



**Politecnico  
di Torino**

**Politecnico di Torino**

Corso di Laurea in Ingegneria Civile  
A.a. 2020/2021  
Sessione di Laurea Luglio 2021

# **Simulazione numerica di flussi granulari in presenza di ostacoli simulativi di vegetazione**

**Relatori:** Prof. Claudio Scavia  
Prof.ssa Marina Pirulli  
Prof. Alessandro Leonardi

**Candidato:** Luca Flammini  
Matricola 243791

## ABSTRACT

I flussi granulari in natura sono dei fenomeni particolarmente pericolosi a causa dei loro effetti distruttivi. Per contenerli vengono realizzate delle opere rigide che riducono l'energia dell'evento o impediscono all'evento stesso di coinvolgere le zone antropizzate. In presenza di flussi di media intensità, tuttavia, la comunità scientifica si è interrogata sulla possibilità di inserire protezioni meno costose e invasive, soprattutto per quanto riguarda l'impatto visivo con l'ambiente circostante. In questo contesto, Luong, Baker ed Einav [2019] hanno proposto una serie di risultati di laboratorio in cui si valuta la variazione delle dimensioni e delle tempistiche di propagazione di un flusso granulare su un piano inclinato, caratterizzato da 3 diversi pattern di ostacoli, simulativi della presenza di alberi. I tre pattern differiscono per la spaziatura, costante e rispettivamente di 40 mm, 60 mm e 80 mm, e vengono confrontati con un'ulteriore prova con un piano libero. Inoltre, gli autori hanno ricavato una relazione analitica valida per tutte le configurazioni sperimentali che permette di descrivere il tasso di crescita areale del flusso. Lo scopo della tesi è stato quello di riprodurre tramite il software RASH3D i risultati del paper, scegliendo la reologia più adatta per la simulazione del fenomeno e calibrandone i parametri sulla base delle misure ricavate dagli autori, tramite un processo di "back-analysis". Successivamente, è stata commentata la validità della precedente relazione analitica, che non trova corrispondenza con i risultati del modello numerico a causa di un'ipotesi iniziale ritenuta eccessivamente semplificativa.

# INDICE

ABSTRACT.....	1
1. FLUSSI GRANULARI IN NATURA E OPERE DI MITIGAZIONE .....	1
1.1. Descrizione del mezzo granulare .....	1
1.2. Flussi granulari in natura .....	3
2. SPERIMENTAZIONE .....	10
3. DESCRIZIONE DI RASH3D .....	21
3.1. Cenni di meccanica dei fluidi .....	21
3.1.1. Equazioni di conservazione della massa .....	21
3.1.2. Equazioni di conservazione della quantità di moto .....	24
3.2. Shallow water equation .....	28
3.3. Reologia.....	38
3.3.1. Attritiva .....	38
3.3.2. Voellmy.....	38
3.3.3. Reologia $\mu(I)$ .....	39
3.4. Dati input .....	48
3.4.1. File "Parameter.mat" .....	49
3.4.2. File "Geometry" .....	49
3.4.3. File "Create Input" .....	51
3.4.4. Visualizzazione dei risultati.....	52
4. BACK-ANALYSIS CON GEOMETRIA 1 .....	53
4.1. Definizione della geometria e dei parametri di input.....	53
4.2. Risultati con reologia Attritiva e Voellmy .....	55
4.2.1. Piano libero-Reologia attritiva $\theta = 24^\circ$ .....	55
4.2.2. Piano con ostacoli [ $S=80\text{ mm}$ ]-Reologia Voellmy.....	58
4.2.3. Piano con ostacoli [ $S=60\text{ mm}$ ]-Voellmy .....	61
4.2.4. Piano con ostacoli [ $S=40\text{ mm}$ ]-Attritiva .....	64
4.2.5. Considerazioni sulle reologie semplici.....	66
4.3. Risultati con Reologia $\mu(I)$ .....	67
4.3.1. Piano libero-Reologia $\mu(I)$ .....	68
4.3.2. Piano con ostacoli [ $S=80\text{ mm}$ ]-Reologia $\mu(I)$ .....	71
4.3.3. Piano con ostacoli [ $S=60\text{ mm}$ ]-Reologia Pouliquen.....	74
4.3.4. Piano con ostacoli [ $S=40\text{ mm}$ ]-Reologia Pouliquen.....	77
4.3.5. Considerazioni sulla reologia Pouliquen .....	80

5.	BACK-ANALYSIS CON GEOMETRIA RETTANGOLARE .....	83
5.1.	Descrizione della nuova geometria .....	83
5.2.	Risultati con reologia $\mu(I)$ .....	85
5.2.1.	<i>Piano libero inlet</i> .....	86
5.2.2.	<i>Piano con ostacoli inlet [S=80 mm]-Reologia Pouliquen</i> .....	89
5.2.3.	<i>Piano con ostacoli inlet[S=60 mm]-Pouliquen</i> .....	92
5.2.4.	<i>Piano con ostacoli inlet [S=40 mm]-Pouliquen</i> .....	95
5.2.5.	<i>Prova della non corrispondenza con le reologie classiche</i> .....	98
6.	LEGGE ANALITICA PROPOSTA DAGLI AUTORI .....	101
6.1.	Descrizione e base teorica .....	101
6.2.	Considerazione critica sul funzionamento della legge .....	108
7.	CONCLUSIONI.....	111
8.	ALLEGATI.....	113
8.1.	“Parameter.mat” .....	113
8.2.	Create Geometry .....	114
8.3.	Create Input.....	116
9.	BIBLIOGRAFIA .....	120

# 1. FLUSSI GRANULARI IN NATURA E OPERE DI MITIGAZIONE

## 1.1. Descrizione del mezzo granulare

Un mezzo granulare è un insieme di particelle microscopiche con un diametro  $d$  tipicamente maggiore di  $100\text{ }\mu\text{m}$ . Questa limitazione in termini dimensionali definisce le interazioni che le particelle esercitano le une sulle altre e che, in questo caso, possono essere di tipo *attritivo* e *collisionale*. Per particelle più piccole iniziano a giocare dei ruoli importanti le forze di Van der Waals.

Per i mezzi granulari, ci sono ancora molti comportamenti che non riescono ad essere colti completamente dalle trattazioni analitiche.

- Il mezzo granulare è composto da un grande numero di particelle. Per esempio, una manciata di sabbia contiene un numero di particelle molto più elevato di quello che saremmo capaci di elaborare approssimandole con delle sfere. C'è una necessità di lavorare nel campo del *continuo*, immaginando di descrivere delle quantità medie ad esso associate. In generale un numero elevato di particelle non è un problema (per esempio nei gas oppure nei liquidi ce ne sono molte di più) ma in quel caso, la presenza di un'agitazione termica permette un approccio statistico da cui si derivano le quantità macroscopiche a partire da quelle microscopiche. Nel caso dei mezzi granulari le particelle sono troppo grandi per muoversi di moto Browniano e quindi non è possibile fare una statistica sulle diverse configurazioni.
- Un altro problema nell'applicazione della statistica ai mezzi granulari sta nel tipo di interazioni che avvengono tra le particelle. Le interazioni di contatto, che includono attrito e collisioni, sono dei meccanismi fortemente non lineari e dissipativi. Proprio la dissipazione a livello macroscopico è la

principale differenza con gli altri sistemi fisici che si studiano con la statistica.

- La descrizione del mezzo granulare come continuo é inoltre difficile perché c'è una mancanza di una scala di separazione netta fra il microscopico (che corrisponde alla dimensione dei grani) e della dimensione del flusso. In generale, quando si effettuano degli esperimenti di laboratorio che coinvolgono un flusso, lo spessore  $h$  é circa 10-20 volte quello della dimensione dei grani.
- Un'ultima difficoltà sta nel fatto che il mezzo granulare può esistere in diversi stati: a seconda di come viene maneggiato esso si può comportare come un solido, un liquido oppure un gas. I grani possono sostenere le tensioni interne nel caso in cui vadano a formare un mucchio di sabbia, possono fluire come acqua quando si trovano all'interno di una clessidra oppure si possono comportare come un gas nel caso in cui i grani siano fortemente agitati.

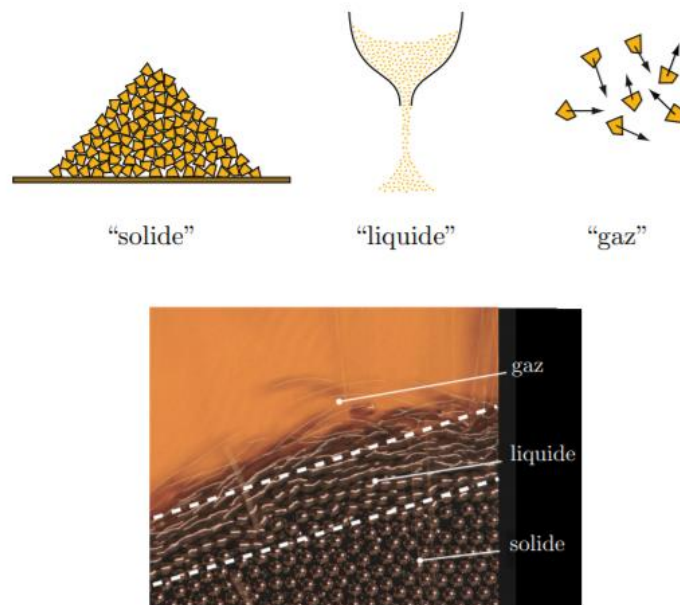


Figura 1: Esempio dei diversi stati del materiale granulare

Di fronte a questa complessità, sono stati sviluppati diversi modelli per descrivere le tipologie di regime. Nel regime denso-quasi-statico, dove le deformazioni sono molto lente e le particelle interagiscono per attrito, si può utilizzare un modello che si basa sulla teoria della plasticità. Nel regime gassoso invece, dove il flusso è più rapido e il materiale è maggiormente diluito, si ha un'interazione collisionale fra le particelle che può essere descritta con la teoria cinetica dei gas.

Il regime intermedio (*fluido*) è quello in cui risiedono le maggiori incertezze ma anche quello che ha maggiori applicazioni pratiche. In ingegneria geotecnica e ambientale, le “rock avalanche” sono un perfetto esempio di flussi densi granulari. I grani interagiscono fra di loro sia per attrito che per collisione e dal punto di vista fenomenologico ricorda un fluido.

## **1.2. Flussi granulari in natura**

I flussi granulari geofisici, come per esempio le valanghe o le colate detritiche, sono molto pericolosi e causano un numero elevato di morti ogni anno in tutto il mondo. È dunque molto importante capirne e predirne la locazione, il tempismo e l'estensione.

Sono stati fatti numerosi studi a questo proposito, sia in scala reale che in scala sperimentale. Questi sono stati utilizzati con successo per ricavare dei modelli predittivi sui flussi granulari e sono serviti per identificare le zone a rischio per progettare delle opere rigide di protezione. Il problema di queste strutture è che possono essere molto costose, sia da costruire che da mantenere e, specialmente quando sono previsti solo dei piccoli eventi, ci si chiede quanto effettivamente sia importante la realizzazione di opere così massive.

Di solito, il ruolo degli alberi e della vegetazione è trascurato quando si studiano le dinamiche di un flusso granulare perché hanno un'azione stabilizzante sul terreno e sulla neve e possono addirittura prevenire del tutto l'insorgere di eventi molto

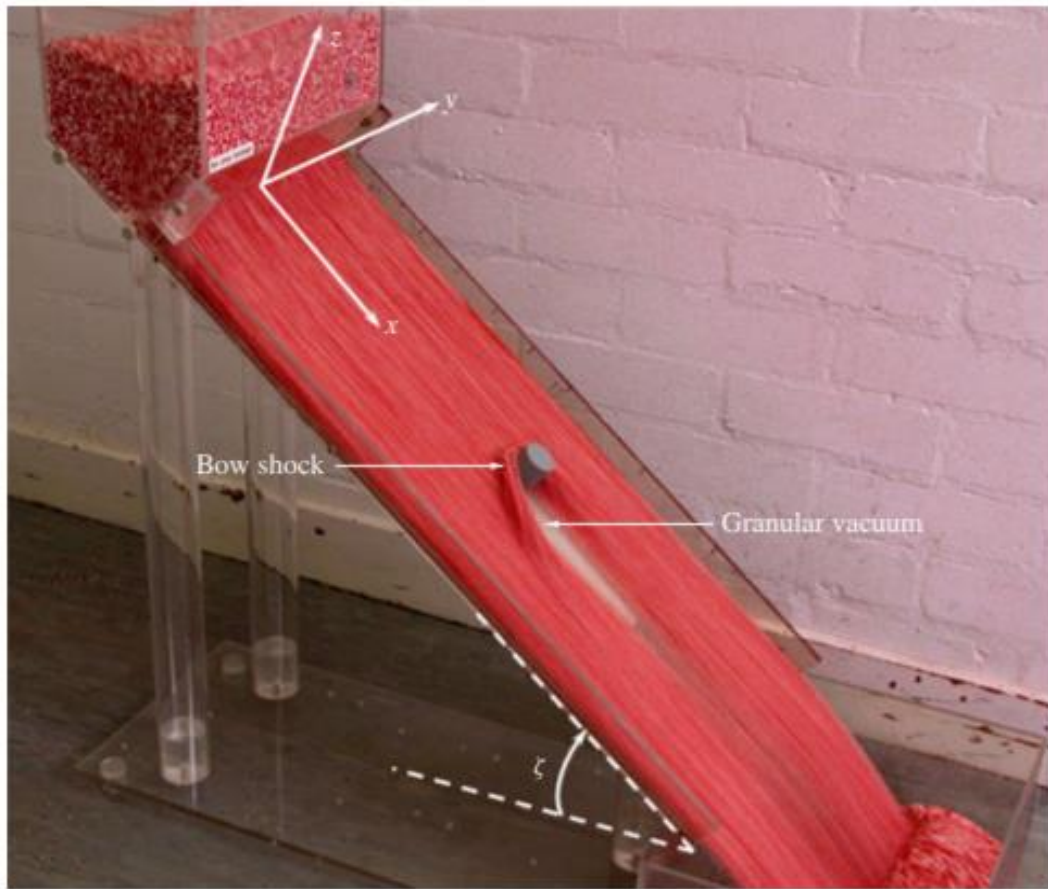
piccoli. D'altro canto però, se l'evento ha una portata considerevole allora la vegetazione viene completamente rimossa al passaggio del materiale e l'energia dissipata nel processo è minima rispetto a quella del flusso nel suo complesso.

Per eventi intermedi invece, che possono lo stesso provocare dei danni significativi, gli alberi hanno un effetto sia sullo sviluppo della frana e sia sul deposito finale. In questo caso la foresta dissipa energia sufficiente per ridurre l'estensione complessiva del flusso e può causare accumuli in corrispondenza degli alberi stessi.

In generale le foreste possono offrire una protezione naturale contro i rischi geofisici modesti e piantare degli alberi aggiuntivi può essere utilizzato come una protezione alternativa agli approcci classici.

La conoscenza di come il flusso interagisce con la foresta è essenziale per capire questi effetti mitiganti, sia per predire l'impatto della vegetazione esistente e sia per l'inserimento di nuovi ostacoli naturali. Sebbene molti esperimenti in scala di laboratorio esaminano i flussi su scivoli o piani vuoti, ce ne sono altrettanti che esaminano il ruolo degli ostacoli oppure la presenza della variabile topografica. Di particolare rilevanza per quanto riguarda il flusso attraverso le foreste è il lavoro di *Cui e Green*[3], i quali studiarono un flusso granulare intorno ad un singolo ostacolo cilindrico.

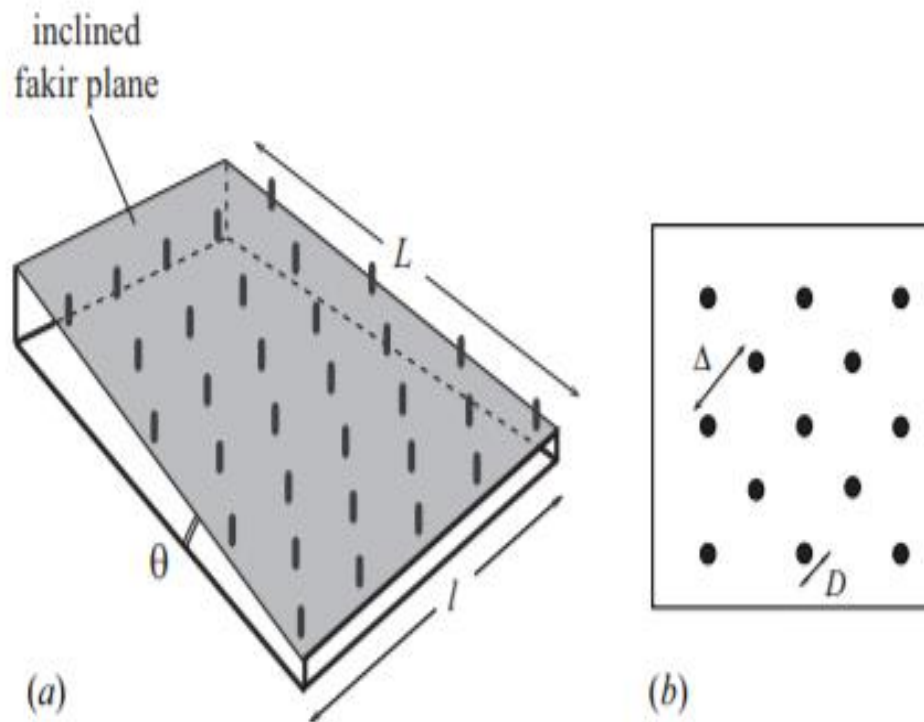




**Figura 2: Esperimento di Cui & Green**

Nella simulazione numerica, si é riuscito a riprodurre il fenomeno per un intervallo specifico del Numero di Froude. Ovviamente, per poter fare delle considerazioni che riflettono maggiormente la realtà é necessario riprodurre l'esperimento in presenza di ostacoli multipli, che generano dei fenomeni di interazione fra le varie parti del flusso.

*Benito et Al.*[4] condusse un esperimento in tal senso, con file di alberi realizzati tramite dei chiodi.



**Figura 3:Esperimento di Benito et Al.**

I risultati della modellazione hanno mostrato che la stabilità dello strato di materiale granulare aumenta all'aumentare della densità degli alberi.

Un altro studio importante è stato quello di *Ng et Al.* [5] che ha condotto un esperimento a larga scala esaminando l'effetto di deflettori difensivi a seguito di un rilascio finito di sabbia. Sono stati esaminati deflettori di diverse altezze e disposizioni, misurando il Numero di Froude e valutando la distanza del flusso risultante.

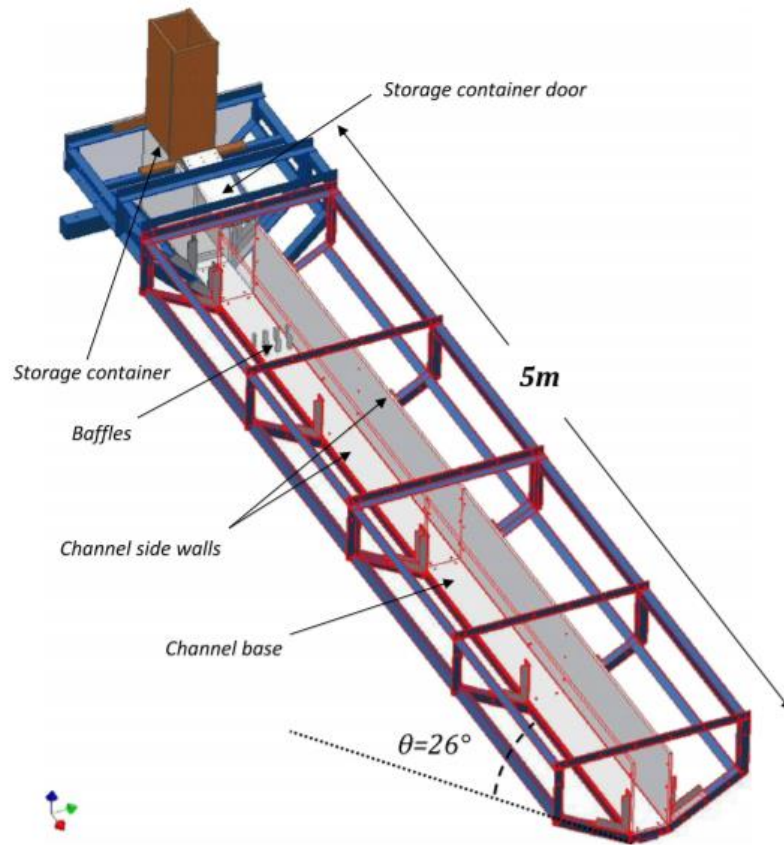
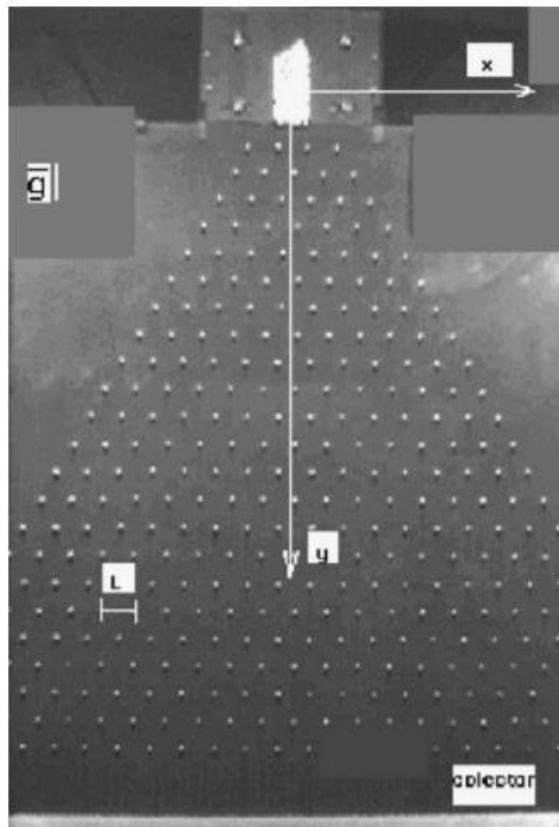


Figura 4: Esperimento Ng et Al.

Il loro piano inclinato tuttavia era confinato con delle pareti abbastanza strette, dunque il flusso durante lo sviluppo non aveva la possibilità di spandersi in ogni direzione.

Un esperimento molto vicino a quello precedente, ma con una distribuzione diversa degli ostacoli, è quello del “Galton Board”[6]: in questo caso si considera una tavola verticale con degli ostacoli attaccati ed equidistanziati sui quali vengono rilasciate delle palline che si accumulano sul fondo.



**Figura 5:Galton Board**

Si é potuto osservare che, prendendo una tavola abbastanza larga, l'espansione laterale delle sfere sarà molto simile a quella di una curva Gaussiana, visto che ogni collisione con un ostacolo può essere considerata come una variabile casuale binomiale con uguale probabilità che la sfera passi a destra o a sinistra dell'ostacolo. La presenza muri laterali più stretti di un valore critico cambia la distribuzione finale Gaussiana, il cui picco non sarà più visibile: questo mette in evidenza l'importante influenza del confinamento laterale. In ogni caso, il problema del Galton Board é che viene utilizzato con un'orientazione strettamente verticale, che minimizza l'attrito fra il flusso dei grani e il tavolo. D'altrocanto, i flussi granulari attraverso le foreste avvengono su superfici che hanno una determinata pendenza.

Il paper di Luong, Baker e Einav [2] cerca di esplorare ulteriormente come i flussi granulari si propagano in un modello simulativo di una foresta, presentando una serie di risultati ottenuti in laboratorio.

L'esperimento utilizza diversi pattern di ostacoli e soprattutto esamina un regime non confinato, che é piú simile a quello che potrebbe avvenire in natura.

## 2. SPERIMENTAZIONE

L'apparato sperimentale consiste in un piano di larghezza 600 mm e lunghezza 900 mm che può essere inclinato a partire da un angolo di  $28^\circ$  fino a un angolo di  $40^\circ$  rispetto all'orizzontale. Il piano inoltre *non* è provvisto di confinamenti laterali, dunque il flusso è libero di muoversi in ogni direzione. Su questo supporto vengono posizionati dei cilindri di plastica, rappresentativi degli alberi, di diametro 20 mm e altezza 50 mm, in maniera tale che lo spessore del flusso non vada mai a ricoprirli. Sono organizzati in pattern esagonali, con una spaziatura uniforme pari a  $S$  che, a seconda del test, può variare assumendo valori 40 mm, 60 mm, 80 mm. Si predispone inoltre una prova preliminare svolta in assenza di ostacoli, dunque con  $S = \infty$ .

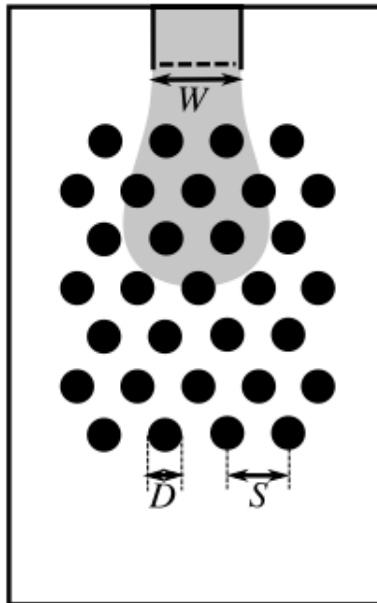


Figura 6: Schema del piano utilizzato per l'esperimento

Il materiale granulare che è stato utilizzato sono delle sfere di vetro di diametro 0.3 mm e con una densità  $\rho = 2500 \frac{kg}{m^3}$ . Esse sono rilasciate da un serbatoio che si trova nella parte alta del piano inclinato e che permette di regolare in maniera molto

precisa l'altezza del foro da cui fuoriesce il materiale, che viene fatta variare tra 13 mm a 43 mm nei differenti tests. La sua larghezza invece è fissa e pari a  $W=97$  mm, molto più piccola di quella del piano visto che il flusso necessita spazio per espandere anche lateralmente senza incontrare impedimenti. Per garantire una continuità di flusso per tutta la durata del test, il serbatoio è stato riempito con 5 kg di sfere di vetro.

Per le misurazioni è stata utilizzata una camera capace di scattare 100 foto al secondo, in maniera tale da poter registrare la progressione del flusso subito dopo l'istante di rilascio.

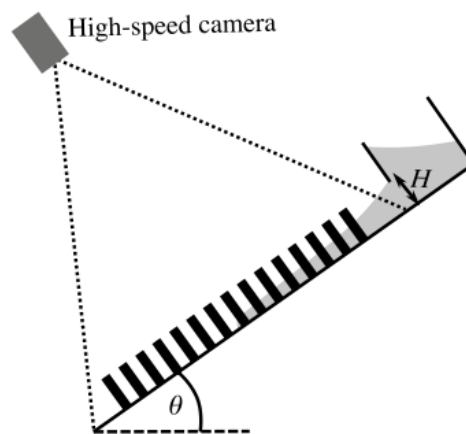


Figura 7: Acquisizione delle immagini tramite fotocamera

I risultati sono stati elaborati utilizzando la distribuzione *Fiji* del programma opensource *ImageJ*. Questo è utilizzato per separare in ogni immagine le regioni contenenti grani di materiale e regioni libere, definendo un valor limite di soglia su una scala di grigi: i pixels al di sotto di questo valore sono colorati di bianco, che è rappresentativo della presenza di materiale.

In basso, si riportano i risultati ottenuti dalla camera in diversi time-step e per ogni configurazione di ostacoli, considerando un'angolazione del piano di  $23^\circ$  e un'apertura del serbatoio  $H=23$  mm

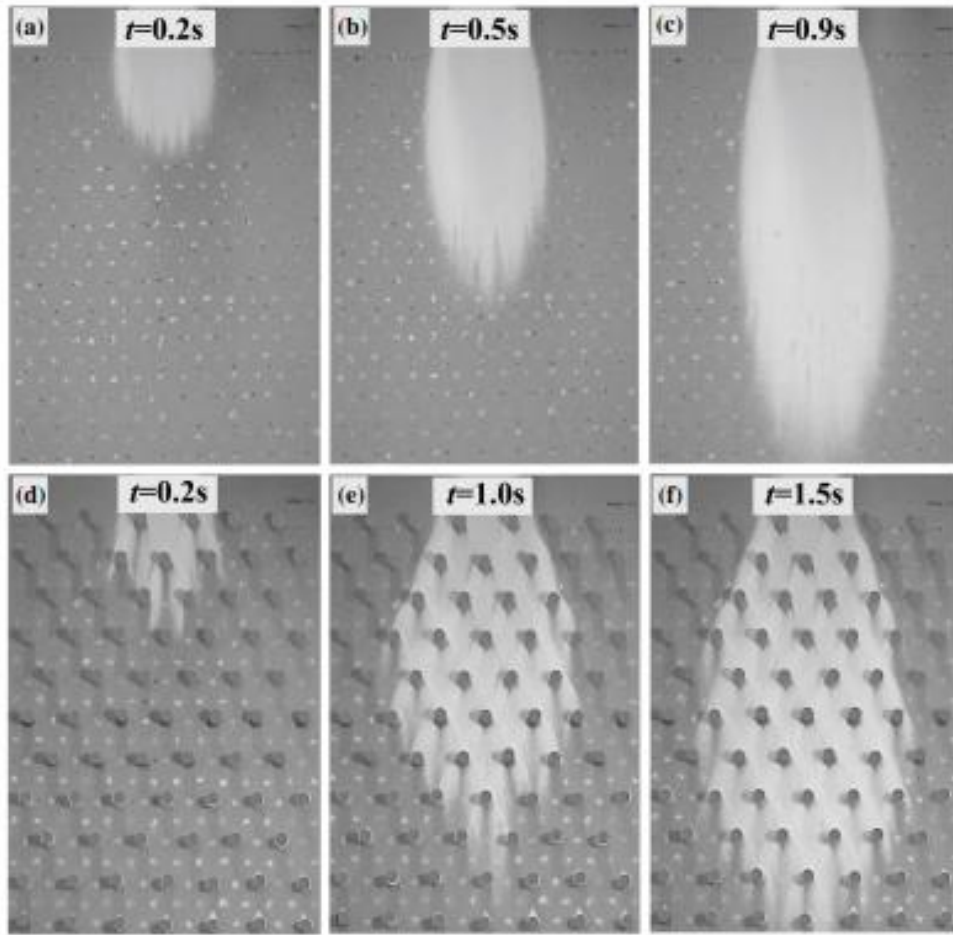


Figura 8: Flusso per  $S=\infty$  e  $S=80$  mm per diversi time-step



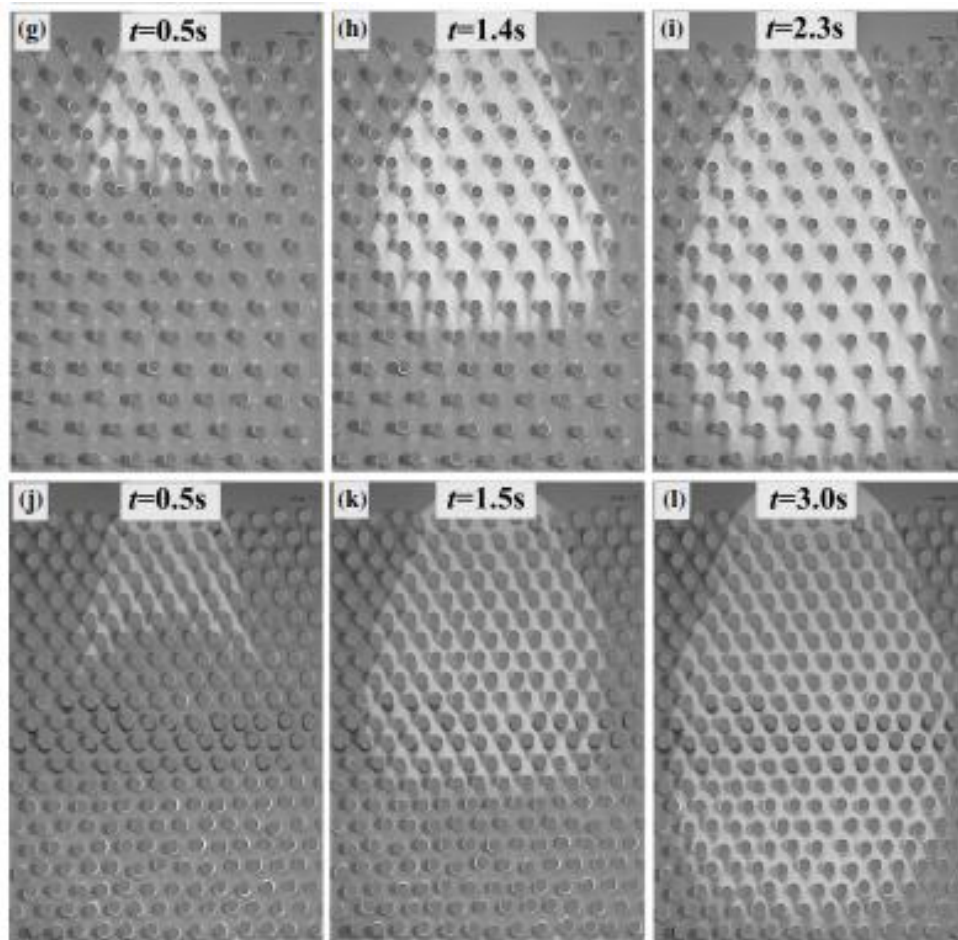


Figura 9:Flussi per  $S=60$  mm e  $S=40$  mm per diversi time-step

Questi dati poi sono elaborati ulteriormente per produrre dei grafici nei quali è più facile capire l'evoluzione del flusso nel tempo. Per ogni istante, si effettuano due misurazioni tracciando un rettangolo fittizio che racchiude il flusso e misurandone base  $W_{max}$  (rappresentativa della larghezza) e altezza  $L_{max}$  (rappresentativa della lunghezza). Inoltre si procede anche al calcolo dell'area interessata dalla presenza di grani, valutando quanti sono i pixels bianchi ed effettuandone poi una scalatura alle dimensioni reali del fenomeno.

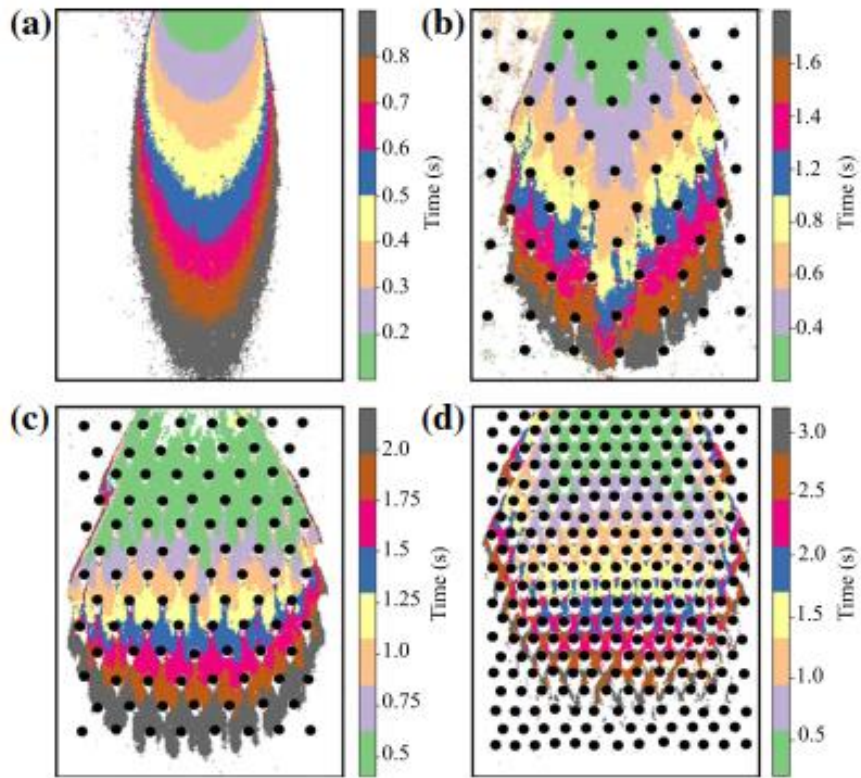


Figura 10: Variazione temporale del flusso nelle diverse configurazioni di ostacoli.

Esaminando le Figure 9 e 10 si può subito notare che la presenza di ostacoli induce dei cambiamenti significativi al flusso.

1. Per prima cosa, i differenti time-scale permettono di verificare che gli alberi rallentano il flusso nella direzione di massima pendenza. Questo risulta molto evidente nella Fig.11 in cui sono stati plottati  $L_{max}$  rispetto al tempo per ogni configurazione sperimentale del piano.

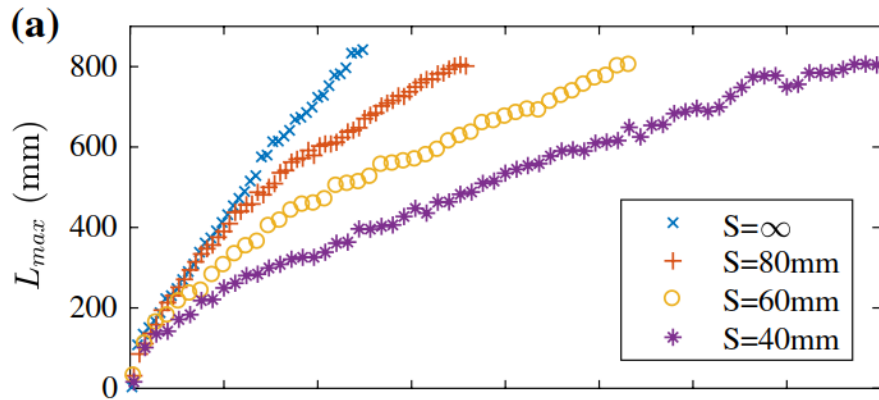


Figura 11: Variazione della lunghezza  $L_{max}$  nel tempo

In ogni caso il valore  $L_{max}$  aumenta con il tempo, visto che c'è un continuo afflusso di materiale dal serbatoio che si trova a monte, ma allo stesso tempo si può apprezzare un gradiente decrescente che indica una decelerazione progressiva. Questo in parte è dovuto all'attrito che si sviluppa tra i grani del materiale e il piano inclinato, ma principalmente è dovuto alla presenza di ostacoli. Infatti una loro disposizione maggiormente densa corrisponde a un maggior rallentamento se confrontato con le altre configurazioni. Per esempio, dopo un secondo il flusso nella configurazione di alberi più densa ha coperto la metà della distanza rispetto a quella che corrisponde al piano libero.

2. Inoltre è evidente anche una espansione laterale del flusso quando sono presenti gli alberi, che risulta tanto più accentuata quanto minore è la spaziatura fra essi. Per esempio, nelle fasi finali della misurazione, per  $S=40$  mm il flusso occupa quasi tutta la dimensione trasversale del piano.

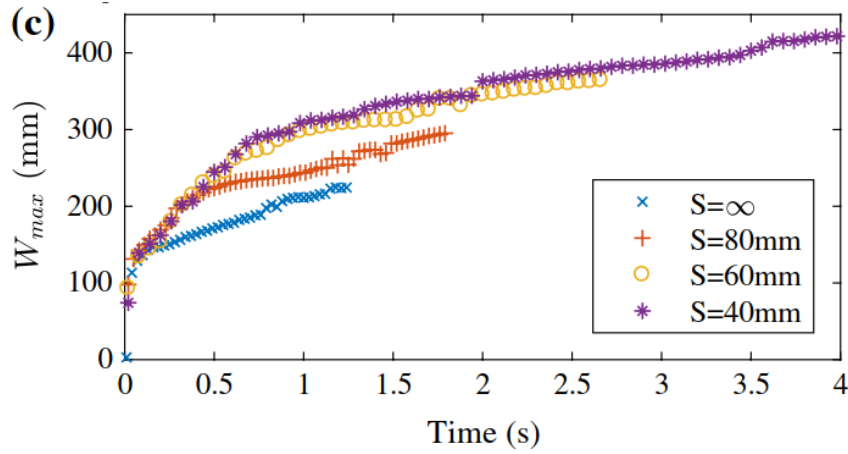


Figura 12: Variazione di  $W_{max}$  nel tempo

Inizialmente, tutte le spaziatore producono un'espansione abbastanza simile ma, con l'aumentare del tempo si osservano delle differenze notevoli: per esempio dopo 1 secondo, nella configurazione di piano libero, il valore  $W_{max}$  è circa 200 mm mentre, nello stesso istante di tempo, nella configurazione più denso si trova un  $W_{max}$  prossimo ai 300 mm.

3. È possibile inoltre utilizzare un'unica misura che incorpora sia  $W_{max}$  che  $L_{max}$ , ovvero l'area  $A = W_{max} * L_{max}$ , la cui variazione nel tempo viene mostrata nelle Fig.12 e 13 per diverse combinazioni di  $\theta$  e  $H$ .

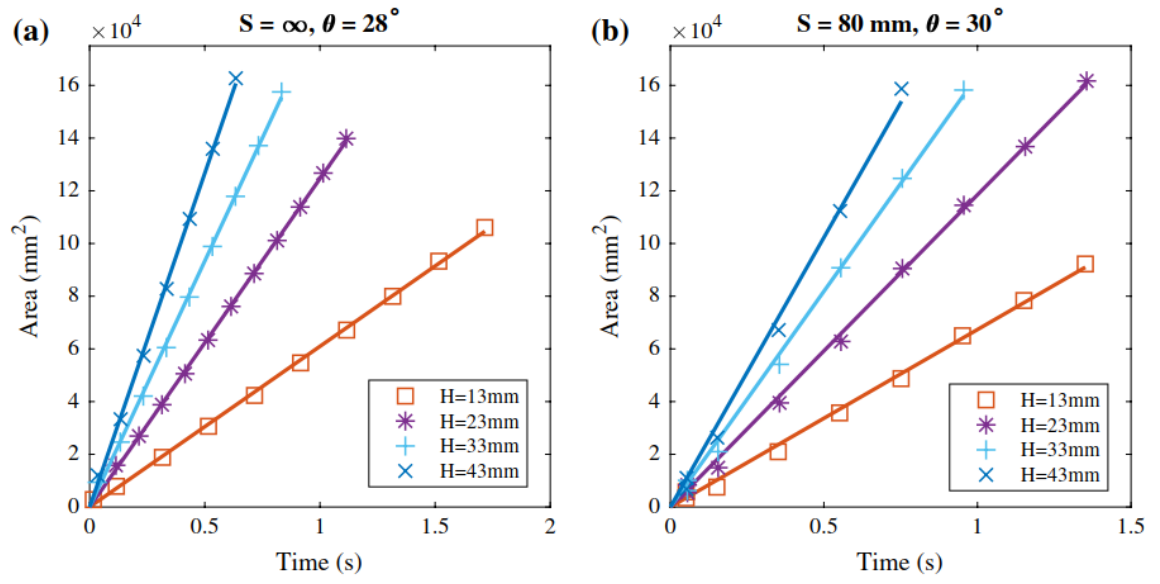


Figura 13: Variazione di A in funzione del tempo per  $S=\infty$  e  $S=80\text{mm}$

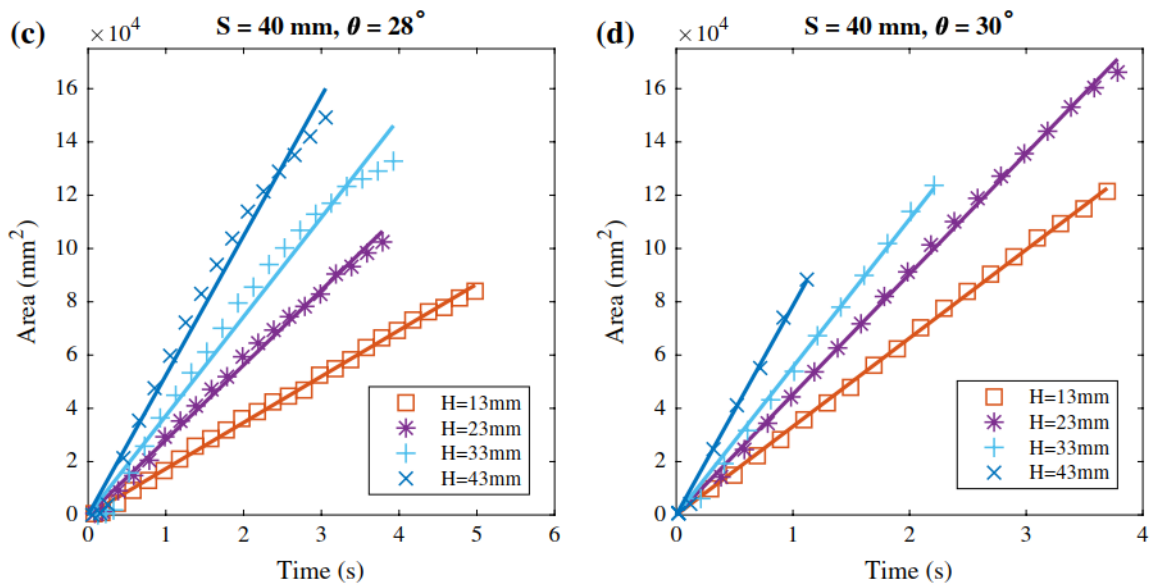


Figura 14: Variazione di A in funzione del tempo per diversi angoli di inclinazione

É evidente l' andamento lineare con il tempo, che indica una variazione di  $A$  nel tempo *costante* il cui valore é fornito dalla pendenza della retta. Si può notare come questo sia in contrasto con la crescita non lineare del flusso sia il lunghezza che in larghezza.

Dai grafici inoltre si può verificare che le inclinazioni del piano più dolci, le altezze di rilascio più basse e una densità di ostacoli maggiore portano a delle pendenze più basse delle rette. Una rappresentazione dei dati maggiormente efficace é quella che collega la quantità  $\dot{A}$ , normalizzata rispetto alla quantità  $W\sqrt{gd}$ , al rapporto  $\frac{H}{d}$ .

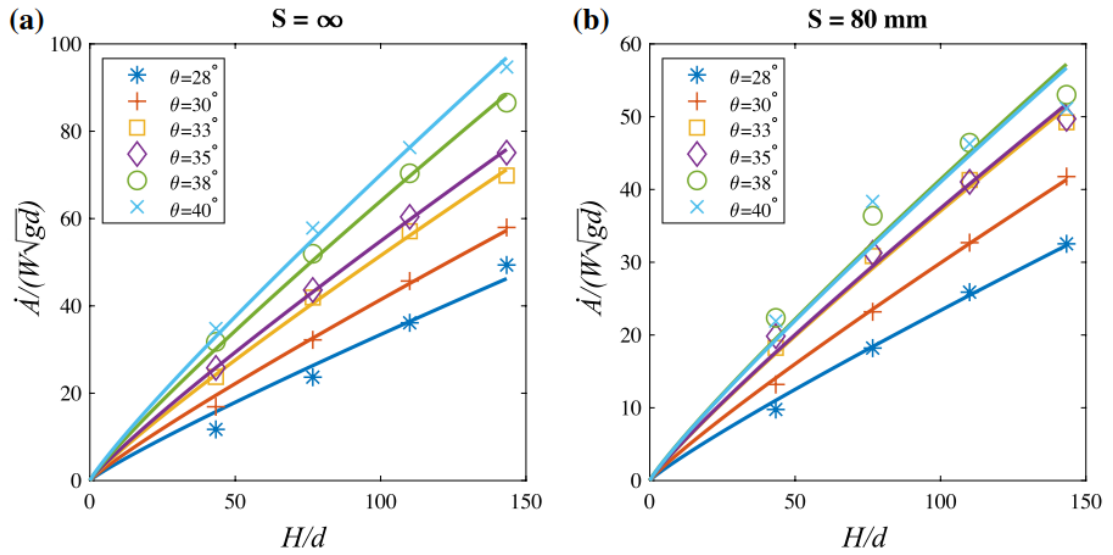


Figura 15: Rappresentazione di  $\dot{A}$  rispetto a  $H/d$  per  $S=\infty$  e  $S=80 \text{ mm}$

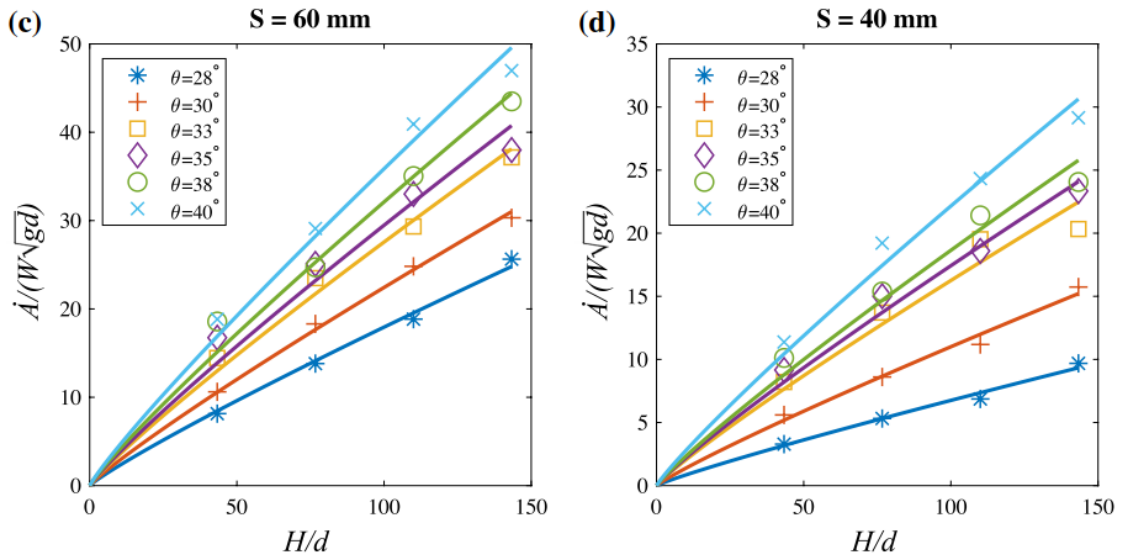
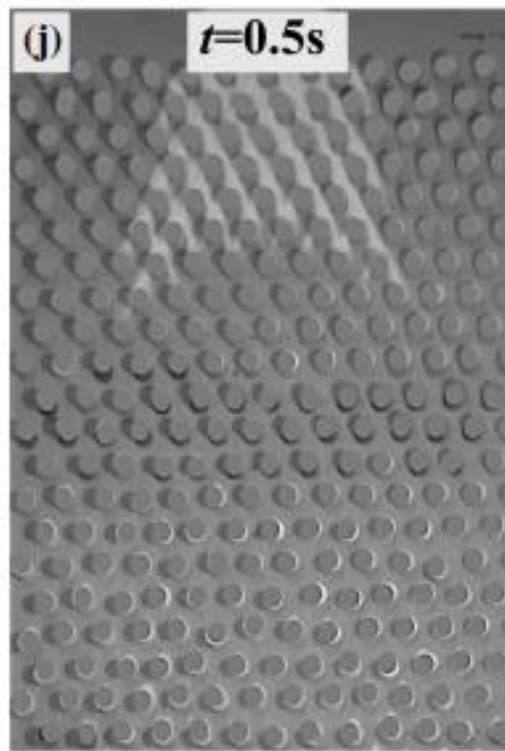


Figura 16: Rappresentazione di A rispetto a H/d per S=60 mm e S=80mm

Un altro punto da considerare è che la presenza di alberi influisce anche sulla morfologia del flusso. Rispetto alla configurazione priva di alberi, in cui il flusso ha un fronte di propagazione convesso e regolare che si muove più velocemente degli altri, negli esperimenti che prevedono la presenza di alberi è possibile osservare una forma più irregolare. Questo è molto evidente per densità elevate (vedi Fig.17) dove il fronte assume una geometria concava per tempi iniziali



**Figura 17: Forma del flusso**

In questo regime, gli estremi del flusso si muovono più velocemente perché il materiale viene incanalato diagonalmente lungo dei percorsi che, rispetto a quelli diretti nella direzione di massima pendenza, sono più liberi. Questa tendenza sparisce per tempi successivi per l'effetto "Galton Board", che porta un flusso di massa più elevato nella regione centrale per contrastare l'iniziale deflessione. Questo comportamento è inoltre esagerato dalla presenza di uno schema così regolare di ostacoli.



### 3. DESCRIZIONE DI RASH3D

Per la simulazione dell'esperimento è stato utilizzato il codice di calcolo Rash3D scritto in linguaggio informatico Fortran, in cui si assimila il materiale reale con un fluido omogeneo e continuo che è governato dalle *equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto*.

#### 3.1. Cenni di meccanica dei fluidi

Le equazioni di conservazione si utilizzano nella forma differenziale, in maniera tale da conoscere il valore di determinate quantità del campo di moto (per esempio velocità e pressione) in ogni punto del sistema. Le equazioni sono alle derivate parziali perché, anche nell'ipotesi di lavorare con una sola variabile, c'è sempre da considerare anche il tempo

##### 3.1.1. Equazioni di conservazione della massa

Viene imposta la conservazione della massa per un volume di controllo a partire dal *Teorema del Trasporto di Reynolds*, in cui si dice che la variazione di massa nel suddetto volume deve essere uguale alla differenza tra il flusso di massa entrante e uscente.

$$\int_{CV} \frac{d\rho}{dt} dV + \int_{CS} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

- Il primo termine regola la variazione di massa all'interno del volume di controllo.
- Il secondo termine esprime il flusso di massa attraverso i contorni del volume di controllo.

Per passare a una formulazione valida in modo puntuale, si utilizza il *Teorema della Divergenza*, che permette di trasformare l'integrale di volume in integrale di superficie e viceversa. Entrando nel dettaglio, se in un integrale di volume l'integrando può essere scritto come una *divergenza* di un vettore  $\vec{G}$  allora esso è equivalente al flusso attraverso la superficie di questo vettore.

$$\int_V \nabla \vec{G} dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA = 0$$

Nel caso in esame è quindi possibile omogeneizzare gli integrali, sostituendo l'integrale di superficie con quello di volume e raccogliendo i termini.

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV + \int_V \nabla(\rho \vec{v}) dV = 0$$

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho \vec{v}) dV = 0$$

L'integrale deve essere nullo per qualunque volume di controllo, dunque si pone nullo l'integrando.

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0$$

Utilizzando le proprietà della divergenza si ottiene

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho\vec{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \vec{v}\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{v}$$

A destra dell'uguale, la somma dei primi due termini costituisce la *derivata totale* di  $\rho$ , poiché sono rappresentativi della *derivata parziale e convettiva*. Rielaborando, si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla\cdot\vec{v} = 0$$

Alcune ipotesi molto comuni nel campo della meccanica dei fluidi, portano ad un'ulteriore semplificazione della conservazione della massa.

- *Moto stazionario*: in questo caso è nulla la derivata locale rispetto al tempo, dunque si pone

$$\nabla(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d(\rho\vec{u})}{dx} + \frac{d(\rho\vec{v})}{dy} + \frac{d(\rho\vec{w})}{dz} = 0$$

- *Fluido incompressibile*:  $\rho$  è omogeneo e non subisce variazioni nel tempo

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{d(\vec{u})}{dx} + \frac{d(\vec{v})}{dy} + \frac{d(\vec{w})}{dz} = 0$$

Il campo di moto di un fluido incompressibile è *indivergente*, ossia è caratterizzato da delle linee di flusso che non hanno né sorgenti né pozzi.

### 3.1.2. Equazioni di conservazione della quantità di moto

In generale la conservazione della massa non basta a risolvere il campo di moto, che dipende da *densità* (variabile con pressione e temperatura) e *velocità*. È necessario dunque associargli una condizione di conservazione della quantità di moto.

In forma globale, la somma delle forze di volume e di quelle di superficie è uguale ai termini di inerzia locali e ai flussi di quantità di moto.

$$\sum \vec{F} = \int_{CV} \rho g dV + \int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{CV} \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} dV + \int_{CS} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Per passare ad una legge valida in maniera puntuale, si utilizza nuovamente il teorema della divergenza, in maniera tale da passare da un integrale di superficie ad un integrale di volume.

$$\int_{CS} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{CV} \nabla \sigma_{ij} dV$$

$$\int_{CS} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{CV} \nabla (\rho \vec{v} \vec{v}) dV$$

Come prima, gli integrali di volume possono essere sommati e, affinché l'integrale risulti sempre nullo, si pone uguale a 0, trovando l'equazione indefinita del moto o *Equazione di Cauchy*.

$$\frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho g + \nabla \cdot \sigma_{ij}$$

Tuttavia l'aggiunta di questa equazione complica ulteriormente il problema perché introduce delle ulteriori *incognite tensionali* che incrementano il numero di incognite: in totale si avranno *10 incognite* [3 componenti di velocità+6 componenti di tensione+densità] per *4 equazioni* [ 1 equazione di conservazione della massa + 3 equazioni per la conservazione della quantità di moto ].

Per semplificare il problema si rielabora il tensore delle tensioni distinguendo la *parte sferica* da quella *deviatorica*

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Un passo ulteriore è poi quello di collegare le tensioni tangenziali alla *velocità di deformazione*.

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij}$$

Imponendo che  $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$  con  $\delta_{ij}$  pari al delta di Kroeniger, si può scrivere:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mu \frac{du}{dx} & 2\mu \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) & 2\mu \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \\ 2\mu \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) & 2\mu \frac{dv}{dy} & 2\mu \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \\ 2\mu \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) & 2\mu \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) & 2\mu \frac{dw}{dz} \end{bmatrix}$$

Andando poi a sostituire la  $\sigma_{ij}$  nell'equazione di Cauchy si ricavano le Equazioni di Navier-Stokes. Se è valida l'ipotesi di fluido incomprimibile il sistema diventa *chiuso*

- 1 equazione di conservazione di conservazione della massa
- 4 incognite [ u,v,w e p].

Per il flusso granulare si ipotizza che:

- Si ignorano fenomeni di segregazione e di locale concentrazione della massa e si assume  $\rho$  uguale a un valore costante. Quindi il tutto si riduce a quanto si era visto prima [divergenza nulla]

Allora si possono esplicitare le equazioni nel seguente modo.

$$\frac{d(\vec{u})}{dx} + \frac{d(\vec{v})}{dy} + \frac{d(\vec{w})}{dz} = 0$$

$$\rho \left( \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}^2}{dx} + \frac{d(\vec{u}\vec{v})}{dy} + \frac{d(\vec{u}\vec{w})}{dz} \right) = \rho g_x - \left( \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\sigma_{yx}}{dy} + \frac{d\sigma_{zx}}{dz} \right)$$

$$\rho \left( \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d(\vec{u}\vec{v})}{dy} + \frac{d\vec{v}^2}{dx} + \frac{d(\vec{v}\vec{w})}{dz} \right) = \rho g_y - \left( \frac{d\sigma_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\sigma_{zy}}{dz} \right)$$

$$\rho \left( \frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{d(\vec{w}\vec{u})}{dz} + \frac{d(\vec{w}\vec{v})}{dy} + \frac{d\vec{w}^2}{dx} \right) = \rho g_z - \left( \frac{d\sigma_{xz}}{dx} + \frac{d\sigma_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_{zz}}{dz} \right)$$

### 3.2. Shallow water equation

In generale la natura del flusso impone di definire anche delle funzioni che ne descrivano la superficie libera, che costituisce un limite superiore, e la superficie topografica che invece ne costituisce il limite inferiore.

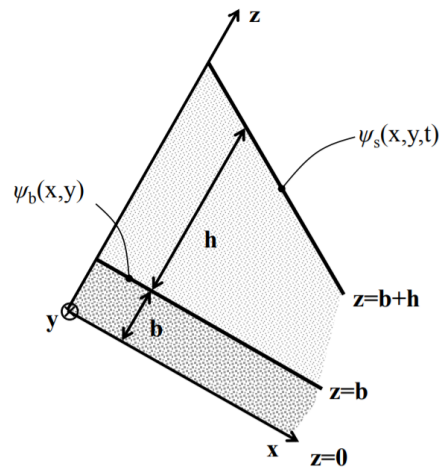


Figura 18: Superficie libera e topografica

- **Bordo inferiore**  $\psi_b(x, y) = b(x, y) - z = 0$
- **Bordo superiore**  $\psi_s(x, y) = [b(x, y) + h(x, y, t)] - z = 0$

Si noti come  $h$ , può cambiare sia da punto a punto che nel tempo, essendo il fenomeno transitorio.

Su queste superfici poi si applicano delle condizioni di contorno

#### 1) Condizioni sul bordo inferiore

- a) Condizioni cinematiche



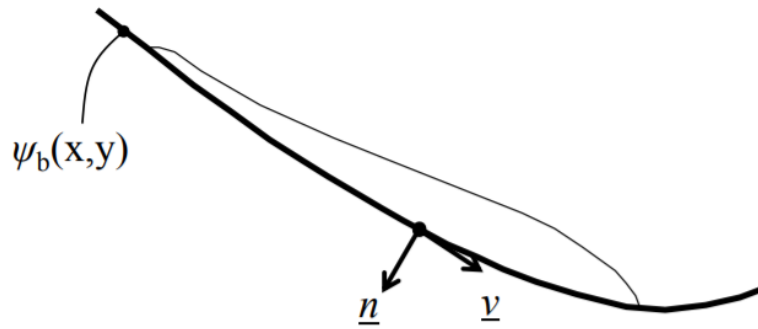


Figura 19: Condizione cinematica al bordo inferiore

- i) Non esiste una componente del vettore velocità che sia perpendicolare al fondo. Questo vuol dire che non si ammette un transito di massa nel contorno inferiore

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

- ii) La variazione della superficie inferiore è ammessa solo se c'è un input/output di massa

$$\frac{d\psi_b}{dt} = \frac{db}{dt} - \frac{dz}{dt} = \frac{db}{dt} + \vec{u} \frac{db}{dx} + \vec{v} \frac{db}{dy} - \vec{w} = 0$$

b) Condizioni dinamiche

- i) Si ipotizza che la resistenza offerta dal bordo inferiore al flusso sia di tipo attritivo, che può essere assunta proporzionale allo sforzo normale agente dovuto al peso del materiale sovrastante moltiplicato per la tangente dell'angolo di attrito del terreno.

$$|\tau| = \sigma \tan \varphi$$

Il segno sarà chiaramente sempre opposto alla direzione di moto del flusso e quindi della velocità.

$$|\tau| = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \sigma \tan \varphi$$

## 2) Condizioni sul bordo superiore

### a) Condizioni cinematiche

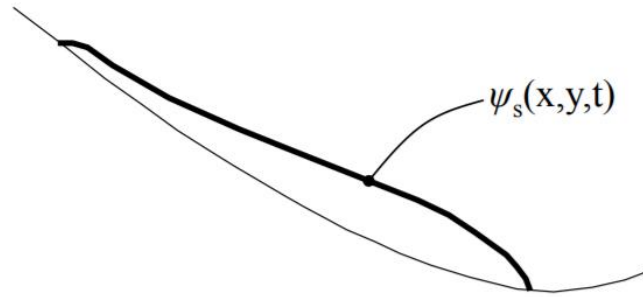


Figura 20: Condizioni sul bordo superiore

- i) La variazione nel tempo del bordo superiore deve essere nullo

$$\frac{d\psi_b}{dt} = \frac{db}{dt} - \frac{dz}{dt} = \frac{db}{dt} + \vec{u} \frac{db}{dx} + \vec{v} \frac{db}{dy} - \vec{w} = 0$$

- ii) La variazione della superficie inferiore è ammessa solo se c'è un input/output di massa

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \frac{d[b+h]}{dt} - \frac{dz}{dt} = \frac{d[b+h]}{dt} + \vec{u} \frac{d[b+h]}{dx} + \vec{v} \frac{d[b+h]}{dy} - \vec{w} = 0$$

b) Condizioni dinamiche

- i) Si trascurano le forze dovute a contatto con l'aria.

$$\vec{\sigma} \vec{n}|_s = 0$$

Un volta definite queste condizioni, si effettuano delle considerazioni sulla forma del flusso: esso si sviluppa molto più in lunghezza che in altezza, che di solito non supera i 10 metri. Se  $\frac{H}{L} \ll 1$  allora si può dire che quello che succede nella direzione verticale è meno importante di quello che succede lungo la x e lungo la y. Di conseguenza nelle velocità è possibile eliminare la dipendenza dalla z [ di solito nello spessore la velocità è più elevata vicino al bordo superiore e meno elevata in quello inferiore ] e passiamo a immaginare come se la velocità fosse uguale lungo tutta la sezione, assumendo un valore mediato, che dipenderà da x, y e il tempo.

$$\vec{v}(x, y, z, t) \Rightarrow \bar{v}(x, y, t)$$

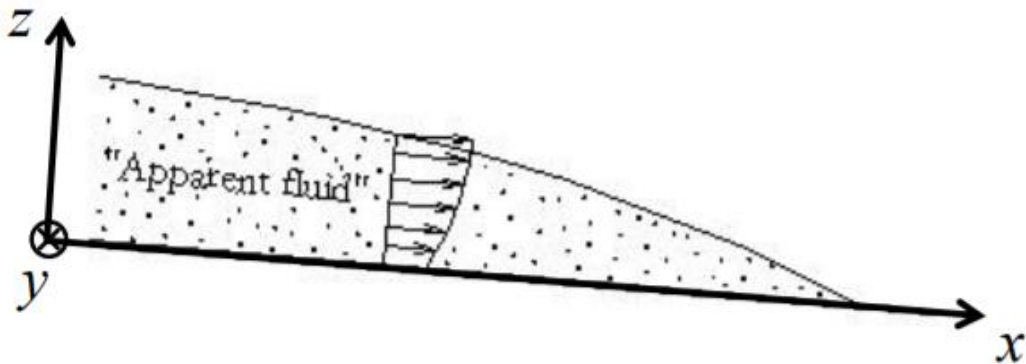


Figura 21: Condizione di flusso sottile

Per ottenere il valore medio bisognerà fare un integrale sullo spessore.

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_b^{b+h} \vec{u} dz$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_b^{b+h} \vec{v} dz$$

$$\bar{w} = \frac{1}{h} \int_b^{b+h} \vec{w} dz$$

Queste quantità vanno inserite nelle equazioni di conservazione della quantità di moto e della massa. Avvalendosi poi della regola di Leibniz

$$\int_b^{b+h} \frac{du}{dx} dz = \frac{d}{dx} \int_b^{b+h} u dz - u_{(b+h)} \frac{d(b+h)}{dx} + u_b \frac{d(b)}{dx}$$

si possono ottenere le “*Shallow Water Equation*” o “*Equazioni delle acqua basse*”, che governano il fenomeno dei flussi granulari.

$$\frac{d(h)}{dt} + \frac{d(\bar{u}h)}{dx} + \frac{d(\bar{v}h)}{dy} = 0$$

$$\rho \left( \frac{d\bar{u}h}{dt} + \frac{d(\bar{u}^2h)}{dx} + \frac{d(\bar{u}\bar{v}h)}{dy} \right) = \rho g_x h - \frac{d(\bar{\sigma}_{xx}h)}{dx} - \frac{d(\bar{\sigma}_{yx}h)}{dy} - \left( \bar{\sigma}_{xx(z=b)} \frac{db}{dx} + \bar{\sigma}_{yx(z=b)} \frac{db}{dy} - \bar{\sigma}_{zx(z=b)} \right)$$

$$\rho \left( \frac{d\bar{v}h}{dt} + \frac{d(\bar{u}\bar{v}h)}{dx} + \frac{d(\bar{v}^2h)}{dy} \right) = \rho g_y h - \frac{d(\bar{\sigma}_{xy}h)}{dx} - \frac{d(\bar{\sigma}_{yy}h)}{dy} - \left( \bar{\sigma}_{xy(z=b)} \frac{db}{dx} + \bar{\sigma}_{yy(z=b)} \frac{db}{dy} - \bar{\sigma}_{zy(z=b)} \right)$$

$$\rho \left( \frac{d\bar{w}h}{dt} + \frac{d(\bar{w}\bar{u}h)}{dx} + \frac{d(\bar{w}\bar{v}h)}{dy} \right) = \rho g_z h - \frac{d(\bar{\sigma}_{xz}h)}{dx} - \frac{d(\bar{\sigma}_{yz}h)}{dy} - \left( \bar{\sigma}_{xz(z=b)} \frac{db}{dx} + \bar{\sigma}_{yz(z=b)} \frac{db}{dy} - \bar{\sigma}_{zz(z=b)} \right)$$

Analizzando nel dettaglio quanto scritto si possono fare delle considerazioni:

- I termini a destra dell'uguale racchiusi da una parentesi tonda sono le 3 componenti tangenziali sul bordo inferiore  $\bar{T} = (T_x; T_y; T_z)$  e non si elidono per l'ipotesi di trascurare l'attrito dell'aria sul bordo superiore e quindi vanno esplicitati.
- Allo stesso modo, bisogna esplicitare i termini di tensione mediati sullo spessore (p.e  $\bar{\sigma}_{xx}$ ).

Per prima cosa si considera l'equazione di conservazione della quantità di moto lungo la z. Per l'ipotesi su cui si basano le “Shallow water equation” é possibile trascurare tutte le variazioni che si manifestano lungo la direzione z ossia  $\frac{d(\bar{\sigma}_{xz}h)}{dx} = 0$  e  $\frac{d(\bar{\sigma}_{yz}h)}{dy} = 0$ .

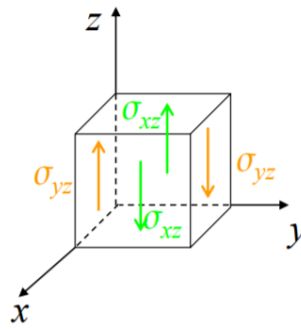


Figura 22: Componenti tangenziali nella direzione z

Inoltre non si considera nulla anche l'accelerazione normale alla superficie topografica. Dunque tutto ciò che si trova a sinistra dell'uguale può essere posto anch'esso pari a 0.

Resta l'uguaglianza

$$T_z = -\rho g_z h.$$

Con riferimento alla terna di assi sopra definita,  $g_z$  può essere scritta in maniera equivalente come  $-g \cos \vartheta$ , dove  $\vartheta$  è l'angolo che descrive la pendenza del piano inclinato. Se il fluido fosse in quiete, questa sarebbe l'unica componente tensionale presente, visto che non ci sarebbe la possibilità di mobilitare anche  $T_x$  e  $T_y$ .

Per quanto riguarda questi termini, possono essere viste come delle componenti di taglio alla base, che si ipotizza vengano mobilitate dall'attrito che si sviluppa tra superficie topografica e la colonna di materiale che si trova al di sopra del punto esaminato.

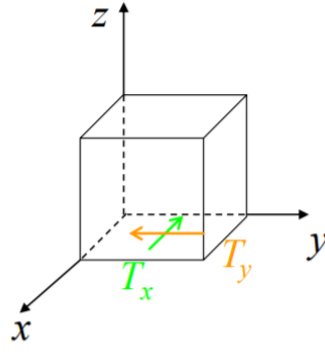


Figura 23: Componenti tangenziali nella direzione x e y

$$\|T_x\| = \mu\|T_z\| = -\mu\rho gh\cos\vartheta \frac{u}{\|\underline{u}\|} = -\tan\vartheta\rho gh\cos\vartheta \frac{u}{\|\underline{u}\|}$$

$$\|T_y\| = \mu\|T_z\| = -\mu\rho gh\cos\vartheta \frac{v}{\|\underline{u}\|} = -\tan\vartheta\rho gh\cos\vartheta \frac{v}{\|\underline{u}\|}$$

Nelle prime due equazioni di conservazione della quantità di moto invece, è possibile trascurare i termini misti e lavorare esclusivamente con  $\bar{\sigma}_{xx}$  e  $\bar{\sigma}_{yy}$ .

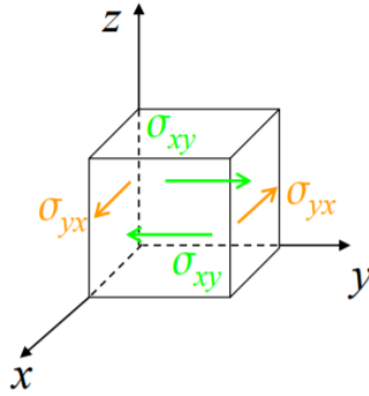


Figura 24: Termini misti sulle facce x e y

Queste quantità sono particolarmente importanti perché rappresentano la spinta del terreno che sta ai lati. In altre parole si ipotizza che l'attrito sia presente solo alla base e non sulle facce laterali.

Per definirli entrambi, si considera l'equazione di conservazione della quantità di moto in z nella sua forma non integrata sullo spessore.

$$\rho \left( \frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{d(\vec{w}\vec{u})}{dz} + \frac{d(\vec{w}\vec{v})}{dy} + \frac{d\vec{w}^2}{dx} \right) = \rho g_z - \left( \frac{d\sigma_{xz}}{dx} + \frac{d\sigma_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_{zz}}{dz} \right)$$

Si trascurano nuovamente le accelerazioni normali alla superficie topografica e le componenti miste a destra dell'uguale. Resta un'uguaglianza a zero di questo tipo

$$\rho g_z - \left( \frac{d\sigma_{zz}}{dz} \right) = 0$$

che permette, tramite integrazione sullo spessore, di ricavare



$$\bar{\sigma}_{zz} = \rho g_z (b + h - z)$$

Questo passaggio é fondamentale per definire anche  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , perch é si ipotizzano delle condizioni di isotropia e dunque  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ .

Si procede poi con l'integrazione sullo spessore per ricavare le quantitá che effettivamente dovranno essere inserite nelle "Shallow Water Equation"

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{h} \int_{z=b}^{z=b+h} \sigma_i dz = \rho g_z \frac{h}{2} \quad \text{per } i = xx, yy, zz$$

Una volta definite tutte queste quantitá é possibile riscrivere le equazioni di conservazione con tutti i loro termini esplicitati.

$$\frac{d(h)}{dt} + \frac{d(\bar{u}h)}{dx} + \frac{d(\bar{v}h)}{dy} = 0$$

$$\rho \left( \frac{d\bar{u}h}{dt} + \frac{d(\bar{u}^2h)}{dx} + \frac{d(\bar{u}\bar{v}h)}{dy} \right) = \rho g_x h - \frac{d \left( \rho g_z \frac{h^2}{2} \right)}{dx} - \mu \rho g h \cos \vartheta \frac{u}{\|\underline{u}\|}$$

$$\rho \left( \frac{d\bar{v}h}{dt} + \frac{d(\bar{u}\bar{v}h)}{dx} + \frac{d(\bar{v}^2h)}{dy} \right) = \rho g_y h - \frac{d \left( \rho g_z \frac{h^2}{2} \right)}{dy} - \mu \rho g h \cos \vartheta \frac{v}{\|\underline{u}\|}$$

### 3.3. Reologia

$T$  è un termine al cui interno ci sono delle informazioni sul tipo di interazione che esiste fra il flusso e la base su cui scorre, che definisce la reologia del fenomeno franoso. In particolare i termini  $T_x$  e  $T_y$  si possono esprimere come

$$T_i = -\tau \frac{v_i}{|v|} \quad \text{con } i = x, y$$

In modo tale da indicare che la resistenza al moto del flusso ha segno opposto rispetto al vettore velocità. Il valore  $\tau$  invece è definito in funzione della reologia.

#### 3.3.1. Attritività

È la reologia più semplice in assoluto perché assume che la dissipazione al contatto fra flusso e suolo avvenga esclusivamente per attrito, come se il continuo equivalente fosse un corpo rigido che scorre su un piano inclinato scabro. Il termine  $\tau$  è stato già definito nel paragrafo precedente e vale

$$\tau = \tan\varphi \rho g h \cos\vartheta$$

- a) Il termine  $\rho g h$  definisce il peso dell'elemento, avente base unitaria e spessore locale  $h$
- b) L'angolo  $\vartheta$  definisce l'inclinazione del piano di scorrimento e permette di ricavare la componente normale del peso alla base.
- c)  $\varphi$  è l'angolo d'attrito del piano.

#### 3.3.2. Voellmy

Ci sono poi alcuni fenomeni in cui dissipazione avviene prevalentemente a causa di fenomeni di *turbolenza*, legata all'impatto che si verifica tra i grani costituenti il

materiale durante il moto. Il contributo della turbolenza si lega ad un coefficiente  $\xi$  che dipende da gradiente della velocità.

$$\tau = \xi \left( \frac{dv}{dh} \right)^2$$

Allora si incorpora questo comportamento turbolento con quello attritivo per ottenere la reologia Voelmy, che spesso viene utilizzata per la simulazione delle colate detritiche.

$$\tau = \sigma_n \tan \varphi + \xi \left( \frac{dv}{dh} \right)^2$$

### 3.3.3. Reologia $\mu(I)$

La seguente reologia è stata indagata e esplicitata dal punto di vista analitico da Pouliquen, che ha condotto una serie di esperimenti di laboratorio in cui è stato studiato un coefficiente d'attrito più elaborato che simula correttamente il comportamento di un flusso stazionario su piano inclinato e scabro

#### 3.3.3.1. Descrizione del lavoro di Pouliquen

Lo studio dei flussi granulari è un problema che è stato indagato a fondo nel corso degli anni. I molteplici esperimenti con diverse configurazioni di prova in laboratorio hanno portato a delle conclusioni condivise dalla comunità scientifica

- i) Per piani inclinati lisci, è possibile individuare un unico angolo critico che permette che il flusso sia stazionario. Per angoli superiori, il flusso accelera mentre per angoli inferiori il materiale resta fermo. Chiaramente in questo caso il comportamento del flusso è riproducibile da una legge semplicemente attritiva perché il tutto viene regolato da un bilancio continuo fra la forza di gravità e quella di attrito.
- ii) Nel caso di letti scabri, quando gli angoli di inclinazione sono molto elevati, si può osservare un flusso accelerato la cui descrizione reologica ben si collega con la Coulomb attritiva.

- iii) Per angoli intermedi invece il fenomeno risulta più complesso perché il regime di flusso uniforme si manifesta non per un singolo angolo ma per un range più ampio. Dal punto di vista teorico la maggiore difficoltà nella descrizione di questo fenomeno è che esso appartiene a un regime intermedio, in cui sia l'attrito tra i grani che le interazioni dovute alle collisioni giocano un ruolo importante.

Pouliquen nel suo paper preferisce un approccio empirico: tramite una prova di laboratorio ha misurato la velocità media del flusso in funzione dell'inclinazione del piano di scorrimento, della sua scabrezza e dello spessore dello strato. Grazie ai dati acquisiti è stato capace di elaborare una legge empirica descrittiva del comportamento di flussi stazionari, chiamata  $\mu(I)$

### 3.3.3.2. Apparato sperimentale

Il setup sperimentale prevede una tavola di misure 2 m x 0,7 m che può essere inclinata tra 0° e 35°. La scabrezza del piano è stata ottenuta incollando un strato di sfere rappresentative del flusso sulla superficie, secondo 4 configurazioni differenti.

	Bulk	Rough surface
System 1	0.5mm±0.04	0.5mm±0.04
System 2	1.3mm±0.13	1.3mm±0.13
System 3	1.15mm±0.1	1.3mm±0.13
System 4	0.5mm±0.04	1.3mm±0.13

Figura 25: Sistemi con cui è stata effettuata la prova di laboratorio

Per questi quattro sistemi di configurazione, è stata misurata la velocità media  $u$  dello strato granulare per ogni angolo di inclinazione e per ogni spessore  $h$ . Il

metodo utilizzato per la misura della velocità si basa su un tracciamento del fronte di propagazione tramite un “*Image Processing System*”. Questa può essere assimilata senza grandi errori alla velocità integrata sullo spessore che è stata definita nei capitoli precedenti.

Un altro parametro che deve essere misurato sperimentalmente è lo spessore  $h$ . Questo parametro viene controllato a monte dall’apertura del battente ma, nella parte centrale del flusso, avrà una misura certamente minore. La misura di questa quantità avviene con un laser che taglia in maniera perpendicolare il piano lungo la sua direzione di massima inclinazione. Quando poi il materiale inizia a fluire sul piano, questa luce verrà traslata lateralmente di una quantità proporzionale allo spessore  $h$ .

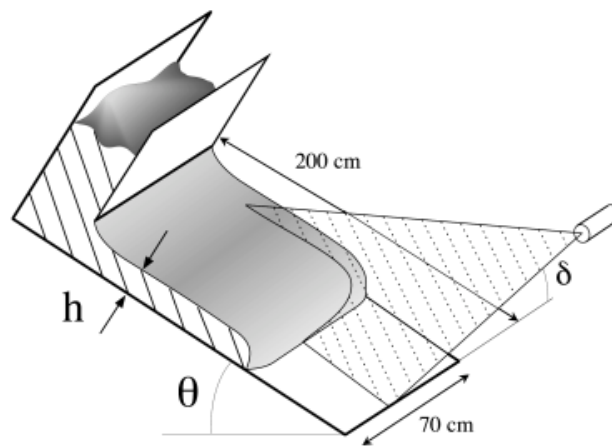


Figura 26: Modalità di acquisizione delle misure

### 3.3.3.3. Risultati sperimentali

Nel seguito si riporteranno i risultati del Sistema 1 per un range di inclinazioni e spessori definite sull’asse delle ascisse (angolo  $\theta$ ) e delle ordinate (spessore adimensionalizzato rispetto al diametro delle particelle).

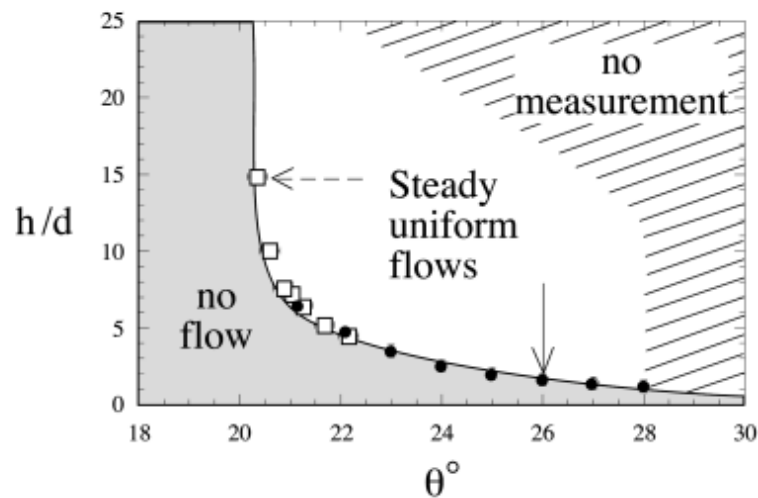


Figura 27: Risultati sperimentali per il Sistema 1

È possibile immediatamente notare che la regione di flusso stazionario è compresa fra due curve: quella più in alto è rappresentativa della transizione fra il comportamento stazionario e quello non stazionario che in genere si verifica quando l'angolo di inclinazione è troppo alto oppure quando lo spessore del flusso è eccessivo. Questa curva non è stata determinata in maniera precisa; in contrasto, la curva bassa che rappresenta la transizione tra movimento del materiale e non, deve essere definita in maniera precisa perché è fondamentale per la definizione matematica della reologia  $\mu(I)$ .

Si può ricavare in due modi:

- Il primo è quello di lavorare con una inclinazione costante e poi diminuire lo spessore del flusso fino a quando non si raggiunge un valore critico chiamato  $h_{stop}$ . Questo metodo è abbastanza preciso quando le inclinazioni del piano sono elevate e gli spessori valutati sono sottili.
- Quando invece gli angoli di inclinazione sono più piccoli si lavora mantenendo uno spessore costante  $h$  e diminuendo gradualmente l'inclinazione. Si potrà dunque individuare volta per volta un valore di  $\theta_{stop}$ .

Gli altri sistemi mostrano che, qualitativamente, le curve  $h_{stop}$  sono simili ma non sovrapponibili. Questo evidenzia come le caratteristiche del flusso siano estremamente variabili a seconda della scabrezza del piano.

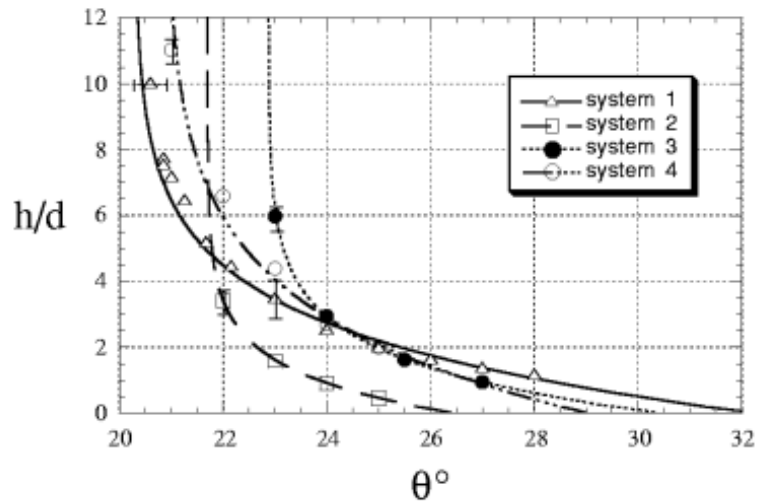


Figura 28: Rappresentazione dei risultati per tutte le configurazioni

Per quanto riguarda le misure di velocità, sono state rappresentate su una coppia d'assi  $\left(\frac{u}{\sqrt{gh}}; \frac{h}{d}\right)$  per il Sistema 1 e per angoli crescenti.

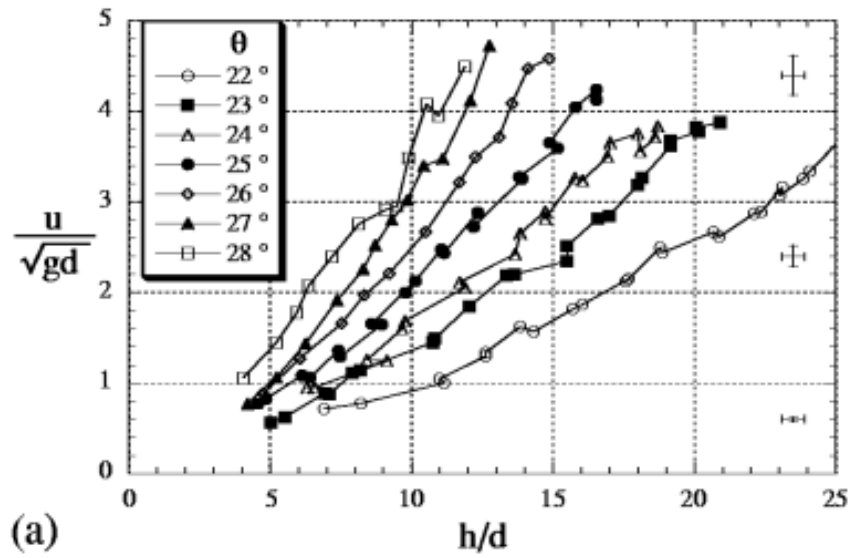


Figura 29: Rappresentazione della velocità in funzione di  $h/d$

Ovviamente si può notare che la velocità cresce all'aumentare dell'angolo di inclinazione e dello spessore dello strato. Gli stessi grafici sono stati riprodotti anche per i sistemi 2,3 e 4, osservando che esiste una discreta sensibilità della velocità nei confronti della scabrezza del piano ( per esempio, fissando un angolo  $\theta = 24$  e un  $\frac{h}{d} = 7$ , si ottengono valori  $\frac{u}{\sqrt{gh}} = 0.1, 2.3, 0.9, 0.7$  rispettivamente per i Sistemi 1,2,3 e 4).

Nonostante queste diversità, Pouliquen ha realizzato che rappresentando  $\frac{u}{\sqrt{gh}}$  in funzione di  $\frac{h}{h_{stop}}$  (in cui l'informazione di  $\theta$  è inserita all'interno  $h_{stop}$ ) tutti i dati collassano in una retta inclinata.



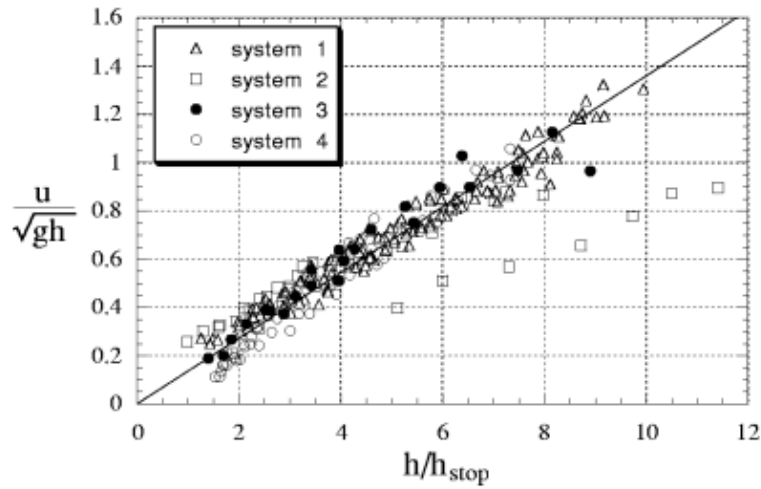


Figura 30: Collasso dei dati su un'unica retta

Questo ha un risvolto importante perché la velocità media adimensionalizzata, o numero di Froude, è indipendente dall'inclinazione e dalla scabrezza del piano e dalla dimensione delle sfere, perché tutti questi parametri sono presi in considerazione indirettamente all'interno del parametro  $h_{stop}$ .

L'unica discrepanza riguarda il *Sistema 2* con un'angolazione di 25 gradi che non collassa sulla stessa retta delle altre.

Dal punto di vista matematico, questa interpolazione lineare si può scrivere nel seguente modo:

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}}$$

Con  $\beta = 0.136$  indipendentemente dall'inclinazione, dalla scabrezza del piano e dalla dimensione dei grani.

#### 3.3.3.4. Descrizione del coefficiente di attrito dinamico

Dalle considerazioni appena fatte, è possibile fare delle considerazioni circa la forza attrittiva che si sviluppa tra il flusso e la superficie scabra. In condizioni stazionarie, è valida la seguente uguaglianza

$$\rho g h \sin \theta = \tau$$

Dividendo questa quantità per la componente normale si ottiene il dynamic friction coefficient  $\mu(u, h)$  che descrive l'interazione fra il materiale granulare e la superficie scabra.

$$\tan \theta = \mu(u, h) \quad (1)$$

Questo vuol dire che, quando si realizza un esperimento fissando un'altezza di flusso  $h$  e un angolo  $\theta$ , il flusso regola la propria velocità sulla base di questa legge.

Per introdurre il coefficiente di attrito dinamico all'interno della (2) è necessario fare un'interpolazione delle curve  $h_{stop}$  presenti in Fig.27

$$\tan \theta = \tan \theta_1 + \frac{(\tan \theta_2 - \tan \theta_1)}{\frac{h_{stop}}{Ld} + 1} \quad (2)$$

- $d$  è il diametro medio delle particelle costituenti il materiale
- $\phi_1$  e  $\phi_2$  che sono rispettivamente il minimo e il massimo angolo di attrito che rendono possibile il flusso stazionario
- $L$  è un parametro che ha dimensioni  $\frac{1}{m}$  che dipende dal tipo di Sistema che si sta utilizzando.

Pouliquen, nel corso dei suoi esperimenti, ha individuato i valori associati a ciascun parametro e per ciascun Sistema come si può vedere nella Figura 31.

	Bulk	Rough surface	$\theta_1$	$\theta_2$	$L$
System 1	$0.5\text{mm} \pm 0.04$	$0.5\text{mm} \pm 0.04$	$20.7^\circ$	$32.8^\circ$	1.96
System 2	$1.3\text{mm} \pm 0.13$	$1.3\text{mm} \pm 0.13$	$21.7^\circ$	$26.4^\circ$	1.23
System 3	$1.15\text{mm} \pm 0.1$	$1.3\text{mm} \pm 0.13$	$22.9^\circ$	$30.4^\circ$	1.50
System 4	$0.5\text{mm} \pm 0.04$	$1.3\text{mm} \pm 0.13$	$20.9^\circ$	$29.1^\circ$	2.9

Figura 31: Rappresentazione dei parametri reologici per i diversi sistemi

Sostituendo  $\tan\theta$  con  $\mu(u, h)$  e  $h_{stop}$  con  $\frac{\beta h \sqrt{gh}}{u}$  si ottiene la relazione che lega l'attrito dinamico a tutti gli altri parametri del problema.

$$\mu(u, h) = \tan\theta_1 + \frac{(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)}{\frac{\beta h}{LFr} + 1} \quad (3)$$

dove  $Fr$  è il numero di Froude pari a  $\frac{u}{\sqrt{gh}}$ .

Questa scrittura porta a una serie di considerazioni:

- 1) Quando la velocità, e quindi il Numero di Froude, tende ad un valore infinito il coefficiente di attrito dinamico tende a  $\theta_2$ . Questo significa che quando il piano inclinato supera questo angolo, non è più possibile apprezzare un flusso stazionario.

- 2) D'altra parte, per regimi a bassa velocità l'equazione non si comporta altrettanto bene. In accordo con la relazione empirica, per qualunque angolo maggiore di  $\theta_1$  si potrebbe osservare un flusso stazionario, indipendentemente dallo spessore  $h$ . Questo però vanificherebbe la presenza di una funzione  $h_{stop}$ .  
 È altresì vero che la (3) deriva dalla (2) che è valida solo per  $h > h_{stop}$  oppure in maniera equivalente per  $\frac{u}{\sqrt{gh}} > \beta$ .

L'introduzione di questo coefficiente d'attrito all'interno delle equazioni di conservazione produce, a seguito dell'integrazione nello spessore, i seguenti risultati.

$$\frac{d(h)}{dt} + \frac{d(\bar{u}h)}{dx} + \frac{d(\bar{v}h)}{dy} = 0$$

$$\rho \left( \frac{d\bar{u}h}{dt} + \frac{d(\bar{u}^2h)}{dx} + \frac{d(\bar{u}\bar{v}h)}{dy} + \frac{1}{2} \frac{d(gh^2 \cos\theta)}{dx} \right) = \rho g_x h - \mu \rho g h \cos\theta \frac{u}{\|\underline{u}\|} - \mu \rho g h \cos\theta \frac{db}{dx}$$

$$\rho \left( \frac{d\bar{v}h}{dt} + \frac{d(\bar{u}\bar{v}h)}{dx} + \frac{d(\bar{v}^2h)}{dy} + \frac{1}{2} \frac{d(gh^2 \cos\theta)}{dy} \right) = \rho g_y h - \mu \rho g h \cos\theta \frac{v}{\|\underline{u}\|} - \mu \rho g h \cos\theta \frac{db}{dy}$$

### 3.4. Dati input

La compilazione e l'esecuzione di Rash3D avviene tramite un codice Matlab, all'interno del quale sono contenute tutte le informazioni necessarie per ricavare la soluzione istante per istante delle equazioni di conservazione della massa e della

quantità di moto. Tutti gli script sono stati riportati nella sezione “Allegati” del documento.

#### 3.4.1. File “Parameter.mat”

Per prima cosa, si definiscono le quantità che costituiranno la geometria del piano inclinato tramite il file denominato “*parameter.mat*”

Si definiscono dunque le misure del piano su cui scorre il flusso (  $D_x$  e  $D_y$ ) e la spaziatura tra un ostacolo e l’altro, qualora nella prova fossero presenti. Per quanto riguarda le dimensioni del piano inclinato, bisogna considerare che sullo script bisogna inserire le dimensioni della proiezione sull’orizzontale. Solo successivamente questa verrà ruotata dell’angolo prescelto. Nel nostro caso le dimensioni di riferimento per la lunghezza sono 780 mm, considerando che in tutte le configurazioni sperimentali si lavora con un angolo di  $30^\circ$ . Questo produce sull’immagine di Paraview un flusso leggermente più corto, che è stato riportato alla dimensione reale nei grafici  $L_{max}$ -t utilizzando una semplice formula inversa. Il confronto visivo invece è stato lasciato invariato considerando che nell’accostamento tra le due immagini la cosa che maggiormente interessa non sono le dimensioni precise (riportate su Excel) quanto più la forma del flusso.

Successivamente se ne definiscono anche le dimensioni ( altezza e diametro) e su quante file verranno disposti.

È importante la definizione di MeshL e MeshS che stabiliscono la grandezza della mesh prevista nelle zone perimetrali e nelle zone più vicine agli alberi. In questo secondo caso, si opta per una dimensione minore in maniera tale da avere una maggiore risoluzione del fenomeno nella zona di contatto.

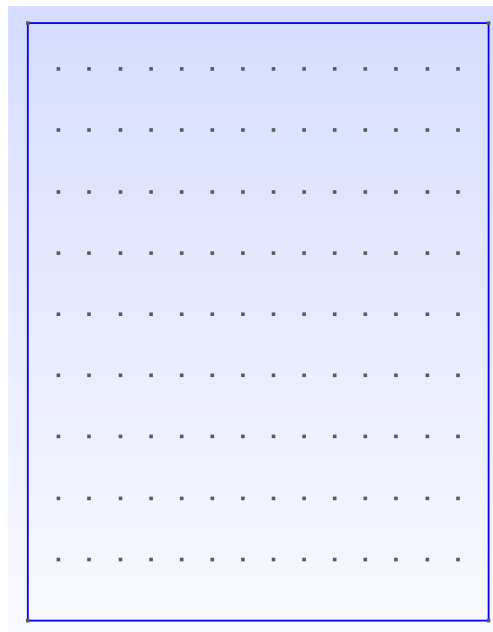
Il tutto poi viene salvato in un file “./parameter.mat” che verrà importato durante l’esecuzione dello script successivo.

#### 3.4.2. File “Geometry”

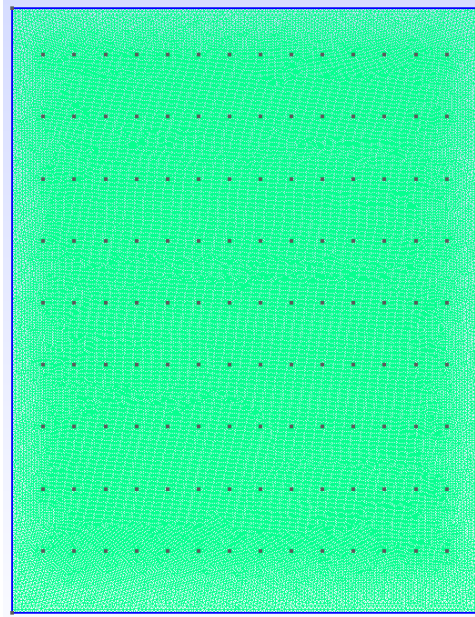
In questo file si stabilisce dapprima la posizione lungo il piano degli alberi e in seguito, tra un albero e l’altro, si predispongono dei punti denominati “ghost” che servono per riportare la mesh da un valore MeshS a un valore MeshL.

Successivamente, si trascrivono delle stringhe che permettono di stampare su un file “./example.geo” tutti i dati geometrici necessari che saranno la base sulla quale verrà sviluppata la Mesh.

Il meshatore adottato in questo lavoro é GMSH e sulla base di quanto scritto su “./example.geo” (Fig.34) elabora la mesh con i valore che sono stati da noi imposti (Fig 35)



**Figura 32: Geometria importata**



**Figura 33: Mesh ricavata dall'input di Matlab**

#### 3.4.3. File “Create Input”

Il terzo script invece è quello che permette di compilare i file che saranno input per il programma RASH3D.

L’output dello script saranno 4 file “*e2.bb*”, “*h2.bb*”, “*z2.bb*” e “*mail2ambda.bb*”. Questi poi sono copiati e incollati nella cartella dove è presente anche un file “*data.txt*”

All’interno di “*data.txt*”, oltre alla definizione del time-step di elaborazione, si ha la possibilità di scegliere quale reologia adottare e assegnare un valore ai parametri che la descrivono. All’interno di questo file avviene la “back-analysis” del problema, attraverso una procedura di calibrazione iterativa che alla fine possa portare ad un risultato confrontabile con quello reale.

#### 3.4.4. Visualizzazione dei risultati

L'output della simulazione é fornito da dei file "para\_XXX.VTU" all'interno dei quali sono presenti tutte le informazioni sul flusso per ciascun istante di tempo nel quale é stata portata avanti l'elaborazione. La visualizzazione dei risultati avviene tramite il software "Paraview" che permette di indagare qualsiasi quantitá associata al flusso ( come per esempio spessore  $h$  del flusso o numero di Froude) su ciascun punto della griglia. Inoltre permette di apprezzare la dinamica del fenomeno rappresentando in maniera sequenziale dove il materiale si posiziona istante per istante.



## 4. BACK-ANALYSIS CON GEOMETRIA 1

### 4.1. Definizione della geometria e dei parametri di input

La prima scelta effettuata ha riguardato la geometria con cui simulare l'apparato sperimentale: in questa fase, si é pensato di introdurre a monte del piano inclinato un ulteriore prolungamento simulativo di una canaletta all'interno della quale si inserisce il continuo equivalente. Nella Fig.39 si possono osservare le dimensioni del piano inclinato e una scala di colori che rappresenta, al tempo  $t = 0$ , lo spessore del flusso in metri su ciascun punto della griglia.

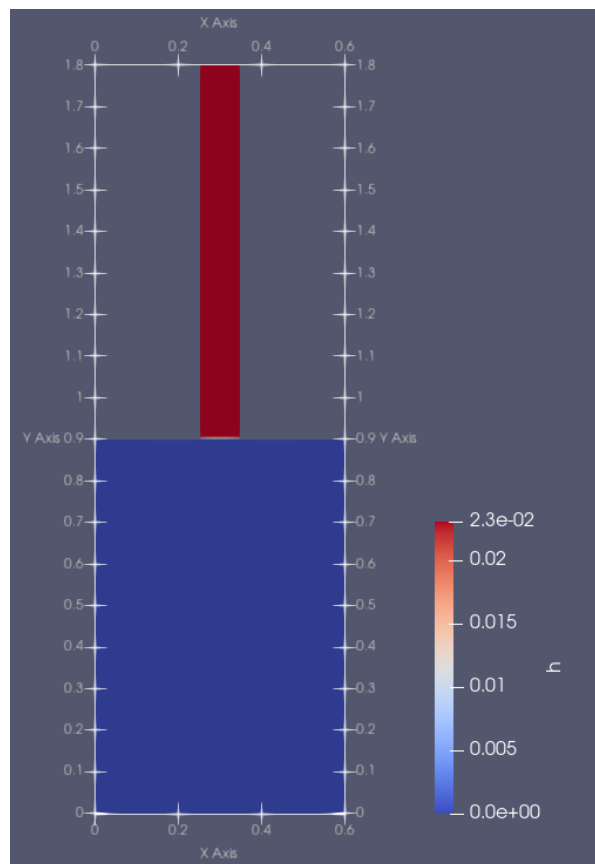


Figura 34: Modello di canaletta su Paraview

Le dimensioni sono state scelte tramite delle considerazioni quantitative prese dalle modalità di esecuzione degli esperimenti.

Si consideri il serbatoio da cui viene rilasciato il flusso: il paper specifica che il materiale granulare in esso contenuto ha peso 5 kg e densità  $\rho = 2500 \frac{kg}{m^3}$ . Ogni grano è rappresentato da una sfera con diametro pari a 0,3 mm.

Da queste due quantità è possibile risalire alle dimensioni che la canaletta deve avere per contenere la stessa quantità di materiale, considerando uno spessore del flusso e una larghezza fissi pari a  $H = 23mm$  e  $W = 97mm$ .

- Volume di una sfera  $V_s = \frac{4}{3}\pi r^3 = 1,413 * 10^{-11} m^3$
- Peso di una sfera  $W_s = 1,413 * 10^{-11} * 2500 = 3,53 * 10^{-8} kg$
- Numero di sfere in 5 kg  $N_s = 141'643'059$
- Volume totale del materiale  $V_{tot} = N_s * V_s = 0,002 m^3$
- Dal volume si ricava la lunghezza  $L$  della canaletta, noti  $W$  e  $h$ .

$$W * L * h = 0,002 m^3$$

$$L = 0,9 m$$

La mesh utilizzata è ad elementi triangolari con dimensioni 0,005 m per gli elementi più grezzi, mentre vicino agli ostacoli si è optato per una misura di

0,003 m. Sono state condotte anche altre analisi provando delle diverse coppie di valori ma, anche infittendo in maniera importante la mesh, non si ottengono delle variazioni apprezzabili, sia per la lunghezza che per la larghezza del flusso.

Sono state condotte delle analisi sulle 4 configurazioni di ostacoli disponibili, con un angolo di inclinazione  $\theta = 28^\circ$  e  $h = 23 \text{ mm}$  in maniera tale da poter fare dapprima un confronto visivo grazie alle istantanee che sono state scattate durante l'esperimento. Le stesse analisi poi sono state ripetute con un apertura  $h = 13 \text{ mm}$  in maniera tale da svolgere anche un confronto quantitativo con i dati presenti nelle Fig. 11 e 12, ottenuti con queste condizioni iniziali.

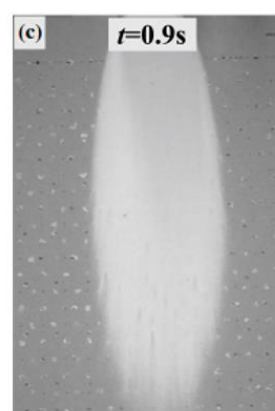
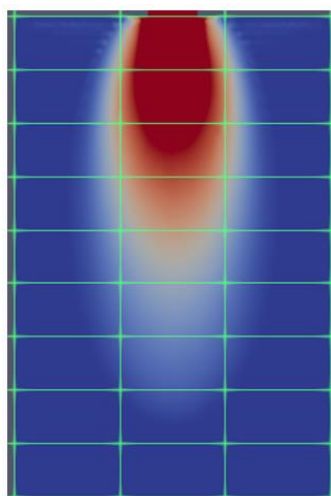
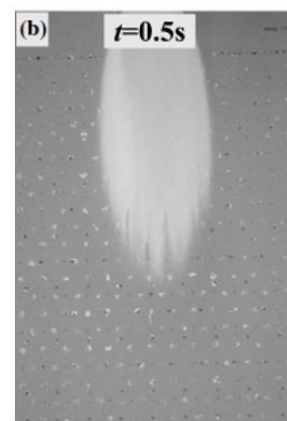
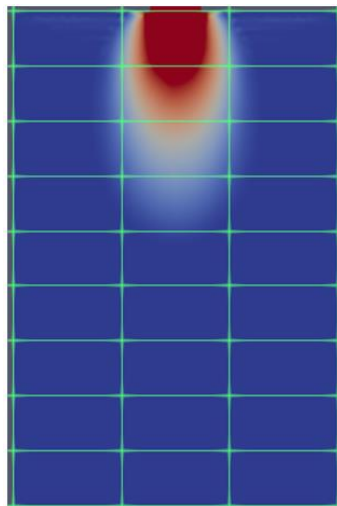
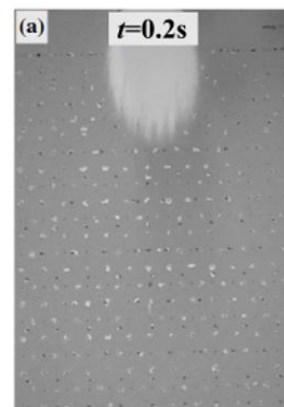
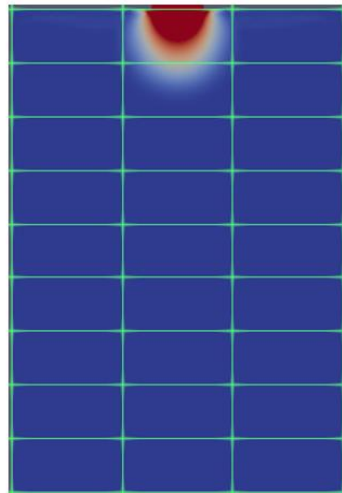
## 4.2. Risultati con reologia Attritiva e Voellmy

Come prima scelta, sono state svolte delle analisi con delle reologie classiche per vedere se fosse possibile approssimare il comportamento del flusso nella maniera più economica possibile. Infatti sia la reologia Voellmy che quella Attritiva vanno calibrate modificando il coefficiente di turbolenza  $\xi$  e/o l'angolo di attrito alla base  $\theta$ .

### 4.2.1. Piano libero-Reologia attritiva $\theta = 24^\circ$

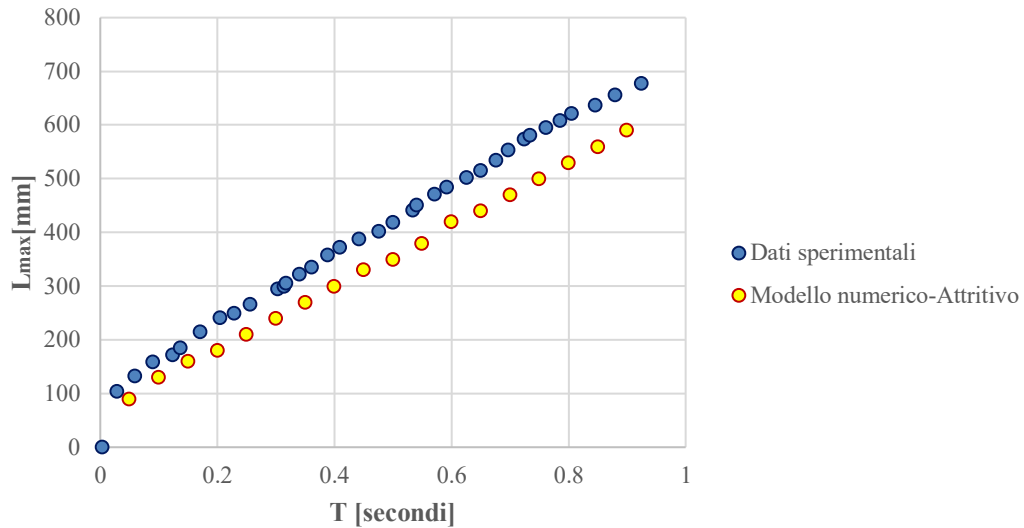
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso. L'angolo di attrito  $\theta$  che è stato inserito nel file "data.txt" per calibrare il modello è pari a **24 gradi**.

Tutte le figure seguenti confrontano i risultati di RASH3D e quelli sperimentali ottenuti dagli autori. Le immagini sono in scala, considerando che l'istantanea ottenuta in laboratorio rappresenta soltanto una porzione dell'intero piano inclinato, le cui dimensioni sono 745 mm x 500 mm.

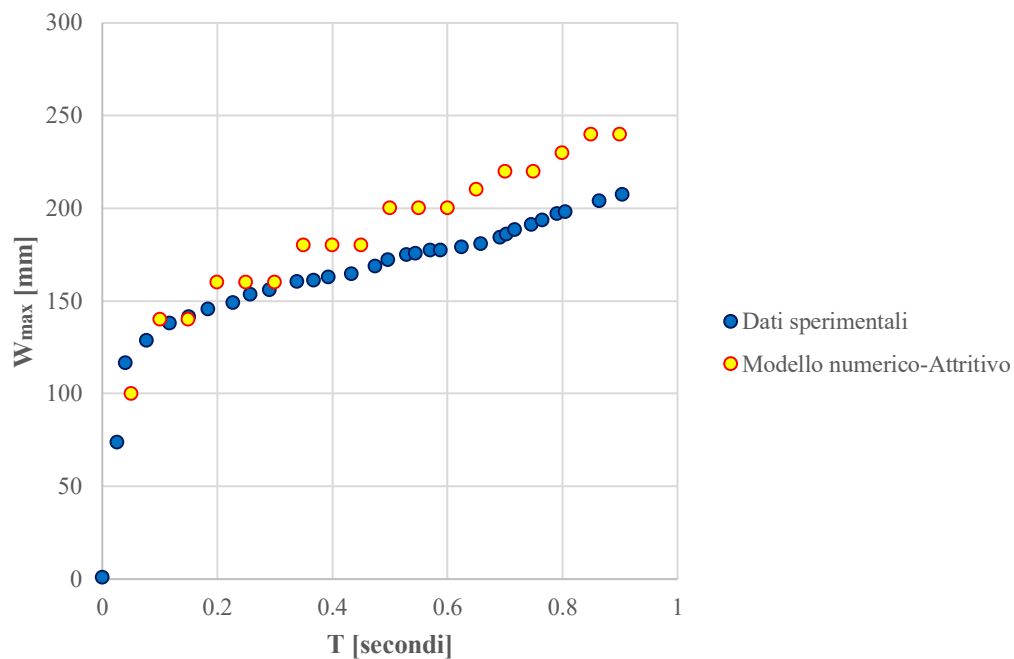


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto quantitativo del fenomeno.

**Table 1: Lunghezza massima-Attritiva [S=inf]**

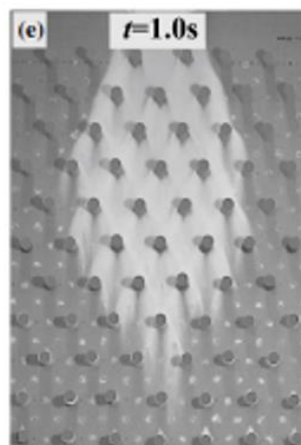
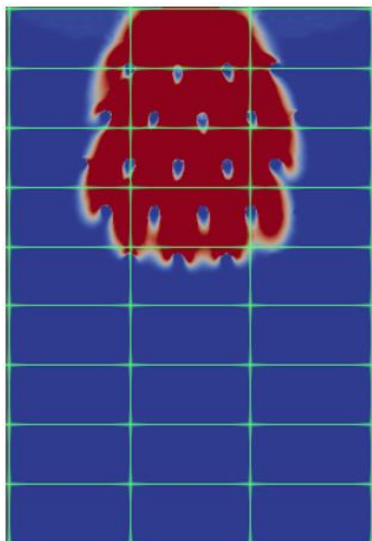
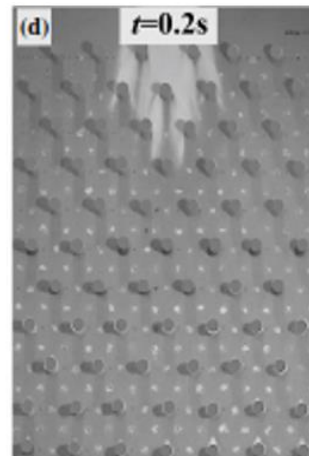
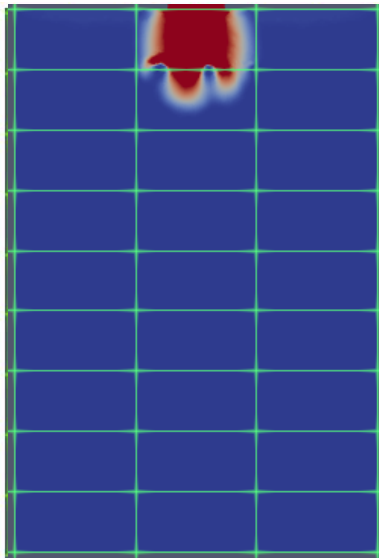


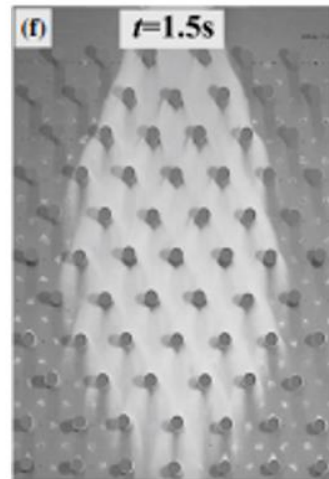
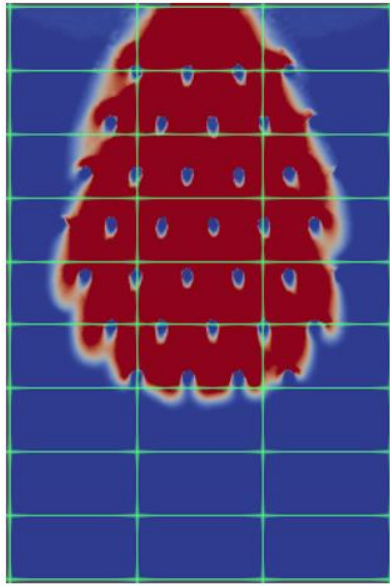
**Table 2: Larghezza massima-Attritiva[S=inf]**



#### 4.2.2. Piano con ostacoli [S=80 mm]-Reologia Voellmy

Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso. L'angolo di attrito  $\theta$  che è stato inserito nel file "data.txt" per calibrare il modello è pari a  $24^\circ$  mentre il coefficiente di turbolenza  $\xi$  viene posto pari a  $200 \frac{m}{s^2}$ .





Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto quantitativo del fenomeno.

**Table 3: Lunghezza massima-Voellmy [s=80mm]**

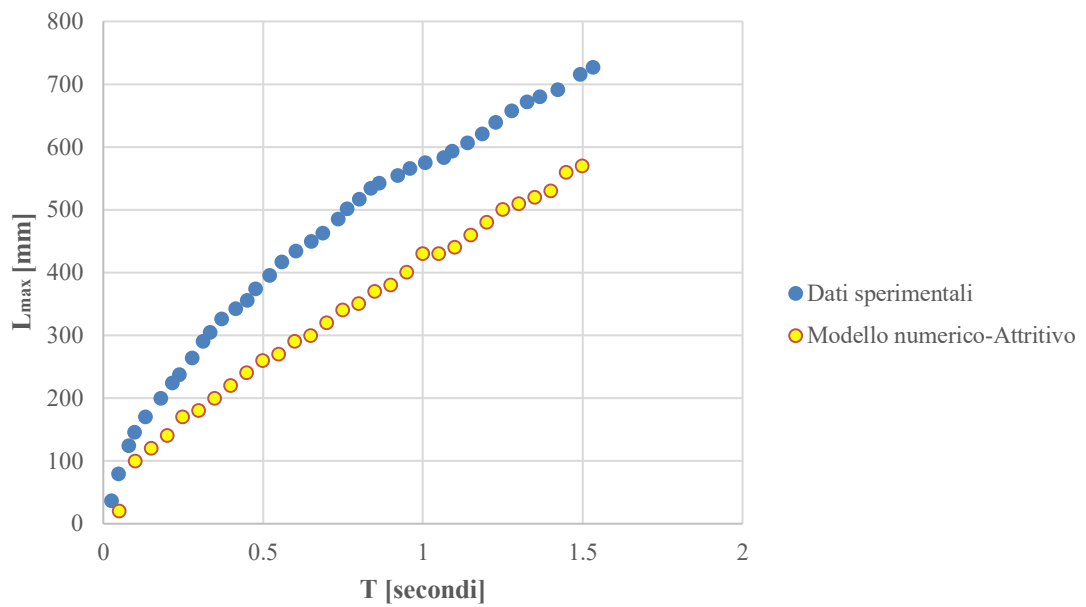
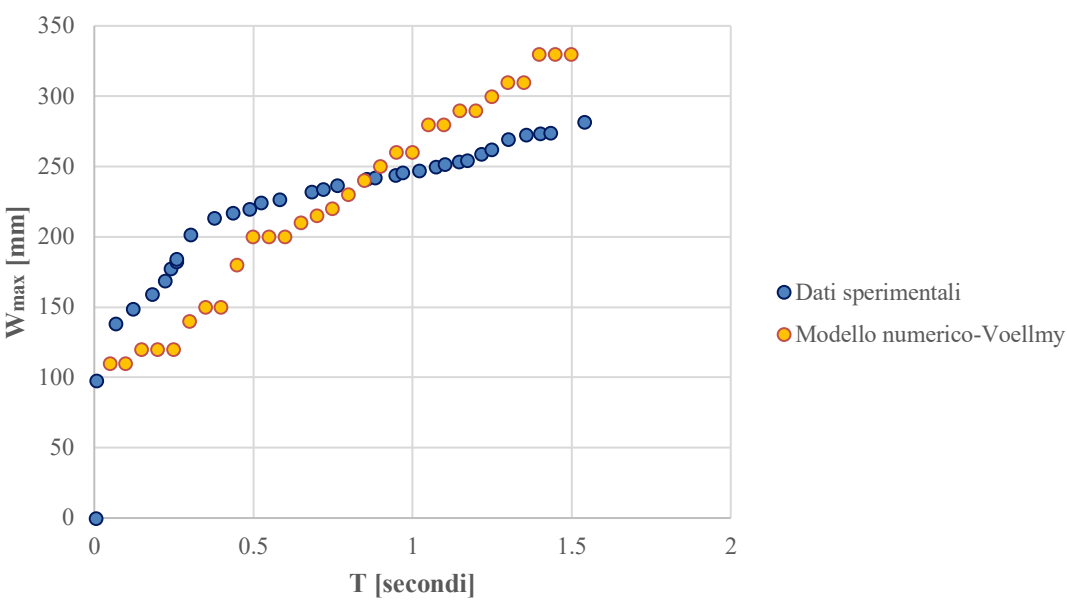


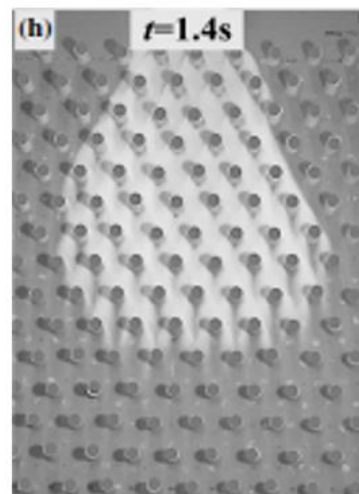
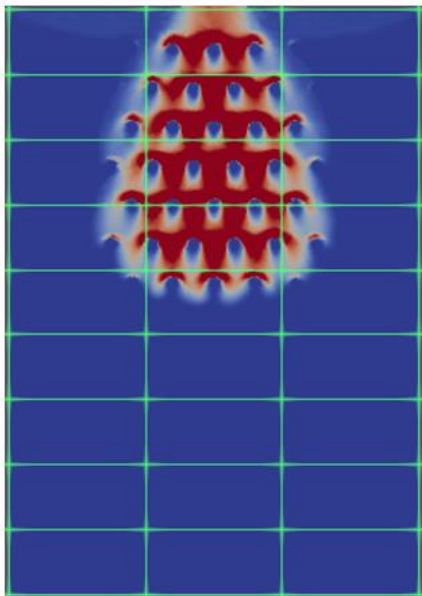
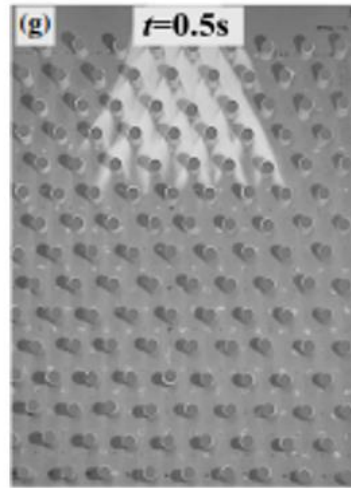
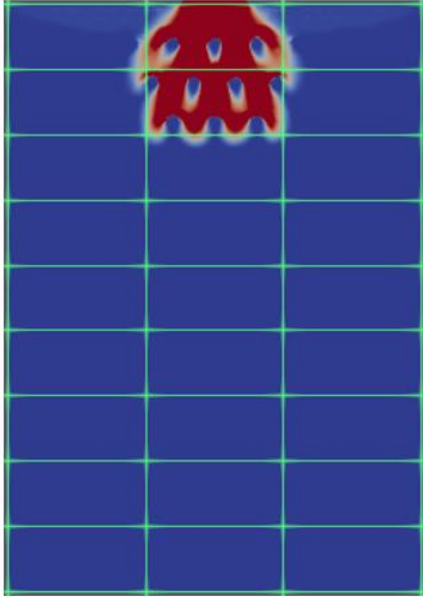
Table 4: Larghezza-Voellmy[S=80 mm]

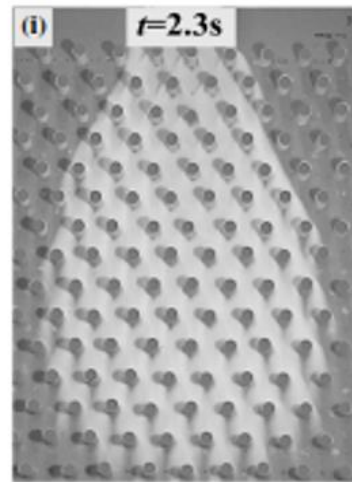
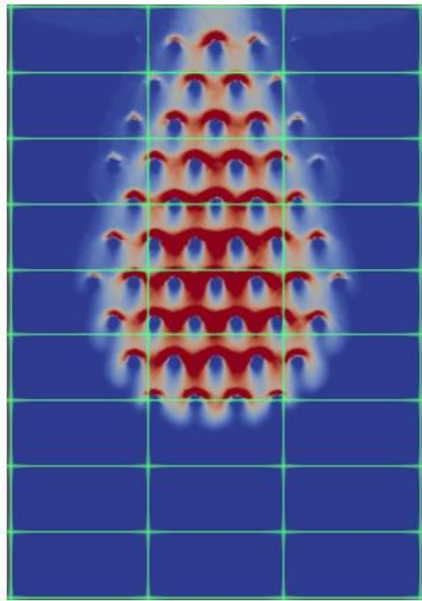




#### 4.2.3. Piano con ostacoli [S=60 mm]-Voellmy

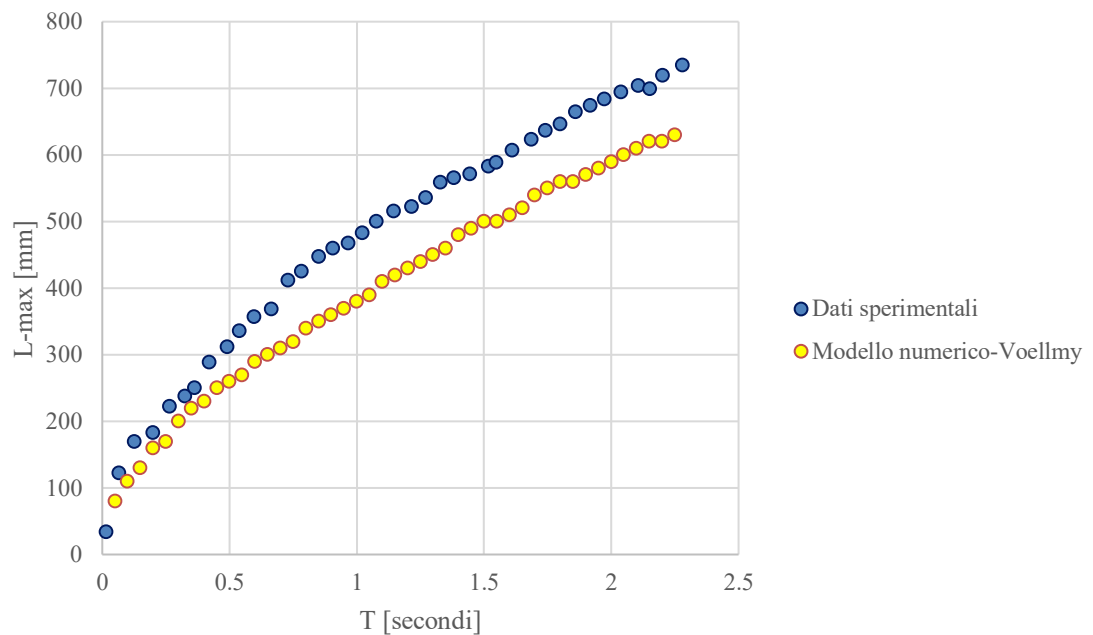
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso. L'angolo di attrito  $\theta$  che è stato inserito nel file "data.txt" per calibrare il modello è pari a  $24^\circ$  mentre il coefficiente di turbolenza  $\xi$  viene posto pari a  $200 \frac{m}{s^2}$



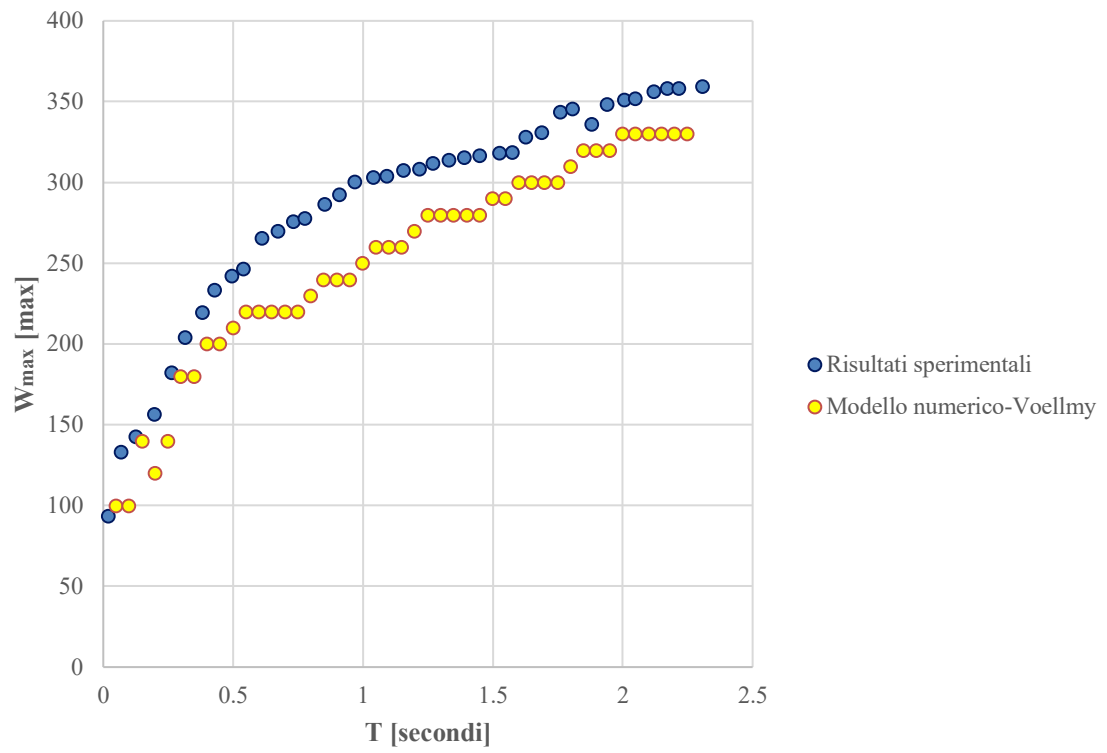


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 5: Lunghezza massima-Voellmy [S=60 mm]**

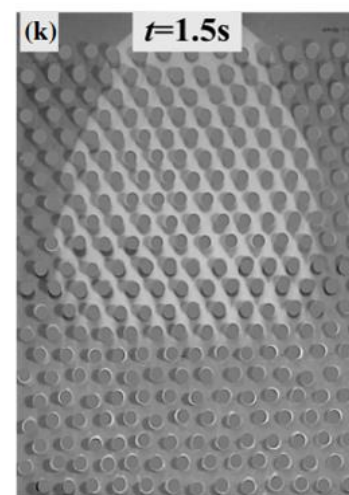
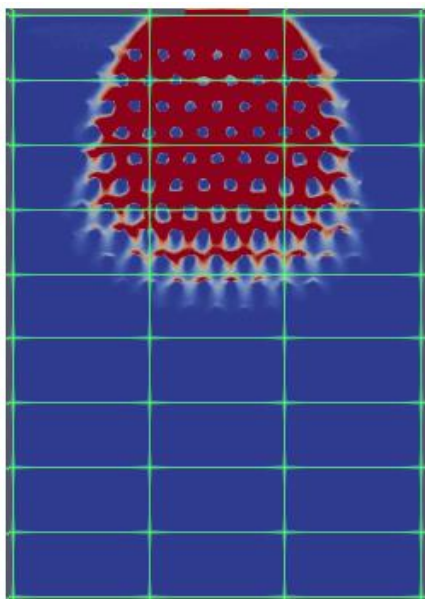
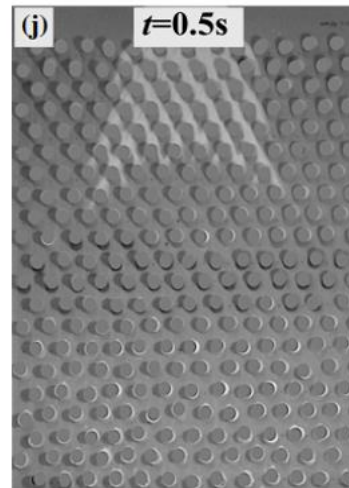
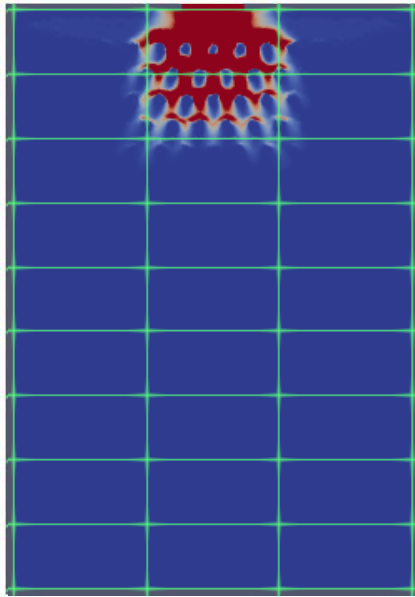


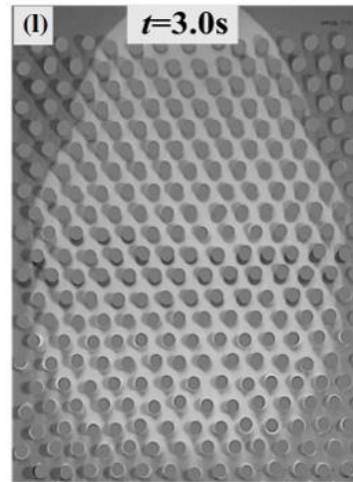
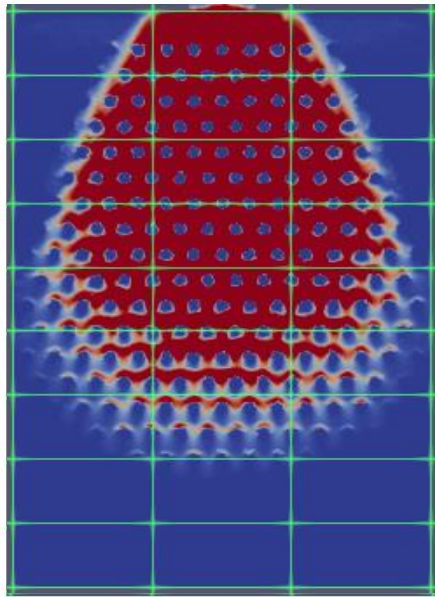
**Table 6: Larghezza massima-Voellmy[S=60 mm]**



#### 4.2.4. Piano con ostacoli [S=40 mm]-Attritiva

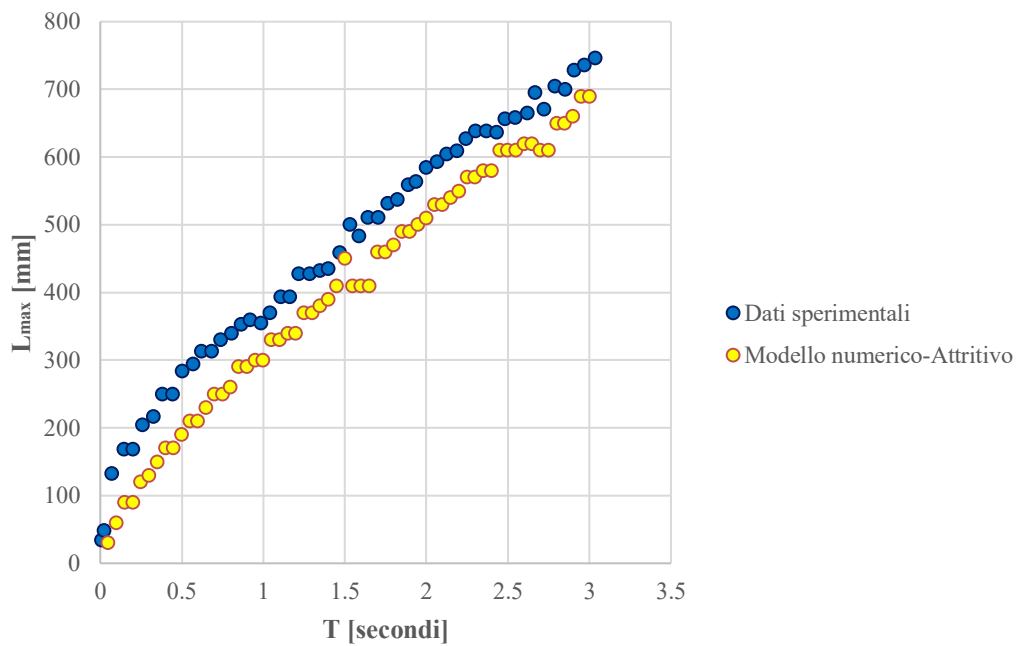
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso. L'angolo di attrito  $\theta$  che è stato inserito nel file "data.txt" per calibrare il modello è pari a **24°**



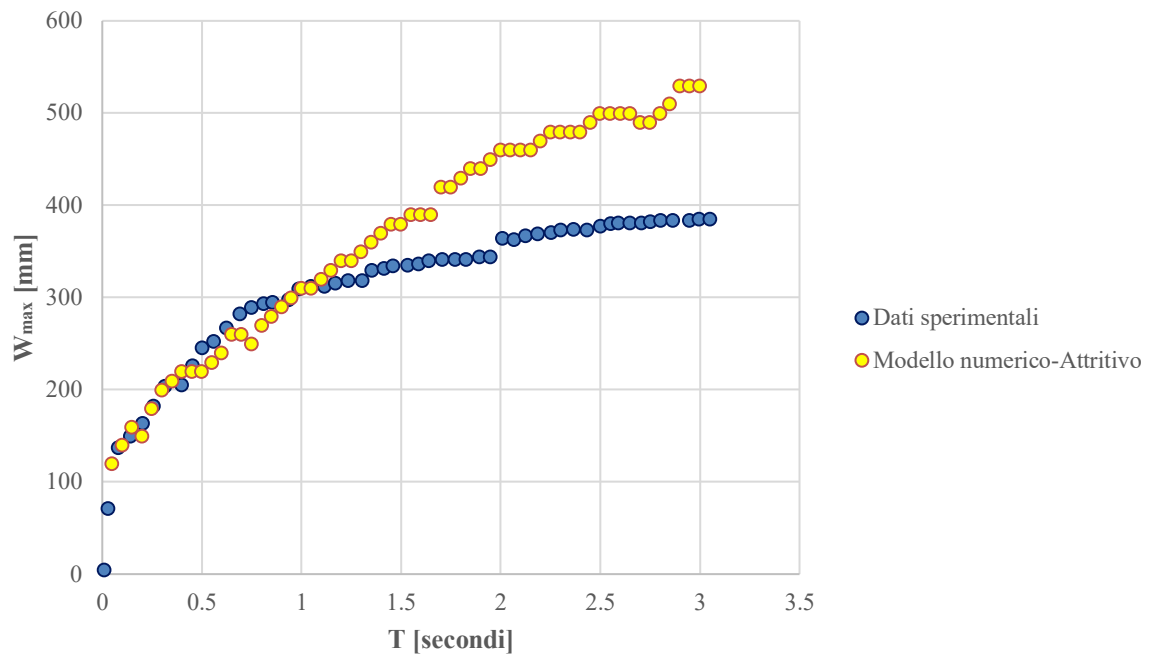


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 7: Lunghezza massima-Attritiva [S=40 mm]**



**Table 8: Larghezza massima-Attritiva [S=40 mm]**



#### 4.2.5. Considerazioni sulle reologie semplici

Le calibrazioni appena discusse sono il miglior risultato che é stato possibile ottenere per la riproduzione dell'esperimento in laboratorio. Considerando che in nessun caso si ottengono dei dati confrontabili, si effettuano le seguenti considerazioni:

- In alcuni casi il confronto fra dati numerici può essere considerato accurato, ma non soddisfa mai contemporaneamente sia il termine  $L_{max}$  e  $W_{max}$
- La riproduzione della morfologia non é particolarmente fedele, con la sola eccezione del caso in cui il piano é libero.
- Anche nel caso in cui si fossero ottenuti dei risultati confrontabili, l'utilizzo di reologie differenti (Attritiva e Voellmy) non rende valida la procedura di calibrazione, perché esiste solo un comportamento reologico e un unico set di parametri che é descrittivo del flusso.

### 4.3. Risultati con Reologia $\mu(I)$

In questo capitolo si riportano i risultati ottenuti a seguito della calibrazione dei parametri della reologia  $\mu(I)$ , discussa nel Capitolo 3 e presa in considerazione dagli stessi autori perché il comportamento del flusso in esame ha delle caratteristiche di stazionarietà. Questa parte della calibrazione è più complicata delle precedenti perché bisogna far variare 4 parametri (il diametro viene assunto pari a 0.3 mm in accordo con l'esperimento del paper).

Per la procedura di calibrazione ci si è avvalsi delle considerazioni fatte sull'ultima parte del paper di riferimento, dove è stata ricavata una legge analitica caratterizzata da un coefficiente  $C(\theta)$ . Esso contiene i termini della reologia  $\mu(I)$  che sono stati calibrati sulla base dei risultati ottenuti da Einav, Luong e Baker nel loro esperimento.

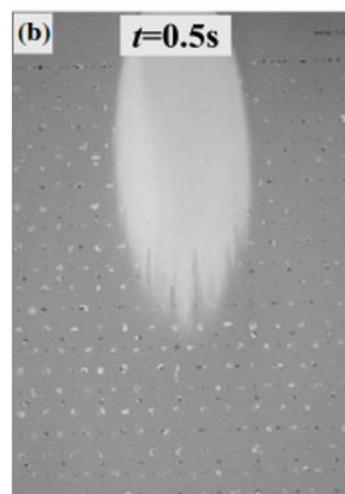
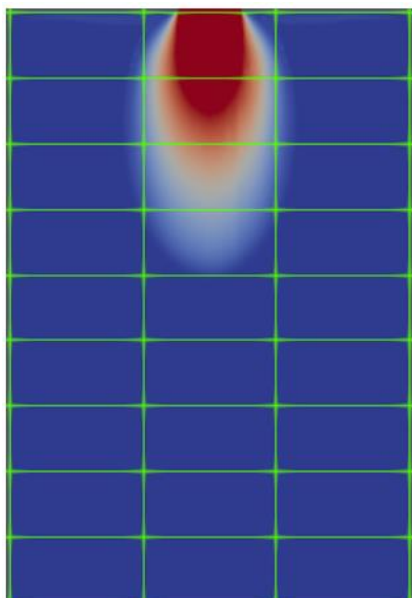
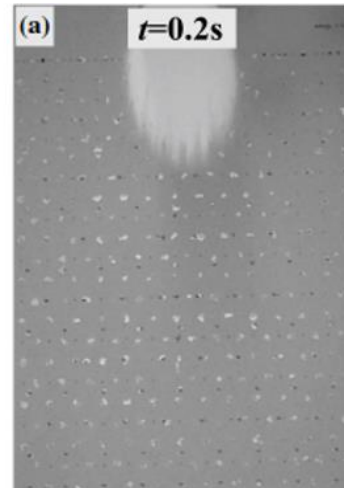
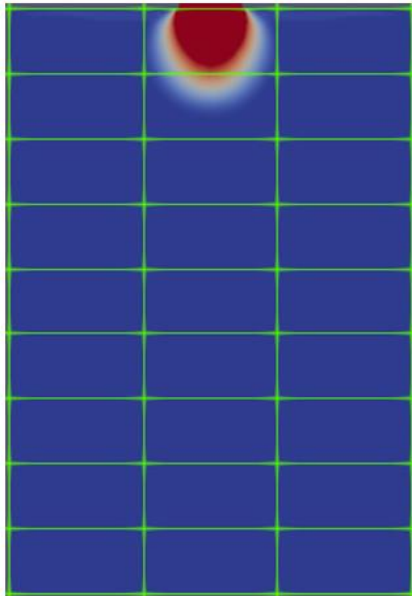
Nel seguito si riporta una tabella dove è possibile apprezzare il confronto fra i parametri estratti dal paper e quelli utilizzati per la calibrazione del fenomeno in questa fase.

	Parametri				
	$\phi_1[^\circ]$	$\phi_2[^\circ]$	$L[1/m]$	$\beta[/]$	$d[m]$
<i>Paper</i>	22,7	55,7	0,000125	0,136	0,0003
<i>RASH3D</i>	22,7	55,7	0,025	0,136	0,0003

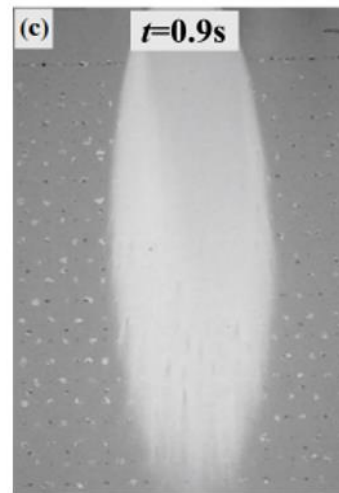
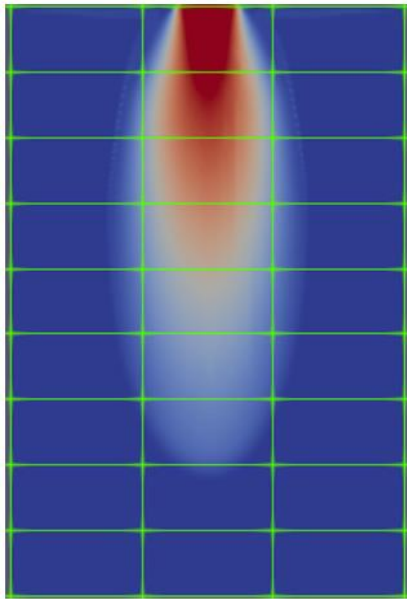
Come evidenziato, viene l'unica differenza riguarda il solo parametro L. Questo set di parametri viene utilizzato per *tutte* le configurazioni di piano.

#### 4.3.1. Piano libero-Reologia $\mu(I)$

Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso.

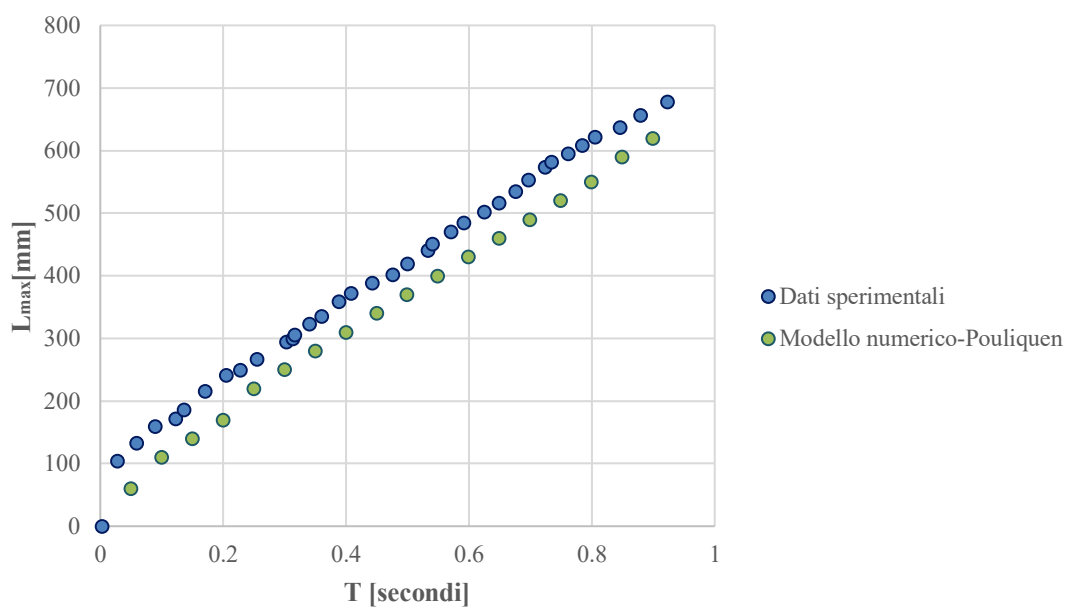




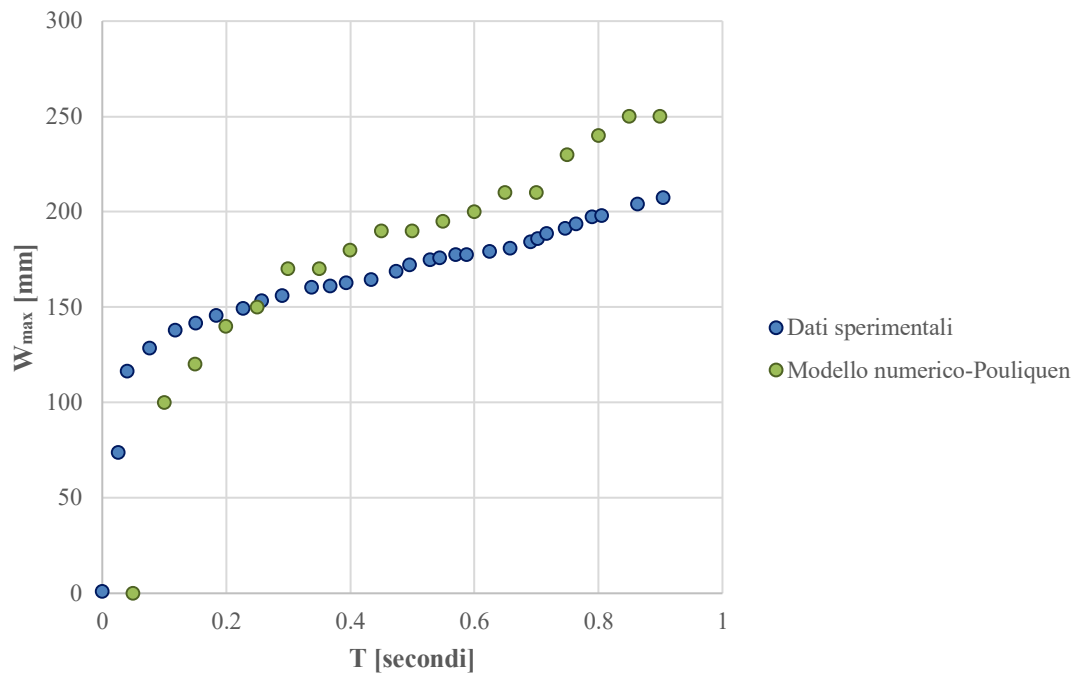


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 9: Lunghezza massima-Pouliquen [ $S=\infty$ ]**

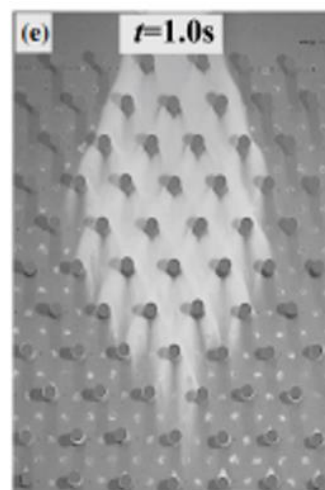
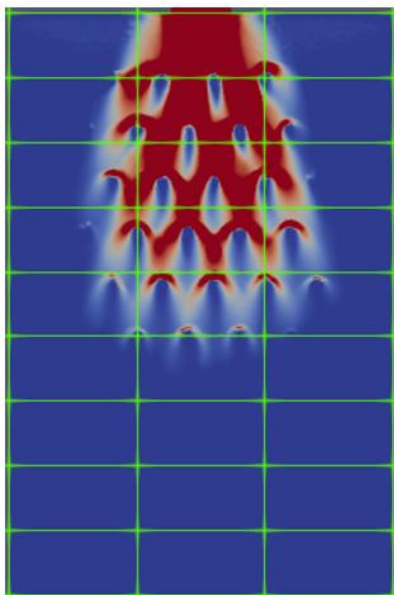
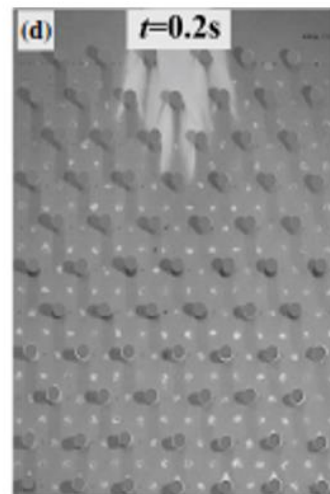
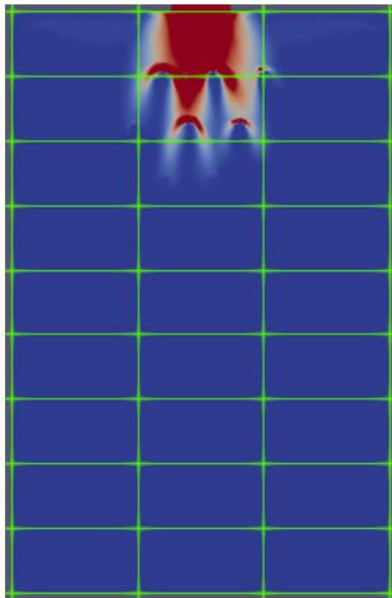


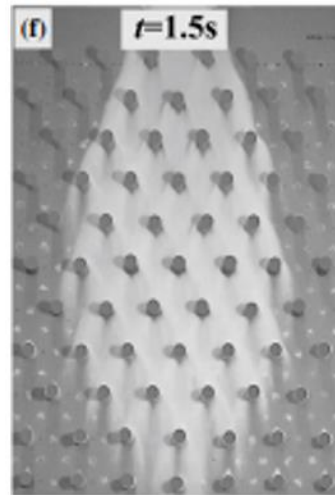
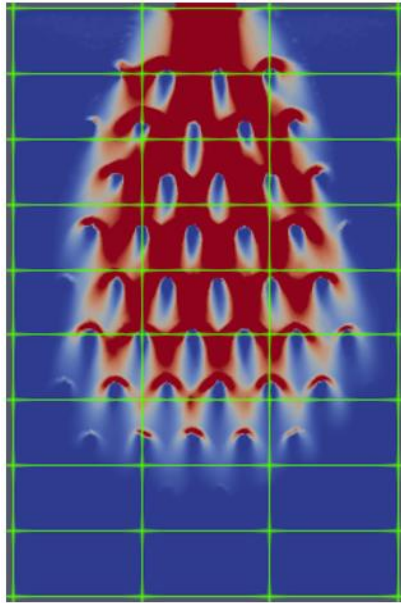
**Table 10: Larghezza massima-Pouliquen [ $S = \infty$ ]**



#### 4.3.2. Piano con ostacoli [S=80 mm]-Reologia $\mu(I)$

Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso.





Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 11: Lunghezza massima-Pouliquen[S=80 mm]**

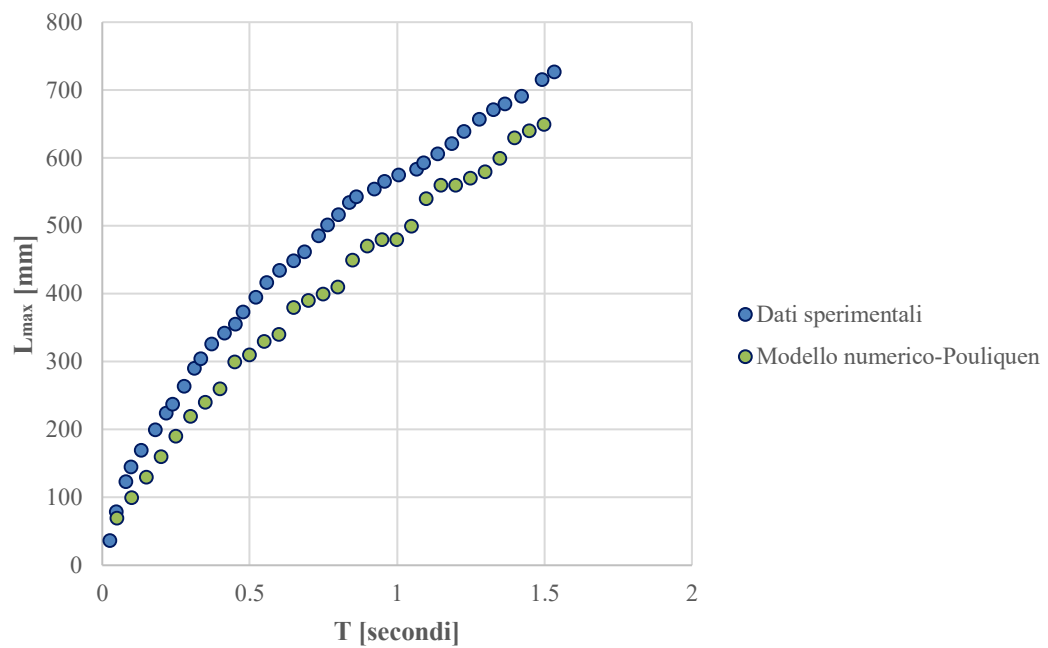
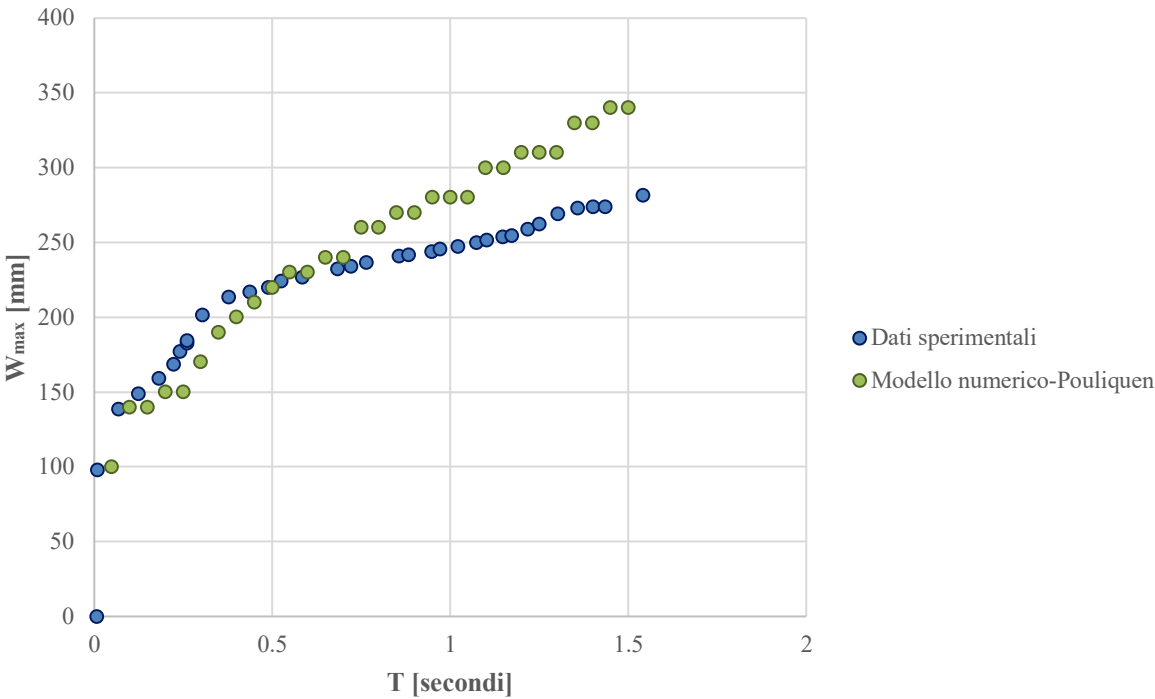
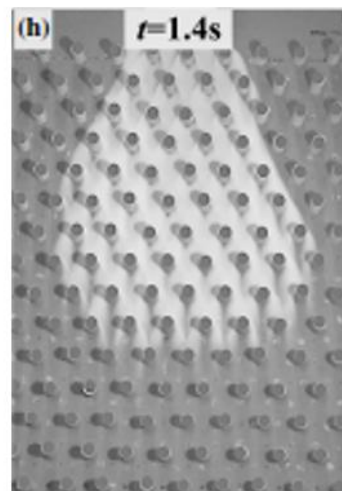
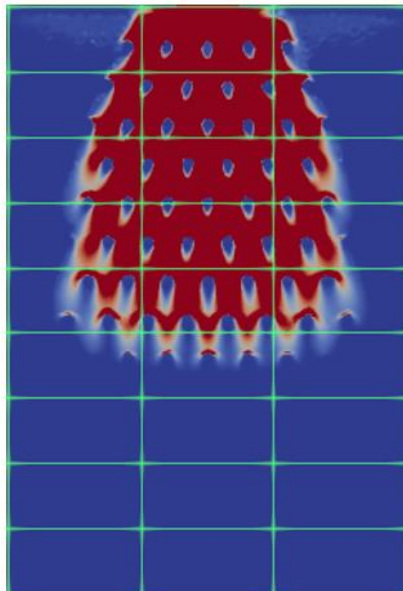
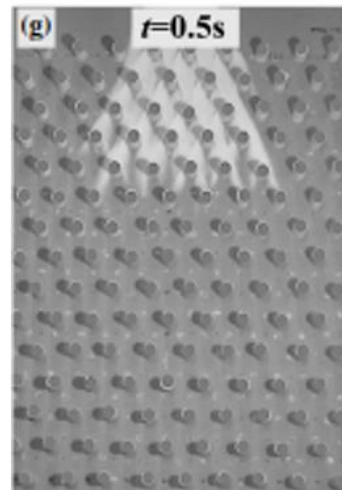
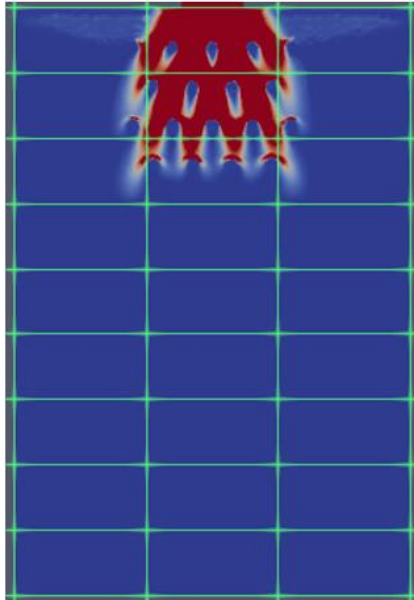


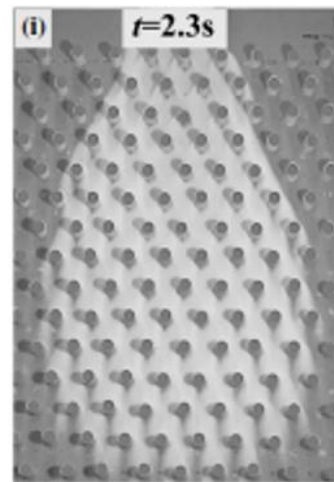
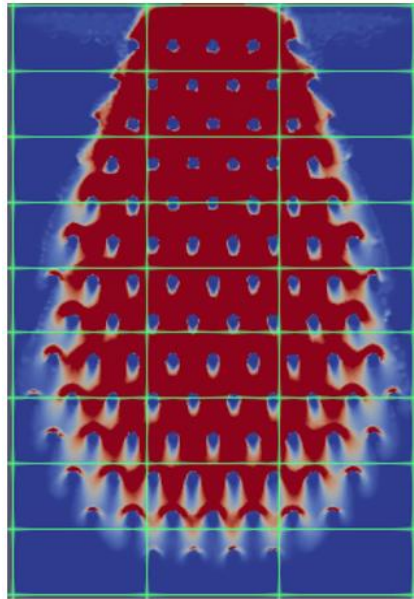
Table 12: Larghezza massima-Pouliquen [S=80 mm]



#### 4.3.3. Piano con ostacoli [ $S=60$ mm]-Reologia Pouliquen

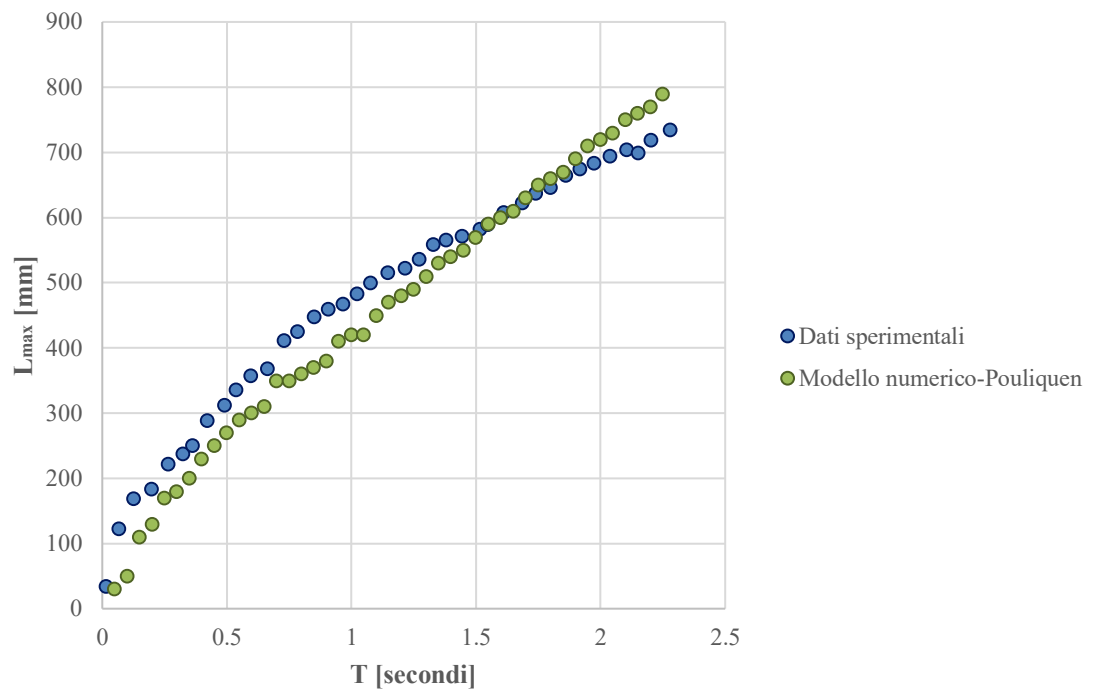
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui é stato fotografato il flusso.



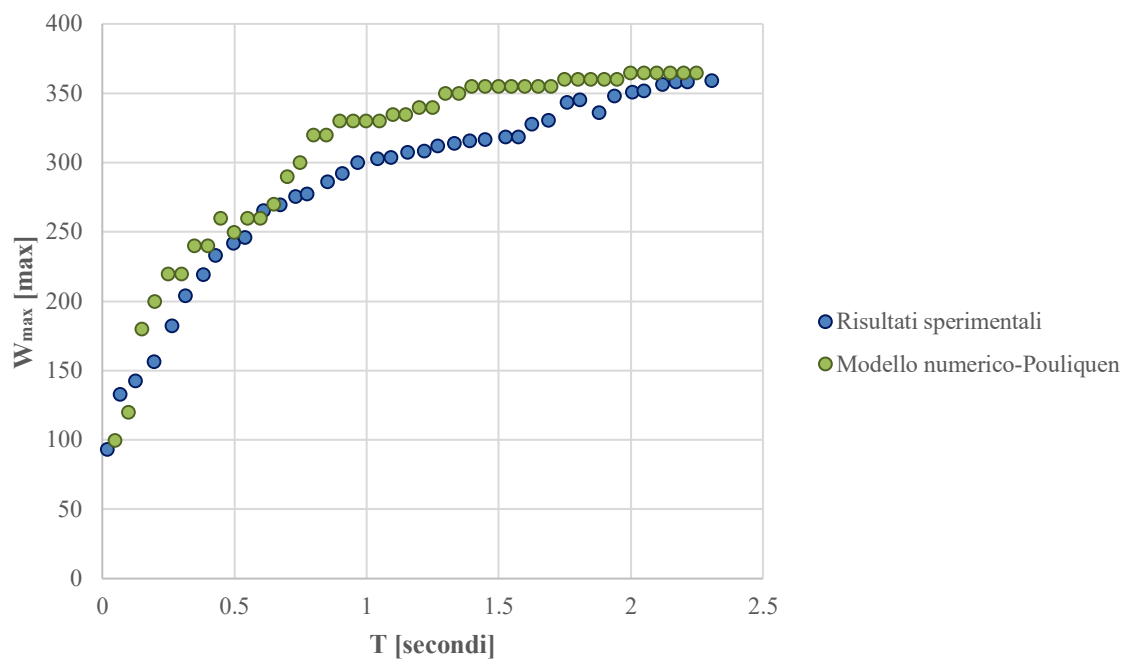


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 13: Piano con ostacoli-Pouliquen[S=60 mm]**



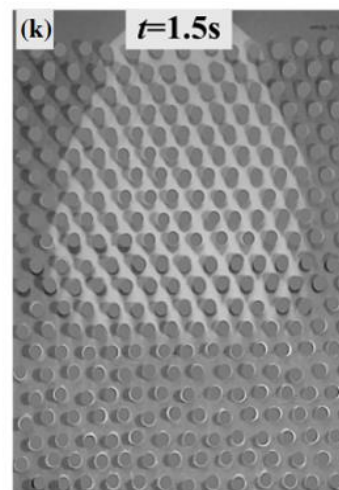
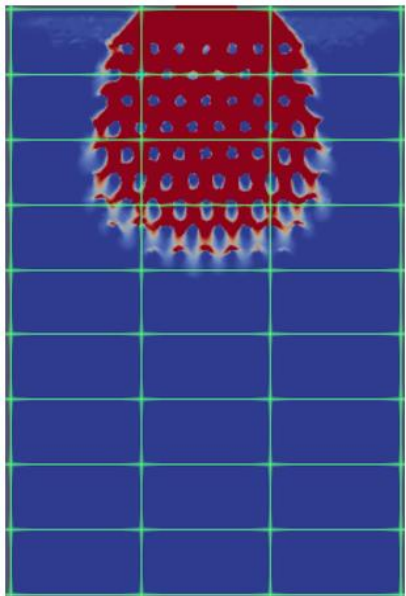
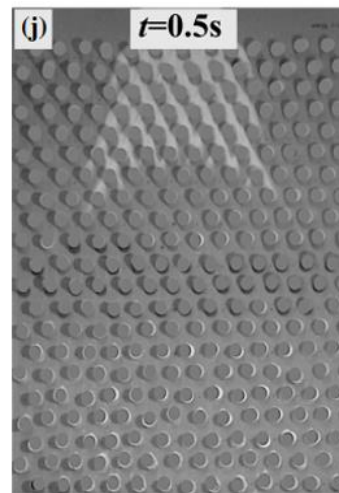
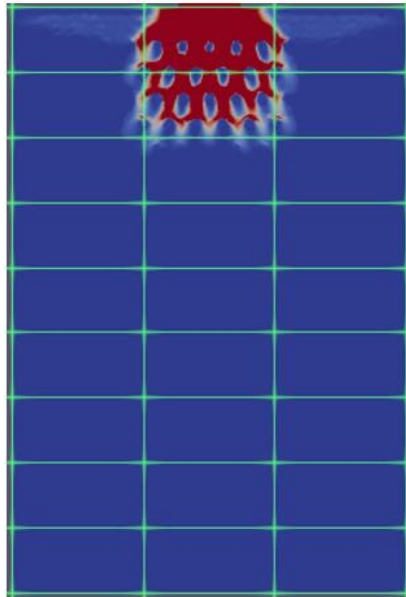
**Table 14: Piano con ostacoli-Pouliquen[S=60 mm]**

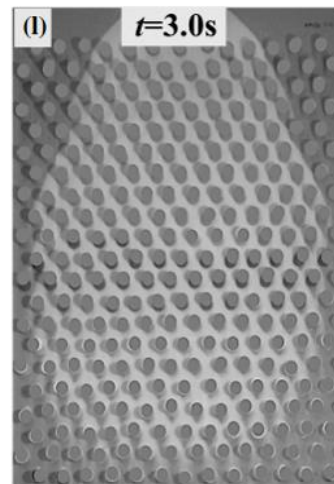
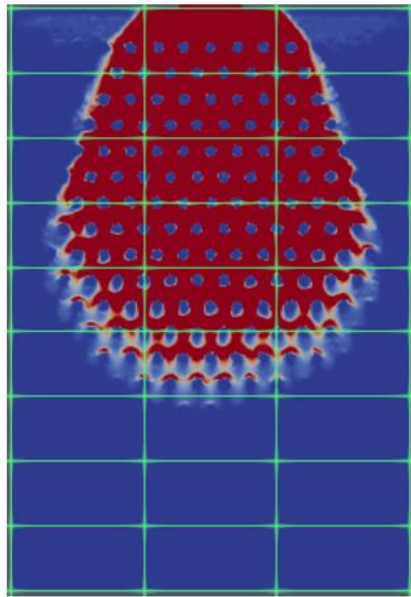




#### 4.3.4. Piano con ostacoli [ $S=40$ mm]-Reologia Pouliquen

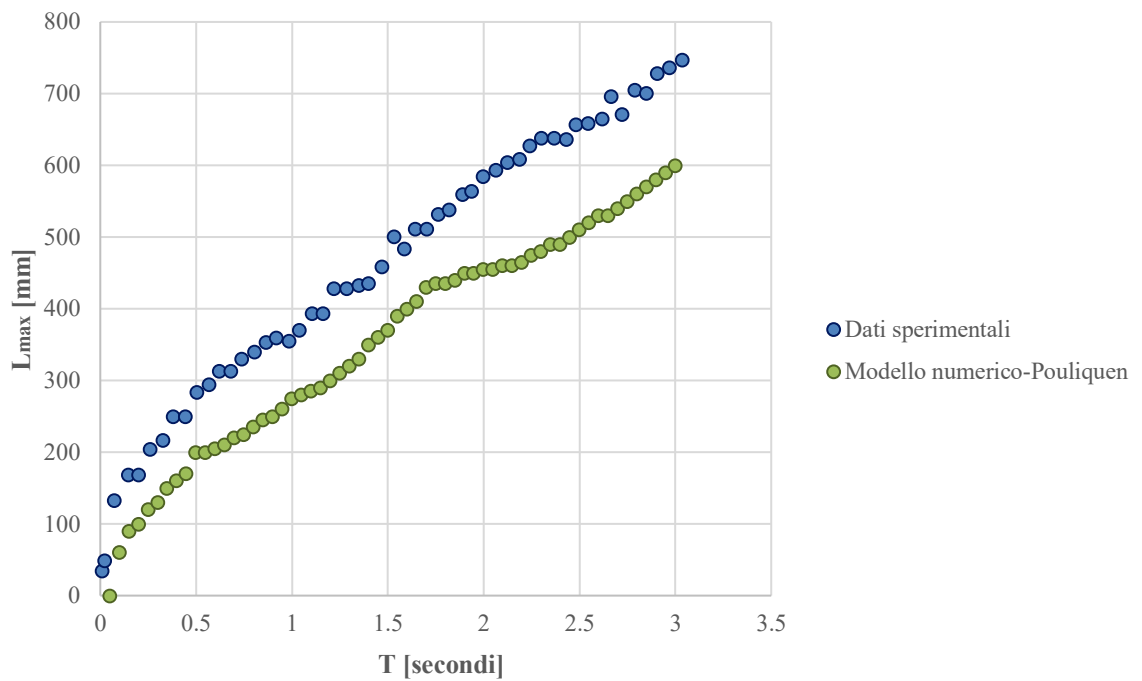
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso.



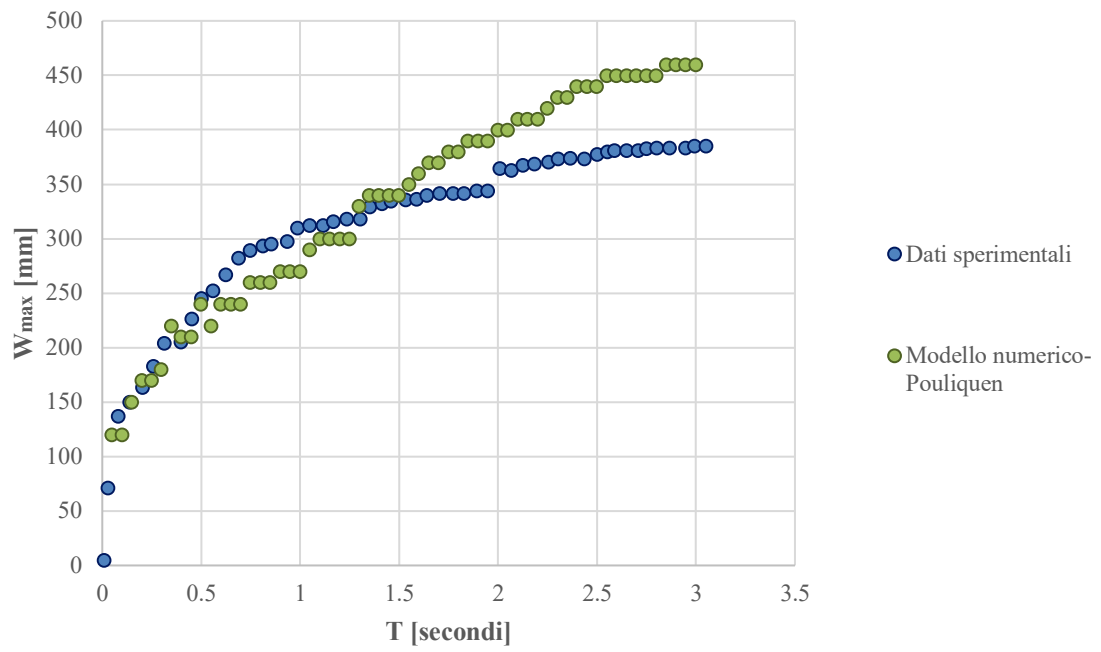


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 15: Lunghezza massima-Pouliquen [S=40 mm]**



**Table 16: Larghezza massima-Pouliquen[S=40 mm]**



#### 4.3.5. Considerazioni sulla reologia Pouliquen

I risultati delle simulazioni sembrano più accurati rispetto al caso precedente, in cui era presente una difformità sia per quanto riguarda la forma del flusso e sia per quanto riguarda le dimensioni. L'utilizzo della reologia Pouliquen invece permette di ottenere i seguenti miglioramenti:

- La forma del flusso è molto più simile a quella sperimentale, soprattutto nei casi  $S=80$  mm e  $S=60$  mm.
- L'andamento dei valori  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in alcuni casi non è ancora particolarmente fedele ma comunque i risultati nella maggior parte delle volte sono migliori rispetto al caso precedente, soprattutto per quanto riguarda l'espansione laterale. Nel seguito si riportano alcuni confronti che permettono di apprezzare le variazioni positive della Pouliquen rispetto alle reologie classiche.

Table 17: Confronti larghezza massima-Piano libero

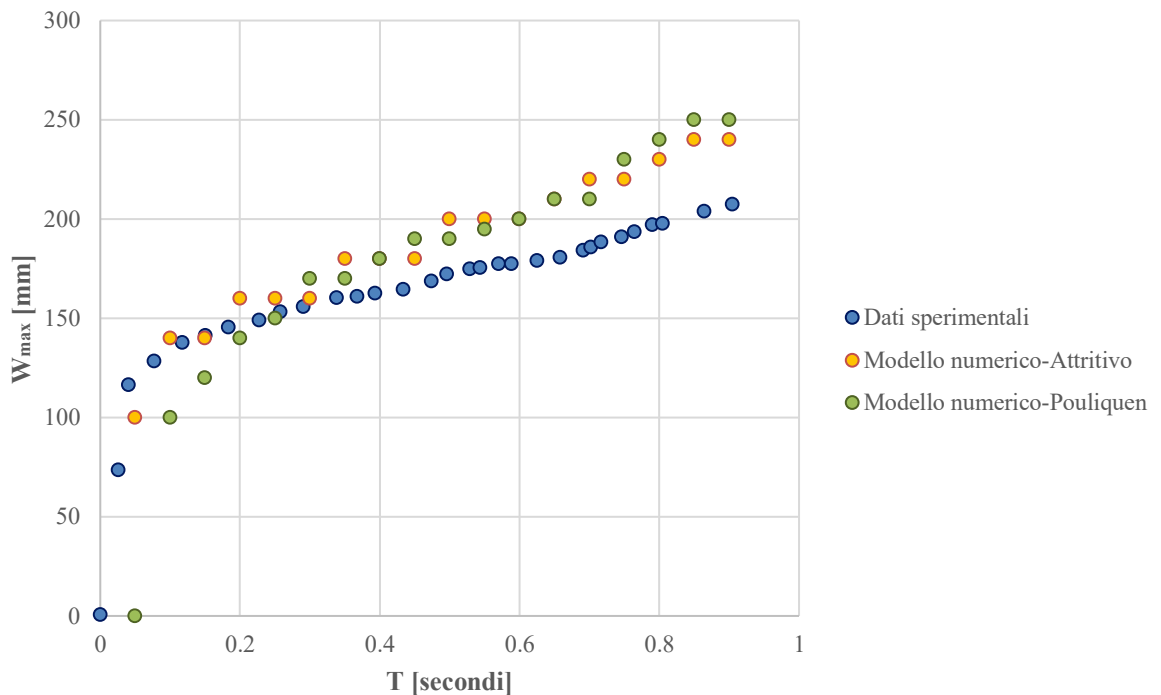


Table 18: Confronti larghezza-S=80 mm

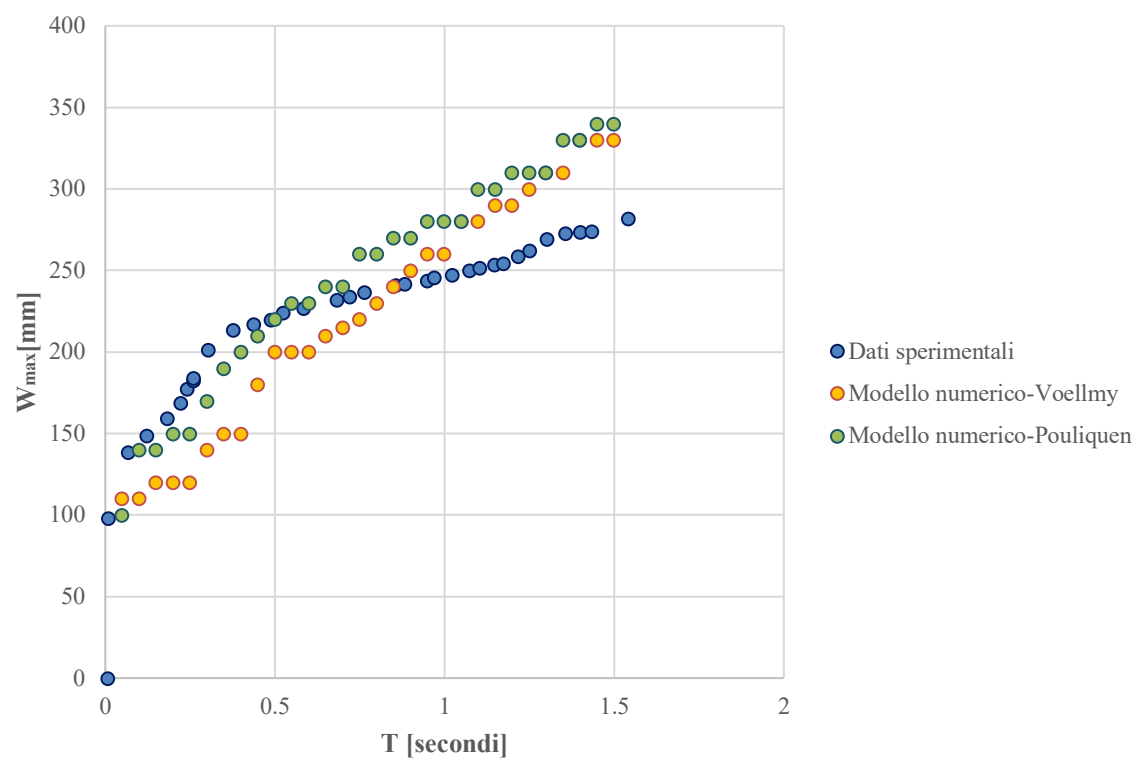
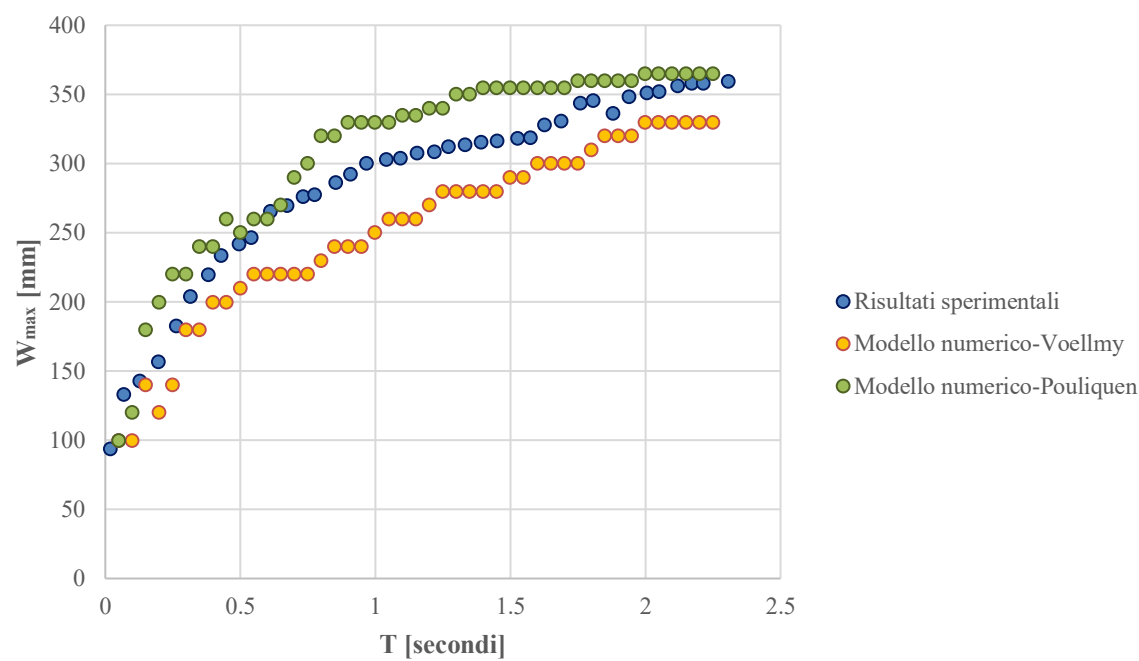
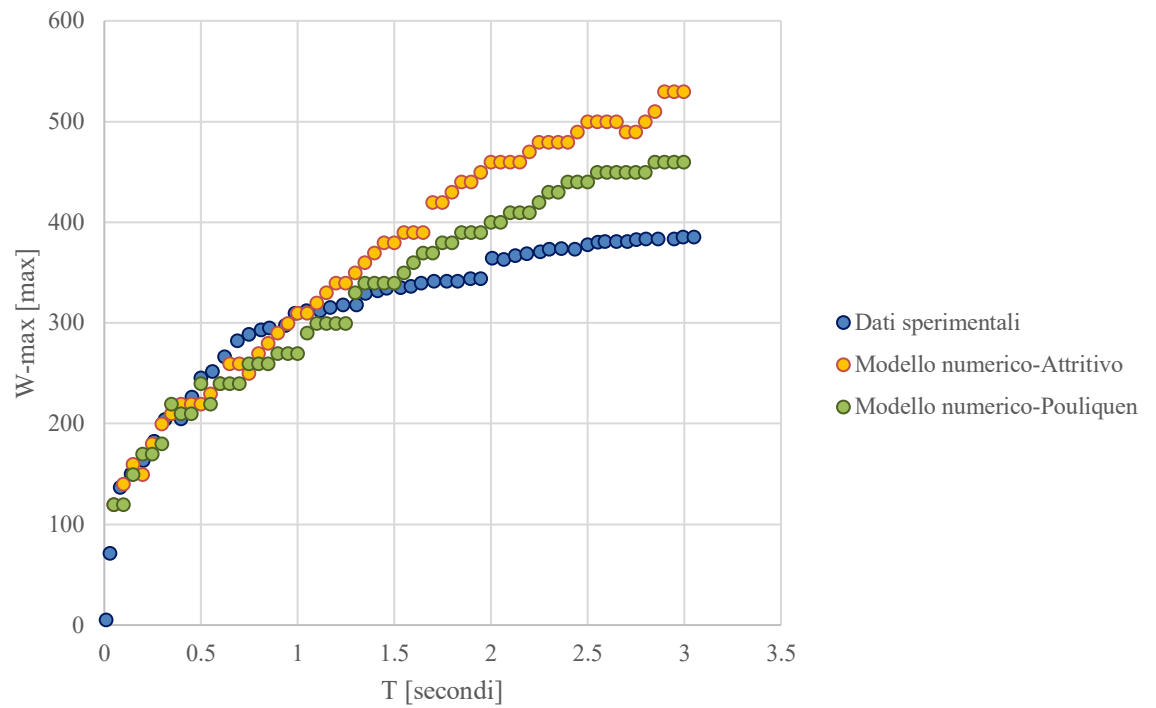


Table 19: Confronti larghezza-S=60 mm



**Table 20: Confronti larghezza-S=40 mm**



- Infine, per la simulazione dei risultati è stata utilizzata la sola reologia Poulighen con un unico set di parametri, a differenza del caso precedente in cui si sono utilizzate due reologie diverse.

## **5. BACK-ANALYSIS CON GEOMETRIA RETTANGOLARE**

### **5.1. Descrizione della nuova geometria**

Le simulazioni precedenti hanno evidenziato che la reologia Pouliquen lavora meglio rispetto a quelle classiche, tuttavia i risultati non sono ancora pienamente confrontabili.

Tornando al Cap. 4.1 e alla luce di queste differenze, è stata rivalutata la scelta della geometria di partenza che presupponeva il rilascio del materiale dall'interno di una canaletta di lunghezza 0,9 m e di larghezza fissa pari a  $W=97$  mm. Probabilmente, questa configurazione non è rappresentativa dell'esperimento: gli autori infatti hanno utilizzato un serbatoio da cui il materiale fuoriusciva in maniera tale da garantire un apporto costante e continuo per tutta la durata della prova.

La configurazione con canaletta effettivamente garantisce questa condizione ed è stata dimensionata anche in maniera tale che contenesse la stessa quantità di materiale prevista originariamente, ma probabilmente differisce in maniera significativa in corrispondenza della zona di entrata del materiale. La presenza di un supporto inclinato e molto lungo da cui il materiale fuoriesce nel corso della prova porta ad osservare nella zona di uscita, istante per istante, delle velocità differenti dovute alla presenza di un moto accelerato del continuo equivalente. Viceversa, nella prova sperimentale, il materiale entra nel piano inclinato con una velocità costante e quindi in questo capitolo si proverà a riprodurre l'esperimento ponendo una maggior attenzione alle condizioni iniziali.

Il codice RASH3D permette di impostare sul contorno della geometria delle condizioni di "inlet" in cui si possono imporre valori di altezza e velocità con cui il materiale fuoriesce. Alla luce di questo, la prima fase è stata quella di modificare la geometria di partenza in maniera tale da tornare alla rappresentazione di un piano rettangolare inclinato di 30 gradi, in cui le condizioni di inlet sono poste sul lato

superiore e centrale della figura, per una larghezza fissa di 97 mm pari alla larghezza della bocca di uscita del sebatoio.



**Figura 35: Condizioni di inlet sul foro d'entrata**

La condizione di inlet riguarda tutti gli elementi della mesh sul contorno che sono stati classificati tramite lo script di Matlab con il valore “1”. Su ciascuno di essi si definisce la portata volumetrica  $Q$  [m<sup>3</sup>/s] che si determina tramite il prodotto di:

- MeshL= dimensione della mesh
- H= altezza di del foro rettangolare
- V= velocità di uscita

Noti i primi due valori, resta da determinare la velocità che costituirà un ulteriore termine di calibrazione nel processo di back-analysis.



## 5.2. Risultati con reologia $\mu(I)$

La calibrazione della reologia  $\mu(I)$  che ha prodotto i risultati migliori viene riassunta nella tabella seguente:

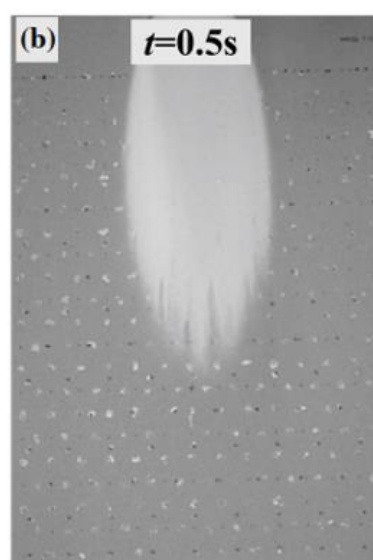
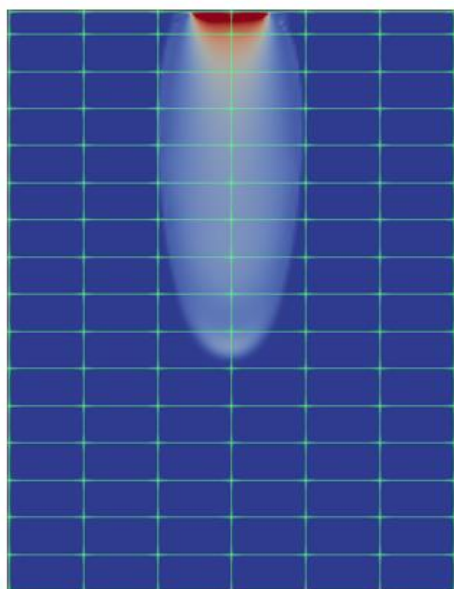
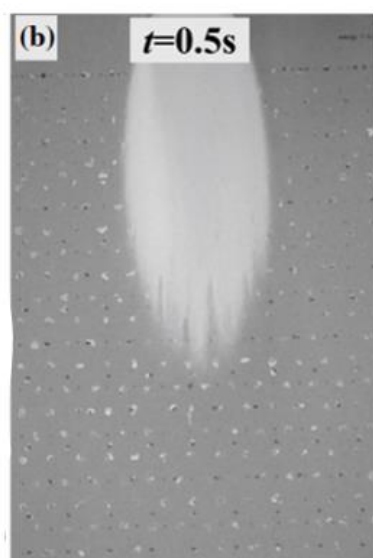
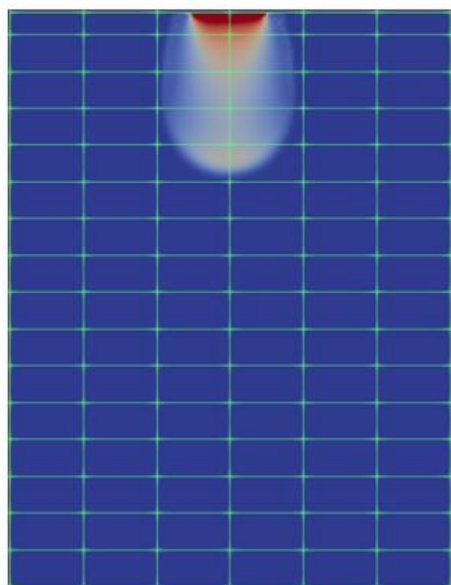
	Parametri					
	$\phi_1[^\circ]$	$\phi_2[^\circ]$	$L[1/m]$	$\beta[/]$	$d[m]$	$v[m/s]$
<i>Paper</i>	22,7	55,7	0,025	0,136	0,0003	\
<i>RASH3D</i>	22,7	55,7	0,025	0,6	0,0003	4,34

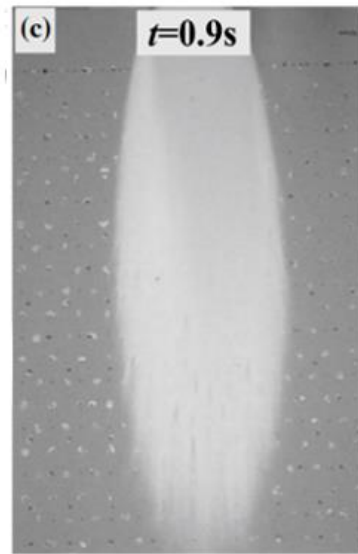
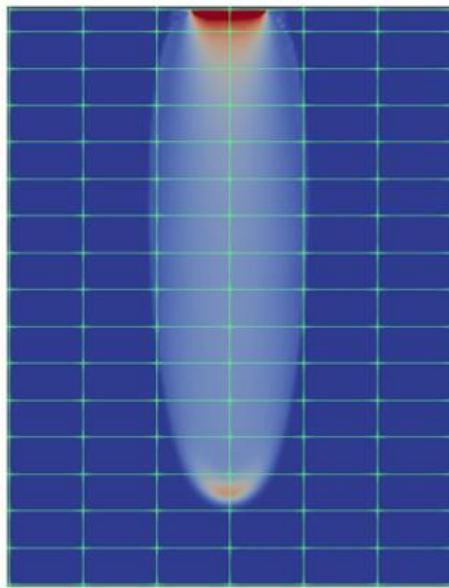
In questo caso, l'unica discrepanza con i dati estratti dal paper riguarda il parametro  $\beta$ . Tutti gli altri sono coerenti con quanto riferito nel paper nella fase di calibrazione della configurazione di piano libero.

Per quanto riguarda il parametro  $v$ , la sua calibrazione e' avvenuta cercando dapprima di riprodurre in maniera qualitativa la forma del flusso utilizzando i parametri della  $\mu(I)$ . Successivamente, principalmente sulla base delle tempistiche di propagazione, e' stata regolata la velocita' fino a raggiungere il valore della tabella.

### 5.2.1. Piano libero inlet

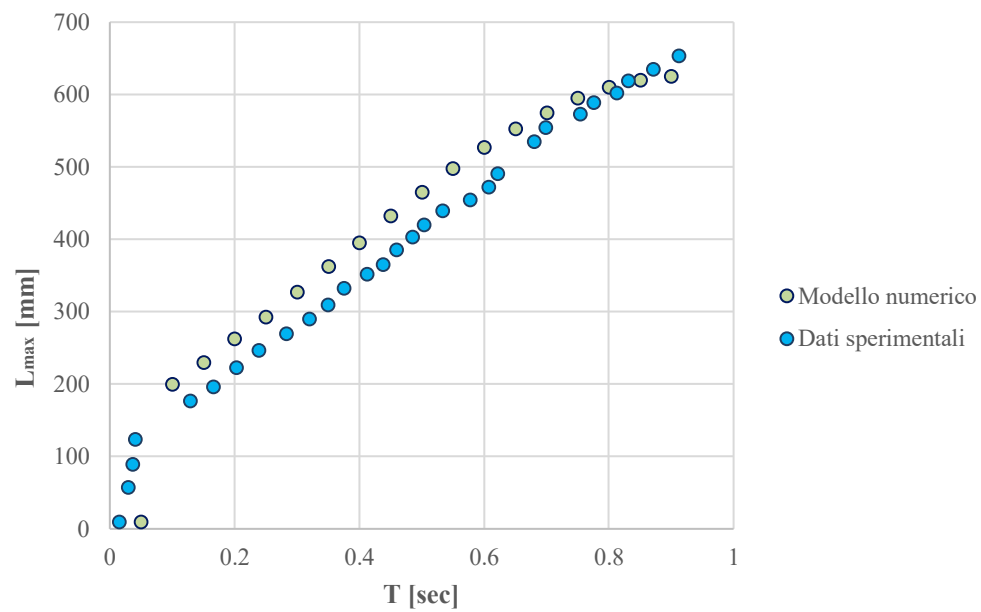
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui é stato fotografato il flusso

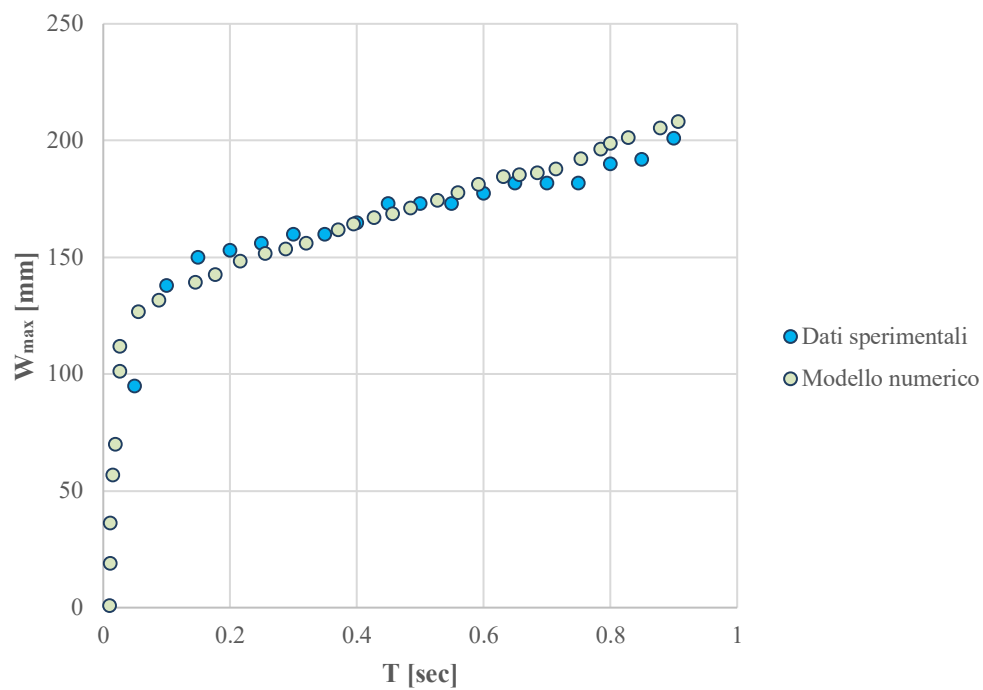




Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

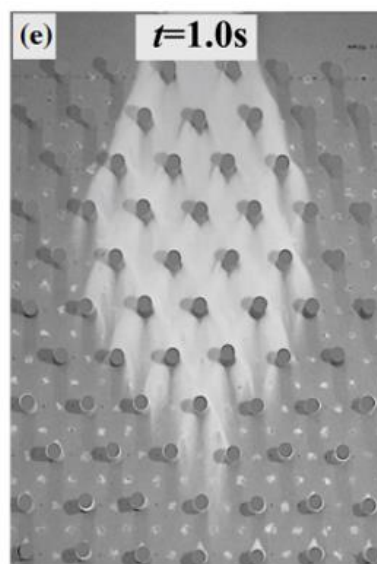
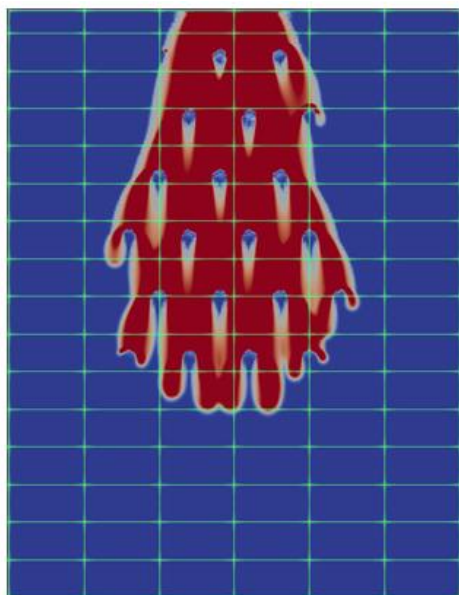
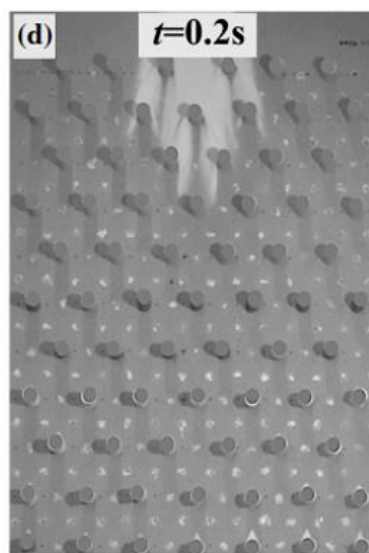
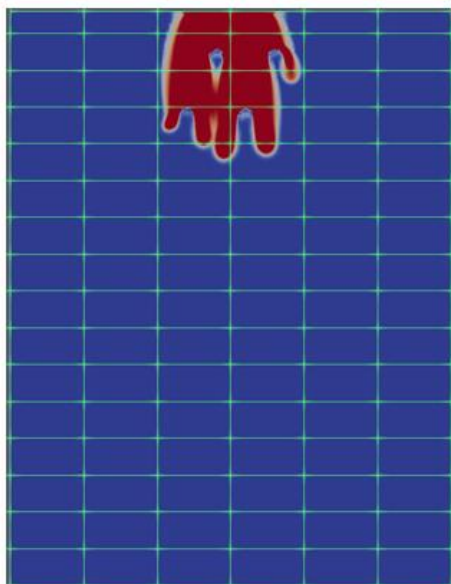
**Table 21: Lunghezza massima inlet-Piano libero**

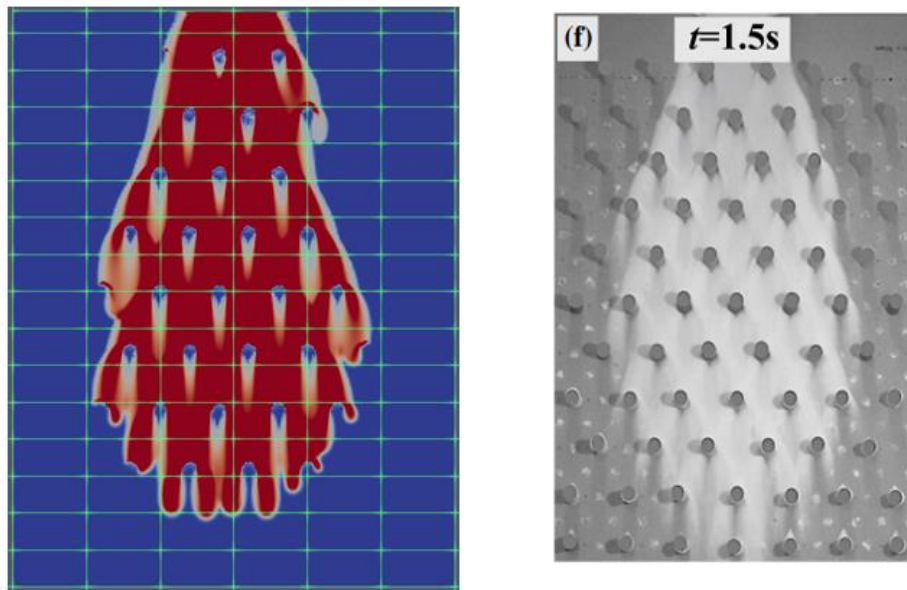




### 5.2.2. Piano con ostacoli inlet [ $S=80$ mm]-Reologia Pouliquen

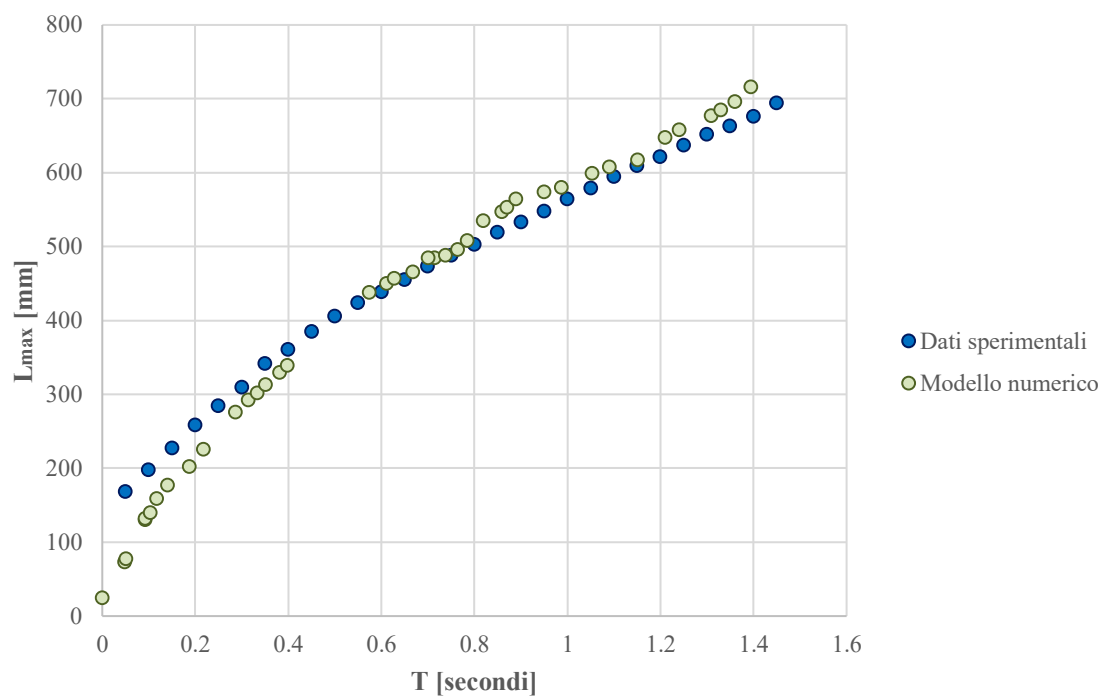
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui é stato fotografato il flusso.



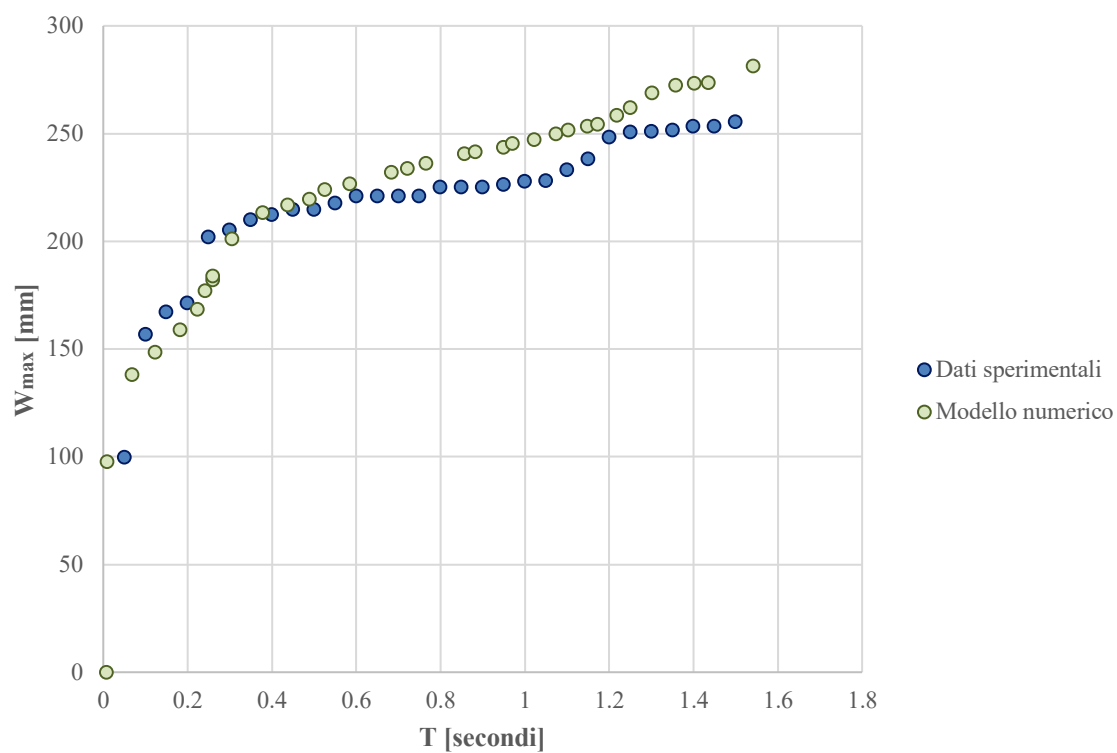


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno

**Table 23: Lunghezza massima inlet-S=80 mm**

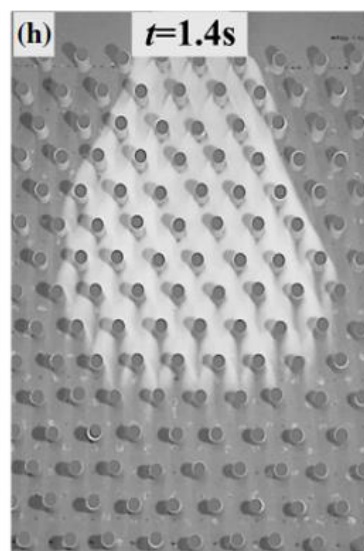
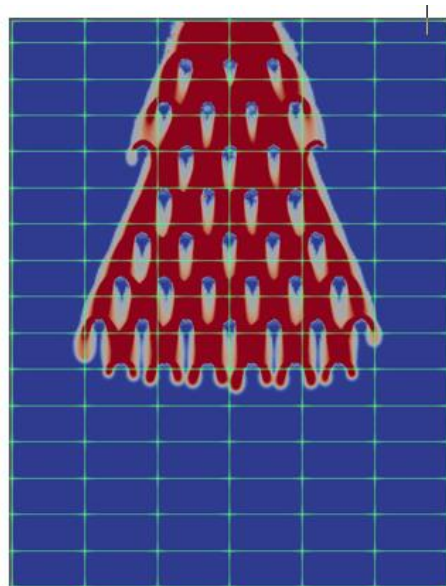
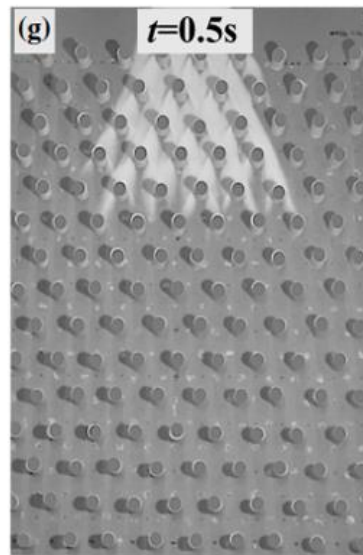
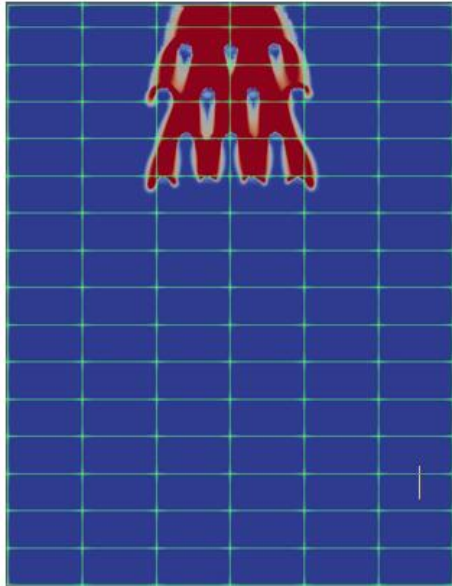


**Table 24: Larghezza massima inlet-S=80 mm**

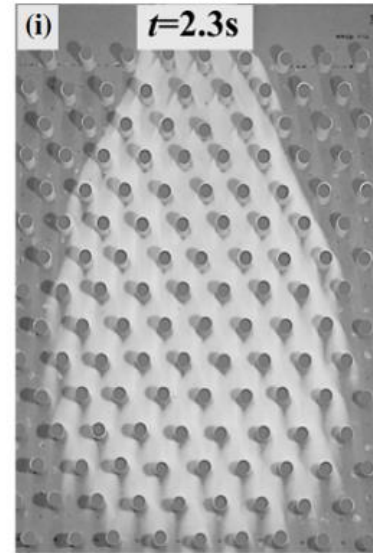
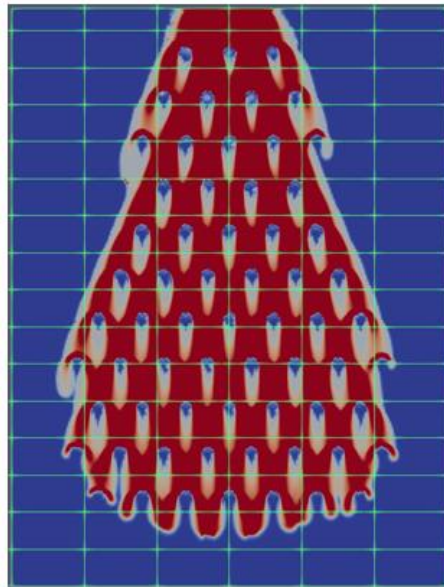


### 5.2.3. Piano con ostacoli inlet[S=60 mm]-Pouliquen

Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui è stato fotografato il flusso. I parametri inseriti all'interno del file “*data.txt*” sono riportati nella tabella seguente.







Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 25: Lunghezza massima inlet-Pouliquen [S=60 mm]**

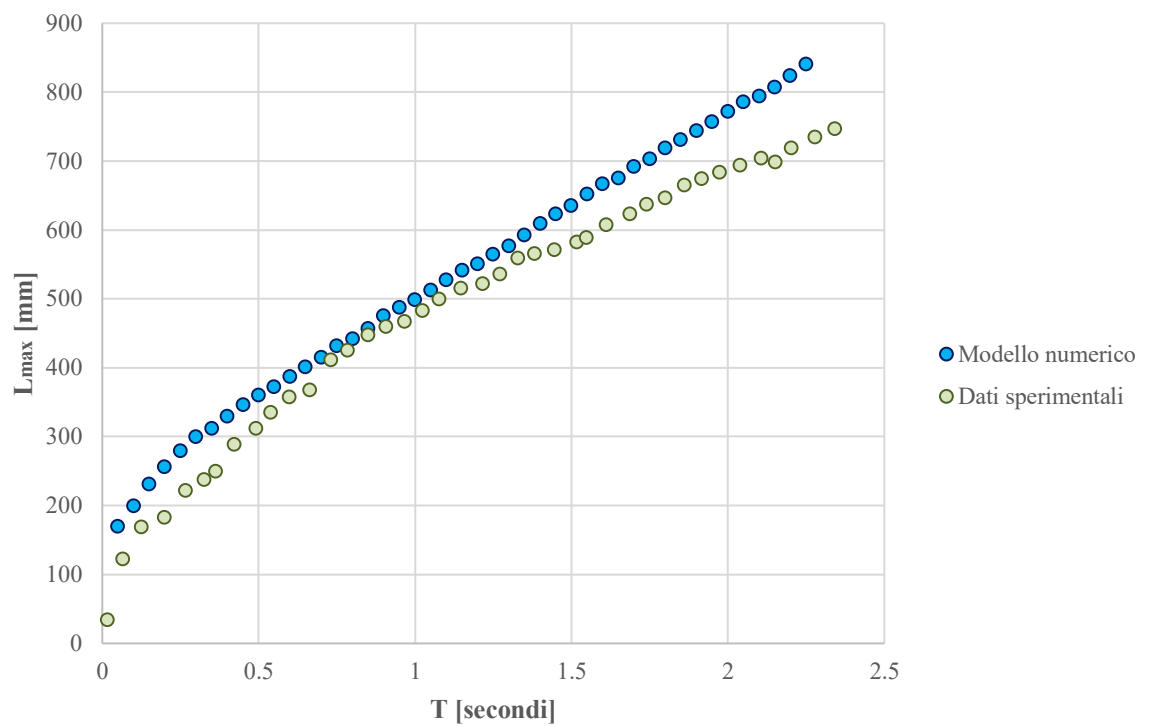
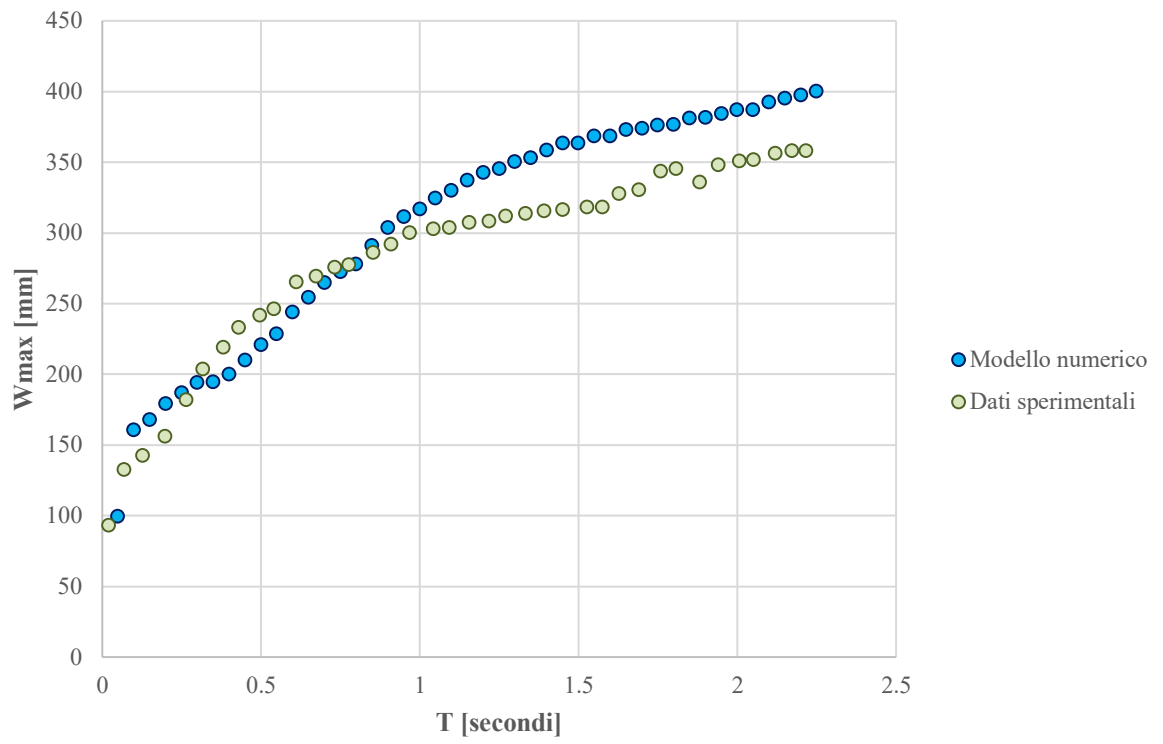
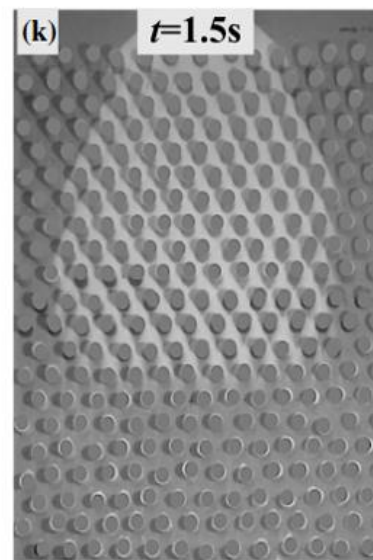
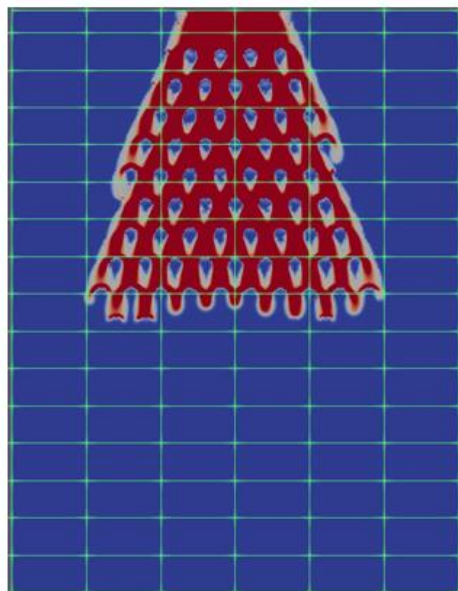
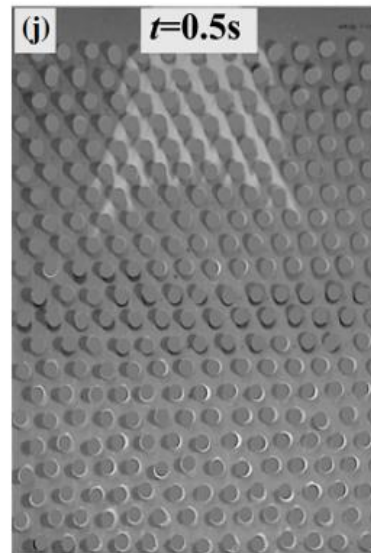
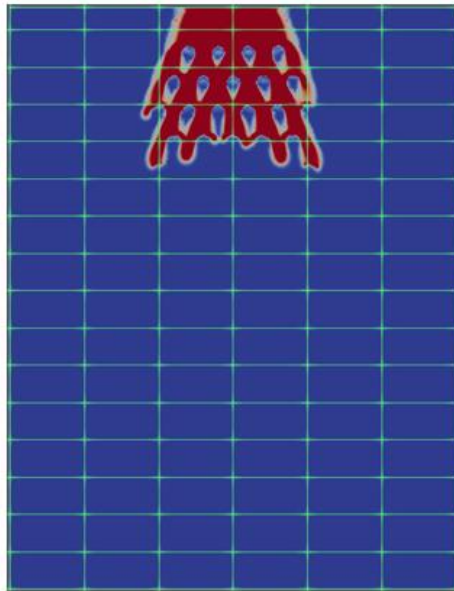


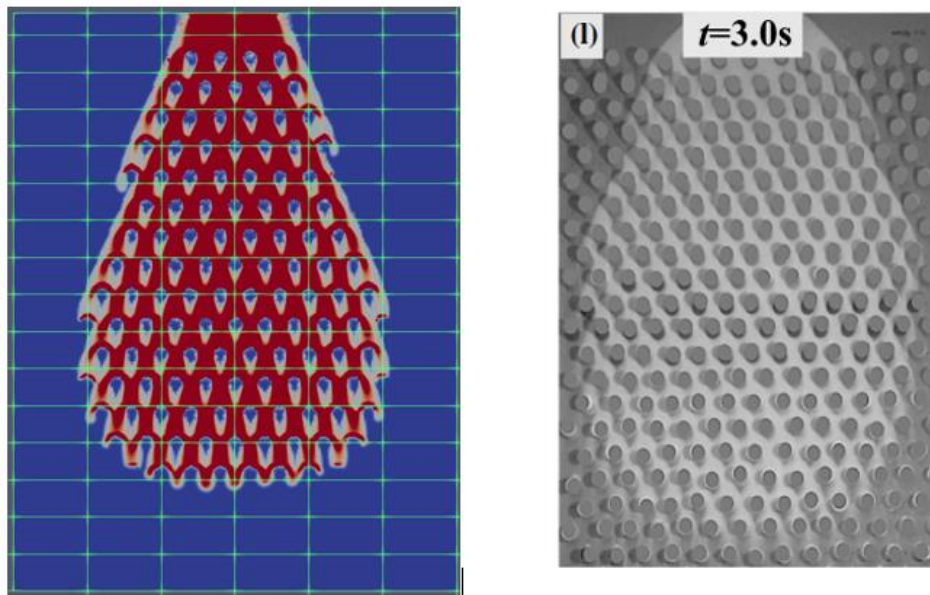
Table 26: Larghezza massima inlet-Pouliquen [S=60 mm]



#### 5.2.4. Piano con ostacoli inlet [S=40 mm]-Pouliquen

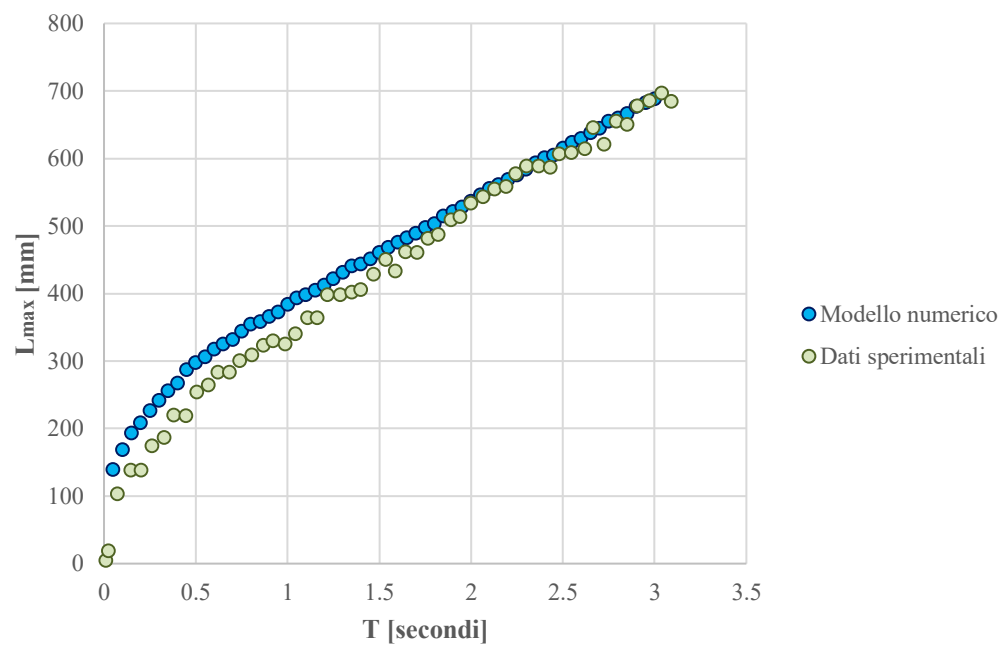
Si riportano i risultati riferiti agli stessi Time-Step con cui é stato fotografato il flusso.



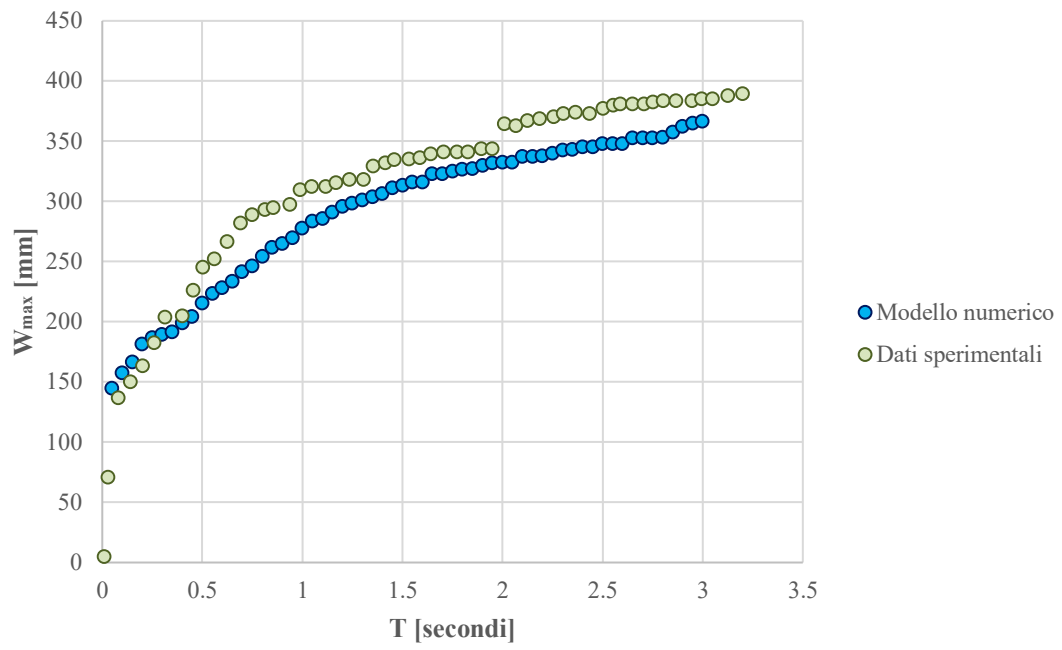


Le misure di  $L_{max}$  e  $W_{max}$  in ogni istante di tempo per il modello numerico e per la prova in laboratorio sono state inserite in un grafico Excel per permettere un confronto più quantitativo del fenomeno.

**Table 27: Lunghezza massima inlet-Pouliquen [S=40 mm]**



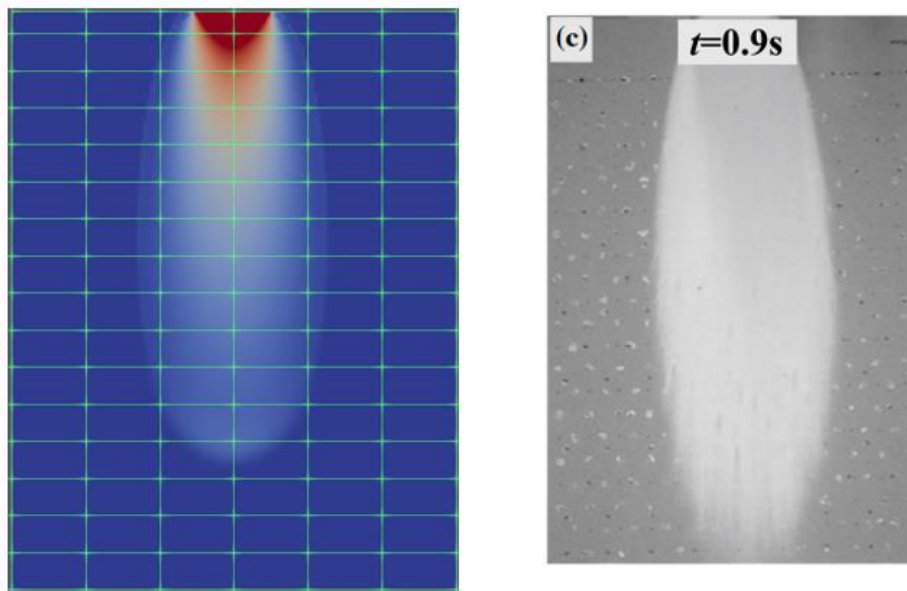
**Table 28: Larghezza massima inlet-Pouliquen [S=40 mm]**



#### 5.2.5. Prova della non corrispondenza con le reologie classiche

Dalle prove effettuate con la nuova geometria mostrano la validità della reologia  $\mu(I)$  come si era già intuito nel capitolo precedente. Questa volta risulta evidente che il fenomeno è stato riprodotto nella maniera corretta, sia tramite il confronto visivo che tramite i dati sperimentali.

Come riprova che il problema è sia reologico che geometrico, sono state svolte delle ulteriori analisi utilizzando le condizioni di inlet del capitolo 5 con le reologie Attritiva e Voellmy calibrate come nel Capitolo 3. Risulta evidente dal confronto che i risultati tornano ad essere poco simili.



**Figura 36: Reologia attritiva con condizioni di inlet**

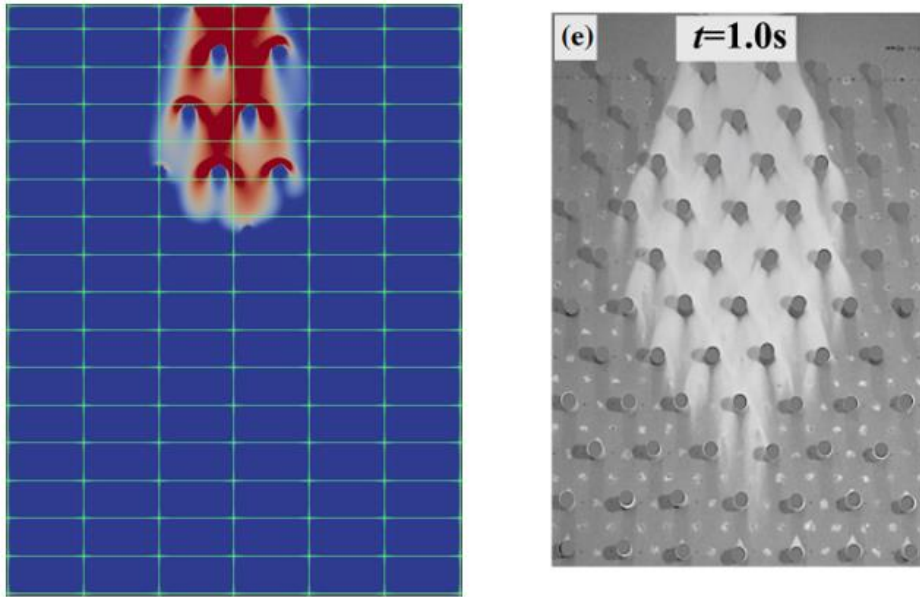


Figura 37:reologia Voellmy con condizioni di inlet

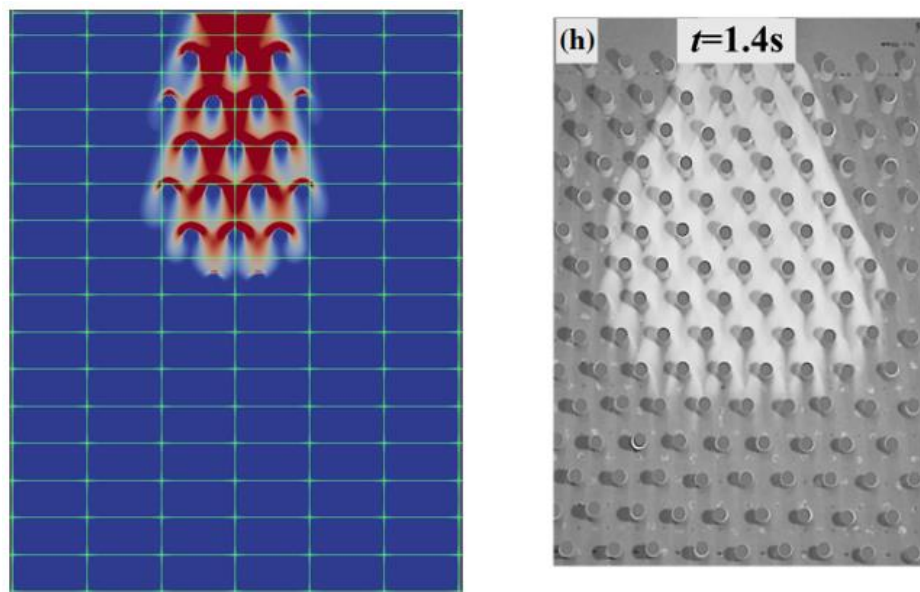


Figura 38:reologia Voellmy con condizioni di inlet

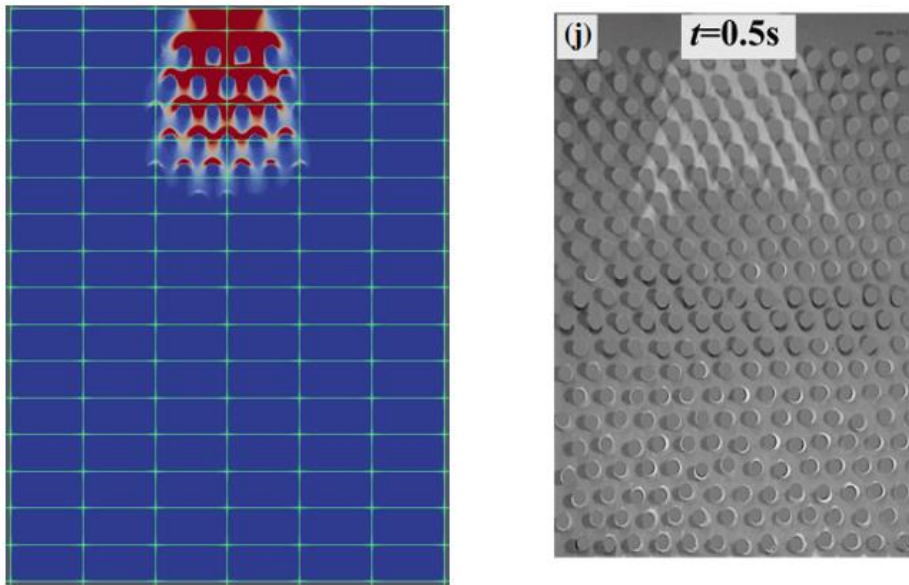


Figura 39: reologia attritiva con condizioni di inlet



## 6. LEGGE ANALITICA PROPOSTA DAGLI AUTORI

### 6.1. Descrizione e base teorica

Nella parte finale del paper, gli autori hanno fatto alcune considerazioni nei confronti dei risultati sperimentali registrati in laboratorio. Riprendendo quanto detto nel Cap.2, l'area del flusso granulare  $A = L_{max} * W_{max}$  indipendentemente dalle condizioni di partenza (angolo del piano inclinato, altezza del foro di uscita) segue una legge lineare nel tempo, che ricorda delle condizioni di flusso stazionario.

Sono molti i ricercatori che si sono interessati ai flussi stazionari su piani inclinati e, sulla base delle conoscenze pregresse, gli autori hanno proposto una legge analitica calibrata sui risultati sperimentali ottenuti che permettesse, in assenza di un modello numerico, di predire il comportamento del flusso con particolare attenzione al tasso di crescita areale.

In particolare, si fa riferimento al paper di Pouliquen (già citato nel capitolo sulle reologie) in cui si effettuano degli esperimenti su piani inclinati e confinati, con diverse configurazioni per quanto riguarda il materiale rappresentativo del flusso e la scabrezza del piano di scorrimento. L'esperimento ha portato a definire la reologia  $\mu(I)$  che viene esplicitata da un fattore di attrito dinamico di seguito riportato.

$$\mu(u, h) = \tan\theta_1 + \frac{(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)}{\frac{\beta h}{LFr} + 1} \quad (3)$$

Essendo il canale nella prova confinato, è possibile considerare un'unica componente di velocità  $u_f$  che è quella diretta nella linea di massima pendenza del piano e che

viene posta uguale a quella che si registra a monte del fronte di propagazione  $u_0$ . In questa zona inoltre, si registra anche uno spessore del flusso sempre costante e pari a  $h_0$ . In questa zona in cui sono valide le condizioni di stazionarietà, le forze di gravità possono essere uguagliate a quelle di attrito e il sistema di equazioni differenziali si riduce ad un sistema di equazioni algebriche.

$$\mu_b(h_0; Fr_0) = \tan\theta \quad (5)$$

Dove  $Fr_0$  è il numero di Froude calcolato per  $u_0$  e  $h_0$ . Utilizzando la (3) e inserendola all'interno della (5) è possibile ottenere una correlazione fra la velocità di propagazione  $u_f$  e spessore  $h_0$ .

$$u_f = u_0 = \frac{\beta \sqrt{g \cos\theta}}{L\gamma} h_0^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

dove

$$\gamma = \frac{\mu_2 - \tan\theta}{\tan\theta - \mu_1}$$

Il collegamento fra Pouliquen e il paper di riferimento passa attraverso la definizione di  $\dot{A}$ , ovvero la variazione della misura areale nel tempo. Mentre nell'esperimento di Einav questo termine coinvolge il prodotto fra  $L_{max}$  e  $W_{max}$ , e quindi una misura diretta della forma approssimata del flusso, in Pouliquen il canale di scorrimento è confinato, dunque sarà il prodotto fra la larghezza fissa del canale  $W$  e la velocità del flusso  $u_f$ . Da questo, si può definire il flusso volumetrico  $Q_0 = h_0 W u_f$ .

Questo valore viene poi uguagliato ad un'espressione ricavata da Faug[12] che ha valutato il flusso volumetrico di un rilascio di sfere di vetro da un'apertura di dimensioni  $H$ [altezza] x  $W$  [larghezza] su un piano inclinato liscio.

$$Q_0 = \alpha \sqrt{g H \sin \theta} H W \quad (7)$$

Considerano la  $u_f$  dall'equazione (6) e uguagliando (7) alla portata volumetrica definita per Pouliquen, si ottiene

$$\frac{h}{d} = \left( \frac{\alpha \gamma L \sqrt{\tan \theta}}{\beta d} \right)^{\frac{2}{5}} \left( \frac{H}{d} \right)^{\frac{3}{5}}$$

Sostituendo quest'ultima nella (6) e poi nella  $\dot{A} = u_0 W$  si ottiene

$$\frac{\dot{A}}{W \sqrt{g d}} = C(\theta) \left( \frac{H}{d} \right)^{\frac{9}{10}}$$

Dove

$$C(\theta) = \sqrt{\cos \theta} \left( \frac{\beta d}{L \gamma} \right)^{\frac{2}{5}} (\alpha \sqrt{\tan \theta})^{\frac{3}{5}}$$

In questo modo si é trovata una relazione che collega la variazione di  $A$  nel tempo con i parametri della reologia Pouliquen, inseriti all'interno del parametro  $C(\theta)$ , per un flusso stazionario su piano liscio. É interessante notare che la dipendenza 9/10 ricorda molto da vicino l'andamento lineare che é stato registrato negli esperimenti di Einav, Luong e Baker: questo permette di intuire che, nonostante i dettagli del flusso non rientrino nell'ambito dei flussi stazionari, le loro caratteristiche principali possono essere descritte utilizzando una trattazione che invece lo é.

Nella figura 40 si può apprezzare la corrispondenza fra i dati sperimentali (valori puntuali) e la legge prima ricavata. Le la pendenza delle linee rappresentative di  $C(\theta)$  sono state ottenute tramite una procedura di interpolazione ai minimi quadrati

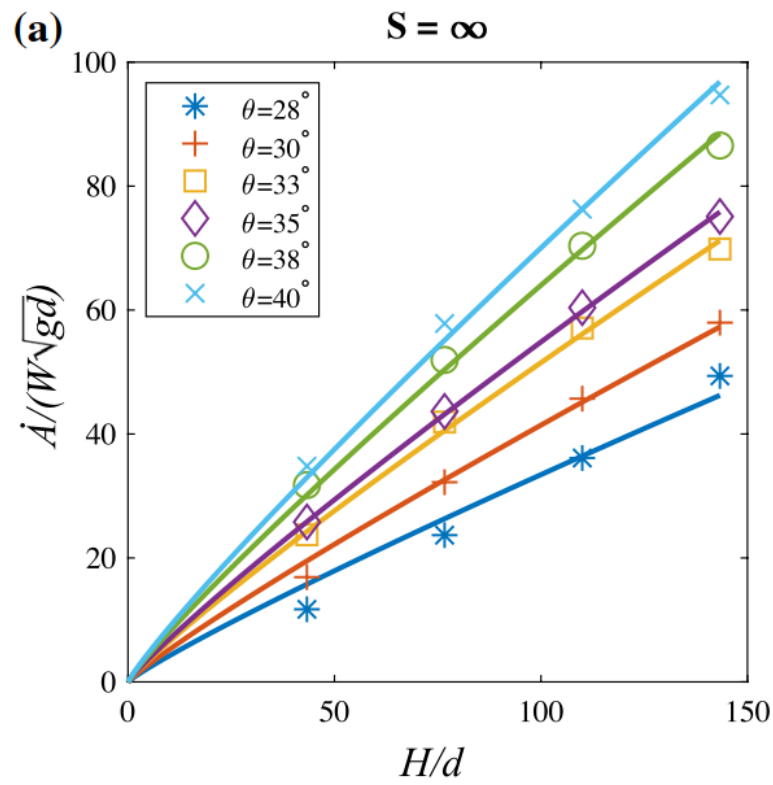


Figura 40: Corrispondenza dati sperimentali vs relazione analitica [ $S=\infty$ ]

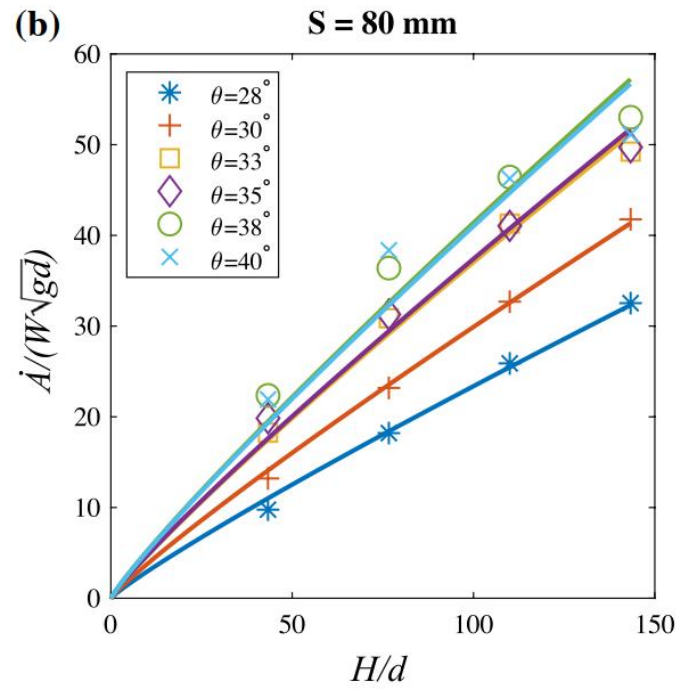


Figura 41: Corrispondenza dati di Einav vs legge analitica [S=80 mm]

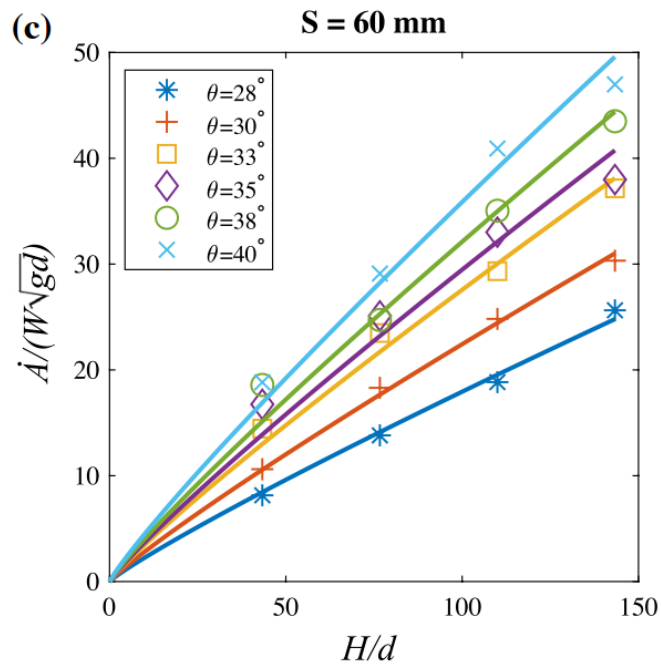


Figura 42: Corrispondenza dati Einav vs relazione analitica [S=60 mm]

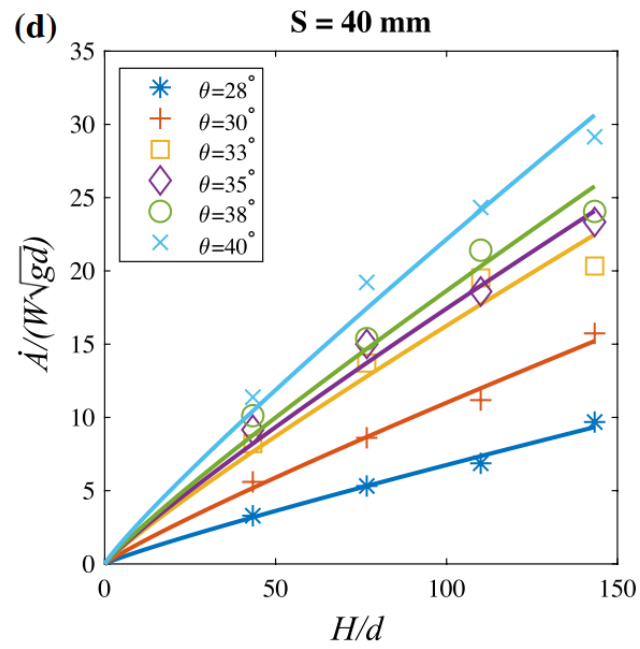


Figura 43: Corrispondenza dati Einav vs relazione analitica

Nella Fig.43 invece si possono trovare i valori di  $C(\theta)$  a seconda dell'angolo di inclinazione del piano. Anche in questo caso, i valori puntuali sono quelli estrapolati dalle figure precedenti mentre le linee solide rappresentano l'espressione analitica proposta dagli autori, che è stata ricavata calibrando i parametri inseriti al suo interno rappresentativi della legge Pouliquen  $\alpha, \beta, L, \theta_1$  e  $\theta_2$ .

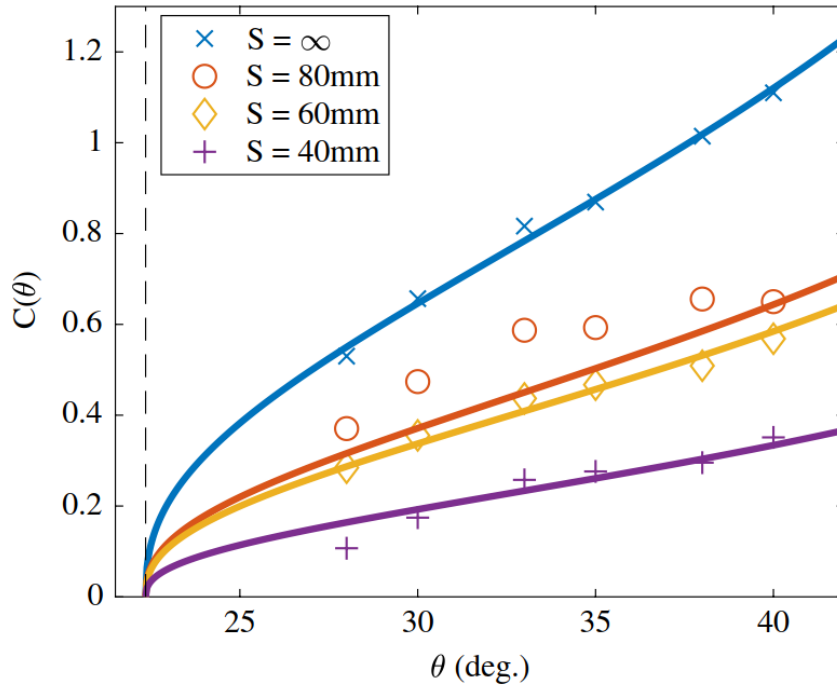


Figura 44: Calibrazione parametro C sui dati di Einav

La procedura di calibrazione si svolge seguendo i passi seguenti:

- $\alpha = 0.72$  e  $\beta = 0.15$  vengono fissati in partenza in accordo con quanto detto da Faug e Pouliquen nei rispettivi paper
- I parametri restanti vengono calibrati sulla base dei dati sperimentali utilizzando un approccio ai minimi quadrati. I valori trovati sono  $\theta_1 = 22.3$  e  $\theta_2 = 57.7$  e  $L=0.025d$  per la configurazione di piano libero.

Successivamente gli autori hanno proposto per i piani alberati di fissare gli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e modificare solo il parametro  $L$ , che verrà quindi considerato unico parametro descrittivo della variazione di  $\dot{A}$  tra una configurazione e l'altra e quindi anche dell'espansione del flusso.

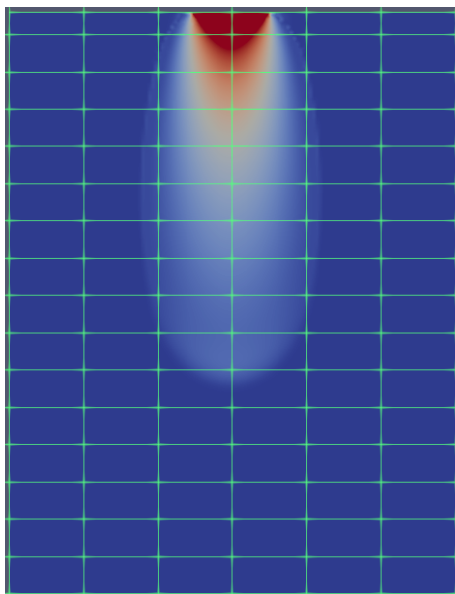
- $L=0.1d$  per  $S=80$  mm
- $L=0.13d$  per  $S=60$  mm
- $L=0.53d$  per  $S=40$  mm

## 6.2. Considerazione critica sul funzionamento della legge

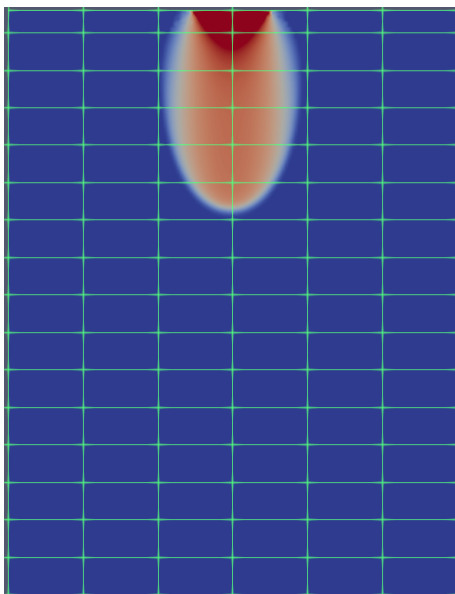
La legge analitica proposta dagli autori ha lo scopo di cogliere alcuni comportamenti macroscopici del flusso, in maniera tale da poter effettuare una valutazione approssimativa delle sue caratteristiche. Il problema é che la teoria di flusso stazionario da cui hanno preso spunto é valida per flussi confinati e alcune delle ipotesi fondamentali a cui si fa fede non sono trasferibili all'esperimento portato avanti da Einav, Luong e Baker.

Il problema principale sta nell'assunzione di uno spessore del flusso  $h_0$  costante in condizioni stazionarie: sebbene questa sia una evidenza certificata nel caso di flussi confinati nel nostro caso é stato verificato tramite RASH3D che variando il parametro  $L$  come suggerito dagli autori, il rispetto della condizione di conservazione della massa non avviene tramite una maggiore espansione del flusso ma tramite un aumento del termine  $h_0$ .

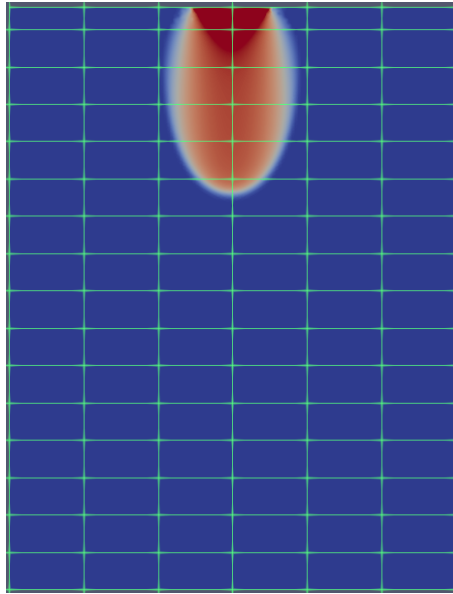




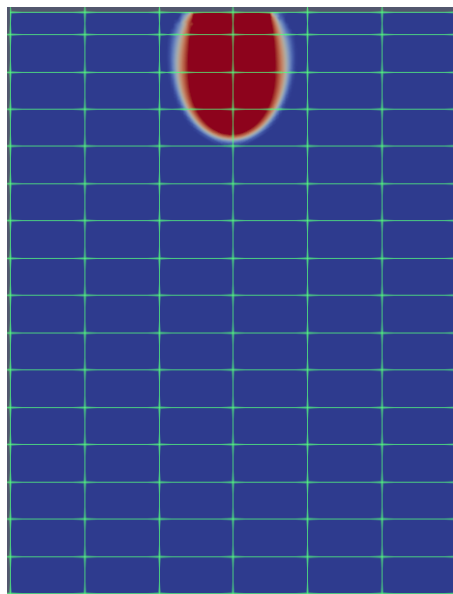
**Figura 45: Prova per  $L=0.025d$  [ $t=0.5$  sec]**



**Figura 46: Prova con  $L=0.1d$  [ $t=0.5$  sec]**



**Figura 47; Prova con  $L=0.13d$  [ $t=0.5$  sec]**



**Figura 48: Prova con  $L=0.53d$  [ $t=0.5$  sec]**

Questo rende evidente l'inutilità della relazione nella descrizione, seppur qualitativa, della morfologia del flusso perché la velocità di variazione di  $A$  nel tempo non è dovuta al fenomeno che gli autori avevano preventivato.

## 7. CONCLUSIONI

L'obiettivo principale del lavoro di tesi è stato quello di riprodurre tramite un modello numerico una serie di esperimenti di laboratorio svolti per predire il comportamento di un flusso granulare in presenza di 3 configurazioni diverse di ostacoli, che differiscono in termini di spaziatura. Le prove sono state svolte per predire l'efficacia della vegetazione nella dissipazione di un fenomeno franoso di media intensità, come alternativa alla realizzazione di opere rigide.

Nel Cap.1 sono state fornite delle informazioni generali sui flussi granulari, facendo riferimento anche ad altri paper in cui sono stati studiati gli effetti della presenza di ostacoli su un piano inclinato.

Nel Cap.2 viene introdotta la prova, a partire dalla descrizione dell'apparato sperimentale e delle sue diverse configurazioni: ci sono diverse condizioni di ingresso del flusso, diverse angolazioni del piano inclinato e soprattutto 4 diverse configurazioni di piano, la prima in assenza di ostacoli mentre le restanti caratterizzate da dei pattern esagonali di ostacoli con spaziatura rispettivamente pari a  $S=80$  mm, 60 mm e 40 mm. Sono inoltre riportati i dati descrittivi della geometria del flusso, che si immagina inscritto in un rettangolo di dimensioni  $L_{max}$  e  $W_{max}$ , e dell'area che occupa il flusso stesso istante per istante. Proprio su quest'ultima misura vengono fatte alcune considerazioni in cui si trovano delle similitudini fra il flusso in esame e quelli stazionari esaminati da altri ricercatori.

Il Cap.3 invece tratta in maniera estensiva le leggi che regolano il movimento del flusso nel software RASH3D: si è iniziato con un richiamo di Idraulica sulle leggi di conservazione della massa e della quantità di moto, sono state ricavate le "Shallow Water Equation" e sono state descritte in maniera approfondita le reologie, con particolare attenzione a quella proposta da Pouliquen per i flussi stazionari, che si esplica con un coefficiente di attrito variabile a seconda del valore di velocità che il flusso assume su ciascun punto del piano. Si è parlato inoltre di come compilare Matlab per definire i file di input di RASH3D. Una volta lanciato il programma, il risultato potrà essere visualizzato tramite un tool chiamato

Paraview, che permette di effettuare un confronto visivo tra i risultati sperimentali e quelli del modello numerico.

Nei Cap.4 e 5 si spiegano i passaggi che sono stati utilizzati nella riproduzione del fenomeno: la scelta di una geometria iniziale per simulare il rilascio del materiale sul piano inclinato non ha portato ai risultati sperati, pur evidenziando la reologia che potrebbe essere più adeguata per descrivere il flusso. Si è quindi proceduto ad un cambio di geometria in cui il materiale fuoriesce a velocità costante dal serbatoio e che questa volta permette di ottenere dei risultati confrontabili, sia dal punto di vista morfologico e sia dal punto di vista delle dimensioni del flusso. In questa fase quindi sono stati evidenziati i valori dei parametri reologici ottenuti a seguito del processo di “back-analysis”

Nell'ultimo capitolo si è discusso della legge analitica proposta dagli autori e calibrata sulla base dei risultati sperimentali ottenuti in laboratorio: il flusso ha delle caratteristiche che si riconducono a dei fenomeni stazionari e quindi gli autori, sfruttando delle ipotesi semplificative di due paper di riferimento, si sono ricondotti a una legge che potesse stimare il processo di espansione del flusso a seconda della spaziatura degli ostacoli. La validità di questa legge tuttavia è stata confutata dal modello numerico da noi realizzato che, a differenza di quanto ipotizzato, evidenzia il rispetto della conservazione della massa non tramite un processo di espansione ma tramite un incremento dello spessore del flusso, che non è quindi costante e invalida una delle ipotesi di partenza.

## 8. ALLEGATI

### 8.1. “Parameter.mat”

```
clear all;
clc;
%
% Parameters for mesh and geometry creation
%

% domain size;
Dy=0.2;
Dx1=0.6;
Dy1=0.78
% mesh size on borders (= scaling factor)
meshL=0.005;
% mesh size around trees
meshS=0.003;
% tree spacing
s=0.04;
% tree diameter
dtree=0.02;
% tree height
htree=0.05;
% gate position
ygate=0.78;
% level of fluid inside reservior/tank
htank=0;

% number of tree rows
ny=floor(Dy1/s)-1;

% prototypes for tree locations (grid)
row=cell(1,2);
row{1}=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14]*s;
row{2}=[0.5 1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5 7.5 8.5 9.5
10.5 11.5 12.5 13.5 14.5]*s;

% number of tree rows
ny=floor(Dy1/s)-1;
```

```

% tree positions (px,py)
index=0;
for i=1:ny
    yhere=i*s;
    xx=rem(i,2)+1;
    nxhere=length(row{xx});
    for j=1:nxhere
        index=index+1;
        px(index)=row{xx}(j);
        py(index)=yhere;
    end
end
% total number of trees
ntrees=length(px);

save('./parameters.mat');

```

## 8.2. Create Geometry

```

clear all;
clc;

%
% This script creates the input file that msh will
% use to create the mesh
%

load('parameters.mat');

geoFileName='./example.geo';

%these points are located between trees, and are
% necessary to reduce the grid spacing there
ghost=cell(1,2);
ghost{1}=[0.5 1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5 7.5 8.5 9.5
10.5 11.5 12.5 13.5 14.5]*s;
ghost{2}=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14]*s;
index=0;
for i=1:ny
    yhere=i*s;
    xx=rem(i,2)+1;
    nxhere=length(ghost{xx});

```

```

        for j=1:nxhere
            index=index+1;
            gx(index)=ghost{xx}(j);
            gy(index)=yhere;
        end
    end
end
nghosts=length(gx);

% creation of .geo file
printIndex=0;
fileId=fopen(geoFileName,'w');
fprintf(fileId,'Point(1) = {0, 0, 0,
%s};\n',meshL);
fprintf(fileId,'Point(2) = {%f, 0, 0,
%s};\n',Dx1,meshL);
fprintf(fileId,'Point(3) = {%f, %f, 0,
%s};\n',Dx1,Dy1,meshL);
fprintf(fileId,'Point(4) = {%f, %f, 0,
%s};\n',(Dx1/2)+(Dx/2),Dy1,meshL);
fprintf(fileId,'Point(5) = {%f,%f, 0,
%s};\n',(Dx1/2)+(Dx/2),Dy+Dy1,meshL);
fprintf(fileId,'Point(6) = {%f, %f, 0,
%s};\n',(Dx1/2)-(Dx/2),Dy+Dy1,meshL);
fprintf(fileId,'Point(7) = {%f, %f, 0,
%s};\n',(Dx1/2)-(Dx/2),Dy1,meshL);
fprintf(fileId,'Point(8) = {0, %f, 0,
%s};\n',Dy1,meshL);
fprintf(fileId,'Line(1) = {1, 2};\n');
fprintf(fileId,'Line(2) = {2, 3};\n');
fprintf(fileId,'Line(3) = {3, 4};\n');
fprintf(fileId,'Line(4) = {4, 5};\n');
fprintf(fileId,'Line(5) = {5, 6};\n');
fprintf(fileId,'Line(6) = {6, 7};\n');
fprintf(fileId,'Line(7) = {7, 8};\n');
fprintf(fileId,'Line(8) = {8, 1};\n');
printIndex=8;
fprintf(fileId,'Curve Loop(1) = {1, 2, 3, 4 ,5, 6,
7, 8};\n');
fprintf(fileId,'Plane Surface(1) = {1};\n');
for k=1:ntrees
    fprintf(fileId,'Point(%i) = {%f, %f, 0,
%d};\n',k+printIndex,px(k),py(k),meshS);
    fprintf(fileId,'Point{%i} In
Surface{1};\n',k+printIndex);

```

```

end
printIndex=printIndex+ntrees;
for k=1:nghosts
    fprintf(fileId,'Point(%i) = {%f, %f, 0,
%d};\n',k+printIndex,gx(k),gy(k),meshL);
    fprintf(fileId,'Point{%i} In
Surface{1};\n',k+printIndex);
end

fclose(fileId);

```

### 8.3. Create Input

```

clear all;
clc;

%
% this script takes a mesh created by MSH, adds
% the z and h fields, and
% prepares it for RASH
%

load('parameters.mat');

meshFileName='./example';

% number of points on borders
nrx=round(Dx/meshL+1)+(Dx1/meshL+1);
nry=(Dy/meshL+1)+(Dy1/meshL+1);
% total number of points on a regular grid based
on borders
i_npoints=nrx*nry;

% create z and h fields based on regular grid
i_x=zeros(i_npoints,1);
i_y=zeros(i_npoints,1);

```



```

i_z=zeros(i_npoints,1);
i_h=zeros(i_npoints,1);
index=0;
for j=0:nry-1
    for i=0:nrx-1
        index=index+1;
        i_x(index)=i*meshL;
        i_y(index)=j*meshL;
        % h is based on location of
reservior/tank/trigger area
        if (i_y(index)>ygate)
            i_h(index)=htank;
        else
            i_h(index)=0.0;
        end
        % z is based on channel inclination (trees
will be added later)
        i_z(index)=i_y(index)*tan(30/180*pi);
    end
end

% create interpolators for z and h
interp_z =
scatteredInterpolant(i_x,i_y,i_z,'natural','none')
;
interp_h =
scatteredInterpolant(i_x,i_y,i_h,'natural','none')
;

%% refined mesh - read file msh from GMSH
fid_gmsh = fopen(meshFileName,'rt');
% points skip header
r_header=fgetl(fid_gmsh);
% total number of points
r_npoints=sscanf(fgetl(fid_gmsh),'%i');
% read points
r_x=zeros(r_npoints,1);
r_y=zeros(r_npoints,1);
for i=1:r_npoints
    new_line=sscanf(fgetl(fid_gmsh),'%e');
    r_x(i)=new_line(2);
    r_y(i)=new_line(3);
end
% skip header to elements
r_header=fgetl(fid_gmsh);

```

```

r_header=fgetl(fid_gmsh);
% total number of elements
r_nele=sscanf(fgetl(fid_gmsh), '%i');
% must remove all elements that are not triangles
n_non3=0;
r_elements=zeros(r_nele,3);
% read (only triangular) elements
for i=1:r_nele
    new_line=sscanf(fgetl(fid_gmsh), '%e');
    if new_line(5)<3
        n_non3=n_non3+1;
        % skip non-triangular elements
        fprintf(sprintf('Skipping element %i,
because n=%i\n',i,new_line(5)));
    else
        r_elements(i-n_non3,1)=new_line(6);
        r_elements(i-n_non3,2)=new_line(7);
        r_elements(i-n_non3,3)=new_line(8);
    end
end
% number of triangular elements
r_nele=r_nele-n_non3;
r_elements=r_elements(1:r_nele,:);

% create values of z and h by interpolation
r_z=interp_z(r_x,r_y);
r_h=interp_h(r_x,r_y);

%% add trees
for k=1:ntrees
    tx=px(k);
    ty=py(k);
    for i=1:r_npoints
        xhere=r_x(i);
        yhere=r_y(i);
        dist2=(xhere-tx)^2+(yhere-ty)^2;
        if (dist2<dtree*dtree/4)
            r_z(i)=r_z(i)+htree;
        end
    end
end

%% write files for RASH
% grid file (ambda)

```

```

fid_maill2_new = fopen('./maill2.amdba','w');
fprintf(fid_maill2_new,'%i %i %i
%i\n',r_npoints,r_nele,1,1);
for i=1:r_npoints
    if((r_x(i)==(Dx1/2)+(Dx/2) || r_x(i)==(Dx1/2)-(
(Dx/2) || r_y(i)==Dy1 || r_y(i)==Dy+Dy1 ) )
        fprintf(fid_maill2_new,'%i %f %f
%i\n',i,(r_x(i))/meshL,(r_y(i))/meshL,2);
    else
        fprintf(fid_maill2_new,'%i %f %f
%i\n',i,(r_x(i))/meshL,(r_y(i))/meshL,0);
    end
end
for i=1:r_nele
    fprintf(fid_maill2_new,'%i %i %i %i
%i\n',i,r_elements(i,1),r_elements(i,2),r_elements
(i,3),1);
end
% column files for z, h and e
fid_z2_new = fopen('./z2.bb','w');
fid_h2_new = fopen('./h2.bb','w');
fid_e2_new = fopen('./e2.bb','w');
for i=1:r_npoints
    fprintf(fid_z2_new,'%f\n',r_z(i));
    fprintf(fid_h2_new,'%f\n',r_h(i));
    fprintf(fid_e2_new,'0 0 0\n');
end
% xyzh2 file for visualization
fid_xyzh_new = fopen('./xyzh2.txt','w');
fprintf(fid_xyzh_new,'X Y Z H \n');
for i=1:r_npoints
    fprintf(fid_xyzh_new,'%f %f %f
%f\n',r_x(i),r_y(i),r_z(i),r_h(i));
end

```

## 9. BIBLIOGRAFIA

1. Yoell Forterre e Oliver Pouliquen –Seminaire Poincare’ “Granular Flows” (2009)
2. Luong, Baker, Einav – “Spread-out and slow-down of granular flows trough model forest” (2019)
3. Cui, X., Gray, J.M.N.T.: Gravity-driven granular free-surface flow around a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 720, 314–337 (2013)
4. Benito, J., Bertho, Y., Ippolito, I., Gondret, P.: Stability of a granular layer on an inclined “fakir plane”. *EPL* 100, 34004 (2012)
5. Ng, C.W., Choi, C.E., Song, D., Kwan, J.H., Koo, R.C., Shiu, H.Y., Ho, K.K.: Physical modeling of baffles influence on land-slide debris mobility. *Landslides* 12(1), 1–18 (2014)
6. Benito, J.G., Meglio, G., Ippolito, I., Re, M., Vidales, A.M.: Exit distribution function crossover in a Galton board. *Granul. Matter* 9(3–4), 159–168 (2007)
7. Dispense del Corso di Laurea in Ingegneria Matematica “Meccanica dei mezzi porosi” a.a. 2019/2020
8. J. M. N. T. Gray and A. N. Edwards “A depth-averaged  $\mu(I)$ -rheology for shallow granular free-surface flows” (2014)
9. Pouliquen, O.: On the shape of granular fronts down rough inclined planes. *Phys. Fluids* 11(7), 1956–1958 (1999)
10. O. Pouliquen ”Scaling laws in granular flows down rough inclined planes” (1999)
11. Jianbo Fei & Yuxin Jie & Debo Zhao & Bingyin Zhang : Simulation of natural shallow avalanches with the  $\mu(I)$  rheology
12. Thierry Faug: “Depth-averaged analytic solution for free-surface granular flows impacting rigid walls down inclines”
13. Pierre Jop, Yoel Forterre & Olivier Pouliquen: “A constitutive law for dense granular flows”

14. Faug, T., Childs, P., Wyburn, E., Einav, I.: Standing jumps in shallow granular flows down smooth inclines. *Phys. Fluids* 27, 73304 (2015)
15. To, K., Lai, P.Y., Pak, H.K.: Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. *Phys. Rev. Lett.* 86(1), 71–74 (2001)