

1

POLITECNICO DI TORINO

2
3

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Matematica

4

Tesi di Laurea

5
6
7
8

**Considerazioni sulla possibilità di formulare
alcune leggi evolutive della crescita volumetrica
di aggregati cellulari come equazioni dinamiche
di teorie meccaniche dei processi anelastici.**



**Politecnico
di Torino**

10

Relatori

Prof. Alfio Grillo
Dr. Salvatore Di Stefano

Candidata
Valentina Licari

11

Anno Accademico 2020-2021

Alla mia splendida famiglia.

Sommario

14 Uno dei problemi più rilevanti nello studio della Meccanica della Crescita Volumetrica dei
15 tessuti biologici e aggregati cellulari è quello di determinare leggi che descrivano come avvie-
16 ne la variazione di massa di tali sistemi, e come questa sia in relazione con la disponibilità
17 di sostanze chimiche, necessarie alla vita delle cellule, e con lo stato meccanico complessivo
18 dei sistemi stessi. A tal proposito sono stati proposti diversi approcci, molti dei quali im-
19 piegano la Teoria delle Miscele [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], che mirano a formulare una legge di
20 crescita, ossia a legare la variazione di massa dei tessuti o aggregati cellulari alla produzio-
21 ne di opportune distorsioni anelastiche. Sovente, tali approcci sono basati su osservazioni
22 fenomenologiche [9] che, a nostro modo di vedere, pur conducendo a risultati realistici, sono
23 a volte difficilmente ottenibili seguendo un processo logico-induttivo che si snoda in seno
24 alla teoria generale della Meccanica della Crescita. In questo lavoro, le leggi evolutive della
25 crescita seguiranno da un principio fisico, che, utilizzando l’approccio di DiCarlo e Quiligotti
26 [10], è identificato con il Principio dei Lavori Virtuali, e la crescita è legata all’esistenza di
27 una forza generalizzata esterna al tessuto o aggregato cellulare capace di cogliere sia aspetti
28 biochimici che meccanici della fenomenologia.

29 Successivamente viene affrontato il problema per i mezzi multi-costituenti, che rappre-
30 sentano un’idealizzazione dei tessuti biologici in crescita. Per essi è stato compiuto un ten-
31 tativo di ottenere una legge di crescita che combini fenomenologia e teoria, ad esempio, in
32 [8], ma i risultati ottenuti presentano delle limitazioni dovute ad alcune specifiche scelte
33 modellistiche. Queste limitazioni, tuttavia, possono essere eliminate reinterpretando ade-
34 guatamente alcuni concetti fondamentali dell’approccio ai processi anelastici proposto in
35 [10, 11, 12, 13, 14] per la Meccanica della Crescita. Così facendo il modello proposto in [8]
36 non diventa “risolutivo”, ma ci sembra migliorabile. Con questi presupposti, riconsigliamo
37 alcune delle idee che hanno condotto ai principali risultati presentati in [8, 14]. Per i nostri
38 scopi, assumiamo di avere una miscela solido-fluido in cui ogni fase è costituita da N costi-
39 tuenti che possono essere trasferiti da una fase all’altra. Poi consideriamo il tasso al quale
40 un dato costituente viene trasferito e lo identifichiamo con una velocità generalizzata che,
41 per dualità, è associata a un sistema di forze generalizzate. Esse si distinguono in interne ed
42 esterne e devono soddisfare un’opportuna equazione di bilancio (si veda la filosofia spiegata
43 in [10]). In seguito, postuliamo un’espressione costitutiva per le forze interne generalizzate
44 [10, 11, 13, 14] cosicché il bilancio delle forze possa essere risolto per il tasso di trasferimento
45 di massa. Ciò conduce ad una relazione tra ciascun tasso di trasferimento di massa e la forza
46 duale esterna generalizzata. Infine, se assumiamo che i tassi di trasferimento di massa sia-
47 no noti, per esempio assegnandoli fenomenologicamente, risolviamo una sorta di problema
48 inverso per determinare quale forza esterna generalizzata garantisca il mantenimento del
49 bilancio delle forze.

50 Nel seguito, per comodità di espressione, utilizzeremo il termine “tessuto” per indicare
51 sia tessuti veri e propri o masse tumorali sia aggregati cellulari.

52 Gli argomenti affrontati in questa tesi fanno parte di una linea di ricerca attualmente
53 seguita, oltre che dalla sottoscritta, da Alfio Grillo e Salvatore Di Stefano, e i risultati di

54 seguito presentati (specialmente nei Capitoli 3 e 4), raggiunti nell'ambito di tale ricerca,
55 costituiscono parte dei risultati preliminari ottenuti per il manoscritto

56 A. Grillo, S. Di Stefano, V. Licari: "A variational theory of volumetric growth
57 based on the "modified" Vakonomic Dynamics". *In preparazione* (la lista degli
58 autori e il titolo sono provvisori),

59 da sottoporre ad una rivista scientifica di settore (si veda [15]).

Indice

60		
61	1	Introduzione 7
62	2	Notazione generale per continui monofasici 9
63	2.1	Cenni di cinematica dei mezzi continui monofasici 9
64	2.2	Equazioni di bilancio 13
65	2.3	Decomposizione di Bilby-Kröner-Lee 16
66	3	Uno studio della dinamica del tensore di crescita in mezzi isotropi 17
67	3.1	Bilancio di massa 17
68	3.2	Principio dei Lavori Virtuali 18
69	3.3	Dissipazione 19
70	3.4	Espressione costitutiva di \mathbf{Y}_d 22
71	3.5	Problema ai valori al contorno 25
72	4	Simulazioni numeriche 29
73	4.1	Descrizione del problema <i>benchmark</i> 29
74	4.2	Energia di deformazione e tensori degli sforzi 31
75	4.3	Legge evolutiva di \mathbf{K} in forma matriciale 33
76	4.4	Risultati 34
77	5	Crescita in mezzi bifasici 39
78	5.1	Descrizione generale della miscela 39
79	5.2	Bilancio di massa e deformazioni anelastiche 40
80	5.2.1	Bilancio di massa 40
81	5.2.2	Deformazioni anelastiche 41
82	5.3	Principio delle Potenze Virtuali 42
83	5.3.1	Equazioni del moto 42
84	5.4	Dissipazione 45
85	5.4.1	Forma locale della dissipazione 45
86	5.5	Considerazioni sui trasferimenti di massa 47
87	6	Conclusioni 49
88	6.1	Crescita nei modelli monofasici 49
89	6.2	Crescita nel modello bifasico a molti costituenti 50
90		Bibliografia 55

Capitolo 1

Introduzione

La Meccanica della Crescita Volumetrica dei tessuti biologici si occupa di determinare le leggi che descrivono le variazioni di volume o di densità di massa di un dato tessuto e le relazioni che intercorrono tra queste grandezze, che sono caratterizzanti per il fenomeno fisico in esame, e tutte le altre grandezze proprie del tessuto considerato, come ad esempio la disponibilità di sostanze chimiche, nonché le deformazioni e gli sforzi meccanici che possono sorgere eventualmente in risposta alla crescita stessa [16].

La variazione di massa dovuta alla crescita è generalmente accompagnata da distorsioni anelastiche [17, 16, 18] che ne costituiscono il principale aspetto meccanico. Queste sono descritte nel seguito da un tensore del secondo ordine, detto *tensore di crescita*. Sulla base di ciò, e pur essendo consapevoli del fatto che la crescita richiederebbe un approccio comprendente almeno aspetti chimici e genetici, oltre che meccanici, della sua evoluzione, questo lavoro di Tesi pone in primo piano la relazione tra la variazione di massa di un tessuto e lo sviluppo di distorsioni anelastiche, arrivando ad identificare il tasso di produzione di queste ultime con la sorgente di massa che costituisce l'essenza della crescita stessa. Questo modo di procedere, peraltro, è quello suggerito da una fetta della letteratura di settore (si vedano, ad esempio, [18, 1, 10, 4, 19]) dalla quale abbiamo attinto per impostare la nostra trattazione.

Un altro aspetto importante della crescita è costituito dalla possibilità, nel caso in cui le distorsioni anelastiche non siano descritte da un tensore puramente sferico, di associare la crescita ad una espressione del rimodellamento strutturale del tessuto, intendendo con quest'ultimo un processo di trasformazione della struttura interna del tessuto esprimibile anch'esso attraverso l'innescamento e l'evoluzione di distorsioni anelastiche. Nei modelli di seguito considerati, si attribuiscono le distorsioni anelastiche del rimodellamento strutturale alla parte isocora del tensore di crescita e si ammette che la dinamica di queste possa essere eventualmente caratterizzata da scale temporali diverse da quelle che governano la parte puramente volumetrica del tensore di crescita e, quindi, la crescita stessa. Ciononostante nella trattazione seguente si ipotizza che il rimodellamento sia essenzialmente dovuto, in parte, alla redistribuzione della massa nel tessuto e, in parte, alla presenza di opportune forze generalizzate che inducono una evoluzione non volumetrica del tensore di crescita. In altre parole, tali forze generalizzate rompono una eventuale sfericità iniziale del tensore di crescita contribuendo a generare una crescita direzionale che, come tale, comporta in generale, oltre alla redistribuzione della massa, anche una variazione della struttura interna del tessuto. Questo approccio ricalca parzialmente un modello recentemente proposto in [14].

Tra le varie tipologie di tessuto biologico cui ci si potrebbe ispirare, facciamo riferimento a quelli tumorali [2, 6], il cui studio della crescita, per ovvie ragioni di interesse sociale per la salute pubblica, occupa un ampio spazio nella ricerca.

130 Per svolgere il compito che ci siamo dati, articoliamo la Tesi nel seguente modo.

131 Nel Capitolo 2 forniamo le nozioni e le definizioni preliminari per la comprensione degli
132 argomenti successivamente trattati, dando una panoramica della Meccanica dei Continui di
133 base.

134 Nel Capitolo 3 esaminiamo un ipotetico tessuto tumorale idealizzato come un mezzo
135 monofasico isotropo e ci poniamo l'obiettivo di scrivere l'equazione dinamica per il tensore di
136 crescita. Per fare ciò, consideriamo il bilancio di massa e scriviamo il Principio delle Potenze
137 Virtuali, dando rilievo ad una coppia di forze generalizzate duali alla velocità virtuale di
138 variazione del tensore di crescita. Tali forze vengono distinte in una forza interna ed una forza
139 esterna e, nella formulazione forte del problema di crescita, devono soddisfare una apposita
140 equazione di bilancio [10]. Tale equazione si aggiunge all'equazione indefinita di equilibrio che
141 deve essere risolta per determinare il moto del tessuto. A questo punto, seguendo una prassi
142 consolidata in Meccanica dei Continui, si invoca il Secondo Principio della Termodinamica
143 scritto come sbilancio dell'energia libera [20, 10, 21] per verificare la coerenza termodinamica
144 del legame costitutivo assegnato. Infine, definendo una espressione costitutiva alla forza
145 dissipativa, giungiamo al problema ai valori iniziali e al contorno.

146 Nel Capitolo 4, specializziamo il modello di crescita ad un problema *benchmark* e imple-
147 mentiamo quest'ultimo sul *software* di calcolo commerciale COMSOL *Multiphysics* versione
148 5.3a, discutendo successivamente i risultati delle varie simulazioni numeriche.

149 Nel Capitolo 5 esaminiamo un tessuto tumorale idealizzato come un mezzo bifasico a
150 molti costituenti e ne studiamo la crescita interpretandola come diretta conseguenza dei
151 trasferimenti di massa da una fase all'altra. L'approccio metodologico seguito è analogo al
152 primo con l'obiettivo di giungere alle equazioni del moto e revisionare in maniera critica
153 alcuni dei risultati ottenuti in [8] tra cui l'ottenimento della condizione di equilibrio chimico
154 tra i costituenti della miscela.

155 Nel Capitolo 6, infine, riassumiamo i risultati principali del lavoro e traiamo alcune
156 conclusioni.

Capitolo 2

Notazione generale per continui monofasici

In questo Capitolo forniamo alcune definizioni di base della Meccanica dei Mezzi Continui, con l'obiettivo di fissare il formalismo necessario alla presentazione dei risultati di seguito riportati. Nel seguito, faremo riferimento esclusivamente ai continui monofasici, che descriviamo ricalcando il trattato di Marsden e Hughes [22].

2.1 Cenni di cinematica dei mezzi continui monofasici

Indichiamo con \mathcal{S} lo spazio Euclideo tridimensionale e con \mathcal{B} un *corpo continuo*, che, in linea con quanto espresso in [22], supponiamo rappresentabile come una varietà differenziabile. Spesso è conveniente studiare l'evoluzione del corpo a partire da un *piazzamento* scelto opportunamente, che, in Meccanica dei Continui classica, prende il nome di *configurazione di riferimento* e viene sovente indicata con \mathcal{B}_R . Quest'ultima è un sottoinsieme di \mathcal{S} i cui punti sono messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di \mathcal{B} per mezzo di una funzione di localizzazione $\kappa_R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_R$. Analogamente, indicando con \mathcal{I} l'intervallo temporale di osservazione di un fenomeno di interesse, e fissando $t \in \mathcal{I}$, è possibile individuare il piazzamento del corpo al tempo t , che denotiamo con $\mathcal{B}(t) \equiv \mathcal{B}_t$ e individuiamo come l'immagine della funzione di localizzazione $\kappa_t : \mathcal{B}_R \rightarrow \mathcal{B}_t$. Anche \mathcal{B}_t è un sottoinsieme di \mathcal{S} e, in Meccanica dei Continui classica, si denomina *configurazione del corpo al tempo t* .

Fintantoché ci limitiamo a descrivere il moto di \mathcal{B} in \mathcal{S} , intendendo il moto stesso come una *sequenza continua* di *piazzamenti*¹, possiamo scrivere:

$$\chi(\cdot, t) : \mathcal{B}_R \rightarrow \mathcal{S}, \quad X \mapsto x = \chi(X, t) \in \mathcal{S}, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (2.1.1)$$

avendo indicato con X i punti di \mathcal{B}_R . Inoltre, lasciando variare t in \mathcal{I} , definiamo anche la funzione

$$\chi : \mathcal{B}_R \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (X, t) \mapsto x = \chi(X, t) \in \mathcal{S}. \quad (2.1.2)$$

La valutazione di $\chi(\cdot, t)$ in tutti i punti \mathcal{B}_R permette di determinare la posizione del corpo al tempo t , ossia $\mathcal{B}(t) \equiv \mathcal{B}_t = \chi(\mathcal{B}_R, t)$, cosicché, eseguendo la restrizione di $\chi(\cdot, t)$ alla propria immagine, ossia ponendo $\phi(\cdot, t) := [\chi(\cdot, t)]_{\mathcal{B}_R \rightarrow \mathcal{B}_t}$, si ottiene la identità $\chi(\cdot, t) = \kappa_t \circ \kappa_R^{-1}$.

¹Tale terminologia è stata tradotta dal sostantivo “*placement*”, impiegato in [10].

183 Supponendo che un dato elemento $X \in \mathcal{B}_R$ occupi il punto $x \in \mathcal{S}$ al tempo $t \in \mathcal{I}$,
 184 e fissato un sistema di coordinate in cui x sia esprimibile come (x^1, x^2, x^3) , allora χ è
 185 rappresentabile da una terna di funzioni (χ^1, χ^2, χ^3) , tali che $x^a = \chi^a(X, t)$, con $a = 1, 2, 3$.
 186 Notiamo che (χ^1, χ^2, χ^3) costituisce, nell'ambito della formulazione classica della Meccanica
 187 dei Continui, la terna dei descrittori cinematici di base per lo studio dell'evoluzione del
 188 corpo \mathcal{B} .

189 **Definizione 2.1.1** (Funzione del tempo universale e identità materiale [22]).

190 Per completezza di notazione e in vista di ciò che verrà trattato nei prossimi capitoli, è
 191 necessario introdurre le seguenti funzioni ausiliarie,

$$\mathcal{T} : \mathcal{B}_R \times \mathcal{J} \mapsto \mathcal{J} \quad (X, t) \mapsto \mathcal{T}(X, t) = t, \quad (2.1.3a)$$

$$\mathcal{X} : \mathcal{B}_R \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{J} \quad (X, t) \mapsto \mathcal{X}(X, t) = X. \quad (2.1.3b)$$

192 che sono rispettivamente la *funzione del tempo universale* e l'*identità materiale*.

193 **Definizione 2.1.2** (Gradiente di deformazione [22]).

194 Supponendo che la funzione χ possieda sufficiente regolarità, definiamo per ogni punto
 195 $X \in \mathcal{B}_R$ e per ogni tempo $t \in \mathcal{I}$, il *gradiente di deformazione* \mathbf{F} , ossia il tensore del
 196 secondo ordine definito come lo Jacobiano di χ , che individua la mappa tangente del moto:

$$\mathbf{F}(X, t) : T_X \mathcal{B}_R \mapsto T_x \mathcal{S} \quad (2.1.4)$$

197 dove $T_X \mathcal{B}_R$ e $T_x \mathcal{S}$ sono gli spazi tangenti di \mathcal{B}_R e $T_x \mathcal{S}$, attaccati rispettivamente ai punti
 198 X e x . Il tensore $\mathbf{F}(X, t)$ trasforma i vettori di $T_X \mathcal{B}_R$ in vettori di $T_x \mathcal{S}$ e, fissata una base
 199 di vettori in $T_X \mathcal{B}_R$ e una in $T_x \mathcal{S}$, le sue componenti sono date da

$$[\mathbf{F}(X, t)]^a_A = \frac{\partial \chi^a}{\partial X^A}(X, t) \mathbf{b}_a(\chi(X, t)) \otimes \mathbf{B}^A(X), \quad (2.1.5)$$

200 in cui $\mathbf{b}_a(x) = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^a}(x) \mathbf{v}_i(x)$ e $\mathbf{B}^A(X) = \frac{\partial \Xi^A}{\partial Z^I}(Z) \mathbf{I}^I(Z)$ sono rispettivamente i vettori della
 201 base generica nello spazio della configurazione attuale e in quello di riferimento e $\zeta^i(x) = z^i$
 202 e $Z^I = (\Xi^{-1})^I(X)$.

203 Se scriviamo \mathbf{F} rispetto alle basi normalizzate $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ e $\{\mathbf{E}^A\}_{A=1}^3$, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(X, t) &= \frac{\partial \chi^a}{\partial X^A}(X, t) \|\mathbf{b}_a(x)\| \|\mathbf{B}^A(X)\| \frac{\mathbf{b}_a(x)}{\|\mathbf{b}_a(x)\|} \otimes \frac{\mathbf{B}^A(X)}{\|\mathbf{B}^A(X)\|} \\ &= (F^a_A)_{\{\mathbf{e}_a\}\{\mathbf{E}^A\}} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{E}^A. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

204 Il determinante del gradiente di deformazione viene invece indicato con la seguente notazione

$$J = \det \mathbf{F}. \quad (2.1.7)$$

205 Riportiamo adesso anche la natura delle trasformazioni associate a \mathbf{F} , cioè la trasposta \mathbf{F}^T ,
 206 l'inversa \mathbf{F}^{-1} e la trasposta dell'inversa \mathbf{F}^{-T} :

$$\mathbf{F}(X, t) : T_X \mathcal{B}_R \mapsto T_x \mathcal{S}, \quad \mathbf{F}^T(x, t) : T_x^* \mathcal{B}(t) \mapsto T_X^* \mathcal{B}_R \quad (2.1.8a)$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x, t) : T_x \mathcal{S} \mapsto T_X \mathcal{B}_R, \quad \mathbf{F}^{-T}(X, t) : T_X^* \mathcal{B}_R \mapsto T_x^* \mathcal{S} \quad (2.1.8b)$$

207 dove $T_X^* \mathcal{B}_R$ e $T_x^* \mathcal{S}$ sono gli spazi cotangenti di \mathcal{B}_R e \mathcal{S} , attaccati rispettivamente ai punti
 208 X e x .

209 **Definizione 2.1.3** (Tensori metrici).

210 Definiamo il *tensore metrico spaziale*, ossia associato a \mathcal{S} , come

$$\mathbf{g}(x) : T_x\mathcal{S} \rightarrow T_x^*\mathcal{S}, \quad (2.1.9a)$$

$$\mathbf{g}(x) = g_{ab}(x) \mathbf{b}^a(x) \otimes \mathbf{b}^b(x). \quad (2.1.9b)$$

211 Esso è simmetrico e definito positivo e induce un prodotto scalare in $T_x\mathcal{S}$, cosicché, dati
 212 due vettori tangenti \mathbf{u}_x e \mathbf{v}_x di $T_x\mathcal{S}$, il loro prodotto scalare è dato da

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{v}_x = \mathbf{u}_x \mathbf{g}(x) \mathbf{v}_x = (\mathbf{u}_x)^a [\mathbf{g}(x)]_{ab} (\mathbf{v}_x)^b. \quad (2.1.10)$$

213 Analogamente, definiamo il *tensore metrico materiale*, ossia associato a \mathcal{B}_R , come

$$\mathbf{G}(X) : T_X\mathcal{B}_R \rightarrow T_X^*\mathcal{B}_R, \quad (2.1.11a)$$

$$\mathbf{G}(X) = G_{AB}(X) \mathbf{B}^A(X) \otimes \mathbf{B}^B(X). \quad (2.1.11b)$$

214 Anch'esso è simmetrico e definito positivo e induce un prodotto scalare, ma in $T_X\mathcal{B}_R$.
 215 Infatti, dati due vettori tangenti \mathbf{U}_X e \mathbf{V}_X di $T_X\mathcal{B}_R$, il loro prodotto scalare è dato da

$$\mathbf{U}_X \cdot \mathbf{V}_X = \mathbf{U}_X \mathbf{G}(X) \mathbf{V}_X = (\mathbf{U}_X)^A [\mathbf{G}(X)]_{AB} (\mathbf{V}_X)^B. \quad (2.1.12)$$

216 I tensori $\mathbf{g}(x)$ e $\mathbf{G}(X)$ sono invertibili e i loro inversi sono

$$\mathbf{g}^{-1}(x) : T_x^*\mathcal{S} \rightarrow T_x\mathcal{S}, \quad (2.1.13a)$$

$$\mathbf{G}^{-1}(X) : T_X^*\mathcal{B}_R \rightarrow T_X\mathcal{B}_R. \quad (2.1.13b)$$

217 Essi inducono prodotti scalari tra covettori rispettivamente in $T_x^*\mathcal{S}$ e in $T_X^*\mathcal{B}_R$, e questi
 218 sono definiti analogamente a quanto riportato in (2.1.10) e in (2.1.12).

219 **Definizione 2.1.4** (Tensore destro di Cauchy-Green [22]).

220 Definiamo il *tensore destro di Cauchy-Green* come il tensore

$$\mathbf{C}(X, t) : T_X\mathcal{B}_R \rightarrow T_X^*\mathcal{B}_R \quad (2.1.14a)$$

$$\mathbf{C}(X, t) = \mathbf{F}^T(\chi(X, t)) \cdot \mathbf{F}(X, t), \quad \mathbf{C}(X, t) = \mathbf{F}^T(\chi(X, t)) \mathbf{g}(\chi(X, t)) \mathbf{F}(X, t), \quad (2.1.14b)$$

221 in cui la presenza del tensore metrico viene spesso abbreviata da un “puntino”.

222 **Definizione 2.1.5** (Invarianti principali di \mathbf{C} [22]).

223 Gli invarianti principali di \mathbf{C} sono dati da

$$I_1 = \hat{I}_1 \circ \mathbf{C} = \text{tr}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}), \quad (2.1.15a)$$

$$I_2 = \hat{I}_2 \circ \mathbf{C} = \frac{1}{2}[(\text{tr}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})], \quad (2.1.15b)$$

$$I_3 = \hat{I}_3 \circ \mathbf{C} = \det \mathbf{C}. \quad (2.1.15c)$$

224 **Definizione 2.1.6** (Tensore sinistro di Cauchy-Green [22]).

225 Definiamo *tensore sinistro di Cauchy-Green* \mathbf{b} il “push-forward” attraverso \mathbf{F} della metrica
 226 Euclidea \mathbf{G} , tale che

$$\mathbf{b}(x, t) : T_x^*\mathcal{B}(t) \rightarrow T_x\mathcal{B}(t) \quad (2.1.16a)$$

$$\mathbf{b}(x, t) = \mathbf{F}(X, t) \mathbf{G}(X) \mathbf{F}^T(x, t). \quad (2.1.16b)$$

227 **Teorema 2.1.1** (Decomposizione polare del gradiente di deformazione [22]).

228 *Il tensore gradiente di deformazione \mathbf{F} può essere decomposto in uno dei seguenti modi*

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{1}}\mathbf{R}\mathbf{U}, \quad (2.1.17a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{1}}\mathbf{R}. \quad (2.1.17b)$$

229 Nella (2.1.17a), $\mathbf{U}(X, t) : T_X\mathcal{B}_R \rightarrow T_X^*\mathcal{B}_R$ è un tensore del secondo ordine simmetrico
 230 definito come $\mathbf{U}(X, t) = \sqrt{C(X, t)}$, $\mathbf{R}(X, t) : T_X\mathcal{B}_R \rightarrow T_X\mathcal{B}_R$ è un tensore del secondo
 231 ordine che definisce una rotazione propria nello spazio tangente $T_X\mathcal{B}_R$, e $\hat{\mathbf{1}}(X, t) : T_X\mathcal{B}_R \rightarrow$
 232 $T_x\mathcal{S}(t)$ è lo shifter che trasporta da $T_X\mathcal{B}_R$ a $T_x\mathcal{S}$, parallelamente alla curva del moto, il
 233 vettore di $T_X\mathcal{B}_R$ “stirato” da $\mathbf{U}(X, t)$ e ruotato da $\mathbf{R}(X, t)$. In componenti si ha (omettendo
 234 per semplicità le dipendenza da x e t)

$$\mathbf{F}^a{}_A = \hat{\mathbf{1}}^a{}_B R^B{}_C G^{CD} U_{DA}. \quad (2.1.18)$$

235 Nella (2.1.17b), $\hat{\mathbf{1}}(X, t)$ e $\mathbf{R}(X, t)$ hanno il medesimo significato indicato sopra, mentre
 236 $\mathbf{V}(x, t) : T_x^*\mathcal{S} \rightarrow T_x\mathcal{S}$ è un tensore del secondo ordine simmetrico definito come $\mathbf{V}(x, t) =$
 237 $\sqrt{\mathbf{b}(x, t)}$. Pertanto, omettendo ancora le dipendenze per semplicità, in componenti si ha

$$\mathbf{F}^a{}_A = \mathcal{V}^{ab} g_{bc} \hat{\mathbf{1}}^c{}_D R^D{}_A. \quad (2.1.19)$$

238 *Dimostrazione.* Si veda ad esempio [22] e [23] per alcune considerazioni sull’argomento. \square

239 **Definizione 2.1.7** (Velocità euleriana e velocità lagrangiana [22]).

240 Detto $T\mathcal{S} := \cup_{x \in \mathcal{S}} (\{x\} \times T_x\mathcal{S})$ il fibrato tangente di \mathcal{S} , definiamo *velocità euleriana*
 241 $\mathbf{v}(\cdot, t) : \mathcal{B}_t \mapsto T\mathcal{S}$ per ogni $t \in \mathcal{I}$ un campo vettoriale che, per ogni istante di tempo
 242 nell’intervallo temporale considerato, associa a ciascun punto x di \mathcal{B}_t il vettore tangente
 243 rappresentante la velocità della particella che passa per il punto x al tempo t . Definiamo,
 244 inoltre, *velocità lagrangiana* \mathbf{V} la derivata parziale rispetto al tempo della mappa χ , ossia

$$\mathbf{V} := \dot{\chi} : \mathcal{B}_R \times \mathcal{I} \rightarrow T\mathcal{S}. \quad (2.1.20)$$

245 Le due velocità sono legate dalla seguente relazione

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} \circ (\chi, \mathcal{J}). \quad (2.1.21)$$

246 **Definizione 2.1.8** (Gradiente di velocità [22]).

247 Definiamo *gradiente* di una velocità \mathbf{v} , l’operatore definito da

$$\text{grad}\mathbf{v}(x, t) : T_x\mathcal{S} \mapsto T_x\mathcal{S}. \quad (2.1.22)$$

248 Esso è dunque un tensore misto le cui componenti sono date da

$$[\text{grad}\mathbf{v}]^a{}_b(x, t) = \mathbf{v}^a{}_{;b}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{v}^a(x, t)}{\partial x^b} + \gamma^a{}_{bc} \mathbf{v}^c(x, t) \quad (2.1.23)$$

249 dove $\mathbf{v}^a{}_{;b}$ sono le componenti della derivata covariante di \mathbf{v} , mentre le funzioni $\{\gamma^a{}_{bc}\}_{a,b,c=1}^3$
 250 costituiscono i *simboli di Christoffel*.

251 **Teorema 2.1.2** (Relazione tra i gradienti di velocità [22]).

252 *Detto $\text{Grad}\mathbf{V}(X, t) : T_X\mathcal{B}_R \rightarrow T_x\mathcal{S}$ il gradiente materiale di velocità, valgono le relazioni*

$$\text{Grad}\mathbf{V}(X, t) = \text{grad}\mathbf{v}(\chi(X, t), t) \mathbf{F}(X, t), \quad \text{Grad}\mathbf{V} = [\text{grad}\mathbf{v} \circ (\chi, \mathcal{J})] \mathbf{F}, \quad (2.1.24a)$$

$$\text{Grad}\mathbf{V}(X, t) = \dot{\mathbf{F}}(X, t). \quad (2.1.24b)$$

253 *In particolare, combinando le (2.1.24a) e (2.1.24b), si ha*

$$\ell(X, t) := \text{grad}\mathbf{v}(\chi(X, t), t) = \dot{\mathbf{F}}(X, t) \mathbf{F}^{-1}(x, t), \quad x = \chi(X, t). \quad (2.1.25)$$

254 *Dimostrazione.* Si veda [22]. □

255 **Definizione 2.1.9** (Derivata sostanziale [22]).

256 Definiamo *derivata sostanziale* di una grandezza h definita in $\mathcal{B}_t \times \mathcal{I}$ e a valori scalari,
257 vettoriali o tensoriali, l'operatore

$$Dh(x, t) := \partial_t h(x, t) + [\text{grad } h](x, t)\mathbf{v}(x, t) \quad (2.1.26)$$

258 **Definizione 2.1.10** (Accelerazione euleriana e accelerazione lagrangiana [22]).

259 Definiamo *accelerazione euleriana* $\mathbf{a}(\cdot, t) : \mathcal{B}_t \mapsto T\mathcal{S}$ per ogni $t \in \mathcal{I}$ un campo vettoriale
260 che, per ogni istante di tempo nell'intervallo temporale considerato, associa a ciascun punto
261 x di \mathcal{B}_t il vettore tangente rappresentante l'accelerazione della particella che passa per il
262 punto x al tempo t . Essa è legata alla velocità euleriana attraverso l'operatore di derivata
263 sostanziale. Infatti si definisce:

$$\mathbf{a} = D\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + [\text{grad } \mathbf{v}]\mathbf{v}. \quad (2.1.27)$$

264 Definiamo, inoltre, *accelerazione lagrangiana* \mathbf{A} la derivata parziale rispetto al tempo della
265 velocità \mathbf{V} , ossia la derivata seconda parziale rispetto al tempo di χ :

$$\mathbf{A} := \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\chi} : \mathcal{B}_R \times \mathcal{I} \rightarrow T\mathcal{S}, \quad (2.1.28)$$

266 Le due accelerazioni sono legate dalla seguente relazione

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \circ (\chi, \mathcal{J}). \quad (2.1.29)$$

267 2.2 Equazioni di bilancio

268 Sia $\mathcal{V}(t) \subset \mathcal{B}(t) \subset \mathcal{S}$ una regione di spazio contenuta nella configurazione corrente del
269 corpo continuo studiato e sia $f : \mathcal{V}(t) \rightarrow \mathbb{R}$ un campo pseudo-scalare integrabile secondo
270 Lebesgue in $\mathcal{V}(t)$, avente il significato di densità volumetrica della grandezza fisica $\int_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mu$,
271 e tale che $\int_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mu$ sia una funzione derivabile del tempo.

272 La derivata temporale di $\int_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mu$ è esprimibile mediante il Teorema di Reynolds [22, 24].
273 Se tale teorema è formulato per una regione $\mathcal{V}(t)$ il cui bordo $\partial\mathcal{V}(t)$ si muove con lo stesso
274 moto dei punti materiali del corpo che al tempo t si trovano su di esso, vale la relazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mu &= \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_t f \, d\mu + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} f \mathbf{v} \mathbf{n} \, da \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_t f \, d\mu + \int_{\mathcal{V}(t)} \text{div}(f \mathbf{v}) \, d\mu \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \{Df + f \text{div} \mathbf{v}\} \, d\mu, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

275 in cui è necessario supporre che f sia di classe C^1 su $\mathcal{V}(t) \times \mathcal{I}$ e si è denotato con \mathbf{n} il
276 campo di conormali, definito sul bordo di $\mathcal{V}(t)$, $\partial\mathcal{V}(t)$, la cui norma è $\|\mathbf{n}\|_{T_x^* \mathcal{S}} = 1$.

277 Seguendo la formulazione di Marsden&Hughes [22], la legge di bilancio per il generico
278 campo pseudo-scalare f ha la forma generale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mu &= \int_{\mathcal{V}(t)} s_f \, d\mu + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{q}_f \mathbf{n} \, da \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \{s_f + \text{div} \mathbf{q}_f\} \, d\mu, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

279 dove s_f è la sorgente o il pozzo associato a f , \mathbf{q}_f è il flusso di f attraverso $\partial\mathcal{V}(t)$ e si è
 280 supposto che esista $\operatorname{div}\mathbf{q}_f$ in $\mathcal{V}(t)$. Unendo i risultati (2.2.1) e (2.2.2), si ha in forma locale
 281 l'equazione di bilancio [22], cioè

$$Df + f \operatorname{div}\mathbf{v} = s_f + \operatorname{div}\mathbf{q}_f. \quad (2.2.3)$$

282 Nel modello di crescita che verrà sviluppato nei capitoli successivi, un ruolo importante
 283 è giocato dal bilancio di massa. Questo si ottiene ponendo $f = \varrho$, essendo ϱ la densità
 284 volumetrica di massa del corpo in esame, $s_f = \gamma_g$ la sorgente o il pozzo di massa dovuto
 285 alla crescita e \mathbf{q}_f flusso di massa, che nella teoria adottata in questa sede verrà supposto
 286 nullo [18] (in altri approcci, questa ipotesi non è considerata [25]). Quindi la (2.2.3) diviene
 287 [18]

$$D\varrho + \varrho \operatorname{div}\mathbf{v} = \gamma_g. \quad (2.2.4)$$

288 La dinamica del problema studiato in questa tesi si fonda sull'impiego, anche generaliz-
 289 zato, del Principio delle Potenze Virtuali [22, 21]. In questa sede ricordiamo l'espressione di
 290 tale principio nella sua formulazione classica, che è

$$\int_{\mathcal{B}(t)} \boldsymbol{\sigma}(x, t) : \operatorname{grad}\mathbf{w}(x) \, d\mu = \int_{\mathcal{B}(t)} \mathbf{f}(x, t)\mathbf{w}(x) \, d\mu + \int_{\partial_N\mathcal{B}(t)} \boldsymbol{\tau}(x, t)\mathbf{w}(x) \, da, \quad (2.2.5)$$

291 dove \mathbf{w} è il campo di *velocità virtuale* definito su $\mathcal{B}(t)$, $\boldsymbol{\sigma}(x, t) : T_x^*\mathcal{S} \rightarrow T_x^*\mathcal{S}$ è detto
 292 tensore degli sforzi di Cauchy, ed è introdotto come grandezza duale alla velocità virtuale
 293 generalizzata $\operatorname{grad}\mathbf{w}$, \mathbf{f} è un campo di covettori spaziali agenti su $\mathcal{B}(t)$ tale che $\mathbf{f}(x, t) :$
 294 $T_x\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ rappresenta le forze esterne volumetriche duali a $\mathbf{w}(x)$, e infine $\boldsymbol{\tau}$ è un campo
 295 di covettori spaziali agenti su $\partial_N\mathcal{B}(t)$ tale che $\boldsymbol{\tau}(x, t) : T_x\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ rappresenta le forze di
 296 contatto duali a $\mathbf{w}(x)$, essendo $\partial_N\mathcal{B}(t)$ il bordo di Neumann di $\mathcal{B}(t)$. Si noti che $\partial\mathcal{B}(t)$ si può
 297 scrivere come l'unione disgiunta di $\partial_D\mathcal{B}(t)$ e $\partial_N\mathcal{B}(t)$, dove $\partial_D\mathcal{B}(t)$ è il bordo di Dirichlet e su
 298 di esso le velocità virtuali sono nulle. Nella Equazione (2.2.9), il primo membro definisce la
 299 potenza virtuale interna che chiamiamo \mathcal{P}^{int} , mentre il secondo membro definisce la potenza
 300 virtuale esterna che chiamiamo \mathcal{P}^{ext} ,

$$\mathcal{P}^{\text{int}}(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{B}(t)} \boldsymbol{\sigma}(x, t) : \operatorname{grad}\mathbf{w}(x) \, d\mu, \quad (2.2.6a)$$

$$\mathcal{P}^{\text{ext}}(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{B}(t)} \mathbf{f}(x, t)\mathbf{w}(x) \, d\mu + \int_{\partial_N\mathcal{B}(t)} \boldsymbol{\tau}(x, t)\mathbf{w}(x) \, da. \quad (2.2.6b)$$

301 La Equazione (2.2.5) deve valere per ogni \mathbf{w} ammissibile.

302 Dal Principio delle Potenze Virtuali (2.2.5) segue che (omettendo per semplicità le
 303 dipendenze)

$$\int_{\partial_N\mathcal{B}(t)} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\mathbf{w} \, da + \int_{\mathcal{B}(t)} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f})\mathbf{w} \, d\mu = 0, \quad (2.2.7)$$

304 da cui si ottiene

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}(t) \quad (2.2.8a)$$

$$\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = 0, \quad \text{su } \partial_N\mathcal{B}(t). \quad (2.2.8b)$$

305 Per scrivere la forma materiale del Principio delle Potenze Virtuali, definiamo la velocità
 306 virtuale lagrangiana $\mathbf{W} = \mathbf{w} \circ \chi$, il tensore di Cauchy lagrangiano $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \circ (\chi, \mathcal{T})$, la forza

307 esterna volumetrica lagrangiana $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \circ (\chi, \mathcal{T})$ e la forza esterna di contatto lagrangiana
 308 $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} \circ (\chi, \mathcal{T})$; inoltre riscriviamo la (2.2.9) trasformando gli integrali su \mathcal{B}_R

$$\int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{P}(X, t) : \text{Grad} \mathbf{W}(X, t) \, d\mu_R = \int_{\mathcal{B}_R} \mathbf{f}_R(X, t) \mathbf{W}(X, t) \, d\mu_R + \int_{\partial_N \mathcal{B}_R} \boldsymbol{\tau}_R(X, t) \mathbf{W}(X, t) \, da_R, \quad (2.2.9)$$

309 dove valgono le seguenti definizioni

$$\mathbf{P}(X, t) = J(X, t) \hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t) \mathbf{F}^{-T}(X, t), \quad (2.2.10a)$$

$$\mathbf{f}_R(X, t) = J(X, t) \hat{\mathbf{f}}(X, t), \quad (2.2.10b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_R(X, t) = J(X, t) \hat{\boldsymbol{\tau}}(X, t) \sqrt{\mathbf{C}^{-1}(X, t) : [\mathbf{N}(X) \otimes \mathbf{N}(X)]}. \quad (2.2.10c)$$

310 La Equazione (2.2.10a) definisce il *primo tensore di Piola-Kirchhoff*, la (2.2.10b) definisce
 311 la forma materiale della forza volumetrica e la (2.2.10c) definisce la forma materiale della
 312 forza di contatto. Per la dimostrazione della (2.2.10c), si rimanda a [26].

313 Dal Principio delle Potenze Virtuali (2.2.9) segue che

$$\int_{\partial_N \mathcal{B}(t)} (\boldsymbol{\tau}_R - \mathbf{P} \mathbf{N}) \mathbf{W} \, da_R + \int_{\mathcal{B}(t)} (\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f}_R) \mathbf{W} \, d\mu_R = 0, \quad (2.2.11)$$

314 da cui si ottiene

$$\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f}_R = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_R, \quad (2.2.12a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_R - \mathbf{P} \mathbf{N} = 0, \quad \text{su } \partial_N \mathcal{B}_R. \quad (2.2.12b)$$

315 Per concludere la trattazione introduciamo il *secondo tensore di Piola-Kirchhoff*, che è dato
 316 da

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}, \quad (2.2.13)$$

317 **Definizione 2.2.1** (Dissipazione [21]).

318 Definiamo la *dissipazione* come

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \mathcal{D} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \psi \, d\mu + \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mu + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mathbf{v} \, da \geq 0, \quad (2.2.14)$$

319 dove ψ è l'energia libera di Helmholtz per unità di volume di $\mathcal{B}(t)$ e $\mathcal{V}(t)$ è una regione di
 320 $\mathcal{B}(t)$.

321 Riconoscendo che l'integrando del terzo addendo della (2.2.14) può essere scritto come
 322 $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \mathbf{v} = (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) \mathbf{n}$, applicando il Teorema di Gauss all'espressione risultante e il Teorema di
 323 Reynolds al primo addendo del secondo membro della (2.2.14), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}(t)} \mathcal{D} &= - \int_{\mathcal{V}(t)} (D\psi + \psi \text{div} \mathbf{v}) \, d\mu + \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mu + \int_{\mathcal{V}(t)} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) \, d\mu \\ &= - \int_{\mathcal{V}(t)} (D\psi + \psi \text{div} \mathbf{v}) \, d\mu + \int_{\mathcal{V}(t)} (\mathbf{f} + \text{div} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v} \, d\mu \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}(t)} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \mathbf{v} \, d\mu \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

324 Invocando la (2.2.8b) e localizzando il risultato, otteniamo

$$\mathcal{D} = -(D\psi + \psi \text{div} \mathbf{v}) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \mathbf{v} \geq 0. \quad (2.2.16)$$

2.3 Decomposizione di Bilby-Kröner-Lee

Poiché la crescita è un fenomeno che induce distorsioni anelastiche [17, 16, 18, 27, 4, 28, 8, 29, 30, 31], che interagiscono con il moto χ e descrivono il riarrangiamento strutturale del corpo a seguito dell'immissione e redistribuzione di massa al suo interno [18, 32, 13], è necessario introdurre un apparato matematico capace di tenere conto di tale fenomenologia. A tal proposito, nella letteratura sulla crescita volumetrica, si fa sovente impiego della *decomposizione moltiplicativa del tensore gradiente di deformazione* che, in questa sede, seguendo [17, 16, 18, 27, 4, 28, 8, 29, 30, 31, 33, 13], proponiamo nella forma conosciuta come la decomposizione di Bilby-Kröner-Lee (BKL) [34, 35], ossia

$$\mathbf{F}(X, t) = \mathbf{F}_e(X, t)\mathbf{K}(X, t). \quad (2.3.1)$$

In questa decomposizione, $\mathbf{K}(X, t)$ è un tensore del secondo ordine, non singolare, che descrive le distorsioni anelastiche dovute alla redistribuzione di materia associata alla crescita e, per ogni $X \in \mathcal{B}_R$, trasforma i vettori di $T_X\mathcal{B}_R$ in vettori di uno spazio $\mathcal{N}_X(t)$ in cui il materiale si trova nel proprio *stato rilassato*, o *naturale*, ossia totalmente privo di sforzi (per ulteriori dettagli si veda, ad esempio, [33]), mentre $\mathbf{F}_e(X, t)$ è un altro tensore del secondo ordine, anch'esso non singolare, che rappresenta la distorsione elastica che, fissato $\mathbf{K}(X, t)$, è necessaria applicare ai vettori di $\mathcal{N}_X(t)$ per ottenere i vettori di $T_{\chi(X, t)}\mathcal{S}$ ottenuti con $\mathbf{F}(X, t) : T_X\mathcal{B}_R \rightarrow T_{\chi(X, t)}\mathcal{S}$.

È importante sottolineare che né $\mathbf{F}_e(X, t)$ né $\mathbf{K}(X, t)$ sono identificabili con i tensori Jacobiani di altrettante deformazioni. Essi, quindi, *non sono integrabili* nel senso delle forme differenziali.

Chiamando $J_e(X, t) := \det\mathbf{F}_e(X, t)$ e $J_{\mathbf{K}}(X, t) := \det\mathbf{K}(X, t)$, si può notare che una conseguenza immediata della (2.3.1) è la relazione

$$J(X, t) = J_e(X, t)J_{\mathbf{K}}(X, t). \quad (2.3.2)$$

Mentre la determinazione di \mathbf{F} si basa sulle leggi standard della Meccanica del Continui, opportunamente modificate per tenere conto della presenza di \mathbf{K} , la determinazione di \mathbf{K} è diventata la questione principale di diverse ricerche che si occupano di crescita e rimodellamento. Si possono menzionare due criteri principali di determinazione. Il primo, basato sul *Teorema di Rappresentazione Tensoriale* [34], che mette in relazione una velocità generalizzata associata a \mathbf{K} , come ad esempio $\dot{\mathbf{K}}\mathbf{K}^{-1}$ o $\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}$, con una misura di sforzo ad essa duale (per esempio il tensore di Mandel). Il secondo, invece, è basato sul determinare $\mathbf{\Lambda}$ direttamente dalla disuguaglianza di dissipazione.

Capitolo 3

Uno studio della dinamica del tensore di crescita in mezzi isotropi

Questo capitolo è basato su alcune parti di [15].

Seguendo quanto fatto in [15], in questo capitolo ci poniamo l'obiettivo di scrivere l'equazione dinamica per il tensore di crescita in mezzi isotropi. Introduciamo quindi il bilancio di massa, scriveremo il Principio delle Potenze Virtuali e la diseuguaglianza della dissipazione, in modo che le variabili in gioco rispettino il Secondo Principio della Termodinamica nella forma meccanica [21]. Attribuiremo una espressione costitutiva alla forza dissipativa e giungeremo infine ad un problema ai valori iniziali e al contorno.

3.1 Bilancio di massa

Come punto di partenza per la nostra teoria della crescita volumetrica consideriamo il bilancio di massa

$$D_t \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = \gamma_g, \quad (3.1.1)$$

in cui γ_g è un termine di sorgente o pozzo che descrive la variazione di massa dovuta alla crescita. In forma materiale, la Equazione (3.1.1) diviene

$$\dot{\varrho}_R = J[\gamma_g \circ (\chi, \mathcal{T})]. \quad (3.1.2)$$

essendo $\varrho_R(X, t) := J(X, t)\varrho(\chi(X, t), t)$ la *densità di massa materiale*. Ricorrendo alla decomposizione moltiplicativa del tensore gradiente di deformazione, possiamo anche introdurre la *densità di massa associata allo stato naturale*, ossia $\varrho_\nu := J_e[\varrho \circ (\chi, \mathcal{T})]$, da cui proviene la relazione $\varrho_R = J_{\mathbf{K}}\varrho_\nu$. Da ciò segue che ϱ_ν è una quantità costante, poiché l'evoluzione temporale della densità di massa legata alla crescita avviene solo dalla configurazione di riferimento allo stato naturale. Si ha, dunque, $\dot{\varrho}_\nu = 0$ e, poiché vale la relazione $\dot{J}_{\mathbf{K}} = J_{\mathbf{K}}\operatorname{tr}\mathbf{\Lambda}$, con $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}$, la Equazione (3.1.2) conduce alla scrittura [15]

$$J_{\mathbf{K}}\varrho_\nu \operatorname{tr}\mathbf{\Lambda} = J[\gamma_g \circ (\chi, \mathcal{T})] \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}(\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}) = \Gamma_g, \quad \text{con } \Gamma_g \equiv \frac{J[\gamma_g \circ (\chi, \mathcal{T})]}{J_{\mathbf{K}}\varrho_\nu}. \quad (3.1.3)$$

Si noti che Γ_g ha le dimensioni fisiche del reciproco del tempo.

379 In svariati modelli di crescita e, in particolare, in quelli di crescita tumorale [2, 36, 6, 8, 37,
 380 38, 9, 39, 33, 13, 40], Γ_g viene assegnato costitutivamente su basi fenomenologiche. Tuttavia,
 381 seguendo un percorso concettualmente diverso, inizialmente suggerito in [18] nell'ambito di
 382 una trattazione che vede \mathbf{K} come variabile interna, e ripreso in [20, 10, 14, 15], in cui
 383 \mathbf{K} è considerata una variabile cinematica, è possibile mostrare che Γ_g può essere ottenuto
 384 (seppure con tutte le limitazioni modellistiche del caso) come il risultato della dinamica del
 385 corpo in crescita e, una volta noto, può essere impiegato per determinare la sorgente, o il
 386 pozzo, di massa γ_g che figura nella Equazione (3.1.1).

387 3.2 Principio dei Lavori Virtuali

388 Seguendo l'approccio di *Di Carlo e Quiligotti* [10] in una forma analoga a quella riportata
 389 in [15] (e [20, 41, 42, 43, 12]), da cui prendiamo il formalismo, possiamo scrivere il Principio
 390 dei Lavori Virtuali nel seguente modo

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \text{Grad } \delta\chi}_{=:W_{\text{int}}^{(\text{st})}} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{Y} : \mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{K}}_{=:W_{\text{int}}^{(\text{n-st})}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{f}_R \delta\chi + \int_{\partial_N \mathcal{B}} \boldsymbol{\tau} \delta\chi}_{=:W_{\text{ext}}^{(\text{st})}} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{Z} : \mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{K}}_{=:W_{\text{ext}}^{(\text{n-st})}} \quad (3.2.1)$$

391 dove \mathbf{P} è il primo tensore di Piola-Kirchhoff, $\delta\chi$ è lo spostamento virtuale associato a χ , \mathbf{Y}
 392 è la forza interna generalizzata non-standard duale allo spostamento virtuale generalizzato
 393 $\delta\mathbf{K}$, \mathbf{f}_R è la forza di volume standard, mentre $\boldsymbol{\tau}$ è la forza di contatto. Infine \mathbf{Z} è la forza
 394 esterna generalizzata non-standard che compie lavoro su $\delta\mathbf{K}$.

395 Possiamo riscrivere il primo termine della (3.2.1) utilizzando il Teorema di Gauss e la
 396 regola di derivazione di Leibniz, ossia

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \text{Grad } \delta\chi = \int_{\mathcal{B}} [\text{Div}(\mathbf{P}^T \delta\chi) - \text{Div} \mathbf{P} \delta\chi] = \int_{\partial_N \mathcal{B}} \mathbf{P} \mathbf{N} \delta\chi - \int_{\mathcal{B}} \text{Div} \mathbf{P} \delta\chi, \quad (3.2.2)$$

397 dove \mathbf{N} è il campo di covettori normali a $\partial_N \mathcal{B}$, che rappresenta il bordo di Neumann di \mathcal{B} .
 398 Raggruppando i termini e sostituendo quanto trovato prima, otteniamo

$$\int_{\partial_N \mathcal{B}} \{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{P} \mathbf{N}\} \delta\chi + \int_{\mathcal{B}} \{\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f}_R\} \delta\chi + \int_{\mathcal{B}} \{\mathbf{Z} - \mathbf{Y}\} : \mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{K} = 0. \quad (3.2.3)$$

399 Dalla (3.2.3) segue il problema in forma forte

$$\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f}_R = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (3.2.4a)$$

$$\mathbf{Z} - \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (3.2.4b)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}, \quad \text{in } \partial_N \mathcal{B} \quad (3.2.4c)$$

$$\chi = \chi_b, \quad \text{in } \partial_D \mathcal{B} \quad (3.2.4d)$$

400 in cui la (3.2.4a) e la (3.2.4c) rappresentano rispettivamente i bilanci di forza nei punti
 401 interni di \mathcal{B} e sul bordo di Neumann $\partial_N \mathcal{B}$ relativi alle forze duali a $\delta\chi$, la (3.2.4b) rappre-
 402 senta l'equazione di bilancio delle forze duali a $\mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{K}$, mentre la (3.2.4d) rappresenta la
 403 condizione al bordo di Dirichlet.

404 Aggiungendo eventuali condizioni iniziali su χ e su \mathbf{K} , le equazioni (3.2.4a)–(3.2.4d)
 405 rappresentano il problema ai valori iniziali e al contorno da risolvere. Per chiudere tale
 406 problema, è necessario fornire delle leggi costitutive che leghino le forze generalizzate interne
 407 \mathbf{P} e \mathbf{Y} ai descrittori cinematici del problema, χ e \mathbf{K} . Analogamente, sarà necessario fornire
 408 delle espressioni per le forze generalizzate esterne \mathbf{f}_R e \mathbf{Z} , tenendo conto del fatto che, come
 409 suggerito in [21] (si veda anche [15]), queste possono racchiudere eventuali effetti inerziali
 410 (si noti che, nel caso di \mathbf{Z} , tali effetti acquisiscono un significato generalizzato), cosicché
 411 ciascuna di esse deve essere messa in relazione con χ e \mathbf{K} , oltre che con le derivate temporali
 412 di queste sino al secondo ordine, se richiesto dal problema.

3.3 Dissipazione

Seguendo quanto esposto in [15], tra tutte le restrizioni costitutive cui \mathbf{P} e \mathbf{Y} devono obbedire, consideriamo per i nostri scopi solo la coerenza con il Secondo Principio della Termodinamica, che esprimiamo attraverso la disequazione per la dissipazione. Supponendo per semplicità di considerare una porzione \mathcal{V} di \mathcal{B}_R , interamente contenuta in esso, e indipendente dal tempo, esprimiamo la forma globale della disuguaglianza della dissipazione come

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D}_R &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \Psi_R + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{P}\mathbf{N})\mathbf{v} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{Z} : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \geq 0 \\ &= -\int_{\mathcal{V}} \dot{\Psi}_R + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{V}} \text{Div}(\mathbf{P}^T \mathbf{v}) + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{Z} : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \geq 0 \\ &= -\int_{\mathcal{V}} \dot{\Psi}_R + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{V}} \text{Div} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} : \text{Grad} \mathbf{V} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{Z} : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \geq 0 \\ &= -\int_{\mathcal{V}} \dot{\Psi}_R + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{f}_R + \text{Div} \mathbf{P}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} : \text{Grad} \mathbf{V} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{Z} : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

in cui Ψ_R è l'energia libera per unità di volume del corpo deformato. Invocando le equazioni del moto (3.2.4a) e (3.2.4b) e localizzando il risultato, otteniamo infine

$$\mathcal{D}_R = -\dot{\Psi}_R + \mathbf{P} : \text{Grad} \mathbf{V} + \mathbf{Y} : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \geq 0. \quad (3.3.2)$$

Al fine di tener conto della natura del materiale di cui un corpo è costituito, leghiamo la risposta del materiale considerato, qui espressa in termini di Ψ_R , \mathbf{P} e \mathbf{Y} , al moto, attraverso \mathbf{F} , a \mathbf{K} , ed eventualmente alle sue derivate. Poniamo quindi

$$\Psi_R = \hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}, \mathcal{X}, \mathcal{T}), \quad (3.3.3a)$$

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}, \mathcal{X}, \mathcal{T}), \quad (3.3.3b)$$

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{Y}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}, \mathcal{X}, \mathcal{T}), \quad (3.3.3c)$$

ma, poiché ipotizziamo che \mathbf{K} racchiuda in sé tutta l'informazione data dalla dipendenza esplicita di Ψ_R , \mathbf{P} e \mathbf{Y} da \mathcal{X} e \mathcal{T} , allora possiamo riscrivere le equazioni (3.3.3a)-(3.3.3c) eliminando la dipendenza da queste ultime, ossia

$$\Psi_R = \hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}), \quad (3.3.4a)$$

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}), \quad (3.3.4b)$$

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{Y}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}). \quad (3.3.4c)$$

Ulteriori semplificazioni seguono dalla Equazione (3.3.2) che diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R &= -\left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{F}} \circ (\dots) \right] : \dot{\mathbf{F}} - \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{K}} \circ (\dots) \right] : \dot{\mathbf{K}} - \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \dot{\mathbf{K}}} \circ (\dots) \right] : \ddot{\mathbf{K}} \\ &\quad + [\hat{\mathbf{P}} \circ (\dots)] : \dot{\mathbf{F}} + [\hat{\mathbf{Y}} \circ (\dots)] : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \\ &= \left\{ -\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{F}} \circ (\dots) + \hat{\mathbf{P}} \circ (\dots) \right\} : \dot{\mathbf{F}} + \left\{ -\mathbf{K}^T \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{K}} \circ (\dots) \right] + \hat{\mathbf{Y}} \circ (\dots) \right\} : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \\ &\quad - \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \dot{\mathbf{K}}} \circ (\dots) \right] : \ddot{\mathbf{K}} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Impiegando il metodo di Coleman&Noll, osserviamo dalla (3.3.5) che, poiché $\ddot{\mathbf{K}}$ non è stata dichiarata né come variabile costitutiva dipendente né come variabile costitutiva indipendente, allora essa può essere variata in maniera del tutto arbitraria e, di conseguenza, può

432 essere scelta in modo tale da rendere \mathcal{D}_R negativa, il che è inaccettabile. Inoltre, \mathcal{D}_R può es-
 433 sere ridefinita come una funzione lineare in $\dot{\mathbf{K}}$, e quindi, al fine di garantire la non-negatività
 434 di \mathcal{D}_R , si richiede che il coefficiente di tale variabile sia identicamente nullo. Quindi $\hat{\Psi}_R$ non
 435 dipende da $\dot{\mathbf{K}}$ e con un lieve abuso di notazione possiamo ridefinirla come

$$\Psi_R = \hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}). \quad (3.3.6)$$

436 Per le stesse considerazioni di prima su $\dot{\mathbf{F}}$, ne segue che

$$\hat{\mathbf{P}} \circ (\dots) = \frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{F}} \circ (\dots), \quad (3.3.7)$$

437 da cui segue che neanche $\hat{\mathbf{P}}$ dipenda da $\dot{\mathbf{K}}$. Possiamo riscrivere allora, con un lieve abuso
 438 di notazione,

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}). \quad (3.3.8)$$

439 Detto ciò, la (3.3.5) si riduce a

$$\left\{ -\mathbf{K}^T \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{K}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right] + \hat{\mathbf{Y}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right\} : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \geq 0. \quad (3.3.9)$$

440 Assumendo che il corpo sia iperelastico, possiamo scrivere l'energia come

$$\begin{aligned} \Psi_R &= \hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = (\det \mathbf{F}) [\Psi \circ (\chi, \mathcal{T})] = (\det \mathbf{K}) \underbrace{(\det \mathbf{F}_e) [\Psi \circ (\chi, \mathcal{T})]}_{:= \Psi_\nu} \\ &= (\det \mathbf{K}) \Psi_\nu, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

441 osservando che Ψ_ν è l'energia libera di Helmholtz per unità di volume del corpo allo stato
 442 naturale.

443 La decomposizione moltiplicativa assieme alla proprietà del materiale di uniformità
 444 permettono di scrivere:

$$\hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = (\det \mathbf{K}) [\hat{\Psi}_\nu \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1})]. \quad (3.3.11)$$

445 Poiché $\mathbf{F}_e = \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}$, allora

$$\Psi_\nu = \hat{\Psi}_\nu \circ \mathbf{F}_e = \hat{\mathcal{W}}_\nu \circ \mathbf{C}_e. \quad (3.3.12)$$

446 Avendo dato la definizione per l'energia libera, calcoliamone la derivata e sostituiamo poi
 447 nella disequazione per la dissipazione (3.3.2)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Psi}}_R &= \frac{d}{dt} [\hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})] = \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{F}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right] : \dot{\mathbf{F}} + \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{K}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right] : \dot{\mathbf{K}} \\ &= J_{\mathbf{K}} (\mathbf{K}^{-T} : \dot{\mathbf{K}}) [\hat{\Psi}_\nu \circ \mathbf{F}_e] + J_{\mathbf{K}} \left[\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F}_e} \circ (\mathbf{F}_e) \right] : \dot{\mathbf{F}}_e. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

448 Sostituiamo adesso nella (3.3.13) la derivata di \mathbf{F}_e , ossia $\dot{\mathbf{F}}_e = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}$, e
 449 riorganizziamo i termini:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Psi}}_R &= J_{\mathbf{K}} (\mathbf{K}^{-T} : \dot{\mathbf{K}}) [\hat{\Psi}_\nu \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1})] \\ &+ J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) : (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) \mathbf{K}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} \\
 &\quad + \left\{ J_{\mathbf{K}} [\hat{\Psi}_\nu \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1})] \mathbf{K}^{-T} - \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-T} J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) \mathbf{K}^{-T} \right\} : \dot{\mathbf{K}} \\
 &= J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) \mathbf{K}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} \\
 &\quad + \left\{ [\hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})] \mathbf{K}^{-T} - \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-T} J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) \mathbf{K}^{-T} \right\} : \dot{\mathbf{K}}. \quad (3.3.14)
 \end{aligned}$$

450 Inseriamo il risultato della derivata dell'energia libera Ψ_R nella disuguaglianza per la dissipa-
 451 zione (3.3.2), ottenendo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_R &= \left\{ -J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) \mathbf{K}^{-T} + \mathbf{P} \right\} : \dot{\mathbf{F}} \\
 &\quad + \mathbf{K}^T \left\{ - \left[[\hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})] \mathbf{I}^T - \mathbf{F}^T J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) \mathbf{K}^{-T} \right] + \mathbf{Y} \right\} : \dot{\mathbf{K}} \geq 0.
 \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

452 Dalle considerazioni precedenti e dalla (3.3.7), possiamo concludere che il primo tensore di
 453 Piola-Kirchhoff può essere definito come

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = \frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{F}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = J_{\mathbf{K}} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_\nu}{\partial \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) \right) \mathbf{K}^{-T}, \quad (3.3.16)$$

454 cioè come la forza generalizzata duale alla velocità generalizzata virtuale $\dot{\mathbf{F}}$. Con questa
 455 considerazione appena fatta la (3.3.15) si riscrive nel seguente modo

$$\mathcal{D}_R = \mathbf{K}^T \left\{ - \left[\left(\hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right) \mathbf{I}^T - \mathbf{F}^T \left(\hat{\mathbf{P}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right) \right] + \mathbf{Y} \right\} : \dot{\mathbf{K}} \geq 0, \quad (3.3.17)$$

456 e tenendo a mente che in generale un tensore di Eshelby è un tensore del tipo

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) = \left[\hat{\Psi}_R \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right] \mathbf{I}^T - \mathbf{F}^T \left[\hat{\mathbf{P}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right],$$

457 possiamo ottenere la dissipazione residua come

$$\mathcal{D}_R = \mathbf{K}^T \left\{ -\hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) + \mathbf{Y} \right\} : \dot{\mathbf{K}} \geq 0, \quad (3.3.19)$$

458 e definendo la seguente quantità

$$\mathbf{Y}_d := -\mathbf{K}^T \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_R}{\partial \mathbf{K}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right) + \mathbf{Y} = - \left[\hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right] + \mathbf{Y}, \quad (3.3.20)$$

459 l'equazione (3.3.17) diventa

$$\mathcal{D}_R = \mathbf{Y}_d : \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} \geq 0, \quad (3.3.21)$$

460 in cui \mathbf{Y}_d è la parte dissipativa della forza interna generalizzata duale alla velocità genera-
 461 lizzata virtuale associata a \mathbf{K} , e la sua espressione sarà assegnata costitutivamente.

3.4 Espressione costitutiva di \mathbf{Y}_d

In questo paragrafo ricaviamo una espressione costitutiva per \mathbf{Y}_d , seguendo quanto riportato in [15, 10]. Per far ciò, iniziamo con il riportare \mathbf{Y}_d allo stato naturale, ottenendo il tensore $\mathbf{Y}_{d\nu} = J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^{-T} \mathbf{Y}_d \mathbf{K}^T$. Chiamiamo, inoltre, $\mathbf{L}_{\mathbf{K}} := \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}$ e riscriviamo così la disequazione (3.3.21)

$$\mathcal{D}_R = J_{\mathbf{K}} \mathbf{Y}_{d\nu} : \mathbf{L}_{\mathbf{K}} \geq 0. \quad (3.4.1)$$

Adesso, procediamo cercando una espressione costitutiva per $\mathbf{Y}_{d\nu} = \hat{\mathbf{Y}}_{d\nu} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}})$ che sostituiamo nell'equazione (3.3.20), ottenendo

$$J_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^T \left[\hat{\mathbf{Y}}_{d\nu} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}) \right] \mathbf{K}^{-T} + \left[\hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \right] = \hat{\mathbf{Z}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dots), \quad (3.4.2)$$

da cui segue

$$\hat{\mathbf{Y}}_{d\nu} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dot{\mathbf{K}}) + \hat{\mathbf{H}}_{d\nu} \circ (\mathbf{F} \mathbf{K}^{-1}) = \frac{1}{J_{\mathbf{K}}} \mathbf{K}^{-T} \left[\hat{\mathbf{Z}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \dots) \right] \mathbf{K}^T. \quad (3.4.3)$$

Come richiesto dalla teoria generale delle leggi costitutive, la funzione $\hat{\mathbf{Y}}_{d\nu}$ deve essere oggettiva. Ad essa, però, è anche richiesto di soddisfare ulteriori assiomi costitutivi che provengono dalla necessità di fare in modo che la Equazione (3.4.3) rappresenti una evoluzione intrinseca di \mathbf{K} [18, 15] e che pertanto risulti essere uniforme, indipendente dalla scelta della configurazione di riferimento e covariante per trasformazioni ortogonali dello stato naturale. Seguendo quanto fatto in [15] si può dimostrare che una legge costitutiva del tipo

$$\mathbf{Y}_{d\nu} = \bar{\mathbf{Y}}_{d\nu} \circ (\mathbf{C}_e, \mathbf{L}_{\mathbf{K}}) \quad (3.4.4)$$

rispetta l'uniformità e l'indipendenza dalla configurazione di riferimento e, date le leggi di trasformazione

$$\mathbf{C}_e(X, t) \mapsto \tilde{\mathbf{C}}_e(X, t) = \mathcal{R}^{-T}(X) \mathbf{C}_e(X, t) \mathcal{R}^{-1}(X), \quad (3.4.5a)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(X, t) \mapsto \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}(X, t) = \mathcal{R}(X) \mathbf{L}_{\mathbf{K}}(X, t) \mathcal{R}^{-1}(X), \quad (3.4.5b)$$

deve soddisfare alla condizione

$$\bar{\mathbf{Y}}_{d\nu}(\tilde{\mathbf{C}}_e(X, t), \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}(X, t)) = \mathcal{R}^{-T}(X) \left[\bar{\mathbf{Y}}_{d\nu}(\mathbf{C}_e(X, t), \mathbf{L}_{\mathbf{K}}(X, t)) \right] \mathcal{R}^T(X), \quad (3.4.6)$$

per essere covariante rispetto alle trasformazioni ortogonali dello stato naturale.

Per trovare una espressione che rispetti la condizione (3.4.6), traiamo ispirazione dalla forma del tensore di Eshelby associato allo stato naturale

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\nu &= \Psi_\nu \boldsymbol{\delta}^T - \mathbf{F}_e^T \mathbf{P}_\nu = \Psi_\nu \boldsymbol{\delta}^T - \mathbf{F}_e^T \mathbf{g} \mathbf{F}_e \mathbf{S}_\nu \\ &= \Psi_\nu \boldsymbol{\delta}^T - \mathbf{C}_e \mathbf{S}_\nu. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Quindi, per definizione di \mathbf{H}_ν , il tensore

$$\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{H}_\nu = \Psi_\nu \mathbf{C}_e^{-1} - \mathbf{S}_\nu \quad (3.4.8)$$

è simmetrico.

Studiamo adesso la doppia contrazione tra il tensore \mathbf{H}_ν e $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}$,

$$\mathbf{H}_\nu : \mathbf{L}_{\mathbf{K}} = \text{tr}(\mathbf{H}_\nu^T \mathbf{L}_{\mathbf{K}}) = \text{tr}(\mathbf{H}_\nu^T \mathbf{C}_e \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{L}_{\mathbf{K}})$$

$$= \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{H}_\nu : \text{sym}(\mathbf{C}_e \mathbf{L}_K). \quad (3.4.9)$$

485 A questo punto possiamo scrivere la dissipazione nel modo seguente

$$\mathcal{D}_R = J_K \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{Y}_{d\nu} : \mathbf{C}_e \mathbf{L}_K \geq 0. \quad (3.4.10)$$

486 Per ottenere una relazione costitutiva tra $\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{Y}_{d\nu}$ e $\mathbf{C}_e \mathbf{L}_K$ modifichiamo opportunamente
 487 una decomposizione nota in letteratura con il nome di *decomposizione di Pericak-Spector &*
 488 *Spector* [44, 45, 15] e poniamo

$$\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{Y}_{d\nu} = [\mathbb{T}_\nu \circ \mathbf{C}_e] : \mathbf{C}_e \mathbf{L}_K, \quad (3.4.11)$$

489 dove la funzione a valori tensoriali del quarto ordine $[\mathbb{T}_\nu \circ \mathbf{C}_e]$ è data da

$$\mathbb{T}_\nu \circ \mathbf{C}_e := a_\nu \mathbb{V}_\nu^\# + 2b_\nu \mathbb{S}_\nu^\# + 2c_\nu \mathbb{A}_\nu^\#, \quad (3.4.12)$$

490 e i tensori $\mathbb{V}_\nu^\#, \mathbb{S}_\nu^\#$ e $\mathbb{A}_\nu^\#$ sono

$$\mathbb{V}_\nu^\# := \frac{1}{3} \mathbf{C}_e^{-1} \otimes \mathbf{C}_e^{-1}, \quad (3.4.13a)$$

$$\mathbb{S}_\nu^\# := \frac{\mathbf{C}_e^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}_e^{-1} + \mathbf{C}_e^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{C}_e^{-1}}{2}, \quad (3.4.13b)$$

$$\mathbb{A}_\nu^\# := \frac{\mathbf{C}_e^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}_e^{-1} - \mathbf{C}_e^{-1} \overline{\otimes} \mathbf{C}_e^{-1}}{2}, \quad (3.4.13c)$$

491 mentre le costanti reali a_ν, b_ν e c_ν devono essere tali che

$$a_\nu + 2b_\nu \geq 0, \quad b_\nu \geq 0, \quad c_\nu \geq 0, \quad (3.4.14)$$

492 affinché la disequazione (3.4.10) sia soddisfatta. Si noti che la notazione riportata nelle
 493 equazioni (3.4.13a)-(3.4.13c) è adattata da [46, 8].

494 Per semplicità di notazione nei successivi calcoli, chiamiamo $\mathcal{Y} := \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{Y}_{d\nu}$ e $\mathcal{L} := \mathbf{C}_e \mathbf{L}_K$
 495 e procediamo con le seguenti operazioni tensoriali

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\# : \mathcal{L} &= \frac{1}{3} \mathbf{C}_e^{-1} \otimes \mathbf{C}_e^{-1} : \mathcal{L} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}_e^{-1} \mathcal{L}) \mathbf{C}_e^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{L}_K) \mathbf{C}_e^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{L}_K) \mathbf{C}_e^{-1}, \end{aligned} \quad (3.4.15a)$$

$$\begin{aligned} [\mathbb{S}^\# : \mathcal{L}]^{\alpha\beta} &= (\mathbb{S}^\#)^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{L}_{\gamma\delta} = \frac{(\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\gamma} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\beta\delta} + (\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\delta} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\beta\gamma}}{2} \mathcal{L}_{\gamma\delta} \\ &= \frac{(\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\gamma} \mathcal{L}_{\gamma\delta} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\delta\beta} + (\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\delta} (\mathcal{L}^T)_{\delta\gamma} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\gamma\beta}}{2} \\ &= [\mathbf{C}_e^{-1} \text{sym}(\mathcal{L}) \mathbf{C}_e^{-1}]^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.4.15b)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^\# : \mathcal{L} &= \mathbf{C}_e^{-1} \text{sym}(\mathcal{L}) \mathbf{C}_e^{-1} = \frac{\mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{L}_K \mathbf{C}_e^{-1} + \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{L}_K^T \mathbf{C}_e \mathbf{C}_e^{-1}}{2} \\ &= \text{sym}(\mathbf{L}_K \mathbf{C}_e^{-1}) \end{aligned} \quad (3.4.15c)$$

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}^\# : \mathcal{L}]^{\alpha\beta} &= (\mathbb{A}^\#)^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{L}_{\gamma\delta} = \frac{(\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\gamma} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\beta\delta} - (\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\delta} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\beta\gamma}}{2} \mathcal{L}_{\gamma\delta} \\ &= \frac{(\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\gamma} \mathcal{L}_{\gamma\delta} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\delta\beta} - (\mathbf{C}_e^{-1})^{\alpha\delta} (\mathcal{L}^T)_{\delta\gamma} (\mathbf{C}_e^{-1})^{\gamma\beta}}{2} \end{aligned}$$

$$= [C_e^{-1} \text{skew}(\mathbf{L}) C_e^{-1}]^{\alpha\beta} \quad (3.4.15d)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^\# : \mathcal{L} &= C_e^{-1} \text{skew}(\mathbf{L}) C_e^{-1} = \frac{C_e^{-1} C_e \mathbf{L}_K C_e^{-1} - C_e^{-1} \mathbf{L}_K^T C_e C_e^{-1}}{2} \\ &= \text{skew}(\mathbf{L}_K C_e^{-1}) \end{aligned} \quad (3.4.15e)$$

496 Facciamo le seguenti osservazioni:

Osservazione.

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^\# + \mathbb{A}^\# &= \frac{C_e^{-1} \underline{\otimes} C_e^{-1} + C_e^{-1} \overline{\otimes} C_e^{-1}}{2} + \frac{C_e^{-1} \underline{\otimes} C_e^{-1} - C_e^{-1} \overline{\otimes} C_e^{-1}}{2} \\ &= C_e^{-1} \underline{\otimes} C_e^{-1} = \mathbb{I}^\# \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

497 dove $\mathbb{I}^\#$ è la generalizzazione del tensore di identità del quarto ordine su $\text{sym}[T_X \mathcal{B}_R]_2^0$
498 effettuata con il cambio di metrica introdotto da C_e^{-1}

$$\mathbb{I}^\# : \text{sym}[T_X \mathcal{B}_R]_2^0 \mapsto \text{sym}[T_X \mathcal{B}_R]_0^2, \quad (3.4.17)$$

499 ossia trasforma un tensore del secondo ordine reso “covariante” da C_e (da sinistra) in un
500 tensore del secondo ordine reso “controvariante” da C_e^{-1} (da destra). Si noti che la notazione
501 $\text{sym}[T_X \mathcal{B}_R]_2^0$ e $\text{sym}[T_X \mathcal{B}_R]_0^2$ è tratta da [47, 46]

Osservazione.

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}^\# - \mathbb{V}^\#) : \mathcal{L} &= \mathbb{I}^\# : \mathcal{L} - \mathbb{V}^\# : \mathcal{L} \\ &= C_e^{-1} \mathcal{L} C_e^{-1} - \frac{1}{3} \text{tr}(C_e^{-1} \mathcal{L}) C_e^{-1} \\ &= \mathbf{L}_K C_e^{-1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{L}_K) C_e^{-1} \\ &= (\text{dev} \mathbf{L}_K) C_e^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

502 Possiamo chiamare $\mathbb{D}^\# := \mathbb{I}^\# - \mathbb{V}^\#$ “operatore deviatorico” rispetto a C_e , cioè

$$\text{tr}[(\mathbb{D}^\# : \mathcal{L}) C_e] = 0. \quad (3.4.19)$$

503 *Osservazione.* Similmente a quanto detto per $\mathbb{D}^\#$, anche $\mathbb{A}^\#$ può essere considerato un
504 “operatore deviatorico”, infatti

$$\text{tr}[(\mathbb{A}^\# : \mathcal{L}) C_e] = \text{tr} \left[\frac{\mathbf{L}_K C_e^{-1} - C_e^{-1} \mathbf{L}_K^T}{2} C_e \right] \quad (3.4.20)$$

$$= \text{tr} \left[\frac{\mathbf{L}_K - C_e^{-1} \mathbf{L}_K^T C_e}{2} \right] = 0. \quad (3.4.21)$$

505 In definitiva,

$$\mathbf{y} = \mathbb{T}_\nu : \mathcal{L}, \quad (3.4.22)$$

506 da cui, esplicitando le definizioni dei tensori, segue che

$$\begin{aligned} C_e^{-1} \mathbf{Y}_{d\nu} &= a_\nu \left\{ \frac{1}{3} C_e^{-1} \underline{\otimes} C_e^{-1} + b_\nu [C_e^{-1} \underline{\otimes} C_e^{-1} + C_e^{-1} \overline{\otimes} C_e^{-1}] \right. \\ &\quad \left. + c_\nu [C_e^{-1} \underline{\otimes} C_e^{-1} - C_e^{-1} \overline{\otimes} C_e^{-1}] \right\} : C_e \mathbf{L}_K. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

507 Sviluppando i calcoli e moltiplicando a destra per il tensore \mathbf{C}_e , otteniamo l'espressione per
 508 la forza dissipativa generalizzata associata allo stato naturale, ossia

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{d\nu} &= a_\nu \frac{\text{tr}(\mathbf{L}_K)}{3} \boldsymbol{\delta}^T + 2b_\nu \mathbf{C}_e \text{sym}(\mathbf{L}_K \mathbf{C}_e^{-1}) + 2c_\nu \text{skew}(\mathbf{L}_K \mathbf{C}_e^{-1}) \\ &= a_\nu \frac{\text{tr}(\mathbf{L}_K)}{3} \boldsymbol{\delta}^T + 2b_\nu \frac{\mathbf{C}_e \mathbf{L}_K \mathbf{C}_e^{-1} + \mathbf{L}_K^T}{2} + 2c_\nu \frac{\mathbf{C}_e \mathbf{L}_K \mathbf{C}_e^{-1} - \mathbf{L}_K^T}{2}. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

509 In conclusione, possiamo quindi scrivere l'espressione di \mathbf{Y}_d come

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_d &= J_K \mathbf{K}^T \mathbf{Y}_{d\nu} \mathbf{K}^{-T} \\ &= J_K a_\nu \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Lambda})}{3} \mathbf{I}^T + 2J_K b_\nu \frac{\mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^T}{2} + 2J_K c_\nu \frac{\mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} - \boldsymbol{\Lambda}^T}{2}. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

510 3.5 Problema ai valori al contorno

511 Per le considerazioni appena svolte, e supponendo che \mathbf{f}_R sia trascurabile per la tipologia di
 512 problemi biomeccanici di interesse per questa Tesi, le Equazioni (3.2.4a)-(3.2.4d) assumono
 513 la forma

$$\text{Div} \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (3.5.1a)$$

$$\chi = \chi_b, \quad \text{in } \partial_D \mathcal{B} \quad (3.5.1b)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}, \quad \text{in } \partial_N \mathcal{B} \quad (3.5.1c)$$

$$\begin{aligned} J_K a_\nu \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{I}^T}{3} + 2J_K b_\nu \frac{\mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^T}{2} + 2J_K c_\nu \frac{\mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} - \boldsymbol{\Lambda}^T}{2} \\ = -\hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) + \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (3.5.1d)$$

$$\mathbf{K}(X, 0) = \mathbf{K}_0(X), \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (3.5.1e)$$

514 $\mathbf{K}_0(X)$ è il tensore di distorsioni anelastiche al tempo $t = 0$.

515 È importante osservare che, mentre le Equazioni (3.5.1a)–(3.5.1c) costituiscono la forma
 516 forma classica dei problemi al contorno quasi-statici che si incontrano in Meccanica dei
 517 Continui, la Equazioni (3.5.1d), assieme alla condizione iniziale (3.5.1e), non è “classica”.
 518 Essa, infatti, rappresenta l'evoluzione del tensore delle distorsioni anelastiche indotte dalla
 519 crescita come una equazione dinamica per questa grandezza tensoriale. In particolare, si
 520 nota che essa conduce ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine alle derivate
 521 ordinarie in tempo e che l'evoluzione di \mathbf{K} è governata dalla differenza tra $\hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})$ e
 522 \mathbf{Z} . Di conseguenza, la forma assegnata a \mathbf{Z} è decisiva per determinare il tipo di evoluzione
 523 di \mathbf{K} .

524 Nel seguito, consideriamo due problemi ai valori al contorno, di cui studieremo i risultati
 525 nei capitoli successivi, che sono ottenuti prescrivendo due espressioni diverse di \mathbf{Z} . Nel
 526 dettaglio, studiamo:

527 1. Modello 1 (M1)

$$\text{Div} \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (3.5.2a)$$

$$\chi = \chi_b, \quad \text{in } \partial_D \mathcal{B} \quad (3.5.2b)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}, \quad \text{in } \partial_N \mathcal{B} \quad (3.5.2c)$$

$$\begin{aligned} J_K a_\nu \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{I}^T}{3} + 2J_K b_\nu \frac{\mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^T}{2} + 2J_K c_\nu \frac{\mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} - \boldsymbol{\Lambda}^T}{2} \\ = -\text{dev}[\hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})] + \mathbf{T} + \frac{1}{3} k_c \Gamma J_K \mathbf{I}^T, \end{aligned} \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (3.5.2d)$$

$$\mathbf{K}(X,0) = \mathbf{K}_0(X), \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (3.5.2e)$$

528 avendo posto

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{H})\mathbf{I}^T + \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c\Gamma J_{\mathbf{K}}\mathbf{I}^T. \quad (3.5.3)$$

529 **2. Modello 2 (M2)**

$$\text{Div}\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (3.5.4a)$$

$$\chi = \chi_b, \quad \text{in } \partial_D\mathcal{B} \quad (3.5.4b)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}, \quad \text{in } \partial_N\mathcal{B} \quad (3.5.4c)$$

$$J_{\mathbf{K}}a_\nu \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{I}^T}{3} + 2J_{\mathbf{K}}b_\nu \frac{\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^T}{2} + 2J_{\mathbf{K}}c_\nu \frac{\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} - \boldsymbol{\Lambda}^T}{2} \\ = -[\hat{\mathbf{H}} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})] + \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c\Gamma J_{\mathbf{K}}\mathbf{I}^T, \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (3.5.4d)$$

$$\mathbf{K}(X,0) = \mathbf{K}_0(X), \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (3.5.4e)$$

530 avendo posto

$$\mathbf{Z} = \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c\Gamma J_{\mathbf{K}}\mathbf{I}^T. \quad (3.5.5)$$

531 Nelle definizioni (3.5.3) e (3.5.5), k_c è una costante reale e positiva avente le unità di [sforzo-
532 tempo]; Γ contribuisce a definire la parte volumetrica di \mathbf{Z} e, come tale, è introdotta per
533 pilotare l'evoluzione della parte volumetrica di $\boldsymbol{\Lambda}$ che, come previsto dalla (3.1.3), è legata
534 alla crescita, ossia a Γ_g ; infine, \mathbf{T} è un tensore del secondo ordine che prendiamo *deviatorico*
535 per definizione e che supponiamo noto, il cui ruolo è quello di “deviare” l'evoluzione di
536 \mathbf{K} dalla forma sferica di tale tensore, che solitamente si ha se si suppone che, all'istante
537 iniziale, non vi sia crescita (ossia, $\mathbf{K}_0(X) = \mathbf{I}$ —dove, con un lieve abuso di notazione,
538 stiamo impiegando il tensore identità \mathbf{I} al posto di uno *shifter* [22]).

539 Alla luce delle considerazioni svolte, nel presente lavoro, l'assegnazione di Γ —che avverrà
540 su basi costitutive/fenomenologiche— permetterà di determinare Γ_g e, noto quest'ultimo,
541 γ_g . Di conseguenza, la forza esterna \mathbf{Z} ha il ruolo di definire sia la crescita propriamente
542 detta, ossia un fenomeno essenzialmente volumetrico, sia la parte di rimodellamento legato
543 alla crescita, che possiamo supporre deviatorico [38].

544 Al solo scopo di prendere ispirazione per l'assegnazione della forma costitutiva e/o fe-
545 nomenologica di Γ , consideriamo il caso limite (previsto dal modello M1) in cui si abbia
546 $k_c = a_\nu + 2b_\nu$ e, quindi, $\Gamma_g = \text{tr}\boldsymbol{\Lambda} = \Gamma$. Successivamente, però, dopo aver definito Γ ,
547 ritorniamo a considerare i casi generali previsti dai modelli M1 e M2.

548 Poiché la crescita è attivata dalla presenza nel corpo di particolari sostanze chimiche
549 che nutrono le cellule e che, pertanto, vengono denominate *nutrienti*, supponiamo che Γ
550 abbia una espressione costitutiva che dipende dalla concentrazione di tali nutrienti nel corpo
551 stesso. Inoltre, in teorie più elaborate, che tengono conto del fatto che un corpo che cresce
552 è più realisticamente descritto da un mezzo multifasico, il termine Γ viene fatto dipendere
553 dalla frazione volumetrica della fase cellulare e dalla frazione di massa di una popolazione
554 di cellule dette *proliferanti* (per ulteriori dettagli, si veda [9, 39]). Infine, per considerare
555 anche l'effetto che lo sforzo meccanico induce sulla crescita, Mascheroni et al. [9, 39] fanno
556 dipendere Γ anche da una misura di sforzo, cosicché si abbia una inibizione della crescita nel
557 caso in cui lo sforzo sia di compressione. Alla luce di quanto riportato, seguendo la notazione
558 di [15], e adattando le leggi costitutive suggerite in [9, 39, 33, 13], poniamo [9, 39, 33, 13]

$$\hat{\Gamma} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathcal{X}, \mathcal{J}) = \check{\Gamma} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}, \omega) := \frac{\zeta}{\varrho_\nu} \left\langle \frac{c - c_{\text{cr}}}{c_{\text{env}} - c_{\text{cr}}} \right\rangle_+ \left[1 - \frac{\alpha \langle \hat{\phi} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \rangle_+}{\sigma_c + \langle \hat{\phi} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K}) \rangle_+} \right], \quad (3.5.6)$$

559 dove ζ è un parametro materiale avente le dimensioni fisiche del reciproco di un tempo,
560 c indica la concentrazione dei nutrienti, c_{env} è il valore (costante) della concentrazione dei
561 nutrienti nell'ambiente, c_{cr} è un valore critico di attivazione, $\hat{\phi} \circ (\mathbf{F}, \mathbf{K})$ è la rappresentazione
562 costitutiva della misura di sforzo che modula Γ e, infine, α e σ_c sono, rispettivamente,
563 una costante materiale adimensionale strettamente positiva, e un valore caratteristico dello
564 sforzo meccanico. Si noti che $\langle a \rangle_+ := (a + |a|)/2$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Capitolo 4

Simulazioni numeriche

Questo capitolo è basato su alcune parti di [15].

In questo Capitolo, specializziamo il modello di crescita descritto nelle sezioni precedenti ad un problema *benchmark* preso dalla letteratura, facendo riferimento al lavoro di *Ambrosi et. al* [2]. Nei fatti, tale lavoro è stato ripreso e, rispetto ad alcuni aspetti salienti, riformulato in alcuni lavori recenti cui questa Tesi fa riferimento [33, 13, 40]. L'implementazione del modello e le relative simulazioni numeriche sono state gestite mediante il software commerciale COMSOL Multyphysics® versione 5.3a [48, 49]. Infine, alcuni risultati numerici, ritenuti di interesse per gli scopi di questo lavoro di Tesi, sono riportati e discussi.

4.1 Descrizione del problema *benchmark*

Come prova di riferimento, rispetto alla quale intendiamo specializzare il modello di crescita esposto nei capitoli precedenti, consideriamo il problema *benchmark* formulato in [2]. In particolare, tale lavoro considera la crescita di un carcinoma duttale entro un dotto mammario. Facendo riferimento a [2], la crescita è studiata come fenomeno *isotropo e omogeneo* che interessa un mezzo *monofasico*. Facciamo presente che in [33, 13, 40] tale *benchmark* è stato generalizzato al caso di crescita isotropa, non omogenea e con il tessuto tumorale descritto come mezzo bifasico e multi-componente, seguendo l'approccio proposto in [39]. Inoltre, in [40], una descrizione *non fickiana* della diffusione dei nutrienti è stata proposta.

In questo lavoro di Tesi, seguendo ciò che è stato proposto in [15], pur intendendo il tessuto tumorale in esame come mezzo monofasico, forniamo una descrizione non omogenea e non isotropa della crescita. Seguendo la presentazione del modello proposta in precedenza, la non omogeneità della crescita è principalmente dovuta alla presenza di una distribuzione di nutrienti non omogenea rispetto ai punti materiali del tessuto preso in esame, oltre che in tempo. Invece, la perdita di sfericità del tensore di crescita è dovuta alla presenza dei tensori di sforzo deviatorici previsti dalla teoria e che guidano l'evoluzione di $\mathbf{\Lambda}$ (si faccia riferimento alle Equazioni (3.5.3) e (3.5.5)). Tutti questi aspetti, in ogni caso, saranno discussi più nel dettaglio nel seguito di questo capitolo.

In accordo alle ipotesi cinematiche rappresentative delle condizioni biologiche proposte in [2], supporremo che il dotto mammario sia un cilindro rigido, cosicché la crescita del tessuto tumorale possa avvenire solo in direzione dell'asse del dotto. Questo implica che, nel seguito, supporremo nulle tutte le componenti delle deformazioni e delle distorsioni anelastiche radiali e circonferenziali. Inoltre, sia la configurazione di riferimento che quella ad un generico istante di tempo $t \in \mathcal{I}$, sono dei cilindri.

Chiamiamo $\mathcal{B}_R = S_R \times]0, L[$ la configurazione di riferimento del campione di tessuto di forma cilindrica in esame e con S_R la sua sezione trasversale supposta circolare (di raggio

601 R_0). Su di essa definiamo un sistema di coordinate cilindriche tali che

$$\mathcal{B}_R \ni X \equiv (R, \Theta, Z), \quad (4.1.1)$$

602 dove R, Θ, Z sono le coordinate radiale, circonferenziale e assiale rispettivamente, e intro-
603 duciamo la base naturale normalizzata $\{\mathbf{E}_I\}_{I=1}^3$.

604 La configurazione attuale è data da $\mathcal{B}(t) = S(t) \times]0, L(t)[$, con $S(t) \equiv S_0$, per ogni tempo
605 t considerato, date le ipotesi cinematiche esposte in precedenza. Inoltre, muniamo lo spazio
606 Euclideo tridimensionale \mathcal{S} di un sistema di coordinate cilindriche tale che

$$\mathcal{S} \ni x \equiv (r, \theta, z), \quad (4.1.2)$$

607 dove r, θ, z sono le coordinate radiale, circonferenziale e assiale rispettivamente, e definiamo
608 la base naturale normalizzata $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$.

609 Rispetto alle coordinate cilindriche appena introdotte, la definizione di moto data in
610 (2.1.2) e che riportiamo di seguito per completezza

$$\chi : \mathcal{B}_R \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (R, \Theta, Z, t) \mapsto \chi(R, \Theta, Z, t) \in \mathcal{S}. \quad (4.1.3)$$

611 ammette la “rappresentazione in coordinate”:

$$\chi(R, \Theta, Z, t) = (\chi^r(R, \Theta, Z, t), \chi^\theta(R, \Theta, Z, t), \chi^z(R, \Theta, Z, t)). \quad (4.1.4)$$

612 In virtù delle ipotesi cinematiche assegnate sopra, possiamo caratterizzare le componenti
613 del moto χ mediante le relazioni

$$\chi^r(R, \Theta, Z, t) = R, \quad (4.1.5a)$$

$$\chi^\theta(R, \Theta, Z, t) = \Theta. \quad (4.1.5b)$$

614 Da ciò segue che l’unica componente incognita del moto è χ^z . Inoltre, data la simmetria del
615 problema, possiamo assumere che χ^z sia indipendente da R e da Θ , in modo da ottenere

$$\chi^z(R, \Theta, Z, t) = \check{\chi}^z(Z, t). \quad (4.1.6)$$

616 Quanto detto vale per tutte le grandezze fisiche che caratterizzano il modello. In questo
617 senso, richiediamo che tutte le quantità fisiche coinvolte nel modello siano indipendenti dalla
618 sezione del campione sulla quale vengono calcolati e che dipendano dai punti materiali, al
619 limite, solo attraverso la loro coordinata lungo l’asse del campione.

620 Nel caso in esame, il tensore \mathbf{F} risulta essere

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(X, t) &= \mathbf{b}_1(x) \otimes \mathbf{B}^1(X) + \mathbf{b}_2(x) \otimes \mathbf{B}^2(X) + \frac{\partial \check{\chi}^z}{\partial Z}(Z, t) \mathbf{b}_3(x) \otimes \mathbf{B}^3(X) \\ &= \mathbf{e}_1(x) \otimes \mathbf{E}^1(X) + \mathbf{e}_2(x) \otimes \mathbf{E}^2(X) + \frac{\partial \check{\chi}^z}{\partial Z}(Z, t) \mathbf{e}_3(x) \otimes \mathbf{E}^3(X), \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

621 e ammette matrice di rappresentazione rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ e $\{\mathbf{E}^A\}_{A=1}^3$ data da

$$[\mathbf{F}(Z, t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \check{\chi}^z}{\partial Z}(Z, t) \end{bmatrix}. \quad (4.1.8)$$

622 Infine, introducendo la funzione spostamento $u = \check{u}(Z, t)$, possiamo scrivere

$$\check{\chi}^z(Z, t) = Z + \check{u}(Z, t) = z. \quad (4.1.9)$$

623 Così facendo la rappresentazione del tensore gradiente di deformazione rispetto alle basi
 624 normalizzate $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ e $\{\mathbf{E}^A\}_{A=1}^3$ risulta quindi essere

$$[\mathbf{F}(Z, t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \check{u}'(Z, t) \end{bmatrix}. \quad (4.1.10)$$

625 Considerando che la rappresentazione matriciale del tensore metrico rispetto alla base
 626 normalizzata $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3$ è data da

$$[\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.11)$$

627 scriviamo la matrice associata al tensore di deformazione di Cauchy-Green come

$$[\mathbf{C}(Z, t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [1 + \check{u}'(Z, t)]^2 \end{bmatrix}. \quad (4.1.12)$$

628 Completiamo la descrizione cinematica del problema in esame, supponendo che anche il
 629 tensore delle distorsioni anelastiche ammetta rappresentazione matriciale diagonale, ossia

$$[\mathbf{K}(Z, t)] = \begin{bmatrix} K_{11}(Z, t) & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}(Z, t) & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}(Z, t) \end{bmatrix}, \quad (4.1.13)$$

630 cosicché anche il tensore $\mathbf{\Lambda}$ ha matrice associata

$$[\mathbf{\Lambda}(Z, t)] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{K}_{11}(Z, t)}{K_{11}(Z, t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{K}_{22}(Z, t)}{K_{22}(Z, t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{K}_{33}(Z, t)}{K_{33}(Z, t)} \end{bmatrix}. \quad (4.1.14)$$

631 4.2 Energia di deformazione e tensori degli sforzi

632 Ai fini dei calcoli supponiamo per il materiale in esame un comportamento di tipo elastico
 633 e isotropo, descritto da una densità di energia per unità di volume dello stato naturale di
 634 tipo Neo-Hookean, data da

$$\hat{\Psi}_\nu \circ \mathbf{C}_e = \check{\Psi}_\nu \circ (\mathbf{I}_{1e}, \mathbf{I}_{2e}, \mathbf{I}_{3e}) = \frac{1}{2}[\mathbf{I}_{1e} - 3]\mu - \frac{1}{2}\ln(\mathbf{I}_{3e})\mu + \frac{1}{8}[\ln(\mathbf{I}_{3e})]^2\lambda, \quad (4.2.1)$$

635 dove

$$\mathbf{I}_{1e} = \hat{\mathbf{I}}_{1e} \circ \mathbf{C}_e = \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e), \quad (4.2.2a)$$

$$\mathbf{I}_{2e} = \hat{\mathbf{I}}_{2e} \circ \mathbf{C}_e = \frac{1}{2}[(\text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e))^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e)], \quad (4.2.2b)$$

$$\mathbf{I}_{3e} = \hat{\mathbf{I}}_{3e} \circ \mathbf{C}_e = \det\mathbf{C}_e = \frac{\det\mathbf{C}}{[\det\mathbf{K}]^2}, \quad (4.2.2c)$$

636 essendo $\boldsymbol{\eta}$ il tensore metrico associato allo stato naturale. Per scopi futuri, osserviamo che
 637 è possibile scrivere gli invarianti in funzione di \mathbf{C} e \mathbf{K} . Infatti, si ha:

$$\mathbf{I}_{1e} = \hat{\mathbf{I}}_{1e} \circ \mathbf{C}_e = \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e)$$

$$\begin{aligned}
 &= \eta^{\alpha\beta} (\mathbf{C}_e)_{\alpha\beta} \\
 &= \eta^{\alpha\beta} (\mathbf{F}_e^T)_{\beta}^a g_{ab} (\mathbf{F}_e)^{b\alpha} \\
 &= \eta^{\alpha\beta} (\mathbf{K}^{-T})_{\alpha}^S (\mathbf{F}^T)_{S^a} g_{ab} F^b_M (\mathbf{K}^{-1})^M_{\beta} \\
 &= (\mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MS} C_{SM} \\
 &= (\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1})^{MS} C_{SM} \tag{4.2.3} \\
 &= \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C}). \tag{4.2.4}
 \end{aligned}$$

638 Da cui segue che si può porre

$$\hat{\mathbb{I}}_{1e} \circ \mathbf{C}_e = \check{\mathbb{I}}_{1e} \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K}) = \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C}). \tag{4.2.5}$$

639 Anche se non necessario, ai fini della tesi, per completezza di trattazione, riportiamo la
 640 rappresentazione del secondo invariante di \mathbf{C}_e in funzione di \mathbf{C} e \mathbf{K} . Nello specifico possiamo
 641 scrivere

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}_{2e} &= \hat{\mathbb{I}}_{2e} \circ \mathbf{C}_e \\
 &= \frac{1}{2} \{ \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{C}_e)^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{C}_e \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{C}_e) \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ [\eta^{\alpha\beta} (\mathbf{C}_e)_{\alpha\beta}]^2 - [\eta^{\alpha\beta} (\mathbf{C}_e)_{\beta\gamma} \eta^{\gamma\delta} (\mathbf{C}_e)_{\delta\alpha}] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ [\eta^{\alpha\beta} (\mathbf{F}_e^T)_{\alpha}^a g_{ab} (\mathbf{F}_e)^{b\beta}]^2 - [\eta^{\alpha\beta} (\mathbf{F}_e^T)_{\beta}^a g_{ab} (\mathbf{F}_e)^{b\gamma} \eta^{\gamma\delta} (\mathbf{F}_e^T)_{\delta}^c g_{cd} (\mathbf{F}_e)^d_{\alpha}] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ [\eta^{\alpha\beta} (\mathbf{K}^{-T})_{\alpha}^S (\mathbf{F}^T)_{S^a} g_{ab} F^b_M (\mathbf{K}^{-1})^M_{\beta}]^2 \\
 &\quad - [\eta^{\alpha\beta} (\mathbf{K}^{-T})_{\beta}^S (\mathbf{F}^T)_{S^a} g_{ab} F^b_M (\mathbf{K}^{-1})^M_{\gamma} \eta^{\gamma\delta} (\mathbf{K}^{-T})_{\delta}^V (\mathbf{F}^T)_{V^c} g_{cd} F^d_Z (\mathbf{K}^{-1})^Z_{\alpha}] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ [(\mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MS} C_{SM}]^2 - [(\mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{ZS} C_{SM} (\mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{K}^{-T})^{MV} C_{VZ}] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ [(\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1})^{MS} C_{SM}]^2 - [(\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1})^{ZS} C_{SM} (\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1})^{MV} C_{VZ}] \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ [\text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C})]^2 - [\text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C})] \}. \tag{4.2.6}
 \end{aligned}$$

642 Pertanto, scriviamo:

$$\hat{\mathbb{I}}_{2e} \circ \mathbf{C}_e = \check{\mathbb{I}}_{2e} \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K}) = \frac{1}{2} \left[\left(\check{\mathbb{I}}_{1e} \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K}) \right)^2 - \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C}) \right]. \tag{4.2.7}$$

643 Il terzo invariante è dato da

$$\mathbb{I}_{3e} = \hat{\mathbb{I}}_{3e} \circ \mathbf{C}_e = \frac{\det(\mathbf{C})}{[\det(\mathbf{K})]^2} = (\det \mathbf{C})(\det \mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1}), \tag{4.2.8}$$

644 cosicché si può porre

$$\hat{\mathbb{I}}_{3e} \circ \mathbf{C}_e = \check{\mathbb{I}}_{3e} \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K}) = \frac{\det \mathbf{C}}{(\det \mathbf{K})^2}. \tag{4.2.9}$$

645 In conclusione l'energia di deformazione sarà

$$\Psi_{\mathbf{R}} = \mathcal{W} \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K}) = \check{\mathcal{W}} \circ [(\check{\mathbb{I}}_{1e}, \check{\mathbb{I}}_{2e}, \check{\mathbb{I}}_{3e}) \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K})] = J_{\mathbf{K}} \Psi_{\nu}. \tag{4.2.10}$$

646 Calcoliamo adesso il secondo tensore di Piola-Kirchhoff \mathbf{S}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= 2 \left[\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{C}} \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K}) \right] \\
 &= 2 \left[\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \check{\mathbb{I}}_{1e}} \circ (\check{\mathbb{I}}_{1e}, \check{\mathbb{I}}_{2e}, \check{\mathbb{I}}_{3e}) \frac{\partial \check{\mathbb{I}}_{1e}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \check{\mathbb{I}}_{2e}} \circ (\check{\mathbb{I}}_{1e}, \check{\mathbb{I}}_{2e}, \check{\mathbb{I}}_{3e}) \frac{\partial \check{\mathbb{I}}_{2e}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \check{\mathbb{I}}_{3e}} \circ (\check{\mathbb{I}}_{1e}, \check{\mathbb{I}}_{2e}, \check{\mathbb{I}}_{3e}) \frac{\partial \check{\mathbb{I}}_{3e}}{\partial \mathbf{C}} \right] \circ (\mathbf{C}, \mathbf{K}), \tag{4.2.11}
 \end{aligned}$$

che risulta essere uguale a

$$\mathbf{S} = J_{\mathbf{K}}[(2\beta_1 + 2\beta_2 \mathbf{I}_{1e})\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} - 2\beta_2 \mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} + 2\beta_3 \mathbf{I}_{3e} \mathbf{C}^{-1}], \quad (4.2.12)$$

dove $\beta_1 = \frac{1}{2}\mu$, $\beta_2 = 0$ (essendo l'energia indipendente da \mathbf{I}_{2e}), $\beta_3 = \frac{-\mu + \frac{1}{2}\lambda \ln \mathbf{I}_{3e}}{2\mathbf{I}_{3e}}$. Si fa presente che gli invarianti \mathbf{I}_{1e} e \mathbf{I}_{3e} sono pensati come funzioni di \mathbf{C} e \mathbf{K} . Infine il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff, risulta essere dato da

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} = J_{\mathbf{K}}[(2\beta_1 + 2\beta_2 \mathbf{I}_{1e})\mathbf{F}\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} - 2\beta_2 \mathbf{F}\mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_{\mathbf{K}}^{-1} + 2\beta_3 \mathbf{I}_{3e} \mathbf{g}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}], \quad (4.2.13)$$

dove il tensore metrico \mathbf{g} risulta essere composto con il moto.

4.3 Legge evolutiva di \mathbf{K} in forma matriciale

Poiché la rappresentazione matriciale di $\mathbf{\Lambda}$ è diagonale per il problema *benchmark* considerato, il coefficiente tensoriale relativo alla parte “antisimmetrica” di \mathbf{Y}_d nella decomposizione di Pericak-Spector & Spector (ossia il coefficiente tensoriale di c_ν in Equazione (3.4.12)) è identicamente nullo. Specializzando tale risultato ai modelli M1 e M2, otteniamo:

1. Modello M1.

La Equazione (3.5.2d) diviene:

$$J_{\mathbf{K}} a_\nu \frac{\text{tr}\mathbf{\Lambda}}{3} \mathbf{I}^{\mathbf{T}} + 2J_{\mathbf{K}} b_\nu \mathbf{\Lambda} = -\text{dev}\mathbf{H} + \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c \Gamma J_{\mathbf{K}} \mathbf{I}^{\mathbf{T}}, \quad (4.3.1)$$

avendo posto, in questo caso, $\mathbf{Z} = \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{H})\mathbf{I}^{\mathbf{T}} + \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c \Gamma J_{\mathbf{K}} \mathbf{I}^{\mathbf{T}}$ (si veda Equazione (3.5.3)).

Ai fini computazionali, è conveniente “spezzare” la Equazione (4.3.1) estraendone la parte volumetrica e quella deviatorica e risolvendole a sistema. A tal proposito, il primo passo consiste nello riscrivere la Equazione (4.3.1) come

$$J_{\mathbf{K}} \frac{a_\nu + 2b_\nu}{3} [\text{tr}\mathbf{\Lambda}]\mathbf{I}^{\mathbf{T}} + 2J_{\mathbf{K}} b_\nu [\text{dev}\mathbf{\Lambda}] = -\text{dev}\mathbf{H} + \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c \Gamma J_{\mathbf{K}} \mathbf{I}^{\mathbf{T}}. \quad (4.3.2)$$

Pertanto, si può scrivere:

$$[a_\nu + 2b_\nu]\text{tr}\mathbf{\Lambda} - k_c \Gamma = 0, \quad \text{tr}\mathbf{\Lambda} = \frac{k_c \Gamma}{a_\nu + 2b_\nu}, \quad (4.3.3a)$$

$$2J_{\mathbf{K}} b_\nu [\text{dev}\mathbf{\Lambda}] + \text{dev}\mathbf{H} - \mathbf{T} = 0, \quad \text{dev}\mathbf{\Lambda} = \frac{-\text{dev}\mathbf{H} + \mathbf{T}}{2J_{\mathbf{K}} b_\nu}. \quad (4.3.3b)$$

Infine, le Equazioni (4.3.3a) e (4.3.3b) conducono al sistema lineare:

$$\frac{\dot{K}_{11}}{K_{11}} + \frac{\dot{K}_{22}}{K_{22}} + \frac{\dot{K}_{33}}{K_{33}} = \frac{k_c \Gamma}{a_\nu + 2b_\nu}, \quad (4.3.4a)$$

$$\frac{2}{3} \frac{\dot{K}_{22}}{K_{22}} - \frac{1}{3} \frac{\dot{K}_{11}}{K_{11}} - \frac{1}{3} \frac{\dot{K}_{33}}{K_{33}} = \frac{\frac{2}{3}H_{22} - \frac{1}{3}H_{11} - \frac{1}{3}H_{33} + T_{22}}{2J_{\mathbf{K}} b_\nu}, \quad (4.3.4b)$$

$$\frac{2}{3} \frac{\dot{K}_{33}}{K_{33}} - \frac{1}{3} \frac{\dot{K}_{11}}{K_{11}} - \frac{1}{3} \frac{\dot{K}_{22}}{K_{22}} = \frac{\frac{2}{3}H_{33} - \frac{1}{3}H_{11} - \frac{1}{3}H_{22} + T_{33}}{2J_{\mathbf{K}} b_\nu}. \quad (4.3.4c)$$

2. Modello M2.

La Equazione (3.5.4d) diviene

$$J_{\mathbf{K}} a_\nu \frac{\text{tr}\mathbf{\Lambda}}{3} \mathbf{I}^{\mathbf{T}} + 2J_{\mathbf{K}} b_\nu \mathbf{\Lambda} = -\mathbf{H} + \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c \Gamma J_{\mathbf{K}} \mathbf{I}^{\mathbf{T}}, \quad (4.3.5)$$

668 avendo posto, in questo caso, $\mathbf{Z} = \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c\Gamma J_{\mathbf{K}}\mathbf{I}^T$ (si veda Equazione (3.5.5)).

669 Ai fini computazionali, è conveniente “spezzare” la Equazione (4.3.5) estraendone la
 670 parte volumetrica e quella deviatorica e risolvendole a sistema. A tal proposito, il
 671 primo passo consiste nello riscrivere la Equazione (4.3.5) come

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{K}}a_\nu \frac{\text{tr}\Lambda}{3}\mathbf{I}^T + 2J_{\mathbf{K}}b_\nu[\text{dev}\Lambda] + 2J_{\mathbf{K}}b_\nu \frac{\text{tr}\Lambda}{3}\mathbf{I}^T \\ = -\frac{\text{tr}\mathbf{H}}{3}\mathbf{I}^T - \text{dev}\mathbf{H} + \mathbf{T} + \frac{1}{3}k_c\Gamma J_{\mathbf{K}}\mathbf{I}^T. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

672 Pertanto, si può scrivere:

$$[a_\nu + 2b_\nu]\text{tr}\Lambda + J_{\mathbf{K}}^{-1}[\text{tr}\mathbf{H}] - k_c\Gamma = 0, \quad \text{tr}\Lambda = \frac{-J_{\mathbf{K}}^{-1}[\text{tr}\mathbf{H}] + k_c\Gamma}{a_\nu + 2b_\nu}, \quad (4.3.7a)$$

$$2J_{\mathbf{K}}b_\nu[\text{dev}\Lambda] + \text{dev}\mathbf{H} - \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \text{dev}(\Lambda) = \frac{-\text{dev}\mathbf{H} + \mathbf{T}}{2J_{\mathbf{K}}b_\nu}. \quad (4.3.7b)$$

673 Infine, le Equazioni (4.3.7a) e (4.3.7b) conducono al sistema lineare:

$$\frac{\dot{K}_{11}}{K_{11}} + \frac{\dot{K}_{22}}{K_{22}} + \frac{\dot{K}_{33}}{K_{33}} = \frac{-(H_{11} + H_{22} + H_{33}) + k_c\Gamma}{a_\nu + 2b_\nu}, \quad (4.3.8a)$$

$$\frac{2}{3}\frac{\dot{K}_{22}}{K_{22}} - \frac{1}{3}\frac{\dot{K}_{11}}{K_{11}} - \frac{1}{3}\frac{\dot{K}_{33}}{K_{33}} = \frac{\frac{2}{3}H_{22} - \frac{1}{3}H_{11} - \frac{1}{3}H_{33} + T_{22}}{2J_{\mathbf{K}}b_\nu}, \quad (4.3.8b)$$

$$\frac{2}{3}\frac{\dot{K}_{33}}{K_{33}} - \frac{1}{3}\frac{\dot{K}_{11}}{K_{11}} - \frac{1}{3}\frac{\dot{K}_{22}}{K_{22}} = \frac{\frac{2}{3}H_{33} - \frac{1}{3}H_{11} - \frac{1}{3}H_{22} + T_{33}}{2J_{\mathbf{K}}b_\nu}. \quad (4.3.8c)$$

674 Per chiudere il modello, assegniamo una forma esplicita a Γ , che è data da
 675 avendo scelto per la concentrazione dei nutrienti la espressione analitica

$$c(X, t) = c_0 \begin{cases} \cosh\left(\omega_0 \frac{2X - L}{2L}\right) \frac{t}{t_0}, & 0 < t \leq t_0, \\ \cosh\left(\omega_0 \frac{2X - L}{2L}\right), & t > t_0. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

676 dove $c_0 = 10^{-3}$, $\omega_0 = 5$, $t_0 = 20$ [d].

677 4.4 Risultati

678 Nel seguito, considereremo due diversi gruppi di simulazioni numeriche. Nello specifico, fis-
 679 sati i valori dei parametri del modello come in Tabella 4.1, abbiamo effettuato la simulazione
 680 numerica dei due modelli M1 ed M2, con lo scopo di visualizzare i campi incogniti del nostro
 681 problema, cioè lo spostamento u e le componenti del tensore di crescita \mathbf{K} , come funzioni
 682 del tempo e della coordinata assiale, e il modo in cui la scelta della forza esterna \mathbf{Z} influen-
 683 za e modula l’evoluzione del sistema in esame. Nel presentare i risultati abbiamo scelto tre
 684 giorni di riferimento, rappresentativi della fase iniziale, della fase centrale e della fase finale
 685 della finestra temporale entro la quale abbiamo osservato l’evoluzione del tessuto tumorale
 686 in esame. Ricordiamo che, nelle nostre simulazioni, abbiamo fissato un arco temporale di
 687 venti giorni, cosicché $\mathcal{S} = [0, 20]$ d. Inoltre, data la simmetria delle soluzioni rispetto al
 688 punto di mezzeria dell’asse del campione cilindrico preso in esame, dovuta alle condizioni al
 689 bordo assegnate al bilancio di impulso, alle condizioni iniziali legate alla legge di crescita,
 690 e alla distribuzione dei nutrienti $c(X, t)$, ci limitiamo a rappresentare nel sotto-intervallo
 691 $[L/2, L]$.

Parametro	Unità di misura	Valore	Riferimento bibliografico
L	[cm]	1.000	[33]
λ	[Pa]	$1.300 \cdot 10^4$	[50]
μ	[Pa]	$2.000 \cdot 10^4$	[50]
ω_{cr}	[-]	$1.000 \cdot 10^{-3}$	[33]
ω_{env}	[-]	$7.000 \cdot 10^{-3}$	[33]
ζ	[kg/(m ³ s)]	$1.000 \cdot 10^{-3}$	[36]
α_{gr}	[-]	$7.138 \cdot 10^{-1}$	[9]
σ_{cr}	[Pa]	$1.541 \cdot 10^3$	[9]
ρ_{ν}	[kg/m ³]	1000	[39]
a_{ν}	[Pa s]	$2.000 \cdot 10^8$	[15]
b_{ν}	[Pa s]	$2.000 \cdot 10^8$	[15]
k_c	[Pa s]	$2.667 \cdot 10^8$	[15]

Tabella 4.1: Parametri usati per le simulazioni numeriche dei modelli di crescita M1 e M2 implementati in ambiente COMSOL Multiphysics.

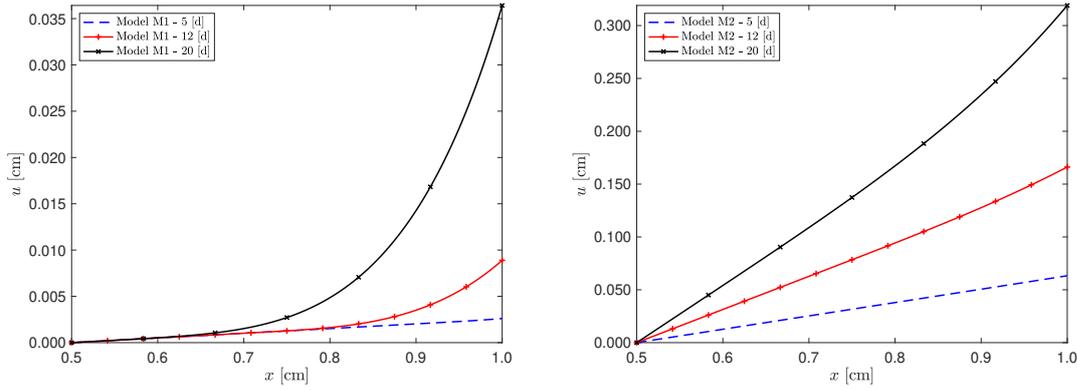
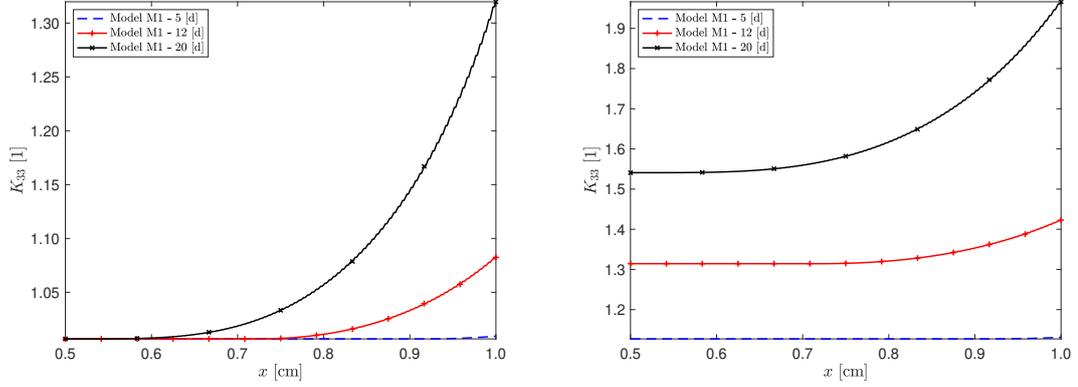


Figura 4.1: Evoluzione in spazio e in tempo dello spostamento assiale u del campione cilindrico considerato. Nell’immagine di sinistra abbiamo considerato i risultati del modello M1, mentre, nell’immagine di destra, i risultati relativi al modello M2.

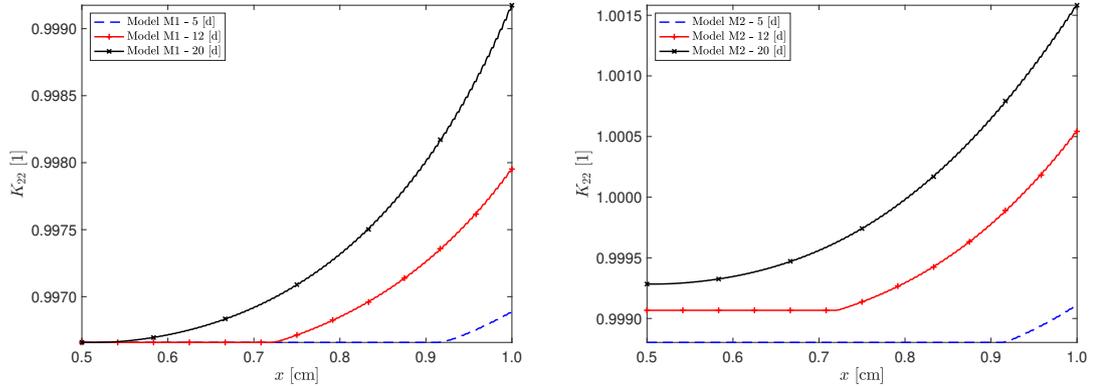
692 In Figura 4.1 mostriamo il comportamento dello spostamento assiale, u , come funzione
693 del tempo e della coordinata assiale Z . Sia per il modello M1 che per il modello M2, osserva-
694 mo che lo spostamento è una funzione crescente sia del tempo che della coordinata assiale.
695 Questo implica che u aumenta man mano che il tumore evolve nel tempo e, in particolare,
696 ad ogni tempo considerato, raggiunge il suo valore massimo in corrispondenza dell’estremo
697 destro dell’asse del campione. Questo comportamento è strettamente legato alla distribu-
698 zione di nutrienti scelta per questo modello e alla sua evoluzione in tempo. Infatti, data
699 l’Equazione (4.3.9), la concentrazione dei nutrienti aumenta in tempo e, istante per istante,
700 raggiunge il suo massimo in corrispondenza delle sezioni estreme del campione. Facciamo
701 inoltre osservare come nel modello M2, l’aggiunta della componente sferica del tensore degli
702 sforzi di Eshelby produca uno spostamento di circa dieci volte maggiore di quello previsto
703 dal modello M1 e corrispondente, di fatto, a circa un terzo del valore della lunghezza iniziale
704 del campione. Tale valore di spostamento elevato rispetto alle dimensioni del campione è
705 da attribuire alla mancanza di termini “pozzo” che riducono o spengono la crescita. Tale
706 fenomenologia è considerata in [39, 33, 13, 40], laddove, nelle nostre simulazioni, la sorgente
707 di massa che determina l’evoluzione di $\mathbf{\Lambda}$ è una funzione non negativa, sempre crescente

708 nell'intervallo di tempo considerato.

709 In analogia a ciò che succede nel caso dello spostamento, la distribuzione dei nutrienti
 710 influenza in maniera considerevole anche l'evoluzione delle componenti del tensore di crescita
 711 Nella Figura 4.2 mostriamo il comportamentp della componente assiale del tensore di



712 Figura 4.2: Evoluzione in spazio e in tempo della componente K_{33} del tensore di cresci-
 713 ta \mathbf{K} . Nell'immagine di sinistra abbiamo considerato i risultati del modello M1, mentre,
 714 nell'immagine di destra, le simulazioni relative al modello M2.



715 Figura 4.3: Evoluzione in spazio e in tempo della componente K_{22} del tensore di cresci-
 716 ta \mathbf{K} . Nell'immagine di sinistra abbiamo considerato i risultati del modello M1, mentre,
 717 nell'immagine di destra, le simulazioni relative al modello M2.

718 crescita \mathbf{K} , K_{33} , come funzione della coordinata assiale a diversi istanti di tempo. In questo
 719 caso, il fatto che la distribuzione di nutrienti aumenti in tempo produce una intensificazione
 720 delle distorsioni assiali associate alla crescita man mano che il tempo passi. Inoltre, poiché
 721 la concentrazione dei nutrienti è massima agli estremi del campione, anche K_{33} assume il
 722 suo massimo valore alle estremità del campione. Un discorso analogo lo si può fare per
 723 K_{33} calcolato a valle del modello M2, il quale risulta raggiungere valori maggiori come
 conseguenza della componente sferica di \mathbf{H} come sorgente nella legge evolutiva. Per quanto
 riguarda la componente circonferenziale K_{22} e radiale K_{11} , esse coincidono numericamente,
 date le simmetrie imposte al modello dalla scelta del problema benchmark, così ci limitiamo
 a riportare solo il comportamento di K_{22} . In Figura 4.3, nel caso del modello M1, K_{22} risulta
 sempre minore di uno, mentre, nel caso del modello M2, K_{22} raggiunge valori anche maggiori
 di uno. Questo comportamento è spiegabile con il fatto che il tensore \mathbf{K} deve soddisfare la

724 condizione $\text{tr}\mathbf{\Lambda} = \Gamma$. Quindi, euristicamente, se una componente risulta maggiore di uno,
 725 l'altra deve necessariamente essere minore di uno affinché la condizione sia rispettato. Tale
 726 situazione risulta indebolita nel caso del modello M2 perché l'evoluzione di $\mathbf{\Lambda}$ è sostenuta
 727 dalla $\text{tr}\mathbf{H}$ e la condizione non è, generalmente, soddisfatta. Facciamo notare che, essendo
 728 K_{33} diverso da K_{22} (e, ovviamente K_{11}), il tensore di crescita non è sferico.

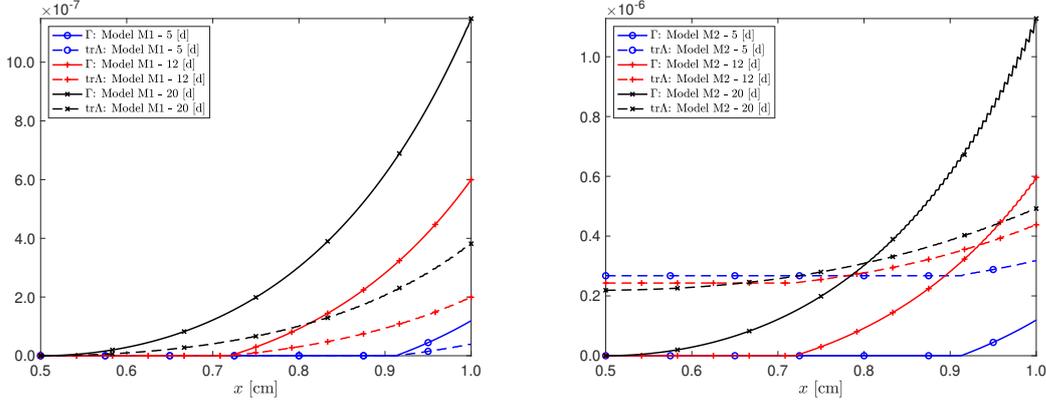


Figura 4.4: Confronto dell'evoluzione in spazio e in tempo di Γ e $\text{tr}(\mathbf{\Lambda})$. Nell'immagine di sinistra abbiamo considerato i risultati del modello M1, mentre, nell'immagine di destra, i risultati relativi al modello M2.

729 Dalla Figura 4.4 possiamo evincere che per il modello M1, Γ e $\text{tr}\mathbf{\Lambda}$ coincidono a meno
 730 della modulazione espressa dal parametro k_c che, in principio, è diverso da $a_\nu + 2b_\nu$. Il
 731 comportamento è però identico. Infatti, si nota un aumento sia di Γ che di $\text{tr}(\mathbf{\Lambda})$ man mano
 732 che ci si avvicina verso il bordo. Per quanto riguarda il modello M2, invece, il comportamento
 733 dei due termini è qualitativamente e quantitativamente diverso. Infatti, mentre verso il
 734 centro $\text{tr}\mathbf{\Lambda}$ è maggiore di Γ , all'avvicinarsi sul bordo, predomina Γ . Contribuiscono a questa
 735 differenza qualitativa e quantitativa sia la modulazione dovuta a k_c , sia l'introduzione della
 736 componente sferica di \mathbf{H} nella legge di crescita. Per completezza, in Figura 4.5, facciamo
 737 notare come effettivamente Γ e $\text{tr}\mathbf{\Lambda}$ coincidono quando $k_c = a_\nu + 2b_\nu$. Infatti, il modello M1
 738 predice che Γ_g è data da

$$\Gamma_g = \text{tr}\mathbf{\Lambda} = \frac{k_c}{a_\nu + 2b_\nu} \Gamma \quad (4.4.1)$$

739 cosicché si abbia $\Gamma_g = \Gamma$ quando $k_c = a_\nu + 2b_\nu$. Mentre per il modello M2, Γ_g è data da

$$\Gamma_g = \text{tr}\mathbf{\Lambda} = \frac{k_c}{a_\nu + 2b_\nu} \Gamma - \frac{J_{\mathbf{K}}^{-1}[\text{tr}\mathbf{H}]}{a_\nu + 2b_\nu}. \quad (4.4.2)$$

740 Infine, per quanto riguarda gli sforzi, dalla Figura 4.6 possiamo notare che $(\text{dev}\mathbf{H})_{33}$
 741 è fortemente influenzato dalla distribuzione dei nutrienti. Infatti, quando i nutrienti sono
 742 nulli, $(\text{dev}\mathbf{H})_{33}$ è costante, mentre tende a decrescere man mano che ci si avvicina al bor-
 743 do. Analogamente, per il modello M2, l'evoluzione di \mathbf{H}_{33} è fortemente influenzata dalla
 744 distribuzione dei nutrienti. In questo caso, l'andamento varia qualitativamente, oltre che
 745 quantitativamente, all'aumentare dei giorni. Cosicché, all'inizio delle simulazioni, lo sforzo è
 746 caratterizzato da un tratto costante nelle zone in cui i nutrienti sono nulli, per poi diminuire
 747 verso il bordo del campione. Al passare dei giorni, \mathbf{H}_{33} tende a crescere verso i bordi del
 748 campione.
 749

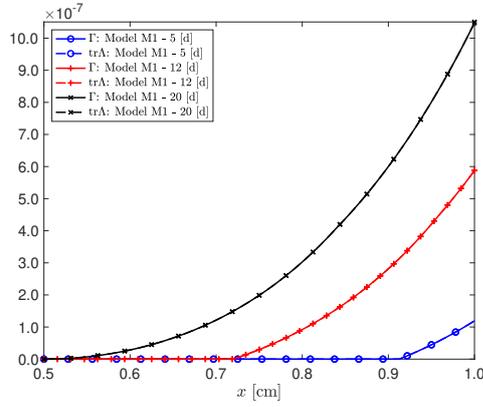


Figura 4.5: Confronto dell'evoluzione in spazio e in tempo di Γ e $\text{tr}(\Lambda)$ nel caso in cui $k_c = a_\nu + 2b_\nu$.

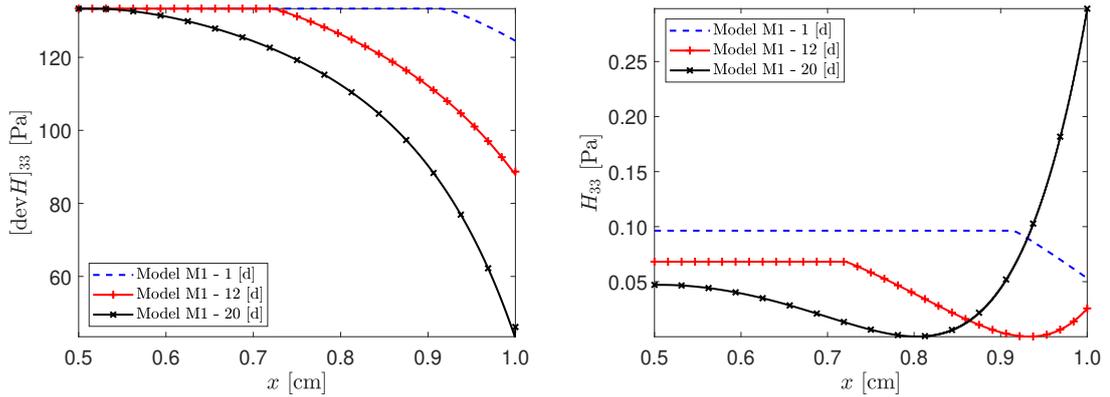


Figura 4.6: Evoluzione in spazio e in tempo della componente deviatorica $(\text{dev} \mathbf{H})_{33}$ del tensore di Eshelby per il modello M1 (a sinistra) e della componente H_{33} del tensore di Eshelby per il modello M2 (a destra).

Capitolo 5

Crescita in mezzi bifasici

In questo Capitolo¹, rivediamo criticamente il lavoro riportato in [8], in cui, descrivendo un ipotetico tessuto biologico come un mezzo bifasico, fibro-rinforzato e costituito da diversi costituenti, si studiano la crescita, il trasferimento di massa tra le due fasi ed il rimodellamento del tessuto (essendo quest'ultimo inteso sia come riorientamento delle fibre sia come evoluzione della struttura interna della fase solida) mediante un approccio chemo-meccanico basato sull'impiego, opportunamente rivisitato, della Teoria delle Miscele [51, 52, 53] e dei mezzi continui con struttura interna variabile. In particolare, concentriamo la nostra revisione su due aspetti soltanto tra quelli sopra elencati e, a tal proposito, semplifichiamo notevolmente il contesto della trattazione, selezionando i processi relativi al trasferimento di massa tra le fasi del tessuto e al riorganizzazione strutturale della fase solida che ne consegue. Le semplificazioni principali sono date dall'ipotesi che il materiale in studio sia isotropo (in particolare, escludiamo la presenza delle fibre di rinforzo) e dalla identificazione del trasferimento di massa tra la fase solida e quella fluida con la "crescita" —intesa in senso generalizzato come "variazione di massa"— della fase solida. Questa puntualizzazione è necessaria perché in [8] il trasferimento di massa viene distinto dalla crescita propriamente detta, che è vista, invece, come il contributo alla variazione totale di massa della fase solida dovuto a sorgenti, o pozzi, di massa non direttamente collegabili agli scambi con la fase fluida. In questo ambito, consideriamo anche la riorganizzazione strutturale della fase solida conseguente alla propria variazione di massa.

L'approccio che seguiremo è concettualmente analogo a quello presentato nei Capitoli precedenti, in particolare per quel che riguarda la introduzione del tensore \mathbf{K} della decomposizione BKL del gradiente di deformazione della fase solida per la descrizione delle distorsioni anelastiche associate al trasferimento di massa tra le fasi [8], l'inquadramento di tale variabile tensoriale come una variabile cinematica del mezzo bifasico [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], e la determinazione delle equazioni del moto mediante il *Principio delle Potenze Virtuali* [20, 10, 21, 8, 42, 14, 15].

5.1 Descrizione generale della miscela

In questa sezione introduciamo le grandezze principali e le variabili cinematiche della miscela. Indichiamo con l'indice $k \in \{\ell, s\}$ tutto ciò che si riferisce alla fase della miscela, in particolare ℓ alla fase fluida e s alla fase solida. Con $a = 1 : N$ indichiamo invece il numero

¹I risultati riportati in questo Capitolo sono parte di uno studio in fase di svolgimento condotto dalla sottoscritta, da Alfio Grillo e da Salvatore Di Stefano con l'obiettivo di scrivere un articolo sull'argomento.

782 di costituenti di ogni fase (nel seguito utilizzeremo anche l'indice $b = 1 : (N-1)$). La densità
783 di massa intrinseca della fase k è definita come

$$\hat{\rho}_k := \sum_a \hat{\rho}_{ak}, \quad (5.1.1)$$

784 in cui $\hat{\rho}_{ak}$ è la densità di massa del costituente a -esimo nella k -esima fase. Inoltre, la frazione
785 di massa del costituente a -esimo nella fase k -esima è:

$$\omega_{ak} := \frac{\hat{\rho}_{ak}}{\hat{\rho}_k} \Rightarrow \sum_a \omega_{ak} = 1. \quad (5.1.2)$$

786 Introduciamo anche la densità di massa apparente della fase k e del costituente a -esimo in
787 essa presente, ossia

$$\rho_k := \phi_k \hat{\rho}_k, \quad \rho_{ak} = \phi_k \hat{\rho}_{ak}, \quad (5.1.3)$$

788 dove ϕ_k è la frazione di volume della fase k . Quando la miscela è satura deve verificarsi la
789 condizione $\phi_s + \phi_\ell = 1$. La densità di massa totale della miscela è invece:

$$\rho := \sum_k \rho_k = \sum_k \sum_a \rho_{ak} = \sum_k \sum_a \phi_k \hat{\rho}_{ak} \omega_{ak}. \quad (5.1.4)$$

790 Con la stessa notazione introduciamo la velocità del costituente \mathbf{v}_{ak} e la velocità di fase:

$$\mathbf{v}_k := \sum_a \omega_{ak} \mathbf{v}_{ak}. \quad (5.1.5)$$

791 La velocità della miscela è invece data da

$$\mathbf{v} := \sum_k c_k \mathbf{v}_k = \sum_k \sum_a c_{ak} \mathbf{v}_{ak}, \quad (5.1.6)$$

792 con $c_k = \frac{\rho_k}{\rho}$ e $c_{ak} = \omega_{ak} c_k$. Per completezza introduciamo anche le seguenti velocità relative,

$$\mathbf{u}_{ak} = \mathbf{v}_{ak} - \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}. \quad (5.1.7)$$

793 5.2 Bilancio di massa e deformazioni anelastiche

794 In questa sezione scriviamo il bilancio di massa e come esso è collegato alle deformazioni
795 anelastiche.

796 5.2.1 Bilancio di massa

797 La forma locale del bilancio di massa del costituente è

$$\partial_t \rho_{ak} + \text{div}(\rho_{ak} \mathbf{v}_{ak}) = \rho_{ak} r_{ak}, \quad (5.2.1)$$

798 dove r_{ak} rappresenta il tasso di produzione di massa relativo al trasferimento di quest'ultima
799 tra le fasi. La forma locale del bilancio di massa della fase è invece

$$D_k \rho_k + \rho_k \text{div} \mathbf{v}_k = \rho_k r_k, \quad (5.2.2)$$

800 scritta in una forma equivalente alla (5.2.1) (a meno di indici) e avendo indicato con $D_k \rho_k$
801 l'operatore di derivata sostanziale di ρ_k rispetto alla fase k -esima, ossia

$$D_k \rho_k = \partial_t \rho_k + (\text{grad} \rho_k) \mathbf{v}_k. \quad (5.2.3)$$

5.2.2 Deformazioni anelastiche

Il trasferimento di massa è considerato un processo anelastico che genera deformazioni anelastiche. Così come introdotto precedentemente, scomponiamo il tensore di deformazione in una parte elastica e in una parte anelastica, data appunto dal tensore di deformazioni anelastiche, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{K}$. Derivando il tensore di deformazione \mathbf{F} rispetto al tempo, otteniamo:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{K} + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{K}}. \quad (5.2.4)$$

Ricordando l'espressione del gradiente di velocità di deformazione, $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$, possiamo sostituire la (5.2.4) nell'espressione precedente, ottenendo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} &= (\dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{K} + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{K}}) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} \\ &= \mathbf{L}_e + \mathbf{F}_e \mathbf{L}_K \mathbf{F}_e^{-1}, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

in cui abbiamo posto $\mathbf{L}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1}$, che rappresenta la parte elastica del gradiente di velocità, e $\mathbf{L}_K = \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}$, ossia rappresenta la velocità generalizzata associata al tensore di distorsioni anelastiche. Osserviamo che l'operazione $\mathbf{F}_e \mathbf{L}_K \mathbf{F}_e^{-1}$ è un "push-forward" di \mathbf{L}_K alla "configurazione corrente".

Rinominando $\boldsymbol{\ell} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$, $\boldsymbol{\ell}_e = \mathbf{L}_e$ e $\boldsymbol{\ell}_K = \mathbf{F}_e \mathbf{L}_K \mathbf{F}_e^{-1}$, si ottiene

$$\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_e + \boldsymbol{\ell}_K. \quad (5.2.6)$$

Quindi se decomponiamo moltiplicativamente \mathbf{F} , le velocità generalizzate associate a \mathbf{F}_e e \mathbf{K} si decompongono additivamente.

Analogamente al caso monofasico, visto nel Capitolo 3, è possibile mostrare che il bilancio di massa della fase solida può essere scritto come $\text{tr} \boldsymbol{\ell}_K = r_s$, ovvero è uguale al tasso con cui la massa viene scambiata tra le fasi fluida e solida. Vale quindi la seguente catena di uguaglianze:

$$\text{tr} \boldsymbol{\ell}_K = \text{tr}(\mathbf{F}_e \mathbf{L}_K \mathbf{F}_e^{-1}) = \text{tr} \mathbf{L}_K = r_s = \sum_a \omega_{as} r_{as}. \quad (5.2.7)$$

Rispetto a quanto fatto in [8], introduciamo \mathbf{K} nel seguente modo:

$$\mathbf{K} = \left(\prod_a \kappa_a^{1/3} \right) \bar{\mathbf{K}}, \quad (5.2.8)$$

con $\bar{\mathbf{K}}$ tensore isocoro, ossia $\det \bar{\mathbf{K}} = 1$, e κ_a funzioni scalari definite $\forall a = 1 : N$. In questo modo, otteniamo la seguente decomposizione di \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \left(\prod_a \kappa_a^{1/3} \right) \bar{\mathbf{K}} \quad (5.2.9)$$

Adesso deriviamo il tensore \mathbf{K} :

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{1}{3} \left(\sum_a \frac{\dot{\kappa}_a}{\kappa_a} \right) \left(\prod_a \kappa_a^{1/3} \right) \bar{\mathbf{K}} + \left(\prod_a \kappa_a^{1/3} \right) \dot{\bar{\mathbf{K}}}, \quad (5.2.10)$$

e sostituiamo l'espressione appena ottenuta nell'espressione per \mathbf{L}_K ,

$$\mathbf{L}_K = \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{3} \left(\sum_a \frac{\dot{\kappa}_a}{\kappa_a} \right) \underbrace{\left(\prod_a \kappa_a^{1/3} \right) \bar{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1}}_{\mathbf{K}} + \left(\prod_a \kappa_a^{1/3} \right) \dot{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{K}^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sum_a \frac{\dot{\kappa}_a}{\kappa_a} \right) \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \quad (5.2.11)$$

825 dove $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$ è la parte deviatorica del tensore $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}$.

826 Ricordando la (5.2.7), calcoliamo la traccia di (5.2.11)

$$\text{tr} \mathbf{L}_{\mathbf{K}} = \sum_a \frac{\dot{\kappa}_a}{\kappa_a} = \sum_a \omega_{as} r_{as}, \quad (5.2.12)$$

827 e supponiamo che valgano le identificazioni

$$\frac{\dot{\kappa}_a}{\kappa_a} = \omega_{as} r_{as}, \quad a = 1 : N. \quad (5.2.13)$$

828 5.3 Principio delle Potenze Virtuali

829 In questa sezione ci occupiamo di ricavare le equazioni del moto applicando il Principio
830 delle Potenze Virtuali (PPV). A tal proposito definiamo una potenza virtuale $\hat{\mathcal{P}}$, che terrà
831 conto di contributi “classici” e “non-classici”. La dinamica “classica” è descritta dalle forze
832 generalizzate “classiche”, cioè lo sforzo di Cauchy, le forze interne dovute allo scambio di
833 impulso tra le fasi ed eventualmente le forze esterne sia volumetriche che di contatto. Mentre
834 quella “non-classica” è descritta dai processi anelastici, ovvero il trasferimento di massa. Le
835 forze “non-classiche” invece saranno introdotte per dualità alle velocità virtuali generalizzate
836 associate a $\dot{\kappa}_a$, $a = 1 : N$ e $\dot{\hat{\mathbf{K}}}$.

837 5.3.1 Equazioni del moto

838 Le equazioni del moto sono ottenute a partire dal Principio delle Potenze Virtuali, che
839 scriviamo in forma compatta come

$$\hat{\mathcal{P}}_T = \hat{\mathcal{P}}^{\text{int}} + \hat{\mathcal{P}}^{\text{ext}} = 0 \quad (5.3.1)$$

840 con $\hat{\mathcal{P}}^{\text{int}} = \hat{\mathcal{P}}_{\text{st}}^{\text{int}} + \hat{\mathcal{P}}_{\text{n-st}}^{\text{int}}$ e $\hat{\mathcal{P}}^{\text{ext}} = \hat{\mathcal{P}}_{\text{st}}^{\text{ext}} + \hat{\mathcal{P}}_{\text{n-st}}^{\text{ext}}$, che scriviamo esplicitamente come

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{st}}^{\text{int}} = \sum_k \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\mathbf{T}_{ak} : \text{grad } \hat{\mathbf{v}}_{ak} + \rho_{ak} \mathbf{m}_{ak} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{ak} \right\}, \quad (5.3.2a)$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{st}}^{\text{ext}} = \sum_k \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \rho_{ak} \mathbf{b}_{ak} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{ak} + \sum_k \sum_a \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau}_{ak} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{ak}, \quad (5.3.2b)$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{n-st}}^{\text{int}} = - \int_{\mathcal{B}_t} \left(\sum_a y_a^{\text{int}} \hat{\mathbf{v}}_a + \mathbf{Y}_\nu : \hat{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{K}} \right), \quad (5.3.2c)$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{\text{n-st}}^{\text{ext}} = \int_{\mathcal{B}_t} \left(\sum_a y_a^{\text{ext}} \hat{\mathbf{v}}_a + \mathbf{Z}_\nu : \hat{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{K}} \right), \quad (5.3.2d)$$

841 in cui \mathbf{T}_{ak} è il tensore di Cauchy del costituente a -esimo della fase k -esima, $\rho_{ak} \mathbf{m}_{ak}$ è la forza
842 interna alla miscela dovuta allo scambio di impulso tra i costituenti, $\rho_{ak} \mathbf{b}_{ak}$ rappresenta le
843 forze di volume, $\boldsymbol{\tau}_{ak}$ rappresenta tutte le trazioni di bordo che agiscono sul costituente a -
844 esimo, $\hat{\mathbf{v}}_a$ è la velocità virtuale associata a $\dot{\kappa}_a$, $\hat{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{K}}$ è la velocità virtuale tensoriale associata
845 a $\dot{\hat{\mathbf{K}}}$, mentre \mathbf{Y}_ν e \mathbf{Z}_ν sono tensori deviatorici.

846 Osserviamo che $\hat{\mathcal{P}}_{\text{n-st}}^{\text{int}}$ ha una espressione in cui figura la velocità virtuale tensoriale $\hat{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{K}}$,
847 ma non $\text{Grad} \hat{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{K}}$; questo significa che la teoria in questione è di grado zero [10]. Quindi,

848 stiamo facendo tacitamente la prima assunzione costitutiva. Ma, ricordiamo, che in un
 849 continuo standard la teoria non può essere di grado 0, perché se fosse di grado 0 dovremmo
 850 ammettere una forza interna duale di una velocità virtuale, il che è impossibile perché
 851 si violerebbe l'invarianza della potenza per traslazioni rigide. Allora l'unica forza interna
 852 ammissibile in un continuo standard è quella nulla. Nella espressione (5.3.2d) possiamo
 853 permetterci di fermarci ad una teoria 0 perché gli "attori" principali ($\hat{\nu}_a$, uno scalare, e $\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$,
 854 un tensore) sono invarianti per traslazioni rigide. Allora verrebbe da chiedersi come mai
 855 nell'espressione standard per la potenza compaiono le forze interne. Semplicemente perché
 856 noi non stiamo lavorando con un continuo monofasico, ma con un continuo multifasico e la
 857 risultante delle forze interne è tale da essere nulla.

858 Assumiamo, a questo punto, che le somma delle potenze virtuali interna ed esterna
 859 sia nulla sia per il caso "classico" che "non-classico", indipendentemente l'uno dall'altro.
 860 Otteniamo quindi

$$\mathcal{P}_{\text{st}}^{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{st}}^{\text{ext}} = 0, \quad (5.3.3a)$$

$$\mathcal{P}_{\text{n-st}}^{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{n-st}}^{\text{ext}} = 0. \quad (5.3.3b)$$

861 La (5.4.10) conduce a

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\mathbf{T}_{ak} : \text{grad } \hat{\mathbf{v}}_{ak} + \rho_{ak} \mathbf{m}_{ak} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{ak} \right\} + \sum_k \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \rho_{ak} \mathbf{b}_{ak} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{ak} \\ + \sum_k \sum_a \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau}_{ak} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{ak} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

862 Supponiamo che la velocità di ogni costituente della fase solida sia uguale a \mathbf{v}_s , ottenendo
 863 così

$$\begin{aligned} \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\mathbf{T}_{as} : \text{grad } \hat{\mathbf{v}}_s + \rho_{as} \mathbf{m}_{as} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \rho_{as} \mathbf{b}_{as} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right\} + \sum_a \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau}_{as} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \\ + \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\mathbf{T}_{al} : \text{grad } \hat{\mathbf{v}}_{al} + \rho_{al} \mathbf{m}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} + \rho_{al} \mathbf{b}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} \right\} + \sum_a \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

864 da cui segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\underbrace{\left(\sum_a \mathbf{T}_{as} \right)}_{\boldsymbol{\sigma}_s} : \text{grad } \hat{\mathbf{v}}_s + \underbrace{\left(\sum_a \rho_{as} \mathbf{m}_{as} \right)}_{\rho_s \mathbf{m}_s} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \underbrace{\left(\sum_a \rho_{as} \mathbf{b}_{as} \right)}_{\rho_s \mathbf{b}_s} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right\} + \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} \underbrace{\left(\sum_a \boldsymbol{\tau}_{as} \right)}_{\boldsymbol{\tau}_s} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \\ + \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\mathbf{T}_{al} : \text{grad } \hat{\mathbf{v}}_{al} + \rho_{al} \mathbf{m}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} + \rho_{al} \mathbf{b}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} \right\} + \sum_a \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

865 Utilizzando la regola di derivazione di Leibniz, giungiamo a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\text{div}(\boldsymbol{\sigma}_s^{\text{T}} \hat{\mathbf{v}}_s) + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \rho_s \mathbf{m}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \rho_s \mathbf{b}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right\} + \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \\ + \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ -\text{div}(\mathbf{T}_{al}^{\text{T}} \hat{\mathbf{v}}_{al}) + \text{div} \mathbf{T}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} + \rho_{al} \mathbf{m}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} + \rho_{al} \mathbf{b}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} \right\} + \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\tau}_{al} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

866 e infine

$$\int_{\mathcal{B}_t} \left\{ \text{div} \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{m}_s + \rho_s \mathbf{b}_s \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \int_{\partial_{\mathbf{N}} \mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s$$

$$+ \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ \operatorname{div} \mathbf{T}_{al} + \rho_{al} \mathbf{m}_{al} + \rho_{al} \mathbf{b}_{al} \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} + \sum_a \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\tau}_{al} - \mathbf{T}_{al} \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_{al} = 0. \quad (5.3.8)$$

867 Sostituendo l'espressione per la velocità relativa (5.1.7), otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{m}_s + \rho_s \mathbf{b}_s \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \\ & + \sum_a \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ \operatorname{div} \mathbf{T}_{al} + \rho_{al} \mathbf{m}_{al} + \rho_{al} \mathbf{b}_{al} \right\} \cdot (\hat{\mathbf{u}}_{al} + \hat{\mathbf{v}}_\ell) \\ & + \sum_a \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\tau}_{al} - \mathbf{T}_{al} \mathbf{n}) \cdot (\hat{\mathbf{u}}_{al} + \hat{\mathbf{v}}_\ell) = 0, \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

868 da cui segue

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{m}_s + \rho_s \mathbf{b}_s \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \\ & + \int_{\mathcal{B}_t} \sum_b \left\{ \operatorname{div} \mathbf{T}_{bl} - \frac{\rho_{bl}}{\rho_{N\ell}} \operatorname{div} \mathbf{T}_{N\ell} + \rho_{bl} (\mathbf{m}_{bl} - \mathbf{m}_{N\ell}) + \rho_{bl} (\mathbf{b}_{bl} - \mathbf{b}_{N\ell}) \right\} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{bl} \\ & + \int_{\mathcal{B}_t} \sum_a \left\{ \operatorname{div} \mathbf{T}_{al} + \rho_{al} \mathbf{m}_{al} + \rho_{al} \mathbf{b}_{al} \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\ell \\ & + \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} \sum_b \left[\left(\boldsymbol{\tau}_{bl} - \frac{\rho_{bl}}{\rho_{N\ell}} \boldsymbol{\tau}_{N\ell} \right) - \left(\mathbf{T}_{bl} - \frac{\rho_{bl}}{\rho_{N\ell}} \mathbf{T}_{N\ell} \right) \mathbf{n} \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_{bl} \\ & + \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} \sum_a (\boldsymbol{\tau}_{al} - \mathbf{T}_{al} \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_\ell = 0, \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

869 Adesso, avendo trascurato le inerzie e tutti i termini quadratici nelle velocità relative, iden-
870 tifichiamo il tensore degli sforzi di Cauchy della fase fluida con la somma dei tensori degli
871 sforzi di Cauchy dei singoli costituenti della fase fluida, ossia

$$\boldsymbol{\sigma}_\ell = \sum_a \mathbf{T}_{al}. \quad (5.3.11)$$

872 Analogamente, nell'ambito della medesima approssimazione, scriviamo

$$\rho_\ell \mathbf{m}_\ell = \sum_a \rho_{al} \mathbf{m}_{al}, \quad (5.3.12)$$

873 mentre definiamo la forza esterna di volume agente sulla fase fluida, cioè \mathbf{b}_ℓ , come

$$\rho_\ell \mathbf{b}_\ell := \sum_a \rho_{al} \mathbf{b}_{al}. \quad (5.3.13)$$

874 Dunque, otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{m}_s + \rho_s \mathbf{b}_s \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \\ & + \int_{\mathcal{B}_t} \sum_b \left\{ \operatorname{div} \mathbf{T}_{bl} - \frac{\rho_{bl}}{\rho_{N\ell}} \operatorname{div} \mathbf{T}_{N\ell} + \rho_{bl} (\mathbf{m}_{bl} - \mathbf{m}_{N\ell}) + \rho_{bl} (\mathbf{b}_{bl} - \mathbf{b}_{N\ell}) \right\} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{bl} \\ & + \int_{\mathcal{B}_t} \left\{ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\ell + \rho_\ell \mathbf{m}_\ell + \rho_\ell \mathbf{b}_\ell \right\} \cdot \hat{\mathbf{v}}_\ell \\ & + \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} \sum_b \left[\left(\boldsymbol{\tau}_{bl} - \frac{\rho_{bl}}{\rho_{N\ell}} \boldsymbol{\tau}_{N\ell} \right) - \left(\mathbf{T}_{bl} - \frac{\rho_{bl}}{\rho_{N\ell}} \mathbf{T}_{N\ell} \right) \mathbf{n} \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_{bl} \end{aligned}$$

$$+ \int_{\partial_N \mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\tau}_\ell - \boldsymbol{\sigma}_\ell \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_\ell = 0. \quad (5.3.14)$$

875 Localizzando, si ottiene

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{m}_s + \rho_s \mathbf{b}_s = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad (5.3.15a)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\ell + \rho_\ell \mathbf{m}_\ell + \rho_\ell \mathbf{b}_\ell = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad (5.3.15b)$$

$$\sum_b \left[\operatorname{div} \mathbf{T}_{b\ell} - \frac{\rho_{b\ell}}{\rho_{N\ell}} \operatorname{div} \mathbf{T}_{N\ell} + \rho_{b\ell} (\mathbf{m}_{b\ell} - \mathbf{m}_{N\ell}) + \rho_{b\ell} (\mathbf{b}_{b\ell} - \mathbf{b}_{N\ell}) \right] = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad (5.3.15c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} = 0, \quad \text{su } \partial_N \mathcal{B}_t \quad (5.3.15d)$$

$$\boldsymbol{\tau}_\ell - \boldsymbol{\sigma}_\ell \mathbf{n} = 0, \quad \text{su } \partial_N \mathcal{B}_t \quad (5.3.15e)$$

$$\sum_b \left[(\boldsymbol{\tau}_{b\ell} - \frac{\rho_{b\ell}}{\rho_{N\ell}} \boldsymbol{\tau}_{N\ell}) - (\mathbf{T}_{b\ell} - \frac{\rho_{b\ell}}{\rho_{N\ell}} \mathbf{T}_{N\ell}) \mathbf{n} \right] = 0, \quad \text{su } \partial_N \mathcal{B}_t. \quad (5.3.15f)$$

876 Dalla risoluzione delle equazioni per la parte “non-classica” della dinamica risulta, invece
877 (si veda ad esempio [20, 11, 8] per risultati metodologicamente simili),

$$y_a^{\text{int}} = y_a^{\text{ext}}, \quad (5.3.16a)$$

$$\mathbf{Y}_\nu = \mathbf{Z}_\nu. \quad (5.3.16b)$$

878 5.4 Dissipazione

879 5.4.1 Forma locale della dissipazione

880 Risolte le equazioni del moto ci resta da studiare la dissipazione. Assegniamo ad ogni co-
881 stituente della miscela la propria energia libera di Helmholtz $\rho_{ak} \psi_{ak}$. Ne segue che l’energia
882 libera di Helmholtz dell’intera miscela è $\rho \psi := \sum_k \sum_a \rho_{ak} \psi_{ak}$. Nel caso isoterma scriviamo
883 la disuguaglianza della dissipazione come [8]

$$\int_{\mathcal{V}_t} \mathcal{D} = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \psi + \mathcal{P}_{\text{st}}^{\text{net}} + \mathcal{P}_{\text{n-st}}^{\text{net}} + \int_{\partial \mathcal{V}_t} \mathbf{q}_\psi \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad (5.4.1)$$

884 dove \mathcal{V}_t è una parte di \mathcal{B}_t , la derivata nel tempo a secondo membro viene fatta rispetto alla
885 velocità della miscela \mathbf{v} , $\mathcal{P}_{\text{st}}^{\text{net}}$ e $\mathcal{P}_{\text{n-st}}^{\text{net}}$ sono date da [8] (si veda anche [20] per la definizione
886 di “net working” per il caso monofasico)

$$\mathcal{P}_{\text{st}}^{\text{net}} = \int_{\mathcal{V}_t} \left\{ \sum_k \sum_a \rho_{ak} \mathbf{b}_{ak} \cdot \mathbf{v}_{ak} \right\} + \int_{\partial \mathcal{V}_t} \sum_k \sum_a \mathbf{T}_{ak} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{ak} \quad (5.4.2a)$$

$$\mathcal{P}_{\text{n-st}}^{\text{net}} = \int_{\mathcal{V}_t} \left\{ \sum_a y_a^{\text{ext}} \dot{\kappa}_a + \mathbf{Z}_\nu : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \right\}, \quad (5.4.2b)$$

887 e sono rispettivamente le potenze nette “classiche” e “non-classiche” [20, 10], e \mathbf{q}_ψ è definito
888 come [8]

$$\mathbf{q}_\psi = - \left\{ \sum_k \sum_a \rho_{ak} \psi_{ak} \mathbf{u}_{ak} + \rho_s \psi_s \mathbf{u}_s + \rho_\ell \psi_\ell \mathbf{u}_\ell \right\}, \quad (5.4.3)$$

889 ed è detto in [8] “pseudo-flusso di energia”. Quindi, la (5.4.1) diviene

$$\int_{\mathcal{V}_t} \mathcal{D} = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \psi + \int_{\mathcal{V}_t} \sum_k \sum_a \rho_{ak} \mathbf{b}_{ak} \cdot \mathbf{v}_{ak} + \int_{\partial \mathcal{V}_t} \sum_k \sum_a \mathbf{T}_{ak} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{ak}$$

$$+ \int_{\mathcal{V}_t} \sum_a y_a^{ext} \dot{\kappa}_a + \mathbf{Z}_\nu : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} + \int_{\partial\mathcal{V}_t} \mathbf{q}_\psi \cdot \mathbf{n} \geq 0. \quad (5.4.4)$$

890 Dopo alcuni calcoli riportati in [8], giungiamo a

$$\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}_{\text{I}}^{(1)} + \tilde{\mathcal{D}}_{\text{II}}^{(1)} + \tilde{\mathcal{D}}_{\text{III}}^{(1)} \geq 0 \quad (5.4.5)$$

891 Il focus di questo lavoro non è riportare i calcoli della dissipazione, svolti in [8], ma concen-
892 trarsi sul terzo termine a secondo membro della (5.5.1).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_{\text{III}}^{(1)} &= \mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) : \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} + \sum_a y_a^{\text{int}} \dot{\kappa}_a + \mathbf{Y}_\nu : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} + \sum_a \rho_{as} r_{as} (\mu_{al} - \mu_{as}) \\ &= \mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) : \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} + \sum_a \underbrace{y_a^{\text{int}} \dot{\kappa}_a}_{:= z_a^{\text{int}}} \omega_{as} r_{as} + \mathbf{Y}_\nu : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \\ &\quad + \sum_a \rho_{as} r_{as} (\mu_{al} - \mu_{as}) \geq 0, \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

893 in cui abbiamo sostituito la relazione (5.4.8).

894 Ricordando che $\mathbf{L}_{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{L}_{\mathbf{K}}) \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$, la (5.4.6) diventa

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_{\text{III}}^{(1)} &= \frac{1}{3} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] \text{tr} \mathbf{L}_{\mathbf{K}} + \text{dev} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \\ &\quad + \sum_a z_a^{\text{int}} \omega_{as} r_{as} + \mathbf{Y}_\nu : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} + \sum_a \rho_{as} r_{as} (\mu_{al} - \mu_{as}) \\ &= \frac{1}{3} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] \sum_a \omega_{as} r_{as} \\ &\quad + \sum_a \rho_{as} r_{as} \left(\frac{\omega_{as}}{\rho_{as}} z_a^{\text{int}} + (\mu_{al} - \mu_{as}) \right) + \left\{ \text{dev} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] + \mathbf{Y}_\nu \right\} : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \\ &= \sum_a r_{as} \left\{ \xi_a^{\text{int}} + \rho_{as} (\mu_{al} - \mu_{as}) + \frac{1}{3} \omega_{as} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] \right\} \\ &\quad + \left\{ \text{dev} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] + \mathbf{Y}_\nu \right\} : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

895 con $\xi_a^{\text{int}} = \omega_{as} z_a^{\text{int}}$.

896 Possiamo pensare la forza generalizzata ξ_a^{int} come somma di un contributo dissipativo e
897 un contributo non dissipativo. In virtù di questo scriviamo,

$$\xi_a^{\text{int,d}} = \xi_a^{\text{int}} + \left\{ \rho_{as} (\mu_{al} - \mu_{as}) + \frac{1}{3} \omega_{as} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] \right\}, \quad \forall a = 1 : N, \quad (5.4.8)$$

898 cosicché la (5.4.7) diventa

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\text{III}}^{(1)} = \sum_a r_{as} \xi_a^{\text{int,d}} + \left\{ \text{dev} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] + \mathbf{Y}_\nu \right\} : \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \geq 0. \quad (5.4.9)$$

899 Arrivati a questo punto, per semplicità, ipotizziamo

$$\xi_a^{\text{int,d}} = \frac{1}{f_a} \omega_{as} r_{as} \quad \Rightarrow \quad \omega_{as} r_{as} = f_a \xi_a^{\text{int,d}} \quad \text{con } f_a > 0. \quad (5.4.10)$$

900 Di conseguenza $\xi_a^{\text{int,d}}$ non può essere determinata costitutivamente se $f_a = 0$ (questo ricorda
901 un po' i fenomeni di soglia). Quindi otteniamo

$$r_s = \sum_a f_a \left\{ \xi_a^{\text{ext}} + \rho_{as} (\mu_{al} - \mu_{as}) + \frac{1}{3} \omega_{as} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] \right\}, \quad (5.4.11)$$

902 ricordando che per la (5.3.16a) $\xi_a^{\text{int}} = \xi_a^{\text{ext}}$.

5.5 Considerazioni sui trasferimenti di massa

La (5.4.10) si può riscrivere come

$$\omega_{as} r_{as} = f_a \xi_a^{\text{int,d}}. \quad (5.5.1)$$

Se $\omega_{as} = 0$ allora $\xi_a^{\text{int,d}} = 0$, mentre, se $\omega_{as} \neq 0$, allora poniamo $z_a^{\text{int,d}} := \frac{\xi_a^{\text{int,d}}}{\omega_{as}}$. Così facendo possiamo continuare con due approcci diversi.

Primo approccio

Il primo consiste nello riscrivere il tasso di scambio tra i costituenti come

$$r_{as} = f_a z_a^{\text{int,d}}, \quad (5.5.2)$$

in cui f_a può essere identificato con una funzione di uno sforzo “efficace” \wp_a che dà luogo ad un effetto di modulazione della crescita noto come meccanotrasduzione [9, 39, 33], ossia

$$f_a = f_{a0} \left[1 - \frac{\delta_1 \langle \wp_a \rangle_+}{\delta_2 + \langle \wp_a \rangle_+} \right] = \begin{cases} f_{a0}, & \text{se } \wp_a \leq 0, \\ f_{a0} \left[1 - \frac{\delta_1 \wp_a}{\delta_2 + \wp_a} \right], & \text{se } \wp_a > 0, \end{cases} \quad (5.5.3)$$

dove $\delta_1 \in [0,1]$ e $\delta_2 > 0$ sono parametri costanti, \wp_a può essere definito ad esempio come

$$\wp_a := -\frac{1}{3} \omega_{as} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^T \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right], \quad (5.5.4)$$

e f_{a0} è un parametro che ha le dimensioni di $1/(\text{tempo} \cdot \text{sforzo})$. Si noti che il parametro δ_2 ha le dimensioni di uno sforzo caratteristico.

Inoltre, assegniamo $z_a^{\text{int,d}}$ come

$$z_a^{\text{int,d}} := \omega_{as} z_{ac} \left\langle \frac{\omega_{al} - \omega_{al}^{\text{cr}}}{\omega_a^{\text{env}} - \omega_{al}^{\text{cr}}} \right\rangle_+ \frac{1 - \phi_s}{\phi_{\ell 0}} \phi_s, \quad (5.5.5)$$

dove ω_{al}^{cr} è un valore critico del costituente a -esimo nella fase solida, ω_a^{env} è il valore del costituente a -esimo nell’ambiente in cui la miscela è immersa e z_{ac} è un valore di riferimento per questa forza dissipativa che ha le dimensioni di uno sforzo. $\phi_{\ell 0}$ è un valore di riferimento per la frazione di volume del fluido.

Mettendo assieme i risultati, otteniamo così

$$r_{as} = z_{ac} f_{a0} \left\langle \frac{\omega_{al} - \omega_{al}^{\text{cr}}}{\omega_a^{\text{env}} - \omega_{al}^{\text{cr}}} \right\rangle_+ \left[1 - \frac{\delta_1 \langle \wp_a \rangle_+}{\delta_2 + \langle \wp_a \rangle_+} \right] \frac{1 - \phi_s}{\phi_{\ell 0}} \phi_s, \quad (5.5.6)$$

e osserviamo che il prodotto $z_{ac} f_{a0}$ può essere identificato con il parametro che definisce simili termini di sorgente o pozzo di massa in altri modelli di crescita.

Il secondo membro della (5.5.6) definisce completamente r_{as} e pertanto può essere impiegato per determinare κ_a tramite l’equazione

$$\frac{\dot{\kappa}_a}{\kappa_a} = \omega_{as} z_{ac} f_{a0} \left\langle \frac{\omega_{al} - \omega_{al}^{\text{cr}}}{\omega_a^{\text{env}} - \omega_{al}^{\text{cr}}} \right\rangle_+ \left[1 - \frac{\delta_1 \langle \wp_a \rangle_+}{\delta_2 + \langle \wp_a \rangle_+} \right] \frac{1 - \phi_s}{\phi_{\ell 0}} \phi_s. \quad (5.5.7)$$

Dopo aver calcolato il tasso r_{as} , possiamo giungere all’espressione di ξ_a^{ext} , calcolandola come

$$\xi_a^{\text{ext}} = \xi_a^{\text{int,d}} - \left\{ \rho_{as} (\mu_{al} - \mu_{as}) + \frac{1}{3} \omega_{as} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^T \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] \right\}, \quad \forall a = 1 : N. \quad (5.5.8)$$

926 **Secondo approccio**

927 Un altro modo di procedere è quello di scrivere la (5.4.11) come

$$\frac{\omega_{as} r_{as}}{f_a} = \xi_a^{\text{ext}} + \rho_{as}(\mu_{al} - \mu_{as}) + \frac{1}{3}\omega_{as} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right], \quad (5.5.9)$$

928 o, ricordando che vale la (5.4.8), nella ulteriore forma

$$\frac{1}{f_a} \frac{\dot{\kappa}_a}{\kappa_a} = \xi_a^{\text{ext}} + \rho_{as}(\mu_{al} - \mu_{as}) + \frac{1}{3}\omega_{as} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right]. \quad (5.5.10)$$

929 dove f_a è ancora dato dalla (5.5.3). Così facendo, assegnando ξ_a^{ext} , ricaviamo κ_a e quindi
930 r_{as} .

931 Nella teoria classica delle miscele, in cui non figurano né ξ_a^{ext} né $-\varphi_a$, l'equilibrio chimico,
932 per cui si ha $r_{as} = 0$, per ogni $a = 1 : N$, si ottiene quando $\mu_{al} = \mu_{as}$, per ogni $a = 1 : N$.
933 Nello studio effettuato in questa sede, invece, il generico termine r_{as} è nullo quando si ha

$$\frac{1}{\rho_{as}} \xi_a^{\text{ext}} + (\mu_{al} - \mu_{as}) + \frac{1}{3} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right] = 0. \quad (5.5.11)$$

934 Come detto in [8], si apre uno “iato nello spettro dei potenziali chimici”. Quindi, la condi-
935 zione di equilibrio di Gibbs (si veda, ad esempio, [53]) è generalizzata. Tuttavia, possiamo
936 ripristinarla ponendo

$$\frac{1}{\rho_{as}} \xi_a^{\text{ext}} = -\frac{1}{3} \text{tr} \left[\mathbf{F}_e^{\text{T}} \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{F}_e} \right) \right]. \quad (5.5.12)$$

937 Il risultato in (5.5.12), già presente in [8], è però stato ottenuto qui in un modo più generale
938 e più coerente dal punto di vista metodologico con la teoria seguita in [8] e ripresa ed estesa
939 in questa tesi.

Capitolo 6

Conclusioni

In questo ultimo capitolo, vogliamo riassumere i principali risultati di questo lavoro. Parte di tali conclusioni sono tratte e riadattate da [15].

6.1 Crescita nei modelli monofasici

L'obiettivo principale del lavoro di tesi è stato l'osservazione dell'evoluzione di un ipotetico ed idealizzato tessuto tumorale, in un arco di tempo pari a venti giorni. Tale studio è stato condotto formulando due “modelli” distinti di un unico modello generale, denominati M1 e M2, ed individuati sulla base dell'espressione assegnata alla forza esterna generalizzata \mathbf{Z} , introdotta nell'ambito della teoria della crescita (e, più in generale, dei processi anelastici) originariamente proposta in [10] e successivamente elaborata in [15]. I modelli matematici, descritti in dettaglio nei Capitoli 3 e 4, sono stati ottenuti prescrivendo di volta in volta per \mathbf{Z} una forma funzionale in grado, secondo il nostro attuale livello di comprensione della fenomenologia, di indurre una espressione di Γ_g (si veda la Equazione (3.1.3)) fisicamente accettabile per descrivere il ruolo della meccanica del tumore sulla sorgente di massa che descrive il processo di crescita.

In particolare, nel modello M1, \mathbf{Z} è stata scelta in modo tale che, proiettando la equazione per l'evoluzione del tensore di crescita (ossia la Equazione (3.5.2d)), sullo spazio dei tensori del secondo ordine isotropi, si ottenesse l'identità

$$\Gamma_g \equiv \text{tr}(\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}) = \frac{k_c}{a_\nu + 2b_\nu} \Gamma, \quad (6.1.1)$$

mentre, per contemplare anche la presenza di una eventuale parte deviatorica di tale evoluzione, è stato introdotto il tensore costante e deviatorico \mathbf{T} (si veda la Equazione (3.5.3)). Ciò ci ha permesso di trarre tre conclusioni:

- Come anticipato in [14], la sorgente di massa Γ_g può essere determinata assegnando la funzione Γ , che lega \mathbf{Z} alla presenza di agenti chimici capaci di innescare o “spegnere” la crescita tumorale, dando così a \mathbf{Z} il significato fisico di una forza meccanica attivabile dalla chimica del tumore, ed eventualmente modulabile dalla distribuzione di sforzo nel tumore stesso, secondo quanto indicato nella espressione (3.5.6).
- Ricordando che la Equazione (3.5.6) è stata proposta in [9] sulla base di evidenze fenomenologiche, ed è stata posta uguale al termine volumetrico dell'evoluzione di \mathbf{K} , ossia a $\text{tr}(\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}})$, con un'opportuna scelta del parametro k_c , ossia ponendo $k_c = a_\nu + 2b_\nu$, è possibile realizzare l'identità $\text{tr}(\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}) = \Gamma$ [15].

- 971 • La parte deviatorica del tensore $\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}$ è interamente dovuta a \mathbf{T} .

972 Il modello M1, per le ragioni appena delineate, pur riuscendo a riprodurre un risultato
973 sperimentalmente noto, è, a nostro modo di vedere, eccessivamente artificiale.

974 Nel modello M2, la scelta di \mathbf{Z} è tale da non sopprimere la componente volumetrica del
975 tensore di Eshelby, che quindi contribuisce ad ottenere evoluzioni diverse per il tensore di
976 deformazioni anelastiche \mathbf{K} (si veda la Equazione (3.5.5)). Di conseguenza, la sorgente di
977 massa Γ_g risulta essere definita dalla identità

$$\Gamma_g \equiv \text{tr} \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} = \frac{-J_{\mathbf{K}}^{-1} [\text{tr} \mathbf{H}] + k_c \Gamma}{a_\nu + 2b_\nu}. \quad (6.1.2)$$

978 Anche in questo caso, è possibile trarre le seguenti conclusioni:

- 979 • Benché Γ_g possa essere individuata assegnando Γ , essa, adesso, non è identificabile con
980 Γ tramite un'opportuna scelta di k_c , poiché interviene la parte volumetrica del tensore
981 di Eshelby che rappresenta un'ulteriore azione meccanica su Γ_g .
- 982 • L'equazione per la parte deviatorica di $\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}$ ha la medesima struttura di quella del
983 modello M1.

984 Tramite il software *COMSOL Multiphysics* versione 5.3a, abbiamo analizzato dapprima
985 il comportamento dello spostamento assiale u al variare del tempo. Esso è una funzione
986 crescente sia del tempo che dello spazio e risulta essere influenzato in maniera considerevole
987 dalla distribuzione dei nutrienti. Inoltre, nel modello M2 abbiamo riscontrato uno sposta-
988 mento dieci volte maggiore rispetto a quello prevista dal modello M1. Analoghi risultati
989 sono stati ottenuti analizzando le componenti del tensore di crescita. In questo caso, per
990 la componente assiale del tensore di crescita, l'aumento in tempo della distribuzione dei
991 nutrienti provoca una intensificazione delle distorsioni anelastiche associate alla crescita al
992 variare del tempo. La componente circonferenziale, invece, nel modello M1 risulta mino-
993 re di uno (il che è spiegabile con il fatto che il tensore \mathbf{K} deve rispettare la condizione
994 $\text{tr}(\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}) = \frac{k_c}{a_\nu + 2b_\nu} \Gamma$), mentre raggiunge valori anche maggiori di uno nel modello M2.
995 Per quanto riguarda l'uguaglianza tra $\text{tr}(\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}})$ e Γ , ribadiamo che essa è verificata nel
996 modello M1, mentre il comportamento di queste due grandezze è palesemente diverso nel
997 modello M2 a causa della presenza della parte volumetrica di \mathbf{H} nella Equazione (4.3.7a)
998 (ripetuta in (6.1.2), per comodità).

999 6.2 Crescita nel modello bifasico a molti costituenti

1000 L'obiettivo di questa parte della tesi, che ne costituisce il Capitolo 5, è stato la revisione
1001 critica di alcuni dei risultati ottenuti in [8] e, in particolare, l'impiego del Principio delle
1002 Potenze Virtuali e della disuguaglianza della dissipazione come strumenti di base per la
1003 descrizione della crescita, intesa come l'esito del trasferimento dei costituenti del tessuto
1004 dalla sua fase fluida a quella solida. Al fine di focalizzarci sugli aspetti essenziali della
1005 revisione condotta, abbiamo considerato una versione semplificata del modello presentato
1006 in [8], in cui il tessuto studiato è fibro-rinforzato e più meccanismi di crescita sono messi in
1007 conto. In tal senso, le principali semplificazioni adottate sono state l'ipotesi che il tessuto
1008 in esame fosse isotropo e la identificazione della crescita con il processo di trasferimento di
1009 massa da una fase all'altra. Come in [8], però, il rimodellamento del tessuto è stato preso
1010 in considerazione e attribuito alla parte isocora del tensore $\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}$.

1011 Il risultato ottenuto in questo lavoro è analogo a quello presente in [8], ma è più generale.
1012 In particolare, usando due diversi approcci, giungiamo ad una condizione generalizzata

1013 dell'equilibrio di Gibbs [53], che dipende da forze esterne generalizzate, introdotte come
1014 enti duali ad altrettante velocità generalizzate $\dot{\kappa}_a$, per $a = 1 : N$, ciascuna delle quali
1015 è legata al tasso di trasferimento di massa del costituente a -esimo, ossia r_{as} , attraverso la
1016 relazione $\dot{\kappa}_a/\kappa_a = \omega_{as}r_{as}$. Tali forze esterne che, possono essere selezionate così da riprodurre
1017 la fenomenologia da descrivere, fanno sì che, una volta “spente”, si ricada nella teoria limite
1018 che già conosciamo [8]. Secondo il nostro livello di comprensione, ciò è possibile perché le
1019 forze esterne considerate forniscono al modello grande flessibilità, potendo essere pensate,
1020 ad esempio, come la traduzione in azione meccanica di interazioni del tessuto con il mondo
1021 esterno altrimenti non direttamente esprimibili come forze nel senso usuale del termine.
1022 Ad esempio, una delle forze esterne generalizzate del nostro modello può rappresentare
1023 l'azione di un farmaco che inibisce o agevola la crescita. Se una simile forza generalizzata
1024 bilancia la somma tra lo sforzo meccanico e la differenza tra i potenziali chimici di un dato
1025 costituente (tale differenza, nella teoria classica delle miscele, governa gli scambi di massa
1026 da un costituente della miscela ad un altro) [53, 8], allora si raggiunge l'equilibrio chimico,
1027 il che può essere preso come uno dei criteri possibili per disattivare la crescita.

Ringraziamenti

1029 Arrivati fino a qui, è doveroso e altrettanto piacevole ringraziare tutte le persone che mi
1030 hanno supportata e sopportata per la stesura di questa Tesi e hanno reso meno tortuoso il
1031 mio cammino verso il raggiungimento della Laurea.

1032 Il mio più grande *grazie* va al Professore Alfio Grillo, persona che, dal primo giorno in cui
1033 mi ha vista tra i banchi del Politecnico, ha creduto in me in maniera incondizionata e che
1034 mi ha trasmesso, tramite il suo modo di fare, la passione per ciò che studio e la sensazione
1035 di essere la persona giusta nel posto giusto. Lo ringrazio perché oltre ad essere stato in
1036 questi anni un padre scientifico, che pazientemente ha rivelato il suo sapere a me, che con
1037 orgoglio giorno dopo giorno ho cercato di rendere mio, è stato una figura di riferimento, che
1038 ha plasmato professionalmente la mia identità di donna e ha abbattuto alcune insicurezze
1039 che portavo con me.

1040 Un ringraziamento profondo va anche al Dottore Salvatore Di Stefano, sempre disponibile
1041 e paziente a darmi suggerimenti e spiegazioni scientifiche. Lo ringrazio, inoltre, per avere
1042 reso le giornate di lavoro piacevoli e scherzose e per aver alleggerito lo stress e l'ansia di
1043 questo periodo mostrandosi sempre pronto ad aiutarmi e stimolandomi a credere sempre di
1044 più in me stessa.

1045 A mio padre e a mia madre, invece, i soli ringraziamenti non bastano. A loro devo tutta
1046 la mia vita e non smetterò mai di dire che ogni successo raggiunto fino a qui è per loro e che
1047 niente potrebbe mai bastare per ripagarli di questo amore incondizionato che ogni giorno
1048 mi avvolge e mi fa sentire degna di vivere.

1049 A mio fratello e a mia cognata, grazie per essermi stati sempre vicini e per aver accolto
1050 i miei sfoghi nei momenti bui, rendendoli meno bui con la vostra positività e allegria e
1051 facendomi sempre sentire amata.

1052 Un ringraziamento va anche alle mie amiche di sempre, le due Martina N., Maria Gio-
1053 vanna, Arianna, Laura, Francesca, Chiara e Claudia, che conoscono gli angoli più remoti
1054 della mia anima e che hanno vissuto con me i momenti più salienti di tutto il mio percorso.

1055 Infine, voglio ringraziare Martina T., Luca, Claudio, Giorgio e Greta, persone meravi-
1056 gliose che hanno reso la mia permanenza qui a Torino un po' meno ardua facendomi sempre
1057 sentire come a casa.

Bibliografia

- [1] J. D. Humphrey, K. R. Rajagopal, A constrained mixture model for growth and remodelling of soft tissues, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12 (03) (2002) 407–430.
- [2] D. Ambrosi, L. Preziosi, On the closure of mass balance models for tumor growth, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12 (05) (2002) 737–754. doi:10.1142/s0218202502001878.
- [3] H. M. Byrne, L. Preziosi, Modelling solid tumour growth using the theory of mixtures, *Mathematical Medicine and Biology* 20 (4) (2003) 341–366. doi:10.1093/imamb/20.4.341.
- [4] B. Loret, F.M.F. Simões, A framework for deformation, generalized diffusion, mass transfer and growth in multi-species multi-phase biological tissues, *Eur. J. Mech. A* 24 (2005) 757–781. doi:10.1016/j.euromechsol.2005.05.005.
- [5] D. Ambrosi, L. Preziosi, G. Vitale, The insight of mixtures theory for growth and remodeling, *Z. Angew. Math. Phys.* 61 (2010) 177–191. doi:10.1007/s00033-009-0037-8.
- [6] L. Preziosi, G. Vitale, A multiphase model of tumor and tissue growth including cell adhesion and plastic reorganization, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 21 (09) (2011) 1901–1932. doi:10.1142/S021820251-1005593.
- [7] G. A. Ateshian, J. D. Humphrey, Continuum mixture models of biological growth and remodeling: Past successes and future opportunities, *Annual Review of Biomedical Engineering* 14 (1) (2012) 97–111. doi:10.1146/annurev-bioeng-071910-124726.
- [8] A. Grillo, S. Federico, G. Wittum, Growth, mass transfer, and remodeling in fiber-reinforced, multi-constituent materials, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 47 (2012) 388–401. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2011.09.026.
- [9] P. Mascheroni, C. Stigliano, M. Carfagna, D. Boso, L. Preziosi, P. Decuzzi, B. Schrefler, Predicting the growth of glioblastoma multiforme spheroids using a multiphase porous media model, *Biomech. Model. Mechanobiol.* 15 (5) (2016) 1215–1228. doi:10.1007/s10237-015-0755-0.
- [10] A. Di Carlo, S. Quiligotti, Growth and balance, *Mechanics Research Communications* 29 (6) (2002) 449–456. doi:10.1016/s0093-6413(02)00297-5.
- [11] T. Olsson, A. Klarbring, Residual stresses in soft tissue as a consequence of growth and remodeling: application to an arterial geometry, *Eur. J. Mech. A* 27(6) (2008) 959–974. doi:10.1016/j.euromechsol.2007.12.006.
- [12] E. Crevacore, S. Di Stefano, A. Grillo, Coupling among deformation, fluid flow, structural reorganisation and fibre reorientation in fibre-reinforced, transversely isotropic biological tissues, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 111 (2019) 1–13. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.022.
- [13] A. Grillo, S. Di Stefano, A. Ramírez-Torres, M. Loverre, A study of growth and remodeling in isotropic tissues, based on the anand-aslan-chester theory of strain-gradient plasticity, *GAMM-Mitteilungen* (2019) e201900015doi:10.1002/gamm.201900-15.

- 1099 [14] A. Grillo, S. Di Stefano, S. Federico, Growth and remodelling from the perspective
1100 of noether's theorem, *Mechanics Research Communications* 97 (2019) 89–95. doi:
1101 [10.1016/j.mechrescom.2019.04.012](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2019.04.012).
- 1102 [15] A. Grillo, S. Di Stefano, V. Licari, A variational theory of volumetric growth based on
1103 the “modified” vakonomic dynamics, In preparation (2021).
- 1104 [16] L. Taber, Biomechanics of growth, remodeling, and morphogenesis, *Appl. Mech. Rev.*
1105 48 (8) (1995) 487. doi:[10.1115/1.3005109](https://doi.org/10.1115/1.3005109).
- 1106 [17] E. K. Rodríguez, A. Hoger, A. D. McCulloch, Stress-dependent finite growth in soft ela-
1107 stic tissues, *Journal of Biomechanics* 27 (1994) 455–467. doi:[10.1016/0021-9290\(94\)](https://doi.org/10.1016/0021-9290(94)90021-3)
1108 [90021-3](https://doi.org/10.1016/0021-9290(94)90021-3).
- 1109 [18] M. Epstein, G. A. Maugin, Thermomechanics of volumetric growth in uniform bo-
1110 dies, *International Journal of Plasticity* 16 (7-8) (2000) 951–978. doi:[10.1016/](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(99)00081-9)
1111 [s0749-6419\(99\)00081-9](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(99)00081-9).
- 1112 [19] J. D. Humphrey, Towards a theory of vascular growth and remodeling, in: H. G.A.,
1113 O. R.W. (Eds.), *Mechanics of Biological Tissue*, Springer-Verlag, 2006, pp. 3–15. doi:
1114 [10.1007/3-540-31184-x_1](https://doi.org/10.1007/3-540-31184-x_1).
- 1115 [20] P. Cermelli, E. Fried, S. Sellers, Configurational stress, yield and flow in rate-
1116 independent plasticity, *Proc. R. Soc. Lond. A* 457 (2001) 1447–1467. doi:[10.1098/](https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0786)
1117 [rspa.2001.0786](https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0786).
- 1118 [21] M. E. Gurtin, E. Fried, L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*,
1119 Cambridge University Press, 2010. doi:[10.1017/CB09780511762956](https://doi.org/10.1017/CB09780511762956).
- 1120 [22] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover
1121 Publications Inc., Mineola - New York, 1983.
- 1122 [23] S. Federico, Some remarks on metric and deformation, *Mathematics and Mechanics of*
1123 *Solids* 20 (5) (2015) 522–539. doi:[10.1177/1081286513506432](https://doi.org/10.1177/1081286513506432).
- 1124 [24] P. Cermelli, E. Fried, M. E. Gurtin, Transport relations for surface integrals arising in
1125 the formulation of balance laws for evolving fluid interfaces, *Journal of Fluid Mechanics*
1126 544 (-1) (2005) 339. doi:[10.1017/s0022112005006695](https://doi.org/10.1017/s0022112005006695).
- 1127 [25] M. E. Gurtin, Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on
1128 a microforce balance, *Physica D* 92 (1994) 178–192. doi:[10.1016/0167-2789\(95\)](https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5)
1129 [00173-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5).
- 1130 [26] J. Bonet, R. D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*,
1131 Cambridge University Press, New York, 2008. doi:[10.1017/CB09780511755446](https://doi.org/10.1017/CB09780511755446).
- 1132 [27] K. Garikipati, E. Arruda, K. Grosh, H. Narayanan, S. Calve, A continuum treatment
1133 of growth in biological tissue: the coupling of mass transport and mechanics, *J. Mech.*
1134 *Phys. Solids* 52 (2004) 1595–1625. doi:[10.1016/j.jmps.2004.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2004.01.004).
- 1135 [28] D. Ambrosi, G. A. Ateshian, E. M. Arruda, et al., Perspectives on biological growth
1136 and remodeling, *J. Mech. Phys. Solids* 59(4) (2011) 863–883. doi:[10.1016/j.jmps.](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.12.011)
1137 [2010.12.011](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.12.011).
- 1138 [29] R. K. Jain, J. D. Martin, T. Stylianopoulos, The role of mechanical forces in tumor
1139 growth and therapy, *Annual Review of Biomedical Engineering* 16 (2014) 321–346.
1140 doi:[10.1146/annurev-bioeng-071813-105259](https://doi.org/10.1146/annurev-bioeng-071813-105259).
- 1141 [30] E. Kuhl, Growing matter: A review of growth in living systems, *Journal of the Me-*
1142 *chanical Behavior of Biomedical Materials* 29 (2014) 529–543. doi:[10.1016/j.jmbbm.](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.10.009)
1143 [2013.10.009](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.10.009).
- 1144 [31] A. Goriely, *The Mathematics and Mechanics of Biological Growth*, Springer New York,
1145 2016. doi:[10.1007/978-0-387-87710-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-87710-5).
- 1146 [32] V. Lubarda, A. Hoger, On the mechanics of solids with a growing mass, *International*
1147 *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (2002) 4627–4664. doi:[10.1016/](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00352-9)
1148 [S0020-7683\(02\)00352-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00352-9).

- 1149 [33] S. Di Stefano, A. Ramírez-Torres, R. Penta, A. Grillo, Self-influenced growth through
1150 evolving material inhomogeneities, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 106
1151 (2018) 174–187. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2018.08.003.
- 1152 [34] M. Mićunović, *Thermomechanics of Viscoplasticity*, Springer New York, 2009. doi:
1153 10.1007/978-0-387-89490-4.
- 1154 [35] S. Sadik, A. Yavari, On the origins of the idea of the multiplicative decomposition of
1155 the deformation gradient, *Mathematics and Mechanics of Solids* 22 (4) (2017) 771–772.
1156 doi:10.1177/1081286515612280.
- 1157 [36] M. A. J. Chaplain, L. Graziano, L. Preziosi, Mathematical modelling of the loss of tissue
1158 compression responsiveness and its role in solid tumour development, *Mathematical*
1159 *Medicine and Biology: A Journal of the IMA* 23 (3) (2006) 197–229. doi:10.1093/
1160 imammb/dql009.
- 1161 [37] P. Ciarletta, D. Ambrosi, G. Maugin, L. Preziosi, Mechano-transduction in tumour
1162 growth modelling, *Eur. Phys. J. E* 36 (2013) 23. doi:10.1140/epje/i2013-13023-2.
- 1163 [38] C. Givero, M. Scianna, A. Grillo, Growing avascular tumours as elasto-plastic bodies
1164 by the theory of evolving natural configurations, *Mech. Res. Commun.* 68 (2015) 31–39.
1165 doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.04.004.
- 1166 [39] P. Mascheroni, M. Carfagna, A. Grillo, D. Boso, B. Schrefler, An avascular tumor gro-
1167 wth model based on porous media mechanics and evolving natural states, *Mathematics*
1168 *and Mechanics of Solids* 23 (4) (2018) 686–712. doi:10.1177/1081286517711217.
- 1169 [40] A. Ramírez-Torres, S. Di Stefano, A. Grillo, Influence of non-local diffusion in avascular
1170 tumour growth, *Mathematics and Mechanics of Solids* 26 (9) (2021) 1264–1293. doi:
1171 10.1177/1081286520975086.
- 1172 [41] A. Grillo, R. Prohl, G. Wittum, A poroplastic model of structural reorganisation in
1173 porous media of biomechanical interest, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*
1174 28 (2016) 579–601. doi:10.1007/s00161-015-0465-y.
- 1175 [42] A. Grillo, R. Prohl, G. Wittum, A generalised algorithm for anelastic processes in
1176 elastoplasticity and biomechanics, *Mathematics and Mechanics of Solids* 22(3) (2017)
1177 502–527. doi:10.1177/1081286515598-661.
- 1178 [43] A. Grillo, M. Carfagna, S. Federico, An Allen–Cahn approach to the remodelling of
1179 fibre-reinforced anisotropic materials, *Journal of Engineering Mathematics* 109 (1)
1180 (2018) 139–172. doi:10.1007/s10665-017-9940-8.
- 1181 [44] K. A. Pericak-Spector, S. J. Spector, On the representation theorem for linear, isotropic
1182 tensor functions, *Journal of Elasticity* 39 (1995) 181–185.
- 1183 [45] A. Grillo, G. Wittum, Growth and mass transfer in multi-constituent biological
1184 materials, *AIP*, 2010. doi:10.1063/1.3498474.
- 1185 [46] S. Federico, Covariant formulation of the tensor algebra of non-linear elasticity, *Int. J.*
1186 *Nonlinear Mech.* 47 (2012) 273–284. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2011.06.007.
- 1187 [47] S. Federico, A. Grillo, Elasticity and permeability of porous fibre-reinforced materials
1188 under large deformations, *Mechanics of Materials* 44 (2012) 58–71. doi:10.1016/j.
1189 mechat.2011.07.010.
- 1190 [48] COMSOL Multiphysics® v. 5.3a. www.comsol.com. COMSOL AB, Stockholm, Sweden.
- 1191 [49] Comsol User’s Guide COMSOL Multiphysics® v. 5.3a. COMSOL AB, Stockholm,
1192 Sweden.
- 1193 [50] T. Stylianopoulos, J. D. Martin, M. Snuderl, F. Mpekris, S. R. Jain, R. K. Jain,
1194 Coevolution of solid stress and interstitial fluid pressure in tumors during progres-
1195 sion: Implications for vascular collapse, *Cancer Research* 73 (13) (2013) 3833–3841.
1196 doi:10.1158/0008-5472.can-12-4521.
- 1197 [51] S. M. Hassanizadeh, Derivation of basic equations of mass transport in porous media.
1198 part 1. macroscopic balance laws, *Adv. Water Resour.* 9 (1986) 196–206.

- 1199 [52] S. M. Hassanizadeh, Derivation of basic equations of mass transport in porous media.
1200 part 2. generalized Darcy's and Fick's laws, *Adv. Water Resour.* 9 (1986) 207–222.
1201 [doi:10.1016/0309-1708\(86\)90025-4](https://doi.org/10.1016/0309-1708(86)90025-4).
- 1202 [53] L. S. Bennethum, M. A. Murad, J. H. Cushman, Macroscale thermodynamics and the
1203 chemical potential for swelling porous media, *Transport in Porous Media* 39 (2) (2000)
1204 187–225. [doi:10.1023/a:1006661330427](https://doi.org/10.1023/a:1006661330427).