

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

## **Stima preliminare del consumo di propellente per missioni verso Near-Earth Asteroids**



**Relatore**

*prof. Lorenzo Casalino*

**Candidato**

*Montedoro Gianmarco*

Luglio 2021

*A mamma,  
a Valeria  
e a Claudia.*

## Sommario

1	Abstract .....	7
2	Introduzione .....	8
2.1	Asteroidi .....	8
2.1.1	Near-Earth Asteroids .....	8
2.1.2	Missioni verso Near-Earth Asteroids .....	9
3	Premesse teoriche .....	12
3.1	Problema dei due corpi .....	12
3.2	Momento della quantità di moto specifico .....	13
3.3	Energia meccanica specifica .....	14
3.4	Traiettorie .....	14
3.5	Orbita ellittica .....	16
3.6	Velocità caratteristiche .....	18
3.6.1	Velocità circolare .....	18
3.7	Sistemi di riferimento .....	19
3.7.1	Sistema di riferimento eliocentrico .....	19
3.8	Determinazione dell'orbita: parametri orbitali .....	20
3.9	Manovre orbitali .....	21
3.9.1	Grandezze fondamentali .....	22
3.9.2	Considerazioni energetiche .....	23
3.9.3	Manovre orbitali a singolo impulso .....	24
3.9.4	Manovre con propulsione elettrica .....	31
4	Modello impulsivo puro .....	36
4.1	Introduzione .....	36
4.2	Variazione di perielio e afelio .....	36
4.2.1	Caso 1: afelio – perielio .....	37
4.2.2	Caso 2: perielio – afelio .....	38
4.3	Variazione combinata di apsi e inclinazione .....	39
4.3.1	Ripartizione imposta come input .....	40
4.3.2	Ripartizione proporzionale e costo minimo .....	41
4.4	Conclusioni .....	43
5	Applicazione del modello impulsivo per la stima del costo ottenuto con propulsione elettrica .....	44
5.1	Introduzione .....	44
5.2	Correzione sul $\Delta i$ : Edelbaum .....	45
5.2.1	Risultati con correzione di Edelbaum .....	48
5.3	Correzione sul $\Delta i$ : confronto tra 3 diversi $k$ .....	52

5.3.1	Confronto con soluzioni di riferimento .....	55
5.3.2	Correlazioni tra errori e parametri .....	58
5.4	Correzione sul $\Delta v$ .....	58
6	Conclusioni .....	63
7	Riferimenti .....	64
8	Ringraziamenti.....	65

## Indice delle figure

Figura 1: distribuzione degli asteroidi nella regione interna del Sistema Solare; .....	8
Figura 2: immagine dell'asteroide near-Earth Eros, fotografato dalla sonda NEAR .....	9
Figura 3: piano della missione NEAR .....	10
Figura 4: animazione della sonda Hayabusa .....	11
Figura 5: problema dei 2 corpi.....	12
Figura 6: Sezioni coniche .....	15
Figura 7:Ellisse .....	16
Figura 8: velocità circolare in funzione del raggio .....	19
Figura 9: sistema eliocentrico.....	19
Figura 10: piano dell'eclittica.....	20
Figura 11: parametri orbitali .....	20
Figura 12: schema delle velocità .....	23
Figura 13: innalzamento apoastro.....	25
Figura 14:innalzamento periastro .....	25
Figura 15: rotazione del piano orbitale .....	27
Figura 16: schema delle velocità radiale e tangenziale.....	27
Figura 17: sistema ascensione retta-declinazione .....	28
Figura 18: grafico efficienza-declinazione .....	29
Figura 19: manovre separate.....	30
Figura 20: manovra combinata.....	30
Figura 21: diagramma manovre combinate/separate .....	31
Figura 22: $\alpha$ in funzione di $\nu$ .....	33
Figura 23: schema della direzione della spinta .....	34

## Indice delle tabelle

Tabella 1: risultati cambio apside afelio-perielio .....	37
Tabella 2: risultati cambio apside perielio-afelio .....	38
Tabella 3: ripartizione sul $\Delta i$ imposta come input .....	40
Tabella 4: confronto tra ripartizioni proporzionali e costo minimo .....	42
Tabella 5: correzione basata su Edelbaum .....	48
Tabella 6: confronto tra correzioni.....	52
Tabella 7: confronto tra correzione finale e soluzioni di riferimento .....	55
Tabella 8: coefficienti di correlazione.....	58
Tabella 9: risultati finali .....	60

## 1 Abstract

Il seguente lavoro di tesi si propone di sviluppare un modello di calcolo rapido del consumo di propellente per missioni verso Near-Earth Asteroids (NEAs).

Nel caso reale, un calcolo di questo genere richiederebbe l'integrazione di equazioni differenziali, e pertanto tempi computazionali molto lunghi; in questo lavoro si è quindi provveduto a creare un modello "impulsivo" del calcolo dei costi di missione; nello specifico, il modello considera spinte impulsive piuttosto che continue nel tempo; in tal modo, il calcolo del  $\Delta v$  e del consumo di propellente risulta essere immediato.

Successivamente, si è provveduto ad applicare tale modello ad un set di asteroidi vicini alla Terra, in modo da confrontare i risultati ottenuti con quelli calcolati nelle ipotesi di spinta continua (più vicine al caso reale); il modello in questione ha chiaramente necessitato di numerose correzioni per potersi adattare al caso di riferimento, in modo da minimizzare il più possibile la differenza tra consumo di propellente calcolato, e consumo di propellente di riferimento.

In conclusione, si è quindi ottenuto un modello di calcolo rapido, dal punto di vista computazionale, dei costi di missione verso NEAs.

## 2 Introduzione

In questo antefatto verranno descritti quelli che saranno gli obiettivi delle missioni di cui parlerà questa tesi, ovvero gli asteroidi, e nello specifico i cosiddetti Near-Earth Asteroids, di particolare interesse in quanto appunto più accessibili; quindi, nell'introduzione vedremo una prima descrizione di tale tipologia di asteroidi, e dell'importanza delle missioni verso di essi.

### 2.1 Asteroidi

È definito asteroide un corpo celeste di piccole dimensioni simile, per composizione, ad un pianeta terrestre (inteso come pianeta composto perlopiù da roccia e metalli); gli asteroidi sono generalmente di forma non sferica, e con diametro inferiore al chilometro (anche se sono stati scoperti di recente degli asteroidi massicci nel Sistema Solare esterno);

Per quanto riguarda la loro origine, si ritiene che gli asteroidi siano residui del disco protoplanetario (luogo di formazione dei sistemi planetari), che durante la formazione del sistema non sono stati incorporati nei pianeti;

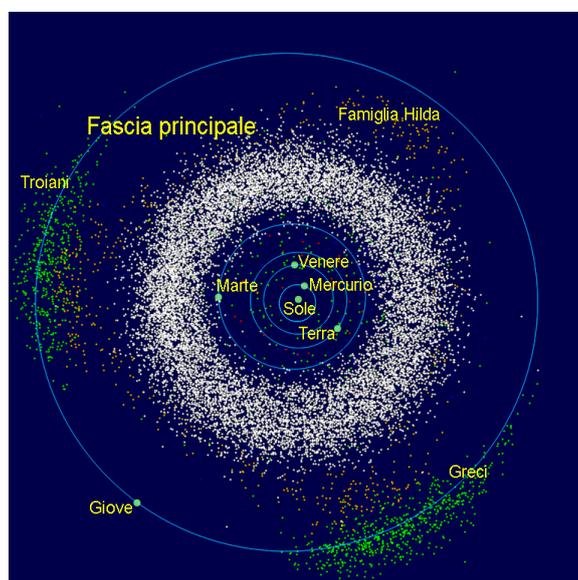


Figura 1: distribuzione degli asteroidi nella regione interna del Sistema Solare; risulta ben evidente la densità di asteroidi nella fascia principale

la maggior parte degli asteroidi del nostro sistema si trova nella fascia principale (regione di separazione tra le orbite di Marte e Giove), ma gli asteroidi di nostro interesse, in realtà, sono quelli vicini alla Terra, definiti appunto near-Earth Asteroids (abbreviato in NEAs).

#### 2.1.1 Near-Earth Asteroids

I NEAs sono generalmente definiti come asteroidi la cui orbita è vicina a quella della Terra; alcuni di essi in realtà costituiscono un pericolo, in quanto le loro orbite possono intersecare quella terrestre, ma l'interesse principale, che è anche l'oggetto di questo lavoro di tesi, è il fatto che essi sono i più accessibili dalle sonde.



Figura 2: immagine dell'asteroide near-Earth Eros, fotografato dalla sonda NEAR

Questi asteroidi possono sopravvivere nelle loro orbite solo per un massimo di 100 milioni di anni, in quanto prima o poi vengono eliminati per diversi motivi: decadimenti orbitali, collisioni con pianeti interni, oppure scaraventati fuori dal sistema solare per effetto fionda dopo il passaggio ravvicinato con un pianeta; a causa di questi fenomeni, appunto, i NEAs dovrebbero essere già tutti eliminati, ma vengono continuamente riforniti dagli oggetti provenienti dalla fascia di asteroidi, arrivati qui a causa delle interazioni gravitazionali con Giove. Altri NEAs invece, in particolare quelli con orbita molto eccentrica, erano probabilmente delle comete provenienti dalla fascia di Kuiper (deposito di comete oltre l'orbita di Nettuno), che hanno perso nel tempo le loro componenti volatili.

La classificazione che viene comunemente fatta per gli asteroidi near-Earth è:

- Asteroidi Aten: NEAs con semiasse maggiore inferiore rispetto a quello della Terra; nonostante ciò, la maggior parte di essi ha un afelio superiore a quello della Terra, quindi gli Aten non hanno tutti un'orbita interna a quella terrestre, ma anzi possono intersecarla;
- Asteroidi Apollo: asteroidi con semiasse maggiore superiore a quello della Terra, ma perielio inferiore; ciò vuol dire che tutti gli Apollo hanno un'orbita che interseca quella terrestre;
- Asteroidi Amor: asteroidi sia con raggio orbitale medio che con perielio superiori a quelli terrestri; di conseguenza sono NEAs con orbite che sfiorano esternamente quelle della Terra, senza intersecarli in alcun punto, ma al più intersecano l'orbita di Marte.

Per quanto riguarda il nostro studio, i casi di asteroidi che vedremo saranno distinti semplicemente dai valori di raggio dell'afelio  $R_a$  e di raggio del perielio  $R_p$ , e pertanto la suddivisione che andremo a fare sarà semplicemente tra asteroidi con orbite interne, intermedie (cioè intersecanti), o esterne all'orbita terrestre.

### 2.1.2 Missioni verso Near-Earth Asteroids

Fin dagli anni sessanta cominciò a diffondersi l'idea della possibilità di una eventuale esplorazione degli asteroidi, il cui studio sarebbe stato molto utile per la comprensione delle prime fasi della formazione dei pianeti; infatti, come accennato prima, gli asteroidi non sono altro che rimanenze del processo che ha portato alla formazione del nostro sistema solare e dei suoi pianeti, e pertanto il loro studio ravvicinato potrebbe consentirci di estrapolare importanti informazioni relative alla storia del nostro universo, magari attraverso lo studio delle loro proprietà chimiche e geologiche. Altro fattore di interesse, per i NEAs nello specifico,

è quello della difesa planetaria: molti asteroidi near-Earth posseggono un'orbita che interseca quella terrestre, e pertanto potrebbero rappresentare una reale minaccia per la Terra.

Nel seguito vedremo esempi di missioni verso NEAs condotte e portate a termine con successo.

#### 2.1.2.1 Near Earth Asteroid Rendezvous

La NEAR è stata una missione della NASA che ha visto il lancio di una sonda spaziale sviluppata per eseguire un rendezvous con un asteroide near-Earth, e condurre osservazioni prolungate; la sonda è stata lanciata il 17 febbraio 1996, ha sorvolato l'asteroide 253 Mathilde, per poi infine raggiungere l'obiettivo reale, ovvero l'asteroide 433 Eros; dopo un anno di osservazioni ravvicinate nell'orbita dell'asteroide, il 12 febbraio 2001 è stato eseguito con successo un atterraggio sulla superficie di Eros; la missione si è poi conclusa due settimane dopo.

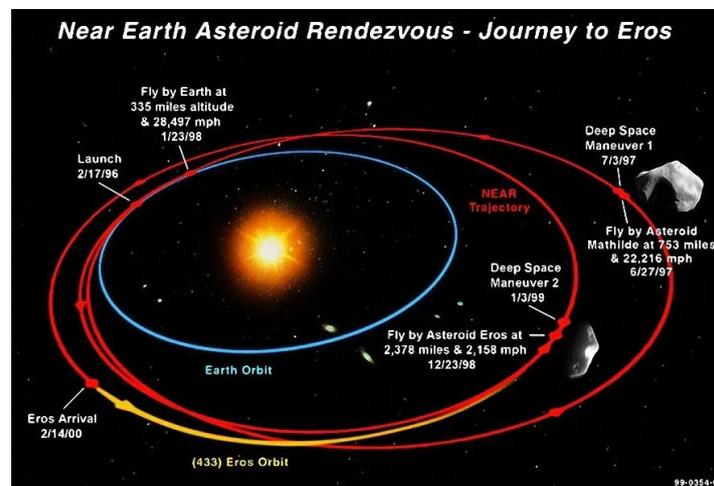


Figura 3: piano della missione NEAR

Obiettivi primari di tale missione sono stati la determinazione di dimensioni, forma, massa, densità, moto di rotazione, morfologia e composizione superficiale di 433 Eros; come obiettivo secondario fu considerata l'opportunità di confrontare l'asteroide con i meteoriti scoperti sulla Terra, e ottenere dettagli su quanto questi siano rappresentativi del corpo originario.

Il sistema propulsivo, in particolare, era esclusivamente di tipo chimico, e si componeva di un motore a razzo bipropellente, in grado di fornire una spinta di 450  $N$  e con impulso specifico di 313  $s$ , quattro motori a monopropellente, con spinta da 21  $N$  (usati per direzionare la spinta durante le accensioni del motore principale), ed infine altri sette motori a monopropellente da 3,5  $N$ , utilizzati per le manovre in orbita attorno all'asteroide.

#### 2.1.2.2 Hayabusa

La sonda Hayabusa è stata lanciata nel 2003 dall'Agenzia Spaziale Giapponese JAXA, con lo scopo di atterrare sull'asteroide 25143 Itokawa e prelevarne campioni di suolo da riportare sulla Terra; il sistema propulsivo, a differenza dell'altra missione descritta, era stavolta di tipo elettrico, ionico ad alta efficienza.



*Figura 4: animazione della sonda Hayabusa*

Il lancio è avvenuto il 9 maggio 2003, e ha raggiunto l'obiettivo a settembre 2005; successivamente, la sonda ha effettuato osservazioni ravvicinate dell'asteroide prima di atterrare sulla superficie a novembre 2005; il 25 aprile successivo fu sigillata la capsula contenente il materiale prelevato, e la sonda ripartì per tornare sulla Terra, dove giunse il 13 giugno 2010.

### 3 Premesse teoriche

Dopo aver introdotto l'argomento principale di cui tratterà la tesi, e prima di entrare nel merito dello studio effettuato sui dati, è importante prima definire i concetti teorici utili a comprendere il lavoro di tesi svolto.

#### 3.1 Problema dei due corpi

Si consideri la presenza di un corpo principale di massa  $M$ , e un corpo secondario di massa  $m$ , tale che  $M \gg m$ ; pertanto, supponendo che  $M$  sia il corpo più influente, diventa possibile trascurare l'influenza di eventuali altri corpi presenti.

I 2 corpi possono essere assimilabili a casi concreti come un satellite e la Terra, oppure la Terra e il Sole.

Si considera poi un sistema di riferimento inerziale  $Oxyz$ , in cui la distanza del corpo principale  $M$  dall'origine di tale sistema è  $\bar{R}_1$ , mentre la distanza tra  $m$  e l'origine è  $\bar{R}_2$ . La differenza di tali raggi vettori, ovvero la posizione relativa tra  $m$  e  $M$  è definita  $\bar{r} = \bar{R}_2 - \bar{R}_1$ .

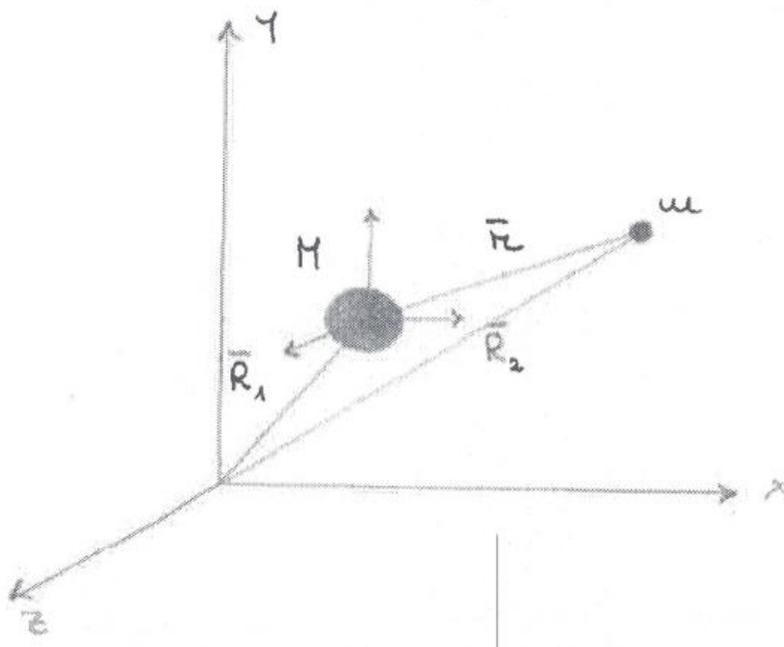


Figura 5: problema dei 2 corpi

Definiamo ora la forza che ogni rispettivo corpo esercita sull'altro: essa sarà esclusivamente gravitazionale, e pertanto eguaglia l'inerzia del corpo stesso:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{R}}_1 M = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\bar{r}}{r} \\ \ddot{\bar{R}}_2 m = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\bar{r}}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\vec{R}}_1 = G \frac{m \vec{r}}{r^2} \\ \ddot{\vec{R}}_2 = -G \frac{M \vec{r}}{r^2} \end{cases}$$

Sottraendo ora le 2 equazioni vettoriali, si ottiene il moto relativo di  $m$  rispetto a  $M$ :

$$\ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1 = \ddot{\vec{r}} = -G \frac{M + m \vec{r}}{r^2}$$

Otteniamo così un'equazione differenziale vettoriale la cui unica incognita è  $\vec{r}$ ; avendo ipotizzato poi  $M \gg m$ , è possibile assumere  $m + M \approx M$ ; si definisce poi il parametro gravitazionale  $\mu = GM$ , e si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu \vec{r}}{r^2} = 0$$

In particolare,  $\mu$  dipenderà solo dal corpo considerato come astro principale; infatti, data la costante gravitazionale universale  $G = 6,67 * 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$ , e considerando che nel nostro studio si considereranno orbite o comunque traiettorie solo ed esclusivamente attorno al Sole (avente massa  $M = 1,989 * 10^{30} kg$ ), il parametro gravitazionale che useremo sarà sempre quello eliocentrico:  $\mu_{\odot} = 1,327 * 10^{11} \frac{km^3}{s^2}$ .

### 3.2 Momento della quantità di moto specifico

Si consideri l'equazione del moto relativo tra due corpi, e si moltiplichino vettorialmente  $\vec{r}$  ad essa:

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \wedge \left( -\frac{\mu \vec{r}}{r^2} \right) = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \wedge \vec{r} = 0$$

Si può notare poi che:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = 0$$

Si definisce così il vettore momento della quantità di moto specifico:

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \text{costante}$$

Tale vettore è una costante del moto, sia in modulo che in direzione: questo si traduce nel fatto che, nelle ipotesi del problema dei due corpi,  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  si troveranno sempre sullo stesso piano, e che quindi il piano dell'orbita rimane costante.

### 3.3 Energia meccanica specifica

Si consideri nuovamente l'equazione del moto relativo tra due corpi, e stavolta si moltiplichino scalarmente per  $\dot{\vec{r}}$ :

$$\dot{\vec{r}} * \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} * \frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = 0$$

In generale, sappiamo che la derivata di un vettore è un altro vettore, perpendicolare al primo; di conseguenza, il prodotto scalare tra un vettore e la sua derivata sarà coincidente col prodotto dei moduli; inoltre, la derivata del vettore posizione non è altro che il vettore velocità:

$$\dot{\vec{r}} \perp \ddot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}} * \ddot{\vec{r}} = \dot{r} * \ddot{r} = v * \dot{v}$$

Sostituendo si ottiene:

$$v\dot{v} + \frac{\mu}{r^2}\dot{r} = 0$$

Ora, notando che:

$$v\dot{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right); \quad \frac{\mu}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}\right);$$

e sostituendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = 0$$

Si definisce l'energia meccanica specifica (per unità di massa):

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{costante}$$

$\varepsilon$  quindi, in assenza di forze che non siano gravitazionali (problema dei due corpi), si rivela essere anch'essa una costante del moto; ciò vuol dire che un corpo in orbita attorno ad un astro principale acquista o perde velocità a seconda della distanza dall'astro stesso; il corpo quindi né acquista né perde energia meccanica, ma scambia energia cinetica in energia potenziale e viceversa.

### 3.4 Traiettorie

La famiglia di curve denominate sezioni coniche rappresenta gli unici cammini possibili per un corpo orbitante nel problema dei due corpi; il fuoco o uno dei fuochi della sezione conica, cioè dell'orbita, è posta in coincidenza del corpo centrale.

Abbiamo visto che poiché l'energia meccanica specifica del satellite si conserva, quest'ultimo rallenta se la distanza dal corpo centrale cresce, mentre accelera se la distanza diminuisce;

invece, dalla conservazione del momento angolare specifico, si evince che il moto orbitale avviene su un piano fisso in uno spazio inerziale.

Le sezioni coniche, nello specifico, sono curve piane ottenute come intersezione di un cono di rotazione con un piano non passante per il vertice.

Siano  $\phi$  l'angolo che le generatrici del cono formano con l'asse, e  $\alpha$  l'angolo che la normale al piano forma con l'asse del cono: a seconda dell'inclinazione del piano, si hanno diverse coniche.

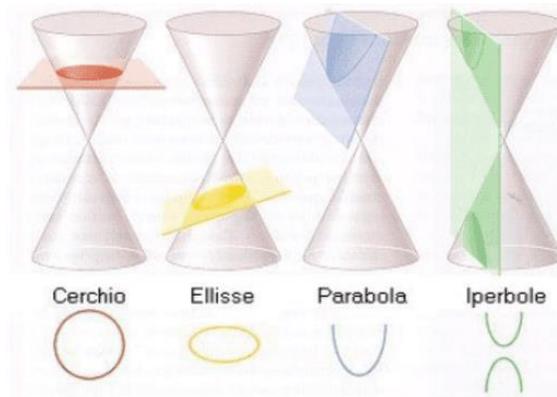


Figura 6: Sezioni coniche

- $\alpha = 0, \frac{\pi}{2} \rightarrow$  circonferenza;
- $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \phi \rightarrow$  ellisse;
- $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi \rightarrow$  parabola;
- $\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \phi \rightarrow$  iperbole.

Per quanto riguarda il nostro lavoro, l'unica tipologia di orbite che ci interessa è quella ellittica: infatti, sia l'orbita di partenza (Terra) che di arrivo (asteroidi) sono chiaramente ellittiche, o al più circolari, e le trasferte da un'orbita all'altra saranno anch'esse ellittiche.

### 3.5 Orbita ellittica

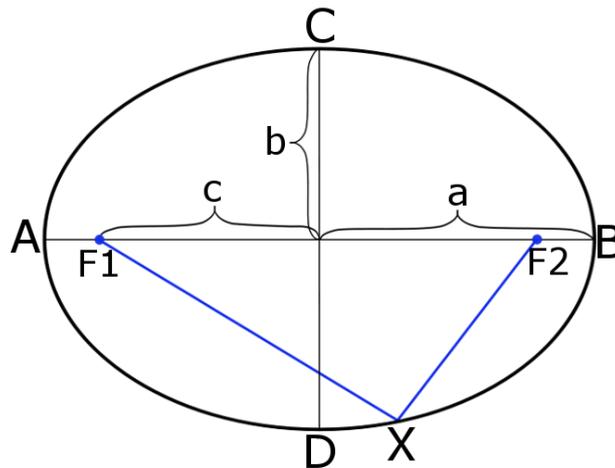


Figura 7: Ellisse

Dati due punti nel piano  $F_1$  ed  $F_2$ , è detta ellisse il luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da  $F_1$  e da  $F_2$ :

$$\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = \text{costante}$$

Supponendo il corpo principale in  $F_2$ , saranno  $A$  l'apoastro e  $B$  il periastro:

$$\overline{AF_2} = R_a \quad \overline{BF_2} = R_p$$

Definiamo poi l'asse maggiore  $2a$  e la distanza tra i fuochi  $2c$ :

$$\overline{AB} = 2a$$

$$\overline{F_1F_2} = 2c$$

Possiamo scrivere che:

$$R_a + R_p = 2a$$

$$R_a - R_p = 2c$$

Definendo poi l'eccentricità come il rapporto tra distanza tra i fuochi e asse maggiore:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p}$$

Da qui, si evince che per un'ellisse si ha  $0 < e < 1$ .

Se invece vogliamo ricavare  $R_a$  ed  $R_p$  in funzione di  $a$  ed  $e$ :

$$\begin{cases} R_a + R_p = 2a \\ R_a - R_p = 2c \end{cases} \quad \begin{cases} R_a + R_a - 2c = 2a \\ \text{"} \end{cases} \quad \begin{cases} R_a = a + c \\ R_p = -2c + a + c \end{cases} \quad \begin{cases} R_a = a(1 + e) \\ R_p = a(1 - e) \end{cases}$$

I parametri su cui ci concentreremo nello studio effettuato saranno proprio distanza di apoastro e periastro e soprattutto l'eccentricità  $e$ , che definisce la forma dell'orbita, e il semiasse maggiore  $a$  che definisce invece la dimensione.

Consideriamo ora di essere ad uno degli apsi, e calcoliamo il momento angolare specifico: in questi particolari punti dell'orbita il vettore posizione e il vettore velocità sono perpendicolari, quindi:

$$\bar{h} = \bar{r} \wedge \bar{v} = R_p v_p = R_a v_a$$

possiamo scrivere  $v_p$  e  $v_a$  in funzione di  $h$ :

$$v_p = \frac{h}{R_p} \quad v_a = \frac{h}{R_a}$$

Ora scriviamo l'equazione dell'energia meccanica specifica, calcolata anch'essa al periastro e all'apoastro:

$$\varepsilon = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{R_p} = \frac{v_a^2}{2} - \frac{\mu}{R_a}$$

Sostituiamo le velocità in funzione del momento angolare:

$$\frac{h^2}{2R_p^2} - \frac{\mu}{R_p} = \frac{h^2}{2R_a^2} - \frac{\mu}{R_a}$$

Isolando  $h$  otteniamo:

$$h^2 = 2\mu \left( \frac{R_p R_a}{R_a + R_p} \right)$$

Ma ricordando le espressioni di  $R_p$  ed  $R_a$  in funzione di semiasse maggiore ed eccentricità:

$$h^2 = \mu a (1 - e^2)$$

Una volta ottenuta questa relazione, consideriamo nuovamente l'equazione dell'energia, calcolata stavolta solo al periastro:

$$\varepsilon = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{R_p} = \frac{h^2}{2R_p^2} - \frac{\mu}{R_p} = \frac{h^2 - 2\mu R_p}{2R_p^2}$$

Ora sostituiamo l'espressione di  $h^2$  ricavata poco fa, e l'espressione  $R_p = a(1 - e)$ :

$$\varepsilon = \frac{\mu a(1 - e^2) - 2\mu a(1 - e)}{2a^2(1 - e)^2} = \frac{\mu a(1 - e)(1 + e - 2)}{2a^2(1 - e)^2} = \frac{\mu(e - 1)}{2a(1 - e)} = -\frac{\mu}{2a}$$

La relazione appena ricavata afferma che il semiasse maggiore  $a$  dipende solo dall'energia meccanica specifica  $\varepsilon$  del corpo orbitante, la quale a sua volta, ricordiamo, dipende solo da  $r$  e da  $v$  in ogni punto lungo l'orbita.

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

Questa relazione è valida per tutte le orbite coniche, e quindi anche per le traiettorie ellittiche che tratteremo.

In particolare, per un'ellisse, sapendo che per convenzione  $a > 0$ , avremo sempre  $\varepsilon < 0$ .

### 3.6 Velocità caratteristiche

Le velocità caratteristiche sono velocità utili allo studio delle manovre; verrà studiata esclusivamente la velocità circolare in quanto, nel lavoro svolto, l'orbita di partenza attorno alla Terra, sarà in prima approssimazione considerata come circolare; non verrà invece trattata la velocità di evasione, in quanto nelle missioni studiate non tratteremo le fasi geocentrica e pianetocentrica, ma esclusivamente la fase eliocentrica.

#### 3.6.1 Velocità circolare

La velocità circolare è la velocità necessaria per mantenere un'orbita circolare attorno al corpo principale; dall'equazione dell'energia:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

Per avere un'orbita circolare, dovremo avere  $r = a$ , quindi:

$$\frac{v_c^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Si noti che  $v_c$  è costante in modulo, indipendentemente dalla massa del satellite.

Se  $r$  aumenta, ovvero il raggio dell'orbita circolare, minore sarà la velocità richiesta per mantenere il satellite in quest'orbita (intuitibile, in quanto più è distante il corpo orbitante, e minore sarà la forza gravitazionale).

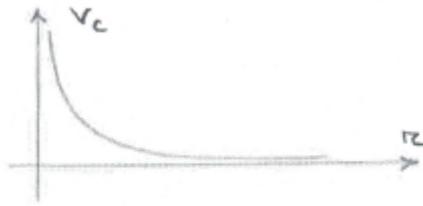


Figura 8: velocità circolare in funzione del raggio

### 3.7 Sistemi di riferimento

Per identificare un sistema di riferimento bisogna conoscerne l'origine ed il piano fondamentale (ovvero dove giacciono gli assi fondamentali) e definire il verso dell'asse  $z$ ; l'unico sistema di riferimento che ci interessa è quello eliocentrico, in quanto, come già detto in precedenza, verranno considerate solo orbite e traiettorie eliocentriche.

#### 3.7.1 Sistema di riferimento eliocentrico

- L'origine del sistema è nel centro del Sole;
- Il piano fondamentale è il cosiddetto piano dell'eclittica, ovvero il piano dato dall'intersezione della sfera celeste con il piano geometrico su cui giace l'orbita di rivoluzione della Terra attorno al Sole;
- La direzione dell'asse  $x$  è data dall'intersezione tra il piano equatoriale e il piano dell'eclittica; infatti, il piano equatoriale è inclinato di  $23,5^\circ$  rispetto al piano dell'eclittica.
- Il verso dell'asse  $x$ , invece, è tale per cui il giorno dell'equinozio di primavera (21 marzo) si veda il Sole nella costellazione dell'Ariete (Punto Vernale  $\gamma$ ).

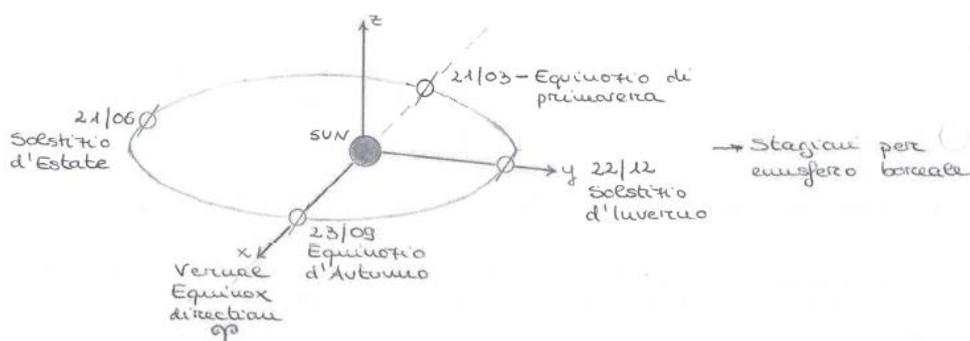


Figura 9: sistema eliocentrico

L'asse  $x$  sarà quindi diretto lungo la linea degli equinozi, ovvero la linea che, passando per il centro del Sole, unisce i due punti dell'orbita in cui i raggi solari sono allo Zenit sull'Equatore; perpendicolare ad essa è invece la linea dei solstizi, che unisce i due punti in cui il Sole è alla massima elevazione al piano equatoriale.

- L'asse  $z$  infine punta verso l'emisfero che contiene la Stella Polaris.

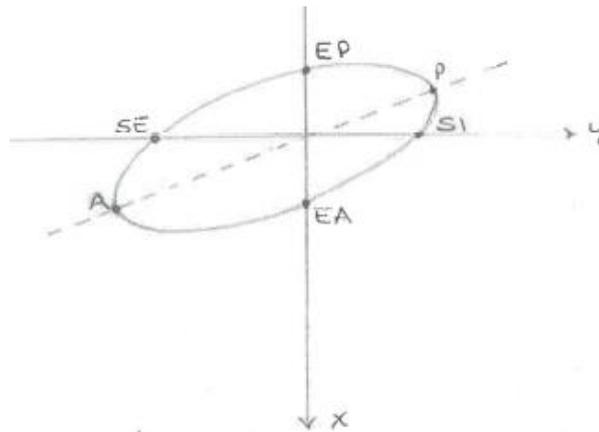


Figura 10: piano dell'eclittica

### 3.8 Determinazione dell'orbita: parametri orbitali

Si consideri un sistema di riferimento geocentrico o eliocentrico, ed un corpo orbitante attorno all'astro principale, con orbita diretta non retrograda.

Sono sufficienti cinque quantità indipendenti per descrivere completamente la dimensione, la forma e l'orientamento dell'orbita; un sesto elemento è poi richiesto per localizzare la posizione di un satellite lungo l'orbita in un istante di tempo particolare. Abbiamo quindi sei grandezze che permettono di definire in modo univoco la posizione di un corpo orbitante in un dato sistema di riferimento, e queste sono dette parametri orbitali, o elementi orbitali.

Si definisce innanzitutto la linea di nodi, determinata dall'intersezione del piano dell'orbita con il piano dell'eclittica (nel caso di sistema eliocentrico). La linea dei nodi passerà per il nodo ascendente, ovvero il punto in cui l'oggetto interseca il piano di riferimento passando dall'emisfero meridionale a quello settentrionale del Sole.

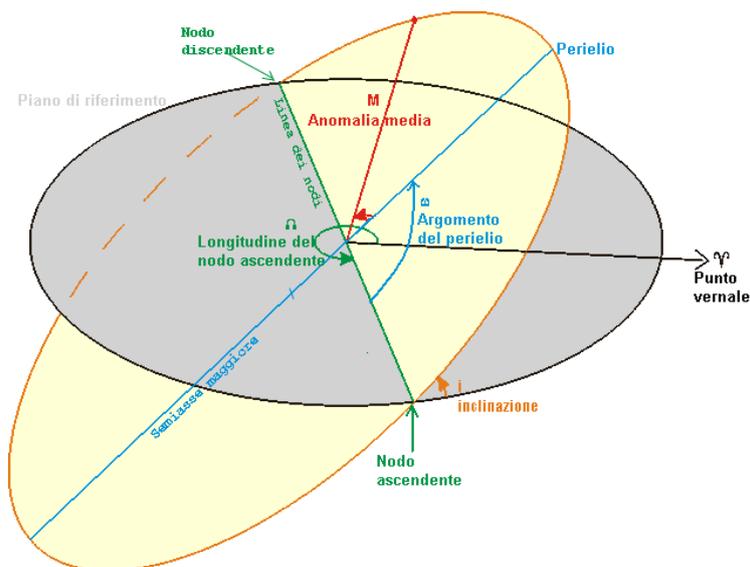


Figura 11: parametri orbitali

Definiamo finalmente i parametri orbitali:

- $a$ : *semiasse maggiore*, stabilisce la dimensione dell'orbita;
- $e$ : *eccentricità*, stabilisce la forma dell'orbita;
- $\omega$ : *argomento del periastro*, è l'angolo tra il nodo ascendente ed il periastro, ed indica quindi la direzione della linea degli apsidi;
- $\nu$ : *anomalia vera*, angolo, nel piano dell'orbita del satellite, tra la posizione del satellite e il periastro;
- $\Omega$ : *longitudine del nodo ascendente*, angolo, nel piano fondamentale, tra l'asse x (ovvero il Punto Vernale) e il nodo ascendente;
- $i$ : *inclinazione*, angolo tra l'asse z e il vettore momento della quantità di moto  $\vec{h}$  (ovvero la direzione perpendicolare al piano dell'orbita), e specifica quindi l'orientamento dell'orbita rispetto al piano equatoriale.

### 3.9 Manovre orbitali

Una manovra orbitale può essere effettuata per diversi scopi: compensazione delle perturbazioni, correzione degli errori di ignizione o trasferimento da un'orbita di parcheggio all'orbita target finale; nel nostro caso, utilizzeremo le manovre esclusivamente per spostarci dall'orbita di partenza (ovvero l'orbita della Terra attorno al Sole) fino all'orbita target (asteroide).

Innanzitutto, nello studio delle manovre, così come nel modello sviluppato nel lavoro di tesi svolto, si assume l'ipotesi di manovre sempre impulsive, ovvero una spinta infinita applicata in un tempo infinitesimo, che avviene a raggio costante; questa ipotesi è valida per missioni interplanetarie, in cui il tempo di missione è molto maggiore del tempo di manovra; tuttavia il modello non è valido nel caso di propulsione elettrica, in cui si ha appunto bassa spinta rispetto alla propulsione chimica;

nel nostro particolare caso, appunto, le soluzioni di riferimento riguardanti il set di near Earth Asteroids sono state calcolate proprio nelle ipotesi di bassa spinta; tuttavia, nel lavoro di tesi viene sviluppato un modello di calcolo delle soluzioni, ma nelle ipotesi di spinte impulsive; per tale motivo, vengono applicate poi delle correzioni in modo da avvicinarci alla soluzione di riferimento a bassa spinta.

Il costo delle manovre orbitali è quantificato in termini di  $\Delta v$ , ovvero una variazione di velocità impulsive.

L'obiettivo, generalmente, è effettuare la manovra con il minimo  $\Delta v$  possibile, per limitare l'impiego di carburante; tuttavia, in alcuni casi, anche il tempo necessario ha un ruolo fondamentale nella scelta della manovra orbitale, ma questo non è il nostro caso: il nostro modello si preoccupa proprio di ottimizzare il consumo, ovvero di minimizzare il costo di missione.

Infatti, a seconda della successione dei  $\Delta v$  scelta si può risparmiare molto: nel nostro caso le missioni prevederanno più passaggi dagli apsidi, e la scelta di partire da periastro piuttosto che da apoastro sarà una discriminante nella ricerca del costo più basso.

Ad ogni modo, il modello impulsivo è ideale, e fornisce il minimo consumo teorico: i risultati che otterremo infatti saranno perlopiù sottostimati rispetto al caso reale di spinta continua, proprio per questo motivo.

### 3.9.1 Grandezze fondamentali

Partiamo dalla definizione della spinta, come variazione della quantità di moto; in realtà essa può essere definita anche in un altro modo:

$$T = m \frac{dv}{dt} = -c \frac{dm}{dt}$$

In cui  $c$  è la velocità di espulsione dei gas relativa allo spacecraft. Per definizione, questa è:

$$c = g_{sl} I_{sp}$$

Con  $g_{sl}$  accelerazione gravitazionale al sea-level, avente valore fisso:

$$g_{sl} = G \frac{M_{earth}}{r_{earth}^2} = 9,80665 \text{ m/s}^2$$

Mentre l'impulso specifico  $I_{sp}$  è definito a sua volta come:

$$I_{sp} = \frac{I_{tot}}{m_p g_{sl}}$$

Essa è la grandezza più importante, insieme alla spinta  $T$ , nell'ambito della propulsione spaziale: mentre  $m_p g_{sl}$  è il peso che il propellente consumato avrebbe sulla Terra (al livello del mare), l'impulso totale è invece l'effetto utile ottenuto, in quanto esso è definito come:

$$I_{tot} = \int_{t_0}^{t_f} T dt = T \Delta t \text{ (se la spinta è costante)}$$

Quindi l'impulso totale valuta l'effetto cumulativo della spinta nel tempo: dato un effetto  $I_{tot}$ , posso ottenerlo con spinta elevata e tempi piccoli o viceversa.

Di conseguenza l'impulso specifico fornisce il rapporto tra la spinta effettiva ottenuta e la massa del propellente consumato necessaria per ottenerla: è un rapporto tra effetto e spesa.

L'unità di misura di  $I_{sp}$  è in *secondi*, ed infatti può anche essere definito come il tempo in cui lo spacecraft, per un'assegnata  $m_p$ , è in grado di fornire una spinta pari al suo peso al sea-level.

Tornando all'equazione della spinta:

$$m \frac{dv}{dt} = -c \frac{dm}{dt} \rightarrow dv = -c \frac{dm}{m}$$

Quindi, per ottenere un salto di velocità  $dv$ , è richiesto un costo  $dm$  di consumo di carburante.

Integrando:

$$\int_0^{\Delta v} dv = -c \int_{m_i}^{m_f} \frac{dm}{m} \rightarrow \Delta v = -c \ln \frac{m_f}{m_i} = c \ln \frac{m_i}{m_f}$$

Supponendo  $c$  costante per tutto il tempo della manovra, quindi, si ottiene la cosiddetta equazione di Tsiolkowski, o equazione del razzo:

$$m_f = m_i e^{-\Delta v/c}$$

Sapendo che la massa finale non è altro che la massa iniziale al netto del combustibile:

$$m_f = m_i - m_p$$

Otteniamo:

$$m_p = m_0(1 - e^{-\Delta v/c})$$

Da questa relazione fondamentale, conoscendo la massa iniziale dello spacecraft, la velocità caratteristica (parametro dato dal sistema propulsivo), e il salto di velocità  $\Delta v$  necessario alla missione, possiamo calcolare il consumo di propellente  $m_p$ . Essa rappresenta pertanto l'equazione fondamentale in ambito propulsivo, in quanto permette di stimare il budget di una missione.

Nel concreto, nel nostro studio, delle grandezze elencate avremo come input la spinta  $T$ , la velocità caratteristica  $c$  (entrambe date dal propulsore), e la massa iniziale dello spacecraft  $m_0$ ; il modello di calcolo poi ci consentirà di ricavare il costo minimo in termini di  $\Delta v$  necessario per raggiungere un asteroide, per poi infine calcolare il consumo di propellente attraverso la Rocket Equation.

### 3.9.2 Considerazioni energetiche

Supponiamo di avere uno spacecraft con velocità  $v_1$ , e di voler passare alla velocità  $v_2$  inclinata rispetto a  $v_1$ . Il salto di velocità necessario  $\Delta v$  avrà un angolo  $\beta$  rispetto a  $v_2$ .

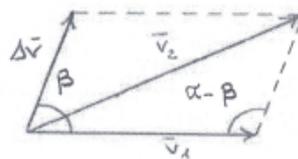


Figura 12: schema delle velocità

Vettorialmente, quindi, avremo:

$$\overline{v_2} = \overline{v_1} + \overline{\Delta v}$$

L'energia associata ai due stati di velocità sarà:

$$\begin{cases} E_{g1} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r} \\ E_{g2} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu}{r} \end{cases}$$

Perché nell'ipotesi di manovra impulsiva, l'impulso avviene a raggio costante; calcolando la variazione energetica tra i due stati quindi avremo:

$$\Delta E_g = E_{g2} - E_{g1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

Ovvero la variazione di energia totale è solo cinetica, in quanto essendo il raggio costante, anche l'energia potenziale lo è.

Dal teorema di Carnot:

$$v_2^2 = v_1^2 + \Delta v^2 - 2v_1\Delta v \cos(\pi - \beta) = v_1^2 + \Delta v^2 + 2v_1\Delta v \cos\beta$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia:

$$\Delta E_g = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\Delta v^2}{2} + v_1\Delta v \cos\beta - \frac{v_1^2}{2}$$

$$\Delta E_g = \Delta v \left( \frac{\Delta v}{2} + v_1 \cos\beta \right)$$

Da questa relazione si nota che, per ottenere la massima variazione di energia con il minimo costo, si hanno due possibilità:

- $v_1$  massima: all'interno di un'orbita la velocità massima si raggiunge al raggio minimo, quindi al perigeo;
- $\cos\beta = 1 \rightarrow \beta = 0$ : ciò vuol dire  $v_1$  e  $\Delta v$  allineati, ovvero spingere il più parallelamente possibile a  $v_1$ .

Questo però ragionando a parità di  $v_2$ : nel nostro studio, vedremo che a seconda dell'orbita target (esterna o interna) e dell'entità della variazione  $\Delta a$  per raggiungerla, varierà ovviamente anche il costo  $\Delta v$ .

### 3.9.3 Manovre orbitali a singolo impulso

Delle tre tipologie di manovre a singolo impulso, ne verranno trattate soltanto le due di nostro interesse; la manovra di rotazione della linea degli apsidi, invece, non verrà trattata, in quanto riguarda una variazione del parametro orbitale  $\omega$ , ma come vedremo, nel modello a impulsi sviluppato ci preoccupiamo di variare soltanto semiasse maggiore  $a$ , eccentricità  $e$  ed inclinazione  $i$ , ipotizzando sempre impulsi agli apsidi e pertanto trascurando gli altri elementi orbitali; per ovviare a questa "omissione", vengono poi applicate delle correzioni.

### 3.9.3.1 *Aggiustamento di quota al perigeo/apogeo*

Si tratta di una manovra complanare, ovvero lo spacecraft rimane sempre sullo stesso piano orbitale.

L'impulso avviene in corrispondenza di un apside, e in particolare sempre agli antipodi dell'apside di cui si vuole avere la variazione:

- Alzare l'apoastro di  $\Delta z_a$  richiede l'impulso al periastro;

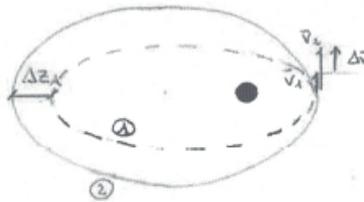


Figura 13: innalzamento apoastro

- Alzare il periastro di  $\Delta z_p$  richiede l'impulso all'apoastro;

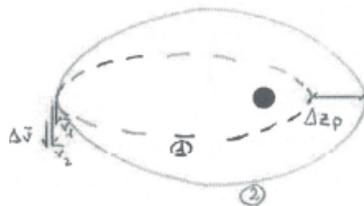


Figura 14:innalzamento periastro

Dall'orbita target, si calcola il  $\Delta z$  desiderato:

$$2a_2 = 2a_1 + \Delta z \rightarrow \Delta z = 2(a_2 - a_1) = 2\Delta a$$

Da esso, si valuta l'impulso  $\Delta v$  necessario;

il semiasse maggiore è direttamente legato al contributo energetico, e la differenza di energia è esclusivamente cinetica:

$$\Delta E_g = E_{g2} - E_{g1} = -\frac{\mu}{2a_2} + \frac{\mu}{2a_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

Quindi, isolando  $v_2$ :

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{\mu}{a_2} + \frac{\mu}{a_1}}$$

Il  $\Delta v$  sarà dato esclusivamente dalla somma delle due velocità, in quanto è una manovra complanare:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{v_1^2 - \frac{\mu}{a_2} + \frac{\mu}{a_1}} - v_1$$

Questo particolare tipo di manovra sarà di nostro particolare interesse, in quanto le missioni per raggiungere gli asteroidi consisteranno in più passaggi dagli apsi, in corrispondenza dei quali si avranno impulsi atti a variare l'afelio e il perielio alternativamente.

Supponiamo ora di ragionare in termini di variazioni differenziali delle varie grandezze in gioco:

$$E_g = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

Isolando  $v^2$  e differenziando per  $r$  costante:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \rightarrow 2v dv = \frac{\mu}{a^2} da$$

Da cui otteniamo:

$$da = \frac{2a^2}{\mu} v dv$$

Ciò significa che una variazione infinitesima della velocità  $dv$  comporta una variazione infinitesima del semiasse maggiore  $da$ .

Sostituendo  $\Delta a = \Delta z/2$ , e calcolando il costo per apoastro e periastro, abbiamo:

$$\Delta v_p = \frac{\mu}{4 a_1^2 v_{1p}} \quad \Delta v_a = \frac{\mu}{4 a_1^2 v_{1a}}$$

Quindi, ipotizzando che sia richiesta una variazione dell'afelio, avremo un costo di manovra minore per velocità iniziale elevata e semiasse maggiore dell'orbita di partenza anch'esso elevato.

Consideriamo i dati di input che vedremo più avanti, in modo da avere già un'idea orientativa del valore numerico di  $\Delta v$  che troveremo nel caso di singola variazione di  $a$  ed  $e$ :

- Semiasse maggiore dell'orbita di partenza (Terra attorno al Sole):  $a_1 = 1 \text{ UA} = 1,496 * 10^8 \text{ km}$ ;
- Velocità iniziale (velocità circolare della Terra):  $v_1 = v_c = \sqrt{\mu_{\odot}/a_1} = 29,8167 \text{ km/s}$ ;
- Variazione quota afelio richiesta:  $\Delta z_a = 0,0333 \text{ UA} = 4,9866 * 10^6 \text{ km}$ ;

poiché è richiesta una variazione dell'afelio, l'impulso da calcolare avverrà al perielio:

$$\Delta v_p = \frac{\mu_{\odot}}{4 a_1^2 v_1} \Delta z_a \simeq 0,24847 \text{ km/s}$$

### 3.9.3.2 Cambio di piano semplice

Questa è una manovra fuori dal piano orbitale: si ruota il vettore velocità di un angolo  $\Delta\psi$  in modo che il piano orbitale subisca una variazione  $\Delta\Omega$  e/o  $\Delta i$ .

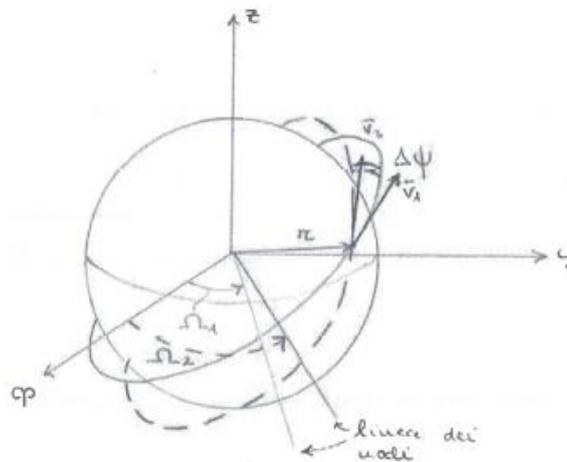


Figura 15: rotazione del piano orbitale

La velocità rimane costante in modulo, e varia solo la sua direzione: poiché anche il raggio rimane costante, rimangono invariati sia il momento angolare in modulo (varia solo la direzione, insieme a  $\vec{v}$ ), e sia l'energia meccanica.

Ora, proiettando la velocità nelle direzioni tangenziale e radiale (perpendicolare e parallela al raggio vettore), notiamo che la velocità radiale non varia, mentre la velocità tangenziale varia solo in direzione, come la velocità, e rimane costante in modulo.

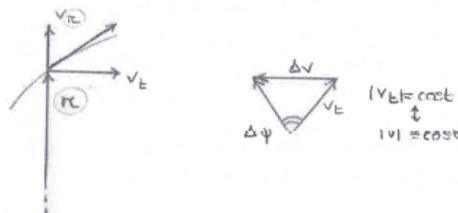


Figura 16: schema delle velocità radiale e tangenziale

Dividendo a metà il triangolo delle velocità, e sapendo dalla trigonometria che un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, troviamo  $\Delta v$ :

$$\frac{\Delta v}{2} = v_t \operatorname{sen} \frac{\Delta\psi}{2}$$

Di conseguenza, per avere un  $\Delta v$  piccolo, conviene manovrare dove la  $v_t$  è piccola.

È possibile dimostrare che la velocità tangenziale si può esprimere in dipendenza dall'anomalia vera (equazione della traiettoria in coordinate polari):

$$v_t = \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \nu)$$

Da cui otteniamo infine che:

$$\Delta v = 2 \frac{\mu}{h} (1 + e \cos v) \sin \frac{\Delta \psi}{2}$$

Ora, definiamo un ulteriore angolo detto latitudine, o declinazione, come l'angolo  $\delta$  formato dal raggio vettore del satellite rispetto alla sua proiezione sul piano di riferimento (nel nostro caso l'eclittica);

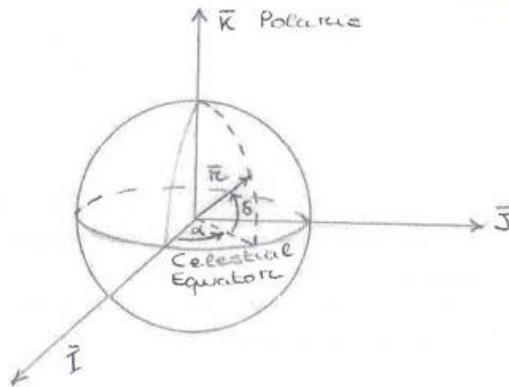


Figura 17: sistema ascensione retta-declinazione

È possibile dimostrare, dalla trigonometria sferica, che:

$$\cos i = \cos \delta \sin \psi$$

Applicandola per il cambio di piano semplice, avremo come direzione della velocità  $\psi_1 + \Delta\psi$  a cui corrisponderà una variazione d'inclinazione  $i_1 + \Delta i$ , mentre la declinazione  $\delta$  non cambia, in quanto il satellite non si sposta:

$$\cos(i_1 + \Delta i) = \cos \delta \sin(\psi_1 + \Delta\psi)$$

Isolando  $\Delta\psi$ , ricaviamo l'efficienza della manovra del cambio di piano:

$$\Delta\psi = \arcsin \left[ \frac{\cos(i_1 + \Delta i)}{\cos \delta} \right] - \psi_1 = \arcsin \left[ \frac{\cos(i_1 + \Delta i)}{\cos \delta} \right] - \arcsin \left( \frac{\cos i_1}{\cos \delta} \right)$$

Poiché  $\cos \delta \leq 1$ , avremo sempre  $\Delta\psi \geq \Delta i$ , quindi si può definire l'efficienza della manovra come il rapporto tra l'effetto, ovvero la variazione d'inclinazione, e la spesa, ovvero la variazione in direzione della velocità: più è alto, e più conviene la manovra, ma si avrà sempre:

$$0 \leq \left| \frac{\Delta i}{\Delta\psi} \right| \leq 1$$

Si nota che l'efficienza dipende dalla latitudine  $\delta$ , e in particolare vediamo che:

$$\text{Se } \delta = 0 \rightarrow \cos \psi = \cos i \rightarrow \Delta\psi = \Delta i \rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta\psi} \right| = 1$$

Ciò significa che dove la declinazione è nulla, ovvero ai nodi, l'efficienza è massima; col crescere della latitudine, diminuirà il costo, come si evince dal grafico:

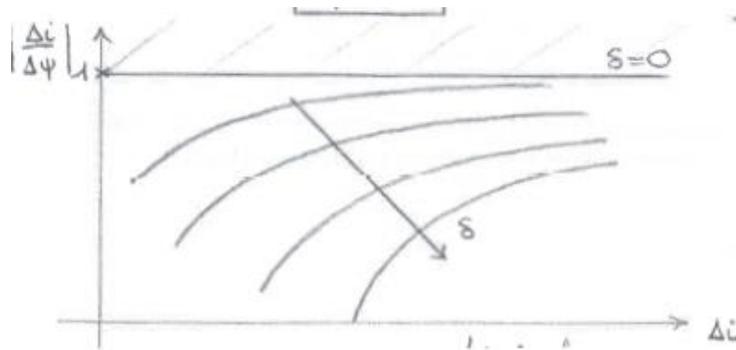


Figura 18: grafico efficienza-declinazione

La manovra all'equatore, inoltre non altera la linea degli apsidi, ovvero si ha solo  $\Delta i$  mentre la longitudine  $\Omega$  rimane costante.

Questa, tuttavia, è una manovra dal costo elevato, e conviene pertanto pianificarla in concomitanza con un'altra manovra in quanto il cambio di piano, da solo, non comporta cambiamenti energetici.

Nel nostro studio, infatti, gli impulsi saranno assunti come eseguiti tutti ai nodi, e prevederanno una variazione simultanea di semiasse maggiore  $a$ , eccentricità  $e$  ed inclinazione  $i$ . Tuttavia, come abbiamo visto, la variazione di  $a$  ed  $e$  (tramite variazione di afelio/perielio) avviene attraverso impulsi agli apsidi: quello che faremo è quindi assumere la forte semplificazione di nodi coincidenti con apsidi, ovvero di  $\omega = 0$  sia per orbita di partenza che per orbita target. Per tenere in considerazione questo parametro, viene poi applicata una correzione che tende a maggiorare il costo nel caso in cui  $\omega$  sia elevato (nel cui caso l'impulso avviene lontano dal nodo, e quindi il cambio piano sarà più dispendioso rispetto al caso ideale), e a lasciare pressoché invariato il costo nel caso in cui, invece, l'argomento del perielio è basso (perché vorrà dire che l'apside, in cui avviene l'impulso, è effettivamente vicino a un nodo, e quindi in realtà non stiamo sottostimando).

Facciamo un primo calcolo numerico anche qui:

- Eccentricità dell'orbita  $e = 0$  (si assume orbita circolare per la Terra);
- Semiasse maggiore (Terra attorno al Sole):  $a_1 = 1 \text{ UA} = 1,496 * 10^8 \text{ km}$ ;
- Velocità iniziale (velocità circolare della Terra):  $v_1 = v_c = \sqrt{\mu_{\odot}/a_1} = 29,8167 \text{ km/s}$ ;
- Variazione di inclinazione richiesta:  $\Delta i = 2^\circ$ .

Calcoliamo prima il momento angolare:

$$h = r * v = a_1 * v_1 = 4,46 * 10^9 \text{ km}^2/\text{s}$$

ora passiamo a calcolare il costo:

$$\Delta v = 2 \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \nu) \sin \frac{\Delta \psi}{2}$$

Ipotizziamo di essere ad un nodo, per cui  $\nu = 0$  e  $\Delta \psi = \Delta i$ :

$$\Delta v = 2 \frac{\mu_{\odot}}{h} \sin \frac{\Delta i}{2} = 1,041 \text{ km/s}$$

### 3.9.3.3 Cambio piano combinato con aggiustamento apsidi

Prese singolarmente, sappiamo che:

- Per la variazione degli apsidi, è richiesto  $\Delta v_{ct} = v_2 - v_1$ ;
- Per il cambio di piano, è richiesto  $\Delta v_{cp} = 2v_t \sin \frac{\Delta \psi}{2}$ ;

Consideriamo due possibilità: o manovre effettuate separatamente in successione, oppure un'unica manovra combinazione delle due:

- Manovre separate: possiamo già dire che converrà effettuare prima la rotazione, e poi l'innalzamento dell'apside, in modo tale da ruotare la velocità quando è ancora bassa in modulo; inoltre, l'ideale sarebbe cambiare piano proprio all'afelio, in cui appunto la velocità è minima:

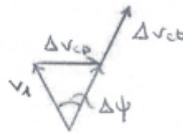


Figura 19: manovre separate

Il costo si calcolerà come semplice somma dei due  $\Delta v$ :

$$\Delta v_{tot} = \Delta v_{cp} + \Delta v_{ct} = 2v_t \sin \frac{\Delta \psi}{2} + v_2 - v_1$$

- Manovra combinata: in questo caso la velocità varierà sia in modulo che in direzione nello stesso istante;

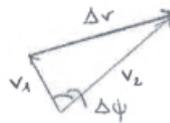


Figura 20: manovra combinata

È possibile calcolare il costo tramite il teorema del coseno:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta \psi}$$

Si nota che per  $\Delta \psi$  molto piccolo, si ha  $\cos \Delta \psi \approx 1$  e quindi  $\Delta v_{tot} \approx v_2 - v_1$ , ovvero un cambio di piano a costo quasi nullo; ciò è molto conveniente, soprattutto nel nostro studio, in cui si avranno asteroidi che richiedono variazioni di inclinazione di massimo  $6^\circ$ , e come già detto tutti gli impulsi saranno effettuati ai nodi, quindi  $\Delta \psi = \Delta i$ .

Mettendo poi a confronto i due tipi di manovra, è possibile tracciare un grafico con la differenza di costo in funzione di  $\Delta\psi$ :

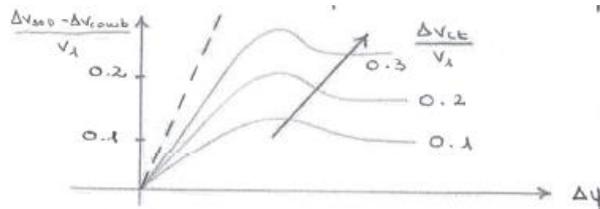


Figura 21: diagramma manovre combinate/separate

Dall'andamento di  $\frac{\Delta v_{sep} - \Delta v_{comb}}{v_1}$  notiamo che, rispetto alle manovre separate, con la manovra combinata si guadagna anche il 20%.

### 3.9.4 Manovre con propulsione elettrica

Per lo studio delle manovre con propulsione elettrica cade l'ipotesi di manovra impulsiva: la propulsione elettrica è infatti caratterizzata da ridotte accelerazioni, e quindi piccole spinte.

Nel nostro particolare caso, in realtà, lo studio di manovre a bassa spinta non ci interessa, in quanto utilizzeremo esclusivamente un modello a impulsi. Tuttavia, le soluzioni di riferimento, con cui andremo a confrontare i risultati dati dal nostro modello, sono state ricavate con uno studio di manovre a bassa spinta (in particolare nelle cosiddette ipotesi di Edelbaum); quindi, per poter adattare il nostro modello e ottenere risultati vicini a quelli di riferimento, alcune correzioni effettuate deriveranno anch'esse dall'approssimazione di Edelbaum; quest'ultima è caratterizzata dalle seguenti ipotesi:

- Orbite quasi circolari:  $r \approx a$ ;  $e \approx 0$ ;
- Orbite con piccola inclinazione:  $i \approx 0$ ;
- Spinte/accelerazioni molto piccole.

Si ha una graduale variazione della velocità che conduce alla descrizione, da parte dello spacecraft, di una traiettoria a spirale.

Definiamo innanzitutto 3 componenti di spinta:

- $T_v \parallel v$ : tale componente varia  $a$ ,  $e$  e  $\omega$ , quindi varia l'energia dell'orbita;
- $T_N \perp v$ : questa componente varia  $e$  e  $\omega$ , e non varia l'energia poiché si spinge perpendicolarmente a  $v$ , che non varia in modulo (e infatti non modifica  $a$ );
- $T_W$ , perpendicolare al piano orbitale: varia  $i$  e  $\Omega$ , ovvero i parametri che definiscono l'orientamento del piano nello spazio.

In ogni punto ci sarà quindi una direzione ottimale di spinta per modificare i parametri desiderati.

Introduciamo ora le equazioni planetarie di Gauss: esse descrivono le variazioni temporali dei parametri orbitali, in funzione degli effetti dei parametri orbitali stessi; nelle ipotesi di

Edelbaum, esse si semplificano di molto; tuttavia, sono presenti delle singolarità in alcune equazioni, che però Edelbaum risolse semplicemente ignorando le equazioni che le contenevano; alla fine abbiamo dunque:

$$\dot{a} = 2 \frac{T_v a}{m v}$$

$$\dot{e} = \left[ 2 \cos v \frac{T_v}{m} - \sin v \frac{T_N}{m} \right] \frac{1}{v}$$

$$\dot{i} = \cos(\omega + v) \frac{T_W}{m v}$$

Ora ci poniamo il problema di comprendere in quale direzione conviene applicare la spinta in modo tale da ottimizzare la variazione di  $a$ ,  $e$  ed  $i$ , a seconda dell'obiettivo particolare che si vuole ottenere.

Definiamo  $\alpha$  l'angolo tra la spinta e la direzione di  $T_v$  nel piano, mentre  $\beta$  sarà l'angolo tra la spinta e la direzione di  $T_W$ , fuori dal piano. Dalla trigonometria:

$$\begin{cases} T_v = T \cos \alpha \cos \beta \\ T_R = -T_N = T \sin \alpha \cos \beta \\ T_W = T \sin \beta \end{cases} \quad (\text{si considera la componente radiale})$$

Edelbaum considera tre problemi:

#### 3.9.4.1 Variazione di $a$

Per ottenere esclusivamente un incremento di  $a$ , è necessario applicare la spinta esclusivamente in direzione tangenziale, quindi:

$$T \parallel v \rightarrow \alpha = \beta = 0 \rightarrow T_v = T; T_N = T_W = 0$$

Sostituendo nell'equazione di Gauss, abbiamo:

$$\dot{a} = 2 \frac{T a}{m v} \rightarrow \frac{da}{dt} = 2 \frac{dv a}{dt v} \rightarrow \frac{dv}{v} = 0,5 \frac{da}{a}$$

Passando alle differenze finite, si ottiene una stima del costo necessario ad ottenere la singola variazione di  $a$ :

$$\Delta v_a = 0,5 \frac{v}{a} \Delta a$$

Per quanto riguarda la variazione di  $e$ , dall'equazione notiamo che essa non è proprio nulla:

$$\dot{e} = 2 \cos v \frac{T}{m v}$$

Ciò vuol dire che appena si applica la spinta,  $e$  varia, ma se la spinta viene applicata in maniera continua per un giro completo,  $e$  torna ad annullarsi:

$$\Delta e = 0$$

Infine, per quanto riguarda la variazione d'inclinazione, notiamo che l'equazione semplicemente si annulla:

$$\dot{i} = 0 \rightarrow \Delta i = 0$$

### 3.9.4.2 Variazione di $e$

Derivando l'equazione di  $\dot{e}$ , si trova che il massimo incremento di  $e$  si ha per:

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \nu; \beta = 0$$

Ora, se diagrammiamo  $\alpha$  in funzione di  $\nu$ , possiamo notare che in prima approssimazione si può porre  $\alpha = \nu$ :

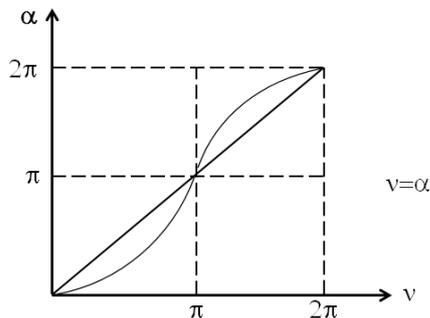


Figura 22:  $\alpha$  in funzione di  $\nu$

Le componenti della spinta diventano quindi:

$$T_\nu = T \cos \nu; \quad T_N = -T \sin \nu; \quad T_W = 0;$$

Per variare esclusivamente  $e$  è quindi necessario applicare la spinta sempre in direzione perpendicolare alla linea degli apsi, soluzione facile da implementare se il motore mantiene sempre la stessa direzione:

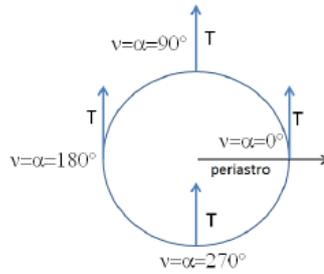


Figura 23: schema della direzione della spinta

Sostituendo nell'equazione di Gauss, otteniamo:

$$\dot{e} = \frac{T}{m} (\cos^2 \nu + 1) \frac{1}{v} \rightarrow de = (\cos^2 \nu + 1) \frac{1}{v} d\nu$$

Ma se mediamo tale equazione su un giro, si otterrà il costo necessario ad ottenere la sola variazione di  $e$ :

$$\Delta v_e = 0,649 * v \Delta e$$

Per quanto riguarda la variazione di  $a$ , applicando la spinta sempre con  $\alpha = \nu$ , il semiasse varia, ma dopo un giro completo torna al suo valore iniziale:

$$\Delta a = 0$$

Per quanto concerne l'inclinazione, invece, semplicemente la sua equazione si annulla, quindi rimane sempre costante:

$$\Delta i = 0$$

#### 3.9.4.3 Variazione di $i$

Per variare solo l'inclinazione, è necessario avere:

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \alpha \text{ qualsiasi}$$

Con segno positivo se si sale di latitudine, e negativo se si scende;

le componenti di spinta sono stavolta:

$$T_v = T_N = 0; \quad T_W = \pm T;$$

l'equazione di Gauss diventa così:

$$\dot{i} = \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \frac{1}{v} \rightarrow di = \cos(\omega + \nu) \frac{1}{v} d\nu$$

La quale anch'essa, mediata su un giro, fornisce la relazione che permette di calcolare il costo del cambio di piano:

$$\Delta v_i = \frac{\pi}{2} v \Delta i$$

Ora, nel nostro particolare caso di studio, tali relazioni ci serviranno per stimare appunto il costo, in termini di  $\Delta v$ , di una variazione simultanea dei 3 parametri  $a$ ,  $e$  ed  $i$  nel caso di bassa spinta, e quindi nelle ipotesi di Edelbaum:

$$\Delta v = \sqrt{\Delta v_a^2 + \Delta v_e^2 + \Delta v_i^2}$$

Notiamo che viene calcolato come somma vettoriale dei 3, e rappresenta quindi una stima molto blanda; essa, infatti, ci serve esclusivamente per effettuare una correzione, come vedremo più avanti, in modo che il risultato che otterremo si avvicini il più possibile alla soluzione ottenuta con Edelbaum.

## 4 Modello impulsivo puro

Dopo aver provveduto ad introdurre i concetti teorici fondamentali per lo studio svolto in questo lavoro di tesi, ora si procederà ad illustrare il lavoro principale, ovvero il modello teorico impulsivo puro.

### 4.1 Introduzione

Nel corso dell'intero sviluppo del modello impulsivo sono state assunte le seguenti ipotesi:

- Come orbita di partenza avremo sempre quella della Terra attorno al Sole, assunta come circolare e ad inclinazione nulla:  
$$a_0 = R_{a0} = R_{p0} = a_E = 1 \text{ UA}; \quad e_0 = 0; \quad i_0 = 0$$
- I dati target sono sempre noti, in termini di afelio  $R_{at}$ , perielio  $R_{pt}$ , e inclinazione  $i_t$ ; in particolare, verranno provati diversi valori di afelio e perielio (in modo da confrontare orbite target esterne, intermedie e interne), mentre l'inclinazione target sarà sempre  $i_t = 5^\circ$ .
- La manovra avviene attraverso più rivoluzioni da parte dello spacecraft attorno al Sole, e quindi con più passaggi dagli apsi, in corrispondenza dei quali avverranno gli impulsi; in particolare; il numero di passaggi da ogni apside sarà sempre pari a 3:

$$\text{numero di giri } n = 3$$

Quindi gli impulsi saranno sempre 6.

Conoscendo quindi le variazioni totali di afelio, perielio e inclinazione richieste per raggiungere l'orbita target, esse verranno divise per il numero di giri; in ogni giro, le variazioni saranno:

$$\Delta R_a = \frac{\Delta R_{a \text{ tot}}}{n}$$

$$\Delta R_p = \frac{\Delta R_{p \text{ tot}}}{n}$$

$$\Delta i = \frac{\Delta i_{\text{tot}}}{n}$$

In particolare, la variazione di  $i$  nel singolo giro viene ulteriormente suddivisa tra afelio e perielio, a seconda del criterio che sceglieremo.

- Tuttavia, noi sappiamo che per variare esclusivamente  $i$ , mantenendo  $\Omega$  costante, dobbiamo avere l'impulso in corrispondenza di un nodo: l'assunzione che facciamo è quindi quella di nodi coincidenti con apsi.

### 4.2 Variazione di perielio e afelio

In questo primo studio, verranno considerate orbite target a inclinazione nulla  $i_t = 0$ , e pertanto il trasferimento sarà complanare, e consisterà in un semplice aggiustamento di perielio e afelio, manovra già studiata nelle premesse teoriche.

Verranno studiati due casi:

- Nel primo caso, il primo impulso  $\Delta v_p$  viene effettuato in corrispondenza del perielio dell'orbita target, in modo tale che a variare per primo sarà l'afelio → *manovra afelio – perielio*.
- Nel secondo caso, al contrario, il primo impulso  $\Delta v_a$  si ha in corrispondenza dell'afelio, in modo da variare per primo il perielio → *manovra perielio – afelio*.

Verranno poi considerati diversi valori di afelio e perielio target, e pertanto diverse tipologie di orbite target, tra cui interne all'orbita di partenza, esterne o intermedie; lo scopo sarà pertanto capire, a seconda del tipo di orbita target, quale manovra conviene tra la afelio – perielio o la perielio – afelio.

#### 4.2.1 Caso 1: afelio – perielio

Per ogni orbita target verranno riportati sia i singoli impulsi agli apsi, e sia il costo totale dato dalla somma di essi; chiaramente non sono state considerate orbite “impossibili”, ovvero con  $R_p > R_a$ , e nemmeno l'orbita in cui  $R_a = R_p = 1$  in quanto coincide proprio con l'orbita di partenza.

Tabella 1: risultati cambio apside afelio-perielio

	$R_a = 0.95$			$R_a = 1$			$R_a = 1.05$			$R_a = 1.1$		
	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$
$R_p = 0.9$	-0.12554	-0.25485	1	0	-0.25376	1	0.12296	-0.25268	1	0.24341	-0.25159	1
	-0.12932	-0.2672	2	0	-0.26483	2	0.12141	-0.26245	2	0.23548	-0.26006	2
	-0.13329	-0.28057	3	0	-0.27666	3	0.11984	-0.27275	3	0.2278	-0.26885	3
	$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]		
	1.1908			0.7953			1.1521			1.4872		
$R_p = 0.95$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$
	-0.12554	-0.12607	1	0	-0.12554	1	0.12296	-0.12501	1	0.24341	-0.12448	1
	-0.12877	-0.12932	2	0	-0.12822	2	0.12093	-0.12711	2	0.23459	-0.12599	2
	-0.13214	-0.13272	3	0	-0.13098	3	0.11894	-0.12924	3	0.2262	-0.12749	3
	$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]		
0.7746			0.3847			0.7442			1.0822			
$R_p = 1$							$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$
							0.12296	0	1	0.24341	0	1
							0.12045	0	2	0.23369	0	2
							0.11802	0	3	0.22457	0	3
	$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]			$\Delta v_{totale}$ [km/s]		
						0.3614			0.7017			
$R_p = 1,05$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$	$\Delta v_p$ [km/s]	$\Delta v_a$ [km/s]	$n$
	0.12296	0.12245	1	0.24341	0.12194	1						
	0.11997	0.11948	2	0.23279	0.1185	2						
	0.11709	0.11663	3	0.22291	0.11521	3						

			$\Delta v_{totale}$ [km/s]	$\Delta v_{totale}$ [km/s]
			0.7186	1.0548

#### 4.2.2 Caso 2: perielio – afelio

Tabella 2: risultati cambio apside perielio-afelio

	$R_a = 0.95$			$R_a = 1$			$R_a = 1.05$			$R_a = 1.1$		
	$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$	$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$	$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$	$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$
$R_p = 0.9$	-0.25376	-0.1266	1	-0.25376	0	1	-0.25376	0.12396	1	-0.25376	0.24537	1
	-0.26601	-0.13042	2	-0.26483	0	2	-0.26364	0.12236	2	-0.26245	0.23725	2
	-0.27927	-0.13443	3	-0.27666	0	3	-0.27406	0.12073	3	-0.27145	0.22936	3
	$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]		
	1.1905			0.7953			1.1585			1.4996		
$R_p = 0.95$	-0.12554	-0.12607	1	-0.12554	0	1	-0.12554	0.12346	1	-0.12554	0.24439	1
	-0.12877	-0.12932	2	-0.12822	0	2	-0.12766	0.12141	2	-0.12711	0.23548	2
	-0.13214	-0.13272	3	-0.13098	0	3	-0.12982	0.11939	3	-0.12865	0.22701	3
	$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]		
	0.7746			0.3847			0.7473			1.0882		
$R_p = 1$							$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$	$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$
							0	0.12296	1	0	0.24341	1
							0	0.12045	2	0	0.23369	2
							0	0.11802	3	0	0.22457	3
							$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]		
						0.3614			0.7017			
$R_p = 1.05$							$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$	$\Delta V_a$ [km/s]	$\Delta V_p$ [km/s]	$n$
							0.12296	0.12245	1	0.12296	0.24241	1
							0.11997	0.11948	2	0.11948	0.23188	2
							0.11709	0.11663	3	0.11616	0.22207	3
							$\Delta V_{totale}$ [km/s]			$\Delta V_{totale}$ [km/s]		
						0.7186			1.0550			

Dai risultati, così come abbiamo già visto nella trattazione sulle manovre di aggiustamento perielio/afelio, si nota l'influenza dei vari parametri sul costo; noi infatti sappiamo che:

$$\Delta v_p = \frac{\mu}{4} \frac{\Delta R_a}{a_1^2 v_{1p}} \quad \Delta v_a = \frac{\mu}{4} \frac{\Delta R_p}{a_1^2 v_{1a}}$$

Si nota subito che nei casi in cui  $|\Delta R_a| > |\Delta R_p|$  (inclusendo quindi sia orbite esterne che interne), l'impulso in modulo risulta più dispendioso al perielio piuttosto che all'afelio, e viceversa; in realtà, anche la velocità dovrebbe incidere, e in modo opposto, in quanto in

generale  $v_p > v_a$ ; tuttavia ricordiamo che partiamo da orbite circolari, e pertanto l'influenza della velocità sul costo sarà minore rispetto agli altri parametri.

Notiamo anche l'influenza del semiasse  $a$  a cui effettuiamo l'impulso: per orbite esterne, vediamo che gli impulsi, giro dopo giro, diminuiscono in modulo (considerando lo stesso apside), e ciò si spiega considerando che il semiasse sta aumentando, e che la dipendenza del costo da essa sia  $\Delta v \propto 1/a^2$ .

Succede invece il contrario per le orbite interne, in quanto in tal caso il semiasse diminuisce giro dopo giro, e quindi i  $\Delta v$  aumenteranno.

C'è da dire inoltre che le orbite target circolari non rappresentano dei casi utili, in quanto appunto hanno  $|\Delta z_a| = |\Delta z_p|$ , e pertanto semiasse  $a$  che varia allo stesso modo tra caso afelio – perielio e perielio – afelio, quindi il costo che otteniamo sarà sempre uguale per i due tipi di manovre.

Infine, volendo ottimizzare le manovre, in modo da capire quando conviene la afelio – perielio e quando conviene invece la perielio – afelio, dovremmo, per ogni orbita target, confrontare l'entità delle variazioni di afelio e di perielio, sia in segno (quindi se si tratta di un'orbita esterna, interna o intermedia), e sia in quantità.

Tuttavia, più rapidamente, mettendo a confronto i casi si può dire che, in generale, conviene effettuare la manovra principale ai raggi più bassi:

- Per orbite target esterne, la manovra principale è quella di alzare l'afelio, quindi conviene prima variare l'afelio (perché l'orbita di partenza è il punto a raggio più basso), e poi alzare il perielio;
- Per orbite target interne, invece, la manovra principale è abbassare l'afelio, e quindi conviene prima abbassare il perielio, in modo da trovarmi nel punto a raggio più basso, e qui spingere per abbassare anche l'afelio.

### 4.3 Variazione combinata di apsidi e inclinazione

In questa seconda analisi vengono considerate stavolta orbite target con diversa inclinazione rispetto a quella di partenza: gli impulsi agli apsidi (coincidenti coi nodi), quindi, varieranno non solo afelio e perielio (e quindi semiasse  $a$  ed eccentricità  $e$ ), ma anche il parametro orbitale  $i$ .

Questo si traduce in un  $\Delta v$  non più nello stesso piano, ma bensì inclinato rispetto alla velocità iniziale di un angolo pari proprio alla variazione di inclinazione parziale che si vuole ottenere in quell'apside (perché abbiamo l'impulso al nodo).

Ora, considerando la variazione di inclinazione nel singolo giro, essa viene frazionata a seconda che si voglia variare di più al perielio o all'afelio:

$$\Delta i_p = x * \frac{\Delta i_{tot}}{n}$$

$$\Delta i_a = (1 - x) \frac{\Delta i_{tot}}{n}$$

#### 4.3.1 Ripartizione imposta come input

In questo primo studio, verranno inseriti come input diversi valori di  $x$ , compresi tra 0 (in cui si spinge fuori dal piano solo all'afelio) e 1 (idem al perielio), per diverse orbite target.

L'obiettivo sarà quindi capire dove conviene spingere fuori dal piano (tra afelio e perielio), e in che misura dosare tale variazione di inclinazione.

Tabella 3: ripartizione sul  $\Delta i$  imposta come input

		$\Delta i_p = 0$ $\Delta i_a = \Delta i$	$\Delta i_p = 0.25 * \Delta i$ $\Delta i_a = 0.75 * \Delta i$	$\Delta i_p = 0.5 * \Delta i$ $\Delta i_a = 0.5 * \Delta i$	$\Delta i_p = 0.75 * \Delta i$ $\Delta i_a = 0.25 * \Delta i$	$\Delta i_p = \Delta i$ $\Delta i_a = 0$
$R_a = 0.95 UA$ $R_p = 0.9 UA$	Perielio-Afelio	$\Delta V = 3.1124 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.8936 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.9435 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.1103 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.5507 \frac{km}{s}$
	Afelio-Perielio	$\Delta V = 3.1424 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.9015 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.9250 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.0658 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.4840 \frac{km}{s}$
$R_a = 1.1 UA$ $R_p = 0.9 UA$	Perielio-Afelio	$\Delta V = 3.3391 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.0323 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.0392 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.2049 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.6502 \frac{km}{s}$
	Afelio-Perielio	$\Delta V = 3.2745 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.9719 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.9761 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.1380 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.5731 \frac{km}{s}$
$R_a = 1.1 UA$ $R_p = 1.05 UA$	Perielio-Afelio	$\Delta V = 3.2767 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.8973 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.7886 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.7819 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.0210 \frac{km}{s}$
	Afelio-Perielio	$\Delta V = 3.2192 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.8596 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.7739 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 2.7904 \frac{km}{s}$	$\Delta V = 3.0491 \frac{km}{s}$

Come già visto dalle premesse teoriche, il cambio di piano semplice risulta molto dispendioso, nonostante non vari l'energia dell'orbita; quindi, si preferisce combinarlo con una manovra che vari l'energia, nel nostro caso una manovra di variazione degli apsi. Dai risultati poi, vediamo che:

- Nel caso di orbita interna, è evidente che il sottocaso più "costoso" è quello in cui la spinta fuori dal piano è effettuata solo al perielio, mentre all'afelio si spinge solo nel piano; infatti, sappiamo che in assenza di variazione di inclinazione, l'impulso all'afelio è quello più costoso; di conseguenza, quello che conviene fare è spingere fuori dal piano laddove l'impulso nel piano è già elevato, quindi all'afelio. Tuttavia, spingere esclusivamente all'afelio è controproducente, quindi conviene sempre effettuare una ripartizione del cambio di piano, mantenendo il contributo maggiore all'afelio.
- Nel caso di orbita intermedia, ovvero con perielio più interno all'orbita di partenza, e afelio esterno, è ancora più evidente come il fatto di cambiare piano solo ad un apside sia controproducente, in quanto i valori maggiori di costo si presentano ai due casi estremi (spinta fuori dal piano solo all'afelio o solo al perielio); inoltre, sappiamo che nelle orbite intermedie, così come per quelle interne, gli impulsi più costosi sono quelli all'afelio, e infatti notiamo che anche qui conviene spingere fuori dal piano più all'afelio e meno al perielio.

- Infine, nel caso di orbita esterna, al contrario, avendo impulsi nel piano più costosi al perielio e meno all'afelio, ovviamente converrà combinare ciò con cambi di piano più importanti al perielio, e meno all'afelio.

#### 4.3.2 Ripartizione proporzionale e costo minimo

Nell'analisi precedente, è stata considerata una ripartizione delle variazioni di inclinazione agli apsi basata su un semplice parametro  $x$  definito come input. Provando quindi diversi valori di  $x$ , è stato trovato il caso che presentava il costo minore in termini di  $\Delta v$ .

Dai risultati si è evinto che conviene compiere cambi di piano elevati dove il  $\Delta v$  nel piano è già elevato (quindi al perielio per orbite esterne, all'afelio per interne), mentre mantenere  $\Delta i$  bassi dove il  $\Delta v$  nel piano è basso.

Dunque, nella seguente analisi, vengono formulati dei criteri di ripartizione sulla base di questi risultati; in particolare, sono stati considerati 3 casi:

1. Il parametro di ripartizione  $x$  dipende dal valore di  $\Delta V$  nel piano. Così facendo, combineremo cambi di piano elevati con  $\Delta V$  elevati e viceversa:

$$x = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_p + \Delta V_a}$$

$$\Delta i_p = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_p + \Delta V_a} * \Delta i; \quad \Delta i_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_p + \Delta V_a} * \Delta i$$

2. Il parametro  $x$  dipende dal valore del cambio di afelio  $\Delta R_a$ ; infatti, quanto più è elevato il salto di afelio  $\Delta R_a$  richiesto, tanto più elevato sarà il  $\Delta V$  al perielio per ottenerlo, e viceversa. Anche in questo modo, quindi, combineremo variazioni di piano elevate con costi nel piano elevati.

$$x = \frac{\Delta R_a}{\Delta R_a + \Delta R_p}$$

$$\Delta i_p = \frac{\Delta R_a}{\Delta R_a + \Delta R_p} * \Delta i; \quad \Delta i_a = \frac{\Delta R_p}{\Delta R_a + \Delta R_p} * \Delta i$$

3. Il parametro  $x$  viene ricercato come punto di minimo della somma dei costi agli apsi. Ciò vuol dire che  $x$  viene mantenuto come incognita nelle espressioni dei cambi di piano:

$$\Delta i_p = x * \Delta i; \quad \Delta i_a = (1 - x) * \Delta i;$$

in questo modo anche le espressioni dei costi agli apsi, calcolati col teorema di Carnot, saranno in funzione di  $x$ :

$$\Delta V_p = \sqrt{V_p^2 + V_p'^2 - 2V_p V_p' \cos \Delta i_p} = \sqrt{V_p^2 + V_p'^2 - 2V_p V_p' \cos (x * \Delta i)}$$

$$\Delta V_a = \sqrt{V_a^2 + V_a'^2 - 2V_a V_a' \cos \Delta i_a} = \sqrt{V_a^2 + V_a'^2 - 2V_a V_a' \cos [(1 - x) * \Delta i]}$$

A questo punto, sommando i due costi, derivando in  $x$  e annullando la derivata, si ottiene il valore di  $x$  per cui il costo è minimo:

$$\Delta V_p + \Delta V_a = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\Delta V_p + \Delta V_a) = 0$$

Sostituendo tale valore di x in tutte le espressioni precedenti, si ottiene il costo minimo.

Quindi confrontando i risultati di quest'ultima analisi (che rappresenta quella ottimale), con i casi precedenti, troveremo quale di questi si avvicina di più al caso ideale, tenendo un occhio anche sulla rapidità di calcolo.

Saranno considerate anche stavolta 3 opzioni di orbite target: una interna a quella di partenza, una intermedia e una esterna, sempre partendo da un'orbita circolare; l'inclinazione dell'orbita target, come detto all'inizio, è sempre  $i_t = 5^\circ$ .

Nella tabella verranno riportati, oltre ai valori di costo, anche i valori di x assunti giro per giro; ovviamente, per il caso di ripartizione con  $\Delta R$ , il valore di x sarà unico, perché i salti di afelio e perielio sono costanti per ogni giro.

Tabella 4: confronto tra ripartizioni proporzionali e costo minimo

		Ripartizione proporzionale in $\Delta V$			Ripartizione proporzionale in $\Delta R$		Costo minimo				
		n	1	2	3	x		n	1	2	3
$R_a = 0.95 \text{ UA}$ $R_p = 0.9 \text{ UA}$	Perielio-Afelio	n	1	2	3			n	1	2	3
		x	0.33284	0.32898	0.32494	x	0.33333	x	0.29188	0.26777	0.24659
		$\Delta V$	2.8973 km/s			$\Delta V$	2.8981 km/s	$\Delta$	2.8928 km/s		
	Afelio-Perielio	n	1	2	3			n	1	2	3
		x	0.33004	0.32615	0.32207	x	0.33333	x	0.34723	0.3163	0.28896
		$\Delta V$	2.8968 km/s			$\Delta V$	2.8971 km/s	$\Delta$	2.8963 km/s		
$R_a = 1.1 \text{ UA}$ $R_p = 0.9 \text{ UA}$	Perielio-Afelio	n	1	2	3			n	1	2	3
		x	0.4916	0.47479	0.45798	x	0.5	x	0.44922	0.35736	0.28478
		$\Delta V$	3.0289 km/s			$\Delta V$	3.0392 km/s	$\Delta$	3.0073 km/s		
	Afelio-Perielio	n	1	2	3			n	1	2	3
		x	0.49173	0.4752	0.45867	x	0.5	x	0.45086	0.36135	0.2897
		$\Delta V$	2.9663 km/s			$\Delta V$	2.9761 km/s	$\Delta$	2.9462 km/s		
$R_a = 1.1 \text{ UA}$ $R_p = 1.05 \text{ UA}$	Perielio-Afelio	n	1	2	3			n	1	2	3
		x	0.66348	0.65995	0.65657	x	0.66667	x	0.68056	0.6492	0.61409
		$\Delta V$	2.7733 km/s			$\Delta V$	2.7736 km/s	$\Delta$	2.7728 km/s		
	Afelio-Perielio	n	1	2	3			n	1	2	3
		x	0.66623	0.66267	0.65925	x	0.66667	x	0.6183	0.58101	0.54228
		$\Delta V$	2.7738 km/s			$\Delta V$	2.7743 km/s	$\Delta$	2.7688 km/s		

Dai risultati si evince come la ripartizione proporzionale che più si avvicina al caso ideale, ovvero che presenta valori di x e di costo più vicini possibile ai valori corrispondenti al caso di costo minimo, è quella con  $\Delta V$ ; questo si poteva immaginare in quanto, in tale caso, il valore di x viene ricalcolato giro per giro e quindi "ottimizzato" per uno specifico valore di  $\Delta V_p$  e  $\Delta V_a$ , presentando però sicuramente dei tempi di calcolo maggiori.

Nel caso di ripartizione con  $\Delta R$ , al contrario, si hanno sì dei valori di costo minimo meno accurati, ma comunque con differenze sotto l'1%. Per di più, il valore del salto di afelio/perielio è costante per tutta la durata della missione, e pertanto lo stesso farà il parametro  $x$ , quindi è sicuramente più veloce in termini di tempi computazionali.

#### 4.4 Conclusioni

Ricapitolando, il modello impulsivo puro che abbiamo appena sviluppato permette di calcolare il costo, in termini di  $\Delta v$ , necessario a variare contemporaneamente il semiasse maggiore  $a$ , l'eccentricità  $e$  e l'inclinazione  $i$ , in un unico impulso che avverrà ad ogni apsidi, a sua volta considerato come coincidente con un nodo.

In particolare, sulla base dei risultati ottenuti, il modello di calcolo considererà:

- Nel caso di orbite esterne, una manovra che presenta il primo impulso al perielio, in modo da variare prima l'afelio, e successivamente il perielio; per orbite interne o intermedie, invece una manovra che parte dall'afelio, in modo da variare prima il perielio e infine l'afelio;
- Come criterio di ripartizione del cambio di inclinazione tra afelio e perielio, il criterio basato su  $\Delta R$ :

$$\Delta i_p = \frac{\Delta R_a}{\Delta R_a + \Delta R_p} * \Delta i; \quad \Delta i_a = \frac{\Delta R_p}{\Delta R_a + \Delta R_p} * \Delta i$$

In quanto, come si evince dai risultati, tale criterio risulta essere un ottimo compromesso tra accuratezza dei risultati e velocità di computazione.

## 5 Applicazione del modello impulsivo per la stima del costo ottenuto con propulsione elettrica

Definito, nel precedente capitolo, il modello impulsivo puro, passeremo ora alla sua applicazione su un set di asteroidi, aggiungendo delle opportune correzioni, in modo da stimare un costo che si avvicini il più possibile al valore ottenuto nelle ipotesi di Edelbaum, quindi di spinta continua nel tempo.

### 5.1 Introduzione

Il set di target è rappresentato da un insieme di 75 Near Earth Asteroids, i cui parametri orbitali sono contenuti all'interno dell'articolo "*Fast and Accurate Estimation of Fuel-Optimal Trajectories to Near-Earth Asteroids*", insieme anche a quelli della Terra; i primi dati ad essere calcolati, quindi, saranno le quote di afelio e perielio, di partenza e target, in modo da ottenere le variazioni richieste:

$$\Delta R_{a\ tot} = R_{at} - R_{a0} = a_t(1 + e_t) - a_E(1 + e_E)$$

$$\Delta R_{p\ tot} = R_{pt} - R_{p0} = a_t(1 - e_t) - a_E(1 - e_E)$$

Infatti, sono questi gli input che dovremo dare al nostro modello a impulsi, insieme anche alla variazione di inclinazione, calcolata semplicemente come differenza:

$$\Delta i_{tot} = i_t - i_E$$

Altro input è il numero di rivoluzioni attorno al sole, assunto ancora come  $n = 3$ .

In questo modo il modello calcolerebbe il costo di missione in termini di salto di velocità impulsivo, ma sappiamo che lo scopo è ottenere un risultato che in realtà si avvicini alla soluzione ottenuta nelle ipotesi di Edelbaum, quindi con bassa spinta continua nel tempo (propulsione elettrica); per di più, il nostro modello ipotizza che la linea dei nodi coincida con quella degli apsi, trascurando quindi l'angolo  $\omega$  presente tra esse (argomento del perielio). Per tale motivo, verranno effettuate diverse correzioni sul  $\Delta i$  totale, e le soluzioni derivate da esse saranno confrontate tra loro.

Il  $\Delta i$  che verrà considerato quindi sarà quello corretto, e definito come  $\Delta i_{equivalente}$ .

Dopodiché, così come visto nel precedente capitolo, si calcolano le variazioni di apsi e di inclinazione internamente ad un giro:

$$\Delta R_a = \frac{\Delta R_{a\ tot}}{n}$$

$$\Delta R_p = \frac{\Delta R_{p\ tot}}{n}$$

$$\Delta i = \frac{\Delta i_{equivalente}}{n}$$

$\Delta i$ , poi, viene ripartito ulteriormente tra perielio e afelio; nel precedente capitolo si è visto come il criterio di ripartizione proporzionale scelto è quello basato su  $\Delta R$ , in quanto più rapido (in termini di tempi computazionali) anche se meno accurato:

$$x = \frac{|\Delta R_a|}{|\Delta R_a + \Delta R_p|}$$

$$\Delta i_p = x * \Delta i$$

$$\Delta i_a = (1 - x) * \Delta i$$

A questo punto, vengono calcolati i  $\Delta v$ ; in particolare, come detto nel precedente capitolo, per asteroidi con orbita più bassa rispetto a quella della Terra, è stata adottata una manovra di tipo perielio – afelio (con variazione prima del perielio, e poi dell’afelio), mentre per le orbite target esterne o intermedie a quelle della Terra, si è adottato il caso afelio – perielio;

I  $\Delta v$  sono stati ricavati dal teorema di Carnot, come visto nella trattazione sulle manovre combinate:

$$\Delta v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1\cos\Delta i}$$

Con velocità e  $\Delta i$  che variano tra il valore all’afelio o il valore al perielio a seconda dell’apside in cui ci si trova;

si è calcolato infine il consumo di propellente tramite l’equazione di Tsiolkowskij, anch’essa vista nelle premesse teoriche:

$$m_p = m_0(1 - e^{-\Delta v/c})$$

## 5.2 Correzione sul $\Delta i$ : Edelbaum

Per tenere in considerazione ciò che è stato detto nell’introduzione, viene effettuata una prima correzione sulla variazione di inclinazione totale; questa correzione è esattamente la stessa che viene fatta nel modello originale di calcolo delle soluzioni con propulsione elettrica, ovvero le soluzioni di riferimento che poi noi andremo a confrontare con quelle del nostro modello.

Questo perché, anche nel calcolo nelle ipotesi di Edelbaum, considerando basse accelerazioni continue nel tempo, si effettua l’ipotesi che gli archi di spinta (che variano sia  $a$  ed  $e$ , che  $i$ ) siano comunque concentrati agli apsi, e pertanto è opportuno correggere considerando che:

- Se l’arco di spinta avviene lontano dal nodo, stiamo sottostimando il costo del cambio di inclinazione, quindi si considera un  $\Delta i$  maggiore;
- Se l’arco avviene in vicinanza ad un nodo, invece, si andrà a considerare un  $\Delta i$  minore.

La correzione sarà la seguente:

$$\Delta i_{equivalente} = \Delta i_{tot} * k$$

Il fattore di correzione  $k$  è dato da 4 contributi:

$$k = k_0 + k_1 k_2 k_3$$

In cui:

- $k_0 = 0,6$ : esso corrisponde al costo di un cambio di piano che avviene precisamente al nodo;
- $k_1 = 1 - \cos(2\omega_{target})$ : tiene conto della distanza tra nodi e apsidi dell'orbita target; infatti, se  $\omega_{target} = 0, \pi$ , nodi e apsidi coincidono e quindi  $k_1 = 0$ ;
- $k_2 = 1,5 * e_{target}$ : tiene conto dell'eccentricità dell'orbita target; infatti, ragionandoci, se l'eccentricità è bassa, c'è meno differenza di raggio tra un apside e un nodo, e pertanto l'impulso potrebbe essere effettuato in corrispondenza di un punto più vicino alla linea dei nodi, senza consumare troppo propellente extra; nel caso estremo di  $e_{target} = 0$ , siamo in un'orbita circolare, pertanto gli apsidi non esistono e l'impulso potrà essere effettuato proprio nei nodi;
- $k_3 = (3 + \cos \Delta\theta)/4$ : quest'ultimo tiene conto della lunghezza angolare dell'arco di spinta  $\Delta\theta$  (che nel nostro modello a impulsi sarà considerato come l'arco corrispondente all'impulso stesso); infatti, se l'arco di spinta è lungo (superiore a  $90^\circ$ ), lo spacecraft praticamente passa sia per la linea dei nodi, che per la linea degli apsidi, e quindi stiamo sostanzialmente spingendo a un nodo.

Ricordiamo che questa correzione è nata per il modello basato su basse spinte continue, che stima le soluzioni nelle ipotesi di Edelbaum; nel nostro particolare caso di modello a impulsi, però, non abbiamo archi di spinta, ma accelerazioni istantanee; tuttavia, nel momento in cui applichiamo il modello al set di asteroidi, stiamo sostanzialmente schematizzando archi di spinta continui con impulsi, e quindi potremmo calcolare la lunghezza dell'arco di spinta corrispondente al nostro impulso, in modo da effettuare la correzione anche al nostro modello.

Per farlo, viene prima di tutto stimato il  $\Delta v$  totale che avremmo nelle ipotesi di Edelbaum, calcolato come visto nelle premesse teoriche, in particolare nella trattazione sulle manovre in propulsione elettrica;

abbiamo visto che, partendo dalle equazioni di Gauss, ragionando in termini di variazioni singole di semiasse, eccentricità e inclinazione, e infine mediando su un giro, i costi per ottenere una singola variazione di uno dei parametri orbitali sono:

$$\frac{\Delta v_a}{v} = 0,5 \frac{\Delta a}{a}$$

$$\frac{\Delta v_e}{v} = 0,649 v \Delta e$$

$$\frac{\Delta v_i}{v} = \frac{\pi}{2} v \Delta i$$

In cui la velocità con cui il  $\Delta v$  viene adimensionato è quella della Terra attorno al Sole:

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_0}} = 29,78 \text{ km/s}$$

Ipotizzando in prima approssimazione che l'orbita sia perfettamente circolare, con

$$r_0 = 1 \text{ UA} = 1,496 * 10^8 \text{ km}$$

Il costo totale, per variazioni combinate dei 3 elementi orbitali, è dato da:

$$\Delta v_{tot \text{ adimensionale}} = \frac{\Delta v_{tot \text{ Edelbaum}}}{v_c} = \sqrt{\frac{\Delta v_a^2}{v_c^2} + \frac{\Delta v_e^2}{v_c^2} + \frac{\Delta v_i^2}{v_c^2}}$$

Anch'esso adimensionale, come possiamo vedere;

definiamo ora i parametri di input, utili anche a rendere adimensionali determinate grandezze;

la spinta dello spacecraft è:

$$T = 1,74 \text{ mN} = 1,74 * 10^{-6} \text{ kg} \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

la massa iniziale invece:

$$m_0 = 20 \text{ kg}$$

Entrambe verranno considerate come adimensionali; la spinta verrà adimensionata su accelerazione centrifuga della Terra e sulla massa dello spacecraft:

$$T_{adimensionale} = \frac{T}{acc_{earth} * m_0} = \frac{T}{\frac{v_0^2}{r_0} * m_0} = 0,0147$$

Mentre la massa è riferita a sé stessa:

$$m_{adimensionale} = 1$$

Ora possiamo calcolare la durata temporale totale degli archi di spinta, considerando l'accelerazione dello spacecraft:

$$\frac{T}{m_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

E sostituendo, troveremo la durata, adimensionale:

$$\Delta t_{adimensionale} = \frac{\Delta v_{tot \text{ adimensionale}}}{T_{adimensionale} / m_{adimensionale}}$$

Ora, per trovare la lunghezza angolare dell'arco, serve la velocità angolare della Terra attorno al Sole:

$$\omega_{earth} = \frac{v_0}{r_0} = 1,991 * 10^{-7} \frac{rad}{s}$$

Utilizzeremo nella formula la velocità angolare adimensionale, riferita a sé stessa, e quindi unitaria:

$$\omega_{adimensionale} = 1$$

Giungiamo infine alla lunghezza angolare di un singolo arco di spinta, dividendo per il numero di archi che avremo, ovvero il numero di impulsi,  $2n$ :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\omega_{earth}}{2n}$$

Sostituendo le grandezze adimensionali, troveremo  $\Delta\theta$  in radianti:

$$\Delta\theta = \Delta t_{adimensionale} \frac{\omega_{adimensionale}}{2n}$$

Una volta calcolata tale lunghezza angolare, si calcola così il  $k_3$ , quindi il  $k$  e si effettua la correzione sul  $\Delta i$ .

### 5.2.1 Risultati con correzione di Edelbaum

Tabella 5: correzione basata su Edelbaum

<b>numero</b>	<b>nome</b>	<b>a [UA]</b>	<b>e</b>	<b>i [°]</b>	<b><math>\omega</math> [°]</b>	<b>Raggio Afelio [UA]</b>	<b>Raggio Perielio [UA]</b>	<b>k</b>	<b><math>\Delta v</math> totale [km/s]</b>	<b>Massa di propellente [kg]</b>
1	2016-TB57	1,102	0,123	0,298	294,83	0,97	1,24	0,87	1,557	0,980
2	2013-WA44	1,100	0,060	2,302	56,51	1,03	1,17	0,71	1,610	1,012
3	2013-BS45	0,992	0,084	0,773	83,36	0,91	1,07	0,84	1,054	0,668
4	2016-CF137	1,090	0,100	2,445	132,55	0,98	1,20	0,74	1,562	0,983
5	2014-YD	1,072	0,087	1,736	117,64	0,98	1,17	0,79	1,260	0,796
6	2015-BM510	0,947	0,122	1,589	267,88	0,83	1,06	0,92	1,750	1,097
7	2014-SD304	1,168	0,108	2,294	7,63	1,04	1,29	0,60	2,257	1,404
8	2012-EC	1,152	0,137	0,913	306,08	0,99	1,31	0,82	1,933	1,209
9	2009-CV	1,116	0,151	0,943	22,40	0,95	1,28	0,65	1,975	1,234
10	2009-OS5	1,144	0,097	1,695	145,36	1,03	1,26	0,68	1,967	1,229

11	2004-JN1	1,085	0,176	1,500	143,97	0,89	1,28	0,75	2,395	1,487
12	2003-SM84	1,125	0,082	2,796	186,68	1,03	1,22	0,60	1,878	1,176
13	2012-UV136	1,007	0,139	2,213	209,90	0,87	1,15	0,69	1,985	1,240
14	1996-XB27	1,189	0,058	2,465	179,41	1,12	1,26	0,60	2,555	1,582
15	2017-BF29	1,181	0,134	2,614	302,39	1,02	1,34	0,82	2,516	1,559
16	2001-QJ142	1,062	0,086	3,104	184,38	0,97	1,15	0,60	1,426	0,899
17	2013-EM89	1,178	0,117	2,411	355,56	1,04	1,32	0,60	2,367	1,470
18	2012-HK31	1,074	0,121	2,205	222,67	0,94	1,20	0,74	1,756	1,102
19	2013-PA7	1,154	0,088	3,472	341,34	1,05	1,26	0,62	2,293	1,426
20	2015-PL57	1,120	0,144	1,631	112,63	0,96	1,28	0,90	2,015	1,258
21	2016-TB18	1,078	0,084	1,527	190,33	0,99	1,17	0,61	1,153	0,730
22	2012-UW68	1,136	0,155	2,472	15,38	0,96	1,31	0,63	2,177	1,356
23	2017-HK1	0,909	0,147	1,510	141,14	0,78	1,04	0,75	2,072	1,293
24	2004-VJ1	0,944	0,164	1,294	233,32	0,79	1,10	0,87	2,301	1,431
25	2015-TZ24	1,191	0,100	3,350	359,80	1,07	1,31	0,60	2,636	1,631
26	1999-AO10	0,912	0,111	2,623	313,18	0,81	1,01	0,75	1,788	1,121
27	2014-YN	0,892	0,134	1,208	239,38	0,77	1,01	0,86	1,949	1,219
28	2007-TF15	1,109	0,045	4,253	193,12	1,06	1,16	0,61	1,987	1,242
29	2001-CQ36	0,938	0,177	1,258	30,79	0,77	1,10	0,71	2,473	1,534
30	2014-EK24	1,008	0,070	4,805	340,59	0,94	1,08	0,62	1,734	1,088
31	2010-HA	0,960	0,196	2,183	251,30	0,77	1,15	1,00	2,925	1,801
32	2005-TG50	0,923	0,134	2,401	344,37	0,80	1,05	0,62	1,945	1,216
33	1999-CG9	1,062	0,064	5,155	138,60	0,99	1,13	0,66	1,995	1,247
34	2008-TX3	1,179	0,187	2,381	193,28	0,96	1,40	0,62	2,575	1,594
35	2006-FH36	0,955	0,199	1,587	280,72	0,77	1,14	1,05	2,873	1,770

36	2007-UY1	0,951	0,175	1,019	337,82	0,78	1,12	0,66	2,418	1,501
37	2013-XY20	1,131	0,106	2,863	78,63	1,01	1,25	0,85	2,127	1,326
38	2015-VV	1,137	0,105	4,007	212,78	1,02	1,26	0,67	2,265	1,409
39	2006-QV89	1,192	0,224	1,071	166,06	0,92	1,46	0,63	3,003	1,846
40	2016-VL3	1,294	0,151	2,161	55,80	1,10	1,49	0,80	3,540	2,158
41	1998-KY26	1,233	0,202	1,481	84,37	0,98	1,48	0,99	2,777	1,714
42	2000-AE205	1,165	0,138	4,459	271,63	1,00	1,32	0,88	2,935	1,807
43	2007-DD	0,987	0,116	2,624	329,00	0,87	1,10	0,68	1,741	1,092
44	2014-MF18	0,886	0,162	2,614	102,21	0,74	1,03	0,96	2,568	1,590
45	2009-RT1	1,156	0,106	4,150	159,66	1,03	1,28	0,63	2,419	1,502
46	2015-LJ	1,232	0,152	2,226	188,16	1,04	1,42	0,61	2,862	1,764
47	1998-HG49	1,201	0,113	4,195	44,82	1,07	1,34	0,71	2,951	1,816
48	2016-FY2	0,869	0,177	1,868	150,00	0,72	1,02	0,70	2,578	1,596
49	2003-LN6	0,856	0,210	0,660	214,65	0,68	1,04	0,75	3,027	1,861
50	2013-HP11	1,185	0,125	4,156	208,66	1,04	1,33	0,66	2,720	1,680
51	2014-UY	1,174	0,173	3,565	218,83	0,97	1,38	0,74	2,672	1,652
52	2017-EB3	1,039	0,153	2,840	25,62	0,88	1,20	0,67	2,238	1,393
53	2001-SW169	1,248	0,051	3,554	8,43	1,18	1,31	0,60	3,282	2,009
54	2009-HC	1,039	0,126	3,778	203,79	0,91	1,17	0,65	2,058	1,285
55	2015-TJ1	1,229	0,221	2,223	284,82	0,96	1,50	0,99	3,166	1,942
56	2005-ER95	1,223	0,159	3,341	175,88	1,03	1,42	0,60	2,874	1,771
57	2014-QH33	1,085	0,185	2,832	335,99	0,88	1,29	0,67	2,658	1,643
58	2001-QE71	1,078	0,159	3,035	148,41	0,91	1,25	0,70	2,366	1,470
59	2011-AA37	1,096	0,017	3,817	275,71	1,08	1,11	0,64	1,822	1,142
60	2017-HZ4	0,908	0,215	1,812	67,30	0,71	1,10	1,00	3,179	1,950

61	2014-FA44	1,293	0,189	0,977	45,26	1,05	1,54	0,78	3,338	2,042
62	2001-BB16	0,855	0,172	2,026	122,56	0,71	1,00	0,88	2,799	1,727
63	2012-UY68	1,175	0,228	2,901	70,30	0,91	1,44	0,98	3,428	2,093
64	2001-AV43	1,284	0,241	0,201	20,50	0,97	1,59	0,65	3,178	1,949
65	2012-WH	0,907	0,145	4,094	235,20	0,78	1,04	0,81	2,572	1,593
66	2016-UE	1,057	0,152	1,088	181,06	0,90	1,22	0,60	2,016	1,259
67	2016-CF194	1,290	0,204	1,643	114,96	1,03	1,55	0,90	3,342	2,044
68	2015-FG36	1,100	0,168	3,514	328,81	0,91	1,29	0,70	2,573	1,593
69	2006-XP4	0,873	0,215	0,515	293,81	0,69	1,06	1,00	3,085	1,895
70	2013-RV9	1,167	0,200	3,511	332,67	0,93	1,40	0,68	2,951	1,816
71	2012-BA35	1,072	0,118	5,715	145,44	0,95	1,20	0,67	2,529	1,567
72	2010-WR7	1,046	0,235	1,563	20,45	0,80	1,29	0,66	3,270	2,002
73	2017-BF30	1,045	0,130	3,623	123,09	0,91	1,18	0,82	2,283	1,420
74	2011-CG2	1,177	0,159	2,757	293,23	0,99	1,36	0,89	2,534	1,570
75	2016-TP11	1,037	0,178	1,538	168,61	0,85	1,22	0,62	2,427	1,506

Questa prima approssimazione ci serve in realtà solo ad avere un'idea qualitativa dei risultati ottenuti col modello messo a punto; a livello numerico, quindi, possiamo dire che i risultati sono sensati, sebbene siano forse ancora lontani dai risultati di riferimento, che vedremo più avanti;

infatti, questa prima correzione in realtà non si adatta in modo opportuno al nostro caso: il  $k$  così formulato è stato sviluppato, ricordiamo, per il modello basato sulle ipotesi di Edelbaum; in tale modello, la relazione che lega il  $\Delta\theta$  (da cui verrà poi calcolato il  $\Delta v$ ) e il  $\Delta i$  è quella per effetto medio di spinta:

$$\Delta i = \frac{2 T}{\pi m} \sin \beta \Delta \theta$$

Questo porterà quindi al calcolo di un costo  $\Delta v$  medio.

Per tale motivo il  $k$  con cui si corregge avrà valori compresi tra 0,6 e 1,35, a seconda che l'arco di spinta avvenga più vicino (costo effettivo minore del costo medio) o lontano (costo maggiore del costo medio) da un nodo.

Questo tipo di correzione, quindi, non può andare bene in un modello a impulsi, in quanto in questo caso non viene calcolato un costo medio, ma viene implicitamente assunto che gli impulsi avvengano tutti ai nodi, e quindi che nodi e apsi coincidano.

### 5.3 Correzione sul $\Delta i$ : confronto tra 3 diversi $k$

Sulla base di ciò che è stato detto in precedenza, si rende necessario un modo diverso di correggere il  $\Delta i$ , ovvero un  $k$  ad hoc per il modello a impulsi;

infatti, ragionandoci sopra:

- Nel caso in cui nodi e apsi coincidano per davvero, si deve avere  $k = 1$ , in modo che il costo del cambio di piano sia esattamente pari a quello richiesto;
- In caso contrario, si deve avere  $k > 1$ , e pertanto costo della variazione  $\Delta i$  maggiore rispetto al costo che prevede nodi e apsi coincidenti.

Quindi la formula proposta per questo nuovo tipo di correzione prevede  $k_0 = 1$ , e non più pari a 0,6 come nel caso precedente, e quindi:

$$k_{new} = 1 + k_1 k_2 k_3$$

Le espressioni dei tre  $k$  moltiplicandi sono le stesse del caso precedente.

In questa analisi quindi si procederà a effettuare un confronto tra i risultati della vecchia analisi, ovvero con la correzione "vecchia", i risultati con questa nuova correzione, e i risultati in assenza di correzioni.

Tabella 6: confronto tra correzioni

numero	nome	$a$ [UA]	$e$	$i$ [°]	$\omega$ [°]	Raggio Afelio [UA]	Raggio Perielio [UA]	$k_{old}$	$k_{new}$	Massa di propellente ( $k_{old}$ ) [kg]	Massa di propellente ( $k_{new}$ ) [kg]	Massa di propellente ( $k = 1$ ) [kg]
1	2016-TB57	1,102	0,123	0,298	294,83	0,97	1,24	0,87	1,27	0,980	0,984	0,981
2	2013-WA44	1,100	0,060	2,302	56,51	1,03	1,17	0,71	1,11	1,012	1,192	1,137
3	2013-BS45	0,992	0,084	0,773	83,36	0,91	1,07	0,84	1,24	0,668	0,706	0,682
4	2016-CF137	1,090	0,100	2,445	132,55	0,98	1,20	0,74	1,14	0,983	1,210	1,125
5	2014-YD	1,072	0,087	1,736	117,64	0,98	1,17	0,79	1,19	0,796	0,949	0,874
6	2015-BM510	0,947	0,122	1,589	267,88	0,83	1,06	0,92	1,32	1,097	1,194	1,114
7	2014-SD304	1,168	0,108	2,294	7,63	1,04	1,29	0,60	1,00	1,404	1,523	1,521
8	2012-EC	1,152	0,137	0,913	306,08	0,99	1,31	0,82	1,22	1,209	1,240	1,221
9	2009-CV	1,116	0,151	0,943	22,40	0,95	1,28	0,65	1,05	1,234	1,261	1,257
10	2009-OS5	1,144	0,097	1,695	145,36	1,03	1,26	0,68	1,08	1,229	1,312	1,293
11	2004-JN1	1,085	0,176	1,500	143,97	0,89	1,28	0,75	1,15	1,487	1,547	1,523

12	2003-SM84	1,125	0,082	2,796	186,68	1,03	1,22	0,60	1,00	1,176	1,378	1,376
13	2012-UV136	1,007	0,139	2,213	209,90	0,87	1,15	0,69	1,09	1,240	1,375	1,342
14	1996-XB27	1,189	0,058	2,465	179,41	1,12	1,26	0,60	1,00	1,582	1,693	1,693
15	2017-BF29	1,181	0,134	2,614	302,39	1,02	1,34	0,82	1,22	1,559	1,735	1,635
16	2001-QJ142	1,062	0,086	3,104	184,38	0,97	1,15	0,60	1,00	0,899	1,218	1,217
17	2013-EM89	1,178	0,117	2,411	355,56	1,04	1,32	0,60	1,00	1,470	1,595	1,595
18	2012-HK31	1,074	0,121	2,205	222,67	0,94	1,20	0,74	1,14	1,102	1,269	1,204
19	2013-PA7	1,154	0,088	3,472	341,34	1,05	1,26	0,62	1,02	1,426	1,679	1,664
20	2015-PL57	1,120	0,144	1,631	112,63	0,96	1,28	0,90	1,30	1,258	1,357	1,280
21	2016-TB18	1,078	0,084	1,527	190,33	0,99	1,17	0,61	1,01	0,730	0,839	0,836
22	2012-UW68	1,136	0,155	2,472	15,38	0,96	1,31	0,63	1,03	1,356	1,511	1,500
23	2017-HK1	0,909	0,147	1,510	141,14	0,78	1,04	0,75	1,15	1,293	1,355	1,330
24	2004-VJ1	0,944	0,164	1,294	233,32	0,79	1,10	0,87	1,27	1,431	1,478	1,445
25	2015-TZ24	1,191	0,100	3,350	359,80	1,07	1,31	0,60	1,00	1,631	1,833	1,833
26	1999-AO10	0,912	0,111	2,623	313,18	0,81	1,01	0,75	1,15	1,121	1,324	1,243
27	2014-YN	0,892	0,134	1,208	239,38	0,77	1,01	0,86	1,26	1,219	1,266	1,234
28	2007-TF15	1,109	0,045	4,253	193,12	1,06	1,16	0,61	1,01	1,242	1,637	1,631
29	2001-CQ36	0,938	0,177	1,258	30,79	0,77	1,10	0,71	1,11	1,534	1,569	1,558
30	2014-EK24	1,008	0,070	4,805	340,59	0,94	1,08	0,62	1,02	1,088	1,645	1,620
31	2010-HA	0,960	0,196	2,183	251,30	0,77	1,15	1,00	1,40	1,801	1,917	1,800
32	2005-TG50	0,923	0,134	2,401	344,37	0,80	1,05	0,62	1,02	1,216	1,356	1,346
33	1999-CG9	1,062	0,064	5,155	138,60	0,99	1,13	0,66	1,06	1,247	1,856	1,763
34	2008-TX3	1,179	0,187	2,381	193,28	0,96	1,40	0,62	1,02	1,594	1,719	1,711
35	2006-FH36	0,955	0,199	1,587	280,72	0,77	1,14	1,05	1,45	1,770	1,837	1,763
36	2007-UY1	0,951	0,175	1,019	337,82	0,78	1,12	0,66	1,06	1,501	1,524	1,520
37	2013-XY20	1,131	0,106	2,863	78,63	1,01	1,25	0,85	1,25	1,326	1,575	1,415
38	2015-VV	1,137	0,105	4,007	212,78	1,02	1,26	0,67	1,07	1,409	1,770	1,704
39	2006-QV89	1,192	0,224	1,071	166,06	0,92	1,46	0,63	1,03	1,846	1,869	1,867
40	2016-VL3	1,294	0,151	2,161	55,80	1,10	1,49	0,80	1,20	2,158	2,239	2,196
41	1998-KY26	1,233	0,202	1,481	84,37	0,98	1,48	0,99	1,39	1,714	1,782	1,715
42	2000-AE205	1,165	0,138	4,459	271,63	1,00	1,32	0,88	1,28	1,807	2,240	1,935

43	2007-DD	0,987	0,116	2,624	329,00	0,87	1,10	0,68	1,08	1,092	1,295	1,251
44	2014-MF18	0,886	0,162	2,614	102,21	0,74	1,03	0,96	1,36	1,590	1,760	1,606
45	2009-RT1	1,156	0,106	4,150	159,66	1,03	1,28	0,63	1,03	1,502	1,845	1,819
46	2015-LJ	1,232	0,152	2,226	188,16	1,04	1,42	0,61	1,01	1,764	1,855	1,853
47	1998-HG49	1,201	0,113	4,195	44,82	1,07	1,34	0,71	1,11	1,816	2,130	2,033
48	2016-FY2	0,869	0,177	1,868	150,00	0,72	1,02	0,70	1,10	1,596	1,665	1,645
49	2003-LN6	0,856	0,210	0,660	214,65	0,68	1,04	0,75	1,15	1,861	1,869	1,865
50	2013-HP11	1,185	0,125	4,156	208,66	1,04	1,33	0,66	1,06	1,680	2,003	1,951
51	2014-UY	1,174	0,173	3,565	218,83	0,97	1,38	0,74	1,14	1,652	1,940	1,834
52	2017-EB3	1,039	0,153	2,840	25,62	0,88	1,20	0,67	1,07	1,393	1,585	1,548
53	2001-SW169	1,248	0,051	3,554	8,43	1,18	1,31	0,60	1,00	2,009	2,178	2,177
54	2009-HC	1,039	0,126	3,778	203,79	0,91	1,17	0,65	1,05	1,285	1,625	1,580
55	2015-TJ1	1,229	0,221	2,223	284,82	0,96	1,50	0,99	1,39	1,942	2,070	1,946
56	2005-ER95	1,223	0,159	3,341	175,88	1,03	1,42	0,60	1,00	1,771	1,969	1,968
57	2014-QH33	1,085	0,185	2,832	335,99	0,88	1,29	0,67	1,07	1,643	1,811	1,778
58	2001-QE71	1,078	0,159	3,035	148,41	0,91	1,25	0,70	1,10	1,470	1,689	1,628
59	2011-AA37	1,096	0,017	3,817	275,71	1,08	1,11	0,64	1,04	1,142	1,501	1,462
60	2017-HZ4	0,908	0,215	1,812	67,30	0,71	1,10	1,00	1,40	1,950	2,022	1,949
61	2014-FA44	1,293	0,189	0,977	45,26	1,05	1,54	0,78	1,18	2,042	2,061	2,051
62	2001-BB16	0,855	0,172	2,026	122,56	0,71	1,00	0,88	1,28	1,727	1,818	1,752
63	2012-UY68	1,175	0,228	2,901	70,30	0,91	1,44	0,98	1,38	2,093	2,285	2,100
64	2001-AV43	1,284	0,241	0,201	20,50	0,97	1,59	0,65	1,05	1,949	1,950	1,950
65	2012-WH	0,907	0,145	4,094	235,20	0,78	1,04	0,81	1,21	1,593	1,938	1,747
66	2016-UE	1,057	0,152	1,088	181,06	0,90	1,22	0,60	1,00	1,259	1,291	1,291
67	2016-CF194	1,290	0,204	1,643	114,96	1,03	1,55	0,90	1,30	2,044	2,105	2,057
68	2015-FG36	1,100	0,168	3,514	328,81	0,91	1,29	0,70	1,10	1,593	1,861	1,789
69	2006-XP4	0,873	0,215	0,515	293,81	0,69	1,06	1,00	1,40	1,895	1,901	1,895
70	2013-RV9	1,167	0,200	3,511	332,67	0,93	1,40	0,68	1,08	1,816	2,056	2,001
71	2012-BA35	1,072	0,118	5,715	145,44	0,95	1,20	0,67	1,07	1,567	2,184	2,066
72	2010-WR7	1,046	0,235	1,563	20,45	0,80	1,29	0,66	1,06	2,002	2,045	2,037
73	2017-BF30	1,045	0,130	3,623	123,09	0,91	1,18	0,82	1,22	1,420	1,760	1,570

74	2011-CG2	1,177	0,159	2,757	293,23	0,99	1,36	0,89	1,29	1,570	1,785	1,624
75	2016-TP11	1,037	0,178	1,538	168,61	0,85	1,22	0,62	1,02	1,506	1,558	1,555

I risultati mostrano ovviamente dei valori di costo maggiori per  $k_{new}$ , generalmente intermedi per  $k = 1$  e minori per  $k_{old}$  (tranne per i rarissimi casi in cui  $k_{old} > 1$ ); questo perché all'aumentare di  $k$ , si presenta un cambio di piano  $\Delta i$  più elevato, e pertanto un costo più oneroso.

Ad ogni modo questo confronto, di per sé, non ha tanto senso, in quanto sarebbe più opportuno, a questo punto, effettuare un confronto con le soluzioni di riferimento.

È possibile già anticipare che le soluzioni che si avvicinano di più a quelle di riferimento sono quelle derivanti dalla correzione con  $k_{new}$ , e pertanto da ora in poi verranno considerate solo esse.

### 5.3.1 Confronto con soluzioni di riferimento

Le soluzioni di riferimento, come già accennato, sono quelle ottenute nelle ipotesi di Edelbaum, considerando archi di spinta continua in propulsione elettrica; del set di 75 NEAs considerati, sono stati esclusi 13 asteroidi, in quanto presentano variazioni di semiasse, eccentricità e/o inclinazione troppo elevati, e quindi si rilevano essere troppo fuori portata per eventuali missioni.

Pertanto, verranno considerati solo 62 asteroidi, e per essi verranno messi a paragone i risultati del nostro modello con le soluzioni di riferimento; verranno confrontati esclusivamente i risultati con  $k_{new}$ , in quanto rappresenta la correzione più opportuna per il nostro modello.

Tabella 7: confronto tra correzione finale e soluzioni di riferimento

N°	nome	a [UA]	e	i [°]	$\omega$ [°]	$R_a$ [UA]	$R_p$ [UA]	$k$	$m_p$ stimata [kg]	$m_{p\ ref}$ [kg]	Errore assoluto [kg]	Rank ( $\Delta m$ )	Errore percentuale [%]	Rank ( $\Delta m\%$ )
1	2016-TB57	1,102	0,123	0,298	294,83	0,97	1,24	1,271	0,984	1,056	-0,0722	53	-7,34	47
2	2013-WA44	1,100	0,060	2,302	56,51	1,03	1,17	1,112	1,192	1,197	-0,0050	58	-0,42	58
3	2013-BS45	0,992	0,084	0,773	83,36	0,91	1,07	1,239	0,706	1,007	-0,3004	27	-42,54	3
4	2016-CF137	1,090	0,100	2,445	132,55	0,98	1,20	1,141	1,210	1,434	-0,2232	38	-18,44	31
5	2014-YD	1,072	0,087	1,736	117,64	0,98	1,17	1,187	0,949	1,107	-0,1580	44	-16,65	35
6	2015-BM510	0,947	0,122	1,589	267,88	0,83	1,06	1,325	1,194	1,452	-0,2575	35	-21,56	26
7	2014-SD304	1,168	0,108	2,294	7,63	1,04	1,29	1,005	1,523	1,590	-0,0667	54	-4,38	53
8	2012-EC	1,152	0,137	0,913	306,08	0,99	1,31	1,222	1,240	1,568	-0,3278	24	-26,43	15
9	2009-CV	1,116	0,151	0,943	22,40	0,95	1,28	1,055	1,261	1,537	-0,2753	34	-21,83	24

10	2009-OS5	1,144	0,097	1,695	145,36	1,03	1,26	1,080	1,312	1,467	-0,1547	45	-11,79	43
11	2004-JN1	1,085	0,176	1,500	143,97	0,89	1,28	1,147	1,547	1,651	-0,1037	49	-6,70	49
12	2003-SM84	1,125	0,082	2,796	186,68	1,03	1,22	1,003	1,378	1,675	-0,2974	28	-21,59	25
13	2012-UV136	1,007	0,139	2,213	209,90	0,87	1,15	1,089	1,375	1,737	-0,3616	20	-26,29	17
14	1996-XB27	1,189	0,058	2,465	179,41	1,12	1,26	1,000	1,693	1,767	-0,0741	52	-4,38	54
15	2017-BF29	1,181	0,134	2,614	302,39	1,02	1,34	1,215	1,735	1,764	-0,0296	55	-1,71	56
16	2001-QJ142	1,062	0,086	3,104	184,38	0,97	1,15	1,001	1,218	1,738	-0,5207	7	-42,76	2
17	2013-EM89	1,178	0,117	2,411	355,56	1,04	1,32	1,002	1,595	1,684	-0,0885	51	-5,55	52
18	2012-HK31	1,074	0,121	2,205	222,67	0,94	1,20	1,143	1,269	1,818	-0,5496	6	-43,32	1
19	2015-PL57	1,120	0,144	1,631	112,63	0,96	1,28	1,304	1,357	1,788	-0,4307	11	-31,73	10
20	2016-TB18	1,078	0,084	1,527	190,33	0,99	1,17	1,007	0,839	1,023	-0,1849	42	-22,05	23
21	2012-UW68	1,136	0,155	2,472	15,38	0,96	1,31	1,025	1,511	1,910	-0,3987	18	-26,38	16
22	2017-HK1	0,909	0,147	1,510	141,14	0,78	1,04	1,146	1,355	1,756	-0,4014	16	-29,63	12
23	2004-VJ1	0,944	0,164	1,294	233,32	0,79	1,10	1,266	1,478	1,772	-0,2943	29	-19,92	29
24	2015-TZ24	1,191	0,100	3,350	359,80	1,07	1,31	1,000	1,833	1,950	-0,1169	48	-6,38	50
25	1999-AO10	0,912	0,111	2,623	313,18	0,81	1,01	1,149	1,324	1,537	-0,2127	39	-16,06	37
26	2014-YN	0,892	0,134	1,208	239,38	0,77	1,01	1,256	1,266	1,603	-0,3371	23	-26,63	14
27	2007-TF15	1,109	0,045	4,253	193,12	1,06	1,16	1,005	1,637	1,767	-0,1309	47	-8,00	45
28	2001-CQ36	0,938	0,177	1,258	30,79	0,77	1,10	1,114	1,569	1,856	-0,2865	31	-18,26	32
29	2014-EK24	1,008	0,070	4,805	340,59	0,94	1,08	1,018	1,645	1,857	-0,2126	40	-12,92	41
30	2010-HA	0,960	0,196	2,183	251,30	0,77	1,15	1,404	1,917	1,931	-0,0134	57	-0,70	57
31	2005-TG50	0,923	0,134	2,401	344,37	0,80	1,05	1,024	1,356	1,683	-0,3268	25	-24,09	20
32	2008-TX3	1,179	0,187	2,381	193,28	0,96	1,40	1,021	1,719	2,136	-0,4175	12	-24,29	19
33	2006-FH36	0,955	0,199	1,587	280,72	0,77	1,14	1,448	1,837	1,970	-0,1335	46	-7,27	48
34	2007-UY1	0,951	0,175	1,019	337,82	0,78	1,12	1,062	1,524	2,043	-0,5189	8	-34,05	8
35	2013-XY20	1,131	0,106	2,863	78,63	1,01	1,25	1,248	1,575	1,507	0,0677	62	4,30	62
36	2015-VV	1,137	0,105	4,007	212,78	1,02	1,26	1,068	1,770	1,870	-0,1001	50	-5,66	51
37	2006-QV89	1,192	0,224	1,071	166,06	0,92	1,46	1,026	1,869	2,234	-0,3651	19	-19,53	30
38	2000-AE205	1,165	0,138	4,459	271,63	1,00	1,32	1,277	2,240	2,237	0,0038	60	0,17	60
39	2007-DD	0,987	0,116	2,624	329,00	0,87	1,10	1,080	1,295	1,703	-0,4080	13	-31,50	11
40	2014-MF18	0,886	0,162	2,614	102,21	0,74	1,03	1,358	1,760	1,762	-0,0024	59	-0,14	59

41	2009-RT1	1,156	0,106	4,150	159,66	1,03	1,28	1,028	1,845	2,151	-0,3054	26	-16,55	36
42	2016-FY2	0,869	0,177	1,868	150,00	0,72	1,02	1,102	1,665	2,141	-0,4762	10	-28,60	13
43	2003-LN6	0,856	0,210	0,660	214,65	0,68	1,04	1,148	1,869	2,105	-0,2367	36	-12,67	42
44	2013-HP11	1,185	0,125	4,156	208,66	1,04	1,33	1,059	2,003	2,206	-0,2024	41	-10,10	44
45	2014-UY	1,174	0,173	3,565	218,83	0,97	1,38	1,137	1,940	2,290	-0,3495	22	-18,01	33
46	2017-EB3	1,039	0,153	2,840	25,62	0,88	1,20	1,069	1,585	2,242	-0,6567	3	-41,43	4
47	2009-HC	1,039	0,126	3,778	203,79	0,91	1,17	1,048	1,625	2,027	-0,4024	15	-24,77	18
48	2014-QH33	1,085	0,185	2,832	335,99	0,88	1,29	1,068	1,811	2,497	-0,6862	2	-37,89	7
49	2011-AA37	1,096	0,017	3,817	275,71	1,08	1,11	1,101	1,501	1,530	-0,0290	56	-1,93	55
50	2017-HZ4	0,908	0,215	1,812	67,30	0,71	1,10	1,401	2,022	2,429	-0,4066	14	-20,11	28
51	2001-BB16	0,855	0,172	2,026	122,56	0,71	1,00	1,278	1,818	2,102	-0,2840	32	-15,62	38
52	2012-UY68	1,175	0,228	2,901	70,30	0,91	1,44	1,384	2,285	2,466	-0,1804	43	-7,90	46
53	2012-WH	0,907	0,145	4,094	235,20	0,78	1,04	1,213	1,938	2,222	-0,2833	33	-14,62	39
54	2016-UE	1,057	0,152	1,088	181,06	0,90	1,22	1,000	1,291	1,517	-0,2262	37	-17,52	34
55	2015-FG36	1,100	0,168	3,514	328,81	0,91	1,29	1,098	1,861	2,481	-0,6195	4	-33,28	9
56	2006-XP4	0,873	0,215	0,515	293,81	0,69	1,06	1,396	1,901	2,652	-0,7515	1	-39,54	5
57	2013-RV9	1,167	0,200	3,511	332,67	0,93	1,40	1,082	2,056	2,534	-0,4774	9	-23,22	21
58	2010-WR7	1,046	0,235	1,563	20,45	0,80	1,29	1,062	2,045	2,334	-0,2897	30	-14,17	40
59	2017-BF30	1,045	0,130	3,623	123,09	0,91	1,18	1,215	1,760	2,117	-0,3570	21	-20,29	27
60	2011-CG2	1,177	0,159	2,757	293,23	0,99	1,36	1,290	1,785	2,184	-0,3995	17	-22,38	22
61	2016-TP11	1,037	0,178	1,538	168,61	0,85	1,22	1,017	1,558	2,167	-0,6088	5	-39,07	6
62	2019-PA7	1,153 9	0,088	3,472	93,278	1,05	1,26	1,202	1,814	1,803	0,0110	61	0,61	61

Dai risultati si nota come l'errore rispetto al caso reale, per la maggior parte dei target, è ancora molto elevato, e in particolare, per quasi tutti i risultati, è negativo.

Si potrebbe pensare di utilizzare un  $k$  maggiore visto che stiamo ancora sottostimando: gli errori più negativi, infatti, presentano valori di  $k$  vicini a 1, tranne qualche eccezione.

Si è provato quindi con  $k = \frac{\pi}{2}(k_0 + k_1 k_2 k_3)$ , mantenendo i  $k$  originali, in modo da ingrandire l'effetto penalizzante, ma rimanendo su  $k \approx 1$  quando  $k_1 k_2 k_3$  è piccolo.

Tuttavia, con questa nuova correzione, se per alcuni target si raggiunge la soluzione reale, per altri ci si allontana repentinamente, e pertanto non sono nemmeno stati riportati i risultati, in quanto si suppone che l'errore non dipenda da ciò.

### 5.3.2 Correlazioni tra errori e parametri

Per capire da cosa sono influenzati gli errori tra soluzione stimata e soluzione di riferimento, è stato utilizzato uno strumento che prende in input determinate grandezze, e fornisce in output dei coefficienti di correlazione tra le grandezze stesse; in particolare, questo strumento utilizza il comando Matlab *corrcoef*, il quale prende in ingresso una matrice contenente le grandezze da correlare, e dà come risultato un'altra matrice in cui l'elemento  $ij$  è il coefficiente di correlazione tra l' $i$  -esima e la  $j$  -esima grandezza.

Nel nostro caso ci interessa solo la correlazione che hanno i parametri con l'errore assoluto:

$$\text{errore assoluto} = m_p \text{ stimata} - m_p \text{ di riferimento}$$

Quindi verrà riportata solo una riga della matrice di correlazione:

Tabella 8: coefficienti di correlazione

$n$	$a$	$e$	$i$	$\cos(2\omega)$	$R_p$	$R_a$	$m_p$	$m_p - m_{p \text{ ref}}$
-0,18505	0,17882	-0,36864	0,18392	-0,11040	0,27311	0,08953	0,07191	1

Si nota che i coefficienti di correlazione più elevati in modulo riguardano l'eccentricità e la distanza del perielio; in particolare:

- Per l'eccentricità, il coefficiente è negativo, e pertanto ad eccentricità basse corrispondono errori elevati, e viceversa;
- Per il perielio, invece, il coefficiente è positivo, quindi ad  $R_p$  elevati corrispondono errori elevati; in realtà ciò è una diretta conseguenza della correlazione con l'eccentricità, in quanto sappiamo che  $R_p = a(1 - e)$ , e quindi quando ad eccentricità bassa corrisponde perielio alto, e quindi errore assoluto alto.

Questa correlazione è abbastanza logica, in quanto variazioni grandi di  $e$  comportano archi grandi, e quindi penalizzazioni maggiori rispetto a impulsi; ad ogni modo, il problema sembra non essere legato alla correzione su  $i$ , ma ad un altro effetto.

### 5.4 Correzione sul $\Delta v$

Una volta appurato che gli errori elevati ancora presenti tra le soluzioni calcolate e quelle di riferimento non dipendono dalla correzione sul  $\Delta i$ , è stata elaborata una seconda correzione, stavolta sul costo  $\Delta v$ .

Questa correzione si propone semplicemente di utilizzare ogni  $\Delta v$  impulsivo che abbiamo (ad ogni apside) per calcolare la lunghezza angolare dell'arco corrispondente  $\Delta\theta$ , e utilizzare quest'ultima poi per correggere il  $\Delta v$  stesso in modo differenziato:

$$\Delta v_{\text{corretto}} = \Delta v * \left( 1 + \text{coef} \frac{\Delta\theta}{2\pi} \right)$$

Per *coeff* viene utilizzato il rapporto tra il costo nelle ipotesi di Edelbaum e il costo impulsivo, entrambi nel piano; questo per fare in modo che la correzione venga “adattata” al caso propulsione elettrica.

$$coeff = \frac{\Delta v_{Edelbaum} \text{ nel piano}}{\Delta v_{impulsivo} \text{ nel piano}} - 1$$

Per il  $\Delta v$  impulsivo, si considera la relazione differenziale:

$$\frac{dv}{v} = 0,5 \frac{da}{a}$$

Per il costo in Edelbaum, invece, supponiamo le variazioni infinitesime uguali,  $da = de$ , le quali, se fossero ottenute con  $dv$  perpendicolari tra loro, avremmo come totale:

$$dv = \sqrt{(0,5da)^2 + (0,649de)^2} = 0,82|da|$$

In realtà, le due variazioni si combinano in un unico  $dv$  (in quanto  $de$  si può ottenere anche spingendo parallelamente a  $v$ , come per  $da$ , e tornerebbe ad annullarsi solo dopo un giro completo).

Quindi, assumendo un angolo  $\alpha$  lineare, in un giro il  $\Delta v$  di Edelbaum nel piano sarebbe la media dei due  $dv$  visti:

$$\frac{0,82 + 0,5}{2} = 0,66$$

Quindi, come *coeff*, dovremmo considerare:

$$coeff = \frac{0,66}{0,5} - 1 = 0,32$$

In realtà, poiché i risultati che si sono ottenuti con questo coefficiente sono ancora sottostimati, si è scelto di raddoppiarlo: verranno riportati esclusivamente i risultati con  $coeff = 0,64$ .

Quindi la correzione che andremo ad effettuare sarà:

$$\Delta v_{corretto} = \Delta v * \left( 1 + 0,64 \frac{\Delta\theta}{2\pi} \right)$$

Per il calcolo della lunghezza del singolo arco di spinta, si calcola innanzitutto la velocità angolare che si ha in corrispondenza di un apside, subito dopo l'impulso:

$$\omega_{apside} = \frac{v_{apside}}{r_{apside}}$$

Quindi il  $\Delta\theta$  nello stesso apside si calcola come abbiamo già visto:

$$\Delta\theta_{apside} = \frac{\Delta v}{T/m_{apside}} \omega_{apside}$$

In cui la massa  $m_{apside}$  è calcolata, volta per volta, al netto del consumo di propellente di eventuali precedenti impulsi.

Tabella 9: risultati finali

N°	nome	$a$ [UA]	$e$	$i$ [°]	$\omega$ [°]	$R_a$ [UA]	$R_p$ [UA]	$m_p$ stimata [kg]	$m_{p\ ref}$ [kg]	Errore assoluto [kg]	Rank ( $\Delta m$ )	Errore percentuale [%]	Rank ( $\Delta m\%$ )
1	2016-TB57	1,102	0,123	0,298	294,83	0,97	1,24	1,089	1,056	0,0329	34	3,02	41
2	2013-WA44	1,100	0,060	2,302	56,51	1,03	1,17	1,298	1,197	0,1002	46	7,72	50
3	2013-BS45	0,992	0,084	0,773	83,36	0,91	1,07	0,735	1,007	-0,2713	8	-36,90	1
4	2016-CF137	1,090	0,100	2,445	132,55	0,98	1,20	1,389	1,434	-0,0447	29	-3,22	26
5	2014-YD	1,072	0,087	1,736	117,64	0,98	1,17	1,056	1,107	-0,0512	25	-4,85	24
6	2015-BM510	0,947	0,122	1,589	267,88	0,83	1,06	1,294	1,452	-0,1578	16	-12,19	12
7	2014-SD304	1,168	0,108	2,294	7,63	1,04	1,29	1,719	1,590	0,1293	47	7,52	49
8	2012-EC	1,152	0,137	0,913	306,08	0,99	1,31	1,420	1,568	-0,1481	18	-10,43	16
9	2009-CV	1,116	0,151	0,943	22,40	0,95	1,28	1,418	1,537	-0,1192	22	-8,41	21
10	2009-OS5	1,144	0,097	1,695	145,36	1,03	1,26	1,458	1,467	-0,0088	33	-0,61	33
11	2004-JN1	1,085	0,176	1,500	143,97	0,89	1,28	1,725	1,651	0,0740	41	4,29	43
12	2003-SM84	1,125	0,082	2,796	186,68	1,03	1,22	1,532	1,675	-0,1430	19	-9,33	18
13	2012-UV136	1,007	0,139	2,213	209,90	0,87	1,15	1,484	1,737	-0,2530	9	-17,05	8
14	1996-XB27	1,189	0,058	2,465	179,41	1,12	1,26	1,861	1,767	0,0940	44	5,05	44
15	2017-BF29	1,181	0,134	2,614	302,39	1,02	1,34	2,028	1,764	0,2637	55	13,00	55
16	2001-QJ142	1,062	0,086	3,104	184,38	0,97	1,15	1,374	1,738	-0,3639	6	-26,47	4
17	2013-EM89	1,178	0,117	2,411	355,56	1,04	1,32	1,816	1,684	0,1318	48	7,26	47
18	2012-HK31	1,074	0,121	2,205	222,67	0,94	1,20	1,894	1,818	0,0759	42	4,01	42
19	2015-PL57	1,120	0,144	1,631	112,63	0,96	1,28	1,553	1,788	-0,2355	11	-15,16	11
20	2016-TB18	1,078	0,084	1,527	190,33	0,99	1,17	0,922	1,023	-0,1010	23	-10,95	14
21	2012-UW68	1,136	0,155	2,472	15,38	0,96	1,31	1,758	1,910	-0,1516	17	-8,62	20
22	2017-HK1	0,909	0,147	1,510	141,14	0,78	1,04	1,513	1,756	-0,2430	10	-16,06	9
23	2004-VJ1	0,944	0,164	1,294	233,32	0,79	1,10	1,614	1,772	-0,1579	15	-9,78	17
24	2015-TZ24	1,191	0,100	3,350	359,80	1,07	1,31	2,082	1,950	0,1328	49	6,38	46
25	1999-AO10	0,912	0,111	2,623	313,18	0,81	1,01	1,508	1,537	-0,0285	31	-1,89	30

26	2014-YN	0,892	0,134	1,208	239,38	0,77	1,01	1,434	1,603	-0,1693	14	-11,81	13
27	2007-TF15	1,109	0,045	4,253	193,12	1,06	1,16	1,804	1,767	0,0364	36	2,02	37
28	2001-CQ36	0,938	0,177	1,258	30,79	0,77	1,10	1,723	1,856	-0,1325	21	-7,69	22
29	2014-EK24	1,008	0,070	4,805	340,59	0,94	1,08	1,809	1,857	-0,0482	28	-2,66	27
30	2010-HA	0,960	0,196	2,183	251,30	0,77	1,15	2,121	1,931	0,1902	51	8,97	52
31	2005-TG50	0,923	0,134	2,401	344,37	0,80	1,05	2,205	1,683	0,5218	60	23,66	60
32	2008-TX3	1,179	0,187	2,381	193,28	0,96	1,40	2,048	2,136	-0,0879	24	-4,29	25
33	2006-FH36	0,955	0,199	1,587	280,72	0,77	1,14	2,026	1,970	0,0559	40	2,76	39
34	2007-UY1	0,951	0,175	1,019	337,82	0,78	1,12	1,662	2,043	-0,3809	5	-22,92	5
35	2013-XY20	1,131	0,106	2,863	78,63	1,01	1,25	1,822	1,507	0,3145	56	17,27	57
36	2015-VV	1,137	0,105	4,007	212,78	1,02	1,26	2,629	1,870	0,7595	61	28,88	61
37	2006-QV89	1,192	0,224	1,071	166,06	0,92	1,46	2,183	2,234	-0,0507	26	-2,32	28
38	2000-AE205	1,165	0,138	4,459	271,63	1,00	1,32	2,052	2,237	-0,1844	13	-8,98	19
39	2007-DD	0,987	0,116	2,624	329,00	0,87	1,10	2,144	1,703	0,4405	59	20,55	59
40	2014-MF18	0,886	0,162	2,614	102,21	0,74	1,03	2,170	1,762	0,4077	58	18,79	58
41	2009-RT1	1,156	0,106	4,150	159,66	1,03	1,28	1,944	2,151	-0,2069	12	-10,65	15
42	2016-FY2	0,869	0,177	1,868	150,00	0,72	1,02	2,192	2,141	0,0509	39	2,32	38
43	2003-LN6	0,856	0,210	0,660	214,65	0,68	1,04	2,366	2,105	0,2602	53	11,00	53
44	2013-HP11	1,185	0,125	4,156	208,66	1,04	1,33	2,380	2,206	0,1740	50	7,31	48
45	2014-UY	1,174	0,173	3,565	218,83	0,97	1,38	1,747	2,290	-0,5427	1	-31,07	2
46	2017-EB3	1,039	0,153	2,840	25,62	0,88	1,20	2,434	2,242	0,1918	52	7,88	51
47	2009-HC	1,039	0,126	3,778	203,79	0,91	1,17	2,351	2,027	0,3241	57	13,79	56
48	2014-QH33	1,085	0,185	2,832	335,99	0,88	1,29	2,052	2,497	-0,4447	4	-21,67	6
49	2011-AA37	1,096	0,017	3,817	275,71	1,08	1,11	1,625	1,530	0,0947	45	5,83	45
50	2017-HZ4	0,908	0,215	1,812	67,30	0,71	1,10	2,467	2,429	0,0382	38	1,55	34
51	2001-BB16	0,855	0,172	2,026	122,56	0,71	1,00	2,138	2,102	0,0358	35	1,68	36
52	2012-UY68	1,175	0,228	2,901	70,30	0,91	1,44	2,425	2,466	-0,0410	30	-1,69	31
53	2012-WH	0,907	0,145	4,094	235,20	0,78	1,04	2,258	2,222	0,0369	37	1,63	35
54	2016-UE	1,057	0,152	1,088	181,06	0,90	1,22	2,570	1,517	1,0528	62	40,97	62
55	2015-FG36	1,100	0,168	3,514	328,81	0,91	1,29	2,154	2,481	-0,3271	7	-15,19	10
56	2006-XP4	0,873	0,215	0,515	293,81	0,69	1,06	2,193	2,652	-0,4595	3	-20,96	7

57	2013-RV9	1,167	0,200	3,511	332,67	0,93	1,40	2,610	2,534	0,0761	43	2,92	40
58	2010-WR7	1,046	0,235	1,563	20,45	0,80	1,29	2,284	2,334	-0,0500	27	-2,19	29
59	2017-BF30	1,045	0,130	3,623	123,09	0,91	1,18	1,978	2,117	-0,1383	20	-6,99	23
60	2011-CG2	1,177	0,159	2,757	293,23	0,99	1,36	2,163	2,184	-0,0211	32	-0,98	32
61	2016-TP11	1,037	0,178	1,538	168,61	0,85	1,22	1,703	2,167	-0,4636	2	-27,22	3
62	2019-PA7	1,1539	0,088	3,472	93,278	1,05	1,26	2,066	1,803	0,2627	54	12,71	54

Si nota che gli errori sono scesi, e in particolare per la maggior parte degli asteroidi l'errore assoluto rimane al di sotto del valore 0,2, abbastanza accettabile; i risultati per cui l'errore è maggiore sono solo 18, il che non è male.

## 6 Conclusioni

Il lavoro di tesi appena illustrato ha reso quindi possibile lo sviluppo di un nuovo modello di stima del costo, in termini di propellente necessario, di missioni destinate al raggiungimento di asteroidi vicini alla Terra, i cosiddetti NEAs; come abbiamo visto, il modello è basato su un'approssimazione a impulsi, e stima pertanto il costo di missione di impulsi corrispondenti ad archi di spinta continui; per aderire in modo più plausibile possibile ai risultati di riferimento (basati appunto su ipotesi di spinta continua), il modello in questione utilizza delle correzioni derivanti dalle ipotesi di Edelbaum; come risultato finale, si è visto il raggiungimento di una buona compatibilità tra le soluzioni del modello sviluppato e le soluzioni di riferimento, presentando errori percentuali inferiori al 15% per la maggior parte degli asteroidi presi in considerazione; questo risultato può essere considerato in linea con le prestazioni di simili metodi algebrici (come per esempio il metodo di Lambert), dove il ridotto costo computazionale viene pagato, a volte, con risultati non proprio accurati.

Ulteriore studio che si potrebbe compiere a seguito di questo sarebbe il rendez-vous con l'asteroide target: finora si è studiata semplicemente la fase eliocentrica della missione, ovvero di uno spacecraft che è già uscito dalla sfera di influenza terrestre, e deve semplicemente entrare nell'orbita target; si stanno trascurando quindi la manovra di lancio dalla Terra, e lo studio del fasamento, ovvero dell'angolo relativo che la posizione della Terra e quella del target devono avere fra loro in modo che all'arrivo lo spacecraft "incontri" e quindi riesca ad atterrare sull'asteroide.

## 7 Riferimenti

- L.Casalino, L.Mascolo, A.Bosa, "Fast Estimation Method for trajectories to Near-Earth Asteroids", 2019
- L. Casalino, L. Mascolo, A. De Iulii, "Fast and accurate estimation of fuel-optimal trajectories to near-Earth asteroids", IAC-20-C1,7,10,x59339, 2020
- L. Casalino, Slide "Space Propulsion", Corso di Laurea Magistrale Propulsione Spaziale 2019
- Cornelisse, J.W., Schoyer, H.F.R., Wakker, K.F., "Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics", Pitman,London, 1979
- C. Pizzamiglio, "Appunti-Teoria del corso di Propulsione Spaziale", 2014
- <https://it.wikipedia.org>
- <https://www.americaspace.com>
- <https://www.esa.int>

## 8 Ringraziamenti

I primi e più importanti ringraziamenti vanno sicuramente al mio relatore, il prof. Lorenzo Casalino, senza cui non sarebbe stato possibile realizzare questo lavoro di tesi; Lo ringrazio non solo per la disponibilità tempestiva dimostrata, durante questo periodo di tesi, anche di fronte alle mie domande meno intelligenti chieste via mail, ma anche per essere uno dei professori più chiari e competenti che potessi conoscere, come ho potuto constatare durante i corsi frequentati con Lui.

Vorrei poi ringraziare il sottoscritto perché sì, sono orgoglioso; grazie a me per essere riuscito in poco tempo, tra una partita a Final Fantasy e un puzzle, a finire la tesi in tempo, anche perché dopo un anno che avevo finito gli esami era anche ora.

Dopodiché vorrei ringraziare la mia famiglia per essermi stata vicina durante i quotidiani momenti di malesangue e disagio, che continuano ad esserci e mi sa che continueranno ancora per molto.

A mio padre, sicuramente per tutti i soldi che ha dovuto versare per questo corso di laurea, e anche per quelli che ho speso personalmente (che lo ammetto...sono tanti); grazie anche per i frequenti battibecchi che non fanno altro che ricordarmi, e che dovrebbero anche far capire a te, che io la capa tosta da te l'ho presa.

A mia madre, per i messaggi e le chiamate di supporto anche quando io praticamente non lo chiamo mai (scusa), per le preoccupazioni costanti anche per le minime cose, ma che ogni tanto effettivamente sono azzeccate.

A Valeria, mia complice nel disagio quotidiano, battagliaiera come me; grazie anche per le risate in risposta ai video stupidi che ti mostro, perché anche se non te l'ho mai detto, la tua risata mi rende felice.

A Sergio che sto inserendo in questi ringraziamenti solo perché spero che ora diventi sindaco e la finisca di fare quella professione brutta lì; grazie per le stimolanti conversazioni, tipo quelle sul fatto che il Sole tramonti o no a Nord-Ovest (dopotutto da un architetto cosa si può pretendere), ma che poi si concludono con un tuo "ia ca c vogghj bain".

A Mattia, senza cui le giornate sarebbero tristi e spente; grazie per l'aiuto nelle costruzioni Lego senza cui assolutamente non ce l'avrei mai fatta, e per le lotte di Batman contro Goblin, anche se uno è DC e l'altro è Marvel, ma vabbè, l'importante è che Superman è più forte di tutti.

A Claudia, la nostra ciallodda; grazie per la gioia che porti ogni giorno semplicemente sorridendo e andandotene ovunque in giro a prendere cose e fare danni. Sei proprio una Rossa.

Un ringraziamento speciale va a Fabio (probabilmente ora mamma si emozionerà più di te) per la fratellanza riscoperta durante il soggiorno a Torino; nonostante il veleno buttato i primi giorni, ho riscoperto un punto di riferimento che mi ha inevitabilmente influenzato durante la mia infanzia; grazie per Tarantino, i fratelli Cohen, Siouxsie and the Banshees, per i Cure, grazie per i Bloc Party; e ora grazie a me, da parte tua, per prendermi cura di te e della casa ogni giorno; perché nonostante da piccolino con la bottiglia dello shampoo battette la testa, io gli voglio bene. Ah Viciè...

Rimanendo nella mia famiglia vorrei ringraziare tutti i miei cugini e zii per l'affetto; grazie a Vito e Annarita (al matrimonio ma f u casein) e a Milena. Grazie a Donatella, Stefano e Nataschia per l'allegria e il divertimento di Bielefeld.

Grazie a Leandra, con cui ho scoperto di poter condividere più di quello che pensavo; grazie per il tuo cuore gigantesco, per l'affetto che sei stata in grado di darmi ogni singolo momento da quando entrambi siamo nati. "s vonn acc'cchjt tutt e deu".

Grazie ai miei amici che mi vogliono sempre bene nonostante la maggior parte del tempo ignoro i gruppi e i messaggi; dopotutto, come non volermene;

A Simonetta, che sta tra gli amici perché ricordati che prima di essere mia cognata (ringraziammi) eri la mia compagna di banco, e sarai per sempre la mia lady lalalala; grazie per essere la mia unica fonte di notizie delle vite scandalose dell'élite di Conversano e dintorni e ormai anche Milano perché il bizocamento non ha limiti. Grazie per essere pazzeska ogni giorno.

A Francesco, il mio car DJ e questo è il suo unico ruolo...ah no volevo dire BFF; grazie per tutti i miei svarioni che sopporti, per gli audio no-sense che ti costringo ad ascoltare in cui divago e non arrivo mai al punto, grazie per la complicità che solo noi abbiamo.

Ad Alessia, per il suo buon cuore nonostante faccia di tutto per nascondere anche se ultimamente devo ammettere un po' meno ma soprattutto grazie per le rivelazioni shock because dell'ultimo periodo che in realtà mi hanno sciolto. Grazie per le bevute di birra in cui tu sei l'unica in grado di rispondere al fuoco...anzi il tuo fuoco rimane imbattuto.

A Giuseppe David, anche detto Giugipsis, per le sue fantastiche freddure da cui io sto ancora imparando; spero di diventare come te un giorno, maestro; grazie anche per essere forse l'unico del gruppo con cui è possibile condividere una citazione di qualche film.

A *Grazia*, nome **completo** Mariagrazia tuttattaccato; per PUNGERE

il tuo disturbo

OSSESSIVO-COMPULSIVO HO DECISO DI INCASINARE

Il Tuo paRaGrAFo.

~~Nonostante~~ il tuo cambiare idea molto rapidamente, grazie per essere una delle poche in grado di **ascoltarmi** e capirmi <sup>su</sup> molte cose.

A Michele, che di cognome fa "Reperibile", grazie per il tuo fantastico accento conversanese e per la tua finezza che ogni volta mi fanno esplodere le orecchie. Di allegria.

A Martina, la mia compagna di giochi; e a chi ci vuole malemale una makumba; grazie per capire che sto scherzando ogni volta che ti sfotto perché si...sto scherzando, come no. Ricordati che a 30 anni se non ci prende nessuno ci sposiamo noi e noi (l'avevo promesso pure a Simonetta, ma ormai sta sistemata).

A Ilaria, my best friend (Simonetta non lo deve sapere), she a real bad b\*\*\*\*. Grazie per le fantastiche foto che poi vabbè grazie a me per essere il soggetto. Per il tuo fantastico pianeta Namecc su cui l'atterraggio è sempre comodo; te lo invidierò per sempre.

A Lucia, per la tua volontà che certe volte mi fa pensare che non sei umana, ma che sei un automO. Grazie per le giornate al mare a cui arriviamo prendendo la complanarA; per le serate

in cui riesci a trovare parcheggio anche nelle zone più IT di Torino. Per le tue due grandissime doti di cui la gente si accorge ancor prima di guardarti in faccia: l'eleganza e la forza d'animo.

A Leo, il mio odontoiatra a distanza e futuro ortodontista, sempre disponibile per un consulto; grazie, la tua amicizia non sarà mai troppo tight come le tue maglie.

A Valeria, amica nerd riscoperta; grazie per le serate torinesi epocali, a te e ai tuoi coinquilini. Spero che ti aumentino lo stipendio da Caffè Vini, così che tu possa realizzare il tuo sogno di diventare avvocato ortofrutticolo. E comunque "Una Nuova Speranza" è l'episodio IV.

A Elia, il mio GCC personale, la mia unica guida spirituale e profana nei meandri di Torino; ammetto che senza di te non sarei sopravvissuto in una città così grande. Grazie per la tua sensibilità e la tua lealtà, grazie per le serate sfrascio in cui mi hai trascinato, grazie di tutto.

A Federica, la mia unica amica di origini miste siculo-slave. Grazie per i pomeriggi di studio nonostante la "minchia queta" fosse dilagante. Grazie per le fantastiche feste a casa tua (e per fortuna perché sennò come ti ritiravi?).

A Luciana, una delle ragazze più intelligenti e simpatiche che conosca; il mio personale ingegnere strutturista che mi farà la torta in additive manufacturing. Oppure in Zirconia stabilizzata con Ittria.

A Serena, buzziconia mia...come ta magni a Carbonara, eh tesò? E a Marco, per le bellissime serate trascorse assieme.

Grazie a Vito, a Francesco, a Federico per aver contribuito a rendere indimenticabile la mia permanenza a Torino.

Grazie a Costantino, Sergio, Donato, Roberto, Dante, Joseph, Michele e tutti i guys (ho sbagliato una lettera?) per la leggerezza delle serate di quest'ultimo anno.

Infine, a grande richiesta (e insistenza) vorrei riservare un ringraziamento per chi mi ha accompagnato proprio dall'inizio del mio percorso di tesi, e che mi starà accanto ancora per molto tempo: il mio apparecchio fisso, perché se con una laurea in Ingegneria Aerospaziale vuoi raggiungere le stelle, devi prima passare dalle stelline.

A tal proposito, ringrazio lo studio Odontoiatrico Pastore di Noicattaro; in particolare vorrei ringraziare Massimo per la sua impeccabile professionalità, Adele per la disponibilità di fronte a tutti gli elastici e i kit che le chiedo, alla dottoressa De Giglio per tutte le unghie che ha dovuto sacrificare per stringere questa bellissima tenaglia, e per ultima, ma non per importanza, Lucia, l'assistente alla poltrona migliore che ci sia (fa pure rima), per aver reso ogni visita più piacevole e allegra, perché dopotutto a cosa mi serve un sorriso perfetto se poi non c'è qualcuno che mi fa ridere, come fai tu?