



**POLITECNICO DI TORINO**

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile LM – 23**

**Tesi di Laurea Magistrale**

**Non – Linear Finite Element Modeling and  
study of ancient masonry churches**

**Relatore:**

Ing. Rosario CERAVOLO

**Correlatore:**

Arch. Giulia DE LUCIA

Ing. Gaetano MIRAGLIA

**Candidato:**

Antonio INFORZATO

Dicembre 2020



# Indice

<i>Abstract</i> .....	7
<i>Introduzione</i> .....	3
<b>1</b> <i>Il Santuario di Vicoforte: un processo costruttivo tra progetti e realizzazioni</i> .....	4
1.1 Il Santuario.....	4
1.2 Processo costruttivo .....	6
<b>2</b> <i>La cupola di Vitozzi e il problema da analizzare</i> .....	9
2.1 Cenni sui metodi storici di analisi delle cupole .....	9
2.2 Membrane di rivoluzione.....	10
2.3 Metodo FEM .....	12
2.4 Comportamento strutturale Cupola .....	13
2.5 Cerchiaggio di rinforzo .....	18
2.6 La Cupola del Vitozzi .....	20
2.7 Confronto con le altre cupole.....	24
2.7.1 Confronto cupola del Santuario di Vicoforte con la cupola del Pantheon.....	24
2.7.2 Confronto tra la cupola del Santuario di Vicoforte e la cupola della Basilica di San Pietro	26
2.8 Il problema da analizzare .....	27
<b>3</b> <i>Modellazione geometrica</i> .....	30
3.1 La modellazione tridimensionale.....	30
3.2 Progetto Vitozziano, modellazione geometrica .....	33
3.3 Modello geometrico del Santuario di Vicoforte costruito .....	38
3.4 Confronto geometrico tra i due modelli.....	41
<b>4</b> <i>Modellazione meccanica</i> .....	43
4.1 Cenni storici .....	43
4.2 Concetto di modellazione numerica .....	43

<b>4.3</b>	<b>Funzionamento.....</b>	<b>44</b>
<b>4.4</b>	<b>Fasi per arrivare al modello.....</b>	<b>44</b>
<b>4.5</b>	<b>Modellazione meccanica del progetto Vitozziano.....</b>	<b>47</b>
4.5.1	Importazione da AutoCAD in DIANA FEA .....	47
4.5.2	Definizione dei materiali.....	48
4.5.3	Discretizzazione elementi .....	53
4.5.4	Definizione delle condizioni al contorno .....	54
4.5.5	Individuazione volume significativo di terreno .....	55
<b>4.6</b>	<b>Modellazione meccanica del costruito .....</b>	<b>59</b>
<b>5</b>	<b><i>Le analisi a sostegno delle problematiche .....</i></b>	<b>60</b>
<b>5.1</b>	<b>Analisi Statica Lineare applicata sul modello Vitozziano.....</b>	<b>61</b>
5.1.1	Svolgimento Analisi Statica Lineare .....	61
<b>5.2</b>	<b>Risultati Analisi Statica Lineare modello Vitozziano.....</b>	<b>65</b>
<b>5.3</b>	<b>Problema autovalori ed autovettori .....</b>	<b>69</b>
5.3.1	Applicazione problema agli autovalori sul modello Vitozziano.....	70
5.3.2	Confronto dei modi di vibrare tra i due modelli .....	72
<b>5.4</b>	<b>Analisi statica non lineare applicata sul modello Vitozziano .....</b>	<b>76</b>
5.4.1	Svolgimento Analisi Statica Non Lineare.....	77
<b>5.5</b>	<b>Risultati Analisi Statica Non Lineare modello Vitozziano.....</b>	<b>83</b>
<b>5.6</b>	<b>Verifica di deformabilità.....</b>	<b>84</b>
<b>5.7</b>	<b>Verifica tensioni tangenziali.....</b>	<b>88</b>
	<b><i>Conclusione.....</i></b>	<b>93</b>
	<b><i>Bibliografia .....</i></b>	<b>95</b>
	<b><i>Sitografia.....</i></b>	<b>96</b>

## Indice delle figure

Figura 1.1 - Santuario di Vicoforte.....	4
Figura 1.2 - Interno Santuario.....	6
Figura 1.3 - Cerchiatura di rinforzo.....	9
Figura 2.1 - Lastra di Rivoluzione.....	12
Figura 2.2 - Semplificazione cupola con arco.....	13
Figura 2.3 - Individuazione Sforzo normale lungo i meridiani.....	15
Figura 2.4 - Definizione sforzo lungo meridiani e paralleli.....	16
Figura 2.5 - Andamento sollecitazioni lungo i meridiani.....	17
Figura 2.6 - Andamento sollecitazioni lungo i paralleli.....	17
Figura 2.7 - Fessurazione cupola lungo i meridiani.....	18
Figura 2.8 - Cerchiaggio ruote di legno.....	18
Figura 2.9 - Cerchiaggio botti in legno.....	19
Figura 2.10 - Effetto cerchiaggio di rinforzo.....	19
Figura 2.11 - Santuario Vicoforte, vista cupola dall'alto.....	20
Figura 2.12 - Intercapedine tra calotta esterna ed interna della cupola.....	21
Figura 2.13 - Sezione longitudinale del Santuario; Definizione della calotta interna ed esterna della cupola.....	22
Figura 2.14 - Cerchiaggio di rinforzo originario.....	22
Figura 2.15 - Cinta di cerchiaggio alla base della cupola.....	23
Figura 2.16 - Ancoraggi tie - bars e portelloni di chiusura.....	23
Figura 2.17 - Interno Cupola Pantheon.....	24
Figura 2.18 - Confronto Santuario di Vicoforte e Pantheon.....	25
Figura 2.19 - Cupola della Basilica di San Pietro; SX: vista esterna; DX: Sezione longitudinale.....	26
Figura 2.20 - Confronto cupola di Vicoforte con la cupola di San Pietro.....	27
Figura 2.21 - Quadro fessurativo Nord – Sud.....	28
Figura 2.22 - Quadro fessurativo cupola - tamburo, prospetto sviluppato.....	29
Figura 3.1 - Pianta progetto Vitozziano.....	33
Figura 3.2 - Prospetto progetto Vitozziano.....	34
Figura 3.3 - Sezione progetto Vitozziano.....	35
Figura 3.4 – Terreno: SX: limo; DX: marna.....	36

Figura 3.5 – SX: fondazione ; DX: basamento.....	36
Figura 3.6 – SX: pavimento ; DX: tamburo .....	36
Figura 3.7 – SX: contrafforti e coperture a volta a botte ; DX: cupola .....	37
Figura 3.8 – SX: lanternino ; DX: campanili.....	37
Figura 3.9 - Modello Vitozziano totale.....	37
Figura 3.10 - Santuario Vicoforte vista dall'alto.....	38
Figura 3.11 – SX: terreno Marna ; DX: terreno Limo .....	39
Figura 3.12 – SX: fondazione ; DX: pavimenti più colonne ed orizzontamenti ...	39
Figura 3.13 – SX: basamento ; DX: tamburo .....	39
Figura 3.14 – SX: calotta interna cupola ; DX: calotta esterna cupola.....	40
Figura 3.15 – SX: contrafforti ; DX: campanili.....	40
Figura 3.16 – SX: lanternino ; DX: cerchiaggio.....	40
Figura 3.17 - Intero modello geometrico del costruito .....	41
Figura 4.1 - Dominio Mohr – Coulomb.....	49
Figura 4.2 - Meccanismo di collasso: Scorrimento dei giunti .....	51
Figura 4.3 - Meccanismo di collasso: Fessurazione dei blocchi.....	51
Figura 4.4 - Meccanismo di collasso: Combinato .....	52
Figura 4.5 - Meccanismo di collasso: Schiacciamento.....	52
Figura 4.6 – SX: finestra set mesh proprieties ; DX: Modello Vitozziano discretizzato .....	53
Figura 4.7 - SX: vincoli base terreno ; DX: vincoli laterle terreno .....	54
Figura 4.8 - Carico concentrato, problema di Boussinesq.....	55
Figura 4.9 - Fondazione progetto Vitozziano .....	57
Figura 4.10 - Andamento tensioni indotte da un carico verticale concentrato in superficie.....	58
Figura 4.11 - Modello discretizzato Santuario di Vicoforte attuale .....	59
Figura 5.1 - Settaggio analisi statica lineare .....	63
Figura 5.2 - Analisi statica lineare, distribuzioni tensioni in direzione Z.....	65
Figura 5.3 - Analisi statica lineare, spostamenti in direzione Z .....	66
Figura 5.4 - Analisi statica lineare, SX: tensioni in direzione X ; DX: tensione in direzione Y.....	67
Figura 5.5 - Analisi statica lineare, spostamento in direzione X.....	67

Figura 5.6 - Analisi statica lineare, spostamenti secondo l'asse Y .....	68
Figura 6.1 - Modello Vitozziano, Modo 1 – $f = 4,01$ Hz.....	71
Figura 6.2 - Modello Vitozziano, Modo 2 – $f = 4,46$ Hz.....	71
Figura 6.3 - Modello Vitozziano, Modo 3 - $f = 5,19$ Hz .....	72
Figura 6.4 - Confronto modi di vibrare in termini di frequenze .....	73
Figura 6.5 - Confronto modi di vibrare in termini di periodo.....	73
Figura 6.6 - Problema agli autovalori, spettro di risposta elastico .....	74
Figura 6.7 - Legge costitutiva di una cerniera plastica .....	76
Figura 6.8 - Analisi statica non lineare, comportamento post – fessurazione .....	79
Figura 6.9 - Prova di trazione indiretta muratura .....	80
Figura 6.10 - Analisi statica non lineare, total strains in direzione XX.....	84
Figura 6.11 - Analisi statica non lineare, deformazione in direzione YY .....	86
Figura 6.12 - Analisi statica non lineare, deformazione rispetto l'asse ZZ.....	87
Figura 6.13 - Tensioni di Cauchy .....	88
Figura 6.14 - Analisi statica non lineare, tensione tangenziale XY.....	89
Figura 6.15 - Analisi statica non lineare, tensione tangenziale YZ.....	90
Figura 6.16 - Analisi statica non lineare, tensioni tangenziali ZX .....	91

## **Indice delle tabelle**

Tabella 1 – Individuazione raggio medio della fondazione.....	57
Tabella 2 - Proprietà materiali con comportamento elastico lineare .....	62
Tabella 3 - Problema agli autovalori, definizione accelerazioni da spettro di risposta elastico .....	75
Tabella 4 - Analisi statica non lineare, caratteristiche elastiche materiali.....	78
Tabella 5 - Analisi statica non lineare, caratteristiche materiali comportamento a fessurazione .....	81
Tabella 6 - Analisi statica non lineare, caratteristiche plastiche materiali.....	82
Tabella 7 - Analisi statica non lineare, verifica di deformabilità secondo l'asse XX .....	85
Tabella 8 - Analisi statica non lineare, verifica tensioni tangenziali YZ.....	90
Tabella 9 - Analisi statica non lineare, verifica tensioni tangenziali ZX.....	91

## **Abstract**

Il presente lavoro di tesi ha come oggetto l'analisi lineare e non lineare del Santuario di Vicoforte, in modo da analizzare ed approfondire il comportamento strutturale dell'edificio. Il Santuario presenta la cupola ellittica più grande del mondo, con i suoi assi interni di 37,15 e 24,8 metri.

Le notevoli dimensioni di questa e la locazione dell'intero Santuario al di sopra di un suolo con scarse caratteristiche meccaniche e soggetto ad oscillazioni della falda superficiale, hanno portato alla nascita di fessure nel sistema tamburo – cupola, già prima della sua ultimazione.

L'obiettivo di questa tesi rappresenta il raggiungimento di un modello geometrico e meccanico tridimensionale che rispetta l'andamento sia in pianta che in alzato della struttura, grazie all'utilizzo di software CAD 3D e modellazione agli Elementi Finiti (FEM), sfruttando gli elaborati principali, quali piante, prospetto e sezioni. In questo modo è stata riprodotta la forma esatta della maestosa cupola ellittica consentendo di analizzare il suo comportamento strutturale con estrema precisione. Per via della presenza del quadro fessurativo, il modello tridimensionale è stato suddiviso in 8 comparti, così da poter assegnare successivamente, valori veritieri di resistenza in funzione del danneggiamento degli elementi.

Ulteriormente è stata modellata geometricamente una seconda struttura, tenendo conto del progetto eseguito da Ascanio Vitozzi alla fine del 1500. Infatti, il Santuario è stato progettato prevalentemente da due architetti, inizialmente Vitozzi e successivamente la sua morte, da Francesco Gallo che rivoluzionò il sistema cupola – tamburo originario.

I modelli numerici così realizzati sono stati poi corroborati con dati provenienti da calibrazioni preliminari. È stata condotta inizialmente l'analisi statica lineare sul primo modello, quello derivante il progetto Vitozziano, con lo scopo di

comprendere il suo comportamento, in termini di deformazione e tensioni, individuando le zone caratterizzate da singolarità e di conseguenza più critiche. A seguito, sempre con l'utilizzo di materiali agenti nel campo lineare è stata risolto il problema agli autovalori, andando a definire i modi di vibrare principali della struttura. Lo studio successivo è stato analizzare la resistenza della struttura in termini di tensioni e deformazioni attraverso lo svolgimento dell'analisi statica non lineare, individuando la reale risposta della struttura Vitozziana. Attraverso questa analisi e con lo svolgimento delle rispettive verifiche in termini di tensioni e deformazioni, è stato possibile comprendere il funzionamento della cupola caratterizzata da un sesto molto ribassato.

## **Introduzione**

Il tema di questo lavoro di tesi nasce, come si può comprendere dal titolo, dalla volontà di studiare strutture storiche in muratura caratterizzate da cupole ed elementi inusuali nell'edilizia moderna. Lo studio effettuato si compone di diverse parti.

La prima prettamente introduttiva, andando a spiegare il processo storico costruttivo del Santuario di Vicoforte e le sue problematiche dovute alla scelta non consona del luogo di realizzazione e le grandiose dimensioni della struttura, mostrando particolare attenzione alla cupola ellittica in muratura che vanta di essere la più grande al mondo con assi interni di 37,15 e 24,8 metri.

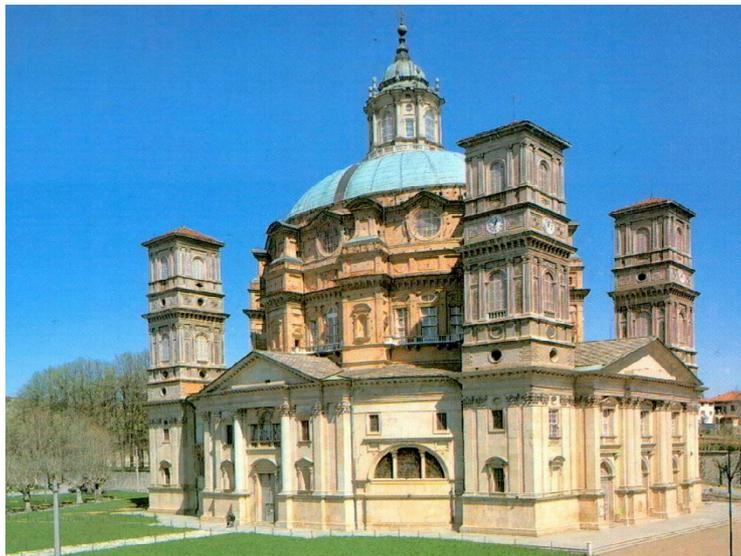
La seconda parte verte sulla modellazione geometrica e successivamente meccanica di due progetti. Il primo realizzato da Vitozzi caratterizzato da una cupola con un sesto molto ribassato e di conseguenza con un comportamento notevolmente spingente, ma mai realizzato per via della premurosa morte dell'architetto, mentre il secondo ottenuto con l'introduzione di Francesco Gallo nella progettazione e realizzazione della grandiosa fabbrica. Conseguendo così due modelli, il primo che rispecchia il progetto Vitozziano ed il secondo che riflette le geometrie attuali del Santuario.

Il lavoro di tesi si conclude con lo svolgimento di analisi lineari e non lineari. La prima, ovvero analisi statica lineare per il progetto Vitozziano, in modo da comprendere se questo fosse realizzato solamente per propaganda oppure realmente studiato e calcolato secondo le teorie di costruzione del 1500, la seconda analisi invece, di tipo modale individuando le forme modali e le frequenze proprie della struttura. Concludendo con l'analisi non lineare, sempre per il modello Vitozziano, captando il vero comportamento in termini di resistenza e deformazione del Santuario.

# 1 Il Santuario di Vicoforte: un processo costruttivo tra progetti e realizzazioni

## 1.1 Il Santuario

La Basilica della Natività di Maria Santissima è un edificio religioso situato nel territorio del comune di Vicoforte, in provincia di Cuneo. Questa struttura risulta essere una delle chiese Monumentali più importanti del Piemonte, la cui cupola con sezione orizzontale ellittica, è la più grande di tale forma al mondo con un'altezza di 74 metri, asse maggiore di 37,15 metri e minore 24,8.



*Figura 1.1 - Santuario di Vicoforte [w1]*

Realizzata prevalentemente da due architetti, Ascanio Vitozzi e successivamente Francesco Gallo, è uno dei principali capolavori del Barocco piemontese, stile architettonico affermato in Piemonte da fine '500 a inizio '700 con l'ascesa del regno Sabauda. Lo stile è caratterizzato da linee sobrie all'esterno della costruzione, mentre nella parte interna si riscontrano ricchissime e scenografiche composizioni architettoniche.

Il Santuario è composto da un basamento di forma prevalentemente ellittica, dove l'intersezione di navata e transetto conferisce alla chiesa una pianta a croce greca.

Al di sopra del basamento si innalza il tamburo, anch'esso di forma ellittica, con asse maggiore e minore coincidenti con la cupola, ed altezza di 15 metri. Questa parte strutturale presenta due tipologie di finestrate, permettendo il giusto ingresso di luce e soprattutto alleggerendo la struttura. Nella parte inferiore del tamburo si notano otto triplette di finestre pseudo rettangolari, mentre nella parte alta si hanno finestrate di forma ovale. Nonostante la presenza di aperture nel tamburo, questo è sufficientemente robusto in modo da contrastare, insieme ad otto contrafforti di base trapezoidale, che si sviluppano a tutta altezza, il grande peso della cupola.

Il completamento della struttura è dato dalla cosiddetta "lanterna" che dona luce all'interno dell'edificio, ed in particolare condizioni offre un'aura quasi mistica agli affreschi ed al tempietto che incornicia il sacro pilone. In Basilica la diversa distribuzione della luce è prevista già nel progetto originale: quasi assente nelle cappelle funerarie, per conciliare il sonno eterno, ma ampiamente diffusa nelle due braccia della croce.

Complessa e contrastata fu nei secoli la costruzione delle torri campanarie. Il disegno di Ascanio Vitozzi prevedeva il posizionamento di un campanile locato nella zona Nord – Est della Basilica, realizzato su richiesta di Madama Reale Cristina di Francia, recatasi a Vico nel 1642. Collegato all'ala che unisce il Santuario al monastero cistercense, permetteva ai monaci l'accesso alla Basilica. Successivamente furono innalzati i due campanili frontali e, per simmetria, anche il quarto a ponente dell'abside.

L'interno del Santuario di Vicoforte è ricco di affreschi, statue e un altare maestoso con marmi rosati ed in fine sono presenti quattro magnifiche cappelle:

La "Cappella di San Bernardo", mausoleo dei Savoia di scuola neoclassica arricchita di diversi elementi simbolici;

La "Cappella di San Bernardo" a destra sotto l'organo che è la più artistica delle quattro e destinata a ricordare la Sacra Sindone;

La "Cappella di San Francesco di Sales", oggi è chiamata come "Cappella del SS. Sacramento", adibita alla preghiera personale e alla celebrazione nei giorni feriali;

La "Cappella di S. Giuseppe" con la grande tela d'altare è opera di Giovanale Bongiovanni di Pianfei.

Degno di attenzione anche l’Abside di San Rocco con la pala d’altare opera di Antonio Meyer da Praga, che la dipinse nel 1752.

La cupola vanta una superficie interna di circa sei mila metri quadrati, impreziosita da affreschi di elevata importanza, ispirati alla pittura del Tiepolo, fra il 1746 e il 1748. Realizzati da Maria Bortoli e Felice Biella, che rappresentarono i tre momenti salienti della vita di Maria, ovvero la nascita, il pellegrinaggio terreno, l’assunzione in cielo e la contemplazione.



Figura 1.2 - Interno Santuario <sup>[w2]</sup>

## 1.2 Processo costruttivo

La Basilica della Madonna Santissima del Montecoreale, ovvero la Basilica di Vicoforte, è un gigantesco monumento che racchiude arte, fede e soprattutto ingegneria. È un'imponente struttura incastonata in una cinta di colli, monti e pianure dove si innalza la maestosa cupola. Concepita come Santuario e Mausoleo della dinastia Sabaudia da Carlo Emanuele I di Savoia, in particolare dalla moglie Caterina, figlia del Re Filippo II di Spagna, con chiaro riferimento al Monastero dell'Escorial realizzato da quest'ultimo nella periferia di Madrid, con medesime funzioni.

La storia della costruzione vede entrare nel processo costruttivo principalmente due figure. Inizialmente i lavori vennero affidati all'architetto Ascanio Vitozzi (Orvieto,

1539 – Torino, 1615), dal 1596 fino al 1615, costruendo fino al cornicione sul quale doveva impostarsi il tamburo della cupola. Successivamente la morte di Vitozzi, la costruzione della gran fabbrica passò a Francesco Gallo (Mondovì, 1672 – Mondovì 1750) nel 1731 che completò la Basilica, edificando tamburo e cupola di poderose linee barocche.

A causa della infelice scelta del luogo dal punto di vista geotecnico, ovvero ubicato alle pendici del colle su cui si sviluppa Vicoforte, caratterizzato da un terreno altamente disomogeneo costituito da un letto di marna che progressivamente viene sostituito da uno strato di limo, la costruzione, avviata alla fine del 1500, a causa dei forti cedimenti differenziali venne sospesa per più di un secolo, impedendo all'architetto Vitozzi di risolvere le problematiche che presentava la maestosa cupola e di completare la Basilica.

In questo periodo, il monumento in costruzione venne a perdere la sua funzione simbolica e di rappresentanza, siccome la vittoria dei Savoia contro i francesi nell'assedio a Torino del 1706 portò l'edificazione della Basilica di Superga, avendo anche funzioni di Mausoleo.

Dopo la morte dell'architetto i lavori proseguirono con l'alternarsi di molteplici capimastri, che tenendo conto dei disegni del Vitozzi, costruirono quasi fino all'imposta della cupola.

L'incremento del peso al di sopra delle fondazioni portò ad un aumento notevole dei cedimenti, comportando gravi problematiche e difficoltà per l'ultimazione della costruzione e di conseguenza per la realizzazione della grande cupola ellittica.

La costruzione riprese a inizio Settecento a cura dell'Architetto ed Ingegnere locale Francesco Gallo, ventenne, che tenendo conto dei vari dissesti e del grave quadro fessurativo della struttura decise di demolire ciò che era stato realizzato negli ultimi anni e concentrarsi esclusivamente sulla progettazione di una delle cupole che avrebbero segnato la storia dell'ingegneria, siccome presentava notevoli difficoltà sia geometriche che costruttive.

Il progetto definitivo di questa, corredato dei particolari costruttivi, fu concluso nel 1727, prevedendo anche l'inserimento di un triplice anello forgiato di catene metalliche, per contenere le elevate spinte della cupola.

Nel 1722 iniziarono i preparativi per l'innalzamento della grande armatura di sostegno della volta, e successivamente tra l'anno 1729 e il 1730 venne concluso il tamburo fino all'imposta della cupola.

La chiusura del tamburo fu realizzata in soli cinque mesi, tra Giugno e Ottobre del 1731, edificando la cupola a doppia curvatura ellittica più grande del mondo.

Nei due secoli successivi al suo completamento, la cupola subì forti danni strutturali evidenziati dallo sviluppo di grandi fessure meridiane. Questo dovuto soprattutto dalla concezione estremamente ardita del grandissimo sistema cupola – tamburo, in merito della forte snellezza delle forme strutturali barocche e della configurazione estremamente ribassata e spingente della cupola, aggiungendo ulteriori cedimenti differenziali delle fondazioni indotti dal nuovo peso strutturale di cupola e tamburo. Durante l'operazione di disarmo della cupola si svilupparono immediatamente cedimenti nell'ordine centimetrico, che ripresero solo nei decenni successivi, incrementando il quadro fessurativo.

Il degrado strutturale venne studiato dall'Ingegnere Bordino, il quale individuò la presenza di una falda acquifera e di conseguenza progettò un condotto per lo smaltimento delle acque lungo il perimetro della Basilica con l'aggiunta di una sottomurazione della facciata, stabilizzando in questo modo lo stato della Basilica. Con il passare degli anni, la mancata manutenzione del sistema di drenaggio e l'immissione nei condotti di portate d'acqua di varia provenienza, comportò l'inefficacia del sistema drenante, e conseguentemente nuovi cedimenti alla struttura.

Nel 1934, la Curia vescovile, preoccupata dei numerosi problemi strutturali, incaricò l'ingegnere Garro di “eseguire accertamenti in merito alle gravi lesioni, ricercarne la cause e proporre gli opportuni lavori per rimediare e le necessarie opere di consolidamento, riparazione e restauro”.

Nel 1985 la cupola fu soggetta ad un notevole intervento di consolidamento, per scongiurare il collasso, optando la cerchiatura all'imposta della cupola mediante 14

cavi post-compressi, costituiti da 4 barre DYWIDAG  $\phi 32$ , posate all'interno di guaine del diametro di 70mm. Le barre vennero dotate di dispositivi di messa in tensione variabile e di celle di pressione per la lettura istantanea dei valori di carico.

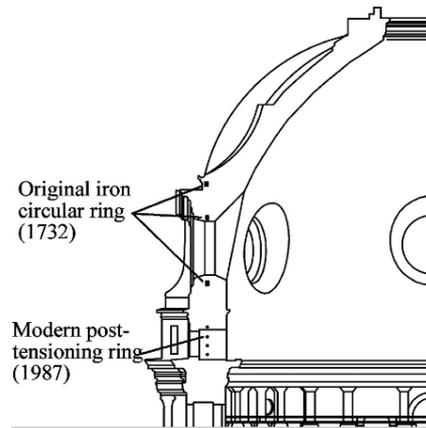


Figura 1.3 - Cerchiatura di rinforzo <sup>[w3]</sup>

Da allora la Basilica mariana è monitorata da parte del Politecnico di Torino. Il controllo avviene di continuo in maniera remota, sul check – up statico, sismico e dinamico della cupola e della chiesa, tramite strumenti posizionati direttamente sulla struttura, come ad esempio celle di carico, termometri e piezometri per il livello dell'acqua.

## 2 La cupola di Vitozzi e il problema da analizzare

### 2.1 Cenni sui metodi storici di analisi delle cupole

Nella trattatistica a partire dal 1400, le strutture ed in particolare le cupole venivano analizzate in funzione della conformazione geometrica e successivamente prendendo in esame le tecniche costruttive utilizzate. Già allora si sosteneva che una buona progettazione strutturale, dipendesse essenzialmente dalla progettazione geometrica delle strutture, infatti successivamente questo principio è stata confermata teoricamente.

Nel XVII Galileo Galilei introdusse nuovi studi basati su criteri matematici e scientifici con il quale era ed è tutt'oggi possibile progettare strutture in funzione della resistenza e dell'individuazione del carico di rottura per elementi monodimensionali, segnando così l'inizio di una nuova era, ovvero la nascita della Scienza delle Costruzioni moderne. Questo portò ad un passaggio progressivo da una progettazione principalmente geometrica ad una numerico – scientifica.

Con le nuove teorie introdotte, i principali matematici si occuparono della statica degli archi. Uno dei metodi più utilizzati per la verifica della stabilità di archi e volte consisteva nella costruzione del poligono funicolare del sistema dei vettori. Con questa tecnica si procede a rappresentare il peso dei singoli conci, passanti per punti stabiliti attraverso tutto l'arco e in chiave. Il poligono funicolare coincide con il poligono delle risultanti, infatti ciascun vettore rappresenta la retta d'azione del risultante di tutte le forze che lo precedono, cominciando dal vettore forza nel concio di chiave. Questa risultante rappresenta l'azione che in corrispondenza del giunto, la parte dell'arco esercita sulla successiva, ovvero l'azione interna scambiata tra conci contigui. Si può affermare che il tracciato della linea delle pressioni, indica la stabilità di un arco. Più la linea delle pressioni si discosta dall'asse, maggiore sarà l'eccentricità e di conseguenza maggiore sarà anche lo spessore dell'arco in modo da garantire che la linea delle pressioni resti al suo interno. Dallo studio dell'arco si passò alla cupola, siccome la maggior parte dei matematici vedeva queste strutture come elementi composti da più spicchi, e per questo motivo la stabilità di essa veniva definita dai criteri usati per l'arco. In realtà il comportamento della cupola può essere visto come la somma dello sforzo nei meridiani più lo stato di sforzo secondo i paralleli, invece l'arco è caratterizzato solamente da sforzi nei meridiani.

## 2.2 Membrane di rivoluzione

Verso la metà del Novecento venne incrementato un'ulteriore tecnica utilizzabile nell'analisi delle cupole, ovvero l'analisi membranale. Questo metodo considera le cupole come superfici curve, analizzate con modelli matematici che presuppongono materiali con comportamento elastico lineare, in grado di resistere sia a trazione

che a compressione, caratteristiche piuttosto lontane da quelle che condizionano il comportamento reale delle murature. Come sottolinea Heyman, la particolarità del comportamento statico delle cupole in muratura rende difficile la possibilità di fare riferimento alla sola analisi elastica per spiegarne il regime tensionale, perché gli spessori che riguardano queste strutture e le caratteristiche dei materiali contrastano con le ipotesi su cui si basa il funzionamento membranale.

Si definisce lastra o membrana di rivoluzione una superficie, generalmente a doppia curvatura, generata dalla rotazione completa di una curva piana  $r(z)$  attorno all'asse di simmetria  $Z$  (fig).

Si dicono meridiani l'insieme delle infinite configurazioni che assume la curva generatrice  $r(z)$  nella sua rotazione. Si dicono paralleli l'insieme delle infinite traiettorie circolari percorse dai singoli punti della curva generatrice. I meridiani e i paralleli rappresentano le cosiddette linee di curvatura, sulle quali può definirsi un sistema di coordinate curvilinee principali  $s_1 s_2$ .

Indicando con  $s_1$  la coordinata curvilinea lungo i meridiani, e con  $s_2$  la coordinata curvilinea lungo i paralleli, si ha:

$$ds_1 = ds = \frac{dz}{\cos \alpha}$$

$$ds_2 = r d\theta$$

Essendo  $\alpha$  l'angolo che la tangente al meridiano forma con l'asse di simmetria, il quale è uguale anche all'angolo che la normale alla superficie forma con il raggio  $r$ , e rappresentando  $\theta$  la longitudinale. Per il Teorema di Meusnier, il raggio  $r$  e il raggio principale di curvatura  $R_2$  sono legati dalla seguente relazione:

$$r = R_2 \cos \alpha$$

Mentre le variazioni del raggio di curvatura  $R_1$  sono nulle rispetto alla coordinata  $s_2$  (cioè lungo il parallelo), le variazioni del raggio di curvatura  $R_2$  rispetto alla coordinata  $s_1$  (cioè lungo il meridiano) valgono:

$$\frac{\partial R_2}{\partial s_1} = \tan \alpha \left( 1 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

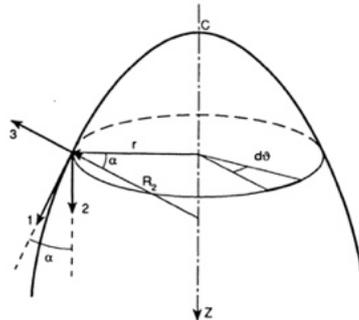


Figura 2.1 - Lastra di Rivoluzione<sup>2</sup>

### 2.3 Metodo FEM

Sempre nello stesso periodo (1956), viene convenzionalmente attribuita la data di nascita del metodo agli elementi finiti (FEM – Finite Elements Method), anno di pubblicazione di un lavoro di Turner, Clough, Martin e Topp. L'importanza di questo lavoro dev'essere messa in relazione alla diffusione del primo linguaggio simbolico, battezzato col nome di FORTRAN (FoRmula TRANslator language). Ciò ha segnato una svolta nell'utilizzo pratico dei mezzi di calcolo. Da allora, il metodo ha conosciuto uno sviluppo estremamente rapido e una popolarità esponenzialmente crescente. Esso è oggi considerato un importante strumento della meccanica delle strutture. I metodi agli elementi finiti sono tecniche atte ad approssimare le equazioni differenziali che governano un sistema continuo con un sistema di equazioni algebriche in un numero finito di incognite. La diffusione di questi metodi è soprattutto dovuta alla facilità con cui essi possono essere tradotti in programmi di calcolo. Inizialmente la metodologia FEM venne utilizzata per la risoluzione di problematiche strutturali, ma successivamente grazie alla sua facilità e rapidità di risoluzione venne estesa a numerosi campi. Ritornando alla metodologia di studio ed analisi della cupola, tramite questa tecnica è possibile individuare le tensioni e deformazioni che si sviluppano lungo meridiani e paralleli,

<sup>2</sup> Carpinteri A. "Scienza delle Costruzioni 2", Bologna. Pitagora, 1992.

ovvero gli elementi con cui può essere suddivisa geometricamente. Dato che il raggio del meridiano è costante in una cupola a base circolare, ci si aspetta che tutti i meridiani presentino lo stesso andamento delle tensioni, risultando interamente di compressione, massime all'equatore, nulle al cervello e di conseguenza inversamente proporzionali in testa.

Diversamente il raggio dei paralleli non è costante ma si riduce di man in mano che si sale dall'equatore al cervello della cupola. In questo caso è plausibile che le tensioni presentino dei valori costanti in ogni punto del parallelo considerato. Questi valori dovrebbero risultare di trazione dall'equatore alla colatitudine di  $51^\circ$  circa e di compressione nella parte superiore.

## 2.4 Comportamento strutturale Cupola

La cupola è una lastra a doppia curvatura che segue la legge sui meridiani e paralleli. Sono realizzate nella maggior parte dei casi in muratura. La muratura presenta una ottima resistenza a compressione ma a trazione può essere reputata uguale a zero, siccome è presente il legante che definisce questo comportamento. L'obiettivo principale nella progettazione e realizzazione di un elemento come questo è quello di evitare l'insorgenza di trazione.

Per lo studio del comportamento strutturale si considera una cupola emisferica realizzata da uno spessore sottile soggetta al solo peso proprio. In virtù della simmetria polare, essa può essere descritta tramite un suo arco. Essendo poi composta da una sezione orizzontale circolare si può tener conto dell'angolo al centro  $\alpha$ .

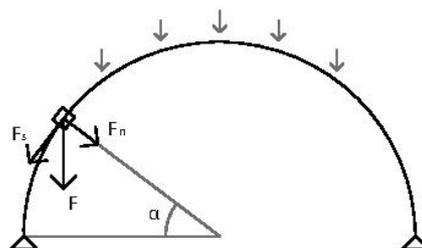


Figura 2.2 - Semplificazione cupola con arco

La forza peso è data dallo spessore della calotta per la lunghezza di riferimento imposta uguale ad 1 metro, lavorando in questa maniera per unità di striscia. Tale forza vale:

$$F = \gamma * h$$

Sulla base della nomenclatura delle lastre, si scompone la forza peso in una componente radiale e una tangenziale, in modo da esplicitare:

- la forza normale agli anelli

$$F_n = - \gamma h \sin \alpha$$

- La forza tangente agli anelli

$$F_s = \gamma h \cos \alpha$$

Ora è possibile passare all'individuazione dello sforzo normale  $N_s$  lungo la striscia, si può procedere tramite le equazioni di equilibrio delle lastre a doppia curvatura oppure nel seguente modo.

Isolando una porzione di cupola definita dalla quota  $\alpha$ , la risultante dei carichi agenti su di essa vale:

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \gamma h d\alpha$$

L'area è data dal parallelo considerato e vale:

$$dA = 2\pi r * R d\alpha = 2\pi R^2 \cos \alpha * d\alpha$$

Siccome:

$$r = R \cos \alpha$$

Definitivamente il carico agente sulla cupola varrà:

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \gamma h d\alpha = 2\pi\gamma R^2 h \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = 2\pi\gamma R^2 h(1 - \sin \alpha)$$

- Se  $\alpha = 0^\circ$  (piede della cupola), il carico  $Q$  è uguale al carico totale
- Se  $\alpha = 90^\circ$ , il carico  $Q \rightarrow 0$

Una volta noto il carico verticale totale agente sulla calotta del parallelo, si può procedere al calcolo dello sforzo  $N_s$  mediante equilibrio alla traslazione verticale:

$$N_s \cos \alpha * (2\pi r) + Q(\alpha) = 0$$

Di conseguenza:

$$N_s = -\frac{Q(\alpha)}{2\pi r \cos \alpha} = -\frac{\gamma h R}{1 + \sin \alpha}$$

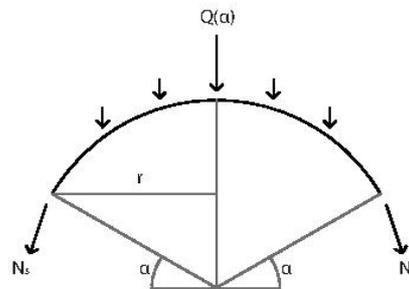


Figura 2.3 - Individuazione Sforzo normale lungo i meridiani

Si può notare che lo sforzo normale meridiano  $N_s$  è massimo al piede  $\alpha = 0^\circ$ , poiché lì grava il carico totale. Viceversa, si ha valore minimo di  $N_s$  quando  $\alpha = \pi/2$ , dove il valore di  $N_s$  si dimezza:

$$N_s(\alpha = 0^\circ) = -\gamma h R$$

$$N_s(\alpha = 90^\circ) = -\frac{\gamma h R}{2}$$

Ora risulta essere immediato ricavare lo sforzo lungo i paralleli  $N_\theta$ , sfruttando l'equazione della lastra a doppia curvatura:

$$\frac{N_s}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = F_n$$

Imponendo:

$$R_1 = R_2 = R$$

Si ottiene:

$$N_\theta = \frac{1 - \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} * \gamma h R$$

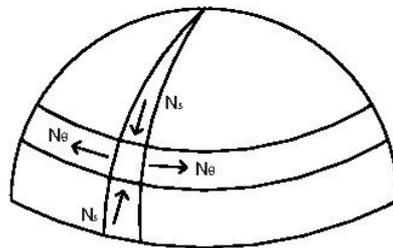


Figura 2.4 - Definizione sforzo lungo meridiani e paralleli

Il contributo di stress lungo i meridiani e lungo i paralleli dipende da  $\gamma, h, R$  e aumentano all'aumentare del raggio, del peso e dello spessore.

Ragionando in termini di tensioni e di sofferenza del materiale, siccome:

$$\sigma_{\theta,s} = \frac{N_{\theta,s}}{1 * h}$$

Lo spessore  $h$  si semplifica e dunque la tensione non dipende da esso ma dal raggio e dal peso specifico ( $2000 - 2700 \frac{kg}{cm^3}$  per materiali lapidei).

Passando allo studio dei diagrammi di sforzo normale, si nota che:

- Lungo il meridiano, l'angolo  $\alpha$  varia e che la componente  $N_s$  risulta essere sempre di compressione passando da un valore massimo all'imposta a un valore minimo in chiave. Ciò vuol dire l'assenza di trazione e quindi la mancata presenza di fessure nella malta.

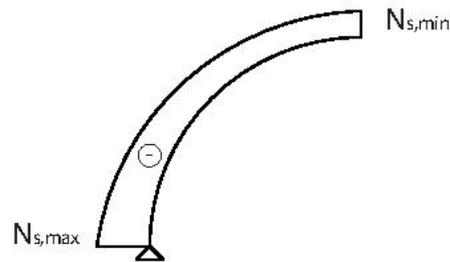


Figura 2.5 - Andamento sollecitazioni lungo i meridiani

- Per quanto riguarda lo sforzo lungo i paralleli  $N_\theta$ , l'ideale sarebbe ottenere un comportamento totalmente compresso. Ciò è voluto anche dal punto di vista tensionale per la pietra. Essa, infatti, ha una resistenza limite a compressione, ma uno stato biassiale di compressione nel momento in cui si  $N_s$  ed  $N_\theta$  sono di compressione, il cerchio di Mohr tende a ridursi, riducendo dunque le azioni tangenziali. Si tende ad un comportamento idrostatico. Nella realtà, è presente un angolo limite, cioè  $N_\theta$  è di compressione solo da un determinato parallelo in su. In particolare, presso la chiave della cupola,  $N_s$  e  $N_\theta$  hanno segno uguale, e teoricamente nel punto di culmine si ha uno stato idrostatico (punto infrangibile). Nella parte bassa invece,  $N_\theta$  è di trazione e dunque al di sotto di un determinato parallelo si potranno sviluppare fessure.

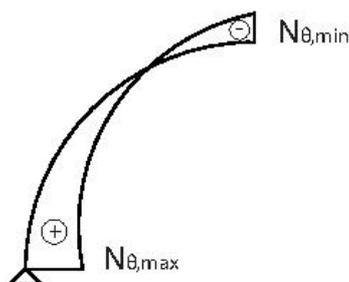


Figura 2.6 - Andamento sollecitazioni lungo i paralleli

L'angolo limite con il quale si ha il passaggio da zona compressa a zona tesa vale  $\alpha_{lim} \sim 30^\circ - 35^\circ$  ma dipende da vari fattori come lo spessore della calotta.

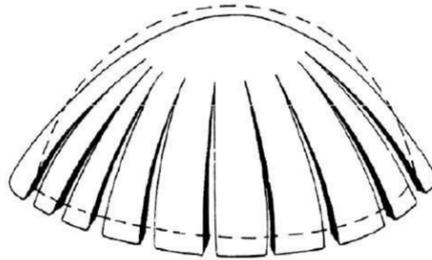


Figura 2.7 - Fessurazione cupola lungo i meridiani [w4]

## 2.5 Cerchiaggio di rinforzo

La soluzione a questo problema è dunque ricorrere all'applicazione di cerchiature di rinforzo. Questa tecnica consiste di utilizzare delle legature intorno ad un oggetto con l'obiettivo di limitarne o impedirne le deformazioni laterali e l'innescò della rottura. Nel campo dell'ingegneria civile, l'applicazione di cerchiature può essere utilizzata sia per confinare singoli elementi strutturali e sia interi edifici o parti di essi. L'utilizzo di questa tecnica risale già dall'antichità e ricopre numerosi campi, come ad esempio le ruote di legno dei carri o per le botti, andando ad incrementare la loro resistenza. Nel primo caso dopo la costruzione della ruota si procedeva alla ferratura, ovvero il posizionamento di un anello di ferro, ancora incandescente, sulla superficie esterna della ruota. In questo modo il raffreddamento lento del ferro generava il fenomeno di ritiro creando il cerchiaggio.



Figura 2.8 - Cerchiaggio ruote di legno [w5]

Un ulteriore esempio è la realizzazione del cerchiaggio per le botti in legno, applicando il criterio ad elementi geometrici circolari. Il concetto è il fissaggio delle singole doghe in legno che formano la botte, mediante anelli in ferro incandescente applicati lateralmente la struttura. Tale cerchiaggio conferisce delle resistenze molto elevate al collegamento tra le singole doghe.



Figura 2.9 - Cerchiaggio botti in legno [w5]

L'evoluzione scientifica e di ricerca nel campo della caratterizzazione fisico – meccanica dei materiali, ha portato l'introduzione di nuove tecniche di cerchiatura in termini di metodologie di applicazione e dimensione del singolo elemento di cerchiaggio. Nello specifico, caricando assialmente un elemento ed applicando una componente di compressione laterale dovuta al cerchiaggio, si ottiene uno stato tensionale tridimensionale che comporta benefici in termini di carico limite, incrementando sia la resistenza che la duttilità dell'elemento stesso.

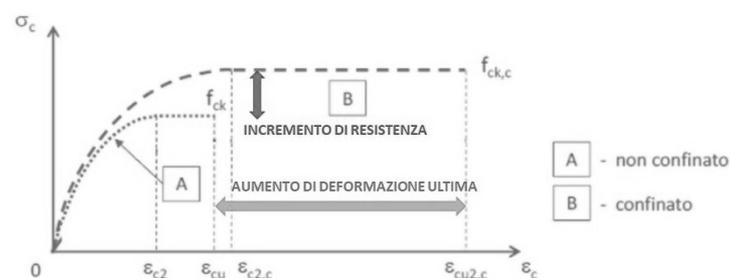


Figura 2.10 - Effetto cerchiaggio di rinforzo [w5]

Esistono varie tipologie di cerchiature, si possono classificare in funzione della collocazione degli elementi, se interna o esterna all'elemento strutturale, in base al materiale utilizzato ad esempio acciaio, fibre sintetiche, oppure materiali compositi

a base resinosa o cementizia. Un'ulteriore differenziazione riguarda il momento di applicazione ed attivazione della cerchiatura. In base a ciò si hanno cerchiatura passiva, ovvero che intervengono solo nel caso di un eventuale peggioramento della situazione di degrado, invece si definiscono attivi, sistemi che entrano in funzione al momento della posa in opera e contribuendo da subito a migliorare il comportamento strutturale dell'elemento cerchiato.

## 2.6 La Cupola del Vitozzi

La cupola del Santuario di Vicoforte presenta nello scenario delle cupole in muratura, un'opera di particolare complessità costruttiva e progettuale, sia per le sue dimensioni e sia per la sua forma. Questa è la cupola ellittica più grande del mondo con l'altezza di 74 metri, asse maggiore di 37,15 e minore di 24,8 metri. La cupola è realizzata in muratura, dove si aggiunge la copertura composta da una struttura in legno e rivestimento in tegole di arenaria a più spioventi. Il tutto poggia sul tamburo in muratura alleggerito da aperture circolari e pseudo-rettangolari.

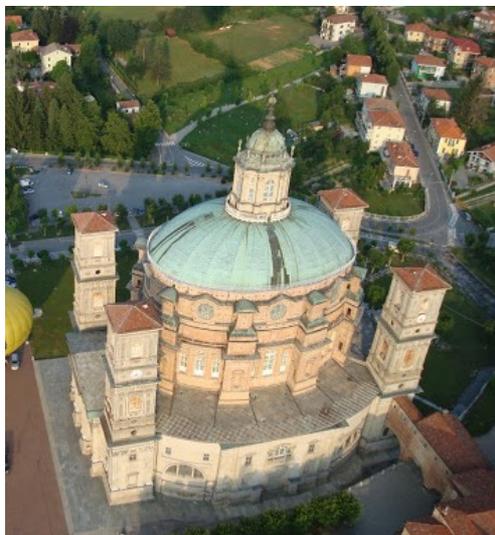


Figura 2.11 - Santuario Vicoforte, vista cupola dall'alto <sup>[w6]</sup>

La vista esterna della cupola del Santuario di Vicoforte non è il cuore pulsante dell'intera struttura. La cupola è composta da una doppia calotta, esternamente realizzata in legno e rivestita con arenaria mentre la calotta interna totalmente in

muratura. La calotta esterna assume una forma ellissoidica cava di spessore 0,60 metri che si adagia al di sopra del piano d'imposta del tamburo. L'altezza relativa alla sola calotta esterna è di 8,35 metri. Questa è composta da una struttura portante in legno formata da una successione di archi con raggio variabile, collegati mediante elementi orizzontali, schematizzando in questo modo la cupola secondo meridiani e paralleli. La struttura portante è completata da listelli in legno, creando la base di appoggio per il rivestimento in pietra arenaria. Si aggiungono elementi strutturali verticali, posti nell'intersezione tra meridiani e paralleli, poggiati al di sopra della calotta in muratura. Quest'ultimi lavorano prettamente a compressione, incrementando la resistenza a sopportare carichi applicati direttamente sulla calotta esterna.



*Figura 2.12 - Intercapedine tra calotta esterna ed interna della cupola <sup>[w7]</sup>*

Il cuore dell'intero Santuario risulta essere la calotta interna in muratura. Le dimensioni geometriche alla base della questa rispettano l'andamento del piano d'imposta del tamburo, infatti si può affermare che quest'ultimo e cupola risultano essere un unico corpo, separabile grazie all'interposizione di un cordolo cavo. La sua peculiarità oltre le notevoli dimensioni geometriche è la sua forma. Si può considerare come la successione di due elementi uniti mediante un cordolo in muratura. La parte bassa della cupola ha un andamento leggermente convesso fino al raggiungimento del suddetto cordolo, dove la calotta presenta uno spessore di circa 1,7 metri, mentre lo spessore di partenza, alla base, è di circa 4,5 metri.

Successivamente si prosegue con un andamento concavo fino al raggiungimento della sommità, dove lo spessore diminuisce leggermente.

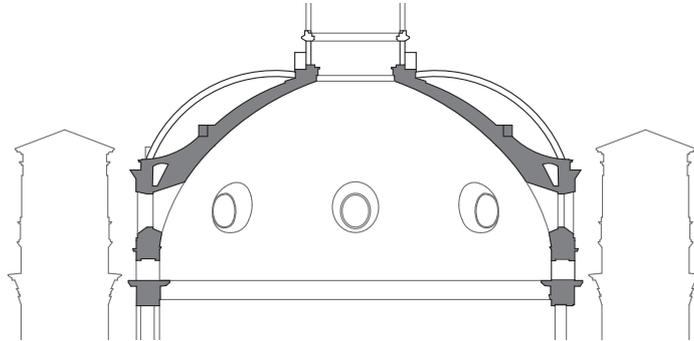


Figura 2.13 - Sezione longitudinale del Santuario; Definizione della calotta interna ed esterna della cupola

Il progetto originale dell'Architetto ed Ingegnere Francesco Gallo prevedeva l'inserimento nella parte superiore del tamburo di un triplice anello forgiato di catene metalliche, di dimensioni n° 2 ferri 40 x 70 mm e n° 1 ferro 50 x 55 mm, in modo da contenere le elevate spinte della cupola. Tutt'oggi questi elementi di cerchiaggio sono dismessi siccome non più efficaci.

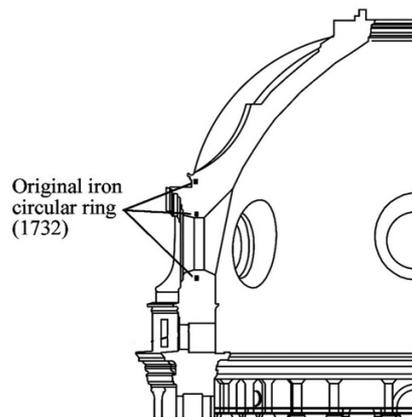


Figura 2.14 - Cerchiaggio di rinforzo originario [w8]

La complessità dell'opera non era dovuta solamente ad aspetti progettuali ed esecutivi, ma soprattutto alla scelta del luogo di collocazione della struttura non ottimale in termini di resistenza. Il suolo in questione è composto per la maggior parte da marna e la restante limo, lavorando così con un terreno altamente disomogeneo. In funzione di ciò durante la costruzione della grande fabbrica si

verificarono una serie di assestamenti e problematiche strutturali che diedero vita ad un quadro fessurativo già prima di terminare la costruzione.

Per scongiurare l'imminente crollo della struttura dovuto alla propagazione delle fessure, nel 1985 vennero eseguite operazioni di consolidamento e monitoraggio strutturale, che, al giorno d'oggi sono ancora presenti. Realizzando operazioni di cerchiatura di rinforzo composte da 14 tratte tangenziali, ciascuna costituita da 4 barre DYWIDAG  $\phi 32$  mm in acciaio ad alta resistenza ( $f_y = 1080 \text{ N/mm}^2$ ), posate all'interno di guaine del diametro di 70 mm, alloggiate entro fori nella muratura.

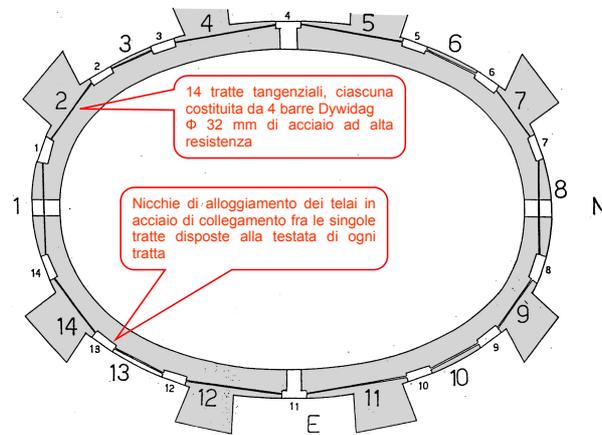


Figura 2.15 - Cinta di cerchiaggio alla base della cupola [9]

Le 14 tratte di tiranti sono connesse a telai in acciaio, composti da travi HE, posizionati in nicchie di alloggiamento, accessibili dall'esterno tramite portelloni, in modo da modificare la tesatura dei tiranti, con la presenza di celle di pressione per la lettura istantanea dei valori di carico.



Figura 2.16 - Ancoraggi tie - bars e portelloni di chiusura [10]

## 2.7 Confronto con le altre cupole

Attraverso il confronto tra la cupola del Santuario di Vicoforte con altre strutture di notevole pregio storico ed architettonico è possibile individuare i differenti comportamenti e criticità delle varie strutture.

### 2.7.1 Confronto cupola del Santuario di Vicoforte con la cupola del Pantheon

Come primo confronto si propone una delle più importanti cupole del mondo, ovvero la cupola del Pantheon situata a Roma. Questa detiene il primato di essere la cupola in calcestruzzo non armato con dimensioni maggiori. Il Pantheon venne costruito in epoca imperiale, intorno al 118 – 128 d.C. .

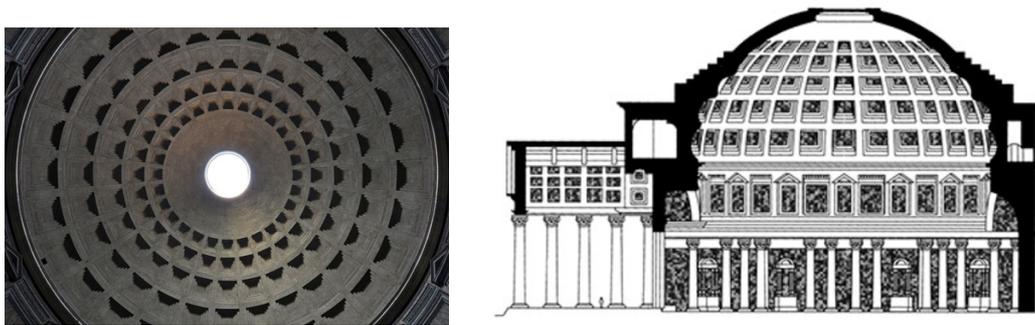


Figura 2.17 - Interno Cupola Pantheon <sup>[w11]</sup>

La struttura si sviluppa secondo una pianta circolare dove si innalza un tamburo con spessore di 6 metri, in modo da contrastare il peso della grandissima cupola emisferica di diametro interno 43,44 metri. La robustezza del tamburo è garantita oltre al suo spessore, anche alla presenza del massiccio rinfiando situato nella parte bassa della cupola. Questa parte consente di contrastare le spinte orizzontali che potrebbero far collassare il tamburo.

Il materiale utilizzato è calcestruzzo privo di armatura. Per ottenere un alleggerimento della struttura, vennero utilizzati aggregati con densità minore man mano che ci si avvicinava alla sommità, ma soprattutto si realizzarono cassettoni quadrangolari formando delle nervature, seguendo meridiani e paralleli.

Confrontando la cupola del Pantheon con quella del Santuario di Vicoforte, innanzitutto la prima differenziazione sta nella geometria. La cupola di Vicoforte ha una base ellissoidica con diametri interni pari a 37,15 metri e 24,8, mentre la cupola del Pantheon ha una base circolare con diametro di 43,44 metri. L'altezza relativa alle singole cupole, invece sono rispettivamente circa 9 metri per Vicoforte e circa 16 metri per il Pantheon. Dal punto di vista dei materiali, nel Pantheon, si è optato per calcestruzzo, quindi materiale con un peso specifico intorno a  $2300 - 2400 \text{ kg/m}^3$ , mentre per la seconda cupola, la muratura con peso specifico di circa  $1500 - 2000 \text{ kg/m}^3$ . Questo porta ad ottenere modalità di progettazione e costruzione differenti, ovvero nel Pantheon si è optato per la realizzazione di cassettoni e scelta di aggregati differenti in funzione dell'altezza della cupola, invece nel Santuario di Vicoforte si ha una struttura resistente prettamente per forma.



Figura 2.18 - Confronto Santuario di Vicoforte e Pantheon [w12]

Dalla figura 2.18, si può captare le differenze geometriche rilevanti tra i due modelli, a sinistra il Santuario di Vicoforte mentre a destra il Pantheon. Il gap di altezza del tamburo comporta una maggior facilità di instabilizzazione dovuta alla spinta esercitata dalla cupola vicese. Per contrastare ciò, sono stati progettati e costruiti otto contrafforti sviluppati su tutta l'altezza del tamburo.

## 2.7.2 Confronto tra la cupola del Santuario di Vicoforte e la cupola della Basilica di San Pietro

Uno dei simboli più celebri di Roma è la cupola della Basilica di San Pietro, costruita nel 1506. La sua storia progettuale è molto complessa, basata su molteplici architetti, dove la progettazione definitiva venne eseguita da Michelangelo Buonarroti. È un'opera che segna il passaggio dall'architettura rinascimentale a quella barocca.



Figura 2.19 - Cupola della Basilica di San Pietro; SX: vista esterna; DX: Sezione longitudinale <sup>[w13]</sup>

La cupola di San Pietro presenta una base circolare di diametro interno di circa 42 metri ed altezza da terra pari a 133,3 metri. La struttura della cupola è a doppia calotta. Quella interna caratterizzata da uno spessore di circa 2 metri, con funzione portante, realizzata in muratura, invece la calotta esterna ha funzionalità di rivestimento e protezione di quella interna, ed è composta da lastre di piombo con spessore di circa un metro. La cupola è sorretta da un tamburo irrobustito da 16 contrafforti radiali ed alleggerito da finestrate.

Il confronto con la cupola di Vicoforte può portare all'individuazione di somiglianze, come ad esempio l'utilizzo di materiale simile, ovvero muratura, oppure la presenza del lanternino in entrambi i progetti, che causa un aumento di compressione in testa alle cupole. Ulteriore somiglianza è la tipologia di cupola a doppia calotta, in modo da proteggere contro le intemperie e azioni atmosferiche la

struttura portante. Così come l'utilizzo di contrafforti per contrastare la spinta esercitata dalla cupola stessa.



Figura 2.20 - Confronto cupola di Vicoforte con la cupola di San Pietro <sup>[w14]</sup>

Nella foto si può notare il Santuario di Vicoforte a sinistra e la Basilica di San Pietro a destra. Nonostante i due progetti sono simili su determinati aspetti, mostrano comunque differenze sostanziali soprattutto dal punto di vista strutturale e geometrico. Partendo dalla geometria, la base della cupola è ellittica, in Vicoforte mentre in San Pietro circolare, ma la differenza sostanziale è l'altezza. La cupola della Basilica di San Pietro presenta un'altezza nettamente maggiore di quella di Vicoforte, questo fa sì che la risposta strutturale è differente, siccome il comportamento spingente nella struttura romana risulta essere minore rispetto a quello causato dalla Cupola vicese.

## 2.8 Il problema da analizzare

Il Santuario di Vicoforte è stato interessato nei secoli da molteplici fattori che hanno aggravato la sua condizione di stabilità. In particolare, l'importanza assunta dall'interazione terreno – struttura, che, nelle varie fasi costruttive, ha dato vita a

danni strutturali concentrati prevalentemente nel sistema cupola – tamburo. Il piano d'appoggio della struttura è caratterizzato da marna e limo. Il terreno marnoso presenta caratteristiche strutturali migliori rispetto a quello limoso, ma la locazione del Santuario fa sì che solamente due degli otto piloni di fondazione poggiano sul terreno migliore. Con il passare degli anni, l'incremento di peso dovuto alla realizzazione della cupola e tamburo ha recato un incremento di cedimenti differenziali in fondazione indotti dalla consolidazione del terreno.

Inoltre, l'inefficienza degli anelli di cerchiaggio previsti nel progetto originale di Francesco Gallo, atti a contenere le spinte laterali esercitate dalla cupola fortemente ribassata e spingente, ha causato un ulteriore incremento di propagazione delle fessure nel sistema cupola – tamburo.

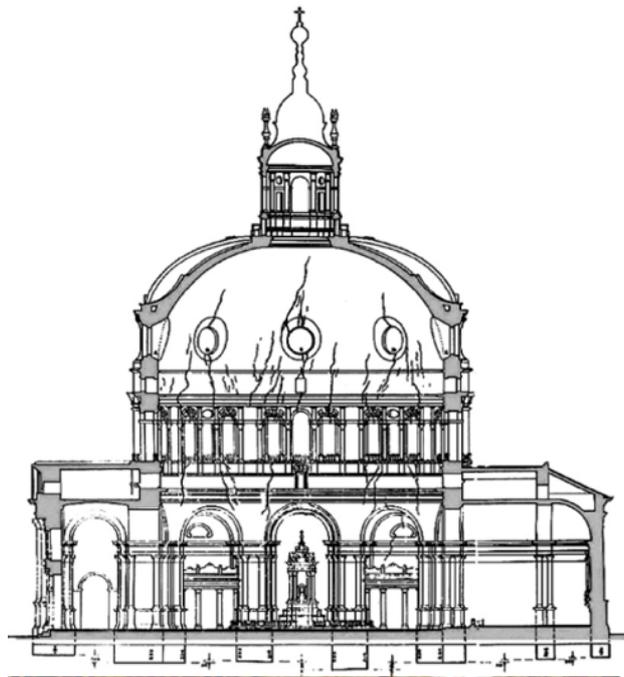


Figura 2.21 - Quadro fessurativo Nord – Sud [w15]

Nella figura si può notare come le fessure si sono sviluppate prevalentemente nella parte bassa della cupola, ovvero la zona sollecitata a trazione. Attualmente sono stati svolti interventi atti a migliorare la resistenza strutturale della zona fessurata tramite il posizionamento di un nuovo sistema di cerchiatura passiva.

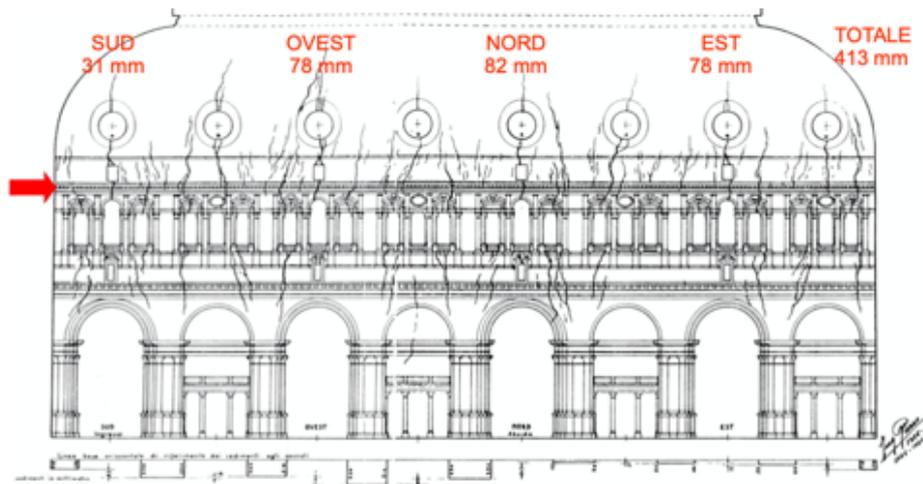


Figura 2.22 - Quadro fessurativo cupola - tamburo, prospetto sviluppato [w16]

Il problema posto riguarda il comportamento della struttura considerando l'attuale quadro fessurativo della cupola e del tamburo. Questo verrà analizzato tramite modellazione geometrica nella prima fase, in modo da replicare con estrema accuratezza le forme del Santuario e successivamente, tramite modellazione numerica per ricavare i dati, in termini di deformazione e tensione, necessari per lo studio. In aggiunta, si procederà con l'individuazione della risposta strutturale ottenuta mediante l'applicazione di un cedimento in fondazione. Tramite questa analisi è possibile prevedere il comportamento futuro del Santuario vicese, siccome sin da prima della sua ultimazione i cedimenti in fondazione sono stati il problema principale. L'individuazione del valore da attribuire al cedimento verrà individuato grazie ad attività di monitoraggio svolte sulla struttura negli anni.

Successivamente, si procederà con l'analisi del progetto realizzato da Vitozzi, mai concluso per via della sua morte, caratterizzato da una cupola con un sesto molto ribassato, in modo da investigare se questo fosse stato davvero calcolato oppure realizzato solo per propaganda. Anticipando che quest'ultimo progetto presenta un tamburo con altezza minore dell'attuale, ma una cupola con un sesto molto più ribassato.

### 3 Modellazione geometrica

La modellazione geometrica è una fase nel processo di analisi strutturale molto importante, eseguendola in maniera scrupolosa facilita l'individuazione del reale comportamento strutturale. Successivamente operazioni di rilievo e restituzione è possibile ottenere gli elaborati principali che descrivono la struttura, ovvero piante, prospetti e sezioni. Quindi, inizialmente il lavoro di modellazione si basa su operazioni bi – dimensionali attraverso software CAD. Ottenuto ciò si passa alla modellazione nel campo tridimensionale.

#### 3.1 La modellazione tridimensionale

La modellazione è il processo che, a partire da una serie di informazioni come, disegni tecnici bidimensionali, informazioni sulla geometria, scansioni, consente di ottenere un modello tridimensionale esportabile in formati standard e utilizzabile dai più diffusi software ingegneristici, architettonici o di pura grafica 3D.

Dal punto di vista tipologico, la modellazione 3D, rientra in due grandi famiglie:

- La modellazione organica, tipica per la creazione di esseri umani o animali; Ma utilizzata anche per la realizzazione di elementi “naturali”, come rocce, piante, alberi e per il territorio in generale. In questi casi i modelli sono caratterizzati da un numero elevato di particolari così da definire una perfetta somiglianza con la realtà.
- La modellazione geometrica risale ad un'età meno recente, viene utilizzata principalmente per la realizzazione di oggetti tecnici, meccanici o per qualsiasi cosa che abbia una natura artificiale. Generalmente la complessità dei modelli realizzati con questa tecnica è inferiore alla precedente, dal punto di vista dell'aspetto esteriore delle singole forme, ma non se si considerano aspetti legati alla precisione e alla corrispondenza delle parti.

Le tecniche di modellazione 3D si possono dividere in tre categorie principali:

- Modellazione procedurale, che a sua volta si divide in automatica e semi – automatica
- Modellazione manuale
- Da dati provenienti da modelli reali, grazie a scansioni tridimensionali

A loro volta queste possono essere suddivise in tre differenti generi di modellazione:

- Modellazione Solida, dove l'oggetto risultante è considerato come formato da un volume pieno
- Modellazione Volumetrica, determina delle entità generati una superficie
- Modellazione di Superfici, l'oggetto in questo caso è determinato dalle sue superfici esterne

La tridimensionalità di un oggetto viene realizzata tramite software, grazie all'utilizzo di equazioni operanti in sistema di riferimento cartesiano tridimensionale, come ad esempio l'equazione di una sfera di raggio  $r$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Anche se equazioni così semplici possono sembrare limitative, l'insieme degli oggetti realizzabili viene ampliato con la tecnica chiamata “geometria solida costruttiva”, la quale combina oggetti solidi come, cubi, sfere, cilindri, per formare oggetti più complessi attraverso operazioni booleane (unione, sottrazione, intersezione).

Tramite operazioni booleane ed utilizzo di equazioni semplici, non è comunque possibile ricoprire la modellazione di gran parte di oggetti, soprattutto di forme complesse come ad esempio superfici con più curvature. La modellazione di quest'ultime avviene con l'utilizzo delle "patch", ovvero l'estensione delle "spline", che approssimano curve continue, alle tre dimensioni. L'impiego di questi tools però comporta l'utilizzo di una gran quantità di potenza di calcolo e di conseguenza, per le applicazioni in tempo reale come videogiochi o simulazioni non sono efficaci. La tecnica del modello poligonale invece, consiste nel rilevare solo determinati punti dell'oggetto in questione, senza informazioni sulle curve comprese tra i vari punti, in questa maniera il livello di dettaglio e precisione è nettamente inferiore della precedente tecnica, però la velocità di esecuzione è maggiore. Un'ulteriore tecnica è la definizione di modelli tridimensionali attraverso NURBS (Non – Uniform Rational B – Splines), ossia la formulazione più generale ed efficace per la rappresentazione matematica di superfici che un qualunque CAD 3D fa di un oggetto, definendone accuratamente la geometria tramite semplici reticoli di curve (splines). Successivamente la geometria viene convertita in un mesh costituita da vertici ed elementi, di forma triangolare o quadrangolare, che ne definiscono la connettività.

Il modello 3D così ottenuto può avere molti impieghi nel campo della progettazione, sia essa ingegneristica o architettonica. Tramite esso è possibile determinare tramite software strutturali ad esempio i valori di deformazione e tensioni agenti sul modello stesso oppure render 3D fotorealistici con l'utilizzo di specifici programmi.

### 3.2 Progetto Vitozziano, modellazione geometrica

Come definito nei capitoli precedenti, il progetto iniziale del Santuario di Vicoforte presenta una struttura notevolmente differente da quella attualmente realizzata. Storicamente il lavoro di progettazione e costruzione fu assegnato all'Architetto ed Ingegnere Ascanio Vitozzi. Sfortunatamente per via della sua morte, il progetto fu rispettato fino la realizzazione del basamento, per poi essere completato da Francesco Gallo successivamente. Quindi fondazione e basamento rispettano il progetto eseguito da Vitozzi mentre tamburo e cupola sono stati totalmente modificati.

Analizzando il progetto Vitozziano, si nota un andamento pseudo – ellittico in pianta dove ai quattro vertici si aggiungono elementi rettangolari ovvero le basi dei campanili. Partendo dalla fondazione questa è caratterizzata da otto piloni principali collegati tra di loro mediante murature in pietra, in modo da seguire la pianta del basamento.

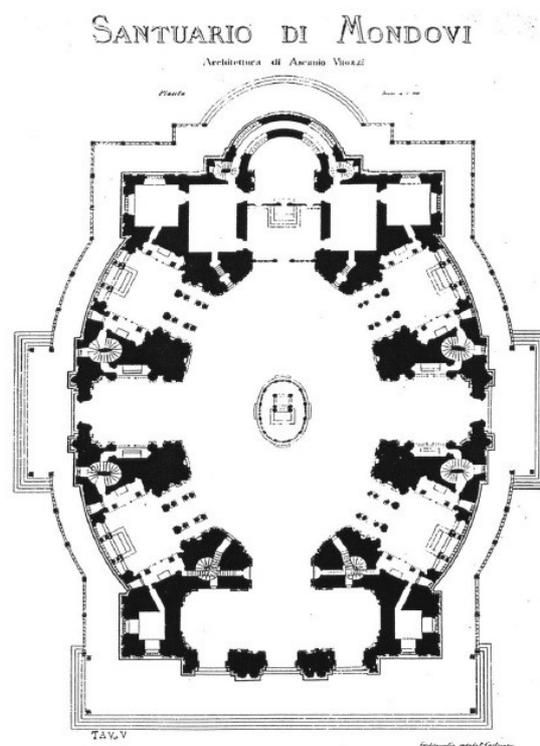


Figura 3.1 - Pianta progetto Vitozziano [w17]

Il basamento ha un'altezza di 12 metri. Internamente si hanno quattro cappelle e si può notare come l'intersezione tra navata e transetto forma una croce greca. Il basamento è composto da due livelli. Al livello zero è possibile accedere a tutto il Santuario, mentre il livello superiore presenta un ballatoio che percorre lo sviluppo della croce greca.

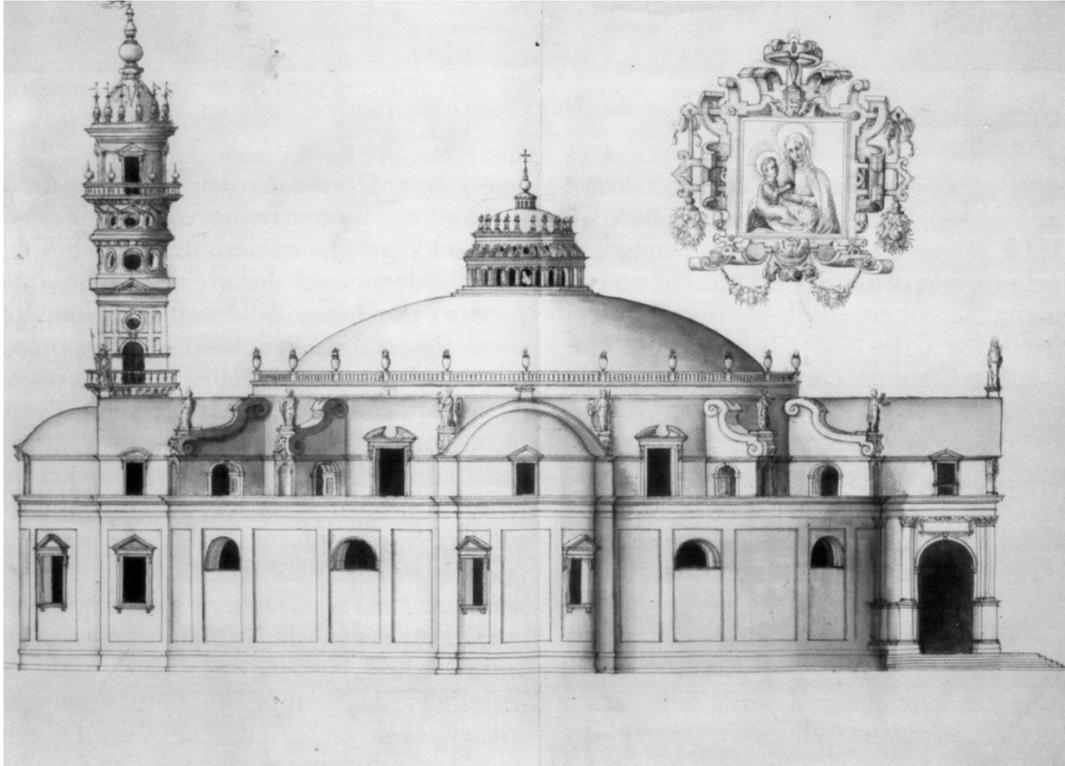


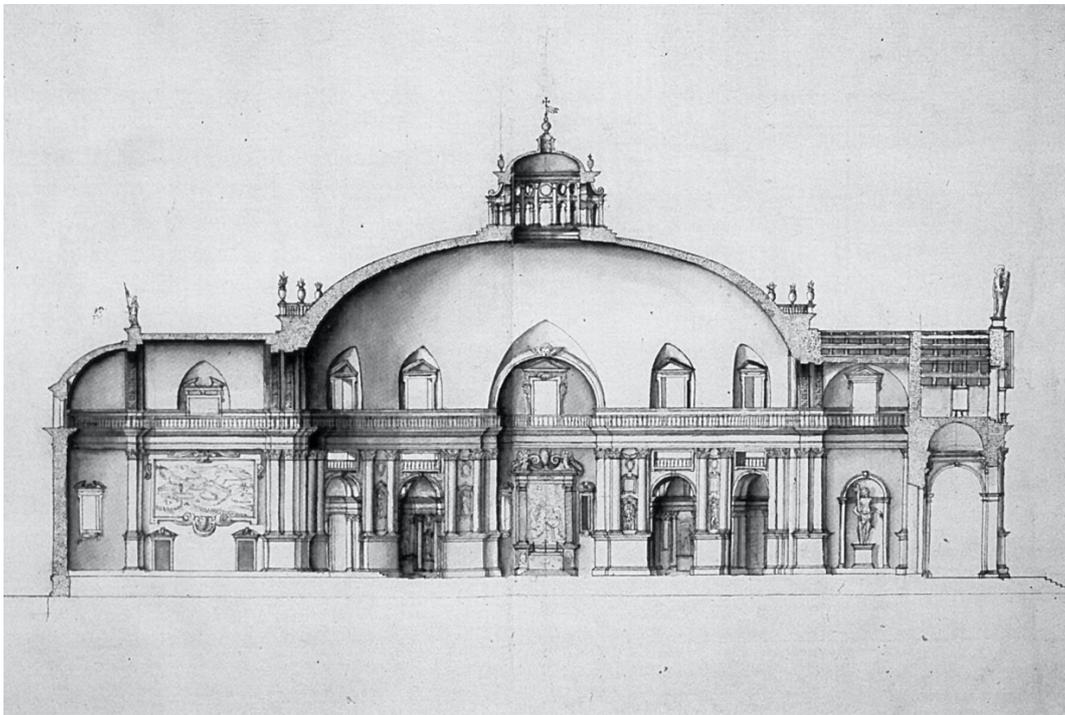
Figura 3.2 - Prospetto progetto Vitozziano<sup>3</sup>

Il tamburo ha una forma ellittica dove gli assi principali rispettano il modello costruito, cosa differente per l'altezza di esso, siccome è pari a 7,30 metri dal basamento. Il tamburo risulta essere irrobustito dalla presenza di 12 contrafforti radiali e soprattutto dalle coperture delle braccia della croce greca. La cupola presenta un sesto molto ribassato, infatti la sua altezza di circa 7 metri ed è formata da un'unica calotta dove lo spessore alla base è di circa 2,50 metri, mentre in testa di circa 0,50 metri. La chiusura della cupola è data dalla lanterna. La progettazione di essa prevedeva lo studio dell'ingresso della luce nel Santuario, in modo da

---

<sup>3</sup> Primo progetto definitivo di Ascanio Vitozzi [Maggio 1596] (BNT, Tesauro, ff. 39v-40r, 41v-42r, 43v-44r)

ottenere ambienti cupi nelle cappelle funebri lateralmente, e luce verso affreschi e tempietto.



*Figura 3.3 - Sezione progetto Vitozziano<sup>2</sup>*

Per la modellazione geometrica del Mausoleo, si è tenuto conto di elaborati tecnici principali, ovvero piante, prospetto e sezione ma anche di un modello tridimensionale approssimato del Santuario.

Per la rappresentazione della struttura si è optato per l'utilizzo di elementi solidi, in modo da poter ottenere un comportamento più veritiero possibile nelle fasi successive. Una delle difficoltà nella modellazione geometrica è stata la suddivisione tra elementi principali e secondari, ovvero si è svolta la semplificazione dei singoli corpi, eliminando le caratteristiche geometriche che esulano dallo studio. Successivamente sapendo che la struttura costruita presenta un notevole quadro fessurativo, che comporta variazioni della resistenza, l'intero Santuario è stato suddiviso in 8 comparti in pianta (Nord 1, Nord 2, Nord – Est, Sud – Est, Sud 1, Sud 2, Sud – Ovest, Nord – Ovest). Inoltre, è stata implementata una seconda suddivisione, questa volta in funzione degli elementi principali del Mausoleo (marna, limo, fondazione, basamento, pavimento, colonne, tamburo,

contrafforti, cupola interna, cupola esterna, lanternino, campanili). Si riporta di seguito i vari elementi della struttura suddivisi per comparto:

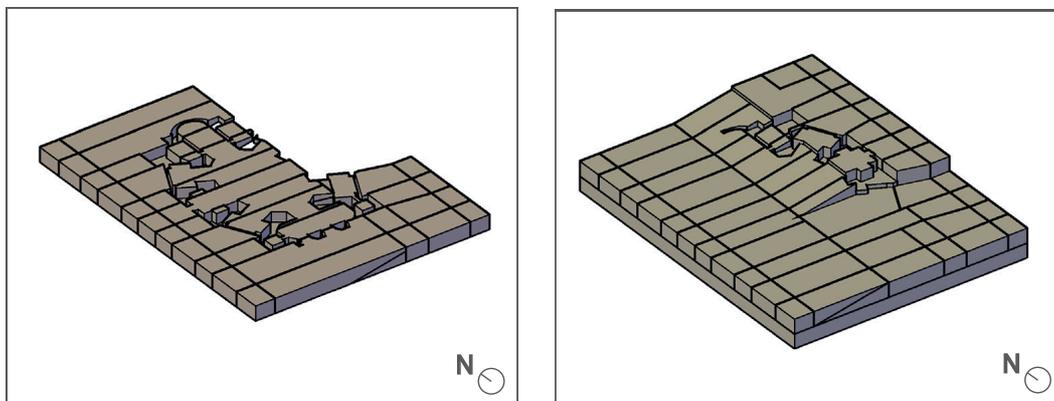


Figura 3.4 – Terreno: SX: limo; DX: marna

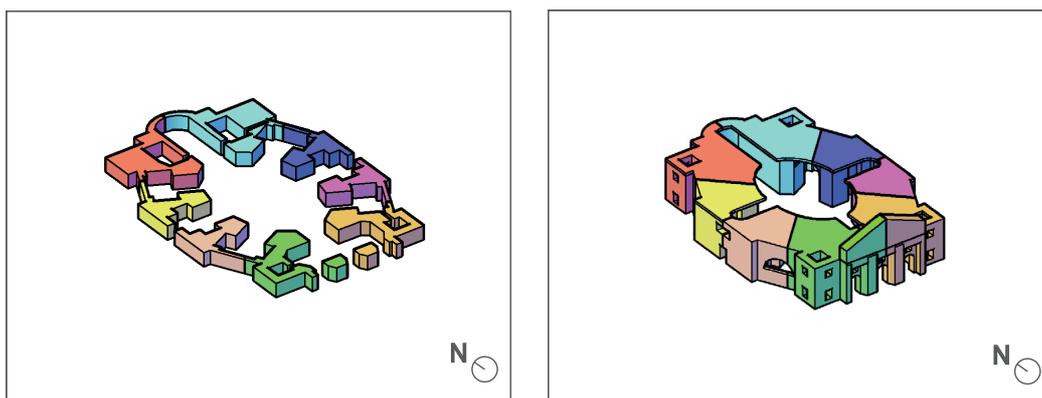


Figura 3.5 – SX: fondazione ; DX: basamento

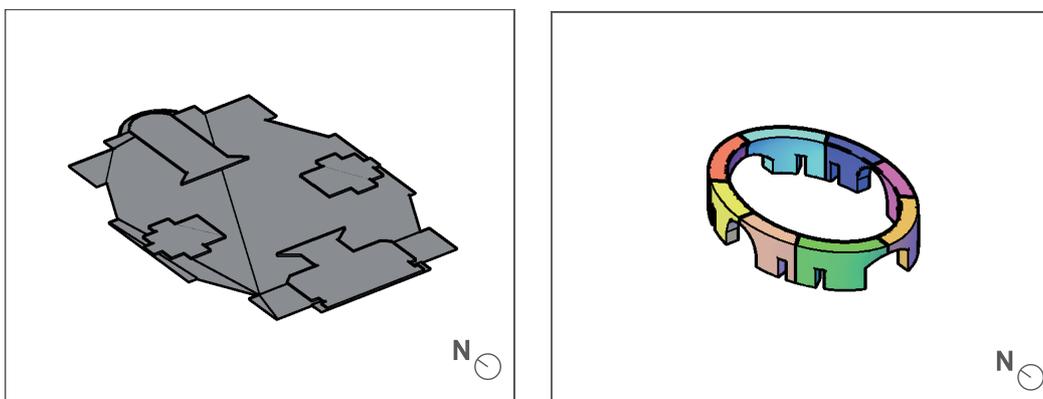


Figura 3.6 – SX: pavimento ; DX: tamburo

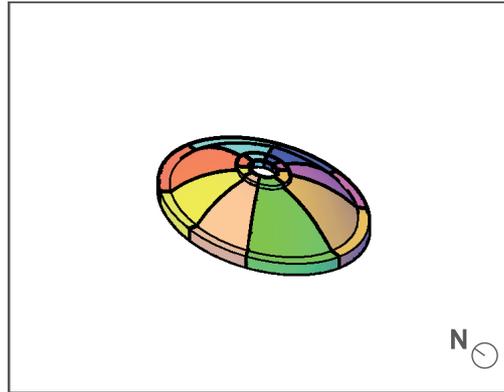
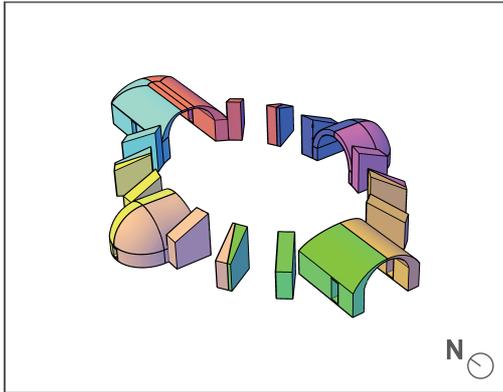


Figura 3.7 – SX: contrafforti e coperture a volta a botte ; DX: cupola

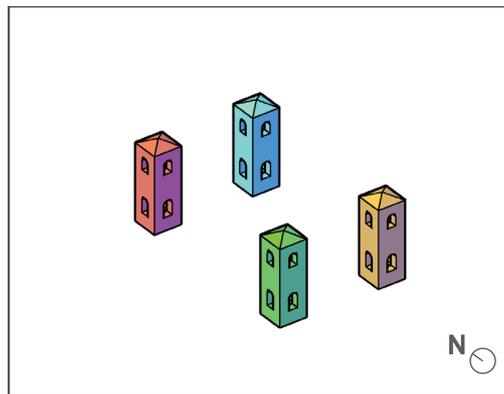
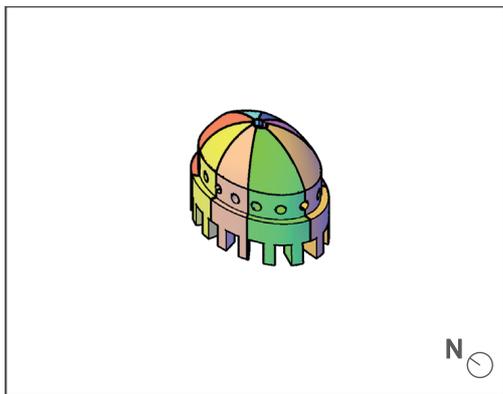


Figura 3.8 – SX: lanterino ; DX: campanili

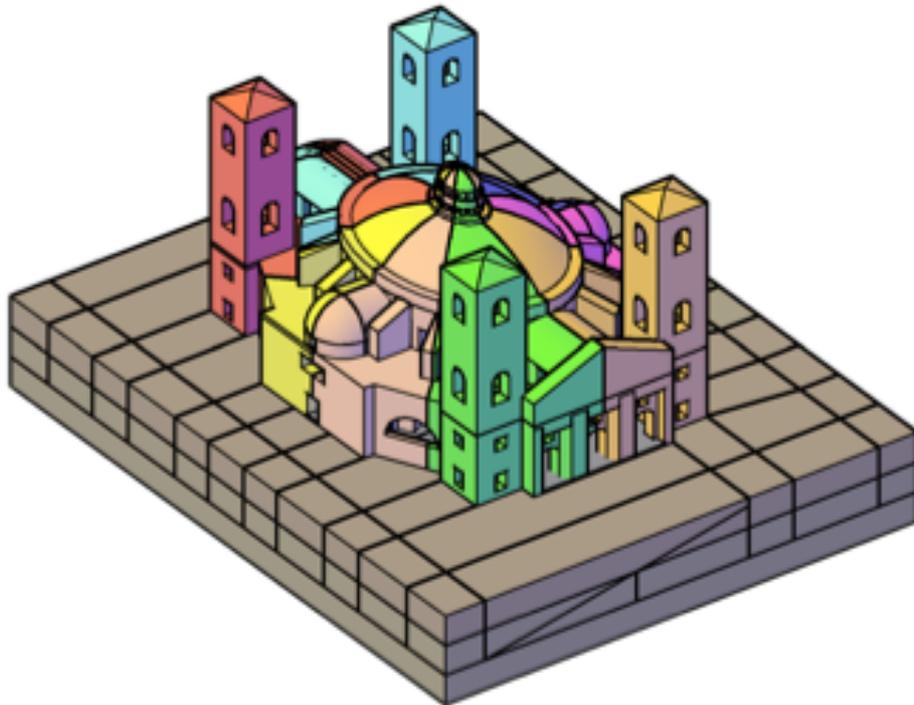


Figura 3.9 - Modello Vitozziano totale

### 3.3 Modello geometrico del Santuario di Vicoforte costruito

La geometria di questo Santuario vede rispecchiare il progetto Vitozziano fino al basamento. Quest'ultimo mostra differenze solamente nell'organizzazione interna degli spazi, in quanto non è più presente il secondo livello e di conseguenza il ballatoio che segue lo sviluppo della croce greca. Il tamburo di altezza 16 metri è irrigidito da 8 contrafforti di base trapezoidale di area circa 10 metri quadri, inoltre si notano finestre ovali e pseudo rettangolari che alleggeriscono la struttura. La cupola presenta un'altezza di circa 15 metri ed è composta da una doppia calotta, quella interna con forma più complessa rispetto quella esterna. La cupola in sommità presenta il lanternino anch'esso dotato di finestre. Si aggiungono all'intero Santuario quattro campanili di base quadrata con lato uguale a 8,5 metri ed altezza 24 metri.



Figura 3.10 - Santuario Vicoforte vista dall'alto <sup>[w18]</sup>

Per la realizzazione di questo modello geometrico si è tenuto conto di rilievi realmente svolti sulla struttura esistente, anche grazie all'utilizzo di strumenti all'avanguardia, successivamente restituiti in CAD, in modo da poter ottenere un modello veritiero.

Anche in questo caso sono state svolte le medesime divisioni in pianta ed in alzato, così come è stato fatto per il modello Vitozziano, in quanto sarà svolta l'operazione di calibrazione del modello, così da poter applicare in fase di analisi agli elementi finiti, dati reali di resistenza della struttura per ogni singolo comparto.

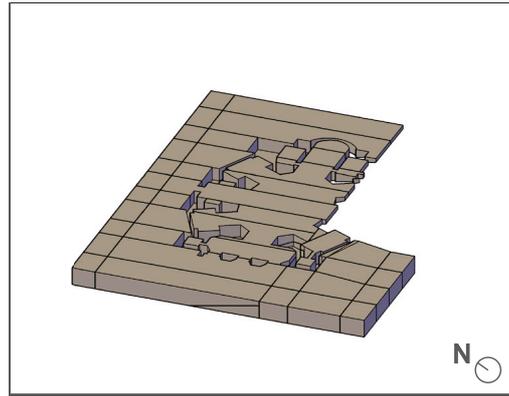
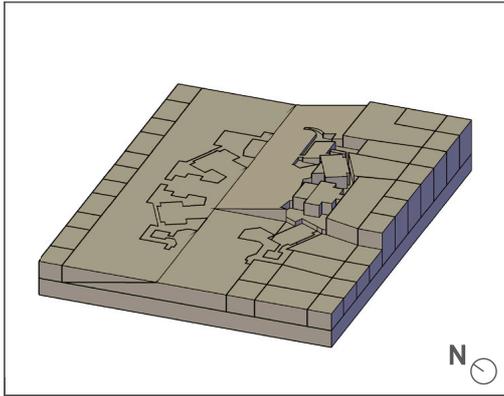


Figura 3.11 – SX: terreno Marna ; DX: terreno Limo

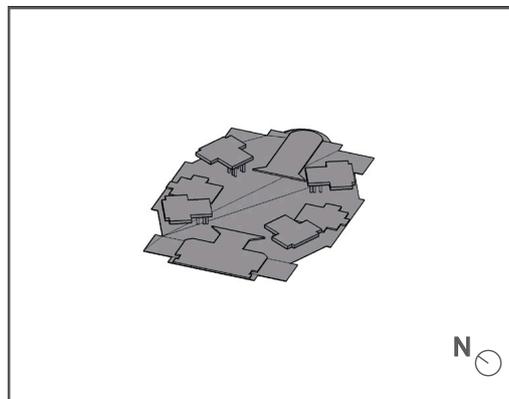
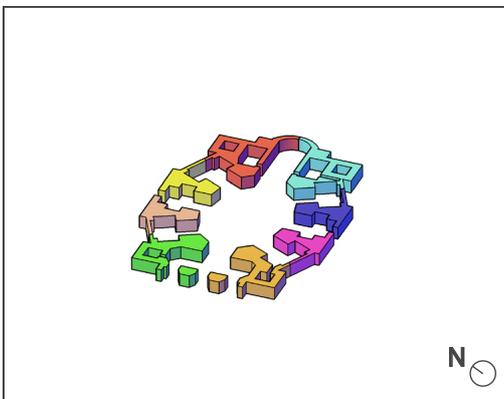


Figura 3.12 – SX: fondazione ; DX: pavimenti più colonne ed orizzontamenti

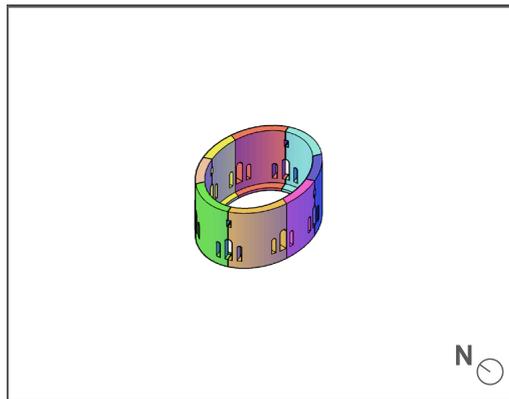
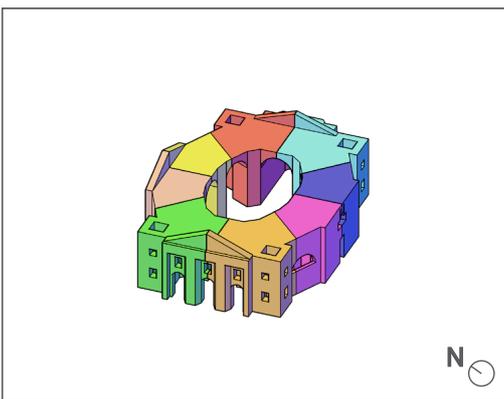


Figura 3.13 – SX: basamento ; DX: tamburo

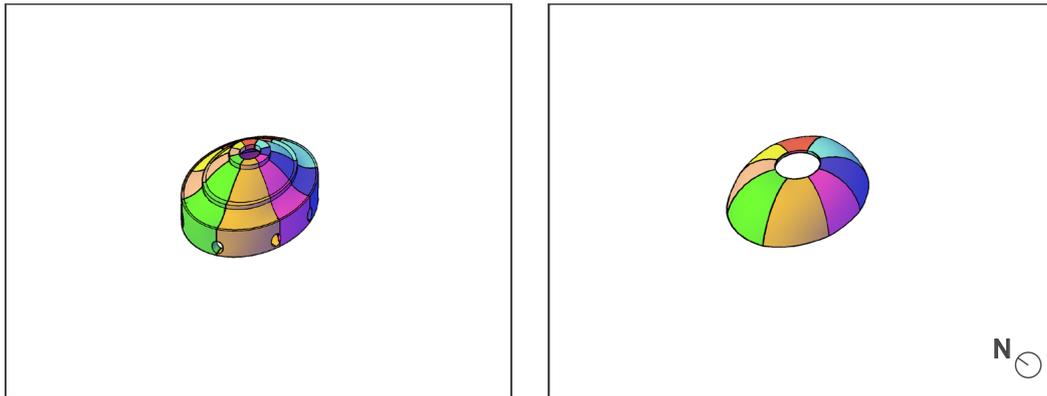


Figura 3.14 – SX: calotta interna cupola ; DX: calotta esterna cupola

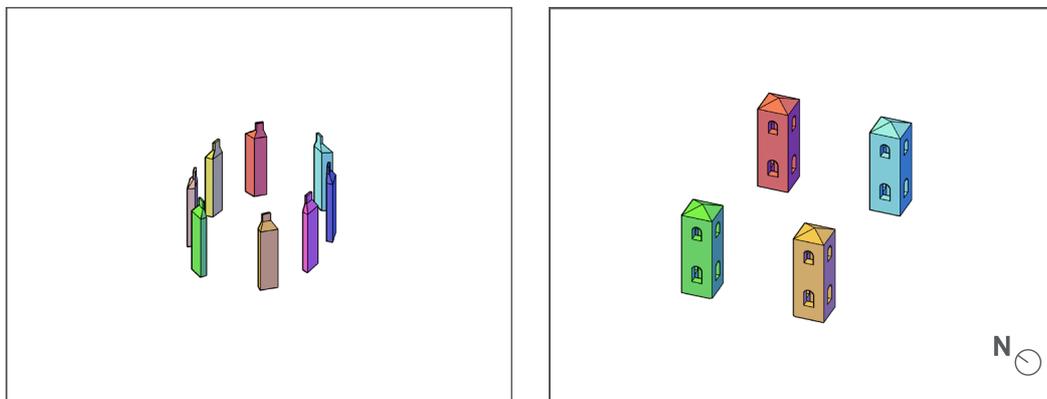


Figura 3.15 – SX: contrafforti ; DX: campanili

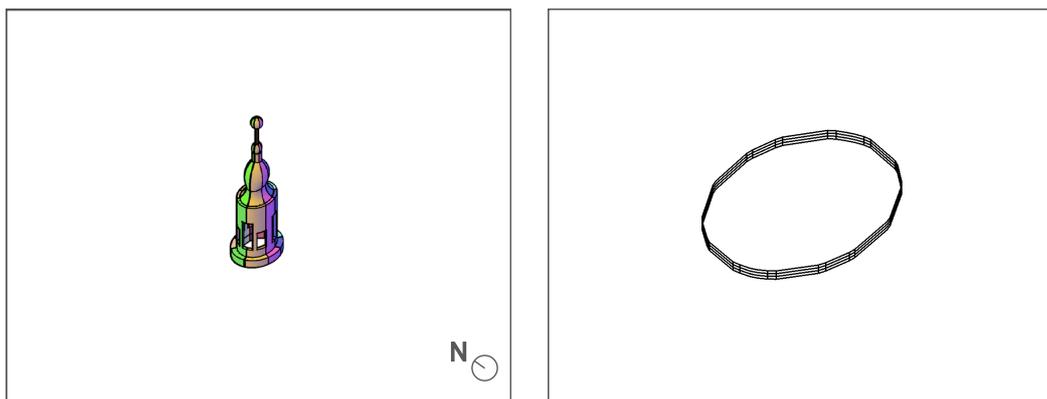
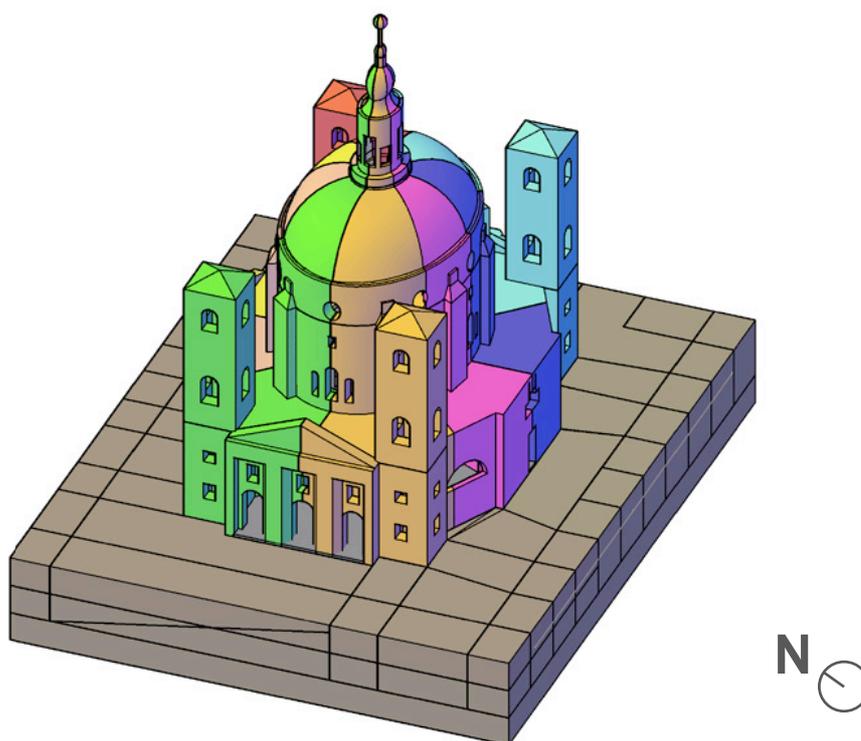


Figura 3.16 – SX: lanternino ; DX: cerchiaggio



*Figura 3.17 - Intero modello geometrico del costruito*

### 3.4 Confronto geometrico tra i due modelli

Come già detto, il progetto Vitozziano è stato realizzato fino all'altezza del basamento, poi per via della morte dell'architetto e forse per una progettazione non consona, sono state apportate modifiche a questo.

Si può notare dalle foto precedentemente elencate l'unica differenza nel basamento, ovvero l'inserimento del ballatoio che percorre totalmente il perimetro interno del Santuario. Passando al tamburo questo nel progetto Vitozziano ha un'altezza di circa 7,30 metri, invece nel modello realmente costruito, questa è stata incrementata fino a 16 metri circa, inoltre il Vitozziano ha notevoli aperture che influenzano in maniera rilevante il comportamento strutturale.

Nel modello attuale la resistenza del tamburo viene incrementata dalla presenza di otto contrafforti, con area alla base di circa 10 metri quadri per elemento, che circondano lo stesso e si sviluppano in tutta altezza. Differenti sono quelli progettati da Vitozzi, assumono una forma più snella, dove l'area alla base risulta essere

simile ma presenta inerzia diseguale. In totale si hanno dodici contrafforti uniti con quattro volte a botte locate lateralmente il transetto e la navata principale, incrementando la robustezza della struttura.

La cupola progettata da Vitozzi è composta da un'unica calotta in muratura con un sesto molto ribassato composta da asse maggiore e minore simili alla struttura costruita, ma altezza minore pari a circa 7 metri. Il progetto esecutivo svolto da Francesco Gallo invece, definisce una doppia cupola. La cupola interna realizzata in muratura con asse maggiore di 37,15 metri e minore di 24,8 metri, mentre l'altezza della sola cupola è circa il doppio del progetto Vitozziano. La calotta esterna, elemento solamente di copertura, è costruita in legno e rivestita da rame. Per il sostegno della calotta esterna sono stati posizionati una serie di elementi meridiani e paralleli in legno, in modo da concepire un reticolato su cui poggiare listelli sempre di legno. Inoltre, l'aggiunta di elementi verticali, ossia puntoni tra la struttura in muratura e quella in legno ha incrementato la stabilità della calotta.

Il lanternino è la struttura posta alla sommità della cupola che in entrambi i progetti presenta una pianta ellittica, così da rispettare la sezione orizzontale sia della cupola e sia dell'intera struttura, ma con altezze differenti. Vitozzi concepì un lanternino molto tozzo, viceversa Francesco Gallo optò per uno sviluppo prevalente in altezza. La funzione principale è quella di dare luce alla cupola stessa e all'interno del Santuario. Nel progetto Vitozziano si possono notare un numero notevole di aperture sia di forma circolare e sia rettangolare, invece nel Gallo si hanno aperture rettangolari in direzione degli assi principali e diagonali.

## 4 Modellazione meccanica

Il passo successivo alla modellazione geometrica, che corrisponde alla definizione delle geometrie principali della struttura in questione, è la modellazione meccanica. Tramite questa è possibile definire le varie caratteristiche strutturali e le rispettive condizioni al contorno in modo da eseguire analisi mediante software ad elementi finiti. L'introduzione della tecnologia all'interno del processo di analisi strutturale, mediante l'utilizzo di software di modellazione tridimensionale, rappresenta senza alcun dubbio una svolta nel campo ingegneristico, in termini di ottimizzazione di tempo e risorse. Grazie alla modellazione meccanica svolta da software si ha una semplificazione del lavoro di progettazione, diminuendo principalmente il rischio d'errore umano su progetti estremamente complessi e massimizzando il rendimento del progettista.

### 4.1 Cenni storici

Il metodo degli elementi finiti nacque di seguito la necessità di risolvere estremamente complessi di analisi strutturale.

Questa risoluzione venne utilizzata per la prima volta negli anni 1930 – 1935 con i lavori di Arthur Roderick Collar, scienziato e ingegnere inglese e W. J. Duncan che crearono una forma primitiva di elemento strutturale. Ma la nascita vera e propria e lo sviluppo del metodo FEM si colloca nella seconda metà degli anni '50 con il contributo fondamentale di M. J. Turner, che formulò e perfezionò il primo approccio agli elementi finiti nel campo continuo (Direct Stiffness Method).

### 4.2 Concetto di modellazione numerica

La modellazione numerica di strutture o di dettagli strutturali viene sviluppata con la precisione necessaria per descrivere il comportamento strutturale atteso. Vengono eseguite analisi lineari, non lineari, statiche e dinamiche. Il tipo di analisi e di elemento finito impiegato viene scelto nella fase iniziale in base alle

caratteristiche costruttive della struttura in questione, alla precisione delle informazioni disponibili ed agli obiettivi della modellazione stessa.

### 4.3 Funzionamento

Il metodo FEM (Finite Element Method) si applica a corpi fisici suddivisibili in un determinato numero di elementi di forma definita e dimensioni continue.

Un corpo tridimensionale nello spazio è formato da infiniti gradi di libertà e per la risoluzione occorre passare da un sistema continuo ad un sistema discreto, ciò avviene mediante la creazione di una maglia che prende il nome di “mesh”. Successivamente la fase di discretizzazione, la soluzione del problema è fornita dalla combinazione lineare di funzione chiamate “funzioni di base”.

Principalmente, il metodo agli elementi finiti viene utilizzato per risolvere problemi basati su leggi costitutive di tipo lineare. Tipici problemi di sforzo – deformazione in campo elastico. Un’ analisi più raffinata permette di analizzare il comportamento di materiali e struttura anche in campo non lineare, ipotizzando comportamenti di tipo plastico o visco – plastico.

### 4.4 Fasi per arrivare al modello

Le fasi fondamentali per ottenere un modello matematico sono le seguenti:

- Modellazione, in questa fase si passa dal sistema fisico ad un modello matematico, focalizzando l’attenzione su poche variabili aggregate di interesse e “filtrando” le rimanenti. Questo step può essere svolto tramite importazione della geometria da un software CAD 3D, oppure creando direttamente la geometria nel software FEM. Il primo metodo è la via principale da utilizzare, soprattutto per geometrie complesse. Il modello tridimensionale deve rispondere a determinate caratteristiche, come ad esempio deve essere “chiuso”, e/o semplificato, andando ad individuare particolari di piccole dimensioni al di sopra della struttura, in modo da trascurarli. Il secondo metodo invece consiste di usare il preprocessore,

ovvero uno dei tre componenti fondamentali di un software FEA. Questo corrisponde a quella parte del codice che permette di importare o creare le geometrie, generare mesh e imporre le condizioni al contorno. Utilizzando il preprocessore, direttamente nel software ad elementi finiti è possibile creare la geometria che dovrà essere esaminata, mediante molteplici comandi. L'utilizzo di quest'ultima tecnica è previsto solamente per strutture molto semplici dal punto di vista geometrico. Indifferentemente la metodologia scelta, il modello deve presentare determinate caratteristiche in termini di precisione e semplificazione, andando a definire le vere peculiarità della struttura in esame.

- Definizione di Materiali, si tratta di creare o scegliere direttamente nella libreria del software, il materiale con il quale è realizzata ogni singola parte della struttura. Definendo anche il tipo di approssimazione da utilizzare per il comportamento del materiale, ad esempio lineare oppure plastico.
  
- Definizione Condizioni al contorno e carichi, questa fase consiste nel definire quali parti del modello subiscano forze o spostamenti determinati dall'esterno (pressioni, momenti, inerzie, vincoli, ecc.). Si tratta di una delle fasi fondamentali nella corretta impostazione di un'analisi agli elementi finiti. L'affidabilità del calcolo è controllata dalle condizioni al contorno imposte dal progettista, infatti questa fase non è automatizzabile, ma occorre richiede l'intervento di un operatore. Le condizioni al contorno da imporre principalmente sono i vincoli e se presenti carichi agenti sulla struttura. Il sistema fisico se complesso viene suddiviso in sottosistemi, che a sua volta verranno suddivisi in elementi finiti ai quali verrà applicato un modello matematico. A differenza delle trattazioni analitiche è sufficiente che il modello matematico scelto sia adeguato alle geometrie semplici degli elementi finiti.
  
- Discretizzazione, ottenendo il passaggio da un numero infinito di gradi di libertà ad un numero finito. La discretizzazione, nello spazio e/o nel tempo

ha lo scopo di ottenere il passaggio da un modello continuo ad uno discreto caratterizzato da un numero finito di gradi di libertà. Gli aspetti principali che riguardo la generazione delle mesh, si focalizzano principalmente nella scelta del tipo di elemento da utilizzare come ad esempio tetraedri, quadratici, lineari, e nella loro dimensione, ma anche la metodologia di generazione delle mesh, in quanto si possono avere mesh strutturata o no, algoritmo di meshatura, densità e dimensione degli elementi, aumento della densità degli elementi in prossimità di dettagli geometrici, infatti incrementando il numero di discretizzazione, che corrisponde alla diminuzione della dimensione delle mesh, si avrà in questi elementi valori di comportamento che simulano con maggior precisione la realtà.

- Analisi, generalmente un codice FEA è composto da tre parti, il pre - processor, il Solutore, il Post – processor. Il primo entra in gioco nel momento in cui occorre settare il modello, definendo le condizioni al contorno, i materiali e costruzione delle mesh. Il solutore è il cuore del sistema, lo strumento in grado di risolvere la “matrice di rigidezza” del modello. Nei software più accurati è possibile fissare diversi parametri del solutore, ad esempio dal tipo di algoritmo per l’inversione della matrice, alla gestione del numero di CPU utilizzate nel calcolo. L’ultimo componente di un codice FEA, ovvero il Post – processor, è quella parte del codice che serve a navigare nel modello risolto e generare grafici e immagini di utilità pratica per il progettista. Esistono varie tipologie di analisi all’interno di un software FEA, come ad esempio analisi statica lineare, non lineare, oppure analisi degli autovalori ed autovettori. Una volta scelta la tipologia di analisi da svolgere e settati i parametri di questa, il software esegue la risoluzione del sistema di equazioni individuando il comportamento strutturale desiderato.
- Post – processing, al termine del calcolo, l’analista verifica i risultati, li confronta con quelli previsti e valuta se sono affidabili o meno. È basilare che l’analista sia anche un tecnico, in grado di calcolare manualmente,

secondo la teoria della Scienza delle Costruzioni, i valori attesi di tensione e deformazione in almeno un punto della struttura. Al termine della verifica è possibile ricavare grafici, immagini e valori delle varie grandezze di interesse, in modo da redigere il report, che conterrà i risultati di calcolo, la interpretazione degli stessi e i suggerimenti per il progettista.

#### 4.5 Modellazione meccanica del progetto Vitozziano

Per la modellazione meccanica del progetto Vitozziano si è optato l'utilizzo del software agli elementi finiti DIANA FEA 10.3. Questo è un software molto utilizzato nell'ingegneria, soprattutto per strutture tridimensionali modellate mediante elementi solidi.

##### 4.5.1 Importazione da AutoCAD in DIANA FEA

La prima fase è stata l'importazione del modello geometrico da AutoCAD in DIANA FEA. Seguendo il "work flow" tipico del software DIANA FEA, iniziando un nuovo progetto occorre definire i seguenti parametri:

- Tipo di Analisi: Strutturale
- Dimensione del modello: Tridimensionale
- Grandezza del modello: 1 *km*
- Tipo di mesh: tetraedrica/ triangolare
- Ordine mesh: Quadratico

Una volta aperto un nuovo progetto, si è svolta la fase di esportazione ed importazione dal programma CAD in DIANA tramite formato \*.iges.

In questo modo esportando elemento per elemento ed importando gli stessi si è arrivati ad ottenere l'intero modello sul software ad elementi finiti, suddiviso per layers.

#### 4.5.2 Definizione dei materiali

Sono stati definiti quattro tipologie di materiale:

Marna, è una roccia sedimentaria, di tipo terrigeno, composta da una frazione argillosa e da una frazione carbonatica data generalmente da carbonio di calcio oppure da carbonato doppio di magnesio e calcio. Dotato di notevoli caratteristiche strutturali in termini di portanza.

Limo, è un inerte di granulometria fine, compreso tra quello delle sabbie, più grosso, e quello delle argille, più sottile, che viene trasportato in sospensione dai fiumi e si deposita sul letto dei corsi d'acqua o sui terreni che hanno subito inondazione. Dal punto di vista geotecnico, il limo non possiede coesione e pertanto non ha un comportamento plastico.

La muratura è un materiale disomogeneo, per la presenza di blocchi pieni o forati e giunti di malta. È possibile schematizzarlo come un materiale globalmente omogeneo ma anisotropo per la resistenza e deformabilità.

Il laterizio è caratterizzato da un comportamento elasto – fragile sia a trazione che a compressione. All'aumentare del tempo di cottura, i laterizi incrementano la resistenza ma diminuiscono la duttilità. Il comportamento della malta è fortemente influenzato dal legante impiegato e dal dosaggio.

Per stati di sollecitazione pluriassiale, sia la malta che il laterizio possono essere adeguatamente descritti dal Criterio di Mohr – Coulomb:

$$|\tau| \leq c - \sigma \tan \phi$$

Dove:

$c$  è la coesione naturale del materiale

$\phi$  è l'angolo di attrito interno del materiale

$\sigma$  è la tensione ed è assunta positiva se di trazione

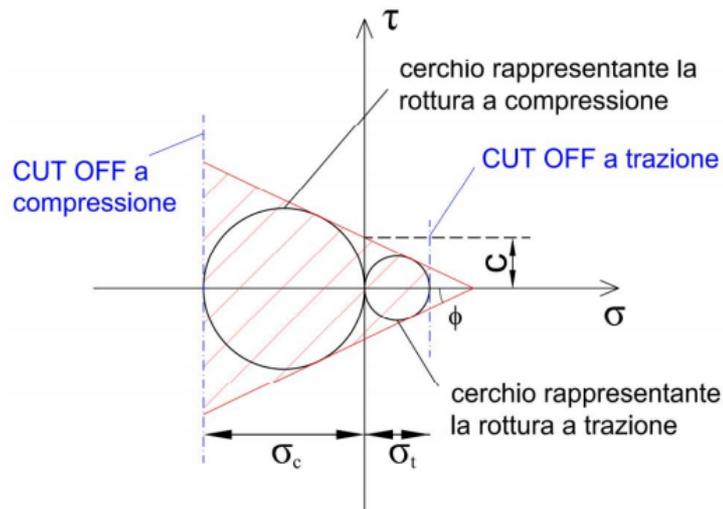


Figura 4.1 - Dominio Mohr – Coulomb [w19]

Dal dominio  $\sigma - \tau$  di Mohr – Coulomb si osserva che i punti che soddisfano il criterio sono quelli di coordinate  $(\sigma, \tau)$  ricadenti nell'area di colore rosso, ovvero all'interno delle due rette inclinate di  $\phi$ . Le due circonferenze, invece, rappresentano la rottura per compressione e trazione monoassiale, dove le tensioni corrispondenti sono:

$$\sigma_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad \sigma_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

Il comportamento della muratura risente le caratteristiche dei materiali che la compongono, come la diversa deformabilità di malta e laterizio, responsabile di stati tensionali in genere pluri – assiali che ne rendono complesso il comportamento, ma anche la presenza di direzioni preferenziali nel materiale, conferendo alla muratura un carattere fortemente ortotropo, per cui la resistenza non dipende solo dall'entità dei carichi applicati ma anche dalla loro direzione.

Per questi motivi, si tende a modificare il dominio di resistenza mediante l'utilizzo di una tensione limite a trazione ridotta rispetto quella definita dal dominio di Mohr – Coulomb. Inoltre, si opta per il cambiamento di comportamento del materiale, passando da ortotropo a isotropo “conservativo”, assumendo per  $\phi$  e  $c$  un valore

che tenga conto dei minimi raggiunti studiando il comportamento del materiale al variare dell'orientamento delle tensioni principali rispetto alla direzione dei corsi di mattoni (Contro e Nova 1983).

Il comportamento della muratura inoltre, può essere descritto anche dal criterio di Durcker e Prager. Questo è un criterio analogo a quello di Coulomb, ma basato su grandezze medie degli sforzi, tramite approccio simile utilizzato nel criterio di Von Mises. Il criterio di Durcker e Prager risulta essere:

$$\tau_m = c_{DP} - \mu_{DP}\sigma_m$$

Dove  $c_{DP}$  e  $\mu_{DP}$  sono rispettivamente, la coesione e il coefficiente di attrito interno. Nel riferimento principale il criterio si pone nella forma:

$$\sqrt{(s_I - s_{II})^2 + (s_I - s_{III})^2 + (s_{III} - s_{II})^2} = c' - \frac{\mu'}{3}(s_I + s_{II} + s_{III})$$

Dove  $c'$  e  $\mu'$  sono due parametri da determinare sperimentalmente equivalenti a  $c_{DP}$  e  $\mu_{DP}$ .

L'equazione precedente descritta definisce nello spazio delle tensioni principali la superficie laterale di un cono con vertice in  $s_I = s_{II} = s_{III} = c'/\mu'$  nell'ottante positivo, ovvero l'ottava parte dello spazio euclideo. I parametri possono essere correlati alle resistenze monoassiali, infatti si afferma che la trazione monoassiale è uguale a:

$$\sigma_t = \frac{3c'}{3\sqrt{2} + \mu'}$$

Invece, la compressione monoassiale:

$$\sigma_c = \frac{3c'}{3\sqrt{2} - \mu'}$$

Da cui si ottiene il vincolo:

$$\mu' \leq 3\sqrt{2}$$

Il criterio di Drucker e Prager presenta simile limite del criterio di Coulomb, ovvero quello di esprimere la rottura a trazione come effetto di scorrimento. Il criterio viene utilizzato quando è richiesta la regolarità della superficie limite, perché presenta vantaggi in termini analitici e computazionali.

I meccanismi di collasso principali della muratura sono:

Scorrimento dei giunti, rottura molto frequente nelle murature di mattoni resistenti e giunti relativamente deboli.

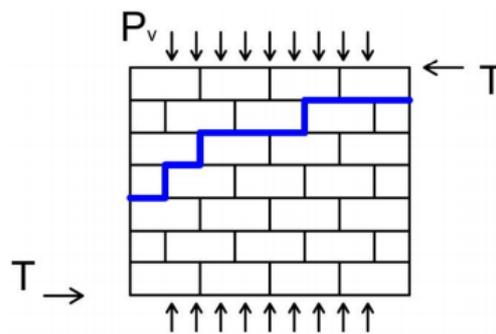


Figura 4.2 - Meccanismo di collasso: Scorrimento dei giunti [w19]

Fessurazione dei blocchi, causata dal cedimento per trazione del blocco, Generalmente coinvolge la parte centrale del pannello, L'inclinazione della fessura dipende dal rapporto tra le componenti verticali ed orizzontali dei carichi applicati.

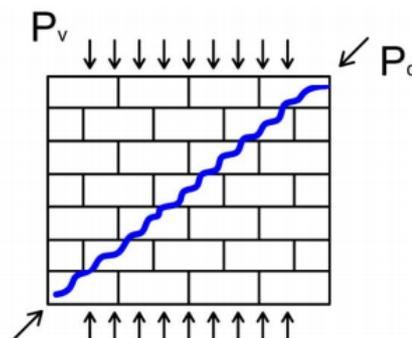


Figura 4.3 - Meccanismo di collasso: Fessurazione dei blocchi [w19]

Meccanismo combinato, la lesione segue in generale la diagonale del pannello, Essa interessa sia il giunto che il mattone. È un collasso che in genere si verifica quando la malta ed il mattone hanno resistenze paragonabili. È un tipo di rottura che interessa in genere le murature per un'ampia variabilità di combinazioni di carico.

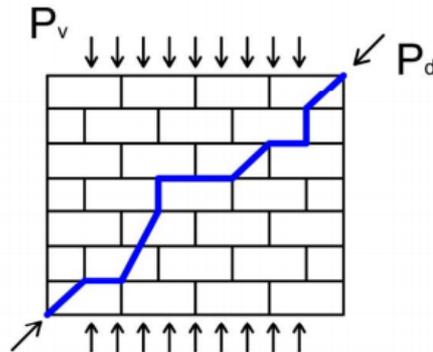


Figura 4.4 - Meccanismo di collasso: Combinato <sup>[w19]</sup>

Schiacciamento in prossimità del punto di applicazione del carico, è una rottura localizzata dovuta in genere ad un'applicazione di carichi puntuali con entità maggiore della resistenza a compressione della muratura.

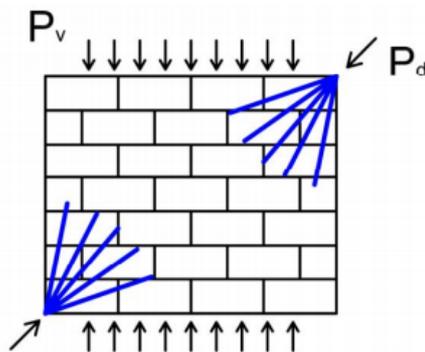


Figura 4.5 - Meccanismo di collasso: Schiacciamento <sup>[w19]</sup>

Le proprietà fondamentali in base alle quali si classifica una muratura sono la resistenza caratteristica a compressione  $f_k$ , la resistenza caratteristica a taglio in assenza di azione assiale  $f_{VK0}$ , il modulo di elasticità normale secante  $E$ , il modulo di elasticità tangenziale secante  $G$ .

Le resistenze caratteristiche  $f_k$  e  $f_{VK0}$  sono determinate o per via sperimentale su campioni di muro o, con alcune limitazioni, in funzione delle proprietà dei campioni.

L'ultimo materiale definito è il marmo, per il pavimento, è una roccia metamorfica composta prevalentemente da carbonato di calcio.

Attraverso l'utilizzo di questi materiali sono state svolte diverse analisi, andando a comprendere i cari comportamenti lineari e non della struttura.

#### 4.5.3 Discretizzazione elementi

Il software DIANA presenta una grande varietà di elementi utilizzabili come solidi, membrane, piastre, gusci, ecc. che possono essere combinati in modo da definire elementi finiti. Nel caso studio sono stati utilizzati elementi solidi per la modellazione, siccome usualmente sono adoperati per modellare e analizzare strutture complesse. Il modello meccanico del progetto Vitozziano è caratterizzato da un numero di elementi solidi pari a 115.

Per la discretizzazione dei vari elementi solidi è stato adottata una mesh quadratica di dimensione 1,5 metri, in modo da captare il comportamento con giusta accuratezza in funzione della potenza del programma utilizzato. Di seguito si riporta il modello discretizzato, composto da un numero di mesh uguale a 86107.

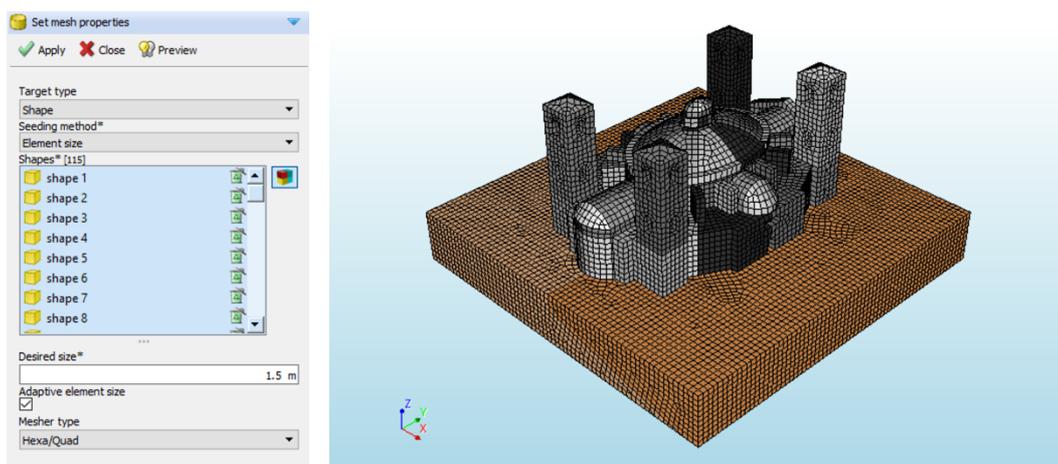


Figura 4.6 – SX: finestra set mesh proprieties ; DX: Modello Vitozziano discretizzato

#### 4.5.4 Definizione delle condizioni al contorno

##### *Vincoli*

Il modello in questione si può dividere essenzialmente in due macro – gruppi, la struttura ed il terreno. Il primo risulta essere vincolato al terreno mediante gli elementi di fondazione, creando uno stato tensionale in funzione della rigidezza del terreno e dei piloni di fondazione, bloccando sei gradi di libertà. Per quanto riguarda il terreno, tenendo conto di una dimensione finita di esso in termini di larghezza, lunghezza e profondità, si procede a vincolare tutti i gradi di libertà alla base dell'elemento citato, invece nelle pareti perimetrali solamente i gradi di libertà nel piano orizzontale. In questo modo si ottiene un comportamento consono a quello reale.

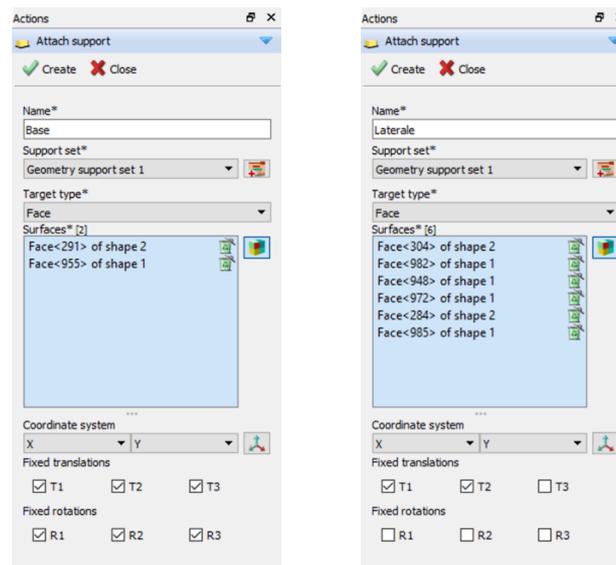


Figura 4.7 - SX: vincoli base terreno ; DX: vincoli laterle terreno

##### *Carichi*

Le analisi che si svolgeranno sul modello Vitozziano sono, l'Analisi Statica Lineare ed Analisi Statica Non Lineare. Per indagare sulla statica del modello, si è considerato solamente il peso proprio della struttura, tenendo conto dell'accelerazione di gravità  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

#### 4.5.5 Individuazione volume significativo di terreno

Prima di eseguire le varie analisi sul modello, è stata svolta l'individuazione del volume significativo, ovvero il volume di terreno che risente dalla presenza del Santuario. Questo è stato scelto in modo da non alterare il comportamento della struttura. In quanto un volume di terreno di piccole dimensioni vincola in maniera più rigida il Santuario, invece utilizzando un terreno di dimensioni spropositate genera un dispendio di tempo nello svolgimento delle analisi.

Per quanto riguarda la profondità di questo si è richiamato il Problema di Boussinesq, cioè le tensioni indotte da un carico verticale concentrato in superficie. Il matematico francese, nel 1885, fornì la soluzione analitica del problema: tensioni e deformazioni indotte da una forza applicata ortogonalmente sulla superficie di un semispazio ideale, continuo, omogeneo, isotropo, elastico lineare e privo di peso.

Con riferimento allo schema della figura successiva, le tensioni indotte in un generico punto di tale semispazio valgono:

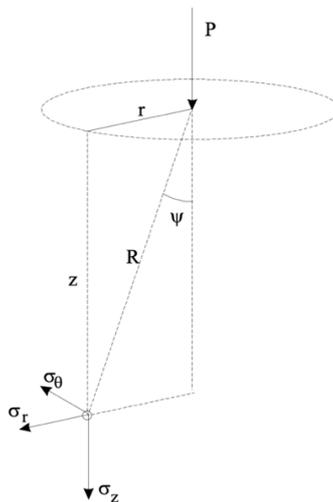


Figura 4.8 - Carico concentrato, problema di Boussinesq <sup>[w20]</sup>

$$\sigma_z = \frac{3P z^3}{2\pi R^5}$$

$$\sigma_r = -\frac{P}{2\pi R^2} \left[ -\frac{3r^2 z}{R^3} + \frac{(1-2\nu)R}{(R+z)} \right]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \left[ \frac{z}{R} - \frac{R}{(R+z)} \right]$$

$$\tau_{rz} = \frac{3P z^2 r}{2\pi R^5}$$

Dove:

$$R^2 = r^2 + z^2$$

Si osserva che l'equazione  $\sigma_z$ , che permette di calcolare la tensione verticale indotta, non contiene il coefficiente di Poisson,  $\nu$ . Questo dovuto alla neutralità della deformazione trasversale del terreno dovuto all'applicazione di un carico monodirezionale longitudinale.

La distribuzione delle tensioni verticali su un piano orizzontale alla profondità  $z$  dal piano di campagna è una superficie di rivoluzione avente forma di una campana, simile alla curva gaussiana, il cui volume è pari al carico applicato in superficie. Al crescere di  $z$  la campana è sempre più estesa e schiacciata. A profondità  $z = 0$  m, la campana degenera in una tensione infinita su un'area infinitesima, ovvero nel carico applicato  $P$ .

Poiché per l'ipotesi di elasticità lineare è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione di Boussinesq è stata integrata per ottenere le soluzioni elastiche relative a differenti condizioni di carico applicato in superficie.

Si procede ad individuare il carico trasmesso dell'area di impronta della fondazione, con precisione degli otto piloni di cui solamente due poggianti su marna e i restanti su limo.

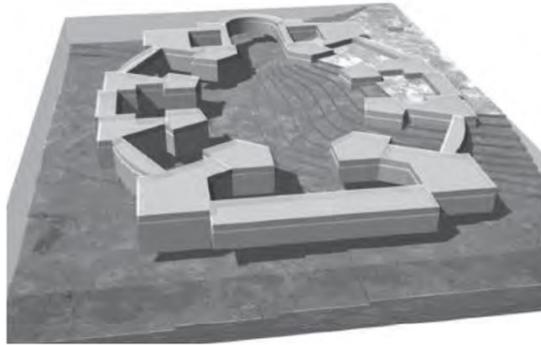


Figura 4.9 - Fondazione progetto Vitozziano [w21]

Riportando la tabella delle aree di impronta dei singoli piloni, è possibile stimare un'area media con cui stimare il raggio equivalente che verrà utilizzato nell'individuazione della  $\sigma_z$ .

$$A = \pi r^2 \rightarrow r_{medio} = \sqrt{A/\pi}$$

<b>Raggio medio fondazione</b>			
Elemento	Area [m <sup>2</sup> ]	Area media [m <sup>2</sup> ]	Raggio medio [m]
Fondazione N1	43,00	42,00	3,66
Fondazione N E	41,00		
Fondazione SE	41,00		
Fondazione S1	43,00		
Fondazione S2	43,00		
Fondazione SO	41,00		
Fondazione NO	41,00		
Fondazione N2	43,00		

Tabella 1 – Individuazione raggio medio della fondazione

Nel calcolo della tensione verticale  $\sigma_z$  trascuriamo l'effetto indotto dal terreno siccome lo stato tensionale viene variato solamente dall'applicazione del carico dovuto dalla struttura e non dalla marna e limo già esistenti in passato.

Applicando la formulazione di Boussinesq per il calcolo della tensione verticale:

$$\sigma_z = \frac{3P z^3}{2\pi R^5}$$

E rappresentando tale andamento in funzione della profondità  $z$  e del rapporto  $\sigma_z/P$ , si ha:

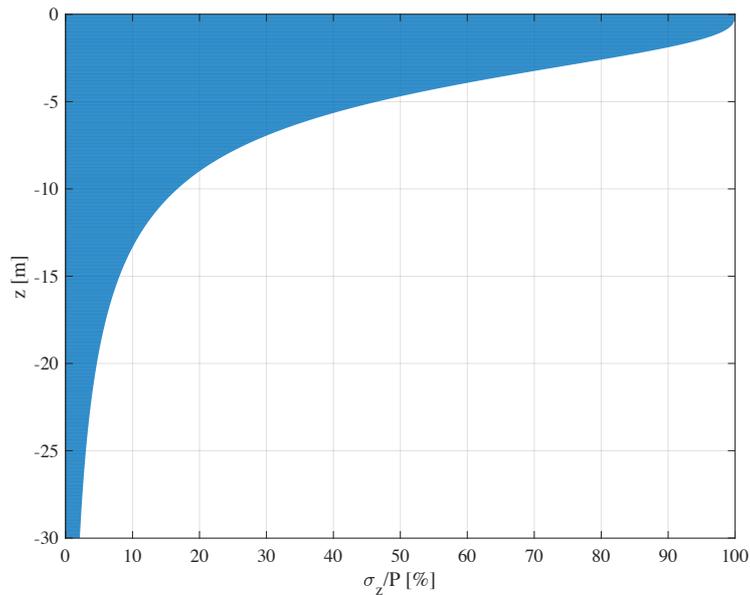


Figura 4.10 - Andamento tensioni indotte da un carico verticale concentrato in superficie

Si osserva una diminuzione notevole della tensione già ad una profondità di 10m, ma sapendo che è possibile ritenere nulle tali tensioni se vale il seguente rapporto:

$$\frac{\sigma_z}{P} \leq 10\%$$

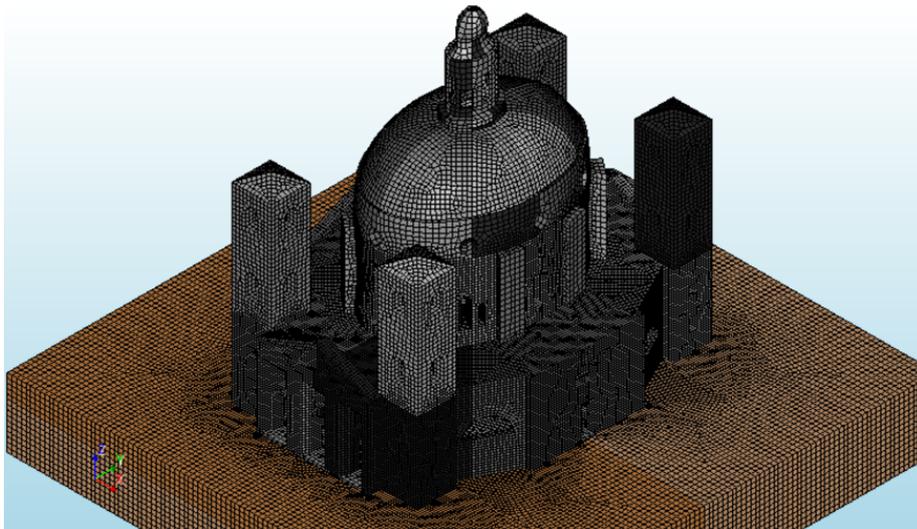
Si sceglie come profondità del volume significativo  $z = 15 \text{ m}$ , dove si associa il rapporto:

$$\frac{\sigma_z}{P} = 8,86\% \leq 10\%$$

#### 4.6 Modellazione meccanica del costruito

La modellazione meccanica del Santuario di Vicoforte corrispondente al progetto costruito è stata svolta parallelamente alla modellazione del progetto Vitozziano ma da parte del tesista Mohamed Dabdoub, dove il suo lavoro di tesi è focalizzato nella calibrazione di tale modello grazie a dati realmente rilevati sulla struttura, mediante accelerometri.

Sono stati settati stessi parametri in entrambi i modelli numerici, in modo da poter ottenere un riscontro in termini di risposta strutturale, dove la differenza di comportamento è dovuta solamente alle variazioni geometriche tra i due progetti. Per completezza si riporta di seguito il modello meccanico del Santuario di Vicoforte.



*Figura 4.11 - Modello discretizzato Santuario di Vicoforte attuale*

## **5 Le analisi a sostegno delle problematiche**

Una volta ottenuto il modello meccanico sia del Santuario di Vicoforte e sia del progetto Vitozziano, si è passati allo svolgimento dello studio strutturale tramite analisi. L'obiettivo imposto sul progetto Vitozziano è la determinazione del comportamento strutturale di un edificio caratterizzato dalla presenza di una cupola con un sesto molto ribassato, andando ad investigare la modalità di progettazione dell'architetto, definendo se questa fosse stata davvero studiata secondo le teorie della scienza delle costruzioni o realizzata solo per propaganda, in quanto l'architetto già sapeva di andare incontro ad un'impresa titanica che non avrebbe mai visto terminare, così come è accaduto. Tramite il modello meccanico Vitozziano, sono stati svolti due studi, innanzitutto l'analisi statica lineare in modo da comprendere le peculiarità e singolarità della struttura per poi passare all'analisi statica non lineare ottenendo valori di deformazione e tensione. Passando invece al modello del Santuario di Vicoforte attuale, come finalità ha la determinazione del comportamento strutturale futuro, dovuto ad un incremento di cedimento differenziale in fondazione. Questa scelta è dovuta dalla presenza continua di deformazioni del terreno che hanno causato la nascita di un quadro fessurativo nella struttura, già prima la sua ultimazione e tutt'oggi in continua evoluzione. Per ottenere ciò, si è svolta l'analisi statica non lineare, imponendo un valore di cedimento definito successivamente uno studio probabilistico attuato su una serie di valori ricavati tramite monitoraggio.

Le analisi sono state svolte in modo automatico mediante l'utilizzo del software DIANA FEA, andando a settare i parametri principali per ogni tipologia di analisi e la scelta della modalità di risoluzione che propone il programma stesso. Al termine di ognuna di queste è stato possibile stilare il report, includendo le caratteristiche della struttura dal punto di vista geometrico, della discretizzazione, i carichi applicati, vincoli e risultati finali in termini di deformazioni e tensioni.

## 5.1 Analisi Statica Lineare applicata sul modello Vitozziano

Questo genere di analisi consente un preliminare studio della struttura nella sua globalità con oneri computazionali non elevati, in modo da ottenere informazioni sul comportamento strutturale globale in esercizio con le quali poter eseguire azioni di confronto con le analisi successive.

Tramite l'analisi elastica lineare è possibile ricavare l'andamento delle tensioni in modo da localizzare eventuali zone di singolarità nella struttura, ovvero zone con rilevanti tensioni e deformazioni.

Questa analisi prevede l'approssimazione ad un comportamento elastico – lineare per i materiali. Riferendosi così ad un materiale che sottoposto ad uno stato di stress, subisce una deformazione elastica, proporzionale alla tensione stessa secondo un fattore di proporzionalità  $E$  che prende il nome di Modulo di Young oppure Modulo Elastico. La relazione che lega tensione e deformazione è la seguente:

$$\sigma = E \epsilon$$

Attraverso un comportamento del materiale elastico e lineare, al cessare dell'applicazione del carico la deformazione sviluppata verrà totalmente recuperata. Nel caso in esame, l'ipotesi di un comportamento del genere per il materiale murario non è estremamente corretta, ma tramite l'analisi statica lineare si affronta uno studio preliminare in modo da ottenere risultati basilari riguardante la distribuzione delle tensioni e deformazioni all'interno degli elementi solidi del modello.

### 5.1.1 Svolgimento Analisi Statica Lineare

Sul software DIANA FEA, successivamente l'operazione di discretizzazione del modello Vitozziano, si è ottenuto il modello numerico, ovvero il punto di partenza per lo svolgimento delle analisi. Il passaggio fondamentale è la definizione delle caratteristiche dei materiali. In questa prima analisi, si assume un comportamento elastico lineare, dove i valori di rigidità sono stati definiti sulla base di modelli

preliminari calibrati. Di seguito si riportano i materiali adoperati con le rispettive caratteristiche.

<b>Materiali comportamento elastico lineare</b>				
Elementi	Materiale	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Limo	Terreno	0,75	0,35	1900,00
Marna	Terreno	5,60	0,35	2100,00
Fondazione	Muratura	2,00	0,35	1800,00
Basamento	Muratura	2,00	0,35	1800,00
Tamburo	Muratura	2,30	0,35	1700,00
Contrafforti	Muratura	5,50	0,30	1700,00
Coperture	Muratura	5,50	0,30	1700,00
Cupola	Muratura	5,50	0,35	1800,00
Lanternino	Muratura	5,60	0,35	1800,00
Campanili	Muratura	4,50	0,35	1800,00

*Tabella 2 - Proprietà materiali con comportamento elastico lineare*

Nella definizione dei materiali, DIANA FEA permette la scelta della classe di ogni singolo elemento. Il software propone “Structural solid” cioè elementi caratterizzati da stress tridimensionale, carico arbitrario forma pressoché cubica. Usualmente viene scelta questa metodologia per strutture voluminose e masse di terreno, mentre la seconda tipologia è “Rubber element” ovvero comportamento altamente deformabile simile ad una gomma, utilizzati prevalentemente per scopi non lineari con iperstaticità. Il sistema inserisce un grado di libertà in termini di pressione aggiuntiva in ogni nodo che viene trascurato nei risultati finali.

Lo step successivo è quello del settaggio dell’analisi da svolgere. Innanzitutto, occorre selezionare nella command windows “add an analysis”, in questo modo è possibile scegliere tra le varie tipologie proposte dal software. Nel nostro caso occorre selezionare “structural linear analysis”.

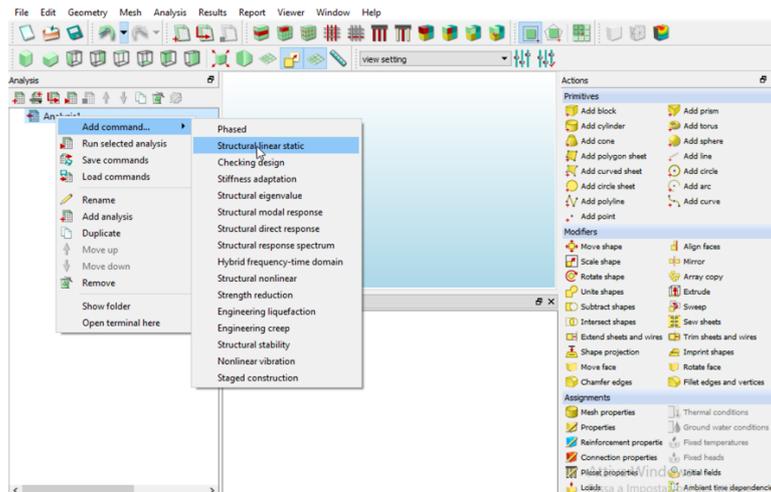


Figura 5.1 - Settaggio analisi statica lineare

Una volta aggiunta l'analisi si procede con settare i parametri in termini di precisione, risoluzione del sistema di equazioni ed output dei risultati.

Le proprietà di precisione del modello vengono definite in funzione della tolleranza del grado angolare imposta uguale a  $0.349066 \text{ rad}$  e tolleranza assoluta degli elementi assemblati uguale a  $1 \times 10^{-6}$ .

DIANA FEA può risolvere il sistema di equazioni attraverso quattro metodologie differenti:

- 1) Metodo di risoluzione Intel PARDISO, ovvero solutore "Parallel Direct Sparse". Questo è il metodo predefinito dal software, ma dal punto di vista pratico, risulta essere nettamente efficiente nel momento in cui il modello è composto da un numero notevole di elementi shell curvi, in quanto il software è in grado di gestire all'interno della matrice di rigidezza il differente ordine di contributi delle rotazioni e traslazioni.
- 2) Metodo di risoluzione sparsa di Cholesky, questa metodologia prevede la scelta autonoma da parte del software DIANA FEA della procedura ottimale per la risoluzione del sistema di equazioni basata nella fase iniziale sul metodo Sparse Cholesky.

- 3) Metodo di risoluzione iterativo, utilizzato esclusivamente per modelli composti da un numero di solidi maggiore di 100 mila unità. Risulta essere altamente efficace siccome modelli del genere hanno un'ottima condizione numerica e questa metodologia fornisce la soluzione con un utilizzo minimo della memoria in tempistiche essenziali.
- 4) Metodo di risoluzione diretta di Gauss, tramite la ripetizione continua di sostituzione di equazione con la combinazione lineare della stessa e di un'altra equazione, in modo da trasformare il sistema assegnato in un sistema a matrice triangolare superiore, individuando la soluzione del sistema di equazioni tramite una backward substitution, ovvero sostituzione a ritroso.

Nel caso in esame, siccome il modello è costituito da un numero di elementi solidi uguale a 115, quindi, un numero minimo si è scelta come metodologia di risoluzione la predefinita, ovvero il metodo di risoluzione Intel Pardiso.

L'output dei risultati permette di determinare in che modo ottenere i valori individuati dalla risoluzione del sistema di equazioni. È possibile scegliere tra metodologie tabulated, midas FX + for DIANA, DIANA native e Femview. Tramite la prima modalità, il software produce delle tabelle andando a specificare per ogni elemento, spostamento, deformazione, sollecitazione ecc. Utilizzando midas FX + for DIANA, il software crea un file output predefinito per lo svolgimento di analisi non in DIANA ma tramite midas FX, viceversa per DIANA native, utilizzato per il post processing interattivo dei risultati dell'analisi con DIANA IE. L'ultima metodologia permette di ottenere output dei risultati con iDIANA.

Terminato il settaggio dei parametri è possibile procedere alla determinazione delle nostre incognite tramite il comando "run analysis". Il software DIANA FEA procede con l'elaborazione di differenti attività. Innanzitutto, esegue la valutazione del modello, ovvero durante questa fase vengono verificate le definizioni assegnate ad ogni singolo elemento, nello specifico le caratteristiche geometriche e le

proprietà dei materiali, per poi passare ai gradi di libertà e la matrice di rigidezza del singolo elemento. Concludendo con l'applicazione dei vettori di carico. La fase centrale dell'analisi è la risoluzione del sistema di equazioni generato precedentemente tramite la metodologia preimpostata. Terminando con i valori di output.

## 5.2 Risultati Analisi Statica Lineare modello Vitozziano

Di seguito vengono riportati i risultati dello studio preliminare del comportamento strutturale del modello Vitozziano. Grazie all'utilizzo di elementi solidi è possibile ricavare l'andamento delle tensioni e deformazioni all'interno di ogni singolo elemento, valutando la risposta strutturale in termini elastici e lineari.

I risultati dell'analisi svolta, sono ottenuti considerando solamente il contributo del peso proprio strutturale. In primis, è possibile descrivere il comportamento della struttura rispetto la tensione verticale  $\sigma_{ZZ}$ .

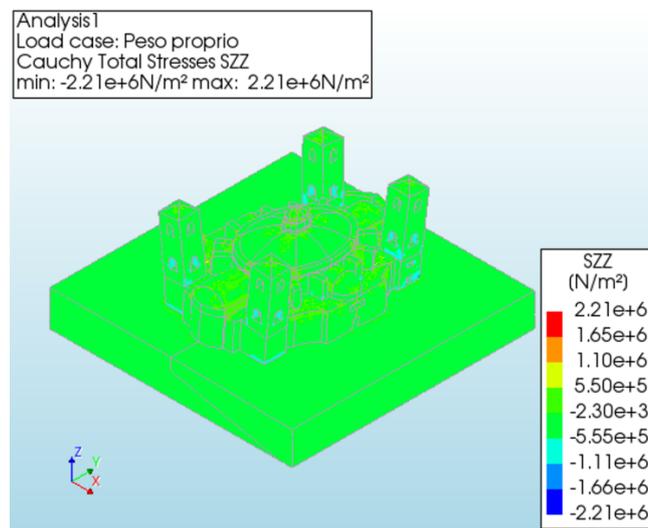


Figura 5.2 - Analisi statica lineare, distribuzioni tensioni in direzione Z

Si ottiene uno stato di tensione abbastanza moderato dovuto all'elevato peso proprio del Santuario. Analizzando la struttura questa è per la maggior parte soggetta a tensioni di compressione dovute al peso di ogni singolo elemento modellato. Si possono notare punti con una determinata singolarità come ad

esempio alla base della struttura, siccome il carico che grava è nettamente maggiore. Nella distribuzione di tensioni verticali si determinano zone con comportamento a trazione, locate prima di tutto nella parte alta della cupola, causate dalla presenza del lanternino e per simile effetto, si hanno zone di trazione situate nella copertura del basamento, questa volta causate dal notevole peso del sistema tamburo - cupola. Le volte a botte sono soggette a compressione, ma presentano trazione al di sotto del piano d'imposta compreso i piedritti.

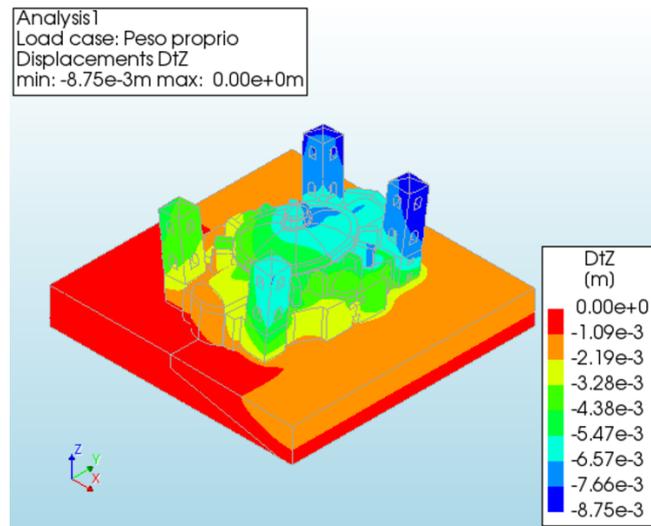


Figura 5.3 - Analisi statica lineare, spostamenti in direzione Z

Riguardo gli spostamenti della struttura nella direzione Z, sono principalmente negativi ovvero la struttura tende a sprofondare nel terreno a causa del suo peso. Nella rappresentazione precedentemente inserita, si nota come la differenza di caratteristiche strutturali del terreno comporta valori di spostamento totalmente differenti nello sviluppo della struttura. Il valore massimo di questo si presenta nei campanili posti nella facciata principale, siccome è la zona che dista maggiormente dalla marna. Infatti, avvicinandoci alla zona retrostante della struttura si hanno cedimenti minori.

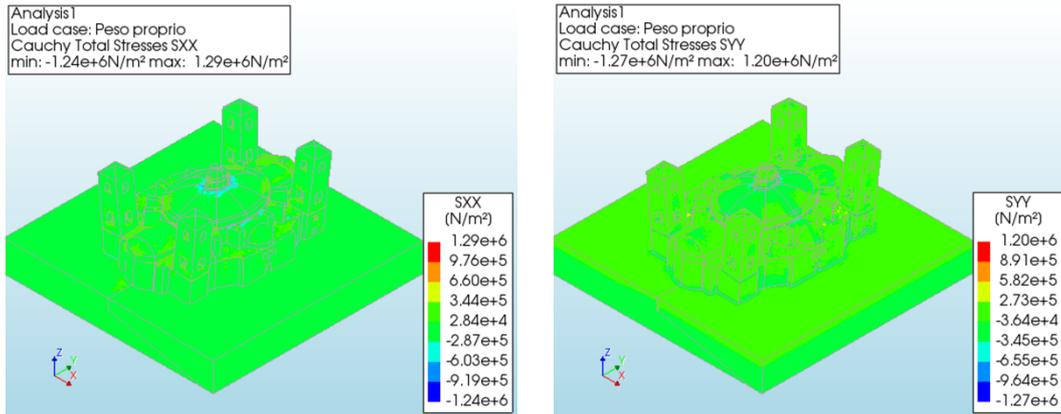


Figura 5.4 - Analisi statica lineare, SX: tensioni in direzione X ; DX: tensione in direzione Y

Lo stato tensionale nella direzione X e nella direzione Y assume comportamento uguale ma intensità differente, in quanto le geometrie della struttura seguono l'andamento ellissoidico. Si nota che prevalentemente in entrambe le direzioni vi è uno stato tensionale di compressione, soprattutto nella zona in sommità della cupola.

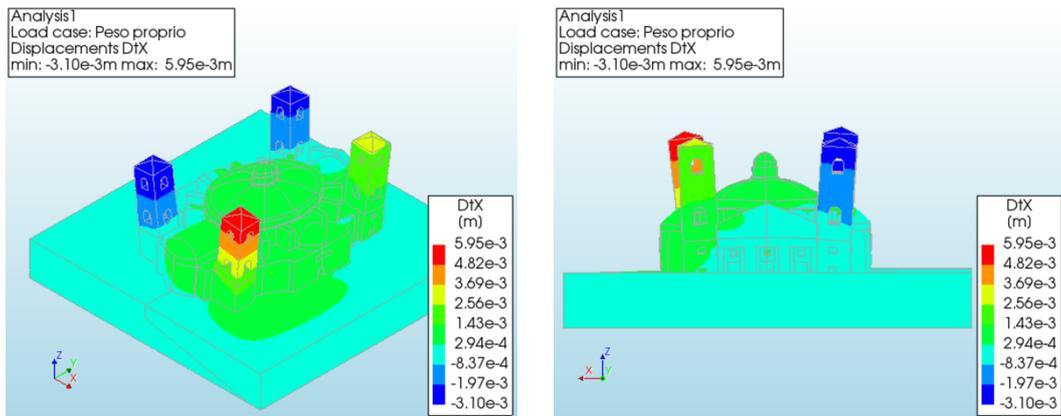


Figura 5.5 - Analisi statica lineare, spostamento in direzione X

Il Santuario Vitozziano presenta una inerzia maggiore nella direzione Y rispetto la direzione X. Analizzando gli spostamenti rispetto quest'ultimo asse si ha che gran parte della struttura situata al di sopra del limo tende a deformarsi maggiormente per via delle minori prestazioni del suolo. La restante struttura posizionata sul terreno resistente vorrebbe opporsi a questo movimento, e per far ciò si deforma nel lato opposto. Ovvero, questa parte strutturale sembrerebbe come se fosse trascinata verso la zona SUD – EST. Questo comportamento può essere confermato dalla deformata dei campanili.

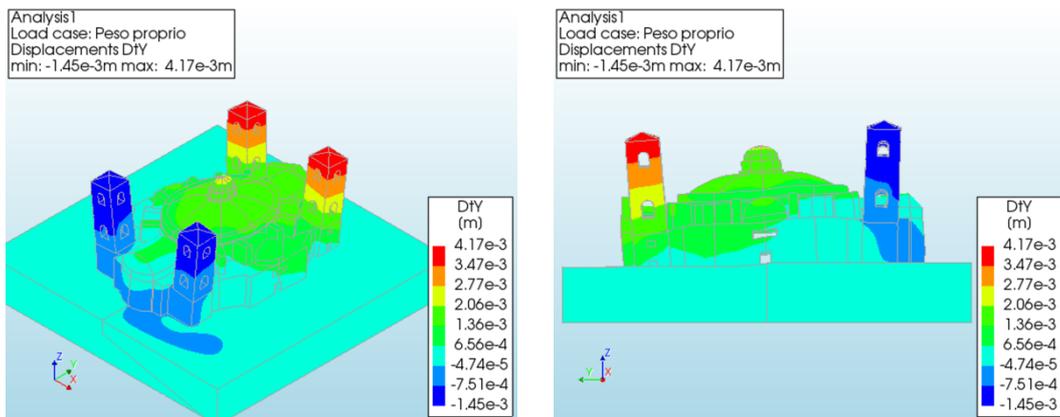


Figura 5.6 - Analisi statica lineare, spostamenti secondo l'asse Y

Medesima situazione per lo spostamento nella direzione Y, dove si evidenzia lo stesso comportamento di deformazione. I campanili sono gli elementi più snelli della costruzione, per questo motivo tendono a deformarsi maggiormente, nello specifico quelli situati nella parte anteriore del Santuario, così come il comportamento della costruzione.

In conclusione, mediante questa metodologia di analisi si è definito il comportamento della struttura soggetta a peso proprio. Riassumendo quanto esplicito precedentemente, il comportamento tensionale e deformativo viene governato dal suolo. La deformazione strutturale corrisponde ad uno sprofondamento del basamento nella parte anteriore del Santuario, seguito da una traslazione per lo più rispetto l'asse X, ovvero direzionato verso il limo. Le criticità che si definiranno con maggior precisione tramite l'analisi statica non lineare, saranno localizzate maggiormente nel tamburo, in quanto deve essere in grado di contrastare il notevole peso della cupola e nella copertura del basamento, siccome è una zona molto sollecitata.

### 5.3 Problema autovalori ed autovettori

L'individuazione degli autovalori ed autovettori permette di determinare i modi di vibrare di un edificio. Per la definizione di ciò si parte dall'equazione del moto generica:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$$

Dove:

- $[m]$  è la matrice delle masse
- $\{\ddot{u}\}$  è il vettore delle accelerazioni globali
- $[k]$  è la matrice di rigidità
- $\{u\}$  è il vettore degli spostamenti globali

La soluzione è determinata da una forma spaziale ed una forma temporale del tipo:

$$\{u\} = \{\phi\} e^{j\omega t}$$

Andando a sostituire all'interno della legge del moto, si ottiene:

$$([k] - \omega^2[m])\{\phi\} = \{0\}$$

Definendo così il problema agli autovalori ed autovettori.

Risolvendo l'equazione si nota  $\{\phi\} = \{0\}$ , ovvero la soluzione banale, che definisce il sistema in quiete e di conseguenza trascurabile dal punto di vista ingegneristico. La soluzione differente dalla banale è determinabile mediante l'annullamento del determinante della matrice dei coefficienti:

$$\det([k] - \omega^2[m]) = 0$$

Applicando la radice quadrata ad ogni autovalore si possono ricavare le pulsazioni modali  $\omega$ . Successivamente introducendo ciascun autovalore all'interno del problema, si individua una soluzione nello spazio, ovvero l' $i$ -esimo modo di vibrare corrispondente all' $i$ -esima pulsazione.

$$U = [\{\phi_1\}\{\phi_2\}\{\phi_3\} \dots \{\phi_n\}] \quad ; \quad E = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_t^2 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il problema agli autovalori si ottiene una matrice  $E$ , i cui elementi sulla diagonale principale sono i quadrati delle pulsazioni naturali del sistema, ed una matrice  $U$  le cui colonne rappresentano i modi di vibrare della struttura.

### 5.3.1 Applicazione problema agli autovalori sul modello Vitozziano

Lo svolgimento di questa analisi ha come scopo il confronto in termini dinamici del modello Vitozziano con quello ottenuto con l'introduzione di Francesco Gallo nella realizzazione del Santuario.

Successivamente la definizione del modello meccanico Vitozziano è stata possibile eseguire l'analisi agli autovalori, con l'ausilio del software DIANA FEA. I dati di input determinano caratteristiche lineari per i materiali adoperati ed inoltre metodologia di risoluzione del sistema di equazioni mediante procedura iterativa proposta dal software stesso. Per la determinazione dei modi di vibrare sono stati individuati i primi 15 autovalori, ovvero le frequenze del sistema.

Con i valori di frequenza ottenuti è stato possibile identificare i modi di vibrare principali della struttura in funzione della massa partecipante. Per strutture complesse, come il Santuario, la definizione dei modi risulta essere non immediata, siccome composte da molti gradi di libertà. Utilizzando il concetto di massa partecipante è possibile determinare ciò, definendola come il quantitativo di massa che concorre ad un determinato tipo di modo. Valori elevati di questo fattore differenziano i modi locali con quelli principali della struttura.

La determinazione della massa partecipante si basa sul concetto di forza equivalente, in quanto i modi maggiori producono elevati valori di forze e taglianti sismici che scaricano in fondazione.

I risultati ottenuti dall'analisi svolta definiscono i seguenti modi di vibrare della struttura:

- Primo modo, frequenza 4,01 Hz

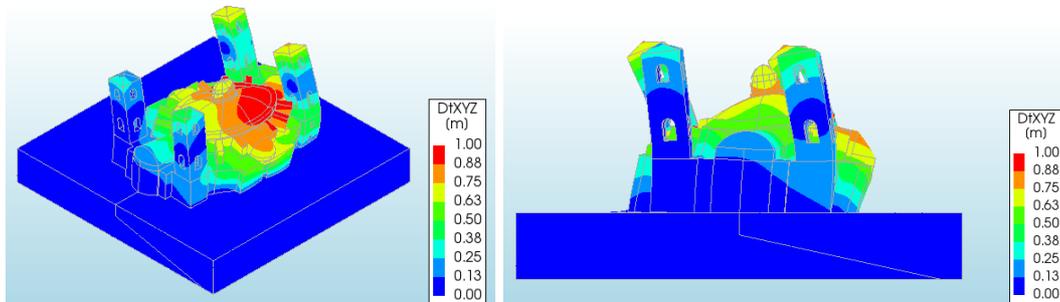


Figura 5.7 - Modello Vitozziano, Modo 1 –  $f = 4,01$  Hz

Analizzando il primo modo della struttura, con frequenza pari a 4,01 Hz e di conseguenza periodo 0,25 secondi, si nota un comportamento molto rigido ed inoltre la forma modale è caratterizzata da uno spostamento laterale negativo rispetto l'asse X per i campanili, mentre parte del sistema cupola – tamburo tende a spostarsi in maniera positiva rispetto questo asse. La forma modale è poco influenzata da spostamenti diretti secondo l'asse Y e Z.

- Secondo modo, frequenza 4,46 Hz

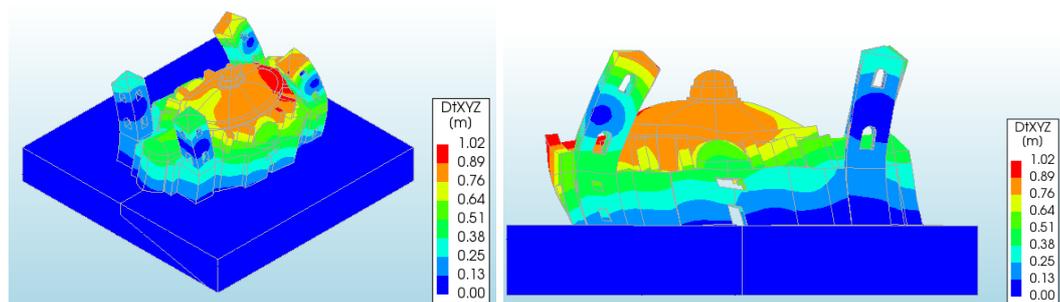


Figura 5.8 - Modello Vitozziano, Modo 2 –  $f = 4,46$  Hz

Il secondo modo, caratterizzato da una frequenza di 4,46 Hz e periodo di 0,22 secondi, determina una forma modale diretta prevalentemente secondo l'asse Y. Il corpo basamento – tamburo – cupola tende a spostarsi in direzione positiva dell'asse Y, mentre i campanili tendono a muoversi in senso opposto.

- Terzo modo, frequenza 5,19 Hz

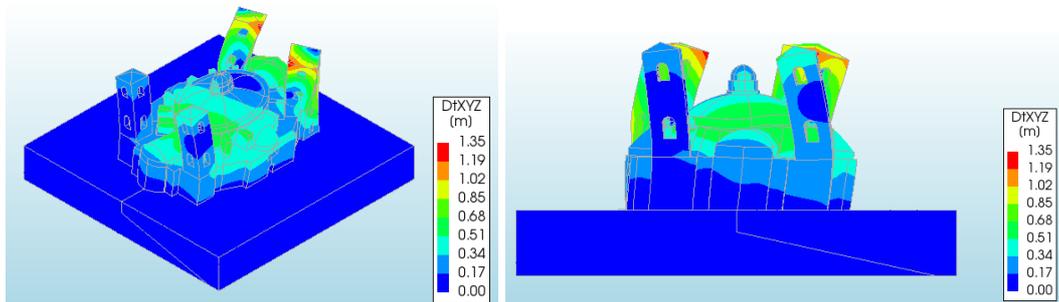


Figura 5.9 - Modello Vitozziano, Modo 3 -  $f=5,19$  Hz

Il terzo modo individuato, contraddistinto da frequenza uguale a 5,19 Hz e periodo 0,19 secondi è di genere torsionale. La forma modale della struttura è rappresentata da uno spostamento positivo della parte posteriore del Santuario in direzione X, accompagnato da uno spostamento negativo della parte anteriore. Rispetto l'asse Y invece, quasi totalmente la struttura tende a spostarsi verso le coordinate positive così come succede per il blocco basamento – tamburo – cupola in funzione dell'asse Z.

### 5.3.2 Confronto dei modi di vibrare tra i due modelli

È possibile definire i valori di frequenza associati ai primi tre modi di vibrare del Santuario di Vicoforte, determinati da prove sperimentali ottenute tramite il sistema di monitoraggio permanente e frequenze numeriche, eseguite dal DIESEG (Ceravolo, R., De Lucia, G., Miraglia, G. & Pecorelli M.L.). Si riportano i valori:

- Primo modo, frequenza 1,93 Hz prevalente X
- Secondo modo, frequenza 2,09 Hz prevalente Y
- Terzo modo, frequenza 2,84 Hz torsionale

Paragonando questi valori con quelli ottenuti dal modello Vitozziano, si riscontra frequenze nettamente maggiore in quest'ultimo, in quanto la struttura è più rigida rispetto quella progettata dal Gallo, dovuto dalla differenza di altezza del tamburo.

L'aumento di rigidezza incrementa la frequenza e di conseguenza diminuiscono i periodi.

	<b>Frequenza Modo 1 [Hz]</b>	<b>Frequenza Modo 2 [Hz]</b>	<b>Frequenza Modo 3 [Hz]</b>
Vitozzi	4,01	4,46	5,19
Gallo	1,93	2,09	2,84
Rapporto [%]	48,14	46,86	54,83

Figura 5.10 - Confronto modi di vibrare in termini di frequenze

Dalla tabella è possibile affermare che l'incremento di altezza ovvero il passaggio da 7,50 metri a 16,30 metri ha portato ad una diminuzione di frequenza di circa il 50%. In termini di periodo è possibile concepire meglio il significato di ciò:

	<b>Periodo Modo 1 [s]</b>	<b>Periodo Modo 2 [s]</b>	<b>periodo Modo 3 [s]</b>
Vitozzi	0,249	0,224	0,193
Gallo	0,518	0,478	0,352
Rapporto [%]	207,72	213,40	182,39

Figura 5.11 - Confronto modi di vibrare in termini di periodo

Quindi l'aumento di altezza del tamburo ha portato all'ottenimento di un periodo proprio della struttura maggiore ovvero il tempo impiegato dalla struttura per compiere un ciclo completo.

Utilizzando lo spettro di risposta elastico è possibile valutare la risposta sismica della struttura, ovvero l'accelerazione massima che subisce nel momento in cui è investita da un evento sismico con una determinata probabilità di accadimento. Questo spettro corrisponde ad un diagramma in cui sull'asse delle ordinate si riportano le accelerazioni, mentre sull'asse delle ascisse il periodo naturale di vibrazione. Il valore di partenza dello spettro è la PGA (peak ground acceleration), successivamente cresce linearmente fino al raggiungimento del platò che definisce la zona di massima amplificazione in funzione del prodotto tra  $\alpha_A PGA$ , dove il coefficiente  $\alpha_A$  dipende dallo smorzamento della struttura. Al termine di questo è presente un andamento decrescente con doppia convessità.

Successivamente la determinazione dei periodi proprio delle due strutture con le rispettive forme modali è possibile eseguire una valutazione in termini di spettro di risposta elastico.

La determinazione di questo è stata eseguita grazie al servizio offerto dal Consiglio superiore dei lavori pubblici, che fornisce un foglio di calcolo atto alla determinazione degli spettri di risposta elastici o inelastici.

In particolare, lo spettro si valuta andando a definire i seguenti parametri:

- Fase 1: Definire Comune di interesse, nel nostro caso Vicoforte
- Fase 2: Scelta del valore da attribuire alla Vita nominale della struttura  $V_n = 200$  anni e al Coefficiente d'uso della costruzione  $C_u = 2$
- Fase 3: Si assegna come Stato Limite quello di Danno, la Categoria del sottosuolo "E" e il fattore di struttura pari a  $q = 1$ .

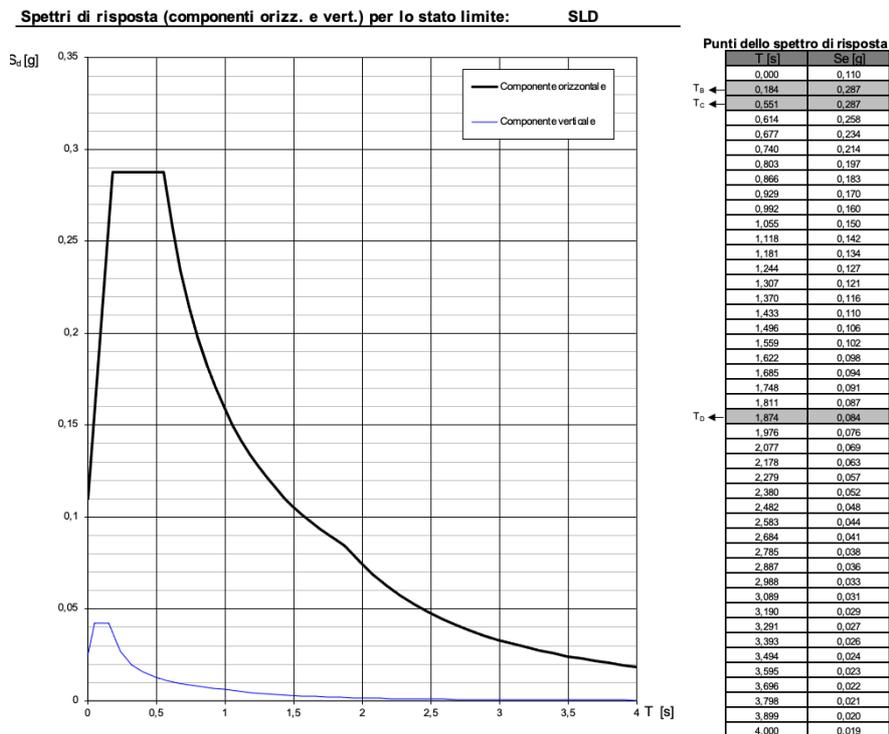


Figura 5.12 - Problema agli autovalori, spettro di risposta elastico

Tramite questo diagramma è possibile definire i valori di accelerazione corrispondenti ai modi di vibrare della struttura.

Modello	Modo	Periodo $T$ [s]	Accelerazione $S$ [g]
Vitozzi	1	0,249	0,287
	2	0,224	0,287
	3	0,193	0,287
Gallo	1	0,518	0,287
	2	0,478	0,287
	3	0,352	0,287

*Tabella 3 - Problema agli autovalori, definizione accelerazioni da spettro di risposta elastico*

Dai valori individuati è possibile affermare che i primi tre modi di vibrare di entrambi i modelli sono collocati nel platò, in quanto i periodi sono compresi tra 0,184 secondi e 0,551 secondi. Dai risultati si afferma che il comportamento in ambito sismico è relativamente migliore per la struttura progettata da Francesco Gallo, in quanto anche se entrambi i modelli ricadono nella zona di massima amplificazione, quest'ultimo è caratterizzato da periodo maggiore, ovvero posizionato verso la fine del tratto considerato. Il significato di ciò è che in presenza di azione sismica elevata, che comporta danneggiamento alla struttura, ottenendo diminuzione di rigidità e di conseguenza incremento di periodo, il modello Vitozziano lavorerà ancora nella zona di massima amplificazione per un determinato tempo, siccome i suoi modi sono collocati nella parte iniziale del tratto, mentre il modello di Gallo procederà verso una diminuzione dell'accelerazione, siccome i suoi modi principali sono collocati alla fine della suddetta zona e quindi nel diagramma si seguirà l'andamento decrescente con concavità rivolta verso l'alto.

## 5.4 Analisi statica non lineare applicata sul modello Vitozziano

A seguito dello studio preliminare sul comportamento strutturale del modello Vitozziano, è stato possibile passare all'analisi statica non lineare, in modo da comprendere con precisione i veri valori di resistenza e rigidezza della struttura e definendo il primo obiettivo della tesi, ovvero se il progetto iniziale realizzato da Vitozzi, fosse ottenuto seguendo le teorie di progettazione strutturale o solamente per propaganda.

L'analisi statica non lineare permette lo studio del comportamento di strutture in campo plastico, definendo la reale risposta in termini di tensione e deformazione. Questo avviene grazie all'introduzione di cerniere plastiche nel modello. Studiando il comportamento di una sezione soggetta a carico assiale, si nota che al crescere del carico lo stato deformativo incrementa in maniera proporzionale fino al raggiungimento della tensione di snervamento del materiale stesso. Successivamente la struttura inizierà a deformarsi plasticamente, quindi in maniera non lineare, in funzione dell'aumento del carico applicato. Si può definire la nascita della cerniera plastica, il momento in cui la curvatura della sezione tende ad infinito così come la deformazione massima.

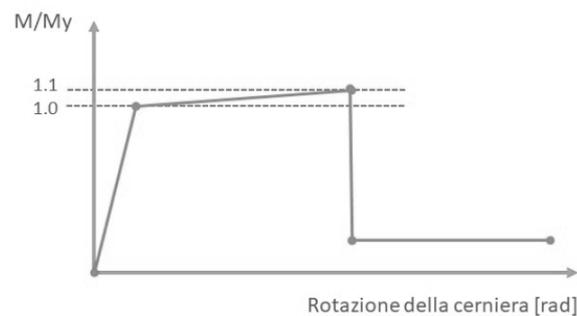


Figura 5.13 - Legge costitutiva di una cerniera plastica <sup>[w22]</sup>

Con il termine non lineare si introduce la capacità delle strutture di deformarsi in campo plastico, ovvero con deformazioni irreversibile, differentemente nello studio elastico dove si approssima un comportamento infinitamente elastico, ottenendo delle deformazioni totalmente recuperate al termine dell'applicazione del carico.

La non linearità può essere definita rispetto il materiale, i vincoli ma anche in funzione della geometria, infatti si ha la non linearità meccanica e la non linearità geometrica.

Partendo dalla prima, si definisce il comportamento del materiale non lineare andando ad attribuire una determinata legge costitutiva, ovvero il materiale che compone la struttura subisce una deformazione che aumenta in modo non lineare rispetto l'applicazione dei carichi esterni.

Dal punto di vista geometrico, con la presenza di deformazioni di notevole intensità e di conseguenza non trascurabili, occorre definire le equazioni di equilibrio in funzione della configurazione deformata, definendo così il problema non lineare geometrico. Una delle motivazioni di questa sono ad esempio le imperfezioni iniziali nell'elemento strutturale o dell'intera struttura, ma rientrano anche le deformazioni globali, ovvero incremento degli spostamenti laterali dovuti solamente a carichi verticali, o deformazioni locali ottenuto per via dell'azione assiale che genera un incremento della deformabilità flessionale dell'elemento strutturale.

Un aspetto molto importante nello svolgimento dell'analisi statica non lineare è che il legame carico – spostamento si sviluppa istante per istante e punto per punto della struttura, ovvero ogni istante la struttura presenta una configurazione differente di deformazione, che segue la legge costitutiva del materiale. Detto ciò, per ottenere risultati veritieri ed attendibili occorre considerare l'evoluzione dell'elemento strutturale nel suo complesso, partendo dallo stato iniziale fino al raggiungimento della condizione di collasso.

#### 5.4.1 Svolgimento Analisi Statica Non Lineare

La prima operazione svolta per l'esecuzione dell'analisi statica non lineare è stata la variazione delle caratteristiche dei materiali che compongono ogni singolo elemento strutturale nel modello Vitozziano.

Per la definizione di un comportamento non lineare dei materiali, DIANA FEA permette di scegliere principalmente due leggi costitutive, Mohr – Coulomb e Drucker – Prager. La prima definisce il comportamento dei materiali secondo la seguente legge costitutiva:

$$|\tau| \leq c - \sigma \tan \phi$$

dove  $c$  indica la coesione del materiale, ovvero il valore di intensità della tensione di taglio in grado di produrre deformazioni plastiche a sforzo costante, invece  $\phi$  è l'angolo di attrito interno del materiale.

La seconda legge costitutiva assume:

$$\tau_m = c_{DP} - \mu_{DP}\sigma_m$$

Dove  $c_{DP}$  e  $\mu_{DP}$  sono rispettivamente, la coesione e il coefficiente di attrito interno e  $\sigma_m$  è la tensione media.

In funzione della proposta offerta dal programma FEM utilizzato, si è optato come legge costitutiva quella di Drucker – Prager. Questa determina il comportamento a compressione della struttura. Si riportano i valori delle caratteristiche dei materiali utilizzati nell'analisi:

<b>Materiali comportamento elastico lineare</b>				
Elementi	Materiale	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Limo	Terreno	0,75	0,35	1900,00
Marna	Terreno	5,60	0,35	2100,00
Fondazione	Muratura	2,00	0,35	1800,00
Basamento	Muratura	2,00	0,35	1800,00
Tamburo	Muratura	2,30	0,35	1700,00
Contrafforti	Muratura	5,50	0,30	1700,00
Coperture	Muratura	5,50	0,30	1700,00
Cupola	Muratura	5,50	0,35	1800,00
Lanternino	Muratura	5,60	0,35	1800,00
Campanili	Muratura	4,50	0,35	1800,00

Tabella 4 - Analisi statica non lineare, caratteristiche elastiche materiali

Per il comportamento a trazione della struttura è stato definito il modello “Multi – directional fixed crack model<sup>[w25]</sup>”. Il concetto alla base di questo è la modellazione della fessura decomposta, ovvero la decomposizione della deformazione totale  $\epsilon$  in una deformazione elastica  $\epsilon^{el}$  e una deformazione di fessurazione (crack)  $\epsilon^{cr}$ :

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{cr}$$

Successivamente il raggiungimento della tensione di trazione resistente  $f_t$ , si procede con una diminuzione lineare della stessa fino all’annullamento, in contemporanea con un incremento di deformazione.

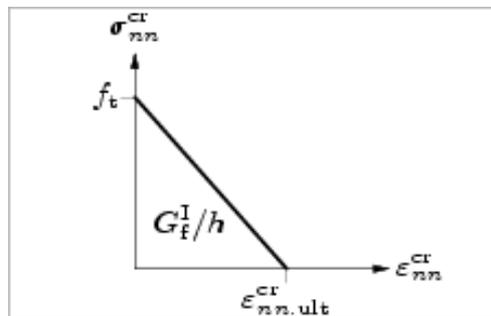


Figura 5.14 - Analisi statica non lineare, comportamento post – fessurazione<sup>[w25]</sup>

Si definisce la deformazione ultima della fessurazione come:

$$\epsilon_{ultimo}^{cr} = 2 \frac{G_f}{h f_t}$$

Dove:

- $G_f$  è l’energia di frattura a trazione;
- $h$  è la dimensione della fessura, nel nostro caso imposta uguale alla dimensione della mesh;
- $f_t$  è la resistenza a trazione del materiale;

Si può verificare facilmente che

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1$$

Il valore minimo della deformazione massima della fessura è quindi fornito da:

$$f_t = \sqrt{2 \frac{G_f E}{h}}$$

In assenza di valori sperimentali, sono stati utilizzati dati medi da letteratura, in quanto le analisi svolte sono di carattere esplorativo, inoltre strutture antiche realizzate in muratura possono presentare resistenze con ordini di grandezza inferiore, ma in funzione di valori medi è possibile ottenere simile risposta strutturale.

Per la determinazione della deformazione ultima della struttura sono stati definiti i seguenti valori:

$$f_t = 0,50 \text{ MPa} \quad ; \quad G_f = 0,05 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad ; \quad h = 1,50 \text{ m}$$

Il valore di resistenza a trazione utilizzata nell'analisi, si è fatto riferimento al documento redatto dal DISEG. Per la definizione di caratteristiche meccaniche della muratura, non si procede con l'applicazione di una componente di trazione assiale, questo per la difficoltà di ancoraggio tra macchina e provino, ma bensì si esegue una prava di trazione indiretta. Questa consiste nell'applicazione di forze di compressione radiali su un provino cilindrico che causano uno schiacciamento e conseguentemente allungamento dello stesso.



Figura 5.15 - Prova di trazione indiretta muratura <sup>[w23]</sup>

Per quanto riguarda l'energia di frattura invece, ovvero il quantitativo di energia necessaria per la formazione di una fessura di area unitaria lungo l'interfaccia, ricavabile mediante l'area sottesa dalla curva esponenziale nel diagramma tensione – dimensione fessura. Il valore utilizzato fa riferimento a documenti individuati durante lo svolgimento delle analisi e al contempo nel rispetto del rapporto tra la deformazione elastica e la deformazione ultima definito da normativa pari a 2.

In funzione del Modulo di Young di ogni parte strutturale è stata definita la deformazione elastica  $\epsilon^{el}$  associata, tramite il seguente rapporto:

$$\epsilon^{el} = \frac{f_t}{E_i}$$

Una volta nota la deformazione elastica è possibile sommarla alla deformazione di fessurazione  $\epsilon^{cr}$ , così da poter ottenere la deformazione ultima della struttura:

$$\epsilon_{ultimo} = \epsilon^{el} + \epsilon^{cr} = \frac{f_t}{E_i} + 2 \frac{G_f}{hf_t}$$

<b>Caratteristiche materiali comportamento a fessurazione</b>					
Elementi	$E$ [GPa]	$f_t$ [MPa]	$\epsilon^{el}$ [ $10^{-5}$ ]	$\epsilon^{cr}$ [ $10^{-4}$ ]	$\epsilon_u$ [ $10^{-4}$ ]
Limo	0,75	0,01	-	-	-
Marna	5,60	0,8	-	-	-
Fondazione	2,00	0,50	25,00	1,33	3,83
Basamento	2,00	0,50	25,00	1,33	3,83
Tamburo	2,30	0,50	21,70	1,33	3,51
Contrafforti	5,50	0,50	9,09	1,33	2,24
Coperture	5,50	0,50	9,09	1,33	2,24
Cupola	5,50	0,50	9,09	1,33	2,24
Lanternino	5,60	0,50	8,93	1,33	2,23
Campanili	4,50	0,50	11,10	1,33	2,24

Tabella 5 - Analisi statica non lineare, caratteristiche materiali comportamento a fessurazione

<b>Materiali caratteristiche plastiche</b>				
Elementi	Materiale	$c [N/m^2]$	$\phi [rad]$	$\delta [rad]$
Limo	Terreno	9800,00	0,40	0,00
Marna	Terreno	1960,00	0,40	0,00
Fondazione	Muratura	240000,00	0,66	0,00
Basamento	Muratura	240000,00	0,66	0,00
Tamburo	Muratura	240000,00	0,66	0,00
Contrafforti	Muratura	240000,00	0,66	0,00
Coperture	Muratura	240000,00	0,66	0,00
Cupola	Muratura	240000,00	0,66	0,00
Lanternino	Muratura	240000,00	0,66	0,00
Campanili	Muratura	240000,00	0,66	0,00

*Tabella 6 - Analisi statica non lineare, caratteristiche plastiche materiali*

Dopo aver apportato le modifiche ai materiali, assegnando il comportamento non lineare, è possibile passare all'analisi vera e propria, procedendo in DIANA FEA selezionando "Structural non linear" nella sezione "Analysis".

Si procede successivamente al settaggio dei vari parametri, lasciando invariato i valori di tolleranza rispetto l'analisi statica lineare. Il software permette di aggiungere o meno il contributo della non linearità geometrica e non linearità transitoria, ma dal punto di vista pratico è possibile trascurarli siccome nel nostro caso non si hanno elevati valori di spostamenti. Come è stato già definito precedentemente, durante lo svolgimento dell'analisi statica non lineare siccome il legame carico – spostamento accresce secondo per secondo, seguendo la legge costitutiva del materiale, occorre definire il "Load set", ovvero la fase di incremento carico. Nel caso in esame è stata scelta una sola fase di carico, immaginando che la costruzione della struttura sia avvenuta istantaneamente. La scelta di ciò è dovuta dal voler conoscere la risposta strutturale dell'intero Santuario soggetto al peso proprio. L'ultima opzione da scegliere è la metodologia di risoluzione del sistema di equazioni. In un'analisi non lineare, il sistema di equazioni deve essere risolto in maniera iterativa fino al raggiungimento dell'equilibrio. DIANA FEA propone gli schemi di interazione più conosciuti, ovvero rigidità costante e lineare, Newton – Raphson regolare e modificato, ma anche la metodologia Quasi – Newton.

Attraverso il metodo Newton – Raphson normale, per ogni iterazione si esegue uno studio della matrice di rigidezza direttamente dal software. Questa tecnica permette di raggiungere la convergenza dopo poche iterazioni, ma la tempistica di svolgimento di ognuna di esse implica un quantitativo di tempo notevole, siccome occorre rielaborare la matrice di rigidezza per ognuna di esse. Il metodo modificato invece, esamina la matrice di rigidezza nella fase iniziale dell'incremento, in questo modo il tempo di analisi di ogni iterazione è minore rispetto il precedente metodo, però occorre svolgere un numero maggiore di iterazione per il raggiungimento della convergenza del sistema. Utilizzando la tecnica Quasi – Newton, si evita l'eccessivo carico computazionale dei metodi puri, tramite l'utilizzo di informazioni ottenute dalla soluzione della iterazione precedente. In fine, se i metodi descritti prima, durante la fase di analisi tendono a non convergere e di conseguenza non trovare la soluzione, è possibile eseguire l'applicazione di un'ultima tecnica, ovvero quella della rigidità costante e lineare. Il software completa la procedura di iterazione nel momento in cui il sistema raggiunge la convergenza, ottenendo risultati di qualità elevata.

## 5.5 Risultati Analisi Statica Non Lineare modello Vitozziano

L'utilizzo dei valori ottenuti dallo svolgimento di questa tipologia di analisi è la verifica della corretta progettazione della struttura. Studiando il suo comportamento tramite l'analisi statica lineare, si nota che le problematiche principali riguardano deformazioni eccessive, dovute dal notevole peso strutturale, ma anche possibili rotture fragili, causate dalla sollecitazione tagliente. Principalmente la struttura inizia la fase di danneggiamento nel momento in cui si ha il raggiungimento della tensione di snervamento, ma focalizzando l'attenzione sull'obiettivo della tesi, occorre capire quali sono le condizioni di collasso. Dall'analisi è possibile ricavare due caratteristiche principali, la deformabilità dei singoli elementi strutturali, e anche lo stato tensionale tangenziale. Tramite la prima caratteristica è possibile confrontarla con il valore ultimo resistente, definito precedentemente nella caratterizzazione dei materiali. In questo modo si procede con lo studio e verifica del comportamento assiale cioè per schiacciamento di ogni elemento dovuto alla

forza di gravità. La seconda verifica da svolgere riguarda le tensioni tangenziali. Principalmente la muratura soggetta a carichi assiali di compressione mostra una adeguata risposta, ma la problematica principale è nei confronti delle tensioni tangenziali che possono causare rotture fragili nella costruzione. Tenendo conto della legge costitutiva di Drucker – Prager, la tensione tangenziale fa riferimento sia alla coesione e anche all’angolo di attrito interno. Per via precauzionale e di sicurezza si procede a trascurare il contributo della tensione media e angolo di attrito interno, considerando solamente il contributo della coesione.

## 5.6 Verifica di deformabilità

Iniziando con la verifica di deformabilità della struttura in termini di Total Strains, in tutte le direzioni. Nel momento in cui la deformazione di allungamento relativa ad un singolo elemento strutturale supera la deformazione ultima del materiale si ottiene il collasso di esso. Tramite questa verifica quindi, si procederà a confrontare  $\epsilon_u$  con i relativi valori di deformazione di allungamento.

Dalle rappresentazioni seguenti, è possibile definire l’esatto comportamento predetto nella fase di analisi statica lineare, dove si notano principalmente nel basamento deformabilità maggiore rispetto l’asse X. Ulteriore singolarità si nota nella parte anteriore il Santuario, dato dalla presenza di terreno con prestazioni strutturali inferiori.

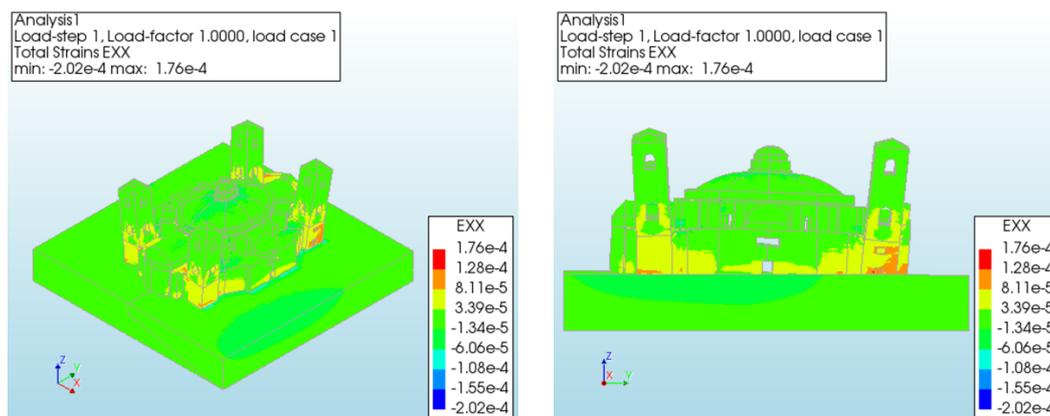


Figura 5.16 - Analisi statica non lineare, total strains in direzione XX

Nelle seguenti tabella si riporta il range di deformazione dovuta alla trazione, per ogni elemento principale della struttura, rispetto l'asse X, Y e X. Si definiscono intervalli di deformazione e non valori puntuali, in quanto la muratura è un materiale fragile e di conseguenza è possibile ottenere punti di fessurazione che causano una concentrazione elevata di tensione nella struttura, non influenzando il comportamento resistente della stessa.

La verifica è soddisfatta se  $\epsilon_{max} \leq \epsilon_u$ .

<b>Verifica di deformabilità secondo l'asse X - X</b>					
Elementi	$\epsilon_{xx} [10^{-4}]$		$\epsilon_u [10^{-4}]$	Verifica	$\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_u} [\%]$
	min	max			
Fondazione	0,08	1,28	3,83	SI	33,39
Basamento	0,35	2,20	3,83	SI	57,39
Tamburo	0,48	2,50	3,51	SI	71,28
Contrafforti	0,06	0,54	2,24	SI	24,17
Coperture	0,08	0,94	2,24	SI	41,92
Cupola	0,13	0,61	2,24	SI	26,44
Lanternino	0,17	0,72	2,23	SI	32,25
Campanili	0,02	1,71	2,24	SI	70,36

Tabella 7 - Analisi statica non lineare, verifica di deformabilità secondo l'asse XX

Dall'analisi evince il superamento della verifica. L'elemento con deformazione maggiore è il tamburo, mentre la minore rispetto l'asse X è nei contrafforti.

Passando all'asse Y invece, si nota deformazione prevalentemente nella parte anteriore della struttura. Confrontando con quella rispettiva all'asse X, si hanno valori caratterizzati dallo stesso ordine di grandezza, ma con comportamento differente. La dilatazione è maggiore nell'asse Y, mentre per la contrazione nell'asse X.

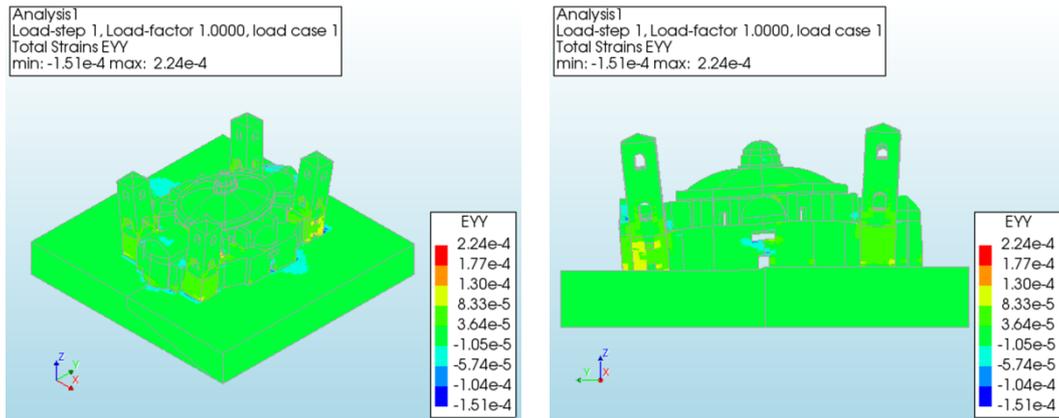


Figura 5.17 - Analisi statica non lineare, deformazione in direzione YY

Segue la tabella con la rispettiva verifica rispetto questo asse.

Verifica di deformabilità secondo l'asse Y - Y					
Elementi	$\epsilon_{yy} [10^{-4}]$		$\epsilon_u [10^{-4}]$	Verifica	$\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_u} [\%]$
	min	max			
Fondazione	0,08	1,21	3,83	SI	31,57
Basamento	0,33	2,02	3,83	SI	52,70
Tamburo	0,07	1,90	3,51	SI	54,17
Contrafforti	0,11	0,618	2,24	SI	27,56
Coperture	0,01	0,455	2,24	SI	19,84
Cupola	0,13	1,14	2,24	SI	50,84
Lanternino	0,01	0,278	2,23	SI	12,49
Campanili	0,13	1,55	2,24	SI	16,32

Tabella 7 - Analisi statica non lineare, verifica di deformabilità secondo l'asse YY

Anche in questo caso, la verifica è totalmente soddisfatta, l'elemento con maggiore deformazione è il tamburo seguito dal basamento, ma comunque ancora lontano dal valore di collasso. La parte strutturale che risente in minor misura della deformazione lungo l'asse Y è il lanternino.

L'ultima verifica di deformazione è rispetto l'asse Z. Siccome l'analisi è stata svolta con l'applicazione del solo peso gravitazionale, è plausibile ottenere la deformazione maggiore rispetto questo asse. Si hanno valori dello stesso ordine di

grandezza ma con intensità maggiore. Tutto questo causato dall'enorme peso della struttura, con precisione del sistema cupola – tamburo.

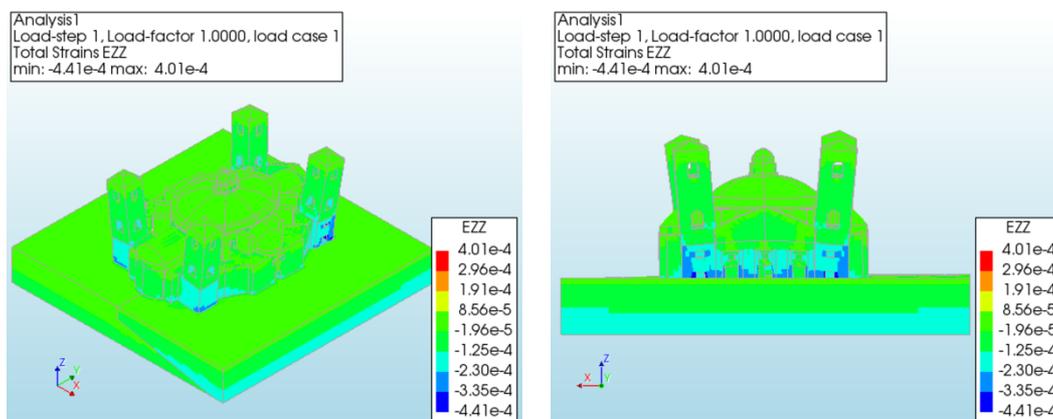


Figura 5.18 - Analisi statica non lineare, deformazione rispetto l'asse ZZ

Verifica di deformabilità secondo l'asse Z - Z					
Elementi	$\epsilon_{zz} [10^{-4}]$		$\epsilon_u [10^{-4}]$	Verifica	$\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_u} [\%]$
	min	max			
Fondazione	0,01	0,01	3,83	SI	0,25
Basamento	0,47	3,76	3,83	SI	98,09
Tamburo	0,41	2,26	3,51	SI	64,44
Contrafforti	0,18	0,38	2,24	SI	16,90
Coperture	0,42	2,11	2,24	SI	94,09
Cupola	0,01	1,46	2,24	SI	65,11
Lanternino	0,02	0,24	2,23	SI	10,83
Campanili	0,31	0,65	2,24	SI	26,75

Tabella 8 - Analisi statica non lineare, deformazione rispetto l'asse ZZ

Come nei due confronti precedenti, anche rispetto l'asse Z, la deformazione per ogni elemento strutturale rispetta la limitazione. Il valore massimo ottenuto di deformazione è  $3,76 * 10^{-4}$  del basamento, il minimo invece è  $0,01 * 10^{-4}$  della fondazione.

Grazie allo studio di deformazione eseguito, si afferma che la struttura in termini di deformazione rientra nei limiti imposti dalle caratteristiche del materiale utilizzato per la costruzione.

## 5.7 Verifica tensioni tangenziali

La seconda verifica svolta tiene conto dell'effetto tangenziali nella struttura. La muratura presenta una resistenza minore nei confronti di questa tipologia di tensioni. Inoltre, le sollecitazioni taglianti causano una rottura di tipo fragile, ovvero collasso immediato senza presentare deformazioni. La resistenza di elementi in muratura rispetto questo genere di tensione è data prevalentemente dalla coesione, ed aumenta all'aumentare del carico verticale agente, che a sua volta è proporzionale all'angolo di attrito interno. La verifica considera il confronto tra le tensioni tangenziali positive che nascono nella struttura e la tensione resistente. A favore di sicurezza si esclude il contributo dovuto al carico verticale agente e si considera solamente la coesione come parte resistente. Nel momento in cui la tensione tangenziale agente supera il valore costante di questa si definisce la condizione di collasso della struttura. Anche nella verifica in esame si tiene conto di range di tensione e non di valori puntuali.

La verifica è soddisfatta se:  $\tau_{max} \leq \tau_{rd}$ .

Il programma DIANA FEA permette di individuare lo stato tensionale secondo la teoria di Cauchy, dove la tensione ha una componente normale ed una tangenziale. Per quanto concerne le componenti  $\sigma_{ij}$  della tensione, il primo pedice caratterizza la giacitura, il secondo l'asse con il quale è diretta la componente.

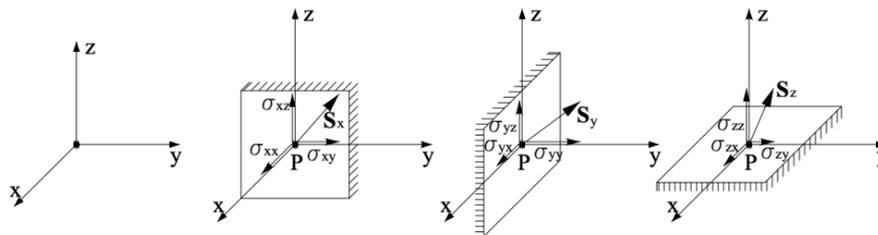


Figura 5.19 - Tensioni di Cauchy; [w24]

Si riporta il comportamento della struttura rispetto l'azione tangenziale  $\sigma_{xy}$ . Principalmente il modello è soggetto a tensioni di compressione, ma si notano fenomeni di trazioni soprattutto nel basamento.

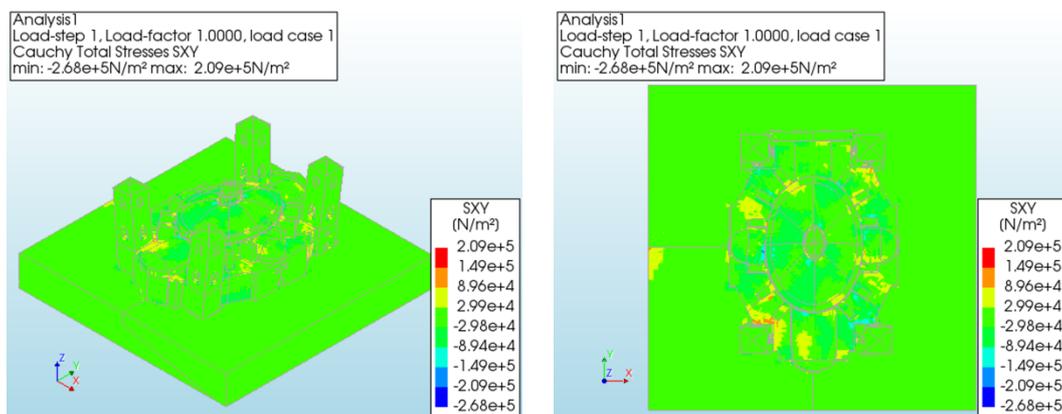


Figura 5.20 - Analisi statica non lineare, tensione tangenziale XY

Verifica tensioni tangenziali X - Y					
Elementi	$\tau_{xy} [N/m^2]$		$\tau_{rd} [N/m^2]$	Verifica	$\frac{\tau_{xy}}{\tau_{rd}} [\%]$
	min	max			
Fondazione	2370,0	86600,0	240000,0	SI	36,08
Basamento	14600,0	157000,0	240000,0	SI	65,42
Tamburo	1810,0	139000,0	240000,0	SI	57,92
Contrafforti	9120,0	169000,0	240000,0	SI	70,42
Coperture	29400,0	208000,0	240000,0	SI	86,67
Cupola	44100,0	209000,0	240000,0	SI	87,08
Lanternino	7490,0	144000,0	240000,0	SI	60,00
Campanili	402,0	170000,0	240000,0	SI	70,83

Tabella 9 - Analisi statica non lineare, verifica tensioni tangenziali XY

I risultati della verifica sono tutti positivi, non si ha il superamento in nessuno degli elementi della tensione resistente. La cupola è l'elemento più soggetto a tensione mentre le fondazioni sono quelle minor sollecitate. Si nota come il comportamento degli elementi al di sopra del basamento è soggetto a tensioni molto elevate dovute al carico della cupola stessa e dall'effetto spingente causato dal sesto moto ribassato.

Segue la verifica delle tensioni tangenziali YZ. Dalle rappresentazioni successive, si nota la presenza di zone maggiormente sollecitate in maniera positiva nella parte SUD - EST. Ciò dovuto al modo di deformazione della struttura, in quanto tende a sprofondare maggiormente nella parte anteriore provocando innalzamento nella zona retrostante.

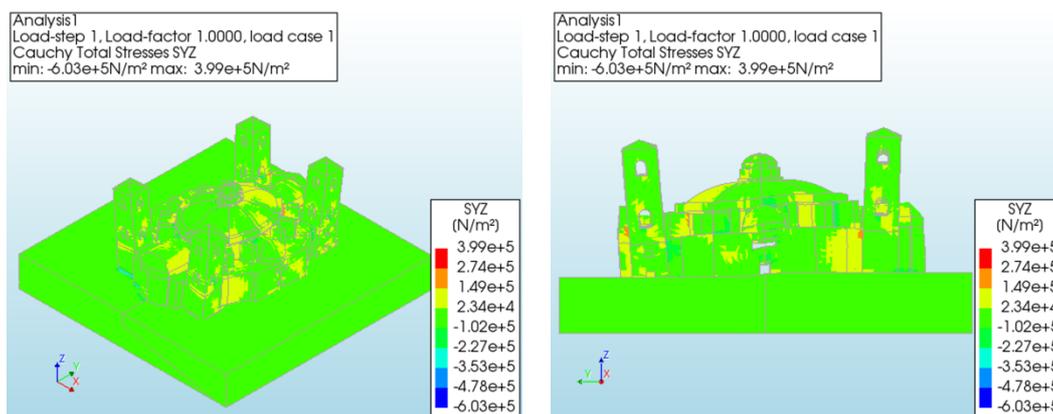


Figura 5.21 - Analisi statica non lineare, tensione tangenziale YZ

Verifica tensioni tangenziali Y - Z					
Elementi	$\tau_{yz} [N/m^2]$		$\tau_{rd} [N/m^2]$	Verifica	$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{rd}} [\%]$
	min	max			
Fondazione	6740,0	189000,0	240000,0	SI	78,75
Basamento	74600,0	231000,0	240000,0	SI	96,25
Tamburo	33900,0	213000,0	240000,0	SI	88,75
Contrafforti	7560,0	225000,0	240000,0	SI	93,75
Coperture	13000,0	178000,0	240000,0	SI	74,17
Cupola	24900,0	183000,0	240000,0	SI	76,25
Lanternino	4090,0	79600,0	240000,0	SI	33,17
Campanili	23400,0	149000,0	240000,0	SI	62,08

Tabella 8 - Analisi statica non lineare, verifica tensioni tangenziali YZ

La verifica rispetto le tensioni che giacciono nel piano YZ ed indirizzate rispetto l'asse Z, presentano dei valori molto elevati soprattutto nell'elemento basamento e tamburo, mentre il lanternino siccome soggetto solamente al peso proprio ha valori di tensione minore. Il confronto di queste, rispetto la capacità resistente della struttura è soddisfatto, ricordando che a favore di sicurezza la  $\tau_{rd}$  è stata imposta

uguale alla coesione. Affermando così che le verifiche con risultati prossimi al valore limite presentano, nella realtà, hanno ancora un margine di resistenza.

L'ultima verifica in termini di tensioni riguarda il piano ZX. L'andamento di queste risulta essere prevalentemente di trazione nella zona sostenuta dal limo, siccome la struttura tende a deformarsi maggiormente per causa della minore capacità portante del terreno.

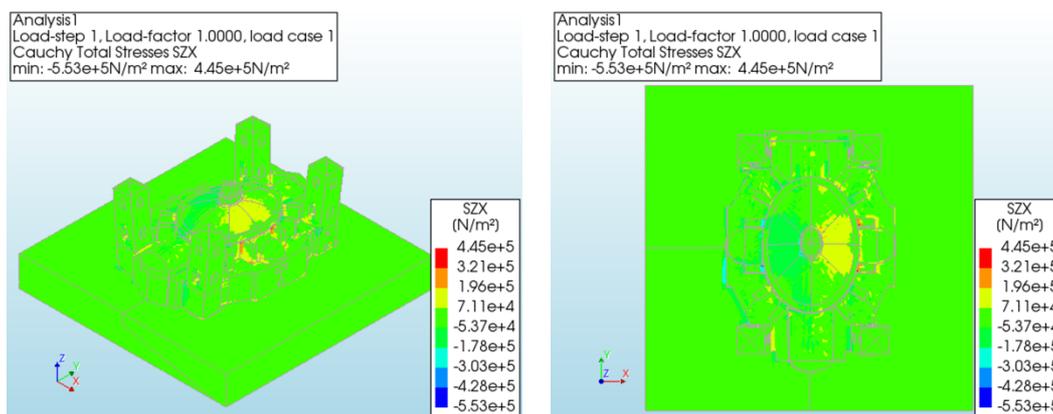


Figura 5.22 - Analisi statica non lineare, tensioni tangenziali ZX

Verifica tensioni tangenziali Z - X					
Elementi	$\tau_{zx}$ [N/m <sup>2</sup> ]		$\tau_{rd}$ [N/m <sup>2</sup> ]	Verifica	$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{rd}}$ [%]
	min	max			
Fondazione	43000,0	171000,0	240000,0	SI	71,25
Basamento	48700,0	169000,0	240000,0	SI	70,42
Tamburo	62500,0	224000,0	240000,0	SI	93,33
Contrafforti	419,0	223000,0	240000,0	SI	92,02
Coperture	980,0	221000,0	240000,0	SI	92,08
Cupola	243000,0	238000,0	240000,0	SI	99,17
Lanternino	173,0	109000,0	240000,0	SI	45,42
Campanili	97300,0	202000,0	240000,0	SI	84,17

Tabella 9 - Analisi statica non lineare, verifica tensioni tangenziali ZX

Quest'ultima verifica mette in mostra l'elevato sviluppo di tensioni tangenziali dirette verso l'asse X, raggiungendo per quasi la maggior parte degli elementi

strutturali il limite di resistenza, ma senza scavalcarlo. La verifica quindi, è soddisfatta.

Tramite l'analisi delle tensioni tangenziali è stato possibile interpretare e verificare la distribuzione di queste all'interno della struttura, concependo gli elementi maggiormente sollecitati e prossimi al collasso. Dai risultati ottenuti si può affermare che il Santuario così come è stato progettato inizialmente da Ascanio Vitozzi, rispetta in termini di tensioni le teorie della Scienza delle Costruzioni.

## Conclusione

Con il presente lavoro di tesi è stato possibile studiare il comportamento strutturale di una delle più importanti cupole del mondo, e nello specifico il progetto iniziale di essa. Tramite la modellazione del Vitozziano si è analizzata la risposta in termini di tensioni e deformazioni che caratterizza la struttura, così da poter svolgere verifiche di deformazione secondo gli assi principali e di taglio rispetto le tensioni tangenziali agenti. Queste scelte sono state attuate in quanto gli edifici in muratura presentano un'elevata resistenza alla compressione e schiacciamento, ma minore per quanto riguarda l'allungamento e sollecitazione di trazione.

Inizialmente si è svolta l'attività di semplificazione della struttura, andando ad identificare quali elementi avrebbero potuto compromettere la risposta strutturale. Successivamente, si è passati alla modellazione geometrica di ogni elemento individuato.

Con il supporto del modello numerico invece, è stato possibile definire la risposta strutturale indotta dall'elevato peso del Santuario, eseguendo preliminarmente l'analisi statica lineare e risolvendo il problema agli autovalori, definendo i modi di vibrare della struttura, concludendo successivamente con indagini più veritiere, ovvero analisi di carattere non lineare. La fase fondamentale della tesi è lo svolgimento di quest'ultima, in quanto definisce i valori di tensione e deformazione utilizzati nelle verifiche di carattere esplorativo e preliminare.

Il comportamento individuato è per lo più di compressione in quasi la totalità del Santuario, giustificabile dalla presenza del sistema cupola – tamburo. Lo stato deformativo invece, si sviluppa maggiormente nella parte anteriore della struttura, dovuto dalla presenza di terreno con minori caratteristiche di portanza. Al termine delle verifiche, si afferma la corretta esecuzione da parte dell'Architetto Ascanio Vitozzi, nello svolgimento dei calcoli strutturali, in modo da rispettare le teorie della Scienza delle Costruzioni e al contempo concepire un Santuario composto da una cupola con sesto molto ribassato. Occorre precisare che le analisi eseguite

tengono conto solamente dell'azione indotta dal peso proprio della struttura Vitozziana, senza considerare l'effetto di possibili cedimenti differenziali in fondazione, che rappresenta una delle cause principali della nascita del quadro fessurativo situato nel sistema cupola – tamburo del Santuario Vicese. Questo lavoro di tesi analizza in maniera esplorativa, il comportamento strutturale del progetto realizzato da Vitozzi, approfondendo le problematiche relative all'elevato peso della struttura, ma comunque producendo modelli meccanici utili nell'implementazione di ulteriori studi.

## Bibliografia

- Barosso L. *“La struttura Cupola – Tamburo del Santuario di Vicoforte: materiali e tecniche costruttive”*, Torino. Atti e Rassegna Tecnica della Società degli Ingegneri e degli Architetti di Torino, 1979.
- Bertone L. *“Francesco Gallo e la cupola ellittica del santuario di Mondovì a Vicoforte”*. Torino: Studi Piemontesi, 1995
- Brandolese S. *“Consolidamento di murature storiche: analisi numerica e sperimentale del comportamento di pannelli di muratura rinforzati. Caso studio: Ex Ospedale Geriatrico di Padova”*. 2014.
- Carboneri N. *“L’architetto Francesco Gallo (1672 – 1750)”*, Torino. Atti della Società Piemontese di Archeologia e belle arti, 1954.
- Carpinteri A. *“Scienza delle Costruzioni 2”*, Bologna. Pitagora, 1992.
- Casimiro D. *“Storia artistica illustrata del santuario di Mondovì presso Vicoforte, 1595 – 1891”*, Torino. Derossi, 1891.
- Cecca A. *“Analisi strutturale della cupola ellissoidica del Santuario di Vicoforte”*, Torino. Politecnico di Torino, Facoltà di Architettura, 1991.
- Ceravolo R, De Lucia G., Miraglia G., Pecorelli M.L. *“Thermoelastic finite element model updating with application to monumental buildings”*. 2019
- DISEG – Centro di Ricerca sui Ponti in Muratura. *“Caratteristiche meccaniche della muratura”*
- Donà C. e De Maria A. *“Manuale delle murature storiche: analisi e valutazione del comportamento strutturale”*, Editore: Dei tipografia del genio civile, 2011.
- G. Vacchetta. *“Nuova storia artistica del Santuario della Madonna di Mondovì a Vico”*, Cuneo. Società per gli Studi Storici Archeologici ed Artistici della Provincia di Cuneo, 1984.
- Shun Chai. *“Finite Element Analysis for Civil engineering with DIANA Software”*. Editore: Springer, 2020.
- Viglino Davico M. *“Ascanio Vitozzi: ingegnere militare, urbanista, architetto (1539 – 1615)”*, Ponte San Giovanni. Quattroemme, 2003.
- Werner Villa S. *“Autodesk AutoCac 2018 Guida complete per architettura, meccanica e design”*. Editore: Tecniche nuove, 2016.

## Sitografia

- [w1]. <http://insolitaitalia.databenc.it/storia/santuario-vicoforte-piemonte-la-sua-cupola-ellittica-fra-le-piu-grandi-al-mondo/>
- [w2]. <https://www.europacristiana.com/al-santuario-di-vicoforte-la-teologia-sulla-cupola-ellittica-piu-grande-del-mondo/>
- [w3]. <https://www.semanticscholar.org/paper/Monitoring-of-masonry-historical-constructions%3A-10-Ceravolo-Marinis/564f41a698bef2d6d9df85ec5378dca29c810e39/figure/3>
- [w4]. [http://www.iuav.it/Ateneo1/docenti/architetto/docenti-st/Paolo-Facc/materiali-/Teoria-e-t/teoriaetecnicalez\\_sette.pdf](http://www.iuav.it/Ateneo1/docenti/architetto/docenti-st/Paolo-Facc/materiali-/Teoria-e-t/teoriaetecnicalez_sette.pdf)
- [w5]. [https://webapi.ingenio-web.it/immagini/file/byname?name=cerchiature%20di%20elementi%20murari-arco%20armato\\_SITO.pdf](https://webapi.ingenio-web.it/immagini/file/byname?name=cerchiature%20di%20elementi%20murari-arco%20armato_SITO.pdf)
- [w6]. <https://www.cittaecattedrali.it/it/bces/375-santuario-basilica-della-nativita-di-maria-regina-montis-regalis>
- [w7]. [https://torino.repubblica.it/cronaca/2016/04/10/foto/cupola\\_di\\_vicoforte\\_test\\_senza\\_precedenti\\_l\\_arte\\_fa\\_bene\\_alla\\_salute-137302622/1/](https://torino.repubblica.it/cronaca/2016/04/10/foto/cupola_di_vicoforte_test_senza_precedenti_l_arte_fa_bene_alla_salute-137302622/1/)
- [w8]. <https://www.semanticscholar.org/paper/Structural-Analysis-with-F.E.-Method-of-the-Dome-of-Roccati-Aoki/c2fd8c268bc6a03ff90eb19c2ed31048296f9f13/figure/2>
- [w9]. <https://www.semanticscholar.org/paper/Structural-Analysis-with-F.E.-Method-of-the-Dome-of-Roccati-Aoki/c2fd8c268bc6a03ff90eb19c2ed31048296f9f13/figure/2>
- [w10]. <https://www.semanticscholar.org/paper/Monitoring-of-masonry-historical-constructions%3A-10-Ceravolo-Marinis/564f41a698bef2d6d9df85ec5378dca29c810e39/figure/4>
- [w11]. <http://www.didatticarte.it/Blog/?p=2169>
- [w12]. <https://s3.amazonaws.com/cdn-media.teknoring/wp-content/uploads/2012/05/pantheon03.jpg>

- [w13]. [https://it.wikipedia.org/wiki/Cupola\\_di\\_San\\_Pietro](https://it.wikipedia.org/wiki/Cupola_di_San_Pietro)
- [w14]. [https://www.edatlas.it/scarica/galleria\\_disegno/Chiese2/16pietro2.gif](https://www.edatlas.it/scarica/galleria_disegno/Chiese2/16pietro2.gif)
- [w15]. <https://www.semanticscholar.org/paper/Structural-Analysis-with-F.E.-Method-of-the-Dome-of-Roccati-Aoki/c2fd8c268bc6a03ff90eb19c2ed31048296f9f13/figure/1>
- [w16]. <https://www.semanticscholar.org/paper/Soil-structure-modeling-and-updating-of-the-%22Regina-Casalegno-Ceravolo/b0a06aaaddcaee286036050f1e162d1523066c6/figure/3>
- [w17]. <https://www.alamy.com/stock-photo-storia-artistica-illustrata-del-santuario-di-mondovi-presso-vicoforte-127741625.html>
- [w18]. <https://www.santuariodivicoforte.it/arte/un-affresco-di-seimila-metri-quadri/>
- [w19]. [https://moodle2.units.it/pluginfile.php/100314/mod\\_resource/content/2/04b%20STRUTTURE%202016-17%20rev11.pdf](https://moodle2.units.it/pluginfile.php/100314/mod_resource/content/2/04b%20STRUTTURE%202016-17%20rev11.pdf)
- [w20]. [http://people.dicea.unifi.it/johannf/disp\\_6.pdf](http://people.dicea.unifi.it/johannf/disp_6.pdf)
- [w21]. <http://www.hms.civil.uminho.pt/sahc/2006/1167.pdf>
- [w22]. <https://www.marcodepisapia.com/analisi-pushover/>
- [w23]. [https://www.researchgate.net/figure/Figura-4-Prova-brasiliana-congiunto-di-malta-ruotato-di-45-e-interpretazione-del-test\\_fig3\\_281399393](https://www.researchgate.net/figure/Figura-4-Prova-brasiliana-congiunto-di-malta-ruotato-di-45-e-interpretazione-del-test_fig3_281399393)
- [w24]. <https://architettura.unige.it/did/12/architettura/terzo0304/scientencostr/dispense/14tensioni.pdf>
- [w25]. <https://dianafea.com/manuals/d103/Diana.html>