



POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in sistemi propulsivi

Tesi di laurea

**Calcolo della risposta forzata non lineare
di dischi palettati di turbine di bassa
pressione**

Relatore
Zucca Stefano

Candidato
Rastoldo Enrico (263242)

Marzo 2021

Indice

1	Introduzione	1
2	Metodi di riduzione	3
2.1	Metodo di Craig Bampton	3
2.1.1	Modi di costrizione	4
2.1.2	Modi di di vibrazione ad interfaccia fissa	4
2.1.3	Matrice di riduzione	4
2.2	Applicazione	5
3	Simmetria ciclica	7
3.1	Analisi modale	8
3.2	Forzante	12
4	Smorzamento per attrito	16
4.1	Contatto strisciante	17
4.2	Bilanciamento armonico	20
4.3	Diversi modelli di contatto	21
4.3.1	Spostamento tangenziale 1D con spostamento e precarico variabile	21
4.3.2	Precarico fisso, strisciamento in due direzioni	22
4.3.3	Spostamento tangenziale 2D con spostamento e precarico variabile	23
4.4	Il bilanciamento armonico e la simmetria ciclica	25
4.5	Applicazione del contatto ad una simmetria ciclica semplice	25
5	Sviluppo del Software	29
5.1	Riduzione in simmetria ciclica	29
5.2	Diagrammi di flusso	31
5.3	Elaborazione con foglio di calcolo	35
6	Analisi	36
6.1	Effetto della variazione dell'indice armonico sulla dinamica lineare	38
6.2	Calcolo della deformata	42
6.3	Analisi al variare della forza normale	44
6.4	Comportamento al variare del coefficiente di attrito	46
6.5	Comportamento al variare dell'indice armonico	52
6.6	Comportamento al variare della rigidezza di contatto	54
6.7	Comportamento al variare della forzante	57
7	Conclusioni	62

Capitolo 1

Introduzione

Uno dei fattori chiave che caratterizza l'industria aerospaziale è la costante ricerca al fine di diminuire i consumi e le emissioni. Questo è molto sentito nell'ambito della progettazione e fabbricazione dei motori; dove la ricerca si sviluppa attraverso diversi rami; sintetizzando si possono individuare due fondamentali strategie: da una parte lo studio di cicli e componenti differenti, dall'altra il miglioramento dei componenti già in uso. Nel primo caso si parla di una ricerca a lungo termine, mentre nel secondo caso si identifica una ricerca più a breve termine, dove l'obiettivo è quello di migliorare i rendimenti e diminuire il peso delle turbomacchine. Nell'ambito della riduzione del peso si può collocare lo studio della dinamica dei rotori. In generale un sistema al quale vengono applicate delle forze variabili nel tempo, vibra; lo studio delle vibrazioni è necessario in quanto un modello statico non può prevedere correttamente gli spostamenti e le tensioni che vengono generate dalle forze dinamiche. Si può infatti affermare che un componente eccitato da una forzante variabile nel tempo, avrà ampiezza di vibrazione e deformata che dipendono dalla frequenza.

Per valutare la risposta dinamica di un sistema esistono diversi software commerciali; un esempio è ANSYS, che permette di sfruttare gli elementi finiti per discretizzare un componente ed effettuare delle analisi lineari, ad esempio sfruttando la simmetria ciclica, estremamente utile nel campo dei rotori. Tuttavia la sola analisi lineare può non essere sufficiente a valutare il comportamento del rotore. Molto spesso intervengono delle non linearità che possono influire parecchio sull'ampiezza di vibrazione e sulle frequenze naturali. Queste possono essere dovute a difetti nel materiale o nella geometria, oppure a causa di contatti striscianti. Questi ultimi sono di particolare interesse per via del loro effetto benefico sul sistema: infatti lo strisciamento introduce uno smorzamento che può ridurre le ampiezze anche in modo significativo; inoltre può spostare la frequenza di risonanza del componente. Tuttavia i software commerciali non sono adatti alla valutazione degli effetti di questo tipo di non linearità, dato che impiegherebbero molto tempo e sarebbero poco adatti allo studio parametrico tipico di queste analisi.

L'obiettivo di questa tesi sarà dunque quello di indagare l'effetto di un contatto strisciante in un settore di turbina. In particolare si vuole andare l'effetto di alcuni parametri che caratterizzano il sistema in generale ed il contatto in particolare. Per farlo ci si avvarrà di un modello in ANSYS agli elementi finiti; sempre con l'appoggio di ANSYS si andranno ad applicare le condizioni di simmetria ciclica necessarie e poi si ridurranno le matrici. Dunque si utilizzerà il linguaggio Python per leggere ed interpretare le matrici e modellare il contatto non lineare, con il fine ultimo di valutare l'influenza di questi fattori sulla dinamica del settore.

Nel caso in esame il modello in Ansys di partenza sarà quello di un disco classico con le pale ad incastro e tettuccio o shroud, come si può vedere in figura 1.1. Il singolo settore sarà in contatto con quelli adiacenti tramite il disco e poi tramite lo shroud, evidenziato in figura 1.2; questo sarà

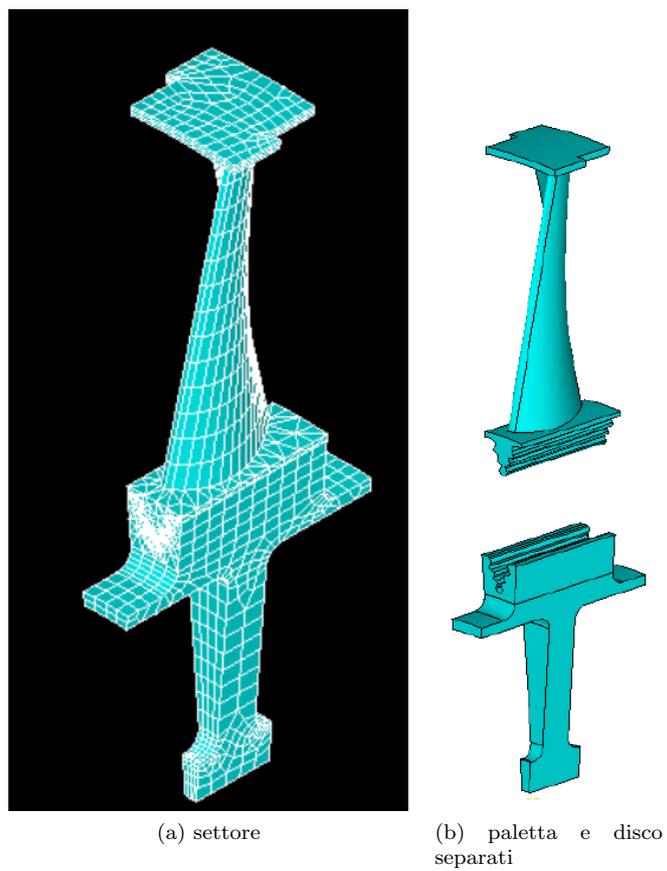


Figura 1.1: Settore fondamentale del disco

effettivamente il punto in cui si andrà ad imporre il contatto strisciante.

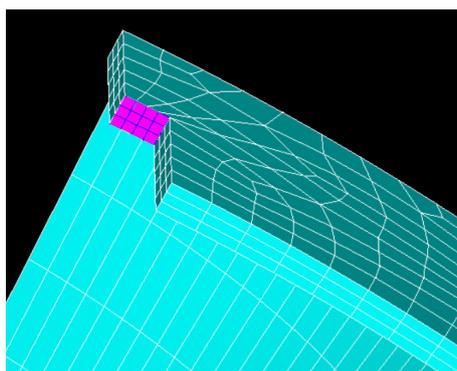


Figura 1.2: contatto nello shroud

Capitolo 2

Metodi di riduzione

Come si è accennato per condurre una qualunque analisi dinamica il componente di solito viene discretizzato con il metodo degli elementi finiti. Si sa che l'accuratezza di un'analisi numerica dipende dal numero di elementi che si impiega; per ottenere delle analisi accurate è necessario impiegare migliaia di elementi e questo si traduce in migliaia di gradi di libertà e dunque matrici molto grandi. A causa delle dimensioni del problema i tempi per ottenere dei risultati, anche in ambito lineare, risulterebbero estremamente lunghi; per questo si sono sviluppati diversi metodi di riduzione, che consentono di ridurre il problema a matrici più piccole e maneggiabili. Questi metodi prendendo in considerazione le forme modali del componente; la riduzione è consentita grazie alla possibilità di eliminare la maggior parte dei nodi fisici sostituendoli con un numero limitato di nodi fittizi.

Questo metodo permette di effettuare delle analisi per valutare il comportamento di alcuni nodi senza dover per forza conoscere tutta la geometria. Risulta interessante, oltre che per le analisi non lineari, anche per lo studio di giunzioni tra pezzi molto grandi.

Esistono numerosi metodi per effettuare questa riduzione; il più utilizzato è quello di Craig-Bampton, del quale esistono diverse varianti, ma esiste anche il metodo di Rubin e Mac Neal. In generale si può scegliere il metodo migliore sulla base della sua efficacia nella situazione in esame. Nel nostro caso si entrerà nei dettagli del metodo di Craig-Bampton, in quanto quello scelto per le nostre analisi e quello più semplice; tuttavia il medesimo concetto è applicabile a tutti i metodi [5].

2.1 Metodo di Craig Bampton

L'idea che sta alla base di qualunque metodo di riduzione è quella di moltiplicare le matrici di rigidezza e di massa per una certa matrice $[R]$ rettangolare:

$$[\tilde{K}] = [R]^T [K] [R] \quad (2.1)$$

Si osserva che per una matrice $[R]$ molto rettangolare si ottiene una matrice $[\tilde{K}]$ molto più piccola della matrice di partenza. Le tecniche di riduzione sono dunque dei metodi per ricavare questa matrice $[R]$. Nel caso del metodo di Craig-Bampton la prima cosa da fare è quella di riordinare le matrici di partenza; per farlo si evidenziano diversi blocchi all'interno delle matrici di rigidezza e di massa:

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} \\ M_{ib} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Il sistema si divide dunque in nodi del bordo o master e nodi interni o slave. L'obiettivo della riduzione si può vedere come voler descrivere i nodi slave in termini di modi di costrizione ($\{\Psi_{C,i}\}$) e modi di vibrazione ad interfaccia fissa ($\{\Phi_i\}$):

$$\{u_i\} = \{\Psi_{C,i}\}\{u_b\} + \{\Phi_i\}\{\eta_i\} \quad (2.3)$$

Dove in questa equazione il vettore ($\{\eta_i\}$) è un vettore di nodi fittizi, associati ai nodi interni. Dunque a questo punto è necessario calcolare i modi di costrizione ed i modi di di vibrazione ad interfaccia fissa.

2.1.1 Modi di costrizione

Un modo di costrizione è la forma di una deformata statica, dovuta ad uno spostamento unitario ad un nodo master. Dal punto di vista pratico, calcolare questi modi è piuttosto semplice: si vanno a legare i nodi slave ai master attraverso la parte statica delle equazioni di equilibrio, dunque le rigidezze:

$$\{u_i\} = -[K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]\{u_b\} \quad (2.4)$$

Dunque posso andare a scrivere l'equazione:

$$\begin{Bmatrix} \{u_b\} \\ \{u_i\} \end{Bmatrix} = [\Psi_c]\{u_b\} = \begin{bmatrix} I \\ -[K_{ii}]^{-1}[K_{ib}] \end{bmatrix} \{u_b\} \quad (2.5)$$

2.1.2 Modi di di vibrazione ad interfaccia fissa

Questi servono per includere le informazioni vibrazionali nella riduzione. Per farlo si parte dal sistema completo:

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} \\ M_{ib} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b \\ f_i \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Si va dunque a fissare l'interfaccia, dunque a porre pari a 0 gli spostamenti all'interfaccia ($\{u_b\} = \{0\}$), riducendo il sistema dall'equazione:

$$[M_{ii}]\{\ddot{u}_i\} + [K_{ii}]\{u_i\} = \{0\} \quad (2.7)$$

Questo si risolve come un problema agli autovalori; la matrice degli autovettori risulta essere pari a $[\Phi_i]$.

2.1.3 Matrice di riduzione

A questo punto si deve assemblare la matrice di riduzione; si ottiene dunque:

$$\begin{Bmatrix} u_b \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Psi_c & \Phi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ \eta_i \end{Bmatrix} = [R_{CB}] \begin{Bmatrix} u_b \\ \eta_i \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Qui è dove fa effettivamente fatta la riduzione; bisogna infatti scegliere quanti modi mantenere in $[\Phi_i]$; infatti più modi mantengo, più avrò un ampio range di frequenze accurate, ma allo stesso tempo avrò anche una matrice di riduzione più "quadrata" e dunque una riduzione meno efficace. A questo punto, trovata la matrice di riduzione si va ad applicare alle matrici di massa e rigidezza:

$$[\tilde{K}] = [R_{CB}]^T [K] [R_{CB}]$$

$$[\tilde{M}] = [R_{CB}]^T [M] [R_{CB}]$$

Vale la pena valutare la forma delle matrici che ci si deve aspettare dalla riduzione; per quello che riguarda la matrice di rigidità:

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{bb} & 0 \\ \Psi_c & \Omega_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Analizzando il termine in 1,1:

$$[\tilde{K}_{bb}] = [K_{bb}] - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]$$

Per quello che riguarda la matrice di massa invece:

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{bb} & \tilde{M}_{b\zeta} \\ \tilde{M}_{\zeta b} & I \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Dove i vari termini indicano:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_{bb}] &= [M_{bb}] - [M_{bi}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}] - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}[M_{ib}] + [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}[M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}] \\ [\tilde{M}_{\zeta b}] &= [\Phi_m]^T([M_{ib}] - [M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]) = [\tilde{M}_{b\zeta}]^T \end{aligned}$$

2.2 Applicazione

Uno degli interessi ed obiettivi che ci si era posti era quello di poter includere nel software sviluppato anche la possibilità di leggere matrici complete e di effettuare la riduzione autonomamente. Anche al fine di comprendere appieno il metodo è stato scritto un piccolo programma che confrontasse le frequenze naturali calcolate per un'asta incastrata (fig 2.1) con un'asta identica ma divisa a metà, ridotta e riassembleta. Si sono utilizzati solo 30 gradi di libertà, per poter tenere sotto controllo le matrici con maggiore semplicità.

Risultato esatto	fm=3	fm=5	fm=7
1.62844	1.62853	1.62846	1.62845
4.881	4.88369	4.88152	4.88114
8.12063	8.13138	8.1226	8.12116
11.3387	11.3836	11.3463	11.3407
14.5267	14.6012	14.5379	14.5296
17.6762	18.0057	17.7128	17.6853
20.7788	24.3924	20.8137	20.787
23.8264		23.9539	23.8537
26.8107		26.904	26.8286
29.7239		30.2256	29.794
32.5584		37.0387	32.5931
35.3064			35.4803
37.9609			38.0302
40.5147			41.0787
42.961			47.0858
45.2934			

In questa tabella con fm si intende il numero di armoniche che si conservano in ciascuno dei due pezzi di asta. Il numero di frequenze naturali che vengono calcolate dipende da questo numero;

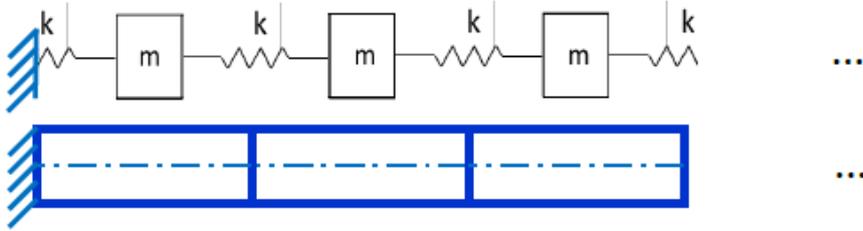


Figura 2.1: Discretizzazione dell'asta

prendiamo ad esempio la seconda colonna, quella dove sono stati conservati 3 modi. Avendo definito un singolo nodo master, ovvero quello centrale di congiunzione delle due sottostrutture, la dimensione di ciascuna matrice sarà 4×4 . Al momento della ricostruzione i nodi master verranno sommati e dunque si otterrà che l'elemento completo ricostruito sarà 7×7 . Si osserva tuttavia come non tutte le frequenze calcolate siano effettivamente significative; man mano che si considerano le frequenze più alte si osserva come la precisione diminuisce e le ultime sono praticamente inutili. Se si è interessati dunque ad uno specifico range di frequenze è necessario aumentare il numero di modi che viene considerato per poter avere una buona accuratezza sulle frequenze naturali calcolate. Come si è già osservato tuttavia il considerare più modi e dunque estendere il range di frequenze di validità della riduzione ha un costo; infatti si avranno matrici $[R]$ meno rettangolari, matrici di rigidezza e massa più grandi e di conseguenza una minor efficienza della riduzione.

A questo punto si è passati ad applicare il metodo ad un caso più reale, ovvero quello di una matrice di rigidezza completa estratta da ANSYS, letta e ridotta con linguaggio Python. Qui sebbene il metodo funzionasse è stato ritenuto poco utile ai fini pratici, a causa dell'enorme tempo richiesto per completare l'operazione; su un normale portatile, i tempi per portare a termine l'operazione sono nell'ordine delle ore, mentre ANSYS permette di ottenere gli stessi risultati in pochi minuti. Per questa ragione è stato scelto di lasciare ad ANSYS il lavoro di riduzione e non implementare ulteriormente i metodi di riduzione.

Nonostante il lavoro possa sembrare fine a sé stesso data la scelta fatta alla fine, in realtà ha permesso una più completa visione della composizione delle matrici in uscita da ANSYS, come si osserverà nei capitoli successivi.

Capitolo 3

Simmetria ciclica

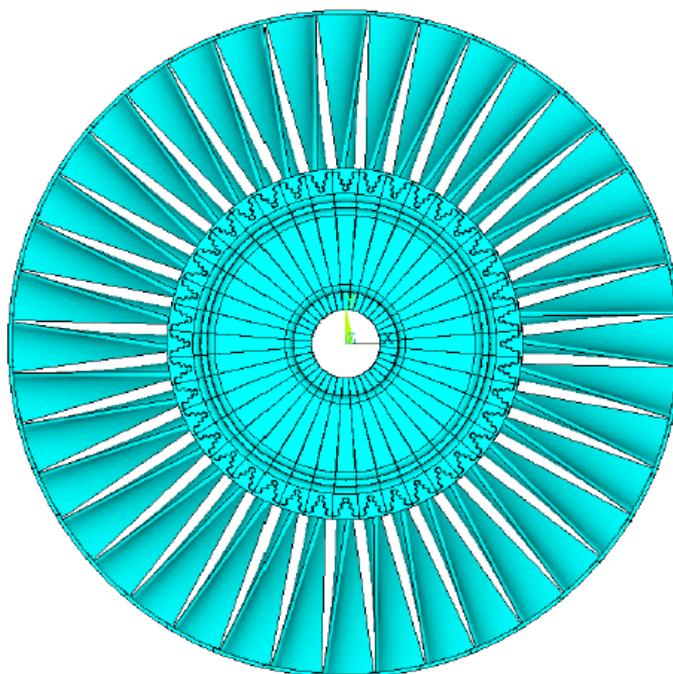


Figura 3.1: Disco completo

In termini di tempo e potenza computazionale il calcolo delle frequenze naturali di un disco palettato come in figura 3.1 può risultare molto oneroso. Per effettuare questo tipo di analisi si ricorre dunque ad una proprietà dei dischi in questione, ovvero la simmetria ciclica. Si ipotizza infatti che, a meno di imperfezioni dovute alla lavorazione o all'usura, il disco sia formato da settori identici tra di loro. Con questo metodo l'analisi del singolo settore rende superflua l'analisi dell'intero disco, che può essere sostituito con delle adeguate condizioni al contorno. In questo capitolo si studierà un elemento semplice, per poter evidenziare le caratteristiche principali del

metodo. Nello studio di un componente in simmetria ciclica molto spesso si adotta una notazione complessa; questo non è indispensabile, ma permette di ottenere delle equazioni più compatte ed intuitive, rispetto ad un metodo basato sulla notazione reale.

3.1 Analisi modale

Il modello semplice al quale si vuole fare riferimento è quello di un settore a due gradi di libertà; questo si può immaginare come un'estrema semplificazione del modello complesso utilizzato nel software. La porzione di disco si riduce ad una singola massa m_1 con una rigidità che la collega a terra, mentre la porzione di paletta si riconduce ad una massa m_2 vincolata alla prima, come si può vedere in figura 3.2. In questo caso si lascia la paletta libera di vibrare mentre si impongono le condizioni di simmetria ciclica alla massa del disco; questo schematizza la soluzione full slip del sistema. Per prima cosa è dunque necessario costruire la matrice di rigidità del settore, per farlo si considerano anche i settori adiacenti di sinistra e destra. Indicando il settore fondamentale come il settore n-esimo, quello di destra sarà il settore n-1, mentre quello di sinistra n+1; i settori adiacenti saranno perfettamente identici al settore fondamentale, con una rigidità pari a k_c ad assemblare le rigidità relative al disco. Ora si scrivono le equazioni di equilibrio del sistema:

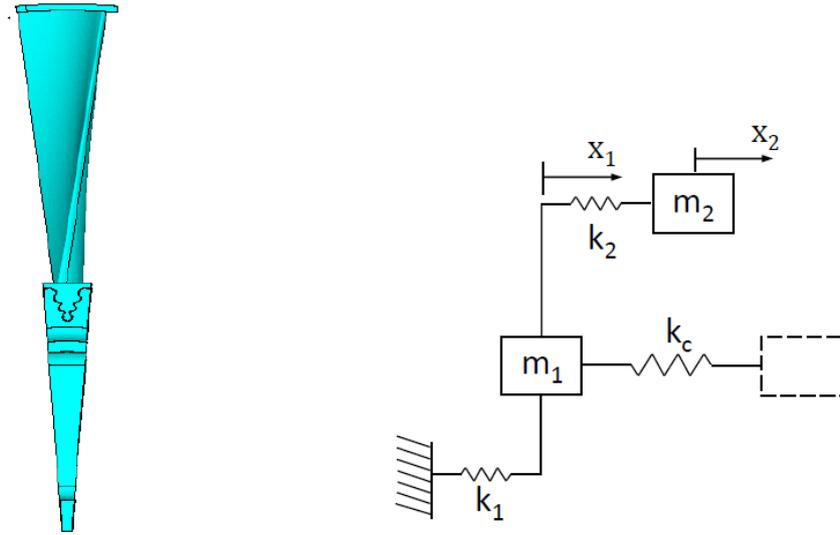


Figura 3.2: Schematizzazione del settore fondamentale

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1^{(n)} + k_1 x_1^{(n)} + k_2 (x_1^{(n)} - x_2^{(n)}) + k_c (x_1^{(n)} - x_1^{(n+1)}) + k_c (x_1^{(n)} - x_1^{(n-1)}) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2^{(n)} + k_2 (x_1^{(n)} - x_2^{(n)}) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Con la notazione matriciale l'equazione (3.1) diventa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1^{(n)} \\ \ddot{x}_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_c & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} -k_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n-1)} \\ x_2^{(n-1)} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

A questo punto si può facilmente intuire la forma della matrice di rigidezza dell'interno disco:

$$[K] = \begin{bmatrix} k^{(1)} & k_c^{(1)} & \dots & k_c^{(1)} \\ k_c^{(2)} & k^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_c^{(N)} & 0 & \dots & k^{(N)} \end{bmatrix}$$

Qui ciascuna riga rappresenta un settore del disco come visto nell'equazione (3.1), dunque ciascun singolo elemento rappresenta una matrice: la dimensione della matrice $[K]$ sarà dunque pari ad $N * J$, dove J rappresenta il numero di gradi di libertà associati a ciascun settore. In modo del tutto analogo si costruisce anche la matrice di massa, che nella sua forma più generale risulta essere una matrice diagonale a blocchi.

[4] A questo punto si può immaginare di calcolare la forme modali del sistema; l'aspetto di una forma modale può essere differente, ma si deve tenere conto che un modo proprio deve rimanere tale anche dopo una rotazione rigida di $2\pi/N$, ovvero l'ampiezza del singolo settore. Consideriamo dunque due autovettori:

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \\ \vdots \\ \Phi^{(N-1)} \\ \Phi^{(N)} \end{Bmatrix} \quad \{\Phi'\} = \begin{Bmatrix} \Phi^{(N)} \\ \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \\ \vdots \\ \Phi^{(N-1)} \end{Bmatrix}$$

Per la proprietà appena enunciata entrambi saranno autovettori, entrambi associati allo stesso autovettore. In generale non è detto che siano ortogonali, tuttavia se sono entrambi autovalori significa che ne deve esistere uno $\{\hat{\Phi}\}$ perpendicolare a $\{\Phi\}$ che soddisfi la relazione:

$$\{\Phi'\} = c\{\Phi\} + s\{\hat{\Phi}\} \quad (3.3)$$

Questo perché per definizione:

$$[-\omega_n^2[M] + [K]]\{\Phi'\} = 0$$

dunque anche

$$c[-\omega_n^2[M] + [K]]\{\Phi\} + s[-\omega_n^2[M] + [K]]\{\hat{\Phi}\} = 0$$

Ma poiché anche $\{\Phi\}$ è autovettore, allora la prima parte darà come risultato 0, per questo anche la seconda darà 0, garantendoci che anche $\{\hat{\Phi}\}$ è autovettore. Ipotizzando ora che tutti e tre gli autovettori siano normalizzati, ovvero che il loro modulo sia unitario. Questo significa che:

$$\{\Psi'\}^T \{\Psi'\} = (c\{\Phi\}^T + s\{\hat{\Phi}\}^T)(c\{\Phi\} + s\{\hat{\Phi}\}) = 1$$

Questo svolgendo l'equazione si riduce a dire che:

$$c^2 + s^2 = 1$$

E dunque che:

$$c = \cos(\varphi) \quad s = \sin(\varphi)$$

Si può inoltre dimostrare che esisterà un altro autovettore normalizzato $\{\hat{\Phi}'\}$ ortogonale a $\{\Phi'\}$; questo porta a scrivere:

$$\begin{Bmatrix} \Phi' \\ \hat{\Phi}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{NJ} \cos(\varphi) & I_{NJ} \sin(\varphi) \\ -I_{NJ} \sin(\varphi) & I_{NJ} \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi \\ \hat{\Phi} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Dove I_{NJ} è una matrice identità di dimensione pari a quella del modello completo. Se però ora ci si concentra sul primo blocco di equazioni, la (3.4) diventa:

$$\begin{Bmatrix} \Phi^{(N)} \\ \hat{\Phi}^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_J \cos(\varphi) & I_J \sin(\varphi) \\ -I_J \sin(\varphi) & I_J \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \hat{\Phi}^{(1)} \end{Bmatrix} = [R_\varphi] \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \hat{\Phi}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Dunque si possono ottenere gli spostamenti di ciascun settore da quelli del settore adiacente; generalizzando si possono ottenere gli spostamenti di tutti i settori da un solo settore, andando ad applicare più volte la stessa matrice di rotazione; vale infatti la relazione:

$$\begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \hat{\Phi}^{(1)} \end{Bmatrix} = \prod_{n=1}^N [R_\varphi] \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \hat{\Phi}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Riprendendo l'equazione (3.3), si osserva come sia possibile assegnare ad a e b dei valori complessi, in particolare $a = 1$ e $b = i$; in questo modo l'autovettore che si andrà a definire si chiamerà $\{\Theta\}$ e sarà complesso. Continuando con la stessa logica vista nel caso reale si può definire anche un autovettore pari a $\{\Theta'\}$. La loro relazione si può esprimere come:

$$\{\Theta'\} = \{\Theta\} e^{-i\varphi} \quad (3.5)$$

infatti andando ad esplicitare i vari termini si ritrova la matrice trovata nella (3.4). Infine seguendo sempre la logica vista nel caso reale, si può trovare la relazione:

$$\{\Theta^{(n-1)}\} = \{\Theta^{(n)}\} e^{-i\varphi} \quad (3.6)$$

Il significato fisico da associare ad un modo complesso è quello di un'onda rotante; infatti si osserva che in punti corrispondenti del sistema sfasati di φ hanno la stessa ampiezza. Per capire quali possono essere gli angoli ammissibili occorre generalizzare l'equazione (3.6) con una logica identica a quella vista nel caso reale; infatti si può dire che:

$$\{\Theta^{(n)}\} = \{\Theta^{(1)}\} e^{(n-1)i\varphi} \quad (3.7)$$

Dopo un numero N di rotazioni ammissibili, il settore dovrà aver compiuto un numero intero h di rotazioni complete:

$$n\varphi = 2\pi h$$

dove h viene chiamato indice armonico e come si è detto è un numero intero. Invece per quello che riguarda φ si chiama inter-blade phase angle e viene definito come:

$$\varphi = h \frac{2\pi}{N} \quad (3.8)$$

A questo punto ci si chiede quali siano effettivamente gli angoli ammissibili. Per capirlo ci si appoggia alla periodicità della funzione e^{ix} , che grazie alle proprietà dei numeri complessi si può vedere anche in termini di seni e coseni. Si può dunque osservare che:

$$e^{ih \frac{2\pi}{N}} = e^{i(h \frac{2\pi}{N} - 2\pi)} = e^{i(h-N) \frac{2\pi}{N}}$$

In questo modo si osserva come lo sfasamento dovuto, ad esempio, ad $h = N - 1$ effettivamente è equivalente allo sfasamento dovuto a $h = -1$. Questo significa che gli indici armonici dopo ad $N/2$ sono equivalenti all'utilizzo di indici armonici negativi. Esprimendo questo fatto con l'aiuto della (3.3) in termini complessi si osserva come:

$$\begin{aligned}\{\Theta_+\} &= \{\Phi\} + i\{\hat{\Phi}\} \\ \{\Theta_-\} &= \{\Phi\} - i\{\hat{\Phi}\}\end{aligned}$$

Quindi sono due modi entrambi ottenuti con una combinazione lineare degli stessi modi reali, e dunque con lo stesso autovalore. Dunque è sufficiente calcolare i modi associati agli indici armonici negativi.

Dopo aver introdotto i concetti di inter blade phase angle e di indice armonico si vuole capire come applicarli in pratica al settore fondamentale per alleggerire il problema. Per prima cosa riprendendo (3.1) e sostituendo:

$$\{x(t)\} = \{\bar{x}\}e^{i\omega t}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} -\omega^2 m_1 \bar{x}_1^{(n)} + k_1 \bar{x}_1^{(n)} + k_2 (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_2^{(n)}) + k_c (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_1^{(n+1)}) + k_c (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_1^{(n-1)}) = 0 \\ -\omega^2 m_2 \bar{x}_2^{(n)} + k_2 (\bar{x}_1^{(n)} - \bar{x}_2^{(n)}) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

E quindi si impone la simmetria ciclica, ovvero ricordando la (3.6):

$$\bar{x}_1^{(n)} = \bar{x}_1^{(n-1)} e^{ih \frac{2\pi}{N}} \quad \bar{x}_1^{(n+1)} = \bar{x}_1^{(n)} e^{ih \frac{2\pi}{N}}$$

In questo modo si elimina la dipendenza dei settori adiacenti; l'equazione in termini matriciali diventa:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^{(n)} \\ \bar{x}_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_c - k_c e^{ih \frac{2\pi}{N}} - k_c e^{-ih \frac{2\pi}{N}} & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^{(n)} \\ \bar{x}_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.10)$$

[2] A questo punto è necessario estendere questa logica al caso di un modello ad elementi finiti, come nell'immagine 3.3. Per farlo è necessario prima riordinare le equazioni in modo da avere in ordine i gradi di libertà dell'interfaccia destra, poi quelli centrali ed infine quelli dell'interfaccia sinistra:

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(n)} \\ x_i^{(n)} \\ x_S^{(n)} \end{Bmatrix}$$

In questo modo si applica la simmetria ciclica sapendo che i nodi di sinistra saranno i nodi di destra del settore successivo, e dunque si può scrivere:

$$x_S^{(n)} = x_D^{(n+1)}$$

Dunque il vettore dei gradi di libertà diventa:

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(n)} \\ x_i^{(n)} \\ x_S^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_D & 0 \\ 0 & I_i \\ I_D e^{ih \frac{2\pi}{N}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_D^{(n)} \\ x_i^{(n)} \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \{x_{sc}^{(n)}\}$$

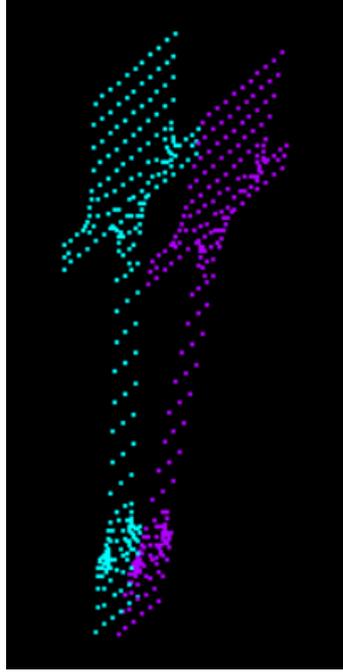


Figura 3.3: Selezione dei nodi di contatto di destra e sinistra del componente in esame

Applicando la matrice di trasformazione la sistema di equazioni si ottiene:

$$[\bar{T}]^T (-\omega^2 [m^{(n)}] + [k^{(n)}]) [\bar{T}] \{x_{SC}^{(n)}\} = \{0\} \quad (3.11)$$

Si possono dunque definire delle matrici di massa e rigidezza in simmetria ciclica:

$$[m_{SC}] = [\bar{T}]^T [m^{(n)}] [\bar{T}] \quad [k_{SC}] = [\bar{T}]^T [k^{(n)}] [\bar{T}]$$

Si osserva come le matrici di massa e di rigidezza ottenute in questo modo dipendano dall'indice armonico. Questo è uno svantaggio non da poco, dato che per ogni indice armonico è necessario memorizzare una matrice di rigidezza ed una di massa.

3.2 Forzante

[7] [8] Si vuole ora valutare l'effetto di una forzante; si immagina che il disco in esame sia soggetto ad un campo di pressioni generato da un componente statorico. Di fatto questo si traduce nell'applicare al generico settore una forzante che varia nel tempo, per poi tornare al valore iniziale dopo un giro completo del rotore. Questo significa che la paletta vedrà una forzante di tipo periodico; inoltre ciascun settore sarà sollecitato dalla stessa forzante del precedente con un certo ritardo Δt . Trattandosi di una funzione periodica, allora è possibile rappresentarla con uno sviluppo di Fourier:

$$F(\alpha) = F_0 + \sum_e oF_c^{(eo)} \cos(eo\alpha) + F_s^{(eo)} \sin(eo\alpha) = F_0 + \sum_e oF^{(eo)} \cos(eo\alpha + \delta) \quad (3.12)$$

In questa equazione eo prende il nome di engine order; prendendo in considerazione un generico engine order si può osservare che la forza applicata alla paletta è pari a:

$$F^{(n)} = F^{(eo)} \cos(\omega t + \delta) \quad (3.13)$$

Dove ω rappresenta la pulsazione della forzante sul settore, che si può legare alla velocità di rotazione secondo la legge $\omega = eo\Omega$. Ora si vuole calcolare cosa succede al settore successivo ($n + 1$). Il ritardo che subirà rispetto al settore n sarà pari a:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{(\Omega N)} \quad (3.14)$$

Dove N è il numero di settori della turbina. Facendo riferimento alla (3.13) si vuole scrivere la forzante del settore successivo:

$$\begin{aligned} F^{(n+1)} &= F^{(eo)} \cos(\omega(t - \Delta t) + \delta) = \\ &= F^{(eo)} \cos\left(\omega\left(t - \frac{2\pi}{\Omega N}\right) + \delta\right) = \\ &= F^{(eo)} \cos\left(\omega t - eo\frac{2\pi}{N} + \delta\right) = \\ &= F^{(eo)} \cos(\omega t - \Psi + \delta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dove Ψ va ad indicare lo sfasamento tra le forze su settori consecutivi. Utilizzando la notazione complessa si osserva:

$$\bar{F}^{(n)} = F^{(eo)} e^{i\omega t} e^{i\delta} = \bar{F}^{(eo)} e^{i\omega t} \quad (3.16)$$

In modo analogo per il settore successivo si può scrivere:

$$\bar{F}^{(n+1)} = F^{(eo)} e^{i\omega t} e^{i\delta} = \bar{F}^{(eo)} e^{i\omega t} e^{-i\Psi} = \bar{F}^{(n)} e^{-i\Psi} \quad (3.17)$$

Estendendo il ragionamento all'intero disco si ottiene il vettore delle forzanti per il generico engine order:

$$\{F_{eo}\} = \begin{Bmatrix} I_j \\ I_j e^{-i\Psi} \\ \dots \\ I_j e^{-i(N-2)\Psi} \\ I_j e^{-i(N-1)\Psi} \end{Bmatrix} \{F^{eo}\} \quad (3.18)$$

Per visualizzare le possibili risonanze si utilizza il diagramma di Campbell (esempio in figura 3.4); si osserva che la pulsazione della forzante dipende linearmente dalla velocità di rotazione del disco, secondo la legge $\omega = eo\Omega$.

Nell'esempio riportato si ipotizza un disco a 6 settori, con un'eccitante rappresentabile solo con 3 engine order; occorre però verificare se ad ogni incrocio effettivamente corrisponde una condizione di risonanza. Per farlo si studia il sistema:

$$[-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]\{\bar{X}\} = \{\bar{F}\} \quad (3.19)$$

Ora l'equazione (3.1) si può anche riscrivere introducendo i modi propri del sistema:

$$\{\Phi\}^T [-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]\{\Phi\}\{\bar{q}\} = \{\Phi\}^T \{\bar{F}\} \quad (3.20)$$

Il che porta a scrivere il sistema diagonale:

$$diag[\omega_n^2 - \omega + i\omega c_n]\{\bar{q}\} = \{\Phi\}^T \{\bar{F}\} \quad (3.21)$$

Dunque si può scrivere per il modo n-esimo:

$$\bar{q}_n = \frac{\{\Phi\}_n^T \{\bar{F}\}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega c_n} \quad (3.22)$$

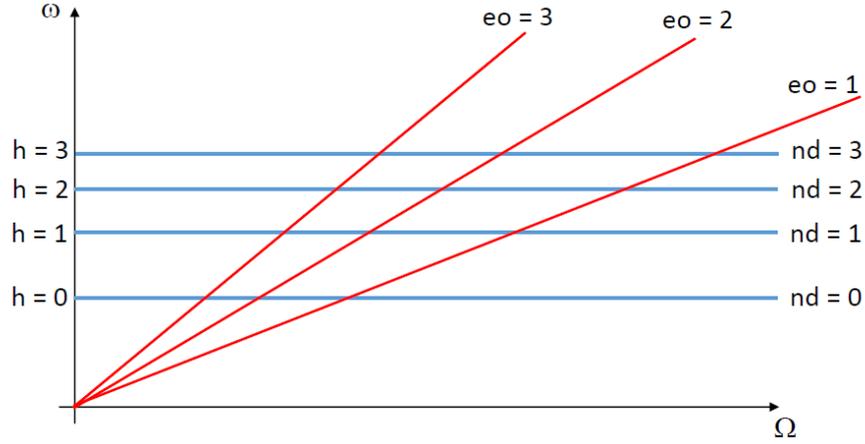


Figura 3.4: Esempio di diagramma di Campbell

Dall'equazione (4.8) si ricava dunque una seconda condizione necessaria per la risonanza; la prima rimane quella $\omega = \omega_n$, ovvero che la pulsazione della forzante sia uguale alla pulsazione naturale del sistema; la seconda è che:

$$\{\Phi\}_n^T \{\bar{F}\} \neq 0 \quad (3.23)$$

Per valutare dal punto di vista pratico il significato di questa condizione si considera il caso in cui viene applicata la forzante in un unico punto P, trasformando la scrittura (3.18) in:

$$\{F_p\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\Psi} \\ \dots \\ e^{-i(N-2)\Psi} \\ e^{-i(N-1)\Psi} \end{Bmatrix} F_p^{(1)} \quad (3.24)$$

Andando a scrivere la forma modale di indice armonico h del medesimo grado di libertà:

$$\{\bar{\Theta}_p\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\varphi} \\ \dots \\ e^{-i(N-2)\varphi} \\ e^{-i(N-1)\varphi} \end{Bmatrix} \bar{\Theta}_p^{(1)} \quad (3.25)$$

Ora si può riscrivere la (4.8) con i vettori:

$$\{\bar{\Theta}_p\}^T \{F_p\} = \bar{\Theta}_p^{(1)} \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\varphi} \\ \dots \\ e^{-i(N-2)\varphi} \\ e^{-i(N-1)\varphi} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\Psi} \\ \dots \\ e^{-i(N-2)\Psi} \\ e^{-i(N-1)\Psi} \end{Bmatrix} F_p^{(1)} \quad (3.26)$$

Esprimendo il prodotto tra vettori come sommatoria si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varphi} e^{in\Psi} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(h-eo)\frac{2\pi}{N}} \quad (3.27)$$

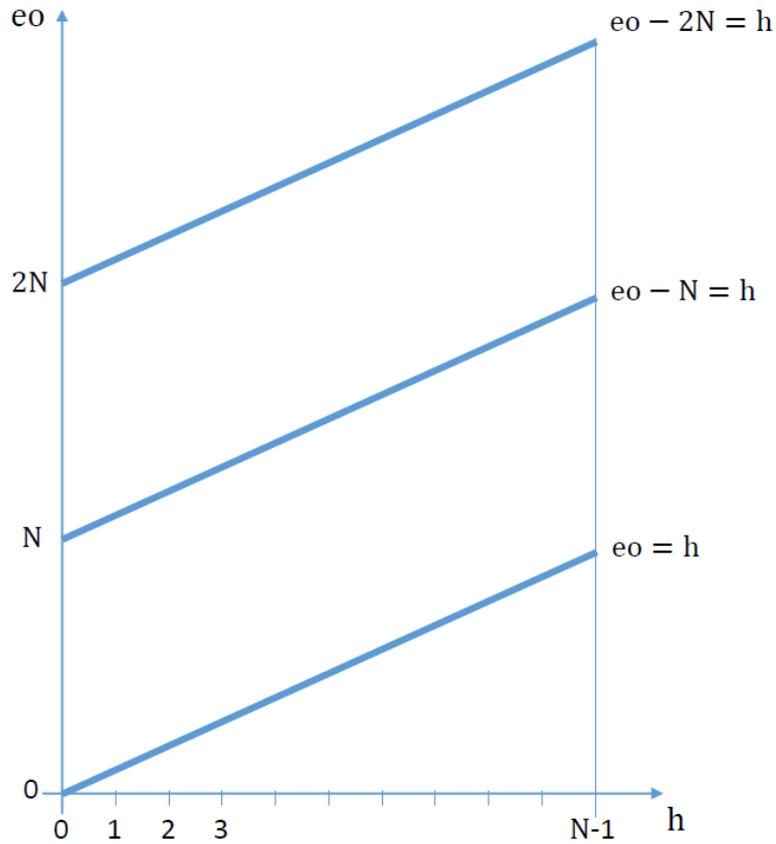


Figura 3.5: Diagramma a zig-zag

Si nota come la (3.27) sia diversa da 0 solo nel caso in cui $h = eo$, nel caso di eo inferiore ad N . Questo significa che solo gli incroci del diagramma di Campbell in cui engine order e indice armonico sono uguali rappresentano una zona di risonanza. C'è inoltre da precisare che non esiste una ragione per cui l'engine order debba essere inferiore ad N ; per questo la condizione più generale per cui avviene risonanza si può scrivere come:

$$eo' = eo - kN \quad (3.28)$$

[8] Questo in genere si riassume in un grafico detto diagramma a zig-zag, come mostrato in figura 3.5.

Come si è visto nella sezione precedente, sfruttare la simmetria ciclica significa dover memorizzare una matrice per ciascun indice armonico. Tuttavia se si sfrutta questa caratteristica, ci si può mettere in un caso semplice, dove si trova un solo engine order; questo permette di memorizzare meno matrici, scegliendo solo quelle effettivamente utili.

Capitolo 4

Smorzamento per attrito

Come si è accennato prima una delle principali fonti di non linearità è lo smorzamento per attrito. Trovare un metodo per modellare questo fenomeno è uno dei problemi più importanti per poter condurre delle previsioni dello stress delle strutture in vibrazione, come possono essere i rotori. Lo studio di queste non linearità è richiesta ogni volta che si presenta un contatto strisciante. In alcuni casi il contatto è presente naturalmente, come nell'incastro della pala al disco; in altri viene inserito di proposito, come nel caso degli underplatform dumper. Nel caso che si va ad analizzare il contatto si trova nello shroud delle palette; tutti questi tipi di contatto si possono vedere in figura 4.1.

Per valutare l'effetto di queste non linearità, si utilizza il metodo del bilanciamento armonico; le

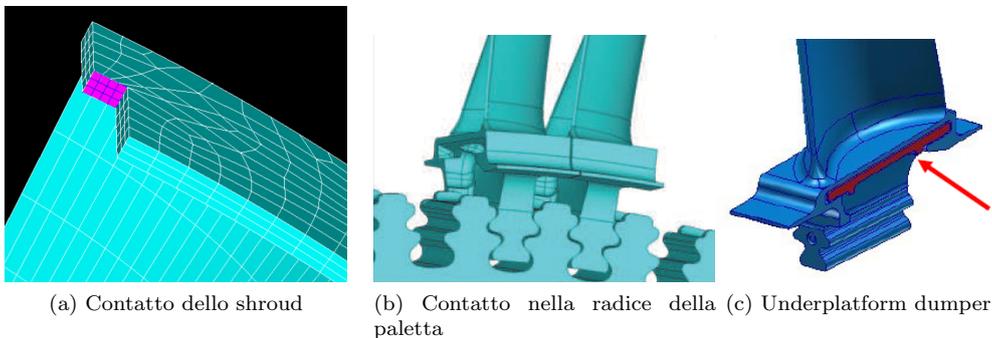


Figura 4.1: Esempio di contatti striscianti

variabili, come ad esempio le forze non lineari (che dipendono dagli spostamenti), sono supposte periodiche, dunque si possono esprimere tramite la sovrapposizione di termini armonici che si possono valutare attraverso lo sviluppo in serie di Fourier. Successivamente si può imporre la condizione di equilibrio per ciascuna armonica, passando da un'equazione differenziale non lineare ad un set di equazioni algebriche non lineari.

In questo capitolo prima si faranno delle osservazioni sul modello di contatto, poi si entrerà nello specifico del bilanciamento armonico nel caso particolare dei sistemi in simmetria ciclica. Infine si faranno delle considerazioni qualitative sulla simmetria ciclica sfruttando il contatto per attrito

4.1 Contatto strisciante

[9] Per intuire il funzionamento di un contatto strisciante si parte da un modello semplice, con una singola massa che striscia a terra (figura 4.2). Per prima cosa si scrive l'equazione di equilibrio:

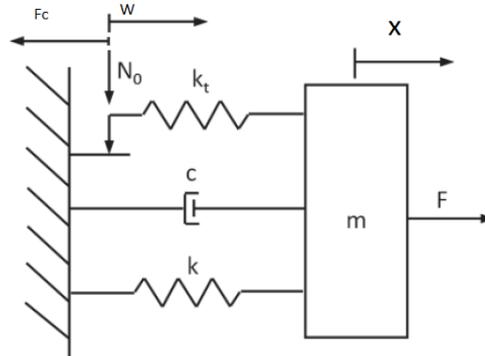


Figura 4.2: Schema di un contatto con un singolo grado di libertà

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F - F_c(x, \dot{x}, t) \quad (4.1)$$

Si osserva che pur avendo una forzante armonica non si può più affermare che lo spostamento sia armonico. In effetti un generico sistema lineare soggetto ad una forzante armonica può dare una risposta periodica (anche se non armonica) o non periodica.

Nel caso in esame lo spostamento w indica lo strisciamento tra le due superfici di contatto. Si evidenziano così due fasi:

- $w = 0$ indica incollaggio, ovvero caso stick
- $w \neq 0$ indica strisciamento, ovvero slip

Durante il moto periodico in linea di massima i due casi si alternano; in generale la forza di contatto in ogni istante t vale:

$$F_c(t) = k_t(x(t) - w(t)) \quad (4.2)$$

Ora volendo valutare nel dettaglio la forza di contatto si deve introdurre un modello di attrito, come quello di Coulomb.

- caso stick: lo spostamento di w è pari a quello che aveva all'inizio della fase di stick, dunque la forza di contatto dipende solo dallo spostamento x e dalla rigidità di contatto
- transizione stick/slip: adottando il modello di attrito di coulomb, si può osservare che il distacco si ha per

$$|F_c(t)| = \mu N_0 \quad (4.3)$$

- caso slip: in questa condizione la forza di contatto sarà pari a quella espressa nella (4.3); in questo caso lo spostamento w diventa identico allo spostamento x
- transizione slip/stick: questa condizione si ottiene quando si inverte il moto della massa, ovvero quando \dot{x} inverte il segno

Si consideri ora l'armonica fondamentale della risposta:

$$x = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \cos(\theta) \quad (4.4)$$

Facendo riferimento alla figura 4.3 si possono osservare con più facilità i criteri di transizione Si

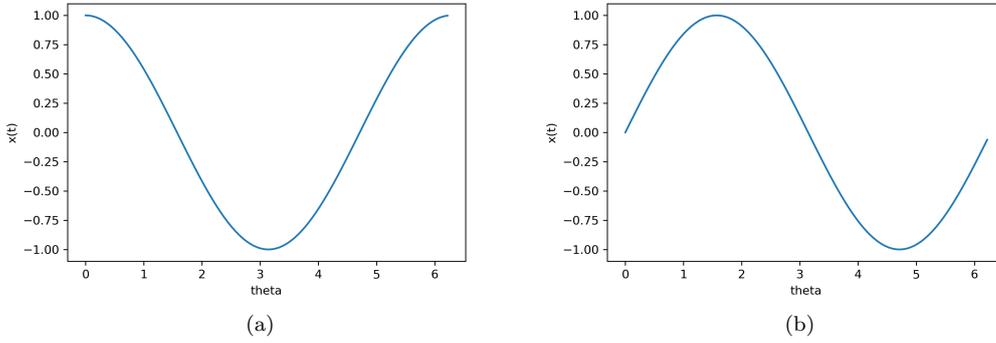


Figura 4.3: Andamenti qualitativi di spostamento e velocità

osserva come in termini assoluti lo spostamento per $\theta = 0, \pi$ è massimo, e si tratta proprio dei punti dove la velocità si inverte.

Si considera per iniziare un caso in cui lo spostamento x è piccolo. Se la forza di contatto non raggiunge il valore limite espresso dalla (4.3), non si avrà nessuno strisciamento, ma una soluzione di tipo lineare full stick. Si può individuare uno spostamento critico oltre al quale si ha il fenomeno dello strisciamento, ovvero:

$$x_{cr} = \frac{\mu N_0}{k_t} \quad (4.5)$$

Dal punto di vista pratico la condizione $x < x_{cr}$ si ottiene per diverse ragioni; un esempio è un precarico molto grande, oppure un elevato coefficiente di attrito.

Se si considera invece un caso in cui la forza di contatto supera la condizione limite si avrà una fase di strisciamento, alternata a fasi di adesione. Il tutto si può riportare in un grafico che prende il nome di ciclo di isteresi, come in figura 4.4. In questo grafico si riassume la condizione full stick, ovvero la linea rossa e la soluzione di strisciamento e adesione in blu.

E' necessario definire le equazioni lungo i vari tratti del ciclo di steresi:

- A: Inizio della fase di stick, dunque si deve applicare la condizione limite:

$$F_c = K_t(x_0 - w_A) = \mu N_0 \quad (4.6)$$

Si osserva come x sia nella condizione di scostamento massimo; inoltre l'equazione permette di trovare il valore di w_A , che rimarrà costante nella fase successiva:

$$w_A = x_0 - \frac{\mu N_0}{K_t} \quad (4.7)$$

- AB: Fase stick, come si è detto la w_A è costante; la forza si può calcolare come:

$$F_c = k_t(x_0 \cos(\theta) - w_A) = \mu N_0 + k_t x_0 (\cos(\theta) - 1) \quad (4.8)$$

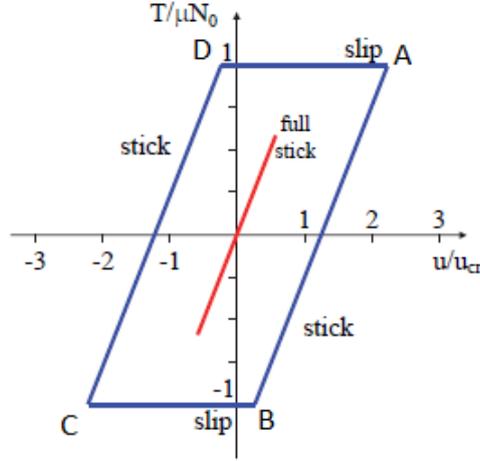


Figura 4.4: Esempio generale di ciclo di isteresi

- B: Questo è un punto di transizione tra stick e slip; la forza vale di nuovo il suo valore massimo:

$$F_c(\theta_B) = -\mu N_0 = \mu N_0 + k_t x_0 (\cos(\theta_B) - 1) \quad (4.9)$$

Attraverso questa equazione è possibile trovare il valore θ_B , come:

$$\theta_B = \arccos\left(1 - 2 \frac{\mu N_0}{K_t x_0}\right) \quad (4.10)$$

- BC: si tratta di una fase di slip, dunque la forza di contatto vale quanto la forza massima:

$$F_c(\theta) = -\mu N_0 \quad (4.11)$$

- C: In questo punto si ha una transizione da slip a stick; come si è visto nel punto A si usa l'equazione della forza per trovare il valore di w_c

$$w_C = -x_0 + \frac{\mu N_0}{k_t} = -w_a \quad (4.12)$$

- CD: il tratto slip, come per quello AB, vede $w = w_C$ costante e variare $F_c(\theta)$:

$$F_c = k_t(x_0 \cos(\theta) - w_c) = -\mu N_0 + k_t x_0 (\cos(\theta) + 1) \quad (4.13)$$

- D: in questo punto si ha una transizione stick e slip; si trova il valore di θ_D per simmetria con B:

$$\theta_D = \pi + \theta_B \quad (4.14)$$

- DA: Fase slip, anche in questa fase la forza è pari alla forza massima:

$$F_c = +\mu N_0 \quad (4.15)$$

La scrittura delle forze nei vari tratti è importante in quanto sono necessarie nello sviluppo in serie di Fourier, che, come si è accennato, serve nel metodo del bilanciamento armonico.

4.2 Bilanciamento armonico

[6] Come si è accennato è un metodo che viene utilizzato per la soluzione dell'equazione (4.1). Dal problema ci si aspetta uno spostamento periodico, dunque si può sviluppare in serie di Fourier; utilizzando i numeri complessi:

$$\bar{x} \simeq \sum_{n=0}^{n_h} \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} \quad (4.16)$$

Allo stesso modo, essendo periodica anche la forza non lineare, si può scrivere:

$$\bar{F}_c \simeq \sum_{n=0}^{n_h} \bar{F}_c^{(n)} e^{in\omega t} \quad (4.17)$$

Naturalmente dato che si sta lavorando con una serie troncata non si potrà avere un'uguaglianza esatta. Risulta necessario scegliere attentamente a che livello troncata la serie, in modo che approssimi la dinamica della struttura con sufficiente accuratezza. Ora si possono sostituire gli sviluppi in serie (4.16) e (4.17) all'interno dell'equazione di equilibrio più generale (4.1), trascurando le componenti statiche:

$$\sum_{n=1}^{n_h} (-(n\omega)^2 m + in\omega c + k) \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} = F e^{i\omega t} - \sum_{n=1}^{n_h} \bar{F}_c^{(n)} e^{in\omega t} \quad (4.18)$$

Perchè questa equazione sia soddisfatta si deve imporre l'uguaglianza di ciascun termine n-esimo della sommatoria:

$$\begin{cases} n = 1 & (-(\omega)^2 m + i\omega c + k) \bar{x}^{(1)} e^{i\omega t} = F e^{i\omega t} - \bar{F}_c^{(1)} e^{i\omega t} \\ n > 1 & (-(n\omega)^2 m + in\omega c + k) \bar{x}^{(n)} e^{in\omega t} = -\bar{F}_c^{(n)} e^{in\omega t} \end{cases} \quad (4.19)$$

Quello che si ottiene è un sistema di equazioni algebriche a coefficienti complessi; non si può disaccoppiare il sistema in quanto il generico termine $F_c^{(n)}$ non dipende solo dal corrispondente spostamento $x^{(n)}$, ma dall'intera serie di Fourier. La precisione del metodo dipende dal numero di armoniche impiegate; in prima approssimazione si osserva che la risposta dinamica del sistema sia fornita dall'armonica fondamentale, ovvero quella per $n=1$. Tuttavia anche in questo caso si tratta di un sistema di equazioni non lineari, in quanto i coefficienti di Fourier sono numeri complessi e sia la parte immaginaria che quella reale della forza di contatto F_c :

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m + k & -\omega c \\ \omega c & -\omega^2 m + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Re(\bar{x}^{(1)}) \\ Im(\bar{x}^{(1)}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Re(\bar{F}_c^{(1)}) \\ Im(\bar{F}_c^{(1)}) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Questa equazione, che come si è detto non è lineare, si può risolvere con metodi numerici iterativi. Infatti, ipotizzando delle forze di contatto si andranno a calcolare gli spostamenti da usare per calcolare le forze di contatto e così via fino a convergenza. Dunque il passo da effettuare ora è quello di utilizzare il modello di contatto visto nel paragrafo precedente per trovare i coefficienti di Fourier. Si sa che essi si possono calcolare come:

$$\begin{cases} Re\bar{F}_c^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_c(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ Im\bar{F}_c^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_c(\theta) \sin(\theta) d\theta \end{cases} \quad (4.21)$$

Per il calcolo si spezzerà l'integrale e si integreranno singolarmente le equazioni (4.8), (4.11), (4.13) e (4.15), ovvero quelle che esprimono la forza di contatto. Il risultato:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \bar{F}_c^{(1)} = \frac{k_t x_0}{\pi} \left[\theta_B - \frac{1}{2} \sin(2\theta_B) \right] \\ \operatorname{Im} \bar{F}_c^{(1)} = -\frac{4\mu N_0}{\pi} \left(1 - \frac{\mu N_0}{k_t x_0} \right) \end{cases} \quad (4.22)$$

Dove θ_B si calcola come (4.10).

4.3 Diversi modelli di contatto

Il modello di contatto che si è analizzato nel capitolo precedente non è l'unico che si può applicare; ne esistono diversi, per tenere conto di diverse situazioni che possono verificarsi. In seguito si osservano un paio di esempi in questo senso; nonostante l'apparente grande differenza con il metodo più semplice, l'ossatura della soluzione rimane la stessa. L'obiettivo sarà sempre applicare il metodo del bilanciamento armonico, la differenza sarà sostanzialmente nella formulazione della forza di contatto e dunque nel calcolo dei coefficienti di Fourier.

4.3.1 Spostamento tangenziale 1D con spostamento e precarico variabile

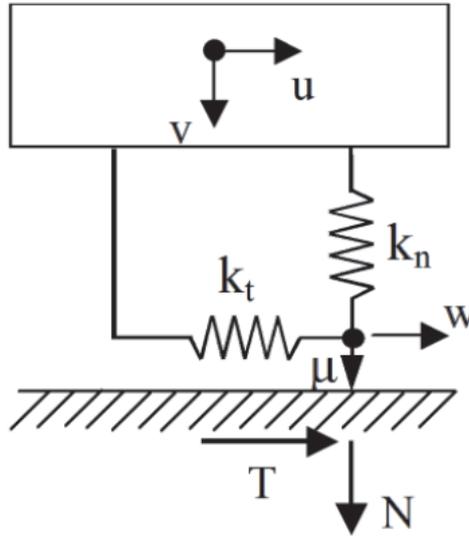


Figura 4.5: Schema di un contatto con precarico variabile

[9] Nel caso in cui il precarico abbia una componente variabile il contatto precedente risulta essere poco attendibile. Un modello più accurato per valutare la forza di contatto è schematizzato in figura 4.5; qui si tiene conto di una rigidezza di contatto sia tangenziale (k_t) che di una rigidezza normale (k_n). La forza di contatto avrà una formulazione del tipo:

$$N = \max(N_0 + k_n v, 0) \quad (4.23)$$

In questo modo si può modellare anche un eventuale distacco. La forza del contatto avrà ora tre possibili configurazioni:

$$F_c = \begin{cases} k_t(u - w) \\ \text{sgn}(w)\mu N \\ 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Che corrispondono rispettivamente a condizione di stick, di slip e di distacco. Ciascuna fase si potrà alternare durante la vibrazione:

Stato iniziale	Stato finale	Criterio
Stick	Slip Distacco	$ T = \mu N$ $N = 0, \dot{N} < 0$
Slip	Stick Distacco	$\dot{w} = 0$ $N = 0, \dot{N} < 0$
Distacco	Stick Slip	$N = 0, \dot{N} > 0, \dot{T} < \mu \dot{N}$ $N = 0, \dot{N} > 0, \dot{T} > \mu \dot{N}$

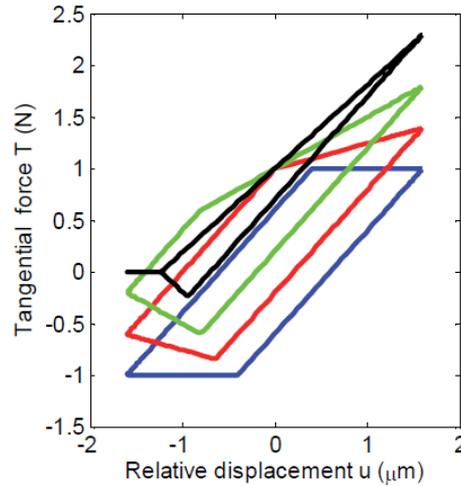


Figura 4.6: Esempio di vari cicli di isteresi al variare del precarico

Quello che ci si aspetta è che un contatto di questo tipo si possa comportare come quello visto in precedenza quando viene imposto un precarico abbastanza grande. In generale, comunque si potrà disegnare un ciclo di isteresi, il quale dipenderà dal precarico. In figura 4.6 se ne vede un esempio, al variare della forza di precarico. Il caso nero ha un precarico molto piccolo, tanto da permettere al contatto di separarsi, come si capisce dalla parte dove la forza di contatto è nulla. Per quello che riguarda il caso blu, invece si può supporre che sia un caso in cui la forza premente sia abbastanza alta da far risultare la vibrazione normale quasi irrilevante.

4.3.2 Precarico fisso, strisciamento in due direzioni

Nel caso in cui si debba tenere conto dello strisciamento in due direzioni, si possono prendere in considerazione due contatti come quelli visti in precedenza impiegati perpendicolarmente tra

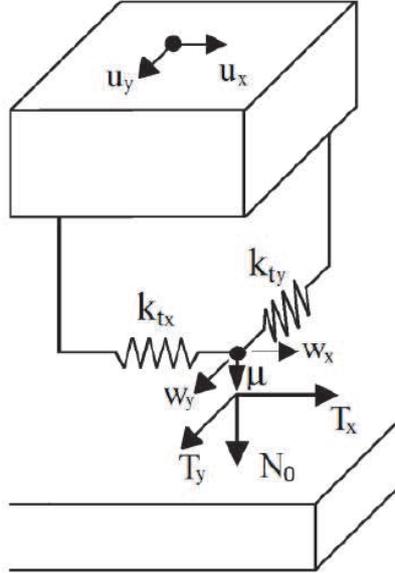


Figura 4.7: Schema di un contatto 2D

di loro, oppure prendendo in considerazione un contatto come quello in figura 4.7. Questo viene modellato con due molle, k_{tx} e k_{ty} ortogonali tra loro. Per ciascuna coppia di spostamenti si può calcolare la coppia di forze di contatto. Anche in questo caso ci saranno due possibilità, ovvero una condizione di stick ed una di slip. Per quanto riguarda la prima:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{tx} & 0 \\ 0 & k_{ty} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} \right) \quad (4.25)$$

Dove il vettore degli spostamenti relativi sarà un vettore nullo. Per quello che riguarda la forza durante lo slip, varrà il limite di Coulomb:

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \mu N_0 \quad (4.26)$$

Questa condizione è riportata graficamente in figura 4.8, rappresentata dal cerchio nero. Le linee rosse rappresentano il caso in cui il contatto è in full stick, mentre il caso blu rappresenta un caso in cui il contatto alterna fasi di stick a fasi di slip.

4.3.3 Spostamento tangenziale 2D con spostamento e precarico variabile

In questo modello di contatto si prendono in considerazione tutti i casi precedenti. La forza normale di contatto risulta essere:

$$N = \max(N_0 + k_n v, 0) \quad (4.27)$$

La forza di contatto nel caso stick si calcolerà come (4.25), con l'unico altro limite della forza normale di contatto che dovrà essere maggiore di 0. Nella fase slip:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \frac{\mu N}{\|\dot{w}\|} \begin{Bmatrix} \dot{w}_x \\ \dot{w}_y \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

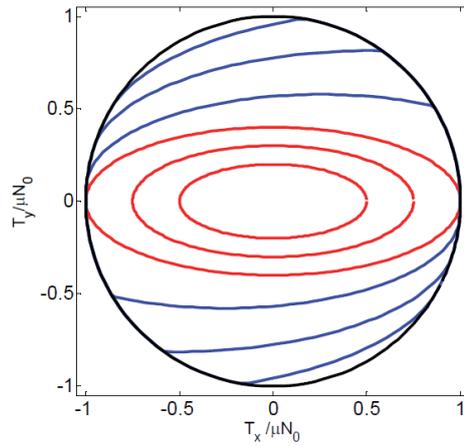


Figura 4.8: Limite di Coulomb

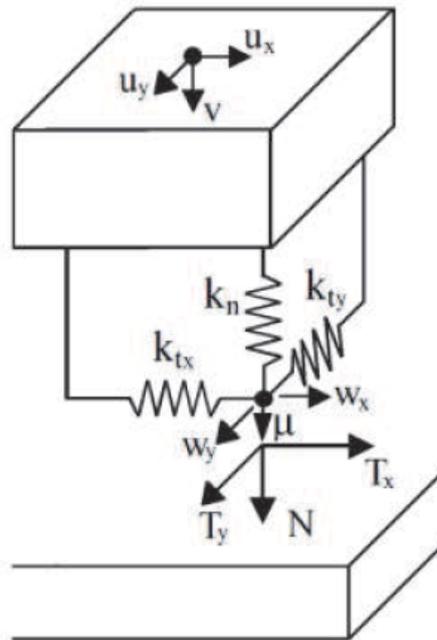


Figura 4.9: Schema di un contatto 2D con prearico variabile

Dove

$$\|\dot{w}\| = \sqrt{\dot{w}_x^2 + \dot{w}_y^2}$$

Naturalmente se si perde il contatto ($N = 0$) si annulleranno le forze di contatto in entrambe le direzioni.

4.4 Il bilanciamento armonico e la simmetria ciclica

[2] [3] Nel caso che si vuole modellare, il sistema è soggetto a delle condizioni di simmetria ciclica. Questo significa che bisogna impiegare l'indice armonico corretto per ciascuna armonica che si vuole conservare nell'espansione in serie di Fourier.

Si consideri un disco che ruota ad una velocità Ω ; la forzante avrà un certo engine order eo ; dunque l'eccitante avrà una frequenza $\omega = eo\Omega$. L'espressione della forza sul generico settore sarà:

$$F_n(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (4.29)$$

Per quello che riguarda il settore adiacente:

$$F_{n+1}(t) = F_0 e^{i\omega(t+\Delta t)} \quad (4.30)$$

Dove il $\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega N}$ è il ritardo della forzante. Considerando la forza non lineare di contatto sul generico settore:

$$F_{c,n}(t) = \sum_{n=0}^{n_h} F_c^{(n)} e^{in\omega t} \quad (4.31)$$

Allo stesso modo della forza lineare si vuole ora scrivere la forza non lineare sulla paletta adiacente:

$$\begin{aligned} F_{c,n+1}(t) &= \sum_{n=0}^{n_h} F_c^{(n)} e^{in\omega(t+\Delta t)} = \\ &= \sum_{n=0}^{n_h} F_c^{(n)} e^{in\omega \left(t + \frac{2\pi}{\Omega N} \right)} = \\ &= \sum_{n=0}^{n_h} F_c^{(n)} e^{in\omega t} e^{in\omega \frac{2\pi}{\Omega N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{n_h} F_c^{(n)} e^{in\omega t} e^{ineo \frac{2\pi}{N}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Si osserva dunque come la forza non lineare di contatto abbia una dipendenza dall'engine order, in particolare per comodità si può definire in $eo_c = neo$. Prendendo in considerazione l'armonica fondamentale si osserva come l'engine order di contatto sia pari a quello della forzante; andando a considerare armoniche superiori si osserva l'aumentare dell'engine order di contatto.

Naturalmente questo significa che per ciascuna armonica che si decide essere necessaria per approssimare la forza di contatto, bisognerà utilizzare delle matrici in simmetria ciclica con l'indice armonico corretto. Questo va ad appesantire ulteriormente la richiesta di risorse computazionali necessarie per portare a termine un'analisi non lineare accurata.

4.5 Applicazione del contatto ad una simmetria ciclica semplice

Per poter indagare più in profondità la simmetria ciclica e lo smorzamento per attrito si è deciso di fare un semplice esercizio per valutarne gli effetti. Si considera un disco palettato; il disco è infinitamente rigido, mentre le palette sono semplificabili con una sola massa. Le palette sono connesse tra loro con un contatto strisciante. La prima prova è valutare che cosa succede con

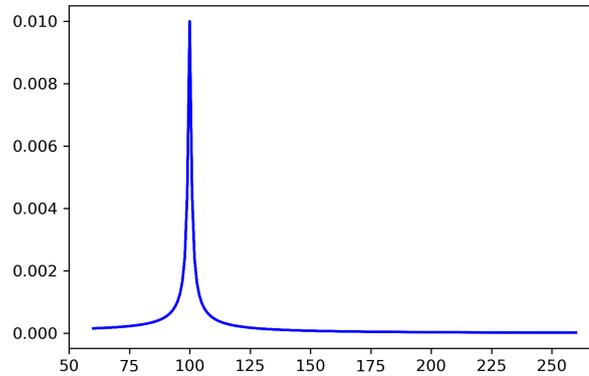


Figura 4.10: Singola massa

il contatto aperto, ovvero la massa isolata; naturalmente in tal caso la simmetria ciclica non si applica, però rimane un caso interessante per fare delle valutazioni sui casi successivi. Osservando il grafico 4.10, si osserva che, esattamente come ci si aspetta, si ottiene un grafico con una singola cresta, in corrispondenza della frequenza naturale.

A questo punto si impone la simmetria ciclica; prima però di imporre il contatto strisciante si va a considerare il modello lineare in cui le molle sono vincolate alle masse. Si ottiene così il seguente grafico 4.11.

In questo caso si osserva un progressivo irrigidimento del sistema; questo è dovuto al modo

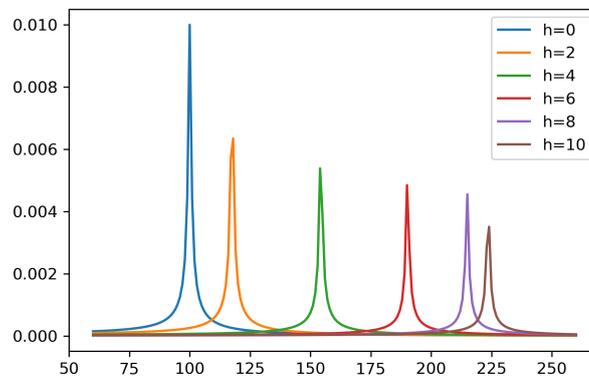


Figura 4.11: Grafico al variare di h

di vibrare del sistema. Si prende ad esempio la linea azzurra, quella per $h=0$; si osserva come essa sia identica a quella nel caso della singola massa isolata. La teoria della simmetria ciclica ci spiega questo fenomeno; infatti h oltre l'indice armonico ha anche il significato di numero di diametri nodali. Se non si trova alcun diametro nodale significa che le masse vibrano insieme e dunque non si attiva la rigidità che le collega, dunque la sua presenza risulta indifferente sul

moto del sistema. Aumentando l'indice armonico le masse avranno uno spostamento relativo sempre maggiore; questo si traduce in un maggiore "utilizzo" della rigidità di collegamento e dunque l'aumento della rigidità del sistema.

A questo punto si introduce lo smorzamento per attrito. dalle affermazioni appena fatte ci si aspetta che il contatto smorzi meglio ad indici armonici elevati, mentre ad indici armonici bassi sia poco efficace.

Il grafico 4.12 ci permette di osservare esattamente quello che ci si aspetta. All'indice armonico

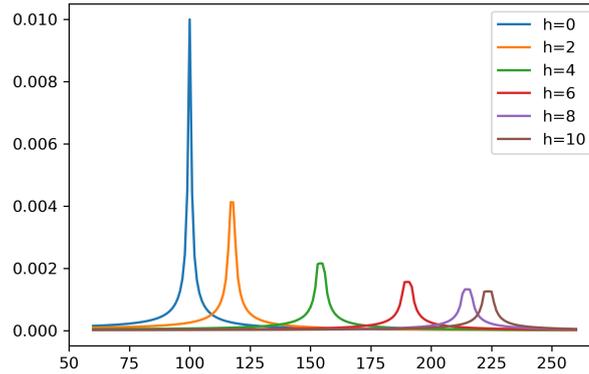


Figura 4.12: Effetto dello smorzatore per attrito

0 la presenza del contatto non si apprezza, per via della configurazione del moto delle palette. Anche per l'indice armonico 2 la presenza dello smorzatore è poco accentuata; mentre per gli indici armonici maggiori l'effetto si fa sempre più importante. L'ultimo grafico che si riporta permette di valutare meglio l'effetto dello smorzamento per attrito sul sistema; risulta ben visibile come le creste vengano "tagliate" dalla presenza del contatto.

Un'ultima osservazione che si vuole fare è riguardo al precarico del contatto. Nel caso semplice

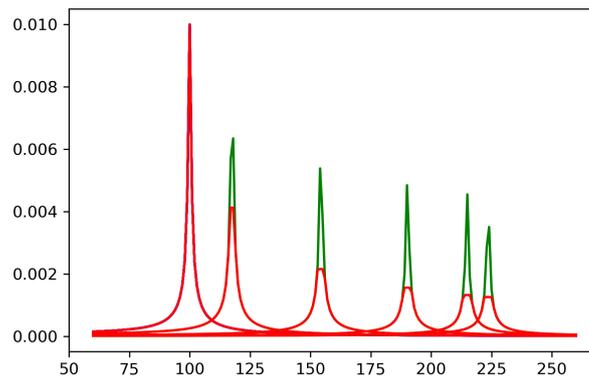


Figura 4.13: Confronto con il caso lineare

che si è preso in considerazione si è scelto un precarico adeguato per poter evidenziare gli effetti interessanti dello smorzatore. Tuttavia se il precarico è troppo grande si ritorna in una situazione come quella in figura 4.11, ovvero una condizione in cui la presenza del contatto non ha più l'effetto di smorzare il sistema, ma semplicemente quello di irrigidirlo.

Capitolo 5

Sviluppo del Software

Il tema centrale di questa tesi è stato lo sviluppo di un software in grado di valutare la risposta forzata di un sistema che presenta una non linearità di contatto. Lo sviluppo è partito da un codice già esistente, che è stato adattato ed ampliato. Si è mantenuta la struttura di base dei solutori lineari e non lineari, oltre che il modello di contatto.

Gli ambiti di lavoro sono stati essenzialmente tre:

- Riduzione in simmetria ciclica con Ansys e ricomposizione della matrice ottenuta
- Adattamento del codice alle matrici ridotte in simmetria ciclica
- Implementazione delle diverse possibilità di analisi

5.1 Riduzione in simmetria ciclica

Come si accennato nei capitoli precedenti per poter effettuare l'analisi di un settore di turbina completo, costituito dunque da pala e disco, si è cercato di effettuare la riduzione direttamente all'interno del codice in python. Essenzialmente dopo aver letto le matrici in uscita da ANSYS, si imponeva la simmetria ciclica al disco e successivamente si passava alla riduzione. Tuttavia questo metodo si è rivelato estremamente lungo e dunque si è scelto di fare un'altra strada. In particolare si è ricorsi ad una funzionalità di ANSYS che permette di effettuare la riduzione ed estrarre le matrici ridotte. Per farlo si è utilizzata la seguente macro:

```
/batch
finish
/filnam,[file name]
/solu
cmsel,s,[master nodes],node
m,all,all
allsel,all
antype,substr
seopt,[file name],2
cmsopt,fix,[modes number]
solve
finish
```

Con questa macro si ottengono i file dai quali estrarre le matrici di massa e rigidezza. I file saranno relativi ai primi $N/2$ indici armonici. Inoltre le matrici che ci vengono fornite sono in notazione reale, per cui è necessario il riassetto in notazione complessa; come si è accennato la notazione complessa permette di utilizzare matrici più piccole e più facili da interpretare. Per la ricomposizione ci si è appoggiati ai metodi di riduzione e a che cosa ci si aspetta. Prendendo in considerazione la matrice di massa ci si aspetta un risultato del tipo:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & I \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Mentre la struttura della matrice fornita da ANSYS è del tipo:

$$[M] = \begin{bmatrix} A & B & C \\ -B & A & D \\ C^T & D^T & I \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

L'ipotesi che si è portata avanti è che il vettore dei gradi di libertà sia del tipo:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_m \\ q_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Re(\bar{x}_m) \\ Im(\bar{x}_m) \\ q_s \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Dove per \bar{x}_m si intendono i gradi di libertà master in forma complessa, mentre per q_s si intendono i modi slave. Attraverso questa osservazione, si è ipotizzata che nella matrice (5.2) le componenti A siano la parte reale della sottomatrice M_{mm} , mentre le componenti B le parti immaginarie. Invece le sottomatrici C e D saranno rispettivamente parte reale ed immaginaria della sottomatrice M_{ms} . Tuttavia per ottenere la matrice M_{ms} corretta è ancora stato necessario rimuovere metà dei modi; questo perché lavorando con numeri reali ci saranno dei modi duplicati, sfasati di un fattore $\pi/2$. Mettendo in pratica questi accorgimenti si possono ricomporre le matrici di rigidezza e di massa. Per valutare la validità della ricomposizione delle matrici ottenute si sono fatti dei confronti con ANSYS, in primo luogo confrontando con i risultati derivanti dalle matrici ridotte, in secondo luogo con le frequenze naturali esatte del modello completo. Nel primo caso si è ottenuta una corrispondenza perfetta; a titolo di esempio si riportano i risultati nel caso di indice armonico 1, 5 e 10:

h=1		h=5		h=10	
ANSYS	Python	ANSYS	Python	ANSYS	Python
57.51	57.51	58.19	58.19	57.82	57.81
57.51		58.19		57.82	
132.08	132.08	144.87	144.87	153.68	153.68
132.08		144.87		153.68	
239.56	239.56	243.46	243.46	242.56	242.56
239.56		243.46		242.56	
248.56	248.56	246.05	246.05	247.01	247.01
248.56		246.05		247.01	

Come si può osservare i risultati sono gli stessi sia se calcolati dalla matrice ridotta in ANSYS, sia se calcolati dalla matrice letta e poi riassetto con python. Questo naturalmente è indice di una ricomposizione corretta. Si vuole anche andare a valutare la bontà della riduzione, per questo si mettono a confronto i risultati ottenuti dal modello completo e quelli ottenuti con il modello ridotto ed assemblato in python; anche in questo caso si riportano dei campioni, di nuovo per gli indici armonici 1, 5, 10:

h=1		h=5		h=10	
ANSYS	Python	ANSYS	Python	ANSYS	Python
57.50	57.51	58.17	58.19	57.84	57.81
57.50		58.17		57.84	
131.94	132.08	144.69	144.87	153.47	153.68
131.94		144.69		153.47	
239.05	239.56	242.98	243.46	242.71	242.56
239.05		242.98		242.71	

Quello che si osserva è una corrispondenza buona ma non perfetta; questo è normale, dato che si sta introducendo una riduzione. Si osserva che le frequenze maggiormente influenzate sono quelle più alte, come ci si aspetta dalla teoria. Questo è sicuramente una cosa di cui tenere conto durante le analisi; se si volessero fare delle analisi che coinvolgono frequenze elevate è necessario effettuare una riduzione che conservi un numero maggiore di modi. Questo vale in generale, nel caso particolare della riduzione in simmetria ciclica bisogna anche tenere conto del fatto che si conservano solo la metà dei modi richiesti ad ANSYS, dunque la richiesta si modi da conservare dovrà essere ancora maggiore.

5.2 Diagrammi di flusso

Si riportano ora delle schematizzazioni del diagramma di flusso che segue il codice; per primo si osserva quello della struttura generale 5.1. Naturalmente subito dopo la lettura delle matrici si devono riassemble; dopo l'assemblaggio, si deve effettuare un'analisi lineare; questa serve come base di partenza per l'analisi non lineare, come si vedrà in seguito. C'è poi il ramo dell'analisi lineare, dove si possono far variare parametri come kt e gli indici armonici. Il suo funzionamento è legato alla scelta dei parametri per l'analisi non lineare. Essendo molto lunga da portare al termine può essere utile vedere il comportamento lineare del settore, nel caso slip e in quello full stick; in questo modo si può selezionare un range di frequenze per il calcolo della risposta non lineare adeguato.

Nell'effettuare un'analisi lineare 5.2 si effettuano due calcoli; il primo in un caso di completo strisciamento (full slip), il secondo in caso di completa adesione (full stick). Il secondo si ottiene dal primo andando ad aggiungere alla matrice di massa una matrice di rigidità; questa è stata costruita tenendo conto della simmetria ciclica e dunque dell'effetto dell'engine order.

Per quello che riguarda l'analisi non lineare 5.3 si utilizza la funzione `fsolve`. Il metodo HBM è implementato direttamente all'interno della funzione che viene fornita ad `fsolve` per il calcolo del residuo.

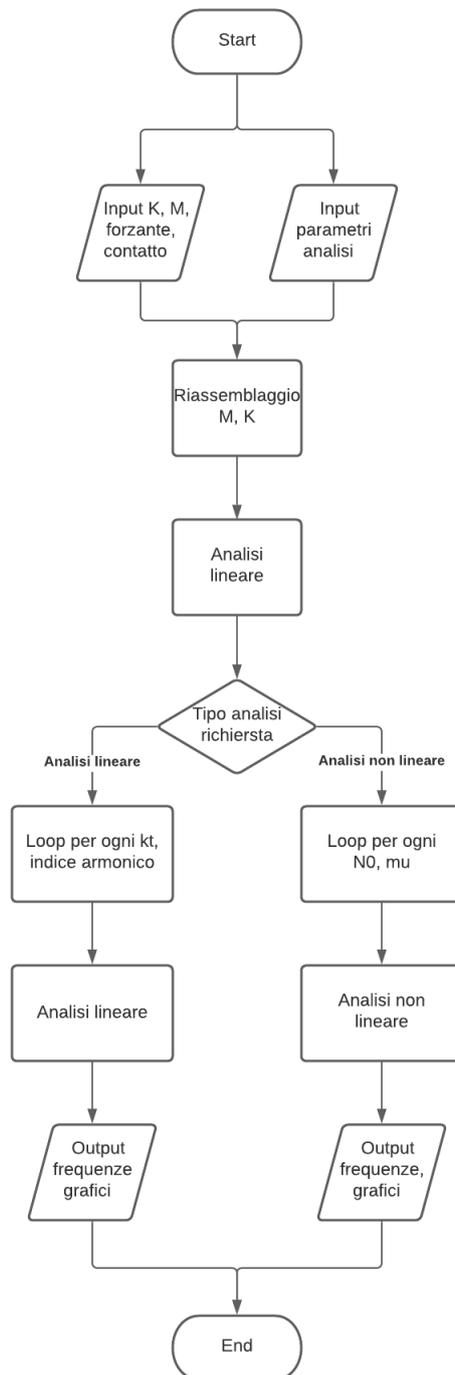


Figura 5.1: Struttura generale del programma

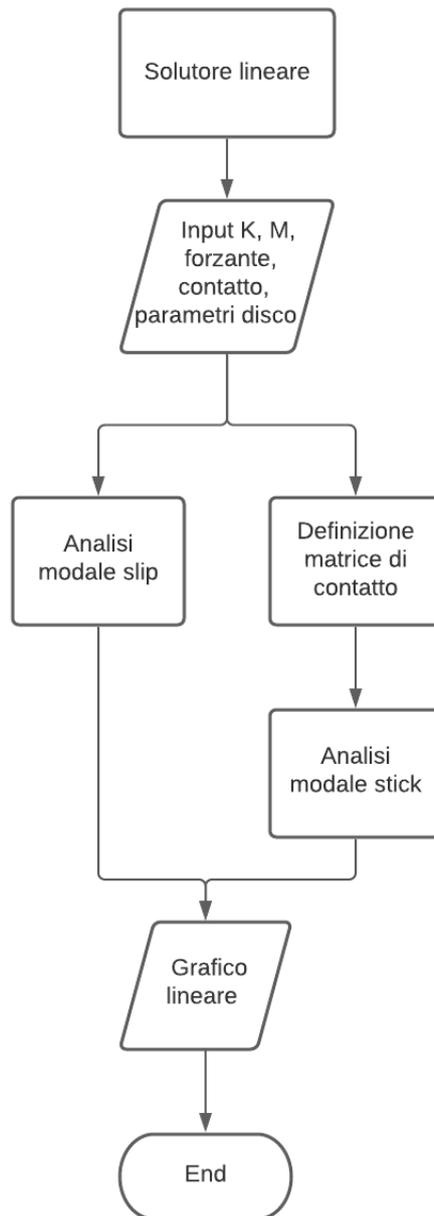


Figura 5.2: Struttura dell'analisi lineare

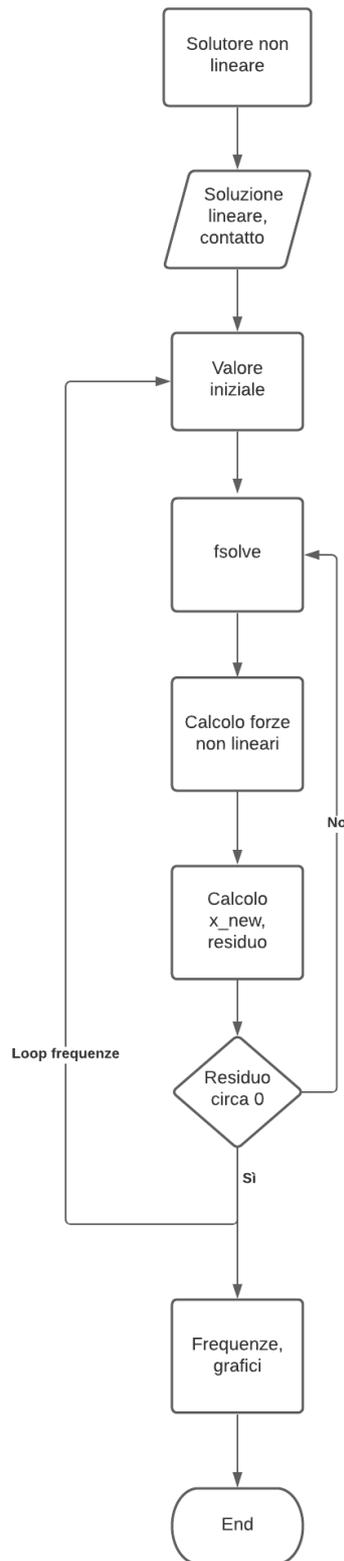


Figura 5.3: Struttura dell'analisi non lineare

5.3 Elaborazione con foglio di calcolo

In alcuni tipi di analisi è stato necessario appoggiarsi ad un foglio di calcolo. Per farlo si è fatto stampare al programma in Ansys un documento di testo con all'interno i risultati successivamente importati nel foglio di calcolo ed elaborati. Ci sono state principalmente due ragioni per questa scelta. La prima è legata alla necessità di fare delle analisi facendo variare due parametri; un esempio risiede nella variazione del coefficiente di attrito. In questo caso si voleva andare a vedere come variava il precarico di ottimo al variare della forza di attrito, dunque per ciascun coefficiente di attrito si doveva costruire un set di precarichi personalizzato. Questo comportava che anche un solo set di parametri errato avrebbe portato a risultati inutilizzabili e avrebbe richiesto di ricominciare una lunga analisi da capo.

La seconda motivazione è stata quella di poter salvare i risultati delle varie analisi e poterli visualizzare in modo più comprensibile

Capitolo 6

Analisi

In questo capitolo si esporranno i risultati delle analisi effettuate. Le analisi sono state condotte con un settore di turbina formato da una pala ed una sezione del disco, mostrato in figura 6.1. Nell'effettuare la riduzione sono stati conservati come master quattro nodi di contatto e 5 nodi lungo il bordo della paletta; questi ultimi sono stati tenuti in primo luogo per poter ottenere un'approssimativa deformata della pala. In secondo luogo servono per poter applicare la forzante in un punto verosimile che possa rappresentare il centro aerodinamico della pala.

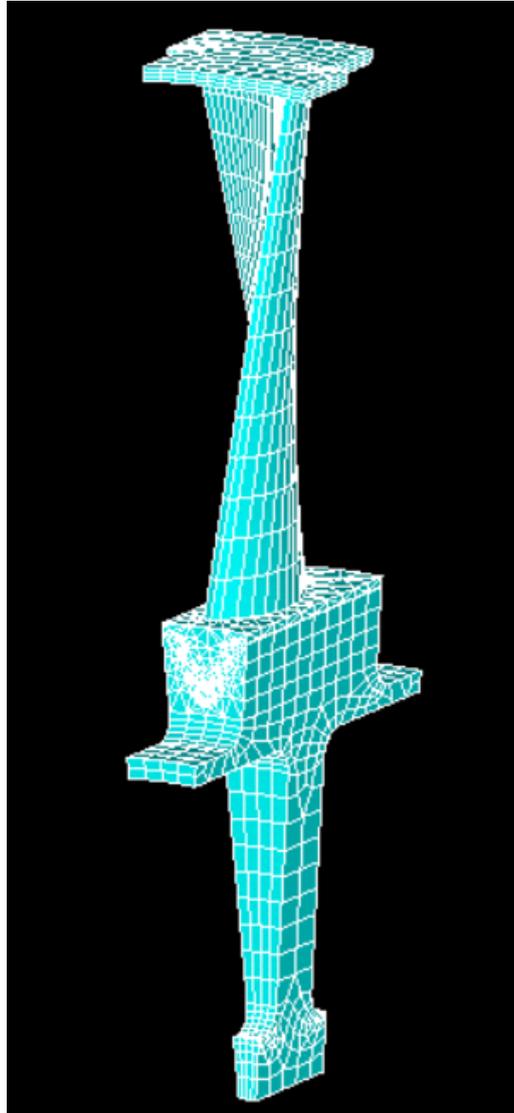


Figura 6.1: Settore utilizzato per le analisi

6.1 Effetto della variazione dell'indice armonico sulla dinamica lineare

La prima analisi che si propone vuole indagare gli effetti della variazione dell'indice armonico. Di fatto facendo questa analisi si indaga su quale potrebbe essere l'effetto della variazione dell'engine order della forzante sulla dinamica lineare. Per primo si riporta un caso full slip (fig 6.2)

Quella che si osserva è che la simmetria ciclica per un caso slip ha poca influenza sulla frequenza di vibrazione; una leggera influenza si nota solo per la quarta famiglia. La spiegazione di questo fenomeno è che il disco è molto rigido rispetto alla pala, per questo l'influenza sulla frequenza è molto simile ad un incastro a terra. Si riportano in tabella i valori delle frequenze ottenuti:

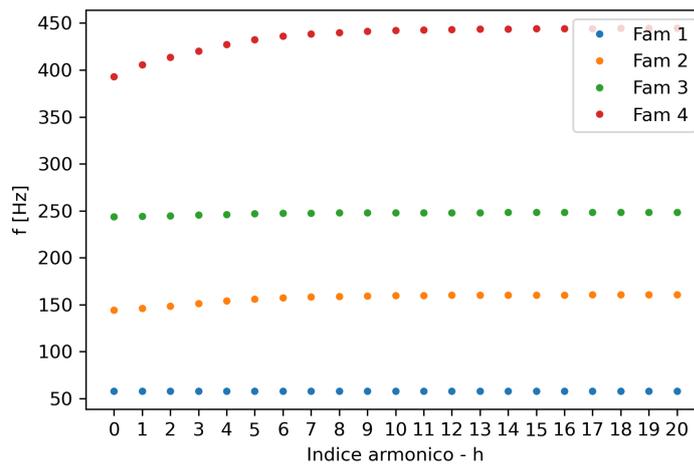


Figura 6.2: Andamento delle frequenze in condizione full slip

h	fam 1 [Hz]	fam 2 [Hz]	fam 3 [Hz]	fam 4 [Hz]
0	57.9	144.4	243.6	392.8
1	58.0	146.2	244.1	405.4
2	58.0	148.6	244.7	413.4
3	58.0	151.4	245.5	420.3
4	58.0	154.2	246.3	427.2
5	58.0	156.1	246.9	432.5
6	58.0	157.4	247.3	436.0
7	58.0	158.3	247.6	438.4
8	58.0	158.9	247.8	440.0
9	58.0	159.3	247.9	441.2
10	58.1	159.6	248.0	442.0
11	58.1	159.8	248.0	442.7
12	58.1	160.0	248.1	443.2
13	58.1	160.1	248.2	443.6
14	58.1	160.2	248.2	443.8
15	58.1	160.3	248.2	444.1
16	58.1	160.4	248.2	444.2
17	58.1	160.4	248.3	444.4
18	58.1	160.5	248.3	444.4
19	58.1	160.5	248.3	444.5
20	58.1	160.5	248.3	444.5

Il passo successivo è stato quello di inserire una rigidità di contatto; in questo caso si è scelto di inserire una rigidità $K_t = 1 \cdot 10^6 N/m$; si è dunque valutato il caso full stick (figura 6.3). In questo caso è più evidente la variazione della frequenza con l'indice armonico. Si riportano in tabella i risultati ottenuti:

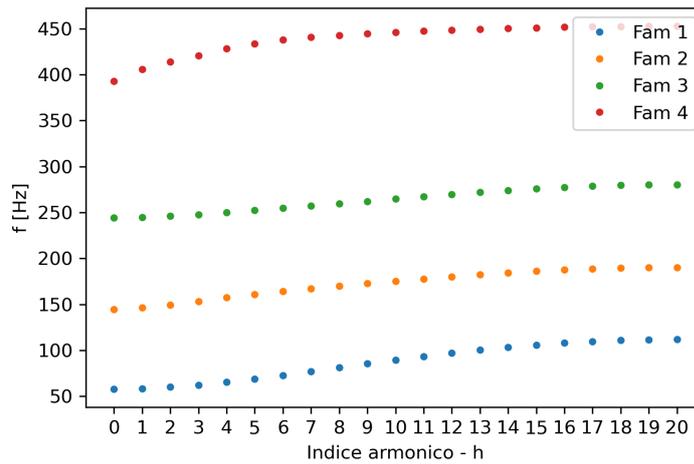


Figura 6.3: Andamento frequenze in condizione full stick

h	fam 1 [Hz]	fam 2 [Hz]	fam 3 [Hz]	fam 4 [Hz]
0	58.0	144.4	244.1	392.9
1	58.6	146.4	244.8	405.6
2	60.0	149.4	246.0	413.7
3	62.3	153.3	247.8	420.8
4	65.3	157.3	250.0	428.1
5	68.9	160.9	252.3	433.7
6	72.8	164.1	254.6	437.7
7	77.0	167.1	257.1	440.6
8	81.2	169.9	259.6	442.9
9	85.5	172.7	262.1	444.6
10	89.6	175.3	264.7	446.1
11	93.5	177.9	267.2	447.4
12	97.1	180.2	269.7	448.5
13	100.4	182.4	271.9	449.5
14	103.4	184.4	274.0	450.3
15	105.9	186.2	275.9	451.0
16	108.0	187.6	277.4	451.6
17	109.7	188.8	278.7	452.0
18	110.9	189.6	279.6	452.3
19	111.6	190.2	280.2	452.5
20	111.9	190.3	280.3	452.6

Sia dal grafico che dalla tabella si può osservare come l'effetto della rigidità è tanto maggiore quanto maggiore è l'indice armonico; questo è coerente con quello che si è detto nei capitoli precedenti riguardo al modo di vibrare del disco. Aumentando l'indice armonico l'angolo di sfasamento tra le pale aumenta, andando ad eccitare maggiormente la rigidità di contatto e dunque aumentando la rigidità generale del sistema.

Infine si riporta un grafico che mostri l'andamento delle ampiezze al variare dell'indice armonico (figura 6.4); per una maggiore chiarezza del grafico si sono diagrammati solo gli indici armonici pari. Questo grafico permette di apprezzare due effetti della variazione dell'indice armonico; da una parte quello che è d'interesse per questa analisi, ovvero l'aumento della frequenza di risonanza, dall'altro la diminuzione dell'ampiezza di vibrazione. Questo secondo effetto è particolarmente evidente a causa della scelta del nodo diagrammato. Si è scelto un nodo di contatto, che si trova dunque sullo shroud della pala; come si vedrà nella sezione successiva la presenza della rigidità di contatto cambia la forma della deformata della pala.

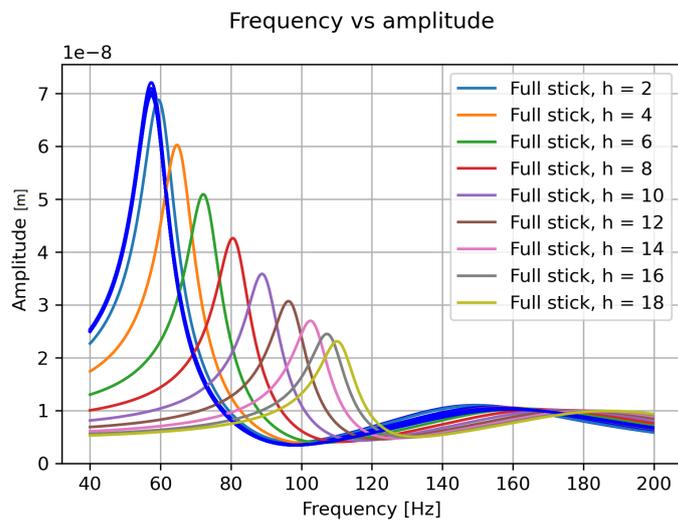


Figura 6.4: Andamento delle ampiezze con l'indice armonico

6.2 Calcolo della deformata

L'obiettivo di questa sezione è quello di valutare la deformata della pala. Per farlo si sono tenuti 5 nodi interni alla pala, di questi si andrà a calcolare l'ampiezza di vibrazione in corrispondenza della prima frequenza naturale. I nodi sono numerati al crescere del raggio; il nodo 0 rappresenta un punto vicino alla radice della pala, mentre il nodo 4 corrisponde ad un punto vicino al tip della pala. Per poter apprezzare le variazioni della deformata si prenderanno in considerazione le soluzioni full stick, valutate per diverse rigidzze di contatto.

Il primo grafico che si riporta (figura 6.5) prende in considerazione un indice armonico pari a 10. Nel grafico si osserva che per rigidzze basse la forma della deformata è simile a quella che ci si aspetta per una trave incastrata ad un estremo. Aumentando progressivamente la rigidzza si osserva che l'ampiezza diminuisce, fino a raggiungere una deformata che si può associare a quella di una trave incastrata a due estremi.

Un altro grafico di particolare interesse è quello che si ottiene per un indice armonico pari a 0, visibile in figura 6.6. Qui la deformata ha una variazione poco significativa, anche per rigidzze molto elevate. Questo è dovuto all'effetto che si è già visto in precedenza; le pale vibrano insieme, con un angolo di sfasamento nullo, dunque la rigidzza inserita tra le pale gioca un ruolo marginale nella dinamica del sistema. Un ultimo grafico che può risultare interessante da osservare è quello che riunisce la deformata della pala per diversi indici armonici a fissata rigidzza di contatto (grafico 6.7). Con lo scopo di evidenziare le differenze tra i grafici si prende in considerazione una rigidzza di contatto abbastanza elevata, pari a $k_t = 1 * 10^{10} N/m$. Inoltre, sempre con lo scopo di rendere più leggibile il grafico si omette l'indice armonico 0, che ha una deformata con ampiezza molto elevata rispetto agli altri indici armonici. Si osserva come la forma della deformata sia molto simile a quella che ci si aspetta da un'asta incastrata agli estremi. Osservando il nodo 0 si trova che l'ampiezza non è esattamente nulla, questo è dovuto al fatto che il disco non è infinitamente rigido ma ha una cedevolezza.

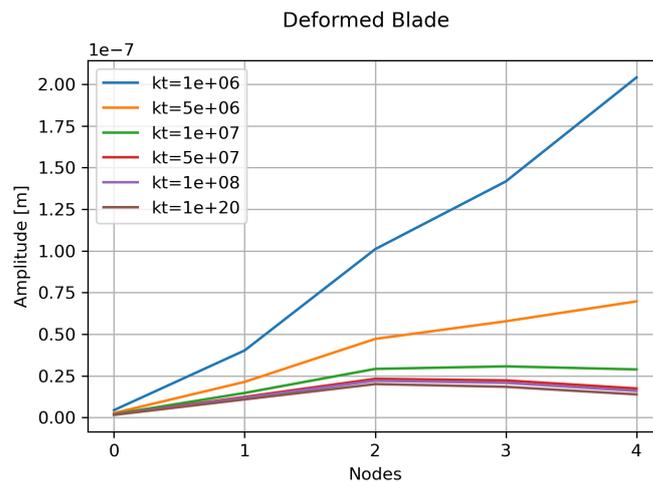


Figura 6.5: Deformata per indice armonico 10

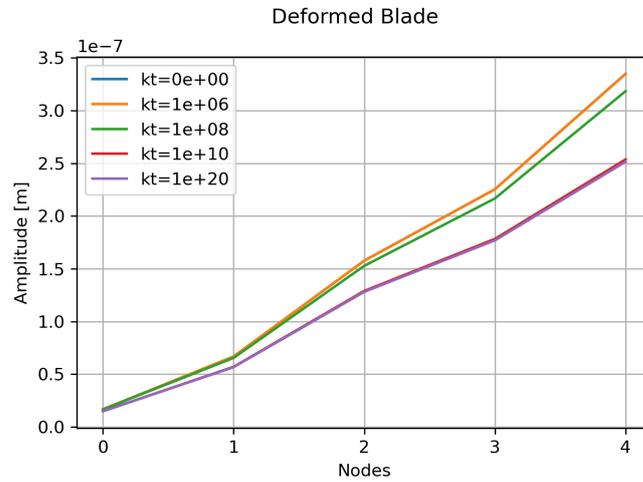


Figura 6.6: Deformata per indice armonico 0

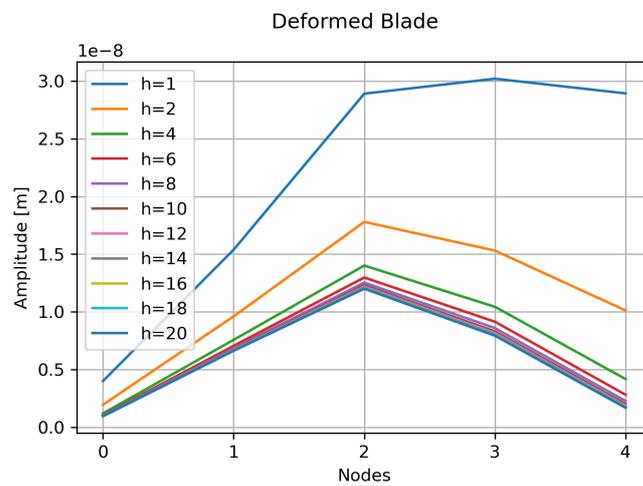


Figura 6.7: Deformata per vari indici armonici

6.3 Analisi al variare della forza normale

L'analisi del sistema al variare della forza normale è la prima analisi non lineare che viene esaminata; questa sarà la base di ulteriori analisi che verranno effettuate in seguito. Essendo un'analisi che viene ripetuta molte volte qui se ne riporta una a titolo di esempio. Nello specifico si sono presi i seguenti parametri di contatto:

Contatto	
$k_t[N/m]$	$1 * 10^6$
μ	0.5
h	10

Il primo grafico riportato (figura 6.8), riporta l'andamento dell'ampiezza. Si osserva come al variare della forza di contatto l'ampiezza prima diminuisce per poi tornare ad aumentare, passando dalla condizione full slip a quella stick. Risulta evidente la presenza di una zona in cui l'ampiezza è minima; questa è considerata la zona di ottimo. Volendo riportare su un grafico proprio l'andamento dell'ampiezza con la forza di contatto si ottiene il grafico 6.9; questo evidenzia la zona di ottimo, in questo caso nei dintorni di $3N$. Risulta inoltre essere più evidente che per precarichi maggiori di $15N$ non si ottiene più alcuna variazione, dovuto al fatto che si è raggiunta la condizione full stick.

In generale l'aver individuato una condizione di ottimo è quello che giustifica l'interesse nei confronti del contatto per attrito. Si può inoltre osservare come un ramo della curva è più ripido dell'altro. Questo significa che difficilmente si può lavorare nelle condizioni di ottimo, dato che una piccola perturbazione sul precarico può portare il sistema a vibrare ad ampiezze molto elevate. Dunque in generale si sceglie di andare ad operare con precarico superiore all'ottimo, nella zona dove prevale lo stick e la curva presenta una maggiore stabilità. Un altro effetto che si osserva nel contatto per attrito è quello dell'aumento della frequenza di risonanza. Questo viene riportato nel grafico 6.10; anche qui è evidente il raggiungimento della condizione full stick.

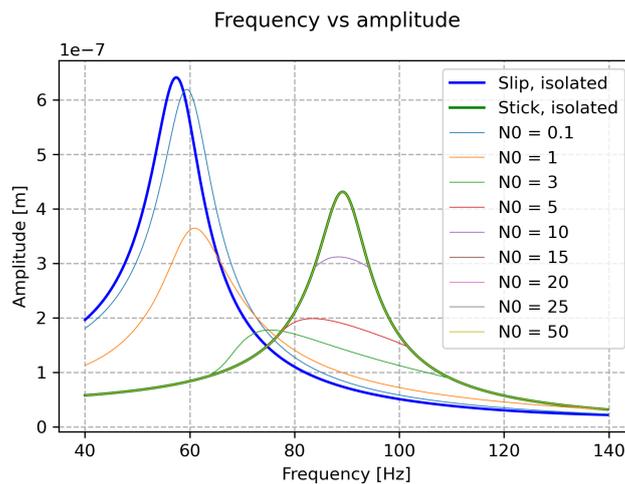


Figura 6.8: Andamento dell'ampiezza al variare della forza di contatto

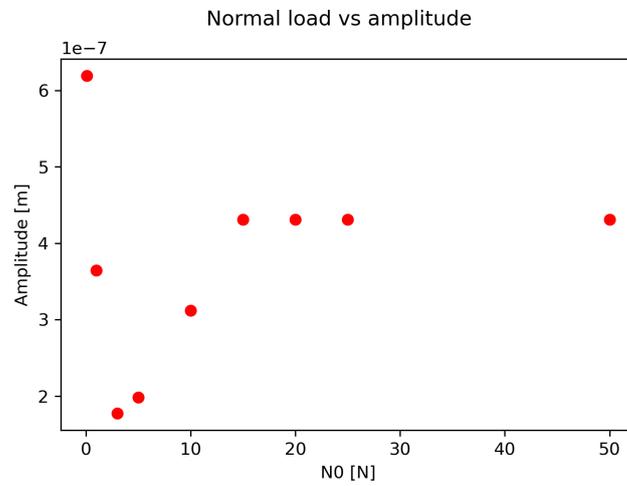


Figura 6.9: Andamento dell'ampiezza al variare della forza di contatto

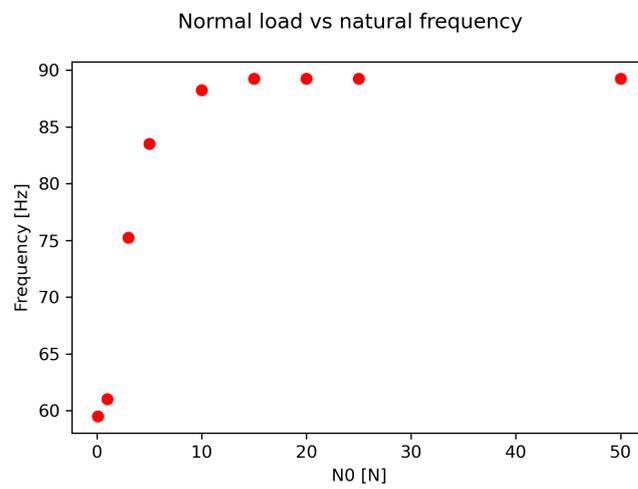


Figura 6.10: Andamento della frequenza con la forza di contatto

6.4 Comportamento al variare del coefficiente di attrito

In questa sezione ci si propone di valutare il comportamento del contatto al variare del coefficiente di attrito. Quello che ci si aspetta è di trovare risultati simili a fissato $\mu * N0$, dato che è il prodotto di questi due fattori a dominare la transizione tra slip e stick. Al fine di ottenere l'analisi completa si sono svolte diverse prove a μ fissato facendo variare il precarico, mettendo poi insieme i vari risultati su un foglio di calcolo. Si osserva inoltre che per poter inquadrare sempre la posizione dell'ottimo, si sono dovute utilizzare dei set di forze normali diverse al variare del coefficiente di attrito. In questo ambito si sono svolti due set di prove, con due set di parametri di contatto differenti.

Il primo set ha visto un contatto con le seguenti caratteristiche:

Contatto	
$k_t [N/m]$	$5 * 10^7$
h	2

Per prima cosa si sono svolte alcune prove preliminari, in modo da individuare la regione di ottimo. Queste prove sono state fatte per un $\mu = 0.9$, individuando la regione nei dintorni di $N0 * \mu = 8.7$. Dopo di che si sono fatte delle prove per diversi coefficienti di attrito, andando ad imporre un passo molto fine tra i vari precarichi.

Il grafico 6.11 riporta un esempio di questi grafici, per un μ pari a 0.5.

Facendo diversi di questi grafici si possono riportare i seguenti risultati:

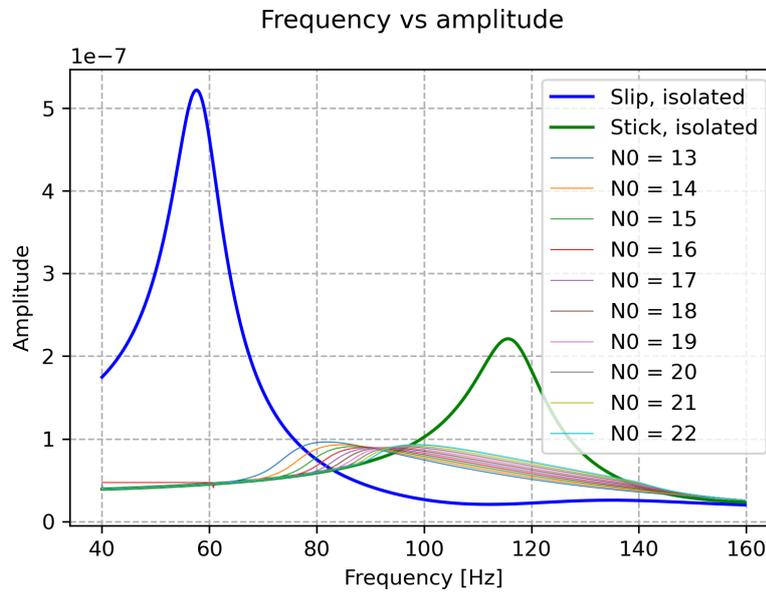


Figura 6.11: Variazione della forza normale intorno all'ottimo

mu	N0[N]	A[m]	f[Hz]	N0*mu
0.3	25	9.08E-08	87.5	7.50
	26	9.00E-08	88.25	7.80
	27	8.96E-08	89.75	8.10
	28	8.94E-08	91	8.40
	29	8.94E-08	92	8.70
	30	8.95E-08	93	9.00
	31	8.98E-08	94.25	9.30
	32	9.02E-08	94.5	9.60
	33	9.07E-08	96	9.90
	34	9.13E-08	96.5	10.20
mu	N0[N]	A[m]	f[Hz]	N0*mu
0.5	13	9.63E-08	81.75	6.5
	14	9.28E-08	84	7
	15	9.08E-08	87.5	7.5
	16	8.97E-08	89.5	8
	17	8.94E-08	91.5	8.5
	18	8.95E-08	93	9
	19	9.00E-08	94.75	9.5
	20	9.09E-08	96.25	10
	21	9.19E-08	97	10.5
	22	9.31E-08	98.5	11
mu	N0[N]	A[m]	f[Hz]	N0*mu
0.7	8	1.09E-07	76	5.6
	9	9.83E-08	80.75	6.3
	10	9.28E-08	84	7
	11	9.03E-08	87.75	7.7
	12	8.94E-08	91	8.4
	13	8.96E-08	92.75	9.1
	14	9.05E-08	95.25	9.8
	15	9.19E-08	97	10.5
	16	9.36E-08	98.75	11.2
	17	9.56E-08	100.25	11.9
mu	N0[N]	A[m]	f[Hz]	N0*mu
0.9	6	1.13E-07	75	5.4
	7	9.83E-08	80.75	6.3
	8	9.18E-08	85.5	7.2
	9	8.96E-08	89.75	8.1
	10	8.95E-08	93	9
	11	9.07E-08	96	9.9
	12	9.26E-08	98	10.8
	13	9.50E-08	100	11.7
	14	9.78E-08	101.25	12.6
	15	1.01E-07	102.75	13.5

La prima osservazione è proprio quella che effettivamente il punto di ottimo si trova nelle vicinanze del fattore $\mu * N0$ ipotizzato all'inizio. Si sono dunque tracciati dei grafici che riportano l'andamento della frequenza (grafico 6.12) e dell'ampiezza (grafico 6.13) del punto di ottimo.

Dal primo si osserva come la frequenza di ottimo sia tra i valori di 93 e 91 Hz; anche sulla base

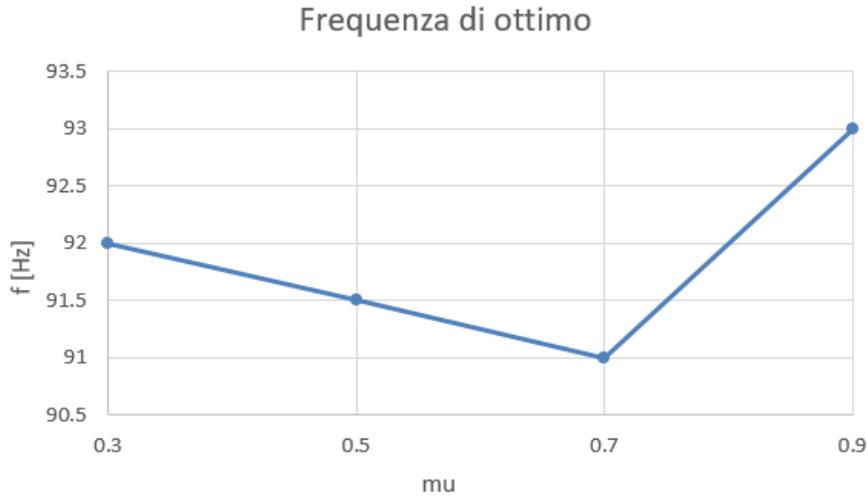


Figura 6.12: Andamento della frequenza di ottimo al variare di μ

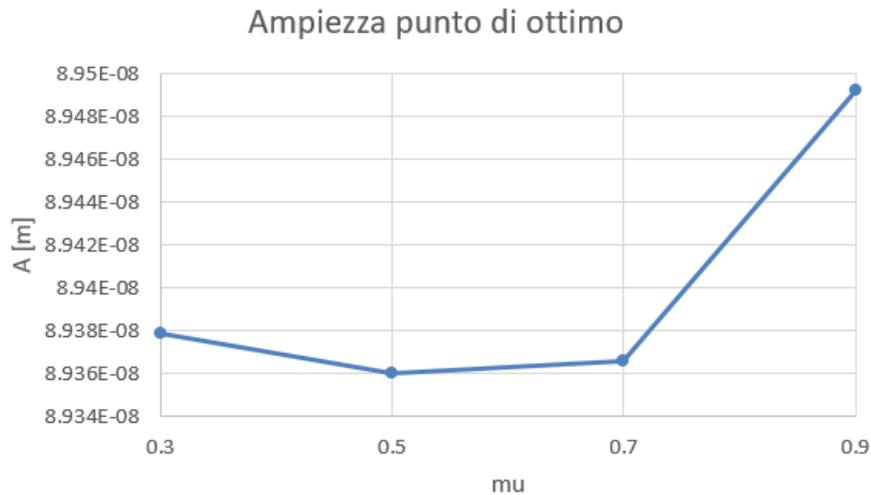


Figura 6.13: Andamento dell'ampiezza di ottimo al variare di μ

del funzionamento dell'algoritmo si può osservare che la frequenza rimane abbastanza costante, nonostante la diversa composizione dei fattori che vanno a formare il parametro $\mu * N0$ che identifica l'ottimo. Queste piccole fluttuazioni si possono imputare all'algoritmo, principalmente per via

dell'andamento delle ampiezze; in generale, nei dintorni dell'ottimo, non ci sono dei picchi di ampiezza molto evidenti; dunque essendo che l'algoritmo va a ricercare i massimi locali nel vettore delle ampiezze, questi potrebbero non essere individuati con precisione. Inoltre dal grafico 6.13 si osserva che anche l'ampiezza rimane all'incirca costante nella condizione di ottimo. Infine si vogliono riunire in un unico grafico l'andamento delle ampiezze nell'intorno del punto di ottimo (grafico 6.14)

Questo grafico permette di osservare come il coefficiente di attrito agisce nei dintorni dell'ottimo;

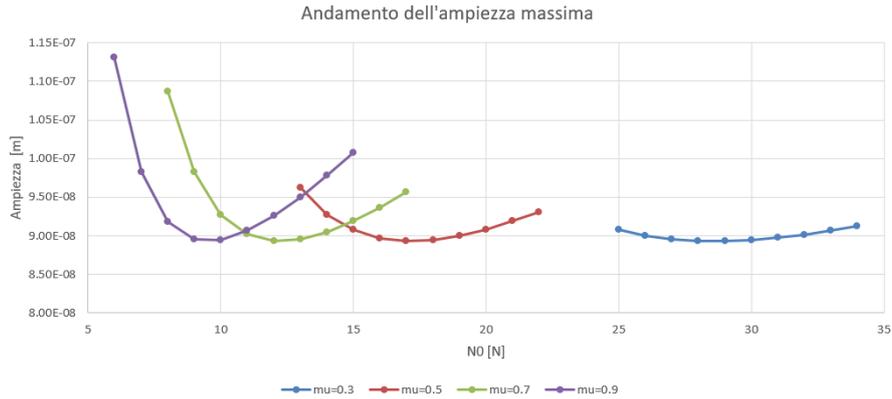


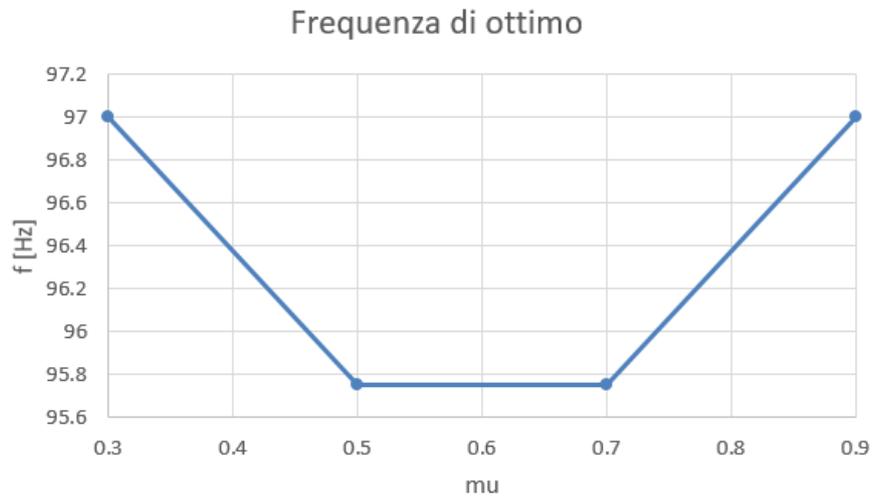
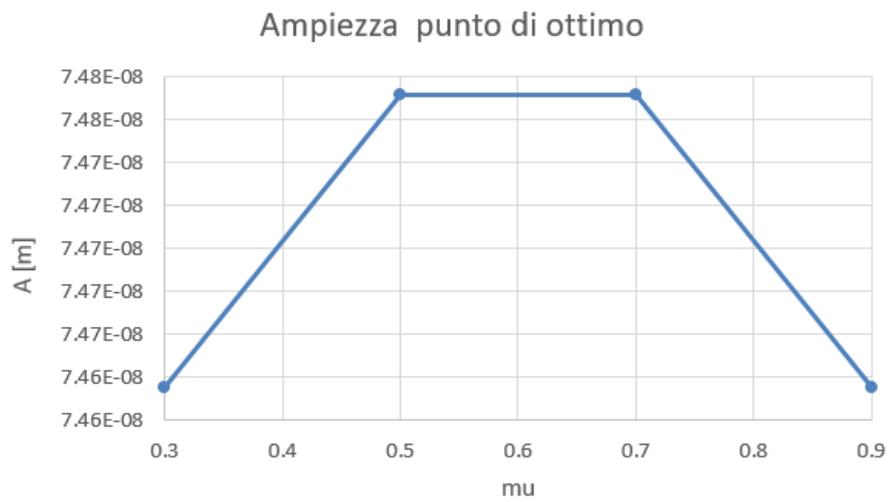
Figura 6.14: Andamento dell'ampiezza nei dintorni dell'ottimo al variare di N_0 e μ

per coefficienti di attrito alti si osserva come l'ampiezza si allontana rapidamente dall'ottimo al variare del precarico, mentre per coefficienti di attrito più bassi ci sia una variazione più graduale. Un secondo set di prove si sono fatte con un contatto con le seguenti caratteristiche:

Contatto	
$k_t [N/m]$	$1 * 10^7$
h	5

I risultati si sono rivelati molto simili a quelli ottenuti con il set precedente. Infatti si trova sempre che il punto di ottimo si trova nell'intorno di un dato $\mu * N_0$; inoltre si osserva che anche in questo caso la frequenza rimane all'incirca costante per tutti i punti di ottimo (grafico 6.15), analogamente a quello che riguarda il valore dell'ampiezza di ottimo (grafico 6.16). Infine si riportano anche tutte le ampiezze nei dintorni dell'ottimo nel grafico 6.17

Tenendo questo set di parametri si riporta un ulteriore grafico (figura 6.18), nel quale, per un medesimo set di precarichi vengono riportate le ampiezze massime per due coefficienti di attrito, uno pari a 0.3 e 0.9. Questo grafico risulta interessante sapendo che come si afferma in [1], al variare della temperatura il coefficiente di attrito varia. Questa variazione del coefficiente di attrito porta il contatto a lavorare in un campo diverso da quello di progetto, con il rischio di lavorare con ampiezze maggiori di quelle ipotizzate.

Figura 6.15: Andamento della frequenza di ottimo al variare di μ Figura 6.16: Andamento dell'ampiezza di ottimo al variare di μ

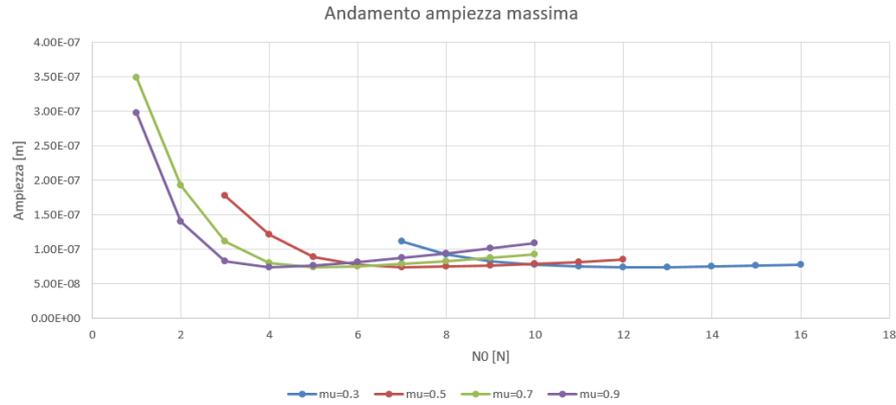
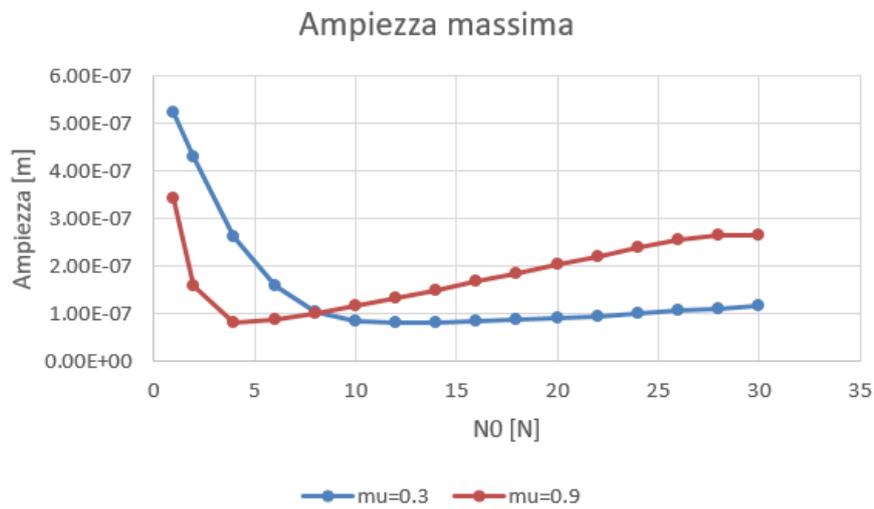
Figura 6.17: Andamento dell'ampiezza nei dintorni dell'ottimo al variare di NO e μ 

Figura 6.18: Confronto ampiezze a diversi coefficienti di attrito

6.5 Comportamento al variare dell'indice armonico

Nelle sezioni precedenti si è visto come si comporta il sistema lineare al variare dell'indice armonico; risulta comunque interessante anche valutare il comportamento non lineare della struttura; per farlo si procede come nel caso precedente. Si sono definiti dei parametri di contatto:

parametri di contatto	
μ	0.5
k_t	$5 * 10^6$

Successivamente si sono svolte le analisi a fissato indice armonico per vari precarichi; eseguendo la stessa procedura per diversi indici armonici si sono potuti riunire i risultati in alcuni grafici.

Il primo grafico che si propone (figura 6.19) riporta l'andamento della frequenza di risonanza del punto di ottimo; conformemente a quanto ci si aspetta si ottiene un andamento crescente; questo è dovuto al fenomeno che si era osservato nella prima sezione; l'aumento dell'indice armonico aumenta la frequenza di risonanza full stick, di conseguenza ci si aspetta un aumento anche della frequenza di ottimo. Nel secondo grafico 6.20 si riporta invece l'andamento dell'ampiezza nel punto di ottimo. Anche questo risultato è conforme a quello che si è ipotizzato dalle analisi precedenti, dato che per valutare l'ampiezza si è scelto un punto di contatto; l'ampiezza va a ridursi per l'effetto della diversa deformata.

Si riporta infine il grafico 6.21, che riporta i risultati di ampiezza massima ai diversi precarichi. In questo grafico risulta evidente che la variazione dell'indice armonico non va a variare il precarico per il quale si ottiene il minimo. Quello che tuttavia varia è la rapidità con cui si raggiunge la condizione full stick, osservando che per indice armonico 1 si è già raggiunta per un precarico di $15N$, mentre per gli altri indici armonici diagrammati non sembra essere raggiunta. Dunque l'engine order della forzante non sembra essere un parametro importante per la valutazione del precarico da applicare al contatto, anche se risulta comunque fondamentale per valutare la frequenza e l'ampiezza dell'ottimo.

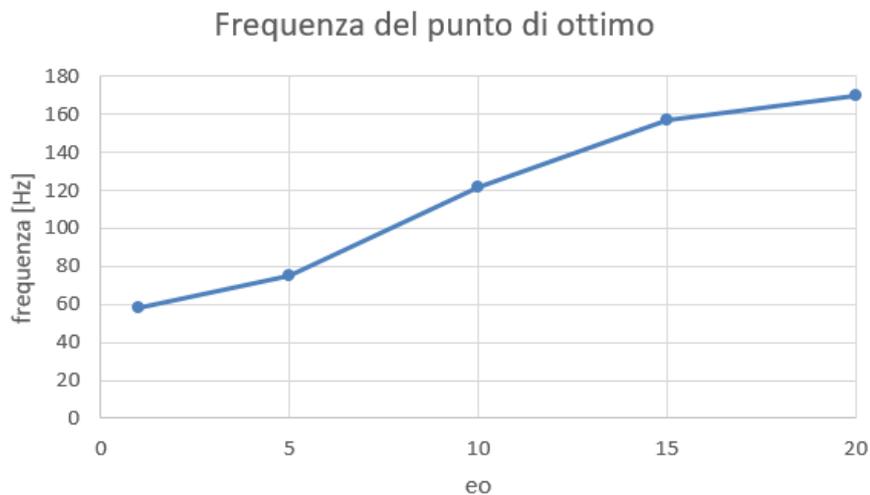


Figura 6.19: Andamento della frequenza al variare dell'indice armonico

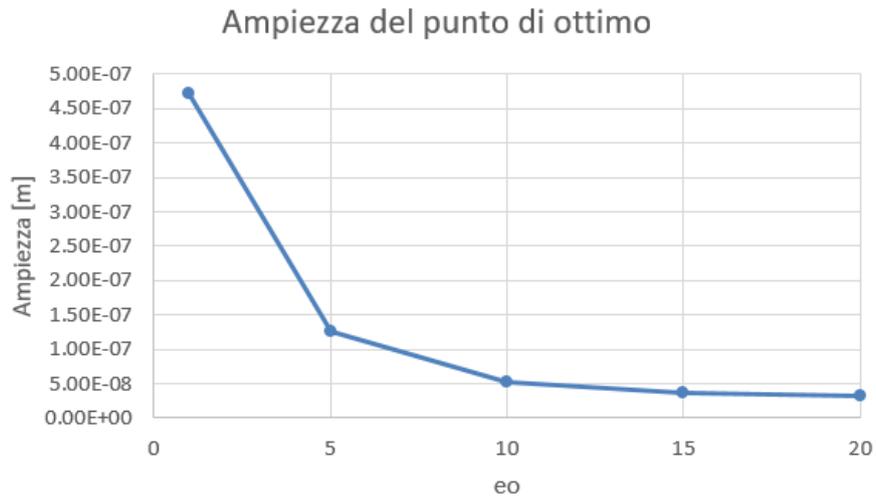


Figura 6.20: Andamento dell'ampiezza al variare dell'indice armonico

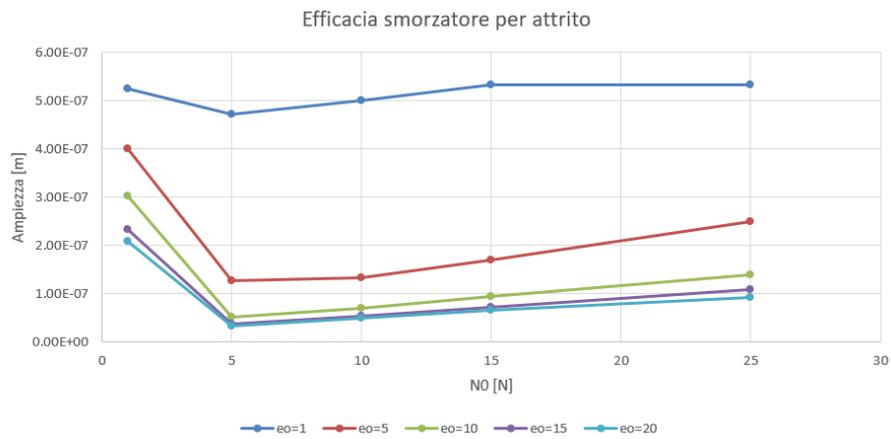


Figura 6.21: Andamento dell'ampiezza al variare di N0 e indice armonico

6.6 Comportamento al variare della rigidità di contatto

Come si può facilmente intuire e si è in parte visto nelle sezioni precedenti, la rigidità di contatto gioca un ruolo significativo nell'ambito della dinamica lineare del sistema full stick. Come per l'indice armonico risulta interessante valutare quale sia la sua influenza sulla dinamica non lineare, in particolare sulla posizione del punto di ottimo. Per farlo si è definito il seguente set di parametri:

parametri di contatto	
μ	0.5
eo	5

Per poi andare a condurre le analisi a fissata rigidità di contatto per vari precarichi. Ripetendo le analisi per varie rigidità e riunendo i risultati si sono potuti tracciare diversi grafici.

Nel primo (figura 6.22) sono riportati gli andamenti delle frequenze di risonanza nel caso slip, stick ed ottimo. Per quello che riguarda il caso slip si ottiene sempre la stessa frequenza; questo è corretto dato che la rigidità non viene inserita, ma fornisce comunque la base dalla quale partire. Quello che si osserva è che la condizione di ottimo ha un andamento molto simile a quella di full stick.

Nel grafico 6.23 si riporta invece l'andamento del precarico per il punto di ottimo; quello che si osserva è che per rimanere nell'ottimo all'aumentare della rigidità di contatto è necessaria un precarico maggiore. Questo è ragionevole, ricordando che comunque la condizione di x_{cr} che va a dominare la transizione tra fase di slip e fase di stick è:

$$x_{cr} = \frac{\mu N_0}{k_t}$$

Nel grafico 6.24 si riporta l'andamento dell'ampiezza della condizione di ottimo. Questa va a diminuire all'aumentare della rigidità di contatto; questo è dovuto al fenomeno che si è visto in precedenza nella deformata della pala. Anche in questo caso si è scelto per le analisi un punto del

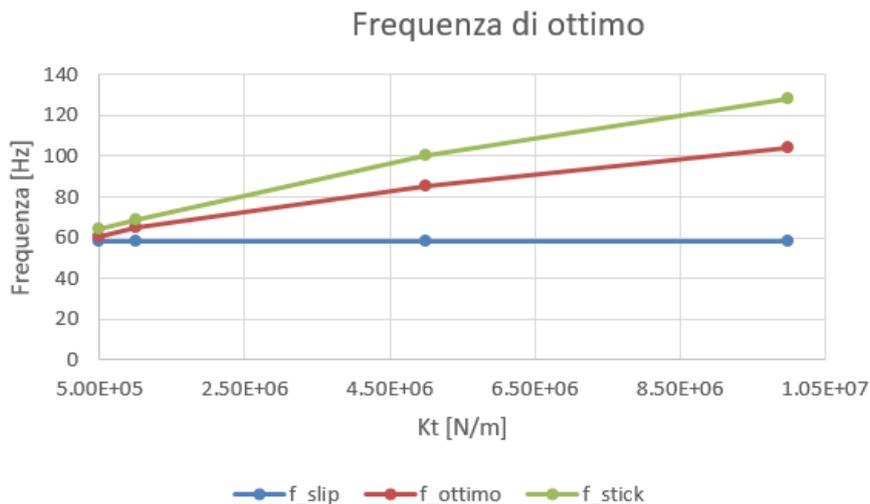


Figura 6.22: Andamento della frequenza al variare della rigidità di contatto

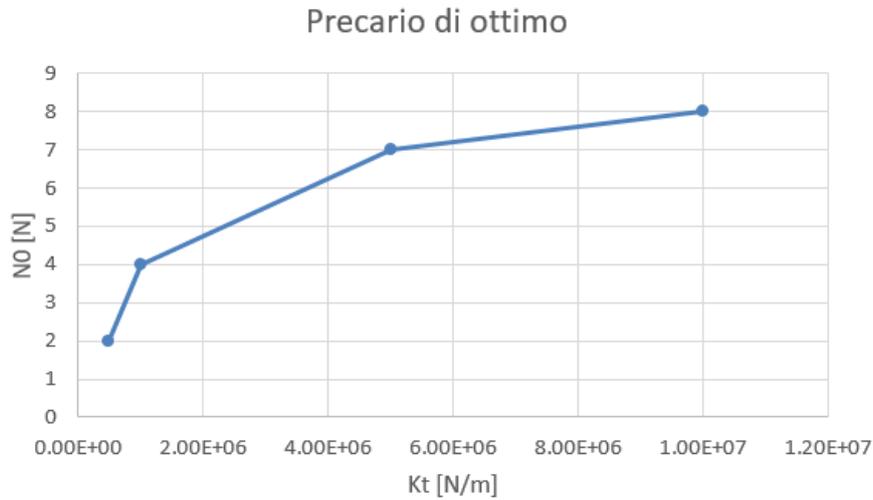


Figura 6.23: Andamento del precario al variare della rigidità di contatto

contatto che, trovandosi nello shroud, risente molto della diversa forma della deformata. Come ultimo grafico (figura 6.25 si riporta il comportamento del contatto nei dintorni dell'ottimo. Oltre ad osservare il fenomeno della diminuzione dell'ampiezza, si osserva anche un progressivo appiattirsi delle curve, come si era notato nel caso del coefficiente di attrito. Questo significa che anche in questo caso ad una rigidità maggiore le fluttuazioni del precario avranno un'influenza minore.

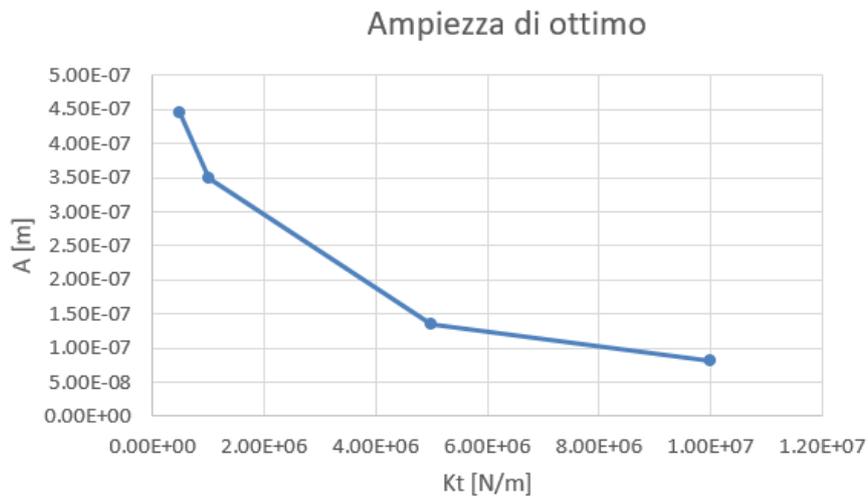


Figura 6.24: Andamento dell'ampiezza di ottimo

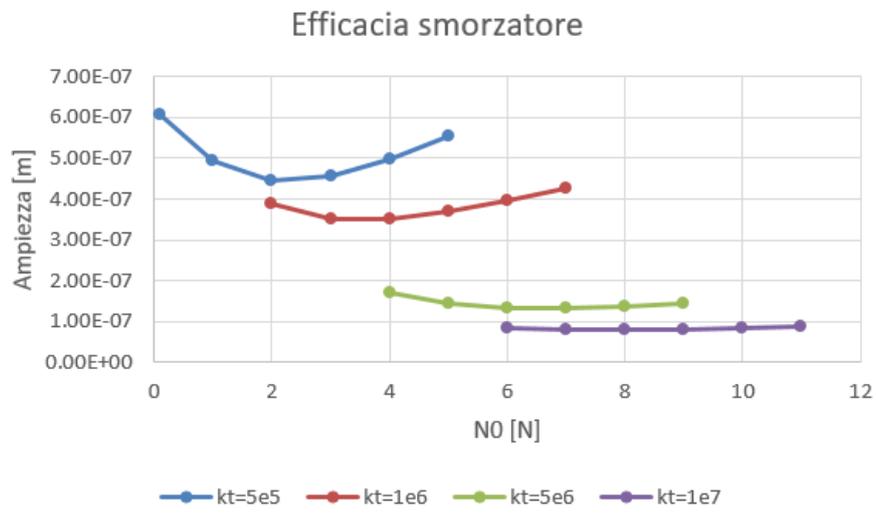


Figura 6.25: Andamento dell'ampiezza nei dintorni dell'ottimo

6.7 Comportamento al variare della forzante

In tutte le analisi che si sono svolte nelle sezioni precedenti la forzante si è considerata unitaria e applicata in un nodo centrale della pala dove si può ipotizzare la presenza di un centro aerodinamico. In questa sezione si vuole indagare quale gioco ricopre l'entità della forzante sul sistema non lineare. Come per le altre prove si sono definiti alcuni parametri di contatto:

parametri di contatto	
μ	0.5
eo	2
k_t	$5 * 10^7$

Da un set di prove preliminari si è osservato come all'aumentare della forzante il punto di ottimo si trovasse a precarichi maggiori. Si sono dunque effettuate delle analisi più sottili, andando a concentrare la variazione del precarico nei dintorni di quello che veniva mostrato come punto di ottimo dalle analisi preliminari, in modo da ricavare grafici simili a quelli dei parametri precedenti. Per prima cosa si riporta un grafico che mostri l'andamento delle ampiezze, sia nei casi lineari, che nella condizione di ottimo (figura 6.26). Si osserva come l'ampiezza sia sempre al di sotto delle condizioni lineari, specialmente di quella slip.

Un secondo grafico rilevante è quello che va a valutare anche i dintorni del punto di ottimo (figura 6.27); qui risulta evidente che per forzanti maggiori sono necessari precarichi più grandi per rimanere nei dintorni dell'ottimo. Si vuole dunque riportare la relazione tra il precarico di ottimo e la forzante (figura 6.28).

Il grafico che si ottiene sembra indicare un andamento lineare del precarico di ottimo con la forzante. Per validare questa ipotesi si è dunque fatta una semplice prova, con l'appoggio del foglio di calcolo. Si è aggiunta una linea di tendenza polinomiale di ordine 2; dall'equazione si è trovato un coefficiente del termine x^2 quasi nullo ($3 * 10^{-14}$), confermando l'ipotesi iniziale. Per una verifica ulteriore si è richiesta al foglio di calcolo una previsione con equazione lineare e si è andati ad

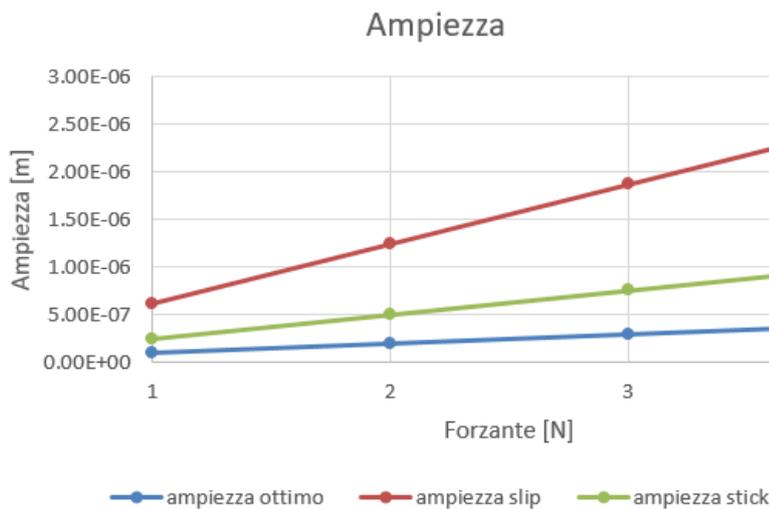


Figura 6.26: Andamento delle ampiezze

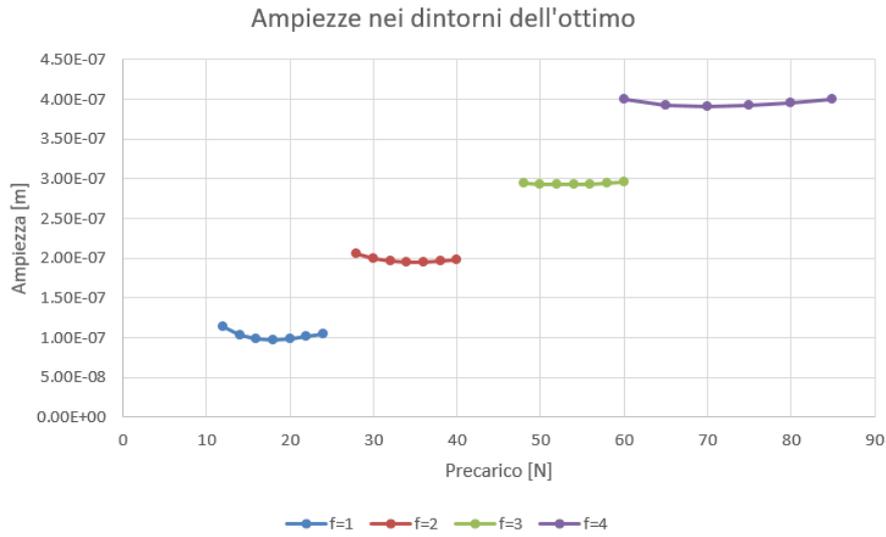


Figura 6.27: Ampiezza nei dintorni dell'ottimo

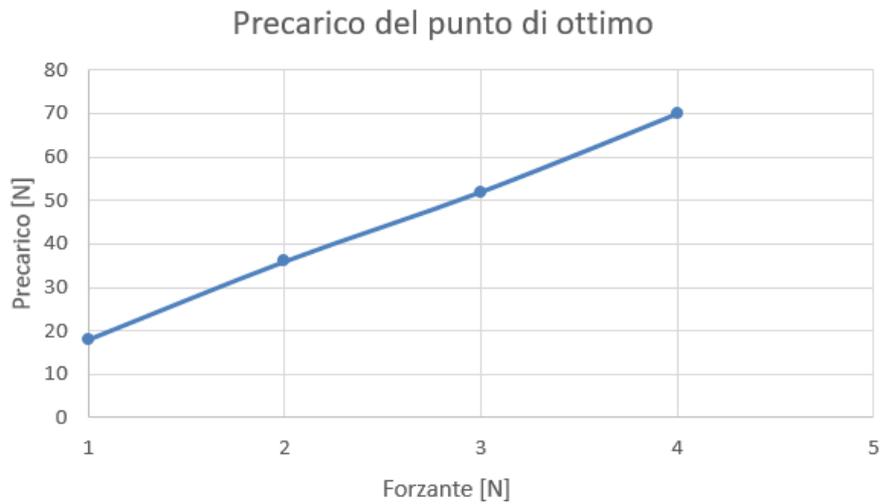


Figura 6.28: Precario del punto di ottimo

ipotizzare un precarico per una forzante pari a 10, trovando circa 170N (grafico 6.29). A questo punto si è effettuata una prova per valutare se la previsione era esatta, trovando il grafico 6.30. Da questo si osserva come effettivamente il precarico ottimale è di 175N, molto vicino alla previsione iniziale.

Volendo effettuare delle ulteriori prove della dinamica del sistema con la forzante variabile è risultato essere interessante valutare l'andamento dell'ampiezza a fissato precarico. Fissati i seguenti parametri:

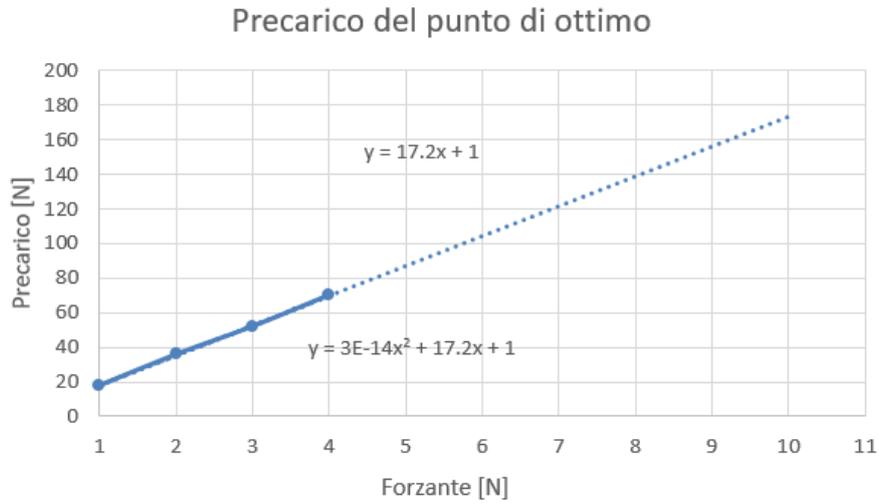


Figura 6.29: Previsione con ipotesi lineare

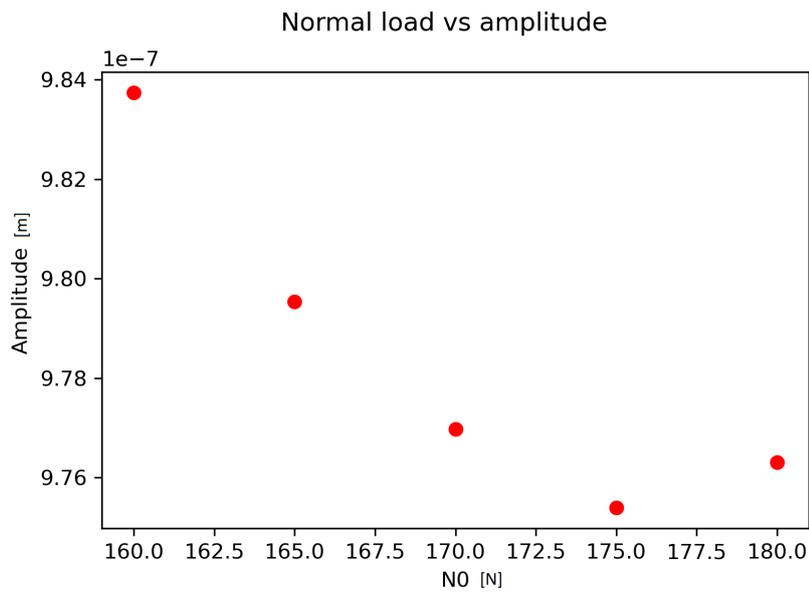


Figura 6.30: Ampiezza nei dintorni dell'ottimo

parametri di contatto	
μ	0.3
eo	5
$k_t[N/m]$	$1 * 10^7$
$N[N]$	50

Si può tracciare il grafico in figura 6.31. Si osserva che il grafico comincia con una zona a pendenza molto elevata; questo è dovuto al fatto che il contatto si comporta in modalità full stick, ovvero con un comportamento lineare. Poi si trova una zona in cui la pendenza è molto bassa; questo significa che all'aumentare della forzante, l'ampiezza aumenta poco. Questa risulta essere una zona interessante a livello di progetto, dato che risulta poco sensibile alle eventuali fluttuazioni della forzante. Inoltre si osserva che operando in questa zona ci si ritrova nel ramo che si era già identificato più conveniente nella curva dell'ottimizzazione ampiezza-precarico (figura 6.9).

Infine risulta interessante valutare che cosa succede a queste curve al variare dell'indice armonico;

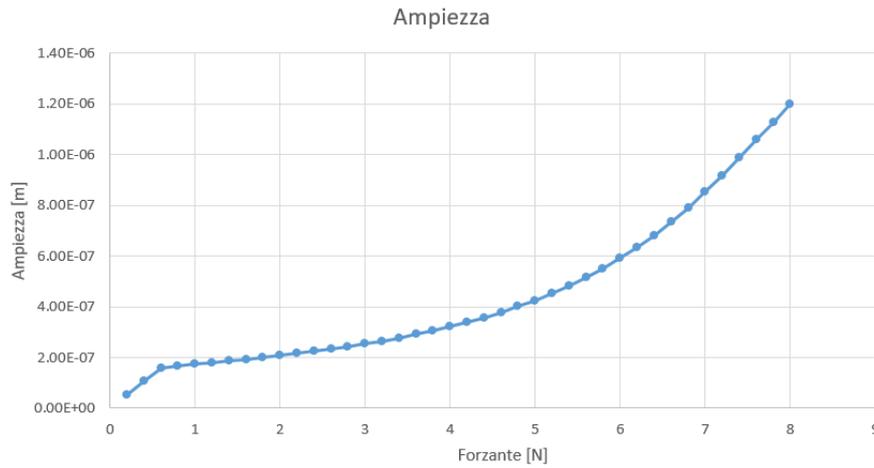


Figura 6.31: Andamento dell'ampiezza al variare della forzante

si traccia dunque il grafico 6.32. Questo risulta essere coerente con i vari grafici tracciati in precedenza; all'aumentare dell'indice armonico aumenta l'angolo di sfasamento tra le pale e di conseguenza la rigidità viene sollecitata maggiormente, portando il sistema in una condizione più rigida in cui la pala vibra in un modo simile a quello di una trave incastrata ai due estremi. Questo si traduce in una minore ampiezza di vibrazione come si è osservato nel grafico 6.20.

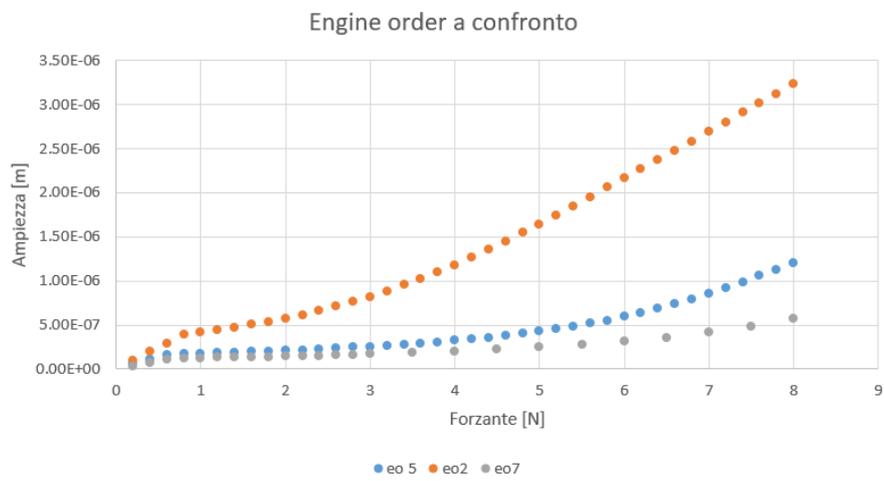


Figura 6.32: Andamento dell'ampiezza per alcuni engine order

Capitolo 7

Conclusioni

Le prove che si sono sviluppate nello svolgimento di questa tesi volte ad esplorare l'effetto dei parametri di contatto hanno fornito dei risultati coerenti con la teoria studiata. Il contatto per attrito si è confermato come un valido componente per lo smorzamento delle vibrazioni nelle turbine e anche utile per la variazione della frequenza naturale di vibrazione, anche se il suo impiego efficace richiede una buona conoscenza delle condizioni in cui viene portato ad operare.

Nonostante i risultati positivi ottenuti dalle analisi condotte con il software, ci sono ancora margini di miglioramento; nello specifico il principale difetto che si può riscontrare nel corso delle analisi è la presenza di instabilità che si formano in determinate situazioni, come ad esempio una grande distanza in termini di frequenza tra la condizione full stick e quella full slip. La risoluzione più immediata del problema è quella di infittire la griglia delle frequenze, andando tuttavia ad aumentare notevolmente i tempi necessari per ottenere una soluzione. Un possibile sviluppo del software potrebbe essere quello di introdurre un sistema per la risoluzione dell'equazione non lineare che impieghi una griglia a passo variabile, in modo da diminuire il passo delle frequenze solo quando effettivamente necessario. In questo modo oltre ad evitare i lunghi tempi di attesa necessari per una griglia eccessivamente fitta, si eviterebbe il rischio di analisi che forniscono output inutilizzabili.

Sempre nell'ottica di diminuire il tempo necessario per le analisi si potrebbero apportare delle modifiche per poter eseguire i calcoli in parallelo. Grazie grazie all'utilizzo dei sistemi HPC@POLITO, si è fatto il primo passo in questa direzione, provando il software su uno dei loro cluster. Il test ha prodotto dei risultati positivi, fornendo un'analisi in un tempo inferiore rispetto ad un normale portatile. Con l'utilizzo di alcuni accorgimenti potrebbe essere possibile ridurre sensibilmente i tempi di attesa della soluzione facendo fare contemporaneamente i calcoli indipendenti. Un esempio potrebbe essere quello di effettuare il calcolo per tutti i precarichi richiesti contemporaneamente, abbattendo in modo significativo il tempo di soluzione.

Volendo fare un passo in avanti per quello che riguarda il realismo del modello potrebbe essere utile apportare delle modifiche al contatto; attualmente si utilizza un contatto a coefficiente di attrito fisso. Tuttavia, in [1], si trova che l'ampiezza dello strisciamento gioca un ruolo importante del definire il coefficiente di attrito. Una possibilità potrebbe essere quella di modificare il modello di contatto andando ad aggiungere un coefficiente di attrito variabile, che si adatti all'ampiezza dello strisciamento.

In conclusione si può affermare che attraverso l'impiego del software si possono condurre delle analisi attendibili, la cui accuratezza può essere aumentata attraverso lo sviluppo delle migliori proposte.

Bibliografia

- [1] Botto, D.; Lavella, M. and Gola, M.M. (2012) *Measurement of contact parameters of flat on flat contact surfaces at high temperature*
- [2] Petrov, E.P. (2010) *Multiharmonic Forced Response Analysis of a Turbine Blading Coupled by Nonlinear Contact Forces* Center for Vibration Engineering, Mechanical Engineering Department, Imperial College London.
- [3] Siewert, Christian; Panning, Lars; Wallaschek, Jorg and Richter, Christoph (2010) *Multiharmonic Forced Responce Analysis of a Turbine Blading Coupled by Nonlinear Contact Forces*
- [4] Thomas, D.L. (1979) *Dynamics or rotationally periodic structures* International journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 1979, 14 (1), pp.81-102. 10.1002/nme.1620140107 . hal-01574169
- [5] Van der Valk, P.L.C. (2010) *Model Reduction & Interface modeling in Dynamic Substructuring*
- [6] Weisheit, Konrad and Marburg, Steffen (2016) *Calculation of the response of a periodically excited beam with frictional contact using Harmonic Balance Method*, IUTAM symposium on "Analytical Methods in Nonlinear Dynamics"
- [7] Wildheim, S.J. (1979) *Excitation of Rotationally Periodic Structures* Journal of applied Mechanics, Vol. 46
- [8] Wildheim, S.J. (1980) *Excitation of rotating circumferentially Periodic Structures* Journal of sound and vibration
- [9] Zucca, Stefano and Firrone, Christian Maria (2011) *Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks, Numerical Analysis - Theory and Application, Prof. Jan Awrejcewicz* SBN: 978-953-307-389-7, InTech, Available from: <http://www.intechopen.com/books/numerical-analysis-theory-and-application/modelling-friction-contacts-in-structural-dynamics-and-its-application-to-turbine-bladeddisks>
- [10] *Computational resources provided by hpc@polito, which is a project of Academic Computing within the Department of Control and Computer Engineering at the Politecnico di Torino (<http://hpc.polito.it>)*