# POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**A.A. 2020/2021**

Sessione di Laurea Luglio 2021

# Sviluppo di un modello dinamico per un velivolo flessibile


**Relatori Accademici:**

*Ing. Angelo Lerro*

*Prof. Piero Gili*

**Relatori Leonardo:**

*Ing. Alberto Chiesa*

*Ing. Umberto Papa*

**Studente:**

*Mauro Iavarone*

*Matr. s264239*


**Anno Accademico 2020/2021**

POLITECNICO DI TORINO

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**A.A. 2020/2021**

Sessione di Laurea Luglio 2021

# Sviluppo di un modello dinamico per un velivolo flessibile

**Anno Accademico 2020/2021**

*Alla mia famiglia.*

# Dichiarazione

Il seguente lavoro è stato realizzato in collaborazione con la Leonardo Company Divisione Velivoli. I risultati presentati, per motivi di riservatezza, sono normalizzati nel range di valori $[-1, 1]$ e sono proprità della Leonardo Company Divisione Velivoli.

# Sommario

I velivoli di nuova generazione e i progetti aeronautici futuri mirano alla realizzazione di piattaforme sempre più leggere con prestazioni crescenti quali la riduzione del consumo di combustile e una maggiore *endurance* di volo. Tali driver si proiettano, come requisiti di progetto, in una maggior efficienza aerodinamica ed in una riduzione del peso strutturale. Questo si concretizza in configurazioni caratterizzate da superfici portanti ad alto allungamento e strutture snelle. Piattaforme contraddistinte da tali caratteristiche strutturali presentano una maggiore flessibilità e pertanto il modello di velivolo rigido non è più sufficiente per descriverne adeguatamente il comportamento dinamico. Le pulsazioni dei modi di vibrare di strutture sufficientemente snelle ed allungate tendono ad avvicinarsi alle pulsazioni dei modi da corpo rigido della dinamica del velivolo. I modi elastici tendono a sovrapporsi ai modi rigidi con conseguente peggioramento delle qualità di volo del velivolo a causa della sovrapposizione dell'effetto dinamico elastico normalmente ininfluente. Inoltre l'efficacia di un sistema di controllo tradizionale, progettato sul velivolo infinitamente rigido, si riduce per la presenza dei modi elastici che introducono degli effetti indesiderati non considerati in fase di progetto del controllore. Tutto ciò porta alla necessità di sviluppare un modello affidabile che integri gli effetti della flessibilità della struttura nella dinamica del velivolo. Nella tesi si discute dello sviluppo teorico di un modello analitico, basato sulla formulazione lagrangiana e sull'uso degli assi medi, per un generico velivolo flessibile. Per la formulazione matematica del modello elastico sono necessari i risultati dell'analisi dinamica strutturale del velivolo di riferimento e il calcolo dei coefficienti aeroelastici. In particolare la determinazione di questi ultimi rende possibile esprimere l'effetto dei gradi di libertà elastici sui gradi di libertà rigidi ed il viceversa. Il modello flessibile sviluppato viene successivamente utilizzato per analizzare la dinamica del volo del velivolo nel solo piano longitudinale. L'obiettivo della tesi consiste, appunto, nel verificare se l'aggiunta dei modi elastici possa influenzare la dinamica da corpo rigido tanto da riscontrare un accoppiamento tra i modi rigidi e flessibili. In dettaglio, si è implementata una legge di controllo per il modello flessibile linearizzato nell'intorno di una configurazione di equilibrio considerando anche le oscillazioni strutturali. La strategia di controllo proposta si basa sulla teoria del Linear Quadratic Regulator (LQR) con comando di un assetto usato come riferimento. Infine è condotta un'analisi di sensitività con l'obiettivo futuro di valutare la possibilità di determinare dei guadagni ottimi per il controllo dell'assetto e per la riduzione della deflessione della struttura. Il seguente lavoro è stato realizzato nel corso delle attività di tirocinio curriculare svolte presso Leonardo Company Divisione Velivoli gran parte in modalità remota e con accessi sul sito di Pomigliano d'Arco.

# Abstract

New generation vehicles and the future aeronautical projects aim to the achieve lighter platforms with even better performance, than previous one, like the reduction of fuel consumption and an greater flight endurance. Such drivers are projected, in conceptual design phase, as design requirements like a greater aerodynamic efficiency and a reduction of structural weight. This often leads to configuration characterized by high aspect ratio lifting surfaces and thin structures. Platforms with such structural characteristics, show a major flexibility and therefore the rigid vehicle model is no longer enough to describe properly its dynamic behavior. The frequencies of the vibration modes of very thin and elongated structure become very close to the rigid body frequencies of vehicle dynamics. As a consequence, elastic modes tend to overlap with rigid body modes and this is responsible of the worsening of the handling qualities of the vehicle, because of the overlapping of the elastic dynamic effect that is usually irrelevant. Moreover the efficiency of flight control system, designed on the infinitely rigid aircraft, is reduced by the presence of the elastic modes that are responsible of the introduction of undesirable effect, not taken into account in the controller design phase. In order to overcome the aforementioned drawbacks, a more reliable model is required to include the effects of structure flexibility in the flight dynamics. This work deals with the theoretical development of an analytical model, based on the lagrangian formulation and on the use of mean axis reference frame, for a generic flexible aircraft. For the mathematical formulation of the elastic model the results of structural dynamic analysis, for the reference vehicles, and the calculation of the aeroelastic coefficients are needed. In particular the development of the latter is crucial to express the effect of the elastic degree of freedom on the rigid ones and viceversa. The developed flexible model is used to perform flight dynamic analysis of the vehicle only in the longitudinal plane. The goal of the work is, indeed, verify whether the elastic modes added in the model can influence the rigid body dynamic and to evaluate the possible coupling between rigid and flexible modes. To conclude a control law is implemented for the flexible linearized model, around an equilibrium point, taking into account structural oscillations too. The control strategy proposed is based on the theory of Linear Quadratic Regulator (LQR) with a command of an attitude used as reference. In the end a sensitivity analysis is performed in order to establish if the control law, implemented for the tracking, could be used to reduce the deflection of the structure. This work has been realized during the internship activities, carried out at Leonardo Company Aircraft Division, mainly in remote way and with some access to Pomigliano d'Arco site.

# Indice

# Elenco delle figure

# Elenco delle tabelle

# Capitolo 1

# Introduzione alla dinamica dei velivoli flessibili

## 1.1 Motivazione per lo studio della dinamica del volo dei velivoli flessibili

L'interesse verso i velivoli flessibili è legato allo sviluppo di architetture ad elevato allungamento alare, caratterizzati da elevata persistenza in volo, come ad esempio velivoli pilotati autonomamente, alianti, velivoli da trasporto commerciali come riportati in figura 1.1. Per analizzare la dinamica di un velivolo flessibile bisogna integrare in una formulazione diverse discipline che sono pertinenti alla fisica del volo come ad esempio la dinamica strutturale, l'aerodinamica e il controllo. La formulazione di un modello di velivolo flessibile racchiude quindi la capacità di descrivere il velivolo come un tutt'uno, includendo la modellazione sia della dinamica da corpo rigido che delle deformazioni elastiche delle componenti flessibili come ala, fusoliera ed impennaggi senza trascurare le forze aerodinamiche, propulsive e gravitazionali. Tradizionalmente i due set di gradi di libertà, rigidi ed elastici, sono stati studiati sempre in maniera disaccoppiata non considerando invece l'influenza reciproca, che su velivoli moderni può non essere trascurabile. Quando la struttura di un velivolo è sufficientemente rigida c'è un'ampia separazione in frequenza tra i modi rigidi e i modi elastici. In generale questa separazione giustifica lo studio e l'analisi della dinamica del velivolo come corpo rigido e la dinamica delle strutture come due discipline separate tra loro. In passato lo studio delle performance, l'analisi della stabilità e delle qualità di volo, la sintesi di controllori veniva eseguita considerando come modello di meccanica del volo del velivolo un modello rigido che trascurava i gradi di libertà elastici. Diversamente nell'analisi di flutter si utilizzava un modello dinamico strutturale che trascurava tutti o alcuni dei gradi di libertà rigidi. Con l'introduzione dei materiali compositi che permettono di ridurre il peso strutturale e con l'avvento di velivoli staticamente instabili, che impiegano sistemi di controllo ad alta autorità, gli effetti aeroelastici diventano sempre più rilevanti. Tutto ciò insieme ad altri fattori determina una riduzione della distanza in frequenza tra i modi rigidi e i modi elastici e dunque emerge la possibilità di un potenziale accoppiamento. I principali driver che guidano la progettazione dei velivoli moderni, in particolare *UAS* per sorveglianza, spingono verso configurazioni sempre più efficienti e più leggere. La ricerca di tali obiettivi porta ad allungamenti e quindi carichi alari maggiori, minor peso strutturale e delle strutture sempre più sottili e dunque sempre più flessibili. A seconda delle condizioni di volo e della manovra le deformazioni diventano più importanti e alterano la configurazione del velivolo e di conseguenza le sue prestazioni dinamiche e statiche.


(a) Boeing 787.

(b) X-HALE.

(c) Glider D-KKum.

(d) Boeing Solar Eagle.

Figura 1.1: Esempi di velivoli elasticamente deformabile.

Tutto questo determina una riduzione delle frequenze dei modi di vibrare strutturali che si avvicinano alle frequenze proprie da modo rigido o alla banda passante del sistema di controllo.
Nel mondo industriale nelle fasi di design delle leggi di controllo viene utilizzato un modello di velivolo rigido prevenendo l'interazione con i modi flessibili attraverso filtri e tecniche di disaccoppiamento. In figura 1.2 è rappresentato uno schema di controllo per la dinamica latero direzionale, in particolare lo schema rappresentato è lo ***Yaw Damper*** [15]. Nella catena di controreazione al comando di alettone è da notare la presenta di $G_b$ ovvero di un filtro per i modi flessionali alari. Tale filtro è necessario perché il momento generato dalla deflessione degli alettoni è trasmesso alla struttura alare che è flessibile. Le oscillazioni strutturali dei modi elastici eccitati dal momento generato sono registrate dai giroscopi per il *roll-rate* in fusoliera e influenzano il comportamento del controllore. Poiché i modi flessionali dell'ala, che sono relativamente bassi in frequenza, possono contribuire significativamente alla risposta dinamica del velivolo in termini di phase shift o gain shift il filtro compensa tali effetti. L'avvicinamento delle frequenze dei modi elastici ai modi rigidi ha diverse conseguenze come ad

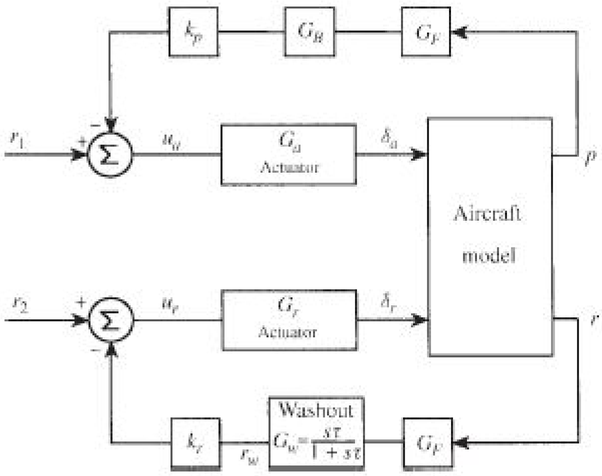



Figura 1.2: Schema base di un sistema di controllo latero direzionale.

esempio l'accoppiamento tra la dinamica strutturale e le piloting tasks. In particolare la dinamica da corpo rigido non è più sufficiente per una descrizione completa del comportamento del velivolo nel suo inviluppo operativo.
Gli effetti della maggiore flessibilità del velivolo possono essere suddivisi in due aspetti:

- statici;
- dinamici.

Gli effetti statici si proiettano in generale in una riduzione del margine di stabilità, delle derivate di stabilità e della potenze dei controlli quasi sempre in direzione peggiorativa. Gli effetti dinamici della maggiore flessibilità caratterizzano la risposta del velivolo flessibile ovvero una risposta in cui c'è un accoppiamento tra l'input alla superficie di comando, la risposta rigida del velivolo e la sua deformazione. Entrambi gli effetti spesso portano alla necessità di introdurre dei sistemi di controllo attivi per compensare gli effetti elastici sia dal punto di vista statico che dinamico.
L'aumento della flessibilità strutturale del velivolo portà alla necessità di progettare dei controllori che forniscano un controllo integrato per il corpo rigido e per le vibrazioni elastiche. Tuttavia lo sviluppo di tali controllori necessita di un modello matematico costruito in maniera tale da catturare gli aspetti essenziali della dinamica rigida e flessibile del sistema. Inoltre è necessario fare sempre riferimento ad un sistema di minima complessità per la realizzazione del controllore stesso. Dunque il requisito di progettazione di un sistema di controllo *semplice* si proietta in un modello con un numero di stati relativamente piccolo. In generale modelli più semplici si assestano su qualche decina di stati rispetto alle migliaia che invece si possono trovare in modelli high fidelity. Inoltre la complessità e l'ordine del modello sono legati anche ai livelli di flessibilità del velivolo che possono essere distinti in leggermente e molto flessibile [16]. Quanto detto lascia presumere che nelle fasi iniziali di un progetto dovrebbe essere sviluppato un modello di velivolo flessibile integrato. In seguito tale modello dovrebbe essere opportunamente semplificato in base alle applicazioni e in base alle caratteristiche elastiche del velivolo stesso. Tuttavia questo approccio non risulta essere una pratica comune e le tecniche per farlo non sono molto diffuse in letteratura.

## 1.2 Prospettiva storica con considerazioni tecniche

Lo studio della dinamica del velivolo flessibile storicamente ha riscontrato diverse difficoltà nella sua trattazione e nella sua applicazione. Dunque per l'assenza di calcolatori sufficientemente potenti si è proceduto studiando separatamente la dinamica del velivolo rigido e la dinamica strutturale-aeroelastica.
In questo paragrafo si vanno a sottolineare le principali cause che rendono questo problema complicato dal punto di vista della trattazione matematica. La dinamica del velivolo flessibile è caratterizzata da variabili *rigide* o di *trasporto* e da variabili *flessibili* o di *deformazione*. Tra le variabili di trasporto ci sono quelle relative al vettore posizione, al vettore delle velocità lineari ed angolari e all'evoluzione degli angoli di Eulero nel tempo. Tali variabili sono funzione del tempo, descrivono le proprietà globali del moto del velivolo rigido facendo riferimento al moto del baricentro e la loro evoluzione è descritta da un set di equazioni differenziali ordinarie (ODE). Le variabili di deformazione dipendono dal tempo e dalla posizione del punto sul velivolo, descrivono proprietà locali del moto della struttura e la loro evoluzione è descritta in termini di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE).
In generale per la dinamica di un velivolo flessibile è richiesto lo studio di un sistema ibrido di equazioni, ODE e PDE, che risultano essere accoppiate sia inerzialmente che aerodinamicamente. Dunque per semplificare il problema è necessario usare un metodo di discretizzazione per le PDE, in modo che anche i gradi di libertà elastici siano descritti da ODE.
Un metodo per la discretizzazione spaziale delle variabili elastiche consiste nell'usare i modi di vibrare strutturali del velivolo. Tuttavia tali modi potrebbero non essere disponibili poiché si è nelle fasi iniziali del progetto e non si dispone dei risultati di un'analisi modale.
Spesso, invece, viene utilizzato il metodo di Galerkin per applicare la discretizzazione spaziale delle variabili elastiche, ovvero tali variabili vengono rappresentate come il prodotto di funzioni di forma, che rappresentano i modi di vibrare dei singoli componenti del velivolo (ala, coda e fusoliera), per le coordinate generalizzate, par.3 [10].
Inoltre la presenza di accoppiamenti inerziali tra le variabili elastiche e le variabili di trasporto fa sì che le equazioni non si prestino ad essere scritte in forma normale. Tale forma è la consigliata per l'integrazione delle equazioni secondo schemi numerici, ad esempio un Runge-Kutta a 4 stadi.
Un altro problema è legato al sistema di riferimento, infatti, nella dinamica da corpo rigido definiamo un sistema di riferimento body che ha l'origine coincidente con il baricentro del velivolo e gli assi opportunamente orientati. Nel caso di un velivolo flessibile la posizione del baricentro e le proprietà inerziali, come ad esempio i momenti di inerzia, variano nel tempo. Per effetto della flessibilità dei componenti strutturali la posizione del baricentro del velivolo non è fissa ma varia rispetto alla posizione in configurazione indeformata. Storicamente per quanto concerne la scelta di un sistema di riferimento per descrivere la posizione e l'assetto di un velivolo flessibile si sono affermate due alternative:

- *mean axes*;
- *pseudo-body axes*;

Per quanto concerne una discussione più dettagliata del sistema di riferimento usato nella tesi si faccia riferimento ai paragrafi 1.3 e 2.5.

È intorno agli anni '60 che si comincia a porre l'attenzione alla dinamica dei velivoli flessibili in particolare i primi lavori risalgono a Milne [1], [2].
L'approccio alla modellazione della dinamica di velivolo flessibile si sviluppa anche grazie all'avvento del metodo agli elementi finiti per la caratterizzazione delle vibrazioni libere della struttura del velivolo, [3]. L'utilizzo del metodo agli elementi finiti accoppiato al sistema di riferimento mean axis ha trovato sempre più campi di applicazione come ad esempio simulazioni non lineari in real time, dinamica del volo, analisi di flutter e sintesi di leggi di controllo per la soppressione attiva del flutter.
La derivazione di un modello di ordine finito per lo studio della dinamica di un velivolo elasticamente deformabile, costituito da ODE, segue storicamente differenti percorsi:

- - Cavin e Dusto in [3] utilizzano una formulazione variazionale per ricavare le equazioni del moto per un corpo elastico non vincolato usando il metodo agli elementi finiti;
- - Waszak e Schmidt in [6] usando gli assi medi sviluppano per il B1-B un modello di velivolo flessibile. Tale modello è comprensivo dei di gradi di libertà rigidi ed elastici che risultano essere disaccoppiati inerzialmente ma accoppiati aerodinamicamente;
- - Tuzcu e Meirovitch in [10] derivano il modello di velivolo flessibile con il metodo di Lagrange in un sistema di assi pseudo-body. Come metodo di discretizzazione spaziale per i gradi di libertà elastici usano il metodo dei modi assunti;
- - Avanzini, Capello e Piacenza in [14] derivano un modello per un velivolo flessibile utilizzando un metodo misto. Viene utilizzato il metodo di Langrange per ricavare le equazioni che descrivono i gradi di libertà elastici mentre la dinamica dei gradi di libertà rigidi è descritta attraverso le equazioni generalizzate di Eulero. La discretizzazione spaziale delle variabili elastiche è ottenuta con il metodo dei modi assunti.

Nell'articolo di Waszak e Schmidt, [6], l'approccio utilizzato per ricavare le equazioni del velivolo flessibile si basa sulla meccanica lagrangiana e sul principio dei lavori virtuali. Gli autori, inoltre, per lo sviluppo delle forze generalizzate e delle componenti elastiche delle forze e dei momenti aerodinamici applicano la *stript theory* e il metodo del *component build up* .
L'utilizzo della stript theory, che è giustificato anche dal contesto ovvero velivoli con elevato allungamento alare, ha due vantaggi:

1. fornisce un approccio di modellazione preliminare nelle fasi iniziali del design quando non si dispone ancora di molte informazioni;
2. permette di ottenere delle espressioni analitiche che forniscono una maggiore sensibilità sui parametri che influenzano i coefficienti da ricavare.

Dunque l'uso della stript theory permette di ricavare un modello di velivolo elastico di primo ordine e successivamente quando analisi più dettagliate sono disponibili è possibile aggiornare i coefficienti e rendere il modello più affidabile.
L'utilizzo del metodo di lagrange permette di ricavare direttamente le equazioni del moto in forma scalare ed in termini delle forze aerodinamiche, propulsive, gravitazionali e generalizzate. Le ipotesi alla base dello sviluppo del modello elastico in [6] sono:

- le deformazioni strutturali sono assunte sufficientemente piccole tali per cui si possa ritenere valida la teoria elastica lineare;
- è disponibile da un'analisi agli elementi finiti un set di modi di vibrare liberi del velivolo ovvero si hanno a disposizione le frequenze, le forme modali e le masse modali;
- le equazioni che descrivono la dinamica dei gradi di libertà elastici e rigidi sono accoppiate solo attraverso le componenti aerodinamiche;
- si ipotizza l'uso di un sistema di riferimento mean-axis con origine nell'istantaneo centro di massa del velivolo.

Buttrill, Arbuckle e Zeiler in [5] sviluppano per l' F-18 un modello matematico che integra il comportamento dinamico non lineare del velivolo rigido più delle equazioni lineari che descrivono il comportamento elastico. Come coordinate generalizzate per applicare la meccanica lagrangiana si usano le coordinate modali mentre i modi utilizzati sono i modi delle oscillazioni libere non smorzate che soddisfano i vincoli degli assi medi. Tra i risultati degli studi si evince che in generale i modi elastici che determinano un accoppiamento inerziale, tra i due set di gradi di libertà, sono quelli per cui si verifica una variazione nella distribuzione di massa del velivolo. Le ipotesi alla base dello sviluppo della trattazione sono:

- il velivolo viene considerato come una collezione di masse concentrate, ciascuna considerata come un corpo rigido con una propria massa ed una propria inerzia. Quindi si considera il velivolo dinamicamente equivalente ad un insieme di masse concentrate che risiedono nei nodi strutturali di un modello fem e che rappresentano una resistenza all'accelerazione;
- si assume che la forza elastica derivante da uno spostamento di una qualsiasi massa sia lineare e proporzionale allo spostamento. Si assumono piccole deformazioni e quindi si ritengono valide le relazioni lineari tensioni-deformazioni e deformazioni-spostamento;
- la deformazione è descritta come somma dei modi di vibrare moltiplicati per i rispettivi coefficienti di partecipazione funzione del tempo.

In [7] gli autori confrontano i risultati di [5] e [6] mettendo in evidenza gli aspetti comuni e le differenze. Nel primo studio l'intento è quello di indagare gli effetti dell'accoppiamento inerziale non lineare, tra le velocità angolari rigide e i ratei di deformazione, che spesso sono ignorati. Nel secondo studio, invece, l'obiettivo è quello di ricavare un modello matematico che integrasse i gradi di libertà elastici e i gradi di libertà rigidi. Entrambi gli studi usano il metodo di Lagrange per derivare le equazioni del moto in un sistema di assi medi che permette di ridurre l'accoppiamento inerziale tra i due set gradi di libertà. Tuttavia in [6] sono presenti altre due assunzioni rilevanti:

1. le masse concentrate non hanno inerzia rotazionale;
2. le deformazioni elastiche e i ratei di deformazione sono sufficientemente piccoli o comunque co-lineari e dunque il loro prodotto vettoriale è trascurabile e quindi il tensore di inerzia è assunto costante.

La seconda ipotesi permette di eliminare l'accoppiamento inerziale che intercorre tra i gradi di libertà elastici e i gradi di libertà rigidi. Tali ipotesi sono trascurate in [5] che appunto vuole investigare l'importanza di questi termini di accoppiamento in volo manovrato.
La seconda delle ipotesi è fondamentale in quanto nelle equazioni che descrivono le rotazioni rigide del velivolo sono presenti i momenti di inerzia. Se il tensore di inerzia è variabile nel tempo a causa della deformazione elastica i momenti di inerzia che entrano nelle equazioni alla rotazione corrispondono a quelli della struttura deformata. L' ipotesi ci permette di assumere che le variazioni del tensore di inerzia siano piccole e dunque trascurabili e quindi i momenti di inerzia usati nelle equazioni corrispondono a quelli del velivolo rigido.
Nell'articolo [6] si mette in evidenza come l'aver trascurato la dinamica dei gradi di libertà elastici, nel modello rigido, abbia portato a stimare una dinamica di lungo periodo stabile, contrariamente a quanto accade nel modello flessibile, e a commettere un errore sulla pulsazione naturale e sullo smorzamento di corto periodo piuttosto significativo.
Lo studio condotto in [5] sottolinea delle condizioni nelle quali l'accoppiamento inerziale non lineare diventa significativo:

1. piccoli carichi aerodinamici;

2. ratei angolari dello stesso ordine di grandezza della frequenza dei modi elastici;

3. deformazioni strutturali accentuate a tal punto da modificare la distribuzione di massa del velivolo

Infine in [7] vengono evidenziati gli aspetti comuni nello studio della dinamica di un velivolo flessibile:

- il modello dinamico complessivo è in generale di ordine elevato. La dinamica dei gradi di libertà elastici è descritta dall'equazione di un oscillatore armonico con un smorzamento modale in generale del 2%. Quindi ogni modo elastico introdotto nel modello aggiunge due stati;

- nel modello del velivolo flessibile è più difficile identificare parametri che invece sono di facile individuazione per il velivolo rigido. Ad esempio per il modello rigido è possibile stimare la pulsazione del modo di corto periodo come $Z_w M_q - M_\alpha$. Ma tale approssimazione non è più valida nel caso di velivolo flessibile;

- le derivate aeroelastiche sono di difficile interpretazione rispetto alle classiche derivate aerodinamiche come il $C_{L_\alpha}$

## 1.3 Sistema di riferimento

Come menzionato nel paragrafo 1.2 sono due le possibili scelte di sistemi di riferimento per lo studio della dinamica flessibile:

- mean axes, [1] ;

- pseudo-body axes, [10].

I mean axes, osservabili in figura 2.2, sono un sistema di riferimento *flottante* rispetto al velivolo indeformato in quanto la deformazione elastica dipende dal tempo. In generale questo riferimento permette di introdurre delle ipotesi simplificative rilevanti per lo sviluppo delle equazioni della dinamica del velivolo flessibile. Infatti è possibile sceglierlo in modo tale che la quantità di moto e il momento della quantità di moto rispetto alla deformazione elastica siano nulli.
Se come origine dei mean axes si considera la posizione istantanea occupata dal baricentro del velivolo allora la traslazione e la rotazione del riferimento e la deformazione elastica relativa al riferimento sono disaccoppiati dal punto di vista inerziale. Tuttavia i gradi di libertà rigidi e i gradi di libertà elastici sono accoppiati dal punto di vista aerodinamico.
Milne in [1] dichiara che è sempre possibile identificare un sistema di riferimento mean axes ma la sua determinazione è tutt'altro che semplice.
L'uso del riferimento mean axes richiede che i modi di vibrare della struttura siano ricavati da un modello non vincolato affinché siano soddisfatti i mean axis constrain [4], paragrafo 2.5. Ciò garantisce che le equazioni che descrivono i gradi di libertà elastici e i gradi di libertà rigidi siano disaccoppiati dal punto di vista inerziale. Se vengono considerati i modi di vibrare ottenuti da un modello vincolato allora i modi elastici risulteranno essere inerzialmente accoppiati ai modi rigidi e le equazioni che descrivono il modello saranno più complicate.
Il riferimento pseudo-body axes è un sistema di riferimento fissato al corpo indeformato. Rispetto a tale riferimento è conveniente definire la traslazione dell'origine e la rotazione del riferimento come la traslazione e la rotazione rigida del velivolo, mentre qualsiasi spostamento relativo al sistema di riferimento è visto come una deformazione elastica.

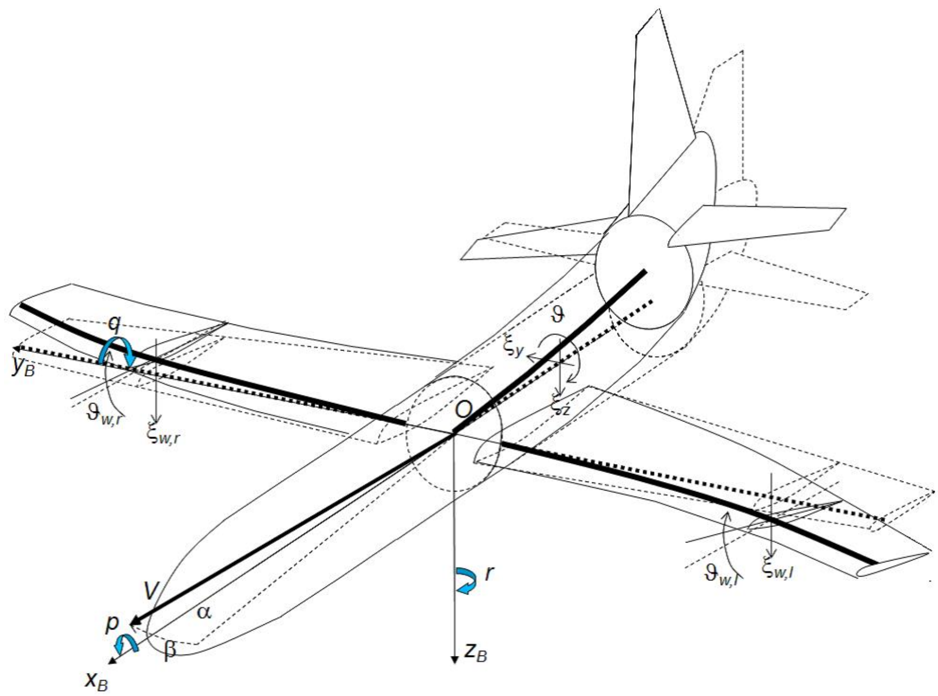



Figura 1.3: Sistema di riferimento pseudo-body e variabili di trasporto e di deformazione del velivolo.

In figura 1.3 si riporta il sistema di riferimento pseudobody, $\mathbf{O}\boldsymbol{x_b y_b z_b}$, considerato per lo studio del velivolo in [14]. Le variabili di deformazione elastica sono:

- lo spostamento verticale dell'ala indicato con $\xi_{w_{l,r}}$ (a seconda se si consideri la semiala destra $\xi_{w_r}$ o sinistra $\xi_{w_l}$);
- lo spostamento verticale della parte di fusoliera considerata deformabile indicato con $\xi_{f_Z}$;
- lo spostamento laterale della parte di fusoliera considerata deformabile indicato con $\xi_{f_Y}$;
- la torsione alare intorno all'asse $\boldsymbol{y_b}$ indicata con $\theta_{w_{l,r}}$ ( a seconda se si consideri la torsione della semiala destra $\theta_{w_r}$ o della semiala sinistra $\theta_{w_l}$.
- la torsione intorno ad $\boldsymbol{x_b}$ della parte di fusoliera considerata deformabile indicata con $\theta_f$.

In generale come origine del sistema di riferimento pseudo-body si considera la posizione del baricentro del velivolo in configurazione indeformata e tale sistema risulta essere fisso rispetto a quel punto. Con questa scelta è possibile descrivere le variabili di stato di deformazione rispetto alla configurazione indeformata. Tuttavia poichè il baricentro del velivolo si sposta dalla sua posizione nel velivolo rigido, per effetto della deflessione elastica, l'equazione di equilibrio dei momenti deve essere rivisitata aggiungendo i termini di trasporto.
Dunque la scelta del riferimento pseudo-body genera delle equazioni accoppiate sia dal punto di vista inerziale che dal punto di vista aerodinamico mentre scegliendo un riferimento mean-axes è possibile eliminare l'accoppiamento inerziale mentre permane l'accoppiamento aerodinamico.
Coerentemente al [13], anche nella seguente tesi si fa riferimento all'uso dei mean axes per lo sviluppo delle equazioni del velivolo deformabile. Inoltre tale sistema di riferimento è sempre più usato in ambito di ricerca per la dinamica e per il controllo dei velivoli flessibili. In particolare si presta bene per ricavare le equazioni del moto del velivolo flessibile usando sia la meccanica lagrangiana che la meccanica classica newtoniana.
L'uso dei mean axes ha numerosi vantaggi ad esempio:

- il vettore di stato del velivolo flessibile è un'estensione del vettore di stato del velivolo rigido. In generale per ottenere il vettore di stato elastico è sufficiente aggiungere in coda al vettore di stato rigido gli stati elastici;
- la dinamica dei gradi di libertà rigidi per il velivolo flessibile può essere rappresentata formalmente con le stesse equazioni del velivolo rigido. La differenza è nelle forze e nei momenti aerodinamici che contemplano il contributo elastico;
- la struttura ed il format del modello di velivolo flessibile mantiene una certa familiarità con il modello del velivolo rigido.

## 1.4 Analisi qualitativa degli effetti della flessibilità in condizioni statiche

Lo studio della dinamica di un velivolo flessibile puó essere affrontato con *il metodo delle* ***deformazioni quasi-statiche***. Si utilizza tale metodologia per riportare l'effetto della flessibilità del velivolo su forze e su momenti aerodinamici senza considerare la dinamica dei gradi di libertà elastici. L'applicazione di tale metodo è giustificata nel caso in cui le frequenze dei modi strutturali siano sufficientemente alte rispetto alle frequenze dei modi rigidi. In questo caso si suppone che solo le deformazioni in condizioni stazionarie influenzino la dinamica del velivolo che è assunto rigido ma nella sua configurazione sotto carico. Spesso capita che le deformazioni strutturali siano tali da alterare alcuni parametri progettuali del velivolo stesso. In tal caso è richiesta la sperimentazione in galleria del vento del velivolo per la configurazione che assume durante il volo sotto carico. Gli effetti delle deformazioni strutturali sulle caratteristiche progettuali del velivolo possono essere molteplici:

- riduzione del gradiente di portanza;
- variazione del punto neutro posteriore;
- riduzione delle derivate di comando;
- riduzione delle derivate di smorzamento aerodinamico;
- peggioramento delle qualità di volo.

A titolo di esempio si analizzano di seguito i principali effetti della deformazione della fusoliera in riferimento al solo piano longitudinale. Un primo effetto rilevante legato alla deformabilità della fusoliera è la riduzione dell'incidenza aerodinamica del piano di coda. Si consideri la figura 1.4 che rappresenta un velivolo rigido in volo e dove, inoltre, viene definita l'incidenza del piano di coda $\alpha_t$ :

$$\alpha_t = \alpha_{WB} + i_T - \varepsilon \tag{1.1}$$

Dove:

- $\alpha_{WB}$ è l'incidenza del velivolo parziale;
- $i_T$ è il calettamento della coda;
- $\varepsilon$ è l'angolo di downwash.

Per effetto della flessione della fusoliera si ha un'alterazione delle incidenze del velivolo ed in particolare, come è possibile osservare in figura 1.5 , dell'incidenza del piano di coda .

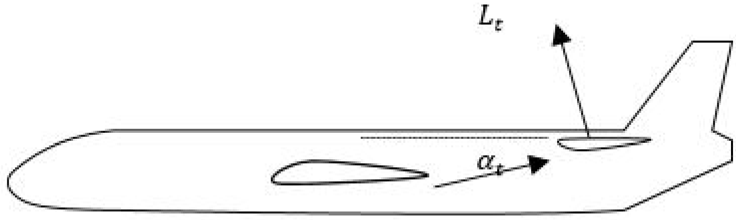



Figura 1.4: Configurazione rigida del velivolo in volo.

La deformata della fusoliera riduce l'incidenza del piano di coda di un termine proporzionale alla portanza sviluppata dal piano di coda stesso. Dunque è possibile esprimere l'incidenza elastica come:

$$\alpha_{t_{FL}} = \alpha_{WB} + i_T - \varepsilon - K L_{T_{FL}} \tag{1.2}$$

Dove:

- K è un coeffiente elastico;
- $L_{T_{FL}}$ portanza generata dalla coda in configurazione deformata.

A questo punto è semplice mostrare come la riduzione dell'incidenza aerodinamica della coda porti ad una riduzione del gradiente della retta di portanza di tale superficie. Il coefficiente di portanza della coda può essere scritto come:

$$C_{L_T} = C_{L_{\alpha_T}}(\alpha_{WB} + i_T - \varepsilon - K L_T) \tag{1.3}$$

Esprimendo opportunamente $L_T$ si ottiene:

$$C_{L_T} = C_{L_{\alpha_T}}(\alpha_{WB} + i_T - \varepsilon - K \frac{1}{2}\rho V_T^2 S_T C_{L_T}) \tag{1.4}$$

Infine risolvendo l'equazione per $C_{L_T}$ si giunge alla seguente espressione:

$$C_{L_T} = \frac{C_{L_{\alpha_T}}(\alpha_{WB} + i_T - \varepsilon)}{(1 + K\frac{1}{2}\rho V_T^2 S_T)} \tag{1.5}$$

È possibile osservare che il coefficiente di portanza nella configurazione deformata risulta essere minore rispetto al caso della configurazione rigida. In via analoga è possibile definire il gradiente della retta di portanza della coda in condizione deformata:

$$C_{L_{\alpha_T}}^{FL} = \frac{C_{L_{\alpha_T}}^{RIG}}{(1 + K\frac{1}{2}\rho V_T^2 S_T)} \tag{1.6}$$

Anche in questo caso è possibile osservare come per effetto della flessibilità ci sia una riduzione del gradiente di portanza. Ciò risulta essere particolarmente rilevante per la valutazione del punto neutro posteriore e di conseguenza per la stabilità statica longitudinale del velivolo.
Il punto neutro posteriore è dato da:

$$\frac{X_N}{\bar{c}} = \frac{X_{ac_{WB}}}{\bar{c}} + \frac{C_{L_{\alpha_T}}}{C_{L_{\alpha_{WB}}}} \bar{V_T} \Big(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\Big) \tag{1.7}$$

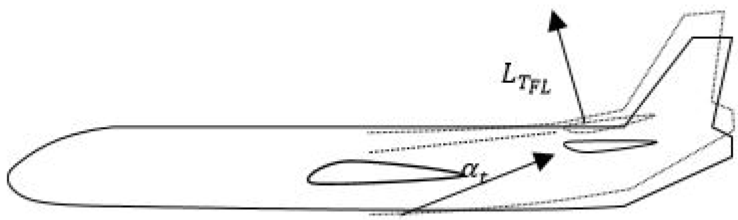



Figura 1.5: Configurazione deformata del velivolo.

Mentre la stabilità statica longitudinale è espressa tramite il segno della derivata:

$$C_{M_\alpha} = C_{L_\alpha}\left(\frac{X_{CG} - X_N}{\bar{c}}\right) < 0 \tag{1.8}$$

La variazione del punto neutro posteriore dovuta alla variazione del gradiente di portanza della coda può essere valutata come:

$$\frac{\Delta X_N}{\bar{c}} = \frac{\Delta C_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha_{wb}}}}\bar{V}_t\left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right) \tag{1.9}$$

Dove:

- $\Delta C_{L_{\alpha_t}} = C^{FL}_{L_{alpha_t}} - C^{RIG}_{L_{alpha_t}} = \dfrac{\frac{1}{2}K\rho V_t^2 S_t C_{L_t}^2}{1 + \frac{1}{2}K\rho V_t^2 S_t C_{L_t}} \rightarrow < 0$

Dunque l'effetto elastico sull'incidenza aerodinamica si proietta anche in una riduzione della stabilità statica longitudinale.
In maniera analoga si può dimostrare che la flessibilità influenza le derivate di comando e che in particolare la potenza del comando longitudinale si riduce. Infine ricordando che la derivata $C_{M_q}$ è dovuta principalmente al piano di coda, in quanto legata all'incidenza indotta dalla velocità angolare di beccheggio, si osserva che una riduzione nel $C_{L_{\alpha_T}}$ porta ad una riduzione dell'effetto smorzante della $q$.
Dunque gli effetti legati alla deformazione della fusoliera del velivolo nel piano longitudinale influenzano diverse caratteristiche dei modi longitudinali:

- la riduzione del margine di stabilità riduce la pulsazione del modo di corto periodo;
- la riduzione della derivata di smorzamento aerodinamico riduce lo smorzamento del modo di corto periodo;
- peggioramento delle *handling e riding qualities* che porta alla necessità di adottare SMC.

In questo paragrafo sono stati considerati solo gli effetti legati alla deformabilità della fusoliera tuttavia anche l'elasticità dell'ala e della coda producono degli effetti simili.

## 1.5 Cenno ai velivoli supersonici

Lo studio degli effetti della flessibilità del velivolo è importante non solo per architetture caratterizzate da un elevato allungamento alare, in generale operanti nel subsonico, ma anche per velivoli caratterizzati da valori più bassi che operano nel supersonico o ipersonico. Per questa categoria di velivoli alla quale spesso ci si riferisce con ***HSCT*** (*High Speed Civil Trasportation*) è importante studiare e porre particolare attenzione all'interazione tra i vari sistemi ovvero all'interazione tra apparato propulsivo, struttura e controlli di volo.
Il progetto dei velivoli supersonici o ipersonici è influenzato da requisiti molto stringenti quali ad esempio una bassa resistenza aerodinamica, un basso peso strutturale ed un sistema di propulsione altamente efficiente. Tutti questi requisiti portano verso una configurazione sempre più integrata dei vari sottosistemi. Per soddisfarli sovente la struttura del velivolo e l'apparato propulsivo vanno a costituire un unico sottosistema.

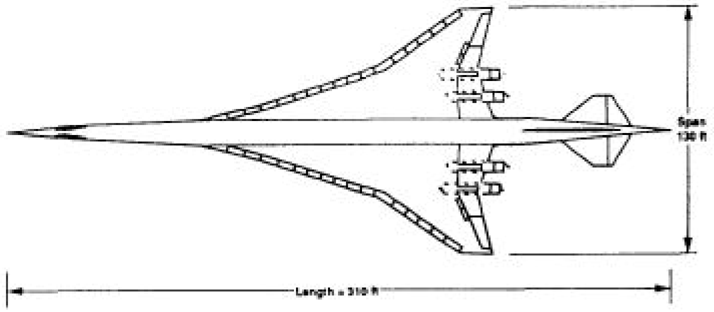



Figura 1.6: Configurazione del *HSCT* studiato in [9].

Una così marcata integrazione determina una forte influenza della dinamica strutturale sulle prestazioni del velivolo. Per la progettazione della struttura dei velivoli supersonici viene fatto ampio uso dei materiali compositi per soddisfare driver tra i quali:

- riduzione del peso strutturale;
- aumento dello smorzamento strutturale.

Inoltre gli *HSCT* durante la crociera supersonica raggiungono temperature di parete piuttosto elevate e ciò influenza le caratteristiche meccaniche dei materiali. L'effetto del riscaldamento aerodinamico è anche responsabile di una riduzione delle frequenze dei modi strutturali che si avvicinano alle frequenze dei modi rigidi del velivolo. Schmidt in [9] studia l'interazione tra i modi strutturali e i modi rigidi di un *HSCT* in quanto le frequenze strutturali sono nel range delle frequenze dei modi rigidi del velivolo.
Per un velivolo come il *B1-B* la frequenza del primo modo flessionale della fusoliera è di circa $2Hz$ mentre per *HSCT* caratterizzato da un'ala a delta molto sottile tale frequenza può arrivare anche ad $1Hz$. Nella tabella 1.1 sono mostrate le più basse frequenze strutturali dei modi di vibrare liberi per diversi velivoli supersonici ed ipersonici. È possibile osservare come alcune delle frequenze di questi velivoli siano entro la banda passante del pilota o comunque del sistema di controllo primario mentre altre possono essere comunque eccitate dalla turbolenza.
Anche per la categoria di velivoli *HSCT* la flessibilità tende a peggiorare le qualità di volo. In particolare in figura 1.7, come in [9], viene riportato l'andamento delle qualità di volo in funzione della flessibilità strutturale.
In figura 1.7 sull'asse dell'ascisse è riportato il livello di flessibilità inteso come frequenza del primo modo flessionale della fusoliera, mentre, sull'asse delle ordinate sono

Tabella 1.1: Trend nelle frequenze elastiche.

| Velivolo | Pulsazione $(rad/s)$ |
|---|---:|
| B-1 | 13 |
| Concorde | 13+ |
| C-5A | 11 |
| NASP | 18 |
| SCR designs | 6.5 |

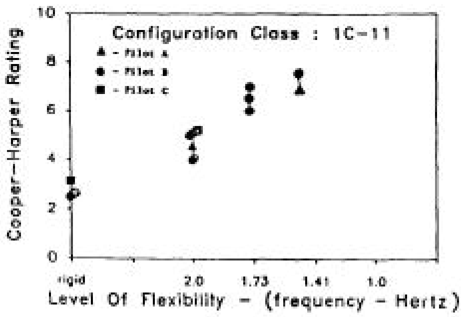



Figura 1.7: Qualità di volo in funzione del livello di flessibilità.

riportati i giudizi dei diversi piloti. Le qualità di volo del velivolo se fosse rigido, ovvero considerando nulle tutte le deformazioni elastiche, sono classificate come livello 1. In corrispondenza della configurazione con una frequenza di $2Hz$ le qualità di volo sono classificate con un livello 2 ovvero 4.5 sulla scala di Cooper-Harper. Abbassando ancora la frequenza del modo strutturale si osserva come le qualità di volo peggiorino ulteriormente fino ad arrivare al livello 3 o 7.0 della scala di Cooper- Harper. Dunque dall'analisi condotta in [9] emerge come al ridursi della frequenza dei modi strutturali del velivolo aumenti il *piloting rating.* Pertanto anche per i velivoli supersonici, con basso valore dell'allungamento alare, è fondamentale studiare in modo integrato la dinamica rigida e la dinamica flessibile del velivolo.
In particolare l'analisi risulta essere più complicata a causa del riscaldamento aerodinamico che:

- non è uniforme sul velivolo ;
- genera carichi di natura termica;
- riduce il modulo elastico dei materiali e ne influenza lo smorzamento.

Pertanto il riscaldamento aerodinamico complica l'analisi dinamica strutturale in quanto genera una maggiore variabilità ed incertezza sulle forme modali e sulle frequenze naturali dei modi elastici del velivolo.
Lo studio della dinamica flessibile è ancora più rilevante quando si parla di velivoli ipersonici dove l'integrazione tra struttura e propulsori è un driver del progetto e i modi elastici del velivolo influenzano anche le prestazioni dei motori stessi. L'interazione tra struttura, propulsori e modi elastici da origine ad un velivolo definito da Schmidt e Chavez in [8] come ***hypersonic aeropropulsive/aeroelastic vehicle***. Inoltre il problema del controllo di tale velivolo va sotto la sigla di ***ASPE*** ovvero ***aeropropulsive/servoelastic problem***. I due autori nell'articolo [8] cercano di studiare

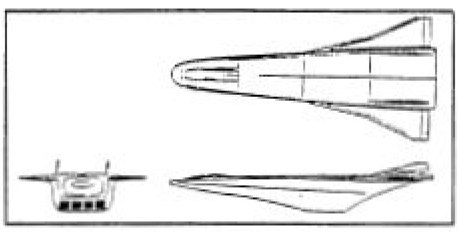


Figura 1.8: Trittico del velivolo X-30.

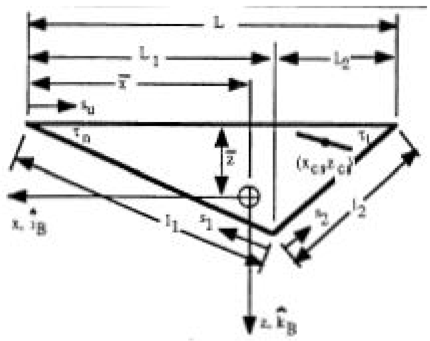


Figura 1.9: Schematizzazione del velivolo X-30 usata in [8].

l'accoppiamento tra i gradi di libertà rigidi e i gradi di libertà elastici di un velivolo con una configurazione simile al X-30 che è riportata in figura 1.8.
In particolare la ricerca è condotta facendo riferimento ad una schematizzazione del velivolo osservabile in figura 1.9. Inoltre volendo verificare un potenziale accoppiamento tra i gradi di libertà elastici ed i gradi di libertà rigidi viene integrato nel modello di velivolo flessibile solo il primo modo di vibrare.
Nonostante le frequenze dei modi rigidi e la frequenza del modo elastico siano sufficientemente separate da non innescare accoppiamenti, il contributo elastico influenza molto la risposta dinamica del velivolo. In particolare il modello dinamico longitudinale del velivolo presenta un'instabilità nel modo di pitch che viene amplificata quando si va ad integrare il modo elastico.

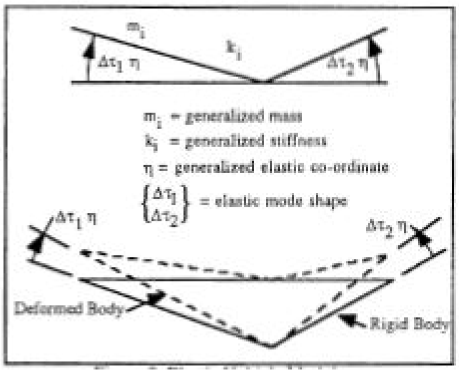



Figura 1.10: Rappresentazione del modo di vibrare incluso nel modello elastico.

# Capitolo 2

# Equazioni del moto per un velivolo deformabile elasticamente

In generale è difficile stabilire a priori la validità dell'ipotesi di velivolo come corpo rigido in quanto tutte le strutture costituenti esibiscono comportamenti elastici entro certi limiti. Tuttavia si può dire che la flessibilità è significativa per la dinamica del volo di velivoli di grandi dimensioni, alti allungamenti alari o alti rapporti di snellezza, in quanto le frequenze dei modi elastici di tali strutture risultano essere relativamente piccole.
L'obiettivo del seguente capitolo è quello di sviluppare un modello matematico di un velivolo elasticamente deformabile ed in quanto tale capace di descrivere la dinamica dei gradi di libertà sia rigidi che elastici. In particolare nello sviluppo del modello si suppone che sia stata eseguita l'analisi modale del velivolo ovvero che sia disponibile la soluzione del problema delle oscillazioni libere, necessaria per il calcolo dei coefficienti aeroelastici. Una tale analisi può essere condotta su uno *stick model* del velivolo con un software commerciale quale MSC-PATRAN/NASTRAN. Il modello sviluppato permette di investigare dei potenziali accoppiamenti tra i gradi di libertà rigidi ed elastici. Infatti non si è interessati alla parte puramente strutturale-aeroelastica del velivolo oggetto di studio, come ad esempio flutter o divergenza, ma solo ai modi elastici con frequenze più vicine ai modi rigidi. Nella figura 2.1 viene riportato il flowchart per lo sviluppo del modello dinamico integrato.
Nei seguenti paragrafi si analizzeranno più nel dettaglio le fasi che portano allo sviluppo di tale modello.

## 2.1 Richiami alle equazioni del velivolo rigido

Per la metodologia adottata in questo studio il modello rigido del velivolo rappresenta il punto di partenza per lo sviluppo del modello flessibile. Usando come riferimento body un riferimento mean axis è possibile espandere il modello rigido per ottenere il modello flessibile. Ciò permette di mantenere inalterate le equazioni che descrivono l'evoluzione dei gradi di libertà rigidi, mentre le sole forze e i momenti aerodinamici contemplano gli effetti elastici.
Il modello rigido è costituito da 6 equazioni differenziali non lineari scritte in un riferimento body che descrivono la traslazione rigida dell'origine del riferimento body e la rotazione del riferimento stesso rispetto ad un riferimento inerziale.
Le 6 equazioni del moto coinvolgono 12 variabili che evolvono nel tempo:

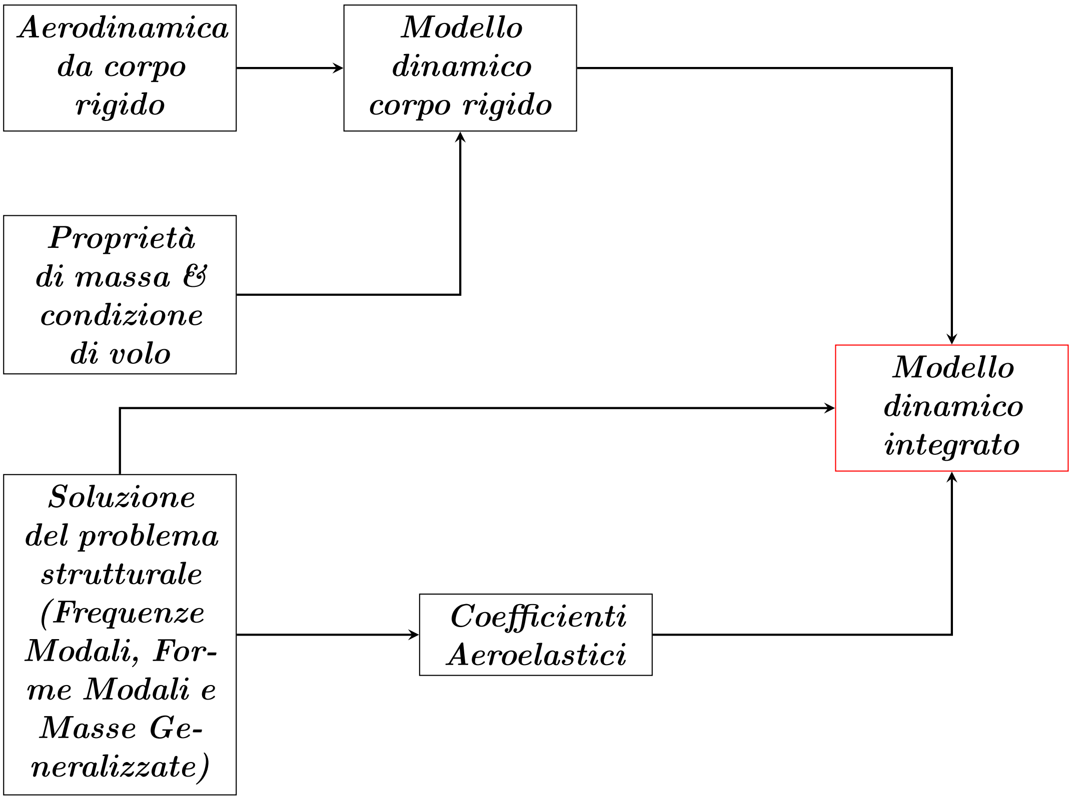



Figura 2.1: Metodologia di modellazione.

- velocità lineari $\{U, V, W\}$ ;
- velocità angolari $\{P, Q, R\}$;
- angoli di Eulero $\{\psi, \theta, \phi\}$;
- posizione dell'origine del riferimento body $\{x_N, y_E, z_D\}$ .

Trascurando la velocità di rotazione terrestre si può considerare un sistema di riferimento fissato sulla superficie terrestre come inerziale. Inoltre nell'ipotesi di Terra piatta e considerando la gravità costante ed indipendente dalla quota e dalla distanza dal centro della Terra si sviluppano le equazioni del moto del velivolo. Tali equazioni sono riportate nella (2.1) e nella (2.2).

$$\begin{aligned} m\big(\dot{U} + QW - VR\big) &= -mg\sin\theta + F_{A_X} + F_{P_X} \\ m\big(\dot{V} + RU - PW\big) &= mg\cos\theta\sin\phi + F_{A_Y} + F_{P_Y} \\ m\big(\dot{W} + PV - QU\big) &= mg\cos\theta\cos\phi + F_{A_Z} + F_{P_Z} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} I_{XX}\dot{P} - I_{XZ}(\dot{R} + PQ) - I_{YZ}(Q^2 - R^2) - I_{XZ}(\dot{Q} - RP) + (I_{ZZ} - I_{YY})RQ &= L_A + L_P \\ I_{YY}\dot{Q} - I_{XY}(\dot{P} + QR) + I_{XZ}(P^2 - R^2) - I_{YZ}(\dot{R} - PQ) + (I_{XX} - I_{ZZ})PR &= M_A + M_P \\ I_{ZZ}\dot{R} - I_{XZ}(\dot{P} - QR) - I_{XZ}(P^2 - Q^2) - I_{YZ}(\dot{Q} + RP) + (I_{YY} - I_{XX})PQ &= N_A + N_P \end{aligned} \tag{2.2}$$

In (2.1) $F_{A_X}, F_{A_Y}$ ed $F_{A_Z}$ sono le componenti della forza aerodinamica mentre $F_{P_X}, F_{P_Y}$ ed $F_{P_Z}$ rappresentano le componenti della forza propulsiva, entrambe espresse negli assi corpo. In (2.2) $L_A, M_A$ ed $N_A$ rappresentano le componenti del momento aerodinamico mentre $L_P, M_P$ ed $N_P$ sono le componenti del momento legato al sistema propulsivo.
Gli angoli di Eulero $\{\psi, \theta, \phi\}$, la cui sequenza di rotazione 3-2-1 definisce l'orientazione del riferimento body rispetto al riferimento inerziale, sono legati ai ratei angolari rigidi attraverso le equazioni cinematiche (2.3).

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= P + Q\sin\phi\tan\theta + R\cos\phi\tan\theta \\
\dot{\theta} &= Q\cos\phi - R\sin\phi \\
\dot{\psi} &= \big(Q\sin\phi + R\cos\phi\big)\sec\theta
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Infine le (2.4) descrivono l'evoluzione della posizione dell'origine del riferimento body nel riferimento terrestre assunto inerziale.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x_N} \\ \dot{y_E} \\ \dot{z_D} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T_{B-I}} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

Dove $\boldsymbol{T_{B-I}}$ è la matrice di trasformazione che permette di passare dal riferimento body al riferimento inerziale.
Le equazioni (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) rappresentano le 12 equazioni non lineari che governano i sei gradi di libertà rigidi del velivolo. In generale in una simulazione del velivolo le 12 equazioni sono integrate contemporaneamente, tuttavia nello studio del comportamento dinamico del velivolo, sia come modello rigido che come modello elastico, le (2.4) non sono molto rilevanti.

## 2.2 Il metodo di Lagrange

La derivazione delle equazioni del velivolo rigido viene condotta attraverso la meccanica classica newtoniana tuttavia per lo sviluppo delle equazioni del velivolo flessibile sovente è utilizzata la meccanica lagrangiana.
A differenza dell'approccio newtoniano l'approccio energetico ci permette di lavorare con grandezze scalari e ci fornisce direttamente le equazioni scalari che descrivono la dinamica dei gradi di libertà, rigidi e flessibili.
L'equazione di Lagrange è definita come:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\Big) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q^T} \tag{2.5}$$

Dove:

- $T$ è l'energia cinetica del sistema flessibile;
- $U$ è l'energia potenziale del sistema flessibile. Tale energia include anche l'energia di deformazione elastica del sistema;
- $\boldsymbol{q}$ è il vettore delle coordinate generalizzate usato per descrivere il sistema. Nel caso del velivolo elasticamente deformabile come coordinate generalizzate si possono considerare la posizione del velivolo, le sue velicità e le sue deformazioni elastiche;

- $\boldsymbol{Q^T}$ è il vettore delle forze generalizzate che agisce sul sistema.

In particolare il vettore delle forze generalizzate che agisce sul sistema può essere ricavato attraverso il principio dei lavori virtuali (2.6).

$$\boldsymbol{Q^T} = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta \boldsymbol{q})} \tag{2.6}$$

Dove

- $\delta W$ è il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne che agiscono sul corpo per lo spostamento virtuale del loro punto di applicazione;
- $\delta \boldsymbol{q}$ è il vettore degli spostamenti virtuali della coordinata generalizzata.

Per applicare l'equazione di Lagrange è sufficiente esprimere l'energia cinetica e l'energia potenziale in funzione dei gradi di libertà e definire un set di coordinate generalizzate.

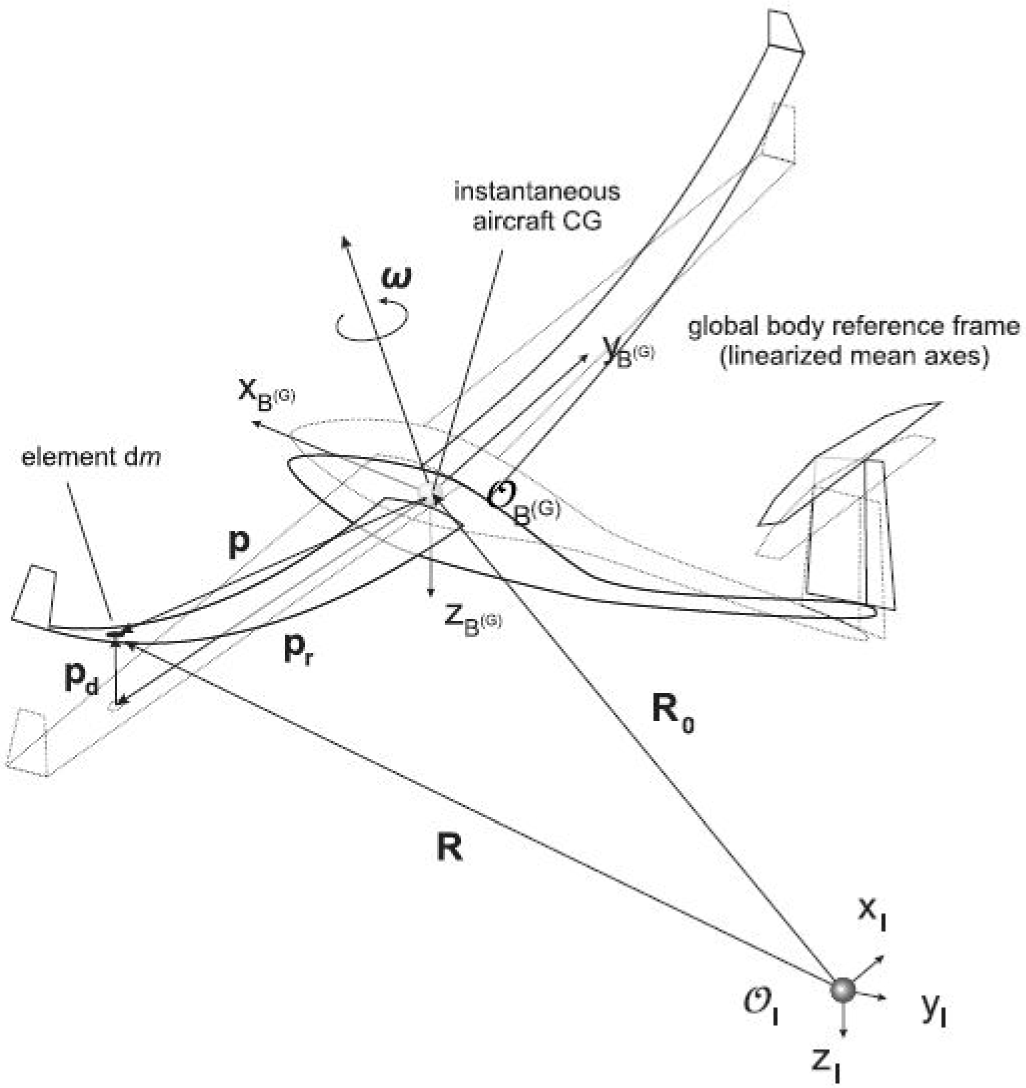



Figura 2.2: Velivolo elasticamente deformabile e sistema di riferimento mean axis.

In figura 2.2 è rappresentato un velivolo in una configurazione di volo elasticamente deformata. Con $d_m$ si indica l'elemento di massa elementare la cui posizione inerziale è individuata da $\boldsymbol{R}$ mentre la posizione relativa al riferimento mean axis è definita da $\boldsymbol{p}$. Inoltre si è introdotto un sistema di riferimento body $\boldsymbol{O_{B(G)}X_{B(G)}Y_{B(G)}Z_{B(G)}}$ ed un sistema di riferimento inerziale $\boldsymbol{O_I X_I Y_I Z_I}$.
Dunque la posizione dell'elemento $d_m$ è data da:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{p_R} + \boldsymbol{p_d} \tag{2.7}$$

Dove

- $\boldsymbol{R}$ è la posizione inerziale di $d_m$;
- $\boldsymbol{R}_0$ è la posizione inerziale dell'istantaneo centro di massa del velivolo;
- $\boldsymbol{p}$ è la posizione di $d_m$ relativa al centro di massa istantaneo;
- $\boldsymbol{p_R}$ è la posizione di $d_m$ rispetto al baricentro nella configurazione indeformata ed è costante;
- $\boldsymbol{p_d}$ è lo spostamento di $d_m$ dovuto alla deformazione elastica.

In seguito si farà riferimento alla quantità $\boldsymbol{p_d}$ come $\boldsymbol{d_e}$ ovvero come *elastic displacement* (spostamento elastico).

## 2.3 Energia cinetica

L'energia cinetica di un sistema rigido è data dalla somma delle energie cinetiche dei singoli costituenti e macroscopicamente è costituito da due termini:

- $\frac{1}{2}mV_G^2$ termine traslazionale legato alla velocità del baricentro del sistema;
- $\frac{1}{2}I\omega_G^2$ termine rotazionale legato alla velocità di rotazione del baricentro del sistema.

Per quanto concerne l'energia cinetica di un sistema deformabile sono presenti dei termini aggiuntivi legati alla velocità di deformazione elastica e agli accoppiamenti inerziali tra i gradi di libertà rigidi e i gradi di libertà elastici.
L'energia cinetica del singolo elementino di massa è definita dall'equazione (2.8).

$$T_{elemento} = \frac{1}{2}V_{elemento}^2 \rho dv \tag{2.8}$$

L'energia cinetica del sistema è data dall'integrale su tutti gli elementi di massa del velivolo:

$$T = \int_{Volume} \frac{1}{2}V_{elemento}^2 \rho dv = \int_{Volume} \frac{1}{2}\boldsymbol{V_{elemento}^T V_{elemento}} \rho dv \tag{2.9}$$

La velocità inerziale dell'elemento $d_m$ è data da:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V_{elemento}} = \left(\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\right)_{Inerziale} &= \boldsymbol{V_{cm}} + \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_{inerziale} \\
&= \boldsymbol{V_{cm}} + \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_{body} + \boldsymbol{\omega_{B,I}} \wedge \boldsymbol{p} \\
&= \boldsymbol{V_{cm}} + \left(\frac{d\boldsymbol{p_R}}{dt}\right)_{body} + \left(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\right)_{body} + \boldsymbol{\omega_{B,I}} \wedge \left(\boldsymbol{p_R} + \boldsymbol{d_E}\right) \\
&= \boldsymbol{V_{cm}} + \left(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\right)_{body} + \boldsymbol{\omega_{B,I}} \wedge \left(\boldsymbol{p_R} + \boldsymbol{d_E}\right)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Dove

- $\boldsymbol{V_{cm}}$ è la velocità inerziale del baricentro;
- $\boldsymbol{\omega_{B,I}}$ è il vettore velocità angolare del riferimento body rispetto al riferimento inerziale;
- $\left(\frac{d\boldsymbol{p_R}}{dt}\right)_{body} = 0$ per come è defintio $\boldsymbol{p_R}$.

Sostiuendo la (2.10) nella (2.9) è possibile ottenere l'espressione dell'energia cinetica del sistema velivolo come corpo deformabile elasticamente.

$$
\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{V_{cm}} \cdot \boldsymbol{V_{cm}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega_{B,I}^T I \omega_{B,I}} + \frac{1}{2}\int_{VOl}\left(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\right)_B \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\right)_B \rho_B dv \\
+ \boldsymbol{V_{cm}} \cdot \int_{VOL}\left(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\right)_B \rho_B dv + \boldsymbol{V_{cm}} \cdot \int_{VOL}\Big(\boldsymbol{\omega_{B,I}} \wedge \left(\boldsymbol{p_R} + \boldsymbol{d_E}\right)\Big)\rho_B dv \\
+ \boldsymbol{\omega_{B,I}} \cdot \int_{VOL}\left(\left(\boldsymbol{p_R} + \boldsymbol{d_E}\right) \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\right)_B\right)\rho_B dV
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Dove

- $\rho_B$ è la distribuzione di densità del corpo assunta costante;
- $\boldsymbol{I}$ è il tensore di inerzia istantaneo del corpo, inclusivo degli effetti elastici.

Come si osserva dalla (2.11) l'energia cinetica del sistema deformabile è costituita da sei termini, due dei quali sono formalmente gli stessi presenti nell'energia cinetica di un sistema rigido, ovvero quelli associati al moto del baricentro.
Il tensore di inerzia istantaneo è costituito da tre termini legati agli effetti della deformazione elastica come riportato in (2.12).

$$
\boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{I_0} + \triangle\boldsymbol{I} + \triangle^2\boldsymbol{I} \tag{2.12}
$$

Con

- $\boldsymbol{I_0} \equiv \int_{VOL} \boldsymbol{\tilde{p}_R \tilde{p}_R^T} \rho_B dv =$ Tensore di inerzia in condizione di velivolo rigido ;
- $\triangle\boldsymbol{I} \equiv \int_{VOL}\Big(\boldsymbol{\tilde{p}_R \tilde{d}_E^T} + \boldsymbol{\tilde{d}_E \tilde{p}_R^T}\Big)\rho_B dv =$ Effetto elastico primo ordine ;

- $\triangle^2 \boldsymbol{I} \equiv \int_{VOL} \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{T}} \rho_B dv =$ Effetto del secondo ordine dell'elasticità.

Nelle precedenti espressioni con $\tilde{(\cdot)}$ viene indicata la matrice equivalente al prodotto vettoriale.
In generale è possibile assumere gli effetti del primo e del secondo ordine trascurabili rispetto al tensore di inerzia del velivolo rigido e dunque si assumono le proprietà inerziali costanti.

## 2.4 Energia potenziale elastica e gravitazionale

L'energia potenziale del velivolo include l'energia potenziale gravitazionale, $U_g$, più l'energia di deformazione elastica, $U_e$, legata alla deformazione della struttura.
L'energia potenziale gravitazionale del velivolo può essere scritta come l'integrale dell'energia potenziale dei singoli elementi di massa del velivolo:

$$U_g = -\int_{VOL} (\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{R}) \rho_B dv = -\int_{VOL} (\boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{R_0} + \boldsymbol{p})) \rho_B dv \tag{2.13}$$

Con

- $\boldsymbol{g}$ vettore accelerazione gravitazionale supposta costante ed uniforme sul velivolo.

L'energia di deformazione elastica del velivolo è l'energia immagazzinata nella struttura dovuta alla sua deformazione per effetto delle forze applicate. Tale energia è dunque la metà del lavoro compiuto dalle forze che agiscono sulla struttura per lo spostamento elastico del punto di applicazione cambiato di segno (2.14).

$$\begin{aligned} U_e &= -\frac{1}{2} \int_{VOL} \Big( \Big( \frac{d^2 \boldsymbol{p}}{dt^2} \Big)_{Body} \cdot \boldsymbol{d_E} \Big) \rho_B dv \\ &= -\frac{1}{2} \int_{VOL} \Big( \Big( \frac{d^2 \boldsymbol{d_E}}{dt^2} \Big)_{Body} \cdot \boldsymbol{d_E} \Big) \rho_B dv \end{aligned} \tag{2.14}$$

## 2.5 Mean axis e Modi liberi di vibrare

Nello studio della dinamica dei velivoli rigidi la scelta di un sistema di riferimento body è sufficientemente arbitraria, in quanto è necessario che l'origine del riferimento coincida con il baricentro del velivolo.
In [1] e in [2] viene definito per un corpo elasticamente deformabile un sistema di riferimento chiamato *mean axes*. Tale sistema di riferimento esiste sempre ed è tale per cui la quantità di moto ed il momento della quantità di moto, valutati rispetto al baricentro, dovuti alla deformazione elastica di una struttura posta in oscillazione libera siano nulli. La (2.15) definisce i cosiddetti *vincoli dei mean axes.*

$$\begin{aligned} &\int_{VOL} \Big( \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \Big)_B \rho_B dv = 0 \\ &\int_{VOL} \boldsymbol{p} \wedge \Big( \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \Big)_B \rho_B dv = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

In particolare si assume che l'origine dei mean axes coincida con l'istantanea posizione del centro di massa del velivolo che tuttavia non occupa un punto fisso.
Pertanto risulta ancora valido:

$$\int_{VOL} \boldsymbol{p}\rho_B dv = 0 \tag{2.16}$$

Dunque questo riferimento costituisce uno speciale sistema di riferimento body la cui traslazione e rotazione descrivono i modi da corpo rigido del velivolo e inoltre gli spostamenti elastici sono definiti rispetto a tale riferimento.
Richiamando la (2.7) è possibile riscrivere le due equazioni in (2.15) come:

$$\begin{gathered}\int_{VOL} \boldsymbol{p_R} \wedge \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv + \int_{VOL} \boldsymbol{d_E} \wedge \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv = 0 \\ \int_{VOL} \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv = 0\end{gathered} \tag{2.17}$$

Dunque per descrivere il riferimento mean axes non bisogna definire opportunamente solo l'origine ma anche la sua orientazione spaziale in modo tale che la (2.17) sia valida. Ci si riferisce sovente alla (2.17) con *pratical mean axes constraints.* Tali vincoli possono essere usati per sviluppare le equazioni del moto e per verificare che gli assi scelti siano dei mean axes. In generale assumendo che il velivolo sia elasticamente deformabile, ovvero che valgano le relazioni lineari tra sforzi e deformazioni e tra deformazioni e spostamenti, si può ritenere che gli spostamenti elastici e i loro ratei siano sufficientemente piccoli, o comunque paralleli, per cui si ha:

$$\int_{VOL} \boldsymbol{d_E} \wedge \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv = 0 \tag{2.18}$$

Supponendo che sia disponibile la soluzione del problema delle oscillazioni libere per il corpo deformabile, ovvero che siano note le frequenze, le masse modali e i modi di vibrare è possibile andare a sviluppare ulteriormente i *practical mean axes constraints.*
Lo spostamento elastico di un punto di una struttura può essere espresso in termini di espansione modale usando gli $n$ modi di vibrare liberi della struttura stessa come:

$$\boldsymbol{d_E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i}(x, y, z)\eta_i(t) \tag{2.19}$$

Dove

- $\boldsymbol{v_i}(x, y, z)$ è la i-esima forma modale;
- $\eta_i(t)$ è il fattore di partecipazione dell'i-esimo modo.

Utilizzando la (2.19) è possibile esprimere in funzione dei modi di vibrare liberi della struttura i *practical mean axis constraints.*
Inoltre considerando la semplicazione introdotta da (2.18) e utilizzando la (2.19) le espressioni dei *practical mean axis constraints* diventano:

$$\int_{VOL} \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv = \int_{VOL} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i}(x, y, z)\dot{\eta}_i(t)\rho_B dv = \sum_{i=1}^{n} \dot{\eta}_i(t) \int_{VOL} \boldsymbol{v_i}(x, y, z)\rho_B dv \tag{2.20}$$

L'ultimo integrale in (2.20) è uguale a zero in quanto i modi di vibrare dell'oscillazione libera sono ortogonali, rispetto alla distribuzione di massa, alla traslazione rigida.

$$\int_{VOL} \boldsymbol{p_R} \wedge \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv = \sum_{i=1}^{n} \dot{\eta}_i(t) \int_{VOL} \boldsymbol{p_R} \wedge \boldsymbol{v_i}(x,y,z)\rho_B dv \tag{2.21}$$

Anche l'integrale della (2.21) è nullo in quanto i modi di vibrare risultano essere mutualmente ortogonali alle rotazioni rigide rispetto alla distribuzione di massa.
In pratica soddisfacendo la condizione di ortogonalità tra tutti i modi liberi di vibrare è assicurato che i *practical mean axes constraints* siano soddisfatti.
A questo punto la condizione di mutua ortogonalità dei modi di vibrare o i *practical mean axes constraints* permettono di semplificare le espressioni delle energie sviluppate nei paragrafi precedenti per l'applicazione del metodo di Lagrange.
Per quanto concerne l'energia cinetica, richiamando la (2.11) e considerando la (2.15) e la (2.16) è possibile fare le seguenti semplificazioni:

1. $\boldsymbol{V_{cm}} \cdot \int_{VOL} \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv = 0$
2. $\boldsymbol{\omega_{B,I}} \cdot \int_{VOL} \Big(\Big(\boldsymbol{p_R} + \boldsymbol{d_E}\Big) \wedge \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B\Big)\rho_B dV = 0$
3. $\boldsymbol{V_{cm}} \cdot \int_{VOL} \Big(\boldsymbol{\omega_{B,I}} \wedge \Big(\boldsymbol{p_R} + \boldsymbol{d_E}\Big)\Big)\rho_B dv = \boldsymbol{V_{cm}} \cdot \Big(\boldsymbol{\omega_{B,I}} \wedge \int_{VOL} \Big(\boldsymbol{p}\Big)\rho_B dv\Big) = 0$

Dunque l'energia cinetica diventa:

$$T = \frac{1}{2} m \boldsymbol{V_{cm}} \cdot \boldsymbol{V_{cm}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega^T_{B,I}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\omega_{B,I}} + \frac{1}{2} \int_{VOL} \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \cdot \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv \tag{2.22}$$

È possibile osservare, utilizzando i mean axes, come l'energia cinetica del sistema velivolo come corpo deformabile differisca da quella di corpo rigido a meno di un termine legato al quadrato della velocità di deformazione elastica.
Utilizzando l'espansione modale è possibile riscrivere il termine elastico nell'energia cinetica come:

$$\int_{VOL} \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \cdot \Big(\frac{d\boldsymbol{d_E}}{dt}\Big)_B \rho_B dv = \int_{VOL} \Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i} \frac{d\eta_i}{dt} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i} \frac{d\eta_i}{dt}\Big)\rho_B dv \tag{2.23}$$

L'espressione (2.23) può essere ulteriormente semplificata considerando la proprietà di mutua ortogonalità tra i modi di vibrare liberi rispetto alla distribuzione di massa per cui risulta:

$$\int_{VOL} \boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_j} \rho_B dv = 0, \qquad i \neq j$$
$$\int_{VOL} \boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_i} \rho_B dv = \boldsymbol{m_i}$$

Dove

- $\boldsymbol{m_i}$ rappresenta la massa generalizzata dell'i-esimo modo di vibrare.

Sfruttando la proprietà di ortogonalità dei modi di vibrare è possibile esprimere la (2.23) come:

$$\int_{VOL}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v_i}\cdot\boldsymbol{v_i}\Big(\frac{d\eta_i}{dt}\Big)^2\Big)\rho_B dv=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m_i}\dot{\eta_i}^2 \tag{2.24}$$

A questo punto considerando la (2.24) è possibile esprimere l'energia cinetica, nel riferimento mean axes e con le relative ipotesi, come:

$$T=\frac{1}{2}m\boldsymbol{V_{cm}}\cdot\boldsymbol{V_{cm}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega_{B,I}^{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega_{B,I}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m_i}\dot{\eta_i}^2 \tag{2.25}$$

È da notare come l'utilizzo di modi mutualmente ortogonali permette di avere un'energia cinetica costituita da tre termini completamente *disaccoppiati* tra loro.
Per quanto concerne l'energia potenziale gravitazionale sfruttando la (2.16) si ha:

$$\begin{aligned}U_g&=-\int_{VOL}\big(\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{R_0}+\boldsymbol{p})\big)\rho_B dv\\&=-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{R_0}\int_{VOL}\rho_B dv-\boldsymbol{g}\cdot\int_{VOL}\boldsymbol{p}\rho_B dv\\&=-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{R_0}m\end{aligned} \tag{2.26}$$

Richiamando l'espressione dell'energia di deformazione elastica, (2.14), e sfruttando l'espansione modale si ottiene una formulazione della stessa in termini di modi di vibrare e coordinate modali.
L'accelerazione elastica può essere espressa usando i risulatati dell'analisi modale come:

$$\frac{d^2\boldsymbol{d_E}}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v_i(x,y,z)}\ddot{\eta}_i(t) \tag{2.27}$$

Dunque è possibile esprimere l'energia di deformazione elastica come:

$$U_e=-\frac{1}{2}\int_{VOL}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v_i}\ddot{\eta}_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v_i}\eta_i\Big)\rho_B dv \tag{2.28}$$

Richiamando la proprietà di ortogonalità dei modi di vibrare si ha:

$$U_e=-\frac{1}{2}\int_{VOL}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v_i}\cdot\boldsymbol{v_i}\ddot{\eta}_i\eta_i\Big)\rho_B dv \tag{2.29}$$

In condizioni di oscillazioni libere non smorzate la coordinata generalizzata è una funzione armonica del tipo:

$$\eta_i(t)=A_i cos(\omega_i t+\Gamma_i) \tag{2.30}$$

Dove

- $A_i$ ampiezza massima della cordinata generalizzata;
- $\omega_i$ pulsazione dell'i-esimo modo di vibrare;
- $\Gamma_i$ fase iniziale.

Con $A_i$ e $\Gamma_i$ dipendenti dalle condizioni iniziali.
Dunque è possibile esprimere $\ddot{\eta}$ come:

$$\ddot{\eta}_i(t) = -\omega_i^2 A_i cos(\omega_i t + \Gamma_i) = -\omega_i \eta_i(t) \tag{2.31}$$

A questo punto è possibile ottenere l'espressione dell'energia di deformazione elastica per una struttura in oscillazione libera:

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \eta_i^2 \boldsymbol{m_i} \tag{2.32}$$

Per un velivolo elasticamente deformabile l'energia di deformazione elastica è data dalla (2.32) in quanto a parità di deformazione strutturale l'energia di deformazione elastica di una struttura in oscillazione libera è la stessa di una struttura in oscillazione forzata.

## 2.6 Equazioni del moto

Per ricavare le equazioni del moto del velivolo flessibile è sufficiente applicare l'equazione di Lagrange alle energie sviluppate nel paragrafo precedente. In particolare tali energie sono espresse in termini di coordinate modali e di gradi di libertà rigidi.
Prima di applicare il metodo di Lagrange è necessario definite un vettore di coordinate generalizzate che può essere scelto come:

$$\boldsymbol{q} = \{X_I \quad Y_I \quad Z_I \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots\}^T \tag{2.33}$$

Dove

- $\{X_I, \quad Y_I, \quad Z_I\} = \boldsymbol{R_0}$ rappresentano la posizione inerziale dell'origine del riferimento body;
- $\{\phi, \quad \theta, \quad \psi\}$ definiscono l'orientazione del riferimento body rispetto al riferimento inerziale;
- $\{\eta_i, \quad i = 1, 2, \dots\}$ sono le coordinate modali rappresentative dell'i-esimo modo libero di vibrare del velivolo.

A questo punto la velocità inerziale del velivolo può essere definita come :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{R_0}}{dt}\right)_I = \boldsymbol{V_{cm}} = \dot{X}_I \boldsymbol{\hat{i}_I} + \dot{Y}_I \boldsymbol{\hat{j}_I} + \dot{Z}_I \boldsymbol{\hat{k}_I} \tag{2.34}$$

Dove
$\boldsymbol{\hat{i}_I}, \boldsymbol{\hat{j}_I}$ e $\boldsymbol{\hat{k}_I}$ sono i tre versori della terna inerziale definita in 2.2.
Il vettore che definisce la velocità di rotazione del riferimento body rispetto al riferimento inerziale è:

$$\boldsymbol{\omega_{B,I}} = P\boldsymbol{\hat{i}_B} + Q\boldsymbol{\hat{j}_B} + R\boldsymbol{\hat{k}_B} \tag{2.35}$$

Con
$\boldsymbol{\hat{i}_B}, \boldsymbol{\hat{j}_B}$ e $\boldsymbol{\hat{k}_B}$ sono i tre versori della terna body definita in 2.2.
Rotazioni e velocità angolari sono legate tra loro in maniera del tutto analoga al caso di velivolo rigido (2.3).

A questo punto è possibile esprimere le energie in funzione delle componenti del vettore delle coordinate generalizzate.
L'energia cinetica può essere espressa come:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{X}_I \quad \dot{Y}_I \quad \dot{Z}_I\}m\begin{Bmatrix}\dot{X}_I\\ \dot{Y}_I\\ \dot{Z}_I\end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\{P \quad Q \quad R\}\boldsymbol{I}\begin{Bmatrix}P\\ Q\\ R\end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m_i}\dot{\eta}_i{}^2 \tag{2.36}$$

Mentre per l'energia gravitazionale e per l'energia di deformazione elastica si ha semplicemente:

$$U_g = -\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{R_0}m = -mgZ_i = mgh \tag{2.37}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\eta_i^2\boldsymbol{m_i} \tag{2.38}$$

Una volta espressa la dipendenza dai gradi di libertà rigidi ed elastici è possibile applicare il metodo di Lagrange e ricavare le equazioni scalari del moto che descrivono la traslazione e la rotazione rigida e la deformazione elastica.
Nel capitolo 4 di [13] è possibile osservare il risultato dell'applicazione dell'equazione di Lagrange.
Le equazioni che governano la traslazione e la rotazione rigida per il velivolo flessibile sono formalmente identiche alle (2.1) e (2.2), che descrivono traslazione e rotazione per il velivolo rigido. Gli effetti legati all'elasticità, che accoppiano il modello rigido con il modello elastico, compaiono in tali equazioni attraverso forze e momenti aerodinamici.
L'equazione del moto che governa i gradi di libertà elastici e dunque la deformazione elastica è data da:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \frac{Q_i}{\boldsymbol{m_i}} \qquad i = 1, \dots, n \tag{2.39}$$

Dove

- $\omega_i$ pulsazione naturale dell'i-esimo modo libero di vibrare del velivolo;
- $\boldsymbol{m_i}$ massa modale dell'i-esimo modo di vibrare del velivolo;
- $Q_i$ forza generalizzata associata all'i-esimo modo di vibrare.

L'i-esima forza generalizzata può essere ricavata attraverso il principio dei lavori virtuali. Si supponga di indicare con $P(x, y, z)$ la distribuzione di pressione esterna che agisce sulle superficie del velivolo e di cui l'integrale di superficie restituisce le forze e i momenti aerodinamici esterni presenti in (2.1) ed in (2.2).
Lo spostamento elastico virtuale della struttura può essere espresso attraverso l'espansione modale come:

$$\delta\boldsymbol{d_E}(x, y, x) = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v_i}(x, y, z)\delta\eta_i(t) \tag{2.40}$$

Il lavoro virtuale infinitesimo dovuto alla distribuzione di pressione $P(x, y, z)$ agente in un punto $(x, y, z)$ della struttura è:

$$d\Big(\delta W_P\Big) = \boldsymbol{P}(x,y,z) \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i}(x,y,z)\delta\eta_i(t)ds \tag{2.41}$$

Dove $ds$ è la superficie elementare di integrazione.
Il lavoro virtuale totale compiuto dalla distribuzione di pressione è:

$$\begin{aligned} \delta W_P &= \int_{Area} \boldsymbol{P}(x,y,z) \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i}(x,y,z)\delta\eta_i(t)ds \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{Area} \boldsymbol{P}(x,y,z) \cdot \boldsymbol{v_i}(x,y,z)\delta\eta_i(t)ds \end{aligned} \tag{2.42}$$

Considerando la (2.42) e derivando rispetto alla coordinata generalizzata virtuale i-esima si ottiene la componente della forza generalizzata i-esima. Sostituendo tale espressione nell'equazione del moto che descrive la dinamica dell'i-esimo grado di libertà elastico si ottiene:

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \frac{1}{\boldsymbol{m_i}} \int_{Area} \boldsymbol{P}(x,y,z) \cdot \boldsymbol{v_i}(x,y,z)ds \qquad i = 1, \dots, n \tag{2.43}$$

Nei successivi paragrafi si andrà a sviluppare l'effetto dell'elasticità su forze e momenti aerodinamici e sulla componente della forza generalizzata.

## 2.7 Effetti dell'elasticità sul modello aerodinamico di forze e momenti

In questo paragrafo viene discussa la modellazione delle forze e dei momenti aerodinamici che agiscono sul velivolo evidenziando gli effetti della deformazione elastica della struttura su tali forze e momenti.
Le componenti delle forze aerodinamiche che agiscono sul velivolo possono essere espresse in un riferimento body come:

$$\begin{aligned} F_{A_X} &= -D\cos\alpha\cos\beta - S\cos\alpha\sin\beta + L\sin\alpha \\ F_{A_Y} &= -D\sin\beta + S\cos\beta \\ F_{A_Z} &= -D\sin\alpha\cos\beta - S\sin\alpha\sin\beta - L\cos\alpha \end{aligned}$$

Dove

- D è la resistenza totale;
- L è la portanza totale;
- S è la forza laterale.

Con l'aggettivo totale si intende la somma di un contributo dovuto alla parte rigida ed uno dovuto alla parte elastica.
In generale gli effetti della deformazione elastica risultano essere più significativi per la

portanza e per la forza laterale. Gli effetti elastici sulla resistenza sono assunti trascurabili fin quando le deformazioni elastiche sono piccole se comparate alle dimensioni del velivolo.
Per ricavare un'espressione in forma chiusa dei contributi elastici per le forze e per i momenti aerodinamici si farà uso della *strip theory* e della *component build-up*. In particolare si trascureranno gli effetti dell'aerodinamica instazionaria supponendo che il periodo dei modi elastici, inclusi nel modello, sia maggiore se comparato alla velocità di variazione della pressione sulle superfici portanti.
Le equazioni che descrivono la traslazione e la rotazione rigida del modello di velivolo flessibile sono formalmente analoghe alle (2.1) e alle (2.2). Tuttavia le forze e i momenti aerodinamici che compaiono a destra dell'uguale di tali equazioni sono influenzati dall'elasticità. In (2.44) e in (2.45) sono riportate le equazioni alla traslazione e alla rotazione per il velivolo flessibile in cui forze e momenti sono scomposti in parte rigida (termine con pedice $\boldsymbol{R}$) e parte flessibile (termine con pedice $\boldsymbol{F}$).

$$
\begin{aligned}
m\big(\dot{U} + QW - VR\big) &= -mg\sin\theta + \underline{\boldsymbol{F_{A_{X_R}}} + \boldsymbol{F_{A_{X_E}}}} + F_{P_X} \\
m\big(\dot{V} + RU - PW\big) &= mg\cos\theta\sin\phi + \underline{\boldsymbol{F_{A_{Y_R}}} + \boldsymbol{F_{A_{Y_E}}}} + F_{P_Y} \\
m\big(\dot{W} + PV - QU\big) &= mg\cos\theta\cos\phi + \underline{\boldsymbol{F_{A_{Z_R}}} + \boldsymbol{F_{A_{Z_E}}}} + F_{P_Z}
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_{XX}\dot{P} - I_{XZ}(\dot{R} + PQ) - I_{YZ}(Q^2 - R^2) - I_{XZ}(\dot{Q} - RP) + (I_{ZZ} - I_{YY})RQ = \\
&\qquad\qquad \underline{\boldsymbol{L_{A_R}} + \boldsymbol{L_{A_E}}} + L_P \\
&I_{YY}\dot{Q} - I_{XY}(\dot{P} + QR) + I_{XZ}(P^2 - R^2) - I_{YZ}(\dot{R} - PQ) + (I_{XX} - I_{ZZ})PR = \\
&\qquad\qquad \underline{\boldsymbol{M_{A_R}} + \boldsymbol{M_{A_E}}} + M_P \\
&I_{ZZ}\dot{R} - I_{XZ}(\dot{P} - QR) - I_{XZ}(P^2 - Q^2) - I_{YZ}(\dot{Q} + RP) + (I_{YY} - I_{XX})PQ = \\
&\qquad\qquad \underline{\boldsymbol{N_{A_R}} + \boldsymbol{N_{A_E}}} + N_P
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Per la valutazione dei contributi elastici che influenzano le azioni aerodinamiche agenti sul velivolo si procederà seguendo il flowchart 2.3.
L'approccio consiste in diversi step che coinvolgono la valutazione dell'incidenza locale del profilo perturbata per effetto della deformazione elastica, l'uso dell'espansione modale per esprimere l'incidenza in termini di coordinate modali e l'estrazione delle derivate aeroelastiche. Di seguito si valuteranno gli effetti elastici solo sulla portanza e sul momento di beccheggio in quanto è possibile valutare in maniera analoga tali effetti sulle altre forze e momenti aerodinamici.

### 2.7.1 Effetto elastico sulla portanza

È possibile assumere che la portanza del velivolo sia generata essenzialmente dell'ala e del piano di coda e dunque sia valido:

$$L = L_W + L_H$$

In figura 2.4 è possibile osservare una sezione alare o del piano di coda ad una stazione y lungo l'apertura soggetta ad un moto elastico. Il profilo in alto rappresenta la sezione

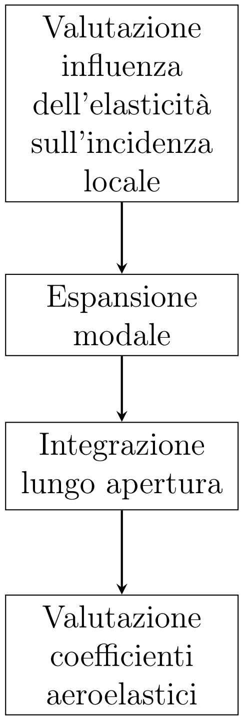



Figura 2.3: Valutazione effetti elastici.

rigida mentre in basso è riportato il profilo elasticamente deformato rispetto alla sua configurazione indeformata. Il moto elastico è rappresentato da un'inflessione lungo l'asse $\boldsymbol{Z_B}$ ad una velocità $\boldsymbol{w_E(y)}$ e da una rotazione della corda,$\boldsymbol{\theta_E(y)}$, equivalente ad una torsione del profilo. In particolare si trascura una qualsiasi variazione della curvatura e della lunghezza della corda del profilo.
La deformazione della superficie portante modifica la distribuzione delle incidenze aerodinamiche lungo l'intera apertura andando a riposizionare anche la risultante delle azioni aerodinamiche sulla superficie stessa. Affinché si possa applicare la *strip theroy* per estrarre i coefficienti aeroelastici in forma chiusa è necessario valutare l'incidenza locale e la sua variazione per effetto della deformazione elastica.
È possibile riscrivere l'incidenza locale per una sezione alare come:

$$\alpha_W(y) = \alpha_{R_W}(y) + \alpha_{F_W}(y) \tag{2.46}$$

Dove

- $\alpha_{R_W}(y)$ è l'incidenza aerodinamica della sezione rigida;
- $\alpha_{F_W}(y)$ è il contributo all'incidenza legato alla deformazione elastica.

L'incidenza rigida è legata alle velocità lineari e angolari, al calettamento e allo svergolamento aerodinamico mentre il contributo elastico è legato a $w_E(y)$ e a $\theta_E(y)$. Dunque è possibile esprimere l'incidenza aerodinamica come:

$$\begin{aligned} \alpha_W(y) = {} & \frac{1}{V_\infty}\Big(W + Py - Q(x_{AC_W}(y) - x_{CG}(y)) + (i_W(y) + \varepsilon_{twist}(y))\Big) + \\ & + \left(\theta_{E_W}(y) + \frac{w_{E_W}(y)}{V_\infty}\right) \end{aligned} \tag{2.47}$$

La portanza sviluppata dalla sezione alla stazione $y$ è data da:

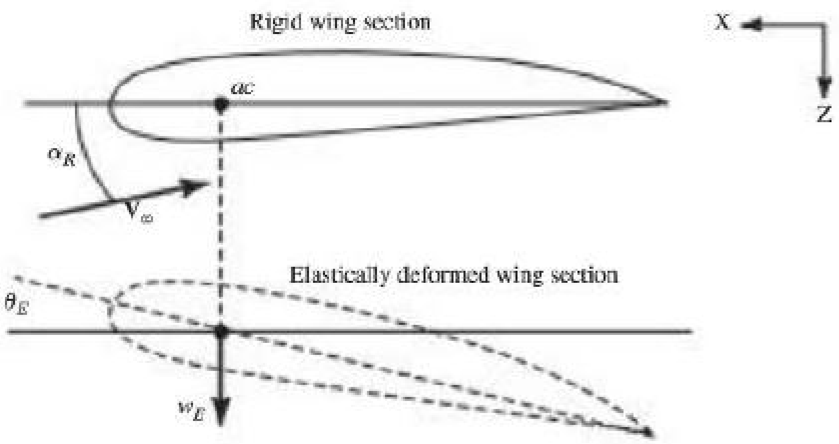



Figura 2.4: Profilo rigido e deformato.

$$l(y) = c_{l_\alpha}(\alpha(y) - \alpha_0(y))q(y)c(y) \tag{2.48}$$

Con

- $\alpha$ è l'angolo d'attacco data dalla (2.47);
- $\alpha_0$ è l'angolo di portanza nulla;
- $q(y)$ pressione dinamica;
- $c(y)$ corda.

Integrando la portanza locale lungo l'apertura alare si ottiene la seguente espressione:

$$L_W = \int_{-\frac{b_w}{2}}^{\frac{b_w}{2}} c_{l_{\alpha_W}}(\alpha_W(y) - \alpha_{0_W}(y))q_W(y)c_W(y)dy \tag{2.49}$$

Sostituendo nella (2.49) la (2.47) è possibile estrarre dalla portanza totale il contributo associato alla deformazione elastica.

$$\begin{aligned} L_{E_W} &= 2\int_0^{\frac{b_w}{2}} c_{l_{\alpha_W}}\Big(\theta_{E_W}(y) + \frac{w_{E_W}(y)}{V_\infty}\Big)q_W(y)c_W(y)dy \\ &= 2q_\infty \int_0^{\frac{b_w}{2}} c_{l_{\alpha_W}}\Big(\theta_{E_W}(y) + \frac{w_{E_W}(y)}{V_\infty}\Big)c_W(y)dy \end{aligned} \tag{2.50}$$

Nell'ultimo passaggio si suppone che la pressione dinamica sia uniforme lungo l'apertura e sia pari al valore della corrente indisturbata. In particolare tale assunzione è valida in quanto si trascurano gli spostamenti elastici lungo l'asse $X_B$ poichè le sezioni sono più rigide alla flessione intorno a $Z_B$ piuttosto che intorno ad $X_B$. Inoltre si assume che la superficie alare sia simmetrica rispetto alla corda alla radice in modo tale da integrare solo su metà apertura.
In maniera del tutto analoga è possibile derivare il contributo elastico della portanza del piano di coda. L'incidenza aerodinamica della coda è influenzata oltre che dalla flessibilità della coda stessa anche dall'elasticità dell'ala tramite un termine simile al downwash ($\varepsilon_{E_H}$), [13] sezione 7.3.

$$
\begin{aligned}
\alpha_H(y) &= \alpha_{R_H}(y) + \alpha_{F_H}(y) \\
&= \alpha_{R_H}(y) + \Big(\theta_{E_H}(y) + \frac{w_{E_H}(y)}{V_\infty} - \varepsilon_{E_H}(y)\Big) \\
&= \alpha_{R_H}(y) + \Big(\theta_{E_H}(y) + \frac{w_{E_H}(y)}{V_\infty} - \frac{d\varepsilon_H}{d\alpha_W}\Big(\theta_{E_W} + \frac{w_{E_W}}{V_\infty}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Applicando la *strip theory* ed isolando il contributo elastico si ha:

$$
\begin{aligned}
L_{E_H} &= 2\int_0^{\frac{b_h}{2}} c_{l_{\alpha_H}} \Big(\theta_{E_H}(y) + \frac{w_{E_H}(y)}{V_\infty} - \varepsilon_{E_H}(y)\Big) q_H(y) c_H(y) dy \\
&= 2q_H \int_0^{\frac{b_h}{2}} c_{l_{\alpha_H}} \Big(\theta_{E_H}(y) + \frac{w_{E_H}(y)}{V_\infty} - \varepsilon_{E_H}(y)\Big) c_H(y) dy \\
&= 2q_H \int_0^{\frac{b_h}{2}} c_{l_{\alpha_H}} \Big(\theta_{E_H}(y) + \frac{w_{E_H}(y)}{V_\infty} - \frac{d\varepsilon_H}{d\alpha_W}\Big(\theta_{E_W} + \frac{w_{E_W}}{V_\infty}\Big)\Big)\Big) c_H(y) dy
\end{aligned}
$$

Gli effetti elastici sulla portanza possono essere divisi in due contributi:

1. Un termine legato allo spostamento modale, $\eta$, ovvero associato alla torsione elastica $\theta_E$;

2. Un termine legato alla valocità modale, $\dot{\eta}$, ovvero associato alla velocità di inflessione elastica $w_E$.

Per ricavare i due termini elastici è necessario applicare l'espansione modale per esprimere $w_E(y)$ e $\theta_E(y)$ in funzione dei modi di vibrare, degli spostamenti e delle velocità modali.
La $w_E$ al centro aerodinamico del profilo può essere scritta applicando l'analisi modale come:

$$
\begin{aligned}
w_E = \dot{z}_{ac}(y,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(x_{ac}, y, z_{ac}) \dot{\eta}_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y) \dot{\eta}_i(t)
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

La torsione elastica,$\theta_E$ , può essere scritta in funzione della pendenza dell'i-esimo modo di vibrare del profilo alla stazione y. In figura 2.5 viene visualizzato lo spostamento elastico di due punti del profilo di coordinate $(x_A, y, z_A)$ e $(x_B, y, z_B)$ rispettivamente. Tali spostamenti in termini di espansione modale possono essere scritti come:

$$
\begin{aligned}
z_A(y,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(x_A, y, z_A) \eta_i(t) \\
z_B(y,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(x_B, y, z_B) \eta_i(t)
\end{aligned}
$$

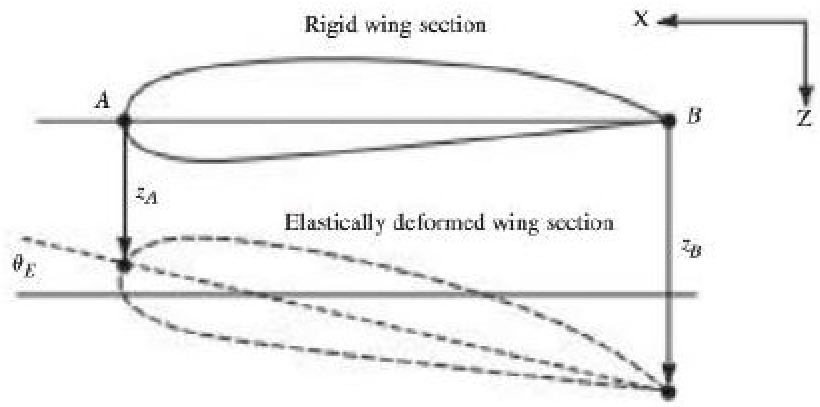



Figura 2.5: Visualizzazione torsione elastica su profilo.

La torsione elastica può essere scritta in funzione degli spostamenti del punto A e del punto B come:

$$\theta_E(y,t) \approx \tan\theta_E(y,t) = \frac{1}{x_A - x_B}\sum_{i=1}^{\infty}\big(v_{Z_i}(x_A,y,z_A) - v_{Z_i}(x_B,y,z_B)\big)\eta_i(t)$$

Tuttavia

$$\lim_{(x_A - x_B)\to 0}\frac{1}{x_A - x_B}\sum_{i=1}^{\infty}\big(v_{Z_i}(x_A,y,z_A) - v_{Z_i}(x_B,y,z_B)\big) \equiv v'_{Z_i}(y)$$

Per cui si ha:

$$\theta_E = \sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_i}(y)\eta_i(t) \tag{2.52}$$

Sfruttando la (2.51) e la (2.52) è possibile riscrivere la (2.50) come:

$$L_{E_W} = 2q_\infty \int_0^{\frac{b_W}{2}} c_{l_{\alpha_W}}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_i}(y)\eta_i(t) + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y)\dot{\eta}_i(t)}{V_\infty}\Big)c_W(y)dy \tag{2.53}$$

Espressa la portanza in termini di modi di vibrare, spostamento modale e velocità modale si può esprimere il contributo elastico come:

$$L_{E_W} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial L_{E_W}}{\partial \eta_i}\eta_i + \frac{\partial L_{E_W}}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i\Big) \tag{2.54}$$

Con

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{E_W}}{\partial \eta_i} &= 2q_\infty \int_0^{\frac{b_W}{2}} c_{l_{\alpha_W}}(y) v'_{Z_{i_W}}(y) c_w(y) dy \\ \frac{\partial L_{E_W}}{\partial \dot{\eta}_i} &= \frac{2q_\infty}{V_\infty}\int_0^{\frac{b_W}{2}} c_{l_{\alpha_W}}(y) v_{Z_{i_W}}(y) c_w(y) dy \end{aligned} \tag{2.55}$$

I contributi elastici alla portanza alare sono funzione della geometria dell'ala, del gradiente della retta di portanza, della condizione di volo, dei modi di vibrare e della pendenza dei modi di vibrare. In maniera analoga è possibile ricavare le espressioni per $\dfrac{\partial L_{E_H}}{\partial \eta_i}$ e per $\dfrac{\partial L_{E_H}}{\partial \dot{\eta}_i}$ ed ottenere l'espressione per la portanza elastica dell'intero velivolo sommando i contributi dell'ala e della coda.

### 2.7.2 Effetto elastico sul momento di beccheggio

Per la valutazione del momento di beccheggio legato alla flessibilità del velivolo si trascura l'effetto diretto legato alla flessione della fusoliera ad eccezione dello spostamento della corda alla radice dell'ala e della coda, figura 2.6. Dunque si considera il momento di beccheggio elastico generato solo dagli effetti dell'elasticità sull'ala e sul piano di coda:

$$M_E = M_{E_W} + M_{E_H}$$

L'obiettivo è quello di sviluppare i coefficienti aeroelastici che esprimono l'influenza della flessibilità sul beccheggio in modo da poter scrivere:

$$M_E = \sum_{i=1}^{\infty} \Big( \frac{\partial M_E}{\partial \eta_i} \eta_i + \frac{\partial M_E}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i \Big) \tag{2.56}$$

Con

- $\dfrac{\partial M_E}{\partial \eta_i} = \dfrac{\partial M_{E_W}}{\partial \eta_i} + \dfrac{\partial M_{E_H}}{\partial \eta_i}$
- $\dfrac{\partial M_E}{\partial \dot{\eta}_i} = \dfrac{\partial M_{E_W}}{\partial \dot{\eta}_i} + \dfrac{\partial M_{E_H}}{\partial \dot{\eta}_i}$

Per l'applicazione della *strip theory* si fa riferimento alla figura 2.7 in cui è rappresentata una semi-ala in pianta. Assumendo che la x sia misurata positiva in maniera concorde all'asse $X_B$ si ha che il momento di beccheggio dovuto alla portanza 2-D agente nel centro aerodinamico di un profilo alare posto alla stazione y è dato da:

$$m_w(y) = l(y) \cos\alpha (x_{AC}(y) - x_{CG}) \approx l(y)(x_{AC}(y) - x_{CG}) \tag{2.57}$$

Esprimendo la portanza come in (2.48) ed richiamando la (2.47) è possibile esprimere la componente elastica del momento di beccheggio:

$$m_{E_W} = c_{l_{\alpha_w}} \Big( \theta_{E_W} + \frac{w_{E_W}}{V_\infty} \Big) (x_{AC}(y) - x_{CG}) q_W(y) c_w(y) \tag{2.58}$$

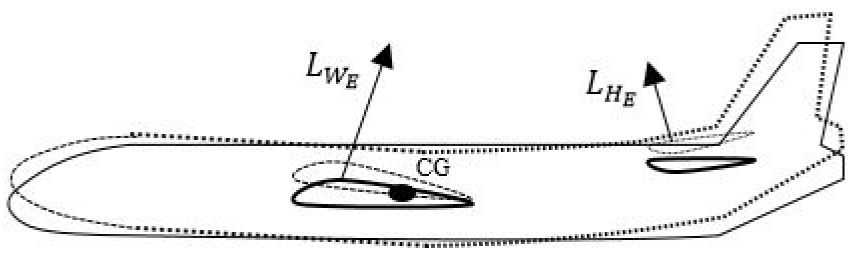



Figura 2.6: Moto elastico del velivolo.

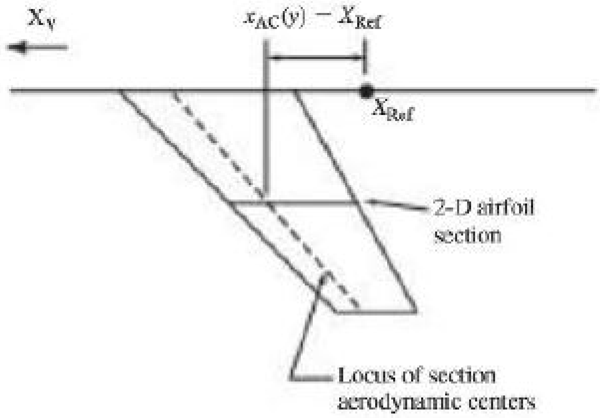



Figura 2.7: Geometria per applicazione *strip theory*.

Integrando (2.58) lungo l'apertura alare si ha il momento di beccheggio dell'ala dovuto agli effetti elastici:

$$M_{E_W} = 2\int_0^{\frac{b_W}{2}} c_{l_{\alpha_w}}\Big(\theta_{E_W} + \frac{w_{E_W}}{V_\infty}\Big)(x_{AC_W}(y) - x_{CG})q_W(y)c_w(y)dy \tag{2.59}$$

Richiamando la (2.51) e la (2.52) si ottiene l'espressione utile per il calcolo delle derivate aeroelastiche:

$$M_{E_W} = 2\int_0^{\frac{b_W}{2}} c_{l_{\alpha_w}}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_i}(y)\eta_i(t) + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y)\dot{\eta}_i(t)}{V_\infty}\Big)(x_{AC_W}(y) - x_{CG})q_W(y)c_w(y)dy \tag{2.60}$$

A questo punto è possibile valutare gli effetti dello spostamento e della velocità modale sul momento di beccheggio:

$$\frac{\partial M_{E_W}}{\partial \eta_i} = 2q_\infty \int_0^{\frac{b_W}{2}} c_{l_{\alpha_W}} v'_{Z_{i_W}}(x_{AC}(y) - x_{CG})c_W(y)dy$$
$$\frac{\partial M_{E_W}}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{2q_\infty}{V_\infty} \int_0^{\frac{b_W}{2}} c_{l_{\alpha_W}} v_{Z_{i_W}}(x_{AC}(y) - x_{CG})c_W(y)dy$$

Le derivate aeroelastiche risultano essere funzione della geometria dell'ala, della condizione di volo, dei modi di vibrare e della loro pendenza.
È possibile procedere in maniera analoga per il calcolo del contributo al beccheggio dovuto all'elasticità della coda e per le derivate aeroelastiche:

$$\begin{aligned} M_{E_H} = -2\int_0^{\frac{b_H}{2}} c_{l_{\alpha_H}}\Big(&\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_{i_H}}(y)\eta_i(t) + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_{i_H}}(y)\dot{\eta}_i(t)}{V_\infty} \\ &- \frac{d\varepsilon_H}{d\alpha_W}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_{i_W}}(y)\eta_i(t) + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_{i_W}}(y)\dot{\eta}_i(t)}{V_\infty}\Big)\Big) \\ &(x_{ACH}(y) - x_{CG})q_H(y)c_H(y)dy \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial M_{E_H}}{\partial \eta_i} = -2q_H \int_0^{\frac{b_H}{2}} c_{l_{\alpha_H}} \Big( v'_{Z_{i_H}}(y) - \frac{d\varepsilon_H}{d\alpha_W} v'_{Z_{i_W}}(y) \Big) (x_{CG} - x_{AC_H}(y)) c_H(y) dy$$

$$\frac{\partial M_{E_H}}{\partial \dot{\eta}_i} = -\frac{2q_H}{V_\infty} \int_0^{\frac{b_H}{2}} c_{l_{\alpha_H}} \Big( v_{Z_{i_H}} - \frac{d\varepsilon_H}{d\alpha_W} v_{Z_{i_W}}(y) \Big) (x_{CG} - x_{AC_H}(y)) c_H(y) dy$$

## 2.8 Calcolo della componente della forza generalizzata

La forza generalizzata è la forzante nell'equazione che descrive l'evoluzione nel tempo dei gradi di libertà elastici, tuttavia la (2.43) non coinvolge solo la dinamica flessibile. Infatti così come le forze e i momenti aerodinamici accoppiano i gradi di libertà rigidi agli elastici, la forza generalizzata accoppia i gradi di libertà elastici ai rigidi. La forza generalizzata può essere calcolata tramite il principio dei lavori virtuali,(2.6) , che ci permette di ricavare la seguente espressione:

$$Q_i = \int_{Area} \boldsymbol{P}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{v_i}(x, y, z) ds \tag{2.62}$$

In questo paragrafo si cercherà di sviluppare la forza generalizzata mettendo in evidenza la dipendenza dai vari gradi di libertà.
In figura (2.8) sono riportate le forze e i momenti aerodinamici agenti nel centro aerodinamico e lo spostamento e la rotazione virtuale del profilo.

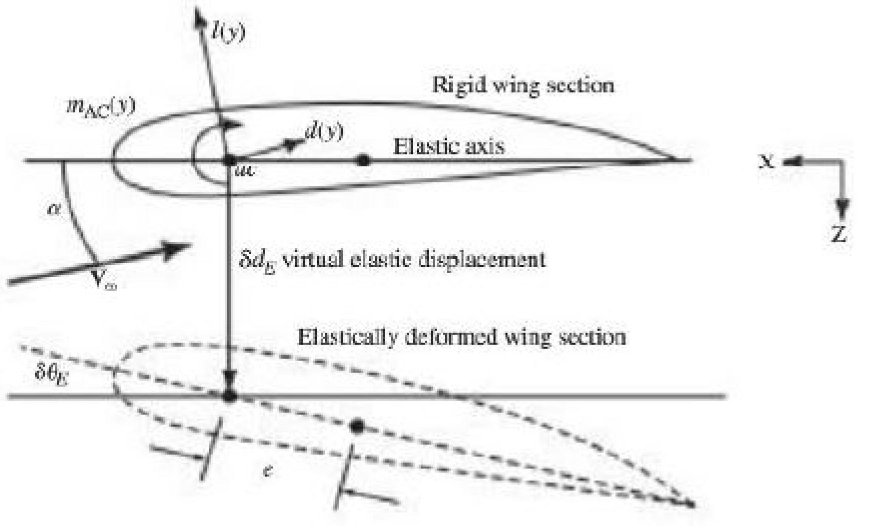



Figura 2.8: Azioni aerodinamiche e spostamenti virtuali.

Il lavoro virtuale per unità di profondità, $\delta w_E$, per l'ala o per la coda può essere espresso come:

$$
\begin{aligned}
\delta w_{E_{WoH}}(y) =& -\left(l(y)\cos\alpha + d(y)\sin\alpha\right)\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y)\delta\eta_i \\
&+ \left(l(y)\sin\alpha - d(y)\cos\alpha\right)\sum_{i=1}^{\infty} v_{X_i}(y)\delta\eta_i \\
&\left(m_{AC}(y) + e(y)(l(y)\cos\alpha + d(y)\sin\alpha)\right)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_i}(y)\delta\eta_i
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Il lavoro virtuale per unità di profondità compiuto sul piano di coda verticale è dato da:

$$
\begin{aligned}
\delta w_{E_V}(z) =& \left(s(z)\cos\beta - d(z)\sin\beta\right)\sum_{i=1}^{\infty} v_{Y_{V_i}}(z)\delta\eta_i \\
&- \left(s(z)\sin\beta + d(z)\cos\beta\right)\sum_{i=1}^{\infty} v_{X_{V_i}}(z)\delta\eta_i \\
&\left(m_{AC_V}(z) + e(z)(s(z)\cos\beta - d(y)\sin\beta)\right)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Y_{V_i}}(y)\delta\eta_i
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Con

- $e(y)$ posizione dell'asse elastico alla stazione y;
- $v_{X_i}$ componente lungo l'asse $\boldsymbol{X_B}$ dell'i-esimo modo di vibrare valutata al centro aerodinamico;
- $v_{Y_i}$ componente lungo l'asse $\boldsymbol{Y_B}$ dell'i-esimo modo di vibrare valutata al centro aerodinamico;
- $v_{Z_i}$ componente lungo l'asse $\boldsymbol{Z_B}$ dell'i-esimo modo di vibrare valutata al centro aerodinamico;
- $v'_{Y_i}$ pendenza dell'i-esimo modo di vibrare valutata al centro aerodinamico;
- $v'_{Z_i}$ pendenza dell'i-esimo modo di vibrare valutata al centro aerodinamico;

Nel calcolo del lavoro virtuali per unità di profondità non viene considerato il contributo legato alla spinta in quanto in generale la risposta del motore è più lenta rispetto alla risposta delle superfici aerodinamiche e dunque è difficile eccitare i modi elastici con la spinta.
Le espressioni della (2.63) e della (2.63) possono essere semplificate sotto diverse assunzioni:

- $\alpha$ e $\beta$ sono sufficientemente piccoli per cui $\cos(\cdot) \approx 1$ e $\sin(\cdot) \approx (\cdot)$;
- $d(y) \ll l(y)$ per l'ala e per la coda mentre $d(z) \ll s(z)$ per il piano di coda verticale ;

- per motivi strutturali $v_{X_i}(y) \ll v_{Z_i}(y)$ e $v_{X_i}(z) \ll v_{Y_i}(z)$;
- profili aerodinamici per piano di coda orizzontale e verticale simmetrici $\rightarrow \alpha_{0_H} = \alpha_{0_V} = 0$ e $m_{AC_H} = m_{AC_V} = 0$.

Sotto queste assunzioni il lavoro diventa:

$$\begin{aligned}
\delta w_{E_W} \approx & -l_W(y)\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y)\delta\eta_i + (m_{AC_W}(y) + e_W(y)l_W(y)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_{W_i}}(y)\delta\eta_i \\
\delta w_{E_H} \approx & -l_H(y)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y)\delta\eta_i + e_H(y)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_{W_i}}(y)\delta\eta_i\Big) \\
\delta w_{E_V} \approx & \, s_V(z)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v_{Y_Z}(y)\delta\eta_i + e_V(z)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Y_{V_i}}(z)\delta\eta_i\Big)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Il lavoro virtuale totale si ottiene sommando i tre contributi delle relative tre superfici portanti ed integrando lungo le rispettive aperture:

$$\delta W_E = \int_{\frac{-b_W}{2}}^{\frac{b_W}{2}} \delta w_{E_W}(y)dy + \int_{\frac{-b_H}{2}}^{\frac{b_H}{2}} \delta w_{E_H}(y)dy + \int_{\frac{-b_V}{2}}^{\frac{b_V}{2}} \delta w_{E_V}(z)dz \tag{2.66}$$

Sostiutendo l'espressione dei singoli lavori virtuali della (2.65) nella (2.66) e differenziando rispetto allo spostamento modale virtuale, $\delta\eta_i$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
Q_i = & \int_{\frac{-b_W}{2}}^{\frac{b_W}{2}} -l_W(y)\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y) + (m_{AC_W}(y) + e_W(y)l_W(y)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_{W_i}}(y) \\
& + \int_{\frac{-b_H}{2}}^{\frac{b_H}{2}} -l_H(y)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v_{Z_i}(y) + e_H(y)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Z_{W_i}}(y)\Big) \\
& + \int_{\frac{-b_V}{2}}^{\frac{b_V}{2}} s_V(z)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} v_{Y_Z}(y) + e_V(z)\sum_{i=1}^{\infty} v'_{Y_{V_i}}(z)\Big)
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Sostiuendo nella (2.67) espressioni come la (2.48) e la (2.47) particolarizzate per l'ala, il piano di coda orizzontale e verticale si possono estrarre i coefficienti aeroelastici per la forza generalizzata.
A questo punto è possibile espandere la forza generalizzata in serie di Taylor, rispetto ad una determinata condizione di riferimento ($\mathbf{0}$), e ricavare le derivate aeroelastiche.

$$Q_i = Q_{i_{\boldsymbol{P}_0}} + \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{p} = Q_{i_{\boldsymbol{P}_0}} + \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{p_R}}\boldsymbol{p_R} + \frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{p_F}}\boldsymbol{p_F}$$

Dove

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^T &= \{\boldsymbol{p_R^T} \quad \boldsymbol{p_F^T}\} \\
\boldsymbol{p_R}^T &= \{U \quad V \quad W \quad P \quad Q \quad R \quad \delta_a \quad \delta_e \quad \delta_r\} \\
\boldsymbol{p_F}^T &= \{\eta_i, i = 1, \dots, n \quad \dot{\eta}_i, i = 1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

# Capitolo 3

# Caso studio

In questo capitolo verrà descritto brevemente il modello rappresentativo del velivolo oggetto di studio ed inoltre sarà affrontato il discorso dell'analisi dinamica strutturale. L'analisi modale è necessaria per determinare le frequenze dei modi elastici e per ricavare i coefficienti aeroelastici indispensabili per sviluppare il modello di velivolo flessibile. Assumendo che il velivolo sia simmetrico rispetto al piano $XZ$ i modi elastici possono essere raggruppati in:

- modi simmetrici;
- modi asimmetrici.

Le forme modali simmetriche sono simmetriche rispetto al piano di simmetria del velivolo. Tra questi modi troviamo ad esempio la flessione alare rispetto all'asse $X$ o la flessione della fusoliera intorno all'asse $Y$. I modi asimmetrici invece sono caratterizzate da forme modali asimmetriche rispetto al piano di simmetria del velivolo. Tra questi si hanno ad esempio la flessione asimmetrica dell'ala rispetto all'asse $X$ oppure la flessione della fusoliera rispetto all'asse $Z$. Per quanto detto nei paragrafi 2.7 e 2.8 delle forme modali sono necessarie solo due componenti:

- $v_{z_i}(x, y, z)$ componente della forma modale rappresentante lo spostamento lungo l'asse $Z$;
- $\theta_{y_i}(x, y, z)$ componente della forma modale rappresentante la rotazione intorno all'asse $Y$.

## 3.1 Presentazione del velivolo

Il velivolo di riferimento, rappresentato schematicamente in figura 3.1, è caratterizzato da un allungamento alare superiore a 10 e data la snellezza della struttura gli effetti elastici possono assumere un ruolo rilevante. Tutto ciò suscita l'interesse per l'analisi del velivolo secondo un modello che abbandona l'ipotesi di piattaforma infinitamente rigida e considera gli effetti elastici sulla risposta dinamica.
Il velivolo opera in un range di velocità subsoniche, l'ala è caratterizzata da un angolo di freccia piccolo ed il sistema di propulsione rispetta requisiti di bassi consumi nei range di operatività. Le proprietà di massa del velivolo e le principali dimensioni sono riportate nelle tabelle 3.1 e 3.2. Nelle tabelle con l'acronimo *mac* si farà riferimento alla corda media aerodinamica.

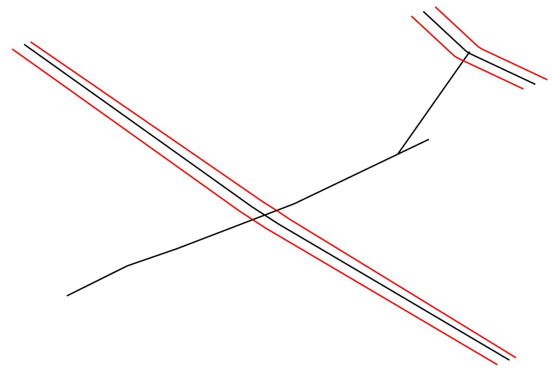


Figura 3.1: Schematizzazione del velivolo.

## 3.2 Analisi modale

L'analisi dinamica strutturale è stata eseguita con l'ausilio del software MSC/NASTRAN ed un modello FEM è stato usato per caratterizzare le proprietà dinamiche del velivolo. Gli autovalori e gli autovettori del problema delle oscillazioni libere sono stati ottenuti tramite la *SOL 103* di Nastran con normalizzazione degli autovettori rispetto al massimo. La disposizione dei nodi, delle masse concentrate ed il sistema di riferimento strutturale usato per il modello FEM sono mostrati in figura 3.2. Nel sistema di riferimento strutturale usato per l'analisi dinamica lo spostamento verticale è positivo se diretto verso l'alto (verso opposto a $\boldsymbol{Z_B}$) mentre la torsione intorno ad $Y$ è positiva se il bordo d'attacco ruota incrementando l'incidenza. Il modello FEM utilizzato si basa su elementi *beam* e su elementi *conm2*, ovvero masse concentrate, come è possibile osservare in figura 3.3. I risultati dell'analisi modale, ovvero le frequenze e le masse modali dei primi dodici modi, sono riportati nella tabella 3.3 opportunamente normalizzati.
Le forme modali riportate in tabella 3.3 contengono sia modi simmetrici che asimmetrici ed in tutti i modi è presente sia una componente flessionale che torsionale. In particolare dei modi del velivolo si è interessati alle componenti delle forme modali dell'ala e del piano di coda orizzantale trascurando gli effetti legati alla fusoliera e al piano di coda verticale. Ciò è in accordo con quanto formulato nei paragrafi 2.7 e 2.8. Poichè di seguito verrà analizzato il comportamento dinamico del velivolo solo nel piano longitudinale gli unici modi che interessano sono quelli simmetrici, ovvero i modi *1, 4, 5, 9, 12.* Tutti gli altri modi essendo asimmetrici generano dei contributi elastici

Tabella 3.1: Caratteristiche di massa del velivolo

| | |
|---|---|
| Massa del velivolo adimensionalizzata con massa ala $[-]$ | 4.63 |
| $I_{XX}$ adimensionalizzato con $I_{ZZ}$ $[-]$ | 0.7484 |
| $I_{YY}$ adimensionalizzato con $I_{ZZ}$ $[-]$ | 0.5232 |
| $I_{ZZ}$ adimensionalizzato con $I_{ZZ}$ $[-]$ | 1 |

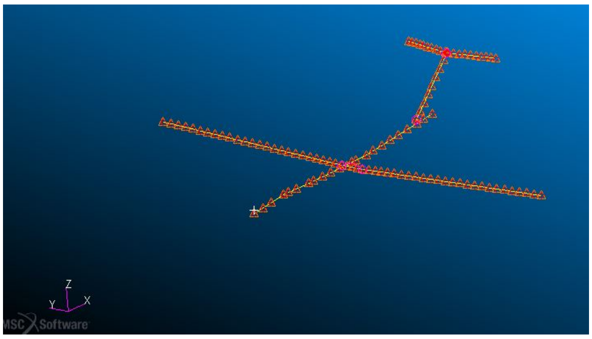


Figura 3.2: Modello agli elementi finiti.

che sono fonte di momenti che agiscono fuori dal piano di simmetria. Pertanto tali modi rendono necessario anche lo studio della dinamica latero-direzionale. Le forme modali dei primi 5 modi simmetrici sono riportate nella figura 3.4.

Il modo 1 esibisce flessione e torsione sia dell'ala che del piano di coda tuttavia, paragonando le ampiezze delle componenti della forma modale, può essere identificato come il primo modo flessionale dell'ala fuori dal piano. Il modo 4 è caratterizzato principalmente dalla flessione dell'ala nel piano per cui può essere identificato come primo flessionale nel piano. Tuttavia le componenti rappresentative lo spostamento trasversale e la torsione possono essere significative per il calcolo delle derivate aeroelastiche associate a tale modo. Il modo 5 è caratterizzato dalla flessione sia delle superfici portanti, ala e coda, che dalla fusoliera e pertanto può essere riconosciuto come primo flessionale della fusoliera. Il modo 9 può essere associato al secondo modo flessionale dell'ala fuori dal piano mentre il modo 12 è il primo modo flessionale del piano di coda. Volendo visualizzare le forme modali (*1, 4, 5, 9, 12*) in termini di spostamento

Tabella 3.2: Caratteristiche geometriche del velivolo

| | |
|---|---|
| $X_{cg}$ del velivolo adimensionalizzato rispetto alla *mac* $[-]$ | 5.685 |
| Apertura alare adimensionalizzata con *mac* $[-]$ | 18 |
| Superficie in pianta alare adimensionalizzata con il quadrato della *mac* $[-]$ | 17.78 |
| Allungamento alare $AR$ | $\approx 18$ |
| *mac* adimensionalizzata $[-]$ | 1 |

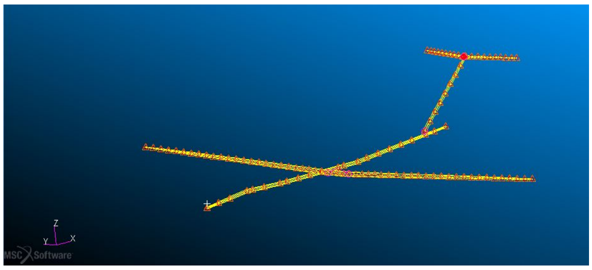
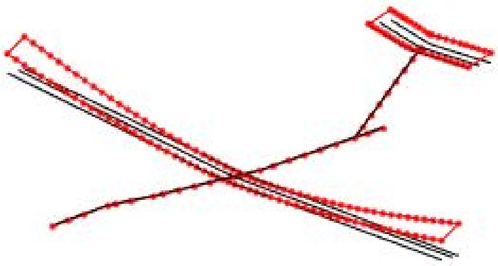


Figura 3.3: Visualizzazione elementi finiti.

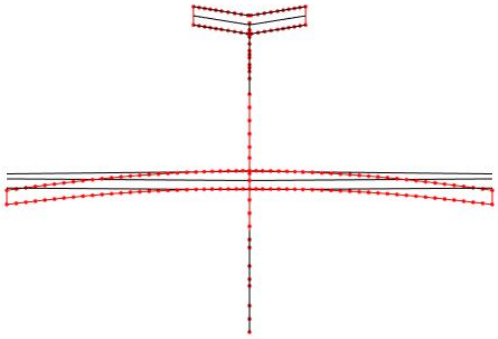
Tabella 3.3: Caratteristiche delle vibrazioni strutturali

| Modo elastico | Frequenza adimensionalizzata rispetto alla frequenza del modo 12 | Massa generalizzata adimensionalizzata rispetto alla massa modale massima | Smorzamento modale (Assunto) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1915 | 0.396 | 2.0% |
| 2 | 0.2904 | 0.9573 | 2.0% |
| 3 | 0.3959 | 0.4636 | 2.0% |
| 4 | 0.4185 | 0.50 | 2.0% |
| 5 | 0.4461 | 1 | 2.0% |
| 6 | 0.4508 | 0.6726 | 2.0% |
| 7 | 0.4988 | 0.1186 | 2.0% |
| 8 | 0.6547 | 0.3164 | 2.0% |
| 9 | 0.6746 | 0.2218 | 2.0% |
| 10 | 0.8037 | 0.3192 | 2.0% |
| 11 | 0.9937 | 0.3215 | 2.0% |
| 12 | 1 | 0.2462 | 2.0% |

verticale e di torsione lungo l'apertura alare o del piano di coda si può fare riferimento alle figure 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9. Per quanto detto precedentemente sul sistema di riferimento il modo 1 presenta simultaneamente flessione verso l'alto e rotazione del leading edge del profilo verso il basso. Contrariamente il piano di coda esibisce una flessione verso il basso ed una torsione che porta il profilo ad aumentare l'incidenza. Nel modo 4 è preponderante la flessione nel piano 3.4d tuttavia le componenti della forma modale fuori dal piano non sono trascurabili 3.6. Nel modo 5 è rilevante la flessione della fusoliera che influenza la forma modale dell'ala e della coda in prossimità degli attacchi. Per il modo 9 è possibile osservare in figura 3.8 i due nodi della forma modale per l'ala. Infine nel modo 12 le componenti di spostamento trasversale e di rotazioni sono più rilevanti per la coda che per l'ala. I modi elastici non solo originano le componenti elastiche delle forze e dei momenti aerodinamici, attraverso le derivate aeroelastiche, ma influenzano anche le derivate che descrivono la parte rigida dell'aerodinamica. Ad esempio si consideri l'effetto dell'angolo d'attacco sulla portanza o sul momento di beccheggio, ovvero $C_{L_\alpha}$ e $C_{M_\alpha}$. All'aumentare dell'incidenza aerodinamica il momento flettente sull'ala aumenta e dunque l'ala tende ad inflettersi sempre di più, [17]. Tuttavia dalla forma modale del primo modo di vibrare simmetrico, figura 3.4a e 3.5, si osserva che mentre l'ala si inflette verso l'alto il bordo d'attacco ruota verso il basso. A seconda di quale sia il contributo prevalente sull'incidenza aerodinamica risultante ci può essere un incremento o una diminuzione del $C_{L_\alpha}$ e $C_{M_\alpha}$ più o meno marcata.



(a) Modo 1.



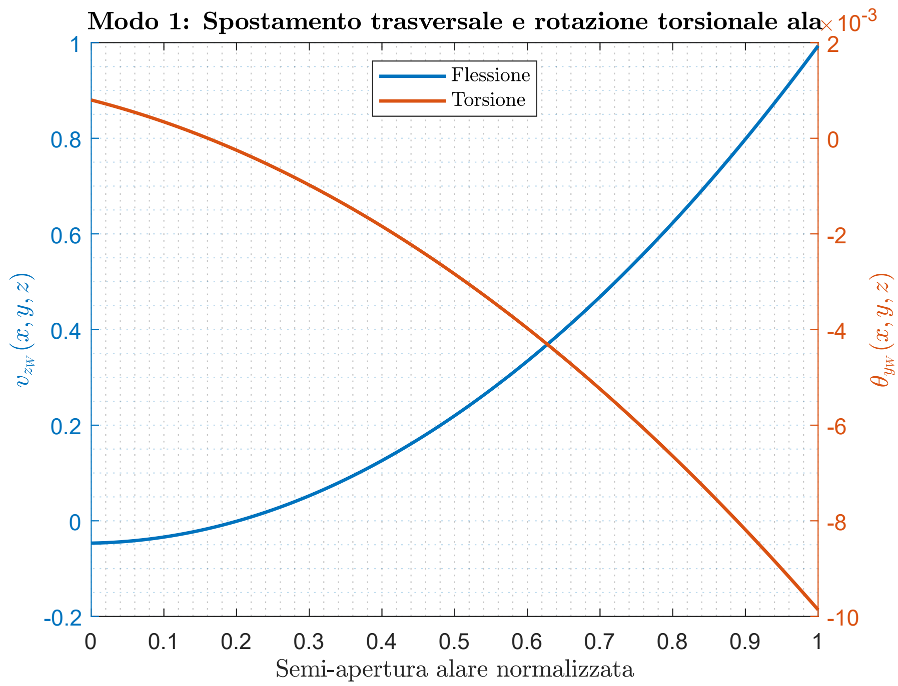
(b) Modo 4.

(c) Modo 5.

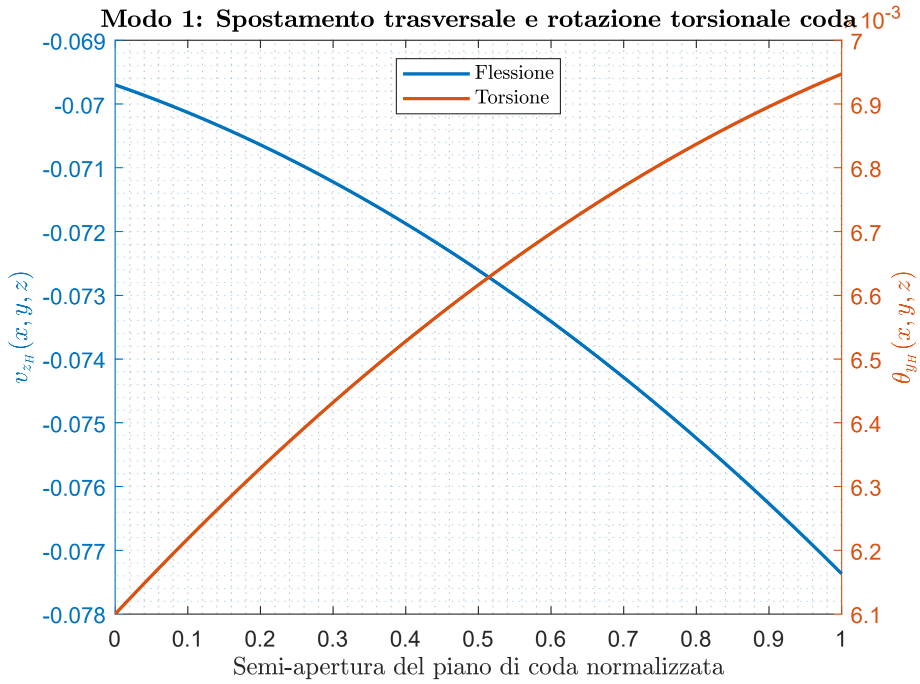
(d) Modo 9.

(e) Modo 12.

Figura 3.4: Modi di vibrare simmetrici.

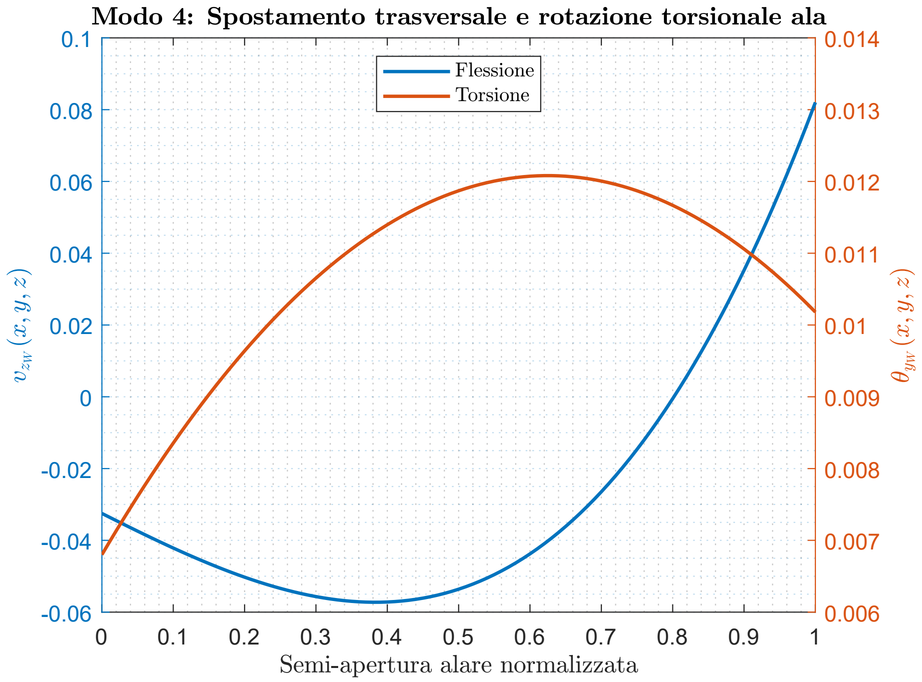



(a) Prima forma modale: componenti flessionali e torsionali dell'ala.

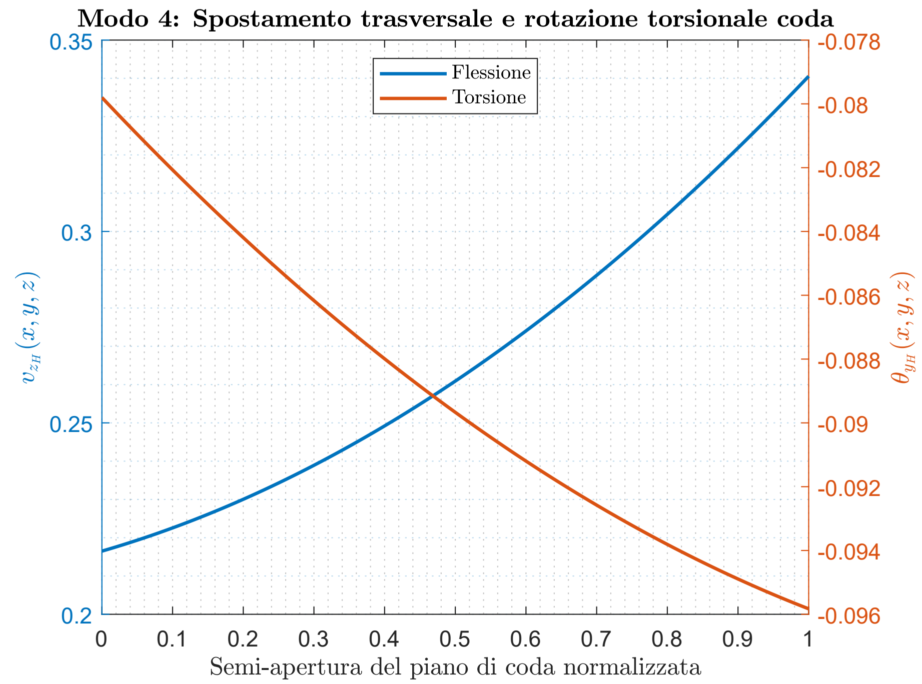



(b) Prima forma modale: componenti flessionali e torsionali del piano di coda.

Figura 3.5: Primo modo di vibrare simmetrico.

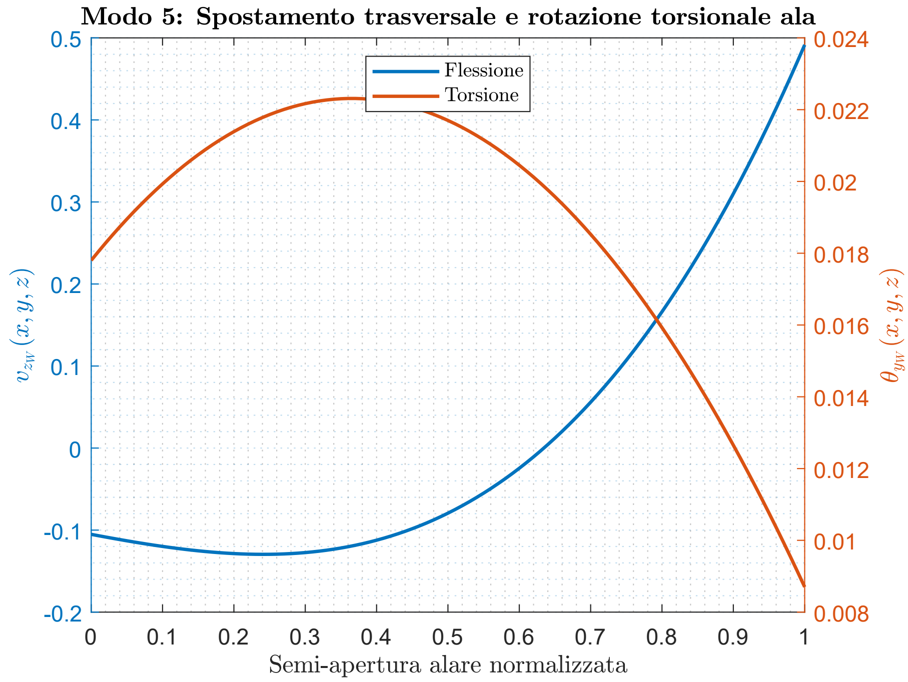



(a) Quarta forma modale: componenti flessionali e torsionali dell'ala.

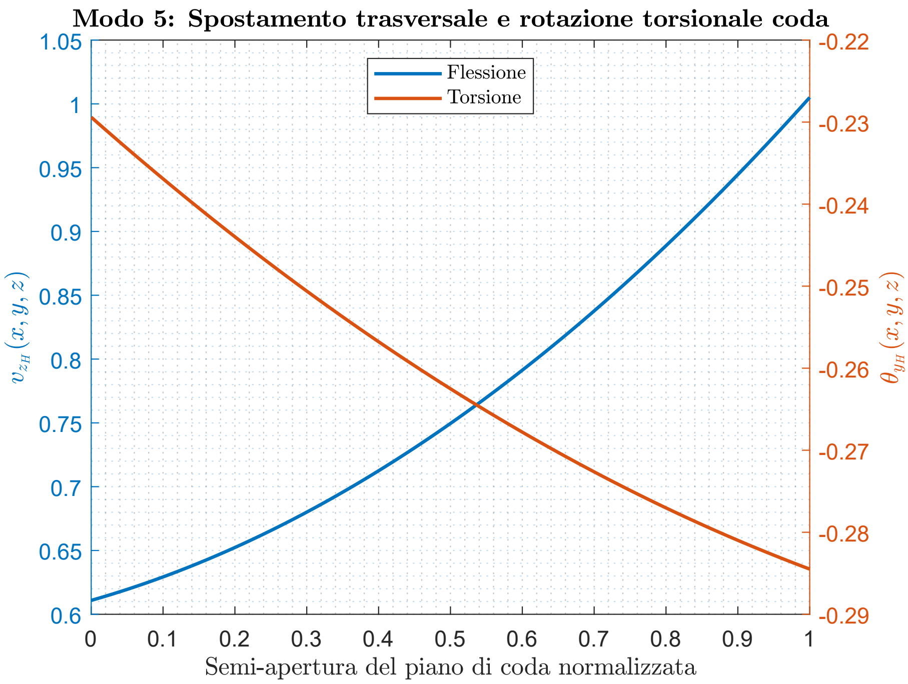



(b) Quarta forma modale: componenti flessionali e torsionali del piano di coda.

Figura 3.6: Quarto modo di vibrare simmetrico.

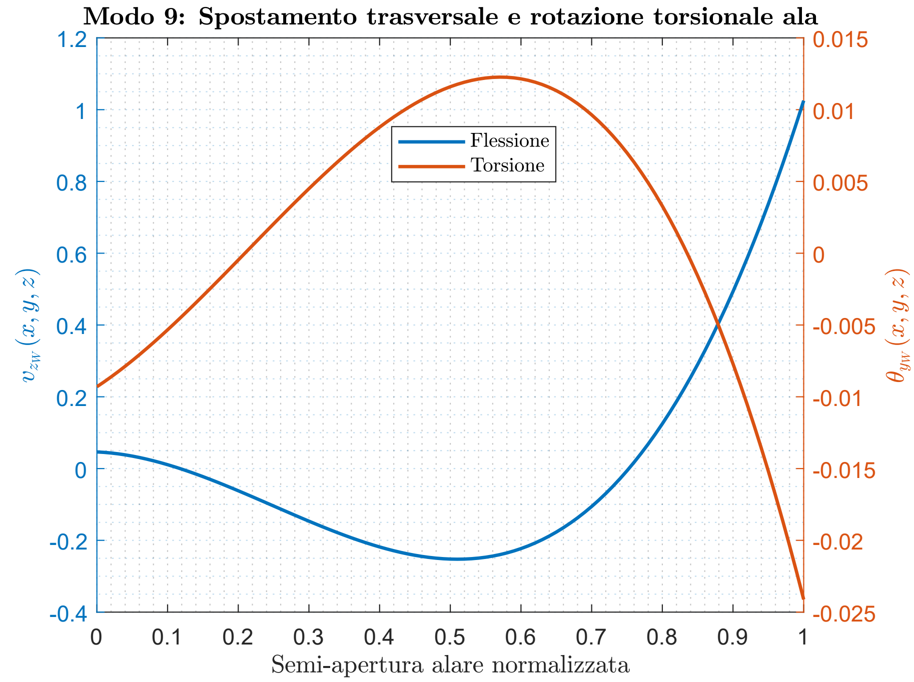



(a) Quinta forma modale: componenti flessionali e torsionali dell'ala.

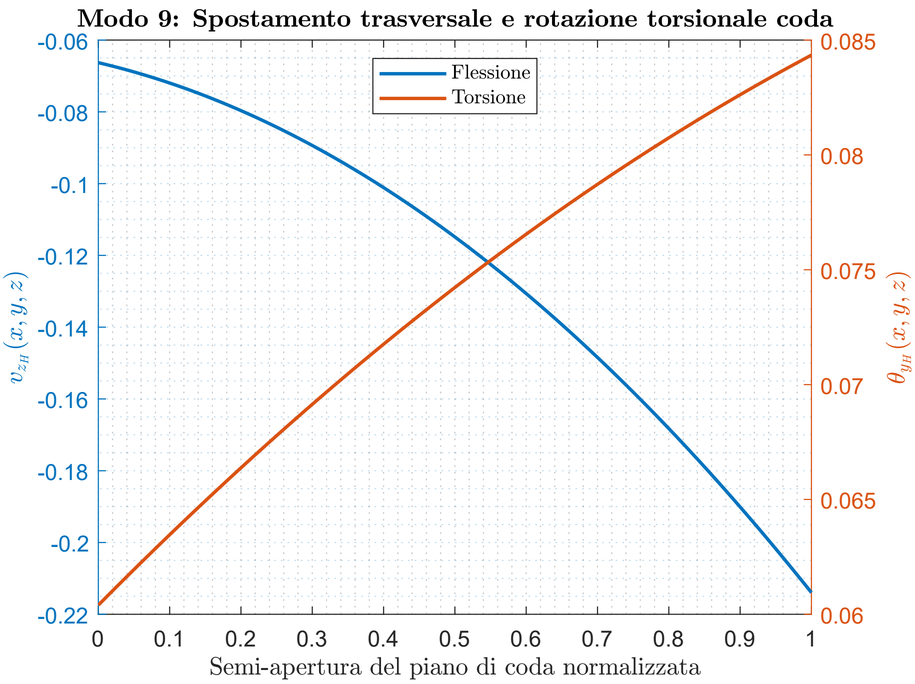



(b) Quinta forma modale: componenti flessionali e torsionali del piano di coda.

Figura 3.7: Quinta modo di vibrare simmetrico.

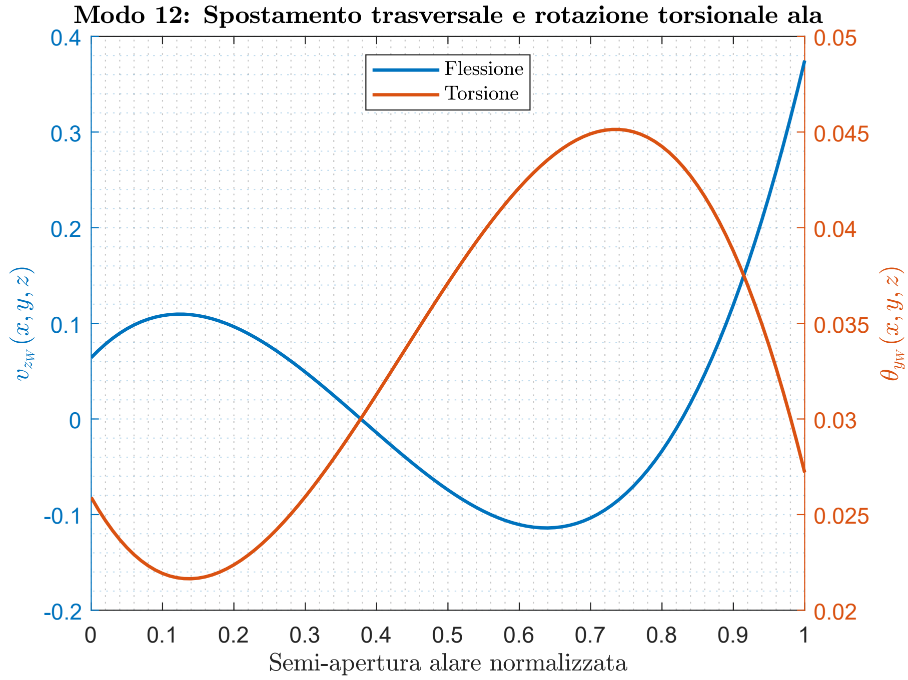



(a) Nona forma modale: Spostamento trasversale e rotazione dell'ala.

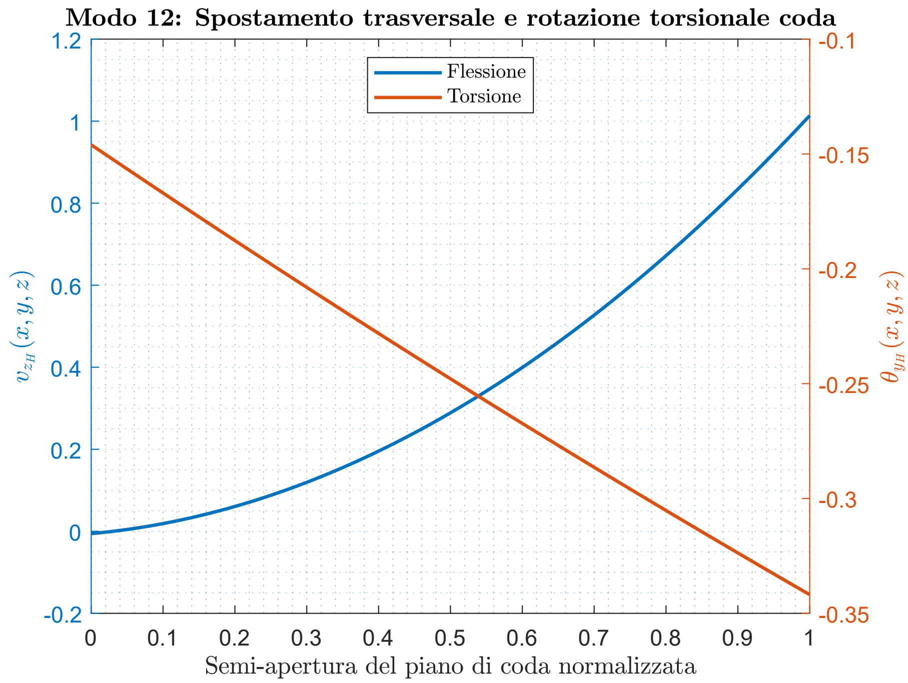



(b) Nona forma modale: Spostamento trasversale e rotazione del piano di coda.

Figura 3.8: Nono modo di vibrare simmetrico.




(a) Dodicesima forma modale: Spostamento trasversale e rotazione dell'ala.




(b) Dodicesima forma modale: Spostamento trasversale e rotazione del piano di coda.

Figura 3.9: Dodicesimo modo di vibrare simmetrico.

# Capitolo 4

# Modellazione e simulazione

L'obiettivo del seguente capitolo consiste nello studio del comportamento dinamico del modello elastico del velivolo. Tale modello è ottenuto espandendo il modello rigido integrando i modi elastici, ottenuti dall'analisi modale, considerando un opportuno smorzamento modale. In particolare si studierà la dinamica del velivolo nel solo piano longitudinale e pertanto solo le forme modali simmetriche saranno considerate nel modello flessibile. A partire da una condizione di trim di volo orizzontale e livellato, inizialmente ottenuta sul modello rigido ed in seguito sul modello elastico, si ricava il modello linearizzato della dinamica longitudinale del velivolo elastico. Infine si valuterà l'influenza della flessibilità, ovvero dei modi elastici, sulla parte rigida della dinamica in termini di variazione di pulsazione propria e di smorzamento dei classici modi longitudinali.

## 4.1 Modello dinamico longitudinale

Prima di ricavare le equazioni che descrivono la sola dinamica longitudinale si riscrivono in una forma più opportuna le (2.44) e (2.45):

$$\begin{aligned}
\dot{U} &= -QW + VR - g\sin\theta + \frac{F_{A_{X_R}} + F_{A_{X_E}} + F_{A_{X_P}}}{m} \\
\dot{V} &= -RU + PW + g\cos\theta\sin\phi + \frac{F_{A_{Y_R}} + F_{A_{Y_E}} + F_{A_{Y_P}}}{m} \\
\dot{W} &= -PV + QU + g\cos\theta\cos\phi + \frac{F_{A_{Z_R}} + F_{A_{Z_E}} + F_{A_{Z_P}}}{m}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{I_{YY}}((I_{ZZ} - I_{XX})PR + I_{XZ}(R^2 - P^2) + M_{A_R} + M_{A_E} + M_P) \tag{4.2}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{P} \\ \dot{R} \end{Bmatrix} = \frac{1}{I_{XX}I_{ZZ} - I_{XZ}^2} \begin{bmatrix} I_{ZZ} & I_{XZ} \\ I_{XZ} & I_{XX} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{XZ}PQ + (I_{YY} - I_{ZZ})RQ + L_{A_R} + L_{A_E} + L_P \\ -I_{XZ}QR + (I_{XX} - I_{YY})PQ + N_{A_R} + N_{A_E} + N_R \end{Bmatrix}$$

Infine si richiamano le equazioni che legano gli angoli di Eulero ai ratei angolari rigidi:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= P + Q\sin\phi\tan\theta + R\cos\phi\tan\theta \\
\dot{\theta} &= Q\cos\phi - R\sin\phi \\
\dot{\psi} &= (Q\sin\phi + R\cos\phi)\sec\theta
\end{aligned}$$

Per ultimo si riporta l'equazione che lega l'altitudine alla velocità inerziale del velivolo:

$$\dot{H} = U \sin\theta - V \sin\phi \cos\theta - W \cos\phi \cos\theta$$

Nell'ipotesi in cui tutte le variabili nel piano latero-direzionale siano costantemente nulle si può considerare il sistema di equazioni (4.3) valido per lo studio della dinamica longitudinale del velivolo flessibile.

$$\begin{aligned}
\dot{U} &= -QW - g\sin\theta + \frac{F_{A_{X_R}} + F_{A_{X_E}} + F_{A_{X_P}}}{m} \\
\dot{W} &= QU + g\cos\theta + \frac{F_{A_{Z_R}} + F_{A_{Z_E}} + F_{A_{Z_P}}}{m} \\
\dot{Q} &= \frac{1}{I_{YY}}(M_{A_R} + M_{A_E} + M_P) \\
\dot{\theta} &= Q \\
\dot{H} &= U\sin\theta - W\cos\theta \\
\ddot{\eta}_i &= -2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i - \omega_i^2\eta_i + \frac{Q_i}{\boldsymbol{m_i}} \qquad \text{con} \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Il sistema (4.3) integrato nel tempo ritorna l'evoluzione dei gradi di libertà, rigidi ed elastici, nel piano longitudinale.
Per l'analisi dinamica del modello flessibile del velivolo è necessario linearizzare tale modello nell'intorno di una configurazione di equilibrio, ad esempio mediante il metodo delle piccole perturbazioni. La ricerca delle condizioni di equilibrio determina il problema del trim che è affrontato nel paragrafo 4.2.

## 4.2 Trim

Il problema del trim consiste nella ricerca di una condizione di volo in cui il sistema velivolo si trovi in equilibrio. Nelle simulazioni dinamiche la risoluzione del trim permette di determinare una condizione iniziale stazionaria rispetto alla quale è più facile individuare l'effetto di determinati input. Inoltre i punti di trim sono fondamentali per la linearizzazione, sia analitica che numerica, del modello dinamico nell'intorno della condizione trovata e dunque permettono di affrontare l'analisi di stabilità del sistema.
Per il velivolo analizzato la ricerca del trim si divide in due punti:

1. trim rigido;

2. trim elastico.

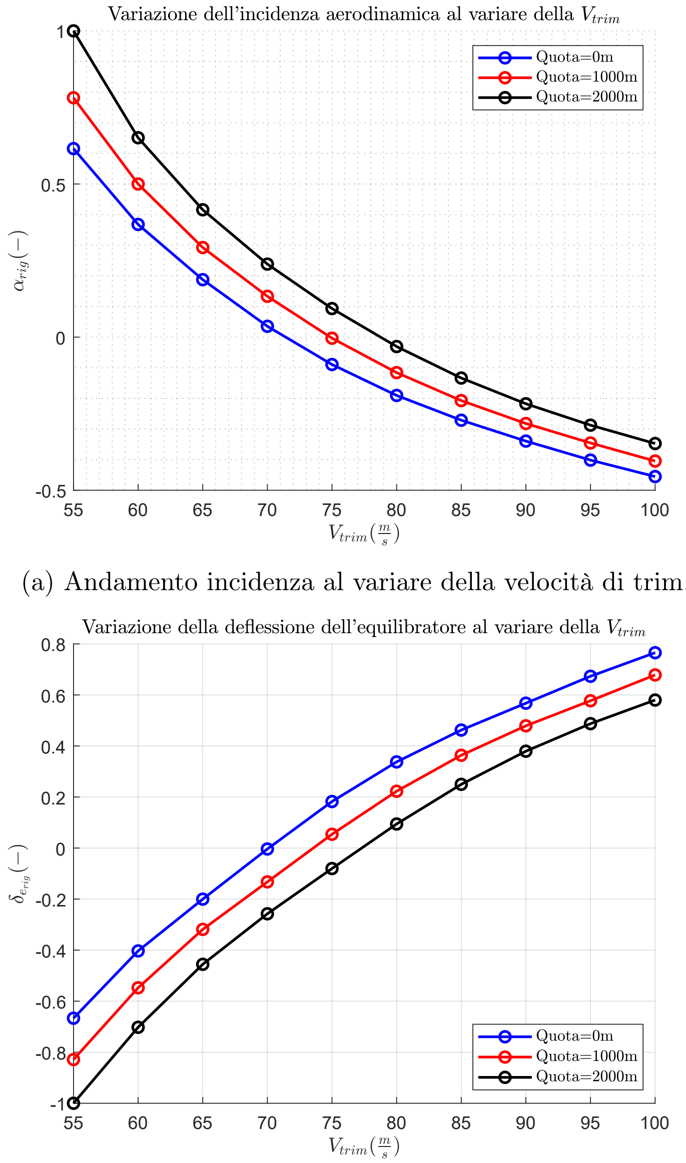
Nel caso del trim rigido si determinano i punti di trim del sistema velivolo considerato rigido e dunque si trascura l'effetto della flessibilità della struttura. Nel caso del trim elastico si ricercano le condizioni di trim per il velivolo modellato come sistema flessibile e dunque si considerano anche gli effetti delle deformazioni strutturali. In particolare il trim flessibile è implementato su un modello matematico dove la parte rigida è descritta da un sistema non lineare di equazioni, con un modello aerodinamico non lineare, mentre la parte elastica è rappresentata da un sistema lineare di equazioni. L'algoritmo utilizzato per la ricerca dei punti di trim in una condizione di volo orizzontale e livellato è descritto in B.

## 4.2.1 Trim rigido

Nel trim rigido in condizione di volo orizzontale e livellato le incognite sono:

1. $\alpha_{rig}$;
2. $\delta_{e_{rig}}$;
3. *Power level angle* $(PLA)$[1].

Si riportano in figura 4.1 le incidenze aerodinamiche e le deflessioni dell'equilibratore di trim, opportunamente normalizzate, per diverse quote e velocità.




(a) Andamento incidenza al variare della velocità di trim.

(b) Deflessione dell'equilibratore al variare della velocità.

Figura 4.1: Parametri di trim per una condizione di volo rettilineo orizzontale.

In figura 4.2 si riporta invece l'andamento della manetta richiesta, in termini di *Power Level Angle*, al variare della velocità di trim e della quota.

[1]Posizione della manetta

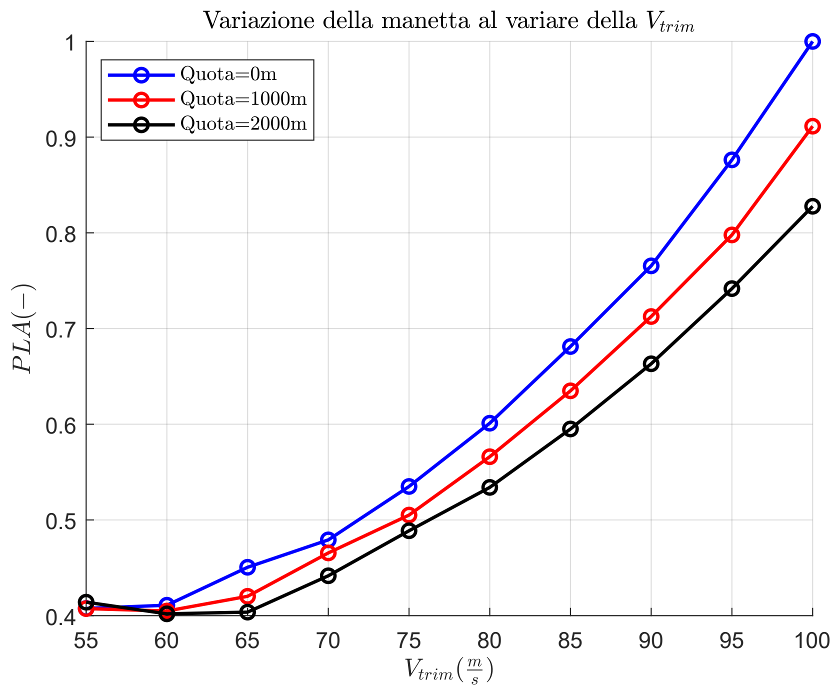


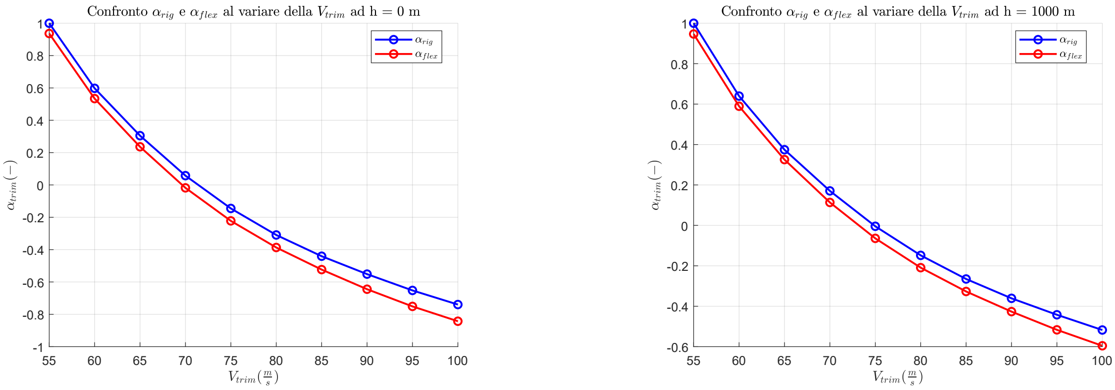

Figura 4.2: $PLA$ al variare della velocità.

### 4.2.2 Trim elastico

Nel problema del trim del modello elastico le incognite da determinare aumentano ed il loro numero è legato ai modi elastici che sono integrati nel modello flessibile. Dunque alle incognite del problema del trim del modello rigido si aggiunge l'incognita coordinata generalizzata, $\boldsymbol{\eta_i}$, ovvero la variabile in cui è scritta l'i-esima equazione che descrive la dinamica dell'i-esimo grado di libertà flessibile. Si ricorda che lo spostamento elastico di un punto di una struttura può essere espresso mediante gli $n$ modi di vibrare liberi della struttura stessa. Pertanto lo spostamento elastico in direzione $Z$ di un punto appartenente alla struttura può essere calcolato come:

$$d_{e_Z}(y,t) = \sum_{i=1}^{n} v_{i_Z}(y)\eta_i \tag{4.4}$$

Poichè le forme modali sono note, in quanto è stata eseguita l'analisi modale della struttura, e dal trim elastico si ricava il valore delle coordinate generalizzate è possibile risalire allo spostamento elastico di un qualsiasi punto della struttura. Si riportano nelle figure 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 un confronto tra i punti di trim nel caso di velivolo rigido e di velivolo flessibile a quota 0 m e 1000 m. Tutti i grafici sono normalizzati con opportune grandezze ad un valore unitario. In particolare il modello elastico da trimmare è ottenuto integrando solo il primo modo simmmetrico, corrispondente alla prima flessionale dell'ala fuori dal piano, al modello rigido. Si noti che in figura 4.6 la coordinata generalizzata assume segno negativo poichè valutata nel riferimento body del velivolo (figura 2.2), nel quale l'asse $Z$ è opposto all'asse $Z$ del riferimento strutturale (figura 3.2). Pertanto l'ala si inflette verso l'alto.
In figura 4.4 è possibile osservare come il velivolo risulti essere meno stabile. Ciò è verificabile analizzando la derivata $C_{M_\alpha}$ nel modello residualizzato in cui si osserva una sua riduzione, par 4.5.



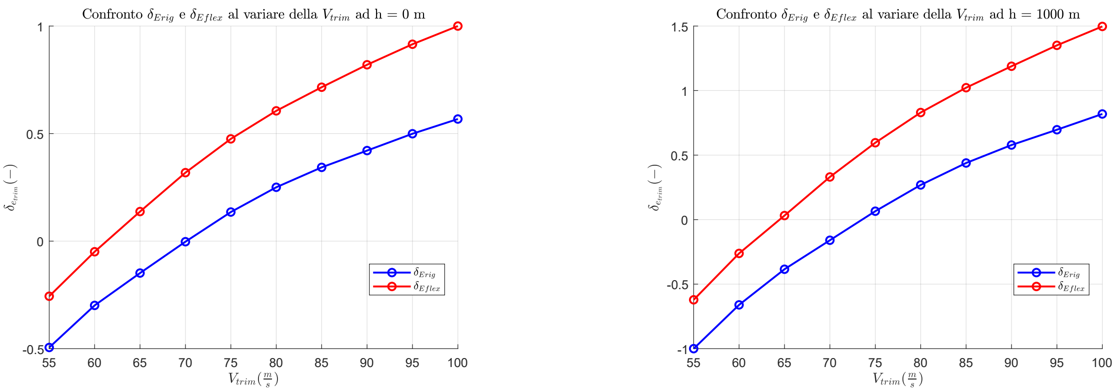

(a) Confronto incidenza aerodinamica modello rigido e flessibile a quota $0m$.

(b) Confronto incidenza aerodinamica modello rigido e flessibile a quota 1000 m.

Figura 4.3: Confronto incidenza aerodinamica al variare della quota.

## 4.3 Analisi dinamica

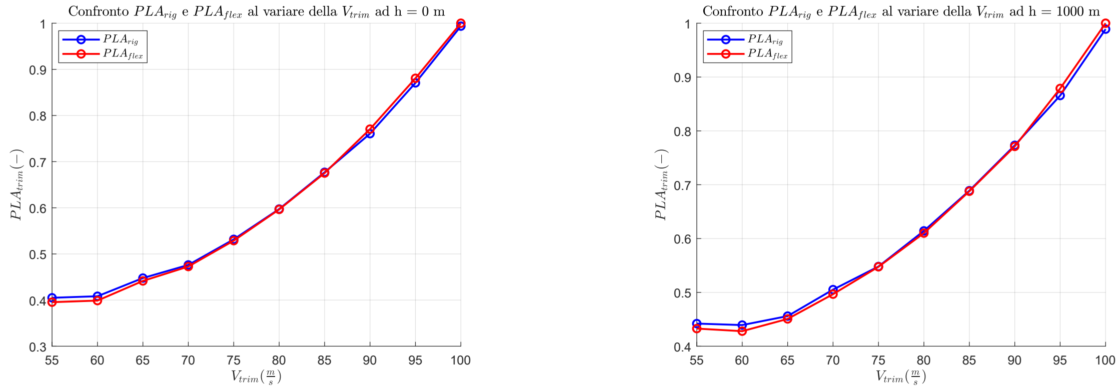
Un'analisi di stabilità dinamica tende ad essere limitata in scopo, nel senso che produce solo un'analisi qualitativa della natura del modo nell'intorno del punto di equilibrio di un sistema. Più specificatamente un'analisi dinamica può chiarire se l'equilibrio sia stabile, asintoticamente stabile o instabile. Il tempo non gioca nessun ruolo in un'analisi di stabilità infatti l'analisi tende ad essere limitata nei casi in cui i coefficienti delle equazioni siano tempo invarianti e le equazioni del moto possano essere ridotte ad un sistema agli autovalori. A partire da un punto di trim è possibile linearizzare il sistema di equazioni non lineari (4.3) ottenendo un sistema di equazioni lineare nelle variabili di perturbazioni. Per avere delle informazioni che vanno oltre la definizione di stabilità come ad esempio la risposta del velivolo bisogna integrare le equazioni del moto e ciò risulta essere ancora più importante nel caso in cui si studi la dinamica di un velivolo flessibile.




(a) Confronto deflessione equilibratore modello rigido e flessibile a quota 0 m.

(b) Confronto deflessione equilibratore modello rigido e flessibile a quota 1000 m.

Figura 4.4: Confronto deflessione equilibratore al variare della quota.




(a) Confronto $PLA$ modello rigido e flessibile a quota 0 m.

(b) Confronto $PLA$ modello rigido e flessibile a quota 1000 m.

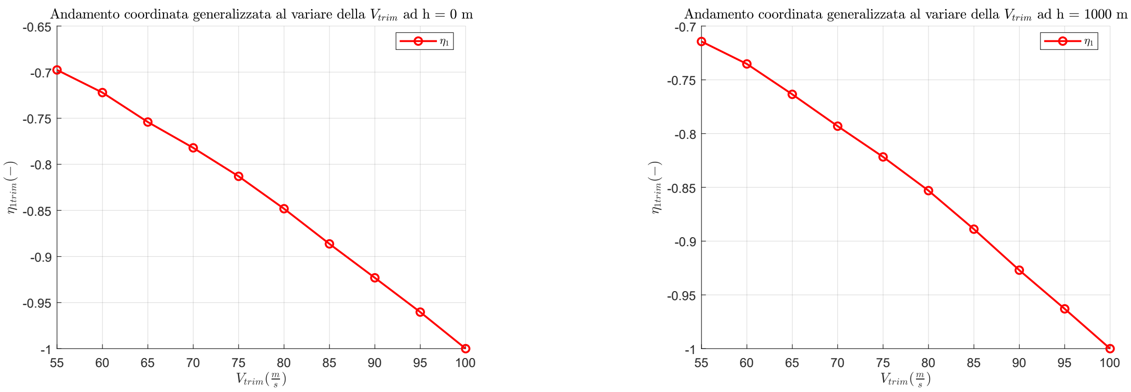
Figura 4.5: Confronto $PLA$ al variare della quota.

### 4.3.1 Analisi dinamica modello rigido

Si vogliono studiare i modi che caratterizzano la risposta dinamica longitudinale del modello di velivolo rigido per una condizione di volo orizzontale e livellato ad una velocità di $100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e ad una quota di $1000\,\mathrm{m}$. A partire dalla condizione iniziale si linearizza il modello dinamico longitudinale rigido che viene riportato, in termini di variabili perturbate, nel sistema (4.5).

$$\begin{cases} \dot{u} = -W_0 q - g\cos(\theta_0)\theta + \dfrac{f_{A_X} + f_{P_X}}{m} \\ \dot{\alpha} = q - \dfrac{g\sin(\theta_0)\theta}{U_0} + \dfrac{f_{A_Z} + f_{P_Z}}{mU_0} \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \dfrac{m_A + m_P}{I_{YY}} \end{cases} \tag{4.5}$$

È evidente che la scelta del vettore di stato ricada su $\boldsymbol{x_r} = \begin{bmatrix} u & \alpha & \theta & q \end{bmatrix}$. È possibile sviluppare le componenti di forze e momenti aerodinamici e propulsivi considerando un modello linearizzato come riportato in (4.6).




(a) Andamento coordinata generalizzata $\eta_1$ ad h = 0 m.

(b) Andamento coordinata generalizzata $\eta_1$ ad h = 1000 m.

Figura 4.6: Andamento della deflessione al variare della quota.

$$
\begin{cases}
\dfrac{f_{A_X}+f_{P_X}}{m} = \left(X_u + X_{p_u}\right)u + X_\alpha \alpha + X_q q + X_{\delta_e}\delta_e + X_T \Pi_T \\
\dfrac{f_{A_Z}+f_{P_Z}}{m} = \left(Z_u + Z_{p_u}\right)u + Z_\alpha \alpha + Z_{\dot\alpha}\dot\alpha + Z_q q + Z_{\delta_e}\delta_e + Z_T \Pi_T \\
\dfrac{m_A+m_P}{I_{YY}} = M_u u + M_\alpha \alpha + M_q q + M_{\dot\alpha}\dot\alpha + M_{\delta_e}\delta_e
\end{cases} \tag{4.6}
$$

Per lo studio della stabilità dinamica di un sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio è sufficiente analizzare gli autovalori della matrice di stato. In generale lo studio della stabilità dinamica di un velivolo rigido è condotto proiettando le equazioni del moto linearizzate su un sistema di riferimento assi-stabilità. Tale scelta del sistema di riferimento permette di semplificare ulteriormente le equazioni del moto. Tuttavia poichè si vuole studiare il comportamento dinamico del modello di velivolo flessibile anche le equazioni che rappresentano la dinamica della parte rigida vengono proiettate nel riferimento body. Inoltre, poiché le derivate di stabilità sono ricavate in un riferimento assi stabilità è necessario riportare tali derivate in un riferimento body, si veda appendice A. Le derivate nel riferimento body sono indicate con il pedice b. La matrice di stato del modello dinamico rigido è riportato in 4.7.

$$
A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \tag{4.7}
$$

Con

$$
A_{11} = (X_{u_b} + X_{pu_b}) + \frac{X_{\dot\alpha_b}\left(Z_{u_b} + Z_{pu_b}\right)}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}} \qquad A_{12} = X_{\alpha_b} + \frac{X_{\dot\alpha_b}\left(Z_{\alpha_b}\right)}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}}
$$

$$
A_{13} = -g\cos\theta_0 - \frac{X_{\dot\alpha_b}\left(g\sin\theta_0\right)}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}} \qquad A_{14} = X_{q_b} - W_{0_b} + \frac{X_{\dot\alpha_b}\left(U_{0_b} + Z_{q_b}\right)}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}}
$$

$$
A_{21} = \frac{Z_{u_b} + Z_{pu_b}}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}} \qquad A_{22} = \frac{Z_{\alpha_b}}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}} \qquad A_{23} = -\frac{g\sin\theta_0}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}}
$$

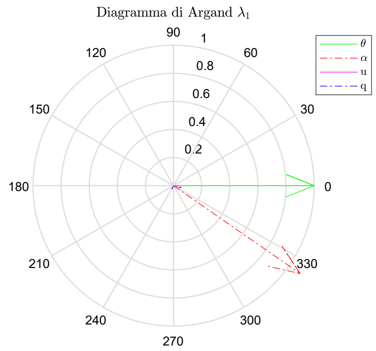
$$
A_{24} = \frac{U_{0_b} + Z_{q_b}}{U_{0_b} - Z_{\dot\alpha_b}} \approx \frac{U_{0_b}}{U_{0_b}} = 1 \qquad A_{31} = 0 \qquad A_{32} = 0 \qquad A_{33} = 0 \qquad A_{34} = 1
$$

$$
A_{41} = M_{u_b} \qquad A_{42} = M_{\alpha_b} \qquad A_{43} = 0 \qquad A_{44} = M_{q_b}
$$

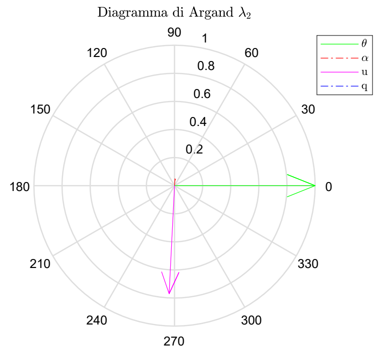
Ricavata la matrice di stato si procede con la risoluzione del problema agli autovalori in Matlab. I risultati di tale analisi sono riportati nella tabella 4.1. La risposta modale consiste di due modi oscillatori stabili, uno leggermente smorzato a bassa frequenza e uno adeguatamente smorzato ad una frequenza maggiore. Nella tabella 4.1 gli autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono normalizzati mentre le pulsazioni e gli smorzamenti sono adimensionalizzati rispettivamente con $\omega_{n_1}$ e $\zeta_1$ . Per analizzare ulteriormente i modi sono riportati in figura 4.7 i diagrammi di Argand. Gli autovettori riportati nel diagramma sono quelli corrispondenti agli autovalori la cui parte immaginaria è negativa e le variabili sono rapportate rispetto a $\theta$.

Tabella 4.1: Caratteristiche dei modi della dinamica longitudinale del velivolo rigido

| | |
|---|---|
| $\lambda_1$ $[-]$ | $-0.4809 + i0.8768$ |
| $\omega_{n_1}[-]$ | 1 |
| $\zeta_1$ | 1 |
| $\lambda_2$ $[-]$ | $-0.0136 + i0.999$ |
| $\omega_{n_2}[-]$ | 0.0377 |
| $\zeta_2$ | 0.0282 |




(a) Diagramma di Argand relativo a $\lambda_1$.




(b) Diagramma di Argand relativo a $\lambda_2$.

Figura 4.7: Diagrammi di Argand dinamica longitudinale del modello rigido.

Nel diagramma di Argand di figura 4.7a relativo a $\lambda_1$ si osserva una componente della velocità molto piccola e ciò suggerisce che il modo avviene praticamente a velocità costante. Le componenti rilevanti sono $\alpha$ e $\theta$ mentre $q$ è poco visibile. Si può ricondurre questo modo al classico modo di corto periodo caratterizzato da un'alta frequenza e da uno smorzamento adeguato. Nel diagramma di figura 4.7b relativo a $\lambda_2$ le componenti rilevanti sono relativo a $u$ e a $\theta$ mentre il contributo relativo ad $\alpha$ è trascurabile. Il contributo relativo a $q$ è poco rilevante in quanto la frequenza modale è relativamente bassa. Dunque è possibile riconoscere tale modo come fugoide.

### 4.3.2 Analisi dinamica del modello flessibile

Per l'analisi dinamica del modello flessibile è necessario far riferimento ad un sistema di equazioni linearizzate che contempli anche le variabili coordinate generalizzate perturbate. La condizione di riferimento analizzata è la stessa su cui si è condotta l'analisi del modello rigido. L'equazione che descrive la dinamica dell'i-esimo grado di libertà in termini di variabili perturbate è riportata nell'equazione (4.8).

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{i}} + 2\zeta_i\omega_i\dot{\boldsymbol{\eta}}_i + \omega_i^2\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\mathbf{q_i}}{\boldsymbol{m_i}} \tag{4.8}$$

Si osservi che la (2.39) e la (4.8) differiscono per due motivi:

1. $\boldsymbol{\eta_i}$ è la perturbazione rispetto ad una condizione di riferimento mentre $\eta_i$ è il valore totale;

2. in (4.8) è presente il termine $2\zeta_i\omega_i\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{i}}$ che rappresenta il termine viscono o smorzante.

Il sistema di equazioni lineare nelle incognite perturbazioni è presentato in (4.9).

$$\begin{cases} \dot{u} = -W_0 q - g\cos(\theta_0)\theta + \dfrac{f_{A_X} + f_{E_X} + f_{P_X}}{m} \\ \dot{\alpha} = q - \dfrac{g\sin(\theta_0)\theta}{U_0} + \dfrac{f_{A_Z} + f_{E_Z} + f_{P_Z}}{mU_0} \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \dfrac{m_A + m_E + m_P}{I_{YY}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{i}} = -2\zeta_i\omega_i\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{i}} - \omega_i^2\boldsymbol{\eta_i} + \dfrac{\mathbf{q_i}}{\boldsymbol{m_i}} \end{cases} \tag{4.9}$$

Avendo integrato nel modello flessibile solo il primo modo di vibrare si pone $i = 1$. L'equazione che descrive la dinamica dell'unico grado di libertà elastico pertubato considerato è:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{1}} + 2\zeta_1\omega_1\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{1}} + \omega_1^2\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{q_1}}{\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}}$$

Volendo scrivere il sistema (4.9) in termini di equazioni differenziali del primo ordine è necessario applicare un cambio di coordinate.

$$\begin{cases} \chi_1 = \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{1}} \\ \chi_2 = \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{1}} \end{cases} \tag{4.10}$$

Applicando il cambiamento di coordinate si giunge al sistema usato per l'analisi dinamica del modello flessibile riportato in (4.11).

$$\begin{cases} \dot{u} = -W_0 q - g\cos(\theta_0)\theta + \dfrac{f_{A_X} + \boldsymbol{f_{E_X}} + f_{P_X}}{m} \\ \dot{\alpha} = q - \dfrac{g\sin(\theta_0)\theta}{U_0} + \dfrac{f_{A_Z} + \boldsymbol{f_{E_Z}} + f_{P_Z}}{mU_0} \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \dfrac{m_A + \boldsymbol{m_E} + m_P}{I_{YY}} \\ \dot{\chi}_1 = \chi_2 \\ \dot{\chi}_2 = -2\zeta_1\omega_1\chi_2 - \omega_1^2\chi_1 + \dfrac{\boldsymbol{q}_{\mathbf{1}}}{\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}} \end{cases} \tag{4.11}$$

Le equazioni dinamiche che descrivono l'evoluzione dei gradi di libertà rigidi differiscono dalle (4.5) per i termini in grassetto ($\boldsymbol{f_{E_X}}, \boldsymbol{f_{E_Z}}$ ed $\boldsymbol{m_E}$). Tali termini racchiudono l'effetto dei gradi di libertà elastici sui gradi di libertà rigidi e possono essere espressi secondo la (4.12).

$$\begin{cases} \dfrac{f_{E_X}}{m} = \dfrac{q_\infty S_w \sum_{i=1}^{n}\Big(C_{X_{\eta_i}}\eta_i + C_{X_{\dot{\eta}_i}}\dot{\eta}_i\Big)}{m} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(X_{\eta_i}\eta_i + X_{\dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i\Big) \\ \dfrac{f_{E_Z}}{m} = \dfrac{q_\infty S_w \sum_{i=1}^{n}\Big(C_{Z_{\eta_i}}\eta_i + C_{Z_{\dot{\eta}_i}}\dot{\eta}_i\Big)}{m} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(Z_{\eta_i}\eta_i + Z_{\dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i\Big) \\ \dfrac{m_E}{I_{YY}} = \dfrac{q_\infty S_w \sum_{i=1}^{n}\Big(C_{M_{\eta_i}}\eta_i + C_{M_{\dot{\eta}_i}}\dot{\eta}_i\Big)}{I_{YY}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(M_{\eta_i}\eta_i + M_{\dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i\Big) \end{cases} \tag{4.12}$$

Con

$$\begin{aligned} C_{X_{\eta_i}} &= C_{L_{\eta_i}}\sin\alpha \qquad C_{X_{\dot{\eta}_i}} &&= C_{L_{\dot{\eta}_i}}\sin\alpha \\ C_{Z_{\eta_i}} &= -C_{L_{\eta_i}}\cos\alpha \qquad C_{Z_{\dot{\eta}_i}} &&= -C_{L_{\dot{\eta}_i}}\cos\alpha \end{aligned}$$

I coefficienti $C_{L_{\eta_i}}$, $C_{L_{\dot{\eta}_i}}$, $C_{M_{\eta_i}}$ e $C_{M_{\dot{\eta}_i}}$ si ottengono adimensionalizzando i contributi elastici sulla portanza e sul momento di beccheggio ($L_E$ ed $M_E$).
Anche la componente della forza generalizzata perturbata, $\boldsymbol{q_i}$, può essere sviluppata linearmente in funzione delle variabili di perturbazioni rigide ed elastiche come riportato in (4.13)

$$\frac{\boldsymbol{q_i}}{\boldsymbol{m_i}} = \Xi_{i_u}u + \Xi_{i_\alpha}\alpha + \Xi_{i_q}q + \Xi_{i_{\delta_e}}\delta_e + \sum_{j=1}^{N}\Big(\Xi_{i_{\eta_j}}\eta_j + \Xi_{i_{\dot{\eta}_j}}\dot{\eta}_j\Big) \tag{4.13}$$

Con

$$\Xi_{i_\bullet} = \frac{C_{Q_{i_\bullet}} q_{infty} S_w c_w}{\boldsymbol{m_i}} \qquad \text{con } \bullet = u, \alpha, q, \delta_e, \eta_j, \dot{\eta}_j \tag{4.14}$$

Una volta sviluppato linearmente i termini che compaiono alla destra delle equazioni del moto si assembla la matrice di stato del modello elastico che ne permette di studiare la stabilità. Il vettore di stato del modello flessibile non è altro che un'espansione del vettore di stato del sistema rigido:

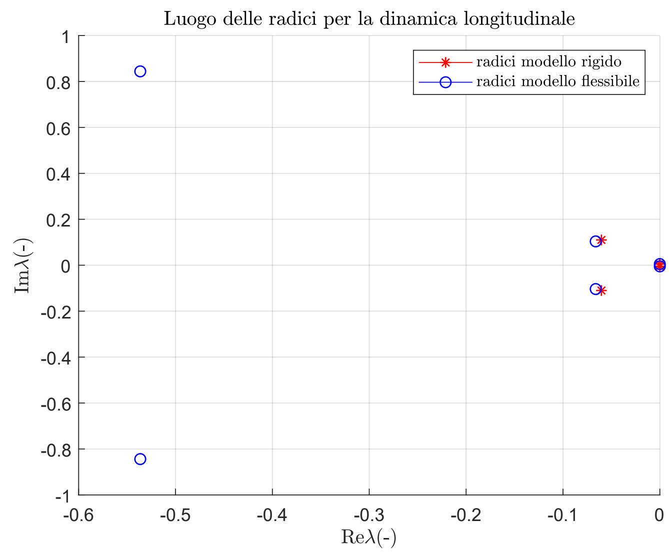
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x_r}^T & \boldsymbol{x_E}^T\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}u & \alpha & \theta & q & \chi_1 & \chi_2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}u & \alpha & \theta & q & \eta_1 & \dot{\eta}_1\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

La matrice di stato del modello flessibile può essere partizionata a blocchi in 4 sotto-matrici come riportato in(4.16).

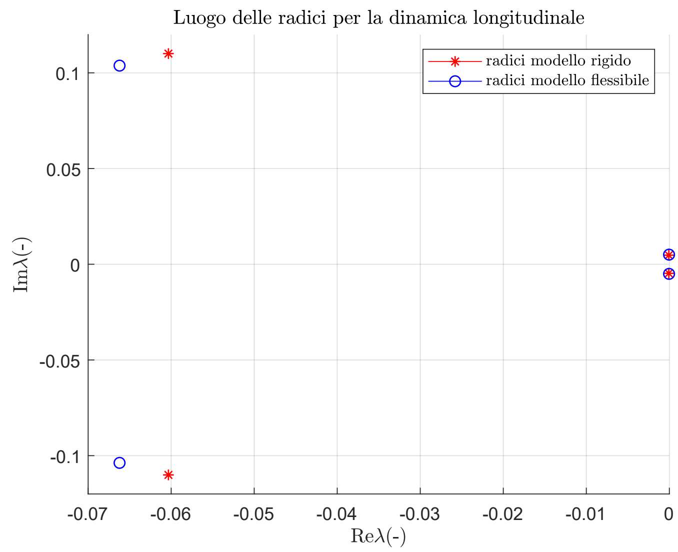
$$A_E = \begin{bmatrix} A_{RR} & | & A_{RE} \\ -- & -- & -- \\ A_{ER} & | & A_{EE} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Dove

- $A_{RR} =$ coincide con la matrice di stato del velivolo rigido;
- $A_{RE} = \begin{bmatrix} X_{\eta_1} + \dfrac{X_{\dot{\alpha}_b}Z_{\eta_1}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} & X_{\dot{\eta}_1} + \dfrac{X_{\dot{\alpha}_b}Z_{\dot{\eta}_1}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} \\ \dfrac{Z_{\eta_1}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} & +\dfrac{Z_{\dot{\eta}_1}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} \\ 0 & 0 \\ M_{\eta_1} & M_{\dot{\eta}_1} \end{bmatrix}$




(a) Luogo delle radici del modello rigido e del modello flessibile.




(b) Particolare modi rigidi: Corto periodo e fugoide per modello rigido e flessibile.

Figura 4.8: Luogo delle radici.

- $A_{ER} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{1_u} & \Xi_{1_\alpha} & 0 & \Xi_{1_q} \end{bmatrix}$

- $A_{EE} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Xi_{1_{\eta_1}} - \omega_1^2 & \Xi_{1_{\dot{\eta}_1}} - 2\zeta_1\omega_1 \end{bmatrix}$

La matrice di stato flessibile risultante è di ordine sei e pertanto sono sei gli autovalori, di cui quattro sono relativi ai modi da corpo rigido e due relativi al modo elastico introdotto. Ai due modi da corpo rigido identificati nell'analisi del modello rigido si aggiunge un terzo modo oscillatorio rappresentativo della dinamica indotta dal modo elastico. L'obiettivo dell'analisi dinamica effettuata sul modello elastico è analizzare come i modi da corpo rigido vengono influenzati dalla presenza del modo elastico integrato nel modello flessibile. Nella tabella 4.2 si riportano le caratteristiche dei modi della dinamica longitudinale del modello flessibile.

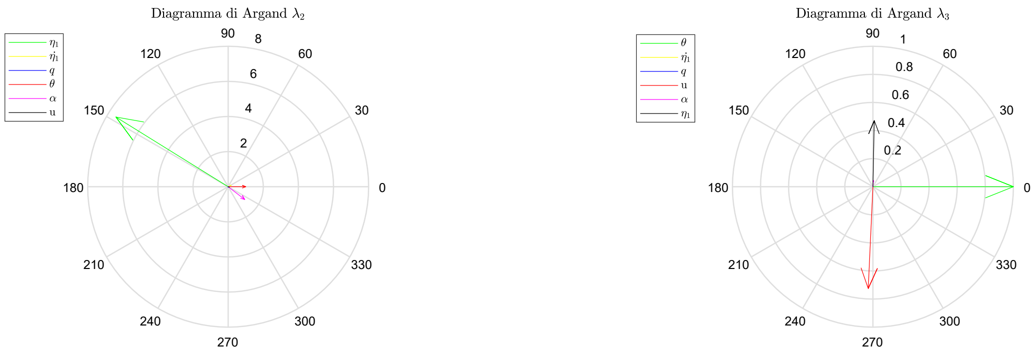
Tabella 4.2: Caratteristiche dei modi della dinamica longitudinale del modello flessibile

| | |
|---|---|
| $\lambda_E[-]$ | $-0.5364 + 0.8440i$ |
| $\omega_E[-]$ | 1 |
| $\zeta_E$ | 1 |
| $\lambda_1[-]$ | $-0.5364 + 0.8440i$ |
| $\omega_1[-]$ | 0.123 |
| $\zeta_1$ | 1.003 |
| $\lambda_2[-]$ | $-0.0071 + 1.0000i$ |
| $\omega_2[-]$ | 0.005 |
| $\zeta_2$ | 0.0132 |

In tabella 4.2 gli autovalori $\lambda_E$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono normalizzati mentre le caratteristiche dei modi, pulsazioni e smorzamento modale, sono adimensionalizzate rispettavamente con $\omega_E$ e $\zeta_E$. Inoltre con il pedice $E$ si è indicato il modo oscillatorio associato al modo elastico strutturale integrato nel modello flessibile e con i pedici *1* e *2* si fa riferimento ai modi da corpo rigido.
Volendo sottolineare l'effetto dell'elasticità sui *modi da corpo rigido* si può dire che per entrambi i modi si registra una diminuzione della pulsazione ed un incremento dello smorzamento. Tuttavia la presenza del modo elastico, caratterizzato da una pulsazione di un ordine di grandezza superiore a quella del modo rigido più veloce, non fa spostare di molto le radici dei modi rigidi nel luogo delle radici. In figura 4.8 è riportato il luogo delle radici del modello flessibile e del modello rigido. Si noti che gli autovalori riportati sul piano sono tutti adimensionalizzati con il modulo dell'autovalore di modulo massimo, ovvero dell'autovalore del modo elastico. Dai diagrammi di Argand, figura 4.9, è possibile osservare come gli stati rappresentativi del grado di libertà elastico influenzino i modi da corpo rigido. In figura 4.9a si riporta il diagramma di Argand relativo al modo di corto periodo e si nota come il contributo legato al grado di libertà elastico contribuisca molto alla risposta dinamica. In figura 4.9b, rappresentante il diagramma di Argand del modo fugoide, si nota come le componenti rilevanti siano $u$ e $\theta$ ma è presente anche un contributo elastico dovuto a $\eta$.
In figura 4.10 è riportato il diagramma di Argand relativo al modo elastico. È possibile osservare che le uniche componenti rilevanti sono $\eta$ ed $\dot{\eta}$ mentre tutte le altre componenti sono poco visibili. È possibile identificare tale modo come un modo puramente elastico dove tutti i gradi di libertà rigidi sono costanti.

## 4.4 Risposta ad un comando di equilibratore

Nella condizione di equilibrio precedentemente analizzata ($V = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e $h = 1000\,\mathrm{m}$) si mette a confronto la risposta dinamica del modello rigido ed elastico del velivolo. Si riportano in figura 4.11 gli andamenti della velocità angolare di beccheggio e dell'incidenza aerodinamica dei due modelli.
In particolare la velocità angolare di beccheggio del modello flessibile è misurata rispetto al baricentro ed è valutata come riportato nell'equazione (4.17).




(a) Diagramma di Argand relativo al modo corto periodo.

(b) Diagramma di Argand relativo al modo fugoide.

Figura 4.9: Diagrammi di Argand dei modi da corpo rigido.

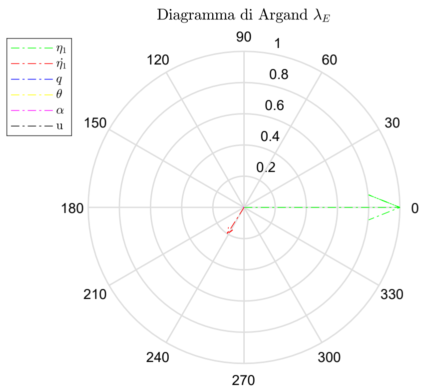


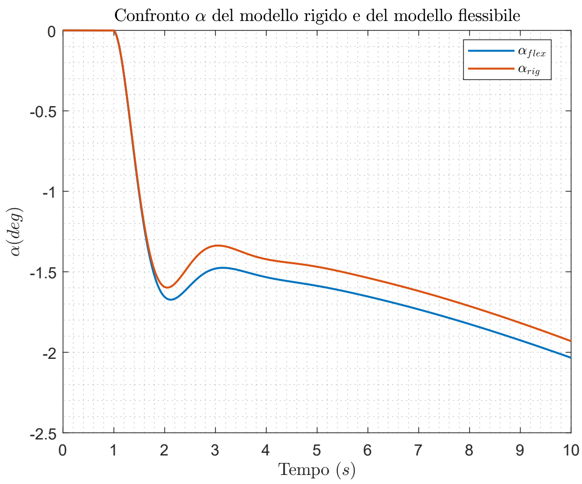

Figura 4.10: Diagramma di Argand relativo al modo elastico.

$$
\begin{aligned}
q_{flex_{CG}}(x_{CG}, t) &= q_{rig}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{i_y}(x_{CG})\dot{\eta}_i(t) \\
&= q_{rig}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\theta}_{E_i}(x_{CG}, t)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

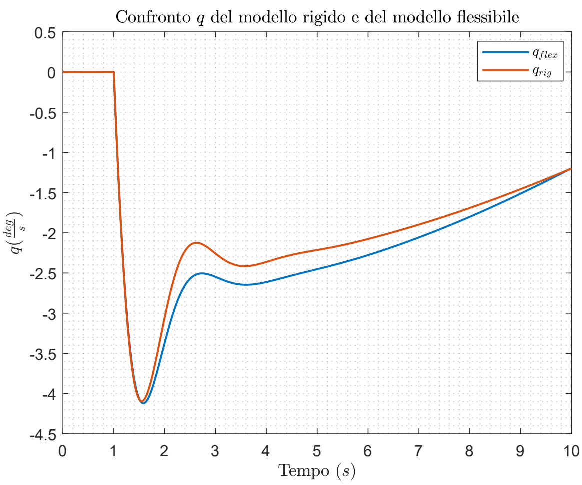
Nella (4.17) si evidenzia come la velocità angolare di beccheggio misurata in prossimità del baricentro sia data dalla somma di una parte rigida, legata al grado di libertà $q_{rig}$, ed una parte elastica dovuta al rateo di deformazione torsionale, $\dot{\theta}_{E_i}$, indotto dall'i-esimo modo di vibrare della struttura. Poichè nel modello flessibile è integrato un solo modo di vibrare si ha:

$$
\begin{aligned}
q_{flex_{CG}}(x_{CG}, t) &= q_{rig}(t) + \theta_{1_y}(x_{CG})\dot{\eta}_1(t) \\
&= q_{rig}(t) + \dot{\theta}_{E_1}(x_{CG}, t)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

In figura 4.11 si osserva che la risposta del modello flessibile presenta un picco maggiore ed è leggermente in ritardo rispetto alla controparte rigida.




(a) Confronto incidenza aerodinamica modello rigido e flessibile.




(b) Confronto velocità angolare di beccheggio modello rigido e flessibile.

Figura 4.11: Confronto tra la risposta del modello rigido e flessibile ad un gradino di equilibratore.

## 4.5 Correzioni elastico-statico

Il modello di velivolo elastico ottenuto può essere ricondotto ad uno di ordine ridotto attraverso l'operazione di *residualizzazione* dei gradi di libertà elastici. Tale operazione permette di ottenere un modello in cui è inclusa solo la dinamica dei gradi di libertà rigidi. La flessibilità influenza la dinamica del velivolo attraverso lo *spostamento statico* dei gradi di libertà elastici. Il modello così ottenuto, definito *modello elastico-statico*, è rappresentativo della dinamica da *corpo rigido* del velivolo nella sua configurazione in volo (*in-flight shape*) sotto carico contrariamente alla sua dinamica da corpo rigido nella configurazione indeformata. Tra gli effetti della deformazione statica si annoverano non solo una variazione della configurazione del velivolo ma anche una modifica delle derivate aerodinamiche e di controllo.
Per lo sviluppo di tale modello è necessario applicare delle correzioni, legate alle deformazioni statiche, alle derivate che caratterizzano il modello rigido. Per l'applicazione delle correzioni, poiché le equazioni del moto per il velivolo flessibile sono scritte in un riferimento body, è necessario che tutte le derivate relative al modello rigido siano riportate dal riferimento stabilità al riferimento body usato.

È possibile schematizzare il processo di correzione delle derivate come segue:

Coefficienti Corretti = (Coefficienti Rigidi) − (Correzioni Elastico-Statiche)

Le correzioni da apportare dipendono da diversi parametri:

1. Geometrici: Superficie alare e corda media aerodinamica;
2. Condizione di volo: Velocità e quota;
3. Strutturali: Massa modale e pulsazione dei modi di vibrare integrati nel modello.

Le correzioni elastiche sono inversamente proporzionali al quadrato della pulsazioni dei modi elastici considerati. Dunque se le frequenze sono alte, sintomatiche di una struttura rigida, le correzioni elastiche saranno piccole. Pertanto solo i modi di vibrare entro una certa soglia saranno significativi per le correzioni. In (4.20) si riportano le correzioni per le forze e i momenti che agiscono nel piano longitudinale.

$$\begin{bmatrix} C'_{X_R} \\ C'_{Z_R} \\ C'_{M_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{X_R} \\ C_{Z_R} \\ C_{M_R} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{X_\eta} \\ C_{Z_\eta} \\ C_{M_\eta} \end{bmatrix} \left[ q_\infty S_w \bar{c}_w \left[\boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{C_{Q_\eta}} - \boldsymbol{\Omega} \right]^{-1} \left[ q_\infty S_w \bar{c}_w \left[\boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{C_{Q_R}} \right] \tag{4.19}$$

Dove

- $[\boldsymbol{M}] = \text{diag}(m_1, \ldots, m_n)$ con $m_i$ = massa dell'i-esimo modo di vibrare del modello elastico;
- $[\boldsymbol{\Omega}] = \text{diag}(\omega_i^2, \ldots, \omega_n^2)$ con $\omega_i$ = pulsazione dell'i-esimo modo libero di vibrare;
- $\boldsymbol{C_{Q_R}} = \begin{bmatrix} C_{Q_{1_u}} & C_{Q_{1_\alpha}} & C_{Q_{1_q}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{Q_{1_n}} & C_{Q_{n_\alpha}} & C_{Q_{n_q}} \end{bmatrix}$;
- $\boldsymbol{C_{Q_\eta}} = \begin{bmatrix} C_{Q_{1_{\eta_1}}} & \ldots & C_{Q_{1_{\eta n}}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{Q_{n_{\eta_1}}} & \ldots & C_{Q_{n_{\eta n}}} \end{bmatrix}$.

Analogamente si procede per la correzione delle derivate di comando:

$$\begin{bmatrix} C'_{X_\delta} \\ C'_{Z_\delta} \\ C'_{M_\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{X_\delta} \\ C_{Z_\delta} \\ C_{M_\delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{X_\eta} \\ C_{Z_\eta} \\ C_{M_\eta} \end{bmatrix} \left[ q_\infty S_w \bar{c}_w \left[\boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{C_{Q_\eta}} - \boldsymbol{\Omega} \right]^{-1} \left[ q_\infty S_w \bar{c}_w \left[\boldsymbol{M}\right]^{-1} \boldsymbol{C_{Q_\delta}} \right] \tag{4.20}$$

Dove

- $\boldsymbol{C_{Q_u}} = \begin{bmatrix} C_{Q_{1_\delta}} & \ldots & C_{Q_{N_\delta}} \end{bmatrix}$

Considerando la condizione di volo analizzata per l'analisi dinamica del modello flessibile si hanno i seguenti valori delle correzioni:

$$\begin{cases} \Delta C_{X_u} \approx 0\,\mathrm{s\,m^{-1}} \\ \Delta C_{X_\alpha} = -0.0044 \\ \Delta C_{X_q} \approx 0\,\mathrm{s} \\ \Delta C_{X_{\delta_e}} \approx 0 \\ \Delta C_{Z_u} = -0{,}0002\,\mathrm{s\,m^{-1}} \\ \Delta C_{Z_\alpha} = -0.0949 \\ \Delta C_{Z_q} = -0{,}0001\,\mathrm{s} \\ \Delta C_{Z_{\delta_e}} \approx 0 \\ \Delta C_{M_u} = 0{,}0004\,\mathrm{s\,m^{-1}} \\ \Delta C_{M_\alpha} = 0.2326 \\ \Delta C_{M_q} = 0{,}0003\,\mathrm{s} \\ \Delta C_{M_{\delta_e}} \approx 0 \end{cases}$$

La correzione più significativa è relativa alla derivata $C_{M_\alpha}$ non solo per il valore assunto dalla correzione rispetto agli altri ma anche per il segno. Infatti la correzione da apportare è pari a $\Delta C_{M_\alpha} = +0.2326$ e quindi si ha una riduzione della derivata $C_{M_\alpha}$ e quindi una riduzione del margine di stabilità statica longitudinale del velivolo.

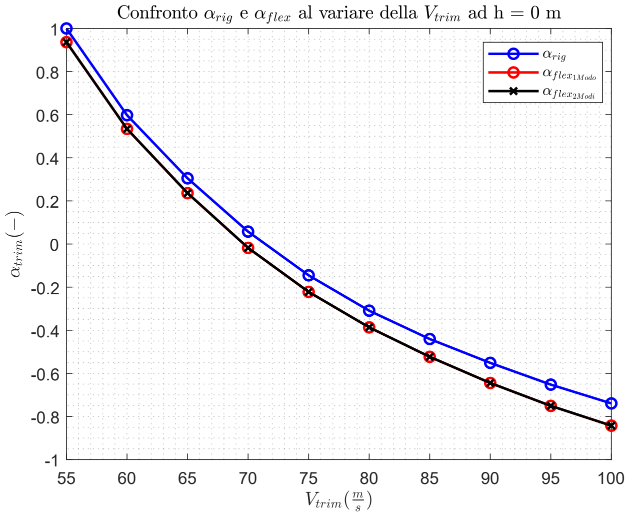
## 4.6 Analisi aggiuntiva del modello

Nei paragrafi precedenti si è analizzato il comportamento del modello flessibile del velivolo integrando solo il primo modo di vibrare della struttura, associato al primo modo flessionale dell'ala. Tale associazione è giustificata anche da una massa modale relativamente piccola che rimarca che il modo sia localizzato. L'obiettivo era quello di verificare un potenziale accoppiamento tra i modi elastici e rigidi che, tuttavia, non è stato riscontrato. Nel seguente paragrafo si analizza il comportamento del modello flessibile ottenuto con l'aggiunta di un ulteriore modo in particolare il nono riportato in figura 3.8. Tale forma modale, con massa modale confrontabile con quella del primo modo, è associabile al secondo modo flessionale alare fuori dal piano. Il vettore di stato del sistema flessibile ottenuto con l'integrazione di un'altra equazione che descrive la dinamica oscillatoria della norma forma modale ha dimensione pari ad otto. Applicando una trasformazione di coordinate, riportata nell'equazione (4.21), si considera come vettore di stato quanto riportato nella (4.22).

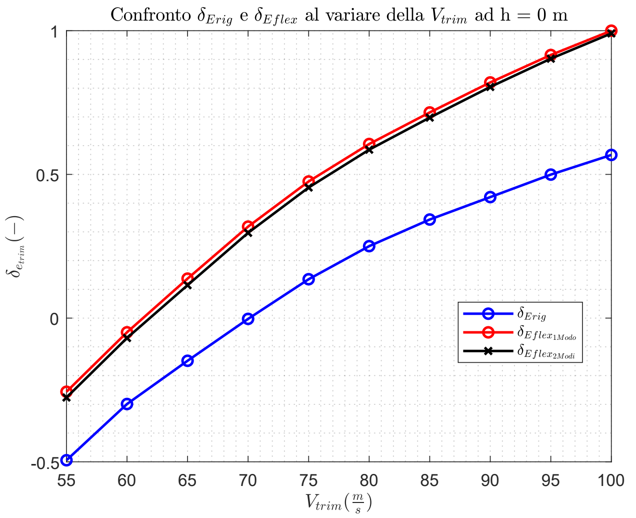
$$\begin{cases} \chi_1 = \boldsymbol{\eta_1} \\ \chi_2 = \boldsymbol{\eta_2} \\ \chi_3 = \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{1}} \\ \chi_4 = \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{2}} \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_r}^T & \boldsymbol{x_E}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u & \alpha & \theta & q & \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u & \alpha & \theta & q & \eta_1 & \eta_2 & \dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Il modello flessibile ottenuto integrando i due modi alari viene equilibrato in una condizione di volo orizzontale e livellato per diverse velocità e ad una quota di 0 m.




(a) Confronto incidenza aerodinamica modello rigido e flessibile a quota $0m$.




(b) Confronto deflessione equilibratore modello rigido e flessibile a quota $0m$ .

Figura 4.12: Confronto incidenza aerodinamica e deflessione equilibratore tra modello rigido e modello flessibile.

In figura 4.12 si può osservare come l'aggiunta di un ulteriore modo elastico alare influenzi poco le condizioni di equilibrio rispetto a quanto riportato nel paragrafo 4.2.2. Infine si riporta in figura 4.13 il luogo delle radici, opportunamente adimensionalizzato, del modello flessibile linearizzato nell'intorno della condizione di volo orizzontale e livellato ad una velocità di $100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e ad una quota di $0\,\mathrm{m}$ .
La presenza dei due modi elastici tende a ridurre la parte reale e lo smorzamento del modo fugoide che si avvicina sempre più all'asse immaginario. Tuttavia anche in questo caso l'aggiunta delle due forme modali elastiche non porta al manifestarsi di accoppiamenti tra i modi.

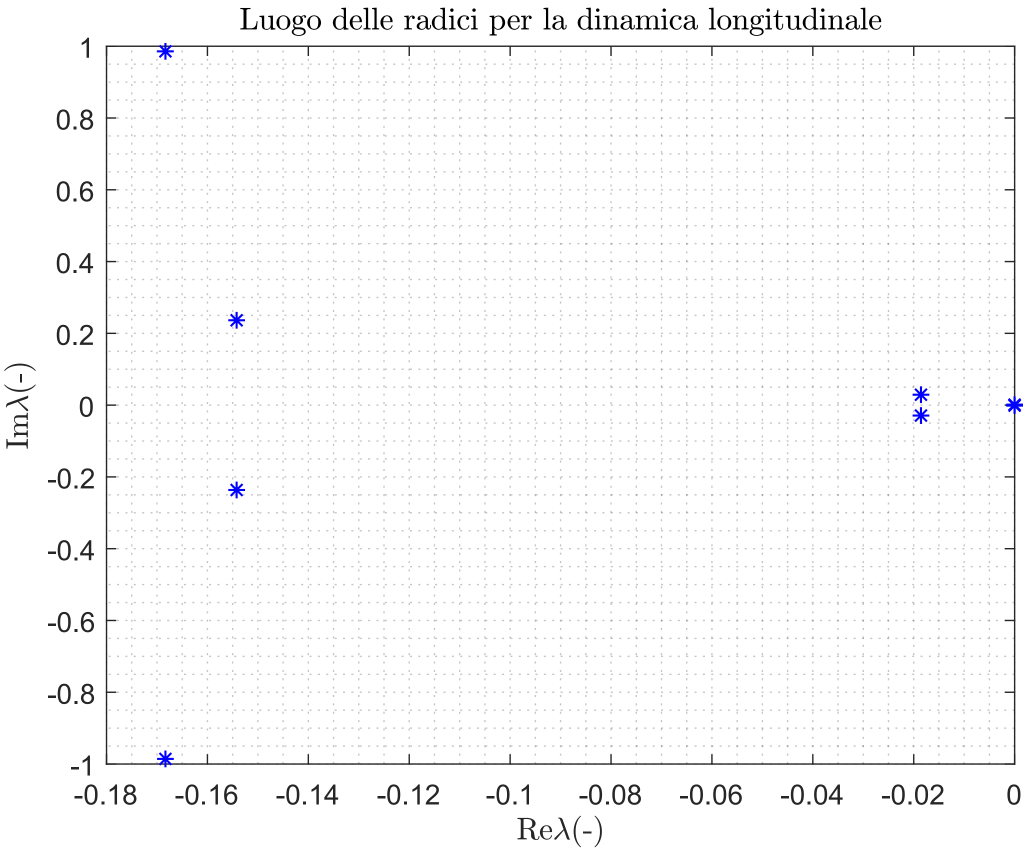



Figura 4.13: Luogo delle radici

# Capitolo 5

# Progetto di un controllore

L'ultima parte della tesi si concentra sul progetto di un sistema di controllo per il modello flessibile del velivolo per quanto concerne l'inseguimento di un comando di assetto come riferimento. Come menzionato in precedenza, par. 4.3.2, il vettore di stato del sistema flessibile è costituito dai quattro gradi di libertà rigidi e dai due gradi di libertà elastici associabili alla deformazione e alla velocità di deformazione di un punto della struttura. Il progetto del controllore prevede la capacità di controllare il velivolo nel suo complessivo ovvero tenendo conto anche di quelle che sono le oscillazioni strutturali. Il controllore progettato si basa sulla teoria del controllo ottimo e robusto. Alcuni parametri del plant sono affetti da incertezze, ad esempio i coefficienti aeroelastici valutati con una teoria del primo ordine, e dunque sarebbe dispendioso un design con la classica tecnica del *trial and error* del *loop shaping*. Tuttavia la realizzazione di un controllore ottimo per il modello flessibile non è semplice e richiede la conoscenza di diversi parametri.
Il tipo di controllore scelto è il *Linear Quadratic Regulator* (*LQR*) che agisce sulla deflessione dell'equilibratore affinchè sia soddisfatta la task del tracking di un riferimento. Il controllore, che può essere applicato a sistemi *LTI*, viene progettato per il sistema definito dalla 4.11. Tuttavia la fase di design segue diversi step:

- controllore progettato sul sistema rigido ed applicato sul sistema flessibile;
- controllore progettato e applicato al sistema flessibile.

Nel capitolo viene descritta la teoria del controllore *LQR* dalla definizione della funzione di costo all'equazione algebrica di Riccati. Infine vengono riportati i risultati delle applicazioni del controllore al modello di velivolo flessibile.

## 5.1 Rappresentazione stato spazio

Prima di procedere con la progettazione del sistema di controllo è opportuno definire il plant sul quale verrà progettato e applicato. Il sistema di equazioni lineari rappresentante il modello elastico del velivolo riportato nell'equazione 4.11 può essere riscritto nella forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5.1}$$

Avendo integrato un solo modo elastico nel modello e considerando solo la dinamica longitudinale del velivolo il vettore di stato è costituito da sei elementi come indicato nell'equazione 4.15. La matrice di stato coincide con la matrice definita nell'equazione 4.16 mentre la matrice dei controlli è definita nell'equazione 5.2.

$$B = \begin{bmatrix} B_R \\ -- \\ B_E \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

La matrice $B_R$ è la matrice dei controlli della parte rigida ed ha dimensione 4x2 mentre la matrice $B_E$ è legata alla parte elastica del modello ed ha dimensione 2x2. Le due matrici sono esplicitate nelle equazioni 5.3 e 5.4. Si noti che con il pedice 'b' si indicano le derivate nel riferimento body.

$$B_R = \begin{bmatrix} X_{\delta_{e_b}} + X_{\dot{\alpha}_b} \dfrac{Z_{\delta_{e_b}}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} & X_{T_b} + X_{\dot{\alpha}_b} \dfrac{Z_{T_b}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} \\ \dfrac{Z_{\delta_{e_b}}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} & \dfrac{Z_{T_b}}{U_{0_b} - Z_{\dot{\alpha}_b}} \\ 0 & 0 \\ M_{\delta_{e_b}} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$B_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Xi_{delta_e} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Infine il vettore dei controlli è costituito da due elementi ovvero la deflessione dell'equilibratore ($\delta_e$) e la posizione della manetta ($\Pi_T$).

## 5.2 LQR design

Il *Linear Quadratic Regulator* è una tecnica che permette di progettare un controllore ottimo attraverso la minimizzazione di una funzione costo opportunamente pesata. Si supponga di voler controllare un sistema lineare tempo invariante, come riportato nell'equazione 5.5, con la tecnica del posizionamento degli autovalori. Il pole placement così come il LQR, richiede che il sistema sia completamente raggiungibile, tuttavia non pone vincoli sull'attività di comando necessaria per raggiungere il risultaro richiesto. Pertanto un piazzamento ad un valore di frequenza sconveniente può risultare in una richiesta eccessiva di potenza di comando. Inoltre questo approccio è incline a effetti indesiderati quando, applicato all'impianto reale, i parametri del sistema sono numericamente diversi da quelli del modello di progetto.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Con l'ausilio del controllo ottimo è possibile gestire anche l'attività del comando che deve essere sempre verificata. La tecnica usata è chiamata *Linear Quadratic Regulator* in quanto è applicata per scopi di controllo su sistemi lineari e si basa su un algoritmo che ottimizza una funzione quadratica. Inoltre tale metodo si basa sulla minimizzazione dell'energia degli stati del sistema e del comando. Questo concede, al progettista, una gestione ottimale dell'incertezza parametrica infatti è possibile dimostrare, [15], che i margini di stabilità ricavati con questa tecnica sono i massimi ottenibili. La misura dell'energia di uno stato o di un comando è data da una norma e la definizione è data nelle equazioni 5.6.

$$\begin{cases} \|u\|_{R,2}^2 = \left(\sqrt{\int_0^\infty u^T(t)Ru(t)dt}\right)^2 = \int_0^\infty u^T(t)Ru(t)dt \\ \|x\|_{Q,2}^2 = \left(\sqrt{\int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt}\right)^2 = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt \end{cases} \tag{5.6}$$

Le due espressioni in 5.6 rappresentano l'energia pesata, attraverso le matrici $R$ e $Q$ entrambe simmetriche e definite positive, degli stati e dei controlli. Graficamente le due equazioni rappresentano l'area sottesa dall'evoluzione temporale degli stati e dei comandi. In generale più grandi sono i valori degli elementi di $Q$ più velocemente convergeranno gli stati al costo di input maggiori. Mentre più grandi sono i valori degli elementi di $R$ più il controllore genererà piccoli input ma l'output sarà grande. Le matrici $R$ e $Q$ determinano il trade-off tra le performance ($\|x\|_{Q,2}$) del sistema e l'attività di comando ($\|u\|_{R,2}$).
L'obiettivo del metodo è la minimizzazione di $\|x\|_{Q,2}$ e $\|u\|_{R,2}$ in quanto la minimizzazione dell'area sottesa dalle curve degli stati o dei comandi rappresenta rispettivamente una velocità di convergenza maggiore verso lo stato desiderato o una minor attività di comando.
La funzione quadratica che rappresenta la funzione obiettivo su cui lavora il $LRQ$ può essere definita come nell'equazione 5.7.

$$J(x,u) = \|x\|_{Q,2}^2 + \|u\|_{R,2}^2 = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{5.7}$$

Tuttavia $x(t)$ è ottenuto dall'integrazione di $\dot{x}(t)$ sotto l'azione degli input $u(t)$ per cui:

$$J(x,u) \rightarrow J(x(u),u)$$

La legge di controllo del $LQR$ è la soluzione del problema di ottimizzazione 5.8 ovvero quella per cui il funzionale è minimo $J(x(u),u)$.

$$u^* = arg\ \min_{x,u} J(x(u),u) \tag{5.8}$$

Inoltre il vettore di stato e dei comandi devono sempre soddisfare l'equazione di stato 5.5. La stabilità non è imposta nel problema di minimizzazione di $J(x(u),u)$ ma minimizzando $\|x\|_{Q,2}$ è assicurata la stabilità del sistema closed loop. Minimizzando l'energia del segnale e quindi l'area sottesa dalla curva è ovvio che si stia cercando di far convergere più rapidamente il sistema e quindi si va verso condizioni più stabili.
Assumendo che le matrici $A$ e $B$ siano controllabili si dimostra che la soluzione del problema di minimizzazione del $LQR$ è una legge di controllo in retroazione dagli stati:

$$u^*(t) = -Kx(t) \tag{5.9}$$

Si osserva che la legge di controllo ottimo non dipende né dal riferimento né dalle condizioni iniziali. La matrice $K$ è definita matrice dei guadagni ottimi ed è costituita da tante righe quanti sono gli input e da tante colonne quanti sono gli stati del sistema. La definizione della matrice $K$ è riportata nell'equazione 5.10.

$$K = R^{-1}B^TP \tag{5.10}$$

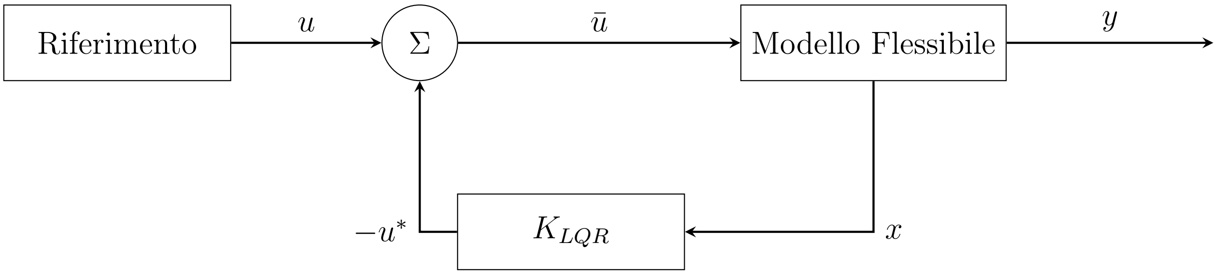



Figura 5.1: Schema di controllo.

Dove

- $R$ è la matrice dei pesi per l'energia degli input;
- $B$ è la matrice dei controlli;
- $P$ è la matrice simmetrica soluzione del problema di Riccati (equazione 5.11).

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

L'equazione matriciale (5.11) è chiamata equazione algebrica di Riccati (ARE) e rappresenta la condizione necessaria per la soluzione del problema LQR con retroazione dagli stati.

Pertanto la progettazione di un controllore mediante la tecnica *LQR* richiede principalmente tre passi:

1. definizione delle matrici dei pesi $R$ e $Q$;
2. risoluzione dell'equazione di Riccati per la determinazione della matrice $P$;
3. Calcolo della matrice dei guadagni ottimi $K$.

A seconda delle specifiche della risposta desiderate il processo può essere re-iterato per scegliere opportunamente gli elementi delle due matrici dei pesi. Lo schema del ciclo chiuso è rappresentato in figura 5.1. Una volta determinata la matrice dei guadagni, $K$, la matrice di stato del sistema controllato è data da:

$$A_g = A - BK \tag{5.12}$$

## 5.3 Risultati

L'implementazione del LQR avviene sul modello del velivolo flessibile linearizzato nell'intorno di una configurazione di equilibrio di volo orizzontale e rettilineo ad una velocità di $70\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e ad una quota di $1000\,\mathrm{m}$. Nella condizione di equilibrio considerata il modello presenta un modo fugoide instabile pertanto il controllore avrà anche la funzione di stabilizzare il sistema. Il progetto del controllore si divide in due fasi che vengono riportate nello schema 5.2. Sulla parte sinistra dello schema vi è la progettazione del sistema di controllo sul modello rigido lineare e la sua applicazione al modello flessibile lineare. Tuttavia il LQR è progettato considerando come gradi di libertà rigidi solo

$\theta$ e $q$. Ciò è dovuto principalmente al fatto che la velocità lineare è grande rispetto alla velocità angolare e quindi possono insorgere problemi di natura numerica. In secondo luogo $\alpha$ ha un effetto stabilizzante sulla risposta dinamica tuttavia l'effetto è tale per cui la risposta in $\theta$ presenta un errore a regime rispetto al riferimento. Per far fronte all'errore di inseguimento viene aggiunto un integratore sul grado di libertà $\theta$. Dunque l'architettura del sistema di controllo progettato sulla sola parte rigida è costituita dal LQR progettato sul sotto set $\bar{x}_s = \{\theta, q\}$ del vettore di stato più un integratore. Tale sistema di controllo è applicato poi al modello flessibile del velivolo linearizzato.

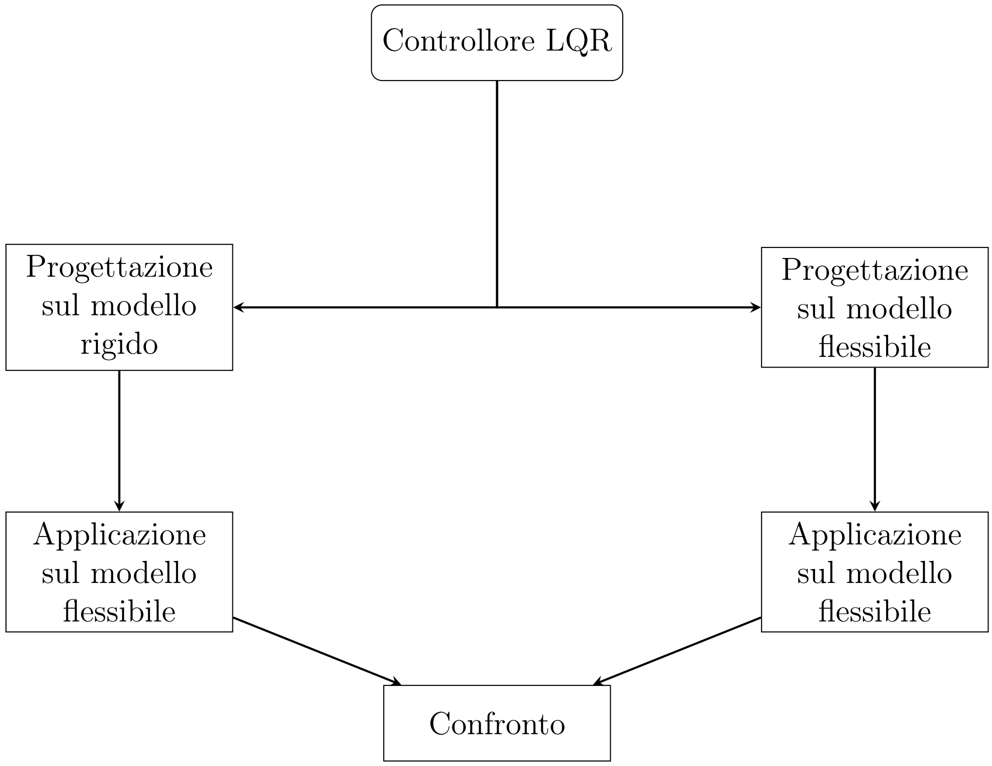



Figura 5.2: Schema: fasi di progetto del controllore.

Sulla parte destra dello schema 5.2 si segue invece la progettazione del sistema di controllo sul modello flessibile e la sua applicazione a tale modello. Per quanto concerne il modello flessibile si può immmaginare la presenza di sensori che restituiscano la misura dello spostamento elastico e della velocità di deformazione, ad esempio estensimetri o accelerometri, di alcuni punti sull'ala o della struttura del velivolo. Tale ipotesi permette di progettare il LQR sul modello lineare flessibile senza la necessità di dover progettare un osservatore di stato. Il controllore LQR viene progettato ancora una volta su un sotto set del vettore di stato del modello flessibile, nel quale oltre ai gradi di libertà rigidi sono presenti anche i gradi di libertà elastici.

$$\bar{x}_s = \left\{\theta, q, \eta_1, \dot{\eta}_1\right\} \tag{5.13}$$

Inoltre anche in questo caso è presente un integratore per ridurre l'errore a regime. Infine il controllore progettato viene poi applicato al modello flessibile comprensivo di tutti i gradi di libertà.
In figura 5.3 e 5.4 sono riportate le risposte del sistema controllato. In particolare in rosso è riportata la risposta del sistema flessibile con LQR progettato solo sui gradi di libertà rigidi mentre in blu la risposta del sistema flessibile con LQR progettato

considerando anche i gradi di libertà elastici. Dalle figure 5.3 e 5.4 non è possibile evincere la pulsazione del modo elastico integrato nel modello flessibile in quanto in generale i modi elastici si sovrappongono al modo di corto periodo ed in secondo luogo tale modo è molto smorzato.

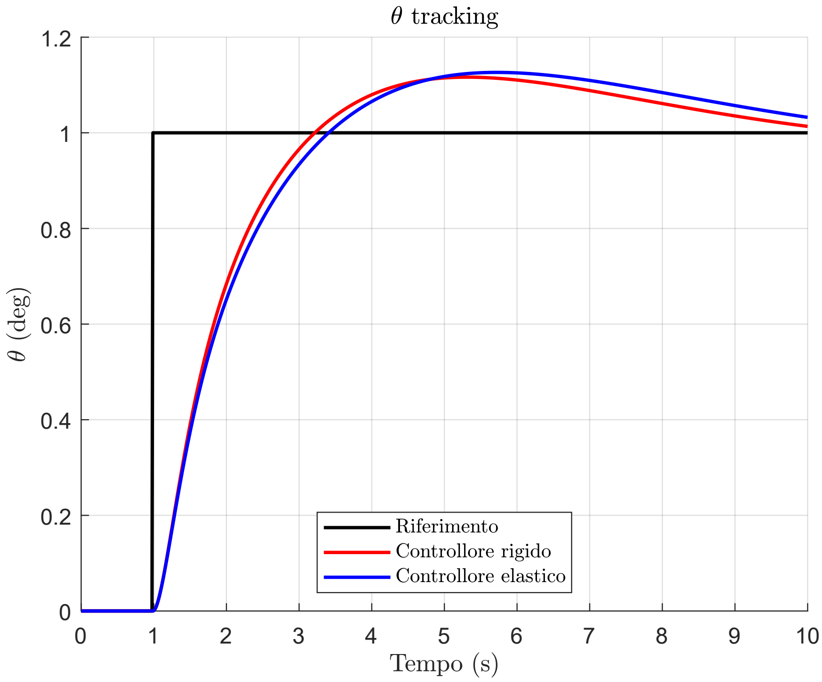
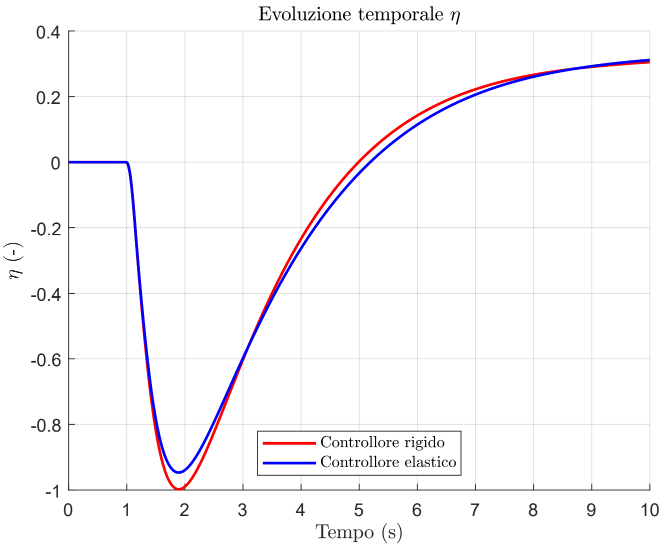



Figura 5.3: Risposta del velivolo in $\theta$ ad un riferimento a gradino unitario.

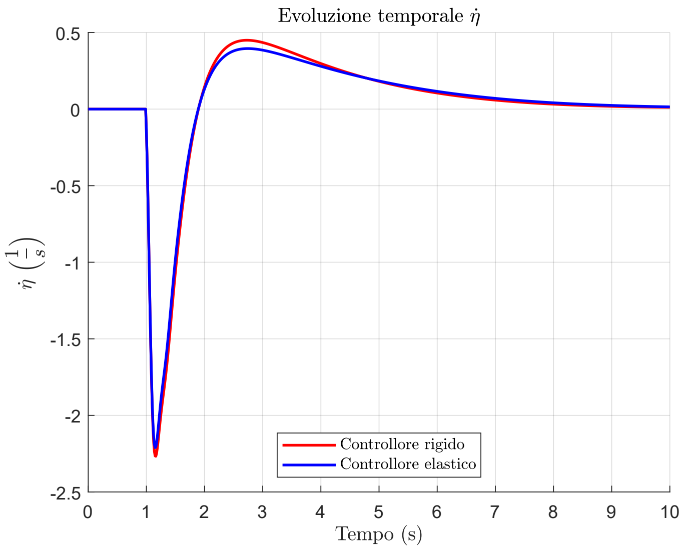
Per quanto concerne la progettazione del controllore considerando anche la parte elastica, se viene fornita al controllo l'indicazione della presenza di una parte flessibile si osserva un sistema più lento ma l'oscillazione sarà ridotta, figura 5.4a. La parte rigida del sistema risponde più lentamente ma complessivamente il sistema flessibile risponde meglio. Ricordando la (4.4) è possibile associare all'evoluzione della coordinata generalizzata lo spostamento elastico di un punto della struttura del velivolo. Riferendosi alla figura 3.5a è possibile osservare che la componente di spostamento trasversale dell'ala al tip assume un valore unitario. Poichè il modello elastico è implementato considerando solo un modo di vibrare si ha:

$$d_{E_{Z_{wing_{tip}}}}(t) = v_{1_{Z_{wing_{tip}}}}\eta_1(t) \equiv \eta_1(t) \tag{5.14}$$

Dunque è possibile guardare la figura 5.4a e confondere l'andamento della coordinata generalizzata con lo spostamento elastico al tip dell'ala. Infine analizzando la matrice $K$ si nota che il LQR tende a mantenere abbastanza separati i guadagni relativi ai gradi di libertà rigidi e i guadagni relativi alla parte flessibile. Ciò è sintomatico del fatto che non c'è un forte accoppiamento in frequenza tra i modi rigidi e i modi elastici. Infine in figura 5.5a e 5.5b si riporta il luogo delle radici del modello flessibile (con integratore) non controllato e del modello flessibile controllato. Gli autovalori riportati nel piano complesso sono adimensionalizzati con il modulo dell'autovalore di modulo massimo. Facendo riferimento alla figura 5.5a si osserva che gli autovalori del modo elastico sono poco influenzati dal controllore LQR, mentre il corto periodo viene sostituito da due modi del primo ordine. In figura 5.5b si può osservare la stabilizzazione del modo fugoide mentre il polo dell'integratore si sposta poco dall'origine.




(a)

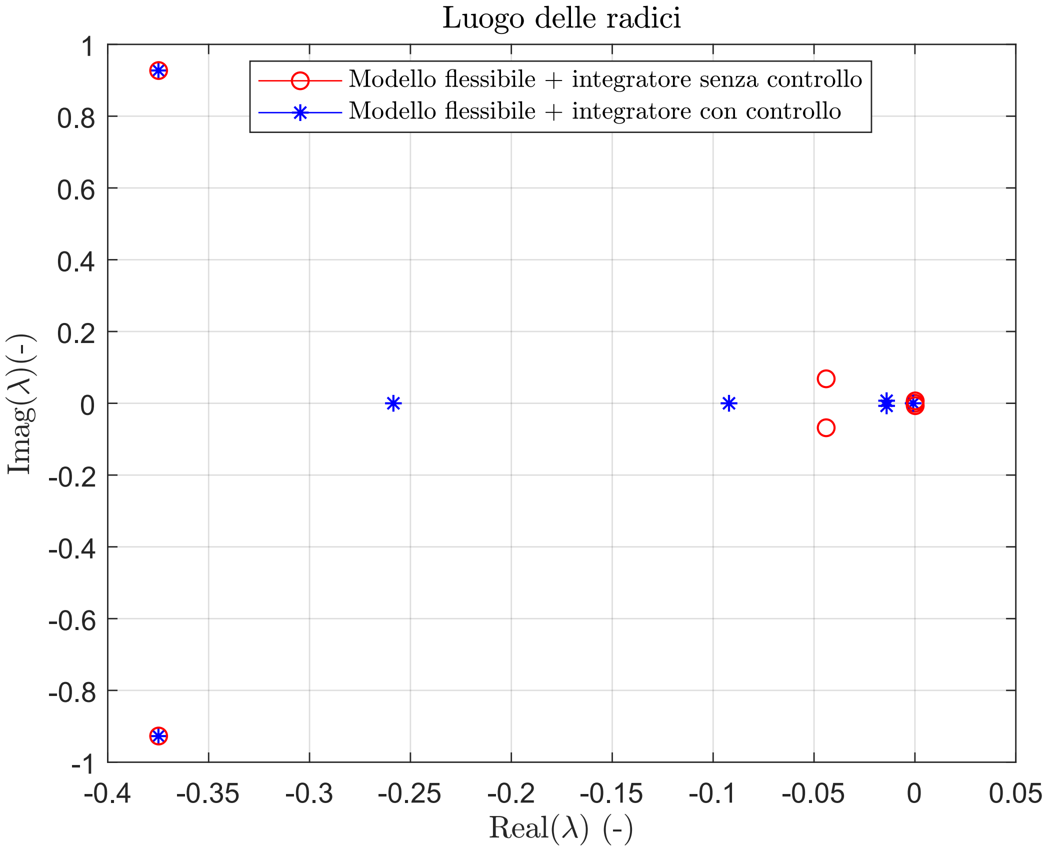



(b)

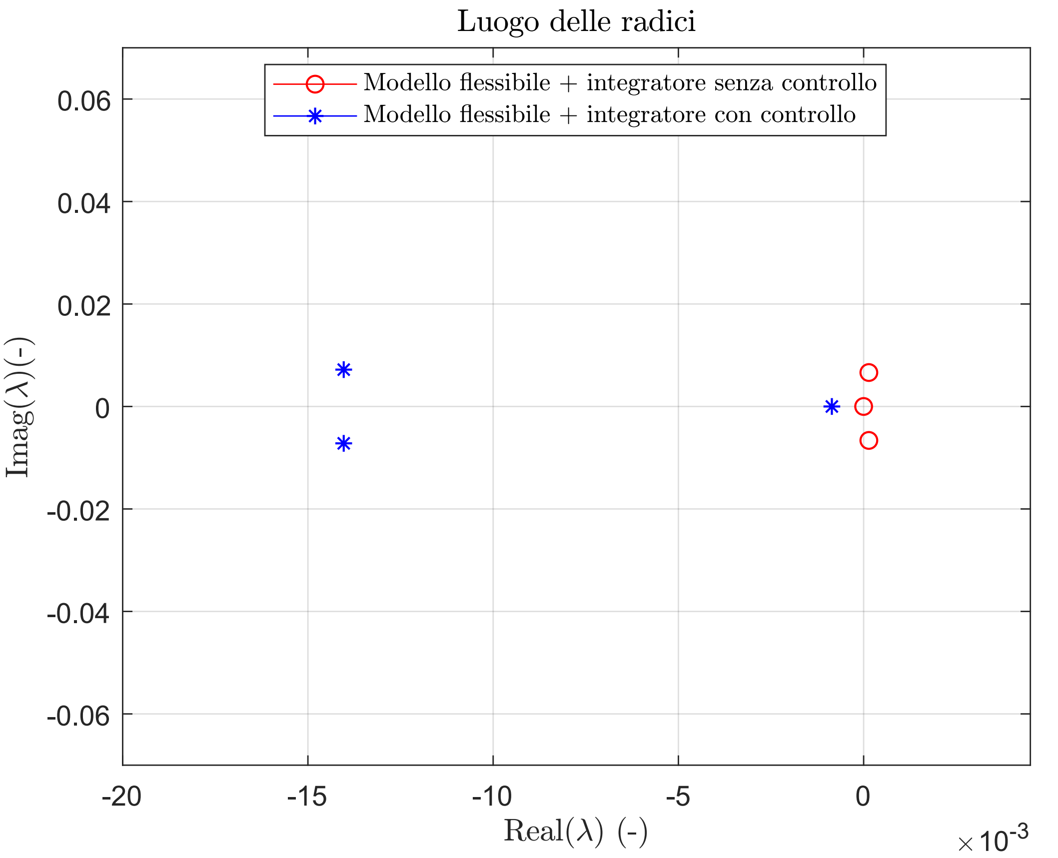
Figura 5.4: Andamento gradi di libertà elastici.

## 5.4 Analisi di sensitività del controllore

Nella seguente sezione si vuole analizzare il comportamento del modello flessibile al variare degli elementi della matrice dei pesi, $Q$, trascurando la command activity. In pratica l'analisi di sensitivà è volta a stabilire se la legge di controllo progettata è più adatta per il load allevation che per il tracking. Si considera come matrice dei pesi che moltiplica il vettore degli stati da controllare una matrice diagonale. In particolare la scelta degli elementi diagonali ha delle implicazioni nel processo di ottimizzazione della funzione di costo. Infatti maggiore è il valore del peso associato allo stato più l'algoritmo cercherà di far convergere velocemente la sua norma. In figura 5.6 è riportato l'andamento dell'angolo di beccheggio, $\theta$, e di $\eta$, corrispondente alla deflessione alare al tip, al variare dei coefficienti della matrice Q. In figura 5.6a è riportata la risposta del velivolo in $\theta$ al variare della matrice $Q$ confrontata con il segnale di riferimento. Si osserva che mantenendo costanti i coefficienti della matrice $Q$ che moltiplicano i gradi di libertà elastici ed incrementando il coefficiente che moltiplica lo stato $\theta$ la risposta diventa più veloce e più smorzata andando ad assomigliare alla risposta di un sistema del primo ordine. Aumentando i coefficienti che moltiplicano i gradi di libertà elastici si osserva un netto peggioramento della risposta in $\theta$ a tal punto da non essere più in grado a seguire la risposta come è possibile osservare dalle due curve, linea continua nera e blu, di figura 5.6a. In figura 5.6b si osserva che aumentando i coefficienti che moltiplicano i gradi di libertà rigidi, mantenendo costanti quelli che moltiplicano i gradi di libertà elastici, si ha una risposta più veloce ma meno smorzata e dunque uno spostamento al tip maggiore. Aumentando i coefficienti che moltiplicano i gradi di libertà elastici si ha una risposta in termini di deformazione migliore ma la risposta in $\theta$ peggiora. Dunque la scelta dei coefficienti della matrice $Q$ è tutt'altro che semplice in quanto le risposte in termini di $\theta$ e di $\eta$ del modello flessibile controllato con LQR hanno comportamenti contrastanti. Fissando dei requisiti per le due risposte è necessario cercare un trade-off attraverso un processo di iterazione che permetta di determinare i guadagni della matrice $K$ che soddisfano le specifiche.

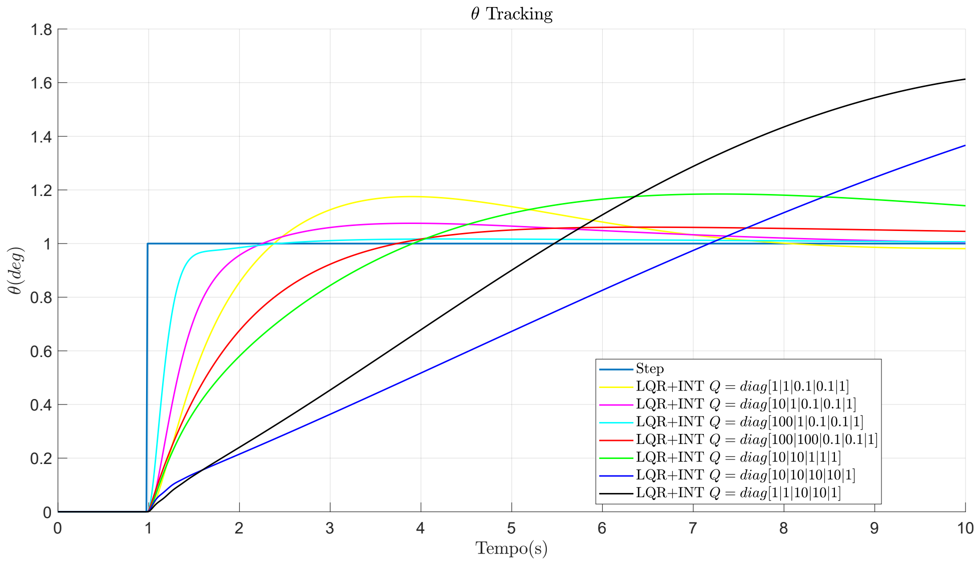



(a) Luogo delle radici.

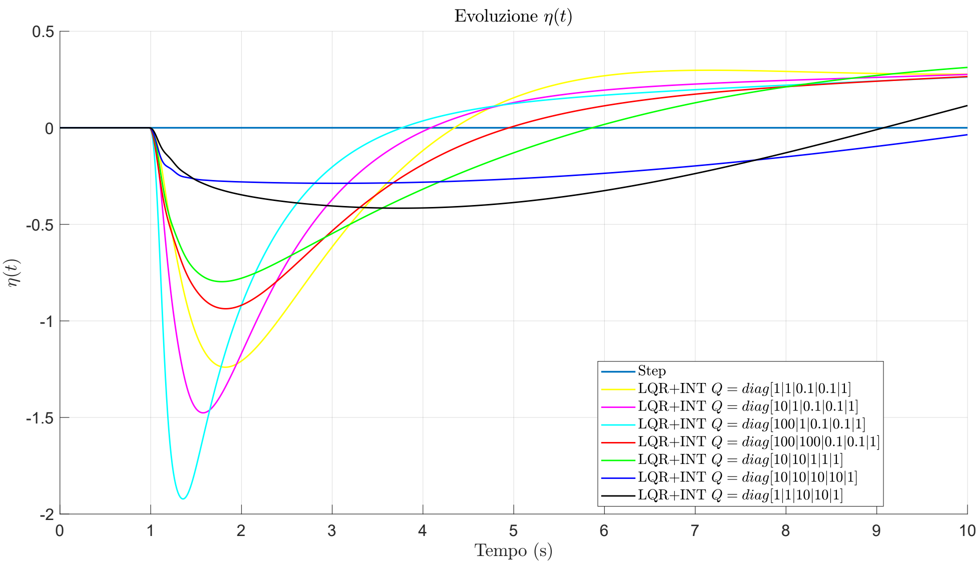



(b) Particolare luogo delle radici.

Figura 5.5: Confronto luogo delle radici.




(a) Evoluzione temporale di $\theta$ al variare della matrice $Q$.




(b) Evoluzione temporale di $\eta$ al variare della matrice $Q$.

Figura 5.6: Analisi di sensitività al variare della matrice $Q$.

# Capitolo 6

# Conclusioni

Il lavoro di tesi, svolto in collaborazione con Leonardo Company Divisione Velivoli, presentato punta a verificare un possibile accoppiamento tra i modi elastici e i modi da corpo rigido del velivolo oggetto di studio, caratterizzato da un elevato allungamento alare, ed ad analizzarne il comportamento dinamico nell'intorno di un punto di equilibrio. Nel capitolo 2 viene presentato il modello matematico che descrive la dinamica del volo di un generico velivolo flessibile. Tale modello è profondamente legato alla controparte rigida infatti può essere visualizzato come una sua estensione o analogamente si può ritenere il modello rigido come un caso particolare di sistema flessibile. Per tali motivi risulta pratica la sua implementazione in ambiente Matlab in quanto è possibile analizzare dapprima la parte rigida e poi estendere il modello con i gradi di libertà elastici e la loro dinamica. In particolare l'uso dell'analisi modale e delle coordinate generalizzate permette di descrivere il problema come dipendente solo dal tempo. Inoltre le forze e i momenti aerodinamici possono essere espressi come la somma di una componente rigida e di una componente legata alla deformazione ed ai ratei di deformazione. Nel capitolo 3 sono riportati i risultati dell'analisi dinamica strutturale eseguita sul velivolo di riferimento per adattare il modello dinamico flessibile al caso di studio. Nel capitolo 4 si analizza la dinamica del modello flessibile, linearizzata nell'intorno di una condizione di equilibrio, avendo integrato solo il primo modo di vibrare della struttura. Poiché si è interessati a valutare l'effetto dell'input del pilota sul modello flessibile non è necessario integrare nel modello modi superiori ad una pulsazione di 20 rad/s. Infatti il pilota difficilmente riesce ad eccitare modi con frequenze superiori ed il primo modo di vibrare integrato, associato al primo modo flessionale alare, ha già una frequenza superiore. Inoltre si osserva che l'aggiunta di un solo modo elastico porta ad un peggioramento delle caratteristiche di stabilità statica longitudinale. Infine nel capitolo 5 viene implementata una legge di controllo in retroazione dagli stati basandosi sulla strategia del LQR per il tracking di un comando di assetto dato come riferimento. In particolare si osserva che progettando il controllore sul sistema flessibile piuttosto che sulla sua controparte rigida si ha una risposta più lenta in termini di inseguimento del riferimento, tuttavia migliora in termini della deflessione strutturale che si riduce. Il modello flessibile sviluppato può essere esteso agevolmente integrando ulteriori modi elastici o può essere aggiornato se sono disponibili nuovi database aerodinamici o nuovi modelli a masse concentrate per un'analisi dinamica più dettagliata. Nonostante le diverse approssimazioni ed assunzioni, il modello flessibile sviluppato rappresenta comunque uno strumento del primo ordine per valutare un possibile accoppiamento dinamico tra i modi elastici e da corpo rigido di un velivolo.

## 6.1 Sviluppi futuri

Il modello flessibile di velivolo analizzato nella tesi è limitato alla sola dinamica longitudinale e pertanto solo i modi di vibrare simmetrici sono stati considerati. Volendo estendere il modello a tutti i gradi di libertà rigidi è possibile inserire anche i modi di vibrare asimmetrici che generano forze e momenti che agiscono nel piano latero-direzionale. In particolare, per il velivolo analizzato, tali modi hanno pulsazioni maggiori rispetto a quelle dei modi da corpo rigido ed inoltre risultano essere molto vicine tra loro, in termini di frequenza, e possono accoppiarsi. Tuttavia bisogna considerare che ogni modo di vibrare elastico aggiunge due stati e di conseguenza la dimensione del vettore di stato cresce. Questo incrementa il costo computazionale legato alla simulazione della dinamica del velivolo. Inoltre un numero di stati eccessivo rende problematica e complica la progettazione di un controllore. Infatti, spesso è necessario utilizzare un osservatore di stato affinché sia possibile applicare strategie basate sulla retroazione dagli stati e questo duplica la dimensione del sistema da controllare. Il modello flessibile, con l'integrazione di altri modi di vibrare, può essere usato anche per studiare problemi aeroelastici quali velocità di inversione dei comandi, divergenza e flutter come in [17].

Tuttavia il modello flessibile potrebbe essere sottoposto ad una raffica, del tipo $1 - \cos$ o ad un modello stocastico, per valutarne il comportamento dinamico. In seguito si potrebbe sviluppare una legge di controllo che permetta di ridurre le oscillazioni che insorgono a causa del disturbo esterno.

# Appendice A

# Trasformazione delle derivate dimensionali da una terna assi stabilità ad una terna assi corpo

Le derivate aeroelastiche e le derivate di stabilità aerodinamiche sono in generale ricavate in due sistemi di riferimento diversi. Le prime sono ricavate in un riferimento body mentre le seconde sono calcolate rispetto ad una terna assi di stabilità. Le due terne di riferimento sono definite in figura A.1. Affinchè le componenti elastiche di forze e momenti siano opportunamente integrate nelle equazioni del moto bisogna far attenzione ad esprimere tutte le derivate nello stesso sistema di riferimento. Poichè le equazioni che descrivono la dinamica del volo del velivolo flessibile sono state scritte in un riferimento body è opportuno ricavare le derivate di stabilità aerodinamiche in tale riferimento. Per fare ciò è sufficiente applicare un'opportuna legge di trasformazione tra i due riferimenti.

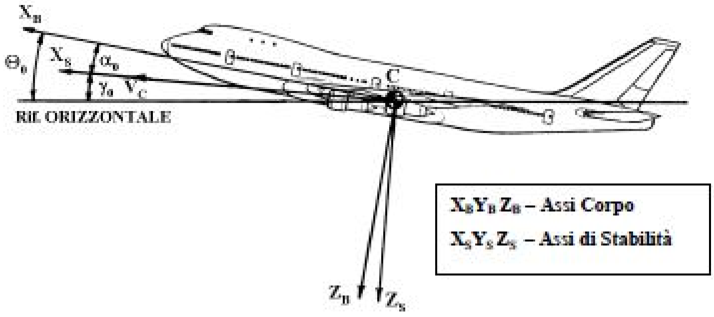



Figura A.1: Orientamento relativo delle terne assi corpo ed assi di stabilità.

È possibile esprimere la varizione di forze e di momenti aerodinamici in termini di variabili di stato perturbate come:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{A}\Delta \boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}\Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{C}\Delta \dot{\boldsymbol{V}} \\ \Delta \boldsymbol{m} &= \boldsymbol{D}\Delta \boldsymbol{V} + \boldsymbol{E}\Delta \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{F}\Delta \dot{\boldsymbol{V}} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dove:

$$\Delta \boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{Bmatrix} ; \Delta \boldsymbol{m} = \begin{Bmatrix} \Delta L \\ \Delta M \\ \Delta N \end{Bmatrix} \tag{A.2}$$

$$\Delta \boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} ; \Delta \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} ; \Delta \dot{\boldsymbol{V}} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} X_u & 0 & X_w \\ 0 & Y_v & 0 \\ Z_u & 0 & Z_w \end{bmatrix} ; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & X_q & 0 \\ Y_p & 0 & Y_r \\ 0 & Z_q & 0 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & X_{\dot{w}} \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 \\ Z_{\dot{u}} & 0 & Z_{\dot{w}} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & L_v & 0 \\ M_u & 0 & M_w \\ 0 & N_v & 0 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} L_p & 0 & L_r \\ 0 & M_q & 0 \\ N_p & 0 & N_r \end{bmatrix} ; \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & L_{\dot{v}} & 0 \\ M_{\dot{u}} & 0 & M_{\dot{w}} \\ 0 & N_{\dot{v}} & 0 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Le componenti di forze e momenti aerodinamici di perturabazione possono essere espressi rispetto a due terne di riferimento generiche, $\mathfrak{T}_{\mathbf{1}}$ e $\mathfrak{T}_{\mathbf{2}}$, attraverso le (A.1). Le leggi di trasformazioni nel passare da $\mathfrak{T}_{\mathbf{1}}$ a $\mathfrak{T}_{\mathbf{2}}$ dei cinque vettori indicati in (A.2) e in (A.3) è del tipo:

$$\Delta \boldsymbol{f_2} = \mathfrak{T}_{21} \Delta \boldsymbol{f_1} \tag{A.6}$$

Dove con i pedici 1 e 2 si sono identificate due terne generiche mentre $\mathfrak{T}_{21}$ rappresenta la matrice di passaggio da $\mathfrak{T}_1 \rightarrow \mathfrak{T}_2$.
Nel caso in cui le due terne differiscano per una rotazione intorno all'asse $Y_1 \equiv Y_2$ di $\epsilon$ si ha:

$$\mathfrak{T}_{21} = \begin{bmatrix} \cos\epsilon & 0 & -\sin\epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\epsilon & 0 & \cos\epsilon \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

A questo punto richiamando la (A.1) è possibile esprimere la (A.6) come:

$$\Delta \boldsymbol{f_2} = \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{A_1} \Delta \boldsymbol{V_1} + \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{B_1} \Delta \boldsymbol{\omega_1} + \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{C_1} \Delta \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \tag{A.8}$$

Poichè $(\cdot)_1 = \mathfrak{T}_{12}(\cdot)_2$ si ha:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{f_2} &= \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{A_1} \mathfrak{T}_{12} \Delta \boldsymbol{V_2} + \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{B_1} \mathfrak{T}_{12} \Delta \boldsymbol{\omega_2} + \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{C_1} \mathfrak{T}_{12} \Delta \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} \\ \Delta \boldsymbol{f_2} &= \boldsymbol{A_2} \Delta \boldsymbol{V_2} + \boldsymbol{B_2} \Delta \boldsymbol{\omega_2} + \boldsymbol{C_2} \Delta \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Dove si sono definite le seguenti leggi di trasformazioni:

- $\boldsymbol{A_2} \equiv \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{A_1} \mathfrak{T}_{12}$;
- $\boldsymbol{B_2} \equiv \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{B_1} \mathfrak{T}_{12}$;
- $\boldsymbol{C_2} \equiv \mathfrak{T}_{21} \boldsymbol{C_1} \mathfrak{T}_{12}$.

In maniera analoga è possibile definire le $\boldsymbol{D_2}, \boldsymbol{E_2}$ e $\boldsymbol{F_2}$.
Sviluppando le leggi di trasformazione è possibile ottenere le derivate aerodinamiche in un opportuno sistema di riferimento.
In particolare indicando senza pedice le derivate calcolate rispetto alla terna assi di stabilità e con il pedice $B$ quelle espresse nella terna assi body, ottenuta attraverso una rotazione di $\epsilon = \alpha_0$ intorno ad $Y = Y_B$, si ha:
$\rightarrow$ Derivate longitudinali:

$$\begin{aligned}
&\Big(X_u\Big)_B = X_u \cos^2\alpha_0 - \Big(X_w + Z_u\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 + Z_w \sin^2\alpha_0 \\
&\Big(X_w\Big)_B = X_w \cos^2\alpha_0 + \Big(X_u - Z_w\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - Z_u \sin^2\alpha_0 \\
&\Big(X_q\Big)_B = X_q \cos\alpha_0 - Z_q \sin\alpha_0 \approx \, - Z_q \sin\alpha_0 \\
&\Big(X_{\dot u}\Big)_B = X_{\dot u} \cos^2\alpha_0 - \Big(X_{\dot w} + Z_{\dot u}\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 + Z_{\dot w} \sin^2\alpha_0 \approx Z_{\dot w} \sin^2\alpha_0 \\
&\Big(X_{\dot w}\Big)_B = X_{\dot w} \cos^2\alpha_0 + \Big(X_{\dot u} - Z_{\dot w}\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - Z_{\dot u} \sin^2\alpha_0 \approx \, - Z_{\dot w} \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \\
&\Big(Z_u\Big)_B = Z_u \cos^2\alpha_0 - \Big(Z_w - X_u\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - X_w \sin^2\alpha_0 \\
&\Big(Z_w\Big)_B = Z_w \cos^2\alpha_0 + \Big(Z_u + X_w\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 + X_u \sin^2\alpha_0 \\
&\Big(Z_q\Big)_B = Z_q \cos\alpha_0 + X_q \sin\alpha_0 \approx Z_q \cos\alpha_0 \\
&\Big(Z_{\dot u}\Big)_B = Z_{\dot u} \cos^2\alpha_0 - \Big(Z_{\dot w} - X_{\dot u}\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - X_{\dot w} \sin^2\alpha_0 \approx \, - Z_{\dot w} \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \\
&\Big(Z_{\dot w}\Big)_B = Z_{\dot w} \cos^2\alpha_0 + \Big(Z_{\dot u} + X_{\dot w}\Big) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 + X_{\dot u} \sin^2\alpha_0 \approx Z_{\dot w} \cos^2\alpha_0 \\
&\Big(M_u\Big)_B = M_u \cos\alpha_0 - M_w \sin\alpha_0 \\
&\Big(M_w\Big)_B = M_w \cos\alpha_0 + M_u \sin\alpha_0 \\
&\Big(M_q\Big)_B = M_q \\
&\Big(M_{\dot u}\Big)_B = M_{\dot u} \cos\alpha_0 - M_{\dot w} \sin\alpha_0 \approx \, - M_{\dot w} \sin\alpha_0 \\
&\Big(M_{\dot w}\Big)_B = M_{\dot w} \cos\alpha_0 + M_{\dot u} \sin\alpha_0 \approx M_{\dot w} \cos\alpha_0
\end{aligned}$$

Dove nelle precedenti relazioni si è sfruttato il fatto che in assi stabilità:

- $X_{\dot u} = 0$;
- $Z_{\dot u} = 0$;
- $M_{\dot u} = 0$.

Ed ancora si suppone $X_q = X_{\dot w} = 0$.

# Appendice B

# Algoritmo di ottimizzazione applicato per il trim del velivolo

L'algoritmo utilizzato per ricavare le condizioni di trim si basa su un metodo di ottimizzazione non vincolata di una funzione costo scalare che sfrutta il *penalty function approach.* La funzione obiettivo che si vuole minimizzare è associata alle equazioni del moto del modello di velivolo in analisi:

- nel caso di velivolo rigido si tratta delle equazioni del moto non lineari accoppiate ai relativi modelli aerodinamici e propulsivi;
- nel caso di modello di velivolo flessibile bisogna aggiungere le equazioni lineari che descrivono l'evoluzione dei gradi di libertà elastici ed il modello per forze e momenti elastici.

La determinazione delle condizioni di trim, comparabili a delle condizioni di volo, permette di definire l'inviluppo operativo del velivolo e di condurre analisi di stabilità dinamica.
La maggior parte dei metodi di risoluzione del problema del trim sono implementati facendo uso delle derivate di stabilità, di smorzamento e di controllo. Ciò porta alla risoluzione di un sistema di equazioni non lineari nelle variabili assetto del velivolo, deflessione delle superfici di controllo e manetta attraverso un metodo numerico iterativo. La risoluzione di tali sistemi diventa più complicata quando i coefficienti aerodinamici non sono costanti con l'angolo d'attacco, l'angolo di derapata ed il numero di Mach. Nelle moderne applicazioni le combinazioni di angoli di assetto, deflessione delle superfici aerodinamiche e manetta che garantiscono il trim sono ottenute numericamente attraverso la minimizzazione di una funzione obiettivo. In generale le equazioni di stato del velivolo possono essere espresse nella forma:

$$\boldsymbol{g}(\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \tag{B.1}$$

Dove

- $\boldsymbol{x}$ è il vettore di stato del velivolo di dimensione $n_s$;
- $\boldsymbol{g}$ è un vettore di $n_s$ funzioni scalari non lineari, $g_i$, derivante dalla proiezione delle equazioni di stato su un opportuno sistema di riferimento;
- $\boldsymbol{u}$ è il vettore delle variabili di controllo di dimensione $n_c$.

La (B.1) è definita formulazione implicita del sistema.
La scelta più diffusa del vettore di stato $\boldsymbol{x}$ è rappresentata dalla seguente:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_d}^T & \boldsymbol{x_k}^T \end{bmatrix}^T \tag{B.2}$$

Dove

- $\boldsymbol{x_d}$ è il vettore delle variabili di stato dinamiche ovvero delle velocità lineari ed angolari;

- $\boldsymbol{x_k}$ è il vettore delle variabili di stato cinematiche ovvero delle posizioni inerziali del baricentro e degli angoli di Eulero.

Per quanto concerne il vettore dei controlli le sue componenti dipendono in numero e in tipo anche dal tipo di velivolo. Per un'architettura convenzionale il numero minimo di input è dato da:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \delta_T & \delta_e & \delta_a & \delta_r \end{bmatrix}^T$$

Dove $\delta_T$ è il settaggio della manetta e $\delta_a, \delta_e$ e $\delta_r$ sono rispettivamente la deflessione dell'alettone, dell'equilibratore e del timone.
Per un sistema rappresentato dalla (B.1) un punto di equilibrio o di trim, $x_{eq}$, è definito come:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x_{eq}}, \boldsymbol{u_{eq}}) = \boldsymbol{0} \quad \text{con} \quad \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{eq}} \equiv \boldsymbol{0} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u}_{eq} = \boldsymbol{0} \tag{B.3}$$

In un algoritmo per la ricerca dei punti di trim alcuni stati e variabili di controllo del velivolo sono assegnate altre invece sono incognite. Le incognite sono viste nell'algoritmo di trim come variabili di controllo o di decisione $\xi_j$ $(j = 1, \ldots, n_{tc})$.
Spesso le equazioni del moto del velivolo possono essere scritte anche nella forma:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{B.4}$$

Nel punto di trim si ha:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x_{eq}}, \boldsymbol{u_{eq}}, t) = \boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_{eq}}, \boldsymbol{u_{eq}}) = \boldsymbol{0} \tag{B.5}$$

Con $\boldsymbol{f}$ vettore di $n_s$ funzioni scalari.
Per trovare il punto di trim di un velivolo è necessario:

1. definire la traiettoria del centro di massa del velivolo ed assegnare i valori di alcune delle variabili di stato (ad esempio quota, velocità e assetto) ed eventualmente delle variabili di controllo. Tale set di variabili di stato e di controllo può essere indicato con $\boldsymbol{\xi_1}$;

2. vincolare i valori di alcune delle variabili di stato (ad esempio vincoli sulle variabili cinematiche ovvero sulle velocità angolari). Tale set di variabili può essere indicato con $\boldsymbol{\xi_2}$;

3. risolvere il sistema: $\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0$ con $k = 1, \ldots, n_s$ ovvero le $n_s$ equazioni non lineari che descrivono la dinamica del velivolo.

Avendo definito opportunamente $\boldsymbol{\xi_1}$ e $\boldsymbol{\xi_2}$ definiamo il numero di incognite del problema di trim come $\boldsymbol{\xi}$ e dunque il problema del trim si riscrive come:

$$\boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{\xi}) = 0$$

$$\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2} = \text{due sotto-set distinti di } \left[\boldsymbol{x^T}, \boldsymbol{u^T}\right]^T \rightarrow$$
$$\boldsymbol{\xi} = \text{il restante sotto-set di } \left[\boldsymbol{x^T}, \boldsymbol{u^T}\right]^T$$

In generale la dimensione di $\boldsymbol{\xi}$ non è mai maggiore di 6 tuttavia dipende dalla condizione di trim desiderata, dalla configurazione del velivolo e dal numero di superfici di controllo.
Uno dei metodi numerici più usato per trovare la condizione di trim si basa sulla minimizzazione di una funzione di costo. Tale funzione di costo, $J(\boldsymbol{\xi})$, è tipicamente definita come una funzione scalare dipendente da $n_{tc}$ parametri. Le variabili indipendenti includono le incognite del problema tra cui le componenti del vettore dei comandi, $\boldsymbol{u}$, e alcune delle variabili di stato. La funzione obiettivo è per definizione sempre non negativa e vale zero quando il velivolo si trova in condizioni di trim. L'algoritmo di trim trova i valori degli input di comando o di alcune variabili di stato che portano a zero la funzione obiettivo ovvero il minimo di tale funzione.
Tipicamente la funzione di costo è ricavata dalle equazioni che descrivono la dinamica del moto e generalmente si sceglie la seguente funzione quadratica ([12]):

$$\boldsymbol{J} = \dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2 + \dot{R}^2 + \dot{Q}^2 + \dot{R}^2 \tag{B.6}$$

o più in generale

$$\boldsymbol{J} = \left\{\dot{x}_d\right\}^T \cdot \left[W\right] \cdot \left\{\dot{x}_d\right\} \tag{B.7}$$

Dove $\left[W\right]$ è una matrice dei pesi simmetrica, semi-definita positiva che ritorna una $\boldsymbol{J}$ non negativa. Lo scopo della matrice dei pesi è principalmente quello di rendere i singoli addendi che costituiscono la funzione di costo dello stesso ordine di grandezza. In questo modo si tiene conto delle diverse unità di misura degli addendi e si riesce a controllare la minimizzazione. È da notare che scegliere $\dot{U}$, $\dot{V}$ e $\dot{W}$ è equivalente a scegliere $\dot{V}_{tot}$, $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$.
La funzione costo $\boldsymbol{J}$ dipende sia da variabili di stato dinamiche che cinematiche (la pozione del velivolo tuttavia non influenza il trim) ed inoltre anche dai comandi e dunque:

$$\boldsymbol{J} = J(\boldsymbol{x_d}, \boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{u})$$

Poichè tale funzione scalare viene definita allo scopo di trimmare il velivolo la dipendenza viene ristretta ad un sotto-set $\boldsymbol{\xi}$ di variabili indipendenti, in quanto le rimanenti sono fissate. Quando la funzione $J(\xi)$ è minimizzata, tenendo conto dei vincoli sulle variabili di controllo e del flight-path, allora si ha una condizione di trim.
L'approccio del *penalty function* si basa invece sulla minimizzazione non vincolata di una funzione scalare il cui valore risulta essere influenzato dal rispetto dei vincoli. È infatti possibile ottenere la nuova funzione obiettivo andando ad estendere i vettori che moltiplicano la matrice dei pesi, $\left[W\right]$, inglobando i vincoli della condizione di trim ricercata. Richiamando la (B.4) è possibile osservare che sia il vettore dei controlli che

il vettore di stato rappresentano dal punto di vista del trim il vettore delle variabili di decisione.

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

Con

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_d}^T & \boldsymbol{x_k}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} U & V & W & P & Q & R & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \delta_T & \delta_e & \delta_a & \delta_r \end{bmatrix}^T$$

Dunque è possibile riscrivere la (B.4) come

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \tag{B.8}$$

Ricavare la condizione di trim è equivalente a determinare $\boldsymbol{z_0}$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{0}$. Supponiamo di voler applicare il *penalty optimization method* per determinare la condizione di trim nel caso di *steady state straight and level flight.* I vincoli o le relazioni di tale condizione sono:

- *steady state* $\rightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$. Corrispondente a 9 relazioni sulle 9 variabili di stato ;
- fissata velocità di trim $= V_{trim}$;
- volo orizzontale: $\gamma = 0 \rightarrow \gamma = \theta - \alpha \rightarrow \theta = \alpha$;
- volo livellato: $\phi = \beta = 0$.

Si hanno in totale 13 relazioni e 13 variabili di decisione. La condizione di trim è ottenuta andando a minimizzare la seguente funzione obiettivo:

$$\tilde{f} = \boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{Q} \tag{B.9}$$

Con

- $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \dot{x_1}, \ldots, \dot{x_9} & (\sqrt{(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2)} - V_{trim}) & \gamma & \beta & \phi \end{bmatrix}^T$
- $\boldsymbol{H} = diag([\alpha_1, \ldots, \alpha_{13}]) =$ Matrice dei parametri di penalty

.

Sviluppando la (B.9) si ha:

$$\tilde{f} = \alpha_1 \dot{x}_1^2 + \cdots + \alpha_9 \dot{x}_9^2 + \alpha_{10}(\sqrt{(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + \dot{x_3}^2)} - V_{trim})^2 + \alpha_{11}\gamma^2 + \alpha_{12}\beta^2 + \alpha_{13}\phi^2 \tag{B.10}$$

La minimizzazione non vincolata della $\tilde{f}$ ci permette di ricavare la condizione di trim per la condizione desiderata. Le condizioni di trim ricavate sono ottenute tramite il comando *fminsearch*, [11], di Matlab che implmenta il *simplex method.*

# Appendice C

# Metodo di stima del downwash

Un parametro molto importante per il calcolo delle derivate di stabilità e che compare anche nel calcolo delle derivate aeroelastiche è il gradiente del downwash, $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$. In prima approssimazione è possibile stimare $\varepsilon$ e $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ assumendo il valore teorico all'infinito pari a due volte il valore calcolato in corrispondenza del centro aerodinamico dell'ala.

$$\varepsilon = \frac{2C_L}{\pi AR}$$
$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{2C_{L_{\alpha_W}}}{\pi AR}$$

Tuttavia il valore effettivo dell'angolo di downwash e della sua variazione possono differire notevolmente rispetto ai valori teorici in quanto dipendono:

- forma in pianta dell'ala;
- distanza relativa tra il piano vorticoso ed il piano di coda del velivolo;
- assetto del velivolo.

Per una stima preliminare della variazione dell'angolo di downwash è possibile ricorrere a formule empiriche che tengono in conto della geometria del velivolo. Per velivoli subsonici la variazione dell'angolo di downwash rispetto all'incidenza aerodinamica può essere calcolata come indicato nella (C.1).

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = 4.44\Big(K_A K_\lambda K_H (\cos\Lambda_{c/4})\Big)^{1.19} \tag{C.1}$$

Dove

- $K_A = \frac{1}{AR} - \frac{1}{1 + AR^{1.7}}$
- $K_\lambda = \frac{10 - 3\lambda}{7}$
- $K_H = \frac{1 - \frac{h_H}{b}}{\sqrt[3]{\frac{2l_H}{b}}}$

Il parametro $l_H$ rappresenta la distanza tra il quarto della corda media aerodinamica dell'ala e quello corrispondente della corda, misurata parallelamente alla corda alare alla radice. Invece il parametro $h_H$ rappresenta la distanza tra la corda media aerodinamica del piano di coda orizzontale ed il piano individuato dalla corda dell'ala alla radice, misurata nel piano di simmetria e considerata positiva per piano di coda posto sopra al piano alare, C.1.

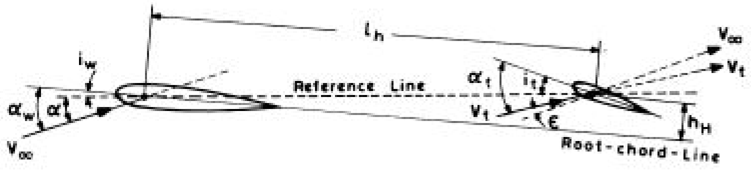



Figura C.1: Schema per il calcolo del downwash [18].

Tuttavia la (C.1) anche se considera l'effetto legato all'allungamento alare, al rapporto di rastremazione, alla freccia e alla posizione relativa tra piano di coda e ala non considera l'effetto legato alle forze aerodinamiche generate dal profilo alare.

# Riconoscimenti

*A conclusione di questo lavoro di tesi desidero ringraziare chi ha contribuito e chi mi ha permesso di raggiungere questo primo obiettivo.*

*In primis vorrei ringraziare il professore Angelo Lerro senza il quale questa tesi non sarebbe stata possibile. Più che un semplice relatore accademico, un professore brillante che appassiona profondamente gli studenti alle tematiche proposte. Per sempre grato per la professionalità e per il lato umano mostratomi.*

*Un ringraziamento di cuore ai miei due relatori della Leonardo l'ingegner Alberto Chiesa e il dottor ingegner Umberto Papa. Grazie per la vostra disponibilità, il vostro aiuto e la vostra spontaneità. Farò tesoro dei consigli tecnici ma soprattutto farò buon uso dei consigli di vita.*

*Un grazie agli amici che hanno sempre creduto in me e che mi hanno accompagnato in questo viaggio in particolare Beniamino e Vittorio.*

*Infine uno speciale ringraziamento alla mia famiglia per avermi sempre sostenuto e avermi spronato a dare sempre il meglio.*

# Bibliografia


[1] D. Milne R. *Dynamics of the Deformable Aeroplane, Part I and II.* University of London: Her Majesty's Stationery office, Reports e Memoranda, 1962.

[2] D. Milne R. «Some Remarks on the Dynamics of Deformable bodies». In: *AIAA Journal* 6.3 (1968), pp. 556–559. DOI: https://doi.org/10.2514/3.4541.

[3] K Cavin R. e R. Dusto A. «Hamilton's Principle: Finite-element Methods and Flexible Body Dynamics». In: *AIAA Journal* 15.12 (1968), pp. 1684–1690. DOI: https://doi.org/10.2514/3.7473.

[4] K. Canavin J e W. Likinst P. «Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft». In: *Journal of Spacecraft and Rocket* 14.12 (1977), p. 724. DOI: https://doi.org/10.2514/3.57256.

[5] S. Buttrill Carey, A. Zeiler Thomas e Douglas Arbuckle P. «Non Linear Simulation of a Flexible Aircraft in Maneuvering Flight». In: *AIAA Journal Flight Simulation Technologies Conference* 1.1 (1987), pp. 122–133. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1987-2501.

[6] K. Schmidt David e R. Waszak Martin. «Flight Dynamics of Aeroelastic Vehicles». In: *Journal of Aircraft* 25.6 (1988), pp. 563–571. DOI: https://doi.org/10.2514/3.45623.

[7] S. Buttrill Carey, R. Waszak Martin e K. Schmidt David. «Modeling and Model Simplification of Aeroelastic Vehicles; An Overview». In: *NASA STI* NASA Technical Memorandum 107691.1 (1992), pp. 1–20. DOI: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19930003028/downloads/19930003028.pdf.

[8] K. Schmidt David e Chavez Frank. «Dynamic of hypersonic flight vehicles exhibiting significant aeroelastic and aeropropulsive interaction». In: *Journal of Aircraft: Guidance, Navigation and Control Conference* Paper No 93-3763.6 (1993), pp. 561–568. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1993-3763.

[9] K. Schmidt David. «On The Integrated Control of Flexible Supersonic Transport Aircraft». In: *Journal of Aircraft: Guidance, Navigation and Control Conference* Paper No 95-3200.6 (1995), pp. 258–265. DOI: https://doi.org/10.2514/6.1995-3200.

[10] Meirovitch Leonard e Tuzcu Ilhan. «Integrated Approach to the Dynamics and Control of Maneuvering Flexible Aircraft». In: *NASA STI* NASA/CR-2003-211748.1 (2003), pp. 1–76. DOI: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20030062109/downloads/20030062109.pdf.

[11] Matlab Documentation. *FMINSEARCH algorithm.* 2006. URL: https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html.

[12] De Marco Agostino, L. Duke Eugene e S. Berndt Jon. «A General Solution to the Aircraft Trim Problem». In: *Journal of Aircraft* 20.23 (2007), pp. 1–40. DOI: `https://doi.org/10.2514/6.2007-6703`.

[13] K. Schmidt David. *Modern Flight Dynamics*. NY: McGraw-Hill, 2012.

[14] Giulio Avanzini, Elisa Capello e Irene Piacenza. «Mixed Newtonian-Lagrangian Approach for the Analysis of Flexible Aircraft Dynamics». In: *AIAA Journal* 51.5 (2014), pp. 1–20. DOI: `https://doi.org/10.2514/1.C032235`.

[15] L. Stevens Brian, L. Lewis Frank e N. Johnson Eric. *Aircraft Control and Simulaation*. NY: Wiley, 2015.

[16] J. Silvestre Flavio e Luckner Robert. «Experimental Validation of a Flight Simulation Model for Slightly Flexible Aircraft». In: *Journal of Aircraft* 53.12 (2015), pp. 3620–3636. DOI: `https://doi.org/10.2514/1.J054023`.

[17] K. Schmidt David, Zhao Wei e Rakesh Kapania K. «Flight-Dynamics and Flutter Modeling and Analysis of a Flexible Flying-Wing Drone». In: *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference* 1.1 (2016), pp. 1–22. DOI: `https://doi.org/10.2514/6.2016-1748`.

[18] Blasi Luciano. *Stabilita Statica e Controllo*. Napoli: SUN, 2017.