

POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Matematica**



Tesi di Laurea Magistrale

**Implementazione e confronto di due
diverse basi polinomiali nella costruzione
VEM in 2D e 3D**

Relatore

Chiar.mo Prof. Stefano BERRONE

Candidato

Gioana TEORA

Correlatore

Prof. Andrea BORIO

Anno Accademico 2020-2021

Sommario

Il lavoro di tesi svolto ha lo scopo di confrontare due possibili scelte per la base polinomiale sui poligoni utilizzata nella costruzione dei *Virtual Element Method* (*VEM*), introdotte al fine di migliorare la stabilità numerica del metodo rispetto alla classica scelta della base dei monomi scalati. Quest'ultima risulta essere efficiente da un punto di vista computazionale, ma influisce negativamente sul numero di condizionamento della matrice di stiffness in presenza di elementi caratterizzati da una forte anisotropia e per valori del grado polinomiale sufficientemente alti.

Entrambe le basi polinomiali analizzate sono ottenute a partire da quella monomiale. In particolare, la prima base analizzata dello spazio $\mathbb{P}_k(E)$ dei polinomi di ordine $\leq k$ sul generico elemento poliedrale E è definita come l'unione di

- una base $L^2(E)$ -ortonormale dello spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E)$ costruita a partire dalla diagonalizzazione della matrice di massa relativa alla base dei monomi dello stesso spazio;
- un insieme $L^2(E)$ -ortonormale di opportune funzioni ottenute rimuovendo dai monomi di ordine esattamente k le loro componenti nello spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E)$.

Tramite questa procedura, si ottiene inizialmente una base per lo spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E)$, la quale, nel seguito, viene estesa in modo da costruire una base per l'intero spazio $\mathbb{P}_k(E)$. Si noti che è necessaria l'introduzione di una base per entrambi gli spazi polinomiali ($\mathbb{P}_{k-1}(E)$ e $\mathbb{P}_k(E)$) per la costruzione dei proiettori locali coinvolti nella definizione della matrice di stiffness associata al problema di reazione-convezione-diffusione di cui si propone l'analisi.

La seconda base è ottenuta applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt modificato alla matrice di Vandermonde dei monomi. Tale metodo consente di ottenere una sequenza di basi ortonormali $\{\mathbf{p}^k\}_{k \geq 1}$ al variare del grado polinomiale k la quale risulta essere gerarchica, ovvero

$$\mathbf{p}^{k-1} \subset \mathbf{p}^k \quad \forall k \geq 1.$$

Entrambe le procedure sono state implementate all'interno di un codice VEM preesistente, ridefinendo i metodi che si occupano della costruzione dei proiettori locali

sia nel caso $2D$ che nel caso $3D$. Poiché i metodi agli elementi virtuali richiedono un costo superiore rispetto quelli agli elementi finiti (FEM), a causa dell'assemblaggio di tali proiettori locali, il codice utilizzato usa un approccio totalmente basato sulle matrici al fine di migliorare l'efficienza computazionale.

Gli esperimenti numerici hanno dimostrato che l'introduzione di una base ortonormale rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ e, in particolare, la ridefinizione dei gradi di libertà in funzione di quest'ultima, permette di limitare il numero di condizionamento della matrice di stiffness, migliorando la stabilità numerica del metodo.

Indice

Elenco delle tabelle	VI
Elenco delle figure	VIII
1 Introduzione	1
2 Il problema di reazione-convezione-diffusione	3
3 Discretizzazione del problema in $2D$	5
3.1 Spazio degli elementi virtuali V_h	5
3.1.1 Gradi di libertà locali	6
3.2 Operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^\nabla$	10
3.3 Spazio VEM modificato W_h e operatore di proiezione $\Pi_{k,E}^0$	14
3.3.1 Costruzione dello spazio W_h	15
3.3.2 Definizione dell'operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^0$	17
3.3.3 Forma bilineare discreta $B_h(\cdot, \cdot)$	19
3.3.4 Termine di stabilità $S^E(\cdot, \cdot)$	21
4 Stima dell'errore	24
5 Implementazione in $2D$	35
5.1 Calcolo di $\Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i$	37
5.2 Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i$	40
5.3 Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i$	41
5.4 Matrice di rigidità locale	42
5.4.1 Matrice di diffusione	43
5.4.2 Matrice di convezione	44
5.4.3 Matrice di reazione	45
5.4.4 Termine forzante	46

6	La scelta della base polinomiale	47
6.1	Base <i>Eig</i>	48
6.1.1	Costruzione della matrice di cambio base relativa alla base <i>Eig</i>	49
6.2	Base <i>MGSReortho</i>	51
6.2.1	Costruzione della matrice di cambio base relativa alla base <i>MGSReortho</i>	52
6.3	L'importanza di ri-ortogonalizzare	53
6.3.1	Costruzione della matrice di cambio base relativa alla base <i>EigReortho</i>	54
6.4	Implementazione VEM relativa alle nuove basi polinomiali introdotte	56
6.4.1	Ridefinizione dei gradi di libertà interni	59
6.5	Esperimento numerico	62
7	Discretizzazione in 3D	71
7.1	Implementazione VEM in 3D	72
7.2	Calcolo di $\Pi_{E,k}^{\nabla} \varphi_i$	74
7.3	Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i$	77
7.4	Matrice di stiffness	78
7.5	Esperimento numerico	79
8	Conclusioni	85

Elenco delle tabelle

6.1	Diversi approcci utilizzati nella costruzione VEM in $2D$, a seconda della base polinomiale \mathbf{q} utilizzata.	48
6.2	Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).	65
6.3	Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).	66
6.4	Aspect ratio massimo delle mesh mostrate in Figura 6.3.	66
6.5	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).	66
6.6	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).	67
6.7	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(b).	68
6.8	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite dopo la ridefinizione dei gradi di libertà interni, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(b).	69
6.9	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(c).	70
6.10	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà interni, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(c).	70

7.1	Diversi approcci utilizzati nella costruzione VEM in $3D$, a seconda della base polinomiale \mathbf{q} utilizzata.	82
7.2	Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k , relativamente all'approccio ibrido. .	83
7.3	Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k , per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà relativi ai momenti.	83
7.4	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo l'approccio ibrido.	83
7.5	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà relativi ai momenti.	84

Elenco delle figure

3.1	Figura 3.1(a) mostra la denominazione dei vertici e dei lati del poligono $E \in \mathcal{T}_h$. La Figura 3.1(b) mostra un poligono $E \in \mathcal{T}_h$ caratterizzato dalla presenza di hanging node. Tali immagini sono state reperite in [7].	9
6.1	Errore di ortogonalizzazione della matrice \mathbf{PH}^{k-1} relativa alla base <i>MGS</i> e alla base <i>MGSReortho</i> in funzione dell'aspect ratio degli elementi che costituiscono la mesh mostrata in Figura 6.3(a) per diversi valori del grado polinomiale k	54
6.2	Errore di ortogonalizzazione della matrice \mathbf{PH}^{k-1} relativo alle basi <i>Eig</i> e <i>EigReortho</i> , in funzione dell'aspect ratio degli elementi che costituiscono la mesh mostrata in Figura 6.3(a), per diversi valori del grado polinomiale k	56
6.3	Tre mesh utilizzate per la discretizzazione del dominio Ω : 6.3(a) costituita da esagoni distorti, 6.3(b) caratterizzata dalla presenza di hanging node e 6.3(c) costituita da rettangoli.	63
6.4	Matrice di stiffness globale \mathbf{K} se i proiettori sono definiti in funzione della base dei monomi scalati (6.4(a)), in funzione della base <i>Eig</i> (6.4(b)) e se vengono ridefiniti i gradi di libertà interni in funzione della base <i>Eig</i> (6.4(c)), relativamente alla mesh esagonale (Figura 6.3(a)) e al grado polinomiale $k = 2$	64
6.5	Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale relativa alla mesh mostrata in Figura 6.3(a) al variare del grado polinomiale k , per le diverse basi presentate, prima (Approccio ibrido 6.5(a)) e dopo (6.5(b)) la ridefinizione dei gradi di libertà interni.	65
6.6	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k per le diverse basi create prima (approccio ibrido) e dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).	67

6.7	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k per le diverse basi create prima (approccio ibrido) e dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(b).	68
6.8	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k per le diverse basi create prima (approccio ibrido) e dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(c).	69
7.1	Mesh tetraedrica utilizzata per la decomposizione del dominio $\Omega = (0,1)^3$	80
7.2	Matrice di stiffness globale \mathbf{K} relativa al grado polinomiale $k = 2$ nel caso in cui i proiettori sono definiti in funzione della base dei monomi scalati (7.2(a)), in funzione della base <i>Eig</i> , sia nel caso si segua un approccio ibrido (7.2(b)), sia se si provvede a ridefinire il tutto in funzione della nuova base (7.2(c)).	80
7.3	Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k , per l'approccio ibrido (7.3(a)) e in funzione della nuova base polinomiale (7.3(b)).	81
7.4	Andamento dell'errore $\ \nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\ _{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k , per l'approccio ibrido e in funzione della nuova base polinomiale.	81

Capitolo 1

Introduzione

I Virtual Element Method (VEM) sono dei metodi numerici che si propongono come generalizzazione dei metodi agli elementi finiti (FEM). Infatti, lo spazio degli elementi virtuali è dato dallo spazio degli elementi finiti con l'aggiunta di opportune funzioni non polinomiali. Poiché è difficile trattare con tali funzioni, la costruzione dei VEM è stata effettuata in modo che, al fine di calcolare le entrate della matrice di stiffness associata al problema, sia necessario conoscere soltanto il valore di queste funzioni non polinomiali rispetto a un insieme di gradi di libertà opportunamente scelto. Tale insieme, difatti, consente di calcolare in modo esatto (nei limiti della precisione di macchina) le entrate della matrice di stiffness, qualora almeno un'entrata della rispettiva forma bilineare sia un polinomio di ordine $\leq k$ e di ottenere risultati stabili con il giusto ordine di grandezza nel caso in cui entrambe le entrate risultino essere funzioni non polinomiali. Si noti che, con tale costruzioni, i metodi agli elementi virtuali hanno grado di accuratezza k , ovvero restituiscono la soluzione esatta ogni qual volta essa risulta essere un polinomio di grado $\leq k$ ([1]).

Come si evince da [2], l'errore derivante dal processo di discretizzazione utilizzato nei VEM comincia a crescere quando il grado di accuratezza k diventa sufficientemente elevato o in presenza di poligoni che non soddisfano opportune ipotesi di regolarità (quali perdita della proprietà di star-shaped, forte anisotropia,...). Tale crescita è dovuta, in parte, al mal condizionamento della matrice di stiffness associata al problema. In particolare, la scelta della base VEM ha un ruolo importante nella determinazione del numero di condizionamento della matrice di rigidità.

Lo scopo di tale lavoro è quello di analizzare due basi polinomiali alternative, introdotte in [3] e [4] al fine di migliorare la stabilità numerica del metodo rispetto l'usuale scelta dei monomi scalati.

Nel Capitolo 2 verrà presentato il framework all'interno del quale si svolge la

trattazione. In particolare, verrà analizzato il problema di reazione-convezione-diffusione. Nel Capitolo 3, verrà mostrata la procedura di discretizzazione VEM di tale problema, con la relativa analisi delle stime di errore (Capitolo 4 [5]). Nel Capitolo 5, verrà mostrato come effettuare una semplice implementazione nel caso 2-dimensionale dei metodi agli elementi virtuali relativamente alla base monomiale, seguendo una procedura illustrata in [6]. Poiché i metodi agli elementi virtuali richiedono un costo superiore rispetto quelli agli elementi finiti a causa dell'assemblaggio dei proiettori locali sullo spazio dei polinomi coinvolti nella definizione della forma bilineare discreta associata al problema, tale procedura sfrutta un approccio totalmente basato sulle matrici al fine di migliorare l'efficienza computazionale del metodo.

Nel Capitolo 6, verranno presentate le basi polinomiali alternative e verrà mostrato come introdurre all'interno del codice VEM presentato nel Capitolo 5, ridefinendo i metodi che si occupano della costruzione dei proiettori locali ([3]). Inoltre, verrà mostrato come la scelta di una base polinomiale influisca sul numero di condizionamento della matrice di stiffness e sull'errore numerico, attraverso un semplice esperimento che consiste nella discretizzazione di un problema di Poisson con condizioni di Dirichlet al bordo omogenee.

Infine, nel Capitolo 7 viene effettuata l'analisi e l'esperimento, precedentemente condotti nel caso bidimensionale, nel caso $3D$.

Capitolo 2

Il problema di reazione-convezione-diffusione

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio poligonale convesso limitato in d dimensioni. Date le funzioni $\theta, \gamma \in L^\infty(\Omega)$ con $\theta(\mathbf{x}) \geq \theta_0 > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ e $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vettore di funzioni in $L^\infty(\Omega)$, con $\nabla \cdot \mathbf{b} \in L^2(\Omega)$.

Nel seguito, $|\cdot|_{1,\Omega}$ indicherà la seminorma in $H^1(\Omega)$, la quale è una norma in $H_0^1(\Omega)$ sotto le assunzioni fatte per Ω , e $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ indicherà il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\theta(\mathbf{x})\nabla u) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + \gamma(\mathbf{x})u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}, \quad (\text{P})$$

dove $\partial\Omega$ indica il bordo del dominio Ω .

Supponiamo $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, dove $H^{-1}(\Omega)$ è il duale di $H_0^1(\Omega)$, e che valgano i seguenti risultati di regolarità ellittica

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C\|f\|_{-1,\Omega}, \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega},$$

con C costante indipendente da f . La sua formulazione variazionale è data da

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ tale che} \\ B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \end{cases}, \quad (\text{PV})$$

dove

- $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare, continua, ovvero

$$\exists M > 0 \text{ t.c. } B(u, v) \leq M|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.1)$$

e debolmente coercitiva, i.e. $\exists C_B > 0$ indipendente da u tale che

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{B(u, v)}{\|v\|_{1, \Omega}} \geq C_B \|u\|_{1, \Omega}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

definita come

$$B(u, v) = a(u, v) + b(u, v) + c(u, v), \quad (2.3)$$

con

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \theta \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}, & b(u, v) &= \int_{\Omega} u (\mathbf{b} \cdot \nabla v) d\mathbf{x}, \\ c(u, v) &= \int_{\Omega} \gamma u v d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

- $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ operatore lineare continuo definito come $F(v) = (f, v)_{0, \Omega}$.

Allora per il Teorema di Babuška-Lax-Milgram esiste unica soluzione del problema (PV) ed essa dipende con continuità dai dati iniziali.

Capitolo 3

Discretizzazione del problema in $2D$

Si supponga $d = 2$. Sia $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una successione di decomposizioni del dominio Ω in poligoni E non sovrapposti e non necessariamente convessi, tale che $\Omega = \cup_{E \in \mathcal{T}_h} E$ e sia \mathcal{E}_h l'insieme dei lati e di \mathcal{T}_h . Generalmente h rappresenta il massimo tra i diametri degli elementi E di \mathcal{T}_h , i.e.

$$h = \max_{E \in \mathcal{T}_h} h_E,$$

con $h_E = \text{diam}(E)$, dove il diametro di un elemento si definisce come $\text{diam}(E) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$.

Si suppongano valide le seguenti ipotesi:

A0.1. Per ogni h , la partizione \mathcal{T}_h è costituita da un numero finito di poligoni semplici, i.e. insiemi aperti, semplicemente connessi, il cui bordo è costituito da una linea continua, priva di intersezioni, costituita da un numero finito di segmenti.

A0.2. Per ogni h , $\exists \rho > 0$ tale che ogni elemento $E \in \mathcal{T}_h$ è un dominio star-shaped rispetto a una palla di raggio $\geq \rho h_E$.

3.1 Spazio degli elementi virtuali V_h

Si consideri un poligono semplice $E \in \mathcal{T}_h$ con $N^{V,E}$ vertici e $N^{E,E}$ lati e ($n = N^{V,E} = N^{E,E}$) e siano \mathbf{x}_E le coordinate del suo baricentro, h_E il suo diametro e $|E|$ la sua misura.

Si definisca, per ogni $k \geq 1$, l'insieme

$$\mathbb{B}_k = (\partial E) = \{v \in C^0(\partial E) : v|_e \in \mathbb{P}_k(e) \ \forall e \subset \partial E\}.$$

Si verifica che $\mathbb{B}_k(\partial E)$ è uno spazio lineare di dimensione $n + n(k-1) = nk$. Infatti, una funzione continua su ∂E , la quale è un polinomio di grado $\leq k$ su ogni lato, è unicamente determinata assegnati i suoi valori ai vertici (n condizioni) più, per $k > 1$, i suoi valori in ulteriori $k-1$ punti su ogni lato, per un totale di $n(k-1)$ condizioni aggiuntive.

Definiamo, inoltre, per ogni $k \geq 1$ lo spazio finito-dimensionale $V_k(E)$ come

$$V_k(E) = \left\{ v \in H^1(E) : v|_{\partial E} \in \mathbb{B}_k(\partial E), \Delta v|_E \in \mathbb{P}_{k-2}(E) \right\}, \quad (3.1)$$

dove $\mathbb{P}_{-1}(E) = \{0\}$.

Notiamo che un polinomio di grado $\leq k$ soddisfa tutte le proprietà che caratterizzano gli elementi di $V_k(E)$, pertanto $\mathbb{P}_K(E) \subset V_k(E)$.

Osserviamo che, dato un polinomio $q_{k-2} \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$ e data una funzione $g \in \mathbb{B}_k(E)$, esiste un'unica funzione $u \in H^1(E)$ tale che $\Delta u = q_{k-2}$ in E e $u = g$ su ∂E . Quindi, la dimensione dello spazio $V_k(E)$ è data da

$$N_E^{\text{dof}} = \dim V_k(E) = nk + \dim \mathbb{P}_{k-2}(E) = nk + \frac{k(k-1)}{2}. \quad (3.2)$$

3.1.1 Gradi di libertà locali

Una funzione $v \in V_k(E)$ può essere identificata in modo univoco da un insieme di funzioni $\text{dof}_i : V_k(E) \rightarrow \mathbb{R}$ indipendenti tra di loro. La scelta più naturale è quella di considerare $\text{dof}_i(v)$ lineari rispetto a v .

Definiamo $\text{dof} : V_k(E) \rightarrow \mathbb{R}^{N_E^{\text{dof}}}$ tale che $v \mapsto \text{dof}(v) = \left(\text{dof}_1(v), \dots, \text{dof}_{N_E^{\text{dof}}}(v) \right)$ la quale è un'applicazione lineare tra spazi di uguale dimensione. Quindi un sistema del tipo $\text{dof}(v) = b$ ammette un'unica soluzione se e solo se l'operatore dof è invertibile o, equivalentemente, iniettivo, ovvero $\text{dof}(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Se ciò si verifica, l'insieme delle forme lineari $(\text{dof}_i)_{i=1}^{N_E^{\text{dof}}}$ è detto *unisolvante* per $V_k(E)$. Ciascuna forma dof_i è detta *grado di libertà* per $V_k(E)$.

In $V_k(E)$ possiamo scegliere i seguenti gradi di libertà:

- $\mathcal{V}^{E,k}$: i valori di v_h nei vertici del poligono (n valori);
- $\mathcal{E}^{E,k}$: per $k > 1$ i valori di v_h in $k-1$ nodi interni di Gauss-Lobatto su ogni lato e ($n(k-1)$ valori);
- $\mathcal{P}^{E,k}$: per $k > 1$, i momenti $\frac{1}{|E|} \int_E m_\alpha(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \forall m_\alpha \in \mathcal{M}_{k-2}(E)$, dove $\mathcal{M}_{k-2}(E)$ è l'insieme dei $k(k-1)/2$ *scaled monomial*

$$\mathcal{M}_{k-2}(E) = \left\{ m_\alpha(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_E}{h_E} \right)^\alpha, \text{ con } \alpha \text{ multi-indice } \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq k-2 \right\}.$$

Notiamo che l'insieme $\mathcal{M}_{k-2}(E)$ rappresenta una base per $\mathbb{P}_{k-2}(E)$.

Nota 3.1 ([7]). Consideriamo un dominio \hat{D} , dato un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, definiamo la funzione $\hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\hat{D}}}{h_{\hat{D}}}\right)^\alpha$. Consideriamo adesso il cambiamento di variabili $\mathbf{x} = h\hat{\mathbf{x}}$ con $h \neq 1$ da \hat{D} a D , mappando la funzione $\hat{\psi}$ in ψ definita come $\psi(\mathbf{x}) = \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\psi}(\mathbf{x}/h)$. Allora $h_D = hh_{\hat{D}}$ e $\psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_D}{h_D}\right)^\alpha$ e ciò spiega l'utilizzo del termine *scaled monomial* per definire gli elementi di $\mathcal{M}_k(D)$. Assumiamo adesso che data $\hat{\psi}$ e dato α si ha

$$\frac{1}{|\hat{D}|} \int_{\hat{D}} \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\frac{\hat{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\hat{D}}}{h_{\hat{D}}}\right)^\alpha d\hat{\mathbf{x}} = 1.$$

Allora si verifica facilmente, adoperando il cambiamento di variabili definito in precedenza, che

$$\frac{1}{|D|} \int_D \psi(\mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_D}{h_D}\right)^\alpha d\mathbf{x} = 1.$$

Noi ci riferiremo a tale proprietà dicendo che il grado di libertà

$$\psi \mapsto \frac{1}{|D|} \int_D \psi(\mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_D}{h_D}\right)^\alpha d\mathbf{x}$$

scala come 1. In realtà tutti i gradi di libertà definiti scalano come 1.

Notiamo che i gradi di libertà di $\mathcal{V}^{E,k}$ e $\mathcal{E}^{E,k}$, i quali vengono definiti *boundary degree of freedom*, sono sufficienti per determinare unicamente un polinomio di grado $\leq k$ su ogni lato di E , ovvero per determinare v_h su ∂E . Definire i gradi di libertà $\mathcal{P}^{E,k}$, denominati *internal degree of freedom*, risulta essere invece equivalente a descrivere $\Pi_{0,k-2}^E(v_h)$ in E , dove $\Pi_{0,k-2}^E$ è l'operatore di proiezione rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ sullo spazio $\mathbb{P}_{k-2}(E)$.

Osserviamo che l'insieme delle funzioni trial e delle funzioni test è costituito, su ogni elemento, da polinomi di grado $\leq k$, più eventualmente altre funzioni non polinomiali. Come vedremo i gradi di libertà sono stati scelti in modo tale da garantire che la matrice locale di stiffness possa essere calcolata in modo esatto (a meno della precisione di macchina), qualora almeno una delle entrate della relativa forma bilineare sia rappresentata da un polinomio di grado $\leq k$, e produrre soltanto un'approssimazione con il giusto ordine di grandezza e stabile, qualora entrambe le entrate non risultano essere dei polinomi.

Tali proprietà garantiscono che l'ordine di accuratezza del metodo sia k , in quanto esse implicano che il metodo permette di ottenere la soluzione esatta (supponendo di lavorare in aritmetica infinita) ogni qual volta essa è un polinomio di grado $\leq k$.

Proposizione 3.1 ([1]). *Sia E un poligono semplice con n lati e sia $V_k(E)$ lo spazio definito in (3.1). L'insieme costituito dai gradi di libertà $\mathcal{V}^{E,k}$, $\mathcal{E}^{E,k}$ e $\mathcal{P}^{E,k}$ è unisolvante per $V_k(E)$.*

Dimostrazione. Per dimostrare che l'insieme dei gradi di libertà locali costituito da $\mathcal{V}^{E,k}$, $\mathcal{E}^{E,k}$ e $\mathcal{P}^{E,k}$ è unisolvante bisogna dimostrare che $\text{dof}(v_h) = 0 \Rightarrow v_h = 0$. Ponendo $\text{dof}(v_h) = 0$, si ottiene

$$v_h = 0 \quad \text{su } \partial E$$

$$\Pi_{0,k-2}^E v_h = 0 \quad \text{in } E$$

Quindi per provare che $v_h = 0$, basta dimostrare che essa è nulla in tutto E . Per farlo, si consideri il problema ausiliario: dato $q \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$

$$\begin{cases} \text{trovare } w \in H_0^1(E) \text{ tale che} \\ a^E(w, v) = (q, v)_{0,E} \quad \forall v \in H_0^1(E) \end{cases} \quad (\text{P1})$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} -\Delta w = q & \text{in } E \\ w = 0 & \text{su } \partial E \end{cases} \quad \text{o, altrimenti,} \quad w = -\Delta_{0,E}^{-1}(q) \quad (\text{P2})$$

poiché la soluzione di tale problema, per il Lemma di Lax-Milgram, esiste ed è unica.

Si consideri, ora, $R : \mathbb{P}_{k-2}(E) \rightarrow \mathbb{P}_{k-2}(E)$, la quale mappa $q \mapsto R(q) = \Pi_{0,k-2}^E(-\Delta_{0,E}^{-1}(q)) = \Pi_{0,k-2}^E(w)$. Innanzitutto, R è ben definita poiché dato q il problema ammetta un'unica soluzione, e, quindi, esiste un'unica proiezione. Inoltre, R è un isomorfismo, i.e. una mappa biunivoca. Infatti,

$$(R(q), q)_{0,E} = (\Pi_{0,k-2}^E w, q)_{0,E} = (w, q)_{0,E} = a^E(w, w),$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che $q \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$ e per la definizione di $\Pi_{0,k-2}^E$. Allora

$$R(q) = 0 \iff a^E(w, w) = 0 \iff w = 0,$$

ma $a^E(\cdot, \cdot)$ forma bilineare e coerciva, allora

$$R(q) = 0 \iff q = 0$$

L'ultima doppia implicazione segue per il fatto che $w = 0$ è soluzione di (P2) per $q = 0$ e la soluzione è unica (\Leftarrow). L'altro verso dell'implicazione è ovvia poiché il laplaciano della funzione nulla è nullo.

Ciò dimostra che R iniettiva e, quindi, è un isomorfismo. Allora, poiché $v_h = 0$ su $\partial E \Rightarrow v_h \in H_0^1(E)$. Inoltre, $-\Delta v_h \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$, allora

$$\Pi_{0,k-2}^E v_h = \Pi_{0,k-2}^E (-\Delta_{0,E}^{-1} (-\Delta v_h)) = R(-\Delta v_h)$$

Quindi $\Pi_{0,k-2}^E v_h = 0 \Rightarrow R(-\Delta v_h) = 0 \Rightarrow -\Delta v_h = 0 \Rightarrow v_h = 0$. Ciò dimostra che l'insieme è unisolvente. \square

Dati tali gradi di libertà, si definisce la base lagrangiana $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_E^{\text{dof}}} \subset V_k(E)$ tale che

$$\text{dof}_i(\varphi_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, N_E^{\text{dof}} \quad \text{e} \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_i(v_h) \varphi_i \quad \forall v_h \in V_k(E). \quad (3.3)$$

Per ogni poligono $E \in \mathcal{T}_h$, si denoti con V_i , per $i = 1, \dots, n$ l'insieme dei suoi vertici ordinati in senso antiorario e con e_i il lato che connette il vertice V_i a V_{i+1} come mostrato in Figura 3.1(a).

Si noti che è consentito avere 2 lati consecutivi che formano un angolo di 180° . Il nodo in comune prende il nome di *hanging node*. Un esempio è mostrato in Figura 3.1(b).

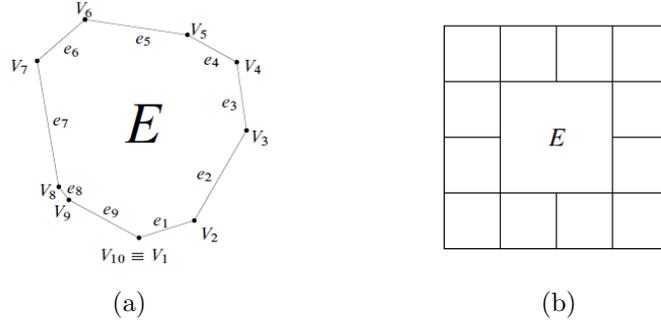


Figura 3.1: Figura 3.1(a) mostra la denominazione dei vertici e dei lati del poligono $E \in \mathcal{T}_h$. La Figura 3.1(b) mostra un poligono $E \in \mathcal{T}_h$ caratterizzato dalla presenza di hanging node. Tali immagini sono state reperite in [7].

Per ogni decomposizione \mathcal{T}_h di Ω e per ogni $k \geq 1$, si introduce lo spazio VEM

$$V_h = \{v \in V \cap C^0(\bar{\Omega}) : v|_{\partial E} \in \mathbb{B}_k(\partial E) \quad \text{e} \quad \Delta v|_E \in \mathbb{P}_{k-2}(E) \quad \forall E \in \mathcal{T}_h\}$$

Poiché il problema (P) è definito da condizioni al bordo di Dirichlet omogenee, la dimensione dello spazio V_h è data da:

$$N^{\text{dof}} = \dim V_h = N^V + N^E (k - 1) + N^{\mathbf{P}} \frac{k(k-1)}{2},$$

dove N^V , N^E e $N^{\mathbf{P}}$ sono rispettivamente il numero totale di vertici interni, lati interni e dei poligoni in \mathcal{T}_h .

Coerentemente con la scelta locale dei gradi di libertà, in V_h si definiscono i seguenti gradi di libertà:

- \mathcal{V}^k : i valori di v_h nei vertici dei lati interni al dominio Ω ;
- \mathcal{E}^k : per $k > 1$, i valori di v_h in $k - 1$ nodi interni di Gauss-Lobatto su ciascun lato interno a Ω ;
- \mathcal{P}^k : per $k > 1$, i momenti $\frac{1}{|E|} \int_E m(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall m \in \mathcal{M}_{k-2}(E)$ in ogni elemento E .

Come fatto in precedenza, anche in questo caso, è possibile verificare che la dimensione N^{dof} di V_h è uguale alla somma dei gradi di libertà costituiti da \mathcal{V}^k , \mathcal{E}^k e \mathcal{P}^k e che l'insieme dei gradi di libertà risulta essere unisolvente per V_h .

3.2 Operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^{\nabla}$

Si consideri l'operatore di proiezione rispetto al prodotto scalare in $H_0^1(E)$

$$\Pi_{E,k}^{\nabla} : V_k(E) \rightarrow P_k(E)$$

il quale è definito tramite la seguente condizione di ortogonalità

$$(\nabla p_k, \nabla (\Pi_{E,k}^{\nabla} v_h - v_h))_{0,E} = 0 \quad \forall p_k \in \mathbb{P}_k(E), v_h \in V_k(E). \quad (3.4)$$

Si verifica facilmente che la condizione (3.4) definisce $\Pi_{E,k}^{\nabla} v_h$ a meno di una costante. Per fissare tale costante, è possibile utilizzare l'operatore di proiezione rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ $P_0 : V_k(E) \rightarrow \mathbb{P}_0(E)$, richiedendo che

$$P_0 (\Pi_{E,k}^{\nabla} v_h - v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_k(E). \quad (3.5)$$

Per motivi che saranno chiari in seguito, come fatto in [8], l'operatore P_0 viene definito come

$$P_0(v_h) = \int_{\partial E} v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{se } k = 1 \quad (3.6a)$$

$$P_0(v_h) = \int_E v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{per } k \geq 2 \quad (3.6b)$$

Quindi, se l'equazione (3.4) stabilisce che $\Pi_{E,k}^\nabla(v_h)$ e v_h hanno lo stesso gradiente, l'equazione (3.5) si occupa della parte costante.

Si consideri la seguente corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e i multi-indici in \mathbb{N}^2

$$\alpha \leftrightarrow \alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$$

tale che

$$\alpha = 1 + \alpha_y + \frac{(\alpha_x + \alpha_y)(\alpha_x + \alpha_y + 1)}{2}, \quad (3.7)$$

Quindi, ad esempio,

$$1 \leftrightarrow (0,0), \quad 2 \leftrightarrow (1,0), \quad 3 \leftrightarrow (0,1), \quad 4 \leftrightarrow (2,0), \quad 5 \leftrightarrow (1,1), \quad 6 \leftrightarrow (0,2) \dots$$

Si osservi che è possibile calcolare $\Pi_{E,k}^\nabla v_h$, dato $v_h \in V_k(E)$ usando soltanto i gradi di libertà locali. Infatti, poiché $\mathcal{M}_k(E)$ è una base dello spazio $\mathbb{P}_k(E)$, l'equazione (3.4) è verificata se e solo se

$$(\nabla m_\alpha, \nabla (\Pi_{E,k}^\nabla v_h - v_h))_{0,E} = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, n_k,$$

dove $n_k = \dim \mathbb{P}_k(E)$, con la convenzione che $n_{-1} = 0$. Inoltre, $\Pi_{E,k}^\nabla v_h \in \mathbb{P}_k(E)$, pertanto è possibile scriverlo come combinazione lineare di elementi di $\mathcal{M}_k(E)$, ovvero come

$$\Pi_{E,k}^\nabla v_h = \sum_{\beta=1}^{n_k} s_\beta^* m_\beta \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \sum_{\beta=1}^{n_k} s_\beta^* (\nabla m_\alpha, \nabla m_\beta)_{0,E} = (\nabla m_\alpha, \nabla v_h)_{0,E} \quad \forall \alpha = 1, \dots, n_k. \quad (3.9)$$

Nota 3.2. Se nell'equazione (3.4) l'uso degli scaled monomial è essenziale per poter sfruttare i gradi di libertà interni $\mathcal{P}^{k,E}$ nel calcolo dei coefficienti s_β dell'operatore $\Pi_{E,k}^\nabla$, nell'equazione (3.8) si sarebbe potuto utilizzare una generica base dello spazio $\mathbb{P}_k(E)$.

L'indeterminatezza si riflette in questo caso per il fatto che per $\alpha = 1$, cui corrisponde $m_1 = 1$, l'equazione (3.9) diventa $0 = 0$. La condizione (3.4) aggiunge un'equazione lineare, i.e.

$$\sum_{\beta=1}^{n_k} s_\beta^* P_0(m_\beta) = P_0(v_h) \quad (3.10)$$

che elimina tale indeterminazione.

Dalle equazioni (3.9) e (3.10) otteniamo il seguente sistema lineare

$$\mathbf{G}\mathbf{s}^* = \mathbf{b},$$

dove

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} P_0(m_1) & P_0(m_2) & \cdots & P_0(m_{n_k}) \\ 0 & (\nabla m_2, \nabla m_2)_{0,E} & \cdots & (\nabla m_2, \nabla m_{n_k})_{0,E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (\nabla m_{n_k}, \nabla m_2)_{0,E} & \cdots & (\nabla m_{n_k}, \nabla m_{n_k})_{0,E} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{s}^* = \begin{bmatrix} s_1^* \\ s_2^* \\ \vdots \\ s_{n_k}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} P_0(v_h) \\ (\nabla m_2, \nabla v_h)_{0,E} \\ \vdots \\ (\nabla m_{n_k}, \nabla v_h)_{0,E} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}.$$

Gli elementi della matrice \mathbf{G} si possono calcolare facilmente in quanto si assume di saper calcolare gli integrali dei polinomi su E . Il termine $P_0(v_h)$ si può calcolare grazie alla scelta dei gradi di libertà. Inoltre, per le formule di integrazione di Green, i termini $(\nabla m_\alpha, \nabla v_h)_{0,E}$, $\forall \alpha = 1, \dots, n_k$ si possono riscrivere come

$$\begin{aligned} (\nabla m_\alpha, \nabla v_h)_{0,E} &= \int_E \nabla m_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= - \int_E \Delta m_\alpha(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial E} \frac{\partial m_\alpha}{\partial n}(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Poiché $\Delta m_\alpha \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$, il primo termine si può calcolare grazie ai gradi di libertà interni. Infatti, riscritto Δm_α come

$$\Delta m_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n_k-2} d_\beta^\alpha m_\beta,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} - \int_E \Delta m_\alpha(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= - \sum_{\beta=1}^{n_k-2} d_\beta^\alpha \int_E m_\beta(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -|E| \sum_{\beta=1}^{n_k-2} d_\beta^\alpha \left(\frac{1}{|E|} \int_E m_\beta(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda, invece, il secondo integrale, l'integranda è un polinomio di grado $(k-1) + k = 2k-1$ e con la scelta dei nodi di Gauss-Lobatto su ogni lato è possibile integrare perfettamente anche il secondo membro. Ricordiamo che la formule chiuse di quadratura di Gauss-Lobatto permettono di integrare in modo esatto polinomi di grado $\leq 2k-1$ con $k-1$ nodi interni più i due vertici del lato.

Si noti come la proprietà $\Delta v|_E \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$ delle funzioni in $V_k(E)$ non è stata mai utilizzata. Infatti, una delle ragioni principali per l'introduzione di tale ipotesi è quella di fissare la dimensione dello spazio $V_k(E)$.

In particolare, usando la definizione di base lagrangiana data in (3.3), v_h si scrive come $v_h = \sum_{i=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_i(v_h) \varphi_i$. Allora, è sufficiente ricavare la matrice dei coefficienti $\mathbf{S}^* \in \mathbb{R}^{n_k \times N_E^{\text{dof}}}$, le cui colonne sono soluzione del sistema

$$\mathbf{GS}^*(:, i) = \mathbf{B}(:, i) \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}, \quad (3.12)$$

dove, in particolare, la i -esima colonna della matrice \mathbf{B} è data da

$$\mathbf{B}(:, i) = \begin{bmatrix} P_0(\varphi_i) \\ (\nabla m_2, \nabla \varphi_i)_{0,E} \\ \vdots \\ (\nabla m_{n_k}, \nabla \varphi_i)_{0,E} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}. \quad (3.13)$$

Poiché $\mathbb{P}_k(E) \subset V_k(E)$,

$$\Pi_{E,k}^{\nabla}(\varphi_i) = \sum_{\alpha=1}^{n_k} \mathbf{S}_{\alpha,i}^* m_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n_k} (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B})_{\alpha i} \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_j(m_\alpha) \varphi_j.$$

Pertanto, definita la matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_E^{\text{dof}} \times n_k}$ tale che

$$\mathbf{D}_{j\alpha} = \text{dof}_j(m_\alpha), \quad (3.14)$$

$$\Pi_{E,k}^{\nabla}(\varphi_i) = \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \left(\sum_{\alpha=1}^{n_k} \mathbf{D}_{j\alpha} (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B})_{\alpha i} \right) \varphi_j = \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} (\mathbf{DG}^{-1}\mathbf{B})_{ji} \varphi_j.$$

Quindi, i coefficienti dell'operatore di proiezione rispetto la base dei monomi di $\mathbb{P}_k(E)$ sono dati da $\mathbf{S}^* = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}$, invece, quelli rispetto la base dello spazio VEM sono dati da $\mathbf{S} = \mathbf{DG}^{-1}\mathbf{B}$ e vale $\mathbf{S} = \mathbf{DS}^*$.

Proposizione 3.2 ([7]). *La matrice \mathbf{G} si può scrivere come $\mathbf{G} = \mathbf{BD}$.*

Dimostrazione. Per $\alpha = 1$ si verifica che

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{BD})_{1\beta} &= \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \mathbf{B}_{1j} \mathbf{D}_{j\beta} \\
 &= \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} P_0(\varphi_j) \text{dof}_j(m_\beta) \leftarrow \text{linearità di } P_0 \\
 &= P_0 \left(\sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_j(m_\beta) \varphi_j \right) \\
 &= P_0(m_\beta) = \mathbf{G}_{1\beta} \quad \forall \beta = 1, \dots, n_k.
 \end{aligned}$$

Per $\alpha \geq 2$, invece,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{BD})_{\alpha\beta} &= \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \mathbf{B}_{\alpha j} \mathbf{D}_{j\beta} \\
 &= \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} (\nabla m_\alpha, \nabla \varphi_j)_{0,E} \text{dof}_j(m_\beta) \leftarrow \text{bilinearità di } (\cdot, \cdot)_{0,E} \\
 &= \left(\nabla m_\alpha, \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_j(m_\beta) \nabla \varphi_j \right)_{0,E} \\
 &= (\nabla m_\alpha, \nabla m_\beta)_{0,E} = \mathbf{G}_{\alpha\beta} \quad \forall \beta = 1, \dots, n_k.
 \end{aligned}$$

E ciò conclude la tesi. □

Nota 3.3. *Nella pratica, la matrice \mathbf{G} viene calcolata come da definizione. La sua caratterizzazione come $\mathbf{G} = \mathbf{BD}$ viene utilizzata per lo più allo scopo di effettuare controlli.*

3.3 Spazio VEM modificato W_h e operatore di proiezione $\Pi_{k,E}^0$

Nei paragrafi precedenti si è mostrato come calcolare in modo “esatto” l’operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^\nabla$ rispetto al prodotto scalare in $H_0^1(E)$ tramite la conoscenza dei soli gradi di libertà definiti sullo spazio $V_k(E)$.

Si consideri lo spazio

$$\mathcal{M}_k^*(E) = \left\{ m_\alpha(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_E}{h_E} \right)^\alpha, \text{ con } \alpha \text{ multi-indice } \in \mathbb{N}^d : |\alpha| = k \right\},$$

la cui dimensione è pari a $k + 1$.

In alcuni casi, come accade nella risoluzione del problema di Poisson con condizioni omogenee presentato in [1], la conoscenza del solo operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^\nabla$ è sufficiente per costruire l'intera discretizzazione del problema. Tuttavia, ci sono dei casi in cui (come avviene nel caso qui presentato) è necessaria la conoscenza anche dell'operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^0 : V_k(E) \rightarrow \mathbb{P}_k(E)$ rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$, il quale $\forall v_h \in V_k(E)$ è definito tramite la seguente condizione di ortogonalità

$$(p_k, (\Pi_{E,k}^0 v_h - v_h))_{0,E} = 0 \quad \forall p_k \in \mathbb{P}_k(E) \quad (3.15)$$

$$\Leftrightarrow (m_\alpha, \Pi_{E,k}^0 v_h - v_h) \quad \forall m_\alpha \in \mathcal{M}_k(E). \quad (3.16)$$

Si noti che, per $k \geq 2$, i momenti $(q, v_h)_{0,E}$ possono essere calcolati in modo esatto (a meno della precisione di macchina) grazie ai gradi di libertà interni quando q è un polinomio di grado $\leq k - 2$ e, quindi, può essere calcolato in modo "esatto" anche l'operatore $\Pi_{E,k-2}^0$. Tuttavia, non è possibile calcolare i momenti di ordine $\geq k - 1$ sfruttando i soli gradi di libertà.

Per ovviare a tale problema, si introduce lo spazio VEM *modificato* W_h ([8]) al posto dello spazio V_h , relativamente al quale sarà possibile calcolare in modo "esatto" anche l'operatore $\Pi_{E,k-1}^0$ e $\Pi_{E,k}^0$, grazie alla conoscenza dei soli gradi di libertà e dell'operatore $\Pi_{E,k}^\nabla$.

3.3.1 Costruzione dello spazio W_h

Definito lo spazio

$$\tilde{V}_k(E) = \{v_h \in H^1(E) : v_h|_{\partial E} \in \mathbb{B}_k(\partial E) \text{ e } \Delta v_h \in \mathbb{P}_k(E)\}$$

tale che $V_k(E) \subset \tilde{V}_k(E)$, lo spazio $W_k(E)$ viene costruito come il sottospazio di $\tilde{V}_k(E)$ tale che

$$W_k(E) = \left\{ w_h \in \tilde{V}_k(E) : (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h, m_\alpha)_{0,E} = 0 \quad \forall m_\alpha \in \mathcal{M}_{k-1}^*(E) \cup \mathcal{M}_k^*(E) \right\}.$$

Proposizione 3.3 ([8]). *La dimensione dello spazio $\tilde{V}_k(E)$ è data da*

$$\dim \tilde{V}_k(E) = nk + \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

e l'insieme dei gradi di libertà costituito dalla traccia delle funzioni su ∂E (funzioni definite a tratti in $\mathbb{P}_k(E)$) e dai momenti fino all'ordine k , è unisolvente per $\tilde{V}_k(E)$.

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca quella già fatta per dimostrare l'unicità dell'insieme dei gradi di libertà definiti per $V_k(E)$ nella Proposizione 3.1. \square

Proposizione 3.4 ([8]). *La dimensione dello spazio $W_k(E)$ è uguale a quella di $V_k(E)$, ovvero è data da*

$$W_k(E) = nk + \frac{k(k-1)}{2} = N_E^{\text{dof}},$$

e l'insieme dei gradi di libertà definiti per $V_k(E)$ è unisolvente anche per $W_k(E)$.

Dimostrazione. La dimensione dello spazio $\mathcal{M}_{k-1}^*(E) \cup \mathcal{M}_k^*(E)$ è pari a $2k+1$. Quindi, senza provare l'indipendenza delle condizioni aggiuntive di $W_k(E)$ rispetto a $V_k(E)$, si può semplicemente concludere che

$$\dim W_k(E) \geq \dim \tilde{V}_k(E) - (2k+1) = nk + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Inoltre, ponendo $\text{dof}(w_h) = 0$, si verifica che

$$w_h = 0 \quad \text{su } \partial E,$$

$$\Pi_{0,k-2}^E w_h = 0 \quad \text{su } E.$$

Quindi la funzione w_h è nulla al bordo e ha tutti i momenti di ordine $\leq k-2$ nulli. Pertanto, per come è definito l'operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^\nabla$, si ottiene che $\Pi_{E,k}^\nabla w_h = 0$ e allora sono nulli tutti i momenti fino all'ordine k della funzione w_h . Quindi, si verifica che tutti i gradi di libertà definiti per $\tilde{V}_k(E)$ e valutati in w_h sono nulli, ma questo insieme è unisolvente $\Rightarrow w_h \equiv 0$. Quanto provato non solo dimostra che l'insieme dei gradi di libertà definiti per $V_k(E)$ è unisolvente anche per $W_k(E)$, ma anche che la dimensione dello spazio $W_k(E)$ è pari a N_E^{dof} . \square

Si noti, pertanto, che lo spazio $W_k(E)$ è stato definito in modo tale che

- sia possibile utilizzare su $W_k(E)$ lo stesso insieme di gradi di libertà già descritto per $V_k(E)$ e, quindi, l'operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^\nabla$ è ancora calcolabile in modo "esatto" usando i soli gradi di libertà.
- $\mathbb{P}_k(E) \subset W_k(E)$, come già accadeva per $V_k(E)$.

Inoltre, come si evince in [8],

- Ogni insieme di N_E^{dof} numeri reali definisce in modo univoco una funzione $v_h \in V_k(E)$ e/o una funzione $w_h \in W_k(E)$. Queste due funzioni non coincidono in generale, ma condividono gli stessi gradi di libertà. Se, ad ogni modo, i valori corrispondenti ai gradi di libertà vengono ottenuti a partire da un polinomio $p \in \mathbb{P}_k(E) \Rightarrow p \equiv v_h \equiv w_h$.

- Poiché il calcolo dell'operatore $\Pi_{E,k}^\nabla$ coinvolge solo i gradi di libertà, si verifica che $\Pi_{E,k}^\nabla v_h = \Pi_{E,k}^\nabla w_h$.
- Per $k > 2$, i momenti di $v_h \in V_k(E)$ fino all'ordine $k - 2$ vengono utilizzati per calcolare $\Pi_{E,k}^\nabla v_h$, ma, in generale, $\forall m_\alpha \in \mathcal{M}_r^*(E)$ con $0 < r \leq k - 2$ si verifica che

$$\int_E v_h(\mathbf{x}) m_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq \int_E \Pi_{E,k}^\nabla v_h(\mathbf{x}) m_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

- Se $w_h \in W_k(E)$ allora essa ha in comune con $\Pi_{E,k}^\nabla w_h$ i momenti di ordine $k - 1$ e k . Pertanto, con sola conoscenza dei gradi di libertà e di $\Pi_{E,k}^\nabla$ è possibile calcolare anche $\Pi_{E,k-1}^0$ e $\Pi_{E,k}^0$.

3.3.2 Definizione dell'operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^0$

Vediamo come calcolare l'operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^0$ rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ definito dalla condizione di ortogonalità (3.15).

Posto $\Pi_{E,k}^0 v_h = \sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{t}_\beta^* m_\beta$, si ottiene

$$\sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{t}_\beta^* (m_\alpha, m_\beta)_{0,E} = (m_\alpha, v_h)_{0,E} \quad \forall \alpha = 1, \dots, n_k.$$

In forma compatta, si scrive

$$\mathbf{H} \mathbf{t}^* = \mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}$$

dove

$$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k} \text{ tale che } \mathbf{H}_{\alpha,\beta} = (m_\alpha, m_\beta)_{0,E} \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n_k \quad (3.17)$$

è la *matrice di massa* relativa alla base dei monomi scalati e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_k}$ tale che $\mathbf{c}_\alpha = (m_\alpha, v_h)_{0,E} \quad \forall \alpha = 1, \dots, n_k$.

Si noti che, non è possibile calcolare \mathbf{c} per funzioni $v_h \in V_k(E)$ utilizzando soltanto i gradi di libertà. Infatti,

- se $k = 1$ non è definito alcun grado di libertà interno;
- se $k = 2$ è noto soltanto $(m_1, v_h)_{0,E} = (1, v_h)_{0,E}$;
- se $k > 2$ sono noti soltanto i momenti relativi ai monomi $m_\alpha \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$.

Tuttavia, se si considerano funzioni $w_h \in W_k(E)$, le ulteriori condizioni

$$\int_E w_h(\mathbf{x}) m_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E \Pi_{E,k}^\nabla w_h(\mathbf{x}) m_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| = k - 1, k, \quad (3.18)$$

consentono di calcolare tutte le entrate del vettore \mathbf{c} .

Come già accennato in precedenza, si assume, invece, di esser sempre in grado di calcolare l'integrale di un polinomio su ogni elemento E e, quindi, di saper calcolare le entrate della matrice di massa \mathbf{H} .

Nota 3.4 ([7]). *Per $k = 1, 2$ si verifica che*

$$\Pi_{E,k}^0 w_h = \Pi_{E,k}^\nabla w_h \quad \forall w_h \in W_k(E).$$

Infatti

- $k = 1$, l'operatore $\Pi_{E,k}^0$ è definito come

$$(p_1, \Pi_{E,k}^0 w_h)_{0,E} = (p_1, w_h)_{0,E}, \quad \forall p_1 \in \mathbb{P}_1(E),$$

ma la condizione (3.18) in questo caso è equivalente a

$$(p_1, \Pi_{E,k}^\nabla w_h)_{0,E} = (p_1, w_h)_{0,E} \quad \forall p_1 \in \mathbb{P}_1(E),$$

e da ciò consegue la tesi per $k = 1$.

- $k = 2$, la condizione (3.5) e (3.6b) unitamente all'equazione (3.18) fa sì che

$$(p_2, \Pi_{E,k}^\nabla v_h)_{0,E} = (p_2, w_h)_{0,E} \quad \forall p_2 \in \mathbb{P}_2(E),$$

e da ciò consegue che $\Pi_{E,k}^0 w_h = \Pi_{E,k}^\nabla w_h \quad \forall w_h \in W_k(E)$.

Come fatto nella Sezione 3.2, si calcolano dapprima i coefficienti \mathbf{T}^* delle combinazioni $\Pi_{E,k}^0 \varphi_i = \sum_{\alpha=1}^{n_k} \mathbf{T}_{\alpha i}^* m_\alpha \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$, per poi ottenere i coefficienti di $\Pi_{E,k}^0 v_h$ con $v_h \in W_k(E)$ sia rispetto la base dello spazio $\mathbb{P}_k(E)$ che rispetto la base VEM. In particolare, i coefficienti di tali combinazione rispetto la base dei monomi scalati risultano essere la soluzione del sistema

$$\mathbf{H}\mathbf{T}^*(:, i) = \mathbf{C}(:, i) \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}},$$

dove $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_k \times N_E^{\text{dof}}} \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ ha entrate definite da

$$\mathbf{C}_{\alpha i} = (m_\alpha, \varphi_i)_{0,E} = \begin{cases} (m_\alpha, \varphi_i)_{0,E} & \text{se } \alpha = 1, \dots, n_{k-2} \\ (m_\alpha, \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i)_{0,E} & \text{se } \alpha = n_{k-2} + 1, \dots, n_k \end{cases}$$

Rispetto la base VEM, invece,

$$\begin{aligned}
 \Pi_{E,k}^0 \varphi_i &= \sum_{\beta=1}^{n_k} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C})_{\beta i} m_{\beta} \\
 &= \sum_{\beta=1}^{n_k} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C})_{\beta i} \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_j(m_{\beta}) \varphi_j \\
 &= \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} \left(\sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{D}_{j\beta} (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C})_{\beta i} \right) \varphi_j \\
 &= \sum_{j=1}^{N_E^{\text{dof}}} (\mathbf{D} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C})_{ji} \varphi_j
 \end{aligned}$$

Allora, $\mathbf{T} = \mathbf{D} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}$ e vale $\mathbf{T} = \mathbf{D} \mathbf{T}^*$.

Si noti, in particolare, che

- Per $\alpha = 1, \dots, n_{k-2}$

$$\mathbf{C}_{\alpha i} = (m_{\alpha}, \varphi_i)_{0,E} = |E| \text{dof}_{nk+\alpha}(\varphi_i) = \begin{cases} |E| & \text{se } i = nk + \alpha \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Per $\alpha = n_{k-2} + 1, \dots, n_k$, ricordando la definizione delle matrici \mathbf{G} (3.11), \mathbf{B} (3.13), si verifica

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{\alpha i} &= (m_{\alpha}, \Pi_{E,k}^{\nabla} \varphi_i)_{0,E} \\
 &= \left(m_{\alpha}, \sum_{\beta=1}^{n_k} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{B})_{\beta i} m_{\beta} \right)_{0,E} \\
 &= \sum_{\beta=1}^{n_k} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{B})_{\beta i} (m_{\alpha}, m_{\beta})_{0,E} \\
 &= \sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{H}_{\alpha\beta} (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{B})_{\beta i} \\
 &= (\mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B})_{\alpha i} \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}.
 \end{aligned}$$

3.3.3 Forma bilineare discreta $B_h(\cdot, \cdot)$

Indicate con $a^E(\cdot, \cdot)$, $b^E(\cdot, \cdot)$, $c^E(\cdot, \cdot)$ e $B^E(\cdot, \cdot)$ le restrizioni su ogni elemento E delle forme bilineari definite in (2.4), si noti che esse e la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$, $\forall u, v \in V$ possono essere riscritte in funzione della partizione \mathcal{T}_h come

$$a(u, v) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} a^E(u, v) \quad b(u, v) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} b^E(u, v),$$

$$c(u, v) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} c^E(u, v), \quad |v|_{1, \Omega} = \left(\sum_{E \in \mathcal{T}_h} |v|_{1, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'ultima relazione definisce una vera e propria seminorma sullo spazio

$$H^1(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(E) \forall E \in \mathcal{T}_h\},$$

che costituisce un esempio di broken-regularity. Pertanto

$$B(u, v) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} B^E(u, v) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} (a^E(u, v) + b^E(u, v) + c^E(u, v)) \quad \forall u, v \in V.$$

Definito l'ordine di accuratezza $k \geq 1$ del metodo, la discretizzazione, come specificato in [1], deve soddisfare alcune ipotesi. Più precisamente

A1. Per ogni h , si suppone esista

- per ogni $E \in \mathcal{T}_h$, uno spazio $W_k(E) \subset H^1(E)$;
- uno spazio $W_h \subseteq V \cap (\cup_{E \in \mathcal{T}_h} W_k(E))$;
- una forma bilineare $B_h : W_h \times W_h \rightarrow \mathbb{R}$, la quale può essere decomposta come

$$B_h(u_h, v_h) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} B_h^E(u_h, v_h) \quad \forall u_h, v_h \in W_h;$$

- un elemento $f_h \in W_h'$, dove lo spazio W_h' rappresenta il duale dello spazio W_h .

A2. Per ogni h e per ogni $E \in \mathcal{T}_h$ si verifica $\mathbb{P}_k(E) \subset W_k(E)$ e sono soddisfatte:

- **k -consistency**, ovvero $\forall p \in \mathbb{P}_k(E)$ e $\forall v_h \in V_{h|E}$ si verifica

$$a_h^E(p, v_h) = a^E(p, v_h). \quad (3.19)$$

- **stability**, ovvero $\exists \alpha_*, \alpha^* > 0$ costanti che non dipendono da h e da E tali che

$$\forall v_h \in W_k(E), \quad \alpha_* B^E(v_h, v_h) \leq B_h^E(v_h, v_h) \leq \alpha^* B^E(v_h, v_h).$$

3.3.4 Termine di stabilità $S^E(\cdot, \cdot)$

Sia $S^E(\cdot, \cdot)$ una forma bilineare, simmetrica su $W_k(E) \times W_k(E)$ che scala come $a^E(\cdot, \cdot)$ sul kernel di $\Pi_{E,k}^\nabla$. Più precisamente, si assuma che $\exists \alpha_*, \alpha^*$ costanti positive indipendenti da h tali che

$$\begin{aligned} \alpha_* a^E(w_h, w_h) &\leq S^E(w_h, w_h) \leq \alpha^* a^E(w_h, w_h) \\ \forall w_h \in W_k(E) \quad &\text{con } \Pi_{E,k}^\nabla w_h = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Per ogni $u_h, v_h \in W_k(E)$ con $\Pi_{E,k}^\nabla u_h = \Pi_{E,k}^\nabla v_h = 0$, poiché $S^E(\cdot, \cdot)$ simmetrica, vale

$$\begin{aligned} S^E(u_h, v_h) &\leq (S^E(u_h, u_h))^{\frac{1}{2}} (S^E(v_h, v_h))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \alpha^* (a^E(u_h, u_h))^{\frac{1}{2}} (a^E(v_h, v_h))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nota 3.5 ([1],[7]). *Notiamo che in un poligono “isotropo” bidimensionale E , $\nabla \varphi_i \approx \frac{1}{h_E}$. Di conseguenza, $(\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_i)_{0,E} \approx 1$ e ciò vale per ogni $i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$. Si noti che la base dei monomi scalati \mathcal{M}_k soddisfa la medesima proprietà.*

Quanto detto non vale più in poligoni fortemente anisotropi, motivo per cui è opportuno introdurre l’ulteriore ipotesi:

A0.3. *Per ogni h , $\exists \rho > 0$ tale che per ogni elemento $E \in \mathcal{T}_h$, la misura di ciascun suo lato e verifica $|e| \geq \rho h_E$.*

Sotto tale ipotesi, $(\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_i)_{0,E} \approx 1 \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$.

La scelta usuale ([1]), consiste nello scegliere come $S^E(\cdot, \cdot)$ il termine

$$S^E(u_h, v_h) = h_E^{d-2} \sum_{r=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_r(u_h) \text{dof}_r(v_h), \quad (3.22)$$

il quale soddisfa, per $d = 2$,

$$S^E(\varphi_i, \varphi_i) = 1.$$

L’introduzione di tale termine fa sì che la proprietà di stabilità risulti essere soddisfatta.

Definite su ogni elemento $E \in \mathcal{T}_h$ e per ogni $u_h, v_h \in W_k(E)$

$$\begin{aligned} a_h^E(u_h, v_h) &= \int_E \theta [\Pi_{E,k-1}^0 \nabla u_h] \cdot [\Pi_{E,k-1}^0 \nabla v_h] \\ &\quad + S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla) u_h, (I - \Pi_{E,k}^\nabla) v_h), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$b_h^E(u_h, v_h) = \int_E [\mathbf{b} \cdot \Pi_{E,k-1}^0 u_h] [\Pi_{E,k-1}^0 \nabla v_h], \quad (3.24)$$

$$c_h^E(u_h, v_h) = \int_E \gamma [\Pi_{E,k-1}^0 u_h] [\Pi_{E,k-1}^0 v_h], \quad (3.25)$$

$$B_h^E(u_h, v_h) = a_h^E(u_h, v_h) + b_h^E(u_h, v_h) + c_h^E(u_h, v_h), \quad (3.26)$$

$$\langle f_h, v_h \rangle_E = \int_E f \Pi_{E,k-1}^0 v_h, \quad (3.27)$$

il problema discretizzato è definito come

$$\begin{cases} \text{trovare } u_h \in W_h \text{ tale che} \\ B_h(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in W_h \end{cases}, \quad (PV_h)$$

dove, $\forall u_h, v_h \in W_h$,

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} a_h^E(u, v), \quad b_h(u_h, v_h) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} b_h^E(u_h, v_h),$$

$$c_h(u_h, v_h) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} c_h^E(u_h, v_h),$$

$$B_h(u, v) = a_h(u_h, v_h) + b_h(u_h, v_h) + c_h(u_h, v_h), \quad (3.28)$$

$$\langle f_h, v \rangle = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \langle f_h, v \rangle_E. \quad (3.29)$$

Nota 3.6 ([5]). *Se le forme bilineari $b_h^E(\cdot, \cdot)$, $c_h^E(\cdot, \cdot)$ locali risultano ben definite per ogni $u, v \in H^1(E)$, così come le forme globali $b_h(\cdot, \cdot)$, $c_h(\cdot, \cdot)$ sono ben definite per le funzioni in $H_0^1(\Omega)$, lo stesso non vale per la forma locale $a_h^E(\cdot, \cdot)$, la quale, a causa della presenza del termine di stabilità $S^E(\cdot, \cdot)$, risulta ben definita soltanto su $W_k(E)$.*

Nota 3.7 ([5]). *Si osservi, inoltre, che*

$$S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla) p_k, (I - \Pi_{E,k}^\nabla) v) = 0 \quad \forall p_k \in \mathbb{P}_k(E), \quad \forall v \in W_k(E),$$

e, poiché $S^E(\cdot, \cdot)$ è simmetrica, tale termine risulta essere nullo qualora almeno una delle entrate di $a_h^E(\cdot, \cdot)$ risulta essere un polinomio in $\mathbb{P}_k(E)$.

Inoltre, è importante osservare che $\forall w_h \in W_k(E)$, la proiezione $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla w_h$ può essere esplicitamente calcolata utilizzando solo i gradi di libertà. Infatti, tale operatore è definito, $\forall w_h \in W_k(E)$ tramite la condizione di ortogonalità

$$(\nabla w_h - \Pi_{E,k-1}^0 \nabla w_h, \mathbf{p})_{0,E} = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in (\mathbb{P}_{k-1}(E))^2 = \mathbb{P}_{k-1}(E) \times \mathbb{P}_{k-1}(E), \quad (3.30)$$

dove, per le formule di integrazione di Green,

$$\int_E \nabla w_h \cdot \mathbf{p} = - \int_E w_h \nabla \cdot \mathbf{p} + \int_{\partial E} w_h \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}.$$

Il primo termine del membro destro dell'equazione si può calcolare tramite i gradi di libertà interni. L'integranda del secondo termine è un polinomio di grado $2k - 1$ che può essere calcolato in modo esatto tramite le formule di quadratura di Gauss-Lobatto, sfruttando, quindi, i gradi di libertà di bordo.

Capitolo 4

Stima dell'errore

Si noti preliminarmente che l'operatore $\Pi_{E,k}^\nabla$, come conseguenza della Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, $\forall w_h \in W_h$ soddisfa

$$\begin{aligned}\|\nabla \Pi_{E,k}^\nabla w_h\|_{0,E}^2 &= (\nabla \Pi_{E,k}^\nabla w_h, \nabla \Pi_{E,k}^\nabla w_h)_{0,E} \\ &= (\nabla w_h, \nabla \Pi_{E,k}^\nabla w_h)_{0,E} \\ &\leq \|\nabla w_h\|_{0,E} \|\nabla \Pi_{E,k}^\nabla w_h\|_{0,E} \\ \Rightarrow \|\nabla \Pi_{E,k}^\nabla w_h\|_{0,E} &\leq \|\nabla w_h\|_{0,E}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

e

$$\begin{aligned}\|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h)\|_{0,E}^2 &= (\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h), \nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h))_{0,E} \\ &= (\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h), \nabla w_h)_{0,E} \\ &\quad - (\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h), \nabla \Pi_{E,k}^\nabla w_h)_{0,E} \\ &= (\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h), \nabla w_h)_{0,E} \\ &\leq \|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h)\|_{0,E} \|\nabla w_h\|_{0,E} \\ \Rightarrow \|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h)\|_{0,E} &\leq \|\nabla w_h\|_{0,E}\end{aligned}\tag{4.2}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h)\|_{0,E}^2 &= (\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h), \nabla w_h)_{0,E} \\ &= (\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h), \nabla (w_h - \Pi_{E,k}^0 w_h))_{0,E} \\ &\leq \|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h)\|_{0,E} \|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^0 w_h)\|_{0,E} \\ \Rightarrow \|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^\nabla w_h)\|_{0,E} &\leq \|\nabla (w_h - \Pi_{E,k}^0 w_h)\|_{0,E}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Inoltre, si osservi che l'insieme dei gradi di libertà definiti sullo spazio $W_k(E)$ definiscono un operatore di interpolazione che associa ad ogni funzione φ sufficientemente regolare una funzione $\varphi_I \in W_k(E)$ che condivide con φ gli stessi gradi di libertà.

Nel seguito, i simboli θ_{\max} , \mathbf{b}_{\max} e γ_{\max} indicheranno $\|\theta\|_{\infty,\Omega}$, $\|\mathbf{b}\|_{\infty,\Omega}$ e $\|\gamma\|_{\infty,\Omega}$ rispettivamente.

Sotto le ipotesi di regolarità della mesh (A0) valgono i seguenti lemmi.

Lemma 4.1 ([5]). *Esiste una costante positiva $C = C(\rho, k)$ tale che, per ogni $E \in \mathcal{T}_h$ e ogni funzione φ sufficientemente regolare definita su E , vale*

$$\|\varphi - \Pi_{E,k}^0 \varphi\|_{m,E} \leq Ch_E^{s-m} |\varphi|_{s,E} \quad m, s \in \mathbb{N} \quad m \leq s \leq k+1,$$

$$\|\varphi - \Pi_{E,k}^\nabla \varphi\|_{m,E} \leq Ch_E^{s-m} |\varphi|_{s,E} \quad m, s \in \mathbb{N} \quad m \leq s \leq k+1, \quad s \geq 1,$$

$$\|\varphi - \varphi_I\|_{m,E} \leq Ch_E^{s-m} |\varphi|_{s,E} \quad m, s \in \mathbb{N} \quad m \leq s \leq k+1, \quad s \geq 2.$$

Lemma 4.2 ([5]). *La forma bilineare $B_h(\cdot, \cdot)$ è continua in $W_h \times W_h$, ovvero*

$$B_h(u, v) \leq C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in W_h,$$

dove $C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma}$ è una costante positiva che dipende dalle funzioni θ , \mathbf{b} e γ ma non da h .

Dimostrazione. La continuità delle forme $b_h(\cdot, \cdot)$, $c_h(\cdot, \cdot)$ è ovvia e risulta valida sull'intero spazio $H_0^1(\Omega)$. Si verifica

$$b_h(u, v) \leq \mathbf{b}_{\max} \|v\|_{0,\Omega} \|u\|_{1,\Omega}, \quad c_h(u, v) \leq \gamma_{\max} \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Per dimostrare la continuità di $a_h(\cdot, \cdot)$ osserviamo prima che da (3.21) e (4.2) discende che $\forall u, v \in W_h$

$$\begin{aligned} a_h^E(u, v) &= \int_E \theta [\Pi_{E,k-1}^0 \nabla u] \cdot [\Pi_{E,k-1}^0 \nabla v] + S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla) u, (I - \Pi_{E,k}^\nabla) v) \\ &\leq \theta_{\max} |u|_{1,E} |v|_{1,E} + \theta_{\max} \alpha^* |(I - \Pi_{E,k}^\nabla) u|_{1,E} |(I - \Pi_{E,k}^\nabla) v|_{1,E} \\ &\leq (1 + \alpha^*) \theta_{\max} |u|_{1,E} |v|_{1,E}. \end{aligned}$$

Allora

$$a_h(u, v) \leq (1 + \alpha^*) \theta_{\max} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in W_h.$$

Da cui segue banalmente la continuità di $B_h(\cdot, \cdot)$. □

Lemma 4.3 ([5]). *Per ogni $E \in \mathcal{T}_h$, sia μ una funzione sufficientemente regolare su E e siano p, q funzioni scalari o vettoriali sufficientemente regolari su E . Per una generica funzione $\varphi \in L^2(E)$ (o in $(L^2(E))^2$), definita la funzione*

$$\mathcal{E}_E^k(\varphi) = \|\varphi - \Pi_{E,k}^0 \varphi\|_{0,E}.$$

si verifica che

$$(\mu p, q)_{0,E} - (\mu \Pi_{E,k}^0 p, \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} \leq \mathcal{E}_E^k(\mu p) \mathcal{E}_E^k(q) + \mathcal{E}_E^k(\mu q) \mathcal{E}_E^k(p) + C_\mu \mathcal{E}_E^k(p) \mathcal{E}_E^k(q),$$

dove C_μ è una costante dipendente da μ .

Dimostrazione. Si osservi che

$$\begin{aligned} (\mu p, q)_{0,E} - (\mu \Pi_{E,k}^0 p, \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} &= (\mu p, q - \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} + (p - \Pi_{E,k}^0 p, \mu \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} \\ &= (\mu p - \Pi_{E,k}^0 \mu p, q - \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} + (\Pi_{E,k}^0 \mu p, q - \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} \\ &\quad + (p - \Pi_{E,k}^0 p, \mu \Pi_{E,k}^0 q - \Pi_{E,k}^0 \mu q)_{0,E} + (p - \Pi_{E,k}^0 p, \Pi_{E,k}^0 \mu q)_{0,E} \\ &= (\mu p - \Pi_{E,k}^0 \mu p, q - \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} + (p - \Pi_{E,k}^0 p, \mu \Pi_{E,k}^0 q - \Pi_{E,k}^0 \mu q)_{0,E} \\ &= (\mu p - \Pi_{E,k}^0 \mu p, q - \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} + (p - \Pi_{E,k}^0 p, \mu \Pi_{E,k}^0 q - \Pi_{E,k}^0 \mu q + \mu q - \mu q)_{0,E} \\ &= (\mu p - \Pi_{E,k}^0 \mu p, q - \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E} + (p - \Pi_{E,k}^0 p, \mu q - \Pi_{E,k}^0 \mu q)_{0,E} \\ &\quad - (p - \Pi_{E,k}^0 p, \mu q - \mu \Pi_{E,k}^0 q)_{0,E}. \end{aligned}$$

La tesi segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz con $C_\mu = \|\mu\|_\infty$. \square

Il seguente Lemma è una diretta applicazione del Lemma precedente.

Lemma 4.4 ([5]). *Per ogni $E \in \mathcal{T}_h$ vale*

$$\begin{aligned} a_h^E(u, v) - a^E(u, v) &\leq \mathcal{E}_E^{k-1}(\theta \nabla u) \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla v) + \mathcal{E}_E^{k-1}(\theta \nabla v) \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla u) \\ &\quad + C_\theta \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla u) \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla v) \\ &\quad + S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla) u, (I - \Pi_{E,k}^\nabla) v) \quad \forall u, v \in W_k(E), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} b_h^E(u, v) - b^E(u, v) &\leq \mathcal{E}_E^{k-1}(\mathbf{b} \cdot \nabla u) \mathcal{E}_E^{k-1}(v) + \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla u) \mathcal{E}_E^{k-1}(\mathbf{b} v) \\ &\quad + C_{\mathbf{b}} \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla u) \mathcal{E}_E^{k-1}(v) \quad \forall u, v \in H^1(E), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} c_h^E(u, v) - c^E(u, v) &\leq \mathcal{E}_E^{k-1}(\gamma u) \mathcal{E}_E^{k-1}(v) + \mathcal{E}_E^{k-1}(\gamma v) \mathcal{E}_E^{k-1}(u) \\ &\quad + C_\gamma \mathcal{E}_E^{k-1}(u) \mathcal{E}_E^{k-1}(v) \quad \forall u, v \in H^1(E). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Il prossimo Lemma definisce l'errore di consistenza.

Lemma 4.5 ([5]). *Per ogni u sufficientemente regolare e per ogni $v_h \in W_h$ vale*

$$B^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - B_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) \leq C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} h_E^k \|u\|_{k+1, E} \|v_h\|_{1, E} \quad \forall E \in \mathcal{T}_h. \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di $B^E(\cdot, \cdot)$ e $B_h^E(\cdot, \cdot)$ segue

$$\begin{aligned} & B^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - B_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) \\ &= a^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - a_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) + b^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - b_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) + \\ & \quad + c^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - c_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h). \end{aligned}$$

Osserviamo dapprima che se $u \in \mathbb{P}_k(E)$, allora $\Pi_{E,k}^0 u \equiv u$ e $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla u \equiv \nabla u$ e il termine relativo ad $S^E(\cdot, \cdot)$ è nullo. Quindi, per (4.4)

$$a_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - a^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) \leq \mathcal{E}_E^{k-1}(\theta \nabla \Pi_{E,k}^0 u) \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla v_h) \quad \forall v_h \in W_k(E).$$

Il primo termine a destra di tale relazione è tale che

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_E^{k-1}(\theta \nabla \Pi_{E,k}^0 u) &= \|\theta \nabla \Pi_{E,k}^0 u - \Pi_{E,k-1}^0 \theta \nabla \Pi_{E,k}^0 u\|_{0, E} = \|\theta \nabla \Pi_{E,k}^0 u - \Pi_{E,k-1}^0 \theta \nabla u\|_{0, E} \\ &\leq \|\theta \nabla \Pi_{E,k}^0 u - \Pi_{E,k-1}^0 \theta \nabla u + \theta \nabla u - \Pi_{E,k-1}^0 \theta \nabla u\|_{0, E} \\ &\leq \|\theta \nabla \Pi_{E,k}^0 u - \theta \nabla u\|_{0, E} + \|\theta \nabla u - \Pi_{E,k-1}^0 \theta \nabla u\|_{0, E} \\ &\leq Ch_E^k (\theta_{\max} |u|_{k+1, E} + |\theta \nabla u|_{k, E}) \\ &\leq C_{\theta} h_E^k \|u\|_{k+1, E}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo termine, essendo $v_h \in W_k(E) \subset H^1(E)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla v_h) &= \|\nabla v_h - \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v_h\|_{0, E} \leq \|v_h\|_{1, E} \\ \Rightarrow a_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - a^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) &\leq C_{\theta} h_E^k \|u\|_{k+1, E} \|v_h\|_{1, E}. \end{aligned}$$

Con un ragionamento simile si dimostra che

$$\begin{aligned} b_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - b^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) &\leq C_{\mathbf{b}} h_E^k \|u\|_{k+1, E} \|v_h\|_{1, E}, \\ c_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) - c^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_h) &\leq C_{\gamma} h_E^k \|u\|_{k+1, E} \|v_h\|_{1, E}. \end{aligned}$$

Da ciò si conclude facilmente la tesi $\forall E \in \mathcal{T}_h$. \square

Nota 4.1 ([5]). *Si noti che il Lemma precedente risulta valido per ogni $v_h \in W_h \subset H^1(\Omega)$. Se, per esempio, $v_h \equiv v_I$, ovvero coincide con l'interpolata di una funzione più regolare, il risultato precedente può essere sostituito da una stima più accurata. Infatti, notando che*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_E^{k-1}(\nabla v_I) &= \|\nabla v_I - \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v_I\|_{0, E} \\ &\leq \|\nabla v_I - \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\|_{0, E} \\ &\leq \|\nabla(v_I - v)\|_{0, E} + \|\nabla v - \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\| \leq Ch \|v\|_{2, E}, \end{aligned}$$

si guadagna una potenza in più di h rispetto quella ottenuta nel risultato (4.7), i.e.

$$B^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_I) - B_h^E(\Pi_{E,k}^0 u, v_I) \leq C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} h_E^{k+1} \|u\|_{k+1, E} \|v_I\|_{2, E} \quad \forall E \in \mathcal{T}_h.$$

Lemma 4.6 ([5]). *Per ogni $v^* \in H_0^1(\Omega)$ esiste $v_h^* \in W_h$ tale che*

$$a_h(v_h^*, v_h) = a(v^*, v_h) \quad \forall v_h \in W_h.$$

Inoltre, esiste una costante C indipendente da h tale che

$$h\|v^* - v_h^*\|_{1,\Omega} + \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \leq Ch\|v^*\|_{1,\Omega}. \quad (4.8)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di operatore di proiezione segue che

$$\|\nabla v - \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\|_{0,E} \leq \|\nabla v - \nabla \Pi_{E,k}^\nabla v\|_{0,E},$$

poiché $\nabla \Pi_{E,k}^\nabla v$ è un vettore di polinomi di grado $\leq k-1$. Quindi, per ogni $v \in W_h$ e per ogni intero $k \geq 1$, dalla relazione (3.20), si ottiene

$$\begin{aligned} a_h(v, v) &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} a_h^E(v, v) \\ &\geq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \left((\theta \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v, \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v)_{0,E} + S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla) v, (I - \Pi_{E,k}^\nabla) v) \right) \\ &\geq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \theta_0 \|\Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\|_{0,E}^2 + \alpha_* a^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla) v, (I - \Pi_{E,k}^\nabla) v) \\ &\geq C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} (\|\Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\|_{0,E}^2 + \|\nabla (I - \Pi_{E,k}^\nabla) v\|_{0,E}^2) \\ &\geq C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} (\|\Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\|_{0,E}^2 + \|\nabla v - \Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\|_{0,E}^2) \geq C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla v\|_{0,E}^2) \\ &\geq C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} (\|\Pi_{E,k-1}^0 \nabla v\|_{0,E}^2 + \|(I - \Pi_{E,k-1}^0) \nabla v\|_{0,E}^2) \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Quindi, $a_h^E(\cdot, \cdot)$ è una forma bilineare continua e coerciva. Conseguentemente che il problema

$$a_h(v_h^*, v_h) = a(v^*, v_h) \quad \forall v_h \in W_h$$

ammette un'unica soluzione $v_h^* \in W_h$. Inoltre,

$$\begin{aligned} C_1 \|v_h^*\|_{1,E}^2 &\leq a_h(v_h^*, v_h^*) = a(v^*, v_h^*) \leq C_2 \|v^*\|_{1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} \\ &\Rightarrow \|v_h^*\|_{1,\Omega} \leq C \|v^*\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Da cui banalmente

$$\|v^* - v_h^*\|_{1,\Omega} \leq C \|v^*\|_{1,\Omega}.$$

Al fine di dimostrare (4.8), bisogna provare ancora che $\|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \leq Ch\|v^*\|_{1,\Omega}$. A tale scopo supponiamo che $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sia soluzione di

$$a_h(v, \psi) = (v^* - v_h^*, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e sia ψ_I la sua interpolata, per la quale vale

$$\|\psi - \psi_I\|_{1,\Omega} \leq Ch|\psi|_2 \leq Ch\|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega}.$$

Si verifica facilmente che $\forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^k(\nabla\psi_I) &\leq \mathcal{E}^0(\nabla\psi_I) \leq \mathcal{E}^0(\nabla(\psi_I - \psi)) + E^0(\nabla\psi) \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla(\psi_I - \psi) - \Pi_{E,0}^0(\nabla(\psi_I - \psi))\|_{0,E} + \|\nabla\psi - \Pi_{E,0}^0\nabla\psi\|_{0,E}) \\ &\leq Ch\|\psi\|_{2,\Omega} \leq Ch\|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{E}^k(\theta\nabla\psi_I) \leq \mathcal{E}^0(\theta\nabla\psi_I) \leq C_\theta h\|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega}.$$

Inoltre, dalla relazione (3.21),

$$\begin{aligned} &S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla)v_h^*, (I - \Pi_{E,k}^\nabla)\psi_I) \\ &\leq \alpha^*(a^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla)v_h^*, (I - \Pi_{E,k}^\nabla)v_h^*))^{\frac{1}{2}} (a^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla)\psi_I, (I - \Pi_{E,k}^\nabla)\psi_I))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \alpha^*\theta_{\max}\|\nabla(I - \Pi_{E,k}^\nabla)v_h^*\|_{0,E}\|\nabla(I - \Pi_{E,k}^\nabla)\psi_I\|_{0,E} \\ &\leq C|v_h^*|_{1,E}\|\nabla\psi_I - \nabla\Pi_{E,k}^\nabla\psi\|_{0,E} \\ &\leq C|v_h^*|_{1,E}(\|\nabla(\psi_I - \psi)\|_{0,E} + \|\nabla(\psi - \Pi_{E,k}^\nabla\psi)\|_{0,E}) \\ &\leq Ch_E|v^*|_{1,E}|\psi|_{2,E} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{E \in \mathcal{T}_h} S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla)v_h^*, (I - \Pi_{E,k}^\nabla)\psi_I) \leq Ch|v^*|_{1,\Omega}|\psi|_{2,\Omega} \leq Ch|v^*|_{1,\Omega}\|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega}.$$

D'altro canto, sia $\mathcal{E}^k(\nabla v_h^*)$ che $\mathcal{E}^k(\theta \nabla v_h^*)$ sono limitate da $C_\theta \|v^*\|_{1,\Omega}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega}^2 &= (v^* - v_h^*, v^* - v_h^*)_{0,\Omega} \\
&= a(v^* - v_h^*, \psi) \\
&= a(v^* - v_h^*, \psi - \psi_I) + a(v^* - v_h^*, \psi_I) \\
&= a(v^* - v_h^*, \psi - \psi_I) + a(v^*, \psi_I) - a(v_h^*, \psi_I) \\
&= a(v^* - v_h^*, \psi - \psi_I) + a_h(v_h^*, \psi_I) - a(v_h^*, \psi_I) \\
&\leq C_\theta \|v^* - v_h^*\|_{1,\Omega} \|\psi - \psi_I\|_{1,\Omega} + \mathcal{E}^{k-1}(\theta \nabla v_h^*) \mathcal{E}^{k-1}(\nabla \psi_I) \\
&\quad + \mathcal{E}^{k-1}(\theta \nabla \psi_I) \mathcal{E}^{k-1}(\nabla v_h^*) + Ch |v^*|_{1,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \\
&\leq C_\theta h \|v^* - v_h^*\|_{1,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} + Ch \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \mathcal{E}^{k-1}(\theta \nabla v_h^*) \\
&\quad + C_\theta h \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} E^{k-1}(\nabla v_h^*) + Ch |v^*|_{1,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \\
&\leq C_\theta h \|v^*\|_{1,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} + Ch \theta_{\max} \|v_h^*\|_{1,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \\
&\quad + C_\theta h \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} + Ch \|v_h^*\|_{1,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \\
&\leq C_\theta h \|v^*\|_{1,\Omega} \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Da cui si ottiene la tesi. \square

Lemma 4.7 ([5]). *La forma bilineare $B_h(\cdot, \cdot)$ soddisfa la seguente condizione: esiste $h_0 > 0$ e una costante \overline{C}_B tale che $\forall h < h_0$*

$$\sup_{v_h \in W_h} \frac{B_h(u_h, v_h)}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \overline{C}_B \|u_h\|_{1,\Omega} \quad \forall u_h \in W_h.$$

Dimostrazione. La forma bilineare $B(\cdot, \cdot)$ soddisfa

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{B(u, v)}{\|v\|_{1,\Omega}} \geq C_B \|u\|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Pertanto, data $u_h \in W_h \exists v^* \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\frac{B(u_h, v^*)}{\|v^*\|_{1,\Omega}} \geq C_B \|u_h\|_{1,\Omega}.$$

Inoltre, per il Lemma 4.6, il problema

$$\begin{cases} \text{trovare } v_h^* \in W_h \text{ tale che} \\ a_h(v_h^*, v_h) = a(v^*, v_h) \forall v_h \in W_h \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che soddisfa

$$\|v_h^*\|_{1,\Omega} \leq C \|v^*\|_{1,\Omega} \quad e \quad \|v^* - v_h^*\|_{0,\Omega} \leq Ch \|v^*\|_{1,\Omega}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
B_h(u_h, v_h^*) &= a_h(u_h, v_h^*) + b_h(u_h, v_h^*) + c_h(u_h, v_h^*) \\
&= a(u_h, v^*) + b_h(u_h, v_h^*) + c_h(u_h, v_h^*) \\
&\quad + b(u_h, v^*) - b(u_h, v_h^*) + c(u_h, v^*) - c(u_h, v_h^*) \\
&= B(u_h, v^*) + b_h(u_h, v_h^*) - b(u_h, v_h^*) + c_h(u_h, v_h^*) - c(u_h, v_h^*) \\
&= B(u_h, v^*) + b_h(u_h, v_h^*) - b(u_h, v_h^*) + c_h(u_h, v_h^*) - c(u_h, v_h^*) \\
&\quad + b(u_h, v_h^*) - b(u_h, v_h^*) + c_h(u_h, v_h^*) - c_h(u_h, v_h^*) \\
&= B(u_h, v^*) + b(u_h, v_h^* - v^*) + c_h(u_h, v_h^* - v^*) \\
&\quad + b_h(u_h, v_h^*) - b(u_h, v_h^*) + c_h(u_h, v_h^*) - c(u_h, v_h^*).
\end{aligned}$$

Per la continuità di $c_h(\cdot, \cdot)$,

$$c_h(u_h, v_h^* - v^*) \leq \gamma_{\max} \|u_h\|_{0,\Omega} \|v_h^* - v^*\|_{0,\Omega} \leq C\gamma_{\max} h \|u_h\|_{0,\Omega} \|v^*\|_{1,\Omega}.$$

Inoltre,

$$b(u_h, v_h^* - v^*) = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla u_h) (v_h^* - v_h) d\mathbf{x} \leq C_{\mathbf{b}}^+ h \|u_h\|_{1,\Omega} \|v^*\|_{1,\Omega}.$$

Dal Lemma 4.4 segue che

$$\begin{aligned}
b_h(u_h, v_h^*) - b(u_h, v_h^*) &\leq \mathcal{E}^{k-1}(\mathbf{b} \cdot \nabla u_h) \mathcal{E}^{k-1}(v_h^*) + \mathcal{E}^{k-1}(\nabla u_h) \mathcal{E}^{k-1}(\mathbf{b} v_h^*) \\
&\quad + C_{\mathbf{b}} \mathcal{E}^{k-1}(\nabla u_h) \mathcal{E}^{k-1}(v_h^*) \\
&\leq \|\mathbf{b} \cdot \nabla u_h\|_{0,\Omega} C h |v_h^*|_{1,\Omega} + |u_h|_{1,\Omega} C h |\mathbf{b} v_h^*|_{1,\Omega} \\
&\quad + C_{\mathbf{b}} |u_h|_{1,\Omega} C h |v_h^*|_{1,\Omega} \\
&\leq C_{\mathbf{b}}^* h |v_h^*|_{1,\Omega} |u_h|_{1,\Omega} \\
&\leq C_{\mathbf{b}}^* h \|v^*\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

In modo analogo si prova che

$$c_h(u_h, v^*) - c(u_h, v^*) \leq C_{\gamma}^* h \|v^*\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{0,\Omega} \leq C_{\gamma}^* h \|v^*\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}.$$

Scegliendo $h_0 = \frac{C_B}{2(C_b^* + C_{\gamma}^* + C_b^+ + C\gamma_{\max})}$, per ogni $h \leq h_0$ si ha

$$(C_b^* + C_{\gamma}^* + C_b^+ + C\gamma_{\max}) h \leq \frac{C_B}{2}. \quad (4.9)$$

Di conseguenza, per ogni $h \leq h_0$

$$\begin{aligned}
B_h(u_h, v_h^*) &= B(u_h, v^*) + b(u_h, v_h^* - v^*) + c_h(u_h, v_h^* - v^*) \\
&\quad + b_h(u_h, v_h^*) - b(u_h, v_h^*) + c_h(u_h, v^*) - c(u_h, v^*) \\
&\leq B(u_h, v^*) + C_b^+ h \|u_h\|_{1,\Omega} \|v^*\|_{1,\Omega} + C\gamma_{\max} h \|u_h\|_{0,\Omega} \|v^*\|_{1,\Omega} \\
&\quad + C_b^* h \|v^*\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega} + C_{\gamma}^* h \|v^*\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega} \\
&\leq B(u_h, v^*) + \frac{C_B}{2} \|v^*\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $h \leq h_0$

$$B_h(u_h, v_h^*) \geq \frac{C_B}{2} \|u_h\|_{1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega}.$$

□

Nota 4.2 ([5]). Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e $\gamma = 0$, la relazione (4.9) è valida per ogni h .

Nota 4.3. Per quanto riguarda il termine forzante f_h si noti che $\forall v_h \in W_k(E)$, si osservi che

$$\langle f_h, v_h \rangle = (f, \Pi_{E,k-1}^0 v_h)_{0,E} = (\Pi_{E,k-1}^0 f, v_h)_{0,E}.$$

Dall'ortogonalità rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ segue che

$$\begin{aligned} \langle f_h, v_h \rangle - (f, v_h)_{0,\Omega} &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int (\Pi_{E,k-1}^0 f - f) v_h dx \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int (\Pi_{E,k-1}^0 f - f) (v_h - \Pi_{E,0}^0 v_h) dx \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} h_E^k |f|_{k,E} h_E |v_h|_{1,E} \\ &\leq h^{k+1} |f|_{k,\Omega} |v_h|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

dove la penultima minorazione segue dalla Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dal Lemma 4.1, richiedendo che $f \in H^k(\Omega)$.

Teorema 4.8 (Errore in $H^1(\Omega)$ [5]). Per h sufficientemente piccolo, il problema discreto (PV_h) ammette un'unica soluzione $u_h \in W_h$ e vale la seguente stima di errore

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k (\|u\|_{k+1,\Omega} + |f|_{k,\Omega}),$$

dove C è una costante che dipende da θ , \mathbf{b} e γ ma non da h .

Dimostrazione. Come conseguenza del Lemma 4.7, il problema discreto PV_h ammette unica soluzione $u_h \in W_h$. Inoltre, per ogni $h \leq h_0$ $\exists v_h^* \in W_h$ che verifica

$$\frac{B_h(u_h - u_I, v_h^*)}{\|v_h^*\|_{1,\Omega}} \geq \bar{C}_B \|u_h - u_I\|_{1,\Omega}.$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} \bar{C}_B \|u_h - u_I\|_{1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} &\leq B_h(u_h - u_I, v_h^*) \\ &= B_h(u_h, v_h^*) - B_h(u_I, v_h^*) \\ &= \langle f_h, v_h^* \rangle + B_h(\Pi_k^0 u - u_I, v_h^*) - B_h(\Pi_k^0 u, v_h^*) \\ &\quad + B(\Pi_k^0 u, v_h^*) + B(u - \Pi_k^0 u, v_h^*) - B(u, v_h^*) \\ &= \langle f_h - f, v_h^* \rangle + B_h(\Pi_k^0 u - u_I, v_h^*) \\ &\quad + (B(\Pi_k^0 u, v_h^*) - B_h(\Pi_k^0 u, v_h^*)) + B(u - \Pi_k^0 u, v_h^*). \end{aligned}$$

Dalla continuità degli operatori $B_h(\cdot, \cdot)$ e $B(\cdot, \cdot)$ e dal Lemma 4.1 segue che

$$\begin{aligned} \overline{C}_B \|u_h - u_I\|_{1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} &\leq \langle f_h - f, v_h^* \rangle \\ &\quad + C (\|\Pi_k^0 u - u_I\|_{1,\Omega} + \|u - \Pi_k^0 u\|_{1,\Omega}) \|v_h^*\|_{1,\Omega} \\ &\quad + (B(\Pi_k^0 u, v_h^*) - B_h(\Pi_k^0 u, v_h^*)) \\ &\leq \langle f_h - f, v_h^* \rangle + Ch^k \|u\|_{k+1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} \\ &\quad + (B(\Pi_k^0 u, v_h^*) - B_h(\Pi_k^0 u, v_h^*)). \end{aligned}$$

Inoltre, $\forall E \in \mathcal{T}_h$, come conseguenza del Lemma 4.5,

$$\overline{C}_B \|u_h - u_I\|_{1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} \leq \langle f_h - f, v_h^* \rangle + Ch^k \|u\|_{k+1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} + C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} h^k \|u\|_{k+1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega}.$$

Per concludere, come conseguenza della Nota 4.3, si ottiene la tesi:

$$\overline{C}_B \|u_h - u_I\|_{1,\Omega} \|v_h^*\|_{1,\Omega} \leq Ch^k (\|f\|_{k,\Omega} + C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} \|u\|_{k+1,\Omega}) \|v_h^*\|_{1,\Omega}.$$

□

Teorema 4.9 (Errore in $L^2(\Omega)$ [5]). *Per h sufficientemente piccolo, vale la seguente stima d'errore:*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} (\|u\|_{k+1,\Omega} + \|f\|_{k,\Omega}),$$

dove C è una costante che dipende da θ , \mathbf{b} e γ , ma non da h .

Dimostrazione. Sia $\psi \in H^2(\Omega) \cup H_0^1(\Omega)$ la soluzione del problema autoaggiunto

$$\mathfrak{L}^* \psi = u - u_h,$$

dove \mathfrak{L}^* è l'operatore autoaggiunto di

$$\mathfrak{L}u = -\nabla \cdot (\theta \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \gamma u.$$

Sia $\psi_I \in W_h$ la sua interpolata, per la quale vale

$$\|\psi - \psi_I\|_{1,\Omega} \leq Ch |\psi|_{2,\Omega} \leq Ch \|u - u_h\|_{0,\Omega}. \quad (4.10)$$

Allora

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= (\mathfrak{L}^* \psi, u - u_h)_{0,\Omega} = (\mathfrak{L}(u - u_h), \psi)_{0,\Omega} = B(u - u_h, \psi) \\ &= B(u, \psi - \psi_I) + B(u, \psi_I) - B(u_h, \psi) \\ &= B(u, \psi - \psi_I) + (f, \psi_I)_{0,E} + B_h(u_h, \psi_I) - \langle f_h, \psi_I \rangle - B(u_h, \psi) \\ &= B(u - u_h, \psi - \psi_I) + \langle f - f_h, \psi_I \rangle + B_h(u_h, \psi_I) - B(u_h, \psi_I) \\ &= B(u - u_h, \psi - \psi_I) + \langle f - f_h, \psi_I - \Pi_{k-1}^0 \psi_I \rangle \\ &\quad + B_h(u_h - \Pi_k^0 u, \psi_I) - B(u_h - \Pi_k^0 u, \psi_I) \\ &\quad + B_h(\Pi_k^0 u, \psi_I) - B(\Pi_k^0 u, \psi_I) \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
 \langle f - f_h, \psi_I - \Pi_{k-1}^0 \psi_I \rangle &\leq h^k |f|_{k,\Omega} \|\psi_I - \Pi_{k-1}^0 \psi_I\|_{0,\Omega} \\
 &\leq h^k |f|_{k,\Omega} \|\psi_I - \Pi_{k-1}^0 \psi\|_{0,\Omega} \\
 &\leq h^k |f|_{k,\Omega} (\|\psi - \psi_I\|_{0,\Omega} + \|\psi - \Pi_{k-1}^0 \psi\|_{0,\Omega}) \\
 &\leq h^{k+1} |f|_{k,\Omega} |\psi|_{2,\Omega}
 \end{aligned}$$

e, come conseguenza del Lemma 4.4,

$$B_h(u_h - \Pi_k^0 u, \psi_I) - B(u_h - \Pi_k^0 u, \psi_I) \leq C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} h^{k+1} \|u\|_{k+1,\Omega} \|u - u_h\|_{0,\Omega}.$$

Allora, per la continuità di $B(\cdot, \cdot)$, per il Teorema 4.9, e la Nota 4.1

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= B(u - u_h, \psi - \psi_I) + \langle f - f_h, \phi_I - \Pi_{k-1}^0 \psi_I \rangle \\
 &\quad + B_h(u_h - \Pi_k^0 u, \psi_I) - B(u_h - \Pi_k^0 u, \psi_I) \\
 &\quad + B_h(\Pi_k^0 u, \psi_I) - B(\Pi_k^0 u, \psi_I) \\
 &\leq Ch^k (\|u\|_{k+1,\Omega} + |f|_{k,\Omega}) \|\psi - \psi_I\|_{1,\Omega} + h^{k+1} |f|_{k,\Omega} |\psi|_{2,\Omega} \\
 &\quad + C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} h^{k+1} \|u\|_{k+1,\Omega} \|u - u_h\|_{0,\Omega} \\
 &\quad + C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} h^{k+1} \|u\|_{k+1,\Omega} \|\psi\|_{2,\Omega} \\
 &\leq C_{\theta, \mathbf{b}, \gamma} h^{k+1} (\|u\|_{k+1,\Omega} + |f|_{k,\Omega}) \|u - u_h\|_{0,\Omega}
 \end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Capitolo 5

Implementazione in $2D$

I metodi agli elementi virtuali risultano essere più costosi dei metodi agli elementi finiti, in quanto la costruzione dei sistemi lineari richiede l'assemblaggio di operatori di proiezione locali. Poiché le operazioni tra matrice-vettore e matrice-matrice risultano essere più efficienti rispetto alle operazioni element-wise che richiedono l'utilizzo di cicli *for*, nel seguito verrà utilizzato un approccio totalmente basato sulle matrici sia per l'assemblaggio degli operatori di proiezione locali che per la costruzione delle matrici di stiffness locali, il quale segue quanto fatto in [6].

L'assemblaggio degli operatori di proiezione locali richiede il calcolo di integrali che coinvolgono monomi. Per poter effettuare tali calcoli in modo efficiente, si può procedere utilizzando la matrice di *Vandermonde*. In particolare,

1. per il calcolo degli integrali sul dominio $E \in \mathcal{T}_h$, si consideri un insieme di N_Q^E punti di quadratura \mathbf{x}_i^E con $i = 1, \dots, N_Q^E$, la relativa matrice di Vandermonde $\mathbf{V}_k^E \in \mathbb{R}^{N_Q^E \times n_k}$, le cui entrate sono definite come

$$(\mathbf{V}_k^E)_{i\alpha} = m_\alpha(\mathbf{x}_i^E) \quad \forall i = 1, \dots, N_Q^E, \quad \alpha = 1, \dots, n_k,$$

e il relativo vettore dei pesi di quadratura $\mathbf{w}^E \in \mathbb{R}^{N_Q^E}$. Si definisca la matrice $\mathbf{W}^E \in \mathbb{R}^{N_Q^E \times N_Q^E}$ avente sulla diagonale i pesi della formula di quadratura, collezionati nel vettore \mathbf{w}^E .

2. In modo analogo a quanto fatto su E , consideriamo l'insieme degli $N_Q^{\partial E}$ nodi di quadratura di Gauss-Lobatto $\mathbf{x}_i^{\partial E} \forall i = 1, \dots, N_Q^{\partial E} = (k-1)N^{V,E} + N^{V,E}$, dove $N^{V,E}$ è il numero di vertici del poligono E . Si indichi con $\mathbf{V}_k^{\partial E} \in \mathbb{R}^{N_Q^{\partial E} \times n_k}$ la relativa matrice di Vandermonde, le cui entrate sono definite come

$$(\mathbf{V}_k^{\partial E})_{i\alpha} = m_\alpha(\mathbf{x}_i^{\partial E}) \quad \forall i = 1, \dots, N_Q^{\partial E}, \quad \alpha = 1, \dots, n_k.$$

e con $\mathbf{W}^{\partial E} \in \mathbb{R}^{N_Q^{\partial E} \times N_Q^{\partial E}}$ la matrice avente sulla diagonale i pesi di quadratura $\mathbf{w}^{\partial E}$. In particolare, i punti di quadratura su ciascun lato sono stati ottenuti

mappando i $k + 1$ nodi di Gauss-Lobatto definiti su un lato di riferimento \hat{e} , cui nel seguito si farà riferimento con $\hat{\mathbf{x}}_\ell^{\partial E}$, con pesi $\hat{\mathbf{w}}_\ell^{\partial E}$. I pesi di quadratura $\mathbf{w}_i^{\partial E}$ sono definiti come

$$\mathbf{w}_i^{\partial E} = \frac{\hat{\mathbf{w}}_\ell^{\partial E}}{|\hat{e}|} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_{h,E} : \\ \mathbf{x}_i \in e}} |e|,$$

dove ℓ è l'indice locale corrispondente all'indice globale i . Indicato con $\mathbf{n}_e = (n_{e,x}, n_{e,y})$ il versore normale ortogonale a $e \in \mathcal{E}_{h,E}$ avente direzione uscente da E , si definiscono i vettori $\mathbf{w}_x^{\partial E}, \mathbf{w}_y^{\partial E} \in \mathbb{R}^{N_Q^{\partial E}}$ come i vettori di componenti

$$(\mathbf{w}_x^{\partial E})_i = \frac{\hat{\mathbf{w}}_\ell^{\partial E}}{|\hat{e}|} \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,E} : \mathbf{x}_i \in e} |e| n_{e,x}, \quad (\mathbf{w}_y^{\partial E})_i = \frac{\hat{\mathbf{w}}_\ell^{\partial E}}{|\hat{e}|} \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,E} : \mathbf{x}_i \in e} |e| n_{e,y}$$

rispettivamente.

Ricordando la convezione utilizzata per l'indicizzazione dei monomi nel caso 2D definita in (3.7), le derivate dei monomi possono essere calcolate come

$$\frac{\partial m_\alpha}{\partial x} = \frac{\alpha_x}{h_E} m_\ell, \quad \text{se } \begin{cases} \ell = \alpha - \alpha_x - \alpha_y \\ \alpha_x > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial m_\alpha}{\partial y} = \frac{\alpha_y}{h_E} m_\ell, \quad \text{se } \begin{cases} \ell = \alpha - \alpha_x - \alpha_y - 1 \\ \alpha_y > 0 \end{cases}$$

e 0 negli altri casi. Definite le matrici $\mathbf{D}_{k,x}^E, \mathbf{D}_{k,y}^E \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ come

$$(\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\ell\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha_x}{h_E} & \text{se } \ell = \alpha - \alpha_x - \alpha_y, \quad \alpha_x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(\mathbf{D}_{k,y}^E)_{\ell\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha_y}{h_E} & \text{se } \ell = \alpha - \alpha_x - \alpha_y - 1, \quad \alpha_y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ottiene

$$\frac{\partial m_\alpha(\mathbf{x}_i^E)}{\partial x} = (\mathbf{V}_k^E)_{i\ell} (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\ell\alpha},$$

con $\ell = \alpha - \alpha_x - \alpha_y$, $\alpha_x > 0$. Poiché per altri valori di ℓ , il prodotto risulta nullo,

$$\frac{\partial m_\alpha(\mathbf{x}_i^E)}{\partial x} = (\mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,x}^E)_{i\alpha}.$$

Si procede in modo analogo per la coordinata y . Si definiscono, allora, le matrici di Vandermonde delle derivate dei monomi come

$$\mathbf{V}_{k,x}^E = \mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,x}^E, \quad \mathbf{V}_{k,y}^E = \mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,y}^E.$$

Definita la matrice $\mathbf{L}_k^E \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ come

$$\mathbf{L}_k^E = (\mathbf{D}_{k,x}^E)^2 + (\mathbf{D}_{k,y}^E)^2,$$

la matrice di Vandermonde associata al laplaciano dei monomi si scrive come

$$\mathbf{V}_{k,\Delta}^E = \mathbf{V}_k^E \mathbf{L}_k^E.$$

In particolare

$$(\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\ell\alpha}^2 = \begin{cases} \frac{\alpha_x(\alpha_x-1)}{h_E^2} & \text{se } \ell = \alpha - 2\alpha_x - 2\alpha_y + 1, \quad \alpha_x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(\mathbf{D}_{k,y}^E)_{\ell\alpha}^2 = \begin{cases} \frac{\alpha_y(\alpha_y-1)}{h_E^2} & \text{se } \ell = \alpha - 2\alpha_x - 2\alpha_y - 1, \quad \alpha_y > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \Delta m_\alpha(\mathbf{x}_i^E) = (\mathbf{V}_k^E)_{i\ell} (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\ell\alpha}^2 + (\mathbf{V}_k^E)_{ij} (\mathbf{D}_{k,y}^E)_{j\alpha}^2,$$

con $\ell = \alpha - 2\alpha_x - 2\alpha_y + 1$, $\alpha_x > 1$ e $j = \alpha - 2\alpha_x - 2\alpha_y - 1$, $\alpha_y > 1$, oppure considerando che le altre entrate sono nulle,

$$\Delta m_\alpha(\mathbf{x}_i^E) = \left(\mathbf{V}_k^E (\mathbf{D}_{k,x}^E)^2 \right)_{i\alpha} + \left(\mathbf{V}_k^E (\mathbf{D}_{k,y}^E)^2 \right)_{i\alpha} = (\mathbf{V}_k^E \mathbf{L}_k^E)_{i\alpha}.$$

5.1 Calcolo di $\Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i$

Nella Sezione 3.2 si è definito l'operatore di proiezione $\Pi_{E,k}^\nabla$ rispetto al prodotto scalare in $H_0^1(E)$ e valutati i coefficienti $\mathbf{S}_{\alpha i}^*$ delle combinazioni $\varphi_i \in V_k(E) \Rightarrow \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i = \sum_{\alpha=1}^{n_k} \mathbf{S}_{\alpha i}^* m_\alpha \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ come soluzione del sistema

$$\mathbf{G} \mathbf{S}^* = \mathbf{B}$$

Ricordando la definizione della matrice \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} P_0(m_1) & P_0(m_2) & \cdots & P_0(m_{n_k}) \\ 0 & (\nabla m_2, \nabla m_2)_{0,E} & \cdots & (\nabla m_2, \nabla m_{n_k})_{0,E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (\nabla m_{n_k}, \nabla m_2)_{0,E} & \cdots & (\nabla m_{n_k}, \nabla m_{n_k})_{0,E} \end{bmatrix},$$

per $\forall \alpha, \beta = 2, \dots, n_k$,

$$(\mathbf{G})_{\alpha,\beta} = (\nabla m_\alpha, \nabla m_\beta)_{0,E} = \int_E \frac{\partial m_\alpha}{\partial x} \frac{\partial m_\beta}{\partial x} + \int_E \frac{\partial m_\alpha}{\partial y} \frac{\partial m_\beta}{\partial y},$$

si può calcolare osservando che

$$\begin{aligned} \int_E \frac{\partial m_\alpha}{\partial x} \frac{\partial m_\beta}{\partial x} &= (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\ell\alpha} \left(\sum_{i=1}^{N_Q^E} (\mathbf{V}_k^E)_{i\ell} \mathbf{W}_{ii}^E (\mathbf{V}_k^E)_{ij} \right) (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{j\beta} \\ &= \left((\mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,x}^E)^T \mathbf{W}^E (\mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,x}^E) \right)_{\alpha\beta} = \left((\mathbf{V}_{k,x}^E)^T \mathbf{W}^E (\mathbf{V}_{k,x}^E) \right)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

con $\ell = \alpha - \alpha_x - \alpha_y$, se $\alpha_x > 0$ e $j = \beta - \beta_x - \beta_y$, $\beta_x > 0$. Procedendo in modo analogo per la coordinata y si ottiene

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{V}_{k,x}^E)^T \mathbf{W}^E (\mathbf{V}_{k,x}^E) + (\mathbf{V}_{k,y}^E)^T \mathbf{W}^E (\mathbf{V}_{k,y}^E), \quad (5.1)$$

dove $\tilde{\mathbf{G}}$ è la matrice \mathbf{G} la cui prima riga è stata sostituita dal vettore nullo.

Per quanto riguarda la prima riga di \mathbf{G} , ovvero per quanto concerne il calcolo di

$$P_0(m_\alpha) = \begin{cases} (m_\alpha, 1)_{0,\partial E}, & \text{se } k = 1 \\ (m_\alpha, 1)_{0,E}, & \text{se } k \geq 2 \end{cases}, \quad \forall \alpha = 1, \dots, n_k,$$

essi possono essere calcolati usando la definizione della matrice di Vandermonde e del vettore dei pesi sul bordo di E per $k = 1$, sul dominio di E altrimenti. Pertanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \tilde{\mathbf{G}} + \begin{bmatrix} (\mathbf{w}^{\partial E})^T \mathbf{V}_k^{\partial E} \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times n_k} \end{bmatrix}, & \text{se } k = 1, \\ \mathbf{G} &= \tilde{\mathbf{G}} + \begin{bmatrix} (\mathbf{w}^E)^T \mathbf{V}_k^E \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times n_k} \end{bmatrix}, & \text{se } k \geq 2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Per quanto riguarda la costruzione della matrice $\tilde{\mathbf{B}}$, la quale corrisponde alla matrice \mathbf{B} la cui prima riga è stata sostituita dal vettore nullo, si ricordi che l'entrata (α, i) di tale matrice $\forall \alpha = 2, \dots, n_k, i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ è definita come

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\alpha i} = (\nabla m_\alpha, \nabla \varphi_i)_{0,E} = - \int_E \Delta m_\alpha \varphi_i + \int_{\partial E} \frac{\partial m_\alpha}{\partial n} \varphi_i.$$

Poiché $\Delta m_\alpha \in \mathbb{P}_{k-2}(E)$, il primo termine si può calcolare sfruttando la definizione della matrice \mathbf{L}_k^E e i gradi di libertà interni. Pertanto, $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}, \alpha = 2, \dots, n_k$

$$\begin{aligned}
 - \int_E \Delta m_\alpha \varphi_i &= - \sum_{\beta=1}^{n_k-2} (\mathbf{L}_k^E)_{\beta,\alpha} \int_E m_\beta \varphi_i \\
 &= -|E| \sum_{\beta=1}^{n_k-2} (\mathbf{L}_k^E)_{\beta,\alpha} \left(\frac{1}{|E|} \int_E m_\beta \varphi_i \right) \\
 &= -|E| \sum_{\beta=1}^{n_k-2} (\mathbf{L}_k^E)_{\beta,\alpha} \text{dof}_{N_E^{\text{dof}} - n_k - 2 + \beta}(\varphi_i) \\
 &= -|E| \sum_{\beta=1}^{n_k-2} (\mathbf{L}_k^E)_{\beta,\alpha} \delta_{N_E^{\text{dof}} - n_k - 2 + \beta, i}. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

In forma compatta, tale membro è pari a

$$\left[\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n_k \times N_Q^{\partial E}} - |E| (\mathbf{L}_k^E (1 : n_k - 2, :))^T \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k - 2} \right].$$

Si osservi che tale termine è nullo per le funzioni di base relative ai gradi di libertà di bordo.

Per quanto riguarda il secondo integrale, si osservi che l'integranda è un polinomio di grado $(k-1) + k = 2k-1$ e con la scelta dei nodi di Gauss-Lobatto su ogni lato è possibile integrare in modo esatto (nei limiti della precisione di macchina) anche il secondo membro. Tale termine risulta essere non nullo soltanto per la funzioni di base relative ai gradi di libertà di bordo. Pertanto, $\forall i = 1, \dots, N_Q^{\partial E}$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial E} \frac{\partial m_\alpha}{\partial n} \varphi_i &= \int_{\partial E} \nabla m_\alpha \cdot \mathbf{n} \varphi_i \\
 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,E}} \int_e \frac{\partial m_\alpha}{\partial x} n_{e,x} \varphi_i + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,E}} \int_e \frac{\partial m_\alpha}{\partial y} n_{e,y} \varphi_i \\
 &= \sum_{\beta=1}^{n_k-1} (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\beta,\alpha} \int_e m_\beta n_{e,x} \varphi_i + \sum_{\beta=1}^{n_k-1} (\mathbf{D}_{k,y}^E)_{\beta,\alpha} \int_e m_\beta n_{e,y} \varphi_i \\
 &= \sum_{\beta=1}^{n_k-1} (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\beta,\alpha} \sum_{j=1}^{N_Q^{\partial E}} (\mathbf{w}_x^{\partial E})_j m_\beta (\mathbf{x}_j^{\partial E}) \delta_{ij} \\
 &\quad + \sum_{\beta=1}^{n_k-1} (\mathbf{D}_{k,y}^E)_{\beta,\alpha} \sum_{j=1}^{N_Q^{\partial E}} (\mathbf{w}_y^{\partial E})_j m_\beta (\mathbf{x}_j^{\partial E}) \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

In forma compatta tale termine si scrive come

$$(\mathbf{V}_{k,x}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} + (\mathbf{V}_{k,y}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} \in \mathbb{R}^{n_k \times (N_E^{\text{dof}} - n_k - 2)}.$$

Allora, la matrice $\tilde{\mathbf{B}}$ è data da

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left[(\mathbf{V}_{k,x}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} + (\mathbf{V}_{k,y}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} \quad -|E| (\mathbf{L}_k^E(1 : n_{k-2}, :))^T \right]. \quad (5.4)$$

Si noti che la prima riga di tale matrice è nulla.

Inoltre, $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$

- Per $k = 1$

$$P_0(\varphi_i) = \int_{\partial E} \varphi_i = (\mathbf{w}_k^{\partial E})_i \quad \forall i = 1, \dots, N_Q^E,$$

ovvero tale integrale è non nullo soltanto per le funzione di base relative ai gradi di libertà di bordo. Si ricordi che per $k = 1$, non sono definiti i gradi di libertà interni. Da ciò consegue che per $k = 1$

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} + \begin{bmatrix} (\mathbf{w}_k^{\partial E})^T \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times N_E^{\text{dof}}} \end{bmatrix}.$$

- Per $k \geq 2$

$$P_0(\varphi_i) = \int_E \varphi_i = |E| \Leftrightarrow i = N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + 1,$$

ovvero tale integrale è non nullo soltanto per la prima funzione di base relativa ai gradi di libertà interni. Da ciò consegue che per $k \geq 2$

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{1 \times (N_E^{\text{dof}} - n_{k-2})} & |E| & \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{1 \times (n_{k-2}-1)} \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times N_E^{\text{dof}}} & & \end{bmatrix}.$$

5.2 Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i$

Come visto nella Sezione 3.3.2, i coefficienti $\mathbf{T}^{*,k-1}(:, i)$ delle combinazioni $\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i = \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} \mathbf{T}_{\alpha i}^{*,k-1} m_\alpha \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ sono soluzione del sistema

$$\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{T}^{*,k-1}(:, i) = \mathbf{C}^{k-1}(:, i).$$

La matrice di massa $\mathbf{H}^{k-1} \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times n_{k-1}}$ in funzione della matrice di Vandermonde si può scrivere come

$$\mathbf{H}^{k-1} = \int_E \mathbf{m} \mathbf{m}^T = (\mathbf{V}_{k-1}^E)^T \mathbf{W}^E \mathbf{V}_{k-1}^E.$$

Per quanto riguarda, invece, la matrice $\mathbf{C}^{k-1} \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times N_E^{\text{dof}}}$, le cui entrate sono definite come

$$\mathbf{C}_{\alpha i}^{k-1} = (m_\alpha, \varphi_i)_{0,E} = \begin{cases} (m_\alpha, \varphi_i)_{0,E} & \text{se } \alpha = 1, \dots, n_{k-2} \\ (m_\alpha, \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i)_{0,E} & \text{se } \alpha = n_{k-2} + 1, \dots, n_{k-1} \end{cases}$$

se $k \geq 2$,

- per $\alpha = 1, \dots, n_{k-2}$

$$\mathbf{C}_{\alpha i}^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} \\ |E| & \text{se } i = N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + 1, \dots, N_E^{\text{dof}} \end{cases}, \quad (5.5)$$

- per $\alpha = n_{k-2} + 1, \dots, n_{k-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\alpha i}^{k-1} &= (m_\alpha, \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i)_{0,E} = \sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{S}_{\beta i}^* (m_\alpha, m_\beta)_{0,E} \\ &= \sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{S}_{\beta i}^* \mathbf{H}_{\alpha\beta}^{k-1} = (\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{S}^*)_{\alpha i}. \end{aligned}$$

Allora

$$\mathbf{C}^{k-1} = \begin{bmatrix} O \in \mathbb{R}^{n_{k-2} \times (N_E^{\text{dof}} - n_{k-2})} & |E| I_{n_{k-2}} \\ (\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{S}^*)_{(n_{k-2} + 1 : n_{k-1}, :)} \end{bmatrix}.$$

Nel caso particolare $k = 1$, la matrice si riduce a

$$\mathbf{C}_{1i}^{k-1} = (1, \varphi_i)_{0,E} = (1, \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i)_{0,E} = (\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{S}^*)_{1i} \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}.$$

5.3 Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i$

L'operatore $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla$ è stato definito tramite la condizione di ortogonalità (3.30), la quale componente a componente $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \Pi_{E,k-1}^0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, p \right) & \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}(E) \\ \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \Pi_{E,k-1}^0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, p \right) & \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}(E) \end{aligned}$$

Posto $\Pi_{E,k-1}^0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} (\mathbf{T}_x^{*,k-1})_{\alpha i} m_\alpha^{k-1}$, i coefficienti $\mathbf{T}_x^{*,k-1}(:, i) \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ si ottengono come soluzione del sistema

$$\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{T}_x^{*,k-1}(:, i) = \mathbf{E}_x^{k-1}(:, i),$$

dove la matrice $\mathbf{E}_x^{k-1} \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times N_E^{\text{dof}}}$ ha entrate definite da

$$(\mathbf{E}_x^{k-1})_{\alpha i} = \left(m_\alpha^{k-1}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{0,E}. \quad (5.6)$$

Applicando le formule di integrazione di Green, $\forall \alpha = 1, \dots, n_{k-1}$ e $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$

$$\left(m_\alpha^{k-1}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{0,E} = - \int_E \varphi_i \frac{\partial m_\alpha^{k-1}}{\partial x} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,E}} \int_e \varphi_i m_\alpha^{k-1} n_{e,x}. \quad (5.7)$$

Il primo termine del membro destro si valuta come

$$\begin{aligned} - \int_E \varphi_i \frac{\partial m_\alpha^{k-1}}{\partial x} &= - \sum_{\beta=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\beta\alpha} \int_E \varphi_i m_\beta^{k-2} \\ &= -|E| \sum_{\beta=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\beta\alpha} \delta_{i, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + \beta} \end{aligned} \quad (5.8)$$

il secondo, invece,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,E}} \int_e \varphi_i m_\alpha^{k-1} n_{e,x} = \sum_{j=1}^{N_Q^{\partial E}} (\mathbf{w}_x^{\partial E})_j m_\alpha^{k-1} (\mathbf{x}_j^{\partial E}) \delta_{ij} = (\mathbf{V}_{k-1}^{\partial E})_{\alpha i}^T (\mathbf{W}_x^{\partial E})_{ii}.$$

ed è non nullo soltanto per $i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2}$. Da ciò consegue che

$$\mathbf{E}_x^{k-1} = \left[(\mathbf{V}_{k-1}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} \quad -|E| (\mathbf{D}_{k,x}^E (1 : n_{k-2}, 1 : n_{k-1}))^T \right] \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times N_E^{\text{dof}}}. \quad (5.9)$$

In modo analogo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_y^{k-1} &= \left[(\mathbf{V}_{k-1}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} \quad -|E| (\mathbf{D}_{k,y}^E (1 : n_{k-2}, 1 : n_{k-1}))^T \right] \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times N_E^{\text{dof}}}. \quad (5.10) \\ &\Rightarrow \mathbf{H}^{k-1} \mathbf{T}_y^{*,k-1}(:, i) = \mathbf{E}_y^{k-1}(:, i). \end{aligned}$$

Notiamo che per $k = 1$, il secondo blocco presente nelle matrici precedentemente definite va considerato come vuoto.

5.4 Matrice di rigidezza locale

Il problema discretizzato (PV_h) richiede la costruzione della matrice di stiffness locale $\mathbf{K}^E \in \mathbb{R}^{N_E^{\text{dof}} \times N_E^{\text{dof}}}$ associata alla forma bilineare discreta locale $B_h^E(\cdot, \cdot)$ definita in (3.26) e del termine forzante $\langle f_h, \cdot \rangle_E$ definito in (3.27). In particolare, la matrice locale di stiffness può essere decomposta come

$$\mathbf{K}^E = \mathbf{K}_\theta^E + \mathbf{K}_b^E + \mathbf{K}_\gamma^E, \quad (5.11)$$

dove \mathbf{K}_θ^E , \mathbf{K}_b^E e \mathbf{K}_γ^E sono le matrici associate alle forme bilineari locali discrete definite in (3.23), (3.24) e (3.25) rispettivamente. Inoltre, si definisca $\mathbf{b}^E \in \mathbb{R}^{N_E^{\text{dof}}}$ il vettore associato al termine forzante.

5.4.1 Matrice di diffusione

Calcoliamo la matrice locale relativa al termine di diffusione

$$a_h^E(\varphi_i, \varphi_j) = \int_E \theta [\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i] \cdot [\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_j] + S^E((I - \Pi_{E,k}^\nabla) \varphi_i, (I - \Pi_{E,k}^\nabla) \varphi_j)$$

in funzione della matrice di Vandermonde. Si verifica che

$$\begin{aligned} (\theta \Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i, \Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_j)_{0,E} &= \left(\theta \Pi_{E,k-1}^0 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right), \Pi_{E,k-1}^0 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) \right)_{0,E} \\ &\quad + \left(\theta \Pi_{E,k-1}^0 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right), \Pi_{E,k-1}^0 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) \right)_{0,E} \\ &= \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} (\mathbf{T}_x^{*,k-1})_{\beta i} (\mathbf{T}_x^{*,k-1})_{\alpha j} (\theta m_\beta^{k-1}, m_\alpha^{k-1})_{0,E} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} (\mathbf{T}_y^{*,k-1})_{\beta i} (\mathbf{T}_y^{*,k-1})_{\alpha j} (\theta m_\beta^{k-1}, m_\alpha^{k-1})_{0,E} \end{aligned}$$

Indicata con

$$\mathbf{H}_\theta^{k-1} = \int_E \theta \mathbf{m}^{k-1} (\mathbf{m}^{k-1})^T = (\mathbf{V}_{k-1}^E)^T \mathbf{W}_\theta^E \mathbf{V}_{k-1}^E,$$

dove

$$(\mathbf{W}_\theta^E)_{ij} = \theta (\mathbf{x}_i^E) (\mathbf{w}^E)_i \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N_Q^E,$$

si ottiene

$$(\theta \Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i, \Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_j)_{0,E} = \left((\mathbf{T}_x^{*,k-1})^T \mathbf{H}_\theta^{k-1} \mathbf{T}_x^* \right)_{ij} + \left((\mathbf{T}_y^{*,k-1})^T \mathbf{H}_\theta^{k-1} \mathbf{T}_y^{*,k-1} \right)_{ij}.$$

Inoltre, utilizzando la scelta classica per il termine di stabilità $S^E(\cdot, \cdot)$ definita in 3.22, si verifica che

$$\begin{aligned} S^E(\varphi_i - \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i, \varphi_j - \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_j) &= h_E^{d-2} \sum_{r=1}^{N_E^{\text{dof}}} \text{dof}_r(\varphi_i - \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i) \text{dof}_r(\varphi_j - \Pi_{E,k}^\nabla \varphi_j) \\ &= h_E^{d-2} \left[(\mathbf{I}^k - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B})^T (\mathbf{I}^k - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}) \right]_{ij}, \end{aligned}$$

dove la matrice \mathbf{D} era stata definita in (3.14) come $\mathbf{D}_{j\alpha} = \text{dof}_j(m_\alpha^k) \forall j = 1, \dots, N_E^{\text{dof}} \forall \alpha = 1, \dots, n_k$.

Quindi, la matrice locale di stiffness in funzione degli operatori di proiezione locali si scrive come

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\theta^E &= (\mathbf{T}_x^{*,k-1})^T \mathbf{H}_\theta^{k-1} \mathbf{T}_x^{*,k-1} + (\mathbf{T}_y^{*,k-1})^T \mathbf{H}_\theta^{k-1} \mathbf{T}_y^{*,k-1} \\ &\quad + \|\theta\|_{\infty,E} h_E^{d-2} (\mathbf{I}^k - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B})^T (\mathbf{I}^k - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Si noti che, il prodotto del termine di stabilità per $\|\theta\|_{\infty,E}$ è stato effettuato affinché tale termine si annulli quando $\theta \equiv 0$ in Ω .

Calcolo di \mathbf{D} con la matrice di Vandermonde

- Per quanto riguarda i gradi di libertà di bordo

$$(\mathbf{D})_{ij} = \text{dof}_i(m_j) = m_j (\mathbf{x}_i^{\partial E}) = (\mathbf{V}_k^{\partial E})_{ij}$$

$$\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} \text{ e } \forall j = 1, \dots, n_k.$$

- Per quanto riguarda, invece, i gradi interni

$$(\mathbf{D})_{ij} = \text{dof}_i(m_j) = \frac{1}{|E|} \left(m_j, m_{i-N_E^{\text{dof}}+n_{k-2}} \right)_{0,E}$$

$$\forall i = N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + 1, \dots, N_E^{\text{dof}} \text{ e } \forall j = 1, \dots, n_k.$$

Allora, la matrice \mathbf{D} si valuta come

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k^{\partial E} \\ \frac{1}{|E|} \mathbf{H}^k(1 : n_{k-2}, :) \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

5.4.2 Matrice di convezione

Calcoliamo la matrice locale relativa al termine di convezione

$$b_h^E(\varphi_i, \varphi_j) = \int_E [\mathbf{b} \cdot \Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i] [\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_j]$$

Allora, relativamente alla base di scaled monomial, ponendo $\mathbf{b} = (b_x, b_y)^T$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_b^E)_{ij} &= (\mathbf{b} \cdot \Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i, \Pi_{E,k-1}^0 \varphi_j)_{0,E} \\ &= \left(b_x \Pi_{E,k-1}^0 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right), \Pi_{E,k-1}^0 \varphi_j \right)_{0,E} + \left(b_y \Pi_{E,k-1}^0 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right), \Pi_{E,k-1}^0 \varphi_j \right)_{0,E} \\ &= \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} (\mathbf{T}_x^{*,k-1})_{\alpha i} \mathbf{T}_{\beta j}^{*,k-1} (b_x m_\alpha^{k-1}, m_\beta^{k-1})_{0,E} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} (\mathbf{T}_y^{*,k-1})_{\alpha i} \mathbf{T}_{\beta j}^{*,k-1} (b_y m_\alpha^{k-1}, m_\beta^{k-1})_{0,E} \end{aligned}$$

Indicate con

$$\mathbf{H}_{b_x}^{k-1} = \int_E b_x \mathbf{m}^{k-1} (\mathbf{m}^{k-1})^T = (\mathbf{V}_{k-1}^E)^T \mathbf{W}_{b_x}^E \mathbf{V}_{k-1}^E,$$

$$\mathbf{H}_{b_y}^{k-1} = \int_E b_y \mathbf{m}^{k-1} (\mathbf{m}^{k-1})^T = (\mathbf{V}_{k-1}^E)^T \mathbf{W}_{b_y}^E \mathbf{V}_{k-1}^E,$$

dove

$$(\mathbf{W}_{b_x}^E)_{ij} = b_x (\mathbf{x}_i^E) (\mathbf{w}^E)_i \delta_{ij}, \quad (\mathbf{W}_{b_y}^E)_{ij} = b_y (\mathbf{x}_i^E) (\mathbf{w}^E)_i \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, N_Q^E,$$

si ottiene

$$\mathbf{K}_b^E = (\mathbf{T}_x^{*,k-1})^T \mathbf{H}_{b_x}^{k-1} \mathbf{T}_x^{*,k-1} + (\mathbf{T}_y^{*,k-1})^T \mathbf{H}_{b_y}^{k-1} \mathbf{T}_y^{*,k-1}.$$

5.4.3 Matrice di reazione

Calcoliamo la matrice locale relativa al termine di reazione

$$c_h^E(\varphi_i, \varphi_j) = \int_E \gamma [\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i] [\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_j],$$

Allora, relativamente alla base di scaled monomial

$$(\mathbf{K}_\gamma^E)_{ij} = (\gamma \Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i, \Pi_{E,k-1}^0 \varphi_j)_{0,E} = \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} \mathbf{T}_{\beta i}^{*,k-1} \mathbf{T}_{\alpha j}^{*,k-1} (\gamma m_\beta^{k-1}, m_\alpha^{k-1})_{0,E}$$

Indicata con

$$\mathbf{H}_\gamma^{k-1} = \int_E \gamma \mathbf{m}^{k-1} (\mathbf{m}^{k-1})^T = (\mathbf{V}_{k-1}^E)^T \mathbf{W}_\gamma^E \mathbf{V}_{k-1}^E,$$

dove

$$(\mathbf{W}_\gamma^E)_{ij} = \gamma (\mathbf{x}_i^E) (\mathbf{w}^E)_i \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N_Q^E,$$

si ottiene

$$(\mathbf{K}_\gamma^E)_{ij} = \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} \mathbf{T}_{\beta i}^{*,k-1} \mathbf{T}_{\alpha j}^{*,k-1} (\mathbf{H}_\gamma^{k-1})_{\beta,\alpha} = \left((\mathbf{T}^{*,k-1})^T \mathbf{H}_\gamma^{k-1} \mathbf{T}^{*,k-1} \right)_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_\gamma^E = (\mathbf{T}^{*,k-1})^T \mathbf{H}_\gamma^{k-1} \mathbf{T}^{*,k-1}.$$

5.4.4 Termine forzante

Il termine forzante, $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$, è dato da

$$\begin{aligned}
 \langle f_h, \varphi_i \rangle_E &= \int_E f \Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i \\
 &= \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} \mathbf{T}_{\alpha i}^{*,k-1} \int_E f m_{\alpha}^{k-1} \\
 &= \sum_{j=1}^{N_Q^E} \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} \mathbf{T}_{\alpha i}^{*,k-1} \mathbf{W}_{jj}^E (\mathbf{V}_{k-1}^E)_{j\alpha} f(\mathbf{x}_j^E) \\
 &= \left((\mathbf{V}_{k-1}^E \mathbf{T}^{*,k-1})^T \mathbf{W}^E \mathbf{f}^E \right)_i
 \end{aligned}$$

dove il vettore $\mathbf{f}^E \in \mathbb{R}^{N_Q^E}$ è tale che $\mathbf{f}_j^E = f(\mathbf{x}_j^E) \forall j = 1, \dots, N_Q^E$. Allora,

$$\mathbf{b}^E = (\mathbf{V}_{k-1}^E \mathbf{T}^{*,k-1})^T \mathbf{W}^E \mathbf{f}^E.$$

Capitolo 6

La scelta della base polinomiale

La base dei monomi scalati $\mathcal{M}_k(E)$ ampiamente discussa nei capitoli precedenti risulta essere vantaggiosa da un punto di vista computazionale, ma influenza negativamente il numero di condizionamento della matrice di stiffness per valori (moderatamente) alti del grado polinomiale k e in presenza di *badly-shaped polygon*, come si evince in [3].

Come evidenziato nella Nota 3.2, la scelta della base polinomiale influisce sia sulla definizione che sul calcolo degli operatori di proiezione coinvolti nella costruzione della forma bilineare che descrive il problema discretizzato (PV_h).

In particolare, la scelta della base polinomiale è determinante nella definizione dei gradi di libertà interni.

Nel seguito, pertanto, verrà dapprima modificata la base polinomiale utilizzata nelle condizioni di ortogonalità che definiscono i proiettori locali e, successivamente, verranno ridefiniti i gradi di libertà interni in funzione della nuova base. Si veda la Tabella 6.1 per maggiori chiarimenti. Tutto ciò ha lo scopo di evidenziare come la base polinomiale abbia influenza sul numero di condizionamento e sul tasso di convergenza del metodo.

Si noti che una variazione della base polinomiale e, in particolare, la ridefinizione dei gradi di libertà interni in funzione di quest'ultima, come si potrà notare dagli esperimenti condotti nella Sezione 6.5, ha principalmente due effetti ([2]):

- influire direttamente sul numero di condizionamento della matrice di rigidità;
- influirvi indirettamente, tramite il termine di stabilità.

Quindi, nel seguito verranno analizzate due diverse basi polinomiale che si propongono come alternative all'usuale base dei polinomi $\mathcal{M}_k(E)$, ovvero

Operatore di proiezione Π definito tramite la condizione di ortogonalità $(q_\alpha, \Pi v)_{0,E} = (q_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n_k} c_\beta q_\beta)_{0,E}$		Gradi di libertà interni $\frac{1}{ E }(q_\alpha, v)_{0,E}$
Approccio classico	monomi	monomi
Approccio ibrido	base polinomiale alternativa (Eig, EigReortho o MGSReortho)	monomi
Ridefinizione dei gradi di libertà	base polinomiale alternativa (Eig, EigReortho o MGSReortho)	base polinomiale alternativa (Eig, EigReortho o MGSReortho)

Tabella 6.1: Diversi approcci utilizzati nella costruzione VEM in $2D$, a seconda della base polinomiale \mathbf{q} utilizzata.

- una base polinomiale ortonormale ottenuta tramite l’algoritmo di ortogonalizzazione modificato di Gram-Schmidt presentata in [4], a cui, nel seguito, si farà riferimento con il nome *MGSReortho*;
- una base di polinomi definita tramite la procedura di ortogonalizzazione mostrata in [3], a cui si farà riferimento con l’appellativo *Eig*.

6.1 Base *Eig*

La base polinomiale proposta in [3] è un’alternativa alla scelta classica dei monomi scalati, cui consegue un piccolo aumento del costo computazionale, ma che consente un notevole incremento nella *reliability* del metodo, limitando il numero di condizionamento delle matrici locali proprie degli elementi *badly shaped*.

In particolare, la base polinomiale dello spazio $\mathbb{P}_k(E)$ dei polinomi di ordine $\leq k$ sul generico elemento $E \in \mathcal{T}_h$ è definita come l’unione di

- una base $L^2(E)$ -ortonormale dello spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E)$, costruita a partire dalla diagonalizzazione della matrice di massa relativa alla base monomiale dello stesso spazio;
- un insieme ortonormale rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ di polinomi ricavati ortonormalizzando un set di funzioni ottenute rimuovendo dai monomi di ordine esattamente k , le loro componenti nello spazio dei polinomi di ordine $\leq k - 1$.

Seguendo questa procedura, il primo step consisterà nella costruzione di una base polinomiale $L^2(E)$ -ortonormale per lo spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E)$. Successivamente essa

verrà estesa in modo da ottenere una base *quasi-ortonormale* per l'intero spazio $\mathbb{P}_k(E)$. Risulta, infatti, necessario definire entrambe le basi per la costruzione degli operatori di proiezione locali coinvolti nella forma bilineare discreta che definisce il problema discretizzato PV_h .

6.1.1 Costruzione della matrice di cambio base relativa alla base *Eig*

Nel seguito \mathbf{m}^k indicherà il vettore colonna $[m_1, \dots, m_{n_k}]^T$ costituito dagli n_k monomi scalati e \mathbf{p}^k il vettore colonna $[p_1, \dots, p_{n_k}]^T$ contenente i polinomi che costituiscono la base polinomiale definita in [3].

Nel seguito, l'apice sinistro $*$ $\in \{\mathbf{m}, \mathbf{p}\}$ indicherà la base di riferimento e, quindi, con \mathbf{m} si farà riferimento alla base dei monomi, invece, con \mathbf{p} si farà riferimento a una base polinomiale alternativa.

Si osservi che la matrice di massa $\mathbf{m}\mathbf{H}^k$ definita in (3.17), il cui apice destro k e apice sinistro \mathbf{m} indicano che essa è relativa alla base monomiale $\mathcal{M}_k(E)$, può essere decomposta come

$$\mathbf{m}\mathbf{H}^k = \int_E \mathbf{m}\mathbf{m}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{m}\mathbf{H}^{k-1} \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times n_{k-1}} & \mathbf{m}\mathbf{H}^{k-1,k} \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times (n_k - n_{k-1})} \\ \mathbf{m}\mathbf{H}^{k,k-1} \in \mathbb{R}^{(n_k - n_{k-1}) \times n_{k-1}} & \mathbf{m}\mathbf{H}^{k/k-1} \in \mathbb{R}^{(n_k - n_{k-1}) \times (n_k - n_{k-1})} \end{bmatrix}$$

Base ortonormale per $\mathbb{P}_{k-1}(E)$

Essendo la matrice di massa $\mathbf{m}\mathbf{H}^{k-1}$ simmetrica, essa è diagonalizzabile, i.e. $\exists \mathbf{R}^{k-1} \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times n_{k-1}}$ ortonormale (i.e. $(\mathbf{R}^{k-1})^T \mathbf{R}^{k-1} = \mathbf{R}^{k-1} (\mathbf{R}^{k-1})^T = \mathbf{I}^{k-1}$) e $\mathbf{\Lambda}^{k-1} \in \mathbb{R}^{n_{k-1} \times n_{k-1}}$ diagonale tale che

$$\mathbf{m}\mathbf{H}^{k-1} = (\mathbf{R}^{k-1})^T \mathbf{\Lambda}^{k-1} \mathbf{R}^{k-1}, \quad (6.1)$$

dove la matrice $\mathbf{\Lambda}^{k-1}$ ha sulla diagonale gli autovalori di $\mathbf{m}\mathbf{H}^{k-1}$ e la matrice $(\mathbf{R}^{k-1})^T$ ha come colonne gli autovettori destri della matrice di massa $\mathbf{m}\mathbf{H}^{k-1}$.

Inoltre, la matrice di massa $\mathbf{m}\mathbf{H}^{k-1}$ è simmetrica definita positiva. Ne consegue che i suoi autovalori sono reali e strettamente positivi. Allora, $\exists (\mathbf{\Lambda}^{k-1})^{-1}$ ed è ben definita la $\sqrt{(\mathbf{\Lambda}^{k-1})^{-1}}$.

Introduciamo la matrice

$$\mathbf{Q}^{k-1} = \sqrt{(\mathbf{\Lambda}^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}^{k-1}.$$

e poniamo

$$\mathbf{p}^{k-1} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{m}^{k-1} \quad (6.2)$$

il quale risulta essere una base ortonormale rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ per lo spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E)$. Infatti, la relativa matrice ${}^{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k-1}$ è data dalla matrice identità. Infatti,

$$\begin{aligned} {}^{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k-1} &= \int_E \mathbf{p}^{k-1} (\mathbf{p}^{k-1})^T \\ &= \int_E \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{m}^{k-1} (\mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{m}^{k-1})^T \\ &= \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^{k-1} (\mathbf{Q}^{k-1})^T \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{\Lambda}^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}^{k-1} (\mathbf{R}^{k-1})^T \boldsymbol{\Lambda}^{k-1} \mathbf{R}^{k-1} (\mathbf{R}^{k-1})^T \sqrt{(\boldsymbol{\Lambda}^{k-1})^{-1}} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{\Lambda}^{k-1})^{-1}} \boldsymbol{\Lambda}^{k-1} \sqrt{(\boldsymbol{\Lambda}^{k-1})^{-1}} = \mathbf{I}^{k-1}. \end{aligned}$$

Base per $\mathbb{P}_k(E)$

Costruita una base ortonormale per lo spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E) \subset \mathbb{P}_k(E)$, è possibile ricavare un insieme di $n_k - n_{k-1}$ polinomi generici $\mathbf{p}^{k/k-1}$ linearmente indipendenti dai polinomi \mathbf{p}^{k-1} rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$, i quali, insieme ai polinomi \mathbf{p}^{k-1} , costituiscono una base per l'intero spazio $\mathbb{P}_k(E)$.

Tale insieme si ottiene rimuovendo dai monomi $\mathbf{m}^{k/k-1}$ in $\mathcal{M}_k^*(E)$ le loro componenti rispetto la base \mathbf{p}^{k-1} , ovvero

$$\mathbf{p}^{k/k-1} = \mathbf{m}^{k/k-1} - \left(\int_E \mathbf{m}^{k/k-1} (\mathbf{p}^{k-1})^T \right) \mathbf{p}^{k-1}$$

o, in modo analogo,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{k/k-1} &= \mathbf{m}^{k/k-1} - \left(\int_E \mathbf{m}^{k/k-1} (\mathbf{m}^{k-1})^T \right) \mathbf{m}^{k-1} \\ &= \mathbf{m}^{k/k-1} - \mathbf{m} \mathbf{H}^{k,k-1} \mathbf{m}^{k-1} \\ &= \left[- (\mathbf{m} \mathbf{H}^{k,k-1})^T \quad \mathbf{I}^{k/k-1} \right] \mathbf{m}^k = \mathbf{R}_a^{k/k-1} \mathbf{m}^k, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\mathbf{R}_a^{k/k-1} = \left[- (\mathbf{m} \mathbf{H}^{k,k-1})^T \quad \mathbf{I}^{k/k-1} \right] \in \mathbb{R}^{(n_k - n_{k-1}) \times n_{k-1}}.$$

Si consideri la matrice di massa relativa ai polinomi $\mathbf{p}^{k/k-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{k/k-1} \mathbf{H}^{k/k-1} &= \int_E \mathbf{p}^{k/k-1} (\mathbf{p}^{k/k-1})^T = \mathbf{R}_a^{k/k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^k (\mathbf{R}_a^{k/k-1})^T \\ \mathbf{p}^{k/k-1} \mathbf{H}^{k/k-1} &= \left(\mathbf{R}_b^{k/k-1} \right)^T \boldsymbol{\Lambda}^{k/k-1} \mathbf{R}_b^{k/k-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Lambda^{k/k-1} = \mathbf{R}_b^{k/k-1} \mathbf{R}_a^{k/k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^k \left(\mathbf{R}_b^{k/k-1} \mathbf{R}_a^{k/k-1} \right)^T.$$

Definito l'insieme dei polinomi collezionati nel vettore

$$\mathbf{p}^{k/k-1} = \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1} \mathbf{R}_b^{k/k-1} \mathbf{R}_a^{k/k-1} \mathbf{m}^k} = \mathbf{Q}^{k/k-1} \mathbf{m}^k,$$

l'insieme rappresentato da

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{Q}^k \mathbf{m}^k \quad \text{dove } \mathbf{Q}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{k-1} & \mathbf{O}^{k-1,k} \\ & \mathbf{Q}^{k/k-1} \end{bmatrix},$$

costituisce una base di vettori “quasi-ortonormali” rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ per lo spazio $\mathbb{P}_k(E)$, ovvero una base la cui matrice di massa assume la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \mathbf{H}^k &= \int_E \mathbf{p}^k (\mathbf{p}^k)^T = \mathbf{Q}^k \int_E \mathbf{m}^k (\mathbf{m}^k)^T (\mathbf{Q}^k)^T = \mathbf{Q}^k \mathbf{m} \mathbf{H}^k (\mathbf{Q}^k)^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{k-1} & \mathbf{O}^{k-1,k} \\ & \mathbf{Q}^{k/k-1} \end{bmatrix} \mathbf{m} \mathbf{H}^k \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}^{k-1})^T & \\ \mathbf{O}^{k,k-1} & (\mathbf{Q}^{k/k-1})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{k-1} & [\mathbf{Q}^{k-1} \ \mathbf{O}^{k-1,k}] \mathbf{m} \mathbf{H}^k (\mathbf{Q}^{k/k-1})^T \\ \mathbf{Q}^{k/k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^k \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}^{k-1})^T \\ \mathbf{O}^{k,k-1} \end{bmatrix} & \mathbf{I}^{k/k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nota 6.1 ([3]). *Per gli elementi badly shaped, il calcolo degli autovalori-autovettori può risultare essere effetto da errori numerici non trascurabili. Quando ciò accade, i blocchi diagonali della matrice di massa $\mathbf{p} \mathbf{H}^k$ non risultano essere più matrici identità. Per questo motivo, nell'implementazione verranno utilizzate le seguenti definizioni per il calcolo della matrice di massa relativa alla base polinomiale definita in [3]:*

$$\mathbf{p} \mathbf{H}^{k-1} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^{k-1} (\mathbf{Q}^{k-1})^T, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{p} \mathbf{H}^k = \mathbf{Q}^k \mathbf{m} \mathbf{H}^k (\mathbf{Q}^k)^T. \quad (6.4)$$

6.2 Base *MGSReortho*

La seconda alternativa, proposta in [4] e denominata nel seguito *MGSReortho*, consiste nell'applicare l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt modificato (MGS), corrispondente all'Algoritmo 1 definito nel seguito.

Questa procedura consente di ottenere una sequenza di basi ortonormali $\{\mathbf{p}^k\}_{k \geq 1}$ gerarchica, ovvero tale che

$$\mathbf{p}^{k-1} \subset \mathbf{p}^k \quad \forall k \geq 1.$$

Algorithm 1: Algoritmo di Gram-Schmidt modificato.

```

Data:  $\mathbf{A}$ 
Result:  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}]$  tali che  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ 
 $n \leftarrow \mathbf{A}.rows();$ 
 $m \leftarrow \mathbf{A}.cols();$ 
 $\mathbf{Q} \leftarrow \text{Zero}(m, n);$ 
 $\mathbf{R} \leftarrow \text{Zero}(n, n);$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
     $\mathbf{Q}(:, i) \leftarrow \mathbf{A}(:, i);$  /* Ortogonalizza */
    for  $j = 1, \dots, m$  do
         $\mathbf{R}_{j,i} \leftarrow \mathbf{Q}(:, i)^T \mathbf{Q}(:, j);$ 
         $\mathbf{Q}(:, i) \leftarrow \mathbf{Q}(:, i) - \mathbf{R}_{j,i} \mathbf{Q}(:, j);$ 
    end
     $\mathbf{R}_{i,i} \leftarrow \|\mathbf{Q}(:, i)\|_2;$  /* Normalizza */
     $\mathbf{Q}(:, i) = \mathbf{Q}(:, i) / \mathbf{R}_{i,i};$ 
end

```

L'autore di [4] suggerisce di applicare la procedura di ortogonalizzazione due volte, in quanto, come si evince in [9], in generale, ripetere la procedura due volte è sufficiente per ottenere una base che sia ortonormale a meno della precisione di macchina.

6.2.1 Costruzione della matrice di cambio base relativa alla base *MGSReortho*

Per trovare la matrice di cambio base \mathbf{Q}^k applicando due volte l'algoritmo MGS, è possibile procedere come segue:

- Per ragioni di stabilità, si costruisce dapprima la matrice di cambio base relativa alla base ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo:

$${}^m\mathbf{V}_k^E = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1.$$

- Successivamente, si ortogonalizza la matrice \mathbf{Q}_1 rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$

$$(\mathbf{W}^E)^{1/2} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2.$$

La matrice di Vandermonde associata alla base dei polinomi ortogonali definita in [4] è data da

$${}^p\mathbf{V}_k^E = {}^m\mathbf{V}_k^E \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{Q}_2,$$

invece, la matrice di massa associata è

$$\mathbf{PH}^k = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}^k.$$

La matrice di cambio base risulta essere

$$\mathbf{Q}^k = ((\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1)^{-1})^T$$

Poiché tale procedura permette di ottenere una sequenza di basi gerarchica, si verifica facilmente che

$$\mathbf{Q}^{k-1} = \mathbf{Q}^k(1 : n_{k-1}, 1 : n_{k-1})$$

e

$$\mathbf{PH}^{k-1} = \mathbf{PH}^k(1 : n_{k-1}, 1 : n_{k-1}).$$

6.3 L'importanza di ri-ortogonalizzare

Nella sezione precedente si è effettuata una seconda ri-ortogonalizzazione tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt modificato della matrice di massa \mathbf{PH}^{k-1} relativa alla base polinomiale alternativa. In particolare, come si evince dall'articolo [9], l'errore di ortogonalizzazione

$$\|\mathbf{I}^{k-1} - \mathbf{PH}^{k-1}\|$$

risulta essere proporzionale al numero di condizionamento della matrice di Vandermonde, il quale aumenta notevolmente all'aumentare del grado polinomiale k . Effettuare una seconda ortogonalizzazione permette di eliminare tale dipendenza.

Tale risultato si può osservare anche dalla Figura 6.1, la quale mostra come all'aumentare del grado polinomiale, l'errore di ortogonalizzazione relativo alla base *MGS*, ovvero la base costruita secondo la procedura mostrata nella sezione precedente ma senza ripetere la procedura di ortogonalizzazione due volte, aumenta all'aumentare del grado polinomiale.

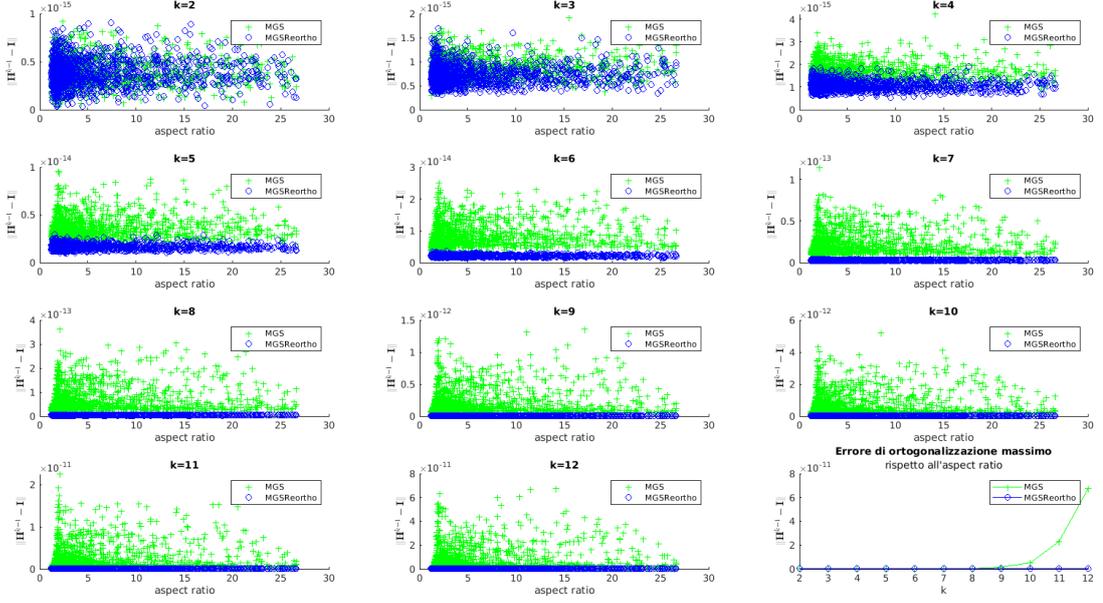


Figura 6.1: Errore di ortogonalizzazione della matrice \mathbf{PH}^{k-1} relativa alla base *MGS* e alla base *MGSReortho* in funzione dell'aspect ratio degli elementi che costituiscono la mesh mostrata in Figura 6.3(a) per diversi valori del grado polinomiale k .

6.3.1 Costruzione della matrice di cambio base relativa alla base *EigReortho*

Nella Sezione 6.1.1 si è visto che la matrice di massa relativa alla base polinomiale, ottenuta seguendo la procedura mostrata in [3] è quasi-ortonormale in quanto assume la forma

$$\mathbf{PH}^{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{k-1} & [\mathbf{Q}^{k-1} \quad \mathbf{O}^{k-1,k}] \mathbf{mH}^k (\mathbf{Q}^{k/k-1})^T \\ \mathbf{Q}^{k/k-1} \mathbf{mH}^k \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}^{k-1})^T \\ \mathbf{O}^{k,k-1} \end{bmatrix} & \mathbf{I}^{k/k-1} \end{bmatrix},$$

ovvero è caratterizzata dal fatto che i blocchi diagonali sono delle matrici identità. Ad ogni modo come rimarcato nella Nota 6.1, a causa dell'errore numerico, tali blocchi non risultano più essere vicini alla matrice identità. Quindi, si potrebbe pensare di procedere come fatto per la base *MGSReortho* e ri-ortogonalizzare i due blocchi in questione. Pertanto, partendo dall'equazione (6.1) e osservando che

$$\sqrt{(\mathbf{\Lambda}^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}^{k-1} \mathbf{mH}^{k-1} (\mathbf{R}^{k-1})^T \sqrt{(\mathbf{\Lambda}^{k-1})^{-1}} = \sqrt{(\mathbf{\Lambda}^{k-1})^{-1}} \mathbf{\Lambda}^{k-1} \sqrt{(\mathbf{\Lambda}^{k-1})^{-1}} \approx \mathbf{I}^{k-1}$$

si procede ortogonalizzando la matrice Λ_1^{k-1} definita come

$$\Lambda_1^{k-1} = \sqrt{(\Lambda^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}^{k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^{k-1} (\mathbf{R}^{k-1})^T \sqrt{(\Lambda^{k-1})^{-1}}$$

ovvero

$$\Lambda_1^{k-1} = (\mathbf{R}_2^{k-1})^T \Lambda_2^{k-1} \mathbf{R}_2^{k-1}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{k-1} &= \sqrt{(\Lambda_2^{k-1})^{-1}} \Lambda_2^{k-1} \sqrt{(\Lambda_2^{k-1})^{-1}} \\ &= \sqrt{(\Lambda_2^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}_2^{k-1} \sqrt{(\Lambda^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}^{k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^{k-1} (\mathbf{R}^{k-1})^T \sqrt{(\Lambda^{k-1})^{-1}} (\mathbf{R}_2^{k-1})^T \sqrt{(\Lambda_2^{k-1})^{-1}}. \end{aligned}$$

La matrice di cambiamento di base risulta pertanto essere

$$\mathbf{Q}^{k-1} = \sqrt{(\Lambda_2^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}_2^{k-1} \sqrt{(\Lambda^{k-1})^{-1}} \mathbf{R}^{k-1}.$$

Anche il secondo blocco diagonale nella costruzione in [3] risulta essere approssimativamente pari alla matrice identità, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{H}^{k/k-1} &= \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1}} \mathbf{R}_b^{k/k-1} \mathbf{R}_a^{k/k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^k (\mathbf{R}_a^{k/k-1})^T (\mathbf{R}_b^{k/k-1})^T \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1}} = \\ &= \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1}} \Lambda^{k/k-1} \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1}} \approx \mathbf{I}^{k/k-1}. \end{aligned}$$

Quindi si (ri)-diagonalizza la matrice

$$\Lambda_1^{k/k-1} = \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1}} \mathbf{R}_b^{k/k-1} \mathbf{R}_a^{k/k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^k (\mathbf{R}_a^{k/k-1})^T (\mathbf{R}_b^{k/k-1})^T \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1}}$$

come fatto in precedenza, ovvero

$$\Lambda_1^{k/k-1} = (\mathbf{R}_c^{k/k-1})^T \Lambda_2^{k/k-1} \mathbf{R}_c^{k/k-1}$$

Pertanto

$$\mathbf{I}^{k/k-1} = \sqrt{(\Lambda_2^{k/k-1})^{-1}} \Lambda_2^{k/k-1} \sqrt{(\Lambda_2^{k/k-1})^{-1}} = \mathbf{Q}^{k/k-1} \mathbf{m} \mathbf{H}^k (\mathbf{Q}^{k/k-1})^T$$

con

$$\mathbf{Q}^{k/k-1} = \sqrt{(\Lambda_2^{k/k-1})^{-1}} \mathbf{R}_c^{k/k-1} \sqrt{(\Lambda^{k/k-1})^{-1}} \mathbf{R}_b^{k/k-1} \mathbf{R}_a^{k/k-1}.$$

Nel seguito si farà riferimento a tale base con il nome *EigReortho*.

Come si evince dalla Figura 6.2, anche in questo caso effettuare una doppia ri-ortogonalizzazione permette di mantenere stabile l'errore di ortogonalizzazione.

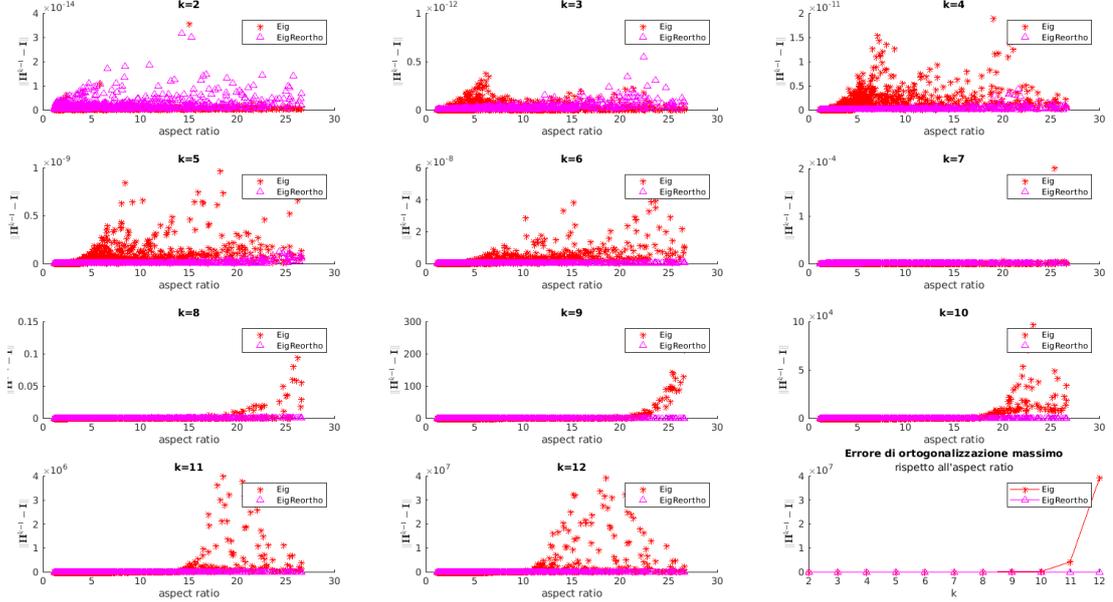


Figura 6.2: Errore di ortogonalizzazione della matrice \mathbf{PH}^{k-1} relativo alle basi *Eig* e *EigReortho*, in funzione dell'aspect ratio degli elementi che costituiscono la mesh mostrata in Figura 6.3(a), per diversi valori del grado polinomiale k .

6.4 Implementazione VEM relativa alle nuove basi polinomiali introdotte

Le modifiche dovute al cambiamento della base polinomiale nella costruzione dei proiettori locali, si introducono con semplicità all'interno di codici VEM preesistenti che seguono l'implementazione mostrata nel Capitolo 5, con alcuni piccoli accorgimenti.

Calcolo di $\Pi_{E,k}^{\nabla} \varphi_i$ Ricordando le costruzioni delle matrici ${}^m\tilde{\mathbf{G}}$ e di ${}^m\tilde{\mathbf{B}}$ in funzione della matrice di Vandermonde date in (5.1) e (5.4) rispettivamente e, osservato che,

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{Q}^k \mathbf{m}^k \Rightarrow \mathbf{pV}_k^* = {}^m\mathbf{V}_k^* (\mathbf{Q}_k)^T \text{ con } * \in \{E, \partial E\},$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\tilde{\mathbf{G}} &= \begin{bmatrix} (\nabla p_1, \nabla p_1)_{0,E} & (\nabla p_1, \nabla p_2)_{0,E} & \cdots & (\nabla p_1, \nabla p_{n_k})_{0,E} \\ (\nabla p_2, \nabla p_1)_{0,E} & (\nabla p_2, \nabla p_2)_{0,E} & \cdots & (\nabla p_2, \nabla p_{n_k})_{0,E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla p_{n_k}, \nabla p_1)_{0,E} & (\nabla p_{n_k}, \nabla p_2)_{0,E} & \cdots & (\nabla p_{n_k}, \nabla p_{n_k})_{0,E} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}^{k\mathbf{m}} \tilde{\mathbf{G}} (\mathbf{Q}^k)^T, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^i = \begin{bmatrix} (\nabla p_1, \nabla \varphi_i)_{0,E} \\ (\nabla p_2, \nabla \varphi_i)_{0,E} \\ \vdots \\ (\nabla p_{n_k}, \nabla \varphi_i)_{0,E} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{k\mathbf{m}} \tilde{\mathbf{B}}^i.$$

Si noti che la prima riga e la prima colonna della matrice $\mathbf{m}\tilde{\mathbf{G}}$ sono nulle, in quanto coinvolgono il gradiente di una costante, e quindi tale matrice risulta essere singolare. Allo stesso modo, anche la matrice $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{G}}$ lo sarà. Pertanto, per calcolare la matrice $\mathbf{P}\mathbf{G}$, calcolata la fattorizzazione *QR-rank-revealing* della matrice $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{G}}$, la matrice $\mathbf{P}\mathbf{G}$ si ottiene dalla matrice $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{G}}$ sostituendo la riga della matrice $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{G}}$ corrispondente al valore singolare più piccolo con il vettore

$$P_0(\mathbf{p}^k)^T = P_0(\mathbf{m}^k)^T (\mathbf{Q}^k)^T$$

e l'elemento corrispondente del vettore $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}(:, i)$ con $P_0(\varphi_i)$. La matrice dei coefficienti $\mathbf{P}\mathbf{S}^*$ relativa alle combinazioni $\mathbf{P}\Pi_{E,k}^{\nabla} \varphi_i = \sum_{\alpha=1}^{n_k} \mathbf{P}\mathbf{S}^*_{\alpha i} p_{\alpha} \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ relativi alla nuova base è data da

$$\mathbf{P}\mathbf{S}^* = (\mathbf{P}\mathbf{G})^{-1} \mathbf{P}\mathbf{B}.$$

Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i$ Il calcolo dei coefficienti $\mathbf{m}\mathbf{T}^{*,k-1}$ delle combinazioni

$$\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i = \sum_{\alpha=1}^{n_{k-1}} \mathbf{P}\mathbf{T}^{*,k-1}(:, i) m_{\alpha}^{k-1} \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$$

richiede la costruzione della matrice $\mathbf{P}\mathbf{C}^{k-1}$ definita come

$$\mathbf{P}\mathbf{C}_{\alpha i}^{k-1} = (p_{\alpha}^{k-1}, \varphi_i)_{0,E} \quad \forall \alpha = 1, \dots, n_{k-1}, \quad i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}},$$

in funzione della base polinomiale alternativa \mathbf{p} . Quindi, $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ e $\alpha = 1, \dots, n_{k-1}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{pC}_{\alpha i}^{k-1} &= (p_{\alpha}^{k-1}, \varphi_i)_{0,E} \\
 &= \left(\sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{k-1} m_{\beta}^{k-1}, \varphi_i \right)_{0,E} \\
 &= \sum_{\beta=1}^{n_{k-1}} \mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{k-1} \mathbf{mC}_{\beta i}^{k-1} = (\mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{mC}^{k-1})_{\alpha i} \\
 &\Rightarrow \mathbf{pC}^{k-1} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{mC}^{k-1}.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Allora

$$\mathbf{pH}^{k-1} \mathbf{pT}^{*,k-1} = \mathbf{pC}^{k-1} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{mC}^{k-1}$$

Sebbene in aritmetica infinita $\mathbf{pH}^{k-1} = \mathbf{I}^{k-1} \Rightarrow \mathbf{pT}^{*,k-1} = \mathbf{pC}^{k-1}$, come già detto nella Nota 6.1, è preferibile valutare $\mathbf{pT}^{*,k-1}$ come

$$\mathbf{pT}^{*,k-1} = (\mathbf{pH}^{k-1})^{-1} \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{mC}^{k-1}. \tag{6.7}$$

Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i$ Osservando che la matrice delle derivate $\mathbf{pD}_{k,*}^E$ dei polinomi che costituiscono la base alternativa, con $* \in \{x, y\}$, si può calcolare come

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_j}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\alpha=1}^{N_k} (\mathbf{Q}^k)_{j\alpha} m_{\alpha} \right) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^{n_k} (\mathbf{Q}^k)_{j\alpha} \frac{\partial m_{\alpha}}{\partial x} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^{n_k} (\mathbf{Q}^k)_{j\alpha} \sum_{i=1}^{n_k} (\mathbf{mD}_{k,x}^E)_{i\alpha} m_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n_k} \left(\sum_{\alpha=1}^{n_k} (\mathbf{Q}^k)_{j\alpha} (\mathbf{mD}_{k,x}^E)_{i\alpha} \right) m_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n_k} (\mathbf{mD}_{k,x}^E (\mathbf{Q}^k)^T)_{ij} m_i
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{pD}_{k,x}^E = \mathbf{mD}_{k,x}^E (\mathbf{Q}^k)^T \text{ e, in modo analogo, } \mathbf{pD}_{k,y}^E = \mathbf{mD}_{k,y}^E (\mathbf{Q}^k)^T.$$

Dall'equazione (5.9) segue pertanto che

$$\mathbf{pE}_x^{k-1} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{mE}_x$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1} = (\mathbf{P}\mathbf{H}^{k-1})^{-1} \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{m}\mathbf{E}_x. \quad (6.8)$$

Si noti che $\mathbf{P}\mathbf{H}^{k-1} = \mathbf{I}^{k-1}$, pertanto

$$\mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1} = \mathbf{P}\mathbf{E}_x.$$

Tuttavia a livello computazionale, come osservato nella Nota 6.1, è preferibile utilizzare l'espressione (6.8).

Procedendo in modo analogo per la componente y , si ottiene

$$\mathbf{P}\mathbf{T}_y^{*,k-1} = (\mathbf{P}\mathbf{H}^{k-1})^{-1} \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{m}\mathbf{E}_y.$$

In funzione della nuova base polinomiale, la matrice di stiffness locale si riscrive come

$$\mathbf{P}\mathbf{K}^E = \mathbf{P}\mathbf{K}_\theta^E + \mathbf{P}\mathbf{K}_b^E + \mathbf{P}\mathbf{K}_\gamma^E,$$

dove

- riscritta la matrice \mathbf{D} , definita in 3.14, in funzione della nuova base polinomiale, i.e.

$$\mathbf{P}\mathbf{D} = \mathbf{m}\mathbf{D} (\mathbf{Q}^k)^T,$$

il termine di diffusione $\mathbf{P}\mathbf{K}_\theta^E$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{K}_\theta^E &= (\mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1})^T \mathbf{P}\mathbf{H}_\theta^{k-1} \mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1} + (\mathbf{P}\mathbf{T}_y^{*,k-1})^T \mathbf{P}\mathbf{H}_\theta^{k-1} \mathbf{P}\mathbf{T}_y^{*,k-1} \\ &\quad + \|\theta\|_{\infty, E} h_E^{d-2} (\mathbf{I}^k - \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B})^T (\mathbf{I}^k - \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}). \end{aligned}$$

- $\mathbf{P}\mathbf{K}_b^E = (\mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1})^T \mathbf{P}\mathbf{H}_{b_x}^{k-1} \mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1} + (\mathbf{P}\mathbf{T}_y^{*,k-1})^T \mathbf{P}\mathbf{H}_{b_y}^{k-1} \mathbf{P}\mathbf{T}_y^{*,k-1}$.
- $\mathbf{P}\mathbf{K}_\gamma^E = (\mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1})^T \mathbf{P}\mathbf{H}_\gamma^{k-1} \mathbf{P}\mathbf{T}_x^{*,k-1}$.

6.4.1 Ridefinizione dei gradi di libertà interni

Come accennato in precedenza, per $k > 1$, la ridefinizione dei gradi di libertà interni in funzione di una nuova base polinomiale, modifica le entrate della matrice di Stiffness e, di conseguenza, il suo numero di condizionamento, influenzando così sulla stabilità del metodo.

In particolare, i gradi di libertà interni intervengono nel calcolo della matrice \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{E}_x , \mathbf{E}_y e, banalmente, della matrice \mathbf{D} , per valori di $k > 1$.

Nel seguito il pedice sinistro $*$ $\in \{\mathbf{m}, \mathbf{p}\}$ farà riferimento al fatto che la matrice in questione è stata calcolata utilizzando i gradi di libertà interni definiti in funzione della base dei monomi o della base polinomiale alternativa rispettivamente.

Si noti il fatto che, per $k = 1$ i gradi di libertà interni non risultano ridefiniti. Si consideri, dunque, il caso in cui $k > 1$.

Calcolo della matrice ${}_{\mathbf{p}}\mathbf{B}$ Il calcolo della matrice ${}^{\mathbf{m}}\mathbf{B}$ richiede l'utilizzo dei gradi di libertà interni. Infatti, nell'equazione (5.3), si è sfruttato il fatto che

$$\frac{1}{|E|} \int_E m_\alpha \varphi_i = \delta_{\alpha i} \quad \forall m_\alpha \in \mathcal{M}_{k-2}(E) \quad \forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}.$$

Ridefinendo i gradi di libertà interni in funzione della nuova base, il termine

$$\begin{aligned} - \int_E \Delta m_\beta^k \varphi_i &= - \sum_{j=1}^{n_{k-2}} ({}^{\mathbf{m}}\mathbf{L}_k^E)_{j,\beta} \int_E m_j^{k-2} \varphi_i \\ &= - \sum_{j=1}^{n_{k-2}} ({}^{\mathbf{m}}\mathbf{L}_k^E)_{j,\beta} \sum_{\ell=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{Q}^{k-2})_{j\ell}^{-1} \int_E p_\ell^{k-2} \varphi_i \\ &= - \sum_{j=1}^{n_{k-2}} ({}^{\mathbf{m}}\mathbf{L}_k^E)_{j,\beta} \sum_{\ell=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{Q}^{k-2})_{j\ell}^{-1} |E| \delta_{i, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + \ell} \\ &= -|E| \left(({}^{\mathbf{m}}\mathbf{L}_k^E)^T (\mathbf{Q}^{k-2})^{-1} \right)_{\beta\ell} \delta_{i, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + \ell}. \end{aligned}$$

Quindi, la matrice ${}_{\mathbf{p}}\mathbf{B}$ relativa alla base dei monomi ottenuta ridefinendo i gradi di libertà interni rispetto la nuova base si scrive come

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{B}} &= \left[({}^{\mathbf{m}}\mathbf{V}_{k,x}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} + ({}^{\mathbf{m}}\mathbf{V}_{k,y}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} \quad -|E| ({}^{\mathbf{m}}\mathbf{L}_k^E)^T (:, 1 : n_{k-2}) (\mathbf{Q}^{k-2})^{-1} \right] \\ &\Rightarrow {}_{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^k {}_{\mathbf{p}}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Nota 6.2. Notiamo che la ridefinizione dei gradi di libertà interni in funzione della nuova base, richiede la conoscenza della matrice di cambio base \mathbf{Q}^{k-2} e, quindi, l'introduzione della base per lo spazio $\mathbb{P}_{k-2}(E)$.

In particolare, al fine di introdurre tale base, utilizzando l'approccio presentato in [3], bisognerà

1. costruire una base $L^2(E)$ -ortonormale per lo spazio $\mathbb{P}_{k-2}(E)$;
2. estendere tale base, in modo da ottenere una base quasi-ortonormale rispetto al prodotto scalare in $L^2(E)$ per lo spazio $\mathbb{P}_{k-1}(E)$;
3. completare la base, aggiungendo ulteriori funzioni linearmente indipendenti da quelle già introdotte che permettano di ottenere una base per l'intero spazio $\mathbb{P}_k(E)$.

La procedura seguita ricalca quella utilizzata nella Sezione 6.1.1. La matrice di massa ottenuta in tal modo assume la forma

$${}_{\mathbf{p}}\mathbf{H}^k = \mathbf{Q}^k {}^{\mathbf{m}}\mathbf{H}^k (\mathbf{Q}^k)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{k-2} & {}_{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k-2,k-1} & {}_{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k-1,k} \\ {}_{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k-1,k-2} & \mathbf{I}^{k-1/k-2} & {}_{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k-1,k-2} \\ {}_{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k,k-1} & {}_{\mathbf{p}}\mathbf{H}^{k-2,k-1} & \mathbf{I}^{k/k-1} \end{bmatrix}.$$

Inoltre, la prima riga della matrice ${}^{\mathbf{m}}\mathbf{B}$ è stata ridefinita come segue

- per $k = 1$, ${}^{\mathbf{m}}\mathbf{B}(1, :) = {}^{\mathbf{m}}\mathbf{B}(1, :)$, in quanto essa dipende soltanto dai gradi di libertà di bordo, rimasti invariati;
- per $k \geq 2$, invece,

$$\begin{aligned} {}^{\mathbf{m}}\mathbf{B}(1, i) &= P_0(\varphi_i) = \int_E \varphi_i \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{Q}^{k-2})_{1\alpha}^{-1} \int_E p_\alpha^{k-2} \varphi_i \\ &= |E| \sum_{\alpha=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{Q}^{k-2})_{1\alpha}^{-1} \delta_{i, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + \alpha}. \end{aligned}$$

La matrice ${}^{\mathbf{p}}\mathbf{B}$ sostituendo la riga relativa al valore singolare più piccolo della matrice ${}^{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{B}}$ il vettore riga ${}^{\mathbf{m}}\mathbf{B}(1, :)$.

Calcolo della matrice ${}^{\mathbf{p}}\mathbf{C}$ Nell'equazione (5.5) è stata utilizzata la definizione di gradi di libertà interni rispetto la base dei monomi scalati. Ridefinendo i gradi di libertà rispetto la nuova base sia ha che per $\alpha = 1, \dots, n_{k-2}$

$${}^{\mathbf{p}}\mathbf{C}_{\alpha i}^{k-1} = (p_\alpha^{k-1}, \varphi_i)_{0,E} = |E| \delta_{N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + \alpha, i}$$

Pertanto,

$$\Rightarrow {}^{\mathbf{p}}\mathbf{C}^{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n_{k-2} \times (N_E^{\text{dof}} - n_{k-2})} & |E| \mathbf{I}^{k-2} \\ (\mathbf{p}\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{p}\mathbf{S}^*) & (n_{k-2} + 1 : n_{k-1}, :) \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Calcolo di ${}^{\mathbf{p}}\mathbf{E}_x^{k-1}$, ${}^{\mathbf{p}}\mathbf{E}_y^{k-1}$ Al fine di ridefinire i gradi di libertà interni in funzione della nuova base polinomiale, bisogna osservare che

$$\begin{aligned} - \int_E \frac{\partial m_\beta^{k-1}}{\partial x} \varphi_i &= - \sum_{j=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{m}\mathbf{D}_{k,x}^E)_{j\beta} \int_E \varphi_i m_j^{k-2} \\ &= - \sum_{j=1}^{n_{k-2}} \sum_{\ell=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{m}\mathbf{D}_{k,x}^E)_{j\beta} (\mathbf{Q}^{k-2})_{j\ell}^{-1} \int_E \varphi_i p_\ell^{k-2} \\ &= - |E| \sum_{j=1}^{n_{k-2}} \sum_{\ell=1}^{n_{k-2}} (\mathbf{m}\mathbf{D}_{k,x}^E)_{j\beta} (\mathbf{Q}^{k-2})_{j\ell}^{-1} \delta_{i, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + \ell} \end{aligned}$$

Di conseguenza, la matrice \mathbf{mE}_x^{k-1} relativa alla base dei monomi valutata ridefinendo i gradi di libertà interni rispetto la nuova base polinomiale si scrive come

$$\begin{aligned} \mathbf{mE}_x^{k-1} &= \left[(\mathbf{mV}_{k-1}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} \quad -|E| (\mathbf{mD}_{k,x}^E)^T (1 : n_{k-1}, 1 : n_{k-2}) (\mathbf{Q}^{k-2})^{-1} \right] \\ &\Rightarrow \mathbf{pE}_x^{k-1} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{mE}_x^{k-1}. \end{aligned}$$

In modo analogo

$$\mathbf{pE}_y^{k-1} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{mE}_y^{k-1}.$$

Calcolo della matrice \mathbf{pD} In particolare, riscrivendo i gradi di libertà in funzione della nuova base polinomiale, cambiano le entrate $(\alpha, i) \forall \alpha = 1, \dots, n_k \forall i = N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ della matrice \mathbf{pD} . Si verifica che, $\forall i = N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ e $\forall \alpha = 1, \dots, n_k$

$$\mathbf{pD}_{i\alpha} = \text{dof}_i(p_\alpha^k) = \frac{1}{|E|} \left(p_{i-N_E^{\text{dof}}+n_{k-2}}^k, p_\alpha^k \right)_{0,E} = \frac{1}{|E|} \mathbf{pH}_{i-N_E^{\text{dof}}+n_{k-2},\alpha}^k$$

In conclusione,

$$\mathbf{pD} = \begin{bmatrix} \mathbf{mV}_k^{\partial E} (\mathbf{Q}^k)^T \\ \frac{1}{|E|} \mathbf{pH}^k(1 : n_{k-2}, :) \end{bmatrix}.$$

6.5 Esperimento numerico

Al fine di valutare l'impatto della scelta della base sul numero di condizionamento della matrice di stiffness, si consideri il seguente problema di Poisson con condizioni omogenee al bordo

$$\begin{cases} -\theta \Delta u = f & \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}, \quad (6.10)$$

con θ costante, la cui soluzione esatta è

$$u(x, y) = 1.6xy(1-x)(1-y) + 1.1. \quad (6.11)$$

Le mesh utilizzate per la discretizzazione del dominio sono mostrate in Figura 6.3.

Dalle Figure 6.4 e 6.5 si può osservare che la matrice di stiffness globale resta pressoché invariata se si provvede soltanto a ridefinire gli operatori di proiezione locali in funzione della nuova base polinomiale. Ridefinendo anche i gradi di libertà interni in funzione della nuova base, invece, cambiano le entrate della matrice di stiffness globale e, di conseguenza, il suo condizionamento. In particolare, si osserva

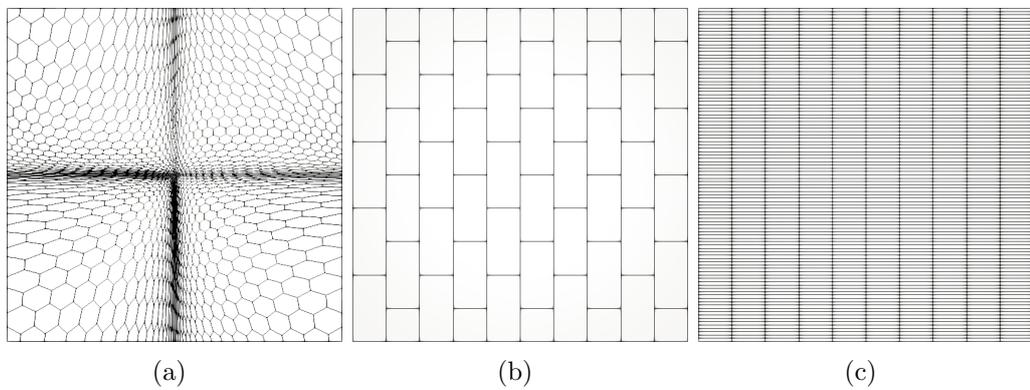


Figura 6.3: Tre mesh utilizzate per la discretizzazione del dominio Ω : 6.3(a) costituita da esagoni distorti, 6.3(b) caratterizzata dalla presenza di hanging node e 6.3(c) costituita da rettangoli.

che l'ordine di grandezza del numero di condizionamento della matrice di stiffness globale, ottenuta ridefinendo i dof in funzione della nuova base polinomiale, tende a rimanere costante anche all'aumentare del grado polinomiale. Si osservi, tuttavia, che il metodo Eig, perde questa proprietà per gradi polinomiali molto elevati. Inoltre, si noti, che in corrispondenza degli stessi gradi polinomiali, si ottenevano anche gli errori di ortogonalizzazione massimi, come si evince dalla Figura 6.2.

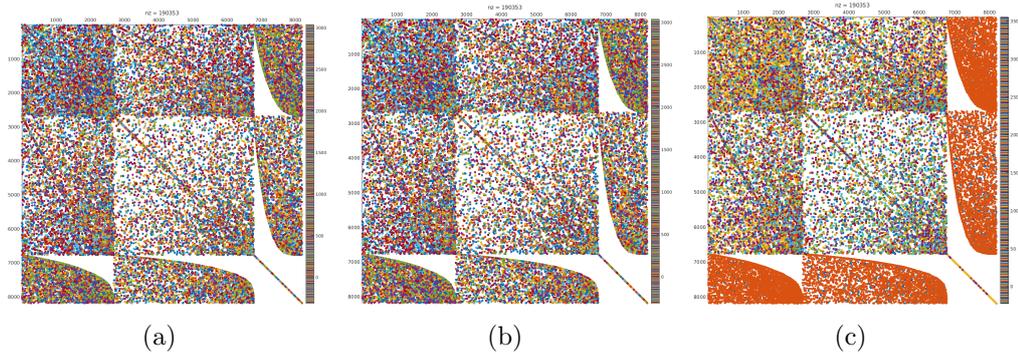


Figura 6.4: Matrice di stiffness globale \mathbf{K} se i proiettori sono definiti in funzione della base dei monomi scalati (6.4(a)), in funzione della base *Eig* (6.4(b)) e se vengono ridefiniti i gradi di libertà interni in funzione della base *Eig* (6.4(c)), relativamente alla mesh esagonale (Figura 6.3(a)) e al grado polinomiale $k = 2$.

Si osservi che la soluzione esatta, definita in (6.11), è un polinomio di grado 4. Pertanto, un metodo VEM con ordine ≥ 4 dovrebbe restituire la soluzione esatta (a meno della precisione di macchina). Tuttavia, a causa del cattivo condizionamento della matrice di stiffness, in aritmetica finita, l'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ anziché tendere a 0, cresce all'aumentare del numero di condizionamento.

In particolare, quello che si osserva è che, ridefiniti i gradi di libertà in funzione della base polinomiale alternativa, la base MGSReortho produce risultati sempre migliori rispetto l'usuale base dei monomi. Per quanto riguarda la base *Eig*, invece, essa performa meglio della base dei monomi qualora l'aspect ratio della mesh utilizzata risulta essere sufficientemente basso. La Tabella 6.4 mostra i valori massimi dell'aspect ratio (inteso come rapporto tra il raggio della circonferenza che circoscrive l'elemento e il raggio della circonferenza inscritta nello stesso) per ciascuna mesh analizzata. In generale, effettuare una seconda ortogonalizzazione permette di migliorare le performance globali della base *Eig*.

Ad ogni modo, si osservi che per gradi polinomiali moderatamente elevati, risulta comunque preferibile l'utilizzo della base dei monomi, in quanto essa garantisce risultati confrontabili con le altre basi, ma richiede un costo computazionale inferiore.

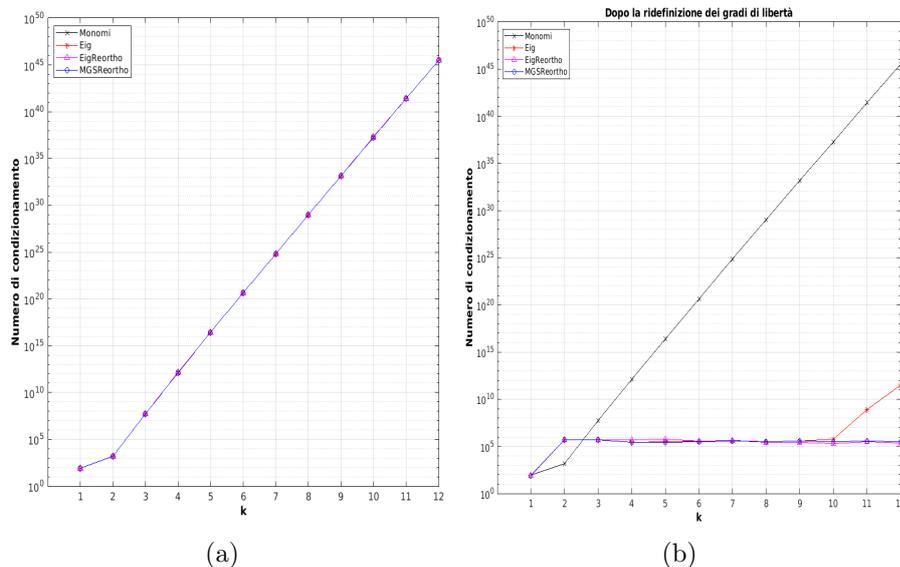


Figura 6.5: Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale relativa alla mesh mostrata in Figura 6.3(a) al variare del grado polinomiale k , per le diverse basi presentate, prima (Approccio ibrido 6.5(a)) e dopo (6.5(b)) la ridefinizione dei gradi di libertà interni.

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	8.5786e+01	8.5786e+01	8.2684e+01	8.2775e+01
2	1.5886e+03	1.6636e+03	1.6636e+03	1.5886e+03
3	5.2592e+07	5.2827e+07	5.0646e+07	5.2592e+07
4	1.3663e+12	1.3899e+12	1.3899e+12	1.3119e+12
5	2.6719e+16	2.5890e+16	2.6035e+16	2.6035e+16
6	4.3430e+20	4.2931e+20	4.3736e+20	4.5494e+20
7	6.9018e+24	7.0030e+24	6.6637e+24	6.7407e+24
8	1.0007e+29	1.0344e+29	1.0030e+29	1.0344e+29
9	1.4655e+33	1.3974e+33	1.4087e+33	1.3974e+33
10	1.9140e+37	1.9309e+37	2.0067e+37	1.9140e+37
11	2.6739e+41	2.6739e+41	2.6739e+41	2.6739e+41
12	3.3282e+45	3.4856e+45	3.4289e+45	3.4289e+45

Tabella 6.2: Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	8.5786e+01	8.5786e+01	8.5786e+01	8.1246e+01
2	1.5886e+03	5.1477e+05	5.1477e+05	5.1477e+05
3	5.2592e+07	4.8101e+05	4.8091e+05	4.7924e+05
4	1.3663e+12	2.5383e+05	4.8231e+05	2.4528e+05
5	2.6719e+16	3.3024e+05	5.5758e+05	2.8207e+05
6	4.3430e+20	3.4198e+05	3.5948e+05	3.1799e+05
7	6.9018e+24	3.9286e+05	4.0000e+05	3.7482e+05
8	1.0007e+29	3.2531e+05	2.8209e+05	3.1710e+05
9	1.4655e+33	3.7209e+05	2.5932e+05	3.3566e+05
10	1.9140e+37	5.4626e+05	1.8511e+05	2.9534e+05
11	2.6739e+41	7.3798e+08	2.9297e+05	3.4538e+05
12	3.3282e+45	3.3495e+11	2.2278e+05	3.0633e+05

Tabella 6.3: Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).

6.3(a)	6.3(b)	6.3(c)
26.6214	2.2361	10.0499

Tabella 6.4: Aspect ratio massimo delle mesh mostrate in Figura 6.3.

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	1.7310e-02	1.7310e-02	1.7310e-02	1.7310e-02
2	6.2939e-04	6.2939e-04	6.2939e-04	6.2939e-04
3	1.6192e-05	1.6192e-05	1.6192e-05	1.6192e-05
4	2.3540e-11	7.1366e-08	3.0240e-11	2.3041e-11
5	3.0069e-11	9.5740e-07	3.4966e-11	3.0813e-11
6	2.3852e-09	2.7119e-05	2.6007e-09	2.2167e-09
7	2.6112e-09	3.1127e-05	5.0114e-09	4.6612e-09
8	2.5368e-07	1.8493e-03	3.4447e-07	3.5795e-07
9	4.5180e-07	5.5439e-03	4.4508e-07	5.0314e-07
10	3.4988e-05	7.5760e-01	4.8035e-05	7.1506e-05
11	1.0412e-04	1.9062e+00	9.7078e-05	1.0876e-04
12	5.7580e-03	3.3932e+00	6.6384e-03	9.9457e-03

Tabella 6.5: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).

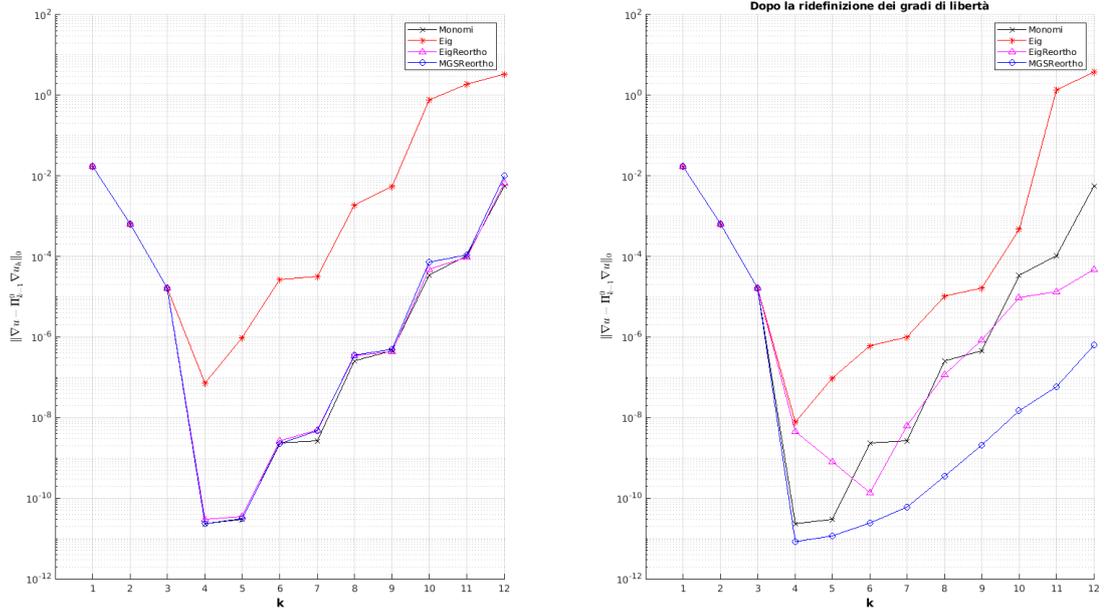


Figura 6.6: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k per le diverse basi create prima (approccio ibrido) e dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	1.7310e-02	1.7310e-02	1.7310e-02	1.7310e-02
2	6.2939e-04	6.2939e-04	6.2939e-04	6.2939e-04
3	1.6192e-05	1.6137e-05	1.6137e-05	1.6133e-05
4	2.3540e-11	7.8278e-09	4.6212e-09	8.4982e-12
5	3.0069e-11	9.4174e-08	7.9184e-10	1.1417e-11
6	2.3852e-09	6.0686e-07	1.3632e-10	2.4757e-11
7	2.6112e-09	1.0117e-06	6.3454e-09	5.9316e-11
8	2.5368e-07	1.0609e-05	1.1771e-07	3.5444e-10
9	4.5180e-07	1.6314e-05	8.3456e-07	2.0499e-09
10	3.4988e-05	4.8152e-04	9.4459e-06	1.5187e-08
11	1.0412e-04	1.3432e+00	1.3296e-05	5.7406e-08
12	5.7580e-03	3.7178e+00	4.7130e-05	6.4327e-07

Tabella 6.6: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(a).

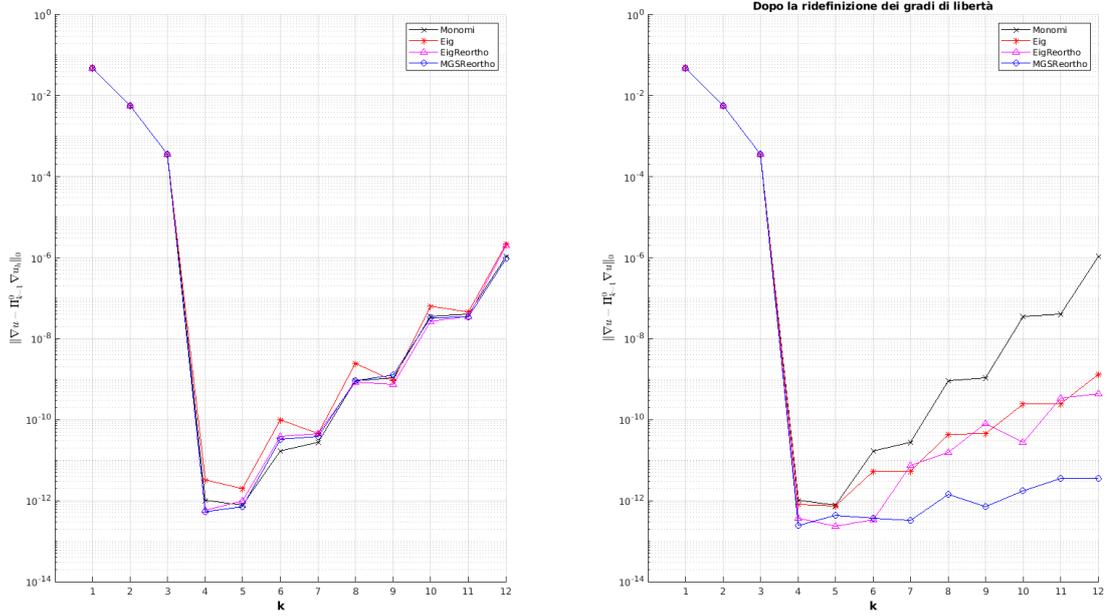


Figura 6.7: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k per le diverse basi create prima (approccio ibrido) e dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(b).

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	4.8364e-02	4.8364e-02	4.8364e-02	4.8364e-02
2	5.7778e-03	5.7778e-03	5.7778e-03	5.7778e-03
3	3.6811e-04	3.6811e-04	3.6811e-04	3.6811e-04
4	1.0246e-12	3.2846e-12	5.7595e-13	5.2375e-13
5	7.7059e-13	1.9906e-12	9.7908e-13	7.0087e-13
6	1.7082e-11	1.0056e-10	3.8305e-11	3.2403e-11
7	2.7832e-11	4.5933e-11	4.4688e-11	3.9062e-11
8	9.2783e-10	2.4646e-09	8.4707e-10	9.2020e-10
9	1.0813e-09	8.9819e-10	7.3691e-10	1.2477e-09
10	3.5869e-08	6.4784e-08	2.6958e-08	3.2585e-08
11	3.9770e-08	4.6205e-08	3.5811e-08	3.4212e-08
12	1.0773e-06	2.2367e-06	2.0038e-06	9.7161e-07

Tabella 6.7: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(b).

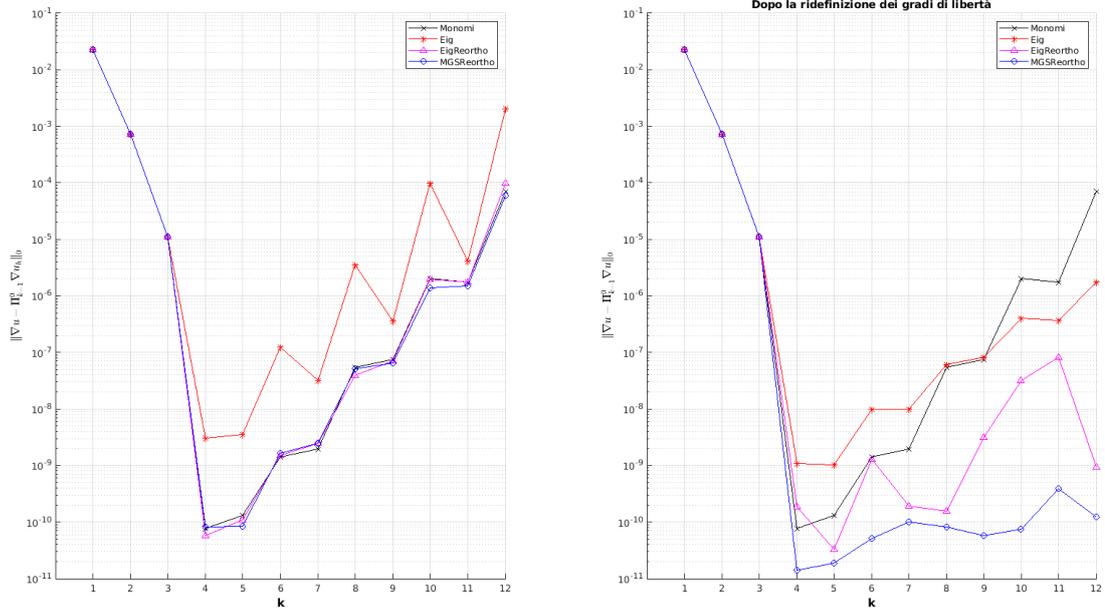


Figura 6.8: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k per le diverse basi create prima (approccio ibrido) e dopo la ridefinizione dei gradi di libertà, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(c).

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	4.8364e-02	4.8364e-02	4.8364e-02	4.8364e-02
2	5.7778e-03	5.7778e-03	5.7778e-03	5.7778e-03
3	3.6811e-04	3.6811e-04	3.6811e-04	3.6811e-04
4	1.0246e-12	8.0438e-13	3.6647e-13	2.4643e-13
5	7.7059e-13	7.4565e-13	2.2984e-13	4.3948e-13
6	1.7082e-11	5.3850e-12	3.4439e-13	3.6586e-13
7	2.7832e-11	5.4197e-12	7.5078e-12	3.2546e-13
8	9.2783e-10	4.2921e-11	1.5301e-11	1.4183e-12
9	1.0813e-09	4.5644e-11	8.1422e-11	7.1451e-13
10	3.5869e-08	2.4421e-10	2.7349e-11	1.7687e-12
11	3.9770e-08	2.4403e-10	3.4550e-10	3.5479e-12
12	1.0773e-06	1.3471e-09	4.2980e-10	3.5505e-12

Tabella 6.8: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite dopo la ridefinizione dei gradi di libertà interni, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(b).

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	2.2935e-02	2.2935e-02	2.2935e-02	2.2935e-02
2	7.2232e-04	7.2232e-04	7.2232e-04	7.2232e-04
3	1.1011e-05	1.1011e-05	1.1011e-05	1.1011e-05
4	7.7625e-11	3.0045e-09	5.7033e-11	8.1309e-11
5	1.3022e-10	3.5213e-09	1.1148e-10	8.3453e-11
6	1.4090e-09	1.2374e-07	1.5112e-09	1.6214e-09
7	1.9738e-09	3.2513e-08	2.4874e-09	2.4903e-09
8	5.4113e-08	3.5526e-06	3.8898e-08	5.1167e-08
9	7.4561e-08	3.5816e-07	7.0754e-08	6.3978e-08
10	2.0379e-06	9.8927e-05	1.9601e-06	1.3786e-06
11	1.7677e-06	4.1165e-06	1.7472e-06	1.4968e-06
12	7.0269e-05	2.0302e-03	9.7868e-05	5.8904e-05

Tabella 6.9: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo un approccio ibrido, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(c).

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	2.2935e-02	2.2935e-02	2.2935e-02	2.2935e-02
2	7.2232e-04	7.2232e-04	7.2232e-04	7.2232e-04
3	1.1011e-05	1.1011e-05	1.1011e-05	1.1011e-05
4	7.7625e-11	1.0991e-09	1.8423e-10	1.4045e-11
5	1.3022e-10	1.0301e-09	3.2761e-11	1.8557e-11
6	1.4090e-09	1.0002e-08	1.3069e-09	5.0483e-11
7	1.9738e-09	1.0011e-08	1.9467e-10	1.0008e-10
8	5.4113e-08	6.1264e-08	1.5481e-10	8.1257e-11
9	7.4561e-08	8.3125e-08	3.0971e-09	5.6705e-11
10	2.0379e-06	3.9980e-07	3.2068e-08	7.4860e-11
11	1.7677e-06	3.6863e-07	8.2430e-08	3.9216e-10
12	7.0269e-05	1.7735e-06	9.3786e-10	1.2503e-10

Tabella 6.10: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà interni, relativamente alla mesh mostrata in Figura 6.3(c).

Capitolo 7

Discretizzazione in 3D

Sia $d = 3$ e si consideri una successione $(\mathcal{T}_h)_h$ di decomposizioni del dominio Ω in elementi poliedrali E . In particolare, si assuma che ([8])

B0. Per ogni h , esista una costante $\rho > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{T}_h$

B0.1. è un dominio star-shaped rispetto ad una palla di raggio $\geq \rho h_E$.

B0.2. ogni faccia $F \in \partial E$ è un dominio star-shaped rispetto ad un disco di raggio $\geq \rho h_F$ t.c. $h_F \geq \rho h_E$.

B0.3. per ogni faccia $F \in \partial E$ e per ogni lato $e \in \partial F$ vale $|e| \geq \rho h_F \geq \rho^2 h_E$.

Nota 7.1 ([8]). Si può dimostrare che la condizione B0 implica l'esistenza di un numero intero N tale che ogni poliedro ha meno di N facce e ogni faccia ha meno di N lati.

Nel seguito, $\mathcal{E}_{h,E}$ e $\mathcal{F}_{h,E}$ indicheranno l'insieme dei lati e delle facce del poliedro $E \in \mathcal{T}_h$. Inoltre, il simbolo “ $\hat{\cdot}$ ” indicherà la controparte bidimensionale dell'insieme a cui si fa riferimento.

Per ogni decomposizione \mathcal{T}_h in poliedri E e per ogni $k \geq 1$, lo spazio VEM modificato in 3-dimensioni si definisce come

$$W_k(E) = \left\{ v \in H^1(E) : \Delta v \in \mathbb{P}_k(E), v \in \hat{W}_k(F) \forall F \in \mathcal{F}_{h,E}, \right. \\ \left. v \in C^0(\partial E), (v - \Pi_{E,k}^\nabla v, p)_{0,E} \forall p \in \mathcal{M}_{k-1}^*(E) \cup \mathcal{M}_k^*(E) \right\}.$$

In 3D, la dimensione dello spazio $\mathbb{P}_k(E)$ è data da

$$n_k = \dim \mathbb{P}_k(E) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

L'indicizzazione scelta per indicare i monomi in questo caso è una naturale estensione di quella utilizzata nel caso bidimensionale ed è definita come segue

$$\alpha \leftrightarrow \alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z),$$

con

$$\alpha = 1 + \alpha_y - \frac{(\alpha_x + \alpha_y + 1)(\alpha_x + \alpha_y + 2)}{2} + \frac{(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 1)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 2)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 3)}{6} \quad (7.1)$$

Quindi, ad esempio,

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow (0,0,0), & 2 &\leftrightarrow (1,0,0), & 3 &\leftrightarrow (0,1,0), & 4 &\leftrightarrow (0,0,1), \\ 5 &\leftrightarrow (2,0,0), & 6 &\leftrightarrow (1,1,0), & 7 &\leftrightarrow (0,2,0), \\ 8 &\leftrightarrow (1,0,1), & 9 &\leftrightarrow (0,1,1), & 10 &\leftrightarrow (0,0,2), & \dots \end{aligned}$$

Lo stesso vale per la scelta dei gradi di libertà locali (e, conseguentemente, globali) che definiscono in modo univoco le funzioni $v_h \in W_k(E)$, il cui insieme è costituito da

- i gradi di libertà di bordo $\mathcal{I}^{E,k}$:
 - $N^{E,V}$ valori che la funzione assume ai vertici del poliedro E ;
 - se $k > 1$, $k - 1$ valori che la funzione assume nei nodi di quadratura interni di Gauss-Lobatto su ciascun lato del poliedro;
 - se $k > 1$, per ogni $F \in \mathcal{F}_{h,E}$ gli \hat{n}_{k-2} momenti $\frac{1}{|F|} (v_h, \hat{m})_{0,E} \quad \forall \hat{m} \in \mathcal{M}_{k-2}(F)$;
- se $k > 1$, i gradi di libertà interni $\mathcal{P}^{E,k}$ costituiti dagli n_{k-2} momenti $\frac{1}{|E|} (v_h, m)_{0,E} \quad \forall m \in \mathcal{M}_{k-2}(E)$.

Il numero di gradi di libertà locale è dato da

$$N_E^{\text{dof}} = N^{E,V} + (k - 1)N^{E,E} + \hat{n}_{k-2}N^{E,F} + n_{k-2},$$

dove $N^{E,E} = \#\mathcal{E}_{h,E}$ e $N^{E,F} = \#\mathcal{F}_{h,E}$.

7.1 Implementazione VEM in 3D

La costruzione dei proiettori locali in 3D segue un approccio molto simile a quello presentato nel caso 2D, con l'ulteriore complicazione che in questo caso risulta necessario costruire anche i relativi proiettori locali su ciascuna faccia $F \in \mathcal{F}_{h,E}$ al fine di poter calcolare gli integrali sul bordo di E sfruttando i gradi di libertà.

In particolare, si analizzeranno tre diverse procedure per effettuare la costruzione VEM, riassunte in Tabella 7.1,

1. utilizzare la base classica dei monomi scalati.
2. utilizzare la base polinomiale alternativa per la costruzione dei proiettori locali sia in 3D, che sulle facce e ridefinire i gradi di libertà relativi ai momenti in funzione di quest'ultima.
3. seguire un *approccio ibrido* che consiste nell'adottare la base polinomiale alternativa per ri-definire i proiettori in 3D e quella dei monomi per la costruzione dei proiettori sulle facce. Si noti che in questo caso, i gradi di libertà relativi ai momenti sono funzione della base dei monomi.

Per ogni poliedro $E \in \mathcal{T}_h$ è necessario definire sia le matrici di Vandermonde relative ai monomi in $\mathcal{M}_k(E)$ che a quelli in $\mathcal{M}_k(F) \forall F \in \mathcal{F}_{h,E}$.

In particolare,

1. Per il calcolo degli integrali sul dominio $E \in \mathcal{T}_h$, si procede in modo analogo a quanto fatto nel caso 2D nella Sezione 5.
2. Per quanto riguarda, invece, il calcolo degli integrali sul bordo di E , si considerano dapprima l'insieme $\mathcal{F}(F)$ degli N_Q^F nodi di quadratura $\hat{\mathbf{x}}_i^F \in \mathbb{R}^2 \forall i$ su ciascuna faccia $F \in \mathcal{F}_{h,E}$, le cui coordinate sono definite in funzione di un sistema di riferimento tangente alla faccia stessa. La matrice di Vandermonde relativa è $\hat{\mathbf{V}}_k^F \in \mathbb{R}^{N_Q^F \times \hat{n}_k}$:

$$\left(\hat{\mathbf{V}}_k^F\right)_{\alpha i} = \hat{m}_\alpha(\mathbf{x}_i^F),$$

mentre i pesi di quadratura, il cui insieme verrà indicato con $\mathcal{W}(F)$, sono collezionati nel vettore $\hat{\mathbf{w}}^F$. Si denoti, inoltre, con $\mathbf{V}_k^{\partial E} \in \mathbb{R}^{N_Q^{\partial E} \times n_k}$, dove $N_Q^{\partial E} = \#\mathcal{Q}(\partial E)$, con $\mathcal{Q}(\partial E) = \cup_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \mathcal{Q}(F)$, la matrice di Vandermonde avente come entrate i valori che i monomi in $\mathcal{M}_k(E)$ assumono nei punti di quadratura $\mathbf{x}_i^{\partial E} \in \mathcal{Q}(\partial E)$ definiti su ciascuna faccia in modo ordinato e con $\mathbf{w}^{\partial E}$ il vettore dei pesi di quadratura relativo. Per il calcolo degli integrali di superficie su ciascuna faccia $F \in \mathcal{F}_{h,E}$ che coinvolgono il versore normale $\mathbf{n}_F = [n_{F,x}, n_{F,y}, n_{F,z}]^T$ uscente da F , si definisce la matrice dei pesi

$$\left(\mathbf{W}_*^{\partial E}\right)_{ij} = w_i^{\partial E} n_{F,*} \delta_{ij}, \quad j = 1, \dots, N_Q^{\partial E}, \quad * \in \{x, y, z\}.$$

Ricordando la convenzione utilizzata per l'indicizzazione dei monomi nel caso 3D definita in (7.1), le derivate dei monomi sono date da:

$$\frac{\partial m_\alpha}{\partial x} = \frac{\alpha_x}{h_E} m_\ell, \quad \text{se } \begin{cases} \ell = \alpha + \alpha_x + \alpha_y + 1 - \frac{(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 1)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 2)}{2} \\ \alpha_x > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial m_\alpha}{\partial y} = \frac{\alpha_y}{h_E} m_\ell, \quad \text{se } \begin{cases} \ell = \alpha + \alpha_x + \alpha_y - \frac{(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 1)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 2)}{2} \\ \alpha_y > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial m_\alpha}{\partial z} = \frac{\alpha_z}{h_E} m_\ell, \quad \text{se } \begin{cases} \ell = \alpha - \frac{(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 1)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 2)}{2} \\ \alpha_z > 0 \end{cases},$$

Definite le matrici $\mathbf{D}_{k,x}^E, \mathbf{D}_{k,y}^E, \mathbf{D}_{k,z}^E \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ come

$$(\mathbf{D}_{k,x}^E)_{\ell\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha_x}{h_E} & \text{se } \ell = \alpha + \alpha_x + \alpha_y + 1 - \frac{(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 1)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 2)}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$(\mathbf{D}_{k,y}^E)_{\ell\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha_y}{h_E} & \text{se } \ell = \alpha + \alpha_x + \alpha_y - \frac{(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 1)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 2)}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$(\mathbf{D}_{k,z}^E)_{\ell\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha_z}{h_E} & \text{se } \ell = \alpha - \frac{(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 1)(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z + 2)}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

le matrici di Vandermonde delle derivate dei monomi sono date da

$$\mathbf{V}_{k,x}^E = \mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,x}^E, \quad \mathbf{V}_{k,y}^E = \mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,y}^E, \quad \mathbf{V}_{k,z}^E = \mathbf{V}_k^E \mathbf{D}_{k,z}^E.$$

Invece, per il calcolo del laplaciano Δ dei monomi, definita la matrice

$$\mathbf{L}_k^E = (\mathbf{D}_{k,x}^E)^2 + (\mathbf{D}_{k,y}^E)^2 + (\mathbf{D}_{k,z}^E)^2,$$

la relativa matrice di Vandermonde si scrive come

$$\mathbf{V}_{k,\Delta}^E = \mathbf{V}_k^E \mathbf{L}_k^E.$$

7.2 Calcolo di $\Pi_{E,k}^\nabla \varphi_i$

Nel seguito, l'apice destro $*$, con $* \in \{E, \partial E\}$, indicherà il dominio sui cui si valutano le entrate della relativa matrice.

La costruzione della matrice $\mathbf{m}\mathbf{G}^E$ è una naturale estensione di quanto fatto nella Sezione 5.1 nel caso bidimensionale. Infatti,

$$\mathbf{m}\tilde{\mathbf{G}}^E = (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,x}^E)^T \mathbf{W}^E (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,x}^E) + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,y}^E)^T \mathbf{W}^E (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,y}^E) + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,z}^E)^T \mathbf{W}^E (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,z}^E)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{m}\mathbf{G}^E &= \mathbf{m}\tilde{\mathbf{G}}^E + \begin{bmatrix} (\mathbf{w}^{\partial E})^T \mathbf{m}\mathbf{V}_k^{\partial E} \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times n_k} \end{bmatrix}, \quad \text{se } k = 1, \\ \mathbf{m}\mathbf{G}^E &= \mathbf{m}\tilde{\mathbf{G}}^E + \begin{bmatrix} (\mathbf{w}^E)^T \mathbf{m}\mathbf{V}_k^E \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times n_k} \end{bmatrix}, \quad \text{se } k \geq 2.\end{aligned}$$

Quindi definita $\mathbf{Q}^{k,E}$ la matrice di cambio base che consente di passare dalla base $\mathbf{m}^{k,E}$ dei monomi scalati alla base polinomiale alternativa dello spazio $\mathbb{P}_k(E)$, come avviene nel caso 2D (vedi equazione (6.5)),

$$\mathbf{p}\tilde{\mathbf{G}}^E = \mathbf{Q}^{k,E} \mathbf{m}\tilde{\mathbf{G}}^E (\mathbf{Q}^{k,E})^T$$

e la matrice $\mathbf{p}\mathbf{G}^E$, propria dell'approccio ibrido, si ottiene dalla matrice $\mathbf{p}\tilde{\mathbf{G}}^E$ sostituendo la riga corrispondente al valore singolare più piccolo con

$$P_0(\mathbf{p}^{k,E})^T = P_0(\mathbf{p}^{k,E})^T (\mathbf{Q}^{k,E})^T.$$

Per quanto riguarda la costruzione della matrice $\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^E$, le cui entrate sono definite da

$$\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}_{\alpha i}^E = (\nabla\varphi_j, \nabla m_\alpha^k)_{0,E} = \left(\varphi_i, \frac{\partial m_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \right)_{0,\partial E} - (\varphi_i, \Delta m_\alpha^k)_{0,E}$$

si osservi che

- $\forall m_\alpha^k \in \mathcal{M}_k(E)$ e $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2}$ il termine

$$\int_{\partial E} \frac{\partial m_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \varphi_i = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \int_F \frac{\partial m_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \varphi_i = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \int_F \frac{\partial m_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{m}\hat{\Pi}_{F,k-1}^0 \varphi_i \quad (7.2)$$

poichè $\frac{\partial m_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \in \mathcal{M}_{k-1}(F) \forall F \in \mathcal{F}_{h,E}$. Pertanto, introdotta la matrice di Vandermonde

$$\mathbf{m}\mathbf{V}_{\Pi_{k-1}^0}^{\partial E} = \mathbf{m}\Pi_{\partial E, k-1}^0 (\varphi_j^{\partial E}) (\mathbf{x}_i^{\partial E}) \quad \forall \mathbf{x}_i^{\partial E} \in \mathcal{Q}(\partial E), \forall j = 1, \dots, N^{\text{dof}_E} - n_{k-2},$$

la matrice $\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^{\partial E} \in \mathbb{R}^{n_k \times (N^{\text{dof}_E} - n_{k-2})}$ tale che

$$\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^{\partial E} = \left[(\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,x}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,y}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,z}^{\partial E})^T \mathbf{W}_z^{\partial E} \right] \mathbf{m}\mathbf{V}_{\Pi_{k-1}^0}^{\partial E}$$

ha come entrata (α, i) il termine definito in (7.2). Tale termine risulta essere nullo per le funzioni di base relative ai gradi di libertà interni.

- $\forall m_\alpha^k \in \mathcal{M}_k(E)$ e $\forall i = N_E^{\text{dof}} - n_{k-2} + 1, \dots, N^{\text{dof}_E}$ il secondo termine risulta essere non nullo solo per le funzioni di base relative ai gradi di libertà interni e si calcola come nel caso 2D (vedi equazione (5.3)).

Definita la matrice

$$\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^{E^\circ} = -|E| [\mathbf{L}_k^E(1 : n_{k-2}, :)]^T,$$

nel caso 3D la matrice $\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^E$ si costruisce come

$$\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^E = [\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^{\partial E} \quad \mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^{E^\circ}].$$

In conclusione

$$\mathbf{m}\mathbf{B}^E = \mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^E + \begin{bmatrix} (\mathbf{w}^{\partial E})^T \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times N_E^{\text{dof}}} \end{bmatrix}, \quad \text{se } k = 1,$$

$$\mathbf{m}\mathbf{B}^E = \mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}^E + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{1 \times N_E^{\text{dof}} - n_{k-2}} & |E| & \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{1 \times n_{k-2} - 1} \\ \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_k-1) \times N_E^{\text{dof}}} & & \end{bmatrix}, \quad \text{se } k \geq 2.$$

Adottando un approccio ibrido, invece, il termine (7.2) si riscrive come $\forall p_\alpha^k$ e $\forall i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}} - n_{k-2}$ il termine

$$\int_{\partial E} \frac{\partial p_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \varphi_i = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \int_F \frac{\partial p_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \varphi_i = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{k,E} \int_F \frac{\partial m_\beta^k}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{m}\hat{\Pi}_{F,k-1}^0 \varphi_i, \quad (7.3)$$

pertanto

$$\mathbf{p}\tilde{\mathbf{B}}^{\partial E} = \mathbf{Q}^{k,E} \left[(\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,x}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,y}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,z}^{\partial E})^T \mathbf{W}_z^{\partial E} \right] \mathbf{m}\mathbf{V}_{\Pi_{k-1}^0}^{\partial E}. \quad (7.4)$$

Oppure

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} \frac{\partial p_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \varphi_i &= \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \int_F \frac{\partial p_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \varphi_i \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \int_F \frac{\partial p_\alpha^k}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{p}\hat{\Pi}_{F,k-1}^0 \varphi_i \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{k,E} \int_F \frac{\partial m_\beta^k}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{p}\hat{\Pi}_{F,k-1}^0 \varphi_i \end{aligned}$$

pertanto

$$\mathbf{p}\tilde{\mathbf{B}}^{\partial E} = \mathbf{Q}^{k,E} \left[(\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,x}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,y}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,z}^{\partial E})^T \mathbf{W}_z^{\partial E} \right] \mathbf{p}\mathbf{V}_{\Pi_{k-1}^0}^{\partial E}. \quad (7.5)$$

Per ottenere la matrice $\mathbf{P}\mathbf{B}$ si procede sostituendo la riga evidenziata dalla fattorizzazione QR-rank-revealing con il vettore dato dagli $P_0(\varphi_i)$.

Utilizzando la base polinomiale alternativa anche sulle facce e ridefinendo i gradi di libertà in funzione della stessa, ovvero ridefinendo sia i gradi di libertà interni, sia i gradi di libertà di bordo inerenti ai momenti rispetto alla base dei monomi su ciascuna faccia, la matrice $\mathbf{P}\mathbf{G}$ coincide con la matrice $\mathbf{P}\mathbf{G}$ definita precedentemente, in quanto non dipende da tali gradi di libertà. Invece, la matrice $\mathbf{P}\mathbf{B}$, in modo analogo al caso $2D$, si ottiene sostituendo la riga corrispondente al valore singolare più piccolo della matrice

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^E = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^{\partial E} & \mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^{E^\circ} \end{bmatrix},$$

dove

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^{E^\circ} = -|E| \left[\mathbf{L}_k^E(1 : n_{k-2}, :) \right]^T (\mathbf{Q}^{k-2,E})^{-1},$$

e

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^{\partial E} = \mathbf{Q}^{k,E} \left[(\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,x}^{\partial E})^T \mathbf{W}_x^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,y}^{\partial E})^T \mathbf{W}_y^{\partial E} + (\mathbf{m}\mathbf{V}_{k,z}^{\partial E})^T \mathbf{W}_z^{\partial E} \right] \mathbf{P}\mathbf{V}_{\Pi_{k-1}^0}^{\partial E}.$$

con

$$(\mathbf{w}^{\partial E})^T, \quad \text{se } k = 1,$$

$$\left[\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times N_E^{\text{dof}} - n_{k-2}} \quad |E| (\mathbf{Q}^{k-2,E})^{-1} (1, :) \right], \quad \text{se } k \geq 2.$$

7.3 Calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i$

Il calcolo dei coefficienti delle combinazioni $\Pi_{E,k-1}^0 \nabla \varphi_i$ per ogni $i = 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$ richiede la costruzione delle matrici dei coefficienti $\mathbf{E}_{k-1,x}^E$, $\mathbf{E}_{k-1,y}^E$ e $\mathbf{E}_{k-1,z}^E$. Quest'ultima coinvolge i gradi di libertà sul bordo nel calcolo del secondo membro del termine destro della relazione (5.7). In particolare, rispetto la componente x ,

$$(\varphi_i, m_\alpha^{k-1} n_{\partial E, x})_{0, \partial E} = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,E}} \left(\hat{\Pi}_{F,k-1}^0 \varphi_i, m_\alpha^{k-1} n_{F,x} \right)_{0,F}.$$

Pertanto, la matrice $\mathbf{E}_{k-1,*}^E$ per ogni $* \in \{x, y, z\}$, definita in (5.6),

- rispetto la base dei monomi

$$\mathbf{m}\mathbf{E}_{k-1,*}^E = \left[(\mathbf{m}\mathbf{V}_{k-1}^{\partial E})^T \mathbf{W}_*^{\partial E} \mathbf{m}\mathbf{V}_{\Pi_{k-1}^0}^{\partial E} \quad -|E| (\mathbf{m}\mathbf{D}_{k,*}^E(1 : n_{k-2}, 1 : n_{k-1}))^T \right];$$

- utilizzando l'approccio ibrido

$$\mathbf{P}\mathbf{E}_{k-1,*}^E = \mathbf{Q}^{E,k-1} \mathbf{m}\mathbf{E}_{k-1,*}^E;$$

- in funzione della nuova base polinomiale, ridefinendo i gradi di libertà relativi ai momenti,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \mathbf{E}_{k-1,*}^E &= \left[\left(\mathbf{m} \mathbf{V}_{k-1}^{\partial E} \right)^T \mathbf{W}_*^{\partial E} \mathbf{p} \mathbf{V}_{\Pi_{k-1}^0}^{\partial E} \quad -|E| \left(\mathbf{m} \mathbf{D}_{k,*}^E (1 : n_{k-2}, 1 : n_{k-1}) \right)^T \left(\mathbf{Q}^{E,k-2} \right)^{-1} \right] \\ &\Rightarrow \mathbf{p} \mathbf{E}_{k-1,*}^E = \mathbf{Q}^{E,k-1} \mathbf{p} \mathbf{E}_{k-1,*}^E. \end{aligned}$$

7.4 Matrice di stiffness

Il calcolo della matrice di stiffness richiede una procedura completamente analoga a quella seguita nella Sezione 5.4 nel caso 2D.

Nota 7.2. *Si osservi che il calcolo di $\Pi_{E,k-1}^0 \varphi_i$ non coinvolge integrali sul bordo di E . Pertanto, la sua costruzione risulta essere completamente analoga a quella relativa al caso 2D, mostrata nella sezioni 5.2 e 6.4.*

Calcolo della matrice \mathbf{D} Indicata con $\mathbf{m} \mathbf{V}_k^{\mathcal{E}_{h,E}} \in \mathbb{R}^{(N^{E,E} + (k-1)N^{E,F}) \times n_k}$ la matrice di Vandermonde avente come entrate i valori che i monomi di $\mathcal{M}_k(E)$ assumono nei punti che definiscono i gradi di libertà su ciascun lato del poliedro e la matrice $\mathbf{m} \hat{\mathbf{V}}_{k-2}^{\partial E} \in \mathbb{R}^{N_Q^{\partial E} \times \hat{n}_k}$ data dalla concatenazione verticale delle matrici $\frac{1}{|F|} \hat{\mathbf{V}}_{k-2}^F$, $\forall F \in \mathcal{F}_{h,E}$, allora

$$\mathbf{m} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \mathbf{V}_k^{\mathcal{E}_{h,E}} \\ \left(\mathbf{m} \hat{\mathbf{V}}_{k-2}^{\partial E} \right)^T \mathbf{W}^{\partial E} \mathbf{m} \mathbf{V}_k^{\partial E} \\ \frac{1}{|E|} \mathbf{m} \mathbf{H}^{k,E} (1 : n_{k-2}, :) \end{bmatrix}.$$

Seguendo l'approccio ibrido, per ogni $\alpha = 1, \dots, n_k$,

- Per ogni $i = 1, \dots, N^{E,V} + (k-1)N^{E,E}$

$$\mathbf{p} \mathbf{D}_{i\alpha} = \text{dof}_i(p_\alpha^k) = p_\alpha^k(\mathbf{x}_i^{\mathcal{E}_{h,E}}) = \sum_{\beta=1}^{n_k} \mathbf{Q}_{\alpha\beta}^{k,E} m_\alpha^k(\mathbf{x}_i^{\mathcal{E}_{h,E}}) = \left(\mathbf{m} \mathbf{V}_k^{\mathcal{E}_{h,E}} (\mathbf{Q}^{k,E})^T \right)_{i\alpha}$$

- Per ogni $i = N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + 1, \dots, N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + \hat{n}_{k-2}$, indicato con $j = i - (N^{E,V} + (k-1)N^{E,E})$

$$\mathbf{p} \mathbf{D}_{i\alpha} = \frac{1}{|F|} (p_\alpha^k, \hat{m}_j^{k-2})_{0,F} = \left(\mathbf{m} \hat{\mathbf{V}}_{k-2}^{\partial E} \mathbf{W}^{\partial E} \mathbf{m} \mathbf{V}_k^{\partial E} (\mathbf{Q}^{k,E})^T \right)_{j\alpha}$$

- Per ogni $i = N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + \hat{n}_{k-2} + 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$, indicato con $j = i - (N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + \hat{n}_{k-2})$

$$\mathbf{p} \mathbf{D}_{i\alpha} = \frac{1}{|E|} (p_\alpha^k, m_j^{k-2})_{0,E} = \left(\frac{1}{|E|} \mathbf{m} \mathbf{H}^k (1 : n_{k-2}, :) (\mathbf{Q}^{k,E})^T \right)_{j\alpha}$$

In conclusione,

$$\mathbf{pD} = \mathbf{mD} (\mathbf{Q}^{k,E})^T.$$

Riscrivendola in funzione della nuova base polinomiale, invece, si ottiene

- Per ogni $i = N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + 1, \dots, N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + \hat{n}_{k-2}$, indicato con $j = i - (N^{E,V} + (k-1)N^{E,E})$

$$\mathbf{pD}_{i\alpha} = \frac{1}{|F|} (p_\alpha^k, \hat{p}_j^{k-2})_{0,F} = \left(\left(\mathbf{p}\hat{\mathbf{V}}_{k-2}^{\partial E} \right)^T \mathbf{W}^{\partial E \mathbf{m}} \mathbf{V}_k^{\partial E} (\mathbf{Q}^{k,E})^T \right)_{j\alpha}$$

- Per ogni $i = N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + \hat{n}_{k-2} + 1, \dots, N_E^{\text{dof}}$, indicato con $j = i - (N^{E,V} + (k-1)N^{E,E} + \hat{n}_{k-2})$

$$\mathbf{pD}_{i\alpha} = \frac{1}{|E|} (p_\alpha^k, p_j^{k-2})_{0,E} = \frac{1}{|E|} \mathbf{pH}^k_{j\alpha}.$$

In conclusione,

$$\mathbf{pD} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathbf{m}\mathbf{V}_k^{\mathcal{E}_{h,E}} \\ \left(\mathbf{p}\hat{\mathbf{V}}_{k-2}^{\partial E} \right)^T \mathbf{W}^{\partial E \mathbf{m}} \mathbf{V}_k^{\partial E} \end{array} \right] (\mathbf{Q}^{k,E})^T \\ \frac{1}{|E|} \mathbf{pH}^{k,E} (1 : n_{k-2}, :) \end{array} \right].$$

7.5 Esperimento numerico

L'esperimento proposto è una naturale estensione di quello presentato nella Sezione 6.5 nel caso 2D. Si consideri pertanto il seguente problema di Poisson con condizione omogenee al bordo

$$\begin{cases} -\theta \Delta u = f & \Omega = (0,1)^3 \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}, \quad (7.6)$$

con θ costante, la cui soluzione esatta è

$$u(x, y) = 6.4xyz(1-x)(1-y)(1-z) + 1.7. \quad (7.7)$$

La mesh utilizzata per la discretizzazione del dominio è mostrata in Figura 7.1.

I risultati mostrano, che nel caso 3D, come già avveniva nel caso bidimensionale, la ridefinizione dei dof in funzione della nuova base polinomiale garantisce che l'ordine di grandezza del numero di condizionamento rimanga pressoché costante all'aumentare del grado polinomiale, come si evince dalla Figura 7.2.

Per quanto riguarda l'andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$, come si può osservare dal grafico 7.4, l'utilizzo di una base alternativa permette di ottenere buoni risultati anche per gradi polinomiali più elevati.

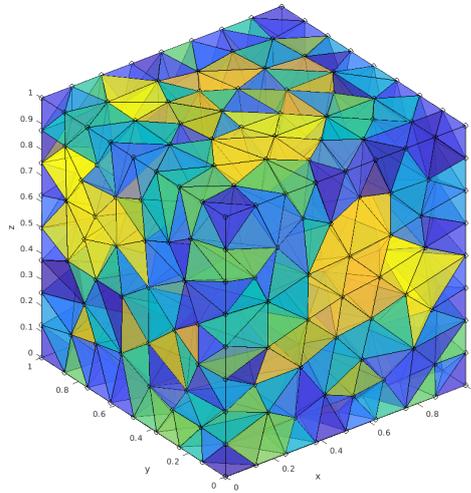


Figura 7.1: Mesh tetraedrica utilizzata per la decomposizione del dominio $\Omega = (0,1)^3$.

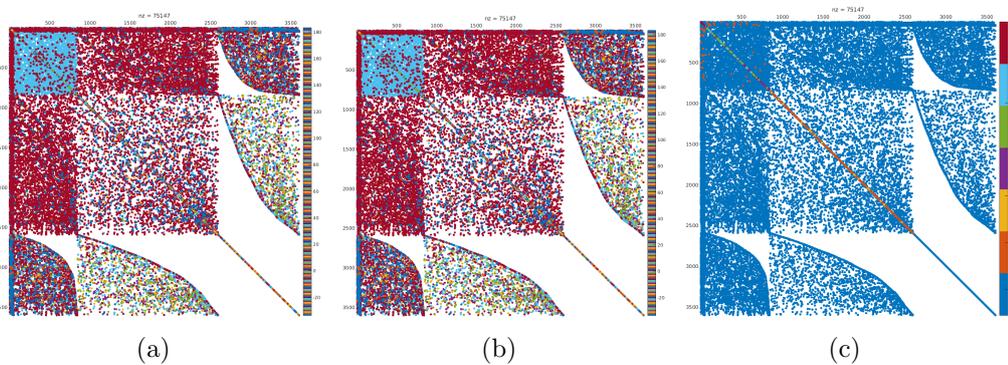


Figura 7.2: Matrice di stiffness globale \mathbf{K} relativa al grado polinomiale $k = 2$ nel caso in cui i proiettori sono definiti in funzione della base dei monomi scalati (7.2(a)), in funzione della base *Eig*, sia nel caso si segua un approccio ibrido (7.2(b)), sia se si provvede a ridefinire il tutto in funzione della nuova base (7.2(c)).

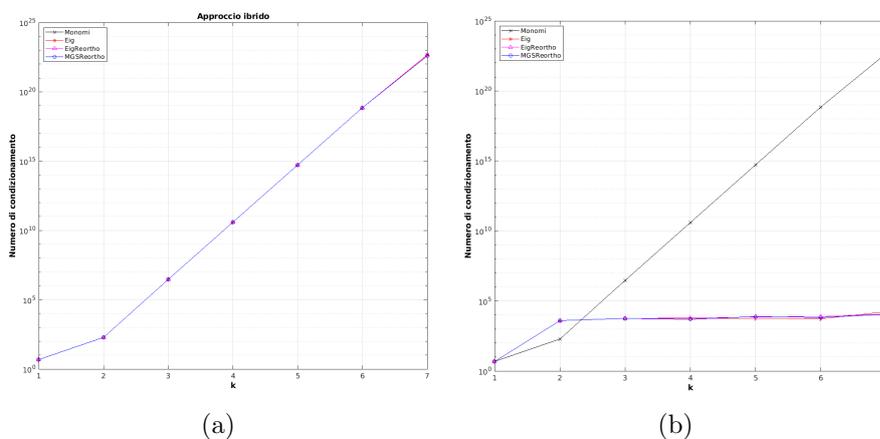


Figura 7.3: Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k , per l'approccio ibrido (7.3(a)) e in funzione della nuova base polinomiale (7.3(b)).

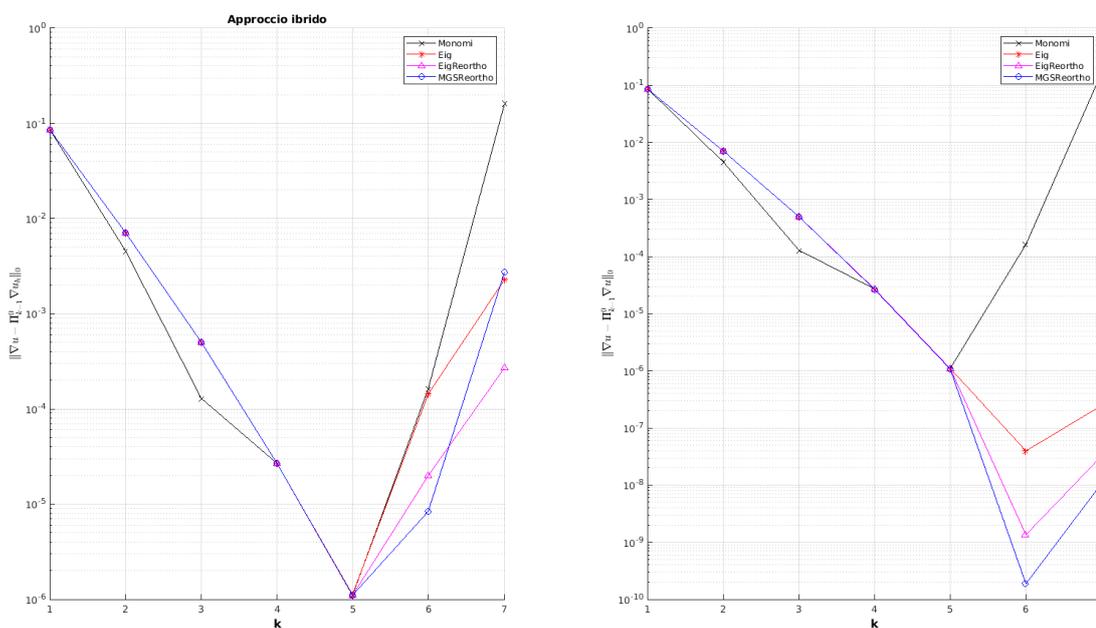


Figura 7.4: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ in funzione del grado polinomiale k , per l'approccio ibrido e in funzione della nuova base polinomiale.

	Operatore di proiezione Π_E definito tramite la condizione di ortogonalità $(q_\alpha, \Pi_E v)_{0,E} = (q_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n_k} c_\beta^E q_\beta)_{0,E}$	Operatore di proiezione $\hat{\Pi}_F$ definito tramite la condizione di ortogonalità $(\hat{q}_\alpha, \hat{\Pi}_F v)_{0,F} = (\hat{q}_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n_k} c_\beta^F \hat{q}_\beta)_{0,F}$	Gradi di libertà relativi ai momenti: $\frac{1}{ F } (q_\alpha, v)_{0,F}$ $\frac{1}{ E } (q_\alpha, v)_{0,E}$
Approccio classico	monomi	monomi	monomi
Approccio ibrido	base polinomiale alternativa (Eig, EigReorth o MGSReorth)	monomi	monomi
Ridefinizione dei gradi di libertà	base polinomiale alternativa (Eig, EigReorth o MGSReorth)	base polinomiale alternativa (Eig, EigReorth o MGSReorth)	base polinomiale alternativa (Eig, EigReorth o MGSReorth)

∞

Tabella 7.1: Diversi approcci utilizzati nella costruzione VEM in 3D, a seconda della base polinomiale \mathbf{q} utilizzata.

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	4.7695e+00	4.7695e+00	4.7695e+00	4.7695e+00
2	2.0008e+02	2.0008e+02	2.0008e+02	2.0008e+02
3	2.9830e+06	2.9830e+06	2.9830e+06	2.9830e+06
4	4.0941e+10	4.0941e+10	4.0941e+10	4.0941e+10
5	5.4111e+14	5.4111e+14	5.4111e+14	5.4111e+14
6	6.9102e+18	6.9102e+18	6.9102e+18	6.9102e+18
7	4.7657e+22	4.3651e+22	4.7468e+22	3.9829e+22

Tabella 7.2: Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k , relativamente all'approccio ibrido.

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	4.7695e+00	4.7695e+00	4.7695e+00	4.7695e+00
2	2.0008e+02	3.9499e+03	3.9499e+03	3.9499e+03
3	2.9830e+06	5.6640e+03	5.5565e+03	5.5765e+03
4	4.0941e+10	5.5951e+03	6.0051e+03	4.7603e+03
5	5.4111e+14	5.6712e+03	7.0691e+03	7.5008e+03
6	6.9102e+18	5.3210e+03	7.3901e+03	6.6187e+03
7	4.7657e+22	1.7009e+04	1.2297e+04	1.1227e+04

Tabella 7.3: Numero di condizionamento della matrice di stiffness globale al variare del grado polinomiale k , per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà relativi ai momenti.

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	8.5331e-02	8.5331e-02	8.5331e-02	8.5331e-02
2	4.5528e-03	7.0938e-03	7.0938e-03	7.0938e-03
3	1.2815e-04	5.0282e-04	5.0282e-04	5.0282e-04
4	2.6896e-05	2.6896e-05	2.6896e-05	2.6896e-05
5	1.0959e-06	1.1295e-06	1.0959e-06	1.0959e-06
6	1.6242e-04	1.4353e-04	1.9979e-05	8.3719e-06
7	1.6156e-01	2.2883e-03	2.6948e-04	2.7523e-03

Tabella 7.4: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, seguendo l'approccio ibrido.

k	Monomi	Eig	EigReortho	MGSReortho
1	8.5331e-02	8.5331e-02	8.5331e-02	8.5331e-02
2	4.5528e-03	7.0938e-03	7.0938e-03	7.0938e-03
3	1.2815e-04	5.0433e-04	5.0433e-04	5.0281e-04
4	2.6896e-05	2.7025e-05	2.7025e-05	2.6698e-05
5	1.0959e-06	1.0943e-06	1.0943e-06	1.0723e-06
6	1.6242e-04	3.9260e-08	1.3481e-09	1.8869e-10
7	1.6156e-01	2.4418e-07	3.2614e-08	1.0531e-08

Tabella 7.5: Andamento dell'errore $\|\nabla u - \Pi_{k-1}^0 \nabla u_h\|_{0,\Omega}$ al variare del grado polinomiale k per le diverse basi costruite, dopo la ridefinizione dei gradi di libertà relativi ai momenti.

Capitolo 8

Conclusioni

I metodi agli elementi virtuali rappresentano un potente strumento per la discretizzazione di equazioni alle derivate parziali. Tuttavia, in presenza di elementi caratterizzati da una forte anisotropia o per gradi polinomiali elevati, tale metodo può restituire soluzioni poco accurate.

Tra le motivazioni vi è l'uso della classica base monomiale, coinvolta nella costruzione degli operatori di proiezione locali e nella definizione dei gradi di libertà, la quale influisce negativamente sul numero di condizionamento della matrice di stiffness.

In questo lavoro di tesi, sono state pertanto presentate due basi polinomiali alternative, la cui implementazione si inserisce facilmente all'interno di un codice VEM preesistente, tramite la sola ridefinizione dei metodi che si occupano della costruzione dei proiettori locali, entrambe pensate con l'obiettivo di migliorare la stabilità numerica del metodo.

I risultati hanno mostrato che la ridefinizione dei gradi di libertà in funzione di una base ortonormale, come quella presentata in [4], permette di limitare, in modo significativo, il numero di condizionamento della matrice di stiffness. Inoltre, il suo utilizzo permette anche un notevole miglioramento rispetto l'errore in norma $H^1(\Omega)$, il quale, anche nel caso in cui la soluzione esatta risulti essere un polinomio di grado $\leq k$, in aritmetica finita, anziché tendere a 0, cresce all'aumentare del grado polinomiale, a causa del cattivo condizionamento della matrice di stiffness e ciò si evidenzia soprattutto nel caso 3-dimensionale.

Ad ogni modo, le simulazioni presentate sono state ottenute fissando il grado polinomiale volta per volta. Una buona scelta della base polinomiale, che garantisca la stabilità del metodo anche in corrispondenza di gradi polinomiali elevati, risulta ancora più importante quando si utilizza un metodo hp , il quale prevede un raffinamento di tipo iterativo sia rispetto al parametro della mesh h sia rispetto al grado polinomiale k (p).

Bibliografia

- [1] L. Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L. Marini e A. Russo, “Basic principles of Virtual Element Methods,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 23, pp. 199–214, nov. 2012.
- [2] L. Mascotto, *Ill-conditioning in the Virtual Element Method: stabilizations and bases*, 2017. arXiv: 1705.10581.
- [3] S. Berrone e A. Borio, “Orthogonal polynomials in badly shaped polygonal elements for the Virtual Element Method,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 129, pp. 14–31, 2017.
- [4] F. Bassi, L. Botti, A. Colombo, D. Di Pietro e P. Tesini, “On the flexibility of agglomeration based physical space discontinuous Galerkin discretizations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, n. 1, pp. 45–65, 2012.
- [5] L. B. da Veiga, F. Brezzi, L. D. Marini e A. Russo, *Virtual Element Methods for general second order elliptic problems on polygonal meshes*, dic. 2014. arXiv: 1412.2646.
- [6] S. Berrone e A. Borio, “An optimized implementation of the Virtual Element Method for second order PDEs,” mar. 2020.
- [7] L. Veiga, F. Brezzi, L. Marini e A. Russo, “The Hitchhiker’s Guide to the Virtual Element Method,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 24, pp. 1–24, lug. 2014.
- [8] B. Ahmad, A. Alsaedi, F. Brezzi, L. Marini e A. Russo, “Equivalent projectors for virtual element methods,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, pp. 376–391, set. 2013.
- [9] L. Giraud, J. Langou e M. Rozložník, “The loss of orthogonality in the Gram-Schmidt orthogonalization process,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 50, pp. 1069–1075, ott. 2005.