

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Magistrale

**Analisi teoriche, sperimentali e agli
elementi finiti dell'instabilità globale e
locale di elementi polimerici stampati 3D**

Supervisor

Candidato

Prof. Salvatore BRISCHETTO

Salvatore GAMBINO

Dott. Roberto TORRE

Dicembre 2020

“Ogni traguardo superato è l’inizio di una nuova gara”

Ringraziamenti

Qualsiasi traguardo, e in particolar modo uno lungo e impegnativo come una laurea, è sempre raggiunto grazie al contributo di così tante persone che anche solo inserirle in una lista diventa un processo tanto complicato quanto riduttivo. Alcuni ringraziamenti sono però dovuti, e sono rivolti a coloro che più hanno concorso al raggiungimento di questo obiettivo, ciascuno per motivi diversi.

Mi sembra giusto cominciare con le due persone senza le quali questo lavoro non sarebbe stato possibile: il professore Salvatore Brischetto, relatore di questa tesi, per avermi dato la possibilità di portare avanti questo lavoro quando sembrava impossibile; l'ingegnere Roberto Torre, co-relatore e mia guida nel corso di questi mesi, sempre disponibile per un consiglio quanto per un supporto di fronte alle tante difficoltà incontrate, questa tesi non sarebbe stata la stessa senza la sua insostituibile presenza.

Ringrazio la mia famiglia: essere sparsi in giro per il mondo non ci ha mai impedito di rimanere uniti e continueremo ad esserlo sempre, dovunque la vita ci porterà, in qualsiasi situazione ci troveremo. Siete il mio orgoglio e il mio sostegno, la mia guida e i miei modelli, e una buona parte di ciò che sono la devo a tutto quello che mi avete dato. Questo risultato lo dedico a voi. Ringrazio poi nonni, zii, cugini e parenti tutti, inesauribili fonti di affetto e ispirazione.

Un immenso grazie poi ai miei migliori amici, i gruppi di *Casa Frank* e *Falso Nove*: siete la cosa più vicina a dei fratelli che mi sia capitato di trovare nella vita, grazie per le risate, le parole di conforto e di rimprovero, la vostra presenza mi ha aiutato a superare qualsiasi momento di difficoltà incontrato finora.

Una carriera universitaria non può definirsi tale senza i colleghi giusti: io ho avuto la fortuna di incontrare le *Mucche Aerodinamiche*, un gruppo di 18 folli con cui ho condiviso molto più che ore di lezione e di studio e in cui ho trovato più che colleghi, ho trovato amici.

Infine, ci tengo a ringraziare tutte le decine di persone incrociate nel mio lungo percorso all'interno dell'associazione *BEST Torino*: nominarle tutte sarebbe impossibile, tanto quanto provare a spiegare quanto io abbia imparato e sia cresciuto nel corso di questa incredibile esperienza. Grazie a ciascuno di voi ho capito qualcosa di me stesso, ed è questo un dono unico che porterò sempre con me.

Indice

Elenco delle tabelle	IX
Elenco delle figure	XI
I Introduzione a fenomeno, tecniche di produzione e di analisi	1
1 L'Additive Manufacturing	3
1.1 Introduzione	3
1.2 Le tecniche di Additive Manufacturing	4
1.2.1 Vat Photopolymerization	4
1.2.2 Powder Bed Fusion	5
1.2.3 Material Jetting	6
1.2.4 Binder Jetting	7
1.2.5 Sheet Lamination Processes	8
1.2.6 Directed Energy Deposition Processes	9
1.2.7 Fused Deposition Modeling	11
2 L'instabilità a compressione	17
2.1 Introduzione	17
2.2 Il modello di Eulero	18
2.3 Il modello di Eulero tangente	22
2.4 La parabola di Johnson	22
2.5 Il buckling per piastre sottili	23
3 La Digital Image Correlation	28
3.1 Introduzione	28
3.2 Funzionamento dell'algoritmo	29
3.2.1 Misurazione del campo di spostamenti	30
3.2.2 Calcolo delle deformazioni	31

3.3	Problematiche principali	33
3.3.1	Errori dovuti al provino e all'acquisizione delle immagini . .	34
3.3.2	Errori dovuti all'algoritmo	35
II	Analisi di Buckling Locale su provini a T	37
4	Fabbricazione dei provini	38
4.1	Geometria	38
4.2	Parametri di stampa	39
4.3	Analisi statistica	40
5	Test di compressione	53
5.1	Preparazione delle prove	53
5.2	Comportamento generale dei campioni	55
5.3	Analisi DIC	56
5.3.1	Analisi tramite Ncorr 2D	62
5.3.2	Elaborazione dei risultati di Ncorr 2D	63
6	Analisi teorica	72
6.1	Parametri del materiale	72
6.2	Applicazione del modello teorico	74
7	Analisi numerica	78
7.1	Introduzione	78
7.2	Dettagli del modello	79
7.2.1	Geometria	79
7.2.2	Mesh	79
7.2.3	Proprietà del materiale	80
7.2.4	Vincoli e carichi	80
7.2.5	Analisi lineare	82
7.2.6	Analisi non lineare	82
7.3	Risultati	83
8	Conclusioni	86
III	Analisi di Buckling Globale su provini quadrati	89
9	Fabbricazione dei provini	90
9.1	Geometria	90
9.2	Parametri di stampa	91

9.3	Analisi statistica	93
10	Test di compressione	99
10.1	Preparazione delle prove	99
10.2	Comportamento generale dei campioni	101
10.3	Analisi DIC	104
10.3.1	Analisi tramite Ncorr 2D	109
10.3.2	Elaborazione dei risultati di Ncorr 2D	110
11	Analisi teorica	119
11.1	Parametri del materiale	119
11.2	Applicazione dei modelli teorici	122
12	Analisi numerica	126
12.1	Introduzione	126
12.2	Dettagli del modello	126
12.2.1	Geometria	127
12.2.2	Mesh	127
12.2.3	Proprietà meccaniche e geometriche dei provini	127
12.2.4	Vincoli e carichi	129
12.2.5	Analisi lineare	131
12.2.6	Analisi non lineare	131
12.3	Risultati	132
13	Conclusioni	135
	Bibliografia	141

Elenco delle tabelle

1.1	Caratteristiche del PLA	16
1.2	Parametri di stampa consigliati per il PLA	16
2.1	Rapporto tra lunghezza libera di inflessione e lunghezza dell'asta al variare delle condizioni di vincolo	22
4.1	Parametri di stampa	41
4.2	Medie delle t per ogni famiglia, e relative deviazioni standard	45
4.3	Medie delle L per ogni famiglia, e relative deviazioni standard	45
4.4	Medie delle h per ogni famiglia, e relative deviazioni standard	46
4.5	Medie delle a per ogni famiglia, e relative deviazioni standard	46
5.1	Tensioni di buckling per tutti i provini, e le relative tensioni di buckling medie, in MPa	65
6.1	Moduli di Young dei provini a sezione quadrata da 55 mm e del materiale, in MPa	74
6.2	I valori di p , q e n nelle due differenti condizioni di vincolo considerate	75
6.3	Tensioni di buckling per tutte le famiglie di provini in entrambe le condizioni di vincolo considerate, e tensioni medie ricavate dalle analisi sperimentali	76
7.1	Tensioni di buckling, in MPa, per tutte le famiglie di provini nei due casi di vincolo, ottenute tramite analisi numeriche lineari e non lineari, e risultati delle analisi sperimentali	84
8.1	Tensioni di buckling, in MPa, per tutte le famiglie di provini nei due casi di vincolo, ottenute tramite analisi numeriche lineari e non lineari, e risultati delle analisi sperimentali	88
9.1	Parametri di stampa	93
9.2	Misure del provini quadrati	94

10.1	Tensioni di buckling per tutti i provini, e le relative tensioni di buckling medie, in MPa	112
11.1	Moduli di Young dei provini a sezione quadrata da 55 mm e del materiale, in MPa	120
11.2	Tensioni di snervamento dei provini da 25 mm e del materiale, in MPa	120
11.3	Coefficienti del polinomio approssimante il modulo di Eulero tangente	122
11.4	Tensioni di buckling teoriche, calcolate tramite i modelli teorici in condizioni di basi appoggiate, e tensioni di buckling sperimentali, in MPa	123
11.5	Tensioni di buckling teoriche, calcolate tramite i modelli teorici in condizioni di basi incastrate, e tensioni di buckling sperimentali, in MPa	125
12.1	Tensioni di buckling in MPa per tutte le famiglie di provini nei due casi di vincolo, ottenute tramite analisi numeriche lineari e non lineari, e risultati delle analisi sperimentali	133
13.1	Tensioni di buckling calcolate tramite i modelli teorici, in MPa . . .	137
13.2	Tensioni di buckling, in MPa, ottenute dall'analisi numerica	137
13.3	Risultati ottenuti nel corso dell'analisi sperimentale condotta in [10], in MPa	140

Elenco delle figure

1.1	Raffigurazione dei tre differenti approcci per la fotopolimerizzazione in vasca [1]	5
1.2	Configurazione standard per un processo di fusione a letto di polvere [1]	6
1.3	Esempio di configurazione per una macchina AM di tipo Material Jetting [1]	7
1.4	Esempio di configurazione per una macchina AM di tipo Binder Jetting [1]	8
1.5	Esempio di configurazione per una macchina LOM di tipo <i>bond-then-form</i> [1]	9
1.6	Esempio di configurazione per una macchina LOM di tipo <i>form-then-bond</i> [1]	10
1.7	Esempio di configurazione per una macchina DED a laser [1]	10
1.8	Rappresentazione di un classico processo FDM [3]	12
1.9	Le tipologie di riempimento maggiormente utilizzate [4]	14
1.10	Anteprima di stampa di due provini a T: a destra, un esempio di supporto dovuto a un errata orientazione del componente; a sinistra, una possibile soluzione. Notare anche la differenza tra perimetri dello strato e riempimento	14
1.11	I due differenti tipi di supporto: a sinistra a reticolo; a destra, ad albero [5]	15
2.1	Modello asta con molla di torsione	17
2.2	Andamento della deflessione θ al variare del carico adimensionato λ , nei casi di asta perfetta (caso non lineare e linearizzato) e imperfetta. Notare come, per l'asta perfetta, siano presenti più configurazioni di equilibrio al di sopra del punto di biforcazione	19
2.3	Asta semplicemente appoggiata sottoposta a carico di punta P [8]	19
2.4	Rappresentazione grafica della lunghezza libera di inflessione di un'asta [10]	21

2.5	Rappresentazione dell'andamento dei modelli di Eulero e di Johnson al variare della snellezza, e del loro punto di incontro, per un acciaio	23
2.6	Piastra sottile caricata uniassialmente [8]	24
2.7	Andamento del coefficiente di instabilità al variare del rapporto a/b nel caso di lati semplicemente appoggiati [8]	26
2.8	Andamento del coefficiente di instabilità al variare del rapporto a/b per varie condizioni di vincolo [8]	27
3.1	Configurazione standard una prova eseguita tramite DIC [12]	29
3.2	La definizione della ROI su Ncorr 2D: da notare la distribuzione di grigi sul provino, effettuata tramite vernice spray	30
3.3	Esempio di subset, centrato in $P(x_0, y_0)$, nell'immagine di riferimento e in quella corrente [12]	31
3.4	Esempio di analisi realizzata tramite tre seed: notare i confini che delimitano le differenti zone di competenza per ognuno di essi	32
3.5	Schermata di calibrazione degli spostamenti su Ncorr 2D. In questo caso è stata realizzata una struttura apposita per facilitare il processo	32
3.6	Spostamenti scalati a seguito della calibrazione	33
3.7	Schermata di selezione di dimensioni e distanziamento dei subset su Ncorr 2D	35
4.1	Le dimensioni L , a , t , h e b del provino	39
4.2	Posizionamento della famiglia $L = 60$ mm nel programma di slicing <i>Simplify3D</i>	41
4.3	Boxplots della dimensione a al variare di L	42
4.4	Boxplots della dimensione h al variare di L	43
4.5	Boxplots della dimensione t al variare di L	43
4.6	Boxplots della dimensione L per ogni famiglia di provini	44
4.7	Distribuzione della dimensione a tra i provini per $L = 36$ mm	47
4.8	Distribuzione della dimensione h per $L = 36$ mm	47
4.9	Distribuzione della dimensione L per $L = 36$ mm	48
4.10	Distribuzione della dimensione t per $L = 36$ mm	48
4.11	Distribuzione della dimensione a tra i provini per $L = 60$ mm	49
4.12	Distribuzione della dimensione h per $L = 60$ mm	49
4.13	Distribuzione della dimensione L per $L = 60$ mm	50
4.14	Distribuzione della dimensione t per $L = 60$ mm	50
4.15	Distribuzione della dimensione a tra i provini per $L = 84$ mm	51
4.16	Distribuzione della dimensione h per $L = 84$ mm	51
4.17	Distribuzione della dimensione L per $L = 84$ mm	52
4.18	Distribuzione della dimensione t per $L = 84$ mm	52
5.1	Le due parti che compongono la base per le prove di compressione	54

5.2	Base per le prove di compressione	54
5.3	Il provino numero 90-6: un'attenta osservazione dell'immagine di riferimento evidenzia una curvatura verso sinistra	55
5.4	La deformata di un provino	56
5.5	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 36 mm	57
5.6	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 42 mm	57
5.7	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 48 mm	58
5.8	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 54 mm	58
5.9	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 60 mm	59
5.10	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 66 mm	59
5.11	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 72 mm	60
5.12	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 78 mm	60
5.13	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 84 mm	61
5.14	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 90 mm	61
5.15	Interfaccia grafica di Ncorr 2D: notiamo centralmente l'immagine di riferimento, a destra le immagini correnti, a sinistra l'avanzamento dell'analisi e la ROI	62
5.16	Spostamenti u del provino 36-5 per un carico lontano dalla condizione di instabilità	64
5.17	Andamento della tensione media di instabilità al variare della lunghezza L dei provini	66
5.18	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 36 mm	66
5.19	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 42 mm	67
5.20	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 48 mm	67
5.21	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 54 mm	68
5.22	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 60 mm	68
5.23	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 66 mm	69
5.24	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 72 mm	69
5.25	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 78 mm	70
5.26	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 84 mm	70
5.27	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 90 mm	71
6.1	Grafici tensione-deformazione per la famiglia di provini a sezione quadrata da 55 mm	73
6.2	Visualizzazione della piastra analizzata, insieme ai vincoli del modello nel primo caso studiato	74
6.3	Visualizzazione della piastra analizzata, insieme ai vincoli del modello nel secondo caso studiato	75
6.4	Confronto tra i due modelli usati e i risultati dell'analisi DIC	77
7.1	Geometria del modello rappresentante i provini da 36 mm	79

7.2	Curva del materiale utilizzata per l'analisi FEM non lineare	80
7.3	Multi-Point Constraint per un provino semplicemente appoggiato nel caso di analisi lineare	81
7.4	Deformate nei casi di semplice appoggio e incastro per analisi lineare	82
7.5	Deformate nei casi di semplice appoggio lineare e incastro per analisi lineare	83
7.6	Andamento dello spostamento del nodo centrale della semi-onda all'aumentare del carico	83
7.7	Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale e numerica	85
8.1	Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica	88
9.1	Geometria del provino e relative dimensioni	91
9.2	Posizionamento della famiglia $L = 200$ mm nel programma di slicing <i>Simplify3D</i>	92
9.3	Boxplots della dimensione a al variare di L	94
9.4	Boxplots della dimensione L per ogni famiglia di provini	95
9.5	Distribuzione della dimensione a per $L = 25$ mm	96
9.6	Distribuzione della dimensione L per $L = 25$ mm	96
9.7	Distribuzione della dimensione a per $L = 105$ mm	97
9.8	Distribuzione della dimensione L per $L = 105$ mm	97
9.9	Distribuzione della dimensione a per $L = 250$ mm	98
9.10	Distribuzione della dimensione L per $L = 250$ mm	98
10.1	Modello CAD della base utilizzata per le prove di compressione sui provini quadrati	100
10.2	Provino da 25 mm deformatosi secondo una configurazione a doppio barilotto	101
10.3	Provino da 40 mm deformatosi, post-buckling, secondo una configu- razione a doppia semi-onda	102
10.4	Deformata di un provino lungo 150 mm	103
10.5	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 25 mm	103
10.6	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 40 mm	104
10.7	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 55 mm	104
10.8	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 75 mm	105
10.9	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 90 mm	105
10.10	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 105 mm	106
10.11	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 120 mm	106
10.12	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 135 mm	107
10.13	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 150 mm	107
10.14	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 200 mm	108
10.15	Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 250 mm	108

10.16	Posizionamento dei seeds per un provino lungo 150 mm	109
10.17	Grafica che permette di visualizzare eventuali problemi di correlazio- ne dei seeds: notare le informazioni sul processo iterativo, in basso a destra	110
10.18	Tensioni di instabilità ricavate dall'analisi sperimentale, al variare di L	113
10.19	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 40 mm	113
10.20	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 55 mm	114
10.21	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 75 mm	114
10.22	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 90 mm	115
10.23	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 105 mm	115
10.24	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 120 mm	116
10.25	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 135 mm	116
10.26	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 150 mm	117
10.27	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 200 mm	117
10.28	Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 250 mm	118
11.1	Grafici tensione - deformazione medie per i provini da 55 mm, pre e post riduzione del campionamento	121
11.2	Andamento del modulo di Young al variare della tensione applicata	121
11.3	Curve relative ai tre modelli teorici e tensioni di instabilità speri- mentali, nel caso di estremi appoggiati	124
11.4	Curve relative ai tre modelli teorici e tensioni di instabilità speri- mentali, nel caso di estremi incastrati	125
12.1	Geometria di un provino 1D	127
12.2	Curva del materiale utilizzata per l'analisi FEM non lineare	128
12.3	Visualizzazione 3D delle caratteristiche geometriche degli elementi assegnati al modello	128
12.4	Vincoli e carichi nei casi di appoggio e incastro nei modelli finalizzati alle analisi lineari	129
12.5	Vincoli e carichi nei casi di appoggio e incastro nei modelli finalizzati alle analisi non lineari	130
12.6	Spostamento del nodo centrale di un modello rispetto al carico applicato	132
12.7	Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale e numerica	134
13.1	Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di semplice appoggio	138
13.2	Dettaglio del confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di semplice appoggio	138
13.3	Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di incastro	139

13.4	Dettaglio del confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di incastro	139
13.5	Dettaglio del confronto tra i risultati ottenuti in questo lavoro di tesi e quelli relativi ricavati in [10]	140

Parte I

Introduzione a fenomeno, tecniche di produzione e di analisi

Introduzione

Con il progresso tecnologico e lo stravolgimento dell'intero processo produttivo introdotto dall'Industria 4.0, la Stampa 3D ha assunto un ruolo sempre più centrale nella realizzazione di componenti, grazie alla libertà di progettazione che concede, alla relativa semplicità di utilizzo e, con lo sviluppo di stampanti da scrivania, al gran numero di utenti che ne hanno accesso, non più limitato alle aziende del settore. Come ogni processo produttivo tuttavia, presenta vantaggi e svantaggi, e influisce notevolmente sulle caratteristiche del pezzo finale, proprietà che necessitano quindi di studi approfonditi per verificarne l'aderenza ai modelli matematici finora utilizzati.

Nel seguente lavoro è stata studiata, analiticamente, sperimentalmente e numericamente, l'instabilità a compressione di provini in PLA realizzati tramite stampa 3D. Sebbene sia presente in letteratura una gran quantità di ricerche riguardanti il buckling in generale, il comportamento a compressione nei materiali prodotti tramite FDM si dimostra particolarmente interessante e a tratti ancora sconosciuto, non essendo stata ad oggi dimostrata la sua attinenza ai modelli già presenti. Sono state quindi esaminate due diverse declinazioni del fenomeno: nella prima parte la tesi procede con uno studio del buckling locale su provini a T, analizzando l'evoluzione della tensione di instabilità al variare della lunghezza dei provini; nella seconda parte invece, l'attenzione è rivolta all'indagine dell'instabilità globale di provini a sezione quadrata, osservato in un range di lunghezze ampio per testare i campioni sia in campo elastico che in campo plastico.

Le analisi sperimentali sono state effettuate utilizzando i dati raccolti tramite Correlazione Digitale d'Immagine (DIC), una tecnica che permette l'estrapolazione dei campi di spostamento e deformazione a partire da una ripresa della prova; i risultati ottenuti sono stati poi confrontati con quelli derivanti dai modelli teorici di Eulero, Eulero tangente e della formula parabolica di Johnson per quanto riguarda i provini a sezione quadrata, con le formule del buckling per il modello piastra per i campioni a sezione a T. Ai fini di verificarne la capacità di simulare il fenomeno, sono poi state realizzate delle analisi numeriche tramite il modellatore Patran e il solutore per analisi a elementi finiti Nastran, in varie configurazioni di vincolo così da dare conferma ad alcune ipotesi sorte nel corso dei test.

Capitolo 1

L'Additive Manufacturing

Come già brevemente spiegato nell'introduzione, questo lavoro di tesi ha lo scopo di analizzare il comportamento a compressione di provini realizzati in Acido Polilattico (PLA) tramite Fused Deposition Modeling, una tecnologia di produzione classificata tra le tecniche di *Additive Manufacturing*. Questo capitolo ha lo scopo di dare un solido background sui principi base di queste tecnologie, i loro punti di forza e i possibili ambiti di utilizzo.

1.1 Introduzione

L'additive manufacturing è un processo produttivo che, a differenza di quelli tradizionali di tipo sottrattivo, prevede la realizzazione del pezzo finito tramite aggiunta di strati successivi di materiale e non per asportazione di truciolo [1]. Le varie tecniche di additive manufacturing sono molto utilizzate per la realizzazione di prototipi (motivo per cui erano precedentemente raggruppate sotto il nome di *Rapid Prototyping*) grazie alla rapidità con cui possono essere avviate al termine della progettazione, e alla possibilità di realizzare il componente in un'unica lavorazione; recentemente stanno tuttavia trovando sempre maggiore applicazione anche nella produzione a livello industriale. Il campo praticamente illimitato di materiali utilizzabili poi, insieme alla grande versatilità che le contraddistingue, portano queste tecniche ad essere utilizzate in ambiti che vanno dall'aerospaziale all'architettura, dalla calzoleria all'automotive, dal medico all'alimentare.

La realizzazione del componente è costituita da varie fasi: si parte innanzitutto da un modello CAD, realizzato tramite programma dedicato o tramite la scansione 3D di un oggetto reale; questo file viene poi elaborato tramite software appositi (i cosiddetti programmi di *Slicing*) che suddividono il pezzo in "fette" e pianificano l'intera stampa, oltre a rendere possibile la regolazione di tutti i parametri fondamentali del processo stesso; successivamente, l'oggetto viene realizzato ed

eventualmente sottoposto a una fase di rifinitura, variabile in base a materiale, utilizzo finale del componente e tecnica di stampa.

1.2 Le tecniche di Additive Manufacturing

Additive Manufacturing è una definizione nella quale rientra un numero sconfinato di tecniche diverse, che differiscono l'una dall'altra per materiali utilizzati, architetture, tecnologie con cui viene fornito il materiale e metodi di adesione tra i vari strati. Per questo motivo una classificazione non è solo complessa, ma anche tutt'altro che univoca, e a seconda della direzione che le si vuole dare può anche portare a mettere insieme tecniche apparentemente distanti o a separarne altre invece molto simili. In questo lavoro si è deciso di riportare la suddivisione utilizzata nel testo *Additive Manufacturing Technologies* [1], che a sua volta rifinisce l'approccio utilizzato da Stucker e Janaki Ram nel loro *CRC Materials Processing Handbook* [2]. In tal modo, i vari processi saranno raggruppati in base alla loro architettura e ai principi fisici alla base della trasformazione del materiale; le categorie derivanti da questa classificazione sono in tutto sette, brevemente presentate nei prossimi paragrafi.

1.2.1 Vat Photopolymerization

La *Fotopolimerizzazione in vasca* è un processo che fa uso dei cosiddetti *fotopolimeri*, resine liquide che, se sottoposte a radiazioni quali raggi UV, luce visibile, laser, e così via a seconda del materiale, reagiscono solidificandosi [1]. A questa categoria appartiene la Stereolitografia, tecnologia sviluppata negli anni '80 dal fondatore di 3D Systems, Charles Hull, e considerata a tutti gli effetti la prima tecnica di Additive Manufacturing mai creata; questa si differenzia dalle altre del suo genere per l'utilizzo di un laser quale iniziatore della reazione, e per la scala prettamente macroscopica di utilizzo.

Esistono ad oggi tre configurazioni principali per questa categoria, di cui una ancora a uno stato prettamente sperimentale [1]:

- Approccio *vector scan*, in cui un laser scansiona la superficie punto per punto, realizzando il singolo strato. Tipico delle macchine da stereolitografia commerciali;
- Approccio *mask projection*, che prevede l'irradiazione di tutto lo strato allo stesso momento previa modellazione del raggio, effettuata dal cosiddetto *Digital Micromirroring Device*;
- Approccio *two-photon*, nel quale la reazione avviene all'incrocio di due raggi laser o viene avviata da composti fotoiniziatori, attivati in questo caso da un singolo fascio luminoso.

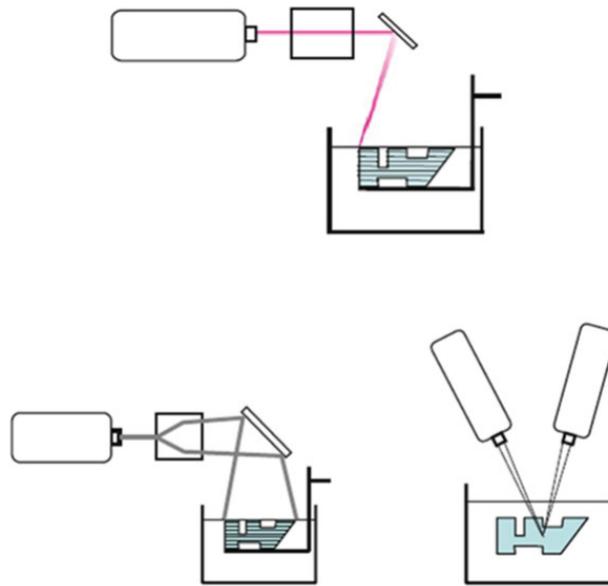


Figura 1.1: Rappresentazione dei tre differenti approcci per la fotopolimerizzazione in vasca [1]

1.2.2 Powder Bed Fusion

Le tecniche di *Fusione a Letto di Polvere* si basano sull'utilizzo di materiale in forma di polvere di varie dimensioni, che si lega allo strato sottostante in seguito a fusione dovuta all'applicazione di una fonte di energia termica [1]. Nel campo aerospaziale viene prevalentemente adoperata su metalli (tramite le tecniche di Selective Laser Sintering ed Electron Beam Melting) ma sono molto impiegati anche ceramici e polimeri.

La configurazione generale di una macchina PBD prevede un piano mobile lungo l'asse verticale sul quale viene distribuito uno strato di polvere tramite un rullo controrotante. Tale strato viene preriscaldato, solitamente per mezzo di raggi infrarossi o da resistori posti all'interno della camera, e successivamente portato allo stato fuso in modo selettivo dalla fonte di calore, per cui la polvere esterna al layer rimane solida e può svolgere la funzione di supporto per eventuali parti sospese. Il processo avviene solitamente in atmosfera inerte (nel caso venga utilizzato un laser come nella Selective Laser Sintering) o nel vuoto (nel caso di fasci di elettroni come nella Electron Beam Melting) così da ridurre al minimo le contaminazioni. La camera viene inoltre tenuta ad alta temperatura in modo da favorire un raffreddamento uniforme nel componente e prevenire il fenomeno del warping.

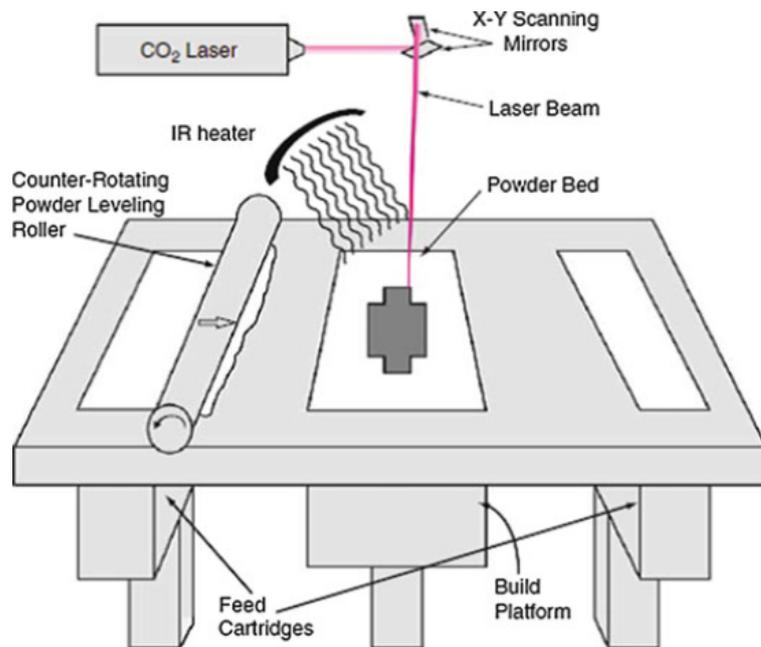


Figura 1.2: Configurazione standard per un processo di fusione a letto di polvere [1]

1.2.3 Material Jetting

Il *Material Jetting* è una tecnica di additive manufacturing sviluppata come diretta evoluzione della classica stampa 2D, della quale viene di fatto ripreso, ed esteso alle tre dimensioni, il funzionamento base [1]. Il materiale viene infatti spruzzato da degli ugelli sotto forma di piccole particelle, e fatto successivamente solidificare tramite apporto di energia, così da formare uno strato compatto. La gamma di materiali utilizzabili è molto ampia e comprende sia polimeri che ceramici che metalli, e a seconda di quello in uso sono possibili due approcci [1]:

- nel primo, il materiale viene preriscaldato a 30-60°C così da favorirne l'espulsione dalla cartuccia di stampa, e in seguito sottoposto a calore o altra fonte di energia (raggi UV, per esempio) per attivarne l'adesione agli strati sottostanti;
- il secondo approccio (usato per metalli e ceramici) prevede l'utilizzo di una sospensione liquida del materiale richiesto, insieme eventualmente a dei leganti. L'alta temperatura del processo porta all'evaporazione del solvente e al compattamento del materiale in sospensione, che sarà dunque l'unico a comporre il pezzo.

Tale tecnica porta con sé numerose difficoltà riguardanti la corretta formazione

delle goccioline e la loro deposizione, caratteristiche che possono cambiare notevolmente anche con una leggera modifica del materiale e che conducono quindi a diversi approcci possibili al problema; inoltre, il Material Jetting necessita della realizzazione di supporti. I vantaggi risiedono tuttavia in una resa estetica notevole, un costo relativamente basso e un'alta velocità di stampa.

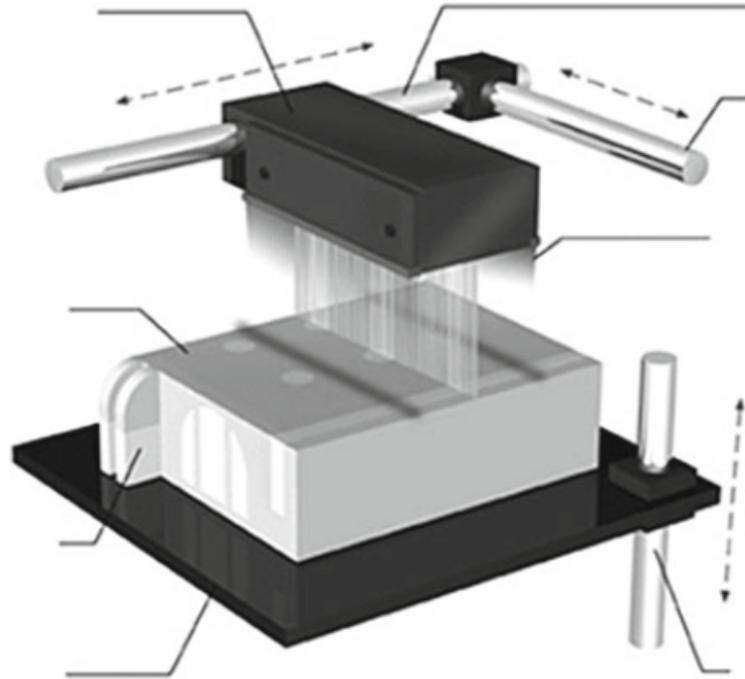


Figura 1.3: Esempio di configurazione per una macchina AM di tipo Material Jetting [1]

1.2.4 Binder Jetting

La tecnica di *Binder Jetting*, sviluppata da ricercatori del MIT nei primi anni '90, consiste nell'utilizzo di alcuni ugelli per spruzzare un legante su di un letto di polvere, dalla cui interazione viene dunque realizzato lo strato [1]. Concettualmente, riprende alcuni elementi del Material Jetting (l'utilizzo di ugelli per spruzzare materiale) ma anche della Powder Bed Fusion (la presenza di un letto di polvere, l'uso di un cilindro controrotante per fornire un nuovo strato di materiale), sebbene se ne differenzi sia per le caratteristiche meccaniche dei componenti finali che per i materiali in uso. Questi comprendono generalmente polveri di polimeri o a di gesso, e talvolta anche metalli, mentre i leganti sono, nelle soluzioni più economiche, a base acquosa. Ciò comporta una finitura superficiale scarsa e una densità del pezzo realizzato molto minore rispetto a quella ottenuta con altre tecniche, motivo per

cui il binder jetting viene solitamente usato per ottenere prototipi visivi e solo raramente funzionali, previa comunque infiltrazione di resine leganti o, in caso di metalli, di sinterizzazione [1]. I vantaggi risiedono tuttavia nella facile scalabilità del processo oltre che nella velocità dovuta al poco materiale da apportare; inoltre, il "binder" può anche essere semplice vernice, caratteristiche che aumentano la flessibilità della lavorazione da un punto di vista di realizzazione estetica.

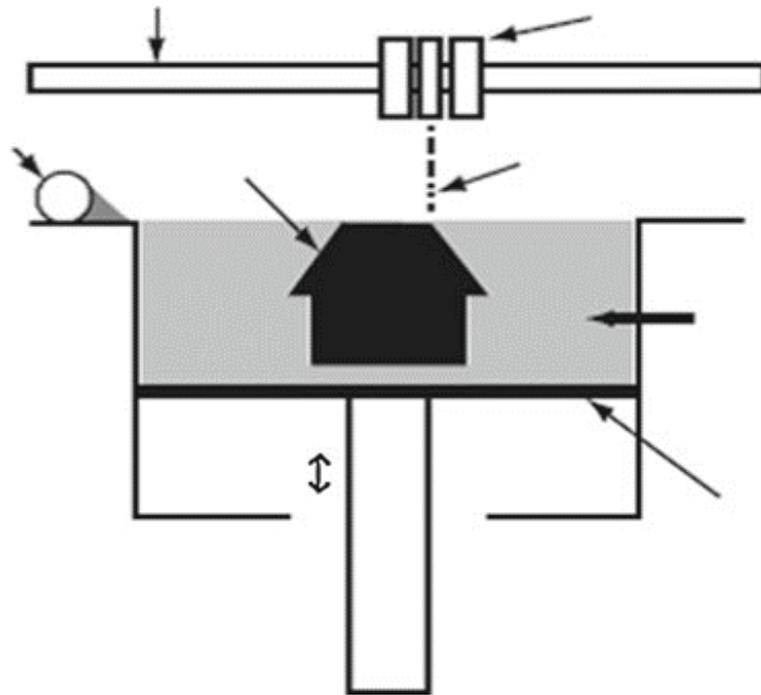


Figura 1.4: Esempio di configurazione per una macchina AM di tipo Binder Jetting [1]

1.2.5 Sheet Lamination Processes

Con *Sheet Lamination Processes* si intende l'insieme di tecniche di AM nella quale il materiale (polimero, ceramico, metallico o anche composito) è apportato sotto forma di fogli [1]. La prima lavorazione sviluppata, oltre che fra le prime nel campo dell'additive manufacturing, è la *Laminated Object Manufacturing*, in cui i contorni esterni dello strato sono tagliati tramite laser mentre il materiale in eccesso viene ridotto in quadrati e utilizzato come supporto, per poi essere rimosso al termine della lavorazione. L'adesione tra gli strati può essere effettuata tramite adesivo, applicato su tutto lo strato o selettivamente, apporto di calore, serraggio degli strati o anche saldatura a ultrasuoni. Gli approcci costruttivi possibili sono due [1]:

- *Bond-then-form*: prevede l'adesione del foglio di materiale al substrato e successivamente il taglio. Comporta un rischio di danneggiamento dovuto all'estrazione del materiale in eccesso, oltre alla necessità di un controllo accurato della profondità di recisione per evitare problemi agli strati sottostanti;

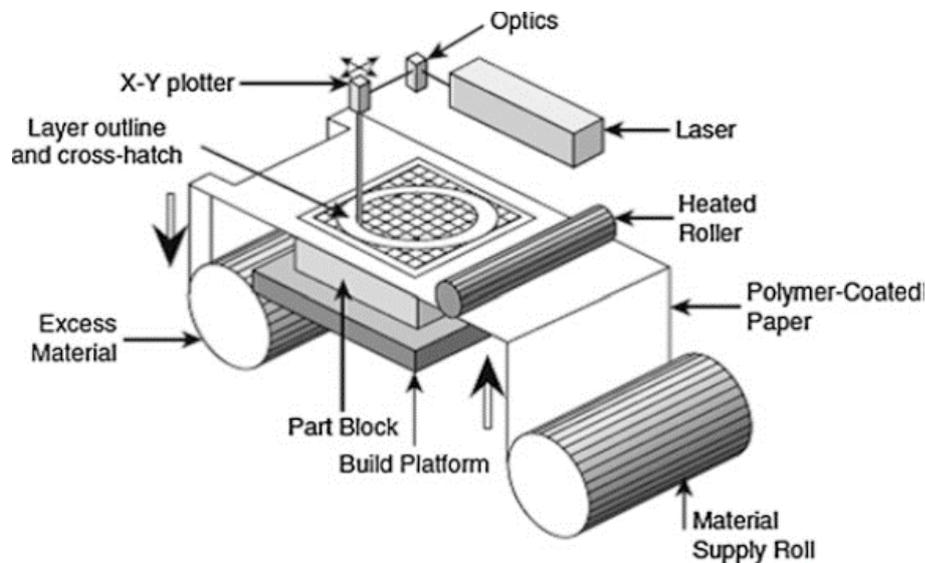


Figura 1.5: Esempio di configurazione per una macchina LOM di tipo *bond-then-form* [1]

- *Form-then-bond*: lo strato viene prima tagliato e poi fatto aderire al substrato. Tale approccio è ancora prevalentemente a un livello sperimentale, ed è usato soprattutto con ceramiche e metalli uniti termicamente. Non avendo materiale in eccesso facilita la realizzazione di parti con cavità interne, specialmente piccole, ma necessita di supporti e di un accurato sistema di allineamento degli strati.

1.2.6 Directed Energy Deposition Processes

La *Directed Energy Deposition* è una particolare tecnica che prevede la fusione del materiale mentre viene depositato [1]: generalmente, un ugello spruzza una polvere (polimerica, ceramica o, più frequentemente, metallica) sul substrato precedentemente liquefatto da una fonte di calore puntiforme (laser, fascio di elettroni o altre); questa crea al passaggio una pozza sulla quale si deposita la polvere e che, fondendo nuovamente una parte del materiale già solidificato, permette l'adesione tra le tracce adiacenti. Il raffreddamento è generalmente molto

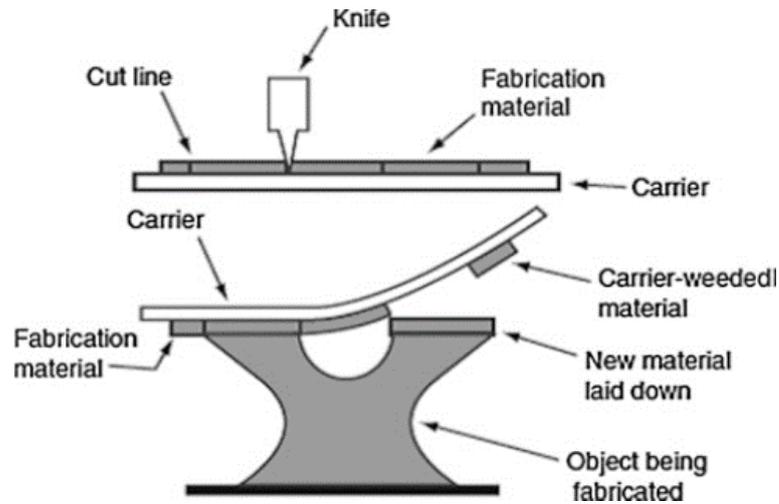


Figura 1.6: Esempio di configurazione per una macchina LOM di tipo *form-then-bond* [1]

veloce ($10^3 - 10^5$ °C/s [1]) e dipende dalle velocità di eiezione della polvere e di movimento dell'ugello, modulabili per ottimizzare in particolare la struttura cristallina e con la possibilità di raggiungere risultati paragonabili a quelli della Powder Bed Fusion. La tecnica largamente più utilizzata in questa categoria è la Laser Engineered Net Shaping (LENS).

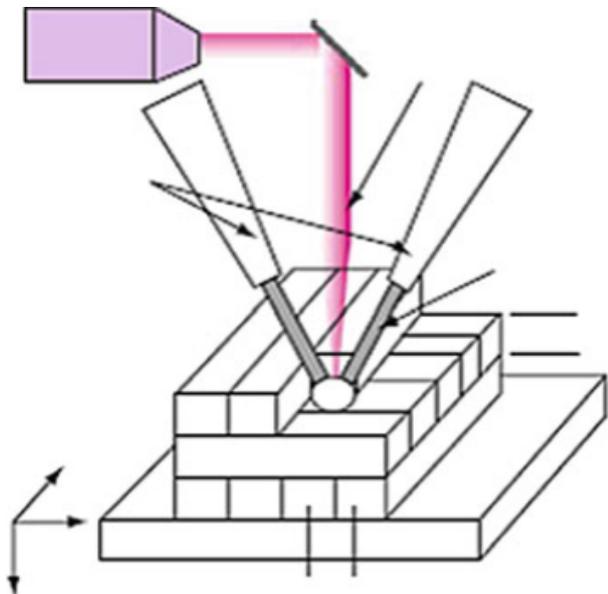


Figura 1.7: Esempio di configurazione per una macchina DED a laser [1]

1.2.7 Fused Deposition Modeling

La *Fused Deposition Modeling* è di gran lunga la tecnica di Additive Manufacturing più utilizzata, essendo la tecnologia sulla cui poggia la maggior parte delle stampanti 3D da scrivania. È stata sviluppata da Stratasys, e si basa sul riscaldamento fino a uno stato semi-solido del materiale, generalmente polimerico, e sulla sua deposizione sul substrato tramite pressione [1]-[3]. La sua relativa velocità e il suo basso costo la rendono utilizzabile per una gran varietà di applicazioni, sebbene porti con sé problematiche quali una bassa finitura superficiale e la necessità di creazione di supporti per alcuni modelli.

Una tipica stampante FDM da scrivania è composta da una camera di dimensioni intorno a 200x200x200 mm [3], sulla quale è presente un piano mobile lungo l'asse z che prende il nome di *piano di stampa*, generalmente in vetro. Al di sopra di questa superficie si muove la cosiddetta *hot-end*, un sistema mobile nel piano x-y composto da una camera chiusa riscaldata, nella quale viene spinto e liquefatto il materiale, e uno o più estrusori metallici di forma conica e diametro di estrusione solitamente compreso tra 0.25 e 1 mm. La camera è rifornita di materiale, sotto forma di filamento, tramite una ruota dentata che può essere integrata nella hot-end o posta più a monte. In generale, il filo fonde nella camera riscaldata, viene spinto attraverso l'ugello e depositato sul substrato, al quale aderisce raffreddandosi, mentre il contatto tra i filamenti estrusi garantisce delle buone caratteristiche meccaniche internamente al singolo layer. Questo è quindi generato dal movimento sul piano della hot-end e, ogni volta che il processo viene concluso, il piano di stampa si abbassa di una quantità pari all'altezza di uno strato, e il tutto si ripete fino alla realizzazione dell'oggetto.

Per avere un buon risultato è evidente svolga un ruolo molto importante l'adesione tra gli strati, come detto dovuta dal raffreddamento, ma è da sottolineare la centralità del legame tra il primo strato e il piano di stampa [3]. Ad oggi i materiali utilizzati per i piani di stampa non garantiscono adesione senza che siano trattati prima dell'inizio del processo, e devono perciò essere ricoperti di colla per evitare fenomeni quali lo scorrimento del componente durante o, nei casi peggiori, il fallimento della lavorazione stessa. La colla più utilizzata nelle macchine da scrivania è ad oggi la comune lacca per capelli. Una cattiva adesione potrebbe essere causata anche da una errata calibrazione del piano, che se posto troppo distante dall'estrusore impedisce un corretto contatto tra superficie e filamento estruso.

Parametri principali

Le caratteristiche della stampa sono determinate da una serie di parametri, la cui regolazione costituisce la principale sfida da affrontare durante il primo approccio a questa tecnica. Ognuno di questi influenza infatti notevolmente sia la durata

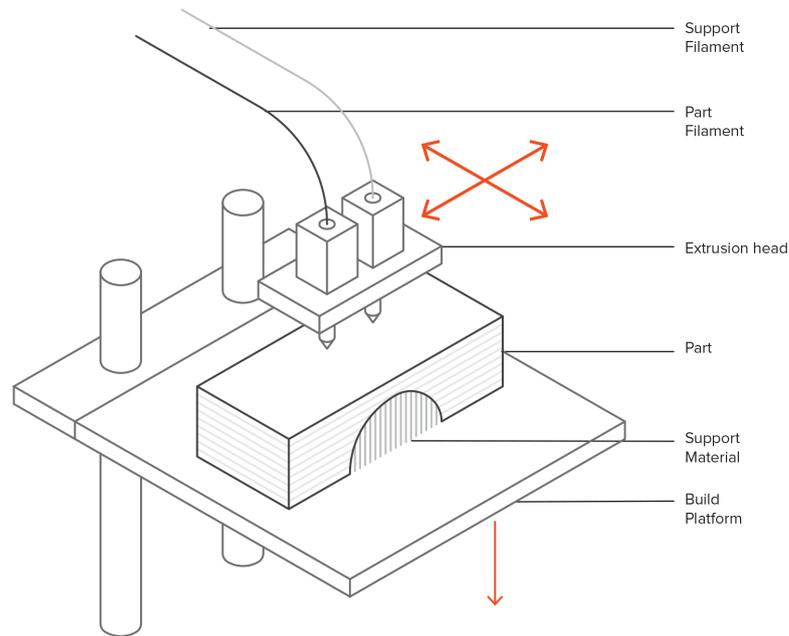


Figura 1.8: Rappresentazione di un classico processo FDM [3]

del processo che la qualità della stampa, tra cui deve chiaramente ricercarsi una condizione di ottimo a seconda della finalità del componente. I più importanti sono riportati di seguito [1]-[3]:

- *Temperatura:* dipende dal materiale e deve essere impostata in modo da avere una buona fluidità del filamento. Anche la temperatura del piano di stampa può, generalmente, essere regolata per migliorare l'adesione del primo strato e limitare problemi derivanti da un gradiente di raffreddamento troppo elevato. Per il PLA, il materiale utilizzato in questo lavoro, i valori consigliati sono riportati in tabella 1.2;
- *Altezza dello strato:* influisce sulla finitura superficiale del componente e sulla velocità del processo (maggiore sarà l'altezza dello strato, minore sarà il tempo di stampa ma la finitura sarà più scarsa). Deve necessariamente essere minore del diametro dell'ugello per permettere una corretta adesione tra gli strati;
- *Bead width:* è la larghezza del filamento estruso e da essa dipende dunque il numero di passaggi da effettuare su un singolo strato. È generalmente simile al diametro dell'ugello;

- *Velocità di stampa*: una maggiore velocità comporta una maggior presenza di difetti, pur riducendo il tempo necessario al processo. La velocità di stampa consigliata per il PLA è riportata in tabella 1.2;
- *Extrusion parameter*: indica la necessità di stampare più o meno materiale, a seconda che il filamento fornito abbia un diametro inferiore o superiore a quello impostato. Deve essere ricavato a partire dai risultati di stampe di prova, così da trovare un ottimo ed evitare sovra estrusioni o vuoti;
- *Perimetri*: indica il numero di perimetri esterni da realizzare nel singolo strato. Soprattutto per componenti con riempimenti inferiori al 100%, un loro aumento comporta un rafforzamento del pezzo senza avere un consistente aumento di materiale utilizzato, ma allo stesso tempo porta anche a un allungamento dei tempi di stampa [4];
- *Riempimento*: con riempimento si indica la densità nello strato e la forma delle celle in caso di sezione non piena; un riempimento più basso comporta delle caratteristiche meccaniche inferiori, mentre la forma ne influenza rigidità ed eventuali direzioni preferenziali di carico. Deve ovviamente essere adattato all'utilizzo finale, per cui componenti sottoposti a sforzi o da forare avranno bisogno di riempimenti più elevati e resistenti, mentre altri a scopo esclusivamente estetico potranno essere stampati con riempimenti più bassi e rapidi da realizzare. Le tipologie più comuni di infill sono le seguenti [4]:
 - Rettangolare: resistente in tutte le direzioni e abbastanza rapido da stampare, conferisce una pseudo-isotropia al componente;
 - Triangolare o diagonale: usato quando è necessaria una maggiore resistenza in alcune direzioni specifiche, richiede una maggiore durata al processo;
 - Wiggle: permette una semplice compressione del componente, è usato soprattutto con materiali morbidi;
 - Nido d'api: molto usato, è veloce da stampare e molto resistente in tutte le direzioni.
- *Raster angle*: rappresenta l'angolo tra il filamento estruso e uno degli assi, nel sistema di riferimento dello strato. Conferisce al layer una maggiore resistenza in quella direzione, e viene per questo spesso variato di strato in strato per conferire caratteristiche pseudo-isotrope al componente. Valori comuni sono $0^\circ/90^\circ$ e $-45^\circ/+45^\circ$.

Sebbene non rientri tra i parametri da impostare nella macchina, fondamentale è poi l'orientazione del pezzo, sia perché da essa può dipendere la necessità di realizzare o meno dei supporti, sia per la sua notevole influenza sulle caratteristiche meccaniche del componente finale, dovuta a legami più deboli all'interfaccia tra gli strati rispetto a quelli interni a un layer singolo.

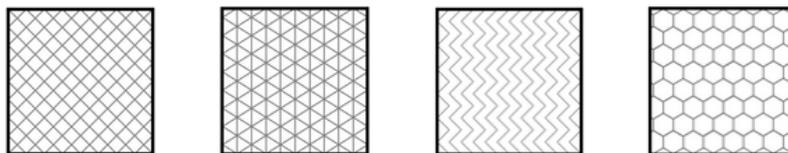


Figura 1.9: Le tipologie di riempimento maggiormente utilizzate [4]

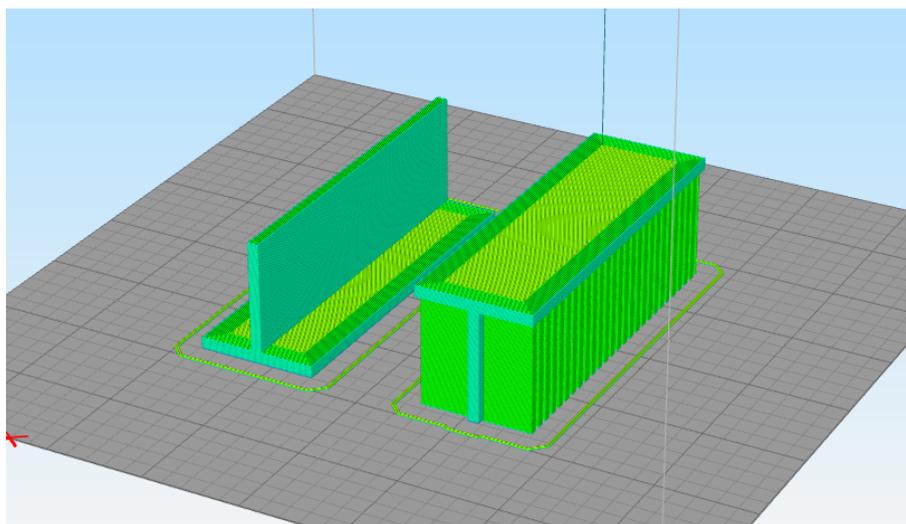


Figura 1.10: Anteprima di stampa di due provini a T: a destra, un esempio di supporto dovuto a un'errata orientazione del componente; a sinistra, una possibile soluzione. Notare anche la differenza tra perimetri dello strato e riempimento

Supporti

Poiché l'Additive Manufacturing si basa sulla costruzione del componente aggiungendo materiale sullo strato precedente, a seconda della tecnologia e della complessità del pezzo potrebbero essere necessarie delle strutture di supporto per sostenere il layer, che se lasciato sospeso porta a difetti del manufatto. Per particolari geometrie, una accurata riflessione va fatta sull'impatto che potrebbero avere i supporti sulla finitura superficiale, sulla effettiva possibilità di essere rimossi e su eventuali altre configurazioni che potrebbero evitarne la realizzazione, quasi sempre problematica.

Per quanto riguarda l'FDM, generalmente sono necessari dei sostegni quando la sporgenza ha un angolo, rispetto alla verticale, maggiore di 45° [5]. Questa regola generale ha una eccezione nel cosiddetto *bridging*, un effetto per il quale il filamento estruso riesce a superare piccole sporgenze (fino a 5 mm circa) senza curvare sotto il suo peso.

I supporti utilizzati sono essenzialmente di due tipi:

- *a reticolo*, il più comune ed è il più adatto alla maggior parte delle stampe FDM;
- *ad albero*, meno popolare e più complesso, garantisce tuttavia una migliore finitura della superficie grazie alla minore superficie di contatto.

I supporti inoltre, possono essere realizzati nello stesso materiale del componente oppure, nel caso la stampante presenti un doppio estrusore, in un materiale diverso, eventualmente anche dissolvibile.



Figura 1.11: I due differenti tipi di supporto: a sinistra a reticolo; a destra, ad albero [5]

Per quanto la realizzazione di supporti aumenti a dismisura le possibilità del processo, porta anche a notevoli complicazioni: innanzitutto, la loro creazione necessita inevitabilmente di una post-produzione, oltre a comportare un peggioramento della finitura superficiale; a seconda della geometria inoltre, non è scontato che il supporto sia rimovibile con semplicità e senza danneggiare il componente, o che sia rimovibile in generale; necessita poi di materiale aggiuntivo, con conseguente aumento dei costi di produzione. Per questo, una strategia spesso utilizzata è la stampa di diverse parti del pezzo in più processi, così da risparmiare materiale e tempo.

Materiali

La FDM è utilizzata esclusivamente per materiali polimerici, e in particolare polimeri termoplastici quali ABS (Acido-Nitrile-Stirene), PLA (Acido Polilattico) e PC (Poli-Carbonato). La caratteristica principale di questi materiali è la mancanza di un punto preciso di liquefazione, che li porta a passare gradualmente dallo stato

solido allo stato fuso; in questo modo si può agevolmente regolarne la viscosità tramite la temperatura, facendo sì che siano facilmente estrudibili ma allo stesso tempo abbastanza viscosi da non perdere la forma voluta una volta depositati.

Il materiale per noi di maggiore interesse, in quanto utilizzato per la realizzazione dei campioni, è il PLA: questo è un poliestere termoplastico la cui formula è $(C_3H_4O_2)_n$, ottenuto a partire dalla condensazione dell'acido lattico [6], a sua volta derivante dalla fermentazione dell'amido di varie piante, dal mais alla canna da zucchero alla yuca. È una plastica biodegradabile che sta trovando sempre maggiore applicazione tra gli imballaggi e come materiale per stoviglie monouso, grazie anche alla sua completa riciclabilità (senza degradazione di caratteristiche) e compostabilità. Soprattutto esso è il materiale più usato nella FDM, poiché possiede un buon mix di resistenza, qualità visiva, adesione tra gli strati e facilità di stampa. Le caratteristiche principali del materiale, tratte da [7], sono riportate in tabella 1.1, mentre i parametri di stampa consigliati sono riportati in tabella 1.2.

Proprietà	Unità di misura	Valore
Densità	g/cm^3	1.21-1.25
Temperatura di transizione vetrosa	°C	45-60
Temperatura di fusione	°C	190-250
Modulo di elasticità a trazione	GPa	0.35-3.5
Resistenza a trazione	MPa	21-60
Allungamento percentuale a rottura	%	2.5-6
Coefficiente di Poisson	/	0.36

Tabella 1.1: Caratteristiche del PLA

Proprietà	Unità di misura	Valore
Temperatura di estrusione	°C	170-210
Velocità di estrusione	mm/s	40-120
Temperatura del piano di stampa	°C	0-50

Tabella 1.2: Parametri di stampa consigliati per il PLA

Capitolo 2

L'instabilità a compressione

Dopo aver presentato le caratteristiche principali delle tecnologie produttive utilizzate per questo lavoro di tesi, è adesso il momento di spiegare nel dettaglio il fenomeno oggetto di studio: l'instabilità a compressione.

2.1 Introduzione

Il buckling (o instabilità a compressione) è un fenomeno per il quale una struttura, sottoposta a un carico di compressione, cambia repentinamente forma una volta superata una certa tensione dipendente da caratteristiche geometriche, materiale e vincoli presenti [8]. È un fenomeno da tenere in grande considerazione in fase progettuale, in quanto potenzialmente distruttivo anche a sforzi inferiori alla tensione di rottura, a causa delle grandi deformazioni trasversali che provoca. Esso può essere *globale*, nel caso interessi la struttura nel suo complesso, oppure *locale*, se si instaura solo in una parte del componente come può avvenire ad esempio nel caso di travi in parete sottile.

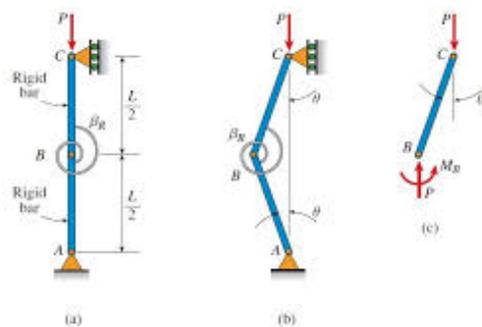


Figura 2.1: Modello asta con molla di torsione

Per capire meglio il fenomeno, consideriamo il caso ideale 1D: asta senza imperfezioni di lunghezza L , semplicemente appoggiata agli estremi, sottoposta a carico perfettamente assiale P ; la struttura è modellizzata tramite due aste di lunghezza $L/2$ collegate da una molla a torsione di rigidezza K_t . Valutando l'andamento dell'angolo θ , visualizzabile in figura 2.1, rispetto al carico adimensionato λ

$$\lambda = \frac{PL}{2K_t} \quad (2.1)$$

si nota che il grafico (figura 2.2) si divide in due zone ben distinte, separate dal cosiddetto *carico critico*: al di sotto di tale valore, la condizione di minimo energetico corrisponde alla deformata a freccia nulla, che è dunque di equilibrio stabile; applicando una forza superiore invece, essa diventa di equilibrio instabile, per cui una qualsiasi perturbazione la porta a deformarsi secondo la nuova condizione di minimo dell'energia potenziale totale, a freccia maggiore di zero. Ciò implica che al di sotto di tale carico l'asta si manterrà rettilinea, mentre al di sopra del valore di λ_{crit} una minima perturbazione la farà inflettere, tanto di più quanto maggiore sarà il carico. Il carico critico è anche detto *di biforcazione*, in quanto nel suo intorno esistono più configurazioni di equilibrio, e rappresenta una condizione di equilibrio indifferente. Il caso reale presenta chiaramente uno scostamento dall'idealità causato dalla presenza di imperfezioni (qui modellizzabili attraverso una deflessione iniziale θ_0) che provoca un passaggio graduale tra le due configurazioni. Nelle prossime sezioni verranno presentati alcuni modelli teorici utilizzabili per ricavare il carico di buckling in vari casi, i primi tre applicabili alle aste, l'ultimo alle piastre compresse.

2.2 Il modello di Eulero

Il modello di Eulero è uno dei più utilizzati per lo studio dell'instabilità a compressione di aste snelle, nonostante sia stato sviluppato più di duecento anni fa, grazie alla buona accuratezza che riesce ad avere sotto certe ipotesi. Nello specifico studieremo un'asta rettilinea e senza imperfezioni, semplicemente appoggiata, sottoposta a carico assiale all'interno dell'ambito di validità della legge di Hooke (relazione lineare tra tensione e deformazione): ci concentreremo sulla ricerca del carico P superato il quale, applicando una perturbazione al sistema, la reazione della struttura non riesce a contrastare il momento flettente generatosi, portando dunque all'esistenza di una condizione di equilibrio diversa da quella rettilinea.

Consideriamo l'asta inflessa come in figura: essa è sottoposta al momento flettente dovuto al carico applicato P^* (maggiore o uguale al carico di buckling P_{crit}) e al momento di reazione della struttura, per cui l'equazione di equilibrio sarà, secondo [9]:

$$P^*v + EIv'' = 0 \quad (2.2)$$

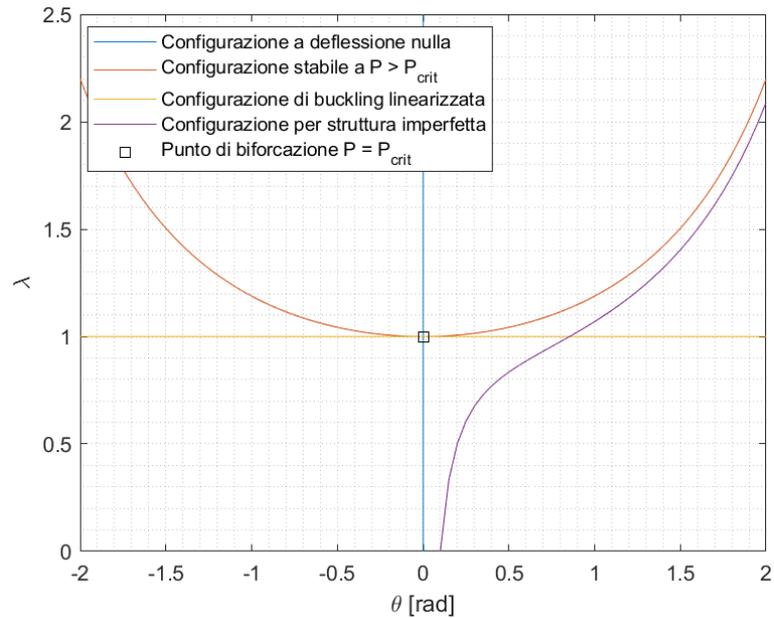


Figura 2.2: Andamento della deflessione θ al variare del carico adimensionato λ , nei casi di asta perfetta (caso non lineare e linearizzato) e imperfetta. Notare come, per l'asta perfetta, siano presenti più configurazioni di equilibrio al di sopra del punto di biforcazione

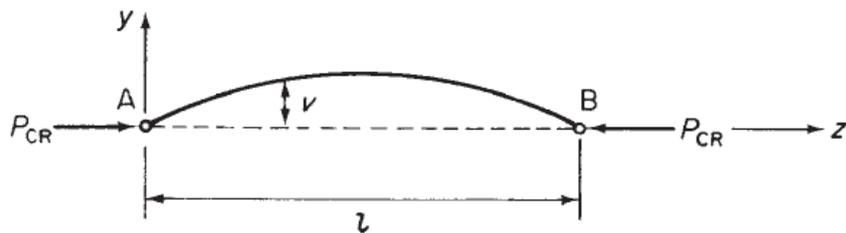


Figura 2.3: Asta semplicemente appoggiata sottoposta a carico di punta P [8]

dove v è la freccia, v'' la sua derivata seconda lungo la direzione assiale dell'asta, E è il modulo di Young del materiale, I è il momento d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse perpendicolare al piano di inflessione. Introducendo il parametro

$$\omega^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.3)$$

si ottiene l'equazione agli autovalori del problema:

$$v'' + \omega^2 v = 0 \quad (2.4)$$

la cui soluzione è nella forma:

$$v = A \sin(\omega z) + B \cos(\omega z) \quad (2.5)$$

Introducendo poi le condizioni al contorno ($v = 0$ per $z = 0, L$), otteniamo

$$B = 0 \vee A \sin(\omega L) = 0 \quad (2.6)$$

Escludendo per ovvi motivi la soluzione banale $A = 0$, avremo dunque $v = 0$ quando il carico applicato P^* sarà tale per cui

$$\omega L = n\pi \quad (2.7)$$

dove n rappresenta il numero di semi-onde della deformata. Notiamo come esistano infinite configurazioni di buckling, sebbene quelle per $n > 1$ siano visualizzabili solo bloccando la freccia in punti appositi lungo l'asse dell'asta, detti *odi* [9]. Il carico di nostro interesse è chiaramente il minimo, ottenibile per $n = 1$:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.8)$$

P_{crit} è il cosiddetto *carico critico euleriano*.

Come già detto, tale modello ha validità esclusivamente in campo elastico, per tensioni cioè al di sotto della tensione di proporzionalità del materiale. Introduciamo allora la tensione critica dividendo l'equazione 2.8 per la sezione dell'asta:

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \quad (2.9)$$

Introducendo il raggio d'inerzia

$$\rho^2 = \frac{I}{A} \quad (2.10)$$

otteniamo allora [9]

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{L^2/\rho^2} \quad (2.11)$$

Il rapporto L/ρ prende il nome di *snellezza* λ dell'asta, e da essa dipende l'insorgenza o meno del buckling in campo elastico. Poiché si deve avere $\sigma_{crit} < \sigma_p$, sostituendo quest'ultima nella formula della tensione critica si ottiene la snellezza limite di validità del modello [8]

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (2.12)$$

Una snellezza superiore a quella limite garantisce instabilità in campo elastico e l'asta si dirà *snella*, viceversa sarà in campo plastico, l'asta sarà *tozza* e sarà

necessario cambiare modello. Infine, è importante sottolineare che la formula di Eulero risulta valida, con alcune modifiche, anche per condizioni al contorno differenti da quelle qui presentate, per le quali la formula del carico critico euleriano sarà:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (2.13)$$

dove L_e è la *lunghezza libera di inflessione*: data un'asta lunga L e sottoposta a condizioni di vincolo qualsiasi, questa è la lunghezza che avrebbe un'asta appoggiata agli estremi che presenti lo stesso carico critico della struttura in esame [8]. In tabella 2.1 sono riportati i valori del rapporto L_e/L per alcune condizioni di vincolo.

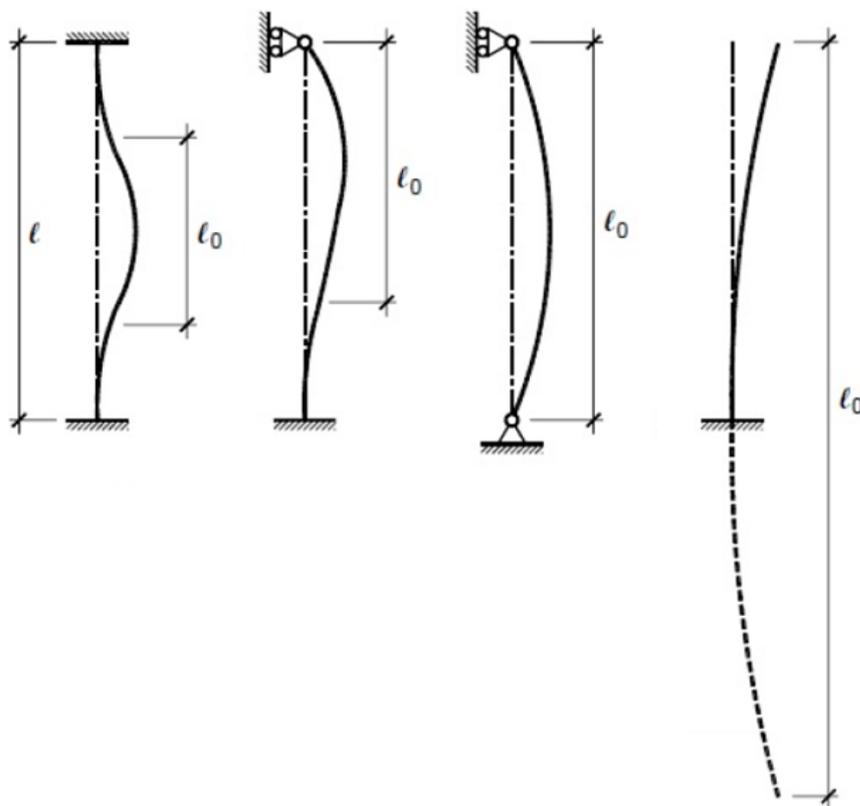


Figura 2.4: Rappresentazione grafica della lunghezza libera di inflessione di un'asta [10]

Vincoli	L_e/L
Cerniera - Carrello	1
Incastro - Incastro	0.5
Incastro - Carrello	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Incastro - Estremo libero	$\frac{2}{2}$

Tabella 2.1: Rapporto tra lunghezza libera di inflessione e lunghezza dell'asta al variare delle condizioni di vincolo

2.3 Il modello di Eulero tangente

Nel caso si abbia a che fare con aste tozze, come già precedentemente enunciato, il modello di Eulero perde di validità e non è più possibile utilizzarlo per ricavare carico e tensione di buckling. Una delle opzioni possibili in questi casi è applicare il modello di Eulero tangente, sostituendo al modulo di Young del materiale la tangente locale al grafico tensione - deformazione (corrispondente tra l'altro al modulo di Young elastico per $\sigma < \sigma_p$). Le formule 2.8 e 2.11 diventano allora [9]

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E_t I}{L_e^2} \quad (2.14)$$

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E_t}{L_e^2 / \rho^2} \quad (2.15)$$

2.4 La parabola di Johnson

Data la complessità del problema, sono state ricavate numerose formule empiriche a partire da osservazioni sperimentali. Una delle più famose è la formula parabolica di Johnson, che fa dipendere la tensione di buckling, oltre da modulo di Young e snellezza dell'asta, anche dalla tensione di snervamento del materiale σ_s [10]:

$$\sigma_{crit} = \sigma_s - \frac{\sigma_s^2 \lambda^2}{4\pi^2 E} \quad (2.16)$$

È importante sottolineare che, mentre il modello di Eulero rappresenta il legame tra tensione e snellezza come una iperbole, la formula di Johnson è invece una parabola, che incontra l'iperbole già citata a una snellezza detta di transizione, pari a

$$\lambda_{trans} = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_s}} \quad (2.17)$$

alla quale si ha $\sigma_{crit} = \sigma_p/2$.

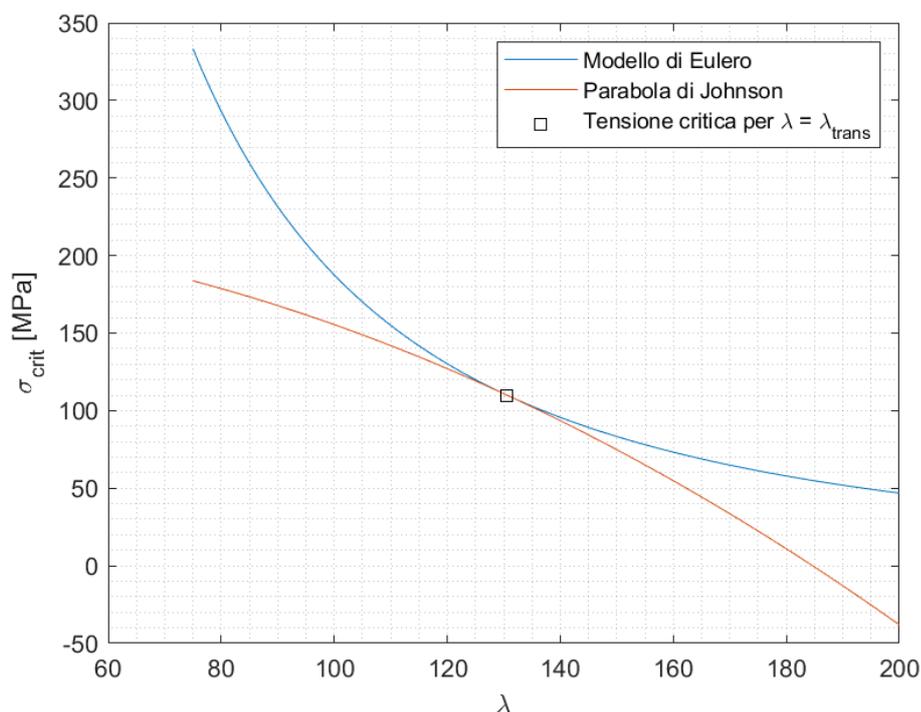


Figura 2.5: Rappresentazione dell'andamento dei modelli di Eulero e di Johnson al variare della snellezza, e del loro punto di incontro, per un acciaio

2.5 Il buckling per piastre sottili

La stabilità delle piastre è un tema di particolare rilevanza in campo aerospaziale dato il largo utilizzo che si fa di questa tipologia di strutture, che rappresentano anche un modello applicabile per le flange e le anime di provini in parete sottile, permettendo di descriverne il comportamento.

Il modello presentato di seguito ha molte affinità con il modello di Eulero: considereremo una piastra monostrato di lati a e b , soggetta a compressione uniassiale in direzione x e composta di materiale omogeneo e isotropo; supponiamo inoltre di trovarci nell'ambito di validità della legge di Hooke (linearità tra tensione e deformazione) e che gli spostamenti siano piccoli rispetto allo spessore della piastra.

Nel caso in cui essa sia semplicemente appoggiata sui lati caricati e libera su quelli scarichi, si può dimostrare [8] che il carico di buckling è analogo a quello critico euleriano per le aste:

$$P_{crit} = \frac{m^2 \pi^2 E^* I}{L^2} \quad (2.18)$$

m rappresenta qui è il numero di semi-onde lungo la direzione di applicazione del carico, mentre E^* è

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2.19)$$

dove ν è il coefficiente di Poisson del materiale.

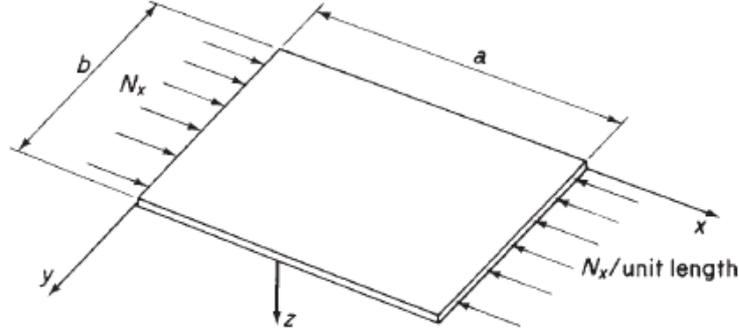


Figura 2.6: Piastra sottile caricata uniaxialmente [8]

Un caso più generale è quello rappresentato da una piastra, sempre caricata assialmente lungo l'asse x , semplicemente appoggiata su tutti e quattro i lati. Per il calcolo dell'equazione di equilibrio imponiamo la stazionarietà dell'energia potenziale totale, la quale per il sistema in esame è data, secondo [8], da

$$\begin{aligned} \Phi_{tot} = U + V = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ & - 2D(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

dove U è l'energia di deformazione mentre V è il lavoro dei carichi esterni, D rappresenta la rigidezza a flessione della piastra, N_x il carico lungo la direzione x diviso per il lato b . Lo spostamento w può, in questo caso, essere rappresentato tramite una serie trigonometrica infinita:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.21)$$

dove m rappresenta il numero di semi-onde lungo x , n quelle lungo y . Sostituendo w nell'equazione dell'energia potenziale totale e integrando, si ottiene [8]

$$\Phi_{tot} = U + V = \frac{\pi^4 ab D}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 m^2 \quad (2.22)$$

Differenziando poi rispetto ai coefficienti incogniti A_{mn} ed eguagliando a zero si trova l'equazione di equilibrio stabile nella configurazione ingobbata, dalla quale possiamo dunque estrapolare, escludendo la soluzione banale, il carico critico $N_{x,crit}$

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial A_{mn}} = \frac{\pi^4 abD}{4} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{4a} N_{x,crit} m^2 A_{mn} = 0 \quad (2.23)$$

$$N_{x,crit} = \pi^2 a^2 D \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.24)$$

Chiaramente il valore minimo si avrà per $n = 1$, mentre sostituendo $n = 0$ si ritorna al caso di lati scarichi non vincolati, già visto in precedenza. Sostituendo a D la sua espressione

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu)} \quad (2.25)$$

e riorganizzando i termini di $N_{x,crit}$ si ottiene infine

$$N_{x,crit} = k \frac{\pi^2 Et^3}{12b^2(1 - \nu^2)} \quad (2.26)$$

nella quale k è il *coefficiente di instabilità* minimo a un dato valore di a/b :

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (2.27)$$

Per uno specifico rapporto a/b esistono infiniti possibili valori di k , tra i quali si può ricavare il minimo semplicemente derivando il coefficiente di instabilità rispetto a tale termine. Graficamente, l'andamento di k è quello della figura 2.7. Notiamo come l'andamento sia "ondulatorio": ciò è dovuto alla dipendenza di k dal numero di semi-onde lungo la direzione di applicazione del carico, dipendenza che a m costante è di tipo parabolico. Ciò porta la configurazione post-buckling a cambiare in base alle dimensioni della struttura: come si evince dal grafico infatti, per $a/b > \sqrt{2}$ la configurazione a una semi-onda porterà a un coefficiente di instabilità maggiore rispetto a quella a due semi-onde, per cui il minimo energetico si avrà proprio in corrispondenza di questo tipo di deformata. Una situazione analoga si avrà per $a/b > \sqrt{6}$, $a/b > \sqrt{20}$ e così via, con un progressivo appiattimento delle curve all'aumentare di m .

Possiamo infine determinare la tensione critica:

$$\sigma_{crit} = \frac{N_{x,crit}}{t} = \frac{k\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (2.28)$$

Tale formula è generalizzabile a tutti i tipi di condizioni al contorno e di carico lungo i suoi bordi semplicemente cambiando il valore di k , estrapolandolo dalla

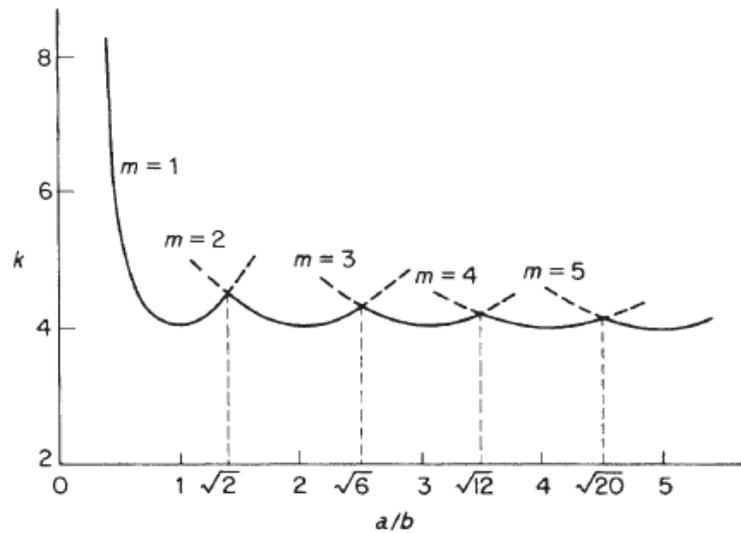


Figura 2.7: Andamento del coefficiente di instabilità al variare del rapporto a/b nel caso di lati semplicemente appoggiati [8]

curva che rappresenta il caso specifico in esame. Numerosi andamenti per diverse condizioni di vincolo sono rappresentati nel grafico 2.8:

Vari modelli sono stati poi sviluppati a seconda dei vincoli esercitati. In questa trattazione, volendo studiare il buckling di provini a T, verificheremo la valenza di quello usato in da *Selamel et al.* in [11], nel quale il coefficiente di instabilità è nella forma:

$$k = \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 + p + q \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \quad (2.29)$$

dove n è il numero di semi-onde lungo la direzione di carico della piastra in buckling, α il rapporto tra i lati a/b , mentre p e q sono due coefficienti dipendenti dalle condizioni di vincolo.

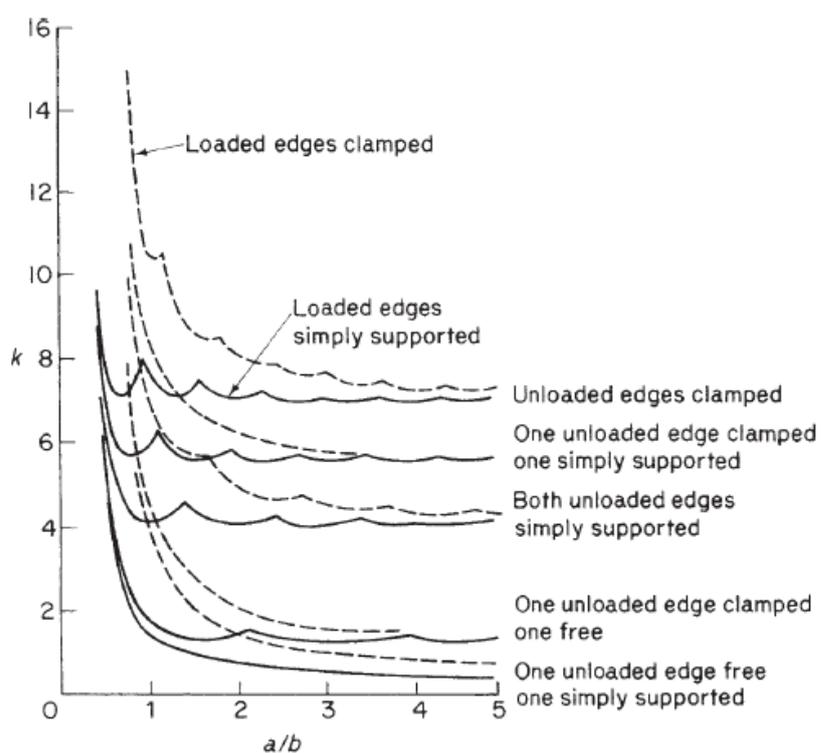


Figura 2.8: Andamento del coefficiente di instabilità al variare del rapporto a/b per varie condizioni di vincolo [8]

Capitolo 3

La Digital Image Correlation

Le rilevazioni degli spostamenti dei provini sono state effettuate, invece che con i comuni metodi utilizzanti estensimetri, tramite Correlazione Digitale d'Immagine. Il presente capitolo ha lo scopo di fornire un'idea generale sul funzionamento di tale strumento, i suoi pregi e i suoi difetti, oltre ad esporre le principali caratteristiche del programma usato, Ncorr 2D.

3.1 Introduzione

La Correlazione Digitale d'Immagine, o Digital Image Correlation, è uno strumento ottico-numerico di misurazione dei campi di spostamenti e deformazioni di oggetti piani, che negli ultimi anni ha guadagnato sempre maggiore attenzione grazie alla sua praticità e flessibilità oltre alla crescente raffinatezza degli algoritmi su cui si fonda. Tali caratteristiche lo rendono a tutti gli effetti una valida alternativa ai più complessi strumenti di analisi interferometrica, e hanno portato allo sviluppo di vere e proprie evoluzioni della DIC 2D qui presentata: dalla DIC 3D, che permette lo studio di superfici non piane o che hanno moti al di fuori del piano d'osservazione, alla Digital Volume Correlation, capace di fornire le deformazioni interne della struttura in esame. L'idea alla base della DIC è quella di effettuare un confronto tra un'immagine digitale del corpo *indeformato* (chiamata anche immagine di riferimento) e immagini del corpo *deformato* [12], estrapolando le informazioni su spostamento e deformazione dai cambiamenti delle intensità di grigio sulla superficie del corpo. La necessità di avere in input esclusivamente delle immagini digitali rende tale metodo estremamente flessibile e applicabile a qualsiasi tipo di scala, dalla macroscopica alla nanometrica, permettendo analisi molto accurate in qualsiasi ambiente ben illuminato previa una semplice, e talvolta non indispensabile,

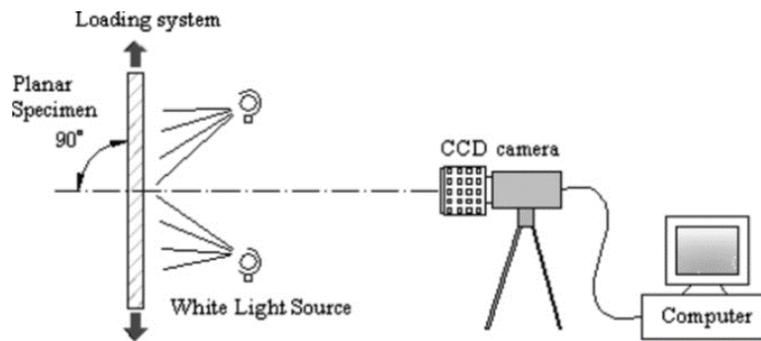


Figura 3.1: Configurazione standard una prova eseguita tramite DIC [12]

preparazione del campione nel caso non presentasse naturalmente una distribuzione di grigi sulla sua superficie. Purtroppo, il fatto che basi il suo funzionamento su immagini digitali rende la precisione della Correlazione d'immagine direttamente dipendente dalla qualità dei sistemi di acquisizione ottici, e sempre comunque inferiore a quella delle tecniche interferometriche.

Nella prossima sezione verranno presentati i principi fondamentali degli algoritmi alla base della Correlazione digitale d'immagine 2D, con un maggiore approfondimento su quelli utilizzati da Ncorr 2D, il software Matlab utilizzato per questa campagna sperimentale.

3.2 Funzionamento dell'algoritmo

Come già anticipato, la Correlazione digitale d'immagine ricava il campo di spostamenti di un corpo confrontando un'immagine del corpo deformato con una, di riferimento, del corpo indeformato, misurando la variazione dei livelli di grigio tra le due. Tale compito viene effettuato suddividendo la cosiddetta *Region of Interest*, definita dall'utente nella foto di riferimento, in piccole zone quadrate o circolari chiamate *facet* o *subset*, delle quali si va a ricercare la posizione nel corpo deformato. Per minimizzare il rischio che l'algoritmo possa confondere delle zone dalla tonalità simile, è necessario rendere il più casuale possibile la distribuzione di grigi sulla superficie da analizzare, operazione solitamente effettuata spruzzandovi della vernice così da creare una trama a puntini che contrasti con il colore del provino.

L'analisi dell'algoritmo, e nello specifico di Ncorr 2D, si snoda attraverso due passaggi fondamentali, di seguito esplicitati.



Figura 3.2: La definizione della ROI su Ncorr 2D: da notare la distribuzione di grigi sul provino, effettuata tramite vernice spray

3.2.1 Misurazione del campo di spostamenti

Come descritto in [12], per misurare gli spostamenti il programma procede innanzitutto attraverso il calcolo della posizione del punto centrale del subset, effettuato tramite la rilevazione del massimo del *coefficiente di correlazione*. Tale parametro può far riferimento a due criteri, *Cross-Correlation* o *Sum-Squared Differences*, e per ognuno ne esistono tre differenti tipi: classico, *normalized* e *zero-normalized*. La formula 3.1 rappresenta il criterio di correlazione utilizzato da Ncorr 2D, la *Normalized sum of squared difference*:

$$C_{NSSD} = \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M \left[\frac{f(x_i, y_i)}{\bar{f}} - \frac{g(x'_i, y'_i)}{\bar{g}} \right]^2 \quad (3.1)$$

In questa, $f(x_i, y_i)$ e $g(x'_j, y'_j)$ sono rispettivamente i valori di grigio nell'immagine di riferimento e in quella corrente in posizione (x_i, y_i) e (x'_i, y'_i) , \bar{f} e \bar{g} rappresentano invece i valori medi nel subset. Per un singolo facet centrato in $P(x_0, y_0)$ si calcolano quindi tutti i possibili coefficienti di correlazione con i punti dell'immagine corrente, ricavando la posizione di P nel pixel in cui si trova quello massimo. Questo calcolo è tuttavia solo una stima, perché non riesce a ricavare la posizione esatta di punti finiti, dopo la deformazione, tra un pixel e un altro: si procede allora con una interpolazione, effettuata tramite spline biquintiche su Ncorr, e un successivo schema iterativo di ottimizzazione non lineare volto a minimizzare il coefficiente di interpolazione C_{LS} , e raggiungere a tutti gli effetti una precisione inferiore al pixel.

La procedura descritta finora, che può essere trovata analoga in vari software, è in realtà utilizzata da Ncorr per ricavare la posizione di un singolo punto chiamato

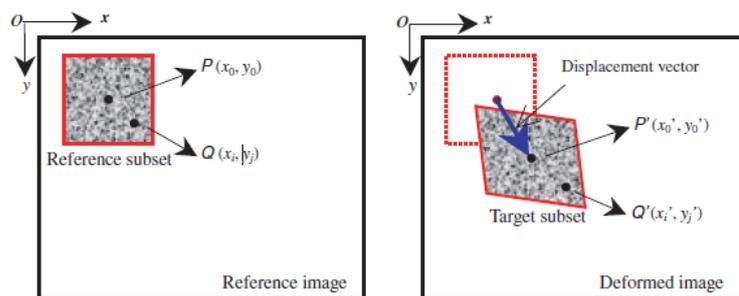


Figura 3.3: Esempio di subset, centrato in $P(x_0, y_0)$, nell'immagine di riferimento e in quella corrente [12]

seed, posizionato dall'utente [13]. Il calcolo del C_{NSSD} è infatti molto dispendioso, per cui, una volta ricavate le informazioni sullo spostamento del *seed*, queste vengono utilizzate per ottenere una stima iniziale della posizione dei quattro punti che lo circondano, per poi continuare con l'interpolazione e il calcolo del C_{LS} minimo che abbiamo precedentemente visto. Il punto dal C_{LS} più basso sarà adesso quello dal quale si ricaveranno le nuove stime di posizione per i punti intorno ad esso, e la procedura continua così fino al calcolo completo degli spostamenti della ROI. Tale processo risulta molto solido oltre che vantaggioso, tanto da un punto di vista computazionale, dato che si riduce al minimo l'utilizzo dell'NCC, quanto da quello della precisione, poiché i punti ad alto C_{LS} vengono poco usati per le stime iniziali e ciò comporta un consistente guadagno in accuratezza. Permettendo inoltre il posizionamento di più di un *seed* (fino a quattro), Ncorr permette di analizzare più sotto-domini in parallelo, velocizzando ulteriormente il calcolo.

L'output di questa fase dell'analisi è, su Ncorr, il campo di spostamenti completo, espresso tuttavia in pixel. Per convertire gli spostamenti nell'unità di misura desiderata è necessario fornire al software un'immagine di calibrazione, sulla quale tracciare una linea della quale fornire le dimensioni così che il programma possa scalare i risultati. Chiaramente, tale funzione rappresenta una potenzialità del processo (perché permette di analizzare sistemi di qualsiasi scala) ma risente anche di tutte le problematiche legate al sensore ottico, quali un errato allineamento tra sensore e provino e la distorsione dell'immagine dovuta alla lente, e può dunque portare a errori nella misurazione. Questi problemi verranno discussi in modo più approfondito nella sezione 3.3, dedicata alle possibili problematiche del processo.

3.2.2 Calcolo delle deformazioni

A differenza del campo di spostamenti le deformazioni non vengono calcolate in modo "diretto", analizzando le immagini fornite in input, ma vengono invece dedotte

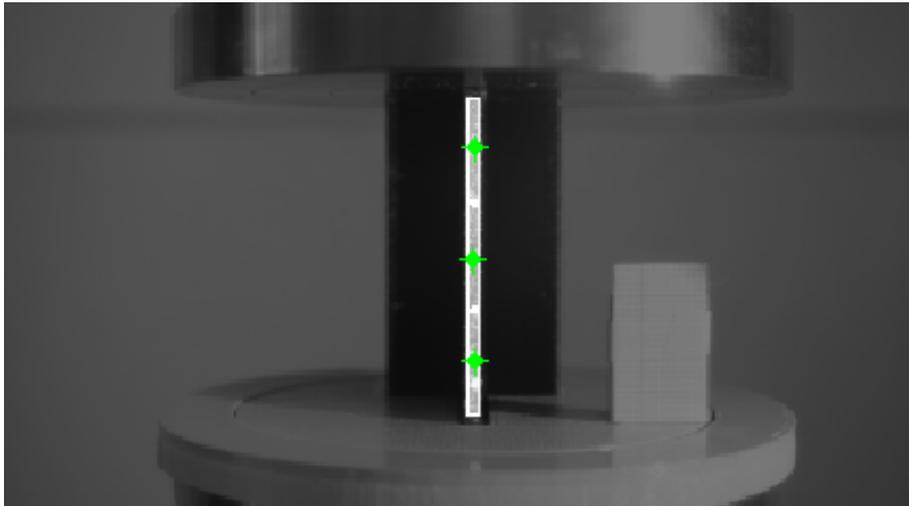


Figura 3.4: Esempio di analisi realizzata tramite tre seed: notare i confini che delimitano le differenti zone di competenza per ognuno di essi

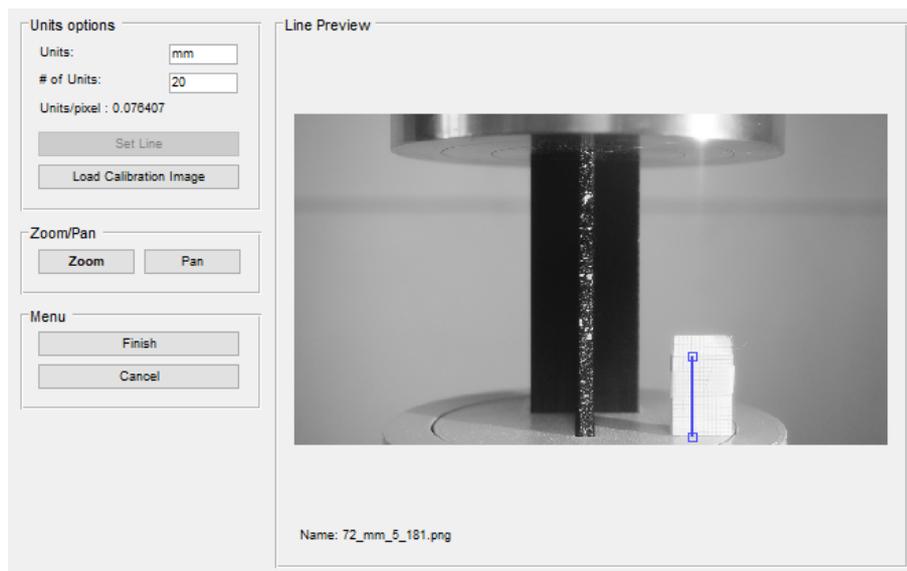


Figura 3.5: Schermata di calibrazione degli spostamenti su Ncorr 2D. In questo caso è stata realizzata una struttura apposta per facilitare il processo

per differenziazione degli spostamenti ricavati dall'analisi. Tale aspetto risulta problematico in quanto la differenziazione numerica è un processo estremamente sensibile al rumore, che ne risulta amplificato al punto da rendere, senza le dovute precauzioni, inaffidabili i risultati. Poiché gli spostamenti sono molto rumorosi, è dunque necessario smussarli: una procedura efficace, usata da Ncorr, è una

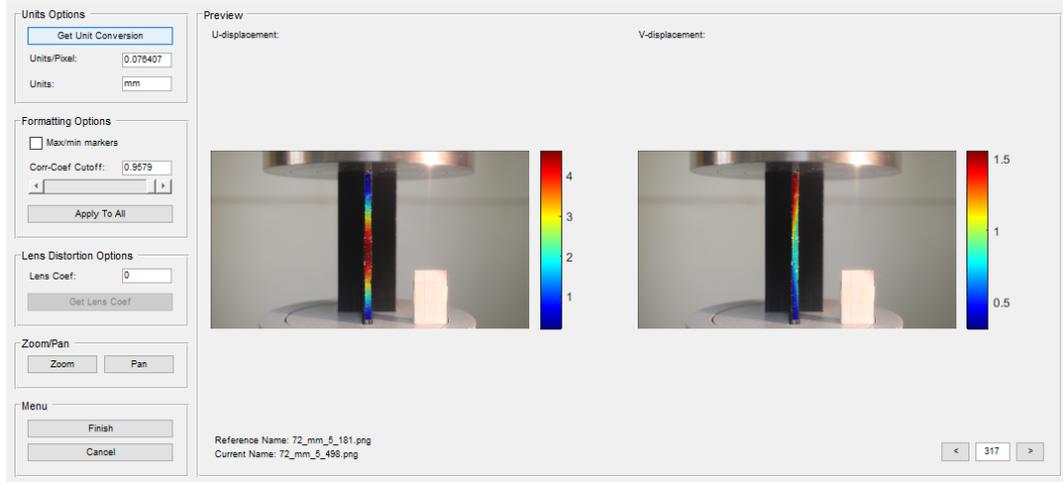


Figura 3.6: Spostamenti scalati a seguito della calibrazione

interpolazione locale ai minimi quadrati degli spostamenti, calcolata su una sezione quadrata di lato $2M + 1$ pixel e centrata nel punto del quale si vuole calcolare la deformazione. L'interpolazione così ottenuta viene dunque usata nelle formule di derivazione di Green-Lagrange, qui presentate:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (3.4)$$

3.3 Problematiche principali

Nonostante il grande sviluppo avuto nell'arco di più di tre decenni, la Correlazione d'immagine è ancora soggetta a numerosi errori tutt'oggi molto difficili da superare del tutto e il cui impatto sull'analisi è stato ampiamente studiato [12], sebbene manchi ancora un modello unico che definisca l'accuratezza del processo a seconda delle condizioni di utilizzo. Nei prossimi paragrafi verranno esposte le principali problematiche riscontrabili nella DIC 2D, insieme ad alcuni accorgimenti che ne possano limitare gli effetti.

3.3.1 Errori dovuti al provino e all'acquisizione delle immagini

Distribuzione di grigi sulla superficie

Le misurazioni della DIC sono notevolmente legate alla distribuzione delle macchioline sulla superficie da analizzare, che deve essere la più casuale possibile così da permettere una più semplice identificazione dei subset. L'impatto di tale distribuzione influenza in modo considerevole anche la scelta delle dimensioni del facet, come spiegato meglio di seguito.

Moto del provino fuori dal piano di osservazione e mancato allineamento tra superficie del provino e sensore ottico

Idealmente, per avere una corretta analisi DIC, il sensore e la superficie del corpo dovrebbero sempre rimanere paralleli e a una distanza fissa. Nella pratica, tali condizioni sono sostanzialmente impossibili da mantenere, a causa della difficoltà di un perfetto posizionamento del sensore e agli inevitabili moti fuori dal piano del provino, dovuti a imperfezioni nel carico e al coefficiente di Poisson. Tali errori risultano amplificati nel caso in cui sensore e provino siano molto vicini, e possono dunque essere alleviati tramite l'utilizzo di ottiche telecentriche o posizionando il sensore a distanza dal campione.

Distorsione dell'immagine

Tutti i sistemi ottici sono inevitabilmente soggetti a distorsioni dovute alla curvatura della lente. Tale effetto può essere di due tipi: a barile, dove la parte centrale dell'immagine risulta ingrandita, e a cuscino, dove invece risulta rimpicciolita. Chiaramente una simile contaminazione dell'immagine deve essere tenuta in conto nella DIC, e per questo numerosi studi sono stati effettuati per studiarne l'impatto sull'analisi [14], e proporre possibili soluzioni [15].

Rumore

Come qualsiasi tipo di rilevazione, l'acquisizione delle immagini da parte del sensore è soggetta a delle fluttuazioni dovute, in questo caso, a variazione dell'illuminazione ambientale, vibrazioni della telecamera e così via. L'impatto di tali fluttuazioni può essere valutato tramite lo studio della deviazione standard, e alleviato invece usando sensori a bassa temperatura e criteri di correlazione indifferenti alla variazione della luce sul provino (gli *Zero-Normalized*).

3.3.2 Errori dovuti all'algoritmo

Dimensioni del subset

La dimensione del subset è un parametro critico del processo, e influenza in modo sostanziale la precisione delle misurazioni. La difficoltà nella scelta risiede nelle due necessità opposte che hanno il calcolo del campo degli spostamenti e quello del campo delle deformazioni:

- per un accurato calcolo del campo di spostamenti, la variazione delle intensità di grigio deve essere tale da rendere il subset facilmente riconoscibile dal programma, e dunque delle dimensioni maggiori sono preferibili;
- il calcolo delle deformazioni ha bisogno di un campo di spostamenti approssimabile a un polinomio del primo o secondo ordine, per cui un subset più piccolo è più opportuno.

La scelta delle dimensioni del facet deve dunque necessariamente seguire delle valutazioni sul campione e sull'andamento dell'esperimento in generale, oltre che su eventuali preferenze riguardo a una maggiore accuratezza degli spostamenti o delle deformazioni.

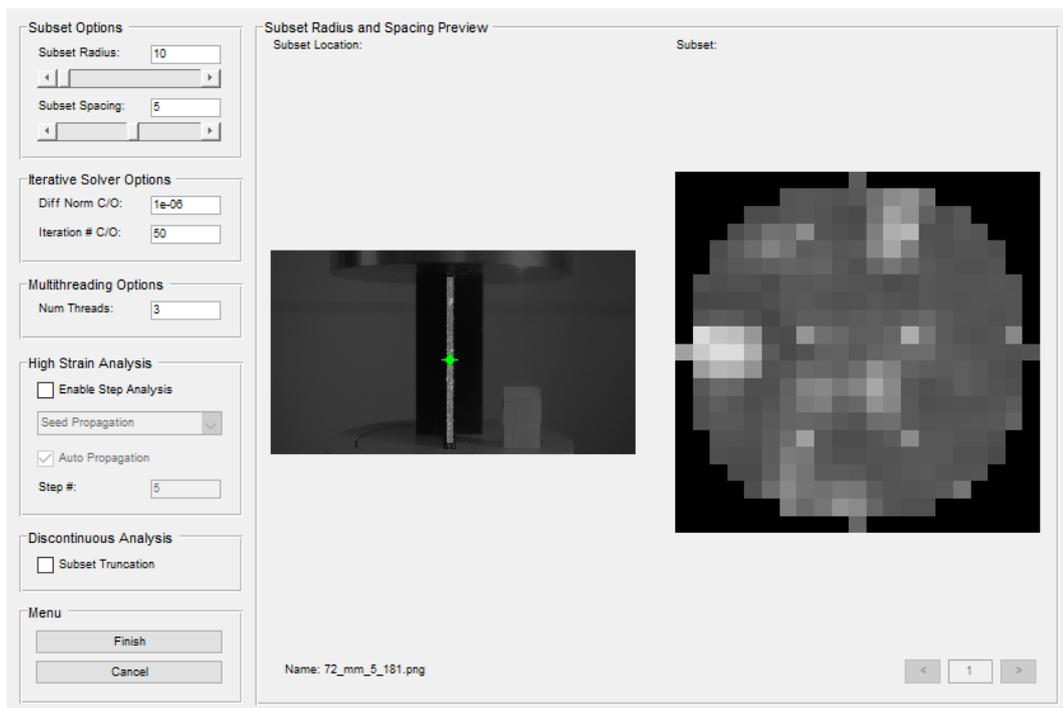


Figura 3.7: Schermata di selezione di dimensioni e distanziamento dei subset su Ncorr 2D

Criterio di correlazione

Come già detto, a seconda del criterio di correlazione utilizzato questo può essere o meno influenzato dalle condizioni di illuminazione di partenza e dalla loro eventuale variazione. In particolare, abbiamo che i criteri normalizzati, di cui un esempio è presentato nell'equazione 3.1, sono insensibili a una variazione lineare dell'intensità di grigi sulla superficie, ma sensibili all'offset di illuminazione; i criteri *Zero-normalized* invece, sono insensibili sia a una variazione lineare che all'offset, mentre i criteri standard sono sensibili a entrambi.

Schema di interpolazione

Un confronto fra vari schemi di interpolazione effettuato in [16] mostra chiaramente che uno schema di ordine maggiore risulta essere molto più preciso. Allo stesso tempo tuttavia, il costo computazionale aumenta di pari passo con l'accuratezza.

Funzioni di forma

Le deformazioni di un subset sufficientemente piccolo possono essere approssimate da funzioni di forma del primo o secondo ordine. Esperimenti mostrano tuttavia che le funzioni del secondo ordine portano a errori sistematici più bassi.

Parte II

Analisi di Buckling Locale su provini a T

Capitolo 4

Fabbricazione dei provini

La fabbricazione dei provini è stata effettuata nell'arco delle prime settimane di lavoro a questa tesi. Di seguito sono spiegati i vari passaggi che l'hanno caratterizzata, dallo studio preliminare per la scelta della geometria, alla realizzazione degli esemplari per i test, alla loro caratterizzazione dimensionale.

4.1 Geometria

L'obiettivo di questa parte della tesi è lo studio dell'instabilità locale di provini a sezione in parete sottile. La normativa ASTM normalmente utilizzata per la compressione di materiali polimerici, tuttavia, non prevede delle disposizioni per prove volte a questo scopo, per cui si è reso necessario analizzare il problema per ottimizzare la geometria dei campioni e adattarla al meglio ai nostri scopi.

L'attenzione è stata innanzitutto indirizzata alla scelta della forma della sezione, restringendo il campo alle più usate geometrie aperte in parete sottile, ossia quelle a C, I e T. La valutazione iniziale si è concentrata sulla semplicità di analisi tramite correlazione d'immagine, cosa che ha portato all'esclusione della sezione a C, potenzialmente soggetta a ingobbamenti globali che ne avrebbero complicato lo studio; avendo poi scelto un modello teorico valido in campo elastico lineare, è stata studiata una potenziale insorgenza del buckling in campo plastico che ne avrebbe invalidato l'utilizzo: alcune analisi numeriche preliminari hanno evidenziato che nei provini a I il buckling insorge generalmente a tensioni superiori che in quelli a T, per cui la scelta è ricaduta su questi ultimi. Facendo riferimento alle dimensioni riportate in figura 4.1, sempre al fine di facilitare la DIC si è optato per uno spessore t delle flange pari a 3 mm, sufficientemente grande da poter essere analizzato agevolmente, e un rapporto b/t , per l'anima centrale, costante e pari a 10, dove b è la dimensione del lato caricato a compressione; per le due flange posteriori si è invece preferito un rapporto tra lato carico e spessore uguale a 5, così

da essere certi di stimolare l'instabilità nella zona di nostro interesse. Riguardo l'altezza dei provini, si è deciso di far variare il rapporto L/b , dove L rappresenta la lunghezza del lato scarico, tra 1.2 e 3, che si traduce in dieci differenti famiglie di campioni tra 36 e 90 mm, a incrementi di 6 mm.

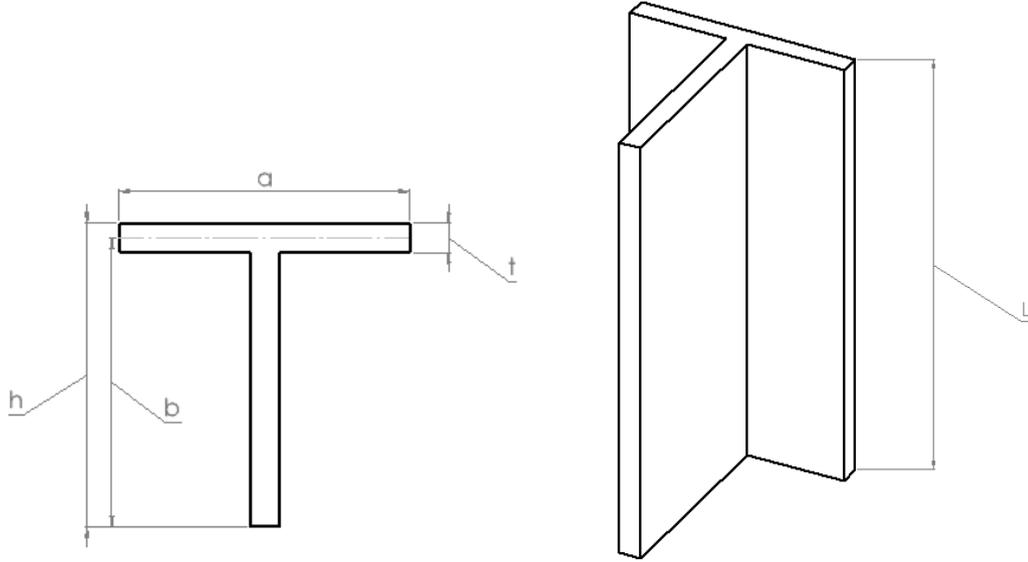


Figura 4.1: Le dimensioni L , a , t , h e b del provino

4.2 Parametri di stampa

I file CAD dei provini sono stati creati tramite il software SolidWorks 2020, convertiti in STL tramite lo stesso e "affettati" poi tramite il programma di slicing Simplify3D. Le stampe sono state poi realizzate tramite una stampante Sharebot Next Generation: questa è dotata di un doppio estrusore, ognuno dei quali presenta il feeder integrato nella hot end, è aperta anteriormente e superiormente, e presenta un volume di stampa di 250x200x200 mm. Ogni famiglia, di sei provini ciascuna, è stata estrusa in un'unica stampa tramite un ugello di 0.4 mm e PLA di 1.75 mm di diametro, ed è stata orientata ponendo l'asse del provino lungo la direzione z (figura 4.2). Inoltre, i provini sono stati tutti raggruppati nella zona centrale del piano di stampa, per evitare che eventuali curvature della superficie influenzassero troppo marcatamente la loro realizzazione. La collocazione dei provini sul piano è riportata in figura 4.2, tratta da Simplify3D.

Riguardo alla scelta dei parametri di stampa, sono state fatte alcune prove con dei valori di test per ottimizzare al meglio il processo e le caratteristiche dei provini. Le scelte sono state le seguenti:

- *Altezza dello strato*: dovendo essere necessariamente compresa tra la risoluzione della stampante (0.05 mm) e il diametro dell'ugello (0.4 mm), è stata impostata a 0.2 mm, che si è rivelato essere un buon compromesso tra velocità del processo e adesione fra gli strati;
- *Larghezza di estrusione*: è impostabile manualmente o in automatico dallo slicer a seconda della stampa. Avendo qui uno spessore t pari a 3 mm, si è scelta una larghezza di 0.5 mm, così da avere un numero intero di filamenti;
- *Riempimento*: per migliorare le caratteristiche del provino si è deciso di fare in modo che l'intero strato fosse composto di soli perimetri concentrici. La selezione della percentuale di infill e della sua orientazione è risultata dunque a tutti gli effetti ininfluente;
- *Temperatura*: la stampante dà la possibilità di scegliere sia quella di estrusione che quella del piano di stampa, impostate rispettivamente a 195 °C e a temperatura ambiente; per migliorare l'adesione del primo strato, la sua temperatura è stata invece impostata su 200 °C;
- *Extrusion multiplier*: dopo vari tentativi, è stato impostato un valore di 1.05 da Simplify3D, e di 1.01 dalla macchina;
- *Velocità di stampa*: la velocità pre-impostata di 1500 mm/min ha garantito una buona velocità al processo e una bassa presenza di difetti.

Oltre a questi, altri due parametri testati sono la lunghezza e la velocità di ritiro, che rappresentano quanto e a che velocità la stampante debba retrarre il filamento ogni volta che l'ugello non deve estrudere durante la stampa (quindi tra la fine di uno strato e l'inizio del successivo e ogni volta che deve cambiare provino all'intero del singolo layer). Una loro corretta impostazione evita che venga estrusa plastica dove non dovrebbe essercene, e dopo alcuni tentativi sono stati scelti valori rispettivamente di 3 mm e 1800 mm/min. Tutti i parametri discussi sono riassunti in tabella 4.1.

4.3 Analisi statistica

Prima di testare i provini, è stato necessario misurarli per ottenere informazioni precise da poter utilizzare per tutte le analisi, e avere così risultati più vicini al caso reale in cui certamente le dimensioni sono leggermente diverse da quelle

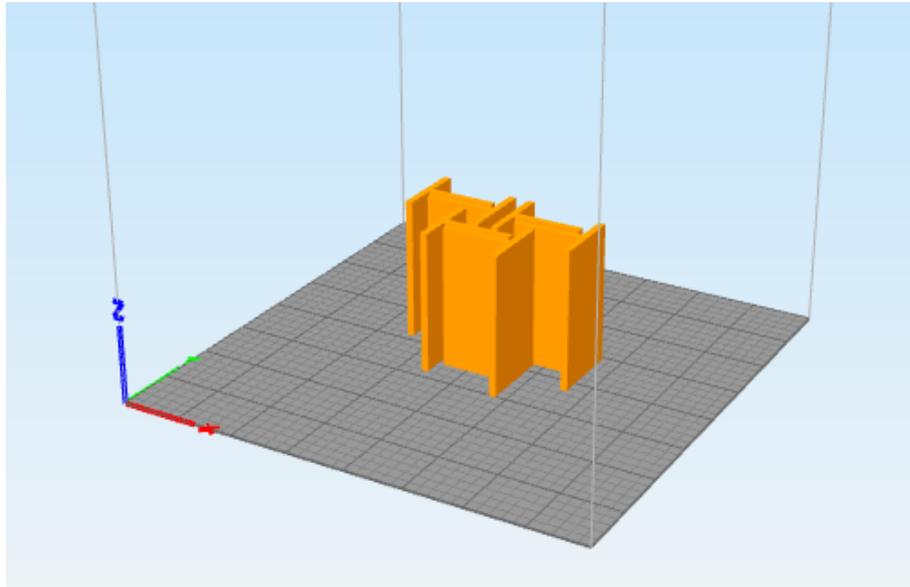


Figura 4.2: Posizionamento della famiglia $L = 60$ mm nel programma di slicing *Simplify3D*

Parametro	Unità di misura	Valore
Temperatura di estrusione	°C	200 (1° strato), 195
Temperatura piano di stampa	/	T ambiente
Altezza strato	mm	0.2
Larghezza di estrusione	mm	0.5
Numero di perimetri	/	3
Percentuale di infill	%	/
Extrusion multiplier	/	1.05 + 1.01
Velocità di stampa	mm/min	1500
Lunghezza di ritrazione	mm	3
Velocità di ritrazione	mm/min	1800

Tabella 4.1: Parametri di stampa

nominali. Per ricavare questi dati è stato utilizzato un calibro digitale centesimale (la cui sensibilità è dunque al centesimo di millimetro) e si è deciso di prendere in totale 15 misure per provino a fronte di quattro informazioni ricercate (lunghezza e larghezza della sezione trasversale, spessore della flangia, lunghezza del provino), così da mediare le misurazioni e ottenere risultati il più possibile avulsi da normali fluttuazioni o da errori di stampa:

- *Lunghezza provino*: misurata nella zona centrale di ogni flangia;
- *Lunghezza e larghezza sezione*: per ognuna, una misurazione in entrambi gli estremi del provino e una a metà lunghezza;
- *Spessore flangia*: due misurazioni per flangia ponendo il calibro diagonalmente, così da valutare una zona quanto più possibile vicina all'incrocio tra le tre anime.

Tutti questi dati sono stati mediati per ottenere le dimensioni del singolo provino, e poi mediati a loro volta all'interno della famiglia per ottenere i valori ad essa riguardanti. È stata poi effettuata un'analisi statistica, dalla quale è emersa una bassa deviazione standard e dunque una generale vicinanza delle misure trovate a quelle medie; sui risultati è stato inoltre effettuato il test di Anderson - Darling sull'attinenza dei dati a una distribuzione normale: per quanto riguarda le dimensioni a , h e L il test ha evidenziato una buona vicinanza alla gaussiana, al contrario di t , dove questa talvolta manca. I grafici 4.3 - 4.6 mostrano infine i boxplots di a , h , t e L al variare di L .

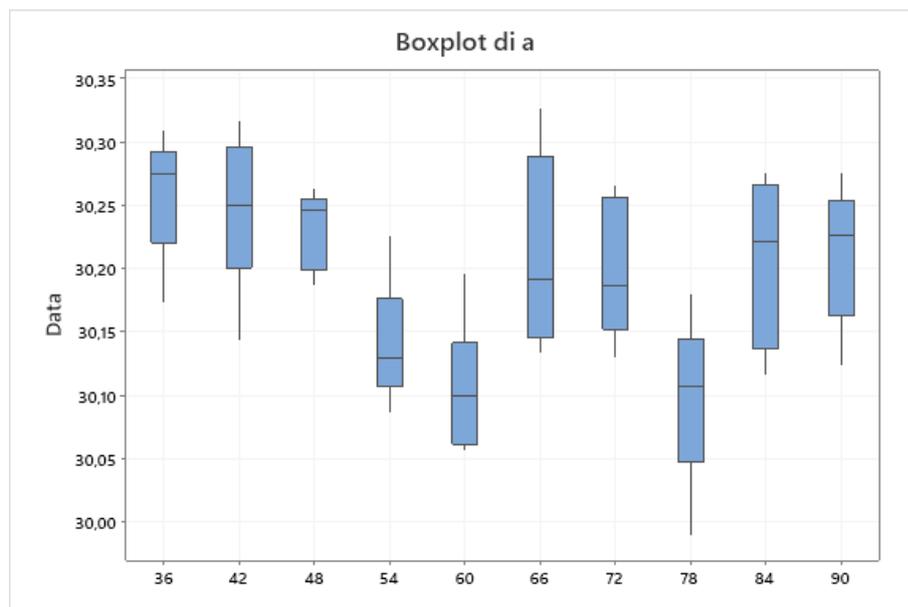


Figura 4.3: Boxplots della dimensione a al variare di L

Nelle tabelle 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 sono elencate le misure medie ricavate per ogni famiglia di provini, e le relative deviazioni standard, mentre nelle figure 4.7-4.18 sono riportati alcuni esempi di distribuzioni di misure, nello specifico per le famiglie da 36, 60 e 84 mm.

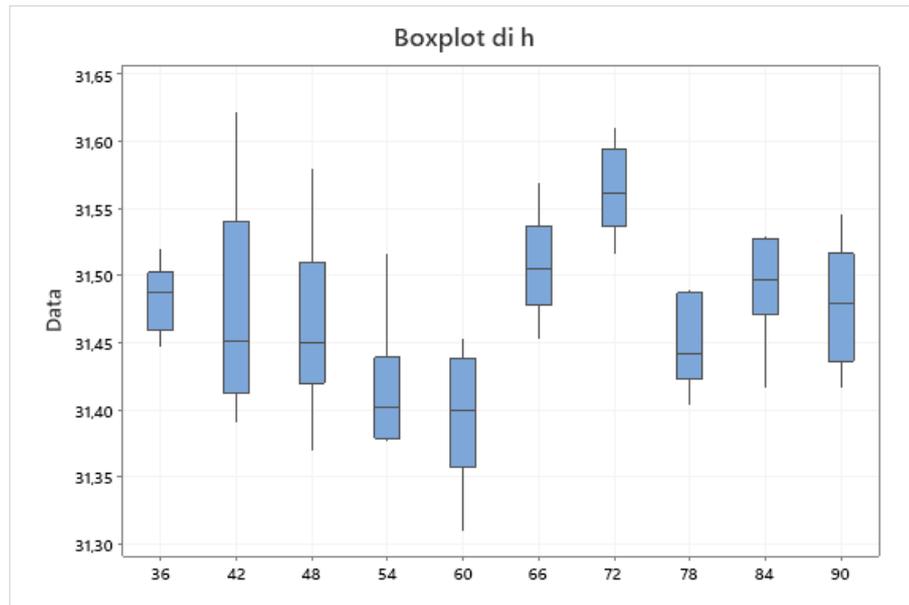


Figura 4.4: Boxplots della dimensione h al variare di L

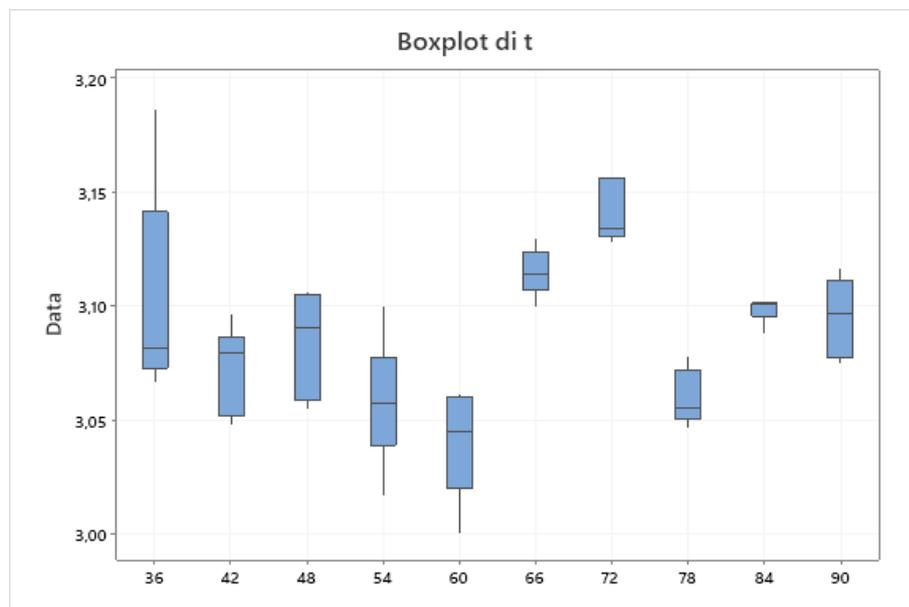


Figura 4.5: Boxplots della dimensione t al variare di L

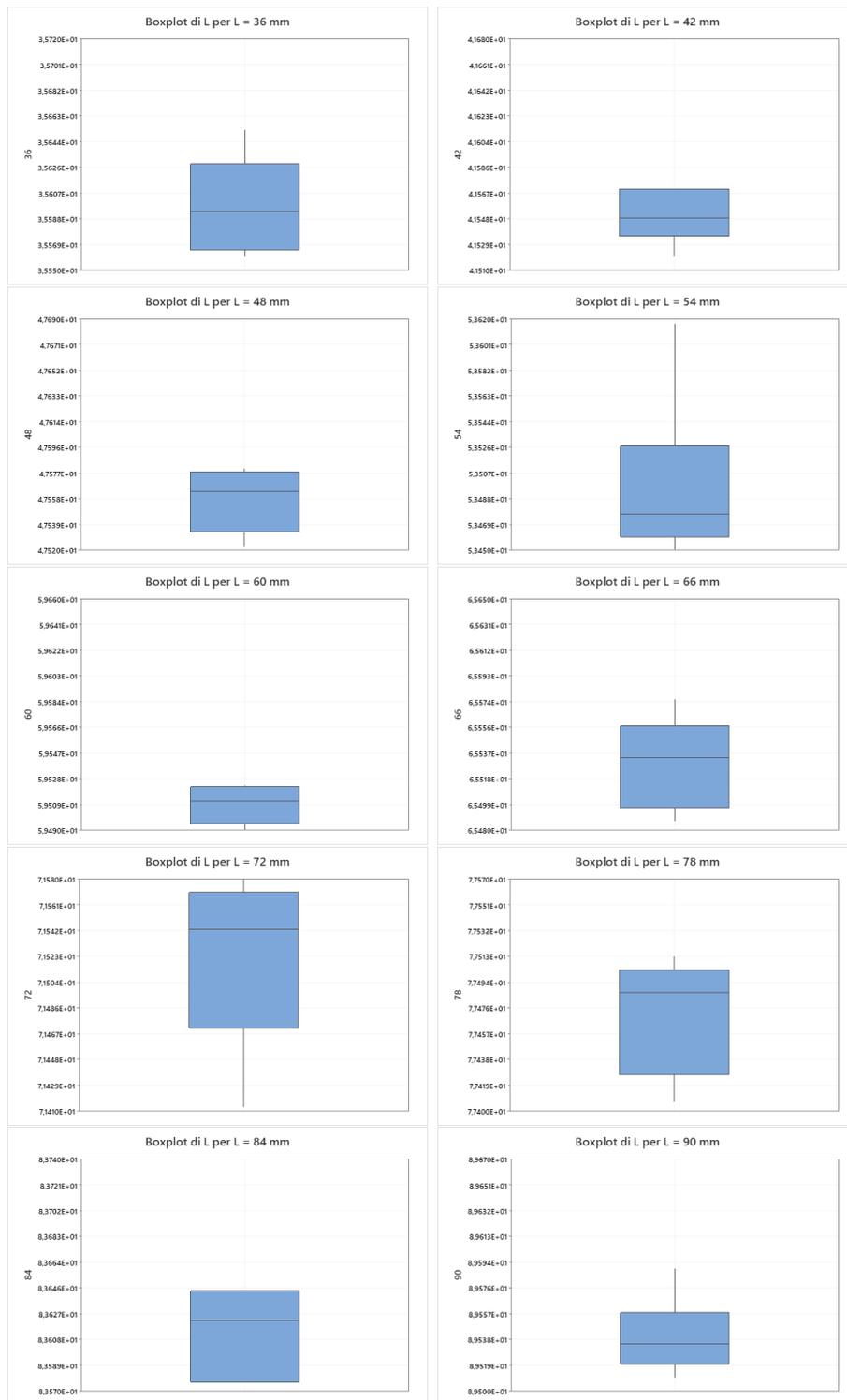


Figura 4.6: Boxplots della dimensione L per ogni famiglia di provini

Famiglia	t [mm]	σ_t
36	3.10	0.0461810
42	3.07	0.0187799
48	3.08	0.0223462
54	3.06	0.0282138
60	3.04	0.0238145
66	3.12	0.0103280
72	3.14	0.0128848
78	3.06	0.0119915
84	3.10	0.0052086
90	3.10	0.0168874

Tabella 4.2: Medie delle t per ogni famiglia, e relative deviazioni standard

Famiglia	L [mm]	σ_L
36	35.60	0.0369183
42	41.55	0.0192546
48	47.56	0.0234204
54	53.50	0.0608093
60	59.51	0.0137335
66	65.53	0.0327956
72	71.52	0.0618390
78	77.47	0.0417221
84	83.61	0.0305808
90	89.54	0.0259629

Tabella 4.3: Medie delle L per ogni famiglia, e relative deviazioni standard

Famiglia	h [mm]	σ_h
36	31.48	0.0259415
42	31.48	0.0837655
48	31.46	0.0691750
54	31.42	0.0520149
60	31.40	0.0504094
66	31.51	0.0391389
72	31.56	0.0338898
78	31.45	0.0337748
84	31.49	0.0409562
90	31.48	0.0434045

Tabella 4.4: Medie delle h per ogni famiglia, e relative deviazioni standard

Famiglia	a [mm]	σ_b
36	30.26	0.0486903
42	30.25	0.0620663
48	30.23	0.0310555
54	30.14	0.0487017
60	30.11	0.0510773
66	30.21	0.0767319
72	30.20	0.0541363
78	30.10	0.0652999
84	30.21	0.0643054
90	30.21	0.0499042

Tabella 4.5: Medie delle a per ogni famiglia, e relative deviazioni standard

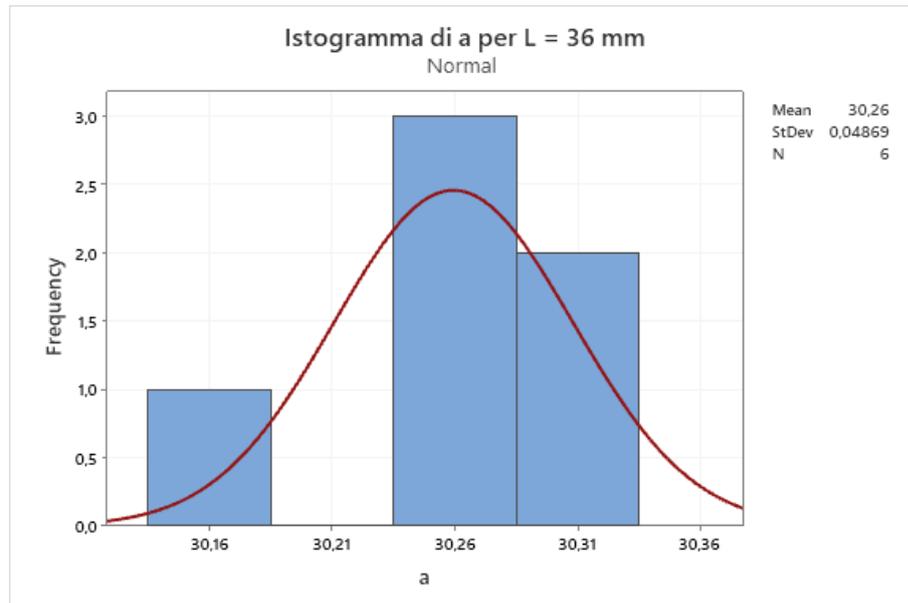


Figura 4.7: Distribuzione della dimensione a tra i provini per $L = 36$ mm

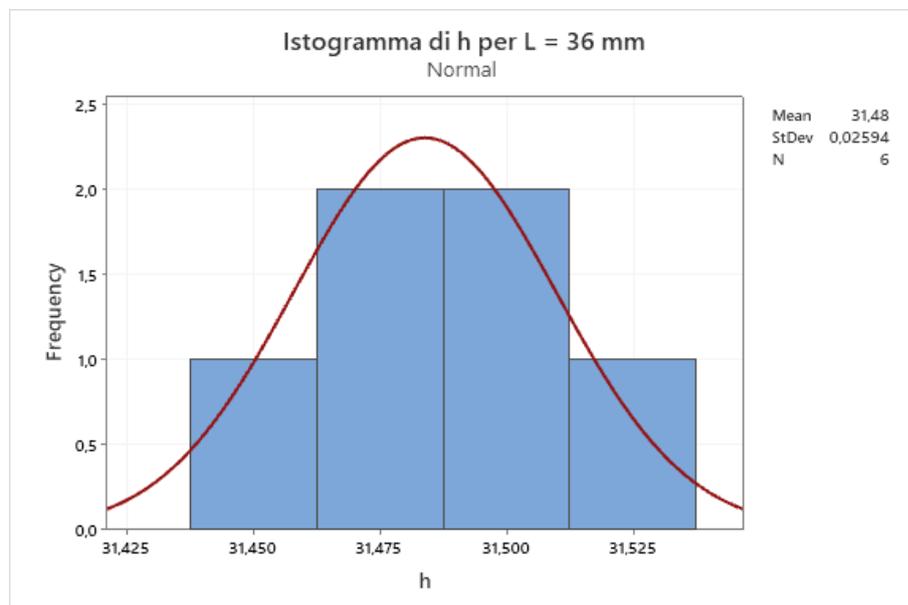


Figura 4.8: Distribuzione della dimensione h per $L = 36$ mm

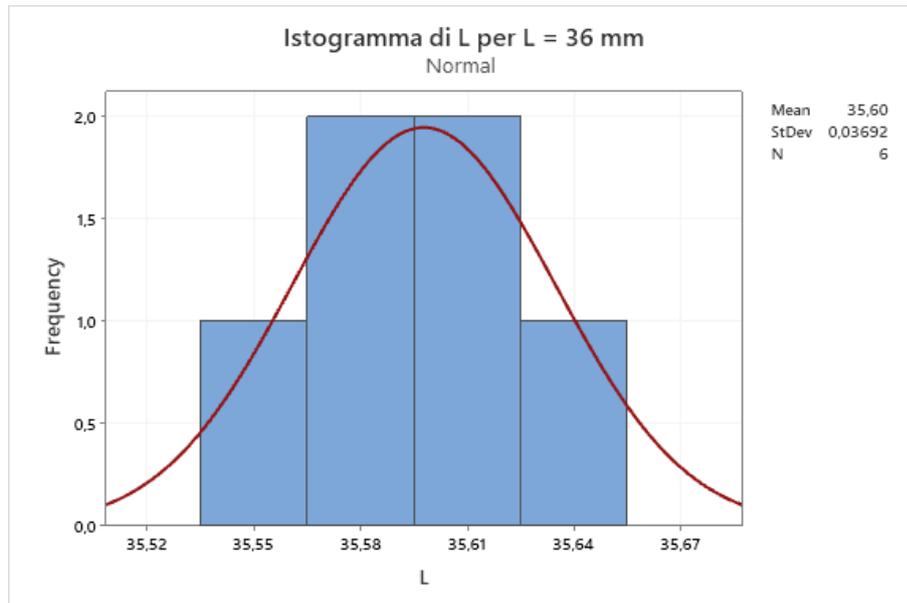


Figura 4.9: Distribuzione della dimensione L per $L = 36$ mm

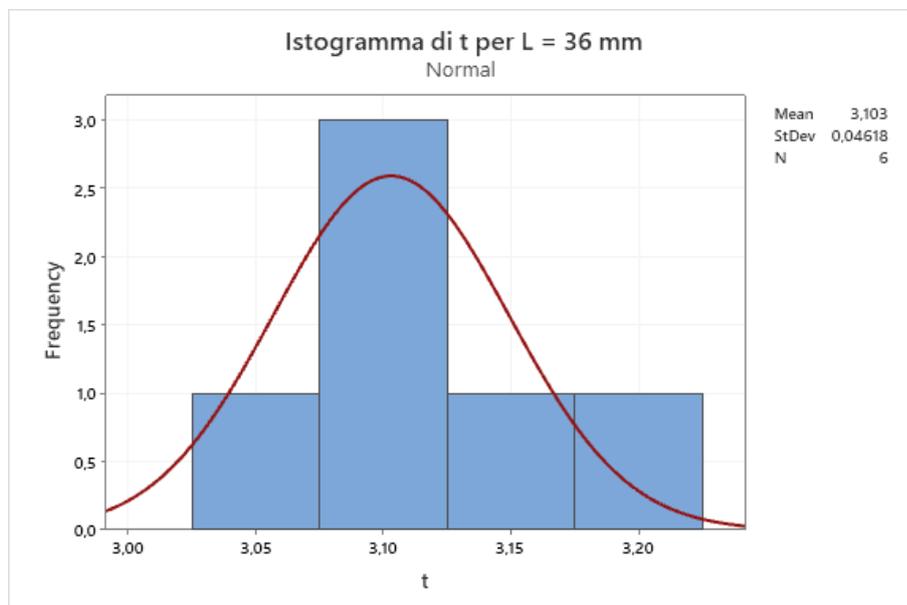


Figura 4.10: Distribuzione della dimensione t per $L = 36$ mm

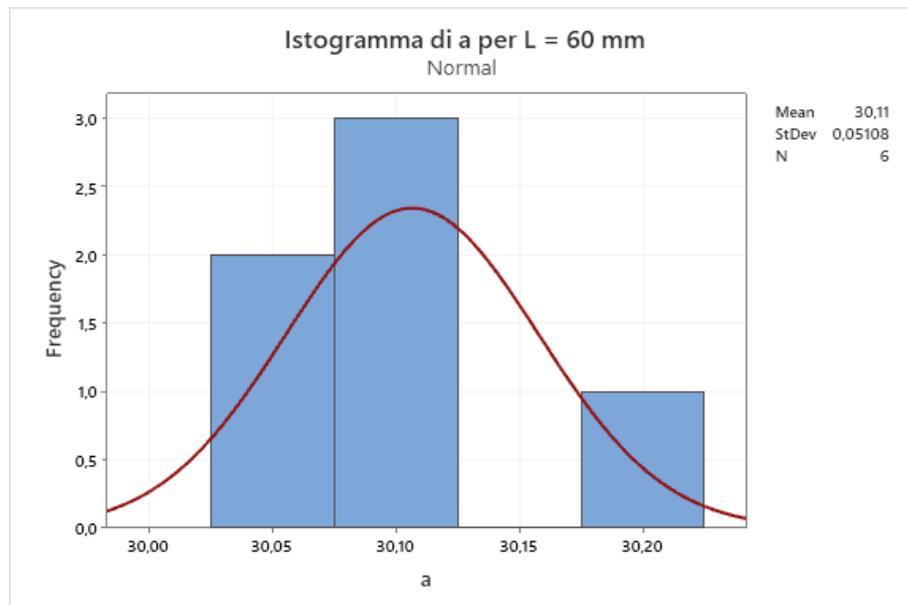


Figura 4.11: Distribuzione della dimensione a tra i provini per $L = 60$ mm

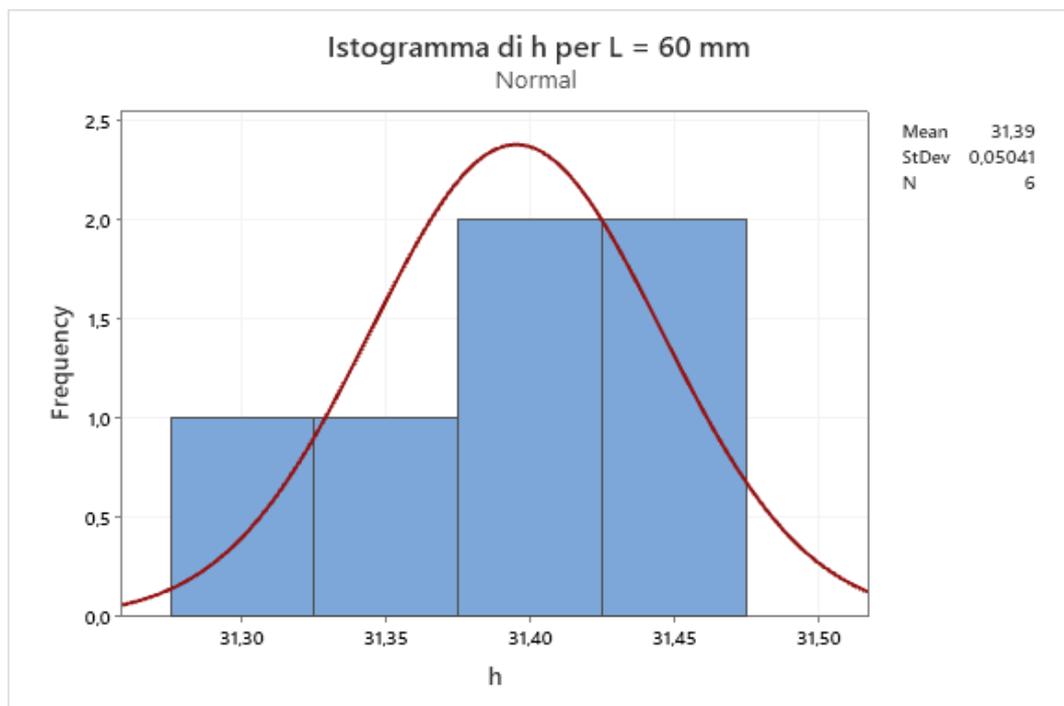


Figura 4.12: Distribuzione della dimensione h per $L = 60$ mm

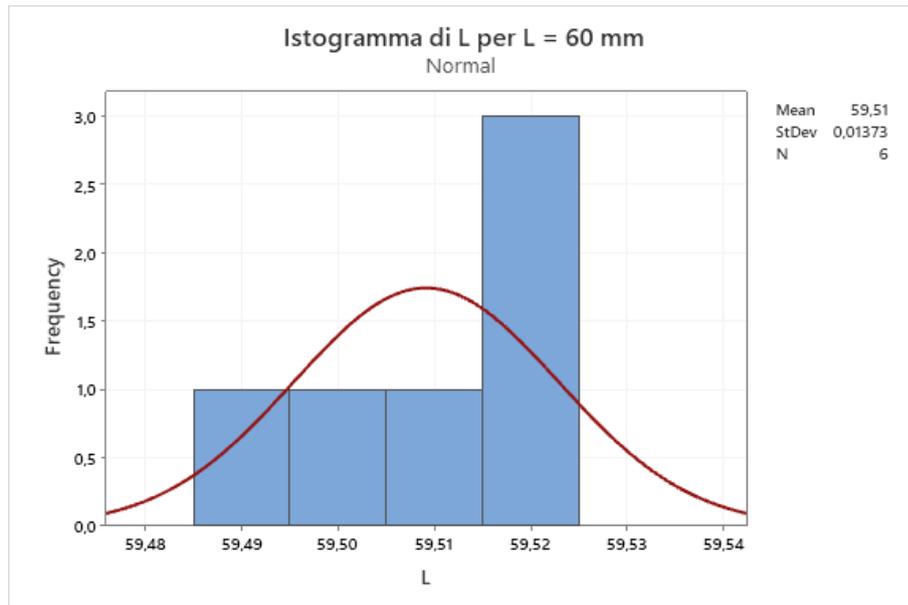


Figura 4.13: Distribuzione della dimensione L per $L = 60$ mm

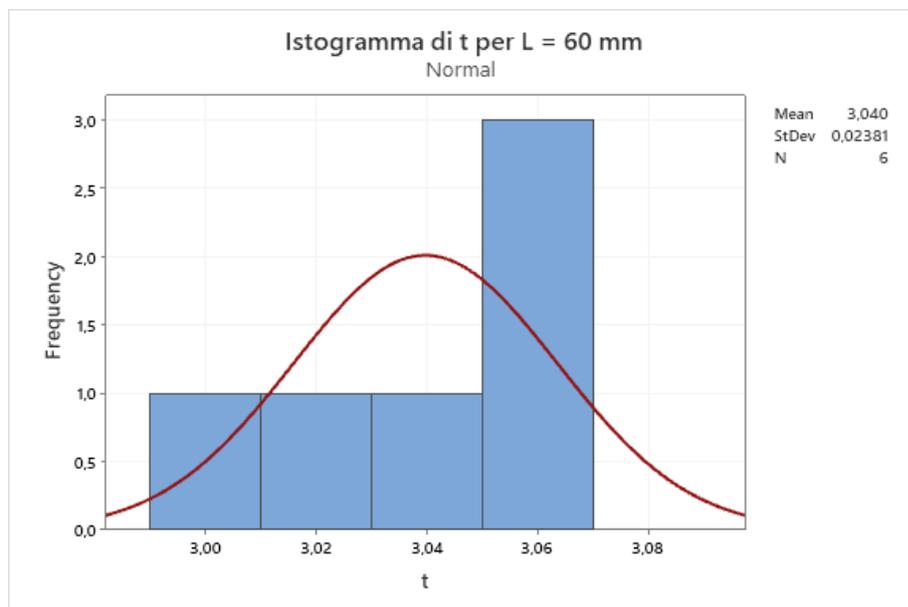


Figura 4.14: Distribuzione della dimensione t per $L = 60$ mm

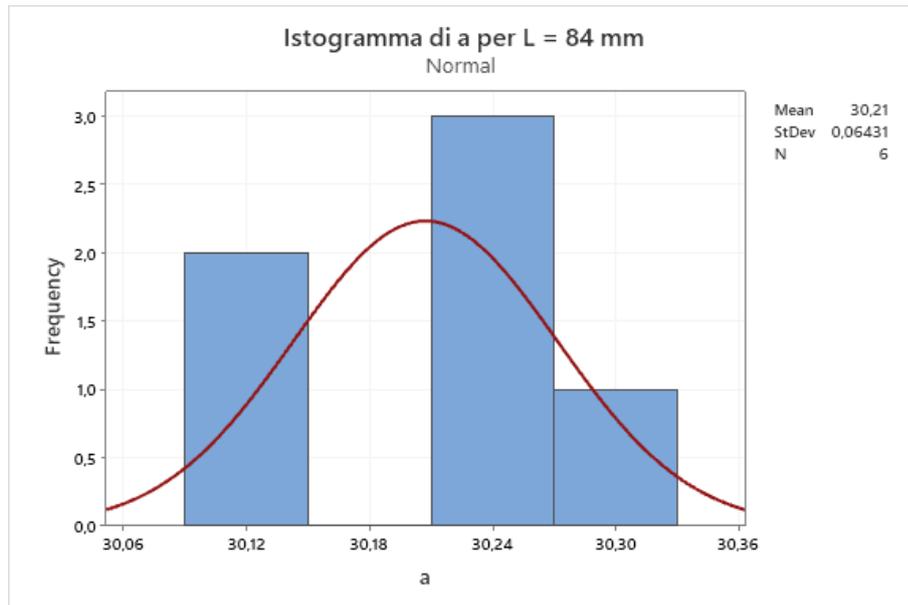


Figura 4.15: Distribuzione della dimensione a tra i provini per $L = 84$ mm

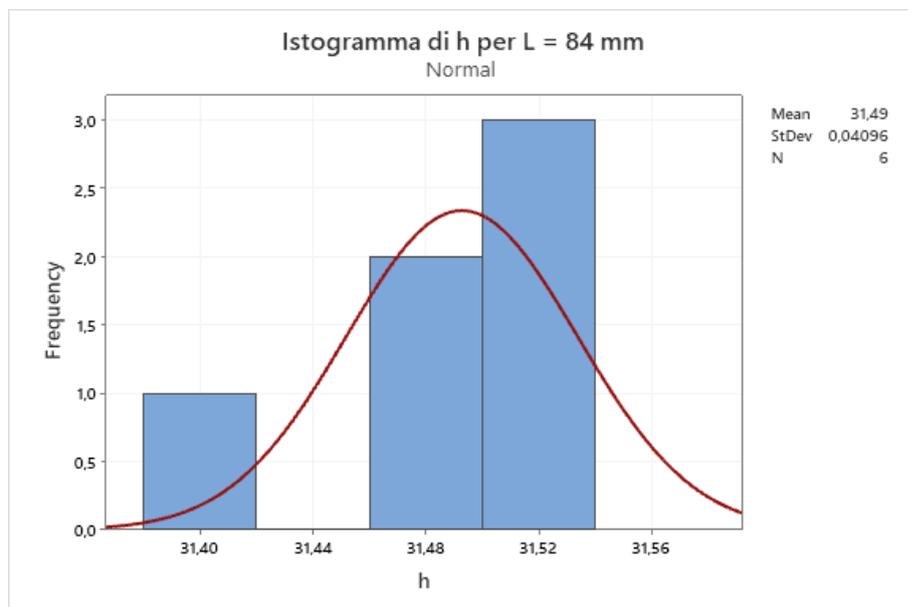


Figura 4.16: Distribuzione della dimensione h per $L = 84$ mm

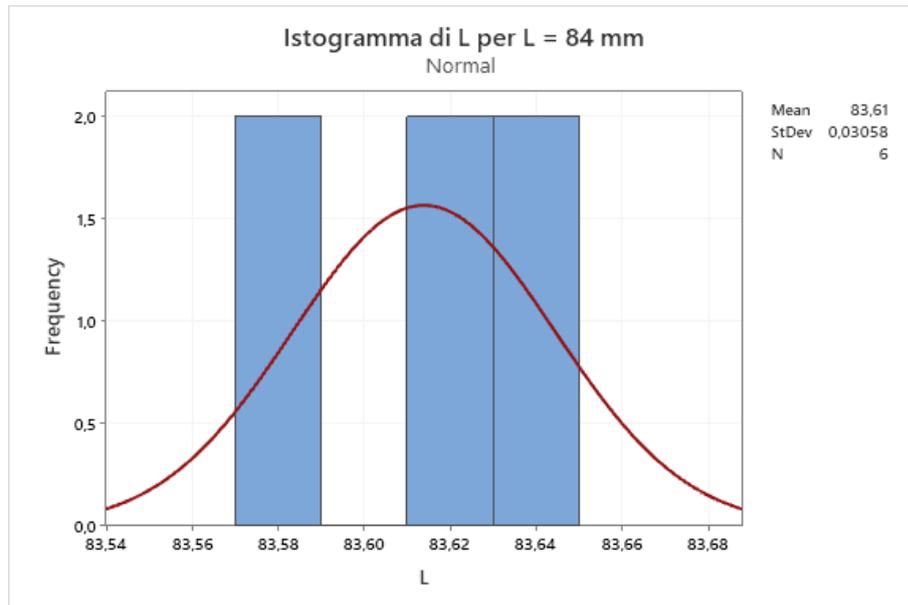


Figura 4.17: Distribuzione della dimensione L per $L = 84$ mm

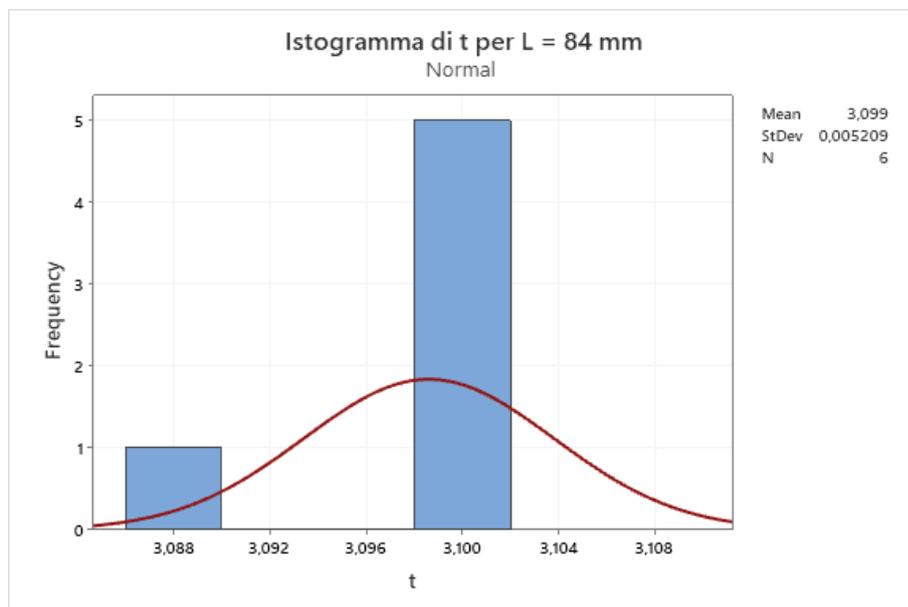


Figura 4.18: Distribuzione della dimensione t per $L = 84$ mm

Capitolo 5

Test di compressione

Dopo aver realizzato i provini, questi sono stati testati in delle prove a compressione che ne evidenziassero le caratteristiche di instabilità. Il seguente capitolo sintetizza tutti i passaggi svolti per la preparazione dei test, ne descrive l'andamento generale e riporta i successivi risultati ottenuti tramite analisi DIC dei dati.

5.1 Preparazione delle prove

Prima di cominciare le prove vere e proprie è stato necessario preparare i campioni alla Correlazione d'immagine, la quale, come detto nella sezione 3.2, necessita di una distribuzione stocastica di grigi sulla superficie da analizzare: i provini sono stati innanzitutto numerati e coperti di nastro adesivo sulle zone da non verniciare, poi spruzzati di vernice bianca; in alcuni provini la distribuzione è risultata troppo fitta, per cui sono stati prima interamente verniciati di bianco e poi spruzzati di nero.

Una fase molto importante per un'analisi DIC accurata è, come spiegato nella sotto-sezione 3.2.1, la scalatura degli spostamenti, effettuata fornendo al programma una dimensione di riferimento all'interno di un'immagine di calibrazione. Per semplificare questo passaggio, si è deciso di realizzare un basamento da appoggiare sull'afferraggio e nel quale inserire il provino, dotandolo inoltre di una piccola parete, parallela alla superficie da analizzare, sulla quale incollare un ritaglio di carta millimetrata; questa struttura aggiuntiva risulta molto pratica poiché permette un posizionamento del provino più semplice e preciso, e soprattutto fornisce una dimensione di riferimento affidabile (e meno soggetta a errori come la lunghezza del campione) in fase di calibrazione dell'analisi. Tale base è stata scomposta in due parti così da rendere più agevole la stampa ed evitare la realizzazione di supporti (paragrafo 1.2.7): una parte esterna, nella quale inserire l'afferraggio, e una interna da appoggiare sull'afferraggio stesso, dotata del foro nel quale introdurre

il campione e della parete descritta in precedenza. I modelli CAD delle due parti della base, e quello dell'assieme, sono mostrati in figura 5.1 e 5.2.

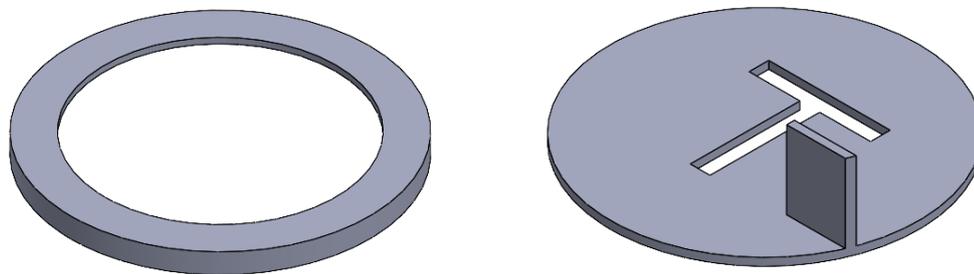


Figura 5.1: Le due parti che compongono la base per le prove di compressione

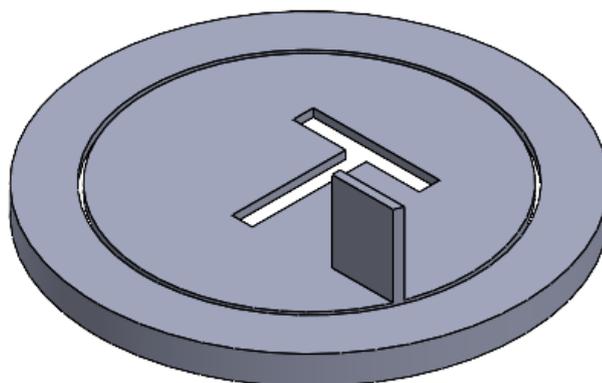


Figura 5.2: Base per le prove di compressione

Il passaggio successivo è il posizionamento della reflex, una Nikon D3500, effettuato con l'aiuto di una livella a bolla. Alcune prove precedenti a questo lavoro hanno evidenziato che, per la macchina fotografica in questione, una lunghezza focale dell'obiettivo pari a 35 mm porta a delle aberrazioni nulle o per lo meno trascurabili, per cui questa configurazione è stata utilizzata per tutte le prove e ha permesso di ignorare l'effetto di distorsione in fase di analisi.

Una volta posizionata la reflex, i provini sono stati testati: a questo scopo è stata utilizzata una MTS QTest/10, una macchina di prova a funzionamento elettromeccanico dotata di una cella di carico con capacità massima pari a 10 kN. Tale cella è montata sulla traversa mobile, posta superiormente, ed è collegata

a un computer sul quale è installato un software dedicato alla regolazione dei parametri e al monitoraggio della prova. Poiché il test di buckling non è definito negli standard ASTM [17], si è deciso di distanziarsi leggermente dalla normativa prevista per le prove a compressione su provini polimerici: si è comunque scelto lo stesso approccio (controllo di spostamento), ma a una velocità di $1.8\text{mm}/\text{min}$, appena maggiore di quella indicata nella ASTM D965 ($1.3 \pm 0.3\text{mm}/\text{min}$). I dati sono stati memorizzati a una frequenza di 5 Hz da parte del software, mentre le prove sono state registrate con una risoluzione di $1920 \times 1080\text{p}$ e a una frequenza di 60 fotogrammi al secondo.

5.2 Comportamento generale dei campioni

A una prima osservazione delle prove risulta evidente che tutti i provini sono andati in instabilità, con un andamento abbastanza uniforme tranne che per poche eccezioni:

- il provino 42-2, a causa di un piccolo incidente, si è rotto poco prima della prova;
- il provino 72-5, probabilmente a causa di qualche difetto dovuto alla stampa, ha un tratto iniziale simile, per certi versi, a un pianerottolo di snervamento, sebbene poi recuperi un andamento analogo a quello degli altri campioni;
- il provino 90-6 presentava già una leggera curvatura prima della prova, ed è infatti, come vedremo successivamente, andato in instabilità a un carico più basso rispetto agli altri campioni della sua lunghezza.

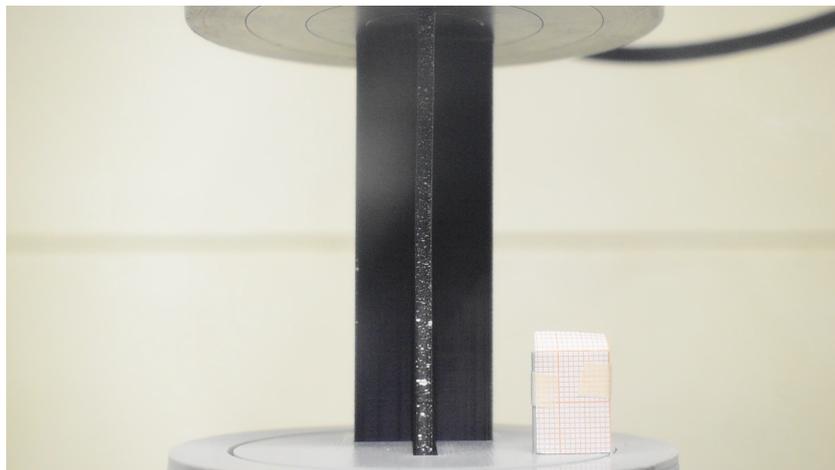


Figura 5.3: Il provino numero 90-6: un'attenta osservazione dell'immagine di riferimento evidenzia una curvatura verso sinistra

Una nota va fatta riguardo la deformata: confrontando infatti quella reale con le deformate post-buckling riportate in figura 2.4, appare subito immediato come vi sia una maggiore somiglianza con una struttura incastrata agli estremi piuttosto che con una semplicemente appoggiata, sebbene questa rappresenti la nostra ipotesi iniziale per l'analisi teorica.

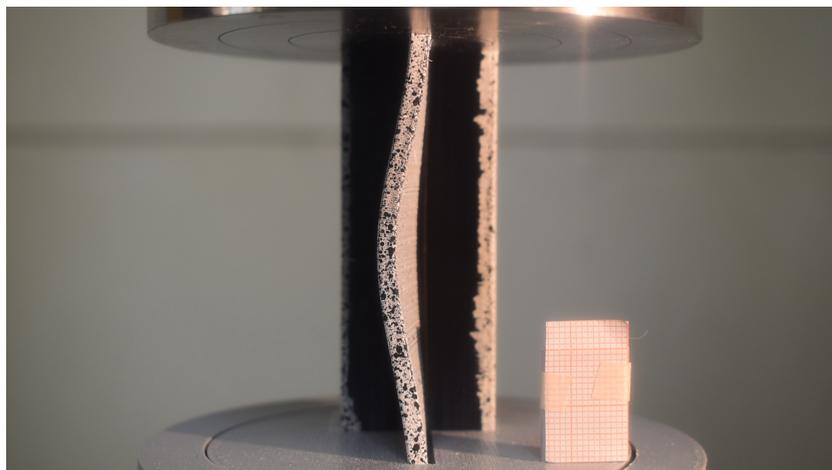


Figura 5.4: La deformata di un provino

Le figure 5.5-5.14 mostrano infine i grafici tensione-deformazione ottenuti a partire dai dati di carico e spostamento della macchina, successivamente rapportati alla sezione e alla lunghezza iniziale di ogni famiglia di provini. Notiamo come l'andamento non sia immediatamente lineare, ma sia invece presente un piccolo tratto dove la tangente, e quindi teoricamente il modulo di Young, varia: confrontando tuttavia i grafici con le immagini delle prove, si osserva che questa fase è quella antecedente al corretto e completo contatto tra afferraggio e provino, e infatti le curve hanno, successivamente, un andamento del tutto analogo tra loro e coerente con le aspettative.

5.3 Analisi DIC

Una volta acquisiti i dati delle prove, questi sono stati processati per ottenere le informazioni cercate. Come già anticipato nel capitolo 3, la Correlazione d'immagine è stata eseguita tramite il software Matlab Ncorr 2D; i risultati di questa analisi sono stati usati come input per uno script Matlab che ha infine restituito le tensioni di buckling dei provini. I prossimi paragrafi sono dedicati all'analisi DIC, al post-processing dei dati raccolti e allo script Matlab usato.

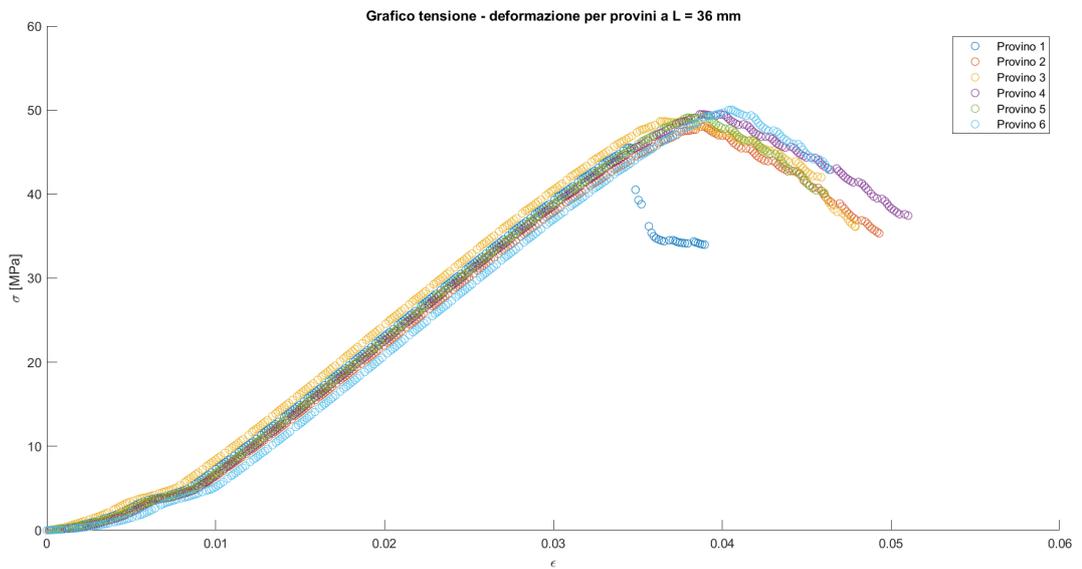


Figura 5.5: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 36 mm

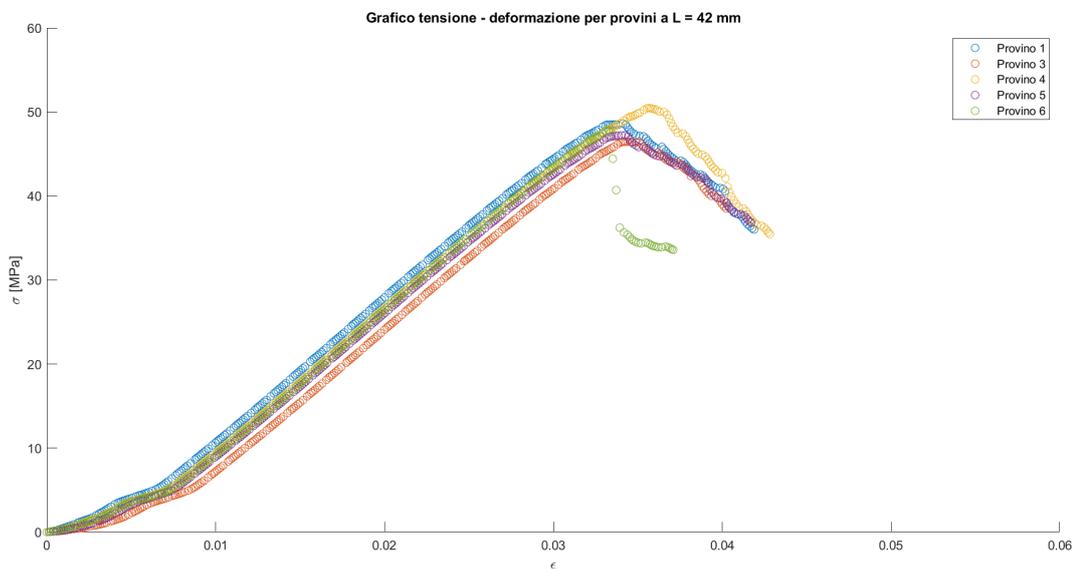


Figura 5.6: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 42 mm

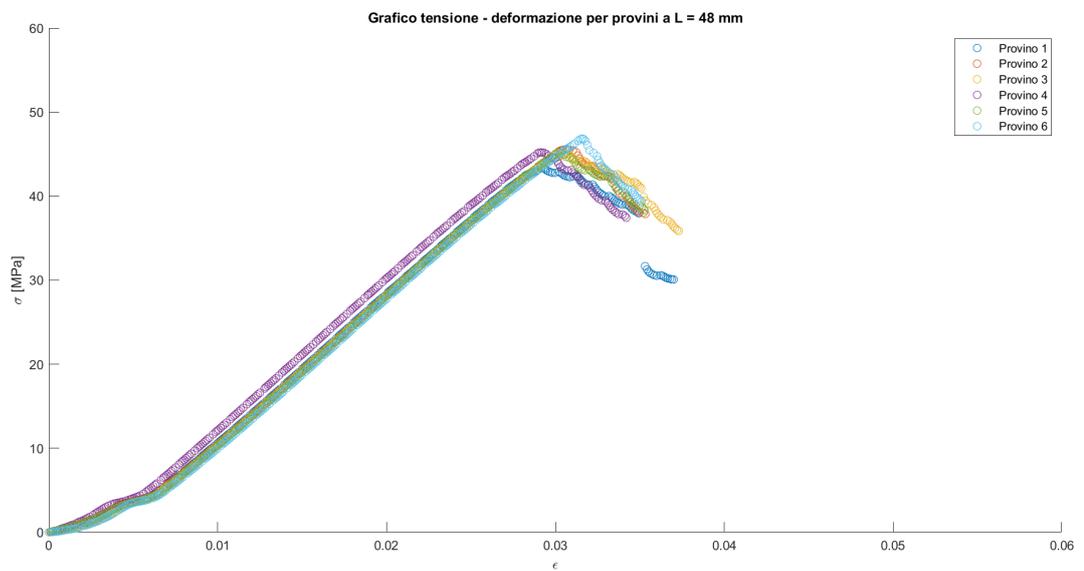


Figura 5.7: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 48 mm

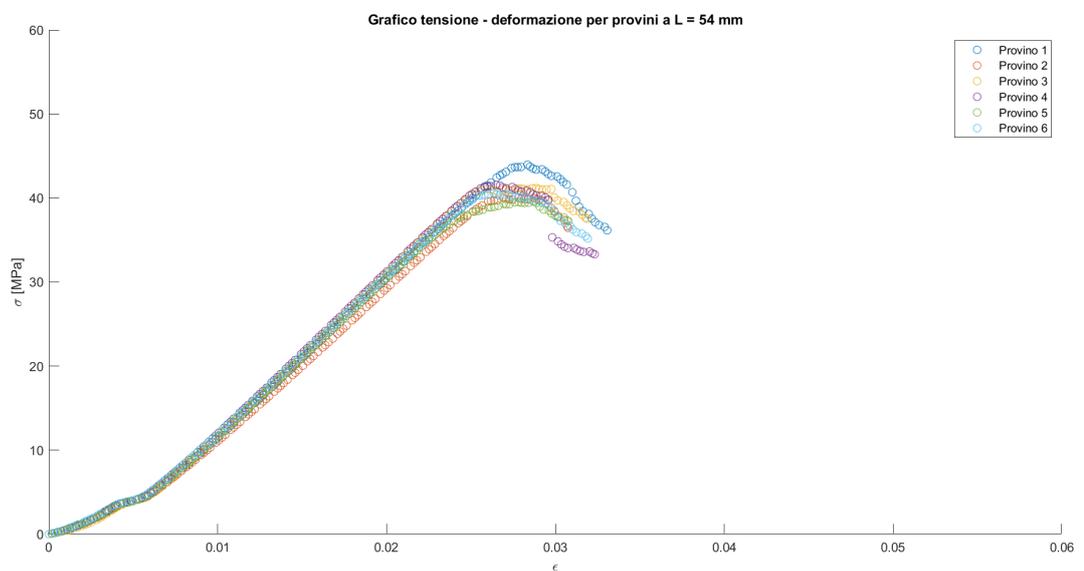


Figura 5.8: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 54 mm

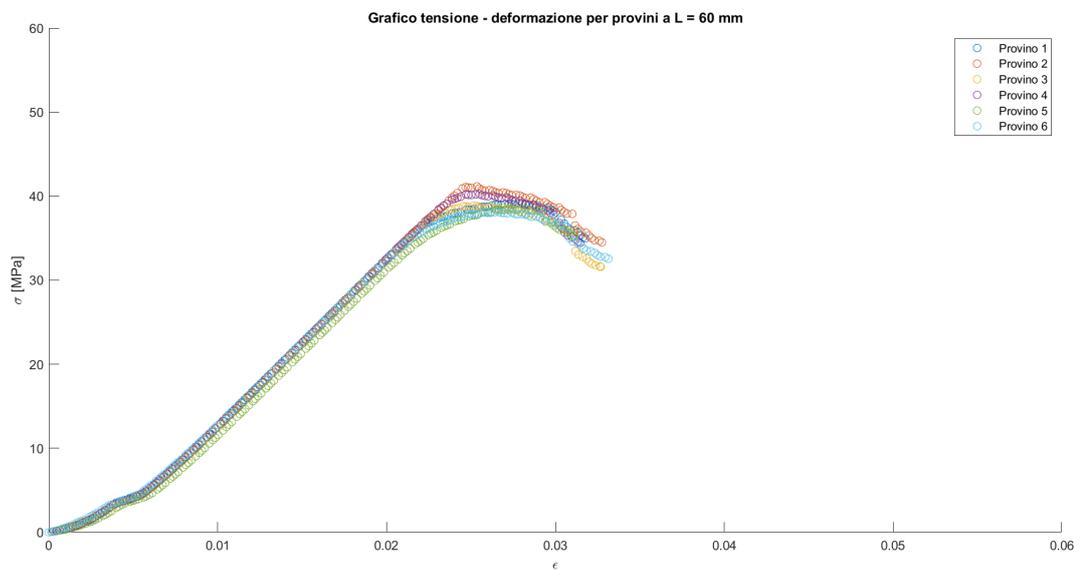


Figura 5.9: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 60 mm

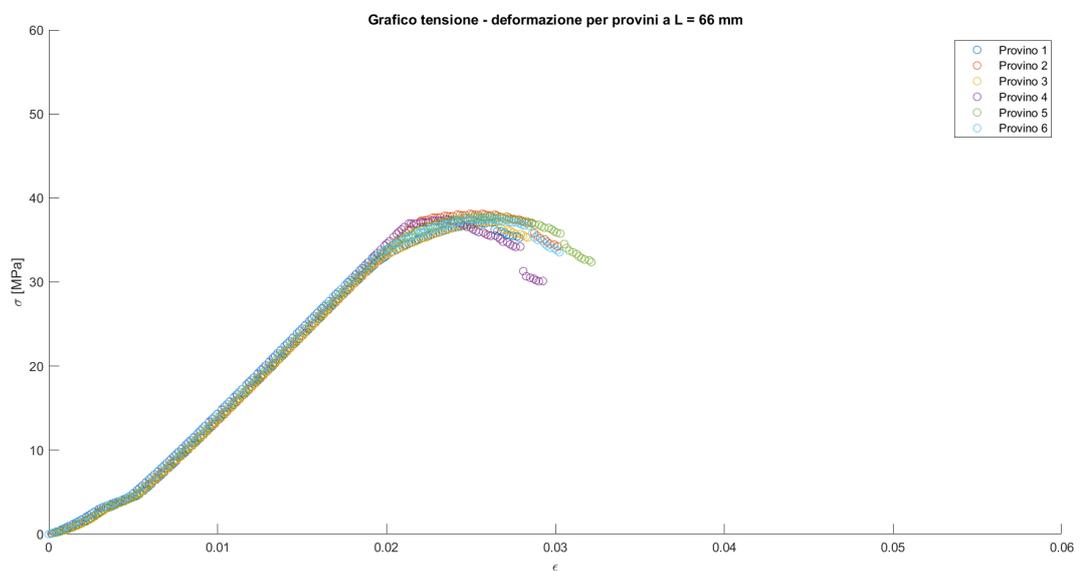


Figura 5.10: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 66 mm

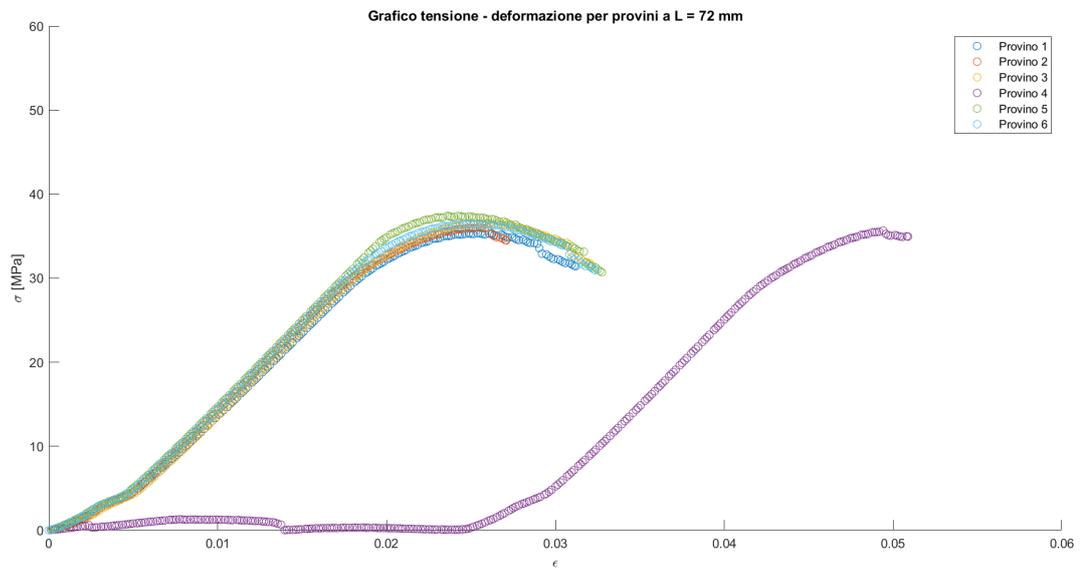


Figura 5.11: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 72 mm

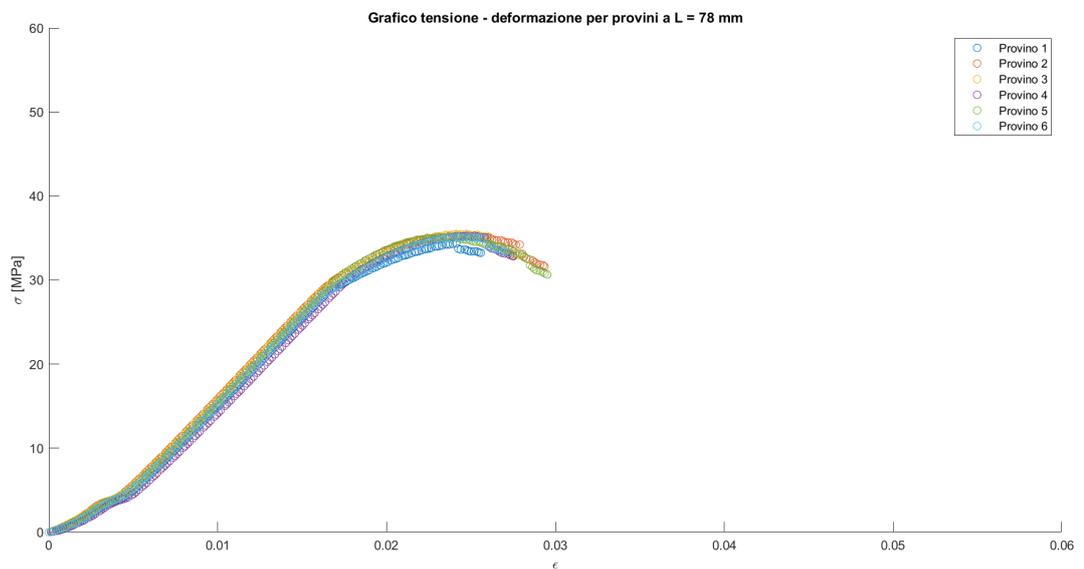


Figura 5.12: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 78 mm

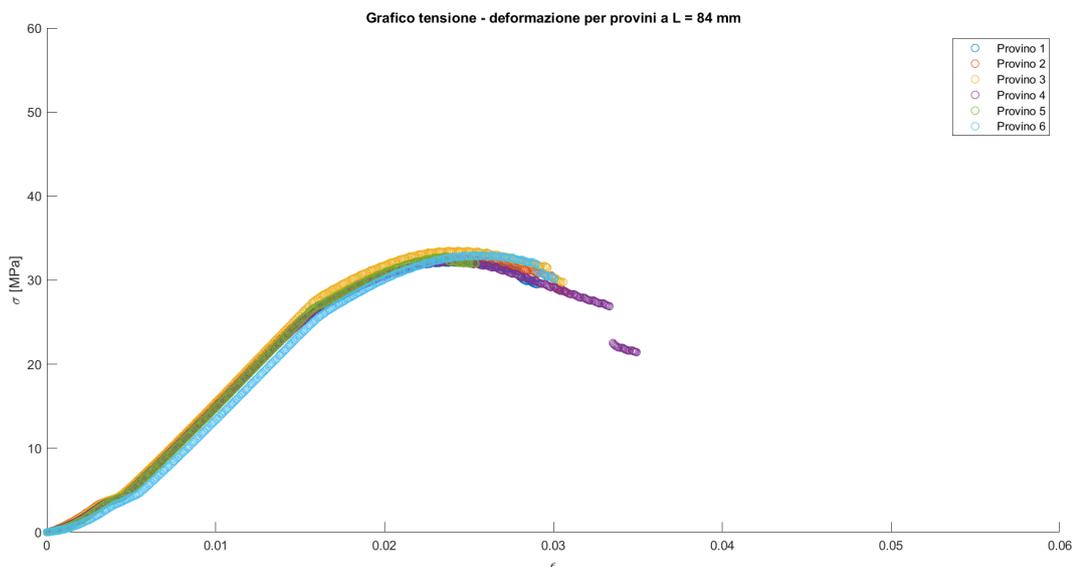


Figura 5.13: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 84 mm

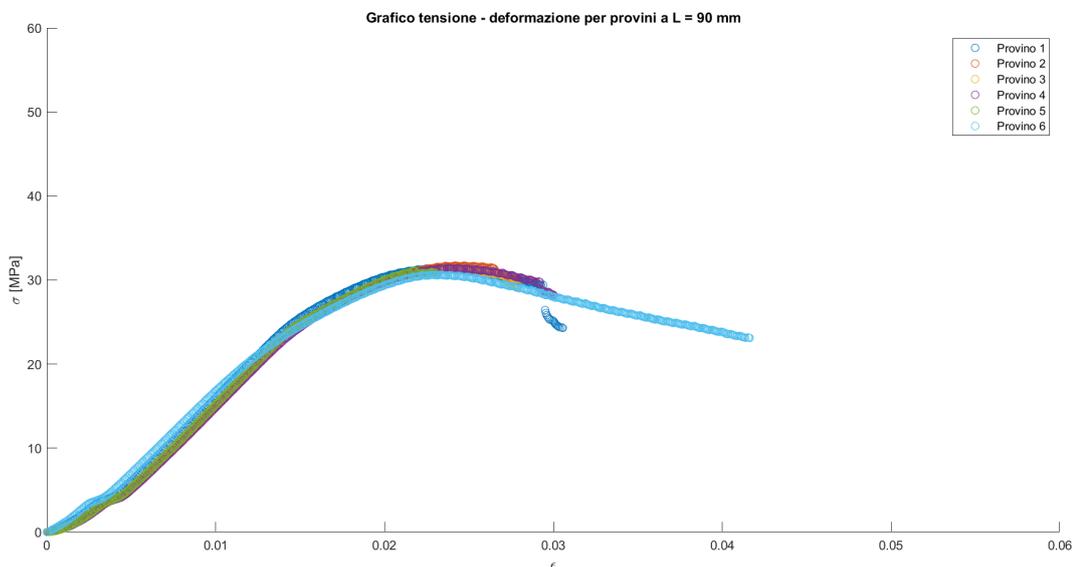


Figura 5.14: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 90 mm

5.3.1 Analisi tramite Ncorr 2D

Oltre a basarsi su un solido algoritmo, già estensivamente descritto in sezione 3.2, Ncorr 2D presenta anche una interfaccia grafica intuitiva che permette di impostare i parametri di analisi, oltre che di visualizzarne i risultati, in modo semplice.

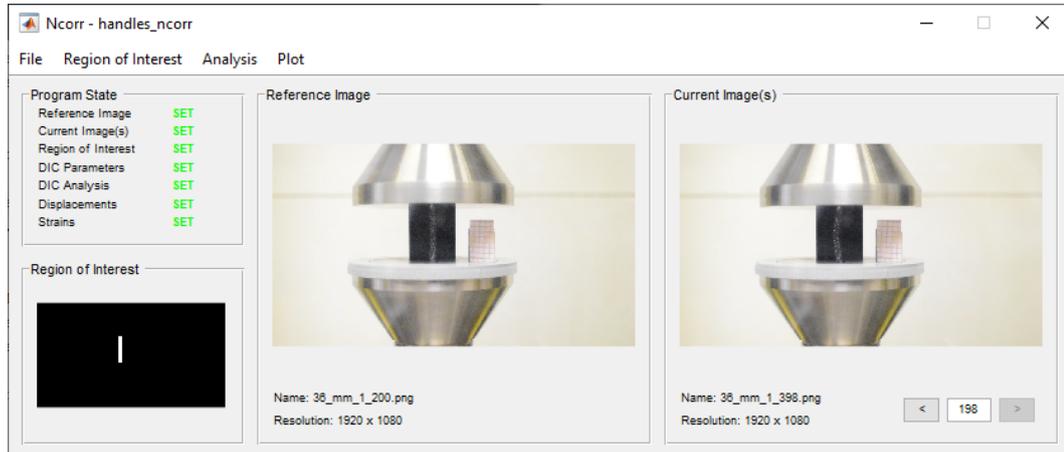


Figura 5.15: Interfaccia grafica di Ncorr 2D: notiamo centralmente l'immagine di riferimento, a destra le immagini correnti, a sinistra l'avanzamento dell'analisi e la ROI

In input il programma richiede una immagine di riferimento e tutto il set delle immagini correnti, che devono dunque essere estrapolate dal video. A questo scopo è stato utilizzato il software ffmpeg, un programma di manipolazione video eseguibile da linea di comando: semplicemente fornendo la posizione del file di input, la frequenza di campionamento desiderata e la posizione e il nome desiderati per i frame, questo esegue l'estrazione e numera le immagini, permettendo di fornirle a Ncorr con il nome nel formato richiesto, *Nomefile_###*, dove i cancelletti rappresentano un numero crescente che gli permette di ordinare correttamente le figure. Avendo estratto i dati dalla macchina di prova a 5 Hz, anche i frame sono stati selezionati a questa frequenza, in formato png per avere una migliore qualità e agevolare il compito al software di analisi.

Fornite le immagini di riferimento e correnti e tracciata la ROI, Ncorr permette di impostare il raggio dei subset e la distanza tra i loro centri in pixel, oltre al numero di seed con il quale eseguire l'analisi e il loro posizionamento: si è optato per 10 pixel di raggio, 5 pixel di distanza e tre seeds posizionati all'incirca al 25%, 50% e 75% dell'altezza del provino, sul suo asse. Una volta calibrati gli spostamenti usando l'immagine di prova, sono infine state calcolate le deformazioni impostando un raggio di interpolazione di 5 pixel (sotto-sezione 3.2.2).

5.3.2 Elaborazione dei risultati di Ncorr 2D

I risultati ottenuti dall'analisi vengono salvati da Ncorr in un file in formato .mat, che presenta, per ogni frame, gli spostamenti u e v organizzati in matrici: queste hanno degli zeri al di fuori della ROI, mentre un valore non nullo rappresenta lo spostamento di un facet nell'unità di misura fornita in fase di calibrazione, o in pixel. Per ogni direzione sono inoltre presenti tre diversi approcci: pre-calibrazione (quindi con gli spostamenti espressi in pixel), lagrangiano ed euleriano, a indicare che lo spostamento sia riferito alla ROI dell'immagine di riferimento o a quella dell'immagine corrente.

Lo script realizzato per processare i risultati di Ncorr analizza congiuntamente i dati dei carichi esercitati dalla macchina di prova e i risultati dello spostamento trasversale ottenuti dall'analisi di correlazione. Il codice riceve in input il file DIC e quello della macchina, insieme all'indice, nel vettore dei carichi, che corrisponde alla forza esercitata dalla macchina di prova in corrispondenza del primo frame analizzato dalla correlazione d'immagine; successivamente lo script approssima con due regressioni lineari il comportamento del provino precedente e successivo al buckling, individuando nella loro intersezione, poiché idealmente rappresenta il punto di separazione tra le due condizioni, il carico di instabilità. I dettagli dei passaggi eseguiti sono elencati di seguito:

- *Rilevazione della posizione della ROI*: i dati del primo frame vengono analizzati da un ciclo che, individuando le caselle non nulle, ricava la ROI, la cui posizione rimane la stessa per tutti i fotogrammi facenti riferimento all'approccio di tipo lagrangiano;
- *Acquisizione dei dati sugli spostamenti*: poiché il provino è in parete sottile, l'asse può essere considerato rappresentativo del suo comportamento. Gli spostamenti della colonna centrale di facet, nel caso la ROI sia composta da tre colonne di dati, o di una media degli spostamenti delle colonne centrali, in caso di ROI più larghe, vengono dunque salvati in una matrice da cui successivamente viene estratta la riga centrale, che rappresentando il punto a $L/2$ è quella da cui si può più facilmente rilevare il buckling. Durante tale processo viene al contempo ridotta la frequenza fino a 1.25 Hz, per ridurre il rumore e facilitare la regressione;
- *Raddrizzamento del provino*: idealmente, lo spostamento trasversale u dovrebbe essere speculare rispetto all'asse del provino a causa del coefficiente di Poisson, e uniforme lungo la sua altezza, mentre il punto selezionato per la nostra analisi, centrale sia lungo l'altezza che lungo lo spessore, dovrebbe rimanere fermo fino all'instaurarsi del buckling. In realtà, i grafici mostrano un disallineamento progressivo delle basi dovuto probabilmente a riposizionamenti del campione e a giochi presenti nella macchina. Supposto dunque tale moto

lineare, in questa fase viene tracciata, frame per frame, una retta a partire dagli spostamenti dei due estremi, usata poi come offset per quelli di tutto il provino;

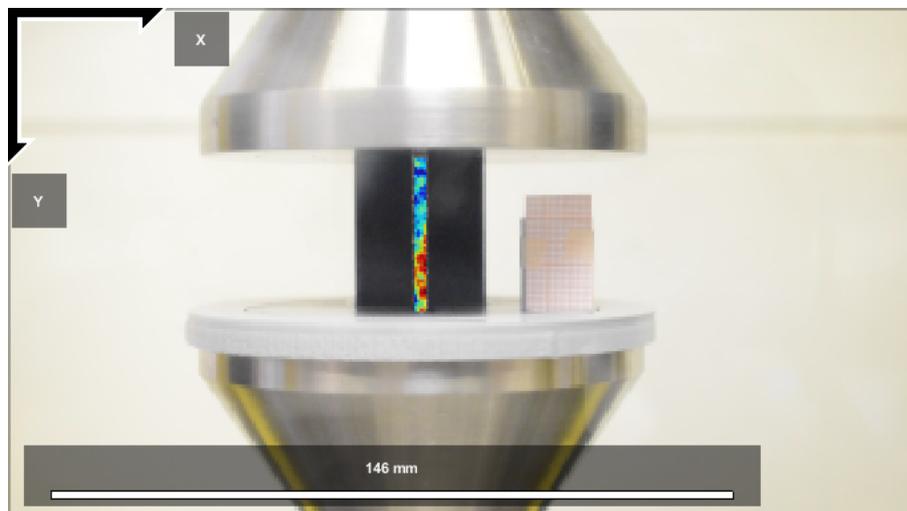


Figura 5.16: Spostamenti u del provino 36-5 per un carico lontano dalla condizione di instabilità

- *Individuazione degli intervalli di regressione:* i due intervalli sono rilevati analizzando l'andamento del coefficiente di correlazione lineare tra carico e spostamento trasversale. Tramite due cicli, uno in avanti dal primo termine, l'altro a ritroso dall'ultimo, il codice calcola il valore cercato su un intervallo di estensione definita in input, estendendone progressivamente la dimensione e fermando il ciclo quando, rispettivamente, la variazione percentuale tra due coefficienti consecutivi supera il 7% per il tratto iniziale e il 5% per quello finale;
- *Calcolo rette di regressione e punto di buckling:* una volta ricavati gli intervalli, vengono dunque calcolate le rette di interpolazione tramite il comando *polyfit*, usate poi per ottenere il loro punto di intersezione (ossia il punto di buckling) applicando il comando *fzero* nell'intorno di 0, fornendo come input un function handle dato dalla differenza tra le due funzioni.

In tabella 5.1 sono riportati i valori di tensione di buckling ricavati tramite questo script, e le tensioni medie per ogni famiglia. Per il calcolo di queste ultime, oltre ai provini già citati in sezione 5.2, sono stati esclusi anche i provini 72-1, poiché presenta una base superiore non parallela alla superficie mobile della macchina che ha portato a dei dati non affidabili, e il provino 84-6, che non è stato analizzato

poiché, come è risultato poi evidente durante il settaggio della ROI, il suo asse non era verticale e i risultati sarebbero dunque stati falsati.

In figura 5.17 presentiamo poi il grafico delle tensioni medie di instabilità al variare della dimensione L : si osserva un andamento assolutamente plausibile, che mostra una decrescita abbastanza uniforme all'aumentare della lunghezza, come previsto inizialmente.

L	1	2	3	4	5	6	σ_m
36	43.39	50.76	48.22	49.55	52.25	50.94	49.18
42	48.55	/	46.51	51.35	47.37	45.51	47.86
48	42.65	44.22	42.89	46.04	43.69	45.35	44.14
54	45.71	39.94	41.00	43.52	38.02	42.56	41.79
60	36.25	42.34	41.01	40.09	34.50	36.96	38.52
66	31.62	36.48	31.96	37.05	33.80	33.66	34.09
72	34.51	28.26	29.73	27.24	35.38	31.30	29.13
78	26.99	29.50	27.96	30.64	29.71	27.70	28.75
84	24.08	24.50	27.55	24.24	26.26	/	25.30
90	24.01	22.05	22.17	21.85	22.58	17.40	22.53

Tabella 5.1: Tensioni di buckling per tutti i provini, e le relative tensioni di buckling medie, in MPa

Le immagini 5.18-5.27 riportano i grafici relativi agli andamenti tensione vs. spostamento di un provino per famiglia, e il relativo punto di buckling. Si nota come la pendenza del tratto successivo all'instabilità vari con la lunghezza del campione, passando anche da negativa a positiva all'aumentare di L , a indicare, nei provini più corti, il superamento della tensione di snervamento del materiale.

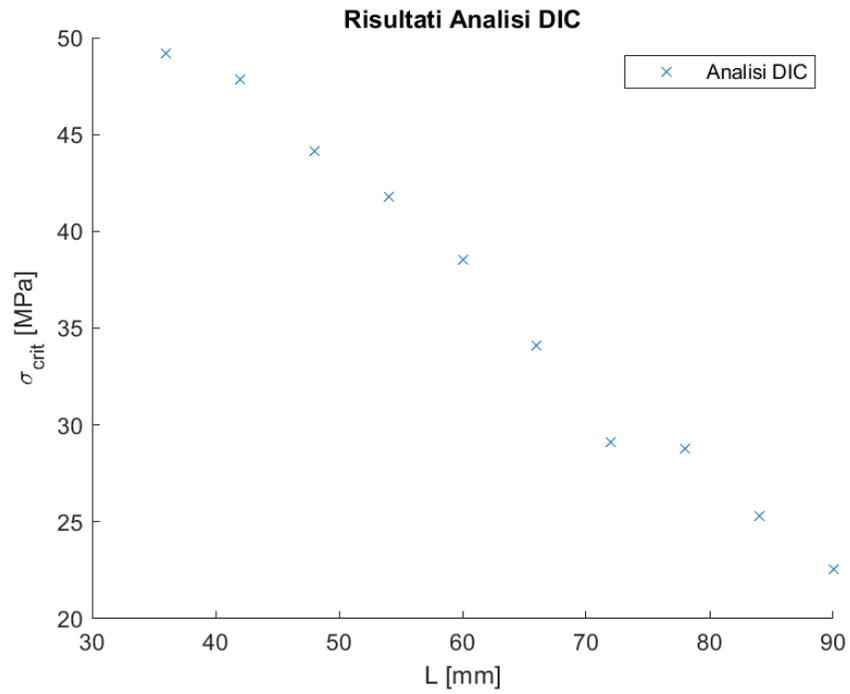


Figura 5.17: Andamento della tensione media di instabilità al variare della lunghezza L dei provini

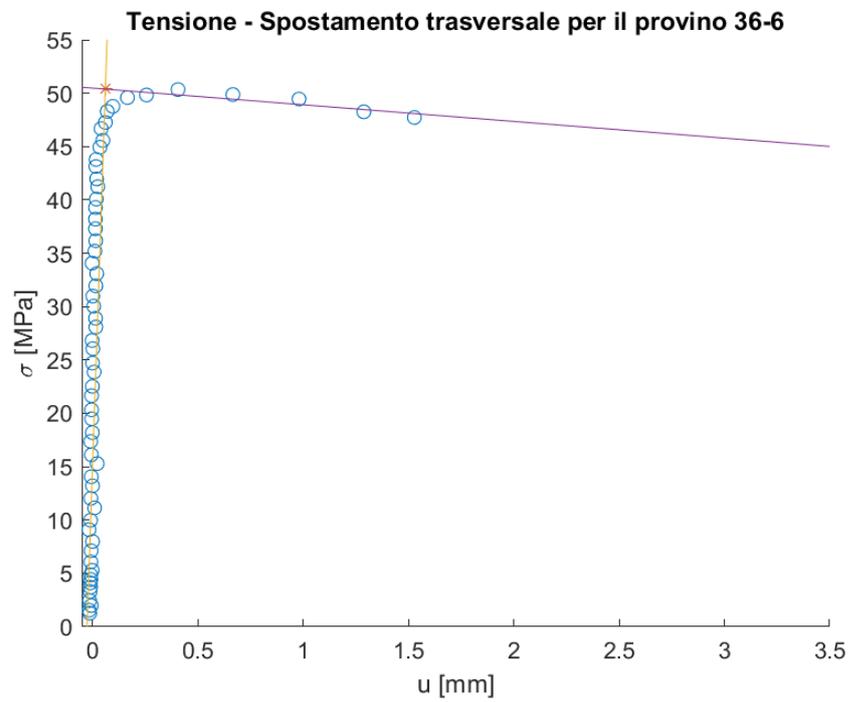


Figura 5.18: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 36 mm

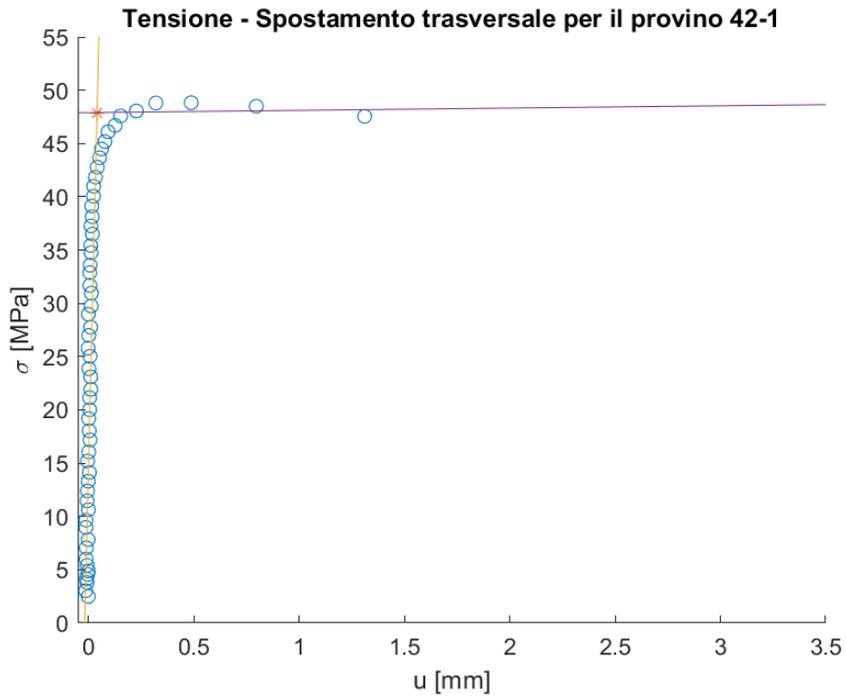


Figura 5.19: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 42 mm

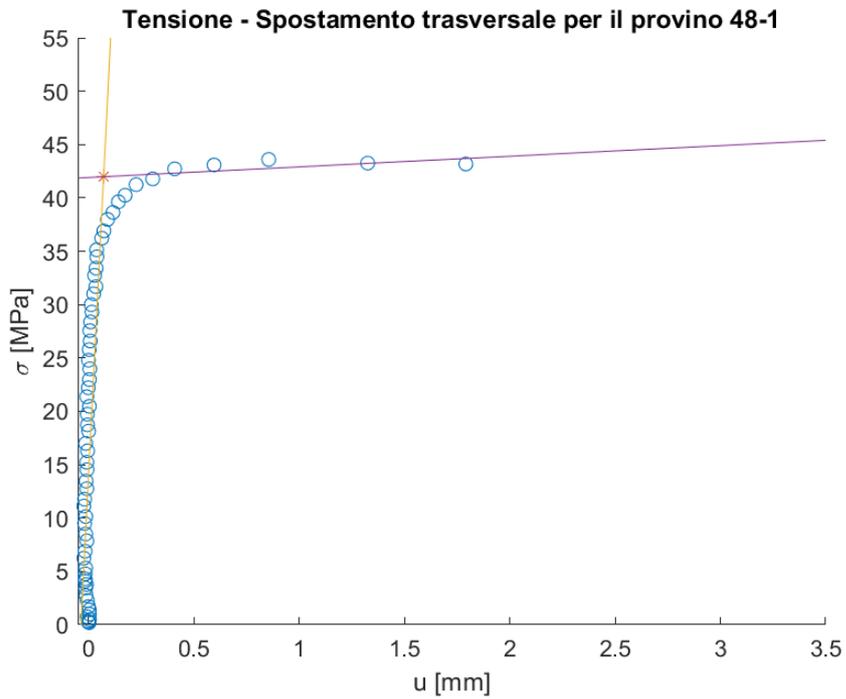


Figura 5.20: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 48 mm

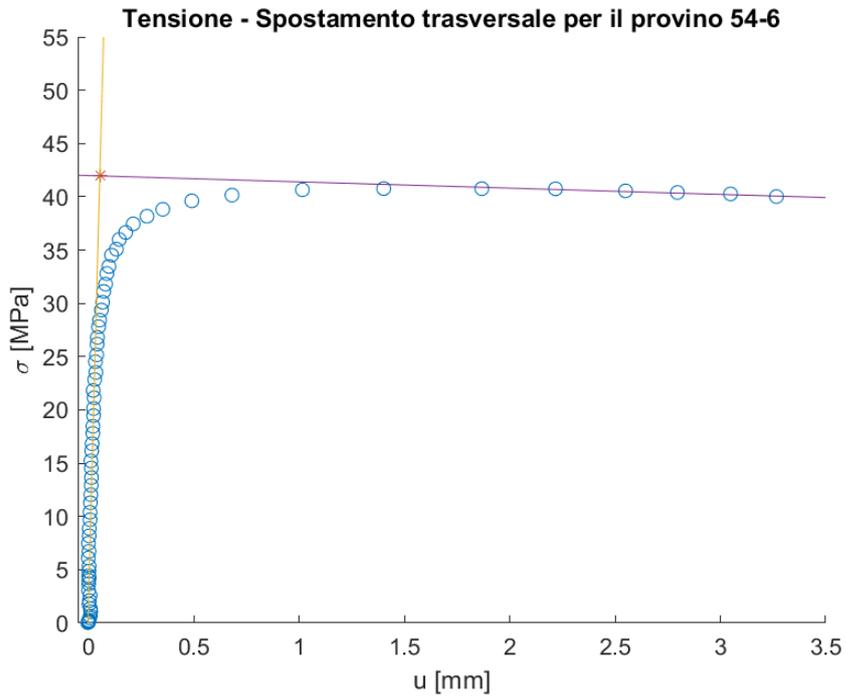


Figura 5.21: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 54 mm

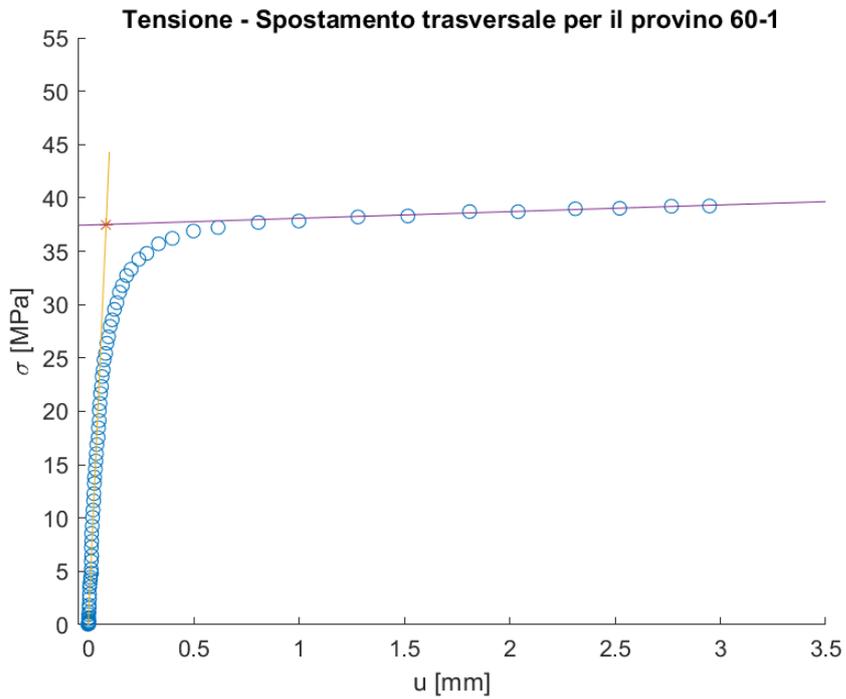


Figura 5.22: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 60 mm

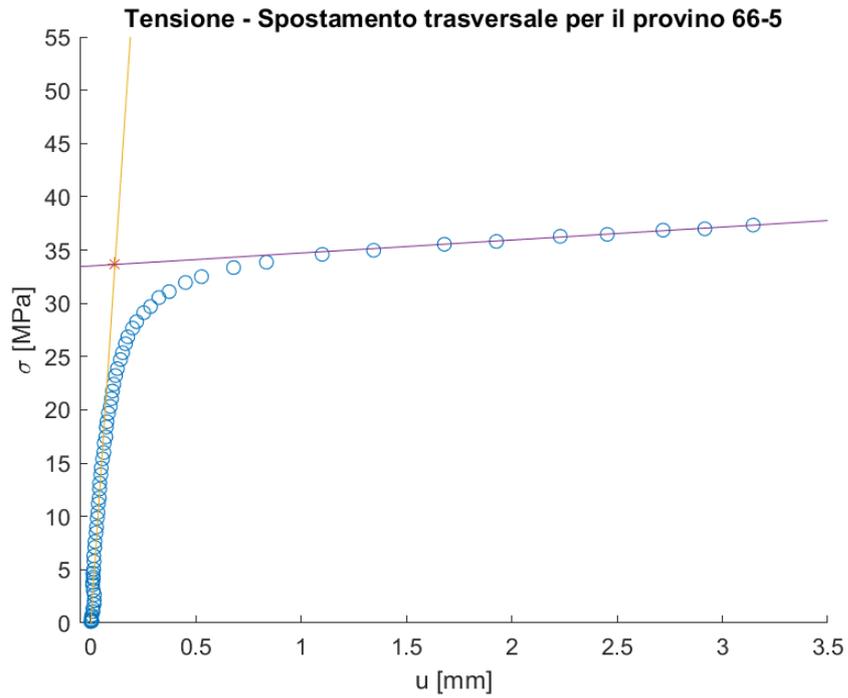


Figura 5.23: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 66 mm

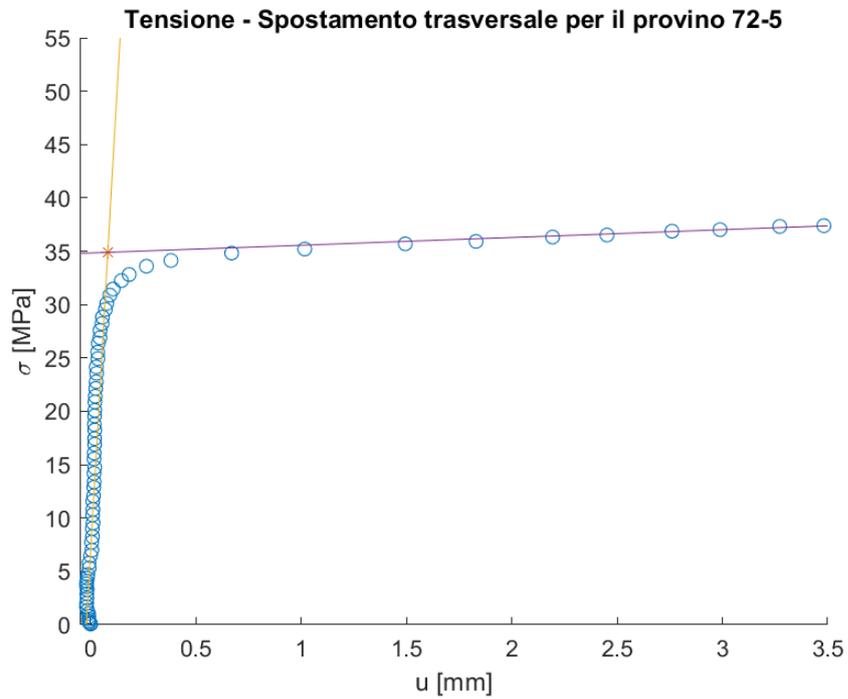


Figura 5.24: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 72 mm

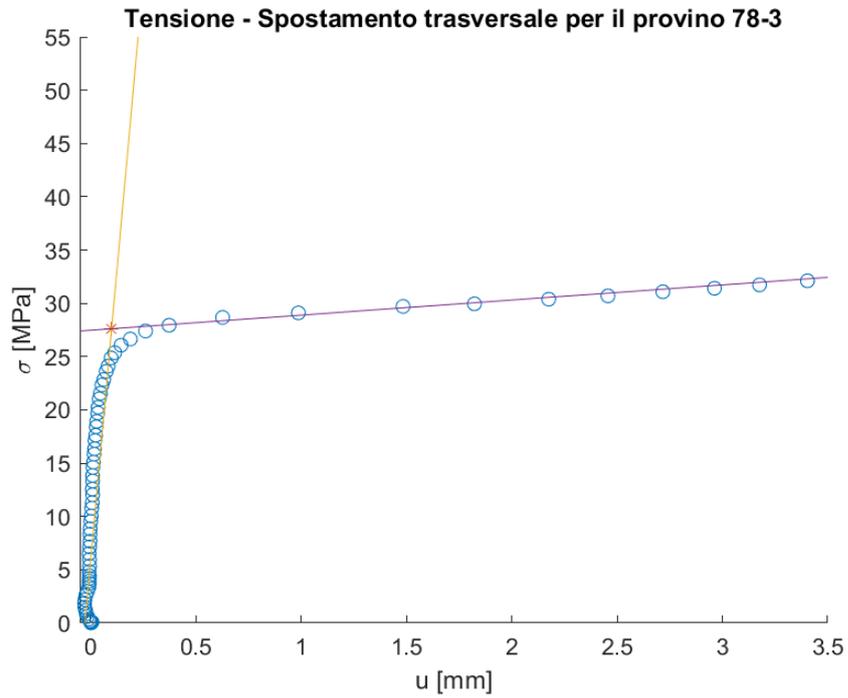


Figura 5.25: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 78 mm

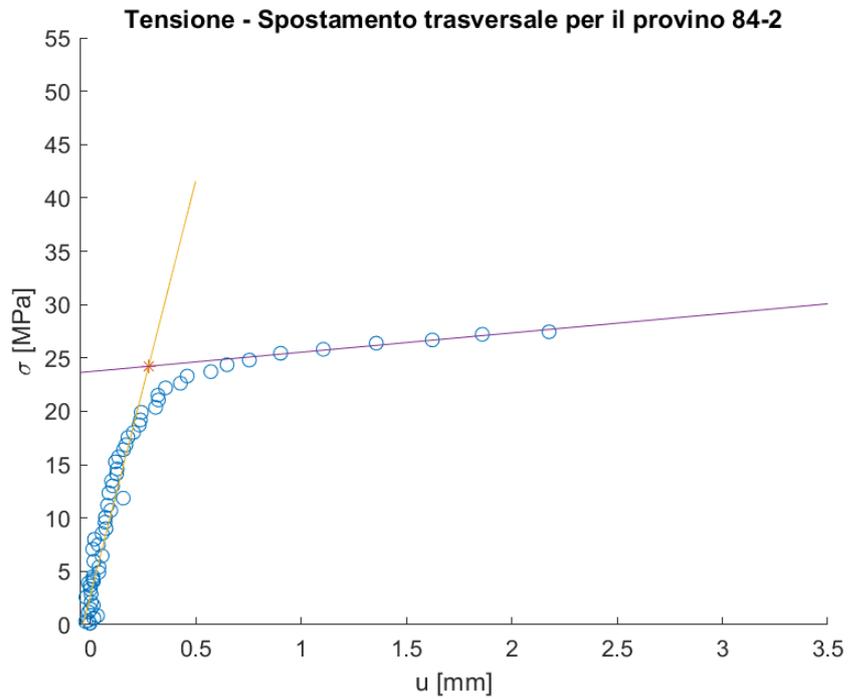


Figura 5.26: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 84 mm

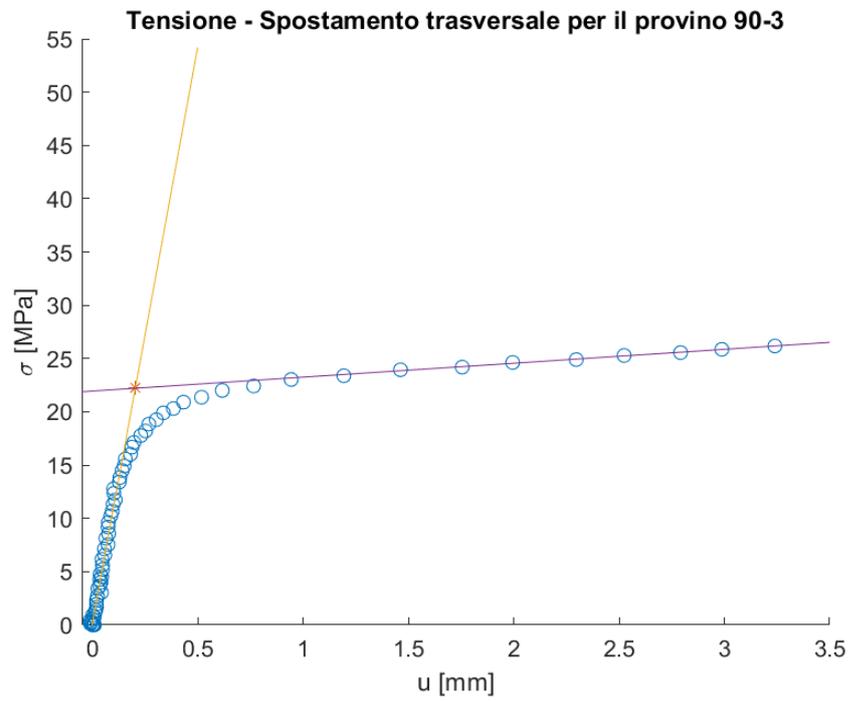


Figura 5.27: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 90 mm

Capitolo 6

Analisi teorica

Come già annunciato, lo studio del fenomeno dell'instabilità locale è stato effettuato anche attraverso l'applicazione di un modello sperimentale che potesse descriverlo. Nel presente capitolo saranno spiegati tutti i passaggi che hanno portato all'individuazione delle caratteristiche del materiale e alla loro applicazione nel modello scelto.

6.1 Parametri del materiale

I test sperimentali condotti in questo lavoro hanno permesso di ricavare le curve carico vs spostamento dei campioni, le quali, tra le altre cose, possono essere indagate per ricavare le caratteristiche del materiale, necessarie per analisi di tipo teorico o numerico.

In base alla normativa ASTM D695-15 relativa ai test di compressione per i materiali polimerici [17], che si è scelto di seguire poiché non ne esiste una specifica per polimeri stampati tramite FDM, caratteristiche meccaniche quali ad esempio il modulo di elasticità, la tensione di rottura o la tensione di snervamento vanno ricavate a partire da test di compressione, effettuati su provini quadrati di dimensioni specifiche per la grandezza in esame. Per ricavare dunque il modulo di elasticità necessario allo studio della tensione critica, non è stato possibile utilizzare i dati relativi alle prove descritte nel capitolo 5, ma si è dovuto attingere a quelli raccolti nel corso dei test eseguiti per lo studio del buckling globale, estensivamente descritti nel corso della successiva parte III. Secondo la normativa, a questo scopo sono necessari campioni di snellezza compresa tra 11 e 16, condizione che nel nostro caso ci ha indirizzati verso la famiglia di lunghezza pari a 55 mm. Ricordiamo che la snellezza di un'asta è data da

$$\lambda = \frac{L}{\rho} \tag{6.1}$$

Dove L è la lunghezza dell'asta in esame e ρ è il raggio d'inerzia della sezione trasversale, per una sezione quadrata dato da

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} \quad (6.2)$$

Dove a è il lato della sezione. Per la famiglia di provini da 55 mm si è ricavata una snellezza pari a 14.36, ampiamente all'interno dell'intervallo descritto. Come per i provini a T, anche in questo caso erano a disposizione sei campioni per famiglia, testati a compressione tramite una macchina di prova capace di registrare, a una frequenza definita in input, il carico esercitato dalla macchina e lo spostamento della traversa mobile. A partire dalle curve delle prove, dividendo per la sezione e la lunghezza nominali, rispettivamente, il carico e lo spostamento della traversa, sono state dunque ricavate le curve tensione - deformazione di ogni provino, analizzate poi tramite uno script Matlab per ricavare il modulo di elasticità del materiale.

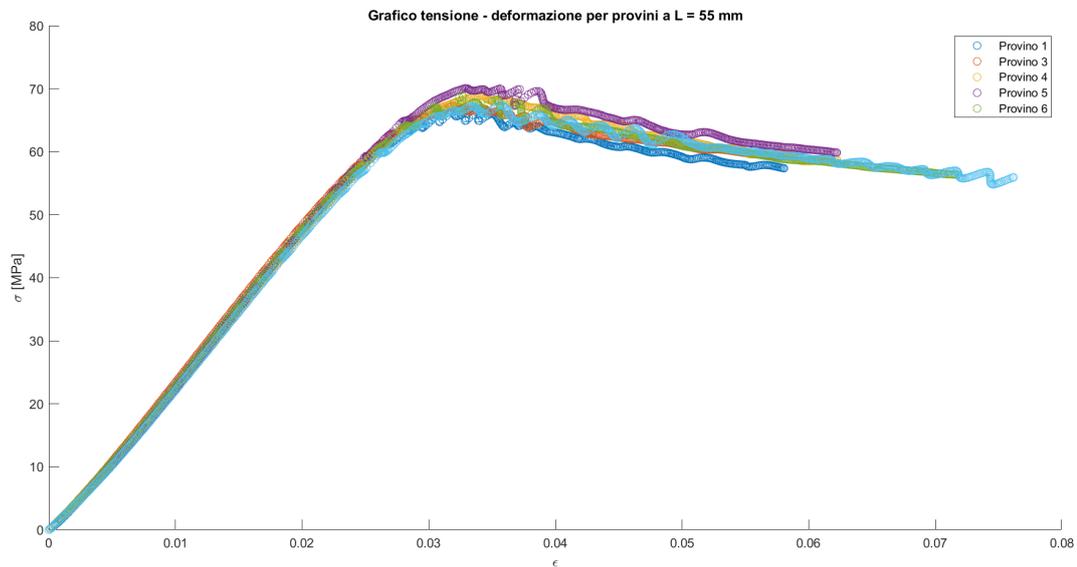


Figura 6.1: Grafici tensione-deformazione per la famiglia di provini a sezione quadrata da 55 mm

Il codice, in particolare, calcola il coefficiente angolare di una retta di interpolazione definita su un intervallo iniziale la cui estensione è data in input; ampliando progressivamente l'intervallo, viene calcolato a ogni iterazione il coefficiente angolare medio, arrestando il ciclo quando la variazione percentuale tra il coefficiente medio e quello relativo all'intervallo supera il 3%; il valore medio viene allora preso come modulo di Young del provino. Come richiesto dalla normativa, tale procedura è stata ripetuta per tutti i campioni ed è stato poi calcolata la loro media, presa

come riferimento per il materiale. I coefficienti ricavati tramite questa procedura sono riportati in tabella 6.1.

L	1	2	3	4	5	6	E
55	2478.58	2496.78	2352.08	2376.71	2437.91	2403.64	2424.28

Tabella 6.1: Moduli di Young dei provini a sezione quadrata da 55 mm e del materiale, in MPa

6.2 Applicazione del modello teorico

Una volta ricavato il modulo di Young del materiale, questo è stato utilizzato per ricavare le tensioni critiche usando le formule per le piastre già presentate nel capitolo 2, impiegate per studiare il comportamento dell'anima centrale del provino a T: in particolare, questa è stata qui modellizzata come una piastra appoggiata sui lati carichi e vincolata su uno dei due lati scarichi, vincolo quest'ultimo che sul provino corrisponde all'incrocio tra le tre flange e che è stato idealizzato prima come un semplice appoggio e poi come un incastro. Le rappresentazioni della piastra nei due casi per il modello studiato sono mostrate in figure 6.2 e 6.3.

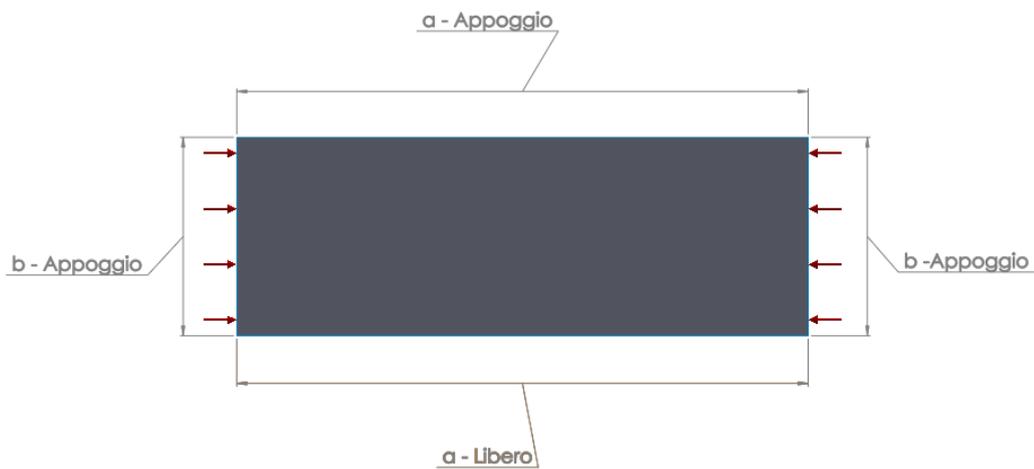


Figura 6.2: Visualizzazione della piastra analizzata, insieme ai vincoli del modello nel primo caso studiato

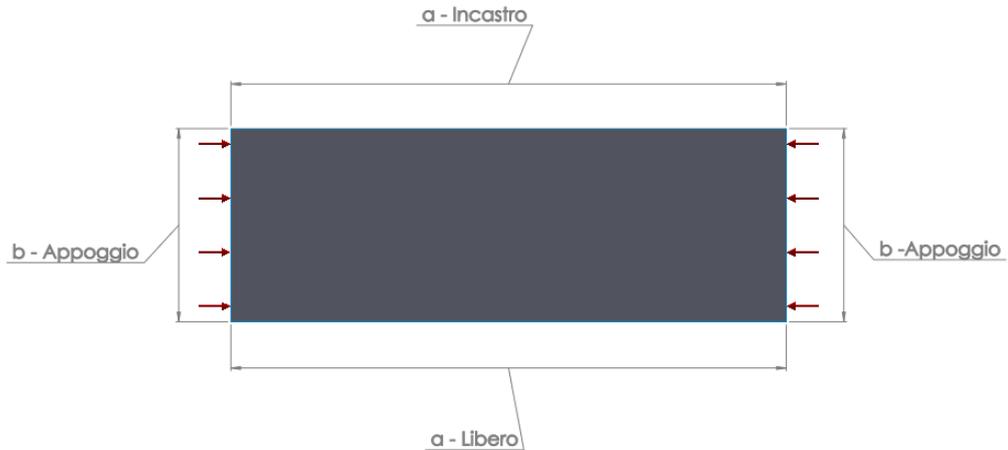


Figura 6.3: Visualizzazione della piastra analizzata, insieme ai vincoli del modello nel secondo caso studiato

Ricordiamo che la tensione critica di una piastra è data da

$$\sigma_{crit} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (6.3)$$

Mentre il coefficiente di instabilità k , nel modello scelto, è dato da

$$k = \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 + p + q \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \quad (6.4)$$

Dove α è il rapporto a/b tra i lati della piastra, p e q sono coefficienti dipendenti dai vincoli, n è il numero di semi-onde previsto dal modello, ricavabile dal grafico in figura 2.8 che rappresenta l'andamento del coefficiente k al variare di α e delle condizioni di vincolo. I valori di p , q e n nei due casi studiati sono riportati in tabella 6.2.

Vincoli sui lati scarichi	p	q	n
Appoggio - libero	0.43	0	1
Incastro - libero	0.57	0.13	1 ($\alpha < 2.2$), 2 ($\alpha \geq 2.2$)

Tabella 6.2: I valori di p , q e n nelle due differenti condizioni di vincolo considerate

Considerando dunque che il rapporto a/b varia tra 1.2 per i provini da 36 mm e 3 per quelli da 90 mm abbiamo, con $\nu = 0.36$, i risultati in tabella 6.3. Per completezza, la tabella riporta anche il rapporto b/t esatto per ogni famiglia,

nominalmente pari a 10 ma leggermente più basso nella realtà, usato per il calcolo; le colonne 4 e 5 riportano i valori di k e σ_{crit} calcolati per lati scarichi con vincoli di tipo appoggio-libero, mentre le colonne 6 e 7 riportano quelli calcolati nel caso di lati scarichi con vincoli di tipo incastro-libero; la colonna 8 riporta, infine, le tensioni ricavate dall'analisi sperimentale.

L [mm]	b/t	α	k_{app}	σ_{app} [MPa]	k_{inc}	σ_{inc} [MPa]	σ_{sperim}
36	9.65	1.2	1.12	27.56	1.44	35.56	49.18
42	9.74	1.4	0.94	22.58	1.33	32.00	47.86
48	9.70	1.6	0.82	19.86	1.28	31.18	44.14
54	9.77	1.8	0.73	17.60	1.28	30.79	41.79
60	9.83	2.0	0.68	16.01	1.32	31.30	38.52
66	9.61	2.2	0.63	15.65	1.55	38.35	34.09
72	9.55	2.4	0.60	15.03	1.44	36.27	29.13
78	9.78	2.6	0.57	13.73	1.37	32.89	28.75
84	9.66	2.8	0.55	13.55	1.33	32.51	25.30
90	9.67	3.0	0.54	13.14	1.30	31.75	22.53

Tabella 6.3: Tensioni di buckling per tutte le famiglie di provini in entrambe le condizioni di vincolo considerate, e tensioni medie ricavate dalle analisi sperimentali

In figura 6.4 sono riportati gli andamenti dei risultati dell'analisi teorica e dell'analisi sperimentale. Notiamo come essi differiscano notevolmente, a dimostrazione che nessuno dei due modelli riesca a rappresentare al meglio i campioni analizzati. Il modello con vincoli di tipo incastro-libero sui lati scarichi, per di più, per $L > 60$ mm prevederebbe un numero di semi-onde pari a 2 nella condizione di post-buckling, ipotesi questa che non ha alcun riscontro nelle nostre analisi sperimentali.

Approfondendo lo studio, e confrontando la curva dei risultati sperimentali con quelle del coefficiente di instabilità mostrate in figura 2.8, si potrebbe ipotizzare che la curva reale sia in realtà più vicina a quella relativa a una piastra incastrata sulle basi, nel grafico riportata con una linea tratteggiata, nonostante non siano possibili considerazioni riguardo al vincolo sui lati scarichi. Da un punto di vista teorico, tale considerazione non può al momento essere confermata, poiché non siamo in possesso dei valori di p e q da utilizzare per questa condizione di vincolo. L'ipotesi di basi incastrate verrà di conseguenza approfondita nel corso dell'analisi numerica.

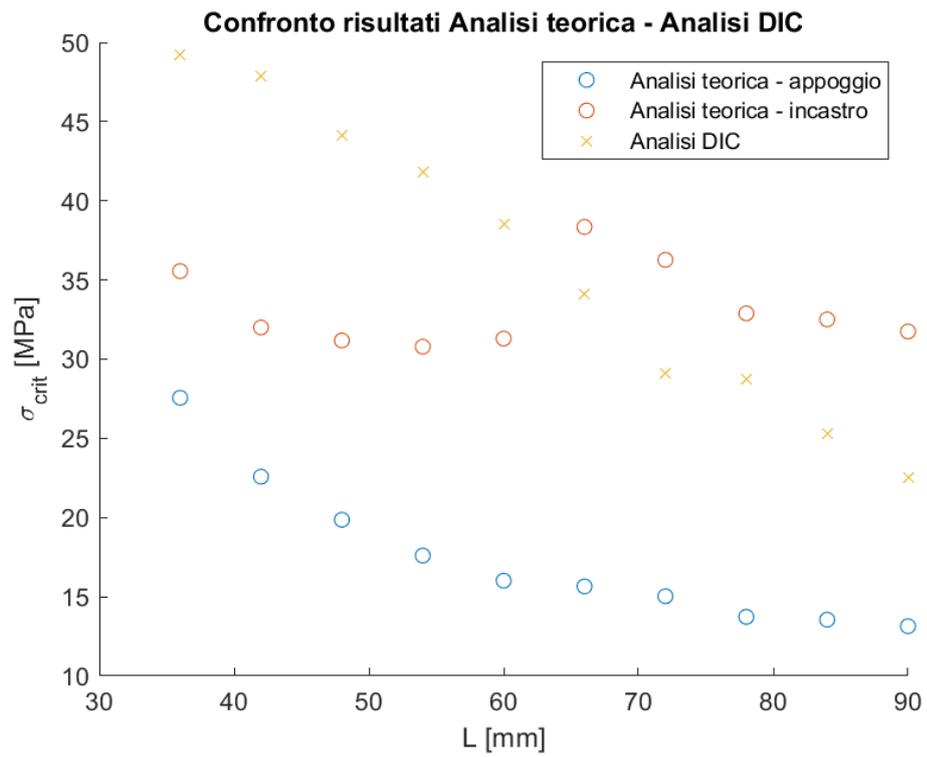


Figura 6.4: Confronto tra i due modelli usati e i risultati dell'analisi DIC

Capitolo 7

Analisi numerica

L'ultimo step di questa campagna sperimentale è dato dall'analisi numerica. Nel presente capitolo verranno descritti nel dettaglio tutti i passaggi di questa fase, dalle soluzioni utilizzate alla realizzazione del modello ai risultati ottenuti.

7.1 Introduzione

Come ben noto, l'analisi FEM o a elementi finiti, si basa sulla discretizzazione del sistema in esame in una serie di sotto-sistemi tramite cui ricercare una soluzione approssimata. Tale metodo è ormai ampiamente utilizzato per la simulazione di ogni tipo di problema strutturale 1D, 2D e 3D, grazie alle numerose tipologie di analisi che permette, dalle statiche alle dinamiche ai problemi di stabilità, in qualsiasi condizione di carico, vincolo ma anche di temperatura.

Nel nostro caso sono state eseguite, tramite il software MSC Nastran/Patran, analisi lineari e non lineari di modelli 2D dei provini, utilizzando rispettivamente la SOL 105 e la SOL 400. Il principio alla base delle due è molto diverso, e questo ci ha condotti verso risultati leggermente difforni: la SOL 105, lineare, analizza il sistema ricercando gli autovalori del problema, in modo simile a quanto mostrato nella sezione 2.2; la SOL 400, utilizzabile per ogni tipo di analisi, scompone il carico in una serie di step definiti in input, fissi o variabili, ricercando la convergenza per ognuno di essi e concludendo l'analisi se non vi riesce, o una volta ricavata la convergenza per il 100% del carico. Rispetto alla SOL 105, la SOL 400 risulta essere molto più flessibile, permettendo di compiere indagini statiche, dinamiche o di buckling, e di eseguirle considerando o meno le non linearità geometriche e/o del materiale. Nel nostro caso sono state eseguite delle analisi statiche considerando sia le non linearità geometriche (grandi deformazioni) che del materiale.

7.2 Dettagli del modello

Prima dell'analisi vera e propria è necessario ricreare la struttura nel software di modellazione, impostando geometria, materiale, vincoli, carichi e discretizzazione del sistema. Di seguito vengono elencati tutti i passaggi eseguiti e le impostazioni relative alle SOL 105 e 400.

7.2.1 Geometria

Per impostare la geometria, è stato sufficiente creare due superfici tra loro perpendicolari che rappresentassero le superfici medie del provino. Le dimensioni usate sono quelle medie presentate in sezione 4.3 e non quelle nominali, così da ridurre al minimo possibili errori legati al modello.

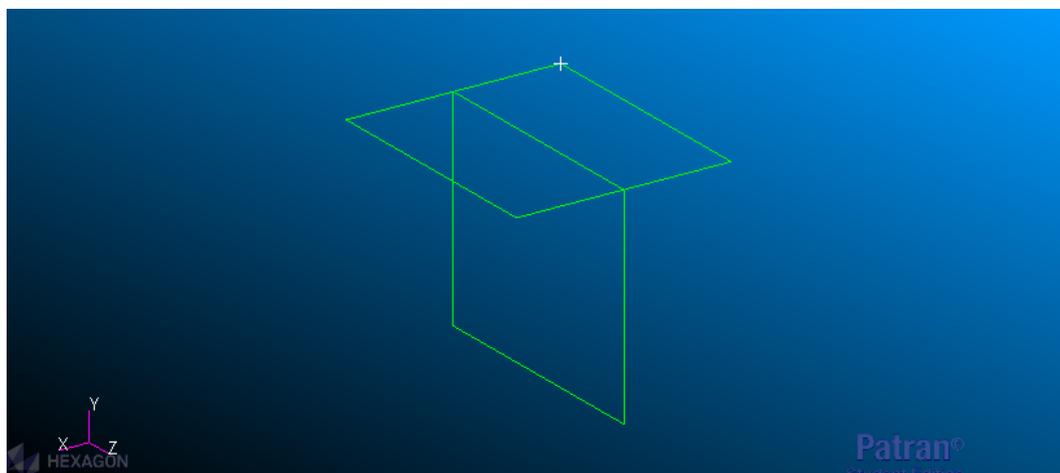


Figura 7.1: Geometria del modello rappresentante i provini da 36 mm

7.2.2 Mesh

Per la discretizzazione si è scelta una IsoMesh di elementi QUAD4, lasciando che il programma la impostasse automaticamente una volta posizionati i nodi sul bordo. Per evitare problemi riguardanti la mesh, si è deciso inizialmente di posizionare 21 nodi su ogni lato, aumentando poi a 31, a lunghezze più elevate, quelli posti sugli estremi scarichi del modello. Molto importante poi è qui selezionare l'equivalenza dei nodi sovrapposti, funzionalità che, eliminando i nodi "doppioni", vincola le due superfici l'una a l'altra e fa sì che si comportino effettivamente come una struttura unica.

7.2.3 Proprietà del materiale

Per quanto riguarda il materiale, in Patran questo può essere impostato come isotropo, ortotropo e anisotropo, aggiungendo poi caratteristiche di ogni tipo, dalla semplice lineare elastica alla elasto-plastica alla visco-plastica e così via, permettendo poi di assegnare tali proprietà a strutture ed elementi 1D, 2D o 3D. Nel nostro caso ci siamo limitati a considerare il materiale come isotropo ed elasto-plastico: in questo caso è bastato semplicemente inserire tra il solo modulo di Young e il coefficiente di Poisson, necessari per l'analisi lineare, e la curva completa del materiale, usando a tale scopo una curva media di quelle ottenute dalle prove per i campioni da 55 mm, già usati per ricavare il modulo elastico del materiale (sezione 6.1). Successivamente, tale proprietà è stata assegnata al provino e alla mesh tramite la funzione *Shell*, applicando il modello per piastre sottili e omogenee e inserendo gli spessori mostrati in sezione 4.3.

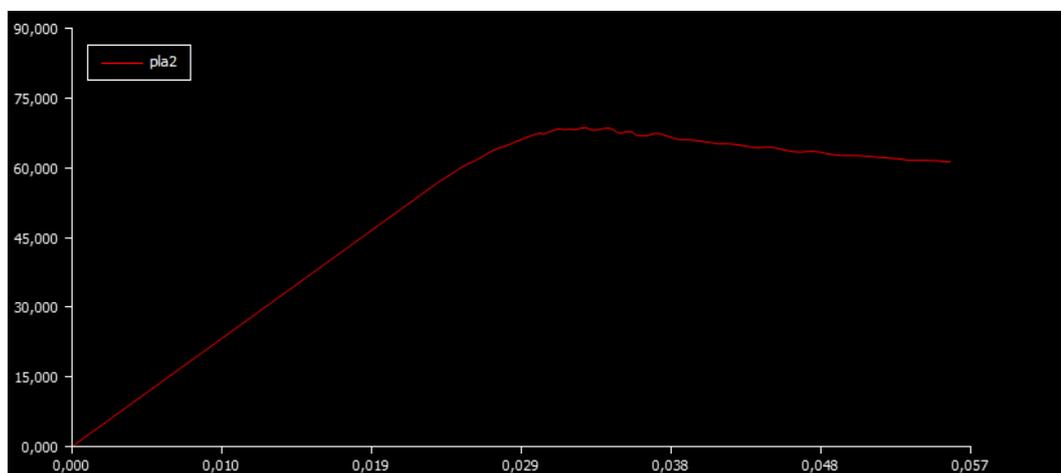


Figura 7.2: Curva del materiale utilizzata per l'analisi FEM non lineare

7.2.4 Vincoli e carichi

Riguardo i vincoli, date le osservazioni sulla deformata fatte in sezione 5.2, si è deciso di impostare due diverse configurazioni, supponendo in un caso che le due basi del provino siano semplicemente appoggiate, in un altro che siano invece incastrate, lasciando ovviamente invariate le altre caratteristiche del modello. Facendo quindi riferimento al sistema di assi in figura 7.3, i vincoli inseriti sono i seguenti:

- nel caso di appoggio, sugli estremi carichi della piastra orizzontale sono stati bloccati gli spostamenti lungo y , mentre su quelli della piastra verticale gli spostamenti lungo x ;

- nel caso di incastro, sui lati carichi della piastra orizzontale sono stati bloccati spostamenti lungo y e rotazioni attorno a x , viceversa sui lati carichi della piastra verticale (spostamenti lungo x , rotazioni attorno a y).

Oltre a questi vincoli si è poi ovviamente bloccato su una base lo spostamento lungo z , così da permettere la compressione.

Per l'applicazione del carico, si è deciso di creare un Multi-Point Constraint di tipo RBE2: gli MPC sono dei particolari tipi di elementi che legano i gradi di libertà di alcuni nodi, detti *dipendenti*, a quelli di un altro, detto *indipendente*. Questa soluzione è stata scelta per simulare al meglio l'applicazione del carico tramite afferraggio, che impone a tutta la base lo stesso spostamento lungo z . Come nodo indipendente si è allora scelto quello posto sul quarto superiore della flangia centrale, in corrispondenza del baricentro della sezione, legando al suo spostamento lungo z quelli degli altri punti appartenenti alla base, scelti come dipendenti.

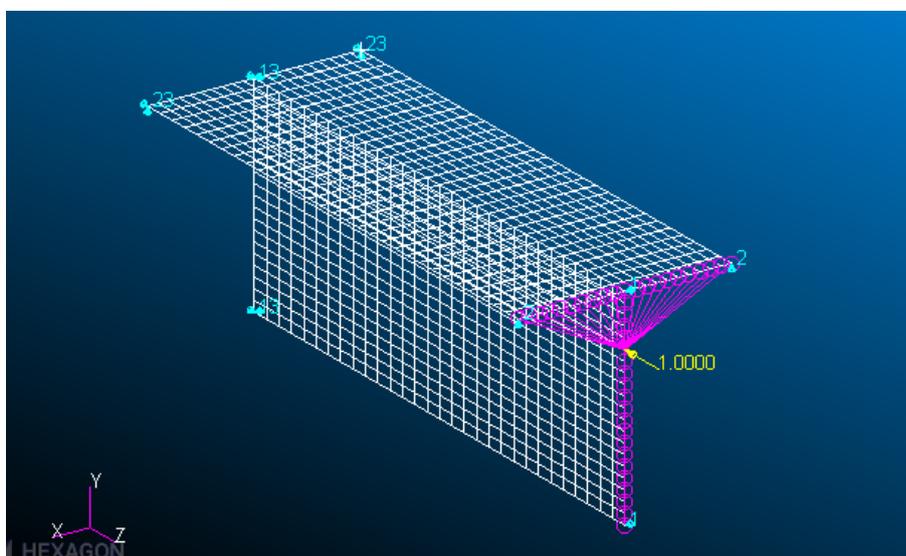


Figura 7.3: Multi-Point Constraint per un provino semplicemente appoggiato nel caso di analisi lineare

Il carico è stato infine simulato come puntiforme e posto sul nodo indipendente dell'MPC: a causa del diverso funzionamento delle SOL 105 e 400, per la prima analisi il carico è stato impostato a 1 N, mentre nella seconda è stato necessario variarlo in base al modello in esame, con valori nell'ordine delle migliaia di Newton. Sempre a causa del loro diverso principio, ai fini dell'analisi non lineare è stato necessario introdurre una perturbazione che permettesse l'instaurarsi della condizione di instabilità: considerando il tipo di deformata ottenuta nelle prove di compressione, è stato dunque posta una forza pari a 0.1 N perpendicolarmente alla

flangia centrale sul suo bordo, a metà altezza, così da stimolare un buckling a una semi-onda.

7.2.5 Analisi lineare

Come già detto, l'analisi lineare non considera gli effetti di non linearità dovuti al materiale ed effettua una ricerca degli autovalori del sistema, che rappresentano in questo caso il coefficiente moltiplicativo del carico applicato tramite il quale ottenere la corrispondente condizione critica. Considerando dunque una sollecitazione P , il carico critico relativo all' i -esimo modo sarà dato da

$$P_{crit,i} = \lambda_i P \quad (7.1)$$

Dove λ_i rappresenta l' i -esimo autovalore del sistema in esame. Per una questione di semplicità si è dunque impostato per questa analisi una forza puntiforme di 1 N, ottenendo tramite il primo autovalore il valore cercato.

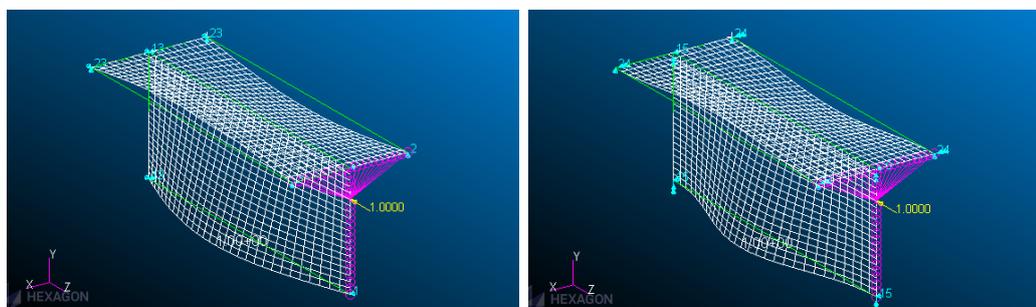


Figura 7.4: Deformate nei casi di semplice appoggio e incastro per analisi lineare

7.2.6 Analisi non lineare

L'analisi non lineare ricerca la convergenza della soluzione applicando il carico in modo incrementale, a step di estensione fissa, definita dall'utente, o variabile a seconda della difficoltà di convergenza della soluzione in questione. Nel nostro caso si è optato per una opzione adattiva, scegliendo come minimo step un valore pari allo 0.005% e come massimo l'1% della sollecitazione applicata, impostando tuttavia quest'ultimo allo 0.5% in alcuni modelli dalla convergenza più complessa (generalmente per campioni più corti e in caso di incastro agli estremi). Aggiungiamo poi che non in tutti i casi si è arrivati alla piena convergenza dell'analisi. Tuttavia, gli ultimi carichi andati a buon fine sono stati comunque sufficienti a instaurare il buckling, per cui si è deciso di non ripetere le analisi.

Poiché la SOL 400 non è stata impostata ai fini di una ricerca del buckling ma solo per un'analisi statica, l'output non ci ha restituito in modo chiaro il carico

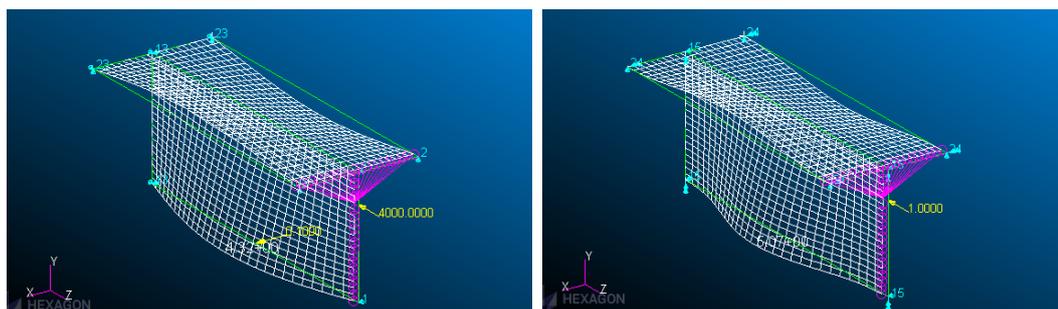


Figura 7.5: Deformate nei casi di semplice appoggio lineare e incastro per analisi lineare

critico ma solo l'evoluzione di spostamenti, deformazioni e tensioni al variare della sollecitazione. Per ricavare allora il carico di instabilità si è deciso di esportare in un file di testo gli spostamenti del nodo su cui si è applicata la perturbazione, insieme ai relativi carichi applicati. Importati questi dati in uno script Matlab e analizzatone il coefficiente di correlazione, il buckling è stato allora individuato nel punto in cui l'andamento della curva si discosta dalla linearità, in modo simile a quanto fatto nell'analisi sperimentale.

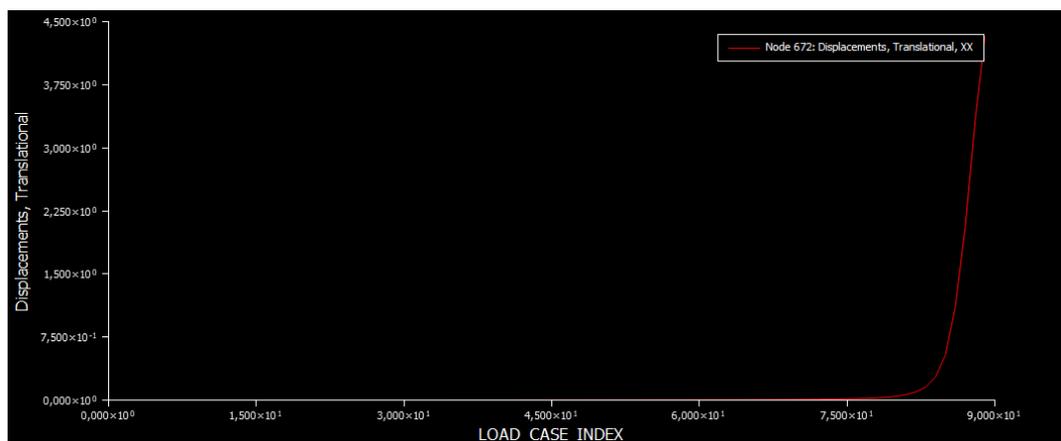


Figura 7.6: Andamento dello spostamento del nodo centrale della semi-onda all'aumentare del carico

7.3 Risultati

In tabella 7.1 sono riportati i valori ricavati dalle analisi, affiancati dai risultati sperimentali già visti nel capitolo 5. Notiamo innanzitutto come le tensioni ottenute

delle indagini non lineari siano leggermente inferiori rispetto a quelle dell'analisi lineare: ciò è probabilmente dovuto al fatto che il buckling debba essere, nella SOL 400, stimolato attraverso l'introduzione di una perturbazione, cosa che rende il sistema non più "perfetto" e provoca dunque un abbassamento della tensione di instabilità, come già visto in sezione 2.1.

Confrontando poi gli andamenti sperimentali e numerici, si osserva come ci sia una buona vicinanza tra i risultati relativi a basi incastrate e quelli reali, soprattutto per quanto riguarda l'analisi lineare e $L > 48 \text{ mm}$, per cui i valori sono sostanzialmente coincidenti. L'analisi non lineare sottostima invece la tensione critica, avvicinandovisi solamente per $L = 48$ ma non riuscendo a prevedere, come d'altronde anche l'analisi lineare, il decremento più "morbido" che si ha tra 36 mm e 48 mm. Il modello che prevede basi appoggiate risulta invece, come già ipotizzato, ampiamente inadatto a descrivere le prove in esame.

In figura 7.7 riportiamo infine gli andamenti delle analisi sperimentali e numeriche.

L	$\sigma_{crit,app,L}$	$\sigma_{crit,app,NL}$	$\sigma_{crit,inc,L}$	$\sigma_{crit,inc,NL}$	$\sigma_{crit,sperim}$
36	28.61	24.07	75.67	64.55	49.18
42	24.30	20.25	59.08	52.59	47.86
48	22.03	18.53	49.11	41.81	44.14
54	20.27	16.49	41.66	35.22	41.79
60	18.92	15.76	36.07	29.88	38.52
66	18.98	15.78	33.92	28.05	34.09
72	18.51	14.99	31.21	25.64	29.13
78	17.22	13.86	27.59	22.30	28.75
84	17.24	13.88	26.38	21.12	25.30
90	16.97	13.67	24.94	20.18	22.53

Tabella 7.1: Tensioni di buckling, in MPa, per tutte le famiglie di provini nei due casi di vincolo, ottenute tramite analisi numeriche lineari e non lineari, e risultati delle analisi sperimentali

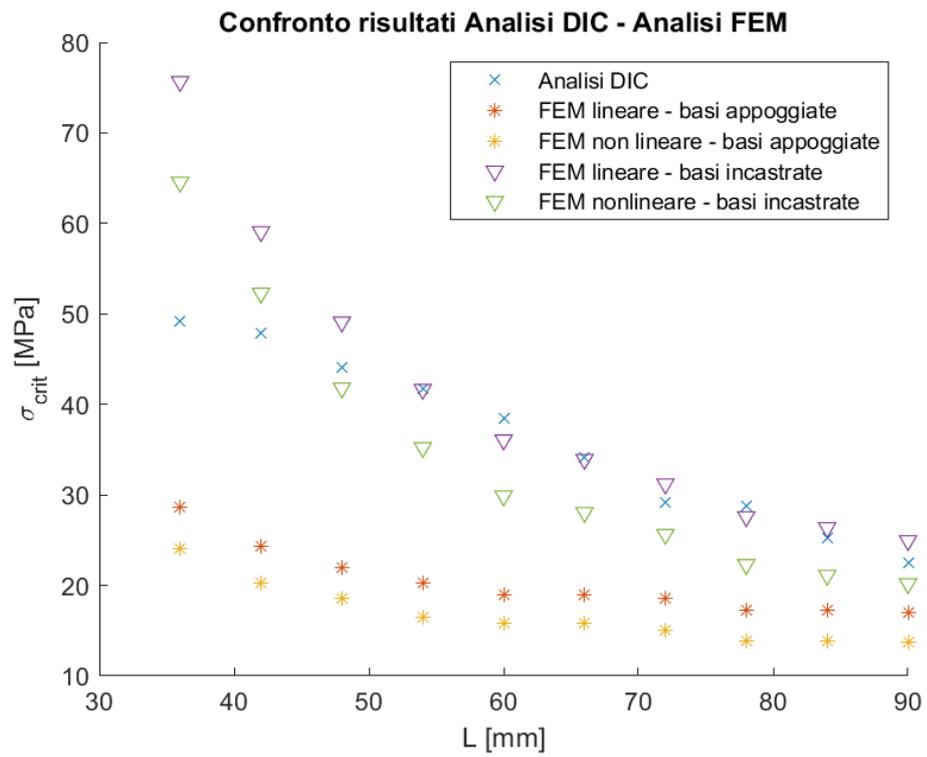


Figura 7.7: Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale e numerica

Capitolo 8

Conclusioni

In questa campagna sperimentale è stato studiato il comportamento a compressione di provini in PLA, a sezione in parete sottile aperta, realizzati tramite Fused Deposition Modelling, per analizzarne da un punto di vista analitico, numerico e sperimentale il buckling locale sulla flangia centrale, al variare della lunghezza del campione.

Per quanto riguarda le analisi sperimentali si è preferito non utilizzare degli estensimetri, poiché avrebbero potuto falsare i risultati aumentando in modo non trascurabile la rigidità di provini così sottili, e si è dunque preferito adoperare la Digital Image Correlation per tracciare gli spostamenti trasversali della flangia di nostro interesse, combinando poi le informazioni così rilevate con quelle sui carichi derivanti dalla macchina di prova. Poiché la normativa ASTM non prevede ancora né lo studio di questo tipo di fenomeno né dei test specifici per campioni realizzati in Additive Manufacturing, si è scelto di procedere distanziandosi leggermente dalla regolamentazione riguardante i materiali polimerici in compressione, compiendo i test a una velocità lievemente superiore di quella opportuna in questi casi. I dati ricavati tramite DIC sono quindi stati processati tramite uno script Matlab apposito, che rintracciando il punto in cui si ha il passaggio tra la configurazione di pre-buckling e quella di post-buckling ha permesso di ottenere i risultati cercati.

L'analisi teorica è stata portata avanti utilizzando le formule relative al modello piastra, volte a descrivere il comportamento dell'anima centrale del provino, e scegliendo una formulazione del coefficiente di instabilità specifica per piastre semplicemente appoggiate sui lati carichi e vincolate su uno dei due bordi scarichi, simulando quest'ultimo, che rappresenta l'incrocio tra le flange nei campioni reali, prima come un semplice appoggio, successivamente come un incastro. Nessuno dei due casi ha tuttavia mostrato una significativa attinenza con i risultati sperimentali, probabilmente a causa dell'errata supposizione riguardo al vincolo sugli estremi caricati.

Per quanto riguarda lo studio di tipo numerico, sono state realizzate delle analisi

ad elementi finiti di tipo lineare e non lineare su provini 2D, anche qui in due casi distinti: prima supponendo che le basi del provino fossero semplicemente appoggiate, poi che fossero incastrate, quest'ultima ipotesi giustificata da osservazioni fatte durante le prove sperimentali e nel corso dell'analisi teorica. Proprio i risultati derivanti da questa considerazione (vincoli di tipo incastro) hanno evidenziato una buona attinenza con i risultati sperimentali, soprattutto a lunghezze medio-alte.

In figura 8.1 riportiamo un grafico con tutti i risultati ottenuti al variare della lunghezza L , mentre in tabella 8.1 sono riportati i valori numerici delle tensioni per tutti i tipi di analisi: in quest'ultima sono dapprima riportati i risultati dell'analisi teorica nei due casi di appoggio-libero e incastro-libero; successivamente sono presentati gli esiti dell'analisi FEM, in particolare le tensioni ricavate dalle analisi lineare e non lineare di provini con basi appoggiate e quelle relative alle analisi lineare e non lineare di provini con basi incastrate; nell'ultima colonna, infine, sono presentate le tensioni ricavate dai dati sperimentali.

Analizzando i risultati complessivi dello studio si osserva che, come già visto, la maggiore vicinanza alle prove sperimentali si ha per l'analisi FEM che suppone basi del provino incastrate, mentre sia la FEM con basi appoggiate che lo studio teorico si dimostrano lontani dalla realtà dei test.

Sull'analisi teorica si può fare però una importante osservazione: i due casi presentati sono stati scelti per, tra le altre cose, provare a studiare il vincolo presente all'incrocio tra le tre flange del provino, sebbene non sia stato purtroppo possibile risalire a delle conclusioni a causa della distanza con i risultati sperimentali. Si nota però una buona vicinanza tra i risultati teorici riguardanti il caso appoggio-libero e i risultati numerici nel caso di basi semplicemente appoggiate: poiché le condizioni di vincolo sui bordi carichi sono le stesse, ciò fa pensare che l'intersezione tra le anime dei provini a T sia, in conclusione, proprio un semplice appoggio.

Studi futuri potrebbero riguardare senz'altro lo sviluppo di una normativa riguardante provini realizzati tramite Additive Manufacturing, così come l'ampliamento di questo studio tramite la ricerca di valori del coefficiente di instabilità che possano simulare un incastro sulle basi, così da confermare le conclusioni ottenute dall'analisi numerica; altri studi potrebbero poi riguardare l'instabilità locale di provini a sezione in parete sottile aperta, o anche chiusa, di forma diversa da quella qui analizzata.

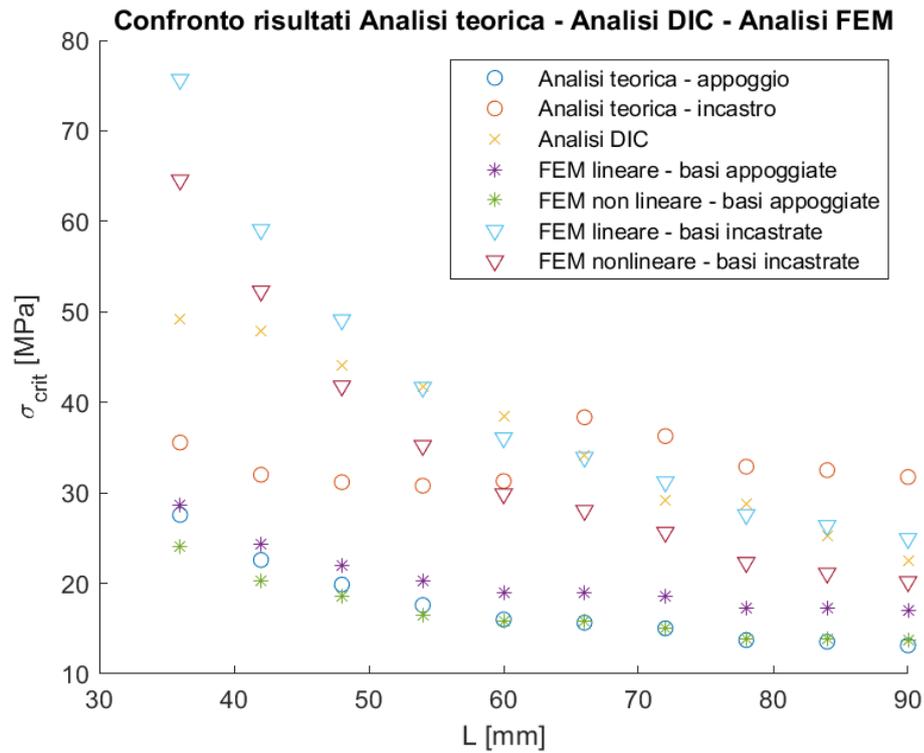


Figura 8.1: Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica

L	$\sigma_{T,app}$	$\sigma_{T,inc}$	$\sigma_{FEM,app,L}$	$\sigma_{FEM,app,NL}$	$\sigma_{FEM,inc,L}$	$\sigma_{FEM,inc,NL}$	σ_{sper}
36	27.56	35.56	28.61	24.07	75.67	64.55	49.18
42	22.58	32.00	24.30	20.25	59.08	52.59	47.86
48	19.86	31.18	22.03	18.53	49.11	41.81	44.14
54	17.60	30.79	20.27	16.49	41.66	35.22	41.79
60	16.01	31.30	18.92	15.76	36.07	29.88	38.52
66	15.65	38.35	18.98	15.78	33.92	28.05	34.09
72	15.03	36.27	18.51	14.99	31.21	25.64	29.13
78	13.73	32.89	17.22	13.86	27.59	22.30	28.75
84	13.55	32.51	17.24	13.88	26.38	21.12	25.30
90	13.14	31.75	16.97	13.67	24.94	20.18	22.53

Tabella 8.1: Tensioni di buckling, in MPa, per tutte le famiglie di provini nei due casi di vincolo, ottenute tramite analisi numeriche lineari e non lineari, e risultati delle analisi sperimentali

Parte III

Analisi di Buckling Globale su provini quadrati

Capitolo 9

Fabbricazione dei provini

Come già visto nella parte introduttiva, questo lavoro di tesi ha studiato il comportamento a compressione di provini realizzati in PLA tramite Fused Deposition Modeling, e in particolare due differenti declinazioni del fenomeno: il buckling locale e il buckling globale. Dopo aver descritto nei capitoli precedenti tutto ciò che ha riguardato l'instabilità locale, questa parte si concentra invece sull'ampliamento del lavoro compiuto in [10] sul buckling di tipo globale su provini a sezione quadrata, analizzandolo da un punto di vista sperimentale, teorico e numerico.

Il capitolo qui presente riporta i passaggi che hanno portato alla realizzazione dei provini, a partire dalla scelta della geometria fino ad arrivare alla loro caratterizzazione dimensionale.

9.1 Geometria

A differenza di quanto visto nel capitolo 4, la scelta della geometria dei provini finalizzati allo studio del buckling globale è stata notevolmente più semplice: dovendo infatti allo stesso tempo studiare il fenomeno e caratterizzare il materiale ai fini delle analisi numeriche e globali, anche in prosecuzione di quanto fatto in [10], si è deciso di seguire le direttive della normativa ASTM D695-15 [17], riguardante la compressione dei materiali polimerici; sebbene infatti non ne esista una specifica per componenti realizzati tramite FDM, quest'ultima fornisce comunque delle utili indicazioni che si è dunque deciso di applicare. In particolare essa impone, per la caratterizzazione, provini di sezione circolare o quadrata di diametro o lato pari a 12.7 mm: ai fini dello studio del buckling, la sezione circolare avrebbe causato troppe incertezze riguardo la direzione su cui si sarebbe sviluppato il fenomeno, poiché i suoi momenti d'inerzia sono uguali per qualsiasi orientazione del sistema di riferimento nel piano; la sezione quadrata invece, offre (idealmente) solo due possibili direzioni al buckling.

Per quanto riguarda invece la lunghezza dei provini, ai fini di uno studio del fenomeno a snellezze superiori a quelle in [10] si è optato per 8 famiglie di campioni tra 75 mm e 250 mm, a cui ne sono state aggiunte altre tre rispettivamente da 25, 40 e 55 mm. Ciò è stato fatto per ricavare, tramite le prove sui campioni da 25 e 55 mm, le caratteristiche del materiale in uso. In conclusione, sono state dunque realizzate 11 famiglie di provini: 25, 40, 55, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 200, 250 mm.

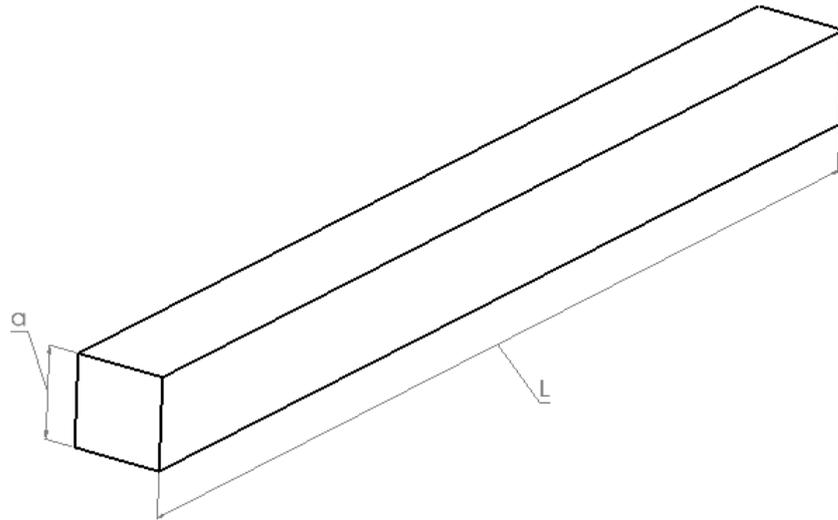


Figura 9.1: Geometria del provino e relative dimensioni

9.2 Parametri di stampa

La realizzazione dei provini è stata eseguita tramite una stampante Intamsys Funmat HT: questa è una macchina a estrusore singolo dal volume di stampa pari a 260x260x260 mm, in cui il moto sul piano orizzontale è demandato all'ugello mentre quello sull'asse z verticale è dato dallo spostamento del piano di stampa, in vetro; un portello apribile è inoltre presente sulle superfici frontale, destra e superiore.

Avendo già ricavato i parametri di stampa per i provini a T, visti nel capitolo 4, alcuni di essi sono stati testati in questa campagna sperimentale, con risultati soddisfacenti; sia per la diversa stampante utilizzata, che per le differenti necessità dovute a sezione e obiettivi diversi da quelli relativi alla parte II, sono invece stati cambiati i seguenti:

- *Perimetri:* la maggiore semplicità della sezione quadrata rispetto a quella a T ci ha portati a scegliere un solo perimetro, inserendo un riempimento;

- *Infill e raster angle*: avendo qui un solo perimetro, l'infill è stato impostato al 100%, mentre per dare una semi-isotropia ai provini si è scelto un raster angle di $0^\circ/90^\circ$;
- *Extrusion multiplier*: osservazioni sull'andamento delle stampe hanno evidenziato che un extrusion multiplier pari a 1.05, impostato dallo slicer, fosse sufficiente a dare un buon riempimento agli strati e limitare al minimo i vuoti.

In tabella 9.1 sono riportati i parametri della stampante, mentre in figura 9.2 è mostrata la collocazione dei provini sul piano di stampa: notiamo come sia stato necessario disporli in prossimità del bordo anteriore, per evitare alcuni difetti presenti sul piano che ne avrebbero compromesso la realizzazione. È da evidenziare inoltre che, a causa di un errore nel gcode, c'è stato un piccolo problema al termine della stampa dei provini da 250 mm, alcuni dei quali hanno toccato l'ugello caldo e si sono dunque parzialmente sciolti nella zona di contatto.

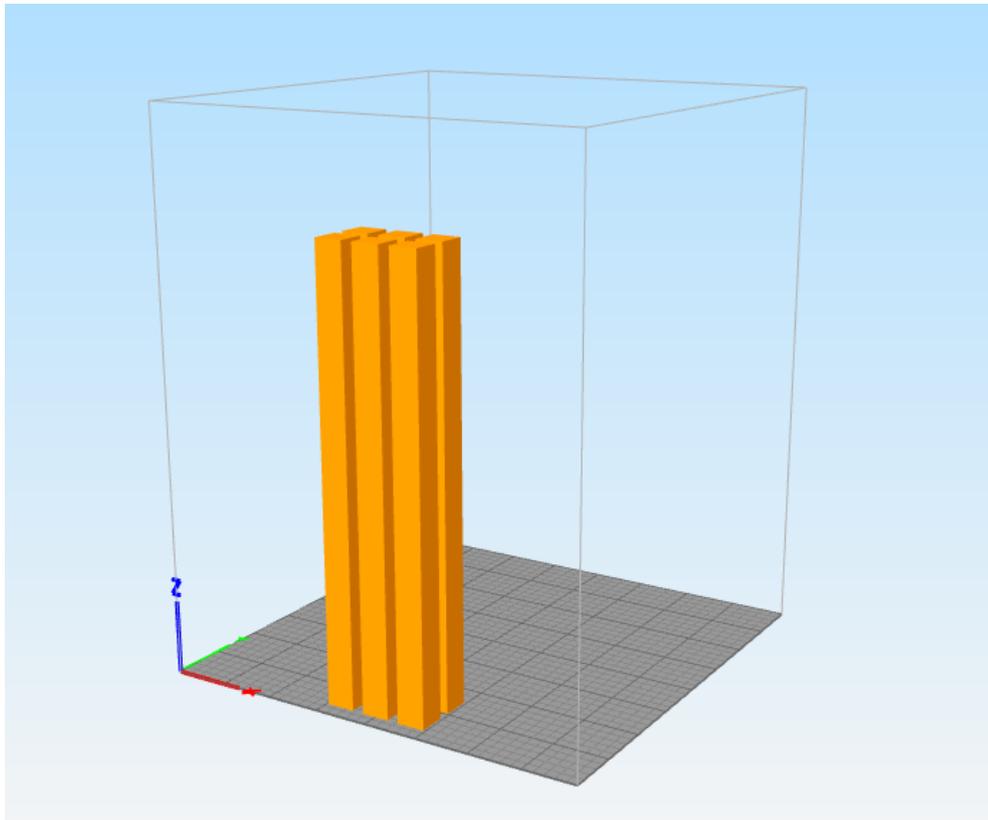


Figura 9.2: Posizionamento della famiglia $L = 200$ mm nel programma di slicing *Simplify3D*

Parametro	Unità di misura	Valore
Temperatura di estrusione	°C	200 (1° strato), 195
Temperatura piano di stampa	/	T ambiente
Altezza strato	mm	0.2
Larghezza di estrusione	mm	0.5
Numero di perimetri	/	1
Percentuale di infill	%	100
Raster angle	/	0°/90°
Extrusion multiplier	/	1.05
Velocità di stampa	mm/min	1500
Lunghezza di ritrazione	mm	3
Velocità di ritrazione	mm/min	1800

Tabella 9.1: Parametri di stampa

9.3 Analisi statistica

Una volta completate le stampe, i provini sono stati misurati: a tal scopo è stato utilizzato un calibro centesimale digitale, eccetto che per i provini da 200 e 250 mm, le cui lunghezze sono state misurate con un calibro analogico ventesimale poiché troppo grandi per il primo. Per ogni campione sono state prese in tutto 8 misure a fronte di 2 informazioni necessarie: mediandole tra loro per ottenere le misure del provino, e mediando poi questi valori all'interno della famiglia, si è in questo modo cercato di limitare la propagazione di possibili errori di stampa o degli inevitabili piccoli scostamenti delle misure reali da quelle nominali.

Le misure di L e a sono state effettuate nel seguente modo:

- L : valutata tramite due misurazioni sulla mezzeria di due lati consecutivi;
- a : due misurazioni per le sezioni agli estremi e per quella al 50% circa della lunghezza L .

I dati così ottenuti insieme alle relative deviazioni standard sono riportati in tabella 9.2. Notiamo in generale un basso scostamento dalle dimensioni nominali e dalla media, quest'ultima osservazione dimostrata dai piccoli valori di deviazione standard. Su queste rilevazioni è stato inoltre effettuato il test di Anderson - Darling volto a valutare la vicinanza dei dati a una gaussiana, la quale si è dimostrata una distribuzione valida in quasi tutti i set di misure. Sono infine stati realizzati i grafici boxplot delle dimensioni a e L al variare di L , mostrati in figure 9.3 e 9.4: anche qui i dati si dimostrano abbastanza regolari sebbene spesso asimmetrici rispetto alla media, con, per a , un solo outlier per $L = 40$ mm, mentre L ne presenta uno per L

= 75 mm e un altro per $L = 250$ mm. Nelle figure 9.5 - 9.10 sono rappresentati degli esempi di distribuzione per le misure L e a , relativi alle famiglie da 25, 105 e 250 mm.

Famiglia	L [mm]	σ_L	a [mm]	σ_a
25	24.90	0.0184391	12.82	0.0428488
40	39.82	0.0372044	12.83	0.0521288
55	54.83	0.0228035	12.83	0.0502153
75	75.14	0.8128679	12.82	0.0456882
90	89.74	0.0461248	12.78	0.0406578
105	105.78	0.0490323	12.77	0.0415487
120	120.04	0.0539135	12.80	0.0471729
135	134.78	0.0388587	12.85	0.0400058
150	149.76	0.0335783	12.88	0.0445689
200	199.62	0.0491596	12.79	0.0394499
250	249.56	0.1211920	12.79	0.0500296

Tabella 9.2: Misure del provini quadrati

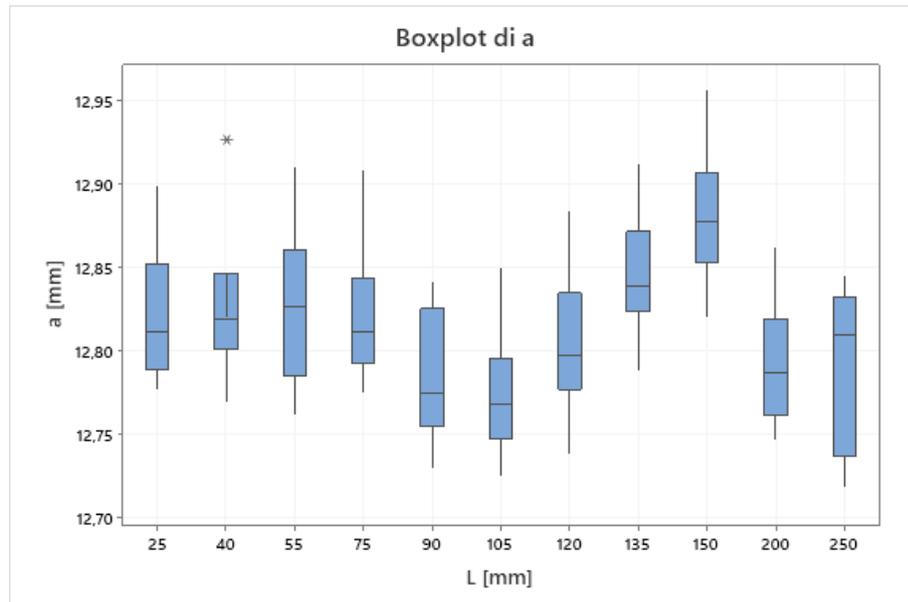


Figura 9.3: Boxplots della dimensione a al variare di L

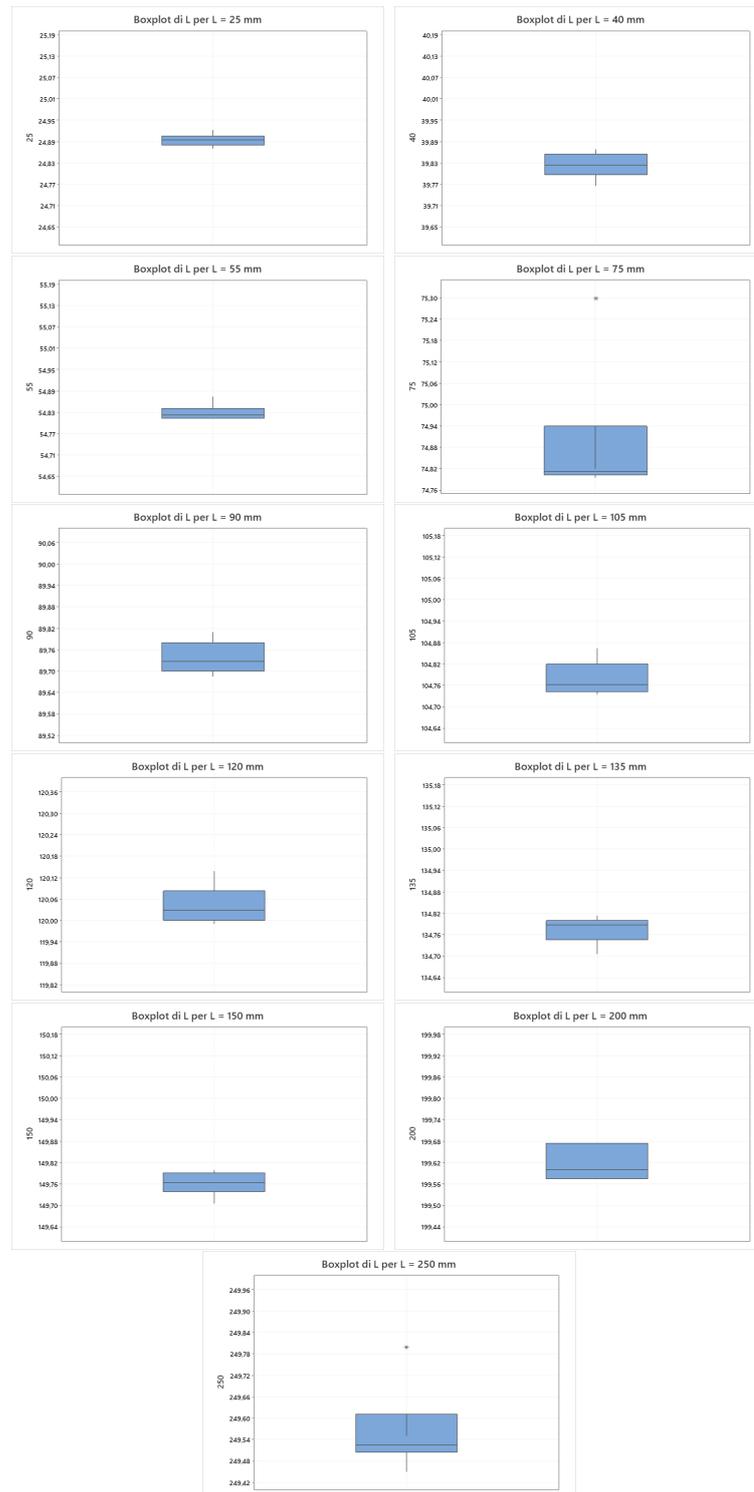


Figura 9.4: Boxplots della dimensione L per ogni famiglia di provini

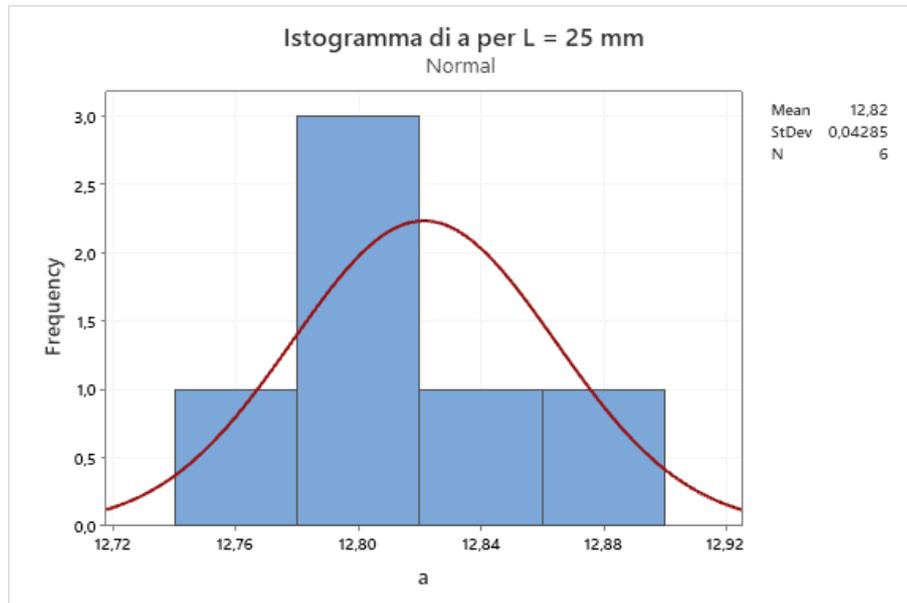


Figura 9.5: Distribuzione della dimensione a per $L = 25 \text{ mm}$

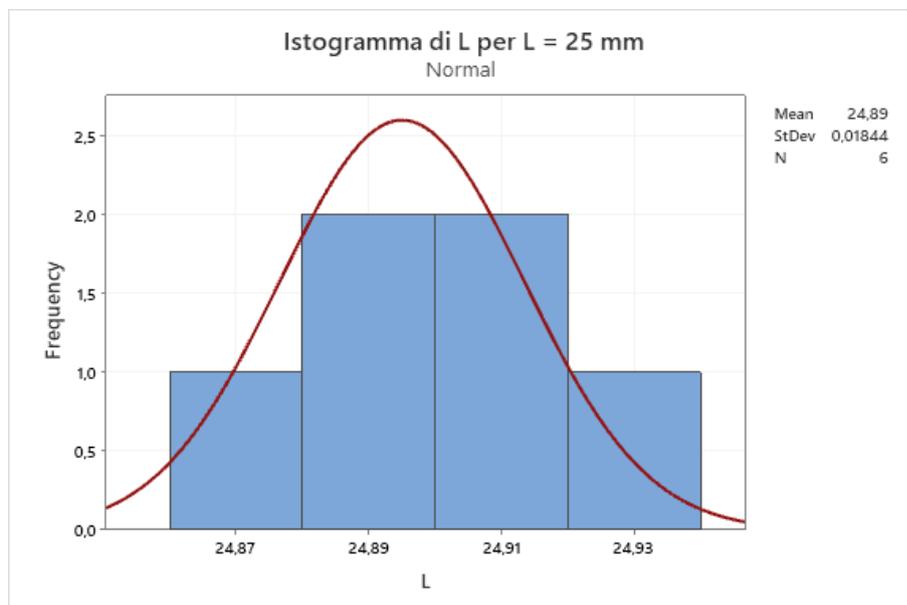


Figura 9.6: Distribuzione della dimensione L per $L = 25 \text{ mm}$

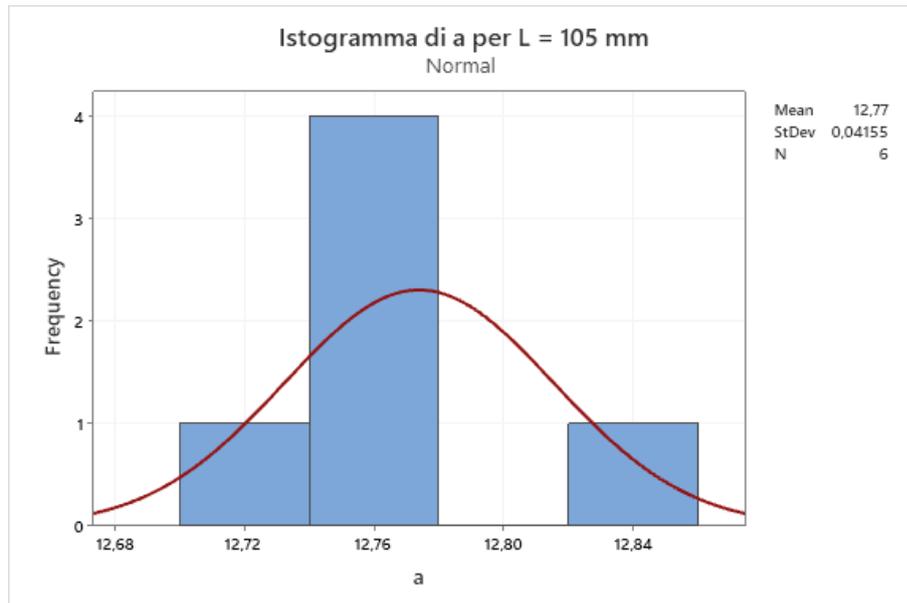


Figura 9.7: Distribuzione della dimensione a per $L = 105$ mm

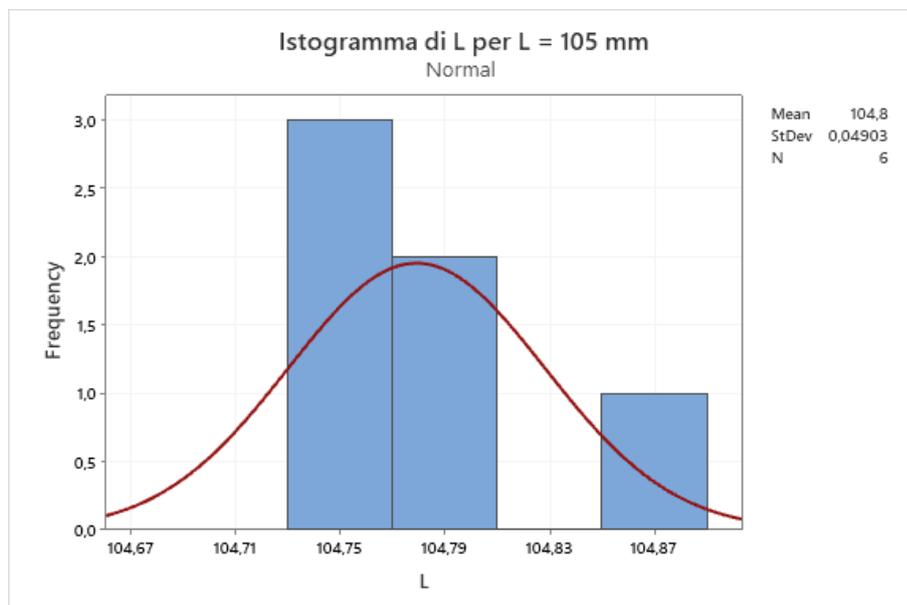


Figura 9.8: Distribuzione della dimensione L per $L = 105$ mm

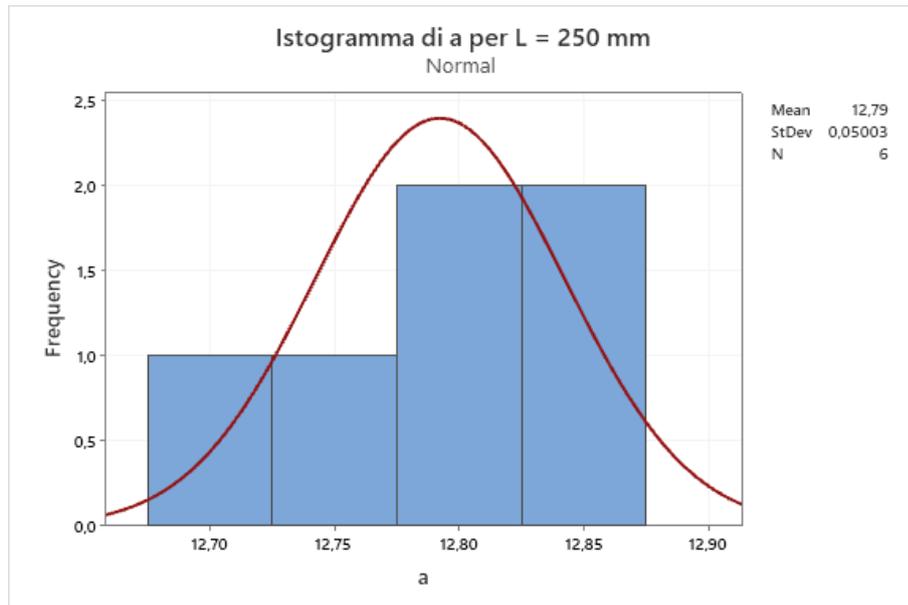


Figura 9.9: Distribuzione della dimensione a per $L = 250$ mm

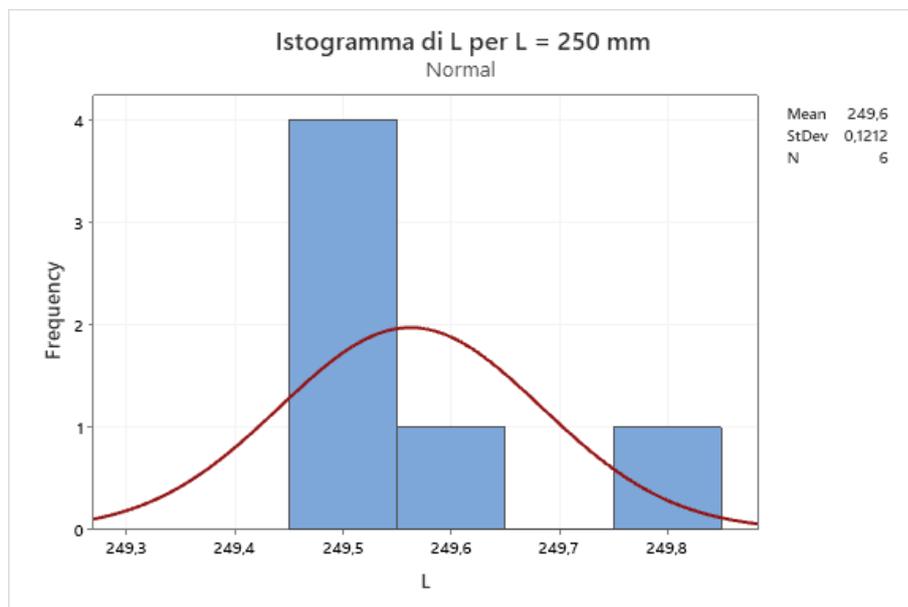


Figura 9.10: Distribuzione della dimensione L per $L = 250$ mm

Capitolo 10

Test di compressione

Il passo successivo alla realizzazione dei provini è la sperimentazione vera e propria. Il presente capitolo si concentra su tutti i passaggi eseguiti per effettuare l'analisi sperimentale, dalla preparazione dei test di compressione all'elaborazione dei dati ottenuti, volta a ottenere le tensioni di instabilità globale al variare della lunghezza dei campioni.

10.1 Preparazione delle prove

I passaggi svolti per la preparazione dei test sperimentali, sebbene sia cambiata la forma della sezione dei campioni, sono sostanzialmente identici a quelli mostrati in sezione 5.1: anche in questo caso infatti, i campioni sono stati innanzitutto numerati e preparati alla Correlazione d'immagine tramite vernice bianca spray, o interamente dipinti di bianco e spruzzati di vernice nera in caso di trame a puntini, al primo tentativo, troppo fitte. In aggiunta, la famiglia da 250 mm è stata lavorata con carta vetrata sulla base superiore, per cercare di arginare i difetti dovuti all'errore di stampa di cui si è parlato in sezione 9.2. Per facilitare poi il posizionamento dei provini sul piano d'appoggio della macchina di prova e la calibrazione degli spostamenti durante l'analisi DIC, è stata nuovamente creata una base nella quale inserire il campione, dotata di una piccola parete sulla quale incollare un ritaglio di carta millimetrata. Il modello CAD della base è mostrato in figura 10.1.

Anche in questa campagna sperimentale è stata utilizzata una macchina reflex Nikon D3500, la cui orientazione è stata regolata con l'aiuto di una livella a bolla e il cui obiettivo è stato impostato su una lunghezza focale di 35 mm, dimensione che, come già spiegato in sezione 5.1, permette di limitare fenomeni di aberrazione ottica.

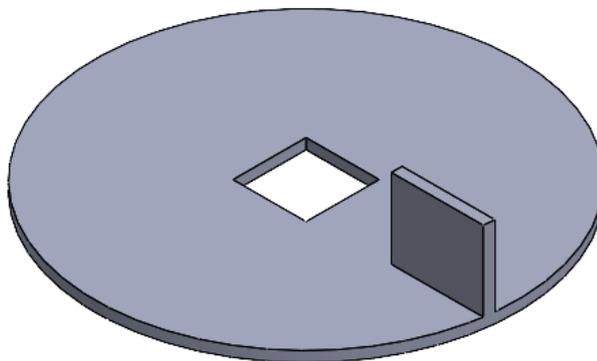


Figura 10.1: Modello CAD della base utilizzata per le prove di compressione sui provini quadrati

Date le maggiori sollecitazioni necessarie per instaurare il buckling nei campioni in questione, la macchina di prova è stata cambiata con una più potente: per i test è stata infatti utilizzata una Instron 8800, una macchina a funzionamento servo-idraulico sulla quale è stata montata una cella di carico di capacità massima pari a 100 kN, collegata a sua volta a un computer dal quale gestire le prove e acquisire i dati attraverso un software dedicato. Sulla cella di carico, montata sulla traversa inferiore mobile, è stato inoltre montato un afferraggio adatto alle prove di compressione, costituito da una superficie piana sulla quale appoggiare il provino. Lo stesso tipo di afferraggio è stato montato sulla superficie superiore, fissa.

Una volta conclusa la preparazione, sono infine state effettuate le prove: anche in questo caso, poiché la normativa ASTM [17] non prevede direttive specifiche per esemplari realizzati tramite FDM né per lo studio del buckling, si è deciso di testare i campioni in controllo di spostamento a una velocità di 1.8 mm/min , leggermente superiore a quella prevista, pari a $1.3 \pm 0.3 \text{ mm/min}$. I dati sono stati memorizzati a una frequenza di 5 Hz, mentre le riprese sono state realizzate con una risoluzione di 1920x1080p, a una frequenza di 60 fotogrammi al secondo.

C'è da sottolineare infine che i primi test, effettuati sui provini più lunghi da 250 mm, hanno evidenziato un comportamento particolarmente "esplosivo" dei provini al momento della rottura: tra campione e macchina fotografica è stato allora posto un pannello di plexiglas che, al proseguire delle prove, è stato tuttavia danneggiato dai detriti. Per tale motivo si è alla fine deciso di non portare a rottura i campioni, ma di fermare la compressione una volta palesatosi in modo evidente il buckling.

10.2 Comportamento generale dei campioni

Da una osservazione preliminare dei video dei test, risulta evidente che tutte le famiglie di campioni sono andate in buckling, eccetto che quella da 25 mm; questi sono stati infatti soggetti a un fenomeno noto come *barreling* [18], comune per esemplari con un basso rapporto tra lunghezza e dimensioni della base [19] e che avviene in presenza di forte attrito tra campione e afferraggio: a causa del coefficiente di Poisson, durante la compressione il provino tende ad aumentare la sua sezione trasversale cercando di contrastare l'attrito, che risulta essere più lieve verso il centro e più marcato verso gli estremi della base. La combinazione di questi effetti porta alla deformata visibile in figura 10.2.

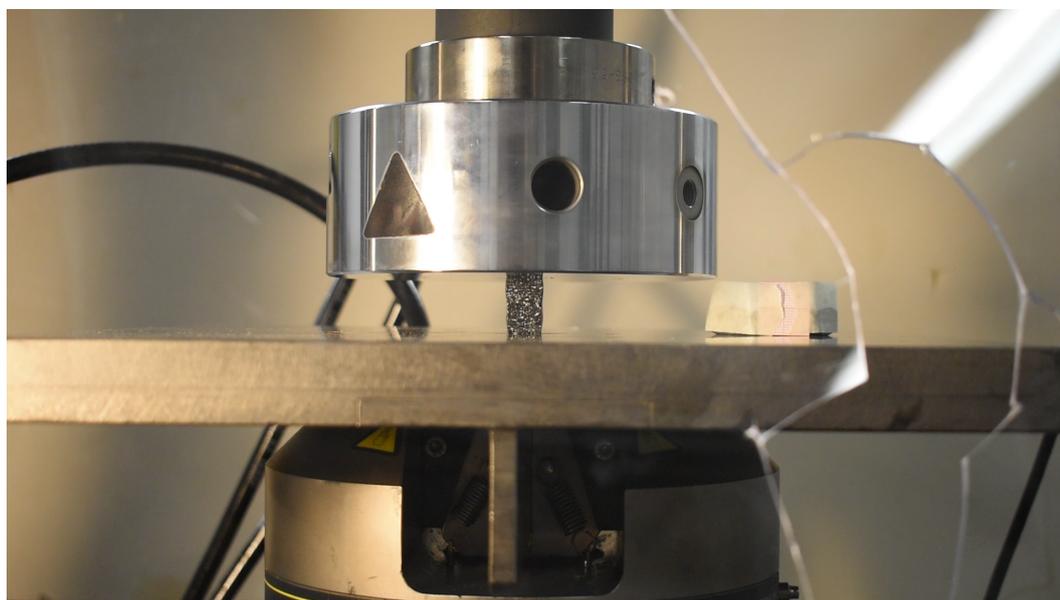


Figura 10.2: Provino da 25 mm deformatosi secondo una configurazione a doppio barilotto

Tra le altre famiglie, è da sottolineare che alcuni campioni, e nello specifico tutti quelli da 40 mm e i provini 55-2, 55-4 e 55-6, presentavano al termine delle rispettive prove una deformata a due semi-onde, come mostrato in figura 10.3. Come già spiegato nel capitolo 2, tale configurazione è, in un'asta, non prevista dalla teoria come primo modo di buckling in condizioni ideali, ed è ottenibile solo bloccando gli spostamenti della sezione posta a $L/2$, anche chiamata *nodo*. Ciò, ovviamente, non è stato fatto, per cui la deformata risultante potrebbe essere dovuta a un disallineamento iniziale delle basi dovuto a errori della stampante, a un non perfetto posizionamento del provino sul centro dell'afferraggio o a particolari effetti dovuti ai vincoli sulle basi.

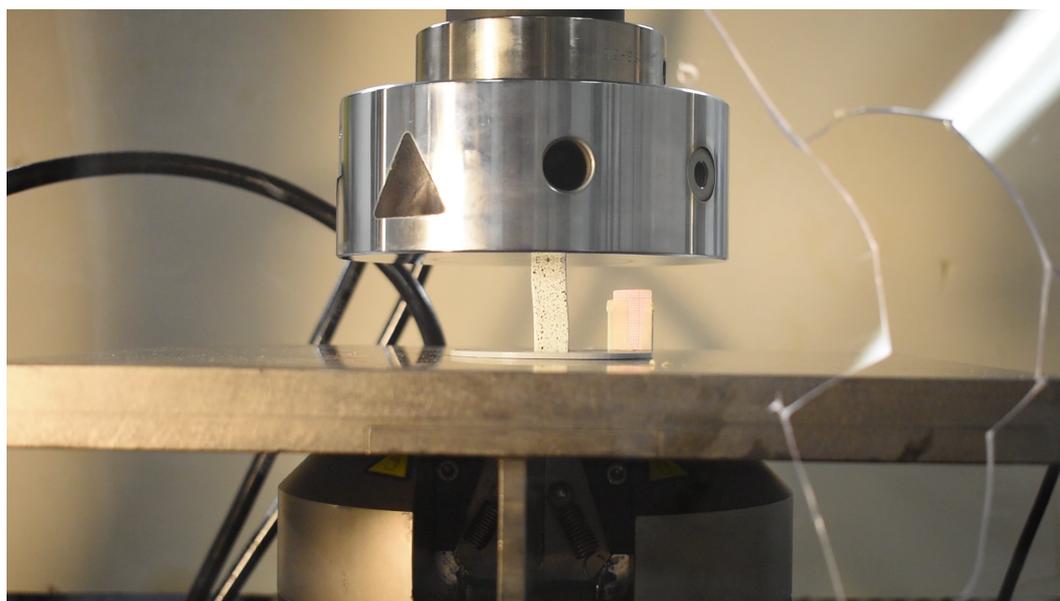


Figura 10.3: Provino da 40 mm deformatosi, post-buckling, secondo una configurazione a doppia semi-onda

Per quanto riguarda tutti i restanti campioni, è importante evidenziare che la loro quasi totalità è andata in instabilità in direzione diagonale, inflettendosi in modo più o meno marcato anche al di fuori del piano di osservazione: dato il gran numero di esemplari soggetti a questo effetto si è deciso di analizzarli comunque, con la consapevolezza che, avendo scelto un algoritmo DIC 2D, i risultati sarebbero stati probabilmente inficiati dal fenomeno. Chiaramente, sono stati invece esclusi dall'analisi i campioni deformati prevalentemente in direzione perpendicolare al piano di osservazione, ossia, nello specifico, i provini 55-1, 55-6, 105-3, 120-1, 120-2, 135-1, 135-2, 135-3, 150-1, 150-3, 250-3, oltre ai provini da 25 mm che come già detto sono stati soggetti a un fenomeno di tipo diverso.

Anche in questo caso sorgono alcuni dubbi riguardo le condizioni di vincolo all'interfaccia tra afferraggi ed estremi dei campioni: un confronto tra la deformata mostrata in figura 10.4 e quella in figura 2.4 evidenzia infatti una maggiore somiglianza con un'asta incastrata agli estremi piuttosto che con una appoggiata. Tale ipotesi verrà approfondita nel corso delle analisi teoriche e numeriche.

Infine, riportiamo in figure 10.5 - 10.15 i grafici tensione vs. deformazione di tutti gli esemplari analizzati, ottenuti dividendo i dati di carico e spostamento della macchina di prova, rispettivamente, per sezione trasversale e la lunghezza iniziale di ogni campione: notiamo come le curve non partano immediatamente con un tratto lineare ma sia presente, come già evidenziato anche in sezione 5.2, una piccola zona ad andamento non lineare detta "toe region", dovuta ad assestamenti del provino

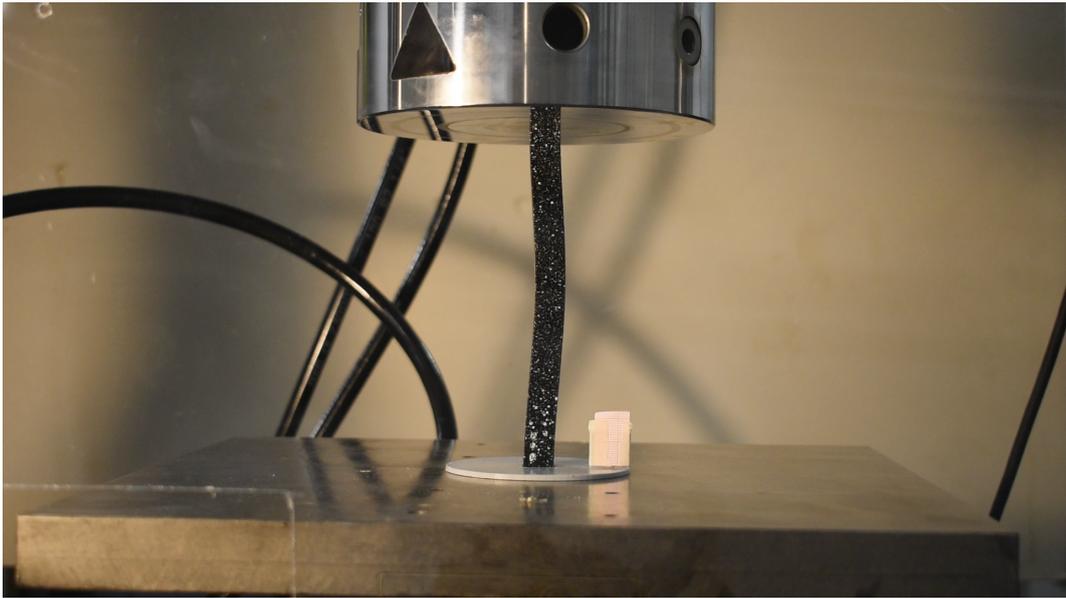


Figura 10.4: Deformata di un provino lungo 150 mm

sull'afferraggio. In generale, si osserva poi come, specialmente negli esemplari di lunghezza minore, siano presenti numerose oscillazioni nell'intorno della tensione massima e anche al superamento della stessa, da ricondurre probabilmente ad assestamenti del provino sulla macchina di prova. Concludiamo poi aggiungendo che alcuni campioni, come si può notare, non sono stati testati fino alla tensione massima, per evitare possibili danni conseguenti alla loro rottura.

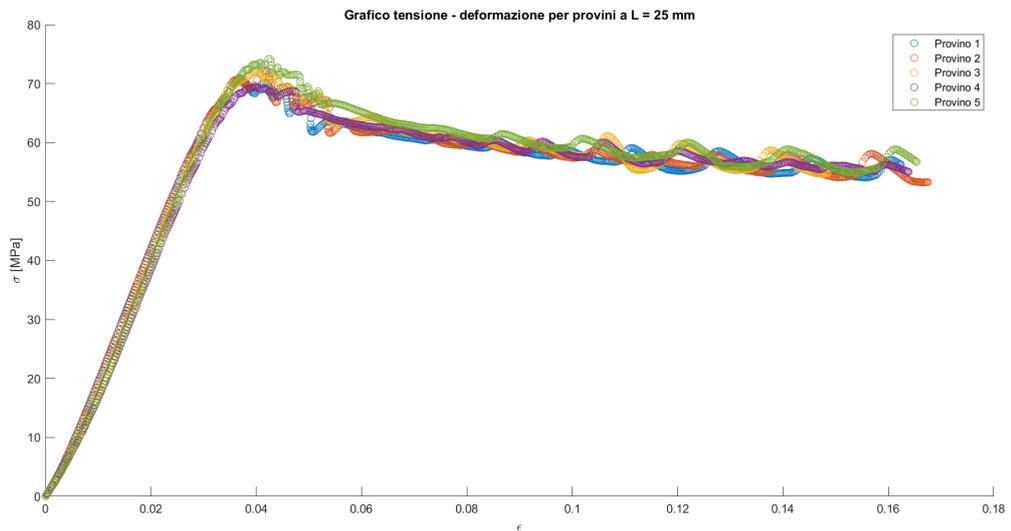


Figura 10.5: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 25 mm

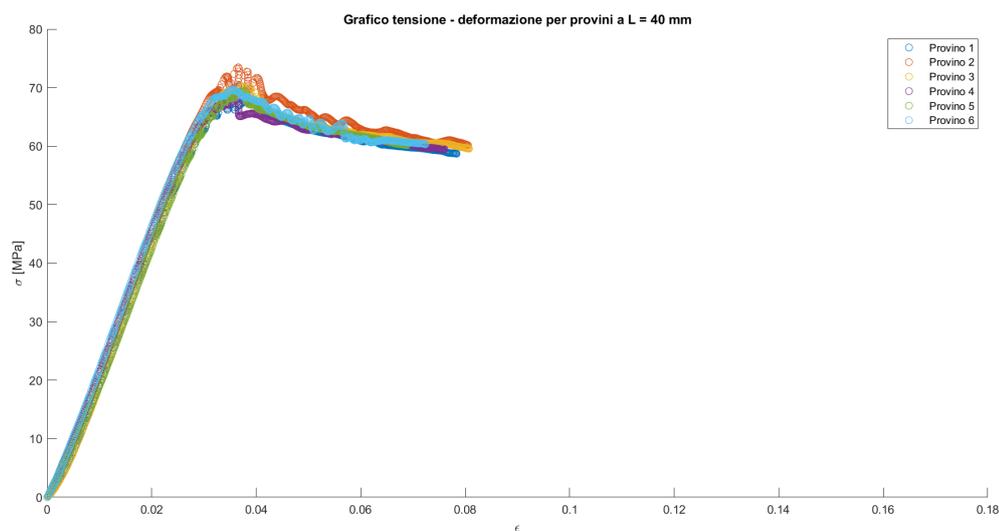


Figura 10.6: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 40 mm

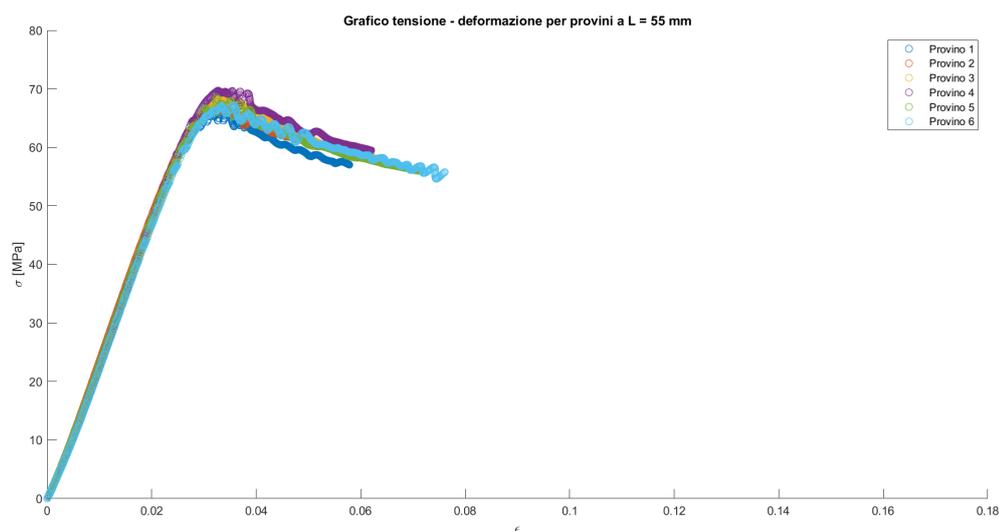


Figura 10.7: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 55 mm

10.3 Analisi DIC

Come per i provini a T, le registrazioni delle prove sono state analizzate tramite il programma Ncorr 2D per ottenere informazioni riguardo gli spostamenti trasversali degli esemplari, informazioni processate poi tramite un codice Matlab per estrapolare la tensione di instabilità. Nella presente sezione verranno enunciate le

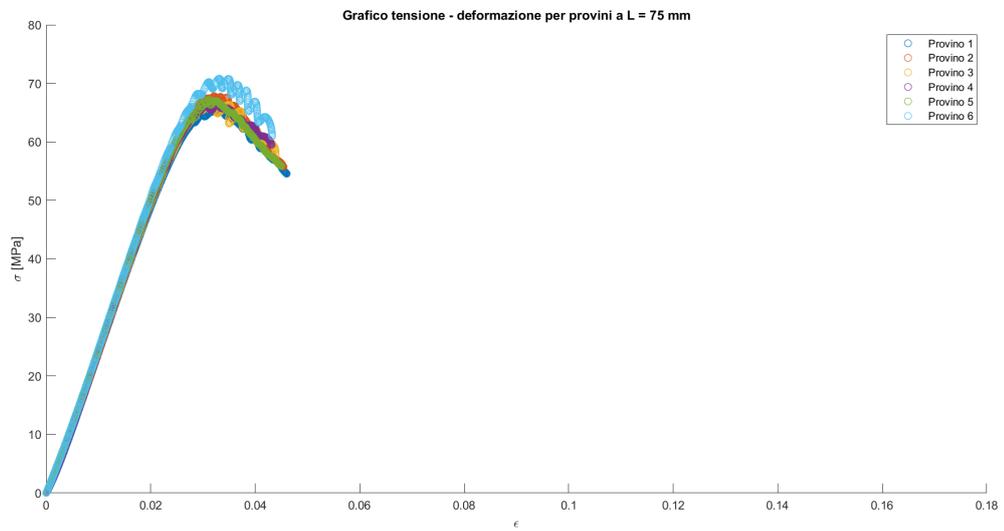


Figura 10.8: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 75 mm

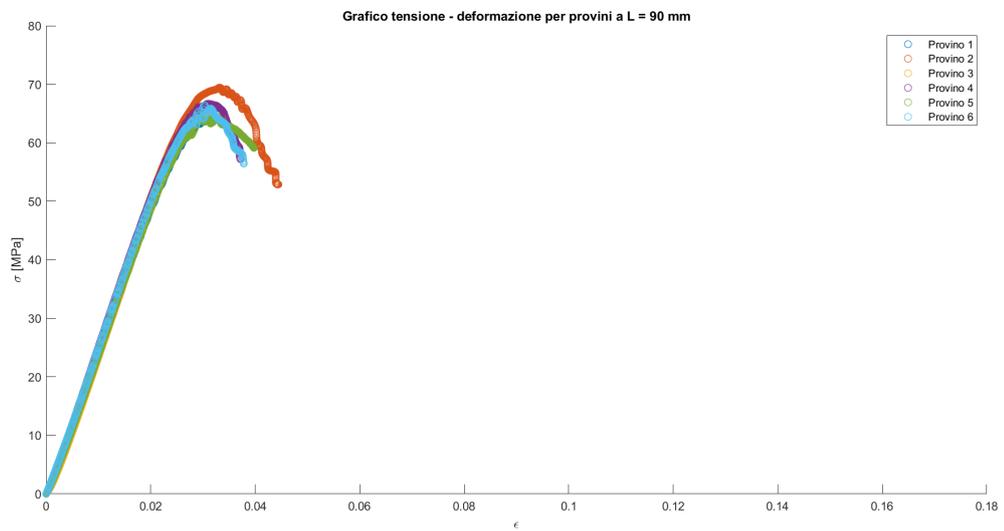


Figura 10.9: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 90 mm

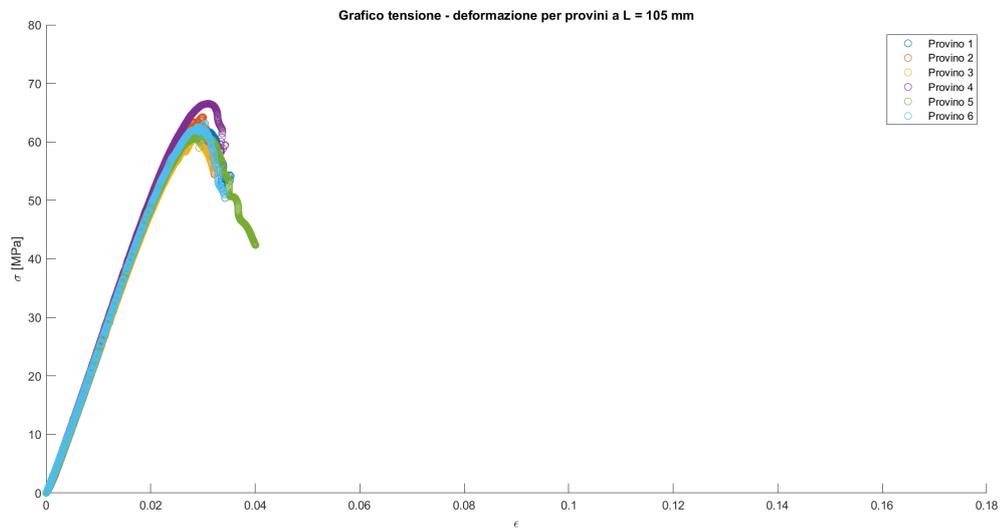


Figura 10.10: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 105 mm

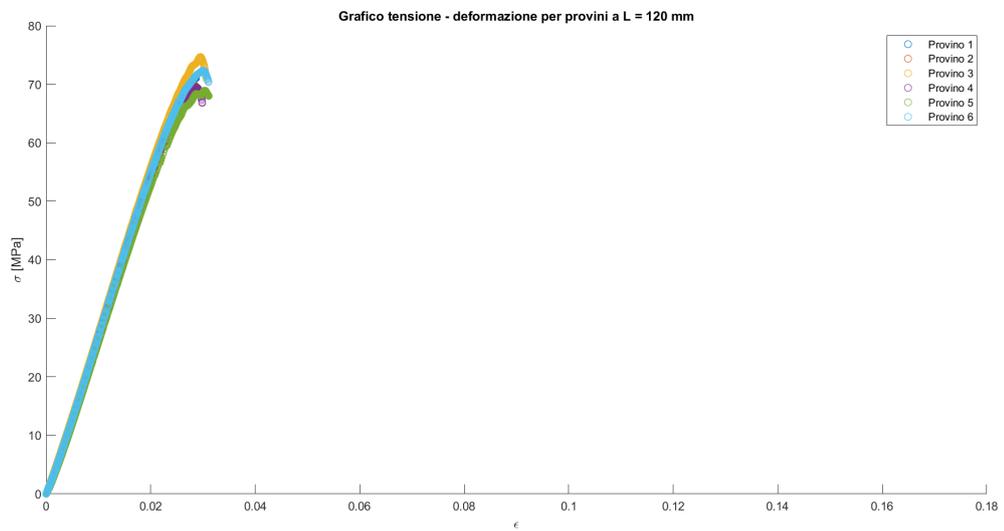


Figura 10.11: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 120 mm

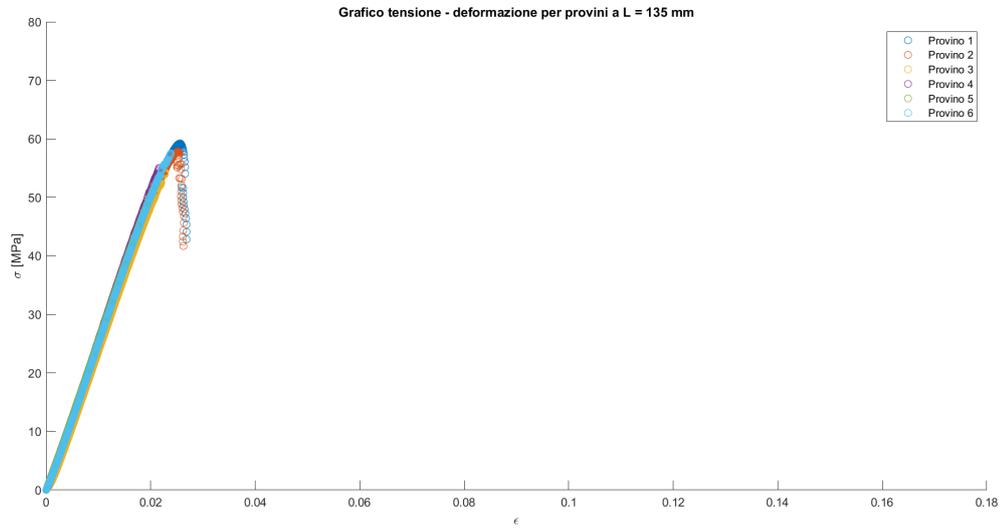


Figura 10.12: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 135 mm

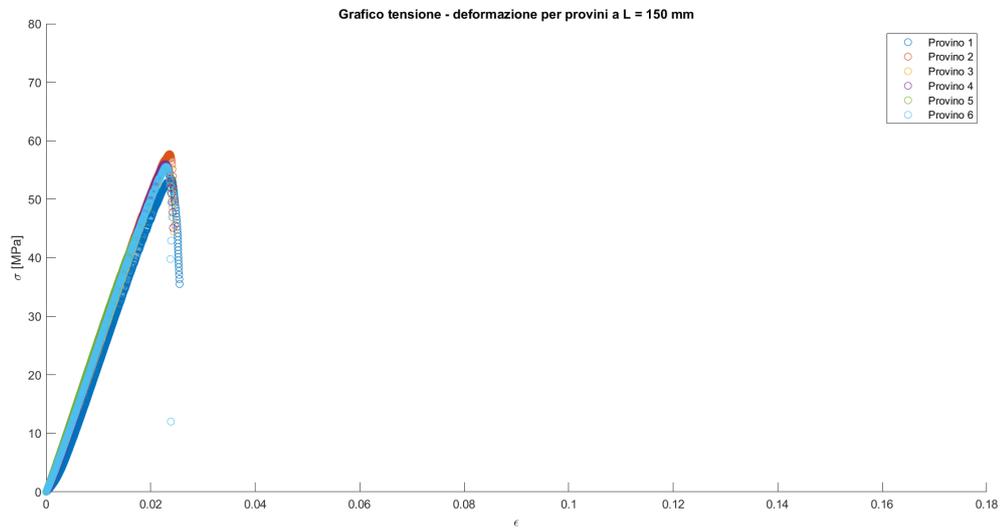


Figura 10.13: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 150 mm

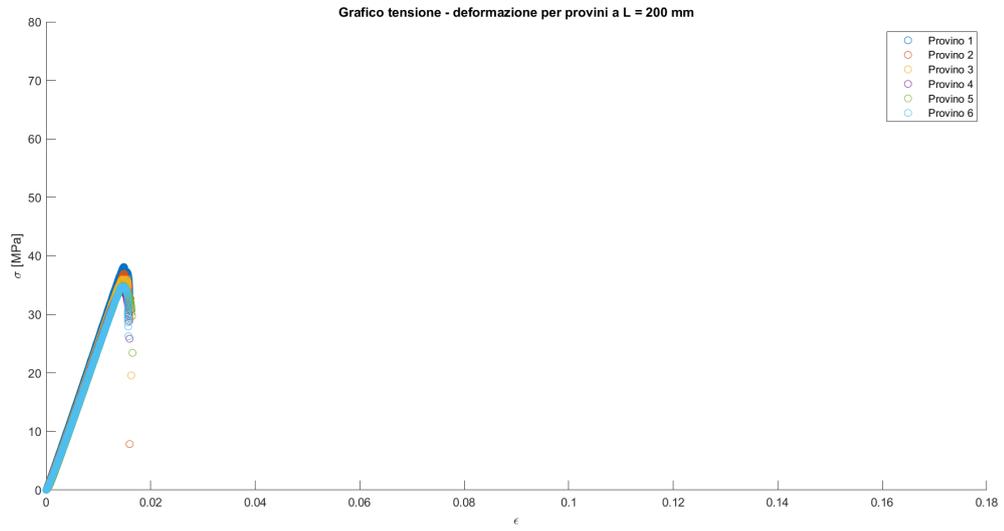


Figura 10.14: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 200 mm

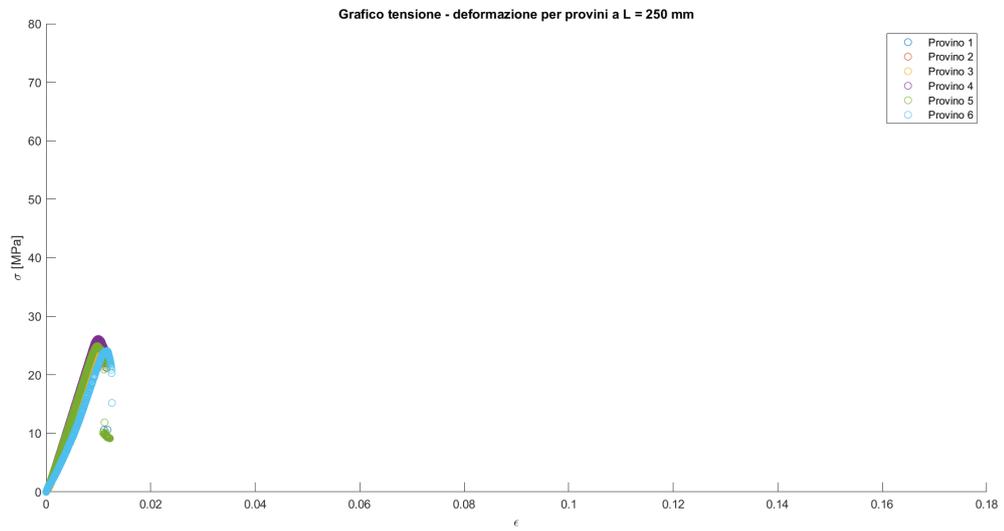


Figura 10.15: Grafico tensione-deformazione per i provini lunghi 250 mm

impostazioni dell'analisi di Correlazione d'immagine, i dettagli riguardanti il codice Matlab utilizzato e i risultati ottenuti.

10.3.1 Analisi tramite Ncorr 2D

Le correlazioni d'immagine relative alle prove sui campioni a sezione quadrata sono state effettuate in modo del tutto analogo a quanto già spiegato in sezione 5.3, relativa alle analisi DIC per i provini a T: una volta campionati a 5 Hz i video dei test tramite il programma ffmpeg, sono state date in input a Ncorr 2D l'immagine di riferimento per l'analisi e le immagini correnti da analizzare, è stata disegnata la ROI e sono stati definiti i parametri da usare. In particolare, si è scelto un valore di 10 pixel come raggio dei subset, i cui centri sono stati invece distanziati di 5 pixel; per quanto riguarda il numero di seeds invece, ne sono stati utilizzati 2 per i provini a L compresa tra 40 e 90 mm, 3 per quelli tra 105 e 135 mm, e 4 per quelli tra 150 e 250 mm, così da evitare rallentamenti dovuti alla maggiore superficie da analizzare (figura 10.16). Successivamente, calibrati gli spostamenti attraverso l'immagine di prova, sono state calcolate le deformazioni utilizzando un raggio di interpolazione pari a 5 pixel.

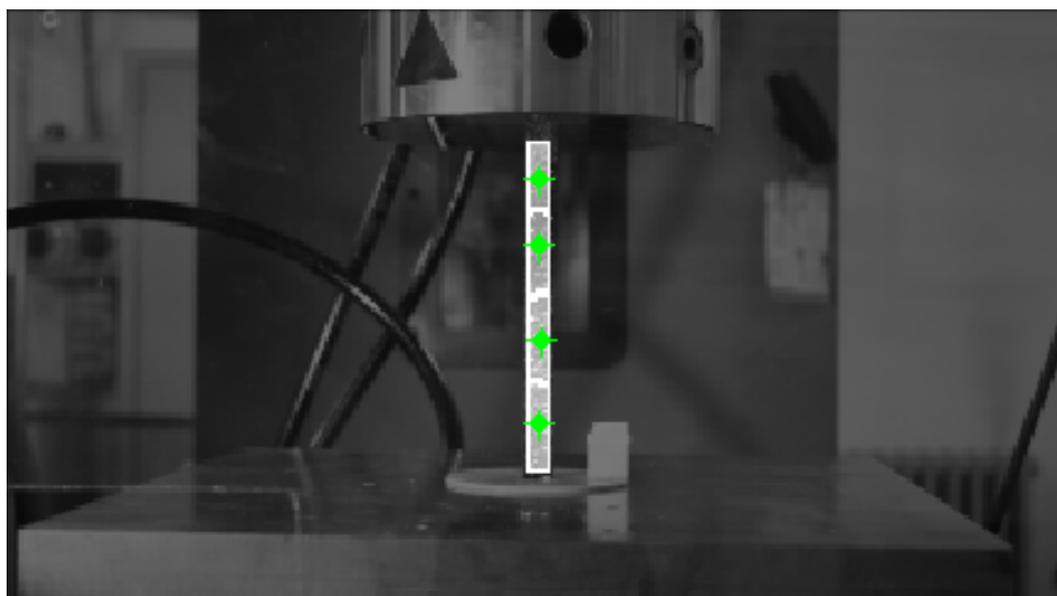


Figura 10.16: Posizionamento dei seeds per un provino lungo 150 mm

In generale, è da evidenziare una maggiore facilità di convergenza del processo iterativo presentato in sotto-sezione 3.2.1, di cui Ncorr mostra alcuni dettagli al termine del posizionamento dei seeds sulle immagini correnti (figura 10.17). Nei campioni a T, questo risultava infatti molto lento e problematico per i frame a fine

prova, probabilmente a causa della bassa dimensione trasversale della superficie analizzata (ricordiamo che in questo caso il lato è di 12.7 mm contro i 3 mm per i provini a T) che rendeva meno individuabili i subset in presenza di grandi deformazioni, condizione in cui la tipologia di analisi utilizzata potrebbe incontrare qualche problema.

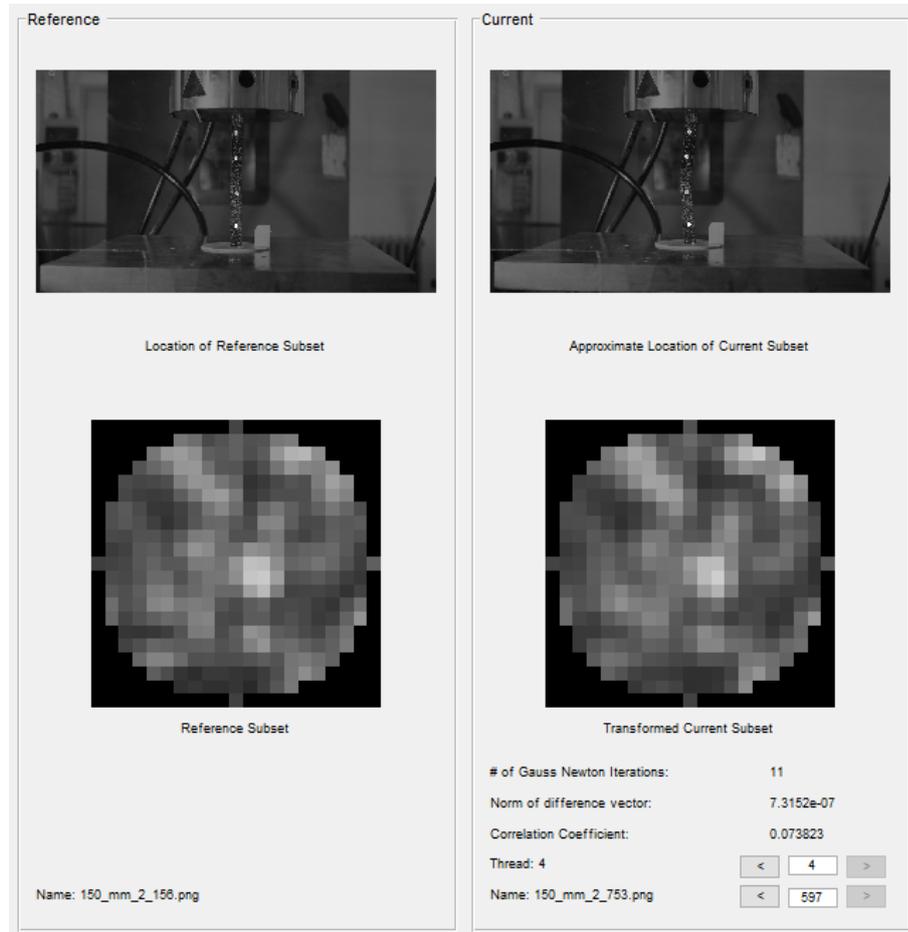


Figura 10.17: Grafica che permette di visualizzare eventuali problemi di correlazione dei seeds: notare le informazioni sul processo iterativo, in basso a destra

10.3.2 Elaborazione dei risultati di Ncorr 2D

Il codice utilizzato per elaborare i risultati delle correlazioni d'immagine di questa campagna sperimentale ha un funzionamento molto simile a quello visto in sottosezione 5.3.2: anche questo individua infatti, a partire dalle matrici degli spostamenti

trasversali ottenuti dall'analisi DIC e dei carichi ricavati dalla macchina di prova, il punto di instabilità tramite delle regressioni lineari delle configurazioni di pre e post-buckling. Per lo studio degli esemplari a sezione quadrata tuttavia, data la maggiore dimensione trasversale della ROI, si è deciso di non considerare gli spostamenti di un singolo punto come nelle analisi precedenti, ma quelli di due facet posti ai due estremi opposti lungo lo spessore, calcolando il carico in cui passano da una configurazione di pre-buckling a una di post-buckling, e successivamente il carico di instabilità come media tra i due così ricavati. I dettagli dei passaggi eseguiti dallo script sono elencati di seguito:

- *Rilevazione della posizione della ROI:* poiché è più agevole utilizzare gli spostamenti di tipo lagrangiano, così da avere una ROI fissa, un ciclo ne ricerca la posizione analizzando i dati del primo frame, individuando le caselle non nulle che, lo ricordiamo, rappresentano i punti all'interno della Region of Interest;
- *Acquisizione dei dati sugli spostamenti:* come già spiegato, in questa analisi non sono stati considerati gli spostamenti di un singolo punto ma di due agli estremi della ROI, lungo lo spessore. Poiché in questi provini non sempre il buckling si è manifestato a $L/2$, dall'ultimo frame viene ricavata la posizione verticale in cui si ha lo spostamento massimo, scegliendo quindi gli estremi destro e sinistro della ROI all'altezza in questione. Gli spostamenti di questi punti vengono allora salvati in una matrice, riducendo al contempo la frequenza di campionamento fino a 1.25 Hz, un quarto di quella originaria, per ridurre il rumore e facilitare le successive regressioni. Aggiungiamo poi che in questo caso si è evitato di "raddrizzare" le curve degli spostamenti per compensare le traslazioni di assestamento delle ganasce, come mostrato in sotto-sezione 5.3.2, poiché, dopo aver effettuato alcuni tentativi, gli andamenti ne sono usciti più sporchi;
- *Individuazione degli intervalli di regressione:* gli intervalli su cui calcolare le rette di regressione tra spostamento e carico vengono, anche in questo caso, ricavati tramite due cicli per subset. Ognuno di questi cicli calcola il coefficiente di correlazione su un intervallo, una volta iniziale, un'altra finale, di estensione definita in input e ampliata progressivamente, fermando le iterazioni quando la variazione percentuale tra due coefficienti di regressione successivi supera il 5%;
- *Calcolo rette di regressione e carico di buckling:* una volta ricavati gli intervalli vengono calcolate le rette di interpolazione, due per ognuno dei due punti considerati, tramite il comando *polyfit*, trovando il loro punto di intersezione in modo analogo a quanto fatto per i provini a T, applicando il comando *fzero* nell'intorno di 0 a un function handle dato dalla differenza tra le due

rette. I due carichi trovati, che rappresentano le sollecitazioni per le quali si ha divergenza degli spostamenti trasversali ai due estremi dello spessore del provino, vengono infine mediati per trovare il carico di instabilità.

In tabella 10.1 sono riportate le tensioni critiche ricavate con questo processo, e le medie per ogni famiglia. Oltre ai provini già citati, per il calcolo delle medie sono stati esclusi anche i provini 90-2 e 135-5, per i quali si ha una tensione di instabilità troppo lontana da quelle dei restanti provini. In generale, l'andamento delle tensioni è abbastanza in linea con le aspettative, eccetto che per alcune famiglie di esemplari: non considerando infatti i valori relativi ai campioni da 75 e 120 mm, notiamo che, come previsto, la sollecitazione critica diminuisce all'aumentare della snellezza; si nota inoltre che i valori rimangono quasi costanti per $L < 135 \text{ mm}$, famiglia a partire dalla quale la decrescita diventa molto più rapida. Una possibile spiegazione alla discrepanza relativa alle due famiglie citate potrebbe essere la direzione di instabilità di buona parte dei provini, andati in buckling diagonalmente e deformatisi dunque in modo consistente in direzione perpendicolare al piano d'osservazione: ciò potrebbe aver reso non precisa l'analisi DIC in alcuni casi, non essendo più valida l'ipotesi di spostamento bidimensionale alla base della Correlazione d'immagine 2D.

L	1	2	3	4	5	6	σ_m
40	67.52	72.04	67.64	71.44	70.93	66.57	69.36
55	/	67.33	66.56	70.19	65.37	/	67.36
75	66.91	69.44	69.70	67.48	67.36	72.46	68.94
90	66.00	79.83	68.65	68.27	65.08	65.82	66.76
105	64.33	62.87	/	68.80	61.72	62.84	64.11
120	/	/	68.82	65.81	64.67	69.99	67.32
135	56.09	55.07	/	/	/	54.17	55.11
150	/	55.30	/	54.26	35.17	50.32	53.29
200	35.70	37.40	36.54	33.84	36.43	35.09	35.83
250	26.44	26.72	/	26.32	23.63	26.64	25.95

Tabella 10.1: Tensioni di buckling per tutti i provini, e le relative tensioni di buckling medie, in MPa

In figure 10.19 - 10.28 sono riportati i grafici tensione vs. spostamento trasversale di un provino per famiglia, insieme alle relative tensioni di buckling ricavate tramite l'analisi sperimentale, mentre in figura 10.18 è riportato l'andamento delle tensioni medie ricavate rispetto alla lunghezza L dei provini.

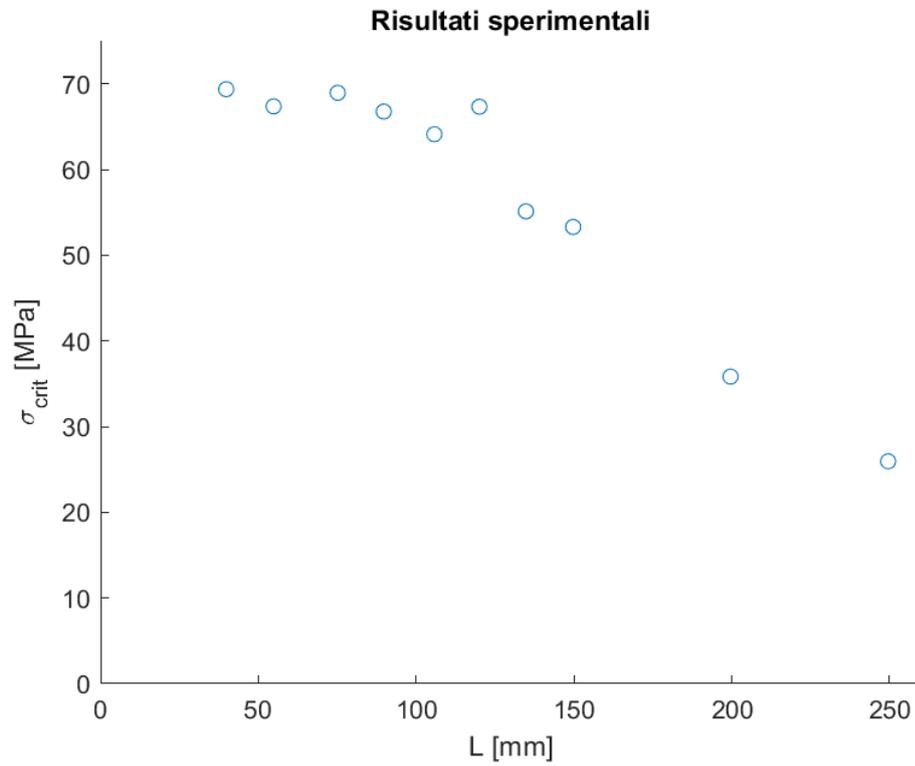


Figura 10.18: Tensioni di instabilità ricavate dall'analisi sperimentale, al variare di L

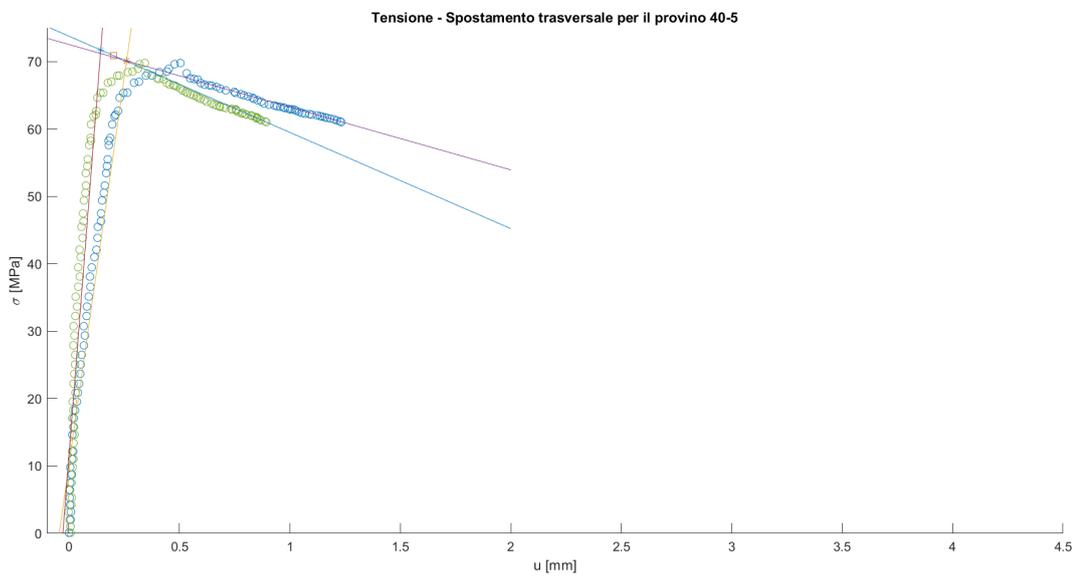


Figura 10.19: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 40 mm

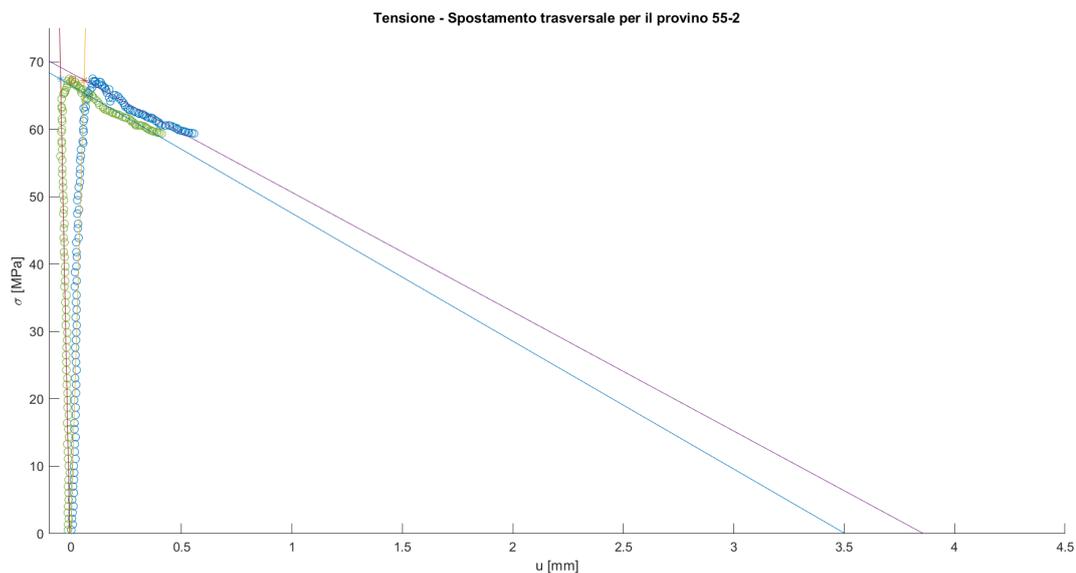


Figura 10.20: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 55 mm

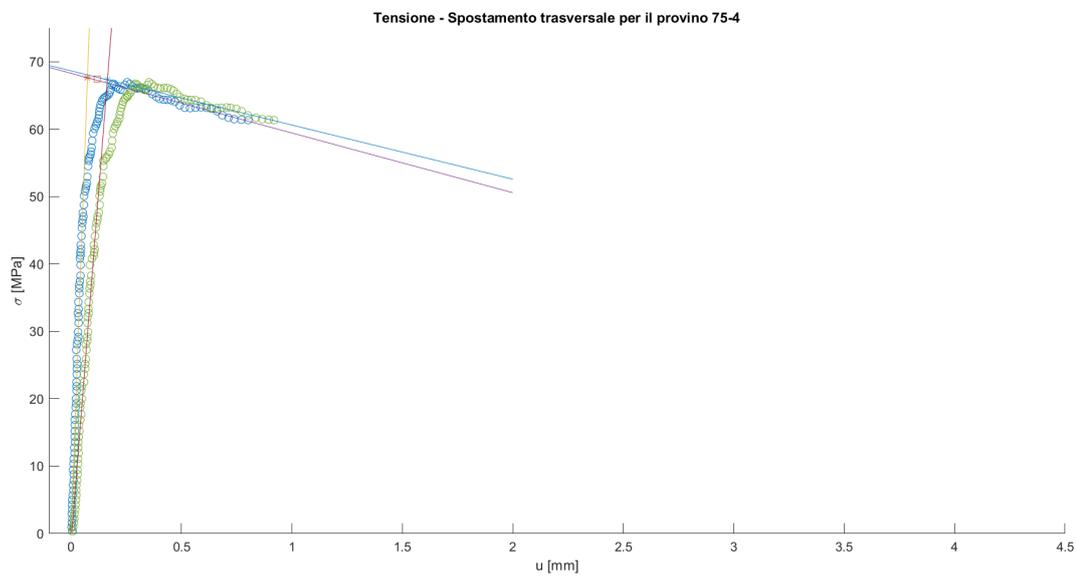


Figura 10.21: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 75 mm

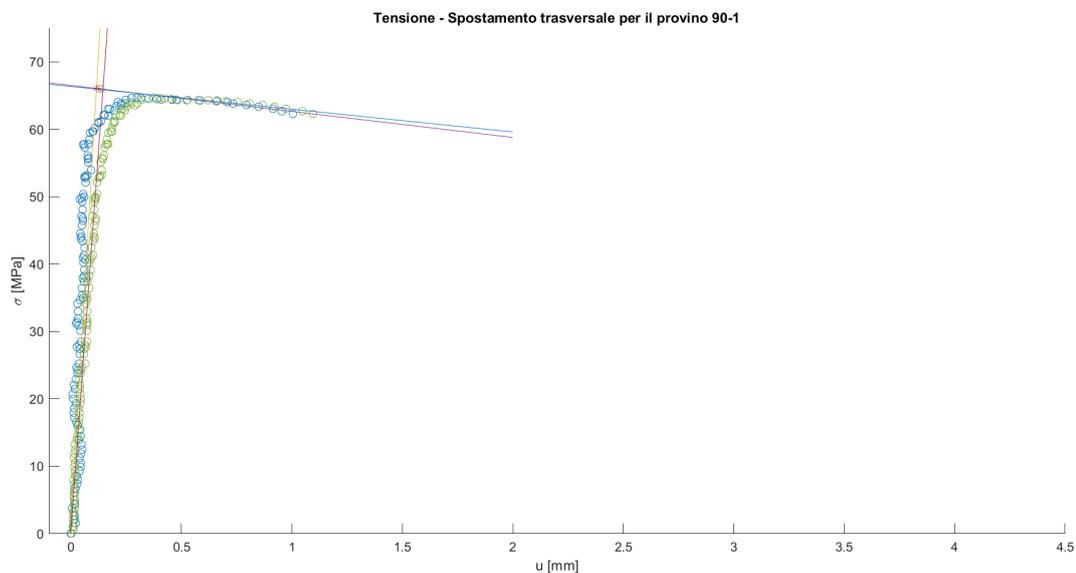


Figura 10.22: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 90 mm

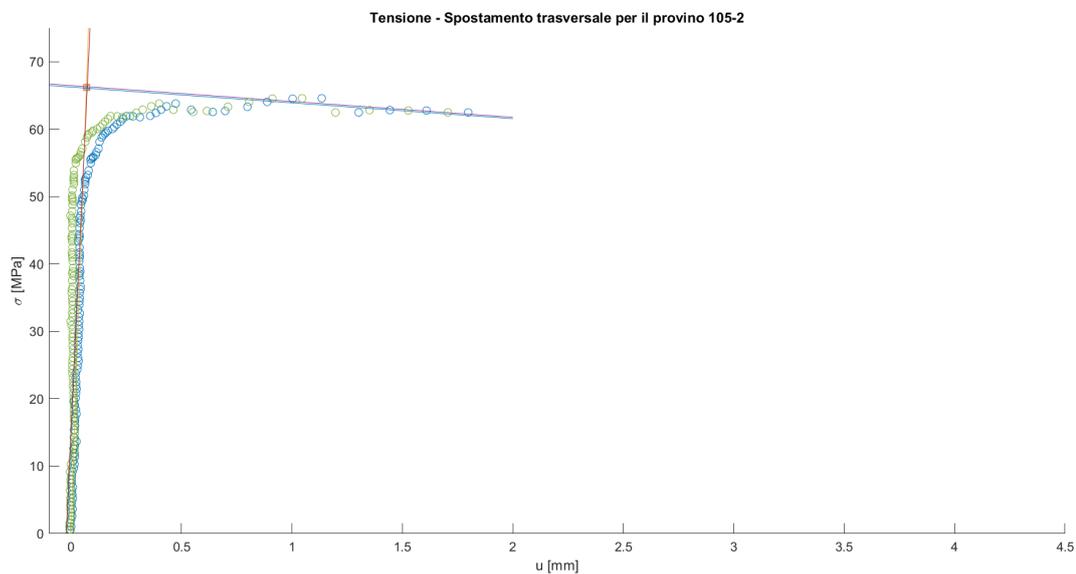


Figura 10.23: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 105 mm

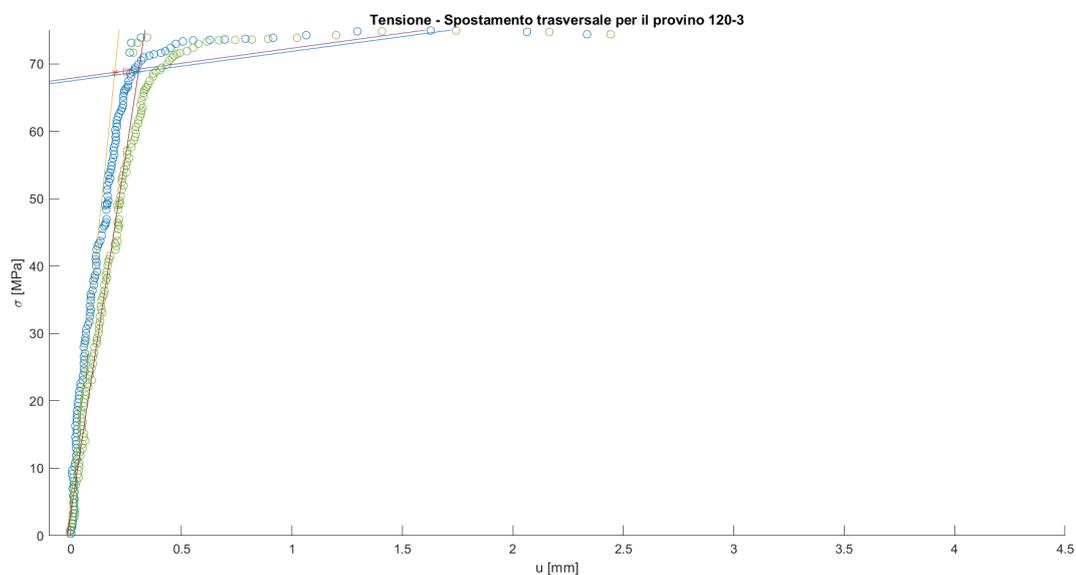


Figura 10.24: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 120 mm

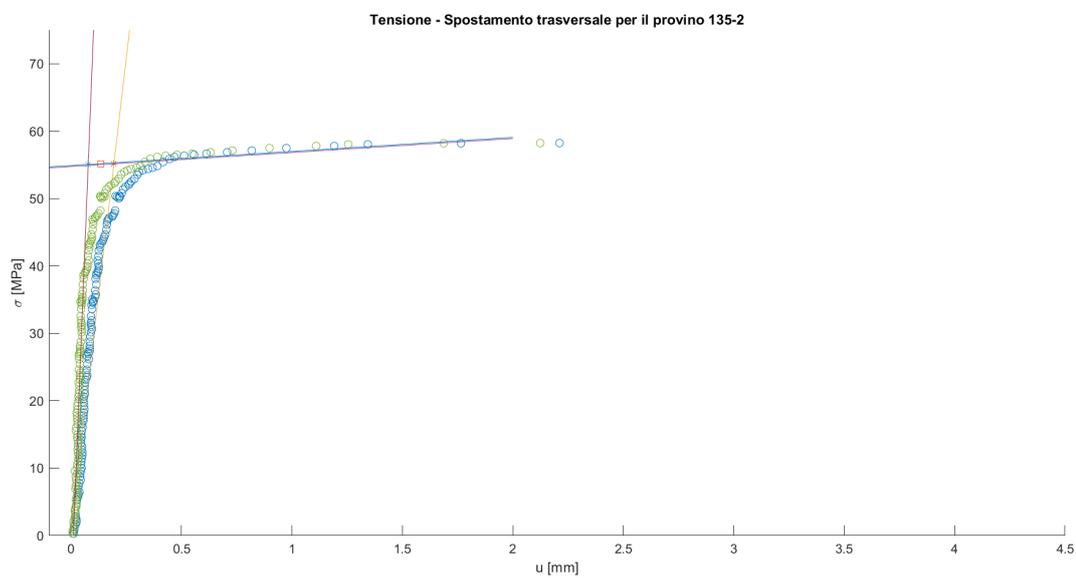


Figura 10.25: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 135 mm

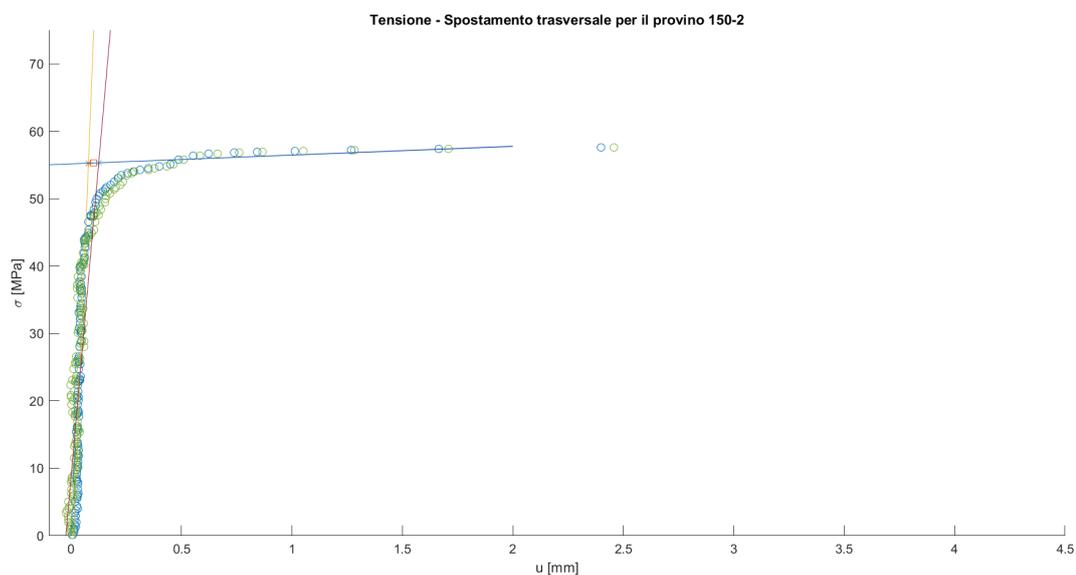


Figura 10.26: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 150 mm

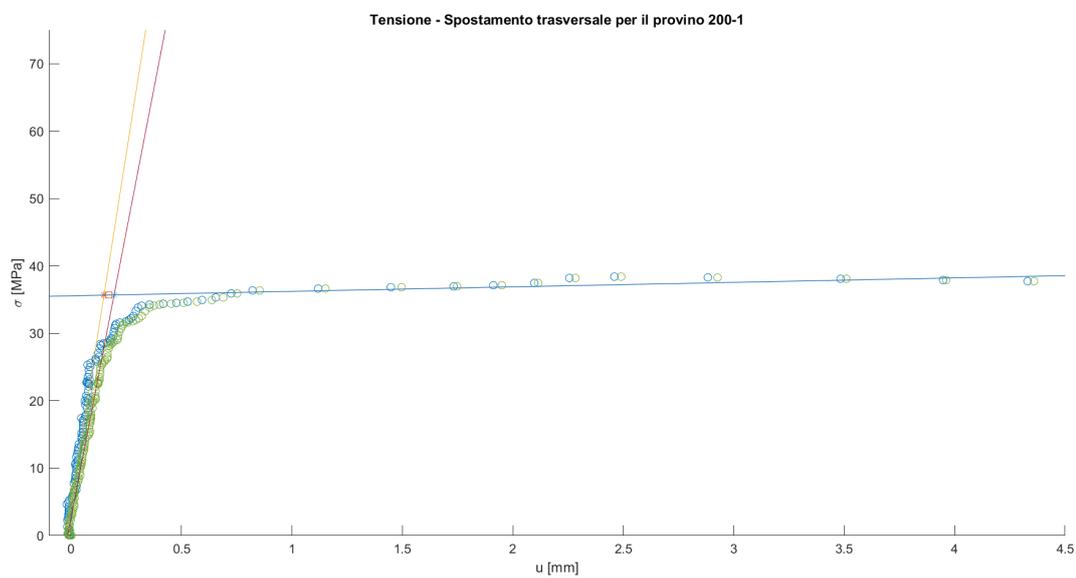


Figura 10.27: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 200 mm

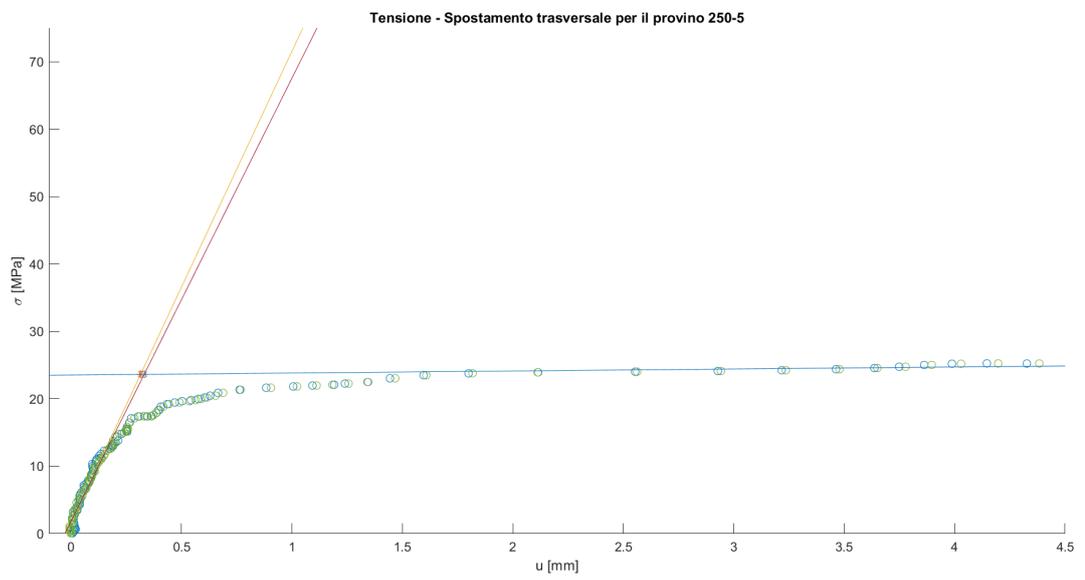


Figura 10.28: Grafico tensione-spostamento per un provino lungo 250 mm

Capitolo 11

Analisi teorica

Ricavate le tensioni di instabilità a partire dai dati sperimentali, è stato effettuato uno studio di tipo teorico del buckling dei provini. Nel presente capitolo sono spiegati tutti i passaggi svolti, a partire dal post-processing dei dati ricavati dalle prove sperimentali volto a ricavare le caratteristiche meccaniche del materiale usato, fino all'applicazione dei modelli teorici veri e propri: il modello di Eulero, il modello di Eulero tangente e la formula parabolica di Johnson.

11.1 Parametri del materiale

Oltre a fornire i dati di input relativi ai carichi, utilizzati nel corso dell'analisi sperimentale, le prove di compressione presentate nel capitolo 10 sono servite, come già visto, a ricavare le curve tensione vs deformazione di tutte le famiglie di provini, utili a estrapolare, come previsto dalla normativa ASTM D965-15, le caratteristiche del materiale. Nel capitolo 6 è stata già mostrata la procedura per ricavare il modulo di Young E del materiale, brevemente riproposta: a partire dalle curve tensione - deformazione dei provini da 55 mm, viene effettuata una interpolazione lineare dei dati su un intervallo iniziale definito in input, e calcolato il coefficiente angolare della retta in questione; in seguito, tale intervallo è progressivamente ampliato nel corso di un ciclo e il valore citato viene salvato, a ogni iterazione, in un vettore, e confrontato con la media di tutti i coefficienti angolari calcolati; il processo iterativo si interrompe quando la differenza percentuale tra il coefficiente medio e quello relativo all'iterazione supera il 3%. Il valore angolare medio è quindi il modulo di Young del campione, mentre la tensione alla quale il ciclo si è interrotto è la relativa tensione di proporzionalità. Come previsto dalla normativa, una volta ricavati i parametri su almeno 5 provini, questi sono stati mediati tra loro per ricavare quelli del materiale.

Per quanto riguarda la tensione di snervamento, utile per la formula parabolica di Johnson, la normativa prevede che venga calcolata utilizzando esemplari a sezione circolare o quadrata, di lunghezza doppia rispetto al diametro/lato del campione in esame. Poiché i provini testati presentavano un diametro da 12.7 mm, nel nostro caso avremmo dovuto usare campioni lunghi 25.4 mm, poco più alti di quelli da 25 mm a nostra disposizione. Per comodità, e considerando che la normativa vigente non è in realtà prevista per provini realizzati tramite FDM, si è dunque deciso di usare proprio i dati relativi a questi campioni. Come richiesto dalle norme, a partire dalle curve tensione vs. deformazione è stata allora ricavata la tensione massima per ogni provino, termini successivamente mediati per ottenere la tensione di snervamento del materiale. Le caratteristiche del PLA così ottenute sono riportate in tabella 11.1 e 11.2: i dati riguardanti il provino 25-3 non sono presenti a causa di un problema che ha invalidato la prova.

L	1	2	3	4	5	6	E
55	2478.58	2496.78	2352.08	2376.71	2437.91	2403.64	2424.28

Tabella 11.1: Moduli di Young dei provini a sezione quadrata da 55 mm e del materiale, in MPa

L	1	2	3	4	5	6	σ_s
25	71.24	72.89	/	72.52	69.91	74.58	72.23

Tabella 11.2: Tensioni di snervamento dei provini da 25 mm e del materiale, in MPa

Un altro parametro necessario allo studio teorico è poi il modulo di Young tangente. Per calcolarlo si è anche in questo caso partiti dal grafico tensione vs deformazione dei provini da 55 mm: dopo aver calcolato la curva media tra tutti gli esemplari, si è poi proceduto a una riduzione del campionamento dei dati a 1/6 di quello originario (figura 11.1), così da evitare problemi di interpolazione dovuti alle numerose oscillazioni presenti in prossimità della tensione massima; successivamente, è stato ricavato il modulo di Young in 6 punti tra la tensione di proporzionalità e la tensione massima, in posizioni definite da nodi di Čebyšëv, tramite il metodo delle differenze centrate; infine il modulo tangente è stato estrapolato mediante interpolazione con un polinomio di quinto grado, usando il comando *polyfit*.

L'andamento del modulo di Young con la tensione è riportato in figura 11.2, mentre i coefficienti del polinomio interpolante sono riportati in tabella 11.3.

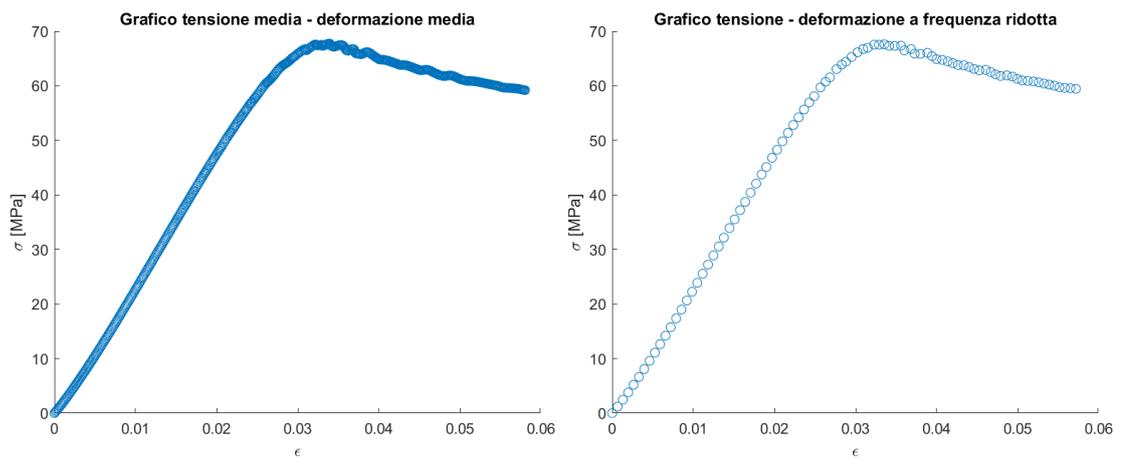


Figura 11.1: Grafici tensione - deformazione medie per i provini da 55 mm, pre e post riduzione del campionamento

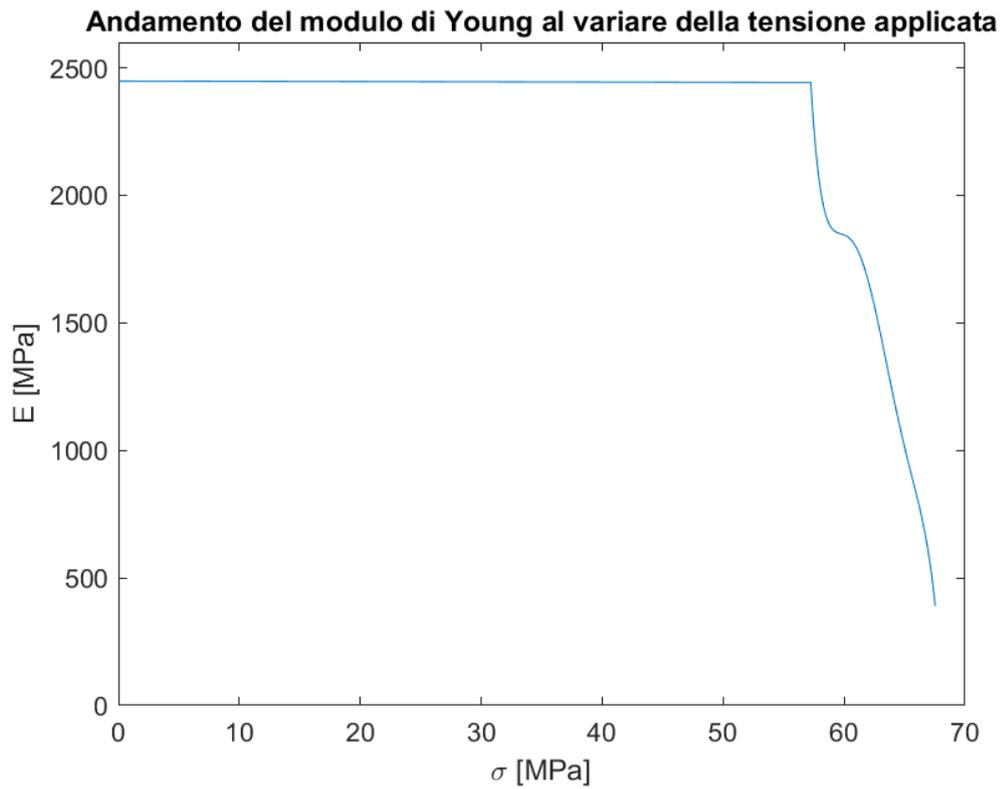


Figura 11.2: Andamento del modulo di Young al variare della tensione applicata

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
-0.30	94.83	-11932.39	$7501.2 * 10^2$	$-2355.93 * 10^4$	$2957.39 * 10^5$

Tabella 11.3: Coefficienti del polinomio approssimante il modulo di Eulero tangente

11.2 Applicazione dei modelli teorici

Avendo calcolato le caratteristiche meccaniche del materiale, è stato possibile applicare i modelli teorici riguardanti il fenomeno, nello specifico il modello di Eulero, il modello di Eulero tangente e la formula parabolica di Johnson, ripresentati nelle formule 11.1 - 11.3:

$$\sigma_{crit,E} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (11.1)$$

$$\sigma_{crit,E_t} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (11.2)$$

$$\sigma_{crit,J} = \sigma_s - \frac{\sigma_s^2 \lambda^2}{4\pi^2 E} \quad (11.3)$$

Dove E ed E_t sono rispettivamente il modulo di Young e il modulo di Young tangente, σ_s è la tensione di snervamento del materiale e λ è la snellezza dell'asta, calcolata come

$$\lambda = \frac{L_e}{\rho} \quad (11.4)$$

Nella quale ρ è il raggio d'inerzia e L_e è la lunghezza libera di inflessione. Nei calcoli effettuati, questa è stata dapprima posta pari alla lunghezza dei provini, come richiesto dalla condizione di semplice appoggio agli estremi; successivamente tuttavia, a partire da alcune osservazioni fatte nel corso del capitolo 10, i calcoli sono stati ripetuti considerando invece degli incastrati, condizione introdotta utilizzando una L_e pari a $L/2$.

Considerando che il modulo tangente è dipendente dalla sollecitazione, come mostra l'equazione 11.5, per l'applicazione di Eulero tangente si è ritenuto più conveniente invertire la formula e usare la tensione come variabile indipendente (equazione 11.6), ricavando poi gli sforzi critici cercati una volta ottenute dalla formula le snellezze dei campioni testati.

$$E_t(\sigma) = C_1 \sigma^5 + C_2 \sigma^4 + C_3 \sigma^3 + C_4 \sigma^2 + C_5 \sigma + C_6 \quad (11.5)$$

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E_t(\sigma)}{\sigma}} \quad (11.6)$$

Ricordiamo poi che i tre modelli hanno dei limiti di applicabilità dettati dalle snellezze limite e di transizione, che in questo caso sono pari a:

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 20.54 \quad (11.7)$$

$$\lambda_{trans} = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_s}} = 25.86 \quad (11.8)$$

Dove σ_p è la tensione di proporzionalità del PLA. Il modello di Eulero lineare è valido per $\lambda > \lambda_{lim}$, mentre la formula di Johnson è valida per $\lambda_{lim} < \lambda < \lambda_{trans}$. Eulero tangente è invece utilizzabile per ogni tipo di snellezza, poiché segue l'andamento del modulo di Young.

I risultati ottenuti applicando i tre modelli nella condizione di estremi appoggiati, accompagnati dai valori ricavati dall'analisi sperimentale, sono riportati in tabella 11.4, mentre il confronto tra gli andamenti dei tre modelli e dei risultati reali è visualizzabile in figura 11.3.

L	λ	Eulero	Eulero tangente	Johnson	σ_{sperim}
40	10.75	209.00	66.24	65.99	69.36
55	14.80	110.23	63.24	60.40	67.36
75	20.30	58.60	57.30	49.97	68.94
90	24.32	40.83	40.83	40.29	66.76
105	28.69	29.34	29.34	27.78	64.11
120	32.49	22.89	22.89	15.25	67.32
135	36.33	18.30	18.30	0.96	55.11
150	41.17	14.25	14.25	-19.29	53.29
200	54.07	8.26	8.26	-85.58	35.83
250	67.59	5.29	5.29	-174.41	25.95

Tabella 11.4: Tensioni di buckling teoriche, calcolate tramite i modelli teorici in condizioni di basi appoggiate, e tensioni di buckling sperimentali, in MPa

Si nota immediatamente come i risultati differiscano dai valori sperimentali, come già intuibile dalle osservazioni sulla deformatata, e, per i modelli di Eulero tangente e Johnson, vi si avvicinino notevolmente solo a snellezze molto basse; il modello di Eulero lineare sovrastimando di molto le tensioni per aste tozze e sottostimandole per provini snelli, risulta chiaramente inadeguato a descrivere le

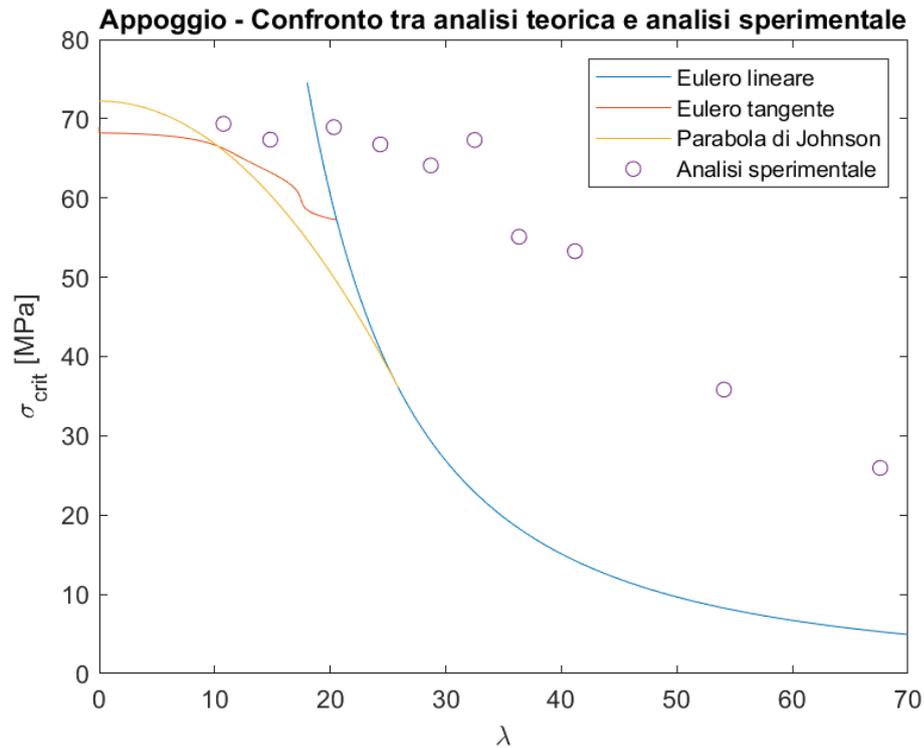


Figura 11.3: Curve relative ai tre modelli teorici e tensioni di instabilità sperimentali, nel caso di estremi appoggiati

condizioni dei test. I tre modelli sono dunque stati nuovamente applicati utilizzando una lunghezza di inflessione pari alla metà della lunghezza dei provini, dimezzando così anche la snellezza e simulando in questo modo estremi incastrati. I risultati così ottenuti sono riportati in tabella 11.5, mentre il grafico in figura 11.4 riporta le tensioni sperimentali nella nuova condizione di vincolo e le curve relative ai tre modelli.

In tabella si nota stavolta una notevole vicinanza tra i risultati sperimentali e quelli teorici nei rispettivi campi di applicabilità, sebbene la formula di Johnson non se ne allontani molto anche per $\lambda < \lambda_{lim}$ e $\lambda > \lambda_{trans}$. Il grafico mostra poi che gli andamenti seguono molto meglio le curve rispetto a quanto visto precedentemente e ciò conferma, come già era avvenuto nel corso della parte II, che il vincolo alle estremità dei provini negli esperimenti effettuati è un incastro.

L	λ	Eulero	Eulero tangente	Johnson	σ_{sperim}
40	5.38	836.01	67.90	70.67	69.36
55	7.40	440.94	67.57	69.27	67.36
75	10.15	234.42	66.61	66.67	68.94
90	12.16	163.32	65.19	64.24	66.76
105	14.35	117.36	63.57	61.12	64.11
120	16.24	91.56	62.03	57.98	67.32
135	18.17	73.20	58.32	54.41	55.11
150	20.59	57.00	57.00	49.35	53.29
200	27.03	33.06	33.06	32.78	35.83
250	33.80	21.15	21.15	10.57	25.95

Tabella 11.5: Tensioni di buckling teoriche, calcolate tramite i modelli teorici in condizioni di basi incastrate, e tensioni di buckling sperimentali, in MPa

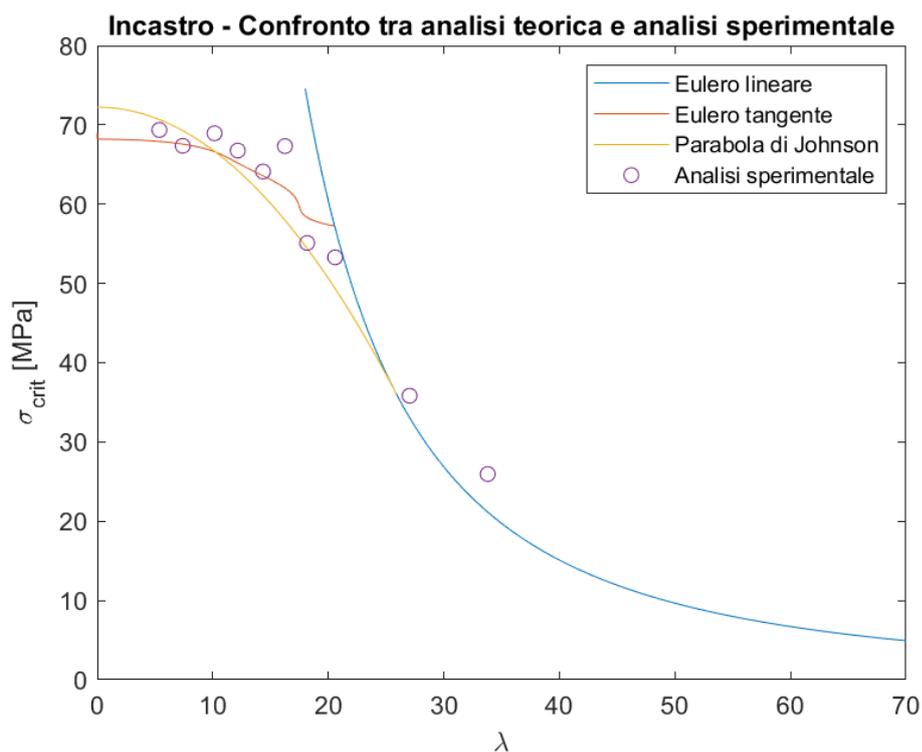


Figura 11.4: Curve relative ai tre modelli teorici e tensioni di instabilità sperimentali, nel caso di estremi incastrati

Capitolo 12

Analisi numerica

L'analisi numerica dei provini a sezione quadrata è infine l'ultimo step di questo lavoro di tesi. Nel presente capitolo verranno trattate le tipologie di studio effettuate, i dettagli del modello e i risultati ottenuti, confrontati con quelli sperimentali.

12.1 Introduzione

Ai fini di dare maggiore solidità allo studio sperimentale effettuato, che pure ha presentato un buon accordo tra modelli teorici e risultati reali, è infine stata eseguita un'analisi numerica a elementi finiti tramite il software MSC Nastran/Patran. In particolare, sono state effettuate analisi 1D lineari e non lineari, utilizzando rispettivamente la SOL 105 e la SOL 400. Come già mostrato nel capitolo 7, il principio di funzionamento delle due è notevolmente diverso: mentre infatti la SOL 105 effettua una ricerca degli autovalori del sistema per ricavare il carico di instabilità, la SOL 400 procede con una scomposizione del carico in step esercitati progressivamente e per i quali viene ricercata una convergenza della soluzione, mentre il carico di buckling è stato estrapolato processando i dati ottenuti in questo modo. Lo studio è stato effettuato nelle due differenti condizioni di vincolo già ampiamente discusse, una volta appoggiando gli estremi dei provini, in un altro incastrandoli, così da poter confermare i risultati ottenuti nel corso dell'analisi teorica.

12.2 Dettagli del modello

Il modello su cui vengono effettuate le analisi è una simulazione vera e propria della struttura reale, della quale devono essere definite geometria, proprietà del materiale, vincoli, carichi e discretizzazione. I dettagli della creazione dei provini

all'interno del programma, e delle analisi lineari e non lineari eseguite, sono riportati di seguito.

12.2.1 Geometria

Poiché l'approssimazione effettuata è di tipo unidimensionale, per inserire la geometria è stato sufficiente creare delle linee, di lunghezze pari a quelle medie ricavate dall'analisi statistica effettuata in sezione 9.3.

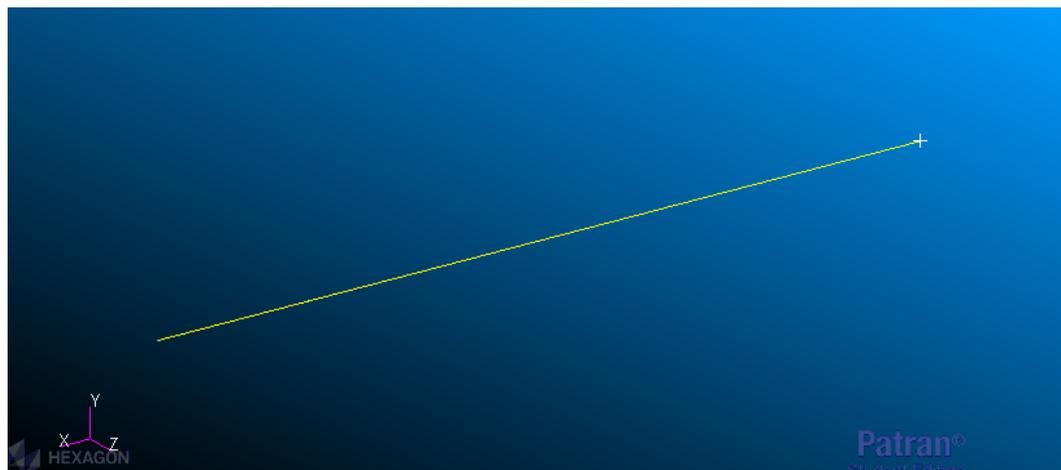


Figura 12.1: Geometria di un provino 1D

12.2.2 Mesh

La discretizzazione è stata realizzata tramite degli elementi BAR2, in numero variabile a seconda della lunghezza del modello: per i campioni fino a 120 mm si è infatti scelto di approssimare la struttura con 10 elementi, portati poi a 20 a lunghezze maggiori. La scelta di un numero pari di elementi non è qui casuale ed è giustificata dalle esigenze della SOL 400, che necessita dell'introduzione di una perturbazione in nodi specifici per poter studiare il buckling.

12.2.3 Proprietà meccaniche e geometriche dei provini

Il materiale relativo a questi studi è lo stesso, chiaramente, già introdotto precedentemente e utilizzato nel corso delle analisi FEM sui provini a T. Il PLA è stato quindi nuovamente impostato come isotropo ed elasto-plastico, e definito tramite l'inserimento dei valori di modulo di Young e del coefficiente di Poisson, necessari per le analisi lineari, e della curva completa del materiale per le analisi non lineari.

La curva è presentata in figura 12.2 ed è la curva media calcolata a partire dai grafici tensione - deformazione della famiglia da 55 mm, modificata per fare in modo che il tratto iniziale, fino alla tensione di proporzionalità, sia effettivamente rettilineo come richiesto dal programma.

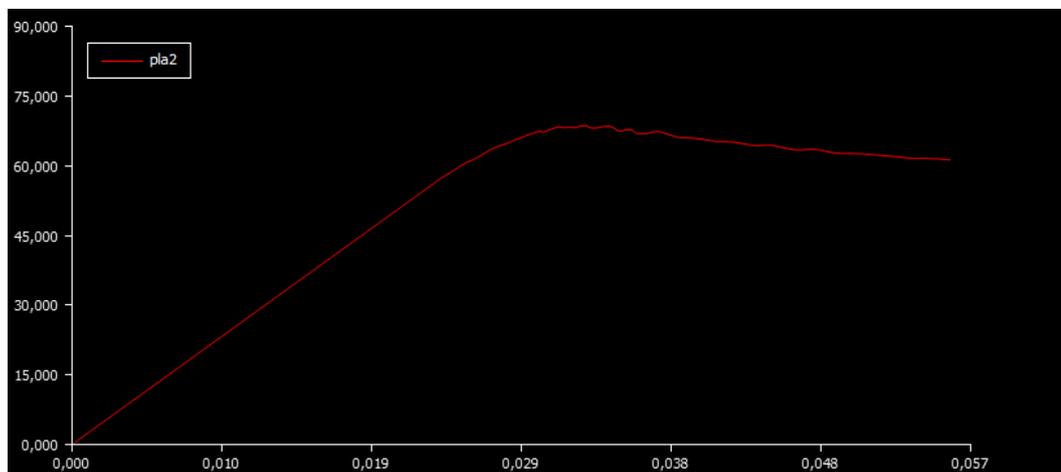


Figura 12.2: Curva del materiale utilizzata per l'analisi FEM non lineare

Le proprietà del materiale sono state quindi assegnate al provino tramite il comando *Beam*, che permette tra le altre cose di impostare le caratteristiche geometriche della sezione (figura 12.3), scelta piena, quadrata e di dimensioni pari a quelle medie viste in sezione 9.3.

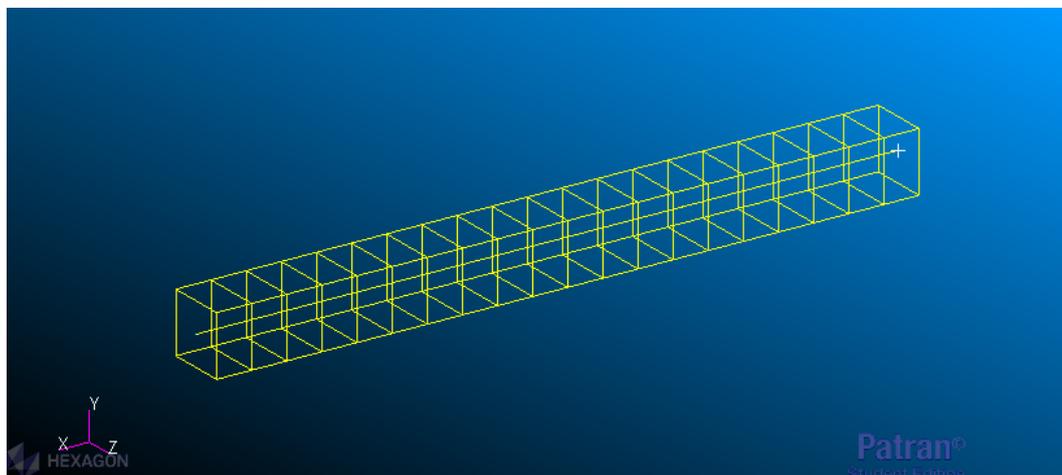


Figura 12.3: Visualizzazione 3D delle caratteristiche geometriche degli elementi assegnati al modello

12.2.4 Vincoli e carichi

Per quanto riguarda i vincoli, si è deciso di impostare due differenti *load cases*, così da poter analizzare in modo più agevole le due condizioni studiate. Considerando il sistema di riferimento in figura 12.4, i moti bloccati alle estremità sono:

- nel caso di semplice appoggio, gli spostamenti lungo y e z sono stati inibiti su entrambe le basi, con l'aggiunta, per l'estremo scarico, del blocco di spostamenti e rotazioni attorno a x;
- nel caso di incastro, a entrambe le basi sono stati impediti spostamenti e rotazioni lungo y e z, e all'estremo scarico sono inoltre stati bloccati spostamenti e rotazioni lungo la direzione x.

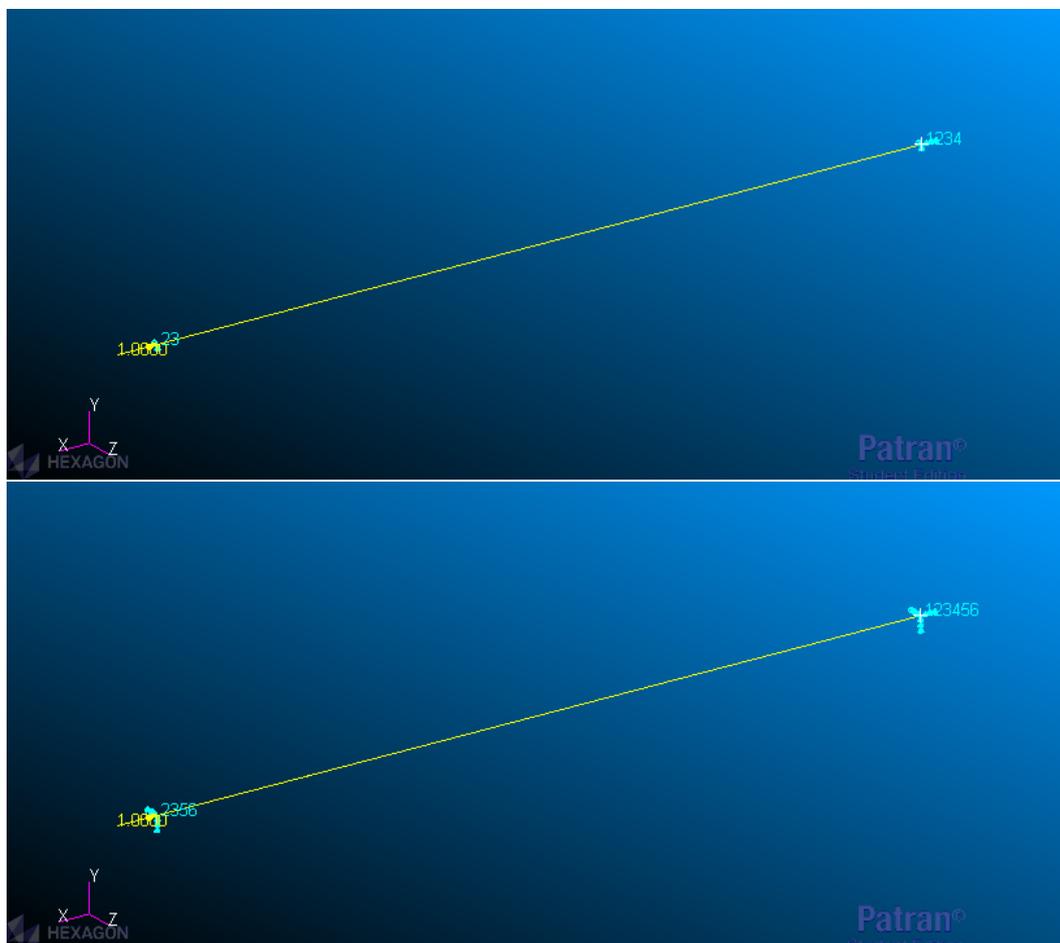


Figura 12.4: Vincoli e carichi nei casi di appoggio e incastro nei modelli finalizzati alle analisi lineari

A proposito del carico, questo è stato simulato in due modi differenti in base al tipo di analisi da effettuare: nel caso lineare infatti, è bastato introdurre una forza puntiforme pari a 1 N, mentre per le analisi non lineari questa è stata variata a seconda della lunghezza del modello, con valori nell'ordine delle migliaia di Newton; inoltre, come già spiegato, nei load cases finalizzati alla SOL 400 sono stati introdotti sul nodo centrale anche dei carichi puntiformi in direzione perpendicolare al provino, di intensità compresa tra 0.1 N, per i provini più lunghi, e 10 N, per i provini più corti, in modo da stimolare il buckling a una semi-onda rilevato nel corso della campagna sperimentale. Il carico di perturbazione è stato variato per semplificare la convergenza delle analisi più complesse, nello specifico quelle dei provini più corti vincolati con incastri.

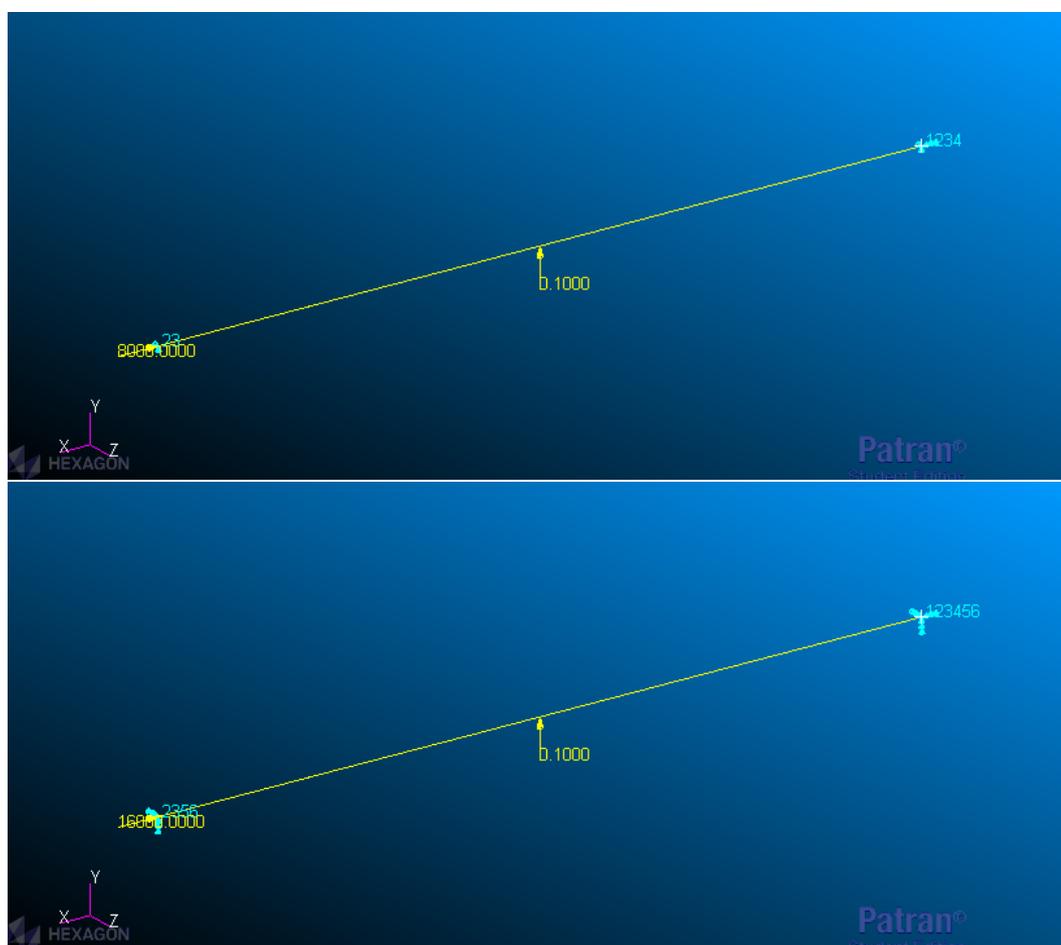


Figura 12.5: Vincoli e carichi nei casi di appoggio e incastro nei modelli finalizzati alle analisi non lineari

12.2.5 Analisi lineare

La SOL 105, come già detto, effettua una ricerca degli autovalori della struttura in modo simile a quanto mostrato nel corso del capitolo 2, tralasciando le non linearità del materiale. In output tale analisi restituisce l'autovalore cercato (il primo, nel nostro caso), che rappresenta il fattore moltiplicativo del carico applicato tramite cui ottenere la sollecitazione di instabilità. Dato dunque un carico P e l'autovalore λ_i relativo all' i -esimo modo, il carico critico i -esimo sarà

$$P_{crit,i} = \lambda_i P \quad (12.1)$$

Avendo impostato il carico a 1 N, gli autovalori ottenuti dalle analisi corrispondono quindi ai carichi critici cercati.

12.2.6 Analisi non lineare

L'analisi non lineare viene svolta suddividendo il carico in step e ricercando per ognuno di essi, applicati progressivamente, la convergenza della soluzione; il processo si ferma quando questa non viene raggiunta o il carico viene applicato in modo completo. Inoltre, gli step di carico possono essere di estensione fissa, definita in input, o di estensione variabile entro un certo intervallo, così che il programma possa affinare l'analisi a seconda della complessità del modello. Nel nostro caso si è optato per una opzione adattiva, con step di dimensione compresa tra lo 0.001% e lo 0.5% del carico, massimo eventualmente abbassato allo 0.25% per alcuni provini più corti, generalmente più "ostici". Evidenziamo infine che non tutte le analisi sono arrivate alla piena convergenza della soluzione: tuttavia, poiché gli step a cui si sono interrotte sono sempre stati sufficienti a instaurare l'instabilità, si è deciso di non ripetere le indagini.

Per ricavare i risultati cercati, come già mostrato nel capitolo 7 è stato necessario processare i dati ottenuti dalle analisi, non essendo la SOL 400 finalizzata al calcolo del carico di buckling: data la maggior complessità delle curve, dovuta all'instaurarsi del fenomeno in campo plastico in buona parte modelli, si è proceduto con un approccio assolutamente analogo a quello utilizzato per ricavare le tensioni sperimentali. Esportate infatti in un file di testo le curve spostamento trasversale vs. carico applicato del punto centrale del provino, e utilizzate queste come input di uno script Matlab, sono state eseguite delle interpolazioni lineari dell'intervallo iniziale e di quello finale dei dati, individuando il carico di instabilità nel punto di intersezione tra le due rette così ricavate.

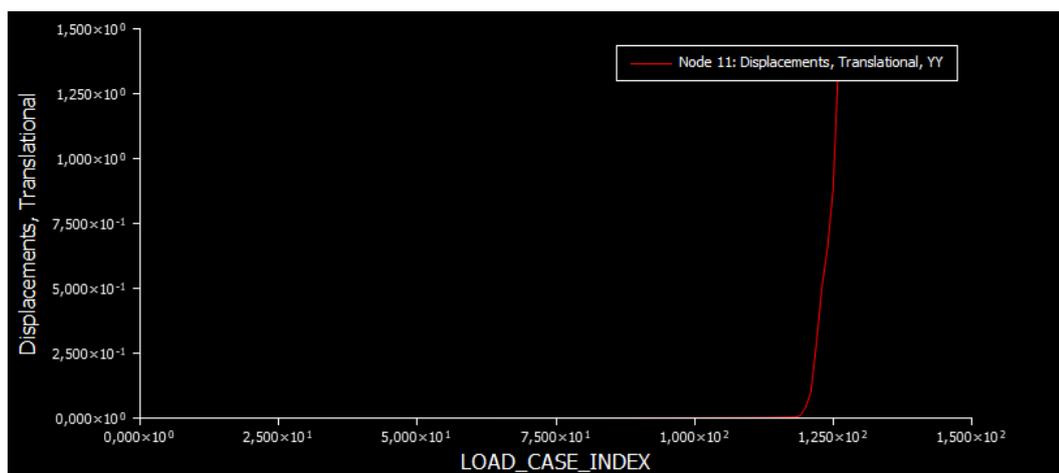


Figura 12.6: Spostamento del nodo centrale di un modello rispetto al carico applicato

12.3 Risultati

I risultati delle analisi numeriche, accompagnati da quelli relativi alle analisi sperimentali, sono riportati in tabella 12.1, mentre in figura 12.7 sono mostrati gli andamenti di tutti i tipi di analisi. Osservandone l'evoluzione generale, si può senz'altro dire che i risultati rispecchino le aspettative iniziali, in quanto l'unico valore leggermente anomalo è quello relativo al provino da 40 mm incastrato, nel caso di analisi non lineare: oltre che con errori numerici o di calcolo, la diminuzione della tensione di buckling che si riscontra tra 55 e 40 mm potrebbe però essere spiegata con le oscillazioni che presenta la curva del materiale in prossimità del massimo, evidenti in figura 12.2, che potrebbero aver tratto in inganno il programma.

Confrontando poi tra loro i risultati, si nota immediatamente come, a differenza di quanto visto nel capitolo 7, i valori non lineari non siano sempre inferiori a quelli lineari, sebbene anche qui siano state introdotte delle perturbazioni che inficiassero la perfezione del sistema. Una possibile spiegazione potrebbe risiedere nello script usato per analizzare i dati: mentre nello studio dei provini a T il buckling veniva individuato nel carico in cui lo spostamento deviava dalla linearità (approccio possibile poiché i valori erano sempre ben al di sotto della tensione di proporzionalità), in questo caso è stata utilizzato un codice del tutto analogo a quello relativo alle analisi sperimentali; dato che questo interpola con delle rette i tratti iniziale e finale, l'intersezione tra le due risiede generalmente al di sopra del punto in cui lo spostamento comincia a divergere da un andamento rettilineo. Tale considerazione non vale ovviamente per i valori al di sopra della tensione di proporzionalità ($L < 75 \text{ mm}$ per l'appoggio, $L < 150 \text{ mm}$ per l'incastro), per i

quali il modello lineare si rivela del tutto inadeguato a descrivere il fenomeno e sovrastima anche di molto i risultati.

Considerando ora congiuntamente i valori riportati in tabella, si osserva che il caso che più si avvicina, con poche eccezioni, ai risultati sperimentali è senza dubbio quello relativo all'incastro non lineare, che si dimostra abbastanza affidabile eccetto che per il campione da 40 mm, del quale si è già parlato, e quello da 120 mm, il cui risultato sperimentale è però anomalo. Osserviamo poi che il modello di appoggio non lineare risulta errato per quasi tutti i provini, ma si avvicina molto alla realtà per esemplari tozzi: ciò è dovuto innanzitutto all'instaurarsi del buckling in campo plastico, nel quale, come visto, si ha una riduzione del modulo di Young che evita la sovrastima delle tensioni vista nel caso lineare; inoltre, per provini molto corti le snellezze relative a un appoggio e a un incastro sono molto simili, fattore che chiaramente riduce la distanza tra i due casi. Infine, come previsto il modello di appoggio lineare non riesce minimamente ad avvicinarsi ai test effettuati, per qualsiasi lunghezza, mentre l'incastro lineare si approssima bene i risultati sperimentali dei campioni snelli, prima di entrare in campo plastico.

L	$\sigma_{crit,app,L}$	$\sigma_{crit,app,NL}$	$\sigma_{crit,inc,L}$	$\sigma_{crit,inc,NL}$	$\sigma_{crit,sperim}$
40	162.12	63.51	375.40	65.96	69.36
55	95.89	62.08	271.26	68.26	67.36
75	54.31	57.66	177.13	62.28	68.94
90	38.69	41.11	133.55	61.27	66.76
105	28.74	31.56	102.96	60.97	64.11
120	22.20	27.22	81.52	58.59	67.32
135	17.88	20.25	66.66	57.09	55.11
150	14.60	17.20	55.14	54.65	53.29
200	8.17	9.51	31.65	31.86	35.83
250	5.25	4.51	20.56	22.12	25.95

Tabella 12.1: Tensioni di buckling in MPa per tutte le famiglie di provini nei due casi di vincolo, ottenute tramite analisi numeriche lineari e non lineari, e risultati delle analisi sperimentali

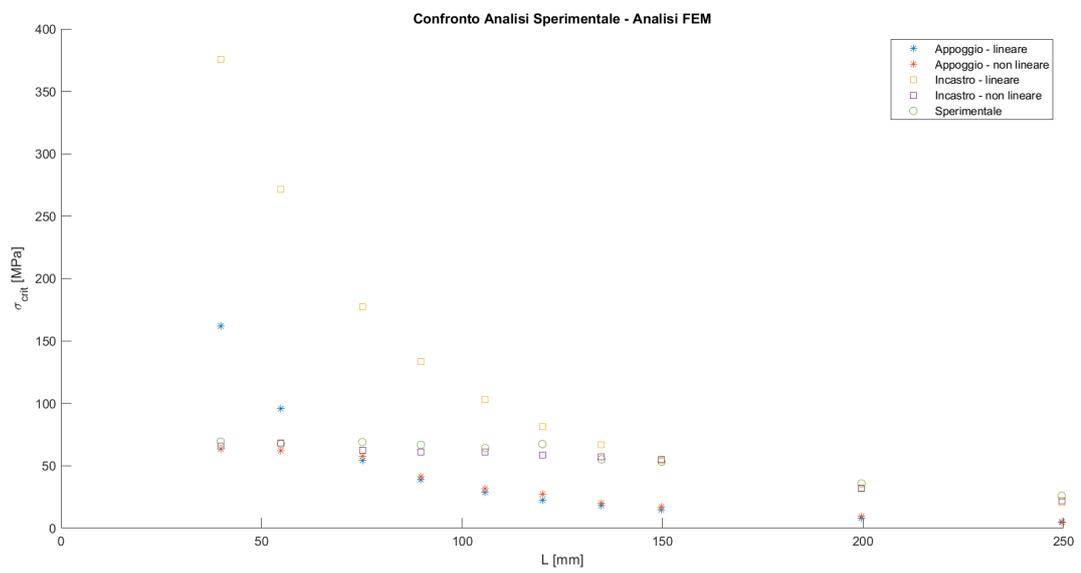


Figura 12.7: Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale e numerica

Capitolo 13

Conclusioni

In questa campagna sperimentale è stato studiato il comportamento a compressione, da un punto di vista sperimentale, teorico e numerico, di provini in PLA realizzati tramite Fused Deposition Modeling, testati per ricavarne la tensione di instabilità al variare della lunghezza dei campioni e con un maggiore interesse verso le alte snellezze.

Gli esperimenti sono stati condotti evitando l'uso di estensimetri, che essendo applicati sui provini avrebbero potuto influire sui risultati in modo non trascurabile, aumentando la rigidità della struttura; per questo motivo si è preferito adottare la Digital Image Correlation, mettendo poi in relazione gli spostamenti trasversali così rilevati con i dati sui carichi ottenuti dalla macchina di prova. I test di compressione sono stati svolti prendendo spunto dalla normativa ASTM D965-15 per quanto riguarda la geometria dei provini, scelti di forma quadrata e di dimensioni tali, per due famiglie, da poter ricavare le caratteristiche meccaniche del materiale scelto; è stata poi utilizzata una velocità di prova leggermente superiore a quella prevista, poiché la ASTM in questione non è in realtà adoperabile per materiali trattati con FDM, i quali non hanno ancora un regolamento di riferimento. I dati ricavati tramite la Correlazione di immagine sono stati poi processati tramite un codice Matlab che studiasse gli spostamenti dei due facet, lungo lo spessore, posti all'altezza in cui si fosse rilevato il massimo spostamento trasversale: interpolando linearmente per ognuno di essi le condizioni di pre e post-buckling e calcolando le rispettive intersezioni tra le rette, che rappresentano i punti in cui i due subset passano da una configurazione all'altra, il carico di instabilità è stato trovato mediando tali punti di incrocio.

Per l'analisi teorica sono stati scelti tre dei modelli più famosi riguardanti il buckling globale: il modello di Eulero, il modello di Eulero tangente e la formula parabolica di Johnson, usate dopo aver ricavato, tramite i dati relativi alle prove sperimentali, le caratteristiche meccaniche del materiale in questione. Le formule sono state applicate nei casi di semplice appoggio, che rappresentava la nostra

ipotesi preventiva sui vincoli del modello, e di incastro, scelto in seguito ad alcune osservazioni sulla deformata fatte nel corso delle prove sperimentali. Proprio quest'ultimo caso è riuscito a rappresentare al meglio il comportamento dei provini, che è stato simulato bene dalle formule nei rispettivi campi di applicabilità, al contrario di quanto avvenuto supponendo condizioni al contorno differenti. I risultati dell'analisi teorica sono riportati in tabella 13.1.

Lo studio numerico è stato effettuato tramite il software di modellazione ad elementi finiti MSC Nastran/Patran: le analisi sono state di tipo lineare (SOL 105) e non lineare (SOL 400) su modelli 1D, anche qui prima vincolati tramite semplice appoggio e successivamente tramite incastro. Come evidente dalla tabella 13.2, le analisi non lineari dei modelli incastrati si sono dimostrate le più affidabili tra quelle utilizzate, mentre quelle lineari hanno comunque mostrato attendibilità al di sotto della tensione di proporzionalità. Le analisi sui modelli appoggiati sono invece risultate errate, sebbene quelle non lineari si siano avvicinate ai risultati reali per gli esemplari più tozzi. Un'altra osservazione si può poi fare a partire dal confronto generale tra tutti i risultati, visualizzabile in figure 13.1 - 13.4: si evidenzia una iniziale vicinanza tra i risultati numerici lineari e quelli teorici del modello di Eulero, sia per l'appoggio che per l'incastro; tuttavia, in entrambi i casi si nota un progressivo distanziamento tra i due tipi di analisi al diminuire della snellezza, che diventa considerevole nei provini più corti. Ciò potrebbe essere dovuto, oltre che all'approssimazione conseguente alla discretizzazione della struttura, a un diverso principio teorico alla base della SOL 105 rispetto alla formula di Eulero, pur derivando entrambe da una ricerca di autovalori.

Concludiamo raffrontando gli andamenti delle tensioni critiche ottenute in questo lavoro con quelle ricavate in [10], dove è stato svolto uno studio del buckling globale di provini tozzi realizzati in PLA tramite FDM, che questa dissertazione ha ampliato concentrandosi su snellezze maggiori. I risultati dell'indagine sperimentale sono riportati in tabella 13.3, mentre in figura 13.5 viene mostrata un confronto generale tra gli esiti delle due tesi: si osserva una complessiva distanza tra gli sforzi critici dei due casi sperimentali, oltre che con i modelli teorici qui ricavati; evidenziamo però che il modulo di Young del PLA utilizzato in [10] è inferiore di circa il 20% rispetto a quello del materiale corrente, e ciò spiega bene il posizionamento più in basso dei risultati rispetto alla curva che sembra avvicinarvisi di più, quella riferita al modello di Eulero tangente. Aggiungiamo infine che, mentre le condizioni al contorno di tipo incastro hanno nel nostro caso portato a una buona descrizione del comportamento dei provini analizzati, in [10] ciò è avvenuto considerando invece vincoli di tipo appoggio.

Oltre allo sviluppo di una normativa adeguata ai polimeri lavorati tramite FDM, già suggerita nel capitolo 9, sviluppi futuri dovrebbero approfondire ulteriormente il fenomeno in questa tipologia di materiali, così da confermarne in modo esaustivo l'attinenza ai modelli comunemente usati o portare allo sviluppo di nuovi, specifici

per questa tecnologia realizzativa. Sebbene infatti i modelli scelti abbiano condotto a dei risultati soddisfacenti, manca ancora ad oggi la certezza che questo sia un comportamento generale e non specifico al caso analizzato, e che i modelli siano a tutti gli effetti estendibile a diversi materiali, condizioni di vincolo e parametri realizzativi.

L	λ_{app}	$\sigma_{E,app}$	$\sigma_{E_t,app}$	$\sigma_{J,app}$	λ_{inc}	$\sigma_{E,inc}$	$\sigma_{E_t,inc}$	$\sigma_{J,inc}$	σ_{sperim}
40	10.75	209.00	66.24	65.99	5.38	836.01	67.90	70.67	69.36
55	14.80	110.23	63.24	60.40	7.40	440.94	67.57	69.27	67.36
75	20.30	58.60	57.30	49.97	10.15	234.42	66.61	66.67	68.94
90	24.32	40.83	40.83	40.29	12.16	163.32	65.19	64.24	66.76
105	28.69	29.34	29.34	27.78	14.35	117.36	63.57	61.12	64.11
120	32.49	22.89	22.89	15.25	16.24	91.56	62.03	57.98	67.32
135	36.33	18.30	18.30	0.96	18.17	73.20	58.32	54.41	55.11
150	41.17	14.25	14.25	-19.29	20.59	57.00	57.00	49.35	53.29
200	54.07	8.26	8.26	-85.58	27.03	33.06	33.06	32.78	35.83
250	67.59	5.29	5.29	-174.41	33.80	21.15	21.15	10.57	25.95

Tabella 13.1: Tensioni di buckling calcolate tramite i modelli teorici, in MPa

L	$\sigma_{app,L}$	$\sigma_{app,NL}$	$\sigma_{inc,L}$	$\sigma_{inc,NL}$	σ_{sperim}
40	162.12	63.51	375.40	65.96	69.36
55	95.89	62.08	271.26	68.26	67.36
75	54.31	57.66	177.13	62.28	68.94
90	38.69	41.11	133.55	61.27	66.76
105	28.74	31.56	102.96	60.97	64.11
120	22.20	27.22	81.52	58.59	67.32
135	17.88	20.25	66.66	57.09	55.11
150	14.60	17.20	55.14	54.65	53.29
200	8.17	9.51	31.65	31.86	35.83
250	5.25	4.51	20.56	22.12	25.95

Tabella 13.2: Tensioni di buckling, in MPa, ottenute dall'analisi numerica

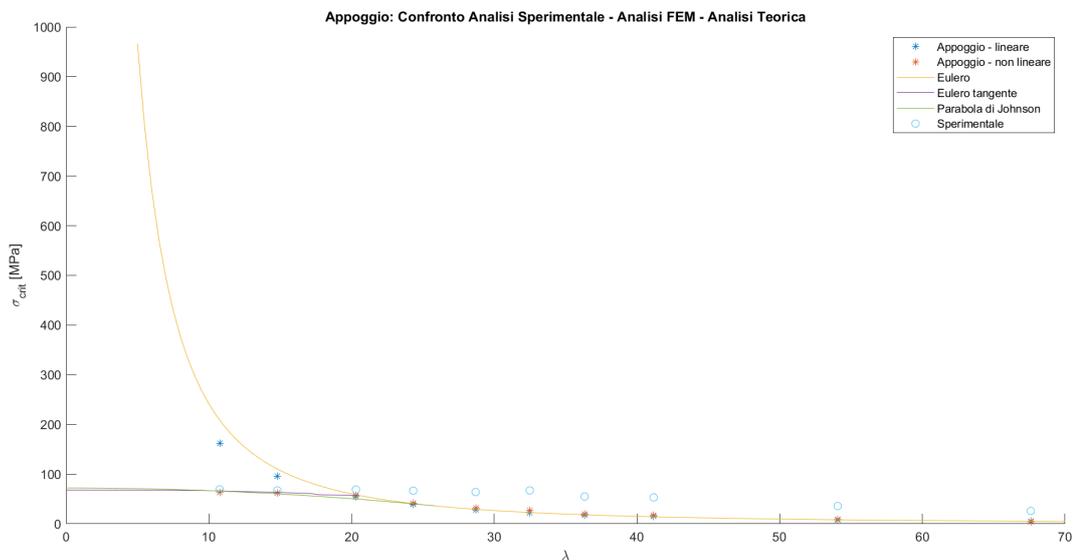


Figura 13.1: Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di semplice appoggio

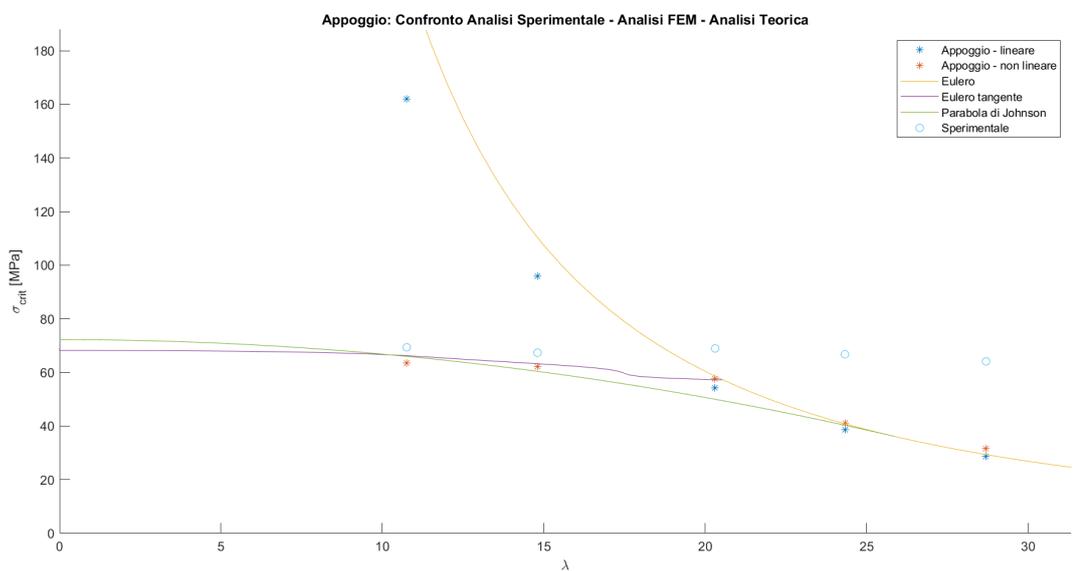


Figura 13.2: Dettaglio del confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di semplice appoggio

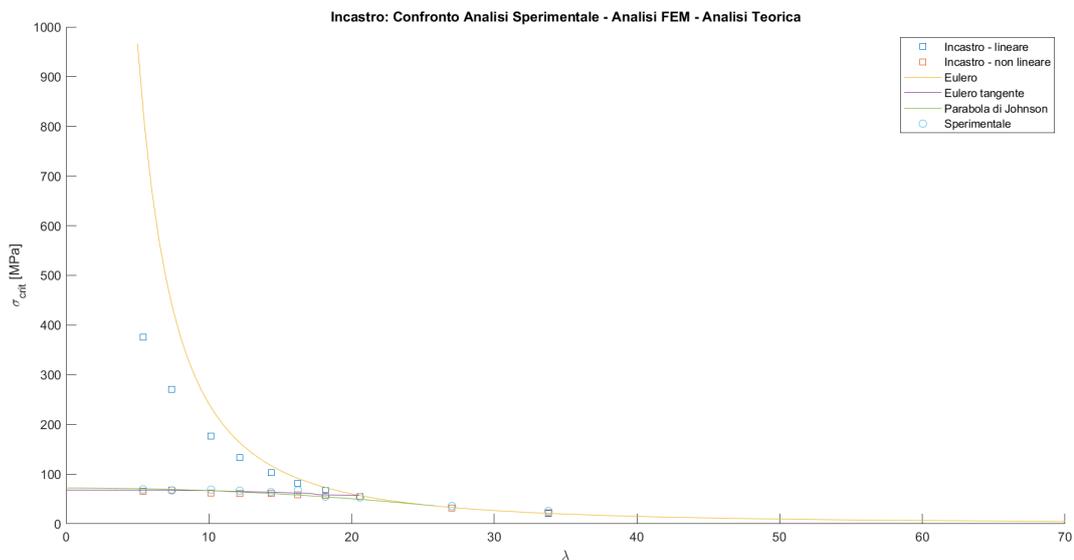


Figura 13.3: Confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di incastro

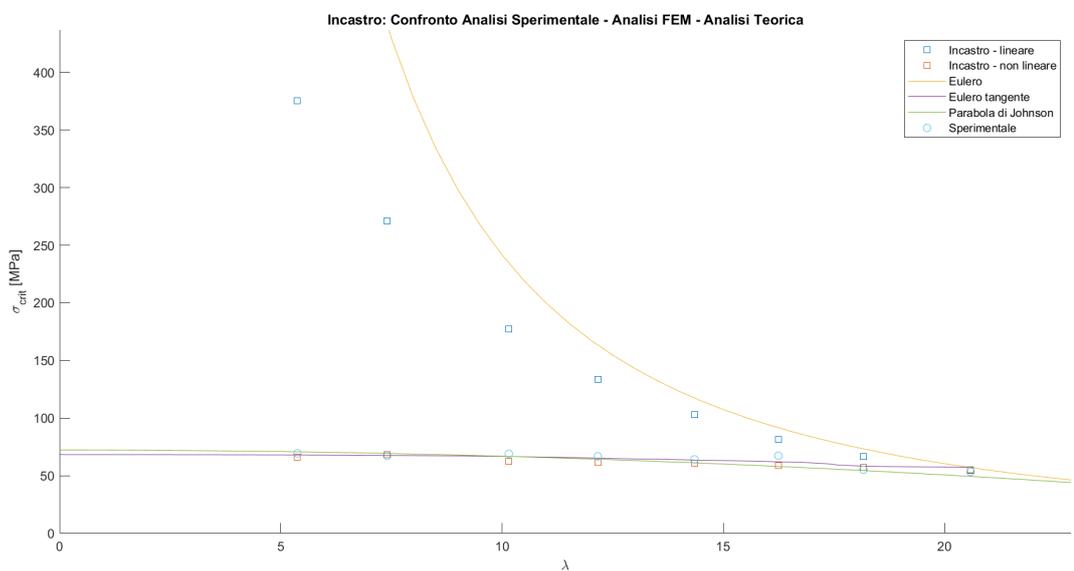


Figura 13.4: Dettaglio del confronto tra i risultati delle analisi sperimentale, teorica e numerica nel caso di incastro

L	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
λ	5.45	6.81	8.17	9.54	10.90	12.26	13.62	14.99	16.35	17.71
σ_{sp}	59.89	52.95	52.18	55.17	52.69	50.83	53.08	53.01	53.58	58.04

Tabella 13.3: Risultati ottenuti nel corso dell'analisi sperimentale condotta in [10], in MPa

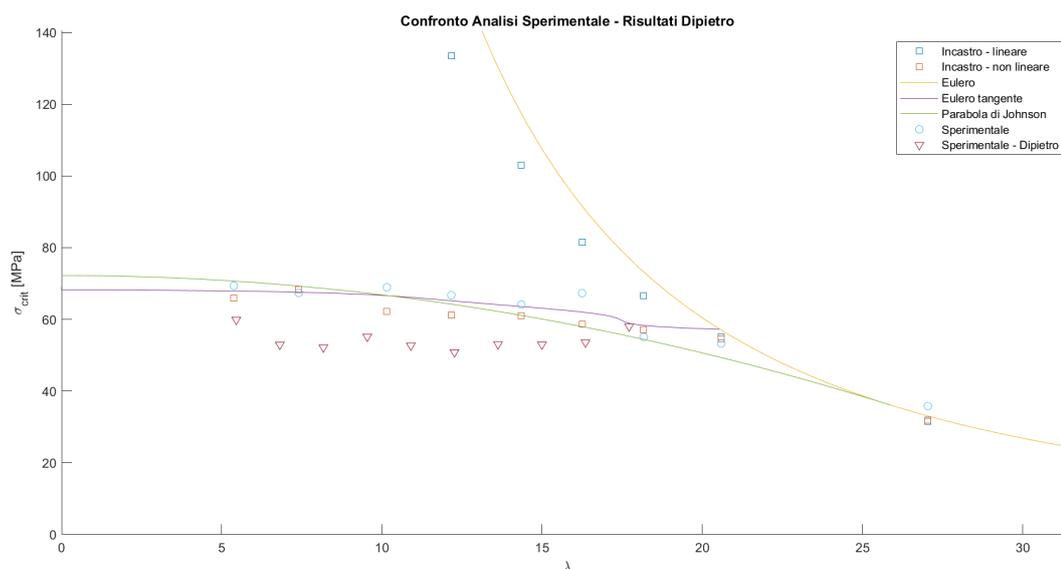


Figura 13.5: Dettaglio del confronto tra i risultati ottenuti in questo lavoro di tesi e quelli relativi ricavati in [10]

Bibliografia

- [1] Gibson I., Rosen D. e Stucker B. *Additive Manufacturing Technologies. 3D Printing, Rapid Prototyping, and Direct Digital Manufacturing*. Springer, 2015. ISBN: 9781493921133 (cit. alle pp. 3–12).
- [2] Srivatsan T. S. «Materials Processing Handbook, Joanna R. Groza, James F. Shackelford, Enrique J. Lavernia, and Michael T. Powers, Editors». In: *Materials and Manufacturing Processes* 27.10 (2012), pp. 1146–1147 (cit. a p. 4).
- [3] Perry Cain. *Introduction to FDM 3D printing*. Nov. 2020. URL: <https://www.3dhubs.com/knowledge-base/introduction-fdm-3d-printing/> (cit. alle pp. 11, 12).
- [4] Perry Cain. *Selecting the optimal shell and infill parameters for FDM 3D printing*. Nov. 2020. URL: <https://www.3dhubs.com/knowledge-base/selecting-optimal-shell-and-infill-parameters-fdm-3d-printing/> (cit. alle pp. 13, 14).
- [5] Perry Cain. *Supports in 3D Printing: A technology overview*. Nov. 2020. URL: <https://www.3dhubs.com/knowledge-base/supports-3d-printing-technology-overview/> (cit. alle pp. 14, 15).
- [6] Anders Södergård e Mikael Stolt. «Industrial Production of High Molecular Weight Poly(Lactic Acid)». In: *Poly(Lactic Acid)*. John Wiley & Sons, Ltd, 2010. Cap. 3, pp. 27–41. ISBN: 9780470649848 (cit. a p. 16).
- [7] Farah S., Anderson D. G. e Langer R. «Physical and mechanical properties of PLA, and their functions in widespread applications — A comprehensive review». In: *Advanced Drug Delivery Reviews* 107 (2016). PLA biodegradable polymers, pp. 367–392. ISSN: 0169-409X (cit. a p. 16).
- [8] Megson T. H. G. *Aircraft Structures for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 2007. ISBN: 9780080488318 (cit. alle pp. 17, 19–21, 23, 24, 26, 27).
- [9] Jones R. M. *Buckling of bars, plates and shells*. Bull Ridge Publishing, 2006. ISBN: 9780978722302 (cit. alle pp. 18, 20, 22).

-
- [10] Brischetto S., Torre R. e Dipietro I. R. «Studio analitico, numerico e sperimentale del fenomeno di buckling nella compressione di provini polimerici stampati 3D». 2020 (cit. alle pp. 21, 22, 90, 91, 136, 140).
- [11] Selamet S. e Garlock M. E. «Local Buckling Study of flanges and webs in I-shapes at elevated temperature». In: *Structures Congress 2020* (mag. 2010) (cit. a p. 26).
- [12] Pan B., Qian K., Xie H. e Asundi A. «Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review». In: *Measurement Science and Technology* 20.6 (apr. 2009) (cit. alle pp. 28–31, 33).
- [13] Blaber J., Adair B. e Antoniou A. «Ncorr: Open-Source 2D Digital Image Correlation Matlab Software». In: *Experimental Mechanics* (mar. 2015) (cit. a p. 31).
- [14] Kikuta H., Kitagawa A., Kitamura K. e Yoneyama S. «Lens distortion correction for digital image correlation by measuring rigid body displacement». In: *Optical Engineering* 45.2 (2006), pp. 1–9 (cit. a p. 34).
- [15] Kikuta H., Kitagawa A., Kitamura K. e Yoneyama S. «In-Plane Displacement Measurement Using Digital Image Correlation with Lens Distortion Correction». In: *JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering* 49.3 (2006), pp. 458–467 (cit. a p. 34).
- [16] Schreier H. W., Braasch J. R. e Sutton M. A. «Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation». In: *Optical Engineering* 39.11 (2000), pp. 2915–2921 (cit. a p. 36).
- [17] ASTM International. *ASTM D659-15, Standard Test Method for Compressive Properties of Rigid Plastics*. West Conshohocken, PA, 2015. URL: www.astm.org (cit. alle pp. 55, 72, 90, 100).
- [18] R. Narayanasamy, R.S.N. Murthy, K. Viswanatham e G.R. Chary. «Prediction of the barreling of solid cylinders under uniaxial compressive load». In: *Journal of Mechanical Working Technology* 16.1 (1988), pp. 21–30. ISSN: 0378-3804 (cit. a p. 101).
- [19] Salvatore Brischetto, Carlo Ferro, Paolo Maggiore e Roberto Torre. «Compression Tests of ABS Specimens for UAV Components Produced via the FDM Technique». In: *2227-7080* 5 (apr. 2017) (cit. a p. 101).