

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

Analisi statica e vibrazioni libere per pannelli sandwich con cuore realizzato mediante strutture lattice

Relatori

Professore Salvatore Brischetto
Professore Francesco Tornabene

Candidato

Karl Verholle

A.A 2020/2021

Ringraziamenti

Vorrei innanzitutto ringraziare i Professori S. Brischetto e F. Tornabene per avermi dato la possibilità di lavorare su questa tesi, per avermi seguito con disponibilità e pazienza durante tutto il percorso necessario per redigere questo documento.

Ringrazio di cuore i miei genitori e mia sorella che mi hanno sempre sostenuto nel mio percorso universitario, nella mia vita e hanno da sempre creduto in me.

Un ringraziamento speciale anche ad i miei migliori amici, A. Monka, A. Giordana, E. Operti, H. Laborne, M. Antonetto, M. Viglietti e P. Zanicchi che da sempre mi rendono la vita di tutti i giorni più spensierata e piacevole.

Indice

Elenco delle figure	7
Elenco delle tabelle	11
1 Introduzione	13
2 Pannelli sandwich con cuore in struttura lattice	14
2.1 Strutture sandwich composite	14
2.2 Strutture composite lattice	16
2.3 Tecniche di produzione delle strutture composite lattice	17
2.3.1 Processo di avvolgimento libero e a secco	17
2.3.2 Processo di avvolgimento robotico	19
2.3.3 Additive Manufacturing e Selective Laser Melting	20
2.4 Applicazioni delle strutture lattice nel campo aerospaziale	21
2.4.1 Applicazioni per lanciatori spaziali	21
2.4.2 Applicazioni per velivoli aerospaziali	22
2.5 Parametri delle strutture lattice	26
2.5.1 Proprietà geometriche	26
2.5.2 Proprietà del materiale di una nervatura	28
3 Modelli Numerici: Shell 3D, 2D FEM e GDQ	34
3.1 Modello a guscio	34
3.2 Relazioni geometriche e legge di Hooke	36
3.3 Equazioni di equilibrio	38
3.4 Soluzioni per strutture multistrato a guscio	39
3.5 Modello numerico e analisi modale 2D FEM	42
3.5.1 Discretizzazione e modellazione della struttura	44
3.5.2 Calcolo delle matrici di massa e rigidezza	45
3.5.3 Calcolo del vettore delle frequenze	46
3.6 Generalized Differential Quadrature (GDQ)	47
4 Analisi e risultati strutturali	49
4.1 Costanti elastiche e densità delle strutture lattice	49
4.1.1 Analisi pannelli sandwich a 2 parametri variabili	50
4.1.2 Analisi pannelli sandwich a 4 parametri variabili	54
4.2 Analisi dinamica con modello 3D esatto e GDQ	57
4.2.1 Commenti ed interpretazione dei risultati	75
4.3 Analisi statica con modello 3D esatto	77
4.3.1 Commenti ed interpretazione dei risultati	103

5 Conclusione e sviluppi futuri	105
Bibliografia	106

Elenco delle figure

2.1	Pannello sandwich con cuore a nido d'ape	14
2.2	Diverse tipologie di pannelli sandwich con cuore in struttura lattice	15
2.3	Esempio di struttura lattice di un guscio cilindrico	16
2.4	Schema processo filament winding	17
2.5	Esempio di componente ottenuto con filament winding	17
2.6	Produzione di strutture composite lattice	18
2.7	Processo di avvolgimento robotico e infusione di resina	19
2.8	Campioni realizzati con SLM	20
2.9	Processo di SLM	20
2.10	Adattatore di carico utile metallico ed in composito a griglia	21
2.11	Posizionamento dell'adattatore di carico utile	22
2.12	Struttura composita reticolare di un satellite	23
2.13	Fusoliera aerea con struttura lattice	23
2.14	Concept di ala con struttura lattice a forma variabile	24
2.15	Concept di velivolo con pannelli in struttura lattice	24
2.16	Composizione di un pannello innovativo in struttura lattice	24
2.17	Pannello composito cilindrico in struttura lattice con bordi fissati	26
2.18	Parametri geometrici delle strutture lattice	27
2.19	Geometria delle celle con tre famiglie di nervature	27
2.20	Pannello ortotropo, continuo e cilindrico con bordi fissati	30
3.1	Sistema di riferimento di un tipico guscio	34
3.2	Sollecitazioni interne agenti su di un elemento infinitesimo di guscio	36
3.3	Sistema di riferimento per un elemento guscio a doppia curvatura	47
3.4	Esempio di distribuzione discreta dei nodi nel modello GDQ	48
4.1	Codice per i casi a 2 parametri	49
4.2	Codice per i casi a 4 parametri	49
4.3	Codice per il calcolo delle costanti elastiche e della densità	50
4.4	Grafico della densità di un pannello al variare della distanza e spessore delle nervature	52
4.5	Grafico delle costanti elastiche al variare dell'angolo centrale	52
4.6	Grafico della densità di un pannello al variare della distanza e spessore delle nervature	55
4.7	Grafico delle costanti elastiche al variare dell'angolo centrale	56
4.8	Codice con caratteristiche del materiale della pelle in Alluminio	57
4.9	Codice con caratteristiche del materiale del cuore in struttura lattice	58
4.10	Codice con le costanti elastiche del cuore in struttura lattice	58
4.11	Definizione del modulo materiale	59

4.12	Rappresentazione del modulo materiale	59
4.13	Definizione del modulo geometria	60
4.14	Definizione del modulo di carico	61
4.15	Definizione del modulo delle condizioni al contorno	61
4.16	Caso 1 Modo I (1,0)	63
4.17	Caso 1 Modo II (0,2)	63
4.18	Caso 2 Modo I (3,1)	64
4.19	Caso 2 Modo II (2,0)	64
4.20	Caso 3 Modo I (4,1)	65
4.21	Caso 3 Modo II (2,0)	65
4.22	Caso 4 Modo I (6,1)	66
4.23	Caso 4 Modo II (1,0)	66
4.24	Caso 5 Modo I (1,3)	67
4.25	Caso 5 Modo II (1,0)	67
4.26	Caso 6 Modo I (4,3)	68
4.27	Caso 6 Modo II (1,0)	68
4.28	Caso 7 Modo I (5,1)	69
4.29	Caso 7 Modo II (2,0)	69
4.30	Caso 8 Modo I (6,2)	70
4.31	Caso 8 Modo II (0,1)	70
4.32	Caso 9 Modo I (3,2)	71
4.33	Caso 9 Modo II (0,1)	71
4.34	Caso 10 Modo I (2,2)	72
4.35	Caso 10 Modo II (1,0)	72
4.36	Caso 11 Modo I (7,1)	73
4.37	Caso 11 Modo II (1,0)	73
4.38	Caso 12 Modo I (5,2)	74
4.39	Caso 12 Modo II (1,0)	74
4.40	Definizione del carico per l'analisi statica	77
4.41	Esempio di valori di sforzo	78
4.42	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 1)	80
4.43	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 1)	80
4.44	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 1)	80
4.45	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 1)	80
4.46	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 1)	80
4.47	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 1)	80
4.48	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 2)	82
4.49	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 2)	82
4.50	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 2)	82
4.51	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 2)	82
4.52	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 2)	82
4.53	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 2)	82
4.54	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 3)	84
4.55	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 3)	84
4.56	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 3)	84
4.57	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 3)	84
4.58	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 3)	84
4.59	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 3)	84

4.60	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 4)	86
4.61	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 4)	86
4.62	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 4)	86
4.63	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 4)	86
4.64	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 4)	86
4.65	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 4)	86
4.66	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 5)	88
4.67	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 5)	88
4.68	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 5)	88
4.69	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 5)	88
4.70	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 5)	88
4.71	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 5)	88
4.72	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 6)	90
4.73	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 6)	90
4.74	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 6)	90
4.75	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 6)	90
4.76	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 6)	90
4.77	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 6)	90
4.78	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 7)	92
4.79	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 7)	92
4.80	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 7)	92
4.81	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 7)	92
4.82	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 7)	92
4.83	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 7)	92
4.84	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 8)	94
4.85	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 8)	94
4.86	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 8)	94
4.87	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 8)	94
4.88	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 8)	94
4.89	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 8)	94
4.90	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 9)	96
4.91	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 9)	96
4.92	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 9)	96
4.93	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 9)	96
4.94	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 9)	96
4.95	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 9)	96
4.96	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 10)	98
4.97	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 10)	98
4.98	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 10)	98
4.99	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 10)	98
4.100	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 10)	98
4.101	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 10)	98
4.102	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 11)	100
4.103	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 11)	100
4.104	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 11)	100
4.105	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 11)	100
4.106	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 11)	100
4.107	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 11)	100

4.108	Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 12)	102
4.109	Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 12)	102
4.110	Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 12)	102
4.111	Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 12)	102
4.112	Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 12)	102
4.113	Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 12)	102

Elenco delle tabelle

4.1	Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 1, Caso 2, Caso 3)	51
4.2	Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 4, Caso 5, Caso 6)	51
4.3	Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 7, Caso 8, Caso 9)	54
4.4	Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 10, Caso 11, Caso 12)	55
4.5	Tabella riassuntiva delle caratteristiche di ogni caso	62
4.6	Tabella con le frequenze del Caso 1	63
4.7	Tabella con le frequenze del Caso 2	64
4.8	Tabella con le frequenze del Caso 3	65
4.9	Tabella con le frequenze del Caso 4	66
4.10	Tabella con le frequenze del Caso 5	67
4.11	Tabella con le frequenze del Caso 6	68
4.12	Tabella con le frequenze del Caso 7	69
4.13	Tabella con le frequenze del Caso 8	70
4.14	Tabella con le frequenze del Caso 9	71
4.15	Tabella con le frequenze del Caso 10	72
4.16	Tabella con le frequenze del Caso 11	73
4.17	Tabella con le frequenze del Caso 12	74
4.18	Tabella riassuntiva delle caratteristiche di ogni caso	78
4.19	Tabella con gli spostamenti del Caso 1	79
4.20	Tabella con le tensioni del Caso 1	79
4.21	Tabella con le tensioni del Caso 1	79
4.22	Tabella con gli spostamenti del Caso 2	81
4.23	Tabella con le tensioni del Caso 2	81
4.24	Tabella con le tensioni del Caso 2	81
4.25	Tabella con gli spostamenti del Caso 3	83
4.26	Tabella con le tensioni del Caso 3	83
4.27	Tabella con le tensioni del Caso 3	83
4.28	Tabella con gli spostamenti del Caso 4	85
4.29	Tabella con le tensioni del Caso 4	85
4.30	Tabella con le tensioni del Caso 4	85
4.31	Tabella con gli spostamenti del Caso 5	87
4.32	Tabella con le tensioni del Caso 5	87
4.33	Tabella con le tensioni del Caso 5	87
4.34	Tabella con gli spostamenti del Caso 6	89

4.35	Tabella con le tensioni del Caso 6	89
4.36	Tabella con le tensioni del Caso 6	89
4.37	Tabella con gli spostamenti del Caso 7	91
4.38	Tabella con le tensioni del Caso 7	91
4.39	Tabella con le tensioni del Caso 7	91
4.40	Tabella con gli spostamenti del Caso 8	93
4.41	Tabella con le tensioni del Caso 8	93
4.42	Tabella con le tensioni del Caso 8	93
4.43	Tabella con gli spostamenti del Caso 9	95
4.44	Tabella con le tensioni del Caso 9	95
4.45	Tabella con le tensioni del Caso 9	95
4.46	Tabella con gli spostamenti del Caso 10	97
4.47	Tabella con le tensioni del Caso 10	97
4.48	Tabella con le tensioni del Caso 10	97
4.49	Tabella con gli spostamenti del Caso 11	99
4.50	Tabella con le tensioni del Caso 11	99
4.51	Tabella con le tensioni del Caso 11	99
4.52	Tabella con gli spostamenti del Caso 12	101
4.53	Tabella con le tensioni del Caso 12	101
4.54	Tabella con le tensioni del Caso 12	101

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi decenni, le strutture di tipo lattice hanno catturato l'interesse del mondo scientifico e ingegneristico, in particolare per le applicazioni biomediche e aerospaziali. Per definizione, la struttura lattice è definita come una configurazione ispirata alla natura ed è caratterizzata dalla ripetizione di celle che possono avere svariate forme geometriche ripetute fino a formare una rete o struttura reticolata. Possono essere create a partire da molteplici materiali come metalli, legno e fibre di carbonio. In natura queste strutture esistono da sempre, basti pensare ai nidi d'ape, alle strutture ossee dei volatili e i gusci dei ricci di mare. Con l'avvento della tecnologia informatica, è sempre più facile creare modelli complessi con un'infinità di forme adattabili ad ogni esigenza. Nel caso del campo biomedico, le strutture reticolari possono essere utilizzate come ottimi sostituti degli impianti medici metallici come per esempio le protesi. Risultano essere meno rigide e più flessibili, quindi più simili alle strutture ossee dell'essere umano. In ambito aerospaziale, le strutture lattice sono diventate delle ottime candidate per la creazione di strutture innovative, infatti senza compromettere caratteristiche meccaniche come la resistenza, è possibile diminuire la loro massa, caratteristica molto apprezzata nella ricerca di materiali applicabili nel mondo aeronautico.

Innanzitutto, dopo l'introduzione di questa tesi andremo a descrivere la struttura lattice integrata nel cuore dei pannelli sandwich, vedremo in particolare la struttura di tali pannelli, i vari metodi di fabbricazione e le possibili applicazioni nel campo delle tecnologie aerospaziali. Verrà proposto lo studio di un pannello rettangolare e ci soffermeremo su modelli di omogeneizzazione per ricavare le caratteristiche elastiche e le densità equivalenti dei cuori di tali pannelli. In seguito, nel terzo capitolo andremo a trattare e confrontare dei modelli 3D e 2D analitici e numerici che verranno opportunamente validati e confrontati nello studio di tali strutture e ci permetteranno di studiare ed analizzare pannelli sandwich con cuore realizzato mediante strutture lattice. Infine, nel quarto capitolo verranno effettuate analisi statiche (in termini di spostamenti, tensioni e deformazioni) e modali e di vibrazioni libere per pannelli sandwich piani e curvi con cuore realizzato mediante strutture di tipo lattice facendo variare alcune caratteristiche come il loro spessore, in questo modo otterremo risultati che saranno opportunamente commentati.

Capitolo 2

Pannelli sandwich con cuore in struttura lattice

2.1 Strutture sandwich composite

Le strutture per diverse applicazioni ingegneristiche devono soddisfare una varietà di parametri funzionali e proprietà a seconda del loro utilizzo.

I pannelli sandwich (o struttura a sandwich) è un elemento costituito da due strati resistenti, detti pelli o facce, distanziati tra loro e collegati rigidamente ad un elemento connettivo che prende il nome di core: in questo modo viene formata una struttura che ha un comportamento statico migliore delle singole parti da cui è costituita. Il core è in genere un materiale leggero e poco resistente, che permette di distanziare le pelli. Le pelli hanno la funzione di distribuzione dei carichi nel piano, la presenza del core serve ad aumentare il valore della rigidezza flessionale del pannello. La struttura del core può presentarsi sotto forma di diverse strutture, quelle più frequenti sono strutture a celle di nido d'ape (honeycomb) o schiume che possono essere presenti allo stato liquido o solido, a seconda dell'esigenza. Distanziando le pelli viene incrementata la rigidezza rispetto a un pannello costituito soltanto da uno spessore di materiale pari a quello delle due facce, con un incremento di peso ridottissimo. Per queste ragioni ed altre che andremo ad esporre in seguito, negli ultimi quaranta anni l'industria aerospaziale si è sempre più affidata all'impiego di pannelli sandwich.

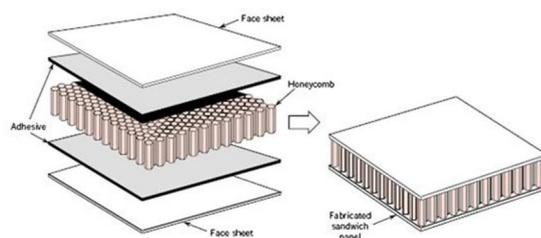


Figura 2.1: Pannello sandwich con cuore a nido d'ape

Vengono sempre più impiegati due concetti strutturali di base che sono ampiamente utilizzati per le applicazioni nel settore aerospaziale, le strutture irrigidite e quelle a sandwich. Questi concetti si basano sull'idea che il carico viene distribuito sulle pelli mentre le nervature realizzate in strutture irrigidite e il core delle strutture sandwich forniscono un'elevata rigidità e resistenza alla flessione quando vengono sottoposte a compressione e taglio. È importante che nelle strutture composite irrigidite o sandwich, la pelle e le nervature non siano unidirezionali e che abbiano una struttura laminata composta da strati composti unidirezionali con differenti angoli di orientamento. Le caratteristiche meccaniche di questi laminati sono considerevolmente inferiori rispetto a quelle dei materiali compositi unidirezionali.

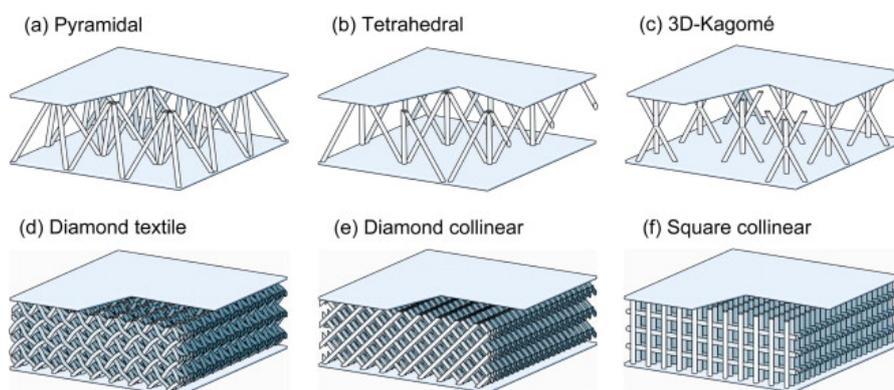


Figura 2.2: Diverse tipologie di pannelli sandwich con cuore in struttura lattice

Le strutture composite a lattice permettono di ottenere degli ottimi risultati per quanto riguarda la sostituzione di strutture metalliche convenzionali offrendo per esempio il miglioramento di alcuni parametri come un rapporto resistenza peso più elevato, flessibilità nel design, personalizzazione delle proprietà desiderate e la capacità di sostenere ambienti diversi. Le strutture lattice a guscio sono considerate come ottimi sostituti di semi gusci solidi o strutture a nido d'api fino ad ora considerate come le migliori soluzioni soprattutto in campo aerospaziale. Il concetto di struttura lattice rappresenta la griglia di nervature interconnesse costituite da fibre continue molto forti, rigide e tenaci che permettono di ottenere ottimi risultati in campo strutturale.

Le nervature che costituiscono una struttura possono essere disposte in differenti modi. La disposizione unidirezionale delle nervature permette di ottenere una buona tolleranza ai danni dovuti ad impatto, ottima resistenza alla delaminazione e propagazione delle crepe attraverso la griglia. Le nervature disposte in una struttura a griglia sono solitamente caricate nella direzione assiale per fornire la loro massima resistenza e rigidità. Le strutture reticolari composite a griglia/lattice possono offrire in questo modo un'ampia varietà di proprietà per diverse tipologie di parametri geometrici come la sezione trasversale delle nervature, spessore del laminato (o pelle), configurazione di una cella unitaria.

2.2 Strutture composite lattice

Negli ultimi decenni, le crescenti esigenze in termini di diminuzione di peso ed efficienza strutturale nell'industria aeronautica e aerospaziale hanno portato allo sviluppo di una nuova concezione di design per strutture a griglia: le strutture anisogrid composite lattice, in grado di sopportare alti carichi di compressione e allo stesso tempo mantenere dei notevoli livelli di rigidità. Queste caratteristiche consentono di ottenere importanti risparmi in termini di massa e una riduzione dei costi rispetto alle convenzionali strutture realizzate in alluminio.

Le strutture lattice possono normalmente presentarsi sotto forma di gusci cilindrici o conici, a seconda delle particolari esigenze. Essi sono composti da un modello regolare di celle reticolari elementari costruito da due sistemi di nervature: nervature elicoidali, inclinate rispetto alla curva meridiana del guscio con lo stesso angolo ma in direzioni opposte. Schemi geometrici unidirezionali con forma rettangolare trasversale: due serie fatte di celle esagonali o triangolari sono normalmente costruite attraverso la ripetizione delle celle lungo la curva meridiana del guscio e attorno al suo asse. Nello specifico, la scelta del tipo di cella reticolare elementare influisce sulla resistenza e sulla rigidità della struttura reticolare. In alcuni casi viene aggiunta una pelle, esterna o interna alle nervature, senza importanti caratteristiche strutturali ma solo per soddisfare un ruolo funzionale richiesto per il guscio reticolare.

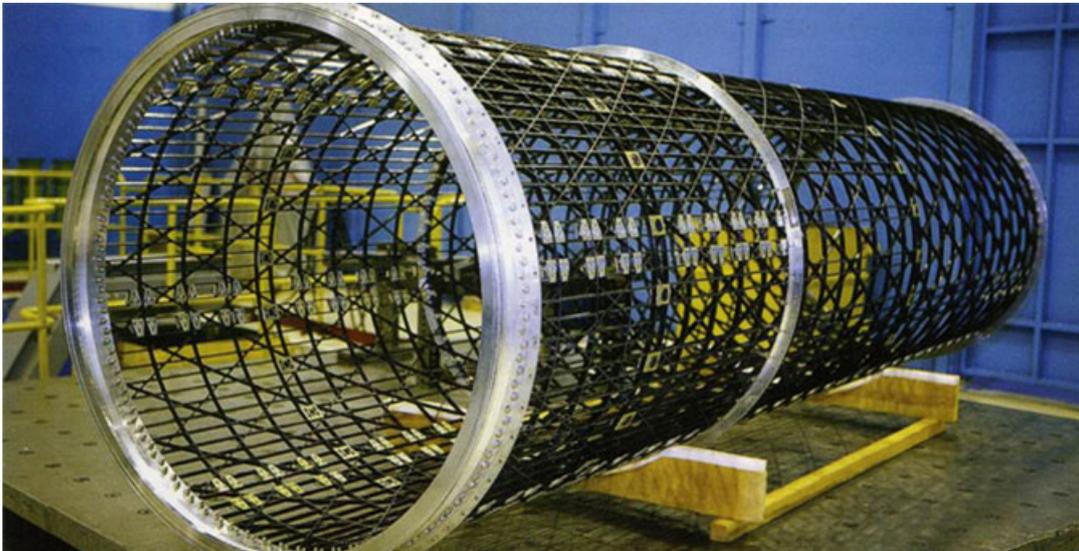


Figura 2.3: Esempio di struttura lattice di un guscio cilindrico

I gusci composti a griglia cilindrici e conici sono molto efficienti in termini strutturali e ampiamente utilizzati in varie strutture in campo aerospaziale, come negli interstadi di razzi, adattatori di carico utile per lanciatori di veicoli spaziali, nei componenti di fusoliera per velivoli e nei componenti di antenne spaziali dispiegabili.

2.3 Tecniche di produzione delle strutture composite lattice

2.3.1 Processo di avvolgimento libero e a secco

La produzione di questi tipi di strutture composite può essere classificata tramite diversi metodi e strumenti di lavorazione:

- metodo di avvolgimento (avvolgimento del filamento o posizionamento della fibra)
- tipo di stampo o mandrino
- tipo di ciclo di polimerizzazione della struttura

Il processo di produzione mira principalmente a fornire un'adeguata qualità e proprietà meccaniche per l'avvolgimento, con nervature a forma di croci o ellissi, di strutture coniche o cilindriche.

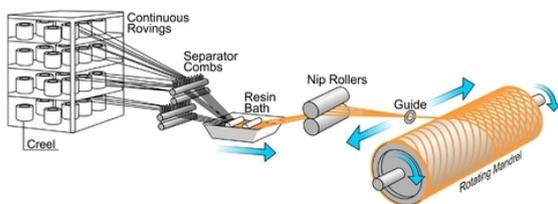


Figura 2.4: Schema processo filament winding

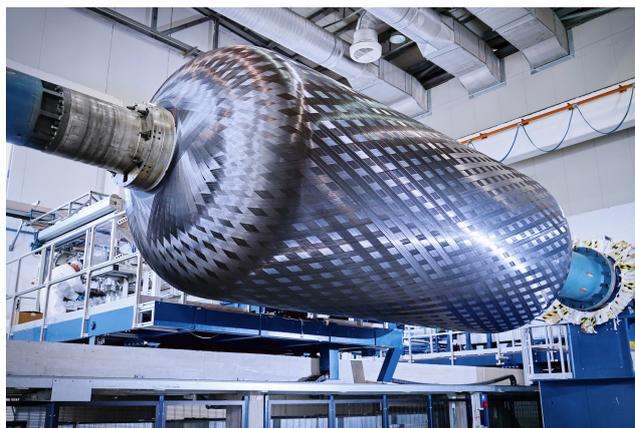


Figura 2.5: Esempio di componente ottenuto con filament winding

La produzione industriale di strutture reticolari composite inizia circa nel 1980 e ha attraversato tre fasi principali. Nella prima fase è stato utilizzato il cosiddetto avvolgimento libero. Nel processo di avvolgimento libero le nervature elicoidali, i nastri compositi, in contrasto con l'avvolgimento tradizionale che consisteva nel coprire completamente la superficie del mandrino, furono posti sulle sommità dei nastri dello strato precedente, mentre la pelle esterna era realizzata mediante avvolgimento circolare. Le strutture che vennero realizzate con avvolgimento libero hanno permesso di ottenere componenti con un'elevata efficienza di peso, ma la qualità delle nervature delle pelli era insoddisfacente.

Nella seconda fase, il processo è stato modificato e i nastri sono stati inseriti nelle scanalature del rivestimento in schiuma del mandrino. Questo processo venne utilizzato per fabbricare le strutture che necessitavano pelli su due lati. Innanzitutto, la pelle interna veniva avvolta sul mandrino. In secondo luogo, la schiuma veniva

spruzzata sulla pelle e lavorata per fornire uno spessore costante desiderato del rivestimento in schiuma e per realizzare i solchi in esso per le nervature elicoidali e circolari.

Terzo, le nervature venivano avvolte negli incavi realizzati precedentemente e infine la struttura era rivestita con la pelle esterna. La struttura sandwich che veniva ottenuta era caratterizzata da un'elevata capacità di carico e da elevate proprietà di isolamento termico e acustico.

Le nervature potevano essere avvolte anche nei solchi del rivestimento termoplastico del mandrino o nelle scanalature ricavate nell'anima metallica.

Il processo moderno più utilizzato per fabbricare strutture reticolari senza una pelle o con una pelle esterna utilizza un rivestimento elastico con scanalature formate in gomma siliconica. Il mandrino ricoperto di rivestimento in gomma è mostrato nella prima figura che segue. Come si può vedere in questa figura, il sistema regolare di scanalature elicoidali è completato da un'altra scanalatura elicoidale con un'angolazione diversa. Questa scanalatura fornisce il continuo avvolgimento delle nervature del cerchio - il nastro passa da una scanalatura del cerchio a quella adiacente che segue l'ulteriore scanalatura elicoidale. Viene poi realizzata una pelle esterna unidirezionale che farà da base al sistema di nervature elicoidali realizzate in precedenza. Una volta terminata la struttura reticolata, viene in seguito polimerizzata, il mandrino è rimosso e il rivestimento in gomma viene estratto.

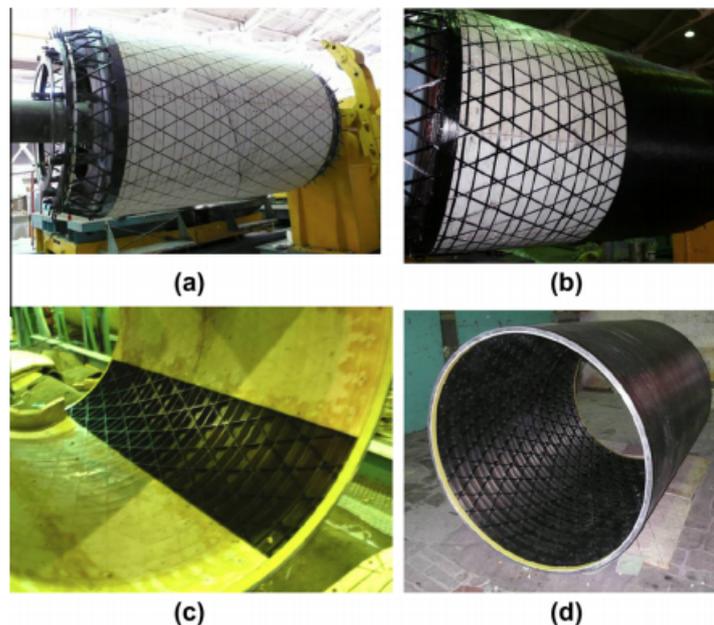


Figura 2.6: Produzione di strutture composite lattice

Nell'area desiderata, grazie all'ausilio di un processo di avvolgimento a secco, i nastri preimpregnati vengono infatti posizionati braccio robotico. Questo è anche chiamato posizionamento delle fibre. Questi processi vengono generalmente effettuati in due modi: l'avvolgimento libero convenzionale e l'avvolgimento guidato tramite solchi. Sul mandrino composte da vari materiali è possibile eseguire l'avvolgimento guidato tramite scanalature. Il mandrino in metallo (alluminio o acciaio) è costituito da solchi elicoidali e circolari. I mandrini devono essere realizzati in più pezzi. Quindi, possono essere assemblati su un albero. Hanno un'adeguata stabilità dimensionale e sono riutilizzabili (cioè possono essere usati più volte). Allo stesso

tempo, sono però molto costosi e la loro produzione richiede molto tempo. I mandrini possono essere realizzati anche tramite gessi stampati su un albero metallico. Dopo aver creato le scanalature e aver effettuato l'avvolgimento, per estrarre la struttura reticolare ottenuta, il gesso deve essere separato dalla struttura meccanicamente o tramite lavaggio con acqua.

2.3.2 Processo di avvolgimento robotico

Il processo di fabbricazione delle strutture lattice rappresenta uno degli aspetti più impegnativi dell'intero progetto. È quindi comprensibile aspettarsi metodi di progettazione e fabbricazione alquanto complessi che richiedono a volte approcci innovativi, fino ad ora mai provati. Uno dei metodi innovativi è suddiviso principalmente in due processi: strategia di avvolgimento robotico ed in seguito infusione e polimerizzazione di resina. Il primo processo viene eseguito partendo dalla formazione di un unico tappetino di silicone e gomma usando uno stampo espanso con le scanalature che andranno a formare le future nervature. Il tappetino è realizzato a temperatura ambiente e viene in seguito fissato al mandrino in alluminio. La strategia di avvolgimento robotico per formare l'intreccio di nervature reticolari è basata sull'avvolgimento parallelo e su numerosi passaggi intorno ai perni.

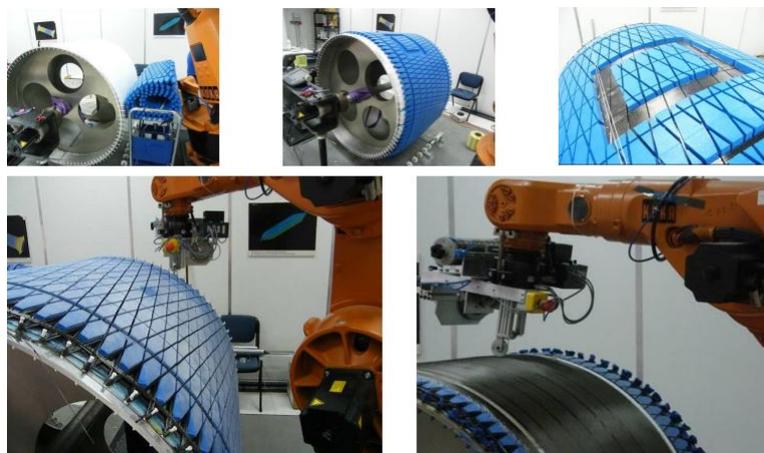


Figura 2.7: Processo di avvolgimento robotico e infusione di resina

L'avvolgimento parallelo significa che vengono contemporaneamente posate le nervature del cerchio mediante diverse bobine. I passaggi multipli intorno ai perni fanno sì che il percorso di deposizione tra il perno iniziale e il perno finale di ciascuna spirale elicoidale giri due volte in direzioni opposte. Questo è stato realizzato in modo da poter mettere due file di solchi l'una accanto all'altra e raggiungere la larghezza nominale desiderata per le nervature elicoidali. Dopo il completamento di ogni strato interlacciato desiderato e sono depositati manualmente e alternativamente con orientato di 0° e 90° rispetto all'asse del guscio, in modo da nervatura circolare ed elicoidale, vengono depositati dei strati di tessuto unidirezionale in fibra di carbonio (a forma di cerotti precedentemente tagliati della dimensione ottenere i telai rinforzati con il sistema di nervature. La preforma secca di nervature interconnesse viene poi infusa con resina liquida all'interno di un sacco dove è stato

precedentemente fatto il vuoto ed in seguito il tutto viene sigillato ed inserito in un forno a 180°C.

2.3.3 Additive Manufacturing e Selective Laser Melting

La proliferazione dell'additive manufacturing alla fine degli anni '90 e all'inizio degli anni 2000 ha creato molta attenzione da parte della ricerca scientifica per la fabbricazione di strutture reticolari, in particolare il selective laser melting (SLM). Il processo di selective laser melting (SLM) è una forma di additive manufacturing che utilizza la powder bed fusion (PBF-fusione di letto di polveri) in cui i componenti metallici vengono fabbricati a partire dai dati CAD mediante la fusione a strati di polveri metalliche utilizzando una fonte di energia laser. Durante il processo di selective laser melting, uno strato di polvere metallica viene distribuito sulla superficie di una piastra di costruzione. Un galvanometro dirige un raggio laser su questa superficie per fondere la polvere dove necessario, fondendola con lo strato sottostante. La piastra viene quindi abbassata e questo processo viene ripetuto fino al completamento della fabbricazione. Il powder bed fusion è la tecnica che meglio si addice per la produzione di reticoli metallici poiché i metodi di additive manufacturing metallici alternativi come la deposizione diretta del metallo non forniscono una precisione geometrica sufficiente ed adeguata alla creazione di strutture lattice.

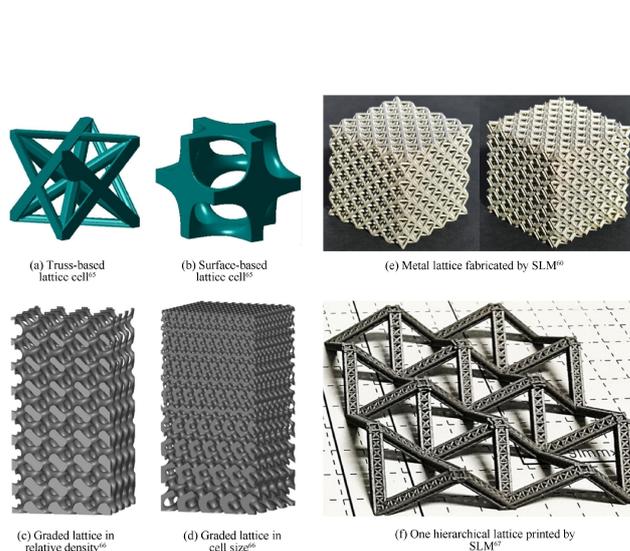


Figura 2.8: Campioni realizzati con SLM

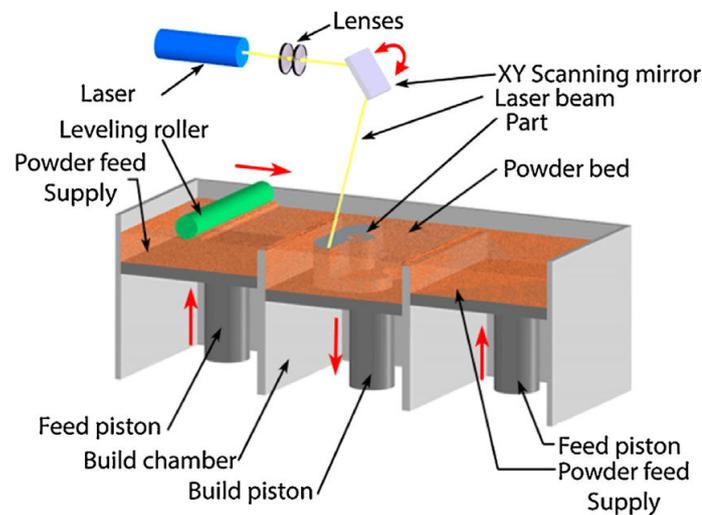


Figura 2.9: Processo di SLM

Le strutture lattice create tramite selective laser melting sono ancora oggetto di studio soprattutto per quello che riguarda il comportamento meccanico delle strutture reticolari e la microstruttura e i potenziali difetti geometrici derivanti dal processo di fabbricazione e i loro effetti sulle prestazioni. I vantaggi delle strutture realizzate mediante selective laser melting includono la capacità di produrre componenti complessi quasi completamente densi con alta risoluzione e proprietà superiori rispetto a quelli prodotti con metodi tradizionali come la fusione e la forgiatura. Tuttavia, esistono anche alcuni svantaggi come la dimensione minima delle caratteristiche del

componente che è vincolata dalla dimensione del raggio laser, i difetti microstrutturali e metallurgici ereditati dal processo di fabbricazione che possono essere difficili da valutare e le distorsioni della struttura dei componenti a causa di tensioni residue derivanti da temperature non totalmente omogenee e dal rapido raffreddamento durante la fabbricazione. Inoltre la rimozione della polvere è un'altra limitazione di questo processo in quanto i vuoti interni chiusi non possono essere prodotti a causa dell'intrappolamento della polvere all'interno del reticolo della struttura.

2.4 Applicazioni delle strutture lattice nel campo aerospaziale

Le applicazioni delle strutture lattice/reticolari sono molteplici, soprattutto nel mondo aerospaziale. Possiamo elencarne soffermandoci su alcuni dettagli:

- stadi di lanciatori, serbatoi, adattatori di carico utile, carenatura di lanciatori
- sezioni di fusoliera di velivoli, strutture alari e longheroni
- travi di coda di elicotteri
- corpi tubulari di telescopi spaziali
- strutture di sottomarini

2.4.1 Applicazioni per lanciatori spaziali

Le strutture lattice sono ampiamente utilizzate da decenni nel settore dei lanciatori. Sia l'agenzia spaziale russa che quella europea le utilizzano visto il loro vantaggio in termini di risparmio di peso ed efficienza strutturale. Vengono impiegate soprattutto nella creazione di adattatori di carico utile che provvedono ad interfacciare i stadi di un lanciatore commerciale con la sua ogiva dove di solito viene riposto il carico utile da portare in orbita. Molto spesso, gli adattatori sono prodotti a forma di gusci conici a causa della differenza di diametro degli attacchi ad anello tra i vari stadi di un razzo o di un velivolo spaziale.



Figura 2.10: Adattatore di carico utile metallico ed in composito a griglia

Gli adattatori esistenti sono realizzati sotto forma di gusci conici metallici di spessore variabile, di traverse irrigidite, di pannelli sandwich di alluminio o di gusci

compositi in fibra di carbonio e resina epossidica. Possono essere realizzati anche in forma di struttura reticolare costituita da un sistema di nervature (Anisogrid lattice). La struttura è generalmente realizzata con un continuo avvolgimento di filamenti durante il quale viene trainata la fibra di carbonio impregnata di resina epossidica e vengono inseriti nelle scanalature formate nel rivestimento elastico del mandrino. L'efficienza in termini di peso è importante e grazie a queste strutture è possibile ridurre il peso degli adattatori da 40% a 60 % e ridurre i costi di produzione del 30% rispetto ad una struttura tradizionale in alluminio.

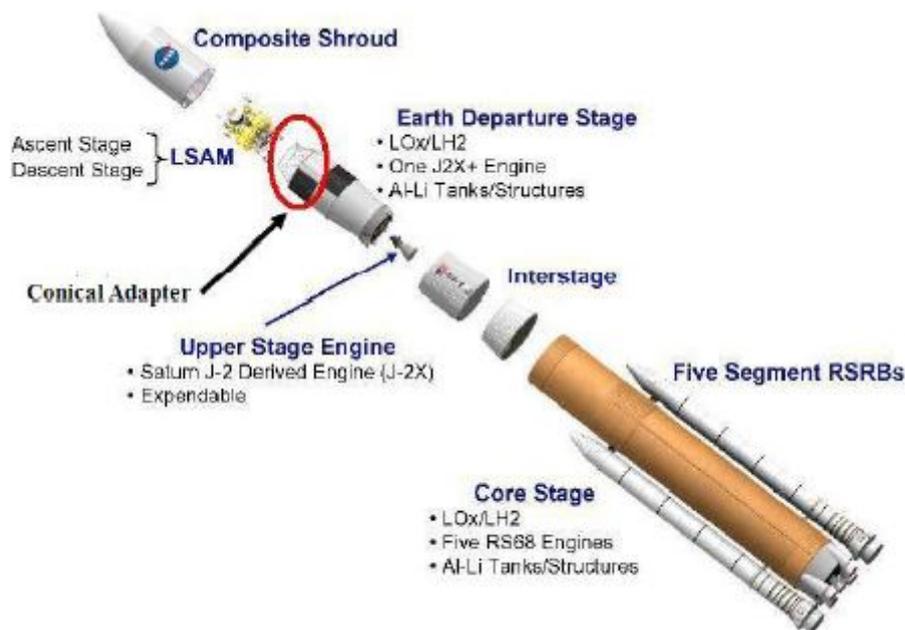


Figura 2.11: Posizionamento dell'adattatore di carico utile

Le caratteristiche meccaniche delle strutture a griglia sono state verificate e validate sperimentalmente e tramite la teoria degli elementi finiti. Il Lanciatore russo Proton-M con adattatori lattici è un esempio lampante della validità di tali strutture: sono stati realizzati con successo circa 39 lanci con rilascio di un carico utile come satelliti.

2.4.2 Applicazioni per velivoli aerospaziali

Un'elevata resistenza specifica e una buona rigidità dei moderni materiali compositi particolarmente quelli realizzati in fibra di carbonio e resina epossidica, hanno permesso un considerevole progresso nell'utilizzo di questi ultimi nelle fusoliere di velivoli commerciali e spaziali. Le strutture reticolari composite impiegate per velivoli aerospaziali possono essere suddivise in due gruppi: il primo comprende i corpi dei velivoli sollecitati durante le fasi di lancio e sono quindi progettati a seconda di vincoli di rigidità e rigidità con il minor peso possibile, mentre il secondo raggruppa tutti quei velivoli con vengono impiegati nello spazio come i satelliti e hanno per lo più vincoli legati sempre alla loro massa ma anche a parametri come la termostabilità dei materiali con i quali sono costruiti. I materiali compositi venivano impiegati per le strutture delle superfici mobili di controllo come gli impennaggi verticali ed orizzontali oppure per le porte del vano del carrello di atterraggio, ma

visto la loro efficacia strutturale e mano a mano che sono stati migliorati i processi di fabbricazione, il loro impiego è stato allargato anche a parti molto più sollecitate come le ali o la fusoliera. Tuttavia, il risparmio di peso del 10-20% associato alla sostituzione delle strutture in alluminio con compositi epossidici non è abbastanza per giustificare un impiego massiccio di questi materiali nella totalità delle strutture aerospaziali.

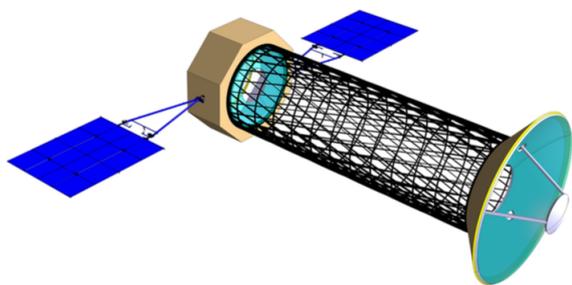


Figura 2.12: Struttura composta reticolare di un satellite

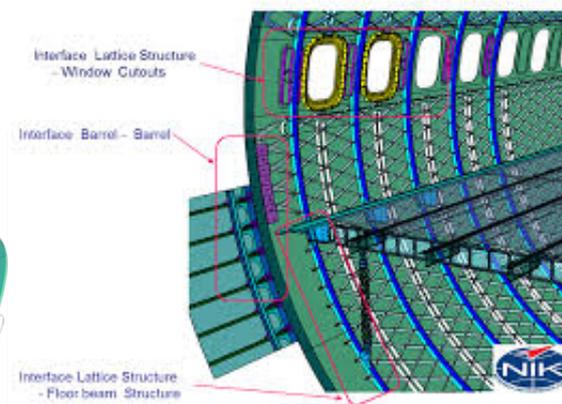


Figura 2.13: Fusoliera aerea con struttura lattice

Viene quindi impiegata una struttura composta a griglia denominata Geodesic Anisogrid simili a quelle utilizzate sui velivoli militari durante la Seconda Guerra Mondiale. I velivoli disponevano di una struttura composta da un sistema di nervature elicoidali in alluminio ricoperte con una pelle che però molto spesso era soggetta a fratture e non garantiva un'adeguata stabilità della struttura. Grazie al processo di avvolgimento di fibre impregnate di resina, è ora possibile creare strutture integrali composte a griglia dove le nervature, le pelli, le aperture per finestre e porte vengono create in un solo processo produttivo garantendo una struttura molto più solida con diminuzioni di peso totali della struttura finale fino al 40% rispetto a prototipi in alluminio. Inoltre, le strutture lattice hanno il vantaggio di avere piccoli spessori (dai 20 ai 30 mm) che permettono di collegarle con giunti metallici senza avere penalizzazioni di aumento di peso.

Un'altra applicazione delle strutture lattice nel campo aerospaziale riguarda le ali di un velivolo. L'idea innovativa che sta prendendo piede nella fabbricazione delle ali è il concetto di ala adattabile: la forma dell'ala viene modificata continuamente per soddisfare ogni condizione di volo desiderata. Questo cambiamento di morfologia può avvenire in molti modi: lunghezza della corda, angolo di freccia oppure profilo alare. Queste modifiche alla propria forma durante le varie fasi di volo ha come scopo quello di ridurre per esempio il consumo di carburante riducendo la resistenza dell'ala nelle diverse modalità di volo.

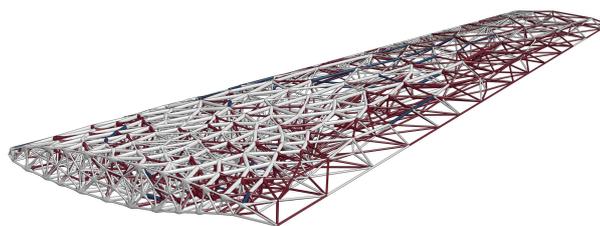


Figura 2.14: Concept di ala con struttura lattice a forma variabile

In natura la struttura interna delle ali di qualsiasi volatile è formata da una struttura regolare di cavità racchiuse tra diverse nervature ossee, queste strutture naturali frutto dell'evoluzione animale, ricordano le strutture lattice, le quali possono essere prese d'esempio per la progettazioni di ali moderne nei velivoli. Questa tipologia di struttura permette di diminuire la massa di tali ali sempre mantenendo la loro resistenza flessibilità e efficienza di volo. Come si vede dalle figure riportate sopra, la struttura lattice con le sue molteplici e complesse geometrie può essere un'ottima innovazione nella creazione di ali sempre più differenti tra loro, si possono ottenere un'infinità di reticoli di ogni forma per avere risultati soddisfacenti in termini di resistenza a flessione e compressione, si possono ottenere strutture alari sempre più leggere che riescono a soddisfare tutti i requisiti di volo necessari a mantenere in volo anche i velivoli più grandi e pesanti rispondendo positivamente ai carichi e alle sollecitazioni sottoposti durante le fasi di atterraggio, decollo e crociera.

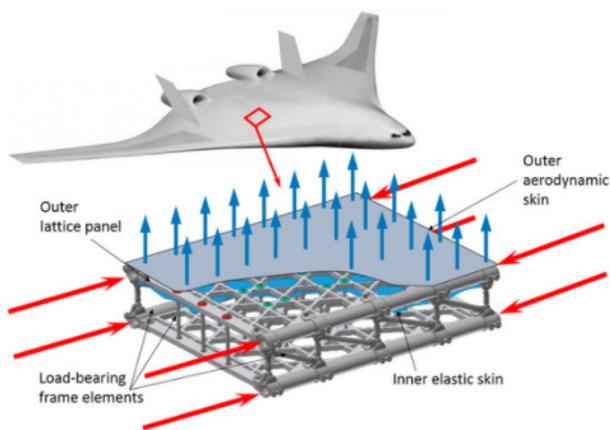


Figura 2.15: Concept di velivolo con pannelli in struttura lattice

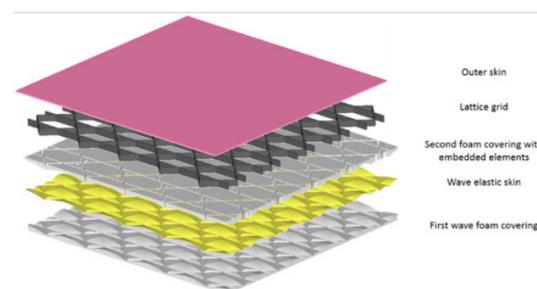


Figura 2.16: Composizione di un pannello innovativo in struttura lattice

In futuro la creazione di velivoli commerciali di tipo "blended wing body" come nella figura sopra a sinistra, richiederà sempre di più materiali innovativi e performanti in modo da ottenere strutture all'avanguardia. La combinazione di più tipologie di elementi strutturali di diversa natura e configurazione permetterà di trarre enormi vantaggi, l'esempio del pannello sandwich riportato nella figura qui sopra dove uno strato è formato da una rete di nervature che andranno ad incastrarsi nelle scanalature coincidenti di uno strato realizzato in schiuma che fungerà da alloggiamento per lo strato in struttura lattice. I velivoli con questa configurazione alare

richiedono strutture sempre più innovative dal punto di vista di leggerezza, resistenza e flessibilità. Questo tipo di velivoli potrebbe avere una sostanziale diminuzione nel consumo di carburante (circa il 10 %) grazie ad una migliore efficienza aerodinamica. Ovviamente questa configurazione può essere ottenuta grazie all'innovazione nel campo dei pannelli sandwich che compongono le ali e la fusoliera adottando le strutture lattice e adattandola ad ogni esigenza.

2.5 Parametri delle strutture lattice

2.5.1 Proprietà geometriche

Vengono progettate e prodotte strutture composite lattice nel campo aerospaziali di svariate forme e geometrie a seconda della loro applicazione e dei requisiti operativi richiesti. Una di queste strutture è il pannello lattice cilindrico. Tale pannello, composto da irrigidimenti curvi e dritti, potrebbe fare parte di un componente più grande, ad esempio un guscio cilindrico chiuso, o potrebbe funzionare come un componente strutturale separato.

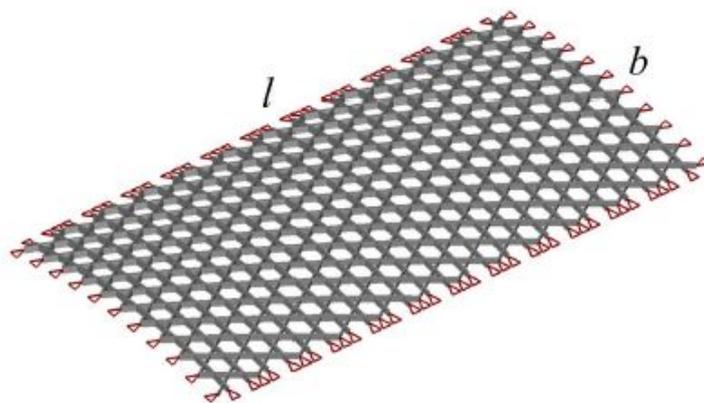


Figura 2.17: Pannello composito cilindrico in struttura lattice con bordi fissati

In molti di questi casi, la struttura lattice/reticolare può essere modellata come un pannello con i bordi fissati e bloccati. Spesso nella pratica, l'analisi strutturale modale deve essere eseguita come una parte importante del processo di progettazione. Normalmente, in questa analisi vengono determinate le frequenze e le modalità di vibrazione utilizzando un metodo degli elementi finiti. L'analisi degli elementi finiti aiuta a studiare un comportamento dinamico del pannello reticolare/lattice avente varie combinazioni di parametri geometrici e di rigidità. Questi parametri dovrebbero soddisfare determinati criteri formulati nella fase di progettazione.

Consideriamo un $l \times b$ pannello cilindrico composito in struttura lattice come mostrato nella figura seguente. La struttura lattice del pannello è composta da due set simmetrici ($+\phi$ e $-\phi$) di nervature elicoidali e da un sistema di segmenti trasversali di nervature circolari. Le nervature trasversali passano attraverso il punto medio dei segmenti delle nervature elicoidali. Le estremità delle nervature a spirale di ogni set si uniscono ai bordi del pannello creando una regolare struttura lattice. Le estremità delle nervature, sia elicoidali che trasversali, sono fissate ai bordi del pannello.

Le strutture lattice del pannello in questione sono caratterizzate dai seguenti parametri geometrici:

- l'altezza dell'intersezione di diverse sezioni delle nervature chiamata h
- l'angolo di orientamento delle nervature elicoidali ϕ
- lo spessore delle nervature elicoidali chiamato δ_s
- lo spessore delle nervature circolari chiamato δ_t

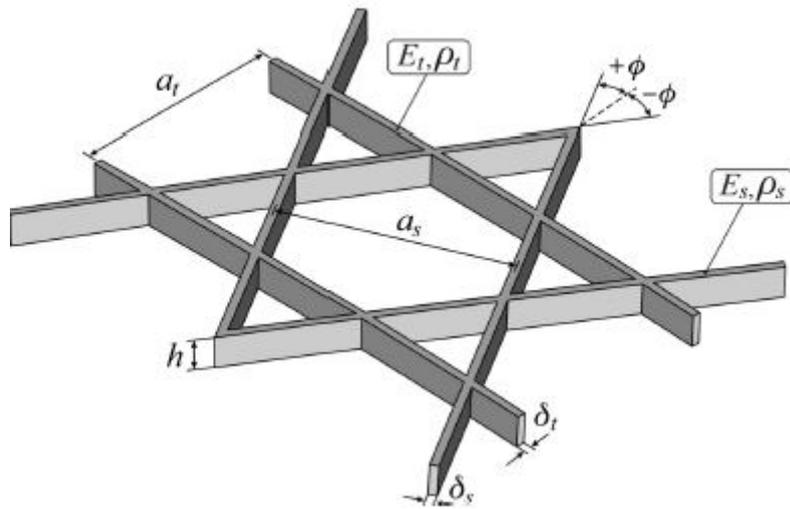


Figura 2.18: Parametri geometrici delle strutture lattice

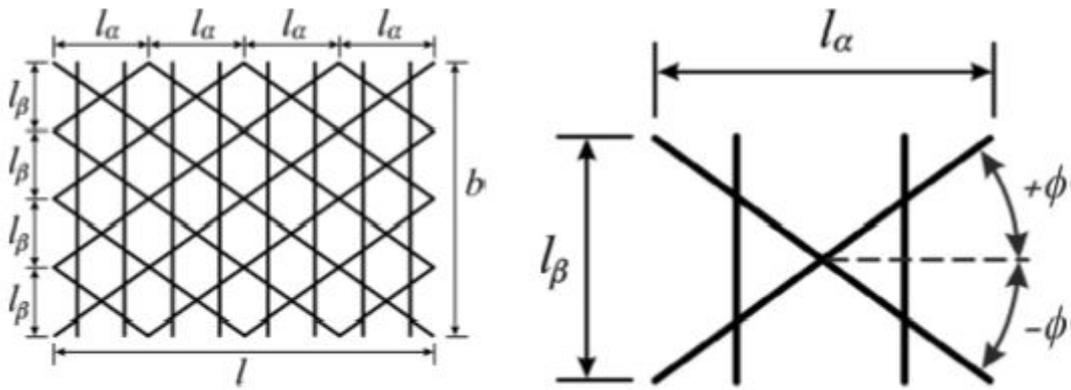


Figura 2.19: Geometria delle celle con tre famiglie di nervature

- la distanza tra le nervature elicoidali chiamata a_s
- la distanza tra le nervature trasversali chiamata a_t

Le nervature elicoidali e trasversali sono ottenute attraverso un materiale composito che a sua volta è caratterizzato da dei moduli elastici E_s e E_t , da degli spessori δ_s e δ_t .

Le distanze a_s e a_t tra le nervature elicoidali e trasversali si calcolano nel seguente modo:

$$l_\beta = l_s = \frac{b}{n_s} \quad (2.1)$$

$$l_\alpha = l_t = \frac{l_s}{\tan(\phi)} = \frac{l}{n_t} \quad (2.2)$$

$$l_h = \frac{l_t}{2 \cos(\phi)} \quad (2.3)$$

$$a_s = \frac{b}{n_s} \cos(\phi) = l_s \cos(\phi) \quad (2.4)$$

$$a_t = \frac{b}{2n_s \tan(\phi)} = \frac{l_s}{2 \tan(\phi)} = \frac{l_t}{2} \quad (2.5)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\text{rounding}\left(\frac{l}{l_s} \tan \phi_i\right)}{\frac{l}{l_s}}\right) \quad (2.6)$$

dove n_s è il numero di nervature elicoidali in una direzione ($+\phi$ o $-\phi$) localizzate sul lato b del pannello.

2.5.2 Proprietà del materiale di una nervatura

Introduciamo la legge di Hooke in forma compatta che verrà trattata nel capitolo seguente andando ad esplicitare i legami esistenti tra le tensioni e le deformazioni applicate ai materiali. In questa prima parte dedicata alle strutture lattice, studieremo come variano le costanti elastiche C_{ij} con la geometria e la disposizione del reticolo delle nervature della struttura presa in esame. La legge di Hooke si esprime come:

$$\boldsymbol{\sigma} = [C]\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.7)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}^T$ è il vettore contenente le componenti di tensione e $\boldsymbol{\epsilon}^T$ è il vettore contenente le componenti di deformazione e

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

è una matrice 6x6 contenente le costanti elastiche (o coefficienti di rigidità) del materiale. Delle 36 costanti della matrice $[C]$ soltanto 21 sono indipendenti in quanto considerazioni sull'energia elastica garantiscono che questa sia simmetrica. Un materiale è detto isotropo se caratterizzato da proprietà meccaniche uniche e indipendenti in tutte le direzioni, ortotropo se caratterizzato da proprietà meccaniche uniche e indipendenti in tre direzioni reciprocamente perpendicolari. Per un materiale isotropo o ortotropo, con angolo di ortotropia pari a 0° o 90° , il numero di costanti C_{ij} scende da 21 a 9 e, rispetto alla scrittura generale, la matrice $[C]$ assume la forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Si ipotizza che reagisca solo nella direzione della nervatura (tipo problema del filo):

$$C_{11} = C_{33} = E \quad (2.10)$$

$$C_{44} = G \quad (2.11)$$

$$C_{22} = C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_{55} = C_{66} = 0 \quad (2.12)$$

Nel caso di materiale ortotropo equivalente per lo strato di rinforzo nervato otteniamo le seguenti formule per le costanti elastiche C_{ij} :

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\delta_i}{a_i} \quad (2.13)$$

$$C_{11} = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\delta_i}{a_i} \cos^4(\phi_i) \quad (2.14)$$

$$C_{12} = C_{66} = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\delta_i}{a_i} \sin^2(\phi_i) \cos^2(\phi_i) \quad (2.15)$$

$$C_{22} = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\delta_i}{a_i} \sin^4(\phi_i) \quad (2.16)$$

$$C_{44} = \sum_{i=1}^n G_i \frac{\delta_i}{a_i} \cos^2(\phi_i) \quad (2.17)$$

$$C_{55} = \sum_{i=1}^n G_i \frac{\delta_i}{a_i} \sin^2(\phi_i) \quad (2.18)$$

$$C_{33} = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\delta_i}{a_i} \quad (2.19)$$

Se le famiglie di nervature sono tre $n = 3$ con i seguenti dati:

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = \phi, \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad a_1 = a_2, \quad a_3 = a_t, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_s, \quad \delta_3 = \delta_t \quad (2.20)$$

dove ϕ_i , a_i , δ_i sono l'orientazione, la spaziatura e lo spessore della i -esima famiglia di nervature, si ha:

$$\rho = \sum_{i=1}^3 \rho_i \frac{\delta_i}{a_i} = 2\rho_s \frac{\delta_s}{a_s} + \rho_t \frac{\delta_t}{a_t} \quad (2.21)$$

$$C_{11} = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\delta_i}{a_i} \cos^4(\phi_i) = 2E_s \frac{\delta_s}{a_s} \cos^4(\phi) \quad (2.22)$$

$$C_{12} = C_{66} = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\delta_i}{a_i} \sin^2(\phi_i) \cos^2(\phi_i) = 2E_s \frac{\delta_s}{a_s} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) \quad (2.23)$$

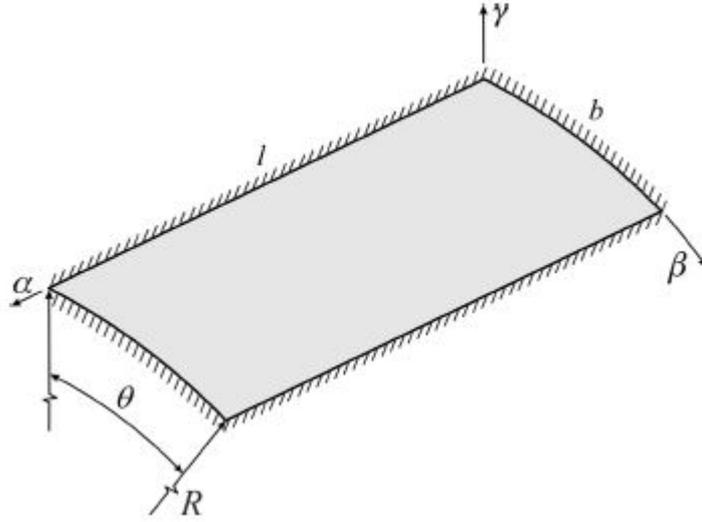


Figura 2.20: Pannello ortotropo, continuo e cilindrico con bordi fissati

$$C_{22} = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\delta_i}{a_i} \sin^4(\phi_i) = 2E_s \frac{\delta_s}{a_s} \sin^4(\phi) + E_t \frac{\delta_t}{a_t} \quad (2.24)$$

$$C_{44} = \sum_{i=1}^3 G_i \frac{\delta_i}{a_i} \cos^2(\phi_i) = 2G_s \frac{\delta_s}{a_s} \cos^2(\phi) \quad (2.25)$$

$$C_{55} = \sum_{i=1}^3 G_i \frac{\delta_i}{a_i} \sin^2(\phi_i) = 2G_s \frac{\delta_s}{a_s} \sin^2(\phi) + G_t \frac{\delta_t}{a_t} \quad (2.26)$$

$$C_{33} = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\delta_i}{a_i} = 2E_s \frac{\delta_s}{a_s} + E_t \frac{\delta_t}{a_t} \quad (2.27)$$

Normalmente, i pannelli cilindrici in struttura lattice hanno strutture dove la distanza a_s è di molto inferiore al lato b . Un'alta densità di posizionamento di nervature permette l'utilizzo del modello continuo di guscio nello studio del comportamento dinamico dei pannelli (vedi [6] e [7]). In accordo con questo approccio, il pannello cilindrico in struttura lattice viene modellato come un guscio continuo caratterizzato da una membrana equivalente e da rigidità alla flessione. Introduciamo quindi la superficie di un pannello con raggio R e un angolo centrale θ del componente curvilineo $\alpha\beta\gamma$ come mostrato nella figura che segue.

Le costanti elastiche possono essere quindi riscritte con le formule generali seguenti:

$$\overline{C}_{11} = C_{11} \cos^4(\theta) + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{22} \sin^4(\theta) \quad (2.28)$$

$$\overline{C}_{12} = C_{12} \cos^4(\theta) + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{12} \sin^4(\theta) \quad (2.29)$$

$$\overline{C}_{13} = C_{13} \cos^2(\theta) + C_{23} \sin^2(\theta) \quad (2.30)$$

$$\overline{C}_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \quad (2.31)$$

$$\overline{C}_{22} = C_{22} \cos^4(\theta) + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{11} \sin^4(\theta) \quad (2.32)$$

$$\overline{C}_{23} = C_{23} \cos^2(\theta) + C_{13} \sin^2(\theta) \quad (2.33)$$

$$\overline{C}_{26} = (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \quad (2.34)$$

$$\overline{C}_{33} = C_{33} \quad (2.35)$$

$$\overline{C}_{36} = (C_{13} - C_{23}) \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (2.36)$$

$$\overline{C}_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{66} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))^2 \quad (2.37)$$

$$\overline{C}_{44} = C_{44} \cos^2(\theta) + C_{55} \sin^2(\theta) \quad (2.38)$$

$$\overline{C}_{45} = (C_{44} - C_{55}) \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (2.39)$$

$$\overline{C}_{55} = C_{55} \cos^2(\theta) + C_{44} \sin^2(\theta) \quad (2.40)$$

$$\overline{C}_{14} = \overline{C}_{15} = \overline{C}_{24} = \overline{C}_{25} = \overline{C}_{34} = \overline{C}_{35} = \overline{C}_{46} = \overline{C}_{56} = 0 \quad (2.41)$$

Andiamo ora ad effettuare una prima semplificazione delle relazioni scritte precedentemente:

$$\overline{C}_{11} = C_{11} \cos^4(\theta) + C_{22} \sin^4(\theta) \quad (2.42)$$

$$\overline{C}_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \quad (2.43)$$

$$\overline{C}_{13} = 0 \quad (2.44)$$

$$\overline{C}_{16} = (C_{11} - 2C_{66}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) (-C_{22} + 2C_{66}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \quad (2.45)$$

$$\overline{C}_{22} = C_{22} \cos^4(\theta) + C_{11} \sin^4(\theta) \quad (2.46)$$

$$\overline{C}_{23} = 0 \quad (2.47)$$

$$\overline{C}_{26} = (-C_{22} + 2C_{66}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (C_{11} - 2C_{66}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \quad (2.48)$$

$$\overline{C_{33}} = C_{33} \quad (2.49)$$

$$\overline{C_{36}} = 0 \quad (2.50)$$

$$\overline{C_{66}} = (C_{11} + C_{22}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{66}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))^2 \quad (2.51)$$

$$\overline{C_{44}} = C_{44} \cos^2(\theta) + C_{55} \sin^2(\theta) \quad (2.52)$$

$$\overline{C_{45}} = (C_{44} - C_{55}) \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (2.53)$$

$$\overline{C_{55}} = C_{55} \cos^2(\theta) + C_{44} \sin^2(\theta) \quad (2.54)$$

$$\overline{C_{14}} = \overline{C_{15}} = \overline{C_{24}} = \overline{C_{25}} = \overline{C_{34}} = \overline{C_{35}} = \overline{C_{46}} = \overline{C_{56}} = 0 \quad (2.55)$$

Infine, otteniamo con questi ultimi passaggi i valori delle espressioni delle costanti elastiche:

$$\overline{C_{11}} = C_{11} \cos^4(\theta) \quad (2.56)$$

$$\overline{C_{12}} = C_{11} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \quad (2.57)$$

$$\overline{C_{16}} = C_{11} \cos^3(\theta) \sin(\theta) = 0 \quad (2.58)$$

$$\overline{C_{22}} = C_{11} \sin^4(\theta) \quad (2.59)$$

$$\overline{C_{26}} = C_{11} \cos(\theta) \sin^3(\theta) = 0 \quad (2.60)$$

$$\overline{C_{33}} = C_{33} \quad (2.61)$$

$$\overline{C_{66}} = C_{11} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \quad (2.62)$$

$$\overline{C_{44}} = C_{44} \cos^2(\theta) \quad (2.63)$$

$$\overline{C_{55}} = C_{44} \sin^2(\theta) \quad (2.64)$$

$$\overline{C_{14}} = \overline{C_{15}} = \overline{C_{24}} = \overline{C_{25}} = \overline{C_{34}} = \overline{C_{35}} = \overline{C_{46}} = \overline{C_{56}} = \overline{C_{45}} = \overline{C_{36}} = \overline{C_{23}} = \overline{C_{13}} = 0 \quad (2.65)$$

In conclusione otteniamo:

$$\overline{C_{11}} = C_{11} \cos^4(\theta) \quad (2.66)$$

$$\overline{C}_{12} = C_{11} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \quad (2.67)$$

$$\overline{C}_{22} = C_{11} \sin^4(\theta) \quad (2.68)$$

$$\overline{C}_{33} = C_{33} \quad (2.69)$$

$$\overline{C}_{66} = C_{11} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \quad (2.70)$$

$$\overline{C}_{44} = C_{44} \cos^2(\theta) \quad (2.71)$$

$$\overline{C}_{55} = C_{44} \sin^2(\theta) \quad (2.72)$$

$$\overline{C}_{14} = \overline{C}_{15} = \overline{C}_{24} = \overline{C}_{25} = \overline{C}_{34} = \overline{C}_{35} = \overline{C}_{46} = \overline{C}_{56} = \overline{C}_{45} = \overline{C}_{36} = \overline{C}_{23} = \overline{C}_{13} = \overline{C}_{16} = \overline{C}_{26} = 0 \quad (2.73)$$

Capitolo 3

Modelli Numerici: Shell 3D, 2D FEM e GDQ

3.1 Modello a guscio

Molti sistemi meccanici e strutture complesse coinvolgono parti di piastre o gusci la cui principale caratteristica è quella di avere una dimensione caratteristica (quella relativa allo spessore) molto trascurabile rispetto agli altri parametri (dimensioni del piano come lunghezza e larghezza). Al fine di analizzare tali strutture come travi, piastre e gusci sono state sviluppate alcune teorie in meccanica dei solidi ed estese successivamente a molti altri domini fisici, come il calcolo di problemi di flussi termici o elettromagnetici nei laminati. Per queste teorie vengono introdotte opportune ipotesi cinematiche e meccaniche sull'evoluzione delle soluzioni come la possibilità di trascurare lo spessore della piastra (guscio) in modo da permettere la riduzione del generale problema meccanico in 3D ad un 2D che coinvolge le sole coordinate nel piano. Tuttavia, in molti casi, quando si affrontano alcuni problemi fisici complessi come fenomeni di comportamento anelastici, la validità di alcune ipotesi in grado di ridurre i modelli dal 3D al 2D viene messa in dubbio e di conseguenza anche l'accuratezza di ottenere risultati soddisfacenti.

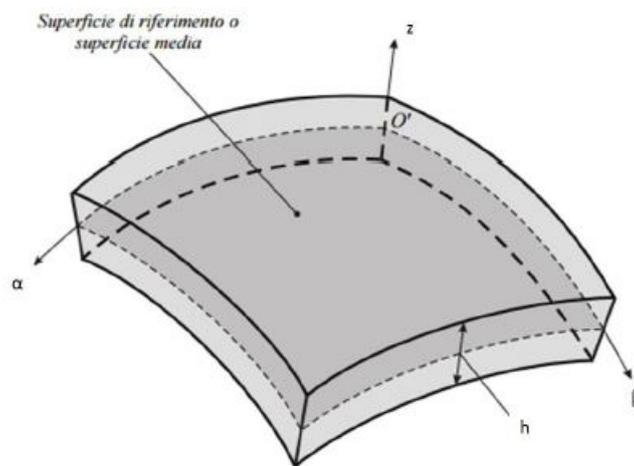


Figura 3.1: Sistema di riferimento di un tipico guscio

Il guscio è generato da un segmento l che muovendosi su una superficie Ω_0 spazza tutti i punti mantenendosi normale ad essa. Nelle due direzioni in cui la superficie

Ω_0 si sviluppa è possibile valutare i valori assunti dai raggi di curvatura R_α e R_β : nel caso in cui uno solo dei raggi di curvatura sia diverso da infinito, si parla di pannello cilindrico; viceversa, se entrambi i raggi hanno valore finito, allora si parla di pannello sferico. Le due superfici generate dagli estremi inferiori e superiori del segmento l sono dette superfici inferiori e superiori. Quando si vuole analizzare il comportamento dinamico di un elemento strutturale, il problema si riconduce alla risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali, in particolare ad equazioni indefinite di equilibrio, equazioni di equilibrio ai limiti, relazioni geometriche ed equazioni di compatibilità o congruenza.

Nell'analisi di un corpo tridimensionale queste equazioni possono essere risolte in *forma forte* o in *forma debole*. La prima prevede la risoluzione in forma analitica delle equazioni differenziali, definendo il valore delle funzioni incognite in ogni punto del corpo. Questo significa definire il campo degli spostamenti come una funzione vettoriale continua della posizione dei punti del corpo: un generico spostamento lungo l'asse x sarà, quindi, espresso come:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) \quad (3.1)$$

Questo però è possibile soltanto per geometrie e condizioni di carico relativamente semplici, introducendo, in opportuni modelli, delle semplificazioni attraverso delle ipotesi, che permettano di ottenere equazioni analiticamente risolubili. La seconda, invece, prevede la risoluzione in forma numerica delle equazioni differenziali, ridotte, per mezzo di opportune tecniche numeriche, ad equazioni algebriche. Le strategie numeriche utilizzabili sono numerose e tra queste quella più utilizzata è il modello degli elementi finiti (FEM-Finite Elements Method). Questo metodo ipotizza che una struttura possa essere discretizzata in un numero finito di elementi mediante la creazione della *mesh*. Gli elementi che costituiscono la *mesh* sono di forma codificata: quando lo stato di tensione varia in tutte e tre le direzioni e tutte e tre le dimensioni dell'oggetto da modellare hanno valori paragonabili, gli elementi utilizzabili sono tridimensionali e ciascuno di essi vedrà a se assegnati un dato numero di nodi, nei quali andranno valutate le variabili considerate.

Considerato che i gusci, come le piastre, sono elementi bidimensionali poiché presentano la dimensione dello spessore (h) inferiore alle altre due (α, β) di almeno un ordine di grandezza, cioè risulta

$$h \ll \alpha, \beta \quad (3.2)$$

è possibile ridurre il problema da 3D a 2D.

Anche in questo caso il problema si riconduce alla risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali e, come per il 3D, queste equazioni possono essere risolte in *forma forte* o in *forma debole*. La forma forte prevede la risoluzione in forma chiusa delle funzioni incognite, non più definite come in 3.1, ma come il prodotto di una funzione dello spessore e di un vettore definito sulla superficie di riferimento Ω_0 .

$$\mathbf{u} = F(z)\mathbf{u}(x, y) \quad (3.3)$$

Anche in questo caso però è necessario usare geometrie e condizioni di carico semplici. La forma debole, come nel 3D, permette, attraverso opportune tecniche numeriche, di ridurre le equazioni differenziali in equazioni algebriche. Quando lo stato di tensione varia in due sole direzioni (mantenendosi costante nella terza) oppure

quando una dimensione dell'oggetto da modellare è piccola rispetto alle altre due, il modello agli elementi finiti permette la discretizzazione la struttura con elementi bidimensionali, a ciascuno dei quali sono assegnati un dato numero di nodi, nei quali andranno valutate le variabili considerate.

3.2 Relazioni geometriche e legge di Hooke

Il primo passo consiste nel definire dei coefficienti parametrici per gusci dotati di raggi di curvatura costanti R_α e R_β nelle direzioni α e β :

$$H_\alpha = (1 + z/R_\alpha) \quad , \quad H_\beta = (1 + z/R_\beta) \quad , \quad H_z = 1 \quad (3.4)$$

L'utilizzo di questi coefficienti consentirà alle relazioni scritte per gusci sferici di degenerare in relazioni per gusci cilindrici (quando $R_\alpha = \infty$ o $R_\beta = \infty$) e in relazioni per piastre (quando $R_\alpha = R_\beta = \infty$) (vedi [1] e [2]).

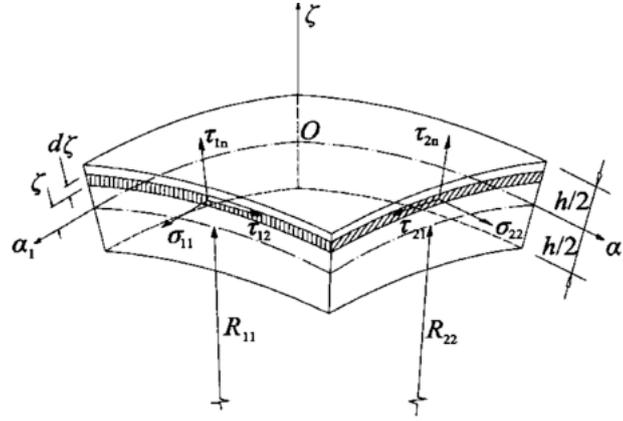


Figura 3.2: Sollecitazioni interne agenti su di un elemento infinitesimo di guscio

La legge di Hooke in forma compatta si scrive:

$$\boldsymbol{\sigma} = [C]\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.5)$$

dove

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\beta z}, \sigma_{\alpha z}, \sigma_{\alpha\beta}\} \quad (3.6)$$

è il vettore contenente le componenti di tensione;

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = \{\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{zz}, \gamma_{\beta z}, \gamma_{\alpha z}, \gamma_{\alpha\beta}\} \quad (3.7)$$

è il vettore contenente le componenti di deformazione e

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

è una matrice 6x6 contenente le costanti elastiche (o coefficienti di rigidità) del materiale. Delle 36 costanti della matrice $[C]$ soltanto 21 sono indipendenti in

quanto considerazioni sull'energia elastica garantiscono che questa sia simmetrica. Un materiale è detto isotropo se caratterizzato da proprietà meccaniche uniche e indipendenti in tutte le direzioni, ortotropo se caratterizzato da proprietà meccaniche uniche e indipendenti in tre direzioni reciprocamente perpendicolari. Per un materiale isotropo o ortotropo, con angolo di ortotropia pari a 0° o 90° , il numero di costanti C_{ij} scende da 21 a 9 e, rispetto alla scrittura generale, la matrice $[C]$ assume la forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

per cui, nei casi in esame, i legami esistenti tra tensioni e deformazioni per il k -esimo strato possono essere scritti come:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^k = C_{11}^k \epsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{12}^k \epsilon_{\beta\beta}^k + C_{13}^k \epsilon_{zz}^k \quad (3.10a)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^k = C_{12}^k \epsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{22}^k \epsilon_{\beta\beta}^k + C_{23}^k \epsilon_{zz}^k \quad (3.10b)$$

$$\sigma_{zz}^k = C_{13}^k \epsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{23}^k \epsilon_{\beta\beta}^k + C_{33}^k \epsilon_{zz}^k \quad (3.10c)$$

$$\sigma_{\beta z}^k = C_{44}^k \gamma_{\beta z}^k \quad (3.10d)$$

$$\sigma_{\alpha z}^k = C_{55}^k \gamma_{\alpha z}^k \quad (3.10e)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = C_{66}^k \gamma_{\alpha\beta}^k \quad (3.10f)$$

Le sei componenti speciali di deformazione del vettore ϵ possono essere espresse in funzione dello spostamento (u, v, w) :

$$\epsilon_{\alpha\alpha}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha} \quad (3.11a)$$

$$\epsilon_{\beta\beta}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial v^k}{\partial \beta} + \frac{w^k}{H_\beta R_\beta} \quad (3.11b)$$

$$\epsilon_{zz}^k = \frac{\partial w^k}{\partial z} \quad (3.11c)$$

$$\gamma_{\beta z}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z} - \frac{v^k}{H_\beta R_\beta} \quad (3.11d)$$

$$\gamma_{\alpha z}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha} \quad (3.11e)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \beta} \quad (3.11f)$$

Sostituendo le relazioni geometriche 3.11 nelle equazioni costitutive 3.10 ed indicando le derivate parziali $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial}{\partial \beta}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$ con $_{,\alpha}$, $_{,\beta}$ e $_{,z}$:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^k = \frac{C_{11}^k}{H_\alpha} u_\alpha^k + \frac{C_{11}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{12}^k}{H_\beta} v_\beta^k + \frac{C_{12}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{13}^k w_z^k \quad (3.12a)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^k = \frac{C_{12}^k}{H_\alpha} u_\alpha^k + \frac{C_{12}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{22}^k}{H_\beta} v_\beta^k + \frac{C_{22}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{23}^k w_z^k \quad (3.12b)$$

$$\sigma_{zz}^k = \frac{C_{13}^k}{H_\alpha} u_\alpha^k + \frac{C_{13}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{23}^k}{H_\beta} v_\beta^k + \frac{C_{23}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{33}^k w_z^k \quad (3.12c)$$

$$\sigma_{\beta z}^k = \frac{C_{44}^k}{H_\beta} w_\beta^k + C_{44}^k v_z^k - \frac{C_{44}^k}{H_\beta R_\beta} v^k \quad (3.12d)$$

$$\sigma_{\alpha z}^k = \frac{C_{55}^k}{H_\alpha} w_\alpha^k + C_{55}^k u_z^k - \frac{C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha} u^k \quad (3.12e)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = \frac{C_{66}^k}{H_\alpha} v_\alpha^k + \frac{C_{66}^k}{H_\beta} u_\beta^k \quad (3.12f)$$

3.3 Equazioni di equilibrio

A questo punto è necessario introdurre le tre equazioni differenziali di equilibrio: nelle relazioni che seguono (\ddot{u} , \ddot{v} , \ddot{w}) rappresentano le derivate seconde, rispetto al tempo, degli spostamenti (u , v , w) e ρ la densità; tutte le quantità in gioco, ad esclusione dei raggi di curvatura, dipendono dal k -esimo strato considerato (vedi [1] e [2]).

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{\alpha z}^k = \rho H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k \quad (3.13a)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z}^k = \rho H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k \quad (3.13b)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta}^k + \left(\frac{H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{zz}^k = \rho H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k \quad (3.13c)$$

Se scritte per strutture semplicemente appoggiate, le equazioni 2.10 possono essere risolte in forma chiusa. Assumiamo a tal fine che gli spostamenti (u , v , w) abbiano la seguente forma armonica:

$$u^k = (U^k)(z) e^{i\omega t} \cos(\tilde{\alpha}\alpha) \sin(\tilde{\beta}\beta) \quad (3.14a)$$

$$v^k = (V^k)(z) e^{i\omega t} \sin(\tilde{\alpha}\alpha) \cos(\tilde{\beta}\beta) \quad (3.14b)$$

$$w^k = (W^k)(z) e^{i\omega t} \sin(\tilde{\alpha}\alpha) \sin(\tilde{\beta}\beta) \quad (3.14c)$$

dove (U^k , V^k , W^k) rappresentano l'ampiezza degli spostamenti nelle direzioni (α , β , z), $\omega = 2\pi f$ è la frequenza angolare (con f il valore della frequenza espresso in Hertz) e t il tempo. Nei coefficienti $\tilde{\alpha} = \frac{m\pi}{a}$ e $\tilde{\beta} = \frac{n\pi}{b}$, m ed n rappresentano il numero di semionde ed a e b le dimensioni della struttura nelle direzioni α e β , calcolate sulla superficie media di riferimento Ω_0 . Sostituendo le equazioni costitutive 3.12 e le espressioni degli spostamenti 3.14 nelle equazioni di equilibrio 3.13 otteniamo il

seguinte sistema di equazioni per ciascuno dei k strati:

$$A_1^k U^k + A_2^k V^k + A_3^k W^k + A_4^k U_z^k + A_5^k W_z^k + A_6^k U_{zz}^k = 0 \quad (3.15a)$$

$$A_7^k U^k + A_8^k V^k + A_9^k W^k + A_{10}^k V_z^k + A_{11}^k W_z^k + A_{12}^k V_{zz}^k = 0 \quad (3.15b)$$

$$A_{13}^k U^k + A_{14}^k V^k + A_{15}^k W^k + A_{16}^k U_z^k + A_{17}^k V_z^k + A_{18}^k W_{zz}^k + A_{19}^k W_{zz}^k = 0 \quad (3.15c)$$

Le 3.15 sono state scritte per gusci sferici, introducendo i coefficienti Ak_s , dipendenti da z . Se R_α , R_β o entrambi sono pari ad infinito, sono costanti e pari ad 1, rispettivamente, H_α , H_β o entrambi e queste relazioni degenerano in equazioni per pannelli cilindrici o per piastre. In quest'ultimo caso tutti i coefficienti A_{sk} risulteranno costanti (vedi [1] e [2]).

3.4 Soluzioni per strutture multistrato a guscio

Le equazioni 3.15 costituiscono un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine: questo può essere ridotto ad un sistema di equazioni differenziali di primo ordine seguendo la metodologia illustrata nel seguente esempio. Supponiamo di avere due equazioni differenziali del secondo ordine definite come segue:

$$a_1 u_1'' + b_1 u_1' + c_1 u_1 = f_1 \quad (3.16a)$$

$$a_2 u_2'' + b_2 u_2' + c_2 u_2 = f_2 \quad (3.16b)$$

dove $u_r'' = u_{r,zz} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$ e $u_r' = u_{r,z} = \frac{\partial u_r}{\partial z}$ mentre f_1 e f_2 rappresentano i carichi esterni. Imponendo le seguenti identità:

$$a_1 u_1' = a_1 u_1' \quad (3.17a)$$

$$a_2 u_2' = a_2 u_2' \quad (3.17b)$$

il sistema di equazioni 3.16-3.17 può essere scritto come:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -c_2 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Questa metodologia può essere applicata al sistema di equazioni 3.15:

$$\begin{bmatrix} A_6^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^k \\ V^k \\ W^k \\ U^{k'} \\ V^{k'} \\ W^{k'} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_6^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^k \\ -A_1^k & -A_2^k & -A_3^k & -A_4^k & 0 & -A_5^k \\ -A_7^k & -A_8^k & -A_9^k & 0 & -A_{10}^k & -A_{11}^k \\ -A_{13}^k & -A_{14}^k & -A_{15}^k & -A_{16}^k & -A_{17}^k & -A_{18}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^k \\ V^k \\ W^k \\ U^{k'} \\ V^{k'} \\ W^{k'} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Definendo, quindi, per il generico strato k le matrici:

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} A_6^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^k \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_6^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^k \\ -A_1^k & -A_2^k & -A_3^k & -A_4^k & 0 & -A_5^k \\ -A_7^k & -A_8^k & -A_9^k & 0 & -A_{10}^k & -A_{11}^k \\ -A_{13}^k & -A_{14}^k & -A_{15}^k & -A_{16}^k & -A_{17}^k & -A_{18}^k \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

ed i vettori:

$$\mathbf{U}^{kT} = [U^k \quad V^k \quad W^k \quad U'^k \quad V'^k \quad W'^k] \quad (3.22)$$

$$U^{k'} = \frac{\partial U^k}{\partial z} \quad (3.23)$$

l'equazione 3.19 può essere scritta nelle seguenti tre forme compatte ed equivalenti:

$$\mathbf{D}^k \mathbf{U}^{k'} = \mathbf{A}^k \mathbf{U}^k \quad (3.24)$$

$$\mathbf{U}^{k'} = \mathbf{D}^{k-1} \mathbf{A}^k \mathbf{U}^k \quad (3.25)$$

$$\mathbf{U}^{k'} = \mathbf{A}^{k*} \mathbf{U}^k \quad (3.26)$$

dove $\mathbf{A}^{k*} = \mathbf{D}^{k-1} \mathbf{A}^k$. Nel caso di una piastra la costanza degli elementi A_{k_s} porta alla costanza delle matrici \mathbf{D}^k , \mathbf{A}^k ed \mathbf{A}^{k*} e la soluzione della 3.26 può essere scritta come:

$$\mathbf{U}^k(\tilde{z}^k) = \exp(\mathbf{A}^{k*} h^k) \mathbf{U}^k(0) \quad \text{con } \tilde{z}^k \in [0, h^k] \quad (3.27)$$

In questa relazione, \tilde{z}^k è una coordinata lungo lo spessore che varia, per ciascuno dei k strati, da 0 (alla base) a h^k (al top) mentre la matrice esponenziale è calcolata, imponendo $\tilde{z}^k = h^k$ per ciascuno strato k, come:

$$\mathbf{A}^{k**} = \exp((\mathbf{A}^{k*}) h^k) = \mathbf{I} + (\mathbf{A}^{k*}) h^k + \frac{(\mathbf{A}^{k*})^2}{2!} (h^k)^2 + \frac{(\mathbf{A}^{k*})^3}{3!} (h^k)^3 + \dots + \frac{(\mathbf{A}^{k*})^N}{N!} (h^k)^N \quad (3.28)$$

Nel caso in cui la geometria considerata sia quella del guscio cilindrico o sferico, il problema da affrontare risiede nel fatto che gli elementi delle matrici \mathbf{D}^k , \mathbf{A}^k , \mathbf{A}^{k**} , non sono costanti a causa dei coefficienti parametrici H_α e H_β , funzioni della coordinata \tilde{z} . Per poter calcolare esattamente queste matrici si introducono, per ognuno dei k strati, j = P strati fittizi: calcolando i valori di R_α , R_β , $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sulla superficie media Ω_0 del guscio e i valori di H_α e H_β nel mezzo del j-esimo strato fittizio, le matrici \mathbf{A}^{j**} saranno costanti in ciascuno degli j strati. Introduciamo adesso l'indice q, in grado di considerare tutti gli strati, fittizi e fisici, di cui la struttura è costituita: gli estremi di q saranno 1 e N_L , con $N_L = P * M$ e lo spessore

di ciascuno strato sarà h^q . Il primo passo consiste nell'imporre la continuità delle funzioni spostamento e tensione a cavallo di ciascuna interfaccia:

$$u_q^b = u_{q-1}^t, \quad v_q^b = v_{q-1}^t, \quad w_q^b = w_{q-1}^t, \quad (3.29a)$$

$$\sigma_{zz}^{bq} = \sigma_{zz-1}^{tq}, \quad \sigma_{\alpha z}^{bq} = \sigma_{\alpha z}^{tq-1}, \quad \sigma_{\beta z}^{bq} = \sigma_{\beta z}^{tq-1}, \quad (3.29b)$$

$$U_q^b = U_{q-1}^t, \quad V_q^b = V_{q-1}^t, \quad W_q^b = W_{q-1}^t \quad (3.29c)$$

Sostituendo nelle 3.29b le equazioni costitutive 3.12 e l'espressione degli spostamenti 3.14 ed introducendo dei coefficienti parametrici $T_q = f(R_\alpha, R_\beta)$ per semplificare le equazioni, definiamo la matrice di trasferimento, tra i generici strati $q-1$ e q come:

$$\mathbf{T}^{q-1,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix}_{q-1,q} \quad (3.30)$$

Il sistema di equazioni 3.29b e 3.29c può così essere scritto:

$$\begin{bmatrix} U^q \\ V^q \\ W^q \\ U^{q'} \\ V^{q'} \\ W^{q'} \end{bmatrix}_q^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix}_{q-1,q} \begin{bmatrix} U^q \\ V^q \\ W^q \\ U^{k'} \\ V^{k'} \\ W^{k'} \end{bmatrix}_{j-1}^t \quad (3.31)$$

e, in forma compatta, nelle seguenti due forme equivalenti:

$$\mathbf{U}^{qb} = \mathbf{T}^{q-1,q} \mathbf{U}^{q-1t} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{U}^q(0) = \mathbf{T}^{q-1,q} \mathbf{U}^{q-1}(h^{q-1}) \quad (3.33)$$

Queste equazioni consentono di legare fra loro il vettore \mathbf{U} calcolato alla base (b) del

q-esimo strato (per $\tilde{z}^q = 0$) col vettore \mathbf{U} calcolato al top del (q-1)esimo strato (per $\tilde{z}^{q-1} = h^{q-1}$). L'equazione 3.27 consente, invece, di legare fra loro il vettore \mathbf{U} calcolato al top (t) del q-esimo strato (per $\tilde{z}^q = h^q$) col vettore \mathbf{U} calcolato alla base dello stesso q-esimo strato (per $\tilde{z}^q = 0$). Introducendo in modo ricorsivo l'equazione 3.27 nella 3.33 possiamo legare fra loro il vettore \mathbf{U} calcolato al top dell'ultimo strato, N_L , (per $\tilde{z}^{N_L} = h^{N_L}$) col vettore \mathbf{U} calcolato alla base del primo strato (per $\tilde{z}^1 = 0$):

$$\mathbf{U}^{N_L}(h^{N_L}) = \mathbf{H}^m \mathbf{U}_1(0) \quad (3.34)$$

Le condizioni di struttura semplicemente appoggiata possono essere scritte come:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\alpha z} = \sigma_{\beta z} = 0, \quad se \quad z = -h/2; \quad (3.35a)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\alpha z} = \sigma_{\beta z} = 0, \quad se \quad z = +h/2; \quad (3.35b)$$

$$w = u = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 0, \quad se \quad \alpha = 0, \quad a; \quad (3.35c)$$

$$w = u = 0, \quad \sigma_{\beta\beta} = 0, \quad se \quad \beta = 0, \quad b. \quad (3.35d)$$

Le tensioni normali e trasversali possono essere scritte, per un generico valore di \tilde{z} dello strato q come:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^q(\tilde{z}) &= \frac{C_{13}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}U_\alpha^q + \frac{C_{13}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}W^q + \frac{C_{23}^q}{H_\beta(\tilde{z})}V_\beta^q + \frac{C_{23}^q}{H_\beta(\tilde{z})}W^q + C_{33}^qW_z^q \\ &= -\bar{\alpha}\frac{C_{13}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}U^q + \frac{C_{13}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}W^q - \bar{\beta}\frac{C_{23}^q}{H_\beta(\tilde{z})}V^q + \frac{C_{23}^q}{H_\beta(\tilde{z})}W^q + C_{33}^qW_z^q\end{aligned}\quad (3.36a)$$

$$\sigma_{\beta z}^q(\tilde{z}) = \frac{C_{44}^q}{H_\beta(\tilde{z})}W_\beta^q + C_{44}^qV_z^q - \frac{C_{44}^q}{H_\beta(\tilde{z})}V^q = \bar{\beta}\frac{C_{44}^q}{H_\beta(\tilde{z})}W^q + C_{44}^qV_z^q - \frac{C_{44}^q}{H_\beta(\tilde{z})}V^q\quad (3.36b)$$

$$\sigma_{\alpha z}^q(\tilde{z}) = \frac{C_{55}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}W_\alpha^q + C_{55}^qU_z^q - \frac{C_{55}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}U^q = \bar{\alpha}\frac{C_{55}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}W^q + C_{55}^qU_z^q - \frac{C_{55}^q}{H_\alpha(\tilde{z})}U^q\quad (3.36c)$$

Imponendo le condizioni espresse dalla 3.35a e dalla 3.35b prima al top dell'ultimo strato (P) e poi alla base del primo strato, possiamo riscrivere il sistema di equazioni 3.36 come:

$$\mathbf{B}_P(h_P)\mathbf{U}_P(h_P) = 0\quad (3.37)$$

$$\mathbf{B}_1(0)\mathbf{U}_1(0) = 0\quad (3.38)$$

Sostituendo l'equazione 3.34 nella 3.37, possiamo scrivere il sistema risolutore come:

$$[\mathbf{E}][\mathbf{U}_1(0)] = [0]\quad (3.39)$$

dove $[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_P(h_P)\mathbf{H}_m \\ \mathbf{B}_1(0) \end{bmatrix}$ è sempre una matrice 6x6, indipendentemente dal numero di strati P.

Risolvere il problema delle vibrazioni libere significa determinare sotto quali condizioni l'equilibrio espresso dall'equazione 3.39 è soddisfatto: le soluzioni non banali al problema sono possibili solo quando:

$$\det[\mathbf{E}] = 0\quad (3.40)$$

Ciò consiste nella ricerca delle radici di equazioni polinomiali in $\lambda = \omega^2$. Per ciascuna coppia di valori di semi onde (m,n), si otterranno un certo numero di frequenze circolari, in funzione dell'ordine N scelto per ciascuna matrice esponenziale \mathbf{A}_q^{**} (vedi [1]-[2]).

3.5 Modello numerico e analisi modale 2D FEM

Il metodo degli elementi finiti ha come obiettivo principale di ridurre le equazioni differenziali di un generico problema ad equazioni algebriche. In questo modo, si ottengono delle soluzioni approssimate ed è possibile controllare l'errore introdotto. Il metodo degli elementi finiti (FEM) permette di passare da un problema continuo ad uno discreto attraverso il concetto di discretizzazione. La struttura da analizzare è suddivisa in un certo numero di elementi, così facendo si ottiene una griglia (mesh) composta da primitive (elementi finiti) sotto forma di triangolo e quadrilateri per domini 2D, a ciascuna delle quali è associato un certo numero di punti, i nodi.

Il metodo agli elementi finiti viene frequentemente adottato nell'ambito dell'analisi modale. L'equazione del moto di un sistema viene espressa imponendo l'equilibrio fra i carichi esterni \mathbf{p} e le forze di inerzia \mathbf{f}_i , le forze viscosse \mathbf{f}_v e le forze elastiche \mathbf{f}_e (vedi [3]). In forma vettoriale si ha:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_e = \mathbf{p} \quad (3.41)$$

Assumendo un comportamento lineare e, quindi, ammettendo la validità del principio di sovrapposizione degli effetti, ciascuna forza può essere espressa come segue:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (3.42)$$

dove \mathbf{k} è la matrice di rigidezza della struttura e \mathbf{u} è il vettore degli spostamenti. I coefficienti k_{ij} rappresentano la forza corrispondente dovuta ad uno spostamento unitario.

$$\mathbf{f}_v = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} \quad (3.43)$$

dove \mathbf{c} è la matrice di smorzamento della struttura e $\dot{\mathbf{u}}$ è il vettore delle velocità. I coefficienti c_{ij} rappresentano la forza corrispondente dovuta ad una velocità unitaria.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.44)$$

dove \mathbf{m} è la matrice di massa della struttura e $\ddot{\mathbf{u}}$ è il vettore delle accelerazioni. I coefficienti m_{ij} rappresentano la forza corrispondente dovuta ad una accelerazione unitaria.

Per l'analisi statica le matrici di massa e di smorzamento sono omesse, per cui la 3.41 può essere riscritta come:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{p} \quad (3.45)$$

Per l'analisi modale, invece, sono omesse le matrici di smorzamento e dei carichi, quindi la 3.41 può essere riscritta come:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

Risolvere il problema dell'analisi modale significa determinare sotto quali condizioni l'equilibrio espresso dalla 3.46 è soddisfatto. Riscriviamo la 3.46 in forma esplicita:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

e assumiamo che il moto di vibrazione libera sia semplicemente armonico:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}\sin(\omega t + \theta) \quad (3.48)$$

Derivando due volte rispetto al tempo la 3.48 si ottiene l'espressione dell'accelerazione:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2\bar{\mathbf{u}}\sin(\omega t + \theta) = -\omega^2\mathbf{u} \quad (3.49)$$

Sostituendo le equazioni 3.48 e 3.49 nella 3.47 si ottiene:

$$[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

Le quantità ω^2 sono autovalori dai quali si può ottenere le frequenze di vibrazione libera al quadrato ed i corrispondenti vettori spostamento, gli autovettori, esprimono

la forma del sistema vibrante. Dalla regola di Cramer sappiamo che soluzioni non banali al problema sono possibili solo quando il determinante dell'espressione in parentesi quadra è nullo. In altre parole, le vibrazioni libere di ampiezza finita saranno possibili solo quando:

$$||\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}|| = 0 \quad (3.51)$$

L'equazione 3.51 è nota come *equazione di frequenza* del sistema. Espandendo il determinante otteniamo un'equazione algebrica per ciascuno degli N gradi di libertà del sistema. Le N radici di queste equazioni ($\omega^2_1, \omega^2_2, \dots, \omega^2_N$) rappresentano il quadrato delle frequenze degli N modi di vibrare possibili per il sistema. Se il sistema è parzialmente o totalmente libero, le prime frequenze che sono ricavate dall'analisi sono quelle relative ai moti rigidi del corpo (con valori circa uguali a zero); se il sistema è correttamente vincolato i moti rigidi non esistono e le frequenze che ritornano sono i modi propri di vibrare. Per risolvere il problema elastico con il metodo FEM sono necessarie alcune considerazioni ed operazioni che andremo ad analizzare in seguito.

3.5.1 Discretizzazione e modellazione della struttura

Bisogna prima di tutto applicare una discretizzazione della struttura, passando cioè da una struttura continua ad un insieme di elementi finiti interconnessi e collegati tra di loro solo in corrispondenza dei nodi. Questa operazione è vitale in quanto, a seconda della griglia adottata, quindi dal numero di elementi e di nodi, ne dipenderà l'accuratezza della soluzione. La forma e le caratteristiche degli elementi finiti sono codificati e il loro uso dipende dalle caratteristiche della struttura presa in esame.

Nel caso in cui tutte e tre le dimensioni della struttura analizzata siano dello stesso ordine di grandezza e lo stato di tensione vari nelle tre dimensioni, si utilizzano elementi tridimensionali a forma di tetraedro, di prisma e di parallelepipedo. Ad ognuno di essi sono associati un certo numero di nodi, in numero minimo pari a quello dei vertici.

Nel caso in cui una delle tre dimensioni della struttura analizzata sia piccola rispetto alle altre due, quindi nel caso di gusci, e lo stato di tensione sia costante nella direzione della dimensione minore, si utilizzano elementi bidimensionali a forma triangolare e quadrati. Come per il caso 3D, ad ognuno di essi sono associati un certo numero di nodi, in numero minimo pari a quello dei vertici.

Per quanto riguarda la modellazione, è presente in tutti gli studi di ingegneria. L'obiettivo principale è di passare da un sistema fisico ad un modello matematico mettendo in risalto solo alcune variabili di maggiore interesse e cercando di filtrare le rimanenti. Il sistema fisico se complesso viene suddiviso in sottosistemi. Il sottosistema verrà poi suddiviso in elementi finiti ai quali verrà applicato un modello matematico. A differenza delle trattazioni analitiche è sufficiente che il modello matematico scelto sia opportunamente adeguato alle geometrie semplici degli elementi finiti. La scelta di un tipo di elemento in un programma software equivale ad una scelta implicita del modello matematico che vi è alla base. L'errore che può portare l'utilizzo di un modello deve essere valutato con prove sperimentali, operazione in genere dispendiosa in termini di tempo e risorse ed è quindi opportuno scegliere il modello più adeguato al problema che sarà oggetto di studio.

Inoltre, sono importanti altri fattori come il tipo di elemento, la definizione delle caratteristiche del materiale e le sue proprietà e infine la presenza di vincoli o meno.

3.5.2 Calcolo delle matrici di massa e rigidezza

Precedentemente abbiamo visto come si scrive l'equazione 3.46, equazione generale del moto nel campo dell'analisi modale assume la forma:

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

Prima di tutto è necessario definire, per ciascun elemento i -esimo, un sistema di riferimento locale (η_i, ζ_i, ξ_i) e delle funzioni di forma $N(\eta_i, \zeta_i, \xi_i)$ che consentano di legare gli spostamenti dei punti dell'elemento con quelli dei suoi nodi e le accelerazioni dei punti dell'elemento con quelle dei suoi nodi:

$$\{u\} = [N]\{u_n\} \quad (3.53)$$

$$\{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{u}_n\} \quad (3.54)$$

Grazie all'interpolazione numerica, le funzioni di forma, solitamente polinomiali, consentono quindi di descrivere il comportamento dell'elemento partendo da quello dei suoi nodi. All'aumentare del numero degli elementi, la soluzione deve convergere verso quella esatta. Affinché questo sia possibile, queste funzioni devono rispettare tre condizioni: essere regolari all'interno dell'elemento, essere continue attraverso il contorno degli elementi ed essere complete.

A questo punto abbiamo ottenuto l'equazione risolutiva per ogni singolo elemento nel sistema di riferimento locale:

$$[m]_l \{\ddot{u}_n\}_l + [k]_l \{u_n\}_l = 0 \quad (3.55)$$

Se indichiamo con $[A]$ la matrice di trasformazione, contenente i coseni direttori del sistema di riferimento locale rispetto a quello globale possiamo esprimere l'equazione risolutiva per ogni singolo elemento nel sistema di riferimento globale:

$$[M]\{\ddot{u}_n\}_g + [K]\{u_n\}_g = 0 \quad (3.56)$$

con

$$\{u_n\}_l = [A]\{u_n\}_g \quad (3.57a)$$

$$\{\ddot{u}_n\}_l = [A]\{\ddot{u}_n\}_g \quad (3.57b)$$

$$[M] = [A]^T \{m\}_l [A] \quad (3.57c)$$

$$[K] = [A]^T \{k\}_l [A] \quad (3.57d)$$

Per ottenere le matrici di massa e di rigidezza globali bisogna legare i contributi locali di ciascun elemento finito, contenuti in matrici quadrate di dimensione $n_i \times n_i$ dove n_i rappresenta il numero di nodi dell'elemento i -esimo.

Matematicamente parlando, il processo può essere suddiviso in due fasi: il primo passo consiste nell'espandere le matrici locali alle dimensioni di quelle globali. Lo scopo principale di questa operazione viene effettuato dalle matrici di connettività che, contenendo le informazioni sulla numerazione dei nodi nella struttura globale,

permettono di collegare a ciascun elemento delle matrici locali la posizione corrispondente nella matrice globale. Le matrici di connettività hanno forma rettangolare e contengono soltanto elementi 0 ed 1: il risultato cercato è ottenuto moltiplicando ciascuna matrice locale per la matrice di connettività corrispondente. Il secondo passo è sommare fra loro le matrici di rigidezza espanse per ottenere la matrice di rigidezza globale $[K]$ e le matrici di massa espanse per ottenere la matrice di massa globale $[M]$. Poiché ad ogni nodo possono concorrere più elementi finiti, i contributi di rigidezza locali, provenienti da diversi elementi, andranno sommati.

Nel caso di strutture multistrato 2D, le matrici di rigidezza e di massa sono ottenute secondo un approccio noto come *Equivalent Single Layer* che consiste nel sommare fra loro i contributi che ciascuno strato fornisce alle matrici $[K]$ ed $[M]$ globali. La struttura reale, costituita da strati diversi, è quindi sostituita da un modello le cui caratteristiche di rigidezza e di massa sono omogenee lungo lo spessore.

3.5.3 Calcolo del vettore delle frequenze

In conclusione, il problema dell'analisi modale, risolto col metodo agli elementi finiti può essere riscritto come:

$$[M]\{\ddot{u}_n\} + [K]\{u_n\} = 0 \quad (3.58)$$

dove $[K]$ rappresenta la matrice di rigidezza globale, $[M]$ la matrice di massa globale, $\{u_n\}$ il vettore degli spostamenti nodali incogniti e $\{\ddot{u}_n\}$ il vettore delle accelerazioni nodali incognite. Come visto nelle 3.48 e 3.49, la 3.58 può essere espressa come:

$$[K - \omega^2 M]u_n = 0 \quad (3.59)$$

da cui l'equazione di frequenza del sistema prende la forma di:

$$||K - \omega^2 M|| = 0 \quad (3.60)$$

Sviluppando il determinante otteniamo un'equazione algebrica per ciascuno degli N gradi di libertà del sistema. Le N soluzioni di queste equazioni rappresentano il quadrato delle frequenze degli N modi di vibrare possibili per il sistema e le radici di queste ultime, disposte in sequenza, costituiscono il *vettore delle frequenze* ω :

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \dots \\ \omega_N \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

3.6 Generalized Differential Quadrature (GDQ)

Il modello numerico GDQ permette di analizzare geometrie complesse, schemi di laminazioni, differenti materiali, condizioni diverse di carico e al contorno. Le analisi e i confronti sono espressi in termini di spostamenti, deformazioni e sollecitazioni. Nel modello 2D GDQ, il taglio trasversale e le sollecitazioni normali trasversali vengono ottenute dalle equazioni di equilibrio 3D. Procedendo in questo modo, questo metodo di calcolo consente di avere risultati in accordo con le soluzioni ottenute dal metodo Shell 3D. Dopo avere convalidato questi risultati, i modelli raffinati GDQ 2D Shell sono utilizzati per investigare su nuovi casi di studio che non possono essere analizzati mediante soluzioni in forma chiusa. Gli attuali nuovi modelli GDQ Shell 2D includono modelli cinematici 2D più raffinati (in due forme equivalenti: single layer (ESL) e layer wise (LW)) ed un approccio geometrico più generale. Il Professore F. Tornabene ha sviluppato modelli GDQ 2D classici e raffinati per l'analisi di piastre e gusci a doppia curvatura utilizzando la geometria differenziale di curve e superfici (vedi [20]). L'unica differenza nella procedura di risoluzione del problema è nell'utilizzo del modello GDQ 3D al posto del modello della matrice esponenziale (EM 3D equazioni di equilibrio vedi [19] e [20]) per trovare la soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali in ζ scritte in forma chiusa.

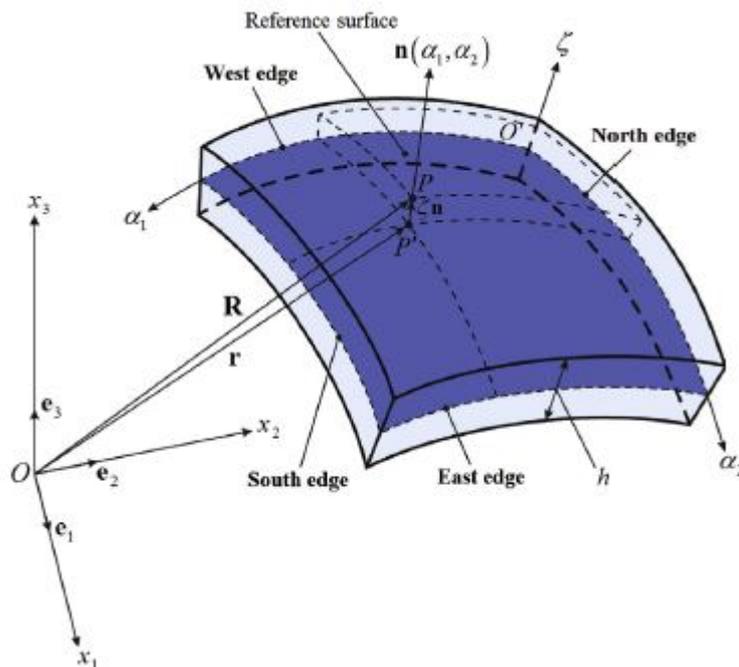


Figura 3.3: Sistema di riferimento per un elemento guscio a doppia curvatura

Il metodo GDQ è una procedura numerica molto utile ed efficace per la creazione di modelli 2D a guscio raffinati. In breve, nel caso di un dominio ad una dimensione usando un intervallo $[x_1, x_T]$, il metodo GDQ permette l'approssimazione della n -esima derivata in un generico punto x_i di una funzione $f(x)$ usando una somma lineare ponderata dei valori della funzione ad un certo numero di punti definiti:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \simeq \sum_{j=1}^T (\zeta_{ij})^n f(x_j) \quad \text{per } x = x_i \quad (3.62)$$

Dove $i = 1, 2, \dots, T$, con T che indica il numero totali di punti della griglia. I coefficienti ponderati sono definiti come $(\zeta_{ij})^n$ e sono calcolati per mezzo delle relazioni ricorsive da Shu (vedi[18]). Questo metodo numerico permette il calcolo delle derivate di una funzione in ogni punto del dominio. I nodi del dominio sono definiti in accordo con una specifica distribuzione della griglia. Shu ha dimostrato che con una semplice formulazione algebrica era possibile determinare i coefficienti ponderati relativi al primo ordine di derivazione, di più la determinazione dei coefficienti ponderati relativi ad ordini superiori poteva essere ottenuta in modo ricorsivo, una volta calcolati quelli del ordine precedente e questo senza restrizione sulla scelta dei nodi. Ciò significa che avendo a disposizione i coefficienti di primo ordine era possibile determinare quelli del secondo ordine, poi da quelli del secondo ordine si poteva calcolare quelli del terzo ordine e così via. Shu ha sviluppato un metodo innovativo per calcolare i coefficienti ponderati per l'approssimazione delle derivate di qualsiasi ordine. In questa soluzione di modello Shell 3D, viene adoperata la distribuzione di griglia Chebyshev-Gauss-Lobatto grazie alla sua stabilità e alla sua accuratezza come dimostrato in riferimento [18].

I punti della griglia vengono espressi come:

$$x_i = (1 - \cos(\frac{i-1}{T-1}\pi)) \frac{x_T - x_1}{2} + x_1 \quad (3.63)$$

dove $i = 1, 2, \dots, T$ e $x \in [x_1, x_T]$.

La soluzione numerica ottenuta tramite il metodo GDQ delle equazioni differenziali (vedi [19]) in ζ permettono la riduzione del costo computazionale delle analisi numeriche.

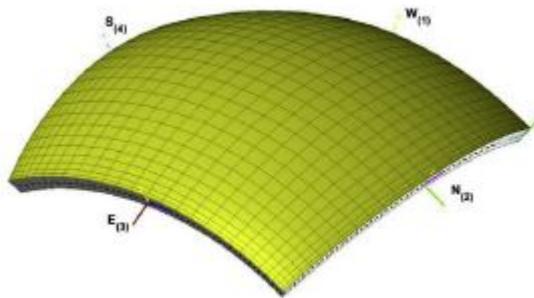


Figura 3.4: Esempio di distribuzione discreta dei nodi nel modello GDQ

Capitolo 4

Analisi e risultati strutturali

4.1 Costanti elastiche e densità delle strutture latticce

In questa sezione, andremo ad analizzare i valori che assumono le costanti elastiche al variare di alcuni parametri precedentemente citati. Per proseguire in questa analisi numerica, sono state scritte le relazioni delle costanti elastiche in codice Matlab. Ci poniamo nella condizione di analizzare un pannello sandwich semplicemente appoggiato, con le pelli realizzate in alluminio e il cuore mediante strutture latticce. Al variare di parametri come lo spessore, la densità o la distanza fra le varie tipologie di nervature che compongono le strutture latticce, il codice ci restituirà valori di costanti elastiche sulle quali andremo poi a fare delle considerazioni a seconda dei valori assunti. Verranno elencati 12 casi, i quali verranno suddivisi in due gruppi principali: il primo corrisponde a 6 casi di pannello rettangolare semplicemente appoggiato a due parametri variabili (δ_1, δ_2 e a_1, a_2) ed il secondo sempre un pannello rettangolare semplicemente appoggiato ma con 4 parametri variabili ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ e a_1, a_2, a_3, a_4) ricordando che il parametro δ_i rappresenta lo spessore di una nervatura mentre a_i rappresenta la distanza tra due nervature.

```
% grid shells parameters
format long
%%%% proprietà dei materiali
E_1=70e9;
E_2=70e9;
ni_1=0.3;
ni_2=0.3;
G_1=E_1/(2*(1+ni_1));
G_2=E_2/(2*(1+ni_2));
rho_1=2707;
rho_2=2707;
%%%% dati geometrici
h=0.1;
d_1=d_2=0.005;
a_1=a_2=0.2;
%%%%
theta_lam=[0 pi/2];
density=[d_1/a_1 d_2/a_2];
rho=[rho_1 rho_2];
```

Figura 4.1: Codice per i casi a 2 parametri

```
% grid shells parameters
%%%% proprietà dei materiali
E_1=E_2=E_3=E_4=70e9;
ni_1=ni_2=ni_3=ni_4=0.3;
G_1=E_1/(2*(1+ni_1));
G_2=E_2/(2*(1+ni_2));
G_3=E_3/(2*(1+ni_3));
G_4=E_4/(2*(1+ni_4));
rho_1=rho_2=rho_3=rho_4=2707;
%%%% dati geometrici
h=0.1;
d_1=d_2=d_3=d_4=0.005;
a_1=a_2=0.2;
a_3=a_4=sqrt(0.2^2+0.2^2);
%%
theta_lam=[0 pi/2 pi/4 -pi/4];
density=[d_1/a_1 d_2/a_2 d_3/a_3 d_4/a_4];
rho=[rho_1 rho_2 rho_3 rho_4];
```

Figura 4.2: Codice per i casi a 4 parametri

Il codice Matlab è suddiviso in una prima parte dove sono riportati i parametri di input come le proprietà dei materiali (per esempio modulo di elasticità a trazione, densità,...) e i dati geometrici come riportato nelle figure. Inizializzando le variabili come per esempio il modulo di Young che dipendono dal materiale e applicando le semplificazioni che sono state apportate nel capitolo 2 sarà possibile (tramite ciclo for di Matlab) ottenere diversi valori di costanti elastiche tramite la risoluzione delle relazioni.

```

for i=1:length(theta_lam)
    C11_seg=C11_seg+density(i)*(C11*(cos(theta_lam(i))^4));
    C12_seg=C12_seg+density(i)*(C11*(sin(theta_lam(i))^2)*(cos(theta_lam(i))^2)
    C22_seg=C22_seg+density(i)*(C11*(sin(theta_lam(i))^4));
    C66_seg=C66_seg+density(i)*(C11*(sin(theta_lam(i))^2)*(cos(theta_lam(i))^2)
    C44_seg=C44_seg+density(i)*(C44*(cos(theta_lam(i))^2));
    C55_seg=C55_seg+density(i)*(C44*(sin(theta_lam(i))^2));
    C33_seg=C33_seg+density(i)*C33;
    rho_seg=rho_seg+density(i)*rho(i);
end
C11_seg
C12_seg
C22_seg
C66_seg
C44_seg
C55_seg
C33_seg
rho_seg

```

Figura 4.3: Codice per il calcolo delle costanti elastiche e della densità

Procedendo in questo modo, otterremo i valori delle costanti elastiche e della densità delle nervature che compongono il pannello rettangolare preso in esame realizzato mediante strutture lattice.

4.1.1 Analisi pannelli sandwich a 2 parametri variabili

In questa analisi, studieremo il primo gruppo che corrisponde a sei casi di pannello rettangolare semplicemente appoggiato a due parametri variabili (δ_1, δ_2 e a_1, a_2) con lunghezza $L_x = 6m$, $L_y = 3.2m$ e le pelli di spessore $h_1 = h_3 = 0.01m$. Come accennato precedentemente, il pannello preso in esame ha le pelli in Alluminio quindi verranno considerati costanti le seguenti variabili per ogni caso:

- Alluminio: Modulo di Young $E = 70GPa$, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, densità $\rho = 2707kg/m^3$
- Lattice core: Modulo di Young $E = 70GPa$, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, densità $\rho = 2707kg/m^3$

Mentre per ogni caso, verranno fatti variare i parametri geometrici caratteristici, rispettivamente lo spessore delle nervature (δ_1, δ_2) delle nervature del cuore lattice.

I primi tre casi in esame hanno tutti il cuore in struttura lattice con spessore $h = 0.1m$, distanza tra le nervature $a_i = 0.2m$ e stesso angolo centrale $\theta=0^\circ/90^\circ$. Differiscono soltanto per i valori di spessore delle nervature δ_i :

- Caso 1: $\delta_1 = \delta_2 = 0.005m$

- Caso 2: $\delta_1 = \delta_2 = 0.01m$
- Caso 3: $\delta_1 = \delta_2 = 0.05m$

Riportiamo ora la tabella con i corrispondenti primi tre casi e i valori delle costanti elastiche e delle densità ottenute:

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
\overline{C}_{11} [N/m^2]	$1.7500 \cdot 10^9$	$3.5000 \cdot 10^9$	$1.7500 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{12} [N/m^2]	$6.5614 \cdot 10^{-24}$	$1.3123 \cdot 10^{-23}$	$6.5614 \cdot 10^{-23}$
\overline{C}_{22} [N/m^2]	$1.7500 \cdot 10^9$	$3.5000 \cdot 10^9$	$1.7500 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{33} [N/m^2]	$3.5000 \cdot 10^9$	$6.9999 \cdot 10^9$	$3.5000 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{44} [N/m^2]	$6.7308 \cdot 10^8$	$1.3462 \cdot 10^9$	$6.7308 \cdot 10^9$
\overline{C}_{55} [N/m^2]	$6.7308 \cdot 10^8$	$1.3462 \cdot 10^9$	$6.7308 \cdot 10^9$
\overline{C}_{66} [N/m^2]	$6.5614 \cdot 10^{-24}$	$1.3123 \cdot 10^{-23}$	$6.5614 \cdot 10^{-23}$
$\overline{\rho}$ [kg/m^3]	$1.3535 \cdot 10^2$	$2.7070 \cdot 10^2$	$1.3535 \cdot 10^3$

Tabella 4.1: Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 1, Caso 2, Caso 3)

I seguenti tre casi in esame hanno tutti il cuore in struttura lattice con spessore $h = 0.05m$, distanza tra le nervature $a_i = 0.2m$ e stesso angolo centrale $\theta=0^\circ/90^\circ$. Differiscono soltanto per i valori di spessore delle nervature δ_i :

- Caso 4: $\delta_1 = \delta_2 = 0.005m$
- Caso 5: $\delta_1 = \delta_2 = 0.01m$
- Caso 6: $\delta_1 = \delta_2 = 0.05m$

Riportiamo ora la tabella con i corrispondenti primi tre casi e i valori delle costanti elastiche e delle densità ottenute:

	Caso 4	Caso 5	Caso 6
\overline{C}_{11} [N/m^2]	$1.7500 \cdot 10^9$	$3.5000 \cdot 10^9$	$1.7500 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{12} [N/m^2]	$6.5614 \cdot 10^{-24}$	$1.3123 \cdot 10^{-23}$	$6.5614 \cdot 10^{-23}$
\overline{C}_{22} [N/m^2]	$1.7500 \cdot 10^9$	$3.5000 \cdot 10^9$	$1.7500 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{33} [N/m^2]	$3.5000 \cdot 10^9$	$6.9999 \cdot 10^9$	$3.5000 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{44} [N/m^2]	$6.7308 \cdot 10^8$	$1.3462 \cdot 10^9$	$6.7308 \cdot 10^9$
\overline{C}_{55} [N/m^2]	$6.7308 \cdot 10^8$	$1.3462 \cdot 10^9$	$6.7308 \cdot 10^9$
\overline{C}_{66} [N/m^2]	$6.5614 \cdot 10^{-24}$	$1.3123 \cdot 10^{-23}$	$6.5614 \cdot 10^{-23}$
$\overline{\rho}$ [kg/m^3]	$1.3535 \cdot 10^2$	$2.7070 \cdot 10^2$	$1.3535 \cdot 10^3$

Tabella 4.2: Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 4, Caso 5, Caso 6)

La prima osservazione è che all'aumentare dello spessore δ_i delle nervature aumenta la densità $\overline{\rho}$ visto che $\overline{\rho} = \frac{\delta_i}{a_i}$ (a_i rimane costante), il cuore del pannello sandwich avrà nervature più spesse e quindi aumenterà anche la massa di tale struttura. Per visualizzarlo in modo più chiaro, riporteremo alcuni grafici come per esempio l'andamento della densità di tali strutture al variare della distanza a_i tra

le nervature, l'andamento di alcuni costanti elastiche al variare dell'angolo centrale θ .

Per il seguente grafico è stato preso in esame un pannello con le dimensioni precedentemente citate. In questo caso è stato mantenuto costante lo spessore del cuore $h = 0.1m$ mentre si è fatto variare la distanza tra le nervature e lo spessore delle nervature:

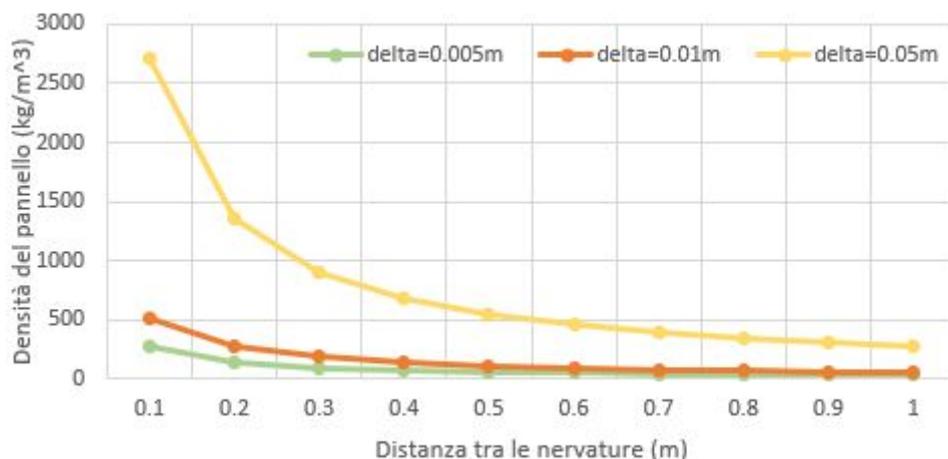


Figura 4.4: Grafico della densità di un pannello al variare della distanza e spessore delle nervature

Da questo grafico, è evidente come aumentando la distanza a_i tra le nervature diminuirà la densità di tale struttura in quanto il cuore avrà una rete meno fitta e più spaziata di nervature al suo interno rendendola sostanzialmente meno piena e quindi più leggera.

Nel seguente grafico, sono state rappresentate due costanti elastiche, C_{11} e C_{44} al variare dell'angolo centrale θ analizzando il pannello preso in esame precedentemente con lo spessore e la distanza delle nervature tenuti costanti ($\delta_i = 0.005m$ e $a_i = 0.2m$):

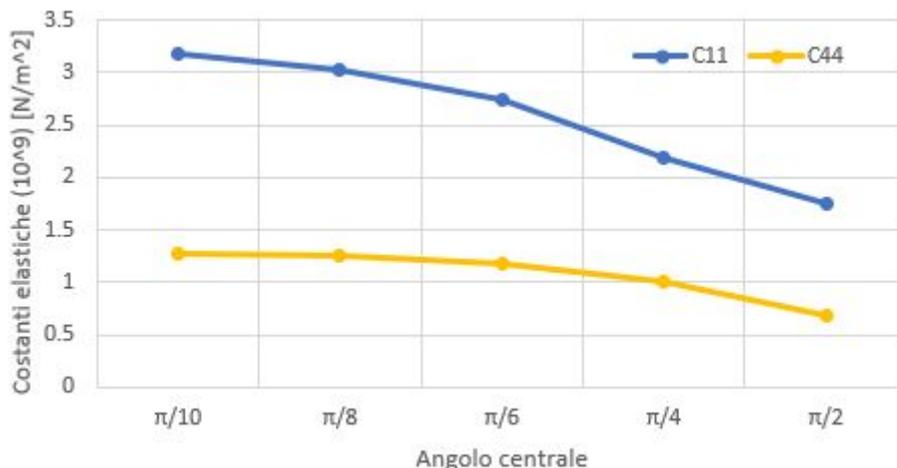


Figura 4.5: Grafico delle costanti elastiche al variare dell'angolo centrale

In questo grafico, notiamo come valori della costante elastica \overline{C}_{11} denominata compressione longitudinale e della costante elastica \overline{C}_{44} denominata modulo di taglio diminuiscono all'aumentare del valore dell'angolo centrale θ .

4.1.2 Analisi pannelli sandwich a 4 parametri variabili

In questa analisi, studieremo il secondo gruppo che corrisponde a sei casi di pannello rettangolare semplicemente appoggiato a quattro parametri variabili ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ e a_1, a_2, a_3, a_4) con lunghezza $L_x = 6m$, $L_y = 3.2m$ e le pelli di spessore $h_1 = h_3 = 0.01m$. Come nei casi precedenti, il pannello preso in esame è lo stesso e quindi ha le pelli in Alluminio, verranno considerati costanti le seguenti variabili per ogni caso:

- Alluminio: Modulo di Young $E = 70GPa$, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, densità $\rho = 2707kg/m^3$
- Lattice core: Modulo di Young $E = 70GPa$, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, densità $\rho = 2707kg/m^3$

Mentre per ogni caso, verranno fatti variare i parametri geometrici caratteristici, rispettivamente lo spessore delle nervature ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$) delle nervature del cuore lattice.

I primi tre casi in esame hanno tutti il cuore in struttura lattice con spessore $h = 0.1m$, distanza tra le nervature $a_1 = a_2 = 0.2m$, $a_3 = a_4 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ e stesso angolo centrale $\theta=0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ$. Differiscono soltanto per i valori di spessore delle nervature δ_i :

- Caso 7: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.005m$
- Caso 8: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.01m$
- Caso 9: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.05m$

Riportiamo ora la tabella con i corrispondenti primi tre casi e i valori delle costanti elastiche e delle densità ottenute:

	Caso 7	Caso 8	Caso 9
\overline{C}_{11} [N/m^2]	$2.3687 \cdot 10^9$	$4.7374 \cdot 10^9$	$2.3687 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{12} [N/m^2]	$6.1872 \cdot 10^8$	$1.2374 \cdot 10^9$	$6.1872 \cdot 10^9$
\overline{C}_{22} [N/m^2]	$2.3687 \cdot 10^9$	$4.7374 \cdot 10^9$	$2.3687 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{33} [N/m^2]	$5.9749 \cdot 10^9$	$1.1950 \cdot 10^{10}$	$5.9784 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{44} [N/m^2]	$1.1490 \cdot 10^9$	$2.2980 \cdot 10^9$	$1.1490 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{55} [N/m^2]	$1.1490 \cdot 10^9$	$2.2980 \cdot 10^9$	$1.1490 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{66} [N/m^2]	$6.1872 \cdot 10^8$	$1.2374 \cdot 10^9$	$6.1872 \cdot 10^9$
$\overline{\rho}$ [kg/m^3]	$2.3106 \cdot 10^2$	$4.6211 \cdot 10^2$	$2.3106 \cdot 10^3$

Tabella 4.3: Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 7, Caso 8, Caso 9)

I seguenti tre casi in esame hanno tutti il cuore in struttura lattice con spessore $h = 0.05m$, distanza tra le nervature $a_1 = a_2 = 0.2m$, $a_3 = a_4 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ e stesso angolo centrale $\theta=0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ$. Differiscono soltanto per i valori di spessore delle nervature δ_i :

- Caso 10: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.005m$
- Caso 11: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.01m$

- Caso 12: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.05m$

Riportiamo ora la tabella con i corrispondenti ultimi tre casi e i valori delle costanti elastiche e delle densità ottenute:

	Caso 10	Caso 11	Caso 12
\overline{C}_{11} [N/m^2]	$2.3687 \cdot 10^9$	$4.7374 \cdot 10^9$	$2.3687 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{12} [N/m^2]	$6.1872 \cdot 10^8$	$1.2374 \cdot 10^9$	$6.1872 \cdot 10^9$
\overline{C}_{22} [N/m^2]	$2.3687 \cdot 10^9$	$4.7374 \cdot 10^9$	$2.3687 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{33} [N/m^2]	$5.9749 \cdot 10^9$	$1.1950 \cdot 10^{10}$	$5.9784 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{44} [N/m^2]	$1.1490 \cdot 10^9$	$2.2980 \cdot 10^9$	$1.1490 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{55} [N/m^2]	$1.1490 \cdot 10^9$	$2.2980 \cdot 10^9$	$1.1490 \cdot 10^{10}$
\overline{C}_{66} [N/m^2]	$6.1872 \cdot 10^8$	$1.2374 \cdot 10^9$	$6.1872 \cdot 10^9$
$\overline{\rho}$ [kg/m^3]	$2.3106 \cdot 10^2$	$4.6211 \cdot 10^2$	$2.3106 \cdot 10^3$

Tabella 4.4: Pannello rettangolare semplicemente appoggiato con diversi spessori di nervatura (Caso 10, Caso 11, Caso 12)

La prima osservazione è che all'aumentare dello spessore δ_i delle nervature aumenta la densità $\overline{\rho}$ visto che $\overline{\rho} = \frac{\delta_i}{a_i}$ (a_i rimane costante), il cuore del pannello sandwich avrà nervature più spesse e quindi aumenterà anche la massa di tale struttura. Per visualizzarlo in modo più chiaro, riporteremo alcuni grafici come per esempio l'andamento della densità di tali strutture al variare della distanza a_i tra le nervature, l'andamento di alcuni costanti elastiche al variare dell'angolo centrale θ .

Per il seguente grafico è stato preso in esame un pannello con le dimensioni precedentemente citate. In questo caso è stato mantenuto costante lo spessore delle nervature $\delta_i = 0.005m$ mentre si è fatto variare la distanza tra le nervature a_i :

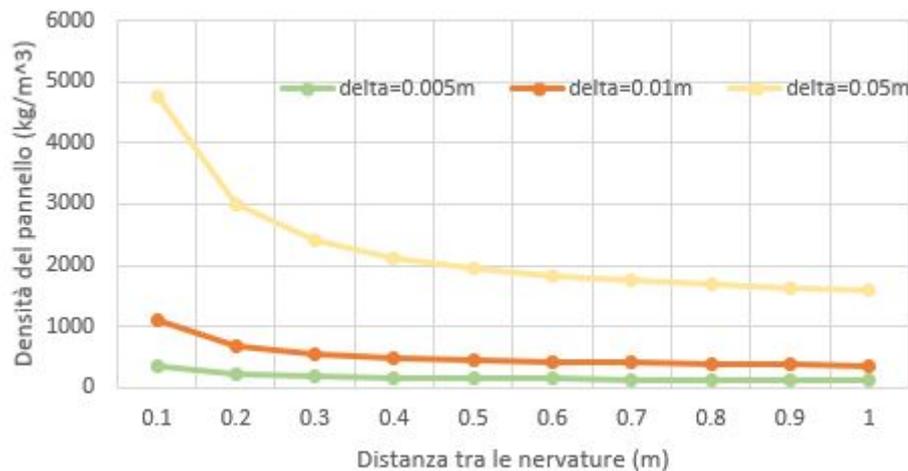


Figura 4.6: Grafico della densità di un pannello al variare della distanza e spessore delle nervature

Da questo grafico, è evidente come aumentando la distanza a_i tra le nervature diminuirà la densità di tale struttura in quanto il cuore avrà una rete meno fitta e più spaziata di nervature al suo interno rendendola sostanzialmente meno piena e quindi più leggera. Rimarrà però più densa e quindi più pesante rispetto ai casi dove

si facevano variare solo due parametri, questo perché ci sono più nervature rispetto a prima e quindi la massa sarà leggermente superiore in questo caso.

Nel seguente grafico, sono state rappresentate due costanti elastiche, C_{11} e C_{44} al variare dell'angolo centrale θ analizzando il pannello preso in esame precedentemente con lo spessore e la distanza delle nervature tenuti costanti ($\delta_i = 0.005m$ e $a_i = 0.2m$):

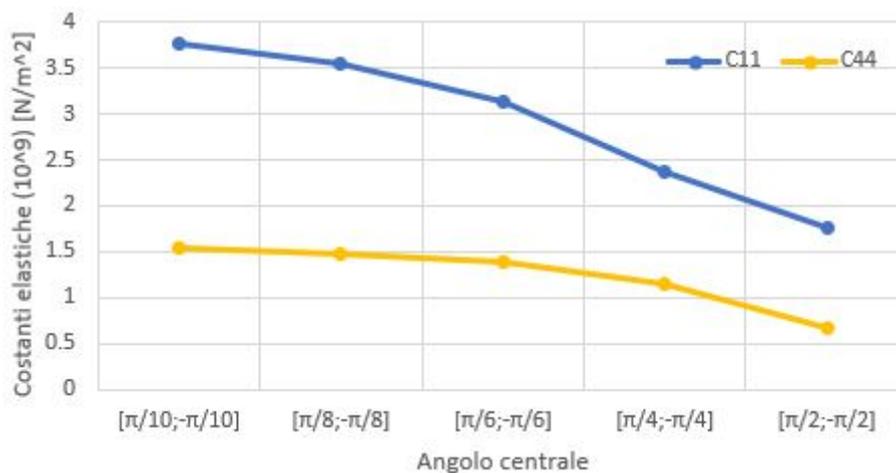


Figura 4.7: Grafico delle costanti elastiche al variare dell'angolo centrale

In questo grafico, notiamo come valori della costante elastica $\overline{C_{11}}$ denominata compressione longitudinale e della costante elastica $\overline{C_{44}}$ denominata modulo di taglio diminuiscono all'aumentare del valore dell'angolo centrale θ .

4.2 Analisi dinamica con modello 3D esatto e GDQ

In questa sezione, verrà effettuata l'analisi dinamica di un pannello sandwich con struttura lattice e verranno in seguito riportate le frequenze ottenute tramite codice Matlab. L'analisi in frequenza può essere utilizzata per avere indicazioni sulle caratteristiche di rigidità della struttura e quindi identificare rapidamente quali sono le zone in cui la struttura potrebbe deformarsi di più e nel peggiore dei casi cedere. Qualsiasi struttura è caratterizzata da modi propri di vibrare che dipendono dalle sue caratteristiche di massa e di rigidità.

Per realizzare tale analisi, è stato utilizzato il seguente programma Matlab: "Program to compute exact 3D free vibration frequencies and the static analysis of simply supported spherical, cylindrical and flat N-layered sandwich panels embedding a lattice core" scritto dal Professore S. Brischetto. Questo programma utilizza la metodologia del modello 3D Shell (il modello e le equazioni costitutive sono stati sviluppati e discussi nel capitolo 2). Riporteremo alcuni passaggi di tale codice per spiegare al meglio come sono stati ottenuti i risultati che verranno riportati in seguito. Nella prima parte di questo codice, è necessario inizializzare in modo opportuno le caratteristiche dell'intero pannello o guscio multistrato preso in esame durante questa analisi. Bisogna per esempio scegliere in quanti strati si vuole dividere la struttura presa in esame, il numero di semi onde n e m con le quali si vuole procedere o ancora è possibile decidere quale tipologia di struttura si vuole andare a studiare come strutture classiche o pannelli sandwich con struttura lattice come nel nostro caso. Una volta effettuato questo primo passaggio, vengono utilizzati dei cicli for di Matlab per ogni pelle e uno per il cuore di tale pannello sandwich. Viene riportata nella seguente figura un esempio di tale ciclo:

```

if FGM==2%material data for sandwich with lattice core
%%
%%
for I=1:25
hL(I)=h/NL;%[m] thickness of the Ith layer (from the bottom to the top)
YM1(I) = 70;%[GPa] or [MPa] Young Modulus in 1 direction of the Ith layer (material reference
YM2(I) = 70;%[GPa] or [MPa] Young Modulus in 2 direction of the Ith layer (material reference
YM3(I) = 70;%[GPa] or [MPa] Young Modulus in 3 direction of the Ith layer (material reference
nu12(I) = 0.3;%[-] Poisson ratio of the Ith layer (material reference system)
nu13(I) = 0.3;%[-] Poisson ratio of the Ith layer (material reference system)
nu23(I) = 0.3;%[-] Poisson ratio of the Ith layer (material reference system)
G12(I) = YM1(I)/2.6;%[GPa] or [MPa] Shear Modulus of the Ith layer (material reference system)
G13(I) = YM2(I)/2.6;%[GPa] or [MPa] Shear Modulus of the Ith layer (material reference system)
G23(I) = YM3(I)/2.6;%[GPa] or [MPa] Shear Modulus of the Ith layer (material reference system)
PHI(I)= 0;%[deg] Orthotropy angle or fiber orientation
rho(I) = 2707;%[kg/m^3] mass density of the Ith layer--- rho(I)=0 in the static case!!!1600 f
end

```

Figura 4.8: Codice con caratteristiche del materiale della pelle in Alluminio

Come si può notare nella prima riga, viene selezionato "FGM=2", con FGM si intende Functionally Graded Material cioè un materiale nel quale la struttura e la composizione cambiano gradualmente e non è totalmente omogeneo, avviene quindi un conseguente cambiamento delle proprietà del materiale. Mentre il numero 2 si riferisce al fatto che stiamo analizzando un pannello sandwich con cuore realizzato tramite struttura lattice. La pelle viene suddivisa quindi in un numero di strati

e vengono introdotte le caratteristiche del materiale con il quale è stata realizzata come il modulo di Poisson ed il modulo di Young. In questo caso viene sempre utilizzato l'alluminio come è stato fatto precedentemente per il calcolo delle costanti elastiche e della densità dei vari casi.

In seguito, viene introdotto il ciclo dedicato al cuore di tale pannello, la parte che è maggiormente oggetto di studio nel nostro caso:

```

for I=26:275
hL(I)=h/NL; %[m] thickness of the Ith layer (from the bottom to the top)
YM1(I) = 1; %[GPa] or [MPa] Young Modulus in 1 direction of the Ith layer (material reference system)
YM2(I) = 1; %[GPa] or [MPa] Young Modulus in 2 direction of the Ith layer (material reference system)
YM3(I) = 1; %[GPa] or [MPa] Young Modulus in 3 direction of the Ith layer (material reference system)
nu12(I) = 0.3; %[-] Poisson ratio of the Ith layer (material reference system)
nu13(I) = 0.3; %[-] Poisson ratio of the Ith layer (material reference system)
nu23(I) = 0.3; %[-] Poisson ratio of the Ith layer (material reference system)
G12(I) = YM1(I)/2.6; %[GPa] or [MPa] Shear Modulus of the Ith layer (material reference system)--[Pa]
G13(I) = YM2(I)/2.6; %[GPa] or [MPa] Shear Modulus of the Ith layer (material reference system)--[Pa]
G23(I) = YM3(I)/2.6; %[GPa] or [MPa] Shear Modulus of the Ith layer (material reference system)--[Pa]
PHI(I)= 0; %[deg] Orthotropy angle or fiber orientation
rho(I) = 135.35; %[kg/m^3] mass density of the Ith layer--- rho(I)=0 in the static case!!!1600 for f:
end

```

Figura 4.9: Codice con caratteristiche del materiale del cuore in struttura lattice

come per le pelli, vengono elencate le varie caratteristiche del materiale che compongono la struttura. In questo caso va notato però come il cuore è suddiviso in molto più strati rispetto alle pelli in quanto nei pannelli sandwich lo spessore delle pelli è molto minore in confronto allo spessore del cuore. Inoltre, è molto importante ricordare che la densità del cuore è variabile e non costante come nelle pelli in Alluminio, questo è dovuto ai vari casi studiati precedentemente nei quali la densità variava con lo spessore e la distanza tra nervature. Bisognerà quindi utilizzare i valori delle densità trovati nel capitolo precedente ed inserirli in modo opportuno. Lo stesso discorso varrà nel caso del ciclo dedicato alle costanti elastiche, bisognerà riprendere i valori calcolati per ogni caso ed aggiornare ogni costante elastica come riportato nella figura d'esempio che segue:

```

Q11(I) = 1.75; %elastic coefficients for orthotropic materials (material reference system)
Q12(I) = 6.561449049145627*10^(-15); %elastic coefficients for orthotropic materials (material
Q13(I) = 0.0; %elastic coefficients for orthotropic materials (material reference system)
Q22(I) = 1.75; %elastic coefficients for orthotropic materials (material reference system)
Q23(I) = 0.0; %elastic coefficients for orthotropic materials (material reference system)
Q33(I) = 3.5; %elastic coefficients for orthotropic materials (material reference system)
Q44(I) = 0.673076923076923; %elastic coefficients for orthotropic materials (material reference
Q55(I) = 0.673076923076923; %elastic coefficients for orthotropic materials (material reference
Q66(I) = 6.561449049145627*10^(-15); %elastic coefficients for orthotropic materials (material

```

Figura 4.10: Codice con le costanti elastiche del cuore in struttura lattice

in questa figura, sono stati riportati i valori delle costanti elastiche calcolate nel caso 1.

Infine, il programma ci fornirà i valori di frequenza ottenuti per l'analisi 3D esatta mentre i valori con il modello GDQ sono stati ottenuti dal software fornito dal professore Tornabene (programma utilizzato: F. Tornabene, Differential Quadrature for Mechanics of Anisotropic Shells, Plates, Arches and Beams (DiQuMASPAB

Software), DII Department, University of Salento <https://DiQuMASPAB.editrice-esculapio.com/>), per ogni numero di semi onde m e n come avevamo visto con le le equazioni di equilibrio trattate nel capitolo 3 e per tutti i dodici casi differenti che avevamo esaminato nel capitolo precedente.

Nel caso di analisi dinamica con metodo GDQ, è stato utilizzato il seguente software: F. Tornabene, DiQuMASPAB Software, DII Department, University of Salento (<https://DiQuMASPAB.editrice-esculapio.com/>) dove DiQuMASPAB è l'acronimo di Differential Quadrature for Mechanics of Anisotropic Shells, Plates, Arches and Beams. Questo software permette di modellare strutture complesse come pannelli e gusci curvi e ottenere risultati strutturali nell'ambito di analisi dinamiche e statiche di vari casi di studio. Prima di ottenere i risultati desiderati tramite l'applicazione del metodo GDQ, bisogna procedere nello riempimento di moduli che caratterizzeranno la struttura presa in esame. Prima di tutto si procede nell'inserimento dei dati riguardanti la tipologia dei materiali utilizzati, il numero di lamine che andranno a comporre il pannello, le informazione come il modulo di Young, lo spessore delle singole lamine e le costanti elastiche di ciascun caso preso in esame (12 casi precedentemente citati) come si vede nella figura riportato qui sotto.

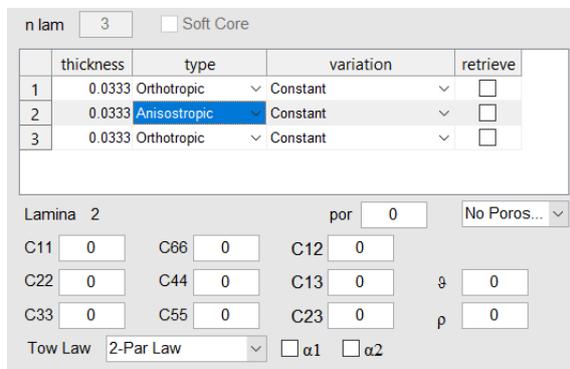


Figura 4.11: Definizione del modulo materiale

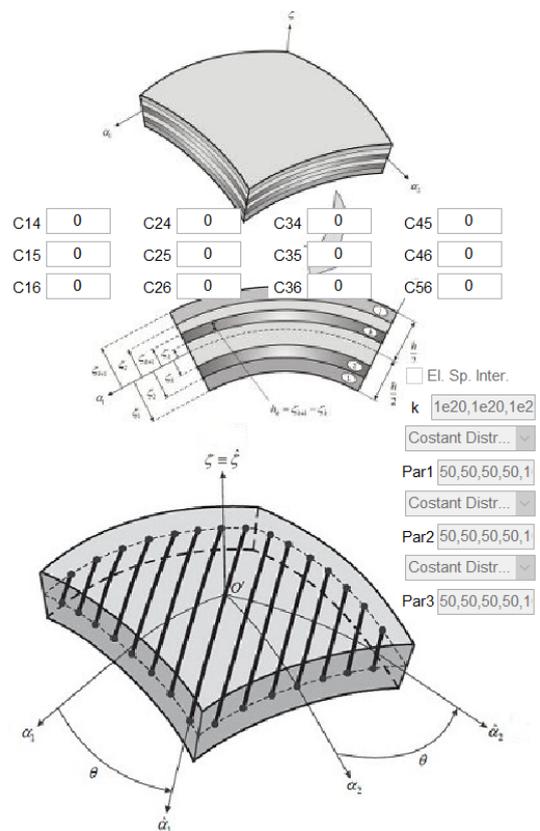


Figura 4.12: Rappresentazione del modulo materiale

Una volta definite i vari parametri che caratterizzano la struttura presa in esame, sarà possibile definire la geometria di tale struttura andando in questo caso a creare un pannello rettangolare con lunghezza $L_x = 6m$, $L_y = 3.2m$ e le pelli di spessore $h_1 = h_3 = 0.01m$. Come accennato precedentemente, il pannello preso in esame ha

le pelli in Alluminio quindi verranno considerati costanti le seguenti variabili per ogni caso:

- Alluminio: Modulo di Young $E = 70GPa$, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, densità $\rho = 2707kg/m^3$
- Lattice core: Modulo di Young $E = 70GPa$, coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$, densità $\rho = 2707kg/m^3$

Sarà possibile tramite il software ricreare una versione virtuale di tale pannello come nella figura che segue.

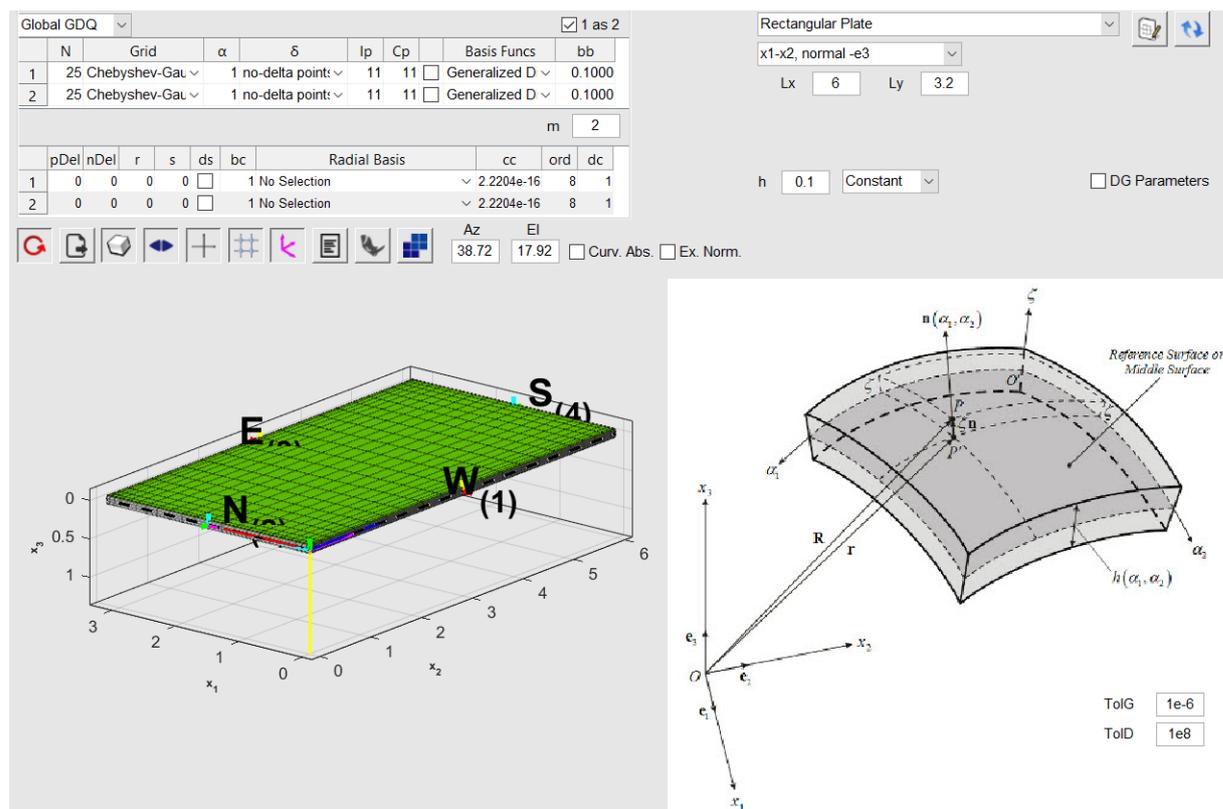


Figura 4.13: Definizione del modulo geometria

Una volta definita la geometria, bisogna definire la tipologia di carico che si desidera applicare nel caso dell'analisi dinamica. Si prosegue quindi inserendo questi dati come mostrato nella schermata qui sotto.

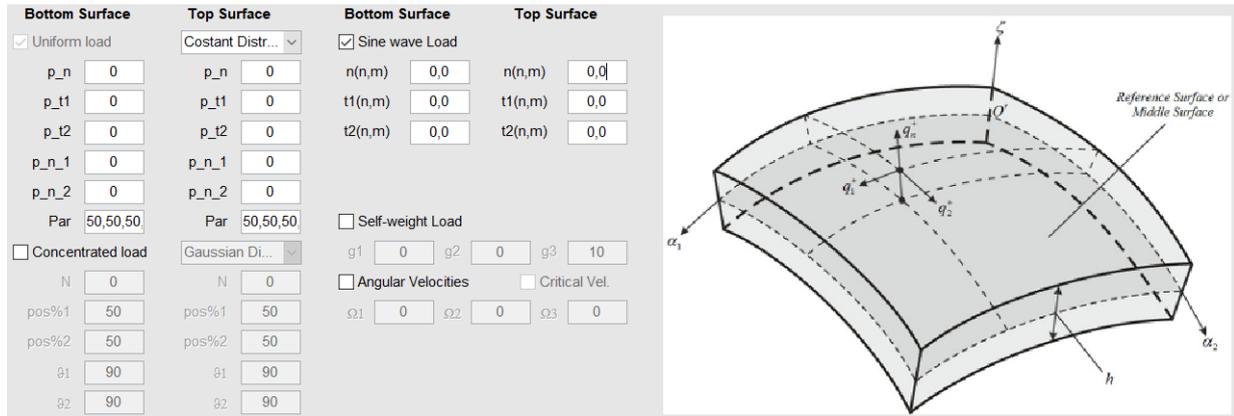


Figura 4.14: Definizione del modulo di carico

L'ultimo step da definire per in seguito avviare l'analisi dinamica è la definizione delle condizioni al contorno, in questo caso è stato scelto di prendere in esame un pannello rettangolare semplicemente appoggiato. Basterà selezionare il tasto "Simply-Supported" e il software automaticamente selezionerà le variabili da prendere in esame per soddisfare la condizione desiderata come mostrato nella figura seguente.

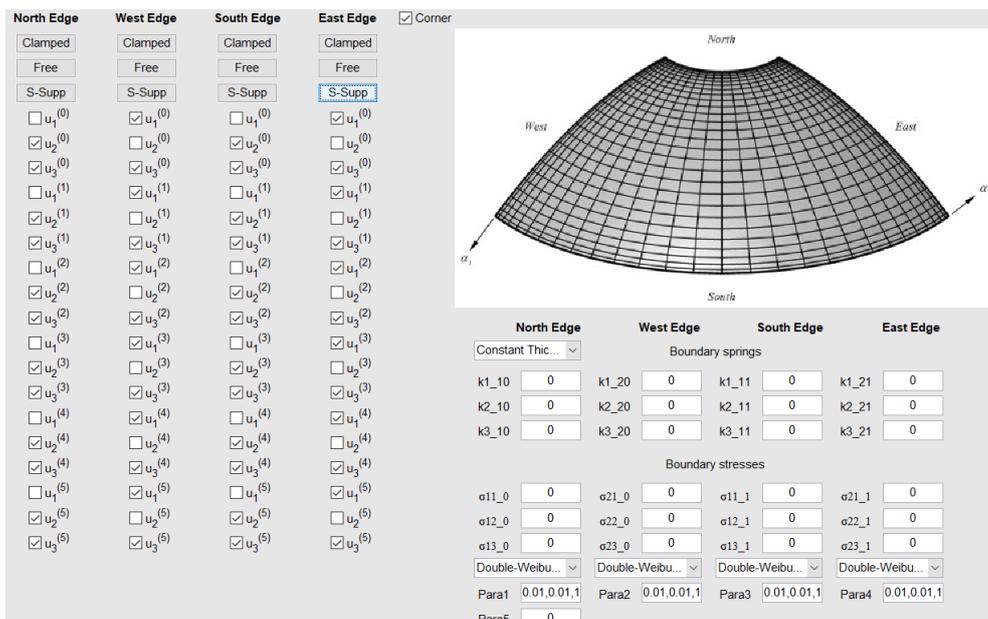


Figura 4.15: Definizione del modulo delle condizioni al contorno

Oltre al raccogliere i valori in frequenza nelle tabelle, verrà proposta anche una colonna con la variabile Δ espressa come la differenza delle frequenze ottenute tra modello GDQ e 3D calcolata nel seguente modo:

$$\Delta(\%) = \frac{f_{GDQ} - f_{3D}}{f_{3D}} * 100 \tag{4.1}$$

Per fornire dei risultati chiari e leggibili seguiranno dodici tabelle nelle quali saranno fornite le frequenze dall'analisi dinamica di un pannello rettangolare semplicemente appoggiato a due parametri variabili (δ_1, δ_2 e a_1, a_2) con lunghezza $L_x = 6m$, $L_y = 3.2m$ e le pelli di spessore $h_1 = h_3 = 0.01m$ e in seguito, alcune figure che

rappresentano gli spostamenti u , v e w . Come avevamo fatto prima, avremo dodici casi in funzione dello spessore del cuore del pannello in esame e dalla suddivisione in numero di strati delle varie strutture che compongono tali pannelli. Vengono quindi forniti i seguenti quattro gruppi con le loro caratteristiche utili nel distinguerli:

	Caso 1, 2, 3	Caso 4, 5, 6	Caso 7, 8, 9	Caso 10, 11, 12
Spessore pelli (p) $h_1 = h_3[m]$	0.01	0.01	0.01	0.01
Spessore cuore (c) $h_2[m]$	0.1	0.05	0.1	0.05
Numero totale strati NL	300	280	300	280
Suddivisione strati (p/c/p)	25/250/25	40/200/40	25/250/25	40/200/40

Tabella 4.5: Tabella riassuntiva delle caratteristiche di ogni caso

Un'ultima importante considerazione da fare prima di presentare i risultati sotto forma di tabelle è che la numerazione dei casi è la stessa fatta nell'analisi preliminare sulle costanti elastiche e le rispettive densità, quindi sono stati utilizzati i valori di questi parametri nel codice in modo da ottenere le corrette frequenze corrispondenti ad ogni caso. Procediamo riportando le tabelle con i risultati in frequenza ottenuti per i singoli casi:

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	50,41	50,54	I	0.258
(2,1)	81,85	82,06	I	0.256
(3,1)	131,73	132,05	I	0.240
(1,2)	156,38	156,74	I	0.233
(2,2)	183,45	183,88	I	0.232
(4,1)	196,53	196,97	I	0.226
(3,2)	226,87	227,38	I	0.223
(1,0)	235,05	235,06	II (w=0)	0.000
(5,1)	272,59	273,18	I	0.216
(4,2)	282,18	284,79	I	0.924
(1,3)	305,53	306,17	I	0.208
(2,3)	328,01	328,69	I	0.208
(5,2)	352,57	353,29	I	0.204
(6,1)	356,75	357,47	I	0.203
(3,3)	364,34	365,07	I	0.201
(4,3)	412,94	413,76	I	0.198
(6,2)	429,37	430,21	I	0.195
(0,1)	440,68	440,71	II (w=0)	0.000
(7,1)	446,46	447,31	I	0.190
(0,2)	470,05	470,09	II (w=0)	0.000

Tabella 4.6: Tabella con le frequenze del Caso 1

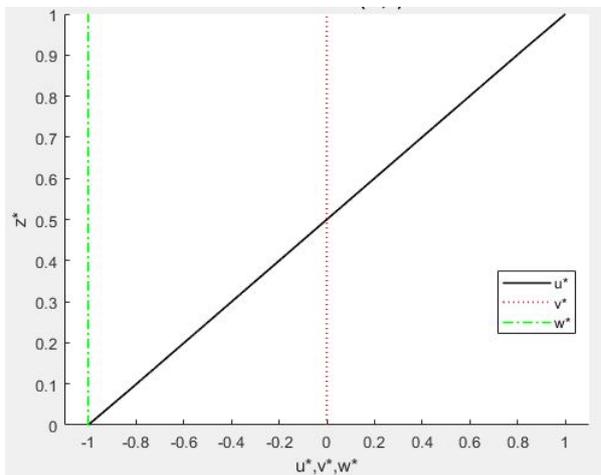


Figura 4.16: Caso 1 Modo I (1,0)

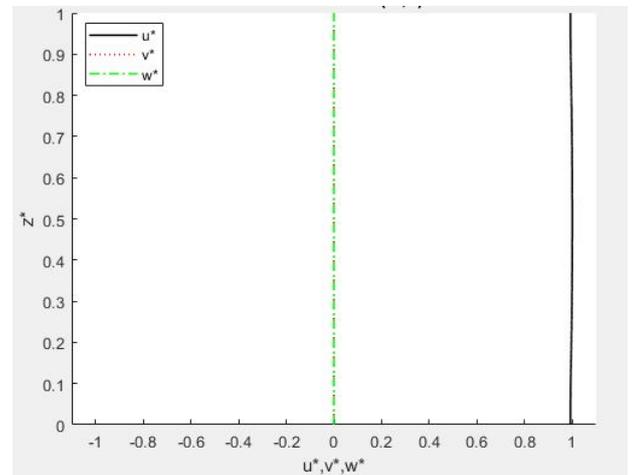


Figura 4.17: Caso 1 Modo II (0,2)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	47,26	47,44	I	0.382
(2,1)	77,35	77,64	I	0.377
(3,1)	126,59	127,05	I	0.362
(1,2)	151,96	152,49	I	0.350
(2,2)	179,14	179,76	I	0.347
(4,1)	192,75	193,41	I	0.340
(1,0)	214,57	214,57	II (w=0)	0.000
(3,2)	223,85	224,62	I	0.343
(5,1)	273,20	274,10	I	0.328
(4,2)	284,65	285,60	I	0.651
(1,3)	309,42	310,42	I	0.321
(2,3)	333,46	334,53	I	0.320
(5,2)	359,42	360,57	I	0.319
(6,1)	365,38	366,52	I	0.320
(3,3)	372,99	374,17	I	0.315
(0,1)	402,27	402,29	II (w=0)	0.000
(4,3)	427,03	428,35	I	0.309
(2,0)	429,07	429,11	II (w=0)	0.000
(6,2)	445,88	447,25	I	0.306
(7,1)	466,88	468,27	I	0.298

Tabella 4.7: Tabella con le frequenze del Caso 2

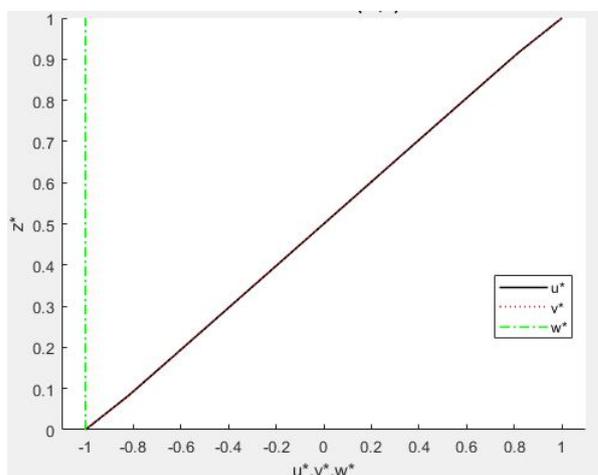


Figura 4.18: Caso 2 Modo I (3,1)

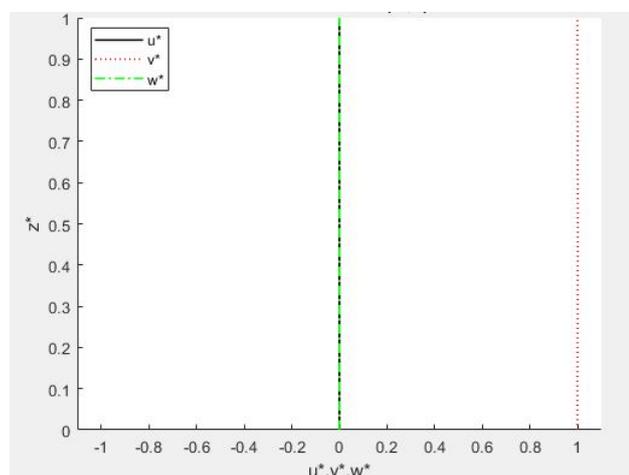


Figura 4.19: Caso 2 Modo II (2,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	33,76	34,05	I	0.865
(2,1)	54,89	55,38	I	0.899
(3,1)	92,01	92,81	I	0.872
(1,2)	114,27	115,19	I	0.806
(2,2)	132,94	134,07	I	0.847
(1,0)	140,47	140,47	II (w=0)	0.000
(4,1)	144,28	145,48	I	0.833
(3,2)	166,06	167,50	I	0.866
(5,1)	210,66	212,35	I	0.800
(4,2)	214,27	216,12	I	0.862
(1,3)	244,36	246,23	I	0.763
(2,3)	261,72	263,78	I	0.786
(0,1)	263,35	263,35	II (w=0)	0.000
(5,2)	277,09	279,43	I	0.842
(2,0)	280,89	280,90	II (w=0)	0.000
(6,1)	290,16	292,41	I	0.775
(3,3)	291,84	294,21	I	0.813
(4,3)	335,59	338,37	I	0.828
(6,2)	353,53	356,41	I	0.814
(7,1)	381,76	384,62	I	0.750

Tabella 4.8: Tabella con le frequenze del Caso 3

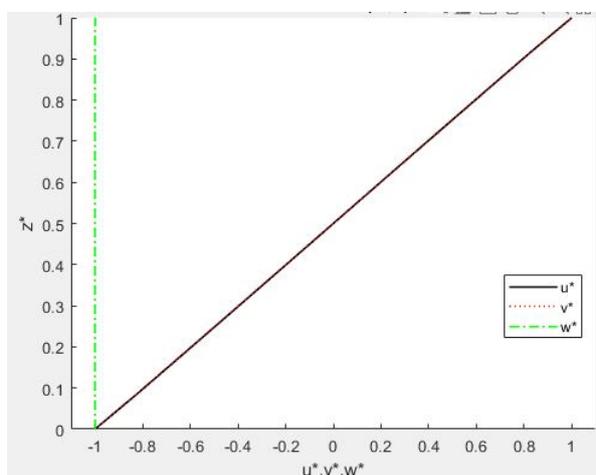


Figura 4.20: Caso 3 Modo I (4,1)

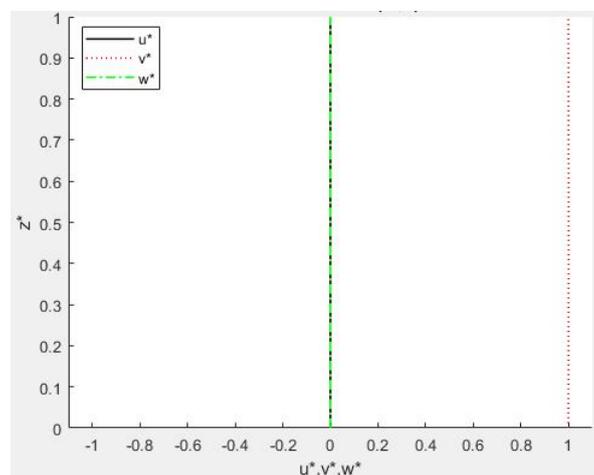


Figura 4.21: Caso 3 Modo II (2,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	29,44	29,49	I	0.170
(2,1)	48,39	48,48	I	0.180
(3,1)	79,15	79,29	I	0.180
(1,2)	94,53	94,69	I	0.172
(2,2)	112,02	112,22	I	0.163
(4,1)	120,45	120,66	I	0.171
(3,2)	140,50	140,74	I	0.170
(5,1)	170,84	171,12	I	0.167
(4,2)	178,96	179,26	I	0.166
(1,3)	193,12	193,43	I	0.162
(2,3)	208,76	209,09	I	0.159
(5,2)	226,15	226,52	I	0.162
(6,1)	228,76	229,12	I	0.157
(3,3)	234,29	234,66	I	0.157
(1,0)	247,77	247,78	II (w=0)	0.000
(4,3)	268,95	269,37	I	0.155
(6,2)	280,73	281,16	I	0.153
(7,1)	292,78	293,22	I	0.150
(5,3)	311,77	312,24	I	0.150
(1,4)	315,14	315,61	I	0.150

Tabella 4.9: Tabella con le frequenze del Caso 4

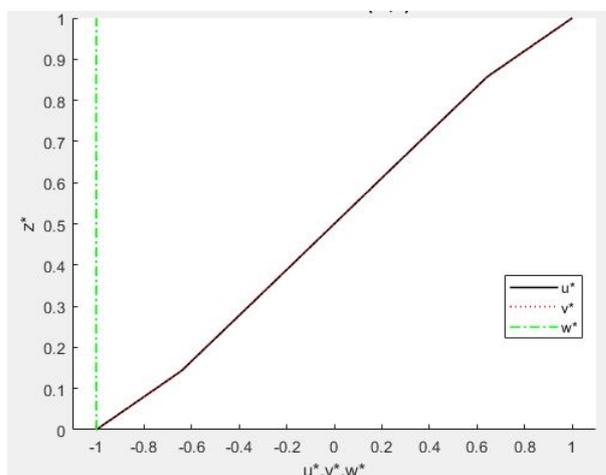


Figura 4.22: Caso 4 Modo I (6,1)

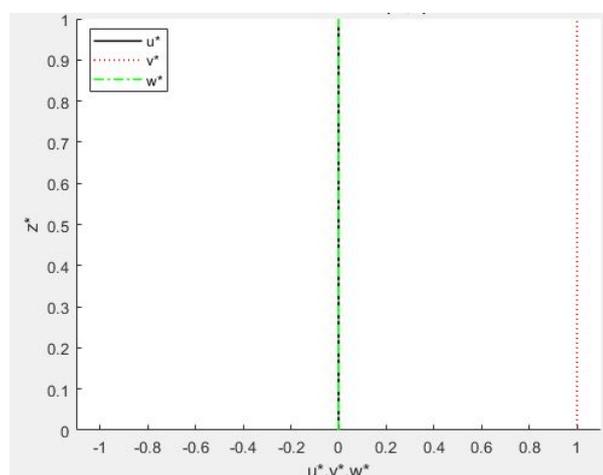


Figura 4.23: Caso 4 Modo II (1,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	28,29	28,38	I	0.325
(2,1)	46,71	46,85	I	0.308
(3,1)	77,09	77,33	I	0.305
(1,2)	92,62	92,90	I	0.297
(2,2)	110,14	110,47	I	0.300
(4,1)	118,74	119,09	I	0.299
(3,2)	139,08	139,49	I	0.293
(5,1)	170,72	171,21	I	0.289
(4,2)	178,91	179,43	I	0.291
(1,3)	194,25	194,81	I	0.286
(2,3)	210,64	211,24	I	0.285
(5,2)	228,83	229,47	I	0.282
(6,1)	232,01	232,66	I	0.279
(1,0)	235,06	235,06	II (w=0)	0.000
(3,3)	237,69	238,36	I	0.281
(4,3)	274,98	275,74	I	0.277
(6,2)	287,89	288,67	I	0.273
(7,1)	301,56	302,37	I	0.270
(5,3)	321,86	322,73	I	0.271
(1,4)	326,41	327,28	I	0.266

Tabella 4.10: Tabella con le frequenze del Caso 5

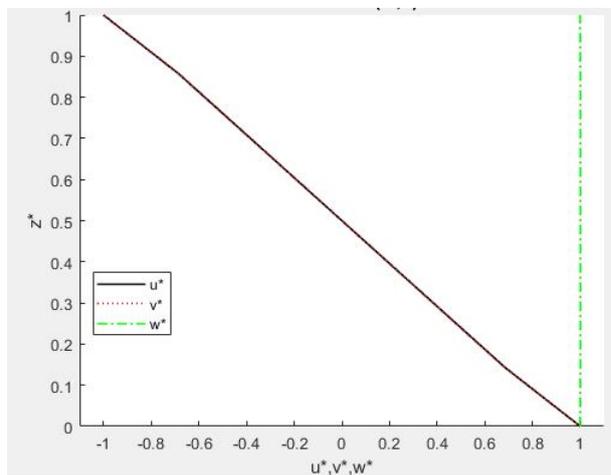


Figura 4.24: Caso 5 Modo I (1,3)

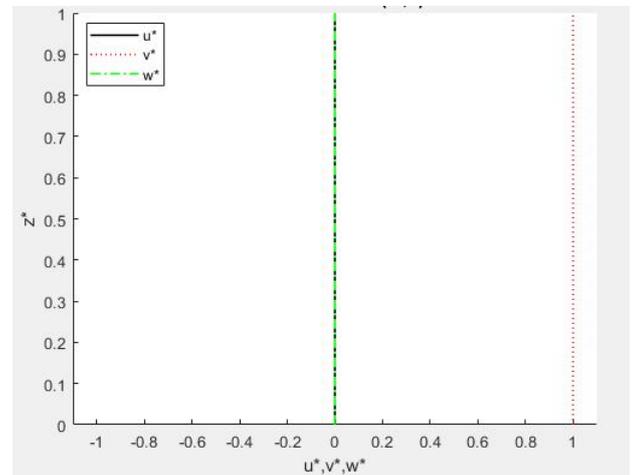


Figura 4.25: Caso 5 Modo II (1,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	21,94	22,09	I	0.703
(2,1)	36,12	36,37	I	0.694
(3,1)	60,34	60,76	I	0.699
(1,2)	73,72	74,21	I	0.665
(2,2)	87,14	87,74	I	0.687
(4,1)	94,35	95,00	I	0.683
(3,2)	110,13	110,90	I	0.697
(5,1)	137,87	138,79	I	0.666
(4,2)	142,88	143,87	I	0.691
(1,3)	158,88	159,92	I	0.650
(2,3)	171,87	173,01	I	0.664
(1,0)	175,20	175,20	II (w=0)	0.000
(5,2)	185,25	186,52	I	0.683
(6,1)	190,58	191,83	I	0.654
(3,3)	193,88	195,18	I	0.669
(4,3)	225,19	226,72	I	0.675
(6,2)	236,94	238,53	I	0.670
(7,1)	252,16	253,79	I	0.645
(5,3)	265,56	267,67	I	0.795
(1,4)	275,61	277,35	I	0.631

Tabella 4.11: Tabella con le frequenze del Caso 6

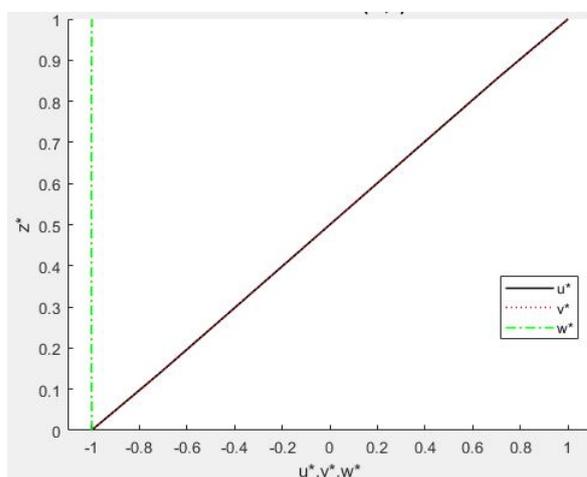


Figura 4.26: Caso 6 Modo I (4,3)

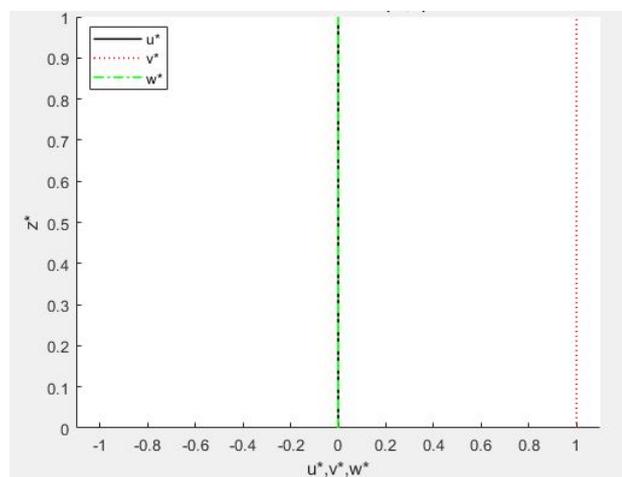


Figura 4.27: Caso 6 Modo II (1,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	48,27	48,44	I	0.355
(2,1)	79,14	79,41	I	0.338
(3,1)	128,85	129,28	I	0.331
(1,2)	153,50	154	I	0.325
(2,2)	181,56	182,14	I	0.319
(4,1)	195,00	195,62	I	0.316
(3,2)	226,96	227,66	I	0.310
(1,0)	232,31	232,31	II (w=0)	0.000
(5,1)	274,86	275,69	I	0.302
(4,2)	287,79	288,65	I	0.299
(1,3)	309,87	310,78	I	0.294
(2,3)	334,46	335,43	I	0.289
(5,2)	361,79	362,83	I	0.287
(6,1)	365,72	366,77	I	0.286
(3,3)	374,44	375,51	I	0.285
(4,3)	428,40	429,59	I	0.277
(0,1)	435,56	435,57	II (w=0)	0.000
(6,2)	446,64	447,86	I	0.274
(2,0)	464,59	464,60	II (w=0)	0.000
(7,1)	465,14	466,40	I	0.271

Tabella 4.12: Tabella con le frequenze del Caso 7

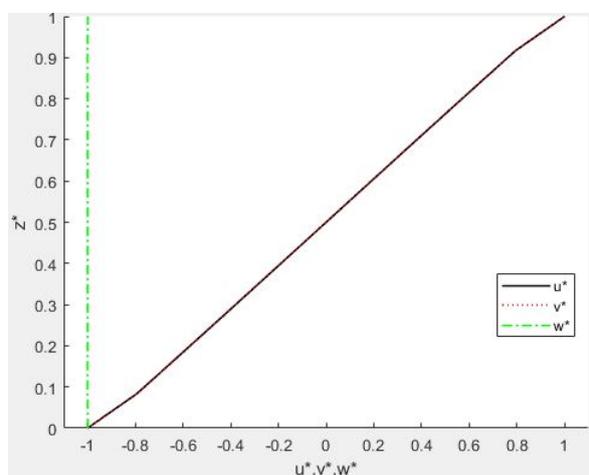


Figura 4.28: Caso 7 Modo I (5,1)

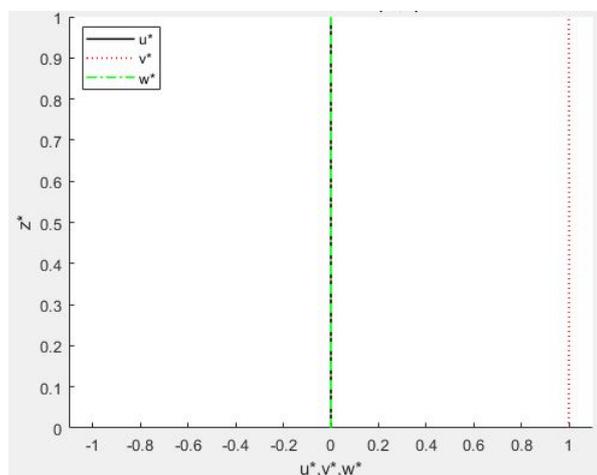


Figura 4.29: Caso 7 Modo II (2,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	43,58	43,79	I	0.486
(2,1)	71,86	72,21	I	0.486
(3,1)	118,21	118,77	I	0.476
(1,2)	141,65	142,31	I	0.466
(2,2)	168,29	169,08	I	0.464
(4,1)	181,25	182,09	I	0.462
(3,2)	212,06	213,03	I	0.458
(1,0)	214,06	214,06	II (w=0)	0.000
(5,1)	259,31	260,47	I	0.448
(4,2)	271,84	273,05	I	0.446
(1,3)	294,31	295,61	I	0.442
(2,3)	318,85	320,24	I	0.436
(5,2)	346,17	347,67	I	0.434
(6,1)	350,54	352,06	I	0.432
(3,3)	359,18	360,73	I	0.431
(0,1)	401,34	401,35	II (w=0)	0.000
(4,3)	414,43	416,19	I	0.424
(2,0)	428,09	428,11	II (w=0)	0.000
(6,2)	433,39	435,21	I	0.419
(7,1)	453,11	454,99	I	0.414

Tabella 4.13: Tabella con le frequenze del Caso 8

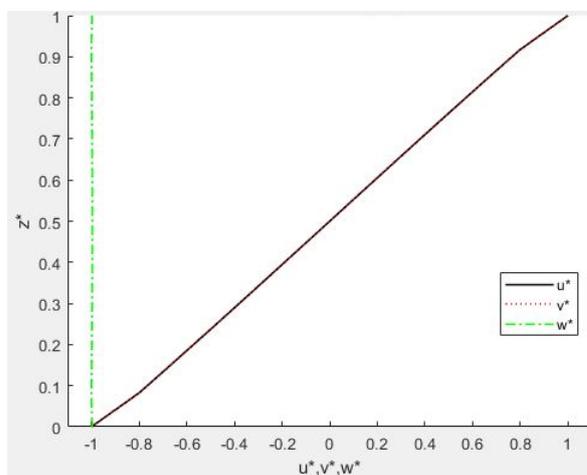


Figura 4.30: Caso 8 Modo I (6,2)

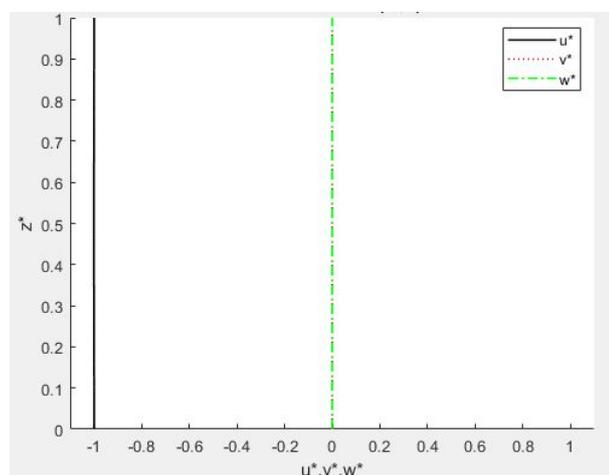


Figura 4.31: Caso 8 Modo II (0,1)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	29,62	26,94	I	0.090
(2,1)	48,92	49,46	I	1.100
(3,1)	81,37	82,85	I	1.820
(1,2)	98,60	99,65	I	1.060
(2,2)	117,12	118,37	I	1.070
(4,1)	126,58	127,94	I	1.070
(3,2)	148,30	149,90	I	1.080
(1,0)	167,86	167,86	II (w=0)	0.000
(5,1)	184,06	185,99	I	1.050
(4,2)	192,09	194,14	I	1.060
(1,3)	210,99	213,17	I	1.030
(2,3)	228,84	231,22	I	1.040
(5,2)	248,12	250,73	I	1.050
(6,1)	253,22	255,83	I	1.030
(3,3)	258,75	261,44	I	1.040
(4,3)	300,72	303,85	I	1.040
(0,1)	314,73	314,73	II (w=0)	0.000
(6,2)	315,28	319,09	I	1.210
(7,1)	333,47	335,71	I	0.670
(2,0)	335,71	336,84	II (w=0)	0.340

Tabella 4.14: Tabella con le frequenze del Caso 9

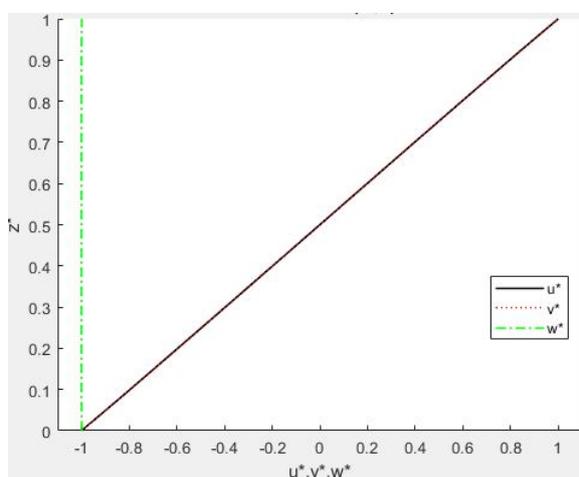


Figura 4.32: Caso 9 Modo I (3,2)

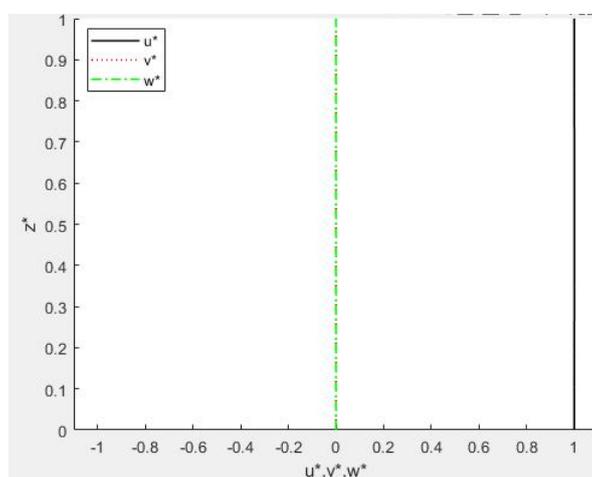


Figura 4.33: Caso 9 Modo II (0,1)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	28,66	28,74	I	0.287
(2,1)	47,35	47,48	I	0.291
(3,1)	77,95	78,16	I	0.265
(1,2)	93,32	93,57	I	0.267
(2,2)	111,12	111,41	I	0.264
(4,1)	119,68	120,00	I	0.267
(3,2)	140,29	140,66	I	0.259
(5,1)	171,53	171,97	I	0.258
(4,2)	180,16	180,62	I	0.254
(1,3)	194,69	195,19	I	0.254
(2,3)	211,23	211,76	I	0.250
(5,2)	229,82	230,39	I	0.249
(6,1)	232,37	232,95	I	0.248
(3,3)	238,39	238,98	I	0.249
(1,0)	245,34	245,34	II (w=0)	0.000
(4,3)	275,57	276,24	I	0.243
(6,2)	288,24	288,94	I	0.242
(7,1)	301,06	301,79	I	0.241
(5,3)	322,03	322,79	I	0.236
(1,4)	325,32	326,09	I	0.236

Tabella 4.15: Tabella con le frequenze del Caso 10

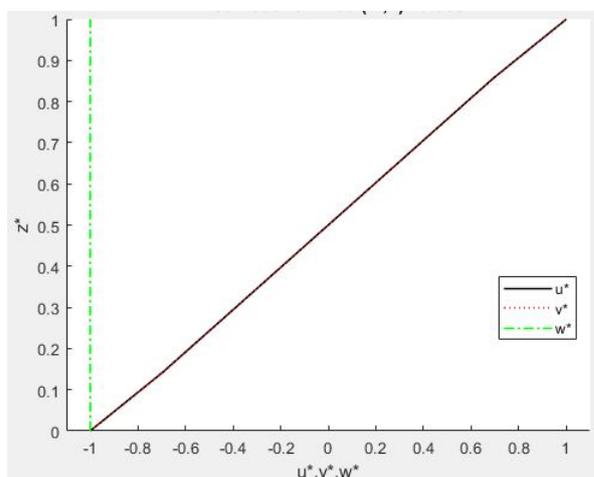


Figura 4.34: Caso 10 Modo I (2,2)

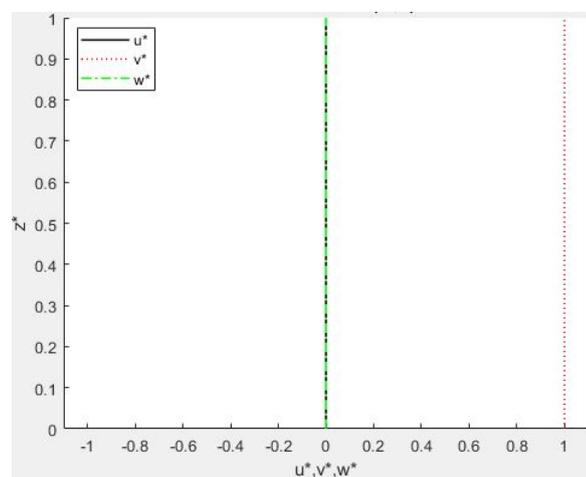


Figura 4.35: Caso 10 Modo II (1,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	26,77	26,89	I	0.428
(2,1)	44,37	44,56	I	0.427
(3,1)	73,45	73,76	I	0.418
(1,2)	88,21	88,58	I	0.421
(2,2)	105,31	105,75	I	0.422
(4,1)	113,59	114,07	I	0.417
(3,2)	133,58	134,14	I	0.417
(5,1)	164,24	164,91	I	0.410
(4,2)	172,66	173,37	I	0.408
(1,3)	187,18	187,93	I	0.403
(2,3)	203,57	204,39	I	0.404
(5,2)	220,04	222,93	I	1.310
(6,1)	224,71	225,61	I	0.399
(3,3)	230,67	231,59	I	0.397
(1,0)	232,31	232,31	II (w=0)	0.000
(4,3)	268,17	269,22	I	0.393
(6,2)	281,07	282,17	I	0.392
(7,1)	301,06	301,79	I	0.241
(5,3)	322,03	322,79	I	0.236
(1,4)	325,32	326,09	I	0.237

Tabella 4.16: Tabella con le frequenze del Caso 11

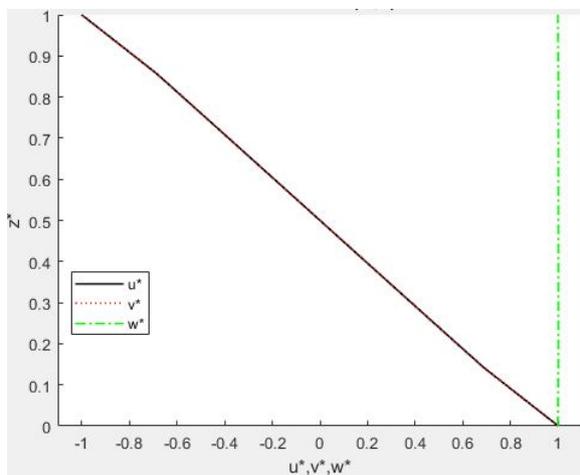


Figura 4.36: Caso 11 Modo I (7,1)

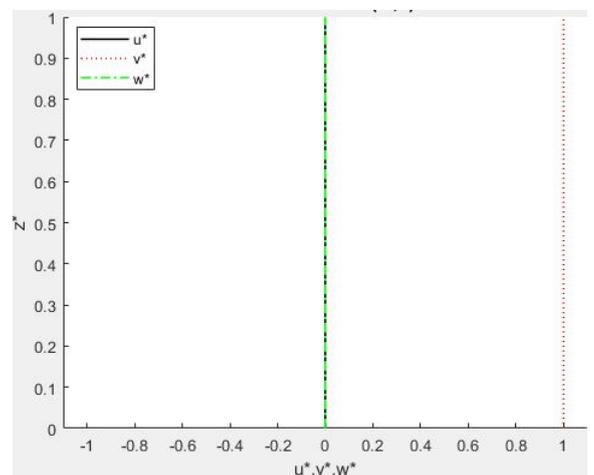


Figura 4.37: Caso 11 Modo II (1,0)

(m,n)	f[Hz] 3D	f[Hz] GDQ	Modo vibrazionale	Δ [%]
(1,1)	19,26	19,41	I	0.796
(2,1)	31,95	32,19	I	0.762
(3,1)	53,17	53,60	I	0.803
(1,2)	64,23	64,74	I	0.797
(2,2)	76,67	77,28	I	0.800
(4,1)	82,86	83,52	I	0.797
(3,2)	97,51	98,29	I	0.795
(5,1)	120,85	121,81	I	0.793
(4,2)	126,76	127,77	I	0.793
(1,3)	138,48	139,57	I	0.784
(2,3)	150,72	151,90	I	0.782
(5,2)	164,31	165,61	I	0.789
(6,1)	166,98	168,29	I	0.780
(3,3)	171,17	172,52	I	0.784
(1,0)	186,28	186,28	II (w=0)	0.000
(4,3)	199,87	201,44	I	0.785
(6,2)	210,00	211,64	I	0.780
(7,1)	221,08	222,79	I	0.773
(5,3)	236,74	238,59	I	0.780
(1,4)	240,97	242,82	I	0.768

Tabella 4.17: Tabella con le frequenze del Caso 12

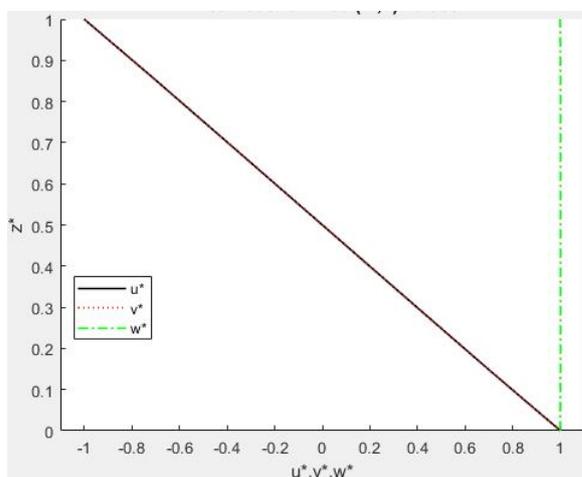


Figura 4.38: Caso 12 Modo I (5,2)

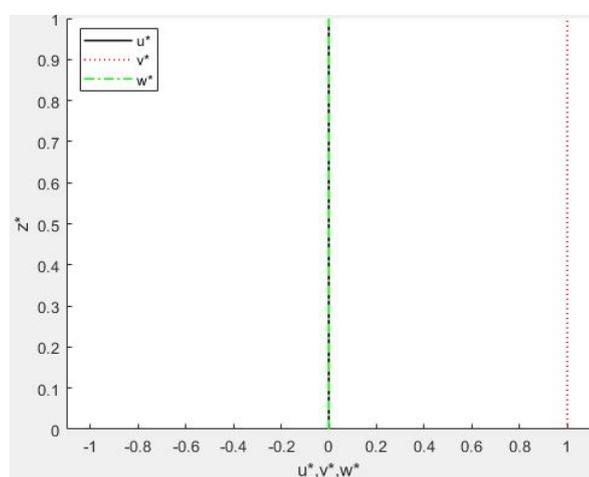


Figura 4.39: Caso 12 Modo II (1,0)

4.2.1 Commenti ed interpretazione dei risultati

Dalle tabelle precedenti, si osserva prima di tutto che i valori di frequenza ottenuti con il metodo GDQ sono leggermente più alti rispetto al metodo 3D. Invece analizzando i dati senza considerare la distinzione tra i due metodi, i valori delle frequenze sono più elevati nei pannelli con cuore di spessore $h_2 = 0.1m$ rispetto a quelli di spessore $h_2 = 0.05m$. Nello specifico, per ogni gruppo di casi (elencati all'inizio del capitolo) si nota come all'aumentare dello spessore delle nervature δ_i e quindi al conseguente aumento del valore di costanti elastiche e densità, diminuiscono leggermente i valori di frequenza.

Inoltre, la differenza di frequenze ottenute tra modello GDQ e 3D denominata Δ è di poco superiore ad 1% solo nel caso 9, mentre negli altri casi i valori di differenza sono inferiori al 1%. Si può quindi dedurre che le teorie numeriche 3D esatto e GDQ permettono di ottenere risultati validi e confrontandole si osserva come le differenze di valori numerici in termini di frequenze sono trascurabili, soprattutto nei casi in cui abbiamo il secondo modo vibrazionale (II) inteso come modo membranale di vibrare, le differenze sono tutte pari a 0, questo è dovuto al fatto che sono ricercate le frequenze nel piano e quindi gli effetti tridimensionali della teoria 3D sono trascurati e non vengono considerati nell'analisi dinamica.

Un altro aspetto importante di questa analisi è a quali frequenze si manifestano il primo e secondo modo vibrazionale. Prendiamo l'esempio dei primi tre casi analizzati: sono tre pannelli con cuore $h_2 = 0.1m$ e pelli $h_1 = h_3 = 0.01m$, l'unica differenza è lo spessore delle nervature che compongono il cuore $\delta_i = 0.005m/0.01m/0.05m$ rispettivamente per i Casi 1, 2 e 3. Notiamo attraverso l'analisi delle frequenze come all'aumentare dello spessore delle nervature corrispondente ad un aumento dei valori delle costanti elastiche C_{ij} e dell'incremento di densità di tali pannelli, diminuiscano i valori di frequenze del I e II modo dal Caso 1 al Caso 3.

Notiamo anche come i valori di frequenza ottenuti tramite metodo GDQ siano in ogni caso leggermente superiori rispetto a quelli ottenuto tramite metodo 3D. Questo può essere giustificato nel diverso modo di discretizzazione delle strutture in quanto nel metodo 3D vengono considerati un'infinità di punti mentre nel caso del metodo GDQ, vengono scelti un numero finito di punti per discretizzare la struttura presa in esame. Possiamo quindi affermare che il metodo 3D è un metodo analitico con una matrice di rigidezza [K] più flessibile rispetto al metodo numerico GDQ che presenta un incremento di rigidezza. Infatti, andando ad analizzare i risultati ottenuti, notiamo come la prima frequenza nei tre casi di studio $f_{caso1} = 50.41Hz$, $f_{caso2} = 47.26Hz$, $f_{caso3} = 33.76Hz$ diminuisca e lo stesso per la prima frequenza del secondo modo $f_{caso1} = 235.05Hz$, $f_{caso2} = 214.57Hz$, $f_{caso3} = 140.47Hz$. Ciò indica che i pannelli si irrigidiscono in direzione verticale a causa della diminuzione delle frequenze del primo modo e quelle del secondo modo. Ma allo stesso tempo che aumenta la rigidità di tali pannelli, aumenta anche la massa passando dal caso 1 con una densità $\rho = 135.35kg/m^3$ al caso 3 con una densità $\rho = 1353.5kg/m^3$, cioè 10 volte più pesante e si potrebbe quindi ipotizzare se l'aumento della rigidità del pannello possa giustificare un così notevole incremento di massa.

Questo comportamento e diminuzione dei valori delle frequenze si ritrova per ogni terna di casi analizzati, il che supporta quanto detto precedentemente dove all'aumentare della massa dei pannelli sandwich abbiamo un conseguente aumento della

rigidità di questi ultimi che si manifesta con valori di frequenze più bassi quando vengono sollecitati dinamicamente.

4.3 Analisi statica con modello 3D esatto

In questa sezione verrà effettuata l'analisi statica di un pannello sandwich con struttura lattice e verranno in seguito riportati gli spostamenti risultanti e le componenti delle tensioni σ_{ij} .

In questa analisi, avendo trovato per l'analisi dinamica dei risultati molto simili tra metodo 3D e GDQ, in questo caso riporteremo solo quelli ottenuti tramite metodo 3D in quanto la matrice $[K]$ di rigidità sarà sempre la stessa calcolata per i due metodi nel caso di analisi dinamica e quindi confidiamo nel fatto che anche per l'analisi statica otterremo risultati simili. Quindi ci concentreremo sul metodo 3D e verranno commentati i risultati ottenuti.

Per realizzare tale analisi è stato utilizzato il seguente programma Matlab: "Program to compute exact 3D free vibration frequencies and the static analysis of simply supported spherical, cylindrical and flat N-layered sandwich panels embedding a lattice core" scritto dal Professore S. Brischetto. Questo programma utilizza la metodologia del modello 3D Shell, esattamente come è stato fatto per l'analisi dinamica effettuata precedentemente. Il primo passo è quello di ovviamente decidere le caratteristiche del pannello come lunghezza e larghezza, numero di strati che andranno a suddividere tale struttura ma in questo caso essendo l'analisi statica, bisognerà definire i carichi esterni agenti su tale struttura e scegliere un valore di intensità come viene riportato nella seguente figura:

```
Pzt=10000; %[Pa] --static load at the top in z direction
Pbt=0.0; %[Pa] --static load at the top in beta direction
Pat=0.0; %[Pa] --static load at the top in alfa direction
Pzb=0.0; %[Pa] --static load at the bottom in z direction
Pbb=0.0; %[Pa] --static load at the bottom in beta direction
Pab=0.0; %[Pa] --static load at the bottom in alpha direction
```

Figura 4.40: Definizione del carico per l'analisi statica

In questo caso, come si può vedere dalla figura, abbiamo scelto di applicare un carico di $P_{zt} = 10000$ Pa sulla superficie superiore del pannello sandwich.

Come abbiamo fatto precedentemente, bisognerà inizializzare pelli e cuore con le loro caratteristiche in modo da impostare nel modo adeguato ogni singolo caso. Inoltre verranno ripresi i valori delle costanti elastiche e saranno riportati i valori per ogni caso affinché si ottengano i giusti valori di spostamenti e sforzi che corrispondono ad ogni caso di studio. Infine, il programma ci restituirà a video i valori degli spostamenti u, v, w , delle sei componenti delle deformazioni $\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{zz}, \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha z}, \gamma_{\beta z}$ e dei sei sforzi $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha z}, \sigma_{\beta z}$ e verranno visualizzate come nell'esempio della figura riportata di seguito:

Una volta descritta la metodologia per l'analisi statica tramite il metodo analitico 3D descritto precedentemente, è possibile raccogliere i dati degli spostamenti e tensioni che ci interessano in modo da comprendere come risponderà tale pannello al carico applicato.

```

11) The six stress components at the bottom, middle and top:
Elapsed time is 439.689431 seconds.
Stress \sigma_{\alpha\alpha} at the bottom:

Saa_b =

      -6.088560263045413e+06

Stress \sigma_{\alpha\alpha} in the middle:

Saa_m =

      -1.716604369632779e+02

Stress \sigma_{\alpha\alpha} at the top:

Saa_t =

      6.091661187840694e+06

```

Figura 4.41: Esempio di valori di sforzo

Nel nostro caso, andremo a riportare i valori degli spostamenti e degli sforzi per ogni caso nelle tabelle che seguiranno. Verranno considerati i valori in tre punti diversi lungo lo spessore h del pannello che saranno bottom ($z/h=0$), middle ($z/h=0.5$) e top ($z/h=1$).

Come avevamo fatto prima, avremo dodici casi in funzione dello spessore del cuore del pannello in esame e dalla suddivisione in numero di strati delle varie strutture che compongono tali pannelli. Vengono quindi forniti i seguenti quattro gruppi con le loro caratteristiche utili nel distinguerli:

	Caso 1, 2, 3	Caso 4, 5, 6	Caso 7, 8, 9	Caso 10, 11, 12
Spessore pelli (p) $h_1 = h_3[m]$	0.01	0.01	0.01	0.01
Spessore cuore (c) $h_2[m]$	0.1	0.05	0.1	0.05
Numero totale strati NL	300	280	300	280
Suddivisione strati (p/c/p)	25/250/25	40/200/40	25/250/25	40/200/40

Tabella 4.18: Tabella riassuntiva delle caratteristiche di ogni caso

Nelle prossime pagine sono quindi riportate le tabelle con i risultati degli spostamenti e degli sforzi ottenuti dall'analisi statica per i singoli casi e in seguito anche dei grafici che mostrano l'andamento di spostamenti e sforzi lungo tutto lo spessore del pannello sandwich preso in esame.

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$4.334 * 10^{-5}$	$8.116 * 10^{-5}$	$1.468 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$1.468 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-4.332 * 10^{-5}$	$-8.112 * 10^{-5}$	$1.469 * 10^{-3}$

Tabella 4.19: Tabella con gli spostamenti del Caso 1

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-3.584 * 10^6$	$-6.653 * 10^6$	0
middle (z/h=0.5)	$-1.239 * 10^1$	$-3.735 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$3.587 * 10^6$	$6.654 * 10^6$	$9.999 * 10^3$

Tabella 4.20: Tabella con le tensioni del Caso 1

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$2.896 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	0	$3.801 * 10^4$	$7.325 * 10^4$
top (z/h=1)	$-2.288 * 10^6$	0	0

Tabella 4.21: Tabella con le tensioni del Caso 1

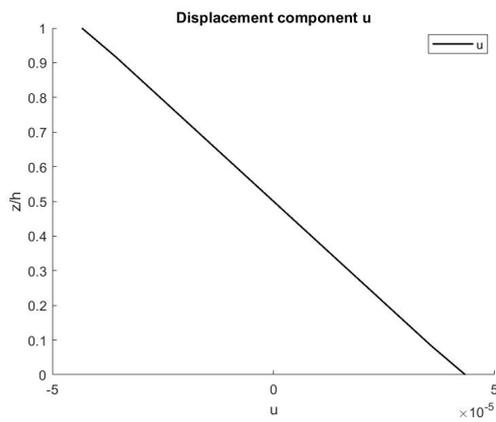


Figura 4.42: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 1)

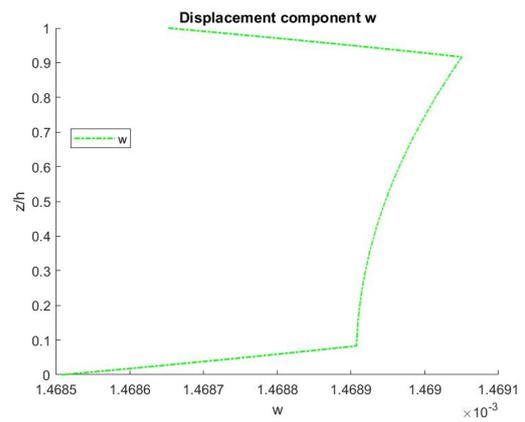


Figura 4.43: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 1)

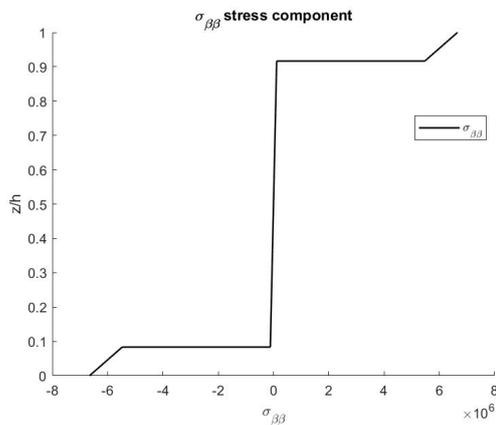


Figura 4.44: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 1)

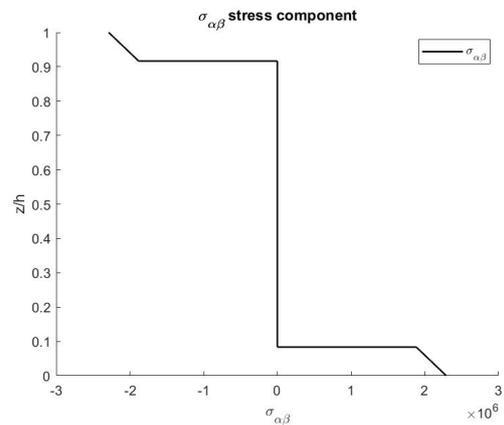


Figura 4.45: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 1)

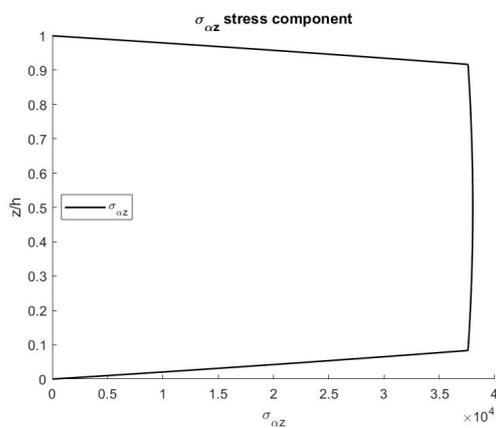


Figura 4.46: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 1)

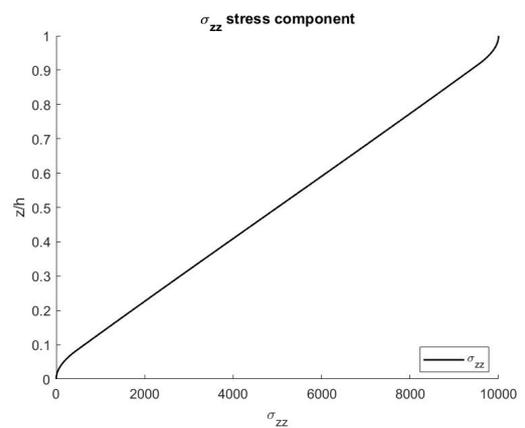


Figura 4.47: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 1)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$4.237 * 10^{-5}$	$7.934 * 10^{-5}$	$1.392 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$1.393 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-4.234 * 10^{-5}$	$-7.930 * 10^{-5}$	$1.392 * 10^{-3}$

Tabella 4.22: Tabella con gli spostamenti del Caso 2

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-3.504 * 10^6$	$-6.504 * 10^6$	0
middle (z/h=0.5)	$-2.431 * 10^1$	$-6.505 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$3.506 * 10^6$	$6.505 * 10^6$	$1 * 10^4$

Tabella 4.23: Tabella con le tensioni del Caso 2

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$2.238 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	0	$3.769 * 10^4$	$7.459 * 10^4$
top (z/h=1)	$-2.237 * 10^6$	0	0

Tabella 4.24: Tabella con le tensioni del Caso 2

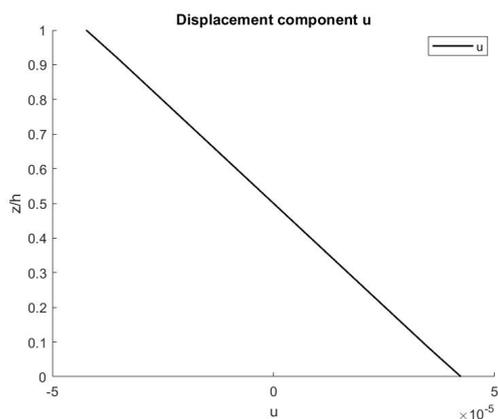


Figura 4.48: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 2)

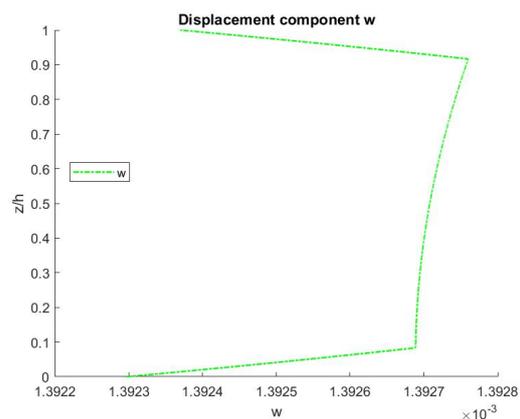


Figura 4.49: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 2)

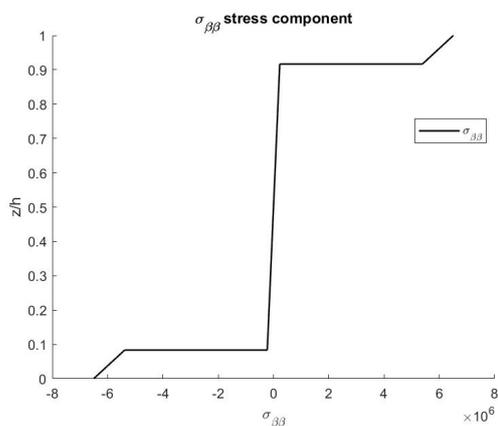


Figura 4.50: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 2)

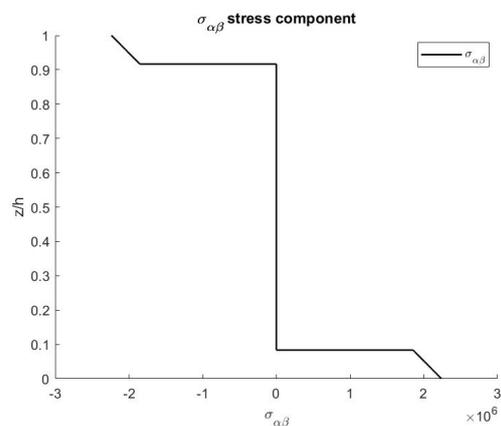


Figura 4.51: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 2)

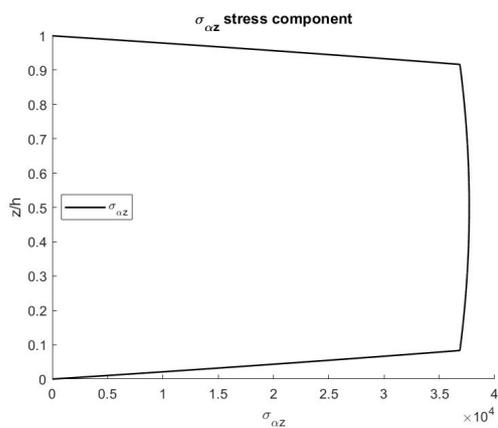


Figura 4.52: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 2)

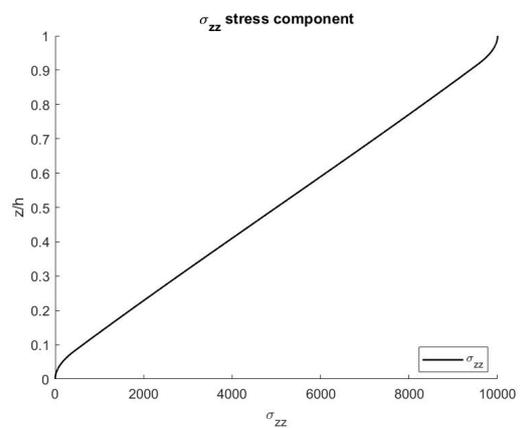


Figura 4.53: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 2)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$3.653 * 10^{-5}$	$6.839 * 10^{-5}$	$1.170 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$1.171 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-3.651 * 10^{-5}$	$-6.837 * 10^{-5}$	$1.170 * 10^{-3}$

Tabella 4.25: Tabella con gli spostamenti del Caso 3

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-3.021 * 10^6$	$-5.606 * 10^6$	0
middle (z/h=0.5)	$-1.097 * 10^2$	$-1.882 * 10^2$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$3.024 * 10^6$	$5.608 * 10^6$	$9.999 * 10^3$

Tabella 4.26: Tabella con le tensioni del Caso 3

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$1.929 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	0	$3.549 * 10^4$	$8.367 * 10^4$
top (z/h=1)	$-1.928 * 10^6$	0	0

Tabella 4.27: Tabella con le tensioni del Caso 3

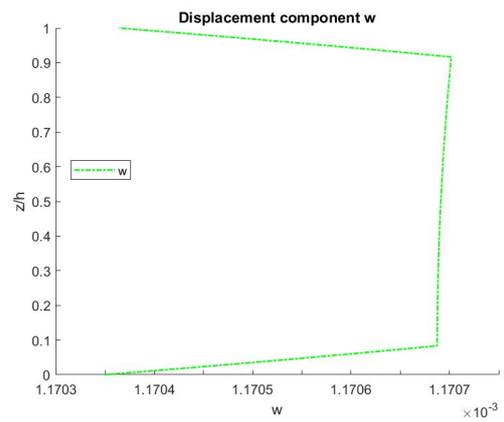
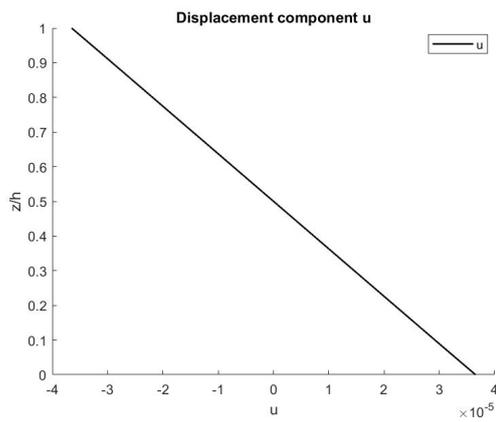


Figura 4.54: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 3)

Figura 4.55: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 3)

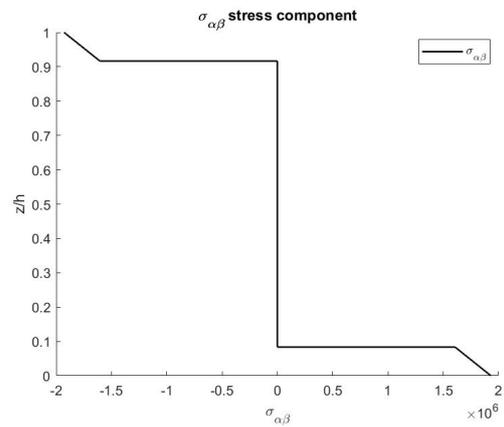
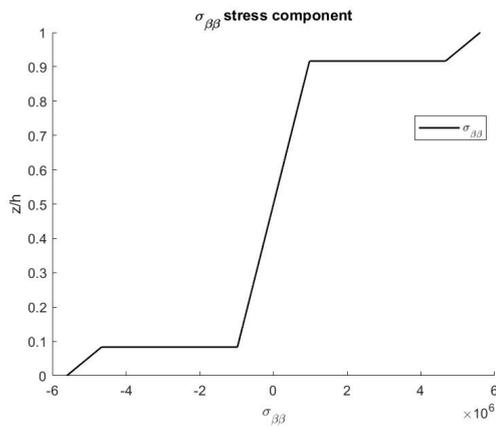


Figura 4.56: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 3)

Figura 4.57: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 3)

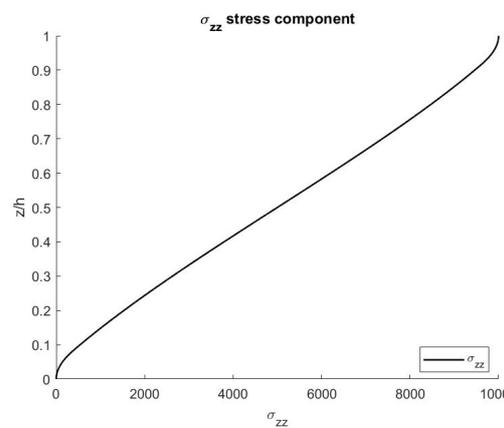
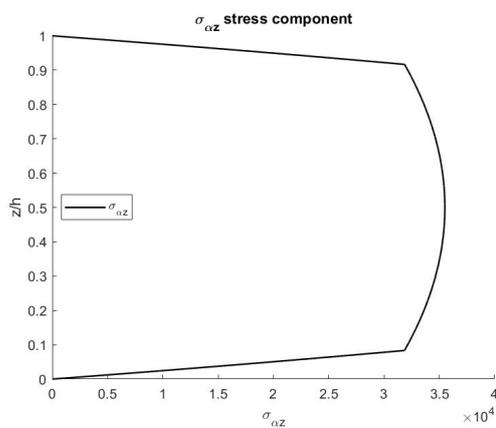


Figura 4.58: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 3)

Figura 4.59: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 3)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$8.526 * 10^{-5}$	$1.598 * 10^{-4}$	$4.793 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$4.794 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-8.524 * 10^{-5}$	$-1.598 * 10^{-4}$	$4.793 * 10^{-3}$

Tabella 4.28: Tabella con gli spostamenti del Caso 4

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-7.055 * 10^6$	$-1.310 * 10^7$	0
middle (z/h=0.5)	$-1.141 * 10^1$	$-3.689 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$7.057 * 10^6$	$1.310 * 10^7$	$1 * 10^4$

Tabella 4.29: Tabella con le tensioni del Caso 4

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$4.507 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	0	$6.960 * 10^4$	$1.322 * 10^5$
top (z/h=1)	$-4.505 * 10^6$	0	0

Tabella 4.30: Tabella con le tensioni del Caso 4

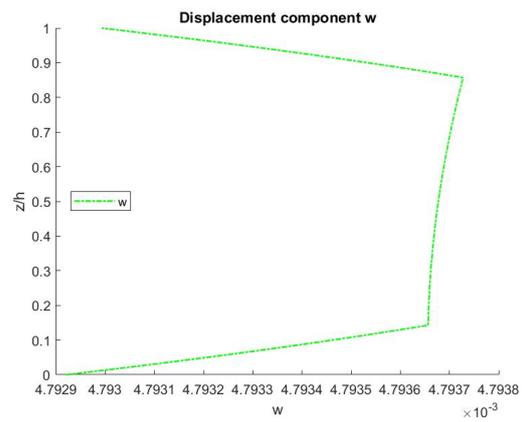
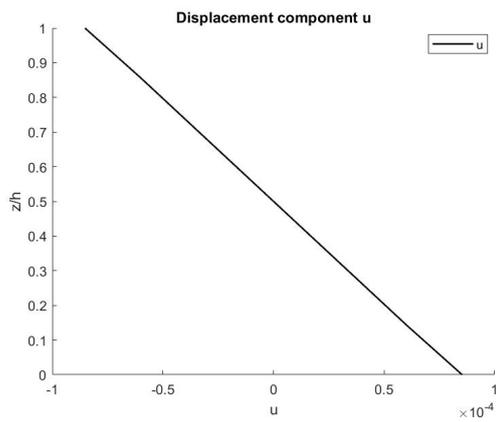


Figura 4.60: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 4)

Figura 4.61: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 4)

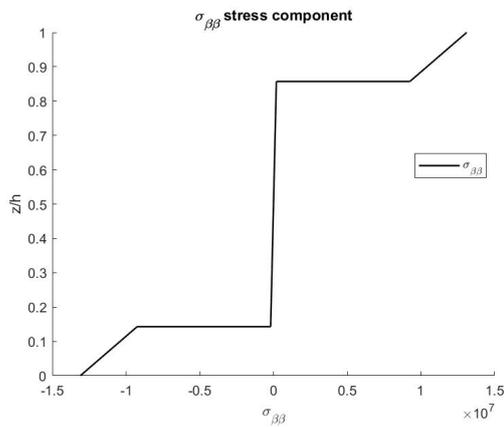


Figura 4.62: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 4)

Figura 4.63: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 4)

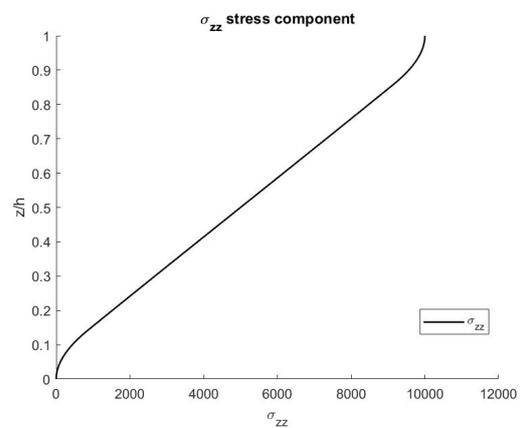
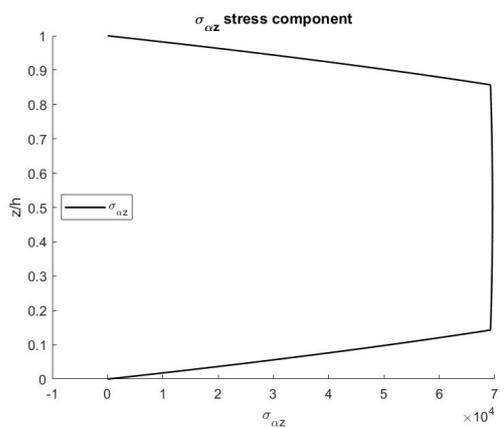


Figura 4.64: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 4)

Figura 4.65: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 4)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$8.435 * 10^{-5}$	$1.581 * 10^{-4}$	$4.672 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$4.673 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-8.432 * 10^{-5}$	$-1.581 * 10^{-4}$	$4.672 * 10^{-3}$

Tabella 4.31: Tabella con gli spostamenti del Caso 5

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-6.979 * 10^6$	$-1.295 * 10^7$	0
middle (z/h=0.5)	$-2.298 * 10^1$	$-6.913 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$6.982 * 10^6$	$1.296 * 10^7$	$1 * 10^4$

Tabella 4.32: Tabella con le tensioni del Caso 5

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$4.458 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	0	$6.938 * 10^4$	$1.335 * 10^5$
top (z/h=1)	$-4.457 * 10^6$	0	0

Tabella 4.33: Tabella con le tensioni del Caso 5

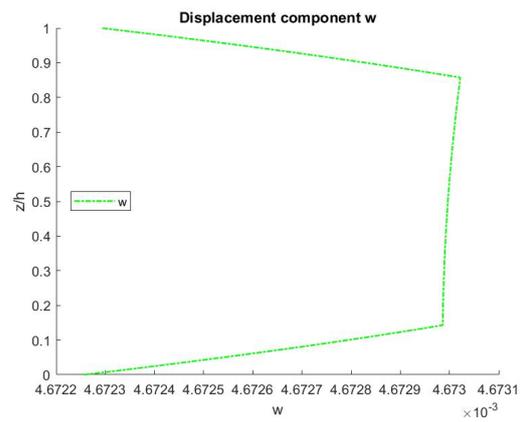
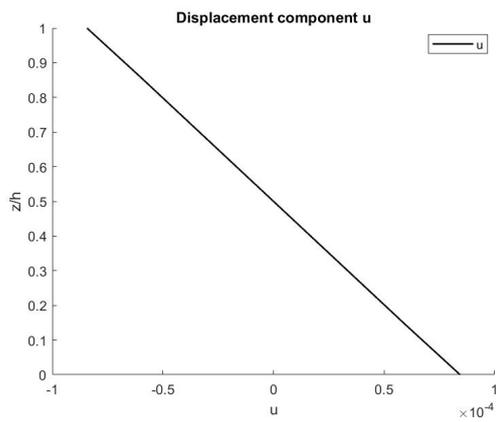


Figura 4.66: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 5)

Figura 4.67: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 5)

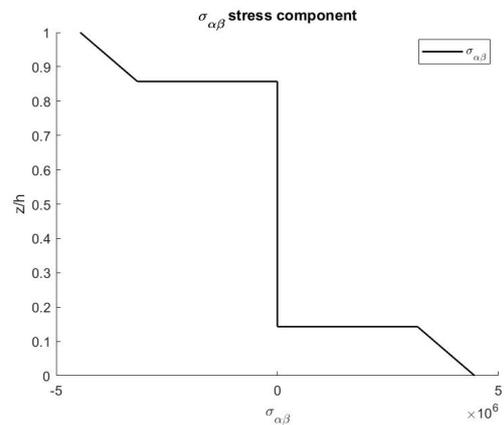
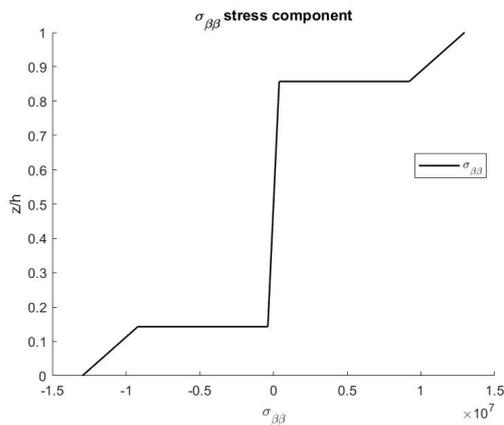


Figura 4.68: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 5)

Figura 4.69: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 5)

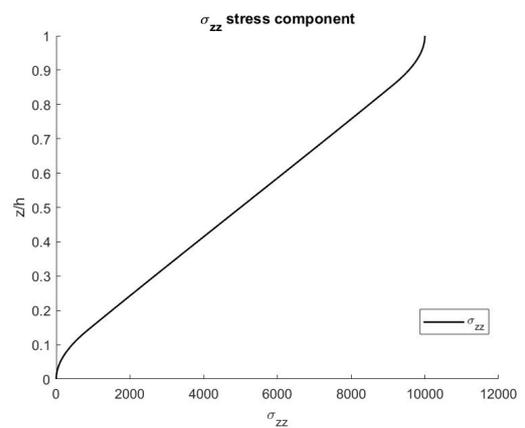
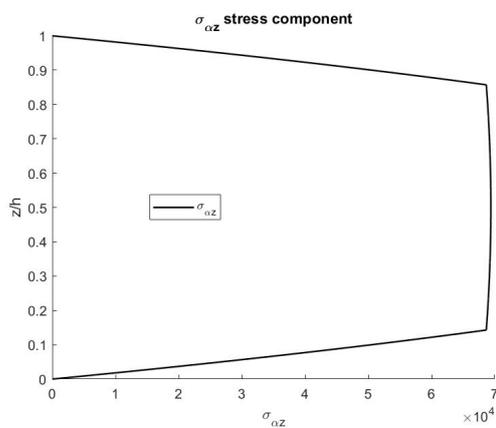


Figura 4.70: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 5)

Figura 4.71: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 5)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$7.889 * 10^{-5}$	$1.478 * 10^{-4}$	$4.317 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$4.318 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-7.886 * 10^{-5}$	$-1.478 * 10^{-4}$	$4.317 * 10^{-3}$

Tabella 4.34: Tabella con gli spostamenti del Caso 6

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-6.527 * 10^6$	$-1.212 * 10^7$	0
middle (z/h=0.5)	$-1.171 * 10^2$	$-2.473 * 10^2$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$6.530 * 10^6$	$1.212 * 10^7$	$1 * 10^4$

Tabella 4.35: Tabella con le tensioni del Caso 6

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$4.169 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	0	$6.772 * 10^4$	$1.428 * 10^5$
top (z/h=1)	$-4.168 * 10^6$	0	0

Tabella 4.36: Tabella con le tensioni del Caso 6

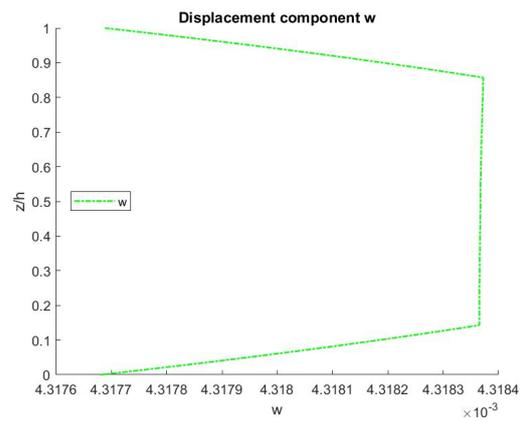
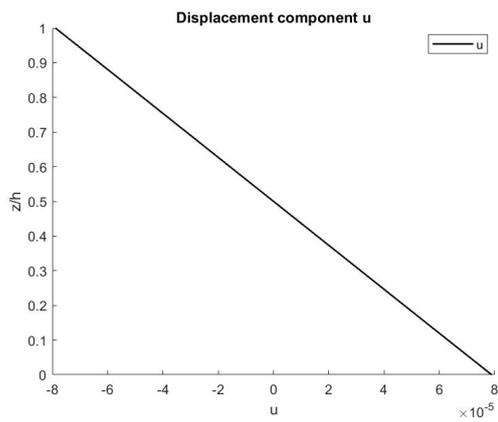


Figura 4.72: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 6)

Figura 4.73: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 6)

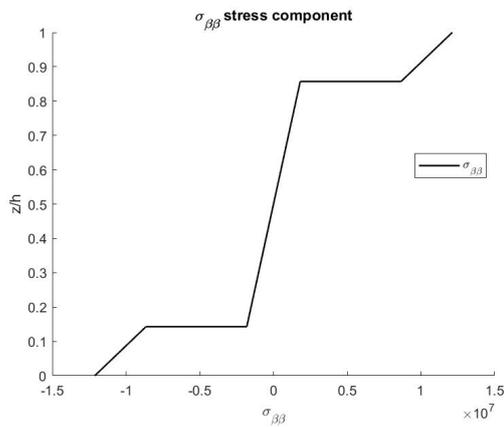


Figura 4.74: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 6)

Figura 4.75: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 6)

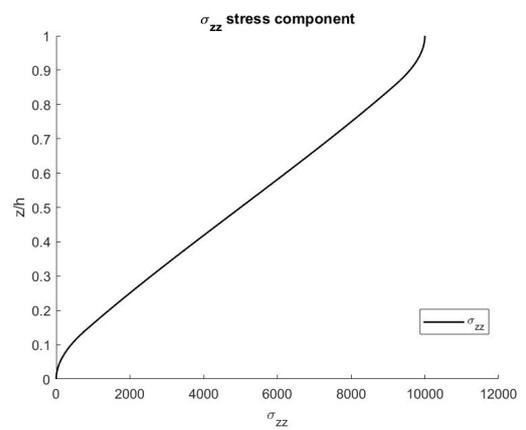
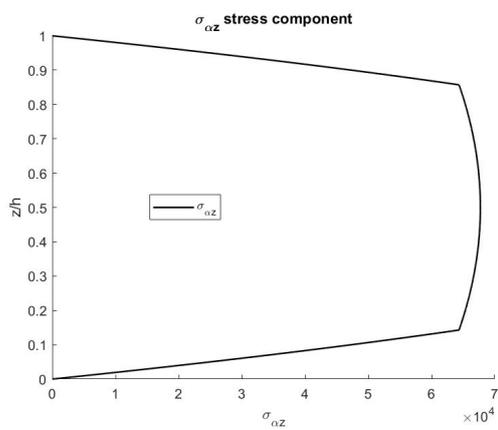


Figura 4.76: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 6)

Figura 4.77: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 6)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$4.243 * 10^{-5}$	$7.953 * 10^{-5}$	$1.403 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$1.404 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-4.241 * 10^{-5}$	$-7.953 * 10^{-5}$	$1.403 * 10^{-3}$

Tabella 4.37: Tabella con gli spostamenti del Caso 7

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-3.511 * 10^6$	$-6.519 * 10^7$	0
middle (z/h=0.5)	$-2.625 * 10^1$	$-5.062 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$3.513 * 10^6$	$6.520 * 10^6$	$9.999 * 10^3$

Tabella 4.38: Tabella con le tensioni del Caso 7

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$2.243 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	$1.339 * 10^1$	$3.904 * 10^4$	$2.054 * 10^4$
top (z/h=1)	$-2.241 * 10^6$	0	0

Tabella 4.39: Tabella con le tensioni del Caso 7

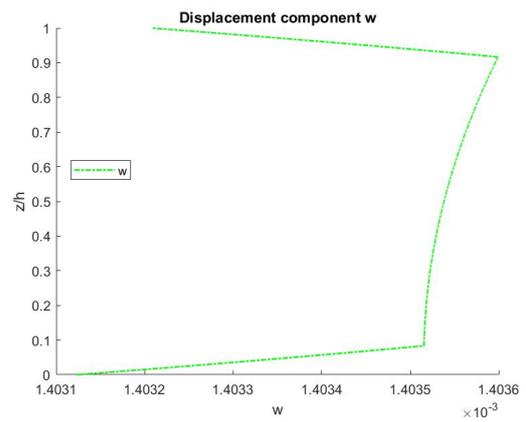
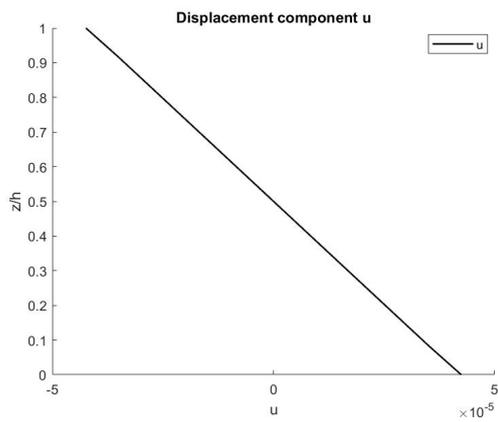


Figura 4.78: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 7)

Figura 4.79: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 7)

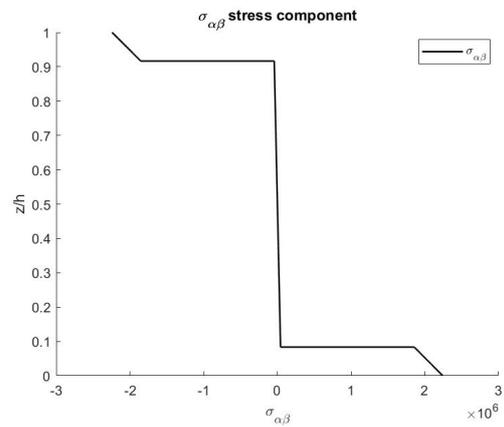
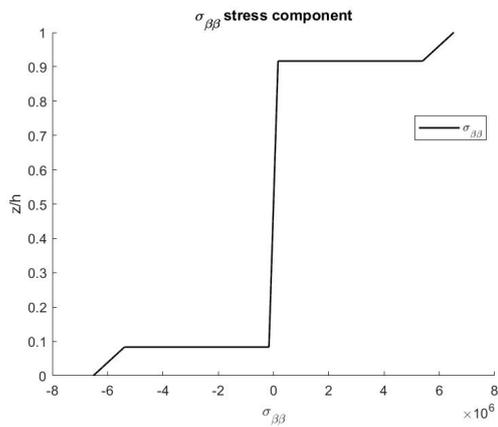


Figura 4.80: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 7)

Figura 4.81: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 7)

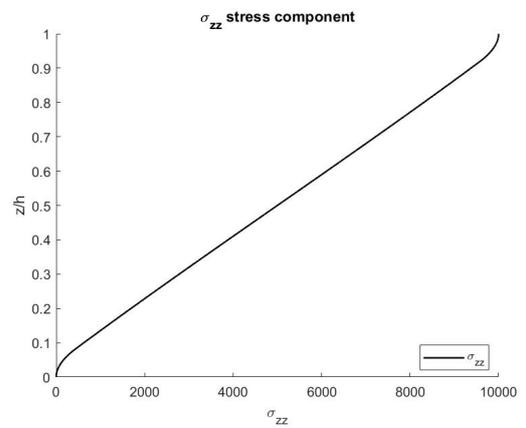
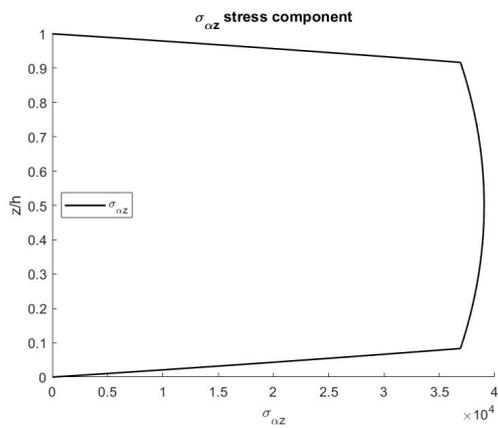


Figura 4.82: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 7)

Figura 4.83: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 7)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$4.082 * 10^{-5}$	$7.652 * 10^{-5}$	$1.325 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$1.326 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-4.080 * 10^{-5}$	$-7.649 * 10^{-5}$	$1.325 * 10^{-3}$

Tabella 4.40: Tabella con gli spostamenti del Caso 8

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-3.377 * 10^6$	$-6.272 * 10^6$	0
middle (z/h=0.5)	$-4.594 * 10^1$	$-8.721 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$3.381 * 10^6$	$6.273 * 10^6$	$9.999 * 10^3$

Tabella 4.41: Tabella con le tensioni del Caso 8

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$2.157 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	$2.342 * 10^1$	$3.969 * 10^4$	$7.554 * 10^4$
top (z/h=1)	$-2.156 * 10^6$	0	0

Tabella 4.42: Tabella con le tensioni del Caso 8

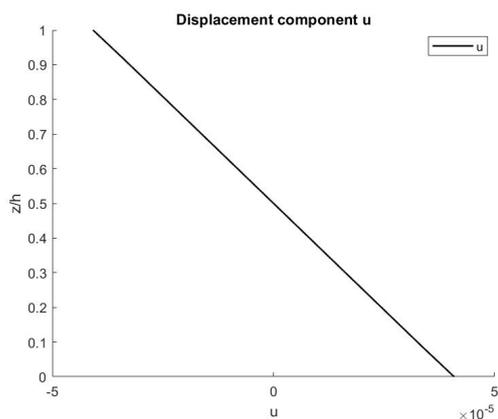


Figura 4.84: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 8)

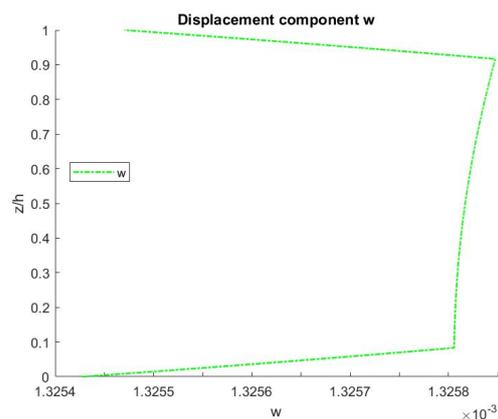


Figura 4.85: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 8)

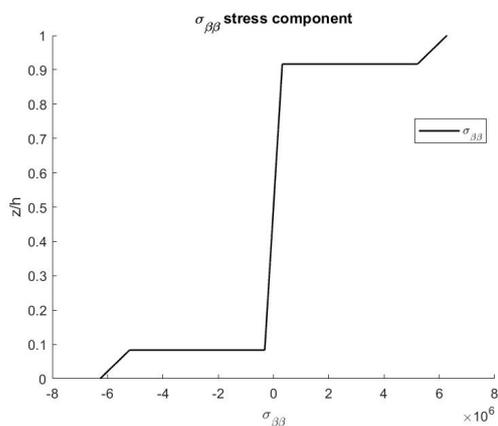


Figura 4.86: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 8)

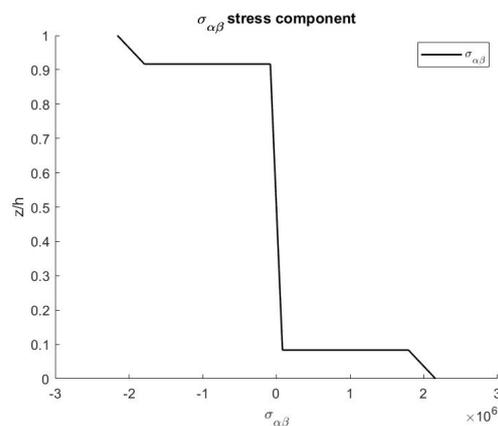


Figura 4.87: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 8)

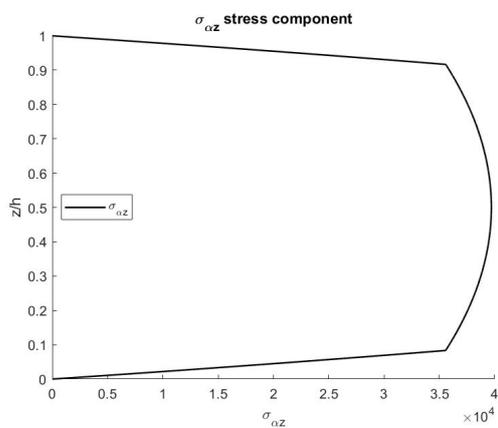


Figura 4.88: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 8)

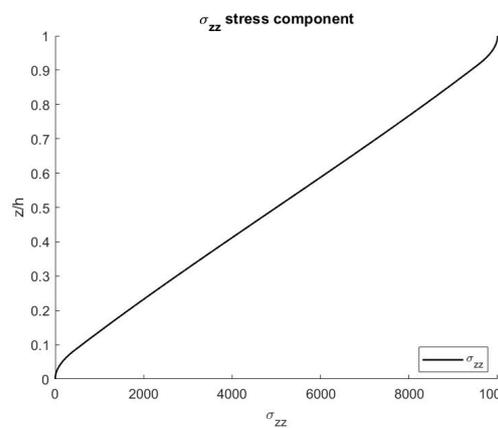


Figura 4.89: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 8)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$3.159 * 10^{-5}$	$5.922 * 10^{-5}$	$1.010 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$1.011 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-3.158 * 10^{-5}$	$-5.920 * 10^{-5}$	$1.010 * 10^{-3}$

Tabella 4.43: Tabella con gli spostamenti del Caso 9

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-2.614 * 10^6$	$-4.854 * 10^6$	0
middle (z/h=0.5)	$-1.241 * 10^2$	$-2.221 * 10^2$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$2.617 * 10^6$	$4.856 * 10^6$	$9.999 * 10^3$

Tabella 4.44: Tabella con le tensioni del Caso 9

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$1.669 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	6.309	$4.359 * 10^4$	$8.607 * 10^4$
top (z/h=1)	$-1.669 * 10^6$	0	0

Tabella 4.45: Tabella con le tensioni del Caso 9

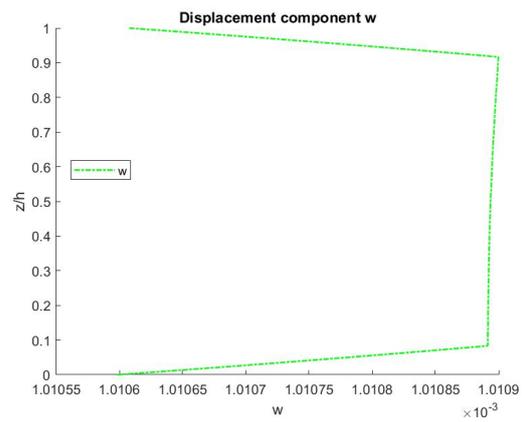
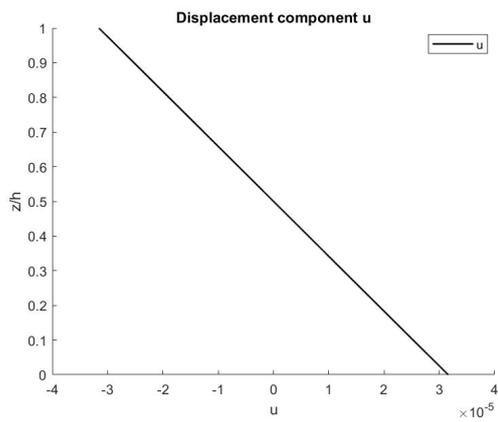


Figura 4.90: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 9)

Figura 4.91: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 9)

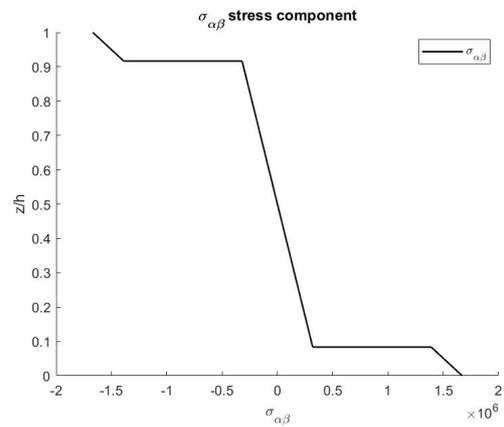
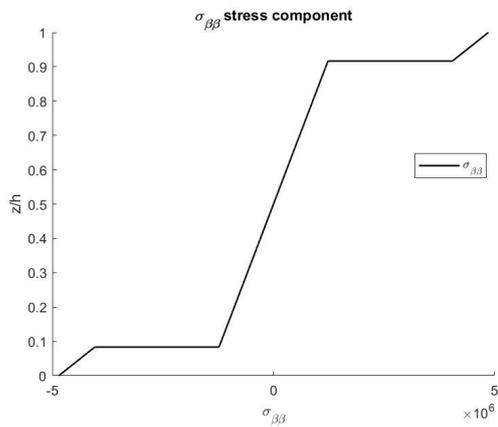


Figura 4.92: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 9)

Figura 4.93: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 9)

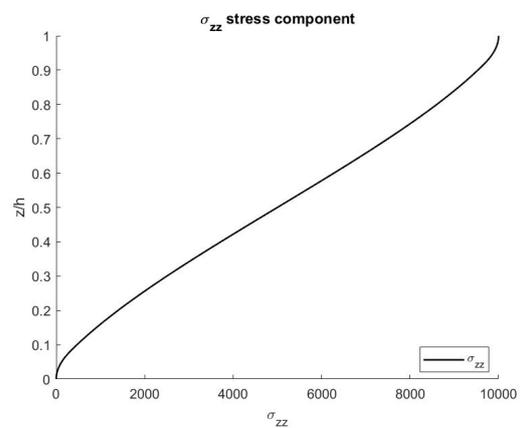
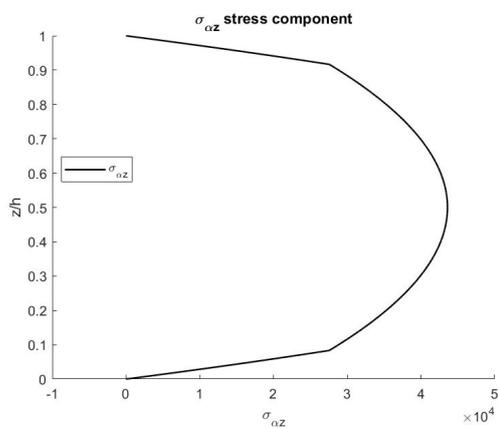


Figura 4.94: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 9)

Figura 4.95: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 9)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$8.443 * 10^{-5}$	$1.583 * 10^{-4}$	$4.689 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$4.690 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-8.441 * 10^{-5}$	$-1.582 * 10^{-4}$	$4.689 * 10^{-3}$

Tabella 4.46: Tabella con gli spostamenti del Caso 10

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-6.987 * 10^6$	$-1.297 * 10^7$	0
middle (z/h=0.5)	$-2.678 * 10^1$	$-5.2142 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$6.989 * 10^6$	$1.297 * 10^7$	$1 * 10^4$

Tabella 4.47: Tabella con le tensioni del Caso 10

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$4.463 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	$1.366 * 10^1$	$7.054 * 10^4$	$1.327 * 10^5$
top (z/h=1)	$-4.462 * 10^6$	0	0

Tabella 4.48: Tabella con le tensioni del Caso 10

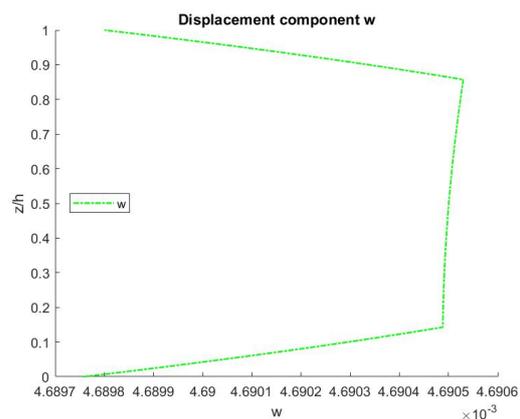
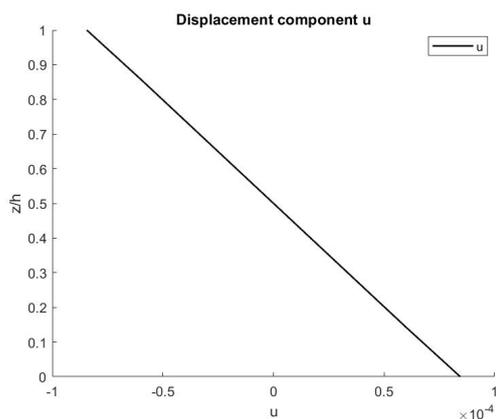


Figura 4.96: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 10)

Figura 4.97: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 10)

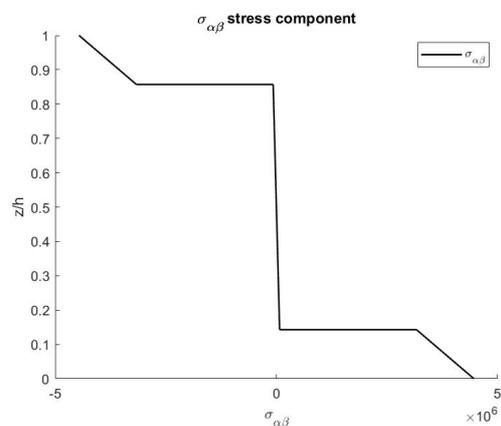
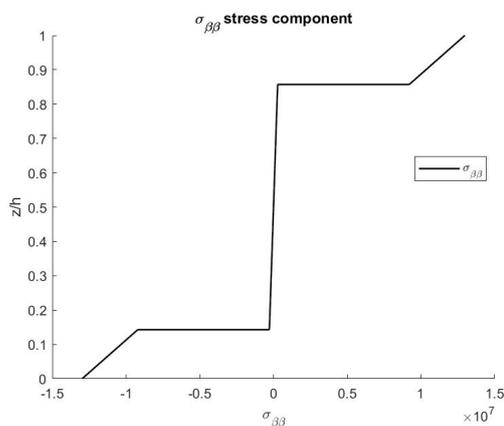


Figura 4.98: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 10)

Figura 4.99: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 10)

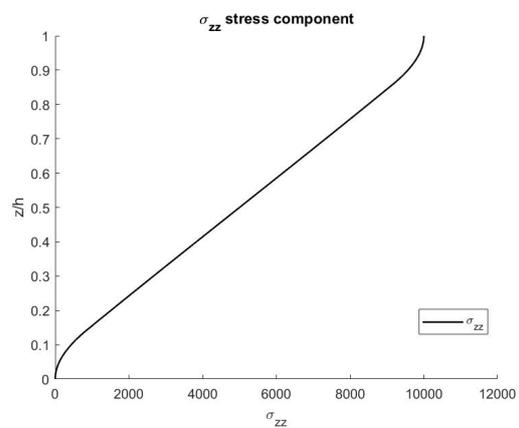
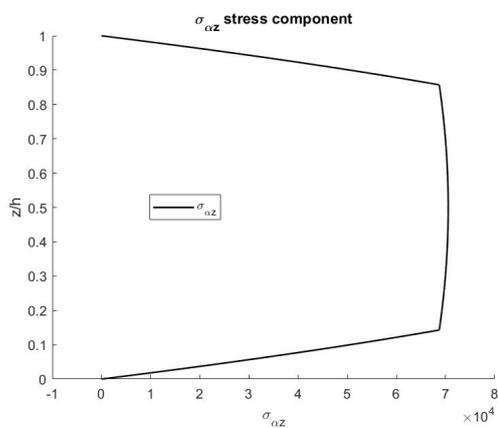


Figura 4.100: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 10)

Figura 4.101: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 10)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$8.298 * 10^{-5}$	$1.556 * 10^{-4}$	$4.569 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$4.569 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-8.296 * 10^{-5}$	$-1.555 * 10^{-4}$	$4.569 * 10^{-3}$

Tabella 4.49: Tabella con gli spostamenti del Caso 11

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-6.867 * 10^6$	$-1.275 * 10^7$	0
middle (z/h=0.5)	$-5.014 * 10^1$	$-9.669 * 10^1$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$6.869 * 10^6$	$1.275 * 10^7$	$9.999 * 10^3$

Tabella 4.50: Tabella con le tensioni del Caso 11

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$4.386 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	$2.558 * 10^1$	$7.123 * 10^4$	$1.345 * 10^5$
top (z/h=1)	$-4.385 * 10^6$	0	0

Tabella 4.51: Tabella con le tensioni del Caso 11

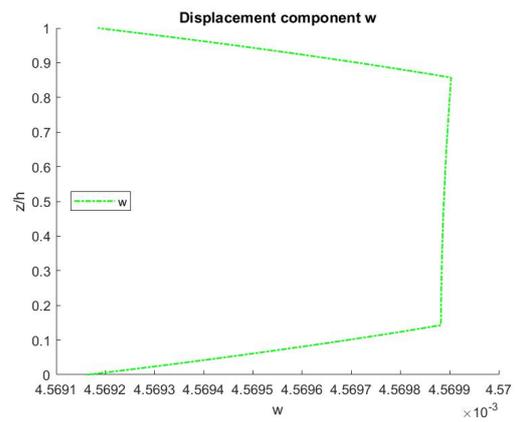
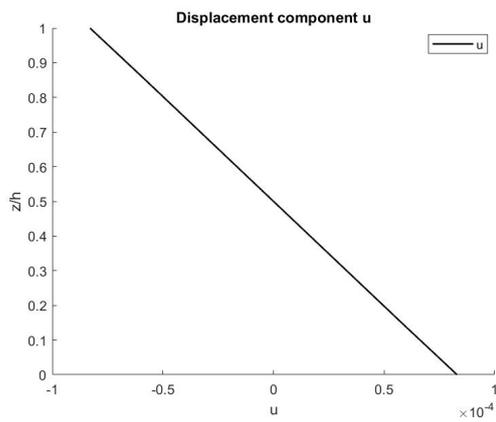


Figura 4.102: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 11)

Figura 4.103: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 11)

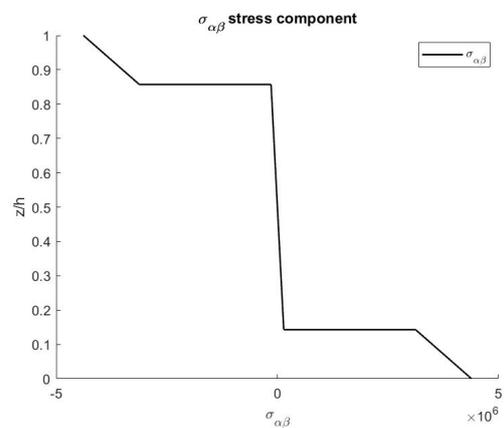
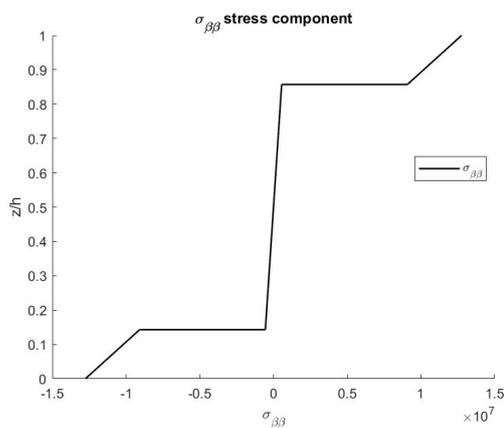


Figura 4.104: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 11)

Figura 4.105: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 11)

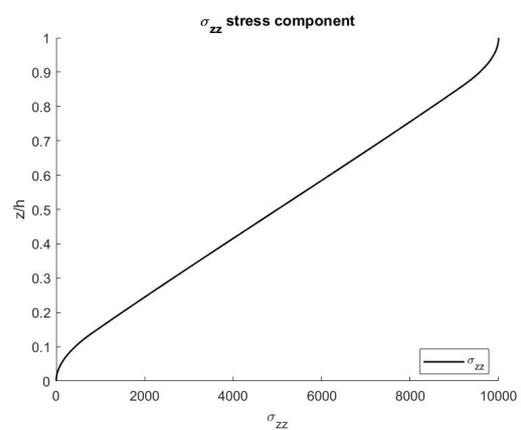
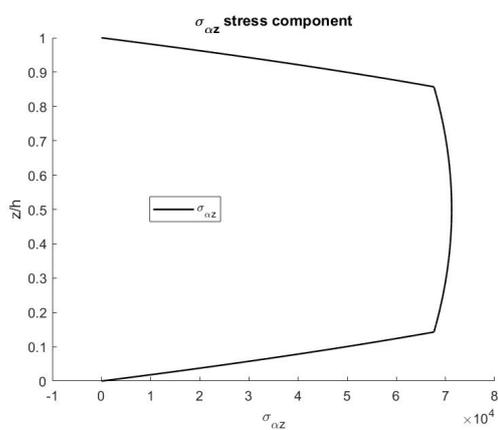


Figura 4.106: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 11)

Figura 4.107: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 11)

	u[m]	v[m]	w[m]
bottom (z/h=0)	$7.357 * 10^{-5}$	$1.379 * 10^{-4}$	$4.023 * 10^{-3}$
middle (z/h=0.5)	0	0	$4.023 * 10^{-3}$
top (z/h=1)	$-7.356 * 10^{-5}$	$-1.379 * 10^{-4}$	$4.023 * 10^{-3}$

Tabella 4.52: Tabella con gli spostamenti del Caso 12

	$\sigma_{\alpha\alpha}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{zz}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$-6.088 * 10^6$	$-1.131 * 10^7$	0
middle (z/h=0.5)	$-1.716 * 10^2$	$-3.156 * 10^2$	$4.999 * 10^3$
top (z/h=1)	$6.092 * 10^6$	$1.131 * 10^7$	$1 * 10^4$

Tabella 4.53: Tabella con le tensioni del Caso 12

	$\sigma_{\alpha\beta}[N/m^2]$	$\sigma_{\alpha z}[N/m^2]$	$\sigma_{\beta z}[N/m^2]$
bottom (z/h=0)	$3.889 * 10^6$	0	0
middle (z/h=0.5)	$8.738 * 10^1$	$7.604 * 10^4$	$1.469 * 10^5$
top (z/h=1)	$-3.888 * 10^6$	0	0

Tabella 4.54: Tabella con le tensioni del Caso 12

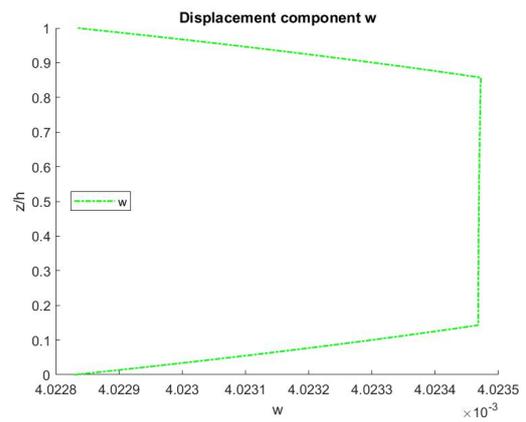
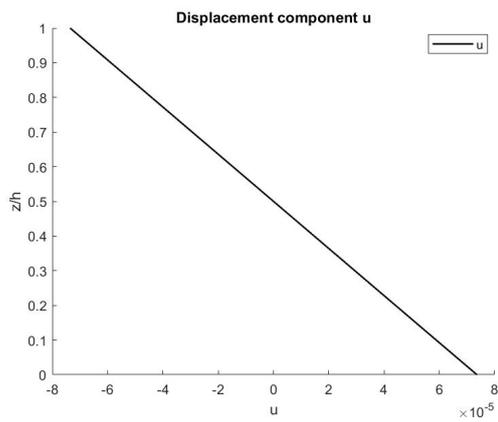


Figura 4.108: Spostamento u lungo lo spessore z/h (Caso 12)

Figura 4.109: Spostamento w lungo lo spessore z/h (Caso 12)

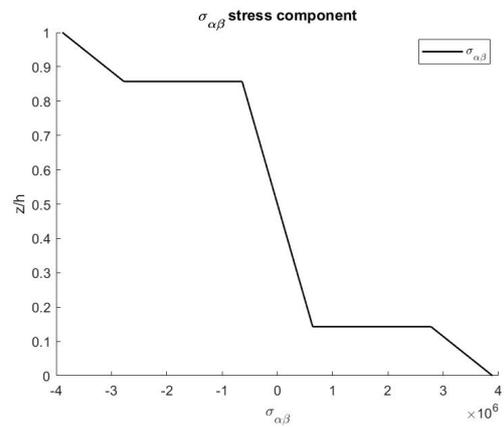
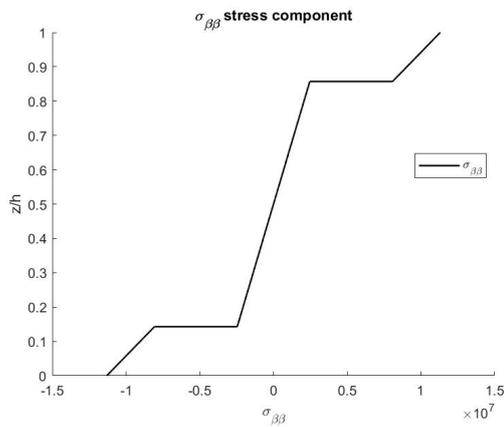


Figura 4.110: Tensione $\sigma_{\beta\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 12)

Figura 4.111: Tensione $\sigma_{\alpha\beta}$ lungo lo spessore z/h (Caso 12)

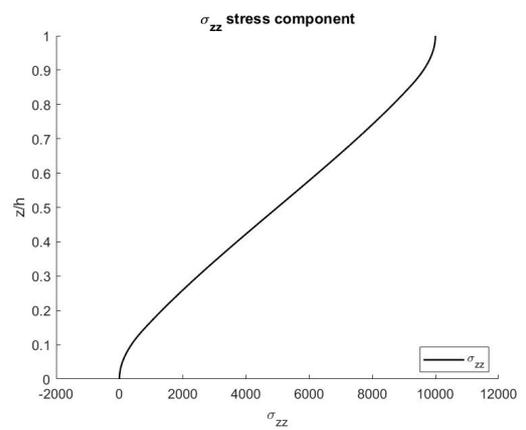
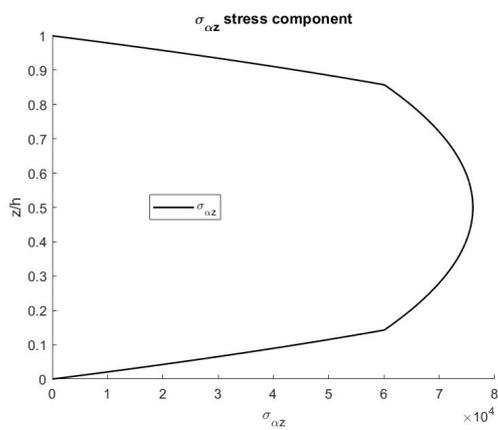


Figura 4.112: Tensione $\sigma_{\alpha z}$ lungo lo spessore z/h (Caso 12)

Figura 4.113: Tensione σ_{zz} lungo lo spessore z/h (Caso 12)

4.3.1 Commenti ed interpretazione dei risultati

La prima osservazione che possiamo fare è che tramite la risoluzione con il modello 3D esatto otteniamo dei grafici, sia in termini di spostamenti che di tensioni, continui in tutti i punti, non c'è discontinuità nel passaggio da pelle superiore o inferiore al cuore dei pannelli analizzati, le curve rimangono continue lungo tutto lo spessore del pannello.

In termini di spostamenti di u , v e w , vediamo come i valori oscillano tra $10^{-5}m$ e $10^{-3}m$, sono valori molto bassi, gli spostamenti sono al massimo dell'ordine dei millimetri, aumentando il carico iniziale è possibile che otterremo valori di spostamenti maggiori, in questo caso sono quasi trascurabili. I valori di spostamento maggiori si hanno per la variabile w (dell'ordine massimo dei millimetri), questo perché avendo applicato un carico sulla faccia superiore si ottiene di conseguenza uno spostamento verticale e quindi lo spostamento w sarà maggiore rispetto a quelli di u e v . Vediamo anche come gli spostamenti u e v hanno sempre valore 0 a metà del pannello ($z/h=0.5$) a differenza dello spostamento w . Inoltre notiamo che nel caso dello spostamento w , i valori tra bottom, top e middle sono praticamente uguali in tutti i casi analizzati, con un valore leggermente più alto a metà pannello. Possiamo quindi affermare che sia pelli che cuore si spostano allo stesso modo quando consideriamo lo spostamento w mentre le pelli sono più soggette a deformazioni nel caso degli spostamenti u e v . Dal grafico dello spostamento w , si può notare come in tutti i casi ci sia una quasi completa simmetria rispetto al middle ($z/h=0.5$) del pannello mentre per il grafico dello spostamento u abbiamo in tutti i casi una retta decrescente con valori uguali in modulo ma con segno opposto per il top ($z/h=1$) e il bottom ($z/h=0$) del pannello e nel middle un valore prossimo a 0.

Inoltre, come è stato descritto all'inizio dell'analisi statica, è stato applicato un carico di 10000 Pa sulla faccia superiore del pannello e notiamo come in tutti i grafici dei 12 casi che rappresentano l'andamento della tensione σ_{zz} , ritroviamo dei valori corretti di tensione con circa $10000N/m^2$ sulla parte superiore del pannello, $5000N/m^2$ esattamente a metà del pannello e 0 sulla parte inferiore del pannello, sono risultati che ci aspettavamo di ritrovare e ciò dimostra come la teoria applicata sia adeguata nel descrivere il comportamento statico di un pannello sandwich.

Un altro comportamento degno di nota che si può osservare in questa analisi è la distribuzione delle tensioni $\sigma_{\alpha z}$ e $\sigma_{\beta z}$. Infatti, notiamo come le tensioni hanno sempre un valore pari a 0 al bottom ($z/h=0$) e al top ($z/h=1$), mentre hanno un massimo nel middle ($z/h=0.5$) del pannello. Sono valori che non ci sorprendono in quanto le componenti P_α e P_β del carico P erano uguali a 0 e quindi è normale aspettarsi al top e al bottom valori uguali a 0 per queste tensioni. Le tensioni $\sigma_{\alpha z}$ e $\sigma_{\beta z}$ sono tensioni tangenziali o sollecitazioni di taglio ed è il cuore di tali pannelli a reggere quasi tutto l'intero sforzo di taglio della struttura contrariamente al caso delle tensioni $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$ che essendo tensioni normali hanno valori molto alti sulle pelli cioè al bottom e al top del pannello e bassi a metà del pannello.

Andiamo ora a vedere come variano gli spostamenti e le tensioni mano a mano che andiamo avanti con i casi, cioè al variare dello spessore del cuore dei pannelli e dello spessore delle nervature. Notiamo per esempio che mantenendo lo spessore

del cuore costante ($h=0.1m$) ma aumentando lo spessore delle nervature del cuore $\delta_1 = 0.005m$, $\delta_2 = 0.01m$ e $\delta_3 = 0.05m$ (rispettivamente Caso 1, 2 e 3), diminuiscono sia i valori degli spostamenti e delle tensioni. In effetti questo andamento è naturale in quanto aumentando lo spessore delle nervature e quindi conseguentemente la densità del cuore del pannello, avremo un pannello più rigido che resisterà meglio alle sollecitazioni al quale sarà sottoposto e quindi si opporrà maggiormente alle deformazioni. Ora invece mettiamo a confronto due pannelli con lo stesso spessore di nervature del cuore $\delta_i = 0.005m$ ma diverso spessore di cuore, $h=0.1m$ per il Caso 1 e $h=0.05m$ per il Caso 4. Notiamo prima di tutto come i valori di spostamenti u , v e w sono leggermente più alti (per esempio per lo spostamento w abbiamo: $w_1 = 1.468 * 10^{-3}$ mentre $w_4 = 4.793 * 10^{-3}$). Lo stesso vale per le tensioni, hanno valori più alti (per esempio $\sigma_{\alpha\alpha 1}^{top} = 3.587 * 10^6$ mentre $\sigma_{\alpha\alpha 4}^{top} = 7.057 * 10^6$ e $\sigma_{\beta\beta 1}^{top} = 6.654 * 10^6$ mentre $\sigma_{\beta\beta 4}^{top} = 1.310 * 10^7$). Ciò ci permette di affermare che a parità di spessore delle nervature del cuore e di carico applicato, la diminuzione dello spessore dello strato del cuore comporta un aumento degli spostamenti e delle deformazioni del pannello.

Capitolo 5

Conclusione e sviluppi futuri

In questa tesi sono state presentate le strutture lattice che si sono dimostrate estremamente innovative e adatte a molteplici scopi, non solo in campo aerospaziale, ma possono essere largamente utilizzate anche in campo biomedico e civile.

Abbiamo approfondito e integrato tali strutture nel cuore dei pannelli sandwich che sono sempre più impiegati nelle strutture dei velivoli di ultima generazione, soprattutto per il loro vantaggio di mantenere un'alta resistenza in rapporto al peso e di potere sfruttare la loro elevata rigidità flessionale. Ovviamente per sfruttare a pieno i vantaggi di tale strutture è opportuno conoscere al meglio le proprietà meccaniche e la risposta alle sollecitazioni di questa tipologia di strutture. Per soddisfare questi obiettivi, abbiamo dimostrato come non basti applicare semplicemente teorie e modelli come per esempio quella di Kirchhoff, molto adatta per le piastre ma non abbastanza precisa nell'analisi di pannelli sandwich, come quelli presentati in questa tesi, in quanto non possono cogliere a pieno la differenza di caratteristiche meccaniche tra pelli e cuore e quindi restituire risultati precisi dalle varie analisi strutturali. Per questo motivo, sono stati presentati modelli come quello 3D esatto e 2D GDQ, modelli più raffinati in grado di descrivere più precisamente il comportamento di pannelli sandwich con cuore realizzato mediante struttura lattice. Tramite l'analisi statica e dinamica, abbiamo dimostrato come tali strutture rispondano a carichi esterni in modo diverso, a seconda della variazione dello spessore delle nervature che compongono la struttura lattice del cuore o allo spessore dello strato rappresentante il cuore stesso del pannello. Questo ci mostra come tali strutture possano essere polivalenti ed adatte a qualsiasi scopo, tramite opportuna progettazione ed analisi iniziali, è possibile creare pannelli sandwich con strutture lattice di infinite geometrie e dimensioni. In futuro grazie ad i più moderni processi industriali come l'additive manufacturing, sempre più efficienti e precisi, sarà possibile integrare le strutture lattice in una grande varietà di progetti e componenti che permetteranno di ottenere ottimi risultati sia in termini di riduzione di peso ma anche nel miglioramento delle caratteristiche meccaniche, vantaggi che sono sempre più ricercati in tutti i settori industriali e scientifici.

Bibliografia

- [1] S. Brischetto, *Three-Dimensional Exact Free Vibration Analysis of Spherical, Cylindrical, and Flat One-Layered Panels*. [*Shock and Vibration*],1-29, 2014.
- [2] S. Brischetto, *Exact elasticity solution for natural frequencies of functionally graded simply-supported structures*. [*Computer modelling in engineering and sciences*], 95, 391-430, 2013.
- [3] R.W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of structures*. Computers and Structures Inc, Berkeley (USA), 2003.
- [4] F. Tornabene, S. Brischetto, N. Fantuzzi, E. Viola, *Numerical and exact models for free vibration analysis of cylindrical and spherical shell panels*. [*Composites Part B: Engineering*], 2015.
- [5] S. Brischetto, R. Torre, *Exact 3D solutions and finite element 2D models for free vibration analysis of plates and cylinders*. [*Curved and layered structures*], vol. 1, 59-92, 2014.
- [6] V.V. Vasiliev, *Mechanics of composites structures*, Washington: Taylor and Francis, 1993.
- [7] V.V. Vasiliev, E.V. Morozov, *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*, third edition Amsterdam: Elsevier, 2013.
- [8] V.V. Karpov, *Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 146, 117-135, 2018.
- [9] J. Awrejcewicz, L. Kurpa, T. Shmatko, *Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier, September 2018.
- [10] G. Totaro, *Flexural, torsional, and axial global stiffness properties of anisogrid lattice conical shells in composite material*, Composite Structures, Elsevier, 153, 738-745, 2016.
- [11] V.G. Belardi, P. Fanelli, F. Vivio, *Design, analysis and optimization of anisogrid composite lattice conical shells*, Composites Part B, Elsevier, 150, 184-195, 2018.
- [12] A.V. Lopatin, E.V. Morozov, A.V. Shatov, *Fundamental frequency of a composite anisogrid lattice cylindrical panel with clamped edges*, Composite Structures, Elsevier, 201, 200-207, 2018.

- [13] A.V. Lopatin, E.V. Morozov, A.V. Shatov, *Buckling of uniaxially compressed composite anisogrid lattice cylindrical panel with clamped edges*, Composite Structures, Elsevier, 160, 765-772, 2017.
- [14] V.V. Vasiliev, V.A. Barynin, A.F. Razin, *Anisogrid composite lattice structures-Development and aerospace applications*, Composite Structures, Elsevier, 94, 1117-1127, 2012.
- [15] A.V. Lopatin, E.V. Morozov, A.V. Shatov, *An analytical expression for fundamental frequency of the composite anisogrid lattice cylindrical panel with clamped edges*, Composite Structures, Elsevier, 141, 232-239, 2016.
- [16] A.V. Lopatin, E.V. Morozov, A.V. Shatov, *Bending of the composite lattice cylindrical shell with the midspan rigid disk loaded by transverse inertia forces*, Composite Structures, Elsevier, 150, 181-190, 2016.
- [17] E.V. Morozov, A.V. Lopatin, V.A. Nesterov, *Buckling and analysis and design of anisogrid composite lattice conical shells*, Composite Structures, Elsevier, 93, 3150-3162, 2011.
- [18] F. Tornabene, N. Fantuzzi, F. Ubertini, E- Viola, *Strong formulation finite element method based on differential quadrature: a survey*, Appl Mech Rev, 67:020801, 2015.
- [19] S. Brischetto, F. Tornabene, *Advanced GDQ models and 3D stress recovery in multilayered plates, spherical and double-curved panels subjected to transverse shear loads*, Composites Part B, Elsevier, 146, 244-269, 2018.
- [20] F. Tornabene, S. Brischetto, *3D capability of refined GDQ models for the bending analysis of composite and sandwich plates, spherical and doubly-curved shells*, Thin-Walled Structures, Elsevier, 129, 94-124, 2018.
- [21] D. Slinchenko, V.E. Verijenko, *Structural analysis of composite lattice shells of revolution on the basis of smearing stiffness*, Composites Structures, Elsevier, 54, 341-348, 2001.
- [22] G. Totaro, Z. Gürdal, *Optimal design of composite lattice shell structures for aerospace applications*, Aerospace Science and Technology, Elsevier, 13, 157-164, 2009.
- [23] D. Shahgholian, G. Gholamhossein Rahimi, *An analytical approach for global buckling of composite sandwich cylindrical shells with lattice cores*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 146, 69-79, 2018.
- [24] Valerio G. Belardi, P. Fanelli, F. Vivio, *Design, analysis and optimization of anisogrid composite lattice conical shells*, Composites Part B, Elsevier, 150, 184-195, 2018.
- [25] Valerio G. Belardi, P. Fanelli, F. Vivio, *Structural analysis and optimization of anisogrid composite lattice shells*, Composites Part B, Elsevier, 139, 203-215, 2018.

- [26] H. Man, F. Fan, J. Zhong, Z. Cao, *Stability analysis of single-layer elliptical paraboloid latticed shells with semi-rigid joints*, Thin-Walled Structures, Elsevier, 72, 128-138, 2013.
- [27] A. Shitanaka, T. Aoki, T. Yokozeki, *Comparison of buckling loads of hyperboloidal and cylindrical lattice structures*, Composite Structures, Elsevier, 207, 877-888, 2019.
- [28] F. Fallaha, E. Taatia, M. Asgharia, *Decoupled stability equation for buckling analysis of FG and multilayered cylindrical shells based on the first-order shear deformation theory*, Composites Part B, Elsevier, 154, 225-241, 2018.
- [29] Shu C., *Differential quadrature and its application in engineering*, London: Springer, 2000.
- [30] Y. Zhang, Z. Xue, L. Chen, D. Fang, *Deformation and failure mechanisms of lattice cylindrical shells under axial loading*, Int J Mech Sci, 51, 213-221, 2009.
- [31] E. Frulloni, JM Kenny, P. Conti, L. Torre, *Experimental study and finite element analysis of the elastic instability of composite lattice structures for aeronautic applications*, Compos Struct, Elsevier, 93, 1031-1038, 2011.
- [32] Q. Zheng, S. Ju, D. Jiang, *Anisotropic mechanical properties of diamond lattice composite structures*, Compos Struct, 129, 101-110, 2015.
- [33] M. Paschero, MW Hyer, *Axial buckling of an orthotropic circular cylinder: application to orthogrid concept*, Int J Solid Struct, 13, 157-164, 2009.
- [34] G. Totaro, *Local buckling modelling of isogrid and anisogrid lattice cylindrical shells with triangular cells*, Compos Struct, 94, 446-452, 2012.
- [35] M. Buragohain, R. Velmurugan, *Study of filament wound grid-stiffened composite cylindrical structures*, Compos Struct, 93, 1031-1038, 2011.
- [36] M. Buragohain, R. Velmurugan, *Buckling analysis of composite hexagonal lattice cylindrical shells using smeared stiffener model*, Defence Sci J, 59, 230-238, 2009.
- [37] KD Powell, *Geodesic aircraft structure*, Defence Sci J, 17-24, august 1961, 15-20 September 1961.
- [38] RD. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, FL: Krieger Publishing Company, 2001.
- [39] B. Alsaidi, Woong Yoel Joe, M. Akbar *Computational analysis of 3D lattice structures for skin in real scale camber morphing aircraft*, MDPI, 7 July 2019.
- [40] E. Novitskaya, C.J. Ruestes, M.M. Porter, V.A. Lubarda, M.A. Meyers, J. McKittrick, *Reinforcements in avian wing bones: Experiments, analysis, and modeling*, Journal of the Mechanical Behavior of Medical Materials , Elsevier, 76, 85-96, December 2017.

-
- [41] Dubovikov, E.; Fomin, D.; Guseva, N.; Kondakov, I.; Kruchkov, E.; Mareskin, I.; Shanygin, A. , *Manufacturing Aspects of Creating Low-Curvature Panels for Prospective Civil Aircraft*, Aerospace 2019, 6, 18. <https://doi.org/10.3390/aerospace6020018>
- [42] F. Tornabene, *DiQuMASPAB Software, DII Department, University of Salento* (<https://DiQuMASPAB.editrice-esculapio.com/>), DiQuMASPAB-Differential Quadrature for Mechanics of Anisotropic Shells, Plates, Arches and Beams
- [43] S. Brischetto, *Matlab Software: Program to compute exact 3D free vibration frequencies and the static analysis of simply supported spherical, cylindrical and flat N-layered sandwich panels embedding a lattice core*