

## 15. LA RESISTENZA A FATICA: FONDAMENTI

Gli elementi meccanici sono spesso soggetti a sollecitazioni che variano nel tempo in *modo ciclico*, cioè a storie di carico nelle quali si può identificare una successione di valori massimi (*picchi*) e minimi (*valli*) alternati. Ad esempio, le fibre sulla superficie di un albero rotante, sotto l'azione di carichi di flessione con direzione prefissata, sono soggette ad una tensione che varia nel tempo in modo sinusoidale (*flessione rotante*, fig.1) a causa della rotazione. Quando un componente meccanico si danneggia sotto l'azione di tensioni cicliche nonostante i valori massimi di tensione si mantengono al di sotto di quelli di rottura, il cedimento avviene per il fenomeno definito di *fatica*. Alcuni autori sostengono che l'80-90% dei cedimenti di componenti strutturali è dovuto a questo fenomeno.

Si noti che nella vita a fatica di un materiale contano soltanto i livelli dei picchi e delle valli della storia temporale della tensione cui è soggetto e non la *forma* della funzione compresa tra essi.

Per spiegare il meccanismo fisico del danneggiamento per fatica si deve anzitutto osservare che i materiali da costruzione non sono mai omogenei e isotropi, assunzione fatta, in molti casi, per l'analisi statica. Ad esempio, i metalli sono aggregati di *grani cristallini* (che, a loro volta, sono aggregati di cristalli, che sono anisotropi); ulteriori disomogeneità sono dovute alla presenza di vuoti o di particelle di materiale differente. Anche se non sono presenti intagli, le tensioni risultano distribuite in modo non uniforme e localmente è facile che superino i limiti dello snervamento anche se la tensione nominale è molto più bassa. Il cedimento per fatica è dovuto all'accumulo di danni localizzati causati da deformazione cicliche in campo plastico. Tipicamente la rottura avviene dopo diverse migliaia di cicli. Le zone più svantaggiate sono quelle a tensione più elevata (ad esempio le zone di concentrazione di tensione) e la superficie esterna.

Lo sviluppo del danneggiamento varia in base alle proprietà di duttilità o fragilità del materiale.

Nei materiali duttili si ha uno sviluppo di *bande di scorrimento* nei grani cristallini che hanno un orientamento più svantaggioso rispetto alla tensione agente. Quando il numero di bande di scorrimento raggiunge un livello di saturazione, le più severe si trasformano in microfratture interne al grano con successiva estensione ad altri grani. Più microfratture iniziate in punti diversi del materiale si uniscono e producono una frattura che si propaga fino al collasso.

Nei materiali fragili il danno microstrutturale si concentra in prossimità dei difetti localizzati assumendo direttamente l'aspetto di una piccola frattura. Le tensioni cicliche di trazione provocano la propagazione della frattura iniziale.

Il processo del cedimento per fatica viene tipicamente diviso in 4 fasi:

1. nucleazione della frattura di fatica,
2. accrescimento della frattura lungo un piano di elevata tensione tangenziale (stadio I della propagazione), secondo il Modo II descritto da Irwin, predominante nei materiali duttili,
3. propagazione della frattura in direzione normale alla tensione di trazione (stadio II della propagazione), secondo il Modo I descritto da Irwin, predominante nei materiali fragili,
4. rottura dell'elemento.

Un cedimento per fatica inizia, quindi, con una frattura microscopica, inizialmente difficile da rilevare con tecniche sperimentali (liquidi penetranti, ispezione con i raggi X, ecc..). Man mano che la frattura si sviluppa gli effetti di concentrazione delle tensioni divengono maggiori e la velocità di accrescimento aumenta sempre più rapidamente, prima nella direzione delle massime tensioni tangenziali, poi in direzione ortogonale alle tensioni normali. La sezione resistente diminuisce in ampiezza e la tensione aumenta sino a quando non raggiunge il livello di collasso.

Il cedimento è caratterizzato da due distinte aree di frattura: la prima dovuta al progressivo sviluppo della cricca, appare quasi liscia (in realtà ha una struttura molto fine), la seconda, dovuta alla frattura finale, è molto simile alla superficie di frattura di un materiale fragile rotto in trazione.

Quando un elemento di macchina è sottoposto a carichi statici vicini ai limiti di rottura generalmente si verificano deformazioni molto grandi e in molti casi i danneggiamenti sono visibili e/o danno luogo a fenomeni premonitori (irregolarità e/o anomalie di funzionamento), mentre le rotture a fatica sono improvvise e totali, quindi più pericolose.

S'intuisce facilmente che la fatica è un fenomeno estremamente più complesso del cedimento nel caso statico, in quanto dipende simultaneamente dal livello di tensione (in realtà di deformazione) alternata locale e dalla distribuzione di difetti localizzati nel materiale; ad oggi non esiste un modello matematico in grado di descrivere in modo totalmente soddisfacente il comportamento a fatica dei materiali.

Se si vogliono progettare elementi di macchina sollecitati a fatica interpretando il carico agente come statico, occorre usare coefficienti di sicurezza molto più alti, tipicamente al di sopra del doppio o del triplo di quelli ordinari.

L'analisi a fatica è basata sui seguenti approcci alternativi:

- approccio basato sulla tensione - analisi basata sulla tensione *nominale* agente nella *sezione* del componente,
- approccio basato sulla deformazione - analisi delle *deformazioni plastiche localizzate* durante i cicli di carico,
- approccio basato sulla *meccanica della frattura*.

L'approccio basato sulla tensione nominale è quello più utilizzato da un punto di vista pratico in quanto più semplice. Il dato d'ingresso per la valutazione della vita a fatica è la tensione nominale ottenuta con le formule semplici della sollecitazione, considerando il materiale elastico lineare ( $\sigma_n$  nominale =  $F/A$ ,  $Mh/I$ ) da correggere con opportuni coefficienti.

I principali fattori che influenzano la vita a fatica sono elencati di seguito.

Fattori legati all'applicazione del carico:

- entità della tensione alternata,
- presenza di una tensione media,
- tipo di sollecitazione (normale-tangenziale, sollecitazione mono/bi/tri-assiale),
- gradiente della tensione.

Fattori legati alla resistenza e alle condizioni del materiale:

- caratteristiche meccaniche,
- temperatura,
- corrosione,
- tensioni residue.

Fattori legati alla geometria dell'elemento:

- forma,
- dimensioni,
- finitura superficiale.

Per migliorare la vita a fatica il progettista ha a disposizione le seguenti opzioni:

- scelta della geometria,
- scelta del materiale,
- miglioramento della finitura superficiale,
- introduzione di tensioni residue superficiali,
- uso di trattamenti termici.

### Curva di Wöhler e limite di resistenza a fatica

#### Curva di Wöhler

Per determinare la resistenza del materiale sotto l'azione di carichi di fatica i provini vengono assoggettati a forze variabili ciclicamente nel tempo tra un valore massimo ed uno minimo prefissati, contando i cicli necessari per la rottura. Un ciclo di fatica è costituito dalla porzione di storia di carico compresa tra 2 massimi o 2 minimi consecutivi aventi lo stesso valore (ad es. fig.1 in alto a destra). Nel caso di sollecitazioni nelle quali i massimi e i minimi sono simmetrici rispetto all'asse temporale, i cicli risultano a *valor medio nullo* e la loro ampiezza è pari al valore massimo della tensione. Per caratterizzare la resistenza del materiale, evitando di introdurre fattori legati alla geometria del componente, nelle prove vengono utilizzati provini standardizzati, a sezione circolare di diametro pari a 7.5 mm, con ottimo grado di finitura superficiale, soggetti a flessione pura (taglio nullo) rotante. Le prove possono essere condotte ad alta velocità mediante una macchina apposita chiamata *macchina di Moore* (fig.1), che assoggetta i provini a *flessione rotante*. In alternativa, i provini possono essere soggetti a *trazione e compressione alternate* utilizzando macchine servoidrauliche o *a risonanza*. In entrambi i casi la sollecitazione è di tipo *monoassiale*. Come già detto, nel caso della macchina di Moore, la tensione varia nel tempo in modo sinusoidale, come mostrato in fig.1, tuttavia, come già detto, il fenomeno della fatica non dipende dalla forma della funzione della tensione rispetto al tempo, ma solo dai valori massimi e minimi raggiunti.

In particolare, nelle prove:

- su un certo numero di provini viene applicata una storia di carico ciclica ad ampiezza  $\sigma_f$  costante (con tensione variabile nel campo  $-\sigma_f \leq \sigma(t) \leq +\sigma_f$ ) e viene registrato il numero di cicli  $N_f$  alla rottura: si noti che la tensione considerata è quella nel punto più sollecitato del provino, nel quale lo stato tensionale è monoassiale, e che la tensione media è nulla; la prima serie di prove è effettuata ad una tensione leggermente al di sotto della tensione di rottura del materiale;
- la prova viene ripetuta con una seconda serie di provini, applicando una tensione alternata minore, e così via;
- i risultati sono riportati in un diagramma  $\sigma_f - N_f$ .

La curva interpolante i risultati sperimentali è nota come *curva di Wöhler* (fig.2) o *curva tensione-vita*. Generalmente essa viene tracciata in coordinate logaritmiche o in coordinate lineari introducendo, però, i logaritmi in base 10 dei valori di  $\sigma_e$  e di  $N$  (fig.3). L'ordinata del diagramma è chiamata *resistenza a fatica*  $\sigma_f$ ; la definizione di questa resistenza deve essere sempre accompagnata dal numero di cicli che le corrisponde, cioè  $\sigma_f(N_f)$ . Si noti che il valore di  $N_f$  cambia molto rapidamente al variare di  $\sigma_f$ .

In fig.2 è mostrata, entro linee tratteggiate, la fascia di dispersione entro la quale si rompe il 90% dei provini. I risultati sperimentali sono piuttosto dispersi in orizzontale, cioè, fissato il valore  $\sigma_f$ , si osserva che i provini si rompono con valori di  $N_f$  compresi in un ampio intervallo. La distribuzione statistica dei numeri di cicli per fissato valore della tensione è di tipo gaussiano (fig.2,3). In verticale la dispersione è minore, quindi, per ottenere che i componenti abbiano una vita a fatica non inferiore a quella di progetto, è sufficiente fare in modo che

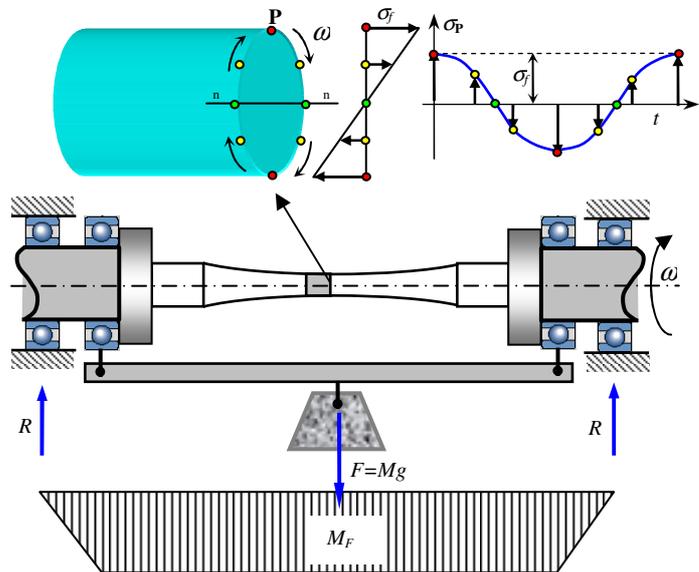


Fig.15.1 – Rappresentazione schematica della macchina di Moore. Dall'alto: andamento della tensione nel punto P al variare del tempo, schema della macchina e provino, diagramma del momento flettente  $M_F$ .

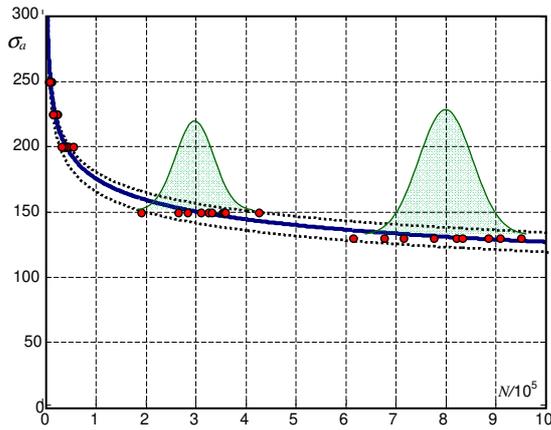


Fig.15.2 - Curva di Wöhler in coordinate lineari.  
Acciaio AISI 1010, a=886 Mpa, b=-0.14.

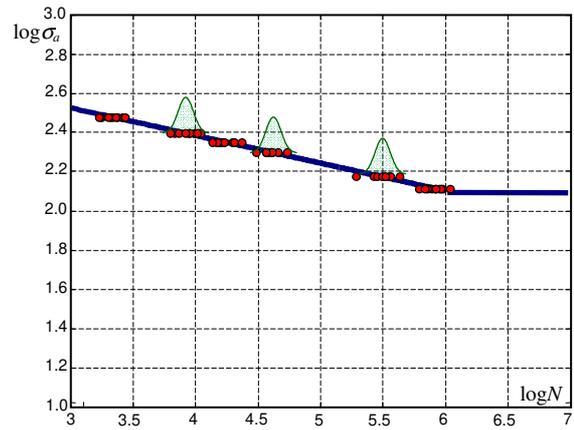


Fig.15.3 - Curva di Wöhler tracciata utilizzando i logaritmi di  $\sigma_a$  ed  $N$ .  
Acciaio AISI 1010, a=886 Mpa, b=-0.14.

la tensione agente sia ragionevolmente inferiore a quella media  $\sigma_f$ , corrispondente al numero di cicli desiderato  $N_f$ . Si noti che se si adotta proprio il valore  $\sigma_f$  preso dal diagramma, essendo  $N_f$  il valore medio dei cicli di vita ottenuto con vari provini, la probabilità che il componente si rompa per un numero di cicli inferiore è pari al 50%.

Nel diagramma di Wöhler si distinguono tre campi:

- campo della resistenza quasi statica o fatica *oligociclica* ( $N_f < 10^{3+4}$ );
- campo della *resistenza a termine* o *a fatica finita* o *ad alto numero di cicli* ( $10^{3+4} < N_f < 10^6$ );  
dove l'equazione della curva di Wöhler è del tipo

$$\sigma_f^\mu N_f = K \tag{15.1}$$

con  $\mu$  e  $K$  costanti relative al materiale;

- campo rettilineo parallelo all'asse  $N$  o con lieve pendenza ( $N_f > 10^6$ ) (non per tutti i materiali).

Nel campo della resistenza a termine il numero di cicli alla rottura varia rapidamente col variare della tensione, per cui è più pratico riportare il diagramma in scala logaritmica. Il diagramma di Wöhler in coordinate logaritmiche è rappresentato da una retta e può essere tracciato conoscendone soltanto due punti. La rappresentazione in scala logaritmica evidenzia una pendenza costante della curva che non appare in coordinate ordinarie.

La (1) può essere esplicitata rispetto alla tensione o al numero di cicli come:

$$\sigma_f = \left( \frac{N_f}{K} \right)^{-1/\mu} \quad N_f = K \sigma_f^{-\mu} \tag{15.2,3}$$

Spesso le (2,3) vengono scritte nella seguente forma:

$$\sigma_f = a N_f^b \quad N_f = \left( \frac{\sigma_f}{a} \right)^{1/b} \tag{15.4,5}$$

con  $a$  e  $b$  ancora costanti relative al materiale legate a  $K$  e  $\mu$  mediante le seguenti relazioni:

$$a = (1/K)^{-1/\mu}, \quad K = (1/a)^{1/b}, \quad b = -1/\mu, \quad \mu = -1/b \tag{15.6ab,7ab}$$

In tabella 1 sono riassunte le caratteristiche delle prove per la determinazione sperimentale della curva di Wöhler di un materiale.

Da notare che la curva di Wöhler può essere determinata anche per componenti strutturali al fine di tenere conto direttamente dei diversi fattori che ne influenzano la durata. In generale il campo dei valori dell'esponente della curva risulta essere  $3 \leq \mu \leq 22$ .

### Campo della resistenza quasi statica

Per  $N_f < 10^3$ , la  $\sigma_f$  raggiunge valori prossimi a quelli di rottura. Usualmente si assume che  $\sigma_f$  sia pari a circa  $0.9 \sigma_r$  per  $N_f = 10^3$ . Si tratta di un valore nominale ottenuto con la formula di Navier che può essere superiore a quello di snervamento. La tensione reale massima nella sezione può essere di poco superiore a quella di snervamento.

### Il limite di resistenza a fatica

Nel caso di diversi materiali ferrosi e loro leghe il diagramma di Wöhler diviene orizzontale al di sotto di un certo livello di tensione. Nel caso degli acciai nel diagramma logaritmico si osserva una cuspidine o *ginocchio*; la resistenza corrispondente al ginocchio è chiamata *limite di fatica* o di *durata*  $\sigma_l$  ed è il *massimo* valore della tensione alternata alla quale *non* si verifica rottura (o il *minimo* valore al quale *si verifica*).

Il valore di  $N_f$  cui corrisponde il limite di resistenza a fatica varia in dipendenza del materiale:

- acciai semplici al carbonio  $10^6$ - $10^7$
- acciai legati meno netto e anche  $10^8$
- acciai ad elevata resistenza non si determina
- leghe di alluminio e magnesio non presentano un  $\sigma_l$
- leghe non bonificabili non si trova oltre  $5 \cdot 10^8$

Per alcuni metalli non ferrosi e loro leghe il grafico non diviene orizzontale, quindi questi materiali non hanno un limite di fatica e si usa il valore corrispondente a  $10^8$  o  $5 \cdot 10^8$  cicli.

Si osserva che in molti casi esiste una relazione fra il limite di fatica e la resistenza ottenuta dalla semplice prova di trazione. Le prove sperimentali mostrano che il limite di fatica varia fra il 40 e il 60% della resistenza a trazione per l'acciaio. Cioè il rapporto di fatica  $\phi = \sigma_l / \sigma_r$  risulta compreso fra 0.4 e 0.6.

Si osserva che esiste una certa dispersione statistica nella determinazione del limite di fatica a partire dalla tensione di rottura, in particolare la deviazione standard del limite di fatica varia dal 4 al 10%.

Per gli acciai il limite di fatica medio per provini a flessione rotante è solitamente ottenuto con le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \sigma_l &= 0.5 \sigma_r && \text{per } \sigma_r \leq 1400 \text{ MPa} \\ \sigma_l &= 700 \text{ MPa} && \text{per } \sigma_r > 1400 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (15.8,9)$$

Nel caso della ghisa il limite di fatica può essere ottenuto mediante la seguente relazione:

$$\sigma_l = 0.4 \sigma_r \quad (15.10)$$

Le leghe di magnesio ed alluminio non hanno un limite di fatica e si assume un valore compreso fra il 30 e il 40% della resistenza a trazione per una vita pari a  $10^8$  o  $5 \cdot 10^8$  cicli:

$$\begin{aligned} \sigma_l &= 0.3 \div 0.4 \sigma_r && \text{per } \sigma_r \leq 340 \text{ MPa} \\ \sigma_l &= 140 \text{ MPa} && \text{per } \sigma_r > 340 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (15.11)$$

La tabella 2 riassume il valore di  $\phi$  e di  $N_l$  per alcuni materiali.

Caratteristiche delle prove	
Tensione	Monoassiale
Storia temporale	Ampiezza costante
	Valor medio nullo
Sollecitazione	Flessione rotante
	Trazione-comprensione
Provini	Dimensioni ridotte
	Ottima finitura superficiale

Tab.15.1 – Caratteristiche delle prove per la determinazione sperimentale della curva di Wöhler.

Materiale	$\phi$	$N_l$
Acciaio	0.5	$10^6$
Ghisa	0.4	$10^6$
Ghise grige	0.34-0.46	$10^6$
Titanio e leghe	0.40-0.65	$10^6$
Leghe rame	0.25-0.5	$10^8$
Leghe nichel	0.35-0.5	$10^8$
Leghe alluminio	0.4	$5 \cdot 10^8$
Leghe magnesio	0.35	$10^8$

Tab.15.2 - Valore di  $\phi$  e di  $N_l$  per alcuni materiali.

### Resistenza torsionale a fatica

Lo stato tensionale dovuto alla torsione, cioè lo stato di tensione puramente tangenziale, è di tipo biassiale, con le tensioni principali aventi uguale modulo e segno opposto. Nel caso della torsione alternata simmetrica le tensioni principali agiscono in *controfase*, cioè una tensione principale passa da valori positivi a negativi, mentre l'altra si comporta nel modo opposto.

In generale non è possibile utilizzare i criteri di resistenza relativi alle sollecitazioni statiche al caso della fatica, tuttavia, nel caso particolare dello stato di tensione puramente tangenziale, in mancanza di dati sperimentali e per materiali duttili, il limite di fatica per tensione tangenziale alternata può essere ottenuto dal limite di fatica a flessione utilizzando teoria della massima tensione tangenziale o quella di Von Mises. Nel caso statico tali teorie affermano che la resistenza di snervamento al taglio è data, rispettivamente, da:

$$\tau_s = 0.5 \sigma_s \quad \tau_s = 0.577 \sigma_s \quad (15.12a,b)$$

Dalle (12) si deducono le seguenti relazioni:

$$\tau_l = 0.5 \sigma_l \quad \tau_l = 0.577 \sigma_l \quad (15.13,14)$$

I risultati sperimentali mostrano che la seconda relazione è più precisa.

Per i materiali fragili si ha invece:

$$\tau_l = 0.8 \div 0.9 \sigma_l \quad (15.15)$$

### Fattori modificanti il limite di fatica

Il limite di fatica  $\sigma_l$  di un elemento di macchina può essere considerevolmente minore del limite di fatica  $\sigma'_l$  del provino a flessione rotante. La differenza è dovuta a diversi fattori e può essere valutata impiegando per ciascuno un apposito coefficiente minore di uno. Il limite di fatica può essere, infatti, espresso come:

$$\sigma_l = k_a k_b k_c k_d k_e k_f \sigma'_l \quad \sigma_l = C_s C_g C_l k_f \sigma'_l \quad (15.16a,b)$$

nelle quali i coefficienti si riferiscono ai seguenti effetti:

#### Shigley

- $k_a$  - finitura superficiale,
- $k_b$  - dimensioni,
- $k_c$  - gradiente/tipo di tensione,
- $k_d$  - temperatura di esercizio,
- $k_e$  - altre cause.

#### Juinall

- $C_s$  - finitura superficiale,
- $C_g$  - dimensioni/ gradiente di tensione,
- $C_l$  - tipo di tensione.

- $k_f=1/K_{ff}$  - inverso del fattore di concentrazione delle tensioni per fatica.

Dell'effetto della concentrazione di tensione si può tenere conto riducendo il limite di fatica per mezzo del coefficiente  $k_f=1/K_{ff}$ , oppure amplificando la tensione agente per mezzo del coefficiente  $K_{ff}$  (e ponendo  $k_f=1$ ).

### Effetto della finitura superficiale

Le rotture per fatica iniziano spesso in un punto situato sulla superficie esterna dell'elemento, principalmente per due motivi:

1. i cristalli in corrispondenza della superficie possono presentare minore resistenza ai difetti microscopici non essendo totalmente circondati da altri cristalli,
2. le irregolarità della superficie (come graffi) costituiscono punti di concentrazione delle tensioni.

La superficie del provino a flessione rotante ha un grado di finitura speculare grazie ad una pulitura finale nella direzione assiale per eliminare ogni spigolo. Ovviamente gli elementi di macchina in genere non hanno questo tipo di finitura e la loro resistenza a fatica risulta minore. I componenti costruiti con materiali che non sono sottoposti a lavorazioni, come nel caso dei materiali compositi o dei polimeri, non risentono di questo effetto.

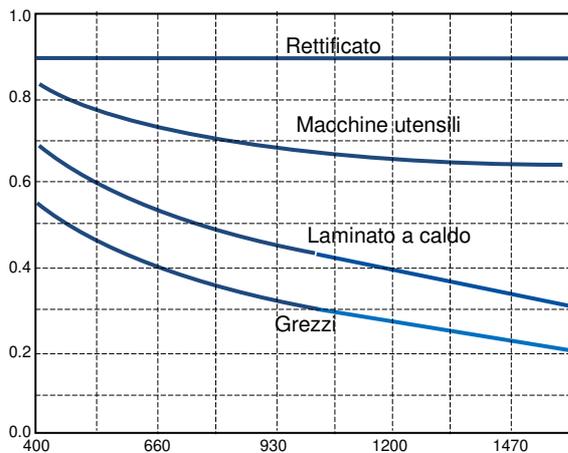


Fig.15.4 – Il fattore  $k_a/C_s$  al variare di  $\sigma_r$  [MPa].

Il diagramma di fig.4 mette in evidenza l'effetto della finitura superficiale sulla vita a fatica. I fattori mostrati sul diagramma sono stati ottenuti mediante un grande numero di prove condotte su acciai. I fattori di finitura superficiale per metalli non ferrosi, come le leghe di alluminio, vengono invece considerati unitari, poiché i limiti di durata di questi materiali includono già gli effetti della finitura. A parità di finitura superficiale, la resistenza a fatica diminuisce spesso all'aumentare della resistenza statica, perché generalmente i materiali con tensioni di rottura più elevate sono più fragili e più sensibili alla concentrazione di tensione.

In definitiva:

- il fattore  $k_a/C_s$  dipende dalla qualità della finitura e dalla resistenza di trazione,
- $k_a/C_s=1$  per ghisa grigia, che possiede già grosse discontinuità, e, in generale, per  $N_f=10^3$  cicli.

Il fattore  $k_a$  può essere ottenuto da diagrammi o mediante la seguente espressione nella quale  $a$  e  $b$  sono assegnati in base al tipo di finitura.

$$k_a = a \sigma_r^b \quad (15.17)$$

Finitura	$a$	$b$	$k_a$ ( $\sigma_r=500$ Mpa)
rettificato	1.58	-0.085	0.93
macchine utensili	4.51	-0.265	0.87
laminato a caldo	57.7	-0.718	0.67
grezzi di forgiatura	272.0	-0.995	0.56

Tab.15.3 – Parametri per il calcolo di  $k_a$ .

### **Effetto delle dimensioni, del gradiente e del tipo di sollecitazione**

Il fenomeno della fatica dipende dalla simultanea presenza di un elevato livello di tensione e di difetti in una zona del materiale. Come visto a proposito del diagramma di Wöhler, i dati relativi al limite di fatica per i vari materiali si riferiscono a provini di 7.5 mm di diametro sollecitati a flessione rotante. Si osserva sperimentalmente che, *a parità di tensione alternata massima*, il limite di fatica decresce al *diminuire del gradiente* di sollecitazione e al *crescere della dimensione* del provino.

Il gradiente della tensione, a parità di tensione alternata massima, influisce sulla resistenza a fatica per 3 motivi:

1. maggiore è il gradiente, meno estesa è la zona interessata alle tensioni massime e di conseguenza minore è il pericolo di innesco del danneggiamento;
2. se si innesca una frattura nella zona ad elevata tensione, dopo che la sua estremità ha oltrepassato tale zona risulta soggetta ad una tensione tanto meno elevata quanto maggiore è il gradiente e, di conseguenza, si propaga meno rapidamente;
3. un gradiente maggiore implica una minore *tensione media agente sul singolo grano cristallino* del materiale, come spiegato nei paragrafi successivi.

Il gradiente della tensione, a sua volta, dipende da tre fattori: 1. il *tipo di sollecitazione* alternata (flessione, trazione ecc.), 2. la presenza di una *concentrazione di tensione*, 3. le *dimensioni* stesse dell'elemento.

1. Per quanto concerne il primo fattore si osserva che la zona del componente interessata alle tensioni più elevate varia a seconda del tipo di sollecitazione (fig.5a,b):
  - flessione rotante: tutti i punti più esterni della sezione,
  - torsione alternata: tutti i punti più esterni della sezione,
  - flessione alternata: solo i punti nelle zone superiori ed inferiori della sezione,
  - trazione alternata: tutti i punti della sezione.
2. La presenza di un intaglio provoca un innalzamento della tensione agente con un elevato gradiente di sollecitazione. Quest'ultimo rende meno pericoloso l'innalzamento di tensione e comporta il fatto che la diminuzione di resistenza a fatica è minore rispetto a quanto l'incremento di tensione farebbe ritenere (fig.5a,b).
3. La dipendenza dalle dimensioni risiede nel fatto che, a parità di tensione massima e di tipo di sollecitazione, il gradiente di tensione risulta minore all'aumentare delle dimensioni, come si vede in fig.5c relativamente al caso di sollecitazione di flessione.

Oltre che avere un effetto sul gradiente, le dimensioni influiscono direttamente sulla resistenza a fatica per due motivi:

- per l'effetto *volume*, dovuto al fatto che un provino più grande ha una maggiore quantità di difetti, quindi la possibilità di innesco del danneggiamento è maggiore e si verifica più rapidamente;
- per l'effetto *tecnologico* dovuto al fatto che le lavorazioni e i trattamenti superficiali hanno minore influenza positiva nelle zone interne del provino per elementi di dimensioni maggiori.

Nella pratica l'effetto della concentrazione di tensione viene affrontato separatamente con un apposito coefficiente e si tiene conto di dimensioni e gradiente (tipo di carico e ancora dimensioni) mediante opportuni 2 coefficienti. Purtroppo la dipendenza del gradiente dalle dimensioni rende la natura dei coefficienti utilizzati dai principali autori leggermente confusa.

Shigley introduce un fattore  $k_b$  che viene dichiarato dipendere esclusivamente dalla dimensione e un fattore  $k_c$  che dipende dal tipo di sollecitazione; lo stesso fattore  $k_c$  viene utilizzato per il caso in cui la tensione è tangenziale invece che normale. L'autore afferma che per la sollecitazione assiale non c'è effetto dimensionale e la differenza tra il caso di flessione ed assiale deve essere contemplato nel  $k_c$ .

Juvinall congloba i due effetti di riduzione del limite di fatica nel coefficiente  $C_g$ . Il caso di tensione tangenziale viene contemplato con un coefficiente  $C_l$ .

In realtà, entrambi gli autori sembrano tenere conto delle dimensioni solo in relazione alla variazione del gradiente della tensione.

#### **Dimensioni/gradiente**

Per flessione rotante e torsione (e per sollecitazione assiale e flessione alternata dove riportato)  $C_g$  e  $k_b$  possono essere calcolati come mostrato in tab.4.

Il coefficiente  $C_g$  per il caso assiale deve essere scelto in valore proporzionale alla qualità della finitura dell'elemento.

Nel caso di elementi non circolari e/o non sollecitati a flessione rotante o torsione, Shigley suggerisce di utilizzare un diametro equivalente ottenuto prendendo in considerazione la superficie della sezione interessata ad una tensione  $\sigma > 0.95 \sigma_{max}$ . Nel caso di provino a sezione circolare (piena o cava) sollecitato a flessione rotante, il diametro equivalente  $d_e$  coincide con  $d$  e tale superficie è una corona circolare la cui area è:

$$A_{0.95\sigma} = \frac{\pi}{4} \left[ d_e^2 - (0.95 d_e)^2 \right] = 0.0766 d_e^2 \quad (15.18)$$

Diametro	$C_g$	$k_b$	$k_c$
$2.8 < d < 10$	1.0	$1.24 d^{-0.107}$	
$10 \leq d < 51$	0.9		
$50 \leq d < 100$	0.8	$1.51 d^{-0.157}$	
$100 \leq d < 150$	0.7		
Assiale	0.7÷0.9	1.0	0.85

Tab.15.4 – Fattori  $C_g$  e  $k_b$ .

Negli altri casi  $d_e$  può essere ottenuto uguagliando l'area  $A_{0.95\sigma}$  all'espressione a destra nella (18) ottenendo

$$d_e = \sqrt{\frac{A_{0.95\sigma}}{0.0766}} = 3.61\sqrt{A_{0.95\sigma}} \quad (15.19)$$

Nel caso di provino a flessione alternata l'area  $A_{0.95\sigma}$  è delimitata da due corde parallele poste a  $0.95d$  da cui  $A_{0.95\sigma}=0.0105d^2$ , mentre nel caso di provino rettangolare  $A_{0.95\sigma}=0.05hb$ . Utilizzando la (19) nei due casi rispettivamente si ottiene:

$$d_e=0.37 d \quad d_e=0.808 h b^{0.5} \quad (15.20a,b)$$

Operando similmente si possono ottenere i diametri equivalenti per varie tipologie di sezione.

**Gradiente/tipo di sollecitazione**

Shigley introduce un coefficiente  $k_c$  legato al gradiente, in funzione del tipo di sollecitazione, e al tipo di tensione (normale o tangenziale). Juvinall introduce il coefficiente  $C_l$  legato al tipo di tensione.

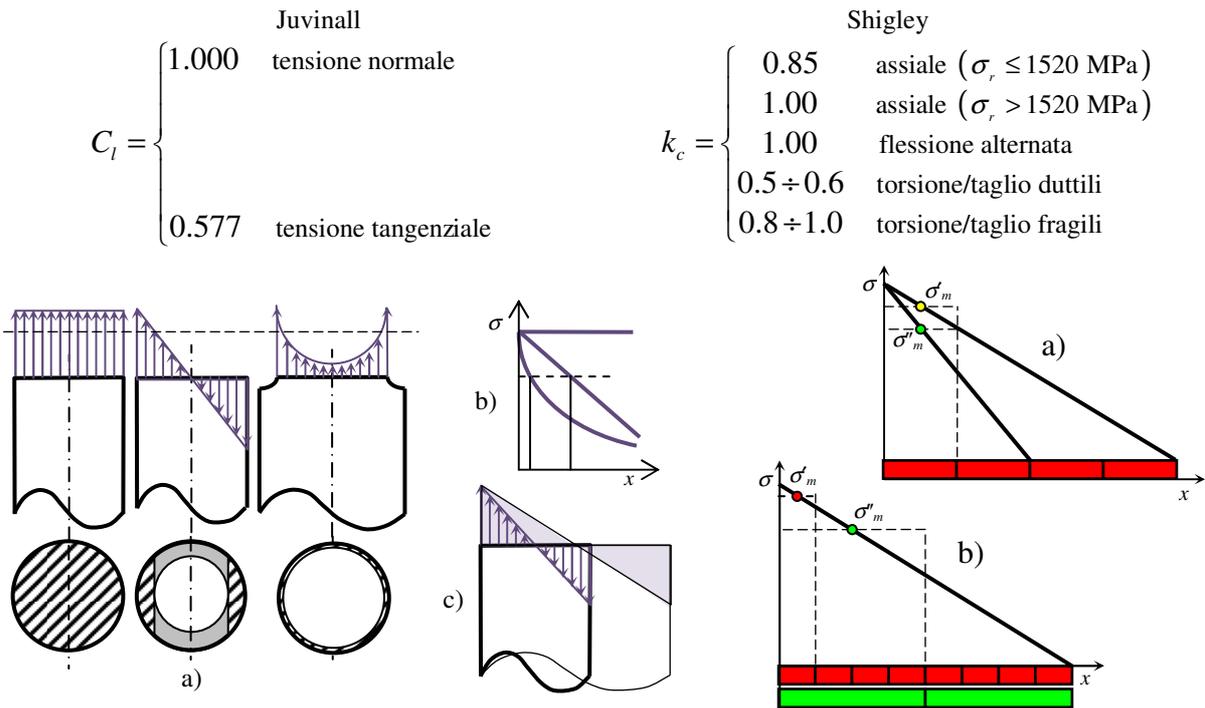


Fig. 15.5 – Gradiente di tensione e dimensioni: a,b) sollecitazione di sforzo normale, di flessione e di sforzo normale con concentrazione di tensione: gradiente della sollecitazione e area interessata alle massime sollecitazioni. c) Effetto della dimensione sul gradiente.

Fig.15.6 – Sollecitazione media sul grano cristallino: a) effetto del gradiente, b) effetto della dimensione del grano.

**Effetto della concentrazione di tensione e sensibilità agli intagli**

La presenza di un intaglio favorisce l'innescò della rottura per fatica poiché la tensione alternata supera localmente quella nominale. Le cricche di fatica, infatti, s'innescano spesso dalle discontinuità geometriche quali scarichi, fori ecc..

Le prove sperimentali mostrano che la presenza di un intaglio influenza la vita a fatica in modo differente nei diversi materiali, che presentano quindi differenti *sensibilità all'intaglio*. In generale si riscontra che nella determinazione del limite di fatica dell'elemento, la tensione non deve essere aumentata dell'intero ammontare del fattore di concentrazione delle tensioni geometrico  $K_r$ .

Per questo motivo è necessario introdurre un *fattore di concentrazione delle tensioni a fatica*  $K_{tf}$  (o semplicemente  $K_f$ ) definito come rapporto tra il limite di fatica del provino senza intaglio e quello con intaglio:

$$K_{tf} = \frac{\sigma_l}{\sigma_{lt}} \quad (K_f \text{ Juvinall}) \quad (15.21)$$

Tipicamente si tiene conto dell'effetto della concentrazione di tensione amplificando la tensione nominale per il fattore di concentrazione a fatica  $K_{tf}$ , oppure, come già mostrato tramite le (15-16), riducendo il limite di fatica mediante il fattore  $k_f$  legato a  $K_{tf}$  dall'ovvia relazione:

$$k_f = \frac{1}{K_{tf}} \quad (15.22)$$

La sensibilità all'intaglio (del materiale)  $q$  è definita dall'equazione:

$$q = \frac{K_{if} - 1}{K_t - 1} \quad (15.23)$$

L'equazione mostra che  $0 < q < 1$ :

- se  $q=0$  si ha che  $K_{if}=1$ : il materiale non ha sensibilità all'intaglio;
  - se  $q=1$  si ha  $K_{if}=K_t$ : il materiale ha la massima sensibilità.
- $q$  è un indicatore dell'incapacità del materiale di attenuare l'effetto teorico della sovrasollecitazione. L'espressione che consente di ottenere  $K_{if}$  per  $K_t$  e  $q$  assegnati è la seguente:

$$K_{if} = 1 + q(K_t - 1) \quad (15.24)$$

Come detto, la minore sensibilità all'intaglio dei materiali nel caso della sollecitazione di fatica si spiega con il fatto che il danno di fatica è provocato simultaneamente dalla tensione alternata effettiva e dalla presenza delle microscopiche discontinuità all'interno del materiale. L'intaglio provoca generalmente un incremento di tensione notevole in una zona ristretta e quindi un gradiente molto elevato e crescente al decrescere della dimensione caratteristica della discontinuità (raggio di raccordo, raggio del foro, etc.). L'elevato gradiente, a parità di tensione massima, limita la pericolosità del livello di tensione perché come detto, la zona soggetta a carichi elevati è meno estesa e, di conseguenza, la probabilità d'innescio e di propagazione sono ridotte.

Ancora, diversamente da quanto postulato dalla teoria dell'elasticità, i materiali non sono dei continui omogenei e, in molti casi, sono aggregati di grani cristallini; la rottura può innescarsi da un grano *disposto in modo sfavorevole* rispetto alla direzione della tensione e dal *livello medio di sollecitazione agente su di esso*. La tensione media agente sul grano di materiale più sollecitato dipende:

- dal gradiente della sollecitazione: a parità di sollecitazione massima e dimensione del grano cristallino, se il gradiente di tensione è elevato, la tensione media sulla dimensione del grano cristallino è minore (fig.6a);
- dalla struttura del materiale: a parità di gradiente e sollecitazione massima, la tensione media sul grano è maggiore nei materiali a *grano fine*, come gli acciai *bonificati*, caratterizzati da *elevati* valori della tensione di rottura, rispetto a quelli a *grano grosso*, come gli acciai *normalizzati* (fig.6b), aventi tensioni di rottura minori.

A causa di questi fattori, risulta che  $q$  dipende dalle caratteristiche del materiale, principalmente dalla dimensione del grano cristallino legata alla tensione di rottura, e dalla dimensione *assoluta* del raggio di raccordo della discontinuità rispetto alla dimensione del grano del materiale.

La sensibilità all'intaglio si differenzia nettamente per materiali fragili e duttili. Tipicamente i materiali fragili hanno valori di  $q$  prossimi all'unità.

Per le ghise, aventi struttura a grano grosso, la sensibilità all'intaglio è molto bassa, variando nel campo  $q=0.0 \div 0.2$  in dipendenza della tensione di rottura a trazione.

### Diagrammi di $q$

I valori di  $q$  per i vari materiali e al variare della dimensione dell'intaglio sono visualizzabili in appositi diagrammi. I diagrammi sono in funzione del raggio di raccordo effettivo dell'intaglio e non di quello adimensionalizzato, poiché il parametro che governa il fenomeno è la dimensione assoluta dell'intaglio rispetto alla dimensione del grano del materiale.

La figura riporta il diagramma di  $q$  per materiali duttili nel caso di flessione rotante o carico assiale alternato. Il diagramma mostra che per grande raggio di raccordo, specialmente per materiali ad alta resistenza, l'indice di sensibilità è molto prossimo a uno.

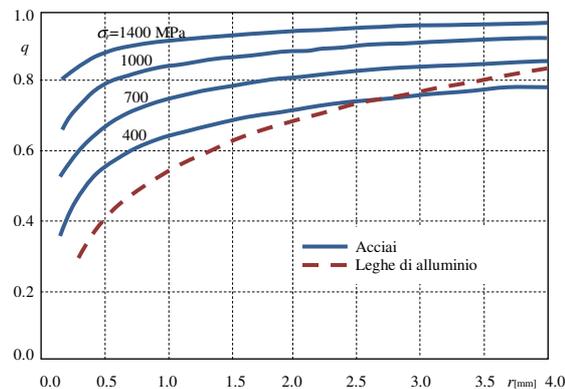


Fig.15.7 - Sensibilità all'intaglio  $q$  in funzione della dimensione dell'intaglio  $r$  [mm] per acciai e leghe di alluminio.

**Formule empiriche per  $q$  e  $K_{tf}$** 

La formula empirica di *Peterson* fornisce  $q$  e  $K_{tf}$  in funzione del raggio dell'intaglio  $r$  e del termine  $a$  avente le dimensioni di una lunghezza e dipendente dal materiale (tab.5):

$$q = \frac{1}{1 + a/r} \quad K_{tf} = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + a/r} \quad (15.25,26)$$

I valori ottenuti sono validi per flessione o sforzo normale; per torsione moltiplicare per 0.6.

La formula empirica di *Neuber* fornisce  $q$  e  $K_{tf}$  in funzione del raggio dell'intaglio  $r$  e della costante  $b$  del materiale, espressa in mm, interpretata dall'autore come dimensione (ideale) del grano:

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{b/r}} \quad K_{tf} = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{b/r}} \quad (15.27,28)$$

La costante  $b$  può essere ottenuta mediante questa ulteriore formula empirica valida per  $\sigma_r < 1520$  Mpa:

$$\log b = (\sigma_r - 134 \text{ MPa}) / 586 \quad (15.29)$$

**Vita limitata**

Nel campo della vita limitata cui corrispondono tensioni nominali  $\sigma_n$  prossime allo snervamento, le tensioni teoriche calcolate considerando la concentrazione di tensione possono risultare superiori allo snervamento localmente o in tutta la sezione. In tale caso, per i materiali duttili, il fattore  $K_{tf}$  viene a dipendere da  $N_f$  e si dovrebbe introdurre un fattore  $K'_{tf} = f(N_f)$ , mostrato qualitativamente in fig.8.

In particolare, in base al livello della tensione applicata e del fattore  $K_t$  si hanno tre possibili casi:

- |                            |                             |                                              |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------|
| 1. nessuno snervamento     | $K_t \sigma_n < \sigma_s$   | $K'_{tf} = \sigma_{max} / \sigma_n = K_{tf}$ |
| 2. snervamento localizzato | $K_t \sigma_n > \sigma_s$   | $K'_{tf} = \sigma_s / \sigma_n$              |
| 3. snervamento totale      | $\sigma_n \approx \sigma_s$ | $K'_{tf} \approx 1$                          |

Il caso 1) è ovvio.

Nel caso 2) la tensione massima non coincide con quella teorica in campo elastico, ma è

- pari alla tensione di snervamento, nel caso di materiale perfettamente plastico,
- leggermente maggiore della tensione di snervamento in presenza di incrudimento.

Nel caso 3) la tensione in tutta la sezione è quella plastica che coincide quindi con quella nominale. Naturalmente se i valori di  $K'_{tf}$  per il caso intermedio non sono noti si utilizza  $K_{tf}$ . Per i materiali fragili si ha  $K'_{tf} \approx K_{tf}$ .

MATERIALE	$a$ [mm]
Leghe di alluminio	0.508
Acciaio bonificato o normalizzato a basso tenore di carbonio	0.254
Acciaio temprato	0.0635
Acciai ad alta resistenza ( $\sigma > 550$ MPa)	$0.025 (2070 \text{MPa} / \sigma)^{1.8}$

Tab.15.5 -Valore della costante  $a$  per alcuni materiali.

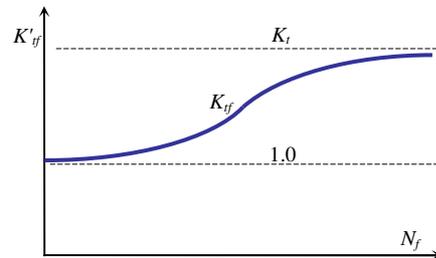


Fig.15.8 – Andamento qualitativo di  $K'_{tf}$  funzione di  $N_f$ .

**Tracciamento approssimato del diagramma di Wöhler e valutazione delle relative costanti**

Un diagramma di Wöhler approssimato nel campo della resistenza a termine in coordinate logaritmiche può essere tracciato unendo due punti opportuni.

Il primo è il valore a  $N_f=10^3$  cicli per il quale si considera un valore di resistenza a fatica  $\sigma_{f3}=\phi'\sigma_r$ . Per alcuni autori  $\sigma_{f3}$  è scarsamente influenzato da molti dei fattori che modificano il limite di resistenza a fatica e utilizzano il valore  $\phi'=0.9$ .

Viceversa, Juvinall considera

- il gradiente: nel caso di trazione alternata  $\sigma_{f3}$  si riduce diventando  $\sigma_{f3}=0.75\sigma_r$ , da cui  $\phi'=0.75$ .
- l'eventuale concentrazione di tensione:  $\sigma_{f3}=k'_f 0.9\sigma_r$ ; considerando  $k'_f=k_f$  si ha  $\phi'=k_f 0.9$ ;
- l'eventualità che la tensione agente sia tangenziale:  $\tau_{f3}=0.9\tau_r$ ; si noti che  $\tau_s=0.577\sigma_s$  mentre  $\tau_r=(0.7\div 0.8)\sigma_r$ , (essendo 0.8 per gli acciai e 0.7 per altri materiali duttili), per cui, in definitiva,  $\phi'=0.9(0.7\div 0.8)$  e  $\tau_{f3}=0.9(0.7\div 0.8)\sigma_r$ .

**I punto:**  $[\text{Log}(N_f)=\text{Log}(10^3)=3, \text{Log}(\sigma_f)=\text{Log}(\phi'\sigma_r)]$

L'altro punto è il limite di resistenza a fatica ottenuto tramite l'espressione (16) e tipicamente posizionato a  $N_f=10^6$  cicli per l'acciaio ( $5\cdot 10^8$  per leghe di alluminio,  $10^8$  per leghe magnesio). Il limite di resistenza a fatica  $\sigma_l$  può essere posizionato a  $N_f=100.000$  invece che  $N_f=1.000.000$  per prudenza. In vari casi  $\sigma_l$  può essere ottenuto dalla tensione di rottura come visto nel paragrafo precedente ( $\sigma_l=\phi\sigma_r\approx 0.5\sigma_r$ ).

**II punto:**  $[\text{Log}(N_f)=\text{Log}(10^6)=6, \text{Log}(\sigma_f)=\text{Log}(\sigma_l)]$

Le costanti di Wöhler possono essere determinate numericamente conoscendo le coordinate di due punti della curva. Ricordando l'espressione di Wöhler in forma esponenziale e logaritmica

$$\sigma_f = a N_f^b \quad \log \sigma_f = \log a + b \log N_f, \quad (15.30,31)$$

per i due punti noti si può scrivere:

$$\sigma_1 = a N_1^b \quad \sigma_2 = a N_2^b; \quad (15.32,33)$$

effettuando il rapporto e passando ai logaritmi si ha

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{N_1^b}{N_2^b} \quad \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = b \log \frac{N_1}{N_2} \quad (15.34,35)$$

da cui

$$b = \frac{\log \sigma_1 - \log \sigma_2}{\log N_1 - \log N_2} \quad (15.36)$$

$a$  può essere ottenuto da una delle (32,33)

$$a = \frac{\sigma_1}{N_1^b} \quad a = \frac{\sigma_2}{N_2^b} \quad (15.37a,b)$$

Utilizzando i punti I e II prima indicati e nel caso in cui  $\sigma_f=\phi\sigma_r$ , si ottiene:

$$a = (1/K)^{-1/\mu} = \frac{(\phi'\sigma_r)^2}{\sigma_l} = \frac{\phi'^2}{\phi} \sigma_r \quad b = -\frac{1}{\mu} = -\frac{1}{3} \log \frac{\phi'\sigma_r}{\sigma_l} = -\frac{1}{3} \log \frac{\phi'}{\phi} \quad (15.38,39)$$

Infatti si ha, rispettivamente,

$$b = \frac{\log \sigma_l - \log \phi'\sigma_r}{\log 10^6 - \log 10^3} = \frac{\log \sigma_l - \log \phi'\sigma_r}{3} = -\frac{1}{3} \log \frac{\phi'\sigma_r}{\sigma_l} \quad (15.40)$$

$$a = \frac{\sigma_2}{N_2^b} = \frac{\sigma_l}{10^{\frac{6}{3} \log \frac{\sigma_l}{\phi'\sigma_r}}} = \frac{\sigma_l}{10^{2 \log \frac{\sigma_l}{\phi'\sigma_r}}} = \frac{\sigma_l}{\left(\frac{\sigma_l}{\phi'\sigma_r}\right)^2} = \frac{(\phi'\sigma_r)^2}{\sigma_l} \quad (15.41)$$

Nel caso di tensioni di fatica tangenziali, per il punto I si utilizza il  $\phi'$  appropriato, il limite di fatica va moltiplicato per  $C_f=K_c=0.58$  e nella curva di Wöhler ottenuta si inseriscono le  $\tau_a$  al posto delle  $\sigma_a$ .