

**POLITECNICO DI TORINO**

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE



## **Dinamica di una racchetta da tennis**

Analisi numerica, sperimentale e sistemi di smorzamento

Candidato:  
**Pieralfonso Montanaro**  
Matricola 265213

Relatore:  
**Prof. Alessandro Fasana**



*A mia madre,  
che ovunque si trovi  
possa essere fiera di me*

## Sommario

Il gioco del tennis è uno degli sport più popolari e amati al mondo. Per questo motivo l'ITF (Federazione Internazionale Tennis) ha come missione, oltre di preservare le abilità tradizionalmente richieste per giocare, di incoraggiare l'innovazione per rendere il gioco più sicuro ed emozionante.

In questa tesi si vuole esaminare il comportamento dinamico di una racchetta in seguito a un impatto, per comprendere quelli che sono i parametri più influenti e che bisogna tenere sotto controllo. Grande importanza viene data allo smorzamento perché è noto che le vibrazioni trasmesse dalla racchetta al polso siano la causa di molti infortuni, soprattutto tra i giocatori amatoriali. I sistemi smorzanti analizzati sono alcuni presenti in commercio, tra cui l'antivibrazione delle corde e un dispositivo in silicone chiamato Fluendo. In alternativa alle soluzioni già esistenti, si è pensato di utilizzare lo smorzatore granulare per raggiungere gli stessi obiettivi.

Nello specifico viene studiata l'influenza di sistemi di smorzamento sia a livello numerico che a livello sperimentale. Per la parte numerica si sono utilizzati due software distinti: SolidWorks e Yade. Il primo utilizza per la risoluzione il metodo agli elementi finiti e viene usato per simulare il comportamento della racchetta, mentre il secondo usa il metodo agli elementi discreti per analizzare il fenomeno non lineare dello smorzamento granulare.

Per la parte sperimentale in laboratorio, invece, si è realizzata un'analisi comparativa attraverso il calcolo del tempo di riverberazione  $t_{60}$ . Tale soluzione ha permesso di oltrepassare l'ostacolo della ripetibilità delle prove e attraverso un risultato relativo si è potuto fare un confronto tra le varie soluzioni esaminate.

# Abstract (English version)

The game of tennis is one of the most popular and loved sports in the world. For this reason, the ITF (International Tennis Federation) has as its mission, in addition to preserving the skills traditionally required to play, to encourage innovation to make the game safer and more exciting.

In this thesis we want to examine the dynamic behavior of an impact, to understand what are the most influential parameters and which must be kept under control. Great importance is given to damping because it is known that the vibrations transmitted from the racket to the wrist are the cause of many injuries, especially among amateur players. The damping systems analyzed are some commercially available, including the anti-vibration of the strings and a silicone device called Fluendo. As an alternative to the already existing solutions, it was decided to use the granular damper to achieve the same objectives.

Specifically, the impact and the influence of damping systems is simulated both numerically and experimentally. For the numerical part, two distinct software programs were used: Solidworks and Yade. The first uses the finite element method for resolution and is used to simulate the behavior of the racket, while the second uses the discrete element method to analyze the non-linear phenomenon of granular damping.

For the experimental part in the laboratory, on the other hand, a comparative analysis was carried out by calculating the reverberation time  $t_{60}$ . This solution made it possible to overcome the obstacle of the repeatability of the tests and through a relative result it was possible to make a comparison between the various solutions examined.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>10</b>
<b>1 Storia ed evoluzione del tennis</b>	<b>12</b>
1.1 Origine e regole del gioco . . . . .	12
1.2 Parametri chiave di una racchetta . . . . .	16
1.2.1 Centro di massa . . . . .	17
1.2.2 Momenti di inerzia . . . . .	19
1.2.3 Sweet spot . . . . .	20
1.2.4 Tensione delle corde . . . . .	23
1.3 Infortuni nel tennis . . . . .	24
<b>2 Modello analitico di un impatto</b>	<b>27</b>
2.1 Modello di impatto di una pallina su una superficie rigida . . . . .	28
2.2 Modello di impatto tra racchetta e pallina . . . . .	31
2.2.1 Caso racchetta con testa incastrata . . . . .	31
2.2.2 Caso racchetta liberamente sospesa . . . . .	33
<b>3 Smorzamento nelle racchette da tennis</b>	<b>38</b>
3.1 Soluzioni presenti in letteratura . . . . .	39
3.1.1 Antivibrazione per corde . . . . .	39
3.1.2 Fluendo . . . . .	40
3.1.3 Sistema Kinetic della ProKennex . . . . .	41
3.2 Smorzamento granulare . . . . .	43
3.2.1 Definizione . . . . .	43
3.2.2 Formulazione DEM . . . . .	45
3.2.3 Applicazione dello smorzatore granulare ad una racchetta da tennis . . . . .	49
<b>4 Modello numerico di un impatto</b>	<b>51</b>
4.1 Metodo agli elementi finiti . . . . .	51
4.1.1 Importanza delle simulazioni numeriche . . . . .	52
4.1.2 Software utilizzato . . . . .	53
4.2 Creazione modello FEM . . . . .	54
4.2.1 Modello del piatto corde . . . . .	55
4.2.2 Modello del telaio . . . . .	57
4.2.3 Modello dell'antivibrazione . . . . .	59
4.2.4 Modello di Fluendo . . . . .	60
4.3 Simulazione statica . . . . .	61

4.3.1	Piatto corde . . . . .	65
4.3.2	Telaio . . . . .	68
4.4	Analisi modale . . . . .	74
4.4.1	Forme proprie . . . . .	74
4.4.2	Frequenze proprie . . . . .	75
4.5	Simulazione dinamica . . . . .	76
4.5.1	Dinamica del piatto corde ed influenza dell'antivibrazione . . . . .	76
4.5.2	Dinamica del telaio ed influenza di Fluendo . . . . .	80
4.6	Metodo agli elementi discreti . . . . .	83
4.6.1	Software utilizzato . . . . .	83
4.6.2	Simulazioni eseguite . . . . .	85
4.7	Analisi dei risultati ottenuti . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Analisi sperimentale dell'impatto</b>	<b>95</b>
5.1	Strumentazione e configurazione dei parametri . . . . .	95
5.2	Prove effettuate . . . . .	99
5.3	Risultati ottenuti . . . . .	101
5.3.1	Storia temporale . . . . .	102
5.3.2	Analisi in frequenza - PSD . . . . .	106
5.4	Calcolo del $t_{60}$ . . . . .	110
5.4.1	Accenni teorici . . . . .	110
5.4.2	Risultati ottenuti . . . . .	112
5.5	Confronto numerico-sperimentale . . . . .	116
	<b>Conclusioni</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Sviluppi matematici dell'impatto analitico</b>	<b>120</b>
A.1	Modello di impatto di una pallina su una superficie rigida . . . . .	120
A.2	Fondamenti teorici per una trave deformabile . . . . .	124
<b>B</b>	<b>Validazione delle simulazioni agli Elementi Finiti</b>	<b>126</b>
<b>C</b>	<b>Approfondimenti per il calcolo dello smorzamento granulare</b>	<b>134</b>
C.1	Funzioni utilizzate nel codice YADE . . . . .	134
C.2	Calcolo del $c_{eq}$ dal lavoro di uno smorzatore viscoso . . . . .	135
<b>D</b>	<b>Script Matlab per il calcolo del <math>t_{60}</math></b>	<b>136</b>

# Elenco delle tabelle

1.1	Proprietà geometriche di una racchetta da tennis [3]	14
1.2	Momenti di inerzia caratteristici di una racchetta da tennis	19
1.3	Valori equivalenti della tensione delle corde libbre-forza	23
4.1	Proprietà del piatto corde	56
4.2	Proprietà del materiale CFRP (polimero rinforzato con fibre di carbonio)	57
4.3	Proprietà della gomma siliconata	59
4.4	Parametri della mesh del piatto corde	64
4.5	Parametri della mesh del telaio	65
4.6	Risultati simulazione statica del piatto corde al cambiare del livello di tensione con una forza di 700N in posizione centrale	66
4.7	Risultati simulazione statica del piatto corde al cambiare della posizione di impatto con una forza di 700N e una tensione di 245N	66
4.8	Parametri delle molle che simulano il piatto corde	69
4.9	Risultati simulazione statica del telaio al cambiare del livello di tensione con una forza di 700N in posizione centrale	71
4.10	Risultati simulazione statica del telaio al cambiare della posizione di impatto con una forza di 700N e una tensione di 245N	71
4.11	Rigidezza flessionale del telaio al cambiare del livello di tensione delle corde	71
4.12	Livello di tensione massima di Von Mises al cambiare del livello di tensione delle corde e con una forza di 700N in posizione centrale	72
4.13	Livello di tensione massima di Von Mises al cambiare della posizione di impatto con una forza di 700N e una tensione di 245N	73
4.14	Valore delle prime frequenze proprie del piatto corde al variare del livello di tensione	75
4.15	Valore delle prime frequenze proprie del telaio al variare del livello di tensione	76
4.16	Compattezza per diverse percentuali di riempimento	87
4.17	Numero di sfere per diverse percentuali di riempimento	88
4.18	Valore del $c_{eq}$ per le diverse simulazioni effettuate	90
5.1	Proprietà delle palline da tennis usate in fase sperimentale	99
5.2	Legenda dei codici utilizzati per le varie prove effettuate	101
5.3	Risultati delle PSD: frequenze di risonanza e relative ampiezze massime	109
B.1	Parametri della mesh: caso trave incastrata	127
B.2	Frequenze naturali della trave incastrata ricavate analiticamente	130
B.3	Frequenze naturali della trave incastrata ricavate numericamente	130

# Elenco delle figure

1.1	Forma e dimensioni di un campo da tennis . . . . .	13
1.2	Geometria di una racchetta da tennis . . . . .	15
1.3	Evoluzione nel tempo delle racchette da tennis [5] . . . . .	15
1.4	Oscillazioni di una racchetta incastrata al manico (A e B) e liberamente sospesa (C) [9] . . . . .	17
1.5	Rappresentazione dei momenti di inerzia di una racchetta da tennis [3] . . . . .	20
1.6	Posizioni comuni delle varie definizioni di sweet spot [10] . . . . .	21
1.7	Schematizzazione del COP della racchetta . . . . .	22
2.1	Modello viscoelastico di Kelvin – Voigt dell’impatto di una pallina da tennis su una superficie rigida . . . . .	29
2.2	Modello viscoelastico che include uno smorzatore $c_M$ per simulare la forza dovuta al flusso di quantità di moto . . . . .	31
2.3	Modello di un impatto della pallina sul piatto corde [21] . . . . .	32
2.4	Modello di un impatto con una racchetta liberamente sospesa: caso corpo rigido . . . . .	34
2.5	Modello di un impatto con una racchetta liberamente sospesa: caso trave flessibile monodimensionale . . . . .	36
3.1	Esempio di antivibrazione per le corde della Yonex . . . . .	39
3.2	Fluendo: dispositivo di smorzamento delle vibrazioni . . . . .	41
3.3	Sistema Kinetic della ProKennex: posizione delle microsferi prima (A), durante (B) e subito dopo l’impatto (C) . . . . .	43
3.4	Schematizzazione di una struttura con uno smorzatore granulare [31] . . . . .	44
3.5	Schematizzazione: (a) contatto tra due granuli; (b) modello massa-molla-smorzatore per la definizione delle forze di contatto [31] . . . . .	46
3.6	Funzione di Tsuj: relazione tra il parametro $\alpha$ e il coefficiente di restituzione $e$ . . . . .	47
4.1	Modello di una racchetta da tennis: (A) vista superiore, (B) vista frontale . . . . .	54
4.2	Modello del piatto corde di una racchetta da tennis . . . . .	55
4.3	Modellazione dei vincoli e delle tensioni del piatto corde: le frecce in verde indicano i movimenti bloccati dovuti ai vincoli, mentre le frecce in viola simulano la tensione delle corde . . . . .	56
4.4	Modello del telaio di una racchetta da tennis . . . . .	57
4.5	Modellazione del vincolo del telaio di una racchetta da tennis . . . . .	58
4.6	Simulazione dell’influenza del piatto corde sul telaio con elementi molla . . . . .	59
4.7	Antivibrazioni delle corde: (a) modello, (b) posizionamento sul piatto corde . . . . .	60
4.8	Modello di Fluendo: (a) dettagliato, (b) semplificato . . . . .	60

4.9	Modello del telaio con l'aggiunta del dispositivo di smorzamento in gomma posizionato nella parte bassa della gola . . . . .	61
4.10	Posizioni di applicazione della forza sul piatto corde: (C) centrale, (L) laterale, (A) alto . . . . .	62
4.11	Posizioni di applicazione della forza sul telaio: (C) centrale, (A) alto, (B) basso, (L) laterale . . . . .	63
4.12	Mesh del modello del piatto corde . . . . .	64
4.13	Mesh del modello del telaio della racchetta da tennis . . . . .	64
4.14	Deformazione del piatto corde dovuta ad un impatto particolare: $F=700N$ , $T=245N$ , posizione C . . . . .	66
4.15	Livello di sollecitazione del piatto corde dovuta ad un impatto particolare: $F=700N$ , $T=245N$ , posizione C . . . . .	67
4.16	Coefficiente di sicurezza del piatto corde dovuta ad un impatto particolare: $F=700N$ , $T=245N$ , posizione C . . . . .	68
4.17	Deformazione del telaio di una racchetta dovuta ad un impatto particolare: $F=700N$ , $T=245N$ , posizione centrale (C) . . . . .	70
4.18	Livello di sollecitazione del telaio di una racchetta dovuta ad un impatto particolare: $F=700N$ , $T=245N$ , posizione centrale (C) . . . . .	72
4.19	Coefficiente di sicurezza del telaio di una racchetta dovuta ad un impatto particolare: $F=700N$ , $T=245N$ , posizione centrale (C) . . . . .	73
4.20	Prime cinque forme modali del modello del piatto corde . . . . .	74
4.21	Prime cinque forme modali del modello del telaio della racchetta . . . . .	75
4.22	Posizione dei nodi considerati per l'analisi dinamica del piatto corde: (A) caso senza antivibrazione, (B) caso con antivibrazione . . . . .	78
4.23	Risultato analisi dinamica del piatto corde: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza antivibrazione e con l'antivibrazione ( $\zeta=1\%$ )	79
4.24	Risultato analisi dinamica del piatto corde: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza antivibrazione e con l'antivibrazione ( $\zeta=5\%$ )	79
4.25	Posizione dei nodi considerati per l'analisi dinamica del piatto corde: (A) caso senza smorzatore, (B) caso con smorzatore . . . . .	81
4.26	Risultato analisi dinamica del telaio: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza smorzatore e con lo smorzatore ( $\zeta=5\%$ ) . . . . .	82
4.27	Risultato analisi dinamica del telaio: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza smorzatore e con lo smorzatore ( $\zeta=50\%$ ) . . . . .	82
4.28	Funzioni dinamiche fisse presenti nei codici YADE . . . . .	84
4.29	Bilancio energetico all'interno di una simulazione eseguita con YADE [38] . . . . .	85
4.30	Rappresentazione dello smorzatore granulare: prototipo testato (sinistra) e modello CAD (destra) . . . . .	85
4.31	Posizionamento del modello di smorzatore granulare: (A) vincolo di tangenza, (B) distanza dall'estremità inferiore del manico della racchetta . . . . .	86
4.32	Schematizzazione del moto di oscillazione dei contenitori granulari . . . . .	86
4.33	Modello molla-smorzatore ad un singolo grado di libertà (SDOF) . . . . .	88
4.34	Energia dissipata nel tempo per il caso $c=0,50$ . . . . .	89
4.35	Energia dissipata nel tempo per il caso $c=0,25$ . . . . .	89

4.36	Energia dissipata nel tempo per il caso $c=0,05$ . . . . .	89
4.37	Andamento del valore di $c_{eq}$ in relazione del numero di sfere . . . . .	90
4.38	Diagramma di Bode in un intervallo di frequenza [10 100] Hz . . . . .	92
4.39	Diagramma di Bode in un intervallo di frequenza [25 31] Hz . . . . .	92
5.1	Configurazione di vincolo della racchetta nelle analisi sperimentali: morsa (1) e cella di carico statica (2) . . . . .	96
5.2	Racchetta utilizzata nelle analisi sperimentali . . . . .	96
5.3	Posizionamento del dispositivo Fluendo sul telaio della racchetta . . . . .	97
5.4	Elementi utilizzati per simulare lo smorzatore granulare: contenitori cavi e sferette in vetro . . . . .	98
5.5	Palline da tennis utilizzate nella parte sperimentale . . . . .	98
5.6	Posizionamento degli accelerometri sul telaio della racchetta . . . . .	99
5.7	Posizionamento degli impatti della pallina sul piatto corde . . . . .	100
5.8	Fotogrammi di un impatto tra racchetta e pallina testato in laboratorio . . . . .	102
5.9	Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione centrali . . . . .	104
5.10	Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione alta . . . . .	104
5.11	Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione bassa . . . . .	105
5.12	Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione laterale . . . . .	105
5.13	PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione centrale . . . . .	107
5.14	PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione bassa	107
5.15	PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione alta	108
5.16	PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione laterale	108
5.17	Definizione del $t_{60}$ . . . . .	112
5.18	Livelli equivalenti per le due bande di frequenza considerate (prova AC18_1)	112
5.19	Livello equivalente e retta interpolante per la prima banda di frequenza (prova AC18_1) . . . . .	113
5.20	Livello equivalente e retta interpolante per la seconda banda di frequenza (prova AC18_1) . . . . .	113
5.21	Valori di $t_{60}$ ottenuti per la banda di frequenza [10-300]Hz . . . . .	115
5.22	Valori di $t_{60}$ ottenuti nel caso senza banda di frequenza . . . . .	115
A.1	Modello viscoelastico che include uno smorzatore $c_M$ per simulare la forza dovuta al flusso di quantità di moto . . . . .	120
A.2	Schematizzazione della variazione di $d_{CONT}$ e $x_B$ nel tempo . . . . .	121
A.3	Definizione delle sezioni in cui è suddivisa la sfera . . . . .	122
B.1	Modello di una trave incastrata con carico a sbalzo all'estremità . . . . .	126
B.2	Analisi statica della trave: andamento tensione di Von Mises . . . . .	128
B.3	Analisi statica della trave: andamento spostamento . . . . .	128
B.4	Analisi modale della trave: prime cinque forme modali . . . . .	130
B.5	Analisi dinamica della trave: caso (A) . . . . .	132
B.6	Analisi dinamica della trave: caso (B) . . . . .	133
B.7	Analisi dinamica della trave: caso (C) . . . . .	133
D.1	File di testo utilizzato per il calcolo del $t_{60}$ . . . . .	137

D.2 Frammento della funzione utilizzata per il calcolo del  $t_{60}$  . . . . . 138

# Acronimi e simboli utilizzati

ITF	Federazione Internazionale Tennis
DEM	Metodo agli Elementi Discreti
FEM	Metodo agli Elementi Finiti
CFRP	Polimero Rinforzato con Fibre di Carbonio
COP	Centro di percussione (Center Of Percussion)
COR	Coefficiente di restituzione (Coefficient Of Restitution)
YADE	Yet Another Dynamic Engine
CAD	Progettazione assistita dall'elaboratore (Computer-Aided Design)
SDOF	Sistema a un grado di libertà (Single Degree Of Freedom)
MOI	Momenti di inerzia (Moments Of Inertia)
PSD	Densità Spettrale di Potenza
ECRB	Muscolo estensore radiale breve del carpo (Extensor Carpi Radialis Brevis)
$t_{60}$	Tempo di riverberazione [s]
$e$	Coefficiente di restituzione [-]
$\Delta t$	Passo temporale [s]
$m$	Massa [kg]
$k$	Coefficiente di rigidezza lineare [N/m]
$c$	Coefficiente di smorzamento [ $Nm^{-1}s$ ]
$t$	Tempo [s]
$T_C$	Tempo di contatto [s]
$\rho$	Densità [ $kgm^{-3}$ ]
$\nu$	Coefficiente di Poisson [-]
$f_n$	Forza normale [N]
$f_t$	Forza tangenziale [N]
$\mu$	Coefficiente di attrito [-]
$E$	Modulo di Young [Pa]
$K_A$	Rigidezza assiale [N/m]
$K_T$	Rigidezza trasversale [N/m]
$\sigma$	Tensione [MPa]
CS	Coefficiente di sicurezza [-]
$\zeta$	Rapporto di smorzamento [-]
$\gamma$	Compattezza [-]
$\omega$	Pulsazione angolare [rad/s]
$E_{d,YADE}$	Energia dissipata al ciclo [J/ciclo]
$f_s$	Frequenza di campionamento [Hz]
$f$	Frequenza [Hz]
$g$	Accelerazione di gravità [ $ms^{-2}$ ]

# Introduzione

La racchetta da tennis ha registrato continui miglioramenti per soddisfare le esigenze prestazionali dei giocatori professionisti. Nel progettare un qualsiasi elemento che riguarda il gioco del tennis, come ad esempio un sistema di smorzamento, bisogna capire quello che accade esattamente quando la palla si scontra con la racchetta.

Lo scopo di questa tesi è l'identificazione dei parametri chiave relativi alla dinamica di una racchetta da tennis. Il fine viene raggiunto attraverso tre strade differenti, attraverso la modellazione analitica, quella numerica ed infine quella sperimentale. La prima fornisce una rappresentazione globale del fenomeno in maniera semplificata, utile in un primo momento per capire l'articolazione del problema. La seconda strada, invece, serve per sviluppare una maggiore comprensione della realtà del fenomeno. Essa utilizza il metodo di analisi agli elementi finiti (FEM). Una volta ottenuti dei risultati numerici è molto importante confrontarli con il comportamento reale. La sperimentazione in questo modo può essere un sistema di verifica dei risultati ottenuti precedentemente.

I risultati ottenuti saranno una base scientifica nel processo di progettazione del sistema di smorzamento aggiuntivo. L'idea che sta alla base di questa tesi è quella di creare un oggetto da inserire sul telaio della racchetta che ha come scopo quello di smorzare le vibrazioni indotte dagli impatti durante il gioco del tennis. Tali vibrazioni si sono rivelate responsabili della maggior parte degli infortuni dei tennisti. Questa trattazione, nonostante i principi ambiziosi, non ha le pretese di risolvere il problema. Lo studio raccoglie una serie di spunti e risultati preliminari che possono essere sviluppati successivamente e che possono migliorare la sicurezza e il comfort di gioco.

I risultati ottenuti sono soprattutto di tipo comparativo e possono essere sintetizzati in un unico parametro che si è scelto essere il tempo di riverberazione  $t_{60}$ . Tale risultato rappresenta l'intervallo di tempo in cui l'energia vibrazionale decresce di 60 dB dopo lo spegnimento della sorgente.

Non si è arrivati ad una soluzione rigorosa perché si sono riscontrate limitazioni, strumentali e temporali, che non hanno permesso uno studio più approfondito sul fenomeno e sulle possibili soluzioni per risolvere le varie problematiche esistenti. Dopo questa doverosa premessa, che sintetizza lo scopo dello studio e i metodi adottati per raggiungerlo, si passa alla descrizione della struttura della tesi.

Il primo capitolo è soprattutto introduttivo e spiega, in maniera sintetica e semplificata, quelle che sono le origini e le regole dello sport. In questo capitolo si affronta anche il tema

degli strumenti necessari per giocare a tennis e dei relativi materiali e proprietà.

Nel secondo capitolo sono presenti i modelli analitici presenti in letteratura che simulano il reale comportamento di un impatto tra pallina e racchetta. Tali studi evidenziano i parametri più significativi e la loro influenza sulle prestazioni.

Il terzo capitolo, invece, affronta il tema dello smorzamento delle vibrazioni in una racchetta da tennis. Questa sezione riporta alcune soluzioni presenti in commercio e l'idea originale di sfruttare il metodo di smorzamento granulare per raggiungere lo scopo.

Nel quarto capitolo prosegue la trattazione della dinamica della racchetta con la simulazione numerica. Tale simulazione utilizza il programma SolidWork Simulation per studiare il comportamento della racchetta con e senza i possibili sistemi di smorzamento aggiuntivi. Solo per il caso dello smorzatore granulare si è adottato un altro software che si chiama Yade. Tale programma è un framework in ambiente Python ed utilizza il metodo agli Elementi discreti, assolutamente necessario per descrivere un problema di tipo non lineare come il granulare.

Il capitolo cinque, infine, si incentra sulle prove effettuate in laboratorio. Tali prove hanno lo scopo di confermare o meno i risultati ottenuti per via numerica o quelli presenti in letteratura.

# Capitolo 1

## Storia ed evoluzione del tennis

### 1.1 Origine e regole del gioco

**Accenni storici** Il Tennis ha una origine molto antica, per cui non è semplice descrivere dettagliatamente la sua evoluzione. Andando indietro nel tempo si può scoprire che già i Greci durante il Medioevo praticavano un gioco chiamato *sferistiké*, con regole simili al moderno squash. [1]

Ma storicamente si è ritenuto che il vero precursore del tennis così come lo conosciamo oggi è il *jeu de paume*, sport sferistico originario nella Francia del XII secolo. La traduzione di questo nome francese è "gioco di palmo (della mano)" perché inizialmente il regolamento prevedeva che i giocatori colpissero la palla col palmo della mano protetta da un apposito guanto. Si ritiene che fosse stato praticato inizialmente all'interno dei monasteri, in spazi aperti simili a dei cortili.

Da lì in poi iniziò a diffondersi nelle varie corti europee, prendendo il nome di *real tennis* o *royal tennis*. Anche in Italia esisteva una variante simile chiamata pallacorda, di cui si hanno notizie solo a partire dal Rinascimento.

L'etimologia del nome tennis è particolare perché nacque da un errore di pronuncia dei primi tennisti inglesi: durante il XV secolo prima di lanciare la palla il giocatore al servizio doveva gridare l'avvertimento "tenez", termine francese che significa "tenetevi" o "attenzione".

Nel Cinquecento il gioco ha continuato a svilupparsi, tanto che il guanto era diventato una piccola racchetta. Un segno di questo cambiamento è un ritratto del re Carlo IX di Francia del 1552 che ritrae il neonato sovrano con in mano una racchetta. [2]

Il real tennis iniziò a perdere popolarità alla fine del XIX secolo, lasciando spazio al *lawn tennis*, il tennis sull'erba. Fu infatti nel 1874, più precisamente il 23 febbraio, che si è ritenuta essere la "data di nascita" del tennis moderno. In quell'anno il maggiore inglese Walter Clopton Wingfield brevettò alla camera dei lordi di Londra l'invenzione di un nuovo gioco. Si trattava di un campo a forma di clessidra, diviso al centro da una rete sospesa. Lo stesso Wingfield commercializzava tutta la strumentazione per giocare: rete, racchette, palline e

istruzioni.

Anche la numerazione dei punti ha avuto origini poco chiare. Già nel *jeu de paume* vi era la seguente numerazione : 15-30-45, poi il 45 fu abbreviato a 40. Il motivo di questa insolita scelta per contare il punteggio ha incuriosito diversi esperti. Una delle ipotesi più accreditate è che derivasse dal criterio di numerazione francese, dove il numero 60 è un numero chiave (per esempio il numero settanta si dice "soixante-dix", ovvero tradotto "sessanta-dieci"). Un'altra teoria è che derivasse dal limite di scommessa consentito per ogni punto durante la partita, cioè 60 denari e quindi 15 a punto.[1] Altre supposizioni potrebbero essere legate ai quarti d'ora segnati per prendere il tempo.

Grazie alle nuove regole lo sport iniziò a diffondersi a macchia d'olio, tanto che verso la fine del XIX secolo vennero fondati i primi club. Nello stesso periodo ci fu la formazione dei più prestigiosi tornei al mondo, i quattro Grandi Slam. Questi sono l'Australian Open, l'Open di Francia, il torneo di Wimbledon e l'US Open, che ancora oggi restano i tornei più importanti per i giocatori professionisti di tennis.

**Regole** Il regolamento del tennis è piuttosto semplice. Lo sport può essere svolto da due giocatori contrapposti o da due coppie di giocatori contrapposti e il luogo dove si effettua l'incontro è un campo rettangolare. Il campo ha la caratteristica di essere diviso a metà da una rete di altezza 0,914 m e può essere all'aperto o al chiuso e di vari materiali: terra battuta, erba, cemento o materiale sintetico. La forma e le dimensioni caratteristiche di un campo da gioco regolamentare sono riportate nella figura 1.1.

Lo scopo del gioco è di mandare la palla, per mezzo di una racchetta, nella metà campo

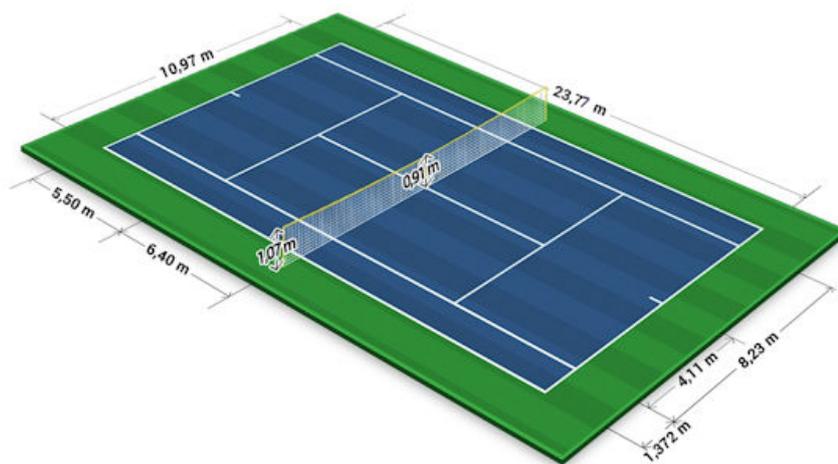


Figura 1.1: Forma e dimensioni di un campo da tennis

opposta. La zona di campo consentita è delimitata da linee in base al tipo di incontro, singolo o doppio che sia. Bisogna quindi che la palla tocchi una volta a terra nel campo avversario in modo l'altro giocatore non riesca a rispondere.

Il regolamento sancisce che la partita sia divisa in set, che possono essere 3 o 5 in base al tipo di torneo. Poi ogni set è composto da 6 giochi ("game"), ciascuno contenente 4 punti. La numerazione dei punti, come accennato prima, è alquanto insolita perché l'ordine di conteggio dei punti è il seguente: si parte da 0, il primo punto vale 15, il secondo 30, poi 40. Al quarto punto poi il giocatore si aggiudica il gioco. In caso di parità, punteggio del game 40 pari, si aggiudica il gioco chi riesce a segnare due punti di seguito.

**Racchetta** Nel gioco del tennis la racchetta è lo strumento più importante perché funge da interfaccia tra il giocatore e la palla. Tale strumento ha avuto una lunga e continua evoluzione per meglio adattarsi alle varie esigenze dei giocatori che possono essere principianti o professionisti. Si è partiti infatti da una racchetta che aveva come materiale principale il legno, poi si è passati alle racchette metalliche ed infine si è arrivati all'utilizzo di materiali compositi.

Le racchette di oggi sono più "potenti", più leggere e con una migliore maneggevolezza rispetto a quelle precedenti. Nonostante ciò ancora oggi tutti gli studiosi del settore ricercano metodi per ottenere un ulteriore miglioramento delle prestazioni della racchetta da tennis.

Le caratteristiche che più si tengono in considerazione nello sviluppo delle racchette sono la "potenza" ed il controllo. La prima è la capacità della racchetta di trasferire velocità alla pallina, mentre la seconda permette di colpire la palla nel punto desiderato ed ottenere quindi una maggiore precisione.

Gli elementi che compongono una racchetta sono i seguenti:

- telaio
  - testa
  - gola
  - impugnatura
- piatto corde

Una rappresentazione della struttura di una racchetta è riportata nella figura 1.2, mentre la tabella 1.1 elenca l'intervallo di valori caratteristici di una racchetta da tennis.

Tabella 1.1: Proprietà geometriche di una racchetta da tennis [3]

L (m)	M (m)	T (m)	S (m)	Massa (kg)	Bilanciamento (m)
0.652–0.811	0.148–0.355	0.240–0.493	0.185–0.308	0.220–0.427	0.30–0.43

I valori geometrici tabulati derivano da uno studio condotto per la stima dei momenti d'inerzia delle racchette. Come si può notare dalla larghezza dell'intervallo dei valori, si sono misurate una vasta gamma di racchette appartenenti ad epoche storiche diverse, databili dal 1874 al 2017. Con il termine bilanciamento si intende la posizione del centro di massa della racchetta, misurata a partire dall'estremità inferiore del manico. Tali valori possono essere

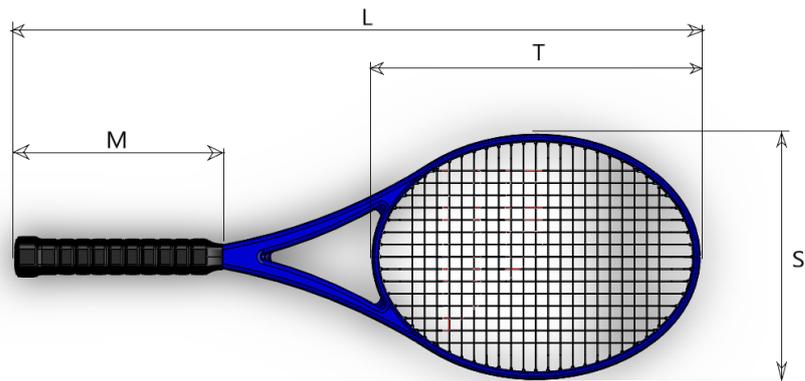


Figura 1.2: Geometria di una racchetta da tennis

utili per ripercorrere l'evoluzione di questo oggetto.

In più di cento anni di storia la costruzione delle racchette ha subito grandi cambiamenti. Dalle prime realizzate in strisce laminate di frassino o legno di faggio, che avevano una massa elevata (circa 0,4 kg), si passati solo negli anni '60 del secolo scorso a racchette in acciaio e alluminio.

Un cambiamento decisivo nella costruzione delle racchette si ebbe negli anni '70 quando venne brevettata una racchetta di dimensioni maggiori. Si trattava della Prince "Classic", in alluminio, che aveva un'area di impatto aumentata dell'80%. Tale evoluzione è rappresentata nella figura 1.3, dove sono riportate racchette di diverse epoche storiche, tra cui la Prince "Classic" (e).



Figura 1.3: Evoluzione nel tempo delle racchette da tennis [5]

Il vantaggio di avere una racchetta con una testa di dimensioni maggiori era di avere maggiori velocità di rimbalzo della palla e una zona di impatto ottimale maggiore.

Negli anni '80 si è continuata la sperimentazione introducendo nuovi materiali compositi, tra cui grafite, fibra di vetro, kevlar e boro. In questo modo si sono ottenute racchette più leggere, rigide e con una velocità di rimbalzo della palla maggiore. I cambiamenti sono continuati, tanto che alcune racchette sono state allungate fino ad una lunghezza complessiva di 0,81 m. Successivamente l'ITF ha imposto dei limiti sia sulla lunghezza che sulla larghezza (73,7 x 31,8 cm). [6]

Un'altra caratteristica del telaio è l'essere una struttura cava. Questa proprietà è spiegata dall'evidenza scientifica che la rigidità a flessione di una struttura cava è maggiore di quella a sezione piena avente la stessa massa. In questo modo, se si volesse conservare una stessa rigidità, con una struttura cava si otterrebbe una notevole riduzione di peso.

Anche le corde della racchetta hanno una grande influenza nel gioco. Il loro scopo principale è quello di assorbire l'energia cinetica dalla velocità relativa tra palla e racchetta, trasformarla in energia potenziale (energia immagazzinata di deformazione elastica), e quindi restituire quell'energia alla palla sotto forma di una velocità della palla in uscita o di energia cinetica. [7]

Esse possono essere di materiali diversi, in numero diverso e anche con un livello di tensione differente. Analizzando il comportamento di una singola corda, essa si comporta come una stringa e la sovratensione dovuta alla deformazione durante l'impatto è trascurabile rispetto alla tensione iniziale.

Ne esistono di quattro tipologie in base al tipo di materiale usato. Sono riportati in seguito i vari materiali in ordine crescente di rigidità:

- budello naturale
- nylon
- poliestere
- kevlar

Ciascuna tipologia è disponibile in un range di diametri che va da 1,20 mm a 1,40 mm. Le corde in budello sono le più costose, per questo sono la scelta soprattutto dei alcuni giocatori professionisti. Ma il materiale più utilizzato è il nylon. Questo avviene perché rappresenta un buon compromesso tra il costo e le proprietà delle corde, portando quindi ad un ottimo livello di "potenza", controllo, comfort e durata.

## 1.2 Parametri chiave di una racchetta

Il tema di questa tesi è la dinamica delle racchette da tennis, ovvero lo studio del movimento e quindi anche delle vibrazioni. L'obiettivo di questo capitolo è in particolare quello di indagare i parametri che contribuiscono al trasferimento di urti e vibrazioni al giocatore. E' importante comprendere anche il tipo di caratteristiche biomeccaniche che aggravano gli infortuni come l'epicondilite laterale, il cosiddetto "gomito del tennista".

Le vibrazioni durante il gioco del tennis dipendono da una serie di parametri:

- proprietà dei materiali: massa, rigidità e distribuzione della massa
- frequenze di vibrazione
- punto di impatto
- durata dell'impatto

Un ulteriore aspetto da considerare nella dinamica è la condizione di vincolo dell'oggetto in esame. La figura 1.4 considera due tipologie di condizioni al contorno: l'incastro ed il vincolo libero-libero.

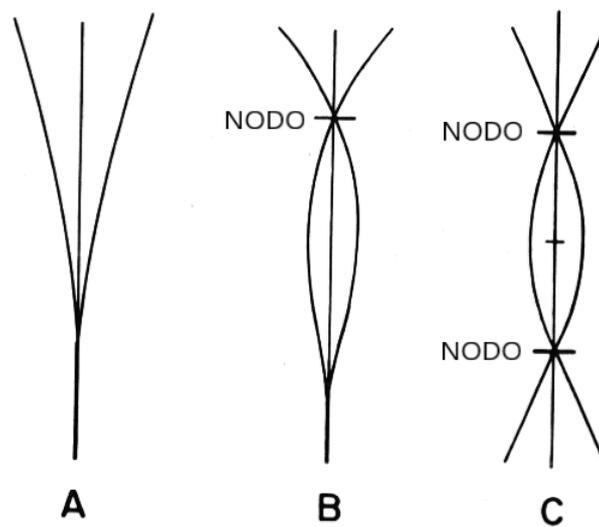


Figura 1.4: Oscillazioni di una racchetta incastrata al manico (A e B) e liberamente sospesa (C) [9]

Una convinzione radicata sin dalle origini del tennis è che la forza di presa, in particolare l'uso di una presa salda durante l'impatto, produrrebbe una maggiore velocità di rimbalzo della palla. Questo potrebbe portare ad immaginare che il vincolo più rappresentativo della realtà sia l'incastro. Tuttavia diverse ricerche supportano l'ipotesi che le forze della mano non influenzino in modo significativo la dinamica di un impatto tennistico, quindi la racchetta si comporta più come se non fosse trattenuta durante l'impatto con la palla.

Perciò il vincolo che rappresenta più fedelmente la realtà è quello libero-libero [9].

Una volta definito il vincolo si passa alla descrizione di diversi parametri che influiscono sulla dinamica del gioco del tennis e che saranno presenti nelle successive trattazioni.

### 1.2.1 Centro di massa

Le racchette, così come tutti gli oggetti, possiedono un loro centro di massa, la cui posizione è indicata nel gergo tennistico con il termine bilanciamento ("balance" in inglese). Tale punto non corrisponde necessariamente alla metà della lunghezza dell'oggetto in quanto la

struttura della racchetta ha una forma complessa e con una diversa distribuzione della massa.

Il bilanciamento misura il punto in cui è posizionato il centro di massa e quindi la posizione dove si potrebbe immaginare concentrata tutta la massa della racchetta. La diversa posizione del centro di massa determina tre tipologie di racchette:

- bilanciate verso il manico ("head light")
- bilanciate intorno alla metà della lunghezza del telaio ("even balance")
- bilanciate verso la testa ("head heavy")

Per capire la differenza tra le varie tipologie elencate, si può immaginare la racchetta come un martello. [8] La tipologia sbilanciata verso la testa ha un comportamento simile ad un martello preso per il manico: all'inizio è più difficile muoverla ma poi la racchetta proseguirà il movimento da sola per colpire la palla più velocemente e quindi con maggiore potenza. Per questo motivo si tratta soprattutto di racchette leggere, altrimenti la maneggevolezza sarebbe limitata, e quindi più adatta per colpi da fondo campo.

La tipologia di racchette sbilanciate verso il manico, invece, è simile a maneggiare un martello al contrario, prendendolo dalla testa. Con questa tipologia si ha una migliore maneggevolezza ma una minore potenza del colpo perché la maggior parte della massa è concentrata nella mano. Tali racchette sono più utili per giocare le volèe e i colpi di tocco.

Non considerando quelle che possono essere le preferenze personali, le racchette "head heavy" hanno un difetto da considerare: essendo leggere e rigide aumentano lo shock durante l'impatto, che potrebbe portare ad un aumento degli infortuni. Per questo motivo tali racchette, anche se permettono di ottenere una velocità della palla maggiore, sono da scartare perché potrebbero compromettere la nostra salute.

Un ulteriore aspetto da considerare relativo alla posizione del centro di massa è il momento della forza, che esprime un indice di affaticamento nel tenere una racchetta in posizione parallela al suolo. Tale momento è definito come la forza peso racchetta moltiplicata per il braccio di leva. Confrontando due racchette della stessa lunghezza e con la stessa massa ma diverso bilanciamento, si nota che quella con bilanciamento più spostato verso la testa sembra più pesante perché possiede un braccio di leva maggiore. Se il momento della forza è maggiore significa che si farà più fatica a maneggiare una racchetta, dato che molto spesso durante la partita la racchetta viene tenuta in posizione parallela al suolo. Nel caso del servizio, invece, questo aspetto è ininfluenza perché la racchetta è in posizione verticale. Questo è un ulteriore motivo per preferire le racchette bilanciate verso il manico.

Un ultimo aspetto da chiarire relativo al bilanciamento è il metodo di misurazione, che cambia tra i paesi dell'Europa continentale e quelli anglosassoni. In Europa continentale viene misurato in centimetri e a partire dalla base del manico, quindi ci dà un'informazione della posizione del centro di massa senza considerare la lunghezza della racchetta. Nei paesi anglosassoni, invece, si usano i termini: "head light" e "head heavy". Il primo si usa per indicare che il centro di massa è al di sotto della metà della lunghezza della racchetta, mentre il secondo indica che è al di sopra, quindi bilanciata verso la testa. Nel caso di bilanciamento

a metà della racchetta si usa il termine "even balance", bilanciamento neutro. Come scala di misura nei paesi anglosassoni si usa l'ottavo di pollice (circa 3 mm), invece del centimetro come nell'Europa continentale.

Il vantaggio del metodo anglosassone è che considera dei valori di bilanciamento a partire dal centro di massa, dandoci informazioni relative alla tipologia di bilanciamento. Quello europeo ci dice soltanto la distanza dall'estremità del manico, anche se la maggior parte delle racchette ha una lunghezza standard di 68,58 cm. Per quanto riguarda i valori di bilanciamento consigliati bisogna pertanto scegliere un valore di 31/31,5 centimetri per le racchette non incordate. [8] A tale valore si ricorda che l'introduzione delle corde sposta il bilanciamento di circa 1 cm verso la testa. Questi valori possono cambiare in base alle preferenze personali, ma bisogna cercare di non aumentare troppo il valore di bilanciamento per non ricadere nel caso di racchette "head heavy".

## 1.2.2 Momenti di inerzia

Una proprietà della racchetta che ha interessato ingegneri e progettisti sportivi nella valutazione delle prestazioni è quella dei momenti di inerzia di massa.

I tre momenti di inerzia (MOI) centrali di una racchetta, figura 1.5 nella pagina successiva, sono:  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ . Il primo viene detto trasversale, il secondo laterale ed il terzo polare. Un aumento di  $I_y$  determina una maggiore resistenza alla rotazione per impatti laterali, mentre un aumento di  $I_x$  può portare ad una maggiore velocità della pallina e quindi ad una potenza della racchetta più elevata. [3]

Per calcolare i valori dei momenti di inerzia attorno ad altri assi si può usare il teorema dell'asse parallelo. In questo modo si riescono a ricavare i MOI attorno ad un asse passante per l'impugnatura, che è più rappresentativo dell'asse attorno al quale il giocatore fa oscillare la racchetta. I nuovi momenti di inerzia sono:  $I_{x'}$  e  $I_{z'}$ . Se, invece, l'asse si trova a circa 10 cm dall'estremità del manico e parallelo all'asse laterale del piano, si definisce un altro momento di inerzia con  $I_s$ , detto anche "peso oscillante" perché indica quanto è difficile accelerare la racchetta attraverso uno swing.

Per quanto riguarda i loro valori, uno studio trattato in [3] ha misurato i momenti di inerzia di 416 racchette dal 1874 al 2017. I valori trovati, presenti in un intervallo molto ampio dato la diversità dei modelli analizzati e la diversa epoca storica di appartenenza, sono riportati nella tabella 1.2.

Dall'analisi delle racchette si è notato che  $I_x$  e  $I_z$  erano di grandezza simile, per questo si è

Tabella 1.2: Momenti di inerzia caratteristici di una racchetta da tennis

$I_{x'}$ ( $kgm^2$ )	$I_y$ ( $kgm^2$ )
0.041–0.0745	0.00058–0.0018

deciso di evitare di misurare entrambi data la moltitudine di racchette. Altri aspetti interessanti legati ai momenti di inerzia è che il valore di  $I_y$  risultava proporzionale al prodotto tra

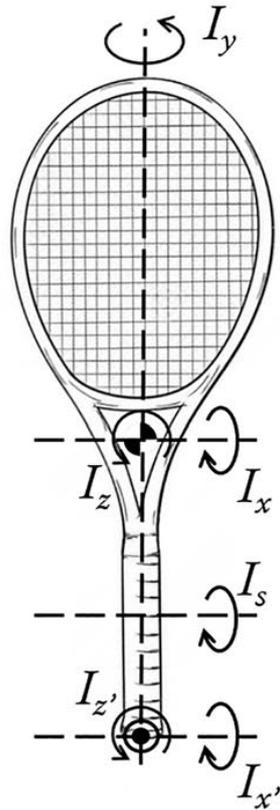


Figura 1.5: Rappresentazione dei momenti di inerzia di una racchetta da tennis [3]

la massa di una racchetta e la larghezza della testa al quadrato e che ovviamente la tensione delle corde si è rivelata poco influente. [4]

Tutti questi valori possono essere utili in un'analisi del modello CAD che verrà trattato nel capitolo 4, per verificare se le proprietà del modello si avvicinano alla realtà o meno.

### 1.2.3 Sweet spot

Lo "sweet spot" è un termine che viene comunemente usato dai giocatori per indicare la zona ottimale di impatto della palla sulla superficie della racchetta. Si tratta quindi della zona caratterizzata da prestazioni ottimali della racchetta e minimo disagio.

Essendo legata alla percezione dei vari giocatori, la posizione esatta dello sweet spot non è ancora stata risolta, per questo motivo si è soliti ritenere che sia la combinazione delle seguenti quattro definizioni:

- centro di percussione (COP)
- nodo
- area con coefficiente di restituzione (COR) più elevato
- punto morto ("dead spot")

La figura 1.6 indica la distribuzione di queste regioni per le racchette più comuni.

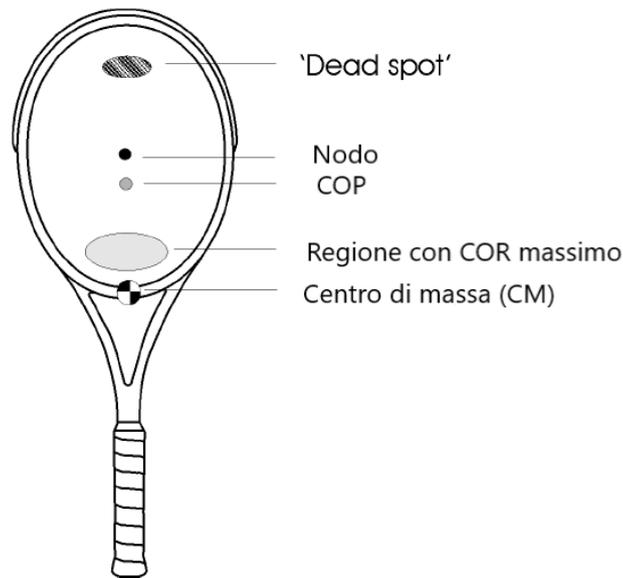


Figura 1.6: Posizioni comuni delle varie definizioni di sweet spot [10]

**Centro di percussione** Il COP è una zona della superficie della racchetta associata alla minima quantità di shock che arriva sulla mano del giocatore. Una rappresentazione di questo concetto è riportata nella figura 1.7, dove si nota che per ciascun tipo di impatto esistono due movimenti rigidi accoppiati: una rotazione attorno al centro di massa e una traslazione della racchetta. Se l'impatto avviene nel centro di percussione, lo spostamento della parte bassa del manico si annulla, con conseguente assenza di forza di reazione sull'impugnatura e quindi nessuno "shock" percepito durante l'impatto. Tale posizione non è unica, ma dipende da dove viene impugnata la racchetta.[20]

**Nodo** Il nodo è legato al concetto di vibrazione minima. Quando un corpo viene eccitato, inizierà a vibrare alle sue frequenze naturali e nelle forme modali corrispondenti. Le frequenze e i modi propri dipendono dalla condizione di vincolo, come rappresentato per esempio nella figura 1.4. Le forme modali hanno solitamente uno o più punti di non oscillazione, chiamati nodi. Tra le varie forme modali che una struttura può possedere, bisogna limitare le vibrazioni del primo modo perché è l'unico che assorbe energia significativa durante l'impatto.

Se quindi l'impatto tra racchetta e pallina avviene in corrispondenza della posizione del nodo corrispondente, tale colpo non ecciterà il modo fondamentale e quindi la vibrazione sarà ridotta.

**Area con COR più elevato** Il coefficiente di restituzione non è altro che un indicatore dell'energia restituita dopo l'impatto, ovvero il rapporto tra la velocità finale e quella iniziale durante l'impatto. In [11] viene riportato che per un impatto tipico il COR vale circa 0,8.

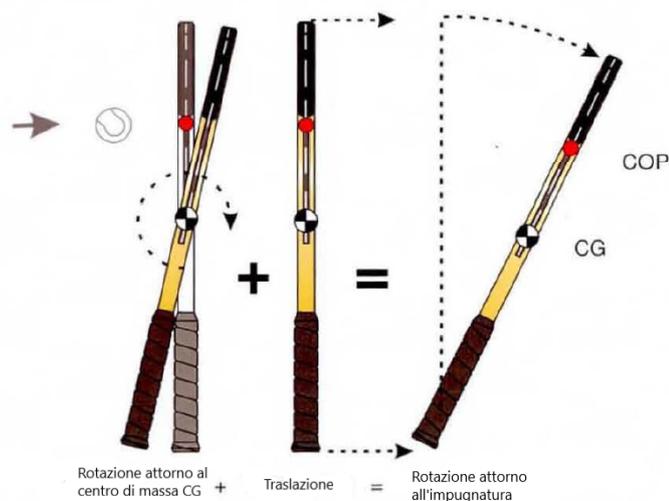


Figura 1.7: Schematizzazione del COP della racchetta

Il motivo per cui la velocità in uscita è minore di quella in entrata si può spiegare in una serie di fattori:

- perdita di energia per la deformazione della palla e del piatto corde
- perdita di energia per l'oscillazione della palla dopo l'impatto
- energia trasformata in vibrazione interna del telaio

Hatze (1993), attraverso un modello matematico, ha quantificato il contributo di ciascuno di questi fattori: l'energia persa attraverso le corde durante l'impatto corrisponde al 2-4%, quella persa a causa della deformazione della palla è circa il 15%, mentre la maggior parte di energia persa (56-65%) avviene dopo l'impatto per l'oscillazione della palla e per la vibrazione del telaio.[11]

Maggiore è il coefficiente di restituzione, più elevata è la velocità della palla al rimbalzo. Siccome è improbabile che i giocatori colpiscano la palla esattamente nel punto con COR più alto, si è soliti considerare una zona con coefficiente di restituzione elevato. Se si riesce a colpire tale zona si ottiene come risultato una maggiore velocità di uscita della pallina.

**Punto morto** Il punto morto ("dead spot"), invece, è legato alla massima velocità durante il servizio. Si tratta di un punto vicino alla punta della racchetta, dove nei normali test di impatto si trova una velocità di rimbalzo molto bassa, ma una velocità di rinculo elevata.

Nel servizio la situazione si inverte perché si tratta di una racchetta in movimento che colpisce una pallina ferma, determinando un'elevata velocità di quest'ultima. Nonostante tale posizione determini un aumento delle vibrazioni e quindi di affaticamento, la posizione di impatto del punto morto viene preferito alle regioni del COP o del COR perché determina una velocità di impatto maggiore.

Dopo aver analizzato brevemente queste definizioni, si può affermare che il concetto di sweet spot è più l'insieme di diverse aree che un singolo punto. Il feedback acustico può essere un metodo per capire se si è impattata la palla correttamente, in modo da ottenere un tiro più preciso, vibrazioni contenute e quindi maggiore comfort.

Da qui si deduce che l'introduzione delle racchette oversize, ovvero con un aumento delle dimensioni della testa, ha anche aumentato la superficie di questa zona favorevole e quindi migliorato la qualità del tennis.

#### 1.2.4 Tensione delle corde

La tensione delle corde di una racchetta da tennis è la forza di trazione che viene applicata sulla corda in fase di incordatura. Quindi non è altro che una forza applicata ad entrambe le estremità della corda e che mette sotto tensione anche l'ovale del telaio.

Una tensione diversa modifica l'impatto della palla, per questo i tennisti possono selezionare una tensione di corda desiderata. Una tensione delle corde più bassa si traduce in una minore rigidità nel piano della corda e in una maggiore deformazione quando si colpisce la palla.

Generalmente, un intervallo accettabile di tensione è specificato da qualche parte sul telaio della racchetta; finché la tensione della stringa si trova all'interno di questo intervallo, non c'è bisogno di preoccuparsi di prestazioni decrescenti. Una maggiore tensione rende maggiore la stabilità nel piano di corda, il che significa anche un migliore controllo. Per questo motivo, una maggiore tensione delle corde è spesso preferita dai giocatori avanzati che possono colpire duramente la palla e non richiedono l'aiuto di una racchetta "potente".

Di solito la tensione delle corde si misura in Newton o in kilogrammi, mentre nei paesi anglosassoni in libbre (Pounds). La tabella 1.3 mostra i livelli di tensioni applicati a ciascuna corda e la relativa equivalenza in Newton. Per ottenere il valore in kg basta dividere la forza in Newton per il valore dell'accelerazione di gravità ( $g=9,81 \text{ m/s}^2$ ).

Tabella 1.3: Valori equivalenti della tensione delle corde libbre-forza

Libbre [lb]	Forza [N]
40	178
45	201
50	223
55	245
60	267
65	290
70	312

Alcuni studi mostrano che la maggior parte dei giocatori non riesce a cogliere una differenza in tensione di 10 lb, sia in termini di sensazione che di performance della racchetta. [7]

Come è facilmente intuibile non tutte le racchette vibrano allo stesso modo. L'intensità delle vibrazioni può essere dovuto sia alla rigidità del telaio che al livello di tensione delle corde. Se da un lato ci aspettiamo che una racchetta più rigida vibri di meno di una più flessibile, dall'alto non è così scontato immaginare che una racchetta incordata ad alta tensione vibri di più di una a bassa tensione. Potrebbe quindi sembrare contro intuitivo che una struttura come il piatto corde vibri di più se è più rigida. Questo accade perché il tempo di contatto della pallina su corde a bassa tensione è maggiore, perciò l'effetto smorzante è maggiore sia per le vibrazioni del telaio che per quelle del piatto corde. [7] Si può concludere che il minimo livello di vibrazioni si ottiene usando una racchetta rigida incordata ad una bassa tensione.

Un altro effetto della tensione delle corde è il seguente: una tensione bassa dà leggermente più potenza, mentre una tensione alta dà leggermente più controllo. Esiste anche una relazione tra il COR e la tensione delle corde: se quest'ultima diminuisce, si alza anche il coefficiente di restituzione. [12] Ciò è dovuto al crescere delle deformazioni della palla e quindi all'aumento del tempo di contatto.

### 1.3 Infortuni nel tennis

Il trasferimento di energia nella pallina induce una forza sulla racchetta che causa delle vibrazioni nel manico. Una racchetta è ben progettata se:

- massimizza le prestazioni
- riduce al minimo gli infortuni

Se ci sono troppe vibrazioni nella racchetta o nelle corde, queste vibrazioni possono essere trasportate lungo il manico della racchetta fino al braccio e causare lesioni come il gomito del tennista. [13] Per l'infortunio al gomito, che è un evento molto comune nel tennis, sono le vibrazioni a bassa frequenza che hanno un effetto negativo sulle articolazioni umane. [12]

Ad influire sulle vibrazioni è senz'altro il punto in cui si colpisce la pallina: per esempio la forza risultante sulla mano del giocatore è maggiore se si colpisce il punto morto (Dead spot) rispetto allo sweet spot. In generale sono gli impatti fuori centro a sviluppare questo tipo di lesioni.

Un altro aspetto da considerare nella prevenzione degli infortuni è il livello di tensione delle corde. Aumentando la tensione si è visto che diminuisce sia il tempo di contatto con la sfera che il coefficiente di restituzione. Ulteriori conseguenze sono la riduzione dello spostamento del piatto corde e del telaio, ma anche un aumento della possibilità del giocatore di avere il gomito del tennista. [12]

Una credenza sbagliata è che gli ammortizzatori delle vibrazioni delle corde, i piccoli oggetti in gomma che si posizionano nella parte bassa dell'ovale, possano in qualche modo ridurre la trasmissione degli urti e vibrazioni all'avambraccio. Tale teoria è stata smentita da numerosi studi, tra cui [14].

L'effetto di tali oggetti è quello di attenuare le vibrazioni ad alta frequenza del piatto corde,

che non sono collegate agli infortuni .

Nel tennis moderno l'aumento della velocità di gioco, dovuta ad miglioramento dei materiali e dell'attrezzatura, ha portato anche ad un aumento delle forze fisiche impartite al giocatore. Si ritiene che l'aumento di queste forze sia la causa dello sviluppo e dell'aggravamento delle lesioni. L'infortunio più comune derivante da queste forze di impatto è l'epicondilita laterale (gomito del tennista).

**Epicondilita laterale** Utilizzando una terminologia medica l'epicondilita laterale può essere definita come il dolore al gomito derivante dalla patologia (tendinosi) del tendine estensore del carpo radiale breve (ECRB), che si trova vicino all'origine dell'estensore, in corrispondenza dell'epicondilo laterale. [17]

L'utilizzo eccessivo degli estensori del polso causa micro strappi all'origine del tendine (epicondilo laterale) dell'estensore del polso. I micro strappi si generano nelle prime fasi della lesione e si sviluppano in lesioni più grandi man mano che la lesione si aggrava. Il fattore dolore della tendinite è il problema principale per il tennista in quanto porta ad un aumento della fatica e alla perdita del controllo della racchetta durante il gioco. [16]

Chiamata anche "gomito del tennista", può essere semplificato con il dolore intorno al gomito che causa disagio quando si gioca a tennis, dovuta dal trasferimento di urti e vibrazioni della racchetta. Questo infortunio è quindi causato da grandi forze di impatto trasferite in modo ripetitivo durante il gioco attraverso l'impugnatura della racchetta. Secondo alcuni studi colpisce il 40-50% dei giocatori amatoriali [15].

Infortuni di tale natura possono essere gestiti in maniera ottimale solo se le cause che li hanno prodotti sono comprese fino in fondo. Il dolore avvertito dal giocatore è causato dall'uso eccessivo degli estensori del polso nell'avambraccio che causa tendinite. Il trasferimento di urti e vibrazioni si verifica quando i muscoli dell'avambraccio sono contratti in quanto, avendo una quantità limitata di movimento aggiunto per assorbire le vibrazioni, trasferiscono l'energia all'origine del tendine nell'epicondilo laterale del gomito.

Tipi di colpi specifici, come il rovescio, consentono un maggiore grado di trasferimento di energia al giocatore in quanto isolano biomeccanicamente i tendini sensibili dell'avambraccio durante il colpo. I giocatori di tennis alle prime armi sono più predisposti a questo tipo di infortunio perchè tendono a utilizzare cinematiche diverse, come ad esempio una maggiore contrazione dei muscoli estensori del polso, rispetto ai giocatori esperti.

Un metodo per limitare il rischio di infortunio è quello di effettuare il rovescio a due mani, per limitare l'affaticamento sugli estensori del braccio. [17]

Oltre ad agire sulla tecnica di esecuzione dei colpi, si possono ridurre gli infortuni agli arti superiori progettando dei sistemi di smorzamento sulla racchetta che limitino la trasmissione degli urti e delle vibrazioni al giocatore. Ricerche precedenti hanno dimostrato che la mano ha un effetto profondo sulla risposta dinamica della racchetta in termini di smorzamento delle vibrazioni: più è stretta la presa della racchetta, maggiore è il livello di vibrazioni

trasferite alla mano e all'avambraccio del giocatore.

Tuttavia tale influenza è difficilmente quantificabile perché varia in base al tipo di giocatore e anche durante tutta la partita. In questa tesi si trascurerà la presenza della mano come effetto smorzante e si faranno delle valutazioni soprattutto comparative legate all'ampiezza e alla frequenza delle vibrazioni generate dall'impatto.

## Capitolo 2

# Modello analitico di un impatto

Il gioco del tennis cambia in continuazione. Negli ultimi anni la trasformazione più significativa è legata alla velocità durante il gioco, aumentata sia nel servizio che nei colpi da fondo campo. Questo cambiamento può essere dovuto a tanti fattori, tra cui sicuramente un maggiore atletismo dei vari giocatori. Tuttavia la Federazione Internazionale Tennis (ITF) è spesso stata criticata per non aver imposto un controllo sulle varie attrezzature dei giocatori.[18]

Il ruolo dell'ITF è infatti quello di preservare la natura del gioco, svolgendo ricerche per accrescere la conoscenza sulla meccanica del gioco. Ingegneri e scienziati devono perciò capire cosa succede esattamente quando la palla si scontra con la racchetta. Per questo è importante avere una comprensione delle dinamiche della racchetta e delle prestazioni dovute a diversi parametri.

Lo scopo di questo capitolo è descrivere i modelli presenti in letteratura atti a simulare quello che solitamente avviene quando una pallina si scontra contro una racchetta. Con tale modello si potrebbe prevedere una risposta dinamica degli elementi coinvolti: pallina, piatto corde e telaio della racchetta.

Bisogna considerare che un tipo di impatto come quello che avviene durante il gioco del tennis è un complesso sistema non lineare, che coinvolge un numero elevato di variabili. Per ottenere un modello che si avvicini alla realtà bisogna procedere per gradi, in modo da capire l'influenza dei vari fattori inizialmente partendo da una condizione semplificata.

Si parte allora dall'analisi dell'impatto di una pallina da tennis contro una superficie rigida. Questa fase iniziale serve per capire soprattutto i parametri della pallina e il modo corretto per modellarli.

Successivamente si considera anche l'influenza del piatto corde, immaginando che la testa della racchetta sia incastrata lungo il suo perimetro. Per le prime due fasi si considera un modello visco-elastico, che utilizza una combinazione di elementi molla e smorzatori per rappresentare rispettivamente la rigidezza e lo smorzamento dei componenti dell'impatto.

Infine si può arrivare a considerare anche il telaio della racchetta ed ottenere un modello

maggiormente completo. La modellazione del telaio può essere svolta in due modi differenti: in un primo momento può essere considerato come un elemento rigido e dopo si può usare un elemento flessibile. Il modello di corpo rigido è accurato solo per impatti al centro del piatto corde, mentre il modello di trave flessibile unidirezionale permette di ottenere i modi di vibrazione e la posizione dei nodi.

## 2.1 Modello di impatto di una pallina su una superficie rigida

Gli elementi che sono coinvolti in un impatto sono i seguenti:

- pallina da tennis
- piatto corde
- telaio della racchetta
- corpo umano

In questo paragrafo si analizza la pallina da tennis e la sua modellazione per un impatto contro una superficie rigida. Prima di simulare il suo comportamento, è bene effettuare una breve definizione dell'oggetto che si vuole considerare. Si tratta di un oggetto sferico con una struttura cava ottenuto attraverso un processo di vulcanizzazione della gomma. Per poter essere approvato deve soddisfare determinate caratteristiche. Ne esistono di quattro tipologie diverse, ma in seguito vengono riportati i requisiti solo per quelle standard, dette anche di tipo 2:

- come materiale si utilizza la gomma, mentre il rivestimento è in feltro. Una copertura del genere crea attrito e quindi più resistenza all'aria, in modo da diminuire la velocità e l'altezza del rimbalzo
- massa compresa tra 56 e 59,6 grammi
- diametro compreso tra 6,541 e 6,858 centimetri
- rimbalzo compreso tra 134,62 e 147,32 centimetri quando viene fatta cadere su una superficie piana e rigida da una altezza di 254 cm
- deformazione all'arrivo a terra compresa tra 0,559 e 0,737 cm e deformazione dopo il contatto compresa tra 0,8 e 1,08 cm quando il carico applicato è di 8,165kg

Definito a grandi linee l'oggetto di studio, si può passare alla sua modellazione utilizzando un modello visco-elastico. Come si può vedere dalla figura 2.1, la pallina è simulata da una molla e da uno smorzatore posti in parallelo.

In questo modo si ottiene un modello semplificato dove l'impatto tra la pallina e la superficie rigida è solo di tipo normale. Lo scopo di questo modello è la comprensione del meccanismo di impatto nel caso più semplice possibile, quando i parametri di rigidità e smorzamento sono costanti. I risultati che si possono ottenere da questo modello sono la forza

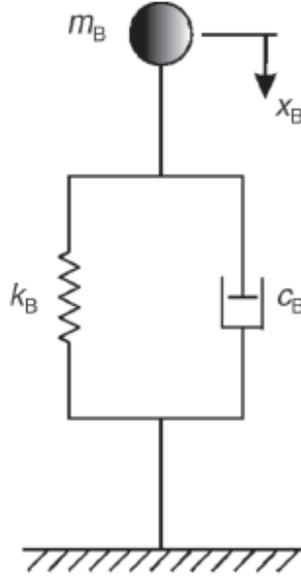


Figura 2.1: Modello viscoelastico di Kelvin – Voigt dell’impatto di una pallina da tennis su una superficie rigida

che agisce sulla pallina, il moto del centro di massa della pallina durante l’impatto e anche la sua velocità dopo l’impatto. L’equazione del moto del sistema è la seguente:

$$m_B \ddot{x}_B + c_B \dot{x}_B + k_B x_B = 0 \quad (2.1)$$

dove con  $m_B$  si indica la massa della pallina,  $c_B$  è il coefficiente di smorzamento associato al materiale,  $k_B$  è la rigidezza lineare della pallina, mentre i valori  $\ddot{x}_B$ ,  $\dot{x}_B$  e  $x_B$  rappresentano rispettivamente l’accelerazione, la velocità e lo spostamento del centro di massa della pallina da tennis in riferimento alla superficie rigida.

Data la condizione al contorno di  $x_B = 0$  al tempo  $t = 0$ , la soluzione dell’equazione del moto è la seguente:

$$x_B = ae^{-bt} \sin \omega t \quad (2.2)$$

in cui i valori dei parametri  $a$  e  $b$  sono ricavati dai valori sperimentali di  $T_C$  (tempo di contatto) e  $COR$  (coefficiente di restituzione).

Le proprietà di rigidezza e di smorzamento della pallina potrebbero essere definite usando delle funzioni della deformazione e della velocità della pallina. In questo caso semplificato sono riportate i valori di  $k_B$  e  $c_B$  che rimangono costanti durante l’impatto, come effettuato nel riferimento [19].

$$k_B = m_B \frac{\pi^2}{T_C^2} \quad (2.3)$$

$$c_B = -2 \frac{m_B}{T_C} \ln(COR) \quad (2.4)$$

in cui  $T_C$  è il tempo di contatto, mentre  $COR$  è il coefficiente di restituzione. Quest’ultimo, come descritto nel primo capitolo, si calcola con la seguente formula:  $COR = V_B'/V_B$ , dove

$V_B'$  corrisponde alla velocità della pallina dopo l'impatto, mentre  $V_B$  alla velocità prima dell'impatto. I valori di  $c_B$  e  $k_B$  sono calcolati analiticamente utilizzando dei valori di  $T_C$  e di  $COR$  ottenuti sperimentalmente con determinate velocità di impatto e per diversi tipi di palle. Come risultati significativi di questo modello si è ottenuto che [18]:

- il parametro di rigidità aumenta con l'aumentare della velocità di impatto e quindi la rigidità strutturale della palla aumenta se la deformazione è maggiore
- la forza che agisce sulla pallina non ha un andamento costante. Considerando una velocità  $V_B$  di 28 m/s, cioè 100 km/h, raggiunge un valore massimo vicino a 1500 N
- il tempo di contatto è dell'ordine dei millisecondi, per esempio considerando  $V_B$  di 28 m/s,  $T_C$  è di circa 3,5 ms
- il coefficiente di smorzamento  $c_B$  aumenta con l'aumentare della velocità di impatto della palla.[19] Questo aumento è dovuto al maggior volume di gomma che si deforma a velocità della palla più elevate

La debolezza di questo modello è che i parametri di rigidità e smorzamento sono costanti durante l'impatto, per questa ragione la correlazione tra la forza che agisce sulla pallina misurata sperimentalmente e quella ricavata attraverso il modello è scarsa. Soprattutto negli ultimi 0,5 ms del tempo di contatto, ovvero durante la fase di rimbalzo, il modello calcola una forza di trazione che non è chiaramente realistica. [18]

Un modello più complesso può essere sviluppato per ottenere una maggiore corrispondenza con la fisica del fenomeno. La differenza sostanziale con il modello precedente è la dipendenza dei parametri di rigidità e di smorzamento dalla posizione e quindi si elimina l'ipotesi della loro costanza durante l'impatto. Un ulteriore aspetto considerato è il contributo del flusso della quantità di moto che può essere considerato in un coefficiente di smorzamento  $c_M$  [18]. Tutti questi aspetti sono trattati dettagliatamente in APPENDICE A.1 per non appesantire troppo la trattazione con procedimenti matematici. In questo capitolo viene riportata soltanto la nuova rappresentazione schematica (figura 2.2 nella pagina successiva) e i risultati ottenuti dal nuovo modello di impatto di una pallina contro una superficie rigida.

I risultati ottenuti possono essere riassunti nel seguente elenco:

- il modello può essere usato per prevedere la forza che agisce sulla palla durante l'impatto, la velocità della palla dopo l'impatto e il tempo di contatto
- mentre nel modello semplificato a parametri costanti il tempo di contatto  $T_C$  è funzione solo della rigidità  $k_B$ , nel nuovo modello dipende dai parametri  $k_{B(0)}$ ,  $A_K$  e  $\alpha$ , che sono descritti in appendice (A.1) e che devono essere trovati sperimentalmente
- il modello calcola il coefficiente di restituzione  $COR$  e il tempo di contatto  $T_C$  con una buona correlazione con i risultati ottenuti sperimentalmente
- analizzando l'andamento della forza nel tempo ottenuta dal modello si nota che la pallina subisce inizialmente un carico molto basso dovuto alla compressione del tessuto superficiale che ha una rigidità molto bassa. Il modello infatti è stato definito in modo che la forza sia nulla per  $x_B < 2mm$

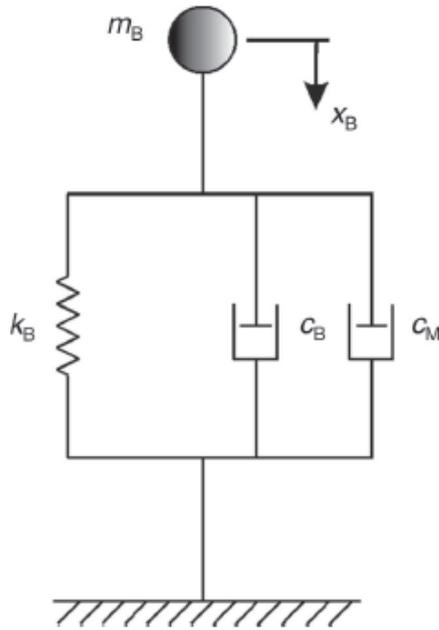


Figura 2.2: Modello viscoelastico che include uno smorzatore  $c_M$  per simulare la forza dovuta al flusso di quantità di moto

- per il calcolo della forza agente sulla pallina il modello prevede la presenza di tre contributi:  $k_B$ ,  $c_B$  e  $c_M$ . Durante i primi 0,6 ms il contributo principale è quello relativo al flusso di quantità di moto, che dura solo durante la compressione e si esaurisce presto, mentre quando la forza raggiunge il suo massimo il contributo prevalente è dovuto alla rigidità strutturale  $k_B$

Questo modello supporta i dati sperimentali e può essere usato come punto di partenza per modellare impatti più complessi.

## 2.2 Modello di impatto tra racchetta e pallina

Dopo aver analizzato il caso semplificato dell'impatto della pallina da tennis su una superficie rigida, si può passare ad aggiungere nel modello anche il contributo della racchetta. In questa sezione sono stati considerati due diversi metodi di supporto della racchetta: il caso in cui la racchetta è fissata lungo il perimetro della sua testa e il caso in cui è sospesa liberamente.

### 2.2.1 Caso racchetta con testa incastrata

Il primo caso, che considera una racchetta vincolata rigidamente lungo il perimetro della testa, permette di concentrarsi soltanto sul contributo della palla e del piatto corde durante l'impatto, trascurando la rigidità del telaio. Questa condizione può essere modellata, come rappresentato nella figura 2.3, attraverso una molla lineare  $k_B$  e uno smorzatore  $c_B$  in parallelo per l'elemento palla, mentre il piatto corde è modellato con una molla lineare  $k_S$ . I valori di questi parametri sono ricavati in modo sperimentale.

Il tipo di impatto considerato è di tipo normale, in un punto al centro del piatto corde, men-

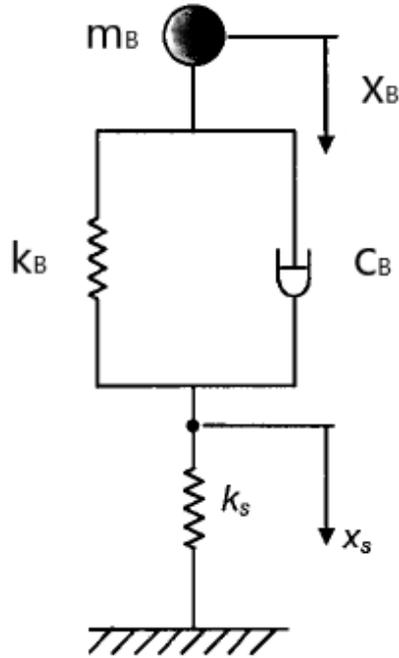


Figura 2.3: Modello di un impatto della pallina sul piatto corde [21]

tre le variabili ottenibili dal modello sono la massima deflessione del piatto corde  $(x_S)_{max}$  e la velocità di rimbalzo della pallina. Per quanto riguarda i parametri di rigidezza e di smorzamento, in [21] sono stati determinati attraverso dei test sperimentali di compressione e di caduta su una superficie rigida. La rigidezza del piatto corde si è trovata attraverso una prova di compressione statica della pallina sul piatto corde, mentre lo smorzamento delle corde si è rivelato essere trascurabile. In questo studio anche il contributo del flusso di quantità di moto si è trascurato.

La forza agente sulla pallina può essere espressa dalla seguente equazione:

$$F = -m_B \ddot{x}_B = -k_S x_S = c_B (\dot{x}_B - \dot{x}_S) + k_B (x_B - x_S) \quad (2.5)$$

Il moto di  $x_B$  e  $x_S$  può essere ricavato numericamente facendo le seguenti assunzioni:

- velocità iniziale della pallina  $V_B$
- al tempo  $t = 0$  si ha  $x_B = x_S = 0$ ,  $\dot{x}_S = \dot{x}_B = V_B$ ,  $\ddot{x}_S = \ddot{x}_B = 0$
- passo temporale  $\Delta t$
- piatto corde privo da massa, quindi nessuna inerzia da superare e coerente con l'ipotesi di  $\dot{x}_S = \dot{x}_B = V_B$  al tempo  $t = 0$

Utilizzando il metodo delle differenze finite si ottiene la seguente espressione di  $x_B$  al tempo  $t$  [21]:

$$(x_B)_t = [(\ddot{x}_B)_{t-\Delta t} \Delta t^2] + [2(x_B)_{t-\Delta t}] - (x_B)_{t-2\Delta t} \quad (2.6)$$

Ipotizzando che la variazione di velocità ad ogni passo temporale sia piccola, si possono scrivere le seguenti espressioni per  $\dot{x}_B$  e  $\dot{x}_S$ :

$$(\dot{x}_B)_t = \frac{(x_B)_t - (x_B)_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (2.7)$$

$$(\dot{x}_S)_t = \frac{(x_S)_t - (x_S)_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Se si sostituisce l'equazione (2.8) nella (2.5) si ottiene:

$$(x_S)_t = \frac{k_B(x_B)_t + c_B(\dot{x}_B)_t + c_B(x_S)_{t-\Delta t}/\Delta t}{k_S + k_B + c_B/\Delta t} \quad (2.9)$$

Attraverso le equazioni precedenti è possibile ricavare i valori di spostamento e di velocità della palla e del piatto corde per ogni istante temporale  $t$ , fornendo al modello i valori di  $V_B$ ,  $k_B$ ,  $c_B$  e  $k_S$ .

Come visto nel caso di impatto contro una superficie rigida, i valori di  $k_B$  e  $c_B$  non sono costanti ma dipendono dallo spostamento della pallina, che in questo caso è definito dallo spostamento relativo  $(x_B - x_S)$ . Siccome quest'ultimo non è noto serve un procedimento iterativo [21].

Anche  $k_S$  non può essere un valore costante perché dipende dalle varie racchette a causa delle diverse dimensioni delle teste, del tipo di corde e del livello di tensione. Anche considerando una singola racchetta,  $k_S$  dipende dalla deflessione del piatto corde e dall'area di applicazione della forza. In particolare la rigidità aumenta se la deflessione  $x_S$  aumenta e se l'area di applicazione del carico cresce. Dei valori estremi trovati sperimentalmente in [21] sono: 40 e 60 kN/m.

Le risultati di questo modello intermedio possono essere riassunti nel seguente elenco:

- la deflessione del piatto corde è compresa tra i 10 e 20 mm per le velocità di impatto della palla considerate, ovvero tra 13 e 32 m/s
- i valori di rigidità del piatto corde sono compresi tra i valori estremi 40 e 60 kN/m
- la rigidità  $k_S$  aumenta con la velocità di impatto della palla e quindi anche con la deflessione del piatto corde
- i valori dei coefficienti di restituzione  $COR$  si trovano in un intervallo compreso tra 0,75 e 0,85 per le velocità considerate e diminuiscono sia all'aumentare di  $V_B$  che all'aumentare di  $k_S$

## 2.2.2 Caso racchetta liberamente sospesa

Il secondo caso di impatto tra pallina e racchetta considera quest'ultima liberamente sospesa che, come descritto nel capitolo 1, rappresenta la condizione più vicina alla presa di un giocatore. Con questa tipologia di vincolo si possono creare due modelli distinti con differente grado di complessità: il primo considerando il telaio come un corpo rigido, mentre il secondo, più complesso, lo considera come un corpo deformabile.

**Corpo rigido** In questo primo modello il telaio della racchetta da tennis viene modellato come una trave rigida che ha le stesse proprietà inerziali della racchetta. La schematizzazione di questo modello viene riportata nella figura 2.4, dove oltre al telaio sono presenti gli elementi palla e piatto corde, simulati con lo stesso modello viscoelastico visto in precedenza. [21]

Le proprietà inerziali considerate sono la massa, il baricentro ("bilanciamento") e il momento di inerzia della massa e sono indicati con la seguente simbologia:  $m_r$  per la massa della racchetta,  $d$  per indicare la distanza del punto di impatto dal centro di massa e  $I_r$  è il momento di inerzia attorno al centro di massa. In questo modello la forza applicata alla trave rigida è un carico puntuale che impatta perpendicolarmente al piatto corde.

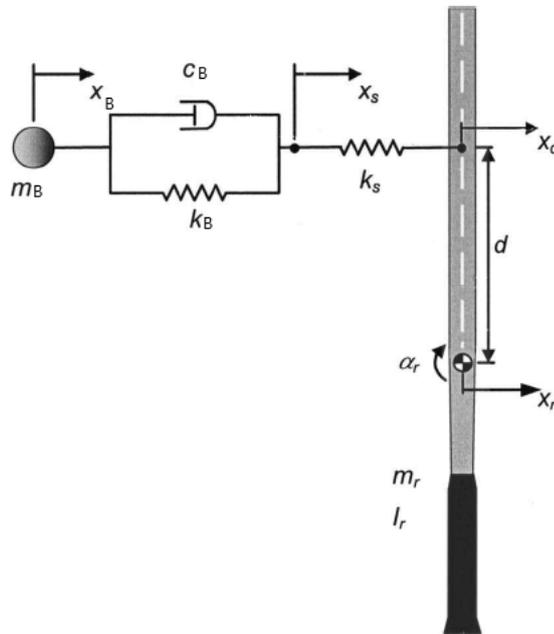


Figura 2.4: Modello di un impatto con una racchetta liberamente sospesa: caso corpo rigido

Oltre agli spostamenti del centro di massa della pallina  $x_B$  e del piatto corde  $x_S$ , esistono spostamenti lineari aggiuntivi:  $x_d$  è lo spostamento della racchetta nel punto di impatto,  $x_r$  nella posizione del centro di massa, mentre  $\alpha_r$  è lo spostamento angolare del centro di massa. Il bilancio di forza è espresso dalla seguente equazione:

$$F = m_B \ddot{x}_B = c_B(\dot{x}_B - \dot{x}_S) + k_B(x_B - x_S) = k_S(x_S - x_d) \quad (2.10)$$

Utilizzando l'equazione (2.8) vista nel caso precedente e sostituendola nella (2.10), si ottiene:

$$(x_S)_t = \frac{k_B(x_B)_t + k_S(x_d)_t + c_B(\dot{x}_B)_t + c_B(x_S)_{t-\Delta t}/\Delta t}{k_S + k_B + c_B/\Delta t} \quad (2.11)$$

e la soluzione è completa con:

$$\ddot{x}_r = \frac{F}{m_r} \quad (2.12)$$

$$\ddot{\alpha}_r = \frac{Fd}{I_r} \quad (2.13)$$

$$\ddot{x}_d = \ddot{x}_r + \ddot{\alpha}_r d \quad (2.14)$$

Quest'ultima equazione ha validità soltanto per angoli  $\alpha_r$  molto piccoli ( $\alpha \ll 1$ ). Per risolvere le equazioni precedenti sono necessarie delle soluzioni numeriche, le quali possono essere ottenute definendo un corretto passo temporale  $\Delta t$  e fornendo i valori di  $V_B$ ,  $k_B$ ,  $c_B$ ,  $k_S$ ,  $m_r$ ,  $I_r$  e  $d$  [21]. In questo modo è possibile ottenere la posizione e la velocità della palla, del piatto corde e della racchetta per ogni istante.

In questa sezione si è più interessati ai risultati ottenuti in [21] rispetto ai procedimenti adottati, che possono essere riassunti nel seguente elenco:

- la modellazione rigida non consente di calcolare le vibrazioni del telaio ma permette di approssimare l'impatto tra pallina e racchetta nelle normali condizioni di gioco
- i valori di  $m_r$  e  $I_r$  usati sono rispettivamente: 0,335 kg e 0,01624  $kgm^2$
- sono stati testati sperimentalmente tre punti di impatto: al centro del piatto corde e a 50 mm di distanza sopra e sotto. La migliore correlazione con il modello si è trovata con impatti centrali e questo può essere dovuto al fatto che, non considerando le perdite di energia, solo il punto centrale vicino al nodo ha vibrazioni contenute e quindi minimizza l'effetto dell'approssimazione rigida
- si può concludere che la modellazione di una racchetta come corpo rigido è una buona approssimazione per impatti al centro del piatto corde e permette di ricavare la velocità della pallina al rimbalzo in modo corretto

**Corpo deformabile** In questo secondo caso il telaio della racchetta viene invece modellato con una trave flessibile unidimensionale, in modo da considerare la deformazione del telaio durante e immediatamente dopo l'impatto. La schematizzazione di questo modello, riportata nella figura 2.5, è molto simile al caso precedente con l'unica differenza che, invece di rappresentare il telaio con un unico elemento rigido, in questo caso la trave è suddivisa in elementi per indicare la sua deformabilità.

Diversi autori hanno dimostrato che i modi di vibrazioni trasversali e la posizione dei rispettivi nodi per una racchetta liberamente sospesa sono molto simili al caso di una semplice trave unidimensionale. [20] Ciò vale soltanto per impatti lungo l'asse longitudinale perché impatti fuori centro possono far nascere vibrazioni torsionali che non sono considerate nel modello di trave unidimensionale.

Alla trave in questione devono essere assegnate le proprietà inerziali della racchetta, tra cui anche la rigidità flessionale. Le basi teoriche del modello deformabile vengono riportate in APPENDICE A.2, mentre in questa sezione vengono solo sintetizzate le potenzialità e le difficoltà di questo modello:

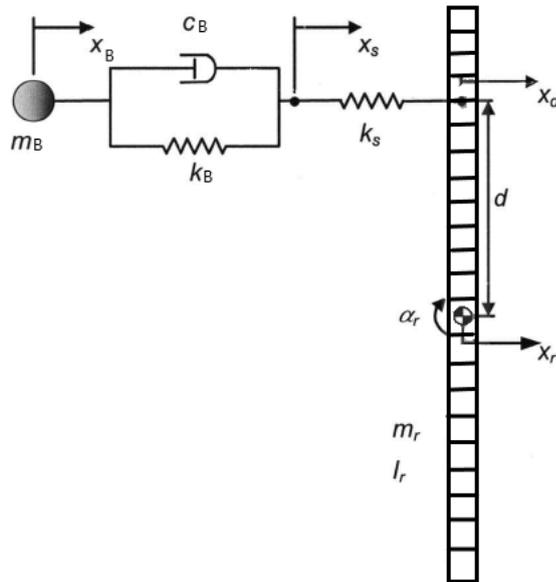


Figura 2.5: Modello di un impatto con una racchetta liberamente sospesa: caso trave flessibile monodimensionale

- per ottenere una soluzione numerica del modello si è suddivisa la trave in un numero finito di elementi della stessa lunghezza e si è calcolato lo spostamento di ciascuno di essi ad intervalli di tempo discreti
- secondo la teoria la lunghezza dei segmenti e i passi temporali devono essere infinitamente piccoli per simulare le infinite modalità di vibrazione di una racchetta. Tuttavia i modi eccitati che hanno un'ampiezza significativa sono a frequenza inferiore a 300 Hz, per questo la divisione in segmenti discreti trascura i modi a frequenza maggiore
- si è ipotizzato che la trave abbia una rigidità flessionale uniforme ma una distribuzione della massa non uniforme [20]
- il carico applicato alla trave è dipendente dal tempo e viene espresso dall'equazione (2.10). Se questa forza si suppone essere puntuale, un impatto nel punto del nodo non eccita le vibrazioni del modo fondamentale, per questa ragione è meglio utilizzare un carico distribuito
- la difficoltà di un modello flessibile rispetto al caso rigido è il maggior numero di calcoli da eseguire per ottenere la soluzione e quindi un aumento di tempo di elaborazione numerica per essere risolti. Se l'impatto è più lontano dal centro del piatto corde, il modello flessibile offre una migliore corrispondenza con la realtà
- si è concluso che un carico distribuito, su un modello di trave a cinque sezioni, è il metodo più adatto per simulare le proprietà inerziali e vibrazionali di una racchetta da tennis, per un impatto con una palla [20]

Tutti questi modelli riportati servono a semplificare il più possibile il fenomeno di impatto tra racchetta e pallina. Attraverso un approccio graduale si è partiti da un impatto contro una superficie rigida, fino ad arrivare a considerare anche il modello della racchetta. L'obiettivo era quello di ottenere le proprietà fisiche caratteristiche della risposta dinamica, in quanto tutti questi modelli sono stati supportati da prove sperimentali.

Una volta compresa la meccanica dell'impatto, si è notato che la modellazione analitica è comunque un'approssimazione di ciò che avviene nella realtà e che aumentando eccessivamente la complessità si otterrebbe un modello poco utilizzabile. In più tutti i parametri concentrati utilizzati, per avere un significato fisico e dare quindi validità al modello, devono essere supportati da una fase sperimentale. Pertanto si può concludere che per rappresentare più fedelmente la realtà e creare delle modifiche sul sistema racchetta è necessario un modello numerico.

## Capitolo 3

# Smorzamento nelle racchette da tennis

L'impatto della racchetta contro la pallina che si verifica continuamente durante il gioco del tennis causa delle vibrazioni nella racchetta. Quelle che si sono rivelate più dannose per i giocatori in termini di infortuni sono associate al primo modo armonico di oscillazione. La condizione di vincolo che più si avvicina alle normali condizioni di impatto, come già più volte riportato in questa tesi, è quella libera-libera.

La prima forma modale per una racchetta liberamente sospesa viene riportata nel caso C della figura 1.3, la quale presenta un nodo vicino al centro del piatto corde e un altro nella parte alta dell'impugnatura. Gli antinodi, invece, si trovano all'estremità superiore della testa, all'estremità inferiore del manico e in prossimità della gola della racchetta. La frequenza di questa modalità di oscillazione è stata trovata tra i 120 Hz e i 200 Hz ed è influenzata soprattutto dalla rigidità del telaio della racchetta poiché la massa cambia poco tra i vari modelli esistenti.

Lo scopo di questo capitolo è di analizzare alcuni sistemi di smorzamento, i quali hanno l'obiettivo di ridurre il tempo in cui l'ampiezza di vibrazione decade. Diversi studi hanno sottolineato che il più efficace sistema di smorzamento è risultato essere la mano. Sono stati confrontati differenti metodi di vincolo: una racchetta in condizione libera ed una tenuta in mano, in quest'ultimo caso il tempo di smorzamento, ovvero il tempo in cui l'ampiezza di oscillazione scende a metà del suo valore iniziale, è risultato essere di un ordine di grandezza inferiore. [22] Nonostante ciò l'influenza della mano è difficilmente quantificabile perché varia continuamente durante il gioco a causa della diversa intensità di presa e anche della posizione della mano sul manico, oltre naturalmente alle differenze introdotte dai giocatori. Per questa ragione si analizzano soltanto gli effetti che hanno il telaio e dispositivi esterni sulla riduzione delle vibrazioni.

Una racchetta più rigida vibra ad una frequenza più alta, perciò il tempo di smorzamento delle vibrazioni libere sarà più breve. Se anche l'ampiezza di una racchetta rigida dovesse dimezzarsi nello stesso numero di cicli di una flessibile, il tempo di smorzamento sarebbe comunque inferiore a causa della frequenza più alta. Tuttavia i telai più rigidi dissipano meno energia durante l'impatto, con conseguente maggior rischio di lesioni. Per ridurre il numero di cicli in cui l'ampiezza di vibrazione decade, bisogna introdurre del materiale che dissipi rapidamente l'energia cinetica delle oscillazioni.

## 3.1 Soluzioni presenti in letteratura

### 3.1.1 Antivibrazione per corde

Un antivibrazione per le corde è un piccolo dispositivo, perlopiù in gomma siliconica, che viene inserito nel piatto corde di una racchetta da tennis nella zona vicino alla gola. Il primo antivibrazione fu prodotto nel 1964 da Rene Lacoste. Chiamato "Tanti-Vibration Dampener" aveva lo scopo proclamato di ridurre il carico sul braccio del giocatore durante l'impatto e quindi ridurre anche il rischio di infortuni. Da quel momento in poi molti altri marchi hanno seguito l'esempio, creando le proprie versioni più disparate ma che avevano il comune obiettivo di ridurre la quantità di vibrazioni delle corde dopo il contatto con la palla. Nel tennis moderno è diventato un accessorio ampiamente utilizzato e un esempio di questo dispositivo è quello riportato nella figura 3.1.

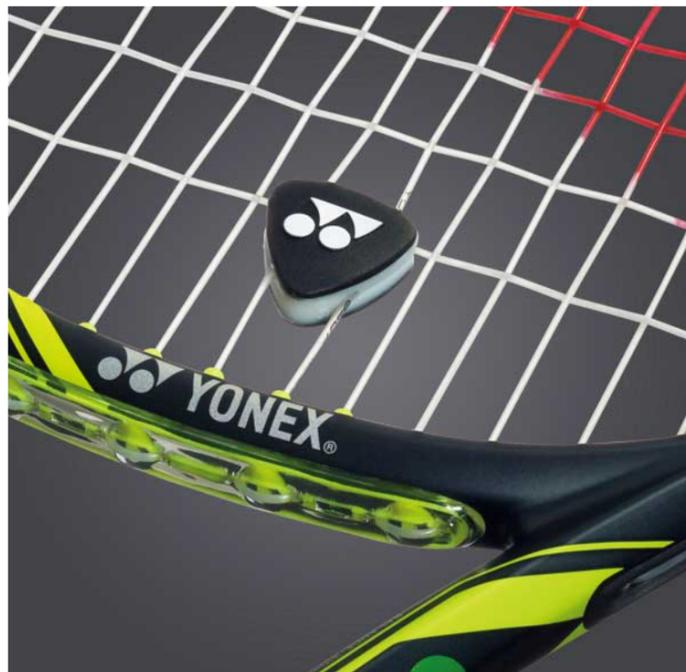


Figura 3.1: Esempio di antivibrazione per le corde della Yonex

Esistono delle regole ufficiali dell'ITF in merito all'utilizzo di questo dispositivo, il quale può essere posizionato solo al di fuori dello schema delle corde incrociate. I posti consentiti sono allora nella parte superiore del piatto corde, nella parte inferiore vicino alla gola e alle due estremità a destra e a sinistra. Se escludiamo il posizionamento laterale che potrebbe creare sbilanciamento nel telaio e quello superiore per mancanza di spazio, l'unica posizione logica risulta essere quella in basso al piatto corde, come nella figura 3.1. Non esistono invece delle regole sulla forma e dimensione, per questo possono essere di tre tipologie diverse:

- pulsante (forma circolare)
- verme (intreccia più corde)
- banda elastica

Nonostante sia comunemente usato dai giocatori di tennis, la sua utilità in merito alla riduzione di disagi agli arti superiori non è sempre stata supportata da studi scientifici. In [23] si sono esaminati gli effetti degli antivibrazioni sulle caratteristiche vibrazionali della racchetta, posizionando degli accelerometri in posizioni diverse. I dati ottenuti stabiliscono che lo smorzatore delle corde riduce l'ampiezza di vibrazione del piatto corde, ma non causa differenze significative sul profilo di accelerazione sull'impugnatura. In [24], invece, si sono analizzate diverse configurazioni per determinare come cambia il profilo di vibrazione al cambiare della posizione e della massa dell'oggetto. Anche in questo caso si è trovato che l'aggiunta dell'antivibrazione ha un effetto minimo sui primi due modi della racchetta, che sono responsabili dei vari infortuni, ma cambia in maniera significativa i modi per frequenze superiori a 500 Hz.

Pertanto si può concludere che il termine "antivibrazione" o "smorzatore" sia un pò fuorviante, in quanto questi oggetti non sono in grado di assorbire una quantità significativa di energia di vibrazione del telaio. Il loro effetto è legato soltanto all'ampiezza di oscillazione del piatto corde, mentre sul manico questo effetto smorzante è trascurabile. L'effetto di riduzione delle vibrazioni percepito dai giocatori potrebbe essere perlopiù una confusione sensoriale, un effetto placebo dovuto all'attenuazione acustica del suono dell'impatto e alla frequenza di oscillazione delle corde stesse che varia il timbro dello strumento. Il motivo per cui gli antivibrazioni delle corde non aiutano nella prevenzione degli infortuni come il gomito del tennista è da individuare nella loro massa ridotta rispetto alla massa della racchetta da tennis. Il peso di pochi grammi di questi smorzatori non riesce ad assorbire l'energia contenuta nel telaio di una racchetta vibrante da circa 350 grammi, per questo il loro effetto è evidente soltanto sul piatto corde, il quale ha una struttura con una massa molto inferiore rispetto al telaio.

Un ultimo aspetto considerato in [24] è che il cambio di modalità del piatto corde non si può ottenere con uno smorzatore universale, uguale per tutte le combinazioni di racchette, corde e tensioni. Siccome il suo scopo non è la dissipazione di energia come si credeva erroneamente, bensì il cambio di modalità, un buon antivibrazione delle corde deve essere progettato conoscendo la struttura modale della singola racchetta su cui deve essere applicato.

### 3.1.2 Fluendo

Nel tennis, essendo una delle attività sportive più popolari al mondo, c'è uno sviluppo incessante delle attrezzature e in questa sezione si analizza uno smorzatore di vibrazioni chiamato Fluendo.

Questo oggetto è stato brevettato nel 2018 da Michele Cantelli e Massimiliano Pesci con l'obiettivo di creare una barriera elastica che assorbisse le vibrazioni e riducesse quindi anche gli infortuni al polso, al gomito e alla spalla. Per quanto riguarda il suo posizionamento, Fluendo si posiziona nella parte bassa della gola della racchetta, nella zona tra il manico e il piatto corde. Si tratta di un dispositivo in polimero siliconico atossico e anallergico dal peso di 15 grammi. La sua geometria e il suo posizionamento sulla racchetta viene riportato nella figura 3.2.

Le sue caratteristiche, riportate in [25], possono essere riassunte nel seguente elenco che non necessariamente descrive tecnicamente e accuratamente il comportamento dell'oggetto:



Figura 3.2: Fluendo: dispositivo di smorzamento delle vibrazioni

- realizzato con una tecnologia HTV permette di essere resistente alle sollecitazioni meccaniche, attacchi chimici, raggi UV e invecchiamento naturale
- sfrutta l'energia generata dalla deformazione dei materiali e dalla loro memoria di forma per assorbire i picchi di vibrazione causati dalla pallina da tennis sul piatto corde
- riduce il tempo di oscillazione della racchetta da 1000 millisecondi a 820 millisecondi, riducendo l'intensità del picco di vibrazione
- la minore intensità delle vibrazioni sollecita in maniera inferiori i recettori sensoriali e quindi limita la sensazione di dolore
- il posizionamento nella parte bassa della gola non altera il baricentro e quindi l'equilibrio della racchetta
- non altera il normale funzionamento della racchetta ma protegge le articolazioni del corpo

Nonostante tutte queste caratteristiche non sono stati trovati studi o articolo scientifici che attestino l'effettiva utilità del dispositivo Fluendo nel raggiungere gli scopi prefissati. Nelle successive parti di questa tesi verrà analizzato il comportamento numerico e sperimentale di questo smorzatore di vibrazioni. Nel caso numerico viene utilizzato un modello realizzato attraverso il software SolidWorks che ha le stesse proprietà dell'oggetto reale, mentre per la parte in laboratorio viene testato Fluendo stesso.

### 3.1.3 Sistema Kinetic della ProKennex

Un altro metodo di smorzamento descritto in letteratura è il sistema Kinetic della Prokennex, il quale utilizza delle masse secondarie in movimento nella testa del telaio per catturare

energia ed aggiungere slancio alla palla. Un effetto significativo di questo sistema, secondo la casa produttrice, è la riduzione della trasmissione degli urti e vibrazioni nella racchetta.

L'origine di questa invenzione è avvenuta in modo insolito, quando nel 1991 Roland Sommer, un ingegnere aeronautico tedesco di 46 anni che non aveva alcun interesse per il tennis, decise di cercare una soluzione ai dolori al gomito di un suo amico che giocava a tennis. Il signor Sommer usò le sue conoscenze ingegneristiche e in particolare una tecnica usata per ridurre lo sventolio negli alettoni e nei timoni degli aerei: utilizzò delle piccole camere caricate con particelle in movimento che smorzano le vibrazioni. Fin da subito il suo amico riscontrò un evidente miglioramento e ritornò a giocare regolarmente a tennis. [26]

Negli anni successivi Sommer presentò la sua invenzione all'azienda produttrice di racchette ProKennex, la quale si interessò subito alla nuova tecnologia e successivamente fu sviluppato il sistema Kinetic. Un ostacolo per l'evoluzione di questo sistema fu la normativa dell'International Tennis Federation (ITF), che vietava l'uso di racchette con masse in movimento, in quanto quest'ultime provocano la modifica del momento di inerzia della racchetta durante il colpo. Alla fine questa regola venne modificata e il sistema Kinetic fu approvato dall'ITF.

Una rappresentazione del sistema Kinetic è riportata nella figura 3.3, dove si può vedere che il telaio di una racchetta è fornito di microsferi, chiamate "Kinetic mass", le quali sono contenute in capsule e posizionate alle estremità laterali dell'ovale della racchetta. In alternativa, il numero di vani contenenti le sfere può salire a quattro, ma il posizionamento deve essere sempre tale da garantire il bilanciamento del telaio. Il suo funzionamento prevede la carica di energia cinetica durante il momento di preparazione al colpo, quando il telaio accelera e le particelle si posizionano sulle pareti nella direzione opposta alla palla. Durante l'impatto le microsferi si muovono verso la palla sprigionando un'energia pari alla loro energia cinetica. Subito dopo l'impatto le sfere si muovono liberamente fino a stabilizzarsi, riequilibrando istantaneamente il telaio. [27] La casa produttrice afferma perciò che il trasferimento di energia dovuta alla massa cinetica determina un aumento dell'area ottimale per colpire la pallina e anche una maggiore efficacia per i colpi decentrati, in quanto la torsione del telaio è molto limitata.

Questo sistema di smorzamento è stato analizzato in diversi studi, per verificarne l'attendibilità. Per esempio in [28] si è riscontrato che l'uso del sistema Kinetic può portare ai seguenti vantaggi rispetto alle racchette standard:

- riduzione delle vibrazioni e quindi dei dolori al braccio
- aumento della zona di sweet spot sulla superficie del piatto corde
- ulteriore velocità della pallina

Ulteriori studi eseguiti presso i laboratori del MIT riportano i seguenti risultati [29]: riduzione degli urti del 20%, aumento del rapporto di smorzamento del 43%, aumento della zona di sweet spot del 12-15%.

Si può concludere che il sistema Kinetic della ProKennex compensa l'energia persa dopo l'impatto, stabilizza la superficie del piatto corde e riduce le vibrazioni trasmesse al giocatore.

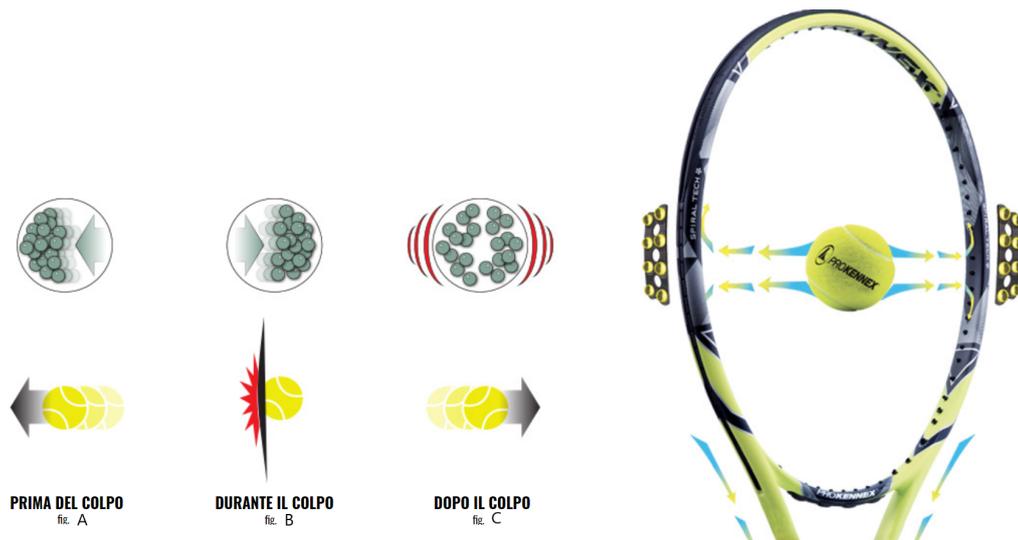


Figura 3.3: Sistema Kinetic della ProKennex: posizione delle microsfero prima (A), durante (B) e subito dopo l’impatto (C)

Ulteriori aspetti favorevoli sono l’aumento dello sweet spot, quindi una maggiore probabilità di colpire la palla correttamente, e una riduzione degli urti dovuti ad impatti fuori centro.

## 3.2 Smorzamento granulare

### 3.2.1 Definizione

La definizione dello smorzamento granulare è la seguente: dispositivo passivo di controllo delle vibrazioni in cui granuli di varie dimensioni e materiali vengono inseriti in un involucro unito o incorporato nella struttura vibrante principale. Si tratta una tipologia di smorzamento a banda larga che, a differenza della dissipazione viscoelastica dipendente dalla frequenza, le conferisce una maggiore stabilità, durata e prestazioni in condizioni operative severe. Il movimento dei grani è in grado di dissipare parte dell’energia attraverso le collisioni non conservative, riducendo così l’ampiezza delle vibrazioni. Tra i vantaggi troviamo anche la bassa manutenzione e quindi la possibilità di utilizzo in ambienti difficili. Una rappresentazione dello smorzatore granulare è riportata nella figura 3.4.

Presenta diversi meccanismi di dissipazione, in base alle variabili di progetto che verranno discusse successivamente:

- dissipazione inerziale
- dissipazione per deformazione e rottura dei grani
- dissipazione per attrito

La prima modalità di dissipazione si ha quando il contenitore che ospita i materiali granulari non è completamente riempito e quindi è consentito il movimento dei granuli al suo interno. Tale movimento delle sfere trasforma l’energia cinetica del sistema principale in

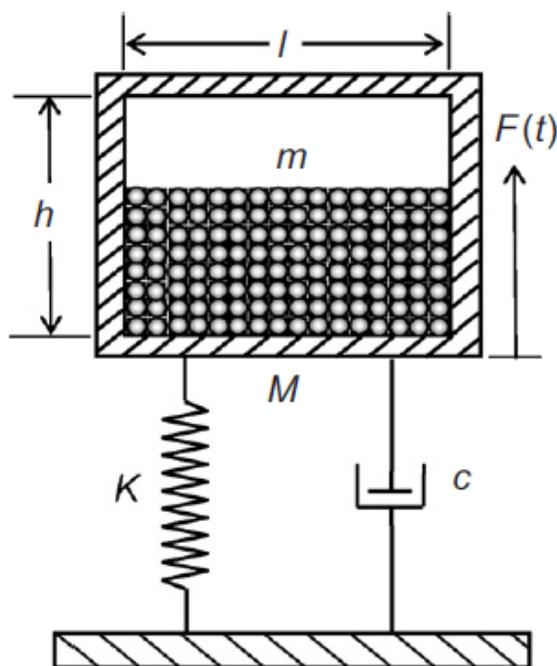


Figura 3.4: Schematizzazione di una struttura con uno smorzatore granulare [31]

energia termica attraverso gli urti che avvengono nel contenitore. Questi urti sono delle collisioni anelastiche che si sviluppano tra le particelle e tra le particelle e le pareti del contenitore. In [30] si è dimostrato che la quantità di smorzamento introdotto con questa modalità non dipende dal materiale o dal numero dei granuli, ma dal rapporto tra la massa totale dei corpuscoli e massa totale del sistema. Se quindi si introduce più massa, l'effetto smorzante è superiore. Tuttavia aumentando la massa dei granuli, si ottiene anche la diminuzione di volume libero nel contenitore, riducendo l'effetto di tale meccanismo. Bisogna pertanto trovare una condizione ottimale che massimizzi lo smorzamento per il tipo di dissipazione inerziale.

La dissipazione per deformazione viscoelastica e plastica e al limite per rottura dei grani, invece, è dovuta ad una forza di precarico, per esempio imposta al sistema attraverso un'apposita vite, che determina un aumento di pressione all'interno del contenitore. I granuli contenuti all'interno, in questo modo, si trovano in una condizione compressa e un movimento del contenitore può causare fenomeni di deformazione e all'estremo anche di rottura. In caso di rottura l'energia dissipata è elevata, ma si tratta di una condizione non ripetibile.

La dissipazione per attrito, infine, è dovuta a un elevato livello di pressione che non è sufficiente a deformare o rompere le sfere ma è abbastanza elevato per farle stare in contatto, perciò si ottiene un movimento ridotto dei granuli all'interno dell'involucro. Non potendo muoversi i corpuscoli strisciano tra di loro e contro il contenitore, in questo modo si riesce a sfruttare l'attrito per ottenere una dissipazione.

Tutti questi meccanismi dissipativi hanno una natura altamente non lineare, per questo quantificare il loro effetto è un processo tutt'altro che banale.

### 3.2.2 Formulazione DEM

Per descrivere il comportamento di tutte le particelle di uno smorzatore granulare si utilizza il metodo agli elementi discreti (DEM), il quale permette di tracciare il moto dei corpuscoli e di stimare l'energia dissipata imponendo un modello di dinamica di contatto appropriata. Siccome questa tipologia di analisi coinvolge un gran numero di granuli, i cui movimenti sono molto frequenti e accoppiati con quelli della struttura esterna, i meccanismi di dissipazione associati sono altamente non lineari e quindi non è possibile risolvere il problema attraverso il metodo agli elementi finiti (FEM).

Il DEM si basa sull'integrazione diretta delle equazioni del moto di Newton. In particolare ad ogni passo temporale vengono calcolate le forze dovute ai movimenti consentiti, che possono essere di traslazione o di rotazione. Il movimento di traslazione è dovuto alla forza di contatto e alla forza gravitazionale, mentre quello rotatorio è causato solo dalle forze di contatto. Tipicamente i passi temporali scelti sono sufficientemente piccoli, in modo che in un singolo intervallo di tempo i disturbi non possano propagare dai vari grani oltre i loro immediati vicini. In questo modo le forze risultanti su qualsiasi granulo sono dovute soltanto all'interazione con gli altri granuli adiacenti e il contenitore esterno con cui è in contatto. Noti il sistema di carichi e la massa di ogni particella, la traiettoria può essere definita direttamente. Le equazioni dinamiche del moto sono le seguenti [31]:

$$\begin{cases} m_i \ddot{p}_i = f_i - m_i g & (i = 1, \dots, n) \\ I_i \ddot{\theta}_i = T_i \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $n$  è il numero totale di granuli e per ogni granulo:  $m_i$  è la massa del singolo granulo,  $p_i$  è il vettore di posizione del centro di massa (quindi  $\ddot{p}_i$  rappresenta il vettore accelerazione),  $f_i$  è la risultante delle forze di contatto che agiscono sul granulo dovuta agli altri granuli e al contenitore,  $g$  è il vettore dell'accelerazione di gravità,  $I_i$  è il momento di inerzia del singolo granulo,  $\theta_i$  rappresenta il vettore dello spostamento angolare (quindi  $\ddot{\theta}_i$  è l'accelerazione angolare) ed infine  $T_i$  è la risultante dei momenti causati dalle forze di contatto.

Definite le equazioni del moto bisogna definire un accurato modello di contatto per caratterizzare il comportamento dei granuli quando entrano in contatto tra di loro e con il contenitore. È importante definire anche un efficiente algoritmo per stabilire quando avviene o meno il contatto tra i corpi. Si può stabilire che quando la distanza tra i centri di due granuli è minore della somma dei loro raggi, questi possono considerarsi in contatto e nascono quindi forze di contatto. La rappresentazione di questo meccanismo è riportata nella figura 3.5.

Esistono diversi modelli di contatto in letteratura, ma il modello forza-smorzamento che viene usato anche nella successiva trattazione numerica è quello di Hertz-Mindlin-Coulomb, il cui schema è riportato nella figura 3.5 (b). Il vantaggio di questo modello è la considerazione della non linearità del sistema, caratteristica necessaria per rappresentare il comportamento dello smorzatore granulare. In questo caso il contatto viene modellato con una molla e uno smorzatore in parallelo per il contributo normale e un ulteriore componente per rappresentare la forza tangenziale. La componente normale è indicata con  $f_{nij}$  ed è espressa dalla seguente relazione:

$$f_{nij} = -(k_n \delta_{nij}^{3/2} + D_n) n_{ij} \quad (3.2)$$

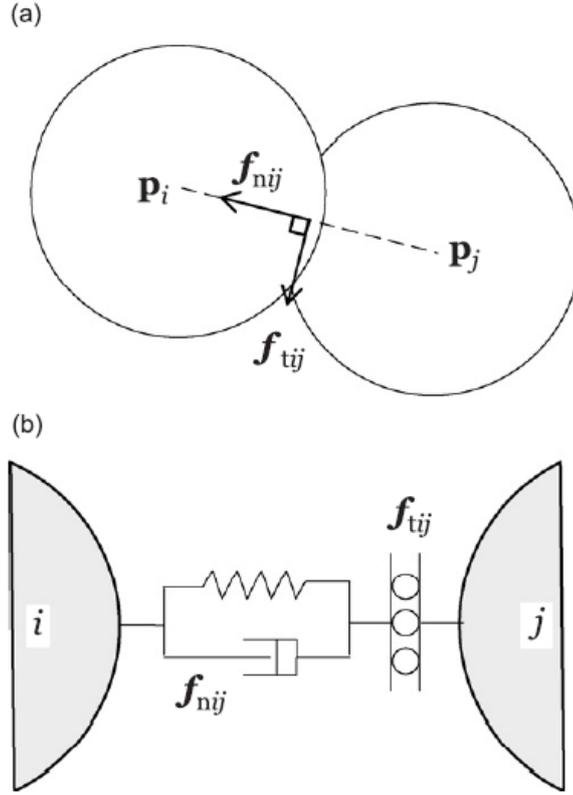


Figura 3.5: Schematizzazione: (a) contatto tra due granuli; (b) modello massa-molla-smorzatore per la definizione delle forze di contatto [31]

dove  $\delta_{nij}$  è lo spostamento normale del granulo  $i$  rispetto a  $j$ ,  $k_n$  è la costante di rigidezza della molla,  $D_n$  è la forza di smorzamento e  $n_{ij}$  è il versore che va dal centro di  $i$  al granulo  $j$ . Come si può vedere l'equazione (3.2) è la somma di due contributi: la forza della molla dovuta alla teoria di Hertz e una forza di smorzamento. Durante il contatto lo spostamento normale  $\delta_{nij}$  può essere scritto come:

$$\delta_{nij} = r_i + r_j - |p_i - p_j| \quad (3.3)$$

dove  $r_i$  e  $r_j$  sono rispettivamente i raggi dei granuli  $i$  e  $j$ , mentre  $p$  è il vettore posizione del centro di massa dei grani. La costante della molla  $k_n$ , invece, si ottiene dalla teoria di Hertz e può assumere due formulazioni diverse a seconda che il contatto sia tra le particelle oppure tra le particelle e la pareti dell'involucro esterno. Nel primo caso di contatto tra due granuli la sua espressione è la seguente:

$$k_n = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{r_i r_j}{r_i + r_j}} \frac{E_i E_j}{(1 - \nu_j^2) E_i + (1 - \nu_i^2) E_j} \quad (3.4)$$

dove  $E$  è il modulo di Young della particella,  $\nu$  è il suo rapporto di Poisson. Mentre nel caso di impatto tra particella e parete, assume la seguente forma:

$$k_n = \frac{4\sqrt{r_i}}{3} \frac{E_i E_w}{(1 - \nu_w^2) E_i + (1 - \nu_i^2) E_w} \quad (3.5)$$

dove  $E_w$  è il modulo di Young della parete e  $\nu_w$  è il suo rapporto di Poisson. Per quanto riguarda la forza di smorzamento dovuta alla componente normale dell'impatto  $D_n$ , in [31] è riportata la seguente espressione determinata sperimentalmente:

$$D_n = \alpha \sqrt{m_i k_n} \delta_{nij}^{1/4} \dot{\delta}_{nij} \quad (3.6)$$

dove  $\alpha$  è una costante che dipende dal coefficiente di restituzione (il quale può essere indicato con il simbolo  $e$ ), mentre  $\dot{\delta}_{nij}$  è la velocità normale del granulo  $i$  rispetto al granulo  $j$ . Il parametro  $\alpha$  è un indice dell'importanza dello smorzamento viscoso nell'impatto tra le sfere e la sua dipendenza da  $e$  può essere espressa dalla seguente equazione [32]:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\log e)^2}{(\log e)^2 + \pi^2}} \quad (3.7)$$

Quest'ultima relazione è stata trovata da Tsuj (1992) e la sua rappresentazione è stata riportata nella figura 3.6. Si tratta di una relazione significativa perché collega una proprietà misurabile ( $e$ ) con il termine analitico  $\alpha$ , rappresentativo della viscoelasticità non lineare. Dall'immagine si nota che la parte riquadrata in blu, ovvero per coefficienti di restituzioni molto bassi, l'effetto della viscoelasticità è molto elevato in quanto le sfere perdono quasi tutta la loro energia cinetica. Nel riquadro in rosso, invece, per valori di  $e$  molto elevati, l'effetto della viscoelasticità è poco rilevante e il contatto si riduce quasi puramente al contributo elastico con lineare.

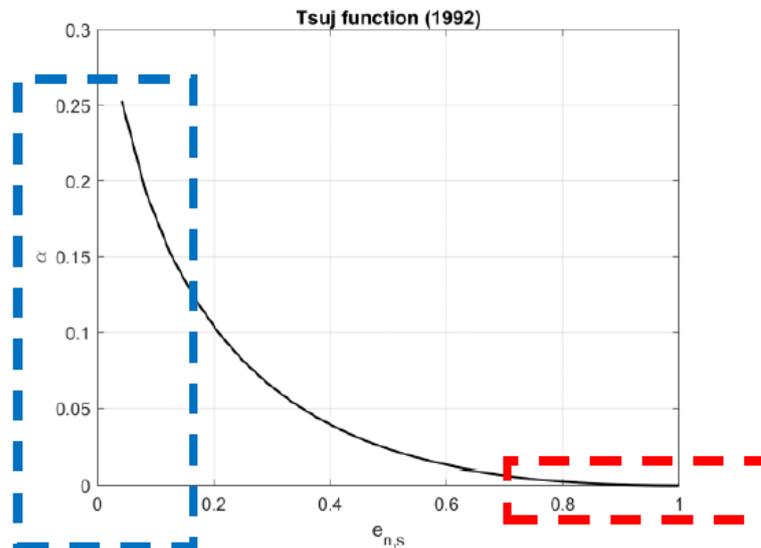


Figura 3.6: Funzione di Tsuj: relazione tra il parametro  $\alpha$  e il coefficiente di restituzione  $e$

In direzione tangenziale si potrebbe effettuare una trattazione analoga alla condizione normale, ritrovando gli stessi parametri di rigidezza e smorzamento, oppure si può esprimere la forza tangenziale secondo il modello di Coulomb:

$$f_{tij} = -\mu |f_{nij}| \frac{\dot{\delta}_{tij}}{|\dot{\delta}_{tij}|} \quad (3.8)$$

dove  $\mu$  è il coefficiente di attrito e  $\dot{\delta}_{ij}$  è la velocità tangenziale del granulo  $i$  rispetto al granulo  $j$ .

Il grande vantaggio di questo modello risiede nell'uso di pochi coefficienti empirici per quantificare il meccanismo di impatto non lineare esistente nello smorzatore granulare. La nonlinearietà è infatti visibile nell'equazione (3.2), dove la costante di rigidità della molla viene moltiplicata per uno spostamento che ha una potenza diversa da uno. In questo modo è anche possibile quantificare meccanismi di dissipazione differenti, in quanto la componente normale considera la collisione tra i granuli e il contenitore, mentre la componente tangenziale considera i fenomeni di attrito esistenti nel contatto.

Un'altra cosa da considerare nella formulazione agli elementi discreti è che i vari movimenti dei granuli e meccanismi di dissipazione che possono sorgere in uno smorzatore granulare dipendono da un numero elevato di parametri di sistema e dalle condizioni operative. Queste ultime possono essere per esempio l'ampiezza e la frequenza di vibrazioni del sistema principale al quale è stato aggiunto lo smorzatore granulare. In fase di progettazione è pertanto di fondamentale importanza la scelta appropriata dei parametri di progetto, che possono essere riassunti nel seguente elenco:

- materiale, dimensione e forma delle particelle e del contenitore
- peso totale delle particelle ( $m_P$ )
- numero di grani ( $N$ )
- percentuale di riempimento del contenitore
- eventuale presenza di pressione esercitata all'interno delle camere
- intensità e frequenza delle vibrazioni

Avendo analizzato brevemente tutti i contributi necessari per effettuare un'analisi agli elementi discreti, il procedimento logico da seguire è il seguente, ovvero per ogni passo temporale  $\Delta t$  bisogna [33] :

1. definire le condizioni iniziali per ogni corpo
2. rilevare le condizioni di contatto
3. valutare forze e momenti nelle collisioni
4. sommare i contributi dinamici per ciascuna particella
5. valutare la presenza di forze esterne
6. integrare le equazioni del moto

### 3.2.3 Applicazione dello smorzatore granulare ad una racchetta da tennis

Dopo aver passato in rassegna alcune delle soluzioni presenti in commercio relative al tema dello smorzamento delle racchette da tennis si passa alla parte più originale di questa tesi, ovvero all'applicazione dello smorzamento granulare sul telaio della racchetta per ottenere maggiore sicurezza e prevenzione degli infortuni in ambito sportivo.

L'idea di fondo di questa tesi è quella di ideare un oggetto compatibile con qualsiasi telaio già esistente, quindi una sorta di accessorio da inserire in base ai gusti personali e alle necessità. Tale oggetto deve avere come scopo la riduzione delle vibrazioni e degli urti trasmessi al braccio del giocatore.

Per realizzare questo scopo si è pensato ad una soluzione simile come idea al sistema Kinetic della ProKennex, ovvero di utilizzare delle cavità riempite con del materiale granulare in modo da sfruttare l'effetto dissipativo dovuto alle varie collisioni interne. A differenza del sistema Kinetic, riservato solamente ai telai della casa produttrice ProKennex, si potrebbe creare un dispositivo compatibile con tutte le racchette presenti sul mercato. Affinché sia universale per tutti i telai, deve essere integrato su un supporto in gomma in modo che si possa modellare sulle varie racchette.

Per quanto riguarda il suo posizionamento si è pensato di inserirlo nella parte alta della gola della racchetta, subito dopo l'ovale, in modo da non alterarne la posizione del centro di massa. Altri posizionamenti, come quelli degli altri sistemi analizzati, si sono rivelati poco efficaci. Per esempio gli antivibrazioni delle corde, posizionati sul piatto corde, si sono rivelati inefficienti in ambito di prevenzione degli infortuni, quindi il loro scopo è legato soltanto all'attenuazione delle vibrazioni del piatto corde da cui deriva l'effetto acustico di riduzione del suono dell'impatto.

Anche una soluzione totalmente in silicone come Fluendo, nonostante non sia supportata da studi scientifici che ne attestino la relativa efficacia o meno, ha suscitato perplessità in riferimento alla sua posizione. Posizionato nella parte bassa della gola della racchetta tale dispositivo non dovrebbe ospitare deformazioni così elevate. In più le sue capacità smorzanti dipendono solo dal materiale silicone, il quale riesce a dissipare in maniera non così marcata e solo se viene deformato.

Si è pensato perciò che lo smorzamento granulare possa essere utile per smorzare le vibrazioni di una racchetta. Per questo potrebbe essere opportuno inserire degli scatolini contenenti granuli di piccole dimensioni sul telaio di una racchetta. Questi contenitori seguendo la deformazione del telaio potrebbero deformarsi e quindi i granuli al loro interno scivolerebbero tra loro provocando una azione di dissipazione attraverso l'attrito. In alternativa si potrebbe sfruttare il meccanismo inerziale e quindi ottenere smorzamento dagli urti anelastici in un contenitore lasco. Entrambi i metodi dissipativi legati allo smorzamento granulare possono essere testati variando la percentuale di riempimento delle cavità. In questo modo è possibile verificare quale meccanismo di dissipazione tra quello inerziale e quello di attrito è più efficace nel caso studio di una racchetta da tennis.

Una possibile configurazione geometrica dell'oggetto pensato viene riportata nel capitolo successivo, dove vengono riportati i modelli CAD e le simulazione numeriche delle varie soluzioni di smorzamento. Per un oggetto del genere non è possibile utilizzare il metodo agli elementi finiti a causa dell'elevata non linearità che caratterizza lo smorzatore granulare. Dopo l'analisi numerica di tutti i sistemi di smorzamento considerati, questi ultimi vengono testati anche in laboratorio. Per il caso dello smorzatore granulare, non avendo un prototipo reale ben definito, viene sperimentato un modello molto semplificato per verificarne l'efficacia del meccanismo di smorzamento, attrito o inerziale che sia.

# Capitolo 4

## Modello numerico di un impatto

### 4.1 Metodo agli elementi finiti

Prima di iniziare la trattazione dell'importanza delle simulazioni numeriche e sui metodi usati in questa tesi, è opportuno fare un riassunto sulla teoria su cui si basano queste simulazioni. Il metodo usato per studiare il comportamento numerico della racchetta da tennis è il Metodo agli Elementi Finiti (FEM).

I concetti che sono alla base della teoria agli elementi finiti sono i seguenti [34]:

- il FEM è una tecnica di approssimazione numerica utilizzata per risolvere la deformazione degli oggetti. Una volta ricavate le componenti di deformazione lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , si possono ottenere le componenti di tensioni associate attraverso la legge di Hooke
- l'oggetto viene discretizzato in piccole divisioni, che sono gli elementi finiti
- ogni elemento è delimitato da nodi, che sono condivisi tra gli elementi adiacenti. In questo modo gli oggetti continui sono rappresentati da un insieme di elementi finiti collegati dai nodi
- si ipotizzano delle funzioni di forma all'interno di un elemento finito per approssimare il campo di spostamento
- si utilizzano delle tecniche matematiche per ridurre al minimo gli errori nel convertire il problema fisico continuo, espresso da un numero elevato di equazioni differenziali alle derivate parziali, in un insieme di equazioni algebriche lineari espresse in funzione della deformazione nodale ( tale operazione si chiama scelta del funzionale)
- si impongono le condizioni di vincolo e di carico all'oggetto. A questo punto è possibile risolvere le equazioni algebriche lineari per ottenere la deformazione nodale di ciascun nodo
- note le deformazioni nodali, si può applicare la legge di Hooke a ciascun elemento e attraverso le funzioni di forma si riesce a calcolare il livello di tensione e deformazione per ogni punto dell'oggetto

Un aspetto importante del metodo agli elementi finiti è quello di dividere un oggetto in elementi di dimensione piccola ma comunque finita e successivamente effettuare i calcoli su tali elementi. I nodi rappresentano i punti di collegamento e contengono i contributi dei vari elementi confinanti. Esistono diversi tipi di elementi che possono essere usati nelle analisi FEM: i più semplici sono gli elementi asta monodimensionali, poi per problemi più complessi possono essere usati elementi 2D o anche 3D.

Un'ulteriore caratteristica da sottolineare è la funzione di forma, la quale definisce un'approssimazione della deformazione interna all'elemento collegandola con la deformazione che si ottiene ai nodi. Questa funzione di approssimazione può essere di tipo lineare, del secondo ordine o ancora maggiore a seconda del numero di nodi di un elemento. La funzione di forma deve essere in grado di definire lo spostamento di ciascun punto interno dell'elemento, per questo deve essere continua e dipendere solo dalle deformazioni dei nodi.

Per la scelta del funzionale, invece, il tema è più complesso perché esistono diversi metodi: energetici o variazionali. Tra quelli energetici si può considerare il principio dei lavori virtuali che afferma: dato un sistema con campo di forze e tensioni equilibrato, dato un campo di spostamento e deformazioni virtuali, il lavoro interno è uguale al lavoro esterno. Inserendo la funzione di forma scelta nel funzionale, è possibile trasformare quest'ultimo da una formulazione integrale a un sistema matriciale con tante righe e colonne quanti sono i gradi di libertà del sistema. Effettuando l'assemblaggio tra i vari elementi si ottengono delle equazioni globali in forma matriciale che sono risolvibili dai software di calcolo.

#### 4.1.1 Importanza delle simulazioni numeriche

La simulazione consente lo studio degli effetti su un oggetto causati dall'applicazione dei carichi del mondo reale. La simulazione numerica utilizza modelli CAD per rappresentare oggetti reali e applicare varie condizioni di carico sul modello, in modo da replicare gli effetti reali. Queste simulazioni sono di vitale importanza al giorno d'oggi perché permettono di effettuare modifiche al modello senza spreco di risorse economiche. Per questo motivo le simulazioni non devono essere intese come uno strumento per verificare la bontà di un progetto alla fine, ma devono essere utilizzate all'inizio del progetto.

Storicamente il ciclo di sviluppo di un prodotto prevedeva le seguenti fasi: il progetto partiva da un concept, ovvero il concetto del prodotto che definiva gli aspetti fondamentali di un progetto, poi si passava alla progettazione di dettaglio e poi, prima di andare in produzione, si effettuavano delle simulazioni. Seguendo questo percorso è chiaro che se fosse stato trovato un problema nella fase finale del ciclo, il prodotto era da riprogettare completamente. Questa soluzione, la maggior parte delle volte, non era possibile in quanto giunti alla fine del ciclo di progettazione i tempi di consegna erano ristretti e il budget poteva essere esaurito. Per questo, non potendo rifare tutto, si cercava di limitare gli errori esistenti e ottenere un progetto non ottimizzato.

L'approccio moderno, che utilizza tutti gli strumenti di progettazione numerica, prevede la simulazione all'inizio del ciclo di sviluppo, subito dopo la fase di concept. Si crea pertanto un modello semplificato, non dettagliato, e lo si simula immediatamente perché se

viene trovato un problema si può intervenire subito e si può ripetere questo ciclo più volte.

In questo modo, adottando l'approccio moderno delle simulazioni numeriche, si ottengono i seguenti vantaggi:

- ottimizzazione del progetto
- diminuzione dei tempi perché eventuali problemi vengono risolti immediatamente
- riduzione dei costi in quanto le modifiche non costano molto nella fase iniziale

#### 4.1.2 Software utilizzato

Il software usato in questa tesi per effettuare le simulazioni numeriche è SolidWorks Simulation. Si tratta di un software di progettazione e analisi completamente integrato, che utilizza come metodo risolutivo il metodo agli elementi finiti. Tale programma permette, applicando un sistema di carichi su un modello vincolato in condizioni ambientali predefinite, di effettuare diverse tipologie di analisi. Tra i possibili tipi di analisi eseguibili con SolidWorks Simulation troviamo: analisi statica, in frequenza, dinamica, di instabilità, termica, di caduta, di fatica, ecc.

Nella seguente trattazione, incentrata sulla dinamica delle racchette da tennis, verranno svolte soltanto le analisi statiche, dinamiche e modali. Le rispettive caratteristiche verranno trattate nelle parti successive, mentre il procedimento comune a ciascuno studio effettuato con SolidWorks Simulation è il seguente:

1. creazione di un modello che rappresenta la geometria fisica
2. definizione del tipo di analisi e creazione di uno studio
3. definizione dei materiali per ogni componente
4. definizione delle connessioni tra le varie parti dell'assieme
5. definizione dei vincoli e dei carichi
6. creazione della mesh, ovvero della divisione della geometria in elementi di dimensione finita
7. esecuzione dell'analisi
8. interpretazione dei risultati

In una fase iniziale dell'analisi è opportuno semplificare il modello e pulire quelle geometrie che non hanno significato dal punto di vista del calcolo e quindi partire da un modello con una discretizzazione non troppo fine. Nella maggior parte dei casi la creazione di una mesh più fine ha il vantaggio di fornire dei risultati più precisi, tuttavia il costo computazionale aumenta e anche il tempo di calcolo necessario a svolgere la simulazione è maggiore.

Prima di passare alle simulazioni sulla racchetta da tennis si è deciso di analizzare una struttura semplificata per capire quali sono i parametri necessari all'integratore SolidWorks.

La struttura analizzata è una semplice trave, in modo tale da avere un riscontro immediato con i risultati presenti in letteratura. Questa analisi viene trattata in dettaglio in APPENDICE B.

## 4.2 Creazione modello FEM

La creazione del modello CAD (Computer-Aided Design), ovvero assistita dall'elaboratore, è un processo iterativo che dipende dal compromesso cercato tra il livello di precisione richiesto e i requisiti minimi da soddisfare. Nel caso in esame della racchetta da tennis si è cercato di rispettare la geometria dell'oggetto, quindi dimensioni e materiali opportuni, senza però soffermarsi su dettagli che possono risultare poco utili ai fini delle analisi effettuate.

Il modello creato, con le rispettive quote fondamentali, viene riportato nella figura 4.1. Come si può vedere dall'immagine, l'oggetto non rappresenta nessuna racchetta particolare, ma presenta delle caratteristiche che sono plausibili e quindi confrontabili con quelle delle racchette esistenti in commercio.

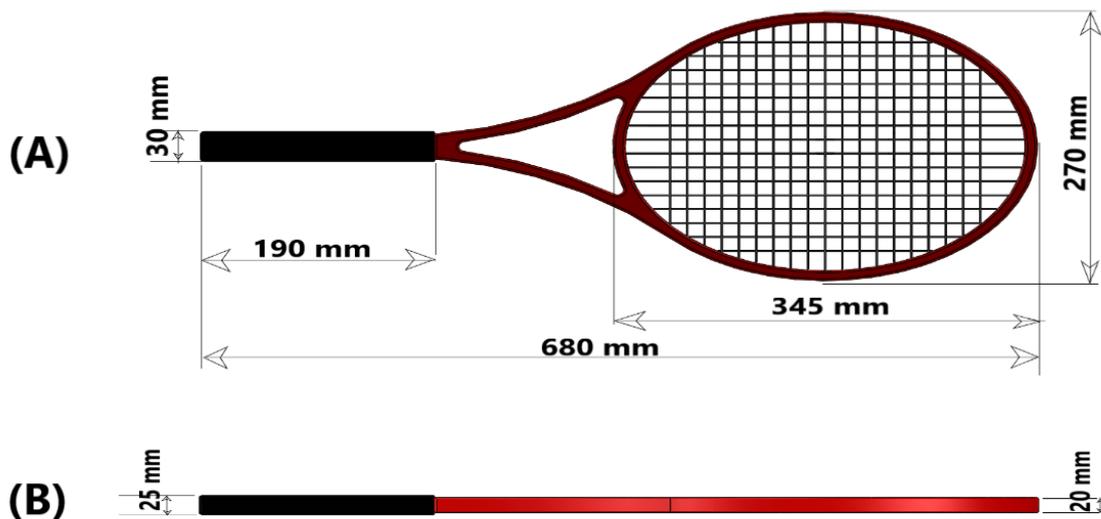


Figura 4.1: Modello di una racchetta da tennis: (A) vista superiore, (B) vista frontale

Aspetti che bisogna considerare nella creazione di un modello CAD sono i seguenti:

- proprietà dei materiali
- interazioni tra le parti
- metodi di dissipazione dell'energia

Per quanto riguarda le proprietà dei materiali, SolidWorks permette di associare a ciascuna parte del modello un materiale con determinate proprietà. Su questo aspetto è opportuno fare una precisazione perché normalmente le racchette sono fatte da vari materiali stratificati

e con un certo ordine. Non avendo queste informazioni dettagliate si è ipotizzato un materiale omogeneo con caratteristiche che possono prestarsi bene a simulare il comportamento di una racchetta. Si è optato quindi per un processo di omogenizzazione: invece di modellare più stati si è scelto un materiale fittizio omogeneo e senza direzioni preferenziali. Si ottiene quindi una rigidità diversa da quella di qualsiasi racchetta esistente perché il materiale reale non è isotropo.

Per l'interazione tra le parti, invece, è necessario specificare il tipo di connessioni tra i vari componenti dell'assieme. Siccome la struttura di una racchetta è abbastanza complessa si è pensato di inserire le seguenti semplificazioni:

1. il grip, nastro che ricopre la superficie del manico, viene escluso dal modello perché si è ritenuto che avesse un peso limitato sulle risposte strutturali della racchetta. In più nel modello agli elementi finiti non viene considerata la mano che impugna la racchetta, perciò non c'è motivo di includere il nastro di presa
2. nonostante nella figura 4.1 nella pagina precedente siano riportati insieme il piatto corde e il telaio della racchetta, si è pensato di separare i due elementi e studiare distintamente i comportamenti delle corde e del telaio

In SolidWorks Simulation si può associare al materiale una capacità di dissipare energia, in modo che dopo l'applicazione del carico le vibrazioni manifestino ampiezze decrescenti fino a annullarsi. Una volta creato il modello si può far partire l'analisi agli elementi finiti.

#### 4.2.1 Modello del piatto corde

Il modello di piatto corde usato nelle successive analisi numeriche è quello riportato nella figura 4.2.

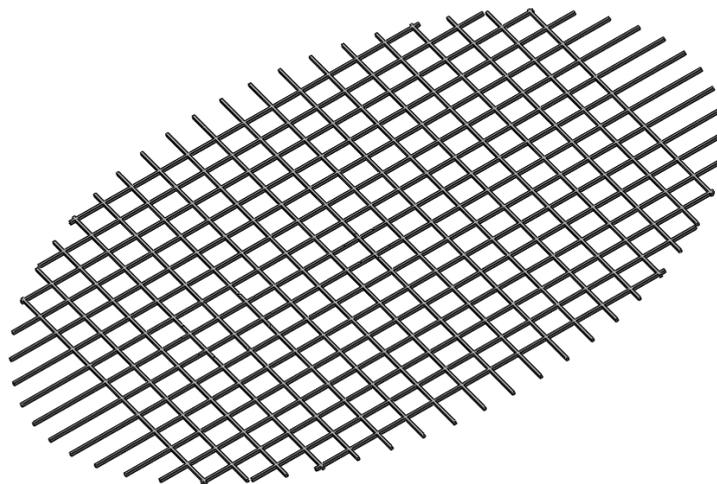


Figura 4.2: Modello del piatto corde di una racchetta da tennis

Come si può vedere dalla figura, la creazione di questo modello si basa su un'ipotesi semplificativa abbastanza forte: invece di modellare le varie corde in contatto tra di loro, si è

scelto di creare un unico corpo con la stessa geometria e le stesse proprietà delle corde reali. In questo modo si è trascurato il problema sul tipo di contatto da imporre e anche il numero di elementi che compone la mesh è notevolmente diminuito, rendendo le varie analisi più veloci. Si è adottata questa semplificazione perché il comportamento del piatto corde può essere simulato come una membrana continua, piuttosto che un insieme discreto di corde interconnesse [35]. Confrontando la rigidezza e le forme modali del modello con quelle reali del piatto corde si è poi verificato che tale approssimazione è accettabile.

Il disegno del piatto corde prevede uno schema di corde 16x19, con l'ipotesi di spaziatura costante tra le corde sia in direzione verticale che orizzontale e pari a 12,8 mm. La larghezza delle corde, quello che sarebbe il diametro se avessero forma cilindrica, si è ipotizzato essere 1,4 mm, mentre lo spessore del piatto corde è 1,6 mm. Il materiale scelto per questo componente è il Nylon 6/10, le cui proprietà, insieme alla massa del modello, sono riportate nella tabella 4.1:

Tabella 4.1: Proprietà del piatto corde

E (GPa)	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	Massa (g)
8,3	1400	21

Per quanto riguarda i vincoli adottati, si sono bloccate le traslazioni perpendicolari a ciascun asse delle corde, lasciando libero soltanto il movimento lungo l'asse longitudinale di ciascuna corda. Le tensioni delle corde, invece, sono state simulate imponendo una forza di trazione alle estremità di ogni corda, come illustrato nella figura 4.3.

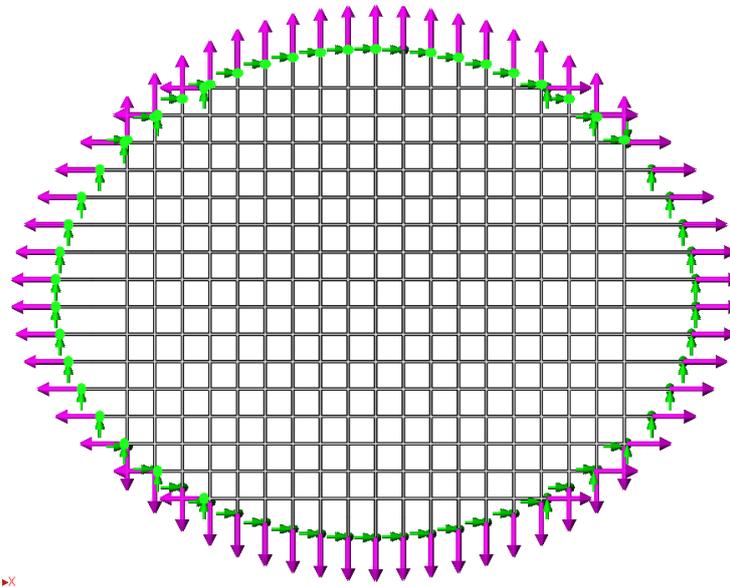


Figura 4.3: Modellazione dei vincoli e delle tensioni del piatto corde: le frecce in verde indicano i movimenti bloccati dovuti ai vincoli, mentre le frecce in viola simulano la tensione delle corde

## 4.2.2 Modello del telaio

Il modello del telaio della racchetta da tennis viene riportato nella figura 4.4. Come anticipato nelle sezioni precedenti si tratta di una struttura semplificata, che non considera la presenza del grip sull'impugnatura e del piatto corde, in quanto si è preferito studiare i due corpi separatamente.



Figura 4.4: Modello del telaio di una racchetta da tennis

Le dimensioni geometriche più rilevanti del telaio sono riportate della figura 4.1, mentre per quanto riguarda il materiale si è scelto il CFRP, ovvero il polimero rinforzato con fibre di carbonio. Tale materiale non è presente nella libreria di SolidWorks, perciò i valori delle proprietà necessarie alle varie analisi sono stati presi dal riferimento [36] e riportati nella tabella 4.2.

Tabella 4.2: Proprietà del materiale CFRP (polimero rinforzato con fibre di carbonio)

E (GPa)	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	Resistenza trazione (MPa)	Resistenza compressione (MPa)
72	1550	550	400

Scegliendo il materiale e considerando la geometria modellata, il software riesce a calcolare in modo automatico quelle che sono le caratteristiche fondamentali della racchetta:

- Massa della racchetta = 291 g
- Posizione del centro di massa (bilanciamento) = 33 cm
- Momenti di inerzia:
  - Rispetto al centro di massa:  $I_x=0.01189 \text{ kg m}^2$ ,  $I_y=0.00141 \text{ kg m}^2$  e  $I_z=0.01327 \text{ kg m}^2$
  - Rispetto ad un sistema di riferimento posto all'impugnatura:  $I'_x=0.04496 \text{ kg m}^2$ ,  $I'_y=0.00141 \text{ kg m}^2$  e  $I'_z=0.04634 \text{ kg m}^2$

Per la denominazione dei momenti di inerzia si è scelto lo stesso sistema di riferimento riportato nella figura 1.5, in modo da avere dei valori confrontabili. Dall'analisi di tali valori possiamo affermare che la racchetta è stata modellata correttamente in quanto la sua

massa complessiva, compresa quella del piatto corde, misura 312 grammi e quindi in linea con il peso delle racchette presenti in commercio che in media hanno un valore vicino ai 300 grammi. Anche il bilanciamento presenta una misura plausibile e bilanciata verso il manico, come sarebbe consigliabile per ogni racchetta in modo da limitare gli infortuni. Infine pure i valori dei momenti di inerzia sono accettabili in quanto rientrano nell'intervallo di valori misurati nel riferimento [3] e riportati nella tabella 1.2.

L'ipotesi semplificativa legata al telaio della racchetta riguarda la condizione di vincolo adottata. Nonostante si è affermato più volte in questa tesi che la condizione che più rappresenta la presa del giocatore durante l'impatto con la pallina è quella liberamente sospesa, in SolidWorks Simulation non è stata possibile applicarla in quanto l'applicazione di un carico determinava uno spostamento rigido e non una deformazione del telaio come ci si aspettava. Per questa ragione si è deciso di adottare una condizione di incastro nella zona di presa della racchetta. La rappresentazione della condizione di vincolo è riportata nella figura 4.5.

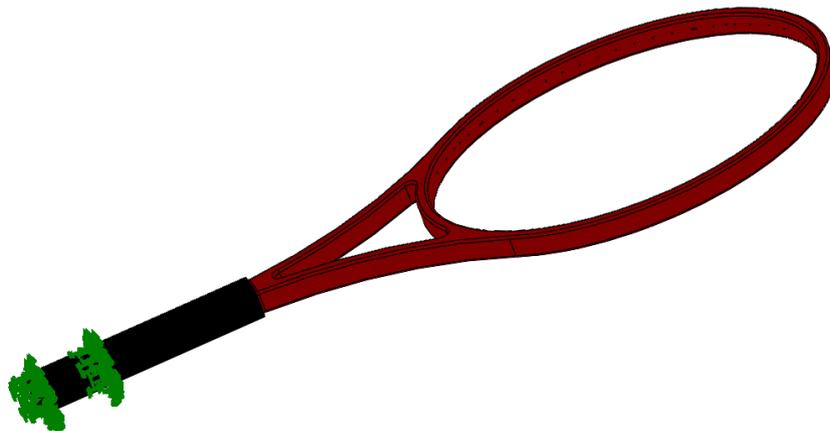


Figura 4.5: Modellazione del vincolo del telaio di una racchetta da tennis

Si è fatta questa scelta di vincolo del telaio anche per avere un risultato confrontabile con l'analisi sperimentale successiva. Una condizione del genere è più facilmente simulabile in laboratorio e siccome si è più interessati ad analizzare le differenze tra i vari sistemi di smorzamento, piuttosto che al reale comportamento della racchetta, questa ipotesi si è ritenuta accettabile.

Un ultimo aspetto della modellazione del telaio che risulta valido per tutte le simulazioni effettuate è la rappresentazione dell'effetto delle corde. Avendo separato l'elemento piatto corde dal telaio, si è pensato di inserire degli elementi molla che simulassero l'influenza delle corde sul telaio. Siccome lo schema corde utilizzato è 16x19 si sono inserite 35 molle all'interno dell'ovale del telaio, come illustrato nella figura 4.6.

I valori di rigidità delle molle saranno discussi in seguito perché dipendono dal valore di tensione delle corde, quindi sono necessarie delle prove statiche per determinare tali valori. Un'ipotesi che viene fatta in questo caso è la costanza della rigidità delle molle durante l'impatto. Si tratta di una semplificazione in quanto è stato dimostrato che la rigidità

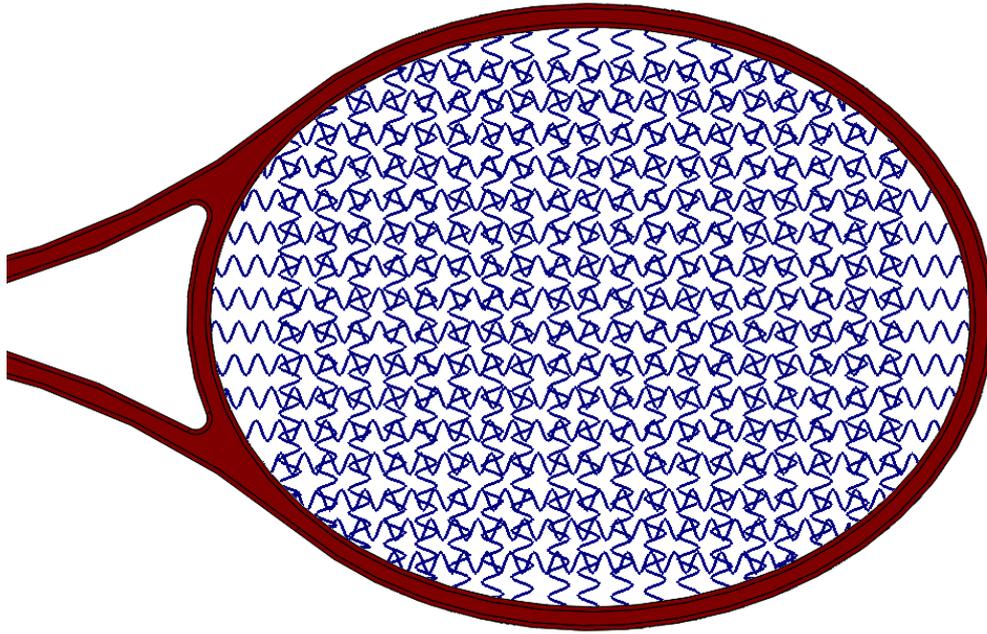


Figura 4.6: Simulazione dell'influenza del piatto corde sul telaio con elementi molla

risulta essere una funzione della deflessione trasversale del piatto corde e quindi della forza applicata [21]. Se la forza dell'impatto è maggiore si ottiene un indurimento e anche la rigidità del piatto corde dovrebbe aumentare.

### 4.2.3 Modello dell'antivibrazione

L'antivibrazione delle corde è un piccolo dispositivo che si inserisce nella parte bassa del piatto corde, quasi in prossimità della gola della racchetta, che ha lo scopo di ridurre le vibrazioni delle corde. La sua modellazione eseguita con SolidWorks e il posizionamento dell'oggetto sul piatto corde viene riportato in figura 4.7.

Come si può vedere dal disegno si tratta di un oggetto molto semplice, che viene modellato con una forma circolare ma che può possedere forme anche molto diverse. Il materiale scelto per il modello è la gomma siliconata, presente nella libreria dei materiali del software e che mostra le proprietà fondamentali riportate nella tabella 4.3.

Tabella 4.3: Proprietà della gomma siliconata

E (MPa)	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	Resistenza a trazione (MPa)
0,4	1246,5	6

Utilizzando questo materiale si è ottenuto un modello che ha una massa pari a 3,7 grammi.

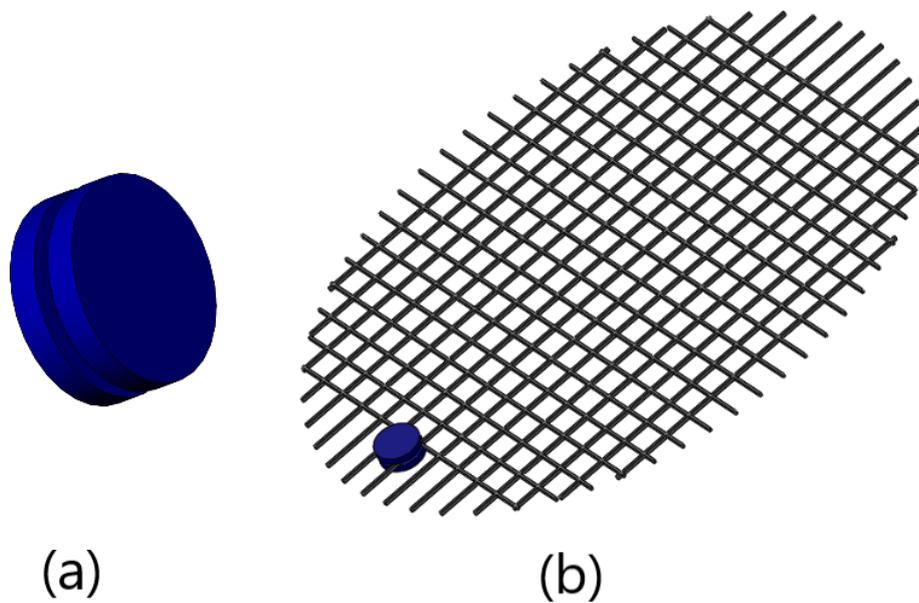


Figura 4.7: Antivibrations delle corde: (a) modello, (b) posizionamento sul piatto corde

#### 4.2.4 Modello di Fluendo

Per quanto riguarda Fluendo, il dispositivo di smorzamento delle vibrazioni in gomma che si posiziona sul telaio, sono stati creati due modelli, come riportato nella figura 4.8. Il primo riprende fedelmente la geometria dell'oggetto, ma in un'analisi FEM tale modello non è facilmente inseribile sul telaio perché non si riesce a allungare la gomma per simulare la chiusura dell'oggetto. Pertanto è stato necessario creare un secondo modello, semplificato, con le stesse proprietà dell'oggetto reale ma che soddisfi i requisiti di montaggio. Sarà quindi il modello semplificato di Fluendo ad essere utilizzato nelle successive analisi numeriche.

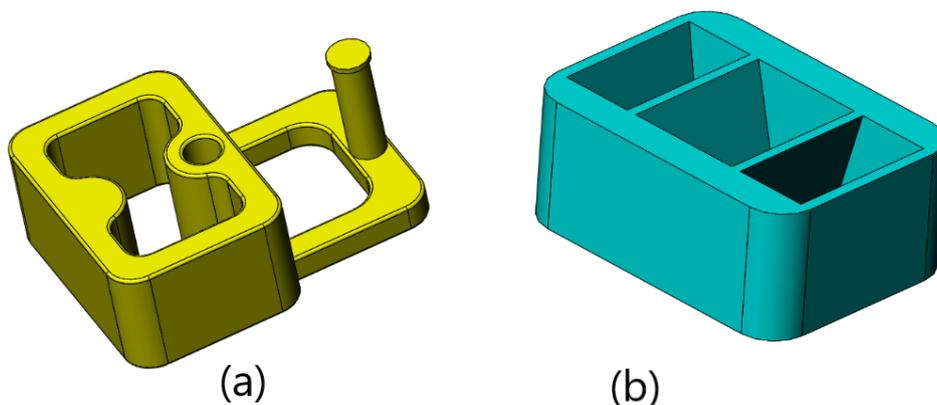


Figura 4.8: Modello di Fluendo: (a) dettagliato, (b) semplificato

Una rappresentazione del posizionamento questo dispositivo sul telaio della racchetta è riportata nella figura 4.9. Per quanto riguarda il materiale, come nel caso dell'antivibrazione

delle corde, si è scelto la gomma siliconata, le cui proprietà sono riportate nella tabella 4.3.

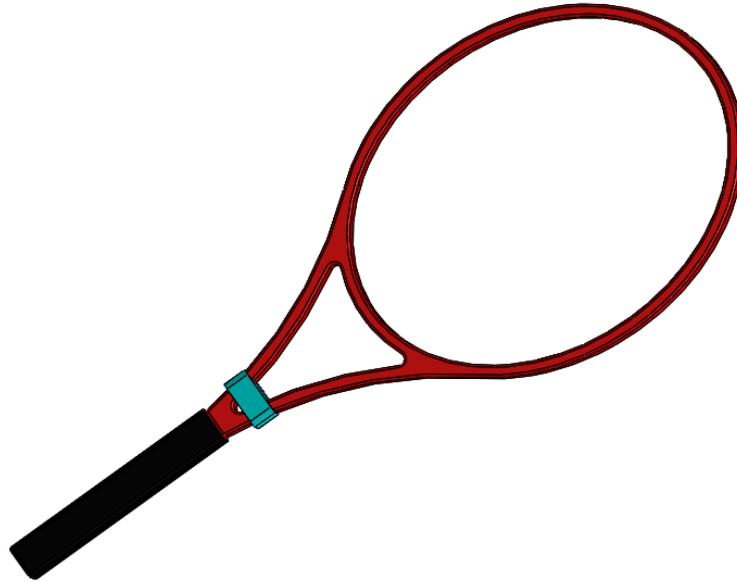


Figura 4.9: Modello del telaio con l'aggiunta del dispositivo di smorzamento in gomma posizionato nella parte bassa della gola

Utilizzando la gomma siliconata come materiale si è ottenuta una massa per il modello semplificato di 14 grammi, la stessa dell'oggetto reale. Quindi considerando che anche la posizione sul telaio è la stessa, si può affermare che tale modello può andare bene per le successive simulazioni numeriche.

### 4.3 Simulazione statica

Dopo aver definito i modelli CAD di tutti gli oggetti necessari per le analisi numeriche e prima di iniziare quelle dinamiche, è opportuno eseguire delle analisi statiche per definire i comportamenti dei modelli creati sottoposti a carichi costanti.

L'analisi statica è il tipo di analisi più comune e consiste nell'applicazione di carichi ad un corpo, i quali causano la deformazione di quest'ultimo. Per assorbire l'effetto dei carichi, il corpo genera delle forze interne e reazioni ai supporti per bilanciare i carichi esterni applicati. Queste forze e reazioni interne causano stress e tensione sul corpo. L'analisi statica perciò si riferisce al calcolo di spostamenti, deformazioni e sollecitazioni sotto l'azione di carichi esterni e sulla base delle seguenti ipotesi:

- i carichi vengono applicati lentamente fino a raggiungere la loro ampiezza completa. Raggiunto tale valore il carico rimane costante
- relazione di linearità tra carichi e risposte: raddoppiando il carico anche la risposta avrà un valore doppio. Affinché sia possibile applicare l'ipotesi di linearità è necessario che:

1. i materiali del modello rispettino la legge di Hooke: sollecitazione proporzionale alla deformazione
2. spostamenti risultanti sufficientemente piccoli per ignorare la variazione di rigidità causata dal carico
3. condizioni al contorno costanti durante l'applicazione dei carichi

Il percorso logico per effettuare un'analisi statica è il seguente: partendo dal modello si definiscono i vincoli e i materiali. Successivamente bisogna caricare la struttura attraverso forze e momenti costanti e, nel caso di un assieme con più elementi, bisogna definire anche il tipo di connessioni tra le parti. Poi, prima di far partire l'analisi, bisogna creare la mesh. Siccome la scelta del materiale e dei vincoli è stata già trattata nella definizione dei modelli, in questa sezione vengono riportati le condizioni di applicazione dei carichi e il processo di meshing utilizzato.

**Applicazione dei carichi** Il tipo di carico da applicare tramite SolidWorks cambia tra piatto corde e telaio. Per il caso del piatto corde si è utilizzato la forza, che è opzione di carico più semplice, la quale può agire su una superficie, una linea o un punto. Nel caso considerato, per simulare l'impatto con la pallina, si sono create delle superfici circolari sul piatto corde in varie posizioni, come mostrato nella figura 4.10.

Per la dimensione dell'area di contatto si è scelto un cerchio di diametro 40 mm, questo

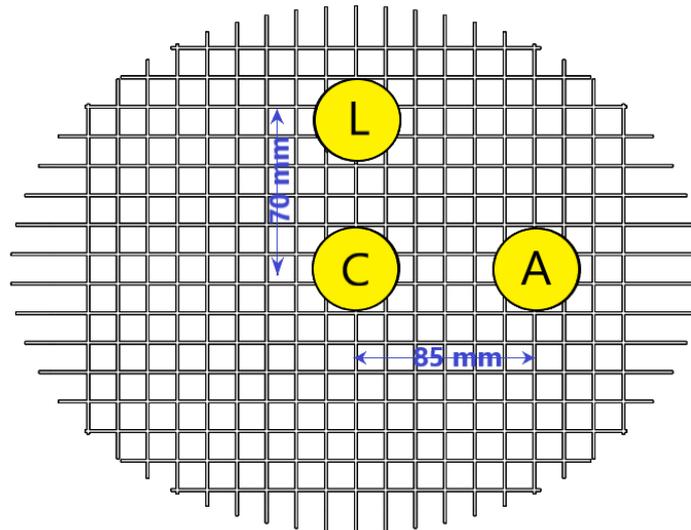


Figura 4.10: Posizioni di applicazione della forza sul piatto corde: (C) centrale, (L) laterale, (A) alto

perché l'area di contatto è un parametro variabile in funzione della deformazione della pallina e quindi si è preso un valore medio. Mentre le posizioni studiate per il piatto corde sono tre ed indicate con le seguenti lettere: *C* è la posizione centrale, *L* è la posizione laterale e *A* è la posizione in alto. Non sono state considerate altre locazioni perché, non avendo inserito il telaio, la posizione in basso è perfettamente uguale a quella in alto e quelle laterali, a sinistra e a destra rispetto al centro, sono simmetriche.

Per il telaio, invece, avendo rimosso le corde si è scelta l'opzione carico remoto, che permette di applicare una forza nella posizione del componente omesso. Il software calcola automaticamente le forze che agiscono sulle facce selezionate, attraverso il trasferimento di forze e momenti equivalenti. Una rappresentazione di questo sistema di carichi viene riportata nella figura 4.11. Anche in questo caso si riescono a studiare più posizioni di impatto cambiando l'origine di applicazione della forza, anche se tali posizioni non sono associate a delle superfici del modello.

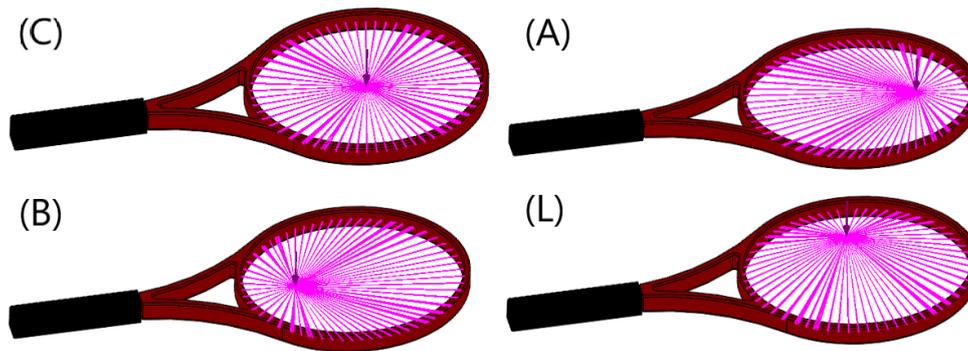


Figura 4.11: Posizioni di applicazione della forza sul telaio: (C) centrale, (A) alto, (B) basso, (L) laterale

**Creazione della mesh** Il processo di meshing è alla base del metodo agli elementi finiti in quanto permette di dividere il modello in parti di forma e dimensione finite.

Il software utilizzato contiene al suo interno un mesher automatico che genera una discretizzazione del modello fornendo determinate informazioni:

- dimensione globale dell'elemento
- tolleranza sulle dimensioni
- specifiche di controllo della mesh locale

Siccome le analisi statiche si basano solo sul comportamento del piatto corde e del telaio, viene riportata la discretizzazione soltanto di questi due elementi. I modelli degli smorzatori di vibrazioni verranno trattati invece nelle simulazioni dinamiche. Per quanto riguarda la mesh del piatto corde si è scelta l'opzione standard con una densità media degli elementi, i cui parametri più significativi sono riportati nella tabella 4.4.

Per il telaio, invece, avendo una geometria curva, si è preferito usare una mesh basata sulla curvatura, sempre con una densità media degli elementi (tabella 4.5). Una rappresentazione della mesh del piatto corde è riportata nella figura 4.12, mentre quella del telaio nella figura 4.13.

Il livello di dettaglio della mesh, ovvero il numero e la dimensione degli elementi, dipende dal tipo di analisi che si vuole eseguire. Se come nell'analisi statica si è interessati allo stato di tensione e deformazione dell'oggetto, non è possibile omettere caratteristiche come i raccordi o smussi perché tale operazione potrebbe creare spigoli vivi con una concentrazione di tensioni che non corrisponde alla realtà.

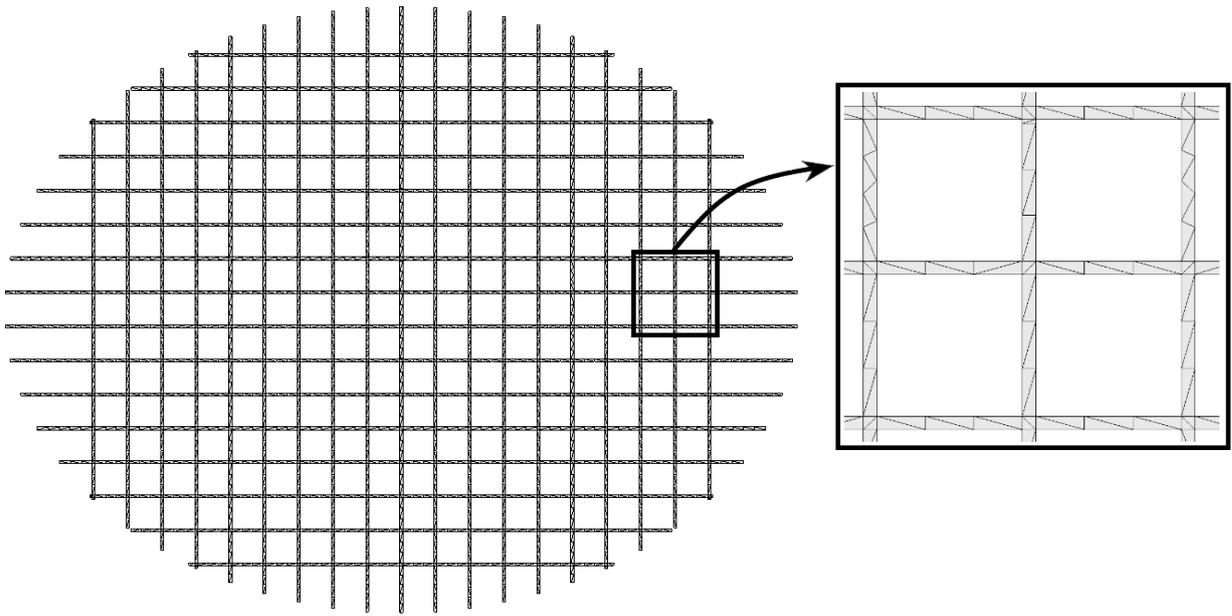


Figura 4.12: Mesh del modello del piatto corde

Tabella 4.4: Parametri della mesh del piatto corde

Tipo di mesh	Elementi solidi
Dimensione elementi (mm)	4,5
Tolleranza elementi (mm)	0,2
Nodi totali	9737
Elementi totali	25104

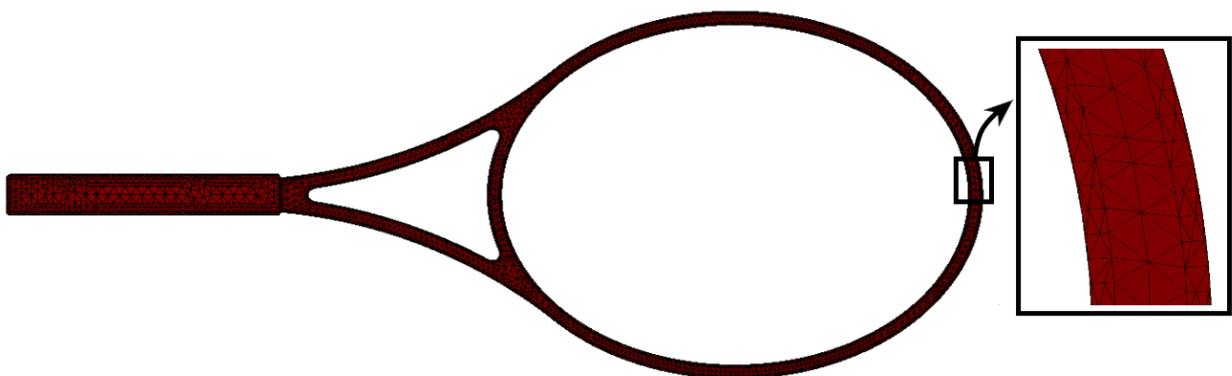


Figura 4.13: Mesh del modello del telaio della racchetta da tennis

Tabella 4.5: Parametri della mesh del telaio

Tipo di mesh	Elementi solidi
Dimensione massima elementi (mm)	16
Tolleranza minima elementi (mm)	3
Nodi totali	11976
Elementi totali	32597

Nelle analisi dinamiche, invece, si è più interessati al comportamento globale della struttura, quindi può essere opportuno trascurare le caratteristiche di dettaglio per rendere l'analisi più veloce.

### 4.3.1 Piatto corde

Le analisi statiche trattate in questa sezione riguardano soltanto gli elementi piatto corde e telaio. Non sono stati considerati i modelli degli smorzatori perché si è notato che la loro influenza è minima in questo tipo di analisi.

**Deformazioni** La deformazione del piatto corde cambia in base a tre parametri di progetto: intensità della forza che simula l'impatto, valore di tensione applicato alle corde e posizione di impatto. Per studiare l'influenza di questi parametri si sono eseguite più simulazioni, i cui risultati sono riportati per lo più in forma tabellare.

Per avere anche una rappresentazione grafica si è riportato un caso particolare con le seguenti caratteristiche nella figura 4.14 nella pagina successiva:

- forza  $F=700$  N
- tensione  $T=245$  N
- posizione C (centrale)

Nell'esempio sopra citato si è scelto un valore di forza di impatto abbastanza plausibile, un livello di tensione delle corde medio e come posizione quella al centro del piatto corde. Come si nota dalla figura 4.14 lo spostamento massimo è risultato ovviamente al centro e con un valore di circa 13mm.

Analizzando altre combinazioni di parametri si è scelto di cambiare soltanto il livello di tensione e la posizione dell'impatto. Il valore della forza di impatto si è lasciato costante per la sola ragione che si sta effettuando un'analisi statica lineare, quindi se raddoppia la forza anche lo spostamento cresce nello stesso modo.

I risultati delle simulazioni effettuate per diversi valori di tensione sono sintetizzati nella tabella 4.6, dove viene riportato il valore di spostamento massimo e, per il caso di impatto in posizione centrale, anche la rigidezza flessionale del piatto corde, calcolata attraverso la semplice relazione  $K = F/x$ .

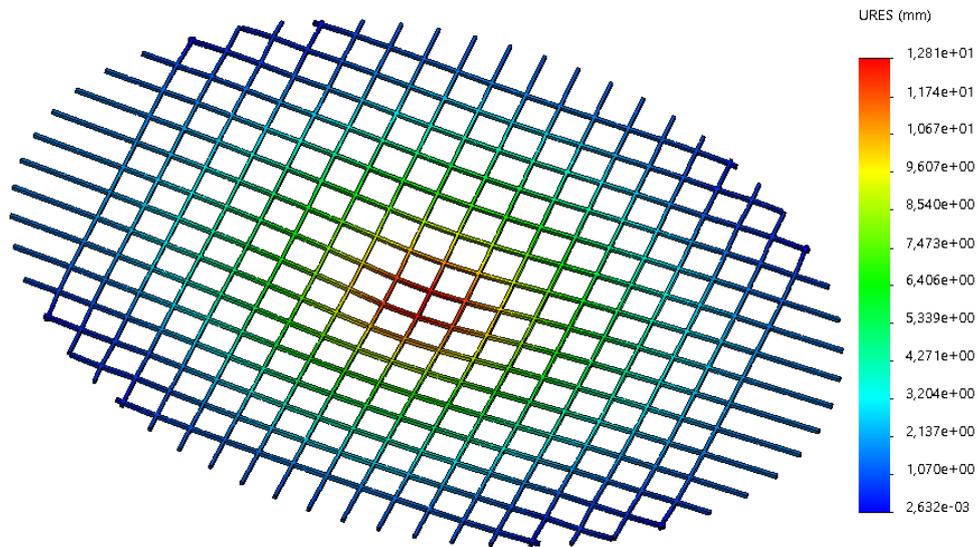


Figura 4.14: Deformazione del piatto corde dovuta ad un impatto particolare:  $F=700\text{N}$ ,  $T=245\text{N}$ , posizione C

Tabella 4.6: Risultati simulazione statica del piatto corde al cambiare del livello di tensione con una forza di  $700\text{N}$  in posizione centrale

Tensione (N)	Spostamento massimo (mm)	Rigidezza trasversale (N/m)
178	15,90	44025
201	14,69	47651
223	13,69	51132
245	12,81	54644
267	12,04	58139
290	11,32	61837
312	10,72	65298

Tabella 4.7: Risultati simulazione statica del piatto corde al cambiare della posizione di impatto con una forza di  $700\text{N}$  e una tensione di  $245\text{N}$

Posizione impatto	Spostamento massimo (mm)
A	11,49
C	12,81
L	10,54

Dai risultati delle varie simulazioni si nota che, per un impatto centrale, aumentando il valore della tensione delle corde, lo spostamento massimo diminuisce. Questo avviene perché la struttura piatto corde diventa più rigida, infatti la rigidezza trasversale aumenta.

Anche spostando la posizione di impatto si nota una diminuzione dello spostamento. Questo è dovuto al fatto che ci si trova più vicini ai vincoli perimetrali e quindi gli spostamenti non possono aumentare. Queste simulazioni, essendo delle prove statiche, non considerano il concetto di sweet spot.

**Sollecitazioni** Per quanto riguarda il livello di tensione della struttura causato dall'applicazione del carico è riportato a titolo di esempio il caso particolare trattato in precedenza: forza di 700 N, tensione di 245 N e posizione di impatto centrale. La rappresentazione è riportata nella figura 4.15.

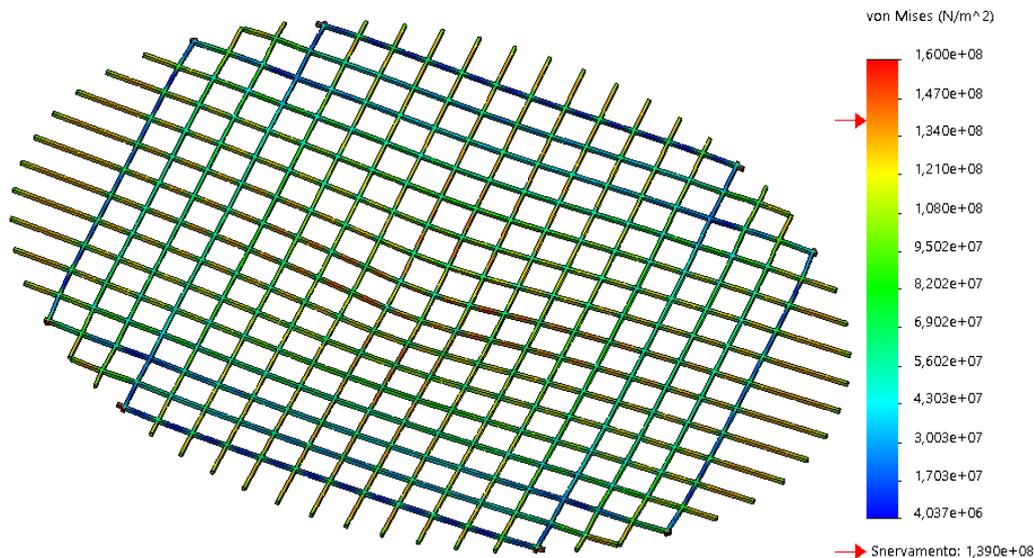


Figura 4.15: Livello di sollecitazione del piatto corde dovuta ad un impatto particolare:  $F=700\text{N}$ ,  $T=245\text{N}$ , posizione C

Nella figura viene riportato l'andamento della tensione di Von Mises. Anche in questo caso sarebbe possibile effettuare più simulazioni, ma più che al valore numerico si è interessati all'andamento della sollecitazione sulla struttura del piatto corde. Come si può vedere dall'immagine le zone maggiormente sollecitate si trovano al centro del modello, dove avviene l'applicazione della forza, ma anche nelle zone perimetrali vicino all'ovale. La causa della presenza di queste zone maggiormente in tensione è dovuta alla presenza della forza verticale per la zona centrale, e alla presenza della tensione delle corde per le zone perimetrali.

In alcune regioni si supera la condizione di snervamento del materiale, ma ciò può essere imputabile ad alcune imprecisioni relative al disegno del modello oppure al fatto che stiamo analizzando un comportamento statico, mentre l'impatto nella realtà ha una durata molto ridotta.

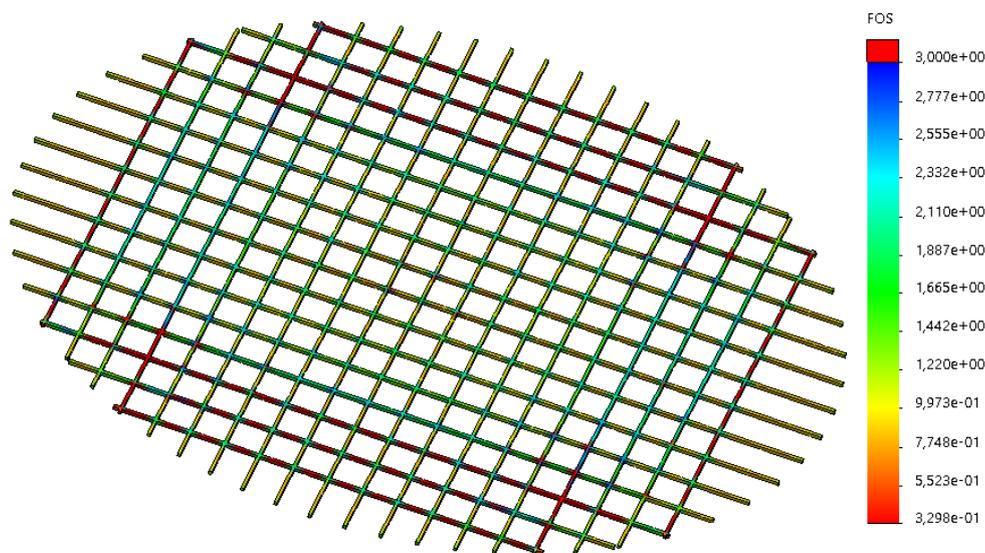


Figura 4.16: Coefficiente di sicurezza del piatto corde dovuta ad un impatto particolare:  $F=700\text{N}$ ,  $T=245\text{N}$ , posizione C

**Coefficienti di sicurezza** Anche per i coefficienti di sicurezza del piatto corde si applica un ragionamento simile a quello delle sollecitazioni, ovvero non si è interessati tanto al valore numerico o al cedimento della struttura, quanto ad individuare le zone particolarmente sensibili.

A titolo di esempio viene riportata la rappresentazione del caso considerato ( $F=700\text{N}$ ,  $T=245\text{N}$ , posizione C) nella figura 4.16.

Guardando la figura è evidente che una simile prova statica sulla struttura la porta a cedimento, in quanto il coefficiente di sicurezza è minore dell'unità per molte zone del modello. Le zone maggiormente sensibili sono quelle perimetrali. Si può quindi affermare che un modello del piatto corde realizzato in questo modo non simula molto bene la resistenza statica delle corde.

Si può concludere che con la prova statica del piatto corde si sono ottenuti dei valori di spostamento e di rigidità plausibili, mentre per quanto riguarda le sollecitazioni e i coefficienti di sicurezza si sono trovati dei problemi, in quanto la struttura andrebbe a cedimento. Questo aspetto può essere spiegato da alcuni difetti nel disegno che fanno lievitare il valore di tensione e anche al fatto che un impatto è un evento istantaneo, molto distante da una prova statica.

### 4.3.2 Telaio

Anche per il telaio della racchetta da tennis vengono eseguite delle simulazioni numeriche di tipo statico, quindi possono essere fatte valutazioni simili alle precedenti. Prima di analizzare le prove effettuate e commentare i risultati ottenuti, bisogna chiarire il tema delle molle da applicare al telaio. Come detto più volte, per rendere più veloci le simulazioni e compatibili con la versione per gli studenti del software SolidWorks Simulation, si è pensato di separare il

piatto corde dal telaio. L'influenza delle corde sul telaio deve però essere considerata, perciò si è scelto di inserire nell'ovale un numero di molle pari al numero di corde che compone lo schema del piatto corde. Siccome lo schema è 16x19 si sono inserite 35 molle all'interno del telaio, in particolare 19 in posizione verticale e 16 posizione in orizzontale, come riportato nella figura 4.6.

Una volta inseriti gli elementi molla all'interno dell'ovale, non resta che definirne i valori di rigidezza, in modo da rappresentare fedelmente il comportamento delle corde reali. I parametri che descrivono un elemento molla sono i seguenti:

- Rigidezza assiale ( $K_A$ )
- Rigidezza trasversale ( $K_T$ )
- Precarico ( $T$ )

Per quanto riguarda il valore di rigidezza assiale da inserire negli elementi molle, si è pensato di effettuare una simulazione statica di trazione su un filo in Nylon. Tale elemento rappresenta la corda reale, con le stesse dimensioni di diametro e lunghezza. Si è quindi calcolata la rigidezza come rapporto tra la forza di trazione applicata e lo spostamento ottenuto:  $K_A = F/x$ . Si è ricavato un valore  $K_A = 39830 N/m$ , che bisogna inserire ad ogni elemento molla dell'ovale e che non cambia in relazione al livello di tensione.

Per il valore di rigidezza trasversale si sono considerati i risultati delle prove statiche del piatto corde riportati nella tabella 4.6 per impatti centrali. Come si può notare la rigidezza cambia in base al livello di tensione, per questo ad ogni valore di tensione delle corde verrà associato un diverso  $K_T$ . Ma il valore trovato in 4.6 si riferisce a tutto il piatto corde, quindi per avere un valore relativo alla singola molla bisogna dividere tale risultato per il numero di molle presenti. Si è fatto questo calcolo perché il sistema di molle si trova in parallelo, quindi la rigidezza totale si calcola come somma delle singole rigidzze delle molle, che si è ipotizzato essere costante.

Il precarico da applicare, invece, non è altro che il livello di tensione delle corde. I valori dei parametri da applicare per ciascuna molla, in base al livello di tensione associato, sono riportati nella tabella 4.8.

Tabella 4.8: Parametri delle molle che simulano il piatto corde

Precarico (N)	Rigidezza assiale (N/m)	Rigidezza trasversale (N/m)
178	39830	1258
201	39830	1361
223	39830	1461
245	39830	1561
267	39830	1661
290	39830	1767
312	39830	1866

Definito l'ultimo aspetto relativo alle molle si può passare alle simulazioni statiche del telaio di una racchetta da tennis.

**Deformazioni** Come per il caso del piatto corde, anche qui i risultati di deformazione variano in base all'intensità della forza applicata, alla sua posizione e anche al livello di tensione delle corde, espresso come rigidezza e precarico delle molle.

Sono state eseguite più simulazioni inserendo un valore di forza costante pari a  $F=700$  N e variando la posizione dell'impatto e i parametri delle molle. Si è studiata anche qui soltanto l'influenza di una forza verticale perpendicolare al piatto corde e con un valore compatibile con la forza di impatto reale, non studiando altri valori in quanto si tratta di uno studio statico lineare.

A titolo di esempio viene riportato una caso particolare nella figura 4.17.

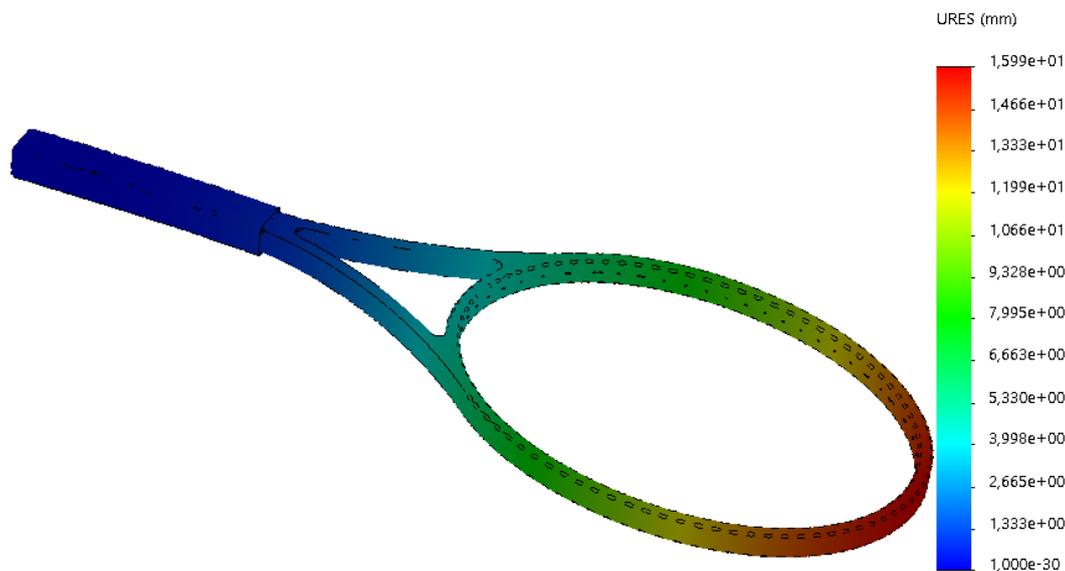


Figura 4.17: Deformazione del telaio di una racchetta dovuta ad un impatto particolare:  $F=700$ N,  $T=245$ N, posizione centrale (C)

Come si può vedere, la racchetta che ha un carico centrale e una condizione di incastro in corrispondenza dell'impugnatura si comporta in modo simile al caso semplificato della trave incastrata trattato in APPENDICE B.

Lo spostamento massimo si ha in corrispondenza dell'estremità della testa e per la condizione in esame, con una forza di 700N e un livello di tensione medio, assume un valore di quasi 16 mm.

Vengono quindi realizzate altre prove per vedere come cambia lo spostamento massimo della racchetta al cambiare del livello di tensione e della posizione di impatto. Tali risultati vengono raccolti rispettivamente nelle tabelle 4.9 e 4.10.

Oltre al valore di spostamento massimo, si può ricavare il valore di rigidezza flessionale del telaio applicando, invece di un carico remoto al centro dell'ovale, una forza sull'estremità della testa della racchetta. In questo modo si trova uno spostamento massimo che non è rappresentativo dell'impatto, ma dividendo il valore di forza applicato per tale risultato si

Tabella 4.9: Risultati simulazione statica del telaio al cambiare del livello di tensione con una forza di 700N in posizione centrale

Tensione (N)	Spostamento massimo (mm)
178	17,35
201	16,86
223	16,41
245	15,99
267	15,60
290	15,20
312	14,86

Tabella 4.10: Risultati simulazione statica del telaio al cambiare della posizione di impatto con una forza di 700N e una tensione di 245N

Posizione impatto	Spostamento massimo (mm)
C	15,99
A	21,34
B	10,31
L	16,33

Tabella 4.11: Rigidezza flessionale del telaio al cambiare del livello di tensione delle corde

Tensione (N)	Rigidezza flessionale (N/m)
178	22815
201	23468
223	24078
245	24666
267	25220
290	25786
312	26274

ottiene le rigidezza flessionale del telaio:  $K = F/x$ . I valori di rigidezza ottenuti cambiano in base ai livelli di tensione delle corde e sono riportati nella tabella 4.11.

Dall'analisi dei risultati tabellari ottenuti per le deformazioni del telaio, si può notare che con l'aumentare del livello di tensione lo spostamento del telaio diminuisce. Ciò avviene perché l'intera struttura diventa più rigida, infatti anche la rigidezza flessionale del telaio cresce con il livello di tensione.

Per quanto riguarda la posizione di impatto si sono studiati quattro casi distinti: posizione centrale (C), laterale (L), in alto (A) e in basso (B). Dai risultati ottenuti si vede che lo spostamento massimo del telaio si ha per l'impatto in posizione (A), in quanto è la più distante dal vincolo, mentre lo spostamento minimo è associato a (B). Risultati comparabili si hanno per impatti (C) e (L), solo che per quest'ultimo caso è associata anche una forza

laterale che causa la torsione sul telaio.

**Sollecitazioni** Anche il livello di tensione del telaio varia a seconda del tipo di impatto. Una rappresentazione del solito esempio viene riportata nella figura 4.18, mentre i valori massimi della tensione di Von Mises al variare della tensione delle corde e della posizione dell’impatto vengono presentati rispettivamente nelle tabelle 4.12 e 4.13.

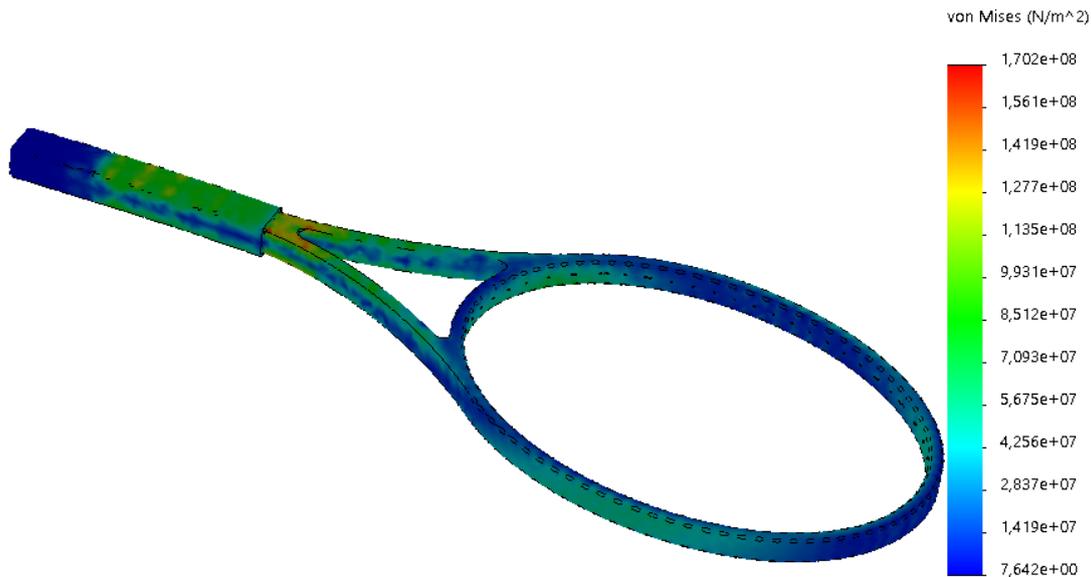


Figura 4.18: Livello di sollecitazione del telaio di una racchetta dovuta ad un impatto particolare:  $F=700\text{N}$ ,  $T=245\text{N}$ , posizione centrale (C)

Tabella 4.12: Livello di tensione massima di Von Mises al cambiare del livello di tensione delle corde e con una forza di  $700\text{N}$  in posizione centrale

Tensione (N)	Tensione massima (MPa)
178	178,3
201	175,3
223	172,6
245	170,2
267	168,0
290	165,8
312	163,8

Dalla figura 4.18 si evince che il massimo livello di tensione si ha nella parte bassa della gola della racchetta, l’ovale invece non è una zona molto sollecitata. Dai risultati tabulati che esprimono l’andamento della tensione massima al variare di alcune condizioni, si nota che la  $\sigma_{max}$  diminuisce all’aumentare della tensione, proprio perché lo spostamento massimo diminuisce e quindi la parte bassa della gola è meno sollecitata.

Stesso discorso vale anche per la posizione di impatto: se si sposta dalla posizione centrale a quella in alto (A), lo spostamento aumenta e quindi anche la tensione. La condizione

Tabella 4.13: Livello di tensione massima di Von Mises al cambiare della posizione di impatto con una forza di 700N e una tensione di 245N

Posizione impatto	Tensione massima (MPa)
C	170,2
A	202,4
B	136,2
L	190,5

opposta, invece, avviene nella posizione in basso (B) che determina una deformazione minore e quindi una sollecitazione massima inferiore. Per il caso laterale lo spostamento è simile al caso centrale, ma in questo caso il livello di tensione aumenta perché è presente anche il contributo della torsione.

**Coefficienti di sicurezza** L'andamento del coefficiente di sicurezza (CS) del telaio della racchetta mostra un andamento simile all'andamento della tensione di Von Mises. In questo caso, a differenza del piatto corde, si ottiene sempre un valore maggiore dell'unità, quindi non si arriva a cedimento.

Una rappresentazione dell'andamento del CS sul telaio è rappresentato dalla figura 4.19, dove è riportato il solito esempio di un impatto simulato da una forza di 700N, in posizione centrale e con un livello di tensione di 245N.

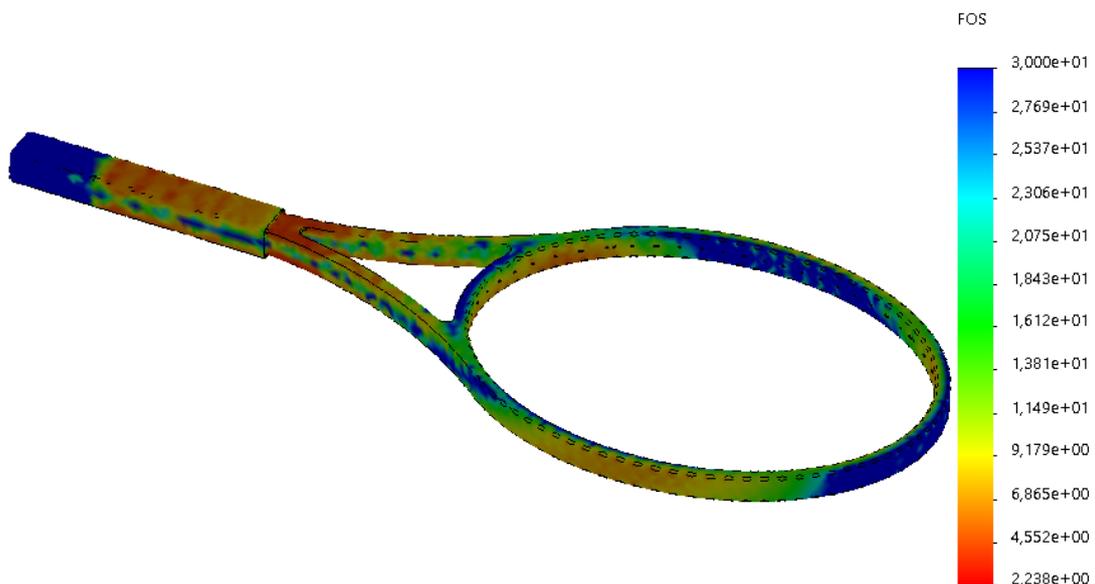


Figura 4.19: Coefficiente di sicurezza del telaio di una racchetta dovuta ad un impatto particolare:  $F=700\text{N}$ ,  $T=245\text{N}$ , posizione centrale (C)

Come si può vedere dalla figura, la zona con un coefficiente di sicurezza più basso e quindi più sensibile è la parte bassa della gola della racchetta. Facendo altre simulazioni, cambiando il livello di tensione o di posizione di impatto, si è trovato un andamento molto simile del CS, con la stessa collocazione delle zone più deboli.

## 4.4 Analisi modale

Quando una struttura è eccitata da un disturbo iniziale, ha la tendenza a vibrare a determinate frequenze chiamate frequenze naturali o proprie. Ad ogni frequenza è poi associata ad una forma deformata della struttura, che è la forma modale. SolidWorks Simulation permette di applicare le condizioni al contorno e simulare la struttura per trovare le frequenze proprie. In questo caso si è interessati ad un comportamento globale della struttura, quindi la presenza di molti dettagli, come smussi o raccordi, potrebbe essere superflua. Viene riportata in seguito l'analisi modale soltanto del piatto corde e del telaio della racchetta.

### 4.4.1 Forme proprie

**Piatto corde** La rappresentazione delle prime cinque forme modali del piatto corde viene illustrata nella figura 4.20. Semplicemente al massimo la trattazione si nota che il comportamento del piatto corde ottenuto è molto simile a quello di una piastra circolare bloccata lungo il suo perimetro esterno.

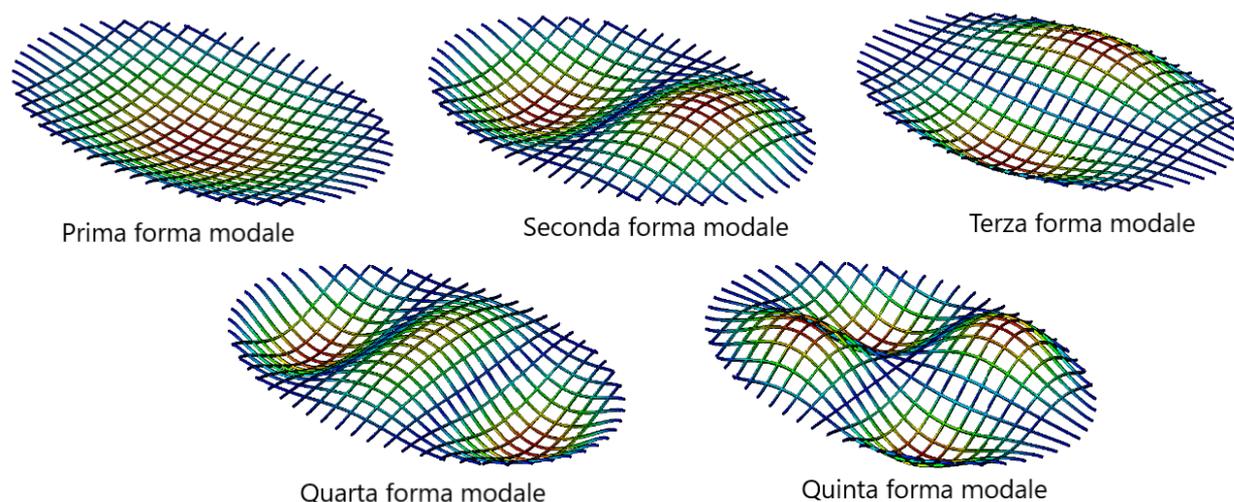


Figura 4.20: Prime cinque forme modali del modello del piatto corde

**Telaio** Anche per il telaio della racchetta si sono ottenute le prime forme modali, come riportato nella figura 4.21. Dall'analisi delle figure si nota un andamento simile a quello della trave incastrata trattato in APPENDICE B.

In particolare la prima forma modale è associata ad una flessione perpendicolare al piano del piatto corde, mentre la seconda è sempre una flessione ma questa volta nel piano delle corde. La terza forma modale mostra una deformazione di torsione. La quarta, come la prima, è una flessione perpendicolare al piano ma con la presenza di nodi, ovvero di punti della racchetta con spostamento nullo. Infine la quinta forma modale è associata anche ad una deformazione di flessione nel piano del piatto corde.

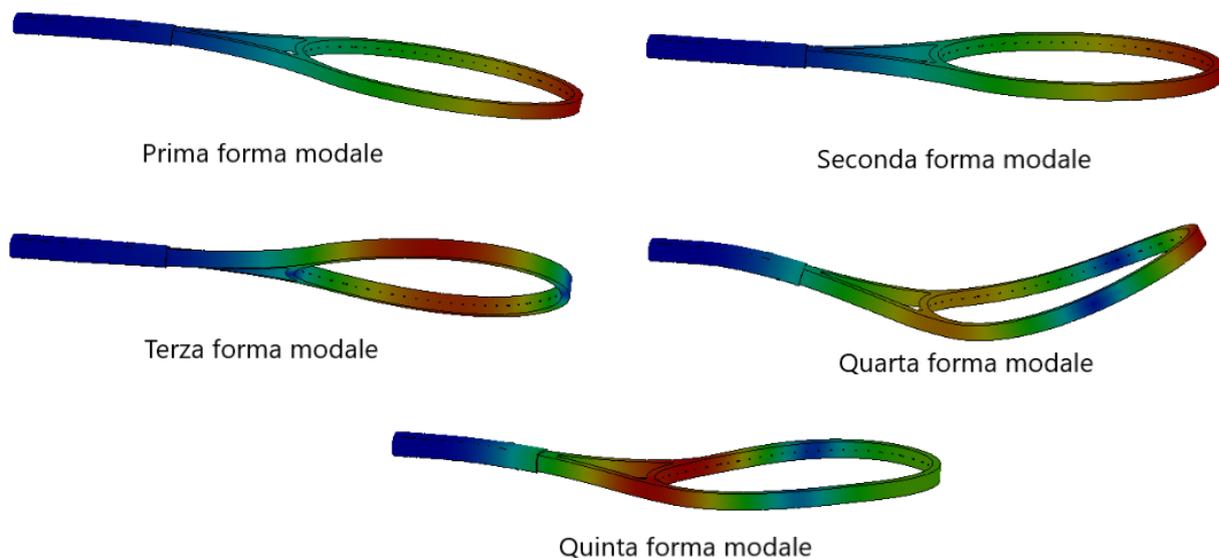


Figura 4.21: Prime cinque forme modali del modello del telaio della racchetta

#### 4.4.2 Frequenze proprie

**Piatto corde** Le frequenze proprie di un sistema dipendono dalla massa e dalla rigidità, in particolare sono direttamente proporzionali alla rigidità associata al rispettivo modo e inversamente proporzionali alla massa associata. Sono state eseguite diverse simulazioni sul piatto corde cambiando il livello di tensione, i cui risultati sono riportati nella tabella 4.14.

Tabella 4.14: Valore delle prime frequenze proprie del piatto corde al variare del livello di tensione

Tensione (N)	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)	$f_4$ (Hz)	$f_5$ (Hz)
178	336	489	589	653	743
201	402	585	702	776	884
223	452	657	788	870	991
245	495	719	861	951	1083
267	533	773	926	1022	1164
290	568	823	986	1088	1240
312	599	869	1040	1147	1307

Dai risultati riportati si nota che la tensione costante applicata al piatto corde ha un effetto molto marcato, in quanto ne aumenta la rigidità e quindi anche le frequenze naturali crescono. Come si è detto prima le frequenze proprie dipendono sia dalla rigidità che dalla massa associata, se quest'ultima rimane costante e la rigidità aumenta con il crescere del livello di tensione, si ha un aumento molto marcato delle frequenze di risonanza del sistema esaminato.

**Telaio** Anche per il telaio della racchetta da tennis sono state eseguite diverse prove di analisi modale cambiando i valori di tensione e quindi variando i parametri delle molle. I risultati ottenuti sono sintetizzati nella tabella 4.15.

Tabella 4.15: Valore delle prime frequenze proprie del telaio al variare del livello di tensione

Tensione (N)	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)	$f_4$ (Hz)	$f_5$ (Hz)
178	97	99	256	396	504
201	98	101	260	398	505
223	100	103	263	399	506
245	101	104	266	400	507
267	102	106	270	401	508
290	103	107	273	403	510
312	104	109	276	404	511

A differenza del caso precedente, per il telaio l'aumento di tensione non ha un effetto significativo sulle frequenze naturali del sistema. Questo aspetto conferma i risultati ottenuti dalle prove statiche precedenti, in quanto anche in quel caso aumentando la tensione, i livelli di rigidità trasversale aumentavano in modo lieve. Un piccolo aumento si è comunque ottenuto, quindi si può confermare che le racchette più rigide e leggere vibrano meno, ma a velocità più alte, ovvero con maggiore frequenza.

Oltre alle forme modali e alle rispettive frequenze, l'analisi modale permette di ottenere i fattori di partecipazione di massa. Si tratta di una misura dell'energia contenuta in ciascun modo nelle direzioni globali x,y,z e normalizzata rispetto alla massa totale. Per il caso del telaio si sono considerati solo i primi cinque modi di vibrare, quindi i valori ottenuti lungo i vari assi sono i seguenti:  $f_x = 2,37 \cdot 10^{-6}$ ,  $f_y = 0,61$  e  $f_z = 0,67$ , dove x è l'asse longitudinale, y quello trasversale e z quello sagittale.

Si sono ottenuti valori bassi, soprattutto associati alla direzione x, perché sono stati considerati soltanto i primi cinque modi di vibrare.

## 4.5 Simulazione dinamica

Dopo aver effettuato l'analisi modale ed aver ottenuto i modi di vibrare della struttura si può calcolare la risposta dinamica conseguente all'applicazione di una forza.

Nel caso della racchetta la forza da applicare è quella che simula l'impatto tra piatto corde e pallina, si tratta di una forza che agisce per un tempo molto ridotto, dell'ordine dei millisecondi.

Una volta che la forza smette di agire, la struttura si muoverà nel tempo fino a ritornare alla sua condizione di equilibrio.

### 4.5.1 Dinamica del piatto corde ed influenza dell'antivibrazione

Per studiare l'effetto dell'antivibrazione sul piatto corde si effettua un'analisi comparativa tra il comportamento dinamico del solo piatto corde e quello dell'insieme che comprende il

piatto corde e l'antivibrazione, il cosiddetto "gommino".

Siccome l'analisi dinamica di una struttura piena di dettagli è abbastanza onerosa a livello computazionale, per evitare di ottenere delle lunghe simulazioni si è scelto di applicare delle semplificazioni: l'influenza delle tensioni sul piatto corde viene trascurata e al posto dei vincoli immessi precedentemente si sono inseriti degli incastri alle facce lungo il perimetro. In questo modo si è evitato di studiare l'influenza delle tensioni nell'analisi dinamica. Si è fatto ciò per due ragioni: in primo luogo per ottenere delle frequenze di risonanza inferiori, a cui sono associati periodi di oscillazioni superiore e quindi possibilità di utilizzare passi di integrazioni più ampi, ed in secondo luogo perché il tipo di analisi è comparativo, quindi si è interessati soprattutto all'influenza che ha l'antivibrazione sul piatto corde.

I parametri scelti per l'esempio di simulazione di cui si riportano i risultati sono i seguenti:

- posizione impatto centrale (C)
- intensità della forza di impatto pari a:  $F=200\text{N}$
- durata di applicazione della forza:  $t=4\text{ms}$
- smorzamento associato al materiale delle corde:  $\zeta=1\%$
- smorzamento associato al materiale delle gommino:  $\zeta=5\%$
- durata della simulazione  $0,5\text{s}$  e passo temporale  $\Delta t=5 \cdot 10^{-4}\text{s}$

Si è adottata una forza inferiore rispetto alla prova statica perché il piatto corde, non essendo tensionato, è meno rigido. E' stato inserito anche un coefficiente di smorzamento in quanto senza quest'ultimo non ci sarebbe il decadimento dell'ampiezza di vibrazione e quindi la struttura vibrerebbe all'infinito. In particolare si usato uno smorzamento del materiale pari all'1% per il nylon e pari al 5% per il silicone. Tali valori sono stati presi dalle tabelle dei materiali di SolidWorks.

I risultati ottenibili dalle simulazioni dinamiche sono: forze, spostamenti, velocità e accelerazioni di ogni nodo in cui è discretizzata la struttura. Si è pensato che i risultati più rappresentativi potessero essere gli spostamenti perpendicolari al piatto corde del nodo situato al centro dell'ovale, ovvero dove lo spostamento verticale è massimo.

La posizione dei nodi considerati è riportata nella figura 4.22, in cui sono presenti i due casi analizzati: (A) senza l'antivibrazione e (B) con l'antivibrazione.

Vengono riportati gli andamenti nel tempo dello spostamento massimo verticale per i due casi, con e senza smorzatore, a confronto: in particolare nella figura 4.23 all'antivibrazione è stato associato uno smorzamento pari a quello del piatto corde ( $\zeta=1\%$ ), mentre nella figura 4.24 al silicone è stato associato uno smorzamento maggiore ( $\zeta=5\%$ ).

Dalle figure rappresentanti gli andamenti nel tempo dello spostamento massimo, si nota in tutti i casi un'ampiezza di oscillazione decrescente, che si esaurisce in circa 0,3 secondi per il caso senza smorzatore e con antivibrazione  $\zeta = 1\%$ , e in circa 0,2 secondi per il caso con l'antivibrazione  $\zeta = 5\%$ . Probabilmente le oscillazioni terminano un pò dopo questi valori,

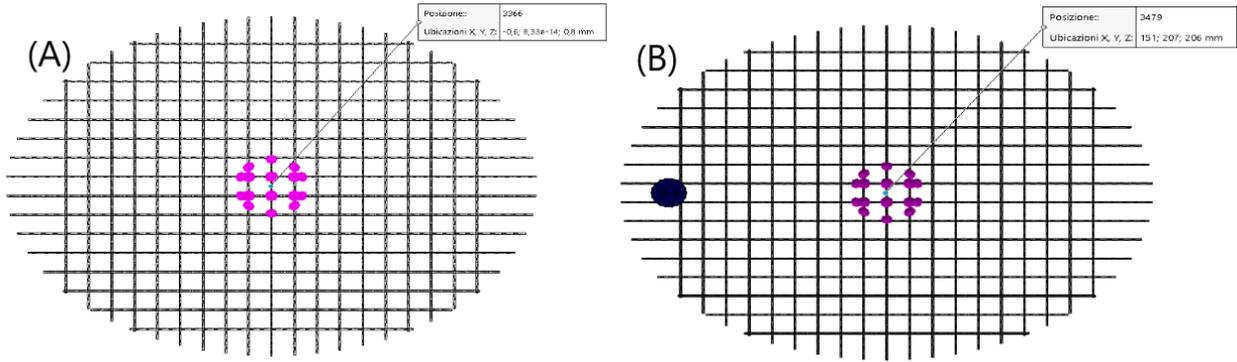


Figura 4.22: Posizione dei nodi considerati per l'analisi dinamica del piatto corde: (A) caso senza antivibrazione, (B) caso con antivibrazione

ma si tratta di andamenti con ampiezza molto ridotta e quindi trascurabile.

Si sono studiati due smorzamenti diversi associati al materiale silicone per notare due effetti differenti: utilizzando la stessa capacità smorzante delle corde e introducendo uno smorzamento superiore. Nel primo caso il gommino aumenta solo la massa del sistema, riducendo lievemente le ampiezze di oscillazione ma non il tempo di decadimento, mentre nel secondo caso l'antivibrazione riesce a ridurre le vibrazioni in maniera molto più marcata.

Quindi a seguito dell'analisi numerica si può affermare che l'effetto dell'antivibrazione ( $\zeta = 5\%$ ) sul piatto corde è presente e determina una riduzione significativa per quanto riguarda l'ampiezza e il tempo di vibrazione. Ciò accade perché avendo separato il telaio dalle corde, la massa introdotta dall'antivibrazione è paragonabile a quella del piatto corde.

Nella realtà questo effetto così marcato non avviene, in quanto l'aumento di massa dovuto al gommino è trascurabile rispetto alla massa dell'intero sistema.

In ogni caso l'introduzione di un elemento come l'antivibrazione produce a livello globale anche un cambiamento delle frequenze di risonanza, che sono diminuite a causa dell'aumento di peso. Le prime due frequenze naturali del piatto corde sono:

- caso senza smorzatore:  $f_1 = 343Hz$  e  $f_2 = 625Hz$
- caso con smorzatore:  $f_1 = 340Hz$  e  $f_2 = 620Hz$

La piccola diminuzione delle frequenze proprie del sistema dovute all'introduzione del gommino rende le oscillazioni non in fase tra i casi con e senza smorzatore.

Un altro effetto è legato all'introduzione di nuove frequenze di risonanza, di ordine ridotto e legate ai modi di vibrare dell'antivibrazione delle corde.

Questi ultimi risultati ottenuti sono in linea con quelli presenti in letteratura riguardo i vari effetti introdotti da un piccolo smorzatore in gomma. Con questa simulazione però non si riesce ad indagare l'effetto dell'antivibrazione delle corde sulle vibrazioni trasmesse al polso e quindi legate agli infortuni, in quanto il piatto corde è separato dal telaio.

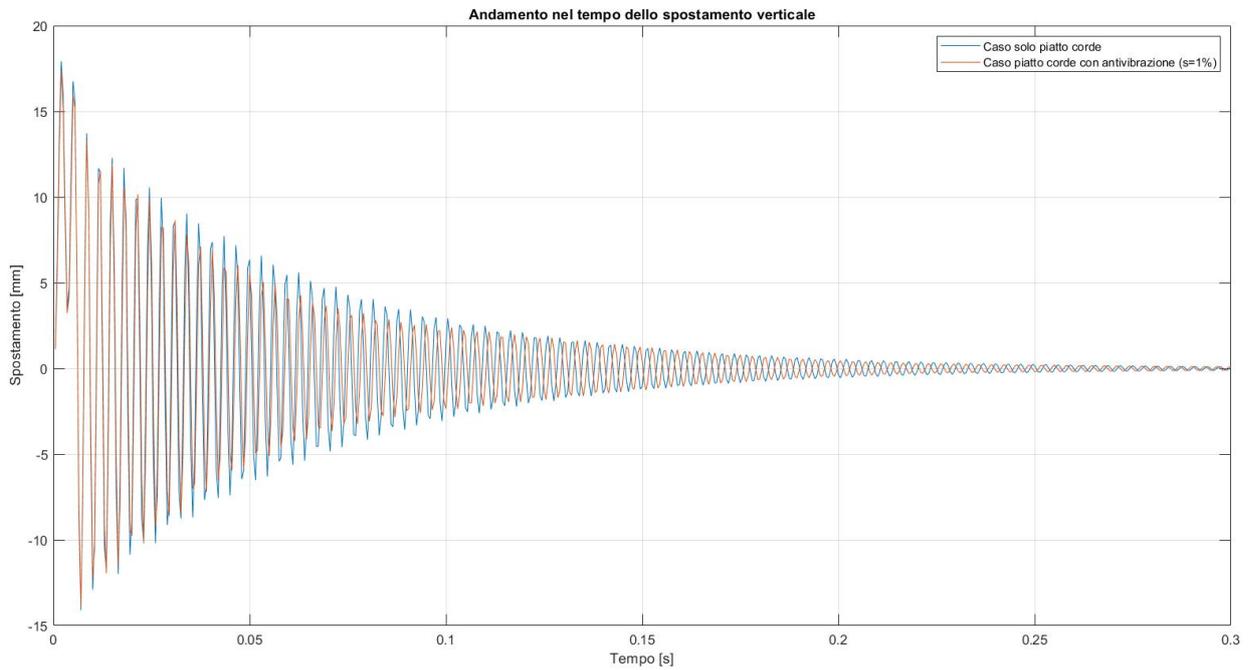


Figura 4.23: Risultato analisi dinamica del piatto corde: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza antivibrazione e con l'antivibrazione ( $\zeta=1\%$ )

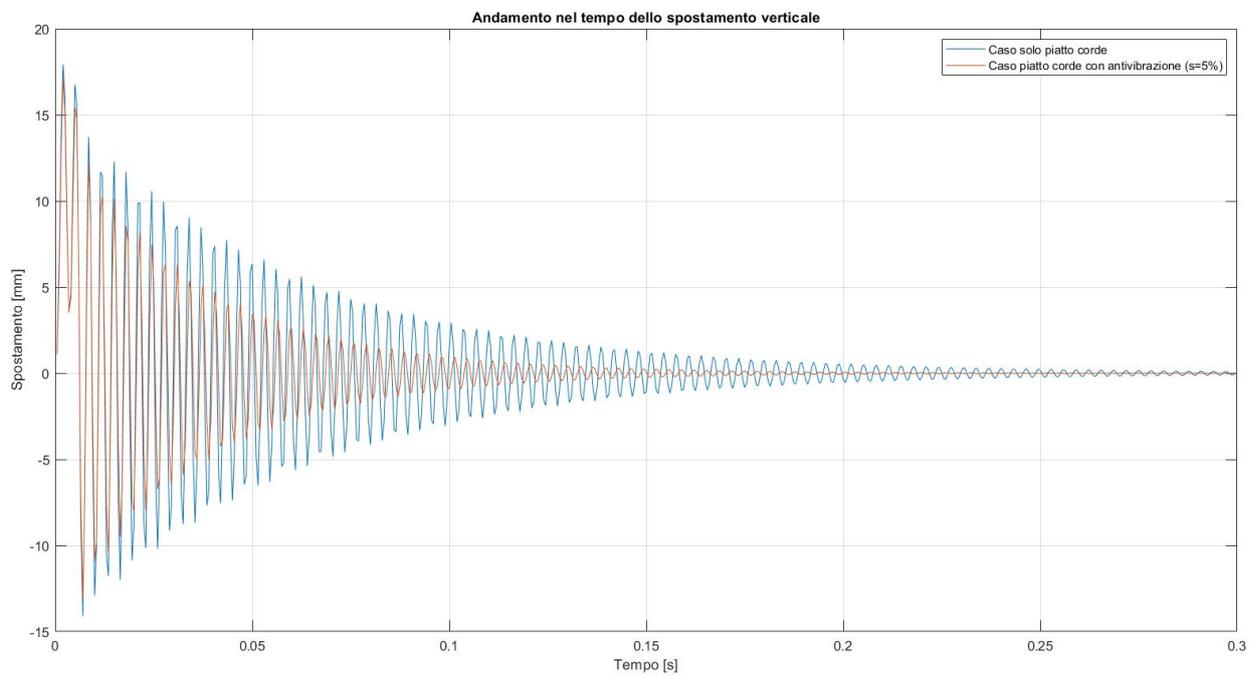


Figura 4.24: Risultato analisi dinamica del piatto corde: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza antivibrazione e con l'antivibrazione ( $\zeta=5\%$ )

## 4.5.2 Dinamica del telaio ed influenza di Fluendo

Lo stesso procedimento adottato in precedenza viene usato per indagare l'influenza che ha uno smorzatore in gomma, che simula Fluendo, sul comportamento dinamico del telaio di una racchetta da tennis.

Anche qui si effettua un'analisi di tipo comparativo con e senza smorzatore, e per fare questo si sono utilizzate le medesime condizioni di progetto per i due casi.

I parametri scelti per l'esempio di simulazione di cui si riportano i risultati sono i seguenti:

- posizione impatto centrale (C)
- intensità della forza di impatto pari a:  $F=500\text{N}$
- durata di applicazione della forza:  $t=4\text{ms}$
- smorzamento associato al materiale del telaio:  $\zeta=1\%$
- smorzamento associato al materiale dello smorzatore:  $\zeta=5\%$
- durata della simulazione  $0,5\text{s}$  e passo temporale  $\Delta t=5 \cdot 10^{-4}\text{s}$

Come per le simulazioni statiche il tipo di carico utilizzato è il carico remoto, in quanto non è presente una superficie del modello nella posizione di applicazione delle forze. Nel modello sono presenti gli elementi molla che simulano gli effetti di rigidità del piatto corde, ed in particolare si sono utilizzati i dati di rigidità relativi ad un livello di tensione medio ( $245\text{ N}$ ).

Lo smorzamento viene introdotto nel materiale: in particolare per il composito in fibra di carbonio (CFRP) si è scelto un  $\zeta = 1\%$ , mentre per il silicone  $\zeta = 5\%$ , come nel caso dell'antivibrazione delle corde. Per enfatizzare il comportamento si è anche imposto uno smorzamento associato al silicone pari a  $\zeta = 50\%$ .

Come risultato si è ricercato lo spostamento massimo che, conoscendo la prima forma modale, si troverà all'estremità della testa del telaio. Pertanto si sono scelti i nodi a cui è associato tale spostamento massimo, come mostrato nella figura 4.25 nella pagina successiva.

Gli andamenti nel tempo dello spostamento per i nodi selezionati sono riportati nelle seguenti figure: 4.26 per il caso con smorzatore  $\zeta = 5\%$  e 4.27 per il caso con smorzatore  $\zeta = 50\%$ . In entrambi i casi è riportato sovrapposto l'andamento del telaio senza smorzatore, per avere una più facile interpretazione dei risultati.

Analizzando gli andamenti presenti nella figura 4.26 non si trova alcuna differenza significativa in termini di smorzamento, si tratta in entrambi i casi di un andamento decrescente dell'ampiezza di vibrazione da un valore massimo di circa  $16\text{ mm}$ . Il tempo in cui si esaurisce il fenomeno vibratorio è poco superiore a  $0,5\text{ s}$ , ma verso la fine le ampiezze possono anche considerarsi trascurabili.

L'unica differenza individuabile tra questi due casi è rappresentata dalle frequenze proprie del sistema, in quanto l'introduzione di un oggetto come Fluendo cambia le frequenze di oscillazione. In particolare:

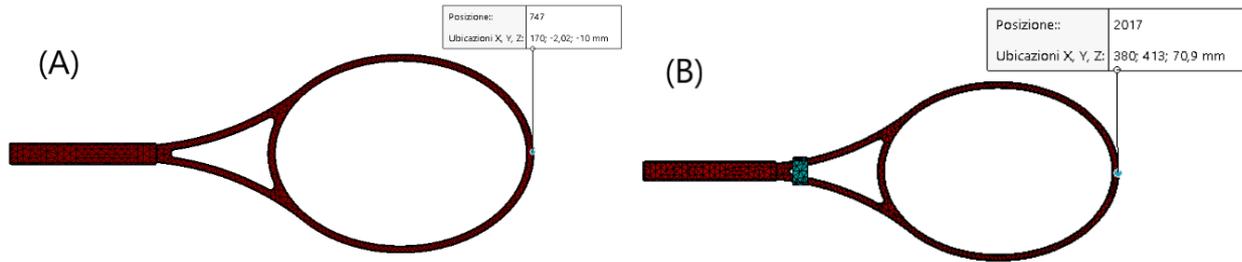


Figura 4.25: Posizione dei nodi considerati per l'analisi dinamica del piatto corde: (A) caso senza smorzatore, (B) caso con smorzatore

- caso senza smorzatore:  $f_1 = 120Hz$  e  $f_2 = 127Hz$
- caso con smorzatore:  $f_1 = 117Hz$  e  $f_2 = 126Hz$

Anche qui l'introduzione di un oggetto massivo riduce le frequenze di risonanza e perciò le oscillazioni non possono essere in fase.

Analizzando invece gli andamenti della figura 4.27 si riesce a notare un piccolo effetto smorzante dovuto all'introduzione di un oggetto in gomma. Tuttavia si tratta di un effetto quasi trascurabile e sicuramente non aderente alla realtà, in quanto si è volutamente esagerato il valore di smorzamento associato.

Dopo aver eseguito le simulazioni e aver analizzato i risultati è possibile fare le seguenti conclusioni: il dispositivo in silicone posizionato nella parte bassa della gola di una racchetta ha poca influenza, aumenta solo la massa della struttura.

Questa mancanza di efficacia può essere spiegata dal fatto che un oggetto in gomma da solo non ha capacità di dissipare energia, riesce a smorzare le vibrazioni in quantità ridotta solamente quando viene deformato. Questa maggiore capacità smorzante rispetto al telaio si è inserita attraverso lo smorzamento del materiale.

Ma anche ipotizzando una elevato smorzamento del dispositivo che simula Fluendo, la soluzione non è efficace soprattutto per la posizione: nella parte bassa della gola della racchetta la deformazione è molto bassa. Dalle analisi statiche si è riscontrato in quella zona solamente una concentrazione di tensioni, quindi non deformandosi in maniera elevata l'oggetto non dissipa.

Una alternativa a questa soluzione potrebbe essere lo smorzatore granulare, che contiene delle sferette al suo interno che si muovono. Anche se un eventuale supporto non si deforma molto, i granuli al suo interno si muoverebbero e quindi si otterrebbe un meccanismo dissipativo diverso.

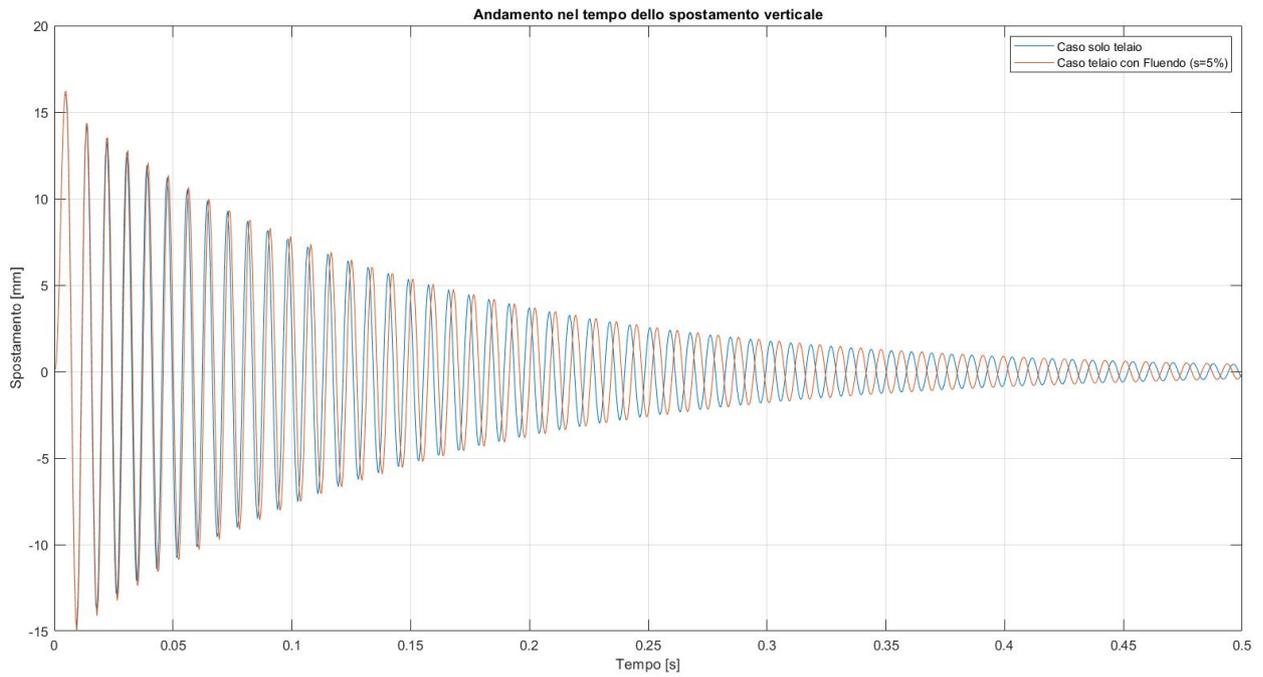


Figura 4.26: Risultato analisi dinamica del telaio: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza smorzatore e con lo smorzatore ( $\zeta=5\%$ )

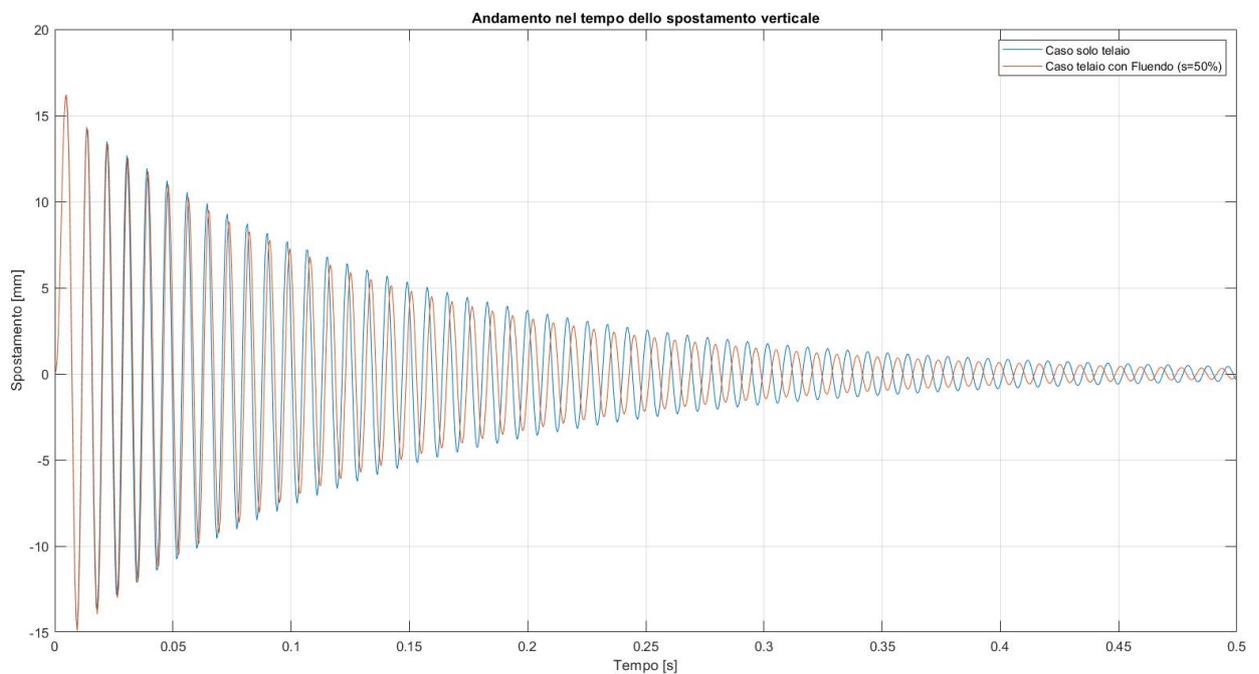


Figura 4.27: Risultato analisi dinamica del telaio: andamento nel tempo dello spostamento massimo per il caso senza smorzatore e con lo smorzatore ( $\zeta=50\%$ )

## 4.6 Metodo agli elementi discreti

Dopo aver effettuato le simulazioni sulla racchetta da tennis attraverso un programma agli elementi finiti ed aver constatato che con tale codice non è possibile trattare lo smorzamento granulare, si è cercato di risolvere il problema attraverso l'utilizzo di un altro software.

### 4.6.1 Software utilizzato

Il software utilizzato per la trattazione relativa al sistema di smorzamento granulare è YADE, un framework a elementi discreti open source. Si tratta di un pacchetto software altamente espandibile che permette di simulare il comportamento di materiali granulari utilizzando metodi numerici basati sulle particelle [37]. Con un approccio del genere, che utilizza il metodo ad elementi discreti descritto nel capitolo 3, è possibile studiare la deformazione non lineare dei grani all'interno di una cavità.

YADE, il cui nome è l'acronimo di "Yet Another Dynamic Engine", è un software scritto in C++, che ha anche un'interfaccia Python che conferisce elevate prestazioni e flessibilità. In questo modo si riesce a simulare l'interazione tra milioni di particelle anche per scopi didattici, nascondendo all'utente l'implementazione C++ relativamente complessa. Python viene quindi utilizzato per l'impostazione, il controllo e la post-elaborazione della simulazione.

In una tipica simulazione in YADE si inizia con il riempimento di una cavità attraverso l'introduzione di particelle sferiche. Le geometrie dei componenti possono essere importate dai normali formati CAD. La soluzione del problema avviene attraverso la seconda legge di Newton, la cui risoluzione permette di calcolare la traiettoria di ogni particella e quindi determinare le proprietà e il comportamento del materiale a causa dell'applicazione di forze esterne [37]. In questo caso le forze tra le particelle vengono dedotte dalle leggi di contatto, come le equazioni (3.2) e (3.8), dove l'influenza delle proprietà viscoelastiche e plastiche del materiale viene modellata attraverso sistemi molla-smorzatori.

Un altro aspetto da considerare in YADE sono i cosiddetti motori, che sono applicati per realizzare la gravità e la rotazione. Questi motori sono le unità di esecuzione di base delle simulazioni e vengono utilizzati per integrare la deformazione delle particelle nella simulazione.

Lo schema operativo che utilizza il software è il seguente [38]:

1. importazione dei modelli CAD della geometria del sistema
2. creazione di una mesh 3D con triangoli interconnessi attraverso la funzione GNU Triangulated Surface
3. definizione dei parametri del sistema

Dopo aver effettuato queste fasi, attraverso il codice in YADE è possibile estrarre la dinamica del sistema, ovvero tutte le informazioni relative a: energie, accelerazioni, velocità, posizioni, forze e momenti.

Ciò che è importante sottolineare è che YADE non è uno strumento universale di simulazione, ma al contrario assolve ad una specifica funzione: risolvere un numero  $n$  di equazioni differenziali per ogni istante  $t_i$  di simulazione, dove  $n$  è il numero di gradi di libertà. Da ciò segue che attraverso questo software si possono estrarre una serie di parametri fisici caratteristici del sistema che possono fare da output a sé dell'analisi o da base per un post-processing da fare esternamente.

Un codice YADE si compone delle seguenti parti [38]:

- Definizione dei parametri fisici di input: tali parametri possono definire le proprietà fisiche o geometriche dei componenti oppure le proprietà dell'interazione tra i componenti
- Importazione della geometria (.STL)
- Definizione del pacco di sfere
- Definizione dei "motori dinamici" o O.engines: si tratta di alcune funzioni proprie della fisica da simulare a cui si aggiungono quattro funzioni dinamiche fisse, le quali sono riportate in nella figura 4.28 e sono:
  1. ad ogni step di iterazione i gradi di libertà degli elementi vengono settati per la nuova integrazione
  2. funzione che configura l'algoritmo di collisione
  3. funzioni dinamiche che definiscono la legge di interazione dal lato geometrico (Ig), la legge dell'interazione fisica (Ip) e la legge del contatto (Law2\_ScGeom)
  4. inclusione della forza di gravità nella simulazione
- Funzioni di servizio (on/off motori, data plotting e data saving)

```

0.engines = [
    ForceResetter(), 1
    InsertionSortCollider([Bo1_Sphere_Aabb(), Bo1_Facet_Aabb()]), 2
3 InteractionLoop(
    [Ig2_Sphere_Sphere_ScGeom(), Ig2_Facet_Sphere_ScGeom()],
    [Ip2_FrictMat_FrictMat_MindlinPhys(frictAngle = friction, en=e_n , es=e_s, label='Ip2')],
    [Law2_ScGeom_MindlinPhys_Mindlin(includeAdhesion=True, calcEnergy=True, label='Mindlin')]
    ),
4 NewtonIntegrator(gravity=(0, 0, -g), damping=0.1),

```

Figura 4.28: Funzioni dinamiche fisse presenti nei codici YADE

Prima di passare all' applicazione al caso studio, nella figura 4.29 viene riportata una schematizzazione sul bilancio energetico.

Come si può vedere dalla figura il sistema non ha un carico, l'energia immessa non alimenta nessuna utenza o ente resistente. Tutta l'energia immessa a questo livello serve solo a mettere in moto il pacco di sfere ed alimentarne le perdite per dissipazione interna. A questo poi si aggiunge una variabile quantità di damping numerico introdotto nel calcolo per migliorare la convergenza, quantità che dovrebbe essere più bassa possibile.

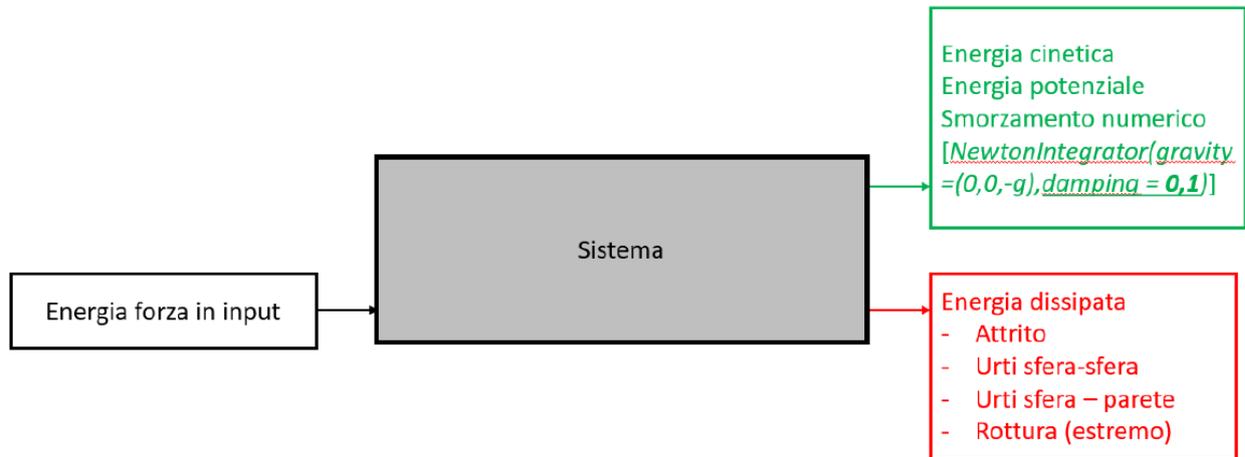


Figura 4.29: Bilancio energetico all'interno di una simulazione eseguita con YADE [38]

## 4.6.2 Simulazioni eseguite

In questa sezione si è simulato il comportamento del modello che rappresenta quanto più fedelmente il prototipo testato in laboratorio. La rappresentazione del prototipo e del modello viene riportata nella figura 4.30.



Figura 4.30: Rappresentazione dello smorzatore granulare: prototipo testato (sinistra) e modello CAD (destra)

In particolare si è pensato che una possibile soluzione per applicare lo smorzamento granulare ad una racchetta da tennis potesse essere un dispositivo contenente delle cavità, all'interno delle quali posizionare dei granuli di dimensione ridotta. Un oggetto del genere potrebbe essere fatto con un materiale polimerico che presenta elevata deformabilità, in modo da adattarsi al telaio della racchetta.

In questa simulazione l'oggetto in gomma che si vincola al telaio viene trascurato e si considerano soltanto i blocchetti contenenti le sfere. La posizione scelta per un tale smorzatore è la parte alta della gola, subito sotto l'ovale, in modo da non spostare il centro di massa e avere uno spostamento maggiore che sul manico. Una rappresentazione più dettagliata della configurazione geometrica della simulazione è riportata nella figura 4.31.

Per modellare il sistema in esame è stato necessario introdurre le seguenti assunzioni:

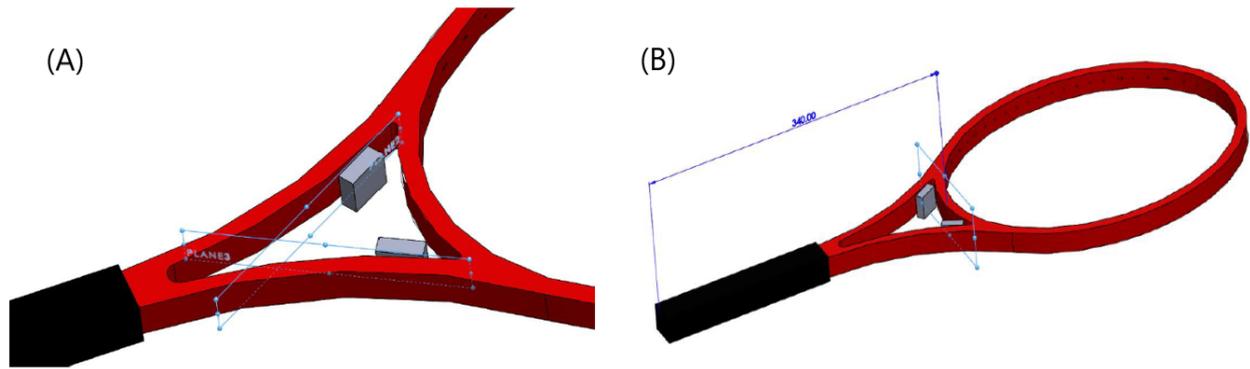


Figura 4.31: Posizionamento del modello di smorzatore granulare: (A) vincolo di tangenza, (B) distanza dall'estremità inferiore del manico della racchetta

- accettare l'ipotesi di separazione dei modi di vibrare
- concentrarsi solo sul primo modo flessionale ( $f=28$  Hz)
- assumere che la forma modale sia debolmente influenzata dalla presenza di elementi con dinamica non lineare
- accettare l'ipotesi che il primo modo flessionale della racchetta in condizione di incastro al manico possa essere ridotto ad una roto-traslazione al livello del pacco di sfere

Si è pertanto considerato soltanto il primo modo flessionale, la cui frequenza di risonanza ottenuta sperimentalmente è risultata essere di 28 Hz. La riduzione dei movimenti dei blocchetti ad una roto-traslazione è lecita in quanto non è prevista una deformazione del pacco sfere, pertanto i granuli al loro interno seguono il movimento dei contenitori. La schematizzazione del moto dei blocchetti contenenti materiale granulare è riportata nella figura 4.32.

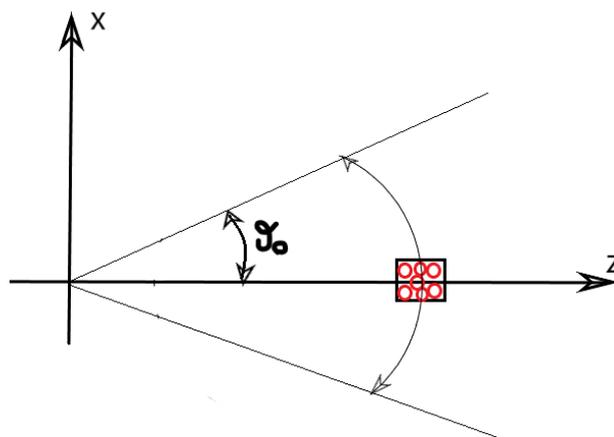


Figura 4.32: Schematizzazione del moto di oscillazione dei contenitori granulari

Per l'ampiezza di oscillazione si è scelto un valore pari ad  $\frac{1}{100} rad \approx 0,6^\circ$ , valore plausibile alla luce delle prove sperimentali effettuate. Alcune delle funzioni più importanti utilizzate

nel codice YADE per ottenere il corretto posizionamento delle sfere nei contenitori sono riportate come approfondimento in APPENDICE C.1 .

In seguito vengono riportati i parametri geometrici e fisici del sistema:

- Sfere
  - diametro= 1-1,5 mm
  - materiale: vetro ( $E=70$  GPa,  $\nu=0,22$ ,  $\rho=2500$   $kg/m^3$  )
- Contenitori
  - numero=2
  - geometria: parallelepipedi con una cavità delle seguenti dimensioni (base= 20mmx6mm, altezza=20mm, spessore pareti=1,5mm)
  - materiale: TPU (durezza SHORE A95,  $E=26$ MPa,  $\nu=0,39$ ,  $\rho=1250$   $kg/m^3$ )

Definiti tutti i parametri si può passare alla fase di simulazione vera e propria. Prima di procedere con estesi giri di simulazioni e variegate analisi di sensitività, conviene condurre dei test pilota del sistema in una configurazione data. I risultati ora mostrati riproducono una ristretta casistica in cui si fa variare il numero di sfere presenti all'interno dei contenitori, quindi la frazione di volume interno occupata dalle sfere. Si fa riferimento alla tabella 4.16.

Tabella 4.16: Compattezza per diverse percentuali di riempimento

% riempimento atteso	Fattore c	$\gamma = \frac{V_{spheres}}{V_{box}}$	% del massimo $\gamma$ teorico
100	0,05	0,498	79%
75	0,25	0,363	57%
50	0,50	0,266	42%

Il coefficiente  $c$  riportato in tabella 4.16 si riferisce alla percentuale di spazio libero nel contenitore con all'interno il pacco sfere. In particolare utilizzando un  $c=0$  si ottiene il pacco più compatto possibile, con il maggior numero di sfere. Per evitare risultati denaturati dalla reciproca repulsione di corpi precompressi nel caso di "gap" $=0$ , che è impossibile, si è imposto un gap minimo con  $c=0,05$ . Questo parametro  $c$  diventa indice indiretto del numero di sfere immesse e del riempimento dei contenitori, come mostrato nella tabella 4.17.

Nella tabella 4.16 è presente anche un altro parametro importante per esprimere la condizione di riempimento negli smorzatori granulari: si tratta della compattezza, la quale è indicata con il simbolo  $\gamma$ . Il valore di compattezza massimo teorico per un pacco di sfere ideale disposte secondo un reticolo esagonale è  $\gamma_{max} = 0,64$ . Da questo valore ci si può discostare a seconda della dispersione dimensionale e della forma del contenitore. Per questo motivo i valori di  $\gamma$  trovati nel caso in esame sono minori rispetto al valore teorico e viene riportata anche la percentuale rispetto al valore massimo.

Tabella 4.17: Numero di sfere per diverse percentuali di riempimento

% riempimento atteso	Fattore c	Numero di sfere
100	0,05	1003
75	0,25	744
50	0,50	532

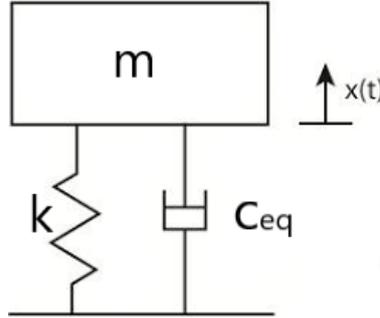


Figura 4.33: Modello molla-smorzatore ad un singolo grado di libertà (SDOF)

**Post processing** Il modo più immediato per sfruttare le informazioni in uscita da YADE è quello di calcolare un parametro concentrato legato allo smorzamento da utilizzare in un semplice modello ad un grado di libertà, come mostrato in figura 4.33. L'idea è quella di ricavare l'energia dissipata al ciclo ed utilizzare quest'ultima per ottenere un fattore di smorzamento equivalente  $c_{eq}$  da inserire in un modello ad un grado di libertà (SDOF) del primo modo flessionale.

La dimostrazione per ricavare il  $c_{eq}$  dall'energia dissipata al ciclo viene omessa in questa parte e riportata in APPENDICE C.2, ma la relazione finale è la seguente:

$$c_{eq} = \frac{E_{d,YADE}}{\pi a^2 \omega} \quad (4.1)$$

dove  $E_{d,YADE}$  è l'energia dissipata al ciclo, mentre  $a$  e  $\omega$  sono rispettivamente l'ampiezza e la frequenza di oscillazione, parametri propri della dinamica simulata, imposti a priori per ricavare l'energia dissipata.

Nel caso in esame, si impone la frequenza propria del primo modo flessionale, la quale è ricavata sperimentalmente e assume il valore di  $f=28$  Hz. La posizione dei blocchetti contenenti materiale granulare rispetto all'estremità del manico è  $L_P = 0,331$  m e l'ampiezza angolare di oscillazione è  $\theta_0=0,57^\circ$ . Per cui si ottengono i seguenti valori:

$$\omega = 2\pi f \approx 176 \text{ rad/s}$$

$$a = L_P \sin \theta_0 \approx L_P \tan \theta_0 = 3,29 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Simulando alcuni cicli di oscillazione nei tre casi considerati ( $c=0,50$   $c=0,25$   $c=0,05$ ), si ottengono le curve di energia dissipata nel tempo rispettivamente nelle figure 4.34, 4.35 e 4.36.

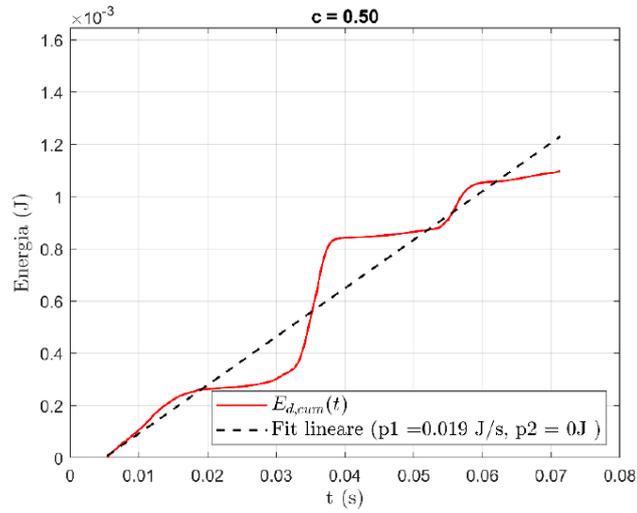


Figura 4.34: Energia dissipata nel tempo per il caso  $c=0,50$

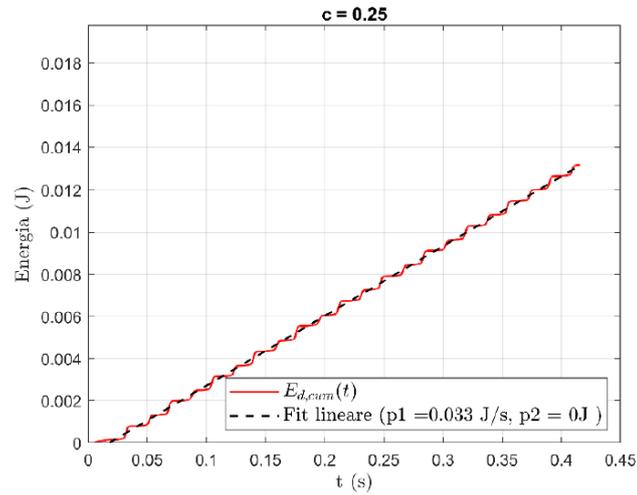


Figura 4.35: Energia dissipata nel tempo per il caso  $c=0,25$

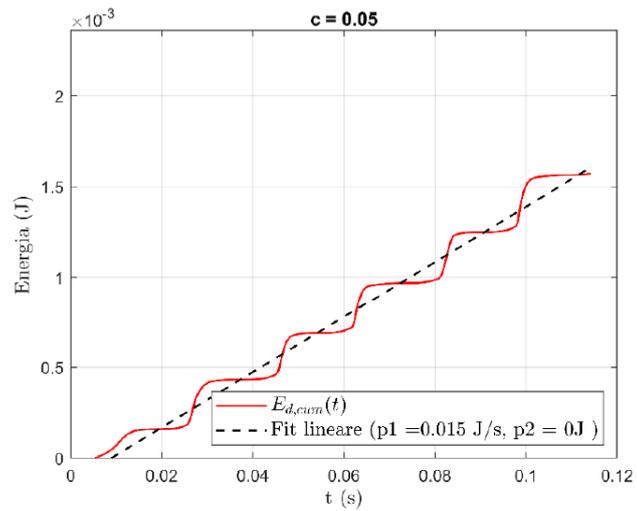


Figura 4.36: Energia dissipata nel tempo per il caso  $c=0,05$

Il fit lineare delle curve ottenute permette di ottenere il rateo temporale di energia dissipata. In particolare la pendenza delle rette interpolanti, le quali hanno intercetta nulla, indica l'energia dissipata nell'unità di tempo. Se si rapporta tale rateo alla durata di un periodo di oscillazione ( $T$ ), si ottiene una stima dell'energia dissipata al ciclo:

$$E_{d,YADE} = \frac{\Delta E_d}{\Delta t} \cdot T = \frac{1}{f} \cdot \frac{\Delta E_d}{\Delta t} \quad (4.2)$$

Seguendo questo procedimento per tutti e tre i valori del parametro  $c$ , si ottengono i risultati di  $c_{eq}$  riportati nella tabella 4.18. Mentre una rappresentazione dell'andamento del  $c_{eq}$  in relazione al numero di sfere presenti all'interno dell'involucro è presente nella figura 4.37.

Tabella 4.18: Valore del  $c_{eq}$  per le diverse simulazioni effettuate

Fattore $c$	Numero di sfere	$E_{d,YADE}$ (J/ciclo)	$c_{eq}$ (Ns/m)
0.05	1003	$5,45 \cdot 10^{-4}$	0,0910
0.25	744	$1,20 \cdot 10^{-3}$	0,1976
0.50	532	$6,63 \cdot 10^{-4}$	0,1107

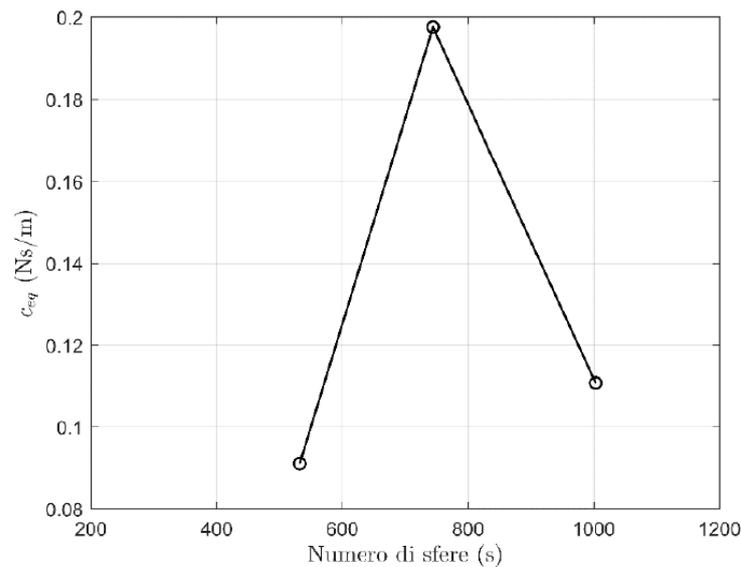


Figura 4.37: Andamento del valore di  $c_{eq}$  in relazione del numero di sfere

Una volta ottenuti i valori sperimentali di  $c_{eq}$  per le tre simulazioni effettuate, è possibile implementare su Matlab un semplice modello SDOF  $m - k - c_{eq}$  con il fine di ottenere un diagramma di risposta in frequenza.

Non avendo a disposizione i valori di  $m$  e  $k$  associati al primo modo di vibrare, si sono calcolati tali valori attraverso una relazione tra il modello numerico, indicato con il pedice 1, e la racchetta reale testata in laboratorio, indicata con il pedice 2. Le relazioni che esprimono le frequenze di risonanza per il primo modo flessionale nei due casi sono le seguenti:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{m}$$

Facendo l'ipotesi che la massa associata al primo modo sia uguale nei due casi, in quanto la massa totale della racchetta è la stessa, si impone che la differenza tra le frequenze proprie sia imputabile solamente ai valori di rigidità. Si ottiene il valore di  $k_2$  con la seguente relazione:

$$k_2 = k_1 \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \quad (4.3)$$

I valori associati a  $k_1$  e  $\omega_1$  si possono prendere dalle simulazioni numeriche effettuate nel capitolo 4, in particolare per un valore medio di tensione delle corde (245 N) si è ottenuto:

- $k_1=24666$  N/M
- $f_1=101$  Hz, quindi  $\omega_1 = 2\pi f_1 = 634,6$  rad/s

Sapendo dalle prove sperimentali in laboratorio che  $f_2=28$  Hz e quindi  $\omega_2=176$  rad/s, sostituendo questi valori nell'equazione (4.3), si ottengono i seguenti valori di massa e rigidità associati al primo modo di vibrare:

- $k_2=6838$  N/M
- $m=0,22$  kg

A questo punto sono noti tutti i coefficienti dell'equazione differenziale del moto per un sistema SDOF con una forzante armonica, la quale ha la seguente forma:

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = f_0 \sin \omega t \quad (4.4)$$

Attraverso alcuni semplici passaggi matematici si può arrivare alla funzione di trasferimento nel dominio di Laplace:

$$\frac{X}{F_0} = G(s) = \frac{1}{ms^2 + c_{eq}s + k} \quad (4.5)$$

Utilizzando l'ultima equazione, attraverso il software Matlab è stato possibile ricavare il diagramma di Bode per i tre livelli di smorzamento rilevati tramite YADE. Tali diagrammi sono riportati nella figura 4.38 per una banda di frequenza [10 100] Hz, mentre nella figura 4.39 per una banda più ristretta tra [25 31] Hz.

Dall'analisi dei diagrammi di Bode ottenuti si nota che la soluzione con riempimento parziale ( $c=0,25$ ) risulta essere quella con smorzamento più efficace in termini relativi, sebbene tutti i risultati mostrino un termine dissipativo irrisorio e con ogni probabilità poco utile.

Infatti per riuscire a vedere l'effetto sull'ampiezza della risposta in frequenza si è dovuto fare uno zoom ed analizzare soltanto l'intervallo di frequenza [25 31] Hz.

Un aspetto da sottolineare è che in queste simulazioni si sta considerando solamente lo smorzamento della struttura associato al sistema di sfere studiato in YADE, trascurando tutte le altre fonti di smorzamento che sicuramente esistono nel sistema reale. In aggiunta tutti i calcoli effettuati si riferiscono ad un solo blocchetto riempito con del materiale granulare, perciò tutti gli effetti di smorzamento devono essere moltiplicati per due dato l'utilizzo

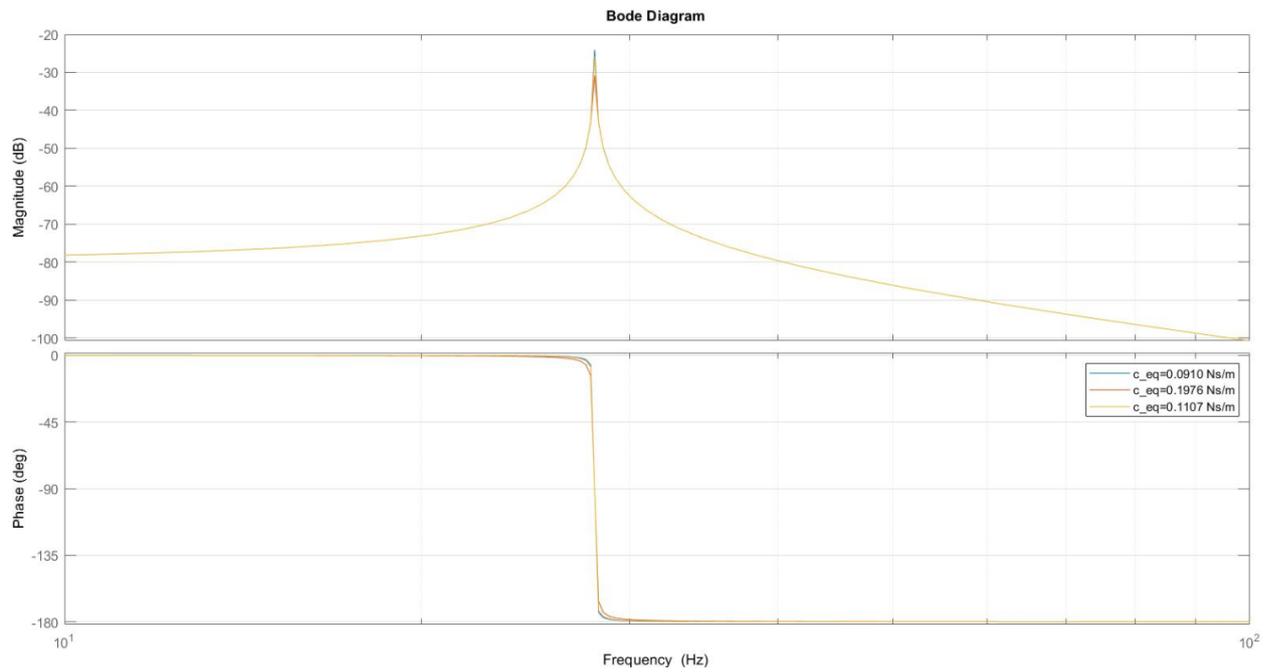


Figura 4.38: Diagramma di Bode in un intervallo di frequenza [10 100] Hz

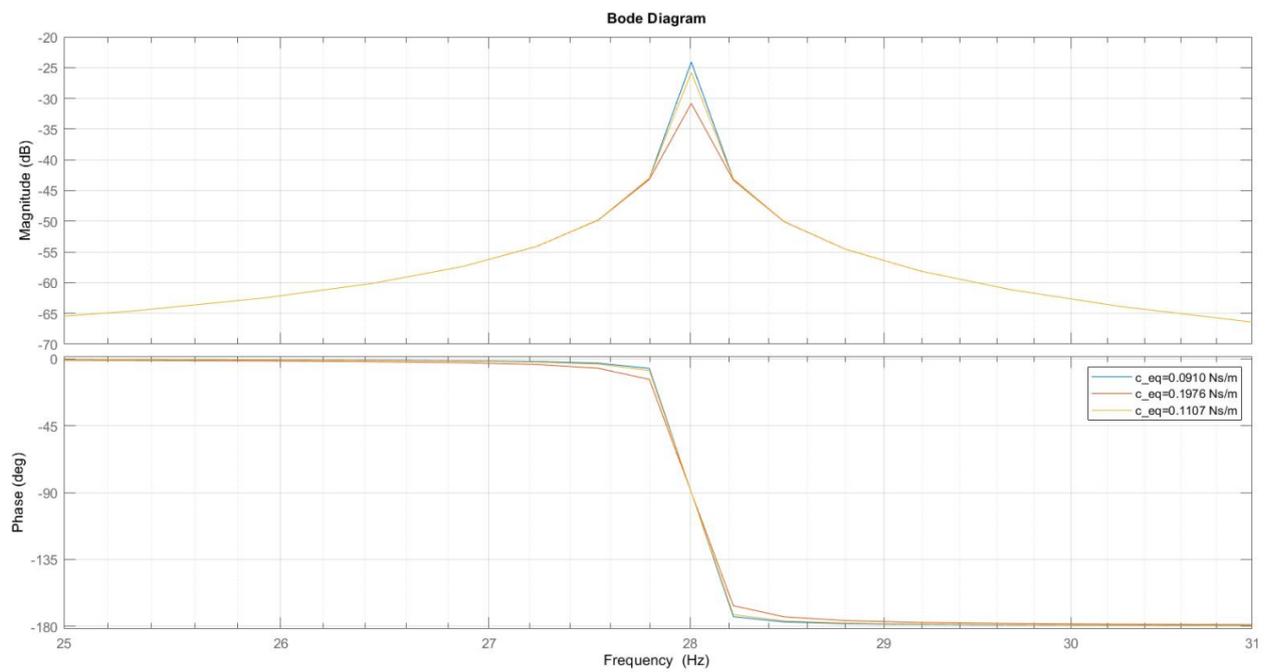


Figura 4.39: Diagramma di Bode in un intervallo di frequenza [25 31] Hz

di due sistemi identici.

In relazione ai dati ottenuti attraverso queste simulazioni numeriche, si può affermare che un simile smorzatore granulare, nella forma e nei parametri utilizzati, si è rilevato poco utile al fine di ottenere uno smorzamento significativo delle vibrazioni della racchetta.

## 4.7 Analisi dei risultati ottenuti

In questa sezione vengono riassunti tutti i risultati ottenuti nelle simulazioni numeriche. Si è partiti dallo studio di una racchetta da tennis attraverso il software SolidWorks Simulation, il quale utilizza come metodo risolutivo il FEM, ovvero il metodo agli elementi finiti.

In particolare in un primo momento si è analizzato il comportamento statico del piatto corde e del telaio. Dall'analisi statica del piatto corde si è trovato il valore di deformazione massima e di rigidità flessionale, quest'ultima necessaria per definire correttamente i parametri delle molle da inserire nel telaio per simulare la presenza del piatto corde. Per entrambi i casi si è notato che un aumento della tensione portava ad una diminuzione della deformazione massima e quindi ad un aumento della rigidità flessionale della struttura.

Compiuta l'analisi statica, si è passati all'analisi modale che permette di ottenere le frequenze proprie e le forme modali. Tali valori ottenuti sono stati la base teorica per effettuare l'analisi dinamica lineare delle varie strutture.

Per il caso del piatto corde si è analizzata l'influenza dell'antivibrazione, ovvero dell'oggetto in gomma che si posiziona sulle corde. Siccome si sono separati gli elementi piatto corde dal telaio, non è stato possibile studiare la sua influenza sulle vibrazioni trasmesse al manico e che quindi causano infortuni. Gli effetti trovati sono solo relativi al piatto corde e si è notato che la presenza dell'antivibrazione determina una riduzione dell'ampiezza e del tempo di oscillazione, con conseguente diminuzione delle frequenze di risonanza a causa del peso aggiuntivo.

L'analisi dinamica del telaio, invece, ha analizzato l'influenza che ha un oggetto in silicone che simula il comportamento di Fluendo. Dai risultati ottenuti, l'effetto in termini di smorzamento è quasi assente, probabilmente dovuto al fatto che la gomma non riesce a dissipare se non viene deformata e quindi un oggetto messo nella parte bassa della gola della racchetta, a cui sono associate piccole deformazioni, si è rivelato poco efficace.

Un metodo alternativo relativo sempre allo smorzamento delle vibrazioni in una racchetta da tennis è quello di utilizzare lo smorzamento granulare, ovvero sfruttare le collisioni anelastiche tra dei granuli presenti in un contenitore per riuscire a dissipare energia. Per simulare tale comportamento si è dovuto ricorrere ad un altro software chiamato YADE, il quale utilizza come metodo risolutivo il DEM, ovvero il metodo agli elementi discreti.

Le simulazioni eseguite per lo smorzatore granulare sono quelle relative ai parametri usati in fase sperimentale, per avere un confronto diretto. Siccome tutta la geometria e i materiali utilizzati erano già definiti, si è variato soltanto il numero di sfere presenti nei contenitori per studiarne l'effetto. La soluzione maggiormente efficace in termini di smorzamento è stata quella relativa ad una percentuale di riempimento delle cavità del 75%, ma comunque si è

trattato di un risultato relativo in quanto un simile smorzatore, con il vincolo della forma e di tutti gli altri parametri di progetto, si è anche rivelato poco utile al fine di ottenere una riduzione significativa delle vibrazioni.

# Capitolo 5

## Analisi sperimentale dell'impatto

Il metodo sperimentale, a differenza di quello numerico che utilizza un programma per simulare il comportamento vibrazionale di una struttura, utilizza un'attrezzatura fisica per il rilevamento dei dati. Nel caso in esame si posizionano degli accelerometri in alcune posizioni caratteristiche della racchetta, i quali riescono a misurare l'accelerazione della struttura in quei determinati punti. Attraverso una rielaborazione dei dati misurati è possibile ottenere la storia temporale dell'accelerazione in quei punti e una risposta in frequenza (PSD).

### 5.1 Strumentazione e configurazione dei parametri

Affinché delle prove sperimentali siano affidabili, è necessario utilizzare sempre una medesima configurazione del sistema. Si è quindi misurato il comportamento dinamico di una racchetta da tennis attraverso una condizione di vincolo costante: la parte finale del manico è stata inserita in una morsa (figura 5.1). In questo modo si è riprodotta una condizione di incastro simile a quella utilizzata nel modello numerico.

Siccome l'elemento morsa permette di bloccare la racchetta con diverse condizioni di serraggio, si è utilizzata anche una cella di carico statica in modo che la forza di vincolo applicata sia costante e quindi la prova sia ripetibile.

Il tipo di impatto considerato è dovuto ad una pallina da tennis che viene fatta cadere da un'altezza di 1,8 m sopra il piatto corde e con una velocità iniziale nulla. Si tratta di un impatto perpendicolare al piatto corde che non considera eventuali rotazioni della pallina, in quanto la forza applicata è dovuta solamente alla gravità. Nonostante il valore di forza applicato in questo modo sia modesto, quindi non paragonabile alle normali condizioni di gioco, nelle analisi eseguite può andare bene perché si eseguono delle analisi comparative tra i sistemi di smorzamento utilizzati.

Con un set di palline si è cercato di colpire la racchetta sempre nello stesso punto. Per calibrare correttamente la posizione di caduta della pallina rispetto alla racchetta si è fatto scendere un filo a piombo e poi si è posizionata la racchetta di conseguenza. Poi affinché la caduta della pallina avvenga nel punto desiderato si è utilizzato un tubo di plastica per indirizzare tale moto e quindi ottenere una condizione iniziale costante tra le varie prove.

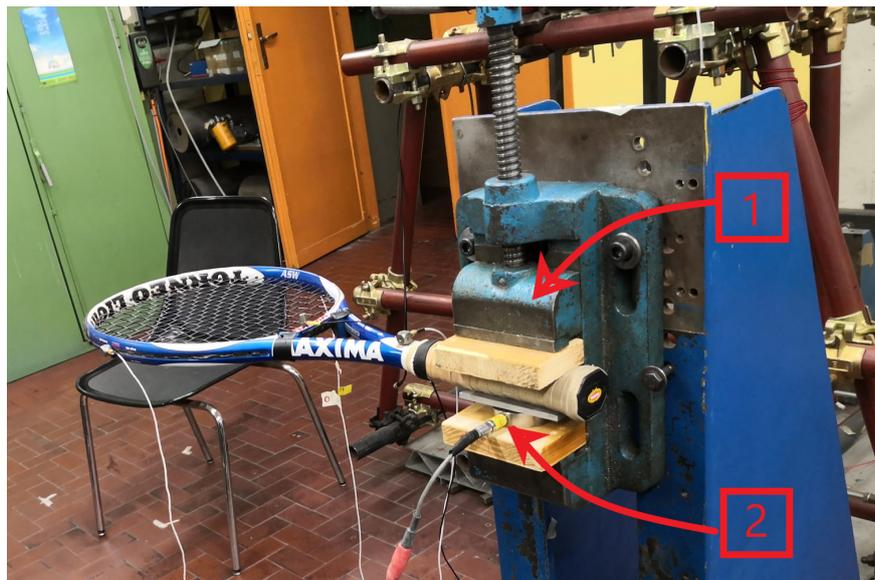


Figura 5.1: Configurazione di vincolo della racchetta nelle analisi sperimentali: morsa (1) e cella di carico statica (2)

Definite quelle che sono le modalità di esecuzione delle prove, si può passare alla descrizione degli oggetti testati. La racchetta da tennis usata nelle prove è della marca "Maxima" (figura 5.2) e presenta le seguenti proprietà fondamentali:

- massa incordata = 309 g
- massa non incordata = 280 g
- dimensione piatto corde =  $100 \text{ in}^2$  ( $645 \text{ cm}^2$ )
- lunghezza = 68,5 cm
- schema corde: 16x19
- bilanciamento = 33 cm



Figura 5.2: Racchetta utilizzata nelle analisi sperimentali

Per la misura delle caratteristiche di incordatura si è utilizzato l'ERT 300, un dispositivo commerciale che fornisce una lettura digitale della tensione delle corde. Tale strumento misura la tensione dinamica DT, ovvero la durezza dinamica del piatto corde efficace durante il gioco [39]. Ottenuto un valore di DT, è possibile ottenere la tensione delle corde conoscendo le dimensioni del piatto corde. Nel caso in esame DT è risultato essere 29, quindi a questo tipo di racchetta corrisponde un valore di tensione piuttosto basso, di poco inferiore a 200 N.

Gli altri oggetti esaminati sono l'antivibrazione delle corde (figura 3.1) e Fluendo (figura 5.3). Tali oggetti hanno le seguenti caratteristiche di massa:

- massa dell'antivibrazione = 4,2 g
- massa di Fluendo = 13,9 g



Figura 5.3: Posizionamento del dispositivo Fluendo sul telaio della racchetta

In aggiunta a questi dispositivi si è creato un prototipo di smorzatore granulare con i seguenti componenti: contenitore in TPU realizzato attraverso una stampa 3D e delle sfere in vetro di piccole dimensioni (figura 5.4).

Lo smorzatore così ottenuto viene fissato al telaio della racchetta per mezzo di un nastro biadesivo e presenta il coperchio smontabile per riempire il contenitore con una percentuale diversa di granuli.

Il blocchetto utilizzato sono due e sono cavi, per permettere di essere riempiti con il materiale granulare. Le loro dimensioni sono: base = 20 mm x 6 mm, altezza = 20 mm, spessore pareti = 1,5 mm. Le sfere, invece, hanno un diametro compreso tra (1-1,5) mm. La posizione di questo smorzatore granulare sul telaio della racchetta è quella riportata nella figura 4.30.

Per lo smorzatore granulare sono state studiate due condizioni diverse: riempendolo completamente o a metà.

Considerando che ogni blocchetto vuoto ha una massa di 2,3 grammi, nelle due configurazioni assume la seguente massa:



Figura 5.4: Elementi utilizzati per simulare lo smorzatore granulare: contenitori cavi e sferette in vetro

- contenitore riempito completamente:  $m=5,5$  g
- contenitore riempito a metà:  $m=3,9$  g

L'impatto analizzato avviene attraverso la caduta delle palline. Per avere più prove in una medesima configurazione si è usato un set di 12 palline numerate (figura 5.5), che presentano le caratteristiche riportate nella tabella 5.1.



Figura 5.5: Palline da tennis utilizzate nella parte sperimentale

Una volta definiti tutti i parametri della simulazione, si sono inseriti degli accelerometri sul telaio della racchetta. Si è scelto di inserire 3 accelerometri triassiali, posizionati rispettivamente nella parte alta del manico e nelle zone laterali dell'ovale. Si sono usati accelerometri triassiali in questi punti per riuscire ad analizzare anche vibrazioni associate alla torsione. Un ulteriore accelerometro, questa volta uniassiale, è stato posizionato lungo l'asse longitudinale della racchetta nella parte bassa dell'ovale.

Tabella 5.1: Proprietà delle palline da tennis usate in fase sperimentale

Numero pallina	Massa (g)	Marca
1	56,0	Babolat
2	56,8	Babolat
3	57,3	Babolat
4	56,4	Babolat
5	57,0	Babolat
6	56,7	Babolat
7	56,9	Babolat
8	56,0	Head Tour
9	56,2	Head Pro
10	58,4	Head Tour
11	55,6	Head Tour
12	57,1	Head Tour

La rappresentazione del posizionamento degli accelerometri sul telaio della racchetta è riportata nella figura 5.6.



Figura 5.6: Posizionamento degli accelerometri sul telaio della racchetta

## 5.2 Prove effettuate

In laboratorio è stato possibile testare diverse configurazioni del sistema, mantenendo comunque costante il vincolo della racchetta e l'altezza dalla quale far cadere le palline. Non avendo a disposizione molto spazio si impostò di lasciar cadere le palline da un'altezza di 1,8

metri.

L'esperimento include 4 punti diversi di impatto, 3 punti lungo l'asse longitudinale della racchetta e 1 fuori centro. Tali posizioni sono indicate con le seguenti lettere: "C" per la posizione centrale, "A" in alto, "B" in basso ed "L" per la posizione laterale (figura 5.7).

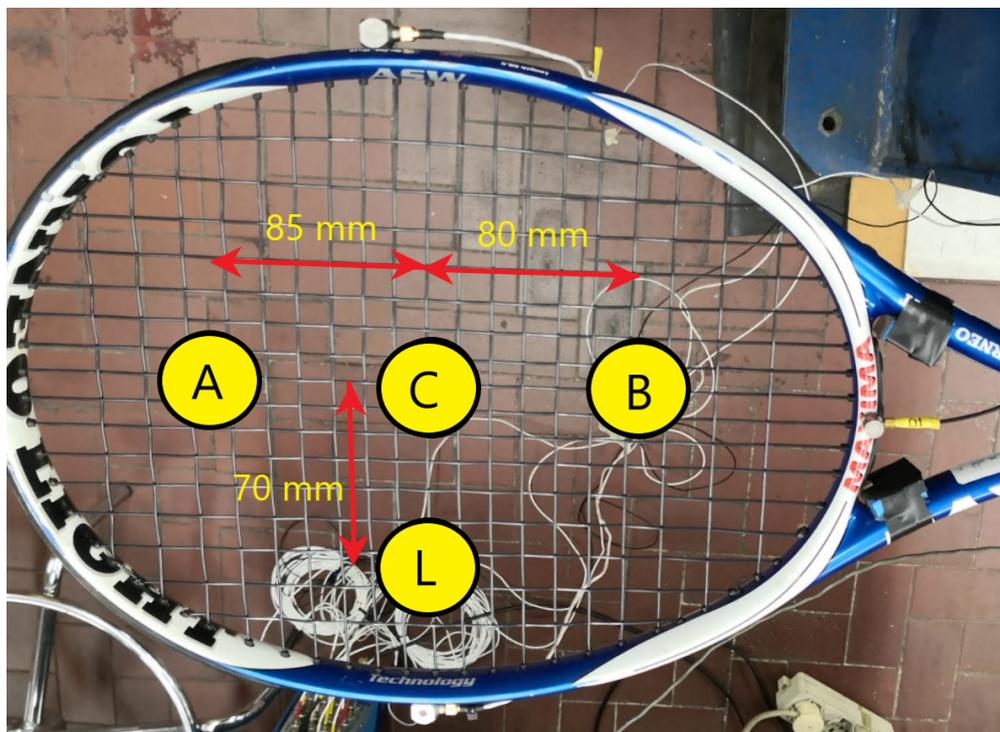


Figura 5.7: Posizionamento degli impatti della pallina sul piatto corde

Oltre ad analizzare diverse posizioni di impatto, tra i vari esperimenti si sono variate le condizioni di smorzamento: senza smorzatori, con l'antivibrazione delle corde, con Fluendo e con lo smorzatore granulare. Per quest'ultimo caso si sono analizzate due diverse condizioni: con entrambi i contenitori riempiti completamente e con il riempimento al 50%.

Sono state eseguite 12 prove per ciascuna posizione di impatto e per ciascuna condizione di smorzamento, per un totale di:  $12 \times 4 \times 7 = 336$  prove.

Per identificare correttamente le varie prove effettuate si è scelto di utilizzare un codice identificativo, la cui legenda viene spiegata nella tabella 5.2.

Nel codice identificativo della prova è presente una lettera in più solo nel caso dello smorzatore granulare, in quanto sono presenti due condizioni di riempimento: 100% e 50%. Sono pertanto analizzate 6 condizioni diverse di smorzamento, per ognuna delle quattro posizioni di impatto. A queste va aggiunta una seconda prova soltanto per il caso dello smorzatore granulare riempito a metà, eseguita per tutte le posizioni. Poi per ognuno dei 28 codici ottenuti sono stati eseguiti 12 impatti tra pallina e racchetta, tutti nelle stesse condizioni.

Tabella 5.2: Legenda dei codici utilizzati per le varie prove effettuate

Prima lettera	A	Senza smorzatori
	B	Con antivibrazioni
	F	Con Fluendo
	D	Con antivibrazioni e Fluendo
	G	Con smorzatore granulare
Seconda lettera	C	Posizione centrale
	A	Posizione in alto
	B	Posizione in basso
	L	Posizione laterale
Eventuale terza lettera	P	Contenitore pieno
	M	Contenitore a metà
Primo numero	18	Altezza di caduta (dm)
Secondo numero	1	Prima prova
	2	Seconda prova

### 5.3 Risultati ottenuti

Il procedimento adottato in laboratorio per ottenere l'acquisizione dei dati relativi alle accelerazioni del sistema in esame è il seguente:

1. Si è vincolata la racchetta al sistema morsa e si è introdotto il sistema di smorzamento;
2. Si sono fissati al telaio della racchetta una serie di accelerometri attraverso i quali è stata acquisita la risposta del sistema;
3. Si è scelto un punto di impatto con la pallina in modo da eccitare i modi del sistema;
4. Si è avviata l'acquisizione tramite il sistema OROS (OR38);
5. Si sono generati 12 impatti (impulsi) consecutivi facendo attenzione che il decadimento della risposta della racchetta fosse finito prima dell'applicazione di un nuovo impulso.

Questa procedura è stata ripetuta per tutti i sistemi di smorzamento analizzati e per le quattro posizioni di impatto scelte. In queste prove si è fatta attenzione a due aspetti in particolare: che il fondo scala di ciascun canale sia corretto al fine di evitare delle possibili saturazioni del canale e che l'intensità dell'impatto sia di un'intensità sufficiente per non essere influenzata dal rumore di fondo.

Prima di analizzare i risultati ottenuti dalle prove in laboratorio, si può notare nella figura 5.8 una serie di fotogrammi che riportano un esempio di impatto tra la pallina e la racchetta. Tali immagini sono state possibili attraverso una telecamera ad alta velocità, dato il tempo di contatto molto ridotto.

Dalle figure si riesce a notare la deformazione della palla quando entra in contatto con il piatto corde (immagine (4) ). La deformazione delle corde, invece, non si nota a causa

del posizionamento della telecamera e dell'impatto di entità molto ridotta. Un altro aspetto che si può considerare è la posizione del telaio dopo il contatto con la pallina, si nota infatti che assume posizioni molto diverse negli ultimi fotogrammi a causa della sua vibrazione (immagini (8) e (9) ).

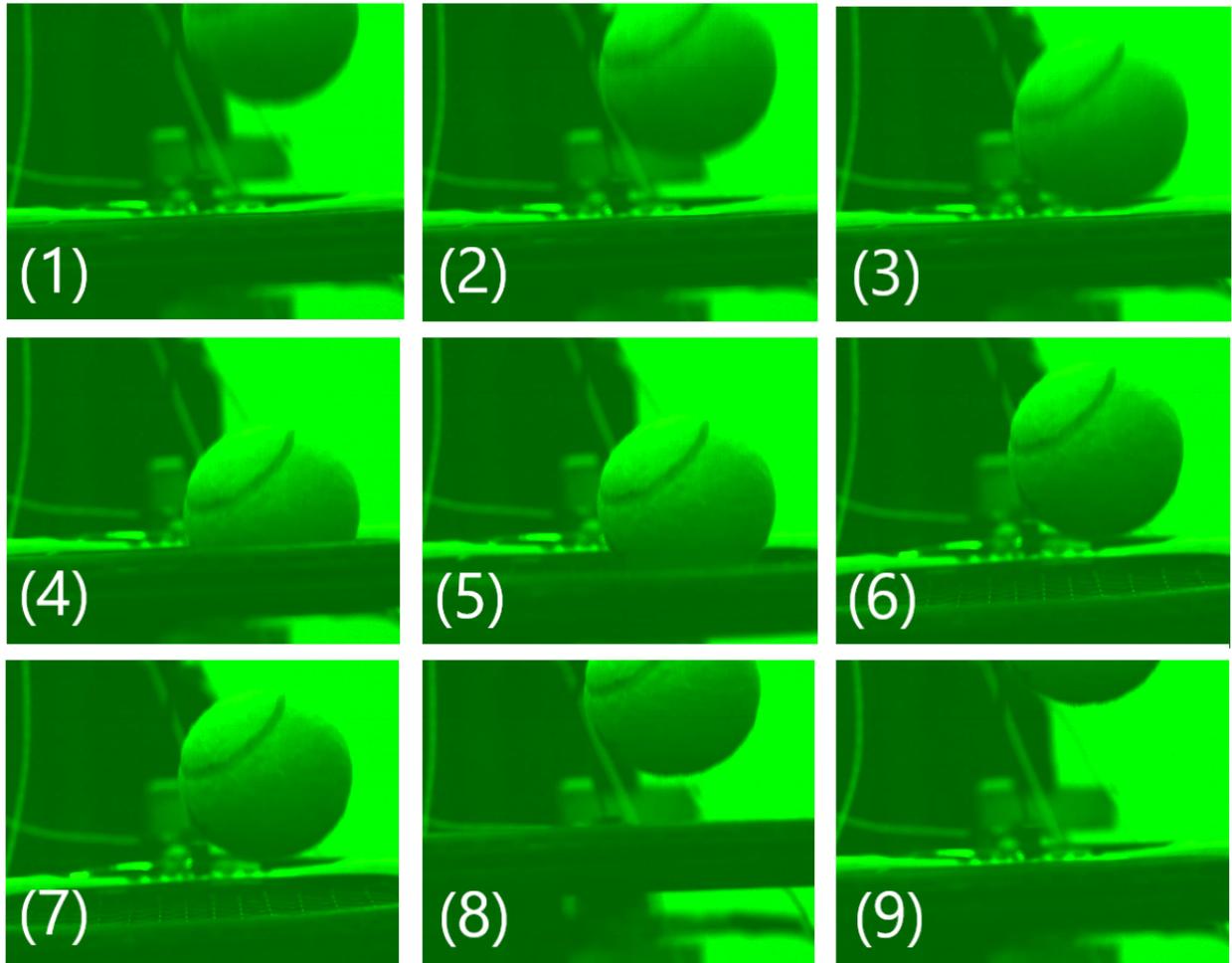


Figura 5.8: Fotogrammi di un impatto tra racchetta e pallina testato in laboratorio

In seguito vengono presentati i risultati ottenuti sotto forma di storia temporale, ovvero l'andamento dell'accelerazione nel tempo, e un'analisi in frequenza per mezzo della PSD (Densità Spettrale di Potenza).

### 5.3.1 Storia temporale

Per poter ricavare la storia temporale delle accelerazioni misurate si effettua una conversione analogico-digitale. Questo avviene perché la lettura dei segnali non avviene in maniera continua, ma a istanti equispaziati, separati da un tempo  $\Delta t$  detto periodo di campionamento. Va sottolineato che i valori così ottenuti sono detti campioni (sample), i quali corrispondono agli istanti di lettura memorizzati, mentre la parte rimanente della misura è come se non esistesse [40].

Un aspetto importante è a questo punto la scelta di un corretto periodo di campionamento, in modo da seguire correttamente le evoluzioni della storia temporale senza aumentare in maniera eccessiva i tempi di calcolo. Un procedimento adottato per ricavare la frequenza di campionamento  $f_s$ , che è l'inverso del periodo di campionamento, è l'utilizzo del teorema di Nyquist:

$$f_s \geq 2f_{max} \quad (5.1)$$

il quale afferma che la frequenza  $f_s$  deve essere almeno il doppio della frequenza massima contenuta nel segnale. In questo modo si riesce ad evitare l'errore di aliasing, mantenendo tutte le informazioni corrette sui segnali fino alla frequenza  $f_{max}$ .

Nel caso in esame si è scelta una frequenza di campionamento pari a 8192 Hz.

Avendo a disposizione accelerometri triassiali, le misure effettuate si riferiscono a più direzioni. Ma la direzione maggiormente significativa è quella perpendicolare alla superficie del piatto corde, in quanto si sta analizzando la flessione di una racchetta dovuta ad un impatto normale alla superficie delle corde.

In seguito vengono riportati gli andamenti dei profili di accelerazione per i vari sistemi di smorzamento e per le varie posizioni del punto di impatto. In particolare si è rappresentata la direzione perpendicolare al piatto corde per l'accelerometro (1) (figura 5.6), in quanto più rappresentativo delle vibrazioni trasmesse al braccio del giocatore. Si è scelto di rappresentare l'accelerazione normalizzata al suo valore massimo per non avere andamenti con ampiezze diverse, data la difficile ripetibilità di eseguire colpi perfettamente uguali.

Nella figura 5.9 sono riportati gli andamenti per impatti centrali, le figure 5.10 e 5.11 si riferiscono rispettivamente a posizioni in alto ed in basso sulla linea d'asse della racchetta, mentre la figura 5.12 analizza impatti in posizione laterale. La legenda tra le varie prove è sempre la stessa: con "A" viene indicata una racchetta senza dispositivi di smorzamento, "B" comprende la presenza del solo antivibrazione delle corde, "F" si riferisce a Fluendo, "D" comprende sia l'antivibrazione che Fluendo, "GP" è il granulare pieno e "GM" il granulare riempito a metà.

Dall'analisi dei risultati ottenuti è possibile fare le seguenti considerazioni:

- data l'eterogeneità degli andamenti trovati, si possono fare solo alcune valutazioni visive
- l'effetto più evidente in tutte le posizioni di impatto è dovuto all'utilizzo dell'antivibrazione delle corde (caso "B" e "D"), in quanto riesce a smorzare le frequenze di oscillazione più elevate
- la durata dell'oscillazione è simile tra le varie prove, comunque inferiore a 0,5 s
- il minimo valore di ampiezza dell'accelerazione si trova per le posizioni in basso, ciò è coerente con la prima forma modale di flessione
- a livello visivo non si riesce a notare una variazione significativa di smorzamento. Tale effetto può essere analizzato più nel dettaglio attraverso il calcolo del  $t_{60}$

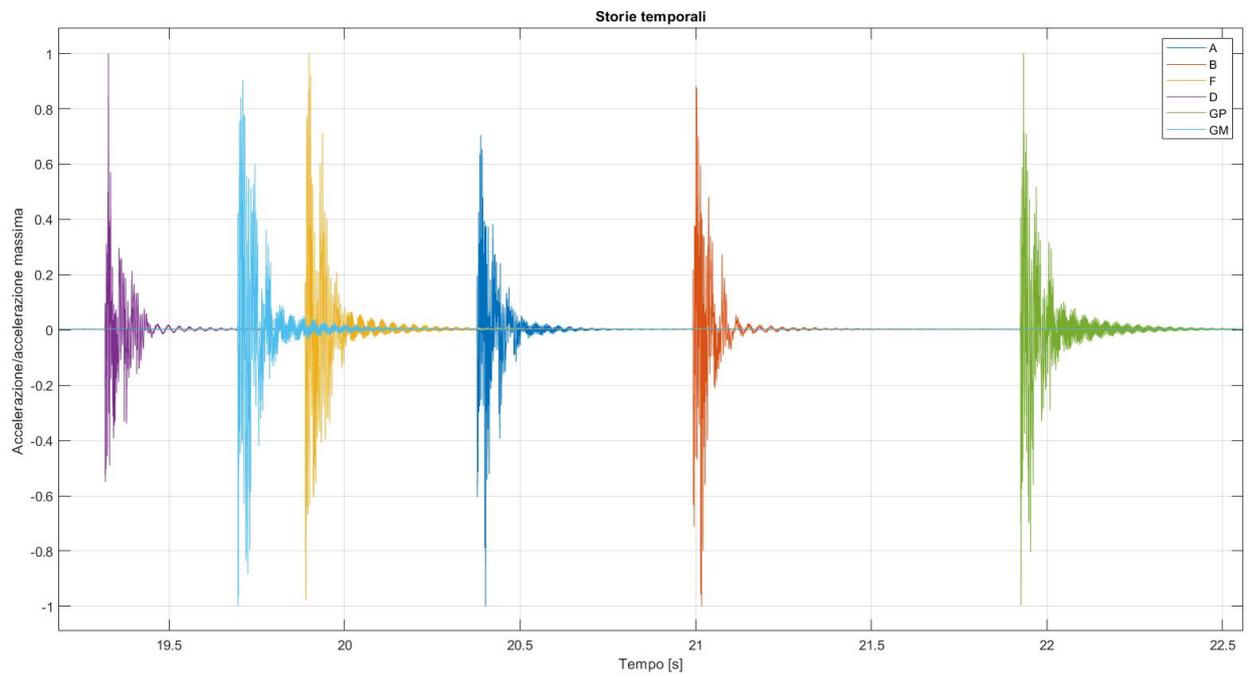


Figura 5.9: Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione centrale

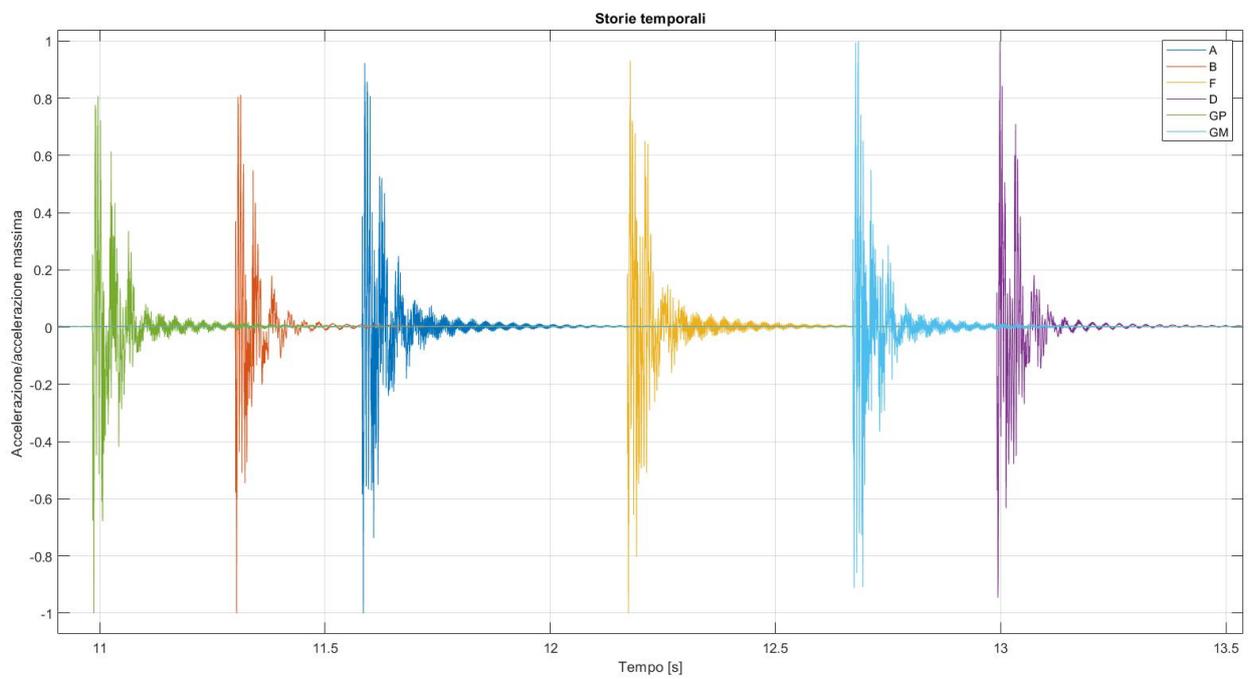


Figura 5.10: Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione alta

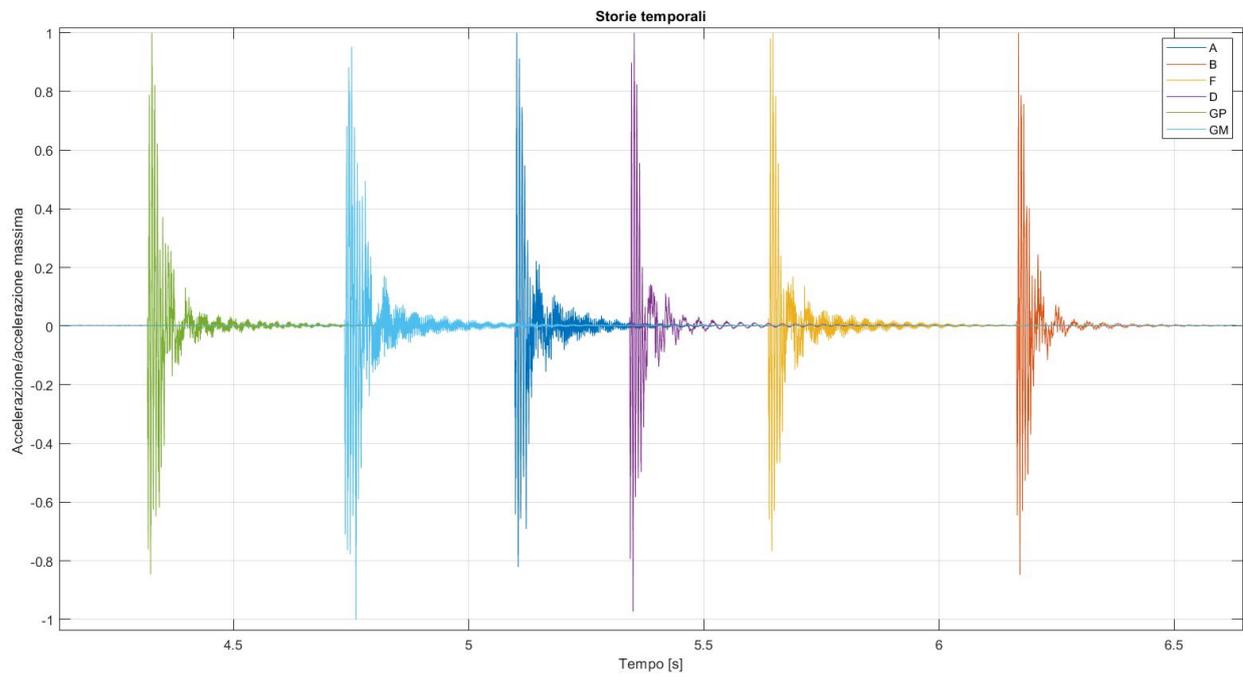


Figura 5.11: Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione bassa

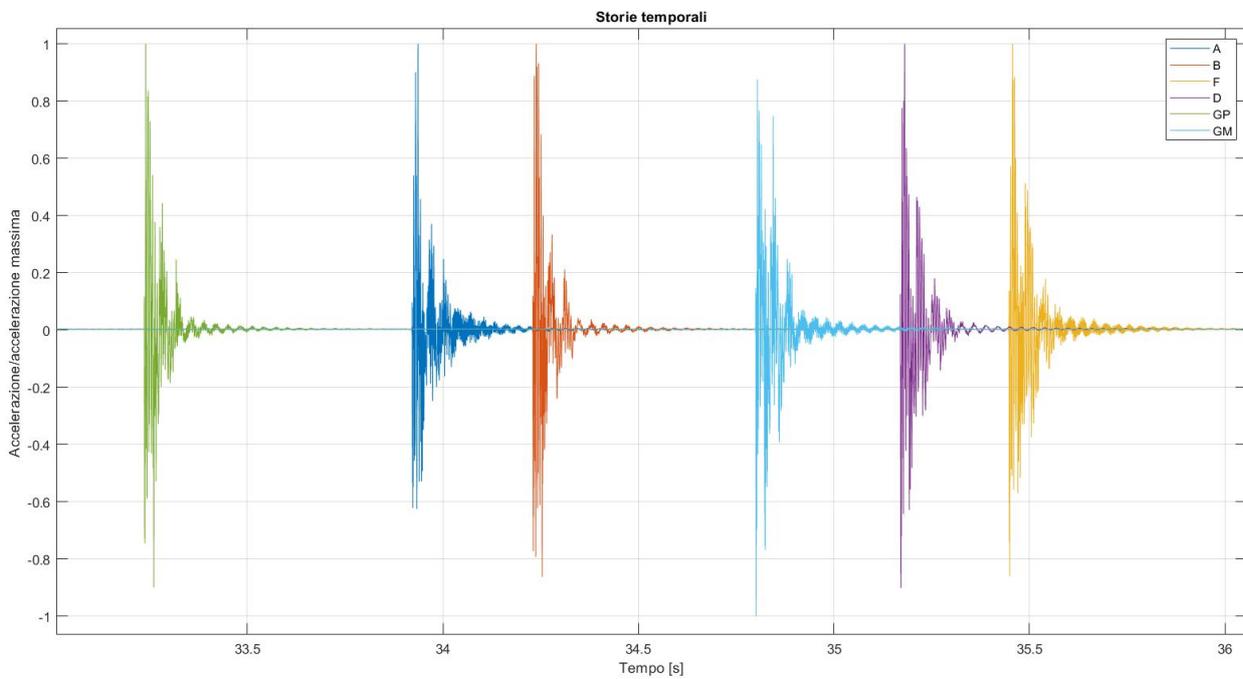


Figura 5.12: Profilo di accelerazione normalizzato per impatti in posizione laterale

- non si riescono ad effettuare altre considerazioni attendibili perché anche se i profili di accelerazione sono normalizzati, la posizione del picco cambia tra le varie prove: si può trovare all'inizio o dopo alcuni cicli di vibrazioni (ciò è dovuto al mescolamento dei vari modi di vibrare)

### 5.3.2 Analisi in frequenza - PSD

Dopo aver analizzato l'andamento dell'accelerazione nel tempo, si passa all'analisi del segnale in frequenza. Per fare questo si è scelto di calcolare la PSD (Power Spectral Density), ovvero la densità spettrale di potenza del segnale.

Prima di descrivere il procedimento adottato e commentare i risultati ottenuti, viene fatta una breve sintesi su cosa è una PSD. Già analizzando il nome si nota come ogni parola corrisponde ad una componente essenziale della PSD.

La potenza si riferisce al fatto che l'ampiezza di questa misura è il valore quadratico medio del segnale analizzato. Quindi non si tratta di una potenza effettiva espressa in Watt. Ma poiché la potenza è proporzionale al valore quadratico medio di una quantità, quest'ultimo può essere inteso come "potenza" di quella quantità.

Il termine spettrale si riferisce al fatto che la PSD è una funzione della frequenza, ovvero rappresenta la distribuzione di un segnale su uno spettro di frequenza.

Mentre la densità indica che l'ampiezza della PSD è normalizzata su una singola larghezza di banda espressa in Hertz.

Avendo misurato come segnale l'accelerazione del sistema, l'unità di misura della PSD è  $(m/s^2)^2/Hz$ .

Il metodo utilizzato per la stima della PSD è quello di Welch. Tale metodo si basa sul concetto di utilizzare le stime dello spettro del periodogramma, che sono il risultato della conversione di un segnale dal dominio del tempo al dominio della frequenza. A livello pratico si effettua una suddivisione del segnale in segmenti sovrapposti. Il metodo di Welch calcola un periodogramma modificato per ogni segmento e quindi la media di queste stime per produrre la stima della densità spettrale di potenza. Poiché il processo è stazionario e il metodo di Welch utilizza stime PSD di diversi segmenti delle serie temporali, i periodogrammi modificati rappresentano stime approssimativamente non correlate della PSD reale e la media riduce la variabilità. I segmenti vengono in genere moltiplicati per una funzione finestra, in modo che il metodo di Welch equivale a calcolare la media dei periodogrammi modificati [41].

Nel caso in esame si è utilizzata la funzione Matlab "pwelch" per ottenere la stima della densità spettrale di potenza attraverso il metodo di Welch. Avendo misurato le accelerazioni di ogni canale, si ottiene una PSD per ogni canale.

La stima della PSD dei segnali multicanale viene calcolata per tutte le prove, ma la rappresentazione grafica è riportata solo per il caso senza smorzatori. Si riportano le PSD per tutte e quattro le posizioni di impatto considerate: centrale (figura 5.13), in basso (figura 5.14), in alto (figura 5.15) e laterale (figura 5.16).

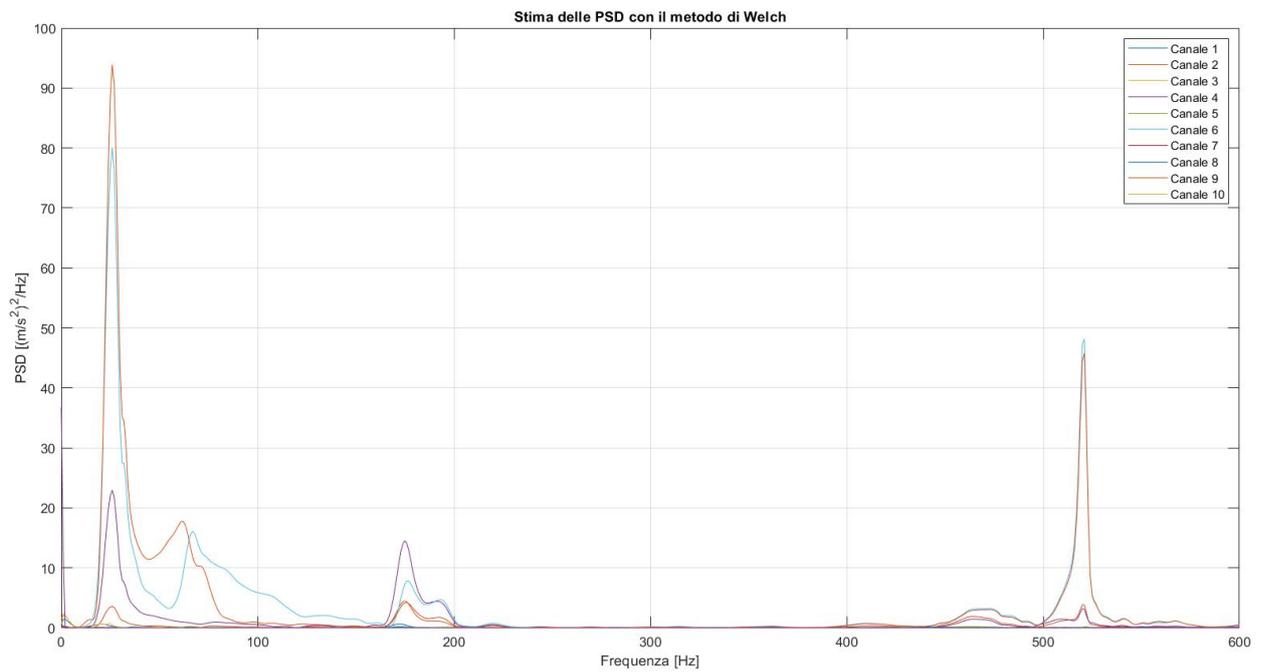


Figura 5.13: PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione centrale

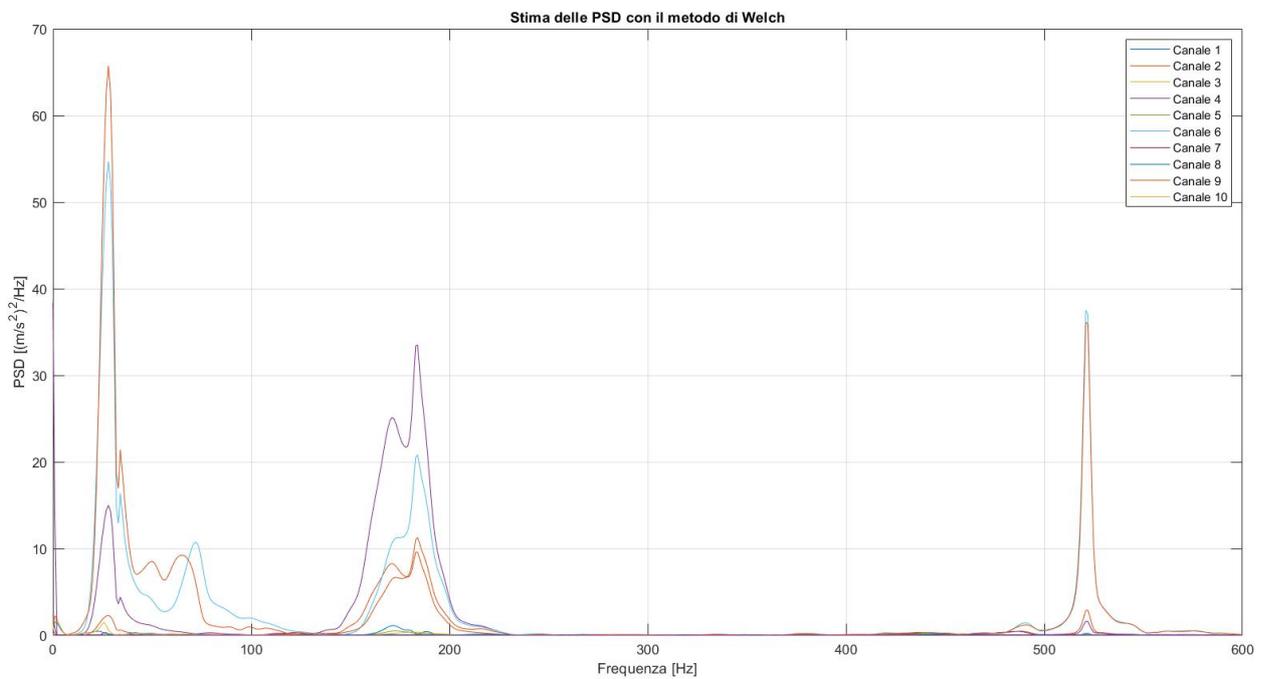


Figura 5.14: PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione bassa

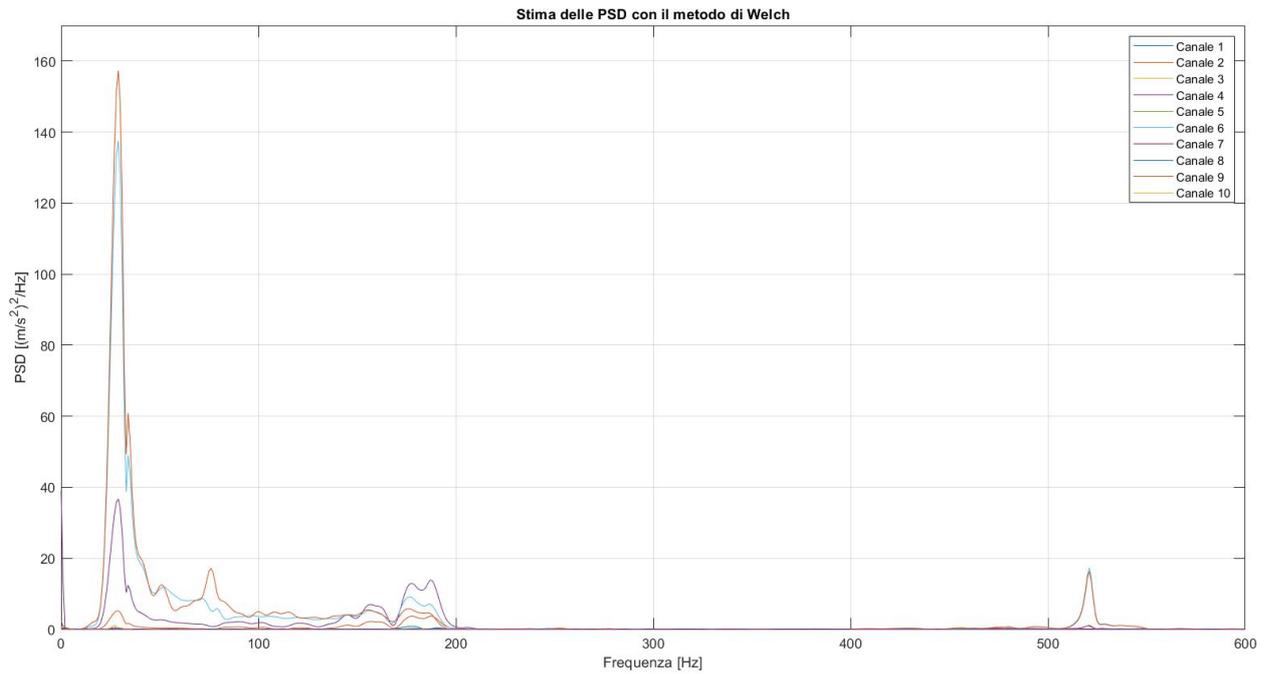


Figura 5.15: PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione alta

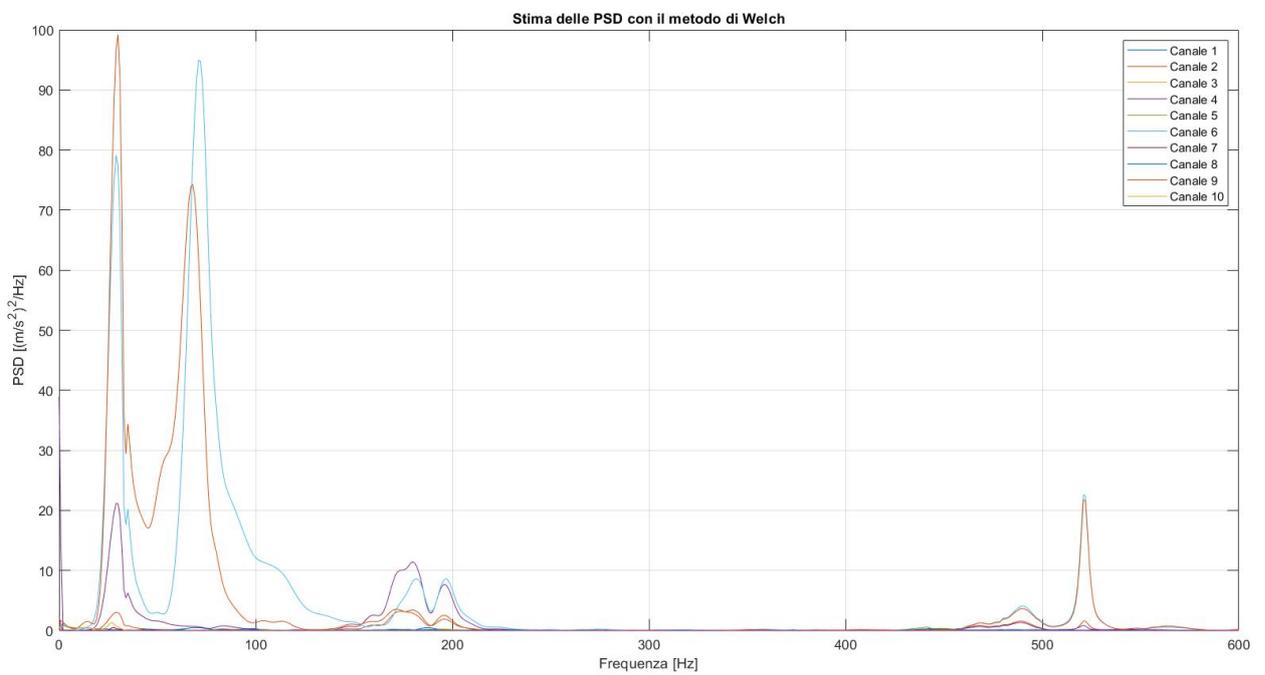


Figura 5.16: PSD per il caso senza dispositivi di smorzamento e l'impatto in posizione laterale

Tabella 5.3: Risultati delle PSD: frequenze di risonanza e relative ampiezze massime

Codice	1° Flessionale		2° Flessionale		Piatto corde		Torsionale	
	$f$ [Hz]	PSD [ $\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$ ]	$f$ [Hz]	PSD [ $\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$ ]	$f$ [Hz]	PSD [ $\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$ ]	$f$ [Hz]	PSD [ $\frac{(m/s^2)^2}{Hz}$ ]
AC18_1	28	93,87	175	14,51	521	48,14	62	17,76
BC18_1	28	112,54	177	14,55	483	3,57	67	21,5
FC18_1	28	85,01	179	6,75	521	65,51	74	35,41
DC18_1	29	80,27	186	6,87	482	0,99	76	9,39
GCP18_1	29	86,58	169	9,28	523	43,23	76	10,6
GCM18_1	29	95,34	170	12,62	523	58,48	77	14,86
GCM18_2	29	102,59	170	10,82	522	46,38	77	16,35
AA18_1	29	157,31	187	13,86	521	17,31	76	17,24
BA18_1	28	141,41	185	12,16	496	0,92	75	27,45
FA18_1	28	94,83	172	19,82	521	31,37	71	14,99
DA18_1	28	99,72	172	22,81	456	0,61	71	15,91
GAP18_1	29	140,71	162	11,5	523	25	76	15,3
GAM18_1	29	139,63	177	11,36	523	20,89	77	18,65
GAM18_2	29	126,79	179	19,29	523	20,85	79	22,32
AB18_1	28	65,71	184	33,47	521	37,53	71	10,57
BB18_1	28	62,88	172	36,93	527	0,88	72	7,61
FB18_1	28	58,51	179	35,4	521	19,79	75	8,04
DB18_1	28	52,32	177	25,69	534	0,6	75	6,72
GBP18_1	29	61,91	172	36,44	522	12,7	79	9,27
GBM18_1	29	60,68	175	44,39	523	21,77	79	17,92
GBM18_2	30	60,33	175	38,68	522	45,06	79	20,09
AL18_1	30	99,2	180	11,45	522	22,4	71	94,98
BL18_1	30	99,73	181	12,52	495	3,44	72	89,01
FL18_1	29	56,87	182	10,82	521	37,43	75	50,71
DL18_1	29	64,19	183	11,14	477	0,51	70	101,96
GLP18_1	28	51,56	166	11,46	523	17,45	73	95,38
GLM18_1	30	70,35	167	12,79	522	21,44	74	128,61
GLM18_2	30	73,33	168	10,01	522	21,05	75	100,54

In aggiunta ai risultati grafici, vengono riportati nella tabella 5.3 le frequenze di risonanza e le ampiezze massime associate della PSD per tutte le prove effettuate.

Dall'analisi sia dei risultati grafici che tabulari ottenuti è possibile fare le seguenti considerazioni:

- nel range di frequenze considerato si riescono ad individuare 4 picchi nel calcolo della PSD: a tali picchi è associata una frequenza di risonanza caratteristica del rispettivo modo di vibrare. Vicino 28 Hz è presente il primo modo flessionale, tra i 60-80 Hz è presente un modo torsionale, poi intorno ai 170 Hz è presente un secondo modo flessionale e un modo del piatto corde sui 520 Hz che poi si propaga sul telaio
- passando progressivamente da impatti in posizione bassa, centrale e alta, la PSD della prima frequenza di risonanza aumenta, in accordo con la maggiore accelerazione trovata nelle storie temporali
- per gli impatti laterali si nota un elevato valore di PSD associato alla frequenza di torsione
- il secondo modo flessionale è evidente per impatti in posizione bassa, mentre il modo del piatto corde si nota soprattutto per impatti centrali
- la prima frequenza flessionale, la torsione e il modo del piatto corde sono stati rilevati soprattutto dai canali 6 e 9, i quali sono associati alla direzione perpendicolare al piatto corde rispettivamente per gli accelerometri (3) e (4)
- il secondo modo flessionale è stato rilevato soprattutto dal canale 4, che è associato alla direzione perpendicolare al piatto corde dell'accelerometro (2)
- l'antivibrazione delle corde ha come effetto quello di annullare quasi completamente l'ampiezza del modo del piatto corde che si trova ad una frequenza superiore a 500 Hz
- Fluendo determina un lieve diminuzione della PSD associata alla prima frequenza flessionale

## 5.4 Calcolo del $t_{60}$

Dopo le valutazioni qualitative sulla storia temporale e sull'analisi in frequenza, per analizzare a livello quantitativo l'ammontare dello smorzamento tra i vari sistemi si è pensato di utilizzare il concetto del  $t_{60}$ . Questa sezione è articolata nel seguente modo: dopo una breve introduzione teorica sul tempo di riverberazione, si passa all'analisi della convergenza del metodo di calcolo usato ed infine si riportano i risultati ottenuti con i vari commenti.

### 5.4.1 Accenni teorici

La definizione del tempo di riverberazione  $t_{60}$ , secondo la norma UNI EN ISO 354:2003, è la seguente:

**Definizione 1** (del Tempo di Riverberazione  $t_{60}$ ). "Tempo necessario affinché la densità di energia sonora discenda ad un milionesimo del valore che aveva nell'istante di spegnimento della sorgente stazionaria, ovvero diminuisca di 60 dB."

Nonostante il riverbero sia un fenomeno acustico legato alla riflessione del suono da parte di un ostacolo posto davanti alla fonte sonora, la stessa metodologia di misura può essere utilizzata in dinamica in quanto anche le vibrazioni mostrano un fenomeno di decadimento dopo un'eccitazione iniziale. Esistono due procedimenti per il calcolo del  $t_{60}$ : la procedura classica consiste nel calcolo del tempo di riverberazione in relazione alle dimensioni dell'ambiente considerato e alle pareti investite dal suono, mentre la procedura inversa si basa sull'immissione di un suono impulsivo in un ambiente e si analizza in quanto tempo questo impulso decade. Nella seguente trattazione viene utilizzato il procedimento inverso.

Il  $t_{60}$  può essere inteso quindi come un indice della rapidità con cui, disattivata una sorgente, le vibrazioni si estinguono nel tempo. Tale valore è quindi associato al livello di smorzamento della struttura, in quanto un valore minore del tempo di riverberazione corrisponde ad uno smorzamento più elevato e quindi ad un decadimento delle vibrazioni più marcato.

Normalmente il  $t_{60}$  viene misurato attraverso l'introduzione di un rumore casuale a banda larga affinché si riesca ad eccitare la maggior parte dei modi in risonanza. Per questo motivo, soprattutto in acustica, si filtra il segnale in bande di frequenza per ottenere informazioni sul tempo di decadimento mediate e per ciascuna banda di frequenza.

Il calcolo del tempo di riverberazione viene eseguito seguendo la normativa UNI EN ISO 354:2003. Facendo riferimento alla figura 5.17 si nota che, dopo l'introduzione di una sorgente stazionaria, si arriva a regime e il livello equivalente è costante. Una volta spenta la sorgente, dopo un piccolo tratto scalinato, la curva di decadimento diviene rettilinea. Per il calcolo del  $t_{60}$  bisogna cronometrare il tempo dall'istante in cui il livello è sceso di 5 dB, per evitare di considerare il primo tratto irregolare, e fermalo quando si è ottenuto un decadimento di 65 dB.

Talvolta non si riescono a misurare 60 dB di decadimento, per cui si considerano tempi come  $t_{10}$ ,  $t_{20}$ ,  $t_{30}$  in cui il pedice sta ad indicare il decadimento in dB considerato. Tali valori sono comunque equivalenti al  $t_{60}$  in quanto l'andamento è lineare, quindi con una semplice proporzione si può passare alla definizione del tempo di riverberazione (per esempio il  $t_{20}$  corrisponde a 3 volte il tempo necessario per scendere di 20 dB, quindi equivale al  $t_{60}$ ).

A livello pratico si è seguito questo procedimento su Matlab, ovvero si è calcolata la pendenza della curva di decadimento del livello espressa in dB. Tale curva è approssimabile ad una retta, quindi si è calcolato il valore di tempo che intercorre tra un intervallo di livelli compatibile con i segnali analizzati. Il valore del tempo ottenuto viene rapportato ad un decadimento teorico di 60 dB e così si ottiene il tempo di riverberazione  $t_{60}$ . Altri dettagli relativi alla metodologia e alle funzioni Matlab utilizzate vengono riportate in APPENDICE D.

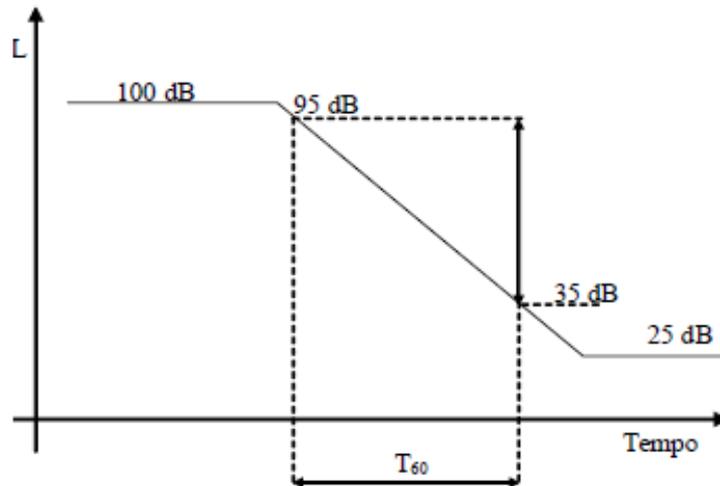


Figura 5.17: Definizione del  $t_{60}$

### 5.4.2 Risultati ottenuti

Per il calcolo del  $t_{60}$  si sono fatte due prove distinte: la prima effettuando una suddivisione in bande di frequenza, rispettando l'analogia con il procedimento acustico, mentre la seconda senza utilizzare alcuna banda di frequenza.

**Caso con due bande di frequenza** Per questo primo caso si sono create due distinte bande di frequenza: la prima è [10-300]Hz, mentre la seconda è [300-600]Hz. In questo modo nella prima banda si considerano le prime due frequenze flessionali e la prima torsionale del telaio, mentre nella seconda banda è presente il primo modo del piatto corde. Una rappresentazione del livello equivalente dell'accelerazione per le due bande di frequenza viene riportata in figura 5.18.

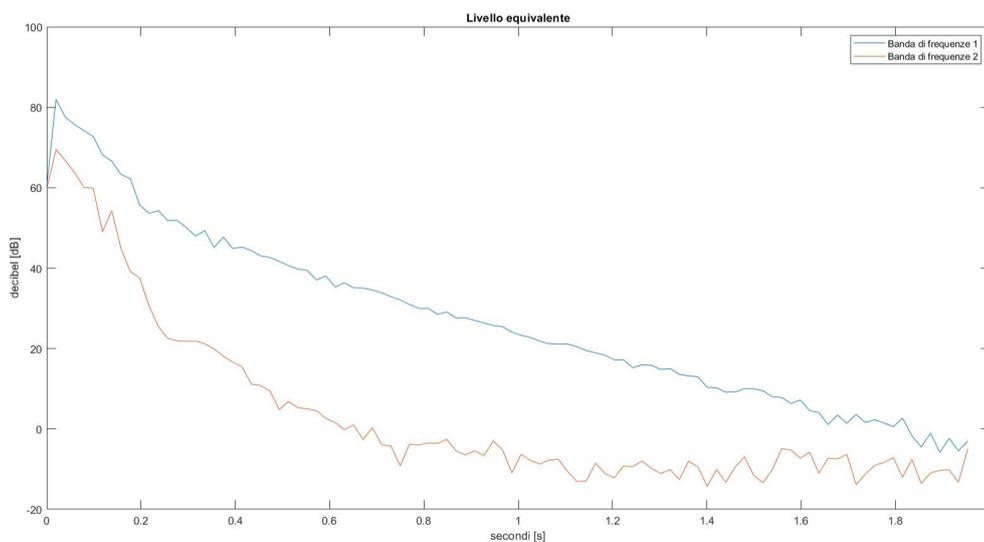


Figura 5.18: Livelli equivalenti per le due bande di frequenza considerate (prova AC18\_1)

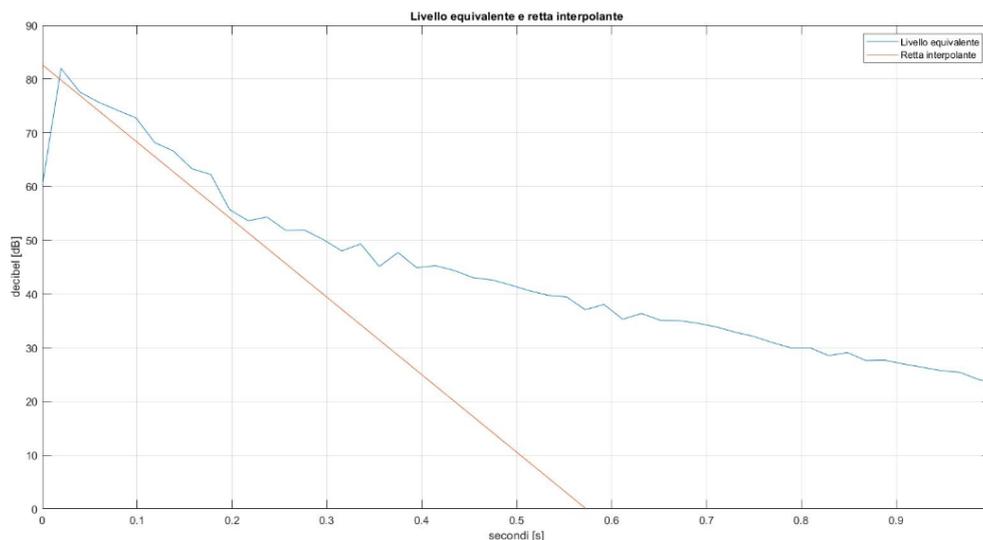


Figura 5.19: Livello equivalente e retta interpolante per la prima banda di frequenza (prova AC18\_1)

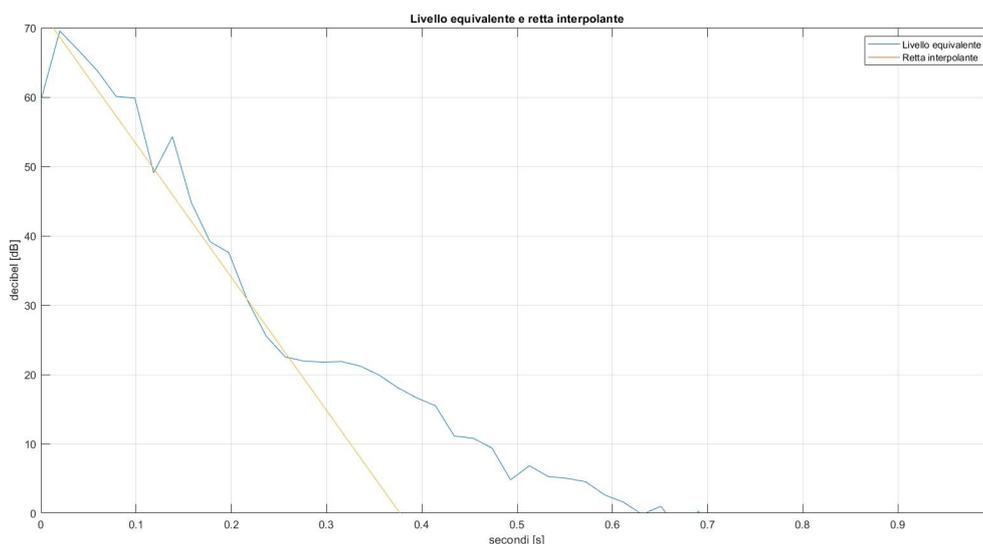


Figura 5.20: Livello equivalente e retta interpolante per la seconda banda di frequenza (prova AC18\_1)

Come si nota dall'immagine 5.18, gli andamenti dei livelli equivalenti sono tutt'altro che rettilinei. La parte iniziale di ogni curva, dove si ha la maggiore riduzione di livello, è approssimabile con una retta (figure 5.19 e 5.20). La funzione Matlab che permette di approssimare una curva con una retta è "polyfit".

Dall'analisi delle figure ottenute si nota un buon accordo con la teoria lineare del decadimento, per questo possiamo affermare che il metodo utilizzato possiede una convergenza abbastanza buona e quindi i risultati ottenuti possono essere ritenuti affidabili.

Il calcolo del  $t_{60}$  viene eseguito sui canali 2,4,6 e 9, ovvero quelli relativi alla direzione perpendicolare al piatto corde rispettivamente degli accelerometri (1),(2),(3) e (4), e per tutti

i 12 impulsi di ogni prova. I valori ottenuti sono riportati in forma grafica e suddivisi tra le varie posizioni di impatto. Ogni grafico mostra, oltre al valore del tempo di riverberazione medio tra i vari impatti, anche il calcolo della deviazione standard, che è una misura della variabilità dei dati statistici. Senza una tale misura non si può avere fiducia in una media calcolata.

Per la prima banda di frequenza i risultati sono riportati in figura 5.21, mentre quelli per la seconda banda di frequenza vengono omessi a causa di una deviazione standard troppo elevata che non rende i risultati molto attendibili.

Il motivo per cui i risultati della seconda banda hanno una dispersione così ampia è dovuto alle maggiori frequenze in gioco, che si esauriscono più velocemente e quindi non sono individuate correttamente dal metodo di calcolo usato. Per la prima banda di frequenza, invece, i risultati sono plausibili perché mostrano un valore di tempo di riverberazione vicino ai 0,4 secondi, molto simile alla durata di oscillazione ricavata nelle storie temporali.

**Caso senza banda di frequenza** Anche in questo caso i calcoli per il  $t_{60}$  vengono effettuati sui canali associati alla direzione perpendicolare al piatto corde, ma a differenza del caso precedente non viene considerata nessuna banda di frequenza. I risultati sono riportati nella figura 5.22.

Dall'analisi dei risultati ottenuti si nota che l'andamento del  $t_{60}$  cambia a seconda dell'utilizzo o meno delle bande di frequenza. Nel primo caso si è effettuata la suddivisione in bande per rispettare il procedimento adottato in acustica che prevede la suddivisione in terze di ottave. Le bande analizzate sono state due: [10-300]Hz e [300-600]Hz, ma solo la prima è risultata più significativa perché comprende le frequenze di risonanza associate ai primi modi di vibrare. I risultati trovati in questo primo caso sono:

- il  $t_{60}$  è inferiore a 0,4 secondi per quasi tutte le prove analizzate
- la deviazione tra le varie prove non è sempre bassa quindi non si possono fare valutazioni molto precise
- nessuno dei sistemi di smorzamenti analizzati produce degli effetti evidenti finalizzati alla riduzione delle vibrazioni

Conclusioni simili possono essere fatte anche per il secondo caso analizzato:

- il  $t_{60}$ , considerando tutte le frequenze del sistema, presenta dei valori più bassi rispetto al caso precedente
- analizzando l'intero spettro di frequenze l'antivibrazione produce un minimo effetto, mentre nel caso precedente ciò era invisibile. Questo conferma la sua efficacia solamente sulle alte frequenze
- il dispositivo Fluendo manifesta un ridotto effetto di smorzamento per impatti centrali e laterali

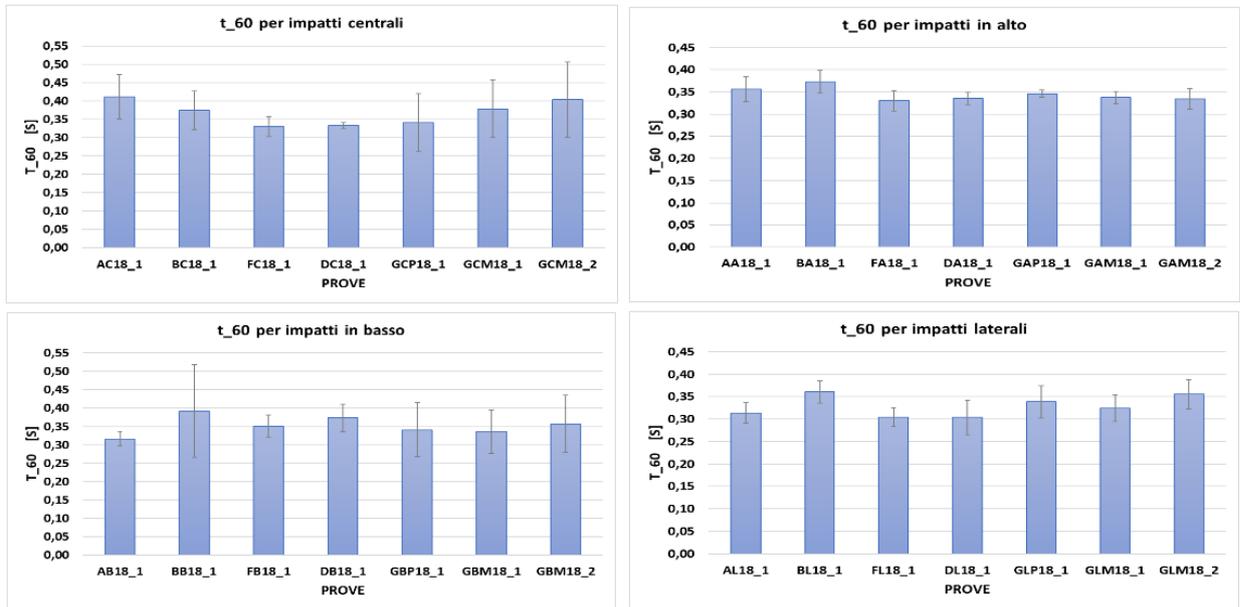


Figura 5.21: Valori di  $t_{60}$  ottenuti per la banda di frequenza [10-300]Hz

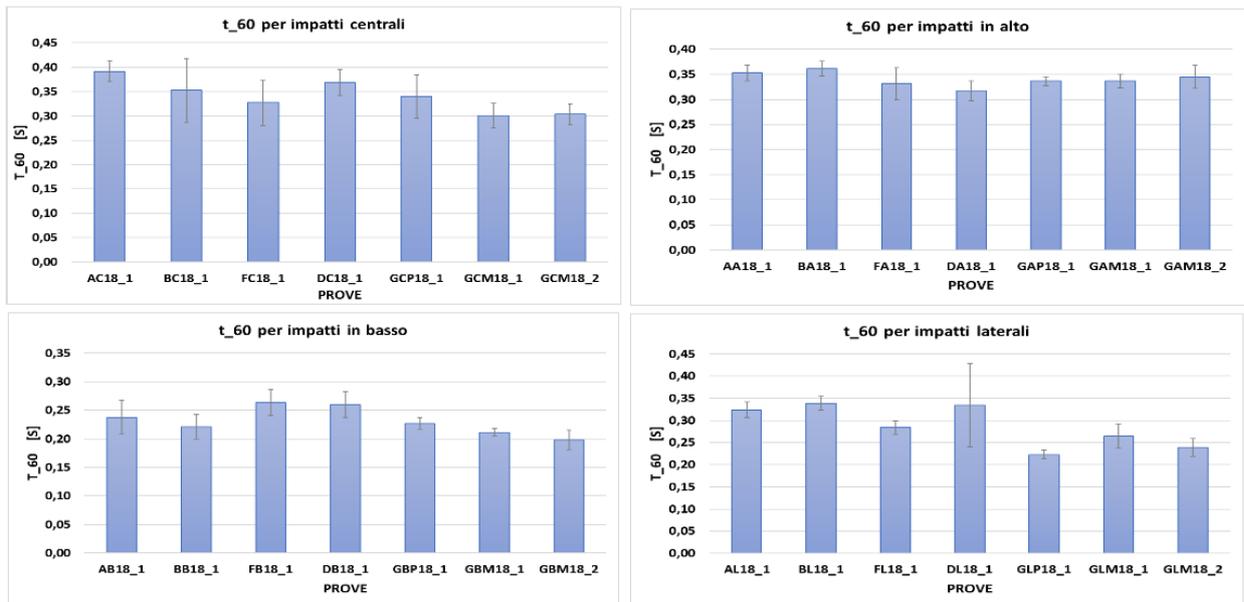


Figura 5.22: Valori di  $t_{60}$  ottenuti nel caso senza banda di frequenza

- un altro minimo effetto di riduzione delle vibrazioni si nota nel caso dello smorzamento granulare per impatti laterali, soprattutto considerando i contenitori riempiti completamente
- in tutte le altre posizioni per lo smorzatore granulare sembra essere più efficace un riempimento del 50% del contenitore

Bisogna infine precisare che tutti i risultati ottenuti sono frutto di analisi numeriche approssimate, che sono accettabili perché la deviazione standard è bassa ma sono comunque delle approssimazioni di quello che avviene nella realtà.

## 5.5 Confronto numerico-sperimentale

Nella fase sperimentale si sono effettuate varie misure di impatti attraverso gli accelerometri. Utilizzando una scheda di acquisizione si è potuto rappresentare nel tempo l'ampiezza di oscillazione, in modo da analizzare il comportamento dell'accelerazione istante per istante. Siccome la precisione legata all'intensità e al posizionamento dell'impatto non era elevata, si è deciso di normalizzare la storia temporale dell'accelerazione al suo valore massimo, in modo che l'ampiezza vari tra i valori  $\pm 1$ .

Analizzando visivamente gli andamenti non si è riscontrato un grande effetto di smorzamento, legato alla riduzione di ampiezza o del tempo di decadimento del transitorio. Perciò dopo aver effettuato un'analisi in frequenza finalizzata all'individuazione delle frequenze di risonanza del sistema, si è passati allo studio del  $t_{60}$ . Questo valore esprime il tempo necessario affinché la densità di energia associata al fenomeno vibratorio diminuisca di 60 dB. Da qui se una struttura presenta un  $t_{60}$  inferiore si ferma più velocemente, quindi lo smorzamento è maggiore. Ciò è corretto se le strutture hanno una stessa massa, ma se aggiungiamo della massa ad una struttura, quest'ultima, a parità di condizioni, si fermerà più velocemente perché l'inerzia è maggiore.

Per questo motivo, nonostante sia stato riscontrato qualche piccolo effetto di smorzamento, questo potrebbe essere imputabile ad una maggiore inerzia della struttura. Quindi nessuno dei sistemi di smorzamento analizzati si è rivelato efficace nel raggiungere lo scopo di riduzione delle vibrazioni trasmesse al giocatore e quindi limitare gli infortuni associati al tennis.

Anche se l'effetto di smorzamento non è stato così rilevante, si sono ottenute una serie informazioni che confermano i risultati numerici ottenuti. In particolare si è visto sperimentalmente che l'aggiunta dell'antivibrazione al piatto corde ha un effetto minimo sui primi modi di piegatura, ma cambia drasticamente la struttura del modo nel dominio della frequenza sopra i 500 Hz. Ciò è evidente sia nella storia temporale dell'accelerazione, dove le ampiezze legate alle frequenze più elevate tendono a scomparire, sia nelle PSD dove il picco legato al modo del piatto corde è quasi annullato e anche nei valori del  $t_{60}$ , dove un minimo effetto si nota solo analizzando l'intero spettro di frequenze.

Il motivo per cui nel modello numerico l'effetto dell'antivibrazione è risultato maggiore è perché si è considerato il piatto corde separato dal telaio, quindi la sua influenza il ter-

mini di massa sul piatto corde è molto maggiore rispetto al caso di considerare anche il telaio.

Per quanto riguarda Fluendo, la sua efficacia non è stata confermata né a livello numerico né a livello sperimentale. Nel caso numerico, introducendo uno smorzamento maggiore al materiale silicone, non si è riscontrata alcuna differenza nella storia temporale dello spostamento perpendicolare al piatto corde. Anche a livello sperimentale gli andamenti dell'accelerazione e della PSD non permettono di riscontrare una grande variazione di ampiezza o di larghezza dei picchi di risonanza, che normalmente è associata ad un effetto smorzante o dissipazione di energia. Con il calcolo del  $t_{60}$ , invece, si è riscontrato un piccolo effetto di smorzamento soprattutto per le posizioni di impatto centrali e laterali.

Infine anche lo smorzatore granulare non si è dimostrato utile in termini di smorzamento delle vibrazioni. Nell'analisi numerica sono state condotte più simulazioni variando il numero di sfere all'interno dei contenitori. I risultati ottenuti hanno evidenziato che la soluzione ottimale prevedeva un riempimento delle cavità al 75%, ma si trattava di un risultato relativo perché il valore associato di  $c_{eq}$  era estremamente ridotto per ottenere dei risultati significativi.

Anche a livello sperimentale sono stati confermati i risultati ottenuti, sia in riferimento alla storia temporale dell'accelerazione che al valore del tempo di riverberazione  $t_{60}$ . Per quest'ultimo valore si è riscontrato un minimo effetto di smorzamento soprattutto per impatti centrali e laterali.

# Conclusione

In questo capitolo conclusivo si mettono a confronto gli scopi prefissati con i risultati ottenuti. All'inizio dello studio di questa tesi si era cercato di creare un dispositivo di smorzamento delle vibrazioni, con il fine di prevenire, o almeno limitare, gli infortuni durante il gioco del tennis. Un oggetto del genere non doveva essere qualcosa di integrato nel telaio, bensì un apparecchio separato da aggiungere all'occorrenza e compatibile con tutte le racchette presenti sul mercato.

Per raggiungere questo scopo si è fatta inizialmente una ricerca per capire il comportamento dinamico dell'impatto tra una pallina e una racchetta da tennis. Dopo lo studio di modelli analitici di impatto, si è passati alla modellazione e simulazione numerica di una racchetta. L'effetto dello smorzamento è stato considerato attraverso delle analisi comparative inserendo di volta in volta dei sistemi di smorzamento già presenti sul mercato: l'antivibrazione delle corde, il cosiddetto "gommino", ed un dispositivo in silicone chiamato Fluendo. Dopo le simulazioni numeriche si è passati all'analisi sperimentale in laboratorio.

Sia a livello numerico che a livello sperimentale questi sistemi si sono rilevati poco utili per raggiungere lo scopo prefissato. In particolare si è trovato che l'antivibrazione ha un effetto molto evidente soltanto in riduzione delle frequenze superiori a 500 Hz. Il suo effetto, come già confermato in altri studi, è quasi assente nelle frequenze più basse, le quali sono associate alle vibrazioni trasmesse al polso e quindi agli infortuni. Anche per Fluendo non si è ottenuta una conferma di quelle che erano le caratteristiche proclamate, ovvero: riduzione delle intensità delle vibrazioni, del tempo di oscillazione e delle onde di picco.

Quei piccoli effetti trovati in Fluendo, soprattutto nella fase sperimentale per impatti in posizione centrale e laterale, sono dovuti probabilmente ad una maggiore inerzia dovuta all'aumento della massa del sistema.

Ciò conferma l'idea iniziale che anche concettualmente il sistema Fluendo non può essere efficace, in quanto la gomma da sola non ha capacità di dissipare energia e quindi di smorzare le vibrazioni. Rispetto ad altri materiali riesce a dissipare un po' di più ma solo nel caso di deformazione dell'oggetto. Ma Fluendo, posizionato nella parte bassa della gola, non subisce grandi deformazioni quindi lo smorzamento è molto basso.

Dopo l'analisi di questi dispositivi si è passati alla creazione di un dispositivo che, almeno a livello concettuale, potesse raggiungere lo scopo di riduzione delle vibrazioni. Il meccanismo di smorzamento scelto è stato quello granulare, per sfruttare le collisioni anelastiche tra sferette di piccole dimensioni per dissipare energia.

Non avendo un oggetto reale del dispositivo pensato, si è dovuto creare un prototipo molto semplificato per studiarne il comportamento, sia a livello sperimentale che numerico. Siccome uno smorzatore del genere sfrutta più metodi dissipativi si sono riempiti dei contenitori con delle sfere in percentuale del volume diversa, in modo da sfruttare il meccanismo inerziale oppure l'attrito.

Ma anche in questo caso i risultati ottenuti in termini di smorzamento si sono rilevati poco incoraggianti, soprattutto a causa di alcune limitazioni sperimentali.

In particolare non avendo degli oggetti perfetti, ma soltanto dei prototipi, non è stato possibile sfruttare i vari meccanismi di dissipazione dello smorzatore granulare. A ciò vanno aggiunte anche altre limitazioni dovute alla fase di sperimentazione vera e propria, in quanto il tipo di impatto analizzato è quello con palline a caduta libera che partono da una condizione di riposo, quindi molto diversa da una condizione di impatto reale. Un'altra limitazione sperimentale è legata all'assenza di velocità di rotazione della pallina e angoli di incidenza diversi dall'impatto perpendicolare, che possono causare differenze tra i risultati ottenuti in laboratorio e quelli su un campo da tennis.

In aggiunta alle limitazioni sperimentali, sono state fatte molte semplificazioni anche a livello numerico. In particolare per le simulazioni sulla racchetta si è studiato separatamente l'effetto del piatto corde da quello del telaio.

In conclusione si può affermare che, nonostante tutte le limitazioni e semplificazioni adottate che non hanno permesso di trovare una soluzione definitiva, un dispositivo che utilizzi lo smorzamento granulare, almeno a livello teorico, potrebbe produrre molti vantaggi in relazione agli infortuni che avvengono giocando a tennis. La natura di questa tesi implica una serie di prospettive, in quanto questo studio è solo l'inizio di un processo di progettazione per trovare un dispositivo adatto a raggiungere gli scopi prefissati, senza alterare le caratteristiche di comfort richieste nella pratica dello sport in questione.

Si ritiene necessario, dopo questo lavoro, sviluppare nuovi prototipi di smorzatore granulare con materiali e forme diverse per riuscire a sfruttare in modo ottimale i vari meccanismi dissipativi. In questo modo, supportando le prove sperimentali con delle simulazioni numeriche, sarà possibile creare un dispositivo ottimale che ha come scopo quello di ridurre le vibrazioni trasferite al giocatore durante il tennis e quindi migliorare la sicurezza dello sport.

# Appendice A

## Sviluppi matematici dell'impatto analitico

### A.1 Modello di impatto di una pallina su una superficie rigida

Viene presentato un modello simile a quello relativo all'impatto su una superficie rigida descritto nel capito 2. In questo caso la complessità aumenta perché ci sono più parametri in gioco, i cui valori variano nel tempo. Una rappresentazione del modello, già riportata nel capitolo 2, è la figura A.1:

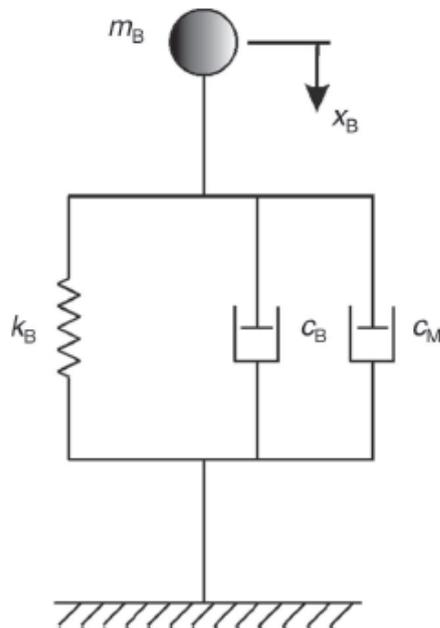


Figura A.1: Modello viscoelastico che include uno smorzatore  $c_M$  per simulare la forza dovuta al flusso di quantità di moto

Vengono discussi separatamente i parametri coinvolti.

**Rigidezza  $k_B$**  Il parametro della molla  $k_B$  viene utilizzato per simulare la rigidezza strutturale della pallina da tennis. Come riportato nel riferimento [18], tale valore varia con lo spostamento del centro di massa  $x_B$  della palla:

$$k_B = k_{B(0)} + A_K x_B^\alpha \quad (\text{A.1})$$

dove  $k_{B(0)}$  corrisponde alla rigidezza della pallina a spostamento nullo, mentre i parametri  $A_K$  e  $\alpha$  sono delle costanti utilizzate per definire la relazione tra  $k_B$  e  $x_B$ , che variano per ciascun tipo di palla.

**Coefficiente di smorzamento  $c_B$**  Il parametro  $c_B$  è associato allo smorzamento dovuto al materiale. Come riportato nei risultati del modello semplificato trattato nel capitolo 2.1, tale valore aumenta con la velocità di impatto della palla. Questo aumento di  $c_B$  è stato attribuito all'aumento del volume di gomma che si deforma a velocità più elevate.

Per esprimere la relazione che lega il parametro di smorzamento al volume di gomma deformato, bisogna considerare il diametro  $d_{CONT}$  che è rappresentativo dell'area di contatto. La figura A.2 mostra come varia il valore di  $d_{CONT}$  nel tempo dovuto allo spostamento del centro di massa  $x_B$ , mentre la seguente equazione ne esprime la relazione analitica durante la fase di compressione, indipendentemente da tipo di pallina e dalla velocità di impatto [20]:

$$d_{CONT} = -2,77 \cdot 10^5 x_B^4 + 1,74 \cdot 10^4 x_B^3 - 453 x_B^2 + 7,66 x_B \quad (\text{A.2})$$

Una volta definito  $d_{CONT}$  e facendo l'ipotesi che la parte di sfera in contatto con la superficie

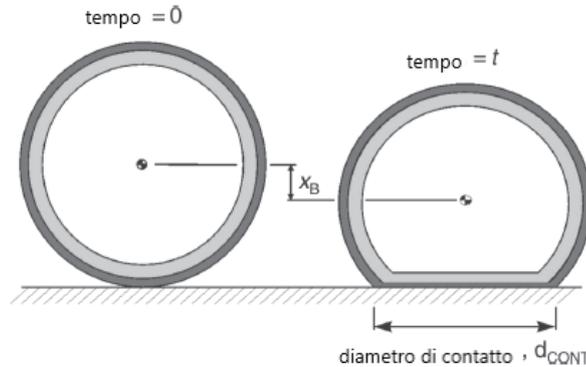


Figura A.2: Schematizzazione della variazione di  $d_{CONT}$  e  $x_B$  nel tempo

abbia la forma di un disco piatto, il parametro  $c_B$  può essere ricavato:

$$c_B = \frac{B\pi}{4} (d_{CONT})^2 \quad (\text{A.3})$$

dove  $B$  è una costante. Unendo le costanti in un unico valore  $A_C = B(\pi/4)$  si ottiene:

$$c_B = A_C (d_{CONT})^2 \quad (\text{A.4})$$

dove  $A_C$  è definita come la costante di area di smorzamento.

**Coefficiente di smorzamento  $c_M$**  Il parametro  $c_M$  è legato al contributo del flusso di quantità di moto. Bisogna considerare questo parametro perché la pallina da tennis è una struttura cava altamente deformabile, fisicamente diversa da una massa collegata ad una molla.

Una pallina che impatta contro una superficie rigida determina una variazione istantanea della quantità di moto del materiale, per questo motivo il modello deve considerare anche questa forza di reazione, che in [19] è stata definita come flusso della quantità di moto.

Per spiegare brevemente il concetto di flusso di quantità di moto si fa riferimento alla figura A.3, dove viene simulato un impatto tra una membrana sferica a pareti sottili e una superficie rigida. Durante la compressione la sfera avanza a velocità  $V_B$  e può essere divisa in due sezioni: la sezione 1 (massa  $M_1$ ) continua a muoversi verso la superficie mentre la sezione 2 (massa  $M_2$ ) è in contatto con la superficie e quindi ha velocità nulla. Esiste una forza di

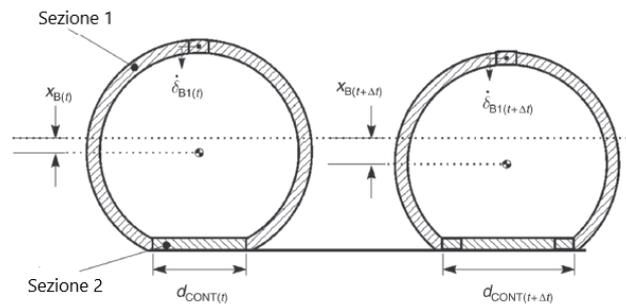


Figura A.3: Definizione delle sezioni in cui è suddivisa la sfera

reazione che è uguale alla variazione della quantità di moto. Ipotizzando che la sezione 1 rimanga non deformata, tutti i suoi punti si muovono a velocità  $\dot{\delta}_{B1}$ , ma quando alcuni suoi punti impattano contro la superficie, la loro velocità si annulla, così la dimensione e la massa della sezione 2 aumentano. Durante la fase di compressione il flusso di massa nella sezione 2 è indicato con  $\dot{M}_2$ , mentre la forza che agisce sulla palla al tempo  $t$  che esprime la variazione di quantità di moto è  $F_M$  ed è espressa da:

$$(F_M)_t = (\dot{M}_2 \dot{\delta}_{B1})_t \quad (\text{A.5})$$

Nel riferimento [19] si è dimostrato che durante l'impatto, il materiale a contatto con la superficie (sezione 2) non immagazzina energia per poi rimbalzare e recuperare energia, perché ciò è impedito dalla sezione 1. In questo modo il concetto di flusso di quantità di moto rappresenta un termine dissipativo, quantificabile nel parametro  $c_M$ . Ritornando al valore della forza  $(F_M)_t$ , quest'ultima può essere riscritta per un intervallo di tempo  $\Delta t$  conoscendo il valore della massa per unità di superficie  $\rho_{area}$ , che per una pallina da tennis standard vale  $5,212 \text{ kg/m}^2$ :

$$(F_M)_t = \frac{[\rho_{area} \pi [(d_{CONT(t)})^2 - (d_{CONT(t-\Delta t)})^2]]}{4\Delta t} (\dot{\delta}_{B1})_t \quad (\text{A.6})$$

La velocità del centro di massa della pallina  $\dot{x}_B$  è diversa dalla velocità  $\dot{\delta}_{B1}$  perché nel modello la sezione 2 è ferma, quindi la relazione tra  $\dot{x}_B$  e  $\dot{\delta}_{B1}$  è la seguente:

$$(\dot{\delta}_{B1})_t = \left(\frac{m_B}{M_1}\dot{x}_B\right)_t \quad (\text{A.7})$$

Sostituendo l'equazione (A.7) nella (A.6) si ottiene:

$$(F_M)_t = \frac{m_B[\rho_{area}\pi[(d_{CONT(t)})^2 - (d_{CONT(t-\Delta t)})^2]]}{4\Delta t(M_1)_t}(\dot{x}_B)_t \quad (\text{A.8})$$

Considerando che la forza  $F_M$  può essere scritta nella forma:

$$(F_M)_t = (c_M\dot{x}_B)_t \quad (\text{A.9})$$

il valore di coefficiente di smorzamento  $c_M$  che si ottiene è il seguente:

$$(c_M)_t = \frac{m_B[\rho_{area}\pi[(d_{CONT(t)})^2 - (d_{CONT(t-\Delta t)})^2]]}{4\Delta t(M_1)_t} \quad (\text{A.10})$$

Bisogna infine sottolineare che le equazioni (A.9) e (A.10) si applicano solo durante la fase di compressione, mentre durante la fase di restituzione  $c_M$  è uguale a zero.

**Soluzione del modello** Prima di passare alla soluzione del modello, in [19] vengono descritte due modifiche da apportare per migliorare la somiglianza tra il modello e l'impatto effettivo. La prima riguarda il carico molto basso durante la fase iniziale di compressione, dovuto alla rigidità molto bassa del tessuto superficiale della sfera. Per questo motivo se lo spostamento  $x_B < 2mm$  si fa valere l'ipotesi che la forza che agisce sulla pallina è uguale a zero. La seconda modifica riguarda la rigidità della molla che, come si è riscontrato sperimentalmente, manifesta instabilità dopo 0,2 ms. Si definisce allora una rigidità elevata e costante durante i primi 0,2 ms, definita  $k_{CONST}$ , mentre dopo si assume il valore variabile definito dall'equazione (A.1).

Una volta considerate queste modifiche si può passare ad analizzare l'equazione del moto che governa la figura A.1:

$$m_B\ddot{x}_B + (c_B + c_M)\dot{x}_B + k_Bx_B = 0 \quad (\text{A.11})$$

Tutti i vari termini dell'equazione sono stati descritti precedentemente. Nonostante  $c_B$  e  $c_M$  siano raggruppati, è bene sottolineare che rappresentano meccanismi diversi e che non possono essere combinati in un unico parametro.

A differenza del caso semplificato descritto nel capitolo 2, in questo modello i parametri di rigidità e smorzamento sono tutti dipendenti da  $x_B$ . Per questa ragione la soluzione dell'equazione del moto è possibile solo attraverso un metodo numerico, che calcola i vari parametri  $x_B$ ,  $\dot{x}_B$  e  $\ddot{x}_B$  in un numero finito di intervalli di tempo. Utilizzando il metodo delle differenze finite e ipotizzando che  $\dot{x}_B$  non cambi durante il piccolo intervallo di tempo  $\Delta t$ , l'equazione (A.11) può essere riscritta come:

$$m_B \left[ \frac{(x_B)_{t+\Delta t} - 2(x_B)_t + (x_B)_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} \right] + \left\{ [(c_B)_t + (c_M)_t] \frac{(x_B)_t + (x_B)_{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\} + (k_B)_t(x_B)_t = 0 \quad (\text{A.12})$$

Da cui si può ottenere la soluzione di  $x_B$  al tempo  $t + \Delta t$ :

$$(x_B)_{t+\Delta t} = -\left(\frac{\Delta t^2}{m_B}\left\{(k_B)_t(x_B)_t + [(c_B)_t + (c_M)_t] \cdot \left[\frac{(x_B)_t + (x_B)_{t-\Delta t}}{\Delta t}\right]\right\} - 2(x_B)_t + (x_B)_{t-\Delta t}\right) \quad (\text{A.13})$$

L'equazione (A.13) permette di determinare il valore di  $x_B$  per ogni intervallo temporale  $\Delta t$  usando le seguenti due condizioni iniziali:

- $(x_B)_{t=0} = 0$
- $(x_B)_{t=-\Delta t} = -V'_B \Delta t$

## A.2 Fondamenti teorici per una trave deformabile

Nel sottoparagrafo (2.2.2) viene analizzato il caso di un impatto di una pallina contro una racchetta liberamente sospesa. Quest'ultima viene modellata con due modalità distinte: come corpo rigido e come corpo deformabile. E' stato notato che il modello rigido era affidabile per impatti vicini al centro del piatto corde, mentre per gli altri punti il livello di approssimazione era maggiore. Questo è dovuto al fatto che attraverso il modello rigido le perdite di energia dovute alle vibrazioni sono trascurate, per questo motivo è necessario definire un modello deformabile che consideri anche questo contributo.

Per considerare l'energia dissipata dalle vibrazioni in una racchetta da tennis, il telaio può essere modellato con una struttura semplificata come una trave unidimensionale, a cui sono assegnate le proprietà della racchetta [20]. Questa semplificazione viene effettuata perché le forme modali e la posizione dei nodi per una racchetta liberamente sospesa si sono dimostrati essere simili al caso di una trave. La rappresentazione di tale elemento è presente nella figura 2.5. L'equazione del moto per una trave unidimensionale che è sottoposta ad una forza distribuita  $F_0$  per unità di lunghezza è:

$$\rho A \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = F_0 - \frac{\delta^2}{\delta x^2} (EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}) \quad (\text{A.14})$$

dove  $\rho$  è la densità,  $A$  è l'area della sezione trasversale,  $E$  il modulo di Young,  $I$  è il momento di inerzia dell'area e  $y$  lo spostamento trasversale della trave dovuto all'impatto. Questo modello considera la trave uniforme, quindi i valori di  $E$  e  $I$  sono costanti. La forza di taglio viene trascurata e la trave si suppone avere una massa  $M$  e una lunghezza  $L$ . Per ottenere una soluzione numerica dell'equazione del moto è necessario suddividere la trave in  $N$  segmenti di uguale lunghezza, ciascuno con massa  $m_N = M/N$  e lunghezza  $s = L/N$ . Solo uno di questi segmenti si è ipotizzato essere soggetto alla forza di impatto  $F$ , per cui l'equazione del moto diventa:

$$m_N \frac{\delta^2 y_n}{\delta t^2} = F - (EI s \frac{\delta^4 y_n}{\delta x^4}) \quad (\text{A.15})$$

mentre per gli altri segmenti risulta:

$$m_N \frac{\delta^2 y_n}{\delta t^2} = -(EI s \frac{\delta^4 y_n}{\delta x^4}) \quad (\text{A.16})$$

Come condizione al contorno bisogna applicare quella liberamente sospesa: quindi per ogni estremità della trave:  $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0$  e  $\frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = 0$ .

Il moto della trave deformabile che simula la racchetta può essere valutato numericamente con il metodo delle differenze finite per le equazioni (A.15) e (A.16).

Una formulazione più complicata potrebbe ipotizzare una distribuzione della massa non uniforme e l'aggiunta di parametri per considerare lo smorzamento del materiale del telaio e la rigidità e lo smorzamento dovuto alla mano che impugna la racchetta.

## Appendice B

# Validazione delle simulazioni agli Elementi Finiti

Per impraticarsi sulle potenzialità del software di calcolo FEM è opportuno eseguire delle analisi numeriche su strutture semplificate di cui si conoscono i risultati. Considerando che il comportamento di una racchetta da tennis può essere approssimato con una trave a sbalzo caricata da una forza pari a quella generata dall'impatto tra la pallina e il piatto corde, si è scelto di studiare una semplice trave incastrata. La condizione di vincolo adottata è quindi un incastro sulla faccia all'estremità sinistra, mentre come carico è stata applicata una forza sullo spigolo all'estremità destra. La rappresentazione di questa struttura è mostrata nella figura B.1.

I dati geometrici scelti in questa prova sono i seguenti:

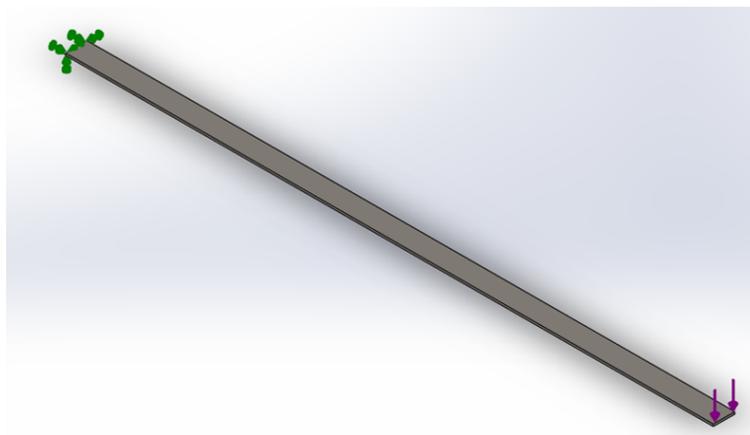


Figura B.1: Modello di una trave incastrata con carico a sbalzo all'estremità

- Lunghezza:  $l = 300mm$
- Larghezza:  $b = 10mm$
- Spessore:  $h = 1mm$

Mentre come materiale è stato utilizzato un acciaio in lega con le seguenti proprietà: modulo elastico  $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$  e densità  $\rho = 7700kg/m^3$ . La forza applicata ha invece il seguente

valore:  $F = 1N$ .

**Analisi statica** Utilizzando i dati geometrici citati in precedenza, è possibile ricavare analiticamente i valori di tensione massima e freccia massima. Per ottenere questi risultati è opportuno calcolare prima il momento di inerzia, che per una trave a sezione rettangolare si calcola con la seguente formula :

$$I = \frac{bh^3}{12} = 0,833mm^4 \quad (B.1)$$

dove  $b$  è la larghezza della trave e  $h$  è il suo spessore.

Una volta ottenuto il momento di inerzia, si può calcolare la freccia massima della trave nel seguente modo:

$$\delta_{max} = \frac{Fl^3}{3EI} = 51,43mm \quad (B.2)$$

dove  $F$  è la forza applicata all'estremità opposta dell'incastro,  $l$  è la lunghezza della trave,  $I$  è il suo momento di inerzia ed  $E$  è il modulo elastico del materiale.

Mentre il valore della tensione massima si può ricavare con la seguente formula:

$$\sigma_{max} = y_{max} \cdot \frac{Fl}{I} = 180MPa \quad (B.3)$$

in questo caso  $y_{max}$  equivale a metà dello spessore della trave e quindi  $y_{max} = 0,5mm$ .

Una volta ottenuti i valori di spostamento e tensione massimi con delle formule matematiche presenti in letteratura, è possibile effettuare una simulazione statica con gli stessi parametri di progetto per effettuare la convalida del software. Dopo aver creato il modello della trave con le stesse misure geometriche ed aver imposto lo stesso materiale e gli stessi vincoli bisogna effettuare la mesh. Tale operazione viene fatta in modo automatico dal programma decidendo il livello di dettaglio ed altre variabili. I parametri ottenuti dalla mesh sono sintetizzati nella tabella B.1.

Tabella B.1: Parametri della mesh: caso trave incastrata

Tipo di mesh	Elementi solidi
Dimensione elementi (mm)	3,25
Tolleranza elementi (mm)	0,16
Qualità mesh	Ottima
Nodi totali	4027
Elementi totali	1748

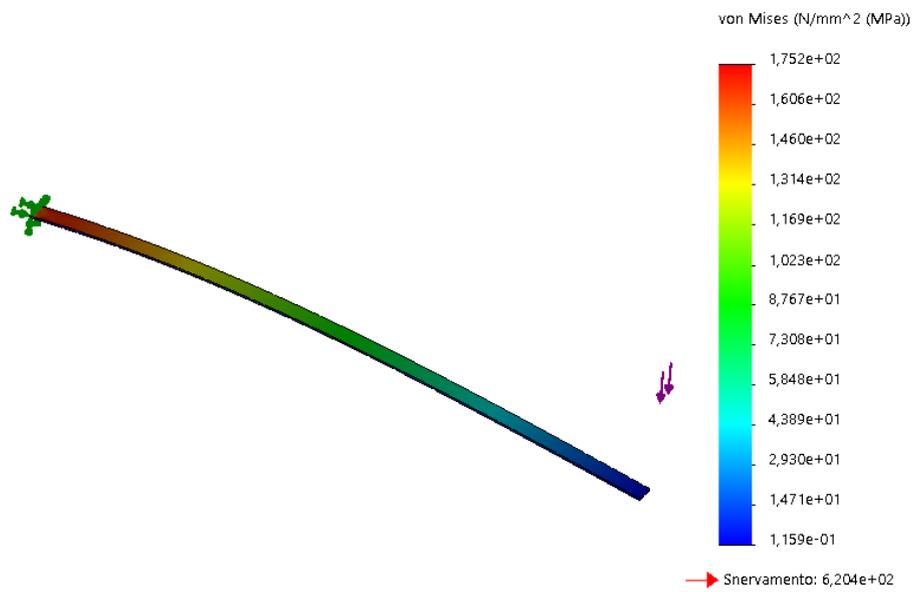


Figura B.2: Analisi statica della trave: andamento tensione di Von Mises

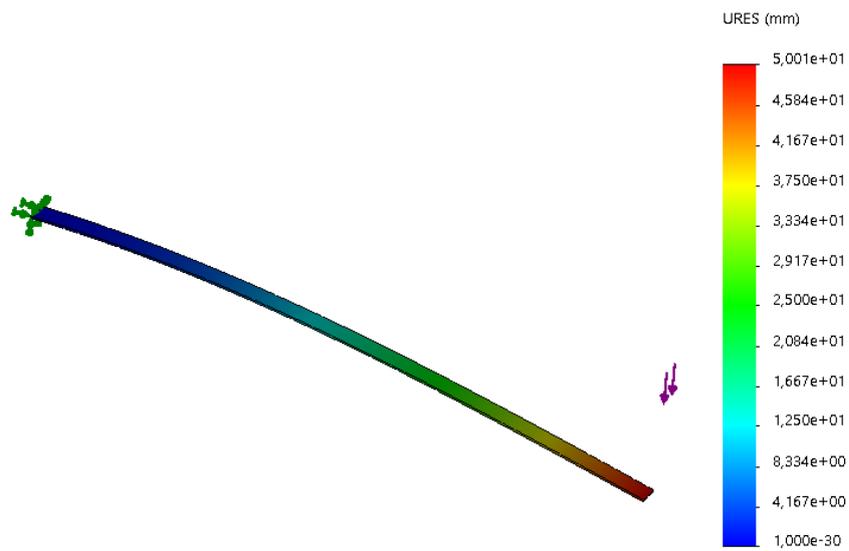


Figura B.3: Analisi statica della trave: andamento spostamento

Dopo aver effettuato tutte queste azioni preliminari è possibile far partire l'analisi. I risultati ottenuti sono riportati in forma grafica nella figura B.2 per quanto riguarda lo stato di tensione risultante e nella figura B.3 in riferimento allo spostamento ottenuto.

Dall'analisi dei risultati ottenuti si può notare che per quanto riguarda il livello di tensione si ha un valore massimo in prossimità dell'incastro, di entità molto simile al risultato analitico. Attraverso la formula si è infatti ottenuto un valore massimo di 180 MPa, mentre il programma ha calcolato 175 MPa: questa piccola differenza è dovuta al criterio di resistenza adottato per il calcolo dello stato tensionale.

Per lo spostamento, invece, il valore massimo si è trovato ovviamente dalla parte opposta all'incastro, nella zona di applicazione del carico. Con la formula il valore ottenuto è di 51,33 mm, mentre con il software 50 mm. Ciò garantisce una buona correlazione tra i due procedimenti adottati.

**Analisi modale** Tutti gli oggetti vibrano quando sono soggetti a urti, rumori o vibrazioni. Durante il fenomeno vibratorio si può manifestare la risonanza, ovvero grandi deformazioni provocate da piccole forze. La risonanza è quindi la tendenza di una struttura ad oscillare alla massima ampiezza a determinate frequenze, che sono le frequenze di risonanza o naturali del sistema. L'analisi modale permette di ricavare queste frequenze caratteristiche della struttura e anche i modelli di deformazione associati, che sono le forme modali.

Un software commerciale, che utilizza il metodo di risoluzione agli elementi finiti, permette facilmente di eseguire l'analisi modale di una struttura. Pertanto in questa sezione confrontiamo i valori ottenuti da Solidworks Simulation con quelli presenti in letteratura in riferimento ad una trave incastrata.

Dall'approccio analitico del sistema continuo si possono ricavare le prime frequenze naturali della trave a sbalzo con la seguente formula:

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (\text{B.4})$$

dove  $\omega$  esprime il valore delle frequenze naturali in  $rad/s$ ,  $E$  è il modulo elastico del materiale,  $m$  è la massa della trave ed  $I$  il suo momento di inerzia. Avendo il materiale della trave e la sua geometria, la massa si ricava facilmente con:  $m = \rho \cdot V = 23,1$  grammi.

Per ricavare questi valori di frequenza sono necessari anche dei coefficienti  $\alpha_n$  relativi al numero della modalità associato. Tali valori sono:  $\alpha_1 = 1,875$ ,  $\alpha_2 = 4,694$ ,  $\alpha_3 = 7,855$  e  $\alpha_4 = 10,996$ . Sostituendo tali coefficienti nell'equazione (B.4), si ottengono i valori delle frequenze naturali riportati nella tabella B.2.

Una volta ricavati i valori delle frequenze naturali e conoscendo gli andamenti delle forme modali, si può far partire l'analisi numerica per effettuare il confronto. Le forme modali ottenute attraverso Solidworks Simulation sono riportate nella figura B.4 nella pagina seguente, mentre i valori delle frequenze di risonanza sono presenti nella tabella B.3.

Dall'analisi dei valori delle frequenze è possibile affermare che la soluzione numerica e analitica coincidono quasi perfettamente, e anche le forme modali ottenute presentano l'andamento aspettato. Il motivo per cui la terza forma modale ottenuta numericamente,

Tabella B.2: Frequenze naturali della trave incastrata ricavate analiticamente

Numero della modalità	Frequenza in $rad/s$	Frequenza in $Hz$
1	58,89	9,37
2	369,06	58,74
3	1033,49	164,49
4	2025,28	322,33

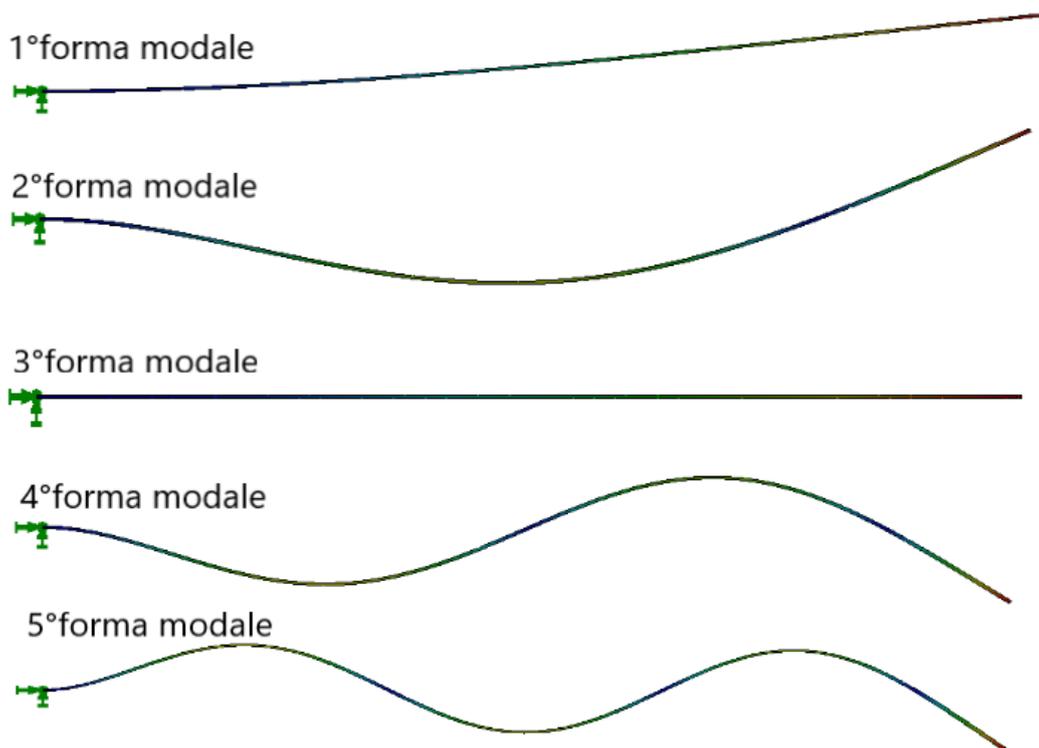


Figura B.4: Analisi modale della trave: prime cinque forme modali

Tabella B.3: Frequenze naturali della trave incastrata ricavate numericamente

Numero della modalità	Frequenza in $rad/s$	Frequenza in $Hz$	Periodo (s)
1	59,08	9,40	0,106
2	370,31	58,94	0,017
3	589,00	93,74	0,011
4	1036,90	165,03	0,006
5	2032,80	323,52	0,003

con la sua relativa frequenza propria, non vengono conteggiate attraverso la formula (B.4) è dovuto al fatto che si tratta di una direzione di oscillazione perpendicolare alla direzione di applicazione della forza. Questo modo si muove parallelamente alla superficie superiore della trave e non viene considerato dalla formula.

**Analisi dinamica** Un'ultima analisi di verifica del software è incentrata sull'analisi dinamica della struttura semplificata. In questo caso si ipotizza di applicare una forza con un certo andamento e con una determinata durata e si analizza quella che è la risposta nel tempo della trave.

Utilizzando questo semplice esempio si può fare una breve spiegazione sull'importanza del passo di integrazione da usare. Ciascun metodo numerico individua un certo numero di istanti temporali di integrazione e la soluzione viene calcolata soltanto in questi istanti. Se viene preso un passo temporale troppo grande si possono ottenere dei risultati sbagliati, in quanto i modi associati alle frequenze più alte possono essere totalmente ignorati.

Per non incorrere in questi errori quando si effettua l'integrazione di una storia temporale è opportuno scegliere attentamente il passo di integrazione. Come regola si è utilizzato un valore  $\Delta t$  che sia almeno 10 volte più piccolo del periodo corrispondente alla frequenza che si vuole considerare. A livello pratico basta prendere la frequenza maggiore di interesse, si calcola il periodo e come passo di integrazione si potrebbe prendere un valore almeno 10 volte più piccolo del periodo trovato. Scegliere correttamente i parametri di integrazione non è affatto banale perché bisogna trovare un compromesso tra tempo e precisione che si vuole ottenere.

Sbagliando il tempo di integrazione, prendendo per esempio un valore troppo elevato, si approssima la storia temporale in maniera eccessiva e alcuni modi potrebbero proprio non essere visti.

In questa sezione vengono analizzati tre casi distinti:

- (A) forza costante di 1 N della durata di 1s senza smorzamento modale
- (B) forza costante di 1 N della durata di 1s con smorzamento modale ( $\zeta = 5\%$ )
- (C) forza impulsiva della durata di 5 ms con smorzamento modale ( $\zeta = 5\%$ )

I tre casi sono riportati rispettivamente nelle figure B.5, B.6 e B.7.

Come risultati più rappresentativi si è scelto di considerare gli spostamenti trasversali di un nodo della trave in prossimità dell'applicazione della forza  $F$ . Il passo di integrazione adottato è di 1ms, in modo da notare l'influenza dei primi modi, ma allo stesso tempo non allungare troppo l'analisi.

Dai vari andamenti risultanti è evidente che nel caso (A) senza smorzamento il sistema oscilla con ampiezza costante intorno alla posizione di massima deflessione statica per il tempo di applicazione della forza, per poi oscillare intorno alla posizione di equilibrio quando il carico è rimosso.

Introducendo uno smorzamento, caso (B), l'oscillazione ha un'andamento decrescente. Si è messo un valore esagerato e non compatibile con il materiale acciaio ( $\zeta = 5\%$ ) solo per notare in maniera chiara il suo effetto.

Nel caso (C), invece, si è inserito un carico molto più breve e così anche l'ampiezza di oscillazione ne risente mostrando un'andamento chiaramente decrescente. Nella figura B.7 si riesce ad intravedere l'influenza di più modi sull'andamento globale della trave, in quanto

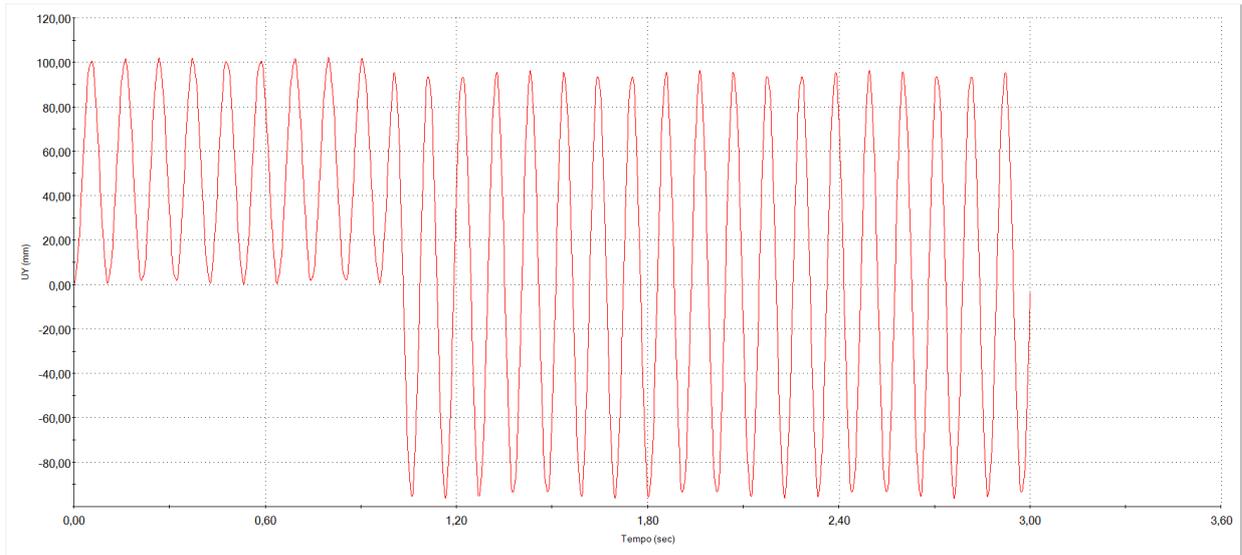


Figura B.5: Analisi dinamica della trave: caso (A)

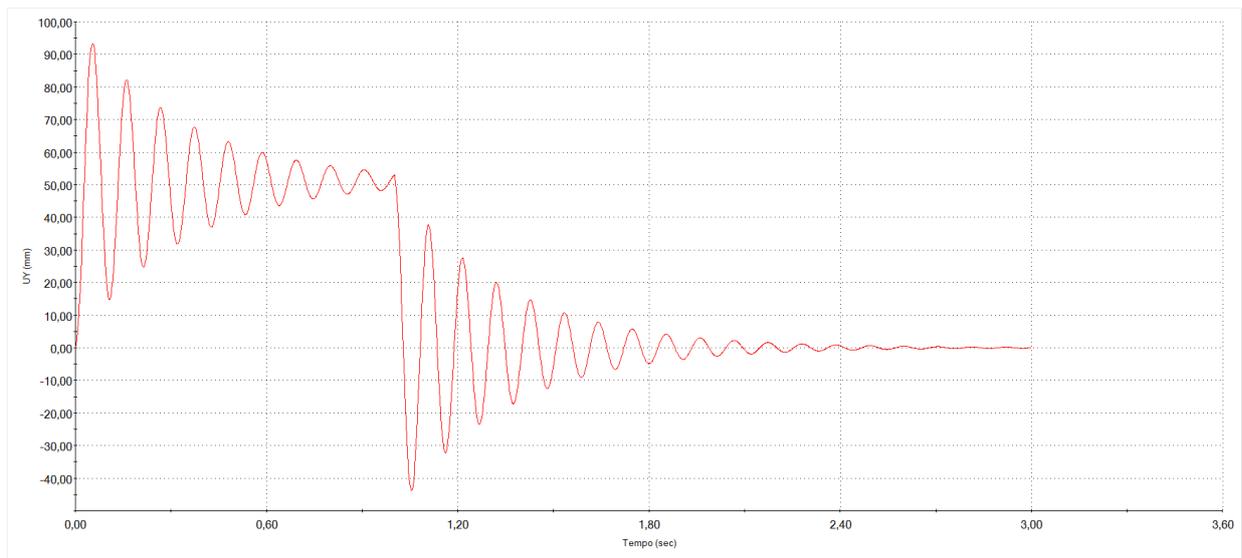


Figura B.6: Analisi dinamica della trave: caso (B)

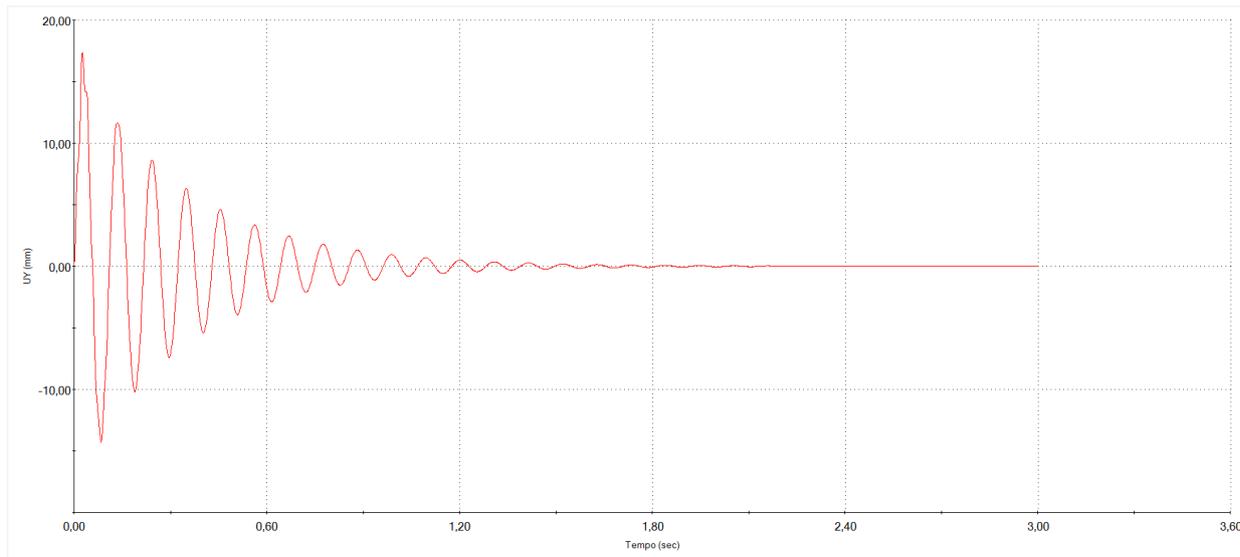


Figura B.7: Analisi dinamica della trave: caso (C)

soprattutto all'inizio non si hanno delle sinusoidi perfette.

In modo analogo al controllo grammaticale in una frase prima di procedere alla scrittura di un intero paragrafo, è di vitale importanza applicare la metodologia stabilita ad una struttura semplificata, come una trave incastrata, per confrontare i risultati numerici con quelli analitici noti in letteratura. Dal confronto è evidente che i risultati ottenuti mostrano un'ottima corrispondenza con i valori ricavati analiticamente, perciò si può affermare che SolidWoks Simulation, con una corretta scelta dei parametri di simulazione, è uno strumento di simulazione affidabile ed è quindi utilizzabile anche per analisi più complesse, come per lo studio del comportamento di una racchetta da tennis.

# Appendice C

## Approfondimenti per il calcolo dello smorzamento granulare

### C.1 Funzioni utilizzate nel codice YADE

Un aspetto non trattato nel paragrafo 4.6 relativo alle simulazioni numeriche eseguite con il software YADE è quello relativo alle funzioni utilizzate nel codice.

L'ostacolo più grande per eseguire la simulazione è quello di riuscire a posizionare il contenitore con il materiale granulare orientato in maniera corretta rispetto al modo flessionale che si vuole studiare.

A tal fine si è utilizzata la funzione `yade.pack.inParallelepiped`, la quale permette di costruire pacchi di sfere i cui contenitori hanno le pareti non necessariamente parallele ai piani della terna cartesiana.

Una volta determinato in maniera corretta il contenitore esterno, si crea il pacco di sfere attraverso una disposizione a reticolo esagonale, la quale garantisce a livello teorico il massimo impaccamento, e con una dimensione del raggio medio pari a  $r=0,625\text{mm}$ .

Altri parametri da considerare sono il gioco nel pacco di sfere (detto gap) e la fluttuazione statistica del raggio delle sfere, in quanto non è realistico pensare che centinaia di sfere all'interno di un contenitore abbiano tutte lo stesso raggio nominale, soprattutto considerando le piccole dimensioni del sistema.

Per introdurre una dispersione nella dimensione dei granuli si è definita una banda di tolleranza, poi dopo aver creato tutte le sfere identiche si è riassegnato loro un nuovo raggio in maniera casuale all'interno della banda di tolleranza utilizzando la funzione python `numpy.random.choice()`.

Un aspetto da considerare relativo al gap del pacco sfere è che quest'ultimo è stato costruito come **random loose pack**, ovvero il pacco sfere è lasco, pertanto non viene applicata nessuna pressione per compattare le sfere.

Una volta impostata l'ampiezza di oscillazione pari ad un valore di circa  $0,6^\circ$  e la frequenza uguale a 28 Hz, si immette energia nel sistema tramite la funzione **HarmonicRotationEngine**, imponendo una rotazione alterna intorno ad un asse parallelo all'asse longitudinale della racchetta.

## C.2 Calcolo del $c_{eq}$ dal lavoro di uno smorzatore viscoso

Il metodo più semplice per utilizzare i risultati ottenuti da YADE è quello definire un parametro concentrato rappresentativo dell'energia dissipata al ciclo.

L'idea è quindi quella di utilizzare l'energia dissipata al ciclo, output di YADE, per ricavare un fattore di smorzamento equivalente  $c_{eq}$  da introdurre in un modello SDOF del primo modo flessionale.

Per fare ciò si considera un modello molla-smorzatore con un solo grado di libertà.

L'equazione del moto per il modello viscoso è la seguente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \cos \omega t \quad (C.1)$$

dove:  $m$  è la massa,  $c$  è il coefficiente di smorzamento,  $k$  è la rigidità ed  $f_0$ ,  $\omega$  sono rispettivamente l'ampiezza e la frequenza della forzante. Si può calcolare il lavoro al ciclo  $L_C$  fornito dalla forza esterna per consentire al sistema un ciclo di oscillazione [40]:

$$L_C = \int_{ciclo} c\dot{x} dx = \int_0^T c\dot{x}^2 dt \quad (C.2)$$

dove  $T$  è il periodo della forzante, che può essere scritto con la seguente relazione:  $T = 2\pi/\omega$ . Lo spostamento risultante, essendo in ritardo rispetto alla forzante può essere scritto nella forma:  $x(t) = a \cos(\omega t - \theta)$ , per cui derivando l'espressione dello spostamento si ottiene la velocità:  $\dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t - \theta)$ . I parametri  $a$  e  $\theta$  indicano rispettivamente l'ampiezza di oscillazione della risposta e il ritardo angolare rispetto alla forzante.

Sostituendo l'espressione di  $\dot{x}$  nell'equazione (C.2) si ottiene:

$$L_C = \int_0^T c\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - \theta) dt = c\omega^2 \frac{a^2}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t - \theta) d(\omega t) \quad (C.3)$$

Ricordando che l'integrale della funzione seno al quadrato tra 0 e  $2\pi$  è uguale a  $\pi$  [40], si ottiene la seguente forma per il lavoro al ciclo:

$$L_C = c\omega a^2 \pi \quad (C.4)$$

Il lavoro  $L_C$  non è altro che l'energia dissipata in un ciclo dallo smorzatore viscoso, che può essere indicata anche come  $E_{d,YADE}$ , output diretto delle simulazioni eseguite. Si nota che tale valore è proporzionale non solo al quadrato dell'ampiezza di oscillazione ma anche alla pulsazione di eccitazione. Infine si può ricavare la costante di smorzamento viscoso con la seguente relazione:

$$c_{eq} = \frac{E_{d,YADE}}{\pi a^2 \omega} \quad (C.5)$$

# Appendice D

## Script Matlab per il calcolo del $t_{60}$

Per completezza in questa sezione vengono riportate alcune delle schermate più significative del file Matlab utilizzato per il calcolo del  $t_{60}$ . Nella figura D.1 è riportata la parte del file dove si effettua il conteggio vero e proprio.

La figura in questione permette di effettuare una spiegazione sull'intero procedimento adottato. Si parte dalla lettura dei dati di accelerazione ottenuta attraverso la scheda di acquisizione OR38, omessa nella figura perché non di fondamentale importanza. Tale lettura permette di ottenere la frequenza di campionamento  $f_s$  ed i vettori contenenti i valori di accelerazione per ognuno dei canali utilizzati.

Analizzando il caso di conteggio per bande di frequenza si è dovuto decimare la frequenza di campionamento (funzione **decimate**) in modo da poter applicare dei filtri bassa banda. In particolare si è scelto di dividere il valore di  $f_s$  per 8 e quindi prendere nella storia temporale un campione ogni 8. Se non si facesse questa operazione, l'utilizzo dei filtri darebbe dei problemi e potrebbe sorgere instabilità numerica. Partendo da  $f_s = 8192\text{Hz}$ , decimando si ottiene una frequenza di campionamento pari a 1024 Hz e in questo modo si riesce a leggere in maniera corretta le frequenze fino a 512 Hz. Si fa questa operazione anche perché si è interessati ad una frequenza vicina a 30 Hz, quindi molto lontana ad una frequenza di 4000 Hz leggibile con  $f_s = 8192\text{Hz}$ .

Dopo questa operazione si può far partire il conto su ogni impulso presente nella prova e per ogni canale degli accelerometri. Sono pertanto necessari due cicli "for", quello esterno sul numero di impulsi (12) e quello interno sul numero dei canali (si sono considerati solo quelli con direzione perpendicolare al piatto corde, ovvero 2-4-6-9). Per ogni impatto si è scelto in maniera automatizzata un inizio ed una fine, si toglie il valor medio e si utilizza la funzione **T60\_ter**.

Questa funzione permette di calcolare il  $t_{60}$  per ogni impulso e per ogni canale, così effettuando i vari cicli si ottiene un valore medio che considera tutti i canali e tutti gli impatti della prova.

Per quanto riguarda la funzione Matlab (**T60\_ter**), si riporta in seguito il pezzo più significativo dove effettua il calcolo del  $t_{60}$  (figura D.2).

L'input di questa funzione è il pezzetto di storia temporale che contiene un impatto,

```

56 - for k=1:ni % Ciclo sul numero di impulsi
57 -     str=['IMPULSO: ' num2str(k)];
58 -     disp(str);
59 -     imp=misura(in(k):fi(k),:);
60 -     t60_parz=0;
61 -     medie=0;
62 -     for kk=[2 4 6 9] % Ciclo sul numero di canali
63 -     % for kk=1:nc % Ciclo sul numero di canali
64 -         str=['Canale: ' num2str(kk)];
65 -         disp(str);
66 -         x=imp(:,kk);
67 -         x=x-mean(x);
68 -         [t60, errore]=T60_ter(x,fs); % Routine di calcolo del T60
69 -         t60_parz=t60_parz+t60;
70 -         medie=medie+errore;
71 -     end % for kk=1:nc % Ciclo sul numero di canali
72 -     t60_parz=real(t60_parz)./medie;
73 -     t60_parz(isnan(t60_parz))=0;
74 -     t60_tot=t60_tot+t60_parz;
75 -
76 -     figure(k)
77 -     t60_parz
78 -     plot(t60_parz,'o');
79 - end % for k=1:ni % Ciclo sul numero di impulsi
80 - t60_tot=t60_tot/ni;

```

Figura D.1: File di testo utilizzato per il calcolo del  $t_{60}$

quindi anche il suo decadimento dell'ampiezza, e la frequenza di campionamento. L'output invece è ovviamente il valore di  $t_{60}$ .

In questa funzione si può agire per decidere se utilizzare le bande di frequenza oppure no.

Nel caso con le bande di frequenza si sono create due suddivisioni: [10-300]Hz e [300-600]Hz. La prima si concentra sul primo modo di vibrare, che si trova intorno ai 30 Hz, ma anche sul modo torsionale ( $\approx 70Hz$ ) e sul secondo modo flessionale ( $\approx 170Hz$ ). La seconda invece presenta al suo interno solo una frequenza di risonanza intorno ai 500 Hz, la quale dovrebbe essere un modo del piatto corde che si propaga sul telaio.

Nel caso della suddivisione in bande bisogna anche procedere al filtraggio delle frequenze delle bande attraverso un filtro bassa basso. Una volta filtrato si utilizza questo segnale. Si procede a dividere l'asse tempi in segmenti e si calcola il livello equivalente, espresso in dB, per ognuno di questi intervalli.

Dall'andamento del livello equivalente prendo il valore massimo, levo 5 dB legati alle

```

84 - L_interp=tmp(ind1(1):ind2(end));
85 - tempi_interp=[ind1(1):ind2(end)]'*deltaT;
86 - [P,S] = polyfit(tempi_interp,L_interp,1);
87 - L_eq_fit = polyval(P,tempi_interp);
88 - t2=tempi_interp(end);
89 - t1=tempi_interp(1);
90 - L_eq1=L_eq_fit(1);
91 - L_eq2=L_eq_fit(end);
92 - t60(k)=(t2-t1)/(L_eq1-L_eq2)*60; % T60
93 - errore(k)=1;

```

Figura D.2: Frammento della funzione utilizzata per il calcolo del  $t_{60}$

fluttuazioni iniziali, ed impongo un delta livello di 15 dB (in questo modo si calcola il  $t_{15}$  ma, come visto nella teoria riportata nella sezione 5.4.1, questo valore è equivalente al  $t_{60}$ ). Si è scelto di calcolare il  $t_{15}$  solo perché non tutti gli impatti avevano un'energia tale da provocare un decadimento di 60 dB.

Questa parte di curva che esprime l'andamento del livello equivalente nel tempo è approssimabile con una retta, per cui si utilizza la funzione Matlab (**polyfit**). Attraverso il coefficiente angolare della retta interpolante si riesce ad ottenere il valore del  $t_{60}$ .

# Bibliografia

- [1] <https://www.gazzetta.it/Speciali/Olimpiadi/2008/pdf/tennis.pdf>, Tennis- La Gazzetta dello Sport
- [2] Storia del tennis, Wikipedia
- [3] Taraborrelli L., Grant R., Sullivan M., Choppin S., Spurr J., Haake S., Allen T., (2019), "Recommendations for estimating the moments of inertia of a tennis racket", *Sports Engineering*, Vol. 22, pp. 1–9
- [4] Brody H., (1985), "The moment of inertia of a tennis racket", *The Physics Teacher*, Vol. 23, pp. 213–216
- [5] Taraborrelli L., Grant R., Sullivan M., Choppin S., Spurr J., Haake S., Allen T., (2019), "Materials Have Driven the Historical Development of the Tennis Racket", *Applied Sciences*, 9, 4352
- [6] Miller S., (2006) "Modern tennis rackets, balls, and surfaces", *British Journal of Sports Medicine*, Vol. 40, pp. 401–405
- [7] Brody H., Cross R., Crawford L., (2002) "The physics and technology of tennis"
- [8] Blog "Tutturacchette", articolo "Il bilanciamento della racchetta" (2014)
- [9] Brody H., (1987), "Models of Tennis Racket Impacts", *International journal of sport biomechanics*, Vol. 3, pp. 293–296
- [10] Kotze J., Mitchell S., Rothberg S., (2000), "The role of the racket in high-speed tennis serves", *Sports Engineering*, 3 (2), pp.67-84
- [11] Weir D., (2012), "Finite element modelling of tennis racket impacts to predict spin generation", tesi di dottorato, Loughborough University
- [12] Li L., Yang S., Hwang C., Kim Y., (2009), "Effects of string tension and impact location on tennis playing", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, pp. 2990–2997
- [13] Blackburne J., (2014), "Vibrations Analysis on Tennis Racket String", *Journal of Undergraduate Research*, Vol. 12, Art. 9
- [14] Li F-X., Fewtrell D., Jenkins M., (2004), "String vibration dampers do not reduce racket frame vibration transfer to the forearm", *Journal of Sports Sciences*, Vol. 22, pp. 1041–1052

- [15] Roberts P.E., Brody H., Dillman J.C., Groppel J.L. ,(1995) "The biomechanics of tennis elbow: An integrated approach", Clinics in Sports Medicine, Vol. 14, Nr. 1
- [16] Brody H., (1989), "Vibration damping of tennis rackets", International journal of sport biomechanics, Vol.5, pp. 451–456
- [17] Hong Y., Bartlett R., (2008), "Handbook of Biomechanics and Human Movement Science", casa editrice: Routledge
- [18] Goodwill S.R., Haake S.J.,(2004), "Modelling of tennis ball impacts on a rigid surface", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 218, Parte C
- [19] Haake S.J., Carré M.J., Goodwill S.R., (2003), "The dynamic impact characteristics of tennis balls with tennis rackets", Journal of Sports Sciences, Vol. 21, pp. 839-850
- [20] Goodwill S. R.,(2002), "The dynamics of tennis ball impacts on tennis rackets ", tesi di dottorato, università di Sheffield
- [21] Goodwill S.R., Haake S.J.,(2001),"Spring damper model of an impact between a tennis ball and racket", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 215, Parte C
- [22] Brody H., (1989), "Vibration Damping of Tennis Rackets", International Journal of Sport Biomechanics, Vol. 5, pp. 451-456
- [23] Hsu Yu-Chieh, Cheng Kuangyou B., (2016), "Effect of attaching string dampers on vibration characteristics of a tennis racket", 34<sup>rd</sup> International Conference on Biomechanics in Sports, Tsukuba, Giappone
- [24] Mohr S., Cottley R., Lau D., Gillet C., Kotze J., Jolly M., Schwenger R., "Dynamics of a String-Bed Damper on Tennis Rackets", The Engineering of Sport 7, Vol. 2, pp. 179-189
- [25] <https://www.fluendotennis.com/>, sito ufficiale per la pubblicizzazione e commercializzazione del dispositivo Fluendo
- [26] Ashley S., (1995), "A new racket shakes up tennis", Mechanical Engineering-CIME
- [27] <https://www.prokennex.eu/tecnologie.php>, sito ufficiale della casa produttrice ProKennex
- [28] Kleinoder H., Yue Z., Mester J., (2000), "Results of investigations on kinetic mass in tennis rackets", Deutsche Sporthochschule Köln
- [29] Rudratpatna V. Ramnath, "Kinetic Racquet Tests", professore di Aeronautica e Astronautica presso il MIT (Massachusetts Institute of Technology)
- [30] Masmoudi M., Job S., Abbes M. S., Tawfiq I., Haddar M., (2016), "Experimental and numerical investigations of dissipation mechanisms in particle", Granular Matter, 18, p. 71
- [31] Fang X., Tang J., Luo H., (2007), "Granular damping analysis using an improved discrete element approach", Journal of Sound and Vibration, Vol. 308, pp. 112–131

- [32] Takeshima M., Asakura T., (2019), "Numerical simulation of vibration damping by granular materials", *Applied acoustic*, Vol. 162, 107189
- [33] Simone S., (2020), "Simulation, experimentation and identification of frictional dampers application to a satellite propeller", tesi di laurea magistrale, Politecnico di Torino
- [34] Le X., Roberts R. L., Duva A. W., (2019), "Teaching Finite Element Analysis for mechanical undergraduate students", *American Society for Engineering Education*
- [35] Cross R., Bower R., (2001), "Measurements of string tension in a tennis racket", *Sports Engineering*, Vol. 4, pp. 165-175
- [36] Asbhy M. F., (1999), "Materials selection in mechanical design", seconda edizione, Dipartimento di ingegneria, Università di Cambridge
- [37] Haustein M., Gladkyy A., Schwarze R., (2017), "Discrete element modeling of deformable particles in YADE", *SoftwareX*, Vol. 6, pp. 118–123
- [38] Simone S., (2021), approfondimento sullo smorzamento granulare, contributo interno al dipartimento di meccanica del Politecnico di Torino
- [39] [https://www.ert300.com/pdf/manual\\_italiano.pdf](https://www.ert300.com/pdf/manual_italiano.pdf)
- [40] Fasana A., Marchesiello S., (2006), "Meccanica delle vibrazioni", pp. 18, CLUT, Torino
- [41] <https://it.mathworks.com/help/signal/ref/pwelch.html>  
documentazione Matlab relativa alla funzione "pwelch"