

POLITECNICO DI TORINO

*Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale*



**Politecnico  
di Torino**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale  
Sessione di Laurea Luglio 2021

# Scambio termico in flussi turbolenti con particelle sospese in presenza di gradiente di temperatura imposto

CANDIDATO:

*Alessio Andreoletti*

*Matricola: 257182*

RELATORE:

*Prof. Michele Iovieno*

*Anno Accademico 2020/2021*



# Sommario

Lo studio dei flussi turbolenti si è consolidato in maniera consistente a partire dalle valutazioni del matematico Andrej Kolmogorov risalenti già al 1941. Alla base dell'ipotesi dello scienziato c'era il concetto che la turbolenza seguisse un determinato comportamento in ogni caso di studio, che prevedeva una distribuzione uniforme delle fluttuazioni all'interno di tutto il dominio, e che la differenza del modulo della velocità del fluido in due punti distinti dello spazio dipendesse solo dalla dissipazione e dal modulo della distanza tra i due punti. Le conseguenze di questa ipotesi sono fondamentalmente due: l'auto-similarità del campo di velocità, ovvero un comportamento regolare del campo; e la distribuzione gaussiana della funzione densità di probabilità delle fluttuazioni di velocità all'interno di tutto il dominio. Le stesse ipotesi vennero poi estese anche al campo degli scalari presenti nel flusso.

Tuttavia un campo scalare trasportato dal flusso ha un comportamento ben diverso, caratterizzato da una forte intermittenza e un allontanamento dalla Gaussianità, con la formazione di strutture che vengono definite *rampe* e *scarpate*.

Tramite l'utilizzo di tecniche di simulazione numerica diretta verrà studiato il comportamento della temperatura, approssimata come uno scalare passivo, in un flusso incomprimibile. Verrà poi studiato l'inserimento nel flusso di particelle di materiale diverso rispetto a quello del fluido, in particolare un materiale con densità molto maggiore di quella del fluido ( $\rho_p \gg \rho_f$ ), di dimensioni molto più piccole della scala di Kolmogorov e con un Reynolds del moto relativo molto minore di 1 ( $Re_p \ll 1$ ). La turbolenza viene considerata omogenea, incomprimibile e stazionaria, e si vedrà che le particelle stesse contribuiscono a influenzare il comportamento dello scalare passivo nel flusso.

Le particelle infatti possono essere studiate valutando due parametri: il *numero di Stokes* e il *numero di Stokes termico*. Il primo è indicativo dell'inerzia delle particelle, e misura il tempo che impiega la particella ad adeguarsi alle variazioni di velocità del fluido; il secondo invece quantifica l'inerzia termica delle particelle, e valuta quindi quanto facilmente esse riescono a scambiare calore con il fluido. In funzione di questi parametri le particelle interagiscono in maniera differente con il fluido che le trasporta.

In questo elaborato si è voluto indagare come le particelle influenzino i campi di temperatura, al variare del loro numero di Stokes e numero di Stokes termico, in una turbolenza con gradiente di temperatura media imposto.

Le condizioni iniziali del problema saranno imposte in modo completamente randomico, e di conseguenza la distribuzione delle particelle all'interno del dominio risulta omogenea e ben equilibrata. La presenza di una forzante porta al raggiungimento di uno stato statisticamente stazionario. Particelle più dense del fluido tendono a disporsi nel dominio in modo non omogeneo, andando a campionare il flusso in particolari regioni, dette *fronti* in cui si notano forti gradienti dello scalare.

Valutare in che modo le particelle si muovono all'interno di un flusso turbolento, dove si concentrano in maniera preferenziale, e come esse influenzano il flusso che le trasporta,

è di grande interesse in diversi campi dell'ingegneria e non solo. Dal trasporto degli inquinanti in atmosfera, alla diffusione di un soluto all'interno di una soluzione, alla concentrazione di plankton negli oceani, tutti questi fenomeni possono essere valutati partendo dai risultati ottenuti, allargando così lo spettro di interesse della trattazione a un numero assai vasto di campi.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Lo scalare passivo . . . . .	1
1.2	I flussi turbolenti . . . . .	4
1.2.1	La cascata energetica . . . . .	4
1.2.2	Le ipotesi di Kolmogorov . . . . .	5
1.3	Metodi numerici . . . . .	6
1.3.1	DNS per flussi turbolenti caricati con particelle . . . . .	6
1.3.2	Approccio lagrangiano per particelle puntiformi . . . . .	7
1.3.3	Approccio euleriano . . . . .	8
1.4	Equazione del moto della particella . . . . .	9
1.4.1	Il numero di Stokes e il numero di Stokes termico . . . . .	11
1.5	L'accoppiamento fluido - particelle . . . . .	11
1.5.1	One way coupling . . . . .	11
1.5.2	Two way coupling . . . . .	12
1.5.3	Four way coupling . . . . .	13
1.6	L'interazione fluido-particelle nella turbolenza . . . . .	13
1.7	Equazioni del modello fisico . . . . .	15
1.8	La soluzione numerica . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Il codice</b>	<b>21</b>
2.1	La relazione tra le scale . . . . .	22
2.2	La forzante . . . . .	24
2.3	L'inserimento dei parametri . . . . .	25
2.3.1	equazioni di Navier Stokes adimensionalizzate . . . . .	25
2.3.2	Adimensionalizzazione delle scale . . . . .	26
2.3.3	Definizione dei parametri relativi al fluido . . . . .	27
2.3.4	Definizione dei parametri relativi alle particelle . . . . .	29
2.4	Il tempo di calcolo . . . . .	30
<b>3</b>	<b>DNS con gradiente medio di scalare imposto</b>	<b>31</b>
3.1	Il codice gradscal . . . . .	32
3.2	Introduzione delle particelle . . . . .	35
3.2.1	Il modello delle collisioni . . . . .	36
3.3	Le nuove equazioni del problema . . . . .	37
3.3.1	Temperatura delle particelle . . . . .	42
3.4	La turboforesi . . . . .	43
3.5	L'inerzia delle particelle . . . . .	44

<b>4</b>	<b>Il post processing</b>	<b>45</b>
4.1	visualizzazione dei risultati . . . . .	45
4.2	Il numero di Nusselt . . . . .	47
4.2.1	Il numero di Nusselt in presenza di particelle . . . . .	48
4.3	La statistica del flusso . . . . .	49
4.3.1	La funzione densità di probabilità dello scalare passivo . . . . .	49
4.4	Lo spettro di scalare passivo e l'anisotropia locale . . . . .	50
4.4.1	Le funzioni di struttura . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Risultati</b>	<b>55</b>
5.1	Gli input . . . . .	55
5.2	Lo stato stazionario . . . . .	58
5.3	Visualizzazione dei campi di temperatura e velocità . . . . .	60
5.3.1	Variazione del numero di Stokes . . . . .	68
5.3.2	Variazione del numero di Stokes termico . . . . .	68
5.4	La posizione delle particelle nel campo di temperatura . . . . .	73
5.5	Le funzioni di struttura del campo di temperatura . . . . .	77
5.5.1	Il campo di temperatura del fluido (carrier flow) . . . . .	77
5.5.2	Il campo di temperatura delle particelle . . . . .	81
5.6	Le funzioni di struttura del campo di velocità . . . . .	85
5.6.1	Il campo di velocità del fluido (carrier flow) . . . . .	86
5.6.2	Il campo di velocità delle particelle . . . . .	88
5.7	Il numero di Nusselt . . . . .	91
5.8	Le PDF dello scalare passivo . . . . .	93
5.8.1	La PDF della temperatura del carrier flow . . . . .	93
5.8.2	La PDF della temperatura delle particelle $\theta_p$ . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>101</b>

# List of Figures

1.1	Generazione sperimentale di flussi turbolenti [23]. Nel caso (a), corrispondente al getto, l'aria calda si meschia con quella più fredda dell'ambiente, producendo così fluttuazioni di temperatura.	
	Nel caso (b) invece, il gradiente di scalare può essere prodotto ancora prima della griglia, nella camera di pressurizzazione, dove vengono posizionati fili riscaldati. In alternativa, la griglia stessa può essere scaldata per produrre fluttuazioni nella temperatura, che corrisponde allo scalare passivo. In ciascuno dei casi comunque, si nota che la varianza della temperatura decade allontanandoci dalla posizione della griglia.	
	Corrsin [8], trascurando gli effetti legati all'azione delle pareti, ha dimostrato che il gradiente medio di temperatura si auto sostiene in direzione $x$ , in virtù del fatto che la turbolenza è isotropa, e non c'è divergenza del flusso.	3
3.1	sfalsamento di mezzo blocco in caso di particelle provenienti da blocchi diversi. Le particelle a cavallo della frontiera ora sono incluse nel nuovo blocco. È sufficiente effettuare il calcolo due volte per non perdersi nessuna coppia di particelle. . . . .	37
4.1	Il dominio di calcolo del problema è un cubo tridimensionale, suddiviso in sottosezioni pari al numero di processori utilizzati . . . . .	45
4.2	alternative per la selezione del piano da mantenere costante. Si nota che, considerando il caso $X_2 = cost$ la suddivisione è più facile, in quanto, nel caso di utilizzo di 16 processori, il piano è diviso in sole quattro parti . .	46
4.3	considerando il segmento di lunghezza $2\pi$ , si nota come, per un intervallo stabilito a ridosso dell'estremità del dominio, la stessa particella viene contata due volte, per via dell'ipotesi di periodicità della soluzione che è stata effettuata . . . . .	46
4.4	raggiungimento del valore asintotico di $5/3$ dello spettro dello scalare passivo. Con i quadrati sono contrassegnati gli spettri scalari relativi al flusso di taglio, mentre con i cerchi quelli relativi al caso di turbolenza generata dalla griglia. Si nota che, nel caso di turbolenza di griglia, il valore asintotico è raggiunto per valori di $Re_\lambda$ molto inferiori rispetto a quelli dello shear flow.	52

5.1	raggiungimento dello stato stazionario per il caso in cui $St = 0.1$ e $St_\theta = 6.24St$ . Si nota che, dal momento che il tempo adimensionale raggiunge un valore pari a 8, la varianza della temperatura raggiunge uno stato di equilibrio. La curva non mostra un andamento perfettamente stazionario a causa della forte volatilità dei dati. Tuttavia le oscillazioni che si notano possono essere considerate trascurabili . . . . .	59
5.2	Raggiungimento dello stato stazionario per il caso di diversi numeri di Stokes. Si nota che non tutte le curve raggiungono la stazionarietà alla stessa velocità e allo stesso modo. Ciò che si osserva per tutti i casi in esame però è una forte oscillazione iniziale, a seguito della quale la varianza della temperatura inizia ad assestarsi su un valore pressapoco stazionario . . . . .	60
5.3	$St = 0.1$ ; $St_\theta = 0.624$ ; $\phi = 10^{-4}$ Evoluzione del campo di temperatura dall'istante iniziale al raggiungimento dello stato stazionario per il caso di gradiente medio di temperatura imposto. Si nota la delineazione dei fronti di temperatura in alcune aree del dominio. In particolare si nota come al centro dei vortici le fluttuazioni di temperatura siano negative, e quindi inferiori rispetto alla temperatura media imposta. Al margine dei vortici invece la temperatura mostra fluttuazioni sensibilmente più alte rispetto al caso iniziale. Osservando la seconda e la terza figura, entrambe relative al raggiungimento dello stato stazionario, si nota come alla vista siano diverse, ma l'ampiezza dei vortici è rimasto pressoché identico, così come le fluttuazioni di temperature raggiunte . . . . .	62
5.4	$St = 0.1$ ; $St_\theta = 0.624$ ; $\phi = 10^{-4}$ Evoluzione del campo di velocità dall'istante iniziale al raggiungimento dello stato stazionario. Come per il caso del campo di velocità, anche in questo caso si nota l'azione della turboforesi nella generazione di fronti. Si noti però che ora le differenze tra lo stato iniziale e quello stazionario risultano meno evidenti in termini di dimensione dei vortici e formazione dei fronti. . . . .	64
5.5	Confronto del campo di temperatura per il caso di $St = 0.1$ e $St_\theta = 0.624$ all'istante iniziale e al raggiungimento dello stato stazionario per il caso in cui la forzante è deterministica (sulla sinistra) e per il caso di forzatura con gradiente medio di temperatura (sulla destra) . . . . .	66
5.6	Confronto del campo di velocità tra il caso "linforcing" e il caso "gradscal" per $St = 0.1$ e $St_\theta = 0.624$ . In alto sono riportati i confronti fatti all'istante iniziale, in basso invece quelli fatti al raggiungimento dello stato stazionario. Si nota ora che, dal momento che la forzante per la velocità rimane di tipo deterministico sia per il caso "gradscal" che per il caso "linforcing", i risultati sono perfettamente confrontabili . . . . .	67
5.7	Confronto dei campi di temperatura e di velocità del fluido allo stato stazionario per i diversi casi di numero di Stokes analizzati. Si mantiene $St_\theta = 6.24St$ . La frazione volumica è $\phi = 10^{-4}$ . . . . .	69
5.8	Confronto dei campi di temperatura e di velocità del fluido allo stato stazionario per il caso di $St = 1$ e $St_\theta = [0.2 : 2]$ . La frazione volumica è $\phi = 10^{-4}$ . . . . .	71
5.9	Confronto dei campi di temperatura e di velocità del fluido allo stato stazionario per il caso di $St = 0.1$ e $St_\theta = [0.2 : 2]$ . La frazione volumica è $\phi = 10^{-4}$ . . . . .	72

5.10	sovrapposizione del campo di temperatura del fluido e della posizione delle particelle all'istante iniziale (sulla sinistra), e al raggiungimento dello stato stazionario (sulla destra) . . . . .	74
5.11	Posizione delle particelle nel campo di temperatura per il caso di diversi $St$ e $St_\theta = 6.24St$ . La frazione volumica $\phi = 10^{-4}$ viene mantenuta costante per tutte le simulazioni, e di conseguenza il numero di particelle presenti varierà a seconda del numero di Stokes considerato . . . . .	75
5.12	Posizione delle particelle per diversi casi di $St$ e $St_\theta$ . $\phi = 10^{-4}$ . . . . .	76
5.13	Structure functions della temperatura del carrier flow per il caso di $St = 0.5$ e $St = 1$ e $St_\theta = 6.24St$ . Indipendentemente dall'ordine delle funzioni, queste mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo e un secondo tratto lineare nel tratto inerziale . . . . .	77
5.14	Structure functions della temperatura del carrier flow per il caso di $St = 0.5$ e $St = 1$ al variare di $St_\theta$ . Si nota che $S_T^2$ decrescono in maniera monotona all'aumentare di $St_\theta$ quando l'accoppiamento termico bidirezionale viene tenuto in considerazione, ma le minime differenze nel campo di temperatura del fluido si notano per valori di $St_\theta$ dell'ordine dell'unità. . . . .	79
5.15	andamento degli esponenti delle leggi di potenza che interpolano le funzioni di struttura del campo di temperatura del fluido in funzione dell'ordine delle funzioni di struttura stesse per $St = 0.5$ e $St = 1$ a diversi $St_\theta$ . . .	80
5.16	Andamento degli esponenti delle leggi di potenza interpolanti il tratto inerziale del campo di temperatura del fluido. Si noti come le curve tendano ad allontanarsi dalla curva tratteggiata, indicando una certa intermittenza anche alle scale del flusso in cui, nel campo di velocità, sarebbe rispettata l'ipotesi di Kolmogorov . . . . .	81
5.17	Structure functions della temperatura delle particelle per il caso di $St = 0.5$ e $St = 1$ e $St_\theta = 6.24St$ . Come le curve relative alla temperatura del carrier flow, anche quelle relative alla temperatura delle particelle mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo e un secondo tratto lineare nel tratto inerziale. Al diminuire della distanza adimensionale $r/\eta$ le funzioni tendono a diminuire, ma non arriveranno a zero come nel caso del campo del carrier flow. . . . .	82
5.18	Structure functions della temperatura del carrier flow per il caso di $St = 0.5$ e $St = 1$ al variare di $St_\theta$ . . . . .	83
5.19	andamento degli esponenti delle leggi di potenza che interpolano le funzioni di struttura in funzione dell'ordine delle SF per $St = 0.5$ e $St = 1$ a diversi $St_\theta$ . . . . .	84
5.20	Structure functions del campo di velocità del carrier flow per il caso di $St = 0.5$ e $St_\theta = 6.24St$ . Indipendentemente dall'ordine delle funzioni, queste mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo, analogamente a quanto accadeva per il campo di temperatura . . . . .	86
5.21	funzioni di struttura del secondo ordine della velocità del carrier flow per diversi $St$ , ovvero per diversi valori di inerzia delle particelle trasportate nel flusso. . . . .	87
5.22	Esponenti della funzione di struttura della velocità del carrier flow in funzione dell'ordine della funzione di struttura . . . . .	88

5.23	Structure functions del campo di velocità delle particelle per il caso di $St = 0.5$ e $St = 1$ e $St_\theta = 6.24St$ . Indipendentemente dall'ordine delle funzioni, queste mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo, analogamente a quanto accadeva per il campo di temperatura	89
5.24	andamento delle funzioni di struttura di velocità delle particelle $S_u^2(r)$ per il caso dei due numeri di Stokes considerati. Si nota che le curve si differenziano in modo marcato, mostrando una tendenza a smorzare la differenza di velocità tra due punti considerati nel caso in cui $St = 0.5$ . . .	89
5.25	Esponenti della funzione di struttura della velocità delle particelle in funzione dell'ordine della funzione di struttura. Si nota come le curve non seguano minimamente un andamento lineare, che sarebbe stato indicativo della gaussianità della funzione di struttura . . . . .	90
5.26	Variazione del numero di Nusselt per $St = 0.5$ e $St = 1$ al variare di $St_\theta$ .	92
5.27	Andamento delle PDF della temperatura del carrier flow per due diversi $St$ al variare di $St_\theta$ . I risultati sono stati ottenuti dall'ing. M.Carbone [7]. I parametri di input con cui sono stati ottenuti i risultati sono $\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ; $\rho_p/\rho_f = 1000$ e $Re = 244$ . . . . .	94
5.28	$\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ; $\rho_p/\rho_f = 1000$ e $Re = 244$ . Andamento delle PDF per la temperatura delle particelle [7]. Le figure (a) e (c) fanno riferimento al caso di feedback termico delle particelle (accoppiamento bidirezionale), i casi (b) e (d) invece si riferiscono al caso di accoppiamento unidirezionale, che trascura il feedback termico delle particelle sul fluido . . . . .	96
5.29	$\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ; $\rho_p/\rho_f = 1000$ e $Re = 244$ . Andamento della PDF di $\dot{\theta}_p$ [7]. I risultati sono di nuovo rapportati alla deviazione standard di $\dot{\theta}_p$ in ascisse e moltiplicati per la deviazione standard di $\dot{\theta}_p$ in ordinate. I casi (a) e (c) fanno riferimento a accoppiamento di tipo bidirezionale, mentre (c) e (d) al caso unidirezionale, senza feedback della temperatura. . . . .	98
5.30	$\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ; $\rho_p/\rho_f = 1000$ e $Re = 244$ . Scostamento della curva della PDF del rateo di cambiamento della temperatura delle particelle, $\dot{\theta}_p$ rispetto alla funzione gaussiana, tratteggiata in nero, per il caso di diversi $St$ e senza considerare l'azione del feedback delle particelle . . . . .	99

# Capitolo 1

## Introduzione

In ambito ingegneristico, nel campo della fluidodinamica, è molto comune imbattersi in una categoria di flussi apparentemente caotici, in cui grossi vortici di dimensioni confrontabili a quelle del sistema che li generano si alternano a vortici di dimensione sempre più ridotta, in un meccanismo di non semplice intuizione. Questi flussi sono detti *flussi turbolenti*.

Questa categoria di flussi è estremamente comune anche in natura. Basti pensare ad esempio alla meccanica dell'atmosfera, o al flusso di un fiume.

Questo elaborato vuole indagare gli scambi termici che avvengono all'interno di un flusso turbolento omogeneo statisticamente stazionario forzato da un gradiente di temperatura nel caso di particelle sospese al suo interno. Considerando piccole differenze di temperatura all'interno del flusso, il campo di temperatura si comporta come uno *scalare passivo*, viene cioè trasportato e diffuso dal moto del fluido, ma ha un effetto dinamico trascurabile sul flusso.

L'interazione tra campi scalari e particelle è oggetto di studio comune in diverse applicazioni, che spaziano dallo studio dei fenomeni di accrescimento all'interno delle nuvole, che consistono in un grande numero di particelle di acqua sospese in aria, alla diffusione di plankton all'interno dell'oceano, al trasporto e diffusione di particelle di sabbia all'interno di fiumi e mari, fino al trasporto delle ben note polveri sottili all'interno dell'aria delle nostre città.

Se è vero che i flussi turbolenti sono una materia ormai ampiamente esplorata in ambito ingegneristico, è altresì vero che la caratterizzazione dell'interazione tra campi scalari e particelle all'interno dei flussi turbolenti è un argomento ancora poco esplorato.

### 1.1 Lo scalare passivo

Lo scalare passivo si definisce come una quantità scalare trasportata dal flusso presente in concentrazione così bassa da non essere in grado di influenzare gli effetti dinamici del moto del fluido. Alcuni esempi di scalari passivi possono essere rappresentati dalle seguenti casistiche [23]:

- un getto debolmente riscaldato mostra il comportamento di scalare passivo nel momento in cui l'aria fredda entra all'interno del getto dall'esterno e si meschia all'aria più calda

- una goccia di vernice diluita in acqua, che si diffonde all'interno del fluido, ma allo stesso tempo l'acqua non risulta sensibilmente influenzata dalla presenza della vernice
- sostanze chimiche combustibili in un composto diluito che vengono introdotte in maniera indipendente l'una dall'altra. La turbolenza provvede all'operazione di mescolamento, da cui quindi può avviarsi il processo di combustione

Lo scopo della trattazione è capire come lo scalare passivo è correlato al campo di velocità in un flusso turbolento stazionario nel tempo e con una forzante imposta alle grandi scale del flusso.

Vengono poi studiate le principali statistiche dello scalare, come ad esempio la funzione densità di probabilità (*PDF*) e le funzioni di struttura, analizzando le differenze che intercorrono tra i diversi casi simulati.

### Generazione di flussi turbolenti

A livello sperimentale, la generazione di flussi turbolenti può avvenire principalmente in due modalità, che danno vita a due categorie distinte di flussi turbolenti, come illustrato da Warhaft [23].

La prima categoria comprende i flussi di taglio, o *shear flows*, e include al suo interno getti e strati limite. Nel getto, lo scalare passivo è introdotto in modo uniforme, ad esempio scaldando il flusso; nel caso dello strato limite invece, lo scalare passivo viene introdotto in modo mirato, inserendolo in punti specifici.

La seconda categoria di flussi sono i cosiddetti *shear free flows*, e comprendono generalmente il caso di turbolenza generata dalla griglia. Il procedimento tipico è quello di imporre un gradiente di scalare medio nel flusso. Per farlo, le tecniche più consolidate sono quella di fare uso di fili riscaldati posti in prossimità della griglia, oppure di riscaldare la griglia stessa.

Nella figura 1.1 sono illustrate le due tipologie di flussi turbolenti appena introdotte.

### Le equazioni dello scalare passivo

La dinamica del campo di scalare passivo  $\Theta$  è descritta dalla equazione di convezione - diffusione:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = k \nabla^2 \Theta \quad (1.1)$$

dove  $k$  rappresenta la diffusività. Nel caso in cui lo scalare passivo considerato fosse la temperatura, allora  $k$  rappresenterebbe la diffusività termica.

L'equazione (1.1) è lineare, e può sembrare che il problema dello studio dello scalare passivo possa essere considerato una sottocategoria dello studio della turbolenza. Tuttavia questo non corrisponde al vero, in quanto i paradigmi validi per il campo della velocità non sono poi applicabili quando si passa allo studio dello scalare.

Lo studio del trasporto e del mixing dello scalare sono di grande interesse dal punto di vista ingegneristico, dove il focus è quello di capire come evolvono il flusso e lo scalare

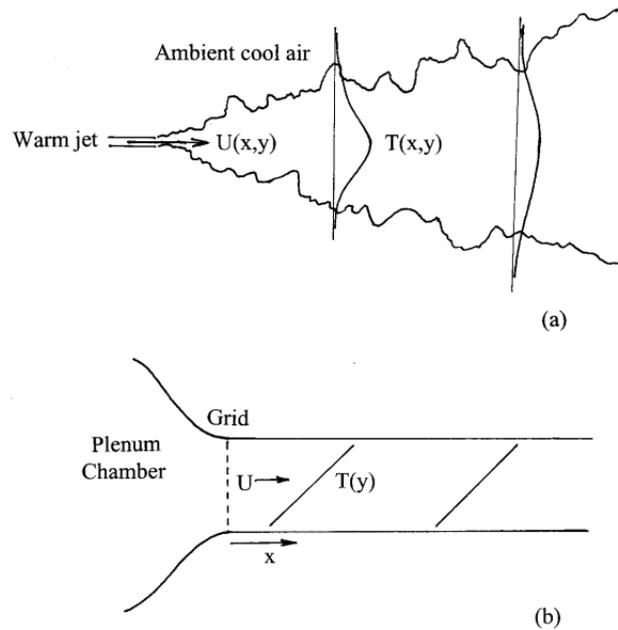


Figura 1.1: Generazione sperimentale di flussi turbolenti [23]. Nel caso (a), corrispondente al getto, l'aria calda si meschia con quella più fredda dell'ambiente, producendo così fluttuazioni di temperatura.

Nel caso (b) invece, il gradiente di scalare può essere prodotto ancora prima della griglia, nella camera di pressurizzazione, dove vengono posizionati fili riscaldati. In alternativa, la griglia stessa può essere scaldata per produrre fluttuazioni nella temperatura, che corrisponde allo scalare passivo. In ciascuno dei casi comunque, si nota che la varianza della temperatura decade allontanandoci dalla posizione della griglia.

Corrsin [8], trascurando gli effetti legati all'azione delle pareti, ha dimostrato che il gradiente medio di temperatura si auto sostiene in direzione  $x$ , in virtù del fatto che la turbolenza è isotropa, e non c'è divergenza del flusso.

nello spazio e nel tempo. Queste quantità risultano *fortemente* influenzate dalle condizioni al contorno.

Le grandi e le piccole scale sono strettamente correlate tra loro per via della cascata energetica che le collega. L'attenzione tuttavia viene posta sulle piccole scale, dal momento che è proprio a quel livello che avviene lo scostamento dal comportamento gaussiano. La skewness e l'intermittenza delle fluttuazioni sono fondamentali per comprendere il mixing alla scala molecolare.

## 1.2 I flussi turbolenti

La turbolenza è un problema *multiscala*. Nei sistemi fisici, un sistema è considerato multiscala quando le scale delle grandezze fisiche coinvolte hanno dimensioni molto diverse tra loro. I vortici più grandi avranno dimensioni confrontabili con quelle del sistema che le ha generate, e più piccoli avranno una dimensione via via minore. Alla base del fenomeno della turbolenza ci sono strutture vorticosi dette *Eddies*, che evolvono nel tempo, spostandosi all'interno del dominio e frammentandosi in sotto strutture più piccole. Nei sistemi multiscala c'è quindi una forte interazione tra scale di grandezze diverse.

A queste strutture sono associati dei tempi caratteristici, oltre che delle frequenze caratteristiche [4]. La destrutturazione dei vortici più grandi in vortici via via più piccoli, e di conseguenza la turbolenza stessa, è un fenomeno strettamente legato a un parametro ben noto in ambito fluidodinamico, il *numero di Reynolds*, che deve raggiungere un determinato valore, variabile a seconda del problema studiato, in modo da garantire l'osservazione di un flusso turbolento con un range inerziale ben sviluppato.

Il fenomeno della turbolenza, apparentemente caotico, è in realtà regolato dalle *equazioni di Navier Stokes*, che verranno richiamate nel seguito nella trattazione, utilizzate in concomitanza a una analisi di tipo statistico. Le soluzioni di tali equazioni non sono ottenibili in forma analitica, ma solo in forma numerica, rendendo il problema di trattazione non semplice.

### 1.2.1 La cascata energetica

Il fenomeno della destrutturazione dei vortici più grandi in vortici più piccoli è legato alla *cascata energetica*. L'energia cinetica dei vortici viene conservata, e solo trasferita dai vortici più grandi verso quelli più piccoli. Il fenomeno continua fino al raggiungimento di una scala, detta *microscala di Kolmogorov*, in cui il rapporto tra le forze inerziali e quelle diffusive diventa pressapoco pari a 1, e la diffusione riesce finalmente a dissipare l'energia finora conservatasi.

Da questo presupposto è possibile calcolarsi la dimensione del vortice più piccolo presente all'interno del flusso, e il suo tempo caratteristico. La relazione che lega queste grandezze è la seguente:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

dove  $\epsilon$  è la dissipazione,  $\nu$  è la viscosità cinematica del fluido, mentre  $\eta$  rappresenta la dimensione della microscala di Kolmogorov.

Questa grandezza può essere valutata anche direttamente in relazione al numero di Reynolds, scrivendo dunque

$$\eta = \frac{\ell}{Re^{3/4}}$$

dove  $\ell$  è la dimensione del vortice più grande presente nel flusso, che corrisponde alla dimensione del mezzo che ha generato la turbolenza.

### 1.2.2 Le ipotesi di Kolmogorov

Appurata l'esistenza all'interno di un flusso turbolento di strutture di scala diversa, come suggerito da Richardson nel 1922, e il fatto che tali scale sono caratterizzate da una interazione non lineare, le ipotesi fondamentali per la teoria di Kolmogorov sono:

- l'ipotesi che le grandi scale non siano influenzate dalla viscosità, che agisce solo alle scale dissipative
- l'ipotesi che l'interazione non lineare sia legata principalmente a componenti di scala poco diverse tra loro, da cui deriva il processo di cascata energetica
- l'ipotesi che, in condizioni stazionarie, il flusso di energia cinetica tra una scala e l'altra debba eguagliare la potenza della dissipazione viscosa

Queste ipotesi comportano che, se il trasferimento di energia è un fenomeno mediamente unidirezionale, la potenza del processo è determinata dalla relazione tra il moto medio e i vortici di grande scala, e che la viscosità  $\nu$  tenderà ad essere sempre meno rilevante al crescere di  $Re$ . Al crescere di  $Re$  infatti la viscosità agisce su scale sempre più piccole, e le scale inerziali del flusso si estendono sempre più verso il basso, fino ad arrivare a un limite asintotico, in cui la forzante alle grandi scale del flusso non influenza il resto delle scale presenti, ottenendo isotropia locale.

La pretesa di universalità della teoria di Kolmogorov, con l'ipotesi che il dominio inerziale, sempre più esteso per flussi ad alti  $Re$ , fosse indipendente dalla forma specifica di una data corrente, venne criticata già pochi anni dopo la sua pubblicazione. Seppur la teoria sia in grado di giustificare un elevato numero di casi sperimentali, non è però in grado di rilevare i possibili fenomeni di *intermittenza* che caratterizzano le piccole scale del flusso. Per le ipotesi di Kolmogorov, correnti turbolente con uno stesso flusso di energia, e quindi con uguale valor medio della dissipazione, dovrebbero essere indistinguibili alle piccole scale, così come la fluttuazione al livello di un eddy qualsiasi dovrebbe essere indistinguibile da quella di un altro eddy. Questa ipotesi implica allora l'assunzione di una estesa auto-similitudine in tutte le scale del flusso, in virtù di un carattere casuale del processo.

L'evidenza sperimentale mostra però un comportamento diverso alle piccole scale, caratterizzate dall'alternanza irregolare di fasi di forte intensità seguite da un periodo di quiescenza, definendo un comportamento detto *intermittenza*. La dissipazione dell'energia cinetica, invece di essere distribuita in modo uniforme è infatti concentrata in piccole regioni, dove sono presenti i vortici di grande intensità.

Per ricavare le relazioni valide nel range inerziale invece si è supposto che gli eddies

di qualsiasi scala occupino tutto lo stesso volume, ovvero che il volume totale rimanga conservato nel processo di frammentazione dai vortici più grandi a quelli più piccoli. Questa assunzione però non trova riscontro nelle prove sperimentali, e se si vuole tenere in considerazione il fatto che le scale dissipative sono interessate dal fenomeno dell'intermittenza serve ripensare le leggi di scala. Le scale più piccole devono infatti essere in grado di garantire lo stesso flusso di energia delle scale più grandi ma in un volume minore. Allo stato dell'arte, non è chiaro se il dominio inerziale sia caratterizzato da una propria intermittenza, ma rimane il fatto che le scale dissipative lo siano [4].

Le ipotesi di Kolmogorov vennero in seguito riprese da Obukhov e Corrsin [8], che ritennero di poter affermare che anche il campo dello scalare presente nel flusso turbolento potesse essere descritto con le stesse ipotesi formulate per il campo di velocità. Il comportamento dello scalare che appare a chi osserva il fenomeno però mostra un allontanamento dalla gaussianità, pure nel caso in cui il campo di velocità che trasporta lo scalare fosse gaussiano. Il campo dello scalare mostra infatti una certa intermittenza su tutte le scale del dominio, e non solo alle scale dissipative.

L'introduzione nel flusso di piccole particelle pesanti rispetto al fluido porta con sé inoltre la necessità di considerare nella trattazione la retroazione che esse hanno sul fluido che le trasporta. L'azione combinata dell'effetto delle particelle e del gradiente di scalare medio imposto porta quindi ad un allontanamento dall'ipotesi di Kolmogorov.

## 1.3 Metodi numerici

I metodi numerici consentono di risolvere numericamente le equazioni di Navier Stokes, e rappresentano uno strumento fondamentale in fluidodinamica, in quanto forniscono una soluzione a problemi non risolvibili analiticamente.

A seconda delle scale considerate, i metodi numerici possono essere divisi in sottocategorie:

- se si seguono tutte le scale del moto del fluido fino alla scala di Kolmogorov, si parla di *Direct Numerical Simulation (DNS)*
- se si applica un filtro in modo da considerare solo scale a partire da una certa dimensione si parla di *Large Eddies Simulation (LES)*
- se si usa un approccio che considera una descrizione statistica del flusso, basandosi sulle equazioni di Navier Stokes mediate, si parla di *RANS*. Per risolvere le RANS serve avere un modello addizionale che simuli gli effetti della turbolenza sulle particelle. Il modello deve dare indicazioni sulla dispersione stocastica dovuta alla turbolenza

### 1.3.1 DNS per flussi turbolenti caricati con particelle

Le DNS (*Direct Numerical Simulation*) sono una tecnica di simulazione numerica ampiamente utilizzata nei diversi campi dell'ingegneria, e permettono di descrivere il fenomeno dei flussi turbolenti, anche in presenza di particelle. Questo tipo di simulazioni permette di seguire tutte le scale del fluido fino alla più piccola scala turbolenta, e sono quindi un valido strumento capace di fornire risultati numerici coerenti con i risultati sperimentali almeno fino alla scala di Kolmogorov.

Il progressivo miglioramento delle capacità computazionali dei calcolatori ha permesso di estendere il campo di utilizzo delle DNS, in modo da simulare anche flussi ad alti numeri di Reynolds, permettendo il confronto con i casi di studio sperimentali. Questo ha permesso di ampliare notevolmente le opportunità di utilizzo delle DNS, rendendole diffuse in molti campi dell'ingegneria.

Alla base di questi metodi si ha come prima cosa la definizione dell'approccio che si intende utilizzare. È possibile infatti usare un metodo che segua lo sviluppo della singola particella (*approccio lagrangiano*), oppure un metodo che indaghi il campo della grandezza da misurare in un certo istante e in un determinato punto dello spazio (*approccio euleriano*). Esistono poi anche metodi intermedi, in cui la fase continua del problema è descritta con approccio euleriano, mentre la fase di dispersione è descritta da un approccio lagrangiano, con l'equazione del moto per la singola particella.

Nelle DNS si risolve il flusso attorno alla singola particella a seguito dell'azione delle forze esterne e della forza idrodinamica esercitata dal fluido.

L'utilizzo di un metodo DNS permette di ottenere una soluzione numerica di un problema analitico. È richiesta quindi per prima cosa una discretizzazione del dominio, al fine di poter risolvere il problema cercando la soluzione in specifici punti, definiti dalla griglia utilizzata.

Il requisito per la risoluzione delle DNS in presenza di particelle, è che la griglia di calcolo sia piccola se comparata alla dimensione della particella. Questo implica che il metodo sarebbe teoricamente applicabile solo per particelle più grandi della più piccola scala turbolenta, sulla quale è costruita la dimensione della griglia.

### 1.3.2 Approccio lagrangiano per particelle puntiformi

Come detto poc'anzi, i metodi DNS hanno una restrizione dettata dalla necessità di poter considerare poche particelle, che siano di dimensioni maggiori della più piccola scala turbolenta. Tale scala viene definita *scala di Kolmogorov*.

Il metodo *point particle* permette di ampliare lo spettro delle particelle utilizzabili. Eventuali particelle più piccole della scala di Kolmogorov possono essere considerate come puntiformi, e si procede facendo riferimento a una simulazione lagrangiana, in cui vengono risolte le equazioni per la singola particella.

Il parametro fondamentale per questo tipo di trattazione è la valutazione del *tempo di rilassamento*, ovvero il tempo necessario alla particella per adeguarsi al flusso istantaneo. Le casistiche che possono presentarsi sono due:

- se il tempo è basso: la velocità della particella può essere considerata uguale a quella del flusso
- se il tempo è grande: non si può supporre che la particella segua pedissequamente il fluido, e servirà risolvere una equazione del moto della particella basata sulla seconda Legge di Newton

Dal momento che l'approccio lagrangiano prevede la valutazione del flusso della singola particella, andrà in seguito indagato il grado di accoppiamento tra le particelle e il flusso. Potranno infatti esserci o meno influenze reciproche, che saranno legate alla frazione volumica delle particelle nel flusso.

### 1.3.3 Approccio euleriano

Nonostante l'utilizzo dell'approccio lagrangiano possa essere esteso anche al caso di particelle più piccole rispetto alla scala di Kolmogorov, l'approccio euleriano rimane il metodo più appropriato in caso di particelle presenti in grande numero.

In questo approccio non si segue più la singola particella, ma si considerano campi di velocità e di concentrazione. Andranno quindi considerate anche le equazioni differenziali per la concentrazione delle particelle. Anche per il caso euleriano sarà necessario indagare il tipo di interazione reciproca tra flusso e particelle.

Va inoltre sottolineato che qualora fossero presenti particelle di dimensioni diverse, servirà risolvere un set di equazioni per ogni classe dimensionale.

La valutazione di un modello euleriano prevede la considerazione di due contributi, uno dato dalla velocità euleriana mesoscopica e un secondo contributo dato dal moto non correlato randomico relativo alle particelle.

In questa trattazione vengono considerate delle DNS con approccio point particle di tipo lagrangiano per quanto riguarda la fase solida del problema, che permettono di risolvere l'evoluzione di una sospensione di particelle inerziali all'interno di un flusso incomprimibile, e un approccio euleriano per la fase del fluido.

Il parametro su cui è stata basata la decisione di considerare tale modello è il *numero di Stokes*, che descrive il rapporto del tempo di adeguamento della particella alle variazioni legate al fluido che le trasporta. Per flussi con piccoli numeri di Stokes, il modello fluido euleriano è in grado di cogliere i dettagli più piccoli delle dinamiche del campionamento delle particelle, ma la descrizione euleriana decade nel momento in cui il numero di Stokes diventasse maggiore di 0.1, in quanto non riuscirebbe a cogliere le eventuali collisioni tra le particelle, e soprattutto non sarebbe in grado di determinare una unica velocità media per le particelle che valga per tutte, essendo queste dotate di una sensibile inerzia [2].

Una descrizione naturale delle sospensioni inerziali all'interno di flussi turbolenti può essere ottenuta con una trattazione euleriana - lagrangiana, che considera cioè un mix tra i due metodi. La fase fluida viene quindi descritta in termini euleriani, ovvero si valuta in forma di campo di velocità e di scalare, mentre le particelle, assumendo che siano diluite all'interno del fluido, sono descritte in termini di traiettorie individuali lagrangiane. Sarà necessario considerare un metodo di accoppiamento siccome stiamo considerando due approcci diversi. I campi del flusso devono essere interpolati alla posizione delle particelle, mentre i feedback delle particelle sul flusso vanno rappresentati su una griglia euleriana.

In questo caso di esame si trascurerà l'interazione particella - particella, ma si terrà in considerazione l'interazione reciproca vigente tra il fluido e le particelle. Le dinamiche del fluido risultano comunque indipendenti dal moto delle particelle, che è dato da una equazione aggiuntiva del moto.

La fase solida si può descrivere come un insieme di particelle caratterizzate dalla funzione densità di probabilità  $p(x, q, t)$ , che rileva una particella al tempo  $t$ , nella posizione spaziale  $x$  e in moto alla velocità  $q$ .

## 1.4 Equazione del moto della particella

Per l'equazione della particella si fa riferimento all'equazione di Maxey Riley [16], che rappresenta l'equazione del moto di una particella sferica in un fluido. Sia:

$x_i$  = posizione della generica particella  $i$

$v_i$  = velocità della generica particella  $i$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v_i \quad (1.2)$$

Nel caso di particelle passive con  $St \approx 0$ , ovvero particelle che si muovono alla stessa velocità del fluido, si avrebbe che  $v_i = u(x_i(t), t)$ , dove  $u(x, t)$  rappresenta la velocità del flusso.

Le particelle inerziali soddisfano la seconda Legge di Newton

$$m_i \frac{dv_i(t)}{dt} = \sum F_i \quad (1.3)$$

L'equazione di Maxey Riley si può scrivere come:

$$m_i \frac{dv_i(t)}{dt} = F_B + F_{PG} + F_{AM} + F_D + F_{hist} + (F_{lift}) \quad (1.4)$$

Dove:

$$F_B = (\rho_i - \rho_f)V_i g \quad (\text{forza di galleggiamento})$$

$$F_{PG} = m_{f,i} \frac{Du_i}{Dt} \quad (\text{pressure gradient force})$$

$$F_{AM} = \frac{1}{2} \rho_f V_i \left( \frac{Du_i}{Dt} - \frac{dv_i(t)}{dt} \right) \quad (\text{added mass force})$$

$$F_D = m_i \frac{(u_i(t), t) - V_i}{\tau_i} (1 + 0.15 Re_i^{0.687}) \quad (\text{drag force})$$

valida per  $0 < Re_i < 1000$ , con  $Re_i = \frac{\rho_f d_i [u(x_i, t) - V_i]}{\mu} = \text{Reynolds particella}$ ;  $\tau_i = \frac{\rho_i d_i^2}{18\mu} = \text{tempo di rilassamento}$

$$F_{hist} = \frac{3}{2} (\pi \rho_f \mu)^{1/2} d_i^2 \int_0^t \frac{d}{d\tau} (u_i(\tau) - V_i(\tau)) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} \quad (\text{forza temporale})$$

Ci potrebbe essere anche un contributo detto  $F_{lift}$ , dovuto a due diversi contributi, ovvero al taglio nella velocità del flusso, oppure alla rotazione della particella.

Maxey e Riley hanno trovato queste relazioni per ciascuna forza, valide nel caso di particelle piccole rispetto alla scala inerziale del flusso. Queste equazioni considerano il contributo dettato dalla dimensione delle particelle, seguendo la correzione suggerita da Faxen [13].

L'equazione (1.4) può essere valutata considerando alcune approssimazioni:

1. per particelle piccole e pesanti ( $\rho_p \gg \rho_f$ ),  $F_{PG}$ ;  $F_{AM}$ ;  $F_{hist}$  sono piccole rispetto a  $F_D$ ;
2. per particelle leggere, come ad esempio il caso di bolle sospese in un liquido,  $F_{PG}$ ,  $F_{AM}$ ,  $F_{hist}$  sono invece predominanti;

3. se  $(\rho_p/\rho_f < 100)$  va tenuto in considerazione che il galleggiamento non è più trascurabile;
4. la  $F_{lift}$  è più rilevante per particelle leggere rispetto che per particelle pesanti;
5. tendenzialmente  $F_{hist}$  non viene tenuta in considerazione a causa dell'elevato costo computazionale;
6. nella maggior parte delle applicazioni, ovvero nel caso di particelle solide o droplet in un flusso turbolento, il mass density ratio è così elevato che le uniche forze da tenere in considerazione sono la *drag force* e la *gravità*

Sono due i parametri che controllano il moto della particella [2]:

- il fattore di massa aggiuntiva  $\beta = 3\rho_f(\rho_f + 2\rho_p)$ , dove  $\beta > 0$  indica particelle leggere, mentre  $\beta < 0$  indica particelle pesanti;
- il tempo di risposta di Stokes  $\tau_s = \frac{a^2}{3\beta\nu}$ , dove  $a$  è il raggio della particella;  $\rho_f$ ,  $\rho_p$  sono le densità di fluido/particella e  $\nu$  è la viscosità cinematica del fluido

Se si trascurano gli effetti della gravità e la  $F_{hist}$ , l'equazione lagrangiana per la traiettoria della particella  $\mathbf{x}(t)$  e  $v(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$  si riduce a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = w(t) + \beta u(x(t), t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{(1-\beta)u(x(t), t) - w(t)}{\tau_s} \end{cases} \quad (1.5)$$

dove:

$u(x, t)$  è il campo di velocità del flusso incomprimibile;  
mentre  $w(t) = v(t) - \beta u(x(t), t)$  è la covelocità della particella

Si considera il modello euleriano più semplice, in cui si trascurano le interazioni tra particelle, e in cui si assume che la velocità della particella sia definita unicamente in ogni punto dello spazio da un campo  $v(x, t)$  diverso dalla velocità del fluido  $u(x, t)$ .

La funzione densità di probabilità  $P(x, v, t)$  del campo di velocità delle particelle è ottenuta dal sistema precedente, e dalle premesse fatte è possibile scrivere che

$$P(x, v, t) = n(x, t)\delta(q - v(x, t)) \quad (1.6)$$

dove  $n(x, t) = \int P(x, q, t) dq$  rappresenta la number density locale delle particelle.

Le equazioni risultanti per i campi di densità e covelocità  $w = v - \beta u$  sono:

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot ((w + \beta u)n) = 0 \\ \partial_t w + (w + \beta u) \cdot \nabla w = \frac{(1-\beta)u - w}{\tau_s} \end{cases} \quad (1.7)$$

L'esistenza del campo di velocità  $v(x, t)$  non è sempre garantita: a causa dell'inerzia infatti, le particelle possono uscire dalla loro traiettoria, e incrociarsi tra di loro con velocità relative non nulle. Questo può portare alla nascita di urti tra le particelle.

### 1.4.1 Il numero di Stokes e il numero di Stokes termico

Il parametro più importante da considerare quando si introducono particelle inerziali all'interno di un flusso è il numero di Stokes [6], che si definisce come

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_\eta}$$

dove  $\tau_\eta$  corrisponde al tempo relativo alla scala di Kolmogorov, ovvero il tempo necessario alla diffusività per dissipare l'energia cinetica dei vortici; mentre

$$\tau_p = \frac{2\rho_p r_p^2}{9\rho_f \nu}$$

è il tempo di risposta della particella relativo alla quantità di moto. Il numero di Stokes quantifica l'inerzia delle particelle.

Dal momento che le particelle possiedono una loro inerzia anche dal punto di vista termico, queste potrebbero non essere in equilibrio con il campo di temperatura del fluido.

Il tempo di rilassamento termico

$$\tau_\theta = \frac{\rho_p C_p r_p^2}{3\rho_f C_f k}$$

è introdotto in modo da definire un nuovo parametro, detto numero di Stokes termico

$$St_\theta = \frac{\tau_\theta}{\tau_\eta}$$

## 1.5 L'accoppiamento fluido - particelle

Nei flussi turbolenti con presenza di particelle, diventa fondamentale capire che tipo di interazione reciproca esiste tra suddette particelle e il fluido. L'accoppiamento in questione può essere sia riferito alla quantità di moto che allo scambio termico.

A seconda del tipo di influenza che le particelle hanno sul fluido è possibile fare una distinzione tra accoppiamento *unidirezionale*, *bidirezionale* e *quadridirezionale* [13].

### 1.5.1 One way coupling

L'accoppiamento unidirezionale, o *one way coupling*, si applica nel caso di fluidi molto diluiti, dove la frazione volumica delle particelle risulti inferiore a  $10^{-5}$ .

In questa situazione le particelle risentono dell'azione delle forze esercitate dal fluido, ma non vale il viceversa. Questa trattazione non manca comunque di considerare gli aspetti più importanti relativi al comportamento delle particelle. È infatti verificabile che nei flussi isotropi turbolenti la concentrazione locale delle particelle risulta non uniforme. Si nota inoltre che nei flussi turbolenti, le particelle tendono a muoversi verso regioni con forti gradienti delle fluttuazioni dello scalare, in un processo definito *turboforesi*. Questo comporta che, tendenzialmente vicino alle pareti esisterà una concentrazione maggiore di particelle rispetto a quelle aree più lontane dai margini, a causa di una maggiore vorticità.

### 1.5.2 Two way coupling

Nel caso di frazioni volumiche maggiori di  $10^{-5}$ , l'effetto della presenza delle particelle sul fluido non potrebbe più essere trascurato, e bisogna tenere in considerazione la forza di reazione che le particelle esercitano sul fluido.

Diventa in questo caso necessaria la risoluzione di due problemi:

1. serve conoscere la velocità del flusso indisturbato alla posizione della particella. La differenza tra la velocità del flusso indisturbato e quello disturbato è piccola se il diametro della particella è piccolo rispetto alla dimensione della griglia, ovvero rispetto alla scala di Kolmogorov.
2. va studiata la forza di reazione che la particella esercita sul fluido (il two way coupling term, o termine di accoppiamento bidirezionale). Tale forza è localizzata alla posizione della particella, e può essere rappresentata da una funzione delta di Dirac. Per avere una rappresentazione reale del termine dell'accoppiamento serve considerare un numero sufficientemente elevato di particelle.

Boivin [3] ha studiato l'influenza della presenza di particelle di massa diversa sulla energia cinetica turbolenta e il rateo di dissipazione per il caso di turbolenza omogenea isotropa. Ciò che si è visto è che entrambe queste grandezze decrescono all'aumentare della massa della particella. Lo spettro di energia mostra che la densità spaziale turbolenta è attenuata dalle particelle grandi, e accentuata dalle particelle piccole. Le particelle inoltre riducono la resistenza idrodinamica. Le fluttuazioni di velocità del flusso nella direzione della corrente sono incrementate per via della presenza delle particelle, mentre risultano attenuate nelle altre due direzioni.

Particelle con un basso numero di Stokes incrementano l'intensità turbolenta, lo stress di Reynolds, la dissipazione viscosa e le statistiche di accelerazione del fluido, mentre le particelle con grande numero di Stokes sopprimono l'intensità della turbolenza.

#### Scambio di calore

Oltre allo scambio di quantità di moto dovuta alla interazione tra le particelle, ci sarà anche uno scambio di calore da tenere in considerazione. La presenza di particelle con un calore specifico maggiore rispetto a quello del fluido favorisce l'aumento di calore trasferito tra le regioni del dominio. Questo processo è dovuto alla turboforesi, che spinge le particelle verso i margini dei vortici, e alla differenza di temperatura media tra le particelle e il fluido.

Si vede tuttavia che nel caso di accoppiamento bidirezionale, l'effetto della turboforesi risulta meno accentuato rispetto al caso di accoppiamento unidirezionale.

#### Concentrazione

Si è visto come l'accoppiamento bidirezionale riduca l'effetto della turboforesi. Questo ha come conseguenza anche una riduzione nella concentrazione delle particelle vicino alle pareti rispetto al caso di simulazione unidirezionale.

#### Trasferimento di massa

Si potrebbe anche valutare il trasferimento di massa tra la fase dispersa (le particelle) e mezzo trasportatore (in questo caso aria secca). Il flusso viene considerato incomprimibile,

e poi si procede valutando anche il cambiamento di densità dovuto alla evaporazione dell'acqua. Il cambiamento di fase favorisce ulteriormente il trasferimento di calore per via dell'entalpia dell'evaporazione, che si traduce quindi in una maggiore differenza nella temperatura media tra le gocce e il gas. La condensazione e l'evaporazione modificano la capacità termica del fluido. In questa trattazione tuttavia non viene incluso il modello della condensazione.

### 1.5.3 Four way coupling

Nel caso di turbolenza omogenea isotropa, per frazioni di volume superiori a  $10^{-3}$ , le particelle non influenzano solo la fase continua, ma diventa importante anche l'interazione tra le particelle stesse, e va considerata la presenza di eventuali urti [10].

Il fatto di considerare anche le collisioni tra le particelle comporta la necessità di valutare due ulteriori elementi nella simulazione:

- un algoritmo che cerchi le collisioni, che potrà essere di natura deterministica o stocastica
- un algoritmo che determini il risultato di tali collisioni

Le collisioni in genere si considerano di breve durata, e si valutano solo particelle sferiche.

Il numero di particelle coinvolte spesso rende proibitivo il calcolo. Un metodo per alleggerirlo è quello di considerare solo particelle che non siano eccessivamente distanti tra loro. Il metodo stocastico prevede invece il calcolo di una funzione di probabilità.

Una volta stabilita la necessità di valutare la collisione tra le particelle, è necessario indicare anche il tipo di collisione, che cambierà a seconda che si considerino particelle di tipo *hard sphere* o *soft sphere* [13]. Nelle prime, le particelle si percepiscono a vicenda solo nel momento della collisione, che è istantanea. Viene rispettata la conservazione della quantità di moto e si considera l'urto di tipo anelastico. Nella seconda tipologia l'urto viene invece considerato elastico, e il moto relativo delle due particelle che collidono è governato da una equazione del moto che coinvolge anche una forza di contatto tra le due particelle.

## 1.6 L'interazione fluido-particelle nella turbolenza

Tramite le simulazioni numeriche si vuole valutare l'interazione tra il campo di temperatura del fluido e la temperatura di piccole particelle sospese nel fluido, considerando accoppiamenti unidirezionali per la quantità di moto e bidirezionali per la temperatura, in flusso stazionario, isotropo in velocità e turbolento. Le particelle vengono caricate all'interno del fluido dopo aver scelto la loro concentrazione e il loro calore specifico, e si valuta come la loro presenza abbia un effetto sul campo di temperatura del flusso. Un ruolo importante lo ha l'allineamento della velocità delle particelle e il gradiente di temperatura del fluido in esame. Ci si aspetta che la varianza del gradiente di temperatura del carrier flow decresca all'aumentare del tempo di risposta termico delle particelle sospese.

Quando le differenze di temperatura all'interno del fluido sono sufficientemente piccole, il campo della temperatura si comporta come uno scalare passivo, e la temperatura viene quindi trasportata e diffusa all'interno del flusso, avendo però un effetto dinamico trascurabile sul fluido.

Un campo scalare passivo è sempre più intermittente che un campo di velocità, e gli scalari passivi sono caratterizzati da una scalatura anomala, in quanto le grandi regioni in cui il campo scalare è costante sono separate dalle regioni più sottili in cui il campo varia bruscamente.

Le zone in cui lo scalare passivo varia poco sono definite *strutture lagrangiane coerenti*. Le regioni sottili, con gradiente elevato, dove avviene la diffusione, si definiscono *fronti*.

In un flusso turbolento caricato con particelle sospese al suo interno, è facile notare che le particelle tendono a raggrupparsi autonomamente in determinate aree del dominio, disponendosi in una distribuzione non uniforme. Questo avviene in virtù del fatto che le particelle inerziali tendono a raggrupparsi sui fronti del campo scalare. All'aumentare dell'inerzia delle particelle, la differenza nella distribuzione spaziale e l'effetto di accoppiamento termico e quantità di moto risultano amplificati. Una misura con cui siamo in grado di valutare il campionamento delle particelle è la dimensione frattale della distribuzione. Questa decresce all'aumentare del numero di Stokes.

Tutti gli studi effettuati partono valutando l'effetto delle particelle inerziali sulle statistiche di larga scala del campo di temperatura del flusso. Tuttavia, si nota che l'effetto dell'accoppiamento fluido - particella può essere rilevante anche alle piccole scale, in virtù del fatto che le particelle tendono, come detto, a raggrupparsi sui fronti del campo di temperatura.

In questo elaborato non si tiene in considerazione un accoppiamento di tipo quadridirezionale, e serve quindi garantire che non si verifichino urti tra le particelle introdotte. Per farlo serve che il numero di Stokes della simulazione non sia eccessivamente alto.

Le particelle tendono infatti a raggiungere il massimo grado di accorpamento quando  $St = o(1)$ . Si nota che:

- quando  $St \ll 1 \rightarrow$  il clustering avviene perché le particelle vengono centrifugate fuori dalle regioni che presentano una forte rotazione;
- quando  $St \geq (1) \rightarrow$  a generare il clustering è un meccanismo non locale, il cui effetto è correlato alla memoria delle particelle riguardo le interazioni con il flusso. È infatti dimostrato che il clustering avviene anche in un regime nel quale l'effetto centrifugo non può essere invocato come spiegazione per il fenomeno [6].

Quando combinate con la forte intermittenza dei campi di temperatura dei flussi turbolenti, le particelle possono sperimentare forti fluttuazioni di temperatura lungo la loro traiettoria.

Ci si aspetta che la varianza del gradiente di temperatura del carrier flow diminuisca all'aumentare della risposta termica delle particelle sospese. La modifica della temperatura del fluido a causa della presenza delle particelle è esaminato computando la concentrazione delle particelle e i flussi di calore della particella, in relazione al modulo del gradiente di temperatura locale del fluido.

La aumentata conduttività termica all'interno del fluido dovuta all'aggregazione delle particelle può portare a un comportamento termico del flusso non noto a priori. Sarà infatti necessario valutare l'interazione tra i campi scalari del fluido e le particelle.

Tramite l'analisi statistica si studiano gli aspetti multiscala del problema, e si analizzano le modalità con cui le particelle inerziali contribuiscono alle proprietà del campo di temperatura del flusso in condizione di regime di accoppiamento bidirezionale.

Questo rappresenta un campo di studio relativamente nuovo, in quanto la risoluzione del problema non è ottenibile analiticamente, ed è necessario il supporto di calcolatori in grado di fornire una soluzione numerica.

## 1.7 Equazioni del modello fisico

Per la definizione del modello fisico si procede distinguendo tra la fase fluida e la fase solida, relativa alle particelle.

### Fase fluida

Si considera un flusso turbolento incomprimibile, omogeneo e isotropo, e statisticamente stazionario. Le equazioni descrittive del fluido sono le equazioni di Navier Stokes. Il campo di velocità turbolenta trasporta il campo di temperatura, assunto come scalare passivo, oltre che le particelle inerziali. La temperatura del fluido viene descritta per mezzo delle equazioni dello scalare, (1.1). Si considera un accoppiamento termico bidirezionale tra fluido e particelle, e un accoppiamento unidirezionale per quanto riguarda la quantità di moto. Le equazioni del problema saranno allora [6]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_f} \nabla P + \nu \nabla^2 u - (C_u) + f \\ \partial_t T + u \cdot \nabla T = k \nabla^2 T - C_T + f_T \end{cases} \quad (1.8)$$

dove:

$f$  e  $f_T$  rappresentano le forzanti di larga scala, che influenzano anche le scale più piccole.  $C_T$  rappresenta il feedback termico delle particelle sul campo di temperatura

Per quanto visto, per piccole variazioni di pressione e temperatura nella fase liquida, gli effetti della comprimibilità possono essere trascurati, e la temperatura  $T(x,t)$  si comporta come uno *scalare passivo* trasportato in un campo di velocità solenoidale  $u(x,t)$ . Le equazioni (1.8) possono essere riformulate come

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 \\ \partial_t u + \nabla \cdot (uu^T) = -\frac{1}{\rho_f} \nabla P + \nu \nabla^2 u + f \\ \partial_t T + \nabla \cdot (uT) = k \nabla^2 T - C_T + f_T \end{cases} \quad (1.9)$$

Quando la forzante è confinata solo alle grandi scale, si assume che i dettagli della forzante non influenzino la dinamica delle piccole scale. Studi recenti però hanno dimostrato che ciò non vale per i campi scalari trasportati, le statistiche dei quali mostrano una certa sensibilità alla forzante imposta.

Volendo caratterizzare la temperatura e le fluttuazioni del gradiente di temperatura nel range dissipativo per diverse simulazioni, che fanno riferimento all'inerzia di particelle sospese diverse, consideriamo una forzante che imponga sempre lo stesso rateo di dissipazione totale per tutte le simulazioni. In questo modo i risultati possono essere comparati al variare dei parametri delle particelle sospese.

Le forzanti di grande scala, in forma di trasformate di Fourier, si definiscono [14] [15]

$$\hat{f}(k, t) = \epsilon \frac{\hat{u}(k, t)}{\sum_{k_f \in K_f} \|\hat{u}(k_f, t)\|^2} \delta_{k, k_f} \quad (1.10)$$

$$\hat{f}_T(k, t) = \chi \frac{\hat{T}(k, t)}{\sum_{k_f \in K_f} |\hat{T}(k_f, t)|^2} \delta_{k, k_f} \quad (1.11)$$

dove  $\epsilon$  e  $\chi$  sono i ratei di dissipazione imposti, rispettivamente in termini di velocità e temperatura. Controllando la forzante siamo in grado di controllare il rateo di dissipazione, e quindi il numero di Stokes.

## Fase solida

Considerando particelle rigide, pesanti rispetto al fluido, piccole rispetto alle scale più piccole del flusso e con un numero di Reynolds del moto relativo molto piccolo ( $\rho_p \gg \rho_f$ ;  $r_p \ll \eta$ ;  $Re_i \ll 1$ ), sia  $\theta_p$  la temperatura della particella. Le equazioni per la fase solida del problema sono una semplificazione dell'equazione (1.4) per il moto della particella, definita Legge di attrito di Stokes, insieme alla legge di Newton per la conduzione del calore

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{u(x_p, t) - v_p}{\tau_p} \quad (1.12)$$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{T(x_p, t) - \theta_p}{\tau_\theta} \quad (1.13)$$

dove

$\tau_\theta = \frac{\rho_p C_p r_p^2}{3\rho_f C_f k}$  è il tempo di risposta termica della particella;

$\tau_p = \frac{2\rho_p r_p^2}{9\rho_f \nu}$  è il tempo di risposta relativo alla quantità di moto;

$C_p$  rappresenta il calore specifico della particella;

$C_f$  rappresenta il calore specifico del fluido, considerato a pressione costante.

Per quanto riguarda l'accoppiamento termico, l'energia termica contenuta nel fluido è finita. Quando il flusso di calore fluisce dal fluido alla particella, il fluido cede energia termica alla posizione della particella. Il feedback della particella al campo di temperatura del fluido è una sovrapposizione della funzione delta di Dirac, centrata nelle particelle.

Il termine di accoppiamento è dato da:

$$C_T(x, t) = \frac{4}{3}\pi \sum_{p=1}^{N_P} \frac{\rho_p C_p}{\rho_f C_f} r_p^3 \frac{d\theta_p}{dt} \delta(x - x_p) \quad (1.14)$$

Relativamente all'accoppiamento della quantità di moto, trascurato in questo lavoro, il feedback della particella sul fluido si definisce come

$$C_u(x, t) = \frac{4}{3}\pi \sum_{p=1}^{N_P} \frac{\rho_p}{\rho_f} r_p^3 \frac{dv_p}{dt} \delta(x - x_p) \quad (1.15)$$

Per quanto detto riguardo all'accoppiamento bidirezionale, le particelle possono influenzare il campo di temperatura del fluido, ma l'interazione particella-particella è trascurata.

Considerando una frazione di volume  $\Phi = 1 \cdot 10^{-4}$  siamo certi di rientrare nei limiti di validità dell'accoppiamento bidirezionale sia termico che relativo alla quantità di moto. Tuttavia, come comprovato da valutazioni sperimentali, il tempo di rilassamento termico è in genere più grande del tempo di rilassamento relativo alla quantità di moto, di modo che

$$St_\theta/St \approx 2 \div 6$$

Di conseguenza, è possibile ignorare l'accoppiamento relativo alla quantità di moto e valutare solo l'interazione termica tra fluido e particelle.

La semplificazione è valida per particelle che siano più piccole della scala di Kolmogorov [21], in quanto per queste dimensioni lo scambio di calore tra particelle e fluido ha una durata inferiore al tempo relativo alla scala di Kolmogorov, rendendo il processo quasi stazionario. Le particelle possono essere considerate puntiformi, e il numero di Reynolds relativo alla particella,  $Re_p$ , viene considerato piccolo.

Il campo di temperatura totale si può risolvere sovrapponendo il campo di temperatura del carrier flow con il disturbo introdotto dalle particelle, che può essere ricavato analiticamente, in quanto, all'interno di un regime diluito, è possibile distinguere le grandi scale dalla scala di Kolmogorov da quella delle particelle.

## 1.8 La soluzione numerica

Per ottenere i risultati delle equazioni (1.8) si esegue una DNS di una turbolenza omogenea, incomprimibile, statisticamente stazionaria e isotropa. Il dominio di calcolo utilizzato è periodico, in modo da conferire universalità ai risultati.

Le equazioni di Navier Stokes (1.8) vengono risolte per mezzo del metodo pseudospettrale di Fourier-Galerkin per la discretizzazione spaziale [5] in cui le convoluzioni necessarie al calcolo dei termini non lineari sono sostituite da una antitrasformazione, che permette il calcolo diretto nello spazio fisico, seguita da una trasformata del risultato.

Questo processo introduce un errore nel calcolo dei coefficienti di Fourier, detto errore di aliasing, che va rimosso. Ciò viene svolto tramite la cosiddetta regola dei 3/2, per cui trasformate e antitrasformate sono calcolate utilizzando una griglia più fine, con  $3/2N$  punti in ogni direzione. Prima della antitrasformata si pongono a zero i numeri d'onda aggiuntivi, e dopo la trasformata si considerano solo i numeri d'onda fino a  $K_{MAX} = \frac{N}{2}$ , cancellando gli altri [5]. Il più grande numero di Reynolds che può essere simulato si è visto che deve garantire che  $k_{max}\eta \geq 1$ , dove  $\eta$  rappresenta la dimensione della scala di Kolmogorov.

La forzante si applica su una singola scala, scelta tra le più grandi tra quelle del flusso, forzando tutti i numeri d'onda che abbiano un modulo assegnato pari al numero d'onda che si vuole forzare  $K_f$ .

Le equazioni per la velocità del flusso e la temperatura sono poi integrate nel tempo per mezzo di un metodo di Runge-Kutta esplicito del secondo ordine con integratore esponenziale [6].

L'uso della rappresentazione di Fourier impone che le condizioni al contorno siano di tipo periodico in tutte e tre le direzioni, e assicura che i campi siano omogenei.

Anche le equazioni per le particelle, descritte da un approccio lagrangiano, vengono integrate con lo stesso metodo di Runge-Kutta, dal momento che le equazioni del fluido e delle particelle sono accoppiate tra loro. Serve però interpolare la velocità e la temperatura del fluido in corrispondenza della posizione delle particelle, e allo stesso tempo va calcolata la retroazione delle particelle sul fluido in corrispondenza della griglia euleriana [6].

Il metodo che si utilizza per il calcolo della retroazione delle particelle sul fluido viene definito NUFFT (*Non Uniform Fast Fourier Transform*), che consiste in tre step:

1. si procede con una convoluzione nello spazio fisico del campo con una funzione base (B-spline) in modo da rendere regolare il flusso
2. si esegue una trasformata di Fourier sul flusso regolarizzato, che può essere quindi campionato sui punti della griglia euleriana
3. si esegue una deconvoluzione nello spazio di Fourier

Le stesse funzioni B-spline sono usate per l'interpolazione di velocità e temperatura. Il codice è parallelizzato mediante le librerie MPI (Message Passing Interface) per sistemi a memoria distribuita. Ad ogni processore è assegnata una parte fissa del dominio, sia nello spazio fisico che nello spazio di Fourier. Questo permette di poter superare i limiti di memoria e velocità di calcolo di un singolo processore.

Le trasformate e antitrasformate di Fourier vengano eseguite in parallelo per mezzo della libreria P3DFFT [18].

Dal momento che il dominio euleriano viene decomposto, le particelle lagrangiane migrano attraverso le frontiere dei domini controllate da processori diversi, e necessitano di essere redistribuite a ogni passo temporale. L'interpolazione alla posizione di particelle che stanno vicine ai confini tra i processori richiede la comunicazione dei risultati tra campi fluidi adiacenti.

Il codice è stato fatto girare utilizzando il cluster HPC Polito, di cui sono stati utilizzati 16 processori.

### Le NUFFT

La velocità del flusso e la temperatura sono interpolati alla posizione della particella per mezzo di una B-spline del quarto ordine [6].

Questa interpolazione è implementata con una backward Non Uniform Fast Fourier Transform (NUFFT) con base B-spline: il campo del fluido viene proiettato su una base B-spline nello spazio di Fourier attraverso una deconvoluzione, quindi trasformata nello spazio fisico per mezzo di una inversa Fast Fourier Transform (FFT) [6].

La convoluzione della distribuzione  $C_T(x, t)$  con una B-spline a base polinomiale  $B(x)$  è calcolata nello spazio fisico, in modo che possa essere rappresentata sulla griglia cartesiana:

$$\tilde{C}_T(x, t) = C_T * B = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho_p C_p}{\rho_0 C_0} r_p^3 \sum_{\rho=1}^{N_p} \frac{d\theta_p}{dt} B(x - x_p)$$

Il campo  $\tilde{C}_T$  è trasformato per mezzo di una FFT ottenendo  $\mathcal{F}[\tilde{C}_T]$  nello spazio di Fourier. La convoluzione viene rimossa nello spazio di Fourier con una B-spline in modo da ottenere la trasformata della distribuzione:

$$\mathcal{F}[C_T](k, t) = \frac{\mathcal{F}[\tilde{C}_T]}{\mathcal{F}[B]}$$

Questo elimina il problema del calcolo dei coefficienti di Fourier di una distribuzione irregolare di delta di Dirac. Aumentando l'ordine della B-spline aumenta l'accuratezza, senza introdurre la non località. Usando gli stessi parametri, stessa B-spline polinomiale del quarto ordine, ma usando una maggiore risoluzione, viene confermata l'indipendenza della griglia dai risultati



# Capitolo 2

## Il codice

Il codice di calcolo, per funzionare, prevede la adimensionalizzazione delle equazioni. Per conferire universalità al calcolo, dal momento che i flussi turbolenti sono per loro natura difficilmente limitabili nello spazio, il metodo con cui si procede è quello di considerare che il flusso illimitato sia periodico, e applicato su un dominio adimensionalizzato. In questo modo, i vortici entranti nel dominio risultano statisticamente uguali a quelli uscenti.

Le funzioni più comode per includere l'ipotesi di periodicità sono seno e coseno. Coerentemente, il dominio di calcolo sarà adimensionalizzato su ogni lato con  $2\pi$ .

La velocità iniziale viene inserita in termini di numero di Reynolds, in modo che il Reynolds inserito dia come risultato un valore quadratico medio delle fluttuazioni pari a 1. I campi di velocità sono omogenei e isotropi.

Il campo di velocità è forzato alle grandi scale, così che la continuità è garantita e la dissipazione media eguaglia la produzione artificiale. Questo comporta che il numero di Reynolds rimarrà costante lungo ogni simulazione.

Dal momento che la turbolenza simulata si vorrebbe che fosse stazionaria, è necessario considerare una opportuna forzante, di modo che riesca a mantenere la turbolenza costante, senza che questa decada, come avverrebbe naturalmente se fosse lasciata libera di evolvere nel tempo.

La forzante introduce un numero di Reynolds forzante e una scala temporale all'interno della simulazione. A seconda del Reynolds e della più grande scala che si vuole ottenere nella simulazione, il valore della forzante può essere modificato in quanto input.

Il flusso turbolento sperimentale analogo a quello simulato è quello della turbolenza generata dalla griglia, con la differenza che la turbolenza di griglia decade, infatti l'energia cinetica turbolenta si attenua man mano che ci si sposta a valle della griglia, mentre nelle simulazioni i campi di velocità sono statisticamente stazionari.

## 2.1 La relazione tra le scale

La risoluzione del problema prevede la conoscenza delle scale coinvolte, e delle relazioni che intercorrono tra loro. Le scale in questione sono:

- scala di Kolmogorov:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

- scala di Taylor:

$$\epsilon = 15\nu \frac{u'^2}{\lambda^2}$$

che porta a scrivere che

$$\lambda = \left( 15\nu \frac{u'^2}{\epsilon} \right)^{1/2}$$

- dissipazione e scala integrale:

$$\frac{\epsilon \ell}{u'^3} = f(Re_\lambda)$$

che porta a scrivere che

$$u' = \frac{(\epsilon \ell)^{1/3}}{f^{1/3}}$$

dove  $f$  è una funzione empirica tale per cui, per  $Re_\lambda \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow 0.42$

I numeri di Reynolds sono definiti come

$$Re_\ell = \frac{u' \ell}{\nu}$$

e

$$Re_\lambda = \frac{u' \lambda}{\nu}$$

In base alle relazioni delle scale appena scritte, i numeri di Reynolds possono essere riscritti come

$$Re_\ell = f^{-1/3} \frac{\epsilon^{1/3} \ell^{4/3}}{\nu}$$

e

$$Re_\lambda = \sqrt{15} \frac{u'^2}{\nu^{1/2} \epsilon^{1/2}} = \frac{\sqrt{15} \epsilon^{1/6} \ell^{2/3}}{f^{2/3} \nu^{1/2}}$$

Conoscendo la dissipazione e la viscosità si ottiene subito la scala di Kolmogorov  $\eta$ . Tuttavia, per conoscere  $Re$ , servirebbe conoscere anche  $\lambda$  e  $u'$ . Cerchiamo allora delle relazioni quantitative tra i vari parametri introdotti. Ammettendo che  $f$  si possa considerare costante, assunzione giustificata dal momento che  $f$  varia poco al variare di  $Re$ , si ottengono le seguenti relazioni

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} = \left( \frac{\nu^3}{f u'^3 / \ell} \right)^{1/4} = \left( \frac{\nu^3 \ell}{u'^3 f} \right)^{1/4} = \left( \frac{\nu^3}{u'^3 l^3} \right)^{1/4} \frac{\ell}{f^{1/4}} = \ell f^{-1/4} Re_\ell^{-3/4}$$

che porta alla relazione

$$\frac{\eta}{\ell} = f^{-1/4} Re_\ell^{-3/4} \quad (2.1)$$

con  $f^{-1/4} \approx 1,19$  se  $f \approx 0,5$

É possibile poi ricavare una relazione che legghi  $\lambda$  ed  $\ell$

$$\lambda = \left(15\nu \frac{u'^2}{\epsilon}\right)^{1/2} = \left(15\nu \frac{u'^2}{u'^3 f/\ell}\right)^{1/2} = \left(\frac{15}{f} \nu \frac{\ell}{u'}\right)^{1/2} = \left(\frac{15}{f} \nu \frac{\nu}{u'\ell}\right)^{1/2} \ell = \left(\frac{15}{f}\right)^{1/2} Re_\ell^{-1/2} \ell$$

Quindi

$$\frac{\lambda}{\ell} = \alpha Re_\ell^{-1/2} \quad (2.2)$$

con  $\alpha = \sqrt{\frac{15}{f}} \approx 5,5$  se  $f \approx 0,5$

É possibile correlare  $Re_\ell$  e  $Re_\lambda$  come segue

$$\frac{\lambda u' \nu}{\ell \nu u'} = \alpha Re_\ell^{-1/2} \rightarrow \frac{Re_\lambda}{Re_\ell} = \alpha Re_\ell^{-1/2}$$

Quindi

$$Re_\lambda = \alpha Re_\ell^{1/2} \quad (2.3)$$

Combinando (2.2) e (2.1) si ottiene una relazione che le lega  $\lambda$  ed  $\eta$

$$\frac{\lambda}{\eta} = \frac{\lambda/\ell}{\eta/\ell} = \frac{\sqrt{15/f} Re_\ell^{-1/2}}{f^{-1/4} Re_\ell^{-3/4}} = \sqrt{15} f^{-1/4} Re_\ell^{1/4}$$

Quindi

$$\frac{\lambda}{\eta} = \sqrt{15} f^{-1/4} Re_\ell^{1/4} \quad (2.4)$$

con  $\sqrt{15} f^{-1/4} \approx 4,61$  Sfruttando la relazione del Reynolds è possibile anche scrivere una dipendenza esplicita di  $\lambda$  da  $\eta$  ed  $\ell$

$$\lambda = \sqrt{15} f^{-1/4} \eta \left(\frac{u'\ell}{\nu}\right)^{1/4} = \frac{\sqrt{15}}{f^{1/3}} \ell^{1/3} \eta^{2/3} \quad (2.5)$$

con  $\sqrt{15} f^{-1/3} \approx 4,6$

Tramite la relazione (2.3) si può scrivere che

$$\frac{\eta}{\ell} = f^{-1/4} (Re_\lambda^2 \alpha^{-2})^{-3/4} = f^{-1/4} \alpha^{3/2} Re_\lambda^{-3/2} = \frac{15^{3/4}}{f} Re_\lambda^{-3/2} \quad (2.6)$$

con  $\frac{15^{3/4}}{f} = 15,2$  e

$$\frac{\lambda}{\ell} = \alpha (Re_\lambda^2 \alpha^{-2})^{-1/2} = \alpha^2 Re_\lambda^{-1} \quad (2.7)$$

con  $\alpha^2 \approx 30$

## 2.2 La forzante

La forzante ha il compito di introdurre energia all'interno del sistema, in modo da mantenere la turbolenza stazionaria. Osservando le equazioni di Navier Stokes (1.8) si nota come tale forzante sia una forza di volume. La forzante deve generare fluttuazioni nel campo di velocità e di temperatura, e può essere di due tipologie.

### La forzante deterministica

La prima tipologia di forzante applicabile è la forzante deterministica. Questa è proporzionale alla velocità del sistema, quindi

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_f} \nabla P + \nu \nabla^2 u + \rho f$$

con  $f \propto U$ . Siccome la forzante è proporzionale alla dissipazione, scegliamo una forzante che permetta di ottenere il valore di dissipazione che è stata fissata. Vale infatti che

$$\epsilon = fu$$

e si è visto che

$$f = \alpha u$$

dove  $\alpha$  rappresenta una costante.

La forzante deterministica è strettamente legata alle condizioni iniziali. Usando le stesse condizioni iniziali, troveremo sempre gli stessi risultati. Questo aspetto conferisce una certa riproducibilità alle simulazioni, con lo svantaggio però che il risultato sarà influenzato dalla qualità delle condizioni iniziali imposte.

### La forzante stocastica

In questo caso imponiamo un processo che generi fluttuazioni casuali. I coefficienti aleatori si trovano partendo da valori stocastici. Il vantaggio in questo caso è che non è necessario considerare le condizioni iniziali, con lo svantaggio però che non posso conoscere direttamente la dissipazione, se non a livello approssimato. Rimane verificato che

$$\epsilon = fu$$

ma in questo caso noi conosciamo solo  $\overline{fu}$

La forzante stocastica viene ottenuta risolvendo la funzione aleatoria

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f}{\tau} + B$$

dove B rappresenta un numero casuale che cambia a ogni passo temporale.

In questo caso, anche se le condizioni iniziali fossero le stesse, risulterà impossibile ottenere gli stessi risultati. Questo conferisce universalità alle simulazioni effettuate, e sul lungo periodo la accuratezza del risultato risulta superiore.

Lo svantaggio però è che non è possibile garantire la riproducibilità dei risultati, e soprattutto non si è in grado di conoscere a priori quale sia la dissipazione se non a grandi linee, dal momento che non siamo a conoscenza del legame tra la forzante  $f$  e la velocità  $u$ , come invece accadeva nel caso di forzante deterministica.

Se consideriamo una forzante deterministica lineare, allora  $\nabla \cdot f = 0$ , in quanto  $f = \alpha u$ , e  $\nabla \cdot u = 0$  siccome il flusso è incomprimibile.

Tuttavia, nel caso in cui inserissimo una forzante di tipo stocastico si deve tenere in conto del fatto che  $\nabla \cdot f \neq 0$ , e pertanto sarà necessario effettuare una proiezione per valutare la pressione.

Nel codice, la forzante va inserita prima di calcolare la pressione, poiché in un flusso incomprimibile la pressione va calcolata in uno spazio a divergenza nulla. La pressione in un flusso incomprimibile è quella che mi garantisce che  $\nabla \cdot u = 0$ .

Dal calcolo della divergenza dell'equazione della quantità di moto, equazione (1.8), si trova però che, affinché sia garantita la condizione  $\nabla \cdot v = 0$ , deve valere che

$$\nabla^2 P = -\nabla \cdot (\text{termini diffusivi})$$

Questa condizione funziona da equazione diagnostica; permette di calcolare la pressione, e garantisce che  $\nabla \cdot u = 0$ .

## 2.3 L'inserimento dei parametri

### 2.3.1 equazioni di Navier Stokes adimensionalizzate

Come affermato in precedenza, all'interno del codice inseriamo i parametri adimensionalizzati. Sarà quindi necessario per prima cosa adimensionalizzare le equazioni con dei parametri di riferimento. In particolare questi parametri sono

$$L_R ; U_R ; T_R = \frac{L_R}{U_R}$$

in modo da trovare così i nuovi parametri adimensionali:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L_R}$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{U_R}$$

Considerando questi parametri appena calcolati, le equazioni di Navier Stokes (1.8) possono essere riscritte nella loro forma adimensionalizzata, e si presentano come segue

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla \tilde{P} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{u} + f \quad (2.8)$$

$$\partial_t \tilde{T} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{1}{ScRe} \nabla^2 \tilde{T} - C_T + f_T \quad (2.9)$$

Le equazioni formalmente cambiano solo per i termini relativi alla viscosità adimensionale e diffusività adimensionale.

Dalla analisi dimensionale si nota infatti che

$$[\nu] = \left[ \frac{m^2}{s} \right] \rightarrow \tilde{\nu} = \nu \frac{T}{L^2} = \nu \frac{\mathcal{L}}{UL^2} \rightarrow \tilde{\nu} = Re^{-1}$$

e

$$k = \frac{\nu}{Sc} = \frac{1}{ReSc}$$

Le equazioni adimensionalizzate per le particelle invece rimangono, formalmente, uguali a come erano nella loro forma dimensionale.

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{u(x_p, t) - v_p}{\tau_p^*} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = \frac{T(x_p, t) - \theta_p}{\tau_\theta^*} \quad (2.11)$$

A cambiare sono solo i tempi di rilassamento, che ora diventano

$$\tau_p^* = \frac{u}{L} \tau_p = \frac{2 \rho_p R^2 u}{9 \rho_f \nu L} = \frac{2 \rho_p}{9 \rho_f} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{uL}{\nu} = \frac{2 \rho_p}{9 \rho_f} \frac{R^{*2}}{Re^{-1}}$$

con  $R^* = \frac{R}{L}$ , e

$$\tau_\theta^* = \frac{u}{L} \tau_\theta = \frac{1 \rho_p C_p}{3 \rho_f C_f} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{uL}{k} = \frac{1 \rho_p C_p}{3 \rho_f C_f} \frac{R^{*2}}{(ScRe)^{-1}}$$

### 2.3.2 Adimensionalizzazione delle scale

In forma adimensionale, il dominio risulta pari a  $2\pi$ . Questo permette di definire la lunghezza di riferimento

$$L_{ref} = \frac{\ell}{2\pi}$$

Sia  $\Delta x = \eta$ , allora  $\eta^* = \frac{2\pi}{N}$ , con  $N$  = numero di punti della griglia.

Anche la dimensione  $\eta$  relativa alla scala di Kolmogorov può essere riscritta in forma adimensionale come segue

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \rightarrow \eta^* = \left( \frac{Re^{-3}}{\epsilon^*} \right)^{1/4}$$

dove  $\epsilon^* = \frac{\epsilon L}{\nu^3}$  è la dissipazione adimensionale

Dalla relazione appena scritta è possibile ricavare la relazione per  $\epsilon^*$

$$\epsilon^* = \frac{Re^{-3}}{\eta^{*4}}$$

che rappresenta il parametro viscosità adimensionale cercata.

Viceversa, se fissiamo come parametro imposto  $\epsilon^*$ , il numero di Reynolds che ne consegue è

$$Re = (\epsilon^* \eta^{*4})^{-1/3}$$

In alternativa si potrebbero imporre i parametri  $Re$  ed  $\epsilon^*$ , trovando così  $\eta^*$ . In questo caso è però necessario verificare che

$$\eta^* \geq \Delta x^*$$

ovvero che la dimensione della scala di Kolmogorov adimensionale sia più grande della dimensione della singola cella di calcolo.

### 2.3.3 Definizione dei parametri relativi al fluido

I parametri di controllo da inserire nella simulazione sono:

Per le equazioni in forma dimensionale:

- la viscosità cinematica  $\nu$
- la dissipazione  $\epsilon$  imposta dalle grandi scale

Per le equazioni in forma adimensionale:

- la viscosità adimensionale  $\tilde{\nu}$
- la dissipazione adimensionale  $\tilde{\epsilon}$
- il numero d'onda  $\tilde{K}_f$  della forzante
- il numero di punti di griglia  $N$
- il passo temporale
- il parametro  $c = \frac{\eta}{\Delta x}$ , che definisce la risoluzione delle simulazioni. La griglia deve essere sufficientemente fine da cogliere la dimensione di  $\eta$

Tutte le altre grandezze saranno dipendenti da quelle definite:

- per il dimensionale  $\eta$  risulta definita una volta assegnati  $\nu$  ed  $\epsilon$ ; inoltre la griglia di calcolo deve avere un  $\Delta x \propto \eta$  sicché all'aumentare della risoluzione spaziale, aumentano anche le dimensioni del dominio
- nell'adimensionale invece il dominio risulta sempre fisso a  $2\pi$ , mentre  $\eta \propto \Delta x = \frac{2\pi}{N}$  è definita dalla risoluzione del dominio. Aumentare la risoluzione vuol dire ridurre la scala di Kolmogorov a parità di dominio e scala integrale

Tutti i rimanenti parametri sono calcolati in modo che la rappresentazione dimensionale ed adimensionale coincidano.

La modalità con cui si procede per ricavare tutte le grandezze richieste dal codice è la seguente:

1. fissiamo  $\eta$  ed  $\epsilon$  (dimensionali)  $\rightarrow$  determiniamo così  $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$

2. fissiamo  $N =$  risoluzione della griglia  $\rightarrow$  determiniamo  $\Delta\tilde{x} = \frac{2\pi}{N}$
3. fissiamo il rapporto  $c = \frac{\eta}{\Delta x} \rightarrow$  determiniamo  $\tilde{\eta} = c\Delta\tilde{x}$
4. calcoliamo la scala di riferimento per la adimensionalizzazione delle lunghezze.  
Siccome  $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{L_R} \rightarrow L_R = \frac{\eta}{\tilde{\eta}}$
5. fissiamo la dissipazione adimensionale  $\tilde{\eta} \rightarrow$  determiniamo così la viscosità adimensionale e la scala di riferimento delle velocità e dei tempi. Infatti si scrive

$$\tilde{\nu} = \tilde{\eta}^{-4/3} \tilde{\epsilon}^{-1/3} \rightarrow Re = \frac{1}{\tilde{\nu}}$$

Siccome

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{U_R^3/L_R} \rightarrow u_R = \left( L_R \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/3}$$

Oppure, in alternativa si vede che

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{Re} = \frac{\nu}{u_R L_R} \rightarrow u_R = \frac{1}{L_R} \frac{\nu}{\tilde{\nu}}$$

Le due relazioni appena ottenute sono coincidenti.

La relazione per il tempo è

$$T_R = \frac{L_R}{u_R}$$

Le grandezze dimensionali e quelle adimensionali risultano ora legate tra loro

6. fissiamo  $\tilde{k}_f$ , numero d'onda della forzante. Questo permette di valutare la scala integrale adimensionale, pari a  $\tilde{\ell} = c_\ell \frac{2\pi}{\tilde{k}_f}$  con  $c_\ell = \frac{1}{1,744}$
7. determiniamo il valore del root mean square della velocità e la scala di Taylor.  
Questo va fatto sia per le variabili adimensionali che per quelle dimensionali, ottenendo risultati coerenti:

$$u' = (\epsilon\ell)^{1/3} f^{-1/3}$$

$$\tilde{u}' = (\tilde{\epsilon}\tilde{\ell})^{1/3} f^{-1/3}$$

Il coefficiente empirico  $f$  si ricava dalla relazione di Doering - Foias [9]:

$$f = \frac{\epsilon\ell}{u'^3} = A(1 + \sqrt{1 + (B/Re_\lambda)^2}) \approx 0,46 \quad (2.12)$$

Per la scala di Taylor consideriamo

$$\lambda = \left( 15\nu \frac{u'^2}{\epsilon} \right)^{1/2}$$

$$\tilde{\lambda} = \left( 15\tilde{\nu} \frac{\tilde{u}'^2}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/2}$$

Il passo temporale può essere ottenuto attraverso due vie:

1. fissiamo il  $\Delta t$  e determiniamo il CFL
2. fissiamo il CFL e determiniamo il  $\Delta t$

Siccome abbiamo solo fluttuazioni di velocità, il CFL può basarsi solo sulle fluttuazioni:

$$CFL = \frac{3}{4} \frac{\tilde{u}' \Delta\tilde{t}}{\Delta\tilde{x}}$$

### 2.3.4 Definizione dei parametri relativi alle particelle

I parametri da inserire sono:

1. il raggio adimensionale
2.  $\frac{\rho_p}{\rho_f}$ , ovvero i rapporti tra le densità di particella e fluido
3.  $\frac{C_p}{C_f}$ , ovvero i rapporti tra i calori specifici di particella e fluido

I parametri fondamentali che si vorrebbe inserire nel caso di particelle a raggio costante sono il numero di Stokes

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_\eta}$$

e il numero di Stokes termico

$$St_\theta = \frac{\tau_\theta}{\tau_\eta}$$

Si nota però facilmente che il numero di Stokes prevede la valutazione della microscala di Kolmogorov, mentre il codice di calcolo non è adimensionalizzato con tale scala, bensì con la scala del dominio.

Questo implica che nel codice non è possibile inserire come parametro il numero di Stokes. I parametri che vengono infatti inseriti sono il numero delle particelle e il raggio adimensionale della particella.

Per farlo si valuta il tempo di rilassamento

$$\tau_p = \frac{2\rho_p r_p^2}{9\rho_f \nu}$$

o, in termini adimensionali

$$\tilde{\tau}_p = \frac{2\rho_p \tilde{r}_p^2}{9\rho_f \tilde{\nu}}$$

Siccome la scala temporale di Kolmogorov è

$$\tilde{\tau}_\eta = \left( \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/2}$$

serve valutare

$$\tilde{\tau}_p = St \tilde{\tau}_\eta$$

e si trova che il raggio adimensionale sarà pari a

$$\tilde{r}_p = \left( \frac{9}{2} \frac{\tilde{\nu} \rho_p}{\rho_f} St \tilde{\tau}_\eta \right)^{1/2}$$

A questo punto si determina il rapporto  $\frac{C_p}{C_f}$  dei calori specifici in modo da ottenere il numero di Stokes termico  $St_\theta$  che si desidera.

## 2.4 Il tempo di calcolo

Il tempo di calcolo complessivo si calcola sommando il tempo necessario a risolvere le equazioni relative al flusso, e il tempo necessario a risolvere la parte solida, ovvero la parte che comprende le particelle.

$$T_{calcolo} = T_{NS} + T_p = a(N^3 \log_2 N) + bN_p \quad (2.13)$$

Per conoscere il tempo di calcolo, è sufficiente conoscere a, b.

Per semplicità consideriamo prima il caso con  $N_p = 0$ . Si avrebbe allora che

$$T = a(N^3 \log_2 N) \rightarrow a = \frac{T}{N^3 \log_2 N}$$

Una volta effettuato il calcolo delle due costanti, conoscendo il numero di CPU utilizzate  $N_{CPU}$ , e il numero di passi ogni salvataggio, siamo in grado di calcolare il tempo di calcolo di ogni passo:

$$T_{calcolo1passo} = \frac{N_{CPU} \cdot \Delta t}{N_{passi/salvataggio}}$$

dove il numeratore corrisponde proprio al tempo di calcolo calcolato poco sopra.

Per conoscere il tempo di calcolo per ogni combinazione di  $N$  ed  $N_p$  serve risolvere il sistema che fa riferimento a due simulazioni:

$$\begin{cases} T_1 = aN_1^3 \log_2 N_1 + bN_{p1} \\ T_2 = aN_2^3 \log_2 N_2 + bN_{p2} \end{cases}$$

Da cui siamo in grado di ricavare i parametri a e b per ogni combinazione di  $N$  e  $N_p$

# Capitolo 3

## DNS con gradiente medio di scalare imposto

A questo punto è necessario valutare il mixing dello scalare passivo all'interno della turbolenza stazionaria, omogenea e isotropa in velocità nel caso di gradiente di scalare medio imposto. Il range di studio spazia tipicamente da valori di  $Re_\lambda = 25 \div 185$  [17]. Il campo di fluttuazioni dello scalare  $\phi(x, t)$  è inizialmente pari a zero, e si sviluppa fino ad arrivare a uno stato statisticamente stazionario dopo un certo numero di convoluzioni complete degli eddies, grazie all'azione imposta dalla forzante gradiente di temperatura media. Si intende studiare la dissipazione scalare, le PDF degli scalari e le previsioni di mixing dello scalare  $\Delta^2\phi$ .

Il modello lineare per il mixing prevede di valutare l'interazione tra lo scalare e il campo di velocità.

Già nel 1952 Corrsin [8] aveva dimostrato che, all'interno di una turbolenza stazionaria e isotropa attraversata da una velocità media uniforme in una direzione, imponendo un gradiente di temperatura medio attraverso il flusso, questo si auto alimenta. Questo risultato è stato dimostrato anche da prove sperimentali, in cui sono state scaldate in modo differenziale le griglie di generazione della turbolenza. Tuttavia, l'evoluzione della varianza degli scalari  $\langle\phi^2\rangle$  è rimasta poco chiara.

Warhaft e Lumley [22] hanno pensato a metodi diversi per produrre il gradiente di temperatura all'interno del flusso turbolento prodotto dalla griglia, e hanno potuto osservare che  $\langle\phi^2\rangle$  cresce linearmente spostandosi a valle della griglia.

Si è osservato che l'isotropia locale, centrale per la teoria di Kolmogorov, non vale nel caso di scalari passivi. Questo aspetto lo si nota dall'analisi della skewness della derivata dello scalare nella direzione alla quale è stato inserito il gradiente medio ( $\partial\phi/\partial x_j$ ).

Dallo studio della PDF dello scalare si è visto che esiste una soglia del numero di Rayleigh ( $Ra \approx 4 \cdot 10^7$ ) attorno al quale le code della PDF degli scalari cambiano il loro comportamento, passando da un comportamento gaussiano a uno esponenziale.

La stessa transizione è stata osservata da Warhaft [11] anche in termini di numero di Reynolds della scala integrale ( $Re_\ell \approx 70$ ). Questo ha permesso di distinguere tra due tipologie di turbolenza:

1. soft turbulence per  $Re_\ell < 70 \rightarrow$  fluttuazioni gaussiane
2. hard turbulence per  $Re_\ell > 70 \rightarrow$  fluttuazioni esponenziali

Una DNS che voglia valutare il comportamento dello scalare passivo necessita di una equazione che segua l'evoluzione del campo scalare.

### 3.1 Il codice gradscal

Gradscal è il nome assegnato ad un codice Fortran in cui aggiungiamo un gradiente di scalare medio, la *temperatura*. Nel caso di forzante deterministica, la temperatura media poteva essere considerata costante, mentre le fluttuazioni della temperatura attorno al valore medio non lo erano.

Forzando il sistema, da una parte si forniva energia, dall'altra questa veniva dissipata, mantenendo una media di energia nulla.

La forzante serviva a generare *fluttuazioni di temperatura*, che venivano trasportate dal flusso e poi dissipate dalla diffusione.

Nel momento in cui eliminiamo la forzante deterministica sullo scalare e la sostituiamo con il gradiente imposto, la temperatura media non sarà più uniforme, ma caratterizzata invece da un gradiente di temperatura costante.

È possibile allora scrivere la temperatura come

$$T = A \cdot x + T' \quad (3.1)$$

con  $A = \frac{\partial T}{\partial x}$

Considerando l'equazione dello scalare passivo

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = k \nabla^2 T \quad (3.2)$$

sostituendo l'equazione (3.1) all'interno della equazione (3.2) troviamo una equazione per  $T'$ :

$$\frac{DT'}{Dt} = k \nabla^2 T' - A \cdot u \quad (3.3)$$

Si nota che ora vale che

$$\nabla T = \left( \frac{\partial T'}{\partial x} + A, \frac{\partial T'}{\partial y}, \frac{\partial T'}{\partial z} \right)$$

Il termine  $A \cdot u$ , inserito nella equazione (3.3) rappresenta la forzante applicata. Si nota che, se c'è una velocità che fluttua in quanto il flusso è turbolento, questa genera delle fluttuazioni di temperatura  $T'$ .

Ipotizzando che all'istante iniziale  $T' = 0$ , va considerata la presenza di vorticità all'interno del flusso. Il vortice prende il flusso da un lato del dominio e lo porta all'altro. Il flusso non vedrà modificate le sue proprietà fisiche, in quanto incomprimibile, tuttavia la temperatura nella nuova posizione risulterà diversa.

Se  $A > 0$ , per convenzione il flusso alla sinistra del dominio sarà più freddo, mentre quello più a destra sarà più caldo. Il fatto che il vortice prenda il flusso caldo e lo porti in una regione più fredda permette la generazione di fluttuazioni di temperatura.

Moltiplicando l'equazione (3.3) per  $T'$  è possibile vedere come sono generate tali fluttuazioni:

$$T' \frac{DT'}{Dt} = (k \nabla^2 T' - A \cdot u) T' \quad (3.4)$$

Si nota che il termine a sinistra dell'uguale può essere scritto come

$$\frac{D(T'^2/2)}{Dt}$$

e facendone la media alla Reynolds si nota che

$$\overline{T'^2} = \sigma(T)$$

è la varianza della temperatura.

L'equazione (3.4) mediata diventa

$$\frac{D(\overline{\sigma(T)/2})}{Dt} = \overline{k\nabla^2 T'^2} - \overline{A \cdot u \cdot T'}$$

Il codice risolve le equazioni di Navier-Stokes (1.8) su un cubo.

L'aspetto più difficile da modificare sono le condizioni al contorno. Tali condizioni sono imposte come periodiche, poiché sono necessarie alla risoluzione di un codice spettrale. All'interno di un codice spettrale le funzioni sono di classe  $C_\infty$  su tutto il dominio, a differenza ad esempio di un codice alle differenze finite, in cui le funzioni risultano lineari a tratti.

Le condizioni che ci interessa imporre sono condizioni di periodicità, in quanto siamo interessati a generare un flusso che sia statisticamente omogeneo. Il flusso si sviluppa su un dominio illimitato, e le proprietà statistiche delle fluttuazioni sono le stesse in tutti i punti.

Imponendo delle condizioni al contorno periodiche stiamo imponendo che, nel dominio di calcolo che stiamo valutando, ciò che entra da una parte del dominio dovrà statisticamente coincidere con ciò che esce dall'altra.

Le condizioni al contorno periodiche permettono anche di stabilire che le considerazioni fatte a livello statistico siano valide anche istantaneamente.

Nel momento in cui consideriamo un dominio sufficientemente grande rispetto al flusso siamo in grado di risolvere una turbolenza *isotropa*, con la solita considerazione che la turbolenza tende a rendere tutto il campo uniforme.

Siccome il gradiente medio genera le fluttuazioni non abbiamo bisogno di forzare la temperatura con una forzante di tipo deterministico. Non sarà più una forzante esterna a immettere energia nel flusso, ma è il gradiente a farlo.

Il termine sorgente diventa

$$\nabla \overline{T'} = -A \cdot \bar{u} \cdot T'$$

La forzante viene dunque ripensata. A differenza del caso classico in cui è considerata di tipo deterministico, in questo caso si considera come forzante la presenza del gradiente medio generato dall'esterno.

### Il gradiente di velocità

Allo stesso modo di quanto fatto per il caso di gradiente di scalare medio imposto, si potrebbe anche considerare anche il caso di flusso con velocità che non sia uniforme, bensì con derivata costante, ovvero un andamento lineare:

$$\text{grad}(\overline{V}) = \text{cost} \neq 0$$

La velocità non sarebbe più periodica, perché ora si ha un gradiente diverso da zero. La soluzione pertanto non sarà periodica nella direzione del gradiente medio.

Rimane verificato però, che se  $grad(\bar{V})$  è uniforme su un dominio molto grande, le fluttuazioni hanno ovunque la stessa PDF, risultando quindi omogenee, in quanto tutte generate dallo stesso moto di taglio. Come risultato, il moto medio non sarebbe periodico, mentre le fluttuazioni di velocità continuerebbero ad esserlo. Il fatto di considerare fluttuazioni omogenee permette di usare condizioni al contorno periodiche.

Allo stesso modo con cui si era suddivisa la temperatura, si dovrebbe procedere effettuando la medesima operazione con la velocità:

$$u = A \cdot x + u' \quad (3.5)$$

Il codice gradscal, in questo caso d'esame, include la presenza di un gradiente dello scalare, la temperatura, ma non un gradiente della velocità, sulla quale rimane una forzante di tipo deterministico.

Per includere il caso di gradiente dello scalare vanno modificate le equazioni di governo (1.8). Andrà infatti aggiunto un termine in più nell'equazione della temperatura, che ora risolve solo  $T'$ , in quanto il codice risolve solo le equazioni periodiche.

Nel codice gradscal è stata modificata sia l'equazione per la temperatura del fluido che quella per la temperatura delle particelle. Si ha che:

$$\frac{dT_p}{dt} = k(T_f - T_p) \quad (3.6)$$

ma, siccome, per (3.1)

$$T_f = A \cdot x + T'$$

sostituendo nella equazione precedente si trova che

$$\frac{dT_p}{dt} = k(A \cdot x + T' - T_p) \quad (3.7)$$

La variabile che risolviamo ora è  $T'$ .

Allo stesso modo in cui si è divisa la temperatura del fluido in componente media e fluttuazioni, equazione (3.1), la stessa cosa può essere fatta per la temperatura delle particelle. Il risultato è il seguente

$$T_p = A \cdot x_p + T'_p \quad (3.8)$$

Calcolandone la derivata è possibile trovare la relazione da inserire a sinistra nell'equazione (3.7):

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{dT'_p}{dt} + A \cdot V_p \rightarrow \frac{dT'_p}{dt} = k(T' - T'_p) - A \cdot V_p \quad (3.9)$$

L'equazione è formalmente uguale alla equazione (3.6) con l'aggiunta di un termine.

## 3.2 Introduzione delle particelle

Il codice permette anche di valutare la risoluzione delle equazioni di Navier Stokes (1.8) nel caso di presenza di piccole particelle.

La dimensione di tali particelle deve però risultare più piccola della scala di Kolmogorov. Attorno a sè, la particella vede un flusso uniforme, dal momento che le fluttuazioni avvengono su scale dell'ordine della scala di Kolmogorov, mentre la dimensione delle particelle è scelta di dimensioni di circa  $\frac{1}{100}\eta$ .

Queste piccole particelle hanno anche un numero di Reynolds piccolo rispetto al flusso ( $Re_p \ll 1$ ). Come accennato in precedenza, le particelle possono essere considerate di diverso tipo, da un granello di sabbia trasportato da un fiume, allo spray di una vernice, a una gocciolina di aerosol all'interno di una nuvola.

Ricapitolando, le condizioni che le particelle inserite devono rispettare sono:

1. devono avere dimensioni molto inferiori alla dimensione della scala di Kolmogorov  $\eta$ ;
2. devono vedere uno spazio uniforme attorno a loro;
3. devono avere un Reynolds del moto relativo piccolo rispetto al fluido ( $Re_p \ll 1$ )

L'interazione fluido - particella può essere approssimata trascurando i termini inerziali, in virtù del fatto che  $Re_p \ll 1$ .

La forza agente sulla particella è la *resistenza di Stokes* più l'eventuale spinta di Archimede. Risolvendo l'equazione per la temperatura attorno alla particella si vede che, trascurando i termini inerziali, si ottiene l'equazione di Fourier per la diffusione:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \quad (3.10)$$

L'equazione non ha termini inerziali, e di conseguenza, non mostra il termine convettivo. Si nota che le equazioni per la particella sono di tipo lineare: il flusso di calore è proporzionale alla differenza di temperatura tra particella e fluido, mentre la resistenza è proporzionale alla differenza di velocità tra particella e fluido.

Un motivo di difficoltà del calcolo è legato al fatto che, per risolvere il moto di una particella, è necessario conoscere la velocità del fluido e la sua temperatura in corrispondenza della posizione delle particelle, che si muovono liberamente all'interno del dominio. I valori di tali grandezze però li abbiamo a disposizione solo nei punti della griglia. È necessario quindi interpolare i valori sulla posizione della particella.

Il codice permette anche di considerare la retroazione delle particelle sul fluido. La rilevanza di questo feedback è legata alla *frazione volumica delle particelle*. Chiamando  $\phi$  tale grandezza, quando  $\phi \approx 10^{-5}$  la retroazione delle particelle inizia ad essere rilevante, soprattutto sulle piccole scale.

Tuttavia fino al raggiungimento di valori di circa  $\phi \approx 10^{-3}$  ci troviamo nel regime già definito *two way coupling*, o accoppiamento bidirezionale, che implica che la retroazione delle particelle sul fluido è contemplata, ma le particelle non sono influenzate dalla presenza delle altre particelle. Questa scelta è legata anche alla complessità di calcolo che un accoppiamento *four way* richiederebbe. Considerando infatti la presenza di un numero

$N$  di particelle all'interno del flusso, sarebbero da considerare  $(N-1)$  disturbi derivanti dalle altre particelle, arrivando a un numero di interazioni pari a  $N \cdot (N - 1) \approx N^2$ , che risulterebbero pesanti a livello computazionale.

Il codice considera sia accoppiamento di tipo unidirezionale che bidirezionale, e sarebbe in grado di includere anche le collisioni tra le particelle. Il campo perturbato non arriva in genere oltre i 10 diametri, ma la collisione tra le particelle potrebbe comunque avvenire. Considerando  $\phi \approx 10^{-4}$  possiamo ignorare l'interazione fluidodinamica tra le particelle, ma rimangono possibili le collisioni tra queste. Volendo essere più precisi, nelle fasi immediatamente prossime alla collisione ci sarà anche una certa interazione fluidodinamica, che tuttavia è trascurabile, specialmente per il caso di  $\rho_p \gg \rho_f$ .

### 3.2.1 Il modello delle collisioni

La collisione è un fenomeno pesante da calcolare in quanto, passo dopo passo, servirebbe considerare  $N \cdot (N - 1)$  possibili collisioni. Per i casi d'esame effettuati, in virtù della frazione volumica scelta, le collisioni non sono state tenute in considerazione, ma per valori di  $\phi$  più elevati il codice sarebbe comunque in grado di valutare gli eventuali urti. Per evitare di dover effettuare  $N^2$  calcoli, il codice divide il dominio in blocchi. Ipotizzando di avere un numero di particelle  $N = 100$ , si vede che:

- considerando un unico blocco composto da 100 particelle, per valutare tutte le possibili collisioni servirebbero  $100^2 = 10000$  controlli
- considerando una suddivisione in 10 blocchi da 10 particelle ciascuno, il codice effettuerebbe  $10 \cdot (10^2) = 1000$  controlli, alleggerendo di molto il carico computazionale

Un problema potrebbe nascere quando le particelle che collidono fossero provenienti da due blocchi diversi. La soluzione in questi casi è quella di sfalsare la valutazione di mezzo blocco e ripetere il calcolo.

Volendo considerare le collisioni, va studiato anche il modello di collisione. In particolare i modelli possibili sono due:

1. collisione completamente elastica (ex. urto di granelli di sabbia)
2. collisione completamente anelastica: le particelle si fondono in una unica particella (ex. goccioline di acqua)

In particolare, il risultato dell'urto dipende dall'angolo a cui avviene l'impatto e da un parametro, il numero di Weber, definito come:

$$We = \frac{\text{energia cinetica}}{\text{tensione superficiale}}$$

Osservando il numero di Weber si nota che:

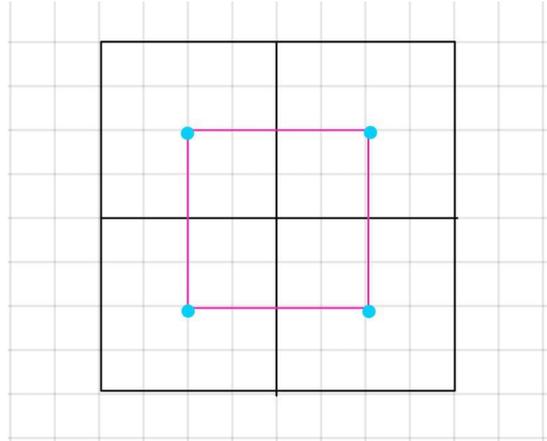


Figura 3.1: sfalsamento di mezzo blocco in caso di particelle provenienti da blocchi diversi. Le particelle a cavallo della frontiera ora sono incluse nel nuovo blocco. È sufficiente effettuare il calcolo due volte per non perdersi nessuna coppia di particelle.

- se  $We$  è basso: le gocce tendono a coalescere
- se  $We$  è alto: le gocce possono coalescere, ma anche rimbalzare l'una sull'altra, unirsi e poi rompersi in altre goccioline, nel caso in cui l'energia cinetica fosse troppo elevata

### 3.3 Le nuove equazioni del problema

In questo caso viene rimossa la forzante di temperatura, in quanto viene sostituita dal gradiente medio dello scalare passivo, la temperatura, che viene mantenuto costante. Chiamiamo  $\Gamma$  tale gradiente, e lo consideriamo imposto nella direzione  $x_3$ . La temperatura risulta allora

$$T(x, t) = \Gamma x_3 + \hat{T}(x, t) \quad (3.11)$$

Questa scomposizione è valida sia per la temperatura del fluido che per quella delle particelle. Risulta quindi che

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \Gamma x_3 + \hat{T}(x, t); \\ \theta_p(t) &= \Gamma x_{p,3}(t) + \hat{\theta}_p(t) \end{aligned}$$

dove  $T$  indica la temperatura del fluido, mentre  $\theta$  indica la temperatura delle particelle. Queste possono essere sostituite nelle equazioni di governo (1.8), che diventano:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \nabla^2 u + f_u + C_u \\ \partial_t \hat{T} + u \cdot \nabla \hat{T} = -\Gamma u_3 + k \nabla^2 \hat{T} + C_T \end{cases} \quad (3.12)$$

La seconda equazione può essere riscritta in termini di derivata lagrangiana

$$\frac{D\hat{T}}{Dt} + \Gamma \frac{Dx_3}{Dt} = k \nabla^2 \hat{T} \quad (3.13)$$

La stessa scomposizione, come visto, si opera per la temperatura delle particelle, ovvero scriviamo

$$\theta_p(t) = \Gamma x_{p,3}(t) + \hat{\theta}_p(t)$$

Sostituendo nelle equazioni per le particelle si ottiene

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{u(x_p, t) - v_p}{\tau_p} \quad (3.14)$$

e

$$\frac{d\hat{\theta}_p}{dt} + \Gamma v_{p,3} = \frac{\hat{T}(x_p, t) - \Gamma x_{p,3} - \hat{\theta}_p + \Gamma x_{p,3}}{\tau_\theta}$$

ovvero, per la temperatura

$$\frac{d\hat{\theta}_p}{dt} = \frac{\hat{T}(x_p, t) - \hat{\theta}_p}{\tau_\theta} - \Gamma v_{p,3} \quad (3.15)$$

### Equazioni adimensionali

Le equazioni di bilancio della quantità di moto non sono influenzate dal gradiente medio di  $T$ , quindi non risultano modificate.

L'adimensionalizzazione richiede la definizione di grandezze di riferimento, da mettere in rapporto alle grandezze dimensionali.

Vogliamo adimensionare l'equazione (3.13) con le classiche grandezze di riferimento  $L_R, U_R$ , e per la temperatura utilizziamo  $T_R$ . L'unico parametro proporzionale alla temperatura è  $\Gamma$ . Considerando

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{\hat{T}}{T_R} \\ \tilde{t} &= \frac{t}{L_R/U_R} \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$\frac{T_R U_R}{L_R} \frac{D\tilde{T}}{Dt} = -\Gamma U_R \tilde{U}_3 + \frac{k}{L_R^2} T_R \tilde{\nabla}^2 \tilde{T}$$

Ovvero

$$\frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} = \frac{k}{U_R L_R} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} - \frac{\Gamma L_R}{T_R} \tilde{U}_3 \quad (3.16)$$

Il termine

$$\frac{k}{U_R L_R}$$

può essere riscritto come segue

$$\frac{k}{U_R L_R} = \frac{\nu}{U_R L_R} \frac{k}{\nu} = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} = \frac{1}{Pe} = \frac{1}{Sc Re}$$

La temperatura di riferimento  $T_R$  non la abbiamo ancora stabilita. Risulta conveniente selezionarla come  $T_R = \Gamma L_R$  di modo che possiamo scrivere

$$\frac{\Gamma L_R}{T_R} = 1$$

In questo modo non è necessario stabilire quanto vale il gradiente medio di temperatura, in quanto tutte le temperature vengono adimensionalizzate con quello stesso gradiente.

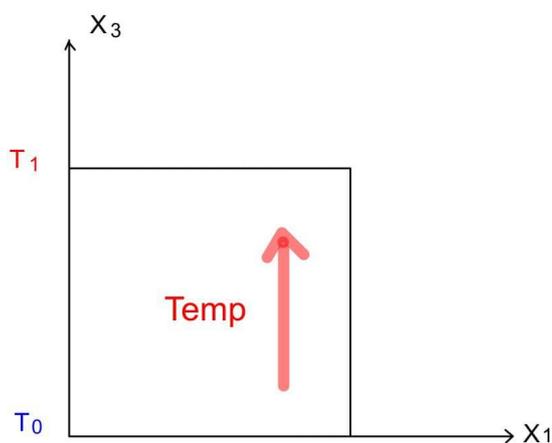
L'equazione (3.16) diventa quindi

$$\frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} = \frac{1}{Pe} \tilde{\nabla}^2 T - \tilde{U}_3 \quad (3.17)$$

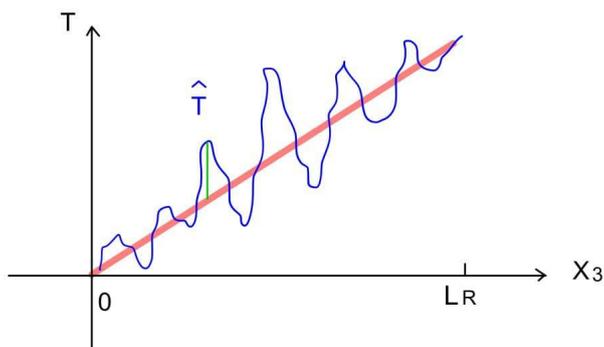
La temperatura con cui adimensionalizziamo è la differenza di temperatura media che abbiamo su una distanza  $L_R$ .

Se  $L_R$  è il dominio,  $T_R$  rappresenta la differenza di temperatura agli estremi del dominio.

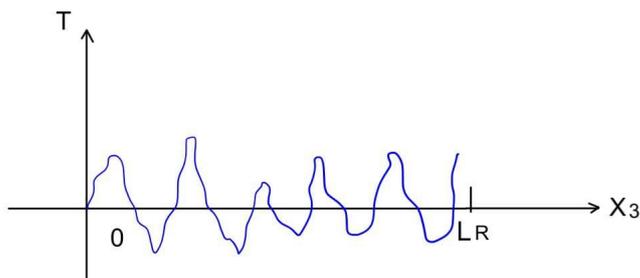
Nel post processing, considerando un gradiente medio imposto nella direzione verticale, la situazione sarà la seguente:



Il comportamento della temperatura lungo la direzione  $X_3$  si presenta allora con un andamento oscillante attorno alla temperatura media imposta dal gradiente:



Per comodità, non consideriamo il gradiente medio, ma solo le fluttuazioni:



É allora chiaro che la varianza della temperatura non sarà la stessa nelle tre direzioni, rompendo così l'isotropia del campo di temperatura:

$$\left\langle \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_{1,2}} \right)^2 \right\rangle \neq \left\langle \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_3} \right)^2 \right\rangle$$

Tornando all'equazione (3.17), per semplicità di scrittura chiamiamo  $\tilde{T}$  adimensionale solamente T. Applicando le considerazioni fatte sui coefficienti dell'equazione si era ottenuto che

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T - U_3$$

Questa equazione può essere mediata, ottenendo

$$\left\langle \frac{DT}{Dt} \right\rangle = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \langle T \rangle - \langle U_3 \rangle \quad (3.18)$$

il termine con la media della velocità lo consideriamo nullo, in quanto la turbolenza, in velocità, rimane omogenea e isotropa.

La derivata lagrangiana a primo membro può essere scomposta nella classica distinzione tra termine temporale e termine convettivo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle T \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle T u_j \rangle$$

In particolare, per quanto concerne il termine convettivo, si nota che:

- per  $j = 1, 2 \rightarrow \langle T u_j \rangle = 0$
- per  $j = 3 \rightarrow \langle T u_j \rangle \neq 0$  (in direzione 3 la turbolenza non è isotropa in temperatura)

in base a queste considerazioni allora, l'equazione (3.18) si scrive come

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle T \rangle + \frac{\partial}{\partial x_3} \langle T u_3 \rangle = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \langle T \rangle \quad (3.19)$$

Consideriamo la classica divisione della media alla Reynolds in termine medio e fluttuazioni:

$$T' = T - \langle T \rangle$$

Quindi

$$\begin{aligned} T &= \langle T \rangle + T' \\ \langle u_3 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Il termine  $\langle T u_3 \rangle$  si può scomporre in

$$\langle T u_3 \rangle = \langle \langle T \rangle u_3 \rangle + \langle T' u_3 \rangle$$

Cerchiamo il contributo delle fluttuazioni al bilancio di energia del problema sottraendo l'equazione della temperatura media da quella della temperatura:

$$\begin{cases} \partial_t T + \partial_j T u_j = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T - u_3 \\ \partial_t \langle T \rangle + \partial_3 \langle T' u_3 \rangle = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \langle T \rangle - \langle u_3 \rangle \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$\partial_t(T - \langle T \rangle) + \partial_1(Tu_1) + \partial_2(Tu_2) + \partial_3(Tu_3 - \langle T'u_3 \rangle) = \frac{1}{Pe} \nabla^2(T - \langle T \rangle) - u_3$$

Mettendo in evidenza le fluttuazioni, la precedente equazione si riscrive come

$$\partial_t(T') + \partial_1(Tu_1) + \partial_2(Tu_2) + \partial_3((\langle T \rangle + T')u_3 - \langle T'u_3 \rangle) = \frac{1}{Pe} \nabla^2(T') - u_3 \quad (3.20)$$

Moltiplicando l'equazione (3.20) per  $T'$  si ottiene la relazione per l'energia correlata alle fluttuazioni:

$$T' \partial_t(T') + T' \partial_1(Tu_1) + T' \partial_2(Tu_2) + T' \partial_3((\langle T \rangle + T')u_3 - \langle T'u_3 \rangle) = \frac{1}{Pe} T' \nabla^2(T') - T'u_3 \quad (3.21)$$

Considerando che il primo termine può essere riscritto come

$$T' \partial_t T' = \partial_t \frac{T'^2}{2}$$

e il primo termine a secondo membro come

$$T' \nabla^2 T' = \nabla^2 \frac{T'^2}{2} - \nabla T' \cdot \nabla T'$$

Di questa nuova equazione possiamo prendere la media statistica, che per la direzione 1 ad esempio risulterà

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle T'^2 \rangle}{\partial t} \frac{1}{2} + \langle \partial_1(T' \langle T \rangle u_1 + T'^2 u_1) \rangle - \langle (\langle T \rangle + T') u_1 \partial_1 T' \rangle = \\ \frac{1}{Pe} \nabla^2 \langle \frac{T'^2}{2} \rangle - \frac{1}{Pe} \langle |\nabla T'| \rangle - \langle u_3 T' \rangle \end{aligned}$$

In questa formula, i termini colorati corrispondono rispettivamente a:

- termini di trasporto
- termine diffusivo
- termine di distruzione
- termine sorgente

Considerando, per semplicità, che  $\langle T \rangle = 0$ , l'equazione mediata per le fluttuazioni (3.21) si scrive come

$$\frac{\partial \langle T'^2 \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle T'^2 u_j \rangle}{\partial x_j} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \langle T'^2 \rangle - \langle u_3 T' \rangle - \frac{1}{Pe} \langle |\nabla T'|^2 \rangle$$

In condizioni stazionarie e omogenee, gli unici termini a rimanere sono gli ultimi due a secondo membro, e dell'equazione precedente rimane solo

$$-\langle u_3 T' \rangle = \frac{1}{Pe} \langle |\nabla T'|^2 \rangle \quad (3.22)$$

Questa equazione rappresenta la condizione di equilibrio, le fluttuazioni crescono o diminuiscono fino a quando non si raggiunge l'equilibrio.

### 3.3.1 Temperatura delle particelle

La temperatura delle particelle diventa invece

$$\frac{d\hat{\theta}_p}{dt} = \frac{\hat{T}(x_p, t) - \hat{\theta}_p}{\tilde{\tau}_\theta} - \Gamma v_{p,3} \quad (3.23)$$

dove  $\tilde{\tau}_\theta$  è il tempo di rilassamento termico.

L'ampiezza della forzante, ovvero il gradiente di temperatura, risulta in questo caso fissata. L'equazione per  $T$  è lineare, a parità di campo di velocità allora, scalando di un fattore  $\alpha$  la forzante, anche la temperatura scalerà dello stesso valore.

Poiché  $\langle T \rangle = \Gamma x_3$ , e quindi  $\langle \tilde{T} \rangle = 0$ , moltiplicando per  $\tilde{T}$  l'equazione per la temperatura e prendendone la media si ottiene

$$\partial_t \langle \tilde{T}^2 / 2 \rangle = -\langle u_3 \tilde{T} \rangle - (ScRe)^{-1} \langle \|\nabla\|^2 \rangle + \langle C_T \tilde{T} \rangle$$

In un flusso mediamente stazionario ed in assenza di particelle, la dissipazione della varianza dello scalare  $\chi$  diviene

$$\chi = -\langle u_3 \tilde{T} \rangle$$

Aggiungendo le particelle va considerato il termine di retroazione delle particelle, che contribuisce alla dissipazione della varianza della temperatura.

Le condizioni al contorno rimangono di natura periodica. Per le particelle che entrano ed escono dalla direzione  $x_3$  si applica comunque una condizione di periodicità sulla temperatura adimensionale delle particelle  $\hat{\theta}$ . In questo modo, ciò che rimane periodico è lo scarto quadratico medio rispetto alla distribuzione media della temperatura. Il flusso infatti rimane omogeneo, ma anisotropo nella temperatura. Considerando però come variabili del problema le fluttuazioni, è possibile sfruttare la condizione per cui  $\hat{T}$  rimane sempre costante.

#### Equazioni adimensionali per la temperatura delle particelle

Quanto fatto per l'adimensionalizzazione della temperatura della parte fluida, viene ripetuto anche per la parte solida, composta dalle particelle.

L'equazione (3.23) viene adimensionalizzata come segue

$$\dot{\hat{\theta}}_p = \frac{L_R}{U_R \tau_\theta} (\tilde{T} - \tilde{\theta}_p) - \frac{\Gamma L_R}{T_R} \tilde{v}_{3,p} \quad (3.24)$$

In particolare, per quanto detto anche in precedenza,

$$\frac{\Gamma L_R}{T_R} = 1$$

mentre

$$\frac{L_R}{U_R \tau_\theta} = \frac{1}{\frac{\tau_\theta}{L_R/U_R}} = \frac{1}{\tau_\theta/T_R} = \frac{1}{St_{ref}}$$

Queste considerazioni portano a riscrivere l'equazione (3.24) come

$$\dot{\hat{\theta}}_p = \frac{1}{St} (\tilde{T} - \tilde{\theta}_p) - \tilde{v}_{3,p} \quad (3.25)$$

### 3.4 La turboforesi

La turboforesi è un processo già accennato precedentemente, che richiama la tendenza del flusso caricato con particelle a raggruppare queste ultime in specifiche regioni del dominio, influenzando in questo modo gli scambi di calore e di quantità di moto.

Aggiungendo le particelle al flusso, queste lo modificano in virtù del fatto che:

- se  $\rho_p > \rho_f \rightarrow$  le particelle tendono ad essere espulse dai vortici
- se  $\rho_p < \rho_f \rightarrow$  le particelle tendono ad essere spinte al centro dei vortici

Le particelle più dense tendono ad essere spinte in zone a bassa vorticità e grande deformazione, mentre le particelle meno dense si spostano in zone ad alta vorticità e bassa deformazione.

In concomitanza del moto delle particelle, anche lo scalare passivo subisce l'azione del flusso turbolento. La temperatura viene infatti trasportata e diffusa dalla turbolenza. Al centro del vortice la diffusione tende a rendere tutto uniforme, e non si nota una forte deformazione. Sul bordo del vortice invece i gradienti dello scalare risultano intensi, perché i bordi sono zone di incontro di due vortici diversi, e la diffusione in quella zona non fa in tempo ad agire e rendere il tutto uniforme. I gradienti, disposti sui bordi tra un vortice e l'altro, sono quindi soggetti a forti stiramenti.

Le particelle pertanto, se  $\rho_p \gg \rho_f$ , tendono ad essere spinte ai bordi dei vortici, finendo quindi nelle regioni con forte gradiente dello scalare, che corrispondono alle zone in cui si osserva un grande flusso di calore.

Le particelle per questo motivo contribuiscono al flusso di calore del sistema, in quanto esse stesse possiedono una propria inerzia termica. Inoltre, particelle con una elevata inerzia tendono anche ad avere una velocità che potrebbe risultare molto diversa da quella del fluido. Nel caso di particelle con piccola inerzia le collisioni sarebbero molto rare, in quanto la loro velocità relativa rispetto a quella del flusso sarebbe bassa o nulla. Particelle con grande inerzia invece, avendo grandi velocità relative, contribuiscono notevolmente anche alla dissipazione della energia cinetica, e tendono anche a dissipare le fluttuazioni grazie ai forti gradienti di temperatura che le caratterizzano. Allo stesso tempo riescono anche a trasportare energia su distanze maggiori. Poiché le fluttuazioni trasportano calore, risulta verificato che il flusso di calore turbolento sarà maggiore di quello laminare:

$$q_{turbolento} > q_{laminare}$$

$$\text{con } q = -\overline{\lambda \cdot \nabla T}$$

La turboforesi inoltre aumenta la probabilità delle collisioni, perché dal momento che le particelle vedono una concentrazione preferenziale in alcune regioni del dominio, diventa più facile che collidano tra loro, favorendo quindi anche la crescita per condensazione [1].

Il mixing di sostanze presenti all'interno del flusso risulta inoltre favorito lungo i fronti generati dalla turboforesi.

### 3.5 L'inerzia delle particelle

Il parametro che ci fornisce le informazioni necessarie a comprendere l'inerzia delle particelle è, come detto in precedenza, il numero di Stokes.

Partendo dalla seconda Legge di Newton:

$$F = m \cdot a$$

sia  $F = k(u - u_p)$ , sostituendo nella equazione precedente si trova che

$$\frac{k(u - u_p)}{m} = \frac{\mathcal{M} \cdot a}{\mathcal{M}} \rightarrow a = \frac{u - u_p}{\tau}$$

Se la velocità del flusso è  $u = \text{cost}$ , il tempo che la particella impiega a raggiungere la velocità del flusso è proporzionale al tempo di rilassamento  $\tau$ .

Risolviendo l'equazione differenziale si trova che

$$u_p = u_f + (u_{p0} - u_f)e^{-t/\tau}$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo, la velocità della particella tenderà a eguagliare la velocità del flusso.

Se il flusso è turbolento però,  $u_f \neq \text{cost}$ .

Essendo la particella più piccola della scala  $\eta$  di Kolmogorov, le grandi scale del flusso non sono più da considerarsi le più rilevanti, che saranno invece quelle più piccole. I vortici più piccoli sono quelli più veloci, e più il vortice è piccolo più il tempo di rilassamento diventa piccolo. Le fluttuazioni di velocità più rapide che vede una particella sono quelle della scala di Kolmogorov.

Come visto nel capitolo 1, a partire da  $St \approx 0, 1$ , gli effetti inerziali delle particelle iniziano ad essere rilevanti. Per valori di  $St < 0, 1$  è possibile considerare le particelle come una singola fase continua, invece che prenderle singolarmente. Non si ha più l'equazione per le singole particelle, ma una equazione per un campo di particelle per unità di volume, oltre che una equazione per la velocità media delle particelle in un certo punto dello spazio.

# Capitolo 4

## Il post processing

La visualizzazione dei risultati è problematica in un campo tridimensionale, perché la scheda grafica non è in grado di visualizzare tutti i milioni di punti che compaiono nel dominio.

L'unica possibilità che abbiamo è quella di visualizzare solo una sezione del dominio, ovvero un tratto 2D. Il piano considerato ha una sua temperatura, che viene salvata, così come il vettore delle velocità. Le particelle però avranno un tasso di probabilità di trovarsi sul piano scelto pari a zero. Va quindi valutato un metodo per includerle nella visualizzazione.

Per fare ciò è necessario prendere un piano, assegnare un certo spessore, e si tengono in considerazione le particelle che si trovano a una distanza inferiore alla dimensione di quello spessore.

### 4.1 visualizzazione dei risultati

Come accennato, il dominio di calcolo delle simulazioni è un dominio tridimensionale, che può essere rappresentato come un cubo, suddiviso in ulteriori parti più piccole in base ai processori utilizzati per il calcolo:

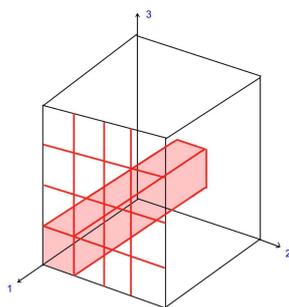


Figura 4.1: Il dominio di calcolo del problema è un cubo tridimensionale, suddiviso in sottosezioni pari al numero di processori utilizzati

Si nota che la direzione indicata con 1 rimane invariata, di conseguenza lungo un segmento parallelo alla direzione 1, tutte le quantità risultano calcolate nello stesso processore.

Come si vede nella figura seguente, la condizione più conveniente è proprio quella in cui si considera un piano  $x_2 = \text{cost}$

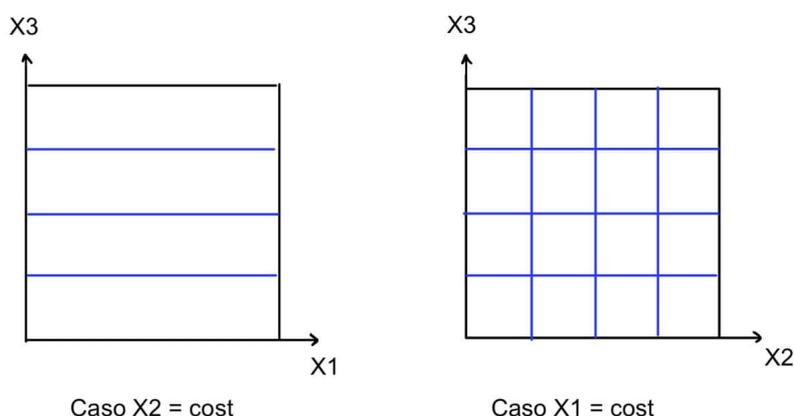


Figura 4.2: alternative per la selezione del piano da mantenere costante. Si nota che, considerando il caso  $X_2 = \text{cost}$  la suddivisione è più facile, in quanto, nel caso di utilizzo di 16 processori, il piano è diviso in sole quattro parti

Una volta stabilito quale sia il piano in considerazione ci si salva in una scrittura unica le tre componenti del vettore di velocità, seguite dagli scalari tenuti in considerazione nella simulazione. La scrittura finale sarà del tipo

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

dove i primi tre termini rappresentano le componenti del vettore velocità, mentre l'ultimo rappresenta il valore dello scalare nel punto considerato.

Per evitare problemi di identificazione delle singole particelle, evitiamo di considerare proprio la faccia esterna del dominio. Per via della periodicità infatti, la stessa particella potrebbe risultare contata due volte:



Figura 4.3: considerando il segmento di lunghezza  $2\pi$ , si nota come, per un intervallo stabilito a ridosso dell'estremità del dominio, la stessa particella viene contata due volte, per via dell'ipotesi di periodicità della soluzione che è stata effettuata

## 4.2 Il numero di Nusselt

Il numero di Nusselt è uno strumento valido per valutare come la presenza delle particelle influenzi il comportamento termico del flusso che le ospita.

Questo parametro adimensionale definisce il rapporto tra il calore effettivamente scambiato e il flusso di calore che si avrebbe in condizioni statiche.

Esso risulta particolarmente utile per le analisi effettuate nel caso di presenza di gradiente di scalare imposto, come avviene nel caso del calcolo effettuato con il codice gradscal.

Il flusso di calore è definito da

$$-\lambda \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_3} - \rho C_p \langle T' u_3 \rangle = -\lambda \Gamma - \rho C_p \langle T' u_3 \rangle$$

Per quanto riguarda il flusso di calore in condizioni statiche invece, questo si scrive come

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} = \lambda \Gamma$$

Questo si ottiene dal fatto che

$$T = \Gamma x_3 + \hat{T} \rightarrow \langle T \rangle = \Gamma x_3 + \langle \hat{T} \rangle$$

che implica che

$$T' = \hat{T}'$$

Per le considerazioni appena fatte, il numero di Nusselt si scrive come rapporto tra le due espressioni appena scritte, di cui viene preso il modulo:

$$Nu = \frac{\rho C_p \langle u_3 T' \rangle + \lambda \Gamma}{\lambda \Gamma} \quad (4.1)$$

Il numero di Nusselt che fa riferimento alle grandezze adimensionali è invece

$$Nu = \frac{\rho C_p U_R L_R \mathcal{V} \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle + \lambda \mathcal{V}}{\lambda \mathcal{V}} \quad (4.2)$$

Tale risultato fa riferimento alla solita definizione della temperatura adimensionale  $T_R = \Gamma L_R$ .

La formulazione ricavata in (4.2) può essere riformulata per mettere in evidenza grandezze utili ai fini del calcolo:

$$Nu = \frac{\rho C_p U_R \mathcal{V} L_R}{\lambda \mathcal{V}} \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle + 1$$

Si nota che il primo termine a secondo membro può essere riformulato in altro modo. Infatti, in virtù del fatto che

$$\frac{\rho C_p}{\lambda} = \frac{1}{k}$$

dove  $k$  rappresenta la diffusività termica.

È quindi possibile notare che (4.2) può essere scritto come

$$Nu = 1 + \frac{1}{k} U_R L_R \langle \tilde{u} T' \rangle$$

Anche il termine  $\frac{U_R L_R}{k}$  può essere rivisto, in quanto

$$\frac{U_R L_R}{k} = Pe$$

Questo risultato porta a una definitiva scrittura del numero di Nusselt:

$$Nu = 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle \quad (4.3)$$

Il codice non fornisce come risultato direttamente il numero di Nusselt, tuttavia fornisce sia il valore di  $\tilde{u}_3$  che quello di  $\tilde{T}'$ . Conoscendo il numero di Peclet riferito al calcolo di nostro interesse, siamo in grado di ricavare il numero di Nusselt.

### 4.2.1 Il numero di Nusselt in presenza di particelle

Quanto appena visto per il calcolo del numero di Nusselt non tiene conto della eventuale presenza di particelle all'interno del flusso.

Se oltre alla turbolenza noi volessimo anche considerare la presenza di particelle, queste verrebbero trasportate dal flusso, e contribuirebbero anch'esse allo scambio di calore.

Come visto in precedenza, l'influenza delle particelle all'interno del flusso è legata soprattutto al numero di Stokes delle particelle. A un numero di Stokes elevato corrisponde anche un numero di Stokes termico elevato, che implica che le singole particelle tendono a conservare la loro temperatura, a causa della difficoltà di adeguamento alla temperatura del flusso. In questo modo le particelle riescono a trasportare il flusso di calore anche alle lunghe distanze.

Il contributo delle particelle al calcolo del numero di Nusselt si ottiene partendo dal trasporto che le particelle attuano. Questo è dato da

$$\langle \theta_p \cdot v_{3,p} \rangle$$

che, moltiplicato per il numero di particelle presenti nel dominio, darà in uscita il trasporto complessivo ad opera delle particelle:

$$n_p \langle \theta_p \cdot v_{3,p} \rangle$$

Da questa scrittura si riesce a ricavare la nuova definizione del numero di Nusselt, che includa anche il contributo dato dalle particelle:

$$Nu = \frac{\rho C_p \langle u_3 T' \rangle + n_p m C_p \langle \theta_p v_{3,p} \rangle}{\lambda \Gamma} \quad (4.4)$$

Come fatto per il caso senza particelle, anche la relazione (4.4) dovrà essere resa adimensionale, in modo da poter fare utilizzo delle grandezze fornite in uscita dal compilatore.

Si otterrà dunque

$$Nu = 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle + \frac{\langle \tilde{\theta} \tilde{u}_{3,p} \rangle U_R L_R \Gamma m_p C_p n_p}{\Gamma \lambda} \quad (4.5)$$

Riscrivendo  $\lambda$  come

$$\lambda = k \rho C_f$$

e sostituendola nella equazione precedente, si ottiene

$$Nu = 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle + \frac{\langle \tilde{\theta} \tilde{u}_{3,p} \rangle U_R L_R \Gamma m_p C_p n_p}{\Gamma k \rho C_f} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle + \frac{\langle \tilde{\theta} \tilde{v}_{3,p} \rangle Pe m_p C_p n_p}{\rho C_f} = 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle + \frac{\langle \tilde{\theta} \tilde{u}_{3,p} \rangle Pe C_p \rho_p Vol_p n_p}{\rho C_f} = \\
&= 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle + Pe \phi \frac{\rho_p C_p}{\rho C_f} \langle \tilde{\theta} \tilde{u}_{3,p} \rangle
\end{aligned}$$

L'osservazione dei risultati del numero di Nusselt permetteranno di constatare che tale parametro risulterà dipendente altri parametri, in particolare varrà che

$$Nu = Nu(Pr, Re, St, St_\theta, n_p)$$

e si potrà constatare che l'effetto del numero di Stokes,  $St$ , e del numero di Stokes termico,  $St_\theta$ , non sarà lineare.

### 4.3 La statistica del flusso

Nel caso di presenza di gradiente dello scalare imposto, il flusso che valutiamo è omogeneo, ma non isotropo, in quanto, avendo introdotto un gradiente di temperatura in una specifica direzione, si deve tenere in considerazione il fatto che

$$\frac{\partial T}{\partial x} \neq \frac{\partial T}{\partial y} \neq \frac{\partial T}{\partial z}$$

Le statistiche nelle tre direzioni allora risultano diverse.

Siccome però la temperatura è uno scalare, l'introduzione del suo gradiente medio all'interno del flusso non influisce sul comportamento del vettore della velocità.

#### 4.3.1 La funzione densità di probabilità dello scalare passivo

Nei primi studi della funzione densità di probabilità riferita a uno scalare all'interno di turbolenza omogenea si riteneva che una distribuzione di tipo gaussiano fosse adatta a descrivere il comportamento dello scalare, così come valeva per il campo della velocità. Tuttavia, studi più recenti mostrano che in certe circostanze, le *PDF* dello scalare mostrano delle code esponenziali, seguendo un comportamento molto diverso da quello ipotizzato da Kolmogorov. Si è infatti notato che, in presenza di gradiente di scalare medio, la *PDF* mostra un comportamento che si allontana dalla gaussianità tipica della *PDF* del campo di velocità.

Siccome non c'è un termine di pressione nelle equazioni di governo dello scalare passivo, il campo scalare soffre di una forte deformazione dovuta alla sola azione convettiva, e vengono meno l'isotropia locale e l'effetto del mixing. Lo scalare passivo viene quindi espulso dal vortice e impilato ai margini dello stesso, in particolari punti del dominio. Le statistiche dello scalare convergono allo stato stazionario più lentamente rispetto a quelle di velocità.

Conoscere la distribuzione della *PDF* diventa allora particolarmente importante quando si intende studiare ad esempio la dispersione di inquinanti in atmosfera, o il mixing di elementi chimici che rendano possibile la combustione all'interno di un motore termico.

### L'evoluzione della varianza dello scalare

Un aspetto rilevante nello studio della varianza dello scalare non è solo come si presenta la *PDF* dello scalare, ma anche come questa evolve nel tempo. Questa analisi ci fornisce le informazioni necessarie a comprendere il rateo di decadimento nel tempo delle fluttuazioni nel momento in cui viene rimossa la forzante.

Le equazioni di governo che regolano la dissipazione del campo di velocità e del campo scalare sono:

$$U \frac{d\langle q^2 \rangle}{dx} = -\langle \epsilon \rangle \quad (4.6)$$

$$U \frac{d\langle \theta^2 \rangle}{dx} = -\langle \epsilon_0 \rangle \quad (4.7)$$

dove

$$\langle q^2 \rangle = \frac{1}{2}[\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle] \approx \frac{3}{2}\langle u^2 \rangle$$

rappresenta l'energia cinetica turbolenta per unità di massa.

Warhaft [23] mostra che il rateo di decadimento  $\langle \theta^2 \rangle$  è funzione del rateo della velocità iniziale alla scala iniziale dello scalare. Aumentando la dimensione della scala iniziale aumenta anche il rateo di decadimento della varianza dello scalare. Dopo un lungo periodo, il rateo di decadimento della varianza termica diventa indipendente dalle condizioni iniziali.

La complessità di questa analisi deriva dalla azione della diffusione molecolare e dalla viscosità, oltre che alla dimensione della sorgente. Il tracciamento della particella inoltre non è semplice, aggiungendo un altro fattore di complessità allo studio.

## 4.4 Lo spettro di scalare passivo e l'anisotropia locale

Lo scalare passivo e la velocità possono essere entrambi scomposti in un flusso medio e fluttuazioni:

$$\theta = T + \theta; \quad u_i = U_i + u'_i$$

In molti problemi risulta fondamentale determinare la varianza dello scalare  $\langle \theta^2 \rangle$ , del flusso  $\langle \theta u_j \rangle$  e del rateo di dissipazione dello scalare  $\langle \epsilon_\theta \rangle$ .

La fenomenologia su cui si basa lo studio dello scalare passivo è quella descritta da Kolmogorov nel 1941. Negli anni successivi, Corrsin e Obukhov [20] hanno apportato delle correzioni per applicare la teoria di Kolmogorov allo studio dello scalare passivo. I due hanno notato che, per alti numeri di Reynolds e di Peclet, avviene una cascata energetica verso le piccole scale, dove il campo scalare ci si aspetta che diventi localmente isotropo.

La previsione stimata dai due per lo studio dello spettro unidimensionale dello scalare è:

$$F_\theta(K_1) = C_\theta \langle \epsilon \rangle^{-1/3} \langle \epsilon_\theta \rangle k_1^{-5/3}$$

dove  $k_1$  rappresenta il numero d'onda longitudinale;

$C_\theta$  è una costante universale

La relazione appena scritta diventa utile per calcolare

$$\langle \theta^2 \rangle = \int_0^\infty F_\theta(K_1) dK_1$$

La relazione corrispondente per il campo di velocità è:

$$F(K_1) = C\langle\epsilon\rangle^{2/3}K_1^{-5/3}$$

dove  $C \approx 0,5$  è la costante universale di Kolmogorov, mentre i due ratei di dissipazione sono:

$$\epsilon = \nu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

$$\epsilon_\theta = 2K \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)$$

La prova sperimentale mostra però la presenza di intermittenza alle piccole scale, caratterizzate da forte variabilità nel rateo di dissipazione e di mixing. La dissipazione del campo di velocità e quella dello scalare hanno dunque comportamento non gaussiano, e le piccole scale non si possono considerare isotrope come invece credevano i due matematici.

È stato dimostrato che le statistiche non gaussiane di  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  sono molto più marcate rispetto a quelle di  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . L'intermittenza dello scalare può avvenire anche in un campo di velocità puramente gaussiano, e il comportamento non gaussiano si estende anche a scale che risultano più ampie della scala di dissipazione  $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ . L'intermittenza dello scalare passivo trasportato dalla turbolenza è un aspetto fondamentale nello studio delle fluttuazioni, e il suo effetto è quello di generare comportamenti non noti che si allontanano dall'andamento gaussiano.

L'assunzione della scalatura prevista da Obukhov-Corrsin prevedeva di considerare alle piccole scale un campo scalare e di velocità che fossero isotropi nel limite di infiniti Peclet e Reynolds. Questa assunzione risulta però violata come mostrano evidenze sperimentali, e il comportamento dello scalare alle grandi scale è riflesso direttamente alle scale inerziali e dissipative.

Studiando i flussi di taglio, Screenivasan [20] ha raccolto inoltre i dati della derivata dello spettro dello scalare passivo a diversi numeri di Reynolds.

Per  $Re_\lambda \approx 10^3 - 10^4$  lo spettro raggiunge il valore asintotico di  $-5/3$ , dove  $Re_\lambda = \frac{\sqrt{u^2}\lambda}{\nu}$ . Screenivasan osserva che lo spettro di velocità trasversale evolve in modo simile allo spettro di temperatura, mentre la velocità longitudinale raggiunge il valore asintotico di  $-5/3$  a valori di  $Re_\lambda$  più bassi ( $Re_\lambda \approx 50$ ). Risultati sperimentali mostrano infatti che

$$\left\langle \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \approx 1,4 \left\langle \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right\rangle$$

Nel caso di turbolenza di griglia invece, l'anisotropia delle piccole scale sembra essere indipendente da  $Re_\lambda$ , e lo spettro scalare raggiunge il valore asintotico di  $-5/3$  in presenza di bassi numeri di Reynolds in assenza di scalature nel campo di velocità, come mostrato in figura 4.4. Questo dimostra che la turbolenza omogenea isotropa raggiunge lo stato asintotico suggerito da Obukhov e Corrsin a un rateo più veloce rispetto a quello necessario alla turbolenza nei flussi di taglio [24].

Risulta dunque chiaro che un additivo passivo, obbedendo a una equazione lineare, mostra caratteristiche molto diverse da quelle del campo di velocità trasportato. Una chiara evidenza di ciò la si nota nel fatto che esistono delle code esponenziali nella curva della densità di probabilità dello scalare, pure in caso di bassi numeri di Reynolds coinvolti, in cui la PDF della velocità rimarrebbe gaussiana.

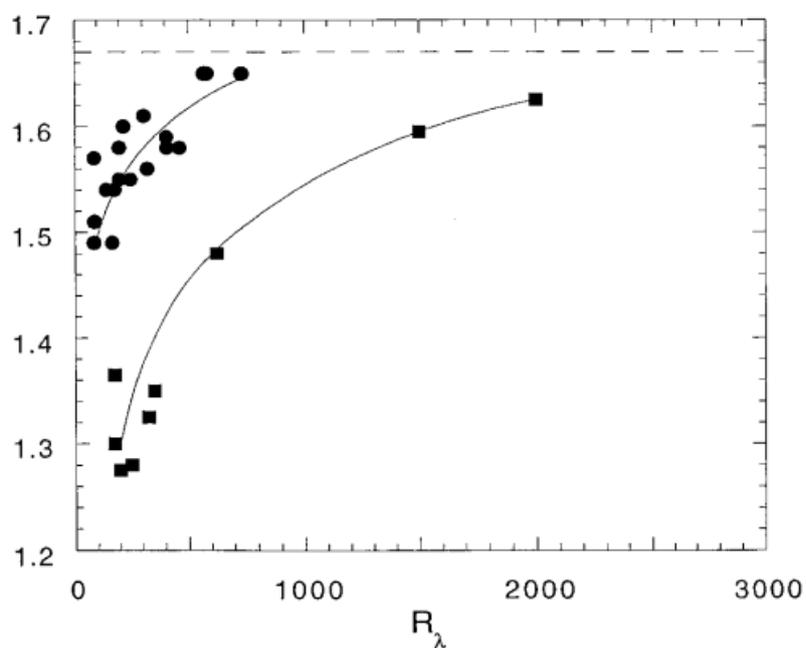


Figura 4.4: raggiungimento del valore asintotico di  $5/3$  dello spettro dello scalare passivo. Con i quadrati sono contrassegnati gli spettri scalari relativi al flusso di taglio, mentre con i cerchi quelli relativi al caso di turbolenza generata dalla griglia. Si nota che, nel caso di turbolenza di griglia, il valore asintotico è raggiunto per valori di  $Re_\lambda$  molto inferiori rispetto a quelli dello shear flow.

Si può quindi notare una marcata anisotropia sia alle scale dissipative che a quelle inerziali, che comportano un allontanamento dal comportamento previsto dalla teoria di Kolmogorov, oltre a una forte intermittenza dello scalare, anche in assenza di intermittenza nel campo di velocità. Questi aspetti giocano un ruolo importante nel mixing, nella dispersione, e nella correlazione di scalari passivi all'interno di un campo fluidodinamico, e vanno tenuti in considerazione nel momento in cui si voglia effettuare uno studio di un modello comportamentale. Si può infatti notare come il trasporto turbolento incrementi la dispersione di sostanze passive, e stimoli il raggruppamento delle impurità. Questi due aspetti hanno forti ripercussioni sugli scambi di calore nei fluidi, favorendo la condensazione di piccole droplet in ambienti supersaturi. Le stesse particelle disperse campionano il fluido con il quale interagiscono in maniera non uniforme. L'effetto della turboforesi genera lungo i fronti delle forti discontinuità, che sono necessariamente causa di elevati livelli di fluttuazioni nel campo scalare campionato dalle particelle, andando così a rompere gli schemi e le assunzioni tipiche degli approcci tradizionali della teoria di Kolmogorov.

#### 4.4.1 Le funzioni di struttura

La valutazione statistica dei flussi turbolenti prevede anche lo studio delle *funzioni di struttura*, definite come:

$$\overline{(T_x - T_{x+r})^n}$$

dove  $T_x$  e  $T_{x+r}$  sono misurazioni del generico campo fatte in due punti diversi dello spazio posti a una certa distanza  $r$ . Dal momento che siamo interessati a valutare l'azione che le particelle hanno sul flusso, essendo queste di dimensioni molto inferiori alla scala di Kolmogorov, è necessario studiare le funzioni di struttura alle scale dissipative del flusso. In questo particolare range, dove la viscosità fa la sua comparsa, le ipotesi proposte da Kolmogorov non sono più valide, e l'ipotesi di gaussianità del campo, sia di velocità che di scalare, verrà meno.

Le funzioni di struttura sono un valido strumento che ci permette approfondire la nostra conoscenza del campo che stiamo studiando. Esse descrivono la differenza nella misurazione del campo di velocità o della temperatura che intercorre tra due punti del dominio posti a una certa distanza  $r$ .

Qualora il problema considerato avesse un comportamento gaussiano, le funzioni di struttura di generico esponente  $n$  si potrebbero tutte ricavare da quelle con altri esponenti, in quanto risulterebbero tutte algebricamente concatenate da una proporzionalità diretta. Qualora questo comportamento non si verificasse, significherebbe che il comportamento del flusso non è gaussiano. Il fatto di avere comportamento diverso per esponenti diversi implica un superamento dell'ipotesi implicita di Kolmogorov, che ipotizzava che, su scale intermedie tra la dimensione della grandi scale a cui si immette l'energia e le scale dissipative, quindi sulle scale inerziali, il modulo della differenza del campo di velocità in due punti distinti del campo dipendesse solo dalla dissipazione  $\epsilon$  e dalla distanza tra i due punti  $r$ , ma non dalla viscosità  $\nu$ .

Queste funzioni sono importanti, perché il sistema non risponde direttamente alla temperatura  $T$ , bensì alle variazioni  $\Delta T$  di questa. Le funzioni di struttura descrivono come sono correlate tra loro le funzioni di temperatura, e danno informazioni sul flusso di energia che scorre da una scala all'altra.

Anche la stessa scala di Kolmogorov si basa sulle funzioni di struttura. Considerando un

generico vortice, ciò che lo caratterizza è la sua vorticità. Si vede però che, a una certa distanza  $R$ , il vortice sarà caratterizzato da una certa  $\frac{\partial u}{\partial R}$ .

La misurazione delle fluttuazioni associata al vortice è la differenza di velocità sulla scala del vortice. Per valutare il flusso serve valutare la differenza di velocità che lo caratterizza.

Allo stesso modo, è possibile anche valutare la differenza di temperatura che caratterizza due punti del vortice posti a una certa distanza  $R$ .

$\frac{\partial T}{\partial R}$  dà informazioni riguardo la temperatura trasportata dai vortici di scala  $R$ .

Quando le scale sono piccole, le funzioni di struttura forniscono informazioni sulla regolarità della struttura. Quando arriviamo a distanze molto piccole,  $R \rightarrow 0$ , il  $\Delta T$  dovrà anch'esso tendere a zero in un tempo relativamente breve. Se così non fosse, starebbe a significare che il campo non è in realtà di classe  $C_\infty$ .

Mentre le equazioni di Navier Stokes sono sicuramente di classe  $C_\infty$ , per via dell'azione compiuta dall'azione della diffusione, nel caso di presenza delle particelle questa assunzione non risulta più scontata. Creando un campo continuo, che in ogni punto fornisce la media delle particelle, nel momento in cui consideriamo particelle molto vicine tra loro sarà possibile osservare che, per valori del numero di Stokes molto piccoli, le temperature tra due particelle adiacenti saranno pressoché identiche; tuttavia, nel caso di numeri di Stokes più grandi, particelle tra loro vicine potrebbero provenire da zone molto diverse del dominio, e di conseguenza portare con sé una temperatura sensibilmente differente. Questo risultato implicherebbe che il campo studiato non è regolare, e tenderebbe a seguire un comportamento frattale. Il risultato atteso è quindi strettamente legato al numero di Stokes: per bassi valori di questo, il campo tenderà a seguire un comportamento regolare, per alti valori del numero di Stokes invece, il comportamento non si potrà più considerare regolare. Dallo studio delle funzioni di struttura siamo quindi in grado di capire quando il flusso raggiunge un comportamento irregolare, e in che modo lo diventa.

Per la teoria di Kolmogorov il parametro di riferimento del suo studio è  $\epsilon$ , ovvero il flusso di energia tra una scala e l'altra. Il processo di generazione di nuove scale che viene considerato implicitamente è di tipo autosimile. Dimezzando la scala, ci si aspetterebbe che le altre grandezze vadano in proporzione.

Ogni deviazione dal comportamento previsto da Kolmogorov viene definita *intermittenza*. Secondo Kolmogorov, a ogni scala, la turbolenza occupa tutto il volume del dominio. Qualora questa ipotesi venisse meno, si avrebbero regioni senza turbolenza, portando a intermittenza.

# Capitolo 5

## Risultati

### 5.1 Gli input

I risultati sono stati valutati per diversi casi d'esame, in modo da far variare sia il numero di Stokes  $St$  che il numero di Stokes termico  $St_\theta$ . In particolare, il procedimento di valutazione dei diversi casi d'esame è stato scelto per includere al suo interno una ampio range di materiali possibili.

Nel primo set di simulazioni si è deciso di simulare il caso di studio in cui la parte solida del problema fosse rappresentata da goccioline di acqua, trascurandone però i fenomeni di condensazione, mentre la parte fluida del problema è stata scelta in modo che fosse aria. In questo caso allora il rapporto tra i calori specifici delle particelle e del fluido risulta costante pari a 4.16.

Considerando come dato di partenza il numero di Stokes che desideriamo, il numero di Stokes termico conseguente sarà dato da

$$St_\theta = \frac{3}{2}St \frac{C_p}{C_f}$$

Risulta allora evidente che nel caso in cui si scegliesse di simulare particelle di acqua in aria, il rapporto tra i due numeri di Stokes rimane costante:

$$St_\theta = 6.24St \tag{5.1}$$

Facendo variare il numero di Stokes è dunque possibile valutare il diverso grado di inerzia e di inerzia termica delle particelle. Per numeri bassi ci si aspetta che le particelle tendano a seguire fedelmente il fluido che le trasporta, sia in termini di velocità che in termini di temperatura. All'aumentare dello Stokes invece i risultati saranno diversi, e al raggiungimento di valori di Stokes dell'ordine di 1 ci si aspetta un maggior grado di irregolarità nei risultati, sia per quanto riguarda le funzioni di struttura che per le PDF. Dal momento che il codice non consente di inserire in input il numero di Stokes, è necessario procedere in modo diverso. Risulta necessario scegliere il raggio adimensionale delle particelle come input, in modo che, associato al numero delle particelle presenti nella simulazione, dettate dalla frazione volumica  $\phi$ , dia in uscita il numero di Stokes desiderato.

Nel secondo caso di esame si è invece mantenuto fisso il raggio adimensionale delle

particelle, ma si è fatto variare il calore specifico della parte solida, in modo da ampliare lo studio al caso di diversi materiali. Non è dunque più valida la relazione (5.1). I valori del  $C_p$  inseriti saranno scelti in funzione dello  $St_\theta$  che si desidera simulare. Volendo includere nella trattazione un ampio range di materiali si è scelto di far variare  $St_\theta$  da 0.2 a 2.

Si nota nella tabella 5.1 la presenza dell'idrogeno, unico materiale con un calore specifico superiore a quello dell'acqua. Il suo inserimento in tabella è in realtà solo simbolico, in quanto la simulazione di particelle di idrogeno in acqua presupporrebbe di avere una densità delle particelle molto minore di quella del carrier flow  $\rho_p \ll \rho_f$ , andando contro le ipotesi fatte per la semplificazione dell'equazione di Maxey Riley (1.4) [13]. Servirebbe in quel caso considerare la presenza della forza di Basset, che complicherebbe di molto il problema.

Nella seguente tabella sono riassunte tutte le casistiche valutate:

St	$St_\theta$	$\frac{C_p}{C_f}$	materiale particella	numero particelle	raggio particelle
0.1	0.624	4.16	acqua	17700939	6.942e-4
0.2	1.248	4.16	acqua	6258224	9.8e-4
0.5	3.12	4.16	acqua	1583220	1.552e-3
1	6.24	4.16	acqua	559753	2.195e-3
0.1	0.2	1.37	cartone	17700939	6.942e-4
0.1	0.5	3.37		17700939	6.942e-4
0.1	1	6.9		17700939	6.942e-4
0.1	2	13.34	(idrogeno)	17700939	6.942e-4
0.2	0.2	0.67	grafite	6258224	9.8e-4
0.2	0.5	1.67	polistirene	6258224	9.8e-4
0.2	1	3.45		6258224	9.8e-4
0.2	2	6.67		6258224	9.8e-4
0.5	0.2	0.27	argento	1583220	1.552e-3
0.5	0.5	0.67	grafite	1583220	1.552e-3
0.5	1	1.34	cartone	1583220	1.552e-3
0.5	2	2.67	legno	1583220	1.552e-3
1	0.2	0.14	mercurio	559753	2.195e-3
1	0.5	0.33	ottone	559753	2.195e-3
1	1	0.67	vetro	559753	2.195e-3
1	2	1.34	cartone	559753	2.195e-3

Tabella 5.1: parametri di input relativi alle particelle nei casi simulati. Per tutti i casi si è considerata una frazione volumica pari a  $\phi = 10^{-4}$

Per quanto riguarda i parametri di input della parte della simulazione relativa al fluido, i parametri di input considerati sono:

- numero di punti di griglia :  $128^3$
- numero di scalari : 1 (temperatura)
- passo temporale :  $3e-3$  (il passo temporale deve essere in grado di cogliere i tempi di rilassamento della velocità e della temperatura delle particelle,

- numero di Reynolds : 152
- numero di Schmidt : 0.7 (relativo a simulazioni in cui il fluido considerato è aria)
- dissipazione media imposta :  $\epsilon = 0.25$  ;  $\epsilon_\theta = 0.1$
- quadrato del numero d'onda forzante della velocità :  $k^2 = 3$
- numero di iterazioni :  $\approx 5000$ , salvando con una frequenza di 100 iterazioni

Gli stessi risultati sono stati calcolati anche per il caso in cui la forzante di temperatura non fosse più il gradiente di scalare imposto dall'esterno, bensì la classica forzante di natura deterministica. In tal caso i dati di input relativi alla parte solida della simulazione non cambiano, per quanto riguarda invece la parte fluida l'unica modifica si trova nel fatto che si rende necessario considerare anche un numero d'onda forzante relativo alla temperatura oltre al termine relativo alla dissipazione riferita alla velocità.

I parametri inseriti sono stati:

- numero di punti di griglia :  $128^3$
- numero di scalari : 1 (temperatura)
- passo temporale :  $3e-3$  (il passo temporale deve essere in grado di cogliere i tempi di rilassamento della velocità e della temperatura delle particelle,
- numero di Reynolds : 152
- numero di Schmidt : 0.7 (relativo a simulazioni in cui il fluido considerato è aria)
- dissipazione media imposta :  $\epsilon = 0.25$  ;  $\epsilon_\theta = 0.1$
- quadrato del numero d'onda forzante della velocità e della temperatura:  $k^2 = 3$  ;  $k_\theta^2 = 3$
- numero di iterazioni :  $\approx 5000$ , salvando con una frequenza di 100 iterazioni

## 5.2 Lo stato stazionario

La situazione che si presenta vede nell'istante iniziale una distribuzione prettamente randomica sia del campo di velocità del fluido che della temperatura, oltre che nella distribuzione delle particelle.

Si nota però che procedendo con gli istanti temporali, il flusso raggiunge uno stato stazionario. Avviene dunque che, dopo un certo intervallo di tempo, l'azione dei vortici presenti nel flusso dà origine al fenomeno della turboforesi, e il campo di distribuzione della temperatura e della distribuzione delle particelle non sarà più uniforme. Dal momento del raggiungimento dello stato stazionario è infatti possibile vedere la formazione dei fronti, già descritti nei paragrafi precedenti. Sarà possibile notare che, per numeri di Stokes alti i fronti saranno meno evidenti, dal momento che le particelle tenderanno a non seguire il fluido per via della loro grande inerzia; al contrario, nel caso in cui il numero di Stokes dovesse rimanere su valori più bassi, la visualizzazione risulterà più semplice.

Per avere una chiara indicazione del raggiungimento dello stato stazionario si procede calcolando la varianza del flusso in esame, sia quella relativa alle tre componenti del vettore della velocità, che quella relativa alla temperatura.

Dal momento che la temperatura media è mantenuta costante, e per semplicità possiamo ipotizzarla pari a 0, la varianza della temperatura risulterà pari alla media del quadrato delle fluttuazioni della temperatura

$$\sigma_T = \langle T'^2 \rangle$$

Per i vari casi di esame lo stato stazionario è stato stabilito osservando l'evoluzione della varianza della temperatura del fluido in rapporto al tempo reso adimensionale. L'adimensionalizzazione del tempo viene fatta calcolando il prodotto tra il  $\Delta t$  considerato e la frequenza di acquisizione dei risultati. Per tutte le simulazioni effettuate si ottiene dunque

$$\tilde{t} = \Delta t * f = 3 \cdot 10^{-3} * 100 = 3 \cdot 10^{-1}$$

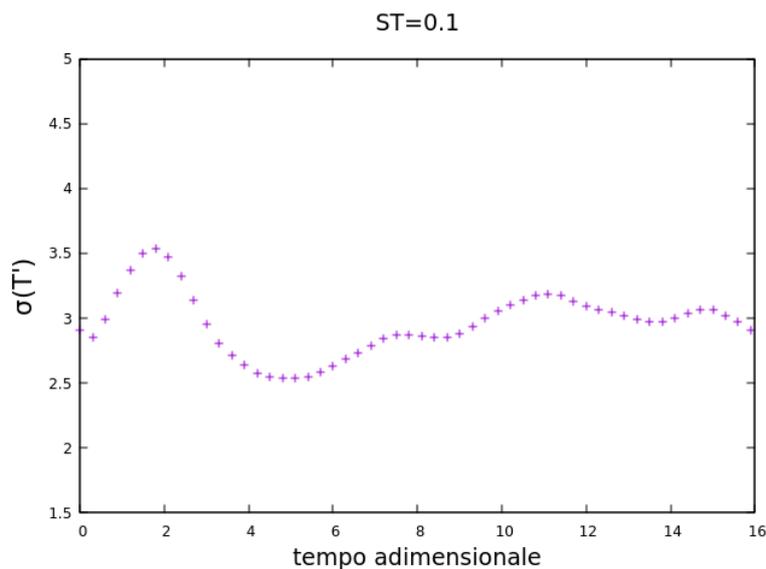


Figura 5.1: raggiungimento dello stato stazionario per il caso in cui  $St = 0.1$  e  $St_\theta = 6.24St$ . Si nota che, dal momento che il tempo adimensionale raggiunge un valore pari a 8, la varianza della temperatura raggiunge uno stato di equilibrio. La curva non mostra un andamento perfettamente stazionario a causa della forte volatilità dei dati. Tuttavia le oscillazioni che si notano possono essere considerate trascurabili

Allo stesso modo possono essere osservati gli stati stazionari anche degli altri casi in esame, per i diversi numeri di Stokes. Valutiamo per il momento il caso d'esame corrispondente alla situazione di particelle di acqua trasportate dal flusso di aria. Lo stesso procedimento comunque verrà fatto anche per i casi con  $St_\theta$  fissati.

La visualizzazione del raggiungimento della stazionarietà è necessaria per impostare il calcolo delle grandezze statistiche utili alla descrizione del flusso. Infatti, sia per il calcolo del numero di Nusselt, che per la valutazione delle funzioni di struttura, sarà necessario limitare il campo di calcolo solo allo stato stazionario, dal momento che i calcoli prevedono una media nel tempo delle grandezze fornite dal calcolatore.

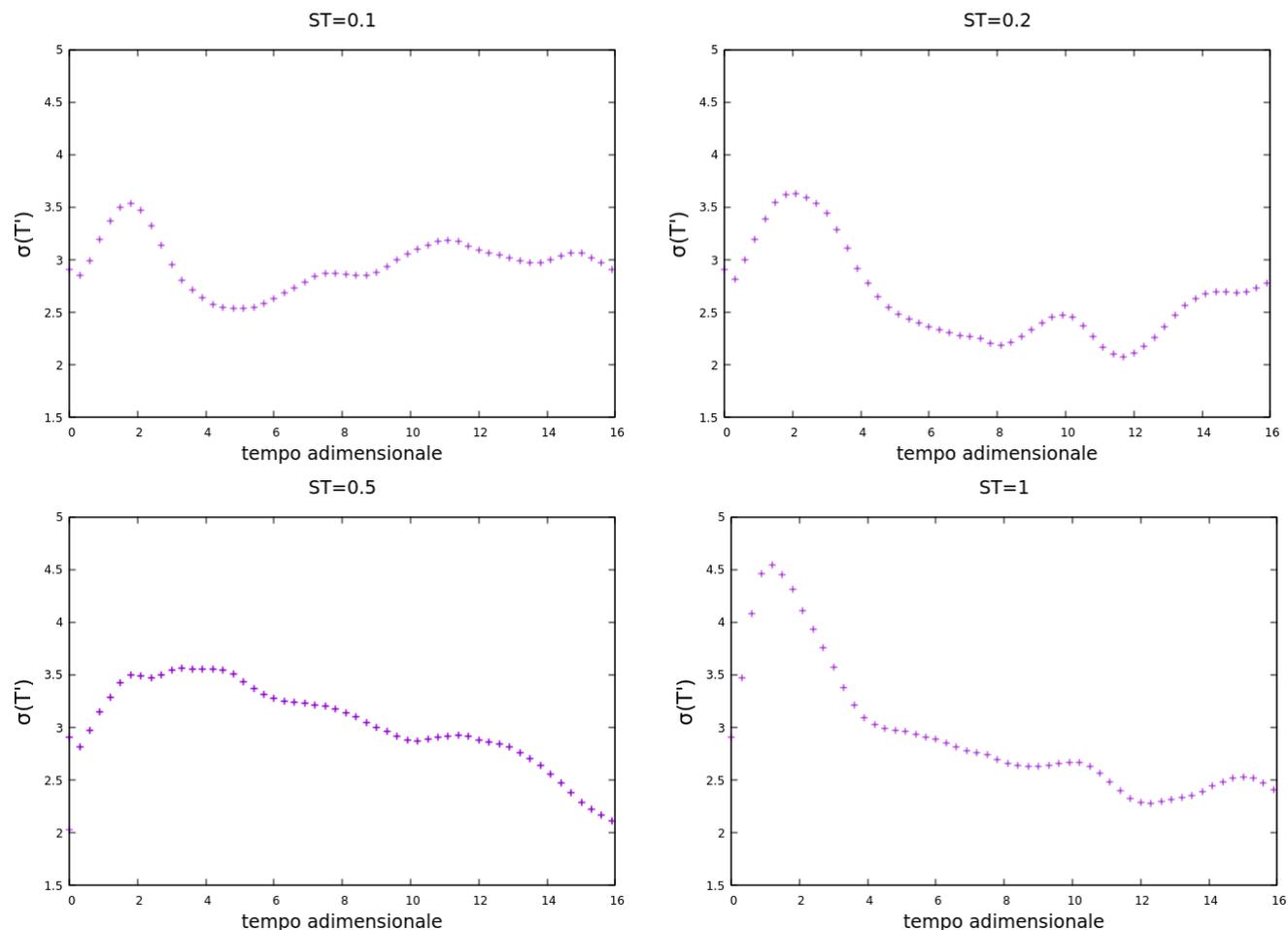


Figura 5.2: Raggiungimento dello stato stazionario per il caso di diversi numeri di Stokes. Si nota che non tutte le curve raggiungono la stazionarietà alla stessa velocità e allo stesso modo. Ciò che si osserva per tutti i casi in esame però è una forte oscillazione iniziale, a seguito della quale la varianza della temperatura inizia ad assestarsi su un valore pressapoco stazionario

### 5.3 Visualizzazione dei campi di temperatura e velocità

Dalle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti, siamo in grado di predire un comportamento dei campi di temperatura e di velocità. Per effetto dell'azione della forzante, allo stato stazionario si delineeranno delle zone del dominio con una diversa intensità dei campi. Le particelle, essendo quasi sempre più dense del fluido che le trasporta, tenderanno ad essere spinte ai bordi dei vortici, in zone in cui anche il gradiente di scalare è più forte. La marcata concentrazione delle particelle in queste aree del dominio comporta una notevole influenza anche sugli scambi di calore tra la parte fluida e la parte solida del problema.

Si è poi potuto osservare che, in base al numero di Stokes considerato nella simulazione, i risultati saranno diversi. Numeri di Stokes e di Stokes termico elevati comportano una grande inerzia delle particelle, e una conseguente difficoltà di adeguamento alle velocità e alle temperature dei fluidi che le trasportano.

I primi risultati che si possono osservare sono quelli che fanno riferimento al campo di

velocità e di temperatura del fluido, comparando la situazione iniziale con la situazione a un passo temporale in cui si è raggiunto lo stato stazionario. Sia nel caso in cui la forzante fosse di tipo gradiente medio di scalare imposto, che in quello in cui a forzare il flusso fosse una forzante deterministica, si nota che allo stadio iniziale i campi risultano caotici, e solo in seguito inizieranno a distinguersi i fronti, in cui si hanno forti variazioni dello scalare, e le zone lagrangiane coerenti, in cui le variazioni risultano più modeste.

Dal momento che il risultato ottenuto dal calcolatore fa riferimento a un dominio 3D, è stato necessario considerare una sezione del dominio in modo da ottenere un piano di dimensione  $2\pi^2$ . Per la visualizzazione della posizione delle particelle è stato poi considerato un margine di incertezza che permettesse di visualizzare su un piano la posizione delle particelle.

Nell'immagine 5.3 facciamo riferimento al campo di temperatura per il caso di studio in cui  $St_\theta = 6.24St$ , e il numero di Stokes  $St=0.1$ .

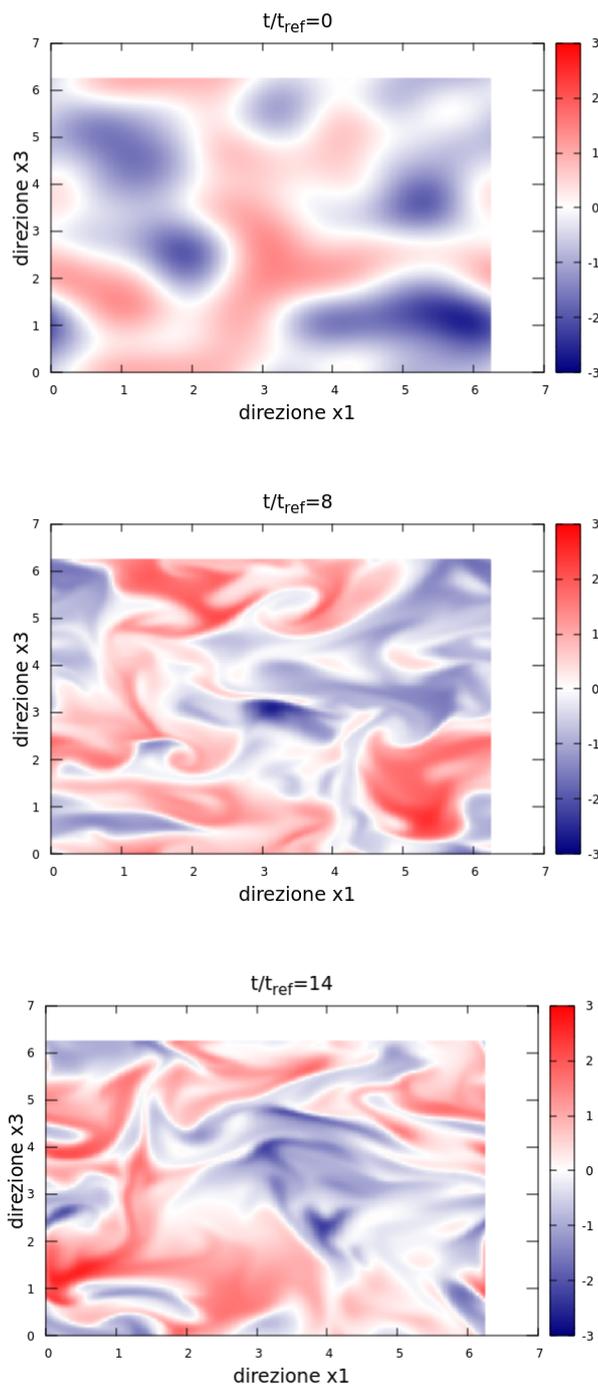


Figura 5.3:  $St = 0.1$  ;  $St_\theta = 0.624$  ;  $\phi = 10^{-4}$

Evoluzione del campo di temperatura dall'istante iniziale al raggiungimento dello stato stazionario per il caso di gradiente medio di temperatura imposto. Si nota la delineazione dei fronti di temperatura in alcune aree del dominio. In particolare si nota come al centro dei vortici le fluttuazioni di temperatura siano negative, e quindi inferiori rispetto alla temperatura media imposta. Al margine dei vortici invece la temperatura mostra fluttuazioni sensibilmente più alte rispetto al caso iniziale. Osservando la seconda e la terza figura, entrambe relative al raggiungimento dello stato stazionario, si nota come alla vista siano diverse, ma l'ampiezza dei vortici è rimasto pressoché identico, così come le fluttuazioni di temperature raggiunte

Per lo stesso caso di studio è possibile visualizzare anche il campo di velocità, come mostrato in figura 5.4. Come per il campo di temperatura, ci si aspetta anche ora di individuare all'interno del dominio i fronti e le zone lagrangiane. Lo studio per il campo di velocità è stato effettuato tenendo in considerazione il modulo della velocità, il cui valore elevato al quadrato risulta direttamente proporzionale all'energia cinetica del sistema. Nel caso del campo di velocità si nota che le differenze tra il campo iniziale e quello stazionario sono più modeste.

Il motivo va ricercato nel fatto che la forzante utilizzata è di tipo deterministico. Ciò significa che tale forzante è strettamente legata alle condizioni iniziali. L'energia che viene immessa nel sistema infatti è tale da bilanciare l'effetto della dissipazione. In particolare l'energia immessa è proporzionale alla velocità dei bassi numeri d'onda. Muovendosi da un istante all'altro, cambierà il coefficiente di proporzionalità, che dipende dalla dissipazione istantanea, ma tendenzialmente il valore rimane proporzionale alla velocità dei bassi numeri d'onda, senza che ci siano variazioni troppo accentuate.

### Le fluttuazioni di velocità

Osservando le curve di livello riferite al campo di velocità, in figura 5.4, si nota che le fluttuazioni raggiungono livelli inferiori una volta raggiunto lo stato stazionario. La spiegazione di questo fenomeno potrebbe semplicemente essere legata all'azione della dissipazione, che riesce a smorzare i risultati ottenuti. Tuttavia non è possibile stabilire con certezza un andamento di smorzamento delle fluttuazioni. Nel momento in cui viene immessa una forzante nel sistema, questa immette energia con un rateo costante nel tempo. Come accennato poc'anzi, questa energia risulta proporzionale al tasso di dissipazione. La dissipazione è stata definita in precedenza, e per le ipotesi di Kolmogorov risulta pari a

$$\epsilon = \frac{u^3}{\ell}$$

dove  $\ell$  rappresenta la dimensione della scala integrale.

Nel nostro caso in particolare viene fissata la scala della forzante, e viene fissata la dissipazione. Di conseguenza risulta fissato anche il valore quadratico medio dell'energia. Dal momento però che l'energia immessa nel sistema risulta indipendente dal valore della dissipazione, non è possibile affermare che i valori di energia iniziale ed energia allo stato stazionario siano coincidenti. Nel caso in cui l'energia immessa fosse stata bassa se confrontata con la forzante imposta si sarebbe notato un aumento delle fluttuazioni.

Questo spiega il perché si nota una differenza tra l'energia visualizzata all'istante iniziale e quella che si vede al raggiungimento dello stato stazionario.

Per il caso della temperatura invece l'analisi risulta indiretta, in quanto l'energia termica risulta legata a  $U_3 \cdot T'$ . Siccome la velocità considerata risulta aleatoria, è difficile determinare la correlazione che le lega. Le fluttuazioni di temperatura risultano infatti legate a quelle di velocità, e di conseguenza anche le fluttuazioni di temperatura sono legate alla scala integrale, seppur in modo indiretto.

I risultati appena ottenuti possono essere confrontati con i corrispettivi casi in cui la forzante non fosse più il gradiente medio di scalare imposto, bensì una forzante di tipo deterministico, proporzionale alla velocità del fluido. Per semplicità di scrittura, chiamiamo "gradscal" il caso in cui la forzante è rappresentata dal gradiente di temperatura, mentre chiamiamo "linforcing" il caso in cui la forzante fosse di tipo deterministico.

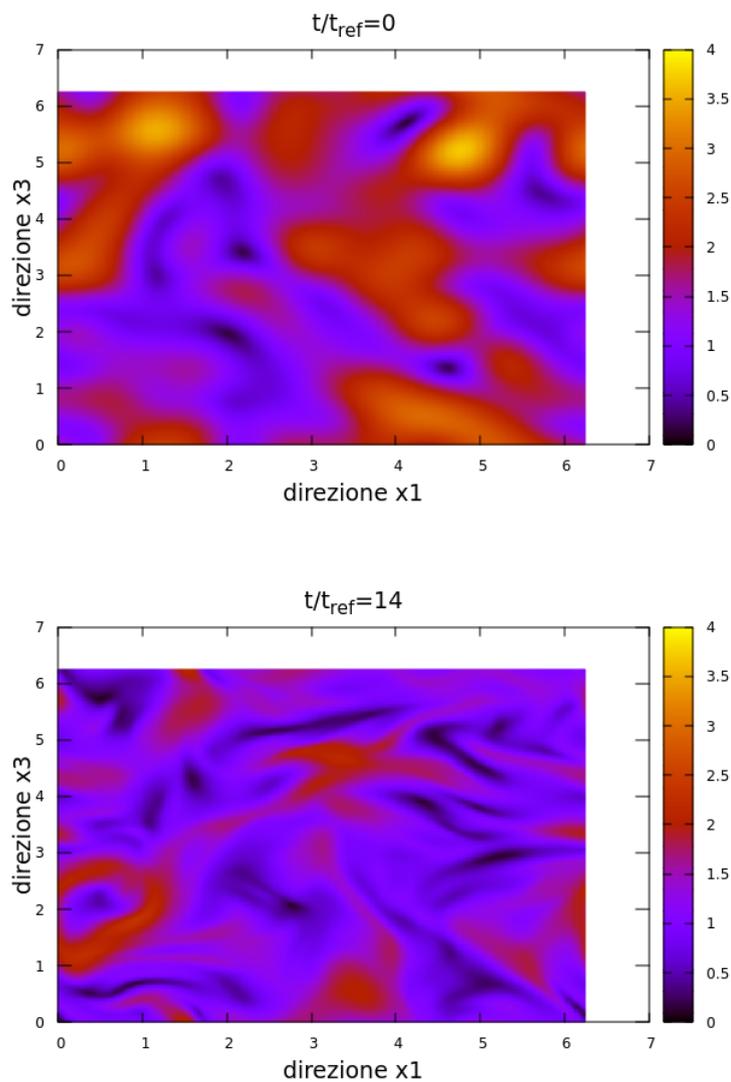


Figura 5.4:  $St = 0.1$  ;  $St_\theta = 0.624$  ;  $\phi = 10^{-4}$

Evoluzione del campo di velocità dall'istante iniziale al raggiungimento dello stato stazionario. Come per il caso del campo di velocità, anche in questo caso si nota l'azione della turboforesi nella generazione di fronti. Si noti però che ora le differenze tra lo stato iniziale e quello stazionario risultano meno evidenti in termini di dimensione dei vortici e formazione dei fronti.

Il campo di temperatura nel caso di forzante deterministica è riportato nella figura 5.5. In entrambi i casi di forzante si simula lo scarto dalla temperatura media. Nel caso “gradscal”, in direzione  $X_3$  si nota una crescita della temperatura media.

Vengono messi in evidenza la situazione all’istante iniziale e al raggiungimento dello stato stazionario. Si nota innanzitutto che, nel caso di forzante di tipo deterministico, lo stato stazionario è raggiunto più in fretta rispetto al caso di forzante gradiente di temperatura, e che nel caso di forzante deterministica le fluttuazioni di temperatura sono più intense di quelle del caso “gradscal” nell’istante iniziale.

Nel caso “linforcing” le fluttuazioni di temperatura risultano imposte come input, e la varianza dipende da quanto rapidamente la dissipazione riesce a eliminare tali fluttuazioni. Nel caso “gradscal” invece non siamo in grado di determinare le fluttuazioni che immettiamo, in quanto queste dipendono dalle fluttuazioni di velocità.

Dal confronto qualitativo delle due situazioni si può notare comunque che le dimensioni dei vortici e l’ampiezza delle fluttuazioni sono del tutto comparabili. La dimensione dei vortici risulta infatti determinata dai vortici di velocità per il caso “gradscal”, e dal numero d’onda della forzante per il caso “linforcing”. Tuttavia il valore della forzante del campo di temperatura è identico a quello del campo di velocità, e di conseguenza non risultano differenze evidenti.

La stessa indagine può essere effettuata per il confronto del campo di velocità nei due casi di forzante. I risultati vengono mostrati nell’immagine 5.6. La forzante di tipo gradiente di temperatura non influenza il campo di velocità, che rimane forzato in modo deterministico. Dal confronto dei risultati nei due casi di forzante allora si noterà che il comportamento è del tutto confrontabile. Le fluttuazioni di velocità sia all’istante iniziale che al raggiungimento dello stato stazionario rimangono pressoché identiche.

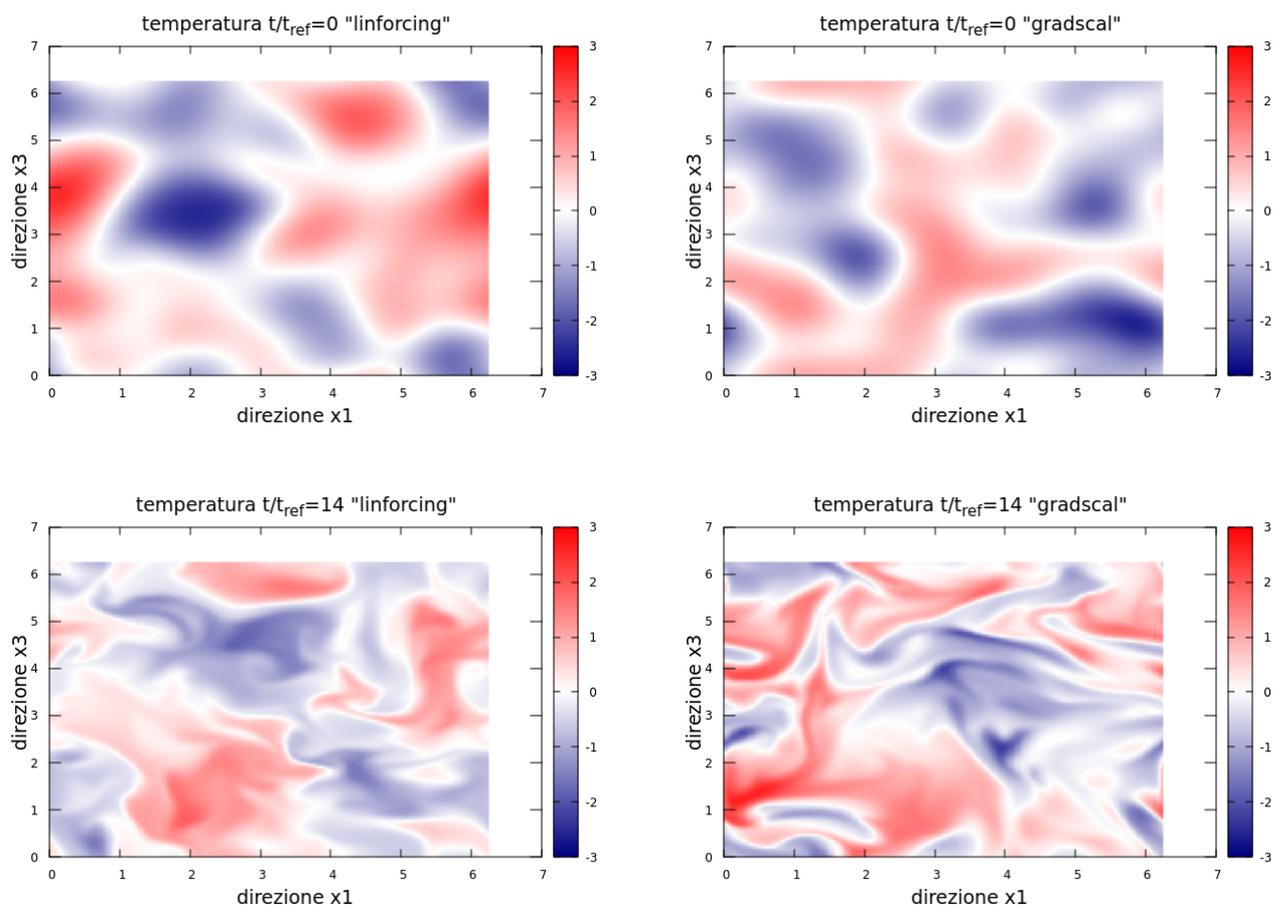


Figura 5.5: Confronto del campo di temperatura per il caso di  $St = 0.1$  e  $St_\theta = 0.624$  all'istante iniziale e al raggiungimento dello stato stazionario per il caso in cui la forzante è deterministica (sulla sinistra) e per il caso di forzatura con gradiente medio di temperatura (sulla destra)

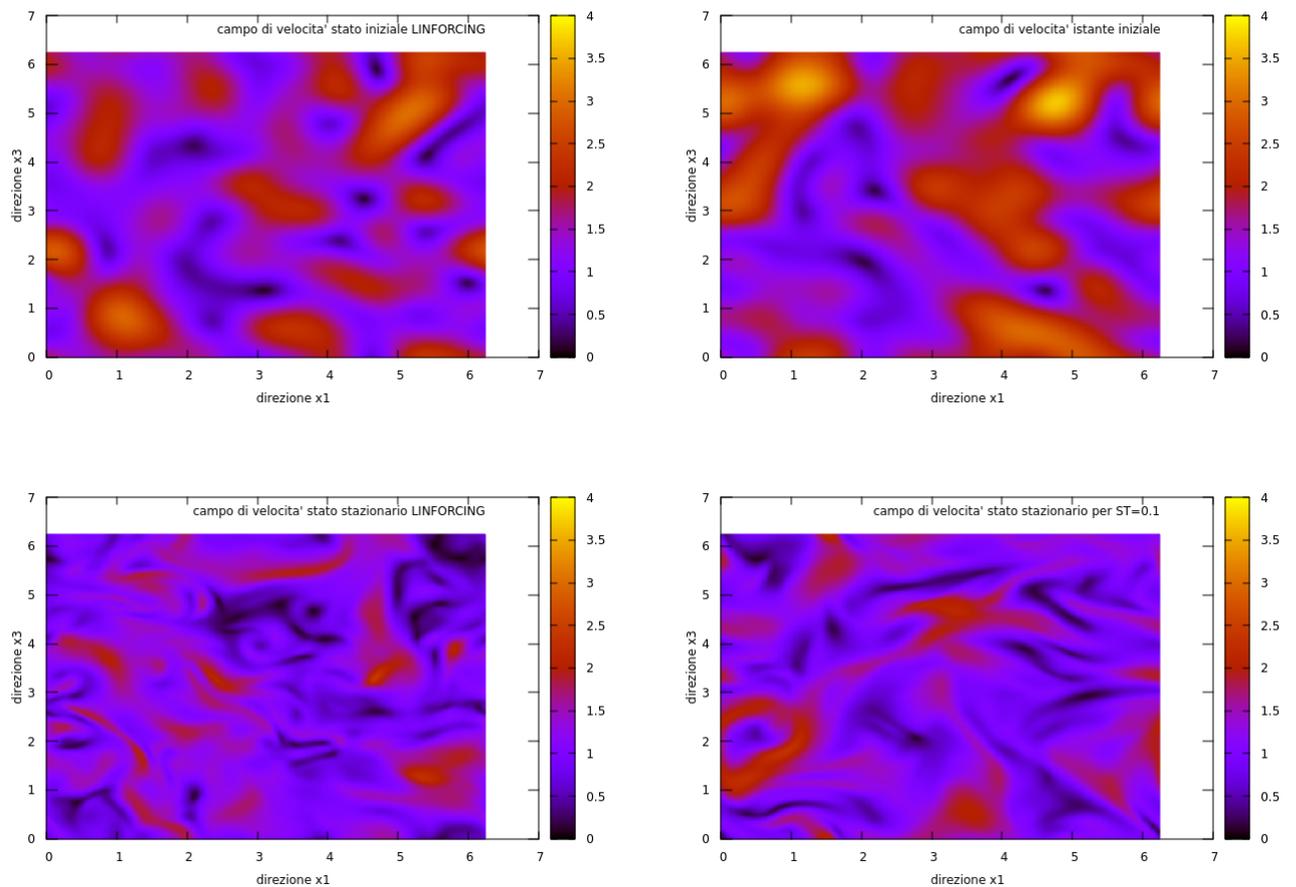


Figura 5.6: Confronto del campo di velocità tra il caso “linforcing” e il caso “gradscal” per  $St = 0.1$  e  $St_\theta = 0.624$ . In alto sono riportati i confronti fatti all’istante iniziale, in basso invece quelli fatti al raggiungimento dello stato stazionario. Si nota ora che, dal momento che la forzante per la velocità rimane di tipo deterministico sia per il caso “gradscal” che per il caso “linforcing”, i risultati sono perfettamente confrontabili

### 5.3.1 Variazione del numero di Stokes

Vengono ora mostrati i campi di temperatura e di velocità calcolati al variare del numero di Stokes, mantenendo però costante il rapporto tra  $St$  e  $St_\theta$ . Consideriamo sempre  $St_\theta = 6.24St$ , e quindi simuliamo la condizione di particelle di acqua in aria. In particolare vengono messe in evidenza le visualizzazioni riferite all'istante iniziale e quelle relative al raggiungimento dello stato stazionario. In figura 5.7 vengono mostrati gli stati stazionari. Dal momento che tutte le simulazioni mostrate sono state effettuate mantenendo lo stesso rapporto tra il numero di Stokes  $St$  e il numero di Stokes termico  $St_\theta$  non si osservano sensibili differenze nei vari campi di temperatura.

Vale infatti che, al cambiare di  $St$ , cambia anche  $St_\theta$ , e di conseguenza cambia il feedback delle particelle sul fluido. Non essendoci feedback di quantità di moto non si è in grado di osservare differenze alcune nel campo di velocità stazionario. È invece presente il feedback termico delle particelle sul fluido, ma per valori di frazione volumica pari a  $\phi = 10^{-4}$ , come in questo caso, le differenze non sono così marcate se osservate visivamente.

Dalla sovrapposizione con le curve di livello dei campi di temperatura e quelle della posizione delle particelle sarà possibile notare una stretta correlazione tra le due situazioni. Le particelle infatti contribuiscono nettamente al trasporto di calore all'interno del dominio, e nelle zone dove tendono ad accumularsi, i fronti, sarà possibile notare anche un aumento delle fluttuazioni di temperatura. L'accumulo delle particelle in specifiche aree del dominio avviene sia per bassi numeri di Stokes che per alti. In particolare, nel caso di bassi numeri di Stokes la causa sarà legata al fenomeno di espulsione delle particelle ai bordi dei vortici, mentre per numeri più alti la spiegazione del fenomeno è legata alla memoria delle particelle, che, essendo più pesanti del fluido che le trasporta, tenderanno a non seguire il flusso, ma a procedere seguendo la loro inerzia.

Le cause della sovrapposizione della posizione delle particelle e dei forti gradienti di temperatura sui fronti sono in realtà di natura diversa. Lo scalare vede infatti i forti gradienti lungo i fronti per un fenomeno di natura cinematica, legata alla vorticità, mentre le particelle vengono spinte sui fronti a causa di un fenomeno legato alla dinamica del trasporto da parte della turbolenza.

### 5.3.2 Variazione del numero di Stokes termico

Finora si è sempre considerato il caso di simulazione di particelle di acqua in aria. Le stesse simulazioni sono state però effettuate anche al variare del rapporto tra  $St$  e  $St_\theta$ , in modo da ampliare lo spettro dei materiali che possono essere trattati come particelle trasportate dal fluido. Volendo considerare un vasto range di materiali si è proceduto stabilendo a priori il valore di  $St_\theta$  desiderato, e per ottenerlo si è fatto variare il calore specifico riferito alle particelle. Il risultato è che il rapporto tra  $St$  e  $St_\theta$  non sarà più costante, ma varierà a seconda del caso considerato, come mostrato nella tabella 5.1.

Dal momento che la situazione iniziale rimane dominata dalla forzante, che produce un andamento caotico, viene riportata in figura 5.8 solo la situazione relativa al raggiungimento dello stato stazionario, ottenuta, come nel caso precedente, valutando l'andamento della varianza delle fluttuazioni di temperatura nel tempo.

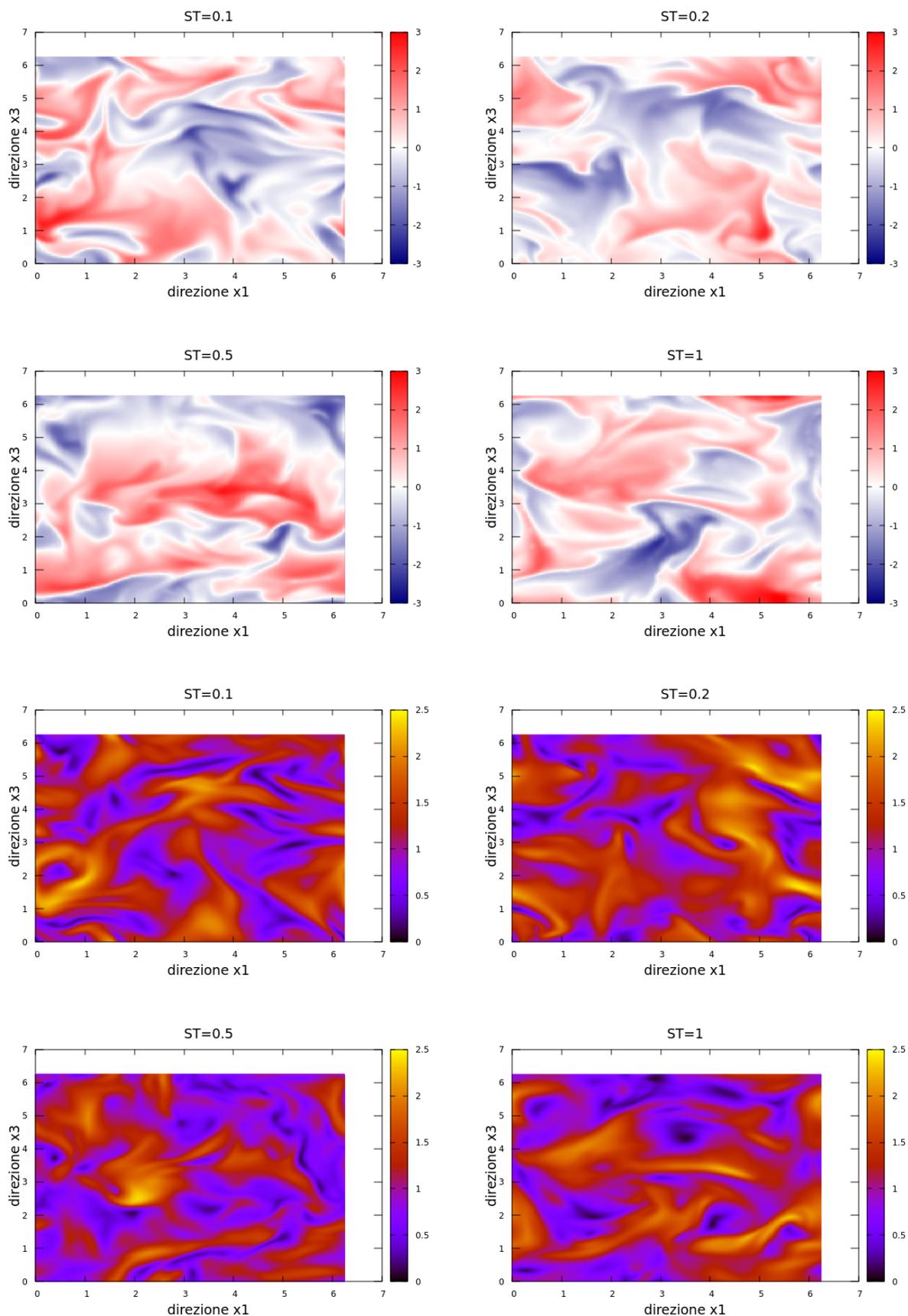


Figura 5.7: Confronto dei campi di temperatura e di velocità del fluido allo stato stazionario per i diversi casi di numero di Stokes analizzati. Si mantiene  $St_\theta = 6.24St$ . La frazione volumica è  $\phi = 10^{-4}$

$$St = 1 \text{ e } St_\theta = [0.2 : 2]$$

Il primo caso analizzato è quello in cui il numero di Stokes viene mantenuto fisso  $St = 1$ , mentre  $St_\theta = [0.2 : 2]$ .

Nel primo caso di simulazione  $St$  è alto, mentre  $St_\theta$  non lo è. Questo implica che le particelle tenderanno a muoversi non seguendo il carrier flow, tuttavia la loro temperatura tenderà ad armonizzarsi velocemente con quella del carrier flow, senza quindi disturbarne di molto il campo di temperatura. Nell'ultimo caso invece, in basso a destra nell'immagine 5.8, viene simulato il caso di  $St_\theta$  più grande. In questo caso le particelle riescono a trasportare l'energia termica su grandi scale. Dal momento che le particelle scambiano energia solo con il fluido, queste tenderanno a rendere il campo di temperatura uniforme in tutto il dominio, smorzando così tutti i picchi delle fluttuazioni di temperatura presenti, come farebbe un processo diffusivo. Dall'osservazione dei risultati per diversi numeri di Stokes termico  $St_\theta$  si vede che la massima interazione tra particelle e fluido si osserva per il caso di  $St_\theta = 1$ . Questo risultato verrà dimostrato anche dallo studio delle funzioni di struttura per il campo di temperatura del carrier flow. Per valori di  $St_\theta$  più elevati si avrebbe infatti uno scambio di calore estremamente lento, e le particelle non sarebbero più in grado di mostrare un qualsivoglia tipo di influenza sul campo di temperatura del fluido.

In questo caso le differenze con le simulazioni precedenti si notano principalmente nel campo di temperatura. A differenza del caso precedente, in cui i numeri di Stokes termici erano più grandi rispetto a quelli mostrati in figura 5.8, si nota ora una più marcata formazione di fronti. Al centro dei vortici si osservano fluttuazioni di temperatura negative, concentrando al loro esterno quelle positive. Uno  $St_\theta$  più modesto comporta una minore inerzia termica, e quindi un più rapido adeguamento alla temperatura del fluido che trasporta le particelle.

$$St = 0.1 \text{ e } St_\theta = [0.2 : 2]$$

In figura 5.9 viene riportata la classica distribuzione dei campi di temperatura e velocità allo stato stazionario considerando però il caso di  $St = 0.1$  e  $St_\theta = [0.2 : 2]$ . Tra i casi valutati al variare di  $St_\theta$ , questo è quello che considera il numero di Stokes più basso. Un numero di Stokes basso implica una bassa inerzia delle particelle nel fluido. Le particelle riescono quindi a seguire il fluido adeguando la loro velocità a quella del fluido in tempi rapidi. Nel dominio si noterà la presenza di più vortici rispetto al caso di  $St = 1$ , e questi vortici presentano una temperatura variabile a seconda del numero di Stokes termico.

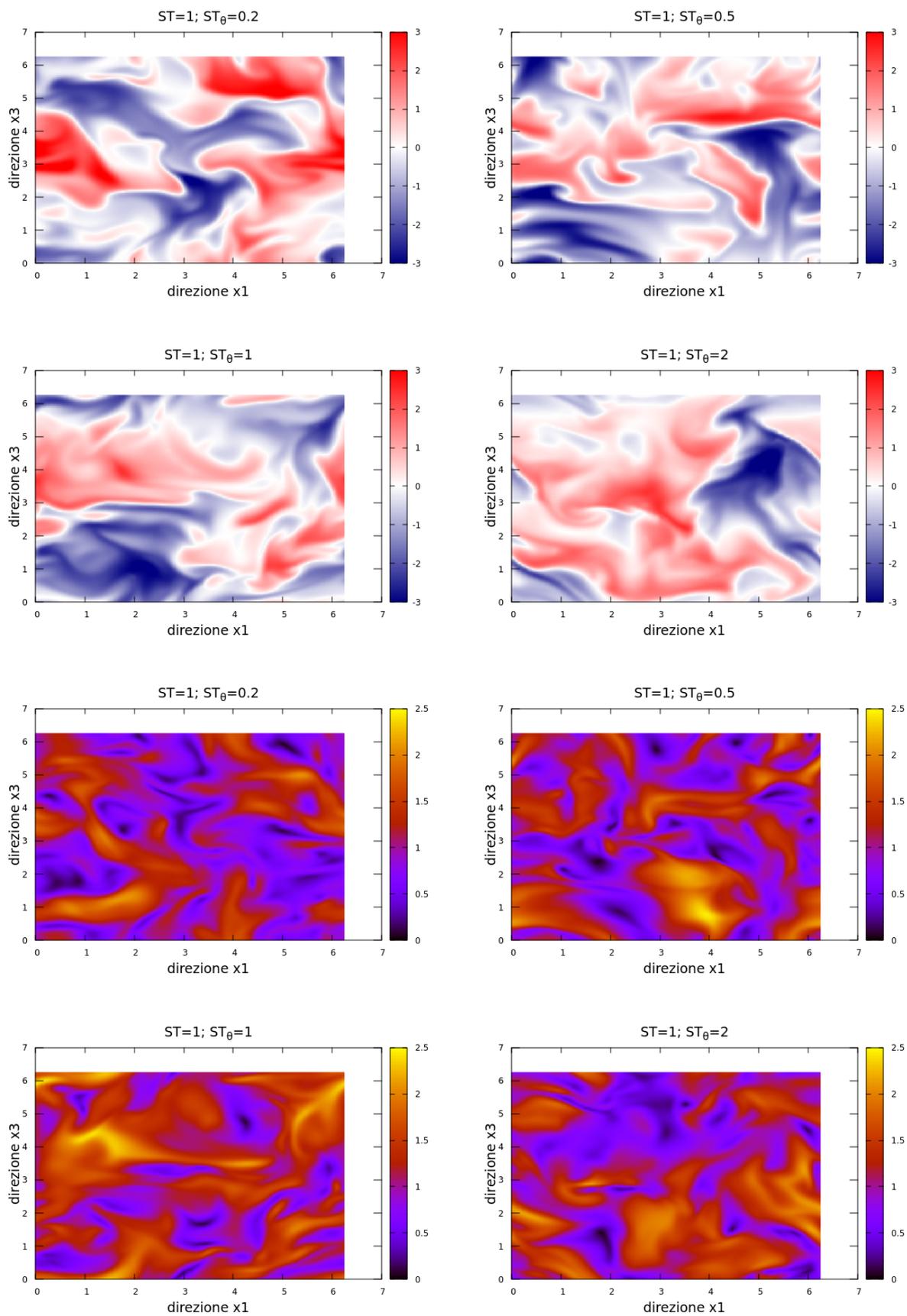


Figura 5.8: Confronto dei campi di temperatura e di velocità del fluido allo stato stazionario per il caso di  $St = 1$  e  $St_\theta = [0.2 : 2]$ . La frazione volumica è  $\phi = 10^{-4}$

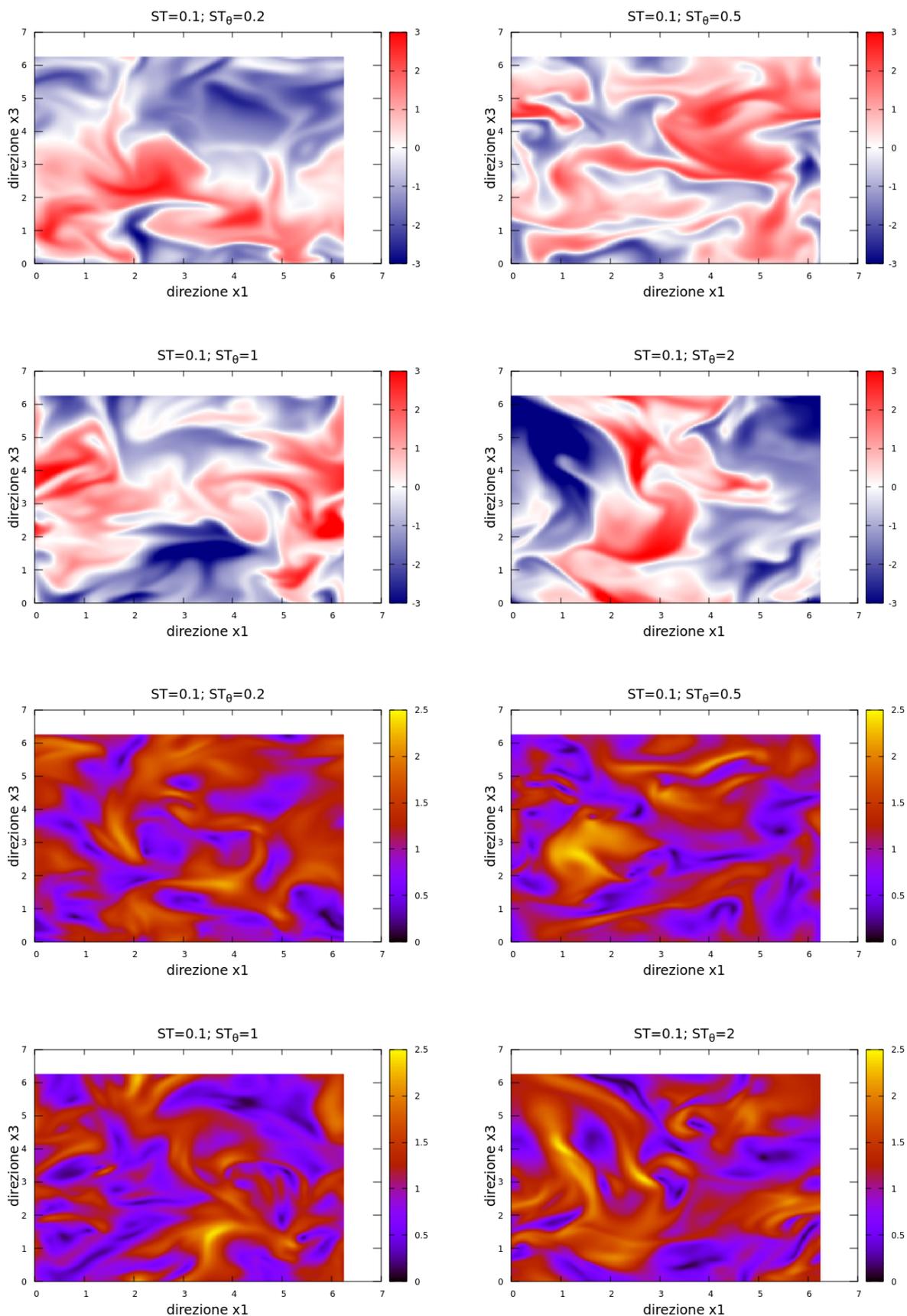


Figura 5.9: Confronto dei campi di temperatura e di velocità del fluido allo stato stazionario per il caso di  $St = 0.1$  e  $St_\theta = [0.2 : 2]$ . La frazione volumica è  $\phi = 10^{-4}$

## 5.4 La posizione delle particelle nel campo di temperatura

Dalle precisazioni fatte nei paragrafi precedenti, siamo in grado di prevedere il posizionamento delle particelle all'interno del dominio dopo il raggiungimento dello stato stazionario. È infatti stato dimostrato che le particelle tendono a disporsi nelle regioni del dominio in cui le fluttuazioni del gradiente dello scalare sono molto intense, in regioni denominate *fronti* [6].

Nel paragrafo 5.3 si è descritto il comportamento dei campi di velocità e temperatura allo stato iniziale e al raggiungimento dello stato stazionario. Si era visto che, dopo un certo intervallo di tempo, sia il campo della velocità che quello della temperatura raggiungono un assetto definitivo, in cui si riesce a notare la formazione di vortici e il diverso livello delle fluttuazioni che i due campi raggiungono.

In particolare, si è in grado di notare una maggiore differenza per quanto riguarda il campo di temperatura rispetto a quello della velocità al raggiungimento dello stato stazionario. Si era stati in grado di constatare che il massimo trasporto dello scalare avveniva per valori di  $St_\theta \approx 1$ , in quanto superato tale valore l'inerzia termica delle particelle diventa troppo elevata, e il fluido non riesce a percepire sensibilmente l'azione delle particelle.

In figura 5.10 viene messa in evidenza la situazione allo stato iniziale e al raggiungimento dello stato stazionario per quanto riguarda il campo di temperatura, sul quale sono state sovrapposte le posizioni raggiunte dalle particelle. Risulta immediato notare che le particelle, inizialmente inserite all'interno del dominio in modo del tutto casuale e uniforme, quando viene raggiunto lo stato stazionario si dispongono all'interno del dominio campionando principalmente zone in cui le fluttuazioni del gradiente della temperatura mostrano forti gradienti.

La stessa operazione può essere ripetuta per tutti i casi di studio effettuati, notando che il risultato non cambia fino al raggiungimento di valori del numero di Stokes superiori a 1, valore oltre al quale le particelle non seguono più il flusso. I risultati sono mostrati in figura 5.11.

La spiegazione del fenomeno di campionamento delle particelle nei fronti all'interno del dominio va ricercata nel fatto che le particelle, se  $\rho_p \gg \rho_f$ , tendono ad essere espulse all'esterno dei vortici, che risultano essere poi i luoghi in cui si generano i più forti gradienti dello scalare.

A ulteriore riprova vengono inseriti anche i risultati relativi alla posizione delle particelle per i calcoli effettuati nelle simulazioni in cui  $St$  veniva tenuto costante, e  $St_\theta$  fatto variare in un range da [0.2:2].

I risultati vengono mostrati in figura 5.12.

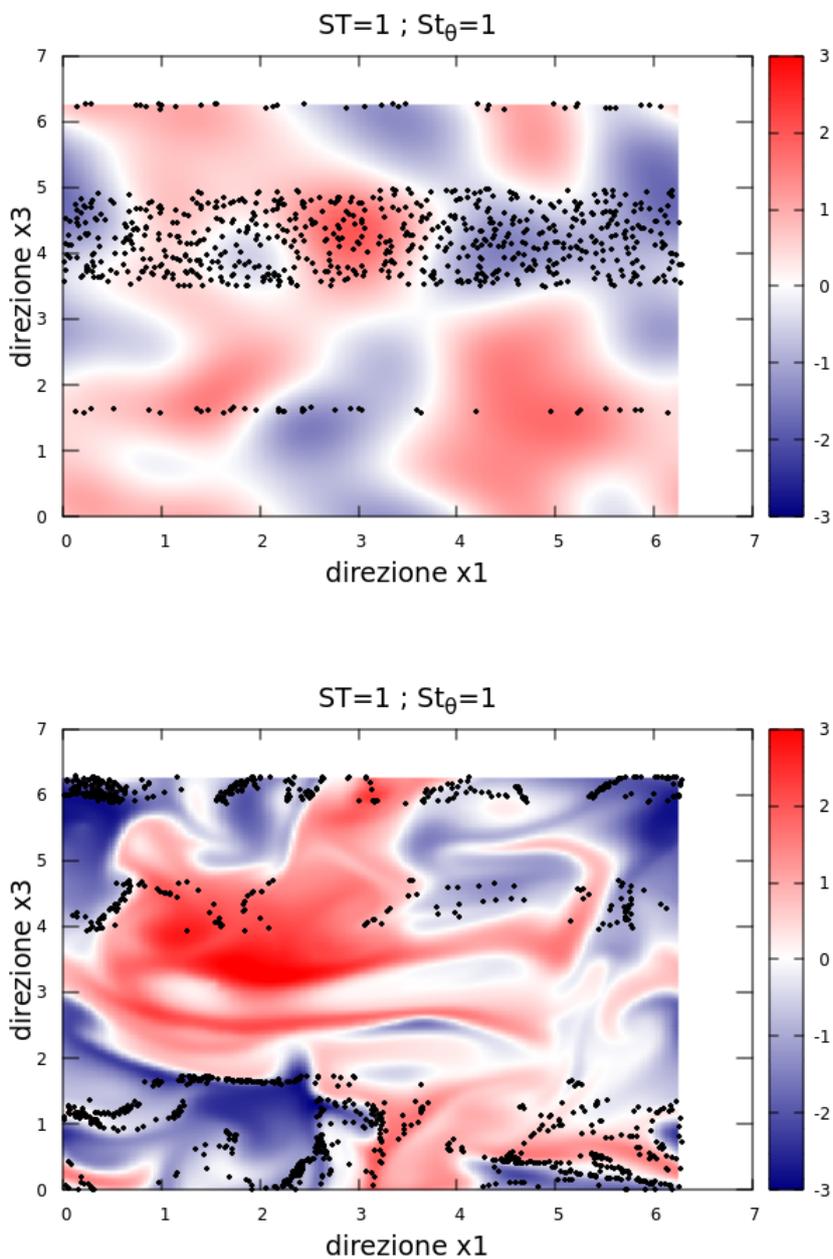


Figura 5.10: sovrapposizione del campo di temperatura del fluido e della posizione delle particelle all'istante iniziale (sulla sinistra), e al raggiungimento dello stato stazionario (sulla destra)

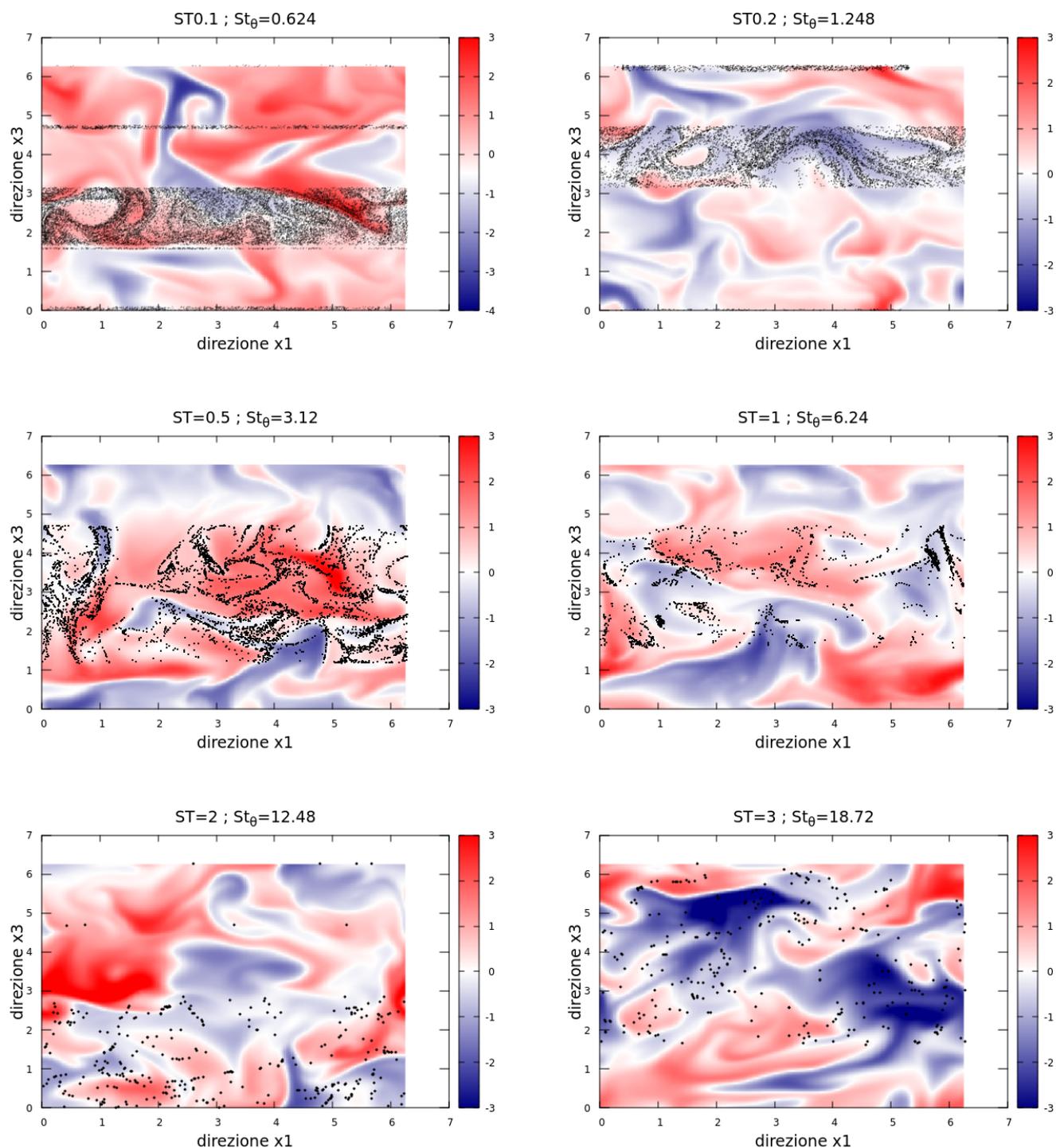


Figura 5.11: Posizione delle particelle nel campo di temperatura per il caso di diversi  $St$  e  $St_{\theta} = 6.24St$ . La frazione volumica  $\phi = 10^{-4}$  viene mantenuta costante per tutte le simulazioni, e di conseguenza il numero di particelle presenti varierà a seconda del numero di Stokes considerato

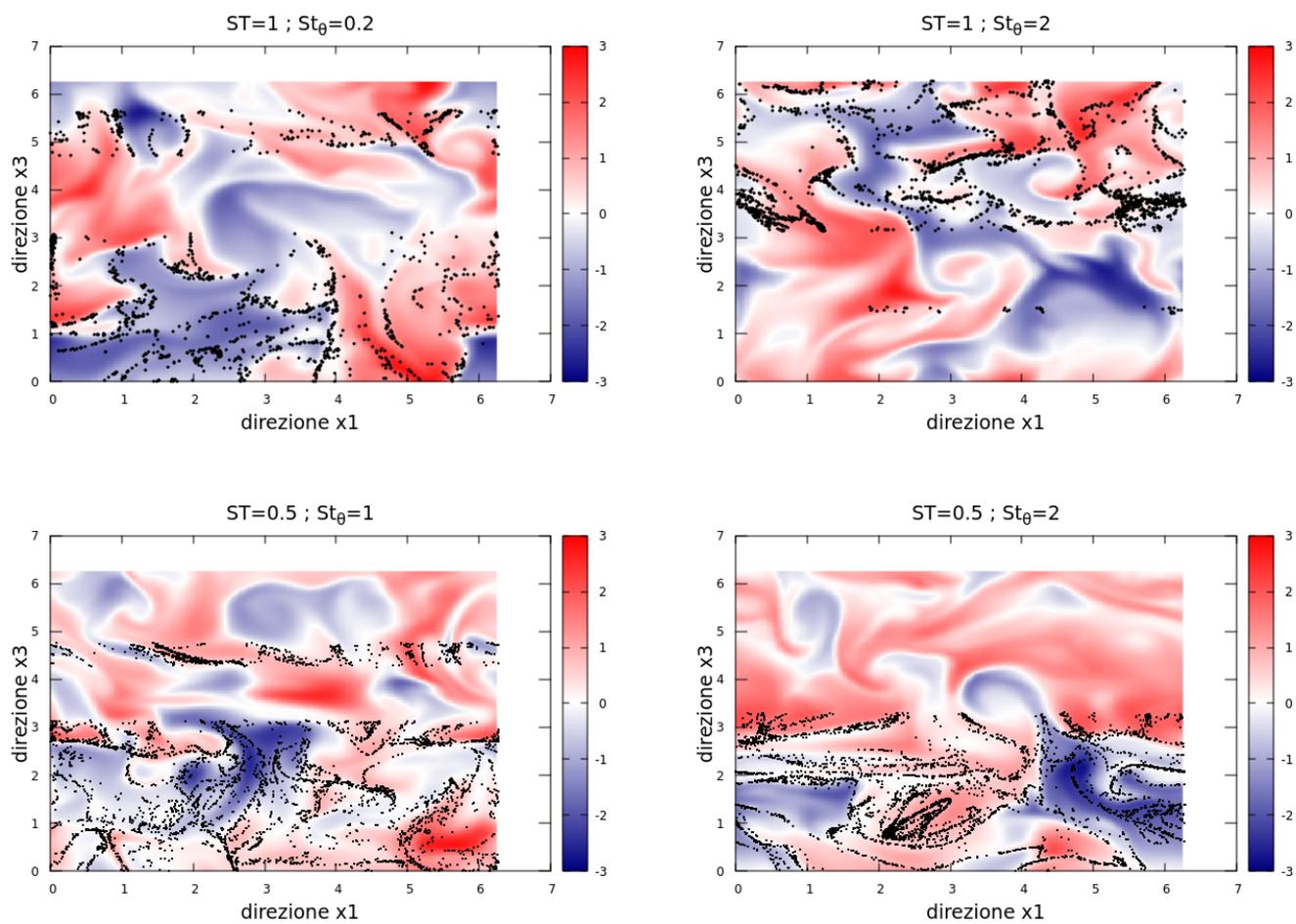


Figura 5.12: Posizione delle particelle per diversi casi di  $St$  e  $St_{\theta}$ .  $\phi = 10^{-4}$ .

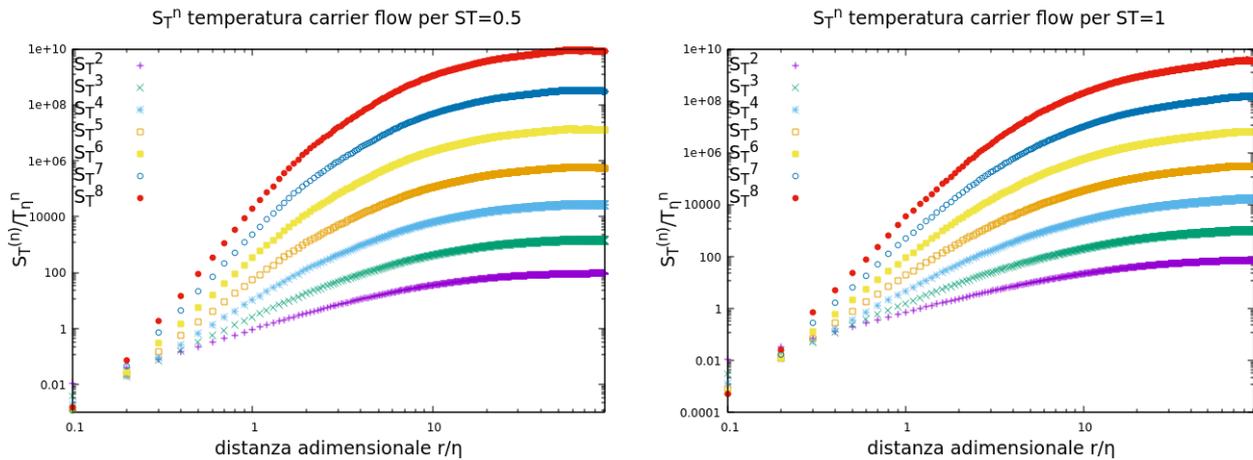


Figura 5.13: Structure functions della temperatura del carrier flow per il caso di  $St = 0.5$  e  $St = 1$  e  $St_\theta = 6.24St$ . Indipendentemente dall'ordine delle funzioni, queste mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo e un secondo tratto lineare nel tratto inerziale

## 5.5 Le funzioni di struttura del campo di temperatura

Le funzioni di struttura, già introdotte in precedenza, per il campo di temperatura sono definite dalla relazione

$$S_T^{(n)}(r) = \langle |\Delta T(r, t)|^n \rangle$$

con  $\Delta T(r, t)$  pari alla differenza di temperatura del flusso misurata in due punti posti a una distanza  $r$ . Nelle figure vengono riportati gli andamenti delle funzioni di struttura al variare del numero di Stokes  $St$  e del numero di Stokes termico  $St_\theta$ . Le funzioni vengono adimensionalizzate con le grandezze delle scale di Kolmogorov. In particolare, la distanza  $r$  viene rapportata alla dimensione della scala di Kolmogorov ( $r/\eta$ ) e la temperatura con la temperatura di Kolmogorov ( $T/T_\eta$ ). La temperatura di Kolmogorov è definita come

$$T_\eta = (\chi\tau_\eta)^{1/2}$$

dove  $\chi$  rappresenta la dissipazione di temperatura imposta al flusso

### 5.5.1 Il campo di temperatura del fluido (carrier flow)

In figura 5.13 vengono riportate le funzioni di struttura relative al fluido per tutti gli esponenti possibili, considerando tutte le scale del flusso. I valori vengono adimensionalizzati con la temperatura di Kolmogorov elevata al grado della funzione di struttura considerata. Visualizzando i risultati su una scala logaritmica, un andamento lineare delle funzioni di struttura implicherebbe un comportamento che segue una legge di potenza.

In figura 5.14 vengono invece mostrati i risultati relativi alle funzioni di struttura nel caso in cui il numero di Stokes venga mantenuto costante, mentre  $St_\theta$  varia nel range considerato nelle simulazioni. Viene considerata per la trattazione la funzione di struttura del secondo ordine  $S_T^{(2)}$ . Nel range dissipativo,  $S_T^{(2)}$  è direttamente connessa alla dissipazione imposta, e viene soppressa in maniera analoga per tutti i casi di  $St$  considerati. Si nota che le minime differenze delle temperature del fluido tra due punti si nota per  $St_\theta \approx 1$ , che rappresenta il caso di massimo trasporto del calore nel dominio

da parte delle particelle, e che pertanto tende a livellare le eventuali fluttuazioni di temperature presenti.

Nella figura 5.15 infine viene riportato l'andamento degli esponenti delle funzioni interpolanti delle structure functions nel tratto dissipativo, in funzione dell'ordine della  $S_T$  per il caso di  $St = 0.5$  e  $St = 1$ . Dalla osservazione delle funzioni infatti si notano due tratti delle curve in cui, se visualizzati in scala logaritmica, sembra mostrarsi un andamento lineare. Questo comportamento implica che la curva segua un andamento del tipo legge di potenza, ovvero interpolabile da una funzione del tipo  $y = ax^b$ . L'esponente  $b$  del tratto relativo alle piccole separazioni ( $r < 2\eta$ ) può allora essere ricavato tramite il metodo dei minimi quadrati, e graficato in funzione dell'ordine della structure function. Se il campo fosse regolare, gli esponenti dovrebbero disporsi lungo una retta, che nella figura viene mostrata tratteggiata. Questa corrisponde alla retta  $y = \zeta_2 \frac{x}{2}$ . Ogni funzione di struttura di ordine  $n$  in quel caso potrebbe quindi essere ricavata da quelle di ordini diversi, in virtù di una proporzionalità diretta tra i risultati delle funzioni di struttura. Se invece così non fosse, la soluzione non sarebbe di tipo autosimile, e l'ipotesi di Kolmogorov non potrebbe più essere considerata valida a descrivere il fenomeno studiato. Si nota che la curva che mostra un andamento più vicino a quello della retta dell'auto-similarità è quella che fa riferimento al caso di assenza di feedback termico delle particelle.

Il campo di temperatura inoltre mostra un certo allontanamento dall'ipotesi di gaussianità ed isotropia locale anche a scale del flusso più grandi rispetto a quella di Kolmogorov. Il matematico aveva ipotizzato che il campo di velocità all'interno della turbolenza, per scale più piccole rispetto a quelle integrali, fosse caratterizzato da isotropia locale e mostrasse un comportamento gaussiano. Il campo dello scalare mostra invece una certa intermittenza anche all'interno del campo inerziale, come sottolineato da Shraiman e Siggia [19]. In figura 5.16 viene allora riportato l'andamento degli esponenti delle leggi di potenza che interpolano i risultati del campo di temperatura ai range inerziali della scala, di dimensioni maggiori rispetto alla scala di Kolmogorov. Ciò che si nota è una certa intermittenza, ed un allontanamento dalla retta della gaussianità, che sarebbe raggiunta invece nel caso di studio del campo di velocità.

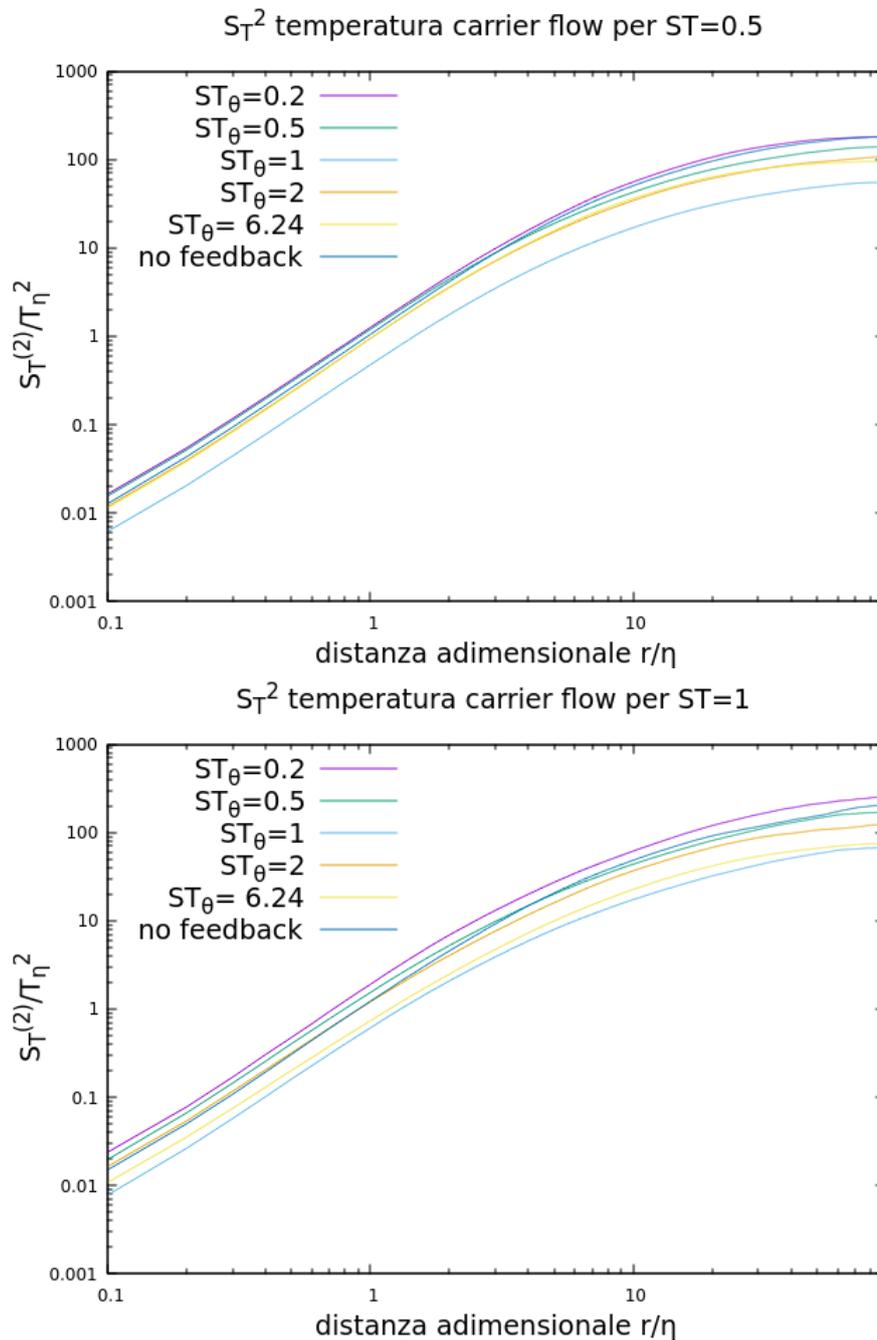


Figura 5.14: Structure functions della temperatura del carrier flow per il caso di  $St = 0.5$  e  $St = 1$  al variare di  $St_\theta$ . Si nota che  $S_T^2$  decrescono in maniera monotona all'aumentare di  $St_\theta$  quando l'accoppiamento termico bidirezionale viene tenuto in considerazione, ma le minime differenze nel campo di temperatura del fluido si notano per valori di  $St_\theta$  dell'ordine dell'unità.

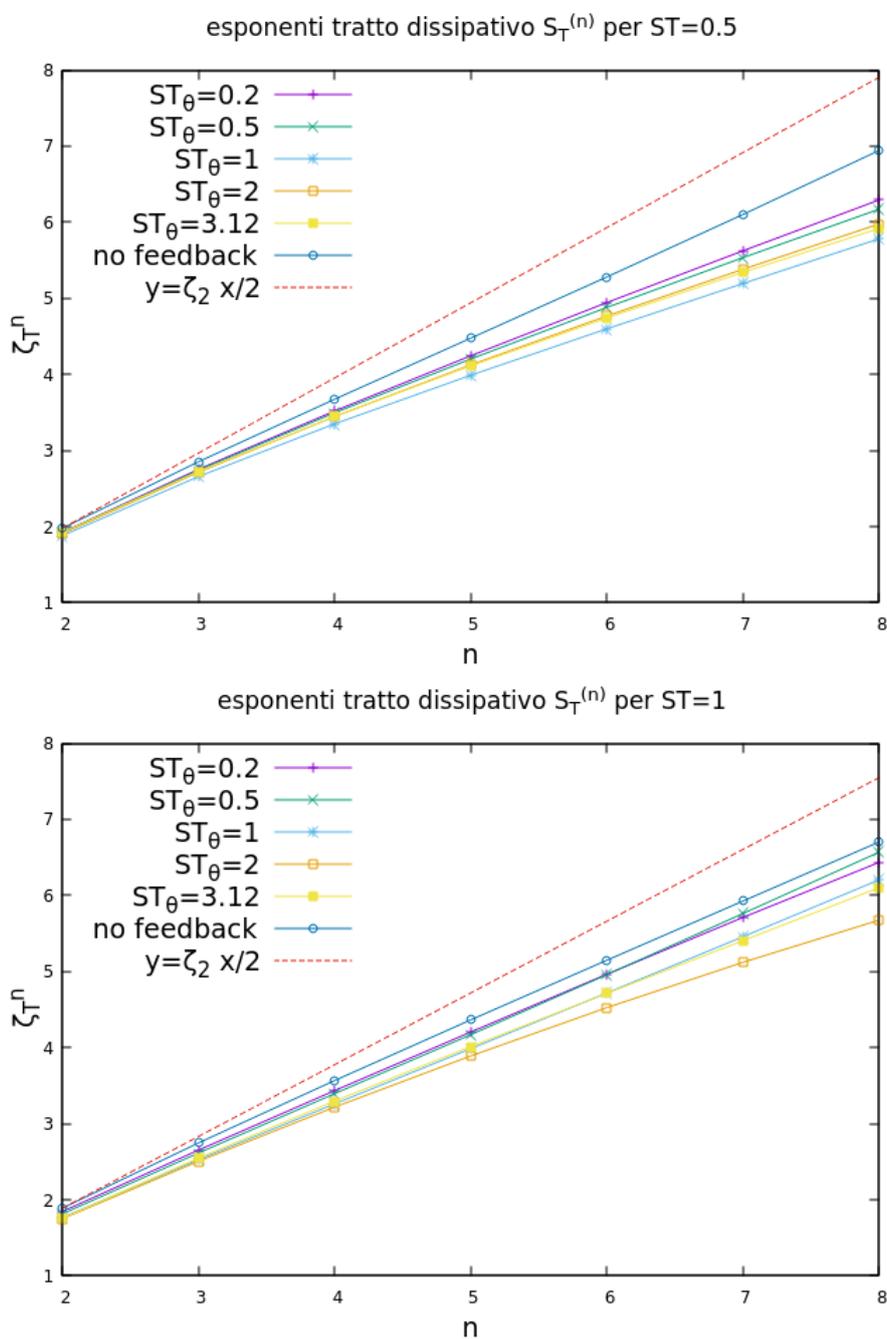


Figura 5.15: andamento degli esponenti delle leggi di potenza che interpolano le funzioni di struttura del campo di temperatura del fluido in funzione dell'ordine delle funzioni di struttura stesse per  $St = 0.5$  e  $St = 1$  a diversi  $St_\theta$

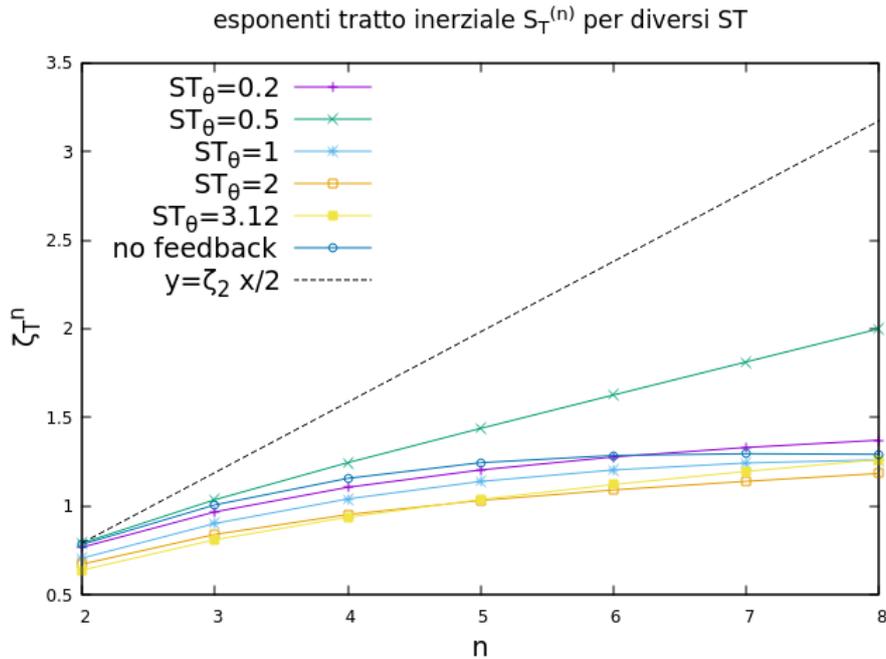


Figura 5.16: Andamento degli esponenti delle leggi di potenza interpolanti il tratto inerziale del campo di temperatura del fluido. Si noti come le curve tendano ad allontanarsi dalla curva tratteggiata, indicando una certa intermittenza anche alle scale del flusso in cui, nel campo di velocità, sarebbe rispettata l'ipotesi di Kolmogorov

### 5.5.2 Il campo di temperatura delle particelle

Allo stesso modo di quanto fatto per il campo di temperatura del fluido si può ripetere l'analisi delle funzioni di struttura anche per il campo di temperatura delle particelle. La funzione di struttura relativa al campo di temperatura delle particelle si definisce come

$$S_\theta^{(n)}(r) = \langle |\Delta\theta_p|^n \rangle_r$$

I risultati vengono mostrati nelle figure a seguire, considerando diversi numeri di  $St$  e  $St_\theta$ , sia in caso di presenza di feedback di temperatura che in caso di sua assenza.

Le funzioni di struttura di ordine  $i$ -esimo sono riportate nella figura 5.17. Si nota che, al diminuire della distanza adimensionale  $r/\eta$ , le curve non tendono ad un valore nullo. La causa è legata al fatto che le particelle possiedono una significativa inerzia termica, e considerando due particelle adiacenti, queste possono avere temperature molto diverse l'una dall'altra. In figura 5.18 si nota come  $S_\theta^2$  aumenti all'aumentare di  $St_\theta$ . Per  $St_\theta$  piccoli si vede come le differenze tra due punti molto ravvicinati all'interno del dominio sia molto più piccola rispetto al caso in cui  $St_\theta$  fosse più alto, ad indicare che, per il caso di bassa inerzia termica, le particelle tendono ad adeguarsi velocemente alla temperatura del fluido, e conseguentemente particelle vicine avranno temperature del tutto simili. Nel caso di inerzia termica più elevata invece, anche nel caso considerassimo particelle adiacenti, la loro temperatura potrebbe essere di molto differente. Si nota che le curve risultano efficaci a descrivere il fenomeno solo per valori di  $r/\eta < 3$ . Dal momento che per ipotesi le particelle sono considerate di dimensioni molto inferiori della scala di Kolmogorov l'attenzione va posta sulle scale dissipative del flusso. Per valori di  $r/\eta$  superiori a 15 possiamo già considerarci in range inerziale. Osservando i grafici

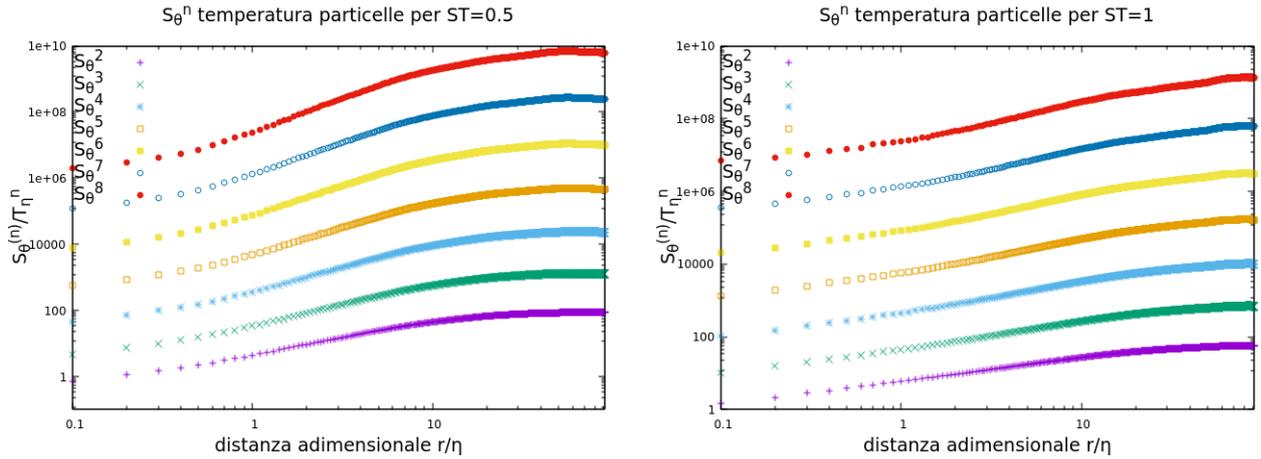


Figura 5.17: Structure functions della temperatura delle particelle per il caso di  $St = 0.5$  e  $St = 1$  e  $St_\theta = 6.24St$ . Come le curve relative alla temperatura del carrier flow, anche quelle relative alla temperatura delle particelle mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo e un secondo tratto lineare nel tratto inerziale. Al diminuire della distanza adimensionale  $r/\eta$  le funzioni tendono a diminuire, ma non arriveranno a zero come nel caso del campo del carrier flow.

si nota come in entrambi i casi, per grandi distanze, le curve tendano a raggiungere la temperatura del fluido, con la conseguenza di avere temperature molto diverse da un punto all'altro. Per  $St_\theta$  piccoli l'adeguamento al fluido è più rapido, e le differenze di temperatura tra due punti alle grandi distanze saranno più marcate rispetto al caso di inerzia termica più elevata. Anche il numero di Stokes si osserva avere una certa influenza sui risultati.

Ponendoci a grandi distanze, per il caso di numero di  $St$  molto grande, le particelle tendono a non seguire il fluido, e solamente dopo un certo intervallo di tempo la situazione tenderà ad essere uniforme, processo che invece risulta più rapido nel caso di  $St = 0.5$ . Dal momento che la velocità relativa delle particelle aumenta con  $St$ , particelle provenienti da aree molto distanti del dominio possono trasportare temperature molto diverse tra loro. Si nota come alle grandi distanze infatti la funzione di struttura del secondo ordine relativa alla temperatura delle particelle tenda a coincidere con la funzione di struttura relativa alla temperatura del fluido,

$$S_\theta^2 \approx S_T^2$$

Come nel caso precedente, anche ora la valutazione degli esponenti delle funzioni che interpolano le structure functions nel tratto dissipativo permette di comprendere facilmente se le funzioni ad ordini diversi sono legate in modo lineare l'una con l'altra o meno. Nel range dissipativo si intuisce che la funzione segue una legge di potenza, la cui interpolazione è ottenuta cercando l'equazione del tipo  $y = ax^b$ , con i coefficienti  $a$  e  $b$  ottenuti tramite il metodo dei minimi quadrati. Anche in questo caso è stato valutato il caso di assenza di feedback termico delle particelle. Questo risultato indica il caso di diluizione infinita, con campo di temperatura del fluido non influenzato minimamente dalla presenza delle particelle. Si nota come le curve degli esponenti della funzione interpolante tendano praticamente a raggiungere un valore orizzontale, deviando quindi dal comportamento gaussiano in modo molto più marcato rispetto al caso del campo di temperatura del fluido.

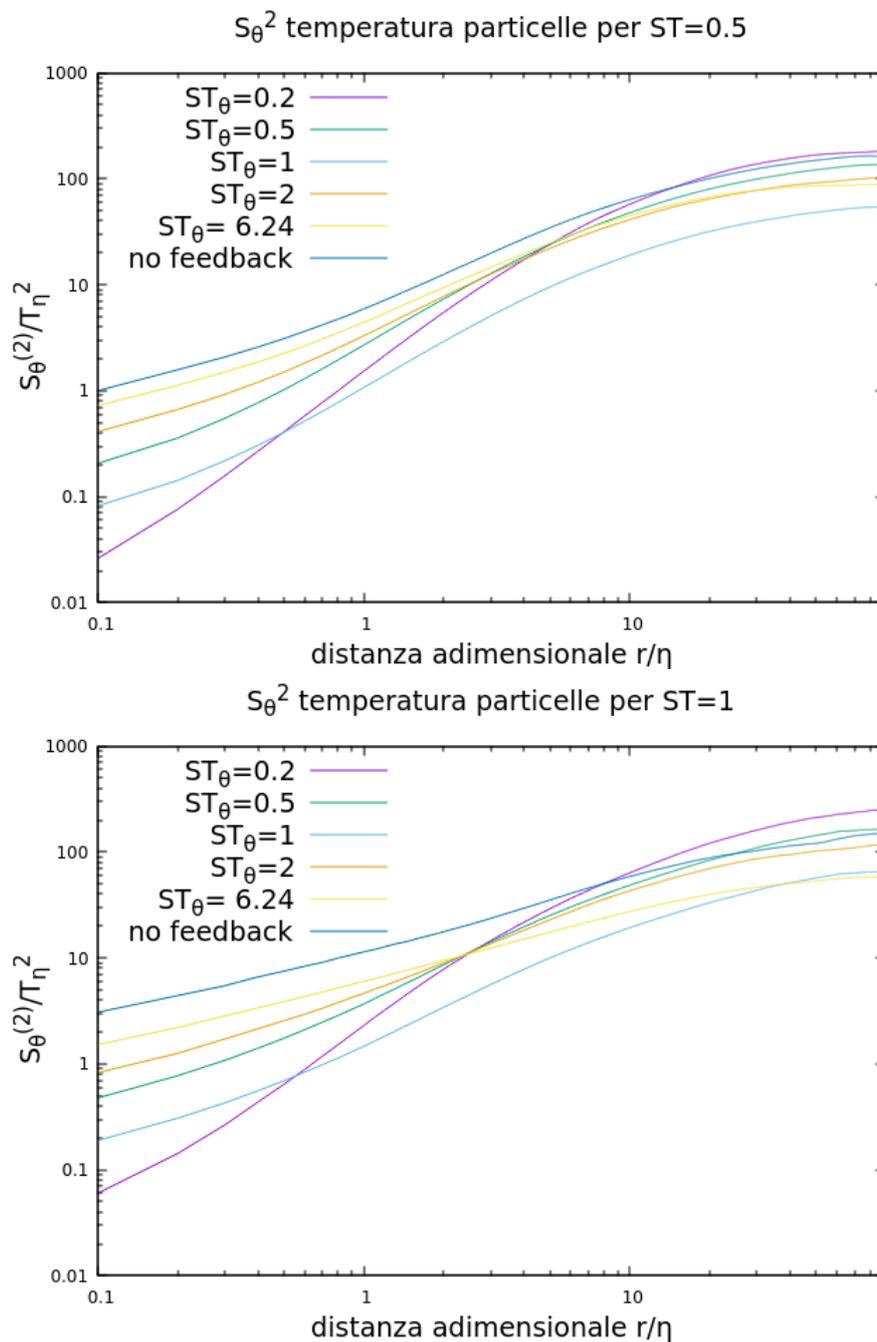


Figura 5.18: Structure functions della temperatura del carrier flow per il caso di  $St = 0.5$  e  $St = 1$  al variare di  $St_\theta$

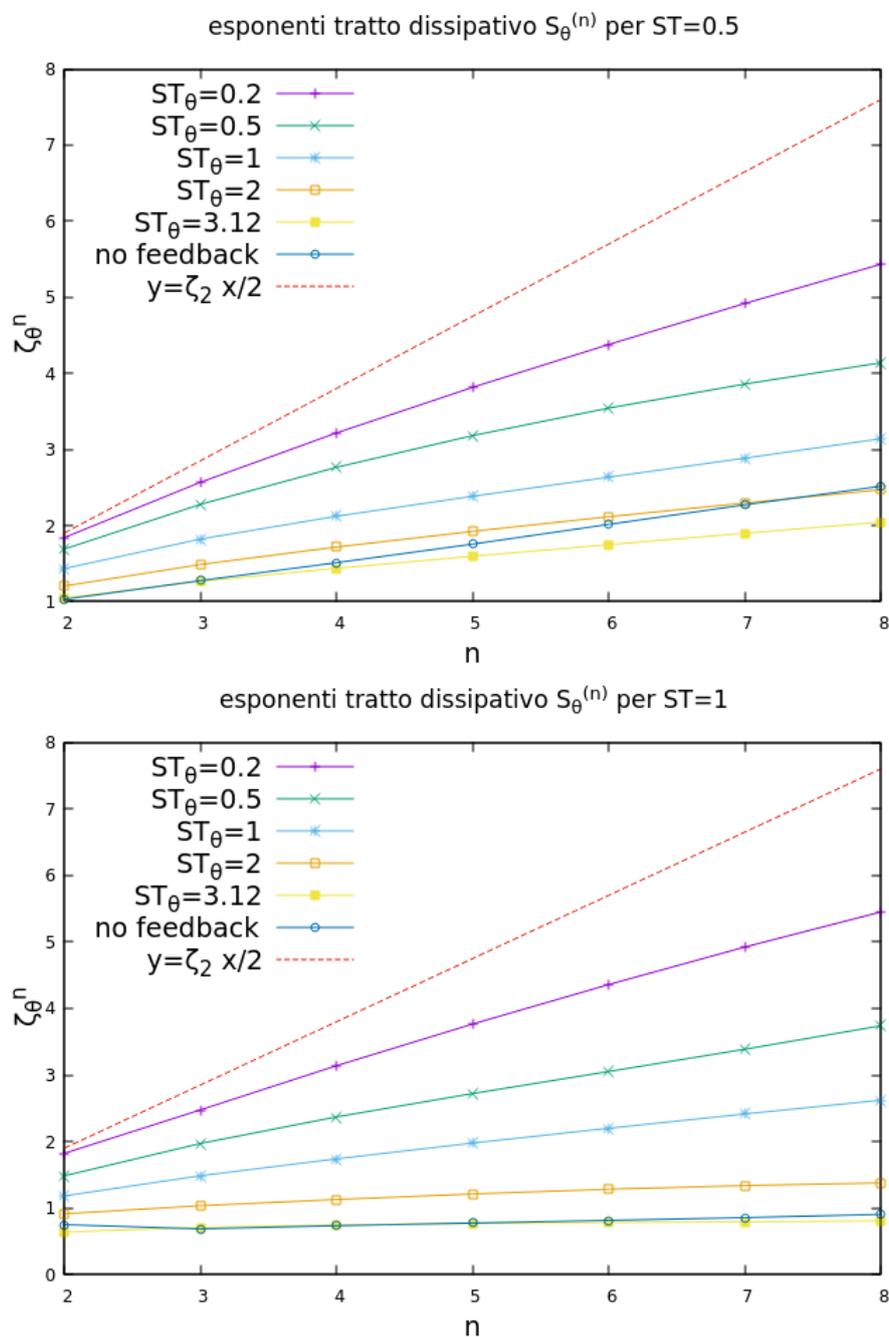


Figura 5.19: andamento degli esponenti delle leggi di potenza che interpolano le funzioni di struttura in funzione dell'ordine delle SF per  $St = 0.5$  e  $St = 1$  a diversi  $St_\theta$

## 5.6 Le funzioni di struttura del campo di velocità

In modo assolutamente analogo a quanto fatto per le funzioni di struttura relative al campo di temperatura è possibile procedere con l'analisi delle funzioni di struttura per il campo di velocità. Dal momento che la temperatura è uno scalare, il problema non richiedeva l'analisi del vettore direzione tra le particelle, ed era sufficiente definire la distanza  $r$  tra i due punti del dominio che si intendeva considerare. Nel caso del campo di velocità però insorge il problema di considerare una direzione di valutazione. Il calcolatore fornisce le funzioni di struttura riferite alla norma del vettore velocità; le funzioni di struttura proiettate nella direzione della distanza, e le funzioni di struttura nella direzione perpendicolare alla distanza.

In questa trattazione si sono considerate le sole funzioni di struttura riferite alla norma del vettore velocità.

Le funzioni di struttura relative al campo di velocità si definiscono come

$$S_u^{(n)} = \langle ||\vec{u}(x_2) - \vec{u}(x_1)||^n \rangle$$

Nel caso di turbolenza omogenea e isotropa, come si ha per il campo di velocità nel nostro caso di studio, la funzione di struttura non dipenderà più dalle singole posizioni  $x_1$  e  $x_2$ , ma solo dalla distanza  $r$  tra le due.

Come fatto per le funzioni del campo di temperatura, anche in questo caso è necessario rendere adimensionali le grandezze considerate. La distanza  $r$  viene di nuovo rapportata alla scala di Kolmogorov ( $r/\eta$ ), mentre la velocità alla velocità di Kolmogorov ( $||V||/u_\eta$ ), definita come

$$u_\eta = (\epsilon\eta)^{1/3}$$

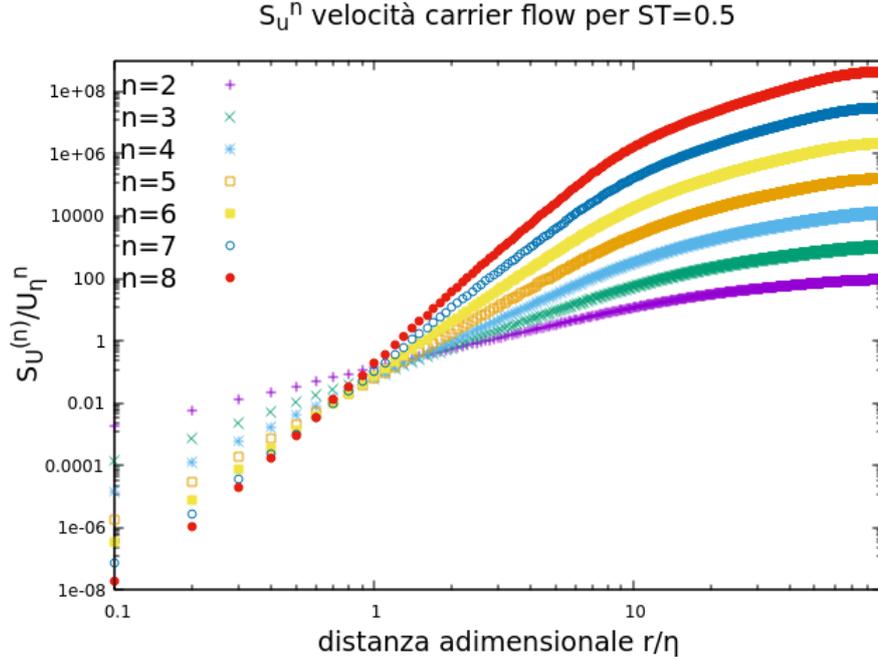


Figura 5.20: Structure functions del campo di velocità del carrier flow per il caso di  $St = 0.5$  e  $St_\theta = 6.24St$ . Indipendentemente dall'ordine delle funzioni, queste mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo, analogamente a quanto accadeva per il campo di temperatura

### 5.6.1 Il campo di velocità del fluido (carrier flow)

Come fatto per il campo di temperatura, anche per il campo di velocità del fluido viene riportato in figura 5.20 l'andamento delle funzioni di struttura al variare dell'ordine delle funzioni. Nel caso del campo di velocità, si noti che non è presente alcun feedback di quantità di moto. Di conseguenza il fluido non risente minimamente della presenza delle particelle, e il comportamento delle funzioni di struttura non risulta influenzato né dal numero di particelle presenti, né dal loro numero di Stokes. Un tratto in cui si osservi un andamento lineare implica una interpolazione tramite legge di potenza.

É poi possibile procedere con la valutazione della funzione di struttura del secondo ordine, particolarmente interessante per valutare il comportamento del campo di velocità. I risultati sono riportati in figura 5.21.

Osservando la figura 5.21 si nota un andamento poco variabile con la dimensione delle scale a cui si fa riferimento. Alle piccole scale infatti, le funzioni di struttura decrescono senza forti cambi di concavità rispetto all'andamento alla scala inerziale, ad indicare un comportamento gaussiano, che segue meglio l'ipotesi formulata da Kolmogorov sulle leggi di scala. Si nota inoltre che le funzioni di struttura per i diversi  $St$  sono sovrapposte l'una con l'altra. Per quanto osservato poc'anzi infatti, esse non risultano influenzate dalla presenza delle particelle, e quindi nemmeno dal loro  $St$ .

Alle piccole scale le  $S_u^2(r)$  risultano proporzionali al rateo di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta a causa dei gradienti di velocità del fluido, così che

$$S_u^2 \propto \|\nabla u\|^2, r < \eta$$

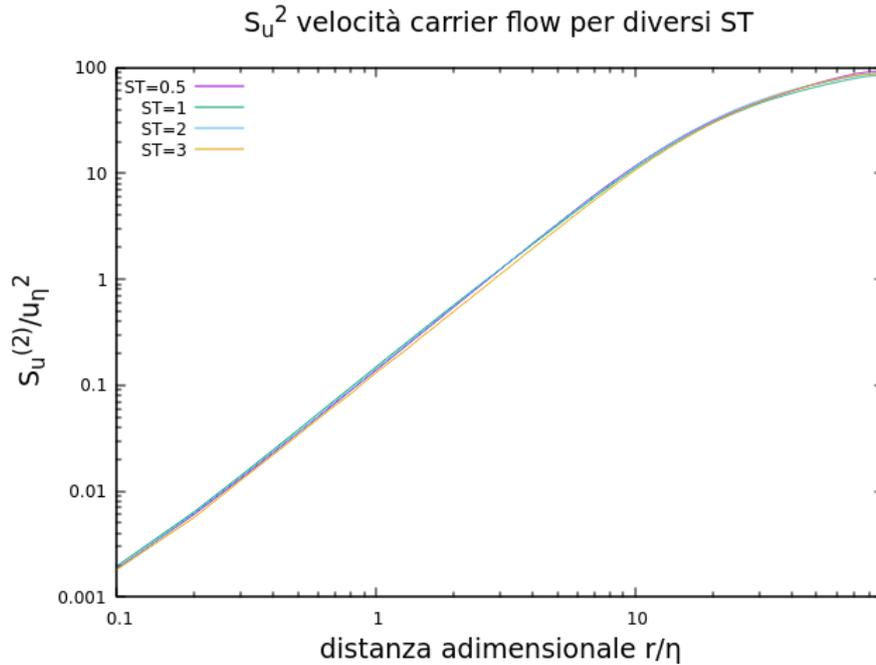


Figura 5.21: funzioni di struttura del secondo ordine della velocità del carrier flow per diversi  $St$ , ovvero per diversi valori di inerzia delle particelle trasportate nel flusso.

A distanze più grandi della scala integrale  $\ell$ , la  $S_u^2(r)$  diventa proporzionale alla varianza delle fluttuazioni del campo di velocità, con un comportamento del tipo

$$S_u^2 \propto u'^2, r \geq \ell$$

Si effettua infine il calcolo dell'andamento degli esponenti delle funzioni di struttura in funzione del loro ordine alle piccole scale del flusso. I risultati vengono mostrati in figura 5.22. Si nota che le curve tendono a posizionarsi in corrispondenza della retta della gaussianità. Il campo di velocità del carrier flow infatti non viene influenzato dalla presenza delle particelle, e di conseguenza mantiene un comportamento regolare sul range inerziale, dove vale l'ipotesi di Kolmogorov. Per numeri di Reynolds sufficientemente grandi il range inerziale risulta ben sviluppato, e tende a estendersi verso il basso andando a ridurre sempre di più il range dissipativo. L'interesse allora verso le scale più piccole del flusso si fa sempre minore, e le curve mostrano un comportamento più regolare.

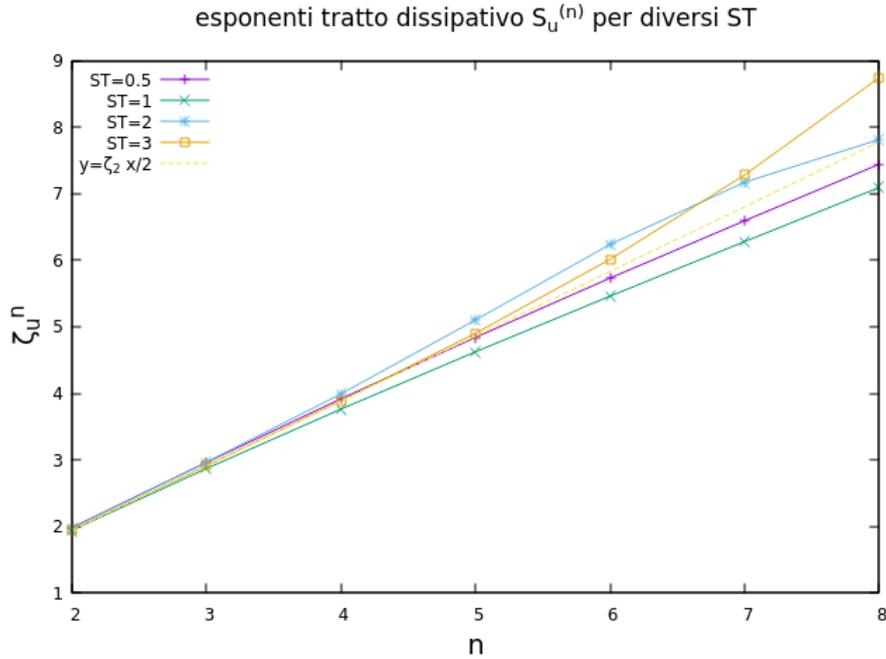


Figura 5.22: Esponenti della funzione di struttura della velocità del carrier flow in funzione dell'ordine della funzione di struttura

### 5.6.2 Il campo di velocità delle particelle

In figura 5.23 si può notare l'andamento delle funzioni di struttura della velocità riportate in scala logaritmica al variare dell'esponente della funzione. Vengono riportate le situazioni relative al caso di  $St = 0.5$  e  $St = 1$  e per  $St_\theta = 6.24St$ . Si nota di nuovo un tratto, relativo al tratto dissipativo, in cui  $r/\eta < 2$ , in cui la funzione di struttura sembra approssimabile con una legge di potenza. Allo stesso modo in cui le funzioni di struttura relative alla temperatura delle particelle non tendevano perfettamente a un valore nullo quando la distanza adimensionale tendeva a zero, anche ora si nota lo stesso comportamento. Le particelle infatti possiedono una propria inerzia, che aumenta con il numero di Stokes. In virtù di ciò, particelle adiacenti o vicine tra loro possono avere velocità molto diverse in modulo, influenzando l'andamento delle curve.

Viene poi calcolato l'andamento delle funzioni di struttura di ordine 2,  $S_u^2(r)$  per il caso di diversi valori di  $St$ . In questo caso  $St_\theta$  non influenza i risultati. Dal momento poi che non si è tenuto in considerazione il feedback in quantità di moto dovuto alla presenza delle particelle, non è possibile valutare il confronto tra presenza e assenza di feedback, come invece fatto per il caso del campo di temperatura.

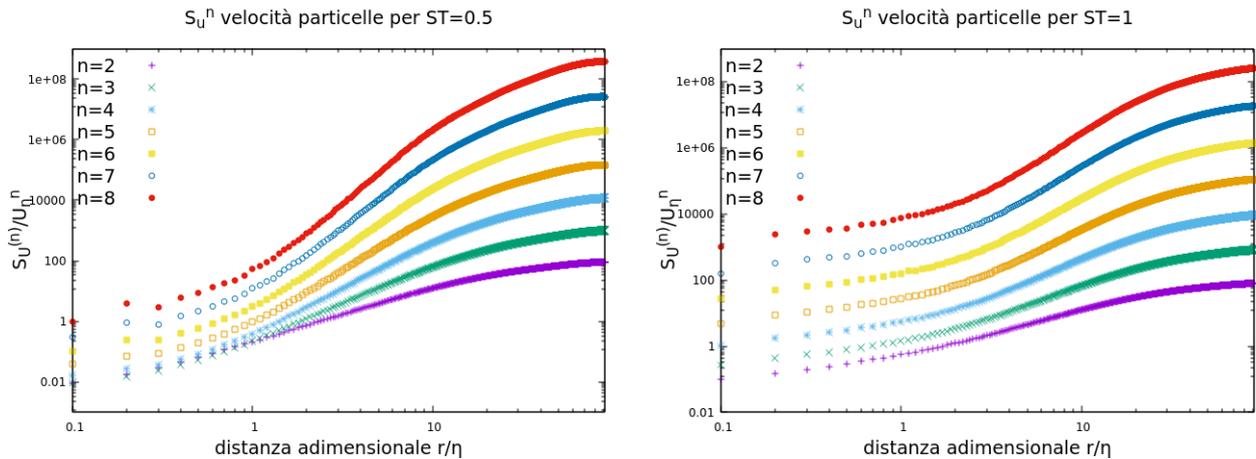


Figura 5.23: Structure functions del campo di velocità delle particelle per il caso di  $St = 0.5$  e  $St = 1$  e  $St_\theta = 6.24St$ . Indipendentemente dall'ordine delle funzioni, queste mostrano un comportamento con un tratto lineare, relativo al range dissipativo, analogamente a quanto accadeva per il campo di temperatura

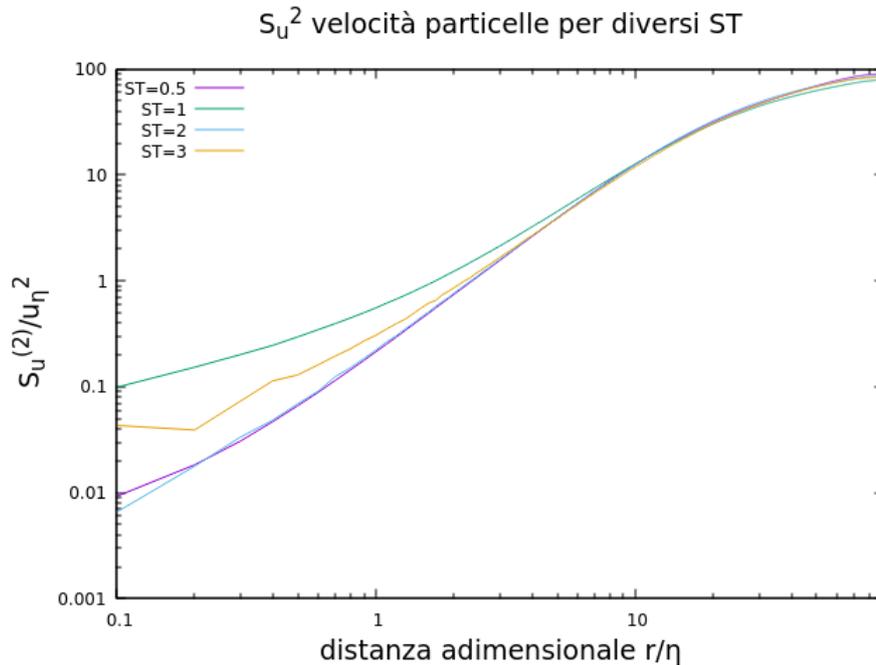


Figura 5.24: andamento delle funzioni di struttura di velocità delle particelle  $S_u^2(r)$  per il caso dei due numeri di Stokes considerati. Si nota che le curve si differenziano in modo marcato, mostrando una tendenza a smorzare la differenza di velocità tra due punti considerati nel caso in cui  $St = 0.5$

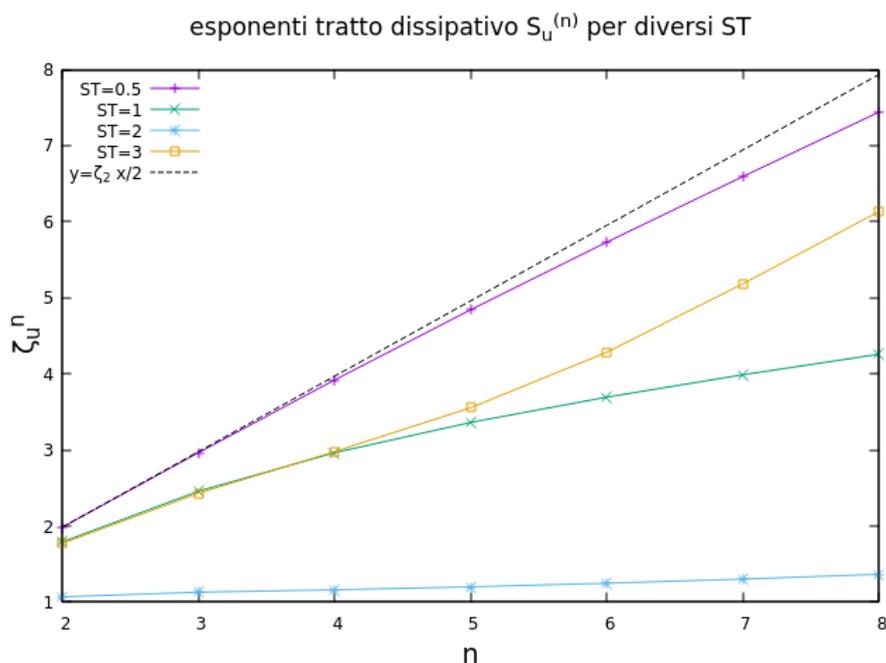


Figura 5.25: Esponenti della funzione di struttura della velocità delle particelle in funzione dell'ordine della funzione di struttura. Si nota come le curve non seguano minimamente un andamento lineare, che sarebbe stato indicativo della gaussianità della funzione di struttura

La figura 5.24 mostra un andamento che si differenzia a seconda delle scale considerate. Alle piccole distanze, con l'aumentare del numero di Stokes si nota che le curve si distanziano sempre più dall'andamento tipico del campo analitico, che segue un andamento del tipo  $r^2$ . Coppie di particelle molto vicine tra loro possiedono una grande velocità relativa rispetto alle particelle di fluido a loro corrispettive. Alle scale intermedie si nota invece che le funzioni di struttura tendono a seguire tutte un andamento descritto da  $r^2/3$ . Alle grandi distanze invece, si nota che l'energia cinetica delle particelle diminuisce all'aumentare dell'inerzia delle particelle, per valori di  $St$  sufficientemente grandi. Le curve dimostrano di nuovo che la massima differenziazione delle funzioni di struttura la si trova per valori di  $St \approx 1$ .

Come per il caso del campo di temperatura, è utile calcolare l'andamento degli esponenti delle funzioni di struttura di velocità in funzione dell'ordine della funzione stessa. Sarà facile notare un comportamento molto distante da quello rettilineo, ad indicare quindi uno spiccato allontanamento dalla gaussianità. I risultati sono mostrati in figura 5.25

## 5.7 Il numero di Nusselt

Già introdotto nel capitolo precedente, il numero di Nusselt è un parametro valido a descrivere l'influenza che le particelle hanno sul fluido che le trasporta. Esso definisce il rapporto tra il flusso di calore scambiato in condizione di movimento del fluido, e il flusso di calore che sarebbe scambiato in condizioni statiche.

Per il caso d'esame in questione, con forzante rappresentata da gradiente di temperatura imposto dall'esterno, si era visto che il numero di Nusselt poteva essere riscritto in una forma trovata nella relazione (4.2)

$$Nu = 1 + Pe \langle \tilde{u}_3 \tilde{T}' \rangle$$

$$\text{con } Pe = \frac{U_R L_R}{k} = Re Pr$$

Risulta utile rappresentare in una tabella i risultati relativi al calcolo del numero di Nusselt per i vari casi d'esame, in modo da facilitare la successiva rappresentazione grafica in funzione di  $St$  e  $St_\theta$ .

St	$St_\theta$	Pe	$\langle u_3 T' \rangle$	Nu
0.1	0.624	106.16	-1.0185	114.18
0.2	1.248	106.16	-0.999	107.05
0.5	3.12	106.16	-1.207	127.14
1	6.24	106.16	-1.15	121.08
0.1	0.2	106.16	-1.361	143.48
0.1	0.5	106.16	-1.466	154.63
0.1	1	106.16	-1.367	144.12
0.1	2	106.16	-1.427	150.49
0.2	0.2	106.16	-1.481	156.22
0.2	0.5	106.16	-1.481	156.22
0.2	1	106.16	-1.517	160.04
0.2	2	106.16	-1.481	156.22
0.5	0.2	106.16	-1.333	140.51
0.5	0.5	106.16	-1.35	142.32
0.5	1	106.16	-1.354	142.74
0.5	2	106.16	-1.294	136.37
1	0.2	106.16	-1.572	165.88
1	0.5	106.16	-1.41	148.69
1	1	106.16	-1.368	144.23
1	2	106.16	-1.279	134.78

Tabella 5.2: Calcolo del numero di Nusselt per i fenomeni studiati. Per tutti i casi si è considerata una frazione volumica pari a  $\phi = 10^{-4}$

Si può dunque graficare l'andamento del numero di Nusselt per i diversi numeri di Stokes al variare di  $St_\theta$ . I risultati riportati riguardano i casi in cui l'andamento risulta più chiaro, ovvero i casi con  $St$  più grande. Si nota come all'aumentare di  $St_\theta$ , il grafico decresca, ad indicare una un contributo via via minore al flusso di calore da parte del fluido. Manca in questa trattazione il contributo delle particelle allo flusso di calore. Le particelle potrebbero contribuire al flusso di calore diventano il principale vettore

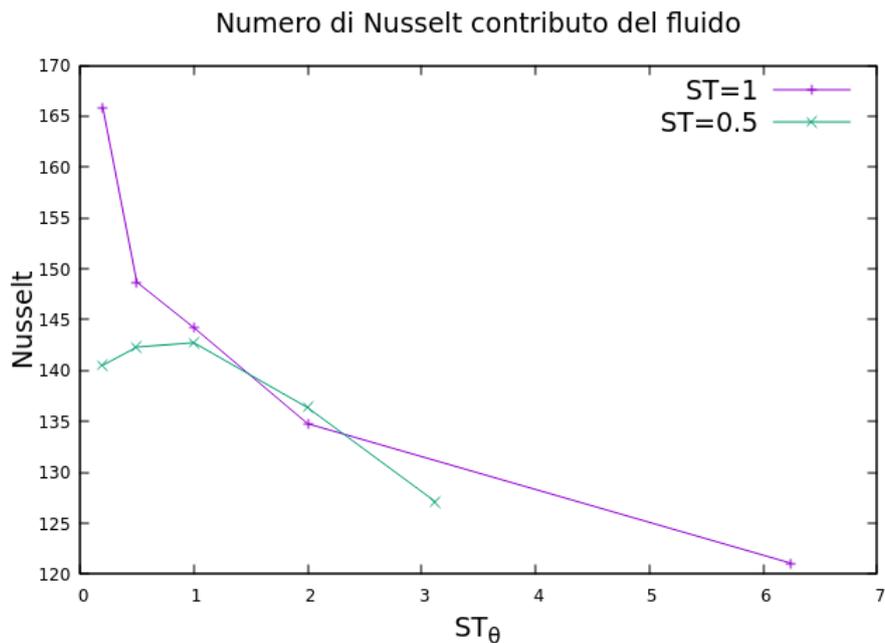


Figura 5.26: Variazione del numero di Nusselt per  $St = 0.5$  e  $St = 1$  al variare di  $St_\theta$

di scambio, portando a una crescita della curva del flusso di calore, oppure potrebbero semplicemente compensare il calo del flusso di calore legato al fluido che si nota quando aumenta  $St_\theta$ .

## 5.8 Le PDF dello scalare passivo

Lo studio delle funzioni probabilità di densità è uno dei metodi più efficaci che abbiamo per visualizzare l'allontanamento dall'ipotesi di Kolmogorov. Un additivo passivo, obbedendo a una legge lineare, mostra caratteristiche molto diverse da quelle del fluido che lo trasporta. Se infatti l'andamento della funzione densità di probabilità del campo di velocità nel tratto inerziale segue un andamento gaussiano, quella dello scalare mostrerà delle code esponenziali, perdendo di fatto la sua gaussianità.

L'ipotesi che le curve di densità di probabilità dello scalare seguissero un andamento di tipo gaussiano è sempre stata considerata alla base della teoria di Kolmogorov.

Un eventuale scostamento da tale comportamento permette di notare istantaneamente l'intermittenza della soluzione.

Dal momento che lo scalare passivo viene spinto in determinate zone del dominio, e le particelle tendono a disporsi laddove è possibile notare un forte gradiente dello scalare, la distribuzione di probabilità dello scalare mostrerà un comportamento anomalo, con code esponenziali osservabili al variare del numero di Stokes termico. Questa anomalia nel campionamento delle particelle in determinate zone del dominio si traduce, nel grafico della PDF, con la nascita di code esponenziali. Una particella con una inerzia elevata riesce infatti a muoversi a lunghe distanze nel dominio, portando con sé la temperatura che possedeva al suo stato iniziale e senza arrivare poi ad una condizione di equilibrio con il fluido.

La conoscenza del comportamento delle code esponenziali dello scalare è importante nel momento in cui si è interessati a determinare il comportamento di uno scalare all'interno di un flusso turbolento. Un esempio può essere rappresentato dalla funzione di distribuzione di probabilità riferita alla concentrazione di una certa sostanza tossica dispersa all'interno dell'atmosfera.

Questo comportamento è osservabile per casi di  $Re_\lambda > 30$  [6].

### 5.8.1 La PDF della temperatura del carrier flow

L'analisi statistica del comportamento del campo di temperatura del fluido viene effettuata valutando la funzione densità di probabilità della temperatura del fluido al variare dei numeri di Stokes e dei numeri di Stokes termici. Le PDF vengono normalizzate con la deviazione standard della distribuzione  $\sigma_T$  [7].

In figura 5.27 sono riportati gli andamenti della PDF della temperatura del carrier flow. Si nota un comportamento quasi gaussiano nel caso di bassi  $St_\theta$ , con un discostamento da questo andamento nelle code della funzione quando  $St_\theta$  iniziasse ad aumentare. In particolare si nota una certa sproporzione sul ramo di destra mostrando quindi una skewness positiva. La forma della PDF della temperatura del carrier flow risulta poco influenzata dalla presenza delle particelle quando si considera accoppiamento termico bidirezionale. Seppure le particelle scambino calore con il fluido che le trasporta, una frazione volumica di  $\phi = 10^{-4}$  non permetterebbe di osservare una forte influenza delle particelle sulla temperatura del fluido, in quanto le particelle sono in grado di riscaldare solo la piccola area di fluido che le circonda.

Seppur l'ipotesi di kolmogorov descriva correttamente il comportamento del campo di velocità del fluido, forzato in modo deterministico, il campo di temperatura si discosta

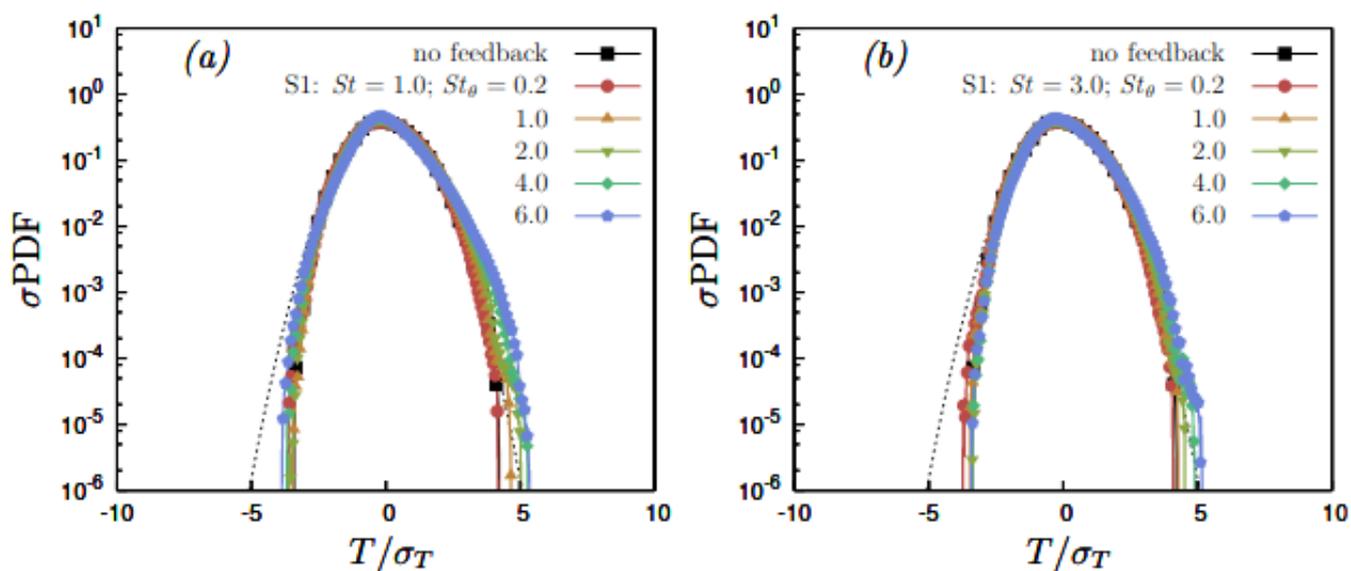


Figura 5.27: Andamento delle PDF della temperatura del carrier flow per due diversi  $St$  al variare di  $St_\theta$ . I risultati sono stati ottenuti dall'ing. M.Carbone [7]. I parametri di input con cui sono stati ottenuti i risultati sono  $\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\rho_p/\rho_f = 1000$  e  $Re = 244$

dall'andamento gaussiano ipotizzato da Kolmogorov e Obhukov [12]. Questo aspetto spiega anche la nascita del fenomeno dell'intermittenza all'interno della turbolenza. Se tutto fosse gaussiano infatti, le fluttuazioni sarebbero omogeneamente disposte all'interno del dominio. Dal momento che però la distribuzione del campo di temperatura non è gaussiana, e al diminuire delle scale questo fenomeno si nota sempre più facilmente, le fluttuazioni di temperatura non risultano uniformemente distribuite all'interno dello spazio.

### 5.8.2 La PDF della temperatura delle particelle $\theta_p$

Come fatto per la temperatura del fluido, è possibile valutare anche l'andamento della funzione densità di probabilità per il caso del campo di temperatura delle particelle  $\theta_p$ . L'analisi è stata fatta per due diversi numeri di Stokes, al variare del numero di Stokes termico, sia considerando il feedback termico delle particelle sul fluido, che trascurandolo. I risultati sono mostrati in figura 5.28. Si nota come le curve relative al calcolo in assenza di feedback termico si dispongano tutto sommato bene lungo la curva gaussiana, mentre quando si considera un accoppiamento bidirezionale le cose cambiano, mostrando delle code che si discostano da un andamento tipicamente gaussiano. In presenza di feedback termico, quando le particelle scambiano calore con il fluido, questo si scalda, e le forti differenze di temperatura tra particelle e fluido tendono ad essere smorzate, con conseguente riduzione anche dello scambio termico. La temperatura delle particelle può rimanere invariata quindi per tempi più lunghi, e in virtù di questo fenomeno nascono quindi le code esponenziali della PDF. Nel momento in cui invece il feedback termico fosse trascurato, il calore scambiato risulta molto più intenso, in quanto il fluido attorno alla particella ignora il fatto che la particella lo stia scaldando. Le grandi code esponenziali osservabili nel caso del feedback delle particelle vengono quindi molto smorzate. All'aumentare di  $St_\theta$ , le particelle tendono a scambiare calore con il fluido in modo sempre più difficoltoso, in tempi lunghissimi. I valori estremi, molto più grandi della deviazione standard della temperatura delle particelle sono sempre più probabili.

Una visione più chiara del comportamento delle funzioni di densità di probabilità si ottiene valutando la variazione della temperatura delle particelle nel tempo. Il risultato viene illustrato in figura 5.29. Dal momento che la variazione nel tempo della temperatura delle particelle risulta proporzionale a  $(\theta - T)$ , di fatto questa curva fornisce informazioni sulla differenza tra la temperatura delle particelle e quella del fluido.

Si nota come, a differenza della PDF del gradiente di temperatura del fluido, la PDF di  $\dot{\theta}_p$  non è autosimile rispetto alla sua varianza, e per  $St_\theta$  che aumenta, la PDF diventa sempre più sottile, in virtù del fatto che per elevati valori di  $St_\theta$  i forti gradienti di temperatura del fluido e delle particelle vengono soppressi.

Questo comportamento avviene perché, quando  $St_\theta$  aumenta, le particelle rispondono più lentamente al cambio di temperatura del fluido. Considerando invece  $St_\theta$  più modesti, si nota come grandi variazioni della temperatura delle particelle diventino più probabili, come le code esponenziali della funzione suggeriscono.

Si nota infine che la forma delle PDF risulta poco affetta dal numero di Stokes, tuttavia il massimo scostamento dal comportamento gaussiano lo si ottiene per  $St \approx 1$ , valore oltre al quale le code si assottigliano, dando una ulteriore prova del comportamento non monotono che hanno i risultati al variare del numero di Stokes. Se si considera  $St \approx 1$ , le particelle si troveranno con ogni probabilità disposte lungo i fronti del campo di temperatura, e le curve mostrano delle code esponenziali più marcate, dal momento che i fronti sono caratterizzati da improvvisi sbalzi di temperatura. Per  $St$  più elevati invece, le particelle non seguono più il flusso, e campionano lo spazio in maniera più uniforme. Le differenze di temperatura tra le varie particelle risultano allora meno marcate, motivo per cui le code esponenziali risultano più attenuate.

In figura 5.30 viene infine riportato il raffronto tra l'andamento della PDF del rateo di cambiamento della temperatura delle particelle con la funzione di Gauss al variare del numero di Stokes mantenendo fisso il rapporto tra  $St$  e  $St_\theta$ , per metterne in evidenza lo

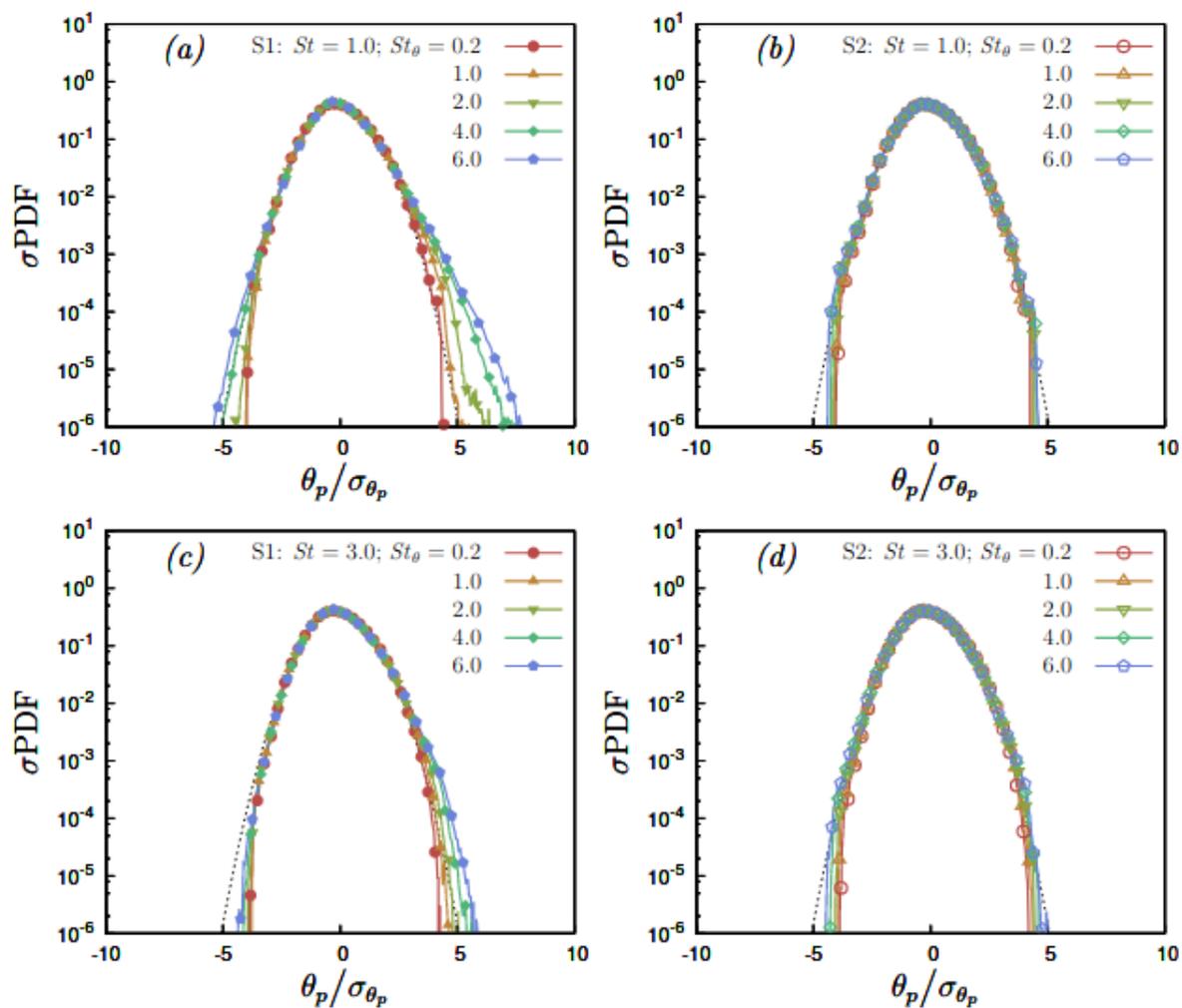


Figura 5.28:  $\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\rho_p/\rho_f = 1000$  e  $Re = 244$ . Andamento delle PDF per la temperatura delle particelle [7]. Le figure (a) e (c) fanno riferimento al caso di feedback termico delle particelle (accoppiamento bidirezionale), i casi (b) e (d) invece si riferiscono al caso di accoppiamento unidirezionale, che trascura il feedback termico delle particelle sul fluido

scostamento. Si nota facilmente come il massimo allargamento delle code esponenziali sia osservabile per il caso di  $St \approx 1$ , a dimostrazione del fatto che tale numero di Stokes rappresenta il valore al quale si assiste a un massimo campionamento delle particelle sui fronti del campo di temperatura [1].

In conclusione, l'ipotesi di Kolmogorov relativa alla autosimilarità della soluzione relativa al campo della velocità in un flusso turbolento [12], e poi estesa da Obukhov per includere il fenomeno del trasporto dello scalare passivo all'interno della turbolenza, considerava come ipotesi il fatto che la distribuzione dei campi di velocità e di temperatura fosse di tipo gaussiano per la maggior parte delle scale del flusso. I due matematici non avevano tenuto in considerazione la presenza delle particelle, ma avevano dato per presupposto che pure l'eventuale presenza di queste non avrebbe influenzato il risultato ottenuto, in quanto particelle solide trasportate da un flusso gaussiano sarebbero state anche trasportate in modo gaussiano. Sperimentalmente però si è provato che i campi delle particelle non seguono la distribuzione prevista, in quanto esse non campionano il flusso in modo uniforme.

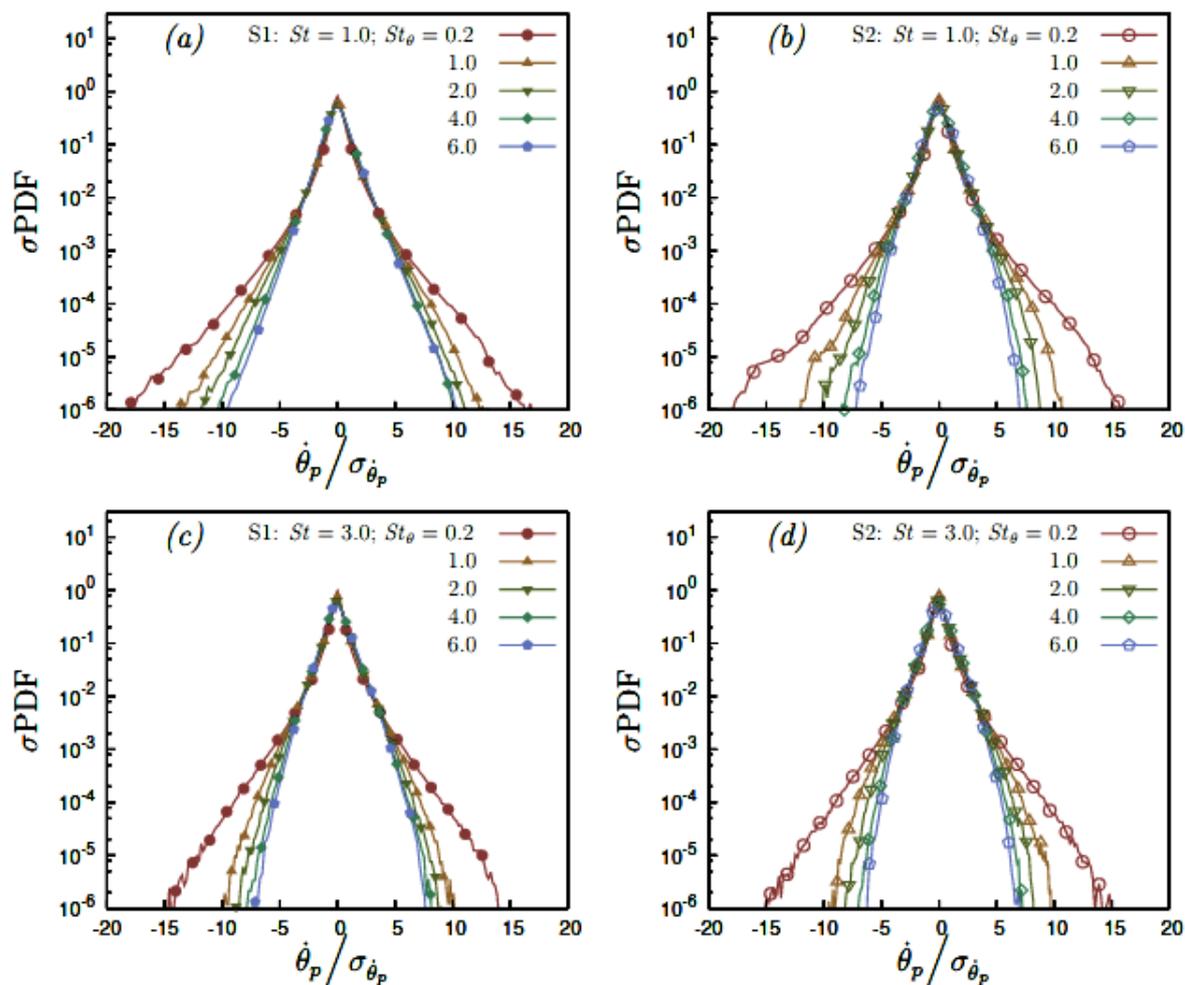


Figura 5.29:  $\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\rho_p/\rho_f = 1000$  e  $Re = 244$ . Andamento della PDF di  $\dot{\theta}_p$  [7]. I risultati sono di nuovo riportati alla deviazione standard di  $\dot{\theta}_p$  in ascisse e moltiplicati per la deviazione standard di  $\dot{\theta}_p$  in ordinate. I casi (a) e (c) fanno riferimento a accoppiamento di tipo bidirezionale, mentre (c) e (d) al caso unidirezionale, senza feedback della temperatura.

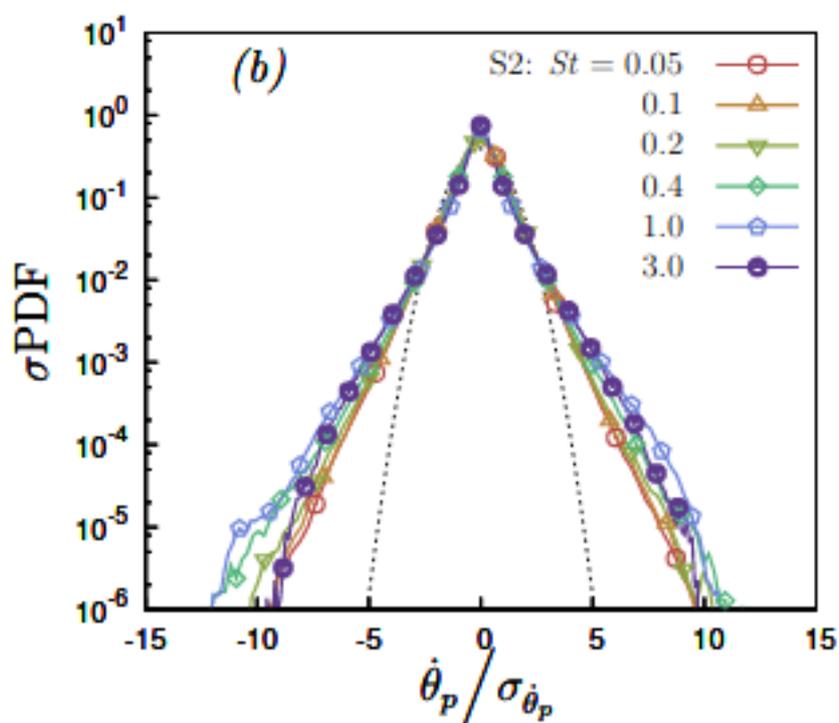


Figura 5.30:  $\phi = 4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\rho_p/\rho_f = 1000$  e  $Re = 244$ . Scostamento della curva della PDF del rateo di cambiamento della temperatura delle particelle,  $\dot{\theta}_p$  rispetto alla funzione gaussiana, tratteggiata in nero, per il caso di diversi  $St$  e senza considerare l'azione del feedback delle particelle



# Capitolo 6

## Conclusioni

Il fenomeno della turbolenza è un problema che è stato studiato a lungo. Già a partire dal 1941 Kolmogorov aveva teorizzato un comportamento della turbolenza che viene utilizzato ancora oggi per descrivere in gran parte il fenomeno. Il matematico, partendo dallo studio del campo di velocità, aveva ipotizzato un comportamento *gaussiano* dei flussi turbolenti lungo le scale inerziali del flusso, lontane quindi sia dalle scale integrali che da quelle dissipative. Per flussi turbolenti caratterizzati da un numero di Reynolds sufficientemente elevato queste scale occupano una elevatissima porzione del dominio, giustificando così le ipotesi di Kolmogorov. Le fluttuazioni di velocità quindi vennero da lui considerate disposte in maniera uniforme nello spazio, riempiendo tutto il dominio di calcolo. Ogni deviazione da questo comportamento viene definita intermittenza. La sua ipotesi venne in seguito estesa anche al campo di scalare della turbolenza.

Al termine di questa tesi sono in grado di confermare che l'ipotesi di Kolmogorov non sia però valida nel caso di turbolenza omogenea stazionaria incomprimibile con gradiente di scalare medio imposto dall'esterno e in presenza di particelle sospese. Il flusso turbolento considerato è stato studiato mediante una DNS valutando anche la presenza di particelle pesanti, con densità molto maggiore di quella del fluido, e di dimensione molto inferiore a quelle della scala di Kolmogorov  $\eta$ , in modo da poter sfruttare l'approssimazione dell'equazione di Maxey Riley per il caso di particelle dense. Le particelle sono state inserite considerando un accoppiamento termico bidirezionale tra la parte solida e la parte fluida del problema. È dunque stata considerata una frazione volumica delle particelle pari a  $\phi = 10^{-4}$ , in modo da garantire che queste ultime potessero influenzare il carrier flow generando un feedback termico, ma che permettesse di trascurare le interazioni tra le singole particelle, e i relativi urti tra esse.

L'accoppiamento fluido - particelle è stato considerato invece unidirezionale per quanto riguarda il campo di velocità. Ciò significa che le particelle risultano influenzate dal comportamento del fluido che le trasporta, ma queste ultime non generano alcun feedback di quantità di moto sul fluido.

Il gradiente di scalare medio imposto corrisponde a un gradiente medio di temperatura. Questo, per piccole fluttuazioni di temperatura, si comporta all'interno del fluido come uno scalare passivo, viene quindi trasportato all'interno del dominio, senza generare influenze sulla dinamica del fluido.

Ciò che si è simulato a livello computazionale può essere riprodotto a livello sperimentale considerando la turbolenza prodotta da una griglia riscaldata, come studiato da Warhaft. Il calcolo viene effettuato utilizzando una DNS, ovvero un metodo di simulazione numerica che include tutte le scale della turbolenza fino a quella più piccola. Tramite un codice

Fortran, utilizzato sfruttando 16 processori del cluster HPC Polito ho potuto ottenere una soluzione alle equazioni della fluidodinamica che regolano il flusso. In particolare, la parte fluida del problema risponde alle equazioni di Navier-Stokes, mentre la parte solida è retta dalle equazioni semplificate di Maxey Riley, che descrivono il comportamento di particelle sferiche all'interno di un fluido.

La garanzia che la turbolenza rimanga statisticamente stazionaria e non decada nel tempo è legata all'inserimento all'interno del fluido di una forzante di natura deterministica per il campo di velocità, e del gradiente di temperatura medio per il campo dello scalare. La forzante di velocità è inserita ai bassi numeri d'onda, quindi alle grandi scale della turbolenza, in modo da non influenzare le scale inerziali e dissipative del flusso. Il campo di temperatura viene invece forzato da un gradiente di scalare medio che, in presenza della fluttuazioni del campo di velocità turbolento, genera fluttuazioni di scalare.

Affinché la simulazione sia valida è necessario considerare un numero di Reynolds e un  $Re_\lambda$  sufficientemente grandi da poter considerare il flusso con un range inerziale sviluppato. In particolare per tutte le simulazioni eseguite si è considerato  $Re = 151$  e  $Re_\lambda = 71$ .

Il dominio di calcolo è un cubo di lato  $2\pi$  sul quale sono state imposte condizioni al contorno di tipo periodico.

L'introduzione di un gradiente di scalare medio ha permesso di riscrivere le equazioni del problema, in modo da renderle riferite alle fluttuazioni della temperatura, mettendo in evidenza un nuovo termine sorgente in grado di equilibrare la dissipazione che le fluttuazioni naturalmente subirebbero. Il fatto di considerare le equazioni, poi adimensionalizzate, in funzione delle fluttuazioni ha permesso di poter utilizzare condizioni al contorno di tipo periodico anche a seguito dell'introduzione della forzante gradiente di temperatura. I risultati dello studio effettuato hanno riguardato in primo luogo la visualizzazione dei campi di temperatura e di velocità del fluido, verificando la diversa incidenza delle particelle sul fluido legata ai vari numeri di Stokes simulati. La visualizzazione ha permesso di valutare inoltre il posizionamento delle particelle proprio in corrispondenza delle regioni in cui si possono osservare forti gradienti dello scalare, confermando un comportamento in fluidodinamica noto come *turboforesi*.

Dalla valutazione delle funzioni di struttura riferite ai campi di temperatura e velocità sia del carrier flow che delle particelle, si è potuta ottenere una dimostrazione del fatto che l'ipotesi di Kolmogorov non possa essere considerata valida in queste condizioni. Le funzioni di struttura mostrano infatti un andamento non autosimile. Quello che Kolmogorov ipotizzava, ovvero che le funzioni di struttura di ordine diverso fossero tutte ricavabili l'una dall'altra in base a una proporzionalità diretta tra i diversi ordini, si è visto che non è verificato per il campo di temperatura delle particelle.

Le funzioni di struttura hanno inoltre permesso di comprendere in che modo le particelle influenzino il fluido che le trasporta. Il risultato che si è potuto osservare è che, per  $St \approx 1$ , le funzioni di struttura mostrano le minime differenze tra due punti dello spazio, nel momento in cui queste vengono valutate alle piccole distanze. Questo comportamento indica che il massimo trasporto dello scalare da parte delle particelle si ottiene per numeri di Stokes dell'ordine di 1.

L'evidenza di questo risultato è dimostrata anche dall'andamento delle funzioni densità di probabilità della temperatura del fluido e delle particelle, che non seguono più l'andamento tipicamente gaussiano teorizzato da Kolmogorov, mostrando invece delle code di tipo esponenziale, di intensità differente a seconda degli  $St$  e  $St_\theta$  che si sono considerati.

# Bibliografia

- [1] Jérémie Bec, Holger Homann, and Giorgio Krstulovic. Clustering, fronts, and heat transfer in turbulent suspensions of heavy particles. *Physical review letters*, 112(23):234503, 2014.
- [2] Guido Boffetta, A Celani, Filippo De Lillo, and S Musacchio. The eulerian description of dilute collisionless suspension. *EPL (Europhysics Letters)*, 78(1):14001, 2007.
- [3] Marc Boivin, Olivier Simonin, and Kyle D Squires. Direct numerical simulation of turbulence modulation by particles in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 375:235–263, 1998.
- [4] Claudio Cancelli, Maurizio Boffadossi, and Pietro Salizzoni. *Fluidodinamica ambientale: Turbolenza e dispersione*. Otto Editore, 2006.
- [5] Claudio Canuto, M Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, A Thomas Jr, et al. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] Maurizio Carbone. *Particle motion and gradient dynamics in turbulent flows: Theory and Numerical Simulations*. 2020.
- [7] Maurizio Carbone, Andrew D Bragg, and Michele Iovieno. Multiscale fluid–particle thermal interaction in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 881:679–721, 2019.
- [8] Stanley Corrsin. Heat transfer in isotropic turbulence. *Journal of Applied Physics*, 23(1):113–118, 1952.
- [9] Charles R Doering and Ciprian Foias. Energy dissipation in body-forced turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 467:289, 2002.
- [10] Said Elghobashi. On predicting particle-laden turbulent flows. *Applied scientific research*, 52(4):309–329, 1994.
- [11] Jayesh and Z Warhaft. Probability distribution, conditional dissipation, and transport of passive temperature fluctuations in grid-generated turbulence. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(10):2292–2307, 1992.
- [12] Andrey Nikolaevich Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Cr Acad. Sci. URSS*, 30:301–305, 1941.
- [13] Johannes GM Kuerten. Point-particle dns and les of particle-laden turbulent flow—a state-of-the-art review. *Flow, turbulence and combustion*, 97(3):689–713, 2016.

- [14] Bipin Kumar, Jörg Schumacher, and Raymond A Shaw. Cloud microphysical effects of turbulent mixing and entrainment. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 27(3):361–376, 2013.
- [15] Bipin Kumar, Jörg Schumacher, and Raymond A Shaw. Lagrangian mixing dynamics at the cloudy–clear air interface. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 71(7):2564–2580, 2014.
- [16] Martin R Maxey and James J Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *The Physics of Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- [17] MR Overholt and SB Pope. Direct numerical simulation of a passive scalar with imposed mean gradient in isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 8(11):3128–3148, 1996.
- [18] Dmitry Pekurovsky. P3dfft: A framework for parallel computations of fourier transforms in three dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(4):C192–C209, 2012.
- [19] Boris I Shraiman and Eric D Siggia. Scalar turbulence. *Nature*, 405(6787):639–646, 2000.
- [20] Katepalli R Sreenivasan. The passive scalar spectrum and the obukhov–corrstin constant. *Physics of Fluids*, 8(1):189–196, 1996.
- [21] Federico Toschi and Eberhard Bodenschatz. Lagrangian properties of particles in turbulence. *Annual review of fluid mechanics*, 41:375–404, 2009.
- [22] Z Warhaft and JL Lumley. An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 88(4):659–684, 1978.
- [23] Zellman Warhaft. Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32(1):203–240, 2000.
- [24] Takeshi Watanabe and Toshiyuki Gotoh. Statistics of a passive scalar in homogeneous turbulence. *New Journal of Physics*, 6(1):40, 2004.