POLITECNICO DI TORINO

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

Analisi 3D FEM e analitiche per lo studio igro-termo-elastico di piastre e gusci con strati in Functionally Graded Material (FGM)

Relatore:
Salvatore Brischetto

Candidato:
Gianluca Gattuso

Marzo 2021

Ringraziamenti

Innanzitutto ringrazio il Professore Brischetto per l'infinita professionalità e disponibilità con cui mi ha guidato in questo percorso di tesi ma soprattutto per gli insegnamenti che mi ha trasmesso e che porterò sempre con me. Un ringraziamento va all'Ingegnere Torre che si è dimostrato altrettanto disponibile e sempre pronto ad aiutarmi nonostante i suoi impegni.

Ringrazio tutti gli amici che mi sono stati vicini in questo percorso e mi hanno sostenuto nei periodi difficili ma che soprattutto sono stati capaci di regalarmi un sorriso o una risata dimostrandomi tutto il loro bene.

Ringrazio la mia ragazza Alessia per aver sopportato il mio caratteraccio e avermi ascoltato nelle mie infinite lamentele, per avermi motivato a fare sempre meglio e per aver creduto in me quando io non lo facevo. Sono cresciuto giorno dopo giorno e questo lo devo anche a lei.

Ringrazio la famiglia della mia ragazza per avermi aiutato in questi mesi e per essere costantemente un punto di riferimento verso cui provo grande ammirazione.

Ringrazio profondamente la mia famiglia perché ha sempre visto in quello che faccio un motivo di vanto e orgoglio, in particolare mia sorella Giulia che mi è stata vicina con le sue parole dolci quando ne avevo bisogno.

Un ringraziamento speciale va ai miei nonni, Marianna e Benedetto, che sono come secondi genitori per me e che appoggiano tutto ciò che faccio. La mia più grande soddisfazione è sapere di renderli fieri.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le strutture aeronautiche realizzate in composito tradizionale e in FGM (Functionally Graded Material) risultano spesso esposte ad alte temperature e/o condizioni ambientali con livelli elevati di umidità. La tendenza ad assorbire l'umidità determina effetti negativi sulle loro prestazioni e proprietà meccaniche in condizioni di funzionamento avverse. Pertanto, gli effetti igroscopici possono essere indagati in termini di degradazione delle proprietà dei materiali incorporati nelle strutture multistrato. Quest'ultime possono essere sottoposte anche a severe condizioni ambientali termiche, come quelle relative alle alte temperature, agli alti gradienti di temperatura e/o ai cambiamenti ciclici della stessa. Alcuni esempi si possono osservare negli aerei ad alta velocità, nei veicoli spaziali, nei veicoli di lancio e nei sistemi di propulsione avanzati. In tutti questi casi, un'adeguata analisi termica strutturale deve essere realizzata e deve tenere conto dei problemi di trasferimento del calore, delle sollecitazioni termiche transitorie e stazionarie, del processo di indurimento dei materiali, del processo di lavorazione e delle sollecitazioni residue derivanti da esso, dei fenomeni vibrazionali nonché dei problemi di deflessione e post-buckling.

1.1 Obiettivi

Il presente lavoro di tesi propone l'analisi igro-termo-elastica di piastre e gusci realizzati in materiale composito e/o sandwich tradizionale nonché in Functionally Graded Material (FGM) sia costituiti da un singolo strato sia formati da più strati con diverse sequenze di laminazione oppure da due pelli esterne in materiale classico intervallate da un cuore in FGM. A tal proposito possono essere considerate diverse leggi lungo lo spessore per descrivere le proprietà elastiche, termiche e igrometriche dei suddetti materiali. Lo studio è stato condotto con modelli 3D FEM tramite Patran & Nastran e con modelli 3D SHELL analitici sviluppati in ambiente Matlab. I profili termici e igrometrici possono essere assunti a priori lineari lungo lo spessore oppure possono essere calcolati risolvendo le versioni 1D e 3D delle leggi di Fourier e Fick. I risultati ottenuti possono essere espressi in termini di spostamenti, tensioni, deformazioni, profili di temperatura e umidità nonché dei relativi flussi termici e igrometrici. Nello specifico si è deciso di ricavare i profili termici e igrometrici attraverso la risoluzione della versione 3D delle leggi di diffusione igrometrica e di trasmissione termica mentre, per facilitare il confronto con risultati già presenti in letteratura, gli output delle analisi qui presentate contengono le componenti di spostamento di *plates* e *shells*. Infatti, come evidenziato ulteriormente nella sezione *Risultati*, una prima fase del lavoro consiste nella verifica e validazione di modelli preesistenti sia per via analitica sia per via numerica per quanto concerne l'analisi termica e igrometrica dei compositi tradizionali. Tale processo di validazione riguarda inoltre i risultati dell'analisi termica analitica degli FGM. Il contributo innovativo al presente lavoro di tesi consiste nell'analisi termica di carattere numerico degli FGM, resa possibile attraverso la creazione di appositi modelli 3D agli elementi finiti, nonché nell'analisi igrometrica sia analitica sia numerica degli FGM. In quest'ultimo caso sono stati realizzati ex novo rispettivamente modelli 3D SHELL analitici e modelli 3D agli elementi finiti verificando la consistenza dei risultati ottenuti con i due distinti codici di calcolo.

Capitolo 2

Functionally Graded Materials

2.1 Background

Numerose applicazioni in campo aerospaziale richiedono componenti e strutture con proprietà e caratteristiche specifiche talvolta non ottenibili attraverso le tecniche di produzione e i materiali utilizzati tradizionalmente. Per ovviare a questo problema nel corso degli anni l'impiego dei materiali compositi ha raggiunto un livello di diffusione notevole assicurando elevate prestazioni e affidabilità in servizio. Questi materiali, infatti, possiedono proprietà fisiche e meccaniche le quali risultano equamente distribuite garantendo un comportamento meccanico-strutturale omogeneo del prodotto finale. Una soluzione alternativa, altrettanto diffusa nel settore dell'aerospazio, prevede l'utilizzo di elementi strutturali realizzati in materiale sandwich. Negli ultimi decenni l'attenzione è stata rivolta ai Functionally Graded Materials (FGM) ovvero compositi in cui le proprietà meccaniche, elastiche, termiche ed igrometriche subiscono graduali variazioni in una o più direzioni (tipicamente lungo lo spessore) con un gradiente di composizione da una fase costituente all'altra. Di conseguenza viene meno il compromesso tra le proprietà desiderate all'interno del componente, diversamente da quanto accade nei compositi tradizionali che rappresentano miscele omogenee con caratteristiche finali mediate. In questa maniera viene anche limitato il problema dell'interfaccia tra layer e, ad esempio, vengono ridotti i livelli di stress inter-laminare [2]. La Figura 2.1 mostra l'evoluzione dei materiali e delle tecniche di produzione nel settore aerospaziale fino all'introduzione degli FGM. La Figura 2.2 mostra la differente variazione delle proprietà all'interno di un FGM rispetto ai compositi tradizionali.

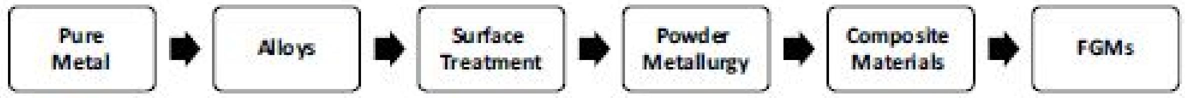

Figura 2.1. Evoluzione verso gli FGM

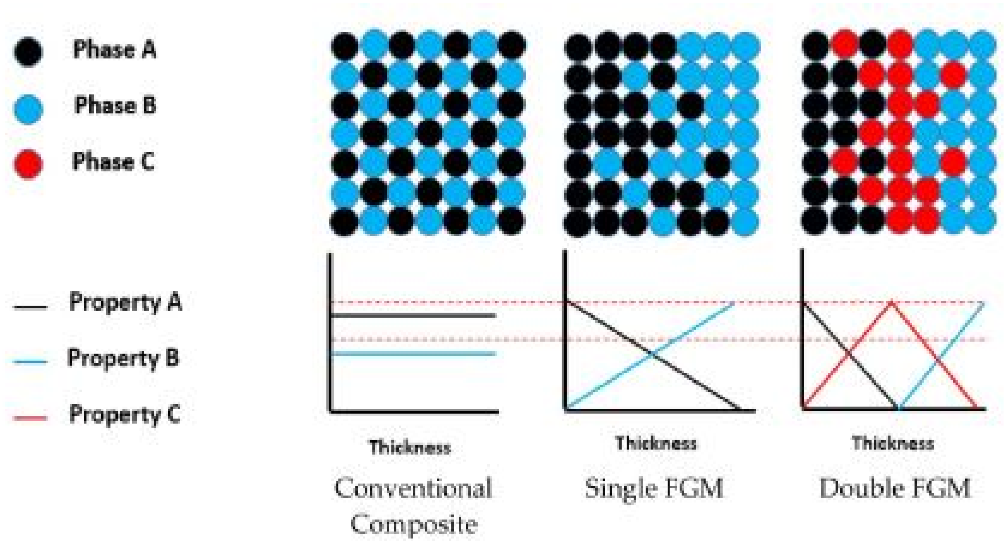

Figura 2.2. Variazione delle proprietà nei compositi tradizionali e negli FGM

2.2 Applicazioni

Gli FGM possono essere utilizzati in molteplici applicazioni dove le condizioni operative risultano proibitive, ad esempio nei rivestimenti resistenti all'usura per la manipolazione di polveri abrasive pesanti, negli scudi termici dei razzi, nei tubi degli scambiatori di calore, nei generatori termoelettrici, nei componenti interni dei motori elettrici, nei rivestimenti dei reattori a fusione, nei giunti metallo/ceramica per l'isolamento elettrico. Inoltre, risultano ideali per minimizzare il disallineamento termomeccanico nei collegamenti metallo-ceramici oppure in campo biomedicale per la sostituzione dei tessuti ossei grazie all'elevata biocompatibilità [1].

2.3 Origine

La prima applicazione degli FGM risale al 1984 in Giappone con il tentativo di realizzazione dello scudo termico di una navetta spaziale utilizzando un materiale innovativo in grado di sopportare una temperatura esterna di 2000 K e un gradiente termico pari a 1000 K attraverso una sezione trasversale piuttosto ridotta. In seguito al suddetto progetto, la ricerca nel settore degli FGM è stata notevole e rappresenta al giorno d'oggi a tutti gli effetti una realtà commerciale e tecnologica [1].

2.4 Tecniche di produzione

Le principali tecniche di produzione degli FGM includono la colata centrifuga, la metallurgia delle polveri, la spruzzatura al plasma, la deposizione chimica/fisica da vapore (CVD/PVD), i metodi di infiltrazione e laminazione, la Solid Free-Form Fabrication (SFF) fino alle tecniche più avanzate di Additive Manufacturing (AM). Attualmente vengono utilizzati differenti materiali nei processi AM: le leghe metalliche nella LENS (Laser Engineered Net Shaping) e nella DMD (Direct Metal Deposition), composti polimerici nella FDM (Fused Deposition Modeling) e nella SLA (Stereolithography), materiali biologici nell'Inkjet Printing e nella micro-estrusione [1]. La Figura 2.3 riporta alcuni esempi di combinazione di materiali ai fini della produzione degli FGM. Invece, la Figura 2.4 schematizza la classificazione dei processi produttivi sopraelencati dei quali riportiamo di seguito i principali vantaggi e svantaggi.

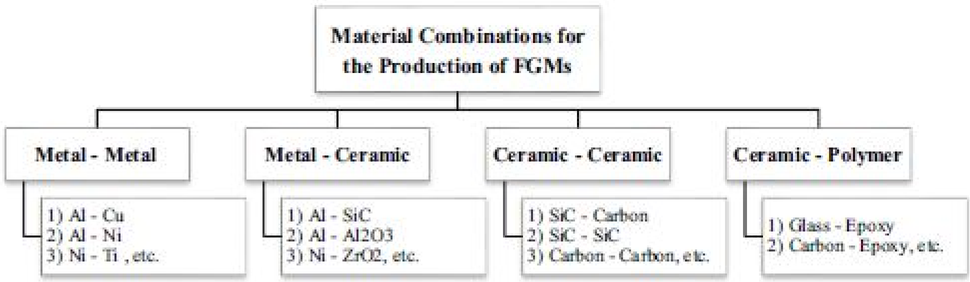

Figura 2.3. Esempi di combinazione di materiali nella produzione degli FGM

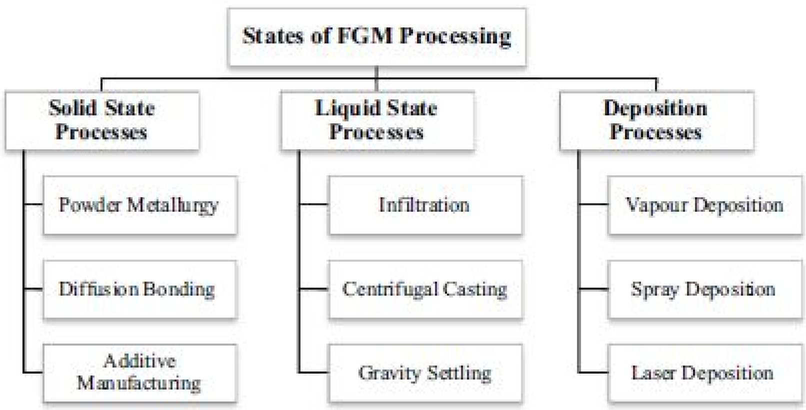

Figura 2.4. Classificazione dei processi produttivi degli FGM

2.4.1 Powder Metallurgy

La metallurgia delle polveri consente di realizzare layer in FGM con spessori differenti (range dai nm ai mm) garantendo un'elevata produttività e livelli di stress ridotti durante la sinterizzazione. Le principali limitazioni associate a questo processo tecnologico riguardano la non-continuità delle strutture prodotte, i requisiti geometrici da rispettare (spessore delle pareti ≥ 2 mm, altezza/diametro ≤ 7), la necessità di post-lavorazioni a macchina, la fattibilità economica per grandi lotti produttivi (≥ 100000 pezzi) [1]. La Figura 2.5 schematizza le fasi principali di lavorazione con la tecnica PM.

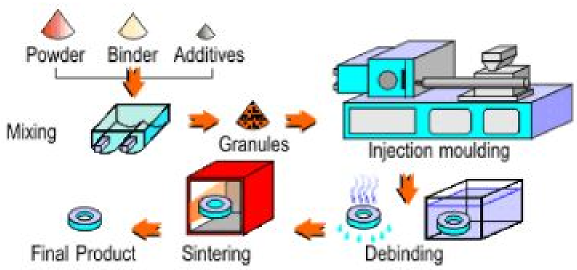

Figura 2.5. Powder Metallurgy (PM)

2.4.2 Centrifugal Casting

La colata centrifuga è un processo tecnologico che permette di ottenere la variazione graduale e continua delle proprietà tipica degli FGM. Risulta adatta per la produzione di componenti ingombranti tuttavia è limitata alle sola geometria cilindrica. Una delle principali problematiche legate a questa tecnica riguarda la difficoltà di monitorare la struttura interna graduata a causa dei problemi di fusione [1] [2]. La Figura 2.6 schematizza le fasi principali di lavorazione con la colata centrifuga.

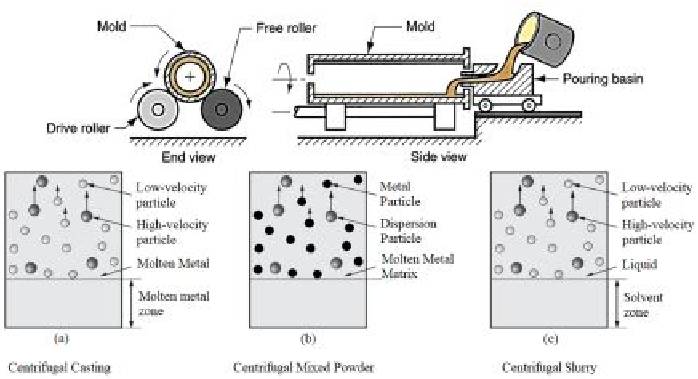

Figura 2.6. Centrifugal Casting

2.4.3 Additive Manufacturing & Solid Free-Form Fabrication

Le tecniche di AM e SFF consentono la realizzazione di componenti in FGM dalla forma complessa con bassi costi, elevata precisione e facilità di riproduzione. In seguito a questi processi si ottengono strutture discrete che necessitano di operazioni secondarie di rifinitura. Le limitazioni più consistenti riguardano l'elevato consumo energetico, i costi sostenuti nel caso delle lavorazioni metalliche e il tasso di produttività ridotto [1] [2]. La Figura 2.7 schematizza le fasi principali di lavorazione con AM e SFF.

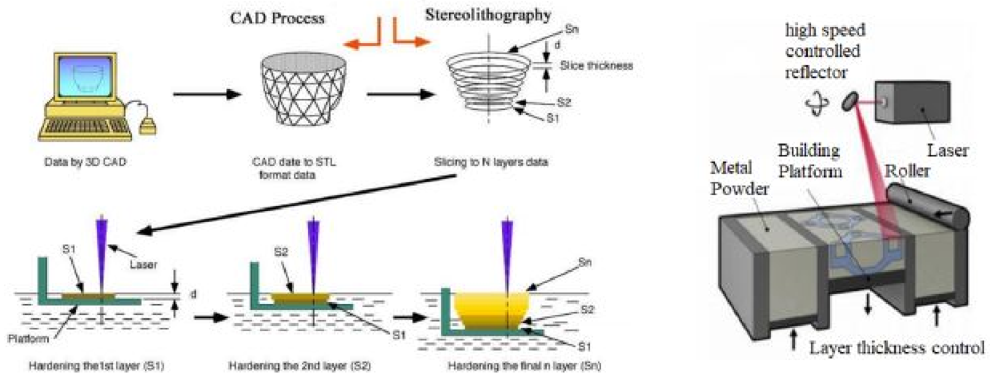

Figura 2.7. AM & SFF

2.4.4 Plasma Spray Forming

La spruzzatura al plasma garantisce la fusione simultanea ed efficace di fasi metalliche unite a fasi altamente refrattarie insieme al controllo delle loro concentrazioni agendo sulle percentuali di polveri presenti nella miscela. Il principale svantaggio nell'utilizzo di questa tecnica concerne le difficoltà di ottimizzazione dei parametri di processo (ad esempio distanza tra ugello e substrato, feed-rate, composizione del gas di trasporto) i quali possono variare per i due componenti della struttura FGM [1] [2]. La Figura 2.8 schematizza il processo di lavorazione con spruzzatura al plasma.

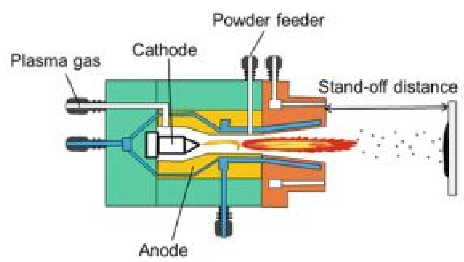

Figura 2.8. Plasma Spray Forming

2.4.5 Laser Deposition

Il processo di deposizione laser per la produzione di componenti in FGM assicura elevata precisione, attraverso il controllo del fascio laser, e riduce la necessità di post-processing con lavorazioni a macchina grazie alla deposizione altamente selettiva del materiale di apporto. Le strutture realizzate risultano principalmente discrete e richiedono trattamenti termici per eliminare gli elevati stress residui [1] [2]. La Figura 2.9 schematizza il processo di lavorazione con deposizione laser.

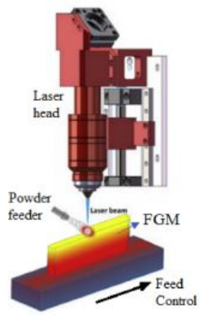

Figura 2.9. Laser Deposition

2.4.6 Vapour Deposition

La deposizione da vapore permette di realizzare strati in FGM dalle dimensioni ridotte (nano/micro range) attraverso la variazione della composizione della fase gassosa. Il principale svantaggio di questo processo è legato ai trattamenti termici necessari per evitare l'inter-diffusione tra il substrato e il film in FGM [1] [2]. La Figura 2.10 schematizza il processo di lavorazione con deposizione da vapore.

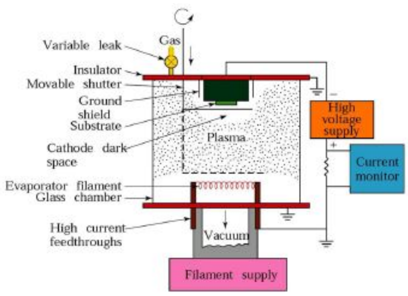

Figura 2.10. Vapour Deposition

2.5 Criteri di classificazione

In questa sezione viene riportata la classificazione convenzionale degli FGM la quale può riguardare i seguenti aspetti: processo di produzione, caratteristiche della struttura interna, tipologia di gradiente, dimensioni e scala del componente, natura del processo di gradazione, campo di applicazione [1]. Di seguito vengono analizzati nel dettaglio i suddetti fattori.

2.5.1 Processo di produzione

Questa classificazione suddivide i metodi produttivi basati sulla tecnologia FGM in processi allo stato solido, processi allo stato liquido e processi di deposizione. La Figura 2.4, riportata in precedenza, distingue i processi produttivi nelle categorie sopracitate. Nel caso della deposizione si dispone di tecnologie avanzate ad elevata precisione adottate principalmente per la produzione di componenti con dimensioni ridotte. I metodi allo stato liquido vengono impiegati usualmente per prodotti finali con dimensioni elevate e si caratterizzano per un ridotto controllo delle proprietà specifiche. Infine, i processi solid-state vengono utilizzati per componenti con stress termo-meccanici notevoli. Le principali differenze tra questi metodi interessano le proprietà del prodotto finale in termini di stress termici, carichi meccanici, forze di pressione e forze di inerzia generati durante le varie fasi di produzione [1].

2.5.2 Struttura interna

Questa classificazione distingue gli FGM in base alla natura della struttura interna la quale può risultare continua oppure discreta, come evidenziato nella Figura 2.11 riportata di seguito. Nel primo caso non è possibile osservare zone o linee di separazione che distinguano chiaramente le proprietà delle regioni interne del materiale. Nel secondo caso le caratteristiche del FGM variano con discontinuità rendendo la struttura interna discreta e stratificata. Un'ulteriore e più dettagliata distinzione interessa composizione, orientazione e frazione del gradiente, come evidenziato sempre nella Figura 2.11. Tipicamente il *fraction gradient* viene ottenuto sfruttando le forze centrifughe presenti durante il processo di colata centrifuga le quali agiscono sulle particelle disperse. Le proprietà degli FGM contenenti l'*orientation gradient* variano in funzione della diversa orientazione delle particelle: essa può essere ottenuta secondo diverse metodologie come, ad esempio, inserire il materiale fuso (sia ceramica sia metallico) all'interno di un campo elettromagnetico in grado di ri-orientare e/o spostare le particelle ferromagnetiche di rinforzo presenti nella miscela fluida. Infine, per quanto concerne il *size gradient*, vengono sfruttati sia i fenomeni di sedimentazione e galleggiamento sia le forze gravitazionali coinvolte nella fusione per gravità e nella pressofusione allo scopo di disporre ed orientare opportunamente le particelle in funzione della massa/superficie di quest'ultime e dell'entità delle forze risultanti agenti su di esse [1].

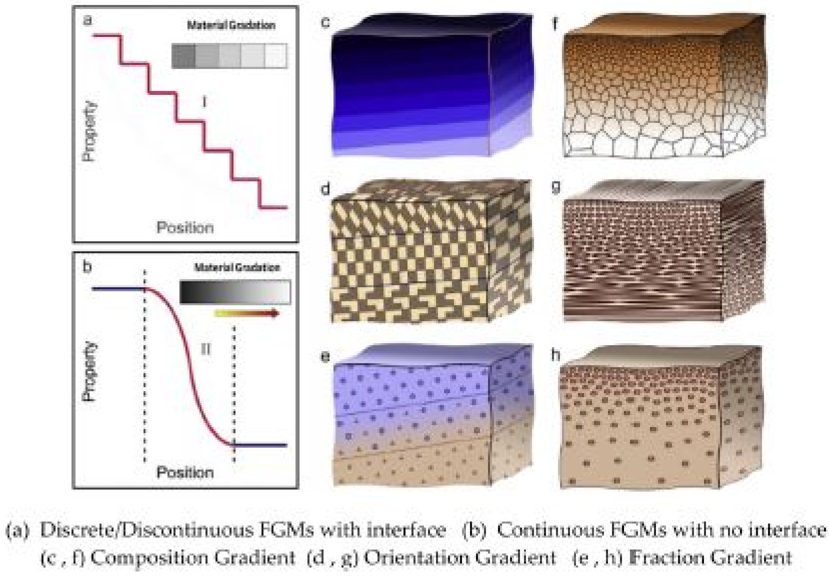

Figura 2.11. Classificazione degli FGM secondo la struttura interna

2.5.3 Tipologia di gradiente

Secondo questa classificazione gli FGM vengono distinti in base alla tipologia di gradiente interno il quale può interessare composizione, microstruttura oppure porosità. Nel primo caso la composizione del materiale con fasi e strutture chimiche differenti si modifica in funzione delle condizioni in cui il processo produttivo viene realizzato. Nel secondo caso attraverso un opportuno processo di solidificazione, in particolare mediante un raffreddamento lento del *core*, è possibile generare microstrutture diverse dalla superficie esterna verso l'interno del materiale. Nell'ultimo caso le dimensioni delle particelle di polvere possono essere misurate variando la taglia delle porosità presenti durante il processo di gradazione in posizioni differenti nel *bulk material* [1]. La Figura 2.12 riportata di seguito mostra le tre tipologie possibili di gradiente negli FGM.

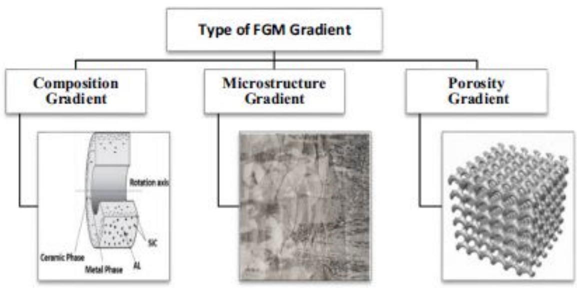

Figura 2.12. Classificazione degli FGM secondo la tipologia di gradiente

2.5.4 Dimensioni del componente

I componenti in FGM con spessore ridotto (*thin FGMs*) vengono tipicamente realizzati mediante deposizione chimica/fisica da vapore (CVD/PVD), deposizione da spruzzatura termica, processi SHS (Self-Propagating High Temperature Synthesis) come ad esempio il laser cladding. Viceversa i componenti FGM con spessore notevole (*bulk FGMs*) vengono prodotti attraverso metallurgia delle polveri, colata centrifuga, SFF (Solid Free-Form Fabrication), gravity settling. La Figura 2.13 illustra questo criterio di classificazione con i relativi processi produttivi. Nel primo caso la taglia del componente varia generalmente tra 5 nm e 500 nm, con estensioni anche al range dei μm, invece nel secondo caso si raggiungono dimensioni maggiori tra 5 mm e 350 mm [1].

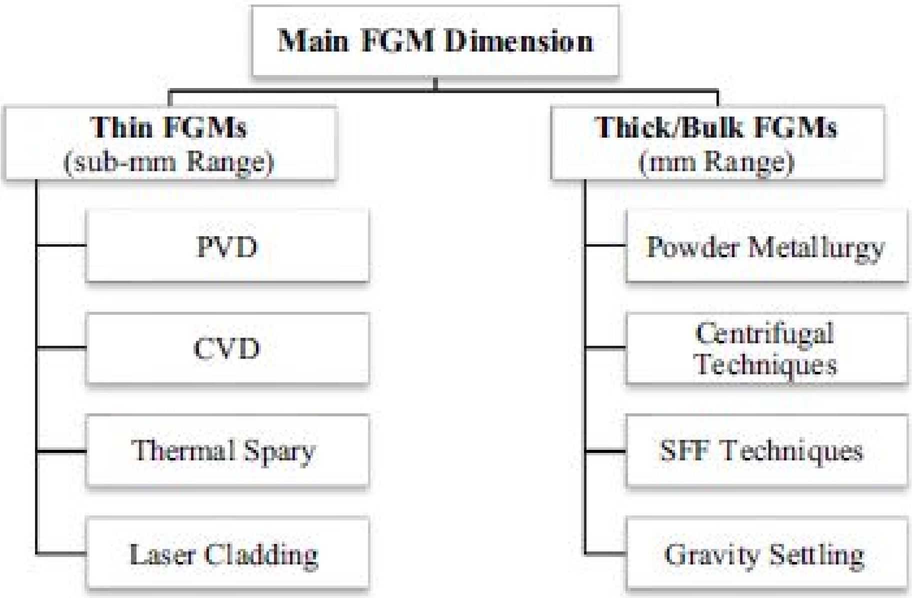

Figura 2.13. Classificazione degli FGM secondo le dimensioni del componente

2.5.5 Processo di gradazione

Secondo questa classificazione gli FGM possono essere distinti in funzione della tipologia del processo di gradazione il quale può essere costruttivo o di trasporto. Nel primo caso il componente viene realizzato (*layer by layer*) e i gradienti tra loro consecutivi vengono costruiti in maniera esatta. Nel secondo caso il gradiente dipende dalla fisica del metodo di trasporto (corrente fluida, diffusione, conduzione di calore). Il principale vantaggio dell'approccio costruttivo risiede nella possibilità di realizzare un numero illimitato di gradienti attraverso processi facilmente realizzabili dal punto di vista tecnologico ed economico, specialmente per prototipi o lotti di produzione ridotti con l'impiego dell'AM [1]. La Figura 2.14 illustra questo criterio di classificazione.

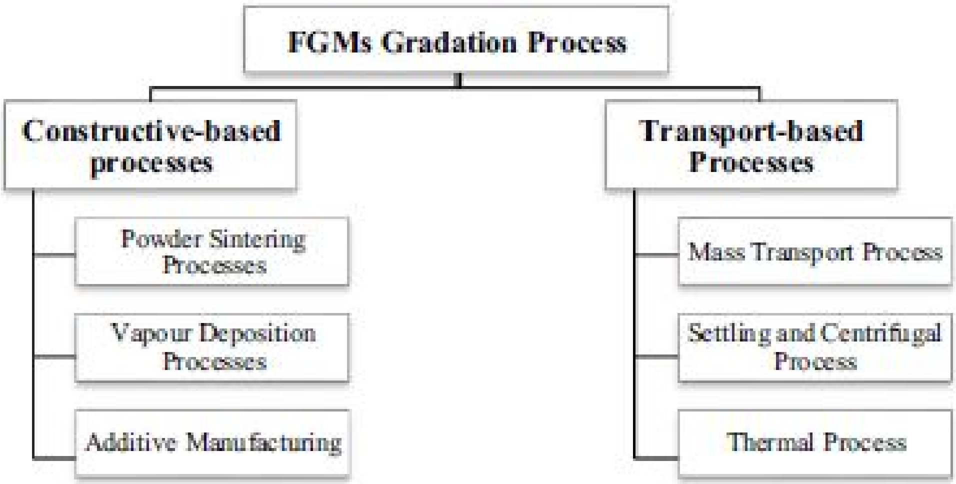

Figura 2.14. Classificazione degli FGM secondo il processo di gradazione

2.5.6 Campo di applicazione

I principali campi di applicazione degli FGM al giorno d'oggi includono svariate applicazioni tra le quali impianti biomedicali, strutture aerospaziali, componenti automobilistici, strumenti per la difesa, reattori nucleari, pale di turbina, equipaggiamenti sportivi, utensili ed attrezzature [1] [2]. La Figura 2.15 illustra questo criterio di classificazione.

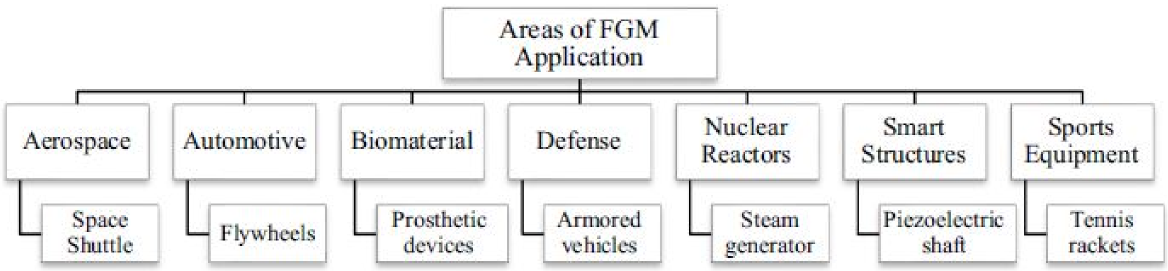

Figura 2.15. Classificazione degli FGM secondo il campo di applicazione

2.6 Micromeccanica

In questa sezione vengono illustrate le principali metodologie per la determinazione delle proprietà elastiche degli FGM. Tali metodi considerano particelle sferiche distribuite in una matrice continua in maniera statisticamente omogenea. Le relazioni presentate di seguito assumono pertanto la presenza di una matrice elastica continua (fase 1) rinforzata da particelle sferiche elastiche (fase 2) producendo proprietà isotrope le quali vengono completamente definite da due costanti elastiche. Inoltre, i modelli micromeccanici proposti si fondano sull'assunzione che un elemento di volume rappresentativo con dimensioni ridotte sia sufficiente per definire le proprietà globali del materiale: a tale elemento viene assegnata una funzione della concentrazione volumica della seconda fase (particolata) ovvero V_2(x, y, z) la quale varia nell'intervallo [0;1] e deve soddisfare opportune condizioni al contorno. Le dimensioni dell'elemento devo essere sufficientemente piccole da considerare la struttura interna localmente ortotropa dunque esso assume la funzione di LRVE (Local Representative Volume Element). Tipicamente vengono impiegati LRVEs cubici per definire le componenti di tensione e deformazione nonché per matchare le proprietà locali; le caratteristiche del materiale vengono ricavate correlando gli stress presenti sulle superfici degli LRVEs alle rispettive deformazioni. Tuttavia, a causa della natura anisotropa degli FGM, insieme alla loro disponibilità ridotta in forme adeguate per la valutazione di stress e proprietà meccaniche lungo specifici assi, la determinazione sperimentale di questi parametri risulta piuttosto complessa [3] [4].

2.6.1 Regola della miscela

Un primo metodo analitico per predire le proprietà elastiche degli FGM consiste nell'applicazione della regola della miscela (ROM, Rule of Mixture) ispirata alla teoria classica dei materiali compositi [5]. A questo proposito viene analizzata ed elaborata graficamente l'immagine della sezione trasversale del materiale distinguendo le regioni occupate dalle diverse fasi costituenti e considerando come fase aggiuntiva presente anche l'insieme delle porosità. A questo punto tale immagine viene suddivisa in un certo numero di sezioni rettangolari con uno spessore predefinito (tipicamente dell'ordine del μm). Pertanto, in ciascuna di queste superfici di riferimento viene valutata la frazione volumetrica delle fasi costituenti così, applicando la ROM, è possibile ottenere il valore medio del modulo di Young. Nel caso di un FGM bifasico costituito, ad esempio, da vetro ed alluminio è possibile scrivere il modulo di elasticità longitudinale come segue:

$$E = V_a E_a + V_v E_v + V_p E_p \tag{2.1}$$

dove V_a, V_v, V_p sono rispettivamente le frazioni volumetriche di alluminio, vetro e porosità presenti nella sezione rettangolare considerata mentre E_a, E_v, E_p sono i corrispondenti moduli di Young. La Figura 2.16 mostra la sezione trasversale del FGM alluminio-vetro del quale viene valutato il modulo di Young.

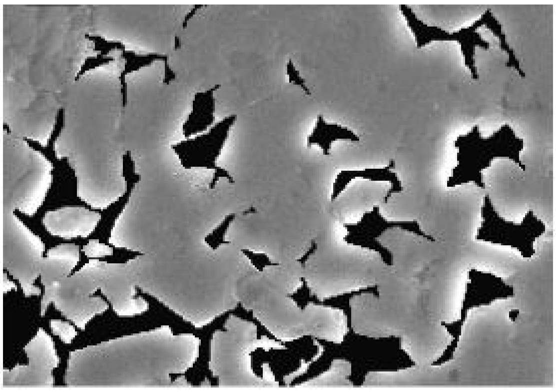

Figura 2.16. Sezione trasversale di un FGM bifasico alluminio-vetro

2.6.2 Regola di Voigt

La regola di Voigt rappresenta una delle soluzioni più adottate in letteratura per la semplicità computazionale e la rapidità nel fornire i risultati [4]. In secondo luogo, spesso il coefficiente di Poisson viene assunto costante pertanto il modello viene ulteriormente semplificato. Secondo questo modello la proprietà effettiva del materiale P può essere espressa come:

$$P = P_1 V_1 \ + \ P_2 V_2 \qquad\qquad V_1 \ + \ V_2 = 1 \tag{2.2}$$

dove P_1 e P_2 rappresentato rispettivamente le proprietà del materiale in corrispondenza della faccia superiore ed inferiore mentre V_1 e V_2 sono le frazioni volumetriche delle fasi costituenti.

2.6.3 Determinazione sperimentale

La procedura sperimentale permette di ricavare direttamente le proprietà elastiche di un FGM nonché di validare i risultati ottenuti con le simulazioni ROM e FEM. Una delle possibili metodologie è la *depth-sensing micro-indentation* [3] [5]. I dati vengono raccolti durante un ciclo completo di carico-scarico pertanto, una volta rimossi i carichi, i risultati vengono elaborati al fine di determinare le proprietà richieste. Nello specifico la sezione trasversale del materiale è soggetta ad un test di micro-indentazione Vickers lungo linee parallele all'asse x (ortogonale alla direzione del gradiente) a profondità differenti, come schematizzato nella Figura 2.17. Per ciascuna prova viene registrata la curva carico-spostamento e, a partire da essa, viene ricavato il modulo di Young locale. Infine viene calcolato il modulo di elasticità longitudinale medio sfruttando i moduli elastici valutati precedentemente su ogni linea. In generale la determinazione in laboratorio delle proprietà macroscopiche di materiali non omogenei, quali gli FGM, risulta poco conveniente per ogni possibile combinazione delle frazioni volumetriche delle fasi costituenti.

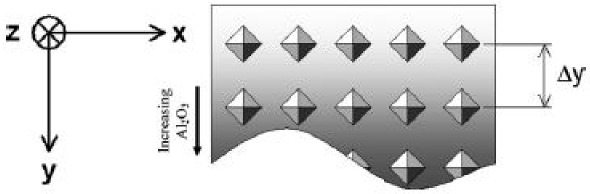

Figura 2.17. Depth-sensing micro-indentation su FGM

2.6.4 Metodo agli elementi finiti

Un secondo metodo per la determinazione delle proprietà elastiche degli FGM è il metodo agli elementi finiti (FEM: in questo caso l'immagine della microstruttura del materiale viene acquisita e ad essa è applicata una mesh 2D. Le caratteristiche termo-meccaniche delle fasi costituenti vengono inserite come dati in input pertanto è possibile simulare il comportamento del FGM ed indagare quali correlazioni esistano tra proprietà elastiche e struttura interna. Inoltre, è possibile tenere conto dell'eventuale presenza di inclusioni e/o porosità che possono alterare la risposta meccanica del materiale. Analogamente all'approccio basato sulla ROM anche in questo caso vengono utilizzate sezioni rettangolari di riferimento, in cui suddividere l'area trasversale del FGM, al fine di valutare il modulo di Young. Il passo successivo dell'analisi prevede la discretizzazione di queste superfici in mesh agli elementi finiti, ad esempio triangolari (TRIA3), come mostrato nella Figura 2.18. Per ciascuna sezione il modulo di elasticità longitudinale può essere calcolato lungo l'asse parallelo alla direzione del gradiente oppure lungo l'asse perpendicolare ad essa (in altre parole, parallelo alla superficie) [6] [5].

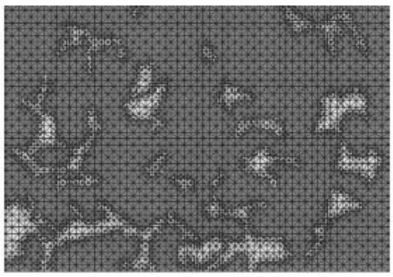

Figura 2.18. Sezione trasversale di un FGM bifasico alluminio-vetro con mesh 2D

2.6.5 Metodo Sasaki-Kerner

Il metodo Sasaki-Kerner (1956) consente di predire le proprietà elastiche nell'analisi di compositi uniformemente rinforzati [5]. A questo proposito i valori medi effettivi del modulo di compressibilità K_0 e del modulo di taglio μ_0 vengono calcolati come segue:

$$K_0 = \frac{\dfrac{K_1 c_1}{(3K_1 \ + \ 4\mu_1)} + \dfrac{K_2 c_2}{(3K_2 \ + \ 4\mu_1)}}{\dfrac{c_1}{(3K_1 \ + \ 4\mu_1)} + \dfrac{c_2}{(3K_1 \ + \ 4\mu_1)}} \tag{2.3}$$

$$\mu_0 = \mu_1 \frac{\dfrac{\mu_2 c_2}{(7 \ - \ 5\nu_1)\mu_1 \ + \ (8 \ - \ 10\nu_1)\mu_2} + \dfrac{c_1}{15(1 \ - \ \nu_1)}}{\dfrac{\mu_1 c_2}{(7 \ - \ 5\nu_1)\mu_1 \ + \ (8 \ - \ 10\nu_1)\mu_2} + \dfrac{c_1}{15(1 \ - \ \nu_1)}} \tag{2.4}$$

dove c_i, ν_i, K_i, μ_i sono rispettivamente frazione volumetrica, coefficiente di Poisson, modulo di compressibilità, modulo di taglio della fase i-esima.

2.6.6 Metodo Mori-Tanaka

Il metodo Mori-Tanaka (1973), in sigla MTM, permette di ottenere soluzioni in forma chiusa, per K_0 e μ_0, nel caso di rinforzi sferici [5]:

$$K_0 = K_1 \left(1 \ + \ \frac{a}{1 \ - \ \alpha_0 a}\right) \tag{2.5}$$

$$\mu_0 = \mu_1 \left(1 \ + \ \frac{b}{1 \ - \ \beta_0 b}\right) \tag{2.6}$$

dove

$$a = \frac{c_2(K_2 \ - \ K_1)}{\alpha_0(K_2 \ - \ K_1) \ + \ K_1} \tag{2.7}$$

$$b = \frac{c_2(\mu_2 \ - \ \mu_1)}{\beta_0(\mu_2 \ - \ \mu_1) \ + \ \mu_1} \tag{2.8}$$

$$\alpha_0 = \frac{3K_1}{3K_1 \ + \ 4\mu_1} \tag{2.9}$$

$$\beta_0 = \frac{6(K_1 \ + \ 2\mu_1)}{5(3K_1 \ + \ 4\mu_1)} \tag{2.10}$$

2.6.7 Metodo Wakashima-Tsukamoto

Il metodo Wakashima-Tsukamoto (1990) permette di determinare K_0 e μ_0 attraverso le seguenti relazioni [5]:

$$K_0 = c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_1 c_2 \frac{(K_1 - K_2)\left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)}{\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} + \frac{4\mu_1}{3K_1K_2}} \tag{2.11}$$

$$\mu_0 = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + c_1 c_2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)}{\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} + \frac{9K_1 + 8\mu_1}{6\mu_1(K_1 + 2\mu_1)}} \tag{2.12}$$

2.6.8 Metodo Tamura

Il metodo Tamura (1973) definisce la relazione stress-deformazione in un FGM bifasico attraverso il parametro empirico [7] [5]:

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \tag{2.13}$$

Nel caso di carico uniassiale, gli stress locali e globali vengono correlati come segue:

$$\sigma_0 = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 = E_0\varepsilon_0 \tag{2.14}$$

Gli stress e le deformazioni locali vengono espresse come segue (dove E_1 ed E_2 sono i moduli di Young locali):

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon_1 \qquad \sigma_2 = E_2\varepsilon_2 \tag{2.15}$$

Combinando le equazioni (2.13)-(2.15) si ottiene il modulo di Young effettivo E_0:

$$E_0 = \frac{c_1E_1(q - E_2) + c_2E_2(q - E_1)}{c_1(q - E_2) + c_2(q - E_1)} \tag{2.16}$$

Le altre costanti elastiche vengono ricavate combinando E_0 con il coefficiente di Poisson effettivo, valutato come:

$$\nu_0 = c_1\nu_1 \ + \ c_2\nu_2 \tag{2.17}$$

2.6.9 Metodo CPA

Il metodo CPA (1993), ovvero Coherent Potential Approximation, permette di predire le proprietà elastiche effettive del materiale attraverso un set di relazioni implicite accoppiate con risultati indipendenti dalla natura continua o particolata della fase presa in esame [5]:

$$\frac{c_1(K_1 \ - \ K_0)}{3K_1 \ + \ 4\mu_0} \ + \ \frac{c_2(K_2 \ - \ K_0)}{3K_2 \ + \ 4\mu_0} = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{c_1(\mu_1 \ - \ \mu_0)}{\mu_1 \ + \ \dfrac{\mu_0(9K_0 \ + \ 8\mu_0)}{6K_0 \ + \ 12\mu_0}} \ + \ \frac{c_2(\mu_2 \ - \ \mu_0)}{\mu_2 \ + \ \dfrac{\mu_0(9K_0 \ + \ 8\mu_0)}{6K_0 \ + \ 12\mu_0}} = 0 \tag{2.19}$$

2.6.10 Metodo Hirano

Il metodo Hirano (1991) è una variante della metodologia Sasaki-Kerner nella quale viene definita una transizione graduata da una fase particolata A, immersa in una matrice continua B, ad una fase particolata B, immersa in una fase continua A. Per valori estremi della frazione volumetrica (0 oppure 1) le proprietà effettive vengono stimate con il metodo Sasaki-Kerner assumendo che la fase particolata sia quella presente con una frazione volumetrica minore. Per frazioni volumetriche intermedie, le proprietà effettive vengono stimate come media ponderata dei valori ottenuti tramite il metodo Sasaki-Kerner considerando la prima fase incorporata nella seconda fase e viceversa [6]. Ad esempio, il modulo di compressibilità viene calcolato come segue:

$$K_0 = P(c_2)K_1^*(c_2) \ + \ (1 \ - \ P(c_2))K_2^*(c_2) \tag{2.20}$$

dove $\mathrm{K}_1^*(\mathrm{c}_2)$ è il modulo di compressibilità effettivo definito con il metodo Sasaki-Kerner utilizzando la formula (2.3) e considerando la fase 1 come matrice mentre $\mathrm{K}_2^*(\mathrm{c}_2)$ è il modulo di compressibilità effettivo definito con il metodo Sasaki-Kerner considerando la fase 2 come matrice. Tale metodo richiede costanti empiriche che definiscano i valori limite della frazione volumetrica, rispetto ai quali viene calcolata la media, e una funzione di interpolazione $\mathrm{P}(\mathrm{c}_2)$ variabile con la frazione volumetrica nonché in grado di riprodurre una transizione graduata.

2.6.11 Metodo SCM

Il metodo SCM (1965), ovvero il Self-Consistent Method, permette di calcolare le proprietà effettive nel caso di matrice continua con particelle sferiche di rinforzo attraverso le relazioni seguenti [5]:

$$c_1 = \frac{\dfrac{K_2}{K_2 \, + \, 4/3\mu_0} \, + \, \dfrac{5\mu_1}{\mu_0 \, - \, \mu_1} \, + \, 2}{\dfrac{K_2}{K_2 \, + \, 4/3\mu_0} \, + \, \dfrac{5\mu_1}{\mu_0 \, - \, \mu_1} \, - \, \dfrac{K_1}{K_1 \, + \, 4/3\mu_0} \, - \, \dfrac{5\mu_2}{\mu_0 \, - \, \mu_2}} \tag{2.21}$$

$$K_0 = \frac{1}{\dfrac{c_1}{K_1 \, + \, 4/3\mu_0} \, + \, \dfrac{c_2}{K_2 \, + \, 4/3\mu_0}} \, - \, 4/3\mu_0 \tag{2.22}$$

Queste relazioni non possono essere risolte in maniera esatta per K_0 e μ_0 in funzione delle proprietà dei costituenti e delle frazioni volumetriche tuttavia è possibile tabulare tali parametri come funzioni della frazione volumetrica stessa calcolando c_1 rispetto a μ_0 e valutando successivamente K_0. Pertanto, non viene richiesta alcuna interazione.

2.6.12 Metodo Gasik

Il metodo Gasik (1998) prevede un'ulteriore assunzione rispetto a quelle generali dei modelli micromeccanici presentate all'inizio del capitolo. In particolare la seconda fase dispersa viene tratta come un'inclusione e viene trasformata in un cubo all'interno di ciascun LRVE con un volume equivalente pari alla concentrazione volumica della fase stessa. La posizione spaziale del LRVE (i, j, k)-esimo viene descritta dal set di coordinate relative $(x, y, z)_{ijk}$. I valori delle proprietà del materiale (modulo elastico, conducibilità termica, ...) variano da un sotto-elemento all'altro in funzione della concentrazione volumica della seconda fase V_2 [4]. L'equazione per il calcolo del modulo di Young, derivante dalla geometria del LRVE e dalla relazione costitutiva stress-strain, risulta essere:

$$E_{ii} = E_1 \left(1 \, - \, \sqrt[3]{V_2^2} \left(1 \, - \, \frac{1}{1 \, - \, \sqrt[3]{V_2}(1 \, - \, E_1/E_2)} \right) \right) \tag{2.23}$$

dove i rappresenta uno degli assi del sistema di riferimento (X, Y o Z). L'equazione precedente può essere semplificata nella forma seguente per ridurre costi e tempi computazionali:

$$E_{ii} = E_1 \left(1 \, + \, \frac{V_2}{FE \, - \, \sqrt[3]{V_2}} \right), \qquad FE = \frac{1}{1 \, - \, E_1/E_2} \tag{2.24}$$

Da quest'ultima equazione si osserva che il modello non presenta singolarità nell'intero intervallo $V_2 \in [0;1]$ infatti quando le due fasi possiedono lo stesso modulo elastico ($E_1 = E_2$) allora FE $\rightarrow \infty$ però $E_{ii} \rightarrow E_1$ ($= E_2$).

2.6.13 Metodo VCFEM

Il Voronoi Cell Finite Element Method (VCFEM) è un metodo numerico che permette di definire le proprietà elastiche degli FGM come segue: nelle regioni di materiale in cui la frazione volumica di una delle due fasi costituenti risulta inferiore rispetto all'altra, si assume che la microstruttura sia costituita da particelle discrete inserite in una matrice continua; nelle regioni in cui le frazioni volumiche sono comparabili, si suppone che la microstruttura sia composta da grappoli di materiale attorcigliati tra loro [3].

2.6.14 Metodo Levin

Il metodo Levin (1967) permette di stimare il coefficiente di espansione termica (CTE) effettivo α_0 nel caso di matrice continua e particelle sferiche di rinforzo in termini delle proprietà dei costituenti e del modulo di compressibilità effettivo come segue [3]:

$$\alpha_0 = \alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K_2}\right)}{\left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)} \tag{2.25}$$

dove α_i è il coefficiente di espansione termica della fase i-esima.

2.7 Modelli strutturali

I problemi riguardanti la meccanica strutturale possono essere studiati facendo ricorso a modelli tridimensionali, bidimensionali o monodimensionali. Nel modello 3D, se si considera una formulazione agli spostamenti, il vettore degli spostamenti $\boldsymbol{u} = \{\mathrm{u\ v\ w}\}$ in un punto generico P risulta funzione delle coordinate spaziali (x, y, z) e viene espresso come:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,\, y,\, z) \tag{2.26}$$

Passare ad un modello 2D significa considerare funzioni incognite di soltanto due coordinate spaziali (x, y) mentre la dipendenza dalla terza coordinata z viene trasferita ad apposite funzioni [8]. In questo caso il vettore degli spostamenti può essere scritto come:

$$\boldsymbol{u} = F_i(z)\boldsymbol{u}_i(x,\, y) \tag{2.27}$$

Passare ad un modello 1D significa considerare funzioni incognite di soltanto una coordinata spaziale z mentre la dipendenza dalle altre due coordinate (x, y) viene trasferita ad apposite funzioni [8]. In questo caso il vettore degli spostamenti può essere scritto come:

$$\boldsymbol{u} = F_i(x,\, y)\boldsymbol{u}_i(z) \tag{2.28}$$

I problemi 3D sono tipici di strutture in cui le dimensioni lungo le tre direzioni x, y, z hanno la stessa importanza. In questo caso si parla di solidi *tozzi*, dei quali è riportata una schematizzazione nella Figura 2.19. Pertanto le tre dimensioni a, b, h non sono trascurabili e il campo di spostamenti $\boldsymbol{u}$ dipende da (x, y, z).

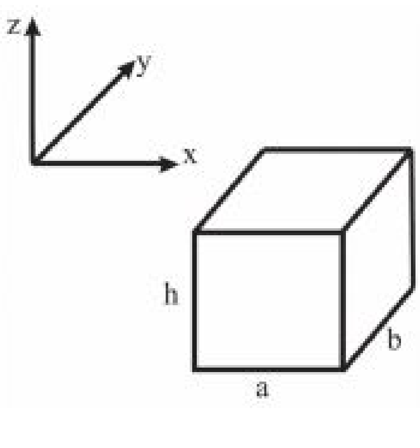

Figura 2.19. Esempio di solido 3D tozzo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,\, y,\, z) \tag{2.29}$$

I problemi 2D sono tipici di strutture quali piastre e pannelli in cui una delle tre dimensioni (generalmente quella lungo la direzione dello spessore z) risulta trascurabile rispetto alle altre due nelle direzioni planari (x, y). Di seguito viene riportata una schematizzazione di una piastra nella Figura 2.20. Pertanto la dimensione h viene trascurata rispetto ad a, b e il campo di spostamenti $\boldsymbol{u}$ viene modellizzato come:

$$\boldsymbol{u} = F_i(z)\boldsymbol{u}_i(x,\, y) \qquad\qquad h \ << \ a,\, b \tag{2.30}$$

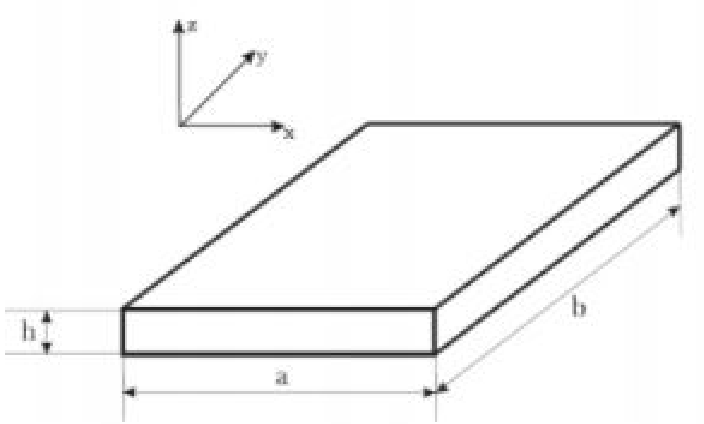

Figura 2.20. Esempio di piastra 2D

Gli elementi bidimensionali possono presentare una curvatura lungo una dimensione del piano (gusci cilindrici) o due dimensioni del piano (gusci sferici). In questo caso il sistema di coordinate rettilinee ortogonali (x, y, z) viene sostituito da un sistema di coordinate miste curvilinee ortogonali (α, β, z). Nella Figura 2.21 viene riportata una schematizzazione di tali gusci. Il campo di spostamenti $\boldsymbol{u}$ diventa:

$$\boldsymbol{u} = F_i(z)\boldsymbol{u}_i(\alpha,\, \beta) \tag{2.31}$$

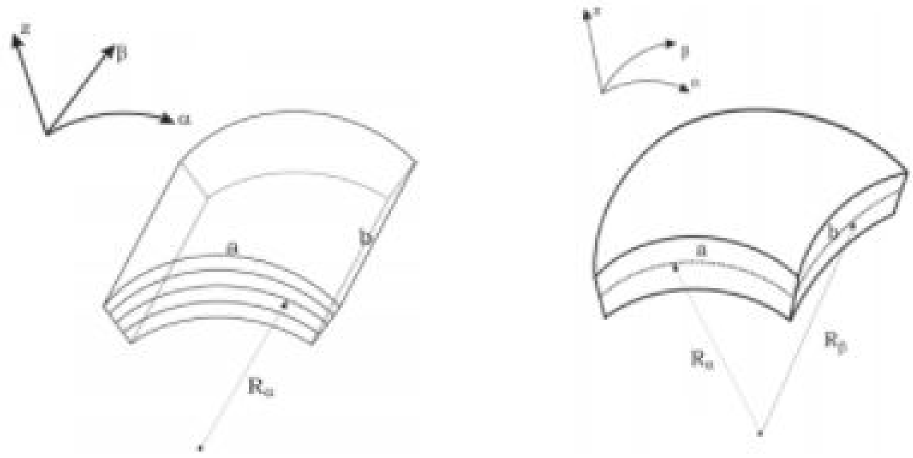

Figura 2.21. Esempio di guscio cilindrico (sinistra) e sferico (destra)

I problemi 1D sono tipici di strutture quali travi ed aste in cui due dimensioni (generalmente quelle della sezione trasversale) risultano trascurabili rispetto alla dimensione lungo l'asse longitudinale. Di seguito viene riportata una schematizzazione di una trave nella Figura 2.22. Pertanto le dimensioni a e b vengono trascurate rispetto a l e il campo di spostamenti $\boldsymbol{u}$ viene modellizzato come:

$$\boldsymbol{u} = F_i(x, y)\boldsymbol{u}_i(z) \qquad\qquad a, b << l \tag{2.32}$$

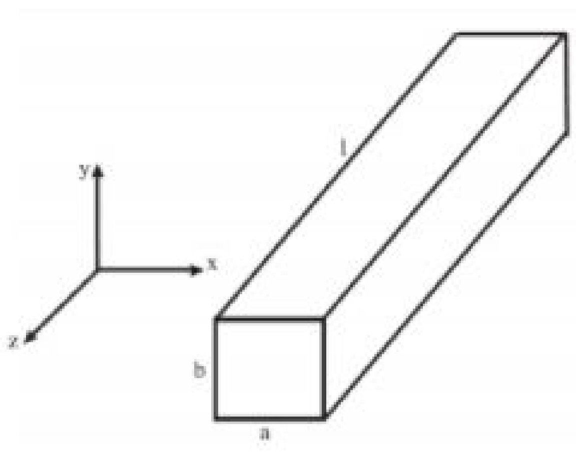

Figura 2.22. Esempio di trave 1D

Le equazioni ottenute a partire dai modelli sopracitati devono essere risolte: a questo proposito è possibile ottenere soluzioni esatte oppure soluzioni numeriche. Le prime risultano valide esclusivamente per particolari geometrie, materiali, carichi e condizioni al contorno. Le seconde consentono l'analisi di casi più generali, sempre in termini di geometrie, materiali, carichi, condizioni al contorno, e possono essere ottenute, ad esempio, attraverso il metodo FEM (Finite Element Method) oppure il GDQM (Generalized Differential Quadrature Method). Le soluzioni numeriche possono essere meno accurate rispetto alle corrispondenti soluzioni esatte tuttavia permettono di studiare problemi numerici complessi altrimenti difficilmente risolvibili e con estesi campi di applicazione ingegneristici. Di conseguenza le soluzioni analitiche esatte vengono impiegate per il confronto e la validazione dei corrispettivi modelli numerici.

Per le strutture multistrato (*plates* e *shells*) i modelli strutturali tridimensionali e bidimensionali possono essere sviluppati come: Equivalent Single Layer (ESL), Kinematic-based zig-zag, Physically-based zig-zag, Layer Wise (LW). L'analisi può essere condotta secondo differenti approcci quali metodi tridimensionali, metodi *continuum based*, teorie bidimensionali assiomatiche ed asintotiche. Per quanto concerne l'analisi tridimensionale (3D) occorre risolvere direttamente, nella forma forte o debole, le equazioni differenziali tridimensionali del problema elastico ossia equazioni di equilibrio, equazioni di compatibilità ed equazioni costitutive fisiche. All'interno di tali equazioni vengono definite opportune matrici contenenti operatori differenziali su un corpo continuo 3D con dominio Σ e contorno Γ. Le grandezze incognite (spostamenti, tensioni, deformazioni) vengono espresse in ogni punto $P(\alpha, \beta, z)$ del sistema di riferimento adottato (α, β, z). Tuttavia questo tipo di analisi è difficile da realizzare, anche per gli elevati costi computazionali, e generalmente ad essa viene preferita un'analisi bidimensionale (2D). In questo modo si assiste alla trasformazione di un problema valido in ciascun punto $P_{\Sigma}(x, y, z)$ del continuo 3D occupato dal *plate* o *shell* in esame ad un problema espresso in ogni punto $P_{\Omega}(x, y)$ della superficie di riferimento Ω della struttura multistrato. Tale semplificazione è consentita in quanto *plates* e *shells*, per definizione, presentano una dimensione (tipicamente lo spessore) di almeno un ordine di grandezza inferiore rispetto alle dimensioni planari rappresentative misurate dalla superficie media di riferimento. Per le piastre multistrato viene adottato un sistema di coordinate ortogonali rettilinee (x, y, z) dove Ω è la superficie mediana di riferimento dell'intera struttura mentre Ω_k è la superficie di riferimento per ciascun strato k-esimo di spessore h_k. Un sistema locale di coordinate ortogonali rettilinee (x_k, y_k, z_k) può essere adottato per ogni strato come mostrato nella figura Figura 2.23. Le medesime considerazioni sono valide per gusci multistrato nei quali è presente il termine di curvatura nelle due direzioni curvilinee planari α e β. Pertanto la superficie di riferimento Ω è curvilinea e viene considerato il problema per ogni punto $P_{\Omega}(\alpha, \beta)$ del sistema di riferimento curvilineo ortogonale misto (α, β, z). Tale sistema di coordinate viene mostrato nella Figura 2.24. Le piastre possono essere assimilate a casi particolari della geometria *shell* con opportune valutazioni sui raggi di curvatura.

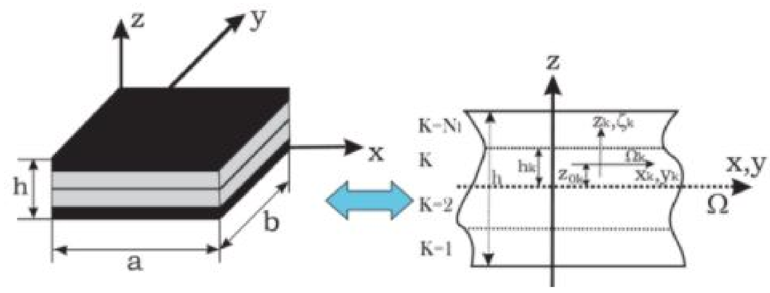

Figura 2.23. Sistema di riferimento adottato per piastre multistrato

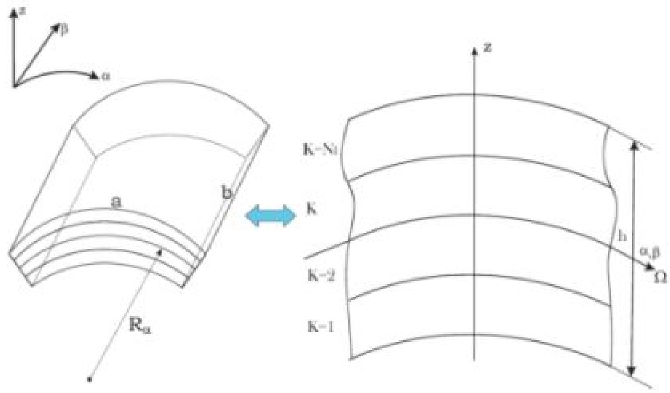

Figura 2.24. Sistema di riferimento adottato per gusci multistrato

L'eliminazione della coordinata z generalmente viene realizzata attraverso l'integrazione delle equazioni di equilibrio, delle equazioni di compatibilità e delle relazioni fisiche costitutive. A questo scopo le principali metodologie 2D sono: modelli *continuum based* oppure *stress resultants based*, approcci di tipo asintotico, approcci di tipo assiomatico. Nei modelli *continuum based* o *stress resultants based* una struttura multistrato 3D è considerata come una superficie sulla quale vengono definite le risultanti di stress. Quindi sono introdotte le approssimazioni bidimensionali e viene realizzata l'integrazione lungo la direzione dello spessore. Il principale vantaggio di tali metodi consiste nella semplicità di considerare il comportamento non lineare sia geometrico sia fisico all'interno delle teorie *plate/shell*. Negli approcci asintotici viene introdotto il parametro di perturbazione δ definito come il rapporto tra lo spessore dello *shell* e una sua dimensione caratteristica (δ = h/a). Le equazioni di governo 3D vengono espanse in funzione del parametro di perturbazione. In questo caso il principale vantaggio risiede nella possibilità di ottenere un'approssimazione consistente poiché tutti i termini presentano il medesimo ordine di grandezza del parametro di perturbazione e le soluzioni 3D vengono raggiunte quando $\delta \to 0$. L'estensione degli approcci asintotici alle strutture multistrato implica ulteriori problemi come, ad esempio, prendere in considerazione l'anisotropia degli strati compositi pertanto è necessario introdurre un altro parametro meccanico (tipicamente il rapporto ortotropo della lamina E_L/E_T). Ad esempio, le equazioni di equilibrio $\boldsymbol{E_\Sigma}$ possono essere scritte in termini del parametro di perturbazione (elevato ad esponenti reali p_i) come:

$$\boldsymbol{E_\Sigma} \approx \boldsymbol{E^1_\Sigma}\delta^{p_1} + \boldsymbol{E^2_\Sigma}\delta^{p_2} + ... + \boldsymbol{E^N_\Sigma}\delta^{p_N} \tag{2.33}$$

Gli approcci assiomatici risultano i maggiormente utilizzati in letteratura e prevedono che il campo di spostamenti o di tensioni venga espresso lungo la direzione dello spessore come segue:

$$f(\alpha,\, \beta,\, z) = f_1(\alpha,\, \beta)F_1(z) + f_2(\alpha,\, \beta)F_2(z) + ... + f_N(\alpha,\, \beta)F_N(z) \tag{2.34}$$

La generica funzione f può rappresentare il vettore degli spostamenti $\boldsymbol{u} = \{\text{u v w}\}$ nella formulazione agli spostamenti, il vettore delle componenti di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ nella formulazione alle deformazioni oppure il vettore delle componenti di stress $\boldsymbol{\sigma}$ nella formulazione alle tensioni. Nel caso delle formulazioni miste f può contenere sia le componenti di spostamento $\boldsymbol{u}$ sia le componenti normali di stress $\boldsymbol{\sigma_n} = (\sigma_{\alpha z},\ \sigma_{\beta z},\ \sigma_{zz})$. Le funzioni f_i sono le incognite definite sulla superficie di riferimento, F_i sono i polinomi introdotti come funzioni base dell'espansione in z mentre N è l'ordine di espansione lungo lo spessore. Nel caso della formulazione agli spostamenti viene utilizzato il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) mentre con la formulazione mista è possibile utilizzare il Teorema Misto Variazionale di Reissner (RMVT). Gli approcci assiomatici offrono il vantaggio di introdurre approssimazioni intuitive per descrivere il comportamento delle strutture multistrato.

Il comportamento delle strutture multistrato, ed in generale delle strutture aeronautiche, può essere poi valutato attraverso differenti tipologie di analisi strutturale a seconda della natura dei carichi agenti: a questo proposito è possibile distinguere tra carichi statici, semi-statici e dinamici. Nel primo caso i carichi applicati non variano nel tempo (oppure variano in un intervallo temporale prolungato e con una velocità tale da essere considerati costanti) e l'analisi viene definita statica. Quest'ultima permette di valutare i fenomeni di fatica che possono insorgere sulla struttura in tali condizioni di carico. Nel secondo caso i carichi agenti vengono originati da fenomeni dinamici ma presentano caratteristiche affini a quelle dei carichi statici ovvero la scala temporale di variazione del carico risulta maggiore rispetto al periodo fondamentale di oscillazione della struttura. Nell'ultimo caso i carichi applicati variano rapidamente nel tempo, in relazione alla capacità di risposta della struttura, e possono introdurre notevoli effetti dinamici (accelerazioni) sulle masse strutturali. Pertanto deve essere effettuata un'analisi di tipo dinamico che tenga in considerazione i fenomeni vibrazionali e di risonanza non trascurabili per la determinazione della risposta strutturale.

Capitolo 3

Analisi igro-termo-elastiche di strutture aeronautiche multistrato

3.0.1 Caratteristiche generali dei fenomeni igro-termo-elastici

Le moderne strutture aeronautiche multistrato risultano spesso soggette a condizioni ambientali e operative caratterizzate da elevate temperature e livelli di umidità notevoli. Tali fattori possono inficiare le performance nonché causare una degradazione delle proprietà meccaniche ed elastiche dei materiali compositi: ad esempio la matrice interna tende ad assorbire l'umidità presente nell'aria e tale assorbimento può determinare un peggioramento nella risposta meccanica del componente. Pertanto, gli effetti igro-termici possono essere investigati in termini di alterazione delle caratteristiche meccaniche oppure considerando i carichi termici ed igroscopici equivalenti che si generano sulla struttura multistrato. Nel caso di *shells* e *plates*, ovvero geometrie bidimensionali con un comportamento prevalentemente membranale, i carichi sopracitati sono in grado di modificare la risposta flessionale [9] [11]. Le distribuzioni di temperatura ed umidità interne al materiale possono essere valutate attraverso la diffusione di Fick, la quale si verifica nelle seguenti condizioni [11] [12]:

- Il trasferimento di calore attraverso il materiale avviene esclusivamente per conduzione e può essere descritto dalla legge di Fourier
- La diffusione di umidità può essere descritta dalla legge di Fick in una forma dipendente dalla concentrazione
- La temperatura all'interno del materiale raggiunge l'equilibrio più velocemente della concentrazione di umidità
- Le equazioni di trasferimento dell'energia (Fourier) e della massa (Fick) sono disaccoppiate
- I coefficienti di conducibilità termica e di diffusività di massa dipendono esclusivamente dalla temperatura mentre risultano indipendenti dalla concentrazione di umidità o dai livelli di stress interni presenti nel materiale

La diffusione di Fick si verifica tipicamente a basse temperature e nelle condizioni di esposizione all'aria umida: deviazioni da tale comportamento possono insorgere per temperature elevate e materiali immersi in liquidi. Tuttavia questo modello permette di descrivere con un'approssimazione consistente il comportamento di numerosi materiali, compresi i compositi tradizionali e gli FGM [11] [12]. La definizione dei carichi equivalenti termici ed igroscopici prevede innanzitutto che i profili di temperatura e umidità vengano definiti. Quest'ultimi possono essere assunti a priori, con un andamento costante oppure lineare, altresì possono essere calcolati lungo la direzione dello spessore della struttura multistrato risolvendo le equazioni di trasferimento del calore (Fourier) e di diffusione dell'umidità (Fick) [11] [12].

Le sollecitazioni termiche cui sono soggette le strutture multistrato possono riguardare temperature elevate, gradienti termici e/o variazioni cicliche della temperatura. Alcuni esempi si ritrovano nei velivoli supersonici e/o ad alta quota, nelle navette spaziali, nei veicoli di lancio, nei sistemi avanzati di propulsione nonché in numerose attrezzature industriali come quelle per le lavorazioni laser ad elevata energia. In tutti questi casi è necessario realizzare un'analisi strutturale termica che prenda in considerazione i seguenti aspetti: problemi di trasferimento del calore, stress termici transitori/a regime, stress residui derivanti dai processi produttivi, carichi di biforcazione, fenomeni vibrazionali, buckling e post-buckling di piastre e gusci. Di conseguenza il campo di temperatura deve essere opportunamente introdotto nel modello meccanico che descrive il comportamento della struttura multistrato e ciò può essere realizzato secondo diverse metodologie: assumere a priori il profilo di temperatura lungo lo spessore (lineare o costante); risolvere l'equazione di trasferimento del calore di Fourier 1D/3D per calcolare il profilo di temperatura lungo lo spessore; considerare un flusso di calore uniforme; introdurre la temperatura nel modello elastico come variabile primaria, in analogia alle variabili elastiche, e accoppiare il campo termico con quello meccanico [11] [12]. Da questo punto di vista gli FGM costituiscono una valida alternativa ai materiali tradizionali perché sono in grado di sopportare temperature elevate, in particolare quando sono costituiti da una fase metallica e da una fase ceramica, e possono ridurre drasticamente gli stress termici [13] [14]. La principale difficoltà nell'analisi termica degli strati FGM risiede nel considerare la continua variazione nella direzione dello spessore delle proprietà termiche ed elastiche. Le medesime considerazioni possono essere sviluppate circa l'analisi igrometrica delle strutture multistrato grazie alla fondamentale analogia tra i fenomeni fisici di conduzione e di diffusione [14].

3.0.2 Il problema della conduzione termica

Per quanto concerne il fenomeno della trasmissione termica sulle strutture multistrato è necessaria una corretta definizione del profilo di temperatura lungo la coordinata di spessore. Esso viene calcolato separatamente e diventa parte integrante del modello analitico termo-meccanico descritto nel capitolo successivo del presente studio. Si suppone che la struttura multistrato sia soggetta ad un campo termico con ampiezza imposta sia sulla faccia superiore (Θ_t) sia sulla faccia inferiore (Θ_b). Il profilo di temperatura può essere definito secondo tre differenti metodologie: calcolato attraverso la risoluzione dell'equazione 3D di Fourier della trasmissione termica (θ_c, 3D), calcolato attraverso la risoluzione dell'equazione 1D di Fourier della trasmissione termica (θ_c, 1D) oppure assunto a priori lineare lungo l'intero spessore della struttura multistrato (θ_a) [14].

Equazione 3D di Fourier della trasmissione termica

In un sistema di coordinate ortogonale curvilineo (u_1,u_2,u_3), l'equazione differenziale della conduzione di calore per un corpo solido omogeneo in condizioni stazionarie, senza la generazione di energia interna, risulta:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{q}(u_1,u_2,u_3) = 0 \tag{3.1}$$

La divergenza del flusso di calore viene scritta come:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{q} = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{a}{a_1}q_1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{a}{a_2}q_2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{a}{a_3}q_3\right)\right] \tag{3.2}$$

dove q_1, q_2, q_3 sono le componenti del flusso termico nelle direzioni 1, 2, 3:

$$q_i = -\kappa_i \frac{1}{a_i}\frac{\partial \theta}{\partial u_i} \tag{3.3}$$

in cui κ_i sono i coefficienti di conducibilità termica nella direzione u_i. a_1, a_2, a_3 sono fattori di scala mentre a viene così definita:

$$a = a_1\, a_2\, a_3 \tag{3.4}$$

L'equazione (3.2) può essere riscritta in un sistema di coordinate misto curvilineo ortogonale (α, β, z) per un materiale ortotropo come:

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\alpha}\kappa_1\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\beta}\kappa_2\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right)\right]+\kappa_3\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0 \tag{3.5}$$

dove z è una coordinata rettilinea mentre $H_z = 1$. I fattori di scala a_i coincidono con i coefficienti parametrici definiti all'interno del modello termo-meccanico H_α, H_β, H_z:

$$a_1 = H_\alpha,\; a_2 = H_\beta,\; a_3 = H_z = 1 \tag{3.6}$$

Utilizzando l'equazione (3.5), per un generico layer fisico ortotropo k, gli operatori differenziali vengono trasferiti esclusivamente al campo termico:

$$\kappa_1^{*k}(z)\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+\kappa_2^{*k}(z)\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+\kappa_3^{*k}(z)\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0 \tag{3.7}$$

$$\kappa_1^{*k}(z)=\frac{\kappa_1^k}{H_\alpha^2},\quad \kappa_2^{*k}(z)=\frac{\kappa_2^k}{H_\beta^2},\quad \kappa_3^{*k}(z)=\kappa_3^k \tag{3.8}$$

L'equazione (3.7) presenta coefficienti non-costanti perché in κ_1^{*k} e κ_2^{*k}, H_α e H_β sono funzioni di z. Suddividendo la struttura multistrato in un numero opportuno di layer matematici è possibile ottenere altrettante M equazioni, una per ogni j-esimo layer, con coefficienti costanti κ_1^{*j}, κ_2^{*j} e κ_3^{*j} calcolati a metà di ciascuno strato fittizio. Pertanto, l'equazione (3.7) può essere riscritta come:

$$\kappa_1^{*j}\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+\kappa_2^{*j}\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+\kappa_3^{*j}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0 \tag{3.9}$$

L'equazione (3.9) viene automaticamente soddisfatta dalla forma armonica della temperatura $\theta(\alpha,\beta,z)$ in cui la dipendenza dell'ampiezza $\Theta(z)$ dalla coordinata di spessore z viene assunta come:

$$\Theta^j(z) = \Theta_0^j \exp(s^j z) \tag{3.10}$$

dove Θ_0^j e s^j devono essere determinati per ogni j-esimo layer matematico. Nello specifico s^j può essere ricavata sostituendo la forma armonica della temperatura, con l'ipotesi della (3.10), nell'equazione (3.9):

$$s^j_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\kappa^{*j}_1 \bar{\alpha}^2 + \kappa^{*j}_2 \bar{\beta}^2}{\kappa^{*j}_3}} \tag{3.11}$$

s^j_1 viene scelta come soluzione (segno +) e l'equazione (3.10) può essere riscritta come:

$$\Theta^j(z) = \Theta^j_{01} \exp(s^j_1 z) + \Theta^j_{02} \exp(s^j_1 z) \tag{3.12}$$

$$\Theta^j(z) = S^j_1 cosh(s^j_1 z) + S^j_2 sinh(s^j_1 z) \tag{3.13}$$

Entrambe le precedenti equazioni contengono alcuni parametri che devono essere determinati per ogni layer matematico. s^j_1 per ciascun j-esimo layer può essere calcolato usando l'equazione (3.11). Devono essere determinati $2\times M$ coefficienti imponendo due condizioni di continuità su ciascuna interfaccia tra layer:

$$\Theta^{(j+1)}_b = \Theta^j_t \tag{3.14}$$

$$\kappa^{*j+1}_3 \Theta^{(j+1)}_{,z_b} = \kappa^{*j}_3 \Theta^j_{,z_t} \tag{3.15}$$

L'equazione (3.14) evidenzia come la temperatura al top del generico j-esimo layer deve essere uguale a quella al bottom del $(j+1)$-esimo layer. L'equazione (3.15) implica l'equivalenza del flusso di calore q_3 nella direzione dello spessore 3 valutata al bottom (b) del $(j+1)$-esimo layer e al top (t) del j-esimo layer. Sviluppando le equazioni (3.14) e (3.15) mediante l'espressione della Θ^j data nella (3.13), è possibile esprimere in forma matriciale compatta il legame esistente tra S_1 e S_2 al j-esimo layer nonché tra S_1 e S_2 al $(j+1)$-esimo layer:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} V_{\Theta 1}^{j+1,j} & V_{\Theta 2}^{j+1,j} \\ V_{\Theta 3}^{j+1,j} & V_{\Theta 4}^{j+1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^{j} \tag{3.16}$$

Un totale di $2\times(M-1)$ condizioni possono essere imposte essendo $(M-1)$ il numero di interfacce tra layer. Definendo la matrice di trasferimento nella (3.16) come $\boldsymbol{V}^{(j+1,j)}_{\Theta}$, il legame tra i coefficienti al layer superiore ($j = M$) e quelli al layer inferiore ($j = 1$) può essere individuato applicando ricorsivamente la (3.16):

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^{M} = \boldsymbol{V}^{(M,M-1)}_{\Theta} \boldsymbol{V}^{(M-1,M-2)}_{\Theta} \ldots\ldots\ldots \boldsymbol{V}^{(3,2)}_{\Theta} \boldsymbol{V}^{(2,1)}_{\Theta} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^{1} = \boldsymbol{V}^{(M,1)}_{\Theta} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^{1} \tag{3.17}$$

Il problema mostrato nell'equazione (3.17) può essere risolto imponendo le temperature al bottom e al top della struttura multistrato per le due condizioni mancanti delle $2\times(M-1)$ già imposte nella (3.16). Dunque, tutti i $2 \times M$ coefficienti (S_1^j e S_2^j per tutti gli M layer matematici) possono essere calcolati. Una volta che i coefficienti degli strati esterni sono noti, i parametri rimanenti possono essere calcolati di conseguenza. L'implementazione di questa soluzione è facilitata se la temperatura viene assunta lineare entro ogni layer matematico. Una volta che i coefficienti della (3.13) sono stati determinati per ogni layer matematico, il profilo di temperatura lungo lo spessore è completamente definito. b_Θ^j rappresenta il valore di temperatura al bottom del j-esimo layer mentre a_Θ^j è la pendenza del profilo termico nel layer considerato.

Equazione 1D di Fourier della trasmissione termica

Sebbene il problema fisico della conduzione termica sia tridimensionale, quando il *thickness ratio* a/h e/o b/h è sufficientemente elevato, la determinazione del profilo di temperatura può essere semplificata. L'andamento planare della temperatura è definito se il campo termico ha un'espressione armonica. Per il k-esimo layer fisico i tre flussi di calore assumono la forma seguente:

$$q_1^k = \kappa_1^{*k}\bar{\alpha}\Theta^k(z)cos(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{3.18}$$

$$q_2^k = \kappa_2^{*k}\bar{\beta}\Theta^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)cos(\bar{\beta}\beta) \tag{3.19}$$

$$q_3^k = \kappa_3^{*k}\Theta_{,z}^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{3.20}$$

Per valori elevati del rapporto di spessore, le equazioni (3.5) e (3.7) si semplificano così:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa_3^*\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)= 0 \tag{3.21}$$

dove $\kappa_3^* = \kappa_3$ poiché z è la coordinata rettilinea. Ciò è dovuto al fatto che i flussi termici q_1 e q_2 decrescono al crescere del *thickness ratio* e risultano trascurabili. L'argomento tra parentesi nella (3.21) rappresenta il flusso di calore nella direzione dello spessore per l'intera struttura. La stessa equazione implica che $q_3(z)$ sia assunto costante lungo l'intero spessore:

$$q_3(z) =\left(\kappa_3^*\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)= const \tag{3.22}$$

L'equazione (3.22) indica che il flusso di calore q_3 è costante nell'intera struttura multistrato e può essere sfruttata per esprimere la continuità di q_3 stesso a ciascuna interfaccia tra due layer fisici/matematici. Considerando il generico j-esimo layer matematico, l'operatore differenziale può essere riscritto in forma algebrica indicando la pendenza del profilo termico:

$$q_3^j = -\kappa_3^{*j} \frac{\partial \Theta^j}{\partial z} = -\frac{\kappa_3^{*j}}{h^j}(\Theta_t^j - \Theta_b^j) \tag{3.23}$$

Il termine κ_3^{*j}/h^j rappresenta la conduttanza termica del j-esimo layer. Il flusso di calore costante lungo lo spessore può essere calcolato definendo il coefficiente di resistenza termica equivalente dell'intera struttura (in analogia con la resistenza elettrica):

$$R_{z_{eq}} = \sum_{j=1}^{M} \frac{h^j}{\kappa_3^{*j}} \tag{3.24}$$

Una volta definita la resistenza termica equivalente, il flusso di calore q_3 dell'intera struttura può essere calcolato utilizzando un singolo layer equivalente:

$$q_3 = -\frac{1}{R_{z_{eq}}}(\Theta_t - \Theta_b) = const \tag{3.25}$$

dove Θ_t e Θ_b sono le ampiezze della temperatura imposta sulle facce esterne dell'intera struttura. La temperatura alla generica coordinata z può essere valutata utilizzando la continuità di q_3^j nella (3.23):

$$q_3^j = -\kappa_3^{*j} \frac{(\Theta_t^j - \Theta_b^j)}{h^j} = q_3^{j+1} = -\kappa_3^{*j+1} \frac{(\Theta_t^{j+1} - \Theta_b^{j+1})}{h^{j+1}} = q_3 = const \tag{3.26}$$

Se il coefficiente $kappa_3^{*j}$ cambia passando da uno strato ad un altro adiacente, la continuità di q_3^j è permessa dal cambiamento della pendenza del profilo di temperatura $\frac{(\Theta_t^j - \Theta_b^j)}{h^j}$. Quindi, quando il materiale dello strato cambia, anche la pendenza del profilo di temperatura cambia ma rimane lineare nello strato. Infatti, tale metodo permette di vedere l'effetto del materiale ma non quello dello spessore dello strato. Questo approccio permette di considerare solo la sequenza di impilamento e gli effetti del materiale mentre la tridimensionalità del problema è trascurata. Risulta possibile valutare il cambiamento della conduttività κ_3^* in ogni strato e la relativa pendenza della temperatura. Tuttavia, la temperatura rimane lineare in ogni strato anche se esso è spesso. L'effetto dello spessore dello strato (profilo di temperatura non lineare nello strato spesso) è catturato solo dall'equazione di conduzione del calore di Fourier 3D. I due coefficienti b_Θ^j e a_Θ^j rappresentano il valore della temperatura alla base del j-esimo strato e la pendenza del profilo di temperatura in esso.

Profilo di temperatura assunto lineare a priori

Un'ulteriore semplificazione può essere fatta considerando il profilo di temperatura lineare attraverso l'intero spessore della struttura dal basso verso l'alto senza considerare il cambiamento del materiale in ogni strato. È un'ipotesi comune presente in letteratura e viene giustificata quando la struttura multistrato presenta alti rapporti di spessore e la sequenza di impilamento comprende un singolo strato o diversi strati termicamente omogenei. Il coefficiente a^j_Θ è ancora più facile da determinare in questo caso perché è soltanto la pendenza globale del profilo di temperatura.

3.0.3 Il problema della diffusione igrometrica

Per quanto concerne il fenomeno della diffusione igrometrica sulle strutture multistrato è necessaria una corretta definizione del profilo di umidità lungo la coordinata di spessore. Esso viene calcolato separatamente e diventa parte integrante del modello analitico igro-meccanico descritto nel capitolo successivo del presente studio. Si suppone che la struttura multistrato sia soggetta ad un campo igrometrico con ampiezza imposta sia sulla faccia superiore ($\mathcal{M}_t$) sia sulla faccia inferiore ($\mathcal{M}_b$). Il profilo di umidità può essere definito secondo tre differenti metodologie: calcolato attraverso la risoluzione dell'equazione 3D di Fick della diffusione igrometrica (M_c, 3D), calcolato attraverso la risoluzione dell'equazione 1D di Fick della diffusione igrometrica (M_c, 1D) oppure assunto a priori lineare lungo l'intero spessore della struttura multistrato (M_a) [11].

Equazione 3D di Fick della diffusione igrometrica

In un sistema di coordinate ortogonale curvilineo (u_1,u_2,u_3), l'equazione differenziale della diffusione igrometrica per un corpo solido omogeneo in condizioni stazionarie, senza la generazione di energia interna, risulta:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{g}(u_1,u_2,u_3) = 0 \tag{3.27}$$

La divergenza del flusso di umidità viene scritta come:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{g} = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{a}{a_1}g_1\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{a}{a_2}g_2\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{a}{a_3}g_3\right)\right] \tag{3.28}$$

dove g_1, g_2, g_3 sono le componenti del flusso igrometrico nelle direzioni 1, 2, 3:

$$g_i = -D_i \frac{1}{a_i}\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial u_i} \tag{3.29}$$

in cui D_i sono i coefficienti di diffusione igrometrica nella direzione u_i. a_1, a_2, a_3 sono fattori di scala mentre a viene così definita:

$$a = a_1\, a_2\, a_3 \tag{3.30}$$

L'equazione (3.28) può essere riscritta in un sistema di coordinate misto curvilineo ortogonale (α, β, z) per un materiale ortotropo come:

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\alpha} D_1 \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\beta} D_2 \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \beta}\right)\right] + D_3 \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial z^2} = 0 \tag{3.31}$$

dove z è una coordinata rettilinea mentre $H_z = 1$. I fattori di scala a_i coincidono con i coefficienti parametrici definiti all'interno del modello igro-meccanico H_α, H_β, H_z:

$$a_1 = H_\alpha,\ a_2 = H_\beta,\ a_3 = H_z = 1 \tag{3.32}$$

Utilizzando l'equazione (3.31), per un generico layer fisico ortotropo k, gli operatori differenziali vengono trasferiti esclusivamente al campo igrometrico:

$$D_1^{*k}(z)\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial \alpha^2} + D_2^{*k}(z)\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial \beta^2} + D_3^{*k}(z)\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial z^2} = 0 \tag{3.33}$$

$$D_1^{*k}(z) = \frac{D_1^k}{H_\alpha^2}, \quad D_2^{*k}(z) = \frac{D_2^k}{H_\beta^2}, \quad D_3^{*k}(z) = D_3^k \tag{3.34}$$

L'equazione (3.33) presenta coefficienti non-costanti perché in D_1^{*k} e D_2^{*k}, H_α e H_β sono funzioni di z. Suddividendo la struttura multistrato in un numero opportuno di layer matematici è possibile ottenere altrettante M equazioni, una per ogni j-esimo layer, con coefficienti costanti D_1^{*j}, D_2^{*j} e D_3^{*j} calcolati a metà di ciascuno strato fittizio. Pertanto, l'equazione (3.33) può essere riscritta come:

$$D_1^{*j}\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial \alpha^2} + D_2^{*j}\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial \beta^2} + D_3^{*j}\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial z^2} = 0 \tag{3.35}$$

L'equazione (3.35) viene automaticamente soddisfatta dalla forma armonica dell'umidità $\mathcal{M}(\alpha,\beta,z)$ in cui la dipendenza dell'ampiezza $M(z)$ dalla coordinata di spessore z viene assunta come:

$$M^j(z) = M_0^j \exp(s^j z) \tag{3.36}$$

dove M_0^j e s^j devono essere determinati per ogni j-esimo layer matematico. Nello specifico s^j può essere ricavata sostituendo la forma armonica dell'umidità, con l'ipotesi della (3.36), nell'equazione (3.35):

$$s_{1,2}^j = \pm\sqrt{\frac{D_1^{*j}\bar{\alpha}^2 + D_2^{*j}\bar{\beta}^2}{D_3^{*j}}} \tag{3.37}$$

s_1^j viene scelta come soluzione (segno +) e l'equazione (3.36) può essere riscritta come:

$$M^j(z) = M_{01}^j \exp(s_1^j z) + M_{02}^j \exp(s_1^j z) \tag{3.38}$$

$$M^j(z) = S_1^j cosh(s_1^j z) + S_2^j sinh(s_1^j z) \tag{3.39}$$

Entrambe le precedenti equazioni contengono alcuni parametri che devono essere determinati per ogni layer matematico. s_1^j per ciascun j-esimo layer può essere calcolato usando l'equazione (3.37). Devono essere determinati $2 \times M$ coefficienti imponendo due condizioni di continuità su ciascuna interfaccia tra layer:

$$M_b^{(j+1)} = M_t^j \tag{3.40}$$

$$D_3^{*j+1} M_{,z_b}^{(j+1)} = D_3^{*j} M_{,z_t}^j \tag{3.41}$$

L'equazione (3.40) evidenzia come l'umidità al top del generico j-esimo layer deve essere uguale a quella al bottom del $(j+1)$-esimo layer. L'equazione (3.41) implica l'equivalenza del flusso di umidità g_3 nella direzione dello spessore 3 valutata al bottom (b) del $(j+1)$-esimo layer e al top (t) del j-esimo layer. Sviluppando le equazioni (3.40) e (3.41) mediante l'espressione della M^j data nella (3.39), è possibile esprimere in forma matriciale compatta il legame esistente tra S_1 e S_2 al j-esimo layer nonché tra S_1 e S_2 al $(j+1)$-esimo layer:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} V_{M1}^{j+1,j} & V_{M2}^{j+1,j} \\ V_{M3}^{j+1,j} & V_{M4}^{j+1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^j \tag{3.42}$$

Un totale di $2 \times (M-1)$ condizioni possono essere imposte essendo $(M-1)$ il numero di interfacce tra layer. Definendo la matrice di trasferimento nella (3.42) come $\boldsymbol{V}_M^{(j+1,j)}$, il legame tra i coefficienti al layer superiore ($j = M$) e quelli al layer inferiore ($j = 1$) può essere individuato applicando ricorsivamente la (3.42):

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^M = \boldsymbol{V}_M^{(M,M-1)} \boldsymbol{V}_M^{(M-1,M-2)} .... \boldsymbol{V}_M^{(3,2)} \boldsymbol{V}_M^{(2,1)} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^1 = \boldsymbol{V}_M^{(M,1)} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}^1 \tag{3.43}$$

Il problema mostrato nell'equazione (3.43) può essere risolto imponendo le umidità al bottom e al top della struttura multistrato per le due condizioni mancanti delle $2 \times (M-1)$ già imposte nella (3.42). Dunque, tutti i $2 \times M$ coefficienti (S_1^j e S_2^j per tutti gli M layer matematici) possono essere calcolati. Una volta che i coefficienti degli strati esterni sono noti, i parametri rimanenti possono essere calcolati di conseguenza. L'implementazione di questa soluzione è facilitata se il contenuto di umidità viene assunto lineare entro ogni layer matematico. Una volta che i coefficienti della (3.39) sono stati determinati per ogni layer matematico, il profilo di umidità lungo lo spessore è completamente definito. b_M^j rappresenta il valore di umidità al bottom del j-esimo layer mentre a_M^j è la pendenza del profilo igrometrico nel layer considerato.

Equazione 1D di Fick della diffusione igrometrica

Sebbene il problema fisico della diffusione igrometrica sia tridimensionale, quando il *thickness ratio* a/h e/o b/h è sufficientemente elevato, la determinazione del profilo di umidità può essere semplificata. L'andamento planare dell'umidità è definito se il campo igrometrico ha un'espressione armonica. Per il k-esimo layer fisico i tre flussi di umidità assumono la forma seguente:

$$q_1^k = D_1^{*k} \bar{\alpha} M^k(z) cos(\bar{\alpha}\alpha) sin(\bar{\beta}\beta) \tag{3.44}$$

$$q_2^k = D_2^{*k} \bar{\beta} M^k(z) sin(\bar{\alpha}\alpha) cos(\bar{\beta}\beta) \tag{3.45}$$

$$q_3^k = D_3^{*k} M_{,z}^k(z) sin(\bar{\alpha}\alpha) sin(\bar{\beta}\beta) \tag{3.46}$$

Per valori elevati del rapporto di spessore, le equazioni (3.31) e (3.33) si semplificano così:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D_3^* \frac{\partial M}{\partial z} \right) = 0 \tag{3.47}$$

dove $D_3^* = D_3$ poiché z è la coordinata rettilinea. Ciò è dovuto al fatto che i flussi igrometrici g_1 e g_2 decrescono al crescere del *thickness ratio* e risultano trascurabili. L'argomento tra parentesi nella (3.47) rappresenta il flusso di umidità nella direzione dello spessore per l'intera struttura. La stessa equazione implica che $g_3(z)$ sia assunto costante lungo l'intero spessore:

$$g_3(z) = \left(D_3^* \frac{\partial M}{\partial z} \right) = const \tag{3.48}$$

L'equazione (3.48) indica che il flusso di umidità g_3 è costante nell'intera struttura multistrato e può essere sfruttata per esprimere la continuità di g_3 stesso a ciascuna interfaccia tra due layer fisici/matematici. Considerando il generico j-esimo layer matematico, l'operatore differenziale può essere riscritto in forma algebrica indicando la pendenza del profilo igrometrico:

$$g_3^j = -D_3^{*j} \frac{\partial M^j}{\partial z} = -\frac{D_3^{*j}}{h^j}(M_t^j - M_b^j) \tag{3.49}$$

Il termine D_3^{*j}/h^j rappresenta la conduttanza termica del j-esimo layer. Il flusso di calore costante lungo lo spessore può essere calcolato definendo il coefficiente di resistenza igrometrica equivalente dell'intera struttura (in analogia con il coefficiente di resistenza igrometrica):

$$R_{z_{eq}} = \sum_{j=1}^{M} \frac{h^j}{D_3^{*j}} \tag{3.50}$$

Una volta definita la resistenza igrometrica equivalente, il flusso di umidità g_3 dell'intera struttura può essere calcolato utilizzando un singolo layer equivalente:

$$g_3 = -\frac{1}{R_{z_{eq}}}(M_t - M_b) = const \tag{3.51}$$

dove M_t e M_b sono le ampiezze dell'umidità imposta sulle facce esterne dell'intera struttura. L'umidità alla generica coordinata z può essere valutata utilizzando la continuità di g_3^j nella (3.49):

$$g_3^j = -D_3^{*j} \frac{(M_t^j - M_b^j)}{h^j} = g_3^{j+1} = -D_3^{*j+1} \frac{(M_t^{j+1} - M_b^{j+1})}{h^{j+1}} = g_3 = const \tag{3.52}$$

Se il coefficiente D_3^{*j} cambia passando da uno strato ad un altro adiacente, la continuità di g_3^j è permessa dal cambiamento della pendenza del profilo di umidità $\frac{(M_t^j - M_b^j)}{h^j}$. Quindi, quando il materiale dello strato cambia, anche la pendenza del profilo di umidità cambia ma rimane lineare nello strato. Infatti, tale metodo permette di vedere l'effetto del materiale ma non quello dello spessore dello strato. Questo approccio permette di considerare solo la sequenza di impilamento e gli effetti del materiale mentre la tridimensionalità del problema è trascurata. Risulta possibile valutare il cambiamento della diffusività D_3^* in ogni strato e la relativa pendenza dell'umidità. Tuttavia, l'umidità rimane lineare in ogni strato anche se esso è spesso. L'effetto dello spessore dello strato (profilo igrometrico non lineare nello strato spesso) è catturato solo dall'equazione di diffusione igrometrica di Fick 3D. I due coefficienti b_M^j e a_M^j rappresentano il valore dell'umidità alla base del j-esimo strato e la pendenza del profilo di umidità in esso.

Profilo di umidità assunto lineare a priori

Un'ulteriore semplificazione può essere fatta considerando il profilo di umidità lineare attraverso l'intero spessore della struttura dal basso verso l'alto senza considerare il cambiamento del materiale in ogni strato. È un'ipotesi comune presente in letteratura e viene giustificata quando la struttura multistrato presenta alti rapporti di spessore e la sequenza di impilamento comprende un singolo strato o diversi strati igrometricamente omogenei. Il coefficiente a_M^j è ancora più facile da determinare in questo caso perché è soltanto la pendenza globale del profilo igrometrico.

Capitolo 4

Modelli 3D per analisi igro-termo-elastiche di strutture multistrato

4.1 Modello 3D SHELL analitico

In questa sezione vengono descritte le caratteristiche del modello 3D SHELL analitico esatto utilizzato per l'analisi igro-termo-elastica di piastre che incorporano strati in materiale composito/sandwich classico oppure in FGM. A tal proposito viene fatta una distinzione tra modello termo-elastico e modello igro-elastico a seconda che venga considerato il problema della trasmissione del calore o della diffusione igrometrica. Si ricorda l'esistenza dell'analogia fondamentale tra i due fenomeni fisici nonché tra le equazioni matematiche che governano gli stessi, ovvero l'equazione di Fourier nel caso termico e l'equazione di Fick nel caso igrometrico. Il modello descritto risulta applicabile nel caso dei gusci, in cui la curvatura geometrica diviene un fattore determinante per l'analisi, diversamente dal modello numerico presentato successivamente il quale è stato creato appositamente per configurazioni geometriche non-curvilinee (piastre). Il modello analitico termo-elastico è il medesimo descritto in [14].

4.1.1 Modello esatto termo-elastico

Si considera una struttura multistrato collocata in un sistema di riferimento ortogonale misto curvilineo (α, β, z). Nel caso rettilineo (piastre) le coordinate α e β coincidono con x e y. Lo spessore della struttura multistrato h risulta costante nella direzione z. L'origine del sistema di riferimento è localizzato in un vertice con α e β paralleli alle facce laterali sulla superficie mediana Ω_0. La coordinata di spessore z è normale alla superficie media e diretta verso la faccia superiore della struttura. R_α e R_β rappresentano i raggi di curvatura nelle direzioni α e β, vengono valutati rispetto alla superficie media Ω_0 e sono assunti costanti. a e b sono le dimensioni della struttura multistrato rispettivamente nelle direzioni α e β (valutate anch'esse rispetto alla superficie media Ω_0). Le diverse configurazioni geometriche per piastre e gusci, con i rispettivi sistemi di riferimento, sono illustrate nelle Figura 2.23 e Figura 2.24. Vengono definiti tre coefficienti parametrici per ciascuna direzione α, β e z:

$$H_\alpha = \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) = \left(1 + \frac{\tilde{z} - h/2}{R_\alpha}\right) \tag{4.1}$$

$$H_\beta = \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) = \left(1 + \frac{\tilde{z} - h/2}{R_\beta}\right) \tag{4.2}$$

$$H_z = 1 \tag{4.3}$$

H_α e H_β possono essere espressi in funzione della coordinata z (variabile da -h/2 a +h/2 con lo zero posizionato sulla superficie media Ω_0) oppure della coordinata $\tilde{z}$ (variabile da 0 ad h rispetto alla superficie inferiore). Nel caso di gusci con raggi di curvatura costanti, tali coefficienti diventano funzioni lineari della coordinata di spessore. Per strutture con una sequenza di laminazione generica e N_L strati fisici, il problema è governato da tre equazioni di equilibrio per ciascun k-esimo strato fisico. Tale formulazione è valida per gusci sferici, gusci cilindrici (in cui uno dei due raggi di curvatura tende ad infinito), cilindri e piastre (in cui entrambi i raggi di curvatura tendono ad infinito).

$$H_\beta \frac{\partial \sigma^k_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma^k_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma^k_{\alpha z}}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta}\right)\sigma^k_{\alpha z} = 0 \tag{4.4}$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma^k_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma^k_{\beta\beta}}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma^k_{\beta z}}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha}\right)\sigma^k_{\beta z} = 0 \tag{4.5}$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma^k_{\alpha z}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma^k_{\beta z}}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma^k_{zz}}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha}\sigma^k_{\alpha\alpha} - \frac{H_\alpha}{R_\beta}\sigma^k_{\beta\beta} + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta}\right)\sigma^k_{zz} = 0 \tag{4.6}$$

La struttura multistrato è soggetta ad un campo di temperatura imposto $\theta(\alpha,\ \beta,\ z)$ misurato rispetto alla temperatura di riferimento T_0 come $\theta = T - T_0$. Le relazioni geometriche vengono scritte nel sistema di riferimento (α, β, z) e presentano la forma seguente dove ${\varepsilon_{\alpha\alpha}}^k$, ${\varepsilon_{\beta\beta}}^k$, ${\varepsilon_{zz}}^k$, ${\gamma_{\beta z}}^k$, ${\gamma_{\alpha z}}^k$, ${\gamma_{\alpha\beta}}^k$ sono le sei componenti di deformazione per il k-esimo layer fisico e possono essere valutate come somma algebrica delle deformazioni meccaniche (pedice m) e delle deformazioni termiche (pedice θ). Esse risultano funzioni delle tre componenti di spostamento u^k, v^k, w^k nelle direzioni α, β, z e della temperatura θ^k attraverso i coefficienti di espansione termica ${\mu_\alpha}^k$, ${\mu_\beta}^k$, ${\mu_z}^k$ nel sistema di riferimento strutturale (α, β, z). Quest'ultimi parametri sono ottenuti a partire dai coefficienti di espansione termica ${\mu_1}^k$, ${\mu_2}^k$, ${\mu_3}^k$ nel sistema di riferimento materiale (1, 2, 3) tramite un'opportuna rotazione.

$$\varepsilon^k_{\alpha\alpha} = \varepsilon^k_{\alpha\alpha m} - \varepsilon^k_{\alpha\alpha\theta} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha} - \mu^k_\alpha \theta^k \tag{4.7}$$

$$\varepsilon^k_{\beta\beta} = \varepsilon^k_{\beta\beta m} - \varepsilon^k_{\beta\beta\theta} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial v^k}{\partial \beta} + \frac{w^k}{H_\beta R_\beta} - \mu^k_\beta \theta^k \tag{4.8}$$

$$\varepsilon^k_{zz} = \varepsilon^k_{zzm} - \varepsilon^k_{zz\theta} = \frac{\partial w^k}{\partial z} - \mu^k_z \theta^k \tag{4.9}$$

$$\gamma^k_{\beta z} = \gamma^k_{\beta zm} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z} - \frac{v^k}{H_\beta R_\beta} \tag{4.10}$$

$$\gamma^k_{\alpha z} = \gamma^k_{\alpha zm} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha} \tag{4.11}$$

$$\gamma^k_{\alpha\beta} = \gamma^k_{\alpha\beta m} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial u^k}{\partial \beta} \tag{4.12}$$

Vengono introdotte le equazioni costitutive, riportate di seguito, in cui il vettore degli stress $\boldsymbol{\sigma}^k$ ha dimensioni 6×1, la matrice dei coefficienti elastici $\boldsymbol{C}^k$ ha dimensioni 6×6 e le deformazioni sono state definite precedentemente. La matrice dei cofficienti elastici nel sistema di riferimento strutturale (α, β, z) per un materiale ortotropo con angoli di rotazione 0° o 90° viene anch'essa riportata di seguito:

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \boldsymbol{C}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k = \boldsymbol{C}^k(\boldsymbol{\varepsilon}^k_m - \boldsymbol{\varepsilon}^k_\theta) \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{C}^k = \begin{bmatrix} C^k_{11} & C^k_{12} & C^k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C^k_{12} & C^k_{22} & C^k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C^k_{13} & C^k_{23} & C^k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^k_{66} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

La soluzione in forma chiusa delle equazioni di equilibrio viene ottenuta per angoli di ortotropia di 0° o 90° poiché attraverso tale ipotesi $C^k_{16} = C^k_{26} = C^k_{36} = C^k_{45} = 0$. La forma esplicita delle equazioni costitutive nel sistema di riferimento strutturale (α, β, z), dopo aver sostituito le relazioni geometriche, diventa:

$$\sigma^k_{\alpha\alpha} = \frac{C^k_{11}}{H_\alpha}u^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{11}}{H_\alpha R_\alpha}w^k + \frac{C^k_{12}}{H_\beta}v^k_{,\beta} + \frac{C^k_{12}}{H_\beta R_\beta}w^k + C^k_{13}w^k_{,z} - \lambda^k_\alpha \theta^k \tag{4.15}$$

$$\sigma^k_{\beta\beta} = \frac{C^k_{12}}{H_\alpha}u^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{12}}{H_\alpha R_\alpha}w^k + \frac{C^k_{22}}{H_\beta}v^k_{,\beta} + \frac{C^k_{22}}{H_\beta R_\beta}w^k + C^k_{23}w^k_{,z} - \lambda^k_\beta \theta^k \tag{4.16}$$

$$\sigma^k_{zz} = \frac{C^k_{13}}{H_\alpha}u^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{13}}{H_\alpha R_\alpha}w^k + \frac{C^k_{23}}{H_\beta}v^k_{,\beta} + \frac{C^k_{23}}{H_\beta R_\beta}w^k + C^k_{33}w^k_{,z} - \lambda^k_z \theta^k \tag{4.17}$$

$$\sigma^k_{\beta z} = \frac{C^k_{44}}{H_\beta}w^k_{,\beta} + C^k_{44}v^k_{,z} - \frac{C^k_{44}}{H_\beta R_\beta}v^k \tag{4.18}$$

$$\sigma^k_{\alpha z} = \frac{C^k_{55}}{H_\alpha}w^k_{,\alpha} + C^k_{55}u^k_{,z} - \frac{C^k_{55}}{H_\alpha R_\alpha}u^k \tag{4.19}$$

$$\sigma^k_{\alpha\beta} = \frac{C^k_{66}}{H_\alpha}v^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{66}}{H_\beta}u^k_{,\beta} \tag{4.20}$$

dove i pedici $,\alpha$, $,\beta$, $,z$ indicano le corrispettive derivate parziali $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. I coefficienti di accoppiamento termo-meccanico λ^k_α, λ^k_β, λ^k_z, definiti nel sistema di riferimento strutturale (α, β, z), sono:

$$\lambda^k_\alpha = C^k_{11}\mu^k_\alpha + C^k_{12}\mu^k_\beta + C^k_{13}\mu^k_z \tag{4.21}$$

$$\lambda^k_\beta = C^k_{12}\mu^k_\alpha + C^n_{22}\mu^k_\beta + C^k_{23}\mu^k_z \tag{4.22}$$

$$\lambda^k_z = C^k_{13}\mu^k_\alpha + C^n_{23}\mu^k_\beta + C^k_{33}\mu^k_z \tag{4.23}$$

Un'ulteriore ipotesi per ottenere la soluzione in forma chiusa delle equazioni di equilibrio consiste nella forma armonica dello spostamento e della temperatura nonché la presenza di condizioni di vincolo *simply-supported*. Le relazioni per gli spostamenti sono le seguenti:

$$u^k(\alpha,\beta,z) = U^k(z)cos(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{4.24}$$

$$v^k(\alpha,\beta,z) = V^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)cos(\bar{\beta}\beta) \tag{4.25}$$

$$w^k(\alpha,\beta,z) = W^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{4.26}$$

I due coefficienti $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ vengono definiti come $\bar{\alpha} = \frac{m\pi}{a}$ e $\bar{\beta} = \frac{n\pi}{b}$ dove a e b sono le dimensioni planari. m e n sono i numeri di semi-onde nelle direzioni α e β. $U^k(z)$, $V^k(z)$ e $W^k(z)$ sono le ampiezze dello spostamento. La forma armonica per il campo di temperatura è:

$$\theta^k(\alpha,\beta,z) = \Theta^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{4.27}$$

dove Θ^k(z) è l'ampiezza della temperatura. L'introduzione delle forme armoniche dello spostamento e della temperatura nelle equazioni costitutive e successivamente nelle equazioni di equilibrio permette di ottenere un set di tre equazioni differenziali in termini delle ampiezze delle componenti di spostamento e della temperatura insieme alle rispettive derivate in z. Le derivate in α e β vengono calcolate in maniera esatta e diventano coefficienti algebrici. Ne deriva un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine in z a coefficienti non costanti a causa di H_α e H_β funzioni di z. Pertanto, ciascun k-esimo strato fisico viene suddiviso in un certo numero di layer matematici. A tal proposito, è definito l'indice j variabile da 1 al numero totale di strati matematici M. A metà di ciascun j-esimo strato matematico i coefficienti H_α e H_β vengono calcolati in maniera esatta. In questa maniera i coefficienti A_s^j (con s da 1 a 19) e i coefficienti J_r^j (con r da 1 a 4) diventano parametri costanti nella forma compatta del sistema di equazioni differenziali in z:

$$A_1^jU^j + A_2^jV^j + A_3^jW^j + A_4^jU^j_{,z} + A_5^jW^j_{,z} + A_6^jU^j_{,zz} + J_1^j\Theta^j = 0 \tag{4.28}$$

$$A_7^jU^j + A_8^jV^j + A_9^jW^j + A_{10}^jV^j_{,z} + A_{11}^jW^j_{,z} + A_{12}^jV^j_{,zz} + J_2^j\Theta^j = 0 \tag{4.29}$$

$$A_{13}^jU^j + A_{14}^jV^j + A_{15}^jW^j + A_{16}^jU^j_{,z} + A_{17}^jV^j_{,z} + A_{18}^jW^j_{,z} + A_{19}^jW^j_{,zz} + J_3^j\Theta^j_{,z} + J_4^j\Theta^j = 0 \tag{4.30}$$

Il disaccoppiamento delle variabili consente di trasformare le equazioni precedenti in un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine nelle ampiezze degli spostamenti U^j, V^j, W^j e nelle loro derivate in z. Tale sistema può essere ridotto al primo ordine infatti l'ordine delle derivate in z può essere abbassato raddoppiando il numero delle variabili per ciascun j-esimo layer da 3 (U^j, V^j, W^j) a 6 (U^j, V^j, W^j, $U^{j'}$, $V^{j'}$, $W^{j'}$). I termini Θ e Θ' risultano noti. L'apice $'$ indica la derivata rispetto a z ($\frac{\partial}{\partial z}$).

$$\begin{bmatrix} A_6^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U^{j'} \\ V^{j'} \\ W^{j'} \end{bmatrix}' =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \\ -A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -A_4^j & 0 & -A_5^j \\ -A_7^j & -A_8^j & -A_9^j & 0 & -A_{10}^j & -A_{11}^j \\ -A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j & -A_{16}^j & -A_{17}^j & -A_{18}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U^{j'} \\ V^{j'} \\ W^{j'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_2^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_4^j & -J_3^j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^j \\ \Theta^{j'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

La precedente equazione matriciale può essere compattata nella forma:

$$\boldsymbol{D}^j\boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{A}^j\boldsymbol{U}^j + \boldsymbol{J}^j\boldsymbol{\Theta}^j \tag{4.32}$$

dove $\boldsymbol{U}^j = [U^j\ V^j\ W^j\ U^{j'}\ V^{j'}\ W^{j'}]^T$, $\boldsymbol{U}^{j'} = \frac{\partial \boldsymbol{U}^j}{\partial z}$, $\boldsymbol{\Theta}^j = [\Theta^j\ \Theta^{j'}\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. T indica il vettore trasposto. Un'ulteriore sviluppo della presente equazione diventa:

$$\boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{D}^{j^{-1}}\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{U}^j + \boldsymbol{D}^{j^{-1}}\boldsymbol{J}^j\boldsymbol{\Theta}^j \tag{4.33}$$

$$\boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{A}^{*^j}\boldsymbol{U}^j + \boldsymbol{J}^{*^j}\boldsymbol{\Theta}^j \tag{4.34}$$

con $\boldsymbol{A}^{*^j} = \boldsymbol{D}^{j^{-1}}\boldsymbol{A}^j$ e $\boldsymbol{J}^{*^j} = \boldsymbol{D}^{j^{-1}}\boldsymbol{J}^j$. L'implementazione della presente soluzione in un codice Matlab risulta semplice quando la temperatura è assunta lineare in ciascun j-esimo layer matematico:

$$\Theta^j(\tilde{z}^j) = a^j_\Theta\tilde{z}^j + b^j_\Theta \tag{4.35}$$

dove a^j_Θ e b^j_Θ sono costanti all'interno di ciascun j-esimo layer matematico. $\tilde{z}^j$ è la coordinata di spessore locale definita entro ogni j-esimo layer matematico e varia tra 0 (bottom del generico strato j-esimo) e h^j (top del generico strato j-esimo) in cui h^j è lo spessore del layer matematico. Ne deriva un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in $\tilde{z}$ o z non-omogenee a causa dei termini associati alla temperatura $\boldsymbol{J}^{*^j}\boldsymbol{\Theta}^j$ funzioni di $\tilde{z}^j$ o z^j.

Un generico set di equazioni differenziali non-omogenee del primo ordine può essere scritto come:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{4.36}$$

dove $\boldsymbol{x}$ è un vettore $M \times 1$, $\boldsymbol{A}$ è una matrice $M \times M$ a coefficienti costanti e $\boldsymbol{f}(t) = [f_1(t) \dots f_M(t)]^T$ è una funzione vettoriale nota. La precedente equazione può essere risolta come:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{f}(s)ds \tag{4.37}$$

Il termine noto nell'equazione (4.34) può essere riscritto in forma esplicita come:

$$\boldsymbol{\Theta}^{*^j} = \boldsymbol{J}^{*^j}\boldsymbol{\Theta}^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J^{*^j}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J^{*^j}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J^{*^j}_4 & -J^{*^j}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^j_\Theta\tilde{z}^j + b^j_\Theta \\ a^j_\Theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -J^{*^j}_1(a^j_\Theta\tilde{z}^j + b^j_\Theta) \\ -J^{*^j}_2(a^j_\Theta\tilde{z}^j + b^j_\Theta) \\ -J^{*^j}_4(a^j_\Theta\tilde{z}^j + b^j_\Theta) - J^{*^j}_3 a^j_\Theta \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

L'equazione (4.34) può essere riscritta nella forma seguente:

$$\boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{A}^{*j}\boldsymbol{U}^{j} + \boldsymbol{\Theta}^{*j} \tag{4.39}$$

con $\boldsymbol{\Theta}^{*j}$ contenente solo funzioni lineari di $\tilde{z}^j$. La soluzione dell'equazione (4.39) diventa:

$$\boldsymbol{U}^{j}(\tilde{z}^j) = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*j}\tilde{z}^j)}\boldsymbol{U}^{j}(0) + \int_0^{\tilde{z}^j} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*j}(\tilde{z}^j - s))}\boldsymbol{\Theta}^{*j}(s)ds \tag{4.40}$$

La precedente equazione può essere utilizzata per calcolare il vettore degli spostamenti al top di ciascun j-esimo layer matematico una volta che i termini $\boldsymbol{A}^{**j} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*j}h^j)}$ e $\boldsymbol{J}^{**j} = \int_0^{h^j} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*j}(h^j - s))}\boldsymbol{\Theta}^{*j}(s)ds$ sono stati valutati per ogni j-esimo layer con spessore h^j. La matrice esponenziale può essere espansa ed è valutata per ogni j-esimo strato matematico come:

$$\boldsymbol{A}^{**j} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*j}h^j)} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{*j}h^j + \frac{\boldsymbol{A}^{*j\,2}}{2!}h^{j\,2} + \frac{\boldsymbol{A}^{*j\,3}}{3!}h^{j\,3} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^{*j\,N}}{N!}h^{j\,N} \tag{4.41}$$

in cui $\boldsymbol{I}$ è la matrice identità 6×6. L'integrale, il quale rappresenta il secondo termine nell'equazione (4.40), viene calcolato per ciascun j-esimo layer di spessore h^j espandendo la matrice esponenziale attraverso la stessa metodologia e il medesimo ordine N mostrati nell'equazione (4.41):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}^{**j} = \int_0^{h^j} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*j}(h^j - s))}\boldsymbol{\Theta}^{*j}(s)ds = \int_0^{h^j} \Big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{*j}(h^j - s) + \frac{\boldsymbol{A}^{*j\,2}}{2!}(h^j - s)^2 + \frac{\boldsymbol{A}^{*j\,3}}{3!}(h^j - s)^3 + \\ \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^{*j\,N}}{N!}(h^j - s)^N\Big)\boldsymbol{\Theta}^{*j}(s)ds\end{aligned} \tag{4.42}$$

Utilizzando le equazioni (4.41) e (4.42), l'equazione (4.40) diventa:

$$\boldsymbol{U}^{j}(h^j) = \boldsymbol{A}^{**j}\boldsymbol{U}^{j}(0) + \boldsymbol{J}^{**j} \tag{4.43}$$

la quale può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{U}^{j}_t = \boldsymbol{A}^{**j}\boldsymbol{U}^{j}_b + \boldsymbol{J}^{**j} \tag{4.44}$$

indicando $\boldsymbol{U}^j(h^j)$ come $\boldsymbol{U}_t^j$ e $\boldsymbol{U}^j(0)$ come $\boldsymbol{U}_b^j$, dove t e b indicano rispettivamente top e bottom del generico j-esimo layer.

L'equazione (4.44) correla gli spostamenti al top e al bottom (insieme alle rispettive derivate in z) all'interno del j-esimo layer matematico. Successivamente occorre introdurre un set di condizioni inter-laminari. Innanzitutto viene imposta la continuità degli spostamenti ad ogni interfaccia:

$$u_b^j = u_t^{j-1}\ ,\ v_b^j = v_t^{j-1}\ ,\ w_b^j = w_t^{j-1} \tag{4.45}$$

Le condizioni espresse nelle precedenti equazioni possono essere riscritte in termini delle ampiezze degli spostamenti U^j, V^j, W^j. Una seconda condizione da soddisfare riguarda la continuità degli stress trasversali normale e di taglio:

$$\sigma_{zz_b}^j = \sigma_{zz_t}^{j-1}\ ,\ \sigma_{\alpha z_b}^j = \sigma_{\alpha z_t}^{j-1}\ ,\ \sigma_{\beta z_b}^j = \sigma_{\beta z_t}^{j-1} \tag{4.46}$$

Nelle equazioni (4.45) e (4.46), per ciascuna variabile, l'equivalenza viene imposta tra il valore al bottom (b) del generico j-esimo layer e il valore al top (t) del $(j-1)$-esimo layer. Introducendo le equazioni costitutive e le forme armoniche degli spostamenti, è possibile ottenere una formulazione agli spostamenti delle equazioni di continuità inter-laminare (4.45) e (4.46). Rispetto al caso classico meccanico, per l'equazione di continuità dello stress normale σ_{zz} occorre considerare un termine termico addizionale (coefficiente T_{11}). La formulazione agli spostamenti delle equazioni di continuità inter-laminare può essere riscritta in forma matriciale compatta introducendo opportune matrici di trasferimento:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_b^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix}^{j-1,j} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_t^{j-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{j-1,j} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Theta' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_t^{j-1} \tag{4.47}$$

La parte diagonale di 1 indica la continuità degli spostamenti nell'equazione (4.45). I coefficienti da T_1 a T_{11} indicano la continuità degli stress nell'equazione (4.46) in termini di spostamento e temperatura (e delle loro derivate in z). Un'ulteriore forma compatta della precedente equazione diventa:

$$\boldsymbol{U}_b^j = \boldsymbol{T}_U^{j-1,j}\boldsymbol{U}_t^{j-1} + \boldsymbol{T}_\Theta^{j-1,j}\boldsymbol{\Theta}_t^{j-1} \tag{4.48}$$

L'equazione (4.48) permette di correlare gli spostamenti e le corrispettive derivate in z calcolate al bottom del j-esimo layer con gli spostamenti e la temperatura (con le derivate in z) valutati al top del $(j-1)$-esimo layer. La struttura multistrato presa in esame viene supposta semplicemente appoggiata e tale condizione è automaticamente soddisfatta dalle forme armoniche di tutte le variabili del problema:

$$w = v = 0,\ \sigma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{per} \quad \alpha = 0,\ a \tag{4.49}$$

$$w = u = 0,\ \sigma_{\beta\beta} = 0 \quad \text{per} \quad \beta = 0,\ b \tag{4.50}$$

Queste condizioni possono essere riscritte nella formulazione agli spostamenti come:

$$\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{U}_t^M = \boldsymbol{P}_t^M = \boldsymbol{0} \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{B}_b^1 \boldsymbol{U}_b^1 = \boldsymbol{P}_b^1 = \boldsymbol{0} \tag{4.52}$$

dove i pedici t e b indicano rispettivamente top e bottom. L'apice M indica l'ultimo layer matematico mentre l'apice 1 indica il primo layer. Il vettore $\boldsymbol{P}$ contiene i carichi meccanici (eventualmente presenti) nelle tre direzioni α, β, z. La matrice $\boldsymbol{B}$ consente l'imposizione dei carichi meccanici sulle superfici esterne della struttura. Per ordinare le equazioni (4.51) e (4.52) in un sistema algebrico in forma matriciale, è conveniente esprimere $\boldsymbol{U}_t^M = \boldsymbol{U}^M(h^M)$ in termini di $\boldsymbol{U}_b^1 = \boldsymbol{U}^1(0)$ (gli spostamenti e le relative derivate in $\tilde{z}$ al top dell'ultimo layer sono collegati agli spostamenti e le relative derivate in $\tilde{z}$ al bottom del primo layer). Tale operazione può essere eseguita introducendo ricorsivamente l'equazione (4.48) nell'equazione (4.44):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_t^M = & \left(\boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_U^{M-1,M} \boldsymbol{A}^{**M-1} \boldsymbol{T}_U^{M-2,M-1} ...... \boldsymbol{A}^{**2} \boldsymbol{T}_U^{1,2} \boldsymbol{A}^{**1} \right) \boldsymbol{U}_b^1 + \\
& \Bigg(\boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_U^{M-1,M} \boldsymbol{A}^{**M-1} ...... \boldsymbol{A}^{**2} \boldsymbol{T}_U^{1,2} \boldsymbol{J}^{**1} + \\
& \boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_U^{M-1,M} \boldsymbol{A}^{**M-1} ...... \boldsymbol{A}^{**3} \boldsymbol{T}_U^{2,3} \boldsymbol{J}^{**2} + \\
& \vdots \\
& \boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_U^{M-1,M} \boldsymbol{J}^{**M-1} + \\
& \boldsymbol{J}^{**M} + \\
& \boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_U^{M-1,M} \boldsymbol{A}^{**M} ...... \boldsymbol{A}^{**2} \boldsymbol{T}_\Theta^{1,2} \boldsymbol{\Theta}_t^1 + \\
& \boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_U^{M-1,M} \boldsymbol{A}^{**M} ...... \boldsymbol{A}^{**3} \boldsymbol{T}_\Theta^{2,3} \boldsymbol{\Theta}_t^2 + \\
& \vdots \\
& \boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_U^{M-1,M} \boldsymbol{A}^{**M-1} \boldsymbol{T}_\Theta^{M-2,M-1} \boldsymbol{\Theta}_t^{M-2} + \\
& \boldsymbol{A}^{**M} \boldsymbol{T}_\Theta^{M-1,M} \boldsymbol{\Theta}_t^{M-1} \Bigg)
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

Il primo blocco dell'equazione (4.53) tra parentesi definisce la matrice 6×6 $\boldsymbol{H}_m$ delle strutture multistrato per l'analisi meccanica pura. Gli M termini che includono $\boldsymbol{J}^{**j}$ (che esplicitamente contiene il profilo termico entro ciascun j-esimo layer matematico) ed i termini $M-1$ che includono $\boldsymbol{\Theta}_t^j$ (che identifica la temperatura a ciascuna interfaccia) vengono aggiunti. La somma di tutte le quantità nel secondo blocco tra parentesi definisce il vettore 6×1 $\boldsymbol{H}_\Theta$:

$$\boldsymbol{U}_t^M = \boldsymbol{H}_m \boldsymbol{U}_b^1 + \boldsymbol{H}_\Theta \tag{4.54}$$

Utilizzando l'equazione (4.54) è possibile riscrivere l'equazione (4.51) in termini di $\boldsymbol{U}_b^1$:

$$\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_m \boldsymbol{U}_b^1 = -\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_\Theta \tag{4.55}$$

Le equazioni (4.55) e (4.52) possono essere compattate come:

$$\boldsymbol{E} \boldsymbol{U}_b^1 = \boldsymbol{P}_\Theta \tag{4.56}$$

dove:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_m \\ \boldsymbol{B}_b^1 \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

$$\boldsymbol{P}_\Theta = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_\Theta \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

La matrice $\boldsymbol{E}$ ha sempre dimensione 6×6 indipendentemente dal numero di layer matematici M e anche nel caso di approccio Layer Wise (LW). Inoltre non varia rispetto al caso puramente meccanico. Il vettore dei carichi $\boldsymbol{P}_\Theta$ contiene esclusivamente carichi termici equivalenti. Ne consegue che il sistema mostrato nell'equazione (4.56) è formalmente identico a quello per il caso puramente meccanico: il campo di temperatura viene convertito in un carico equivalente $\boldsymbol{P}_\Theta$ con dimensione 6×1 (le prime tre righe possono essere diverse da zero). Una volta che gli spostamenti al bottom sono stati calcolati attraverso l'equazione (4.56), le equazioni (4.48) e (4.44) possono essere usate conseguentemente per valutare gli spostamenti (e le relative derivate in z) attraverso l'intero spessore della struttura multistrato.

4.1.2 Modello esatto igro-elastico

Grazie all'analogia esistente tra il fenomeno di trasmissione termica (descritto dalla legge di Fourier) e il fenomeno della diffusione igrometrica (descritto dalla legge di Fick), il modello esatto igro-elastico risulta strutturalmente identico a quello termo-elastico descritto nelle sezione soprastante. Di seguito viene data una descrizione delle sue caratteristiche e del suo funzionamento. La struttura multistrato è soggetta ad un campo di umidità imposto $\mathcal{M}(\alpha, \beta, z)$. Le relazioni geometriche vengono scritte nel sistema di riferimento ortogonale misto curvilineo (α, β, z) e presentano la forma seguente dove ${\varepsilon_{\alpha\alpha}}^k$, ${\varepsilon_{\beta\beta}}^k$, ${\varepsilon_{zz}}^k$, ${\gamma_{\beta z}}^k$, ${\gamma_{\alpha z}}^k$, ${\gamma_{\alpha\beta}}^k$ sono le sei componenti di deformazione per il k-esimo layer fisico e possono essere valutate come somma algebrica delle deformazioni meccaniche (pedice m) e delle deformazioni igrometriche (pedice $\mathcal{M}$). Esse risultano funzioni delle tre componenti di spostamento u^k, v^k, w^k nelle direzioni α, β, z e del contenuto di umidità $\mathcal{M}^k$ attraverso i coefficienti di espansione igrometrica ${\eta_\alpha}^k$, ${\eta_\beta}^k$, ${\eta_z}^k$ nel sistema di riferimento strutturale (α, β, z). Quest'ultimi parametri sono ottenuti a partire dai coefficienti di espansione igrometrica ${\eta_1}^k$, ${\eta_2}^k$, ${\eta_3}^k$ nel sistema di riferimento materiale (1, 2, 3) tramite un'opportuna rotazione.

$$\epsilon^k_{\alpha\alpha} = \epsilon^k_{\alpha\alpha m} - \epsilon^k_{\alpha\alpha\mathcal{M}} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha} - \eta^k_\alpha \mathcal{M}^k \tag{4.59}$$

$$\epsilon^k_{\beta\beta} = \epsilon^k_{\beta\beta m} - \epsilon^k_{\beta\beta\mathcal{M}} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial v^k}{\partial \beta} + \frac{w^k}{H_\beta R_\beta} - \eta^k_\beta \mathcal{M}^k \tag{4.60}$$

$$\epsilon^k_{zz} = \epsilon^k_{zzm} - \epsilon^k_{zz\mathcal{M}} = \frac{\partial w^k}{\partial z} - \eta^k_z \mathcal{M}^k \tag{4.61}$$

$$\gamma^k_{\beta z} = \gamma^k_{\beta zm} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z} - \frac{v^k}{H_\beta R_\beta} \tag{4.62}$$

$$\gamma^k_{\alpha z} = \gamma^k_{\alpha zm} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha} \tag{4.63}$$

$$\gamma^k_{\alpha\beta} = \gamma^k_{\alpha\beta m} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial u^k}{\partial \beta} \tag{4.64}$$

I coefficienti parametrici H_α e H_β possono essere espressi in funzione della coordinata z (variabile da -h/2 a +h/2 con lo zero posizionato sulla superficie media Ω_0) oppure della coordinata $\tilde{z}$ (variabile da 0 ad h rispetto alla superficie inferiore). Nel caso di gusci con raggi di curvatura costanti, tali coefficienti diventano funzioni lineari della coordinata di spessore. Per strutture con una sequenza di laminazione generica e N_L strati fisici, il problema è governato da tre equazioni di equilibrio per ciascun k-esimo strato fisico. Tale formulazione è valida per gusci sferici, gusci cilindrici (in cui uno dei due raggi di curvatura tende ad infinito), cilindri e piastre (in cui entrambi i raggi di curvatura tendono ad infinito).

$$H_\alpha = \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) = \left(1 + \frac{\tilde{z} - h/2}{R_\alpha}\right) \tag{4.65}$$

$$H_\beta = \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) = \left(1 + \frac{\tilde{z} - h/2}{R_\beta}\right) \tag{4.66}$$

$$H_z = 1 \tag{4.67}$$

Il contenuto di umidità (scalare) $\mathcal{M}$ può essere definito in forma adimensionale oppure come percentuale (moltiplicandolo per 100):

$$\mathcal{M} = \frac{W - W_d}{W_d} \times (100) = \frac{W_d + W_c - W_d}{W_d} \times (100) = \frac{W_c}{W_d} \times (100) \tag{4.68}$$

La massa totale del materiale è definita come $W = W_d + W_c$ dove W_c è la massa del contenuto di umidità inclusa all'interno della struttura e W_d è la massa del materiale asciutto (*dry*). La massa del contenuto di umidità inglobata nel materiale può essere definita attraverso l'integrazione sul volume V della concentrazione di umidità c $[kg/m^3]$:

$$W_c = \int_V c\, dV \tag{4.69}$$

La massa del materiale asciutto è ottenuta dall'integrazione sul volume V della densità di massa del materiale asciutto ρ_d $[kg/m^3]$:

$$W_d = \int_V \rho_d\, dV \tag{4.70}$$

Combinando opportunamente le equazioni (4.68)-(4.70) il contenuto di umidità può essere espresso come:

$$\mathcal{M} = \frac{c\,V}{\rho_d\,V} \times (100) = \frac{c}{\rho_d} \times (100) \tag{4.71}$$

dove la concentrazione di umidità c viene espressa in $[kg/m^3]$, il contenuto di umidità $\mathcal{M}$ è adimensionale in quanto viene ottenuto dividendo c per la densità di massa del materiale asciutto ρ_d. Quando il contenuto di umidità $\mathcal{M}$ viene dato in forma non-dimensionale $[-]$, il corrispettivo coefficiente di espansione igrometrica η risulta anch'esso adimensionale $[-]$. Se il contenuto di umidità è espresso in percentuale %, il corrispettivo coefficiente di espansione igrometrica è misurato in $[\frac{1}{\%}]$. La forma compatta matriciale delle equazioni costitutive è:

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \boldsymbol{C}^k \boldsymbol{\epsilon}^k = \boldsymbol{C}^k(\boldsymbol{\epsilon}_m^k - \boldsymbol{\epsilon}_{\mathcal{M}}^k) \tag{4.72}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}^k$ è il vettore degli stress 6×1, $\boldsymbol{C}^k$ è la matrice dei coefficienti elastici 6×6 mentre le deformazioni sono quelle definite in precedenza. Per ottenere una soluzione in forma chiusa del problema gli angoli di ortotropia del materiale devono essere $0°$ o $90°$ affinché $C_{16}^k = C_{26}^k = C_{36}^k = C_{45}^k = 0$. Pertanto, la matrice dei coefficienti elastici nel sistema di riferimento struttura (α, β, z) sotto queste ipotesi è:

$$\boldsymbol{C}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{13}^k & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{23}^k & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{33}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^k \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

La sostituzione delle equazioni geometriche nelle equazioni costitutive conduce al seguente sistema:

$$\sigma^k_{\alpha\alpha} = \frac{C^k_{11}}{H_\alpha}u^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{11}}{H_\alpha R_\alpha}w^k + \frac{C^k_{12}}{H_\beta}v^k_{,\beta} + \frac{C^k_{12}}{H_\beta R_\beta}w^k + C^k_{13}w^k_{,z} - \xi^k_\alpha \mathcal{M}^k \tag{4.74}$$

$$\sigma^k_{\beta\beta} = \frac{C^k_{12}}{H_\alpha}u^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{12}}{H_\alpha R_\alpha}w^k + \frac{C^k_{22}}{H_\beta}v^k_{,\beta} + \frac{C^k_{22}}{H_\beta R_\beta}w^k + C^k_{23}w^k_{,z} - \xi^k_\beta \mathcal{M}^k \tag{4.75}$$

$$\sigma^k_{zz} = \frac{C^k_{13}}{H_\alpha}u^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{13}}{H_\alpha R_\alpha}w^k + \frac{C^k_{23}}{H_\beta}v^k_{,\beta} + \frac{C^k_{23}}{H_\beta R_\beta}w^k + C^k_{33}w^k_{,z} - \xi^k_z \mathcal{M}^k \tag{4.76}$$

$$\sigma^k_{\beta z} = \frac{C^k_{44}}{H_\beta}w^k_{,\beta} + C^k_{44}v^k_{,z} - \frac{C^k_{44}}{H_\beta R_\beta}v^k \tag{4.77}$$

$$\sigma^k_{\alpha z} = \frac{C^k_{55}}{H_\alpha}w^k_{,\alpha} + C^k_{55}u^k_{,z} - \frac{C^k_{55}}{H_\alpha R_\alpha}u^k \tag{4.78}$$

$$\sigma^k_{\alpha\beta} = \frac{C^k_{66}}{H_\alpha}v^k_{,\alpha} + \frac{C^k_{66}}{H_\beta}u^k_{,\beta} \tag{4.79}$$

I pedici $(,\alpha)$, $(,\beta)$, $(,z)$ indicano le derivate parziali $(\frac{\partial}{\partial\alpha})$, $(\frac{\partial}{\partial\beta})$, $(\frac{\partial}{\partial z})$. I coefficienti di accoppiamento igro-meccanico ξ^k_α, ξ^k_β e ξ^k_z nelle equazioni (4.74)-(4.79) sono definiti nel sistema di riferimento strutturale (α, β, z) e hanno la seguente forma:

$$\xi^k_\alpha = C^k_{11}\eta^k_\alpha + C^k_{12}\eta^k_\beta + C^k_{13}\eta^k_z \tag{4.80}$$

$$\xi^k_\beta = C^k_{12}\eta^k_\alpha + C^n_{22}\eta^k_\beta + C^k_{23}\eta^k_z \tag{4.81}$$

$$\xi^k_z = C^k_{13}\eta^k_\alpha + C^n_{23}\eta^k_\beta + C^k_{33}\eta^k_z \tag{4.82}$$

Per una struttura multistrato con N_L strati fisici (indice k) le equazioni di equilibrio 3D sono:

$$H_\beta\frac{\partial\sigma^k_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + H_\alpha\frac{\partial\sigma^k_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + H_\alpha H_\beta\frac{\partial\sigma^k_{\alpha z}}{\partial z} + (\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta})\sigma^k_{\alpha z} = 0 \tag{4.83}$$

$$H_\beta\frac{\partial\sigma^k_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + H_\alpha\frac{\partial\sigma^k_{\beta\beta}}{\partial\beta} + H_\alpha H_\beta\frac{\partial\sigma^k_{\beta z}}{\partial z} + (\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha})\sigma^k_{\beta z} = 0 \tag{4.84}$$

$$H_\beta\frac{\partial\sigma^k_{\alpha z}}{\partial\alpha} + H_\alpha\frac{\partial\sigma^k_{\beta z}}{\partial\beta} + H_\alpha H_\beta\frac{\partial\sigma^k_{zz}}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha}\sigma^k_{\alpha\alpha} - \frac{H_\alpha}{R_\beta}\sigma^k_{\beta\beta} + (\frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta})\sigma^k_{zz} = 0 \tag{4.85}$$

Le equazioni (4.83)-(4.85) sono scritte per gusci sferici con raggi di curvatura costanti ma risultano valide anche per cilindri e pannelli cilindrici (in cui uno dei due raggi di curvatura tende ad infinito) nonché per piastre (in cui entrambi i raggi di curvatura tendono ad infinito). L'ipotesi principale per ottenere una soluzione in forma chiusa delle equazioni (4.83)-(4.85) riguarda il vincolo di semplice appoggio e la forma armonica delle componenti di spostamento e del profilo igrometrico.

$$u^k(\alpha,\beta,z) = U^k(z)cos(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{4.86}$$
$$v^k(\alpha,\beta,z) = V^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)cos(\bar{\beta}\beta) \tag{4.87}$$
$$w^k(\alpha,\beta,z) = W^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{4.88}$$
$$\mathcal{M}^k(\alpha,\beta,z) = M^k(z)sin(\bar{\alpha}\alpha)sin(\bar{\beta}\beta) \tag{4.89}$$

I termini $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sono calcolati come $\bar{\alpha} = \frac{m\pi}{a}$ e $\bar{\beta} = \frac{n\pi}{b}$ dove a e b sono le dimensioni planari della struttura riferiti al piano medio Ω_0. m e n sono i numeri di semi-onde nelle direzioni planari. $U^k(z)$, $V^k(z)$, $W^k(z)$ sono le ampiezze delle componenti di spostamento mentre $M^k(z)$ è l'ampiezza del profilo igrometrico. Le forme armoniche degli spostamenti e del profilo di umidità, insieme alle equazioni costitutive opportunamente riscritte, vengono sostituite nelle equazioni di equilibrio 3D:

$$A_1^jU^j + A_2^jV^j + A_3^jW^j + A_4^jU_{,z}^j + A_5^jW_{,z}^j + A_6^jU_{,zz}^j + L_1^jM^j = 0 \tag{4.90}$$
$$A_7^jU^j + A_8^jV^j + A_9^jW^j + A_{10}^jV_{,z}^j + A_{11}^jW_{,z}^j + A_{12}^jV_{,zz}^j + L_2^jM^j = 0 \tag{4.91}$$
$$A_{13}^jU^j + A_{14}^jV^j + A_{15}^jW^j + A_{16}^jU_{,z}^j + A_{17}^jV_{,z}^j + A_{18}^jW_{,z}^j + A_{19}^jW_{,zz}^j + L_3^jM_{,z}^j + L_4^jM^j = 0 \tag{4.92}$$

Le equazioni (4.83)-(4.85)) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine in z. I termini coinvolti sono le ampiezze degli spostamenti e del profilo igrometrico insieme alle corrispettive derivate rispetto a z. Le derivate parziali rispetto alle coordinate α e β sono calcolate in maniera esatta grazie all'utilizzo delle forme armoniche. Le presenti equazioni hanno coefficienti non costanti a causa di H_α e H_β dipendenti da z. Ciascun k-esimo strato fisico della struttura viene suddiviso in un numero opportuno di layer matematici definiti dall'indice j (variabile da 1 al numero totale dei layer matematici M). In ciascun j-esimo layer matematico i coefficienti H_α e H_β possono essere calcolati esattamente attraverso la coordinata z a metà di ciascuno strato. In questa maniera i coefficienti A_s^j (con s da 1 a 19) e L_r^j (con r da 1 a 4) diventano termini costanti nel sistema compatto di equazioni differenziali in z. Nelle equazioni (4.90)-(4.92) le incognite possono essere raddoppiate. Il profilo igrometrico lungo lo spessore viene calcolato separatamente e diviene un termine noto pertanto il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine viene scritto nelle ampiezze degli spostamenti U^j, V^j, W^j e nelle rispettive derivate in z. Raddoppiando il numero delle variabili, il sistema di equazioni differenziali in z risulta del primo ordine infatti, per ciascun j-esimo layer matematico, le variabili passano da 3 (U^j, V^j, W^j) a 6 (U^j, V^j, W^j, $U^{j'}$, $V^{j'}$, $W^{j'}$) dove l'apice $'$ indica la derivata parziale rispetto a z ($\frac{\partial}{\partial z}$). I termini M e M' sono noti in quanto calcolabili direttamente.

$$
\begin{bmatrix}
A_6^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & A_{12}^j & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & A_{19}^j & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U^j\\ V^j\\ W^j\\ U^{j'}\\ V^{j'}\\ W^{j'} \end{bmatrix}^{'} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j\\
-A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -A_4^j & 0 & -A_5^j\\
-A_7^j & -A_8^j & -A_9^j & 0 & -A_{10}^j & -A_{11}^j\\
-A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j & -A_{16}^j & -A_{17}^j & -A_{18}^j
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U^j\\ V^j\\ W^j\\ U^{j'}\\ V^{j'}\\ W^{j'} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-L_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-L_2^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-L_4^j & -L_3^j & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} M^j\\ M^{j'}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}
\tag{4.93}
$$

Una forma compatta della precedente equazione è:

$$\boldsymbol{D}^j \boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{A}^j \boldsymbol{U}^j + \boldsymbol{L}^j \boldsymbol{M}^j \tag{4.94}$$

dove la forma esplicita dei vari vettori è: $\boldsymbol{U}^j = [U^j \ V^j \ W^j \ U^{j'} \ V^{j'} \ W^{j'}]^T$, $\boldsymbol{U}^{j'} = \frac{\partial \boldsymbol{U}^j}{\partial z}$, $\boldsymbol{M}^j = [M^j \ M^{j'} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. T indica il vettore trasposto. L'equazione (4.94) può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{D}^{j^{-1}} \boldsymbol{A}^j \boldsymbol{U}^j + \boldsymbol{D}^{j^{-1}} \boldsymbol{L}^j \boldsymbol{M}^j \tag{4.95}$$

$$\boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{A}^{*^j} \boldsymbol{U}^j + \boldsymbol{L}^{*^j} \boldsymbol{M}^j \tag{4.96}$$

dove $\boldsymbol{A}^{*^j} = \boldsymbol{D}^{j^{-1}} \boldsymbol{A}^j$ e $\boldsymbol{L}^{*^j} = \boldsymbol{D}^{j^{-1}} \boldsymbol{L}^j$. Dopo il calcolo del profilo igrometrico (assunto lineare a priori, calcolato con l'equazione 1D di Fourier, calcolato con l'equazione 3D di Fourier) l'andamento effettivo viene ricostruito attraverso l'approssimazione lineare del contenuto di umidità in ciascun j-esimo layer matematico. Tale approssimazione viene scritta come:

$$M^j(\tilde{z}^j) = a_M^j \tilde{z}^j + b_M^j \tag{4.97}$$

dove a_M^j e b_M^j sono due termini costanti calcolati in ogni j-esimo layer. La coordinata locale di spessore $\tilde{z}^j$ viene opportunamente definita e calcolata per ogni j-esimo layer.

Essa va da 0 (al bottom del generico j-esimo layer) allo spessore h^j del medesimo layer. L'equazione (4.96) è un sistema di equazione differenziali del primo ordine in $\tilde{z}$ o z; esse sono non-omogenee a causa del termine igroscopico $\boldsymbol{L}^{*^j}\boldsymbol{M}^j$ dipendente da $\tilde{z}^j$ o z^j. Il metodo della matrice esponenziale viene applicato ad un generico sistema di equazioni differenziali non-omogenee del primo ordine secondo i seguenti step:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{4.98}$$

dove $\boldsymbol{x}$ è un vettore $M \times 1$, $\boldsymbol{A}$ è una matrice con coefficienti costanti di dimensione $M \times M$ e $\boldsymbol{f}(t) = [f_1(t) \ldots f_G(t)]^T$ è una funzione vettoriale nota. Una soluzione dell'equazione (4.98) è:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{f}(s)ds \tag{4.99}$$

Una forma esplicita matriciale del termine noto in (4.96) è:

$$\boldsymbol{M}^{*^j} = \boldsymbol{L}^{*^j}\boldsymbol{M}^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1^{*^j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_2^{*^j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_4^{*^j} & -L_3^{*^j} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_M^j \tilde{z}^j + b_M^j \\ a_M^j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -L_1^{*^j}(a_M^j \tilde{z}^j + b_M^j) \\ -L_2^{*^j}(a_M^j \tilde{z}^j + b_M^j) \\ -L_4^{*^j}(a_M^j \tilde{z}^j + b_M^j) - L_3^{*^j} a_M^j \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

Utilizzando il termine noto $\boldsymbol{M}^{*^j}$, l'equazione (4.96) può essere scritta come:

$$\boldsymbol{U}^{j'} = \boldsymbol{A}^{*^j}\boldsymbol{U}^j + \boldsymbol{M}^{*^j} \tag{4.101}$$

in cui $\boldsymbol{M}^{*^j}$ contiene solo funzioni lineari note in $\tilde{z}^j$. Pertanto, l'equazione (4.101) può essere risolta come:

$$\boldsymbol{U}^j(\tilde{z}^j) = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*^j}\tilde{z}^j)}\boldsymbol{U}^j(0) + \int_0^{\tilde{z}^j} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*^j}(\tilde{z}^j - s))}\boldsymbol{M}^{*^j}(s)ds \tag{4.102}$$

I termini $\boldsymbol{A}^{**^j} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*^j}h^j)}$ e $\boldsymbol{L}^{**^j} = \int_0^{h^j} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*^j}(h^j - s))}\boldsymbol{M}^{*^j}(s)ds$ devono essere calcolati in ogni j-esimo layer con spessore h^j per definire il vettore degli spostamenti al top dello stesso.

Di conseguenza la matrice esponenziale deve essere opportunamente espansa e valutata in ciascun j-esimo layer:

$$\boldsymbol{A}^{**^j} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*^j} h^j)} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{*^j} h^j + \frac{\boldsymbol{A}^{*^j\,2}}{2!} h^{j\,2} + \frac{\boldsymbol{A}^{*^j\,3}}{3!} h^{j\,3} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^{*^j\,N}}{N!} h^{j\,N} \tag{4.103}$$

dove $\boldsymbol{I}$ è la matrice identità 6×6. L'integrale in (4.102) può essere valutato in ciascun j-esimo layer con spessore h^j espandendo la matrice esponenziale con la stessa metodologia e lo stesso ordine N dell'equazione (4.103):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{**^j} = \int_0^{h^j} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}^{*^j}(h^j - s))} \boldsymbol{M}^{*^j}(s) ds = \int_0^{h^j} \Big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{*^j}(h^j - s) + \frac{\boldsymbol{A}^{*^j\,2}}{2!}(h^j - s)^2 + \frac{\boldsymbol{A}^{*^j\,3}}{3!}(h^j - s)^3 + \\ \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^{*^j\,N}}{N!}(h^j - s)^N \Big) \boldsymbol{M}^{*^j}(s) ds\end{aligned} \tag{4.104}$$

La definizione delle equazioni (4.103) e (4.104) modifica la (4.102) come:

$$\boldsymbol{U}^j(h^j) = \boldsymbol{A}^{**^j} \boldsymbol{U}^j(0) + \boldsymbol{L}^{**^j} \tag{4.105}$$

in cui $\boldsymbol{U}_t^j$ indica $\boldsymbol{U}^j(h^j)$ e $\boldsymbol{U}_b^j$ indica $\boldsymbol{U}^j(0)$ (t e b denotano top e bottom di ogni j-esimo layer). L'equazione (4.105) può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{U}_t^j = \boldsymbol{A}^{**^j} \boldsymbol{U}_b^j + \boldsymbol{L}^{**^j} \tag{4.106}$$

L'equazione (4.106) consente di correlare gli spostamenti e le rispettive derivate in z definiti al top del j-esimo layer matematico con gli spostamenti e le rispettive derivate al bottom dello stesso j-esimo layer. Il modello 3D proposto si basa su un approccio Layer Wise (LW) pertanto devono essere imposte condizioni di continuità inter-laminare in termini di spostamenti e stress trasversali all'interfaccia tra il $(j-1)$-esimo e il j-esimo layer. La condizione di continuità inter-laminare per gli spostamenti è:

$$u_b^j = u_t^{j-1}\,,\; v_b^j = v_t^{j-1}\,,\; w_b^j = w_t^{j-1} \tag{4.107}$$

La condizione di continuità inter-laminare per gli stress trasversali normale e di taglio è:

$$\sigma_{zz_b}^j = \sigma_{zz_t}^{j-1}\,,\; \sigma_{\alpha z_b}^j = \sigma_{\alpha z_t}^{j-1}\,,\; \sigma_{\beta z_b}^j = \sigma_{\beta z_t}^{j-1} \tag{4.108}$$

Le equazioni (4.107) e (4.108) possono essere opportunamente riscritte nella formulazione agli spostamenti utilizzando le equazioni costitutive e la forma armonica per gli spostamenti e il contenuto di umidità. La metodologia è la medesima per l'analisi puramente elastica però, nel caso igro-elastico, l'equazione di continuità per la tensione normale σ_{zz} presenta un termine addizionale igroscopico (associato al coefficiente T_{11}). Le formulazioni agli spostamenti delle equazioni (4.107) e (4.108), riscritte in forma matriciale compatta, presentano due matrici di trasferimento:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_b^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix}^{j-1,j} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_t^{j-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{j-1,j} \begin{bmatrix} M \\ M' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_t^{j-1} \tag{4.109}$$

La porzione che include la diagonale di 1 rappresenta la continuità degli spostamenti nell'equazione (4.107). I termini da T_1 a T_{11} rappresentano la continuità degli stress nell'equazione (4.108) in termini degli spostamenti e del contenuto di umidità nonché delle rispettive derivate in z. L'equazione (4.109) può essere compattata come:

$$\boldsymbol{U}_b^j = \boldsymbol{T}_U^{j-1,j} \boldsymbol{U}_t^{j-1} + \boldsymbol{T}_M^{j-1,j} \boldsymbol{M}_t^{j-1} \tag{4.110}$$

Gli spostamenti e le rispettive derivate in z definite al bottom del j-esimo layer sono correlate agli spostamenti e al contenuto di umidità (insieme alle rispettive derivate in z) calcolate al top del $(j-1)$-esimo layer mediante l'equazione (4.110). La struttura multistrato in esame è semplicemente appoggiata ovvero:

$$w = v = 0,\ \sigma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{per} \quad \alpha = 0,\ a \tag{4.111}$$

$$w = u = 0,\ \sigma_{\beta\beta} = 0 \quad \text{per} \quad \beta = 0,\ b \tag{4.112}$$

Le condizioni soprastanti sono automaticamente soddisfatte mediante le forme armoniche di tutte le variabili del problema. Se le superfici esterne della struttura non vengono sollecitate, ovvero non vengono applicati carichi meccanici, $\sigma_{\alpha z} = \sigma_{\beta z} = \sigma_{zz} = 0$. Tali condizioni possono essere espresse in termini di spostamento come:

$$\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{U}^M M_t = \boldsymbol{P}_t^M = \boldsymbol{0} \tag{4.113}$$

$$\boldsymbol{B}_b^1 \boldsymbol{U}_b^1 = \boldsymbol{P}_b^1 = \boldsymbol{0} \tag{4.114}$$

dove t e b indicano rispettivamente top e bottom della struttura. L'apice M indica l'ultimo layer matematico mentre l'apice 1 indica il primo layer. Il vettore $\boldsymbol{P} = (P_\alpha\, P_\beta\, P_z)^T$ contiene gli eventuali carichi meccanici nelle tre direzioni α, β, z. La matrice $\boldsymbol{B}$ consente l'imposizione dei carichi meccanici sulle superfici esterne della struttura. $\boldsymbol{U}_t^M = \boldsymbol{U}^M(h^M)$ può essere scritta in relazione con $\boldsymbol{U}_b^1 = \boldsymbol{U}^1(0)$ per ottenere una forma matriciale del sistema algebrico delle equazioni (4.113) e (4.114). Ciò significa che gli spostamenti e le rispettive derivate in $\tilde{z}$, calcolate al top dell'ultimo layer, sono correlati agli spostamenti con le rispettive derivate in $\tilde{z}$ al bottom del primo layer. Tale condizione viene ottenuta sostituendo ricorsivamente l'equazione (4.110) nella (4.106):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_t^M = & \left(\boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_U^{M-1,M}\boldsymbol{A}^{**M-1}\boldsymbol{T}_U^{M-2,M-1}\ldots\ldots\,\boldsymbol{A}^{**2}\boldsymbol{T}_U^{1,2}\boldsymbol{A}^{**1}\right)\boldsymbol{U}_b^1 + \\
& \Big(\boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_U^{M-1,M}\boldsymbol{A}^{**M-1}\ldots\ldots\,\boldsymbol{A}^{**2}\boldsymbol{T}_U^{1,2}\boldsymbol{L}^{**1} + \\
& \boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_U^{M-1,M}\boldsymbol{A}^{**M-1}\ldots\ldots\,\boldsymbol{A}^{**3}\boldsymbol{T}_U^{2,3}\boldsymbol{L}^{**2} + \\
& \vdots \\
& \boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_U^{M-1,M}\boldsymbol{L}^{**M-1} + \\
& \boldsymbol{L}^{**M} + \\
& \boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_U^{M-1,M}\boldsymbol{A}^{**M}\ldots\ldots\,\boldsymbol{A}^{**2}\boldsymbol{T}_M^{1,2}\boldsymbol{M}_t^1 + \\
& \boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_U^{M-1,M}\boldsymbol{A}^{**M}\ldots\ldots\,\boldsymbol{A}^{**3}\boldsymbol{T}_M^{2,3}\boldsymbol{M}_t^2 + \\
& \vdots \\
& \boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_U^{M-1,M}\boldsymbol{A}^{**M-1}\boldsymbol{T}_M^{M-2,M-1}\boldsymbol{M}_t^{M-2} + \\
& \boldsymbol{A}^{**M}\boldsymbol{T}_M^{M-1,M}\boldsymbol{M}_t^{M-1}\Big)
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

Il primo blocco dell'equazione (4.115) tra parentesi è la matrice 6×6 $\boldsymbol{H}_m$ per l'analisi classica elastica. Nel caso dell'analisi igro-elastica gli M termini includono $\boldsymbol{L}^{**j}$ mentre gli $M-1$ termini includono $\boldsymbol{M}_t^j$. I primi considerano il profilo igrotermico per ciascun j-esimo layer matematico, i secondi definiscono il contenuto di umidità ad ogni interfaccia. La somma di tutti i termini è raccolta tra parentesi nel secondo blocco e definisce il vettore 6×1 $\boldsymbol{H}_M$:

$$\boldsymbol{U}_t^M = \boldsymbol{H}_m \boldsymbol{U}_b^1 + \boldsymbol{H}_M \tag{4.116}$$

L'equazione (4.113) può essere definita in termini di $\boldsymbol{U}_b^1$ mediante la sostituzione della (4.116):

$$\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_m \boldsymbol{U}_b^1 = -\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_M \tag{4.117}$$

Le equazioni (4.117) e (4.114) vengono raccolte in:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{U}_b^1 = \boldsymbol{P}_M \tag{4.118}$$

dove:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_m \\ \boldsymbol{B}_b^1 \end{bmatrix} \tag{4.119}$$

$$\boldsymbol{P}_M = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{B}_t^M \boldsymbol{H}_M \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{4.120}$$

Il metodo descritto utilizza un approccio Layer Wise (LW): sebbene venga impiegato un numero elevato di strati matematici M, la matrice $\boldsymbol{E}$ ha sempre dimensioni 6×6 ed è la stessa ottenuta per il caso elastico puro. La differenza rispetto a quest'ultimo è l'aggiunta del vettore $\boldsymbol{P}_M$ che include i carichi igroscopici equivalenti. Il sistema finale in (4.118) formalmente non cambia rispetto al caso elastico eccetto per il campo di umidità lungo lo spessore il quale viene convertito nel carico equivalente $\boldsymbol{P}_M$ con dimensione 6×1. Gli spostamenti al bottom, con le relative derivate in z, sono ottenuti dalla (4.118). In generale le componenti di spostamento, insieme alle derivate in z, vengono ricavate ad ogni coordinata di spessore lungo la direzione z della struttura multistrato attraverso le equazioni (4.110) e (4.106).

4.2 Modello 3D FEM numerico

4.2.1 Componenti del modello

In questa sezione viene descritto il modello 3D numerico, basato sulla metodologia FEM (Finite Element Method), generato ed implementato in ambiente Patran-Nastran per l'analisi igro-termo-elastica di piastre in materiale composito/sandwich tradizionale nonché in FGM. La caratteristica principale di tale modello riguarda l'approccio *parametrico* con il quale è stato realizzato. Nello specifico sono stati utilizzati differenti file sessione (.ses), ognuno dei quali presenta al suo interno la definizione parametrizzata dei valori in input necessari all'analisi. Tali parametri, definiti a priori, interessano la costruzione della geometria del modello, la caratterizzazione dei materiali e delle proprietà, l'applicazione dei carichi meccanici e/o termici-igrometrici, l'inserimento delle condizioni di vincolo e, infine, la discretizzazione agli elementi finiti con la realizzazione della mesh. Questo approccio ha consentito di ottimizzare e velocizzare i differenti cicli di analisi modificando ogni volta, con estrema facilità ed immediatezza, i valori in ingresso associati al modello oggetto di studio. Inoltre, i file sessione sono stati suddivisi in due tipologie: quelli destinati all'analisi termica o igrometrica delle piastre e quelli finalizzati all'analisi meccanica una volta ottenuti i risultati della precedente. Di seguito vengono descritti i principali aspetti d'interesse riguardanti il modello numerico 3D:

Sistema di riferimento

Il sistema di riferimento adottato è identico a quello descritto per il modello 3D analitico con l'eccezione che risulta collocato sulla faccia inferiore della struttura multistrato anziché sulla superficie mediana. Occorre precisare che i risultati riportati nel seguito del presente studio sono riferiti a questo sistema di riferimento.

Geometria

La geometria delle diverse piastre è stata creata ex novo in ambiente Patran secondo l'approccio parametrico sopracitato. Trattandosi di piastre monostrato, pluristrato e sandwich innanzitutto sono state definite le dimensioni geometriche corrispondenti a larghezza, lunghezza e spessore (con un'ulteriore distinzione tra spessore del core e spessore dello skin nel caso del sandwich) e successivamente è stato generato il modello solido in funzione di tali grandezze. In questa maniera, agendo direttamente sui parametri geometrici dichiarati all'inizio dei vari file sessione, è stato possibile modellizzare piastre con rapporti *dimensioni planari/spessore* differenti ricorrendo sempre alla medesima lista di comandi senza intervenire direttamente dall'interfaccia all'interno del software. Siccome l'obiettivo dello studio è stato la valutazione del comportamento igro-termo-meccanico di piastre al variare del loro spessore, da spesse a sottili, la creazione della geometria per via parametrica ha agevolato e snellito notevolmente la procedura. Un'ulteriore semplificazione è stata possibile attraverso la creazione di *gruppi* al fine di isolare ed evidenziare singole parti della geometria complessiva (ad esempio il core oppure le facce esterne nel caso della piastra sandwich).

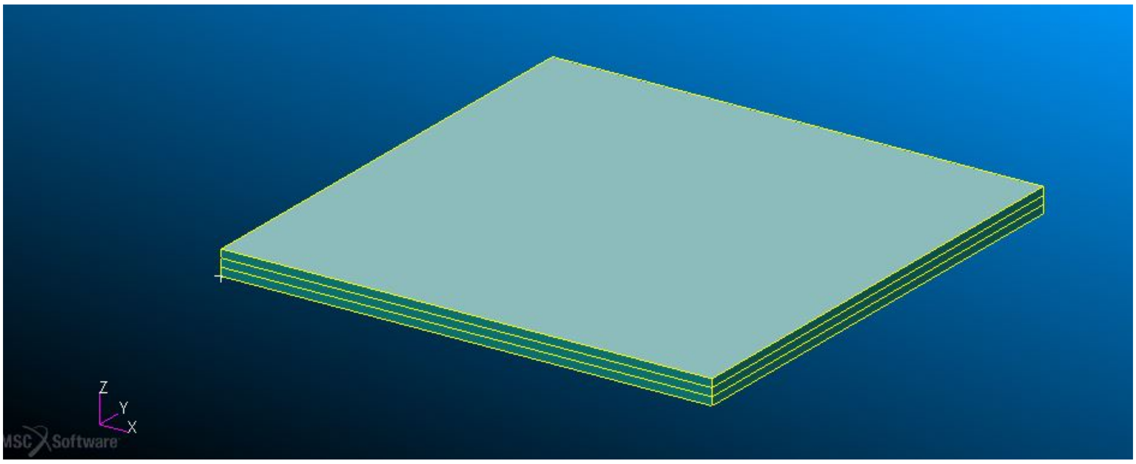

Figura 4.1. Esempio di geometria realizzata in ambiente Patran (piastra multistrato)

Materiale

La definizione delle caratteristiche del materiale è avvenuta per via *parametrica*. Per quanto concerne l'analisi termica sono stati inseriti due parametri essenziali ovvero il coefficiente di espansione termica μ [1/K] e il coefficiente di conducibilità termica k [W/mK]. Grazie all'analogia tra la legge di Fourier per la conduzione e la legge di Fick per la diffusione, l'analisi igrometrica è stata condotta analogamente a quella termica sostituendo i parametri precedenti rispettivamente con il coefficiente di espansione igrometrica η [1/%] e il coefficiente di diffusione D [kg/ms]. Invece, dal punto di vista meccanico, sono stati definiti i seguenti valori caratteristici del materiale in esame: modulo di Young E [GPa], coefficiente di Poisson ν [/], modulo elastico a taglio G [GPa]. La scelta delle unità di misura risulta coerente con quella delle altre grandezze in gioco e con quelle associate alla geometria del modello [mm]. In base alla tipologia di piastra analizzata, si è fatto ricorso sia alla definizione di materiale isotropo sia a quella di ortotropo 3D.

Proprietà

La definizione delle proprietà è avvenuta in maniera parametrizzata. Nello specifico, sono state utilizzate proprietà solide 3D attribuite direttamente alla geometria, anch'essa solida, nel caso delle piastre composite e sandwich (sono state assegnate ad ogni layer fisico presente nella struttura multistrato). Nel caso delle piastre in FGM l'attribuzione delle proprietà è stata successiva alla creazione della mesh poiché ciascuna di esse è stata assegnata ad uno strato non-fisico di elementi finiti solidi tridimensionali al fine di riprodurre il metodo adottato nell'approccio analitico, descritto in precedenza, il quale prevede la definizione di strati matematici utili per descrivere l'andamento variabile delle proprietà del materiale lungo la coordinata di spessore.

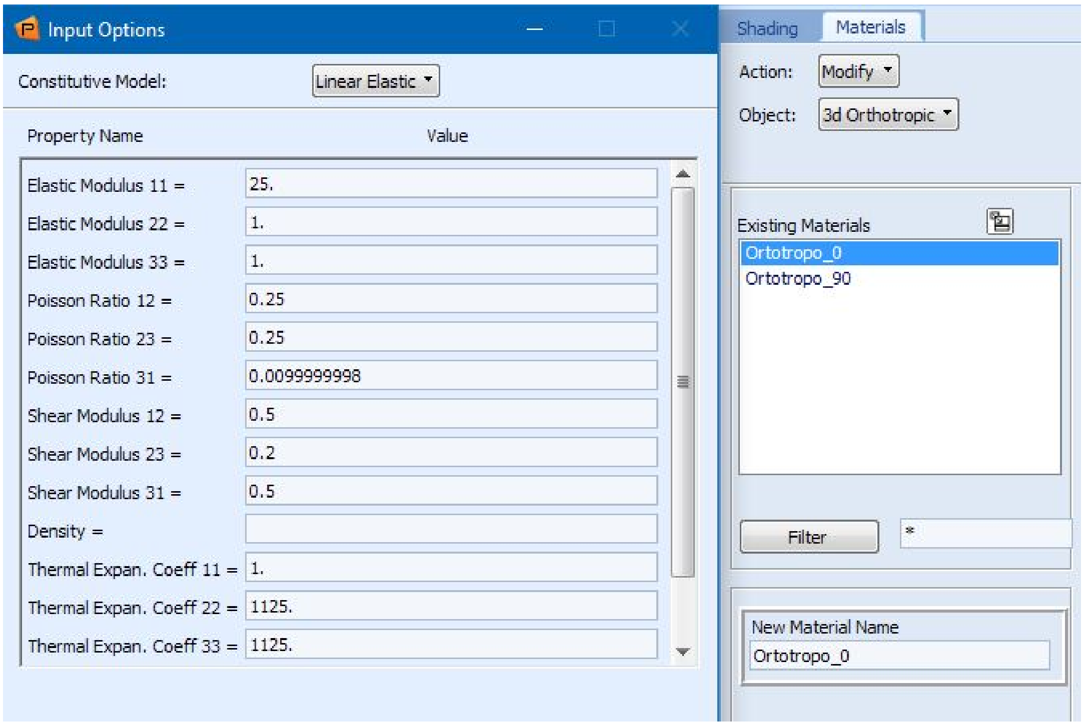

Figura 4.2. Esempio di materiale caratterizzato in ambiente Patran (ortotropo 3D)

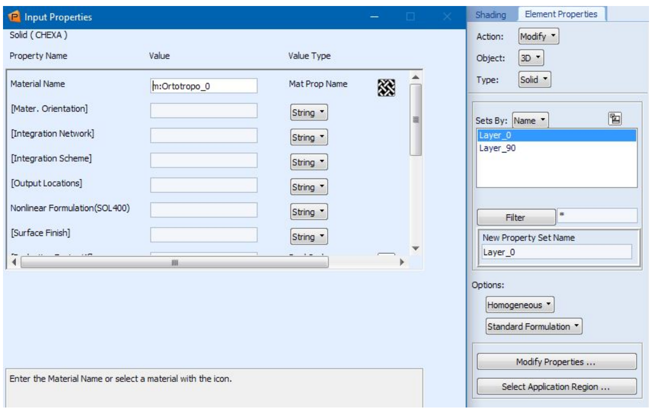

Figura 4.3. Esempio di proprietà definita in ambiente Patran (solida 3D)

Vincoli

I vincoli sono stati inseriti riferendosi alla parametrizzazione della geometria e consistono nel semplice appoggio (*simply-supported*) sui quattro lati della piastra.

Carichi

I carichi sono stati inseriti in maniera parametrizzata sia nelle analisi meccaniche sia nelle analisi termiche e igrometriche. Nel primo caso, qualora presente, è stato definito un carico meccanico di compressione sulla faccia superiore della piastra il cui valore è stato parametrizzato all'inizio del file sessione nell'ottica di facilitare eventuali modifiche successive. Nel secondo caso sono stati applicati dei carichi termici e igrometrici definendo le ampiezze dei profili di temperatura [K] e di contenuto igrometrico [%] presenti sulle facce superiore ed inferiore della piastra. Anche questi valori sono stati introdotti a monte dell'analisi in maniera da modificarli con immediatezza se necessario. Tutti i carichi, data la loro natura bi-sinusoidale, sono stati applicati attraverso la definizione di un *field* scalare ovvero un campo di valori (corrispondenti alle diverse temperature/percentuali di umidità) assegnati a ciascun nodo della mesh mediante l'importazione in ambiente Patran di un file .csv contenente l'ID nodale associato al corrispettivo valore di temperatura/umidità. Ne consegue che l'inserimento dei carichi è avvenuto soltanto dopo la realizzazione della mesh sul modello.

Mesh

La mesh dell'intero modello è stata realizzata a partire dal *mesh seed* sulle curve e superfici della geometria. Quest'ultimo risulta parametrizzato ovvero è stato definito il numero di elementi finiti da generare sia lungo lo spessore sia lungo le dimensioni planari a monte dell'analisi in maniera tale da rendere possibile eventuali modifiche della mesh stessa (necessaria, ad esempio, per infittirla gradualmente nell'analisi di convergenza). Nello specifico sono stati utilizzati elementi finiti solidi 3D (Hex8) per generare una *IsoMesh* sulla geometria di partenza.

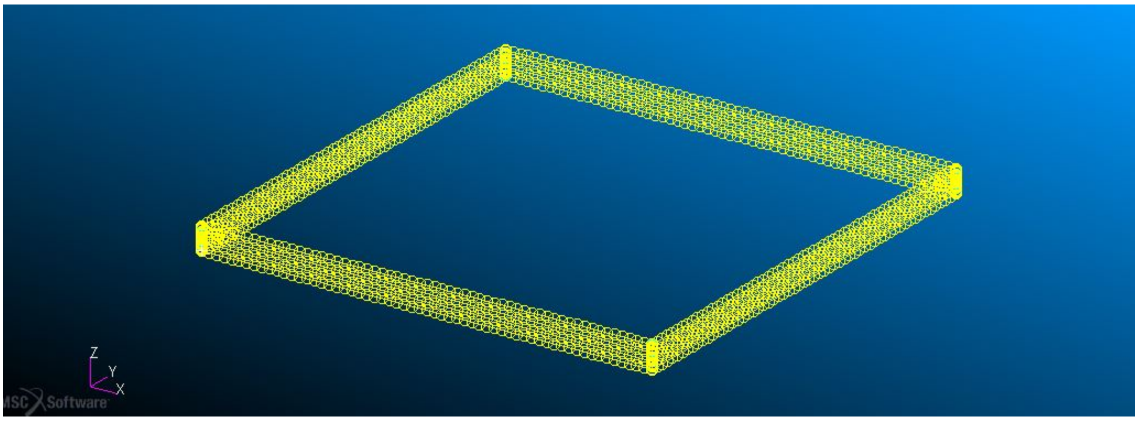

Figura 4.4. Esempio di mesh-seed realizzata in ambiente Patran (piastra multistrato)

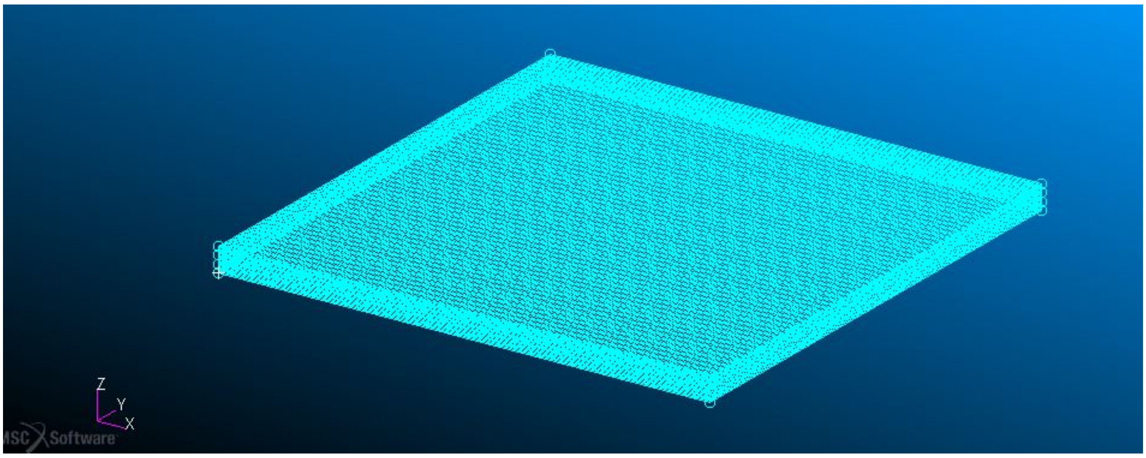

Figura 4.5. Esempio di mesh realizzata in ambiente Patran (IsoMesh Hex8)

4.2.2 Procedura di analisi

Attraverso l'impiego del modello FEM 3D precedentemente descritto sono state condotte sia analisi di natura meccanica sia analisi di natura termica e igrometrica su diverse configurazioni di piastra. Tali analisi risultano strettamente connesse tra loro in quanto gli output dello studio termico o igrometrico diventano gli input per la successiva analisi meccanica. Operativamente è stata seguita la seguente procedura:

1. Viene caricato il file sessione (.ses) corrispondente all'analisi termica o igrometrica (SOL 153) che deve essere effettuata sulla piastra in esame. In base alle caratteristiche geometriche e alle proprietà dei materiali, vengono modificati manualmente i valori dei parametri d'ingresso presenti nella sezione iniziale del file sessione. Avviando il file sessione, in automatico è costruita la geometria del modello, vengono assegnati i materiali e le proprietà, viene realizzata la mesh e, infine, vengono applicate le condizioni di vincolo nonché i carichi agenti (entrambi nodali).

2. Una volta effettuata l'analisi termica/igrometrica, i risultati vengono caricati su Patran e si realizza un report contenente l'identificativo di ciascun nodo della mesh con il relativo carico termico/igrometrico associato derivante dal profilo di temperatura/umidità presente sulle facce della piastra.

3. Il report viene convertito in ambiente Excel in un file .csv, contenente sempre le coppie *ID nodo - temperatura/umidità*, affinché possa essere processato in ambiente Patran-Nastran.

4. Viene caricato il file sessione (.ses) corrispondente all'analisi meccanica (SOL 101) che deve essere effettuata sulla medesima configurazione di piastra in esame. In base alle caratteristiche geometriche e alle proprietà dei materiali, vengono modificati manualmente i valori dei parametri d'ingresso presenti nella sezione iniziale del

file sessione. Avviando quest'ultimo, in automatico è costruita la geometria del modello, vengono assegnati i materiali e le proprietà, viene realizzata la mesh e vengono applicate le condizioni di vincolo.

5. Vengono inseriti i carichi necessari per l'analisi meccanica sulla piastra ovvero viene caricato su Patran il file .csv descritto in precedenza e corrispondente all'output dell'analisi termica o igrometrica inizialmente condotta.

6. Una volta effettuata l'analisi meccanica, i risultati vengono caricati su Patran e si ottengono le componenti di spostamento e tensione derivanti dalla sollecitazione termica o igrometrica presente sulla piastra.

4.2.3 Procedura di analisi per gli FGM

Per quanto concerne l'analisi igro-termo-elastica delle piastre in FGM la procedura operativa che è stata seguita risulta identica a quella descritta in precedenza eccetto per un aspetto fondamentale che viene evidenziato in questa sezione. Nel caso dei compositi e sandwich tradizionali le proprietà solide 3D sono state assegnate direttamente alla geometria, in corrispondenza dei vari strati fisici del materiale secondo differenti schemi di laminazione, e risultano costanti all'interno di ciascuno strato. Per le piastre in FGM tale approccio non è stato possibile a causa dell'andamento variabile lungo lo spessore delle proprietà igro-termo-meccaniche del materiale: di conseguenza, noti i valori delle suddette proprietà in funzione della coordinata di spessore (direzione z del sistema di riferimento adottato) in corrispondenza di diverse stazioni, sono calcolati i valori medi e ognuno di essi è stato assegnato ad un layer non-fisico di elementi finiti 3D solidi (Hex8) dal *bottom* al *top* della piastra. Ne deriva che raffinando la mesh lungo lo spessore è possibile aumentare il numero di strati non-fisici (in analogia con i layer matematici del caso analitico) e ciò permette una rappresentazione più accurata dell'andamento reale delle proprietà miste tra quelle della fase metallica e quelle della fase ceramica. Inoltre, è opportuno sottolineare come questa fase di assegnazione delle proprietà sia successiva alle definizione della mesh, applicandosi a gruppi di elementi finiti lungo z, e come la piastra venga modellizzata secondo una stratificazione di layer isotropi tridimensionali (invece nel caso dei compositi tradizionali sono stati impiegati materiali ortotropi tridimensionali).

Le proprietà meccaniche della fase ceramica e della fase metallica degli FGM vengono tipicamente assegnate in termini del modulo di bulk K, del modulo di taglio G e del coefficiente di Poisson η. Invece all'interno del presente modello numerico, nella scheda di assegnazione delle proprietà del materiale, oltre a G ed η è stato assegnato il modulo di Young E il quale può essere ricavato, a partire dai parametri precedenti, con la seguente relazione:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \tag{4.121}$$

Tali proprietà vengono definite sia per la fase metallica (pedice m) sia per la fase ceramica (pedice c) e risultano variabili rispetto alla coordinata di spessore z. A tal proposito viene definita la frazione volumetrica della fase ceramica V_c ovvero la frazione (in volume) del materiale ceramico presente all'intero del FGM rispetto al volume complessivo e, successivamente, attraverso questo parametro viene esplicitata la dipendenza delle caratteristiche meccaniche dallo spessore [15].

$$V_c = (\tilde{z}_{_{FG}}/h_{_{FG}})^p \tag{4.122}$$

dove $h_{_{FG}}$ è lo spessore dello strato in FGM, $\tilde{z}_{_{FG}}$ è la coordinata locale di spessore (variabile da 0 al bottom fino ad $h_{_{FG}}$ al top dello strato) e p rappresenta è l'ordine di potenza della legge di variazione (nel presente studio viene assunto $p = 2$). Il generico strato in FGM viene supposto completamente metallico al bottom e completamente ceramico al top infatti $V_c = 0$ quando $\tilde{z}_{_{FG}} = 0$ e $V_c = 1$ quando $\tilde{z}_{_{FG}} = h_{_{FG}}$. Le caratteristiche meccaniche vengono stimate con l'utilizzo del modello Mori-Tanaka in quanto anch'esse funzioni della frazione volumetrica della fase ceramica:

$$\frac{K - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)\frac{K_c - K_m}{K_m + \frac{4}{3}G_m}} \tag{4.123}$$

$$\frac{G - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)\frac{G_c - G_m}{G_m + f_m}} \tag{4.124}$$

$$f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \tag{4.125}$$

Per quanto riguarda le proprietà termiche, sia il coefficiente di conducibilità termica κ sia il coefficiente di espansione termica μ dipendono entrambe dalla frazione volumetrica della fase ceramica:

$$\frac{\kappa - \kappa_m}{\kappa_c - \kappa_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)\frac{\kappa_c - \kappa_m}{3\kappa_m}} \tag{4.126}$$

$$\frac{\mu - \mu_m}{\mu_c - \mu_m} = \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{K_m}}{\frac{1}{K_c} - \frac{1}{K_m}} \tag{4.127}$$

In analogia anche le proprietà igrometriche presentano una dipendenza dalla V_c sia per il coefficiente di diffusione igrometrica D sia per il coefficiente di espansione igrometrica η:

$$\frac{D - D_m}{D_c - D_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c)\frac{D_c - D_m}{3D_m}} \tag{4.128}$$

$$\frac{\eta - \eta_m}{\eta_c - \eta_m} = \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{K_m}}{\frac{1}{K_c} - \frac{1}{K_m}} \tag{4.129}$$

4.3 Analisi di convergenza

Sia per il metodo analitico 3D sia per il metodo numerico 3D è stata effettuata un'analisi di convergenza dei risultati al fine di valutare rispettivamente il numero di strati matematici e il numero di elementi finiti ottimale lungo lo spessore. A tal proposito è stato scelto come *thickness ratio* di riferimento della piastra a/h = 20 e, una volta raggiunta la convergenza, le analisi sono state ripetute per gli altri casi di rapporto di spessore sfruttando il numero di layer matematici e di elementi finiti solidi che avevano assicurato la convergenza (15 ELM o 25 ELM per il caso numerico, 300 LYR per il caso analitico come indicato nelle tabelle dei risultati).

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo vengono riportati i risultati ottenuti dalle analisi termiche, igrometriche e meccaniche su piastre in materiale composito e sandwich tradizionali nonché in FGM. Tali risultati vengono espressi in termini di componenti di spostamento nelle tre direzioni x, y e z e, in alcuni casi, possono essere adimensionalizzati. Nella prima sezione del capitolo sono inseriti i risultati derivanti dalla validazione e verifica di modelli preesistenti in riferimento ad analisi e dati presenti in letteratura, come ad esempio in [13] [14] [15]:

- modello analitico per l'analisi termica dei compositi tradizionali (3D(θ_c, 3D) Ref.)
- modello analitico per l'analisi igrometrica dei compositi tradizionali (3D(M_c, 3D) Ref.)
- modello numerico per l'analisi termica dei compositi tradizionali (3D FEM Ref.)
- modello numerico per l'analisi igrometrica dei compositi tradizionali (3D FEM Ref.)
- modello analitico per l'analisi termica degli FGM (3D(θ_c, 3D) Ref.)

Nella seconda sezione del capitolo, invece, vengono riportati i risultati ottenuti con nuovi modelli creati appositamente per il presente lavoro di tesi:

- modello numerico per l'analisi termica degli FGM (3D FEM)
- modello analitico per l'analisi igrometrica degli FGM (3D(M_c, 3D))
- modello numerico per l'analisi igrometrica degli FGM (3D FEM)

Caso 1: piastra composita con sequenza di laminazione 0°/90°/0°, quadrata (a = b), semplicemente appoggiata, con spessore h = 1 e spessore di ciascuno strato $h_1 = h_2 = h_3 = h/3 = 1/3$. Sulle facce superiore e inferiore della piastra è presente un campo di temperatura bi-sinusoidale di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). Per ciascuno strato vengono definite le seguenti proprietà termiche e meccaniche: $E_L/E_T = 25$, $G_{LT}/E_T = 0.5$, $G_{TT}/E_T = 0.2$, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$, $\mu_T/\mu_L = 1125$, k_L = 36.42 W/mK, k_T = 0.96 W/mK dove E è il modulo di Young, G è il modulo elastico a taglio, ν è il coefficiente di Poisson, μ è il coefficiente di espansione termica, k è il coefficiente di conducibilità termica. L rappresenta la direzione longitudinale lungo le fibre mentre T indica le direzioni trasversali planari e non-planari. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 4, 10, 20, 50, 100. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici.

Caso 2: piastra composita con laminazione a 0°, quadrata (a = b), semplicemente appoggiata, con spessore h = 1. Sulle facce superiore e inferiore della piastra è presente un campo di temperatura bi-sinusoidale di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà termiche e meccaniche: E_1 = 172.72 GPa, $E_2 = E_3$ = 6.909 GPa, $G_{12} = G_{13}$ = 3.45 GPa, G_{23} = 1.38 GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$, $\mu_1 = 0.57 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\mu_2 = \mu_3 = 35.6 \cdot 10^{-6}$ 1/K, k_1 = 36.42 W/mK, $k_2 = k_3$ = 0.96 W/mK dove E è il modulo di Young, G è il modulo elastico a taglio, ν è il coefficiente di Poisson, μ è il coefficiente di espansione termica, k è il coefficiente di conducibilità termica. Il pedice *1* indica la direzione longitudinale lungo le fibre mentre i pedici *2* e *3* rappresentano le direzioni trasversali alle fibre. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 5, 10, 20, 50, 100. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici.

Caso 3: piastra composita con laminazione 0°/90°/0°, quadrata (a = b), semplicemente appoggiata, con spessore h = 1 e spessore di ciascuno strato $h_1 = h_2 = h_3 = h/3 = 1/3$. Sulle facce superiore e inferiore della piastra è presente un campo di temperatura bi-sinusoidale di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà termiche e meccaniche: E_1 = 172.72 GPa, $E_2 = E_3$ = 6.909 GPa, $G_{12} = G_{13}$ = 3.45 GPa, G_{23} = 1.38 GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$, $\mu_1 = 0.57 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\mu_2 = \mu_3 = 35.6 \cdot 10^{-6}$ 1/K, k_1 = 36.42 W/mK, $k_2 = k_3$ = 0.96 W/mK dove E è il modulo di Young, G è il modulo elastico a taglio, ν è il coefficiente di Poisson, μ è il coefficiente di espansione termica, k è il coefficiente di conducibilità termica. Il pedice *1* indica la direzione longitudinale lungo le fibre mentre i pedici *2* e *3* rappresentano le direzioni trasversali alle fibre. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 5, 10, 20, 50, 100. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici.

Caso 4: piastra composita con laminazione 0°/90°/0°, con dimensioni planari a = 1 m e b = 3 m, semplicemente appoggiata, con spessore di ciascuno strato $h_1 = h_2 = h_3 = h/3$ dove h rappresenta lo spessore totale. Sulla faccia superiore viene applicato un carico meccanico bi-sinusoidale di compressione con ampiezza P_{zt} = 1000 Pa (m = n = 1).

Vengono definite le seguenti proprietà meccaniche: $E_1 = 172.37$ GPa, $E_2 = E_3 = 6.89476$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 3.4474$ GPa, $G_{23} = 1.3789$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$ dove E è il modulo di Young, G è il modulo elastico a taglio, ν è il coefficiente di Poisson. Il pedice *1* indica la direzione longitudinale lungo le fibre mentre i pedici *2* e *3* rappresentano le direzioni trasversali alle fibre. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 4, 10, 20, 50, 100. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici. La componente di spostamento è stata adimensionalizzata con la formula:

$$w_{adim} = \frac{100E_2}{P_{zt}h(a/h)^4}w \tag{5.1}$$

Caso 5: piastra composita con laminazione 0°/90°/0°, con dimensioni planari a = 4 m e b = 12 m, semplicemente appoggiata, con spessore di ciascuno strato $h_1 = h_2 = h_3 = h/3$ dove h rappresenta lo spessore totale. Sulle facce superiore ed inferiore viene applicato un campo di umidità bi-sinusoidale di ampiezza $M_t = 1\%$ e $M_b = 0.5\%$ (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà igrometriche e meccaniche: $E_1 = 172.37$ GPa, $E_2 = E_3 = 6.89476$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 3.4474$ GPa, $G_{23} = 1.3789$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$, $\eta_1 = 0$ 1/%, $\eta_2 = \eta_3 = 0.4 \cdot 10^{-2}$ 1/%, $D_1 = 7.04$ kg/ms, $D_2 = D_3 = 4.96$ kg/ms dove E è il modulo di Young, G è il modulo elastico a taglio, ν è il coefficiente di Poisson, η è il coefficiente di espansione igrometrica, D è il coefficiente di diffusione igrometrica. Il pedice *1* indica la direzione longitudinale lungo le fibre mentre i pedici *2* e *3* rappresentano le direzioni trasversali alle fibre. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 4, 10, 20, 50, 100. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici.

Caso 6: piastra sandwich con laminazione 0°/90°/CORE/90°/0°, quadrata (a = b = 1 m), semplicemente appoggiata, con spessore di ciascuno strato dello skin $h_1 = h_2 = h_4 = h_5 = h/10$ e spessore del core $h_3 = 3/5h$ dove h rappresenta lo spessore totale. Sulla faccia superiore della piastra viene applicato un carico meccanico bi-sinusoidale di compressione con ampiezza $P_{zt} = 10000$ Pa (m = n = 1). Sulle facce superiore ed inferiore viene applicato, inoltre, un campo di umidità bi-sinusoidale di ampiezza $M_t = 1\%$ e $M_b = 0\%$ (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà igrometriche e meccaniche per lo skin: $E_1 = 138$ GPa, $E_2 = E_3 = 8.5$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 4.5$ GPa, $G_{23} = 3.2$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.29$, $\nu_{23} = 0.36$, $\eta_1 = 0$ 1/%, $\eta_2 = \eta_3 = 0.4 \cdot 10^{-2}$ 1/%, $D_1 = 7.04$ kg/ms, $D_2 = D_3 = 4.96$ kg/ms. Vengono definite le seguenti proprietà igrometriche e meccaniche per il core: E = 3 GPa, G = 1.07 GPa, $\nu = 0.4$, $\eta = 0.28 \cdot 10^{-2}$ 1/%, $D = 9.324 \cdot 10^{-8}$ kg/ms. E è il modulo di Young, G è il modulo elastico a taglio, ν è il coefficiente di Poisson, η è il coefficiente di espansione igrometrica, D è il coefficiente di diffusione igrometrica. Il pedice *1* indica la direzione longitudinale lungo le fibre mentre i pedici *2* e *3* rappresentano le direzioni trasversali alle fibre. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 4, 10, 20, 50, 100. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici.

Caso 7: piastra monostrato FGM quadrata (a = b), semplicemente appoggiata, con spessore h = 1. Sulle facce superiore ed inferiore viene applicato un campo di temperatura bi-sinusoidale di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = 0 K (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà termiche e meccaniche: K_m = 227.24 GPa, K_c = 125.83 GPa, G_m = 66.55 GPa, G_c = 58.077 GPa, $\mu_m = 15 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\mu_c = 10 \cdot 10^{-6}$ 1/K, k_m = 25 W/mK, k_c = 2.09 W/mK dove K è il modulo di bulk, G è il modulo elastico a taglio, μ è il coefficiente di espansione termica, k è il coefficiente di conducibilità termica. Il pedice m indica la fase metallica mentre il pedice c rappresenta la fase ceramica. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 4, 10, 20, 50, 100. Viene considerato un esponente della legge di variazione della frazione in volume della fase ceramica pari a p = 2. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici. Le componenti di spostamento sono state adimensionalizzate come segue:

$$w_{adim} = \frac{w}{10^{-6}a} \qquad\qquad u_{adim} = \frac{u}{10^{-6}a} \tag{5.2}$$

Caso 8: piastra sandwich FGM quadrata (a = b = 10 m), semplicemente appoggiata, con spessore dello skin $h_1 = h_3 = 0.2$h e spessore del core $h_2 = 0.6$h dove h è lo spessore totale. Sulle facce superiore ed inferiore viene applicato un campo di temperatura bi-sinusoidale di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà termiche e meccaniche: K_m = 227.24 GPa, K_c = 125.83 GPa, G_m = 66.55 GPa, G_c = 58.077 GPa, $\mu_m = 15 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\mu_c = 10 \cdot 10^{-6}$ 1/K, k_m = 25 W/mK, k_c = 2.09 W/mK dove K è il modulo di bulk, G è il modulo elastico a taglio, μ è il coefficiente di espansione termica, k è il coefficiente di conducibilità termica. Il pedice m indica la fase metallica mentre il pedice c rappresenta la fase ceramica. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 5, 10, 20, 50, 100. Viene considerato un esponente della legge di variazione della frazione in volume della fase ceramica pari a p = 2. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici.

Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata (a = b), semplicemente appoggiata, con spessore h = 1. Sulle facce superiore ed inferiore viene applicato un campo di umidità bi-sinusoidale di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0 % (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà igrometriche e meccaniche: K_m = 227.24 GPa, K_c = 125.83 GPa, G_m = 66.55 GPa, G_c = 58.077 GPa, $\eta_m = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/%, $\eta_c = 1 \cdot 10^{-3}$ 1/%, $D_m = 10^{-9}$ kg/ms, $D_c = 10^{-10}$ kg/ms dove K è il modulo di bulk, G è il modulo elastico a taglio, η è il coefficiente di espansione igrometrica, D è il coefficiente di diffusione igrometrica. Il pedice m indica la fase metallica mentre il pedice c rappresenta la fase ceramica. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 4, 10, 20, 50, 100. Viene considerato un esponente della legge di variazione della frazione in volume della fase ceramica pari a p = 2. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici. Le componenti di spostamento sono state adimensionalizzate come segue:

$$w_{adim} = \frac{w}{10^{-6}a} \qquad u_{adim} = \frac{u}{10^{-6}a} \tag{5.3}$$

Caso 10: piastra sandwich FGM quadrata (a = b = 10 m), semplicemente appoggiata, con spessore dello skin $h_1 = h_3 = 0.2h$ e spessore del core $h_2 = 0.6h$ dove h è lo spessore totale. Sulle facce superiore ed inferiore viene applicato un campo di umidità bi-sinusoidale di ampiezza $M_t = 1\%$ e $M_b = 0.5\%$ (m = n = 1). Vengono definite le seguenti proprietà igrometriche e meccaniche: $K_m = 227.24$ GPa, $K_c = 125.83$ GPa, $G_m = 66.55$ GPa, $G_c = 58.077$ GPa, $\eta_m = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/%, $\eta_c = 1 \cdot 10^{-3}$ 1/%, $D_m = 10^{-9}$ kg/ms, $D_c = 10^{-10}$ kg/ms dove K è il modulo di bulk, G è il modulo elastico a taglio, η è il coefficiente di espansione igrometrica, D è il coefficiente di diffusione igrometrica. Il pedice m indica la fase metallica mentre il pedice c rappresenta la fase ceramica. I rapporti di spessore investigati sono a/h = 2, 5, 10, 20, 50, 100. Viene considerato un esponente della legge di variazione della frazione in volume della fase ceramica pari a p = 2. Il *thickness ratio* a/h = 20 viene preso come riferimento e, rispetto ad esso, viene effettuata l'analisi di convergenza dei risultati numerici ed analitici.

a/h		2	4	10	20	50	100
$w/(a/h)^2$ (a/2, b/2, h)							
3D FEM	3 ELM				11,98		
	6 ELM				12,05		
	9 ELM				12,07		
	12 ELM				12,07		
	15 ELM	53,50	36,81	17,40	12,07	10,44	10,20
	18 ELM				12,07		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				11,41		
	30 LYR				11,40		
	60 LYR				11,40		
	90 LYR				11,40		
	150 LYR				11,40		
	300 LYR	45,25	28,00	14,66	11,40	10,38	10,23

Tabella 5.1. Caso 1: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

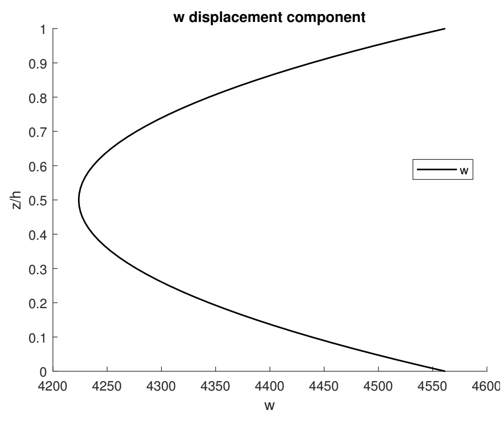

Figura 5.1. Caso 1: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 attraverso il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
		u $[10^{-5}$ m] (0, b/2, h)					
3D FEM	3 ELM				-0,6486		
	6 ELM				-0,6493		
	9 ELM				-0,6493		
	12 ELM				-0,6491		
	15 ELM	-0,0283	-0,1220	-0,3046	-0,6491	-1,6452	-3,2929
	18 ELM				-0,6491		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				-0,6482		
	30 LYR				-0,6480		
	60 LYR				-0,6480		
	90 LYR				-0,6480		
	150 LYR				-0,6480		
	300 LYR	-0,0369	-0,1351	-0,3104	-0,6480	-1,6408	-3,2877

Tabella 5.2. Caso 2: piastra composita 0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

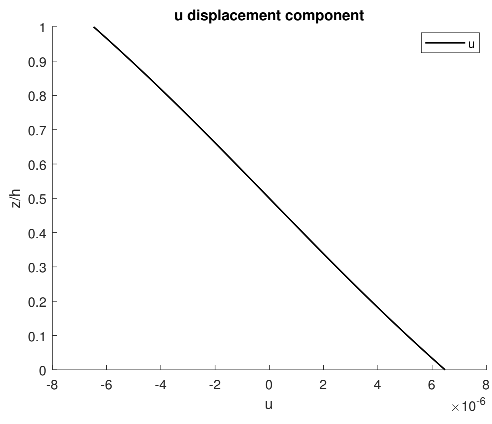

Figura 5.2. Caso 2: piastra composita 0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). La componente di spostamento u è stata ottenuta per a/h = 20 attraverso il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
			v [10^{-5} m] (a/2, 0, 0)				
3D FEM	3 ELM				0,7582		
	6 ELM				0,7505		
	9 ELM				0,7473		
	12 ELM				0,7448		
	15 ELM	0,3139	0,4984	0,5263	0,7448	1,6706	3,2967
	18 ELM				0,7448		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				0,7859		
	30 LYR				0,7857		
	60 LYR				0,7856		
	90 LYR				0,7856		
	150 LYR				0,7856		
	300 LYR	0,2718	0,4771	0,5572	0,7856	1,6977	3,3162

Tabella 5.3. Caso 2: piastra composita 0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

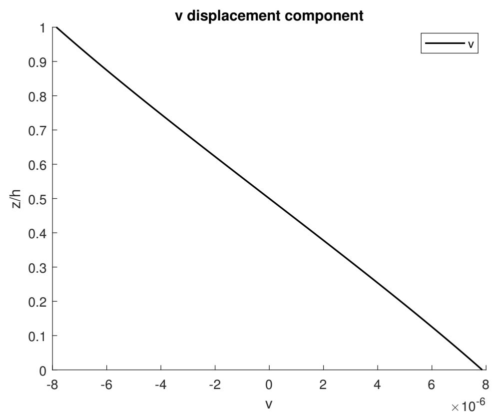

Figura 5.3. Caso 2: piastra composita 0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). La componente di spostamento v è stata ottenuta per a/h = 20 attraverso il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
w [10^{-5} m] (a/2, b/2, h/2)							
3D FEM	3 ELM				8,7351		
	6 ELM				8,7211		
	9 ELM				8,7364		
	12 ELM				8,7445		
	15 ELM	0,1702	0,8630	2,4793	8,7445	52,764	209,96
	18 ELM				8,7445		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				8,5804		
	30 LYR				8,5757		
	60 LYR				8,5751		
	90 LYR				8,5750		
	150 LYR				8,5750		
	300 LYR	0,0958	0,6221	2,2634	8,5750	52,565	209,64

Tabella 5.4. Caso 2: piastra composita 0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

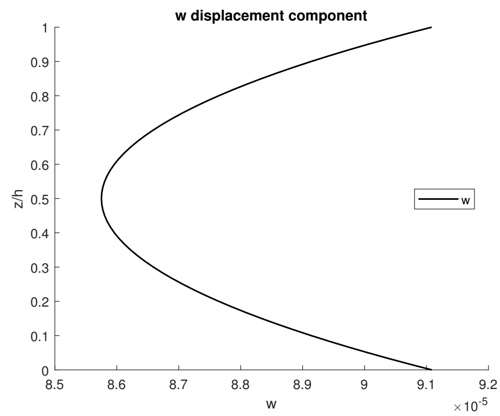

Figura 5.4. Caso 2: piastra composita 0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 attraverso il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
		u [10^{-5} m] (0, b/2, h)					
3D FEM	3 ELM				-0,6506		
	6 ELM				-0,6515		
	9 ELM				-0,6513		
	12 ELM				-0,6513		
	15 ELM	-0,0295	-0,1279	-0,3125	-0,6513	-1,6400	-3,2787
	18 ELM				-0,6513		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				-0,6534		
	30 LYR				-0,6532		
	60 LYR				-0,6532		
	90 LYR				-0,6532		
	150 LYR				-0,6532		
	300 LYR	-0,0400	-0,1451	-0,3191	-0,6532	-1,6430	-3,2888

Tabella 5.5. Caso 3: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_b =$ -0.5 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

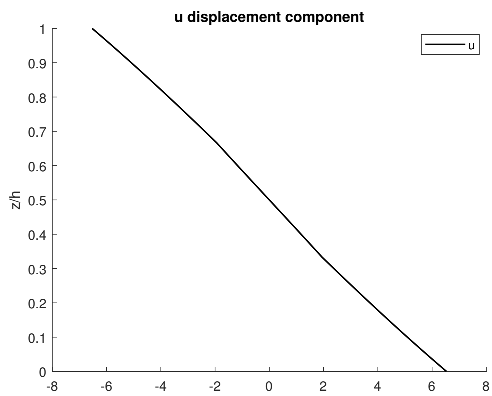

Figura 5.5. Caso 3: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 0.5 K e Θ_b = -0.5 K (m = n = 1). La componente di spostamento u è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
				v [10^{-5} m] (a/2, 0, 0)			
3D FEM	3 ELM				0,7605		
	6 ELM				0,7525		
	9 ELM				0,7490		
	12 ELM				0,7464		
	15 ELM	0,2837	0,4326	0,5091	0,7464	1,6830	3,3048
	18 ELM				0,7464		
3D(θ_c,3D)	15 LYR				0,7800		
	30 LYR				0,7798		
	60 LYR				0,7798		
	90 LYR				0,7798		
	150 LYR				0,7798		
	300 LYR	0,2610	0,4471	0,5426	0,7798	1,6956	3,3152

Tabella 5.6. Caso 3: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_b =$ -0.5 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

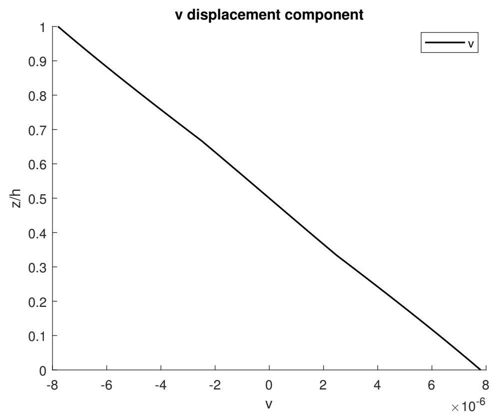

Figura 5.6. Caso 3: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_b =$ -0.5 K (m = n = 1). La componente di spostamento v è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
				w [10^{-5} m] (a/2, b/2, h/2)			
3D FEM	3 ELM				9,0063		
	6 ELM				8,9915		
	9 ELM				9,0061		
	12 ELM				9,0071		
	15 ELM	0,1531	0,9158	2,7001	9,0071	52,823	209,20
	18 ELM				9,0071		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				8,9058		
	30 LYR				8,9002		
	60 LYR				8,9002		
	90 LYR				8,9002		
	150 LYR				8,9002		
	300 LYR	0,1132	0,7622	2,5294	8,9002	52,910	209,99

Tabella 5.7. Caso 3: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_b =$ -0.5 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

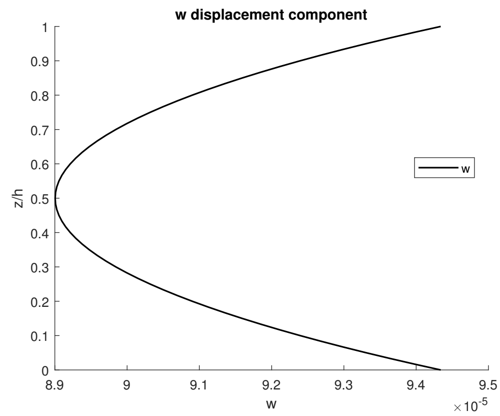

Figura 5.7. Caso 3: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 0.5$ K e $\Theta_b =$ -0.5 K (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	4	10	20	50	100
w adimensionale (a/2, b/2, h/2)							
3D FEM	3 ELM				0,615		
	6 ELM				0,612		
	9 ELM				0,612		
	12 ELM				0,612		
	15 ELM	8,17	2,82	1,03	0,612	0,521	0,507
	18 ELM				0,612		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				0,609		
	30 LYR				0,609		
	60 LYR				0,609		
	90 LYR				0,609		
	150 LYR				0,609		
	300 LYR	8,16	2,81	0,917	0,609	0,520	0,507

Tabella 5.8. Caso 4: piastra composita 0°/90°/0° semplicemente appoggiata con carico meccanico compressivo di ampiezza P_{zt} = 1000 Pa (m = n = 1). Le soluzioni di riferimento sono state ottenute sia analiticamente sia numericamente con i modelli 3D.

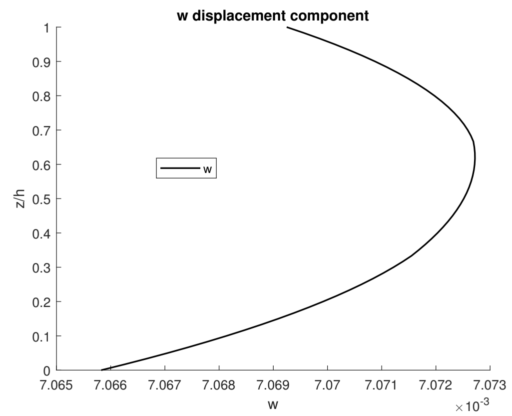

Figura 5.8. Caso 4: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico meccanico di ampiezza P_{zt} = 1000 Pa (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 mediante il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	4	10	20	50	100
w [10^{-3} mm] (a/2, b/2, h/2)							
3D FEM	3 ELM				0,287		
	6 ELM				0,248		
	9 ELM				0,248		
	12 ELM				0,248		
	15 ELM	-0,0821	0,0143	0,1097	0,248	0,644	1,29
	18 ELM				0,248		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				0,278		
	30 LYR				0,253		
	60 LYR				0,253		
	90 LYR				0,253		
	150 LYR				0,253		
	300 LYR	-0,0904	0,0159	0,1217	0,253	0,639	1,28

Tabella 5.9. Caso 5: piastra composita 0°/90°/0° semplicemente appoggiata con carico igrometrico di ampiezza $M_t = 1\%$ e $M_b = 0.5$ % (m = n = 1). Le soluzioni di riferimento sono state ottenute sia analiticamente sia numericamente con i rispettivi modelli 3D.

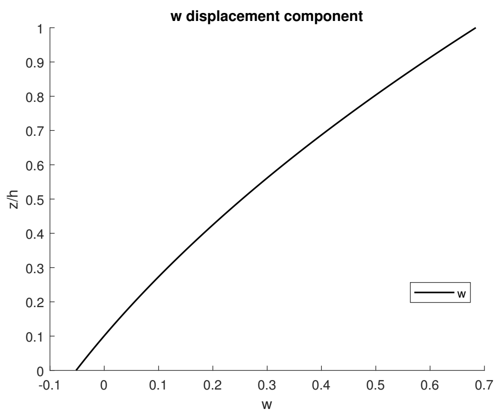

Figura 5.9. Caso 5: piastra composita 0°/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico igrometrico di ampiezza $M_t = 1\%$ e $M_b = 0.5$ % (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	4	10	50	100
w [10^{-1} mm] (a/2, b/2, h/2)						
3D FEM	5 ELM			3,775		
	10 ELM			3,600		
	15 ELM	-0,7661	0,6800	3,600	30,85	129,2
	20 ELM			3,600		
3D(M_c, 3D)	10 LYR			3,663		
	30 LYR			3,666		
	60 LYR			3,666		
	90 LYR			3,666		
	150 LYR			3,666		
	300 LYR	-0,8162	0,6986	3,666	30,88	129,5

Tabella 5.10. Caso 6: piastra sandwich 0°/90°/CORE/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico meccanico compressivo di ampiezza P_{zt} = 10000 Pa (m = n = 1) e carico igrometrico di ampiezza M_t = 1% e M_b = 0 % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

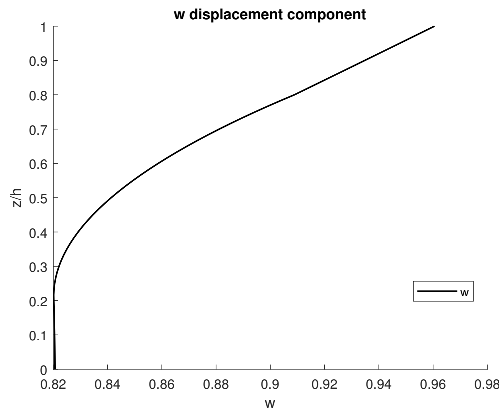

Figura 5.10. Caso 6: piastra sandwich 0°/90°/CORE/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico meccanico di ampiezza P_{zt} = 10000 Pa e carico igrometrico di ampiezza M_t = 1% e M_b = 0 % (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	4	10	50	100
v [10^{-2} mm] (a/2, 0, 4h/5)						
3D FEM	5 ELM			-10,25		
	10 ELM			-10,20		
	15 ELM	-6,622	-9,401	-10,20	-12,91	-19,25
	20 ELM			-10,20		
3D(M_c, 3D)	10 LYR			-10,84		
	30 LYR			-10,84		
	60 LYR			-10,84		
	90 LYR			-10,84		
	150 LYR			-10,84		
	300 LYR	-7,017	-9,879	-10,84	-12,93	-19,31

Tabella 5.11. Caso 6: piastra sandwich 0°/90°/CORE/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico meccanico compressivo di ampiezza P_{zt} = 10000 Pa (m = n = 1) e carico igrometrico di ampiezza M_t = 1% e M_b = 0 % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

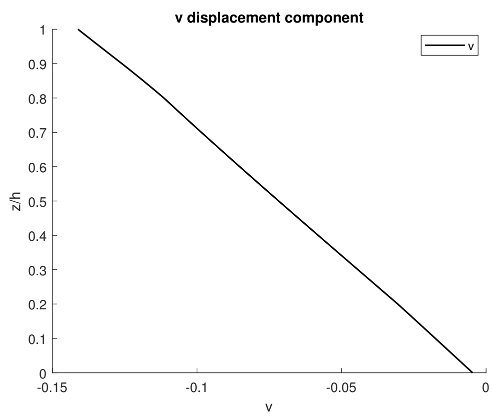

Figura 5.11. Caso 6: piastra sandwich 0°/90°/CORE/90°/0° quadrata semplicemente appoggiata con carico meccanico di ampiezza P_{zt} = 10000 Pa e carico igrometrico di ampiezza M_t = 1% e M_b = 0 % (m = n = 1). La componente di spostamento v è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	4	10	20	50	100
w adimensionale (a/2, b/2, 0)							
3D FEM	10 ELM				12,55		
	20 ELM				12,20		
	25 ELM	0,965	2,525	6,380	12,20	29,00	57,40
	30 ELM				12,20		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				11,55		
	30 LYR				11,35		
	60 LYR				11,30		
	90 LYR				11,30		
	150 LYR				11,30		
	300 LYR	0,615	1,900	5,510	11,30	28,40	56,90

Tabella 5.12. Caso 7: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
w adimensionale (a/2, b/2, h/2)							
3D FEM	10 ELM				12,65		
	20 ELM				12,25		
	25 ELM	1,265	2,775	6,500	12,25	29,00	57,40
	30 ELM				12,25		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				11,60		
	30 LYR				11,40		
	60 LYR				11,35		
	90 LYR				11,35		
	150 LYR				11,35		
	300 LYR	0,915	2,143	5,630	11,35	28,40	56,90

Tabella 5.13. Caso 7: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
w adimensionale (a/2, b/2, h)							
3D FEM	10 ELM				12,85		
	20 ELM				12,45		
	25 ELM	2,595	3,575	6,860	12,45	29,00	57,40
	30 ELM				12,45		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				11,80		
	30 LYR				11,60		
	60 LYR				11,55		
	90 LYR				11,55		
	150 LYR				11,55		
	300 LYR	2,415	3,050	6,010	11,55	28,40	56,90

Tabella 5.14. Caso 7: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

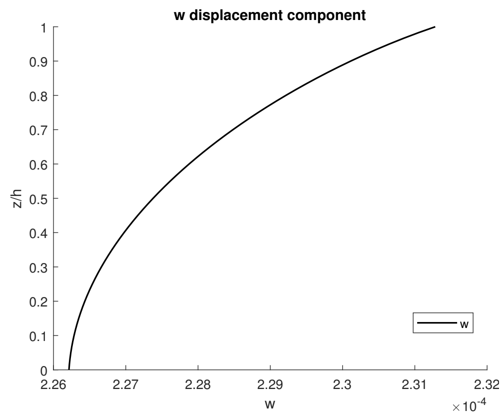

Figura 5.12. Caso 7: piastra monostrato FGM semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	4	10	20	50	100
u adimensionale (0, b/2, 0)							
3D FEM	10 ELM				0,16000		
	20 ELM				0,15150		
	25 ELM	0,19700	0,27500	0,21000	0,15150	0,10380	0,09160
	30 ELM				0,15150		
$3D(\theta_c, 3D)$	15 LYR				0,09000		
	30 LYR				0,08650		
	60 LYR				0,08500		
	90 LYR				0,08500		
	150 LYR				0,08500		
	300 LYR	0,06950	0,08250	0,08500	0,08500	0,08540	0,08530

Tabella 5.15. Caso 7: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La soluzione $3D(\theta_c$, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
u adimensionale (0, b/2, h/2)							
3D FEM	10 ELM				-0,8600		
	20 ELM				-0,8800		
	25 ELM	-0,5400	-0,8150	-0,8960	-0,8800	-0,8560	-0,8500
	30 ELM				-0,8800		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				-0,8750		
	30 LYR				-0,8050		
	60 LYR				-0,8000		
	90 LYR				-0,8000		
	150 LYR				-0,8000		
	300 LYR	-0,4425	-0,6825	-0,7860	-0,8000	-0,8080	-0,8080

Tabella 5.16. Caso 7: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
u adimensionale (0, b/2, h)							
3D FEM	10 ELM				-1,890		
	20 ELM				-1,835		
	25 ELM	-1,915	-1,960	-1,930	-1,835	-1,742	-1,720
	30 ELM				-1,835		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				-1,730		
	30 LYR				-1,710		
	60 LYR				-1,700		
	90 LYR				-1,700		
	150 LYR				-1,700		
	300 LYR	-1,650	-1,680	-1,700	-1,700	-1,702	-1,700

Tabella 5.17. Caso 7: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

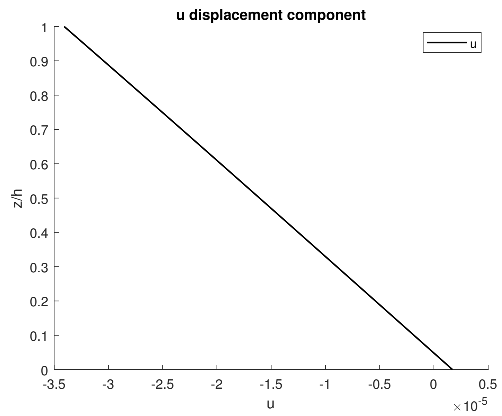

Figura 5.13. Caso 7: piastra monostrato FGM semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza $\Theta_t = 1$ K e $\Theta_b = 0$ K (m = n = 1). La componente di spostamento u è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
w [10^{-4} m] (a/2, b/2, h/2)							
3D FEM	10 ELM				3,104		
	20 ELM				2,632		
	25 ELM	0,3242	0,8022	1,544	2,632	7,665	15,34
	30 ELM				2,632		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				2,900		
	30 LYR				2,911		
	60 LYR				2,912		
	90 LYR				2,912		
	150 LYR				2,912		
	300 LYR	0,2539	0,7141	1,450	2,912	7,291	14,56

Tabella 5.18. Caso 8: piastra sandwich FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

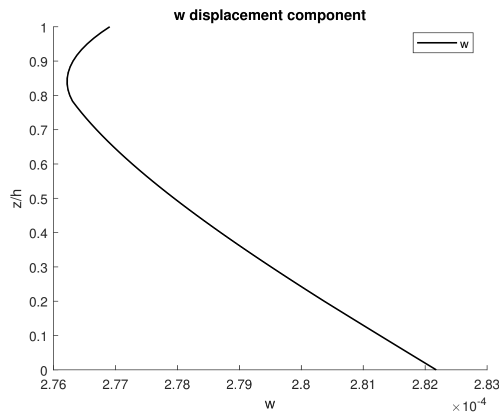

Figura 5.14. Caso 8: piastra sandwich FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
				v [10^{-4} m] (a/2, 0, h)			
3D FEM	10 ELM				-0,13789		
	20 ELM				-0,13485		
	25 ELM	-0,1693	-0,14612	-0,13632	-0,13485	-0,13484	-0,13527
	30 ELM				-0,13485		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				-0,05870		
	30 LYR				-0,06052		
	60 LYR				-0,06053		
	90 LYR				-0,06053		
	150 LYR				-0,06053		
	300 LYR	-0,0975	-0,06921	-0,06233	-0,06053	-0,06000	-0,05994

Tabella 5.19. Caso 8: piastra sandwich FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

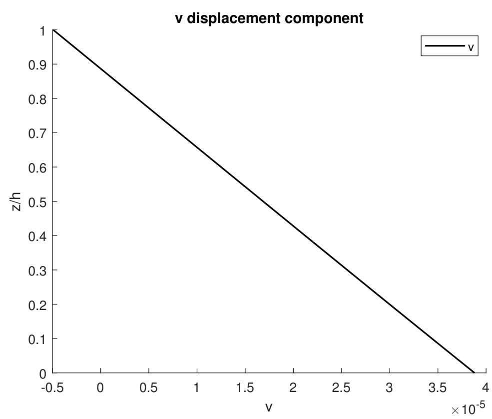

Figura 5.15. Caso 8: piastra sandwich FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La componente di spostamento v è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
u [10^{-4} m] (0, b/2, 0)							
3D FEM	10 ELM				0,3514		
	20 ELM				0,3682		
	25 ELM	0,3729	0,3712	0,3553	0,3682	0,3476	0,3475
	30 ELM				0,3682		
3D(θ_c, 3D)	15 LYR				0,3981		
	30 LYR				0,3980		
	60 LYR				0,3980		
	90 LYR				0,3980		
	150 LYR				0,3980		
	300 LYR	0,3710	0,3924	0,3967	0,3980	0,3981	0,3981

Tabella 5.20. Caso 8: piastra sandwich FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La soluzione 3D(θ_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di temperatura 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

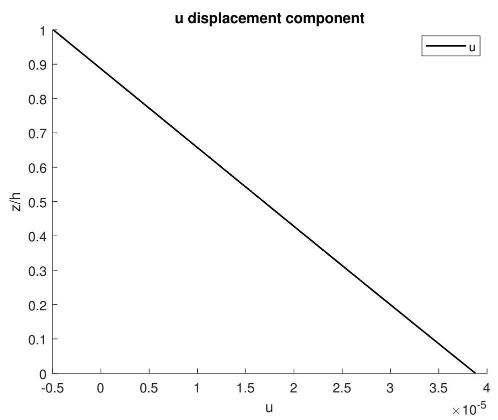

Figura 5.16. Caso 8: piastra sandwich FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico termico di ampiezza Θ_t = 1 K e Θ_b = -1 K (m = n = 1). La componente di spostamento u è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(θ_c, 3D).

a/h		2	4	10	20	50	100
w adimensionale (a/2, b/2, 0)							
3D FEM	10 ELM				1390,00		
	20 ELM				1410,00		
	25 ELM	58,90	292,00	741,09	1410,00	3358,00	6627,00
	30 ELM				1410,00		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				1278,50		
	30 LYR				1261,50		
	60 LYR				1255,35		
	90 LYR				1255,35		
	150 LYR				1255,35		
	300 LYR	61,30	205,60	611,40	1255,35	3161,80	6330,30

Tabella 5.21. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0 % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
w adimensionale (a/2, b/2, h/2)							
3D FEM	10 ELM				1398,00		
	20 ELM				1421,50		
	25 ELM	148,25	323,50	756,50	1421,50	3362,00	6629,00
	30 ELM				1421,50		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				1287,95		
	30 LYR				1269,45		
	60 LYR				1263,30		
	90 LYR				1263,30		
	150 LYR				1263,30		
	300 LYR	101,45	238,33	626,90	1263,30	3165,00	6331,90

Tabella 5.22. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza $M_t = 1$ % e $M_b = 0$ % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
w adimensionale (a/2, b/2, h)							
3D FEM	10 ELM				1421,00		
	20 ELM				1445,00		
	25 ELM	308,90	421,75	800,30	1445,00	3372,00	6634,00
	30 ELM				1445,00		
3D(M_c,3D)	15 LYR				1310,65		
	30 LYR				1292,95		
	60 LYR				1286,75		
	90 LYR				1286,75		
	150 LYR				1286,75		
	300 LYR	277,85	345,75	673,26	1286,75	3174,40	6336,60

Tabella 5.23. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza $M_t = 1$ % e $M_b = 0$ % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

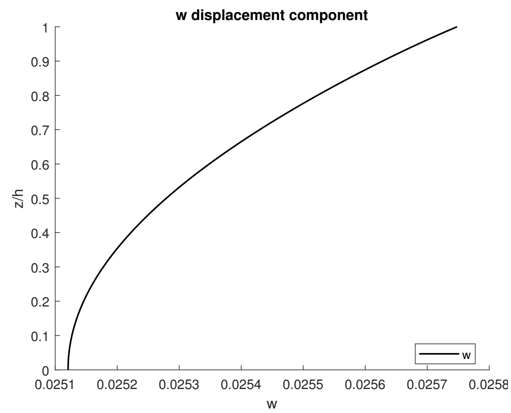

Figura 5.17. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico igrometrico di ampiezza $M_t = 1$ % e $M_b = 0$ % (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	4	10	20	50	100
u adimensionale (0, b/2, 0)							
3D FEM	10 ELM				-0,78500		
	20 ELM				-0,87700		
	25 ELM	1,85350	0,05240	-0,69430	-0,87700	-0,90460	-0,84790
	30 ELM				-0,87700		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				-0,31385		
	30 LYR				-0,67950		
	60 LYR				-0,80770		
	90 LYR				-0,80770		
	150 LYR				-0,80770		
	300 LYR	1,27000	0,05073	-0,68030	-0,80770	-0,84460	-0,84990

Tabella 5.24. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0 % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
u adimensionale (0, b/2, h/2)							
3D FEM	10 ELM				-105,20		
	20 ELM				-106,25		
	25 ELM	-69,12	-102,83	-112,90	-106,25	-107,84	-107,13
	30 ELM				-106,25		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				-107,70		
	30 LYR				-99,95		
	60 LYR				-99,62		
	90 LYR				-99,62		
	150 LYR				-99,62		
	300 LYR	-55,90	-84,85	-97,54	-99,62	-100,20	-100,29

Tabella 5.25. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza $M_t = 1$ % e $M_b = 0$ % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

a/h		2	4	10	20	50	100
u adimensionale (0, b/2, h)							
3D FEM	10 ELM				-219,10		
	20 ELM				-222,10		
	25 ELM	-226,95	-235,88	-234,00	-222,10	-210,4	-207,55
	30 ELM				-222,10		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				-202,85		
	30 LYR				-200,45		
	60 LYR				-199,65		
	90 LYR				-199,65		
	150 LYR				-199,65		
	300 LYR	-191,60	-196,70	-199,20	-199,65	-199,76	-199,78

Tabella 5.26. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0 % (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

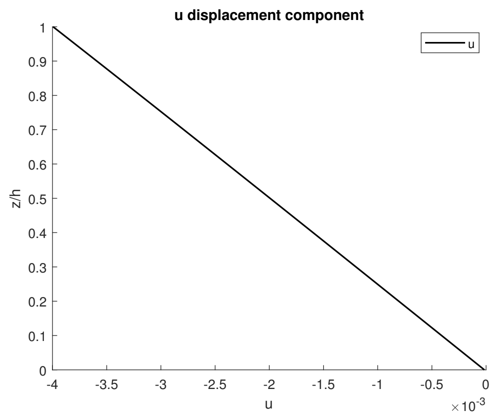

Figura 5.18. Caso 9: piastra monostrato FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0 % (m = n = 1). La componente di spostamento u è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
w [10^{-4} m] (a/2, b/2, h/2)							
3D FEM	10 ELM				-37,81		
	20 ELM				-36,44		
	25 ELM	-2,785	-8,087	-16,71	-33,23	-84,72	-167,0
	30 ELM				-33,23		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				-38,68		
	30 LYR				-36,23		
	60 LYR				-33,27		
	90 LYR				-33,27		
	150 LYR				-33,27		
	300 LYR	-2,685	-8,277	-16,64	-33,27	-83,15	-166,3

Tabella 5.27. Caso 10: piastra sandwich FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza $M_t = 1\%$ e $M_b = 0.5\%$ (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

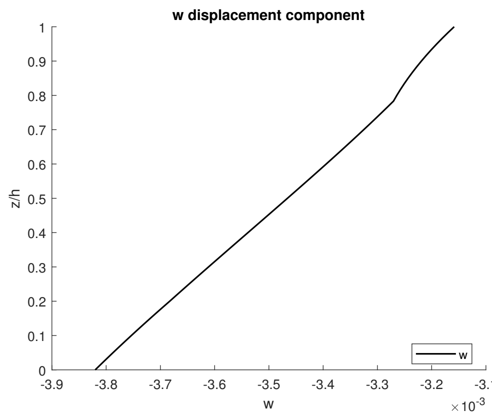

Figura 5.19. Caso 10: piastra sandwich FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0.5 % (m = n = 1). La componente di spostamento w è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
		v [10^{-4} m] (a/2, 0, h)					
3D FEM	10 ELM				-24,45		
	20 ELM				-21,92		
	25 ELM	-15,97	-17,19	-20,10	-22,70	-22,93	-23,05
	30 ELM				-22,70		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				-17,69		
	30 LYR				-18,81		
	60 LYR				-18,68		
	90 LYR				-18,68		
	150 LYR				-18,68		
	300 LYR	-16,75	-18,15	-18,56	-18,68	-18,71	-18,72

Tabella 5.28. Caso 10: piastra sandwich FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1% e M_b = 0.5% (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

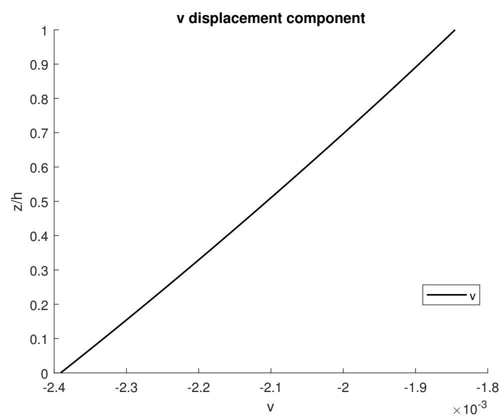

Figura 5.20. Caso 10: piastra sandwich FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0.5 % (m = n = 1). La componente di spostamento v è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

a/h		2	5	10	20	50	100
		u [10^{-4} m] (0, b/2, 0)					
3D FEM	10 ELM				-25,67		
	20 ELM				-23,18		
	25 ELM	-21,44	-23,02	-23,88	-22,93	-24,10	-23,97
	30 ELM				-22,93		
3D(M_c, 3D)	15 LYR				-23,83		
	30 LYR				-23,89		
	60 LYR				-23,92		
	90 LYR				-23,92		
	150 LYR				-23,92		
	300 LYR	-22,53	-23,57	-23,84	-23,92	-23,94	-23,94

Tabella 5.29. Caso 10: piastra sandwich FGM quadrata, semplicemente appoggiata, con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1% e M_b = 0.5% (m = n = 1). La soluzione 3D(M_c, 3D) è stata ottenuta con il modello 3D analitico basato su un profilo di umidità 3D calcolato lungo lo spessore. Questa soluzione è stata validata numericamente con il modello 3D FEM.

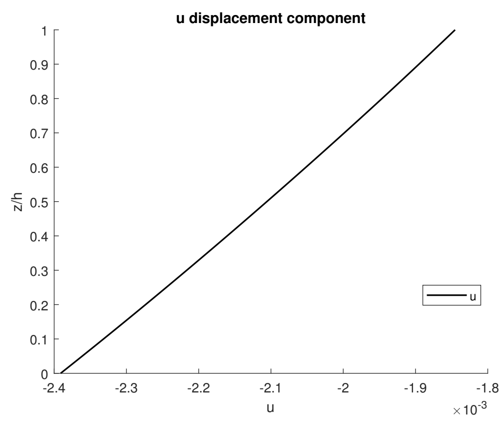

Figura 5.21. Caso 10: piastra sandwich FGM quadrata semplicemente appoggiata con carico igrometrico di ampiezza M_t = 1 % e M_b = 0.5 % (m = n = 1). La componente di spostamento u è stata ottenuta per a/h = 20 con il modello analitico 3D(M_c, 3D).

Capitolo 6

Conclusioni

Le soluzioni 3D analitica SHELL e numerica FEM proposte permettono l'analisi delle sollecitazioni termiche e igrometriche di piastre e gusci che incorporano strati in Functionally Graded Material (FGM). L'ampiezza dei campi di temperatura e umidità viene imposta alle superfici esterne in condizioni stazionarie. Il profilo di temperatura attraverso lo spessore è definito risolvendo l'equazione di conduzione termica di Fourier 3D (il modello termomeccanico relativo è chiamato 3D(θ_c, 3D)) mentre il profilo di umidità viene ricavato risolvendo l'equazione di diffusione igrometrica di Fick 3D (il modello igromeccanico relativo è chiamato 3D(M_c, 3D)). Il metodo della matrice esponenziale è stato impiegato per risolvere il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine non omogenee in z dato in forma chiusa grazie all'impiego delle condizioni al contorno di semplice appoggio e delle forme armoniche per gli spostamenti e per i carichi termici/igrometrici. La presenza di coefficienti elastici, termici e igrometrici variabili all'interno degli strati in FGM e/o della curvatura caratteristica dei gusci produce equazioni differenziali con coefficienti non costanti. Quest'ultimi vengono resi costanti impiegando strati matematici e un approccio Layer Wise (LW). Il profilo di temperatura/umidità calcolato 3D permette di considerare sia gli effetti dello spessore dei vari strati sia l'effetto del materiale presenti al loro interno (il profilo di temperatura/umidità calcolato 1D permette di considerare solo l'effetto del materiale mentre il profilo di temperatura/umidità assunto lineare trascura entrambi gli effetti). Le analisi condotte, in termini di spostamenti, stress e profili di temperatura/umidità, evidenziano che l'utilizzo di un profilo termico/igrometrico calcolato 3D è necessario per eseguire una corretta indagine delle sollecitazioni termiche/igrometriche presenti sulle strutture multistrato che incorporano strati in FGM con diversi rapporti di spessore. Una corretta risposta igro-termo-meccanica è possibile soltanto se la parte elastica del modello 3D insieme al carico termico o igrometrico equivalente vengono correttamente definiti.

Bibliografia

[1] I. M. El-Galy, B. I. Saleh, M. H. Ahmed, *Functionally Graded Materials Classifications and Development Trends from Industrial Point of View*, Springer Nature Switzerland, 1-23, 2019.

[2] T. Khan, N. Zhang, A. Akram *State of the Art Review of Functionally Graded Materials*, International Conference on Computing, Mathematics and Engineering Technologies, 1-10, 2019.

[3] V. Cannillo, L. Lusvarghi, C. Siligardi, A. Sola, *Prediction of the Elastic Properties Profile in Glass-Alumina Functionally Graded Materials*, Journal of the European Ceramic Society, 1-8, 2006.

[4] M. M. Gasik, *Micromechanical Modelling of Functionally Graded Materials*, Computational Materials Science, 1-14, 1998.

[5] J. R. Zuiker, *Functionally Graded Materials: Choice of Micromechanics Model and Limitations in Property Variation*, Elsevier Science, 1-13, 1995.

[6] M. J. Pindera, J. Aboudi, S. M. Arnold, *Limitations of the Uncoupled, RVE-based Micromechanical Approach in the Analysis of Functionally Graded Composites*, Mechanics of Materials, 1-18, 1994.

[7] T. Reiter, G. J. Dvorak, V. Tvergaard, *Micromechanical Models for Graded Composite Materials*, Institute of Lightweight Structures of Vienna, 1-22, 1996.

[8] E. Carrera, *A Class of Two Dimensional Theories for Multilayered Plates Analysis*, Atti Accademia delle Scienze di Torino, 49–87, 1995.

[9] S. Brischetto, R. Leetsch, E. Carrera, T. Wallmersperger, B. Kröplin, *Thermo-Mechanical Bending of Functionally Graded Plates*, Journal of Thermal Stresses, 286-308, 2008.

[10] D. B. Butrymowicz, J. R. Manning, M. E. Read, *Diffusion in Copper and Copper Alloys*, Institute for Materials Research of Washington, 1-50, 1977.

[11] S. Brischetto, *Hygrothermal Loading Effects in Bending Analysis of Multilayered Composite Plates*, Tech Science Press, 1-52, 2012.

[12] S. Brischetto, *Hygrothermoelastic Analysis of Multilayered Composite and Sandwich Shells*, Journal of Sandwich Structures and Materials, 1-35, 2013.

[13] S. Brischetto, R. Torre, *3D Shell Model for the Thermo-Mechanical Analysis of FGM Structures via Imposed and Calculated Temperature Profiles*, Politecnico di Torino, 1-43, 2018.

[14] S. Brischetto, R. Torre, *Thermo-Elastic Analysis of Multilayered Plates and Shells Based on 1D and 3D Heat Conduction Problems*, Elsevier Science, 1-28, 2018.

[15] S. Brischetto. R. Torre, *3D Shell Model for the Thermo-Mechanical Analysis of FGM Structures via Imposed and Calculated Temperature Profiles*, Elsevier Science, 1-15, 2019.