

# POLITECNICO DI TORINO

Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

## Studio CFD di schiere di compressore assiale transonico

Relatori

Prof. Michele FERLAUTO

Candidato

Emanuele RESTA

Dicembre 2020



# Sommario

L'innovazione nel campo della propulsione aeronautica, e soprattutto gli obiettivi sempre più ambiziosi di riduzione delle emissioni inquinanti e di aumento delle prestazioni degli ultimi anni sta evidenziando un trend sempre più aggressivo nel design delle palette di fan e compressori.

L'interesse ad aumentare le portate elaborate dai motori civili, adottando fan di maggiori dimensioni, o la tendenza ad aumentare le velocità di rotazione nei motori più compatti, impiegati ad esempio in ambito militare, hanno entrambi come conseguenza l'insorgere dei fenomeni transonici al tip delle palette rotoriche del compressore.

In questo contesto si rendono quindi necessari strumenti d'indagine che permettano di studiare nel dettaglio il funzionamento dei compressori in tali regimi, per valutarne le prestazioni e con l'intento di identificare nuove metodologie per ridurre le perdite dovute all'irreversibilità dei fenomeni che li caratterizzano.

Nel presente lavoro di tesi si adotta un approccio numerico finalizzato alla previsione del flusso attorno a schiere di pale di compressori transonici, utilizzando a questo scopo il solutore compressibile *rhoCentralFoam*, basato sullo schema di Kurganov-Tadmor, e presente nella suite open source OpenFOAM.

Vengono quindi investigati i campi di moto su schiere desunte da due testcase reperibili in letteratura, in particolare la schiera subsonica-transonica presentata nella NACA Technical Note 2649, e la schiera supersonica ARL-SL 19, ed i risultati vengono comparati con quelli sperimentali disponibili.



# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	VI
<b>Elenco delle figure</b>	VII
<b>Acronimi</b>	XI
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 Introduzione alla CFD . . . . .	3
1.2 Funzionamento dei compressori . . . . .	4
1.2.1 Parametri di prestazione delle schiere . . . . .	7
1.2.2 Aerodinamica delle schiere transoniche . . . . .	10
1.3 Panoramica . . . . .	21
<b>2 Il Modello Matematico</b>	23
2.1 Equazioni di conservazione . . . . .	25
2.1.1 Ipotesi del modello . . . . .	26
2.1.2 Conservazione della massa . . . . .	28
2.1.3 Conservazione della quantità di moto . . . . .	30
2.1.4 Conservazione dell'energia . . . . .	33
2.2 Le equazioni costitutive . . . . .	36
2.3 Le Equazioni di Navier Stokes . . . . .	38
2.3.1 Il caso inviscido - Equazioni di Eulero . . . . .	40
2.3.2 Scrittura compatta . . . . .	41
2.4 Il problema fisico e le condizioni al contorno . . . . .	43
2.5 RANS e modelli di turbolenza . . . . .	46

2.6	Il modello di turbolenza di Spalart-Allmaras . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Modello OpenFOAM</b>	<b>53</b>
3.1	OpenFOAM . . . . .	54
3.2	Il solutore rhoCentralFoam . . . . .	59
3.2.1	Lo schema di Kurganov-Tadmor . . . . .	60
3.3	Creazione della Mesh . . . . .	67
3.4	Le condizioni al contorno . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Risultati e confronto con il Test Case di riferimento</b>	<b>77</b>
4.1	Test Case di riferimento: Technical Note 2649 . . . . .	78
4.2	Test Case di riferimento: ARL-SL19 . . . . .	95
4.3	Conclusioni . . . . .	103
	<b>Bibliografia</b>	<b>104</b>

# Elenco delle tabelle

2.1	Classificazione dei campi di moto in base al numero di Mach . . . .	24
2.2	Costanti modello di Spalart-Allmaras standard[10] . . . . .	52
2.3	Costanti modello di Spalart-Allmaras senza <i>trip function</i> [10] . . . .	52
4.1	ARL-SL19: Parametri di progetto in ingresso . . . . .	95
4.2	ARL-SL19: Parametri di progetto in ingresso . . . . .	97

# Elenco delle figure

1.1	Compressore Assiale: dettagli della palettatura statorica e rotorica .	1
1.2	Girante di un Compressore Centrifugo . . . . .	2
1.3	Piano meridiano caratteristico dei compressori . . . . .	4
1.4	Vista meridiana di un compressore multistadio . . . . .	5
1.5	Profili palettatura statorica e rotorica di un compressore . . . . .	5
1.6	Profilo base NACA 65-010: ascisse e ordinate per il profilo e per la linea media a $cl=1.0$ [2] . . . . .	13
1.7	Profilo base NACA 65-010: ascisse e ordinate per il profilo e per la linea media a $cl=1.0$ [2] . . . . .	14
1.8	Profilo base ARL-SL-19: ascisse e ordinate per la SS e la PS adimensionalizzate rispetto alla corda $l$ [4] . . . . .	15
1.9	Profilo base ARL-SL-19 [4] . . . . .	16
1.10	Campo di moto periodico per una schiera semi-infinita di pale[3] . .	18
1.11	Direzione di Incidenza Unica per una schiera infinita di pale ad arco di cerchio[3] . . . . .	19
1.12	Grafico di incidenza unica per profilo di pala supersonica ad arco di cerchio[3] . . . . .	20
1.13	Grafico di incidenza unica per profilo di pala supersonica ad S[4] . .	20
2.1	Esempio di contorni del dominio per flusso interno ad una schiera di pale[8] . . . . .	43
2.2	Segno degli autovalori al contorno d'ingresso nel caso subsonico[8] .	44
2.3	Segno degli autovalori al contorno di uscita nel caso subsonico[8] . .	45

2.4	Modello di turbolenza di Spalart-Allmaras: andamento della funzione di parete[10]	51
3.1	OpenFOAM: Struttura di base dell'organizzazione del software	54
3.2	rhoCentralFoam: Notazione Griglia ai Volumi Finiti	62
3.3	GMSH: Rappresentazione di esempi di griglia strutturata (sopra) e non strutturata (sotto) al variare del numero di vertici	68
3.4	GMSH: Rappresentazione di esempi di griglia non strutturata sempre più fitta, procedendo da destra verso sinistra	69
3.5	GMSH: Rappresentazione della griglia ibrida utilizzata; dettaglio su griglia strutturata attorno al profilo della pala e non strutturata man mano che ci si allontana da quella regione	70
3.6	GMSH: Rappresentazione della griglia ibrida utilizzata; dettaglio su diversa densità della mesh in base alla vicinanza alla paletta	71
3.7	GMSH: Rappresentazione della griglia utilizzata nella sua interezza	72
4.1	Technical Note 2649: profilo di pala NACA 65 e relative variazioni dei vettori della velocità attraverso la schiera di pale [1]	78
4.2	Technical Note 2649: Diagramma schematico dell'installazione dell'apparato sperimentale per la schiera bidimensionale [1]	79
4.3	Technical Note 2649: Dettaglio del condotto: strato limite con e senza aspirazione[1]	79
4.4	Mach: 0.42. Campo di pressione nel dominio e attorno alla pala	80
4.5	Mach: 0.42. Linee contour della pressione	81
4.6	Mach: 0.42. Confronto tra distribuzione del coefficiente di pressione del caso sperimentale e numerico	82
4.7	Mach: 0.42. Streamlines	83
4.8	Relazione tra Mach di ingresso e angolo di deviazione della corrente [1]	84
4.9	Salto di pressione: curve misurate sperimentalmente e calcolate numericamente[1]	85
4.10	Mach: 0.61. Campo di pressione nel dominio e attorno alla pala	86
4.11	Mach: 0.61. Linee contour della pressione	87
4.12	Mach: 0.61. Confronto tra distribuzione del coefficiente di pressione del caso sperimentale e numerico	88

4.13 Mach: 0.61. Streamlines . . . . .	89
4.14 Mach: 0.81. Campo di pressione nel dominio e attorno alla pala . .	90
4.15 Mach: 0.81. Confronto tra distribuzione del coefficiente di pressione del caso sperimentale e numerico . . . . .	91
4.16 Mach: 0.81. Linee contour della pressione . . . . .	92
4.17 Mach: 0.81. Streamlines . . . . .	93
4.18 ARL-SL19: Parametri geometrici e profili della schiera di pale . . .	95
4.19 ARL-SL-19: . . . . .	96
4.20 Mach: 1.58. Visualizzazione del numero di Mach nel dominio . . . .	97
4.21 Campo di moto osservato sperimentalmente per Mach 1.58, e rap- porto di compressione 2.12[4] . . . . .	98
4.22 Mach: 1.58. Linee contour della pressione sovrapposte al campo di Mach . . . . .	99
4.23 Confronto tra distribuzione del Mach isoentropico ottenuta speri- mentalmente e numericamente . . . . .	100
4.24 Confronto tra distribuzione del Mach isoentropico ottenuta speri- mentalmente e numericamente in [21] . . . . .	101
4.25 Incidenza della corrente al variare del Mach: confronto tra dati numerici[21] e sperimentali . . . . .	102



# Acronimi

## **PDE**

Partial Differential Equation

## **ODE**

Ordinary Differential Equation

## **APU**

Auxiliary Power Unit

## **NACA**

National Advisory Committee for Aeronautics

## **CFD**

Computational Fluid Dynamics

## **CAD**

Computer Assisted Design

## **PM**

Prandtl-Meyer

## **NS**

Navier-Stokes

**LE**

Leading Edge

**TE**

Trailing Edge

**SS**

Suction Side

**PS**

Pressure Side

**SA**

Spalart Allmaras

**AVDR**

Axial Velocity Density Ratio

**KNP**

Kurganov-Noelle-Petrova

**KT**

Kurganov-Tadmor

**DNS**

Direct Numerical Simulation

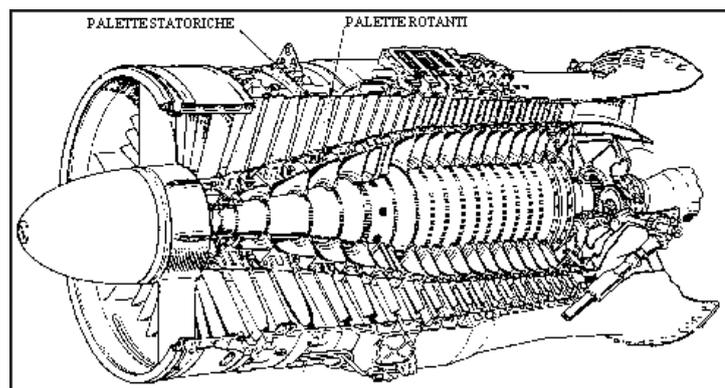
# Capitolo 1

## Introduzione

Un compressore è essenzialmente una turbomacchina operatrice, nella quale viene immessa energia in un fluido tramite la rotazione di un rotore, composto da un certo numero di pale.

All'aumento di energia nel rotore corrisponde un'accelerazione del fluido, la quale viene poi sfruttata nella schiera statorica, composta da pale ferme, in cui il fluido rallenta con l'effetto di ottenere un innalzamento di pressione. Tramite la ripetizione di questa unità fondamentale, detta stadio, si possono ottenere rapporti di compressione anche molto elevati.

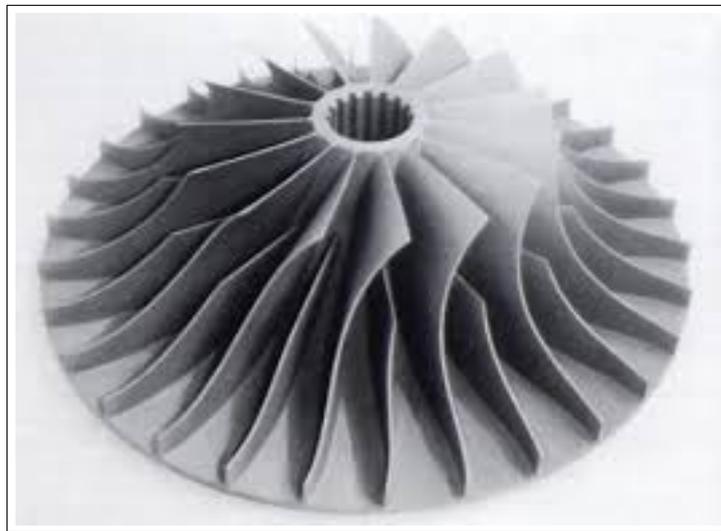
Il compressore assiale è molto utilizzato in campo aeronautico ed energetico, grazie alla possibilità di gestire maggiori portate rispetto ai compressori centrifughi, i quali tuttavia hanno rapporti di compressione per stadio maggiori.



**Figura 1.1:** Compressore Assiale: dettagli della palettatura statorica e rotorica

L'interesse per i compressori assiali inizia già negli anni '20 ma questo tipo di turbomacchina non si diffonde fino agli anni '30-'40, quando la Lockheed e la General Electric vengono incaricate della fornitura di motori assiali a getto e turboeliche, mentre precedentemente i progetti più fortunati erano equipaggiati con compressori centrifughi, che presentavano ingombri minori, con conseguente minor resistenza aerodinamica, e rapporti di compressione inarrivabili.

Negli anni '50 ormai il compressore assiale era montato su tutti i motori più potenti disponibili sul mercato, mentre i compressori radiali continuavano a trovare fortuna su elicotteri ed APU (Auxiliary Power Unit, utilizzata per l'avvio dei motori).



**Figura 1.2:** Girante di un Compressore Centrifugo

Considerando la diffusione del compressore assiale nel mercato aeronautico si intuisce facilmente l'importanza dello studio e dell'ottimizzazione dello stadio del compressore, con l'obiettivo costante di aumentarne l'efficienza e le prestazioni, portando ricadute positive sulla potenza dei motori, sui consumi, e quindi sui costi di operazione dei velivoli.

## 1.1 Introduzione alla CFD

Lo sviluppo e l'ottimizzazione dei compressori assiali, siano essi impiegati in campo aeronautico o energetico, sono stati enormemente accelerati dall'avvento dell'era informatica. Infatti, con l'invenzione dei moderni calcolatori, e con il continuo incremento delle loro capacità di calcolo, sono diventate possibili diverse tecniche di progettazione assistita (CAD) le quali hanno velocizzato enormemente il processo di ricerca e sviluppo riguardante i motori aeronautici, e non solo.

In moltissimi ambiti, dallo studio del flusso attorno alle pale di un compressore e dalla valutazione della risposta strutturale di queste alle forze generate, alla meteorologia, alle scienze mediche, alla microbiologia, si riscontra l'enorme contributo delle tecniche di analisi numerica, affiancata allo studio teorico e sperimentale dei fenomeni trattati.

Se, infatti, fino alla prima metà del secolo scorso, la ricerca e l'avanzamento della tecnica nel campo dell'aerodinamica erano affidate esclusivamente a sforzi teorici e prove sperimentali che ne confermassero la validità, al giorno d'oggi è possibile risolvere numericamente le equazioni che descrivono il comportamento dei fluidi tramite le tecniche di *Computational Fluid Dynamics*.

Le tecniche di CFD consistono nella suddivisione del dominio fisico in piccole regioni, dette elementi o volumi finiti, e nella risoluzione numerica delle equazioni differenziali di governo nelle loro forme algebriche discretizzate nello spazio e/o nel tempo.

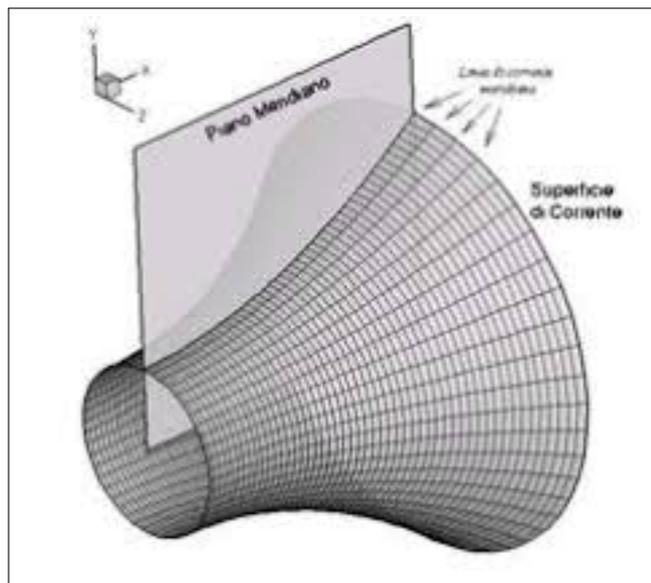
Tra le prime e più importanti applicazioni della *CFD* in ambito aerospaziale, figura certamente la soluzione del problema del corpo tozzo in campo supersonico, dove si ha la formazione di un campo di moto misto subsonico-supersonico.

Al giorno d'oggi lo studio della fluidodinamica tramite tecniche numeriche è estremamente diffuso, e trova applicazioni in tantissimi ambiti, consentendo di ottenere risultati molto accurati e riducendo allo stesso tempo i costi di sviluppo legati alla necessità di validazione dei risultati tramite prove sperimentali.

## 1.2 Funzionamento dei compressori

È importante iniziare descrivendo le caratteristiche delle turbomacchine oggetto del presente studio, per cui si introducono alcuni concetti fondamentali e la terminologia specifica per le schiere.

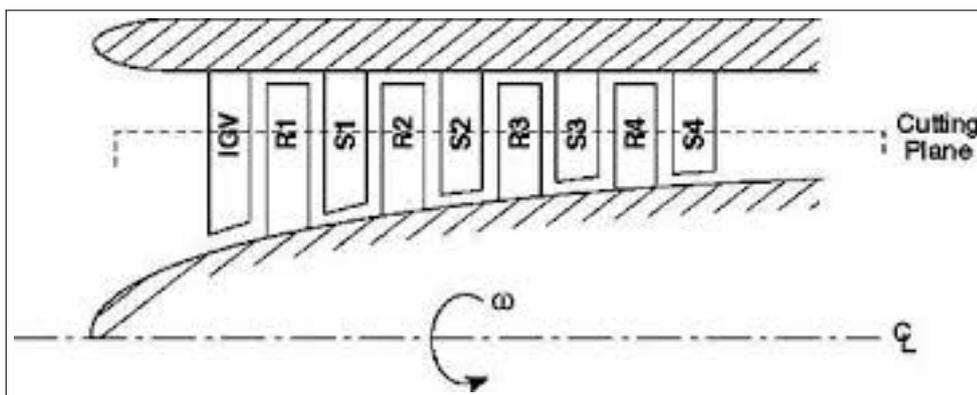
In una turbomacchina rotativa a fluido si possono ricavare molte informazioni da due tipi di viste convenzionalmente utilizzate: la sezione meridiana della macchina e la sezione interpalare.



**Figura 1.3:** Piano meridiano caratteristico dei compressori

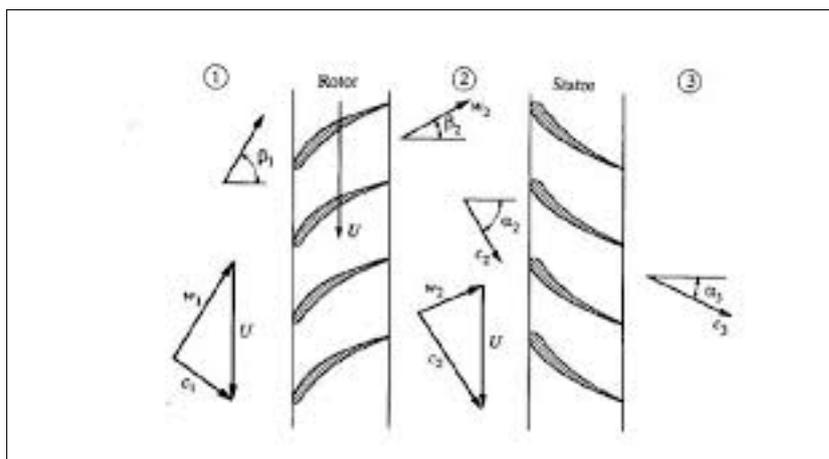
La prima è data dall'intersezione tra un qualsiasi piano contenente l'asse di rotazione e la macchina stessa (in virtù della simmetria assiale): in essa è rappresentata la proiezione delle pale e l'informazione fondamentale trasmessa riguarda le componenti assiale e radiale del flusso. La sezione interpalare è lo sviluppo in piano di una sezione anulare che si otterrebbe intersecando la macchina con un cilindro di raggio  $r$  coassiale alla macchina. Da questa sezione si ricavano i profili delle palette al raggio  $r$ , e il loro sviluppo in piano è detto *schiera*.

L'analisi completa di una schiera decelerante deve assolutamente considerare gli effetti tridimensionali del flusso, approccio adottato normalmente in fase finale di progettazione.



**Figura 1.4:** Vista meridiana di un compressore multistadio

Le caratteristiche fondamentali del flusso attorno ai profili, il salto di pressione e le perdite possono essere colte efficacemente tramite modelli bidimensionali semplificati, in cui viene studiato il flusso in moto piano, appunto grazie alla sezione interpolare.



**Figura 1.5:** Profili palettatura statorica e rotorica di un compressore

Nella Figura 1.5, si vedono con chiarezza i profili delle palettature di un compressore. Si definisce passo di una schiera la distanza circonferenziale tra due profili omologhi. In una macchina rotativa, quindi, il passo aumenta all'aumentare del raggio su cui è tracciata la sezione interpolare.

Si definiscono altresì bordo di attacco (*Leading Edge*) e di uscita (*Trailing Edge*) rispettivamente i punti di primo e ultimo contatto tra la corrente ed il profilo della

paletta.

Il dorso e il ventre della pala, dette anche estradosso ed intradosso del profilo, sono invece rispettivamente le curve lungo le quali la pressione mediamente diminuisce ed aumenta rispetto alle condizioni indisturbate di monte del flusso.

In letteratura sono comunemente adoperati i termini *Suction Side* (SS) e *Pressure Side* (PS). La linea media o *camber-line* è invece la curva che va dal bordo d'attacco a quello di uscita che mantiene uguale distanza tra ventre e dorso.

La corda di un profilo  $c$  è la distanza retta tra bordo d'attacco e bordo di fuga. Si definisce quindi la solidità  $\sigma$  come il rapporto tra corda e passo dei profili costituenti una schiera:  $\sigma = \frac{c}{s}$ , e rappresenta la capacità di far rispettare al flusso la curvatura geometrica del profilo, con importanti conseguenze sulle prestazioni.

Una solidità infinita rappresenta una schiera con pale infinitamente vicine, mentre una solidità nulla rappresenta un profilo isolato.

L'angolo costruttivo o di calettamento della pala è l'angolo formato dalla corda del profilo e la direzione assiale della schiera; l'angolo costruttivo al bordo d'attacco è l'angolo tra la tangente alla linea media al leading edge e la direzione assiale, mentre l'angolo costruttivo al bordo di fuga è l'analogo in coda alla paletta.

La differenza tra i due angoli è denominata angolo di deflessione ed è legato alla deviazione del flusso, a sua volta responsabile del lavoro scambiato tra macchina e fluido.

### 1.2.1 Parametri di prestazione delle schiere

Le prestazioni delle schiere vengono valutate e confrontate grazie anche all'utilizzo di alcuni parametri e coefficienti adimensionali, derivati da grandezze globali caratterizzanti il bulk del flusso. Solitamente vengono valutate alle sezioni di ingresso e di uscita, utilizzando sonde di pressione e tubi di Pitot per la misurazione delle grandezze.

I principali parametri di interesse sono dunque:

- **AVDR:** l'Axial Velocity Density Ratio è definito come il rapporto tra i prodotti di densità e velocità assiali medie tra le sezioni in ingresso e in uscita di una schiera.

$$AVDR = \frac{\rho_2 q_{x2}}{\rho_1 q_{x1}} \quad (1.1)$$

Questo è un indicatore della bidimensionalità del flusso; il suo valore risulta pari a 1 per correnti 2D, mentre diventa maggiore dell'unità per flussi con linee di corrente che si addensano; valori inferiori all'unità si riscontrano invece in caso di flussi con linee di corrente che divergono.

Nei flussi guidati, come per i compressori, la presenza di strato limite sulle pareti e le eventuali separazioni del flusso possono portare l'AVDR ad essere  $> 1$ , con effetti importanti per la formazione di flussi secondari nei condotti interpalari.

- **Rapporto di compressione:** il rapporto di compressione  $\pi_c$  è definito come il salto di pressione tra la sezione di valle e di monte, e misura l'incremento di pressione attraverso la schiera.

$$\pi_c = \frac{p_2}{p_1} \quad (1.2)$$

Può essere definito per misurare il salto di pressione statico o anche quello di pressione totale.

$$\pi_c^\circ = \frac{p_2^\circ}{p_1^\circ} \quad (1.3)$$

- **Coefficiente di perdita:** il coefficiente  $\Omega$  è definito come il rapporto tra la differenza di pressione totale tra ingresso e uscita della schiera e la differenza tra pressione totale e statica in ingresso, ovvero la pressione dinamica responsabile delle perdite.

$$\Omega = \frac{p_1^{\circ} - p_2^{\circ}}{p_1^{\circ} - p_1} \quad (1.4)$$

È un parametro legato al rendimento isoentropico dei compressori ed è molto importante nei compressori supersonici dove sono presenti urti obliqui e normali che introducono perdite.

Questo parametro dipende fortemente dall'incidenza della corrente e dal numero di Mach, nonché dal rapporto di compressione, da cui dipendono posizione e tipo degli urti.

- **Coefficienti di Pressione, Portanza e Resistenza:** questi coefficienti sono parametri calcolati dalla distribuzione di pressione sul dorso e ventre della pala.

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho q_{\infty}^2} \\ c_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho q_{\infty}^2 c} \\ c_D &= \frac{D}{\frac{1}{2}\rho q_{\infty}^2 c} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dove L e D sono la Portanza e la Resistenza, esercitate dalla corrente fluida sul profilo rispettivamente in direzione perpendicolare e parallela al vettore  $\bar{q}_{\infty}$ .

I coefficienti di lift e drag rapportano tali forze alla pressione dinamica che le ha generate e alla superficie della paletta  $S = c \cdot 1$ .

L'andamento di questi parametri si può legare all'angolo d'incidenza del flusso ed al numero di Mach.

Se si considera una schiera rotorica, la risultante delle forze tangenziale all'asse di rotazione moltiplicata per la velocità di rotazione tangenziale fornisce la potenza spesa per sostenere il moto, mentre la componente parallela all'asse sarà un'azione assorbita dalle pale e dai cuscinetti su cui è montata l'intera struttura del rotore.

- **Numero di Reynolds:** Uno tra i gruppi adimensionali più noti, il numero di Reynolds può essere matematicamente definito come segue.

$$Re = \frac{\rho q_{\infty} c}{\mu} \quad (1.6)$$

Questo rappresenta il rapporto tra forze inerziali e forze viscosse a cui è sottoposta una particella fluida che si muove a velocità  $\bar{q}$ : all'aumentare di  $Re$  si ha il passaggio da moto laminare a moto di transizione a turbolento.

- **Mach Isoentropico:** Parametro adimensionale pari al numero di mach calcolato in modo isoentropico dalla pressione statica locale e la pressione totale di monte.

$$M_{iso} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_1^{\circ}}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (1.7)$$

Questa definizione è resa possibile dall'introduzione dell'ipotesi sulla variazione di pressione statica nulla all'interno dello strato limite; ciò porta a definire la pressione statica a parete uguale a quella subito fuori dallo strato limite.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

Il Mach isoentropico è quindi un utile strumento per visualizzare l'andamento sul profilo della pala, identificando facilmente le zone in cui la velocità della corrente varia, ad esempio sul dorso dove accelera fortemente, portando al rischio di forti perdite viscosse o dovute agli urti.

## 1.2.2 Aerodinamica delle schiere transoniche

Fin dall'avvento dell'era dei motori a getto per la propulsione aeronautica si è manifestata la necessità di spingere gli stadi di compressore a sempre maggiori rapporti di compressione con elevate portate specifiche elaborate.

Le maggiori velocità di volo e di rotazione delle turbomacchine hanno quindi portato allo sviluppo di fans e compressori con velocità relativa del flusso in ingresso supersonica.

Tipicamente queste macchine sono fatte operare con velocità relativa in uscita subsonica, per cui vengono denominate compressori transonici. Il vantaggio nell'operare con elevate velocità all'ingresso della macchina deriva direttamente dall'equazione di Eulero.

$$L = u_2 c_{\theta 2} - u_1 c_{\theta 1} \quad (1.9)$$

Dove  $u$  è la velocità del rotore mentre  $c_\theta$  la componente tangenziale all'asse di rotazione della velocità assoluta del flusso; i pedici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente alla sezione a monte e a valle della schiera.

È evidente che per aumentare il lavoro specifico si può agire sulla velocità di rotazione  $u$  oppure sulla deviazione del flusso che però è molto limitata soprattutto per macchine a fluido decelerante, dove il gradiente di pressione avverso può causare la separazione del flusso.

Si pensa quindi di aumentare la velocità di rotazione e quindi la velocità relativa del flusso in ingresso, secondo la regola del triangolo di velocità.

$$\bar{c} = \bar{w} + \bar{u} \quad (1.10)$$

In questo modo è possibile aumentare notevolmente il lavoro specifico. Questo è la causa principale degli elevati rapporti di compressione che si possono ottenere con compressori transonici, arrivando ad essere anche superiori a  $\pi_c = 2.2$ , mentre per tipiche macchine che funzionano a velocità subsoniche questo valore si aggira attorno a  $\pi_c = 1.2$  per stadio.

Un ulteriore e decisivo vantaggio per applicazioni aeronautiche è la possibilità di ridurre il numero degli stadi a parità di salto di pressione, riducendo così il peso della macchina.

Sfortunatamente la velocità supersonica del flusso comporta la presenza di onde d'urto al bordo d'attacco e nel canale di passaggio che deteriorano drasticamente l'efficienza della macchina sia per la perdita di pressione totale, sia per le interazioni con lo strato limite, che portano a distorsioni del flusso e/o separazione della vena fluida.

L'ottimizzazione delle schiere supersoniche mira a ridurre il più possibile queste perdite cercando di trarre vantaggio dal meccanismo di compressione degli urti. Le considerazioni sul flusso supersonico nel piano circonferenziale sono prese in congiunzione con il flusso nel canale meridiano.

La deviazione e le perdite introdotte nel piano blade to blade incidono anche sul flusso assiale nella macchina, e nel caso supersonico l'accoppiamento è solitamente più importante che nel caso subsonico, per cui risulta utile tenere in considerazione l'influenza di fattori di tridimensionalità come l'AVDR.

### **Profili NACA Serie 65 per schiere di compressori**

La famiglia di profili NACA 65, ottimizzata per i compressori funzionanti in alto subsonico, sono ottenuti combinando una legge degli spessori di base ad una linea media inarcata.

Per la legge degli spessori è stata adottata la forma base NACA 65(216)-010, modificata introducendo una variazione dipendente dalla corda in modo da aumentare lo spessore del profilo verso il bordo di fuga..

$$t_{N65} = t_{base} + 0.0015 \cdot \frac{x}{c} \quad (1.11)$$

La forma ottenuta da questa modifica del profilo simmetrico base è stata definita come NACA 65-010.

La linea media utilizzata è invece quella di carico uniforme sulla pala, definita dal parametro  $a = 1.0$ , che indica la posizione relativa sulla corda del punto di

massimo inarcamento del profilo [1].

Le ordinate delle curve di dorso e ventre sono ottenibili a partire dalla legge degli spessori e della linea media, calcolando:

$$\begin{aligned}x_V &= x + t \cdot \sin \theta \\y_V &= y_m - t \cdot \cos \theta\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}x_D &= x - t \cdot \sin \theta \\y_D &= y_m + t \cdot \cos \theta\end{aligned}\tag{1.13}$$

L'inarcamento della linea media è espresso in funzione del coefficiente di portanza di design, secondo la formula:

$$\begin{aligned}\frac{y_c}{c} &= \frac{c_{li}}{2\pi(a+1)} \left\{ \frac{1}{1-a} \left[ \frac{1}{2} \left( a - \frac{x}{c} \right)^2 \ln \left| a - \frac{x}{c} \right| - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{c} \right)^2 \ln \left( 1 - \frac{x}{c} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x}{c} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( a - \frac{x}{c} \right)^2 - \frac{x}{c} \ln \frac{x}{c} + g - h \frac{x}{c} \right\}\end{aligned}\tag{1.14}$$

dove

$$\begin{aligned}g &= -\frac{1}{1-a} \left[ a^2 \left( \frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{4} \right) \right] \\h &= \frac{1}{1-a} \left[ \frac{1}{2} (1-a)^2 \ln 1-a - \frac{1}{4} (1-a)^2 \right] + g\end{aligned}\tag{1.15}$$

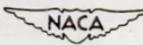
Sia le ordinate che le pendenze del profilo alle varie stazioni possono essere riscalate direttamente moltiplicando per il coefficiente desiderato: ad esempio, per ottenere un profilo a  $c_l = 1.2$  sarà sufficiente moltiplicare le ordinate della linea media per un fattore 1.2.

La notazione per questa famiglia di profili segue parte delle regole base della notazione NACA. Partendo dalla forma base simmetrica 65-010 già descritta, vengono definiti gli altri profili in base al loro *camber*, per cui ad esempio la pala NACA 65-810 indica un profilo la cui linea media ha un *lift coefficient* di design di

$c_l = 0.8$ , mentre il profilo NACA 65-(12)10 ha una linea media tale per cui il *lift coefficient* è  $c_l = 1.2$ .

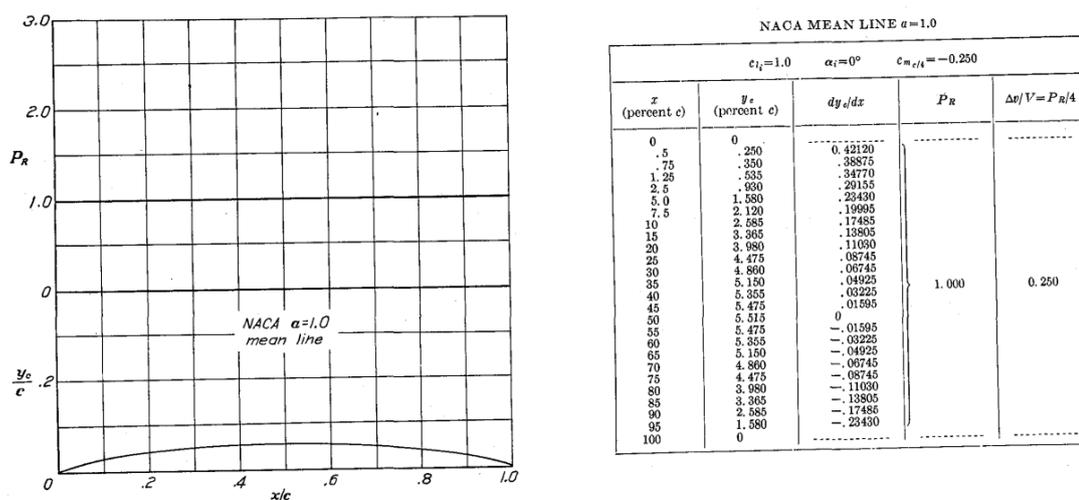
Di seguito si riportano le ascisse e ordinate per il profilo base NACA 65-010 in Figura 1.6 e per la linea media a  $c_l = 1.0$  in Figura 1.7

Station, x	Ordinates, ±y	
	65(216)-010 airfoil combined with $y = 0.0015x$	Derived 65-010 airfoil
0	0	0
.5	.752	.772
.75	.890	.932
1.25	1.124	1.169
2.5	1.571	1.574
5.0	2.222	2.177
7.5	2.709	2.647
10	3.111	3.040
15	3.746	3.666
20	4.218	4.143
25	4.570	4.503
30	4.824	4.760
35	4.982	4.924
40	5.057	4.996
45	5.029	4.963
50	4.870	4.812
55	4.570	4.530
60	4.151	4.146
65	3.627	3.682
70	3.038	3.156
75	2.451	2.584
80	1.847	1.987
85	1.251	1.385
90	.749	.810
95	.354	.306
100	.150	0
L.E. radius	.666	.687



**Figura 1.6:** Profilo base NACA 65-010: ascisse e ordinate per il profilo e per la linea media a  $c_l=1.0$  [2]

Si passa ora alla definizione dei profili per le schiere transoniche.



**Figura 1.7:** Profilo base NACA 65-010: ascisse e ordinate per il profilo e per la linea media a  $c_l=1.0$ [2]

### Profili ARL-SL-19 per schiere transoniche

Il profilo scelto per lo studio comparativo è l'ARL SL 19, il quale ricade nella tipologia di profili di pala ad S-shape.

Tale forma è caratteristica dei profili a ridotta deviazione del flusso e sfrutta contemporaneamente sia la modalità di compressione interna, tramite un'onda d'urto normale nel canale interpalaire con flusso subsonico nella zona posteriore del profilo, sia la precompressione esterna, realizzata proprio grazie alla particolare forma concava del dorso della paletta [3].

Al bordo d'attacco nasce infatti un *bow shock* molto ravvicinato alla parete, con il ramo obliquo inferiore più intenso di quello superiore, dovuto alla leggera incidenza positiva della corrente.

A valle del *bow shock*, si sviluppa un ventaglio di espansione isoentropica della corrente dovuto alla forte deviazione del flusso supersonico attorno al leading edge, che può portare a numeri di Mach molto elevati, seguito poi da una serie di linee di compressione generate dalla forma concava e graduale della parte iniziale del *suction side*, le quali coalescono anteriormente all'urto staccato davanti alla paletta successiva, realizzando una precompressione e rallentando la corrente, in modo

quindi da diminuire le perdite per gli urti sulla paletta adiacente.

Suction Surface		Pressure Surface	
$X_{SS}/l$	$Y_{SS}/l$	$X_{PS}/l$	$Y_{PS}/l$
0.001389	0.001279	0.001170	-0.001274
0.012656	0.000551	0.012425	-0.002454
0.024082	0.000153	0.023344	-0.003535
0.035660	-0.000250	0.035422	-0.004518
0.047387	-0.000549	0.047164	-0.005402
0.071285	-0.000338	0.071114	-0.006885
0.095750	-0.000745	0.095653	-0.007995
0.120746	-0.000293	0.120743	-0.008761
0.146218	0.000431	0.146333	-0.009213
0.172107	0.001527	0.172342	-0.009395
0.198339	0.002790	0.198634	-0.009346
0.224836	0.004206	0.225272	-0.009132
0.251495	0.005714	0.252015	-0.008796
0.278244	0.007255	0.278317	-0.008390
0.305014	0.008735	0.305619	-0.007964
0.331755	0.010256	0.332374	-0.007536
0.358421	0.011652	0.359032	-0.007139
0.384988	0.012960	0.385573	-0.006784
0.411438	0.014149	0.411390	-0.006473
0.437768	0.015238	0.438286	-0.006219
0.463991	0.016233	0.464463	-0.005994
0.490107	0.017071	0.490544	-0.005806
0.516126	0.017836	0.516510	-0.005650
0.542037	0.018498	0.542370	-0.005524
0.567845	0.019048	0.568116	-0.005432
0.593545	0.019431	0.593746	-0.005371
0.619125	0.019777	0.619252	-0.005352
0.644583	0.019931	0.644619	-0.005370
0.669357	0.020333	0.669342	-0.005437
0.695076	0.019944	0.694920	-0.005552
0.720106	0.019713	0.719853	-0.005713
0.744997	0.019313	0.744659	-0.005884
0.769747	0.018729	0.769331	-0.006049
0.794367	0.017943	0.793885	-0.006171
0.818368	0.016949	0.818345	-0.006219
0.843268	0.015727	0.842723	-0.006164
0.867576	0.014263	0.867029	-0.005972
0.891806	0.012536	0.891284	-0.005617
0.915964	0.010575	0.915483	-0.005073
0.940058	0.008310	0.939661	-0.004310
0.964095	0.005741	0.963793	-0.003300
0.988073	0.002353	0.987909	-0.002021
1.000045	0.001233	0.999955	-0.001277

**Figura 1.8:** Profilo base ARL-SL-19: ascisse e ordinate per la SS e la PS adimensionalizzate rispetto alla corda  $l$  [4]

La curvatura del dorso diventa poi convessa, ed aumenta lo spessore; ad una certa distanza dal bordo d'attacco si ritroverà l'onda obliqua proveniente dalla paletta adiacente, che rifletterà sulla parete, provocando un rallentamento della corrente ed una compressione del flusso.

Sul ventre, il flusso a valle del *bow shock* viene accelerato fino ad andare incontro

ad un'onda d'urto normale nel canale interpilare ad una posizione sulla corda che dipende anche dalla back pressure imposta alla schiera.

La presenza di questo *normal shock* a parete può portare all'interazione con lo strato limite e alla sua separazione dalla parete in modo più o meno pronunciato.

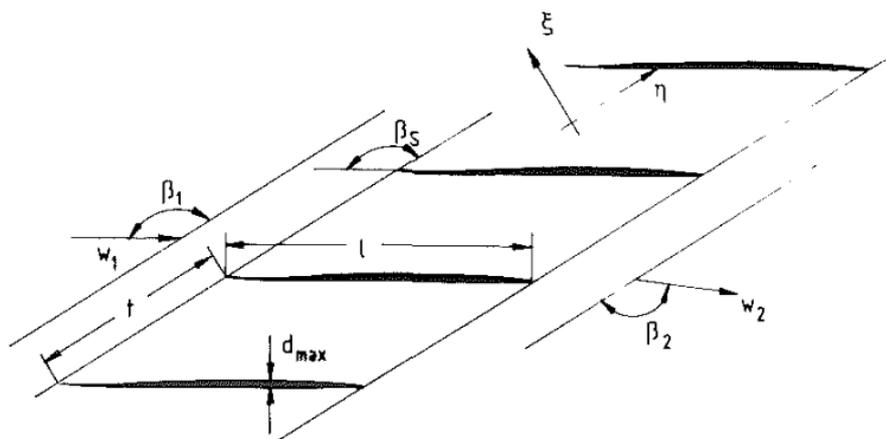


Figura 1.9: Profilo base ARL-SL-19 [4]

### Angolo di Incidenza Unica

Per le schiere investite da una corrente supersonica, se questa presenta alcune precise caratteristiche esiste una relazione biunivoca tra il numero di Mach d'ingresso e l'inclinazione della corrente [5].

Per una corrente supersonica, considerando il campo indisturbato come irrotazionale, si possono ottenere per ogni punto dalle equazioni di congruenza due direzioni caratteristiche lungo le quali viene propagato il segnale.

Per il metodo delle caratteristiche, il valore delle grandezze del campo può essere determinato a partire dalle condizioni iniziali e al contorno propagando i segnali nel dominio: si definiscono quindi un dominio di dipendenza ed un dominio di influenza per ogni punto del campo.

Il dominio di dipendenza è dato dalla regione del dominio delimitata dalle linee caratteristiche che individuano il punto, per il quale le condizioni di monte determinano la soluzione in quel particolare punto.

Il dominio di influenza invece è delimitato dalle linee caratteristiche che si dipanano dal punto in questione verso i punti a valle, per cui quest'ultimo ne influenza direttamente la soluzione, mentre il suo disturbo non influenza i punti a monte.

Le linee caratteristiche di una corrente supersonica coincidono con le *linee di Mach*, per le quali la pendenza rispetto alla direzione della corrente può essere calcolata grazie alla relazione matematica che segue.

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M} \quad (1.16)$$

Per un fissato numero di Mach, quindi, l'inclinazione della corrente può essere tale che una delle due linee caratteristiche che partono da un punto qualsiasi del campo di monte sia diretta verso il campo di monte, in particolare questo succede se è verificata la relazione seguente.

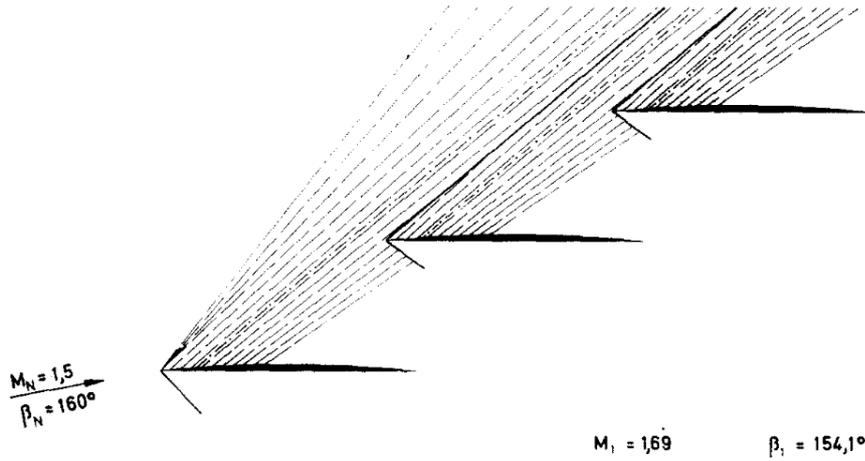
$$\beta + \mu > \frac{\pi}{2} \quad (1.17)$$

Quando si è in queste condizioni, il numero di Mach assiale della corrente  $M_{ax} = M_{\infty} \cdot \cos \beta$  è minore dell'unità, ed il disturbo può risalire la corrente e perturbare il campo a monte della schiera.

Tenendo a mente queste considerazioni, si può introdurre una schiera semi-infinita di pale, per analizzare come queste premesse portino alla definizione univoca della direzione del campo di moto supersonico di monte.

Come si può vedere dalla Figura 1.10 che segue, il campo di moto per una schiera semi-infinita di pale è periodico a partire dalla seconda pala, mentre nel caso della prima paletta si evincono delle differenze nel campo risultante.

Infatti, in condizioni di incidenza  $\beta_N$  maggiori dell'inclinazione della tangente al bordo d'attacco, sul ventre della prima paletta si forma un'onda d'urto obliqua, mentre sul dorso si crea un ventaglio di espansione di Prandtl-Meyer (PM), che accelera la corrente e la fa deviare. Per una corrente supersonica che si possa



**Figura 1.10:** Campo di moto periodico per una schiera semi-infinita di pale[3]

considerare irrotazionale vale infatti che[3]

$$\begin{aligned} \beta + \nu(M) &= \text{const} && \text{per caratt. right turning} \\ \beta - \nu(M) &= \text{const} && \text{per caratt. left turning} \end{aligned} \quad (1.18)$$

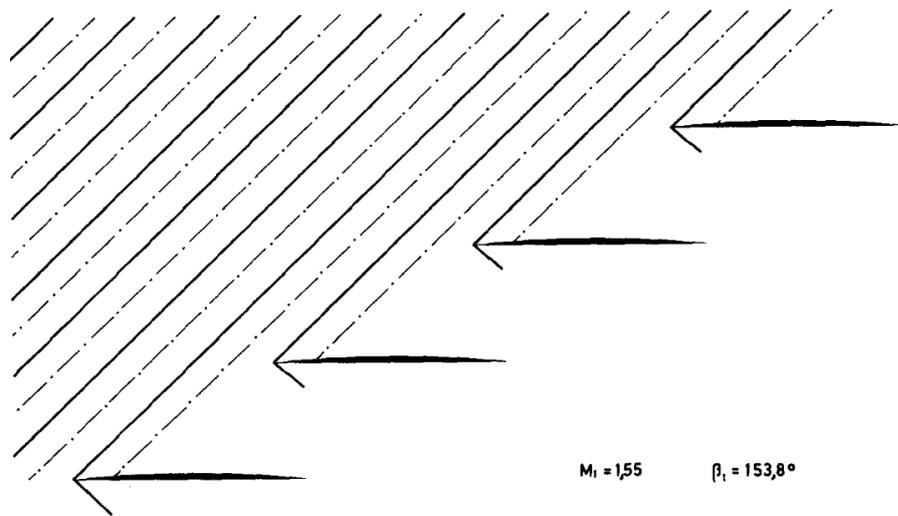
dove

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \quad (1.19)$$

Sulla parete del dorso della pala si forma quindi un ventaglio di linee caratteristiche *left turning*, orientate secondo l'angolo di mach calcolato dalla velocità tangenziale alla parete. Queste linee caratteristiche avranno inclinazioni diverse, e tra queste ne esisterà una che non intersecherà mai le linee caratteristiche provenienti dalle palette successive alla prima.

Il Mach e la direzione della corrente che generano questa linea caratteristica si possono quindi considerare le condizioni uniformi di monte, per cui si ha lo stesso campo di moto risultante su tutte le palette della schiera piana infinita, come si può vedere in Figura 1.11.

Da queste considerazioni si può quindi ricavare un grafico che lega il numero di



**Figura 1.11:** Direzione di Incidenza Unica per una schiera infinita di pale ad arco di cerchio[3]

Mach della corrente alla sua inclinazione, nel quale si può distinguere facilmente la regione in cui si è in condizioni di *Unique Incidence*, sia per schiere di pale supersoniche ad arco di cerchio, in Figura 1.12, che per pale ad S, in Figura 1.13.

In queste condizioni, e fino a che la velocità non è tale che le linee caratteristiche siano interamente contenute nel canale interpilare della schiera, il disturbo introdotto dalla pala potrà risalire la corrente e influenzare il campo di monte.

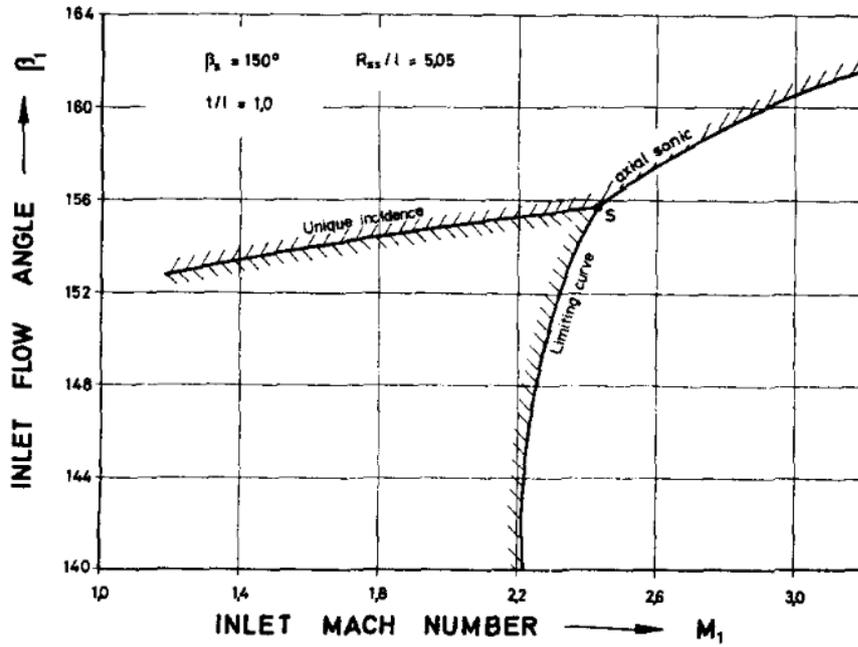


Figura 1.12: Grafico di incidenza unica per profilo di pala supersonica ad arco di cerchio[3]

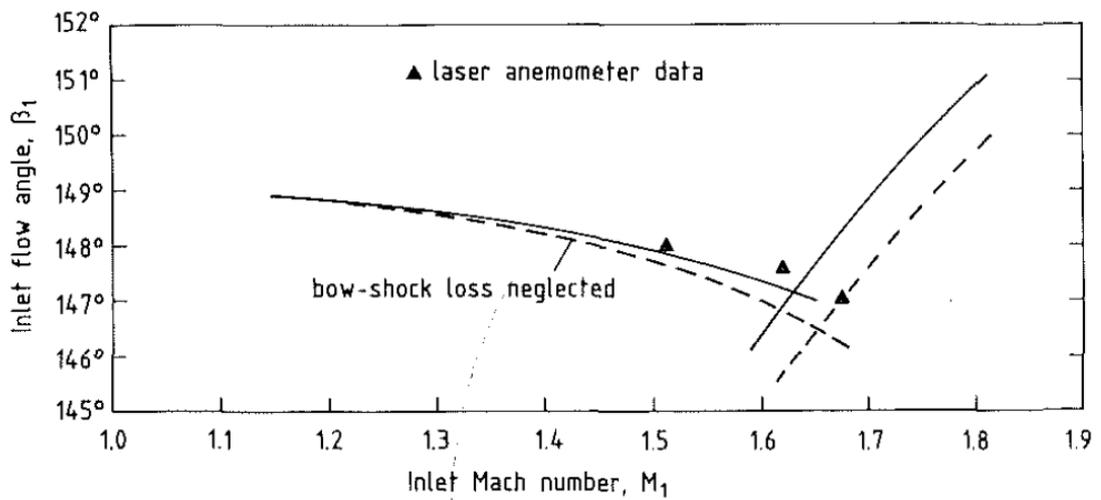


Figura 1.13: Grafico di incidenza unica per profilo di pala supersonica ad S[4]

## 1.3 Panoramica

All'interno di questo primo capitolo, nei paragrafi precedenti si è introdotto l'ambito in cui il caso studio si sviluppa. Dapprima si è descritta la CFD e se ne sono evidenziati i pregi che la rendono così essenziale e diffusa negli ambienti accademici ed industriali, e successivamente si è entrati nel dettaglio del soggetto in esame: il compressore.

Per quanto riguarda lo sviluppo dei successivi capitoli, il lavoro di tesi verrà presentato secondo la seguente suddivisione:

- **Capitolo 2: Descrizione del Modello Matematico**

In questa sezione viene descritto il modello matematico utilizzato per descrivere i fenomeni fluidodinamici; vengono descritte le ipotesi e i passaggi necessari per ottenere le equazioni nel caso più generale. In seguito vengono presentate le ipotesi su cui si basano le metodologie analitiche utilizzate in passato, le ipotesi semplificative nel modello di fluido inviscido, e i risultati ottenibili da questi modelli. Si discute il problema differenziale, la natura del problema fisico e quindi le condizioni al contorno da imporre. Vengono poi presentate le equazioni necessarie alla trattazione della turbolenza.

- **Capitolo 3: Modello OpenFOAM**

Viene presentato e descritto il progetto OpenFOAM, soffermandosi sulle sue potenzialità, punti di forza e debolezze del linguaggio utilizzato. Si discutono nel dettaglio le caratteristiche del solutore prescelto per lo studio comparativo con i dati sperimentali, entrando nel dettaglio degli schemi numerici utilizzati per ottenere la soluzione. Si descrive la procedura di creazione della geometria, la sua conversione in formato compatibile con il solutore, e la preparazione dei file necessari alla simulazione: condizioni al contorno, proprietà termofisiche, modello di turbolenza etc...

- **Capitolo 4: Risultati e confronto con il Test Case di riferimento**

Rappresenta l'ultima sezione dell'elaborato, ed è a sua volta suddivisa per presentare le due diverse schiere analizzate.

Nel primo caso viene presentato lo studio su schiera subsonica-transonica della NACA[1]. Si analizzano le premesse e si discute della possibilità o meno di riprodurre l'analisi tramite la CFD; in seguito vengono presentati i risultati ottenuti e la loro aderenza ai dati sperimentali disponibili.

Nella seconda parte, vengono presentati i risultati ottenuti dalla simulazione numerica della schiera supersonica ARL-SL 19[4].

Infine, vengono tratte delle conclusioni in base alle considerazioni effettuate sui risultati.

## Capitolo 2

# Il Modello Matematico

Per la simulazione di un flusso compressibile in un compressore assiale, il modello matematico è basato sulle leggi di conservazione delle grandezze fisiche e termodinamiche di interesse.

Di seguito si darà una descrizione delle equazioni di governo della fluidodinamica, presentandole dapprima nella formulazione più generale, per poi passare alle forme semplificate, dove vengono fatte importanti ipotesi che riducono la complessità del problema.

Tra queste, la più importante sarà quella di considerare il fluido come inviscido, per cui vengono eliminati tutti gli effetti viscosi e dissipativi, come la presenza di strato limite sulle pareti delle pale o la presenza di turbolenza.

Alle leggi di conservazione si accompagnano anche relazioni costitutive che regolano i legami tra diverse variabili del modello, e che permettono la risoluzione del sistema matematico di equazioni.

Verranno poi illustrati i metodi di discretizzazione delle equazioni di governo che descrivono la fisica del problema, che porteranno ad una diversa scrittura delle stesse in cui compariranno le grandezze delle singole celle del dominio.

Si possono suddividere la maggior parte delle tipologie di flussi studiati con la CFD in due categorie:

- *Flussi incompressibili*: per questo tipo di correnti fluide si possono considerare trascurabili i cambiamenti nella densità, i quali non modificano sostanzialmente la soluzione numerica della simulazione;
- *Flussi compressibili*: al contrario, per questo tipo di flussi, i cambiamenti di densità possono essere considerevoli, e devono essere necessariamente tenuti in considerazione. Nelle turbomacchine in generale, siano esse compressori o turbine, vengono realizzati salti importanti di densità, per cui i flussi interni a queste macchine ricadono sempre nella categoria dei flussi compressibili.

Di seguito, la tabella riassuntiva della caratterizzazione della tipologia di flusso al variare del valore assunto dal numero adimensionale di Mach.

Tipo di flusso	Numero di Mach
Basso subsonico	0 - 0.3
Alto subsonico	0.3 - 0.6
Transonico	0.6 - 1.1
Supersonico	1 - 5
Ipersonico	> 5

**Tabella 2.1:** Classificazione dei campi di moto in base al numero di Mach

## 2.1 Equazioni di conservazione

Risulta intuitivo comprendere il concetto di conservazione di una quantità, tuttavia può diventare piuttosto complicato rappresentarla in formulazione matematica.

In una equazione di conservazione, la variazione di una grandezza all'interno di un volume arbitrariamente definito viene calcolata considerando la presenza delle sorgenti interne al volume considerato, ed il contributo dei flussi attraverso le superfici del volume stesso.

Le leggi sulle quali si basa la fluidodinamica sono sostanzialmente casi particolari delle equazioni di conservazione, o leggi di bilancio, delle seguenti grandezze fisiche:

- **Massa:** la legge di bilancio della massa è detta anche equazione di continuità;
- **Quantità di moto:** la conservazione della quantità di moto rappresenta la seconda legge di Newton;
- **Energia:** la conservazione dell'energia incarna il primo principio della termodinamica;

Il sistema di equazioni differenziali che si ottiene dall'espressione delle leggi di conservazione, unito alle relazioni costitutive del fluido, descrive completamente il comportamento di qualsiasi flusso fluido; l'insieme di queste equazioni prende il nome di **Equazioni di Navier Stokes**.

Queste equazioni sono in grado di descrivere nella loro interezza tutti i fenomeni delle correnti fluide, tra cui anche la turbolenza, nonostante un approccio diretto di calcolo delle traiettorie e delle grandezze del fluido in questo caso sia infattibile per il costo computazionale che comporterebbe.

Al posto delle DNS (*Direct Numerical Simulations*) si preferisce ricorrere a modelli di turbolenza con formulazioni semplificate, oppure impiegando la forma delle equazioni di Navier-Stokes mediate.

Il problema differenziale viene completato aggiungendo alle equazioni di bilancio le condizioni iniziali del problema e le condizioni al contorno sulle regioni ai bordi del dominio.

### 2.1.1 Ipotesi del modello

Nella descrizione di un fenomeno fisico, il modello matematico che si utilizza permette solamente un certo livello di rappresentazione della realtà, in virtù delle ipotesi su cui esso si regge.

Le equazioni della fluidodinamica ad esempio possono essere considerate valide per sistemi in cui il numero di particelle sia sufficientemente alto da poter considerare il fluido come *continuo*. In questo modo, al moto di agitazione termica delle singole molecole, si sovrappone il moto medio generale, e si possono considerare le grandezze medie di un numero sufficientemente grande di particelle piuttosto che di ogni particella singolarmente.

Così, l'elemento fondamentale della fluidodinamica diventa il volumetto infinitesimo, e non la singola molecola, per cui i campi di velocità, temperatura, pressione, possono essere descritti da grandezze medie senza dover specificarne il valore per ogni particella.

Il parametro adimensionale che descrive il grado di *continuità* del mezzo considerato, è il *Numero di Knudsen*.

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \tag{2.1}$$

Nella sua definizione si vede comparire al numeratore il libero cammino medio di una particella costituente, e al denominatore la lunghezza caratteristica del problema fluidodinamico considerato.

Il libero cammino medio di una particella rappresenta la distanza media che intercorre tra due urti successivi, e quindi il cammino che essa percorre liberamente prima di incontrare un'altra particella.

È facile intuire l'implicazione fisica di questo parametro, che indica chiaramente la concentrazione di particelle in una regione, quanto queste siano confinate, e quanto quindi siano vicine tra di esse.

Per poter definire però il grado di continuità del fluido si deve confrontare il libero cammino medio delle particelle con la grandezza caratteristica del fenomeno che si sta considerando: se la lunghezza caratteristica è dello stesso ordine di grandezza del libero cammino medio, il fluido non apparirà come un continuo costituito da un grande numero di particelle, ma la distanza percorsa da ognuna di

queste sarà apprezzabile ed esse devono essere considerate singolarmente nelle loro interazioni e non più in modo statistico e mediato.

- $Kn < 0.01$ : ipotesi di fluido continuo
- $0.01 < Kn < 1$ : regime di transizione
- $Kn > 1$ : regime molecolare

Un'altra ipotesi delle classiche equazioni di Navier-Stokes, consiste nel considerare il fluido chimicamente omogeneo e non reagente: vengono trascurate le perturbazioni dovute alle reazioni chimiche delle diverse specie presenti nella miscela.

Volendo considerare reazioni chimiche, devono essere aggiunte al sistema le equazioni di conservazione delle singole specie chimiche, andando di fatto ad aggiungere un intero modello chimico che complica di molto la fisica del problema.

Addizionalmente si ipotizza che il fluido sia privo di cariche elettriche libere, che quindi il fluido sia neutro, e che di conseguenza siano assenti perturbazioni dovute alle forze elettromagnetiche.

Considerando tali effetti si inizia a trattare di plasmi e si sconfinava nella Magnetofluidodinamica, dove l'evoluzione del fluido comporta la dissociazione delle molecole, con la creazione di specie chimiche cariche che hanno un comportamento elettromagnetico non trascurabile, e che si somma agli effetti fluidodinamici.

## 2.1.2 Conservazione della massa

La conservazione della massa di un sistema è uno dei principi fondamentali su cui si basa la meccanica dei continui.

L'equazione di bilancio di questa quantità fisica è un'equazione scalare di conservazione, per la quale si calcola la variazione della massa all'interno di un volume arbitrario nel tempo come il flusso netto di massa attraverso le superfici del volume di controllo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (2.2)$$

Considerando i vettori delle superfici del volume di controllo come uscenti dal volume, e considerando il flusso di massa netto come entrante nel volume, si può scrivere l'equazione di conservazione della massa.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \bar{q} \cdot \bar{n} dS \quad (2.3)$$

Dal secondo termine si vede come il flusso di massa netto sia ottenuto calcolando la circuitazione del termine convettivo  $\rho \bar{q}$  sulle superfici del volume.

Se si considerassero sorgenti volumetriche e di superficie l'equazione di bilancio potrebbe essere scritta, in modo più generale come segue, dove  $Q_V$  e  $Q_S$  sono i termini sorgente rispettivamente di volume e di superficie.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \bar{q} \cdot \bar{n} dS + \int_V Q_V dV + \int_S Q_S dV \quad (2.4)$$

Considerando la semplice equazione senza termini sorgente, e portando tutto a primo membro si ottiene la forma integrale dell'equazione di conservazione della massa.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho \bar{q} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (2.5)$$

Poiché si considera un volume arbitrario, esso può essere scelto arbitrariamente

piccolo, per cui si può riscrivere questa equazione in forma differenziale.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{q}) = 0 \quad (2.6)$$

Questa equazione differenziale prende il nome di **Equazione di continuità**.

Nella meccanica dei fluidi la massa non viene trasformata in energia, ed inoltre non è trasportata per diffusione, per cui il termine diffusivo è assente.

Si può manipolare ulteriormente questa espressione, per cui sviluppando la divergenza si ottiene la formulazione matematica seguente.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{q} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (2.7)$$

Per un fluido incompressibile la densità è costante sia nello spazio che nel tempo, per cui la precedente equazione si riduce alla condizione di divergenza nulla della velocità all'interno del campo.

$$\nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Conservazione della quantità di moto

La quantità di moto è una quantità vettoriale, data dal prodotto della massa di un corpo, quantità scalare, per la sua velocità, quantità invece vettoriale. Come tale, nella sua formulazione più generica, l'equazione di bilancio della quantità di moto, rappresenta la conservazione di questa grandezza nelle tre direzioni dello spazio, e per questo motivo può essere suddivisa e riscritta come equazione di bilancio delle singole componenti della quantità di moto.

$$m\bar{q} = m \cdot (q_x\hat{i} + q_y\hat{j} + q_z\hat{k}) \quad (2.9)$$

Al contrario, può risultare comodo rappresentare tramite un'unica equazione vettoriale la conservazione di questa quantità.

A questo proposito, si considera la variazione di quantità di moto nel tempo, all'interno del volume di controllo considerato, come il contributo netto dei flussi attraverso le superfici del volume, più i contributi delle forze esterne di volume e delle forze interne per unità di massa che, per il secondo principio della dinamica corrispondono ad una variazione appunto della quantità di moto.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\bar{q}dV + \oint_S \rho\bar{q}(\bar{q} \cdot \hat{n})dS = \int_V \rho\bar{f}_e dV + \int_S \bar{f}_i dS \quad (2.10)$$

Il vettore delle forze interne al fluido che agisce su un elemento di superficie  $dS$  dipende dalle caratteristiche del fluido stesso e dalla sua posizione ed orientazione rispetto alla superficie  $dS$ , per cui si può riscrivere il vettore delle forze interne come il prodotto tra il tensore degli sforzi interni  $\bar{\sigma}$  e la normale della superficie.

$$\bar{f}_i = \bar{\sigma} \cdot \hat{n}dS \quad (2.11)$$

Se si considera il fluido come Newtoniano, per cui quindi gli sforzi viscosi sono proporzionali al gradiente della velocità, si può riscrivere il tensore degli sforzi interni  $\bar{\sigma}$  scomponendolo in due termini, dove  $\bar{I}$  è il tensore identità, e  $\bar{\tau}$  è il tensore degli sforzi viscosi tangenziali del fluido.

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (2.12)$$

Il tensore degli sforzi è definito dalla relazione matematica che segue quando il fluido è in equilibrio termodinamico locale. La variabile  $\mu$  rappresenta la viscosità dinamica del fluido.

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{q}) \delta_{ij} \right] \quad (2.13)$$

Nel caso più generale è valida invece la più completa Espressione 2.14 per il tensore degli sforzi viscosi.

$$\tau_{ij} = \left[ \mu \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) + \lambda (\nabla \cdot \bar{q}) \delta_{ij} \right] \quad (2.14)$$

Dove si è introdotto il nuovo coefficiente di viscosità  $\lambda$ , definito dalla Relazione di Stokes 2.15, che risulta valida fino a valori di temperatura o pressione molto alti.

$$2\mu + 3\lambda = 0 \quad (2.15)$$

Le forze viscosi all'interno del volume si annullano a vicenda all'interfaccia delle superfici considerate, fino ad arrivare alla superficie del contorno del dominio, dove invece il contributo è non nullo, per cui l'effetto delle forze interne può essere calcolato come un integrale di superficie sul bordo del dominio.

L'equazione di bilancio della quantità di moto assume dunque la forma seguente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \bar{q} dV + \oint_S \rho \bar{q} (\bar{q} \cdot \hat{n}) dS &= \int_V \rho \bar{f}_e dV + \oint_S \bar{\bar{\sigma}} \cdot \hat{n} dS = \\ &= \int_V \rho \bar{f}_e dV - \oint_S p \cdot \hat{n} dS + \oint_S \bar{\bar{\tau}} \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (2.16)$$

Da questa forma, applicando il teorema di Gauss, si possono ottenere solamente termini con integrali di volume.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \bar{q} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \bar{q} \times \bar{q}) dV = \int_V \rho \bar{f}_e dV - \int_V (\nabla p \cdot \bar{\bar{I}}) dV + \int_V (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}) dV \quad (2.17)$$

Si può passare a questo punto alla forma differenziale dell'equazione.

$$\frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{q} \times \bar{q} + p \bar{I} - \bar{\tau}) = \rho \bar{f}_e \quad (2.18)$$

Si sviluppano successivamente i termini differenziali composti e, utilizzando l'equazione di continuità e introducendo la definizione del tensore degli sforzi viscosi precedentemente presentata, si arriva infine a scrivere l'equazione di Navier-Stokes del moto.

Di seguito si riporta l'espressione nel caso in cui venga considerata viscosità costante.

$$\rho \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \rho (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} = -\nabla p + \mu [\nabla^2 \bar{q} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \bar{q})] + \rho \bar{f}_e \quad (2.19)$$

Da quest'ultima equazione è facile ricavare l'espressione per il caso in cui si consideri un fluido inviscido, ottenendo l'Equazione di Eulero del moto.

$$\rho \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \rho (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} = -\nabla p + \rho \bar{f}_e \quad (2.20)$$

### 2.1.4 Conservazione dell'energia

L'energia contenuta all'interno di un sistema è descritta in termodinamica dall'energia interna per unità di massa  $e$ ; questa è una variabile di stato, per cui in una trasformazione termodinamica la sua variazione dipende solamente dagli stati iniziali e finali.

In un fluido la quantità di energia che si conserva è la cosiddetta *Energia Totale*, definita come l'energia interna del fluido sommata alla sua energia cinetica per unità di massa.

$$E = e + \frac{\bar{q}^2}{2} \quad (2.21)$$

la quantità così definita è quindi un'energia per unità di massa, mentre il termine  $\rho E$  sarà un'energia per unità di volume.

Per il primo principio della termodinamica, la variazione di energia interna in un sistema è pari al lavoro delle forze che agiscono su di esso e al calore scambiato.

Volendo scrivere l'equazione di conservazione dell'energia per unità di volume  $\rho E$ , si introducono due termini:

- Un termine di *flusso convettivo*

$$\bar{F}_C = \rho \bar{q} \left( e + \frac{\bar{q}^2}{2} \right) \quad (2.22)$$

- Un termine di *flusso diffusivo dell'energia*, rappresentato dalla legge di trasmissione del calore di Fourier, dove  $T$  è la temperatura e  $k$  il coefficiente di conduttività termica.

$$\bar{F}_D = -k \nabla T \quad (2.23)$$

La conduttività termica è a sua volta definita in relazione a viscosità dinamica, calore specifico a pressione costante e numero adimensionale di Prandtl.

$$k = \mu \frac{c_p}{Pr} \quad (2.24)$$

Inoltre, devono essere considerate le sorgenti di calore e lavoro derivanti dalle interazioni del fluido con le superfici ed interne al volume. Infatti, per effetto della viscosità, lo scorrimento del fluido produce un lavoro, che può essere scritto adoperando il tensore degli sforzi viscosi già definito in precedenza.

$$\bar{Q}_S = \bar{\sigma} \cdot \bar{q} = -p\bar{q} + \bar{\tau} \cdot \bar{q} \quad (2.25)$$

L'altro termine sorgente può essere scritto per gli scambi di calore e lavoro interni al volume, considerando le interazioni delle forze esterne, degli scambi radiativi, e del calore, prodotto o sottratto al volume, legato all'attività chimica del fluido.

$$\bar{Q}_V = \rho \bar{f}_e \cdot \bar{q} + q_H \quad (2.26)$$

Si può quindi scrivere la forma integrale dell'equazione di conservazione dell'energia mettendo insieme tutti i termini presentati.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \oint_S \rho E \bar{q} dS \\ = \oint_S -k \nabla T \cdot dS + \int_V (\rho \bar{f}_e \cdot \bar{q} + q_H) dV + \oint_S \bar{\sigma} \cdot \bar{q} dS \end{aligned} \quad (2.27)$$

Una volta trasformati gli integrali di superficie in integrali di volume, si può passare alla forma differenziale, dove  $W_f$  rappresenta il lavoro delle forze sul fluido.

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \bar{q}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \cdot \bar{q}) + W_f + q_H \quad (2.28)$$

Si può riscrivere l'equazione esplicitando i termini viscosi ed introducendo l'entalpia.

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.29)$$

In questo modo si è scritta l'equazione di conservazione dell'energia in termini di entalpia totale del fluido.

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{q} H - k \nabla T - \bar{\sigma} \cdot \bar{q}) = W_f + q_H \quad (2.30)$$

Per quanto riguarda l'entalpia totale, valgono le seguenti relazioni ed uguaglianze.

$$H = e + \frac{\bar{q}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = E + \frac{p}{\rho} = h + \frac{\bar{q}^2}{2} \quad (2.31)$$

## 2.2 Le equazioni costitutive

In fisica, le equazioni (o relazioni) costitutive sono leggi che descrivono il comportamento tipico di alcuni materiali. Un esempio è la legge di Stokes, in grado di caratterizzare un fluido viscoso.

Per definizione dunque, le equazioni costitutive sono relazioni tra quantità fisiche, specifiche del materiale e che non derivano da bilanci generali. Queste rappresentano un modello teorico che traduce in termini matematici i fenomeni dal punto di vista delle caratteristiche del comportamento di un materiale.

Nella pratica, le relazioni costitutive definiscono diverse classi di materiali ideali che rappresentano un modello di comportamento per i materiali reali. Esse sono rappresentative di particolari comportamenti ideali (elastico, plastico, viscoso, ecc.) che i diversi materiali possono seguire in determinate circostanze.

Sono state scritte le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, ma queste non sono sufficienti a descrivere completamente il problema, in quanto sono in numero minore rispetto alle variabili indipendenti presenti.

Per tutte le grandezze che compaiono si può vedere che le variabili sono dipendenti dalle seguenti caratteristiche fisiche [6]:

- Densità:  $\rho$
- Temperatura:  $T$
- Velocità:  $u, v, w$
- Tensore degli Sforzi:  $p, \tau_{ij}$
- Conducibilità:  $k$

Il sistema di equazioni così composto non può essere risolto per trovare tutte le 9 variabili che compaiono in esso, per cui vanno definite delle altre equazioni che permettono di legare tra di loro le variabili presenti, ovvero le equazioni costitutive del fluido [7].

In questo caso, le equazioni costitutive fanno riferimento a due ipotesi:

- fluido Newtoniano, ovvero caratterizzato dall'averne una relazione lineare tra il tensore degli sforzi viscosi  $\tau$  e gradiente delle velocità  $\nabla \cdot \bar{q}$

$$\tau = 2\mu D + \lambda(\nabla \cdot \bar{q})I \quad (2.32)$$

- contributo della viscosità di volume può essere considerato trascurabile (ipotesi di Stokes)

$$\sum_i \tau_{ii} = (2\mu + 3\lambda) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.33)$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.34)$$

In questa condizione si è visto come sia possibile scrivere i termini del tensore degli sforzi  $\tau_{ij}$  in relazione ai gradienti di velocità nella seguente forma:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{q}) \delta_{ij} \right] \quad (2.35)$$

## 2.3 Le Equazioni di Navier Stokes

Le equazioni di Navier-Stokes sono un sistema di equazioni utilizzato nello studio della fluidodinamica. Esse sono composte da tre equazioni di bilancio alle derivate parziali della meccanica dei continui.

Il moto dei fluidi può essere descritto completamente tramite l'utilizzo di leggi di conservazione per tre proprietà del fluido: massa, quantità di moto ed energia. Per quanto possa essere complicata l'evoluzione del campo di moto, queste grandezze dovranno conservarsi, rispettando le equazioni che le governano.

Per ottenere le equazioni di Navier Stokes, occorre introdurre le relazioni costitutive (2.32) e (2.34) all'interno delle equazioni di conservazione. In particolare, si utilizzano le equazioni di conservazione della massa (o equazione di continuità) (2.6), quantità di moto (2.19), ed energia (2.28) [7].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{q} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \bar{q} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \rho(\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} &= -\nabla p + \mu[\nabla^2 \bar{q} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{q})] + \rho \bar{f}_e \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \bar{q}) &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\bar{\sigma} \cdot \bar{q}) + W_f + q_H \end{aligned} \quad (2.36)$$

A questo sistema di equazioni, vanno affiancate altre due leggi che permettono di creare relazioni tra variabili diverse. In particolare, nel caso di un singolo fluido assimilato a gas perfetto, in assenza di reazioni chimiche, il suo stato termodinamico risulta definito in modo completo da due variabili di stato [7]. Queste sono:

- pressione, attraverso la legge dei gas perfetti che impone una relazione matematica tra pressione e temperatura

$$P = R\rho T \quad (2.37)$$

- energia interna, in cui si esplicita la sua dipendenza dalla temperatura

$$e = C_v T \quad (2.38)$$

Considerando il sistema di equazioni di Navier-Stokes che descrivono lo stato fisico del sistema, e considerando le equazioni di stato che invece lo caratterizzano dal punto di vista dello stato termodinamico, si è in grado di risolvere il problema per ogni step temporale.

Viene utilizzato a questo scopo il solutore per campi compressibili *rhoCentralFoam*, del pacchetto open source OpenFOAM, basato sullo schema centrato di Kurganov-Tadmor, il quale rende possibili applicazioni più complesse a casi studio compressibili tridimensionali, e in campo misto transonico-supersonico, grazie alle sue capacità di *shock-capturing*.

### 2.3.1 Il caso inviscido - Equazioni di Eulero

Come visto approfonditamente nei paragrafi precedenti, le equazioni di Navier-Stokes sono in grado di caratterizzare dal punto di vista fluidodinamico in modo completo un caso studio di fluido comprimibile.

Nel caso di correnti caratterizzate da alti numeri di Reynolds, gli effetti della viscosità e della conducibilità termica sono confinati in sottili regioni, risultando trascurabili nella gran parte del dominio; in questo caso, è possibile considerare il fluido come inviscido [7].

$$\begin{aligned}\mu &= 0 \\ Q &= 0 \\ k &= 0\end{aligned}\tag{2.39}$$

Eliminando gli effetti viscosi e di conducibilità termica, le equazioni di Navier-Stokes si semplificano [7]. Il lavoro delle forze viscosi deve essere trascurato, mentre quello relativo alle forze di pressione rimane importante.

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= 0 \\ \bar{\sigma} &= -p\bar{I}\end{aligned}\tag{2.40}$$

Si ottengono così le equazioni di Eulero.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{q} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \bar{q} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \rho (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} &= -\nabla p + \rho \bar{f}_e \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \bar{q}) &= \nabla \cdot (\bar{\sigma} \cdot \bar{q}) + W_f\end{aligned}\tag{2.41}$$

### 2.3.2 Scrittura compatta

Le leggi di conservazione in forma conservativa possono essere descritte dalla seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{q} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \bar{q} &= 0 \\
 \rho \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \rho (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} &= \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \bar{f}_e \\
 \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \bar{q}) &= \nabla \cdot (\bar{\sigma} \cdot \bar{q}) + (p \bar{f}_e \cdot \bar{q}) - \nabla \cdot \bar{q} T
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Scrivendo le equazioni in forma più compatta, si possono evidenziare:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \bar{q} \\ \rho E \end{Bmatrix}}_U + \nabla \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho \bar{q} \\ \rho \bar{q} \bar{q} \\ \rho \bar{q} E + p \bar{q} - \bar{\tau} \cdot \bar{q} - k \nabla T \end{Bmatrix}}_{\bar{F}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \bar{f}_e \\ \rho \bar{f}_e \cdot \bar{q} \end{Bmatrix}}_Q \tag{2.43}$$

Dove  $\rho \bar{q}$  rappresenta le componenti della quantità di moto. Si ottiene dunque la seguente scrittura compatta:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{F} = \bar{Q} \tag{2.44}$$

Dove, i vettori evidenziati come  $U$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{Q}$  possono essere esplicitati come segue:

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix} \tag{2.45}$$

$$\bar{F} = f \bar{i} + g \bar{j} + h \bar{k} \tag{2.46}$$

dove

$$f = \left\{ \begin{array}{c} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ (\rho E + p)u - (\tau \cdot \bar{q})_x - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2.47)$$

$$g = \left\{ \begin{array}{c} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ (\rho E + p)v - (\tau \cdot \bar{q})_y - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.48)$$

$$h = \left\{ \begin{array}{c} \rho w \\ \rho uv - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (\rho E + p)w - (\tau \cdot \bar{q})_z - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.49)$$

$$\bar{Q} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \rho f_{ex} \\ \rho f_{ey} \\ \rho f_{ez} \\ \rho \bar{f}_e \cdot \bar{q} \end{array} \right\} \quad (2.50)$$

Gli schemi numerici si basano sulla discretizzazione della forma compatta delle equazioni di conservazione.

## 2.4 Il problema fisico e le condizioni al contorno

Per un problema fisico, il numero ed il tipo di condizioni al contorno da imporre sui bordi del dominio varia in base alla natura del problema, al tipo di contorno e in base alle proprietà delle linee caratteristiche.

Il numero di condizioni al contorno fisiche da imporre dipende dai segni degli autovalori della matrice

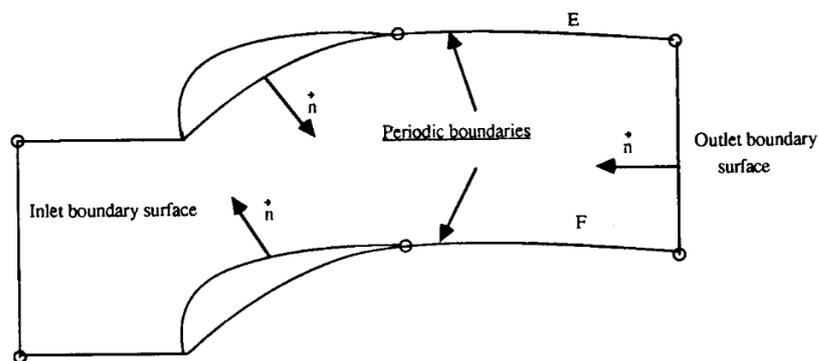
$$K = \bar{A} \cdot \bar{\mathbf{l}}_n = A\hat{n}_x + B\hat{n}_y \quad (2.51)$$

dove  $\bar{\mathbf{l}}_n$  è il versore normale alla superficie considerata, e può essere scomposto nelle componenti  $\hat{n}_x$  e  $\hat{n}_y$  in un sistema di coordinate cartesiane bidimensionale;  $A$  e  $B$  sono invece le matrici Jacobiane delle componenti conservative in  $x$  e  $y$  del vettore flusso.

Gli autovalori della matrice  $K$  per un flusso bidimensionale con velocità  $\bar{v}$  sono

$$\bar{v} \cdot \bar{\mathbf{l}}_n \quad \bar{v} \cdot \bar{\mathbf{l}}_n \quad \bar{v} \cdot \bar{\mathbf{l}}_n + c \quad \bar{v} \cdot \bar{\mathbf{l}}_n - c \quad (2.52)$$

Gli ultimi due autovalori sono associati alle onde acustiche che propagano nel dominio. Il segno di questi due autovalori sarà determinato dalla velocità normale ai contorni del dominio. In Figura 2.1 si può visualizzare una configurazione tipica per schiere di pale, con contorni periodici, parete solide e sezioni di ingresso e uscita del flusso:

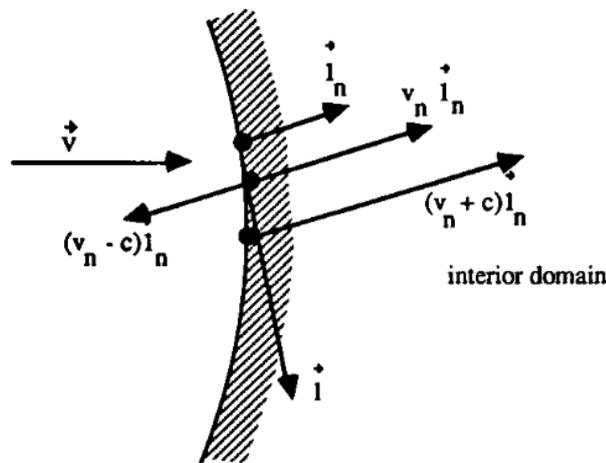


**Figura 2.1:** Esempio di contorni del dominio per flusso interno ad una schiera di pale[8]

Si può generalizzare la scrittura degli autovalori, indicandone uno qualsiasi con  $\lambda$ , per cui  $\lambda \cdot \bar{l}_n$  è la velocità dell'onda di propagazione associata.

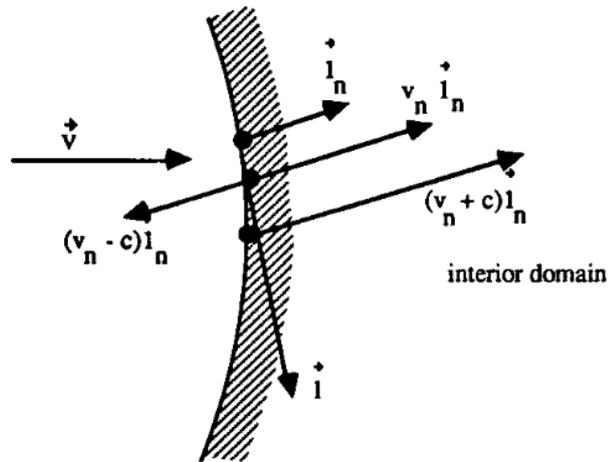
Quando  $\lambda$  è positivo, per come sono definite le normali alle superfici, l'informazione associata all'onda considerata propaga verso l'interno del dominio, ed è necessario quindi imporre una condizione fisica. Al contrario, se  $\lambda$  è negativo, ciò significa che il segnale propaga dall'interno del dominio verso il contorno d'ingresso, per cui l'informazione non deve essere imposta.

Facendo un esempio, si può considerare una velocità subsonica al contorno d'ingresso, per cui quindi un solo autovalore sarà negativo, conducendo alla condizione in Figura 2.2, e rendendo necessaria la definizione delle restanti 3 condizioni al contorno:



**Figura 2.2:** Segno degli autovalori al contorno d'ingresso nel caso subsonico[8]

Al contorno di outlet, invece, l'unico autovalore con segno positivo è  $(\bar{v} \cdot \bar{l}_n - c)$ , mentre gli altri tre hanno segno negativo, come si vede in Figura 2.3, per cui si dovrà imporre in uscita una sola condizione al contorno, mentre l'informazione relativa agli altri tre autovalori proverrà dall'interno del dominio:



**Figura 2.3:** Segno degli autovalori al contorno di uscita nel caso subsonico[8]

Allo stesso modo si può ragionare per condizioni di flusso in ingresso supersonico; in questo caso, il segno degli autovalori è sempre positivo, in quanto si considera una velocità normale alla superficie  $\bar{v} \cdot \bar{l}_n > c$ , e quindi l'autovalore  $(\bar{v} \cdot \bar{l}_n - c) > 0$ . In queste condizioni devono essere imposte tutte e 4 le condizioni fisiche all'ingresso, mentre in uscita non è necessario imporre nulla, in quanto il campo in uscita è completamente definito trovandosi interamente al dominio di dipendenza della corrente di monte.

## 2.5 RANS e modelli di turbolenza

Le RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) sono equazioni approssimate utilizzate per trattare i fenomeni turbolenti. In particolare, esse sono mediate nel tempo, in tutto lo spettro delle fluttuazioni turbolente [8].

Le grandezze in gioco non sono più istantanee, bensì mediate in un certo periodo di tempo  $T$  che sia:

- sufficientemente piccolo rispetto ai fenomeni che si vogliono seguire
- sufficientemente grande rispetto ai disturbi della turbolenza

Queste equazioni richiedono, in aggiunta alla definizione degli intervalli di tempo, anche la definizione di informazioni empiriche o semi-empiriche riguardo la struttura del moto turbolento e la sua relazione con il flusso mediato (*averaged flow*).

Il processo di *averaging* dei fenomeni turbolenti è introdotto al fine di ottenere le leggi di moto per quantità turbolente *medie* nel tempo. Questa media in riferimento al tempo è da definire tale per cui l'influenza delle fluttuazioni turbolente sia rimossa, ma allo stesso tempo senza compromettere la dipendenza temporale con altri fenomeni, aventi scale temporali diverse [8].

Difatti, rappresentando con  $A$  una quantità turbolenta a scelta e con  $\bar{A}$  la stessa quantità mediata nel tempo, è possibile scrivere la variabile secondo la separazione dei due contributi.

$$A = \bar{A} + A' \quad (2.53)$$

In questa scrittura  $A'$  è il termine che tiene conto della parte fluttuante del moto turbolento, il quale è di *natura stocastica*.

In particolare, definendo  $T$  l'intervallo di tempo scelto, si può definire la quantità  $\bar{A}$  mediata nel tempo come integrale della rispettiva quantità turbolenta originale.

$$\bar{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A(\vec{x}, t + \tau) d\tau \quad (2.54)$$

Per i flussi comprimibili, il processo di *averaging* porta a prodotti delle fluttuazioni tra densità e altre variabili, come velocità o energia interna. Per evitare la

loro manifestazione, può essere introdotta una media pesata della densità, chiamata **Favre-averaging**, la cui scrittura matematica è riportata di seguito.

$$\tilde{A} = \frac{\overline{\rho A}}{\bar{\rho}} \quad (2.55)$$

In questa scrittura, il termine  $\tilde{A}$  è definito in modo tale da soddisfare entrambe le equazioni di seguito:

$$A = \tilde{A} + A'' \quad (2.56)$$

$$\overline{\rho A''} = 0 \quad (2.57)$$

Questa modalità di definizione delle variabili turbolente medie consentirà di rimuovere ogni prodotto aggiuntivo della fluttuazione sulla densità con altre quantità fluttuanti [8].

Ad esempio, è facile constatare l'efficacia di questa strategia applicandola all'equazione di continuità (2.6).

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}}) = 0 \quad (2.58)$$

Applicata all'equazione della quantità di moto, si ottiene invece la seguente scrittura del momento turbolento medio, in assenza di forze:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\vec{v}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \times \tilde{\vec{v}} + \bar{p} \vec{I} - \tilde{\vec{\tau}}^v - \bar{\vec{\tau}}^R) = \rho f_e \quad (2.59)$$

Dove lo *sforzo di Reynolds*  $\bar{\vec{\tau}}^R$  è definito come:

$$\bar{\vec{\tau}}^R = -\overline{\rho \vec{v}''_i \times \vec{v}''_j} \quad (2.60)$$

Le relazioni tra gli sforzi di Reynolds e le quantità medie del flusso sono sconosciute, per cui l'applicazione delle equazioni medie di Reynolds alla computazione dei flussi turbolenti richiede l'introduzione di modelli basati su considerazioni teoriche accoppiate con informazioni necessariamente empiriche [8].

Ad oggi comunque, nessuno dei modelli disponibili per la descrizione dei flussi turbolenti risulta essere in grado di produrre una caratterizzazione completa e accurata a causa delle caratteristiche *random* di questi; in ogni flusso turbolento difatti, vi saranno sempre inevitabilmente perturbazioni nelle condizioni iniziali, nelle condizioni al contorno, e nelle proprietà dei fluidi [9].

Proprio in ragione di ciò, l'approssimazione che permettono le RANS è diffusamente apprezzata, accettata e anche la più largamente utilizzata nella pratica.

Questo approccio consente difatti una importante riduzione dei tempi di calcolo, poiché le scale del moto medio sono molto più grandi di quelle delle fluttuazioni turbolente.

## 2.6 Il modello di turbolenza di Spalart-Allmaras

Il modello semplificato di turbolenza sviluppato da Spalart ed Allmaras [10] nel 1994 per la Boeing consiste in un'unica equazione di trasporto della viscosità turbolenta.

Rispetto ai modelli di turbolenza disponibili in precedenza, risolve i problemi di strato limite e di interazione con onde d'urto in modo migliore, ed inoltre consente una modellazione migliore dei flussi separati, mentre per i modelli precedenti (in particolare gli autori menzionano il modello Johnson-King e Baldwin-Lomax) si era vincolati alla struttura rigida di strato limite come entità fisica completamente modulare, con in più vincolo all'utilizzo di griglie strutturate.

In più, il modello proposto da Spalart-Allmaras consente di ottenere risultati più accurati per flussi molto separati.

Il confronto con modelli di turbolenza a due equazioni come il modello  $k - \epsilon$  evidenzia invece il vantaggio in termini di costo di calcolo e di difficoltà di utilizzo, per quanto possano essere superiori in termini di qualità della soluzione per flussi estremamente separati.

Sono state proposte diverse versioni del modello di turbolenza ad un'equazione di Spalart-Allmaras, a partire da una più semplice di base applicabile a flussi di taglio, fino ad arrivare a versioni più complete e adatte a flussi attorno a corpi solidi e con regioni laminari.

Il modello si basa su una quantità di centrale importanza, ovvero la *eddy viscosity*  $\nu_t$ . Gli sforzi di Reynolds sono dati da:

$$-\overline{u_i u_j} = 2\nu_t S_{ij} \quad (2.61)$$

dove  $S_{ij}$  è lo *strain-rate tensor*.

$$S_{ij} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}}{2} \quad (2.62)$$

Guardando ad un modello a due equazioni, si nota subito la mancanza del termine  $k$  dell'energia cinetica turbolenta: infatti, quest'ultimo termine non è di

grande importanza per sforzi di taglio in regioni sottili, per cui può essere ignorato, considerando anche che esso stesso è una forma approssimata.

Nei modelli a un'equazione, il termine  $k$  può essere calcolato come un'approssimazione proporzionale agli sforzi dati da  $\nu_t S_{ij}$ .

L'approccio di Spalart e Allmaras nella costruzione dell'equazione per la turbolenza parte da considerazioni empiriche, assemblando termini dimensionalmente corretti che possano costituire una plausibile equazione di trasporto.

L'equazione del modello finale di Spalart-Allmaras è riportata di seguito.

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = & c_{b1} \left[ 1 - f_{t2} \tilde{S} \tilde{\nu} \right] + \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) + c_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2 \right] + \\ & - \left[ c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{k^2} f_{t2} \right] \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2 + f_{t1} \Delta U^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

La viscosità turbolenta  $\nu_t$  è definita in relazione alle seguenti relazioni matematiche.

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (2.64)$$

Nel contributo di produzione, i termini  $\tilde{S}$  e  $f_{t2}$  sono definiti come:

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (2.65)$$

dove  $S$  è il modulo della vorticità  $\omega = \nabla \times \bar{q}$ , mentre  $d$  è la distanza dalla parete più vicina.

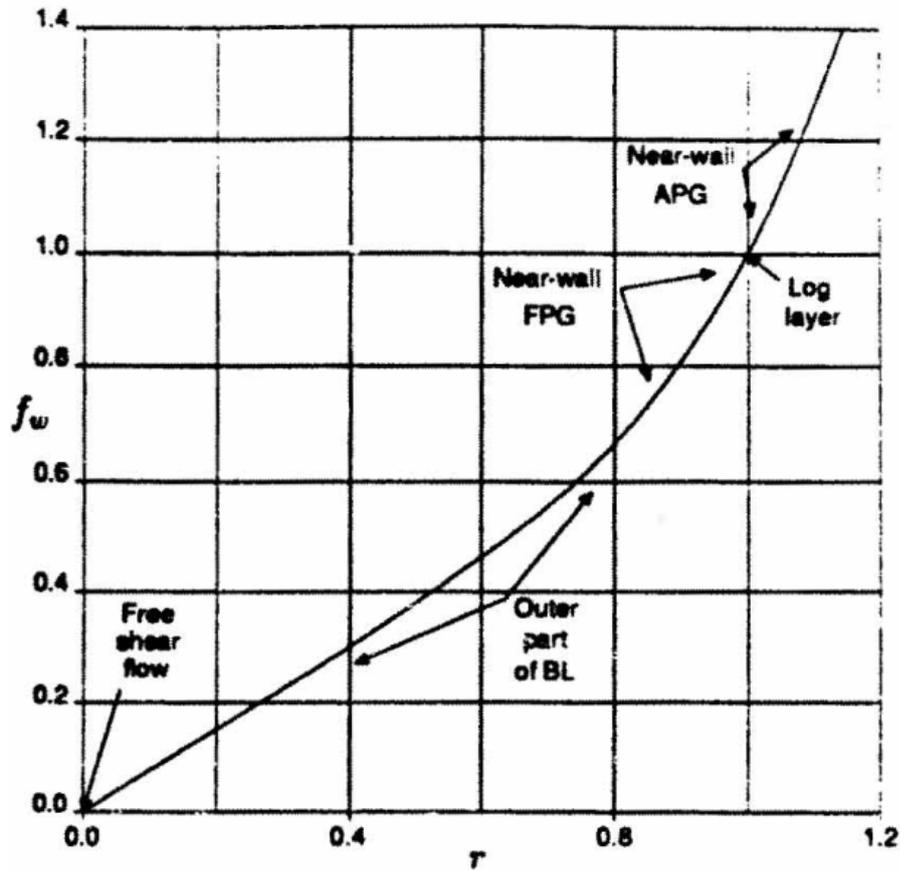
La funzione di parete  $f_w$  invece è definita come:

$$f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right] \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k^2 d^2} \quad (2.66)$$

ed il suo andamento può essere apprezzato in figura 2.4.

A parete la condizione al contorno corretta da imporre è  $\tilde{\nu} = 0$ , e lo stesso anche per le condizioni di freestream, sempre che non si incorra in errori numerici.

$$B.C. \quad \tilde{\nu}_w = 0 \quad \tilde{\nu}_\infty = 0 \quad (2.67)$$



**Figura 2.4:** Modello di turbolenza di Spalart-Allmaras: andamento della funzione di parete[10]

Ancora, la funzione  $f_{t2}$  è definita come:

$$f_{t2} = c_{t3}e^{(-c_{t4}\chi^2)} \quad (2.68)$$

mentre la funzione  $f_{t1}$ , la *trip function*, traducibile con *funzione d'ostacolo*, è definita come:

$$f_{t1} = c_{t1}g_t e^{\left(-c_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} [d^2 + d_t^2 d_t^2]\right)} \quad (2.69)$$

Per il calcolo della *trip function*,  $d_t$  è la distanza tra il punto del campo e l'ostacolo presente su una parete, mentre  $\omega_t$  è la vorticità a parete in corrispondenza dell'ostacolo. Il termine  $\Delta U$  è la differenza tra la velocità tra il punto nel campo e

quella all'ostacolo.

Il termine  $g_t$  viene scelto secondo la condizione  $g_t = \min\left(0.1, \frac{\Delta U}{\omega_t \Delta x}\right)$ .

Le costanti presenti, per il modello standard sono definite come di seguito.

$c_{b1} = 0.1355$	$\sigma = 2/3$	$c_{b2} = 0.622$
$k = 0.41$	$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}$	$c_{w2} = 0.3$
$c_{w3} = 2$	$c_{v1} = 7.1$	$c_{t1} = 1$
$c_{t2} = 2$	$c_{t3} = 1.1$	$c_{t4} = 2$

**Tabella 2.2:** Costanti modello di Spalart-Allmaras standard[10]

Il modello presentato, tuttavia, è scarsamente utilizzato così come definito.

Difatti, la *trip function* viene trascurata quando il modello viene utilizzato per trattare flussi completamente turbolenti. Inoltre, devono essere cambiate le condizioni al contorno, che in questo caso diventano:

$$B.C. \quad \tilde{\nu}_w = 0 \quad \tilde{\nu}_\infty = 3\nu_\infty : 5\nu_\infty \quad (2.70)$$

Anche le costanti vengono modificate leggermente, per cui vengono impiegati i seguenti valori:

$c_{b1} = 0.1355$	$\sigma = 2/3$	$c_{b2} = 0.622$
$k = 0.41$	$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}$	$c_{w2} = 0.3$
$c_{w3} = 2$	$c_{v1} = 7.1$	$c_{t1} = 1$
$c_{t2} = 2$	$c_{t3} = 1.2$	$c_{t4} = 0.5$

**Tabella 2.3:** Costanti modello di Spalart-Allmaras senza *trip function*[10]

Il modello risultante, però, ha i termini sorgente di produzione e distruzione non nulli per la corrente di freestream, anche quando la vorticità è nulla. Tuttavia, essi sono molto piccoli e inversamente proporzionali al quadrato della distanza dalla parete.

## Capitolo 3

# Modello OpenFOAM

Per poter ottenere dei risultati sul campo di moto e di pressioni all'interno della schiera di compressore, è necessario disporre di un modello che ne descriva la geometria e la fisica dei fenomeni coinvolti.

A questo scopo vengono discretizzate le equazioni di governo della fluidodinamica, per poter permettere la risoluzione all'interno del dominio di calcolo, il quale consiste in una fine griglia che va a sostituirsi al dominio fisico.

Di seguito verrà descritto l'ambiente OpenFOAM, nel quale viene definito il modello computazionale, e le sue caratteristiche.

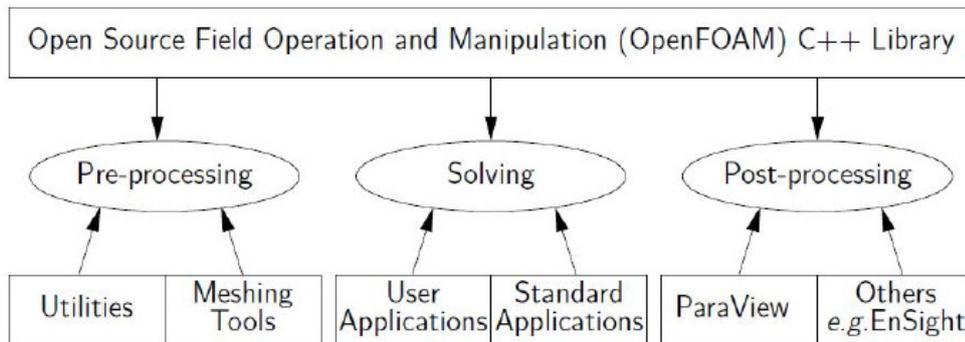
### 3.1 OpenFOAM

Tutte le simulazioni elaborate in questo lavoro sono basate sul framework di OpenFOAM (*Open Field Operation and Manipulation*), software basato sul linguaggio C++ per la definizione di tutti i file necessari al suo funzionamento, dai solutori alle funzioni di post-processing.

Esso consiste in una libreria di oltre un centinaio di codici che possono all'occorrenza essere raggruppati insieme per creare eseguibili, indicati nel software come applicazioni. OpenFOAM ne possiede al suo interno oltre 250 precompilati[11].

I diversi solutori presenti nel pacchetto OpenFOAM permettono la modellazione e lo studio di fenomeni fluidodinamici complessi, a cui possono aggiungersi modelli di cinetica chimica, turbolenza, scambio di calore, elettromagnetismo, meccanica dei solidi e modelli di acustica.

Una rappresentazione della struttura base di OpenFOAM è mostrata di seguito, in cui sono distinguibili le tre fasi di sviluppo di un problema: pre-processing, risoluzione e post-processing.



**Figura 3.1:** OpenFOAM: Struttura di base dell'organizzazione del software

La struttura del software è organizzata in modo da consentire all'utente un ampio spettro di funzionalità e un diverso grado di profondità nelle tre fasi di operazione sopra indicate.

Vi sono tre cartelle principali in cui è strutturato il lavoro: la cartella "0", o *time directory*, la cartella "constant" e la cartella "system".

- **La time directory**, o cartella 0, contiene le condizioni iniziali e le condizioni al contorno delle variabili per cui si ricerca la soluzione o da cui essa è dipendente.

I campi iniziali nelle simulazioni su OpenFOAM devono essere specificati obbligatoriamente anche nel caso di flusso stazionario.

Avanzando con gli istanti temporali, il software produce altre cartelle successive a questa prima relativa all'istante 0, secondo intervalli definiti dall'utente.

Nel software, le variabili sono sempre definite considerando le unità del sistema internazionale, e i dati sono specificati utilizzando dizionari: un'entità contenente dei dati in input può essere difatti richiamata utilizzando una specifica parola (keyword).

Molti file dati di OpenFOAM sono a loro volta dizionari, e possono contenere uno o più dati in ingresso. C'è una vasta selezione di condizioni al contorno disponibili in OpenFOAM, sia per campi scalari che vettoriali, con la possibilità di definire anche condizioni non uniformi o variabili nel tempo.

- **La cartella *constant*** contiene tre elementi: il file delle proprietà termofisiche, quello delle proprietà che descrivono il modello di turbolenza ed una cartella chiamata PolyMesh.

In particolare, le proprietà possono essere costanti oppure funzioni di altre proprietà termodinamiche, come T e P, ad esempio la viscosità dinamica  $\mu$  può essere definita come costante oppure può essere indicata per essa una legge di variazione tra quelle disponibili in OpenFOAM, come ad esempio la Legge di Sutherland.

Il dizionario delle proprietà termofisiche è richiamato da ogni solutore che utilizzi la libreria del modello termofisico. Le proprietà termofisiche (keyword `thermophysicalProperties`) cominciano con la definizione del "termotipo" ("thermotype") che definisce le equazioni di stato e dei modelli per il trasporto e il miscelamento dei fluidi.

Le proprietà relative ai moti turbolenti sono registrate nel file *turbulentProperties*, che contiene il dizionario che permette di specificare il modello turbolento che si desidera utilizzare.

La cartella PolyMesh, invece, contiene i dati relativi alla mesh generata per il caso studio. Al suo interno si trovano un certo numero di file separati:

- *points*: file contenente tutti i vertici delle facce della griglia in formato leggibile da OpenFOAM;
  - *faces*: file contenente tutte le facce generate, le quali sono composte da una lista di vertici, definiti nel file *points*;
  - *owner* e *neighbour*: mantengono le informazioni riguardanti celle adiacenti;
  - *boundary*: file che definisce una lista di *patches*, ovvero un'insieme di facce della mesh che insieme costituiscono un contorno del dominio.
- **La cartella *system*** contiene invece tutte le utility utilizzate per operare la manipolazione della mesh e il controllo dei casi simulati .

Alcune voci dei dizionari che possono essere ritrovati in questa cartella includono `blockMeshDict`, che registra e contiene i dati relativi alla geometria, `controlDict`, dove possono essere definiti l'intervallo temporale, i parametri di inizio e fine della simulazione ed i parametri di scrittura dei risultati, `fvSchemes`, dove si definiscono gli schemi di discretizzazione dei termini matematici delle equazioni, come gradienti, divergenze, e le loro interpolazioni.

Un altro dizionario utile da evidenziare è `decomposeParDict`, che permette la decomposizione del dominio in un numero di sottodomini per cui si possono risolvere separatamente le equazioni su diversi processori in parallelo, per poi ricomporli per assemblare la soluzione per l'intero dominio. Questo strumento è particolarmente utile nel caso di necessità di analizzare casi studio molto estesi e con un numero di celle talmente grande che necessiterebbero di tempi molto lunghi per essere risolti in seriale, per cui si sfrutta il calcolo parallelo in clusters di computer.

OpenFOAM è un software con licenza Open Source, ovvero con filosofia a contenuto aperto; è infatti possibile il download gratuito e l'utilizzo libero del software, nonché lo studio e la modifica del codice sorgente. Questo è difatti strutturato in una maniera tale per cui ogni utente è abilitato alla libera creazione e manipolazione del codice di solutori e applicazioni che meglio si prestano alla

singola casistica analizzata. É quindi possibile pensare di modificare i file delle condizioni al contorno per meglio soddisfare le proprie esigenze, oppure si possono inserire funzioni aggiuntive sviluppate dall'utente per rendere più facile l'estrazione di dati o la loro manipolazione all'interno del solutore.

La forte libertà di operazione è uno degli aspetti più rilevanti che ha fatto sì che si sia creata nel tempo una nutrita comunità di utilizzatori sia nell'industria che nel mondo accademico, anche e soprattutto nella comunità che si occupa di studi sulla CFD, che ne spinge lo sviluppo continuativo ormai dal 2004 ad oggi.

Le applicazioni disponibili nel pacchetto base di OpenFOAM sono implementate utilizzando una sintassi interna di alto livello che semplifica la scrittura delle equazioni matematiche riproducendone in modo più snello la notazione convenzionale.

Sono sostanzialmente disponibili due tipi di applicazioni:

- *Solutori*: il loro scopo è risolvere il modello matematico definito al loro interno tramite la sintassi semplificata, effettuando i calcoli necessari sulle variabili interessate e producendo un risultato per lo step temporale successivo.
- *Utility*: questi codici assolvono a compiti molto diversi tra loro per scopo e complessità; vengono utilizzati per la preparazione preliminare del caso numerico, per la creazione della griglia di calcolo, o per processare i risultati e fornire informazioni aggiuntive all'utilizzatore.

Nella fase di post-processing, OpenFOAM utilizza uno strumento di visualizzazione, anch'esso a filosofia open source, chiamato *paraFoam*, che permette la visualizzazione grafica dei risultati ottenuti dalle simulazioni.

Solitamente, si impone un intervallo temporale che scandisce la cadenza con cui il software deve restituire in output i risultati ottenuti, e successivamente questi dati aggregati vengono visualizzati, anche attraverso la generazione di animazioni. Si possono inoltre generare campi come funzione di due o più campi noti generati.

*Visualization Toolkit* (VTK) è anch'esso uno strumento di visualizzazione molto diffuso grazie alla disponibilità di licenza open source e al supporto multi piattaforma che offre alla comunità scientifica.

OpenFOAM offre inoltre supporto all'utilizzo di software di terze parti, consentendo la conversione in formato compatibile dei file di mesh generati da altri software molto diffusi, tramite le seguenti utility:

- `fluentMeshToFoam`: legge un file `.msh` in formato Fluent e lo converte;
- `starToFoam`: per convertire i file mesh STAR-CD/PROSTAR;
- `gambitToFoam`: per convertire i file `.neu` di GAMBIT;
- `gmshToFoam`: per convertire i file `.geo` di Gmsh;

Quest'ultimo software è stato scelto per la creazione della mesh e verrà descritto in una sezione successiva.

## 3.2 Il solutore rhoCentralFoam

I solutori sono una delle due tipologie di applicazioni presenti nel pacchetto base di OpenFOAM, e si occupano di risolvere il modello matematico definito al loro interno tramite la sintassi semplificata utilizzata in OpenFOAM, effettuando i calcoli necessari sulle variabili interessate e producendo un risultato per lo step temporale successivo.

Nel caso particolare di questo caso studio, il solutore utilizzato è rhoCentralFoam.

Questo solutore in grado di trattare e sviluppare transitori in cui partecipano fluidi comprimibili, analizzando i fenomeni fisici in gioco considerando:

- Fenomeni turbolenti
- Scambi di calore
- Presenza di urti, sia normali che obliqui

Gli schemi su cui si basa il modello matematico del solutore sono quelli del modello centrato upwind di Kurganov e Tadmor, di cui si parlerà dettagliatamente nel paragrafo successivo.

### 3.2.1 Lo schema di Kurganov-Tadmor

Lo schema di Kurganov-Tadmor[12] è lo schema centrato utilizzato dal solutore *rhoCentralFoam* per risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono i fenomeni fisici coinvolti nella compressione del fluido nel compressore.

Uno schema numerico è un metodo di risoluzione dell'evoluzione del problema discretizzato nello spazio e nel tempo, attraverso la soluzione delle equazioni riguardanti le quantità analizzate (Temperatura, pressione, velocità).

La soluzione di queste equazioni consiste principalmente in due passaggi:

- discretizzazione del dominio spaziale e temporale, in modo da lavorare con un numero finito di regioni dello spazio in cui calcolare la soluzione per ogni intervallo di tempo;
- espressione delle quantità infinitesime attraverso la loro approssimazione alle relative quantità discrete, facenti riferimento alla griglia creata. Difatti, l'idea di base di questi metodi è sostituire nell'equazione da approssimare, ad ogni derivata un rapporto incrementale finito.

Le funzioni approssimate del sistema differenziale sono quindi ottenute negli istanti temporali e nei punti del dominio (o nelle regioni come media dei valori assunti dalle variabili all'interno della cella) definiti precedentemente. Nel caso di riferimento ai punti si parla di metodi agli elementi finiti, mentre nel caso di riferimento alle regioni spaziali si indicano come metodi ai volumi finiti.

Per i flussi comprimibili in particolare, sono largamente utilizzati gli schemi numerici della famiglia di Lax-Friedrichs[13], di cui lo schema di Kurganov-Tadmor è una estensione.

La particolare caratteristica degli schemi centrati, che li rende potenzialmente adatti come metodo universale nella risoluzione delle equazioni non lineari di convezione e diffusione, quindi particolarmente adatti per i flussi compressibili è che sono svincolati dalla struttura degli autovalori del problema, per cui non è necessario conoscere la direzione delle caratteristiche come per i solutori di Riemann.

Lo schema di Lax-Friedrichs del primo ordine, nel 1954, è il primo ad aprire la strada in questo senso, e lo schema di Nessyahu-Tadmor[14] ne costituisce una versione a più alta risoluzione.

Per questi schemi numerici, la viscosità numerica che consente la stabilità della soluzione è dell'ordine di:

$$O\left(\frac{(\Delta x)^{2r}}{\Delta t}\right) \quad (3.1)$$

Per questi schemi numerici, si corre il rischio di avere una viscosità numerica eccessiva per step temporali troppo piccoli, per cui è stato proposto da Kurganov e Tadmor uno schema numerico centrale che mantenesse le caratteristiche di indipendenza dagli autovalori del problema, ma con una viscosità numerica molto minore, dell'ordine di:

$$O\left((\Delta x)^{2r-1}\right) \quad (3.2)$$

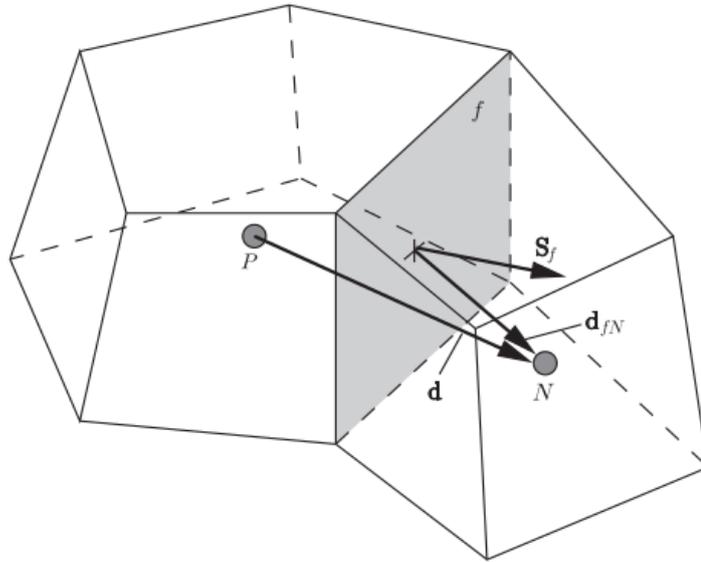
si vede come per questo schema si sia ottenuta l'indipendenza dall'inverso dello step temporale, tanto da poter ottenere una formulazione semi-discreta nel caso di  $\Delta t \rightarrow 0$  [12].

Nell'algoritmo del solutore *rhoCentralFoam*[15], vengono implementati gli schemi di Kurganov e di Kurganov-Tadmor per il calcolo dei flussi come di seguito. Innanzitutto il dominio viene suddiviso in un numero arbitrario di celle, composte a loro volta da un certo numero di facce di diversa geometria, definita da un numero di vertici arbitrariamente disposti nello spazio.

In generale le celle non sono allineate al sistema di riferimento; per la griglia si può affermare in modo generalizzato che le facce delle celle possono essere *interne*, ovvero fanno parte contemporaneamente di due celle adiacenti, oppure che esse siano parte di un contorno esterno (*boundary*), e che appartengano quindi ad una sola cella.

La notazione utilizzata per definire il metodo numerico è basata sulla geometria di celle adiacenti. Tutte le variabili di interesse come pressione, temperatura, velocità, sono riferite al centro della cella, per cui si considerano per la definizione della notazione della griglia due celle adiacenti: una cella *owner*, di cui si indica il centroide con  $\mathbf{P}$ , ed una cella confinante *neighbour*, definita da un centroide indicato da  $\mathbf{N}$ , come in figura 3.2.

Si definiscono per le facce il vettore  $S_f$ , normale alla faccia stessa e di modulo la sua superficie, ed il vettore  $d_{fN}$  che connette il centro della faccia al centro della cella  $\mathbf{N}$ ; inoltre si definisce il vettore che collega i due centri cella  $d$ .



**Figura 3.2:** rhoCentralFoam: Notazione Griglia ai Volumi Finiti

Per poter applicare i metodi ai volumi finiti occorre innanzitutto esprimere le equazioni differenziali che si vogliono risolvere all'interno di un integrale di volume sulla cella generica. I termini di divergenza ed i gradienti sono convertiti in integrali di superficie sull'area delle facce della cella generica.

Per poter effettuare l'integrazione completa occorre quindi avere i flussi delle grandezze di interesse alle facce della cella, per cui si rende necessario effettuare un'interpolazione dai valori di cella, concentrati nei centroidi delle varie celle, ai valori in corrispondenza delle singole facce.

Sono disponibili diversi tipi di interpolazione, ma per i metodi di Kurganov e Tadmor implementati nel solutore *rhoCentralFoam* essa consiste in un'interpolazione lineare tra i valori delle due celle. Si indica quindi  $\Psi$  come campo tensoriale generico, che verrà interpolato dai valori di cella  $\Psi_P$  ai valori sulle facce  $\Psi_f$ .

## Discretizzazione dei termini convettivi

Nelle equazioni di conservazione i termini convettivi sono i seguenti:

$$\nabla \cdot [\bar{q}\rho] \quad \nabla \cdot [\bar{q}(\rho\bar{q})] \quad \nabla \cdot [\bar{q}\rho E] \quad \nabla \cdot [\bar{q}p] \quad (3.3)$$

questi termini possono essere integrati sul volume di controllo e linearizzati come di seguito:

$$\int_V \nabla \cdot [\bar{q}\Psi] dV = \int_S dS \cdot [\bar{q}\Psi] \approx \sum_f S_f \cdot \bar{q}\Psi_f = \sum_f \phi_f \Psi_f \quad (3.4)$$

dove  $\sum_f$  è la sommatoria sulle facce della cella e  $\phi_f = S_f \cdot \bar{q}$  è il flusso volumetrico che attraversa le facce.

Per valutare il flusso volumetrico e le quantità  $\Psi_f$  i metodi più semplici sono le interpolazioni lineari a differenze centrate tra due celle contigue; in alternativa sono disponibili molti altri schemi che offrono un certo grado di *upwinding* per stabilizzare la soluzione.

Un'interpolazione lineare viene effettuata inserendo un coefficiente  $\omega_f = \frac{|S_f \cdot d_{fN}|}{S_f \cdot d}$ , ottenendo:

$$\Psi_f = \omega_f \Psi_P + (1 - \omega_f) \Psi_N \quad (3.5)$$

Nel caso di flussi compressibili le proprietà del fluido sono trasportate anche dalla propagazione di onde all'interno del dominio, per cui l'interpolazione del flusso deve essere stabilizzata in base al trasporto, che può avvenire in qualsiasi direzione; per questo motivo, nei metodi KT e KNP, l'interpolazione viene divisa in due direzioni, una per il flusso in uscita e una per il flusso in entrata dalla faccia considerata per la cella generica.

$$\sum_f \phi_f \Psi_f = \sum_f [\alpha \phi_{f+} \Psi_{f+} + (1 - \alpha) \phi_{f-} \Psi_{f-} + \omega_f (\Psi_{f-} - \Psi_{f+})] \quad (3.6)$$

Nel metodo di Kurganov-Tadmor i contributi nelle direzioni  $f-$  e  $f+$  sono pesati in egual modo, con  $\alpha = 1/2$ , da cui la denominazione di schema *centrato*.

Nel metodo KNP[16], invece,  $\alpha$  è calcolato in base alla velocità locale di propagazione unidirezionale, per cui i pesi nell'interpolazione sono sbilanciati nella direzione di *upwind*, per cui questi schemi vengono definiti *centrati upwind*.

Secondo questa filosofia si calcolano i flussi volumetrici associati alle velocità di propagazione locali, dove  $c_{\pm} = \sqrt{\gamma RT_{f\pm}}$  è la velocità del suono del gas sulle facce considerate, verso l'interno e verso l'esterno della cella *owner*.

$$\psi_{f+} = \max(c_{f+}|S_f| + \phi_{f+}, c_{f-}|S_f| + \phi_{f-}, 0) \quad (3.7)$$

$$\psi_{f-} = \max(c_{f+}|S_f| - \phi_{f+}, c_{f-}|S_f| - \phi_{f-}, 0) \quad (3.8)$$

Riassumendo il coefficiente peso è:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} & KT \\ \frac{\psi_{f+}}{\psi_{f+} + \psi_{f-}} & KNP \end{cases} \quad (3.9)$$

mentre il termine  $\omega_f$  del flusso volumetrico diffusivo si calcola nei due metodi come:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha \max(\psi_{f+}, \psi_{f-}) & KT \\ \alpha(1 - \alpha)(\psi_{f+} + \psi_{f-}) & KNP \end{cases} \quad (3.10)$$

Come visto i due metodi coinvolgono l'interpolazione in due direzioni delle variabili a partire dai valori delle celle confinanti.

La procedura di interpolazione è implementata considerando in aggiunta un limitatore per passare tra schemi di basso e alto ordine in base ad una funzione di limitazione del flusso  $\beta(r)$ , dove  $r$  rappresenta il rapporto tra gradienti successivi della variabile interpolata, ed è vincolato ad essere  $r \geq 0$ .

Per una mesh poliedrica, per  $\Psi$  scalare, nella direzione  $f+$  vale:

$$r = 2 \frac{d \cdot (\nabla \Psi_P)}{(\nabla_d \Psi)_f} - 1 \quad (3.11)$$

dove  $(\nabla \Psi_P)$  è il gradiente interpolato per la cella *owner*  $P$ , mentre il termine

$(\nabla_d \Psi)_f = \Psi_N - \Psi_P$  è la componente del gradiente normale alla faccia, scalata del modulo della distanza  $|d|$ .

La scelta delle funzioni di limitazione ricade su Minmod[17] e Van Leer[18], per cui si ha:

$$\beta(r) = \max [0, \min(1, r)] \quad \text{Minmod} \quad (3.12)$$

$$\beta(r) = \frac{r + |r|}{1 + r} \quad \text{VanLeer} \quad (3.13)$$

L'interpolazione in direzione  $f+$  diventa in questo modo:

$$\Psi_{f+} = (1 - g_{f+})\Psi_P + g_{f+}\Psi_N \quad (3.14)$$

dove  $g_{f+} = \beta(1 - \omega_f)$ , e quindi per  $\beta = 0$  si ha interpolazione *upwind*, mentre per  $\beta = 1$  si ha interpolazione lineare; inoltre, per  $\beta = 2$  si ottiene un'interpolazione *downwind*, sbilanciata in senso contrario.

### Discretizzazione dei termini gradiente

I termini in cui compare un gradiente nelle equazioni di conservazione vengono integrati sul volume e discretizzati come:

$$\int_V \nabla \Psi dV = \int_S dS \Psi \approx \sum_f S_f \Psi_f \quad (3.15)$$

normalmente, per flussi incompressibili, l'interpolazione utilizzata per  $\Psi_f$  è tipicamente lineare; gli schemi KT e KNP tuttavia, dividono l'interpolazione secondo le direzioni  $f+$  e  $f-$ , secondo:

$$\sum_f S_f \Psi_f = \sum_f [\alpha S_f \Psi_{f+} + (1 - \alpha) S_f \Psi_{f-}] \quad (3.16)$$

le interpolazioni lungo  $f+$  ed  $f-$  utilizzano i limitatori Minmod e Van Leer descritti precedentemente.

### Discretizzazione dei termini Laplaciani

Per completezza si descrive la discretizzazione dei termini laplaciani con coefficiente  $\Gamma$  di diffusione; essi sono inizialmente discretizzati come:

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Psi) dV = \int_S dS \cdot (\Gamma \nabla \Psi) \approx \sum_f \Gamma_f S_f \cdot (\nabla \Psi)_f \quad (3.17)$$

Solitamente  $\Gamma_f$  è interpolato linearmente dai valori di centro cella. per il caso generale in cui una faccia sia non ortogonale, e quindi per i casi in cui il vettore della superficie  $S_f$  non è parallelo al vettore  $d$ , la valutazione del termine  $S_f \cdot (\nabla \Psi)_f$  è suddiviso in una componente ortogonale in cui compaiono i valori delle celle *owner* e *neighbour*, ed un termine non-ortogonale di gradiente calcolato a centro cella ed interpolato sulla faccia:

$$S_f \cdot (\nabla \Psi)_f = A(\Psi_N - \Psi_P) + \mathbf{a} \cdot (\nabla \Psi)_f \quad (3.18)$$

dove  $A = \frac{|S_f|^2}{S_f \cdot \mathbf{d}}$  ed  $\mathbf{a} = S_f - Ad$ .

### 3.3 Creazione della Mesh

Come anticipato nella prima sezione di questo capitolo, la creazione della geometria del caso studio, e la generazione della griglia di calcolo sono state portate a termine sul software open source Gmsh[19]. Questo viene descritto come un generatore di griglie agli elementi finiti tridimensionali, dotato di un motore grafico CAD e di un post processore. Grazie a queste sue caratteristiche, ne è consentito l'utilizzo interattivo ed *user-friendly*, tramite l'interfaccia grafica fornita, oppure creando o modificando uno script in linguaggio Gmsh, basato sul classico C.

Il software è suddiviso in quattro moduli:

1. **Geometry**
2. **Mesh**
3. **Solver**
4. **Post-Processing**

Nel modulo della geometria è possibile, tramite l'interfaccia grafica, aggiungere entità fondamentali al modello geometrico, come punti, linee e superfici, con estrema facilità. Inoltre, il software è stato strutturato in modo da permettere la parametrizzazione di tutti gli input, per cui modificando opportunamente lo script si può sfruttare questa proprietà per inserire un componente all'interno di una catena computazionale più larga.

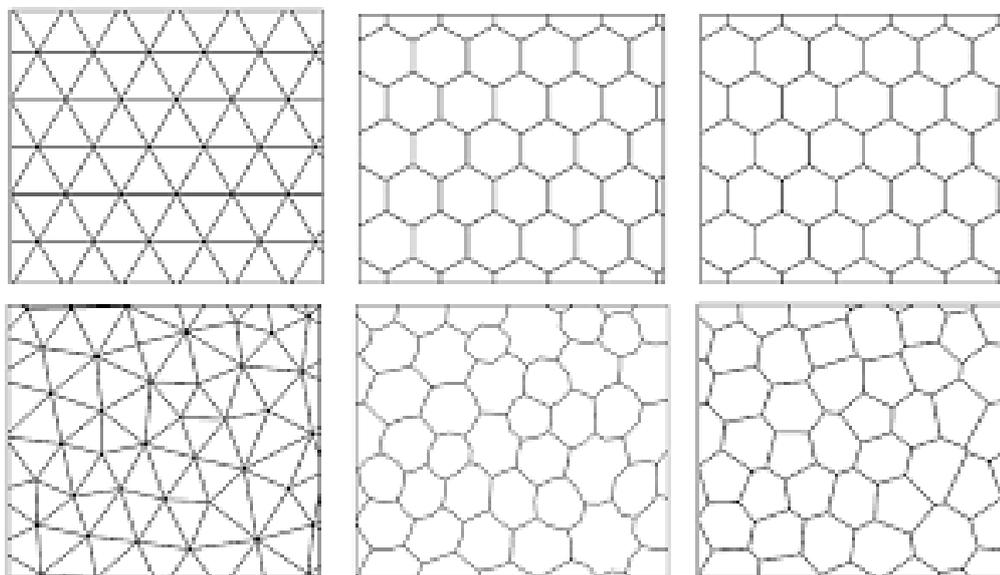
Ai fini della creazione della griglia utilizzata in questo lavoro di tesi, è stato sufficiente conoscere il funzionamento dei primi due moduli di Gmsh, ovvero Geometria e Mesh, mentre i moduli Solver e Post-Processing sono stati lasciati in default.

La griglia del dominio è stata suddivisa in zone a griglia strutturata e zone a griglia non strutturata.

Una griglia strutturata presenta appunto una struttura coerente e ripetuta in modo regolare, in cui i nodi della griglia vengono generati dall'intersezione di famiglie di linee appartenenti a sistemi di coordinate cartesiane o curvilinee definiti. In griglie

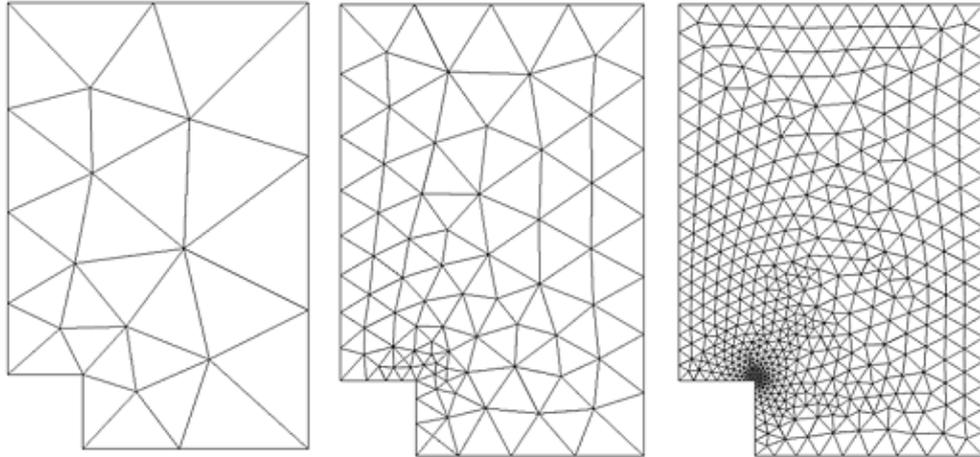
di questo tipo è possibile costruire una numerazione razionale ed ordinata dei nodi, con vantaggi in termini di richiesta di memoria e tempo di calcolo per generarle. Gli elementi di una griglia strutturata sono solitamente quadrangolari per griglie bidimensionali, o esaedriche per griglie tridimensionali.

Le griglie non strutturate, al contrario, sono connesse in modo molto più irregolare, anche a causa della forma degli elementi, che può in linea teorica essere arbitrariamente scelta; un inconveniente di questo tipo di griglia è rappresentato dalla necessità di salvare in memoria per ogni cella informazioni sulle celle adiacenti e sul loro ordinamento, appunto a causa della mancanza di una struttura generale.



**Figura 3.3:** GMSH: Rappresentazione di esempi di griglia strutturata (sopra) e non strutturata (sotto) al variare del numero di vertici

La qualità della mesh dipende da diversi fattori, primi tra tutti il numero di elementi e la loro grandezza; una soluzione più accurata si ottiene con griglie più fitte, dove gli elementi sono più piccoli, ma allo stesso tempo aumenta il numero di celle per cui devono essere risolte le equazioni, per cui aumenta il costo computazionale ed il tempo totale della simulazione. Per questo motivo la scelta del tipo di griglia, del numero e della grandezza dei suoi elementi risulta di fondamentale importanza.



**Figura 3.4:** GMSH: Rappresentazione di esempi di griglia non strutturata sempre più fitta, procedendo da destra verso sinistra

Inoltre, la dimensione della mesh gioca un ruolo anche nella stabilità dello schema di calcolo, secondo la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy, che nel caso bidimensionale può essere scritta come:

$$Co = \frac{u_x \cdot \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y \cdot \Delta t}{\Delta y} < Co_{max} \quad (3.19)$$

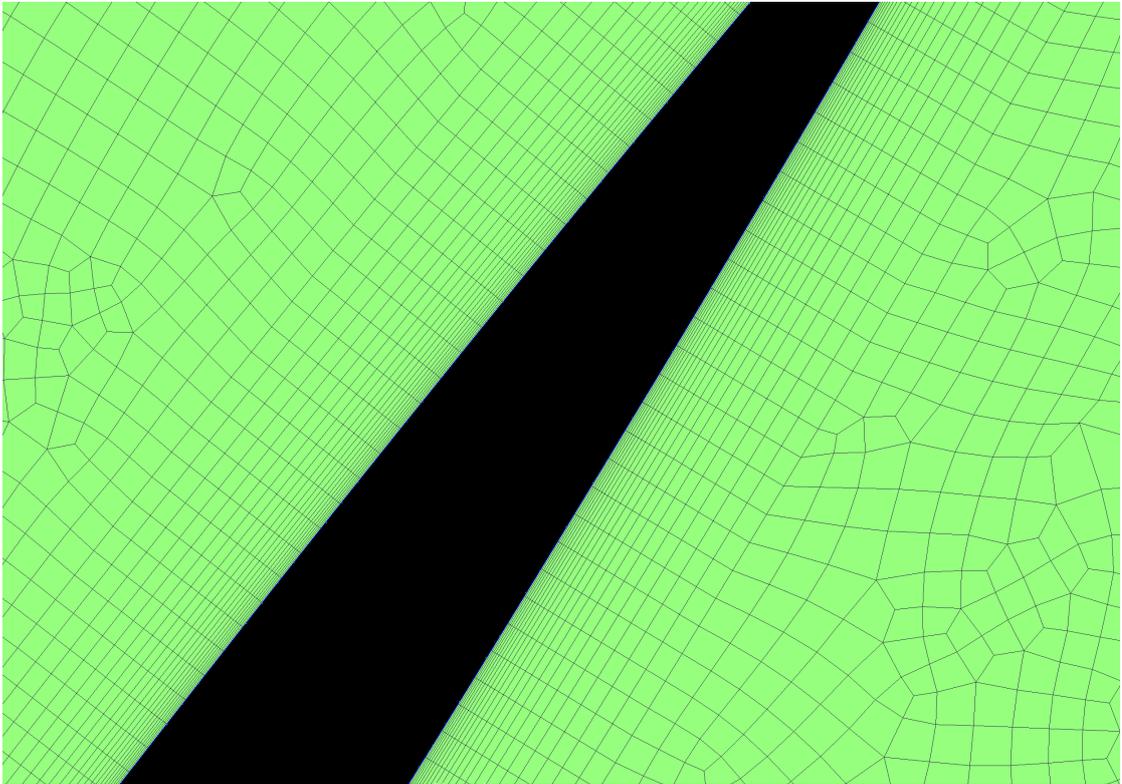
In più, un'alta risoluzione della griglia è necessaria nei problemi transonici e supersonici per poter praticare la "cattura dell'urto", in cui è consentita la formazione di una superficie di discontinuità delle grandezze fisiche sufficientemente ridotta da poter considerare i risultati come accurati.

Altre importanti caratteristiche della griglia da tenere in considerazioni sono:

- *Aspect Ratio*: il rapporto tra il lato più lungo e il più corto della cella; per i risultati migliori sarebbe meglio avere un AR contenuto e il più vicino possibile all'unità, per evitare il rischio di incorrere in errori di interpolazione delle grandezze dal centro cella alla superficie di separazione con l'elemento successivo.
- *Skewness*: rappresenta l'asimmetria tra gli angoli interni della cella, e può essere misurata in diversi modi; è consigliabile che anch'essa sia il più contenuta

possibile per ridurre gli errori di interpolazione come per l'AR.

Nel caso studio in oggetto in questo lavoro di tesi è stata utilizzata una griglia ibrida, nella quale sono presenti sia zone a mesh strutturata che zone non strutturate.

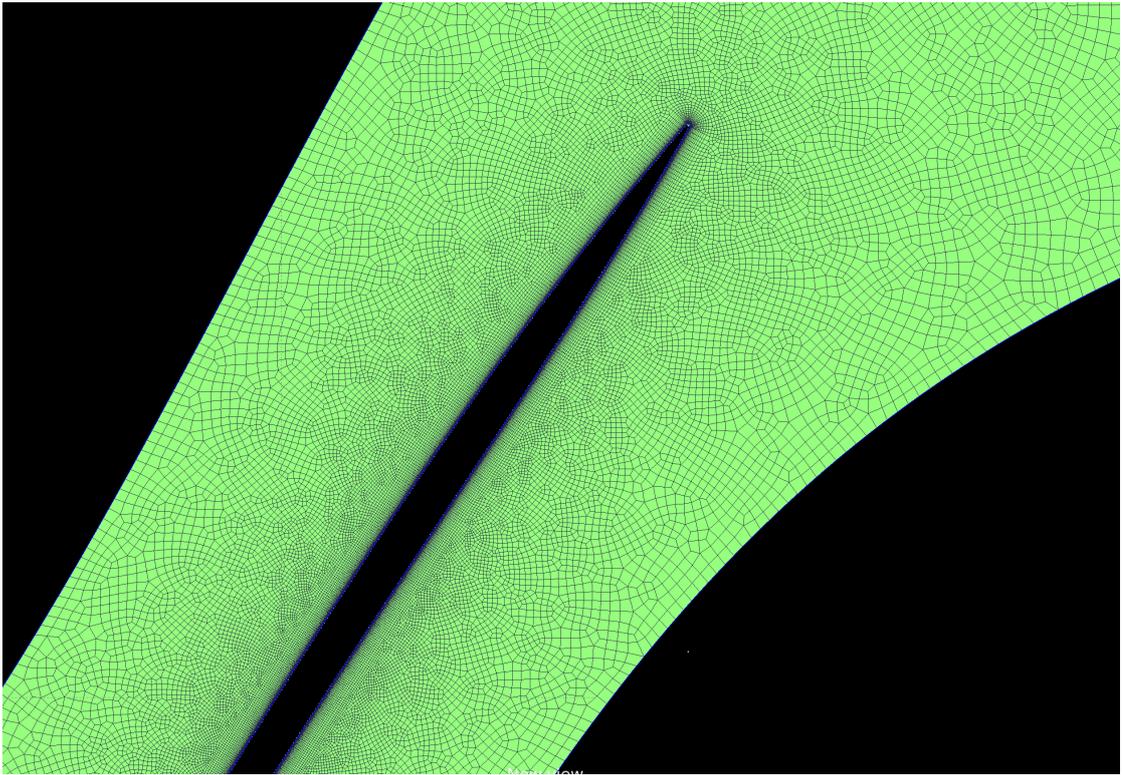


**Figura 3.5:** GMSH: Rappresentazione della griglia ibrida utilizzata; dettaglio su griglia strutturata attorno al profilo della pala e non strutturata man mano che ci si allontana da quella regione

Nello specifico, si è creata una zona strutturata nell'intorno del profilo della pala, in modo da poter catturare accuratamente il flusso che scorre parallelamente alla parete nel caso inviscido, o l'evoluzione dello strato limite nel caso viscoso.

Una volta sufficientemente lontani dalla paletta la regione è stata decomposta in una griglia non strutturata, i cui elementi aumentano gradualmente di dimensione nelle regioni in cui non ci si aspettano fenomeni fluidodinamici significativi, e dove quindi non sono richieste risoluzioni della griglia particolarmente alte.

Considerata la particolare periodicità delle schiere bidimensionali infinite, si è sfruttata tale proprietà per ottenere un singolo dominio significativo del quale i

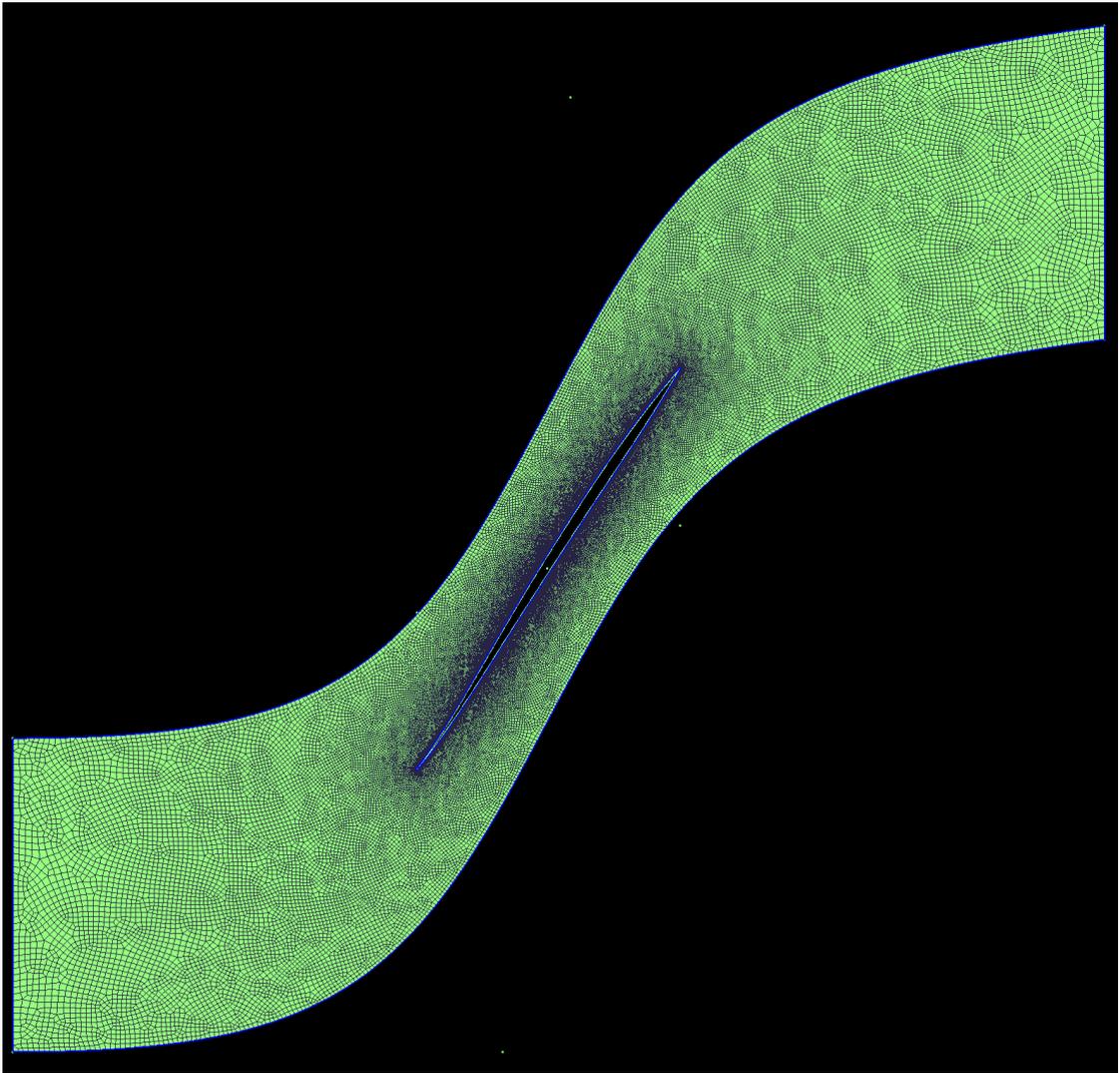


**Figura 3.6:** GMSH: Rappresentazione della griglia ibrida utilizzata; dettaglio su diversa densità della mesh in base alla vicinanza alla paletta

risultati del campo di moto potessero essere estesi all'intera schiera, e nel quale si sentissero le perturbazioni dovute alle pale adiacenti.

Ciò è stato possibile imponendo la periodicità delle condizioni al contorno sulle superfici superiore e inferiore del dominio una volta esportato il file della griglia in formato OpenFOAM.

Di seguito, in Figura 3.7 si può osservare la mesh nel suo complesso: il profilo della paletta, i bordi (periodici) superiore ed inferiore del dominio considerato, sezioni di ingresso e uscita.



**Figura 3.7:** GMSH: Rappresentazione della griglia utilizzata nella sua interezza

### 3.4 Le condizioni al contorno

Parte del lavoro di tesi svolto è stata incentrata sulla ricerca della combinazione di condizioni al contorno che potesse rappresentare il più fedelmente possibile il problema fisico.

Il solutore *rhoCentralFoam*, prevede il possibile utilizzo di un certo numero di diverse condizioni al contorno[20], sia per le variabili scalari che vettoriali, che sono state testate e sono compatibili con le equazioni fisiche del solutore scelto.

Questo ha comportato, nonostante una vasta scelta di tipologie disponibili, che si fosse limitati all'utilizzo delle condizioni al contorno compatibili con il solutore, con la conseguenza di dover fare dei compromessi nella scelta.

Come precedentemente illustrato alla Sezione 2.4, per l'imposizione delle condizioni al contorno è necessario individuare il comportamento fisico del problema. In entrambi i casi studio presentati in questo lavoro, ovvero sia nel caso di schiera di pale con flusso subsonico, sia per la schiera di pale con flusso supersonico, si ricade nella casistica in cui devono essere imposte:

- tre variabili fisiche all'ingresso del dominio
- una variabile fisica all'uscita del dominio

Ciò è motivato dal segno negativo che assume l'autovalore  $(\bar{v} \cdot \bar{I}_n - c)$ .

Per il caso subsonico ciò avviene poiché la velocità del flusso è minore di quella di propagazione delle onde acustiche.

Nel caso del flusso supersonico invece, anche se il modulo della velocità è tale da avere un Mach maggiore dell'unità, l'inclinazione della corrente rispetto alla schiera fa sì che la componente normale al contorno di ingresso sia minore della velocità del suono, per cui è possibile per i segnali risalire dall'interno del dominio a perturbare il campo di monte.

Preso atto della peculiarità di entrambi i casi studio, si è quindi proceduto con l'intento di trovare tre condizioni per l'ingresso ed una condizione per l'uscita del fluido nel dominio considerato.

La prassi in fluidodinamica computazionale (CFD) è solitamente tale da imporre per l'ingresso la pressione totale e il modulo della velocità, oppure il mach e la direzione, o una combinazione di questi.

In OpenFOAM, tuttavia, non è possibile agire ad esempio imponendo un numero di Mach, oppure il modulo della velocità lasciando libera la corrente di trovare una condizione di incidenza fisicamente corretta; infatti, il programma è strutturato in modo da leggere le condizioni al contorno da tre file di testo,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ .

All'interno di questi è possibile specificare il tipo di condizione per ogni contorno del dominio, in aggiunta ai parametri necessari al corretto calcolo delle condizioni, e con anche solitamente la possibilità di fornire il valore iniziale.

In questo modo, date le limitate, seppur numerose, condizioni al contorno tra cui scegliere, non si è riusciti a trovare una combinazione che permettesse di imporre Mach e pressione totale all'ingresso.

Dopo una scrematura delle condizioni non rilevanti, sono stati fatti tentativi con diverse combinazioni delle seguenti tipologie di condizioni, al fine di trovare le impostazioni che portassero ai risultati migliori:

- **fixedValue**: impone un valore fisso di pressione, temperatura o, per la velocità, tutte le componenti.
- **totalPressure**: impone la pressione totale, con l'aggiunta del  $\gamma$  della miscela necessaria al calcolo della pressione statica.
- **totalTemperature**: come sopra ma per la temperatura.
- **freestreamVelocity**: impone una velocità di freestream, secondo la quale il valore di velocità non viene imposto direttamente sul contorno ma esso viene utilizzato per calcolare le diverse componenti della velocità considerando anche il disturbo che risale dal dominio.
- **freestreamPressure**: condizione di pressione statica a monte, come per la velocità il valore inserito è utilizzato per un calcolo indiretto della pressione sul contorno.
- **supersonicFreestream**: impone una condizione di freestream adattata per il caso supersonico, dove vengono richiesti i valori di  $U, p, T$  all'infinito di monte,

e i valori al contorno sono calcolati con la funzione di Prandtl-Meyer ad ogni istante utilizzando la pressione delle celle adiacenti al contorno e dal mach nell'istante considerato.

- **zeroGradient**: consiste nell'imporre un gradiente della grandezza considerata nullo sul contorno, per cui il valore viene calcolato dal campo interno.
- **waveTransmissive**: è una condizione al contorno non riflessiva, in quanto il valore al contorno è calcolato risolvendo l'equazione delle onde per il campo indicato  $(p, T, U)$ ; viene utilizzata per i casi in cui possano esserci onde che raggiungono il contorno di uscita ad esempio, riflettendo e tornando a perturbare l'interno del dominio. Si possono specificare tra le opzioni un valore di campo all'infinito di valle ed una relativa distanza, in modo che nel calcolo del valore al contorno ci sia un rilassamento che simuli la distanza dal contorno del valore imposto.

Per poter replicare i valori al contorno sperimentali, forniti in termine di Mach in ingresso, direzione della corrente e salto di pressione, si è dovuto studiare una configurazione che facesse utilizzo delle tipologie elencate sopra che realizzasse le condizioni desiderate.

Si è inizialmente provato ad imporre il Mach e la direzione tenendo fissati la velocità e la temperatura, in modo tale che  $M = \frac{|U|}{\sqrt{\gamma RT}} = cost$ , ma impostando la pressione come *zeroGradient* si ottenevano delle variazioni troppo marcate, che cambiavano inoltre il valore di pressione totale del fluido senza che ci fosse lavoro o calore scambiato.

La configurazione finale utilizzata, prevede l'utilizzo delle condizioni totali di pressione e temperatura in ingresso, unitamente alla condizione di *freestream* per la velocità, in modo che, nonostante il sistema fosse leggermente sovraspecificato, la velocità potesse variare localmente sul contorno in termini di modulo e direzione, mantenendo però a monte un valore di intensità fissato.

Al contorno di uscita, invece, sia per il caso subsonico che per il caso supersonico, è stata imposta una pressione statica.

Nel caso subsonico si può tranquillamente utilizzare la condizione *fixedValue* per la pressione, in quanto non ci si aspetta la formazione di onde d'urto o di espansione nel campo di moto, e quindi non si ha rischio di riflessioni sull'uscita.

Nel caso supersonico, invece, si è dovuto utilizzare la condizione *waveTransmissive*, in modo da scongiurare le riflessioni delle onde; in quest ultimo caso per la pressione è stato fornito un valore di pressione del campo a valle ed una distanza corrispondente.

Per le restanti tre condizioni non imposte all'outlet, si è fatta nuovamente distinzione tra il caso supersonico e subsonico.

In quest ultimo è stato sufficiente impostare per temperatura e velocità la condizione *zeroGradient*, lasciando che il valore al contorno venisse imposto dall'interno; per il caso supersonico invece, anche per temperatura e velocità si è adoperato la condizione *waveTransmissive*, senza però imporre un valore a valle con cui imporre un'influenza sulla soluzione in corrispondenza del contorno di uscita.

## Capitolo 4

# Risultati e confronto con il Test Case di riferimento

Nella prima parte di questo capitolo si illustrano i casi studio di riferimento, le premesse su cui essi si basano ed i risultati che si vogliono riprodurre tramite l'analisi numerica.

Il primo studio in analisi fa parte della nota tecnica 2649 del National Advisory Committee for Aeronautics, più comunemente noto con l'acronimo NACA. Questo ente governativo statunitense, poi soppresso per dare i natali alla NASA, detiene un impressionante numero di studi scientifici in ambito aeronautico e fluidodinamico, in un primo momento confidenziali, e successivamente desecretati per consentirne l'utilizzo da parte della comunità scientifica.

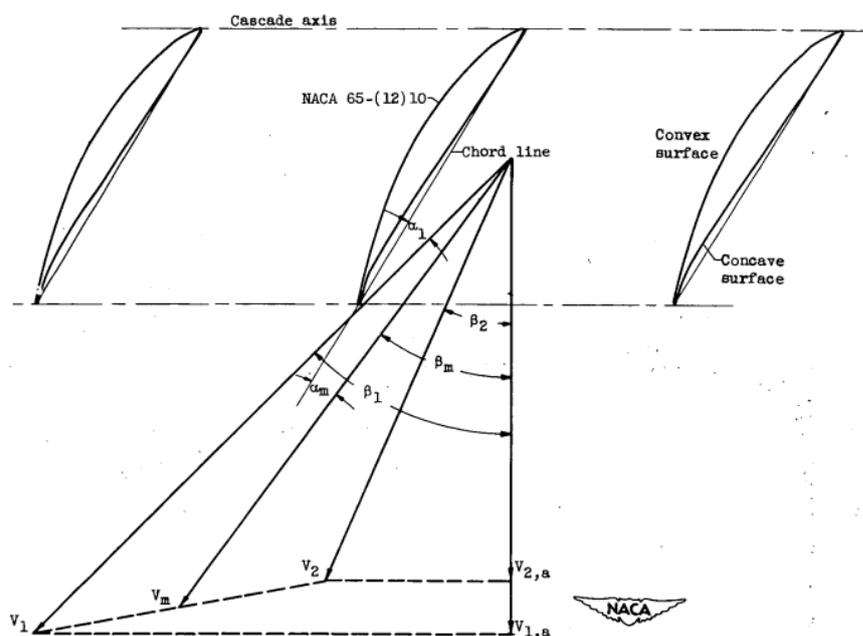
Viene brevemente descritta la metodologia sperimentale utilizzata nel documento originale e i risultati prodotti, e si ragiona sulla compatibilità con lo studio numerico effettuato in questo elaborato.

Nella seconda parte invece, si descrive lo studio sperimentale effettuato sulla schiera supersonica ARL-SL 19, il campo di moto che ne caratterizza il caso analizzato e si presentano i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche svolte.

## 4.1 Test Case di riferimento caso subsonico: Technical Note 2649

Il documento fornisce dati e informazioni sull'effetto del numero di Mach sul flusso in una schiera bidimensionale di pale per compressori subsonici-transonici.

Il profilo di pala utilizzato proviene dalla serie NACA 65 di pale per compressori, le quali seguono una legge degli spessori diversa rispetto ai normali profili NACA, come già descritto in Sezione 1.2.2.

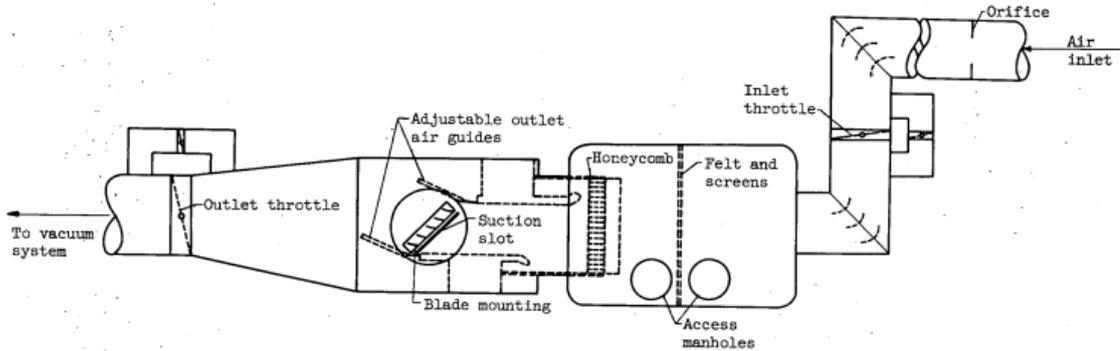


**Figura 4.1:** Technical Note 2649: profilo di pala NACA 65 e relative variazioni dei vettori della velocità attraverso la schiera di pale [1]

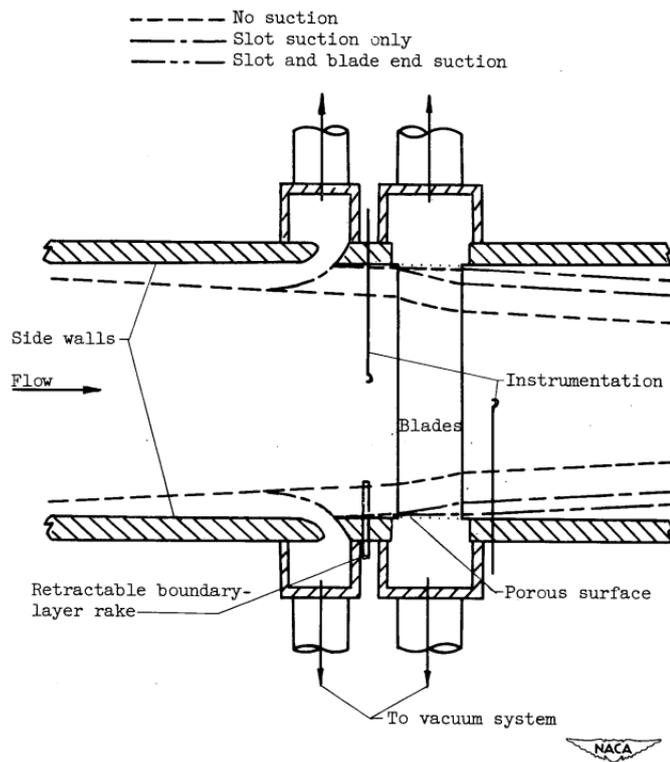
Viene descritta la geometria dell'apparato sperimentale, il quale consiste sostanzialmente in un condotto, dove fluisce una corrente d'aria, e dal quale si può regolare una portata di spillamento del flusso alle pareti, prima della schiera, effettuando così un'aspirazione dello strato limite.

Per simulare poi con accuratezza la bidimensionalità del problema, è stato aspirato anche lo strato limite presente sulla pala, tramite l'impiego di pareti porose e di un'attenta calibrazione del livello di aspirazione. In questo modo, gli autori vogliono comparare i risultati teorici con quelli sperimentali; nell'ambito di questo

elaborato si effettuerà il confronto dei risultati numerici, ottenuti per simulazione di fluido inviscido, con quelli sperimentali presentati nella Technical Note.



**Figura 4.2:** Technical Note 2649: Diagramma schematico dell'installazione dell'apparato sperimentale per la schiera bidimensionale [1]

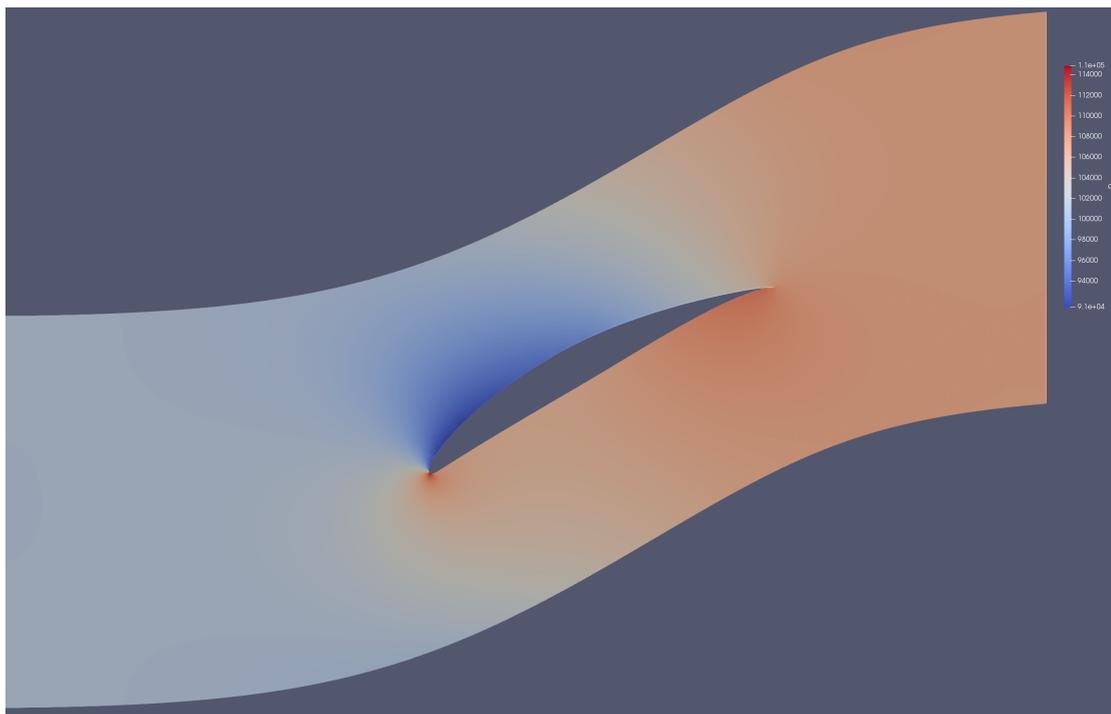


**Figura 4.3:** Technical Note 2649: Dettaglio del condotto: strato limite con e senza aspirazione[1]

## Mach 0.42 - Confronto dei risultati

In questa prima sezione, si condurrà un confronto tra dati sperimentali e derivanti dalle soluzioni numeriche dei fenomeni fisici che si verificano per condizioni di velocità della corrente in ingresso caratterizzate da un valore di Mach pari a 0.42.

Il campo di pressione che si sviluppa in queste condizioni all'interno del dominio considerato è visibile in Figura 4.4.

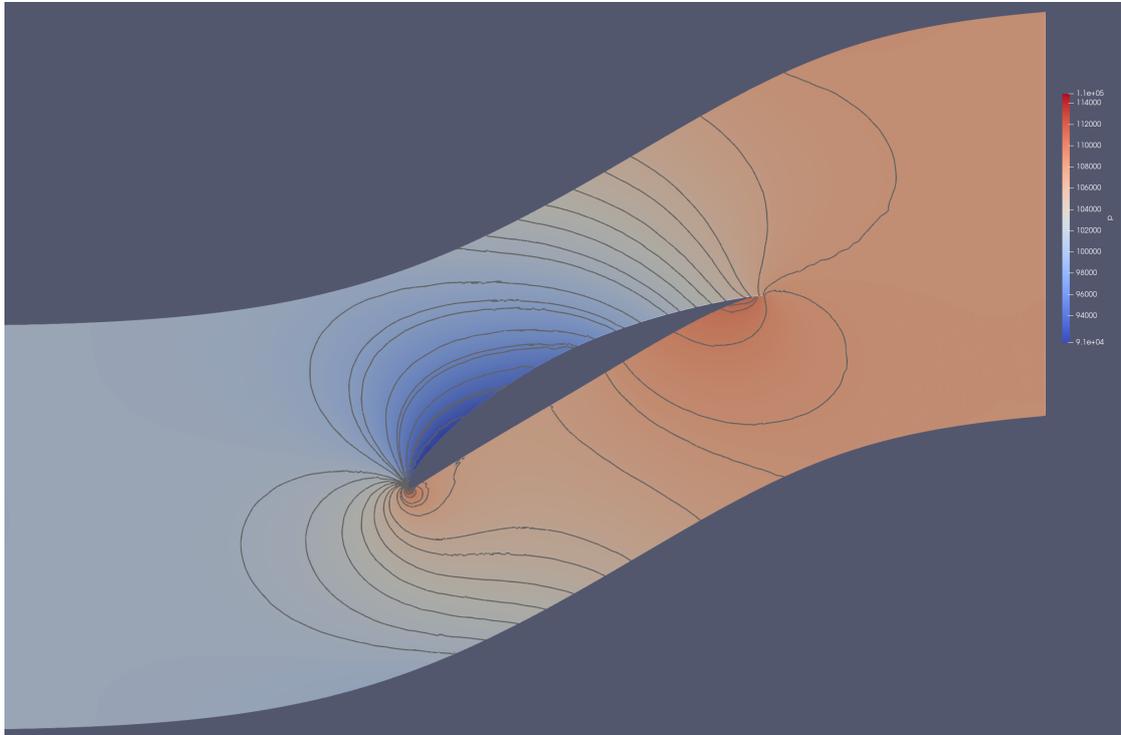


**Figura 4.4:** Mach: 0.42. Campo di pressione nel dominio e attorno alla pala

In questa visualizzazione cromatica, risultano facilmente interpretabili le zone sul profilo in cui vengono realizzate la compressione e l'espansione del fluido: sul dorso si vede la pressione scendere, soprattutto nella prima parte, con poi una ricompressione (gradiente avverso) andando verso il bordo d'uscita.

Si nota anche la zona del bordo d'attacco dove si ha la compressione dinamica del fluido fino al punto di arresto, in cui la pressione risulta essere massima e il flusso fermo.

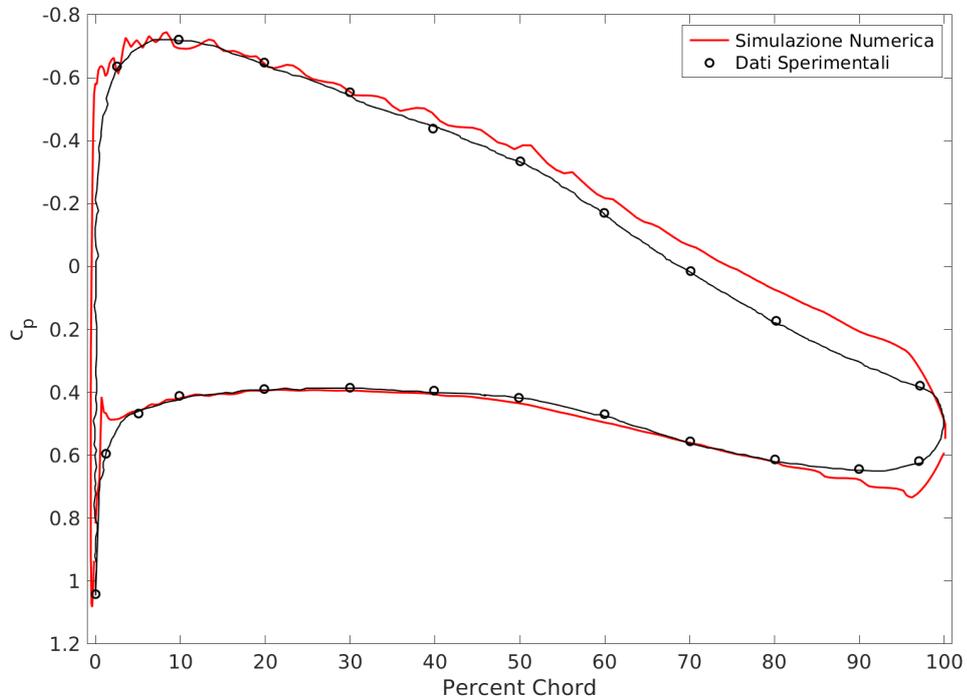
Nella Figura 4.5 si possono vedere sovrapposte al campo di pressione le linee contour, da cui si evincono le superfici ad ugual pressione intorno alla paletta.



**Figura 4.5:** Mach: 0.42. Linee contour della pressione

É facile notare nei pressi della parete un addensamento delle linee, segno che le variazioni di pressione avvengono più rapidamente che in altre zone della pala.

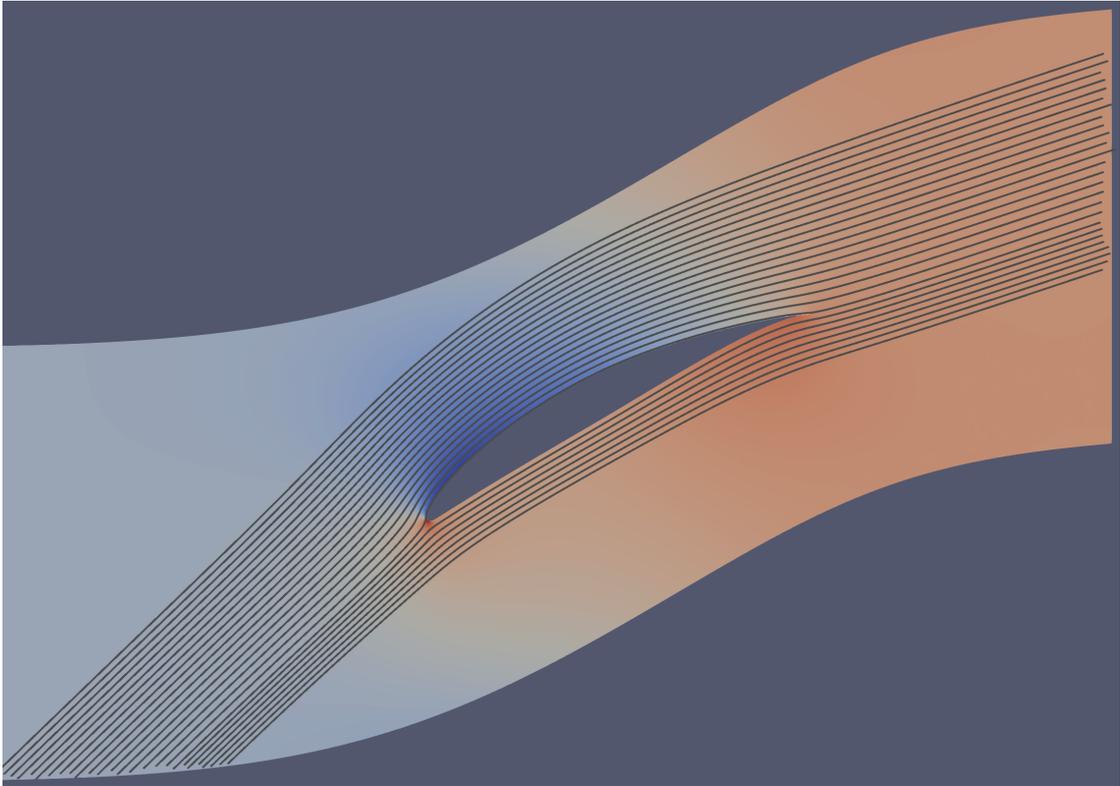
Nella Figura 4.6 si può invece confrontare la distribuzione del coefficiente di pressione tra il caso sperimentale e numerico:



**Figura 4.6:** Mach: 0.42. Confronto tra distribuzione del coefficiente di pressione del caso sperimentale e numerico

La curva dei dati ottenuti dalla simulazione segue fedelmente la curva dei dati sperimentali per la prima metà della corda, dopodiché si nota un leggero scostamento dei dati sul dorso e al bordo di fuga. Viceversa la corrispondenza è mantenuta per il *pressure side*, dove si ha un'ottima aderenza ai dati sperimentali.

Successivamente, in Figura 4.7 si offre una visualizzazione delle streamlines attorno al corpo, in cui si può vedere la traiettoria del fluido e la variazione nell'angolo della corrente, dovuta alla presenza della paletta, e in seguito al quale si ottiene la compressione.

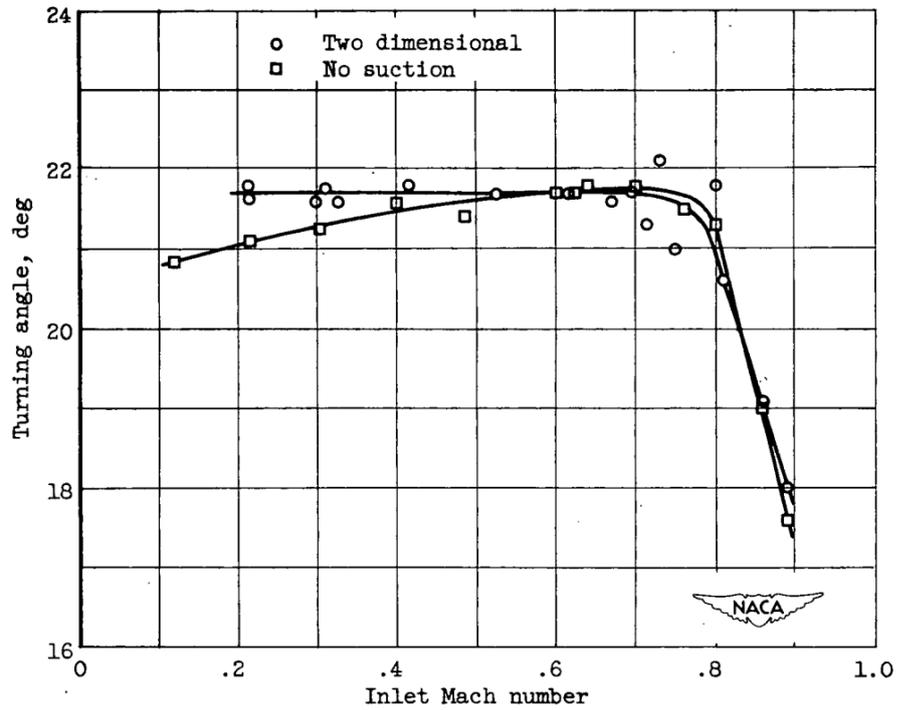


**Figura 4.7:** Mach: 0.42. Streamlines

Per i risultati numerici, l'entità della deviazione è pari a:

$$\Delta\beta = 25.64^\circ \quad (4.1)$$

mentre per i dati sperimentali, al variare del Mach, si ha che la deviazione della corrente segue l'andamento in Figura 4.8:



**Figura 4.8:** Relazione tra Mach di ingresso e angolo di deviazione della corrente [1]

La deviazione registrata sperimentalmente per  $M = 0.42$  risulta essere:

$$\Delta\beta = 21.8^\circ \quad (4.2)$$

Il rapporto di compressione statica per il quale si ottiene il campo di moto presentato corrisponde invece a

$$\frac{p_2}{p_1} = 1.058 \quad (4.3)$$

che corrisponde esattamente al valore registrato sperimentalmente, come è possibile constatare in Figura 4.9

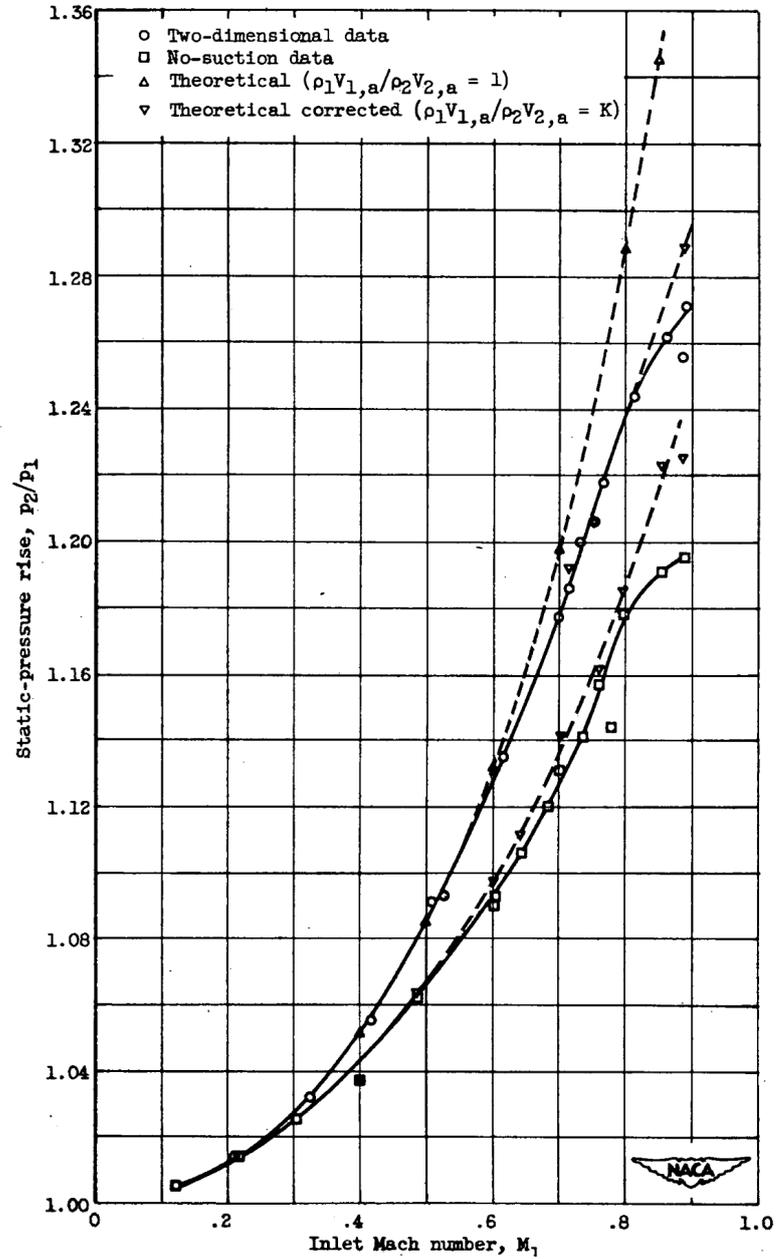
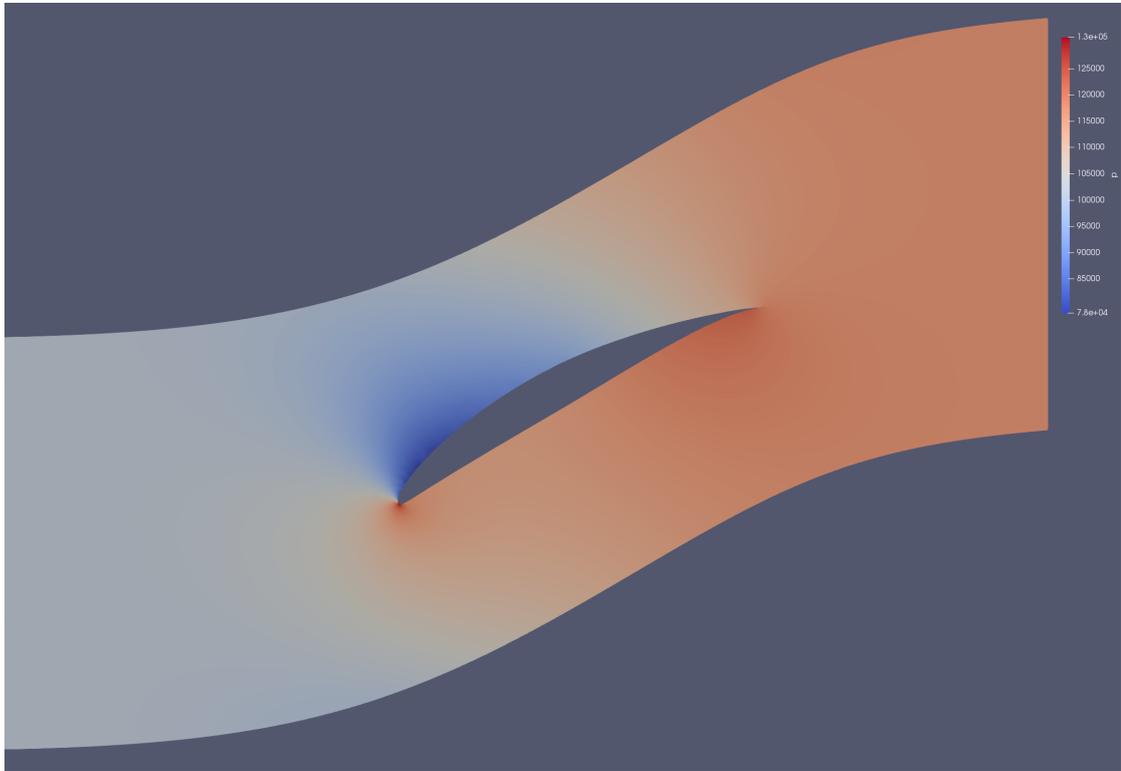


Figura 4.9: Salto di pressione: curve misurate sperimentalmente e calcolate numericamente[1]

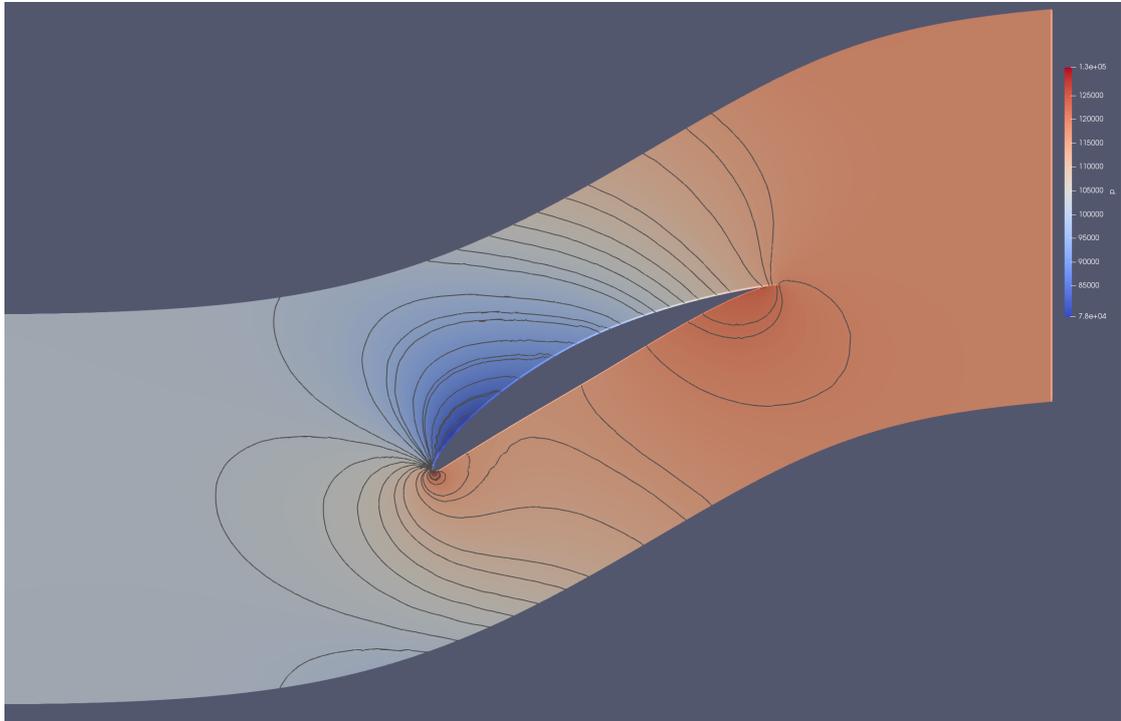
### Mach 0.61 - Confronto dei risultati

Per velocità della corrente in ingresso con Mach pari a 0.61, si ottiene il campo di pressione visibile in Figura 4.10.



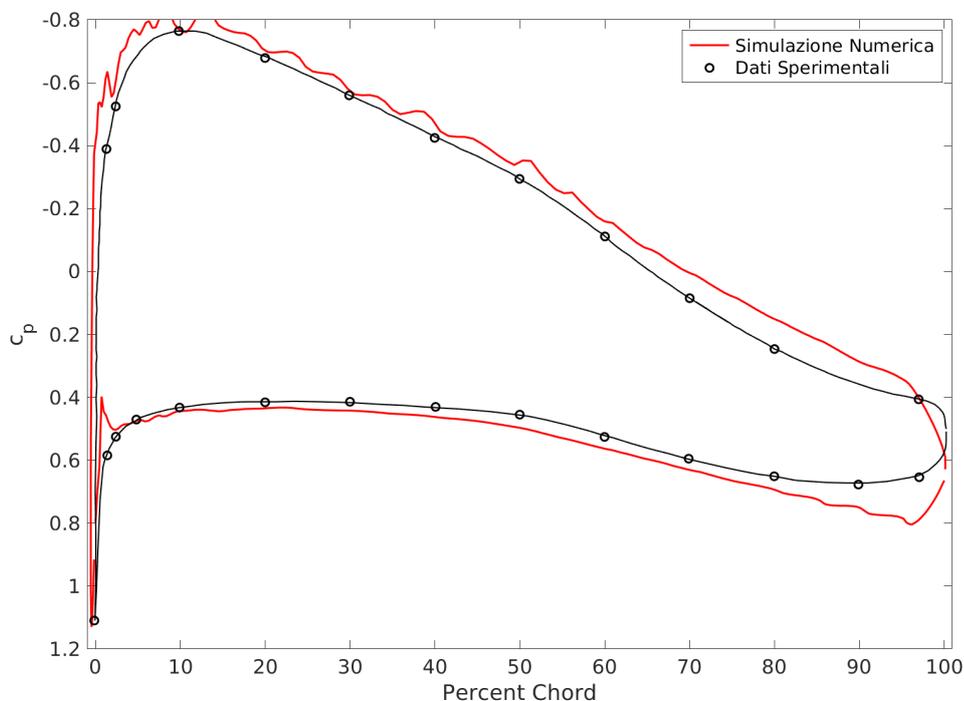
**Figura 4.10:** Mach: 0.61. Campo di pressione nel dominio e attorno alla pala

In Figura 4.11 si possono vedere le linee contour della pressione. Valgono le stesse considerazioni sul campo di moto del caso precedente.



**Figura 4.11:** Mach: 0.61. Linee contour della pressione

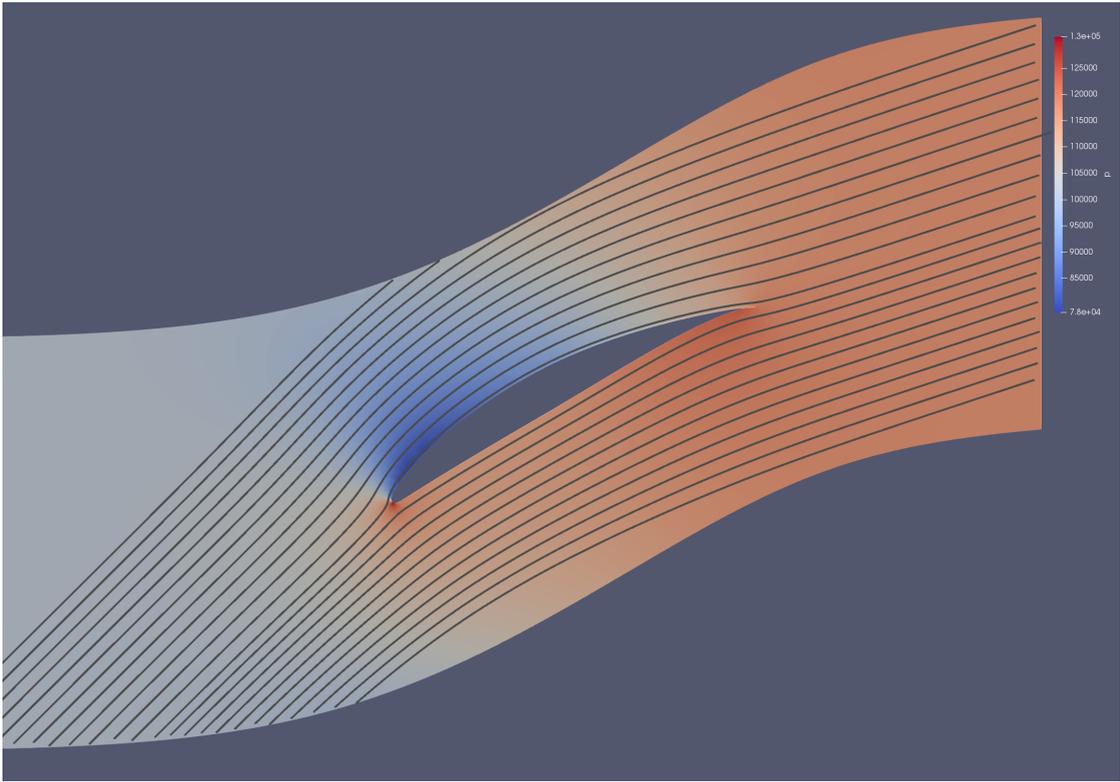
Nella Figura 4.12 si può invece confrontare la distribuzione del coefficiente di pressione tra il caso sperimentale e numerico.



**Figura 4.12:** Mach: 0.61. Confronto tra distribuzione del coefficiente di pressione del caso sperimentale e numerico

Si nota sempre una buona corrispondenza tra le due curve, con una maggiore aderenza ai dati sperimentali fino a circa il 60% della corda. Nella restante zona di coda si ha invece che i risultati numerici si discostano maggiormente, dilatando l'area del grafico.

In Figura 4.13 si possono vedere le streamlines della corrente per il caso in esame.



**Figura 4.13:** Mach: 0.61. Streamlines

L'entità della deviazione è pari a:

$$\Delta\beta = 25.99^\circ \quad (4.4)$$

contro i  $21.7^\circ$  registrati per il caso sperimentale.

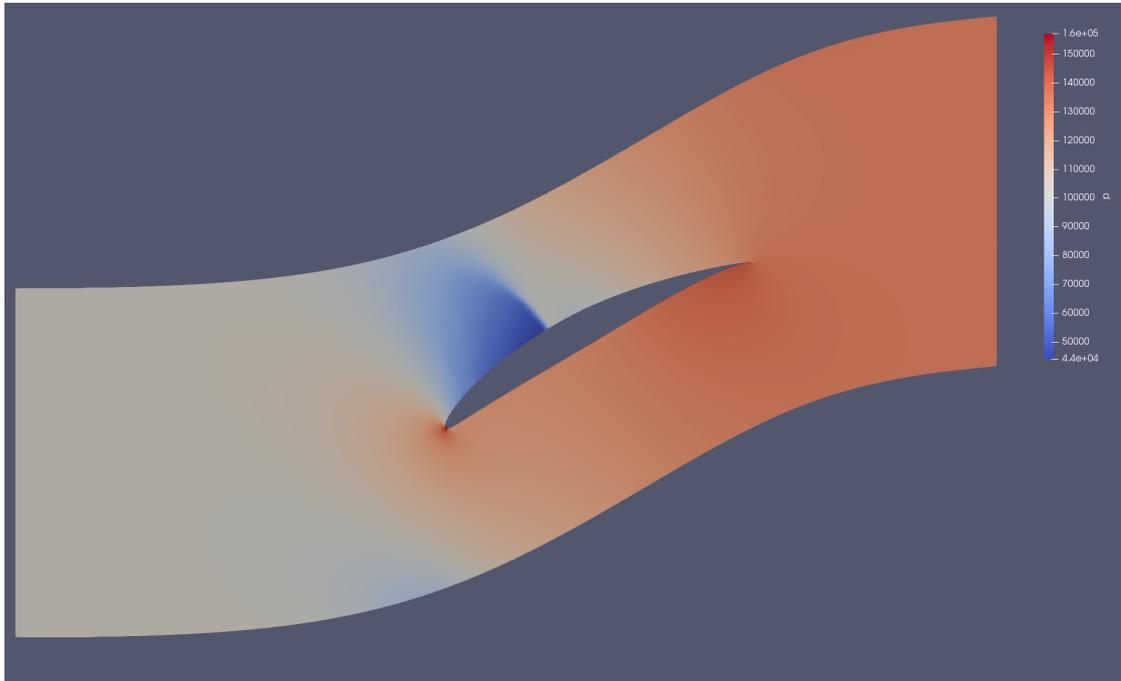
Il rapporto di compressione statica per il quale si ottiene il campo di moto presentato corrisponde invece a

$$\frac{p_2}{p_1} = 1.151 \quad (4.5)$$

mentre sperimentalmente si è ottenuto un rapporto di  $\frac{p_2}{p_1} = 1,133$ . Si può vedere quindi che in questo caso sia il rapporto di compressione che l'angolo di deviazione sono sovrastimati.

### Mach 0.81 - confronto dei risultati

Per velocità della corrente in ingresso con Mach pari a 0.81, si ottiene il campo di pressione visibile in Figura 4.14.



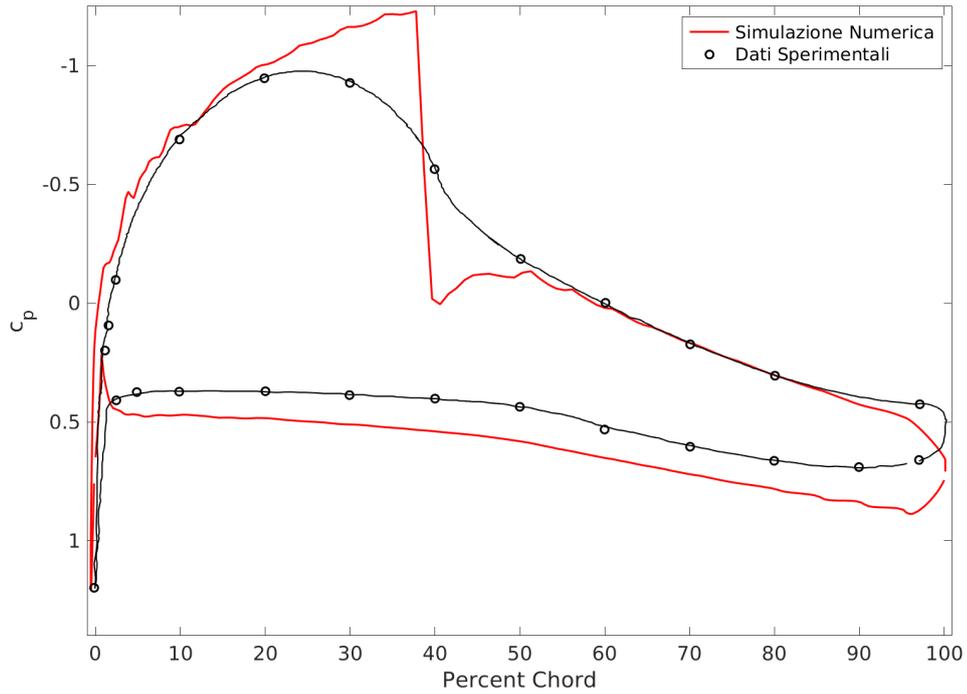
**Figura 4.14:** Mach: 0.81. Campo di pressione nel dominio e attorno alla pala

Si nota la formazione della bolla supersonica sul dorso della paletta, come ci si potrebbe aspettare per una velocità così prossima a quella del suono.

A causa dell'accelerazione sul dorso, si forma un'onda d'urto retta che riporta la velocità a valori subsonici, ricomprimendo la corrente.

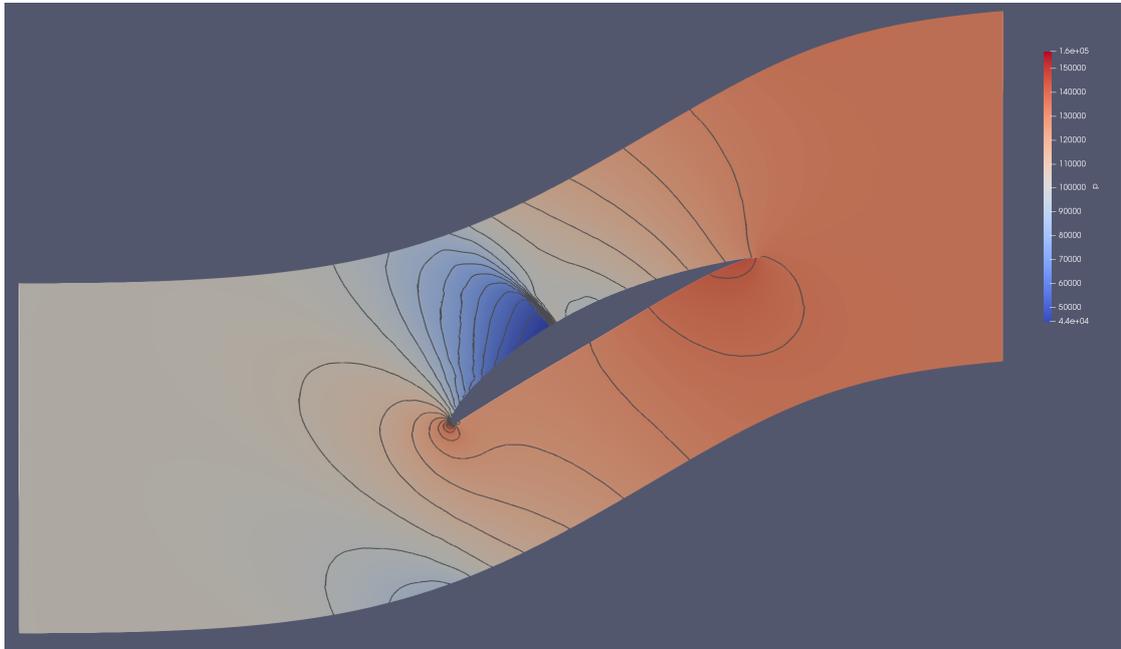
In Figura 4.15 si mostra il grafico del coefficiente di pressione ottenuto a confronto con quello misurato sperimentalmente.

Si nota una grande discrepanza nei dati soprattutto nella prima metà della pala, dove appunto viene coinvolto un urto retto, in corrispondenza del quale si ha un importante salto nella pressione a parete.



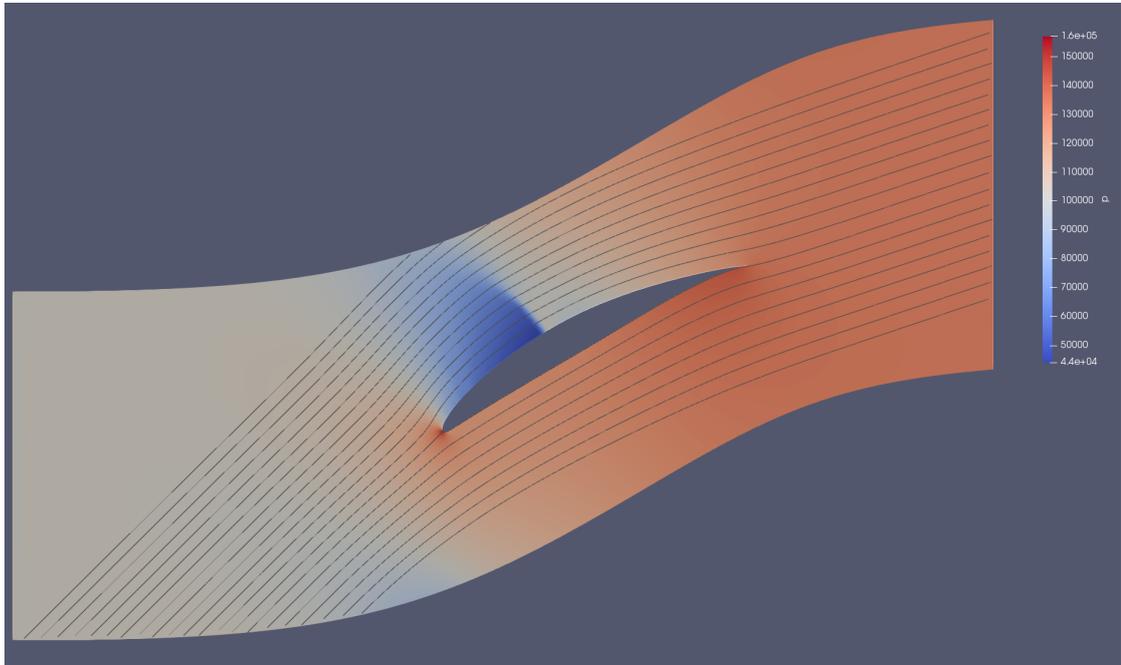
**Figura 4.15:** Mach: 0.81. Confronto tra distribuzione del coefficiente di pressione del caso sperimentale e numerico

In Figura 4.16 si possono vedere le linee contour della pressione. Le considerazioni sono le stesse degli altri due casi, con la differenza che è possibile apprezzare l'addensamento delle linee in corrispondenza dell'urto retto, dove si passa bruscamente da un valore più basso di pressione ad uno più alto.



**Figura 4.16:** Mach: 0.81. Linee contour della pressione

In Figura 4.17 è riportata invece la rappresentazione delle streamlines della corrente. La presenza dell'onda d'urto non perturba particolarmente la traiettoria del fluido, in quanto il salto attraverso l'onda retta non riguarda la direzione della velocità come per le onde d'urto oblique.



**Figura 4.17:** Mach: 0.81. Streamlines

L'entità della deviazione è pari a:

$$\Delta\beta = 26.13^\circ \quad (4.6)$$

contro i  $20.61^\circ$  registrati per il caso sperimentale.

Il rapporto di compressione statica per il quale si ottiene il campo di moto presentato corrisponde invece a

$$\frac{p_2}{p_1} = 1.302 \quad (4.7)$$

mentre sperimentalmente si è ottenuto un rapporto di  $\frac{p_2}{p_1} = 1,243$ . Anche in questo caso sia il rapporto di compressione che l'angolo di deviazione sono sovrastimati.

Nonostante la marcata differenza nei risultati attesi, è opportuno confrontare i risultati ottenuti in termini di rapporto di compressione facendo riferimento alla Figura 4.9.

In essa viene raffigurato il salto di pressione teorico a confronto con quello misurato sperimentalmente a diversi Mach, e si può notare come per  $M = 0.81$  si ottenga un valore molto prossimo a quello atteso per il caso teorico; viceversa la curva dei dati misurati sperimentalmente si discosta dalla curva dei dati analitici, a causa di possibili effetti di flusso reale.

Inoltre, si nota come anche nel caso di  $M = 0.61$  il leggero scostamento nel rapporto di compressione si ritrova nel fatto che per quel valore di velocità della corrente il ramo dei risultati sperimentali stesse iniziando a divergere dalla curva sperimentale.

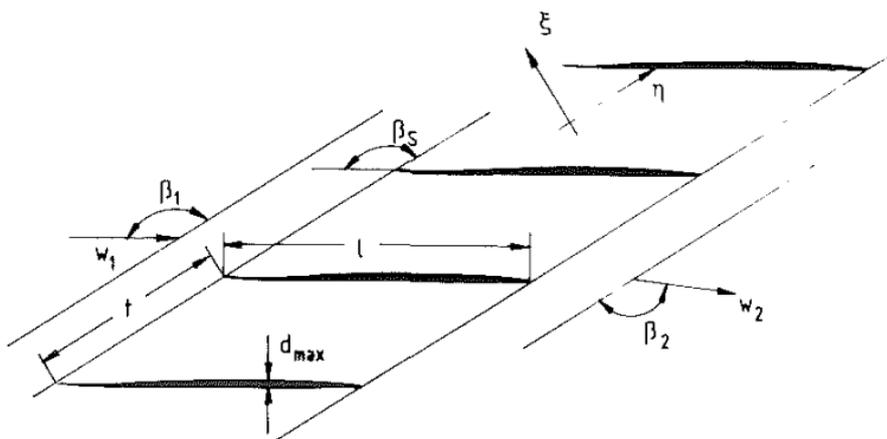
Per il caso a  $M = 0.42$  invece, la corrispondenza dei risultati è indice di come per un campo di moto interamente in regime subsonico non ci siano problemi di corrispondenza tra il modello teorico ed i risultati registrati in galleria del vento.

## 4.2 Test Case di riferimento caso supersonico: ARL-SL19

Lo sviluppo di fan e compressori ad alta velocità funzionanti con velocità relative di ingresso supersoniche richiede la conoscenza pregressa del comportamento del flusso in queste condizioni operative e delle prestazioni delle pale del rotore.

Sebbene il modello della schiera abbia dei limiti, può tuttavia fornire una visione considerevole di gran parte della fisica del flusso rilevante in un'ampia gamma di condizioni operative con tempo e costi più ridotti di quanto sarebbe necessario per ottenere informazioni simili da un rotore reale[4].

Questa forma di test consente una misurazione del flusso relativamente semplice ma dettagliata, fornendo informazioni sul carico della lama, le perdite generate e l'angolo di deviazione del flusso.



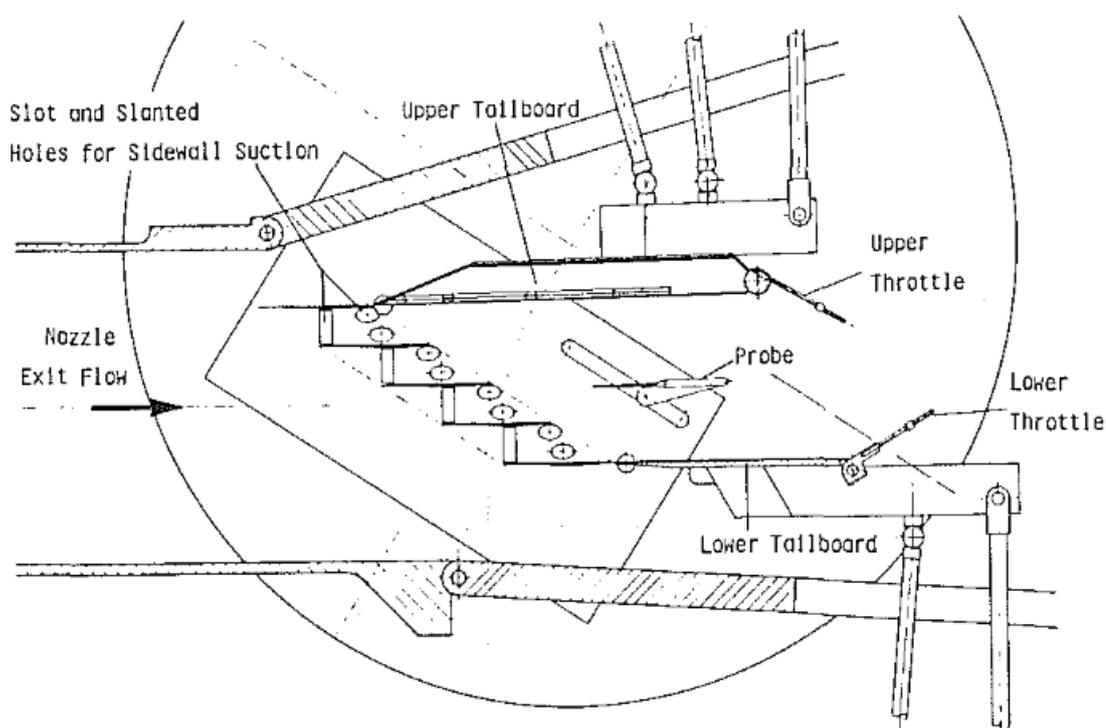
**Figura 4.18:** ARL-SL19: Parametri geometrici e profili della schiera di pale

In Figura 4.18 viene presentata la schiera con la notazione geometrica. Inoltre, i parametri di progetto in ingresso sono elencati in tabella quelli elencati in Tabella 4.1:

Parametro	Valore
Mach	1.612
$p_2/p_1$	2.15

**Tabella 4.1:** ARL-SL19: Parametri di progetto in ingresso

Lo schema dell'impianto sperimentale è riportato in Figura 4.19. Il condotto è alimentato a circuito chiuso, e può consentire una variazione continua del numero di Mach alla sezione di prova che varia tra 1.3 e 2.4 grazie ad un ugello convergente-divergente regolabile[4].



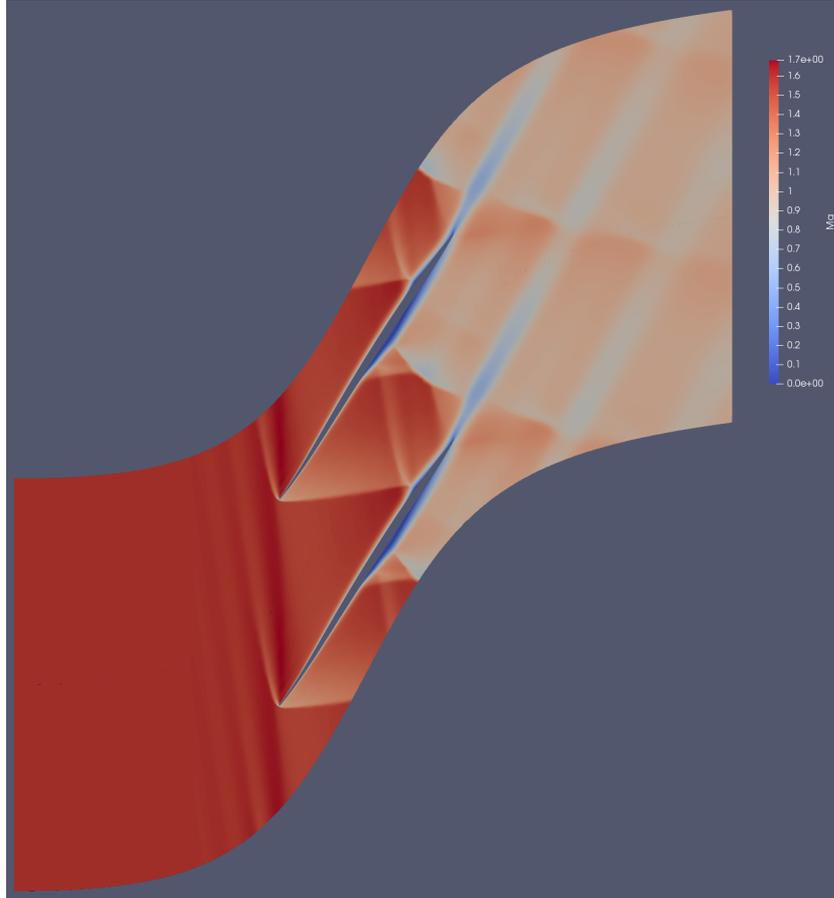
**Figura 4.19:** ARL-SL-19:

Al fine di ridurre gli effetti negativi dovuti alla presenza dello strato limite sulle pareti dei condotti, ed alla sua interazione con le onde generate nel campo di moto si è praticata anche in questo caso aspirazione del flusso a parete. Ciò è necessario per evitare che le palette più vicine al condotto venissero disinnescate dalla forte perturbazione indotta dalle interazioni, compromettendo la periodicità cercata nella schiera.

Le misurazioni blade-to-blade dei valori di pressione statica, pressione totale e della direzione del flusso sono state ottenute a metà lunghezza della pala, utilizzando una sonda  $26\text{mm}$  a valle in direzione assiale e misurando il traverso spostandola nella direzione  $\eta$ [4].

### Mach 1.58: confronto dei risultati

Il campo di moto risultante dalla simulazione è riportato in Figura 4.20



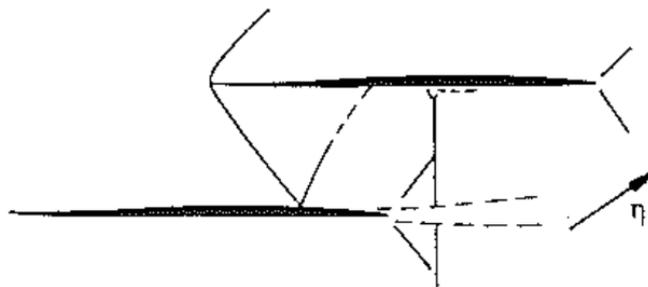
**Figura 4.20:** Mach: 1.58. Visualizzazione del numero di Mach nel dominio

Quest ultimo è stato ottenuto considerando una corrente caratterizzata dai seguenti parametri in ingresso:

Mach	$\beta$	$p_2/p_1$	$p^\circ$	$T^\circ$	$Re$
1.58	58.69	1.96	101325Pa	300K	$1.2 \cdot 10^6$

**Tabella 4.2:** ARL-SL19: Parametri di progetto in ingresso

In Figura 4.21 è riportato invece uno schema del campo di moto ottenuto sperimentalmente, per cui si può notare una corretta ricostruzione delle strutture fluidodinamiche:



**Figura 4.21:** Campo di moto osservato sperimentalmente per Mach 1.58, e rapporto di compressione 2.12[4]

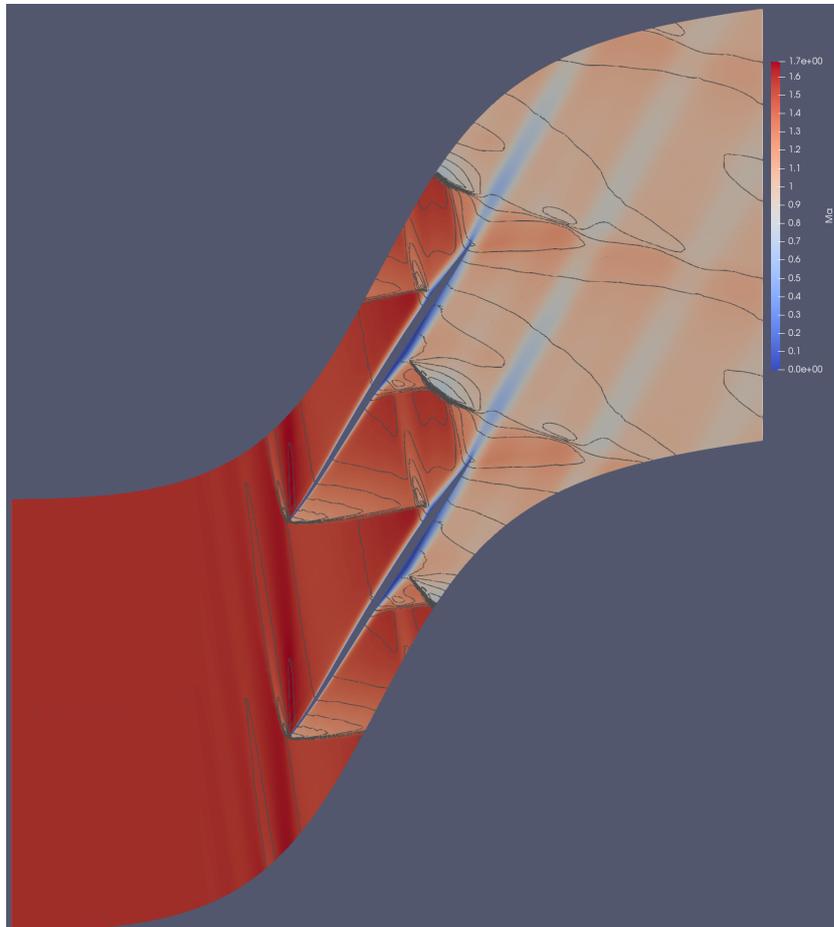
Viene infatti riprodotto il sistema di urti generati dalla corrente supersonica, in particolare si riconosce il bow shock al bordo d'attacco, più intenso nel ramo inferiore, e l'urto retto che si forma in coda alla pala e che propaga fino ad arrivare sul ventre della pala successiva.

Per queste simulazioni è stato abbandonato il modello inviscido di Eulero, nonostante esso rappresenti una buona rappresentazione dei campi supersonici, poiché le interazioni degli urti con lo strato limite si sono rivelate fondamentali per la corrispondenza dei risultati.

È stato quindi necessario riprogettare la griglia per tener conto della presenza dello strato limite a parete; si è optato quindi per una griglia strutturata nella regione della parete, con grandezza del primo elemento corrispondente a  $y^+ = 5$ . Nel modello numerico è stata quindi introdotto il calcolo turbolento tramite l'implementazione del modello ad un'equazione di Spalart-Allmaras[10], grazie al quale è stato possibile far emergere le strutture di separazione e di scia previste nei risultati sperimentali.

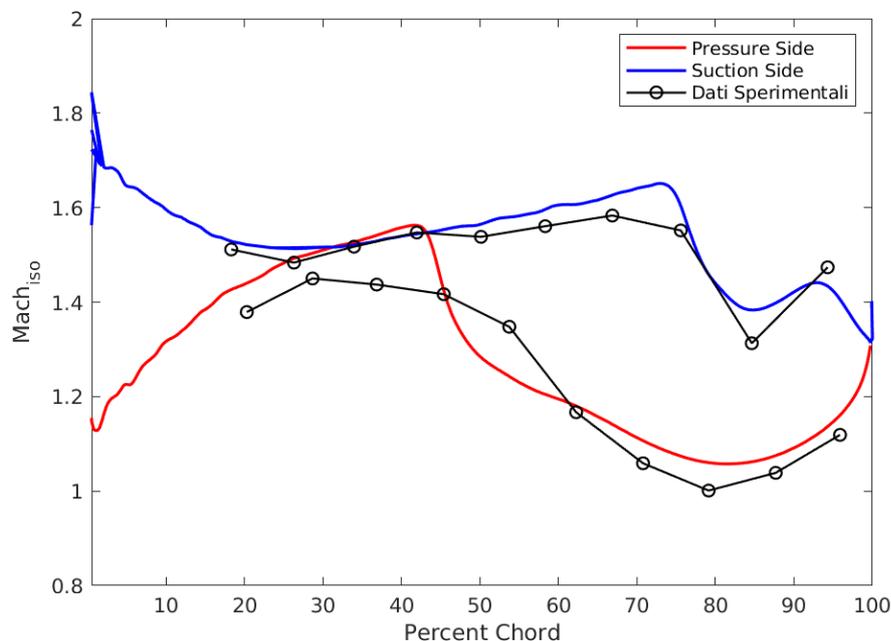
Si può notare infatti in Figura 4.20 come, in seguito alla riflessione degli urti sulle pareti, si formino le tipiche bolle di separazione a parete, con la creazione di urti obliqui e strutture a lambda.

In Figura 4.22 si notano ancora gli addensamenti delle linee contour della pressione in corrispondenza degli urti. É inoltre possibile visualizzare, in presenza di zone di espansione, i corrispondenti fan isoentropici:



**Figura 4.22:** Mach: 1.58. Linee contour della pressione sovrapposte al campo di Mach

Di seguito si riporta in Figura 4.23 il confronto tra i dati sperimentali disponibili e il risultato numerico ottenuto:



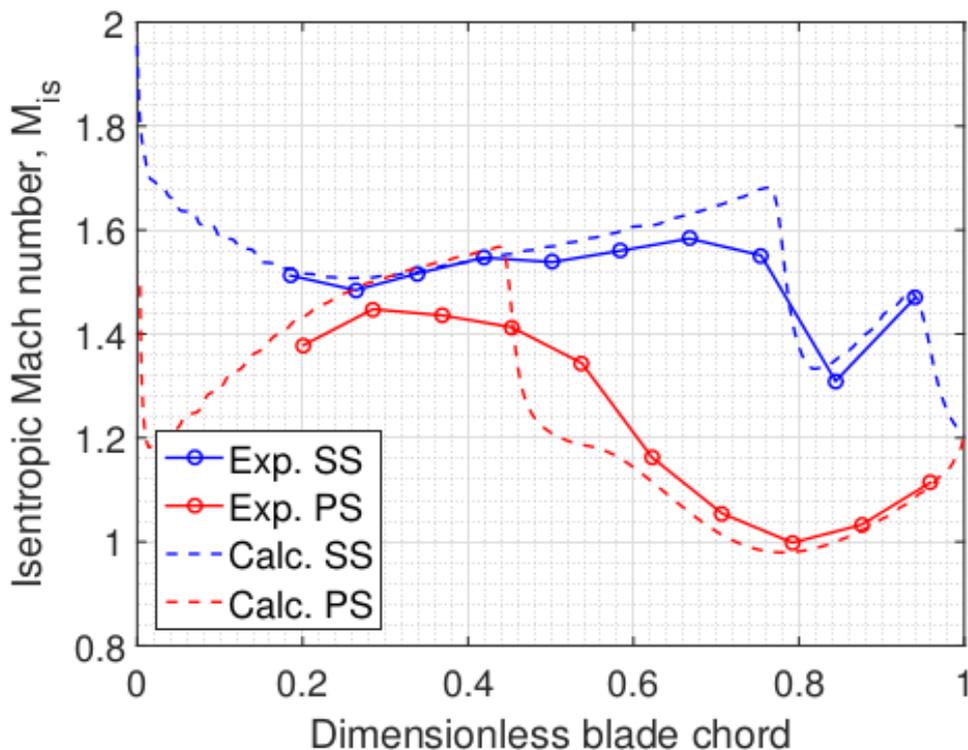
**Figura 4.23:** Confronto tra distribuzione del Mach isentropico ottenuta sperimentalmente e numericamente

Si nota immediatamente una certa discrepanza, soprattutto per quanto riguarda i risultati sul ventre, dove si ha aderenza ai dati sperimentali soltanto qualitativamente dal 60% della corda in poi. Nel tratto precedente la corrente è più veloce di quanto registrato sperimentalmente, ed in seguito ad un urto riflesso sulla parete il valore di  $M_{is}$  scende bruscamente.

Diversamente, per il dorso i risultati seguono un andamento migliore, mantenendo una buona aderenza ai dati sperimentali, e discostandosi solo nell'ultima parte dove viene coinvolto un urto e la successiva espansione in uscita. In questa zona la ricompressione dell'urto non è sufficientemente forte, per cui il valore del Mach isentropico non scende fino al livello sperimentale, seguendo l'andamento solo in modo qualitativo.

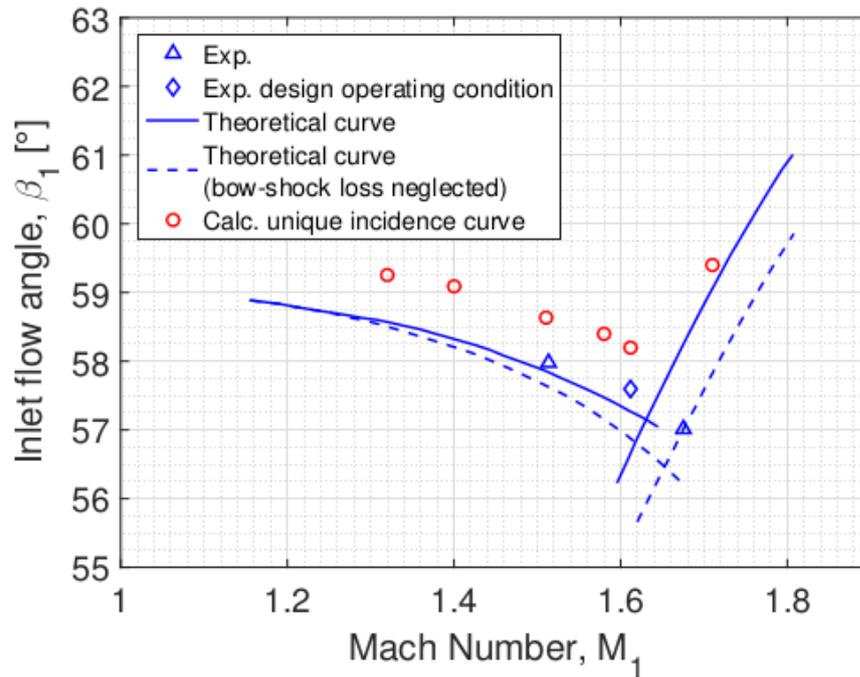
Nella Figura 4.24 si ritrova l'andamento descritto per i risultati numerici, i quali si scostano nuovamente dai dati sperimentali, e anche in questo caso in maniera preponderante sul ventre del profilo.

Per il dorso si trova invece una maggior corrispondenza con il valore sperimentale in seguito all'urto e alla successiva espansione, mentre prima di questi si ha un'accelerazione eccessiva che fa discostare il valore ottenuto dal dato misurato:



**Figura 4.24:** Confronto tra distribuzione del Mach isoentropico ottenuta sperimentalmente e numericamente in [21]

Inoltre, rispetto ai dati numerici, si è riscontrata una differenza anche nell'angolo di incidenza unica per il valore del Mach di ingresso  $M = 1.58$ . In Figura 4.25 viene riportata la curva teorica presentata nel riferimento [4] confrontata con i dati di incidenza calcolati numericamente a diversi Mach nel riferimento [21]:



**Figura 4.25:** Incidenza della corrente al variare del Mach: confronto tra dati numerici[21] e sperimentali

Allo stesso modo, come riportato precedentemente, anche per i risultati numerici ottenuti nel contesto del presente elaborato, si è riscontrata una differenza sostanziale dell'angolo di incidenza rispetto ai valori teorici attesi (circa un grado).

## 4.3 Conclusioni

È stata investigata l'affidabilità del solutore open-source *rhoCentralFoam* nel predire correttamente il campo di moto e la distribuzione di pressione attorno a profili di compressori funzionanti in regime transonico-supersonico.

Il confronto tra i dati numerici e sperimentali per la schiera subsonica-transonica NACA-651210 ha evidenziato una buona aderenza dei risultati fino a  $M = 0.61$ . Superata questa condizione i risultati sperimentali, nonostante l'aspirazione dello strato limite anche sulle pareti delle palette, si discostano dai valori calcolati analiticamente dalle equazioni di Eulero, i quali sono invece ricalcati fedelmente dai dati ottenuti con simulazione inviscida.

Si registra inoltre un'importante scostamento nel valore di deviazione del flusso misurata sperimentalmente e calcolata numericamente; questo effetto è stato riscontrato anche a Mach più bassi, dove la corrispondenza nel rapporto di compressione e nella distribuzione del coefficiente di pressione sulla pala era molto soddisfacente.

Per il caso di flusso supersonico, invece, ci si è ritrovati costretti ad effettuare una simulazione viscosa con modello di turbolenza per migliorare l'aderenza ai dati sperimentali, in quanto gli effetti viscosi di interazione perturbavano significativamente il campo di moto e ne influenzavano i risultati.

L'andamento ottenuto per il Mach isoentropico attorno alla pala non risulta particolarmente soddisfacente se comparato esclusivamente ai dati sperimentali, rispetto ai quali l'andamento qualitativo della grandezza sul ventre presenta uno scostamento notevole, soprattutto nella metà anteriore.

Considerando nel confronto anche risultati numerici ottenuti per le stesse condizioni e presentati in letteratura, si nota come l'andamento ottenuto in sede di questo elaborato corrispondano sufficientemente. Inoltre si riscontra lo stesso effetto di variazione significativa dell'angolo di incidenza unica per la schiera considerata rispetto alle condizioni teoriche e sperimentali.

# Bibliografia

- [1] Briggs W. «Effect of Mach number on the flow and application of compressibility corrections in a two-dimensional subsonic-transonic compressor cascade having varied porous-wall suction at the blade tips». In: *NACA Technical note* 2649 (mar. 1952) (cit. alle pp. 12, 22, 78, 79, 84, 85).
- [2] Stivers Abbott Doenhoff. «Summary of Airfoil Data». In: *NACA Report* 824 (1945) (cit. alle pp. 13, 14).
- [3] Starcken H. Lichtfuss H.J. «Supersonic Cascade Flow». In: *Progress in Aerospace Science* 15 (1944) (cit. alle pp. 14, 18–20).
- [4] D. L. Tweedt, H. A. Schreiber e H. Starcken. «Experimental Investigation of the Performance of a Supersonic Compressor Cascade». In: *Journal of Turbomachinery* 110.4 (ott. 1988), pp. 456–466 (cit. alle pp. 15, 16, 20, 22, 95, 96, 98, 101).
- [5] Levine P. «Two-Dimensional Inflow Conditions for a Supersonic Compressor With Curved Blade». In: *ASME Journal of Applied Mechanics* 24 (1957) (cit. a p. 16).
- [6] J. D. Anderson. *Modern Compressible Flow, with historical perspective*. NY: Mc Graw Hill Education, 2012 (cit. a p. 36).
- [7] R. Arina. *Fondamenti di Aerodinamica*. Torino, IT: LevrottoBella, 2015, pp. 62–70 (cit. alle pp. 36, 38, 40).
- [8] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows, Second edition*. Burlington, MA: B|H Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2007, pp. 89–92 (cit. alle pp. 43–47).

- 
- [9] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000 (cit. a p. 48).
- [10] Spalart P. Allmaras S. «A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows». In: AIAA-92-0439 (1992) (cit. alle pp. 49, 51, 52, 98).
- [11] OpenFOAM. URL: <https://www.openfoam.com/documentation/> (cit. a p. 54).
- [12] A. Kurganov e E. Tadmor. «New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection—Diffusion Equations». In: *Journal of Computational Physics* 160 (2000), pp. 241–282 (cit. alle pp. 60, 61).
- [13] Peter D. Lax. «Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation». In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 7 (feb. 1954) (cit. a p. 60).
- [14] H. Nessyahu e E. Tadmor. «Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws». In: *Journal of Computational Physics* 87.2 (1990), pp. 408–463 (cit. a p. 60).
- [15] C. J. Greenshields, H. G. Weller, L. Gasparini e J. Reese. «Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows». In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 63 (2009), pp. 1–21 (cit. a p. 61).
- [16] A. Kurganov, S. Noelle e G. Petrova. «Semidiscrete Central-Upwind Schemes for Hyperbolic Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations». In: *SIAM J. Sci. Comput.* 23 (2001), pp. 707–740 (cit. a p. 64).
- [17] P. Roe. «CHARACTERISTIC-BASED SCHEMES FOR THE EULER EQUATIONS». In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 18 (1986), pp. 337–365 (cit. a p. 65).
- [18] Bram van Leer. «Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme». In: *Journal of Computational Physics* 14.4 (), pp. 361–370 (cit. a p. 65).

- [19] Christophe Geuzaine e Jean-François Remacle. «Gmsh: A 3-D Finite Element Mesh Generator with built-in Pre- and Post-Processing Facilities». In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.11 (set. 2009), pp. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579 (cit. a p. 67).
- [20] OpenFOAM. URL: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/standard-boundaryconditions.php> (cit. a p. 73).
- [21] E. Benini T. Piovesan A. Magrini. «Accurate 2-D Modelling of Transonic Compressor Cascade Aerodynamics». In: *Aerospace* 6 (2019) (cit. alle pp. 101, 102).