

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Meccanica LM33

Tesi di Laurea Magistrale

Modelli analitici per la caratterizzazione strutturale di
cuscinetti di tipo foil bearing



Relatore:

Prof. Federico Colombo

Correlatore:

Prof. Raparelli Terenziano

Candidato:

Giuseppe Cafagna

Anno Accademico 2020/2021

1. Abstract

Fra le tecnologie emergenti e con maggiori prospettive di sviluppo in applicazioni industriali si inseriscono i cuscinetti a lamina d'aria, i quali sono in grado di competere a livello prestazionale con le tecnologie tradizionali sfruttando i propri punti di forza: condizioni di esercizio a temperature e velocità elevate, peso proprio ridotto e, non meno importante, la sostenibilità ambientale. D'altra parte, i cuscinetti a lamina presentano diversi ostacoli tecnici a causa della capacità di carico non elevata, del transitorio incontrollato durante le fasi di avviamento ed arresto e della scarsa implementazione di metodi analitici predittivi ed affidabili di supporto alla progettazione.

La seguente trattazione si pone l'obiettivo di approfondire i modelli della lamina superiore del cuscinetto a lamina presenti in letteratura al fine di fornire una dettagliata base di studio per modelli analitici. Inoltre, è stato preso in esame un modello analitico del Bump foil per studiarne il comportamento statico dovuto ad un carico distribuito esercitato sul Top foil e per enucleare i punti di criticità del modello stesso. Attraverso tale approfondimento, è stato prodotto un modello numerico che ne dimostra l'attendibilità, che simula la risposta flessionale della lamina con protuberanze e che quindi consente di comprendere gli effetti del carico agente sulla lamina superiore.

Keywords: Cuscinetti a lamina, top foil, bump foil, modello numerico, modello analitico

2. Sommario

1.	Abstract.....	3
3.	Lista delle figure.....	6
4.	Introduzione.....	8
5.	Cos'è un Air Foil Bearing.....	10
5.1	Tipologie di Air Foil Bearings.....	13
5.2	Criticità per l'utilizzo di Air Foil Bearing.....	16
6.	Applicazioni del Air Foil Bearings.....	18
6.1	Sistema di condizionamento d'aria di un aeromobile.....	19
6.2	Macchina ad impiego militare.....	20
6.3	Turbomacchine a ricircolo d'aria per aerei di linea.....	21
7.	Metodi di fabbricazione del Foil Bearing.....	24
7.1	Materiali di fabbricazione.....	24
7.2	Processo di formatura per cuscinetti conformi a lamina.....	24
7.3	Processi di formatura per cuscinetto reggispinta a lamina.....	29
8.	Modellazione numerica Top foil.....	34
8.1	Introduzione.....	34
8.2	Descrizione Modello.....	34
8.3	Modello A.....	36
8.4	Modello B.....	40
9.	Modellazione numerica Bump foil.....	43
9.1	Introduzione.....	43
9.2	Descrizione del modello.....	43
9.3	Applicazione del Teorema di Castigliano.....	50
9.4	Incongruenze Modello.....	55
9.5	Modello alternativo del Bump foil.....	61
9.6	Confronto modelli del Bump foil.....	63

10.	Risultati numerici modello Bump foil.....	67
10.1	Deformazione verticale costante.....	68
10.2	Distribuzione di forza nota.....	74
10.3	Coefficiente di attrito tra Top foil e Bump foil variabile	80
10.4	Distribuzione di forza variabile	83
10.5	Rappresentazione grafica del Bump foil.....	87
11.	Conclusioni	89
12.	Appendice A	91
13.	Listati	97
14.	Nomenclatura	102
15.	Bibliografia	104

3. Lista delle figure

Figura 5.1 – Geometria tipica di un Cuscinetto a lamina d’aria	11
Figura 5.2 - Bump foil linearizzato.....	12
Figura 5.3 - Disposizione dei foil per il cuscinetto.....	13
Figura 5.4 - Cuscinetto circolare Caso 1 e Caso 2.....	15
Figura 5.5 – Cuscinetto con tre pastiglie Caso 3 e Caso 4	15
Figura 6.1 - Architettura del sistema di condizionamento.....	20
Figura 6.2 – Macchina a ricircolo d’aria con cuscinetti ad aria ad impiego militare	21
Figura 6.3 – Sezione del gruppo del nucleo del turbocompressore a gas di scarico modificato con cuscinetti a lamina d'aria.....	22
Figura 6.4 – Gruppo rotore modificato con perni radiali maggiorati e disco con scanalatura a spirale assiale centrale.....	23
Figura 7.1 - Lamina del Bump foil dopo formatura	25
Figura 7.2 - Dimensioni del Bump foil	26
Figura 7.3 - a) Bump foil posizionato sull'utensile, b) fase di formatura del Bump foil, c) Bump foil dopo il processo.....	27
Figura 7.4 - Stampa per Bump foil e Top foil.....	28
Figura 7.5 - Supporto per le lamine del cuscinetto ad aria	30
Figura 7.6 – Disegno del Bump foil con anelli concentrici indicizzati.....	31
Figura 7.7 – Processo di formatura del Bump foil.....	32
Figura 7.8 – Anelli del Bump foil e stampa del Bump foil	32
Figura 7.9 – Cuscinetto ad aria assemblato e supporto separato.....	33
Figura 7.10 – Cuscinetto ad aria dopo il trattamento termico.....	33
Figura 8.1 – Suddivisione assiale del Top Foil	34
Figura 8.2 – Modello lineare Top Foil.....	35
Figura 8.3 – Modello A del Top Foil.....	36
Figura 8.4 – Indicizzazione Modello B del Top foil	40
Figura 8.5 – Confronto Modello A e Modello B	42
Figura 9.1 – Modello equivalente semplificato del Bump Foil di un cuscinetto a lamina d'aria.....	43
Figura 9.2 - Forze agenti sul Bump i-esimo e sulla molla equivalente	44
Figura 9.3 – Modello Link-Spring del Bump Foil.....	44
Figura 9.4 - Relazione geometrica tra deflessioni verticali e orizzontali nel modello del Bump	45
Figura 9.5 - Diagramma di corpo libero del segmento rigido compreso tra due Bump consecutivi	46
Figura 9.6 – Diagramma di corpo libero del singolo Bump	46

Figura 9.7 - Estremo libero N-esimo del Bump foil	48
Figura 9.8- Diagramma di corpo libero del Bump con estremità libera	49
Figura 9.9 - Molla di rigidità k_1 tra due link rigidi.....	50
Figura 9.10 - Studio dell'energia interna del modello del Bump.....	51
Figura 9.11 - Diagramma di corpo libero del Bump errato	55
Figura 9.12 - Correzione diagramma di corpo libero del Bump	56
Figura 9.13 - Diagramma di corpo libero del Link rigido	57
Figura 9.14- Studio dell'energia interna del modello del Bump privo del momento M_b	58
Figura 9.15- Bump foil per cuscinetto reggispira	61
Figura 9.16 - Equivalenza Bump-molla nel cuscinetto	61
Figura 9.17 - Parametri del modello del Bump foil	63
Figura 10.1 - Geometria del Bump	68
Figura 10.2 - ΔL al variare di Δh	69
Figura 10.3 - α al variare di Δh	69
Figura 10.5 - Andamento della forza F_p al variare di Δh per ogni singolo Bump.....	71
Figura 10.6 - Andamento delle reazioni vincolari del Bump al variare di Δh	72
Figura 10.7 -Andamento della rigidità k_v al variare di Δh	73
Figura 10.8 - Diagramma a blocchi del modello iterativo	76
Figura 10.9 - Andamento di α per ogni Bump	77
Figura 10.10 - Andamento di Δh e ΔL per ogni Bump	78
Figura 10.11 - Confronto di F_p per validare il Modello	79
Figura 10.12 - Iperbole equilatera della distribuzione di forza costante F_p	79
Figura 10.13 - Andamento di α per ogni Bump al variare del coefficiente di attrito μ	80
Figura 10.14 -Andamento di Δh per ogni Bump al variare del coefficiente di attrito μ	81
Figura 10.15 -Andamento di ΔL per ogni Bump al variare del coefficiente di attrito μ	82
Figura 10.16 -Andamento della rigidità K_v/L per ogni Bump variando coefficiente di attrito μ	82
Figura 10.17 - Distribuzione di forza: Costante, Triangolare decrescente, Trapezoidale	83
Figura 10.18 - Distribuzione di forza triangolare superiore	84
Figura 10.19 - Confronto per verificare correttezza del modello numerico	84
Figura 10.20 -Andamento di ΔL e Δh per ogni Bump variando la distribuzione di forza	85
Figura 10.21 -Andamento della rigidità K_v per ogni Bump variando la distribuzione di forza	86
Figura 10.22 - Rappresentazione del Bump foil	87
Figura 10.23 - Zoom Bump con estremità saldata	88
Figura 10.24 - Zoom Bump con estremità libera.....	88

4. Introduzione

Lo scenario globale è in continua evoluzione poiché spinto dalla necessità di perseguire costantemente l'innovazione tecnologica per far fronte ad emergenze climatiche, ambientali e di sostenibilità. Tali obiettivi appartengono a più sfere sociali ed economiche, ed in particolare per il campo ingegneristico, incidono sulle fasi di progettazione di componenti e sull'utilizzo di determinate tecnologie. In questo panorama globale, si inserisce il bisogno di incentivare la produzione e commercializzazione di cuscinetti innovativi che riescano a combinare le capacità prestazionali con la sostenibilità ambientale.

Tra le varie tipologie di cuscinetti, indubbiamente i cuscinetti a lamina sono un buon compromesso tra le due esigenze e rappresentano la tecnologia su cui è necessario investire. Tale tipologia di cuscinetti non sfrutta alcun fluido oleodinamico per il suo funzionamento, assicurando un minore impatto ambientale in quanto non è coinvolto alcun elemento nocivo per l'ambiente. Sfrutta, di fatti, fluidi aeriformi per il proprio funzionamento e ciò permette di utilizzare aria o altri fluidi gassosi coinvolti nel processo.

D'altra parte, è necessario garantire delle prestazioni elevate per i cuscinetti in quanto devono sopportare a carichi statici e dinamici dovuti ad alberi in rotazione su cui sono applicati. Per raggiungere tale obiettivo, nel corso degli anni si è puntato sulla ricerca di cuscinetti a lamina d'aria con lo scopo di migliorarne le caratteristiche. In effetti, la ricerca ha prodotto una serie diversa di tipologie di cuscinetti a lamina che ha consentito di ampliare la gamma di cuscinetti disponibili e di ottenere miglioramenti prestazionali. Seppur vi sia stata una spinta notevole per implementare tale tecnologia, quest'ultima ha dovuto imbattersi in difficoltà oggettive di modellazione predittiva, utile per semplificare e migliorare la progettazione di tali componenti. Uno dei motivi che giustifica la difficoltà di modellazione dei cuscinetti a lamina si riscontra nell'utilizzo di un fluido gassoso che presenta proprietà intrinsecamente differenti a seconda delle condizioni di esercizio. La difficoltà nella modellazione analitica dei cuscinetti a lamina ha rallentato negli ultimi anni lo sviluppo di tale tecnologia e ne ha limitato le capacità prestazionali.

A tale scopo, in questa trattazione si è puntata l'attenzione su modelli esistenti in letteratura in modo tale da sviscerarne i punti di forza e le criticità, consentendo di avere una solida base in letteratura e affinandone la modellazione stessa. Tale lavoro si sofferma in particolare su due componenti che costituiscono l'ossatura del cuscinetto a lamina, ossia la lamina superiore, nota come Top foil, e la lamina con protuberanze, nota come Bump foil.

Per quanto riguarda il Top foil, si è cercato di affinare un modello precedentemente studiato in cui si determina la freccia della lamina superiore soggetta ad un carico dovuto all'albero in rotazione e la forza agente sulla lamina stessa. Il modello è stato perfezionato e ampliato dal punto di vista analitico studiandone un modello alternativo con un grado di accuratezza maggiore.

Inoltre, è stato studiato un modello analitico per il Bump foil. In particolare, sono state approfondite le ipotesi di base su cui esso si fonda e sono state proposte dal punto di vista analitico delle ipotesi alternative, per certi aspetti più realistiche e adeguate al modello. Tale modello analitico è stato confrontato con un altro analogo presente in letteratura, evidenziandone punti di similitudine e di divergenza per i due modelli. Dopo aver approfondito tale modello sotto l'aspetto analitico, è stato avvalorato grazie ad una modellazione numerica ottenuta attraverso il software MATLAB. In questo modo, è stato possibile valutarne la validità attraverso la computazione numerica.

5. Cos'è un Air Foil Bearing

I cuscinetti ad aria a lamina sono cuscinetti idrodinamici autoazionati a superficie conforme. La particolarità di questa tipologia di cuscinetti è l'utilizzo di un fluido aeriforme proveniente dall'ambiente esterno come fluido operativo o lubrificante. Tale tecnologia è priva di lubrificanti inquinanti, ad esempio olio, e in questo modo si favorisce una enorme semplificazione delle varie fasi di progettazione delle turbomacchine. Di fatti, l'applicazione progettuale di questi cuscinetti riduce notevolmente le dimensioni dei cuscinetti stessi e la loro complessità poiché risultano privi di sistemi di valvole idrauliche per il controllo del lubrificante oleoso all'interno del complessivo. L'eliminazione di questa componentistica risolve il problema degli ingombri.

In alcuni casi è possibile utilizzare qualsiasi altro fluido gassoso, non propriamente aria compressa, coinvolto nella dinamica di progetto per ottimizzare il processo stesso. Di conseguenza, si è in grado di ridurre il numero di componenti coinvolti garantendo allo stesso modo l'azione pneumatica lubrificante. Per questo motivo, l'uso di un cuscinetto ad aria risulta essere uno tra i dispositivi più ecologici soprattutto rispetto ai cuscinetti convenzionali in quanto si eliminano i problemi di leakage di liquidi dannosi per l'ambiente. Tuttavia, la sostituzione del cuscinetto ad aria con un cuscinetto convenzionale viene presa in considerazione solo in determinate circostanze o con precise esigenze prestazionali del cuscinetto. Ad esempio, nel momento in cui è richiesto di lavorare in un range elevato di velocità, questa tecnologia trova largo impiego poiché il basso coefficiente di viscosità del fluido lubrificante consente al cuscinetto a lamina di funzionare nel regime idrodinamico adeguato.

L'introduzione dei cuscinetti a lamina ad aria è stata sostenuta dai numerosi vantaggi che hanno rilevante impatto sia nel processo che nella progettazione:

- a) innanzitutto, l'impiego di questa tecnologia consente di ridurre il peso e gli ingombri, come precedentemente indicato, in quanto non è presente alcun sistema di lubrificazione;
- b) l'utilizzo di tale tipologia di cuscinetti non richiede elevata manutenzione per garantire il corretto funzionamento;
- c) dal punto di vista prestazionale i cuscinetti ad aria sono in grado di sopportare condizioni di esercizio con temperature e velocità elevate e ciò consente di ampliare il range di utilizzo degli stessi;
- d) l'utilizzo di un mezzo comprimibile come l'aria consente inoltre di ridurre enormemente la dissipazione di energia in condizioni operative. Di fatti, a differenza dei fluidi oleosi, l'aria presenta una viscosità molto bassa rispetto a parità di principi di funzionamento, quindi una minore perdita di potenza per la macchina;

- e) la presenza di queste proprietà nei cuscinetti lubrificati ad aria sviluppa dunque una ridotta rigidità e un basso smorzamento ed una maggiore affidabilità;
- f) quando la macchina è in funzione, il film di aria/gas tra il cuscinetto e l'albero proteggono i fogli del cuscinetto dall'usura. La superficie del cuscinetto è a contatto con l'albero solo quando la macchina si avvia e si ferma.

Dall'altro lato, è inevitabile che vi si presentino degli svantaggi nell'impiego di questa tecnologia. L'impiego ad elevate velocità porta il cuscinetto a sopportare una capacità di carico ridotta rispetto ai cuscinetti tradizionali. Di fatti, per i cuscinetti con lubrificante oleodinamico il gioco tra la componente rotativa e la componente statica aumenta al crescere della velocità di rotazione del rotore e ne riduce così gli effetti viscosi del fluido; al contrario, un cuscinetto a lamina d'aria funziona senza contatto in un'ampia gamma di velocità ma con una scarsa capacità di carico. [1]. I punti di criticità dell'applicazione dei cuscinetti a lamina verranno affrontati nel capitolo successivo.

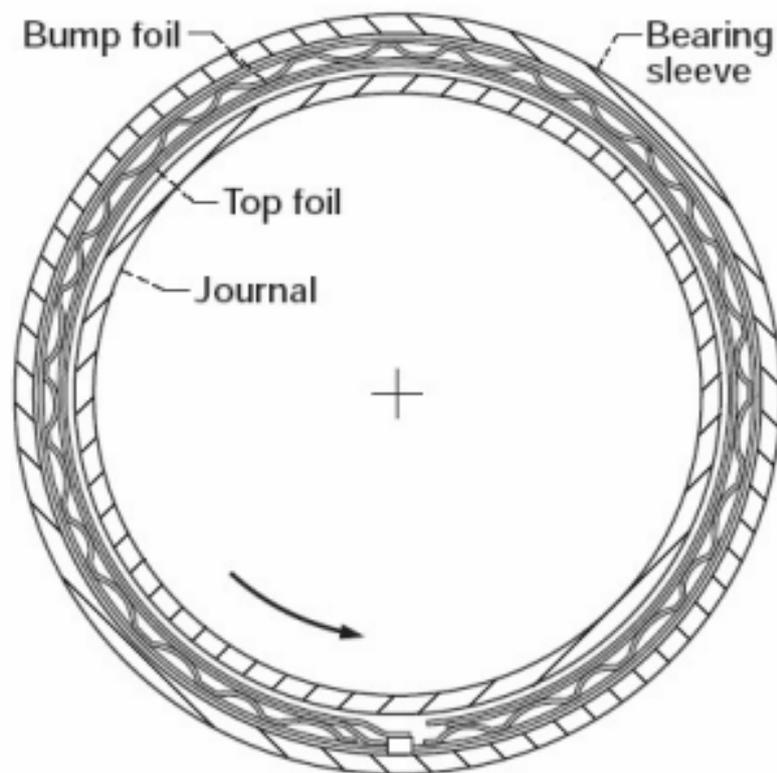


Figura 5.1 – Geometria tipica di un Cuscinetto a lamina d'aria

Dal punto di vista strutturale, il cuscinetto ad aria si presenta come un assemblato di componenti principali, quali:

- Manicotto: un cilindro rigido solidale alla carcassa che funge da struttura di ancoraggio per la lamina con i Bump e per la lamina superiore;
- Top foil: è una sottile lamina di metallo di forma cilindrica, posta internamente a contatto con l'albero rotante e attaccata al manicotto del cuscinetto ad un'estremità e libero all'altra estremità;
- Bump foil: la configurazione del Bump foil consiste in quattro strisce, ciascuna con cinque Bump, allineate assialmente. L'estremità di una striscia è saldata al manicotto del cuscinetto mentre l'altra estremità è libera, come mostrato nella fig. 5.2. Quindi, per un totale di cinque segmenti, essi sono posizionati attorno al manicotto del cuscinetto.
- Striscia saldata: linea di saldatura che collega la lamina superiore e le strisce protettive al manicotto del cuscinetto.

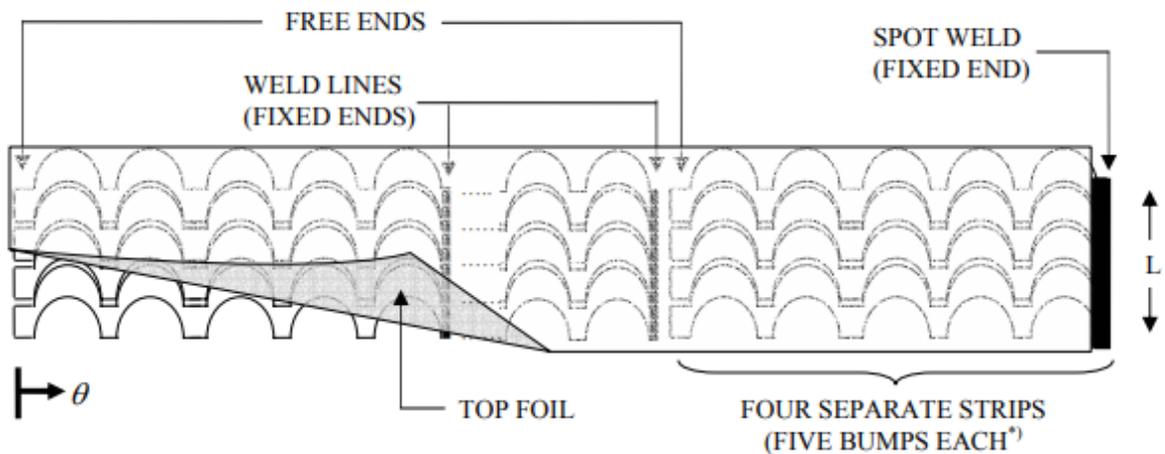


Figura 5.2 - Bump foil linearizzato

La posizione della saldatura a punti è caratterizzata dall'assenza di protuberanze e si estende per circa 10° . La saldatura a punti impedisce il movimento della lamina superiore e della lamina con protuberanza fissandone un'estremità (estremità saldata).

Il funzionamento del cuscinetto ad aria prevede tre stati: uno di riposo, l'innesco e il mantenimento. Nella condizione di riposo, la lamina superiore (Top foil) in fig. 5.3 è precaricata a molla contro l'albero, quando quest'ultimo non è in rotazione. Non c'è spazio come in un cuscinetto a manica rigida. La fase di innesco avviene quando l'albero è messo in rotazione. Tale movimento relativo induce il trasporto di aria viscosa lungo la circonferenza tra la superficie della lamina superiore e l'albero. Di conseguenza si genera pressione aereodinamica. Tale pressione agisce sulla lamina superiore ovvero la lamina più interna (Top foil) in modo da creare il distacco dall'albero e avere l'effetto del sollevamento che porta la lamina in battuta con la sua struttura di supporto cedevole. La pressione del film fluido e la rigidità

della lamina interagiscono prima in maniera dinamica poi in maniera statica a regime per stabilizzarsi in uno stato di equilibrio per un dato insieme di condizioni al contorno. L'azione di sostenimento dell'albero in rotazione è ottenuta grazie alla rigidità della lamina Bump foil, la quale con le sue protuberanze si oppone alla pressione radiale esercitata dall'albero e scaricata sul Top foil. Inoltre, le variazioni di pressione nel film fluido di taglio e il riscaldamento viscoso possono portare alla generazione di calore che può influenzare le proprietà del film fluido o la lamina proprietà meccaniche, perciò è necessario monitorare i suddetti parametri. Queste interazioni fluide, strutturali, termiche complesse e significative, creano difficoltà per la modellazione della lamina dei cuscinetti poiché è necessario tener conto della non linearità del fluido coinvolto e dei grandi effetti elastici di deformazione sulla lamina [1].

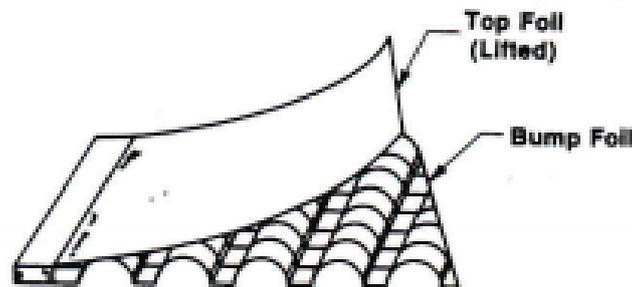


Figura 5.3 - Disposizione dei foil per il cuscinetto

5.1 Tipologie di Air Foil Bearings

I recenti studi sono stati eseguiti sia con un approccio sperimentale e che analitico sui cuscinetti a lamina in modo estensivo ed è stato riscontrato un significativo miglioramento della capacità di carico e della dinamica del rotore. In genere la letteratura ritiene che i cuscinetti a lamina d'aria avanzati abbiano una struttura complessa al fine di fornire un meccanismo di supporto sottostante univoco in condizioni di esercizio, che, d'altra parte, rendono il cuscinetto molto instabile e con una bassa capacità di carico. Tuttavia, i cuscinetti a lamina d'aria sono stati studiati in particolare soffermandosi su un'unica tipologia di cuscinetti, ovvero quelli con profilo circolare del Top foil con distribuzione uniforme della rigidità del Bump foil perché non sono a disposizione informazioni sufficientemente dettagliate in letteratura sulla distribuzione della rigidità della protuberanza (Bump) e sulla forma complessiva del cuscinetto in letteratura pubblica. L'art. [2] indaga sulla capacità di carico e sulle prestazioni rotodinamiche di due diversi tipi di cuscinetti a lamina d'aria. Ad esempio, si considerano i cuscinetti cilindrici circolari con una lamina superiore continua e cuscinetti non circolari precaricati con

tre pastiglie a formare la lamina superiore. All'interno delle due categorie indicate sono state individuate due sottocategorie che analizzano le variazioni di rigidità sia lungo le direzioni assiale e sia lungo la direzione circonferenziale. Si ottengono, in questo modo, un totale di quattro tipologie di cuscinetti a lamina d'aria con diverse forme complessive di cuscinetti e distribuzioni di rigidità. Queste quattro tipologie di cuscinetti presentano le seguenti caratteristiche:

1. Il cuscinetto è di forma circolare ed è costituito da una lamina continua antiurto e una lamina superiore, come mostrato nella fig. 5.4. Tutte le protuberanze (Bump) presentano la stessa rigidità tipica del film d'aria dei cuscinetti di prima generazione;
2. Il cuscinetto ha la stessa forma complessiva del cuscinetto del caso 1 con distribuzione della rigidità parabolica dei Bump foil lungo la direzione assiale con il massimo al centro e il carico distribuito al 50% su ogni singolo lato. La rigidità media è la stessa di caso 1;
3. Il cuscinetto è costituito da tre lamine protettive in serie e tre pastiglie di alluminio poste superiormente a formare una configurazione a tre pastiglie come in fig. 5.5. Si presume che le lamine superiori, le lamine protuberanti e il cuscinetto manicotto siano lavorati e formati in modo tale che il cuscinetto finale supporti un precarico di 0,5 sulla lamina superiore. Il precarico, r_p , è definito come un rapporto della distanza d tra il centro del giornale e il centro della pastiglia e il gioco nominale del cuscinetto C , ovvero $r_p = d / C$ [2]. Il cuscinetto ha una distribuzione della rigidità uniforme come nel caso 1. Nella fig. 5.5, un cerchio tangente alle lamine superiori in corrispondenza del perno è un set di cerchi alesaggio, che definisce un gioco in corrispondenza del perno;
4. Il cuscinetto ha la stessa forma complessiva del cuscinetto del caso 3 con una distribuzione della rigidità parabolica lungo la direzione circonferenziale all'interno di una pastiglia. La rigidità diminuisce lentamente dal bordo d'uscita al perno e cade improvvisamente verso il bordo d'attacco. La rigidità media è la stessa del caso 1. [2]

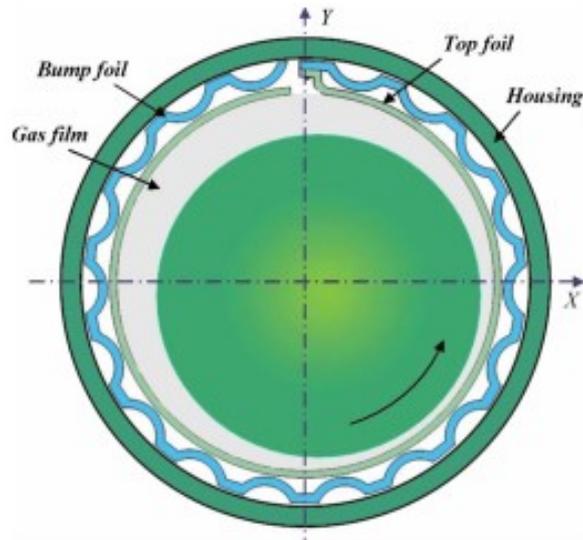


Figura 5.4 - Cuscinetto circolare Caso 1 e Caso 2

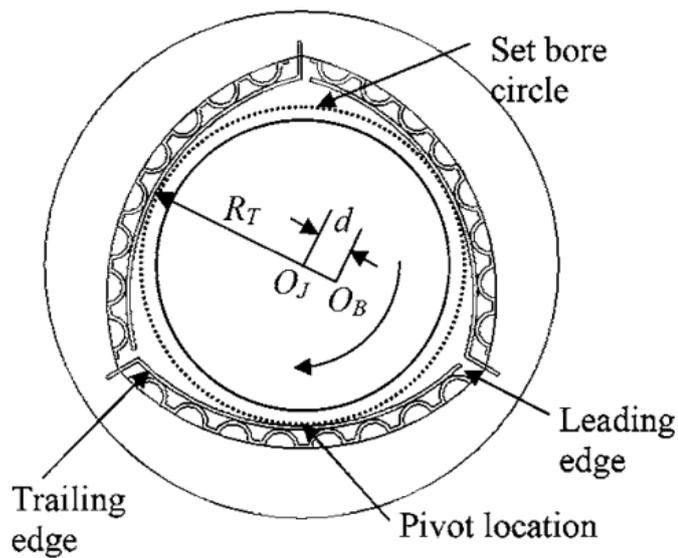


Figura 5.5 – Cuscinetto con tre pastiglie Caso 3 e Caso 4

Le prestazioni statiche e dinamiche complessive dei quattro diversi tipi di cuscinetti a lamina d'aria sono presentate e confrontate tramite calcoli di capacità di carico e coefficienti di forza dinamica, analisi di stabilità modale e simulazioni di orbite nel dominio del tempo nel art. [2]. La principale differenza delle capacità di carico deriva dalla forma complessiva del cuscinetto (lamina circolare continuo o tre pastiglie precaricate) piuttosto che dalla variazione spaziale della rigidità dell'urto all'interno delle lamine dell'urto. I cuscinetti a tre pastiglie precaricati hanno una capacità di carico notevolmente ridotta rispetto ai cuscinetti circolari a causa della minore lunghezza dell'arco del cuscinetto.

5.2 *Criticità per l'utilizzo di Air Foil Bearing*

L'applicazione nei vari campi dei cuscinetti a lamina d'aria si è scontrata negli anni con tre principali ostacoli tecnici, che ne hanno impedito così l'implementazione massiva in sistemi complessi e ad alte prestazioni come motori a turbina a gas. I principali ostacoli tecnici che riducono l'utilizzo di questa tecnologia sono:

- 1) capacità di carico non adeguata;
- 2) fasi di avviamento ed arresto ad alta temperatura;
- 3) metodi di prestazione predittivi inaffidabili e linee guida per la progettazione;

Recentemente, invece, sono stati riscontrati alcuni miglioramenti per quanto riguarda la capacità di carico che questa tipologia di cuscinetti è in grado di sopportare [1]. In un articolo del 1994 dello studioso Heshmat, è stato rilevato con test un incremento della capacità di carico [3]. Questo miglioramento è stato attribuito alla migliore progettazione della lamina adatta alla struttura basata su modellazione analitica elasto-idrodinamica. L'incremento del limite di carico sopportabile da questa tipologia di cuscinetti ha consentito di mitigare questo ostacolo tecnico. Per assicurare che il cuscinetto con film d'aria riesca a sopportare un carico adeguato, è necessario inoltre che l'albero rotante superi la velocità di decollo in condizioni di esercizio [4]. Tale parametro, in fase di progettazione, consente di capire il range di velocità di rotazione accettabile per cui il cuscinetto ha una sufficiente capacità di carico. Di fatti, durante il funzionamento del cuscinetto se la velocità si mantiene all'interno di intervallo noto di velocità per un tempo sufficientemente lungo non si rileva l'usura della superficie della lamina superiore [5]. Le performance migliori per la dinamica e lo sfruttamento della rotazione di progetto si raggiungono nella condizione in cui la velocità di decollo si porti al più basso valore possibile [6] in modo tale da innescare il più rapidamente possibile il passaggio da attrito secco ad attrito fluido garantendo così una minore resistenza al moto e assicurando anche una adeguata resistenza al carico.

Per quanto riguarda il limite della temperatura di esercizio, il funzionamento dei cuscinetti ad alta temperatura ($> 300\text{ }^{\circ}\text{C}$) è sempre stato un ostacolo tecnico impegnativo da superare in quanto i rivestimenti lubrificati con lamina comunemente usati sono prodotti con materiali a temperatura relativamente bassa (ad esempio, PTFE e MoS_2) [7] [8]. Questi materiali vengono utilizzati non solo per le buone proprietà lubrificanti, ma anche perché sono flessibili e non alterano in maniera rilevante la cedevolezza e la morfologia superficiale della lamina superiore.

Questi lubrificanti solidi usati tradizionalmente presentano un limite di temperatura di esercizio inferiore ai $300\text{ }^{\circ}\text{C}$ circa. Al contrario, se si andasse alla ricerca invece di lubrificanti solidi in grado di

operare a temperature superiori a 300°C, si prenderebbero in considerazione i materiali simili alla ceramica per i quali risulta una rigidità elevata e di difficile applicazione. L'assenza di flessibilità, in questo modo, comprometterebbe lo scopo principale della lamina ossia di attutire il carico.

La recente ricerca su nuovi lubrificanti solidi ad alta temperatura applicati agli alberi dei cuscinetti sembra che consenta di superare il secondo ostacolo tecnico precedentemente presentato. I cuscinetti a lamina di superlega a base di nichel sono stati con successo lubrificati sfruttando rivestimenti per alberi PS304 per oltre 100.000 cicli di avvio e arresto a temperature fino a 640 ° C. Il PS304 è un lubrificante solido composito al plasma che contiene lubrificanti eutettici argento e fluoruro in un formato matrice metallo ed ossido. [9] Lo strato di lubrificante permette nelle fasi di arresto e di avvio di ridurre l'attrito tra le lamine consentendo quindi un impiego a temperature maggiori. Utilizzando questo tipo di lubrificanti o altri rivestimenti simili, si assicurano tempi di esercizio lunghi ad alta temperatura e ciò amplia la gamma di impiego dei cuscinetti a lamina d'aria.

Il terzo ostacolo tecnico che consiste nel trovare metodi affidabili di prestazione predittiva e linee guida di progettazione non è stato ancora ampiamente superato. La scarsa conoscenza di tali metodi in letteratura si deve alla non linearità intrinseca dei cuscinetti a lamina e di conseguenza risulta difficile la creazione di modelli attendibili semplificati. Questa difficoltà di modellazione è dovuta alle complesse interazioni strutturali non lineari, fluide idrodinamiche e termiche tra le lamine cedevoli e il film fluido che sono spesso influenzati dai contatti di attrito stick slip tra gli elementi in lamina e la struttura di supporto della fondazione elastica (ad esempio urti) [10]. In sistemi tecnologicamente più maturi, come i cuscinetti a rotolamento, un ampio spettro di dati sperimentali e l'esperienza basata sull'applicazione operativa hanno portato a linee guida di progettazione di base empirica [11] [12]. Per i cuscinetti a foglio d'aria, non sono state effettuate misurazioni sperimentali estese, specialmente ad alte temperature, e pertanto linee guida simili basate sull'esperienza non sono ancora disponibili.

6. Applicazioni del Air Foil Bearings

L'applicazione dei cuscinetti a lamina si è evoluta nel corso degli anni con il progresso tecnologico e con gli studi eseguiti per incrementarne le caratteristiche prestazionali. La letteratura distingue tre diverse fasi o generazioni dei cuscinetti a lamina d'aria, partendo dall'introduzione dei primi modelli pratici di piegatura realizzati negli anni '60. Tali modelli di prima generazione (Generation I) sono caratterizzati da una base elastica semplice e uniforme e da proprietà di rigidità uniformi. I cuscinetti a lamina di prima generazione mostrano capacità di carico approssimativamente uguali a cuscinetti rigidi per gas di dimensioni simili, tuttavia con capacità di smorzamento limitata. I cuscinetti a lamina di seconda generazione (Generation II), invece, hanno una struttura di base più complessa in quanto stato riprogettato il substrato elastico per aumentare la capacità di smorzamento del cuscinetto e di adattarsi ai problemi indicati in precedenza. In questa tipologia di cuscinetti la rigidità è prevalente in una direzione, ad esempio assialmente, per mitigare alcuni fenomeni esterni al componente, quali il disallineamento dell'albero o la fuoriuscita di fluido idrodinamico dai bordi della lamina. Questi cuscinetti a lamina di seconda generazione presentano una capacità di carico circa il doppio di quelle dei cuscinetti di prima generazione grazie alle maggiori capacità di smorzamento. Tale incremento li ha resi interessanti per diverse applicazioni ad alta velocità come turboespansori criogenici in razzi, turbocompressori e unità di potenza ausiliarie (APU). I cuscinetti di terza generazione (Generation III) si sono sviluppati con strutture di base elastiche molto complesse, hanno rigidità che è prevalente in due direzioni, nella maggior parte dei casi assiale e radiale. Questo design complesso ha consentito uno sviluppo delle prestazioni del cuscinetto e un conseguente aumento del coefficiente di smorzamento. Quest'ultimo incremento (del coefficiente di smorzamento) va a mitigare il limite di capacità di carico in quanto esso risulta linearmente dipendente dallo stesso coefficiente di smorzamento. L'ultima generazione incrementa così, rispetto alla generazione precedente, di circa due o tre volte la capacità di carico in condizioni di esercizio. Nonostante il progresso tecnologico, la capacità di carico resta uno dei punti di criticità per l'applicazione di questi cuscinetti come affrontato nel capitolo precedente presentato.

Grazie all'evoluzione tecnologica dei cuscinetti a lamina, i cuscinetti ad aria a lamina sono stati utilizzati con successo in molte applicazioni aerospaziali come macchine a ricircolo d'aria, turbocompressori ad aria di spurgo e turbo espansori. Queste applicazioni sono caratterizzate da carichi leggeri, velocità costanti e temperature moderatamente basse. I precedenti tentativi volti ad estendere la tecnologia ad applicazioni ad alto carico e alta temperatura sono falliti a causa di capacità di carico inadeguate, capacità dei materiali o prestazioni rotodinamiche. Tuttavia, i recenti progressi nella progettazione dei cuscinetti d'aria a lamina hanno portato a miglioramenti significativi sia nella capacità di carico che

nello smorzamento; inoltre, le prestazioni di rigidità che aprono nuove possibilità per la loro applicazione in turbomacchine oil-free avanzate.

Il funzionamento ad alta temperatura, tuttavia, continua a essere un ostacolo fondamentale, come presentato nel paragrafo precedente. I cuscinetti d'aria della lamina galleggiano su un film d'aria idrodinamica autoazionato durante il normale funzionamento e quindi non subisce contatto scorrevole o usura. Tuttavia, le fasi più critiche sono quelle di avvio e di arresto in quanto si verifica uno scorrimento tra le lamine, che precede la creazione del film fluido viscoso. Per sopperire a questo ostacolo allo spunto è necessario fornire una solida lubrificazione che consenta di ridurre l'attrito e l'usura. I precedenti tentativi di lubrificare i cuscinetti in alluminio ad alte temperature hanno avuto scarso successo. [13]

6.1 Sistema di condizionamento d'aria di un aeromobile

La macchina a ricircolo d'aria rappresenta il primo caso di implementazione del cuscinetto a lamina. Lo scopo principale è garantire condizioni di volo sia per passeggeri che per l'equipaggio confortevoli fornendo loro aria raffreddata e pressurizzata per la cabina dell'aeromobile. Per raggiungere l'obiettivo, l'aria pressurizzata calda proveniente dal sistema di propulsione viene sfruttata affinché passi attraverso uno scambiatore di calore circondato da aria fredda, in modo tale da abbassarne la temperatura. Superato lo stadio di scambio termico nello scambiatore, l'aria calda finisce in un sistema di compressione che pressurizza l'aria. Il passaggio successivo consiste nel far passare nuovamente questa aria compressa attraverso lo scambiatore di calore, ma raffreddandola. Infine, l'aria raffreddata viene forzata nella girante della turbina. Il processo può essere esemplificato attraverso la fig. 6.1.

Simplified Air Cycle cooling system

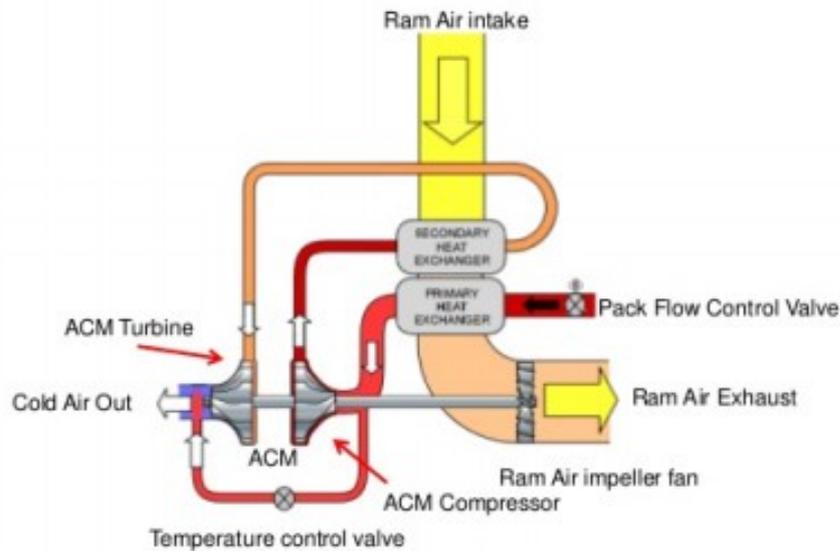


Figura 6.1 - Architettura del sistema di condizionamento

La tecnologia dei cuscinetti a lamina d'aria ha trovato largo impiego sin dalla Generazione I, pur presentando prestazioni limitate. Se confrontato con le altre tipologie di cuscinetti impiegati in aeromobili, il cuscinetto riesce ad aumentare l'affidabilità, a diminuire la necessità di manutenzione, a funzionare a velocità maggiori, risulta più conforme alle normative ambientali e può funzionare a una gamma di temperature più ampia. In caso di guasto, in genere raro, il cuscinetto d'aria limita i danni all'ambiente circostante, per cui è spesso limitato ai cuscinetti e alle superfici dell'albero.

6.2 *Macchina ad impiego militare*

La prima macchina di produzione militare in cui i cuscinetti a sfere sono stati sostituiti con i cuscinetti ad aria è stata la F-18. Lo sviluppo e il progetto della macchina ad impiego militare F-18 sono stati affidati all'azienda statunitense AiResearch nel 1976. Una sezione trasversale della macchina è mostrata in fig. 6.2. Il componente è dotato di due rotori: una turbina e un compressore posti all'estremità. La macchina funziona a circa 95.000 giri/min. [17] Per sviluppare tale complessivo sono state sfruttate le conoscenze acquisite dall'implementazione per gli Airbus.

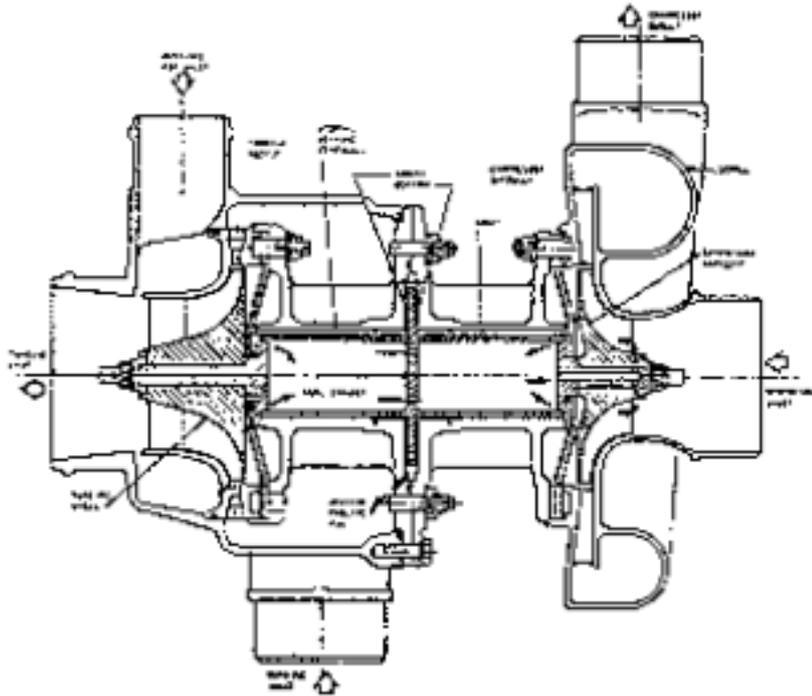


Figura 6.2 – Macchina a ricircolo d'aria con cuscinetti ad aria ad impiego militare

Sin da subito i cuscinetti ad aria sono risultati attendibili in quanto riuscivano a garantire coefficienti di affidabilità notevolmente più alti rispetto alle unità di macchina prodotte servendosi di cuscinetti a sfere. Tuttavia, essendo il primo componente implementato su macchina necessitava di miglioramenti soprattutto per quanto riguarda i punti di criticità, ovvero la capacità di carico ridotta e lo smorzamento viscoso.

6.3 Turbomacchine a ricircolo d'aria per aerei di linea

Se pur in maniera non estesa, gli studi effettuati sui cuscinetti a lamina d'aria hanno portato allo sviluppo di alcune varianti implementate in svariati ambiti. In particolare, è stato sviluppato un cuscinetto multipad intorno alla metà degli anni '60 Garrett/Airresearch negli Stati Uniti applicandolo ad una macchina a ricircolo d'aria per un aereo di linea a lungo raggio. La velocità di funzionamento del rotore di questa macchina a ricircolo d'aria è di circa 48.000 giri/min e il rotore è completamente trasportato su un film d'aria da 2000 rpm in su [15]. Il cuscinetto a lamina è, a sua volta, composto da alcuni cuscinetti elastici scorrevoli realizzati con un foglio a molla. Il supporto per le pastiglie è garantito da una boccola da un lato e dal pad successivo. Questa struttura multipastiglia assicura una maggiore resistenza dinamica alle vibrazioni per il cuscinetto.

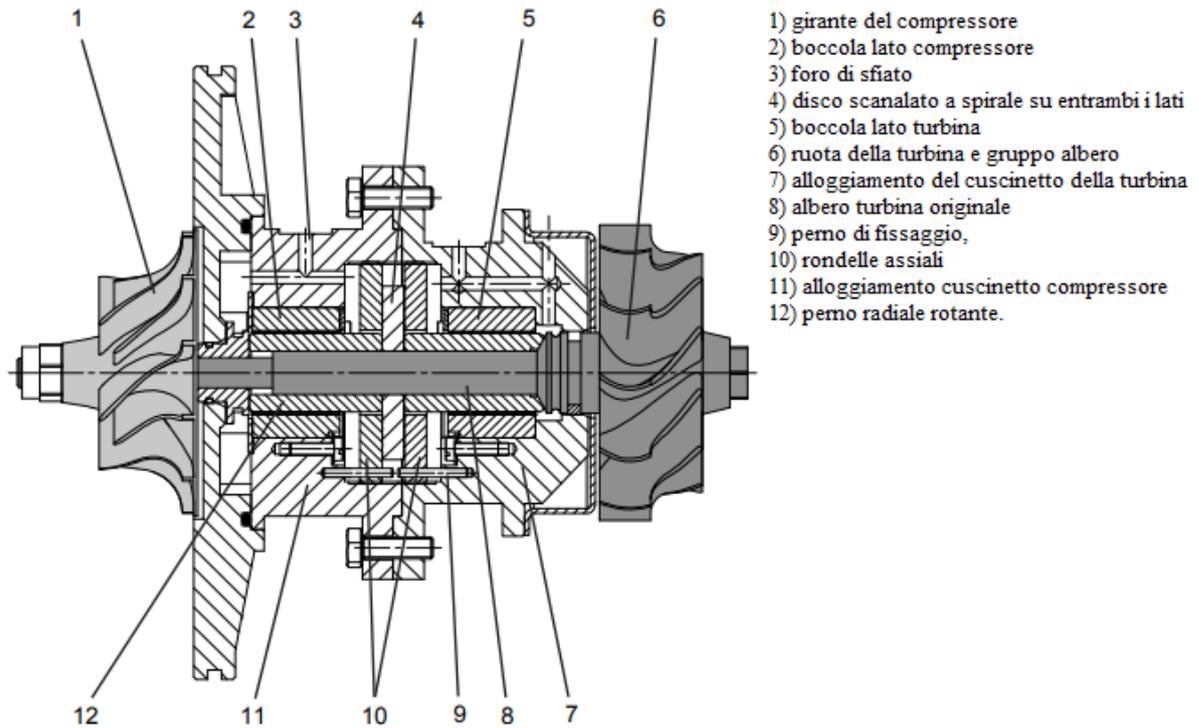


Figura 6.3 – Sezione del gruppo del nucleo del turbocompressore a gas di scarico modificato con cuscinetti a lamina d'aria

Nell'all. [14] si fa riferimento ad un turbocompressore modificato a gas di scarico nel quale i cuscinetti ad olio sono stati sostituiti con i cuscinetti a lamina d'aria. La turbomacchina considerata è la K26 della BorgWarner Turbo Systems. L'alloggiamento del cuscinetto monopezzo originale è stato sostituito da un alloggiamento del cuscinetto d'aria in due pezzi appositamente sviluppato (vedi fig. 6.3). Contrariamente al design originale, i nuovi cuscinetti radiali a foglio d'aria sono stati posizionati vicino alla palettatura del compressore e della turbina progettati secondo il metodo di Dellacorte [1] e Dykas [16]. In seguito alla implementazione dei cuscinetti ad aria la massa totale del rotore è aumentata da 0,13 kg a 0,5 kg in quanto è stato modificato l'assemblaggio dei componenti con aggiunta di un cuscinetto a disco a spirale posizionato centralmente, come in fig. 6.4.



Figura 6.4 – Gruppo rotore modificato con perni radiali maggiorati e disco con scanalatura a spirale assiale centrale

7. Metodi di fabbricazione del Foil Bearing

Il processo di produzione è costituito principalmente da tre step. Il primo consiste nel tagliare le lamine che, a seconda del materiale scelto, necessitano del trattamento di ricottura prima di essere del taglio. È in questa fase che si sceglie il materiale adatto per il cuscinetto in funzione delle proprietà finali che si desiderano ottenere. Il secondo stadio prevede il processo di formatura del Bump foil mediante pressatura contro uno stampo in acciaio per utensili. Il passaggio finale sfrutta il trattamento a caldo delle lamine formate per sviluppare proprietà di resistenza in condizioni di esercizio. [16] Lo step maggiormente critico risulta essere quello della formatura del Bump foil. Di fatti, se per il Top foil è necessario ottenere una lamina piana e successivamente curvarla, con determinate caratteristiche resistenziali, per il Bump foil occorre, invece, generare con elevata accuratezza le protuberanze che, come si vedrà in seguito, generano le proprietà di rigidità a Bump foil.

7.1 *Materiali di fabbricazione*

Per la fabbricazione del cuscinetto a lamina d'aria la ricerca di nuovi materiali di fabbricazione è in continua evoluzione. Fra le varie tipologie di materiali, per le lamine viene spesso utilizzato metallo in acciaio inossidabile (18Cr9Ni) con uno spessore di 0,1 mm [14], in alternativa alle superleghe resistenti ad alte temperature, perché il processo di trattamento termochimico è più semplice e ciò lo rende un materiale più economico. L'utilizzo di superleghe a base di nichel invece garantisce nel processo di fabbricazione resistenza ad alte temperature per l'intero componente assemblato durante i trattamenti termici. Per aumentare le prestazioni in condizioni di esercizio la lamina viene ricoperta da uno strato di film lubrificante che consente di ridurre gli attriti allo spunto, quindi in fase di arresto e di avvio. Altre applicazioni, tuttavia, prevedono l'utilizzo del rame nel cuscinetto a lamina in quanto consente, a differenza di altri materiali di ottenere ottime proprietà di smorzamento Coulombiano [20].

7.2 *Processo di formatura per cuscinetti conformi a lamina*

È possibile ottenere per formatura la lamina del Bump foil con due tipologie di utensile: piano o curvilineo per formatura. È importante prestare adeguata attenzione alle proprietà resistenziali dell'utensile in quanto incidono sulle proprietà del componente.

La prima tra le due tipologie di utensili viene fabbricata per formatura partendo da piastre in acciaio inox 15-5 PH temprate e rettificate. Prima la parte superiore e quella inferiore vengono rettificate in piano e parallele, quindi le due parti vengono tagliate e modellate tramite il processo di elettroerosione a filo (EDM).[\[21\]](#) In alternativa, si possono utilizzare lavorazioni convenzionali, ad esempio la fresatura, anche se il processo di EDM garantisce un taglio comodo e accurato dei modelli di stampo per il Bump foil. Il processo EDM si traduce in una finitura superficiale elevata, necessaria per garantire una superficie liscia per il Bump foil. In questo caso bisogna assicurare per lo stampo una finitura superficiale maggiore rispetto a quella che si desidera per il Bump foil. Con le tecnologie attuali è possibile raggiungere una rugosità pari Ra di 0,2. [\[20\]](#)

Il risultato del processo di formatura su utensile è mostrato in fig. 7.1:



Figura 7.1 - Lamina del Bump foil dopo formatura

Dal punto di vista geometrico è fondamentale specificare le dimensioni dell'utensile di formatura, alle quali seguiranno in negativo quelle del Bump foil, con una determinata rugosità superficiale. Secondo quanto riportato nell'art. [\[21\]](#) ogni Bump presenta una larghezza di 2,54 mm e a profondità o altezza di 0,51 mm e sono separati da un segmento piatto con una lunghezza di 0,6 mm come mostrato in fig. 7.2.

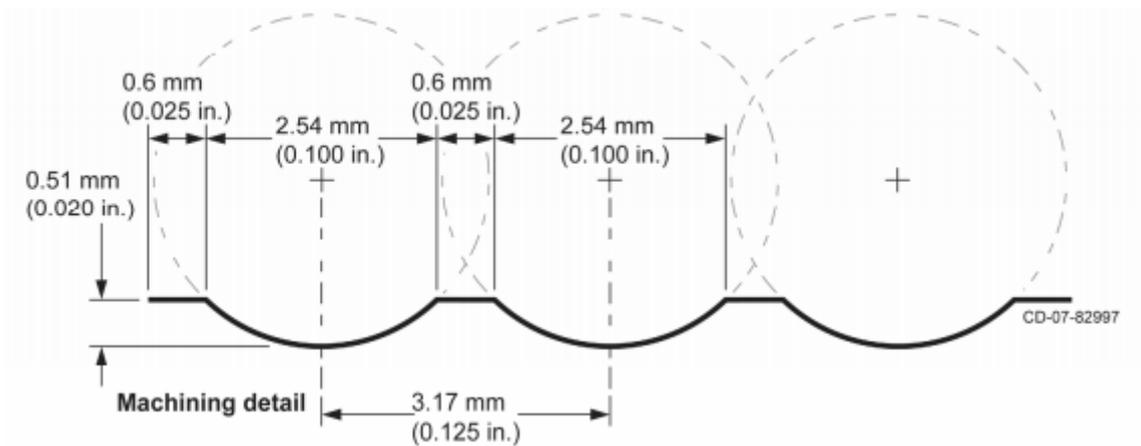


Figura 7.2 - Dimensioni del Bump foil

In pratica, la superficie superiore della lamina segue il contorno della matrice con le protuberanze indipendentemente dallo spessore della pellicola utilizzata. Nell'articolo citato è previsto per la fabbricazione di questi cuscinetti che sia utilizzata una superlega a base di nichel induribile per precipitazione a grana fine. [21] Sia per il Bump foil che per il Top foil si utilizzano delle lamine in genere di spessore pari a 0.1 mm. Se, tuttavia, le lamine sono fabbricate con uno spessore più elevato questo andrà ad incidere maggiormente in un incremento di rigidità a discapito della conformità. La rigidità, come si vedrà successivamente, è dettata principalmente dallo spessore della lamina e per questo motivo dal punto di vista della fabbricazione è il principale parametro da considerare. D'altra parte, la conformazione geometrica del Bump foil ha un notevole impatto sulle caratteristiche del cuscinetto e per questo è necessario che si sviluppi una opportuna modellazione.

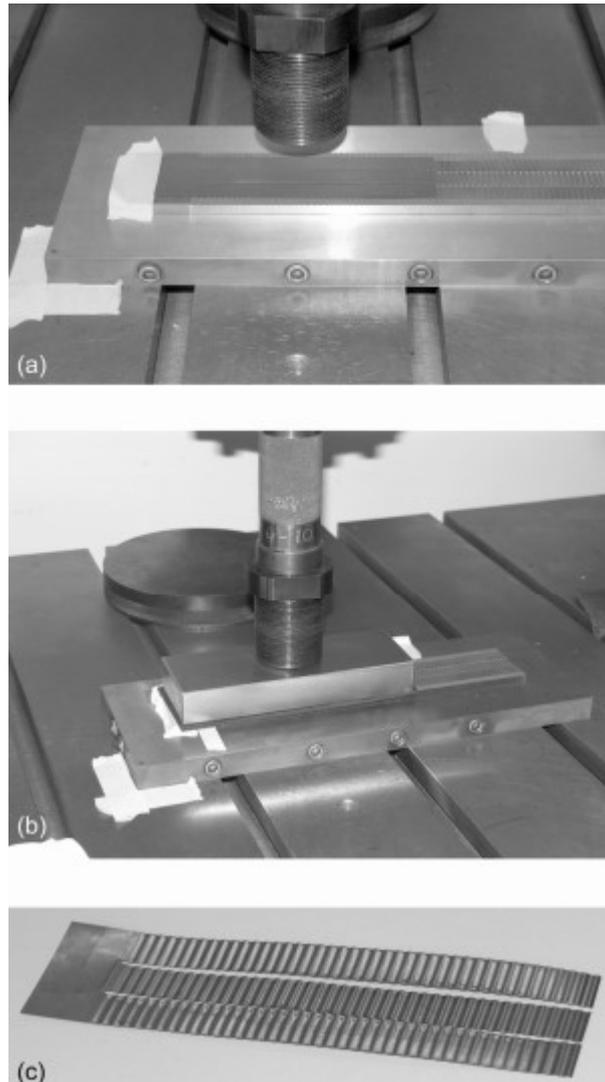


Figura 7.3 - a) Bump foil posizionato sull'utensile, b) fase di formatura del Bump foil, c) Bump foil dopo il processo

In seguito all'individuazione dell'utensile da utilizzare, segue il processo di formatura della lamina del Bump foil. La lamina viene inizialmente tagliata in direzione longitudinale come mostrato in fig. 7.3a. Questo consente di ottenere più strisce di lamine da uno stesso grezzo di partenza. Successivamente con nastro adesivo viene posizionata sull'utensile (o sullo stampo di formatura) affinché non si verifichi lo spostamento del grezzo (fig. 7.4b). Infine, la pressa esercita una forza in direzione normale alla lamina creando quindi le protuberanze sul Bump foil. È importante determinare quale deve essere la forza di pressione da esercitare per deformare il pezzo senza che quest'ultimo venga danneggiato. Dall'analisi dell'articolo [21] che riporta i risultati ottenuti da test eseguiti su lamine si evince che partendo da una forza di 133kN fino ad una forza di 177 kN la precisione della deformazione della lamina aumenta. Per valori di forza normale superiori a 177 kN non si notano miglioramenti per la forma dei Bump della lamina.

La fase successiva del processo prevede la piegatura della lamina in modo tale da conferirgli la forma circolare. Questo processo viene eseguito sia per il Top foil che per il Bump foil. Tuttavia, data la geometria desiderata del Bump foil, che presenta numerose protuberanze, non è possibile utilizzare un rullo liscio a manovella poiché potrebbe modificare la geometria dei singoli Bump della lamina alterandone le proprietà. Questa tecnica viene quindi utilizzata per il Top foil essendo una lamina liscia priva di protuberanze. Per questo motivo, si avvolge il Bump foil attorno ad un mandrino e ciò consente non solo di ovviare a questo problema, ma anche di conferire alla lamina la forma circolare desiderata. In questa fase il componente dal punto di vista termico è ancora nello stato ricotto per cui ne consegue una facile piegatura in quanto non abbiamo un materiale incrudito.

In alternativa si possono unire le due fasi di formatura e piegatura utilizzando un utensile curvilineo. Questo stampo consente di ottenere la curvatura richiesta e le caratteristiche desiderate di entrambe le lamine, come mostrato in fig. 7.4. Tale tecnica ha lo svantaggio di non essere customizzabile in quanto non è possibile variare le dimensioni dei Bump o del diametro della lamina ottenuta. Tuttavia, utilizzando uno stampo con rugosità adeguata ($R_a 0.2$) è possibile ottenere dei componenti molto accurati.

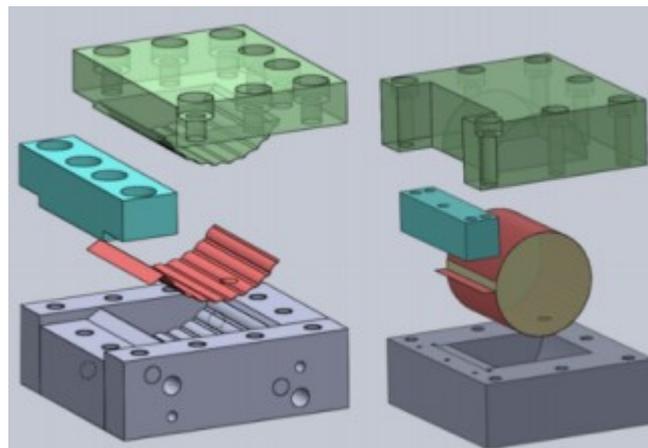


Figura 7.4 - Stampo per Bump foil e Top foil

Dopo aver reso la lamina circolare, è necessario trattare il componente per conferirgli proprietà resistenziali adeguate all'uso. In generale il rafforzamento della lamina o dell'intero complessivo si ottiene mediante i trattamenti termici ed in particolare attraverso la precipitazione durante le varie fasi di tempra, tipicamente di carburi. Le proprietà del materiale finale ottenuto dopo trattamenti termici così dipendono dalla dimensione del grano, dalla dimensione del precipitato e dalla distribuzione dei carburi sul bordo così come dalla chimica del bordo del grano. Dato che le lamine, in particolare la lamina del Bump foil, funzionano come molle, i trattamenti termici per cuscinetti a lamina sono generalmente selezionati per massimizzare le proprietà della molla (modulo elastico) e la fatica forza. [16] Per ottenere le proprietà della molla alla massima temperatura, il produttore consiglia

il cosiddetto "Triplo trattamento termico". Questo processo termico prevede tre step di riscaldamento intervallati da fasi di raffreddamento a temperatura ambiente in aria. [21]

Questo trattamento termico include la ricottura in soluzione a 1150 ° C solitamente condotto al mulino prima del taglio e della formatura della lamina, seguito da una stabilizzazione di lunga durata (24 ore) con un trattamento termico 843 ° C ed il processo di trattamento termina con fase termica di precipitazione lungo (20 ore) condotta a 704 ° C [21]. La conformazione della lamina risulta sottile e ciò si traduce in un rapporto tra superficie e volume relativamente ampio rispetto ad altre forme come la barra. Pertanto, durante il trattamento termico, è necessario prestare attenzione per evitare un'eccessiva ossidazione del foglio da parte dell'atmosfera del forno poiché ciò potrebbe portare all'esaurimento della composizione di componenti minori ma importanti nella lega. L'ossidazione viene contrastata attraverso i trattamenti termici sottovuoto o in ambienti inerti. In alternativa, per ridurre i costi dei trattamenti termici a discapito delle proprietà meccaniche finali, si preferisce abbassare la temperatura di trattamento termico ovviando così al fenomeno indesiderato dell'ossidazione. Infine, si suggerisce vivamente che le lamine del Bump foil subiscano i processi di trattamento termico utilizzando un pergolato posizionato comodamente all'interno della Bump durante il trattamento termico in modo tale da prevenire il cedimento e mantenere la forma del Bump in maniera accurata. [21]

Al termine del trattamento termico, è necessario unire i due componenti (Top foil e Bump foil) per evitare un movimento relativo tra le due parti. Un estremo delle due lamine viene di conseguenza saldato ad un manicotto esterno che funge da struttura portante dell'intero cuscinetto. La saldatura avviene attraverso la tecnica di saldatura a punti che per quanto accurata va ad alterare le proprietà meccaniche del componente ottenute in seguito ai trattamenti termici nella zona del bordo. Varia in questo modo lo stato metallurgico e termico nella zona di saldatura.

7.3 Processi di formatura per cuscinetto reggispinta a lamina

Il processo di fabbricazione del cuscinetto reggispinta a lamina dipende dalle modalità di progettazione adottate durante le fasi del Design. Tipicamente, i cuscinetti reggispinta sono costituiti da un numero discreto di cuscinetti reggispinta, ciascuno con una forma arcuata in cui una lamina superiore si estende circonferenzialmente con diametri interni ed esterni costanti, come mostrato in fig. 7.5. Ogni porzione discreta di cuscinetto è distanziata dalla successiva da un tratto costante che rappresenta un tratto di transizione da una porzione all'altra. Dato che questa configurazione non consente un processo continuo di formatura efficace, gli spazi tra una porzione e l'altra sono ottenuti per assemblaggio. Per questo motivo una lamina formata è soggetta a lavorazioni meccaniche non

convenzionali, ad esempio l'elettroerosione a filo che consente di seguire la geometria del pezzo grezzo.

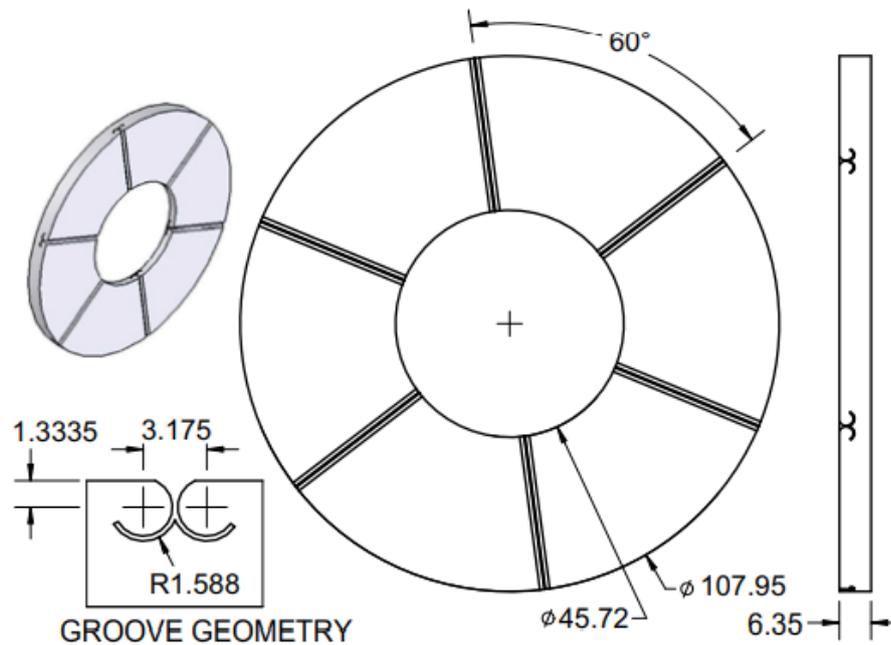


Figura 7.5 - Supporto per le lamine del cuscinetto ad aria

Una piastra di supporto del cuscinetto, come mostrato in fig. 7.5, viene prima lavorata e rettificata in superficie per produrre facce piane e parallele. Le fessure ad arco parziale necessarie per trattenere i componenti della lamina vengono quindi lavorate mediante elettroerosione a filo. [16]

Il Bump foil è caratterizzato da diverse fessure che lo separano in cinque strisce individuali, come mostrato in fig. 7.6. La divisione in anelli concentrici consente di mitigare gli effetti della variazione della velocità superficiale, di temperatura e di disallineamento.

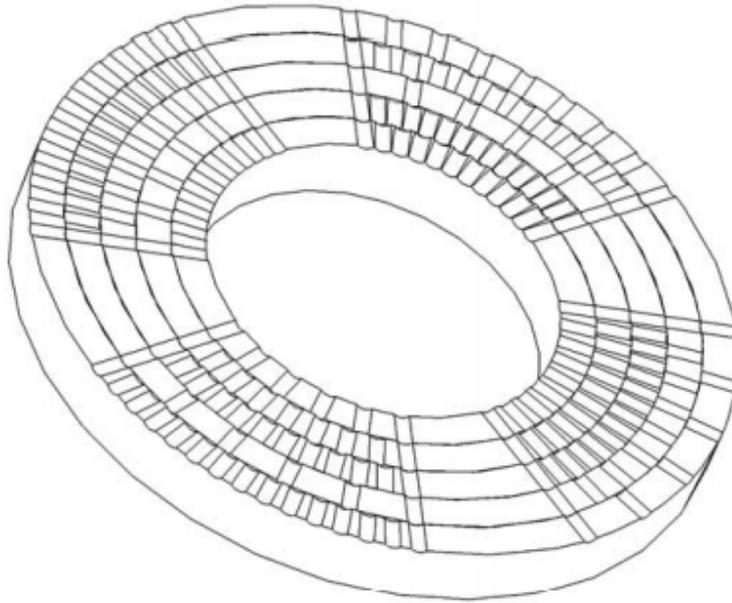


Figura 7.6 – Disegno del Bump foil con anelli concentrici indicizzati

Nonostante la configurazione del cuscinetto con strisce circolari non sia di banale produzione, c'è una discreta libertà di fabbricazione dei Bump foil, elemento delicato del cuscinetto a lamina d'aria. Generalmente, si preferiscono stampi lavorati convenzionalmente e poi pressati in formatura su un utensile di formatura piuttosto che processi diretti di stampaggio o formatura con pressa idraulica. Ciò si verifica poiché attualmente non si produce un elevato numero di tali componenti, perciò per produzioni al dettaglio è sufficiente sfruttare processi che combinano minore velocità di produzione e maggiore precisione in lavorazione. [16]

Gli spazi vuoti del Bump foil sono disposti sullo stampo per produrre la disposizione bump desiderata e uno strato spesso 1,6 mm di politetrafluoroetilene (PTFE) viene posizionato sopra il foglio, con uno spesso blocco in acciaio in appoggio sulla sommità come mostrato in fig. 7.7. Questo strato viene quindi inserito sotto una pressa idraulica manuale e circa 20 MPa di pressione viene applicato per formare i Bump foil. [16]



Figura 7.7 – Processo di formatura del Bump foil

La fig. 7.8 mostra il Bump foil e il PTFE dopo la formatura, dove è stato riscontrato che il comportamento a flusso freddo del PTFE produce Bump di forma migliore rispetto ai fogli di poliuretano e gomma [16]. Questo materiale garantisce una elevata precisione, pur non prendendo in considerazione il ritorno elastico dovuto agli effetti termici. Per questo di solito si preferisce l'Inconel (acciaio inossidabile a base di nichel) che ovvia a questo problema.



Figura 7.8 – Anelli del Bump foil e stampo del Bump foil

Le fig. 7.9 mostra il prototipo di cuscinetto a lamina d'aria dopo l'assemblaggio dei componenti. Per garantire la corretta adesione fra i componenti viene esercitata una pressione di compressione di 2kPa. [16]



Figura 7.9 – Cuscinetto ad aria assemblato e supporto separato

La fig. 7.10 mostra l'intero complessivo dopo il processo di trattamento termico eseguito sul pezzo assemblato. Il trattamento termico è un passaggio fondamentale nella fabbricazione della lamina. Il trattamento termico viene scelto ovviamente in funzione del materiale del pezzo da lavorare, con lo scopo di aumentare le resistenze del materiale. D'altra parte, il trattamento termico deve anche prevenire che le tensioni residue possano portare il pezzo a danneggiarsi in condizioni di esercizio. Per l'acciaio inossidabile in particolare, si richiede una ricottura di distensione, poiché l'acciaio inossidabile è fornito sul mercato già temprato. [20] Dopo le fasi finali di formatura degli elementi in lamina, metallo le giunzioni sono saldate con saldatura a punti nelle fessure immediatamente adiacenti tra un anello e il successivo come mostrato in fig. 7.9.



Figura 7.10 – Cuscinetto ad aria dopo il trattamento termico

8. Modellazione numerica Top foil

8.1 Introduzione

Lo scopo della modellazione numerica del Top Foil del cuscinetto a lamina d'aria è fornire un modello semplificato che consenta di valutare gli effetti dovuti alla rotazione dell'albero sul Top Foil e di conseguenza comprendere come esso sia dipendente dalla forza che l'albero esercita su di esso. Gli orifizi di alimentazione si trovano tra i Bump lungo la direzione circonferenziale a causa del vincolo geometrico del Bump foil e dei tubi di alimentazione dell'aria. Quando si trascura l'effetto di flessione o effetto piastra della lamina superiore, i punti della griglia in cui si trovano gli orifizi idrostatici considerano deflessioni irrealisticamente grandi della lamina superiore. Per questo motivo si studia la deflessione del Top Foil come conseguenza del carico in condizioni di esercizio.

8.2 Descrizione Modello

La modellazione del Top Foil è ottenuta attraverso un modello di trave unidimensionale della lamina superiore del cuscinetto, corrispondente alla lamina più interna dell'Air Foil Bearings [5]. Dato che si sta considerando un modello unidimensionale è necessario ipotizzare che il cuscinetto sia suddiviso in lamine di spessore piccolo e trascurabile lungo la direzione assiale e indicizzate col pedice j come rappresentato in fig. 8.1. Per semplicità di modellazione, si considera inoltre che la deflessione di una singola lamina 1D, ottenuta suddividendo il cuscinetto lungo l'asse non abbia impatti sulle deflessioni delle lamine adiacenti. Si suppone inoltre che la deflessione della lamina superiore in ciascun punto nodale sia indipendente l'uno dall'altro.

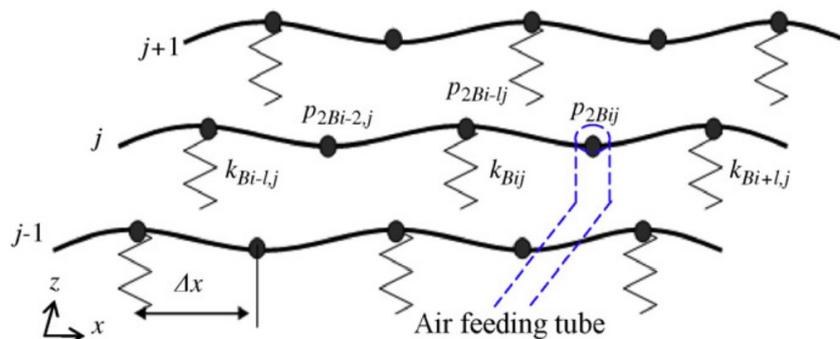


Figura 8.1 – Suddivisione assiale del Top Foil

Le lamine di spessore infinitesimo del Top Foil si considerano suddivise in tratti lineari in modo tale da semplificare l'analisi. Inoltre, in condizioni operative la trave si considera caricata in direzione radiale, ossia in direzione ortogonale alla lamina, con un carico distribuito dovuto alle forze di pressione generate durante la rotazione dell'albero rotante. L'ipotesi di una distribuzione uniforme del carico consente di calcolare la deflessione della lamina superiore, che si ipotizza essere l'unica deformazione della lamina, escludendo in questo modo deviazioni angolari. [5]

La pressione che agisce sul Top Foil spinge la lamina superiore verso il Bump Foil e questa azione è contrastata dalla rigidità del Bump Foil a cui consegue la deflessione del Top Foil. La rigidità del Bump è assunta equivalente ad una molla puntuale e agente sui singoli punti nodali in cui vi è contatto tra le due lamine. Ad ogni molla equivalente è associato un indice di punto nodale $k_{i\text{-esimo}, J\text{-esimo}}$.

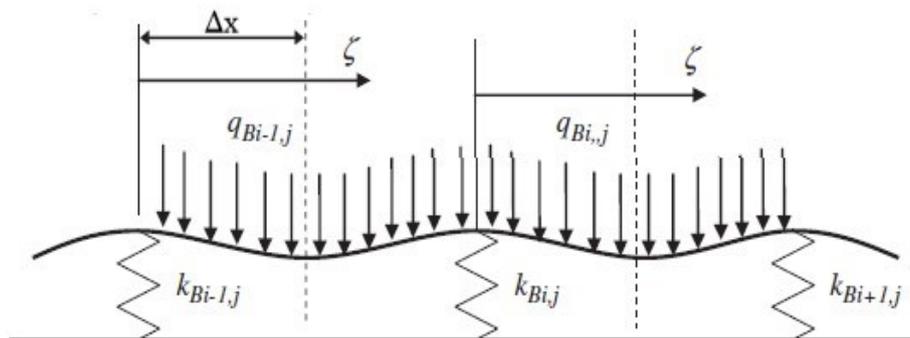


Figura 8.2 – Modello lineare Top Foil

La distribuzione del carico $q_{B_{i,j}}(z)$ per unità di lunghezza è assunta come funzione parabolica della coordinata lineare z (fig. 8.2):

$$q_{B_{i,j}}(z) = (a_{B_{i,j}}z^2 + b_{B_{i,j}}z + c_{B_{i,j}}) \Delta z$$

Il tratto di Top Foil compreso tra due bump consecutivi è suddiviso in N parti individuate da N+1 nodi. I coefficienti $a_{B_{i,j}}$, $b_{B_{i,j}}$, $c_{B_{i,j}}$ sono dipendenti dalla pressione puntuale nei nodi N+1. La scelta del numero N di suddivisioni determina il grado di accuratezza del modello semplificato.

In questa trattazione si esamina un modello A in cui si assume N pari a 2 e un modello B in cui si assume N pari a 4.

8.3 Modello A

Il modello A prevede che il segmento del Top Foil presente tra due bump consecutivi sia suddiviso in due parti e che quindi sia identificato da 3 nodi come mostrato in fig. 8.3. [5]

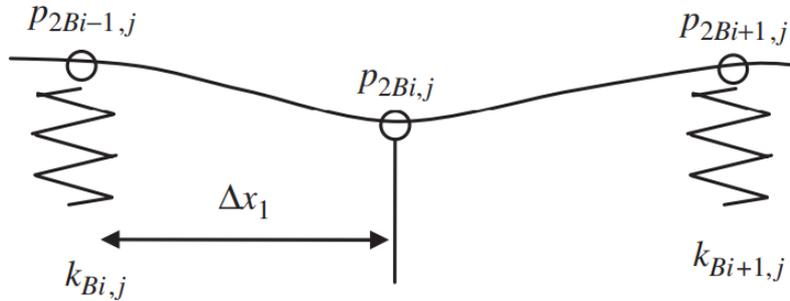


Figura 8.3 – Modello A del Top Foil

A seguito delle ipotesi precedentemente esplicitate, i nodi sono indicizzati attraverso i pedici i, j e ad ogni nodo è associata un pressione puntuale $p_{2B_{i-esima}, j-esima}$. Per il modello A si assumono le seguenti espressioni dei coefficienti $a_{B_{i,j}}$, $b_{B_{i,j}}$, $c_{B_{i,j}}$ [5]:

$$a_{B_{i,j}} = \frac{p_{2B_{i+1},j} + 2p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i-1},j}}{2\Delta x_1^2}$$

$$b_{B_{i,j}} = \frac{4p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i+1},j} - 3p_{2B_{i-1},j}}{2\Delta x_1}$$

$$c_{B_{i,j}} = p_{2B_{i-1},j}$$

In cui Δx_1 è la distanza tra due punti nodali, ovvero un mezzo della distanza tra due bump consecutivi.

Per studiare la deflessione, ogni segmento del Top Foil ($0-2\Delta x_1$) è modellato come una trave incastrata alle estremità su entrambi i lati ma libere di muoversi lungo la direzione orizzontale. Supponendo che entrambi i supporti per Bump siano rigidi, la deflessione locale del Top Foil o cedimento, $v_{B_{i,j}}$, può essere risolto sfruttando l'equazione di Eulero-Bernoulli, applicata per una trave snella come nel caso considerato e di cui si va a studiare l'equazione della linea elastica:

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = (a_{B_{i,j}}\zeta^2 + b_{B_{i,j}}\zeta + c_{B_{i,j}}) \Delta z$$

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{3}a_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}b_{B_{i,j}}\zeta^2 + c_{B_{i,j}}\zeta + C_1\right) \Delta z$$

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{12}a_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}b_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}c_{B_{i,j}}\zeta^2 + C_1\zeta + C_2\right) \Delta z$$

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{60}a_{B_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}b_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}c_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}C_1\zeta^2 + C_2\zeta + C_3\right) \Delta z$$

$$v_{B_{i,j}} = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{360}a_{B_{i,j}}\zeta^6 + \frac{1}{120}b_{B_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}c_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}C_1\zeta^3 + \frac{1}{2}C_2\zeta^2 + C_3\zeta + C_4\right) \frac{\Delta z}{EI}$$

Tutti i calcoli inerenti il modello A del Top foil sono esplicitati nell'[appendice A](#). Integrando l'equazione di Eulero-Bernoulli si ottiene il cedimento del Top Foil in cui compare il modulo di Young E e il momento di inerzia I. Per conoscere l'espressione della linea elastica applicata al segmento tra due Bumb è necessario applicare le condizioni al contorno, che dipendono dai vincoli assunti per le estremità del segmento considerato.

Nel caso specifico, si è assunto che il segmento del Top Foil sia incastrato alle estremità e ciò implica uno spostamento verticale nullo e una rotazione nulla.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{B_{i,j}} = \left(\frac{1}{360}a_{B_{i,j}}\zeta^6 + \frac{1}{120}b_{B_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}c_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}C_1\zeta^3 + \frac{1}{2}C_2\zeta^2 + C_3\zeta + C_4\right) \frac{\Delta z}{EI} \\ v_{B_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0 \\ v'_{B_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = 0 \\ v_{B_{i,j}}(2\Delta x_1) = 0 \\ v'_{B_{i,j}}(2\Delta x_1) = 0 \end{array} \right.$$

Imponendo le condizioni al contorno, si ottiene così l'equazione della linea elastica note le seguenti costanti:

$$C_1 = -\frac{8}{15}a_{B_{i,j}}\Delta x_1^3 - \frac{3}{5}b_{B_{i,j}}\Delta x_1^2 - c_{B_{i,j}}\Delta x_1;$$

$$C_2 = \frac{4}{15}a_{B_{i,j}}\Delta x_1^4 + \frac{4}{15}b_{B_{i,j}}\Delta x_1^3 - \frac{1}{3}c_{B_{i,j}}\Delta x_1^2;$$

$$C_3 = 0;$$

$$C_4 = 0;$$

Di rilevante interesse è la deflessione nel punto intermedio, in quanto in questo punto si ottiene il valore massimo. Ne risulta quindi:

$$v_{B_{i,j}}(\Delta x_1) = \left(\frac{17}{360} a_{B_{i,j}} \Delta x_1^6 + \frac{1}{24} b_{B_{i,j}} \Delta x_1^5 + \frac{1}{24} c_{B_{i,j}} \Delta x_1^4 \right) \frac{\Delta z}{EI}$$

$$v_{B_{i,j}}(\Delta x_1) = \frac{\Delta x_1^4}{360} \cdot \frac{\Delta z}{EI} \left(p_{2B_{i+1,j}} + 13 p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i-1,j}} \right)$$

Il secondo parametro che definisce il comportamento in condizioni di esercizio è la deflessione del Bump Foil $\delta_{B_{i,j}}$. Questo parametro può essere calcolato dall'equazione dinamica del Bump Foil:

$$f_{B_{i,j}} = m_{foil} \delta''_{B_{i,j}} + C_{B_{i,j}} \delta'_{B_{i,j}} + k_{B_{i,j}} \delta_{B_{i,j}}$$

L'inerzia del Top Foil viene trascurata a causa della ridotta massa che lo caratterizza mentre i coefficienti $C_{B_{i,j}}$ e $k_{B_{i,j}}$ sono rispettivamente la rigidità strutturale e lo smorzamento strutturale. La letteratura offre conoscenze limitate riguardanti le caratteristiche strutturali, tuttavia alcuni studi hanno portato a definire lo smorzamento come invariante nella gamma delle alte frequenze di esercizio. La formula utilizzata per il calcolo dello smorzamento strutturale è: $C_{B_{i,j}} = \frac{k_{B_{i,j}} \gamma}{\omega}$ dove γ è il coefficiente di viscosità nel mezzo e rappresenta il coefficiente di dissipazione energetica del sistema [5].

Per il calcolo della forza agente sul Bump Foil è necessario integrare l'espressione del carico distribuito a cavallo del Bump Foil fra due segmenti successivi. Per questo motivo è necessario considerare il carico distribuito $q_{B_{i,j}}(\zeta)$ e $q_{B_{i-1,j}}(\zeta)$:

$$f_{B_{i,j}} = \int_0^{\Delta x_1} q_{B_{i,j}}(\zeta) d\zeta + \int_{\Delta x_1}^{2\Delta x_1} q_{B_{i-1,j}}(\zeta) d\zeta$$

Eseguendo l'integrazione sui due tratti si ottiene che la forza risulta essere:

$$f_{B_{i,j}} = \Delta z \left(\frac{1}{3} a_{B_{i,j}} \Delta x_1^3 + \frac{1}{2} b_{B_{i,j}} \Delta x_1^2 + c_{B_{i,j}} \Delta x_1 + \frac{7}{3} a_{B_{i-1,j}} \Delta x_1^3 + \frac{3}{2} b_{B_{i-1,j}} \Delta x_1^2 + c_{B_{i-1,j}} \Delta x_1 \right)$$

$$f_{B_{i,j}} = \Delta z \Delta x_1 \left(\frac{p_{2B_{i+1,j}} - 2 p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i-1,j}}}{6} + \frac{4 p_{2B_{i,j}} - p_{2B_{i+1,j}} - 3 p_{2B_{i-1,j}}}{4} + p_{2B_{i-1,j}} + \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7(p_{2B_{i-1,j}} - 2p_{2B_{i-2,j}} + p_{2B_{i-3,j}})}{6} + \frac{3(4p_{2B_{i-2,j}} - p_{2B_{i-1,j}} - 3p_{2B_{i-3,j}})}{4} \Big) = \\
& = \frac{\Delta z \Delta x_1}{12} \left(-p_{2B_{i-3,j}} + 8p_{2B_{i-2,j}} + 10p_{2B_{i-1,j}} + 8p_{2B_{i,j}} - p_{2B_{i+1,j}} \right);
\end{aligned}$$

La deflessione del Bump Foil $\delta_{B_{i,j}}$ è calcolata per ogni Bump dalla legge di Hooke:

$$\delta_{B_{i,j}} = \frac{f_{B_{i,j}}}{k}$$

dove il Bump foil è caratterizzato da una costante elastica k per ogni Bump. Ciò significa che viene eseguita una certa semplificazione del comportamento del Foil. Per stabilire la deflessione della lamina superiore, il cedimento $v_{B_{i,j}}$ è combinato con un'interpolazione della deflessione del bump foil $\delta_{B_{i,j}}$. Questa interpolazione dipende dalla posizione della lamina superiore, tra due Bump successivi $B_{i,j}$ e $B_{i+1,j}$. Quindi, l'interpolazione può essere modellata come segue [5]:

$$\delta_{interp} = \left(1 - \frac{\zeta}{2\Delta x_1}\right) \delta_{B_{i,j}} + \frac{\zeta}{2\Delta x_1} \delta_{B_{i+1,j}}$$

Particolare attenzione merita la regione del bordo della lamina superiore richiede attenzione. Nel modello computazionale della deflessione del Top foil, ogni segmento della lamina superiore sostenuto da ogni molla elastica subisce una deflessione indipendente. Pertanto, la deflessione della lamina superiore nella regione del bordo è sempre zero a causa della condizione al contorno con pressione ambiente sul bordo del cuscinetto. Questo può portare a degli errori di valutazione nel modello poiché a causa dell'effetto membrana sempre esistente della lamina superiore e del Bump elastico come struttura continua in direzione assiale, la deflessione della lamina superiore ai bordi non può essere nulla in condizioni operative. Una semplice correzione al modello nelle zone del bordo può essere un'estrapolazione lineare della deflessione della lamina superiore utilizzando una pendenza calcolata utilizzando due deflessioni della lamina superiore appartenenti a punti nodali all'interno del bordo. [5]

8.4 Modello B

Un' altra configurazione computazionale per il calcolo della deflessione prevede che il segmento di lamina presente tra due bump consecutivi sia suddiviso in 4 segmenti equivalenti ($N=4$) e di conseguenza il numero di nodi computazionali è pari a 5, come mostrato in Fig 8.4 [5]

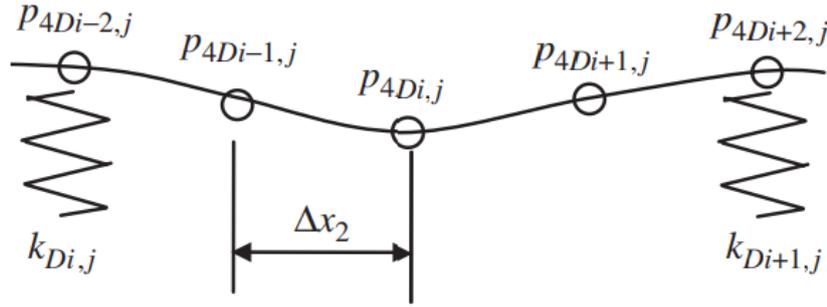


Figura 8.4 – Indicizzazione Modello B del Top foil

Se la funzione di deflessione del Top Foil è la stessa del Modello A, allora la pressione nei nodi nel Modello B può essere espressa in funzione del Modello A come segue:

$$p_{2B_{i,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i,j}} + \frac{p_{4D_{i+1,j}} + p_{4D_{i-1,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2$$

$$p_{2B_{i+1,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i+2,j}} + \frac{p_{4D_{i+3,j}} + p_{4D_{i+1,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2$$

$$p_{2B_{i-1,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i-2,j}} + \frac{p_{4D_{i-1,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2$$

$$\Delta x_1 = 2 \cdot \Delta x_2$$

Tutti i calcoli inerenti il modello A del Top foil sono esplicitati nell'[appendice A](#). Rieseguendo il procedimento in maniera analoga al modello A, è possibile trovare la funzione del carico distribuito in relazione alla pressione applicata nei singoli nodi:

$$q_{D_{i,j}}(\zeta) = \left(a_{D_{i,j}} \zeta^2 + b_{D_{i,j}} \zeta + c_{D_{i,j}} \right) \Delta z$$

$$a_{D_{i,j}} = \frac{p_{4D_{i+3,j}} + 2 p_{4D_{i+2,j}} - p_{4D_{i+1,j}} - 4 p_{4D_{i,j}} - p_{4D_{i-1,j}} + 2 p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{32\Delta x_2^2}$$

$$b_{D_{i,j}} = \frac{-p_{4D_{i+3,j}} - 2 p_{4D_{i+2,j}} + 3 p_{4D_{i+1,j}} + 8 p_{4D_{i,j}} + p_{4D_{i-1,j}} - 6 p_{4D_{i-2,j}} - 3 p_{4D_{i-3,j}}}{16\Delta x_2}$$

$$c_{D_{i,j}} = \frac{p_{4D_{i-1,j}} + 2 p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{4}$$

Si calcola inoltre deflessione per il segmento di lamina e il suo valore nel punto intermedio applicando le medesime condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{D_{i,j}} = q_{D_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{360} a_{D_{i,j}} \zeta^6 + \frac{1}{120} b_{D_{i,j}} \zeta^5 + \frac{1}{24} c_{D_{i,j}} \zeta^4 + \frac{1}{6} C_1 \zeta^3 + \frac{1}{2} C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta + C_4 \right) \frac{\Delta z}{EI} \\ v_{D_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0 \\ v'_{D_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = 0 \\ v_{D_{i,j}}(4\Delta x_2) = 0 \\ v'_{D_{i,j}}(4\Delta x_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$C_1 = -\frac{64}{15} a_{D_{i,j}} \Delta x_2^3 - \frac{12}{5} b_{D_{i,j}} \Delta x_2^2 - 2c_{D_{i,j}} \Delta x_2;$$

$$C_2 = \frac{64}{15} a_{D_{i,j}} \Delta x_2^4 + \frac{32}{15} b_{D_{i,j}} \Delta x_2^3 - \frac{4}{3} c_{D_{i,j}} \Delta x_2^2;$$

$$v_{D_{i,j}}(2\Delta x_2) = \left(\frac{136}{45} a_{D_{i,j}} \Delta x_2^6 + \frac{4}{3} b_{D_{i,j}} \Delta x_2^5 + \frac{2}{3} c_{D_{i,j}} \Delta x_2^4 \right) \frac{\Delta z}{EI}$$

$$v_{D_{i,j}}(2\Delta x_2) = \frac{\Delta x_2^4}{90} \cdot \frac{\Delta z}{EI} \left(p_{4D_{i+3,j}} + 2 p_{4D_{i+2,j}} + 14 p_{4D_{i+1,j}} + 26 p_{4D_{i,j}} + 14 p_{4D_{i-1,j}} + 2 p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}} \right)$$

Analogamente al modello A è possibile trovare la funzione della forza ottenuta dall'integrazione della distribuzione del carico agente su due segmenti del Top Foil successivi. In particolare, è necessario tener conto della corretta corrispondenza di indici tra i due modelli, come mostrato in fig. 8.5

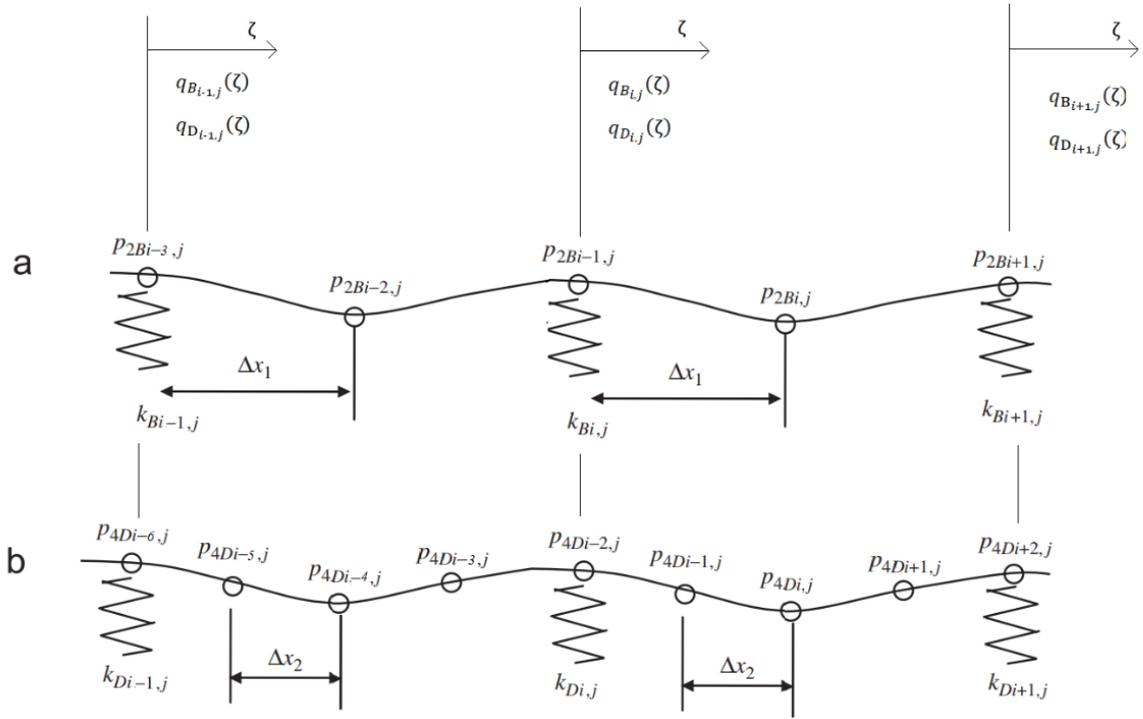


Figura 8.5 – Confronto Modello A e Modello B

Di conseguenza la forza in funzione della pressione per il modello B è pari a:

$$f_{D_{i,j}} = \int_0^{2\Delta x_2} q_{D_{i,j}}(\zeta) d\zeta + \int_{2\Delta x_1}^{4\Delta x_2} q_{D_{i-1,j}}(\zeta) d\zeta$$

$$f_{D_{i,j}} = \Delta z \left(\frac{8}{3} a_{D_{i,j}} \Delta x_2^3 + \frac{4}{2} b_{D_{i,j}} \Delta x_2^2 + 2 c_{D_{i,j}} \Delta x_2 + \frac{56}{3} a_{D_{i-1,j}} \Delta x_2^3 + \frac{12}{2} b_{D_{i-1,j}} \Delta x_2^2 + 2 c_{D_{i-1,j}} \Delta x_2 \right)$$

$$f_{D_{i,j}} = \frac{\Delta z \Delta x_2}{24} \left(-p_{4Di-7,j} - 2 p_{4Di-6,j} + 7 p_{4Di-5,j} + 16 p_{4Di-4,j} + 18 p_{4Di-3,j} + 20 p_{4Di-2,j} + 18 p_{4Di-1,j} + \right. \\ \left. + 16 p_{4Di,j} + 7 p_{4Di+1,j} - 2 p_{4Di+2,j} - p_{4Di+3,j} \right)$$

Come nel Modello A si ricava la deflessione del Bump Foil $\delta_{D_{i,j}}$ come interpolazione della deflessione per due Bump consecutivi.

9. Modellazione numerica Bump foil

9.1 Introduzione

La modellazione del cuscinetto a lamina risulta difficile a causa della complessità meccanica del Bump foil connessa alla struttura della lamina superiore; viene ulteriormente aggravata dall' assenza di modelli semplici, sebbene fisicamente realistici, di dissipazione dell'energia tra le superfici a contatto dove è prevalente l'attrito secco. Lo scopo della seguente modellazione numerica del Bump Foil del cuscinetto a lamina d'aria è fornire un modello semplificato che consenta di valutare gli effetti sul Bump Foil della pressione indotta dalla rotazione dell'albero sulla lamina superiore e agente, di conseguenza, sul Bump Foil stesso. Per questo motivo si studia la deflessione del Bump Foil come conseguenza del carico in condizioni di esercizio in un modello semplificato.

9.2 Descrizione del modello

Nel modello semplificato presentato nell'art. [\[18\]](#) di Kai Feng si vogliono concentrare le proprietà del Bump Foil in un una molla equivalente di rigidità k_v , come mostrato in fig. 9.1. Lo scopo di questa trattazione è trovare il valore della rigidità k_v della molla equivalente ad ogni Bump appartenente al Foil. Si assume che la distribuzione di pressione P agente sul Top Foil in fig. 9.2 si concentri in forze $F_p^{i-esima}$ agenti puntualmente sulla sommità di ogni singolo Bump i -esimo.

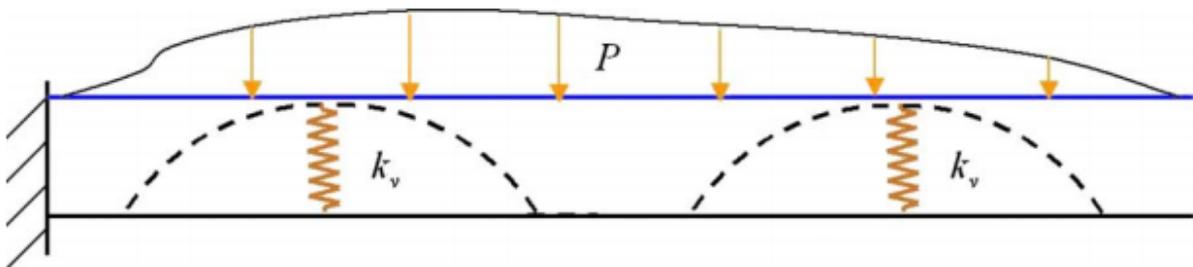


Figura 9.1 – Modello equivalente semplificato del Bump Foil di un cuscinetto a lamina d'aria

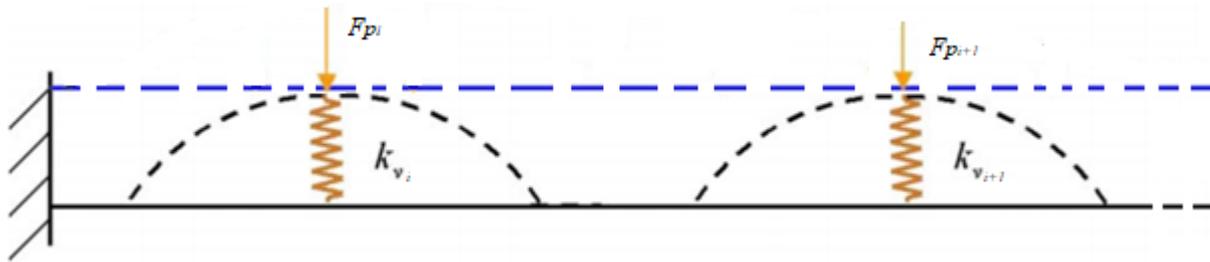


Figura 9.2 - Forze agenti sul Bump i-esimo e sulla molla equivalente

Per trovare il valore della rigidità k_{v_i} si considera il modello di molla equivalente al Bump e perciò sfruttando la legge di Hooke si ottiene che:

$$F_{p_i} = k_{v_i} \cdot \Delta h_i$$

Dove Δh_i corrisponde alla deflessione verticale del Bump e di conseguenza all'accorciamento della molla equivalente con rigidità k_{v_i} .

Ogni Bump i-esimo in questo studio è stato semplificato con due collegamenti rigidi obliqui ed una molla di richiamo di rigidità k_1 orizzontale collegata ad una estremità dei due collegamenti. Per entrambi i collegamenti l'estremo rimanente libero è invece collegato ad una cerniera in modo tale da creare una struttura triangolare in cui al vertice del triangolo, ossia in corrispondenza della cerniera, è applicata la forza F_p , come mostrato in fig. 9.3

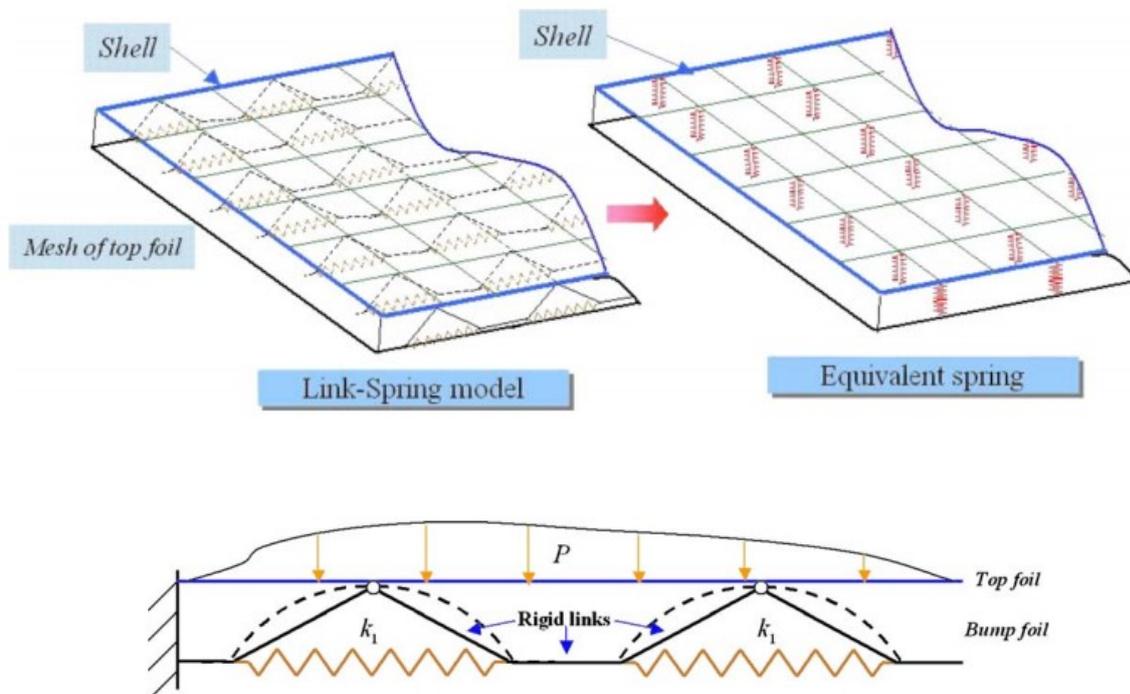


Figura 9.3 – Modello Link-Spring del Bump Foil

Le forze di interazione tra due Bump sono scambiate attraverso i link rigidi di collegamento tra un estremo del Bump i -esimo e il successivo Bump $i+1$ -esimo. Di fatto, il link rigido obliquo del Bump i -esimo, il link rigido di collegamento orizzontale e il link rigido obliquo del Bump $i+1$ -esimo costituiscono un unico corpo rigido incernierato alle estremità e collegato alla base con due molle di richiamo, come mostrato in fig. 9.3. I movimenti relativi, così come le forze di attrito tra le superfici di contatto, si verificavano se i Bump si deformano, [18] ossia quando agisce la forza F_{pi} che induce una deflessione Δh_i che deforma il Bump.

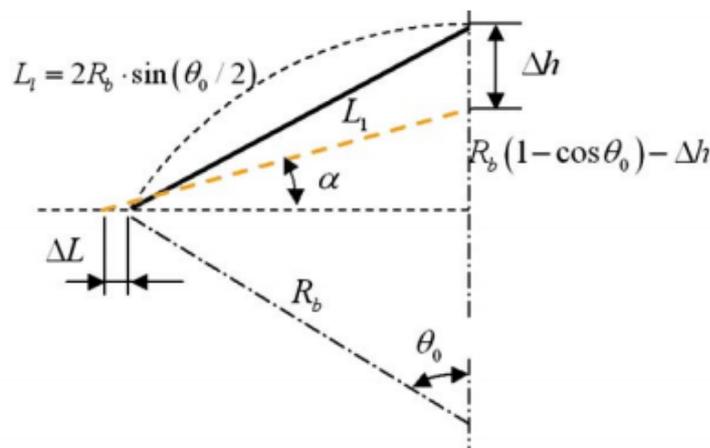


Figura 9.4 - Relazione geometrica tra deflessioni verticali e orizzontali nel modello del Bump

La relazione tra la deflessione verticale del Bump Δh e la deformazione della molla ΔL può essere ricavata dalla geometria dei Bump, poiché i link sono considerati rigidi, come mostrato in fig. 9.4 [18]:

$$\Delta L = \sqrt{\left(2R_b \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^2 - \left(R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h\right)^2} - R_b \sin(\theta_0)$$

$$\tan \alpha = \frac{R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h}{R_b \sin(\theta_0) + \Delta L}$$

Per ottenere il valore di k_v è necessario studiare l'analisi delle forze Diagramma di corpo libero del segmento che collega due Bump consecutivi. Come mostrato in fig. 9.5 le forze in gioco sono:

- F_p forza di pressione verticale agente nel punto più alto del Bump;
- F_s forza di richiamo elastica agente tra le due estremità del Bump;
- F_{beam} componente orizzontale di reazione nel Bump;

- F_R e F_L componenti verticali di reazione nel Bump;
- f forza di attrito di strisciamento tra il Bump e l'alloggiamento del cuscinetto;
- $F_p \cdot \eta$ forza di attrito di strisciamento tra il Bump e il Top Foil;

dove η è il coefficiente di attrito di strisciamento tra il Bump foil e il Top Foil.

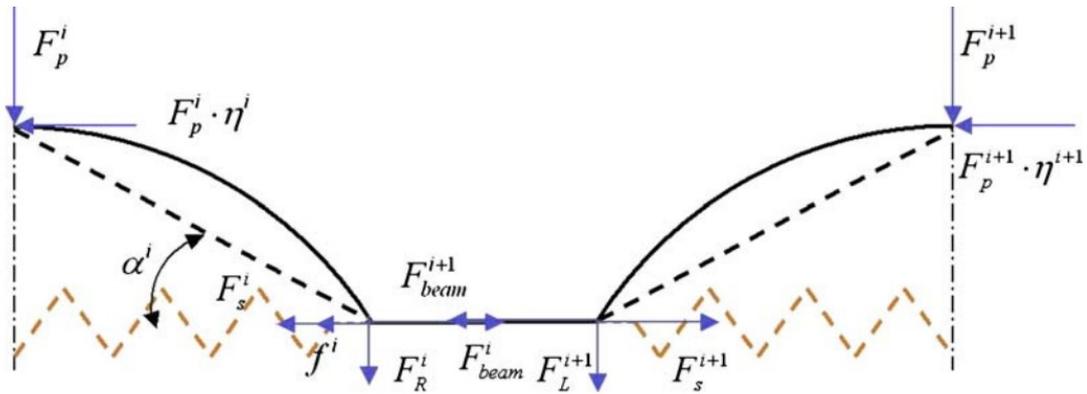


Figura 9.5 - Diagramma di corpo libero del segmento rigido compreso tra due Bump consecutivi

Per comprendere quali forze agiscono sul segmento rigido è opportuno studiare l'equilibrio statico del Bump i-esimo. Studiando il diagramma di corpo libero del singolo Bump in fig. 9.5, l'equilibrio dei momenti intorno ad A e l'equilibrio verticale forniscono i valori di F_L e F_R :

$$F_p^i \cdot \cos \alpha^i - F_R^i \cdot 2 \cos \alpha^i = F_p^i \cdot \eta^i \sin \alpha^i \rightarrow F_R^i = 1/2 F_p^i (1 - \eta^i \tan \alpha^i)$$

$$F_p^i - F_R^i - F_L^i = 0 \rightarrow F_L^i = 1/2 F_p^i (1 + \eta^i \tan \alpha^i)$$

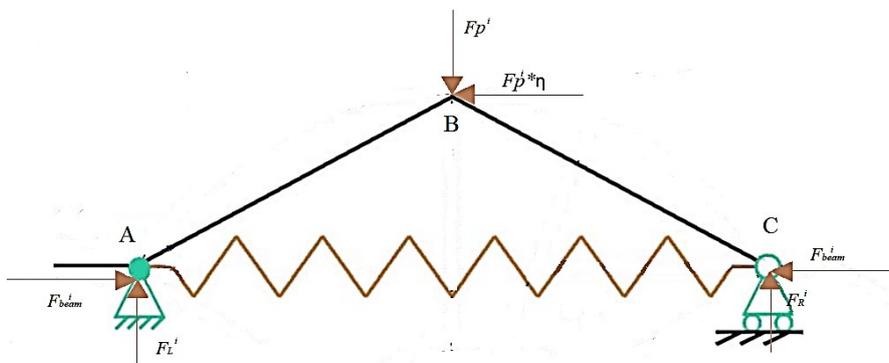


Figura 9.6 - Diagramma di corpo libero del singolo Bump

La forza di attrito f^i è data dal prodotto della forza normale al segmento rigido per il coefficiente di attrito tra il Bump e l'alloggiamento del cuscinetto pari a μ . Quindi si ottiene che:

$$f^i = \mu \cdot (F_R^i + F_L^{i+1})$$

Il verso della forza di attrito f^i è opposto a quello del moto del Bump, supposto in questo caso verso destra.

Per trovare la forza di richiamo elastico F_s^i si fa riferimento alla fig. 9.5 dove ΔL rappresenta la deflessione orizzontale del Bump, ossia l'allungamento elastico della molla che di conseguenza genera una forza di richiamo elastico, diretta verso il centro del Bump e di cui il modulo è pari a:

$$F_s^i = 2\Delta L^i \cdot k_1$$

Le forze radiali F_{beam}^i sono legate alle componenti verticali grazie alla seguente relazione [18]:

$$F_{beam}^i = \frac{F_R^i}{\tan \alpha^i}; F_{beam}^{i+1} = \frac{F_L^{i+1}}{\tan \alpha^{i+1}};$$

Note le forze che agiscono nel segmento rigido da inserire nel diagramma di corpo libero, si studia l'equilibrio delle forze orizzontali e si ottiene che:

$$F_s^i + F_{beam}^{i+1} + f^i = F_s^{i+1} + F_{beam}^i$$

E sostituendo le espressioni delle singole forze nell'equazione precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} 2\Delta L^i \cdot k_1 + \frac{F_L^{i+1}}{\tan \alpha^{i+1}} + \mu^i \cdot (F_R^i + F_L^i) &= 2\Delta L^{i+1} \cdot k_1 + \frac{F_R^i}{\tan \alpha^i}; \\ 2\Delta L^i \cdot k_1 + \frac{1/2 F_p^{i+1} (1 + \eta^{i+1} \tan \alpha^{i+1})}{\tan \alpha^{i+1}} + \mu^i (1/2 F_p^i (1 - \eta^i \tan \alpha^i) + 1/2 F_p^{i+1} (1 + \eta^{i+1} \tan \alpha^{i+1})) &= \\ = 2\Delta L^{i+1} \cdot k_1 + \frac{1/2 F_p^i (1 - \eta^i \tan \alpha^i)}{\tan \alpha^i}; \end{aligned}$$

Per trovare il valore della rigidità elastica k_v si sostituisce l'espressione della forza di pressione:

$$F_p^i = k_v^i \cdot \Delta h^i; F_p^{i+1} = k_v^{i+1} \cdot \Delta h^{i+1}$$

E risulta che:

$$k_v^i = \frac{2(\Delta L^i - \Delta L^{i+1})k_1 + B^i \cdot k_v^{i+1}}{A^i};$$

dove i coefficienti A^i e B^i :

$$A^i = 0.5 \Delta h^i \left(\frac{1}{\tan \alpha^i} - \mu^i \right) (1 - \eta^i \tan \alpha^i);$$

$$B^i = 0.5 \Delta h^{i+1} \left(\frac{1}{\tan \alpha^{i+1}} + \mu^i \right) (1 + \eta^{i+1} \tan \alpha^{i+1})$$

La formula iterativa per la rigidità verticale equivalente è calcolata dall'estremità libera all'estremità fissa del Bump foil. Pertanto, la rigidità verticale equivalente del Bump vicino a l'estremità libera N-esima, vedi fig. 9.7 deve essere calcolata in precedenza. [18]

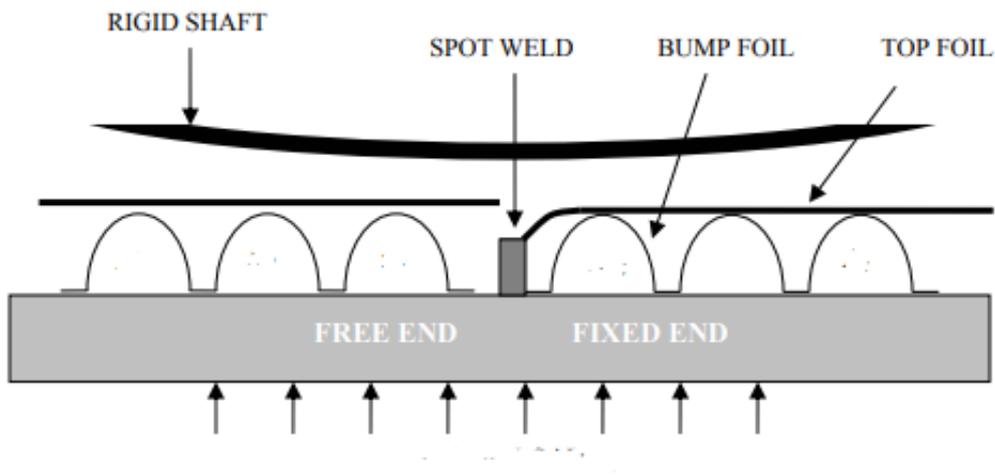


Figura 9.7 - Estremo libero N-esimo del Bump foil

Il diagramma di corpo libero del Bump N-esimo risulta essere diverso dai precedenti in quanto è connesso ad un unico Bump e per questo motivo il Link rigido è formato solo da un semi arco di Bump, come mostrato in fig. 9.8.

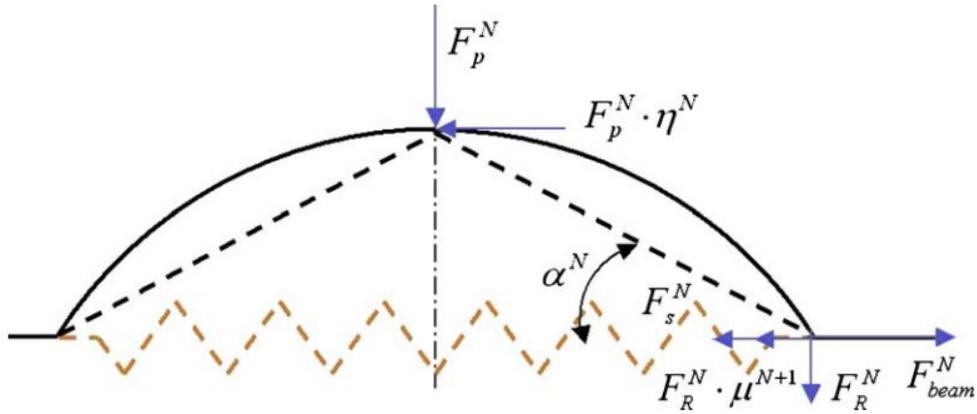


Figura 9.8- Diagramma di corpo libero del Bump con estremità libera

Il valore della rigidezza nel Bump con estremità libera risulta pari a pari a: [18]

$$k_v^N = \frac{F_p^N}{\Delta h^N} = \frac{2 \cdot \Delta L^N \cdot k_1}{A^N};$$

dove A^N è pari a:

$$A^i = 0.5 \Delta h^N \left(\frac{1}{\tan \alpha^N} - \mu^{N+1} \right) (1 - \eta^N \tan \alpha^N);$$

9.3 Applicazione del Teorema di Castigliano

Per calcolare il valore di k_v , rigidezza equivalente del Bump è necessario conoscere il valore della rigidezza k_1 della molla equivalente considerata tra le due estremità del Bump stesso. In fig. 9.9 è mostrata la molla inserita nel modello per opporsi allo spostamento relativo di un Link rigido rispetto ai Link rigidi adiacenti.

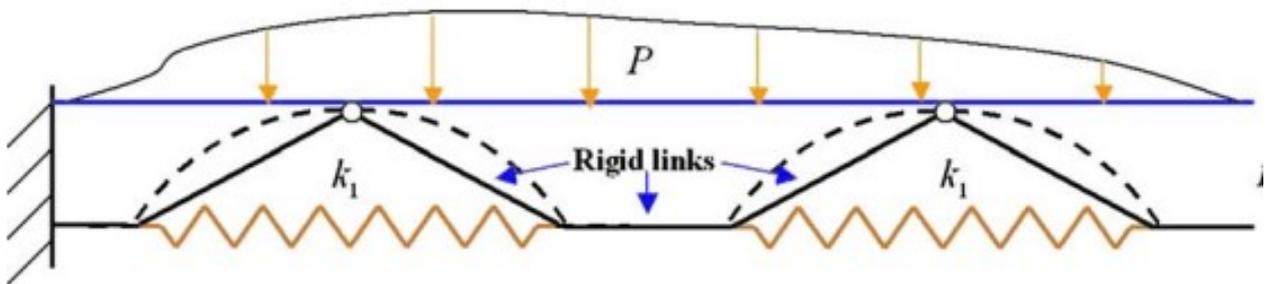


Figura 9.9 - Molla di rigidezza k_1 tra due link rigidi

La rigidità della molla orizzontale k_1 è stata calcolata in base alla geometria iniziale dei Bump utilizzando il Teorema di Castigliano. L'enunciato del teorema prevede che "lo spostamento (o rotazione) di un elemento solido elastico è definito dalla derivata parziale del lavoro di deformazione, espresso in funzione delle forze (o dei momenti) esterni, eseguita rispetto a una di tali forze che sia applicata all'elemento considerato nel punto e nella direzione dello spostamento desiderato"

Dal punto di vista analitico, definita F_H una forza generica agente sulla struttura e $\bar{\delta}$ lo spostamento in corrispondenza del punto di applicazione della forza ed in direzione della forza stessa, e U l'energia elastica di deformazione si ottiene che:

$$\bar{\delta} = \frac{\partial U}{\partial F_H}$$

Questo teorema spesso trova il suo utilizzo pratico nel calcolo di spostamenti strutturali, in particolare per individuare la rigidezza di una struttura precaricata da una Forza effettiva o fittizia.

Tale teorema consente così di calcolare le frecce e le rotazioni di strutture trabeiformi. Derivando l'energia interna per la forza applicata in un punto si ottiene il valore della deflessione nel suddetto punto e da quel valore di deflessione è possibile ricavare il valore della rigidezza, in questo caso di k_1 . Quindi per calcolare il valore della deflessione $\bar{\delta}$ bisogna calcolare il valore dell'energia interna del

sistema in cui è applicata una forza F_H fittizia con la stessa direzione dello spostamento $\bar{\delta}$, come mostrato in fig. 9.10.

Inoltre, è inserito un momento di reazione M_b necessario per imporre la condizione la rotazione nulla nell'estremità del Bump in cui è applicata, come mostrato in fig. 9.10. A quest'ultima condizione imposta, segue che:

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = 0$$

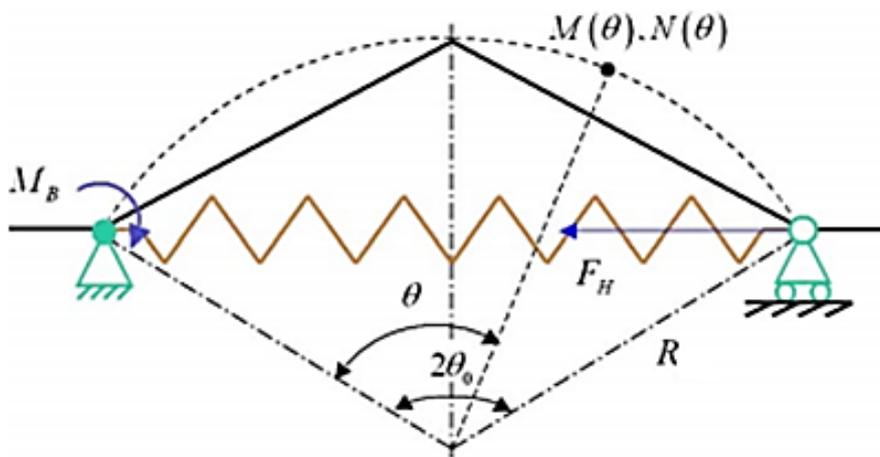


Figura 9.10 - Studio dell'energia interna del modello del Bump

Il primo step prevede il calcolo dell'energia di deformazione. Per definire l'energia interna del sistema è necessario individuare lo sforzo normale $N(\theta)$ e il momento $M(\theta)$ in funzione della variabile di riferimento in questo caso θ . È necessario quindi calcolare l'energia interna come segue:

$$U = \int_0^l \left(\frac{M^2(\theta)}{2DL} + \frac{N^2(\theta)}{2SE} \right) dl$$

Dove il momento $M(\theta)$ e lo sforzo normale $N(\theta)$, secondo lo schema in fig. 9.10, sono pari a:

$$M(\theta) = F_H R (\cos(\theta_0 - \theta) - \cos(\theta_0)) + M_B;$$

$$N(\theta) = F_H \cos(\theta_0 - \theta);$$

$$e \, dl = R \cdot d\theta.$$

Ne risulta che l'energia di deformazione è pari a:

$$U = \frac{R}{2DL} \alpha_1 + \frac{R}{2SE} \alpha_2$$

Il primo termine dipende da:

- $D = Et^3/12(1 - \nu^2)$, rigidezza flessionale del Bump;
- L , spessore della lamina;

mentre il secondo termine dipende da:

- E , modulo di Young;
- S , area della sezione della lamina.

Si procede nel calcolare prima il valore di α_2 utile per un termine dell'integrale di α_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \int_0^{2\theta_0} N^2(\theta) \, d\theta = F_H^2 \int_0^{2\theta_0} \cos^2(\theta_0 - \theta) \, d\theta = F_H^2 \int_0^{2\theta_0} \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\theta_0 - \theta)] \, d\theta = \\ &= F_H^2 \left\{ \left[\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\theta_0} - \left[\frac{1}{2} \sin(\theta_0 - \theta) \right]_0^{2\theta_0} \right\} = F_H^2 \left\{ \left[\frac{2\theta_0}{2} - \frac{0}{2} \right] - \frac{1}{4} [\sin(\theta_0 - 2\theta_0) - \sin(2\theta_0)] \right\} = \\ &= F_H^2 \left[\theta_0 - \frac{1}{4} [-\sin(2\theta_0) - \sin(2\theta_0)] \right] = F_H^2 \left[\theta_0 + \frac{1}{2} \sin(2\theta_0) \right] = F_H^2 [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_0^{2\theta_0} M^2(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\theta_0} [F_H \cdot R(\cos(\theta_0 - \theta) - \cos(\theta_0)) + M_B]^2 \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\theta_0} \{ F_H^2 R^2 [\cos(\theta_0 - \theta)^2 - 2 \cos(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) + \cos(\theta_0)^2] + \\ &\quad + M_B^2 + 2M_B F_H R \cdot \cos(\theta_0 - \theta) - 2M_B F_H R \cos(\theta_0) \} \, d\theta = \\ &= F_H^2 R^2 \left\{ \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin(\theta_0 - \theta) \right]_0^{2\theta_0} - 2 \cos(\theta_0) [-\sin(\theta_0 - \theta)]_0^{2\theta_0} + \cos(\theta_0)^2 [\theta]_0^{2\theta_0} \right\} + \\ &\quad + M_B^2 [\theta]_0^{2\theta_0} + 2M_B F_H R \cdot [-\sin(\theta_0 - \theta)]_0^{2\theta_0} - 2M_B F_H R \cos(\theta_0) [\theta]_0^{2\theta_0} = \end{aligned}$$

$$= F_H^2 R^2 \{ \theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 2 \cos(\theta_0) [\sin(\theta_0) + \sin(\theta_0)] + 2 \cos(\theta_0)^2 \theta_0 \} +$$

$$+ 2 M_B^2 \theta_0 + 2 M_B F_H R \cdot [\sin(\theta_0) + \sin(\theta_0)] - 4 M_B F_H R \cos(\theta_0) \theta_0 ;$$

Imponendo la condizione del Teorema di Castigliano di rotazione nulla per l'estremità di sinistra del Bump:

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = 0;$$

Si ottiene che:

$$4 M_B^2 \theta_0 + 4 F_H R \cdot \sin(\theta_0) - 4 F_H R \cos(\theta_0) \theta_0 = 0$$

Da cui si ottiene M_B in funzione di F_H, R e θ_0 :

$$M_B = - F_H R \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} + F_H R \cos(\theta_0) = 0$$

Sostituendo il valore di M_B si ricava l'energia interna U:

$$\alpha_1 = F_H^2 R^2 [\theta_0 - 3 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + 2 \cos(\theta_0)^2 \theta_0] + \beta_1$$

$$\beta_1 = 2 F_H^2 R^2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} + 2 \theta_0 F_H^2 R^2 \cos^2(\theta_0) - 4 F_H^2 R^2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) +$$

$$+ 4 F_H^2 R^2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 4 F_H^2 R^2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} + 4 F_H^2 R^2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 4 F_H^2 R^2 \theta_0 \cos^2(\theta_0) =$$

$$= -2 F_H^2 R^2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} - 2 F_H^2 R^2 \theta_0 \cos(\theta_0) + 4 F_H^2 R^2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0);$$

$$\alpha_1 = F_H^2 R^2 \left[\theta_0 - 3 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + 2 \cos(\theta_0)^2 \theta_0 - 2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} - 2 \theta_0 \cos^2(\theta_0) + 4 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) \right];$$

$$U = \frac{R}{2DL} \alpha_1 + \frac{R}{2SE} \alpha_2;$$

$$U = \frac{R^3}{2DL} F_H^2 \left[\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} \right] + \frac{R}{2SE} F_H^2 [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)];$$

Imponendo la condizione del Teorema di Castigliano per l'estremità destra del Bump:

$$\bar{\delta} = \frac{\partial U}{\partial F_H}$$

Si ottiene che:

$$\bar{\delta} = \frac{R^3}{DL} \left[\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} \right] + \frac{R}{SE} [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)]$$

Da cui si ricava il valore di k_1 è pari a:

$$k_1 = \frac{F_H}{\bar{\delta}} = \left\{ \frac{R^3}{DL} \left[\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} \right] + \frac{R}{SE} [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] \right\}^{-1}$$

Sono stati esplicitati i calcoli per individuare la rigidezza k_1 presentati nell'Appendice all'art. [\[18\]](#) che fa riferimento all'art. [\[19\]](#) di M.Arghir.

9.4 Incongruenze Modello

In questo capitolo si esporranno le incongruenze di modellazione presenti nell'art. [18] di Kai Feng in modo tale da affinare il modello in futuro con una accurata analisi.

Nel modello presentato nei capitoli precedenti è stato necessario eseguire l'analisi del diagramma di corpo libero del Bump i-esimo al fine di comprendere quali forze agiscono sul segmento rigido. Studiando il diagramma di corpo libero del singolo Bump, troncando il Bump dai Link rigidi adiacenti, sono state inserite per ciascun troncamento le forze di reazione, rispettivamente verticali e orizzontali, come mostrato in fig. 9.11.

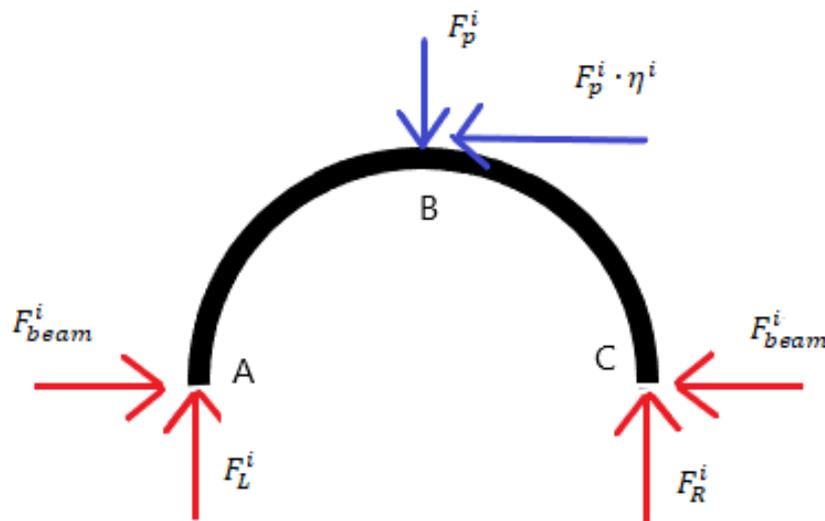


Figura 9.11 - Diagramma di corpo libero del Bump errato

È stato eseguito l'equilibrio dei momenti intorno ad A e l'equilibrio verticale per trovare i valori di F_L e F_R , ponendole diverse a destra e a sinistra.

$$F_p^i \cdot \cos \alpha^i - F_R^i \cdot 2 \cos \alpha^i = F_p^i \cdot \eta^i \sin \alpha^i \rightarrow F_R^i = \frac{1}{2} F_p^i (1 - \eta^i \tan \alpha^i)$$

$$F_p^i - F_R^i - F_L^i = 0 \rightarrow F_L^i = \frac{1}{2} F_p^i (1 + \eta^i \tan \alpha^i)$$

Tuttavia, nell'art. [18] è stato trascurato l'equilibrio alla traslazione orizzontale. Studiando l'equilibrio mancante come in fig. 9.11 si nota che le componenti orizzontali applicate alle estremità del Bump non hanno lo stesso modulo. Se fosse come presentato nell'articolo si otterrebbe che:

$$F_{beam}^i - F_{beam}^i - \eta^i F_p^i = 0 \rightarrow \eta^i F_p^i = 0$$

E ciò è in opposizione con le ipotesi iniziali del modello, in cui si vuole studiare la deformazione del Bump in presenza di attrito. Per correggere tale equilibrio statico è necessario inserire due forze differenti, $F_{beam_L}^i$ e $F_{beam_R}^i$ con moduli differenti, come mostrato fig. 9.12:

$$F_{beam_L}^i - F_{beam_R}^i - \eta^i F_p^i = 0 \rightarrow \eta^i F_p^i = 0$$

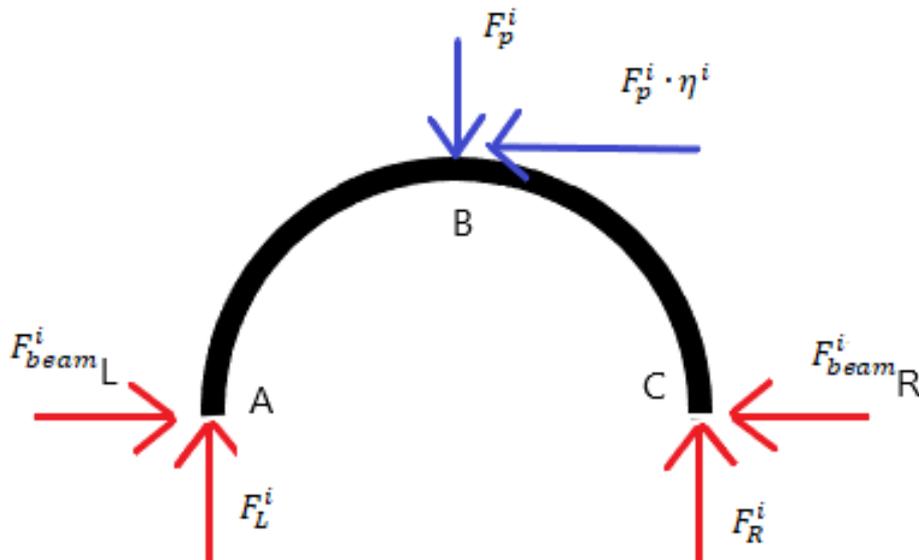


Figura 9.12 - Correzione diagramma di corpo libero del Bump

In maniera analoga, nello studio del diagramma di corpo libero del Link rigido, in fig. 9.13, sono state trascurate le reazioni vincolari dovute alle cerniere presenti tra due Link rigidi adiacenti.

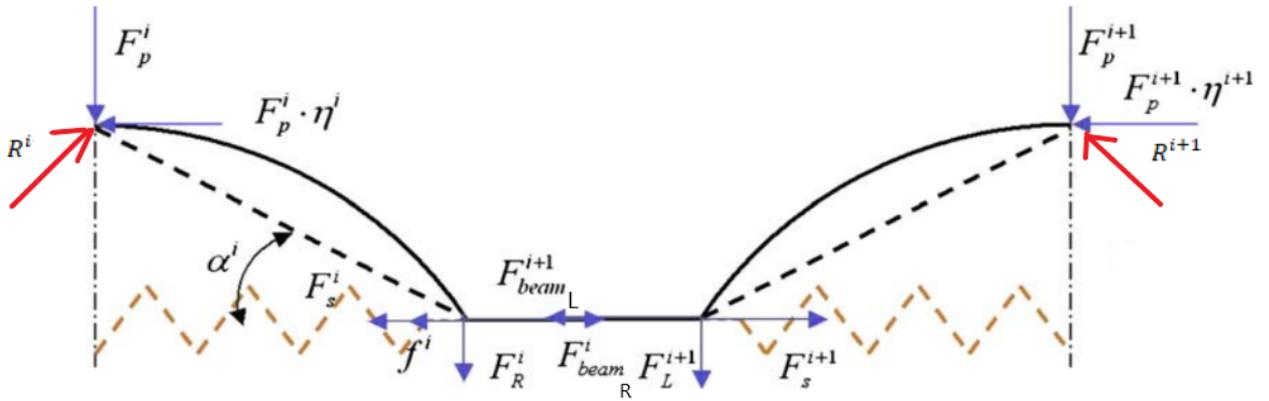


Figura 9.13 - Diagramma di corpo libero del Link rigido

Si rimanda il calcolo dell'equilibrio alla traslazione orizzontale, utile per risolvere il sistema iterativo per il calcolo della rigidezza del Bump, in quanto compaiono sia le forze orizzontali del Bump $F_{beam_L}^i$ e $F_{beam_R}^i$ individuate in precedenza sia le componenti orizzontali delle forze R^i e R^{i+1} .

$$R^{i+1} \cos \alpha^{i+1} + F_s^i + F_{beam}^{i+1} + f^i = F_s^{i+1} + F_{beam}^i + R^i \cos \alpha^i$$

Per utilizzare l'equazione precedente nel sistema iterativo è necessario conoscere i moduli delle forze R^i e R^{i+1} , risultato del sistema tra le equazioni di equilibrio alla rotazione e alla traslazione orizzontale e verticale. Questa precisazione nel modello ne complica ulteriormente la soluzione iterativa, in quanto si aggiungono delle incognite e di conseguenza delle equazioni in più al sistema iterativo.

Diversamente dalle incongruenze precedenti, è inoltre importante sottolineare come le ipotesi alla base del calcolo della rigidezza della molla k_1 , applicando il Teorema di Castigliano, siano di discutibile fondatezza. Di fatti, si rimarca come sia opportuno considerare, come presentato nell'Appendice all'art. [18] di Arghir, il caso in cui alle due estremità del Bump sia concessa la rotazione.

In questo modo, viene meno l'utilità di inserire un momento M_b alla base del Bump e di conseguenza cade l'ipotesi descritta nel capitolo precedente:

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = 0$$

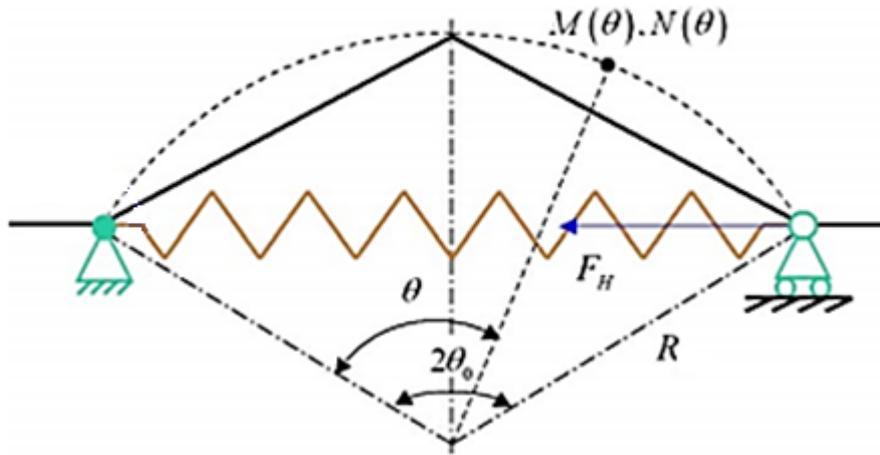


Figura 9.14- Studio dell'energia interna del modello del Bump privo del momento M_b

Sulla base delle considerazioni appena fatte, si procede in maniera analoga con il calcolo:

$$M(\theta) = F_H R (\cos(\theta_0 - \theta) - \cos(\theta_0))$$

$$N(\theta) = F_H \cos(\theta_0 - \theta);$$

$$e \, dl = R \cdot d\theta.$$

Risulta quindi che l'energia di deformazione è pari a:

$$U = \frac{R}{2DL} \alpha_1 + \frac{R}{2SE} \alpha_2$$

Dove:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_0^{2\theta_0} M^2(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\theta_0} [F_H \cdot R (\cos(\theta_0 - \theta) - \cos(\theta_0)) + M_B]^2 \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\theta_0} \{F_H^2 R^2 [\cos(\theta_0 - \theta)^2 - 2 \cos(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) + \cos(\theta_0)^2] \, d\theta = \\ &= F_H^2 R^2 \left\{ \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin(\theta_0 - \theta) \right]_0^{2\theta_0} - 2 \cos(\theta_0) [-\sin(\theta_0 - \theta)]_0^{2\theta_0} + \cos(\theta_0)^2 [\theta]_0^{2\theta_0} \right\} \\ &= F_H^2 R^2 \left\{ \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin(\theta_0 - \theta) \right]_0^{2\theta_0} - 2 \cos(\theta_0) [-\sin(\theta_0 - \theta)]_0^{2\theta_0} + \cos(\theta_0)^2 [\theta]_0^{2\theta_0} \right\} + \\ &= F_H^2 R^2 \{ \theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 2 \cos(\theta_0) [\sin(\theta_0) + \sin(\theta_0)] + 2 \cos(\theta_0)^2 \theta_0 \} \end{aligned}$$

$$= F_H^2 R^2 [\theta_0 - 3 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + 2 \cos(\theta_0)^2 \theta_0];$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \int_0^{2\theta_0} N^2(\theta) d\theta = F_H^2 \int_0^{2\theta_0} \cos^2(\theta_0 - \theta) d\theta = F_H^2 \int_0^{2\theta_0} \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\theta_0 - \theta)] d\theta = \\ &= F_H^2 \left\{ \left[\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\theta_0} - \left[\frac{1}{2} \sin(\theta_0 - \theta) \right]_0^{2\theta_0} \right\} = F_H^2 \left\{ \left[\frac{2\theta_0}{2} - \frac{0}{2} \right] - \frac{1}{4} [\sin(\theta_0 - 2\theta_0) - \sin(2\theta_0)] \right\} = \\ &= F_H^2 \left[\theta_0 - \frac{1}{4} [-\sin(2\theta_0) - \sin(2\theta_0)] \right] = F_H^2 \left[\theta_0 + \frac{1}{2} \sin(2\theta_0) \right] = F_H^2 [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)]; \end{aligned}$$

Imponendo la condizione del Teorema di Castigliano:

$$\bar{\delta} = \frac{\partial U}{\partial F_H}$$

Si ottiene che:

$$\bar{\delta} = \frac{R^3 F_H}{DL} [\theta_0 - 3 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + 2 \cos(\theta_0)^2 \theta_0] + \frac{R F_H}{SE} [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)]$$

Da cui si ricava il valore di k_1 è pari a:

$$k_1 = \frac{F_H}{\bar{\delta}} = \left\{ \frac{R^3}{DL} [\theta_0 + 2 \theta_0 \cos^2(\theta_0) - 3 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] + \frac{R}{SE} [(\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0))] \right\}^{-1}$$

Si riporta di seguito un esempio numerico per comprendere il peso dei due termini presenti nella formula della rigidezza k_1 , ossia la dipendenza dalla componente di sforzo normale e dalla componente di momento flettente. Per comprendere correttamente l'importanza dei due termini si è eseguito il calcolo sia per l'espressione riportata nell'art. [18] di Kai Feng che non impedisce la rotazione nel vincolo di sinistra del Bump, sia per l'espressione calcolata in questa trattazione in cui si consente la rotazione.

<i>Rb</i>	0.004053	m
<i>ϑ₀</i>	60	°
<i>L</i>	0.0381	m
<i>t</i>	0.0001	m

<i>E</i>	2.14E+11	Pa
<i>ν</i>	0.29	
$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$	1.95E-02	Pa·m ³
<i>S = t·L</i>	3.81E-06	m ²

<i>Hp:</i>	Componente momento flettente (m/N)	Componente sforzo normale (m/N)	<i>k1 (N/m)</i>
Kai Feng	4.291E-06	7.358E-09	<u>2.326E+05</u>
Correzione	2.439E-05	7.358E-09	<u>4.099E+04</u>

Dai risultati ottenuti si nota come la componente dell'energia dovuta al momento flettente è preponderante in entrambe le espressioni, ciò dimostra come lo sforzo normale incide poco nel calcolo della rigidezza *k1*, perciò è del tutto trascurabile.

9.5 Modello alternativo del Bump foil

Un secondo modello di analisi della rigidità equivalente del Bump è formulato da Iordanoff [21]. Questo modello, a differenza del precedente, è sviluppato per un cuscinetto reggispira, di cui è stato in precedenza descritto il processo di fabbricazione. Dal punto di vista funzionale e di progettazione, lo scopo di questo cuscinetto è reggere carichi in direzione assiale e per questo motivo la serie dei Bump nella lamina non si sviluppa radialmente come nel caso precedente ma assialmente.

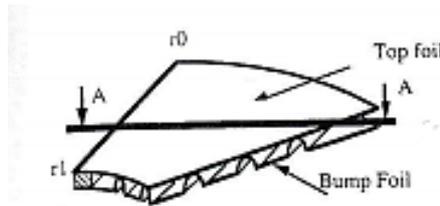


Figura 9.15- Bump foil per cuscinetto reggispira

Come nel modello presentato nel capitolo precedente, si pone l'obiettivo di trovare la rigidità equivalente del singolo Bump, come mostrato in fig. 9.16.

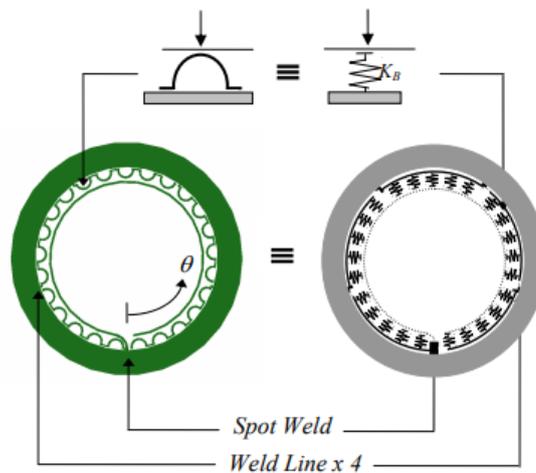


Figura 9.16 - Equivalenza Bump-molla nel cuscinetto

Le assunzioni che vengono considerate da Iordanoff per questa modellazione riguardano l'influenza di ogni Bump, il coefficiente di attrito secco che intercorre tra Top foil e Bump foil e la posizione radiale del carico applicato. In questo modello il passo del Bump è considerato costante e a differenza del modello precedente è trascurata l'interazione tra i Bump consecutivi. Il modello di Iordanoff giunge a

due formulazioni di rigidezza valide rispettivamente per il Bump saldato in entrambe le estremità e per il Bump con una estremità libera:

$$K_i = \frac{F}{\delta} = \frac{E \cdot t^3 \sin^3(\beta/2)}{12(1 - \nu^2)l_0^3 \cdot p_1^2 \cdot L \cdot J(\beta, \mu)};$$

dove:

$$J(\beta, \mu) = y_b \left[\left(\cos \frac{\beta}{2} - 1 \right) \left(\sin \frac{\beta}{2} + \mu \cos \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\mu(1 - \cos \beta)}{4} \right] + (1 - y_b) \left(\frac{\beta}{4} - \sin \frac{\beta}{4} \right);$$

$$y_b = \frac{\left(\frac{\beta}{4} + \sin \frac{\beta}{2} - \frac{3}{4} \sin \beta \right)}{\beta \sin \frac{\beta}{2} \left(\sin \frac{\beta}{2} + \mu \cos \frac{\beta}{2} \right) - 2\mu \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) + \frac{\beta}{2} - \frac{\sin \beta}{2}};$$

Mentre per l'ultimo Bump, con una estremità libera:

$$K_N = \frac{F}{\delta} = \frac{E \cdot t^3 \sin^3(\beta/2)}{6(1 - \nu^2)l_0^3 \cdot p_1^2 \cdot L \cdot I(\beta, \mu)};$$

$$I(\beta, \mu) = \left(A^2 + \frac{\mu^2 + 1}{2} \right) \frac{\beta}{2} - \frac{(1 - \mu^2) \sin \beta}{4} - \frac{\mu(\cos \beta - 1)}{2} - 2A \left[1 - \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) + \mu \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \right];$$

$$A = \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) + \mu \cos \left(\frac{\beta}{2} \right);$$

I parametri utilizzati nell'espressione della rigidezza di Iordanoff, come mostrato in fig. 9.17, rappresentano:

- E è il modulo elastico del materiale;
- ν è rapporto di Poisson;
- β è angolo spazzato da un estremo all'altro del Bump;
- p_1 è il passo tra due Bump consecutivi;
- $J(\beta)$ e $I(\beta)$ sono funzione di α e sono i due momenti di Inerzia dei due Bump;
- $2l_0$ è la lunghezza del Bump;
- t è lo spessore della lamina;

- $2l_0$ è la lunghezza del Bump;
- t è lo spessore della lamina;

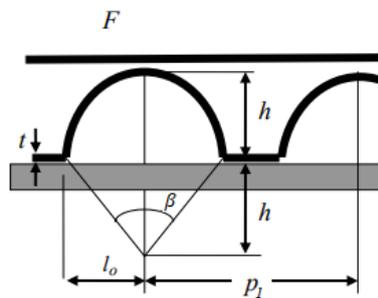


Figura 9.17 - Parametri del modello del Bump foil

9.6 Confronto modelli del Bump foil

I modelli analizzati di Iordanoff e di Kai Feng esprimono due diverse espressioni della rigidità equivalente del Bump foil. Per questo motivo è opportuno eseguire un confronto dei due modelli, analizzandone le ipotesi alla base dei due modelli e i rispettivi risultati ottenuti. Innanzitutto, è necessario sottolineare come i due modelli facciano riferimento a due tipologie di cuscinetti a lamina differenti, rispettivamente cuscinetto reggispinta e cuscinetto conforme a lamina; ovviamente tale presupposto condiziona le forze in gioco agenti sul Bump foil e la conseguente analisi geometrica del Bump. Tuttavia, è di rilevante importanza comprendere le ipotesi alla base dei due modelli.

Il modello di Iordanoff si basa sul modello precedentemente analizzato da Heshmat nell'art. [10] e si fonda sulle medesime ipotesi:

1. La rigidità della lamina è considerata uniforme distribuita e costante in tutto il cuscinetto ed è così indipendentemente dalla quantità di flessione del Bump;
2. Si assume che la lamina Top foil non si infletta rispetto ai Bump in conseguenza ad un carico puntiforme;
3. La deflessione delle lamine del Bump foil, nella loro risposta alle forze agenti, dipende solo dall'effetto locale, unicamente dalla forza che agisce direttamente sul particolare punto;
4. Il fluido nel film è isotermico e si comporta come un gas perfetto;
5. Si considera l'attrito tra Top foil e Bump foil.

Il modello di Kai Feng invece condivide con il precedente modello alcune ipotesi, quali:

- Il fluido considerato nel film è un gas perfetto;
- l'assenza di deformazione della lamina Top Foil in seguito alla distribuzione di forze di pressione;

Tuttavia, si discosta per due delle ipotesi:

- La rigidità della lamina, considerata puntiforme, agisce per ogni singolo Bump e dipende dalla quantità di deflessione generata dal carico agente sulla sommità del Bump;
- La deflessione delle lamine del Bump foil è conseguenza delle forze agenti sul Bump stesso e dalle forze di interazione con i Bump adiacenti;

A queste ipotesi, si aggiungono diverse considerazioni sul modello che ne condizionano il risultato finale, ossia:

- Si assume che il Bump degeneri da una forma circolare ad una forma triangolare, in modo tale da semplificarne lo studio analitico;
- Nel modello si considera l'attrito tra il Top Foil e il Bump e tra il Bump e il manicotto con valori differenti;
- Si suddivide la lamina in Link rigidi, connessi tra loro tramite cerniere poste alla sommità del Bump; la rotazione del Link rigido attorno alla cerniera è ostacolata dalla molla di richiamo fissata tra le due estremità di ogni singolo Bump;

Per entrambi i modelli l'ultimo Bump, ossia il Bump con una estremità libera e l'altra connessa alla parte rimanente della lamina, necessitano di una trattazione particolare in quanto vengono meno alcune delle ipotesi.

Dal punto di vista dei risultati analitici, i due modelli presentano espressioni della rigidità del Bump differenti, in conseguenza alle forti ipotesi e per certi aspetti discordanti. Si riporta la rigidità del Bump foil per ognuno dei modelli:

Modello di Kai Feng :
$$k_v^i = \frac{2(\Delta L^i - \Delta L^{i+1})k_1 + B^i \cdot k_v^{i+1}}{A^i};$$

dove:

$$k_1 = \frac{F_H}{\delta} = \left\{ \frac{R^3}{DL} \left[\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} \right] + \frac{R}{SE} [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] \right\}^{-1}$$

Modello di Iordanoff:
$$k_i = \frac{F}{\delta} = \frac{E \cdot t^3 \sin^3(\beta/2)}{12(1-\nu^2)l_0^3 \cdot p_1^2 \cdot L \cdot J(\beta, \mu)}$$

Si può notare come vi siano delle analogie e delle differenze tra i due risulta. Per entrambi i modelli il valore della rigidità dipende dai parametri geometrici del modello. In particolare, si riportano i parametri geometrici dei due modelli:

- Il raggio del Bump (R nel modello di Kai Feng, implicitamente tramite $l_0 = Rb \cos(\beta/2)$ nel modello di Iordanoff);
- lo spessore della lamina (implicitamente tramite $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ nel modello di Kai Feng, t nel modello di Iordanoff);
- l'angolo di base del Bump ($2\theta_0$ nel modello di Kai Feng, β nel modello di Iordanoff);
- dallo spessore del cuscinetto L in entrambi i modelli

Utilizzando la stessa nomenclatura si possono notare delle analogie tra le due espressioni della rigidità del Bump:

Modello di Kai Feng:
$$k_v^i = \frac{2(\Delta L^i - \Delta L^{i+1})k_1 + B^i \cdot k_v^{i+1}}{A^i};$$

dove:

$$k_1 = \frac{F_H}{\delta} = \left\{ \frac{R^3}{DL} \left[\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - 2 \frac{\sin^2(\theta_0)}{\theta_0} \right] + \frac{R}{SE} [\theta_0 + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] \right\}^{-1}$$

Modello di Iordanoff:
$$k_i = \frac{F}{\delta} = \frac{D \sin^3(\theta_0)}{[R \cos(\theta_0)]^3 \cdot p_1^2 \cdot L \cdot J(\theta_0, \mu)}$$

dove:
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

Si nota come il modello di Iordanoff, per le assunzioni descritte in precedenza, tenga conto solo della componente di momento flettente per il calcolo della rigidità del Bump. Come era previsto, nel modello di Iordanoff non si tiene in considerazione l'interazione reciproca tra i Bump adiacenti; di fatti, non compare alcun indice "i" ad indicare il Bump considerato.

In entrambi i modelli risulta applicato il Teorema di Castigliano ma con due relazioni differenti:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2DL} + \frac{N^2}{2SE} dl \quad (\text{Modello di Kai Feng})$$

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2SE} dl \quad (\text{Modello di Jordanoff})$$

La differenza risiede nel considerare il Bump rispettivamente come un guscio e come una trave.

Uguagliando le due espressioni e sostituendo la relazione della rigidezza flessionale D si ottiene che il discriminante è un fattore moltiplicativo adimensionale $(1 - \nu^2)$, dipendente dal modulo di Poisson.

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} ; \quad DL = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} L$$

$$I = \frac{Lt^3}{12} ; \quad EI = E \frac{Lt^3}{12}$$

10. Risultati numerici modello Bump foil

Nel seguente paragrafo è stato creato un modello numerico utilizzando l'applicativo "Matlab" al fine di verificare la correttezza del modello del Bump foil presente nell'art [18] di Kai Feng, di accertare quale sia la risposta di ogni singolo Bump a una sollecitazione esterna agente sul Top foil e infine di dimostrare che la simulazione numerica sia corretta. L'analisi della risposta statica del Bump foil è stata eseguita seguendo due diversi approcci:

- il primo approccio prevede che ogni Bump della lamina si deformi di una quantità uniforme e costante pari a Δh ; lo scopo è comprendere come si comporta ogni singolo Bump al variare della deformazione locale;
- il secondo approccio consente di avere una visione più realistica del comportamento del Bump foil; si impone una distribuzione di forza F_p e si analizza la risposta della lamina a causa della distribuzione stessa in termini di deflessione Δh , allungamento ΔL e rigidità complessiva K_v .

Per implementare il modello numerico per i due diversi approcci si è dovuto imporre in un caso una deflessione costante e nota per ogni Bump, nel secondo caso una distribuzione di forza nota ed ipotizzata.

Per definire il modello sono state imposte delle condizioni iniziali uguali per entrambi gli approcci. È stata definita la geometria del Bump, che si considera fissa e non modificabile:

<i>Rb</i>	0.004053	m
<i>ϑo</i>	60	°
<i>L</i>	0.0381	m
<i>t</i>	0.0001	m

La variabile t rappresenta lo spessore della lamina, che si suppone anch'essa fissa e costante. Per comprendere il significato delle variabili si riporta la fig. 10.1 che chiarifica i termini presenti nel modello di Kai Feng.

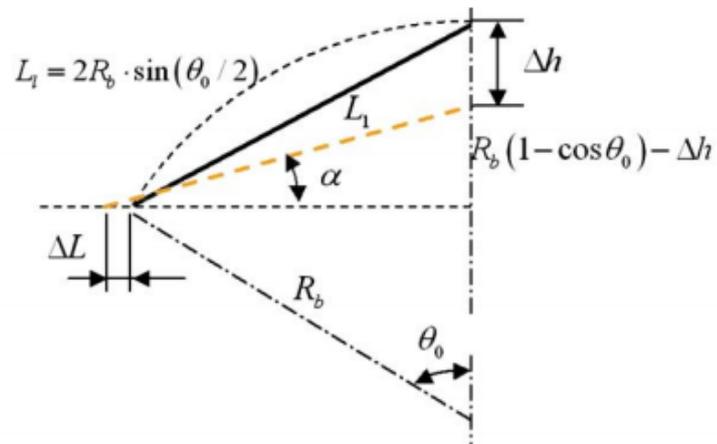


Figura 18 - Geometria del Bump

Inoltre, è stato necessario definire le proprietà intrinseche del materiale della lamina e i coefficienti di attrito tra la lamina e il manicotto e tra la lamina e il Top foil, come esplicitato nel modello di Kai Feng presentato in precedenza:

E	2.14E+11	Pa
ν	0.29	
μ	0.1	
η	0.1	

10.1 Deformazione verticale costante

Definita la geometria del Bump e note le proprietà, è possibile calcolare il valore di deformazione orizzontale ΔL al variare di Δh .

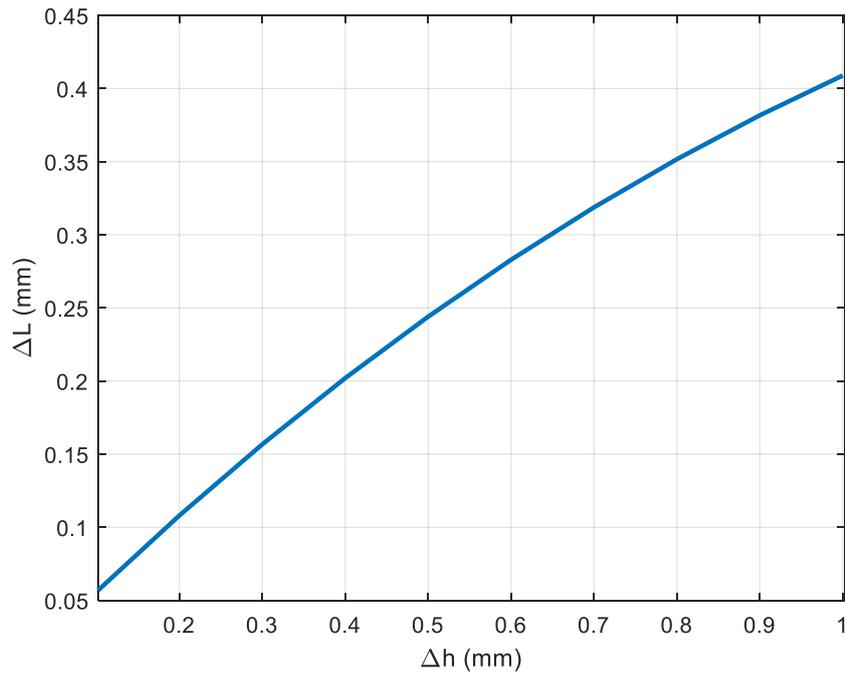


Figura 19 - ΔL al variare di Δh

Come era prevedibile dedurre dalle equazioni imposte nel modello analitico, il valore di ΔL cresce al variare di Δh . Questo avviene perché una deformazione verticale del Bump maggiore implica un allungamento in direzione orizzontale a causa della compressione del Bump stesso.

Di analoga e semplice interpretazione è il grafico seguente:

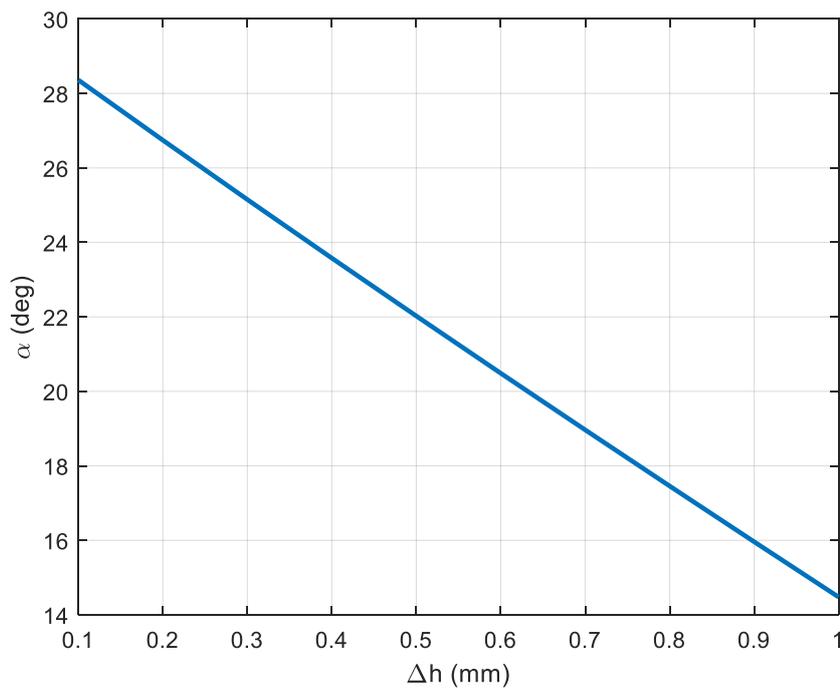


Figura 20 - α al variare di Δh

Si nota dal grafico che col crescere del valore della deflessione Δh il valore dell'angolo alla base α del Bump decresca. Questo è coerente con quanto previsto dal modello: avendo previsto di semplificare il Bump conferendogli una forma "triangolare", ad una deformazione verticale del Bump segue uno spostamento orizzontale del link rigido, presentato nel capitolo precedente, e per questo si ha una riduzione dell'angolo di base α .

Nei grafici mostrati in precedenza non vi è alcuna dipendenza dal Bump considerato che sia questo il primo o l'i-esimo Bump. Ciò è giustificato dalla volontà di considerare lo stesso valore di deflessione Δh per tutti i Bump, come deducibile dalle equazioni seguenti:

$$\Delta L = \sqrt{\left(2R_b \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^2 - \left(R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h\right)^2} - R_b \sin(\theta_0)$$

$$\tan \alpha = \frac{R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h}{R_b \sin(\theta_0) + \Delta L}$$

La valutazione è differente per quanto riguarda il diagramma di corpo libero del Bump. Si è focalizzata l'attenzione sui valori delle forze di reazione del Bump, ossia la componente orizzontale F_{beam} e verticali F_R e F_L . Inoltre, si è individuato quel valore di F_p con il quale si ottiene la deformazione Δh imposta.

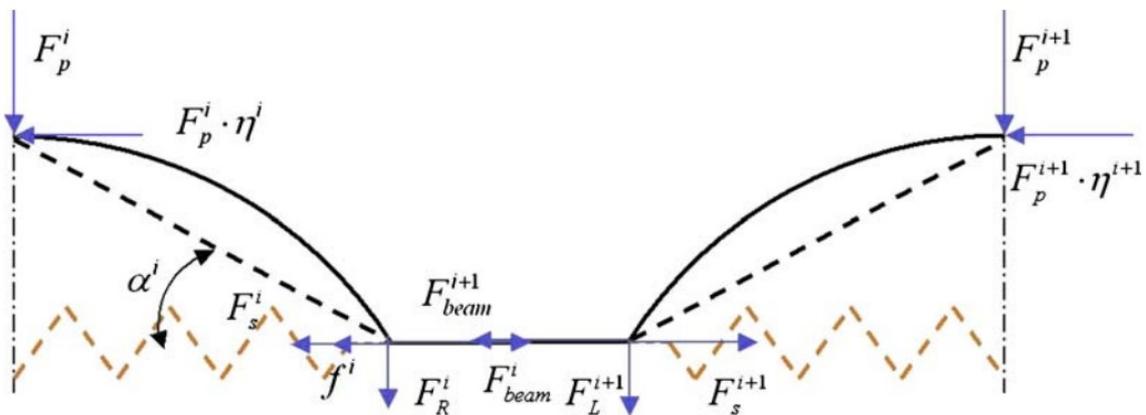


Figura 10.4 - Diagramma di corpo libero del Link rigido

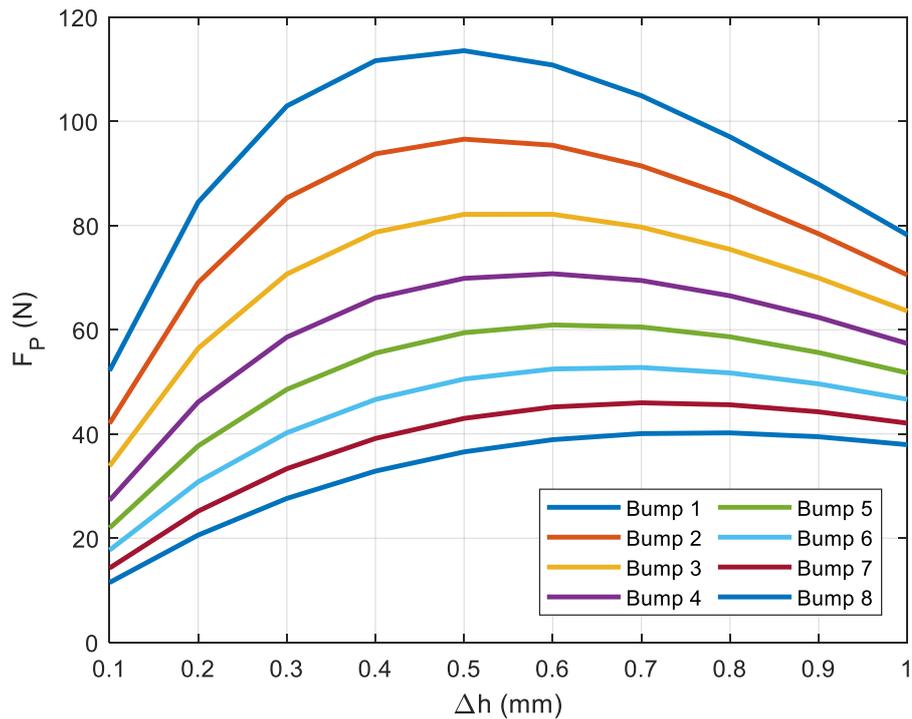


Figura 21 - Andamento della forza F_p al variare di Δh per ogni singolo Bump

Il primo grafico va osservato in verticale in quanto dato un valore Δh indica qual è il valore della forza di pressione F_p che consente di ottenere tale deflessione per ogni Bump. Si può osservare che aumentando la deflessione imposta al Bump aumenta l'effetto che un Bump ha sul successivo fino ad determinato punto di massimo, circa 0.5 mm, per cui si riduce l'effetto di interazione tra Bump contigui.

La valutazione è analoga per le componenti orizzontali e verticali di reazione del Bump.

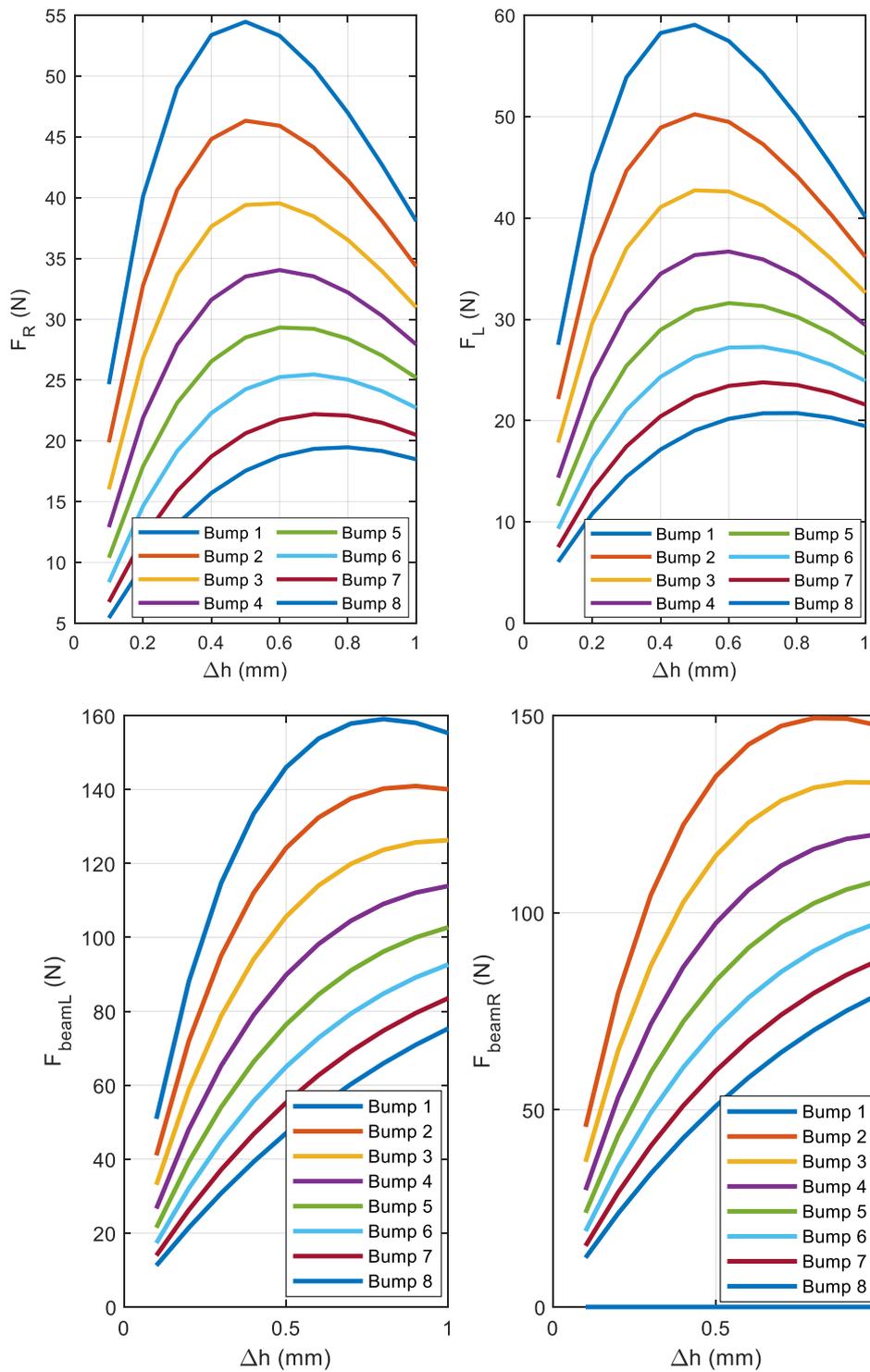


Figura 22 - Andamento delle reazioni vincolari del Bump al variare di Δh

Si può notare come il punto di massimo per le reazioni vincolari verticali non coincida con il massimo per le reazioni vincolari orizzontali. Si giustifica dal fatto che l'angolo α incide diversamente per le due componenti.

Inoltre, come si evince dalle equazioni utilizzate, si nota che la componente F_L sia maggiore di F_R in quanto vi è un contributo positivo del coefficiente di attrito η dovuto all'ipotesi di spostamento del Bump verso destra.

Infine, si mostra l'andamento della rigidezza k_v in funzione del Δh . Si evince che con una deformazione minore si ha un valore di rigidezza maggiore e per questo motivo all'aumentare del Δh si riduce anche il mutuo effetto dei Bump.

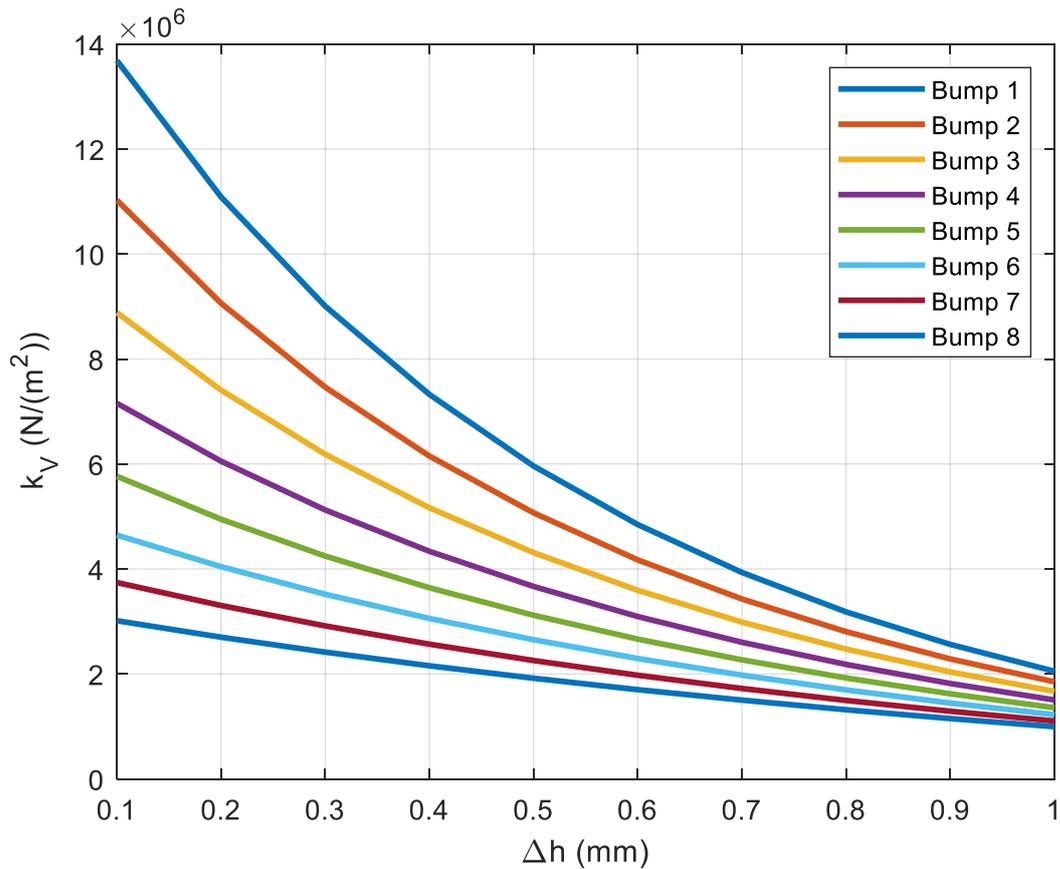


Figura 23 -Andamento della rigidezza k_v al variare di Δh

10.2 Distribuzione di forza nota

Il secondo approccio prevede di considerare una distribuzione di forza nota e di calcolarne di conseguenza tutte le altre variabili. Tale approccio consente di ottenere una visione realistica del problema in quanto si considera noto lo sforzo applicato sul Top foil dovuto all'azione del cuscinetto all'interno di un complessivo. Si studia in questo modo la risposta del Bump foil ad un carico noto.

La complessità di questo approccio è presente nella natura delle equazioni. Il numero di equazioni coincide con il numero di incognite se si considerano l'analisi di tutti i Bump e non solo di uno singolo. Questa particolarità implica che è necessario un calcolo iterativo.

Le equazioni coinvolte sono:

$$\Delta L^i = \sqrt{\left(2R_b \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^2 - (R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h^i)^2} - R_b \sin(\theta_0);$$

$$\Delta L^{i+1} = \sqrt{\left(2R_b \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^2 - (R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h^{i+1})^2} - R_b \sin(\theta_0);$$

$$\tan \alpha^i = \frac{R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h^i}{R_b \sin(\theta_0) + \Delta L^i};$$

$$\tan \alpha^{i+1} = \frac{R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h^{i+1}}{R_b \sin(\theta_0) + \Delta L^{i+1}};$$

$$A^i = 0.5 \Delta h^i \left(\frac{1}{\tan \alpha^i} - \mu^i \right) (1 - \eta^i \tan \alpha^i);$$

$$B^i = 0.5 \Delta h^{i+1} \left(\frac{1}{\tan \alpha^{i+1}} + \mu^i \right) (1 + \eta^{i+1} \tan \alpha^{i+1})$$

$$k_v^i = \frac{2(\Delta L^i - \Delta L^{i+1})k_1 + B^i \cdot k_v^{i+1}}{A^i};$$

Come si può notare dall'equazione coinvolte, per il calcolo di k_v^i è necessario conoscere il valore della rigidezza k_v^{i+1} del Bump successivo. Per questo motivo per l'iterazione è efficace partire dal Bump N-esimo che presenta le seguenti equazioni:

$$\Delta L^N = \sqrt{\left(2R_b \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^2 - (R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h^N)^2} - R_b \sin(\theta_0);$$

$$\tan \alpha^N = \frac{R_b(1 - \cos(\theta_0)) - \Delta h^N}{R_b \sin(\theta_0) + \Delta L^N};$$

$$A^i = 0.5 \Delta h^N \left(\frac{1}{\tan \alpha^N} - \mu^{N+1} \right) (1 - \eta^N \tan \alpha^N);$$

$$k_v^N = \frac{F_p^N}{\Delta h^N} = \frac{2 \cdot \Delta L^N \cdot k_1}{A^N};$$

Apparentemente non sarebbe necessaria alcuna iterazione, ma per conoscere il valore di k_v^N e risolvere il modello per i Bump precedenti è necessario conoscere Δh^N che non è noto. La stessa considerazione vale per i Bump precedenti in quanto non siamo a conoscenza del valore di Δh^i .

L'ulteriore equazione da inserire nel sistema è la seguente:

$$F_p^i = k_v^i \cdot \Delta h^i; \quad F_p^N = k_v^N \cdot \Delta h^N$$

Questa equazione, utilizzata sia per il Bump i-esimo che per il Bump N-esimo, lega il valore puntuale della forza di pressione F_p^i (nota) alla deformazione Δh^i (incognita) e alla rigidezza k_v^i (incognita e dipendente da Δh^i). Per questa ragione si prosegue con una iterazione in cui:

- Ipotizzo Δh^i ;
- Trovo tutte i parametri ($\Delta L^i, \tan \alpha^i, A^i, B^i$);
- Trovo k_v^i ;
- Calcolo la forza di pressione iterativa $F_p^i = k_v^i \cdot \Delta h^i$;
- Se F_p^i è diversa dal valore noto, si modifica il valore Δh^i cercando di far convergere la soluzione;

Per verificare quest'ultima condizione si va ad imporre un errore relativo inferiore al 1% in questo modo sul valore di Δh^i :

$$e^i = \left| \frac{\Delta h^i - F_p^i / k_v^i}{F_p^i / k_v^i} \right| \leq 0.01;$$

Si riassume il processo iterativo con il seguente diagramma a blocchi in fig. 10.8:

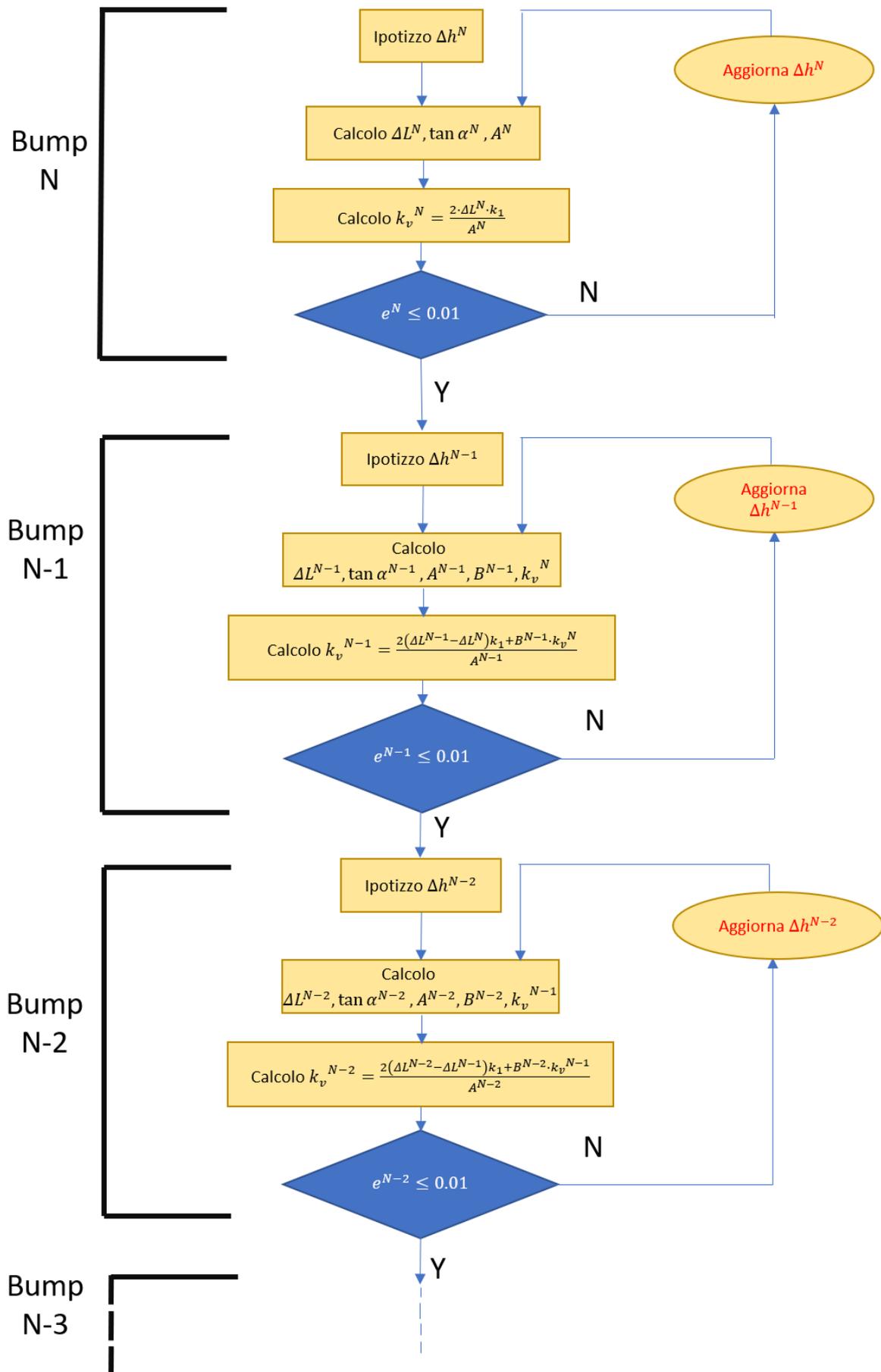


Figura 24 - Diagramma a blocchi del modello iterativo

Il Bump N-1 si considera separatamente in quanto per il calcolo di k_v^{N-1} è necessario conoscere il valore di k_v^N che sfrutta una equazione differente rispetto alle altre poiché relativo al Bump con estremità libera.

Di seguito si riportano i risultati ottenuti dall'iterazione partendo da una distribuzione di forza Fp costante. Ne segue che:

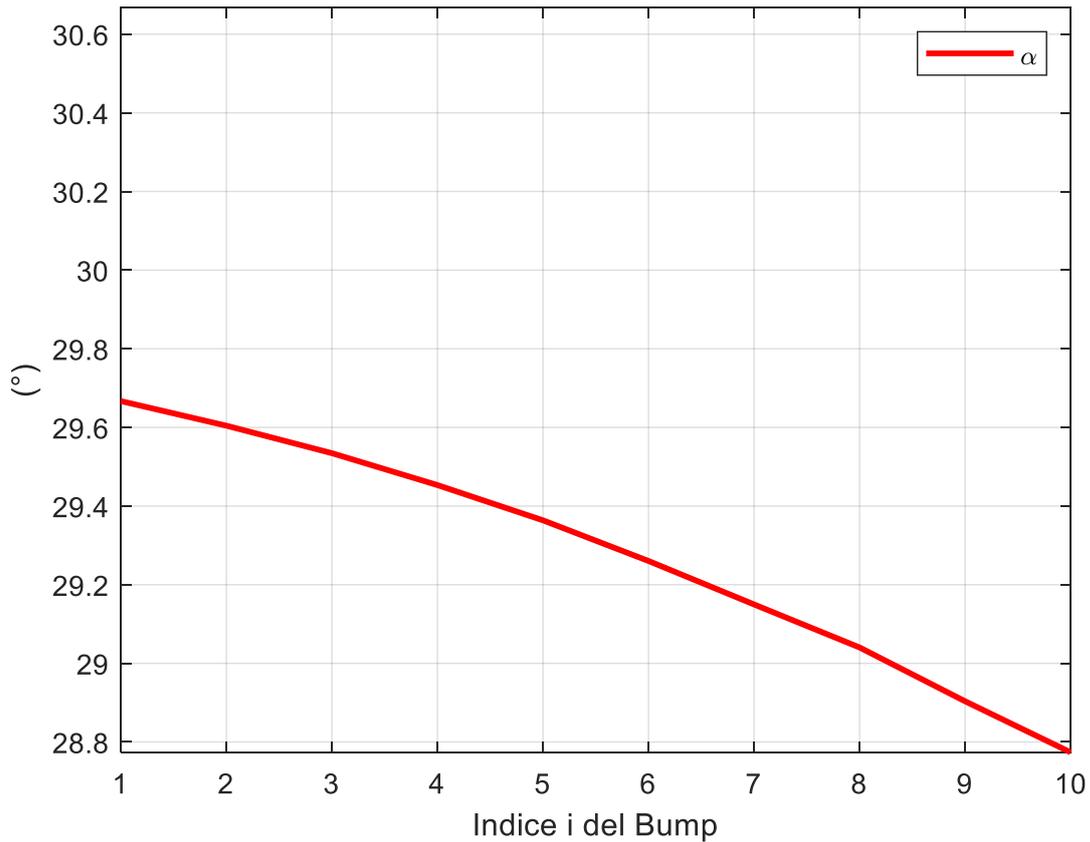


Figura 25 - Andamento di α per ogni Bump

L'andamento dell'angolo alla base α è decrescente. Tale risultato è coerente in quanto ipotizzando una distribuzione di forza costante su ogni Bump il mutuo effetto di un Bump con il successivo tende ad appiattare i Bump.

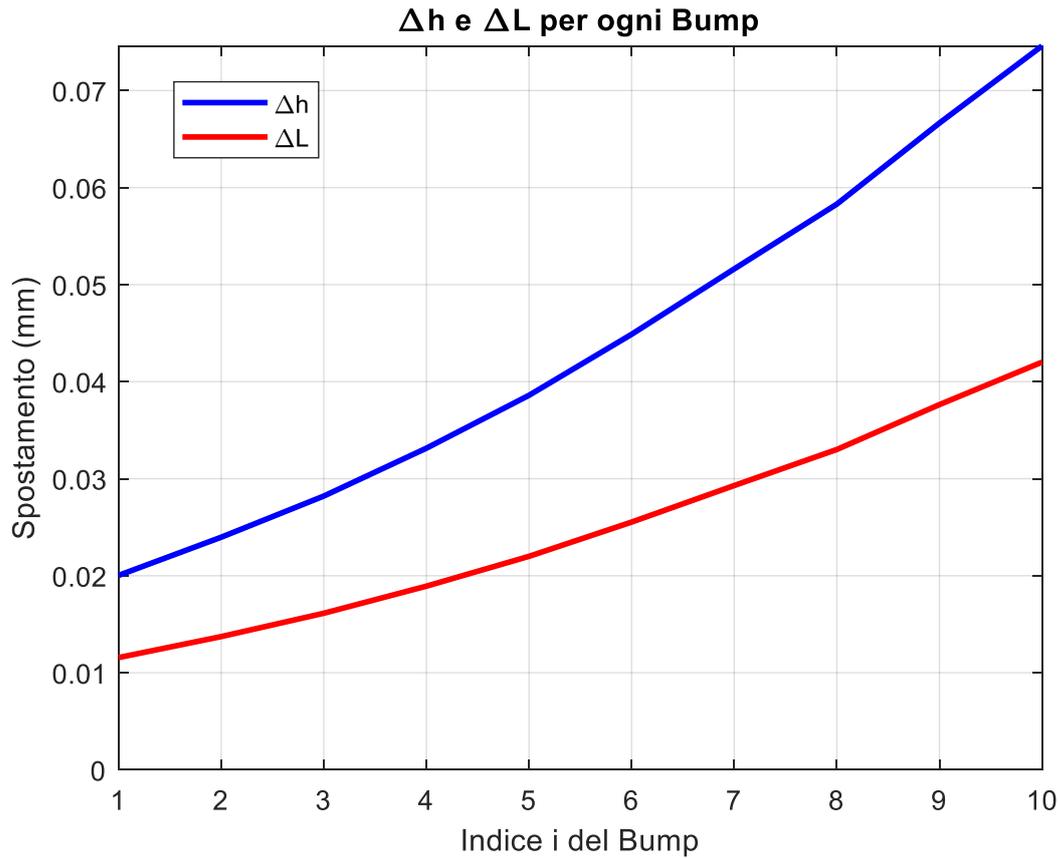


Figura 26 - Andamento di Δh e ΔL per ogni Bump

Dall'altra parte un carico distribuito costante implica che per ogni Bump i valori di deflessione verticale e allungamento orizzontale siano crescenti. Tale risultato attesta che il primo Bump, avendo una estremità saldata ha un allungamento inferiore rispetto all'ultimo Bump che avendo una estremità libera e risentendo degli spostamenti orizzontali dei Bump precedenti si allunga maggiormente.

Per quanto riguarda la deflessione verticale, anch'essa risulta minima per il Bump con l'estremità saldata. Analogamente, una deflessione verticale di un Bump precedente ha effetti sul Bump successivo, aumentandone la deflessione stessa.

Per attestare l'attendibilità del modello numerico è stato confrontato il valore di F_p noto per ogni Bump con il prodotto $k_v^i \cdot \Delta h^i$, entrambi risultati dell'iterazione.

Come mostrato in fig. 10.11 il valore della rigidità decresce passando da un Bump al successivo, mentre il valore della deflessione aumenta.

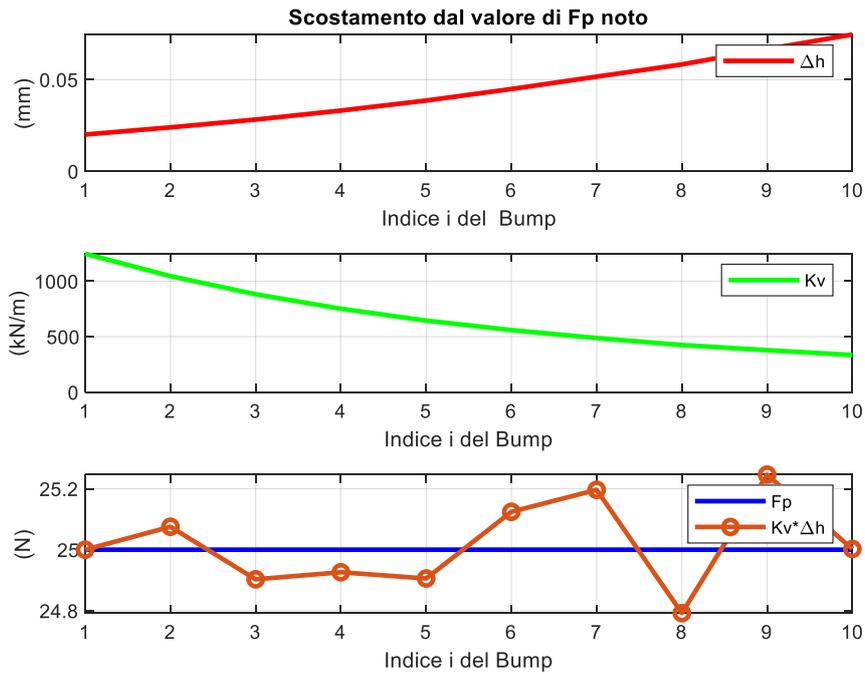


Figura 27 - Confronto di F_p per validare il Modello

Si può notare nel terzo grafico che l'errore commesso per ogni Bump è inferiore all' 1%, come imposto in precedenza nell'iterazione. Questo attesta come il modello numerico sia attendibile.

Analogamente, il modello numerico trova validità anche diagrammando la rigidezza k_v^i in funzione della deflessione Δh^i . Dato che è stata imposta una distribuzione di forza costante, il risultato da ottenere è un'iperbole equilatera poiché il prodotto $k_v^i \cdot \Delta h^i$ è costante.

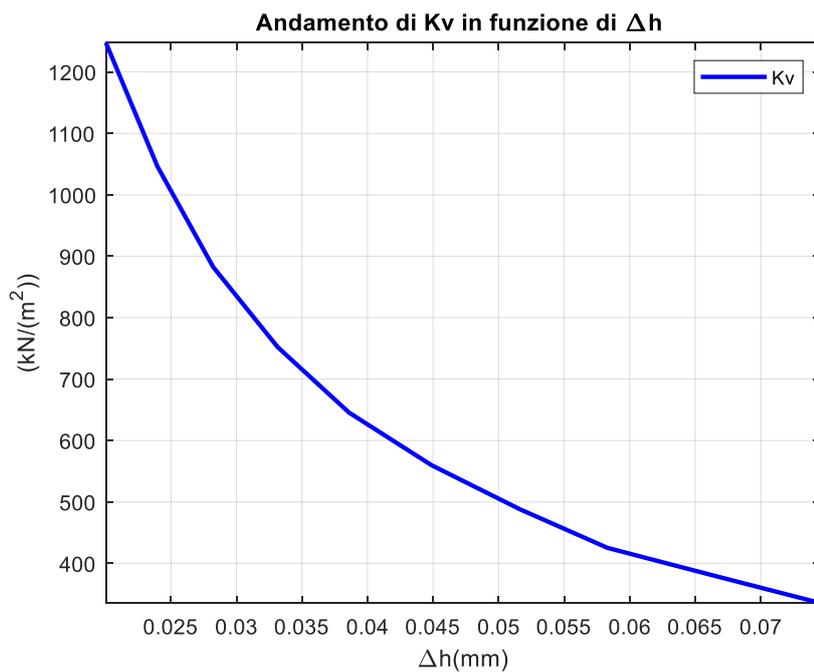


Figura 28 - Iperbole equilatera della distribuzione di forza costante F_p

10.3 Coefficiente di attrito tra Top foil e Bump foil variabile

I risultati ottenuti con distribuzione di forza costante lungo la direzione circonferenziale del Bump foil sono stati utilizzati per ulteriori approfondimenti. Di seguito si riporta un'analisi eseguita sul coefficiente di attrito statico μ . Attraverso tale coefficiente si stima l'aderenza tra la superficie del Bump foil e il manicotto. I due materiali coinvolti potrebbero essere diversi per questo motivo è opportuno studiare il comportamento della lamina al variare del coefficiente di attrito.

Per valutare l'incidenza del coefficiente di attrito μ sui parametri del Bump foil si sono ipotizzati tre valori crescenti, riportati in tabella:

μ_a	0.1
μ_b	0.3
μ_c	0.5

Dalla rappresentazione grafica presente in fig. 10.13, si nota come al crescere del coefficiente di attrito μ , la curva rappresentativa dell'angolo α trasla verso l'alto. Ciò sta a significare che un aumento di tale coefficiente rende più difficoltosa una deformazione del Bump a causa proprio del fenomeno dell'aderenza. Come mostrato in precedenza, l'andamento si conserva decrescente a causa del mutuo effetto dei Bump.

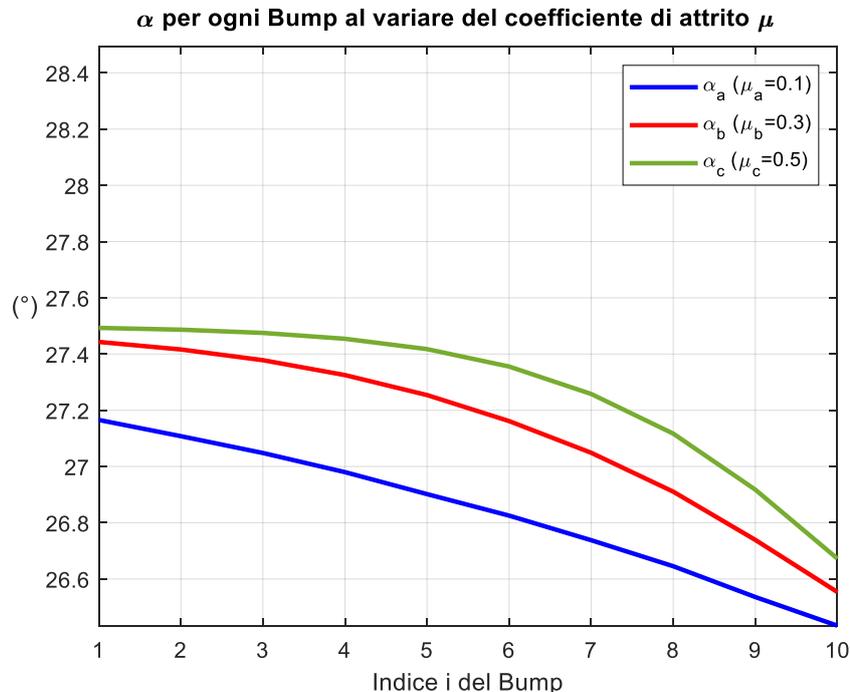


Figura 29 - Andamento di α per ogni Bump al variare del coefficiente di attrito μ

Di conseguenza, l'interazione tra manicotto e Bump foil ha effetti sull'andamento della deflessione verticale Δh . Si può notare infatti che per un coefficiente di attrito elevato ($\mu_c=0.5$) per il primo Bump la deflessione è pressoché nulla a causa proprio del coefficiente di attrito. Tale comportamento è coerente con quanto ipotizzato nel modello. Infatti, si è ipotizzato che il primo Bump abbia un'estremità saldata e l'altra connessa al Bump successivo tramite link rigido. Di conseguenza, se il coefficiente di attrito è elevato, risulta più difficoltoso deflettere verticalmente il Bump.

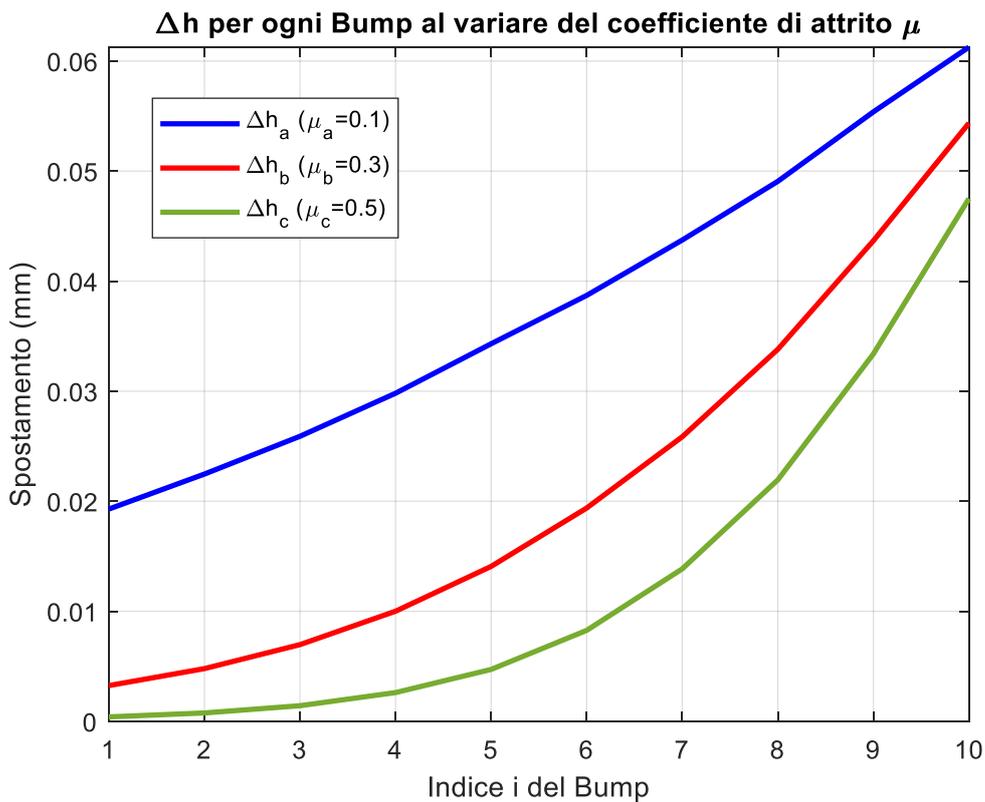


Figura 30 -Andamento di Δh per ogni Bump al variare del coefficiente di attrito μ

Inoltre, si può notare come aumentare il coefficiente di attrito vari la pendenza della curva. Ciò trova giustificazione nell'equilibrio statico del link rigido in cui aumenta il contributo della forza di attrito, ipotizzata nel modello verso sinistra.

Analoga valutazione può essere condotta sul contributo che il coefficiente di attrito μ ha sull'allungamento orizzontale ΔL .

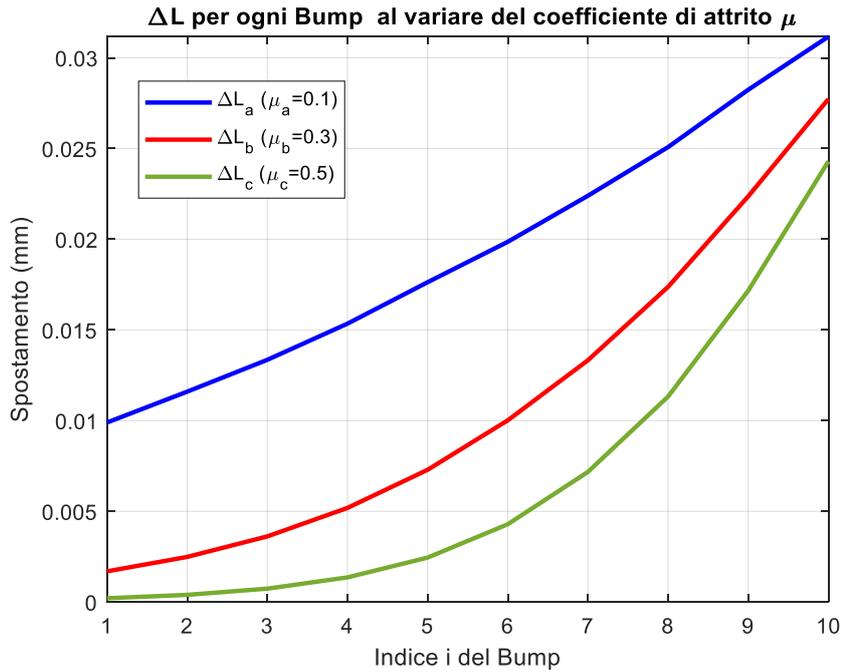


Figura 31 -Andamento di ΔL per ogni Bump al variare del coefficiente di attrito μ

Una conseguenza delle valutazioni precedenti è riportata nel grafico in fig. 10.16 in cui si rappresenta la rigidità del Bump per unità di lunghezza. Si mostra come sia maggiore la rigidità per il primo Bump con coefficiente di attrito pari a 0.5 e che questo decresca rapidamente per i Bump successivi.

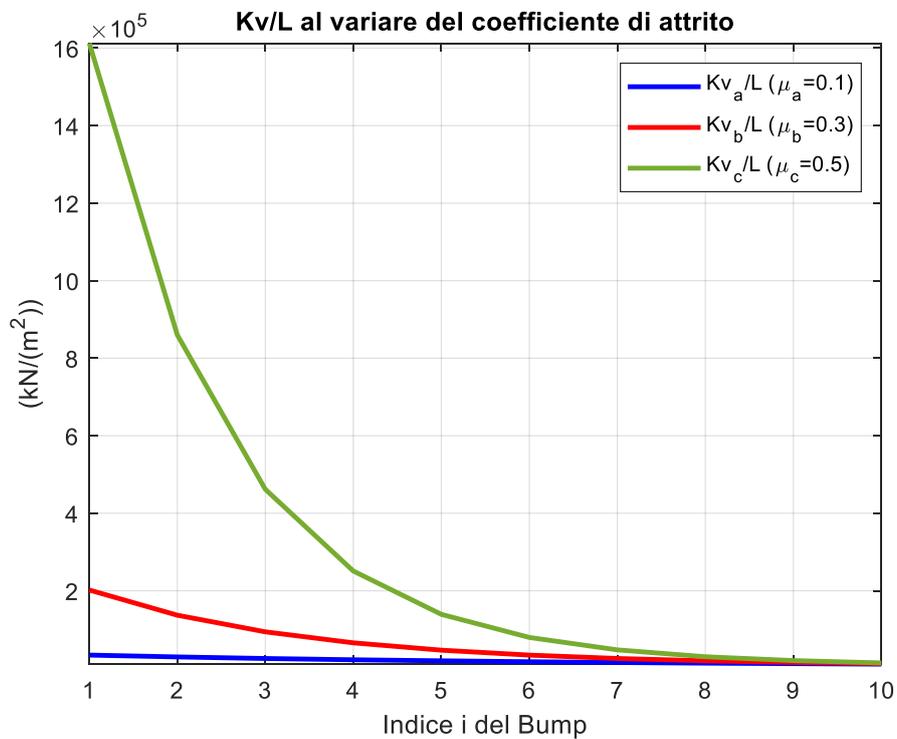


Figura 32 -Andamento della rigidità Kv/L per ogni Bump variando coefficiente di attrito μ

10.4 Distribuzione di forza variabile

Dopo aver effettuato considerazioni sul coefficiente di attrito statico, è opportuno valutare come la lamina a Bump risponda alle diverse distribuzioni di forza applicate sulla lamina del Top foil. Dal punto di vista ingegneristico, la distribuzione di forza è dovuta alla reazione vincolare che il cuscinetto deve esercitare per contrastare le forze agenti su un albero in rotazione su cui i cuscinetti stessi sono applicati. Tali forze di reazione si distribuiscono lungo la direzione circonferenziale.

Nel modello presentato si è considerata una distribuzione di forza agente sull'intero Bump foil. In realtà l'albero rotante su cui è applicato il cuscinetto esercita una forza variabile per singolo Bump. Per questo motivo sarebbe opportuno analizzare il comportamento dinamico della lamina, ma date le ipotesi del modello di Kai Feng, si va a considerare una distribuzione variabile lungo la direzione circonferenziale.

In particolare, sono state considerate tre tipologie di distribuzioni di forza agenti sulla lamina superiore, rappresentate in fig. 10.17:

- Costante per ogni Bump;
- Triangolare decrescente;
- Trapezoidale;

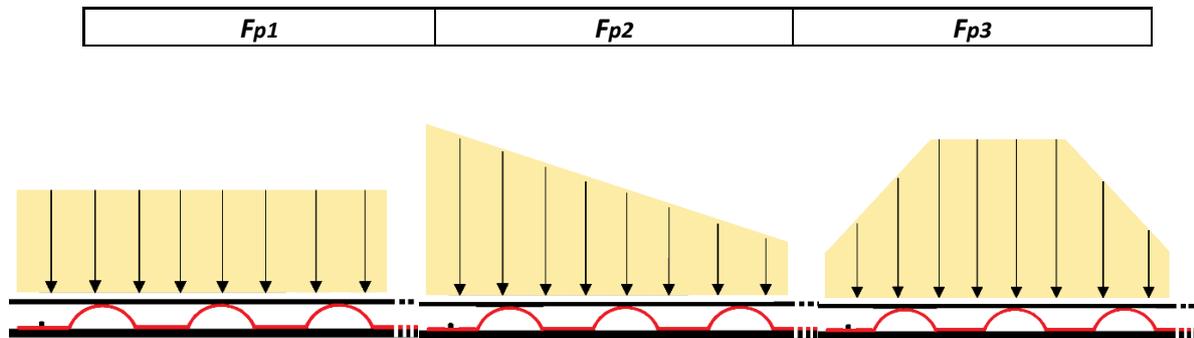


Figura 33 - Distribuzione di forza: Costante, Triangolare decrescente, Trapezoidale

Una particolarità emersa nella scelta della forma di distribuzione di forza è la mancata convergenza della soluzione numerica nel caso di distribuzione triangolare crescente. Tale evento trova giustificazione nelle ipotesi del modello numerico presentato nel capitolo precedente. Di fatti, si è ipotizzato un verso di spostamento del Bump dall'estremità saldata verso quella libera. Il verso di spostamento relativo induce il verso della forza di attrito, opposto allo spostamento relativo. Si nota

quindi, che una distribuzione di forza con forma triangolare crescente porti ad un spostamento inverso da quello ipotizzato e per questo motivo la soluzione non converge.

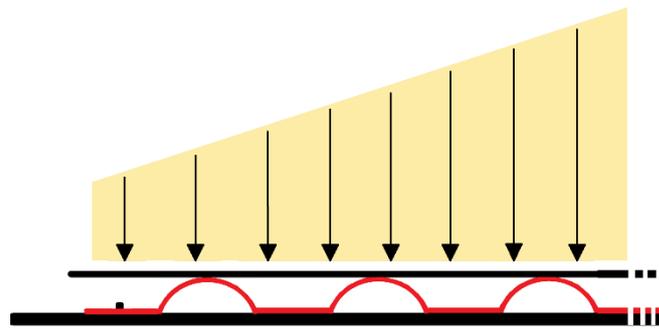


Figura 34 - Distribuzione di forza triangolare superiore

Come accaduto per l'analisi svolta in precedenza, anche in questo caso è opportuno verificare la convergenza della soluzione confrontando la forma ottenuta utilizzando i parametri dell'iterazione e la distribuzione imposta. Si può notare come sia pressoché nullo l'errore che si commette sulla forza F_p per ognuna delle forme scelte.

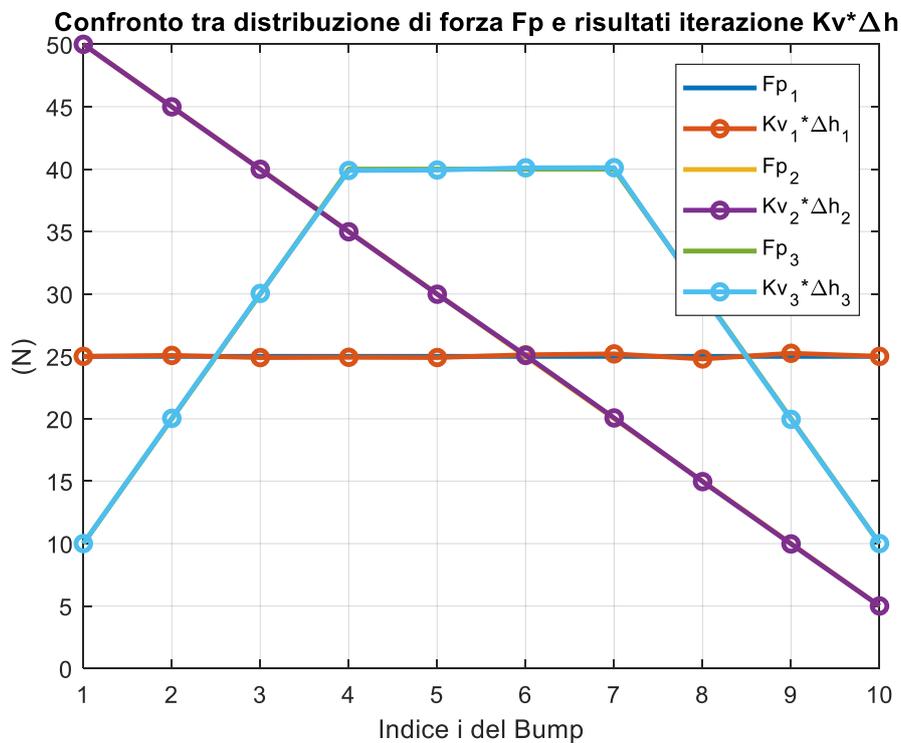


Figura 35 - Confronto per verificare correttezza del modello numerico

Le considerazioni fatte in precedenza sulla distribuzione di forza costante restano valide. Analizzando l'andamento di ΔL e Δh per la forma trapezoidale si può notare come la discontinuità della distribuzione di forza si conservi anche per tali parametri. D'altra parte, si nota che la distribuzione triangolare decrescente fornisce andamenti di ΔL e Δh all'incirca costante. Con tale distribuzione di forza si ottiene una deflessione verticale costante per ogni Bump. Questo aspetto ci consente di unire le considerazioni fatte per l'analisi con deformazione verticale costante con tale approccio numerico realistico.

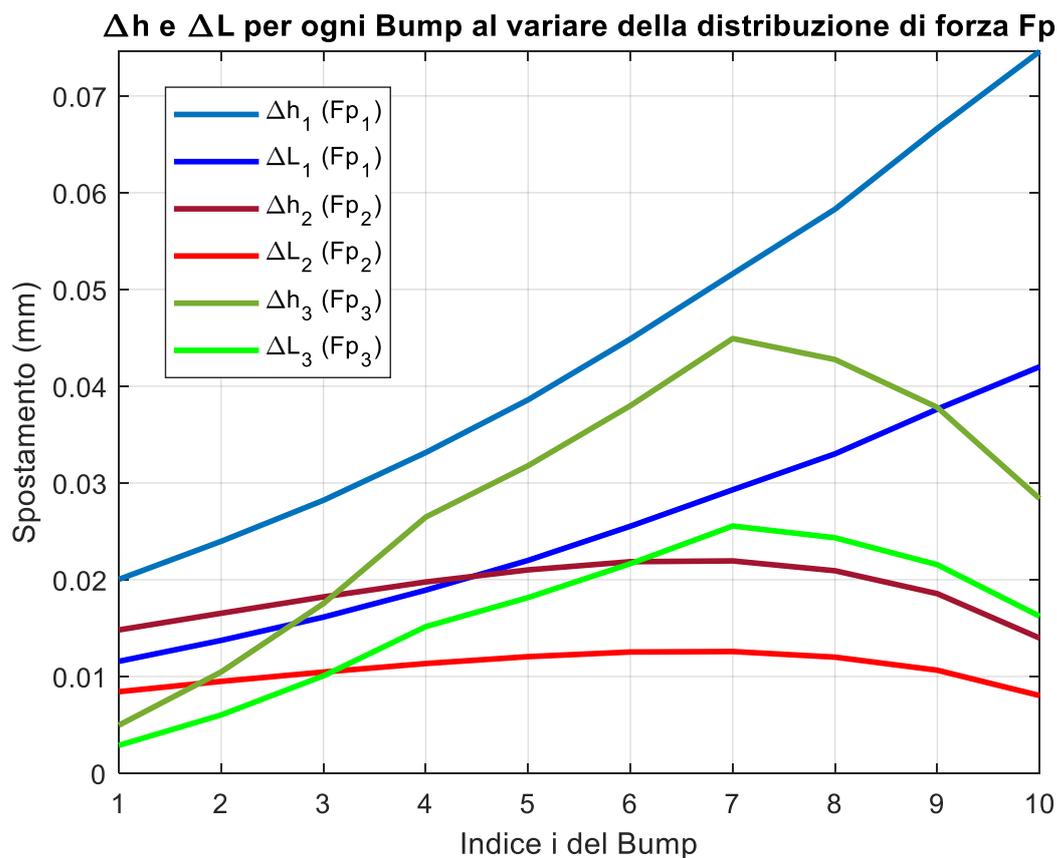


Figura 36 -Andamento di ΔL e Δh per ogni Bump variando la distribuzione di forza

Per quanto riguarda l'andamento della rigidità K_v per unità di lunghezza, si nota come essa sia maggiore per l'estremità saldata quando sul Bump foil agisce una distribuzione trapezoidale. La distribuzione triangolare decrescente fornisce invece un valore di rigidità con pendenze pressoché costante.

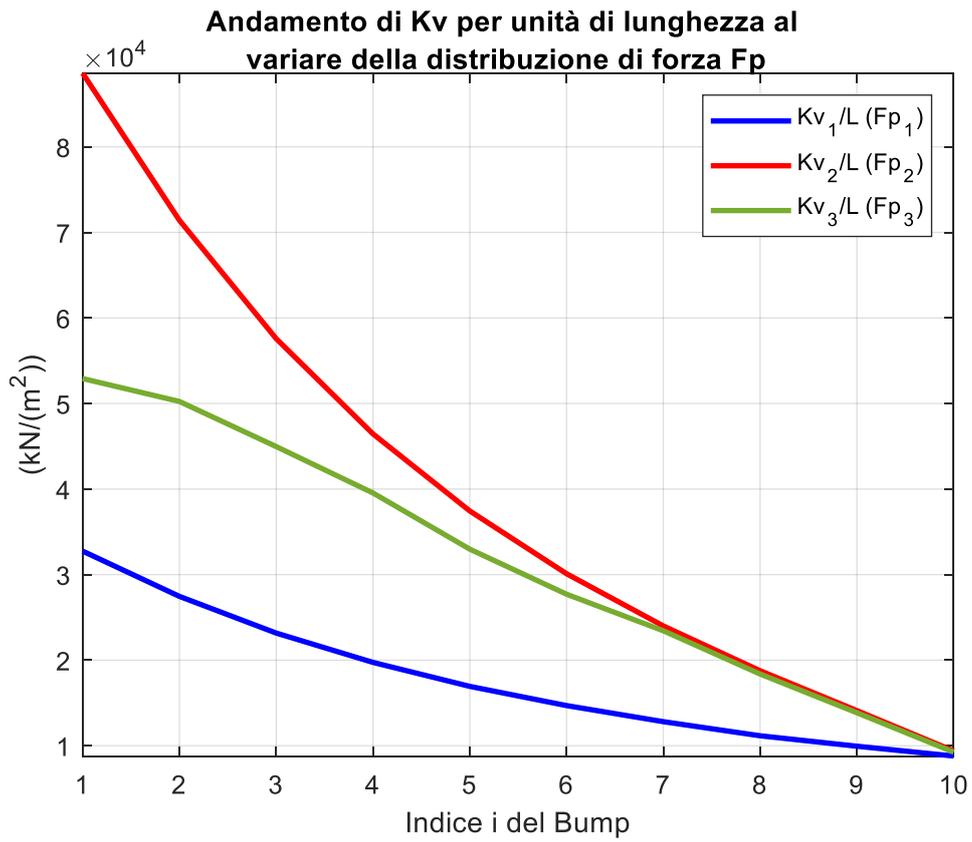


Figura 37 -Andamento della rigidezza K_v per ogni Bump variando la distribuzione di forza

10.5 Rappresentazione grafica del Bump foil

Sfruttando i parametri ottenuti nell'analisi con distribuzione di forza costante per ogni Bump, è stato possibile rappresentare graficamente la lamina nelle due configurazioni. La configurazione iniziale è stata ottenuta utilizzando i dati iniziali noti del modello, ovvero:

Rb	0.004053	m
ϑ_0	60	°

La configurazione deformata, invece, è stata ottenuta partendo dalla configurazione iniziale e variando i parametri per la rappresentazione in funzione della deflessione verticale Δh e dell'allungamento orizzontale ΔL . Si riportano di seguito la rappresentazione del Bump foil e alcuni ingrandimenti.

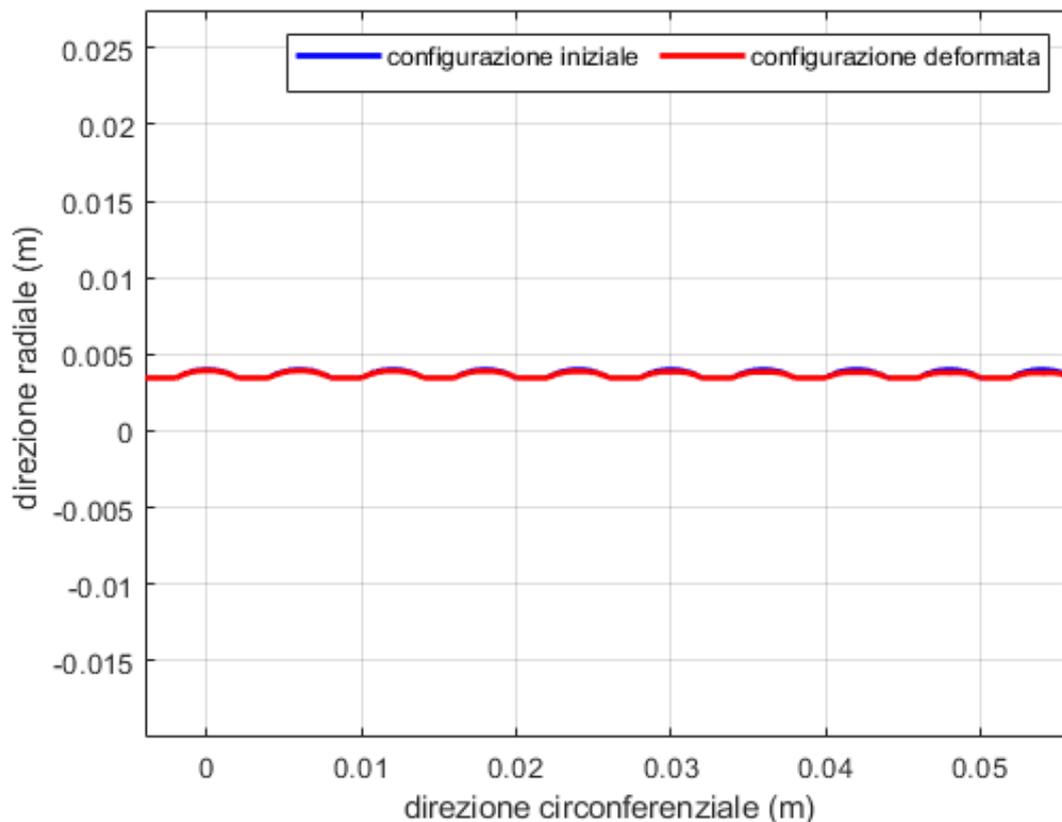


Figura 38 - Rappresentazione del Bump foil

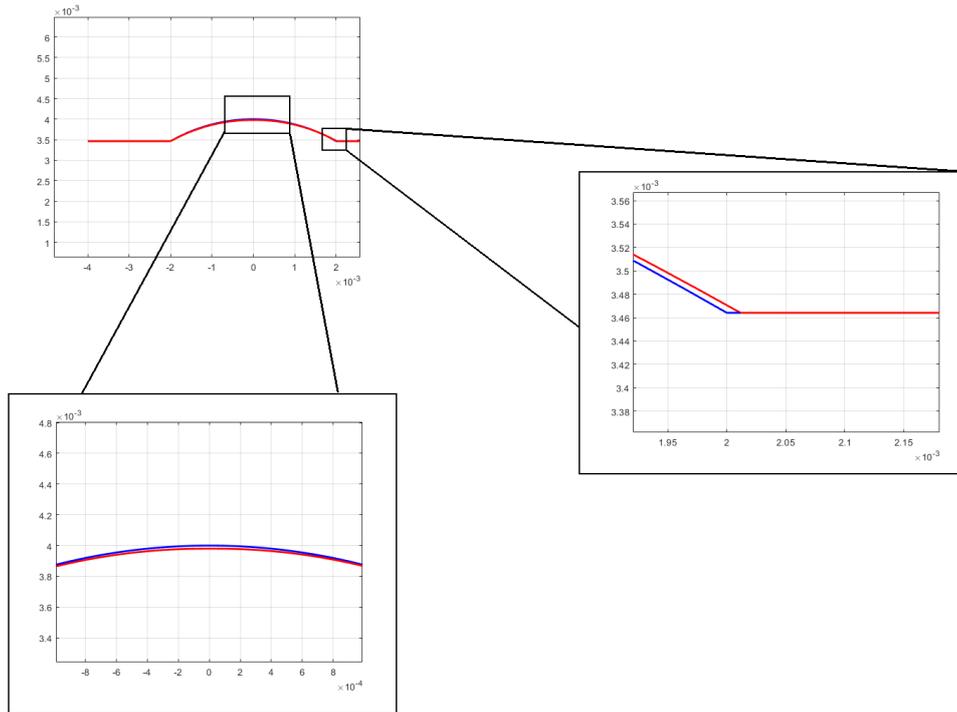


Figura 39 - Zoom Bump con estremità saldata

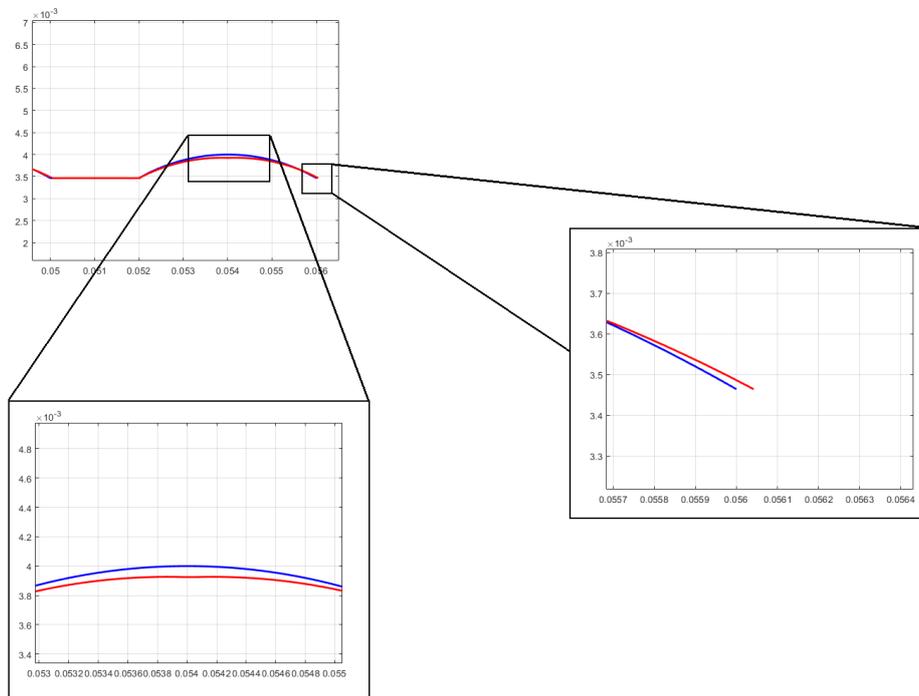


Figura 40 - Zoom Bump con estremità libera

11. Conclusioni

I cuscinetti a lamina rappresentano una delle tecnologie su cui è importante investire per ottimizzare la produzione attraverso modelli numerici. L'analisi svolta ha evidenziato le criticità di implementazione di questa tipologia di cuscinetti ed è emerso che un supporto notevole per l'analisi predittiva in fase di progettazione si otterrebbe sviluppando modelli analitici accurati. Di fatti, sfruttando un modello analitico, si riuscirebbe ad evitare errori durante la progettazione e a perfezionare le prestazioni del cuscinetto studiandone le caratteristiche.

Per questo motivo, in tale trattazione si è puntata l'attenzione su modelli analitici riguardanti il Top foil ed il Bump foil. Del modello analitico del Top foil è stata affinata la trattazione analitica, perfezionandone le equazioni e verificando la coerenza delle ipotesi. Inoltre, è stato approfondito un secondo modello di maggiore complessità analitica in modo tale da produrne un risultato maggiormente corretto. In entrambi i casi, è stata calcolata la freccia della lamina e la forza equivalente agente su di essa; tali risultati sono utili per produrre un modello numerico coerentemente con le ipotesi di base.

Dall'altro lato, è stata eseguita una approfondita analisi su un modello analitico del Bump foil che ha consentito di individuare e studiare i parametri critici nella progettazione del cuscinetto, ossia la deflessione, l'allungamento e il valore della rigidità del singolo Bump. Del modello presentato sono state evidenziate le incongruenze presenti, in particolar modo per quanto riguarda il diagramma di corpo libero e l'applicazione del Teorema di Castigliano per il calcolo dell'energia interna. In merito alle correzioni, si suggerisce per una futura analisi di sfruttare le considerazioni riguardanti le ipotesi e di sviluppare nuovamente il modello al netto delle stesse considerazioni.

Fra le ipotesi del modello analitico, è stata considerata la direzione di allungamento del Bump dall'estremità saldata all'estremità libera, con conseguenze sul verso della forza di attrito coinvolta nello studio del diagramma di corpo libero. Una possibile alternativa è invertire il verso dell'allungamento in modo tale da variare le condizioni di esercizio del Bump e comprenderne gli effetti sui tre parametri indicati in precedenza.

Inoltre, una possibile variante del modello potrebbe interessare l'analisi dinamica del modello del Bump foil. In questo lavoro, ci si è soffermati su uno studio statico del fenomeno della compressione del Bump; tuttavia, potrebbe risultare di elevato interesse lo studio dinamico del fenomeno fisico.

Dal punto di vista computazionale, è stato prodotto un modello numerico, volto a verificare la validità del modello analitico. Sfruttando l'applicativo MATLAB è stata valutata la risposta del Bump foil in termini di allungamento e deflessione dei vari Bump della lamina ed è stato anche studiato

l'andamento del valore della rigidità equivalente di ogni Bump. Dopo un'analisi preliminare in cui il valore della deflessione per ogni Bump è stato scelto costante, il modello è stato realisticamente implementato in modo tale da imporre una distribuzione di forza, ottenendo così i valori di rigidità, deflessione e allungamento per ogni Bump. È stato notato, in linea generale, come il mutuo effetto ipotizzato nel modello comporti un accrescimento della deflessione e dall'allungamento, spostandosi verso l'estremità libera. Al contrario, il valore della rigidità risulta maggiore in corrispondenza del Bump con estremità saldata e decresce spostandosi verso i Bump con estremità libera.

Successivamente, sono stati variati la distribuzione di forza considerata, agente sul Top foil, e il coefficiente di attrito tra lamina e manicotto. Si nota complessivamente che, imponendo una distribuzione di forza triangolare inferiore, si è in grado di ottenere una deflessione all'incirca costante per ogni Bump. Inoltre, si evidenzia che un aumento del coefficiente di attrito rende l'intera lamina complessivamente più rigida a causa del notevole effetto delle forze di attrito.

Al netto dello studio numerico del modello, è stato compreso come esso sia valido. Si sottolinea, al termine di questa trattazione, come possa essere di notevole interesse integrare, sotto opportune ipotesi, tale modello numerico con un altro riguardante il Top foil per valutarne l'interazione tra le due lamine e fornire un'analisi maggiormente accurata.

12. Appendice A

Modello A

Dopo aver definito La distribuzione del carico $q_{B_{i,j}}(\zeta)$ per unità di lunghezza:

$$q_{B_{i,j}}(\zeta) = (a_{B_{i,j}}\zeta^2 + b_{B_{i,j}}\zeta + c_{B_{i,j}}) \Delta z; \quad (1)$$

$$a_{B_{i,j}} = \frac{p_{2B_{i+1,j}} + 2p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i-1,j}}}{2\Delta x_1^2}; \quad (2)$$

$$b_{B_{i,j}} = \frac{4p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i+1,j}} - 3p_{2B_{i-1,j}}}{2\Delta x_1}; \quad (3)$$

$$c_{B_{i,j}} = p_{2B_{i-1,j}}; \quad (4)$$

Sfruttando l'equazione di Eulero-Bernoulli, si ricava l'equazione della linea elastica:

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = (a_{B_{i,j}}\zeta^2 + b_{B_{i,j}}\zeta + c_{B_{i,j}}) \Delta z;$$

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{3}a_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}b_{B_{i,j}}\zeta^2 + c_{B_{i,j}}\zeta + C_1\right) \Delta z;$$

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{12}a_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}b_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}c_{B_{i,j}}\zeta^2 + C_1\zeta + C_2\right) \Delta z;$$

$$EIv_{B_{i,j}}'''' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{60}a_{B_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}b_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}c_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}C_1\zeta^2 + C_2\zeta + C_3\right) \Delta z;$$

$$v_{B_{i,j}} = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{360}a_{B_{i,j}}\zeta^6 + \frac{1}{120}b_{B_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}c_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}C_1\zeta^3 + \frac{1}{2}C_2\zeta^2 + C_3\zeta + C_4\right) \frac{\Delta z}{EI}; \quad (5)$$

Si applicano le condizioni al contorno, che dipendono dai vincoli assunti per le estremità del segmento considerato, ossia due incastri che implicano spostamento verticale nullo e rotazione nulla.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{B_{i,j}} = \left(\frac{1}{360}a_{B_{i,j}}\zeta^6 + \frac{1}{120}b_{B_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}c_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}C_1\zeta^3 + \frac{1}{2}C_2\zeta^2 + C_3\zeta + C_4\right) \frac{\Delta z}{EI} \\ v_{B_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0 \\ v'_{B_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = 0 \\ v_{B_{i,j}}(2\Delta x_1) = 0 \\ v'_{B_{i,j}}(2\Delta x_1) = 0 \end{array} \right.$$

$$C_1 = -\frac{8}{15} a_{B_{i,j}} \Delta x_1^3 - \frac{3}{5} b_{B_{i,j}} \Delta x_1^2 - c_{B_{i,j}} \Delta x_1;$$

$$C_2 = \frac{4}{15} a_{B_{i,j}} \Delta x_1^4 + \frac{4}{15} b_{B_{i,j}} \Delta x_1^3 - \frac{1}{3} c_{B_{i,j}} \Delta x_1^2;$$

$$C_3 = 0;$$

$$C_4 = 0;$$

Imponendo $\zeta = \Delta x_1$ si ottiene la freccia nel punto medio del segmento tra due nodi consecutivi.

$$v_{B_{i,j}}(\Delta x_1) = \left[\left(\frac{1}{360} - \frac{8}{90} + \frac{4}{30} \right) a_{B_{i,j}} \Delta x_1^6 + \left(\frac{1}{120} - \frac{3}{30} + \frac{4}{30} \right) b_{B_{i,j}} \Delta x_1^5 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) c_{B_{i,j}} \Delta x_1^4 \right] \frac{\Delta z}{EI};$$

$$v_{B_{i,j}}(\Delta x_1) = \left(\frac{17}{360} a_{B_{i,j}} \Delta x_1^6 + \frac{1}{24} b_{B_{i,j}} \Delta x_1^5 + \frac{1}{24} c_{B_{i,j}} \Delta x_1^4 \right) \frac{\Delta z}{EI}; \quad (6)$$

Sostituendo nell'eq. 6 le eq. 2,3,4 si ottiene che:

$$v_{B_{i,j}}(\Delta x_1) = \frac{\Delta x_1^4}{360} \cdot \frac{\Delta z}{EI} \left(\frac{17}{2} p_{2B_{i+1,j}} - 17 p_{2B_{i,j}} + \frac{17}{2} p_{2B_{i-1,j}} + \frac{15}{2} \cdot 4 p_{2B_{i,j}} - \frac{15}{2} p_{2B_{i+1,j}} - \frac{45}{2} p_{2B_{i-1,j}} + 15 p_{2B_{i-1,j}} \right);$$

$$v_{B_{i,j}}(\Delta x_1) = \frac{\Delta x_1^4}{360} \cdot \frac{\Delta z}{EI} \left(p_{2B_{i+1,j}} + 13 p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i-1,j}} \right) \quad (7)$$

Sempre riferendosi al modello A, si è calcolata la forza agente sul Bump foil come integrale della distribuzione di forza:

$$f_{B_{i,j}} = \int_0^{\Delta x_1} q_{B_{i,j}}(\zeta) d\zeta + \int_{\Delta x_1}^{2\Delta x_1} q_{B_{i-1,j}}(\zeta) d\zeta =$$

$$= \int_0^{\Delta x_1} (a_{B_{i,j}} \zeta^2 + b_{B_{i,j}} \zeta + c_{B_{i,j}}) \Delta z d\zeta + \int_{\Delta x_1}^{2\Delta x_1} (a_{B_{i-1,j}} \zeta^2 + b_{B_{i-1,j}} \zeta + c_{B_{i-1,j}}) \Delta z d\zeta =$$

$$= \Delta z \left(\frac{1}{3} a_{B_{i,j}} \Delta x_1^3 + \frac{1}{2} b_{B_{i,j}} \Delta x_1^2 + c_{B_{i,j}} \Delta x_1 + \frac{7}{3} a_{B_{i-1,j}} \Delta x_1^3 + \frac{3}{2} b_{B_{i-1,j}} \Delta x_1^2 + c_{B_{i-1,j}} \Delta x_1 \right) =$$

$$= \Delta z \Delta x_1 \left(\frac{p_{2B_{i+1,j}} - 2 p_{2B_{i,j}} + p_{2B_{i-1,j}}}{6} + \frac{4 p_{2B_{i,j}} - p_{2B_{i+1,j}} - 3 p_{2B_{i-1,j}}}{4} + p_{2B_{i-1,j}} + \right.$$

$$\left. + \frac{7(p_{2B_{i-1,j}} - 2 p_{2B_{i-2,j}} + p_{2B_{i-3,j}})}{6} + \frac{3(4 p_{2B_{i-2,j}} - p_{2B_{i-1,j}} - 3 p_{2B_{i-3,j}})}{4} \right) =$$

$$= \frac{\Delta z \Delta x_1}{12} \left(-p_{2B_{i-3,j}} + 8 p_{2B_{i-2,j}} + 10 p_{2B_{i-1,j}} + 8 p_{2B_{i,j}} - p_{2B_{i+1,j}} \right); \quad (8)$$

MODELLO B

Per esplicitare la distribuzione di forza $q_{D_{i,j}}(\zeta)$ nel modello B sono state utilizzate le seguenti relazioni tra le pressioni puntuali.

$$p_{2B_{i,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i,j}} + \frac{p_{4D_{i+1,j}} + p_{4D_{i-1,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2;$$

$$p_{2B_{i+1,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i+2,j}} + \frac{p_{4D_{i+3,j}} + p_{4D_{i+1,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2;$$

$$p_{2B_{i-1,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i-2,j}} + \frac{p_{4D_{i-1,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2;$$

$$p_{2B_{i-2,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i-4,j}} + \frac{p_{4D_{i-5,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2;$$

$$p_{2B_{i-3,j}} \Delta z \Delta x_1 = \left(p_{4D_{i-6,j}} + \frac{p_{4D_{i-7,j}} + p_{4D_{i-5,j}}}{2} \right) \Delta z \Delta x_2;$$

Dalle precedenti equazioni si ottiene le pressioni nei punti nodali del modello A sono pari a:

$$p_{2B_{i,j}} = \frac{2 p_{4D_{i,j}} + p_{4D_{i+1,j}} + p_{4D_{i-1,j}}}{4}; \quad (9)$$

$$p_{2B_{i+1,j}} = \frac{2 p_{4D_{i+2,j}} + p_{4D_{i+3,j}} + p_{4D_{i+1,j}}}{4}; \quad (10)$$

$$p_{2B_{i-1,j}} = \frac{2 p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-1,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{4}; \quad (11)$$

$$p_{2B_{i-2,j}} = \frac{2 p_{4D_{i-4,j}} + p_{4D_{i-5,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{4}; \quad (12)$$

$$p_{2B_{i-3,j}} = \frac{2 p_{4D_{i-6,j}} + p_{4D_{i-7,j}} + p_{4D_{i-5,j}}}{4}; \quad (13)$$

Sostituendo nell'eq.2,3,4 le eq. 9,10,11 si ottiene l'espressione della distribuzione di forza $q_{D_{i,j}}(\zeta)$ nel modello B:

$$q_{D_{i,j}}(\zeta) = \left(a_{D_{i,j}} \zeta^2 + b_{D_{i,j}} \zeta + c_{D_{i,j}} \right) \Delta z;$$

$$a_{D_{i,j}} = \frac{p_{4D_{i+3,j}} + 2p_{4D_{i+2,j}} - p_{4D_{i+1,j}} - 4p_{4D_{i,j}} - p_{4D_{i-1,j}} + 2p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{32\Delta x_2^2} \quad (14)$$

$$b_{D_{i,j}} = \frac{-p_{4D_{i+3,j}} - 2p_{4D_{i+2,j}} + 3p_{4D_{i+1,j}} + 8p_{4D_{i,j}} + p_{4D_{i-1,j}} - 6p_{4D_{i-2,j}} - 3p_{4D_{i-3,j}}}{16\Delta x_2} \quad (15)$$

$$c_{D_{i,j}} = \frac{p_{4D_{i-1,j}} + 2p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{4} \quad (16)$$

Sfruttando l'equazione di Eulero-Bernoulli, si ricava l'equazione della linea elastica $v_{D_{i,j}}$:

$$EIV_{D_{i,j}}'''' = q_{D_{i,j}}(\zeta) = (a_{D_{i,j}}\zeta^2 + b_{D_{i,j}}\zeta + c_{D_{i,j}})\Delta z;$$

$$EIV_{D_{i,j}}''' = q_{D_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{3}a_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}b_{B_{i,j}}\zeta^2 + c_{B_{i,j}}\zeta + C_1\right)\Delta z;$$

$$EIV_{D_{i,j}}'' = q_{B_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{12}a_{B_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}b_{B_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}c_{B_{i,j}}\zeta^2 + C_1\zeta + C_2\right)\Delta z;$$

$$EIV_{D_{i,j}}' = q_{D_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{60}a_{D_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}b_{D_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}c_{D_{i,j}}\zeta^3 + \frac{1}{2}C_1\zeta^2 + C_2\zeta + C_3\right)\Delta z;$$

$$v_{D_{i,j}} = q_{D_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{360}a_{D_{i,j}}\zeta^6 + \frac{1}{120}b_{D_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}c_{D_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}C_1\zeta^3 + \frac{1}{2}C_2\zeta^2 + C_3\zeta + C_4\right)\frac{\Delta z}{EI}; \quad (17)$$

Si applicano le condizioni al contorno, che dipendono dai vincoli assunti per le estremità del segmento considerato, ossia due incastri che implicano spostamento verticale nullo e rotazione nulla.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{D_{i,j}} = q_{D_{i,j}}(\zeta) = \left(\frac{1}{360}a_{D_{i,j}}\zeta^6 + \frac{1}{120}b_{D_{i,j}}\zeta^5 + \frac{1}{24}c_{D_{i,j}}\zeta^4 + \frac{1}{6}C_1\zeta^3 + \frac{1}{2}C_2\zeta^2 + C_3\zeta + C_4\right)\frac{\Delta z}{EI} \\ v_{D_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0 \\ v'_{D_{i,j}}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = 0 \\ v_{D_{i,j}}(4\Delta x_2) = 0 \\ v'_{D_{i,j}}(4\Delta x_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$C_1 = -\frac{64}{15}a_{D_{i,j}}\Delta x_2^3 - \frac{12}{5}b_{D_{i,j}}\Delta x_2^2 - 2c_{D_{i,j}}\Delta x_2;$$

$$C_2 = \frac{64}{15}a_{D_{i,j}}\Delta x_2^4 + \frac{32}{15}b_{D_{i,j}}\Delta x_2^3 - \frac{4}{3}c_{D_{i,j}}\Delta x_2^2;$$

$$C_3 = 0;$$

$$C_4 = 0;$$

Imponendo $\zeta = 2\Delta x_2$ si ottiene la freccia nel punto medio del segmento tra due nodi consecutivi.

$$\begin{aligned}
 v_{D_{i,j}}(2\Delta x_2) &= \left[\left(\frac{64}{360} - \frac{64}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 + \frac{256}{60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) a_{D_{i,j}} \Delta x_2^6 + \left(\frac{32}{120} - \frac{36}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 + \frac{256}{120} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) b_{D_{i,j}} \Delta x_2^5 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{16}{24} - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 + \frac{8}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) c_{D_{i,j}} \Delta x_2^4 \right] \frac{\Delta z}{EI} = \\
 &= \left(\frac{136}{45} a_{D_{i,j}} \Delta x_2^6 + \frac{4}{3} b_{D_{i,j}} \Delta x_2^5 + \frac{2}{3} c_{D_{i,j}} \Delta x_2^4 \right) \frac{\Delta z}{EI}; \tag{18}
 \end{aligned}$$

Sostituendo nell'eq. 18 le eq. 14,15,16 si ottiene che:

$$v_{D_{i,j}}(2\Delta x_2) = \frac{\Delta x_2^4}{90} \cdot \frac{\Delta z}{EI} \left(p_{4D_{i+3,j}} + 2 p_{4D_{i+2,j}} + 14 p_{4D_{i+1,j}} + 26 p_{4D_{i,j}} + 14 p_{4D_{i-1,j}} + 2 p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}} \right)$$

Sempre riferendosi al modello B, si è calcolata la forza agente sul Bump foil come integrale della distribuzione di forza:

$$\begin{aligned}
 f_{D_{i,j}} &= \int_0^{2\Delta x_2} q_{D_{i,j}}(\zeta) d\zeta + \int_{2\Delta x_1}^{4\Delta x_2} q_{D_{i-1,j}}(\zeta) d\zeta \tag{19} \\
 &= \int_0^{2\Delta x_2} (a_{D_{i,j}} \zeta^2 + b_{D_{i,j}} \zeta + c_{D_{i,j}}) \Delta z d\zeta + \int_{2\Delta x_1}^{4\Delta x_2} (a_{D_{i-1,j}} \zeta^2 + b_{D_{i-1,j}} \zeta + c_{D_{i-1,j}}) \Delta z(\zeta) d\zeta = \\
 &= \Delta z \left(\frac{8}{3} a_{D_{i,j}} \Delta x_2^3 + \frac{4}{2} b_{D_{i,j}} \Delta x_2^2 + 2 c_{D_{i,j}} \Delta x_2 + \frac{56}{3} a_{D_{i-1,j}} \Delta x_2^3 + \frac{12}{2} b_{D_{i-1,j}} \Delta x_2^2 + 2 c_{D_{i-1,j}} \Delta x_2 \right);
 \end{aligned}$$

dove:

$$a_{D_{i,j}} = \frac{p_{4D_{i+3,j}} + 2 p_{4D_{i+2,j}} - p_{4D_{i+1,j}} - 4 p_{4D_{i,j}} - p_{4D_{i-1,j}} + 2 p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{32\Delta x_2^2}; \tag{20}$$

$$b_{D_{i,j}} = \frac{-p_{4D_{i+3,j}} - 2 p_{4D_{i+2,j}} + 3 p_{4D_{i+1,j}} + 8 p_{4D_{i,j}} + p_{4D_{i-1,j}} - 6 p_{4D_{i-2,j}} - 3 p_{4D_{i-3,j}}}{16\Delta x_2}; \tag{21}$$

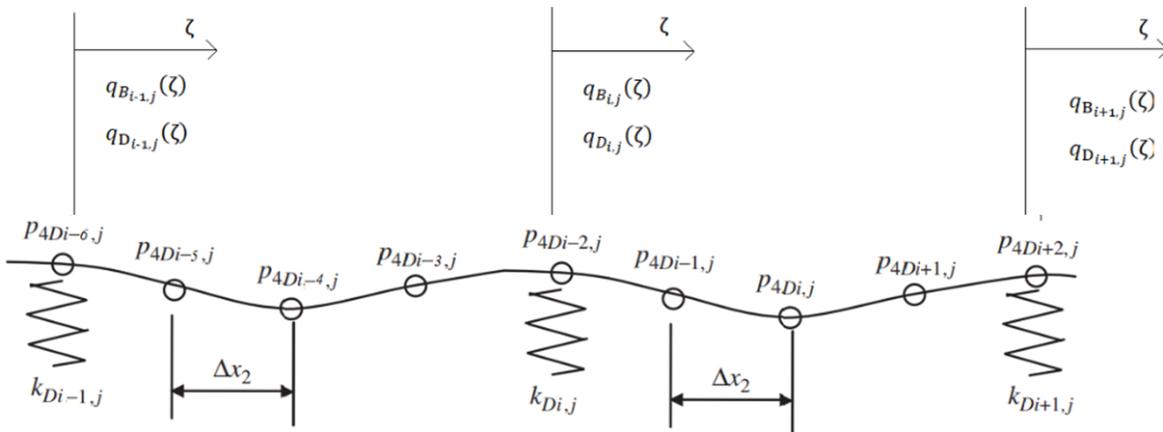
$$c_{D_{i,j}} = \frac{p_{4D_{i-1,j}} + 2 p_{4D_{i-2,j}} + p_{4D_{i-3,j}}}{4}; \tag{22}$$

$$a_{D_{i-1,j}} = \frac{p_{4D_{i-1,j}} + 2 p_{4D_{i-2,j}} - p_{4D_{i-3,j}} - 4 p_{4D_{i-4,j}} - p_{4D_{i-5,j}} + 2 p_{4D_{i-6,j}} + p_{4D_{i-7,j}}}{32\Delta x_2^2}; \tag{23}$$

$$b_{D_{i-1,j}} = \frac{-p_{4D_{i-1,j}} - 2 p_{4D_{i-2,j}} + 3 p_{4D_{i-3,j}} + 8 p_{4D_{i-4,j}} + p_{4D_{i-5,j}} - 6 p_{4D_{i-6,j}} - 3 p_{4D_{i-7,j}}}{16\Delta x_2}; \tag{24}$$

$$c_{D_{i-1,j}} = \frac{p_{4D_{i-5,j}} + 2 p_{4D_{i-6,j}} + p_{4D_{i-7,j}}}{4}; \tag{25}$$

Le eq. 23,24,25 sono ottenute riferendosi allo schema in figura.



Sostituendo nella eq. 20-25 nell'eq.19 si ottiene l'espressione della forza $f_{D_{i,j}}$

$$f_{D_{i,j}} = \frac{\Delta z \Delta x_2}{24} \left(-p_{4D_{i-7,j}} - 2 p_{4D_{i-6,j}} + 7 p_{4D_{i-5,j}} + 16 p_{4D_{i-4,j}} + 18 p_{4D_{i-3,j}} + 20 p_{4D_{i-2,j}} + 18 p_{4D_{i-1,j}} + \right. \\ \left. + 16 p_{4D_{i,j}} + 7 p_{4D_{i+1,j}} - 2 p_{4D_{i+2,j}} - p_{4D_{i+3,j}} \right);$$

13. Listati

```
%% Calcolo Bump Foil iterativo
clear all
close all
clc
%% Dati iniziali di configurazione

mu=0.1; % coefficiente di attrito dinamico con il Manicotto
eta=0.1; % coefficiente di attrito dinamico con il Top foil
teta0=60/180*pi; % (rad)
Rb=4e-3; %raggio di base del Bump (m)
Rb*(1-cos(teta0))*1e3; %massimo valore di deltah (mm)
2*Rb*sin(teta0/2)*1e3; %lunghezza segmento inclinato (mm)
Bump_Number=10; %numero di Bump
v=0.29; %coefficiente di Poisson
E=2.14e11;%modulo di Young
t=0.1e-3; %spessore della lamina (m)
L=38.1e-3; %lunghezza lamina (m)
k1=k1_func(Rb,teta0,t,L,v,E); %rigidezza molla orizzontale

%% imposto sistema iterativo
Fp=25*ones(Bump_Number,1); %forza verticale su ciascun bump (N)
delta_h=ones(Bump_Number,1)*1e-3; %deltah iniziale
test=10*ones(Bump_Number,1); %valore iniziale del test
for i=Bump_Number:-1:1
    if i<Bump_Number-1
        while test(i)>=0.01
            delta_L(i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i))^2)-
                +Rb*sin(teta0);
            tg_alfa(i)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i));
            delta_L(i+1)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i+1)).^2)-
                +Rb*sin(teta0);
            tg_alfa(i+1)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i+1))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i+1));
            A(i)=0.5*delta_h(i)*(1/tg_alfa(i)-mu)*(1-eta*tg_alfa(i));
            B(i)=0.5*delta_h(i)*(1/tg_alfa(i)+mu)*(1+eta*tg_alfa(i));
            A(i+1)=0.5*delta_h(i+1)*(1/tg_alfa(i+1)-mu)*(1-eta*tg_alfa(i+1));
            B(i+1)=0.5*delta_h(i+1)*(1/tg_alfa(i+1)+mu)*(1+eta*tg_alfa(i+1));
            Kv(i+1)=(2*(delta_L(i+1)-delta_L(i+2))*k1+B(i+1)*Kv(i+2))/A(i+1);
            Kv(i)=(2*(delta_L(i)-delta_L(i+1))*k1+B(i)*Kv(i+1))/A(i);
            test(i)=(delta_h(i)-Fp(i)/Kv(i))/(Fp(i)/Kv(i));
            delta_h(i)=Fp(i)/Kv(i);
        end
    elseif i==Bump_Number-1
        while test(i)>=0.01
            delta_L(i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i))^2)-
                +Rb*sin(teta0);
            tg_alfa(i)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i));
            delta_L(i+1)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i+1)).^2)-
                +Rb*sin(teta0);
            tg_alfa(i+1)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i+1))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i+1));
            A(i)=0.5*delta_h(i)*(1/tg_alfa(i)-mu)*(1-eta*tg_alfa(i));
            B(i)=0.5*delta_h(i)*(1/tg_alfa(i)+mu)*(1+eta*tg_alfa(i));
            A(i+1)=0.5*delta_h(i+1)*(1/tg_alfa(i+1)-mu)*(1-eta*tg_alfa(i+1));
            Kv(i+1)=2*delta_L(i+1)*k1/A(i+1);
            Kv(i)=(2*(delta_L(i)-delta_L(i+1))*k1+B(i)*Kv(i+1))/A(i);
            test(i)=(delta_h(i)-Fp(i)/Kv(i))/(Fp(i)/Kv(i));
            delta_h(i)=Fp(i)/Kv(i);
        end
    elseif i==Bump_Number
        while test(i)>=0.01
            delta_L(i)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i)).^2)-
                +Rb*sin(teta0);
            tg_alfa(i)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i));
            A(i)=0.5*delta_h(i)*(1./tg_alfa(i)-mu)*(1-eta*tg_alfa(i));
            Kv(i)=2*delta_L(i)*k1/A(i);
            test(i)=(delta_h(i)-Fp(i)/Kv(i))/(Fp(i)/Kv(i));
            delta_h(i)=Fp(i)/Kv(i);
        end
    end
end
end
```

```

%% plot
figure()
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),atan(tg_alfa)*180/pi,'r','LineWidth',2)
xlim([1 max(Bump_Number)])
ylim([min(atan(tg_alfa)*180/pi) max(atan(tg_alfa)*180/pi)+1])
xlabel('Indice i del Bump')
ylabel('(°)')
legend('\alpha')
grid

figure()
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),delta_h*1e3,'b','LineWidth',2)
hold all
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),delta_L*1e3,'r','Linewidth',2)
xlabel('Indice i del Bump')
ylabel('Spostamento (mm)')
legend('\Deltah','\DeltaL')
xlim([1 max(Bump_Number)])
ylim([0 max(max(delta_L*1e3,delta_h*1e3))])
title('\Deltah e \DeltaL per ogni Bump')
grid

figure()
subplot(3,1,1)
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),delta_h*1e3,'r','LineWidth',2)
xlabel('Indice i del Bump')
title('Scostamento dal valore di Fp noto')
ylabel('(mm)')
legend('\Deltah')
xlim([1 max(Bump_Number)])
ylim([0 max(delta_h*1e3)])
grid

subplot(3,1,2)
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),Kv*1e-3,'g','LineWidth',2)
xlabel('Indice i del Bump')
ylabel('(kN/m)')
legend('Kv')
xlim([1 max(Bump_Number)])
ylim([0 max(Kv*1e-3)])
grid

subplot(3,1,3)
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),Fp,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),Kv'.*delta_h,'-o','LineWidth',2)
xlabel('Indice i del Bump')
ylabel('(N)')
legend('Fp','Kv*\Deltah')
%xlim([1 max(Bump_Number)])
grid

figure()
plot(delta_h*1e3,Kv'*1e-3,'b','LineWidth',2)
xlim([min(delta_h).*1e3 max(delta_h).*1e3])
ylim([min(Kv*1e-3) max(Kv*1e-3)])
title('Andamento di Kv in funzione di \Deltah ')
xlabel('\Deltah(mm)')
ylabel('(kN/(m^2))')
legend('Kv')
grid

FR=0.5*Kv'.*delta_h.*(1-eta*tg_alfa');
FL=0.5*Kv'.*delta_h.*(1+eta*tg_alfa');

figure()
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),FR,'-o','LineWidth',2)
hold all
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),0.5*Fp.*(1-eta*tg_alfa'),'r','LineWidth',2)
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),FL,'-o','LineWidth',2)
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),0.5*Fp.*(1+eta*tg_alfa'),'b','LineWidth',2)
xlabel('Indice i del Bump')

```

```

ylabel(' (N) ')
title('Andamento di FL e FR simulate e ipotizzate per ogni Bump ')
legend('FR simulata',' FR ipotizzata',' FL simulata','FL ipotizzata')
grid

figure()
plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),Kv'*1e-3/L,'b','LineWidth',2)
xlim([1 max(Bump_Number)])
ylim([min(Kv*1e-3/L) max(Kv*1e-3/L)])
title('Andamento di Kv per unità di lunghezza ')
xlabel('Indice i del Bump')
ylabel(' (kN/(m^2)) ')
legend('Kv/L (Kai Feng)')
grid

%%

figure()
n=101; %numero di punti per Bump
teta=linspace(-pi/6+pi/2,pi/6+pi/2,n);
p=3*Rb*cos(-pi/6+pi/2); %passo
L_tot=p*(Bump_Number-1); %lunghezza circonferenziale della lamina
xc=linspace(0,L_tot,Bump_Number); % vettore dei centri dei Bump

for i=1:Bump_Number
    x=Rb*cos(teta)+xc(i);
    y=Rb*sin(teta);
    Y=Rb*sin(-pi/6+pi/2)*ones(1,n);
    X=xc(i)-linspace(0,Rb*cos(-pi/6+pi/2),n);
    plot(x,y,'b',X,Y,'b','LineWidth',2);
    hold on
    def_oriz=linspace(delta_L(i),0,n);
    def_vert=[linspace(0,delta_h(i)/2,(n+1)/4),linspace(delta_h(i)/2,delta_h(i),(n+1)/4),
    delta_h(i),linspace(delta_h(i),delta_h(i)/2,(n-1)/4),linspace(delta_h(i)/2,0,(n-1)/4)];

    xnew=x+def_oriz;
    ynew=(Rb-def_vert).*sin(teta);
    XNEW=-Rb*cos(-pi/6+pi/2)-linspace(0,Rb*cos(-pi/6+pi/2),n);
    YNEW=Rb*sin(-pi/6+pi/2)*ones(1,n);
    plot(xnew,ynew,'r',XNEW,YNEW,'r','LineWidth',2);
    axis equal
    grid
end
for i=2:Bump_Number
    x=Rb*cos(teta)+xc(i);
    y=Rb*sin(teta);
    Y=Rb*sin(-pi/6+pi/2)*ones(1,n);
    X=xc(i)-Rb*cos(-pi/6+pi/2)-linspace(0,Rb*cos(-pi/6+pi/2),n);

    plot(x,y,'b',X,Y,'b','LineWidth',2);
    hold on
    def_oriz=linspace(delta_L(i),0,n);
    % def_oriz=delta_L(i)*ones(1,n);

def_vert=[linspace(0,delta_h(i)/2,(n+1)/4),linspace(delta_h(i)/2,delta_h(i),(n+1)/4),delta_h(i)
),linspace(delta_h(i),delta_h(i)/2,(n-1)/4),linspace(delta_h(i)/2,0,(n-1)/4)];

    xnew=xc(i)+Rb*cos(teta)+def_oriz;
    ynew=(Rb-def_vert).*sin(teta);
    XNEW=X+delta_L(i-1);
    YNEW=Rb*sin(-pi/6+pi/2)*ones(1,n);
    plot(xnew,ynew,'r',XNEW,YNEW,'r','LineWidth',2);
    axis equal
    grid
end

xlabel('direzione circonferenziale (m)')
ylabel('(direzione radiale (m))')
legend('configurazione iniziale','', 'configurazione deformata')

```

```

for j=1:size(Fp,2)
    for i=Bump_Number:-1:1
        if i<Bump_Number-1
            while test(i,j)>=0.01
                delta_L(i,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))^2)-
                +Rb*sin(teta0));
                tg_alfa(i,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i,j));
                delta_L(i+1,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
                +delta_h(i+1,j))^2)-Rb*sin(teta0));
                tg_alfa(i+1,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-
                +delta_h(i+1,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i+1,j));
                A(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)-mu).*(1-eta*tg_alfa(i,j));
                B(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)+mu).*(1+eta*tg_alfa(i,j));
                A(i+1,j)=0.5*delta_h(i+1,j).*(1/tg_alfa(i+1,j)-mu).*(1-eta*tg_alfa(i+1,j));
                B(i+1,j)=0.5*delta_h(i+1,j).*(1/tg_alfa(i+1,j)+mu).*(1+eta*tg_alfa(i+1,j));
                Kv(i+1,j)=(2*(delta_L(i+1,j)-delta_L(i+2,j))*k1+B(i+1,j).*Kv(i+2,j))./A(i+1,j)
                Kv(i,j)=(2*(delta_L(i,j)-delta_L(i+1,j))*k1+B(i,j).*Kv(i+1,j))./A(i,j);
                test(i,j)=(delta_h(i,j)-Fp(i,j)./Kv(i,j))./(Fp(i,j)./Kv(i,j));
                delta_h(i,j)=Fp(i,j)./Kv(i,j);
            end
        elseif i==Bump_Number-1
            while test(i,j)>=0.01
                delta_L(i,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))^2)-
                +Rb*sin(teta0));
                tg_alfa(i,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i,j));
                delta_L(i+1,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
                +delta_h(i+1,j))^2)-Rb*sin(teta0));
                tg_alfa(i+1,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-
                +delta_h(i+1,j))./(Rb*sin(teta0)+delta_L(i+1,j));
                A(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)-mu).*(1-eta*tg_alfa(i,j));
                B(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)+mu).*(1+eta*tg_alfa(i,j));
                A(i+1,j)=0.5*delta_h(i+1,j).*(1/tg_alfa(i+1,j)-mu).*(1-eta*tg_alfa(i+1,j));
                Kv(i+1,j)=2*delta_L(i+1,j)*k1/A(i+1,j);
                Kv(i,j)=(2*(delta_L(i,j)-delta_L(i+1,j))*k1+B(i,j).*Kv(i+1,j))./A(i,j);
                test(i,j)=(delta_h(i,j)-Fp(i,j)./Kv(i,j))./(Fp(i,j)./Kv(i,j));
                delta_h(i,j)=Fp(i,j)./Kv(i,j);
            end
        elseif i==Bump_Number
            while test(i,j)>=0.01
                delta_L(i,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j)).^2)-
                +Rb*sin(teta0));
                tg_alfa(i,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i,j));
                A(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1./tg_alfa(i,j)-mu).*(1-eta*tg_alfa(i,j));
                Kv(i,j)=2*delta_L(i,j)*k1/A(i,j);
                test(i,j)=(delta_h(i,j)-Fp(i,j)/Kv(i,j))./(Fp(i,j)/Kv(i,j));
                delta_h(i,j)=Fp(i,j)/Kv(i,j);
            end
        end
    end
end

figure()
for i=1:size(Fp,2)
    plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),delta_h(:,i)*1e3,'LineWidth',2)
    hold on
    plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),delta_L(:,i)*1e3,'Linewidth',2)
end
xlabel('Indice i del Bump')
ylabel('Spostamento (mm)')
legend('\Deltah_1 (Fp_1)', '\DeltaL_1 (Fp_1)', '\Deltah_2 (Fp_2)', '\DeltaL_2 (Fp_2)', '\Deltah_3 (Fp_3)', '\DeltaL_3 (Fp_3)')
xlim([1 max(Bump_Number)])
ylim([0 max(max(delta_h,[], 'all'), max(delta_L,[], 'all'))*1e3])
title('\Deltah e \DeltaL per ogni Bump al variare della distribuzione di forza Fp')
grid

```

```

for j=1:size(mu,2)
    for i=Bump_Number:-1:1
        if i<Bump_Number-1
            while test(i,j)>=0.01
                delta_L(i,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))^2)-
Rb*sin(teta0);
                tg_alfa(i,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i,j));
                delta_L(i+1,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
delta_h(i+1,j))^2)-Rb*sin(teta0);
                tg_alfa(i+1,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-
delta_h(i+1,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i+1,j));
                A(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)-mu(j)).*(1-eta*tg_alfa(i,j));
                B(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)+mu(j)).*(1+eta*tg_alfa(i,j));
                A(i+1,j)=0.5*delta_h(i+1,j).*(1/tg_alfa(i+1,j)-mu(j)).*(1-eta*tg_alfa(i+1,j));
                B(i+1,j)=0.5*delta_h(i+1,j).*(1/tg_alfa(i+1,j)+mu(j)).*(1+eta*tg_alfa(i+1,j));
                Kv(i+1,j)=(2*(delta_L(i+1,j)-delta_L(i+2,j))*k1+B(i+1,j)).*Kv(i+2,j))./A(i+1,j)
                Kv(i,j)=(2*(delta_L(i,j)-delta_L(i+1,j))*k1+B(i,j)).*Kv(i+1,j))./A(i,j);
                test(i,j)=abs((delta_h(i,j)-Fp(i))./Kv(i,j))./(Fp(i))./Kv(i,j)));
                delta_h(i,j)=Fp(i)./Kv(i,j);
            end
        elseif i==Bump_Number-1
            while test(i,j)>=0.01
                delta_L(i,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))^2)-
+Rb*sin(teta0);
                tg_alfa(i,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i,j));
                delta_L(i+1,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
+delta_h(i+1,j))^2)-Rb*sin(teta0);
                tg_alfa(i+1,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-
+delta_h(i+1,j))./(Rb*sin(teta0)+delta_L(i+1,j))
                A(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)-mu(j)).*(1-eta*tg_alfa(i,j));
                B(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)+mu(j)).*(1+eta*tg_alfa(i,j));
                A(i+1,j)=0.5*delta_h(i+1,j).*(1/tg_alfa(i+1,j)-mu(j)).*(1-
+eta*tg_alfa(i+1,j));
                Kv(i+1,j)=2*delta_L(i+1,j)*k1/A(i+1,j);
                Kv(i,j)=(2*(delta_L(i,j)-delta_L(i+1,j))*k1+B(i,j)).*Kv(i+1,j))./A(i,j);
                test(i,j)=abs((delta_h(i,j)-Fp(i))./Kv(i,j))./(Fp(i))./Kv(i,j)));
                delta_h(i,j)=Fp(i)./Kv(i,j);
            end
        elseif i==Bump_Number
            while test(i,j)>=0.01
                delta_L(i,j)=sqrt((2*Rb*sin(teta0/2))^2-(Rb*(1-cos(teta0))-
+delta_h(i,j))^2)-Rb*sin(teta0);
                tg_alfa(i,j)=(Rb*(1-cos(teta0))-delta_h(i,j))/(Rb*sin(teta0)+delta_L(i,j));
                A(i,j)=0.5*delta_h(i,j).*(1/tg_alfa(i,j)-mu(j)).*(1-eta*tg_alfa(i,j));
                Kv(i,j)=2*delta_L(i,j)*k1/A(i,j);
                test(i,j)=abs((delta_h(i,j)-Fp(i))./Kv(i,j))./(Fp(i))./Kv(i,j)));
                delta_h(i,j)=Fp(i)./Kv(i,j);
            end
        end
    end
end

figure()
for i=1:size(mu,2)
    plot(linspace(1,Bump_Number,Bump_Number),atan(tg_alfa(:,i))*180/pi,'LineWidth',2)
    hold on
end

xlim([1 max(Bump_Number)])
ylim([min(atan(tg_alfa)*180/pi,[],'all') max(atan(tg_alfa)*180/pi,[],'all')+1])
xlabel('Indice i del Bump')
ylabel('(°)')
legend('\alpha_a (\mu_a=0.1)', '\alpha_b (\mu_b=0.3)', '\alpha_c (\mu_c=0.5)')
title('\alpha per ogni Bump al variare del coefficiente di attrito \mu')
grid

```

14. Nomenclatura

C = smorzamento strutturale del Top foil;

D = rigidità flessionale del Bump foil;

E = modulo di Young;

f = forza dinamica trasmessa dal Top foil su Bump foil;

F_p = forza di pressione verticale agente nel punto più alto del Bump;

F_s = forza di richiamo elastica agente tra le due estremità del Bump;

F_{beam} = componente orizzontale di reazione nel Bump;

F_H = forza fittizia per il calcolo della deflessione nel Bump;

F_R = componente verticale destra di reazione nel Bump;

F_L = componenti verticali sinistra di reazione nel Bump;

f = forza di attrito di strisciamento tra il Bump e l'alloggiamento del cuscinetto;

k = rigidità elastica della molla;

k_v = rigidità elastica della molla equivalente del Bump;

k_1 = rigidità elastica della molla tra le due estremità del Bump;

I = inerzia del segmento del Top foil;

l_0 = un mezzo della lunghezza del Bump;

m = massa del Top foil;

M_b = momento di reazione applicato nell'estremità del Bump;

p = pressione agente sul Top foil;

p_1 = il passo tra due Bump consecutivi;

q = distribuzione del carico agente sul Top foil;

R_b = raggio del Bump;

R^i = reazione vincolare tra Link rigidi del modello del Bump foil;

R = raggio del Bump;

S = area della sezione della lamina del Bump foil;

t = lo spessore della lamina del Bump foil;

U = energia interna del Bump;

α = angolo del link rigido nel modello del Bump foil;

β = angolo spazzato da un estremo all'altro del Bump;

γ = coefficiente di viscosità nel mezzo;

δ = deflessione del Bump foil nella modellazione del Top foil;

$\bar{\delta}$ = deflessione orizzontale del Bump nella modellazione del Bump foil;

μ = coefficiente di frizione tra Bump foil e alloggiamento;

η = coefficiente di frizione tra Bump foil e Top Foil;

v = deflessione verticale del Top Foil;

ν = rapporto di Poisson;

ζ = coordinata lineare del segmento del Top Foil;

Δh = deflessione verticale del Bump;

Δx = tratto del segmento del Top Foil compreso tra due Bump consecutivi;

Δz = spessore del Top foil lungo la direzione assiale;

ΔL = deflessione orizzontale del Bump;

θ_0 = mezzo angolo del Bump Foil;

15. Bibliografia

- [1] C. DellaCorte and Mark J. Valco, "Load Capacity Estimation of Foil Air Journal Bearings for Oil-Free Turbomachinery Applications", NASA/TM—2000-209782, ARL-TR-2334
- [2] Daejong Kim, "Parametric Studies on Static and Dynamic Performance of Air Foil Bearings with Different Top Foil Geometries and Bump Stiffness Distributions", Vol. 129, pp. 354-364 April 2007
- [3] Heshmat, H.: "Advancements in the Performance of Aerodynamic Foil Journal Bearings High Speed and Load Capability," ASME Journal of Tribology, Vol. 116, pp. 287–295, April 1994.
- [4] P. Baginski and G. Zywicka Mechanics and Mechanical Engineering, "Determination of the Lift-Off Speed in Foil Bearings Using Various Measurement Methods" Vol. 22, No. 2 pp. 415–424, 2018
- [5] D. Kim and S. Park," Hydrostatic air foil bearings: Analytical and experimental investigation", Tribology International, Vol. 42, No 3, pp. 413–425, 2009.
- [6] L. I. Paouris, D. A. Bompos, G. A. Nikolakopoulos "Simulation of Static Performance of Air Foil Bearings Using Coupled Finite Element and Computational Fluid Dynamics Techniques", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol 136, 022503, 2013.
- [7] L. O'Donner, "Fluid-Film Foil Bearings Control Engine Heat," Mechanical Engineering, ASME, pp. 72–75, May 1993
- [8] P. Newman, "Surface Coating for Machine Elements Having Rubbing Surfaces," U.S. Patent, Vol 4, no5, 1977
- [9] C. DellaCorte, V. Lukaszewicz, M.J. Valco, K.C. Radil, H. Heshmat, "Performance and Durability of High Temperature Foil Air Bearings for Oil-Free Turbomachinery," NASA/TM—1999–209187.
- [10] Heshmat, C.A., Xu, D.S., and Heshmat, H., "Analysis of Gas Lubricated Foil Thrust Bearings Using Coupled Finite Element and Finite Difference Methods," ASME Paper No. 99-TRIB-34, 1999.
- [11] Zaretsky, E.V.: "Life Factors for Rolling Element Bearings," STLE Special Publication.
- [12] Zaretsky, E.V., Poplowski, J.V., and Peters, S.M, "Comparison of Life Theories for Rolling-Element Bearings," STLE Tribology Transactions, Vol. 32, No. 2, pp. 237–248, 1996
- [13] C. DellaCorte, V. Lukaszewicz, M.J. Valco and K.C Radil, H. Heshmat, "Performance and Durability of High Temperature Foil Air Bearings for Oil-Free Turbomachinery", NASA/TM—2000-209187/REV1, ARL-TR-2202, 2000

- [14] Uwe Borchert, Antonio Delgado, Janusz A. Szymczyk, "Development and Testing of Air Foil Bearing System for an Automotive Exhaust Gas Turbocharger", 4th International Conference, Low Temperature and Waste Heat Use in Energy Supply Systems, 25th September 2015
- [15] G. L. Agrawal, "Foil Air/Gas Bearing Technology An Overview", International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition, June 2nd–5th 1997, Orlando, Publication 97-GT-347
- [16] Dykas, B. et al.: Design, Fabrication and Performance of Foil Gas Thrust Bearings for Microturbomachinery Applications, Technical Publication, NASA/TM 2008-215062, 2008
- [17] G. L. Agrawal, "Foil air/gas bearing technology-an overview," ASME, p. 11, 1997
- [18] K. Feng and Shigehiko Kaneko, "Analytical Model of Bump-Type Foil Bearings Using a Link-Spring Structure and a Finite-Element Shell Model" ASME Journal of Tribology Vol. 132, pp. 2-10, 2010
- [19] S. Le Lez, M. Arghir and J. Frene, "A New Bump-Type Foil Bearing Structure Analytical Model," ASME J. Eng. Gas Turbines Power, Vol.129, pp.1047–1057, 2007
- [20] K. Shalash, J. Schiffmann, "On the manufacturing of compliant foil bearings" École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL),2002
- [21] C. Dellacorte, K. C. Radil, R.J.Bruckner, S.A. Howard "Design, Fabrication and Performance of Open Source Generation I and II Compliant Hydrodynamic Gas Foil Bearings" NASA/TM—2007-214691, 2007