l'espressione di  $\Delta x_c$ . Di conseguenza, lo schema risolutivo ha dovuto tenere in considerazione una riformulazione in termini di problema di Cauchy introducendo una matrice che ne riarrangia la forma, nello specifico:

$$\{\dot{z}\} = [M]^{-1}([A]\{z\} + \{F\} - \{F_c\}) \quad (2.35)$$

In cui:

$$\{\dot{z}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{v}\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \quad \{z\} = \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Il vettore delle forze esterne è espresso in termini di:

$$\{F_{ext}\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

La matrice A si esprime come:

$$[A] = \left[ \begin{array}{c|c} -[C] & -[K] \\ \hline [I] & [0] \end{array} \right] \quad (2.38)$$

Mediante la riformulazione nei termini appena descritti, il sistema di equazioni è stato riscritto eliminando un ordine di derivazione aumentando tuttavia il numero di incognite.



### 2.2.3 Risultati

Si riportano i parametri del sistema in esame.

Parametri	Valori
$m_1$ [kg]	1
$m_2$ [kg]	1
$m_3$ [kg]	1
$m_4$ [kg]	1
$k_1$ [N/m]	3.55e04
$k_2$ [N/m]	3.55e04
$k_3$ [N/m]	3.55e04
$k_4$ [N/m]	3.55e04
$k_c$ [N/m]	1e4
$\mu$ ( <i>friction coefficient</i> )	0.5
$N_0$ [N]	50
$F_1$ [N]	$\emptyset$
$F_2$ [N]	$\emptyset$
$F_3$ [N]	$\emptyset$
$F_4$ [N]	$\emptyset$

**Tabella 2.5:** Parametri del sistema a 4 gradi di libertà

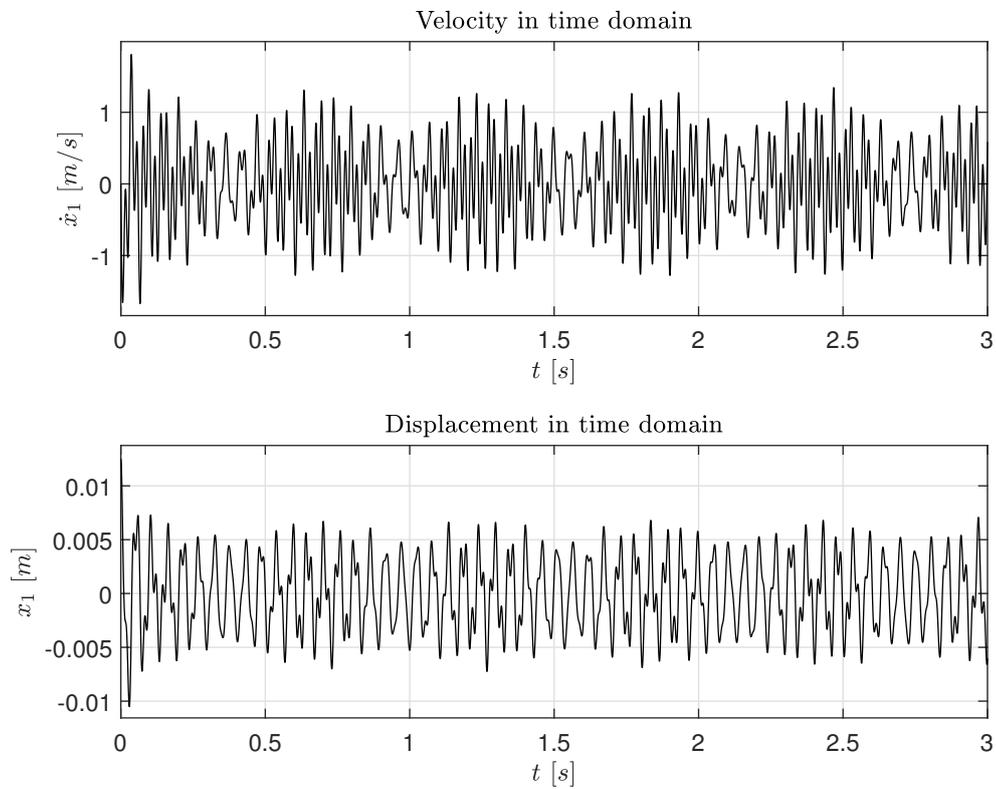
#### Caso 1 - Sistema in assenza di smorzamento viscoso $c_i = 0$ N/m/s

In questo paragrafo si discutono i risultati ottenuti per un sistema a quattro gradi libertà in assenza di smorzamento viscoso.

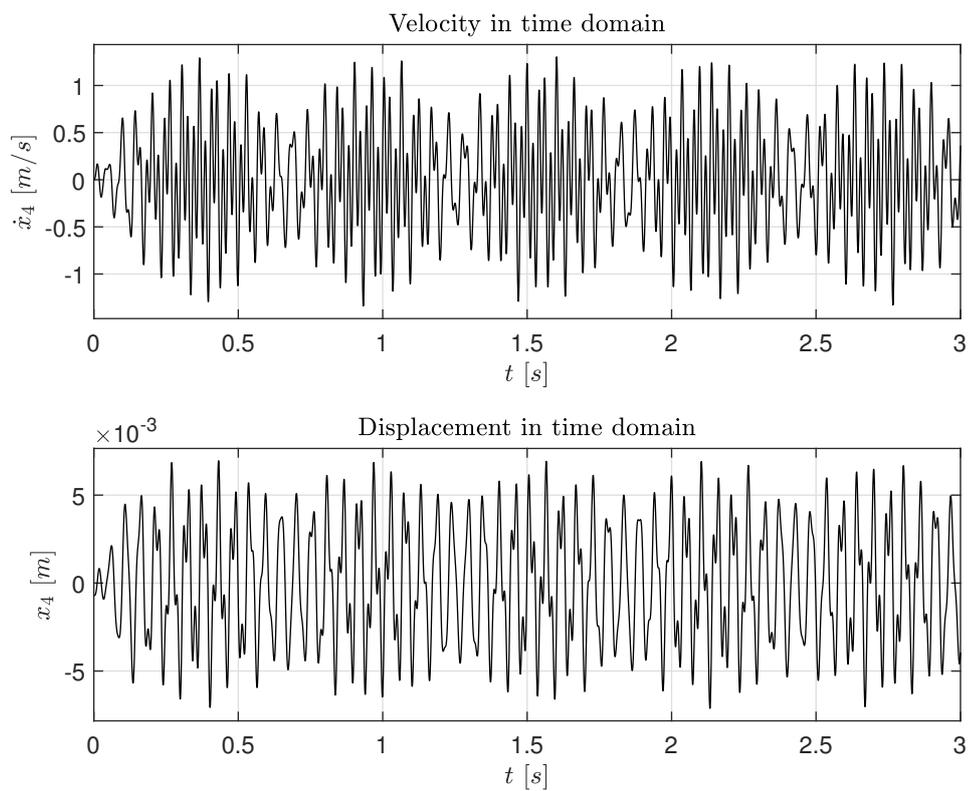
- $\dot{x}_i(t_0) = 0$  m/s con  $i = 1, \dots, 4$ ,
- $x_1(t_0) = \mu N_0 / k_c$  m.

Risolvendo il sistema di equazioni 2.41 considerando  $\{x_{hh}\}_{t_0} = x_1(t_0)$  si ottengono le condizioni iniziali per gli altri gradi di libertà. I risultati riportati nelle Figg. 2.27, 2.29, 2.30, 2.28 rappresentano l'andamento temporale dello spostamento e della velocità di ogni massa. Si nota come i segnali siano caratterizzati dalla presenza di due portanti a frequenza diversa, infatti, come si vedrà nel seguito, l'analisi nel

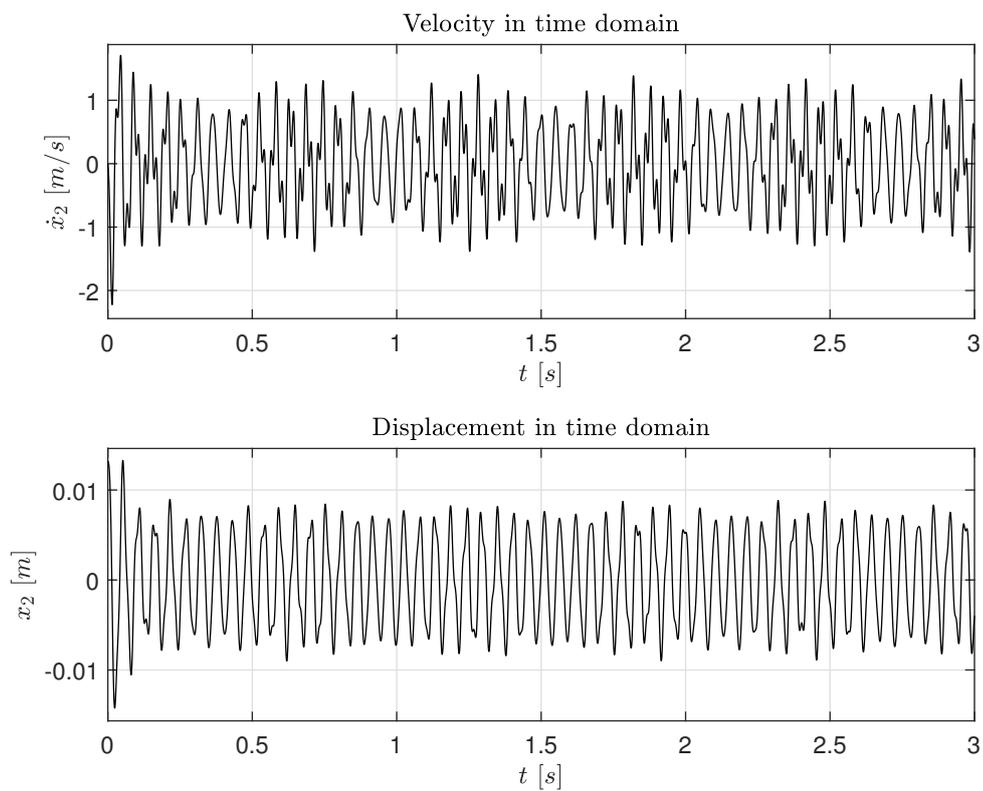
dominio della frequenza riporta due singoli picchi sintomo del fatto che le frequenze sono accoppiate.



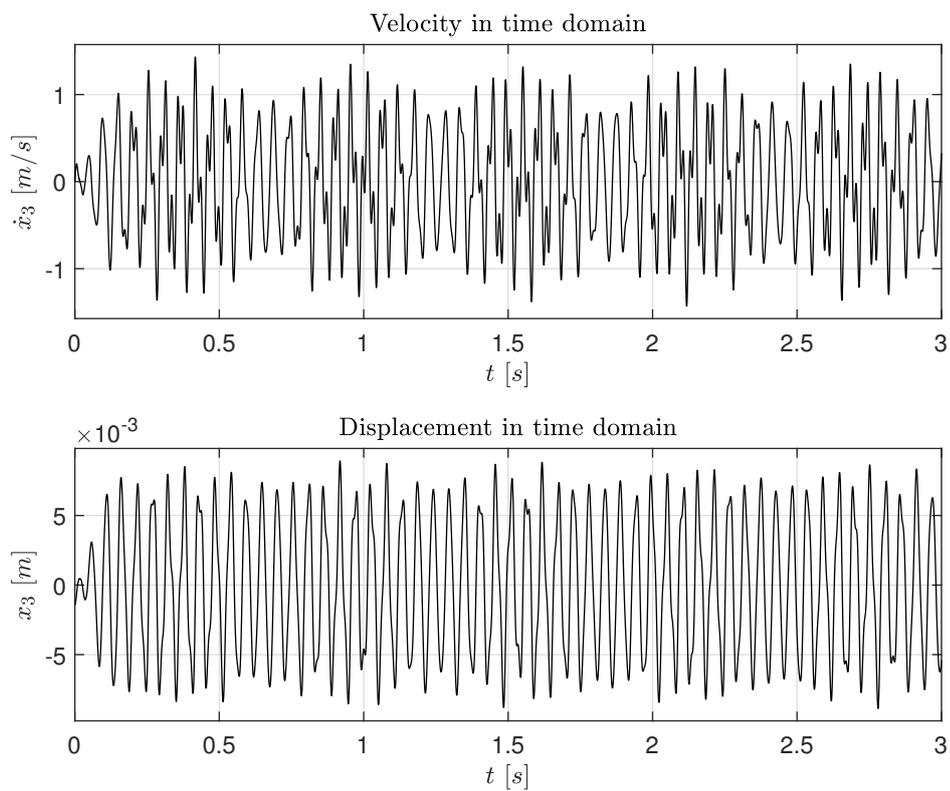
**Figura 2.27:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa 1



**Figura 2.28:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa 4

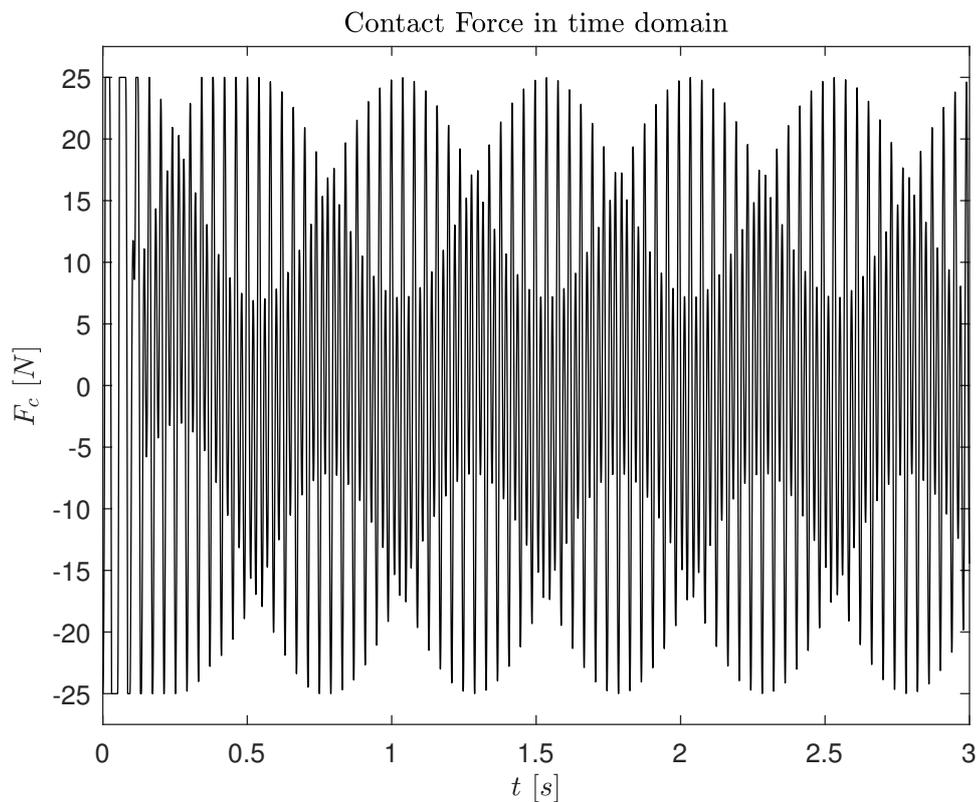


**Figura 2.29:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa 2



**Figura 2.30:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa 3

Per quanto riguarda le storie temporali di spostamento e velocità relative alle masse due e tre, le due frequenze di oscillazione sono meno evidenti a causa dell'azione del contatto.



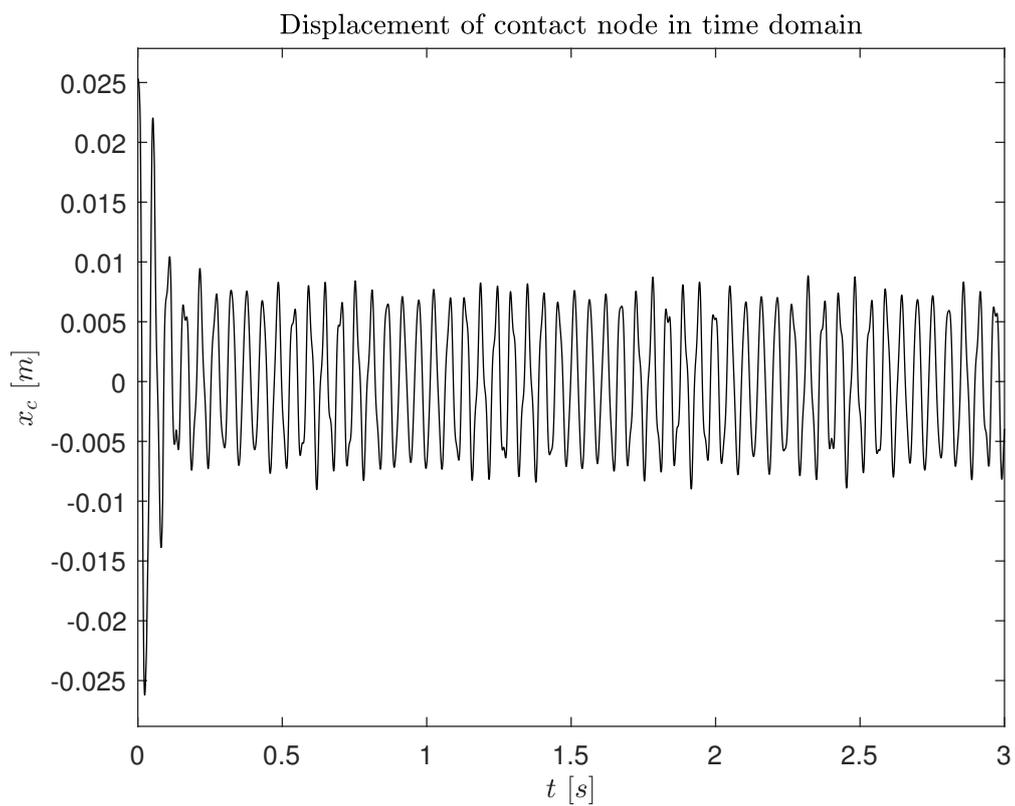
**Figura 2.31:** Time History della forza di contatto

Come si può notare dalla Fig.2.31, la forza di contatto  $F_c$  in questo caso la presenza delle due portanti è ben definita in quanto anche  $F_c$  oscilla con due frequenze caratteristiche.

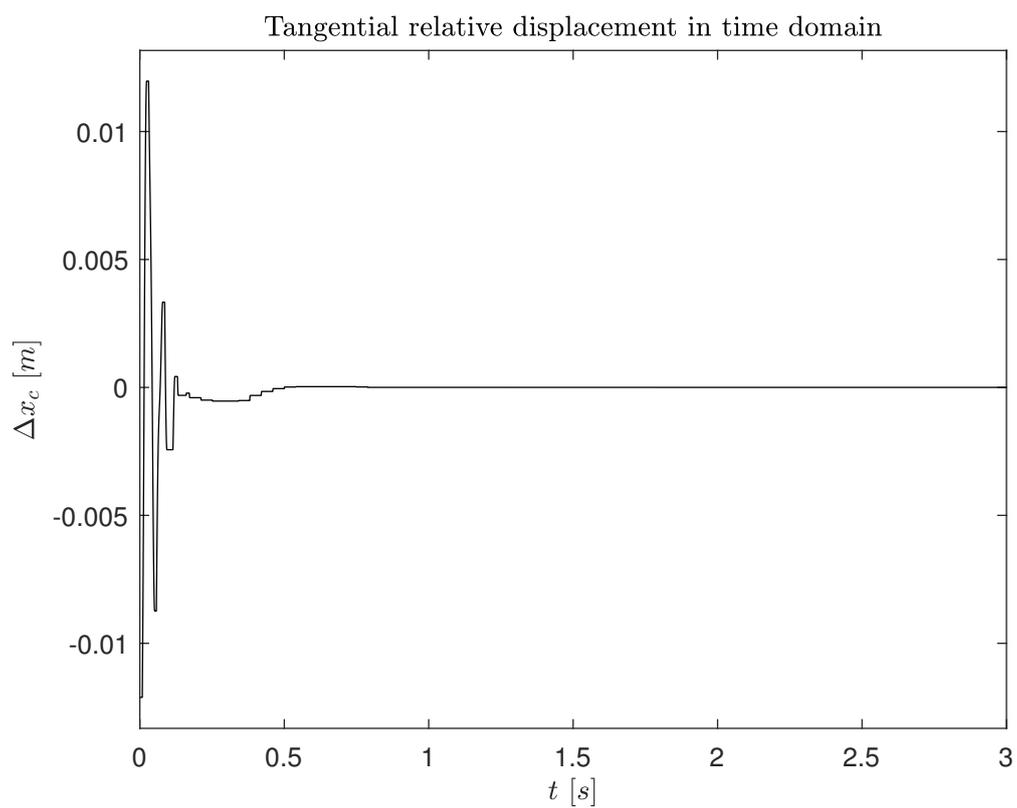
In Tab. 2.6 sono riportati i risultati e i dovuti confronti tra le frequenze ottenute tramite analisi modale e quelle calcolate mediante metodo grafico. Si nota come vi sia una quasi totale sovrapposizione fra le coppie di valori.

Frequenza	
Analisi Modale	Metodo Grafico
$f_1 = f_2 = 22.8 \text{ Hz}$	$f_1(x_i) = 20 \text{ Hz con } i = 1 \div 4$
$f_3 = f_4 = 49.3 \text{ Hz}$	$f_2(x_i) = 51.3 \text{ Hz con } i = 1 \div 4$

**Tabella 2.6:** Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e grafica



**Figura 2.32:** Time History dello spostamento del nodo di contatto



**Figura 2.33:** Time History dello spostamento tangenziale relativo al contatto

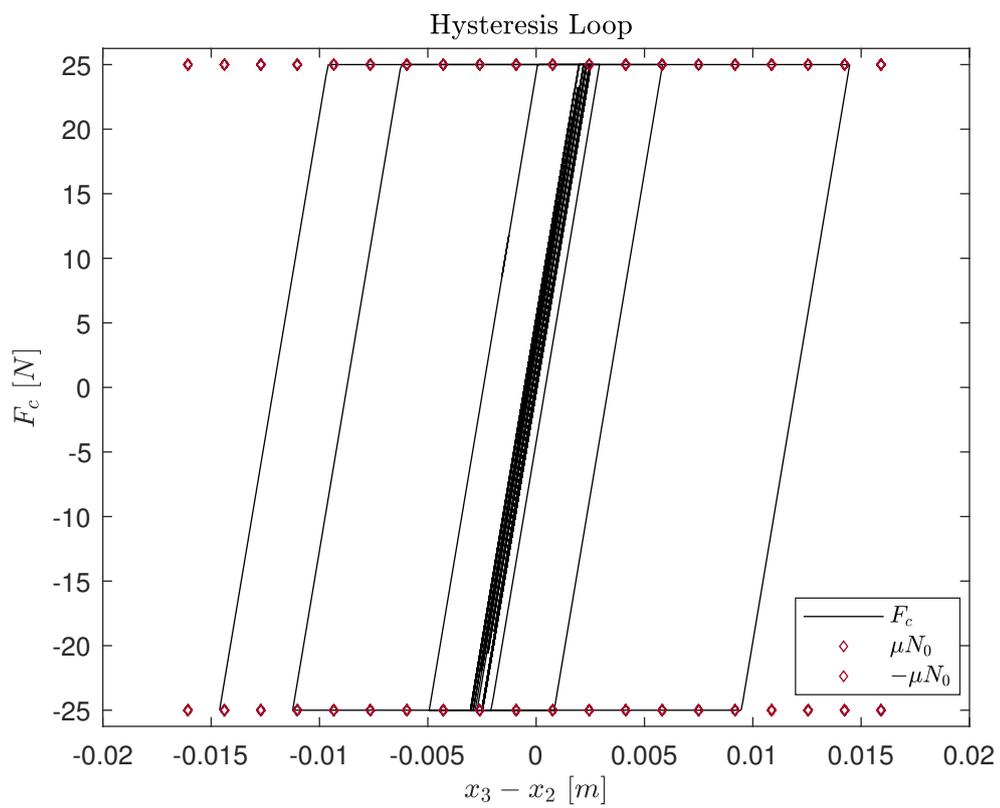
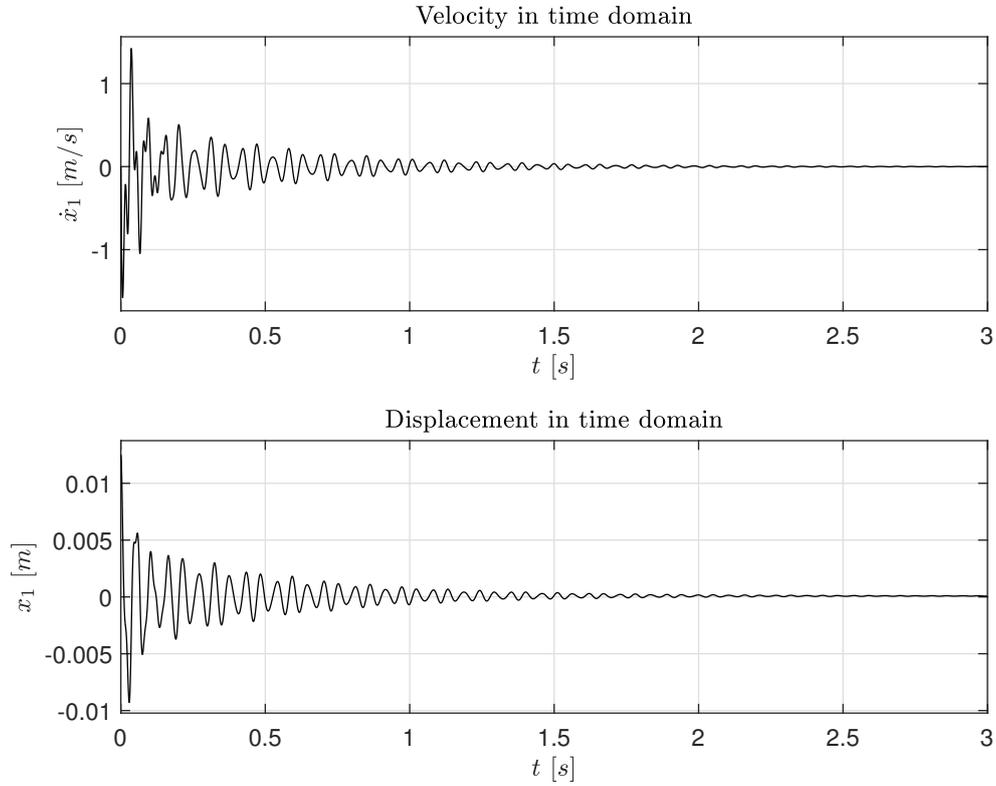
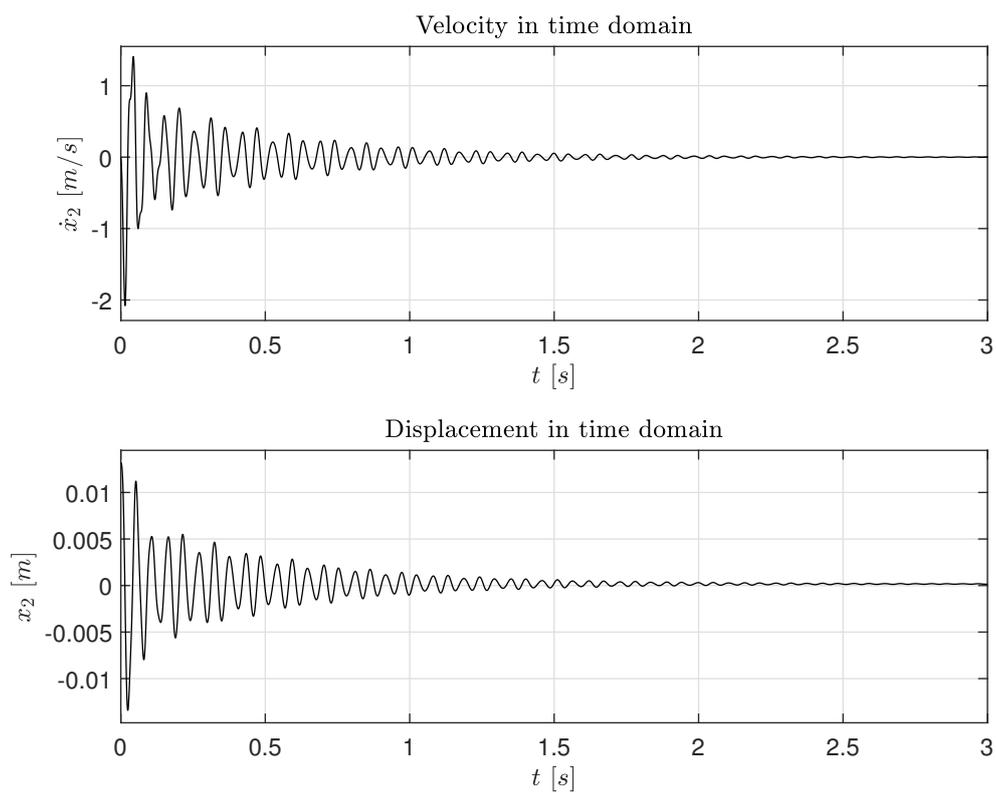


Figura 2.34: Ciclo di isteresi

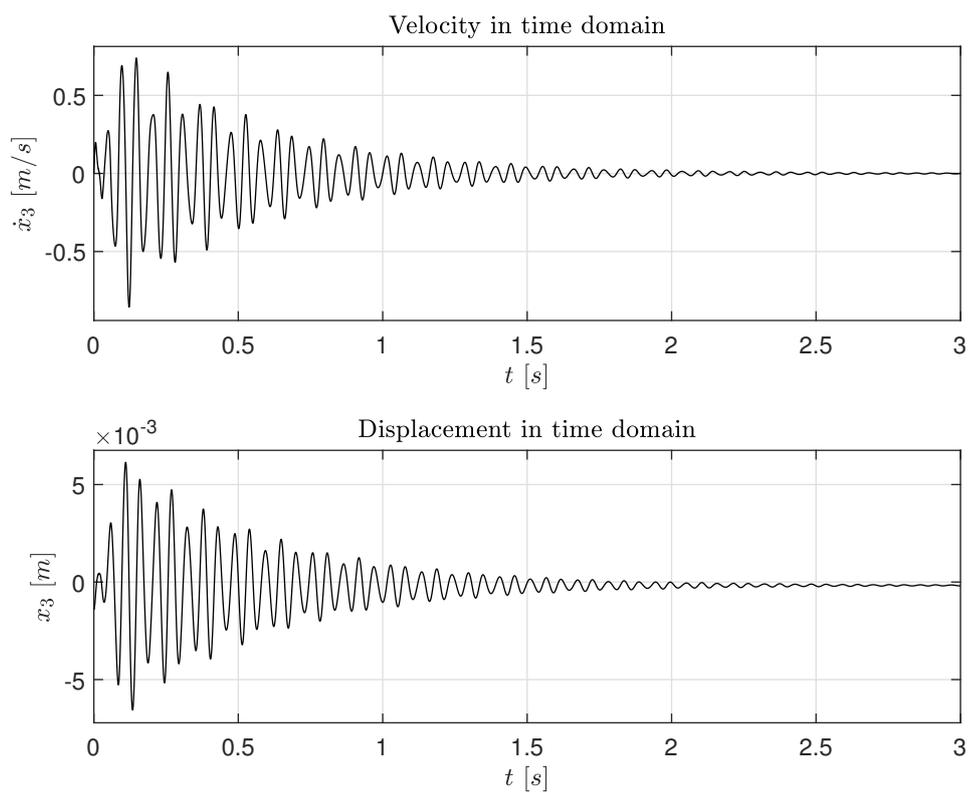
**Caso 2 - Sistema con smorzamento viscoso** Damping  $c_i = 10$  N/m/s Nel caso presentato la matrice di smorzamento viscoso è costante e riporta gli stessi valori per ogni massa.



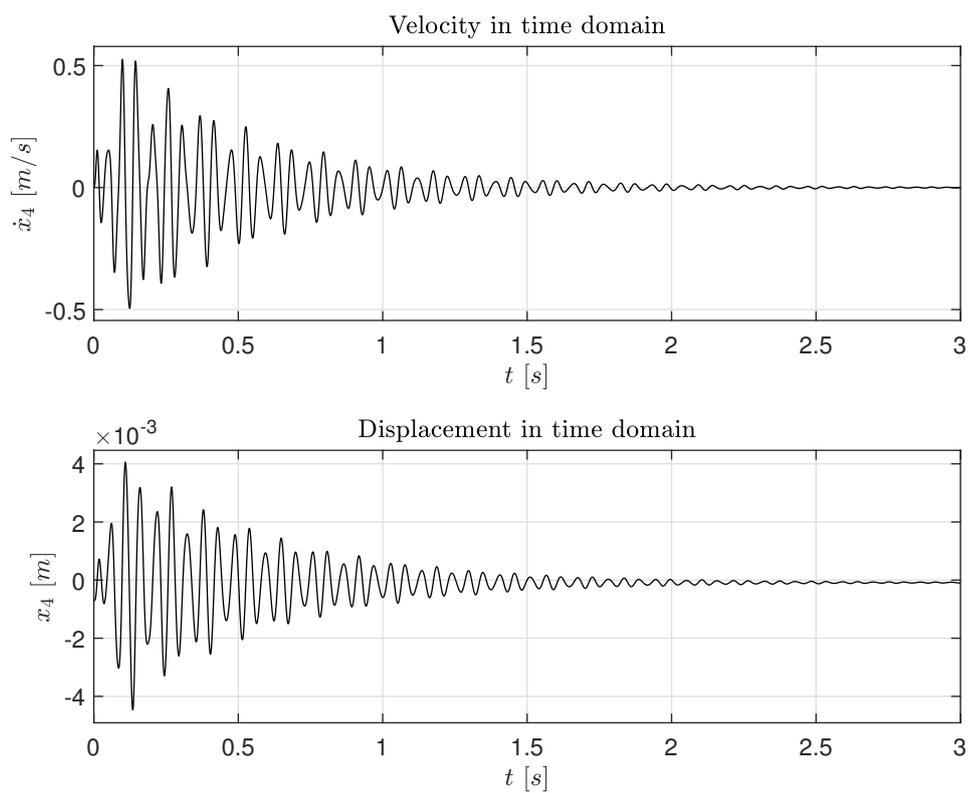
**Figura 2.35:** Time History per ogni spostamento



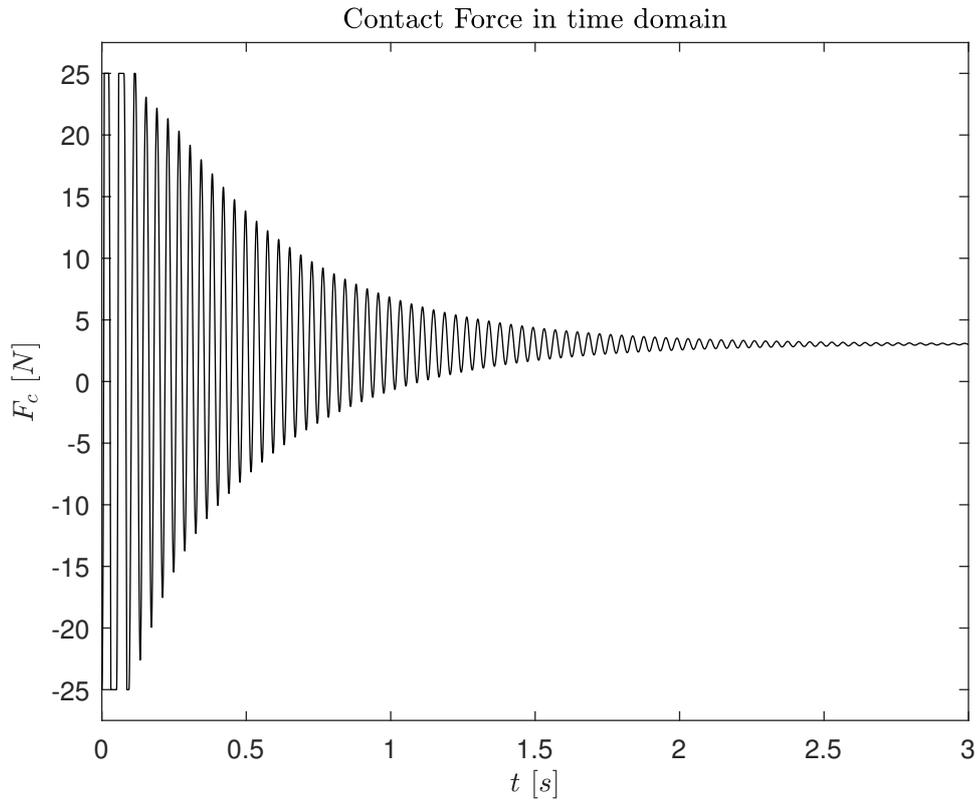
**Figura 2.36:** Time History per ogni spostamento



**Figura 2.37:** Time History per ogni spostamento



**Figura 2.38:** Time History per ogni spostamento



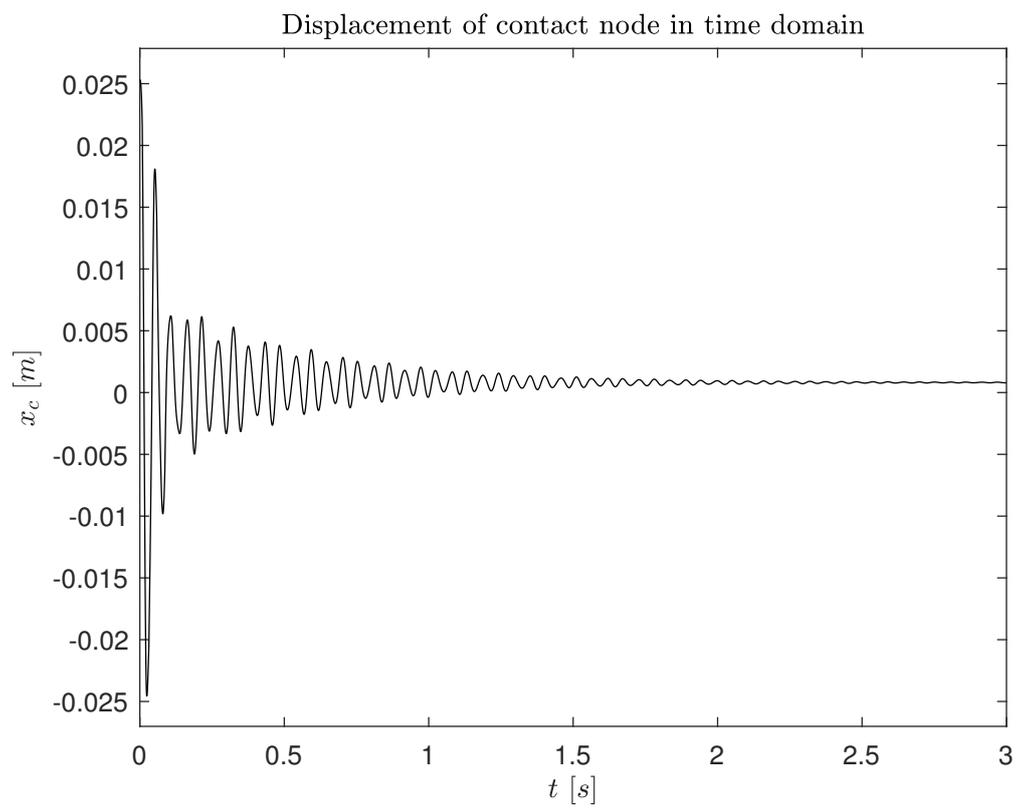
**Figura 2.39:** Time History della forza di contatto

In questo caso, la forza di contatto  $F_c$  oscilla attorno a un valore diverso da zero in funzione delle condizioni iniziali imposte.

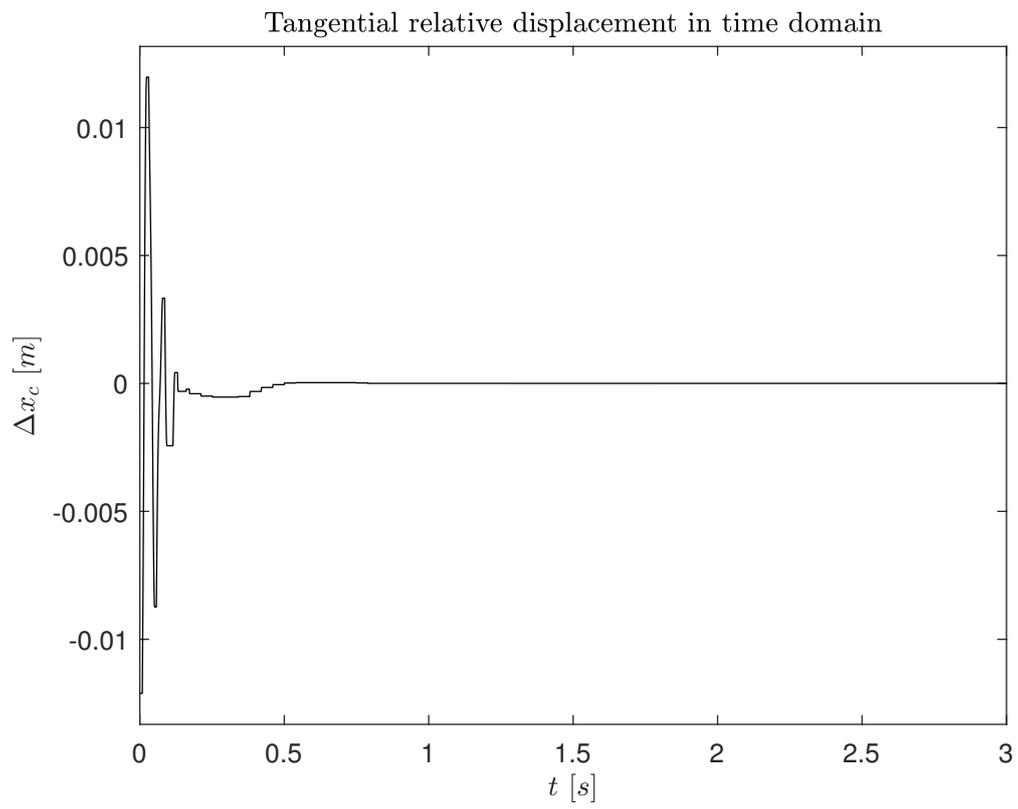
In Tab. 2.7 si riportano i valori i frequenza ottenuti tramite analisi modale e analisi grafica. Si nota come, anche in questo caso, le frequenze siano accoppiate ma nettamente inferiori, in special modo per la seconda frequenza, a quelle calcolate mediante analisi modale, questo in virtù del fatto che i valori ottenuti mediante analisi grafica sono relativi alla frequenza smorzata del sistema  $\omega_d$ .

Frequenza	
Analisi Modale	Metodo Grafico
$f_1 = f_2 = 22.8 \text{ Hz}$	$f_{1_d}(x_i) = 20 \text{ Hz con } i = 1 \div 4$
$f_3 = f_4 = 49.3 \text{ Hz}$	$f_{2_d}(x_i) = 28 \text{ Hz con } i = 1 \div 4$

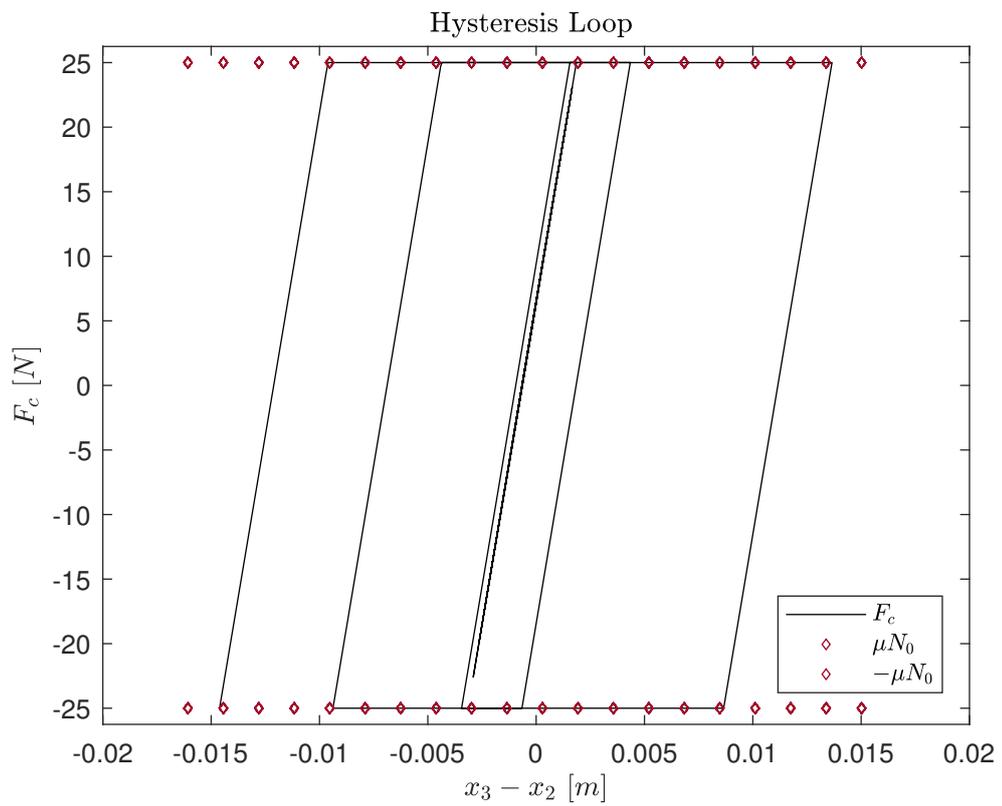
**Tabella 2.7:** Confronto dei risultati ottenuti dall'analisi modale e grafica



**Figura 2.40:** Time History dello spostamento del nodo di contatto



**Figura 2.41:** Time History dello spostamento tangenziale relativo al contatto



**Figura 2.42:** Ciclo di isteresi

## 2.3 Modello numerico con 4 gradi di libertà e una interfaccia di contatto

Il sistema in figura 2.43 è costituito da 4 masse con 1 grado di libertà in direzione orizzontale  $x_i(t)$ . Le masse  $m_1$  e  $m_4$  sono collegate, rispettivamente, tramite una molla di rigidezza  $k_1$  e  $k_4$  e uno smorzatore viscoso  $c_1$  e  $c_4$ , al suolo, mentre sono connesse alle masse  $m_2$  e  $m_3$  attraverso delle molle di rigidezza  $k_2$  e  $k_3$  e degli smorzatori viscosi  $c_2$  e  $c_3$ . A seguito di uno spostamento iniziale della massa  $m_1$ , la massa  $m_2$  entra in contatto con la massa  $m_3$ , esercitando una forze di contatto non lineare in direzione tangenziale  $T(t)$ . Per tener conto dell'attrito che si sviluppa tra le superfici di contatto, tra la massa  $m_2$  e la massa  $m_3$  viene inserito un elemento di Jenkins, costituito da una molla di rigidezza  $k_t$  e uno slider che obbedisce alle legge di attrito di Coulomb con il coefficiente di attrito  $\mu$ .

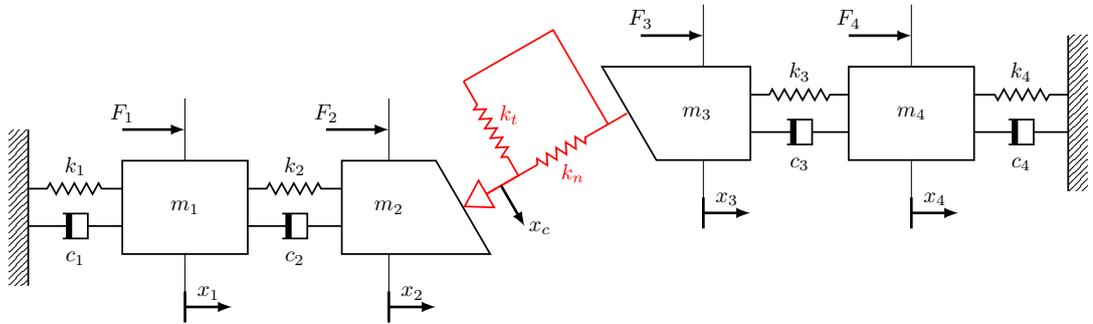


Figura 2.43: Modello 4Dofs con carico normale variabile

### 2.3.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo

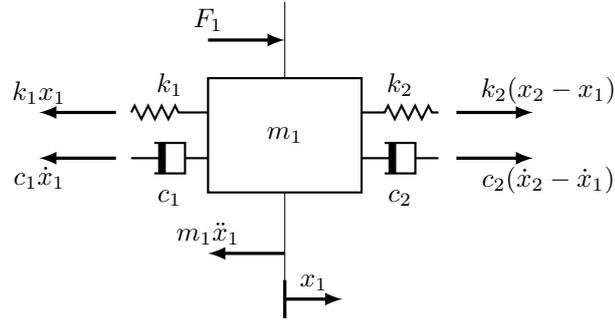
Considerando il diagramma di corpo libero visibile in figura 2.44 , si può scrivere l'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_1$  in direzione x:

$$-m_1\ddot{x}_1 - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + F_1 = 0 \quad (2.42)$$

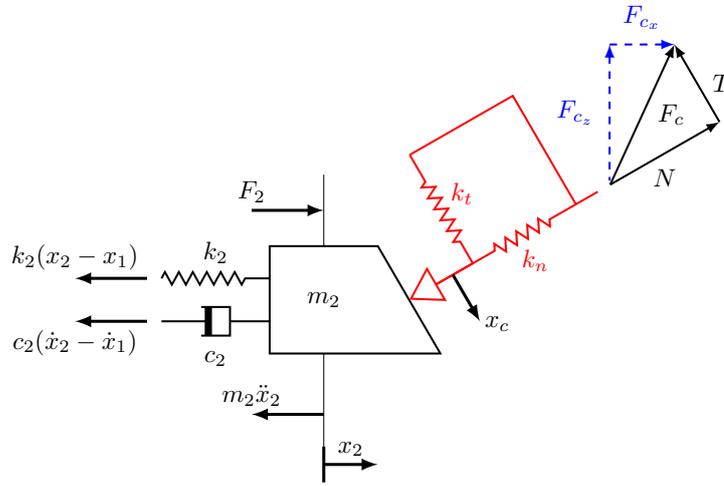
$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) - F_1 = 0 \quad (2.43)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - F_1 = 0 \quad (2.44)$$

Considerando il diagramma di corpo libero visibile in figura 2.45 , si può scrivere l'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_2$  in direzione x:



**Figura 2.44:** Diagramma di corpo libero per massa 1



**Figura 2.45:** Diagramma di corpo libero per massa 2

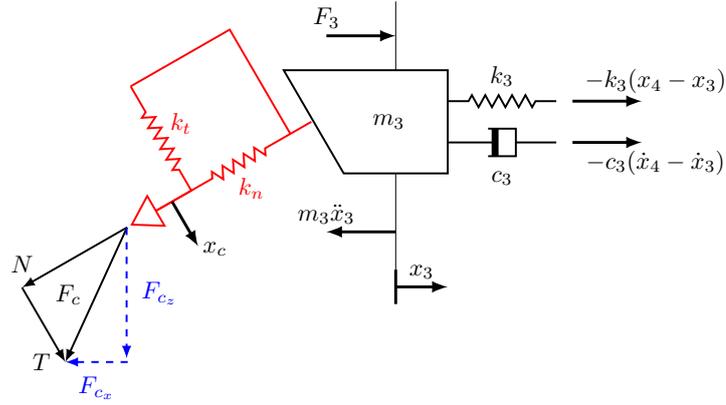
$$-m_2\ddot{x}_2 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) + F_{c_x}(x, \dot{x}) + F_2 = 0 \quad (2.45)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) - F_{c_x}(x, \dot{x}) - F_2 = 0 \quad (2.46)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 - F_{c_x}(x, \dot{x}) - F_2 = 0 \quad (2.47)$$

Considerando il diagramma di corpo libero visibile in figura 2.46, si può scrivere l'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_3$  in direzione  $x$  :

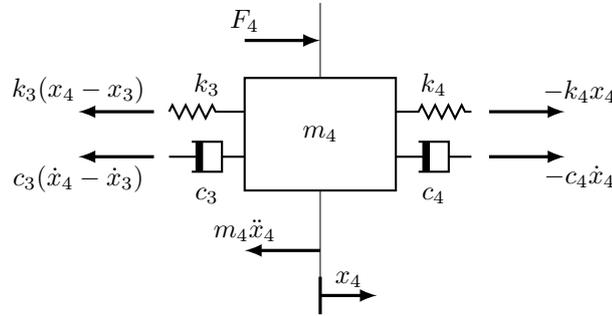
$$-m_3\ddot{x}_3 + c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + k_3(x_4 - x_3) - F_{c_x}(x, \dot{x}) + F_3 = 0 \quad (2.48)$$


**Figura 2.46:** Diagramma di corpo libero per massa 3

$$m_3\ddot{x}_3 - c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_3(x_4 - x_3) + F_{c_x}(x, \dot{x}) - F_3 = 0 \quad (2.49)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 - c_3\dot{x}_4 + k_3x_3 - k_3x_4 + F_{c_x}(x_3, \xi_c, \theta, \mu) - F_3 = 0 \quad (2.50)$$

Considerando il diagramma di corpo libero visibile in figura 2.47, si può scrivere l'equilibrio dinamico delle forze agenti sulla massa  $m_4$  in direzione  $x$ :


**Figura 2.47:** Diagramma di corpo libero per massa 4

$$-m_4\ddot{x}_4 - c_4\dot{x}_4 - k_4x_4 - c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_3(x_4 - x_3) + F_4 = 0 \quad (2.51)$$

$$m_4\ddot{x}_4 + c_4\dot{x}_4 + k_4x_4 + c_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + k_3(x_4 - x_3) - F_4 = 0 \quad (2.52)$$

$$m_4\ddot{x}_4 - c_3\dot{x}_3 + (c_3 + c_4)\dot{x}_4 - k_3x_3 + (k_3 + k_4)x_4 - F_4 = 0 \quad (2.53)$$

Il sistema di equazioni completo è:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - F_1 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 - F_{c_x}(x_3, \xi_c, \theta, \mu) - F_2 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 - c_3\dot{x}_4 + k_3x_3 - k_3x_4 + F_{c_x}(x_3, \xi_c, \theta, \mu) - F_3 = 0 \\ m_4\ddot{x}_4 - c_3\dot{x}_3 + (c_3 + c_4)\dot{x}_4 - k_3x_3 + (k_3 + k_4)x_4 - F_4 = 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

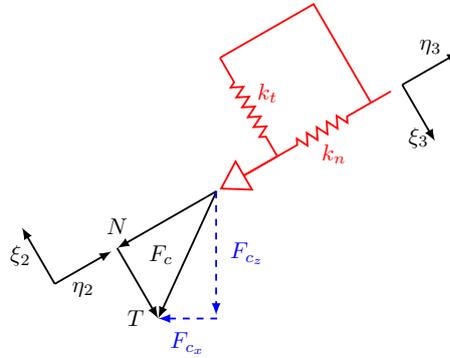
In forma matriciale:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{c_x}(x) \\ F_{c_x}(x) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

In forma compatta:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} + \{F_c(x)\} - \{F\} = \{0\} \quad (2.56)$$

Le forze di contatto  $F_{c_x}(x, t)$  è calcolata utilizzando un modello di contatto bidimensionale con spostamento relativo tangenziale  $\Delta\xi_c$  e una forza di precarico normale variabile  $N(t)$  descritto nella sezione 1.1.2.



**Figura 2.48:** Zoom della zona di contatto

La forza di contatto  $F_c$  deriva dalla composizione vettoriale della forza di contatto normale e tangenziale. Nel sistema di riferimento globale le sue componenti sono:

$$\begin{aligned} F_{c_x}(t) &= N(t)\cos\theta - T(t)\sin\theta \\ F_{c_z}(t) &= N(t)\sin\theta + T(t)\cos\theta \end{aligned} \quad (2.57)$$

In forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_{c_x}(t) \\ F_{c_z}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(t) \\ T(t) \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

Dal modello di contatto descritto in 1.1.2, la forza normale e tangenziale si può scrivere come:

$$\begin{aligned} N(t) &= k_n(\eta_3 - \eta_2) \\ T(t) &= \begin{cases} k_t(\xi_3 - \xi_c) = k_t(\xi_3 - \xi_2 - \Delta\xi_c) & \textit{stick} \\ \mu N(t) \operatorname{sgn}(\Delta\dot{\xi}_c(t)) & \textit{slip} \\ 0 & \textit{lift off} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Gli spostamenti nel sistema di riferimento locale  $(\eta, \xi)$  si ottengono attraverso una rotazione antioraria, pari a  $\theta$ , degli spostamenti espressi nel sistema di riferimento globale:

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z = 0 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

Come espresso in precedenza, si applica nuovamente il metodo di soluzione proposto nell'equazione 2.35. Riguardo al calcolo della forza istantanea di contatto, si fa riferimento all'algorithmo riportato in appendice.

## 2.3.2 Risultati

Si riportano i risultati del caso in esame, i parametri invarianti del sistema sono riportati in Tab.2.8.

Parametri	Valori
$m_i$ con $i = 1, \dots, 4$ [kg]	$1e3$
$k_1 = k_4$ [N/mm]	$2e2$
$k_2 = k_3$ [N/mm]	$10e2$
$k_n$ [N/mm]	$4e3$
$k_t$ [N/mm]	$1e3$
$\mu$ ( <i>friction coefficient</i> )	$0.1$
$F_i$ con $i = 1, \dots, 4$ [N]	$\emptyset$

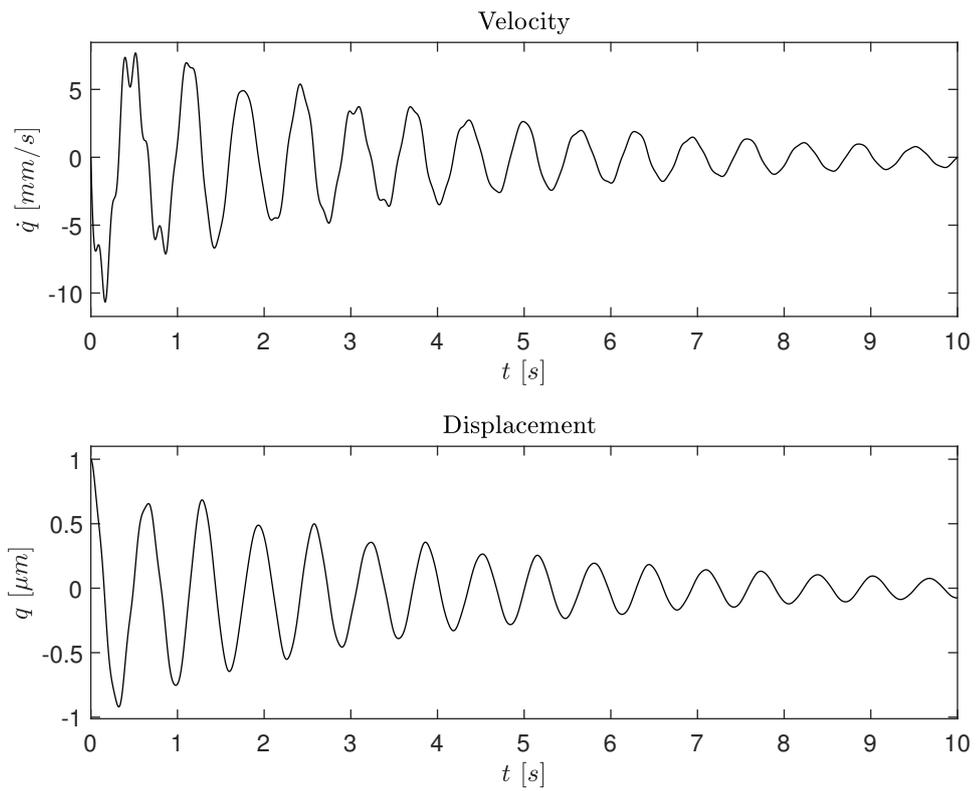
**Tabella 2.8:** Parametri del sistema a 4 gradi di libertà

**Caso1**  $c_i = 0.5 \text{ N/mm/s}$

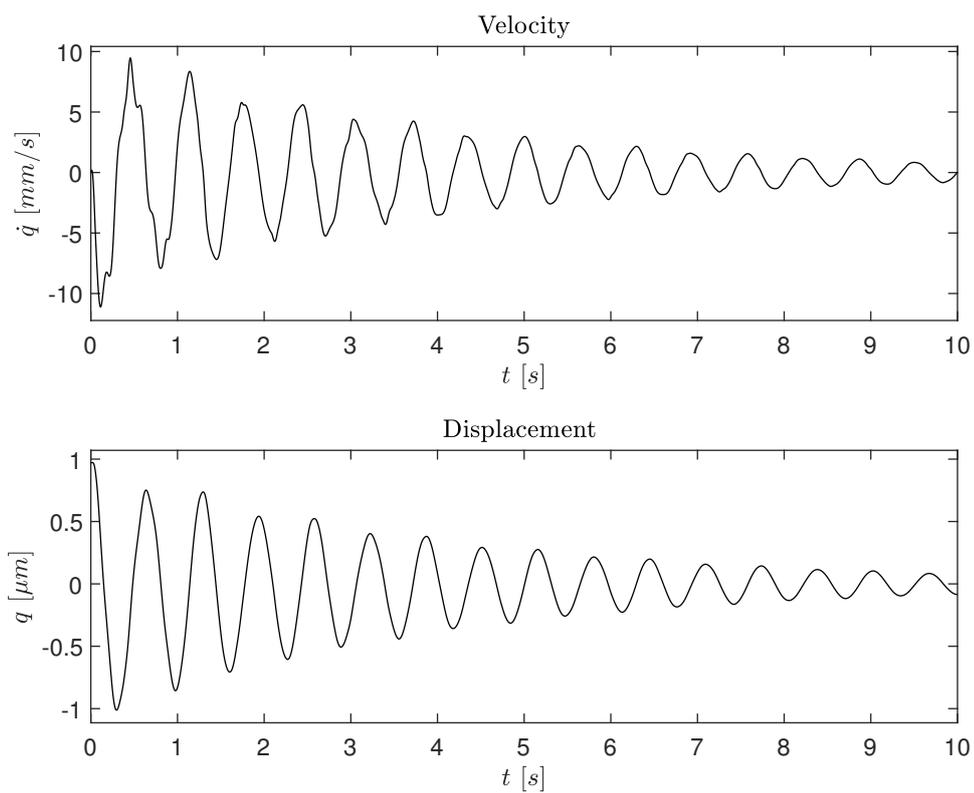
Il metodo di calcolo delle condizioni iniziali ricalca quello espresso in sez.2.2.2.

- $\dot{q}_i(t_0) = 0 \text{ mm/s}$  con  $i = 1 : 4$ ,
- $q_1(t_0) = 1 \text{ }\mu\text{m}$ .

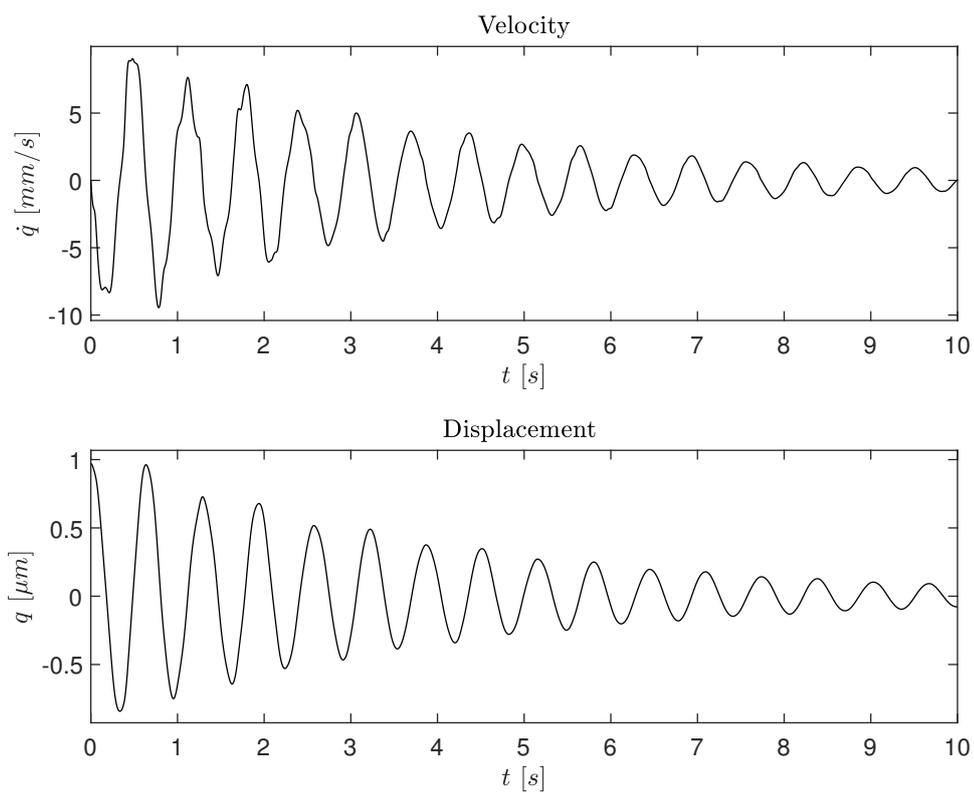
Per chiarezza espositiva, si riportano nel seguito i grafici relativi agli spostamenti e alle velocità del sistema.



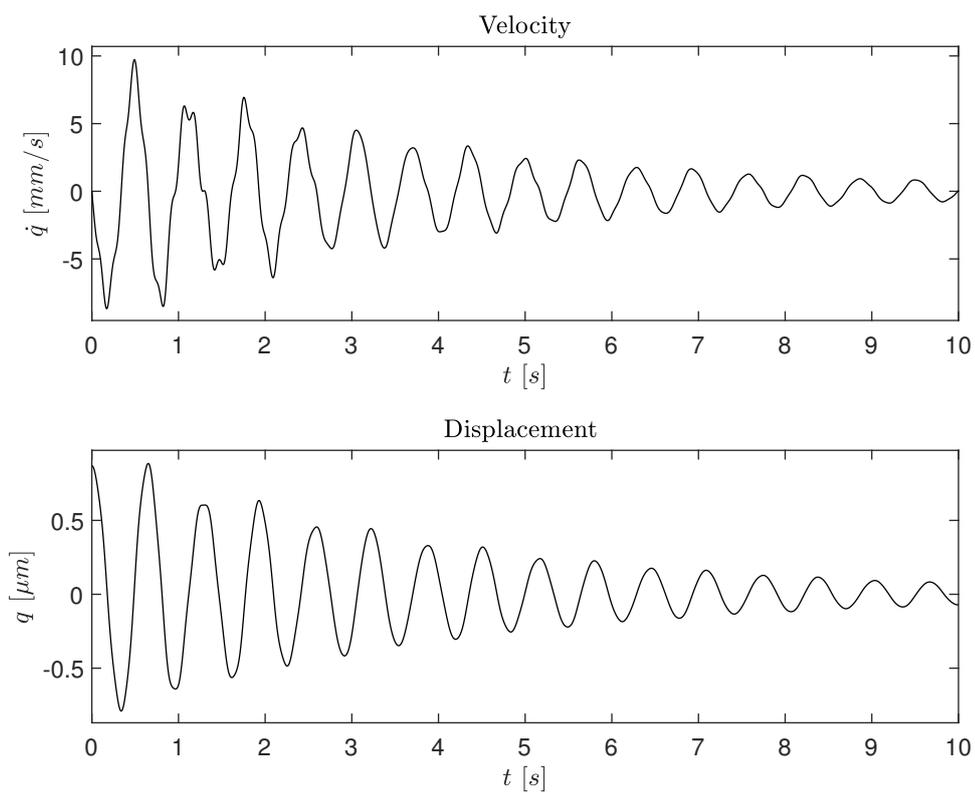
**Figura 2.49:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_1$



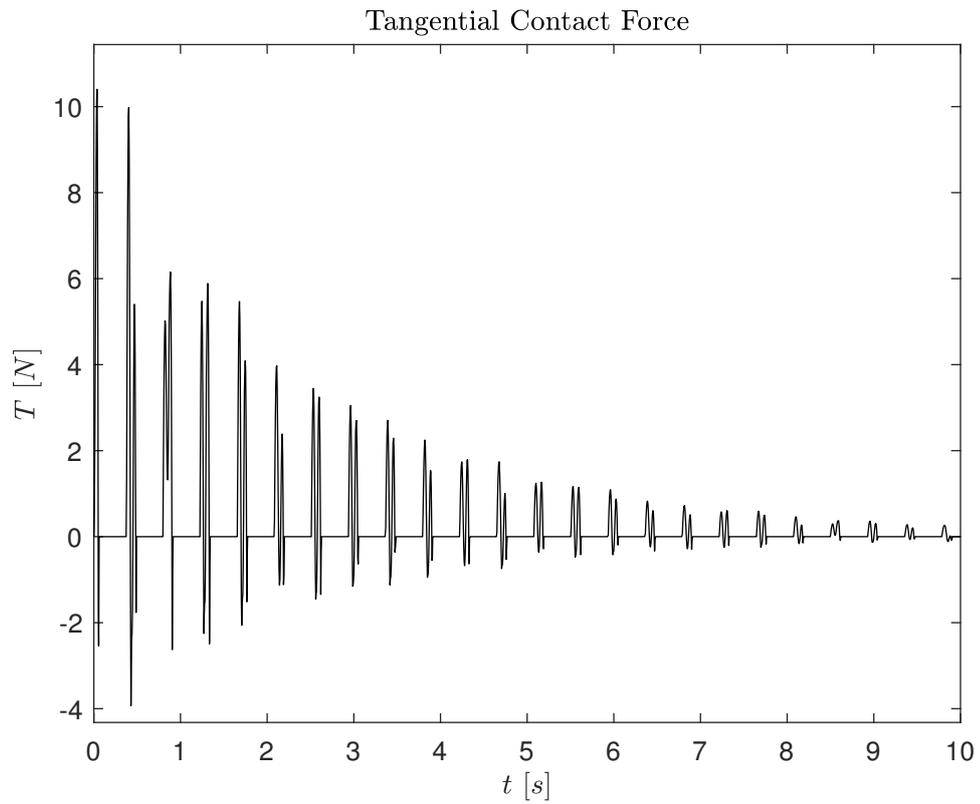
**Figura 2.50:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_2$



**Figura 2.51:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_3$

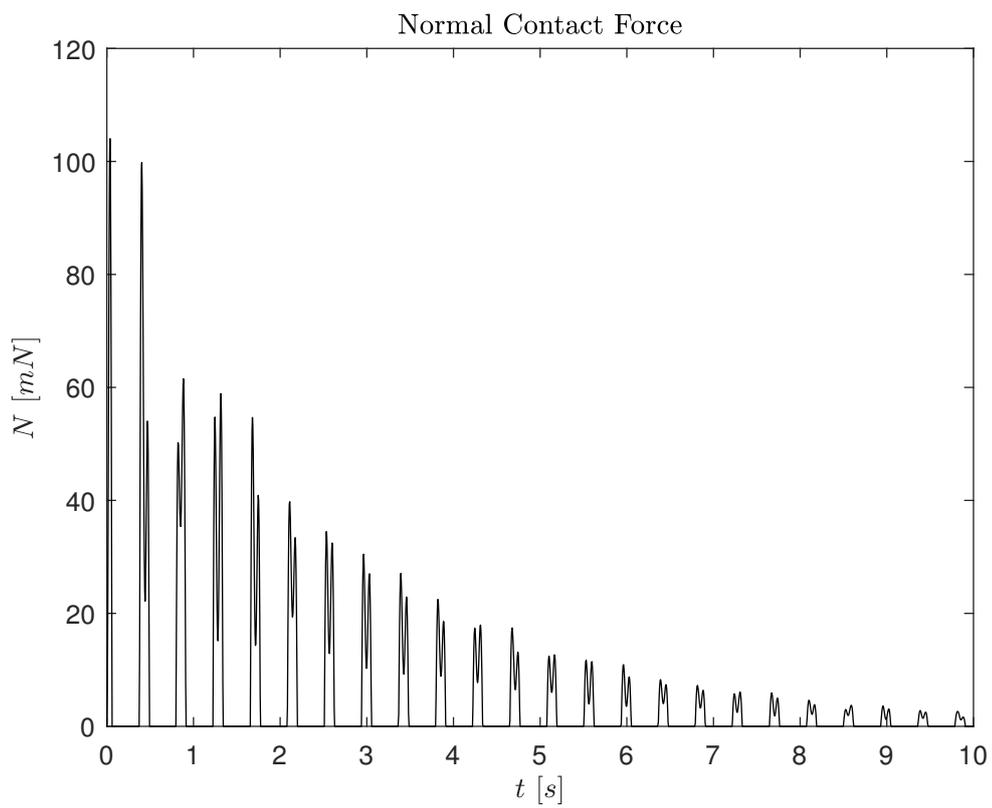


**Figura 2.52:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_4$

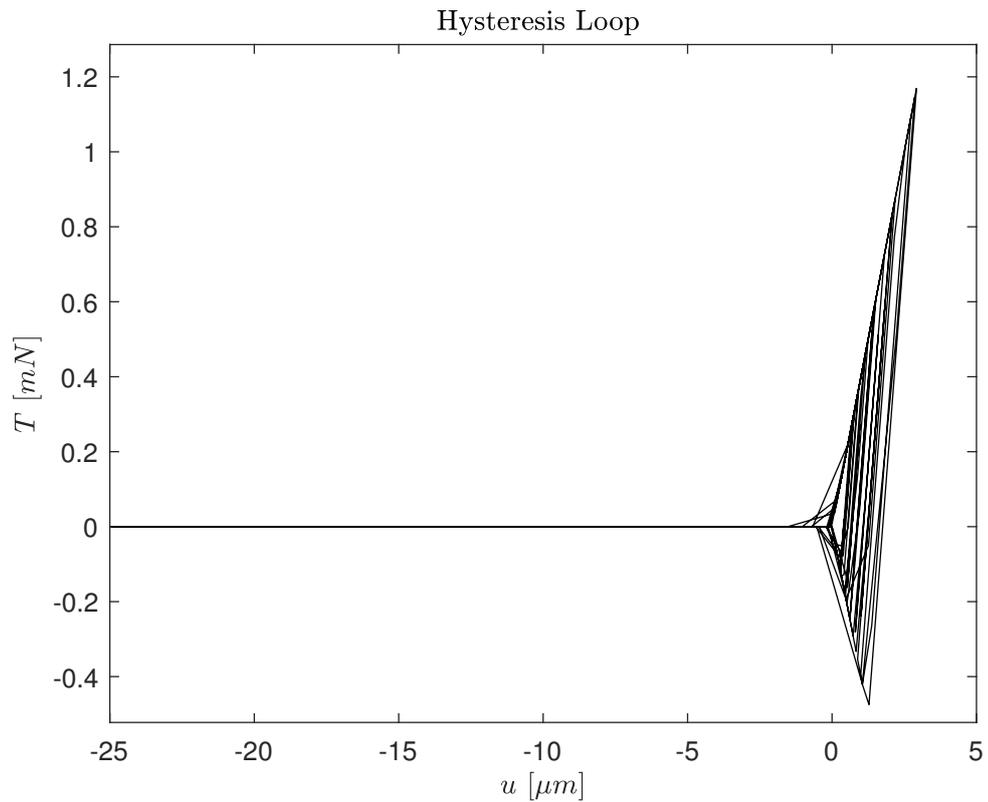


**Figura 2.53:** Forza di contatto tangenziale

In Fig.2.53 si riporta l'andamento della forza di contatto tangenziale, si sottolinea che, quando la forza assume valore nullo, si manifesta la condizione di *lift-off*. Analogamente, lo stesso fenomeno si verifica per la forza normale, riportata in Fig.2.54.



**Figura 2.54:** Forza di contatto normale



**Figura 2.55:** Ciclo di isteresi

La natura isteretica della forza di contatto è riportata in Fig.2.55. Per valori nulli il sistema è in condizione di *lift-off*, al crescere dello spostamento relativo  $u$ , si verificano due condizioni distinte: le rette che contornano l'area del ciclo rappresentano rispettivamente il *positive slip* e il *negative slip*, le rette interne al ciclo indicano le posizioni per cui il sistema è in stato di *stick*.

## 2.4 Modello numerico con 10 gradi di libertà e 4 interfacce di contatto

La maggiore specializzazione del modello, tesa all'ottenimento di un sistema che descriva al meglio delle proprie possibilità, il comportamento del sistema fisico in esame, sfocia nella formalizzazione di un modello a dieci gradi libertà. L'upgrade è imputabile alla necessità di descrivere con maggiore dettaglio i fenomeni di contatto che si sviluppano sulle interfacce che interessano la pala e gli slot. Data l'omogeneità del sistema, le masse in cui è suddivisa la pala e le relative rigidità sono identiche tra loro. In analogia, si è applicato lo stesso criterio per i corpi costituenti gli slot.

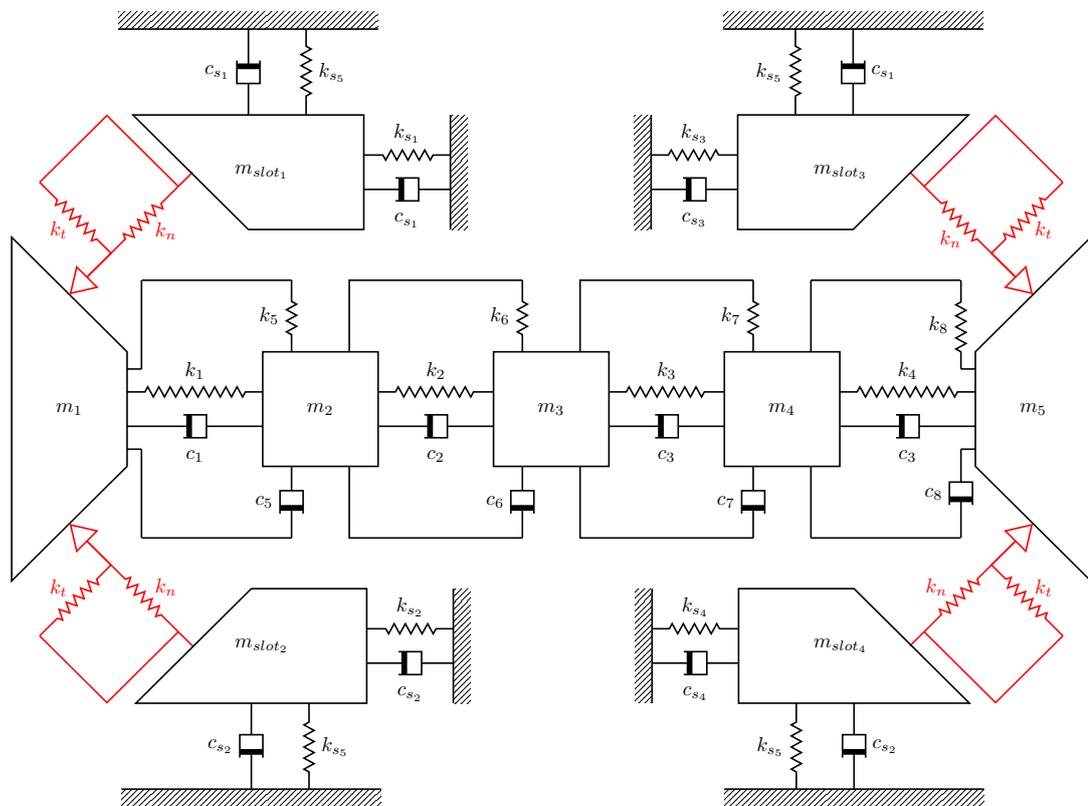


Figura 2.56: Modello 10 Dofs con 4 interfacce di contatto

### 2.4.1 Equazioni di Equilibrio nel dominio del tempo

La descrizione dello stato di equilibrio è affidata al diagramma di corpo libero riportato in Fig.2.57.

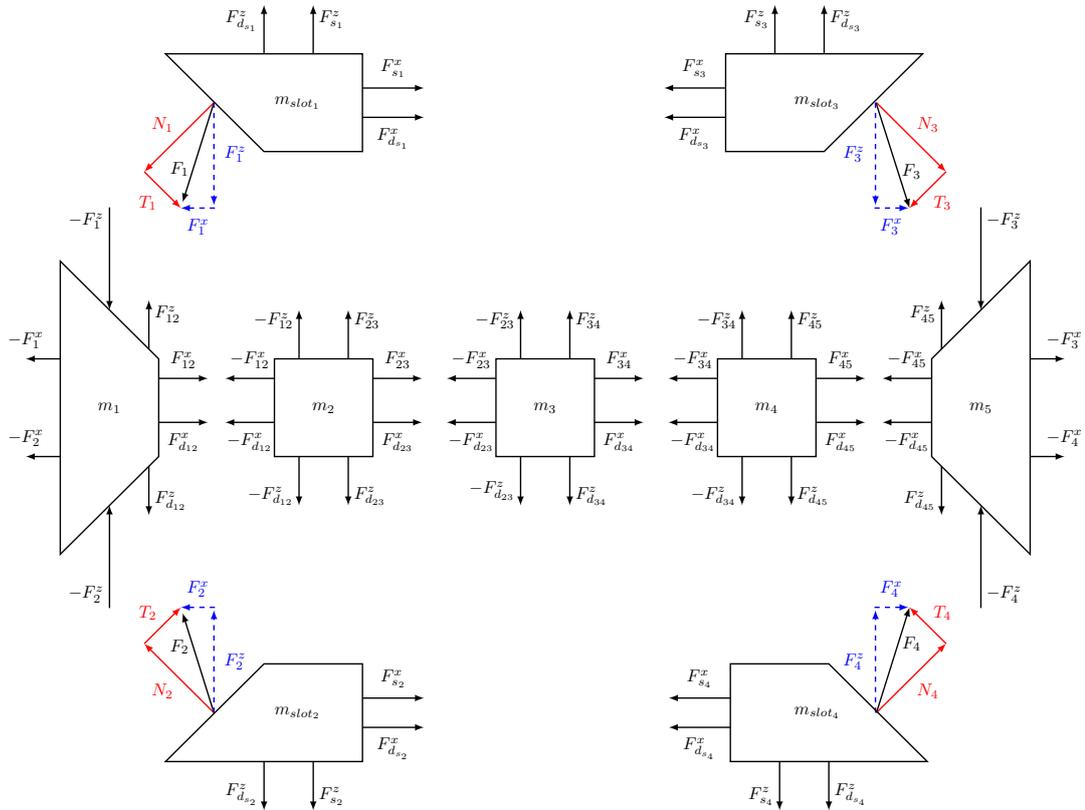


Figura 2.57: Diagramma di corpo libero del sistema

**Coordinate fisiche** Il comportamento temporale del sistema viene espresso, analogamente a quanto fatto in precedenza, in coordinate fisiche considerando le adeguate rotazioni dei sistemi di riferimento locali. Tuttavia, data la complessità intrinseca della soluzione del sistema fisico in coordinate cartesiane che si riflette in un costo computazionale esoso, si è effettuata la medesima analisi in coordinate modali.

**Coordinate modali** Ogni sistema dinamico può essere rappresentato nello spazio delle proprie forme modali a partire da una base costituita dagli stessi modi. Questa rappresentazione restituisce un sistema di equazioni linearmente indipendenti tra loro poichè i modi sono ortogonali, ottenendo un disaccoppiamento delle equazioni della dinamica.

Si è visto che per un sistema a  $N$  gradi di libertà, l'equazione del moto per il sistema forzato non smorzato assume la forma:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} \quad (2.61)$$

Definendo un vettore di gradi di libertà modali  $\{\bar{q}\}$ , dove il termine  $\{\bar{q}_i\}$  rappresenta l'ampiezza del modo  $i$ -esimo, è possibile riscrivere il vettore dei gradi di libertà fisici  $\{q\}$  come combinazione lineare dei modi propri del sistema attraverso la seguente relazione algebrica:

$$\{q(t)\} = [\Psi]\{\bar{q}(t)\} \quad (2.62)$$

dove la matrice  $[\Psi]$  rappresenta la matrice degli autovettori ottenuta dall'analisi modale del sistema libero non smorzato. Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico, si ottiene:

$$[M][\Psi]\{\ddot{q}\} + [K][\Psi]\{q\} = \{F(t)\} \quad (2.63)$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice degli autovettori:

$$[\Psi]^T[M][\Psi]\{\ddot{q}\} + [\Psi]^T[K][\Psi]\{\bar{q}\} = [\Psi]^T\{F(t)\} \quad (2.64)$$

Definendo la matrice modale di massa  $[M_{mod}]$  come  $[\Psi]^T[M][\Psi]$ , la matrice modale di rigidità  $[K_{mod}]$  come  $[\Psi]^T[K][\Psi]$  e il vettore modale di forze esterne  $F_{mod}$  come  $[\Psi]^T\{F\}$ , si ha:

$$[M_{mod}]\{\ddot{\bar{q}}\} + [K_{mod}]\{\bar{q}\} = \{F_{mod}(t)\} \quad (2.65)$$

Essendo i modi propri del sistema definiti a meno di una costante moltiplicativa, è possibile normalizzarli a piacere. La scelta più comune è la  $m$ -normalizzazione ovvero scalare i modi propri in modo tale che la matrice  $[m_{mod}]$  sia una matrice identità. Il modo  $m$ -normalizzato  $n$ -esimo si ottiene dividendo il modo  $n$ -esimo per un fattore di scala  $\alpha_n$ :

$$\{\Phi_n\} = \{\Psi_n\}/\alpha_n, \quad \alpha_n = \sqrt{\{\Psi\}^T[M]\{\Psi\}} \quad (2.66)$$

Si ottiene quindi:

$$[I]\{\ddot{\bar{q}}\} + [K_{mod}]\{\bar{q}\} = \{F_{mod}(t)\} \quad (2.67)$$

Il sistema di equazioni in coordinate modali è disaccoppiato in quanto le matrici hanno forma diagonale. Pertanto, il sistema si trasforma in un sistema costituito da  $n$  sistemi massa-molla indipendenti.

**Definizione della matrice di smorzamento** Nel caso di sistema forzato smorzato a  $N$  gradi di libertà, le equazione del moto sono:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = F(t) \quad (2.68)$$

dove  $[C]$  rappresenta la matrice di smorzamento. In questo elaborato si è implementato uno smorzamento strutturale equivalente:

$$c_i = \frac{\eta\omega_i^2}{\omega_{ex}} \quad (2.69)$$

A partire dalla definizione di questo smorzamento, la componente viscosa è tutta attribuibile alle forze di contatto.

**Definizione delle condizioni iniziali** Analogamente con quanto fatto in precedenza, in cui le condizioni iniziali si ottenevano mediante l'imposizione di una deformazione ottenuta tramite stati di equilibrio successivi, in questo caso è necessario inserire anche una forza di tiro. Data l'ipotesi di piccoli spostamenti, che garantisce in questa fase un comportamento lineare, è possibile operare mediante sovrapposizione degli effetti.

Di conseguenza, la determinazione delle condizioni iniziali del sistema è suddivisa in due fasi successive: in un primo momento la forza assiale di tiro, tradotta come reazione vincolare, è ottenuta iterativamente e converge al valore di target mediante un ricalcolo degli spostamenti ad ogni step.

Successivamente, al sistema appena ottenuto si impone uno spostamento pari all'autovettore corrispondente alla frequenza a cui si vuole eccitare il sistema. Il risultato è un sistema di condizioni iniziali espresse agli spostamenti che contempla il tiro applicato e la deformata iniziale.

## 2.4.2 Risultati

Si riportano i risultati del caso in esame, i parametri invarianti del sistema sono riportati in Tab.2.9.

Parametri	Valori
$m_i$ con $i = 1, \dots, 5$ [kg]	0.1378
$m_{s_i}$ con $i = 1, \dots, 4$ [kg]	0.1412
$k_{x_i}$ con $i = 1, \dots, 5$ [N/mm]	130e3
$k_{z_i}$ con $i = 1, \dots, 5$ [N/mm]	2.5e3
$k_{x_{s_i}}$ con $i = 1, \dots, 4$ [N/mm]	5.5e4
$k_{z_{s_i}}$ con $i = 1, \dots, 4$ [N/mm]	0.65e4
$k_2 = k_3$ [N/mm]	10e2
$k_n$ [N/mm]	1.32e6
$k_t$ [N/mm]	1.98e6
$\mu$ ( <i>friction coefficient</i> )	0.5
$F_i$ con $i = 1, \dots, 5$ [N]	$\emptyset$

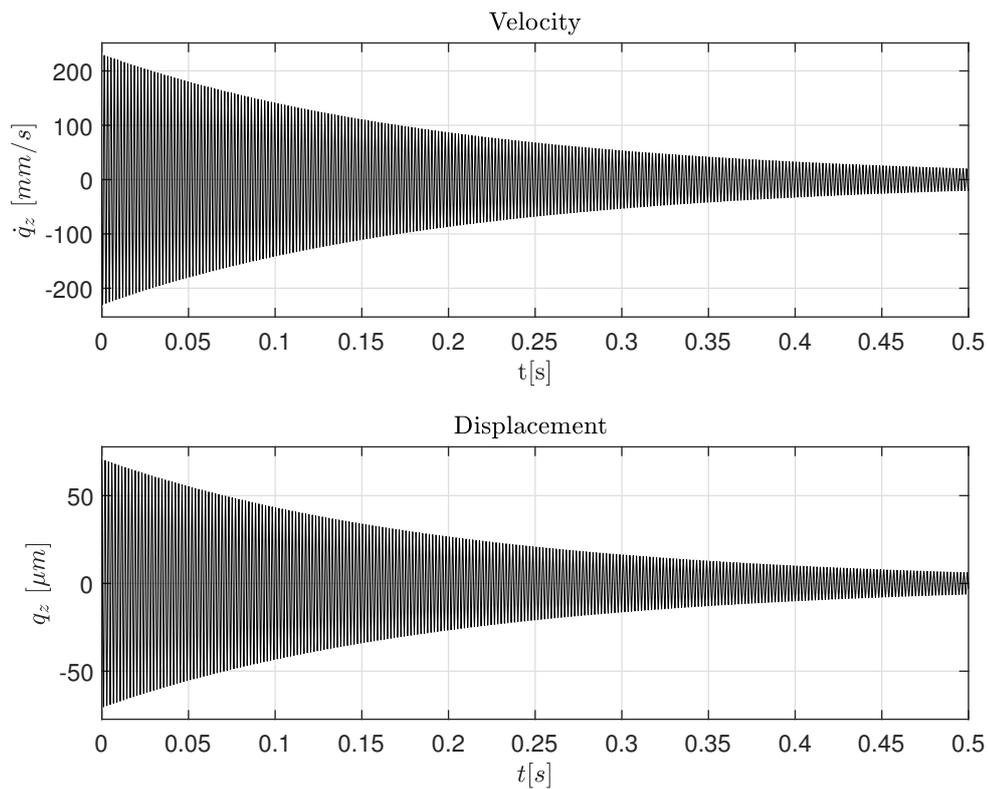
**Tabella 2.9:** Parametri globali del sistema

Il metodo di calcolo delle condizioni iniziali ricalca quello espresso in sez.2.4.1, nel seguito riportano i valori delle condizioni iniziali relative all'integrazione temporale e a realizzare le condizioni di tiro ideali.

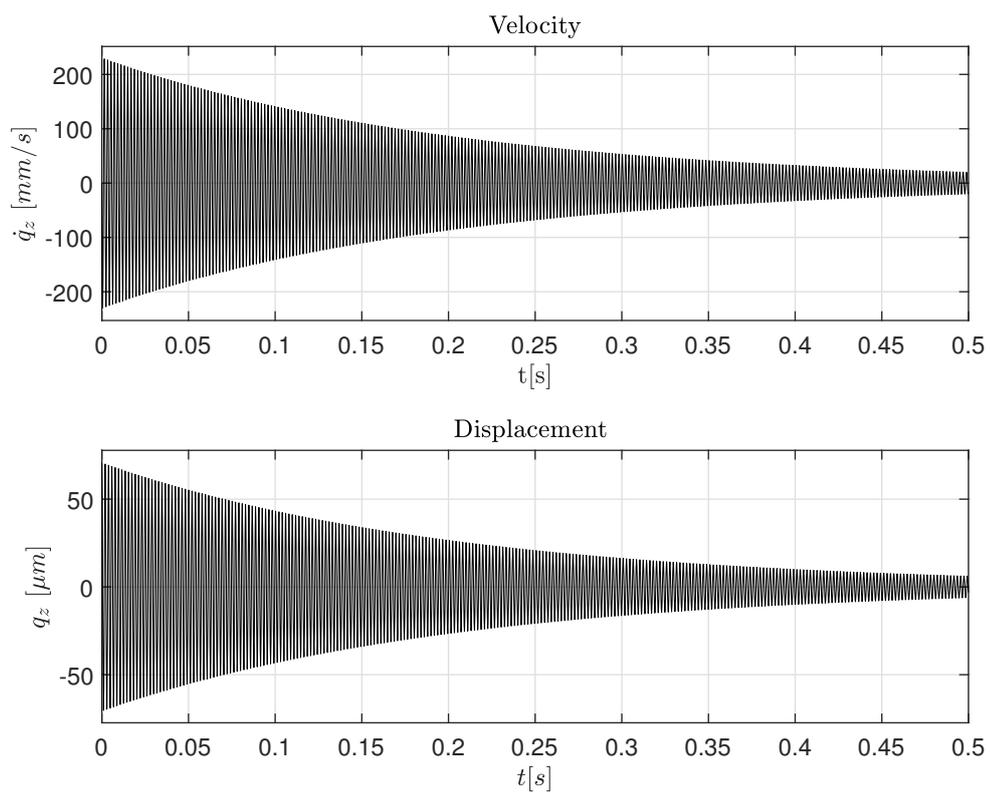
- $\dot{q}_{x_i}(t_0) = 0$  mm/s con  $i = 1 : 4$ ,
- $\dot{q}_{z_i}(t_0) = 0$  mm/s con  $i = 1, : 4$ ,
- $q_{x_{si}}(t_0) = 0$  mm con  $i = 1,2$ ,
- $q_{z_{si}}(t_0) = 0$  mm con  $i = 1,2$ ,
- $q_{x_{si}}(t_0) = 0$  mm con  $i = 3,4$ ,
- $q_{z_{si}}(t_0) = 5e^{-3}$  mm con  $i = 3,4$

Il sistema viene forzato a vibrare secondo la prima forma modale mediante l'imposizione del primo autovettore normalizzato rispetto al massimo.

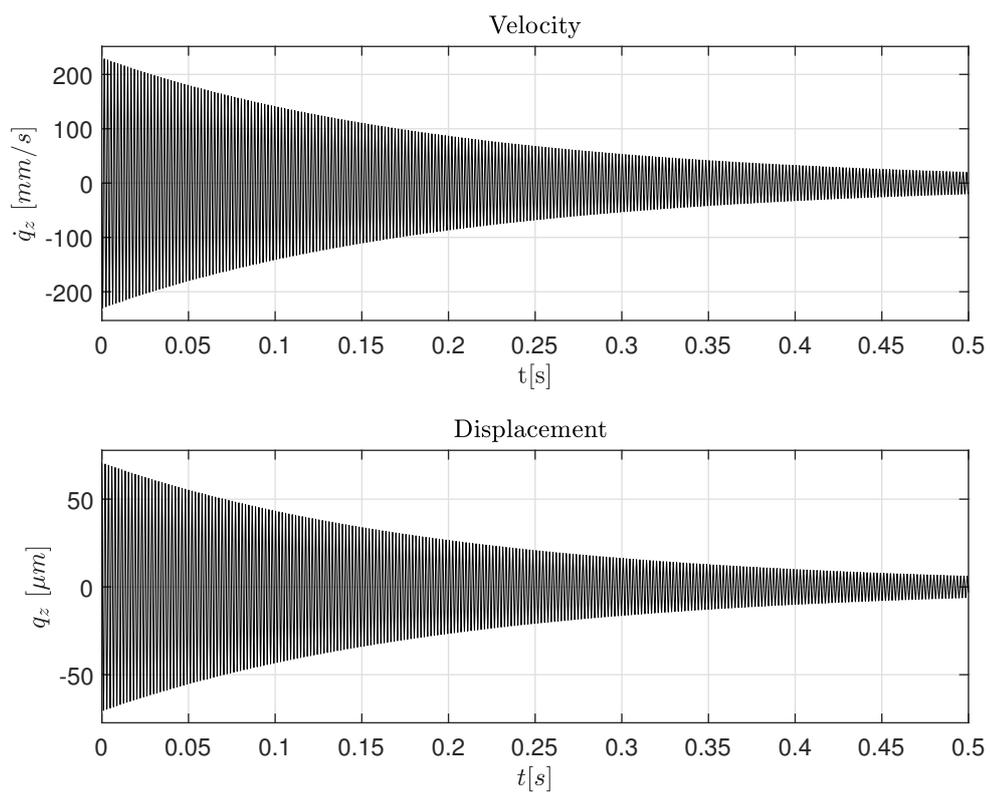
**Coordinate Fisiche** Di seguito si riportano i risultati relativi alla risoluzione in coordinate fisiche.



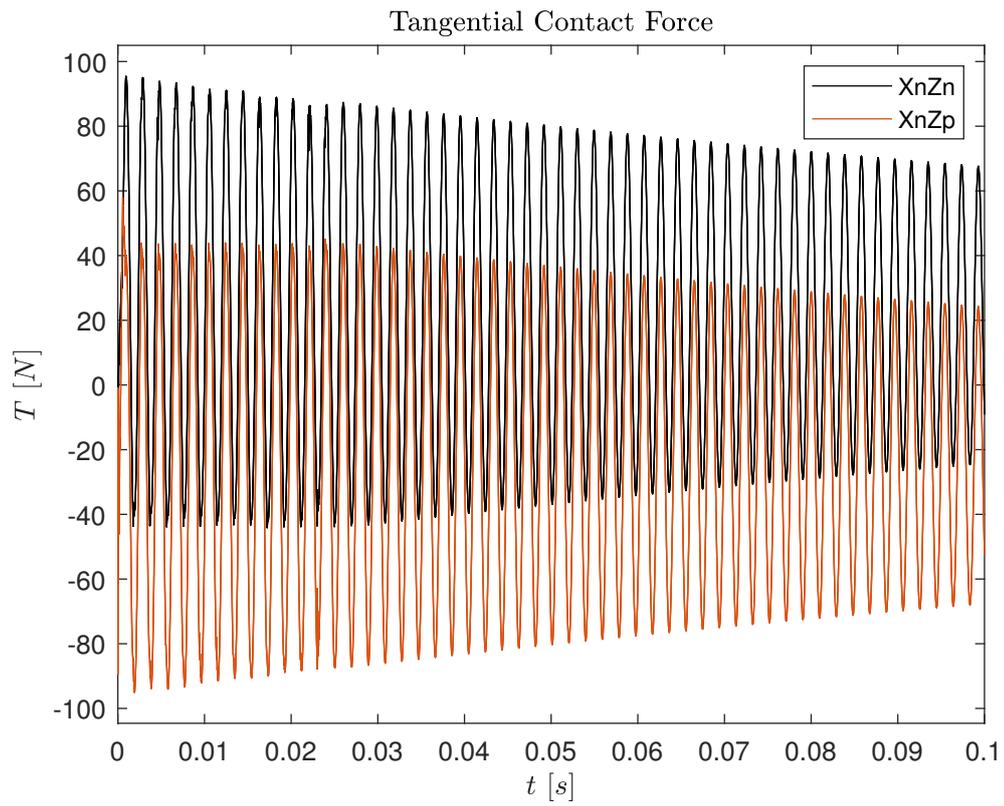
**Figura 2.58:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_3$



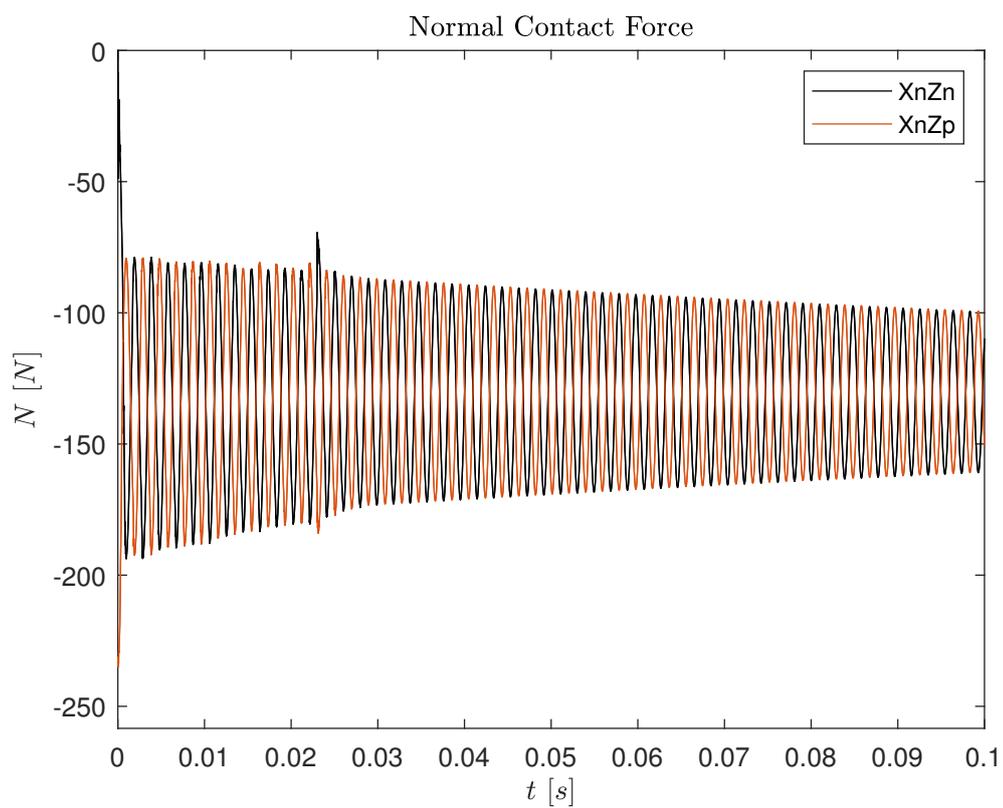
**Figura 2.59:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_2$



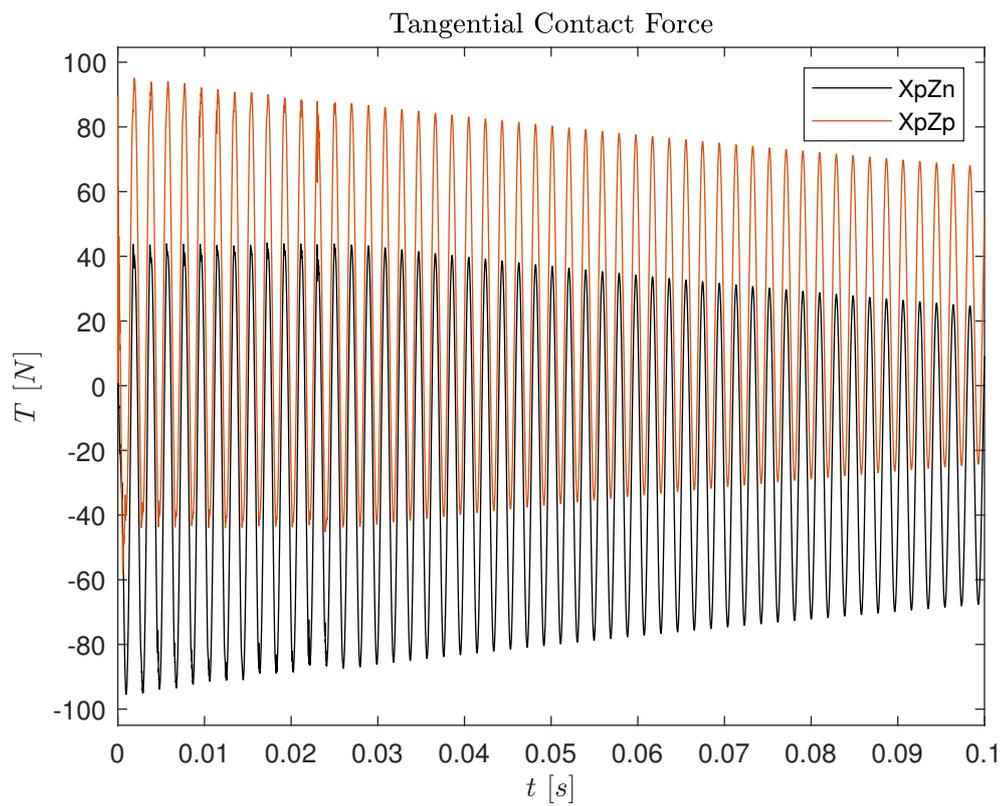
**Figura 2.60:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_4$



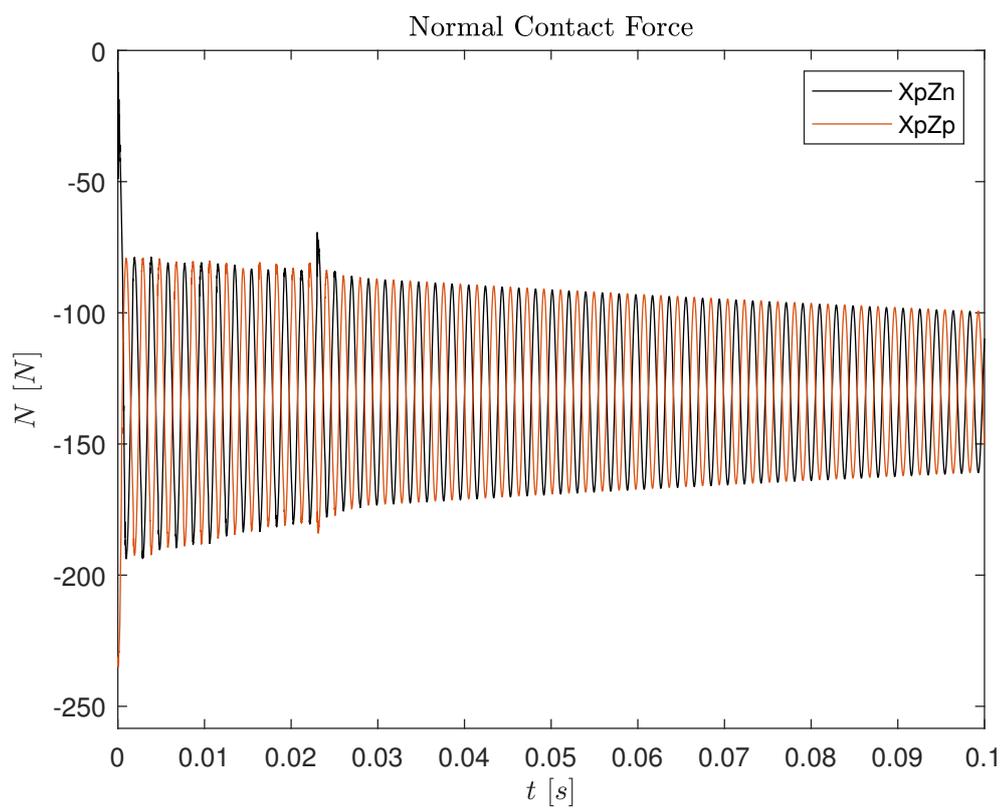
**Figura 2.61:** Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa  $m_1$



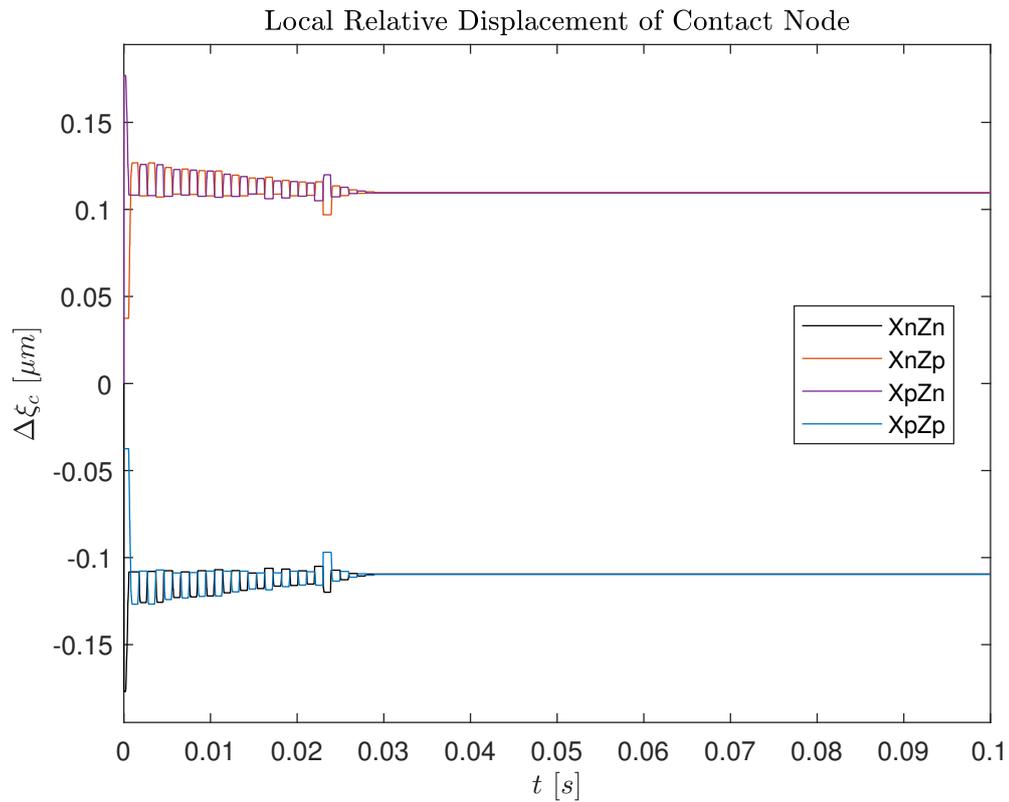
**Figura 2.62:** Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa  $m_1$



**Figura 2.63:** Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa  $m_5$

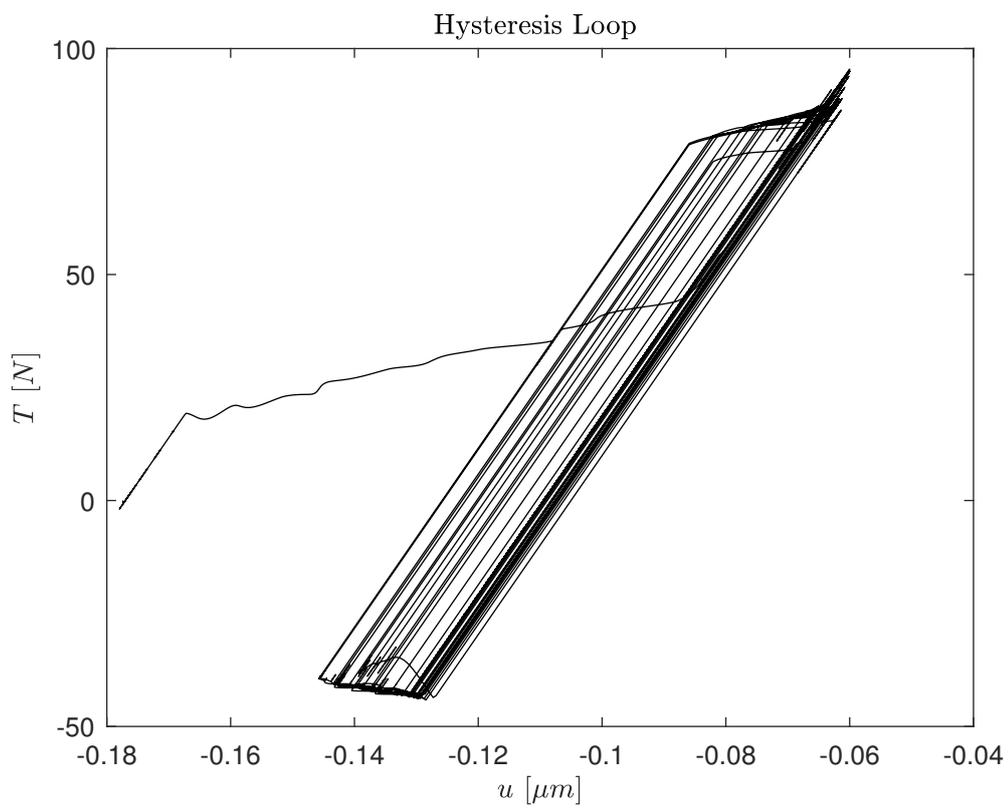


**Figura 2.64:** Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa  $m_5$

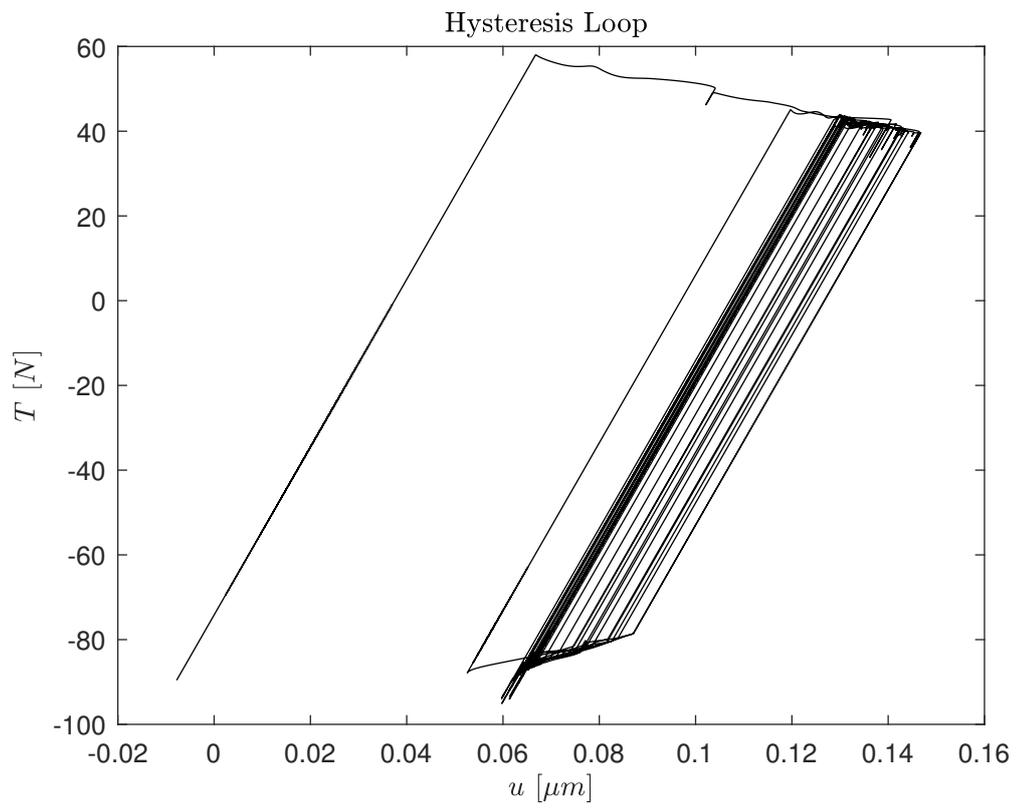


**Figura 2.65:** Time History degli spostamenti relativi dei nodi di contatto nel sistema di riferimento locale

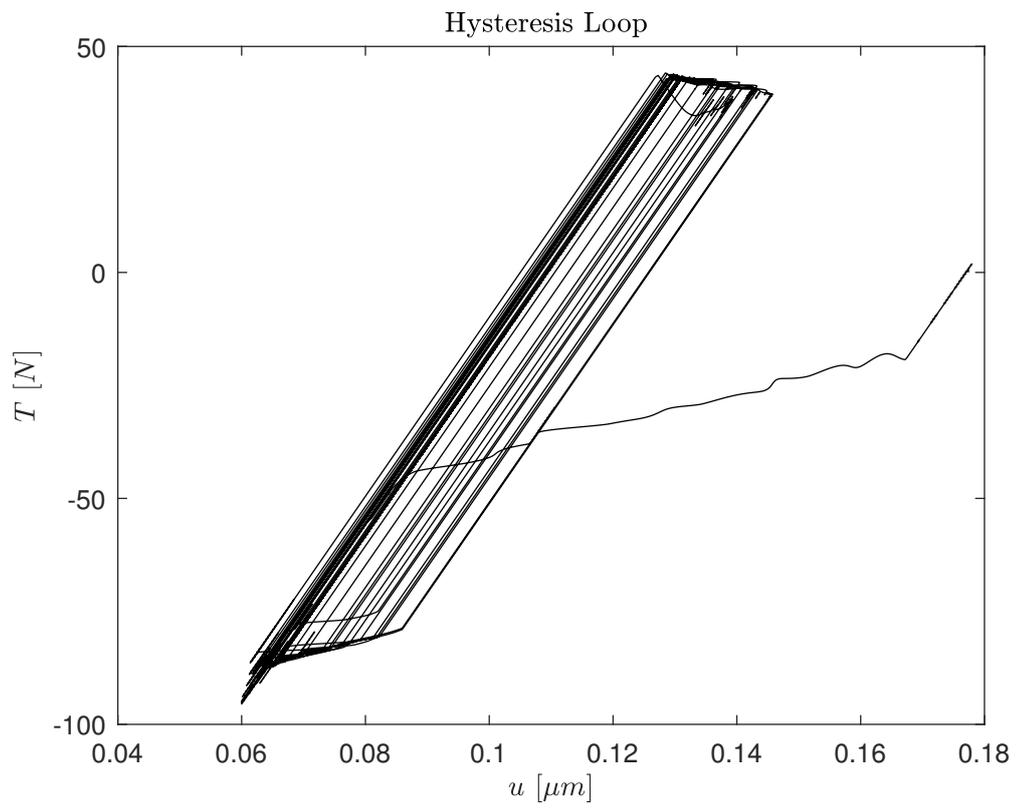
La Fig.2.65 rappresenta l'andamento temporale dello spostamento relativo del nodo di contatto, i tratti costanti indicano la condizione di *stick* mentre quanto il segnale varia si ha una condizione di *slip*. Analogamente ai casi precedenti, i valori nulli testimoniano la condizione di *lift-off*, la quale tuttavia non si manifesta in questo caso.



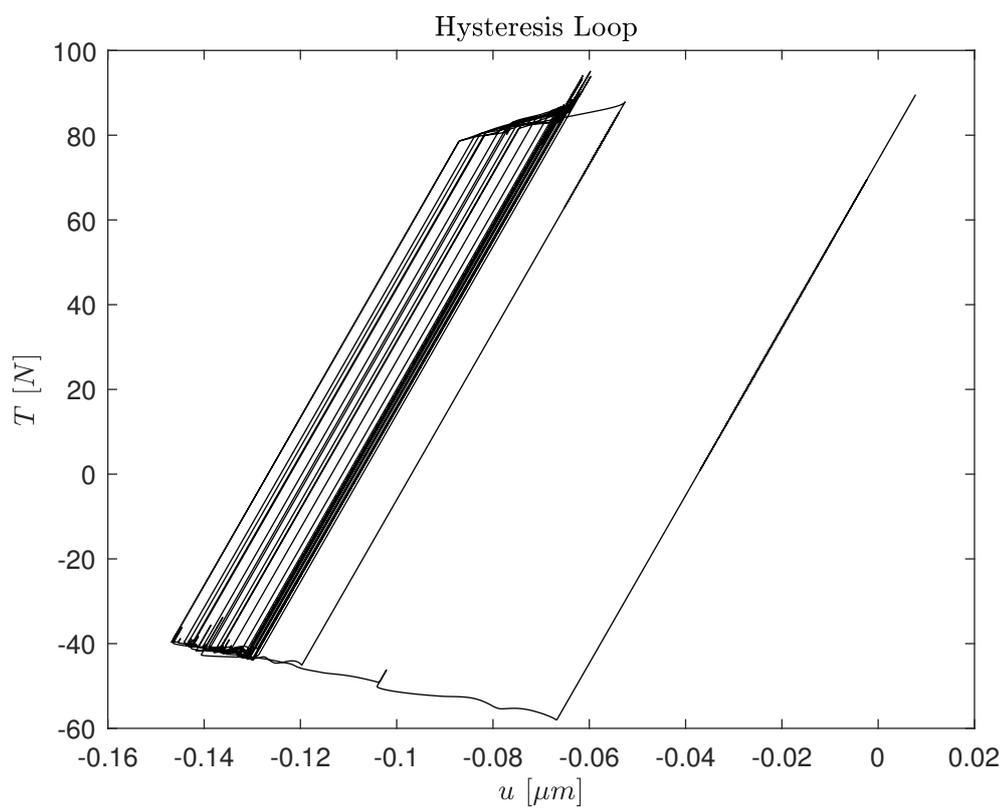
**Figura 2.66:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 1



**Figura 2.67:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 2

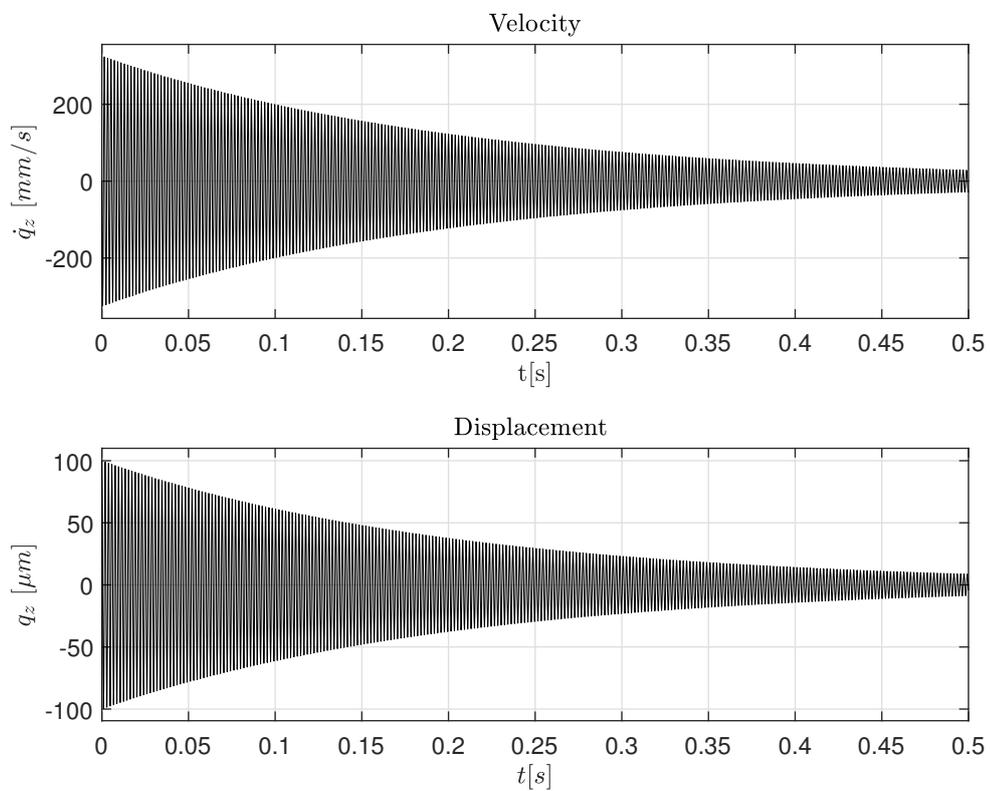


**Figura 2.68:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 3

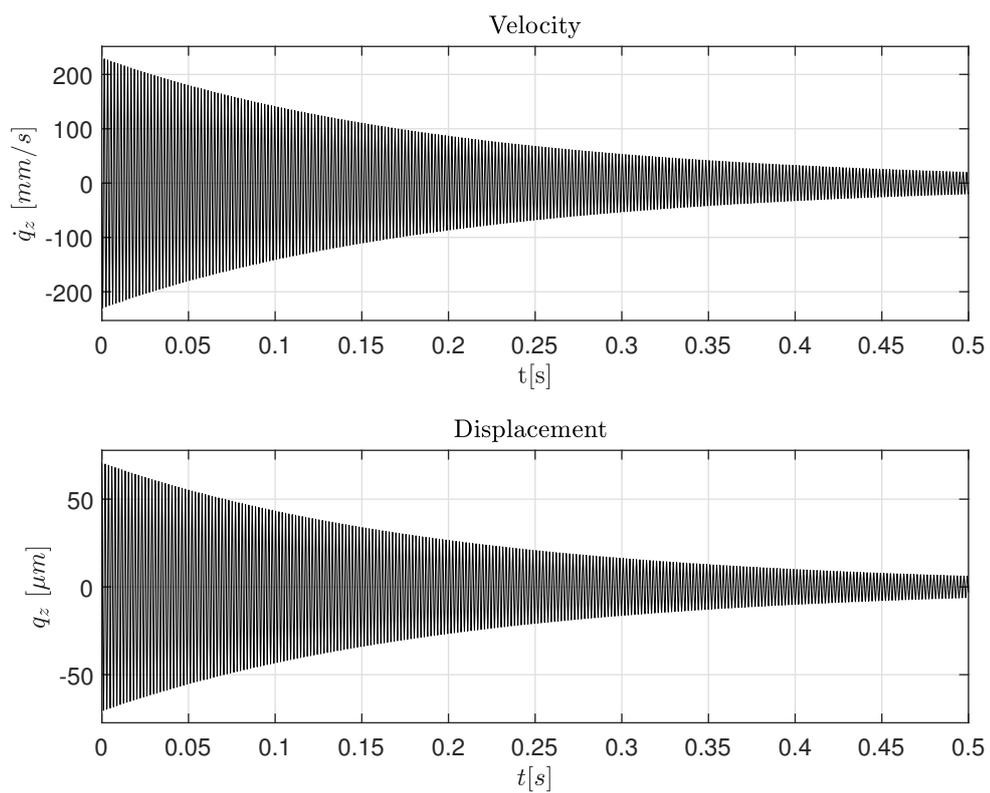


**Figura 2.69:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 4

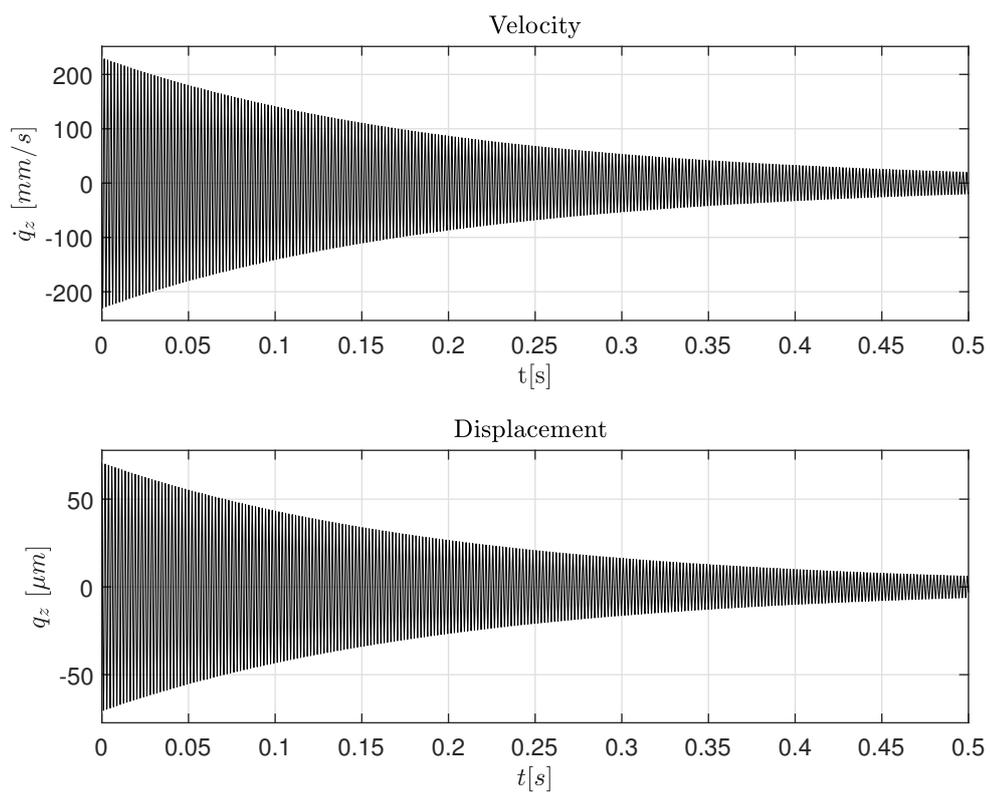
**Coordinate Modali** Si riportano i risultati relativi alla soluzione in coordinate modali.



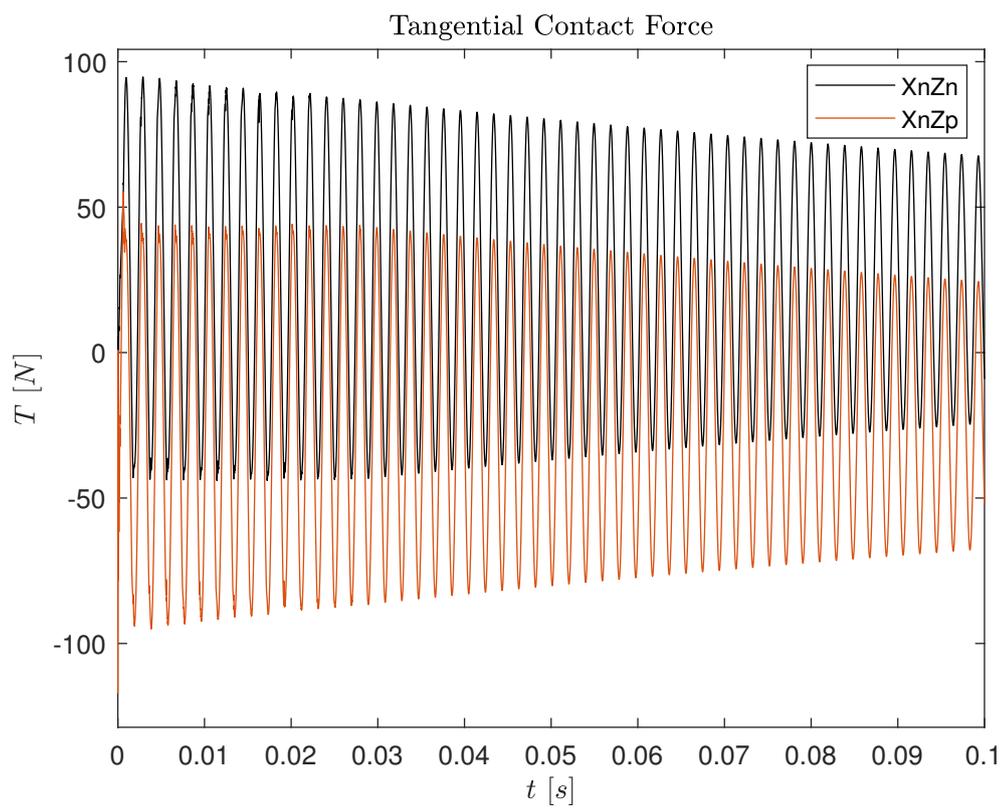
**Figura 2.70:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_3$



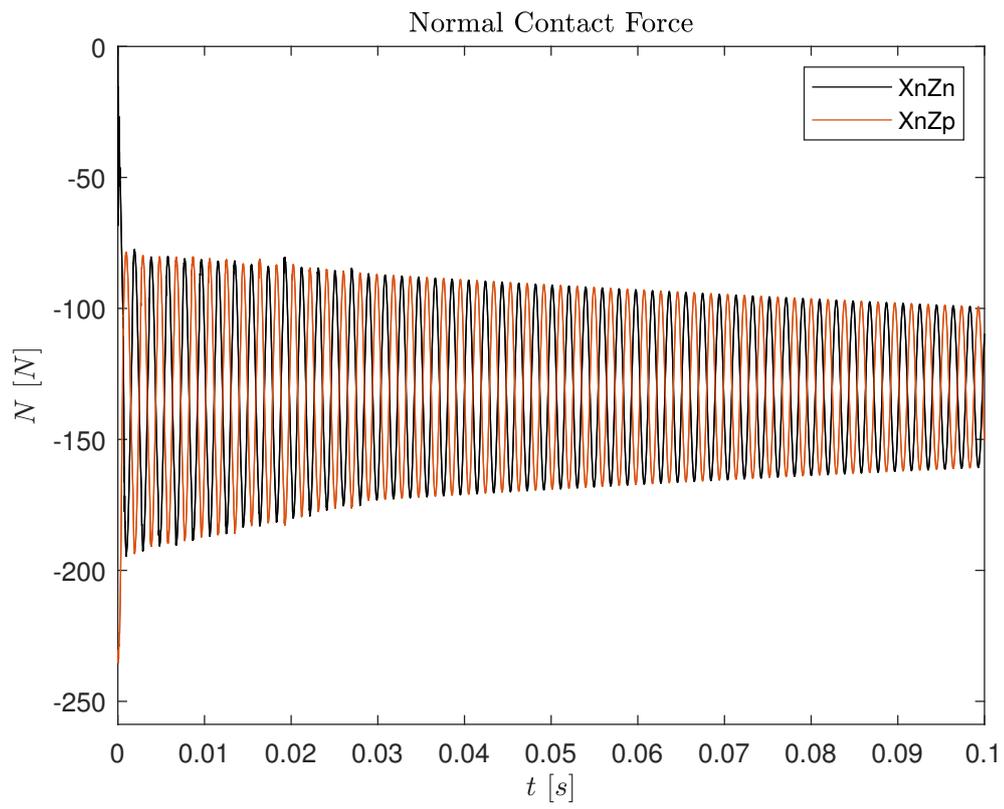
**Figura 2.71:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_2$



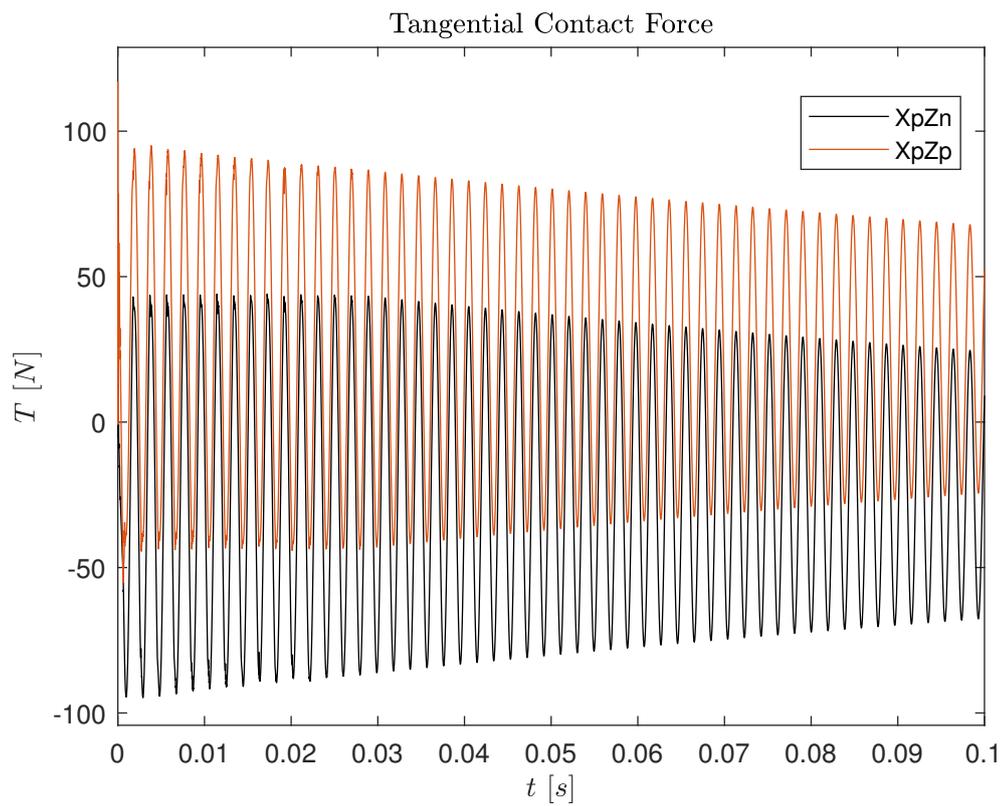
**Figura 2.72:** Time History della velocità e dello spostamento per la massa  $m_4$



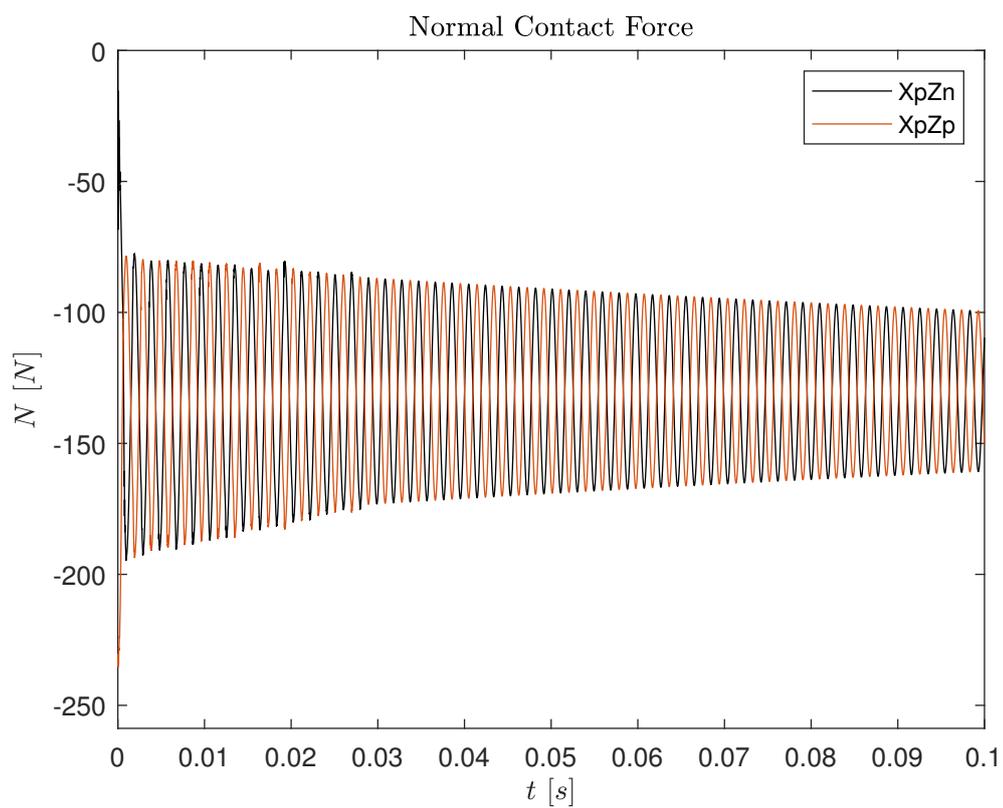
**Figura 2.73:** Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa  $m_1$



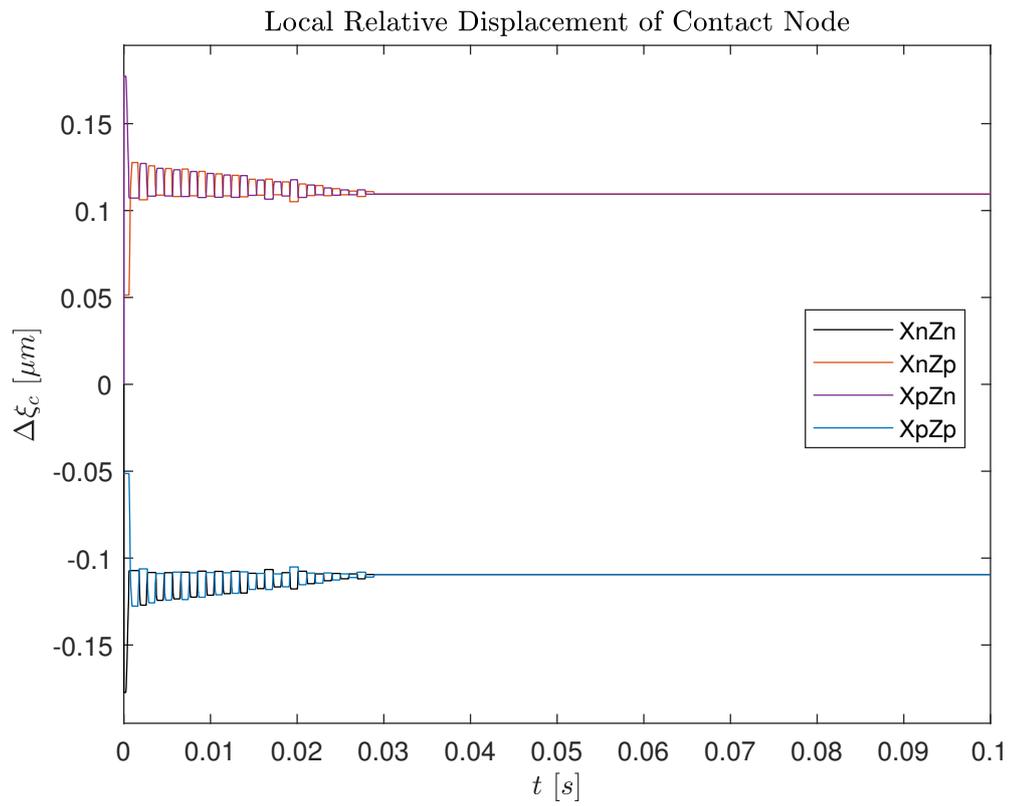
**Figura 2.74:** Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa  $m_1$



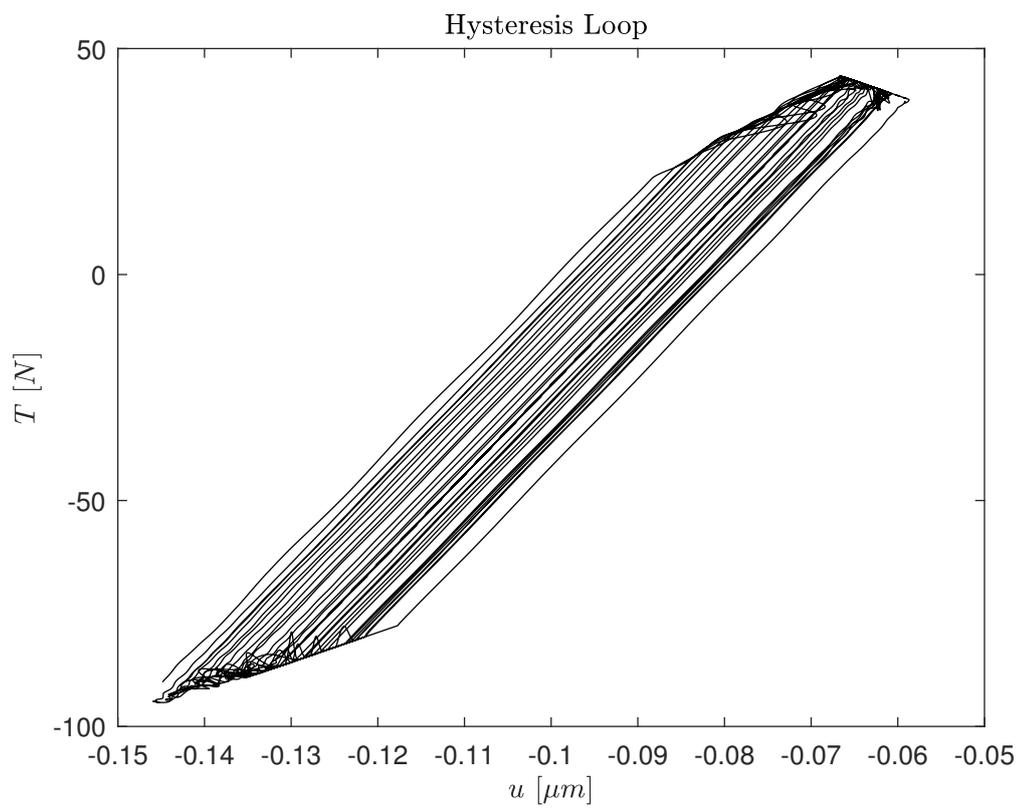
**Figura 2.75:** Time History delle forze tangenziali di contatto agenti sulla massa  $m_5$



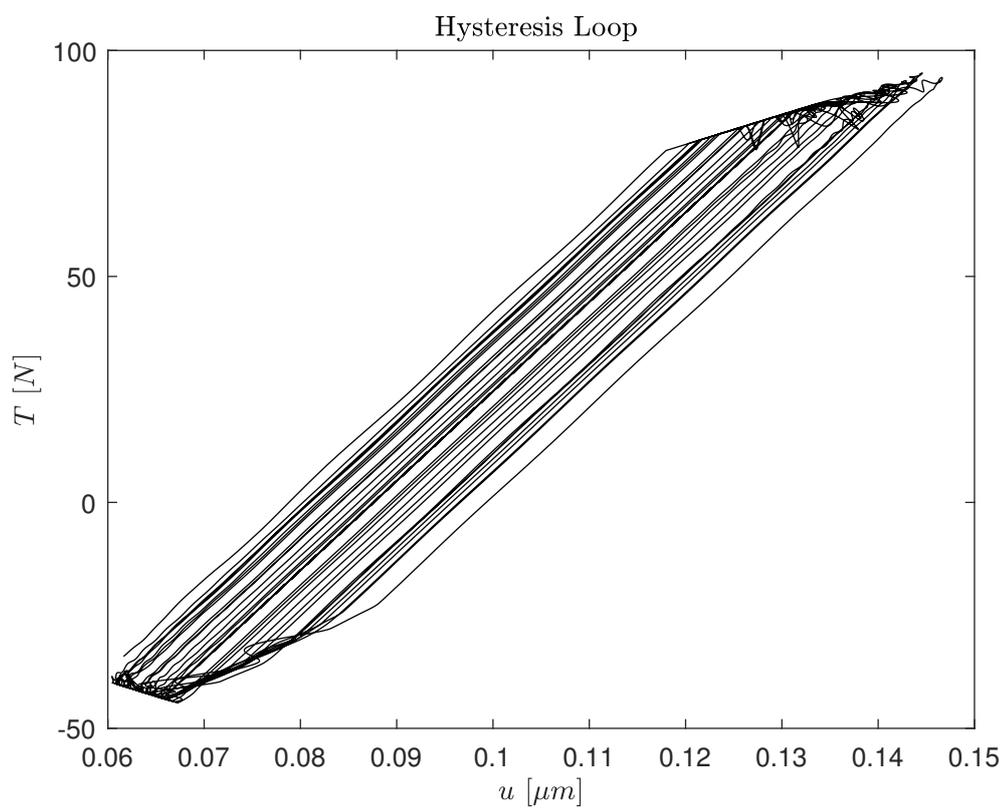
**Figura 2.76:** Time History delle forze normali di contatto agenti sulla massa  $m_5$



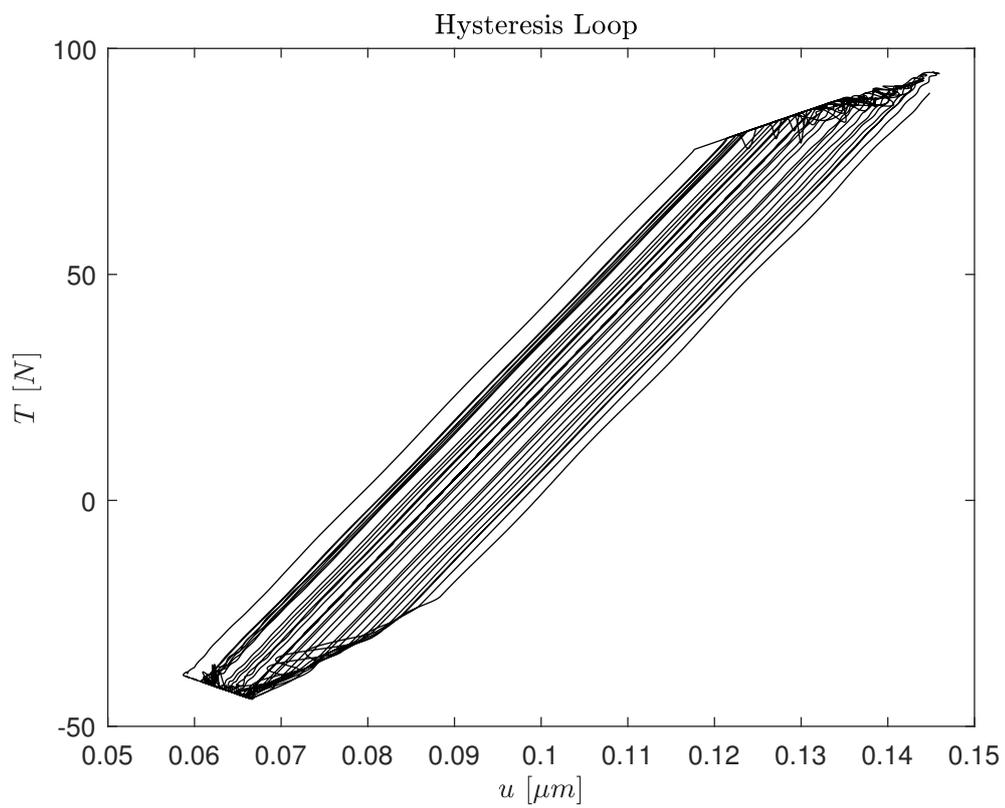
**Figura 2.77:** Time History degli spostamenti relativi dei nodi di contatto nel sistema di riferimento locale



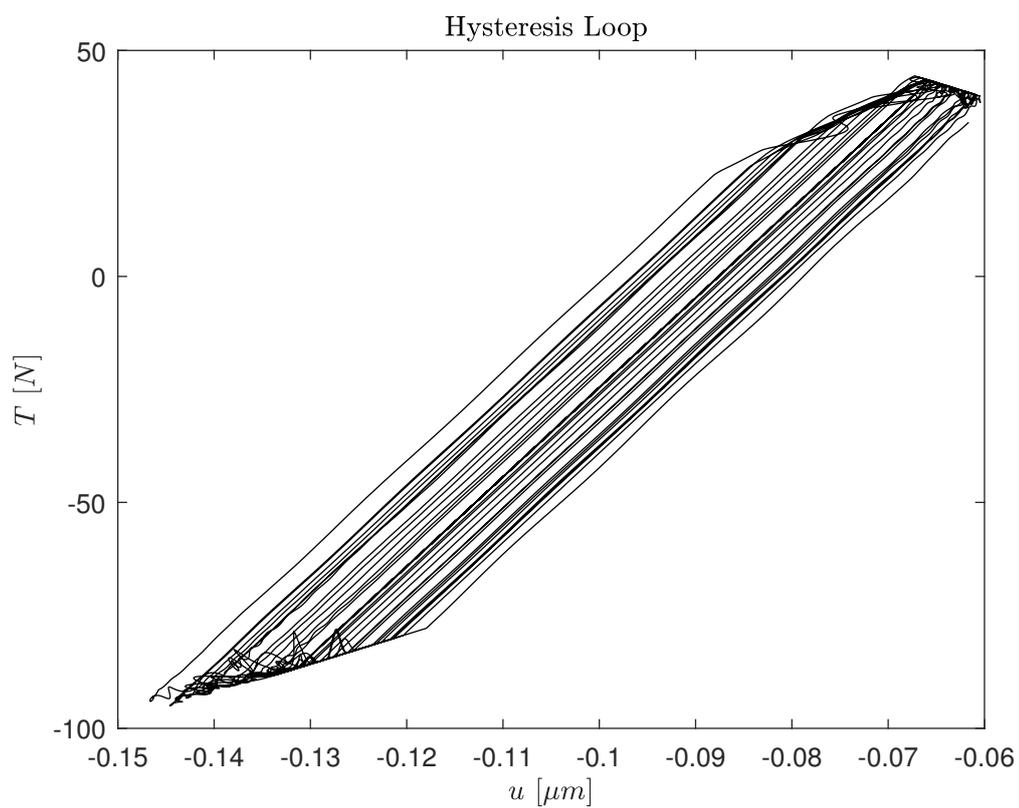
**Figura 2.78:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 1



**Figura 2.79:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 2



**Figura 2.80:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 3



**Figura 2.81:** Ciclo di isteresi per interfaccia di contatto con slot 4

## 2.5 Modello Numerico M-Dofs

La formalizzazione di un modello di contatto robusto deve essere estensibile a modelli a numerosi gradi di libertà, nel caso specifico si è partiti da un modello agli elementi finiti (FE) del setup sperimentale, realizzato in ambiente Ansys. Quest'ultimo ha rappresentato la sorgente da cui ottenere le matrici di massa e rigidità di dimensione pari al numero di nodi del modello. Successivamente, queste matrici sono state manipolate mediante adeguati metodi di riduzione, per poter essere importate in ambiente Matlab. Al fine di verificare la validità dei dati di input, è stata effettuata un'analisi modale confrontando, in termini di frequenza, i risultati numerici e sperimentali.

Ottenuta una preliminare validazione delle caratteristiche di massa e rigidità, quindi in assenza di contatto, si è poi definito un modello di contatto non lineare che potesse descrivere il comportamento reale del fenomeno.

### 2.5.1 Modello agli Elementi Finiti

Il setup sperimentale è stato modellato in ambiente Ansys mediante il Metodo agli Elementi Finiti, qui sono state importati i tre componenti del setup sperimentale, i quali sono stati discretizzati con elementi solidi esaedrici lineari di tipo SOLID185 a 8 nodi. La scelta di elementi solidi di questo tipo ha una duplice motivazione, la modellazione lineare descrive adeguatamente il comportamento del materiale, che, essendo un acciaio, presenta delle curve sforzo-deformazione altamente lineari entro i limiti di esercizio; dall'altro lato consente l'ottenimento di una mesh strutturata nella quasi totalità della geometria.

Tuttavia, dato che nelle interfacce slot-blade si assiste a delle variazioni repentine di curvatura, il pattern della mesh è stato volutamente infittito al fine di cogliere, al massimo delle capacità del modello considerato, variazioni di carico e deformazione. In aggiunta, proprio sui nodi di interfaccia è stata imposta la coincidenza spaziale al fine di garantire una totale corrispondenza tra elementi contigui della trave e dello slot, caratteristica necessaria per le successive analisi. Non avendo applicato alcun algoritmo di *equivalence*, i nodi contigui mantengono distinte le loro proprietà pur condividendo le coordinate spaziali.

### 2.5.2 Riduzione Craig-Bampton

Per le successive analisi è stato necessario adottare un metodo di riduzione dei gradi di libertà associati alla struttura in modo tale da ottenere una descrizione compatta della dinamica strutturale del componente mantenendo il livello di dettaglio del modello FE originale, facilitarne l'analisi e ridurre il tempo di calcolo [12]. Il metodo di riduzione utilizzato è il metodo di Craig-Bampton (CB-CSM), il quale

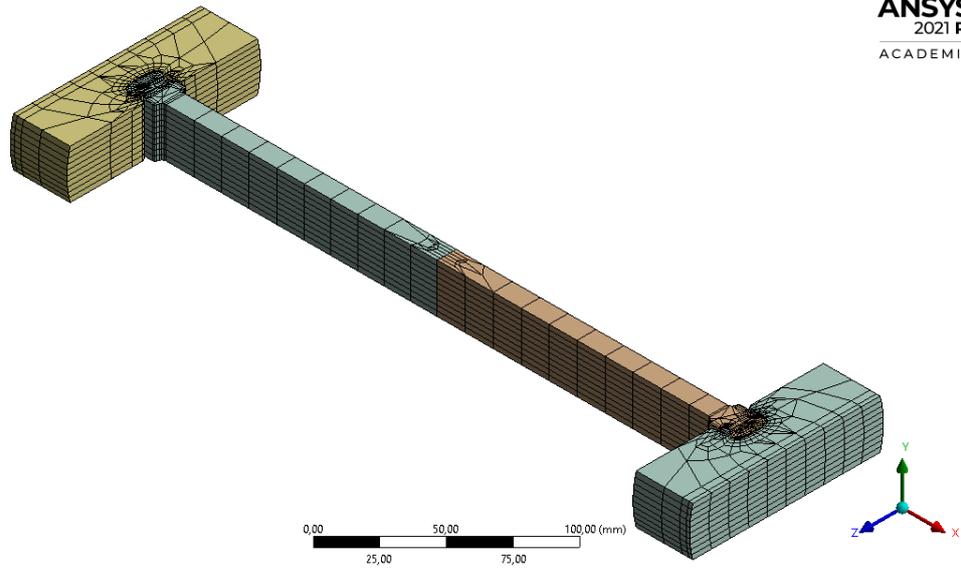


Figura 2.82: Modello FE Setup Sperimentale

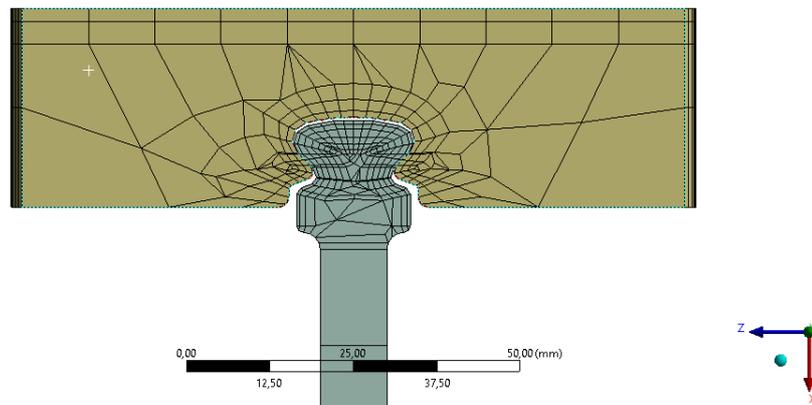


Figura 2.83: Interfaccia di Contatto

permette di descrivere il comportamento dinamico della struttura in termini di un numero limitato di modi.

Secondo questa tecnica, i gradi di libertà del sistema vengono suddivisi in *master dofs* e *slave dofs*. I *master dofs* rappresentano i gradi di libertà che saranno presenti nel modello ridotto mentre gli *slave dofs* vengono sostituiti con un serie di forme modali, questa tecnica è consolidata in letteratura come riportato ad esempio in [13].

Considerando l'equazione del moto per un sistema libero non smorzato per un sistema a N gradi di libertà,  $[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$ , si può effettuare una partizione delle matrici  $[M]$ ,  $[K]$  in sottomatrici corrispondenti ai *master dofs* e agli *slave dofs*:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{mm} & 0 \\ 0 & M_{ss} \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Analogamente, il vettore dei gradi di libertà sarà partizionato come segue:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

E' possibile esprimere gli spostamenti degli *slave dofs* in funzione degli spostamenti dei *master dofs*  $\{q_m\}$  attraverso la matrice dei "modi statici"  $[\Phi_c]$  e in funzione delle ampiezze dei modi interni  $\{p_n\}$  attraverso la matrice dei "modi interni"  $[\Phi_n]$ :

$$\{u_s\} = [\Phi_c]\{u_m\} + [\Phi_n]\{p_n\} \quad (2.72)$$

I modi statici, quindi, sono definiti come gli spostamenti degli *slave dofs* dovuti agli spostamenti dei *master dofs*

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m \\ q_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

Dalla seconda equazione matriciale, si ha:

$$\begin{aligned} [K_{sm}]\{q_m\} + [K_{ss}]\{q_s\} = \{0\} &\Rightarrow \{q_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{q_m\} \\ \{u_s\} &= [\Phi_c]\{u_m\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

I modi interni, invece, sono definiti come i modi della struttura quando i *master dofs* sono vincolati:

$$\omega^2[M_{ss}][\Phi_n] = [K_{ss}][\Phi_n] \quad (2.75)$$

Pertanto, definendo un nuovo sistema di coordinate  $\{\bar{p}\}$ , formato dai *master dofs* e dalle ampiezze dei modi interni, il vettore dei gli spostamenti si può esprimere come:

$$\begin{Bmatrix} q_m \\ q_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_c & \Phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m \\ p_n \end{Bmatrix} \Rightarrow \{q\} = [\alpha]\{\bar{p}\} \quad (2.76)$$

Nel nuovo sistema di coordinate l'equazione del moto diventa:

$$[M][\alpha]\{\ddot{\bar{p}}\} + [K][\alpha]\{\bar{p}\} = 0 \quad (2.77)$$

Premoltiplicando per la trasposta di  $[\beta]$ :

$$[\alpha]^T [M][\alpha]\{\ddot{\bar{p}}\} + [\alpha]^T [K][\alpha]\{\bar{p}\} = 0 \quad (2.78)$$

Si ottengono dunque le matrici di massa e rigidità ridotte,  $[\bar{M}]$  e  $[\bar{K}]$ :

$$[\bar{M}] = [\beta]^T [M][\alpha], \quad [\bar{K}] = [\alpha]^T [K][\alpha] \quad (2.79)$$

### 2.5.3 Assemblaggio Superelementi

Da Ansys, si ottengono, per ciascun componente della configurazione sperimentale, i valori di massa e rigidità associati a ogni nodo master e ai nodi derivanti dalla riduzione di Craig-Bampton. E' necessario creare un algoritmo che garantisca la corrispondenza univoca dei gradi di libertà di ogni nodo di ogni elemento per i tre componenti.

Per questo motivo, si è adottato uno schema di riempimento che prevede per le matrici associate agli slot il seguente ordine:

- gradi di libertà dei nodi master associati alle interfacce di contatto che hanno la coordinata  $z$  positiva indicati con  $z_p$ ;
- gradi di libertà dei nodi master associati alle interfacce di contatto che hanno la coordinata  $z$  negativa indicati con  $z_n$ ;
- gradi di libertà dei nodi associati ai vertici indicati con  $V$ ;
- gradi di libertà dei nodi associati alla base indicati con  $B$ ;
- gradi di libertà dei nodi associati ai modi interni derivanti dalla riduzione di Craig-Bampton indicati con  $N$ .

Mentre, per le matrici associate alla trave si ha un diverso ordine così definito:

- gradi di libertà dei nodi master associati alle interfacce di contatto che hanno le coordinate  $x$  e  $z$ , rispettivamente, negativa e positiva indicati con  $x_n$  e  $z_p$ ;
- gradi di libertà dei nodi master associati alle interfacce di contatto che hanno entrambe le coordinate  $x$  e  $z$  negative indicati con  $x_n$  e  $z_n$ ;
- gradi di libertà dei nodi master associati alle interfacce di contatto che hanno entrambe le coordinate  $x$  e  $z$  positive indicati con  $x_p$  e  $z_p$ ;

- gradi di libertà dei nodi master associati alle interfacce di contatto che hanno le coordinate  $x$  e  $z$ , rispettivamente, positiva e negativa indicati con  $x_p$  e  $z_n$ ;
- gradi di libertà dei nodi master associati alla parete laterale caratterizzati da avere la coordinata  $z$  positiva indicati con  $lat\ z_p$ ;
- gradi di libertà dei nodi master associati alla parete laterale caratterizzati da avere la coordinata  $z$  negativa indicati con  $lat\ z_n$ ;
- gradi di libertà dei nodi associati ai modi interni derivanti dalla riduzione di Craig-Bampton indicati con  $N$ .

Le matrici di massa e rigidezza ottenute, vengono assemblate a blocchi, nel senso di  $x$  crescente, rispettivamente, in una matrice globale di massa rappresentata in figura 2.84 e in una matrice globale di rigidezza visibile in figura 2.85.

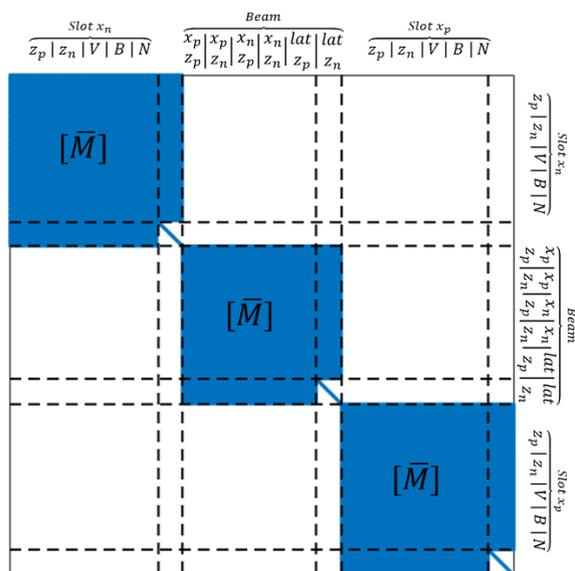


Figura 2.84: Matrice di massa globale

### 2.5.4 Analisi Modale di un sistema con M-Dofs con rigidezza infinita o giunto fisso

Al fine di verificare la solidità del modello proposto, si è implementato un modello privo di contatto le cui interfacce risultassero totalmente contigue ottenendo quindi un sistema a giunto fisso. Per fare ciò si è applicato un metodo di *equivalence*

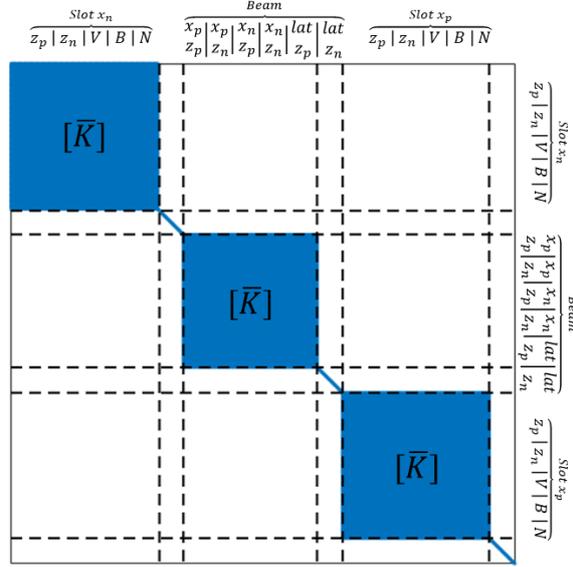


Figura 2.85: Matrice di rigidità globale

come descritto nel seguito. Se infatti le pulsazioni proprie della struttura sono direttamente proporzionali alla rigidità della stessa, il modello così proposto vibrerebbe ad una frequenza propria maggiore.

### Metodo di equivalenze

La matrice di trasformazione  $[L]$  è una matrice sparsa di dimensione  $dim[L] = 1968 \times 1572$  costruita in modo tale da eliminare i nodi duplicati di corpi contigui ridimensionando l'intero sistema. Queste matrici ridotte sono definite come segue:

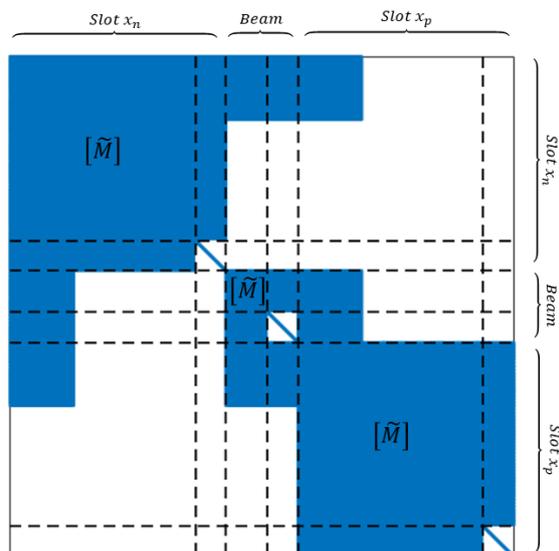
$$\begin{aligned} [\widetilde{M}] &= [L]^T [M_{globale}] [L] \\ [\widetilde{K}] &= [L]^T [K_{globale}] [L] \end{aligned} \quad (2.80)$$

La nuova distribuzione delle proprietà di massa e rigidità per nodo è visibile, rispettivamente in fig.2.86 e fig.2.87.

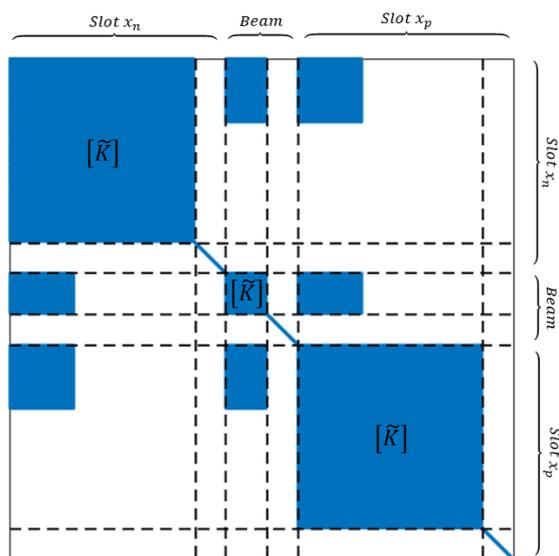
### Matrice con vincoli imposti

Al fine di effettuare le analisi modali, si sono vincolati i nodi alla base dei slot **motivare il perché**. Per un sistema a  $N$  gradi di libertà, l'equazione del moto assume, come già detto, la forma:

$$[\widetilde{M}]\{\ddot{q}\} + [\widetilde{K}]\{q\} = \{0\} \quad (2.81)$$



**Figura 2.86:** Matrice di massa globale con giunto fisso



**Figura 2.87:** Matrice di rigidezza globale con giunto fisso

che assumendo una vibrazione armonica del tipo  $\{q\} = \{\bar{q}\}e^{i\omega t}$ , diventa:

$$(-\omega^2[\tilde{M}] + [\tilde{K}])\{\bar{q}\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.82)$$

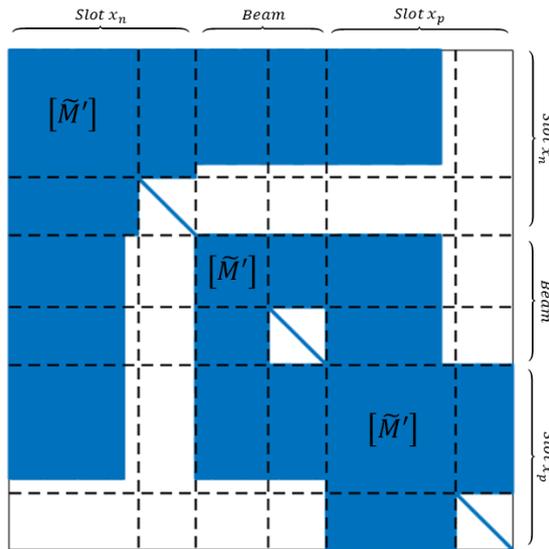
Partizionando il sistema in gradi di libertà liberi  $\bar{q}_f$  e vincolati  $\bar{q}_c$ , si ottiene:

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{ff} & \widetilde{M}_{fc} \\ \widetilde{M}_{cf} & \widetilde{M}_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{ff} & \widetilde{K}_{fc} \\ \widetilde{K}_{cf} & \widetilde{K}_{cc} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{q}_f \\ \bar{q}_c = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_v \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

Da cui si ottengono due equazioni matriciali:

$$\begin{cases} (-\omega^2[\widetilde{M}_{ff}] + [\widetilde{K}_{ff}]) \{ \bar{q}_f \} = \{ 0 \} \\ (-\omega^2[\widetilde{M}_{cf}] + [\widetilde{K}_{cf}]) \{ \bar{q}_f \} = \{ R_v \} \end{cases} \quad (2.84)$$

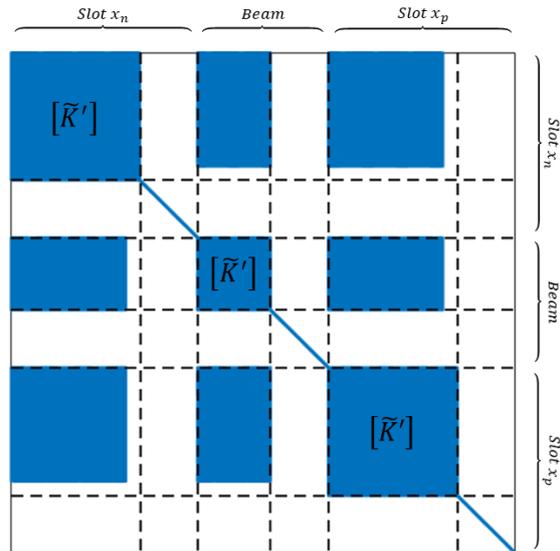
Le analisi modali sono state effettuate utilizzando le matrici  $[M_{ff}], [K_{ff}]$ , ottenute dalle matrici globali equivalenti  $[\widetilde{M}], [\widetilde{K}]$  eliminando le righe e le colonne corrispondenti ai gradi di libertà delle basi dei due supporti, in quanto incastrati. La struttura delle matrici risultanti è visibile in fig.2.88 e fig.2.89.



**Figura 2.88:** Matrice di massa globale con giunto fisso vincolata

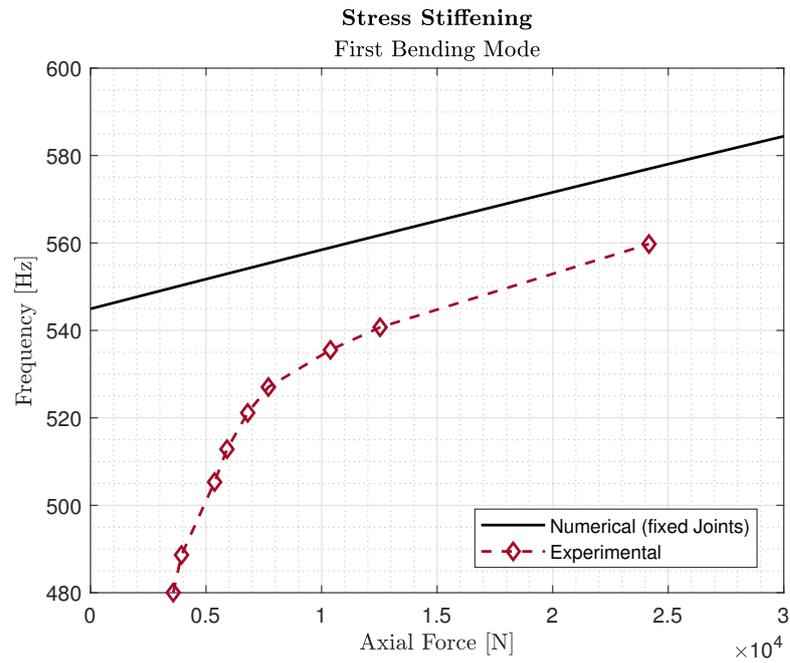
## Risultati

I grafici riportati nelle Figg. 2.90 e 2.91 riportano il confronto tra le frequenze ottenute numericamente e sperimentalmente per differenti carichi assiali, per il primo e il secondo modo flessionale. Dai grafici proposti risultano due evidenze, la maggiore frequenza di vibrazione, rispetto ai risultati sperimentali, a parità di

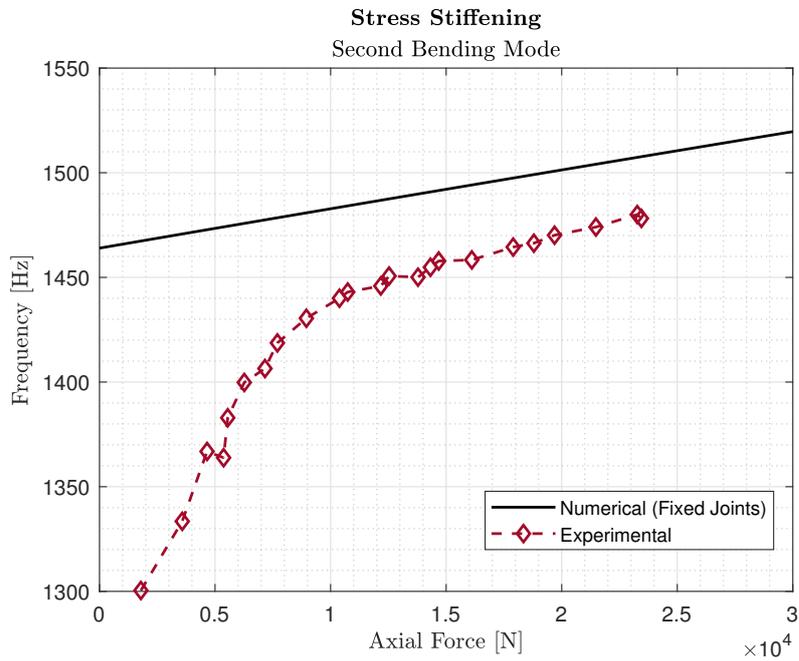


**Figura 2.89:** Matrice di rigidezza globale con giunto fisso vincolata

forza assiale; il solo tratto lineare per il modello numerico. Entrambi questi output derivano dal fatto che il modello implementato in questa sezione è a giunto fisso, pertanto in assenza di contatto. Questa caratteristica si traduce in una maggiore rigidezza della struttura che si riverbera nei risultati sopra proposti. Tuttavia, è bene evidenziare come le pendenze numeriche e sperimentali presentino una corrispondenza univoca quando la forza assiale è maggiore di 12 kN, valore che corrisponde alla condizione di *stick*.



**Figura 2.90:** Confronto andamento numerico e sperimentale per il primo modo flessionale



**Figura 2.91:** Confronto andamento numerico e sperimentale per il secondo modo flessionale

## Capitolo 3

# Ricerca dei parametri di contatto

Al fine di ottimizzare il modello complessivo a  $m$  gradi di libertà, si è applicata una ricerca dei parametri ottimi in termini di coefficiente di rigidità tangenziale e normale, nonché di attrito mediante un approccio *trial and error*. Data la natura del fenomeno, il quale si sviluppa totalmente all'interno di un piano, al fine di incrementare la velocità di elaborazione e quindi diminuire il costo computazionale, forti dei risultati ottenuti in precedenza, si è deciso di ridurre il modello al suo equivalente bidimensionale. Le considerazioni riportate riguardano i primi due modi flessionali, la cui analisi è stata effettuata in termini di frequenza e ampiezza.

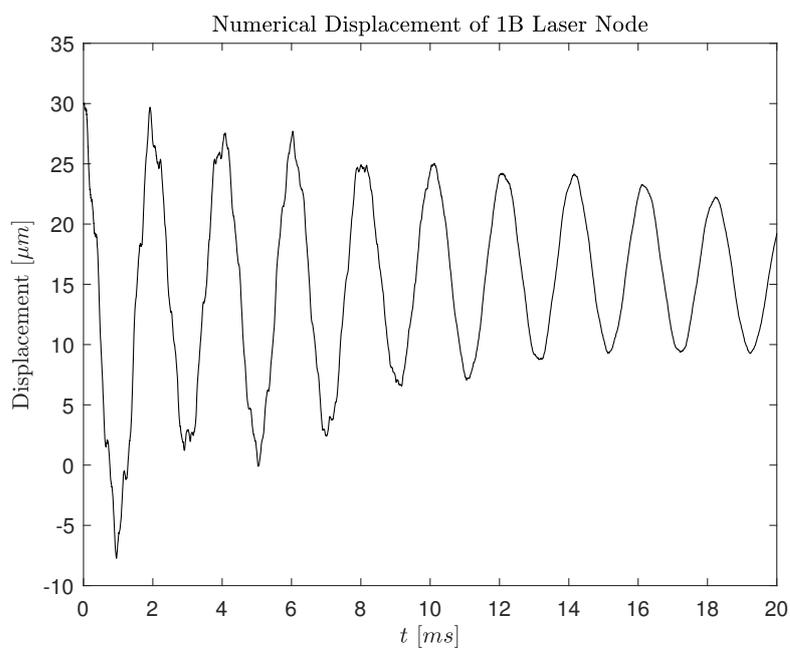
### 3.1 DTI del M-dof in presenza di contatto

I risultati ottenuti nei capitoli precedenti hanno confermato la solidità del modello proposto nel seguente lavoro, tuttavia, al fine di ottenere un modello ottimizzato e affidabile, si è formalizzato il modello complessivo dotato di quattro superfici di contatto.

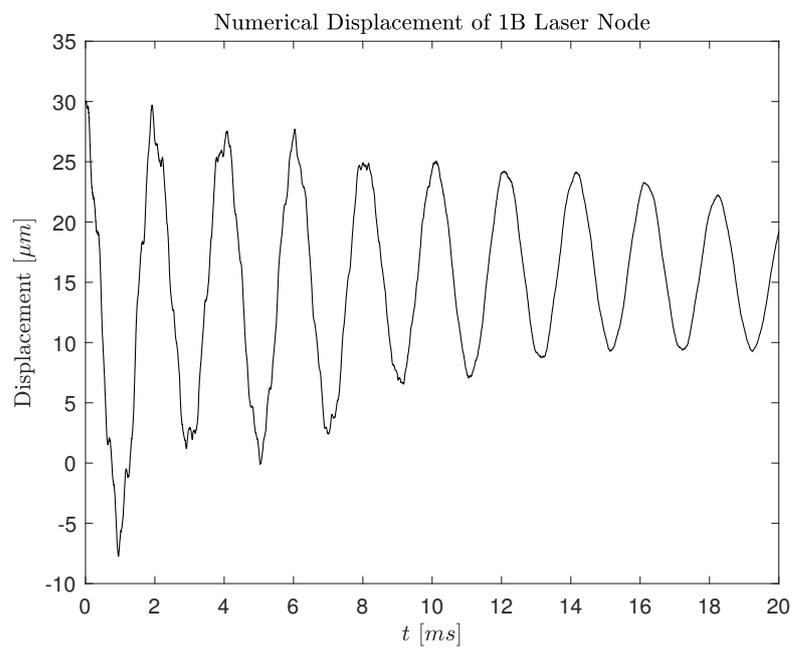
Queste superfici sono costituite da 33 nodi di contatto ciascuna, in ognuno dei quali è implementato il modello di contatto non lineare. Per gli scopi anticipati precedentemente, sono state effettuate analisi al variare del carico assiale per ogni terna di parametri. Queste analisi sono utili per caratterizzare la porzione di curva sperimentale, per valori di carico inferiore ai 12 kN, come riportato nelle Figg.2.90 e 2.91. Si nota come la porzione di grafico in esame sia caratterizzata da una sostanziale non linearità, la quale giustifica la formalizzazione di un modello non lineare del contatto. I risultati discussi nel seguito si riferiscono a prove sperimentali ottenute con una forza assiale pari a 4 kN.

### 3.1.1 Analisi del primo modo flessionale

La campagna sperimentale ha previsto l'acquisizione della velocità dell'antinodo della prima e della seconda forma modale, al fine di ottenere la massima deformazione del sistema. Pertanto, gli andamenti numerici e quelli sperimentali si riferiscono a questo nodo target.

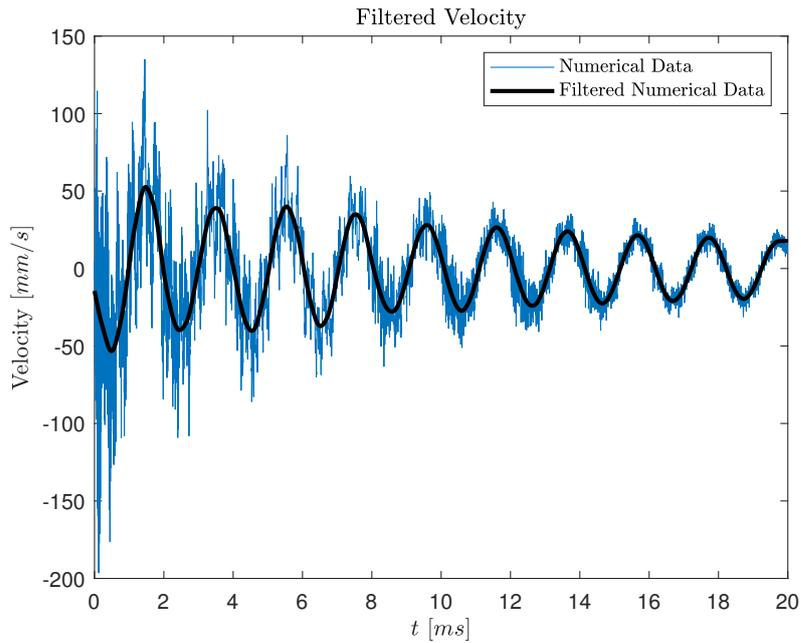


**Figura 3.1:** Time-history dello spostamento del nodo target per 1B



**Figura 3.2:** Time-history della velocità del nodo target per 1B

**Filtraggio del segnale** Gli andamenti numerici ottenuti per lo spostamento e per la velocità, calcolata a sua volta mediante derivazione dello spostamento, portano con sé una serie di incongruenze numeriche testimoniate dai numerosi *spikes* presenti. Per poter confrontare agevolmente i segnali con gli equivalenti sperimentali, e per eliminare tutte le componenti non fisiche dell'integrazione, si è implementato un filtro passa-basso la cui frequenza di taglio, pari a 1500 Hz, copre l'intero spettro della prima e della seconda frequenza modale

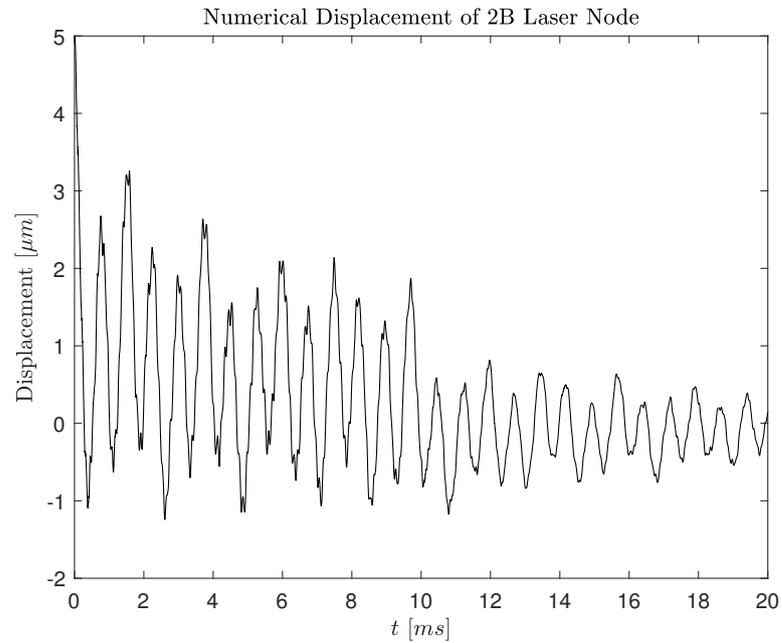


**Figura 3.3:** Analisi del segnale filtrato per 1B

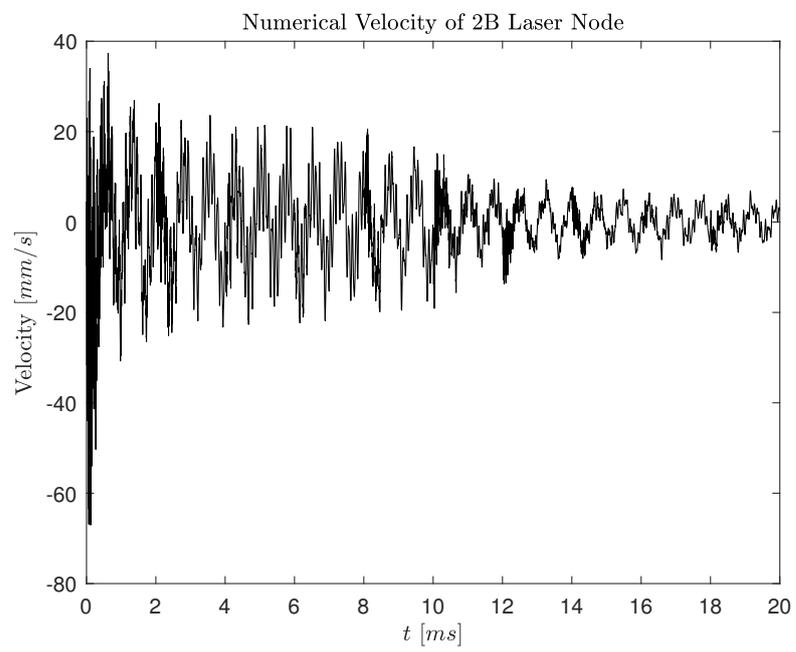
Dalla Fig.3.3 risulta evidente come il segnale filtrato restituisca un segnale caratterizzato unicamente dalla portante del primo modo flessionale.

### 3.1.2 Analisi del secondo modo flessionale

Analogamente a quanto riportato in precedenza, nel seguito si presentano i risultati ottenuti dalla DTI per il secondo modo flessionale.

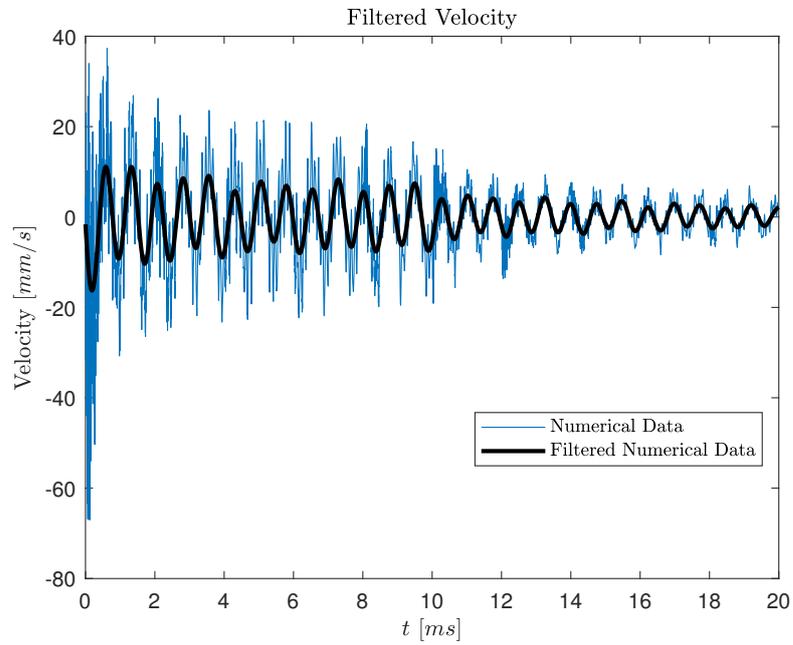


**Figura 3.4:** Time-history dello spostamento del nodo target per 2B



**Figura 3.5:** Time-history della velocità del nodo target per 2B

**Filtraggio del segnale** Anche in questo caso, il filtro passa basso con frequenza di taglio pari a 1500 Hz restituisce la portante del secondo modo senza inficiare i risultati.



**Figura 3.6:** Analisi del segnale filtrato per 2B

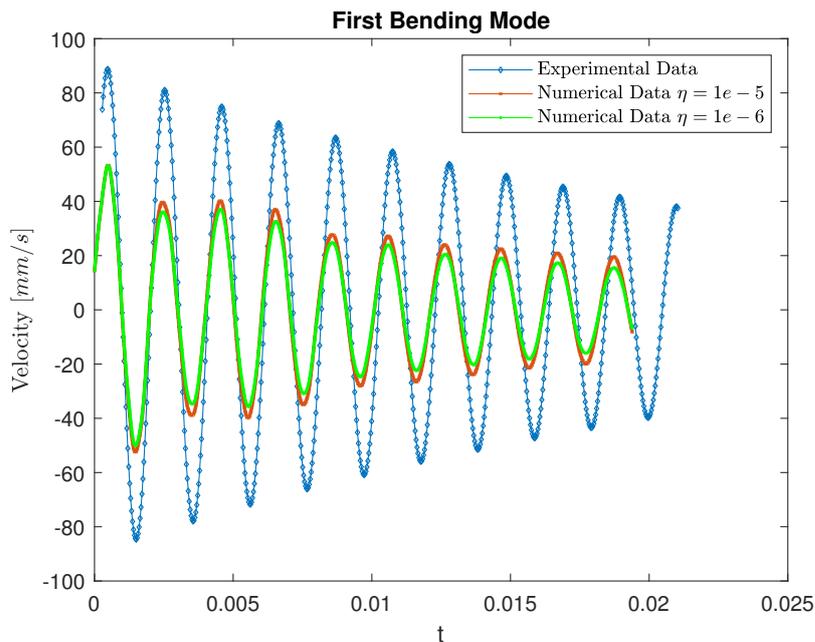
## 3.2 Confronto con i dati sperimentali

La variazione delle terne di parametri mediante approccio *trial and error* ha evidenziato come al variare del parametro di *loss factor*  $\eta$ , il quale rappresenta sinteticamente una componente dello smorzamento complessivo, le ampiezze convergano lentamente verso il dato sperimentale. Si propongono due valori di  $\eta$ :

- $\eta = 1e^{-5}$
- $\eta = 1e^{-6}$

I parametri fissati sono invece:

- $k_n = 10,148.879$  N/mm
- $k_t = 17,020$  N/mm
- $\mu = 0.5$



**Figura 3.7:** Andamento della velocità al variare del loss factor per 1B

Come si nota dalla Fig.3.7 e, ancora più in dettaglio, dalla Fig.3.8, all'aumentare del parametro  $\eta$  le ampiezze tendono a sovrapporsi a quella sperimentale, per fissati valori di rigidezza e coefficiente di attrito. Questo risultato suggerisce come il *modus operandi* fin qui adottato restituisca risultati incoraggianti.

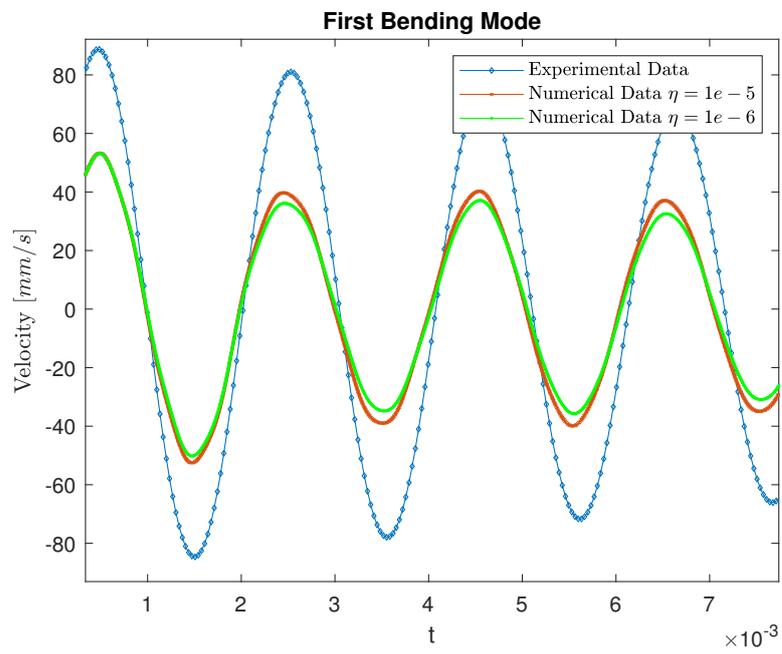


Figura 3.8: Zoom sulle ampiezze

# Capitolo 4

## Conclusioni

L'intero *modus operandi* presentato in questo lavoro di tesi ha dimostrato come sia possibile, mediante un approccio *bottom up*, formalizzare la problematica della non-linearità insita nella dinamica dei contatti dei giunti di tipo dovetail. Come si è visto, l'approccio iniziale ha previsto il consolidamento della teoria esistente, in termini di modelli monodimensionali, salvo poi giungere verso formulazioni con un grado di complessità via via crescente.

Si è dimostrata la robustezza dell'approccio seguito tramite il confronto tra i risultati ottenuti dalla *Direct Time Integration* con quelli ottenuti dal maggiormente consolidato metodo agli autovalori in termini di frequenza di risonanza. Questo ciclo di analisi è stato ripetuto per modelli con complessità crescente, rappresentata dal maggior numero di gradi libertà modellati. Inoltre, le verifiche hanno coinvolto anche un modello contenente superfici di contatto inclinate tali da rappresentare il sistema fisico.

Successivamente, forti delle conclusioni ottenute durante l'intero iter di processo descritto, si è implementato il modello di contatto non lineare nel sistema completo fornendo prove tangibili della sua consistenza. Tuttavia, per poter considerare affidabile questa tecnica di soluzione è stata fornita una prova della sua robustezza tramite il confronto con alcune prove sperimentali effettuate in altri lavori. Si nota come l'aderenza, in termini di frequenza di risonanza, sia pressoché totale; l'ampiezza invece necessita di un tuning più accurato, sebbene i risultati siano fortemente incoraggianti, agendo sui valori di rigidezza, smorzamento e attrito.

Il presente lavoro, come ampiamente dimostrato in precedenza, si configura come una solida base sulla quale costruire un modello di ottimizzazione multi-obiettivo capace di identificare le terne di parametri fondamentali, in termini di rigidezza normale e tangenziale, attrito e smorzamento utili alla progettazione strutturale a fatica dei componenti coinvolti.



# Appendice A

## Algoritmi

---

**Algorithm 1** Algoritmo Forza di Contatto

---

```

1: procedure FORZA DI CONTATTO( $q_b^G, q_s^G, \Delta\xi_c(t-1), [Rgl]$ )
2:    $\triangleright q_b^G$  è lo spostamento del nodo  $i$  sulla pala all'istante  $t$  nel SR globale
3:    $\triangleright q_s^G$  è lo spostamento del nodo  $i$  sullo slot all'istante  $t$  nel SR globale
4:    $\triangleright \Delta\xi_c(t-1)$  è lo spostamento relativo del nodo di contatto  $i$  sulla pala all'istante
    $t$  nel SR locale
5:    $\triangleright [Rgl]$  è la matrice di rotazione da SR globale a SR locale
6:    $\triangleright$  Inizializzazione
7:    $\triangleright$  Si assegna il valore delle seguenti variabili:
8:    $\mu$   $\triangleright$  Coefficiente di attrito
9:    $k_n$   $\triangleright$  Rigidezza di contatto normale
10:   $k_t$   $\triangleright$  Rigidezza di contatto tangenziale
11:   $\triangleright$  Esecuzione
12:   $\triangleright$  Si calcolano gli spostamenti nel SR locale all'istante di tempo  $t$ 
13:   $q_b^L = [Rgl]q_b^G, \quad q_s^L = [Rgl]q_s^G$ 
14:   $\eta_{b_i} = q_{b_i}^L(1), \quad \eta_{s_i} = q_{s_i}^L(1)$ 
15:   $\xi_{b_i} = q_{b_i}^L(2), \quad \xi_{s_i} = q_{s_i}^L(2)$ 
16:   $\triangleright$  Si calcola la forza di contatto normale per l'istante di tempo  $t$ 
17:   $N(t) = k_n(\eta_{s_i} - \eta_{b_i})$ 
18:  if  $N(t) \geq 0$  then
19:     $\triangleright$  I corpi sono in contatto all'istante  $t$ 
20:     $\triangleright$  Si ipotizza il contatto in stick per l'istante di tempo  $t$ 
21:     $\triangleright$  Si calcola la forza di contatto predittiva considerando lo spostamento
22:     $\triangleright$  relativo all'istante precedente  $\Delta\xi_c(t-1)$ 
23:     $T^P = k_t(\xi_{s_i} - \xi_{b_i} - \Delta\xi_c(t-1))$ 
24:    if  $|T^P| < \mu N(t)$  then
25:       $\triangleright$  Stato del contatto = STICK
26:       $\triangleright$  Update Forza di contatto tangenziale e spostamento relativo
27:       $T(t) = T^P$ 
28:       $\Delta\xi_c(t) = \Delta\xi_c(t-1)$ 
29:    else
30:       $\triangleright$  Stato del contatto = SLIP
31:       $\triangleright$  Update Forza di contatto tangenziale e spostamento relativo
32:       $T(t) = \mu N \text{sign}(T^P)$ 
33:       $\Delta\xi_c(t) = \xi_{s_i} - \xi_{b_i} - T(t)/k_t$ 
34:    end if
35:  else
36:     $\triangleright$  I corpi non sono in contatto all'istante  $t$ 
37:     $\triangleright$  Stato del contatto = LIFT OFF
38:     $\triangleright$  Update Forza di contatto tangenziale e spostamento relativo
39:     $N(t) = 0$ 
40:     $T(t) = 0$ 
41:     $\Delta\xi_c(t) = 0$ 
42:  end if
43:  return  $F_c(t)$   $\triangleright$  Forza di Contatto all'istante  $t$ 
44:  return  $\Delta\xi_c(t)$   $\triangleright$  Spostamento relativo all'istante  $t$ 
45: end procedure

```

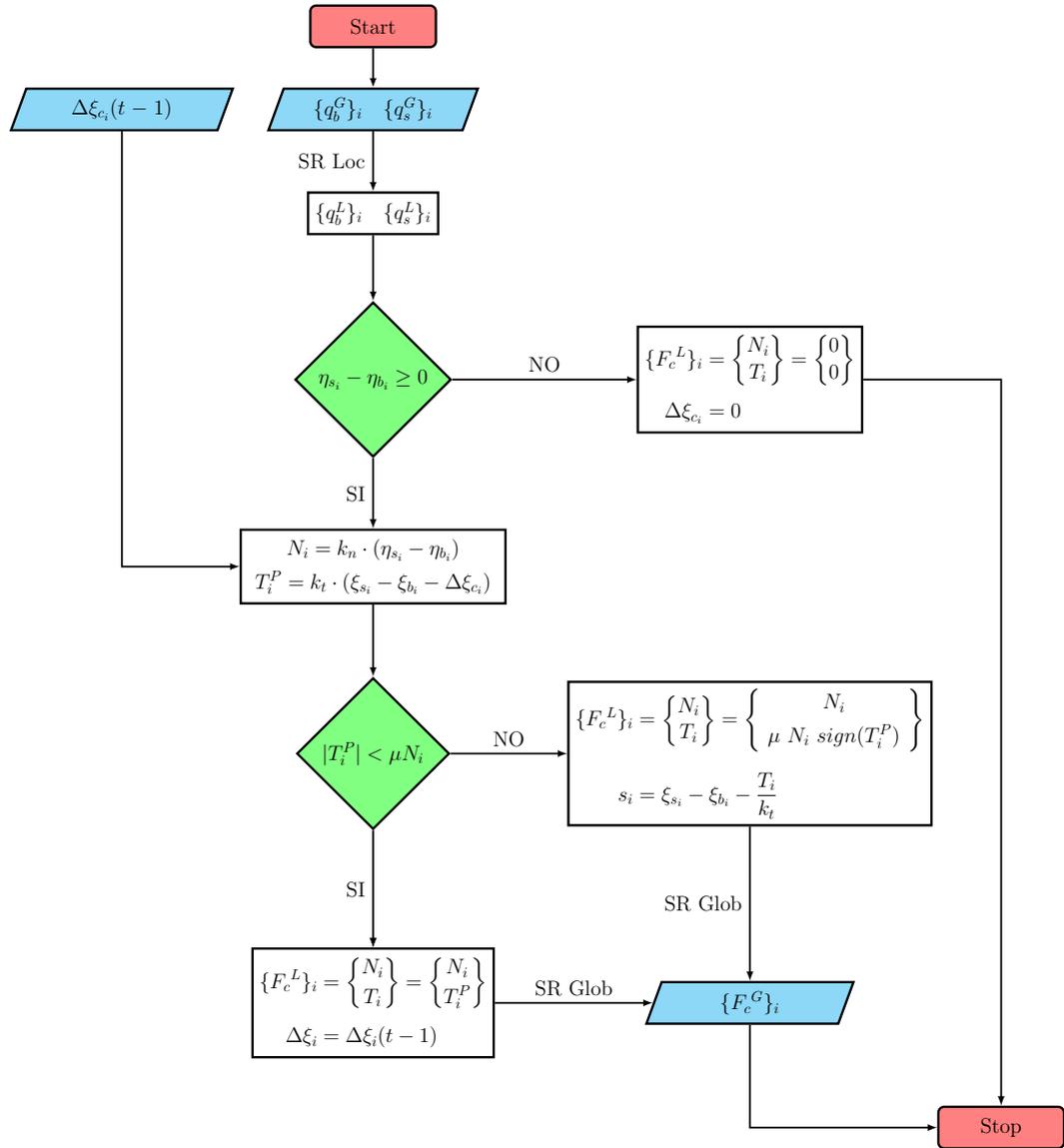


Figura A.1: Flow Chart per calcolo della forza di contatto

# Ringraziamenti

Ringrazio chi c'è stato, per il supporto; chi non c'è stato, per il silenzio.  
Non esaltatevi troppo.

# Bibliografia

- [1] G. Jacquet-Richardet et al. «Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application». In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 40.2 (nov. 2013), pp. 401–420. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.05.010 (cit. a p. 1).
- [2] Da-Sheng Wei, Shan-Hu Yuan e Yan-Rong Wang. «Failure analysis of dovetail assemblies under fretting load». In: *Engineering Failure Analysis* 26 (dic. 2012), pp. 381–396. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2012.06.007 (cit. a p. 1).
- [3] Christian Maria e Stefano Zucc. «Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks». In: *Numerical Analysis - Theory and Application*. InTech, set. 2011. DOI: 10.5772/25128 (cit. alle pp. 1, 3).
- [4] J. H. Griffin. «Friction Damping of Resonant Stresses in Gas Turbine Engine Airfoils». In: *Journal of Engineering for Power* 102.2 (apr. 1980), pp. 329–333. DOI: 10.1115/1.3230256 (cit. a p. 3).
- [5] Stefano Zucca, Christian M. Firrone e Muzio M. Gola. «Numerical assessment of friction damping at turbine blade root joints by simultaneous calculation of the static and dynamic contact loads». In: *Nonlinear Dynamics* 67.3 (lug. 2011), pp. 1943–1955. DOI: 10.1007/s11071-011-0119-y (cit. a p. 3).
- [6] E. P. Petrov e D. J. Ewins. «Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks». In: *Journal of Turbomachinery* 125.2 (apr. 2003), pp. 364–371. DOI: 10.1115/1.1539868 (cit. a p. 5).
- [7] E. P. Petrov e D. J. Ewins. «Generic Friction Models for Time-Domain Vibration Analysis of Bladed Disks». In: *Journal of Turbomachinery* 126.1 (gen. 2004), pp. 184–192. DOI: 10.1115/1.1644557 (cit. a p. 5).
- [8] B.D. Yang e C.H. Menq. «CHARACTERIZATION OF 3D CONTACT KINEMATICS AND PREDICTION OF RESONANT RESPONSE OF STRUCTURES HAVING 3D FRICTIONAL CONSTRAINT». In: *Journal of Sound and*

- Vibration* 217.5 (nov. 1998), pp. 909–925. DOI: 10.1006/jsvi.1998.1802 (cit. a p. 5).
- [9] Randall J. Leveque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. CAMBRIDGE, set. 2007. 341 pp. ISBN: 0898716292. URL: [https://www.ebook.de/de/product/8408447/randall\\_j\\_leveque\\_finite\\_difference\\_methods\\_for\\_ordinary\\_and\\_partial\\_differential\\_equations\\_steady\\_state\\_and\\_time\\_dependent\\_problems.html](https://www.ebook.de/de/product/8408447/randall_j_leveque_finite_difference_methods_for_ordinary_and_partial_differential_equations_steady_state_and_time_dependent_problems.html) (cit. a p. 5).
- [10] Giancarlo Genta, cur. *Vibration Dynamics and Control*. Springer US, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-79580-5 (cit. a p. 5).
- [11] Chiara Gastaldi e Teresa M. Berruti. «Competitive Time Marching Solution Methods for Systems with Friction-Induced Nonlinearities». In: *Applied Sciences* 8.2 (feb. 2018), p. 291. DOI: 10.3390/app8020291 (cit. a p. 6).
- [12] Sven Voormeeren. *Dynamic substructuring methodologies for integrated dynamic analysis of wind turbines*. Oisterwijk: BOXPress, 2012. ISBN: 9789491104107 (cit. a p. 96).
- [13] Roy R. Craig e Mervyn C. C. Bampton. «Coupling of substructures for dynamic analyses.» In: *AIAA Journal* 6.7 (lug. 1968), pp. 1313–1319. DOI: 10.2514/3.4741 (cit. a p. 98).