

**POLITECNICO DI TORINO**

**Corso di Laurea Magistrale  
in Ingegneria Meccanica**

**Tesi di Laurea Magistrale**

**Analisi modale sperimentale. Ricerca automatica  
delle soluzioni**



**Relatore**

Prof. Alessandro Fasana

---

**Candidato**

Leonardo Pio Petrillo

---

Aprile 2021

## Abstract

L'estrazione e la selezione dei parametri modali sono delle problematiche alle quali l'accademia e l'industria si sono dedicate sin dalla fine del secolo scorso. La strada seguita è stata quella dell'implementazione del diagramma di stabilizzazione, che fornisce una panoramica sulla distribuzione delle estrazioni effettuate. Il passaggio successivo è quello di cercare di rendere il diagramma più chiaro, per agevolare il processo di selezione dei modi rappresentativi della struttura in esame. Questo passaggio ha subito una notevole evoluzione negli anni, dall'approccio al diagramma a occhio nudo, all'uso di soglie numeriche impostate manualmente sino a una completa automatizzazione del processo.

In questo lavoro di tesi viene implementato uno dei metodi automatizzati di selezione dei parametri modali, teorizzato da E.Reydeners, J.Houbrechts e G. De Roeck. Partendo da parametri modali estratti utilizzando il metodo LIPEZ e riferiti a un sistema di cui si ignora il numero di gradi di libertà, l'obiettivo è, in primo luogo, quello di rendere il diagramma di stabilizzazione più ordinato possibile, eliminando i modi spuri, e successivamente quello di selezionare i parametri che caratterizzano effettivamente il moto del sistema. A tal fine si segue un processo composto da alcuni passaggi, il primo dei quali richiede di applicare i cosiddetti Soft Validation Criteria per confrontare tra loro le forme modali estratte e immagazzinare queste informazioni in vettori. Dopodichè si usa l'algoritmo del 2-means clustering per creare una prima distinzione tra la classe dei vettori che caratterizzano modi sicuramente spuri e quella dei vettori che descrivono modi forse stabili. Il passaggio successivo è l'Hard Validation Criteria, che elimina le estrazioni caratterizzate da uno smorzamento privo di senso fisico. Successivamente viene applicato il clustering gerarchico sulla base delle distanze medie alle estrazioni non scartate, per ottenere una configurazione ordinata del diagramma di stabilizzazione. Infine, si utilizza nuovamente il 2-means clustering, ma stavolta per determinare i clusters da non considerare nel processo di selezione, in base al numero di modi presenti nei cluster stessi.

Completato il processo di organizzazione del diagramma di stabilizzazione, per ogni cluster viene scelto, come modo caratterizzante del sistema per la frequenza corrispondente, quello con lo smorzamento più vicino al valore mediano del cluster e la selezione dei parametri modali caratterizzanti del sistema può dichiararsi conclusa.

In generale, l'efficacia dell'algoritmo implementato può essere considerata soddisfacente. Si sono tuttavia evidenziate delle criticità, approfondite nella trattazione, per il primo 2-means clustering. Infatti, l'algoritmo è impostato per scartare solo i modi la cui totalità dei vettori associati viene classificata come spuria. Questo, tuttavia, avviene raramente, dunque la quantità di modi scartati nel passaggio in questione è abbastanza esigua. Inoltre, dei problemi sono stati evidenziati anche in relazione alla soglia impostata automaticamente nel passaggio del clustering gerarchico. Il valore di questa soglia, come suggerito nell'articolo originale, risulta troppo elevato: l'operazione non viene arrestata al momento giusto, ma prosegue ancora di alcuni cicli alterando i risultati finali. Modulando opportunamente la soglia critica, è possibile ottenere dei risultati convincenti e simili a quelli ottenuti con i metodi tradizionali.

# Indice

Introduzione .....	1
1. Metodo LIPEZ per l'estrazione dei parametri modali .....	2
2. Generazione di modi spuri dall'estrazione dei parametri modali .....	5
2.1. Diagramma di stabilizzazione .....	5
2.1.1. Diagramma di stabilizzazione tradizionale .....	6
2.1.2. Diagramma di stabilizzazione di clustering .....	7
3. Pulizia del diagramma di stabilizzazione: strade intraprese .....	8
3.1. Ottimizzazione dell'estrazione delle forme modali: il metodo Polymax .....	8
3.2. Ottimizzazione del diagramma di stabilizzazione .....	10
4. Tecniche automatiche di clustering e criteri di validazione dei modi .....	13
4.1 Tipologie di clustering .....	13
4.2 K-means clustering .....	15
4.3 Hierarchical clustering .....	17
4.4. Soft Validation Criteria e Hard Validation Criteria .....	21
5. Implementazione del modello di selezione dei parametri modali .....	23
5.1 Single-mode validation criteria: Soft Validation Criteria .....	24
5.1.2 Differenza relativa tra le frequenze naturali .....	25
5.1.3 Differenza relativa tra i fattori di smorzamento .....	25
5.1.4 Differenza relativa tra gli autovalori continui nel tempo .....	25
5.1.5 Confronto tramite il MAC .....	26
5.1.6 Confronto attraverso il MACX .....	28
5.1.7 Differenze relative tra i MPC .....	29
5.1.8 Confronto tra i Modal Scaling Factor .....	30
5.1.9 Riepilogo dei criteri utilizzati .....	31
5.2 Prima applicazione del 2-means clustering .....	32
5.3 Single-mode validation criteria: Hard Validation Criteria .....	36
5.4 Applicazione dell'agglomerative hierarchical clustering .....	37
5.5 Seconda applicazione del 2-means clustering e scelta finale delle soluzioni .....	39
6. Applicazione dell' algoritmo a un modello numerico .....	41
6.1. Single-mode validation criteria: Soft Validation Criteria .....	44
6.2. Primo 2-Means clustering .....	45
6.3. Single-mode validation criteria: Hard Validation Criteria .....	49
6.4 Agglomerative hierarchical clustering .....	49
6.5. Secondo 2-means clustering .....	50
6.6. Selezione dei modi caratteristici .....	50
6.6. Confronto tra soluzioni teoriche e soluzioni estratte .....	56
6.7 Applicazione al modello numerico con modifica dell'intensità del rumore .....	56
7. Applicazione dell' algoritmo a un sistema reale .....	68

7.1. Single-mode validation criteria: Soft Validation Criteria .....	73
7.2. Primo 2-Means clustering .....	73
7.3. Single-mode validation criteria: Hard Validation Criteria.....	76
7.4. Agglomerative hierarchical clustering .....	77
7.4.1. Problematica relativa alla soglia critica .....	77
7.5. Secondo 2-means clustering.....	78
7.6. Selezione dei modi caratteristici .....	78
7.7. Confronto con un altro algoritmo di selezione dei parametri modali .....	84
Conclusioni .....	87
Bibliografia .....	88
Appendice – Script Matlab .....	89

## Indice Figure

Figura 1 - Esempio di diagramma di stabilizzazione tradizionale .....	6
Figura 2 - Esempio di diagramma di stabilizzazione di clustering .....	7
Figura 3 - Diagramma di stabilizzazione relativo ad una autovettura:a) LSCE, b) PolyMax .....	9
Figura 4 - Applicazione del CMI al diagramma di stabilizzazione delle forme modali. Fonte [9] ...	12
Figura 5 Esempio di K-means clustering con 3 centroidi. Immagine tratta da: <a href="http://www.github.com">www.github.com</a> ....	17
Figura 6 Esempio di matrice di prossimità relativa a hierarchical clustering. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13] .....	18
Figura 7 Similitudine tra clusters in base a distanze minime. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13].....	19
Figura 8 Similitudine tra clusters in base a distanze massime. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13].....	19
Figura 9 Similitudine tra clusters in base a distanze medie. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13].....	20
Figura 10 Similitudine tra clusters in base a distanze tra centroidi. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13].....	20
Figura 11 Esempio di dendrogramma con soglia. Immagine tratta da: <a href="http://www.stackabuse.com">www.stackabuse.com</a> .....	21
Figura 12 Esempio di MAC-matrix relativa a due modelli aeroelastico. Fonte [12].....	27
Figura 13 Esempio di comparazione tra MAC e MACX relativamente a due modelli aeroelastici. Fonte [12].....	28
Figura 14 Confronto tra forma modale con MPC=1 (sinistra) e forma modale con MPC prossimo al valore nullo (destra). Fonte [5] .....	30
Figura 15 Diagramma spazio-temporale relativo al sistema.....	41
Figura 16 Rappresentazione delle FRF .....	42
Figura 17 Rappresentazione della somma dei moduli delle FRF .....	42
Figura 18 Diagramma di stabilizzazione frequenze-ordini.....	43
Figura 19 Diagramma di stabilizzazione frequenze-smorzamenti.....	43
Figura 20 Diagramma di stabilizzazione ordini-smorzamenti .....	44
Figura 21 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS4 .....	46
Figura 22 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS4 .....	47
Figura 23 Rappresentazione del sottospazio VS4-VS7 .....	47
Figura 24 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS7 .....	48
Figura 25 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS7 .....	48
Figura 26 Diagramma di stabilizzazione successivo all'applicazione degli HVC .....	49
Figura 27 Rappresentazione delle FRF-Rumore al 20% .....	57
Figura 28 Rappresentazione della somma dei moduli delle FRF-Rumore al 20%.....	57
Figura 29 Diagramma di stabilizzazione frequenze-ordini - Rumore al 20% .....	58
Figura 30 Diagramma di stabilizzazione frequenze-smorzamenti - Rumore al 20% .....	58
Figura 31 Diagramma di stabilizzazione ordini-smorzamenti - Rumore al 20% .....	59
Figura 32 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS4 – Rumore al 20%.....	59
Figura 33 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS4 – Rumore al 20% .....	60
Figura 34 Rappresentazione del sottospazio VS4-VS7 – Rumore al 20% .....	60
Figura 35 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS7 – Rumore al 20% .....	61
Figura 36 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS7 – Rumore al 20% .....	61

Figura 37 Diagramma di stabilizzazione dopo HVC – Rumore al 20%.....	62
Figura 38 Rappresentazione sommaria del modello FEM costruito. Fonte [3].....	68
Figura 39 Rappresentazione della portiera con i punti di misurazione. Fonte [3].....	69
Figura 40 Rappresentazione schematica dei punti di misurazione, della cella di carico e dei riferimenti. Fonte [num].....	70
Figura 41 Rappresentazione delle FRF .....	71
Figura 42 Rappresentazione della somma delle FRF.....	71
Figura 43 Diagramma di stabilizzazione frequenze-ordini.....	72
Figura 44 Diagramma di stabilizzazione frequenze-smorzamenti.....	72
Figura 45 Diagramma di stabilizzazione ordini-smorzamenti .....	73
Figura 46 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS4 .....	74
Figura 47 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS4 .....	75
Figura 48 Rappresentazione del sottospazio VS4-VS7 .....	75
Figura 49 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS7 .....	76
Figura 50 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS7 .....	76
Figura 51 Diagramma di stabilizzazione successivo all'applicazione degli HVC .....	77

## Indice Tabelle

Tabella 1 Soft Validation Criteria implementati.....	31
Tabella 2 Esempio di un elenco di modi estratti.....	36
Tabella 3 Esempio di un insieme di vettori fisicamente stabili, ottenuto dopo l'esecuzione del 2-means clustering.....	36
Tabella 4 Hard Validation Criteria implementati .....	37
Tabella 5 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: frequenze.....	51
Tabella 6 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: fattori di smorzamento.....	52
Tabella 7 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: frequenze.....	53
Tabella 8 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: fattori di smorzamento .....	54
Tabella 9 Modi finali selezionati .....	55
Tabella 10 Modi teorici.....	55
Tabella 11 Matrice MAC per paragonare forme modali teoriche con forme modali estratte.....	56
Tabella 12 Matrice MACX per paragonare forme modali teoriche con forme modali estratte.....	56
Tabella 13 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: frequenze - Rumore al 20%.....	63
Tabella 14 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: fattori di smorzamento - Rumore al 20% .....	64
Tabella 15 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: frequenze – Rumore al 20%.....	65
Tabella 16 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: fattori di smorzamento – Rumore al 20% .....	66
Tabella 17 Modi selezionati - Rumore al 20% .....	67
Tabella 18 Modi teorici - Rumore al 20% .....	67
Tabella 19 Matrice MAC - Rumore al 20%.....	67
Tabella 20 Matrice MACX - Rumore al 20%.....	67
Tabella 21 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: frequenze.....	79
Tabella 22 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: fattori di smorzamento .....	80
Tabella 23 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: frequenze.....	81
Tabella 24 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: fattori di smorzamento .....	82
Tabella 25 Modi finali selezionati .....	84
Tabella 26 Modi selezionati dall'algorithmo di confronto .....	86
Tabella 27 Matrice MAC per il confronto delle forme modali.....	86
Tabella 28 Matrice MACX per il confronto delle forme modali.....	86

## Introduzione

Questo lavoro di tesi affronta il tema dell'estrazione e della selezione dei parametri modali. Queste ultime sono problematiche a cui, sin dalla fine del secolo scorso, sia l'accademia che l'industria si sono dedicate. La strada solitamente seguita in questo ambito consiste nel cercare di estrarre e selezionare parametri modali che possano presentare una affinità più alta possibile rispetto ai parametri evidenziati sperimentalmente.

Uno dei punti fermi fondamentali nel processo di selezione dei parametri modali è sicuramente il diagramma di stabilizzazione: esso è una rappresentazione grafica delle estrazioni effettuate, che consente, da un lato, di fare le prime considerazioni sul numero di modi effettivamente estratti, dall'altro, di avere un'idea riguardo la stabilità degli stessi. Nella prima parte della trattazione, verranno brevemente illustrati i passaggi che hanno permesso, nel corso degli anni, di aumentare gradualmente il grado di automatizzazione del diagramma di stabilizzazione, limitando sempre più la discrezionalità per quanto riguarda la scelta dei modi, e si farà riferimento a particolari esempi che si sono rivelati essenziali per questa innovazione.

Nella seconda parte, ci si concentrerà prettamente sul lavoro svolto: esso ha come obiettivo l'implementazione di un algoritmo completamente automatizzato che, partendo dal diagramma di stabilizzazione, debba selezionare i parametri modali che effettivamente caratterizzano il modello in esame. A tal fine, si è scelto di seguire le linee guida dettate dal metodo automatizzato di selezione dei parametri modali implementato e teorizzato da E.Reydeners, J.Houbrechts e G. De Roeck. Partendo da modi estratti utilizzando l'algoritmo LIPEZ e riferiti a un sistema di cui si ignora il numero di gradi di libertà, l'algoritmo implementato ha, come primo compito, quello di rendere il diagramma di stabilizzazione più ordinato rispetto alla versione in uscita dall'algoritmo di estrazione. Questo procedimento, che sarà descritto nei dettagli all'interno della trattazione, è composto da più passaggi: i Soft Validation Criteria, il cui ruolo è quello di effettuare un primo confronto tra tutti i modi estratti attraverso la costruzione di particolari vettori di comparazione; una prima applicazione dell'algoritmo 2-means clustering finalizzata a determinare la natura dei vettori di comparazione in uscita dal passaggio precedente, stabilendo cioè se possono presentare una stabilità o se sono sicuramente spuri; una applicazione dell'agglomerative hierarchical clustering, che è il passaggio in cui effettivamente si verifica l'automatizzazione del diagramma, attraverso il raggruppamento di modi simili in insiemi denominati *clusters*; una seconda applicazione del 2-means clustering al fine di eliminare dal diagramma i clusters con un numero di modi insufficiente al loro interno.

Completato il processo di organizzazione del diagramma, per ogni cluster viene scelto un particolare modo che caratterizza il sistema, attraverso il criterio dello smorzamento mediano.

L'algoritmo implementato è stato poi testato su due differenti tipologie di sistemi:

- Un modello numerico, di cui si conosce in partenza il numero di gradi di libertà (l'algoritmo comunque non possiede questa informazione)
- Un sistema fisico reale, di cui si possiedono dei dati sperimentali.

Ottenuti i modi caratterizzanti del modello in esame, l'ultimo passaggio, che sarà ovviamente illustrato nella trattazione, è il confronto dei modi estratti e selezionati dal diagramma di stabilizzazione con quelli teorici, nel caso del modello numerico, o scelti da un altro algoritmo di selezione (implementato da Dario Anastasio), nel caso del sistema fisico reale. Questo confronto sarà effettuato utilizzando i parametri *MAC* e *MACX* per la comparazione delle forme modali: la costruzione della matrice *MAC* e della matrice *MACX* permetterà, di conseguenza, di fare opportune considerazioni sull'affidabilità dei modi estratti e selezionati.

# 1. Metodo LIPEZ per l'estrazione dei parametri modali

Il lavoro svolto nel progetto di tesi è consistito nella creazione e nella successiva lettura automatizzata del diagramma di stabilizzazione, relativo ai modi estratti a partire dalle misure sperimentali su un sistema di  $n$  gradi di libertà.

I parametri modali da cui il lavoro è partito sono stati ottenuti sfruttando il software che utilizza il metodo LIPEZ, la cui implementazione è esplicitata in maniera dettagliata in [4]. Il metodo di analisi si potrebbe però utilizzare anche se il diagramma di stabilizzazione fosse prodotto da un qualunque altro algoritmo di estrazione dei parametri modali.

Il metodo LIPEZ consiste in un modello finalizzato a ottenere una estrazione dei parametri modali, relativamente al dominio delle frequenze. Considerando un sistema lineare e invariante nel tempo, composto da  $n$  gradi di libertà non noti a priori, la risposta all'impulso, nel dominio del tempo può essere espressa come:

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2n} A_r e^{s_r t} \quad (1)$$

Effettuando la trasformazione di Fourier per traslare l'espressione della risposta nel dominio delle frequenze si ottiene la funzione di risposta in frequenza:

$$H(i\Omega) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{A_r}{i\Omega - s_r} \quad (2)$$

Il generico polo  $s_r$  è generalmente scritto nella forma:

$$s_r = -\zeta_r \omega_r + i\omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (3)$$

dove  $\omega_r$  e  $\zeta_r$  rappresentano, rispettivamente, la pulsazione naturale e il fattore di smorzamento.

L'espressione (2), benchè corretta, non consente di formulare il problema in una forma atta alla soluzione. Si introduce dunque la trasformata Z della relazione (1) per ottenere:

$$H_k = \sum_{r=1}^{2n} A_r \frac{z_k}{z_k - z_r} \quad (4)$$

Il coefficiente  $k$  indica una generica linea spettrale di riferimento, mentre i coefficienti  $z_r$  e  $z_k$  legati alla trasformazione sono calcolati nel modo seguente:

$$z_r = e^{s_r \Delta t} \quad (5)$$

$$z_k = e^{-i(k-1)\Delta\Omega\Delta t} = e^{-i\pi(k-1)/(N-1)} \quad (6)$$

dove  $N$  indica il numero totale di linee spettrali a disposizione.

Svilluppando la sommatoria dell'equazione (4) si ottiene la forma:

$$H_k = \frac{b_1 z_k + \dots + b_{2n} z_k^{2n}}{a_0 + a_1 z_k + \dots + a_{2n-1} z_k^{2n-1} + z_k^{2n}} \quad (7)$$

in cui tutti i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  sono reali

Dunque, per ogni FRF e in riferimento alla  $k$ -esima linea spettrale, sono presenti  $4n$  incognite da valutare. Considerando l'equazione completa, relativa al numero  $N$  di linee spettrali, si ottiene la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} H_1 & \cdots & H_1 z_1^{2n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N & \cdots & H_N z_N^{2n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_1^{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N & \cdots & z_N^{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 z_1^{2n} \\ \vdots \\ H_N z_N^{2n} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Scrivendo l'equazione in forma compatta si ha:  $A\vec{a} - B\vec{b} = \vec{w}$

La quantità di linee spettrali è scelta a priori e si tende a optare per un numero molto alto, in modo tale da soddisfare la condizione  $N \geq 4n$  e poter risolvere l'equazione completa con il metodo dei minimi quadrati.

L'equazione (8) è relativa a una singola FRF e va estesa per la totalità delle funzioni di risposta. Di conseguenza l'equazione complessiva si presenta come segue:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{NFRF} \end{bmatrix} \vec{a} + \begin{bmatrix} -B & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_{NFRF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vdots \\ \vec{w}_{NFRF} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Da quest'ultima formulazione è facile notare che il vettore  $\vec{a}$  e la matrice  $B$  non dipendono dalla singola FRF, mentre le altre incognite variano a seconda della funzione di risposta considerata.

Dalla costruzione dell'equazione (9) parte il procedimento volto a ricavare le incognite necessarie al calcolo delle forme modali. L'equazione potrebbe essere risolta ai minimi quadrati, ma le dimensioni delle matrici coinvolte nell'operazione comporterebbero errori numerici nella soluzione e, inoltre, tempi di calcolo inaccettabilmente elevati. È preferibile dunque manipolare l'equazione (9) affinché il primo passo sia il calcolo degli elementi del vettore  $\vec{a}$  tramite l'equazione:  $R\vec{a} = \vec{r}$ . Il vettore  $\vec{r}$  ha dimensione  $2n$ , mentre  $R$  è una matrice  $2n \times 2n$  reale e ben condizionata, in grado di presentare un enorme vantaggio: portare un'informazione relativa a  $N$  linee spettrali e  $NFRF$  funzioni di risposta in frequenza a una dimensione, piuttosto modesta, di  $2n$ . Per la costruzione di  $\vec{r}$  e di  $R$  si può far riferimento al documento originale.

Una volta ricavati gli elementi del vettore  $\vec{a}$  si passa al calcolo dei poli  $s_r$ , ricavabili attraverso l'ottenimento dei coefficienti  $z_r$ . Questi ultimi vengono calcolati trovando gli zeri della seguente equazione polinomiale:

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{2n-1} z^{2n-1} + z^{2n} = 0 \quad (10)$$

Dunque, sfruttando ora l'equazione (5), si ricavano facilmente i valori dei poli  $s_r$ .

In conclusione si calcolano le costanti modali  $A_r$ , relative a ogni singola FRF, a partire dall'equazione (4): a quel punto si hanno tutti gli elementi per ricavare i parametri della forma modale.

Come espresso precedentemente, il numero di gradi di libertà del sistema che fornisce i dati in ingresso al modello non è mai noto, dunque è necessario svolgere il processo di costruzione delle forme modali per differenti ordini del modello, per poi analizzare i risultati ottenuti e risalire al numero effettivo di gradi di libertà del sistema. In output al modello si ottiene dunque una matrice tridimensionale, in cui ogni piano corrisponde alle estrazioni relative a un determinato ordine del modello. La  $j$ -esima estrazione sul piano  $i$ -esimo è indicata come:

$$\vec{e}_{ij} = \begin{pmatrix} f_{ij} \\ \zeta_{ij} \\ \vec{\Psi}_{ij} \end{pmatrix}$$

i cui termini rappresentano rispettivamente la frequenza, lo smorzamento, e la forma modale relativi ad essa. Per quanto riguarda la forma modale  $\vec{\Psi}_{ij}$ , la sua dimensione è pari al numero di canali in output, ovvero al numero di punti di misura del sistema.

Il lavoro svolto successivamente è stato quello di analizzare la matrice delle estrazioni dei parametri modali, con lo scopo di effettuare delle verifiche riguardo la stabilità e l'affidabilità delle forme modali estratte. Queste caratteristiche, che saranno approfondite nei capitoli successivi, riguardano tutti gli elementi della estrazione, e possono anche riferirsi al confronto tra estrazioni distinte. In base a queste analisi le singole estrazioni verranno classificate come possibilmente fisiche, e dunque stabili, oppure certamente spurie, e di conseguenza attribuibili non alla struttura in esame, bensì al solutore numerico (LIPEZ, nello specifico caso in esame). Tra le estrazioni appartenenti alla prima classe verranno poi selezionate quelle che rappresentano con maggior fedeltà il comportamento del sistema.

## 2. Generazione di modi spuri dall'estrazione dei parametri modali

Come espresso nel paragrafo precedente, il lavoro eseguito parte dal risultato dell'estrazione di parametri modali utilizzando il metodo LIPEZ, ma sarebbe comunque adattabile a qualunque algoritmo di estrazione dei parametri modali. Le estrazioni ottenute attraverso l'applicazione del codice sono illustrate all'interno della matrice *matmodi* che viene salvata come file. I modi contenuti in questa matrice in output devono subire un inevitabile processo di categorizzazione e scrematura, volto innanzitutto a isolare e scartare i modi totalmente computazionali e non sussistenti dal punto di vista fisico (definiti *modi spuri*), e di conseguenza a individuare le frequenze, gli smorzamenti e le relative forme modali che meglio rappresentano il comportamento del sistema soggetto ad un particolare tipo di sollecitazione.

Occorre interrogarsi sulla ragione per la quale questi metodi di analisi e di estrazione dei parametri modali portano alla generazione anche di modi spuri. A tal proposito, è necessario far riferimento al fatto che i sistemi analizzati da questo tipo di analisi modale sono sistemi fisici reali. Di conseguenza il numero di gradi di libertà non è noto e, al contrario, si può dire che idealmente il sistema presenti un numero infinito di gradi di libertà. Dunque, la necessità di rappresentare fedelmente il comportamento del sistema deve essere soddisfatta stabilendo a priori un intervallo di ordini del modello, compreso tra un massimo e un minimo scelti in base al buon senso ingegneristico. Una volta determinata l'ampiezza dell'intervallo, il procedimento di estrazione dei parametri modali è ripetuto per ogni singolo ordine appartenente a esso, ottenendo, come anticipato nel paragrafo precedente, una matrice delle estrazioni. In tal senso, potrebbero essere generati dei modi spuri a causa di una sovrastima dei gradi di libertà del sistema da parte dell'algoritmo. Quest'ultima, tuttavia, non è la unica ragione alla base dell'estrazione di questo tipo di forme modali. Ci possono essere anche dei modi spuri la cui generazione è legata alle condizioni fisiche dell'ambiente in cui i dati vengono raccolti. In tal senso può essere valutata l'influenza del tipo di eccitazione a cui il sistema è sollecitato, oppure la varietà di rumore di fondo presente nell'ambiente di misura.

L'operazione di scrematura dei dati in uscita dal processo di estrazione dei parametri modali, al fine di ottenere dei parametri più ordinati e più fedeli al comportamento della struttura, è stata costantemente oggetto di studio da parte degli addetti ai lavori, specialmente in riferimento alla seconda metà del secolo scorso e i primi anni del nuovo millennio. Lo strumento che ha permesso di percorrere questa strada, attraverso soluzioni semplici e via via più complesse, è senza dubbio il diagramma di stabilizzazione dei modi. Esso sarà il filo conduttore di questo lavoro di tesi, in cui, come anticipato, il fine è quello di ottenerne una versione più pulita possibile, per rendere più efficiente il processo di selezione dei modi che caratterizzano il sistema in esame. Una panoramica descrittiva sul diagramma di stabilizzazione, necessaria per far luce sulle sue caratteristiche e sul suo funzionamento, è illustrata nel paragrafo che segue.

### 2.1. Diagramma di stabilizzazione

Il diagramma di stabilizzazione è uno strumento visivo che permette di rappresentare graficamente le estrazioni modali riferite al sistema in esame. Una rappresentazione grafica di questi parametri può essere di grande aiuto nell'individuazione degli effettivi modi che caratterizzano il modello. Ad esempio, un picco di dati concentrato in corrispondenza di una determinata frequenza può suggerire la probabile presenza di un modo fisicamente stabile in corrispondenza di essa. Al contrario, dei modi registrati in modo sparso lungo l'intervallo catturato dal diagramma, senza alcuna densità in vicinanza di una precisa frequenza, lasciano intendere che siano modi che andranno scartati, perché probabilmente spuri o comunque non stabili fisicamente (Figura 1).

È chiaro dunque che, dal punto di vista visivo, un diagramma di stabilizzazione può già fornire uno strumento per l'individuazione dei parametri utili e l'eliminazione di quelli non corretti. Tuttavia, per evidenziare questi aspetti è necessaria una visione complessiva del diagramma da parte dell'occhio umano, che spesso potrebbe essere insufficiente se si analizzano dei sistemi particolarmente

complessi. In tal senso, la sfida che ha accompagnato gli ultimi decenni è stata quella di limitare l'importanza dei giudizi soggettivi, benché affidati a tecnici esperti, dall'analisi cercando, un po' alla volta, di automatizzare il processo di selezione dei parametri modali.

Può essere utile, per una trattazione completa, svolgere una breve descrizione dei tipi di diagramma di stabilizzazione più utilizzati, e su cui anche questo progetto di tesi verte.

### 2.1.1. Diagramma di stabilizzazione tradizionale

Per diagramma di stabilizzazione tradizionale si intende la sua versione storicamente più utilizzata per lo studio e l'analisi dei modi estratti. La sua struttura, articolata in due assi cartesiani, prevede il posizionamento delle frequenze sull'asse delle ascisse e dell'ordine del modello sull'asse delle ordinate. La sua costruzione, effettuata dal software di estrazione dei parametri modali, avviene ordine per ordine. In altre parole, ad ogni estrazione, riferita all' $i$ -esimo ordine del modello, corrispondono un numero  $k$  di forme modali estratte a frequenze differenti. Nel diagramma di stabilizzazione questi  $k$  modi vengono rappresentate alla riga  $i$ -esima, nella posizione relativa alla rispettiva frequenza che li caratterizza (Figura 1).

In questo tipo di diagramma, i modi fisicamente stabili tendono a posizionarsi a frequenze quasi identiche con l'incremento dell'ordine del modello. Di conseguenza, la loro presentazione nel diagramma di stabilizzazione è quella di lunghe colonne verticali di punti visivamente molto evidenti. La stessa cosa non si può dire dei modi spuri, infatti questi ultimi non garantiscono stabilità in frequenza durante il processo di estrazione, e per questo possono presentarsi in maniera notevolmente disgregata.

Per quanto riguarda l'uso di questo diagramma di stabilizzazione, l'ambizione che negli anni è stata sempre più alimentata è quella di rendere più efficiente possibile il processo di identificazione e selezione delle colonne di poli stabili. In principio questa operazione era effettuata ad occhio nudo, o comunque sulla base del buon senso ingegneristico, oppure attraverso l'applicazione di particolari soglie, come ad esempio un numero minimo di poli appartenenti a una singola colonna per far sì che i modi corrispondenti vengano classificati come stabili. Con lo sviluppo di algoritmi sempre più avanzati, che limitavano in maniera via via maggiore l'intervento dell'uomo e che si adattavano a una varietà sempre più ampia di sistemi fisici, è stato possibile accorciare notevolmente la distanza dall'obiettivo finale. Questo lavoro, infatti, sarà incentrato, nei paragrafi successivi, all'implementazione di uno di questi modelli, per comprenderne il funzionamento e sondare l'efficacia dei risultati finali.

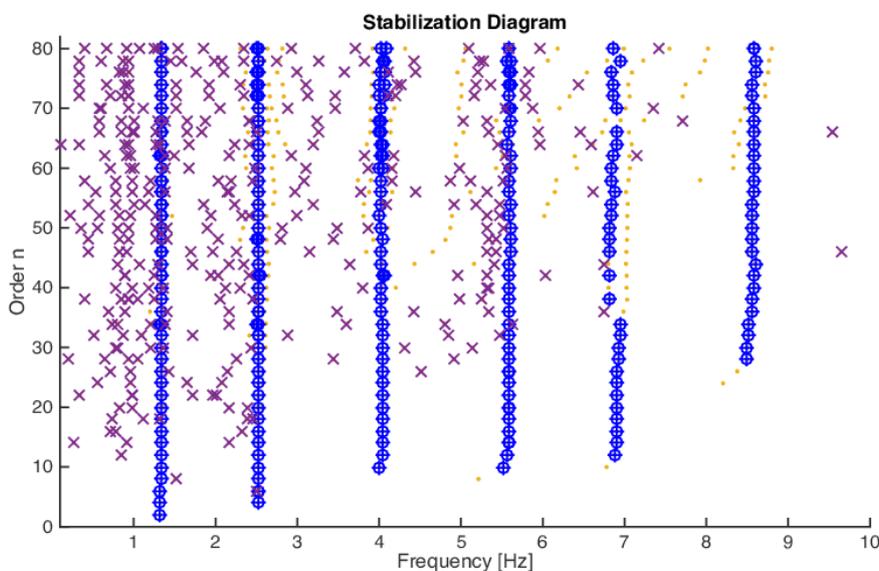


Figura 1 - Esempio di diagramma di stabilizzazione tradizionale

Un esempio di come il diagramma di stabilizzazione si presenta graficamente è illustrato in Figura 1. Risulta facile notare la notevole dispersione dei modi classificati come spuri, rappresentati con il simbolo  $\times$ , e l'ordine verticale con il quale tendono a disporsi i modi fisicamente stabili, caratterizzati dal segno  $\oplus$ .

### 2.1.2. Diagramma di stabilizzazione di clustering

Un diagramma di stabilizzazione alternativo, che utilizza la tecnica del clustering, merita sicuramente un cenno all'interno della trattazione, anche perché una tecnica simile sarà utilizzata successivamente all'eliminazione dei modi instabili per determinare l'effettivo numero di cluster, e dunque di modi effettivi, che caratterizza il sistema in esame.

Questo tipo di diagramma è sempre articolato in due assi cartesiani, con le frequenze rappresentate sull'asse delle ascisse. Sull'asse delle ordinate, invece, si ha una maggiore discrezione sulla scelta del parametro da rappresentare. Uno tra i più utilizzati è il fattore di smorzamento, e la combinazione tra esso e la frequenza corrispondente si traduce in un punto nella raffigurazione grafica, definito dal *polo* corrispondente. Relativamente a questo diagramma, si conferma il fatto che i poli corrispondenti ai modi fisicamente instabili tendono ad avere una dispersione notevole nel piano. Per quanto riguarda i modi stabili, invece, i poli si concentrano in zone molto piccole, denominate *clusters*. Questo permette, per sistemi non troppo complessi, di effettuare visivamente delle stime su quanti modi effettivi sono stati estratti, in relazione al numero di cluster visibili sul diagramma (Figura 2).

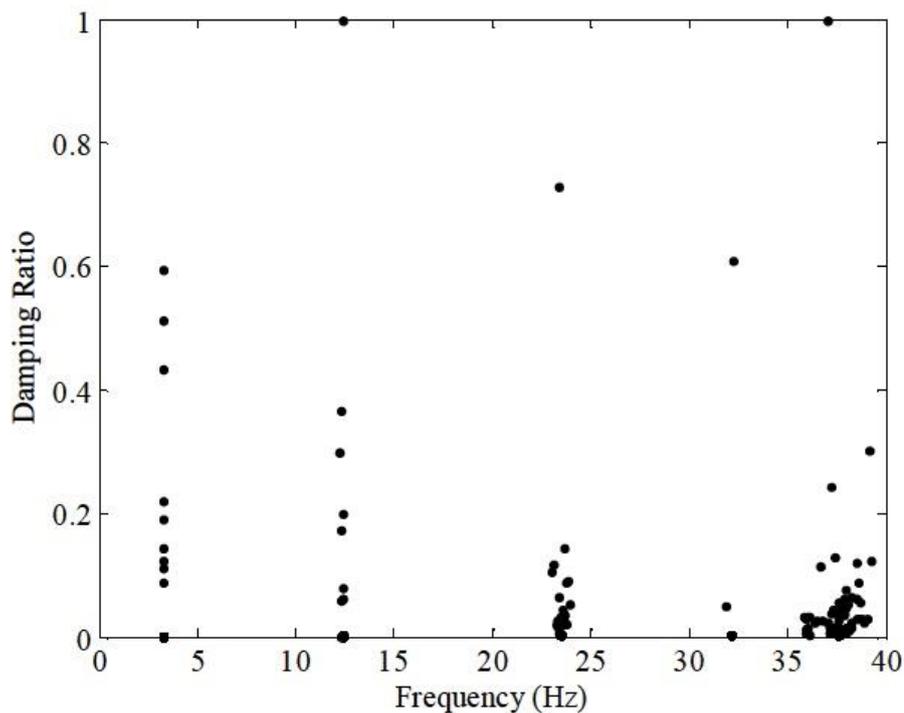


Figura 2 - Esempio di diagramma di stabilizzazione di clustering

La stabilità dei cluster può essere messa in relazione alla loro relativa dimensione: considerando un cluster come una zona pseudo-circolare di raggio  $r$  e contenente un determinato numero di poli, il cluster, e dunque i modi corrispondenti, sono tanto più stabili quanto più  $r$  è piccolo.

Gli aspetti che riguardano il calcolo automatizzato del numero di cluster presenti nel diagramma e l'inizializzazione dei centroidi di ogni cluster sono molto interessanti. Essi non verranno affrontati in maniera diretta in questa trattazione, ma procedimenti analoghi sono stati implementati relativamente al diagramma di stabilizzazione tradizionale. Proprio per questo motivo è stato ritenuto doveroso fornire una visione generale di questo tipo di diagramma.

### 3. Pulizia del diagramma di stabilizzazione: strade intraprese

Segue ora una breve trattazione sulle problematiche che si sono evidenziate negli anni in relazione alla scelta dei modi fisicamente stabili all'interno del diagramma di stabilizzazione e l'eliminazione dei modi spuri, al fine di ottenere un diagramma più ordinato. Queste criticità sono state affrontate seguendo svariate strade, e in questa disamina ne verranno citate alcune che hanno notevolmente influenzato le scelte ingegneristiche degli anni successivi, rappresentando dei veri e propri crocevia nella ricerca di soluzioni definitive. Queste ultime si riferiscono ai metodi completamente automatizzati di estrazione e selezione dei parametri modali esistenti oggi, uno dei quali è stato basilare per lo svolgimento di questo lavoro.

Per raggiungere una maggior chiarezza del diagramma, le due vie principali che sono state intraprese sono state le seguenti:

- Risoluzione del problema a monte del diagramma, ottimizzando il metodo di estrazione delle forme modali;
- Azione diretta sul diagramma, attraverso l'implementazione di modelli e sistemi di selezione dei parametri ritenuti di stabilità sufficiente a non essere scartati.

Di seguito si pone brevemente l'attenzione su alcune peculiarità delle due strade percorse, e anche su alcuni aspetti che si sono rivelati di notevole importanza per permettere l'implementazione del codice a cui questa trattazione si riferisce.

#### 3.1. Ottimizzazione dell'estrazione delle forme modali: il metodo Polymax

Per l'estrazione dei parametri modali e la conseguente costruzione del diagramma di stabilizzazione, uno dei modelli maggiormente utilizzati è l'approccio LSCE-LSFD, che sfrutta il metodo di risoluzione dei minimi quadrati. Quest'ultimo si divide in due passaggi fondamentali, sintetizzati di seguito:

- La prima operazione che si esegue è il calcolo dei poli, a partire dai dati ricevuti in input, eseguita con il metodo LSCE (*least squares complex exponential*). Da questi risultati parte la costruzione del diagramma di stabilizzazione, dove l'obiettivo finale è sempre quello di distinguere i poli fisici dai poli computazionali;
- L'operazione successiva è la stima delle forme modali, sfruttando il risolutore LSFD (*least squares frequency domain*).

Questo approccio, come già detto, è notevolmente diffuso, e applicabile facilmente per risolvere molti fenomeni vibratorii e riesce a gestire una quantità di dati moderata in un tempo comunque ragionevole. Tuttavia, l'utilizzo di questo metodo comporta anche alcune controindicazioni, come ad esempio la difficoltà di gestire un numero di canali in input elevato. Ma in merito ai difetti del modello, è opportuno fare il punto sul diagramma di stabilizzazione che si ottiene. In riferimento a esso, quando l'ambiente di misurazione è caratterizzato da un rumore di fondo intenso, il metodo in questione può entrare in crisi, il che si traduce in un diagramma di stabilizzazione molto disperso e poco chiaro (Figura 3.a).

Diversi sono stati gli approcci volti a risolvere il problema della chiarezza del grafico di stabilizzazione. Uno di quelli che ha permesso di evidenziare i risultati migliori è sicuramente il metodo LSCF (*least squares frequency domain*). Questo metodo utilizza l'approccio dei minimi quadrati per rendere un modello polinomiale a frazione razionale adatto a descrivere la matrice delle funzioni di risposta in frequenza, che solitamente è del tipo MIMO (*multi input multi output*). Una variante di questo metodo è conosciuta come *PolyMax*. Quest'ultimo è la variante che ha ottenuto i risultati migliori in termini di qualità del diagramma, e può essere schematizzato come segue:

$$[H(\omega)] = \frac{\sum_{r=0}^n z^r [\beta_r]}{\sum_{r=0}^n z^r [\alpha_r]} \quad (11)$$

dove:

- $[\beta_r]$  è la matrice che contiene i coefficienti del numeratore polinomiale della funzione, che sono incogniti;
- $[\alpha_r]$  è la matrice dei coefficienti del denominatore polinomiale della funzione, anch'essi incogniti;
- $n$  è il numero del modello;
- $z$  indica che il modello è sviluppato nel dominio delle frequenze, dunque:

$$z = e^{i\omega\Delta t} \quad (12)$$

con  $\Delta t$  pari al tempo di campionamento.

I coefficienti incogniti appartenenti alle matrici  $[\alpha_r]$  e  $[\beta_r]$  vengono ottenuti dapprima linearizzando le equazioni, e successivamente risolvendole con l'applicazione del metodo dei minimi quadrati. Per visualizzare la procedura dettagliata del funzionamento del modello, può essere utile visionare [9]. Sperimentalmente si sono evidenziati notevoli vantaggi dall'applicazione di questo metodo, a partire dalla possibilità di trattare sistemi di ordine abbastanza elevato contenendo comunque la dispersione dei dati all'interno del diagramma. Ad esempio, il modello PolyMax è in grado di riconoscere i poli caratterizzati da smorzamenti di segno negativo e di eliminarli prontamente dal diagramma.

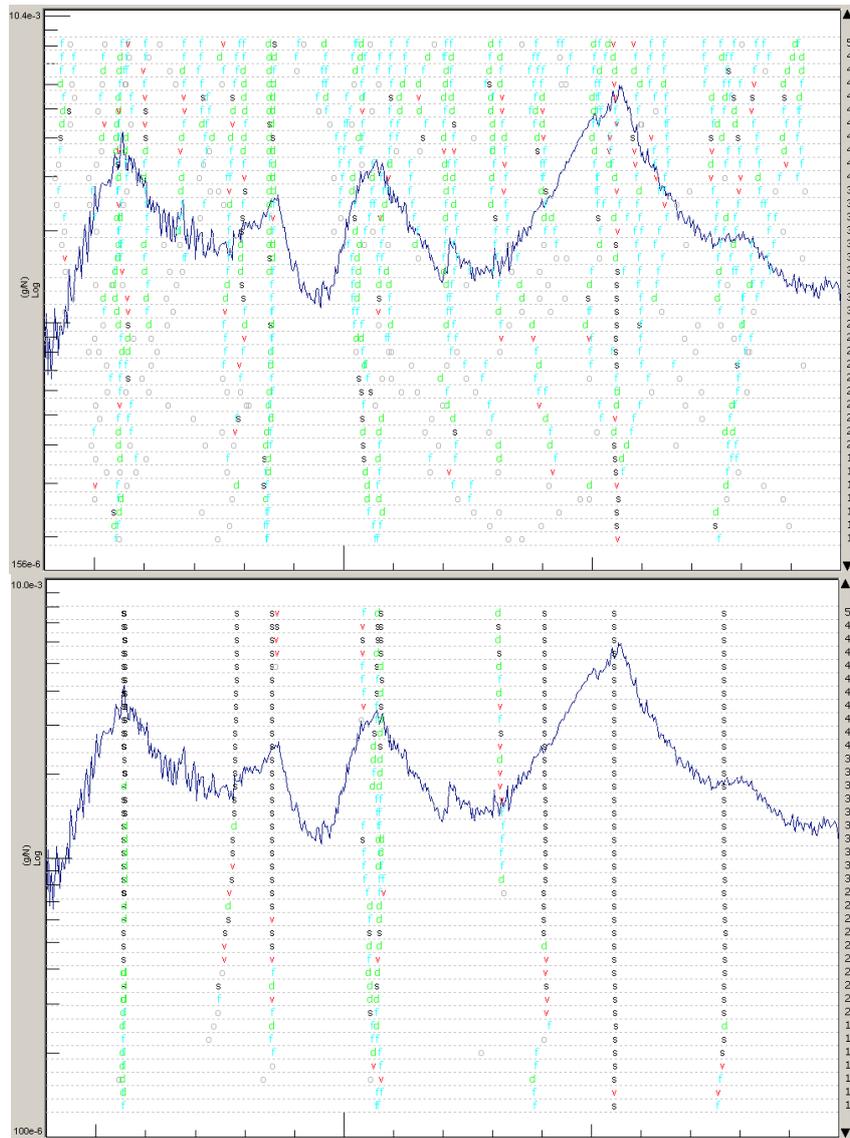


Figura 3 - Diagramma di stabilizzazione relativo ad una autovettura: a) LSCE, b) PolyMax

Come è evidente in Figura 3, la stima dei parametri modali si rivela notevolmente più accurata, e questo agevola sostanzialmente la corretta interpretazione del diagramma. Infatti, anche dal punto di vista visivo, risulta molto più facile evidenziare le colonne di modi stabili e procedere alla selezione dei modi che caratterizzano effettivamente il sistema.

### 3.2. Ottimizzazione del diagramma di stabilizzazione

Dopo aver fatto delle considerazioni sulla possibilità di ottenere un diagramma più pulito agendo direttamente sull'estrazione dei parametri modali, ora è opportuno porre l'attenzione sull'analisi del diagramma, e su come effettuare l'operazione di classificazione dei modi in fisici o computazionali. Questo passaggio è una delle azioni fondamentali nel processo di selezione dei parametri modali, perché permette di ottenere un diagramma ulteriormente più chiaro. Nel lavoro proposto, essa è implementata in una maniera completamente automatizzata, che sarà esplicitata nei paragrafi seguenti. Quando l'ottenimento di un processo completamente automatizzato era ancora lontano, la strada principalmente utilizzata era quella di interfacciarsi visivamente con il diagramma e con i risultati in esso contenuti. Dunque si cercava di individuare le colonne di modi stabili attraverso l'introduzione di opportune soglie, utilizzate per confrontare i parametri relativi a un modo di ordine  $n$  con quelli relativi al modo corrispondente all'ordine  $n - 1$ . Riguardo ai parametri di confronto, si riportano quelli maggiormente utilizzati:

- Frequenza  $f$ ;
- Smorzamento  $\zeta$ ;
- Modal Assurance Criterion, la cui sigla è  $MAC$ .

Riguardo al  $MAC$ , esso rappresenta matematicamente il grado di somiglianza e correlazione tra due vettori. In questo contesto viene utilizzato per paragonare tra loro due forme modali. I suoi valori possono variare da 0 a 1 e un  $MAC$  vicino all'unità denota grande somiglianza tra le due forme modali. Il  $MAC$  tra un modo di ordine  $n$  e uno di ordine  $n - 1$  è calcolato come segue:

$$MAC(n, n - 1) = \frac{|\phi(n)^T \cdot \phi(n - 1)|^2}{(\phi(n)^T \cdot \phi(n))(\phi(n - 1)^T \cdot \phi(n - 1))} \quad (13)$$

L'operazione di confronto effettuata tra i due modi è volta a verificare o meno l'esattezza delle condizioni matematiche illustrate di seguito:

$$|f(n) - f(n - 1)|/f(n) \times 100 < \delta_f \quad (14)$$

$$|\zeta(n) - \zeta(n - 1)|/\zeta(n) \times 100 < \delta_\zeta \quad (15)$$

$$(1 - MAC(n, n - 1)) \times 100 < \delta_\phi \quad (16)$$

dove  $\delta_f$ ,  $\delta_\zeta$ ,  $\delta_\phi$  rappresentano le soglie critiche per classificare o meno le due forme modali confrontate come simili. I valori delle soglie che generalmente vengono usati sono:

- 1% per  $\delta_f$ ;
- 2% per  $\delta_\zeta$ ;
- 5% per  $\delta_\phi$ .

Utilizzando queste soglie, è possibile identificare, a grandi linee, le colonne di modi caratterizzate da una stabilità generale. Tuttavia, non è fornita una informazione sufficiente per selezionare l'effettivo ordine del modello, cosa che necessita l'utilizzo di ulteriori criteri. Interessante, in tal senso, è stata

l'introduzione di parametri che caratterizzassero singolarmente i modi estratti. Questi parametri sono stati fondamentali per il successivo avvento di una totale automatizzazione del processo di scelta delle soluzioni, motivo per cui si è scelto di fornirne un breve accenno in questa trattazione.

Un parametro che sicuramente si è rivelato un precursore dei fattori usati oggi, compresi quelli presenti in questo lavoro, è il *Consistent Mode Indicator*, la cui sigla è *CMI*. Ogni modo estratto è caratterizzato da un particolare valore del *CMI* e quest'ultimo denota la qualità e l'accuratezza dell'estrazione. La formulazione del *CMI* sulla singola estrazione *i*-esima è la seguente:

$$CMI_i = EMAC_i \cdot MPC_i \times 100 \quad (17)$$

I due fattori che compongono il *CMI* si riferiscono allo studio della stabilità della forma modale nello spazio e nel tempo. In particolare il coefficiente  $EMAC_i$ , il cui significato è *Extended Modal Amplitude Coherence*, rappresenta qualitativamente la misura della coerenza temporale relativa all'estrazione *i*-esima. In altre parole, viene misurata la stabilità dei risultati ottenuti relativamente a un intervallo temporale preciso, la cui ampiezza è determinata dai dati in input e in output al sistema. La procedura di calcolo completa, abbastanza complessa, è presente in [9]. Considerando ora il  $MPC_i$ , il cui nome esteso è *Modal Phase Collinearity*, esso fornisce una informazione sulla coerenza spaziale della forma modale *i*-esima. In altre parole, tanto più il  $MPC_i$  si avvicina all'unità, tanto più le vibrazioni del sistema, in punti di misurazione differenti, tendono ad allinearsi su una sola fase. Dunque il  $MPC_i$  misura quanto il sistema, relativamente al modo considerato, tende a vibrare in monofase. Matematicamente, la sua formulazione è la seguente:

$$MPC_i = \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 \times 100 \quad (18)$$

I coefficienti  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono gli autovalori della matrice di varianza-covarianza, e sono calcolati come segue:

$$\lambda_{1,2} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2S_{xy}} \pm S_{xy} \sqrt{\eta^2 + 1} \quad (19)$$

I fattori  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$  e  $S_{xy}$  rappresentano, rispettivamente, la varianza della parte reale della forma modale in questione, la varianza della relativa parte immaginaria, la covarianza tra la parte reale e la parte immaginaria. Il coefficiente  $\eta$  viene ottenuto come:

$$\eta = (S_{yy} - S_{xx})/2S_{xy} \quad (20)$$

I valori del *CMI* possono oscillare da 0 al 100% e, al crescere di esso, cresce l'accuratezza dell'estrazione considerata. Il calcolo del *CMI* può essere applicato anche graficamente al diagramma di stabilizzazione delle forme modali, per ottenere una stima visiva sulla stabilità dei vari modi estratti. Si può ad esempio imporre una soglia minima sul valore del *CMI*, al di sotto della quale il modo viene automaticamente scartato e non compare nel diagramma di stabilizzazione. Questa soglia di solito è settata al 5%. Inoltre, è possibile rappresentare ogni forma modale estratta in relazione al rispettivo valore del *CMI*. In altre parole, i modi nel diagramma non vengono rappresentati come semplici punti, ma come dei tratti. La lunghezza dei tratti viene dosata in modo che risulti proporzionale al valore del *CMI* del modo considerato. Dunque, un *CMI* nullo comporterebbe idealmente la cancellazione del modo dal diagramma, mentre un *CMI* pari al 100% corrisponderebbe a un tratto di lunghezza massima. Ora, si prendano in considerazione due forme modali differenti, ma caratterizzate da frequenze simili e estratte a due ordini del modello adiacenti. Nel caso in cui

entrambe le forme modali presentino un *CMI* pari al 100%, quello che si ottiene graficamente è l'unione dei due tratti che le rappresentano in un'unica linea più lunga. Estendendo il ragionamento a tutti i modi estratti in corrispondenza di una particolare frequenza, se tutti presentassero idealmente un *CMI* pari al 100%, si osserverebbe una lunga linea continua che percorre verticalmente il diagramma. Dunque, se nel diagramma si è in grado di osservare, in corrispondenza di alcune frequenze, dei tratti assimilabili a linee continue, è probabile che i modi corrispondenti siano caratterizzati da una buona stabilità.

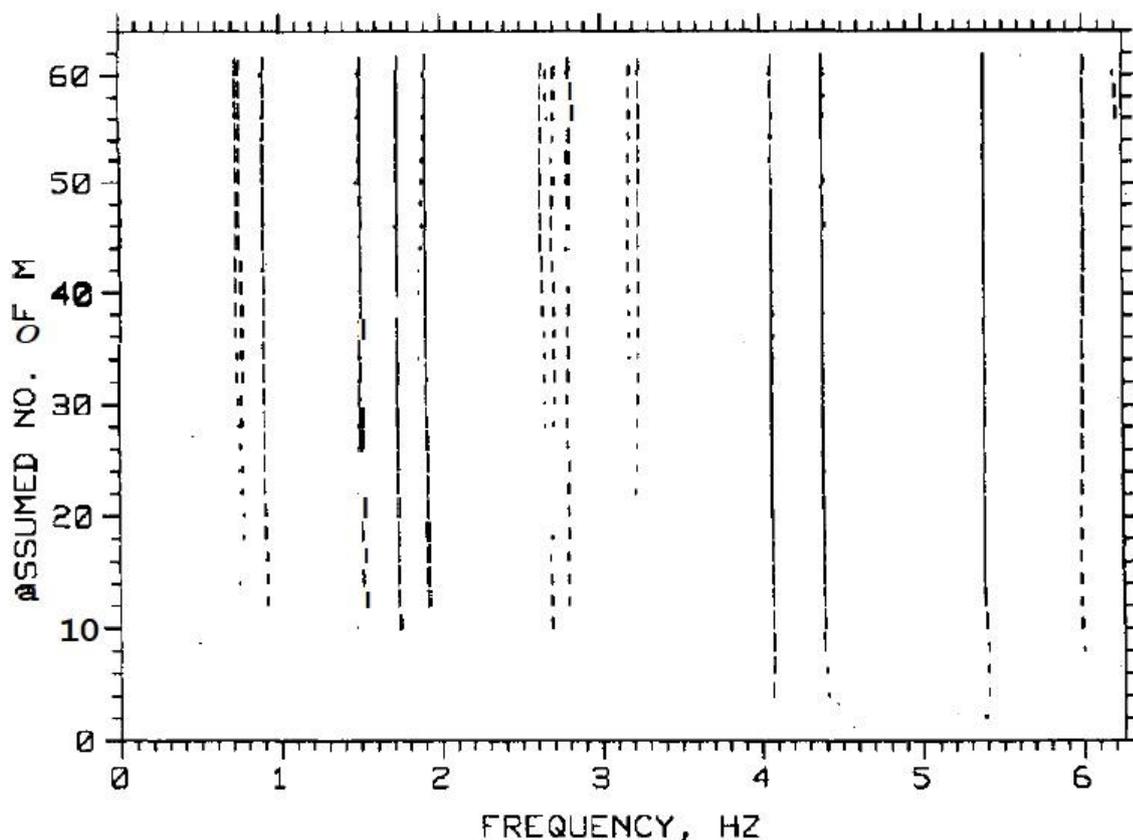


Figura 4 - Applicazione del *CMI* al diagramma di stabilizzazione delle forme modali. Fonte [9]

Un esempio di un'applicazione del *CMI* è osservabile in Figura 4. Le colonne che presentano maggiore continuità rappresentano dei modi stabili, mentre quelle che assumono l'aspetto di una linea tratteggiata con tratti piccoli segnalano che probabilmente i modi corrispondenti andranno scartati. La soglia discriminante per determinare se una colonna viene scartata o meno è l'80%: se il valore del *CMI* medio dei modi appartenenti ad una determinata colonna supera questa soglia, si considera che alla frequenza corrispondente vi è un modo stabile che caratterizza il sistema.

L'introduzione di parametri matematici che qualificano le forme modali estratte è stata fondamentale, come sarà evidente nei paragrafi successivi, per ottenere una completa automatizzazione del processo di selezione delle soluzioni. Quest'ultimo comporta l'eliminazione di soglie numeriche assunte a priori, richiedendo dunque una forte elasticità all'algoritmo, in base al sistema al quale esso viene applicato.

## 4. Tecniche automatiche di clustering e criteri di validazione dei modi

In questo capitolo l'intento è quello di introdurre il tema della totale automatizzazione del processo di selezione dei parametri modali che caratterizzano il sistema in esame. In riferimento a ciò, i risultati che negli anni sono stati raggiunti sono notevoli e hanno permesso di limitare progressivamente l'importanza della soggettività di giudizio, sino ad annullarla (quasi).

In questo lavoro l'attenzione è stata ovviamente posta sui metodi che coinvolgono l'implementazione del diagramma di stabilizzazione, che, come espresso precedentemente, permette di ottenere una panoramica sulla distribuzione dei parametri estratti. Tuttavia, è opportuno tenere a mente che l'obiettivo finale è quello di implementare un algoritmo di selezione che sia totalmente indipendente rispetto all'intervento umano. Per ottenere ciò, l'algoritmo deve essere in grado di costruire autonomamente il diagramma di stabilizzazione e di interpretarne i dati contenuti, stabilendo, in base ad opportuni criteri che saranno illustrati dettagliatamente nei paragrafi seguenti, i parametri da scartare e quelli da conservare.

Tra le strade che sono state seguite per ottenere l'automatizzazione del processo di selezione delle forme modali, l'attenzione è stata posta sull'implementazione di metodi complessi, che sono a loro volta composti da più algoritmi e criteri automatizzati combinati tra loro e utilizzati in una determinata sequenza logica. Di conseguenza, è opportuno fare un breve cenno riguardante gli strumenti fondamentali che hanno permesso l'implementazione di algoritmi più articolati, come quelli presenti oggi nella letteratura. Gli elementi basilari da analizzare e comprendere sono i seguenti:

- K-means clustering
- Agglomerative hierarchical clustering
- Soft Validation Criteria (SVC)
- Hard Validation Criteria (HVC)

Segue ora un breve approfondimento sul funzionamento di ognuno di questi strumenti. È importante comprendere in cosa consista l'operazione di clustering di dati estratti, per poi soffermarsi sulle differenti varianti di questa tecnica che sono state implementate nel tempo, evidenziando principalmente le peculiarità di quelle utilizzate in questo lavoro. Inoltre, vengono descritti anche gli aspetti principali che riguardano i criteri di validazione dei modi e la maniera in cui essi interagiscono con gli algoritmi fondamentali. I SVC si basano su un confronto tra modi, mentre gli HVC valutano un particolare parametro relativo ad un singolo modo.

### 4.1 Tipologie di clustering

Nell'analisi di dati numerici di diversa natura, l'operazione denominata *clustering* permette di ricavare informazioni specifiche sugli elementi analizzati, essendo in grado di suddividere i dati in gruppi di elementi, chiamati per l'appunto *clusters*, in modo tale che ogni elemento contenuto in un cluster abbia caratteristiche simili agli altri elementi presenti all'interno dello stesso cluster e sia sufficientemente distinguibile rispetto a quelli presenti negli altri.

In generale, l'operazione di clustering e l'analisi dei clusters ottenuti è svolta solitamente per raggiungere due tipologie di scopi:

- Classificazione dei dati: in questo caso, il clustering è utilizzato per separare e identificare automaticamente dei raggruppamenti di elementi che condividono particolari caratteristiche. Si tratta dunque di una funzione puramente qualitativa, volta semplicemente a dividere i dati posseduti per ottenerne una distribuzione ordinata nella quale tutte le caratteristiche di ogni cluster siano evidenziate in modo chiaro.
- Astrazione delle caratteristiche fondamentali: questo aspetto è di notevole importanza nell'implementazione dell'algoritmo per selezionare i modi. L'operazione di clustering è effettuata sulla base di alcune caratteristiche note, come ad esempio i risultati dei Soft Validation Criteria, che saranno approfonditi nei paragrafi seguenti. Tuttavia, una volta che i

raggruppamenti di dati sono stati formati, l'obiettivo è quello di astrarre da ognuno una entità che ne riassume la totalità delle caratteristiche. In altre parole, la finalità è quella di trovare un elemento, denominato *prototipo* del cluster, che possa racchiudere in sé tutte le peculiarità degli elementi presenti nel cluster e che, in un certo senso, possa rappresentarli. Un esempio esplicativo di questo aspetto, che sarà ritrovato nell'implementazione dell'algoritmo a cui questa trattazione si riferisce, è la scelta del modo caratterizzante di ogni cluster, che sia in grado di rappresentare in maniera efficace la totalità dei modi presenti in ciascun raggruppamento.

I primi tentativi di approccio a processi assimilabili alle tecniche di clustering risalgono agli sgoccioli del ventesimo secolo. Con l'invenzione dei moderni calcolatori, avvenuta nella seconda metà del secolo scorso, è stato possibile implementare una varietà enorme di algoritmi di questo tipo, che si differenziano tra loro sia per il tipo di approccio nei confronti dei dati a disposizione, sia per la propria finalità. Il numero enorme di tipologie degli algoritmi implementati può essere spiegato da varie ragioni, ma è dovuto principalmente ai seguenti fattori:

- non esiste una teoria unificata che possa fungere da linea guida nell'implementazione di un algoritmo del genere;
- la definizione stessa di cluster chiama in causa una certa arbitrarietà, poiché essa dipende sempre dalle caratteristiche dei dati a disposizione e dalla maniera in cui i parametri vengono analizzati e raggruppati.

Volendo fornire una panoramica generale sulle tipologie differenti degli algoritmi che sono stati implementati, si può far riferimento alle seguenti strade:

- Algoritmi Prototype-Based
- Algoritmi Density-Based
- Algoritmi Graph-Based
- Algoritmi ibridi

Gli algoritmi Prototype-Based hanno come loro caratteristica principale la definizione di prototipi, ovvero di entità ideali di tipo differente a seconda dei dati analizzati, attorno alle quali si vanno poi a costruire i cluster, determinando, elemento per elemento, la maggiore affinità rispetto a un prototipo piuttosto che ad un altro. Per alcuni algoritmi appartenenti a questa categoria, i prototipi dei cluster sono rappresentati da centroidi attorno ai quali i dati tendono a distribuirsi in maniera più o meno ordinata. In questo caso, i cluster assumono graficamente una caratteristica forma globulare, a partire dalla quale possono essere fatte una serie di considerazioni sull'accuratezza dell'algoritmo: ad esempio, risulta logico dedurre che la dimensione grafica del cluster possa essere legata in maniera inversamente proporzionale all'accuratezza dell'algoritmo. Esempi di algoritmi che utilizzano dei centroidi come prototipi sono il Fuzzy C-Means clustering e il K-Means clustering. Quest'ultimo è stato utilizzato in questo lavoro di tesi per effettuare una prima separazione tra le estrazioni sicuramente spurie e quelle che evidenziano una possibile stabilità. Dato che la distinzione dei modi pone solamente due differenti alternative, è necessaria soltanto una coppia di centroidi e di conseguenza la variante dell'algoritmo utilizzata è il 2-Means.

Una prima alternativa agli algoritmi Prototype-Based è fornita da un gruppo di algoritmi che si focalizzano principalmente sulla distribuzione dei dati a disposizione, evitando l'uso di entità ideali intorno alle quali organizzarli. Questi algoritmi prendono il nome di Density-Based. Il fulcro del loro approccio è quello di riuscire a evidenziare delle zone ad alta densità di elementi, che solitamente sono circondate da zone a bassa densità. Le zone ad alta intensità evidenziate, dopo ulteriori verifiche, vengono definite come clusters di dati. Questa tipologia di algoritmi viene utilizzata solitamente quando la distribuzione e la forma dei cluster di dati sono abbastanza irregolari, oppure quando l'entità del rumore in misurazione è notevole. In questi casi risulta difficile, ad esempio, ottenere dei cluster di forma globulare come accade con l'uso di algoritmi Prototype-Based, e l'utilizzo di questa

tipologia di software permette di superare queste criticità. Uno degli algoritmi più semplici appartenenti a questa categoria è il DBSCAN. In breve, questo agisce dividendo i dati a disposizione in punti centrali al cluster, punti di bordo e punti associati al rumore, facendo riferimento alla densità euclidea degli elementi. Una volta effettuata questa ripartizione, il software è in grado di ricostruire i cluster congiungendo opportunamente i punti etichettati. Quando i dati da gestire sono di dimensione elevata, come ad esempio dei vettori, vengono applicati algoritmi più complessi che ricercano zone di alta densità in sottospazi vettoriali. Per una panoramica maggiormente esaustiva sull'argomento si rimanda a [14].

Gli algoritmi Graph-Based, come suggerito dal loro nome, si caratterizzano per un approccio principalmente grafico ai dati e, in tal senso, non sono molto differenti dagli algoritmi Prototype-Based. Tuttavia, quello che li differenzia notevolmente da questi ultimi è l'assenza di centroidi attorno ai quali costruire i cluster. Al contrario, l'operazione svolta è l'individuazione di una unità di misura specifica, in base alla quale si misurano le distanze relative degli elementi a disposizione: è il caso del Divisive hierarchical clustering e dell'Agglomerative hierarchical clustering, che peraltro è utilizzato nel codice implementato per la selezione dei parametri modali. Questo algoritmo, dopo aver misurato le distanze relative tra i parametri in ingresso, procede con un progressivo raggruppamento degli elementi più vicini fino a ottenere un numero limitato di clusters, caratterizzati da elementi simili tra loro. Una trattazione più completa di questo codice e la relativa applicazione al caso in esame sarà affrontata nei paragrafi seguenti.

Infine, vi è una categoria di algoritmi che presenta una notevole varietà interna: gli algoritmi ibridi. L'utilizzo di questa tipologia va ricercato nel fatto che la quantità o il tipo di dati analizzati possa, in alcuni casi, evidenziare delle limitazioni o delle carenze degli algoritmi presi singolarmente. Si ricorre, di conseguenza, ad un uso combinato di due o più algoritmi differenti per oltrepassare questi limiti e raggiungere l'obiettivo finale. In un certo senso, anche in questo lavoro è stato implementato un algoritmo ibrido, perché per ricavare efficientemente i cluster modali non era sufficiente l'applicazione di un singolo algoritmo. Come sarà evidente nei passaggi successivi della trattazione, una variante del K-Means clustering sarà utilizzata per due volte, intervallate dall'applicazione di una versione dell'Agglomerative hierarchical clustering. L'algoritmo ibrido complessivo risulta quindi formato da un algoritmo Prototype-Based con doppia applicazione e da un algoritmo Graph-Based. Come già espresso, la varietà di questi algoritmi è sostanziale, e per una analisi più approfondita si consiglia di consultare [14].

## 4.2 K-means clustering

Si fornisce ora una breve introduzione sul funzionamento del K-means clustering, che è utilizzato nella variante 2-means all'interno del codice implementato. I primi tentativi riguardanti l'implementazione di questo algoritmo risalgono alla metà del ventesimo secolo, con la nascita di numerose varianti presenti ancora oggi. Nella sua versione tradizionale, il K-means clustering è un algoritmo del tipo Prototype-Based che ripartisce gli elementi in ingresso in diversi cluster sulla base della loro distanza dai centroidi. All'inizio, i centroidi possono essere impostati manualmente, sulla base di evidenze sperimentali, oppure possono essere calcolati da algoritmi che sondano la distribuzione iniziale dei dati e forniscono in uscita una stima dell'allocazione dei centroidi. Alla fine di ogni ripartizione, i centroidi vengono ricalcolati sulla base delle distanze medie tra gli elementi che appartengono al cluster e il ciclo si ripete. Il processo si interrompe nel momento in cui si raggiunge un minimo relativo o una convergenza di valori per quanto riguarda la somma delle distanze dei punti dai centroidi dei cluster.

Entrando in contatto con la formulazione matematica del K-means clustering, si supponga di avere un insieme  $X$  di dati da ripartire nei cluster. L'insieme  $X$  può essere rappresentato come:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (21)$$

dove il generico elemento  $x_i$  può essere uno scalare o può avere dimensione superiore all'unità. L'espressione matematica del K-means clustering si traduce in una funzione che relaziona i dati in ingresso con i centroidi in un calcolo iterativo. La funzione caratteristica può essere espressa come segue:

$$\{p_{ck}\}_{1 < k < K} = \operatorname{args}_{p_{ck}} \min \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in C_k}}^{m(C_k)} \pi_{x_i} \operatorname{dist}(x_i, p_{ck}) \quad (22)$$

in cui:

- $K$  è il numero di cluster in cui si vuole dividere i dati a disposizione, da cui dipende il nome delle varianti del K-means clustering (ad esempio 3-means clustering se sono presenti 3 centroidi);
- $C_k$  rappresenta il k-esimo cluster;
- $p_{ck}$  si riferisce al centroide del k-esimo cluster;
- $\pi_{x_i}$  è il peso dell'elemento  $x_i$ ;
- $\operatorname{dist}$  indica il calcolo della distanza tra il generico elemento  $x_i$  appartenente al cluster  $C_k$  e il centroide  $p_{ck}$  dello stesso cluster. Tra le varie distanze calcolabili, quella utilizzata in un numero maggiore di applicazioni è la distanza euclidea, che nel caso di vettori coincide con la norma quadratica della loro differenza.

La formulazione matematica esprime evidentemente l'esigenza del K-means clustering, ovvero quella di cercare di minimizzare il più possibile le sommatorie delle distanze degli elementi ripartiti dai rispettivi centroidi dei clusters.

Dopo ogni iterazione, è necessario aggiornare la posizione dei centroidi, per verificare se, all'iterazione successiva, la ripartizione venga confermata, oppure se alcuni elementi subiscano una transizione da un cluster ad un altro. I centroidi vengono ricalcolati con la seguente relazione:

$$p_{ck} = \sum_{x_i \in C_k} \pi_{x_i} x_i / n_k \quad (23)$$

in cui  $n_k$  rappresenta il numero di elementi contenuti nel cluster  $C_k$ .

In sintesi, il modus operandi che caratterizza ogni iterazione del K-means clustering può essere riassunto come segue:

- alla prima iterazione è necessario stimare o imporre la posizione dei centroidi per consentire l'inizio del processo di organizzazione dei parametri;
- ad ogni iterazione, per ogni elemento  $x_i$ , si calcolano le relative distanze da ogni centroide  $p_{ck}$ : l'elemento viene inserito nel cluster il cui centroide risulta a distanza minore;
- si applica l'equazione (22) per calcolare la sommatoria delle distanze di ogni elemento dal rispettivo cluster e si confronta il risultato con quello ottenuto nell'iterazione precedente;
- si ripetono le prime due operazioni fino a trovare un minimo relativo o una convergenza assoluta dei valori, in modo tale da poter considerare conclusa l'operazione di ripartizione degli elementi nei rispettivi clusters.

Quando il processo di clustering può dichiararsi concluso, i dati sono organizzati in raggruppamenti che riproducono graficamente una forma pseudo-globulare (Figura 5), tanto più definita quanto più il processo di estrazione dei dati si rivela preciso ed accurato.

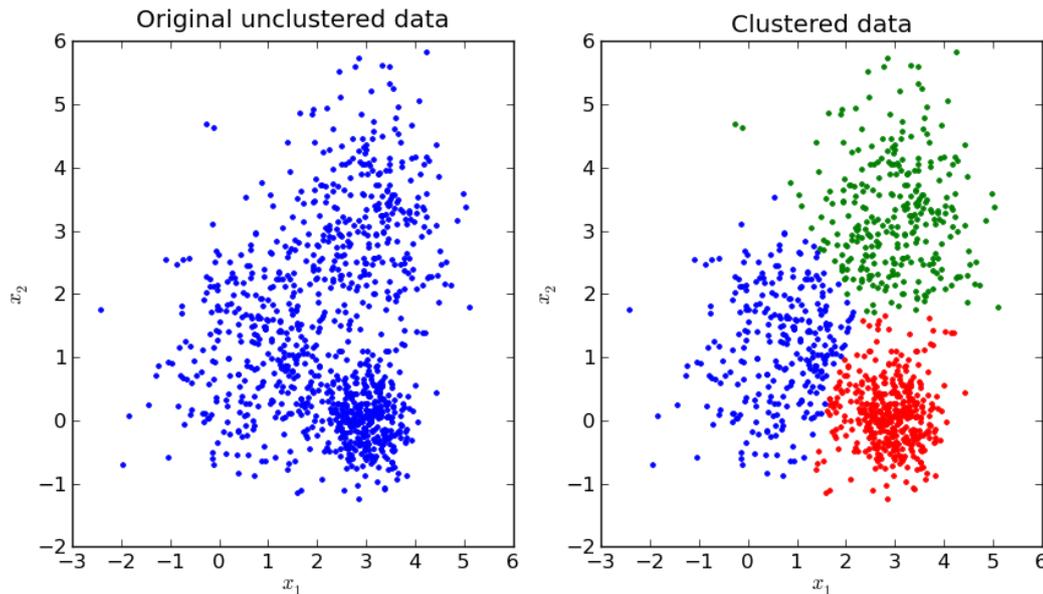


Figura 5 Esempio di K-means clustering con 3 centroidi. Immagine tratta da: [www.github.com](http://www.github.com)

Il K-means è sempre stato uno degli algoritmi più utilizzati, sia nella sua versione tradizionale, sia nelle numerose varianti che negli anni sono state implementate. La sua diffusione è dovuta principalmente alla semplicità dell'algoritmo e alla capacità dello stesso di adattarsi a dati in ingresso di tipo differente. Nell'analisi modale sperimentale, esso si è rivelato uno strumento fondamentale, soprattutto nel riuscire a fornire una prima scrematura dei dati, distinguendo i modi che potrebbero avere consistenza fisica da quelli che si rivelano sicuramente spuri. Questo aspetto sarà approfondito nella spiegazione riguardante il codice implementato.

### 4.3 Hierarchical clustering

Un'altra tecnica di raggruppamento di dati che è stata utilizzata in questo lavoro è l'Hierarchical clustering. Questa tecnica appartiene alla categoria Graph-based, di conseguenza non vengono definite delle entità ideali attorno alle quali distribuire i dati in ingresso per formare i clusters. Al contrario, l'operazione di raggruppamento viene effettuata in questo modo: in primo luogo viene definito un parametro che funge da unità di misura per stabilire la distanza relativa tra gli elementi; successivamente, si procede al clustering vero e proprio, basandosi esclusivamente dalla posizione dei dati analizzati e sulle distanze reciproche misurate.

Una prima distinzione nell'ambito di questa tecnica si ritrova nel modo in cui vengono interpretati i dati quando l'algoritmo comincia ad agire, che comporta un approccio dal basso verso l'alto o viceversa. In altre parole, si possono evidenziare due differenti tipologie di Hierarchical clustering:

- Agglomerative hierarchical clustering: il suo approccio è noto per essere dal basso verso l'alto. Gli elementi in ingresso vengono tutti considerati come cluster singoli e separati tra loro. L'obiettivo è quello di costruire cluster sempre più grandi in cui siano presenti elementi che si assomigliano in base al parametro scelto per confrontarli. Di conseguenza, ad ogni iterazione, l'algoritmo individua la coppia di elementi più vicini e li unisce, creando un cluster di dimensioni maggiori. Il processo può essere arrestato ponendo un valore soglia del parametro utilizzato per misurare la distanza tra i cluster, per cui quando i due cluster più vicini si trovano ad una distanza superiore al valore soglia, l'algoritmo riceve il comando di fermarsi. Se non si imposta un valore soglia, il codice procede sino a ottenere un unico raggruppamento, nel quale sono presenti tutti gli elementi che all'inizio erano stati considerati come singoli cluster.

- **Divisive hierarchical clustering:** il processo svolto è esattamente l'opposto. L'approccio ai dati è dall'alto verso il basso, dunque gli elementi in ingresso vengono considerati tutti come appartenenti ad un unico grande raggruppamento iniziale. L'obiettivo, quindi, è quello di scomporre il cluster iniziale in raggruppamenti sempre più piccoli e composti dagli elementi che hanno più caratteristiche in comune. Ad ogni iterazione il cluster che si presenta come più eterogeneo al suo interno viene scomposto in due clusters differenti. Analogamente alla variante agglomerativa, se non si impone un valore soglia alla distanza tra i cluster, il processo continua fino a una completa disgregazione dei raggruppamenti, di modo che ognuno di essi sia composto da un solo elemento.

In questo lavoro è stata utilizzata la variante agglomerativa dell'algoritmo. Tutti i modi sono stati trattati come clusters unitari e si è proceduto a un loro progressivo raggruppamento per ottenere clusters di dati coerenti tra loro.

Il primo passaggio della tecnica agglomerativa è quello di creare la matrice di prossimità, in cui sono registrate tutte le distanze tra gli elementi. Se si considera la riga o la colonna  $j$ -esima della matrice di prossimità, queste registrano la totalità delle distanze del cluster  $j$ -esimo dagli altri raggruppamenti.

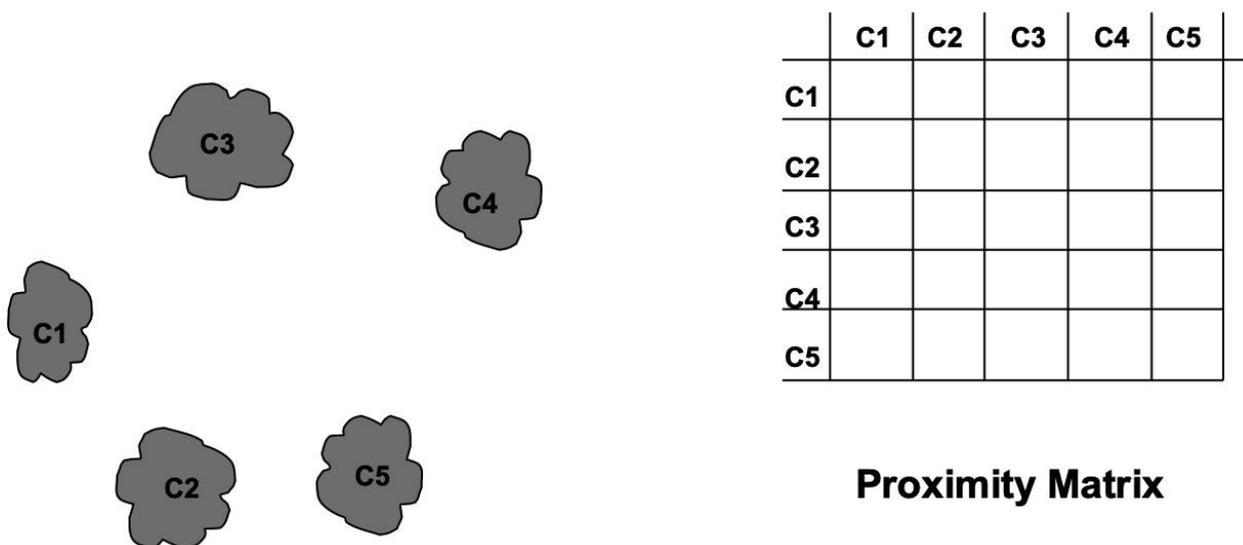


Figura 6 Esempio di matrice di prossimità relativa a hierarchical clustering. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13]

La matrice di prossimità (Figura 6) è aggiornata ad ogni singola iterazione, dunque la sua dimensione decresce man mano che i cluster vengono uniti e diminuiscono in quantità. In tal senso, è necessario precisare che esistono differenti approcci che riguardano la misurazione della similitudine tra due cluster, al fine di decidere quali siano i cluster che si somigliano maggiormente in una determinata iterazione. In altre parole, la distanza tra differenti cluster può essere misurata in modi distinti, di cui si riportano di seguito alcuni esempi esplicativi:

- **Distanza minima tra cluster:** se si utilizza questa tecnica, la similitudine tra due cluster viene stimata misurando semplicemente la distanza che caratterizza la coppia di punti appartenenti ai cluster che si trovano più vicini tra loro. Dunque, si chiamino  $C_i$  e  $C_j$  rispettivamente il cluster  $i$ -esimo e il cluster  $j$ -esimo ottenuti dopo un numero  $n$  di iterazioni. Se  $x_i$  e  $x_j$  costituiscono due punti generici appartenenti ai due cluster differenti, l'espressione matematica di questa tecnica di misurazione della distanza è la seguente:

$$dist(C_i, C_j) = \min\{dist(x_i, x_j)\} \quad (24)$$

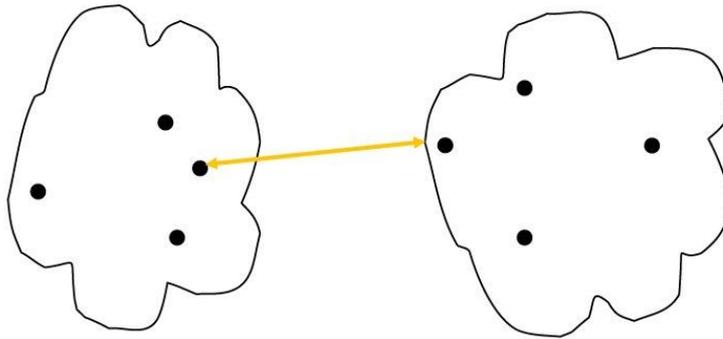


Figura 7 Similitudine tra clusters in base a distanze minime. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13]

- Distanza massima tra i cluster: l'approccio che questa tecnica utilizza è esattamente opposto a quello che riguarda le minime distanze, ovvero la similitudine tra cluster viene valutata sulla base della distanza massima che si può evidenziare tra le coppie di elementi appartenenti a raggruppamenti differenti. Mantenendo la nomenclatura  $C_i$  e  $C_j$  per i cluster e  $x_i$  e  $x_j$  per gli elementi generici che vi appartengono, la formulazione matematica del metodo è la seguente:

$$dist(C_i, C_j) = \max\{dist(x_i, x_j)\} \quad (25)$$

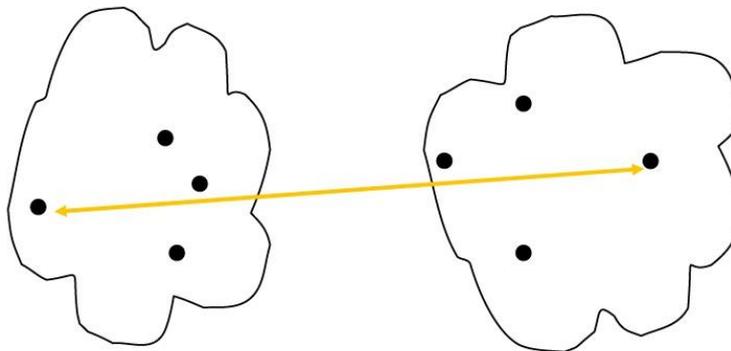


Figura 8 Similitudine tra clusters in base a distanze massime. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13]

- Distanza media tra i cluster: questo metodo è caratterizzato da un livello di complessità leggermente più alto, in quanto tutti gli elementi appartenenti a un singolo cluster sono coinvolti nella misurazione. In altre parole, per stimare la similitudine tra due cluster, il processo seguito è quello di misurare tutte le distanze relative alle possibili coppie di elementi appartenenti ai raggruppamenti. Dunque, si calcola, per un singolo elemento di un cluster, la distanza rispetto a tutti gli elementi dell'altro cluster e il processo si ripete finché non si hanno a disposizione tutte le misurazioni tra i punti. Successivamente, queste distanze vengono mediate e si ottiene il risultato finale, espresso dalla seguente formulazione matematica:

$$dist(C_i, C_j) = \frac{1}{|C_i||C_j|} \sum_{x_i} \sum_{x_j} dist(x_i, x_j) \quad (26)$$

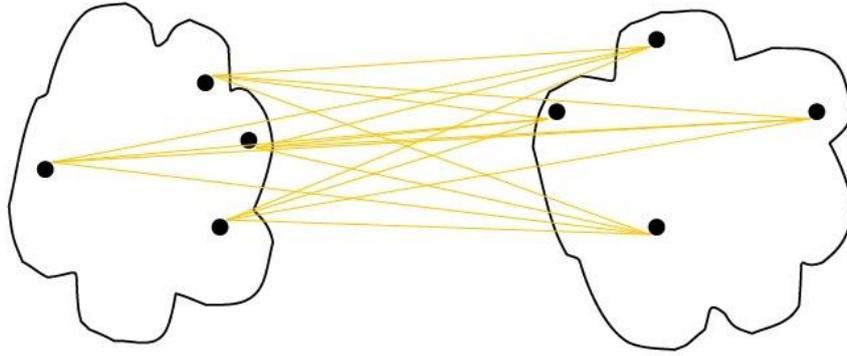


Figura 9 Similitudine tra clusters in base a distanze medie. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13]

- Distanza tra i centroidi dei cluster: questo è l'approccio implementato anche nel codice a cui questa tesi si riferisce. Esso può apparire simile all'approccio delle distanze medie, ma in realtà evidenzia sostanziali differenze. In sostanza la similitudine tra i cluster si riferisce alla distanza tra i rispettivi centroidi. Il centroide di un cluster viene calcolato effettuando la media delle posizioni degli elementi appartenenti a esso. Di conseguenza, se  $c_i$  e  $c_j$  sono i centroidi rispettivamente del raggruppamento i-esimo e j-esimo, la distanza tra i centroidi è calcolata come segue:

$$dist(C_i, C_j) = dist(c_i, c_j) \quad (27)$$

in cui:

$$c_i = \frac{1}{|C_i|} \sum x_i \quad (28)$$

$$c_j = \frac{1}{|C_j|} \sum x_j \quad (29)$$

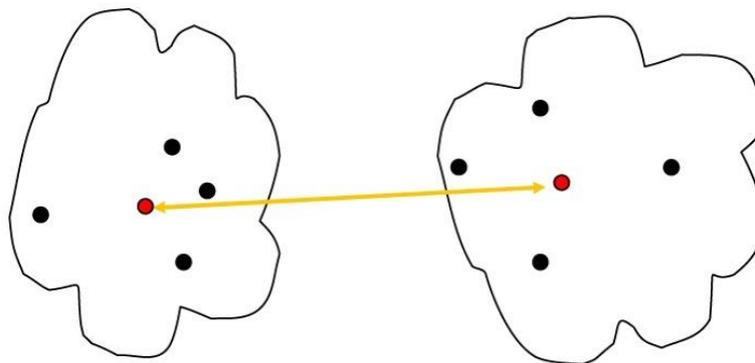


Figura 10 Similitudine tra clusters in base a distanze tra centroidi. Autore: Valentini Giorgio – Università degli studi di Milano, [13]

Mantenendo ancora l'attenzione sulla variante agglomerativa dell'algoritmo, è opportuno fare alcune considerazioni sui risultati finali che si ottengono. Come già anticipato, ad ogni iterazione i due raggruppamenti più vicini vengono uniti per formare un cluster di dimensioni maggiori. Questo comporta un progressivo allontanamento reciproco tra i cluster, perché ad ogni passaggio si va ad agire sulle distanze minime. In altre parole, ad ogni iterazione è associata una crescita della distanza

presente tra i cluster più vicini. Se l'algoritmo è lanciato senza limitazioni, esso termina la sua corsa unendo i due raggruppamenti rimasti per formare un unico grande cluster che contiene tutti gli elementi a disposizione. Tuttavia, la finalità principale di questo tipo di tecnica è di raggruppare i dati secondo una reciproca somiglianza e l'uso che se ne è fatto in questo lavoro non fa eccezione. Per fermare il processo in un momento ritenuto opportuno, l'operazione più logica da effettuare è quella di imporre una soglia critica all'algoritmo. L'esecuzione è interrotta quindi quando la distanza minima tra i cluster è superiore al valore soglia imposto. In questo modo, i risultati che si ottengono sono dei raggruppamenti ben distinti e distanziati tra loro, i cui elementi sono accomunati da caratteristiche simili.

L'hierarchical clustering, analogamente al K-means clustering, permette di associare all'algoritmo anche una raffigurazione grafica relativa alla sua esecuzione, che consiste in un diagramma ad albero che prende il nome di *dendrogramma*. La consultazione del dendrogramma permette di visualizzare nel dettaglio il processo di raggruppamento degli elementi. Esso è organizzato su due assi:

- sull'asse delle ascisse si riportano i cluster, che all'ordinata nulla corrispondono agli elementi singoli da cui si parte;
- sull'asse delle ordinate si riporta il livello gerarchico dei raggruppamenti, associato alla loro distanza reciproca.

Anche il valore soglia può essere rappresentato sul dendrogramma, attraverso una linea orizzontale. Il numero di intersezioni della linea che rappresenta la soglia critica con i rami del dendrogramma corrisponde al numero di raggruppamenti che l'algoritmo fornisce in uscita (Figura 11).

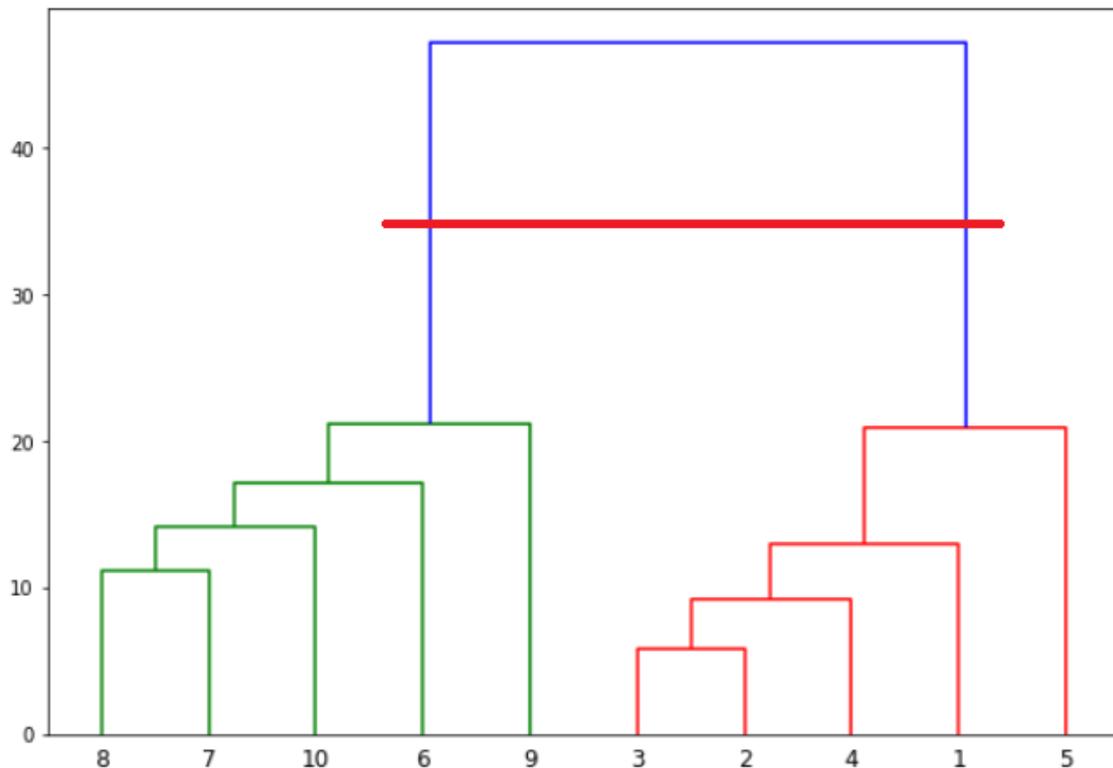


Figura 11 Esempio di dendrogramma con soglia. Immagine tratta da: [www.stackabuse.com](http://www.stackabuse.com)

#### 4.4. Soft Validation Criteria e Hard Validation Criteria

Gli algoritmi di clustering hanno bisogno di dati in ingresso che descrivono particolari caratteristiche del sistema studiato. Partendo da questi dati, si è poi in grado di effettuare una opportuna scrematura per ottenere i risultati finali e scartare quelli riconosciuti come non coerenti. Nel caso della selezione dei parametri modali, i dati da scremare sono quelli relativi al processo di estrazione, che può fornire in uscita dei parametri adeguati o meno al sistema analizzato. Inoltre, i parametri risultanti dal

processo di estrazione spesso non sono organizzati in maniera ordinata ed è compito del calcolatore fare in modo che i cluster presentino al loro interno valori reciprocamente simili.

I parametri in base ai quali i modi in uscita dal processo di estrazione vengono scremati e organizzati, sfruttando gli algoritmi di clustering, sono i Soft Validation Criteria e gli Hard Validation Criteria. In questo paragrafo si può trovare una breve introduzione sulla struttura e sull'utilità che caratterizzano questi criteri, che saranno poi approfonditi nei capitoli seguenti. Entrambe le tipologie di criteri si riferiscono ai parametri modali estratti, ma in maniera diversa nel codice implementato:

- i SVC mettono in relazione due estrazioni differenti, ovvero stimano la similitudine tra due modi sulla base di specifici parametri di confronto;
- gli HVC si riferiscono al modo preso singolarmente, utilizzano quindi un determinato parametro per scegliere, in base ai propri valori, se il modo debba essere scartato o considerato per i passaggi successivi.

In riferimento ai SVC, è opportuno notare che l'uso di questi parametri nel codice implementato costituisce un passaggio fondamentale per l'implementazione dell'algoritmo relativo al K-means clustering nella variante 2-means. In altre parole, i dati in uscita dall'applicazione dei SVC costituiscono anche i dati in ingresso del 2-means clustering necessario per effettuare una prima distinzione tra i modi. I dettagli relativi a questo aspetto saranno evidenziati nel capitolo successivo. Prima di passare a una descrizione dettagliata del codice implementato, occorre una precisazione, che riguarda il modo con cui questi criteri e algoritmi sono stati combinati tra loro per ottenere la struttura completa del codice. In letteratura sono presenti soluzioni molto variabili, e la scelta è ricaduta su quella caratterizzata dal maggior grado di automatizzazione dell'algoritmo, la cui descrizione si trova in [11]. In riferimento a ciò, è opportuno ricordare che il raggiungimento di una autonomia completa dei calcolatori nell'effettuare il processo di selezione delle soluzioni è uno degli obiettivi maggiormente rincorsi sia dall'accademia che dall'industria in questo campo. La macrostruttura del codice può essere riassunta come segue:

- Applicazione di SVC
- Applicazione di 2-means clustering
- Applicazione di HVC
- Applicazione di Agglomerative hierarchical clustering
- Nuova applicazione di 2-means clustering

Questo breve cenno alla struttura complessiva dell'algoritmo sarà ovviamente seguito da un approfondimento nel capitolo successivo, dove ogni punto sarà oculatamente analizzato.

## 5. Implementazione del modello di selezione dei parametri modali

Si entra ora nel nucleo fondamentale di questo lavoro: l'implementazione di un modello in grado di selezionare autonomamente i parametri modali tra la totalità di quelli estratti. In questo capitolo ogni singolo passaggio dell'algoritmo implementato verrà presentato e spiegato nei dettagli, con particolare attenzione al modo in cui i dati vengono trasformati, raggruppati o scartati a seconda dei risultati ottenuti. Il punto di partenza del modello è la matrice di estrazione dei parametri modali, che deve fornire in ingresso un insieme di estrazioni organizzate, come è stato già anticipato, in una struttura tridimensionale in cui ogni piano  $i$ -esimo contiene i modi estratti imponendo un numero  $i$  di gradi di libertà al sistema analizzato. Si ricorda che la singola estrazione situata al piano  $i$ -esimo e nella posizione  $j$  si presenta nel modo indicato dalla relazione (11):

$$\vec{e}_{ij} = \begin{Bmatrix} f_{ij} \\ \zeta_{ij} \\ \vec{\Psi}_{ij} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Vengono ora introdotte brevemente le tappe che sono state seguite nell'implementazione del codice e che saranno poi approfondite puntualmente nella successione di paragrafi di questo capitolo:

- il primo approccio riguarda l'applicazione dei Soft Validation Criteria: essi caratterizzano i modi confrontandoli tra loro in base a opportuni parametri selezionati e i loro risultati possono variare in un intervallo compreso tra 0 e 1. In uscita ai Soft Validation Criteria, si ha una schiera di vettori, ognuno dei quali si riferisce al confronto tra due modi specifici;
- si applica il 2-means clustering ai vettori risultanti del passaggio precedente con lo scopo di attuarne una divisione in modi fisici o spuri. I modi la cui totalità di vettori associati viene classificata come spuria vengono eliminati dal diagramma di stabilizzazione;
- successivamente si applicano gli Hard Validation Criteria per ottenere una seconda scrematura del diagramma. A differenza dei Soft Validation Criteria, questi forniscono una risposta binaria: se essa è 0, il modo analizzato viene scartato come spurio, mentre, se è 1, esso accede al passaggio successivo;
- il quarto passaggio fondamentale riguarda il raggruppamento dei dati non eliminati nelle tappe precedenti: si applica l'hierarchical clustering, nella sua variante agglomerativa, per formare clusters di modi che abbiano caratteristiche in comune. La soglia critica di interruzione dell'algoritmo agglomerativo deve essere completamente automatizzata, in un modo che sarà analizzato nel paragrafo corrispondente;
- una volta raggruppati i modi, si applica nuovamente il 2-means clustering per eliminare i raggruppamenti che non forniscono una sufficiente garanzia di stabilità, e che quindi hanno un numero troppo piccolo di modi al loro interno. Anche in questo caso, la scelta del numero minimo di modi presenti all'interno di un cluster per considerarlo stabile deve essere autonoma da parte dell'algoritmo;
- per ognuno dei clusters che hanno superato i passaggi, viene scelto un singolo modo che caratterizza la struttura analizzata. La scelta del modo può avvenire seguendo strade diverse e analizzando una varietà di parametri. Nel caso in questione, viene scelto il modo di cui il fattore di smorzamento presenta il valore mediano all'interno del cluster.

Nei prossimi paragrafi, ogni tappa essenziale dell'algoritmo sarà presentata dettagliatamente, chiarendone l'utilità e spiegando le motivazioni di ogni scelta effettuata.

## 5.1 Single-mode validation criteria: Soft Validation Criteria

Incominciando a far riferimento in maniera più precisa al codice implementato per la selezione dei parametri modali, è opportuno rimarcare l'importanza dei cosiddetti *single-mode validation criteria*. Il loro nome deriva dal fatto che questi criteri vengano applicati, in riferimento al diagramma di stabilizzazione, per effettuare una prima classificazione dei modi. Come già anticipato nei paragrafi precedenti, questa distinzione, che avviene in più passaggi durante il processo di selezione, prevede l'attribuzione di due diverse caratteristiche ai modi:

- modi forse fisici: sono quelli che, in base all'applicazione dei suddetti criteri, presentano dei parametri che permettono di dedurre una possibile stabilità fisica. Questa stabilità può essere attribuita attraverso il confronto dei parametri caratterizzanti del modo con i relativi valori ideali, oppure più semplicemente utilizzando un valore soglia al di sopra o al di sotto del quale l'estrazione possa essere dichiarata stabile;
- modi spuri: sono i modi che possono essere generati, tra le varie ragioni, a causa di una sovrastima, da parte dell' algoritmo, dell'ordine del modello del sistema analizzato, oppure da una presenza di rumore nell'ambiente di misura in grado di alterare le misurazioni. I criteri di validazione utilizzati permettono, in maniere diverse, di individuare questi modi partendo dal diagramma di stabilizzazione e di eliminarli dai passaggi successivi svolti dall'algoritmo.

L'utilizzo di questi criteri, di conseguenza, fornisce un aiuto fondamentale nell'ottenimento di diagrammi di stabilizzazione più ordinati, condizione di partenza dei passaggi successivi dell'algoritmo.

Il primo passo dell'algoritmo è l'implementazione di una delle due tipologie di Single-mode validation criteria, denominati *Soft Validation Criteria*. Questi ultimi stabiliscono, per ogni determinato parametro attribuito alle estrazioni in questione, un valore ideale, da confrontare con quelli espressi dai dati sperimentali. La classificazione in modi fisici o spuri viene effettuata proprio in base alla maggiore o minore vicinanza dei parametri nei confronti dei valori ideali. Il processo sarà chiaro in un passo successivo della trattazione mentre in questo saranno elencati e spiegati tutti i criteri che sono stati utilizzati. Prima di entrare nel dettaglio, occorre precisare che tutti i *SVC* implementati sono relativi ad un confronto tra due estrazioni differenti, quindi non sono stati utilizzati dei parametri relativi a modi presi singolarmente, cosa che invece è stata effettuata nel documento originale. Volendo fornire una panoramica sui metodi utilizzati si può far riferimento al seguente elenco:

- differenze relative tra le frequenze;
- differenze relative tra i fattori di smorzamento;
- differenze relative tra gli autovalori continui nel tempo;
- *MAC*;
- *MACX*;
- confronto tra i Modal Scaling Factor;
- differenze relative tra gli *MPC*.

Segue ora una dettagliata analisi di ogni criterio utilizzato, che ne chiarisce il senso fisico, ne definisce il valore numerico ideale su cui si basa il confronto e ne illustra le formulazioni matematiche corrispondenti.

### 5.1.1 Differenza relativa tra grandezze

Il parametro della distanza relativa, come intuibile dall'elenco precedente, è largamente utilizzato, all'interno di questa trattazione, per definire specifici parametri di confronto tra i modi in uscita dal processo di estrazione.

La differenza relativa tra due grandezze  $x$  e  $y$  è espressa dalla relazione seguente:

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{\max(|x|, |y|)} \quad (31)$$

Questa relazione è ovviamente declinata per ogni parametro che si riferisce a delle distanze relative, come molti di quelli che sono presenti in questa trattazione e che saranno ora descritti in maniera dettagliata.

### 5.1.2 Differenza relativa tra le frequenze naturali

È ormai chiaro che ad una singola estrazione sono associati: una frequenza naturale di vibrazione; un fattore di smorzamento; una forma modale. Un primo parametro di confronto tra due estrazioni differenti può essere certamente la distanza relativa tra le frequenze, espressa come segue:

$$d(f_{ui}, f_{uj}) = \frac{|f_{ui} - f_{uj}|}{\max(|f_{ui}|, |f_{uj}|)} \quad (32)$$

dove  $f_{ui}$  e  $f_{uj}$  rappresentano rispettivamente la frequenza naturale relativa all'estrazione i-esima e quella relativa all'estrazione j-esima. La misura della differenza relativa fra le frequenze permette di creare una associazione matematica automatica con quello che è possibile osservare visivamente all'interno del diagramma di stabilizzazione. Infatti, è facile notare nel diagramma una eventuale concentrazione di modi in corrispondenza di una precisa frequenza. Questo corrisponde, nel linguaggio dei SVC, a una serie di estrazioni le cui distanze relative, in termini di frequenze, sono prossime al valore nullo. Risulta ovvio affermare che il valore ideale della distanza relativa tra frequenze è 0.

### 5.1.3 Differenza relativa tra i fattori di smorzamento

La differenza relativa tra i fattori di smorzamento si costruisce in maniera completamente analoga a quella riguardante le frequenze e si riassume con la seguente relazione:

$$d(\zeta_i, \zeta_j) = \frac{|\zeta_i - \zeta_j|}{\max(|\zeta_i|, |\zeta_j|)} \quad (33)$$

dove  $\zeta_i$  e  $\zeta_j$  rappresentano rispettivamente il fattore di smorzamento relativo all'estrazione i-esima e quello relativo all'estrazione j-esima.

### 5.1.4 Differenza relativa tra gli autovalori continui nel tempo

Un parametro di confronto tra modi che coinvolge sia le frequenze che i fattori di smorzamento è quello relativo agli autovalori. Relativamente all'estrazione i-esima, l'autovalore corrispondente viene calcolato come segue:

$$\lambda_{ci} = -|2\pi f_{ui}| \zeta_i + 2i\pi f_{ui} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (34)$$

Ottenuti gli autovalori per tutti i modi estratti, si può applicare la formulazione delle differenze relative per confrontarli tra loro:

$$d(\lambda_{ci}, \lambda_{cj}) = \frac{|\lambda_{ci} - \lambda_{cj}|}{\max(|\lambda_{ci}|, |\lambda_{cj}|)} \quad (35)$$

Combinare due parametri per l'ottenimento di un terzo parametro, usandolo per il calcolo delle differenze, può essere realmente utile per evidenziare eventuali casi di instabilità che i due parametri considerati singolarmente non permettono di rilevare. Il vantaggio dell'utilizzo degli autovalori come unità di confronto risiede anche in questo aspetto.

### 5.1.5 Confronto tramite il MAC

Un confronto tra estrazioni diverse maggiormente articolato è quello basato sull'utilizzo del Modal Assurance Criterion, la cui sigla è *MAC*. Questo parametro è già stato menzionato in un passo precedente, in cui si faceva riferimento alle idee che sono state progressivamente applicate con l'obiettivo di arrivare ad automatizzare completamente il processo di selezione delle soluzioni. Questo aspetto suggerisce ancora una volta di sottolineare l'importanza delle prime semplici idee relative all'ottimizzazione del procedimento e di come queste si siano arricchite gradualmente nel tempo e abbiano acquisito quella complessità di struttura necessaria a garantirne una adattabilità a sistemi ed elementi differenti.

Tornando al *MAC*, da un punto di vista matematico esso è utilizzato per confrontare due vettori e comprenderne l'eventuale somiglianza. Tra le diverse tipologie di *MAC* esistenti, si è scelto di utilizzarne la versione "classica", di cui si parla in questo sotto-paragrafo, e quella denominata *MACX* che sarà approfondita nel passaggio seguente.

Per utilizzare il *MAC* è opportuno fare riferimento alle forme modali in uscita dall'algoritmo di estrazione dei parametri modali. La forma modale relativa all'estrazione *i*-esima è espressa come segue:

$$\vec{\Phi}_i = \begin{Bmatrix} \Phi_{i,1} \\ \Phi_{i,2} \\ \vdots \\ \Phi_{i,n-1} \\ \Phi_{i,n} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Le componenti del vettore appartengono all'insieme dei numeri complessi, e la dimensione del vettore dipende dai punti di misura del sistema, che determinano il numero di canali in uscita. Ad ogni canale, dunque, corrisponde un coefficiente della forma modale.

Ora, si consideri  $\vec{\Phi}_j$  come la forma modale corrispondente all'estrazione *j*-esima. Il *MAC* ottenuto confrontando  $\vec{\Phi}_i$  e  $\vec{\Phi}_j$  è calcolato applicando l'equazione (13) ai due autovettori. Il risultato ottenuto è il seguente:

$$MAC(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j) = \frac{|\vec{\Phi}_i^* \vec{\Phi}_j|^2}{\|\vec{\Phi}_i\|_2^2 \|\vec{\Phi}_j\|_2^2} \quad (37)$$

$$\|\vec{\Phi}_i\|_2, \|\vec{\Phi}_j\|_2 \neq 0$$

dove l'asterisco all'apice del vettore indica che se ne considera il complesso coniugato e lo si traspone. La condizione espressa sulle norme quadratiche indica che si devono considerare nel calcolo soltanto le estrazioni non degeneri, ovvero quelle caratterizzate da frequenza, fattore di smorzamento e forma modale non nulli.

L'intervallo di variabilità corre dal valore nullo all'unità. A *MAC* maggiori corrispondono vettori che si somigliano maggiormente e che tendono sempre più a coincidere. Di conseguenza, il valore ideale del *MAC*, corrispondente a dei vettori identici, è uguale a 1.

Questo criterio ha il suo principale utilizzo nell'ambito del confronto, relativamente ad un particolare sistema analizzato, tra due diversi raggruppamenti di parametri modali estratti. Un esempio può consistere nel comparare due modelli differenti di estrazione dei parametri modali, applicandoli al medesimo sistema fisico; un'altra strada possibile da seguire è quella di confrontare dei parametri modali estratti sperimentalmente con altri ricavati analiticamente e relativi allo stesso sistema. Graficamente è possibile rappresentare i risultati ottenuti in una cosiddetta *MAC-matrix*, dove si possono apprezzare visivamente le comparazioni tra i differenti gruppi di modi estratti. Una maggior chiarezza della *MAC-matrix* si raggiunge attraverso la sua rappresentazione tridimensionale, come quella presente in Figura 12. La somiglianza tra due vettori viene sottolineata sia dal punto di vista della scala cromatica che dal punto di vista dell'altezza delle colonne. Solitamente, due vettori che, confrontati, soddisfano la condizione  $MAC \geq 0.9$  possono essere classificati come correlati, mentre non sono affatto correlabili se si verifica la condizione  $MAC \leq 0.6$ . Per valori intermedi del *MAC* entra in gioco la discrezione relativa alla particolare analisi effettuata e, in questo senso, l'utilizzo di altri parametri di confronto può fornire un aiuto fondamentale.

L'utilizzo di questo fattore comporta alcune limitazioni, di cui si riportano le due più importanti:

- un limite fondamentale nell'uso del *MAC* consiste nella sensibilità di questo fattore alle ampiezze delle componenti dei vettori confrontati. In altre parole, se le ampiezze delle componenti di uno dei due vettori differiscono di molto rispetto a quelle relative al secondo vettore i risultati potrebbero subire una distorsione. Se questa differenza di ampiezze si presenta sistematicamente, una strada possibile da seguire per rendere i calcoli affidabili è quella di scalare le componenti dei vettori appartenenti ad uno dei due set per equilibrarne i contributi in termini di ampiezza;
- un altro problema fondamentale lo si incontra quando i vettori confrontati sono di piccola dimensione, quindi con un numero ridotto di componenti. Anche in questo caso la precisione del parametro diminuisce perché i riferimenti spaziali sono in numero esiguo.

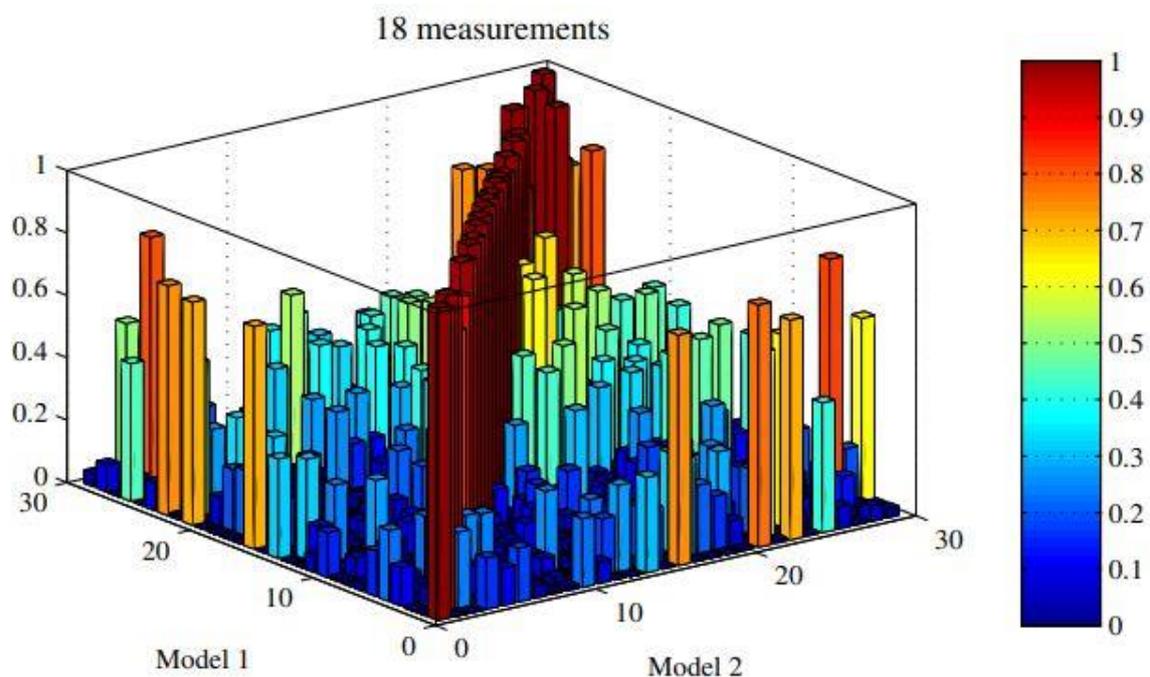


Figura 12 Esempio di *MAC-matrix* relativa a due modelli aeroelastico. Fonte [12]

### 5.1.6 Confronto attraverso il *MACX*

Si è deciso di utilizzare anche una estensione della versione del Modal Assurance Criterion classica, ovvero il *MACX*. Esso può essere applicato a tutti i tipi di vettori e la sua formulazione relativa alle due generiche forme modali  $\vec{\Phi}_i$  e  $\vec{\Phi}_j$  è la seguente:

$$MACX(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j) = \frac{(|\vec{\Phi}_i^* \vec{\Phi}_j| + |\vec{\Phi}_i^T \vec{\Phi}_j|)^2}{(|\vec{\Phi}_i^* \vec{\Phi}_i| + |\vec{\Phi}_i^T \vec{\Phi}_i|) + (|\vec{\Phi}_j^* \vec{\Phi}_j| + |\vec{\Phi}_j^T \vec{\Phi}_j|)} \quad (38)$$

Anche questo parametro ha un intervallo di variabilità compreso tra 0 e 1. Inoltre, se almeno una delle forme modali confrontati è in monofase, il *MAC* e il *MACX* coincidono.

L'uso principale del *MACX* è sempre relativo al confronto tra due gruppi di forme modali ricavati in maniere differenti e relative allo stesso sistema fisico vibrante. Il suo utilizzo permette di risolvere, seppur in parte, alcune problematiche che caratterizzano il parametro *MAC*. In particolare, il *MACX* è in grado di gestire vettori di dimensione ridotta senza eccessive perdite in termini di precisione dei risultati. Al contrario, permane il problema relativo all'ampiezza delle componenti dei vettori: se una delle due forme modali presenta componenti molto più grandi rispetto a quelle relative all'altra con cui viene confrontata, i risultati perdono di precisione e affidabilità. Scalare le componenti di uno dei due vettori può essere utile anche in questo caso per effettuare comparazioni coerenti.

Può essere interessante fornire un termine di paragone tra *MAC* e *MACX* per quanto riguarda i risultati ottenuti quando questi vengono applicati allo stesso sistema. A tal proposito si evidenzia che i valori del *MACX* sono mediamente più alti di quelli del *MAC*, anche se questa affermazione non è valida in assoluto. Infatti, la Figura 13 mostra un esempio di una differenza tra *MACX* e *MAC* relativamente allo stesso sistema. In altre parole, si sottrae la *MAC*-matrix alla *MACX*-matrix e si fanno considerazioni su ciò che si ottiene. Si può dire che le differenze tra i due criteri in termini di risultati sono sostanziali e si evidenzia che l'intervallo di variazione si estende, in questo esempio, da un minimo di circa  $-0.2$  ad un massimo vicino a  $+0.7$ .

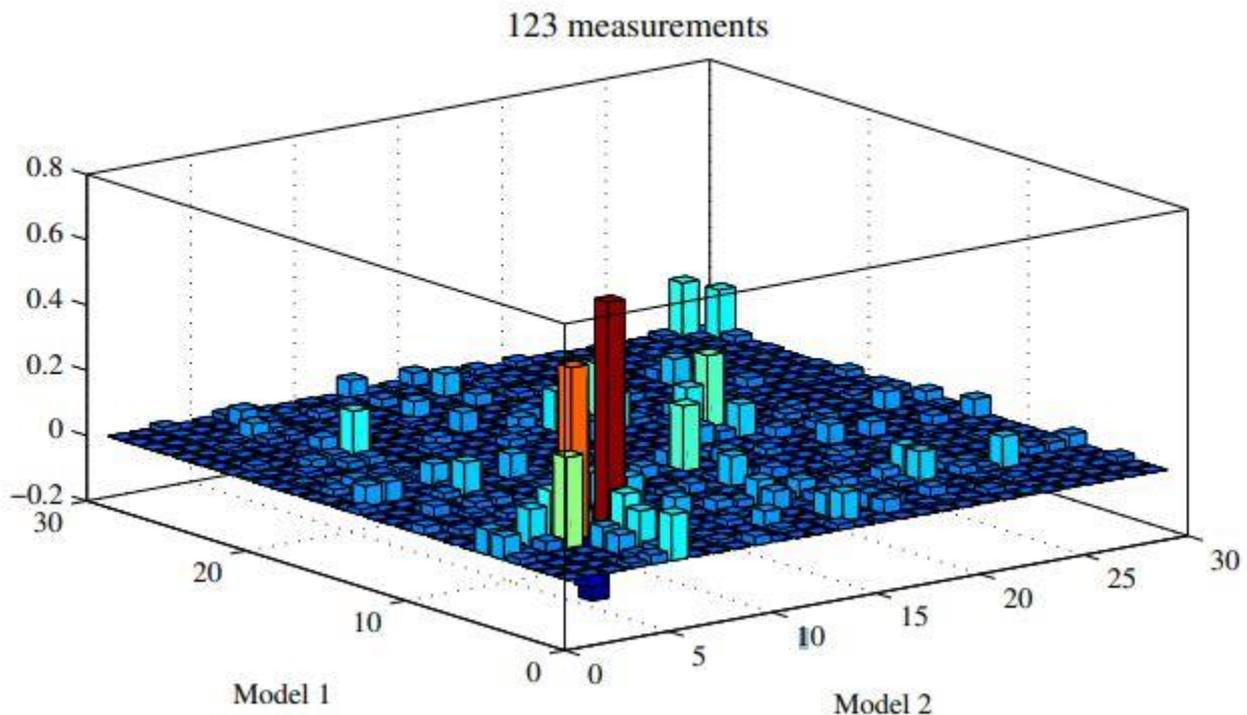


Figura 13 Esempio di comparazione tra *MAC* e *MACX* relativamente a due modelli aeroelastici. Fonte [12]

### 5.1.7 Differenze relative tra i $MPC$ .

Il Modal Phase Collinearity, la cui sigla è  $MPC$ , è anch'esso un parametro già utilizzato precedentemente nei primi tentativi di automatizzazione della selezione dei parametri modali. Anche in questa trattazione esso è stato presentato nell'ambito della descrizione del coefficiente  $CMI$ , di cui rappresenta uno dei due fattori, come si può evidenziare facendo riferimento all'equazione (17).

Riprendendo il significato fisico del  $MPC$ , si ricorda che esso fornisce una informazione sulla coerenza spaziale della forma modale analizzata e quindi sulla relazione possibile tra le vibrazioni del sistema in zone differenti. Il suo valore oscilla sempre tra 0 e 1 e un  $MPC$  vicino all'unità segnala che le vibrazioni del sistema, in punti di misurazione differenti, tendono ad allinearsi su una singola fase. Di conseguenza, un  $MPC$  perfettamente unitario indica che il moto del sistema è monofase, ovvero che il modo è reale.

Non esiste un'unica formulazione del  $MPC$ , e quella corrispondente all'equazione (18) non corrisponde a quella implementata in questo lavoro, che si riferisce a [11]. Pur presentando diverse metodologie di formulazione, il significato fisico del  $MPC$  rimane pressoché identico.

Ora, considerando ancora  $\vec{\Phi}_j$  come l'autovettore che si riferisce all'estrazione  $j$ -esima, si riporta la formulazione matematica del  $MPC$  utilizzata, e successivamente sarà fatto il punto su tutti i coefficienti che vi compaiono:

$$MPC(\vec{\Phi}_j) = \frac{\|Re(\vec{\Phi}_j)\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_{MPC}} Re(\vec{\Phi}_j^T) Im(\vec{\Phi}_j) (2(\varepsilon_{MPC}^2 + 1) \sin^2(\theta_{MPC}) - 1)}{\|Re(\vec{\Phi}_j)\|_2^2 + \|Im(\vec{\Phi}_j)\|_2^2} \quad (39)$$

Si nota il simbolo  $\sim$  presente su quello della forma modale. Esso indica che, chiamata  $\Phi_{jk}$  la componente  $k$ -esima del vettore  $\vec{\Phi}_j$ ,  $\tilde{\Phi}_{jk}$  si ricava come:

$$\tilde{\Phi}_{jk} = \Phi_{jk} - \sum_{o=1}^{n_y} \Phi_{jo} / n_y \quad (40)$$

dove  $n_y$  rappresenta il numero di componenti di  $\vec{\Phi}_j$ .

Passando ora al fattore  $\varepsilon_{MPC}$ , esso si calcola nel modo seguente:

$$\varepsilon_{MPC} = \frac{\|Im(\vec{\Phi}_j)\|_2^2 - \|Re(\vec{\Phi}_j)\|_2^2}{2Re(\vec{\Phi}_j^T) Im(\vec{\Phi}_j)} \quad (41)$$

Infine, il parametro  $\theta_{MPC}$  viene calcolato con la seguente relazione:

$$\theta_{MPC} = \tan^{-1} \left( |\varepsilon_{MPC}| + \text{sign}(\varepsilon_{MPC}) \sqrt{1 + \varepsilon_{MPC}^2} \right) \quad (42)$$

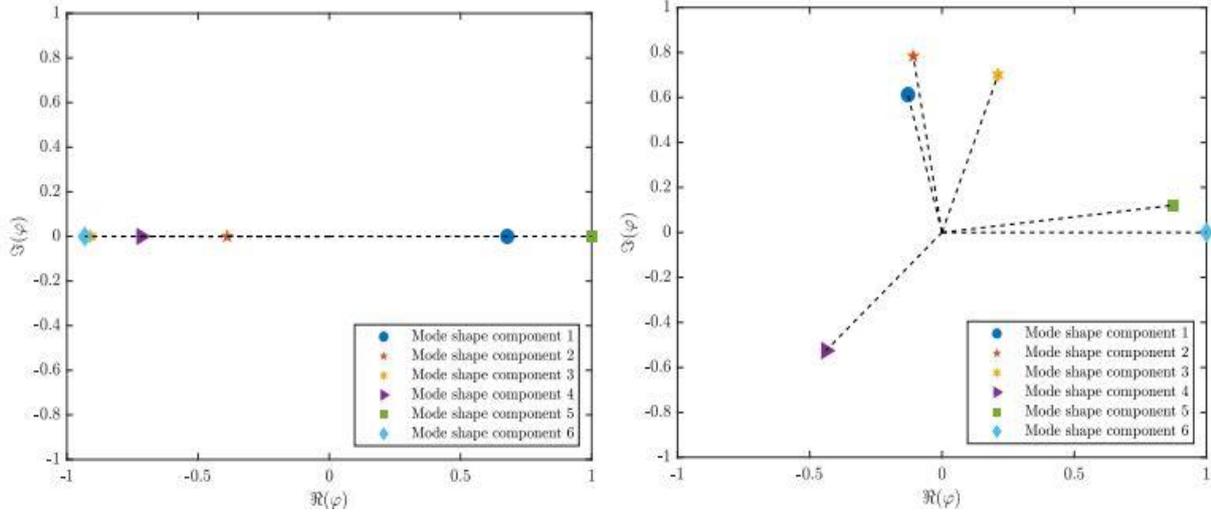


Figura 14 Confronto tra forma modale con MPC=1 (sinistra) e forma modale con MPC prossimo al valore nullo (destra). Fonte [5]

Come è stato possibile intuire, il  $MPC$  è un parametro che non si riferisce a un confronto tra vettori, ma caratterizza una singola entità vettoriale. Ora, ricordando che i Soft Validation Criteria si riferiscono, in questa trattazione, ad un confronto tra forme modali distinte, si è deciso di implementare una comparazione tra i vari  $MPC$  calcolati, al fine di stabilire la somiglianza dei modi in base all'uso di questo parametro. Il confronto, analogamente alle frequenze e ai fattori di smorzamento, è stato effettuato in base alle differenze medie. Chiamando  $MPC_i$  e  $MPC_j$  rispettivamente il  $MPC$  relativo all'estrazione  $i$ -esima e quello relativo all'estrazione  $j$ -esima, il confronto si esprime come segue:

$$d(MPC_i, MPC_j) = \frac{|MPC_i - MPC_j|}{\max(|MPC_i|, |MPC_j|)} \quad (43)$$

Una differenza relativa prossima al valore nullo indica che entrambe le estrazioni confrontate hanno la stessa tendenza di vibrazione, che può essere vicina alla monofase se entrambi i  $MPC$  sono alti, o lontana se il loro valore è vicino allo 0.

### 5.1.8 Confronto tra i Modal Scaling Factor

L'ultimo criterio implementato parte dalla definizione dei Modal Scale Factor, la cui sigla è  $MSF$ . Il  $MSF$  mette in relazione due forme modali normalizzate rispetto alla massa. Se  $\vec{\Phi}_j$  e  $\vec{\Phi}_i$  rappresentano i due vettori normalizzati, il suo calcolo si esprime come segue:

$$MSF(\vec{\Phi}_j, \vec{\Phi}_i) = \frac{\vec{\Phi}_i^* \vec{\Phi}_j}{\|\vec{\Phi}_i\|_2^2} \quad (44)$$

$$\|\vec{\Phi}_j\|_2^2 \neq 0$$

In questa trattazione la strada seguita è stata diversa, in quanto scalare i modi in base alla massa richiede la conoscenza delle masse modali. Dunque, si è scelto di scalare tutti i vettori semplicemente in base alla propria norma, ottenendo modi caratterizzati tutti da norma unitaria. In questo modo è comunque garantita la simmetria del fattore  $MSF$ , che risiede nella condizione  $MSF(\vec{\Phi}_j, \vec{\Phi}_i) = MSF(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j)$ .

Successivamente al calcolo di tutti i  $MSF$ , si introduce un nuovo fattore, che sarà poi quello effettivamente impiegato nei Soft Validation Criteria: esso, indicato con il simbolo  $q$ , prende il nome

di Modal Scaling Factor. Se  $q_j$  rappresenta il Modal Scaling Factor associato all'estrazione j-esima e  $q_i$  quello associato all'estrazione i-esima, la formulazione della distanza tra i due dipende direttamente dai  $MSF$  calcolati in precedenza e si esprime come segue:

$$d(q_j, q_i) = \left| \ln \left( \frac{MSF(\vec{\Phi}_j, \vec{\Phi}_i)}{\text{sign}(\max(\text{Re}(MSF(\vec{\Phi}_j, \vec{\Phi}_i)), \text{Im}(MSF(\vec{\Phi}_j, \vec{\Phi}_i))))} \right) \right| \quad (45)$$

Grazie alla presenza del valore assoluto nell'equazione (45), è garantita la simmetria anche della differenza tra i Modal Scaling Factor, e quindi vale la condizione  $d(q_j, q_i) = d(q_i, q_j)$ .

Il valore teorico minimo di  $q$  è sempre 0, mentre il valore massimo può essere anche maggiore rispetto all'unità. Al fine di ottenere dei  $SVC$  tutti di valore compreso tra 0 e 1, i risultati relativi a  $q$  vengono scalati nella maniera seguente: si individua il parametro che presenta il valore minimo, che viene poi sottratto a tutti i valori di  $q$  calcolati. Dopodichè, si dividono ancora tutti gli elementi per il valore massimo e l'operazione può dichiararsi conclusa.

### 5.1.9 Riepilogo dei criteri utilizzati

Dopo aver spiegato tutti i Soft Validation Criteria che sono stati implementati per essere utilizzati negli algoritmi di clustering successivi, si ritiene opportuno fare un riepilogo di ciò che è stato trattato. Sono stati implementati sette criteri differenti per un primo confronto tra i parametri ottenuti dall'algoritmo di estrazione. Una sintesi relativa a essi si può evidenziare nella Tabella 1, composta in questo modo: si indicano i criteri utilizzati, elencandoli in base all'ordine della loro applicazione; per ognuno di essi si indica il valore ideale, ovvero quello per il quale le estrazioni confrontate risultano completamente identiche in base a quel criterio; infine, è riportato anche il valore opposto all'ideale, vale a dire quello per il quale si evidenzia la maggiore distanza tra i due modi, sempre relativamente a quel criterio. L'utilità di questi parametri indicati sarà chiarita e approfondita nel paragrafo seguente, in cui si descrive la prima applicazione di un algoritmo di clustering, ovvero il 2-means.

Sigla criterio	Criterio	Valore ideale	Valore non ideale
VS1	$d(\lambda_{ci}, \lambda_{cj})$	0	1
VS2	$d(f_{ui}, f_{uj})$	0	1
VS3	$d(\zeta_i, \zeta_j)$	0	1
VS4	$MAC(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j)$	1	0
VS5	$d(MPC_i, MPC_j)$	0	1
VS6	$d(q_i, q_j)$	0	1 (scalato)
VS7	$MACX(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j)$	1	0

Tabella 1 Soft Validation Criteria implementati

## 5.2 Prima applicazione del 2-means clustering

Si entra ora nel vivo del primo algoritmo di clustering presente nel codice implementato: il 2-means clustering. Esso è una variante del gruppo di algoritmi K-means introdotti nel capitolo precedente. Questi si caratterizzano per essere degli algoritmi Prototype-Based, ovvero operano la divisione dei dati in raggruppamenti basandosi sulla relativa distanza dai prototipi, la cui rappresentazione grafica sono i centroidi. La variante specifica dell'algoritmo (2-means, 3-means, ...) è definita in base al numero di centroidi attorno ai quali si ripartiscono gli elementi.

Il 2-means clustering, nel caso in questione, ha l'utilità di attuare una prima divisione dei modi estratti in:

- modi che potrebbero rappresentare un risultato fisicamente significativo, per cui ulteriori verifiche saranno fatte in passi successivi del codice;
- modi sicuramente spuri, che andranno scartati direttamente dal diagramma.

Il primo passo fondamentale è la definizione degli elementi che andranno poi divisi nei raggruppamenti dall'algoritmo. Si potrebbe pensare di eseguire il 2-means direttamente sui modi estratti, prendendo come riferimenti, ad esempio, la frequenza e il fattore di smorzamento. Tuttavia, una ripartizione del genere sarebbe poco efficiente e difficilmente potrebbe garantire dei risultati soddisfacenti, specialmente per il numero esiguo di parametri considerati. La strada più indicata da seguire è quella di confrontare le estrazioni sulla base dei Soft Validation Criteria implementati. In tal senso, il singolo elemento in ingresso al 2-means cluster non rappresenta un singolo modo, ma il confronto tra due di essi. In questo modo, le informazioni su un singolo modo si moltiplicano considerevolmente: infatti, se  $n$  è il numero di modi estratti, ognuno di essi sarà comparato agli altri  $n - 1$  e si avranno per l'appunto  $n - 1$  vettori che forniscono informazioni su una singola entità. Questi vettori, quindi, costituiscono gli elementi in ingresso al 2-means clustering e subiranno la relativa ripartizione, in base alla quale si potranno poi fare delle considerazioni sui modi che andranno scartati e su quelli che andranno al passo successivo dell'algoritmo.

Si passa ora alla definizione precisa dei vettori forniti in ingresso al 2-means clustering: in riferimento alle estrazioni  $i$ -esima e  $j$ -esima, il vettore che ne opera la comparazione, denominato  $\vec{p}_{ij}$ , è rappresentato nel modo seguente:

$$\vec{p}_{ij} = \{SVC_{ij,k}\}_{1 \leq k \leq m} \quad (46)$$

in cui:

- $SVC$  si ricorda essere la sigla dei Soft Validation Criteria;
- $k$  identifica il particolare  $SVC$  considerato;
- $m$  rappresenta il numero totale di  $SVC$  utilizzati.

Per quanto riguarda il parametro  $m$ , è importante utilizzare un numero sufficientemente elevato di  $SVC$  per ottenere una ripartizione con precisione soddisfacente. Quest'ultima, infatti, scala con la quantità e la complessità dei parametri utilizzati. Nell'algoritmo a cui questo lavoro si riferisce,  $m = 7$ . Noti i parametri utilizzati, è possibile illustrare la forma estesa del generico vettore  $\vec{p}_{ij}$ . Si riporta di seguito la formulazione completa:

$$\vec{p}_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} d(\lambda_{ci}, \lambda_{cj}) \\ d(f_{ui}, f_{uj}) \\ d(\zeta_i, \zeta_j) \\ MAC(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j) \\ d(MPC_i, MPC_j) \\ d(q_i, q_j) \\ MACX(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j) \end{array} \right\} \quad (47)$$

All'interno del codice, si può notare che in testa ad ogni vettore  $\vec{p}_{ij}$  sono riportati gli indici relativi al posizionamento dei due modi confrontati all'interno della matrice delle estrazioni che si fornisce in ingresso: nel caso del LIPEZ, il nome della matrice è *matmodi*. Questi indici vengono inseriti per consentire, nel caso in cui un determinato modo venga classificato come stabile dall'algoritmo, di risalire successivamente alle informazioni essenziali che lo riguardano, ovvero:

- l'iterazione nella quale viene estratto, ossia l'ordine del modello (primo indice);
- il posizionamento all'interno della singola iterazione (secondo indice).

Il vettore  $\vec{p}_{ij}$  si presenta, nella sua forma completa, nel modo seguente:

$$\vec{p}_{ij,compl} = \left\{ \begin{array}{l} \text{indici}_i \\ \text{indici}_j \\ \vec{p}_{ij} \end{array} \right\} \quad (48)$$

È opportuno ora fare alcune considerazioni sui centroidi del 2-means clustering. Si sa che l'algoritmo è composto da più iterazioni e che alla fine di ognuna di esse è necessario un aggiornamento dei centroidi, in base agli elementi assegnati ai relativi cluster e alla loro posizione nello spazio. Tuttavia, è importante focalizzarsi su un passaggio abbastanza delicato che può in alcuni casi condizionare il risultato: l'inizializzazione dei centroidi. Nella trattazione generale sul K-means clustering presente nel capitolo precedente, sono state indicate le due strade principali seguite, che si riportano di seguito per chiarezza:

- inizializzare manualmente i centroidi, sulla base, ad esempio, di condizioni analitiche o evidenze sperimentali;
- effettuare una prima stima di distribuzione nello spazio (o nei sottospazi in caso di vettori) degli elementi in ingresso, scegliendo la posizione iniziale dei centroidi in zone ad alta densità di dati

La strada seguita, come risulta evidente dal codice, è quella di inizializzare a priori i componenti dei centroidi. Nel caso in questione, il numero di componenti dei vettori è ovviamente  $m$ , pari cioè alla quantità di Soft Validation Criteria implementati. La scelta dei valori dei componenti riguardanti i centroidi è stata fatta sulla base dei valori dei SVC illustrati in Tabella 1. Si ottengono quindi i punti di partenza per l'iterazione dettata dal 2-means clustering:

- il centroide fisico, attorno al quale vengono raggruppati i vettori riferiti a modi simili;
- il centroide spurio, attorno al quale si trovano i vettori che confrontano modi molto distinti.

Per quanto riguarda il centroide fisico, esso viene chiamato  $\vec{p}_{c1}$  e i suoi valori inizializzati a priori corrispondono ai valori ideali dei SVC in Tabella 1:

$$\vec{p}_{c1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Al contrario, il centroide spurio, denominato  $\vec{p}_{c2}$  viene inizializzato a priori in base ai valori opposti agli ideali:

$$\vec{p}_{c2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Una volta definita l'inizializzazione dei centroidi, si può entrare nel vivo dell'algoritmo di clustering dei vettori  $\vec{p}_{ij}$ . La formulazione matematica relativa ad un algoritmo K-means è già stata descritta nell'equazione (23). In riferimento al 2-means clustering, è opportuno risalire precisamente alla sua formulazione e applicarla al caso in esame. Per questa ragione, si riporta la (23) per maggiore chiarezza:

$$\{p_{ck}\}_{1 < k < K} = \underset{p_{ck}}{\operatorname{args}} \min \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in C_k}}^{m(C_k)} \pi_{x_i} \operatorname{dist}(x_i, p_{ck}) \quad (23)$$

Partendo da destra, le distanze misurate sono quelle tra i vettori  $\vec{p}_{ij}$  e i centroidi  $\vec{p}_{ck}$ . Si ricorda che esistono molteplici tipologie di calcolo delle distanze tra entità. In questa trattazione si è scelto di utilizzare la variante euclidea.

È opportuno ora fare una considerazione fondamentale: da questo momento in poi, pur tenendo a mente che  $\vec{p}_{ij}$  si riferisce al confronto tra due modi, esso sarà chiamato  $\vec{p}_j$  per questioni di semplificazione delle relazioni matematiche illustrate successivamente. Del resto, come espresso nella relazione (48), l'indicazione dei modi confrontati è già contenuta all'interno dei vettori, dunque non è necessario continuare a identificarli attraverso una coppia di indici.

Fatta questa precisazione, un generico vettore  $\vec{p}_j$  che appartiene al cluster k-esimo  $C_k$  viene indicato con  $\vec{p}_{j,k}$ . La distanza euclidea tra  $\vec{p}_{j,k}$  e il k-esimo centroide  $\vec{p}_{c,k}$  si calcola come:

$$\operatorname{dist} = \|\vec{p}_{j,k} - \vec{p}_{c,k}\|_2^2 \quad (51)$$

Per quanto riguarda  $\pi_{x_i}$ , in questa trattazione tutte le distanze considerate hanno lo stesso peso, dunque  $\pi_{x_i}$ , che in questo caso prenderebbe il nome  $\pi_{p_{j,k}}$ , assume sempre valore unitario.

Una volta precisati gli ultimi dettagli, si può scrivere l'equazione matematica che caratterizza il 2-means clustering applicato al caso in questione:

$$\{p_{ck}\}_{1 \leq k \leq 2} = \underset{p_{ck}}{\operatorname{args}} \min \sum_{k=1}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ \vec{p}_{j,k} \in C_k}}^{m(C_k)} \|\vec{p}_{j,k} - \vec{p}_{c,k}\|_2^2 \quad (52)$$

Il numero di vettori appartenente al cluster  $C_k$  è denominato  $m(C_k)$ . L'insieme dei vettori appartenenti al cluster  $C_1$  si indica come segue:

$$\{\vec{p}_{j,1}\} = \{p_j | \|\vec{p}_j - \vec{p}_{c1}\| \leq \|\vec{p}_j - \vec{p}_{c2}\|\} \quad (53)$$

Risulta facile concludere che l'insieme dei vettori appartenenti al cluster  $C_2$  è descritto nel modo seguente:

$$\{\vec{p}_{j,2}\} = \{\vec{p}_j | \|\vec{p}_j - \vec{p}_{c2}\| < \|\vec{p}_j - \vec{p}_{c1}\|\} \quad (54)$$

I due insiemi di vettori appena descritti vengono ottenuti dopo un certo numero di iterazioni dell'algoritmo. È dunque opportuno entrare nel dettaglio del codice e spiegare i passaggi che vengono effettuati ad ogni iterazione:

- ad ogni ciclo, il primo passaggio è il calcolo, per ognuno dei vettori  $\vec{p}_j$ , delle distanze dai centroidi dei due clusters  $\vec{p}_{c1}$  e  $\vec{p}_{c2}$ . Ogni vettore viene poi assegnato al cluster il cui centroide si trova a distanza minima dal suo, come affermano matematicamente le relazioni (53) e (54).
- successivamente entra in gioco l'equazione (52): per ognuno dei due cluster, vengono calcolate le distanze dei centroidi rispetto a tutti gli elementi che vi appartengono e se ne sommano i risultati per ottenere un singolo valore numerico  $d_{TOT}$ . Questo valore va memorizzato per essere poi confrontato con quello ottenuto nell'iterazione successiva.
- Alla fine di ogni iterazione, si effettua il ricalcolo dei componenti dei centroidi, per poi ripartire con il ciclo successivo. I nuovi centroidi vengono definiti, componente per componente, mediando i valori dei vettori appartenenti ai clusters corrispondenti.

Il parametro cardine che determina la continuazione o l'interruzione del processo è proprio  $d_{TOT}$ . Bisogna ricordare, a tal proposito, che l'obiettivo del 2-means clustering implementato è quello di minimizzare  $d_{TOT}$  e di massimizzare dunque la concentrazione dei clusters attorno ai rispettivi centroidi. Il 2-means clustering viene interrotto quando si verifica una di queste due condizioni:

- si osserva un minimo relativo nell'andamento di  $d_{TOT}$
- si osserva una convergenza di valori nell'andamento di  $d_{TOT}$

In questi casi il raggruppamento di tipo 2-means può dichiararsi concluso. Si dispone ora delle due classi complete di vettori fisici e spuri, su cui saranno fatte delle considerazioni.

Terminato l'operato dell'algoritmo, è il turno di eseguire un'altra operazione: effettuare una prima scrematura del diagramma di stabilizzazione sulla base dei risultati ottenuti. In altre parole, bisogna eliminare da esso i modi che, in base al 2-means clustering, vengono classificati come sicuramente spuri. Per poter sancire la stabilità dei modi è necessario ricordare che, se sono a disposizione  $n$  estrazioni differenti, per ognuno di essi sono presenti  $n - 1$  vettori (contando anche le sovrapposizioni) che il 2-means clustering classifica. Per la maggior parte dei modi estratti, si verifica la situazione per la quale alcuni vettori associati finiscono nell'insieme dei vettori fisici, mentre altri terminano in quello dei vettori sicuramente spuri. La scelta che è stata fatta prevede di scartare solamente i modi la cui totalità di vettori associati viene inserita dall'algoritmo di clustering nella classe di vettori spuri. Tutti gli altri modi vengono conservati e partecipano al seguente passaggio di selezione, che sarà illustrato nel paragrafo seguente.

Si vuole ora fornire un breve esempio esplicativo su come l'algoritmo scarta i modi spuri in questo passaggio: si parte da una matrice di estrazione che contiene i modi indicati in Tabella 2.

Dopo l'esecuzione dell'algoritmo, che in questo esempio ha coinvolto solamente i primi 4 criteri implementati, i vettori  $p_{ij}$  sono divisi tra l'insieme degli elementi fisici e quello degli elementi spuri.

Il primo insieme è visibile in Tabella 3. Analizzando questa tabella, è facile notare che non è presente alcun vettore relativo alla estrazione 7: di conseguenza, questa estrazione viene eliminata dal diagramma di stabilizzazione, coerentemente alle considerazioni fatte precedentemente.

N. estrazione	1	2	3	4	5	6	7
Frequenza [Hz]	10	20	10,1	19,9	9,9	20,1	30
F. smorzamento	0,1	0,04	0,11	0,05	0,09	0,03	0,14
Forma modale	1	2	0,9	1,9	1,1	2,1	4
	2	1	2,1	1,1	1,9	0,9	4
	3	2	3,05	1,99	2,98	2,01	-1

Tabella 2 Esempio di un elenco di modi estratti

N. estrazione 1	1	1	2	2	3	4
N. estrazione 2	3	5	4	6	5	6
VS1	0.0141	0.0141	0.0112	0.0112	0.0281	0.0223
VS2	0.0099	0.0100	0.0050	0.0050	0.0198	0.0100
VS3	0.0909	0.1000	0.2000	0.2500	0.1818	0.4000
VS4	0.9988	0.9986	0.9979	0.9980	0.9948	0.9918

Tabella 3 Esempio di un insieme di vettori fisicamente stabili, ottenuto dopo l'esecuzione del 2-means clustering

### 5.3 Single-mode validation criteria: Hard Validation Criteria

Successivamente alla prima scrematura del diagramma di stabilizzazione, ottenuta sfruttando la combinazione di *SVC* e 2-means clustering, si procede al passaggio successivo dell'algoritmo di selezione. Esso prevede l'applicazione di una differente tipologia di Single-mode validation criteria. Si ricorda che questi ultimi sono dei criteri che permettono, attraverso l'utilizzo di particolari parametri matematici, di etichettare e classificare le estrazioni analizzate e di farne opportune considerazioni.

A questo punto dell'algoritmo, vengono applicati i cosiddetti *Hard Validation Criteria*, che vengono indicati con la sigla *HVC*. Essi si caratterizzano, a differenza dei *SVC*, nel fatto di poter effettuare una scrematura dei modi autonomamente, senza la necessità di essere accoppiati a un algoritmo di clustering. Tornando agli *SVC*, essi forniscono semplicemente un valore di un parametro all'interno di un determinato intervallo, non sono dunque in grado di scremare in modo indipendente il diagramma di stabilizzazione, cosa di cui si occupa poi il 2-means clustering. Al contrario, gli *HVC* caratterizzano sempre i modi in base ad opportuni parametri, ma controllano anche che questi parametri rientrino all'interno di precisi intervalli di ammissibilità: se la risposta è affermativa, il modo in questione accede al passaggio successivo dell'algoritmo, altrimenti viene cancellato dal diagramma di stabilizzazione. È chiara, dunque, l'autonomia con cui agiscono gli *HVC* e la loro maggiore forza rispetto ai *SVC*.

Un altro aspetto da considerare, in riferimento al confronto tra *HVC* e *SVC* implementati in questo lavoro, riguarda il tipo di approccio nei confronti dei modi: è noto ormai che i *SVC* si basano esclusivamente sul confronto tra modi diversi, attraverso  $m$  parametri di comparazione. L'approccio degli *HVC* è completamente diverso, in quanto si analizza ogni modo in maniera indipendente, senza alcun riferimento alla sua posizione nel diagramma di stabilizzazione e alla sua distanza nei confronti degli altri.

Dopo aver fatto queste opportune considerazioni, è possibile entrare nel dettaglio degli *HVC* utilizzati. Il parametro guida, come suggerito dal documento originale, è il fattore di smorzamento. Si ricorda che esso è fornito in ingresso nella matrice *matmodi* di estrazione dei parametri modali. Su di esso sono state imposte due semplici condizioni necessarie per non considerare il modo  $j$ -esimo associato come sicuramente spurio:

- fattore di smorzamento  $\zeta_j$  positivo, per verificare che il modo estratto abbia senso fisico;
- fattore di smorzamento  $\zeta_j$  minore del 20%, valore soglia ricavato sperimentalmente.

Il valore limite 20% va ovviamente adattato alla struttura in esame e può eventualmente essere abbassato o alzato in base alle evidenze sperimentali

Sigla criterio	Criterio	Forse fisico	Sicuramente spurio
VH1	$\zeta_j > 0$	1	0
VH2	$\zeta_j < 20\%$	1	0

Tabella 4 Hard Validation Criteria implementati

Come evidente dalla Tabella 4, gli *HVC* forniscono una risposta binaria: 1 se il modo rispetta entrambi i criteri, 0 se rispetta uno dei due o nessuno dei due. I *SVC* si basano su valori reali contenuti all'interno di un intervallo continuo e compreso tra gli estremi 0 e 1, e quindi sono caratterizzati da infinite risposte possibili. Al contrario, la risposta degli *HVC* comprende solo due possibili varianti e in questo risiede la maggiore forza degli *HVC* rispetto ai *SVC*.

A questo punto, un dubbio potrebbe sorgere spontaneamente: potrebbe non essere chiaro il motivo per il quale gli *HVC* non siano stati utilizzati in un passaggio precedente rispetto ai *SVC*. Infatti, a causa dell'utilizzo primario dei *SVC*, l'algoritmo che effettua il 2-means clustering si ritrova a raggruppare nei clusters anche dei modi che presentano smorzamento non compreso nell'intervallo ideale, che quindi sono sicuramente dei modi spuri. Questi vengono poi eliminati dal diagramma soltanto eseguendo il passaggio successivo degli *HVC*. La risposta a questo dubbio, come precisato in [11], risiede nella necessità di non creare ostacoli all'algoritmo del 2-means clustering. Svolgere i due passaggi in ordine inverso potrebbe alterare i risultati finali: in particolare, gli *HVC* potrebbero eliminare già quasi tutti i modi spuri presenti nel diagramma di stabilizzazione. Di conseguenza, una successiva applicazione dei *SVC* e del 2-means clustering potrebbe comportare l'eliminazione di alcuni modi forse fisici, cosa che renderebbe i risultati finali inaffidabili. Inoltre, modi spuri a causa del fattore di smorzamento potrebbero essere comunque utili per creare connessioni con altri modi fisici, che vengono poi immagazzinate nei *SVC* e utilizzate per la ripartizione del 2-means clustering. Rompere queste possibili connessioni con l'applicazione primaria degli *HVC* comporterebbe l'alterazione dello svolgimento dell'algoritmo di clustering. Per questi motivi i passaggi devono essere svolti strettamente nell'ordine presentato finora.

Dopo l'applicazione dei *HVC*, si dovrebbe ottenere un diagramma notevolmente più chiaro, con modi che presentano in buona parte una ottima stabilità fisica. È giunto il momento di passare al secondo algoritmo di clustering del modello: l'agglomerative hierarchical clustering, descritto nel passo seguente.

#### 5.4 Applicazione dell'agglomerative hierarchical clustering

Una volta completato il processo che comprende i Soft Validation Criteria, il 2-means clustering e gli Hard Validation Criteria, la finalità del passaggio successivo è quella di raggruppare in maniera ordinata i modi che sono rimasti all'interno del diagramma di stabilizzazione. Di conseguenza, per lo meno in questo passaggio, non c'è la volontà di eliminare dei modi dal diagramma, ma l'algoritmo deve semplicemente comprendere le eventuali similitudini tra modi vicini e cominciare a riconoscere le colonne di modi stabili del diagramma di stabilizzazione, cosa che fino ad ora non è stata effettuata. Infatti, nei passaggi precedenti ogni estrazione veniva comparata con tutte le altre, proprio perché il modello non riconosce a priori i clusters evidenziabili visivamente nella rappresentazione grafica del

diagramma. Al contrario, l'algoritmo riceve in ingresso soltanto la matrice delle estrazioni, nella quale non ne vengono appunto indicate le possibili relazioni reciproche.

Dopo aver chiarito le finalità di questo passaggio, è possibile introdurre e spiegare le peculiarità del modello implementato: esso è l'hierarchical clustering, utilizzato nella sua variante agglomerativa. Anche questo tipo di algoritmo è stato trattato nel Capitolo 4, in cui sono state specificate le sue varianti e le sue caratteristiche. Esso appartiene alla categoria di algoritmi Graph-Based, dunque non raggruppa gli elementi in ingresso attorno a delle entità ideali, come ad esempio fa il 2-means clustering presentato. Al contrario, l'operazione di raggruppamento viene svolta dapprima definendo un parametro che funga da unità di misura per stabilire la distanza relativa tra i dati, e successivamente raggruppandoli esclusivamente in base alla loro posizione e alle loro distanze relative. La variante utilizzata è quella agglomerativa, quindi i modi sono considerati, inizialmente, come clusters con un singolo elemento. L'obiettivo è quello di raggruppare i modi che si somigliano in clusters sempre più grandi, che rappresentino l'equivalente matematico delle colonne di modi che è possibile osservare nel diagramma di stabilizzazione.

Il primo passo è quello di comprendere quale debba essere il parametro in base al quale i modi verranno confrontati e raggruppati. In riferimento a [11], si è scelto di seguire fedelmente la scelta di questo parametro: nel confronto tra due modi, si prende in considerazione la distanza tra i rispettivi autovalori continui nel tempo e la *MAC* tra le loro forme modali. La formulazione della distanza tra il modo  $i$ -esimo e il modo  $j$ -esimo si scrive nel modo seguente:

$$d(i, j) = d(\lambda_{ci}, \lambda_{cj}) + 1 - MAC(\overline{\Phi}_i, \overline{\Phi}_j) \quad (55)$$

Determinato il parametro utilizzato per il calcolo delle distanze, si può costruire la matrice di prossimità, una matrice simmetrica in cui, per ogni modo, sono riportate le distanze da tutti gli altri. Si riporta una rappresentazione sintetica di essa:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & d_{1i} & d_{1j} & d_{1N} \\ d_{i1} & \ddots & d_{ij} & d_{iN} \\ d_{j1} & d_{ji} & \ddots & d_{jN} \\ d_{N1} & d_{Ni} & d_{Nj} & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Una volta definita la matrice di prossimità iniziale, l'algoritmo di cluster può partire. Ad ogni passaggio, i due clusters più vicini vengono raggruppati in un cluster unico. Questo corrisponde all'eliminazione di una colonna e della riga corrispondente nella matrice  $[M]$ . Dopo ogni ciclo, bisogna ricalcolare le distanze relative necessarie per partire con il passaggio successivo. Queste distanze vengono ricalcolate mediando le distanze tra gli elementi che vi appartengono.

Nel capitolo precedente si è parlato anche della necessità di porre una soglia critica per fermare l'algoritmo. Infatti, in assenza di essa, l'algoritmo prosegue ininterrottamente fino a raggruppare tutti gli elementi in un unico cluster che li contiene nella loro totalità, e questo lo renderebbe inutile ai fini del modello. A questo punto è importante ricordare che l'obiettivo di questo lavoro è massimizzare l'automatizzazione del modello, rendendolo completamente indipendente da parametri impostati manualmente. A tal fine, anche la soglia che ferma il clustering deve essere calcolata autonomamente dall'algoritmo.

Per calcolare la soglia critica, il codice fa riferimento all'insieme dei vettori fisici  $\{\vec{p}_{j,1}\}$  in uscita dal 2-means clustering eseguito in precedenza. Di quest'insieme di vettori, si considerano le componenti relative alle distanze tra gli autovalori e al *MAC*. Gli autovalori sono riportati nella prima componente dei vettori appartenenti all'insieme, mentre il *MAC* è indicato in quarta posizione. Si costruisce dunque un vettore  $p_1$ , da cui poi ricavare il valore effettivo della soglia critica, in cui ogni componente ha la struttura seguente:

$$p_{1,i} = p_{j,1i}(1) + 1 - p_{j,1i}(4) \quad (57)$$

Una volta ricavato il vettore  $p_1$ , la soglia critica si calcola come segue:

$$\tilde{d} = \mu_{p_1} + 2\sigma_{p_1} \quad (58)$$

in cui:

- $\mu_{p_1}$  rappresenta la media del vettore  $p_1$ ;
- $\sigma_{p_1}$  rappresenta la deviazione standard di  $p_1$ .

Quando la distanza tra i due clusters più vicini si trova ad essere superiore alla soglia critica, l'algoritmo viene interrotto e il clustering si dichiara concluso.

Si possiedono ora dei raggruppamenti precisi di modi che, in base al parametro di distanza utilizzato, hanno delle caratteristiche essenziali in comune. L'algoritmo è ora in grado di comprendere matematicamente la distribuzione dei modi nel diagramma di stabilizzazione, osservando semplicemente i clusters in uscita dall'hierarchical clustering. Seguirà ora una ulteriore scrematura dei clusters ottenuti grazie a una nuova applicazione, in chiave differente, del 2-means clustering. Questa scrematura servirà per eliminare i clusters che non hanno un numero sufficiente di modi al loro interno, e che quindi non possono garantire sufficiente stabilità.

### 5.5 Seconda applicazione del 2-means clustering e scelta finale delle soluzioni

Come passaggio finale della pulizia del diagramma di stabilizzazione, si ha una seconda applicazione dell'algoritmo del 2-means clustering. Mentre nella prima applicazione gli elementi da ripartire erano i vettori  $p_j$  costruiti applicando i SVC, in questo caso i dati in ingresso sono gli stessi clusters ottenuti raggruppando i modi con l'hierarchical clustering. Analogamente alla divisione dei vettori  $p_j$  anche in questa applicazione i clusters sono ripartiti in due gruppi: l'insieme dei clusters fisici e quello dei clusters spuri.

Si immagini ora di avere a disposizione un numero  $n_c$  di clusters. Un generico cluster j-esimo è considerato in base al numero di modi  $n_{hj}$  al suo interno. Esso è il parametro che guida questa applicazione del 2-means clustering. Facendo ancora un paragone con la sua prima applicazione, il parametro che rappresenta gli elementi in ingresso è dunque uno scalare, al contrario dei vettori  $p_j$ . L'obiettivo finale di questo 2-means clustering è quello di eliminare eventuali clusters che non soddisfino requisiti sufficienti di stabilità: in altre parole, bisogna scartare i clusters che non hanno un numero sufficiente di modi al loro interno. A tal proposito, si ricorda ancora una volta che in questo lavoro si vuole evitare assolutamente l'inserimento manuale di opportune soglie critiche, e quindi non si può definire in assoluto un numero di modi minimo che un cluster debba possedere per non essere scartato. Questa soglia sarà stimata e applicata dall'algoritmo in base alla morfologia dei cluster, che sicuramente può modificarsi sostanzialmente se lo stesso modello viene applicato a sistemi differenti.

Si entra ora in merito al funzionamento di questa applicazione del 2-means clustering. Il primo passaggio è quello di aggiungere agli  $n_c$  clusters di partenza un numero  $n_e$  di clusters con un numero nullo di modi contenuti. Il numero  $n_e$  viene scelto contando i clusters che possiedono un numero di modi pari almeno alla metà di quelli presenti nel cluster più popolato. La somma di  $n_e$  ed  $n_c$  fornisce il numero totale  $n_s$  di set su cui il modello inizia ad agire. Questa operazione viene effettuata perché, almeno in teoria, tutti i modi che non vengono scartati nei passaggi precedenti dovrebbero presentare una certa stabilità, e di conseguenza tutti i clusters di partenza dovrebbero essere fisicamente stabili. In tal senso, applicare il 2-means clustering senza aggiungere delle caselle vuote che partecipano al processo non porterebbe all'eliminazione di alcun cluster, rendendo il passaggio completamente inutile.

L'equazione cardine dell'algoritmo è analoga alla (52) e si presenta come segue:

$$\{n_{hc1}, n_{hc2}\} = \underset{n_{hck}}{\text{argmin}} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{n_s(k)} (n_{hj,c} - n_{hck})^2 \quad (59)$$

dove  $n_{hc1}$  e  $n_{hc2}$  rappresentano rispettivamente il centroide dei set fisici e il centroide dei set spuri. La loro inizializzazione avviene nel modo seguente:

$$\begin{aligned} n_{hc1} &= \max(n_{hj}) \\ n_{hc2} &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Il funzionamento dell'algorithmo è assolutamente analogo a quello spiegato nel paragrafo 5.2: il primo step riguarda il calcolo, per ogni set, della distanza dai centroidi, al fine di stabilire l'insieme a cui esso appartiene. Questa distanza viene misurata semplicemente applicando la differenza quadratica tra il numero di elementi del set e il centroide in questione. Si riportano le formulazioni matematiche dei due insiemi a cui i set in ingresso possono appartenere:

$$\begin{aligned} \{n_{hj,1}\} &= \{n_{hj} | (n_{hj} - n_{hc1})^2 \leq (n_{hj} - n_{hc2})^2\} \\ \{n_{hj,2}\} &= \{n_{hj} | (n_{hj} - n_{hc2})^2 < (n_{hj} - n_{hc1})^2\} \end{aligned} \quad (61)$$

Una volta classificati tutti i set, si applica l'equazione (59) e si calcola la somma di tutte le distanze  $d_{TOT}$  tra i set e i centroidi degli insiemi di appartenenza. Il processo si ripete finchè  $d_{TOT}$  non raggiunge un minimo relativo oppure un punto di convergenza assoluto. Alla fine di ogni iterazione, i centroidi vengono aggiornati mediando il numero di modi che i relativi set contengono al loro interno.

Concluso il 2-means clustering, i clusters che sono stati classificati nell'insieme spurio  $\{n_{hj,2}\}$  devono essere scartati. Di conseguenza, i modi che vi appartengono vengono considerati spuri ed eliminati anch'essi dal diagramma di stabilizzazione. L'ultimo passaggio di pulizia del diagramma di stabilizzazione può così dichiararsi completato.

Successivamente all'applicazione dei numerosi passaggi volti a eliminare dati in eccesso e non affidabili, si ha ora a disposizione una schiera di modi stabili, ripartiti ordinatamente in base alla reciproca somiglianza. Rimane solo l'ultimo passaggio da svolgere: per ogni cluster, va scelto il modo specifico caratterizzante il sistema vibrante in esame. Le strade percorribili sono molteplici e possono comportare il coinvolgimento di uno o più parametri. Quello che si è scelto di considerare in questo caso è il fattore di smorzamento: per ogni raggruppamento tra quelli rimasti, si sceglie il modo caratterizzato dal valore mediano del fattore di smorzamento. Da qui, in base ai dati conservati lungo i passaggi dell'algorithmo, si è in grado di risalire alla posizione del modo all'interno della matrice delle estrazioni fornita in ingresso, e dunque di ottenere le informazioni riguardanti l'ordine del modello e la forma modale associata.

## 6. Applicazione dell' algoritmo a un modello numerico

Dopo aver affrontato e analizzato tutti i punti del codice implementato, si può porre l'attenzione sul passaggio seguente. Esso consiste nel mettere in pratica il lavoro svolto, effettuando delle verifiche di funzionamento del codice.

Mettere alla prova l' algoritmo ha permesso di mettere in luce alcune problematiche relative al suo funzionamento, e di adottare le necessarie contromisure affinché l'obiettivo possa essere raggiunto. La verifica del funzionamento del codice ha seguito due strade parallele e molto differenti tra loro, per ottenere maggiori spunti sull'operato dell' algoritmo. Queste due strade sono riassunte di seguito:

- La prima strada è stata l'applicazione dell' algoritmo a una matrice di estrazioni generata agendo su un modello numerico, di cui si conosce in partenza il numero di gradi di libertà (l' algoritmo comunque non possiede questa informazione). Questa verifica sarà illustrata in questo capitolo.
- La seconda verifica riguarda dati sperimentali raccolti in laboratorio e riguardanti un sistema vibrante smorzato che consiste in una portiera di una automobile. Questa analisi sarà sviluppata nel capitolo successivo.

Come anticipato, questo capitolo è incentrato sull'applicazione dell' algoritmo a dati numerici ottenuti utilizzando il LIPEZ su un modello vibrante ideale. Questo modello è caratterizzato dai seguenti parametri:

- 7 gradi di libertà, corrispondenti a masse puntuali;
- 13 molle con costante elastica  $k_i$ ;
- 13 smorzatori viscosi con coefficiente di smorzamento  $c_i$

Questo sistema viene eccitato, lungo un intervallo di tempo compreso tra  $t_{min} = 0$  e  $t_{max} = 200$  s, da una forza  $F$  caratterizzata da un andamento casuale.

Su questo modello, di cui una rappresentazione degli spostamenti in funzione del tempo è fornita in Figura 15, viene eseguito l' algoritmo *FRF.rec* per ricavare le funzioni di risposta nel dominio delle frequenze, e successivamente il codice *LIPEZ* che estrae i parametri modali e permette di costruire una prima versione del diagramma di stabilizzazione.

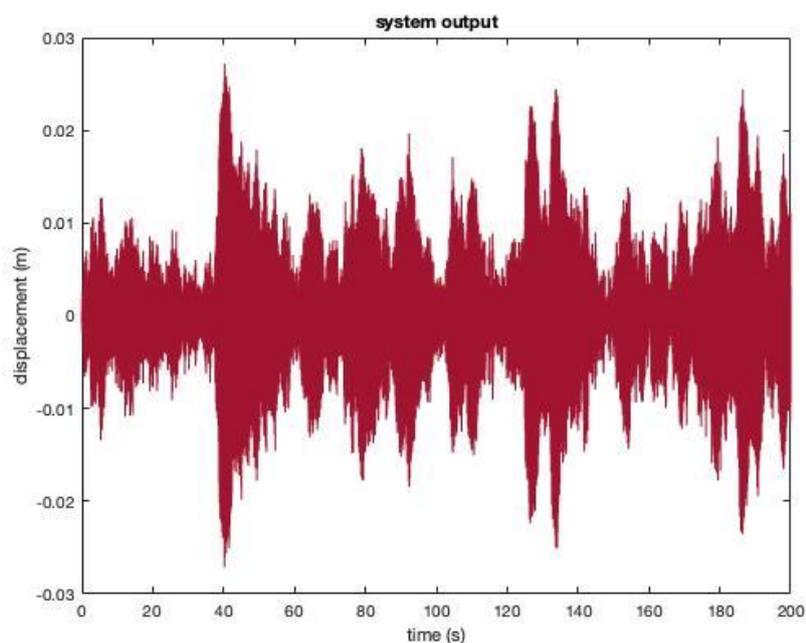


Figura 15 Diagramma spazio-temporale relativo al sistema

In uscita dall'algoritmo *FRF.rec* è possibile ipotizzare una prima stima del numero di modi che effettivamente dovrebbero caratterizzare il sistema. A tal proposito, si riporta la rappresentazione dei moduli delle FRF estratte in Figura 16. Le imperfezioni che si notano sulle FRF sono dovute al rumore (5% del valore efficace) che è stato aggiunto sia sull'ingresso (forza) sia sulle 7 uscite (spostamenti) dell'integratore numerico che simula una struttura reale.

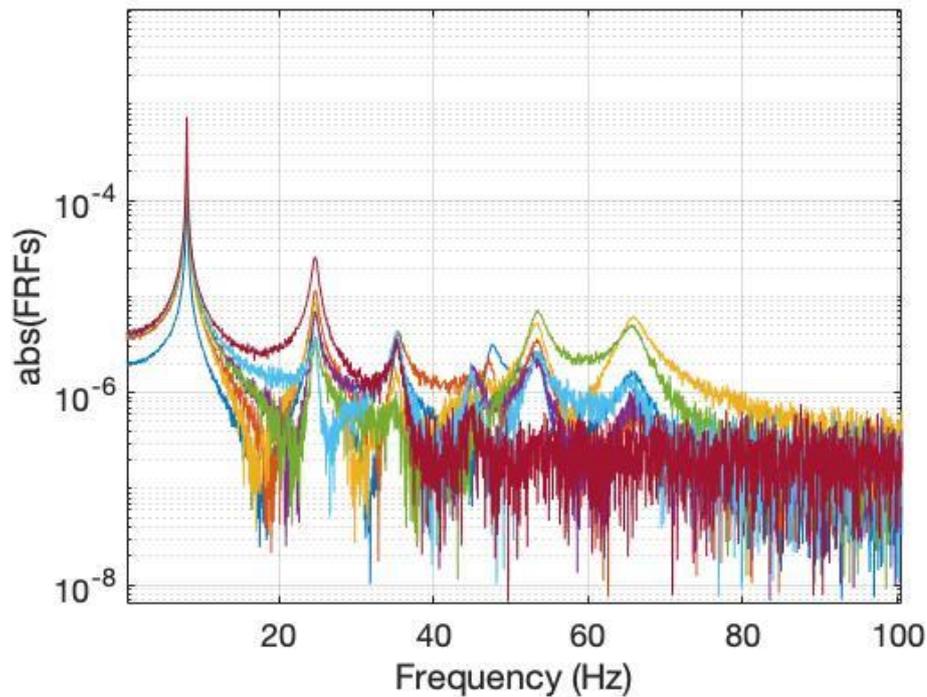


Figura 16 Rappresentazione delle FRF

Già da questa prima rappresentazione, si intuisce quali possano essere i picchi negli spettri, che dovrebbero corrispondere ai modi fisicamente stabili. Questa intuizione può essere resa maggiormente chiara rappresentando la somma dei moduli di tutte le FRF, illustrata in Figura 17.

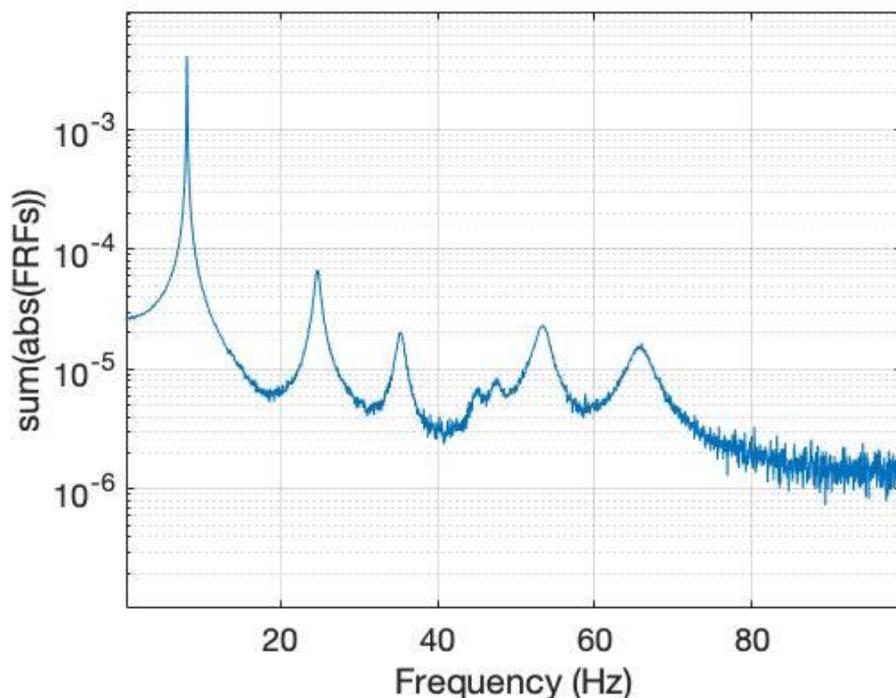


Figura 17 Rappresentazione della somma dei moduli delle FRF

Osservando la Figura 17 si osservano, per l'appunto, dei picchi in corrispondenza di determinate frequenze, soprattutto nell'intervallo di frequenze compreso tra lo 0 e i 70 Hz.

A questo punto si esegue l'algoritmo LIPEZ con i seguenti parametri impostati:

- Intervallo di frequenze compreso tra 5 e 70 Hz.
- Ordine minimo del sistema vibrante  $n_{min} = 5$ .
- Ordine massimo del sistema vibrante  $n_{max} = 50$ .

Seguono ora le rappresentazioni dei diagrammi di stabilizzazione in uscita dal LIPEZ, da cui parte l'algoritmo di selezione dei parametri modali implementato in questo lavoro.

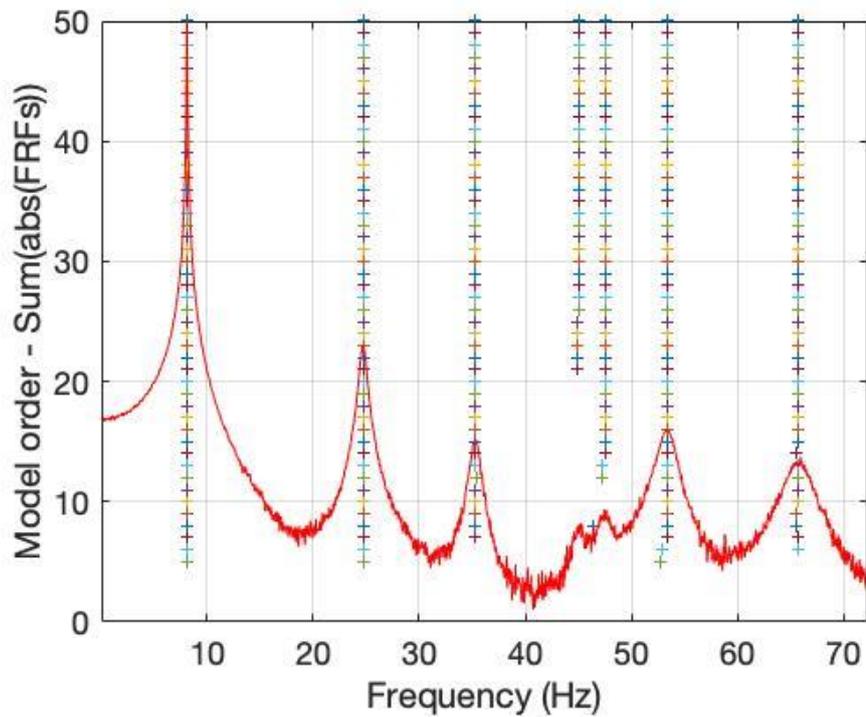


Figura 18 Diagramma di stabilizzazione frequenze-ordini

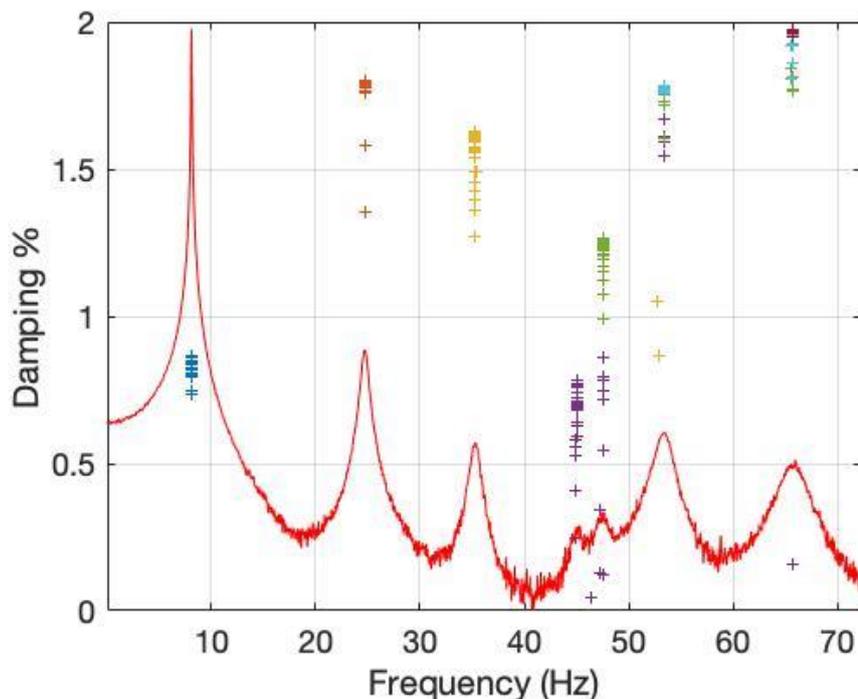


Figura 19 Diagramma di stabilizzazione frequenze-smorzamenti

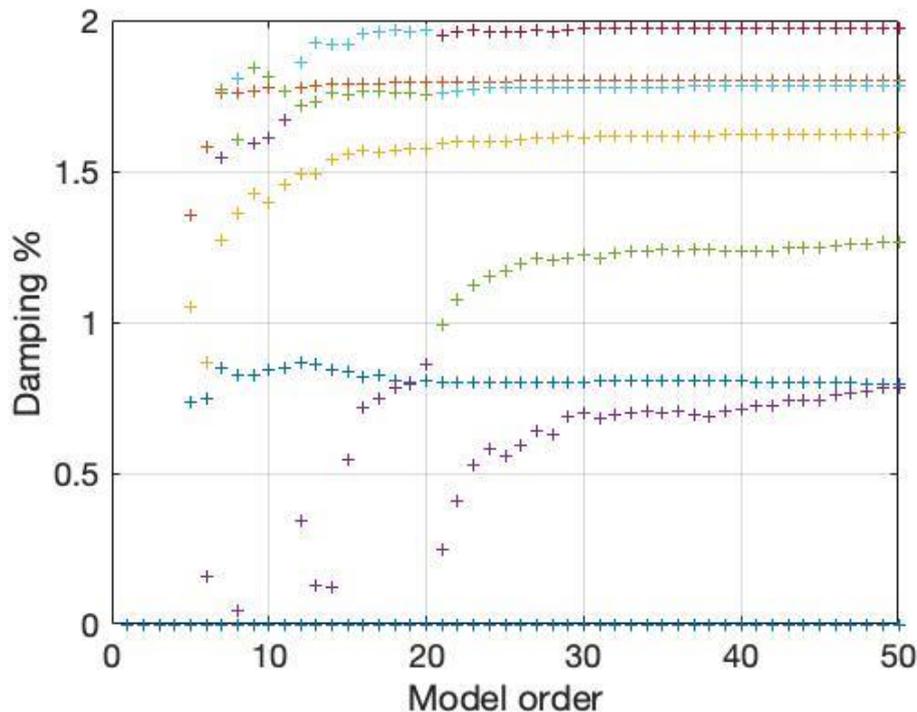


Figura 20 Diagramma di stabilizzazione ordini-smorzamenti

Partendo dai parametri modali estratti dal LIPEZ, si può passare ora all'applicazione dell'algoritmo implementato per la selezione automatica delle soluzioni. In questa trattazione ci si soffermerà su ogni punto dell'algoritmo per illustrare i risultati raggiunti tappa dopo tappa e le eventuali problematiche evidenziate da ogni passaggio. Questa spiegazione proseguirà nei paragrafi successivi di questo capitolo, nell'ordine corrispondente a quello dei passaggi dell'algoritmo affrontato nel Capitolo 5.

### 6.1. Single-mode validation criteria: Soft Validation Criteria

Il primo passo è il calcolo relativo ai *SVC*. Come descritto nel capitolo precedente, i criteri applicati sono 7 e sono elencati di seguito in ordine di applicazione:

- Differenze relative tra gli autovalori
- Differenze relative tra le frequenze naturali
- Differenze relative tra i fattori di smorzamento
- *MAC*
- Differenze relative tra *MPC*
- Differenze relative tra i Modal Scaling Factor
- *MACX*

L'algoritmo LIPEZ estrae  $n = 297$  modi, negli intervalli di frequenze e ordini impostati. Di conseguenza, ognuno di essi è confrontato con gli altri modi estratti e vengono costruiti, omettendo le sovrapposizioni,  $m = 43956$  vettori  $p_{ij}$ . Questi vettori sono ora il punto di partenza per l'esecuzione del primo 2-means clustering, con l'obiettivo di creare un insieme di elementi stabili fisicamente e un altro di elementi spuri. La forma dei vettori  $p_{ij}$  è quella descritta precedentemente nella relazione compatta (46) e nella forma estesa (47), che vengono riportate di seguito per chiarezza:

$$\vec{p}_{ij} = \{SVC_{ij,k}\}_{1 \leq k \leq m} \quad (46)$$

$$\vec{p}_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} d(\lambda_{ci}, \lambda_{cj}) \\ d(f_{ui}, f_{uj}) \\ d(\zeta_i, \zeta_j) \\ MAC(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j) \\ d(MPC_i, MPC_j) \\ d(q_i, q_j) \\ MACX(\vec{\Phi}_i, \vec{\Phi}_j) \end{array} \right\} \quad (47)$$

## 6.2. Primo 2-Means clustering

L'operazione successiva è l'esecuzione del primo algoritmo di clustering del modello: il 2-means clustering. La descrizione completa del processo si può trovare nel Capitolo 5, mentre in questo punto della trattazione si pone l'accento su i risultati in uscita. Tuttavia, si considera utile riportare seguentemente l'equazione cardine dell'algoritmo:

$$\{p_{ck}\}_{1 \leq k \leq 2} = \underset{p_{ck}}{args} \min \sum_{k=1}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ \vec{p}_{j,k} \in C_k}}^{m(C_k)} \|\vec{p}_{j,k} - \vec{p}_{ck}\|_2^2 \quad (52)$$

I centroidi impostati inizialmente sono espressi dalle relazioni (49) e (50):

$$\vec{p}_{c1} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (49)$$

$$\vec{p}_{c2} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (50)$$

Si passa ora ai risultati ottenuti ad algoritmo concluso: dopo un numero di iterazioni  $iter = 6$ , il processo si interrompe perché trova un minimo relativo nella somma delle distanze tra i vettori  $\vec{p}_{ij}$  e i relativi centroidi  $p_{ck}$ .

All'interruzione del processo, gli  $n$  vettori di confronto sono ripartiti nei due insiemi caratteristici nel modo seguente:

- Un numero  $n_1 = 6256$  vettori classificati come fisicamente stabili
- Un numero  $n_2 = 37700$  vettori classificati come spuri

La forma finale dei centroidi è la seguente:

$$\vec{p}_{c1} = \begin{pmatrix} 0,0013 \\ 5,8980e - 04 \\ 0,0806 \\ 0,9931 \\ 0,4366 \\ 0,0023 \\ 0,9968 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\vec{p}_{c2} = \begin{pmatrix} 0,4754 \\ 0,4753 \\ 0,3613 \\ 0,0046 \\ 0,7142 \\ 0,4396 \\ 0,0046 \end{pmatrix} \quad (63)$$

A questo punto, riferendosi alla spiegazione nel Capitolo 5, l'algoritmo procede ricercando le estrazioni per le quali la totalità dei vettori  $p_{ij}$  viene classificata come spuria. Queste estrazioni vengono eliminate dal diagramma di stabilizzazione. Nel caso in questione, non si trova una singola estrazione che non rispetti i requisiti di paragone con tutte le altre, perché per ogni estrazione ce ne è almeno un'altra che presenta diverse somiglianze in termini dei parametri che vengono coinvolti nell'implementazione dei SVC. Di conseguenza, nessun modo, in questo passaggio, viene eliminato dal diagramma di stabilizzazione. Questa conclusione non rende affatto inutile l'implementazione del 2-means clustering e dei SVC, perché essi saranno fondamentali nell'elaborazione dei parametri di distanza relativa coinvolti nel processo dell'hierarchical clustering.

Seguono ora delle rappresentazioni grafiche di alcuni sottospazi relativi ai vettori  $p_{ij}$ , con l'illustrazione della divisione dei vettori in fisici e spuri e con l'indicazione spaziale dei centroidi finali del processo di clustering.

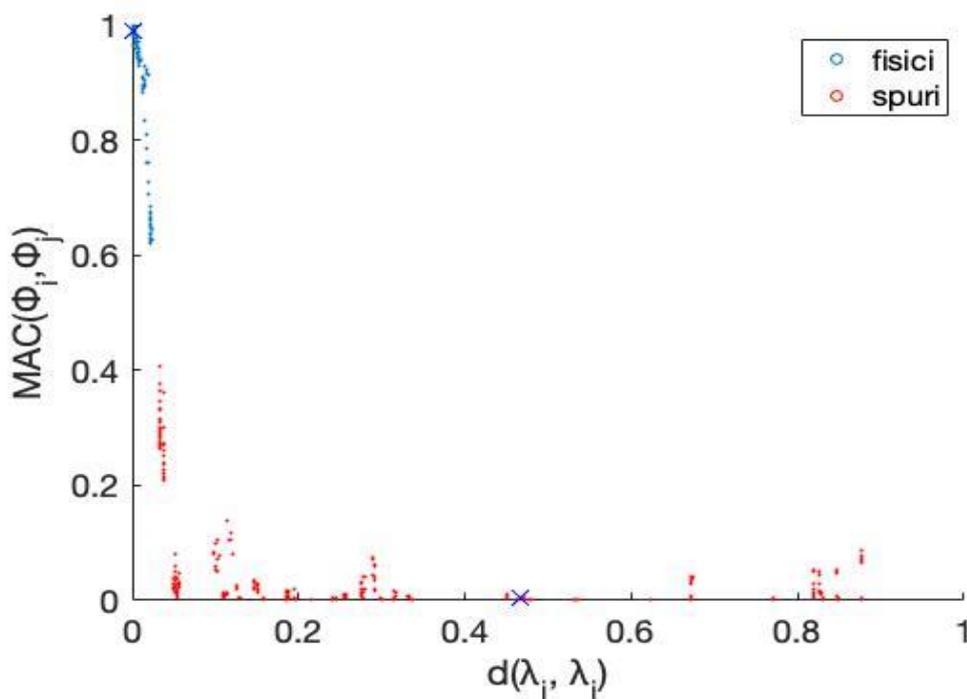


Figura 21 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS4

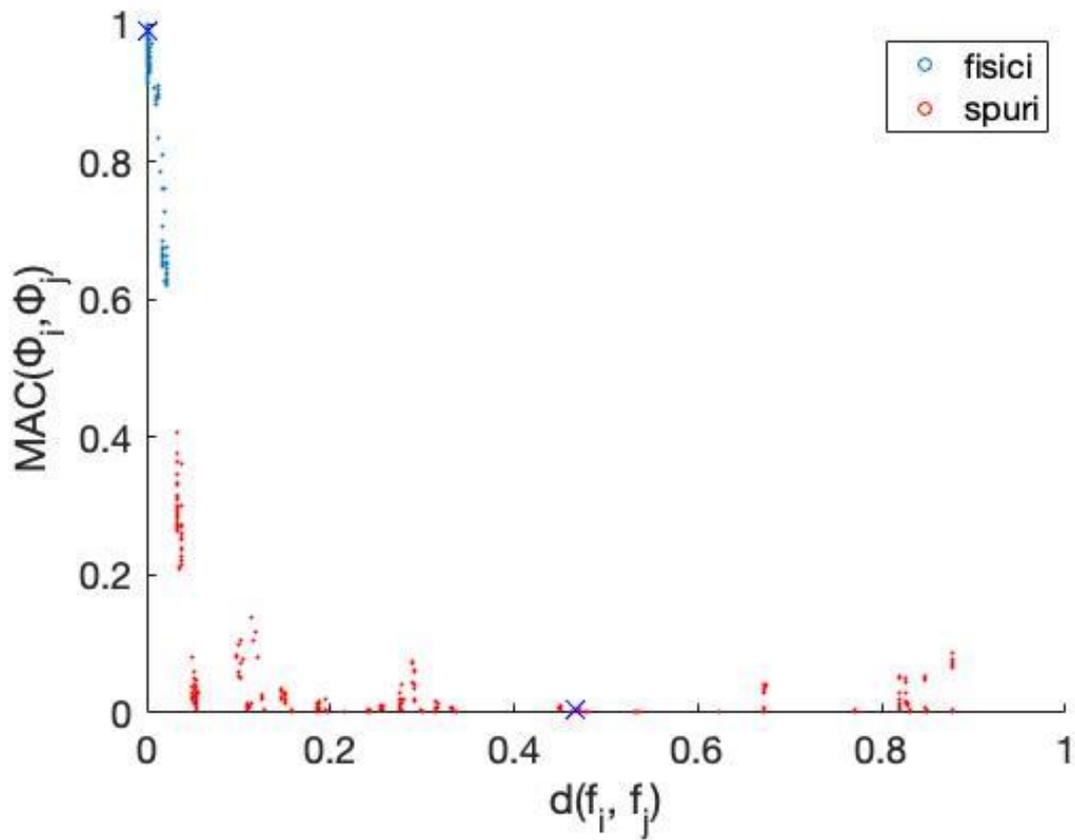


Figura 22 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS4

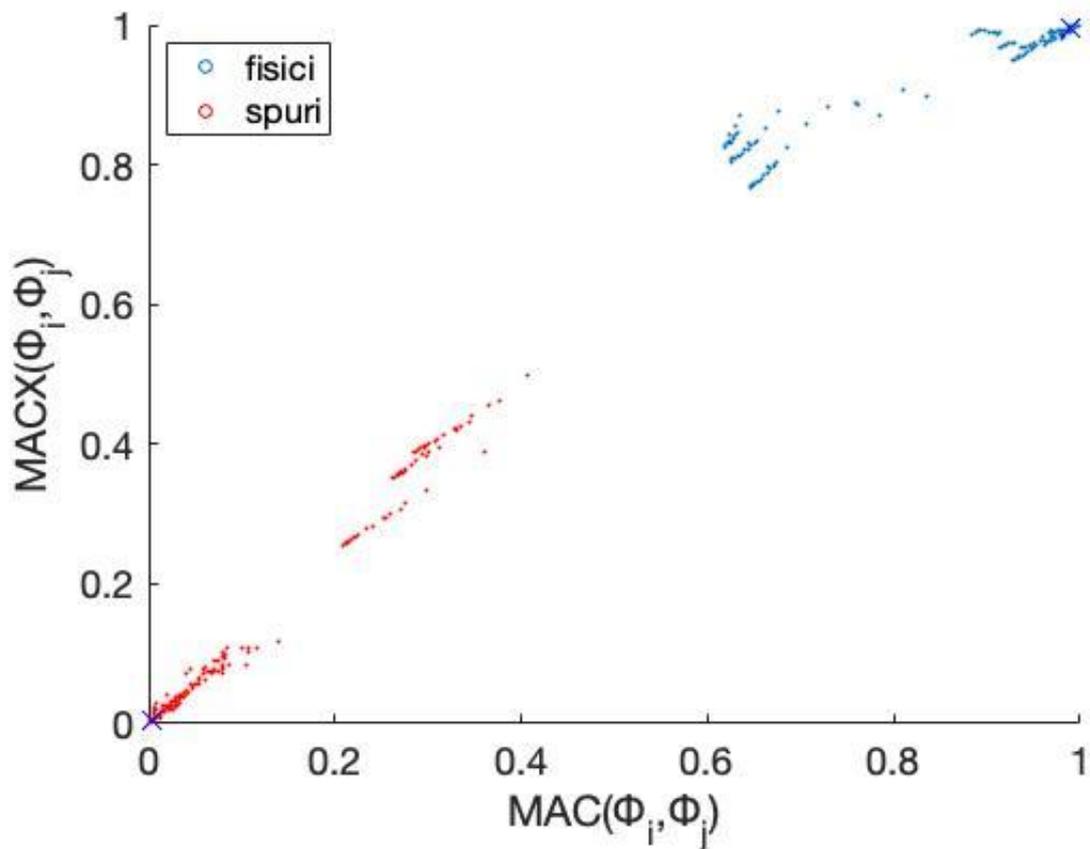


Figura 23 Rappresentazione del sottospazio VS4-VS7

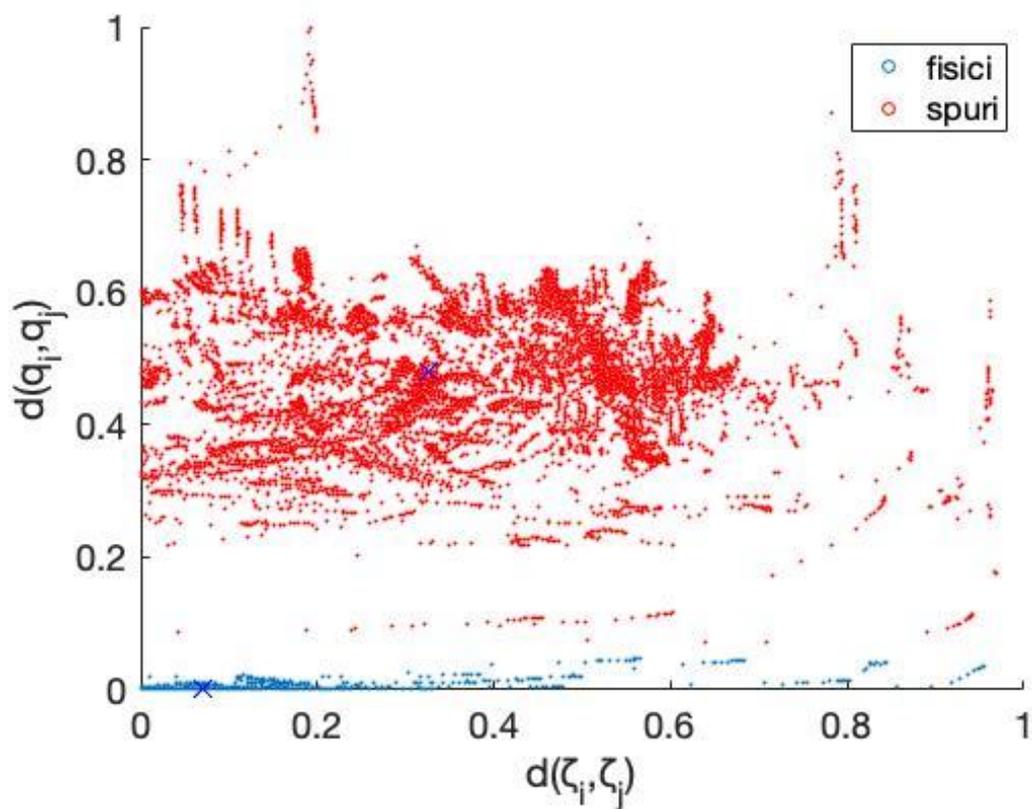


Figura 24 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS7

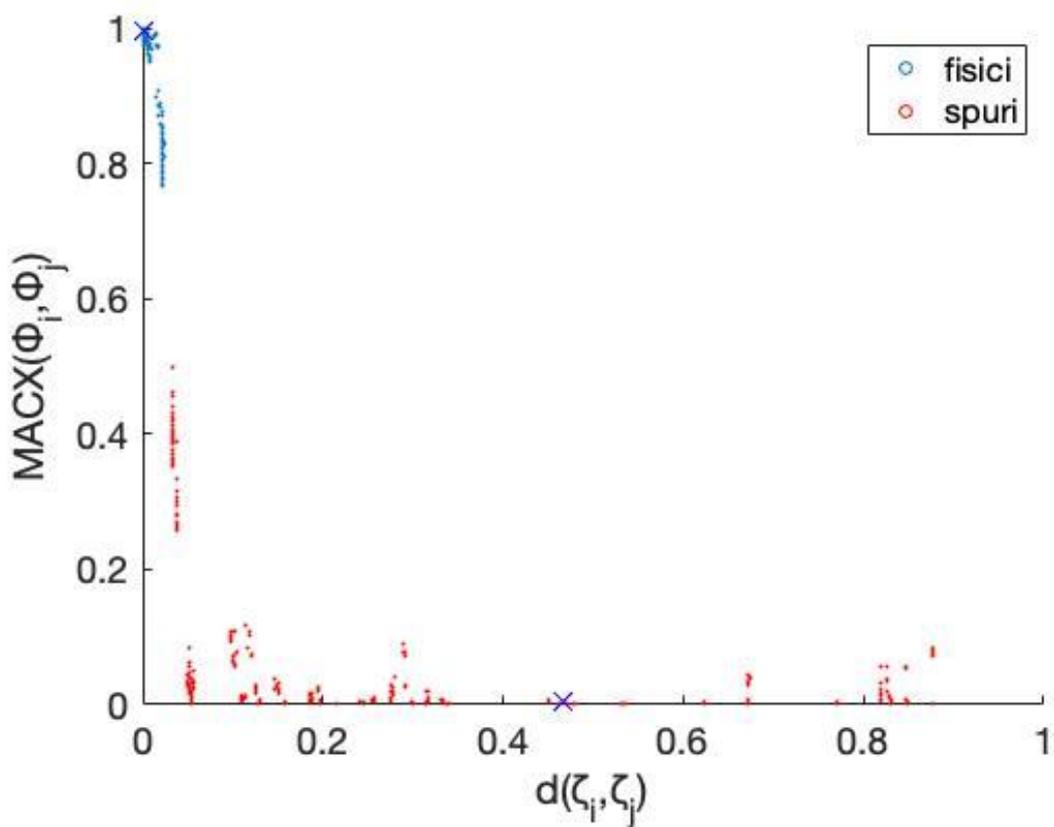


Figura 25 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS7

### 6.3. Single-mode validation criteria: Hard Validation Criteria

Dopo il 2-means clustering, si passa all'applicazione degli *HVC* per eliminare le estrazioni che non rispettano i requisiti in termini di fattore di smorzamento, che sono:

- fattore di smorzamento  $\zeta_j$  positivo
- fattore di smorzamento  $\zeta_j$  minore del 20%

Questo passaggio elimina dal diagramma di stabilizzazione quei modi i cui fattori di smorzamento non risiedono in questo intervallo, tuttavia essi hanno evidenziato una sostanziale utilità per una esecuzione corretta del primo 2-means clustering. Il diagramma di stabilizzazione successivo alla applicazione degli *HVC* si presenta nella struttura illustrata in Figura 26.

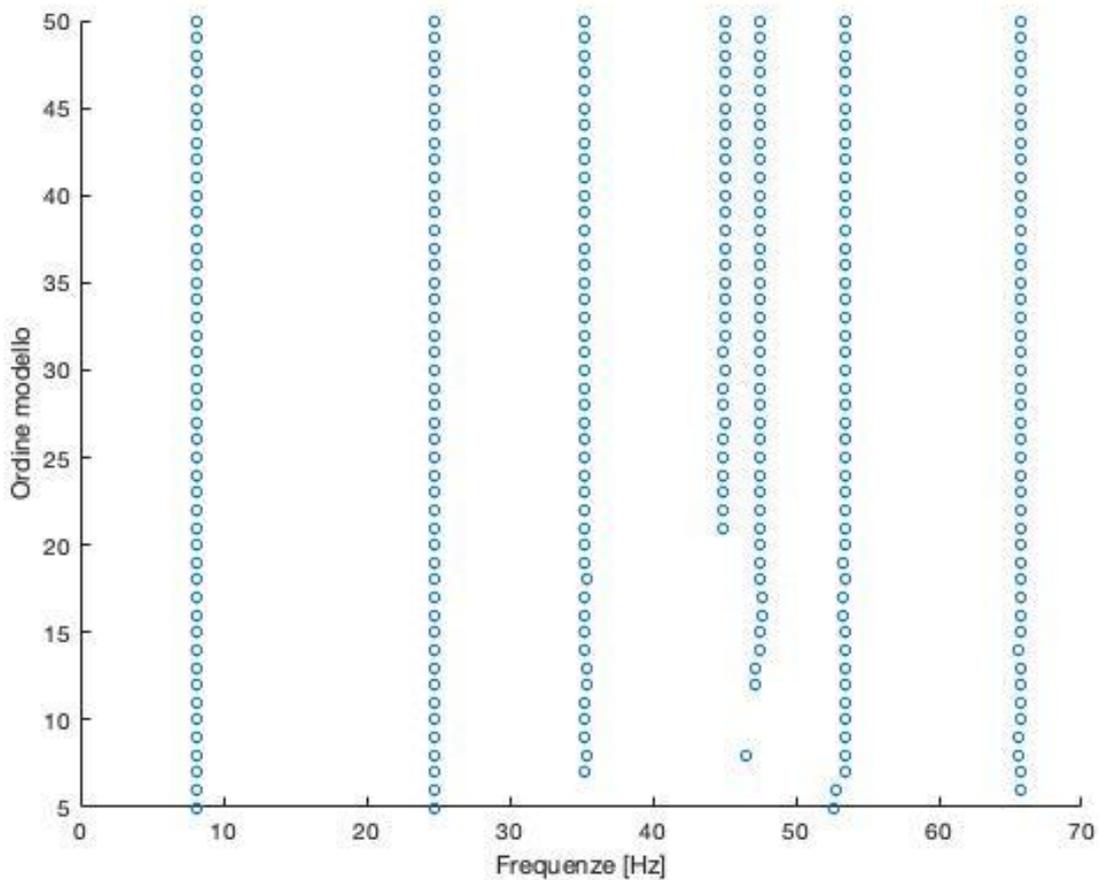


Figura 26 Diagramma di stabilizzazione successivo all'applicazione degli *HVC*

### 6.4 Agglomerative hierarchical clustering

Si arriva ora al momento più importante dell'algoritmo di selezione: l'operazione di raggruppamento dei modi che hanno superato i passaggi precedenti. Si ricorda ancora che prima dell'applicazione dell'hierarchical clustering, il codice non riconosce autonomamente i raggruppamenti di modi vicini, cosa che invece è possibile ottenere visivamente osservando i diagrammi di stabilizzazione.

La formulazione della distanza tra il modo *i*-esimo e il modo *j*-esimo si scrive come indicato nell'equazione (55):

$$d(i, j) = d(\lambda_{ci}, \lambda_{cj}) + 1 - MAC(\overline{\Phi}_i, \overline{\Phi}_j) \quad (55)$$

La soglia è decisa automaticamente dall'algoritmo in base ai risultati ottenuti dall'esecuzione del 2-means clustering, come indicato nel Capitolo 5 dalla relazione (58):

$$\tilde{d} = \mu_{p_1} + 2\sigma_{p_1} \quad (58)$$

Dopo un numero  $n = 288$  iterazioni, i clusters di dati sono ben definiti e la loro distanza relativa supera il valore soglia  $\tilde{d}$ : il processo di clustering può dichiararsi concluso.

Si osserva un numero  $n_{clu} = 10$  di raggruppamenti distinti di estrazioni. Le frequenze naturali e i fattori di smorzamento relativi ai clusters individuati sono illustrati rispettivamente in Tabella 5 e Tabella 6.

### 6.5. Secondo 2-means clustering

Una volta raggruppati i modi nei relativi clusters, il processo di selezione è quasi concluso. L'ultimo passaggio necessario per procedere poi alla scelta di un modo per ogni cluster è la classificazione di cluster in fisici e spuri. Infatti, non tutti i clusters in uscita dall'hierarchical clustering sono sicuramente stabili dal punto di vista fisico. Di conseguenza, quelli che non presentano un numero di modi al loro interno pari almeno ad una determinata soglia (si ricorda che essa è stabilita autonomamente dall'algoritmo, come spiegato nel Capitolo 5) vengono classificati come instabili.

Vengono aggiunti  $n_{empty} = 7$  set agli  $n_{clu}$  iniziali, in base alla condizione per la quale si deve aggiungere un set vuoto per ogni cluster di dimensioni pari almeno alla metà del cluster più popolato. L'equazione cardine di questa seconda esecuzione del 2-means clustering è la (59) ed è riportata per chiarezza:

$$\{n_{hc1}, n_{hc2}\} = \underset{n_{hck}}{\text{args}} \min \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{n_s(k)} (n_{hj,c} - n_{hck})^2 \quad (59)$$

L'inizializzazione dei centroidi  $n_{hc1}$  e  $n_{hc2}$  è indicata dalle relazioni (60):

$$\begin{aligned} n_{hc1} &= \max(n_{hj}) \\ n_{hc2} &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Degli  $n_{clu}$  clusters in ingresso al 2-means clustering,  $n_{clu\_fin} = 7$  soddisfano la condizione di stabilità e accedono all'ultimo passaggio dell'algoritmo: la selezione del modo caratteristico del sistema per ogni cluster. In Tabella 7 e Tabella 8 si osservano i cluster che accedono all'ultimo step.

### 6.6. Selezione dei modi caratteristici

La selezione del modo caratteristico per ogni cluster avviene in base al criterio dello smorzamento mediano: si sceglie il modo il cui fattore di smorzamento si avvicina maggiormente al valore mediano di tutti i fattori di smorzamento dei modi appartenenti al cluster.

I modi scelti relativamente al sistema analizzato sono riportati in Tabella 9. In Tabella 10, invece, vengono riportati i modi teorici relativi al modello analizzato. Il confronto tra i modi teorici e quelli estratti e selezionati dall'algoritmo è effettuato nel paragrafo seguente.

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7	Cluster 8	Cluster 9	Cluster 10
8,0989	24,7390	52,7049	65,7203	35,3027	53,4038	65,6605	46,4616	47,1663	44,9096
8,0983	24,6805	52,8874	/	35,3245	53,3917	65,6497	/	47,2447	44,9295
8,0997	24,7029	/	/	35,3014	53,4184	65,6291	/	47,5588	44,9393
8,0999	24,7058	/	/	35,3068	53,3991	65,6205	/	47,5153	44,9468
8,0995	24,7090	/	/	35,2859	53,4095	65,6698	/	47,5832	44,9700
8,0990	24,7092	/	/	35,3321	53,3925	65,6573	/	47,5962	44,9895
8,0980	24,7068	/	/	35,3267	53,4010	65,6492	/	47,5362	45,0012
8,0971	24,7060	/	/	35,3152	53,4010	65,6640	/	47,5612	44,9963
8,0968	24,7059	/	/	35,3052	53,3918	65,6622	/	47,5677	44,9963
8,0957	24,7063	/	/	35,3142	53,3931	65,6646	/	47,5458	44,9923
8,0953	24,7060	/	/	35,3154	53,3867	65,6644	/	47,5335	45,0039
8,0949	24,7060	/	/	35,3167	53,3855	65,6639	/	47,5222	45,0107
8,0949	24,7063	/	/	35,3228	53,3882	65,6632	/	47,5181	45,0193
8,0948	24,7060	/	/	35,3200	53,3867	65,6671	/	47,5286	45,0225
8,0947	24,7056	/	/	35,3120	53,3879	65,6708	/	47,5281	45,0168
8,0950	24,7054	/	/	35,3137	53,3947	65,6699	/	47,5231	45,0206
8,0950	24,7060	/	/	35,3169	53,3931	65,6694	/	47,5239	45,0252
8,0950	24,7058	/	/	35,3165	53,3917	65,6736	/	47,5135	45,0199
8,0950	24,7059	/	/	35,3150	53,3903	65,6751	/	47,5143	45,0187
8,0950	24,7057	/	/	35,3185	53,3905	65,6637	/	47,5099	45,0187
8,0951	24,7056	/	/	35,3145	53,3910	65,6634	/	47,5093	45,0159
8,0948	24,7057	/	/	35,3137	53,3910	65,6622	/	47,5052	45,0173
8,0949	24,7057	/	/	35,3157	53,3917	65,6619	/	47,5048	45,0102
8,0949	24,7059	/	/	35,3158	53,3901	65,6628	/	47,5058	45,0116
8,0949	24,7059	/	/	35,3170	53,3908	65,6626	/	47,5050	45,0103
8,0949	24,7058	/	/	35,3154	53,3909	65,6623	/	47,5049	45,0098
8,0948	24,7059	/	/	35,3156	53,3908	65,6625	/	47,5073	45,0090
8,0948	24,7056	/	/	35,3153	53,3906	65,6628	/	47,5063	45,0096
8,0949	24,7057	/	/	35,3152	53,3905	65,6631	/	47,5074	45,0077
8,0948	24,7057	/	/	35,3152	53,3903	65,6617	/	47,5098	45,0050
8,0948	24,7057	/	/	35,3154	53,3903	65,6613	/	47,5093	/
8,0948	24,7057	/	/	35,3155	53,3902	65,6609	/	47,5125	/
8,0951	24,7056	/	/	35,3149	53,3903	65,6606	/	47,5127	/
8,0951	24,7057	/	/	35,3147	53,3903	65,6602	/	47,5126	/
8,0951	24,7058	/	/	35,3145	53,3906	65,6599	/	47,5143	/
8,0952	24,7057	/	/	35,3148	53,3900	65,6601	/	47,5145	/
8,0952	24,7057	/	/	35,3152	53,3900	65,6601	/	47,5156	/
8,0952	24,7057	/	/	35,3150	53,3903	65,6597	/	47,5145	/
8,0952	24,7058	/	/	35,3149	53,3902	65,6598	/	47,5129	/
8,0952	24,7057	/	/	35,3146	53,3902	65,6601	/	/	/
8,0953	24,7057	/	/	35,3144	53,3901	65,6600	/	/	/
8,0953	24,7058	/	/	35,3146	53,3901	65,6695	/	/	/
8,0953	24,7058	/	/	35,3146	53,3889	65,6257	/	/	/
8,0954	24,7058	/	/	35,3148	53,3891	65,7151	/	/	/
8,0954	24,7058	/	/	/	/	/	/	/	/
8,0954	24,7058	/	/	/	/	/	/	/	/

Tabella 5 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: frequenze

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7	Cluster 8	Cluster 9	Cluster 10
0,7348	1,3562	1,0508	0,1599	1,2722	1,5452	1,7704	0,0463	0,3410	0,2451
0,7472	1,5830	0,8680	/	1,3603	1,6036	1,8111	/	0,1301	0,4087
0,8457	1,7565	/	/	1,4236	1,5932	1,8077	/	0,1199	0,5249
0,8236	1,7563	/	/	1,4539	1,6129	1,8420	/	0,5462	0,5781
0,8242	1,7658	/	/	1,3982	1,6680	1,8586	/	0,7191	0,5547
0,8437	1,7743	/	/	1,4917	1,7174	1,9277	/	0,7458	0,5894
0,8466	1,7675	/	/	1,4904	1,7299	1,9185	/	0,7838	0,6384
0,8686	1,7793	/	/	1,5375	1,7579	1,9552	/	0,7930	0,6281
0,8590	1,7802	/	/	1,5545	1,7548	1,9608	/	0,8615	0,6848
0,8426	1,7865	/	/	1,5656	1,7580	1,9596	/	0,9909	0,6845
0,8361	1,7859	/	/	1,5618	1,7622	1,9632	/	1,0726	0,7003
0,8207	1,7868	/	/	1,5747	1,7635	1,9637	/	1,1241	0,6910
0,8216	1,7899	/	/	1,5702	1,7588	1,9652	/	1,1515	0,7015
0,8076	1,7919	/	/	1,5719	1,7573	1,9632	/	1,1671	0,6973
0,8075	1,7919	/	/	1,5899	1,7541	1,9658	/	1,1919	0,7056
0,8044	1,7938	/	/	1,5981	1,7667	1,9687	/	1,2126	0,7082
0,8053	1,7957	/	/	1,6000	1,7722	1,9679	/	1,2070	0,7063
0,8049	1,7963	/	/	1,6008	1,7748	1,9627	/	1,2117	0,7087
0,8052	1,7968	/	/	1,6041	1,7764	1,9610	/	1,2115	0,7235
0,8057	1,7974	/	/	1,5961	1,7758	1,9688	/	1,2211	0,7211
0,8054	1,7984	/	/	1,6110	1,7766	1,9711	/	1,2282	0,6952
0,8031	1,7988	/	/	1,6091	1,7774	1,9721	/	1,2351	0,6889
0,8008	1,7988	/	/	1,6132	1,7785	1,9726	/	1,2353	0,7381
0,8011	1,7986	/	/	1,6104	1,7790	1,9729	/	1,2330	0,7412
0,8022	1,7993	/	/	1,6137	1,7790	1,9727	/	1,2333	0,7422
0,8029	1,7995	/	/	1,6158	1,7790	1,9729	/	1,2391	0,7561
0,7999	1,7951	/	/	1,6170	1,7793	1,9738	/	1,2403	0,7634
0,8001	1,7999	/	/	1,6174	1,7797	1,9735	/	1,2427	0,7736
0,7999	1,7999	/	/	1,6167	1,7805	1,9741	/	1,2355	0,7808
0,7993	1,7999	/	/	1,6180	1,7801	1,9738	/	1,2343	0,7837
0,7995	1,8003	/	/	1,6183	1,7802	1,9733	/	1,2345	/
0,7999	1,8005	/	/	1,6189	1,7806	1,9736	/	1,2453	/
0,8047	1,8006	/	/	1,6207	1,7806	1,9737	/	1,2447	/
0,8054	1,8007	/	/	1,6215	1,7803	1,9731	/	1,2468	/
0,8043	1,8013	/	/	1,6212	1,7809	1,9740	/	1,2526	/
0,8041	1,8015	/	/	1,6197	1,7804	1,9746	/	1,2565	/
0,8034	1,8010	/	/	1,6231	1,7807	1,9747	/	1,2616	/
0,8033	1,8010	/	/	1,6228	1,7810	1,9747	/	1,2655	/
0,8005	1,8017	/	/	1,6225	1,7809	1,9750	/	1,2664	/
0,7989	1,8018	/	/	1,6224	1,7812	1,9753	/	/	/
0,7998	1,8017	/	/	1,6228	1,7811	1,9753	/	/	/
0,7993	1,8018	/	/	1,6238	1,7813	1,9471	/	/	/
0,7978	1,8018	/	/	1,6245	1,7769	1,9192	/	/	/
0,7963	1,8020	/	/	1,6252	1,7772	1,7635	/	/	/
0,7965	1,8021	/	/	/	/	/	/	/	/
0,7956	1,8020	/	/	/	/	/	/	/	/

Tabella 6 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: fattori di smorzamento

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7
8,0989	24,7390	35,3027	53,4038	65,6605	47,1663	44,9096
8,0983	24,6805	35,3245	53,3917	65,6497	47,2447	44,9295
8,0997	24,7029	35,3014	53,4184	65,6291	47,5588	44,9393
8,0999	24,7058	35,3068	53,3991	65,6205	47,5153	44,9468
8,0995	24,7090	35,2859	53,4095	65,6698	47,5832	44,9700
8,0990	24,7092	35,3321	53,3925	65,6573	47,5962	44,9895
8,0980	24,7068	35,3267	53,4010	65,6492	47,5362	45,0012
8,0971	24,7060	35,3152	53,4010	65,6640	47,5612	44,9963
8,0968	24,7059	35,3052	53,3918	65,6622	47,5677	44,9963
8,0957	24,7063	35,3142	53,3931	65,6646	47,5458	44,9923
8,0953	24,7060	35,3154	53,3867	65,6644	47,5335	45,0039
8,0949	24,7060	35,3167	53,3855	65,6639	47,5222	45,0107
8,0949	24,7063	35,3228	53,3882	65,6632	47,5181	45,0193
8,0948	24,7060	35,3200	53,3867	65,6671	47,5286	45,0225
8,0947	24,7056	35,3120	53,3879	65,6708	47,5281	45,0168
8,0950	24,7054	35,3137	53,3947	65,6699	47,5231	45,0206
8,0950	24,7060	35,3169	53,3931	65,6694	47,5239	45,0252
8,0950	24,7058	35,3165	53,3917	65,6736	47,5135	45,0199
8,0950	24,7059	35,3150	53,3903	65,6751	47,5143	45,0187
8,0950	24,7057	35,3185	53,3905	65,6637	47,5099	45,0187
8,0951	24,7056	35,3145	53,3910	65,6634	47,5093	45,0159
8,0948	24,7057	35,3137	53,3910	65,6622	47,5052	45,0173
8,0949	24,7057	35,3157	53,3917	65,6619	47,5048	45,0102
8,0949	24,7059	35,3158	53,3901	65,6628	47,5058	45,0116
8,0949	24,7059	35,3170	53,3908	65,6626	47,5050	45,0103
8,0949	24,7058	35,3154	53,3909	65,6623	47,5049	45,0098
8,0948	24,7059	35,3156	53,3908	65,6625	47,5073	45,0090
8,0948	24,7056	35,3153	53,3906	65,6628	47,5063	45,0096
8,0949	24,7057	35,3152	53,3905	65,6631	47,5074	45,0077
8,0948	24,7057	35,3152	53,3903	65,6617	47,5098	45,0050
8,0948	24,7057	35,3154	53,3903	65,6613	47,5093	/
8,0948	24,7057	35,3155	53,3902	65,6609	47,5125	/
8,0951	24,7056	35,3149	53,3903	65,6606	47,5127	/
8,0951	24,7057	35,3147	53,3903	65,6602	47,5126	/
8,0951	24,7058	35,3145	53,3906	65,6599	47,5143	/
8,0952	24,7057	35,3148	53,3900	65,6601	47,5145	/
8,0952	24,7057	35,3152	53,3900	65,6601	47,5156	/
8,0952	24,7057	35,3150	53,3903	65,6597	47,5145	/
8,0952	24,7058	35,3149	53,3902	65,6598	47,5129	/
8,0952	24,7057	35,3146	53,3902	65,6601	/	/
8,0953	24,7057	35,3144	53,3901	65,6600	/	/
8,0953	24,7058	35,3146	53,3901	65,6695	/	/
8,0953	24,7058	35,3146	53,3889	65,6257	/	/
8,0954	24,7058	35,3148	53,3891	65,7151	/	/
8,0954	24,7058	/	/	/	/	/
8,0954	24,7058	/	/	/	/	/

Tabella 7 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: frequenze

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7
0,7348	1,3562	1,2722	1,5452	1,7704	0,3410	0,2451
0,7472	1,5830	1,3603	1,6036	1,8111	0,1301	0,4087
0,8457	1,7565	1,4236	1,5932	1,8077	0,1199	0,5249
0,8236	1,7563	1,4539	1,6129	1,8420	0,5462	0,5781
0,8242	1,7658	1,3982	1,6680	1,8586	0,7191	0,5547
0,8437	1,7743	1,4917	1,7174	1,9277	0,7458	0,5894
0,8466	1,7675	1,4904	1,7299	1,9185	0,7838	0,6384
0,8686	1,7793	1,5375	1,7579	1,9552	0,7930	0,6281
0,8590	1,7802	1,5545	1,7548	1,9608	0,8615	0,6848
0,8426	1,7865	1,5656	1,7580	1,9596	0,9909	0,6845
0,8361	1,7859	1,5618	1,7622	1,9632	1,0726	0,7003
0,8207	1,7868	1,5747	1,7635	1,9637	1,1241	0,6910
0,8216	1,7899	1,5702	1,7588	1,9652	1,1515	0,7015
0,8076	1,7919	1,5719	1,7573	1,9632	1,1671	0,6973
0,8075	1,7919	1,5899	1,7541	1,9658	1,1919	0,7056
0,8044	1,7938	1,5981	1,7667	1,9687	1,2126	0,7082
0,8053	1,7957	1,6000	1,7722	1,9679	1,2070	0,7063
0,8049	1,7963	1,6008	1,7748	1,9627	1,2117	0,7087
0,8052	1,7968	1,6041	1,7764	1,9610	1,2115	0,7235
0,8057	1,7974	1,5961	1,7758	1,9688	1,2211	0,7211
0,8054	1,7984	1,6110	1,7766	1,9711	1,2282	0,6952
0,8031	1,7988	1,6091	1,7774	1,9721	1,2351	0,6889
0,8008	1,7988	1,6132	1,7785	1,9726	1,2353	0,7381
0,8011	1,7986	1,6104	1,7790	1,9729	1,2330	0,7412
0,8022	1,7993	1,6137	1,7790	1,9727	1,2333	0,7422
0,8029	1,7995	1,6158	1,7790	1,9729	1,2391	0,7561
0,7999	1,7951	1,6170	1,7793	1,9738	1,2403	0,7634
0,8001	1,7999	1,6174	1,7797	1,9735	1,2427	0,7736
0,7999	1,7999	1,6167	1,7805	1,9741	1,2355	0,7808
0,7993	1,7999	1,6180	1,7801	1,9738	1,2343	0,7837
0,7995	1,8003	1,6183	1,7802	1,9733	1,2345	/
0,7999	1,8005	1,6189	1,7806	1,9736	1,2453	/
0,8047	1,8006	1,6207	1,7806	1,9737	1,2447	/
0,8054	1,8007	1,6215	1,7803	1,9731	1,2468	/
0,8043	1,8013	1,6212	1,7809	1,9740	1,2526	/
0,8041	1,8015	1,6197	1,7804	1,9746	1,2565	/
0,8034	1,8010	1,6231	1,7807	1,9747	1,2616	/
0,8033	1,8010	1,6228	1,7810	1,9747	1,2655	/
0,8005	1,8017	1,6225	1,7809	1,9750	1,2664	/
0,7989	1,8018	1,6224	1,7812	1,9753	/	/
0,7998	1,8017	1,6228	1,7811	1,9753	/	/
0,7993	1,8018	1,6238	1,7813	1,9471	/	/
0,7978	1,8018	1,6245	1,7769	1,9192	/	/
0,7963	1,8020	1,6252	1,7772	1,7635	/	/
0,7965	1,8021	/	/	/	/	/
0,7956	1,8020	/	/	/	/	/

Tabella 8 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: fattori di smorzamento

| Ordine            |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 40                | 27                | 28                | 28                | 31                | 27                | 20                |
| Frequenza<br>[Hz] |
| 8,0952            | 24,7059           | 35,3137           | 44,9963           | 47,5143           | 53,3889           | 65,6699           |
| F.smorz.<br>[%]   |
| 0,8041            | 1,7986            | 1,6091            | 0,6281            | 1,2115            | 1,7769            | 1,9687            |
| Forma<br>modale   |
0,4938+0,0017i	0,8134-0,0288i	2,7255-0,0686i	0,6473-0,237i	29,2167-3,7503i	-0,4982-0,0179i	-0,2734-0,0286i
0,9586+0,0042i	1,3542-0,0385i	3,7086+0,0938i	1,4426-1,3154i	16,8619+1,9757i	-0,7341-0,0413i	-0,1035-0,0165i
1	1	1	1	1	1	1
1,1281+0,0009i	0,7529-0,0255i	-3,2378-0,0994i	-4,8485+6,285i	1,1823-0,0783i	-0,4781-0,0459i	-0,12-0,0175i
1,1114+0,0039i	0,417+0,0038i	-0,65-0,0897i	1,3536-1,0942i	-2,3814-1,1584i	1,496+0,0801i	-0,8825-0,0325i
1,2172-0,0139i	-0,4151+0,0395i	-3,8434+0,0696i	5,1552-5,1334i	-0,68-0,2054i	-0,5734-0,0515i	0,2251-0,01i
1,3107-0,0002i	-3,0848+0,0937i	2,7004-0,0353i	-1,1288+1,6466i	-0,9417+0,0695i	-0,0459+0,007i	0,0152-0,0186i

Tabella 9 Modi finali selezionati

| Frequenza<br>[Hz] |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 8,0926            | 24,7039           | 35,3169           | 45,0257           | 47,5453           | 53,4597           | 65,9942           |
| F.smorz.<br>[%]   |
| 0,2199            | 1,4381            | 1,4346            | 1,1467            | 1,3816            | 1,6147            | 1,9721            |
| Forma<br>modale   |
0,5128-0,0006i	0,7977+0,0039i	2,2427-0,0263i	-1,5912-1,186i	7,4538+0,4177i	-0,463+0,0208i	-0,2626+0,0099i
0,9844+0,0002i	1,3355+0,0038i	3,0865-0,1198i	-1,8243-0,2038i	-4,1329-0,3381i	-0,6792+0,0065i	-0,1024-0,0039i
1	1	1	1	1	1	1
1,1644-0,0006i	0,7532+0,0075i	-2,5286+0,106i	9,8243+2,5085i	0,3269+0,3887i	-0,4436+0,0249i	-0,1128+0,0086i
1,1441	0,4227-0,0214i	-0,4809+0,0108i	-2,4157-0,5334i	-0,5139-0,1086i	1,3785-0,0568i	-0,8201-0,0298i
1,2519-0,0008i	-0,3743-0,0075i	-3,0708+0,0159i	-8,6309-2,0115i	0,2343-0,1948i	-0,5198+0,0182i	0,2128+0,0053i
1,3562-0,002i	-2,984+0,0012i	2,2769-0,0218i	2,9705+0,731i	0,0045+0,074i	-0,0331-0,0184i	0,0222+0,0097i

Tabella 10 Modi teorici

## 6.6. Confronto tra soluzioni teoriche e soluzioni estratte

Il passaggio finale, una volta che l'algoritmo ha selezionato i modi caratterizzanti del sistema, è il confronto tra questi modi e quelli teorici. La comparazione tra i due set di modi è effettuata seguendo 2 criteri:

- Matrice *MAC*
- Matrice *MACX*

I risultati dell'applicazione di questi criteri sono illustrati nelle tabelle seguenti, e a questo punto il processo di selezione dei parametri modali può essere dichiarato concluso.

/	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Modo 1	99,9863	0,1348	0,2966	0,0060	0,1125	0,7117	0,0033
Modo 2	0,3180	99,9499	0,1403	0,1604	0,1826	0,1220	0,0295
Modo 3	0,0356	0,1992	99,6654	0,0051	0,4495	0,0501	0,0116
Modo 4	1,2195	0,2338	0,0144	96,3651	0,8257	0,3402	0,8513
Modo 5	0,1972	0,1552	0,3694	0,4933	98,6129	0,4927	0,5931
Modo 6	0,4240	0,1004	0,0335	0,0162	0,1718	99,6577	0,1046
Modo 7	0,1488	0,0130	0,0337	0,1233	0,0189	0,1219	99,6997

Tabella 11 Matrice *MAC* per paragonare forme modali teoriche (righe) con forme modali estratte (colonne)

/	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Modo 1	99,9948	0,1514	0,2903	0,0043	0,1196	0,6800	0,0016
Modo 2	0,2890	99,9845	0,1529	0,2058	0,1895	0,1342	0,0259
Modo 3	0,0691	0,2041	99,8585	0,0627	0,5322	0,0558	0,0104
Modo 4	0,9932	0,4381	0,0550	97,4682	0,4134	0,2757	0,7453
Modo 5	0,1217	0,0465	0,3863	0,3297	98,7095	0,5009	0,7803
Modo 6	0,4139	0,0972	0,0250	0,0189	0,1808	99,8828	0,1451
Modo 7	0,1455	0,0053	0,0180	0,1426	0,0338	0,1315	99,8711

Tabella 12 Matrice *MACX* per paragonare forme modali teoriche (righe) con forme modali estratte (colonne)

## 6.7 Applicazione al modello numerico con modifica dell'intensità del rumore

Si è deciso di riportare nella trattazione anche una seconda applicazione dell'algoritmo al modello numerico descritto in precedenza, di cui si riportano le caratteristiche fisiche:

- 7 gradi di libertà, corrispondenti a masse puntuali;
- 13 molle con costante elastica  $k_i$ ;
- 13 smorzatori viscosi con coefficiente di smorzamento  $c_i$

Anche in questo caso l'eccitazione del sistema avviene tramite l'applicazione di una forza di intensità casuale, ma si attua la variazione di un parametro fondamentale: il rumore. Esso è ora impostato ad una intensità pari al quadruplo del valore settato in precedenza (ovvero 20% del valore efficace) ed è aggiunto, analogamente a prima, sia sull'ingresso (forza), sia sulle 7 uscite (spostamenti) dell'integratore numerico che simula una struttura reale.

Si è deciso di eseguire l'algoritmo *LIPEZ* di estrazione e, successivamente, l'algoritmo di selezione dei parametri modali per scegliere automaticamente i modi che caratterizzano il sistema e per evidenziare eventuali differenze rispetto al caso precedente. I singoli passaggi saranno descritti sinteticamente, essendo completamente analoghi a quelli del caso precedente.

Eseguendo il file *FRF.rec*, si ricostruiscono le FRF relative al sistema e alla sollecitazione applicata. In Figura 27 e Figura 28 si riportano, rispettivamente, l'andamento dei moduli delle FRF e della loro

somma. Si nota, relativamente a Figura 28, che l'aumento del rumore comporta l'ottenimento di un grafico con andamento molto meno regolare in confronto a quello di Figura 17.

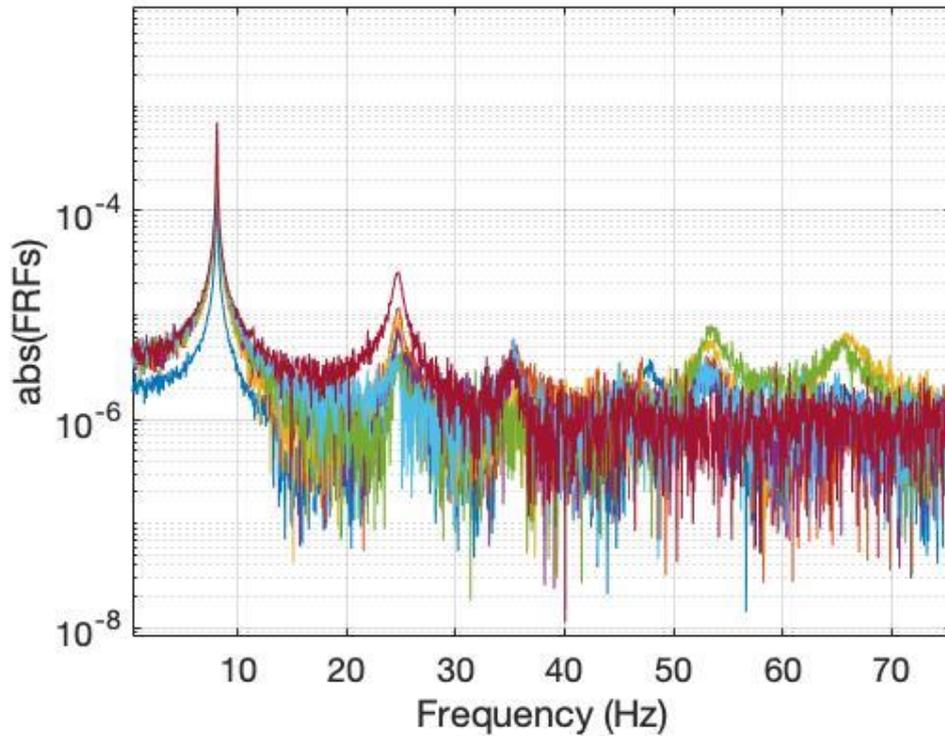


Figura 27 Rappresentazione delle FRF-Rumore al 20%

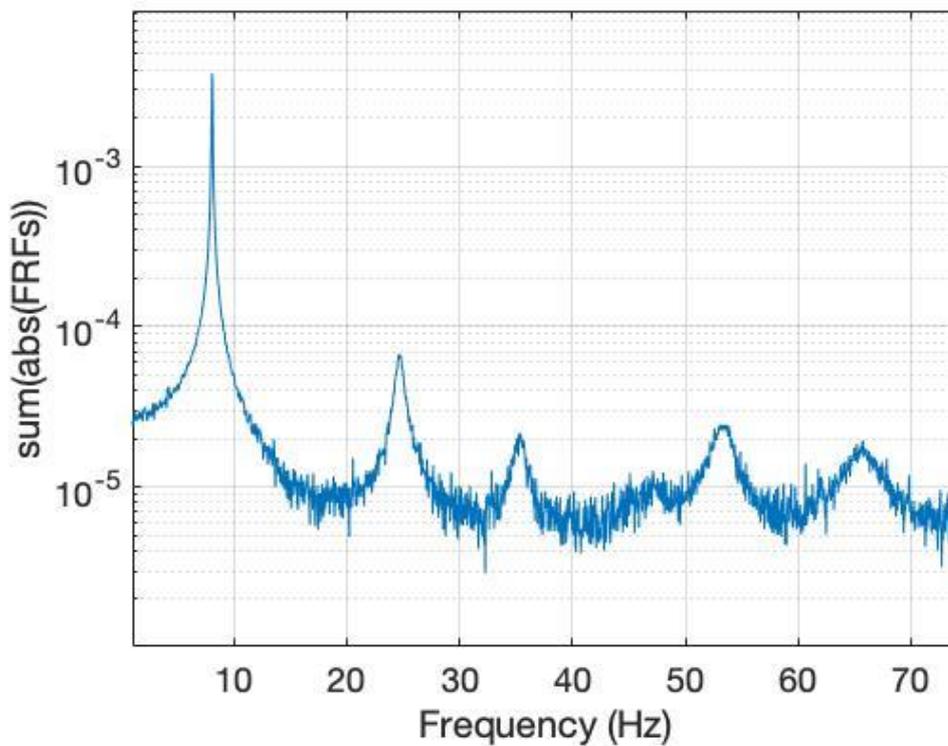


Figura 28 Rappresentazione della somma dei moduli delle FRF-Rumore al 20%

Si esegue l'algoritmo *LIPEZ* con le stesse condizioni del caso precedente:

- Intervallo di frequenze compreso tra 5 e 70 Hz.

- Ordine minimo del sistema vibrante  $n_{min} = 5$ .
- Ordine minimo del sistema vibrante  $n_{max} = 50$

Si ottengono i diagrammi di stabilizzazioni illustrati nelle immagini seguenti, con  $n = 211$  modi estratti. Come è possibile osservare soprattutto in Figura 29, sembra che vengano estratti due file di modi in meno rispetto al caso precedente. Le due file di modi non estratti sono quelle la cui ampiezza corrispondente della somma delle FRF risulta limitata, e, di conseguenza, l'aumento del rumore in uscita nasconde i picchi relativi a quei modi.

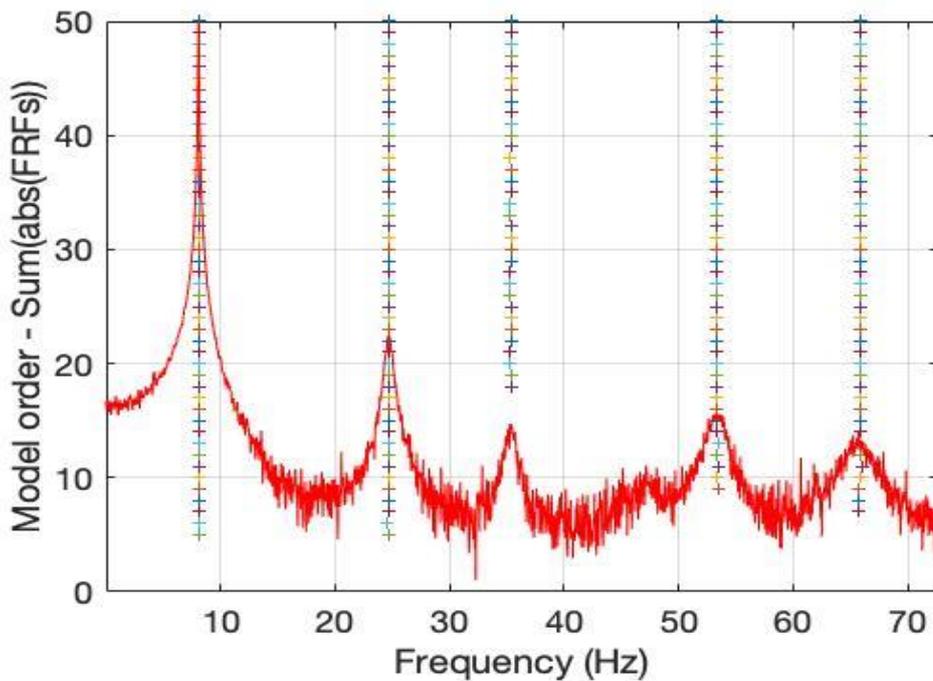


Figura 29 Diagramma di stabilizzazione frequenza-ordini - Rumore al 20%

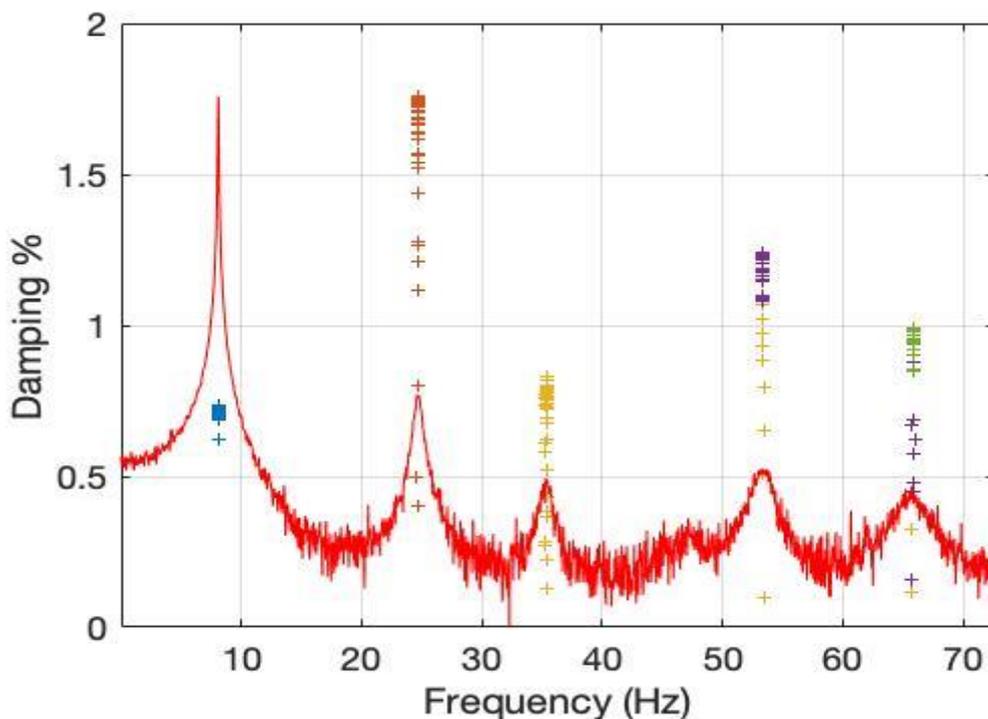


Figura 30 Diagramma di stabilizzazione frequenza-smorzamenti - Rumore al 20%

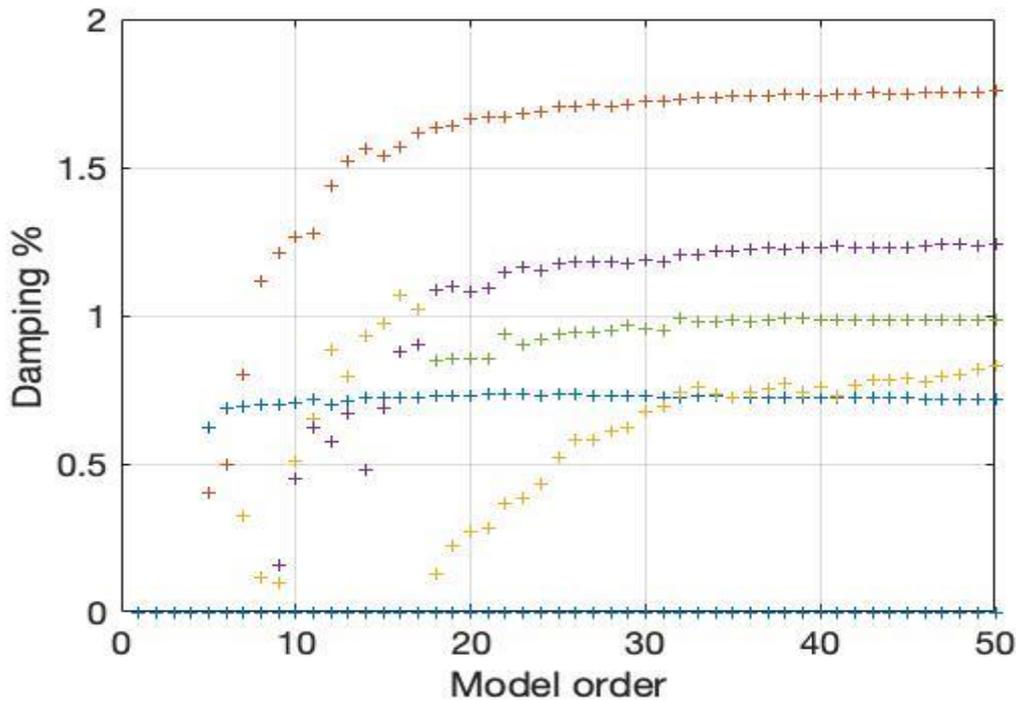


Figura 31 Diagramma di stabilizzazione ordini-smorzamenti - Rumore al 20%

Si esegue ora l'algoritmo di selezione automatizzata dei parametri modali, di cui si riportano i tratti e i risultati salienti.

Applicando i *SVC* si ottengono  $m = 22155$  vettori  $p_{ij}$  che sono poi sottoposti all'esecuzione del primo 2-means clustering. Questo passaggio, dopo  $iter = 4$  iterazioni, porta ai seguenti risultati:

- $n_1 = 4405$  vettori fisici
- $n_2 = 17750$  vettori spuri

Si riportano, anche in questo caso, alcune raffigurazioni di sottospazi relativi ai vettori  $p_{ij}$ , con l'illustrazione della divisione dei vettori in fisici e spuri e con l'indicazione spaziale dei centroidi finali del processo di clustering.

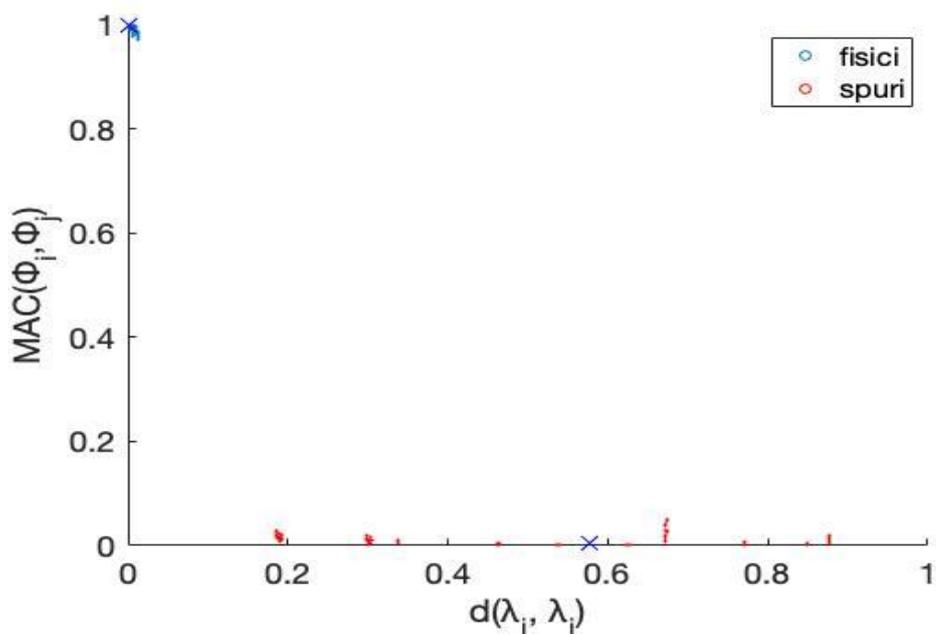


Figura 32 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS4 - Rumore al 20%

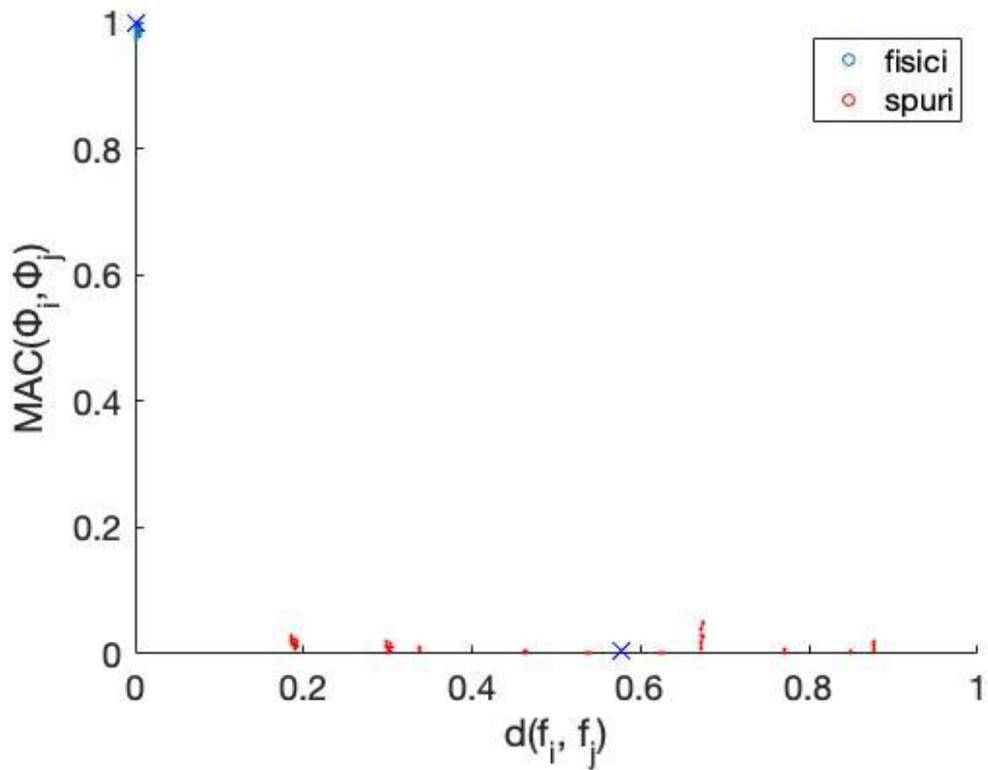


Figura 33 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS4 – Rumore al 20%

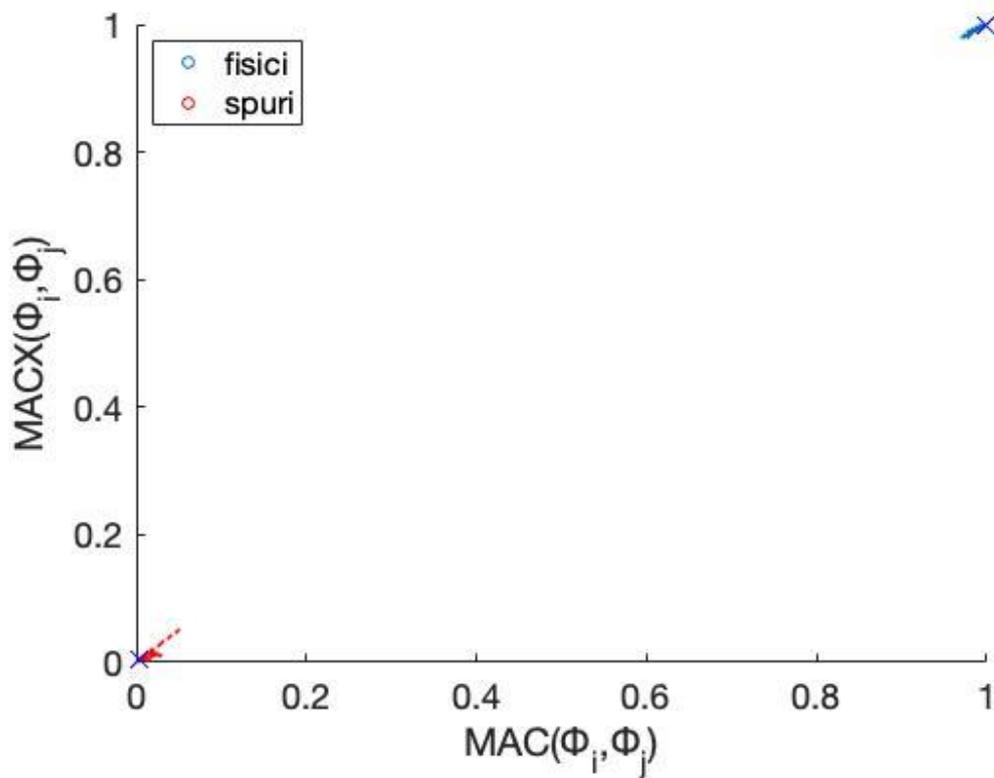


Figura 34 Rappresentazione del sottospazio VS4-VS7 – Rumore al 20%

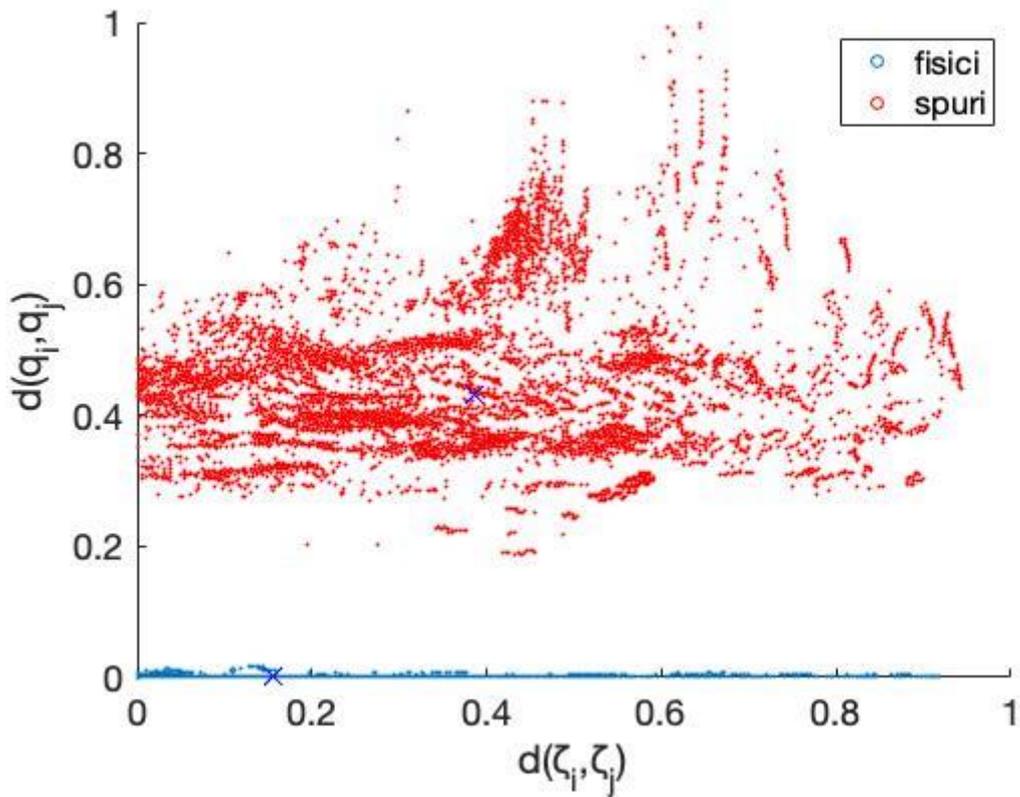


Figura 35 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS7 – Rumore al 20%

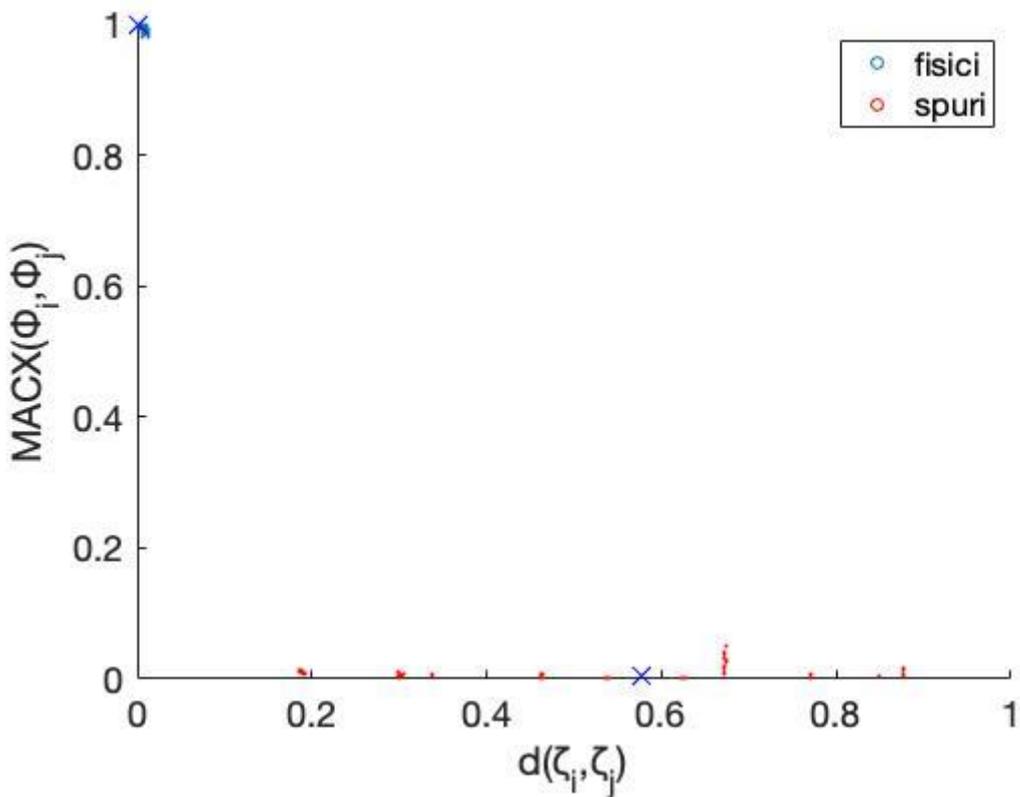


Figura 36 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS7 – Rumore al 20%

Anche in questo caso, per motivi analoghi al caso precedente, nessun modo viene eliminato nel passaggio del 2-means clustering.

Si applicano poi gli *HVC*, a valle dei quali il diagramma di stabilizzazione si presenta come illustrato nella rappresentazione seguente.

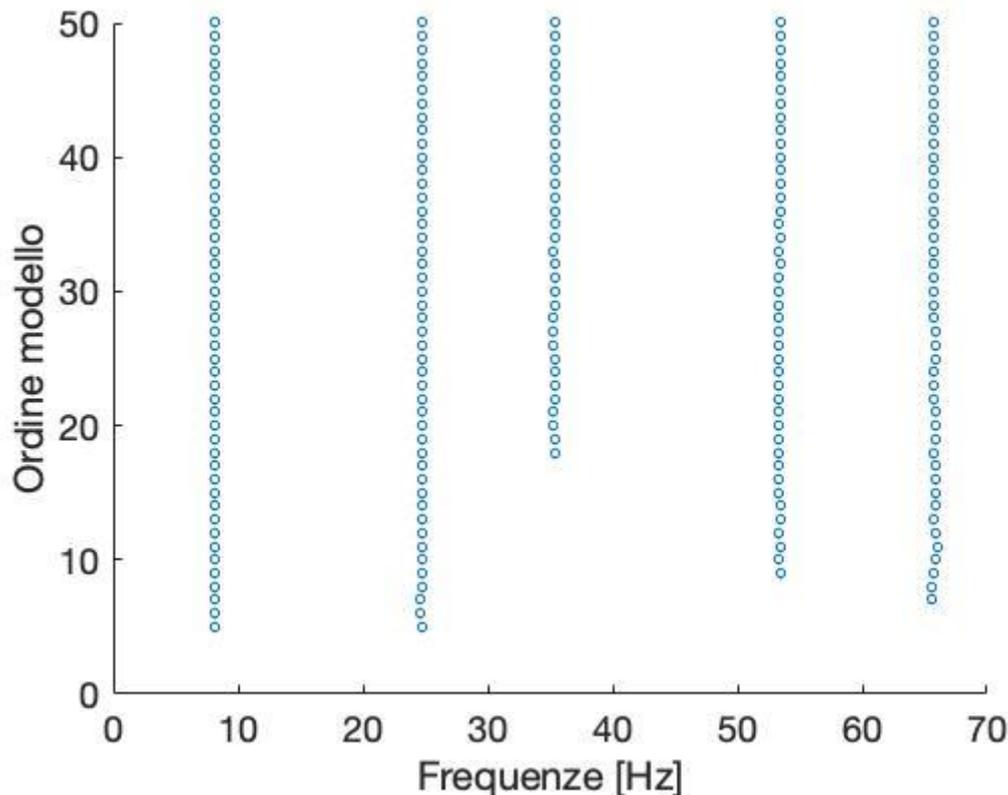


Figura 37 Diagramma di stabilizzazione dopo HVC – Rumore al 20%

Il passaggio successivo è l'esecuzione dell'agglomerative hierarchical clustering ( $n = 204$  iterazioni), al termine del quale l'algoritmo riconosce  $n_{clu} = 8$  raggruppamenti di modi distinti, riportati in Tabella 13 e Tabella 14. Infine, la seconda esecuzione del 2-means, con l'aggiunta di  $n_{empty} = 8$  set vuoti, porta all'eliminazione dei clusters poco popolati e consegna, come risultato finale,  $n_{clu\_fin} = 5$  raggruppamenti di modi (Tabella 15 e Tabella 16).

L'ultimo passaggio è la scelta, per ogni cluster, del modo caratterizzante del sistema: analogamente a prima, si sceglie il modo il cui valore del fattore di smorzamento sia più vicino al valore mediano del relativo cluster (Tabella 17).

Come ultimo passaggio, si confrontano le soluzioni estratte e selezionate con le corrispondenti soluzioni teoriche espresse in Tabella 18. Il confronto, analogamente al caso precedente, si basa sul paragone delle forme modali attraverso:

- La matrice *MAC*
- La matrice *MACX*

I risultati relativi all'applicazione di questo confronto possono essere visualizzati in Tabella 19 (*MAC*) e Tabella 20 (*MACX*).

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7	Cluster 8
8,0981	24,7637	24,5883	24,6766	65,6138	53,3992	53,3370	35,3626
8,0977	/	/	24,7544	65,6187	/	53,4446	35,3627
8,0981	/	/	24,7183	65,6835	/	53,4140	35,3163
8,0971	/	/	24,7285	65,8969	/	53,3796	35,2968
8,0967	/	/	24,7044	65,8611	/	53,3917	35,3361
8,0966	/	/	24,7102	65,8123	/	53,3419	35,3706
8,0963	/	/	24,7191	65,7623	/	53,3623	35,3655
8,0967	/	/	24,7190	65,8259	/	53,3578	35,3336
8,0962	/	/	24,7144	66,0308	/	53,3759	35,3224
8,0962	/	/	24,7199	65,8398	/	53,3691	35,3181
8,0961	/	/	24,7133	65,8589	/	53,3710	35,3167
8,0960	/	/	24,7119	65,8043	/	53,3604	35,3297
8,0958	/	/	24,7131	65,8364	/	53,3848	35,3461
8,0959	/	/	24,7143	65,8217	/	53,3763	35,3414
8,0959	/	/	24,7152	65,8283	/	53,3768	35,3304
8,0961	/	/	24,7124	65,8024	/	53,3743	35,3255
8,0962	/	/	24,7127	65,8083	/	53,3672	35,3302
8,0963	/	/	24,7117	65,8086	/	53,3689	35,3321
8,0964	/	/	24,7110	65,8015	/	53,3720	35,3280
8,0967	/	/	24,7124	65,8142	/	53,3795	35,3298
8,0967	/	/	24,7124	65,7969	/	53,3798	35,3360
8,0969	/	/	24,7126	65,7994	/	53,3771	35,3348
8,0970	/	/	24,7116	65,7898	/	53,3890	35,3383
8,0956	/	/	24,7115	65,7911	/	53,3843	35,3217
8,0956	/	/	24,7113	65,7911	/	53,3885	35,3351
8,0956	/	/	24,7117	65,7989	/	53,3876	35,3344
8,0954	/	/	24,7125	65,7948	/	53,3855	35,3363
8,0954	/	/	24,7120	65,7944	/	53,3873	35,3373
8,0955	/	/	24,7117	65,7939	/	53,3877	35,3387
8,0955	/	/	24,7114	65,7940	/	53,3902	35,3393
8,0956	/	/	24,7117	65,7907	/	53,3884	35,3400
8,0957	/	/	24,7116	65,7909	/	53,3894	35,3422
8,0952	/	/	24,7115	65,7902	/	53,3902	35,3340
8,0952	/	/	24,7110	65,7898	/	53,3892	/
8,0952	/	/	24,7110	65,7917	/	53,3905	/
8,0952	/	/	24,7110	65,7915	/	53,3905	/
8,0952	/	/	24,7111	65,7910	/	53,3894	/
8,0953	/	/	24,7112	65,7932	/	53,3895	/
8,0952	/	/	24,7113	65,7936	/	53,3909	/
8,0952	/	/	24,7117	65,7941	/	53,3913	/
8,0951	/	/	24,7111	65,7938	/	53,3899	/
8,0972	/	/	24,7111	65,7942	/	/	/
8,0973	/	/	24,7113	65,7857	/	/	/
8,0972	/	/	24,7111	65,7887	/	/	/
8,0973	/	/	/	/	/	/	/
8,0976	/	/	/	/	/	/	/

Tabella 13 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: frequenze - Rumore al 20%

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7	Cluster 8
0,6210	0,4013	0,4997	0,7991	0,3256	0,1003	0,5102	0,1282
0,6898	/	/	1,1188	0,1164	/	0,6527	0,2248
0,6956	/	/	1,2136	0,1549	/	0,7926	0,2725
0,6982	/	/	1,2645	0,4489	/	0,8838	0,2815
0,6991	/	/	1,2765	0,4786	/	0,9289	0,3660
0,7053	/	/	1,4357	0,5717	/	0,9717	0,3836
0,6967	/	/	1,5233	0,6690	/	1,0179	0,4319
0,7165	/	/	1,5403	0,6889	/	1,0709	0,5197
0,7114	/	/	1,5625	0,6201	/	1,0850	0,5827
0,7210	/	/	1,5707	0,8787	/	1,0795	0,5811
0,7224	/	/	1,6157	0,9029	/	1,0922	0,6078
0,7210	/	/	1,6360	0,8512	/	1,1009	0,6212
0,7249	/	/	1,6416	0,8527	/	1,1433	0,6733
0,7242	/	/	1,6634	0,8513	/	1,1660	0,6934
0,7254	/	/	1,6698	0,8540	/	1,1542	0,7431
0,7243	/	/	1,6691	0,9352	/	1,1786	0,7333
0,7223	/	/	1,6817	0,9423	/	1,1809	0,7393
0,7226	/	/	1,6855	0,9431	/	1,1789	0,7285
0,7237	/	/	1,7028	0,9472	/	1,1818	0,7685
0,7253	/	/	1,7083	0,9361	/	1,1766	0,7598
0,7212	/	/	1,7073	0,8999	/	1,1825	0,7229
0,7216	/	/	1,7109	0,9195	/	1,1891	0,7405
0,7216	/	/	1,7101	0,9651	/	1,2047	0,7544
0,7254	/	/	1,7216	0,9582	/	1,2083	0,7588
0,7310	/	/	1,7241	0,9487	/	1,2181	0,7631
0,7296	/	/	1,7287	0,9897	/	1,2215	0,7758
0,7276	/	/	1,7322	0,9821	/	1,2173	0,7802
0,7276	/	/	1,7348	0,9816	/	1,2271	0,7853
0,7254	/	/	1,7383	0,9842	/	1,2272	0,7863
0,7261	/	/	1,7384	0,9845	/	1,2254	0,7918
0,7275	/	/	1,7398	0,9839	/	1,2314	0,8000
0,7286	/	/	1,7442	0,9836	/	1,2318	0,8159
0,7329	/	/	1,7451	0,9845	/	1,2334	0,8287
0,7326	/	/	1,7446	0,9843	/	1,2279	/
0,7317	/	/	1,7429	0,9831	/	1,2294	/
0,7344	/	/	1,7482	0,9846	/	1,2310	/
0,7299	/	/	1,7502	0,9863	/	1,2378	/
0,7305	/	/	1,7497	0,9862	/	1,2379	/
0,7291	/	/	1,7494	0,9858	/	1,2414	/
0,7370	/	/	1,7520	0,9880	/	1,2425	/
0,7372	/	/	1,7528	0,9892	/	1,2430	/
0,7194	/	/	1,7539	0,9938	/	/	/
0,7153	/	/	1,7551	0,9783	/	/	/
0,7147	/	/	1,7587	0,9831	/	/	/
0,7153	/	/	/	/	/	/	/
0,7143	/	/	/	/	/	/	/

Tabella 14 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: fattori di smorzamento - Rumore al 20%

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5
8,0981	24,6766	65,6138	53,3370	35,3626
8,0977	24,7544	65,6187	53,4446	35,3627
8,0981	24,7183	65,6835	53,4140	35,3163
8,0971	24,7285	65,8969	53,3796	35,2968
8,0967	24,7044	65,8611	53,3917	35,3361
8,0966	24,7102	65,8123	53,3419	35,3706
8,0963	24,7191	65,7623	53,3623	35,3655
8,0967	24,7190	65,8259	53,3578	35,3336
8,0962	24,7144	66,0308	53,3759	35,3224
8,0962	24,7199	65,8398	53,3691	35,3181
8,0961	24,7133	65,8589	53,3710	35,3167
8,0960	24,7119	65,8043	53,3604	35,3297
8,0958	24,7131	65,8364	53,3848	35,3461
8,0959	24,7143	65,8217	53,3763	35,3414
8,0959	24,7152	65,8283	53,3768	35,3304
8,0961	24,7124	65,8024	53,3743	35,3255
8,0962	24,7127	65,8083	53,3672	35,3302
8,0963	24,7117	65,8086	53,3689	35,3321
8,0964	24,7110	65,8015	53,3720	35,3280
8,0967	24,7124	65,8142	53,3795	35,3298
8,0967	24,7124	65,7969	53,3798	35,3360
8,0969	24,7126	65,7994	53,3771	35,3348
8,0970	24,7116	65,7898	53,3890	35,3383
8,0956	24,7115	65,7911	53,3843	35,3217
8,0956	24,7113	65,7911	53,3885	35,3351
8,0956	24,7117	65,7989	53,3876	35,3344
8,0954	24,7125	65,7948	53,3855	35,3363
8,0954	24,7120	65,7944	53,3873	35,3373
8,0955	24,7117	65,7939	53,3877	35,3387
8,0955	24,7114	65,7940	53,3902	35,3393
8,0956	24,7117	65,7907	53,3884	35,3400
8,0957	24,7116	65,7909	53,3894	35,3422
8,0952	24,7115	65,7902	53,3902	35,3340
8,0952	24,7110	65,7898	53,3892	/
8,0952	24,7110	65,7917	53,3905	/
8,0952	24,7110	65,7915	53,3905	/
8,0952	24,7111	65,7910	53,3894	/
8,0953	24,7112	65,7932	53,3895	/
8,0952	24,7113	65,7936	53,3909	/
8,0952	24,7117	65,7941	53,3913	/
8,0951	24,7111	65,7938	53,3899	/
8,0972	24,7111	65,7942	/	/
8,0973	24,7113	65,7857	/	/
8,0972	24,7111	65,7887	/	/
8,0973	/	/	/	/
8,0976	/	/	/	/

Tabella 15 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: frequenze – Rumore al 20%

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5
0,6210	0,7991	0,3256	0,5102	0,1282
0,6898	1,1188	0,1164	0,6527	0,2248
0,6956	1,2136	0,1549	0,7926	0,2725
0,6982	1,2645	0,4489	0,8838	0,2815
0,6991	1,2765	0,4786	0,9289	0,3660
0,7053	1,4357	0,5717	0,9717	0,3836
0,6967	1,5233	0,6690	1,0179	0,4319
0,7165	1,5403	0,6889	1,0709	0,5197
0,7114	1,5625	0,6201	1,0850	0,5827
0,7210	1,5707	0,8787	1,0795	0,5811
0,7224	1,6157	0,9029	1,0922	0,6078
0,7210	1,6360	0,8512	1,1009	0,6212
0,7249	1,6416	0,8527	1,1433	0,6733
0,7242	1,6634	0,8513	1,1660	0,6934
0,7254	1,6698	0,8540	1,1542	0,7431
0,7243	1,6691	0,9352	1,1786	0,7333
0,7223	1,6817	0,9423	1,1809	0,7393
0,7226	1,6855	0,9431	1,1789	0,7285
0,7237	1,7028	0,9472	1,1818	0,7685
0,7253	1,7083	0,9361	1,1766	0,7598
0,7212	1,7073	0,8999	1,1825	0,7229
0,7216	1,7109	0,9195	1,1891	0,7405
0,7216	1,7101	0,9651	1,2047	0,7544
0,7254	1,7216	0,9582	1,2083	0,7588
0,7310	1,7241	0,9487	1,2181	0,7631
0,7296	1,7287	0,9897	1,2215	0,7758
0,7276	1,7322	0,9821	1,2173	0,7802
0,7276	1,7348	0,9816	1,2271	0,7853
0,7254	1,7383	0,9842	1,2272	0,7863
0,7261	1,7384	0,9845	1,2254	0,7918
0,7275	1,7398	0,9839	1,2314	0,8000
0,7286	1,7442	0,9836	1,2318	0,8159
0,7329	1,7451	0,9845	1,2334	0,8287
0,7326	1,7446	0,9843	1,2279	/
0,7317	1,7429	0,9831	1,2294	/
0,7344	1,7482	0,9846	1,2310	/
0,7299	1,7502	0,9863	1,2378	/
0,7305	1,7497	0,9862	1,2379	/
0,7291	1,7494	0,9858	1,2414	/
0,7370	1,7520	0,9880	1,2425	/
0,7372	1,7528	0,9892	1,2430	/
0,7194	1,7539	0,9938	/	/
0,7153	1,7551	0,9783	/	/
0,7147	1,7587	0,9831	/	/
0,7153	/	/	/	/
0,7143	/	/	/	/

Tabella 16 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: fattori di smorzamento – Rumore al 20%

Ordine	Ordine	Ordine	Ordine	Ordine
41	29	28	26	27
Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]
8,0964	24,7116	35,3167	53,3672	65,8086
F.smorz. [%]	F.smorz. [%]	F.smorz. [%]	F.smorz. [%]	F.smorz. [%]
0,7237	1,7101	0,6078	1,1809	0,9431
Forma modale	Forma modale	Forma modale	Forma modale	Forma modale
0,5086-0,0129i 0,9789-0,0231i 1 1,1593-0,016i 1,1357-0,0245i 1,2408-0,0198i 1,3436-0,0319i	0,8365-0,06i 1,3731-0,0219i 1 0,7524-0,0379i 0,4077+0,0175i -0,4787+0,0277i -3,3294+0,0423i	3,2927-1,0067i 4,8909-0,7642i 1 -4,1624+0,4136i -1,3418-0,2013i -5,228+0,9043i 3,2949-1,0153i	-0,4902+0,0269i -0,7107-0,1414i 1 -0,5194-0,049i 1,4427+0,1355i -0,5596-0,1686i -0,084-0,0257i	-0,2804-0,0042i -0,1204-0,0469i 1 -0,1368-0,0374i -0,8934-0,0045i 0,2301-0,0685i 0,0157-0,0196i

Tabella 17 Modi selezionati - Rumore al 20%

Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]	Frequenza [Hz]
8,0926	24,7039	35,3169	53,4597	65,9942
F.smorz. [%]	F.smorz. [%]	F.smorz. [%]	F.smorz. [%]	F.smorz. [%]
0,2199	1,4381	1,4346	1,6147	1,9721
Forma modale	Forma modale	Forma modale	Forma modale	Forma modale
0,5128-0,0006i 0,9844+0,0002i 1 1,1644-0,0006i 1,1441 1,2519-0,0008i 1,3562-0,002i	0,7977+0,0039i 1,3355+0,0038i 1 0,7532+0,0075i 0,4227-0,0214i -0,3743-0,0075i -2,984+0,0012i	2,2427-0,0263i 3,0865-0,1198i 1 -2,5286+0,106i -0,4809+0,0108i -3,0708+0,0159i 2,2769-0,0218i	-0,463+0,0208i -0,6792+0,0065i 1 -0,4436+0,0249i 1,3785-0,0568i -0,5198+0,0182i -0,0331-0,0184i	-0,2626+0,0099i -0,1024-0,0039i 1 -0,1128+0,0086i -0,8201-0,0298i 0,2128+0,0053i 0,0222+0,0097i

Tabella 18 Modi teorici - Rumore al 20%

/	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Modo 1	<b>99,9937</b>	0,1559	0,2904	0,6459	0,0045
Modo 2	0,7572	<b>99,7348</b>	0,2093	0,1100	0,0166
Modo 3	0,3112	0,2409	<b>98,2236</b>	0,3814	0,2268
Modo 4	0,4127	0,1919	0,0161	<b>98,9493</b>	0,1105
Modo 5	0,3779	0,0028	0,0312	0,0989	<b>99,2448</b>

Tabella 19 Matrice MAC di confronto tra f.modali estratte (colonne) e teoriche (righe) - Rumore al 20%

/	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Modo 1	<b>99,9992</b>	0,1550	0,2897	0,6432	0,0035
Modo 2	0,7575	<b>99,7807</b>	0,2107	0,1283	0,0126
Modo 3	0,3141	0,2533	<b>99,0761</b>	0,4002	0,2446
Modo 4	0,4140	0,1971	0,0259	<b>99,7895</b>	0,2550
Modo 5	0,3797	0,0009	0,0313	0,1753	<b>99,7977</b>

Tabella 20 Matrice MACX di confronto tra f.modali estratte (colonne) e teoriche (righe) - Rumore al 20%

## 7. Applicazione dell' algoritmo a un sistema reale

Verificato il funzionamento dell' algoritmo su un modello ideale, si è scelto di procedere all' applicazione del metodo implementato a un sistema reale, da cui estrarre e selezionare i parametri modali.

Questo capitolo farà riferimento all' esperienza di laboratorio descritta da [3], in cui il fulcro consiste nella modellazione di una portiera effettuata a partire dagli stampi di un' automobile a marchio Ferrari, e la seguente esecuzione dell' algoritmo LIPEZ per l' estrazione dei parametri modali riferiti a essa. Il processo viene descritto nel dettaglio all' interno del documento originale, mentre in questa trattazione esso viene riportato solo in sintesi e ci si concentra sugli aspetti fondamentali relativi al diagramma di stabilizzazione che si ottiene.

I passaggi fondamentali descritti in [3] sono i seguenti:

- Scelta del materiale
- Controllo relativo alla produzione, incentrato principalmente all' orientazione delle fibre.
- Sviluppo di un modello FEM che rappresenti adeguatamente il sistema
- Estrazione dei parametri modali utilizzando il modello LIPEZ

Per quanto riguarda la scelta del materiale per la costruzione del modello, si utilizza la fibra di carbonio CFRP T300. La portiera è costituita da due singoli componenti in fibra di carbonio prodotti separatamente, che aderiscono tra loro lungo la superficie esterna. In alcune delle configurazioni realizzate, tra le due componenti in fibra di carbonio è inserito uno strato di materiale con coefficiente di smorzamento elevato, che in produzione permette di incrementare le potenzialità smorzanti della struttura e di migliorarne le qualità acustiche.

Per quanto riguarda l' orientazione delle fibre di carbonio all' interno della struttura della portiera, essa è tale da rendere il materiale ortotropo: di conseguenza le proprietà meccaniche e termiche della struttura possono essere considerate uniche e indipendenti nelle tre direzioni reciprocamente perpendicolari.

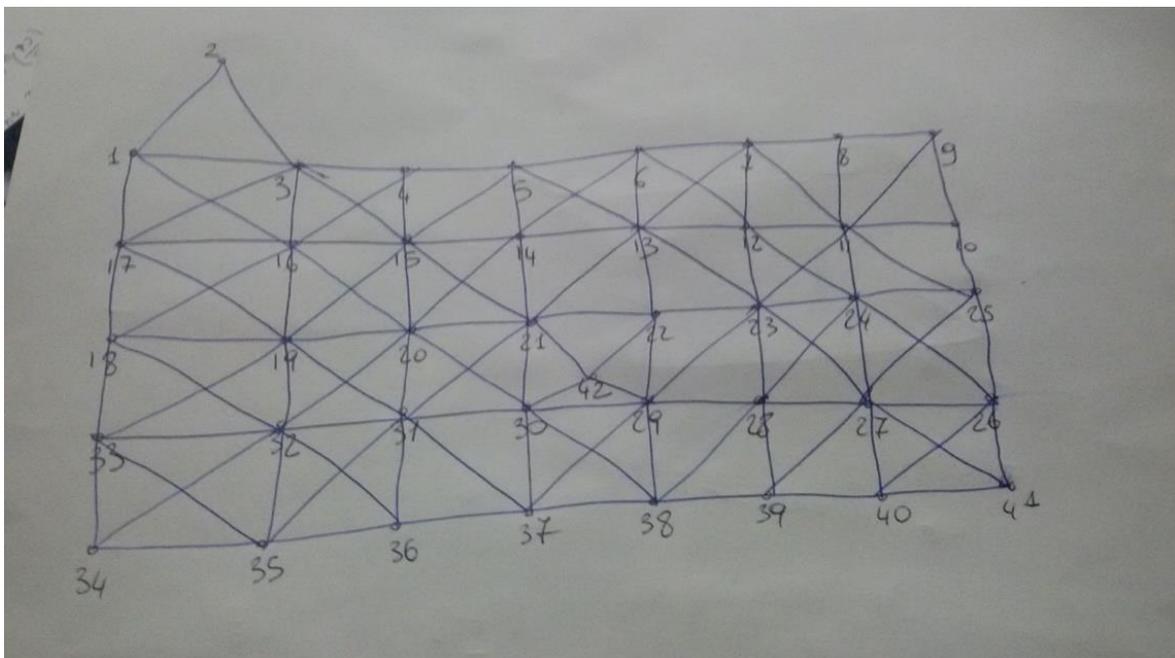


Figura 38 Rappresentazione sommaria del modello FEM costruito. Fonte [3]

È opportuno fare alcune considerazioni sulle modalità di estrazione dei parametri modali, tramite l' algoritmo LIPEZ, implementate sulla struttura. In primo luogo, si vuole precisare il modo in cui le parti del sistema vengono denominate:

- La parte interna della portiera è chiamata *body*;
- La parte esterna è denominata *frame*;
- L'insieme di frame e body dà luogo alla portiera nella sua forma complessiva, che viene per l'appunto chiamata *door*.

I componenti analizzati possono presentare più di una singola configurazione, in particolare si possono impostare:

- 2 setup differenti per il body
- 2 setup per il frame
- 4 setup differenti per la door, ovvero la portiera completa.

Si riporta in Figura 39 una raffigurazione completa della portiera in laboratorio. Sono presenti degli adesivi sul telaio il cui significato sarà chiarito nella trattazione appena successiva.

Per quanto riguarda la sollecitazione applicata alla struttura, anche in questo caso essa è caratterizzata da andamento casuale, su due differenti livelli di intensità:

- Livello 1: intensità contenuta
- Livello 2: intensità alta.



Figura 39 Rappresentazione della portiera con i punti di misurazione. Fonte [3]

Per quanto riguarda lo strato di materiale smorzante posto tra il body e il frame, la scelta di posizionarlo o meno dà luogo a due differenti configurazioni del sistema:

- Configurazione *undamped*: materiale smorzante non presente

- Configurazione *damped*: materiale smorzante presente

Si può passare ora alla definizione dei punti di misura in cui vengono inseriti gli accelerometri per chiarire il numero di canali in base ai quali sarà eseguita l'estrazione. L'accelerazione registrata è limitata alla componente perpendicolare al punto di misura. In Figura 40 è possibile osservare l'effettiva distribuzione dei punti di misura. In particolare si hanno:

- 20 punti effettivi di misura, alcuni contrassegnati da un simbolo quadrangolare, altri da un simbolo triangolare;
- 2 riferimenti, indicati con *REF*
- Una cella di carico dove è applicata la forza  $F$

L'estrazione di parametri modali può essere svolta, come evidenziato, su un certo numero di configurazioni, che possono distinguersi tra loro per la struttura del modello, per il livello di sollecitazione o per il setup impostato. In questo lavoro sarà scelta una di queste configurazioni e, partendo dai risultati ottenuti dal LIPEZ, sarà eseguito l'algoritmo di selezione dei parametri modali estratti.

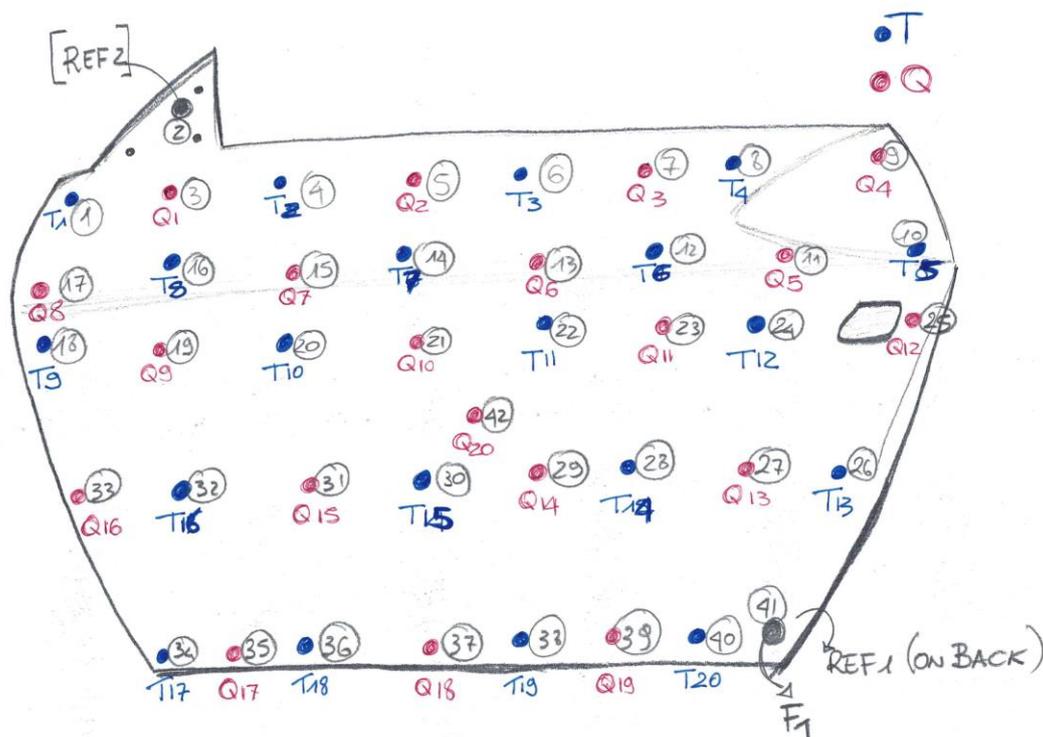


Figura 40 Rappresentazione schematica dei punti di misurazione, della cella di carico e dei riferimenti. Fonte [num]

In questo lavoro è stata effettuata la scelta di considerare nell'analisi la parte esterna della portiera, ovvero quella contenente il telaio del vetro, denominata *frame*. Le caratteristiche principali della configurazione in esame sono le seguenti:

- Setup 1;
- Livello di forza applicato:1
- Configurazione *damped*, è presente dunque lo strato di materiale smorzante
- Prima misurazione effettuata.

Facendo riferimento a questa configurazione, si esegue innanzitutto il file *FRF\_rec*, mediante il quale vengono ricostruite le funzioni di risposta in frequenza relative al sistema e alla sollecitazione applicata (Figura 41).

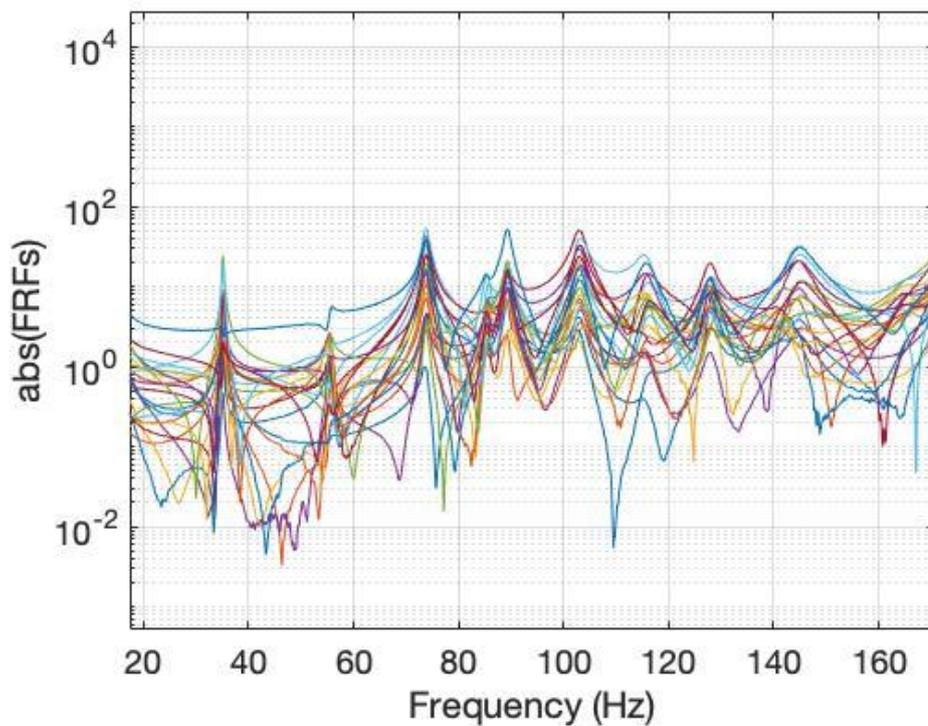


Figura 41 Rappresentazione delle FRF

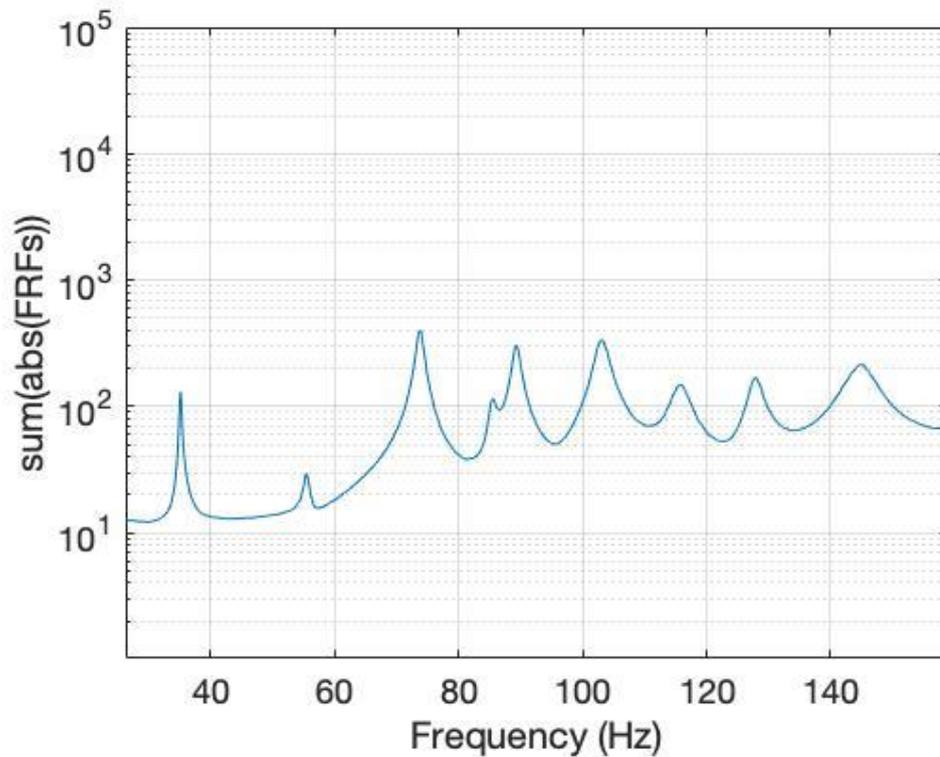


Figura 42 Rappresentazione della somma delle FRF

In Figura 42, invece, è riportata la somma di tutte le FRF per fornire un'idea generale sulla distribuzione dei picchi e sulla probabile localizzazione di modi effettivamente stabili.

Analogamente al modello ideale analizzato, viene eseguito il LIPEZ impostando l'ampiezza dell'intervallo di frequenze, l'ordine minimo  $n_{min}$  e l'ordine massimo  $n_{max}$ :

- Intervallo di frequenze compreso tra 20 e 160 Hz
- $n_{min} = 5$
- $n_{max} = 30$ .

Seguono ora delle rappresentazioni dei diagrammi di stabilizzazione in uscita dal LIPEZ.

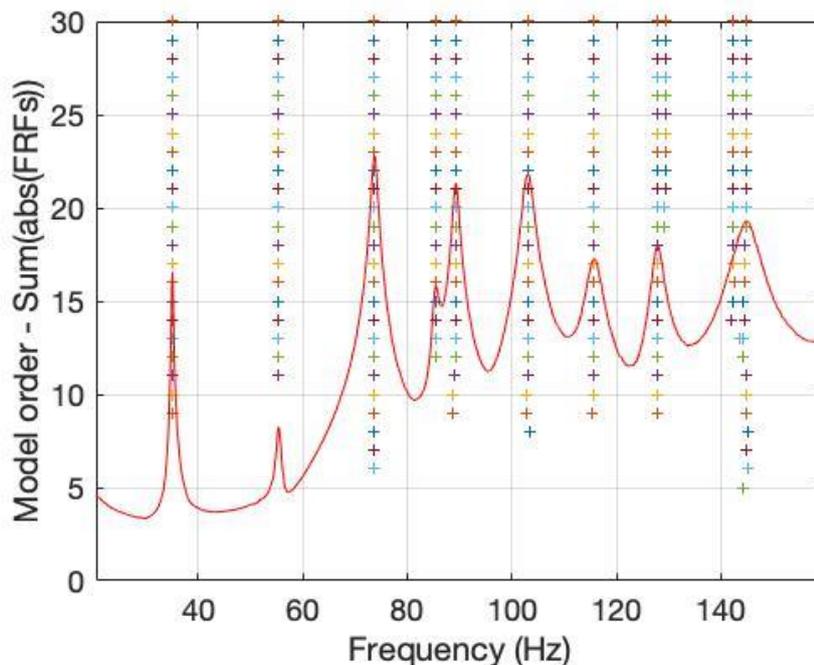


Figura 43 Diagramma di stabilizzazione frequenze-ordini

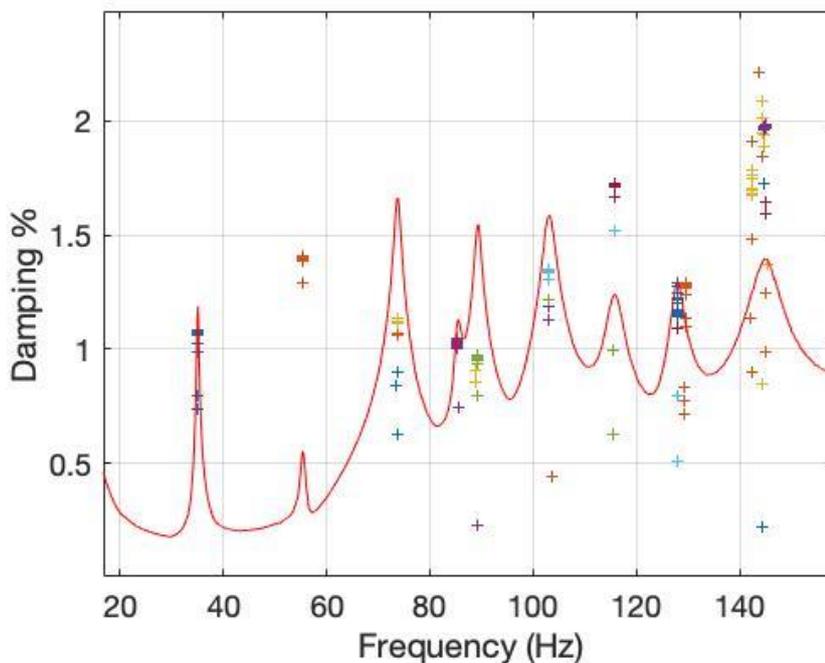


Figura 44 Diagramma di stabilizzazione frequenze-smorzamenti

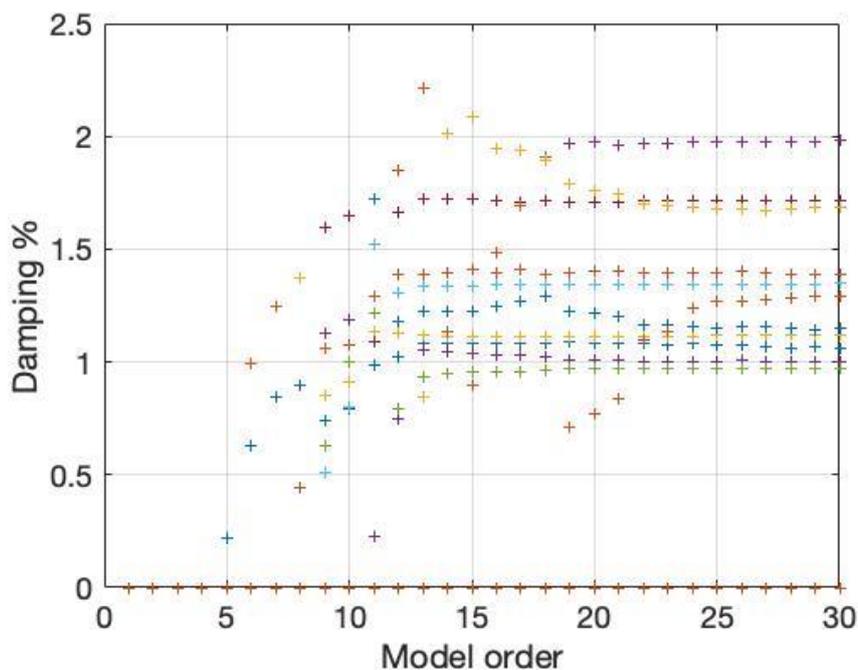


Figura 45 Diagramma di stabilizzazione ordini-smorzamenti

Una volta eseguito l'algoritmo LIPEZ, che estrae un numero  $n = 231$  modi, si passa all'applicazione dell'algoritmo implementato in questo lavoro per la selezione automatica delle soluzioni. Analogamente al capitolo precedente, anche in questo ci si soffermerà su ogni punto dell'algoritmo, mettendo in evidenza i risultati progressivamente raggiunti.

Ossevando la Figura 43, si evidenziano, in corrispondenza dei due picchi vicini rispettivamente ai 130 Hz e ai 145 Hz, due clusters di estrazioni visivamente stabili. È interessante, in tal senso, valutare il comportamento dell'algoritmo relativamente a questi raggruppamenti di modi. In teoria, ad ogni picco del grafico della somma delle FRF dovrebbe corrispondere la presenza di un modo stabile. Di conseguenza, uno dei due clusters relativi ad un singolo picco dovrebbe presumibilmente essere scartato. La trattazione seguente porrà l'accento anche sull'effettiva efficacia del modello nella selezione dei parametri per ogni picco.

### 7.1. Single-mode validation criteria: Soft Validation Criteria

Il primo passo è il calcolo relativo ai *SVC*. Come descritto nel capitolo precedente, i criteri applicati sono 7 e sono elencati di nuovo in ordine di applicazione:

- Differenze relative tra gli autovalori
- Differenze relative tra le frequenze naturali
- Differenze relative tra i fattori di smorzamento
- *MAC*
- Differenze relative tra *MPC*
- Differenze relative tra i Modal Scaling Factor
- *MACX*

Confrontando tra loro gli  $n$  modi estratti, vengono costruiti  $m = 26565$  vettori  $p_{ij}$ .

### 7.2. Primo 2-Means clustering

L'operazione successiva è l'esecuzione del primo 2-means clustering. Eseguendo il ciclo, questo si interrompe dopo  $iter = 14$  iterazioni, trovando un minimo relativo nella somma delle distanze tra i vettori  $\vec{p}_{ij}$  e i relativi centroidi  $p_{ck}$ .

All'interruzione del processo, gli  $n$  vettori di confronto sono ripartiti nei due insiemi caratteristici nel modo seguente:

- Un numero  $n_1 = 2450$  vettori classificati come fisicamente stabili
- Un numero  $n_2 = 24115$  vettori classificati come spuri

La forma finale dei centroidi è la seguente:

$$\vec{p}_{c1} = \begin{Bmatrix} 0,0026 \\ 0,0015 \\ 0,1048 \\ 0,9473 \\ 0,3248 \\ 0,0169 \\ 0,9591 \end{Bmatrix} \quad \vec{p}_{c2} = \begin{Bmatrix} 0,3571 \\ 0,3570 \\ 0,2637 \\ 0,0638 \\ 0,6879 \\ 0,3423 \\ 0,0684 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

A questo punto l'algoritmo cerca eventuali modi la cui totalità dei vettori  $p_{ij}$  viene classificata come spuria per eliminarli dal diagramma di stabilizzazione. Anche in questo caso, nessun modo viene classificato come totalmente spurio, dunque il diagramma di stabilizzazione rimane nella sua forma originaria.

Seguono ora le rappresentazioni grafiche di alcuni sottospazi relativi ai vettori  $p_{ij}$ , con l'illustrazione della divisione dei vettori in fisici e spuri e con l'indicazione spaziale dei centroidi finali del processo di clustering.

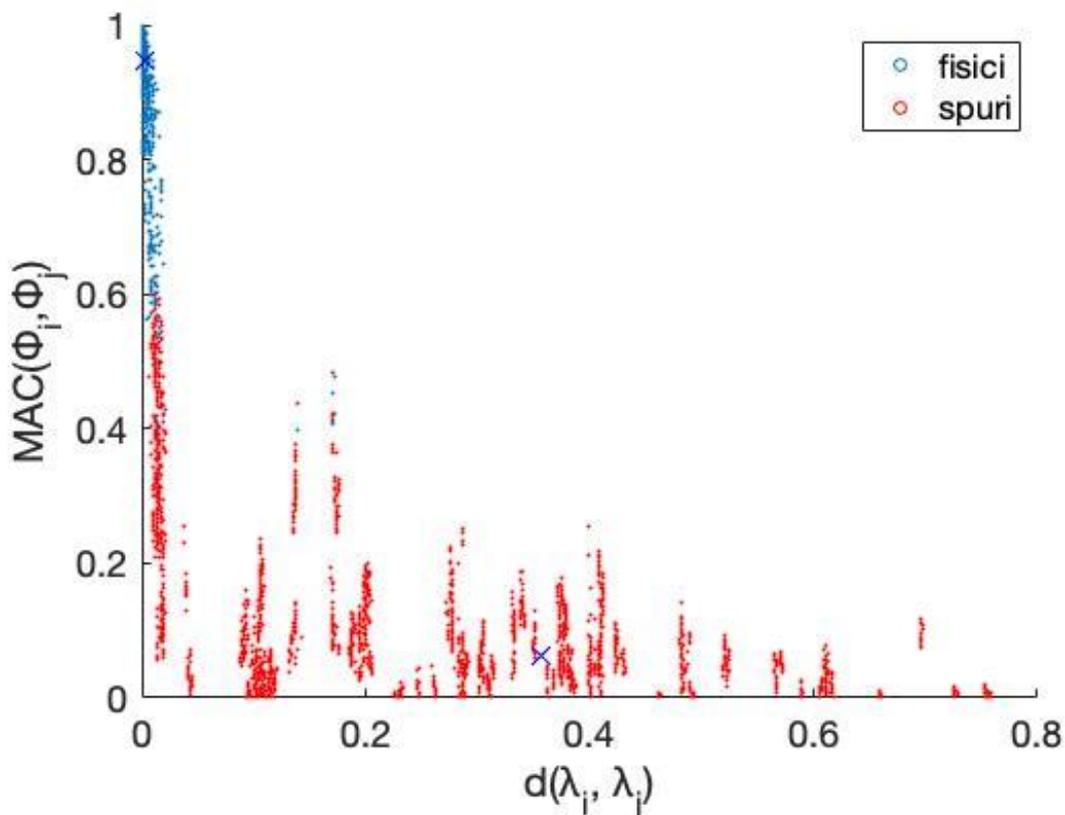


Figura 46 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS4

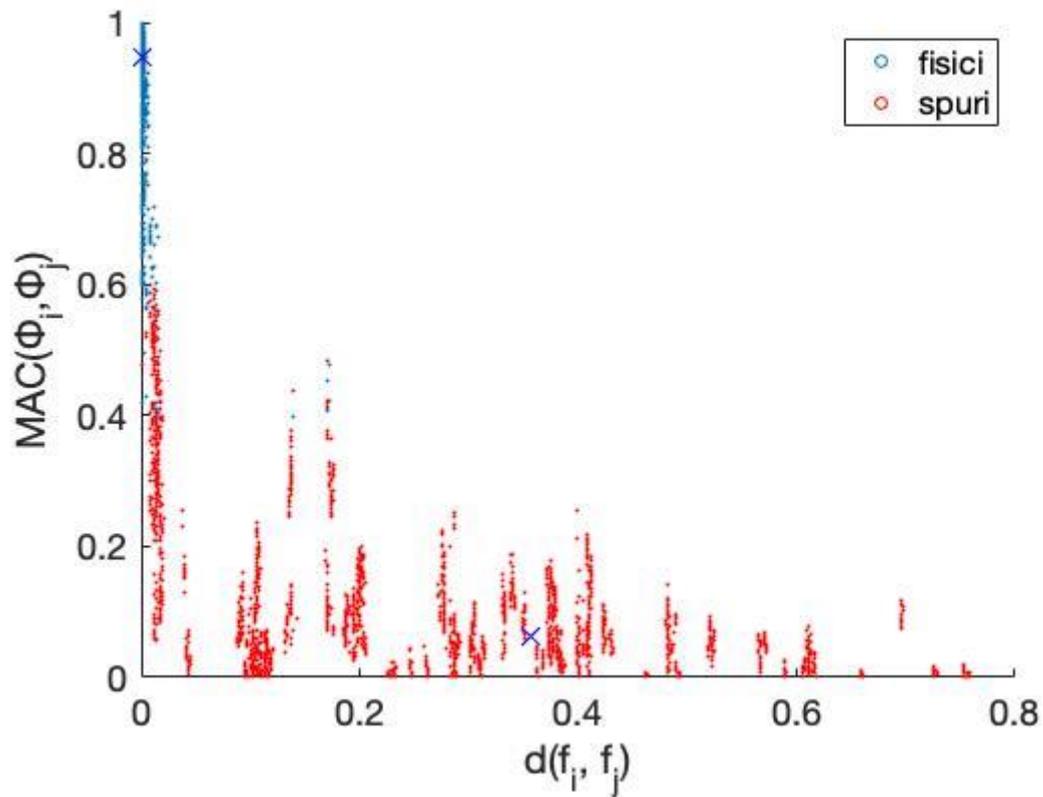


Figura 47 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS4

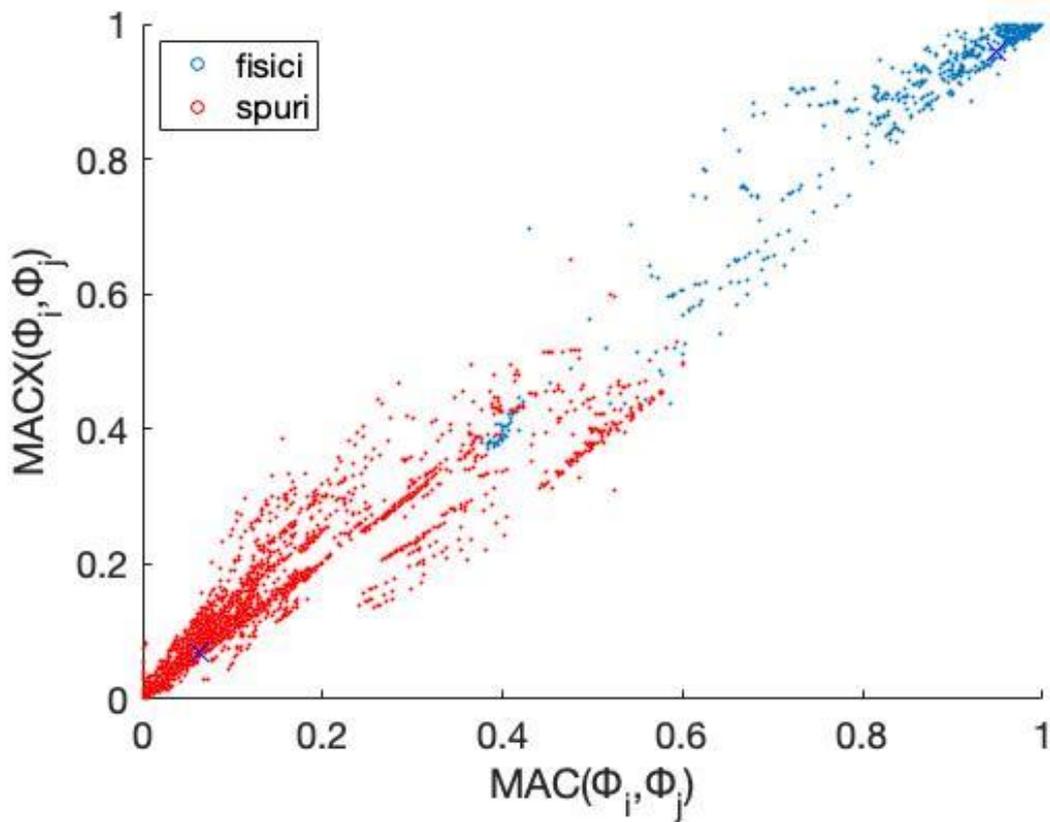


Figura 48 Rappresentazione del sottospazio VS4-VS7

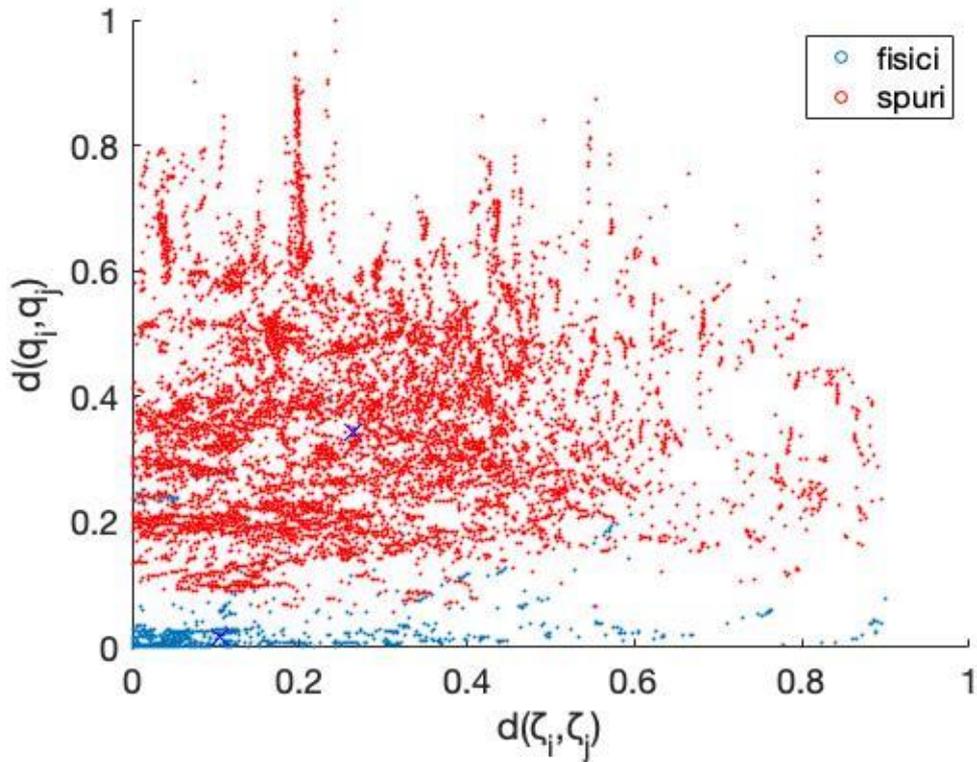


Figura 49 Rappresentazione del sottospazio VS1-VS7

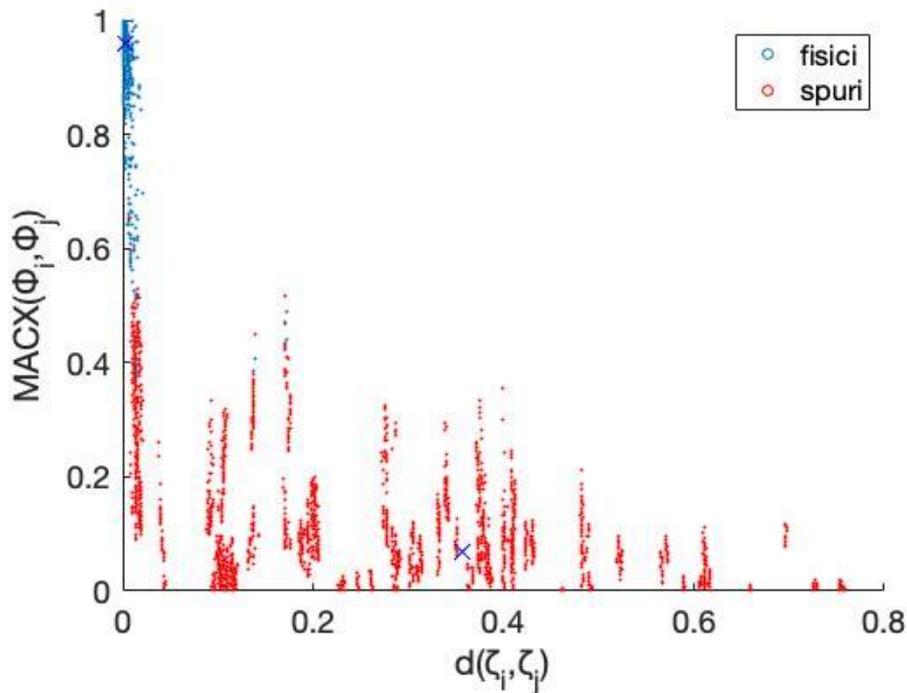


Figura 50 Rappresentazione del sottospazio VS2-VS7

### 7.3. Single-mode validation criteria: Hard Validation Criteria

Dopo il 2-means clustering, si passa all'applicazione degli *HVC* per eliminare le estrazioni che non rispettano i requisiti in termini di fattore di smorzamento, che sono:

- fattore di smorzamento  $\zeta_j$  positivo
- fattore di smorzamento  $\zeta_j$  minore del 20%

Il diagramma di stabilizzazione successivo alla applicazione degli *HVC* si presenta nella struttura illustrata in Figura 51.

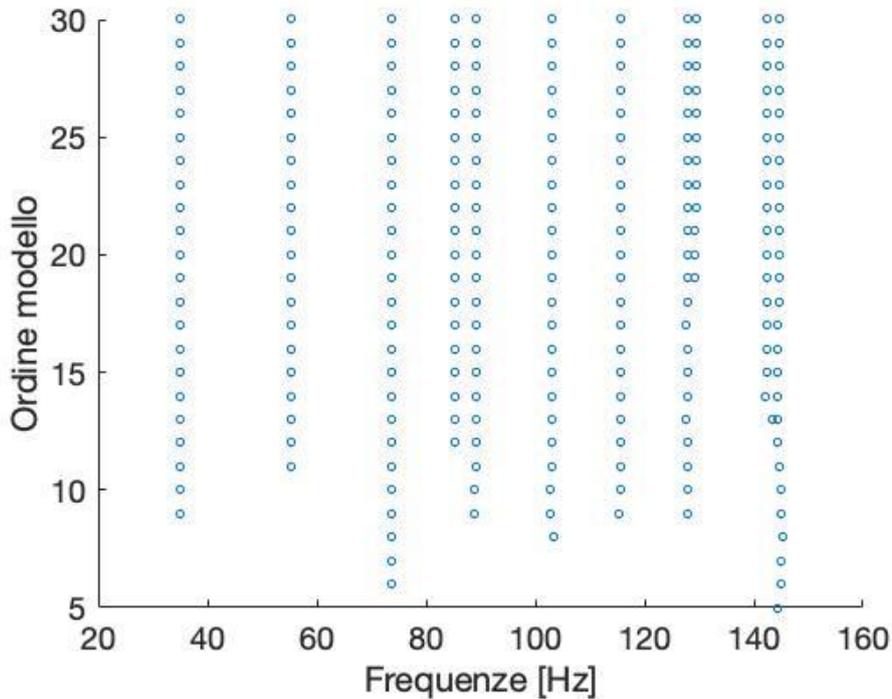


Figura 51 Diagramma di stabilizzazione successivo all'applicazione degli *HVC*

#### 7.4. Agglomerative hierarchical clustering

I modi che hanno superato i passaggi precedenti vengono ora raggruppati in clusters attraverso l'applicazione dell'Agglomerative hierarchical clustering. Si ricorda che il parametro di distanza utilizzato per paragonare i modi è quello indicato dalla relazione (55) e la soglia critica automatica è calcolata sfruttando la relazione (58):

$$d(i, j) = d(\lambda_{ci}, \lambda_{cj}) + 1 - MAC(\overline{\Phi}_i, \overline{\Phi}_j) \quad (55)$$

$$\tilde{d} = \mu_{p_1} + 2\sigma_{p_1} \quad (58)$$

L'algorithmo di clustering si interrompe dopo un numero di iterazioni  $n = 218$ . Il numero di raggruppamenti distinti di modi è  $n_{clu} = 13$ . Le frequenze naturali e i fattori di smorzamento relativi ai clusters individuati sono illustrati rispettivamente in Tabella 21 e Tabella 22 collocate a fine capitolo.

##### 7.4.1. Problematica relativa alla soglia critica

È opportuno fare delle considerazioni sulla soglia critica di interruzione dell'algorithmo di clustering e dunque sull'efficacia dello stesso. In questa trattazione è stata analizzata una precisa configurazione del modello, in termini di intervalli di frequenze e di ordini, applicata poi al sistema *frame* della portiera. Tuttavia, è importante sottolineare che il codice è stato testato non solo sul *frame*, ma anche sul *body* e soprattutto sulla portiera completa (*door*). Inoltre, per ognuno di questi tre sistemi, l'algorithmo è stato eseguito sia per la configurazione *damped* del modello, sia per la configurazione *undamped*.

Tornando all'applicazione dell'algorithmo al sistema *frame*, anche quest'ultima presenta una notevole variabilità, che ha la propria origine nel settaggio dei parametri iniziali del LIPEZ per l'estrazione dei parametri modali. Questa variabilità può essere riferita soprattutto ai due parametri seguenti:

- intervallo di frequenze utile in cui il LIPEZ estrae i parametri modali
- ordine minimo del modello  $n_{min}$
- ordine massimo del modello  $n_{max}$
- numero di linee spettrali nell'equazione

In base alla variazione di questi parametri, il diagramma di stabilizzazione in uscita dall'algoritmo di estrazione può presentarsi in diverse varianti: può variare il numero di modi estratti in corrispondenza di una determinata frequenza, o può anche annullarsi; si può ottenere un diagramma più o meno ordinato in termini di distribuzione di modi estratti. Questa variabilità di risultati si ripercuote ovviamente sull'algoritmo di selezione, a cui questa trattazione si riferisce.

Questa premessa è stata fatta per permettere di spiegare una problematica che è stata evidenziata durante le verifiche di funzionamento dell'algoritmo, variando i valori dei parametri suddetti. Questo problema si riferisce alla soglia critica che causa l'interruzione dell'agglomerative hierarchical clustering: in particolare, in alcune prove, l'algoritmo si ferma dopo un numero di iterazioni troppo elevato, raggruppando nel medesimo cluster anche modi molto distanti tra loro nel diagramma di stabilizzazione. Questo accade perché il valore soglia  $\tilde{d}$  risulta troppo alto rispetto alle distanze relative tra gli elementi che vengono raggruppati. Il valore anomalo di  $\tilde{d}$  ha la sua causa principale nel 2-means clustering svolto relativamente ai vettori  $\vec{p}_{ij}$ : in particolare, ad una crescita percentuale del numero di vettori  $\vec{p}_{ij}$  classificati come fisicamente stabili, corrisponde un maggiore scostamento dei valori del centroide fisico  $\vec{p}_{c1}$  da quelli ideali impostati inizialmente, secondo la (49). Questo scostamento si traduce nell'innalzamento, per i vettori stabili, del valore medio e della varianza del criterio VS1 (distanza relativa tra gli autovalori) e del VS4 (MAC). La conseguenza finale è un aumento eccessivo di  $\tilde{d}$ , con una alterazione dei risultati finali. In questi casi, il rimedio adottato è stato quello di modificare manualmente la soglia, scalandola progressivamente fino ad ottenere dei risultati più affidabili.

Il problema della soglia critica si è verificato solo relativamente al caso sperimentale, mentre nell'analisi del modello ideale, descritta nel Capitolo 6, questa criticità non è mai stata evidenziata. In questa trattazione, si è ritenuto opportuno presentare un caso nel quale il problema della soglia critica non si è verificato, sottolineando comunque la presenza di questa problematica nell'esecuzione del codice.

### 7.5. Secondo 2-means clustering

L'ultimo passaggio dell'algoritmo è la classificazione dei clusters ottenuti in fisici e spuri, attraverso l'applicazione del secondo 2-means clustering. Per l'esecuzione di questo modello, vengono aggiunti  $n_{empty} = 10$  set vuoti ai  $n_{clu}$  set ottenuti dal passaggio precedente.

Degli  $n_{clu}$  clusters in ingresso al 2-means clustering,  $n_{clu\_fin} = 11$  soddisfano la condizione di stabilità e accedono alla selezione finale dei modi caratteristici. In Tabella 23 e Tabella 24 si osservano i cluster che accedono all'ultimo passaggio.

### 7.6. Selezione dei modi caratteristici

La selezione del modo caratteristico per ogni cluster avviene sempre in base al criterio dello smorzamento mediano, ovvero si sceglie il modo il cui fattore di smorzamento si avvicina maggiormente al valore mediano di tutti i fattori di smorzamento dei modi appartenenti al cluster. I modi scelti relativamente al sistema analizzato sono riportati in Tabella 25. Analizzando i risultati ottenuti, si nota che nessuno dei due cluster intorno rispettivamente ai 130 Hz e ai 145 Hz è stato eliminato dal diagramma di stabilizzazione. Infatti, per ognuno di questi due picchi, sono stati selezionati due modi.

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7
144,2592	73,6442	103,5344	35,0546	88,8298	115,4728	127,8403
145,0322	73,5908	102,8759	35,0963	88,8369	115,5504	127,9006
144,9188	73,6895	102,8774	35,1046	89,2933	115,7517	127,8673
145,1903	73,7275	103,0051	35,1135	89,2869	115,6796	127,7496
144,9114	73,7352	103,0128	35,1119	89,3028	115,7072	127,7404
144,8748	73,7410	103,0222	35,1122	89,3057	115,7271	127,7626
144,7748	73,7464	103,0301	35,1114	89,3095	115,7281	127,7701
/	73,7492	103,0315	35,1114	89,3121	115,7304	127,7562
/	73,7483	103,0337	35,1102	89,3149	115,7284	127,7354
/	73,7479	103,0319	35,1104	89,3163	115,7196	127,8296
/	73,7474	103,0358	35,1108	89,3160	115,7166	127,9829
/	73,7472	103,0294	35,1114	89,3162	115,7169	127,9895
/	73,7442	103,0294	35,1119	89,3170	115,7162	127,9535
/	73,7394	103,0295	35,1100	89,3166	115,7143	127,9358
/	73,7389	103,0292	35,1095	89,3160	115,7144	127,9264
/	73,7382	103,0290	35,1098	89,3159	115,7147	127,9099
/	73,7369	103,0295	35,1098	89,3155	115,7150	127,9070
/	73,7364	103,0305	35,1097	89,3155	115,7153	127,9057
/	73,7358	103,0301	35,1134	89,3150	115,7153	127,9062
/	73,7360	103,0299	35,1151	89,3151	115,7166	127,9072
/	73,7362	103,0310	35,1165	89,3152	115,7170	127,9028
/	73,7364	103,0314	35,1172	89,0493	115,7170	127,8968
/	73,7353	103,0317	/	/	/	/
/	73,7372	/	/	/	/	/
/	73,7367	/	/	/	/	/
Cluster 8	Cluster 9	Cluster 10	Cluster 11	Cluster 12	Cluster 13	
55,4569	85,4712	144,3462	144,2659	142,1122	129,1280	
55,4666	85,3629	144,3956	/	142,3023	129,1099	
55,4683	85,3535	144,3346	/	142,4673	129,3542	
55,4648	85,3528	144,3929	/	142,3669	129,4193	
55,4663	85,3526	144,5115	/	142,4383	129,4724	
55,4678	85,3458	144,5947	/	142,4438	129,5154	
55,4553	85,3528	144,7183	/	142,4427	129,5130	
55,4495	85,3542	144,7342	/	142,4237	129,5230	
55,4454	85,3554	144,7531	/	142,4184	129,5205	
55,4447	85,3562	144,7906	/	142,4145	129,4947	
55,4463	85,3578	144,7989	/	142,4109	129,5565	
55,4409	85,3576	144,8123	/	142,4110	129,5948	
55,4415	85,3594	144,8150	/	142,4058	/	
55,4418	85,3599	144,8202	/	142,4116	/	
55,4449	85,3608	144,8251	/	142,4096	/	
55,4440	85,3601	144,8242	/	142,4194	/	
55,4430	85,3625	144,8248	/	142,3981	/	
55,4418	85,3620	144,8239	/	/	/	
55,4439	85,3624	143,5231	/	/	/	
55,4441	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	

Tabella 21 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: frequenze

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7
0,0022	0,0063	0,0045	0,0074	0,0085	0,0063	0,0051
0,0099	0,0084	0,0113	0,0080	0,0091	0,0100	0,0080
0,0125	0,0090	0,0119	0,0099	0,0079	0,0152	0,0109
0,0137	0,0106	0,0122	0,0103	0,0093	0,0166	0,0118
0,0159	0,0107	0,0131	0,0108	0,0095	0,0172	0,0123
0,0165	0,0113	0,0134	0,0108	0,0095	0,0172	0,0122
0,0173	0,0112	0,0134	0,0108	0,0096	0,0172	0,0123
/	0,0112	0,0134	0,0108	0,0096	0,0172	0,0125
/	0,0111	0,0134	0,0108	0,0095	0,0171	0,0127
/	0,0111	0,0134	0,0108	0,0097	0,0172	0,0129
/	0,0111	0,0134	0,0108	0,0097	0,0171	0,0123
/	0,0112	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0122
/	0,0111	0,0135	0,0107	0,0097	0,0171	0,0120
/	0,0111	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0117
/	0,0111	0,0135	0,0109	0,0097	0,0171	0,0116
/	0,0111	0,0135	0,0109	0,0097	0,0171	0,0116
/	0,0112	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0115
/	0,0111	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0115
/	0,0112	0,0135	0,0107	0,0097	0,0171	0,0115
/	0,0112	0,0135	0,0106	0,0097	0,0171	0,0114
/	0,0112	0,0135	0,0106	0,0097	0,0171	0,0116
/	0,0112	0,0135	0,0106	0,0023	0,0171	0,0116
/	0,0112	0,0135	/	/	/	/
/	0,0112	/	/	/	/	/
/	0,0112	/	/	/	/	/
Cluster 8	Cluster 9	Cluster 10	Cluster 11	Cluster 12	Cluster 13	
0,0129	0,0075	0,0185	0,0085	0,0114	0,0071	
0,0139	0,0105	0,0201	/	0,0090	0,0077	
0,0139	0,0105	0,0209	/	0,0148	0,0084	
0,0140	0,0104	0,0195	/	0,0170	0,0110	
0,0141	0,0103	0,0194	/	0,0191	0,0113	
0,0140	0,0103	0,0189	/	0,0179	0,0124	
0,0141	0,0102	0,0197	/	0,0176	0,0127	
0,0139	0,0101	0,0197	/	0,0175	0,0128	
0,0139	0,0101	0,0196	/	0,0170	0,0129	
0,0140	0,0101	0,0197	/	0,0169	0,0129	
0,0139	0,0100	0,0197	/	0,0168	0,0127	
0,0139	0,0100	0,0198	/	0,0168	0,0128	
0,0139	0,0100	0,0198	/	0,0168	/	
0,0139	0,0100	0,0198	/	0,0168	/	
0,0140	0,0100	0,0198	/	0,0168	/	
0,0140	0,0101	0,0198	/	0,0168	/	
0,0140	0,0100	0,0198	/	0,0167	/	
0,0139	0,0100	0,0198	/	/	/	
0,0140	0,0100	0,0221	/	/	/	
0,0140	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	
/	/	/	/	/	/	

Tabella 22 Clusters raggruppati dopo hierarchical clustering: fattori di smorzamento

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7	Cluster 8	Cluster 9	Cluster 10	Cluster 11
73,6442	103,5344	35,0546	88,8298	115,4728	127,8403	55,4569	85,4712	144,3462	142,1122	129,1280
73,5908	102,8759	35,0963	88,8369	115,5504	127,9006	55,4666	85,3629	144,3956	142,3023	129,1099
73,6895	102,8774	35,1046	89,2933	115,7517	127,8673	55,4683	85,3535	144,3346	142,4673	129,3542
73,7275	103,0051	35,1135	89,2869	115,6796	127,7496	55,4648	85,3528	144,3929	142,3669	129,4193
73,7352	103,0128	35,1119	89,3028	115,7072	127,7404	55,4663	85,3526	144,5115	142,4383	129,4724
73,7410	103,0222	35,1122	89,3057	115,7271	127,7626	55,4678	85,3458	144,5947	142,4438	129,5154
73,7464	103,0301	35,1114	89,3095	115,7281	127,7701	55,4553	85,3528	144,7183	142,4427	129,5130
73,7492	103,0315	35,1114	89,3121	115,7304	127,7562	55,4495	85,3542	144,7342	142,4237	129,5230
73,7483	103,0337	35,1102	89,3149	115,7284	127,7354	55,4454	85,3554	144,7531	142,4184	129,5205
73,7479	103,0319	35,1104	89,3163	115,7196	127,8296	55,4447	85,3562	144,7906	142,4145	129,4947
73,7474	103,0358	35,1108	89,3160	115,7166	127,9829	55,4463	85,3578	144,7989	142,4109	129,5565
73,7472	103,0294	35,1114	89,3162	115,7169	127,9895	55,4409	85,3576	144,8123	142,4110	129,5948
73,7442	103,0294	35,1119	89,3170	115,7162	127,9535	55,4415	85,3594	144,8150	142,4058	/
73,7394	103,0295	35,1100	89,3166	115,7143	127,9358	55,4418	85,3599	144,8202	142,4116	/
73,7389	103,0292	35,1095	89,3160	115,7144	127,9264	55,4449	85,3608	144,8251	142,4096	/
73,7382	103,0290	35,1098	89,3159	115,7147	127,9099	55,4440	85,3601	144,8242	142,4194	/
73,7369	103,0295	35,1098	89,3155	115,7150	127,9070	55,4430	85,3625	144,8248	142,3981	/
73,7364	103,0305	35,1097	89,3155	115,7153	127,9057	55,4418	85,3620	144,8239	/	/
73,7358	103,0301	35,1134	89,3150	115,7153	127,9062	55,4439	85,3624	143,5231	/	/
73,7360	103,0299	35,1151	89,3151	115,7166	127,9072	55,4441	/	/	/	/
73,7362	103,0310	35,1165	89,3152	115,7170	127,9028	/	/	/	/	/
73,7364	103,0314	35,1172	89,0493	115,7170	127,8968	/	/	/	/	/
73,7353	103,0317	/	/	/	/	/	/	/	/	/
73,7372	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
73,7367	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

Tabella 23 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: frequenze

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7	Cluster 8	Cluster 9	Cluster 10	Cluster 11
0,0063	0,0045	0,0074	0,0085	0,0063	0,0051	0,0129	0,0075	0,0185	0,0114	0,0071
0,0084	0,0113	0,0080	0,0091	0,0100	0,0080	0,0139	0,0105	0,0201	0,0090	0,0077
0,0090	0,0119	0,0099	0,0079	0,0152	0,0109	0,0139	0,0105	0,0209	0,0148	0,0084
0,0106	0,0122	0,0103	0,0093	0,0166	0,0118	0,0140	0,0104	0,0195	0,0170	0,0110
0,0107	0,0131	0,0108	0,0095	0,0172	0,0123	0,0141	0,0103	0,0194	0,0191	0,0113
0,0113	0,0134	0,0108	0,0095	0,0172	0,0122	0,0140	0,0103	0,0189	0,0179	0,0124
0,0112	0,0134	0,0108	0,0096	0,0172	0,0123	0,0141	0,0102	0,0197	0,0176	0,0127
0,0112	0,0134	0,0108	0,0096	0,0172	0,0125	0,0139	0,0101	0,0197	0,0175	0,0128
0,0111	0,0134	0,0108	0,0095	0,0171	0,0127	0,0139	0,0101	0,0196	0,0170	0,0129
0,0111	0,0134	0,0108	0,0097	0,0172	0,0129	0,0140	0,0101	0,0197	0,0169	0,0129
0,0111	0,0134	0,0108	0,0097	0,0171	0,0123	0,0139	0,0100	0,0197	0,0168	0,0127
0,0112	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0122	0,0139	0,0100	0,0198	0,0168	0,0128
0,0111	0,0135	0,0107	0,0097	0,0171	0,0120	0,0139	0,0100	0,0198	0,0168	/
0,0111	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0117	0,0139	0,0100	0,0198	0,0168	/
0,0111	0,0135	0,0109	0,0097	0,0171	0,0116	0,0140	0,0100	0,0198	0,0168	/
0,0111	0,0135	0,0109	0,0097	0,0171	0,0116	0,0140	0,0101	0,0198	0,0168	/
0,0112	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0115	0,0140	0,0100	0,0198	0,0167	/
0,0111	0,0135	0,0108	0,0097	0,0171	0,0115	0,0139	0,0100	0,0198	/	/
0,0112	0,0135	0,0107	0,0097	0,0171	0,0115	0,0140	0,0100	0,0221	/	/
0,0112	0,0135	0,0106	0,0097	0,0171	0,0114	0,0140	/	/	/	/
0,0112	0,0135	0,0106	0,0097	0,0171	0,0116	/	/	/	/	/
0,0112	0,0135	0,0106	0,0023	0,0171	0,0116	/	/	/	/	/
0,0112	0,0135	/	/	/	/	/	/	/	/	/
0,0112	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
0,0112	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/

Tabella 24 Clusters raggruppati dopo 2-means clustering: fattori di smorzamento

Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello
25 Frequenze [Hz]	23 Frequenze [Hz]	23 Frequenze [Hz]	28 Frequenze [Hz]	18 Frequenze [Hz]	18 Frequenze [Hz]
35,1114 F.smorz [m <sup>2</sup> /s]	55,4463 F.smorz [m <sup>2</sup> /s]	73,7364 F.smorz [m <sup>2</sup> /s]	85,3625 F.smorz [m <sup>2</sup> /s]	89,3121 F.smorz [m <sup>2</sup> /s]	103,0319 F.smorz [m <sup>2</sup> /s]
1,0774 Forma modale	1,3939 Forma modale	1,1147 Forma modale	1,0039 Forma modale	0,9628 Forma modale	1,3421 Forma modale
2,9983-0,0361i 1,9346-0,009i 1	-0,0628+0,0142i 0,2934+0,017i 1	-0,1185-0,042i 1,2625-0,0279i 1	-1,7035-0,0159i -0,2594-0,041i 1	-2,5825+0,0363i -0,8949+0,0715i 1	-1,9989-0,3313i 3,4275+0,3873i 1
0,2301+0,0085i -0,4911+0,0604i -1,0271+0,057i -0,709+0,0128i 0,4732-0,0386i -3,2882+0,0017i -2,9456+0,0626i -2,0225+0,1391i -0,5225-0,0321i -1,2897-0,1232i -2,2428+0,0843i -2,4718+0,0614i -3,5701-0,0288i -2,2502-0,0263i 3,1501-0,0267i 9,7774-0,1073i 7,9077-0,0966i 0,7134+0,5671i 0,4292+0,1769i	2,1387-0,0717i -0,8826-0,0074i -3,7221+0,0804i -1,3639+0,101i 2,0843-0,0805i 1,1261-0,0396i -4,4798+0,1543i -4,7171+0,1182i 0,338-0,0752i -1,5437+0,0255i -2,856+0,0691i -0,1709-0,0019i 5,4586-0,2188i 4,125-0,1712i -1,1715+0,012i -4,4049+0,1215i 1,1126+0,0204i 0,2809-0,0575i 6,2445-0,2335i	-0,4269+0,0055i 0,3558+0,0248i 6,3359+0,2223i 5,1122+0,0516i -0,5283-0,0082i 0,4511-0,039i 1,9531-0,0914i -0,4847-0,0824i -2,3374-0,0141i -3,8623-0,0126i -2,9468-0,0924i -1,8999-0,0667i -0,8522+0,073i -1,4403+0,064i -1,7315-0,0111i 0,3622-0,0013i 4,9171+0,0814i 4,5779-0,2282i 4,5475-0,0623i	0,5516-0,1268i 4,4172+0,7579i 6,0073+0,6489i -1,6745-0,7474i -0,1502+0,2047i -2,6494-0,5733i -1,5627-0,6885i 3,4558+0,559i -0,0435+0,3295i -1,2458+0,1087i -2,585-0,2763i -3,5221-0,5038i 4,1365+0,5742i 3,5319+0,5084i -2,5299+0,0238i -1,0874+0,194i 7,9342+0,2172i 1,6687-0,2592i 3,6451-0,6722i	3,6252-0,4478i -5,8091+1,0978i -1,895+1,087i 5,6553-0,5323i -3,8371+0,4251i 6,4887-1,2195i 8,3074-1,2336i -6,3766+1,1827i -6,8299+0,9005i -4,2021+0,6163i 1,5052-0,5985i 6,0099-1,4539i -3,437+1,0883i -2,475+0,8865i -3,5817+0,0929i -7,6885+0,9413i 6,557+0,2805i 5,6291-1,2938i 19,8373-2,8114i	-2,4517-0,3874i 0,6789+0,1424i 9,4594+1,1531i 24,4436+4,4567i -1,3074-0,2566i 3,07-0,145i -10,0055-2,1864i -14,4883-2,0975i 6,3418+1,4113i 2,0388+0,9029i -11,6273-1,2524i -5,8158-0,9984i 1,6659+0,338i 3,7292+0,6781i 8,7008+1,1874i 4,5553+0,9984i -19,0297-2,515i -15,9433-2,4414i -7,7541-2,1775i

Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello
23 Frequenze [Hz]	27 Frequenze [Hz]	19 Frequenze [Hz]	25 Frequenze [Hz]	23 Frequenze [Hz]
115,7144 F.smorz [%]	127,8968 F.smorz [%]	129,1280 F.smorz [%]	142,4110 F.smorz [%]	144,7989 F.smorz [%]
1,7129 Forma modale	1,1584 Forma modale	1,2713 Forma modale	1,6846 Forma modale	1,9759 Forma modale
-0,1065-0,011i 0,4926+0,0066i 1	0,5238-0,1394i 1,7831-0,1367i 1	0,5455-0,7586i 1,66-0,838i 1	-0,0306+0,0625i 0,4021+0,0813i 1	-0,6611+2,6072i -0,2306+1,1043i 1

-0,4123-0,0102i	-0,251+0,0828i	-0,1654+0,3889i	0,1282+0,0767i	-0,3713+2,0597i
1,8507-0,0004i	-1,7057-0,5122i	-1,8119-2,8352i	2,1994+0,2262i	0,8004+7,4343i
3,5456+0,3244i	1,3299+0,8169i	1,0442+3,8961i	-0,6118-0,4406i	4,959-16,8483i
-4,1282-0,1976i	1,0042-0,9134i	1,1329-4,5887i	-0,7433+0,4113i	-6,0392+13,8429i
-0,2044+0,0148i	-0,8764-0,071i	-0,9437-0,4799i	-0,2662-0,098i	0,7909-1,3873i
-0,7144+0,1874i	-2,2542-0,1873i	-2,3675-0,3728i	1,1978-0,2642i	4,4463-4,0599i
-2,15-0,0381i	-1,0252+0,4007i	-0,79+2,8042i	-0,9434+0,0108i	-1,1059-0,7871i
-0,4294-0,2919i	-2,0813+0,0092i	-2,1368-1,2019i	-1,43+0,164i	-3,6694+6,1116i
-1,0107-0,0703i	0,1395-0,3824i	-0,6562-2,4684i	-0,0884-0,0535i	0,7926-0,3766i
-1,1398-0,0416i	2,2078-0,1651i	2,3388-0,5797i	0,1242-0,0831i	0,3975-1,3401i
-0,2554-0,0796i	3,4186-0,1005i	3,1843-1,1246i	0,87+0,2095i	-0,2014+1,6152i
1,5993+0,0922i	1,4139-0,1078i	1,0631-0,6507i	1,6355-0,0456i	2,488-1,355i
0,4715-0,0273i	-0,551-0,0496i	-0,8613-0,7691i	-0,8855-0,1644i	0,5747-5,0149i
2,5371-0,0552i	0,9417-0,316i	0,4695-2,4917i	-1,5827-0,0401i	-2,1311-0,7795i
4,3838-0,0012i	1,1281+0,1161i	1,6977+0,792i	-1,5175+0,3908i	-7,4837+13,3928i
-2,1799-0,0672i	0,4141+0,0371i	0,9411+1,139i	-0,4414+0,1112i	-2,1541+4,9333i
-7,1332-0,164i	-0,2165-0,7806i	-1,661-5,1477i	2,0115-0,5952i	11,1782-20,3405i
1,6855-0,1664i	-1,5589-0,1144i	-3,5259-4,4449i	0,4865+0,8274i	-1,6155+8,9654i
6,1094-0,0444i	-1,9719+0,6018i	-1,8294+1,0618i	-0,4212+0,9915i	-7,9579+20,9006i

Tabella 25 Modi finali selezionati

## 7.7. Confronto con un altro algoritmo di selezione dei parametri modali

I risultati ottenuti in riferimento al modello sperimentale vengono ora confrontati con i corrispondenti ottenuti grazie ad un altro algoritmo di estrazione, implementato da Dario Anastasio. Questo algoritmo, che può essere consultato all'interno degli allegati di questo lavoro (*fStabDiag.mat*) si basa sulla scelta di particolari soglie critiche che servono a raggruppare i modi simili e a dividerli in fisici o spuri. Queste soglie critiche riguardano i seguenti parametri:

- frequenze naturali
- fattori di smorzamento
- *MACX*

Un modo viene classificato come stabile se e solo se risulta stabile per tutti i criteri applicati. Per una visione completa dell'algoritmo, si può consultare il modello originale. I modi estratti e selezionati utilizzando questo algoritmo sono riportati in Tabella 26, collocata a fine paragrafo.

Il confronto tra i modi selezionati con i due differenti algoritmi avviene, anche in questo caso, con una comparazione tra le forme modali attraverso i parametri *MAC* e *MACX*, i cui risultati sono riportati in Tabella 27 e Tabella 28: essi risultano in generale comparabili. Solo in un caso, relativo al modo n.9 (frequenza vicina ai 129 Hz) il *MAC* e il *MACX* scendono leggermente sotto il 90%. Di conseguenza, anche in questa circostanza, si può affermare che l'algoritmo implementato in questo lavoro abbia fornito delle soluzioni generalmente accettabili e affidabili.

Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello
13 Frequenze [Hz]	14 Frequenze [Hz]	17 Frequenze [Hz]	21 Frequenze [Hz]	21 Frequenze [Hz]	19 Frequenze [Hz]
35,1119 F.smorz [%]	55,4648 F.smorz [%]	73,7472 F.smorz [%]	85,3562 F.smorz [%]	89,3162 F.smorz [%]	103,0294 F.smorz [%]
1,0814 Forma modale	1,3970 Forma modale	1,1151 Forma modale	1,0068 Forma modale	0,9704 Forma modale	1,3451 Forma modale
3,1471-0,0893i 2,0203-0,0105i 1 0,18+0,0332i -0,5054+0,0817i -1,1014+0,0238i -0,6848+0,0773i 0,5128-0,0585i -3,4148+0,0284i -3,0722+0,0556i -2,0295+0,1722i -0,5214-0,01i -1,3089-0,0887i -2,286+0,1336i -2,5776+0,1032i -3,7175+0,0405i -2,3824+0,049i 3,1319-0,0044i 9,8817-0,1677i 8,1203-0,1787i 0,8357+0,5654i 0,6632+0,1137i	-0,0792-0,0271i 0,3035+0,0102i 1 2,1418-0,0733i -0,8323+0,0842i -3,8187+0,2426i -1,2943+0,1107i 2,0833-0,2043i 1,1387-0,1351i -4,5285+0,3126i -4,6663+0,3459i 0,3387-0,0641i -1,5576-0,0074i -2,8341+0,1902i -0,1446+0,0087i 5,4973-0,4423i 4,1852-0,317i -1,1448+0,1124i -4,4152+0,4099i 1,1985+0,0766i 0,328+0,3469i 6,2037-0,3261i	-0,1206-0,0412i 1,2615-0,0313i 1 -0,428+0,0136i 0,3612+0,0289i 6,3433+0,2142i 5,1143+0,0265i -0,5242-0,0093i 0,4535-0,0465i 1,9432-0,0949i -0,4875-0,0702i -2,3229-0,0086i -3,8599-0,0312i -2,9488-0,0812i -1,901-0,0591i -0,8401+0,0686i -1,4324+0,0624i -1,734-0,008i 0,3544-0,0067i 4,9096+0,0724i 4,5952-0,1124i 4,5488-0,0008i	-1,6882-0,017i -0,2507-0,0458i 1 0,5628-0,1212i 4,3673+0,7083i 5,9296+0,6295i -1,6667-0,7394i -0,1549+0,1965i -2,6205-0,549i -1,5438-0,6555i 3,4272+0,5147i -0,071+0,3011i -1,2804+0,1381i -2,5556-0,2737i -3,4698-0,4869i 4,0874+0,5552i 3,4961+0,4962i -2,4931+0,0372i -1,095+0,2097i 7,8632+0,2017i 1,7761-0,4452i 3,6965-0,7384i	-2,5816+0,06i -0,8834+0,0844i 1 3,6228-0,4667i -5,7224+1,1534i -1,9039+1,1057i 5,6691-0,5948i -3,826+0,4513i 6,4512-1,2823i 8,2378-1,2954i -6,3008+1,2548i -6,747+0,9344i -4,2108+0,6074i 1,522-0,6063i 5,9899-1,4931i -3,4069+1,0973i -2,4522+0,8965i -3,5974+0,1452i -7,719+1,021i 6,5788+0,2249i 5,8874-1,2122i 19,9582-2,9251i	-2,0028-0,3417i 3,4359+0,399i 1 -2,4637-0,4011i 0,6628+0,1334i 9,4778+1,2206i 24,4754+4,6157i -1,3109-0,268i 3,0784-0,1267i -10,0256-2,2309i -14,5356-2,2094i 6,3472+1,4589i 2,0677+0,9209i -11,6457-1,3254i -5,8211-1,0429i 1,6655+0,3428i 3,736+0,6879i 8,7295+1,2173i 4,5683+1,0457i -19,0985-2,6077i -16,0966-2,5284i -7,8212-2,2286i
Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello	Ordine modello
28 Frequenze [Hz]	23 Frequenze [Hz]	25 Frequenze [Hz]	24 Frequenze [Hz]	24 Frequenze [Hz]	
115,7166 F.smorz [%]	127,9264 F.smorz [%]	129,5130 F.smorz [%]	142,4109 F.smorz [%]	144,8123 F.smorz [%]	
1,7140 Forma modale	1,1645 Forma modale	0,7142 Forma modale	1,6797 Forma modale	1,9690 Forma modale	
-0,1052-0,0101i 0,4924+0,0079i 1	0,5193-0,1426i 1,7764-0,1395i 1	0,0108-0,6253i 1,249-0,578i 1	-0,0301+0,0652i 0,405+0,0838i 1	-0,623+2,5893i -0,2415+1,083i 1	

-0,4136-0,0099i	-0,2435+0,0797i	0,1365+0,4015i	0,1304+0,0772i	-0,3502+2,0617i
1,8532+0,0028i	-1,7065-0,55i	-2,9431-2,1719i	2,2005+0,227i	0,9361+7,4442i
3,5491+0,3229i	1,3376+0,8557i	3,0161+3,4634i	-0,6148-0,457i	4,6777-16,789i
-4,13-0,1966i	0,9855-0,946i	-1,5058-3,7024i	-0,7374+0,4286i	-5,8422+13,7713i
-0,2047+0,0148i	-0,8812-0,0761i	-1,2581-0,3602i	-0,2669-0,0992i	0,7681-1,3926i
-0,7144+0,1863i	-2,256-0,1893i	-2,5306-0,4183i	1,1922-0,2679i	4,4231-4,0617i
-2,1488-0,0421i	-1,0084+0,4236i	0,6375+2,0118i	-0,948+0,0078i	-1,0645-0,7468i
-0,4269-0,2862i	-2,0737-0,0143i	-2,4389-0,5719i	-1,4203+0,1657i	-3,643+6,1035i
-1,0092-0,0701i	0,1118-0,4091i	-1,683-1,482i	-0,0862-0,0546i	0,8047-0,3612i
-1,1415-0,0454i	2,1894-0,1508i	1,4936-0,8057i	0,1209-0,0747i	0,4136-1,3823i
-0,2527-0,0777i	3,4042-0,1073i	2,6283-0,6377i	0,8749+0,2135i	-0,2268+1,5884i
1,6014+0,0931i	1,403-0,112i	0,889-0,4312i	1,6347-0,0474i	2,4718-1,3539i
0,4695-0,0273i	-0,5631-0,0589i	-1,1901-0,4145i	-0,8848-0,1674i	0,4765-5,0107i
2,5356-0,0534i	0,9137-0,3342i	-0,9269-1,7322i	-1,5799-0,0376i	-2,1687-0,7876i
4,3826-0,0003i	1,1405+0,1315i	1,8638+0,3106i	-1,5138+0,4033i	-7,2648+13,3826i
-2,1806-0,0727i	0,4258+0,0572i	1,0496+0,4739i	-0,4459+0,1171i	-2,0012+4,9399i
-7,1307-0,164i	-0,2615-0,8345i	-3,9552-3,2689i	2,0106-0,6109i	10,8142-20,3565i
1,7008-0,1434i	-1,5538-0,2392i	-3,5136-0,5422i	0,5182+0,8024i	-1,7628+9,0782i
6,1158-0,0261i	-1,9261+0,55i	0,0836+2,256i	-0,3947+0,9898i	-7,8491+20,9396i

Tabella 26 Modi selezionati dall' algoritmo di confronto

MAC	Algoritmo di confronto											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Algoritmo implementato	1	99,943	1,722	6,329	2,217	1,415	0,602	8,939	0,695	0,718	2,052	0,348
	2	1,580	99,847	0,008	6,615	12,284	0,025	8,462	5,268	4,911	0,406	0,612
	3	6,744	0,033	99,990	27,636	27,456	0,182	0,199	7,552	4,259	0,617	0,098
	4	2,357	6,523	27,180	99,969	2,822	7,520	0,215	8,646	10,647	0,201	9,090
	5	1,174	11,940	27,127	2,925	99,986	9,162	1,010	5,214	2,061	4,781	3,919
	6	0,679	0,014	0,147	7,753	9,280	99,999	0,743	8,051	4,343	9,321	2,954
	7	8,768	8,071	0,199	0,241	1,039	0,757	99,999	2,170	18,750	7,662	18,954
	8	0,614	5,140	7,673	8,730	5,564	8,208	2,243	99,935	47,198	0,117	1,866
	9	1,145	5,821	6,145	10,856	2,998	6,749	9,514	52,490	89,956	6,951	1,135
	10	2,137	0,457	0,645	0,135	4,808	9,164	7,776	0,151	6,430	99,989	27,853
	11	0,316	0,632	0,134	8,892	3,955	3,065	18,775	1,666	0,727	27,926	99,992

Tabella 27 Matrice MAC per il confronto delle forme modali

MACX	Algoritmo di confronto											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Algoritmo implementato	1	99,951	1,755	6,372	2,334	1,443	0,566	8,915	0,862	1,113	2,008	0,242
	2	1,578	99,981	0,010	6,744	12,338	0,023	8,474	5,612	5,935	0,486	0,640
	3	6,807	0,042	99,999	27,731	27,406	0,148	0,205	8,164	5,339	0,718	0,164
	4	2,442	6,647	27,285	99,988	1,308	7,721	0,202	9,346	12,738	0,499	9,740
	5	1,186	12,033	27,111	1,418	99,990	9,240	1,018	5,455	2,008	5,652	4,241
	6	0,655	0,040	0,122	7,972	9,365	99,999	0,694	9,009	6,304	10,168	2,974
	7	8,732	8,132	0,203	0,230	1,053	0,701	99,999	2,567	23,391	8,401	19,308
	8	0,743	5,492	8,245	9,365	5,779	9,074	2,601	99,982	35,212	0,924	2,652
	9	2,036	8,154	8,857	15,495	3,778	11,113	13,848	42,758	89,891	12,256	1,300
	10	2,087	0,504	0,722	0,422	5,617	9,978	8,560	1,053	9,997	99,993	21,670
	11	0,194	0,649	0,192	9,638	4,291	3,083	19,137	2,408	0,709	21,633	99,996

Tabella 28 Matrice MACX per il confronto delle forme modali

## Conclusioni

Questo lavoro è stato incentrato, come indicato all'interno della trattazione, a comprendere la validità del modello implementato da E.Reydeners, J.Houbrechts e G. De Roeck per la selezione completamente automatica dei parametri modali. L'applicazione di questo modello ai due sistemi descritti ha permesso di valutarne il funzionamento e di osservare le eventuali criticità che esso evidenzia.

La prima criticità che è stata identificata, come descritto nei capitoli precedenti, è riferita alla prima applicazione del 2-means clustering. Al termine della sua esecuzione, l'algoritmo è impostato affinché tutti i modi la cui totalità di vettori  $p_{ij}$  viene classificata come spuria siano eliminati dal diagramma di stabilizzazione. Nei differenti casi analizzati, la condizione per la quale tutti i vettori legati a un modo specifico vengano classificati nell'insieme spurio si è verificata molto raramente. Di conseguenza, spesso il numero di modi eliminati dal diagramma in questo passaggio si è rivelato esiguo, se non nullo. Tuttavia, questo aspetto non cancella l'importanza dell'esecuzione del 2-means clustering, che si ricorda essere determinante per stabilire la soglia critica del passaggio successivo: l'agglomerative hierarchical clustering.

La seconda criticità riguarda, per l'appunto, proprio la soglia critica relativa all'applicazione dell'agglomerative hierarchical clustering, con riferimento particolare all'analisi del sistema fisico reale consistente nella portiera di una automobile. In alcune varianti del sistema analizzato, e per alcuni intervalli di ordini e frequenze impostati, si è evidenziato che la soglia critica relativa all'algoritmo presenta un valore troppo elevato per raggruppare i modi in una maniera soddisfacente. In altre parole, si è visto che alcuni cluster erano composti da più raggruppamenti di modi, simili al loro interno ma non simili tra loro. Questa problematica, nei casi in cui si è presentata, è stata risolta con una modulazione opportuna della soglia critica.

Una volta chiarite le criticità incontrate nel percorso di verifica dell'algoritmo, ci si può concentrare sui risultati ottenuti per paragonarli a quelli teorici, nel caso del modello numerico, o derivanti dall'applicazione di un altro algoritmo di selezione, per il sistema fisico reale. Per verificarne l'affidabilità, come indicato durante la trattazione, l'attenzione è stata posta su due fattori fondamentali, riportati per chiarezza:

- Confronto delle forme modali attraverso la matrice  $MAC$
- Confronto delle forme modali attraverso la matrice  $MACX$

Come si può evidenziare dai capitoli precedenti, i risultati possono essere ritenuti mediamente soddisfacenti ed affini ai corrispondenti teorici o sperimentali. Di conseguenza, il lavoro svolto in questo progetto di tesi ha permesso di sancire, al netto delle criticità evidenziate, il corretto funzionamento del modello teorizzato dagli autori suddetti.

## Bibliografia

- [1] R. Allemang, «The modal assurance criterion - Twenty years of use and abuse», *Sound Vib.*, vol. 37, pagg. 14–23, 2003.
- [2] G. Carlsson, F. Mémoli, «Characterization, Stability and Convergence of Hierarchical Clustering Methods.», *J. Mach. Learn. Res.*, vol. 11, pagg. 1425–1470, 2010.
- [3] A. Fasana, A. Ferraris, A. G. Airale, D. Berti Polato, M. Carello, «Experimental Characterization of Damped CFRP Materials with an Application to a Lightweight Car Door», *Shock Vib.*, vol. 2017, pagg. 1–9, 2017.
- [4] A. Fasana, «Modal parameters estimation in the Z-domain», *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 23, n. 1, pagg. 217–225, 2009.
- [5] S. Gres, M. Dohler, P. Andersen, L. Mevel, «Uncertainty quantification for the Modal Phase Collinearity of complex mode shapes», *Mech. Syst. Signal Process.*, vol.152, 2021.
- [6] P. Guillaume, P. Verboven, S. Vanlanduit, «Frequency domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals», 1998.
- [7] E. Neu, F. Janser, A. A. Khatibi, A. C. Orifici, «Fully Automated Operational Modal Analysis using multi-stage clustering», *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 84, pagg. 308–323, 2017.
- [8] R. Pappa, K. Elliott, e A. Schenk, «A consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm», *J. Guid. Control Dyn.*, 1992.
- [9] B. Peeters, H. Van der Auweraer, J. Leuridan, T. Vassel, «PolyMAX modal parameter estimation: Challenging automotive and aerospace applications», pagg. 1-13+572, 2004.
- [10] A. W. Phillips, R. J. Allemang, D. L. Brown, «Autonomous Modal Parameter Estimation: Methodology», in *Modal Analysis Topics, Volume 3*, New York, NY, pagg. 363–384, 2011.
- [11] E. Reynders, J. Houbrechts, G. De Roeck, «Fully automated (operational) modal analysis», *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 29, pagg. 228–250, 2012.
- [12] P. Vacher, B. Jacquier, A. Bucharles, «Extensions of the MAC criterion to complex modes», in *Proceedings of the international conference on noise and vibration engineering*, pagg. 2713–2726, 2010.
- [13] G. Valentini, «Hierarchical clustering for gene expression data analysis», Università degli Studi di Milano.
- [14] J. Wu, «Cluster Analysis and K-means Clustering: An Introduction», in *Advances in K-means Clustering*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pagg. 1–16, 2012.
- [15] C. Wu, H. Liu, X. Qin, e J. Wang, «Stabilization diagrams to distinguish physical modes and spurious modes for structural parameter identification», *J. Vibroengineering*, vol. 19, pagg. 2777–2794, 2017.

## Appendice – Script Matlab

```
clear all
close all
clc

tic
load matmodi

% Funzioni
fMAC=@(Phi1,Phi2) (abs((Phi1)'*Phi2))^2/((Phi1'*Phi1)*(Phi2'*Phi2));
fMACX=@(Phi1,Phi2) (abs(Phi1'*Phi2)+abs(Phi1.'*Phi2))^2/((Phi1'*Phi1+abs(Phi1.'*Phi1))*(Phi2'*Phi2+abs(Phi2.'*Phi2)));
fgamma=@(gamma1,gamma2) (abs(gamma1-gamma2))/max(abs(gamma1),abs(gamma2))
fMSF=@(Phi_j,Phi) ((Phi_j)'*(Phi))/((Phi_j)'*Phi)
fq=@(msf) (abs(log(msf/sign(max(real(msf),imag(msf))))))
ftilde=@(res) res-sum(res)/length(res)
fepsilon=@(vet) ((imag(vet))'*(imag(vet)) - (real(vet))'*(real(vet)))/(2*(real(vet))'*imag(vet))
fteta=@(epsi) atan(abs(epsi) + sign(epsi)*sqrt(1+epsi^2))
fMPC=@(vett,epsi,tet) ((norm(real(vett)))^2 + (1/epsi)*real(vett)'*imag(vett)*(2*(epsi^2)+1)*((sin(tet))^2-1))/(norm(imag(vett)))^2 + norm(real(vett))^2)

nr=22; %Numero canali

lung=size(matmodi,2);
nlim=lung;
iter=1:nlim;

matfreq_estr=matmodi((iter-1)*(2+nr)+1,:); %estrazione frequenze naturali
matzita_estr=-matmodi((iter-1)*(2+nr)+2,:); %estrazione fattori di smorzamento

%Scrematura colonne "vuote" da matfreq e matzita
for j=1:1:size(matfreq_estr,2)
    contr=find(matfreq_estr(:,j)==0);
    if length(contr)<length(matfreq_estr(:,j))
        matfreq(:,j)=matfreq_estr(:,j);
        matzita(:,j)=matzita_estr(:,j);
    end
end

%Autovalori
for j=1:1:size(matfreq,1)
    for k=1:1:size(matfreq,2)
        if matfreq(j,k)~=0
            matgamma(j,k)=(-abs(2*pi*matfreq(j,k))*matzita(j,k) + (2*i*pi*matfreq(j,k)*sqrt(1-(matzita(j,k))^2)));
        end
    end
end

matfreq_tr=matfreq';
matzita_tr=matzita';
freq_lin=matfreq_tr(:)';
freq_lin=setdiff(freq_lin,0);
p_ord_s=[1:1:length(freq_lin)];
```

```

contatore=1;
for ja=1:1:size(matfreq,1)
    for jb=1:1:size(matfreq,2)
        if matfreq(ja,jb)~=0
            p_ord_d(:,contatore)=[ja;jb];
            contatore=contatore+1;
        end
    end
end

%SOFT VALIDATION CRITERIA
contatore=0;

for ja=1:1:size(p_ord_d,2)

    res_1=matmodi(((p_ord_d(1,ja)-1)*(nr+2)+3):((p_ord_d(1,ja)-
1)*(nr+2)+2+nr),p_ord_d(2,ja));
    res_1_norm=res_1/norm(res_1);
    res_1_tilde=ftilde(res_1);
    epsilon_1=fepsilon(res_1_tilde);
    teta_1=fteta(epsilon_1);
    MPC_1=fMPC(res_1_tilde,epsilon_1,teta_1);

    for jb=(1+ja):1:size(p_ord_d,2)

        contatore=contatore+1;
        confr_freq=(abs(matfreq(p_ord_d(1,ja),p_ord_d(2,ja))-
matfreq(p_ord_d(1,jb),p_ord_d(2,jb))))/(max(abs(matfreq(p_ord_d(1,ja),p_ord_d(2,
ja))),abs(matfreq(p_ord_d(1,jb),p_ord_d(2,jb))))); %delta frequenze
        confr_smorz=(abs(matzita(p_ord_d(1,ja),p_ord_d(2,ja))-
matzita(p_ord_d(1,jb),p_ord_d(2,jb))))/(max(abs(matzita(p_ord_d(1,ja),p_ord_d(2,
ja))),abs(matzita(p_ord_d(1,jb),p_ord_d(2,jb))))); %delta smorzamenti
        confr_gamma=(abs(matgamma(p_ord_d(1,ja),p_ord_d(2,ja))-
matgamma(p_ord_d(1,jb),p_ord_d(2,jb))))/(max(abs(matgamma(p_ord_d(1,ja),p_ord_d(2,
ja))),abs(matgamma(p_ord_d(1,jb),p_ord_d(2,jb))))); %delta autovalori

        res_2=matmodi(((p_ord_d(1,jb)-1)*(nr+2)+3):((p_ord_d(1,jb)-
1)*(nr+2)+2+nr),p_ord_d(2,jb));
        res_2_norm=res_2/norm(res_2);

        res_2_tilde=ftilde(res_2);
        epsilon_2=fepsilon(res_2_tilde);
        teta_2=fteta(epsilon_2);
        MPC_2=fMPC(res_2_tilde,epsilon_2,teta_2);

        confr_mac=fMAC(res_1,res_2); %delta mac
        confr_macx=fMACX(res_1,res_2); %delta mac x
        confr_msf=fMSF(res_1_norm,res_2_norm);
        confr_q=fq(confr_msf);
        confr_mpc=fgamma(MPC_1,MPC_2); %differenza mpc

    p_ind(:,contatore)=[p_ord_d(1,ja);p_ord_d(2,ja);p_ord_d(1,jb);p_ord_d(2,jb)];
        p_fr(contatore)=confr_freq;
        p_smorz(contatore)=confr_smorz;
        p_gamma(contatore)=confr_gamma;
        p_mac(contatore)=confr_mac;
        p_macx(contatore)=confr_macx;
        p_mpc(contatore)=confr_mpc;
        p_q(contatore)=confr_q;

```

```

        end
    end

    %scalare p_q
    p_q=p_q-min(p_q);
    p_q=p_q/max(p_q);

p=[p_ind;p_gamma;p_fr;p_smorz;p_mac;p_mpc;p_q;p_macx];

%PRIMA APPLICAZIONE DI 2-MEANS CLUSTERING
pc1=[0;0;0;1;1;0;1]; %centroide fisico iniziale
pc2=[1;1;1;0;0;1;0]; %centroide spurio iniziale
somma=0;
flag=0;
cont=1;

while flag==0
    k=0;
    w=0;

    for j=1:1:contatore
        norma_1=(p(5:end,j)-pc1)'*(p(5:end,j)-pc1);
        norma_2=(p(5:end,j)-pc2)'*(p(5:end,j)-pc2);
        if norma_1<=norma_2
            k=k+1;
            p_fis(:,k)=p(:,j);
            norma_fis(k)=norma_2;

        else
            w=w+1;
            p_spu(:,w)=p(:,j);
            norma_spu(w)=norma_2;
        end
    end

norma_fis=norma_fis(1:k); %Taglio eventuali eccessi ciclo precedente
norma_spu=norma_spu(1:w); %Taglio eventuali eccessi ciclo precedente
somma(cont)=sum(norma_spu)+sum(norma_fis);
p_fis=p_fis(:,1:k);
p_spu=p_spu(:,1:w);

    if cont>1 && somma(cont)==somma(cont-1)
        flag=1;
    else
        for ind=5:1:size(p,1)
            pc1(ind-4)=mean(p_fis(ind,:));
            pc2(ind-4)=mean(p_spu(ind,:));
        end
        cont=cont+1
    end
end
end

```

```

for j=1:length(p_ord_s)
    flag=0;
    k=0;
    while k<size(p_fis,2) && flag==0
        k=k+1;
        if p_fis(1:2,k)==p_ord_d(:,j)
            flag=1;
        elseif p_fis(3:4,k)==p_ord_d(:,j)
            flag=1;
        end
    end
end

if flag==0
    p_ord_s(j)=0;
    freq_lin(j)=0;
    p_ord_d(:,j)=0;
end
end

contr=find(freq_lin==0);
p_ord_s=setdiff(p_ord_s,0);
freq_lin=setdiff(freq_lin,0);
p_ord_d(:,contr)=[];

%GRAFICI SOTTOSPAZI
figure(1) %gamma e mac
scatter(p_fis(5,:),p_fis(8,:),2);
hold on
scatter(p_spu(5,:),p_spu(8,:),2,'r');
hold on
scatter(pcl(1),pcl(4),100,'b','x')
hold on
scatter(pc2(1),pc2(4),100,'b','x')
xlabel('d(\mathbb{E}^a_i, \mathbb{E}^a_j)')
ylabel('MAC(\mathbb{E}^a_i, \mathbb{E}^a_j)')
legend('fisici','spuri')

figure(2) %freq e MAC
scatter(p_fis(6,:),p_fis(8,:),2);
hold on
scatter(p_spu(6,:),p_spu(8,:),2,'r');
hold on
scatter(pcl(2),pcl(4),100,'b','x')
hold on
scatter(pc2(2),pc2(4),100,'b','x')
xlabel('d(f_i, f_j)')
ylabel('MAC(\mathbb{E}^f_i, \mathbb{E}^f_j)')
legend('fisici','spuri')

figure(3) %MAC E MACX
scatter(p_fis(8,:),p_fis(11,:),2);
hold on
scatter(p_spu(8,:),p_spu(11,:),2,'r');
hold on
scatter(pcl(4),pcl(7),100,'b','x')
hold on
scatter(pc2(4),pc2(7),100,'b','x')
xlabel('MAC(\mathbb{E}^i, \mathbb{E}^j)')
ylabel('MACX(\mathbb{E}^i, \mathbb{E}^j)')
legend('fisici','spuri','Location','northwest')

```

```

figure(4) %MAC e q
scatter(p_fis(7,:),p_fis(10,:),2);
hold on
scatter(p_spu(7,:),p_spu(10,:),2,'r');
hold on
scatter(pc1(3),pc1(6),100,'b','x')
hold on
scatter(pc2(3),pc2(6),100,'b','x')
xlabel('d( $\Theta_i, \Theta_j$ )')
ylabel('d( $q_i, q_j$ )')
legend('fisici','spuri')

figure(5)
scatter(p_fis(5,:),p_fis(11,:),2);
hold on
scatter(p_spu(5,:),p_spu(11,:),2,'r');
hold on
scatter(pc1(1),pc1(7),100,'b','x')
hold on
scatter(pc2(1),pc2(7),100,'b','x')
xlabel('d( $\Theta_i, \Theta_j$ )')
ylabel('MACX( $\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_j$ )')
legend('fisici','spuri')

%HARD VALIDATION CRITERIA
for j=1:length(p_ord_s)
    if matzita(p_ord_d(1,j),p_ord_d(2,j))<=0 ||
matzita(p_ord_d(1,j),p_ord_d(2,j))>=0.2
        p_ord_s(j)=0;
        freq_lin(j)=0;
    end
end

contr=find(freq_lin==0);
p_ord_s=setdiff(p_ord_s,0);
freq_lin=setdiff(freq_lin,0);
p_ord_d(:,contr)=[];

%DIAGRAMMA DI STABILIZZAZIONE
w=1;
for j=1:1:size(matfreq,1)
    for k=1:1:size(matfreq,2)
        f_ord(w)=matfreq(j,k);
        w=w+1;
    end
end
f_ord=nonzeros(f_ord)';
figure(6)
scatter(f_ord,p_ord_d(1,:),20);
xlabel('Frequenze [Hz]')
ylabel('Ordine modello')

%HIERARCHICAL CLUSTERING
%costruzione matrici mac e gamma
mac=ones(length(p_ord_s));
gamma=zeros(length(p_ord_s));
for j=1:length(p_ord_s)
    for k=1:length(p_ord_d)
        if j~=k

```

```

gamma(j,k)=fgamma(matgamma(p_ord_d(1,j),p_ord_d(2,j)),matgamma(p_ord_d(1,k),p_or
d_d(2,k)));
    res_1=matmodi(((p_ord_d(1,j)-1)*(nr+2)+3):((p_ord_d(1,j)-
1)*(nr+2)+2+nr),p_ord_d(2,j));
    res_2=matmodi(((p_ord_d(1,k)-1)*(nr+2)+3):((p_ord_d(1,k)-
1)*(nr+2)+2+nr),p_ord_d(2,k));
    mac(j,k)=fMAC(res_1,res_2);
        end
    end
end

A=gamma+1-mac;

cos=0;
cluster=zeros(size(A));
cluster(1,:)=p_ord_s;
m=0;
som_hie=0;
p_gamma_fis=p_fis(5,:);
p_mac_fis=p_fis(8,:);
hie=p_gamma_fis+1-p_mac_fis;
media_hie=mean(hie);
dev_hie=std(hie);
d_soglia=(media_hie+2*dev_hie);
flag=0;
contatore=0;

while flag==0
contatore=contatore+1
A_d=zeros(size(A));
for j=1:1:size(A,1)
    for k=1:1:size(A,2)
        if j>k
            A_d(j,k)=0;
        else
            A_d(j,k)=A(j,k);
        end
    end
end
end

m=min(min(nonzeros(A_d)));
if m>=d_soglia
    flag=1;
else
[r,c]=find(A_d==m);
ind1=min(r,c);
ind2=max(r,c);
A_new=zeros(size(A));

%portare colonna 3 su colonna 2

for j=1:1:size(A,1)
    if j~=ind1 && j~=ind2
        for k=1:1:size(A,2)
            if k==ind1
                A_new(j,k)=(A(j,ind1)+A(j,ind2))/2;
            else
                A_new(j,k)=A(j,k);
            end
        end
    end
end
end

```

```

else
    if j~=ind2
        for k=1:1:size(A,2)
            if k==ind1 || k==ind2
                A_new(j,k)=A(j,k);
            else
                A_new(j,k)=(A(ind1,k)+A(ind2,k))/2;
            end
        end
    end
end
end
end

A_new(:,ind2)=0;

ind=find(sum(A_new,1)==0) ;
A_new(:,ind) = [] ;

ind=find(sum(A_new,2)==0) ;
A_new(ind,:)=[];

vet=nonzeros(cluster(:,ind2));

cont=1
while cluster(cont,ind1)~=0
    cont=cont+1;
end

for u=1:length(vet)
    cluster(cont,ind1)=vet(u);
    cont=cont+1;
end

cluster(:,ind2)=[];

cos=cos+1
A=A_new;
end
end

%rappresentare i vari cluster
for j=1:1:size(cluster,2)
    clu=nonzeros(cluster(:,j));
    for k=1:size(clu)
        pos=find(p_ord_s==clu(k));
        frequenze(k,j)=matfreq(p_ord_d(1,pos),p_ord_d(2,pos));
        smorzamenti(k,j)=matzita(p_ord_d(1,pos),p_ord_d(2,pos));
    end
end

writematrix(frequenze,'frequenze.xls')
writematrix(smorzamenti*100,'smorzamenti.xls')

%SECONDA APPLICAZIONE DI 2-MEANS CLUSTERING
%creazione nj
for j=1:size(cluster,2)
    nhj(j)=length(nonzeros(cluster(:,j)));
end

```

```

%aggiungere spazi vuoti
cont=length(nhj)+1;
nhj_scal=nhj/max(nhj);
for j=1:length(nhj_scal)
    if nhj_scal(j)>0.5
        nhj(cont)=0;
        cont=cont+1;
    end
end

%centroidi
nhc2=0;
nhc1=max(nhj);

% procedimento
ord=[1:1:length(nhj)];
flag=0;
cont=1;
while flag==0
    k=0;
    w=0;
    for j=1:length(nhj)
        diff_1=(nhj(j)-nhc1)^2;
        diff_2=(nhj(j)-nhc2)^2;
        if diff_1<diff_2
            k=k+1;
            nhj_fis(k)=nhj(j);
            ord_fis(k)=ord(j);
            diff_fis(k)=diff_1;
        else
            w=w+1;
            nhj_spu(w)=nhj(j);
            ord_spu(w)=ord(j);
            diff_spu(w)=diff_2;
        end
    end

    diff_fis=diff_fis(1:k);
    diff_spu=diff_spu(1:w);
    somma2(cont)=sum(diff_fis)+sum(diff_spu);
    diff_fis=diff_fis(1:k);
    diff_spu=diff_spu(1:w);
    ord_fis=ord_fis(1:k);
    ord_spu=ord_spu(1:w);

    if cont>1 && somma2(cont)==somma2(cont-1)
        flag=1;
    else
        nhc1=mean(nhj_fis);
        nhc2=mean(nhj_spu);
        cont=cont+1
    end
end

%Rappresentazione cluster
for j=1:length(ord_fis)
    frequenze_finale(:,j)=frequenze(:,ord_fis(j));
    smorzamenti_finale(:,j)=smorzamenti(:,ord_fis(j));
end

```

```

end

%SCELTA FINALE MODI
for j=1:1:size(ord_fis,2)
    sm_mediani(j)=median(smorzamenti_finale(:,j));
end

for j=1:1:length(sm_mediani)
    for k=1:1:nhj_fis(j)
        smorz_dist(k,j)=abs(smorzamenti_finale(k,j)-sm_mediani(j));
    end
end

for j=1:1:length(sm_mediani)
    modi_mindist(j)=min(smorz_dist(1:nhj_fis(j),j));
end

for j=1:1:size(modi_mindist,2)
    for k=1:1:nhj_fis(j)
        if smorz_dist(k,j)==modi_mindist(j)
            pos_min(j)=k;
        end
    end
end

%andare a prendere le estrazioni
for j=1:size(ord_fis,2)
    cluster_finale(:,j)=cluster(:,ord_fis(j));
end

for j=1:1:size(cluster_finale,2)

modi_fin(:,j)=[p_ord_d(:,cluster_finale(pos_min(j),j));frequenze_finale(pos_min(j),j);smorzamenti_finale(pos_min(j),j)];

modi_fin_2(:,j)=[cluster_finale(pos_min(j),j);frequenze_finale(pos_min(j),j);smorzamenti_finale(pos_min(j),j)];
end

for j=1:1:size(modi_fin,2)
    forma_mod(:,j)=matmodi(((modi_fin(1,j)-1)*(nr+2)+3):((modi_fin(1,j)-1)*(nr+2)+2+nr),modi_fin(2,j));
end

modi_compl=[modi_fin;forma_mod];
fr_modello=sort(modi_compl(3,:));

for k=1:1:length(fr_modello)
    pos=find(modi_compl(3,:)==fr_modello(k));
    modi_modello(:,k)=modi_compl(:,pos);
end

```