



Tesi di Laurea Magistrale

OTTIMIZZAZIONE DI TRAIETTORIE PER FLY-BY MULTIPLI DI ASTEROIDI
NEAR-EARTH CON VEICOLI SPAZIALI A BASSA SPINTA

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Politecnico di Torino

1 ottobre 2020

Relatori

Prof. Lorenzo Casalino (PoliTo)
Prof.ssa Michèle Lavagna (PoliMi)

Candidato

Fabio Ferrari

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Ottimizzazione di traiettorie spaziali	5
1.2	Propulsione a bassa spinta	6
1.3	Flusso di lavoro	7
1.3.1	Preselezione degli asteroidi	7
1.3.2	Ottimizzazione di una traiettoria	7
1.3.3	Automatizzazione del processo	9
1.3.4	Scelta delle sequenze	9
2	Definizione della missione	11
2.1	Near-Earth Objects	11
2.2	Flyby multipli di asteroidi	13
2.3	Proposta NEST	14
2.4	Caratteristiche della missione	16
3	Richiami di meccanica orbitale	19
3.1	Generalità sulla meccanica orbitale	19
3.1.1	Leggi di Keplero	19
3.1.2	Legge di gravitazione universale	19
3.1.3	Problema degli N-corpi	20
3.1.4	Problema dei due corpi	21
3.1.5	Invarianti del moto	21
3.1.6	Equazione della traiettoria e delle coniche	22
3.1.7	Tipi di orbite e loro proprietà	23
3.1.8	Posizione e velocità in funzione del tempo	24
3.2	Sistemi di coordinate e misure del tempo	26
3.2.1	Sistemi di coordinate	26
3.2.2	Misure del tempo	27
3.3	Trasformazione di coordinate	28
3.4	Parametri orbitali classici	30
3.4.1	Determinazione dei parametri orbitali da r e v	31
3.4.2	Determinazione di r e v dai parametri orbitali	31
3.5	Manovre orbitali	31
3.5.1	Costo della manovra	31
3.5.2	Principali manovre a uno o due impulso	32
3.6	Sfera di influenza e cenni su traiettorie interplanetarie	37
4	Selezione preliminare degli asteroidi	39
4.1	Step di selezione	39
4.1.1	Preparazione dei file	39
4.1.2	Bassa inclinazione e nodi vicini	40
4.1.3	Valutazione temporale dei passaggi	41
4.1.4	Suddivisione dei quattro passaggi	43
4.2	Riassunto criteri e altre considerazioni	43

4.3	Asteroidi candidati	44
5	Modelli matematici	47
5.1	Tipo di trasferta	48
5.1.1	Modello impulsivo	48
5.1.2	Modello continuo	49
5.1.3	Scelta del tipo di trasferta	50
5.2	Equazioni del moto	51
5.2.1	Problema dei due corpi	51
5.2.2	Rendezvous	53
5.2.3	Libration points	54
5.2.4	Scelta del set di equazioni	56
6	Obiettivi di missione	59
6.1	Tipi di funzioni obiettivo	59
6.1.1	Funzioni obiettivo di Mayer	60
6.1.2	Funzioni obiettivo di Lagrange	61
6.1.3	Altre funzioni obiettivo	62
6.2	Scalarizzazione della funzione obiettivo	62
6.3	Formulazione del problema di ottimizzazione	63
6.4	Scelta della funzione obiettivo	64
7	Approcci, metodi e tecniche di ottimizzazione	65
7.1	Teoria del controllo ottimale	66
7.1.1	Principio di Pontryagin	68
7.1.2	Generalizzazione del problema con vincoli di uguaglianza	68
7.1.3	Generalizzazione del problema con vincoli di disuguaglianza	69
7.1.4	Ulteriori osservazioni sulla teoria del controllo ottimale	69
7.2	Approcci di risoluzione	69
7.2.1	Approcci analitici	69
7.2.2	Approcci numerici	70
7.3	Algoritmi di risoluzione	70
7.3.1	Risoluzione di equazioni differenziali	70
7.3.2	Risoluzione di sistemi non lineari algebrici	72
7.3.3	Risoluzione di problemi di ottimizzazione non lineari	74
7.4	Metodi di risoluzione	76
7.4.1	Metodi diretti	76
7.4.2	Metodi indiretti	77
7.5	Tecniche numeriche di risoluzione	78
7.5.1	Tecniche delle Inclusioni differenziali	78
7.5.2	Tecniche di Shooting	78
7.5.3	Tecniche di collocazione	80
7.6	Scelta dell'approccio, dei metodi, delle tecniche e degli algoritmi di risoluzione	81
8	Automatizzazione dell'algoritmo	83
8.1	Funzionamento dei vari programmi	84
8.2	Algoritmo di stima per i moltiplicatori di Lagrange	87
9	Analisi delle sequenze a quattro asteroidi	89
9.1	Ottimizzazioni preliminari	89
9.2	Caratterizzazione delle traiettorie a quattro flyby	95
9.2.1	Caratterizzazione delle traiettorie a bassa spinta	95
9.2.2	Caratterizzazione delle traiettorie a basse velocità relative	102
9.3	Riassunto condizioni favorevoli a traiettorie a basso costo	103

10 Soluzioni ottenute	105
10.1 Traiettorie con il minor consumo	106
10.1.1 Traiettorie 11	106
10.1.2 Traiettorie 12	111
10.1.3 Traiettorie 13	116
10.2 Traiettorie con le velocità relative più basse	120
10.2.1 Traiettorie 218	120
10.2.2 Traiettorie 209	124
10.2.3 Traiettorie 212	128
10.3 Traiettorie scientificamente più interessanti	132
11 Conclusioni	135
A Problema di ottimizzazione	139
A.1 Massimi e minimi di una funzione scalare	139
A.2 Problema di ottimizzazione	140
A.2.1 Problema di massimizzazione	140
A.2.2 Problema di minimizzazione	140
A.3 Ottimizzazione libera	140
A.4 Ottimizzazione vincolata	141
A.4.1 Ottimizzazione con vincoli di uguaglianza	141
A.4.2 Ottimizzazione con vincoli di disuguaglianza	143
B Tabelle dei risultati	145
B.1 Traiettorie a un flyby	145
B.2 Traiettorie a quattro flyby	147

Sommario

Le missioni spaziali all'interno del sistema solare richiedono grandi quantità di propellente per essere svolte, ed ogni chilogrammo in più sulla sonda aumenta in modo consistente il costo totale della missione. I processi di ottimizzazione delle traiettorie rappresentano una metodologia abilitante per risolvere il problema: è possibile trovare delle leggi di controllo che permettono di svolgere diverse missioni, come la proposta NEST di ESA, con consumi estremamente bassi. Lo scopo della tesi consiste nel trovare dei metodi di design per missioni che effettuano flyby multipli di asteroidi *near-earth*. Esse hanno un altissimo valore scientifico perché permettono l'osservazione ravvicinata di diversi oggetti del sistema solare che contengono informazioni fondamentali sui processi di formazione planetaria che vanno dalla nebulosa solare alla creazione degli stessi pianeti. La missione di riferimento presa in esame consiste nell'effettuare quattro flyby con quattro diversi asteroidi *near-earth* in meno di 3 anni. La partenza è fissata per la fine del 2027 e la fine della missione per la metà del 2030. Il veicolo preso in considerazione ha le stesse caratteristiche della proposta NEST: una massa iniziale di 850kg e l'utilizzo della propulsione elettrostatica, caratterizzata da un alto valore di impulso specifico e una bassa spinta. Gli asteroidi candidati per i flyby passano tutti a meno di 18 milioni di chilometri dalla Terra almeno una volta nella finestra temporale considerata. Il metodo di design è basato su un approccio numerico con metodi indiretti e tecniche di shooting, il processo è completamente automatizzato e permette di ottenere un'alta probabilità di convergenza a soluzioni a basso costo. Alla fine del processo sono state trovate 328 traiettorie a quattro flyby, oltre che 1378 traiettorie a tre flyby, 1542 traiettorie a due flyby e 105 traiettorie a un flyby, tutte con un consumo di propellente minore di 25kg. I risultati hanno consentito di caratterizzare statisticamente le traiettorie in base ai punti e i tempi degli incontri, definendo alcune condizioni necessarie per consumare poco propellente. Tra tutte, la traiettoria a più basso costo utilizza 11.6kg di propellente, ha una durata di 2.9 anni e la velocità relativa massima di 12.74km/s, essa inoltre effettua un flyby con il *Potentially Hazardous Asteroid* denominato 2001 WN5, che è caratterizzato da un diametro di 936 metri e che passerà a meno di 250000km dalla Terra nel 2028. I risultati permettono anche di caratterizzare le traiettorie a più bassa velocità relativa in base ai parametri orbitali degli asteroidi considerati, lo studio ha portato alla scoperta di traiettorie con velocità relative massime di meno di 7km/s e consumo di 13.5kg di propellente. La tesi dunque dimostra la fattibilità di missioni nello spazio *near-earth*, in particolare conferma la possibilità di effettuare osservazioni ravvicinate di diversi asteroidi di piccola e media taglia e PHA ad un consumo complessivo di propellente estremamente limitato e in un tempo molto breve.

Abstract

Space missions around the solar system often require large amounts of propellant, every extra kilogram on-board a spacecraft significantly increases the total cost of the mission. Trajectory optimization processes represent an enabling methodology to tackle this issue: finding a control law that minimizes the consumption allows to carry out many low-cost missions that have never been studied before, such as ESA's NEST proposal. The purpose of this thesis is to define a process to design missions in the near-earth space, in particular those that perform multiple flybys with asteroids. They have a very high scientific importance, as they allow to observe different objects of the solar system which could bring groundbreaking information on the processes of the formation of our star and its orbiting planets. The reference example mission performs four sequential flybys with four different *near-earth* asteroids in less than 3 years. The departure date is set for the fall of 2027 and the conclusion of the mission for mid 2030. The selected vehicle has the same specification as the NEST proposal: an initial mass of 850kg and uses an electrostatic propulsion system, characterized by a high specific impulse and low thrust. All candidate asteroids perform an Earth close-up approach, reaching, at least once in the considered time window, distances below 18 million kilometers from our planet. The design methodology consists in an automatic process based on a numerical approach, indirect method and shooting techniques which gives a high convergence rate to very low consumption solutions. The process discovered 328 four-asteroids trajectories, as well as 1378 three-asteroids trajectories, 1542 two-asteroids trajectories and 105 single-asteroid trajectories, all of which with a fuel consumption of less than 25kg. The high amount of data produced by the process made it possible to analyse and characterize the trajectories on the basis of distances and times of the flyby. Different conditions have been defined, which assure little propellant consumption. The best trajectory utilizes only 11.6kg of propellant to perform all the four flybys in a 2.9 years long mission, the maximum relative speed is 12.74km/s with the *Potentially Hazardous Asteroid* named 2001 WN5, which has a diameter of 936 meters and will pass at less than 250000km from the Earth in 2028. The results also allow to characterize the trajectories with the lowest relative velocities based on the orbital parameters of the considered asteroids, the study led to the discovery of trajectories with relative velocities of less than 7km/s and a consumption of just 13.5kg of propellant. The ultimate goal of the thesis demonstrates the feasibility of missions in the *near-earth* space, in particular confirms that it is possible to carry out close-up observations of several small and medium-sized asteroids, including PHA, with an extremely limited overall consumption of propellant and in a very short time.

1

Introduzione

Il capitolo introduttivo presenta una generica introduzione all'ottimizzazione delle traiettorie spaziali, alla propulsione a bassa spinta e al flusso di lavoro seguito. Parlando di traiettorie ottimali il legame con la propulsione a bassa spinta è molto stretto, infatti sono proprio le forze piccole a rendere la traiettoria continua e ottimizzabile. È questo il motivo per cui si cita la propulsione a bassa spinta per l'impiego in questione, delineando le prestazioni e i parametri utilizzati nello studio.

Il lavoro presentato nel corpo della tesi inizia dando una panoramica sulle missioni verso asteroidi, in modo da giustificare l'importanza di un simile progetto. In seguito si introduce la proposta NEST, che verrà presa come missione di riferimento in termini di caratteristiche propulsive e di massa del veicolo nella definizione della missione analizzata. Dopo un breve richiamo ai principi della meccanica orbitale, si parlerà della selezione preliminare degli asteroidi presenti nel sistema solare che esclude i corpi più difficili da raggiungere da una sonda, in modo da concentrarsi su missioni verso oggetti nello spazio *near-earth*. I capitoli che seguono delineano la teoria dell'ottimizzazione delle traiettorie spaziali, riportandone i flussi logici di alto livello: i modelli, gli obiettivi e le diverse metodologie, tecniche e algoritmi [2]. Alla fine di ognuno di questi capitoli si valuta l'utilità delle opzioni presentate, effettuando la scelta più opportuna per il caso in esame. Gli ultimi capitoli sono incentrati sui calcoli svolti, in particolare si descrive l'algoritmo automatizzato che è stato sviluppato, l'analisi delle sequenze di asteroidi e i risultati ottenuti dai processi di ottimizzazione implementati.

1.1 Ottimizzazione di traiettorie spaziali

L'ottimizzazione delle traiettorie spaziali può essere definita come la ricerca della legge di controllo per cui viene ottimizzato un particolare parametro, detto in gergo comune *indice di prestazione*, e vengono rispettati i vincoli imposti. Per legge di controllo si intende l'evoluzione temporale della spinta in modulo, direzione e verso. Applicando la legge di controllo in un modello di equazioni che descrivono il moto del veicolo, si ottiene, per integrazione numerica, una traiettoria ottimale che soddisfa le condizioni al bordo, le condizioni iniziali e quelle lungo la stessa traiettoria, che possono essere funzioni integrali sul tempo di missione (o su tutta la traiettoria) o valori ad un preciso istante, molto spesso quello finale del percorso.

Le missioni spaziali, specie quelle di lunga percorrenza, richiedono l'ottimizzazione della loro traiettoria perché essa è strettamente collegata con i consumi di propellente: seguire una traiettoria sub-ottimale significa allocare più massa per il propellente, che si traduce in una massa del veicolo alla partenza maggiore con un aumento del costo complessivo della messa in orbita e, in alcuni casi, del tempo di

missione. Da un altro punto di vista, una traiettoria sub-ottimale significa portare a bordo meno carico pagante allo stesso costo, situazione altrettanto indesiderata.

Negli ultimi anni, i metodi per ottimizzare le traiettorie hanno visto un progresso notevole e vengono spesso utilizzati nelle missioni interplanetarie. L'ottimizzazione delle traiettorie, come ogni disciplina numerica complessa, non ha una strada univoca. Ci sono diversi modelli matematici che possono essere utilizzati, a ognuno dei quali può corrispondere un obiettivo diverso, dunque un diverso indice di prestazione. Possono, inoltre, essere utilizzati degli approcci diversi, nei quali possono essere seguiti metodi, tecniche e algoritmi differenti. È evidente che ognuna di queste strade ha i propri svantaggi e i propri vantaggi, per cui è necessario fare una scelta accurata e giustificata dal risultato che si vuole ottenere.

1.2 Propulsione a bassa spinta

Un punto cardine dell'ottimizzazione delle traiettorie spaziali è un sistema di propulsione a bassa spinta e alta efficienza. La propulsione chimica non si adatta molto a calcoli di ottimizzazione perché molto spesso la spinta in gioco è talmente grande da riuscire a considerare le manovre come impulsi, ovvero come variazioni brusche di velocità del veicolo in una certa posizione fissa ad un dato momento. Una manovra impulsiva può essere ottimizzata in termini di direzione, verso e modulo della spinta e scegliendo il momento opportuno in cui effettuarla. Molto spesso ciò non richiede calcoli numericamente complessi, ma è possibile arrivare all'ottimo anche per via analitica, si prenda ad esempio la trasferta di Hohmann. La tecnologia abilitante per le traiettorie ottimali a basso consumo è senza alcun dubbio la propulsione elettrica nelle sue tre forme: propulsione elettrotermica, propulsione elettrostatica e propulsione elettromagnetica. Nel caso in analisi la propulsione più adatta per la missione è quella elettrostatica per via degli ordini di grandezza di impulso specifico, spinta e potenza utilizzati. Per ulteriori approfondimenti sul tema si rimanda a [9].

A differenza della controparte chimica, che utilizza attraverso la combustione l'energia chimica contenuta all'interno del propellente stesso, la propulsione elettrica utilizza una fonte esterna di energia (radiazione catturata con pannelli solari).

Questo comporta una sostanziale indipendenza tra portata e potenza, per cui si può aumentare l'una e avere minore energia specifica, quindi spinte più grandi a efficienze basse o aumentare l'altra e avere un propellente molto energetico, il che porta ad avere alte efficienze e basse spinte. Il primo caso è poco importante ai fini di questa tesi, perché ci si potrebbe arrivare in maniera più facile e efficace con la propulsione chimica, il secondo è la peculiarità della propulsione elettrica che si sfrutta.

Propulsori elettrici a bassa spinta sono di impiego comune in missioni che richiedono grandi sforzi propulsivi dopo l'inserimento in orbita (alti valori di ΔV), come missioni *sample & return*, trasferte interplanetarie, cambi di inclinazione o, appunto, missioni con target multipli. Questo perché essa può aumentare grandemente le performance per via dei bassi consumi di propellente. Per la legge di Tsiolkowski, più l'impulso specifico è grande, più grande è la *payload fraction* a parità di ΔV :

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}}$$

Nella propulsione elettrica viene favorito l'impulso specifico a discapito della spinta, portando ad alcuni svantaggi tecnici e matematici.

Gli svantaggi tecnici derivano dalla piccola autorità di controllo del propulsore, che in alcune fasi della missione potrebbe diventare critica in quanto le perturbazioni potrebbero avere ordini di grandezza uguali alla spinta se non addirittura più grandi. Inoltre piccole spinte danno piccole accelerazioni, che a loro volta portano a tempi di manovra molto lunghi rispetto alle manovre impulsive con propulsione chimica. Contando che il tempo di missione è direttamente proporzionale al tempo di gestione del veicolo da parte di un Mission Control Center, ciò potrebbe far aumentare considerevolmente i costi della missione.

Matematicamente una manovra con propulsione elettrica deve essere trattata come una traiettoria in cui agisce, oltre che la forza di gravità, anche la forza propulsiva per gran parte del tempo. La spinta varia da istante a istante generalmente in modulo (molto spesso in modo discontinuo), direzione e verso, per cui il termine noto delle equazioni differenziali non è nullo e in generale tempo-dipendente.

Un'altra complicazione matematica deriva dal piccolo modulo della spinta, che modifica solo leggermente la traiettoria. Si richiedono dunque passi di integrazione temporale molto piccoli che aumentano il costo computazionale del problema.

La continuità della spinta, seppur generi tutti i problemi citati, è proprio la caratteristica che rende possibile l'ottimizzazione delle traiettorie e che diminuisce drasticamente i consumi di propellente.

1.3 Flusso di lavoro

1.3.1 Preselezione degli asteroidi

Ottimizzare una traiettoria non significa poter arrivare nel punto prefissato a basso costo, ma significa arrivare a destinazione nel modo più conveniente possibile, tuttavia non sempre *più conveniente e a basso costo* sono sinonimi. È necessario, prima di effettuare qualsiasi ottimizzazione, fare una preselezione gli asteroidi per trovare quelli più facilmente raggiungibili e i punti sulla loro traiettoria dove è possibile arrivare spendendo il minimo possibile. Questo permette di scegliere delle classi di asteroidi candidati per la missione in esame.

Per non avere consumi di propellente eccessivi, è intuitivo che il veicolo debba restare nell'intorno dell'eclittica, in quanto cambi di inclinazione sono molto dispendiosi per via dell'altissima velocità orbitale della Terra intorno al Sole (29.78km/s in media). Inoltre si deve cercare di ridurre gli spostamenti, sia in termini di raggio, sia di ascensione retta relativa alla Terra. Gli asteroidi scelti, dunque, passeranno molto vicino alla Terra e il veicolo li intercetterà al nodo ascendente o discendente della sua orbita (fig. 4.1a). Nel caso in cui essi abbiano bassa inclinazione, ogni punto dell'orbita è un buon punto di incontro se abbastanza vicino alla Terra, ma si preferisce incontrare l'asteroide a uno degli apsi per ridurre le velocità relative al passaggio (fig. 4.1b). Per effettuare la valutazione non bastano solo i parametri orbitali degli asteroidi, è necessario valutare temporalmente i passaggi per capire se gli asteroidi intercettano solo l'orbita terrestre o anche il pianeta che passa in quella regione a quel tempo.

I vincoli utilizzati per la selezione verranno scelti in modo da restringere ragionevolmente il campo a qualche centinaio di asteroidi.

Del processo di selezione degli asteroidi si parlerà più approfonditamente nel capitolo 4.

1.3.2 Ottimizzazione di una traiettoria

Tutto il processo di risoluzione del problema di ottimizzazione di una traiettoria di un veicolo spaziale può essere diviso in quattro macro-step, come descritto in figura 1.1. In particolare gli step sono i seguenti:

1. Scelta del modello
2. Scelta della funzione obiettivo
3. Scelta dell'approccio di risoluzione
4. Soluzioni ottenute

Ovviamente questi sono passi che riguardano la risoluzione matematica del problema e non prevedono scelte progettuali della missione in se, che devono essere effettuate a priori. Requisiti, obiettivi e piani di missione possono influenzare in maniera diversa le quattro fasi, in particolare è necessario studiare a fondo questi aspetti prima di fare delle scelte interne ad ogni passo.

Il primo passo è necessario non solo per l'ottimizzazione, ma per ogni problema di meccanica orbitale. Esso consiste nella comprensione della dinamica del sistema in cui ci si muove e nella scelta del modello matematico che la descrive. In altre parole consiste nella definizione del vettore di stato, che indica in modo univoco lo stato del sistema e delle rispettive equazioni differenziali del moto del veicolo spaziale, nonché del vettore dei controlli con cui la spinta influenza la dinamica.

Il secondo passo riguarda la scelta degli obiettivi di missione, in particolare degli obiettivi secondo i quali si vuole ottimizzare la traiettoria del veicolo. Questo operativamente viene fatto definendo una funzione costo, che consiste in un parametro o un'opportuna combinazione di parametri che si vuole mantenere

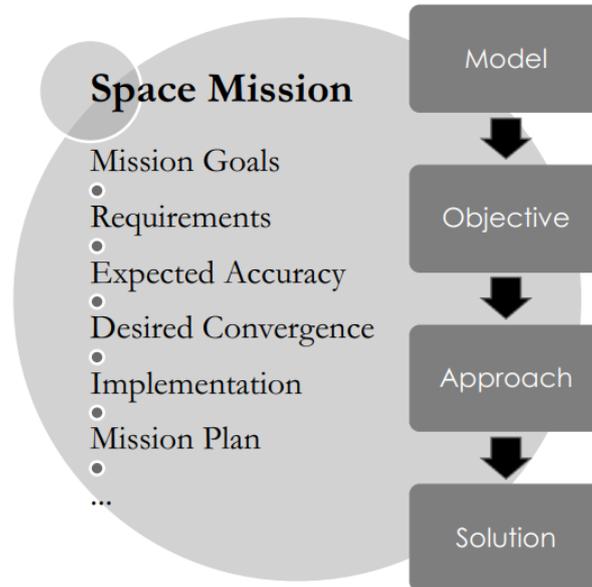


Figura 1.1: Macro-passi per l'ottimizzazione di una traiettoria

il più basso o il più alto possibile. In particolare si procederà a distinguere i casi in cui ci sia una sola variabile da ottimizzare o più di una. Si farà una differenziazione in base al tipo di obiettivo che ci si fissa e al numero.

Il terzo passo consiste nella scelta dell'approccio, dei metodi, delle tecniche e degli algoritmi da impiegare per risolvere il problema di design della traiettoria. Si definisce approccio una strada di risoluzione precisa, che può essere analitica o numerica. La teoria del controllo ottimale, ovvero la teoria che determina il vettore di controllo in funzione nel tempo tale per cui i vincoli vengano rispettati e il costo venga minimizzato, ricava le equazioni che stanno alla base dell'ottimizzazione, seppur la trattazione in se sia del tutto analitica, ciò non comporta che l'approccio sia analitico, infatti i metodi indiretti si basano sull'integrazione numerica di queste equazioni analitiche. L'approccio analitico cerca una strada rigorosa e formale per arrivare alla soluzione, ma non sempre esiste, specie se non si adottano determinate approssimazioni. L'approccio numerico non prevede funzioni analitiche ed è suddiviso in metodi: metodi diretti, che trovano il minimo della funzione costo direttamente tramite programmazione non lineare, a partire dai vettori di stato e di controllo opportunamente discretizzati in tempo, e indiretti, che prevedono di ricavare analiticamente le condizioni necessarie all'ottimo, da cui emergono altre variabili ed equazioni dette appunto "aggiunte", e trasformano il problema di ottimizzazione in un problema alle condizioni al bordo risolvibile tramite integrazione numerica in tempo e il metodo di Newton. Questi ultimi si basano sul principio di Pontryagin. Ogni metodo ha i suoi lati positivi e negativi che possono limitare il loro campo d'utilizzo.

Il quarto e ultimo passo consiste nella risoluzione del problema seguendo l'approccio scelto. Nel caso analitico, la soluzione sarà una soluzione analitica in forma chiusa. Nel caso numerico, la traiettoria finale avrà la forma di una tabella, in quanto viene trovata per punti. L'ultimo approccio è quello più usuale per traiettorie spaziali, perché troppo complesse e intrinsecamente non lineari per presentare una soluzione in forma chiusa. L'approccio analitico può essere usato solo se vengono fatte delle assunzioni stringenti o sotto specifiche condizioni che limitano di parecchio la conformità della soluzione trovata con quella reale.

Nei capitoli 5, 6, 7 e 10 si definiranno i quattro passi più in dettaglio, delineandone vantaggi e svantaggi.

Vengono riportati anche i ragionamenti per il caso in esame, giustificando tutte le scelte effettuate.

1.3.3 Automatizzazione del processo

Una volta definito il problema, dopo aver scelto il metodo risolutivo e gli algoritmi da usare, è necessario sviluppare un processo automatico per ripetere l'ottimizzazione sul numero più grande possibile di sequenze di asteroidi, in modo da esplorare il più possibile le combinazioni e definire diverse missioni di esplorazione dello spazio *near earth*.

1.3.4 Scelta delle sequenze

Dopo aver ottenuto un numero consistente di traiettorie con flyby multipli, è possibile analizzare i risultati trovando correlazioni tra i parametri degli asteroidi e i tempi di flyby. In particolare sono stati definiti alcuni pattern dal forte significato fisico basati sui principi della meccanica orbitale e dell'approssimazione di Edelbaum che garantiscono missioni dal ΔV estremamente basso.

Seguendo questi pattern è possibile ridurre con criterio il numero di combinazioni di sequenze a 2, 3 o 4 asteroidi, in modo da rendere computazionalmente accettabile il calcolo di tutte le possibili traiettorie ottimali. Del processo di individuazione delle sequenze e automatizzazione delle ottimizzazioni si parlerà in maniera estesa nel capitolo 8 e nel capitolo 9.

2

Definizione della missione

In questo capitolo si fa una completa introduzione sugli oggetti Near-Earth e sulla loro importanza, dopodiché si passa a descrivere le missioni di flyby multipli di asteroidi e la proposta NEST sulla quale si basa la scelta della missione analizzata.

2.1 Near-Earth Objects

Per NEO si intende un *Near-Earth Object*, ovvero un oggetto del sistema solare con orbita intersecante quella della Terra o quasi. Tutti i corpi Near-Earth hanno un perielio inferiore a 1.3 unità astronomiche e afelio maggiore di 0.983 unità astronomiche. Tra questi oggetti si annoverano migliaia di asteroidi (NEA, *Near-Earth Asteroids*), alcune comete con orbita molto vicina a quella terrestre, le sonde orbitanti intorno al Sole e i meteoroidi grandi abbastanza da essere trovati e studiati prima che colpiscano la Terra.

L'interesse negli asteroidi prossimi alla Terra è aumentato da decade a decade con la consapevolezza che un impatto con un oggetto di questo tipo potrebbe mettere a repentaglio la vita umana sul pianeta. Tra i NEA esistono corpi che fanno anche parte di una categoria di asteroidi pericolosi detta PHO (Potentially Hazardous Objects), i cui oggetti posseggono una distanza di intersezione minima all'orbita terrestre inferiore o uguale a 0.05 unità astronomiche (poco meno di 7.5 milioni di chilometri) e una magnitudine assoluta inferiore a 22, il che indica una dimensione maggiore o uguale a 150 metri. Gli PHO vengono costantemente monitorati per via del pericolo di collisione in determinate finestre temporali.

Ovviamente i NEA non sono importanti solo per le loro potenzialità distruttive e catastrofiche, molti di questi sono di elevato interesse scientifico perché possono essere esplorati con missioni a basso ΔV , anche grazie alla loro gravità molto ridotta. Essi sono dei campioni a basso costo che permettono di studiare gli aspetti astronomici e geochimici del sistema solare, della sua storia e della sua evoluzione. Soprattutto negli ultimi anni, con l'avvento della New Space Economy, i NEA sono visti come una potenziale risorsa economica per via del materiale extraterrestre che è possibile estrarre e portare sulla Terra a un costo ridotto.

Dei quasi un milione di asteroidi conosciuti nel sistema solare, circa 20000 sono classificabili come NEA, un censimento dei quali è dato in figura 2.1. Essi possono essere classificati a loro volta in tre sottogruppi:

- Asteroidi Aten: raggio orbitale medio inferiore a 1UA ma con afelio più grande del perielio terrestre;
- Asteroidi Apollo: raggio orbitale medio maggiore di 1UA e perielio più piccolo dell'afelio terrestre;
- Asteroidi Amor: raggio orbitale medio tra quello della Terra e Marte e perielio esterno all'orbita terrestre.

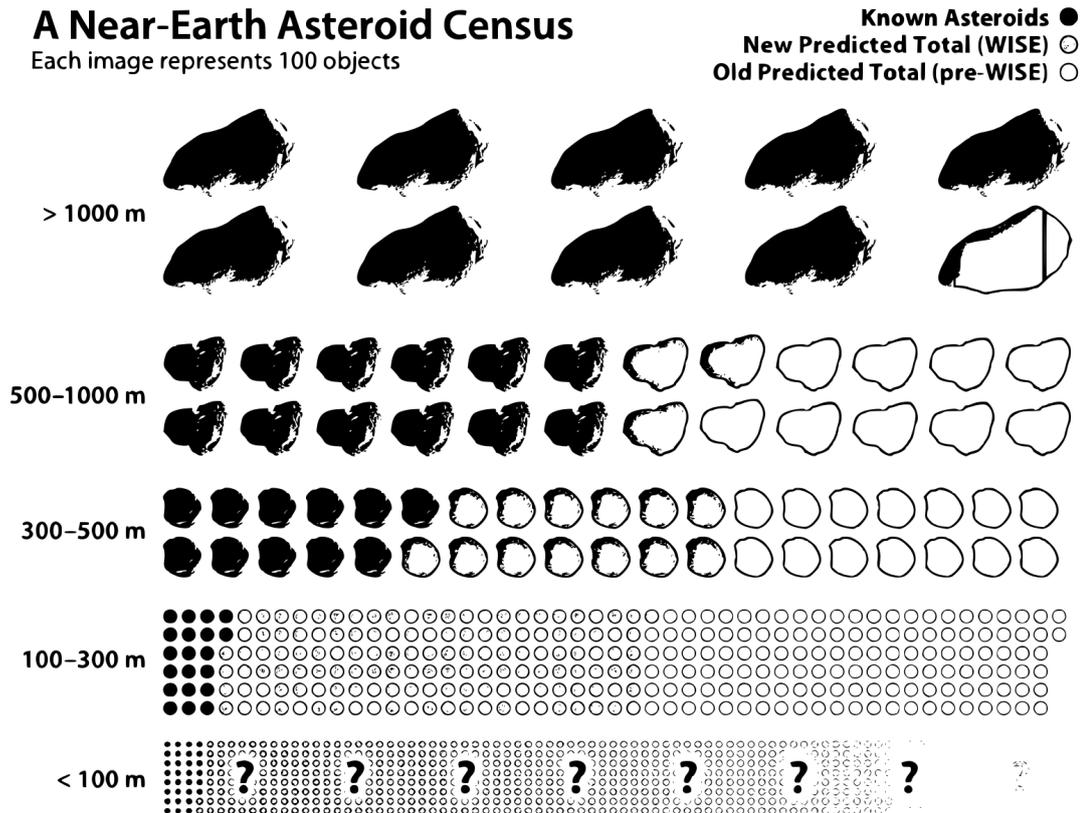


Figura 2.1: Censimento degli asteroidi Near-Earth

La composizione fisico-chimica di questi asteroidi presentano una grande diversità: silicati, carbonati, composti basaltici e metalli. Le diverse composizioni derivano dalla loro formazione e aggregazione con altri oggetti, essa rende gli asteroidi dei testimoni diretti di collisioni, fissioni e cambiamenti di tutto il sistema solare. La densità, le distribuzioni e le caratteristiche meccaniche risultano alquanto variegate: la struttura interna di un asteroide e la sua superficie sono dunque una fonte inesauribile di informazioni sulla formazione e sull'evoluzione del sistema solare, dalla condensazione della nebulosa solare alle varie collisioni che hanno poi portato alla configurazione attuale di tutti i corpi celesti. Gli asteroidi NEA, oltre che per il basso costo della missione, sono interessanti perché sono relativamente piccoli. È stato dimostrato che essi si comportano in maniera diversa dalla controparte più massiccia che si trova nella cintura di asteroidi. In particolare presentano composizione, proprietà rotazionali e di aggregazione molto diversi e di estremo interesse: durante la formazione del sistema solare, le polveri di dimensioni micrometriche si sono aggregate in modo da formare aggregati con dimensioni del centimetro, una volta che questi aggregati raggiungono la dimensione del chilometro, le forze gravitazionali sono abbastanza forti da creare un proto-pianeta; tuttavia, nell'evoluzione, non sono chiare le fasi intermedie, per via della *barriera del metro*. Quando la dimensione dell'aggregato raggiunge il metro l'accrescimento diventa molto difficile, perché l'energia che tiene assieme i componenti dell'aggregato non è molto forte, mentre la loro velocità relativa (che genera una forza centrifuga) va a salire: né le gravità né le forze viscoso possono spiegare il passaggio dal centimetro al chilometro.

La vita stimata di un NEA è di soli pochi milioni di anni, solitamente vengono eliminati per via dei decadimenti orbitali verso il Sole, collisioni con pianeti interni oppure per espulsione dal sistema solare a seguito di un effetto fionda con un pianeta abbastanza grande. La vita così breve indica che non sono

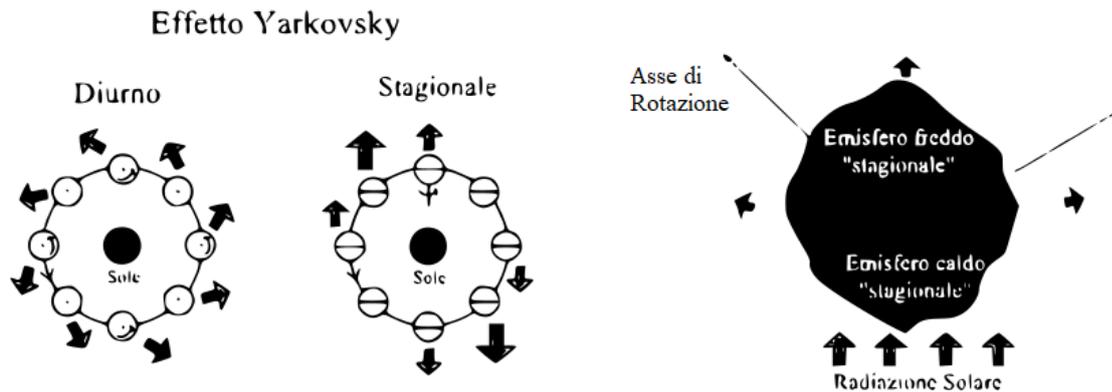


Figura 2.2: Effetto Yarkovsky

stati formati nelle loro attuali orbite con il resto del sistema solare, ma provengono da altri punti. Molti asteroidi vengono inseriti nelle loro attuali orbite vicine a quella terrestre dagli effetti gravitazionali che Giove ha sulla cintura di asteroidi tra Marte e Giove stesso. La cintura presenta infatti alcuni cali di densità della distribuzione di asteroidi sulla direzione radiale (le lacune di Kirkwood, figura 2.3), perché le orbite circolari di quelle dimensioni vanno in risonanza orbitale con il Gigante Gassoso. La risonanza porta a perturbazioni sull'orbita di questi oggetti che possono ricadere verso l'orbita terrestre. Tuttavia non è la sola interazione che contribuisce alla "migrazione": un altro importante fenomeno è l'effetto Yarkovsky, ovvero la perturbazione orbitale indotta dalla radiazione solare assorbita e riemessa dall'oggetto in questione: nel momento in cui gli asteroidi assorbono energia, essi la irradiano nello spazio secondo la legge di Stefan-Boltzmann, per cui essi emetteranno di più dalle zone più calde dell'asteroide (che, se l'asteroide è rotante sono le zone che si trovano al "pomeriggio") e meno dalle zone più fredde (nelle zone del "mattino"), generando sul corpo una pressione di radiazione risultante in direzione non radiale. L'effetto Yarkovsky può essere diurno o stagionale (figura. 2.2) e, seppur generi una forza molto piccola, può giocare sul semiasse maggiore e sugli altri parametri orbitali. Nel corso degli anni la perturbazione può portare a deviazioni di decine o centinaia di chilometri, tuttavia in milioni di anni essa riesce a trasferire gli asteroidi della cintura tra Marte e Giove in orbite pericolosamente vicine alla Terra.

Lo studio degli asteroidi Near Earth è dunque molto importante per scopi scientifici e per scopi di difesa. Seppur la loro vita è limitata, essi provengono dalla fascia degli asteroidi, formata con il sistema solare stesso, per cui campioni e studi su di essi potrebbero permettere una comprensione più accurata delle origini di tutto il sistema solare e della sua evoluzione nei primi stadi, che includono la formazione del pianeta Terra stesso. Inoltre, essendo molti di essi abbastanza pericolosi per la Terra, è necessario monitorare costantemente la posizione attuale e futura dei NEO più grandi e minacciosi, in modo da prevenire i possibili danni da impatto o sviluppare dei modi di effettuare *collision avoidance*. In quest'ultimo caso è molto importante conoscere la composizione dell'oggetto in quanto un asteroide monolitico, ad esempio, sarebbe molto più difficile da deviare rispetto ad uno composto da un agglomerato di detriti della stessa dimensione. Una missione esemplare di difesa da asteroidi è la *Double Asteroid Redirection Test* (DART) [14].

2.2 Flyby multipli di asteroidi

L'uso di veicoli spaziali per lo studio delle proprietà fisiche degli asteroidi è molto interessante dal punto di vista scientifico, come ampiamente discusso nella sezione precedente. La missione più semplice a tal

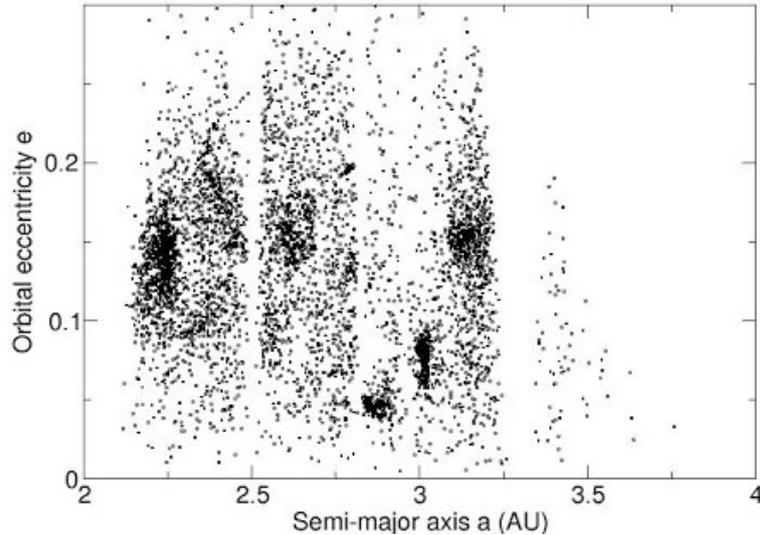


Figura 2.3: Lacune di Kirkwood

scopo consiste nel mandare un veicolo in orbita nella cintura degli asteroidi e misurare gli effetti di quell'ambiente in microgravità, studiando man mano tutti i corpi che si incontrano. Una missione di questo tipo ha il vantaggio di non richiedere un oggetto target a cui arrivare, tuttavia si otterrebbero informazioni solo sui corpi più popolosi in quella determinata zona celeste. Sfortunatamente gli asteroidi più grandi non sono tanto comuni nella cintura, per cui non sono facilmente analizzabili.

Per studiare le proprietà degli asteroidi grandi, è necessario trovare un modo per studiarne diversi, preferibilmente con gli stessi equipaggiamenti e nella stessa missione. A questo impiego, missioni con flyby multipli risultano particolarmente convenienti, ma necessitano di informazioni orbitali molto accurate per permettere di predeterminare il luogo e il tempo di incontro.

Le missioni che prevedono flyby multipli di asteroidi, utilizzano la propulsione a bordo per portare il veicolo da una traiettoria nominale ad un'orbita di trasferimento verso il corpo preselezionato. Esistono sostanzialmente tre categorie di missioni:

- missioni verso asteroidi selezionati in base ai loro parametri orbitali in modo che richiedano basso ΔV (missione in esame, figura 2.4);
- missioni che richiedono il flyby di un asteroide in particolare e che possono effettuare altri flyby successivi o precedenti senza eccessivi costi aggiuntivi (Proposta simile a quella dei rendezvous di NEST [16]);
- missioni verso i pianeti principali del sistema solare in cui si dà la possibilità di passare in prossimità di uno o più asteroidi (New Horizons [15]).

2.3 Proposta NEST

Il *Near-Earth Space Trekker* (NEST, [16]) è una proposta di missione ESA di classe F, ovvero una missione *Fast* e non troppo costosa. Le missioni di classe F devono avere una massa di lancio minore di 1000kg e devono poter condividere il lancio con altre missioni di classe media.

Gli obiettivi di NEST sono di esplorare lo spazio nei dintorni dell'orbita terrestre e incontrare, tramite rendezvous, diversi (2-3) asteroidi near-earth di dimensione ridotta. NEST condividerà il lancio e l'inserimento al punto lagrangiano L2 con la missione ARIEL. Il lanciatore è un Ariane 6, ancora in fase di sviluppo, capace di portare dalle 3 alle 7 tonnellate in orbita terrestre alta, per cui, contando che la massa

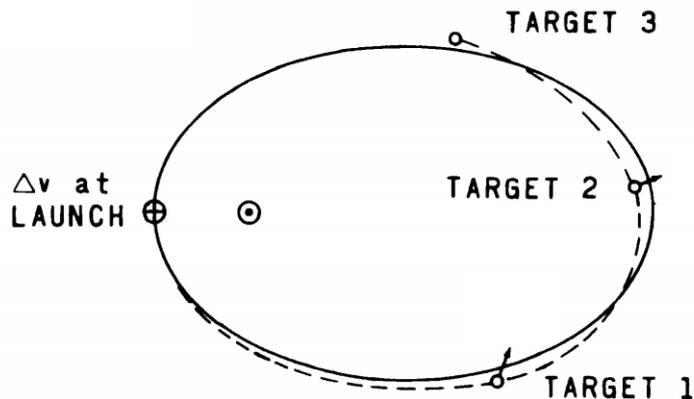


Figura 2.4: Flyby multipli di asteroidi near-earth

del veicolo ARIEL si aggira attorno ai 1300kg, è possibile includere anche la missione NEST nel carico pagante senza eccessivi problemi. Dopo che il vettore ha posto il veicolo spaziale nel punto di Langrange L2, esso inizierà il suo viaggio nello spazio near-earth immettendosi in una traiettoria eliocentrica con l'uso di meno di 2 chilogrammi di combustibile. L'immissione nello spazio eliocentrico è pensata per l'inizio del 2028 ma non viene modellata, infatti si suppone che il veicolo parta già dall'orbita terrestre, al di fuori della sfera d'influenza del pianeta e con velocità relativa ad esso nulla. Uno dei requisiti è di riuscire a effettuare il rendezvous con almeno due oggetti Near-Earth in meno di cinque anni e con un consumo minore di 400kg di propellente. Uno di questi oggetti deve essere l'asteroide PHO Apophis, che si avvicinerà pericolosamente alla terra nell'aprile del 2029. Visto che due soluzioni sono già state sviluppate, prevedendo due rendezvous con un consumo di 188 e 118 chilogrammi rispettivamente per la missione più costosa e meno costosa, nel lavoro di tesi verrà analizzata una variante della missione che utilizza comunque sempre lo stesso veicolo. Verranno quindi considerate le stesse caratteristiche propulsive e di massa.

Nella variante, non si effettueranno rendezvous multipli ma flyby multipli, con il requisito di effettuare almeno quattro flyby nel tempo massimo di 3 anni e un consumo di propellente di meno di 22kg. Nel caso dei flyby è necessario imporre un vincolo aggiuntivo: quello sulla velocità relativa. Un flyby con velocità relativa molto grande è poco utile dal punto di vista scientifico, in quanto non vi è il tempo per effettuare le osservazioni e le analisi che ci si è preposti con un'accuratezza adeguata, tuttavia può risultare interessante per missioni di collision avoidance: più la velocità relativa è alta, più grande è il cambiamento dei parametri orbitali dell'asteroide dopo l'ipotetico impatto con il veicolo. Sul limite di velocità relativa imposto si parlerà in dettaglio nel capitolo 9.

NEST si propone di effettuare delle misurazioni radar per investigare la struttura interna degli asteroidi, tale tipo di misura non è mai stata effettuata *in-situ* su un asteroide. Infatti, anche se sono state effettuate diverse missioni spaziali verso alcuni NEA, esse hanno ricavato informazioni soltanto sulla superficie esterna dell'asteroide, mentre la struttura interna ad oggi rimane per lo più sconosciuta: si stima che i corpi di dimensione media abbiano una struttura di aggregato, tuttavia non si conosce quale sia la dimensione dei blocchi costituenti, la loro varietà e soprattutto il loro comportamento in un ambiente a così bassa gravità; gli asteroidi di piccola taglia sembrano essere monolitici, ma non si conosce il processo di accrescimento e la metamorfosi subita dal corpo.

La tecnologia radar è sicuramente quella più matura per caratterizzare l'interno degli asteroidi. In particolare verranno impiegati due tipi di radar:

- HFR (monostatic high frequency radar) per gli asteroidi di piccola taglia, in quanto questa tecnica permette una mappatura completa della variazione della permittività dielettrica dell'asteroide,

che dunque sarà l'indice di variazione di composizione e densità del materiale. Negli asteroidi più grandi, questa tecnica permette solo di indagare lo strato più superficiale dell'asteroide con una risoluzione accettabile.

- LFR (bistatic lower frequency radar) per indagare le profondità degli asteroidi più grandi, ricavando la struttura dell'aggregato, le sue dimensioni ed eterogeneità.

E le misurazioni avverranno da una sonda madre e quattro sonde figlie, che si staccheranno dalla piattaforma principale posizionandosi in punti strategici intorno all'asteroide tramite propulsione a gas freddi. Effettuare uno studio di questo tipo porta un valore aggiuntivo a tutta l'economia spaziale: si potrà confermare il potenziale di questi oggetti per lo *space mining*, ovvero lo sfruttamento delle risorse minerali presenti su di essi.

Altre misurazioni verranno fatte da piccole piattaforme composte da strumenti e sensori miniaturizzati, al fine di ricavare le proprietà superficiali del corpo celeste.

Nel caso di un flyby, il tempo di incontro è limitato, la velocità relativa è elevata e la distanza minima potrebbe essere relativamente grande. Queste caratteristiche non risultano compatibili con le misurazioni radar, che richiedono tempo e una distanza relativa con l'oggetto controllata, per cui si dovrebbe puntare su altre tipologie di rilevamento durante la missione. Immagini nel visibile, nell'infrarosso o nell'ultravioletto, nonché immagini multispettrali e iperspettrali sono già state ottenute durante altri flyby, per cui potrebbero utilizzarsi strumenti ottici invece che radar.

Il veicolo sarà inoltre equipaggiato da strumenti ottici e nel vicino infrarosso, nonché camere ottimizzate per la ricerca di nuovi asteroidi, in particolare quelli co-orbitanti con la Terra nei suoi punti lagrangiani (asteroidi Troiani), in quanto, ad oggi, non ne sono stati ancora individuati per via della difficoltà di osservazione da Terra. NEST sarà in grado di identificare oggetti più piccoli di 50 metri ad una distanza di 0.05 unità astronomiche. Ciò permetterà di trovare nuovi target per future missioni a basso ΔV e testare modelli e teorie sulle origini del sistema solare interno.

La proposta NEST prevede che le *proximity operations* durino per qualche mese, tuttavia, nel caso di flyby, il tempo in cui il veicolo si troverà effettivamente in prossimità dell'asteroide si ridurrà a solo qualche ora.

Le domande a cui NEST si propone di dare risposta sono le seguenti:

1. Quali sono le condizioni del disco protoplanetario e quali sono i meccanismi che determinano la formazione di un pianeta roccioso?
2. Qual è la struttura interna e le proprietà delle superfici degli asteroidi in base alla loro dimensione? come la formazione e l'evoluzione di questi oggetti si riflette su di essa?
3. Qual è la natura dei PHO?

2.4 Caratteristiche della missione

Come si è accennato, la proposta NEST prevede che il veicolo entrerà nel primo arco eliocentrico agli inizi del 2028 con una *wet mass* di 850kg e una durata massima della missione di 3 anni. Tra le soluzioni trovate verranno tuttavia riportate anche alcune traiettorie con partenza nella seconda metà del 2027 ai fini di non escludere alcuni asteroidi che potrebbero essere intercettati agli inizi del 2028.

La proposta NEST prevede un veicolo madre che porta con se quattro veicoli figli per scandagliare completamente gli asteroidi da punti strategici. Nel caso di flyby il loro impiego non è previsto, tuttavia si considera ugualmente una massa iniziale ugualmente di 850kg.

La propulsione impiegata è elettrica, in particolare, per una missione molto breve e con ΔV basso, è stato selezionato un propulsore a ioni (*gridded ion thruster*) con impulso specifico di 3900 secondi, una spinta massima di 125mN e una potenza massima di circa 4kW con un'efficienza η pari al 62.5%. L'impulso specifico viene considerato costante, mentre la spinta varia con la portata, che si riscalda con la potenza. La spinta ha un duty cycle nominale del 90%, solo 15 giorni prima di un incontro esso viene ridotto al 70% per contare i periodi *no-thrust*, durante i quali si performano le operazioni di guida e navigazione, nonché altre operazioni pre-flyby. Il tempo di permanenza vicino ad un asteroide viene trascurato perché

Specifiche di missione		Prestazioni	
Partenza	fine 2027	I_{sp}	3900s
Massa	850kg	Spinta max	125mN
No. flyby	4	Potenza max	3.9kW
ΔV_{max}	1.00km/s	η	0.625
$V_{rel,max}$	$\simeq 10km/s$	Portata	3.21mg/s
Loc. partenza	Terra	Duty cycle	70%-90%
V_{∞}	0km/s	Propellente disp.	250kg
Permanenza	0 giorni	Durata	3 anni

Tabella 2.1: Tabella riassuntiva della missione

solo di poche ore.

I valori presentati sono in linea con quelli proposti nella soluzione di riferimento di NEST.

Il punto di partenza della missione è fuori dalla sfera d'influenza terrestre, sull'orbita terrestre in anticipo rispetto al pianeta. La velocità relativa con esso (e quindi l'eccesso iperbolico di velocità che si da al veicolo) è nulla.

3

Richiami di meccanica orbitale

Il questo capitolo si farà una breve panoramica della fenomenologia della meccanica celeste, si partirà dalle leggi di Keplero e dalla legge di gravitazione universale fino a descrivere le manovre orbitali e quelle interplanetarie utili per la comprensione delle tecniche utilizzate in questa tesi.

3.1 Generalità sulla meccanica orbitale

3.1.1 Leggi di Keplero

Legge di Keplero 1. *L'orbita di ogni pianeta è un'ellisse con il Sole ad uno dei fuochi e l'altro fuoco libero.*

Legge di Keplero 2. *La linea che unisce i pianeti al Sole spazza aree uguali in tempi uguali in modo che la velocità areolare $\frac{dA}{dt}$ risulta costante. Più il raggio è grande più si va lenti.*

Legge di Keplero 3. *Il quadrato del periodo orbitale è proporzionale al cubo della distanza media dal Sole, la quale è funzione del semiasse maggiore dell'ellisse.*

3.1.2 Legge di gravitazione universale

La legge di gravitazione universale si deve a Newton, essa afferma che due corpi si attraggono con una forza proporzionale al prodotto delle loro masse e all'inverso della distanza al quadrato. In formule:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Dove $G = 6.670 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ è la costante di gravitazione universale. Essa è la legge che concilia la meccanica terrestre alla meccanica celeste, infatti, unendo tale legge con la seconda legge di Newton si ottiene l'equazione del moto del problema degli N corpi. Si ricorda la seconda legge di Newton:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

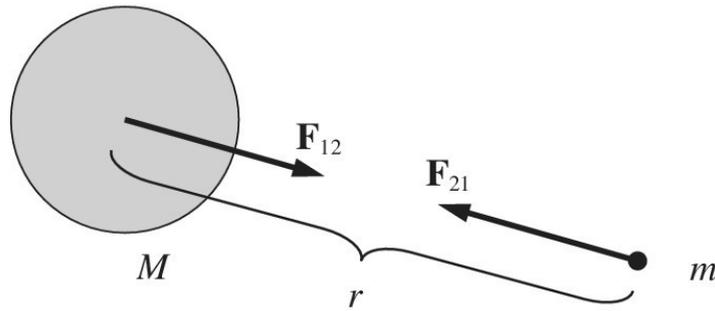


Figura 3.1: Convenzione della legge di gravitazione universale

3.1.3 Problema degli N-corpi

Il problema degli N-corpi è il problema di un veicolo spaziale che viaggia nello spazio e ad ogni istante è assoggettato a N diverse forze gravitazionali da parte di N corpi diversi dotate di diverse masse gravitazionali (fig. 3.2). Il corpo può essere soggetto anche ad altri campi e forze, che vengono trascurate nella

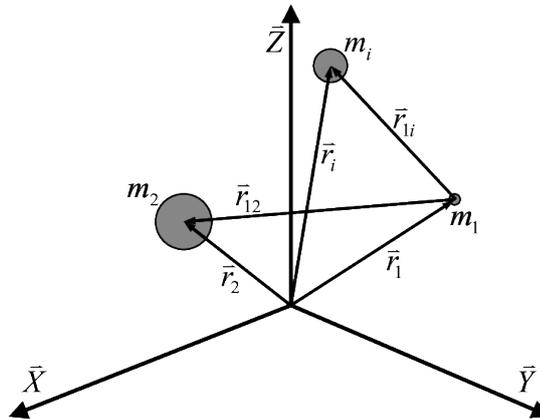


Figura 3.2: Problema degli N-corpi

trattazione. Si considera un'insieme di N masse (m_1, m_2, \dots, m_N) in uno spazio euclideo, in cui il corpo in oggetto è uno dei tanti presenti. Si fanno le seguenti ipotesi:

1. Si ha simmetria sferica di geometria e di massa dei corpi
2. Le masse sono costanti nel tempo
3. La forza di gravità è l'unica forza agente

Si possono considerare masse puntiformi e invarianti. In un sistema di riferimento inerziale, si può scrivere che la forza che il corpo n imprime sul corpo i è:

$$\vec{F}_{in} = -G \frac{m_n m_i}{r_{ni}^3} \vec{r}_{ni}$$

con $n \neq i$ e $\vec{r}_{ni} = \vec{r}_i - \vec{r}_n$. In termini di risultante:

$$\vec{F}_i = - \sum_n G \frac{m_n m_i}{r_{ni}^3} \vec{r}_{ni}$$

Sempre per $n \neq i$. Unendola alla legge di Newton ed esplicitando le distanze relative, si trova la seguente formulazione:

$$\ddot{\vec{r}}_{ij} = -G \frac{(m_i + m_j)}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} - \sum_{n \neq i, m \neq j} G m_n \left(\frac{\vec{r}_{nj}}{r_{nj}^3} - \frac{\vec{r}_{ni}}{r_{ni}^3} \right)$$

Dove il primo termine rappresenta la forza tra due corpi e l'altro i disturbi gravitazionali degli altri corpi. Si possono scrivere $n - 1$ equazioni differenziali vettoriali di questo tipo. Esse sono tutte del secondo ordine e tutte accoppiate tra di loro. Non sono risolvibili analiticamente per cui l'unica via è quella numerica.

3.1.4 Problema dei due corpi

Il problema degli N corpi è facilmente semplificabile a un sistema composto da soli due corpi, questo è il caso in cui due corpi siano molto più vicini tra di loro che con il resto dei corpi presenti nell'universo. Il risultato è la stessa equazione del problema degli N corpi dove scompare il termine in sommatoria.

$$\ddot{\vec{r}}_{ij} = -G \frac{(m_i + m_j)}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

Nel caso in cui venga imposta la quarta ipotesi di un corpo molto più piccolo dell'altro si parla di *problema dei due corpi ristretto*. L'interazione del corpo piccolo su quello grande è irrilevante e può essere trascurata. Un sistema di riferimento centrato nel corpo più grande è inerziale e la distanza relativa diventa distanza assoluta. L'equazione differenziale diventa:

$$\ddot{\vec{r}} = G \frac{M + m}{r^3} \vec{r}$$

Con $M \gg m$ si ottiene

$$\ddot{\vec{r}} = G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

Dove si può definire una costante gravitazionale del corpo maggiore $\mu = GM$. Per i flyby in campo eliocentrico $\mu = 132500 \times 10^6 km^3/s^2$

3.1.5 Invarianti del moto

Il campo gravitazionale è conservativo e radiale, per cui l'energia meccanica si conserva ed è definibile un'energia potenziale. Inoltre, la radialità porta alla conservazione del momento angolare del sistema isolato.

Conservazione dell'energia meccanica

Moltiplicando scalarmente l'equazione del moto per la velocità \vec{r} si sta moltiplicando una forza per unità di massa per una velocità, per cui si ottiene una potenza specifica.

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{r} = 0$$

Da cui si trova che:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

Se la derivata è nulla, allora ciò che sta dentro deve essere costante nel tempo. Il termine è proprio l'energia meccanica specifica. La costante di integrazione dell'energia potenziale viene presa nulla a raggio infinito, per cui è nulla.

Conservazione del momento angolare

In analogia con la conservazione dell'energia meccanica, si moltiplica vettorialmente l'equazione del moto con il raggio \vec{r} , in modo da ottenere una coppia per unità di massa sul sistema.

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} + \vec{r} \wedge \mu \frac{\vec{r}}{r^2} = 0$$

Sapendo che il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è nullo, e sfruttando la regola della derivazione del prodotto vettoriale si ottiene che:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = 0$$

Il termine in parentesi è il momento angolare, se la sua derivata è nulla significa che esso si conserva nel tempo.

È importante notare che il momento angolare è una quantità vettoriale e come tale si conserva in modulo, direzione e verso. Sapendo che il momento angolare è sempre perpendicolare al piano del moto, il suo essere costante porta alle orbite a stare su un piano, detto appunto piano orbitale.

3.1.6 Equazione della traiettoria e delle coniche

Una soluzione parziale che da informazioni sulla forma dell'orbita è semplice da ottenere, mentre ricavare la soluzione con dipendenza temporale esplicita è molto complesso per via della doppia integrazione. Moltiplicando vettorialmente l'equazione del moto per il momento angolare, si giunge, con semplici passaggi all'equazione:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Integrando compare una costante integrativa vettoriale \vec{B} , ricavando il raggio in modulo si ottiene la forma:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu} \cos \nu}$$

Dove è stato definito l'angolo ν tra \vec{B} e il raggio. Deve essere $\frac{B}{\mu} < 1$ per motivi di esistenza della soluzione. È possibile notare che quando ν è nullo si è al raggio minimo, mentre quando è pari a π si è al raggio massimo.

Tale risultato ha la stessa identica forma dell'equazione polare della sezione conica, del tipo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

Dove p è il semilatus rectum, e l'eccentricità dell'orbita, mentre ν è l'anomalia vera.

Ciò è una prova non rigorosa che la prima legge di Keplero sia effettivamente vera, tuttavia l'ellissi non è l'unica orbita possibile in quanto non è l'unica sezione di cono ammissibile.

Definizione 1. *Una conica è il luogo dei punti che sta sul piano in modo che la distanza da un certo punto (detto fuoco) e la distanza da una certa retta (detta direttrice) stanno in rapporto costante e pari a e eccentricità della conica.*

In tale definizione ricadono le ellissi, le iperboli, le parabole e le circonferenze. Due coniche sono chiuse e due sono aperte, ciò che discrimina la forma dell'orbita sono i valori di energia e momento angolare (che insieme determinano l'eccentricità).

3.1.7 Tipi di orbite e loro proprietà

Tutte le orbite hanno una certa simmetria e due fuochi. Per l'ellisse e l'iperbole i fuochi sono ben identificabili, per la circonferenza i due fuochi sono coincidenti nel centro e per la parabola uno dei fuochi (quello fisicamente vacante) si trova all'infinito. La parabola rappresenta un limite tra orbite chiuse e aperte ed è l'orbita ad energia minima per sfuggire dall'influenza gravitazionale di un corpo. In un'orbita sono definibili delle grandezze geometriche fondamentali:

- Semilatus rectum p : semiapertura della conica in corrispondenza al fuoco;
- Semiasse maggiore a : semidistanza tra gli apsi (apoastro e periastro);
- Semidistanza focale c : semidistanza tra i due fuochi.
- Semiasse minore b : semidistanza tra gli anti-apsidi

Grandezze legate tra di loro da alcune utili relazioni:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}; \quad E = -\frac{\mu}{2a}; \quad h = \sqrt{\mu p}$$

$$a^2 = c^2 + b^2; \quad p = a(1 - e^2)$$

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e); \quad r_{max} = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e)$$

Orbita ellittica

L'orbita di tutti i pianeti del sistema solare è ellittica, è una curva chiusa e a periodo costante. Essa è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$r + r' = 2a$$

La somma dei raggi di ogni punto dai due fuochi resta costante. Inoltre, i raggi degli apsi sono così collegati:

$$r_a - r_p = 2c$$

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Il periodo dell'orbita ellittica è

$$T_p = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

Orbita circolare

Il cerchio è un caso degenere dell'ellisse in cui i due fuochi coincidono e l'eccentricità è nulla. Le relazioni dell'ellisse valgono esattamente anche con il cerchio, con la differenza che il raggio qui è costante e pari al semiasse maggiore dell'orbita. La velocità circolare dell'orbita circolare è calcolabile come:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}}$$

Orbita parabolica

L'orbita parabolica è caratterizzata da uno dei due fuochi all'infinito ed eccentricità pari a 1. È un'orbita molto rara da trovare in natura in quanto è un caso limite. È un'orbita aperta e ha:

$$p = 2r_p$$

con r_p raggio del periastro. La parabola è caratterizzata dalla velocità di fuga, ovvero la velocità minima che un corpo deve avere ad un determinato raggio per uscire dalla sfera di influenza del corpo centrale e non risentire più della sua gravità. Quando il raggio tende all'infinito, la velocità tende a zero, per cui l'energia complessiva dell'orbita parabolica è nulla.

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

Orbita iperbolica

Le orbite iperboliche sono caratterizzate da energia positiva, ovvero quando si arriva all'infinito si ha ancora una velocità diversa da zero, detta appunto velocità di eccesso iperbolico. Tale orbita presenta due asintoti e due rami, di cui solo uno fisico. Il semiasse maggiore, la distanza tra i fuochi e il semiasse minore sono negativi e assumono significati leggermente diversi: Il semiasse maggiore è la distanza tra i due periastri (quello reale e quello immaginario) e la semidistanza focale è la distanza tra i due fuochi in negativo. Si ha che:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

In questo caso l'eccentricità è maggiore di 1 e determina l'inclinazione degli asintoti tramite la formula:

$$\frac{1}{e^2} = \cos^2 \phi$$

3.1.8 Posizione e velocità in funzione del tempo

Le equazioni temporali della meccanica orbitale sono ottenibili per via analitica utilizzando solo la dinamica e l'integrazione numerica. Per la conservazione del momento angolare è possibile scrivere:

$$\dot{\nu} = \frac{h}{r^2}$$

Sapendo che la velocità areolare è costante, per una circonferenza si trova che:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{R}{2} \dot{\nu} = \frac{h}{2}$$

Per un'ellisse il discorso è analogo, per cui:

$$T_p = 2 \frac{A_{ellisse}}{h}$$

Da cui, conoscendo l'espressione dell'area dell'ellisse si può ricavare nuovamente la formula del periodo. Il tempo per percorrere una certa distanza in un'orbita da un punto iniziale qualsiasi a uno finale qualsiasi si calcola per sottrazione tra il tempo per arrivare al punto finale dal periastro e il tempo per arrivare al punto iniziale sempre dal periastro, in particolare come $t_{12} = t_2 - t_1 = (t_2 - t_p) - (t_1 - t_p)$.

Si sa, da quanto scritto prima che:

$$t_i = \frac{A_i}{A_{tot}} T_p$$

Il problema di risoluzione consiste nel determinare A_i in funzione dell'anomalia vera.

Per ovviare a questo problema si costruisce un cerchio ausiliario come in figura 3.3. L'angolo indicato con E è l'anomalia eccentrica, ovvero l'angolo tra il raggio vettore del punto sul cerchio e la linea degli apsi.

Prima di procedere è necessario notare la relazione tra il cerchio e l'ellisse: Da cui si ricava la semplice

	Ellisse	Cerchio
Equazione	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Ordinata	$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$	$y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Tabella 3.1: Relazione ellisse - cerchio ausiliario

relazione $y_{ellisse} = \frac{b}{a} y_{cerchio}$.

L'area sottesa dall'anomalia vera può essere divisa in due aree: un arco di ellisse e un triangolo. L'area del triangolo è intuitivamente:

$$A_t = \frac{ab}{2} (e - \sin E - \sin E \cos E)$$

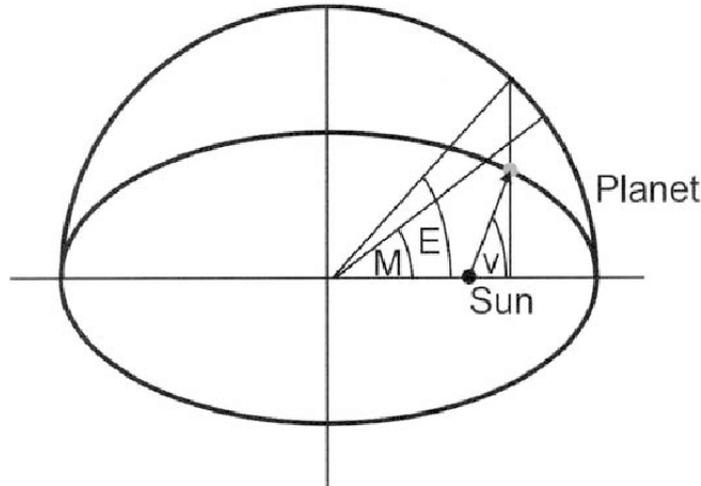


Figura 3.3: Cerchio ausiliario e anomalia eccentrica

L'area sottesa all'ellisse si trova scrivendo l'area sottesa al cerchio e riscalandolo secondo la relazione trovata:

$$A_{cerchio} = \frac{a^2}{2}(E - \cos E \sin E) \Rightarrow A_{ellisse} = \frac{ab}{2}(E - \cos E \sin E)$$

Per cui, sostituendo tutto si trova che:

$$t_i = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E_i - e \sin E_i)$$

Dove $M = (E_i - e \sin E_i)$ è l'anomalia media del satellite.

Il tempo tra un punto iniziale e finale è scrivibile come:

$$t_{21} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E_2 - e \sin E_2 - E_1 + e \sin E_1)$$

Il passo finale consiste nel relazionare l'anomalia eccentrica all'anomalia vera. sapendo che la proiezione del raggio sulla linea degli apsidi più la semidistanza focale è pari al semiasse maggiore per il coseno dell'anomalia eccentrica si trova che:

$$\cos E = \frac{ae + r \cos \nu}{a}$$

Conoscendo l'equazione del raggio e sostituendola nell'equazione si ottiene:

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}$$

Le relazioni scritte sopra mettono in relazione delle funzioni trigonometriche, per cui, risolvendo, il dominio degli angoli sarà limitato al primo e al secondo quadrante del piano cartesiano. Tuttavia, è possibile dimostrare analiticamente che se l'anomalia eccentrica è maggiore di π , allora lo sarà anche l'anomalia vera e viceversa.

Tutto il discorso fatto per l'ellisse è generalizzabile anche per circonferenze (anomalia vera ed eccentrica coincidono) e per le traiettorie aperte, per le quali vengono definiti altri parametri più complessi. Tali generalizzazioni non verranno trattate perché non utili al fine della tesi.

3.2 Sistemi di coordinate e misure del tempo

3.2.1 Sistemi di coordinate

Per studiare la dinamica celeste è necessario trovare un sistema di riferimento che conviene. I vari sistemi che si presentano in questa sezione sono tutti, per un certo grado, non inerziali. Tuttavia in base al tipo di missione e in particolare alla durata della stessa, essi possono essere approssimati molto bene a sistemi di riferimento inerziali.

Per descrivere un sistema di riferimento è necessario stabilire:

- Un origine;
- L'orientamento del piano x-y;
- La direzione principale;
- Il verso della normale al piano x-y

Ovviamente la direzione di y viene scelta in modo da formare una terna destrorsa di assi ortonormali.

Sistema eliocentrico-eclittico

Come suggerisce il nome, esso è centrato nel centro di massa del Sole e il piano fondamentale è quello dell'eclittica, dove giace l'orbita terrestre. La direzione x è data dall'intersezione tra il piano equatoriale terrestre e l'eclittica (ovvero la linea degli equinozi). Nel primo giorno di primavera, il vettore che parte dalla Terra e punta il Sole individua direzione e verso dell'asse x. Tale direzione cambia di 50 arcosecondi l'anno per via della precessione degli equinozi, tuttavia questo cambiamento non viene preso in considerazione nei calcoli che seguiranno in quanto la durata delle missioni considerate variano da 2 a 3 anni, tempi troppo piccoli per risentire di questo movimento. Il verso dell'asse normale z è quello del momento angolare del moto di rivoluzione della terra intorno al Sole. Una chiara rappresentazione di tale sistema di riferimento è rappresentato in figura 3.4.

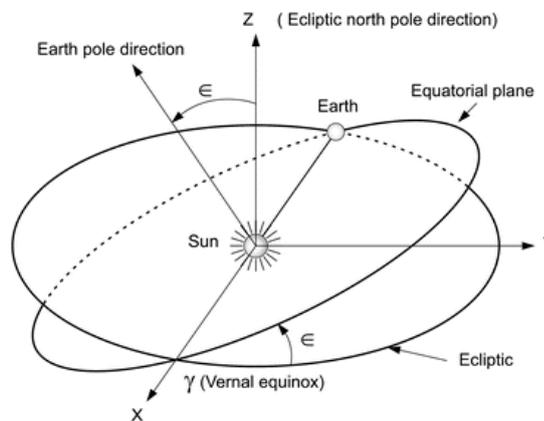


Figura 3.4: Sistema eliocentrico-eclittico

Sistema geocentrico-equatoriale

Esso ha come origine il centro di massa terrestre, il piano fondamentale è quello equatoriale e l'asse x punta l'equinozio di primavera. L'asse z punta nella direzione del polo nord. Si noti che il sistema è solidale con il centro di massa della Terra ma non ruota solidalmente con essa, gli assi hanno direzione fissa e parallela agli assi del sistema eliocentrico-eclittico. Una rappresentazione accurata si può vedere in figura 3.5, dove sono stati rappresentati anche gli angoli di ascensione retta e declinazione.

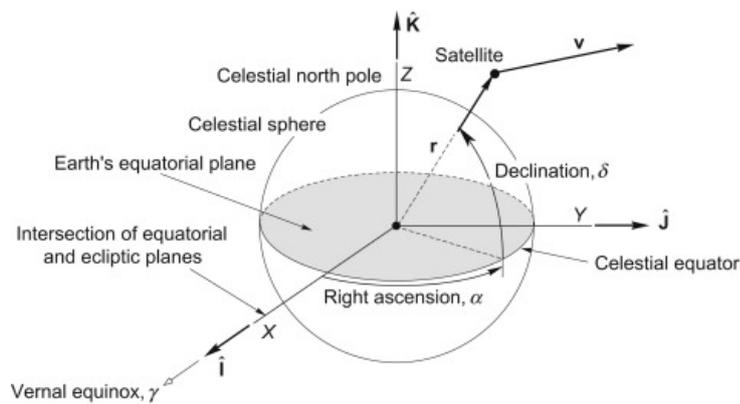


Figura 3.5: Sistema geocentrico-equatoriale

Sistema perifocale

Il sistema perifocale è uno dei sistemi più convenienti per descrivere il moto di un corpo che orbita un altro corpo più grande. In questo caso il piano fondamentale è quello dell'orbita del corpo (piano perifocale). L'asse x è rivolto nella direzione del periastro, mentre l'asse z è nella direzione del momento angolare del corpo stesso. Una rappresentazione bidimensionale del sistema perifocale si può vedere in figura 3.6.

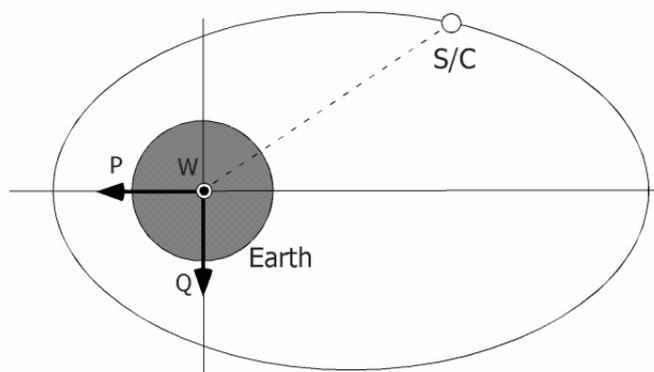


Figura 3.6: Sistema perifocale

3.2.2 Misure del tempo

In astrodinamica esistono sostanzialmente due misure temporali: il tempo solare e il tempo siderale. Il tempo solare è basato sul *giorno solare apparente*, ovvero il tempo per cui il Sole transita due volte sopra lo stesso meridiano. È detto *apparente* perché non è il tempo necessario a fare una rivoluzione completa, ma è leggermente maggiore per via del moto di rivoluzione attorno al Sole che sposta la congiungente terra Sole nello spazio. Il moto di rivoluzione è in media di poco meno di un grado al giorno, per cui, in un giorno solare l'angolo percorso è di circa 361 gradi. Il tempo siderale è basato sul giorno siderale, ovvero il tempo che la Terra impiega a percorrere un angolo giro. Le due misure sono riassunte in tabella 3.2. Su una rivoluzione è possibile distinguere due tipi di tempo: anno tropico e anno siderale. Come per i giorni, l'anno siderale si basa su una rotazione completa, l'anno tropico si basa sul tempo che intercorre

	Tempo siderale	Tempo solare
24 ore siderali	24h 00min 00s	23h 56min 04s
1giorno siderale	1.00000gg	0.99727gg
24 ore solari	24h 03min 56s	24h 00min 00s
1 giorno solare	1.00274gg	1.00000gg

Tabella 3.2: Tempo siderale e tempo solare

tra un equinozio di primavera e il successivo. Questo perché per via della precessione degli equinozi, ogni anno, si percorrono 50 arcosecondi in meno tra due equinozi di primavera, equivalenti a 18 minuti solari. I due anni sono riportati in tabella 3.3. Quest'ultima distinzione è l'origine dei calendari ad oggi esistenti:

Anno siderale	Anno tropico
365gg 06h 09min 10s	365gg 05h 48min 46s

Tabella 3.3: Anno siderale e anno tropico

calendario giuliano e calendario gregoriano. In particolare quest'ultimo è quello attuale in quanto tiene in considerazione le 5 ore e 48 minuti di scarto dai consueti 365 giorni dell'anno. Le distinzioni fondamentali tra questi vengono riportati in tabella 3.4. Un momento importante del sistema di riferimento temporale

	Calendario Giuliano	Calendario Gregoriano
Ciclo (anni)	4 anni	400 anni
Ciclo (giorni)	1461 giorni	146097 giorni
Scostamento dall'anno tropico	1 giorno / 128 anni	1 giorno / 3323 anni
Scostamento dall'anno tropico	0.0278gg/anno	0.003gg/anno

Tabella 3.4: Anno siderale e anno tropico

è il J2000, ovvero il mezzogiorno (UT) dell'1 gennaio del 2000. Esso è il 2451545° giorno del calendario giuliano ed è il momento in cui vengono definite le direzioni degli assi del sistema di riferimento ECI J2000. Inoltre solitamente il tempo astronomico parte dal J2000 e si misura in anni giuliani (giorni del calendario gregoriano). Per ridurre la dimensione del dato tempo, si introduce spesso il MJD (*Modified Julian Date*), ovvero la data in giorni giuliani diminuita di 2400000.

3.3 Trasformazione di coordinate

Alcuni calcoli sono più convenienti se effettuati in uno specifico sistema di riferimento, motivo per cui, molto spesso è necessario trasformare delle grandezze vettoriali da un sistema di coordinate ad un altro. Si immagini di voler ruotare una terna di versori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ di un angolo α lungo l'asse \vec{k} . I versori risultanti sono:

$$\begin{Bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

La matrice quadrata è la rappresentazione delle equazioni sulle direzioni dei vettori ruotati e viene detta matrice di rotazione. Analogamente alla rotazione lungo \vec{k} , si possono scrivere le matrici di rotazione per rotazioni sugli altri due assi:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad L_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici sono ortogonali, per cui la loro inversa è uguale alla loro trasposta. Se si vuole ruotare la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ nella terna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ basta trasporre le matrici sopra rappresentate.

Si noti che per rotazioni successive attorno ad assi diversi, le matrici si moltiplicano semplicemente sostituendo il vettore input di una rotazione con il vettore output della rotazione precedente. Ad esempio, per una sequenza di rotazioni attorno all'asse z, y e x rispettivamente, si ottiene;

$$\begin{Bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

I prodotti tra matrici, anche se associativi, non permettono la commutazione, per cui l'ordine in cui vengono effettuati è molto importante. Gli angoli ϕ , θ e ψ così scritti rappresentano gli angoli di Tait-Bryan, che rappresentano un cambiamento di coordinate ma che non hanno alcun senso fisico. Effettuando una rotazione prima su \vec{k} , poi su \vec{x} e poi nuovamente su \vec{z} si riesce a passare da un sistema di riferimento all'altro dove gli angoli, detti di Eulero, hanno senso fisico nel caso della meccanica orbitale. Seguendo la figura ??, la prima rotazione porta l'asse x del sistema eliocentrico eclittico sulla linea dei nodi, la seconda rotazione inclina il piano $x - y$ ottenuto dall'inclinazione del piano orbitale e la terza rotazione porta l'asse x a coincidere con la direzione del perieliio. In parole povere la prima rotazione è di un angolo pari alla longitudine del nodo ascendente Ω , la seconda è una rotazione pari all'inclinazione dell'orbita i e la terza è una rotazione pari all'argomento del periastro ω . In formule, svolgendo le moltiplicazioni matriciali:

$$\begin{Bmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos i - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

La matrice è molto importante e fondamentale per la determinazione dei punti caratteristici delle orbite degli asteroidi che si andranno ad analizzare.

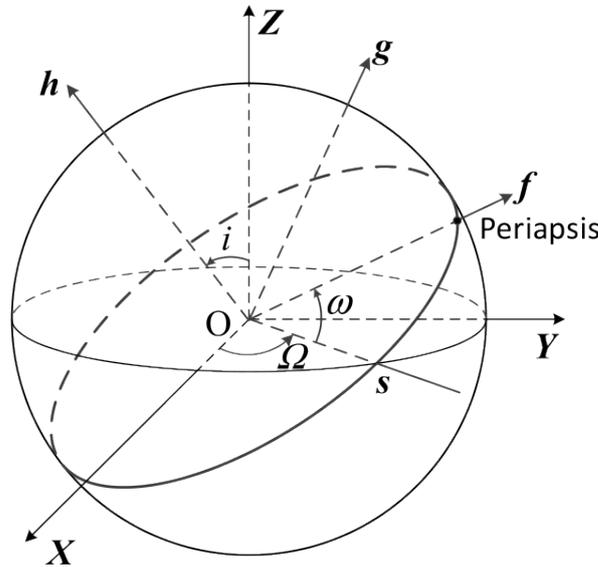


Figura 3.7: Rotazione 3-1-3 dal sistema eliocentrico-eclittico a quello perifocale

3.4 Parametri orbitali classici

Nella meccanica orbitale bastano cinque parametri indipendenti per descrivere un'orbita in termini di dimensione, forma e orientamento nello spazio euclideo. Un sesto parametro, l'unico variabile, è necessario per individuare la posizione esatta del corpo orbitante ad un dato tempo. I parametri orbitali classici sono rappresentati in figura 3.8. Essi sono:

- a semiasse maggiore;
- e eccentricità dell'orbita;
- i inclinazione dell'orbita;
- Ω longitudine del nodo ascendente;
- ω argomento del periastro;
- ν anomalia vera.

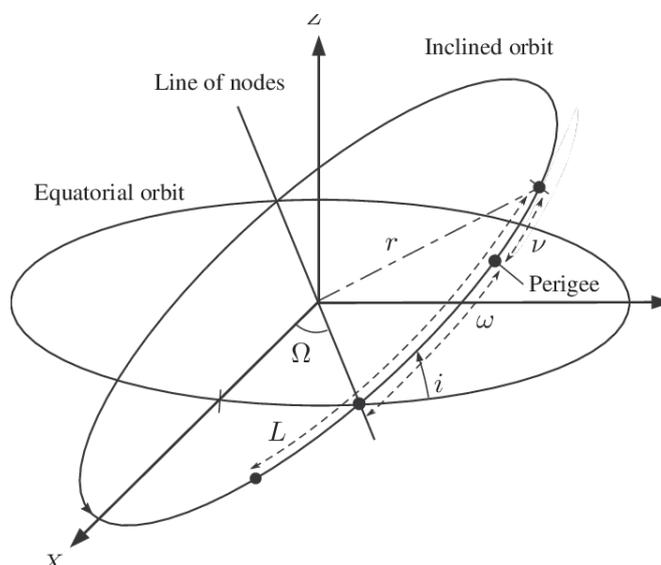


Figura 3.8: Parametri orbitali classici

Il semiasse maggiore determina la dimensione dell'orbita, l'eccentricità la sua forma, l'inclinazione l'angolo tra l'eclittica e il piano orbitale, la longitudine del nodo ascendente la distanza angolare tra la direzione dell'equinozio di primavera e la posizione del nodo ascendente (ovvero il punto in cui l'orbita buca il piano dell'eclittica salendo verso nord), l'argomento del periastro indica l'angolo compreso tra il nodo ascendente e la direzione del periastro e infine l'anomalia vera indica l'angolo tra la radiale che punta al satellite e la direzione del periastro.

Ovviamente non è l'unico modo di descrivere il moto di un satellite su un'orbita, ma ce ne sono altri. Una variante molto utilizzata in questa trattazione consiste nel sostituire l'anomalia vera con una variabile temporale: il tempo tra il passaggio al periastro e il punto considerato.

Non sempre i parametri orbitali classici sono convenienti, ci sono situazioni in cui uno o più parametri possono essere indeterminati:

- Se l'inclinazione è nulla ω e Ω non sono distinguibili, si considera solo la loro somma che viene detta *longitudine del periastro*.
- Se l'eccentricità è nulla ω e ν non sono distinguibili, si considera solo la loro somma che viene detta *argomento della latitudine*.
- Se sia l'eccentricità che l'inclinazione sono nulle ω , Ω e ν non sono distinguibili, si considera solo la loro somma che viene detta *longitudine vera*.

3.4.1 Determinazione dei parametri orbitali da \mathbf{r} e \mathbf{v}

Come già dimostrato nei paragrafi precedenti, l'energia e il momento angolare sono collegati univocamente rispettivamente a a e p , interconnesse a loro volta tra di loro dall'eccentricità.

Se si conosce solo la posizione e la velocità del corpo orbitante nello spazio, si può calcolare il vettore eccentricità tramite:

$$\frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{e}$$

Inoltre, da \vec{r} e \vec{v} si può ricavare sia il momento angolare sia l'energia dell'orbita, da cui si ricavano a e p . Per chiudere il problema della determinazione dei parametri orbitali, è necessario calcolare le grandezze angolari. Per far ciò si utilizzano i versori:

$$\Omega = \arccos\left(\frac{\vec{I} \cdot (\vec{K} \wedge \vec{h})}{|\vec{K} \wedge \vec{h}|}\right); \quad \omega = \arccos\left(\frac{(\vec{K} \wedge \vec{h}) \cdot \vec{P}}{|\vec{K} \wedge \vec{h}|}\right)$$

$$i = \arccos\left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{h}}{|\vec{h}|}\right) \quad \nu = \arccos\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \vec{P}\right)$$

Dove \vec{P} è la direzione del periastro (parallela al vettore eccentricità), mentre \vec{I}, \vec{J} e \vec{K} sono gli assi cartesiani del sistema di riferimento considerato. Ogni secondo membro è una funzione solo della posizione e della velocità, per cui non è necessario conoscere nient'altro.

3.4.2 Determinazione di \mathbf{r} e \mathbf{v} dai parametri orbitali

é il problema inverso del paragrafo precedente. Si assume di conoscere tutti e sei i parametri orbitali classici e si vuole calcolare la posizione e la velocità del corpo orbitante.

Nel sistema perifocale si sa che:

$$\vec{r} = r \cos \nu \vec{p} + r \sin \nu \vec{q}$$

con il modulo di r pari a:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

Per la velocità si differenzia r assumendo il sistema di riferimento perifocale come inerziale. Si ottiene:

$$\vec{r}' = \vec{v} = (\dot{r} \cos \nu - r \dot{\nu} \sin \nu) \vec{p} + (\dot{r} \sin \nu + r \dot{\nu} \cos \nu) \vec{q}$$

Riscrivibile come:

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (-\sin \nu \vec{p} + (e + \cos \nu) \vec{q})$$

3.5 Manovre orbitali

Le manovre orbitali sono effettuate per cambiare uno o più parametri orbitali. Nelle manovre il corpo considerato non è più kepleriano, ma si aggiungono le forze propulsive che, in generale, implicano la variazione della massa del veicolo. In questo paragrafo si riportano alcune manovre impulsive che, seppur non siano quelle effettuate dallo spacecraft, sono molto importanti perché spiegano in maniera semplicistica ciò che succede quando una spinta viene applicata in una certa direzione.

3.5.1 Costo della manovra

Per una manovra impulsiva, utilizzando la *rocket equation* di Tsiolkovsky, è possibile vedere che l'input della manovra è un cambio di velocità richiesto ΔV e l'output che si ottiene perché ciò avvenga è una certa energia spesa dal propulsore. Per manovre impulsive è possibile approssimare la posizione come costante durante la manovra, assunzione non possibile nel caso di manovra continua. Il costo della manovra è l'energia che è necessario fornire per ottenere il cambio di velocità voluto, che sarà

direttamente proporzionale al consumo di carburante della manovra.

Il ΔV si calcola come la variazione di velocità da imprimere per ottenere una V_2 consona all'orbita che si vuole ottenere. Visto che le velocità e il ΔV sono delle grandezze vettoriali, è necessario utilizzare il teorema di Carnot:

$$V_2^2 = V_1^2 + \Delta V^2 - 2V_1\Delta V \cos(\pi - \beta)$$

Il cambio di energia che si ha è solo di energia cinetica (essendo la posizione costante), per cui:

$$\Delta E_g = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} = \frac{1}{2}\Delta V(\Delta V + 2V_1 \cos(\beta))$$

Per ottenere la più grande variazione di energia possibile, è necessario effettuare la manovra quando la velocità è massima e quando l'angolo β è nullo (o uguale a π). Più la velocità è bassa, più parte dell'energia finisce in perdite gravitazionali e l'effetto energetico è basso a parità di ΔV . Il β non nullo comporta invece delle perdite per disallineamento della spinta.

Si ricorda che, per la *rocket equation*, il consumo di combustibile è legato al ΔV e all'efficienza del propulsore (impulso specifico) e non alla variazione di energia ottenuta.

$$\Delta V = c \log\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \quad c = I_{sp}g_0 = \frac{T}{\dot{m}}$$

3.5.2 Principali manovre a uno o due impulso

Il questo paragrafo verranno riportate le manovre impulsive principali, verranno omesse le manovre a tre impulsi o trasferimenti tra orbite a inclinazioni diverse perché non utili ai fini delle traiettorie analizzate, che resteranno a inclinazioni molto basse. Si riporta soltanto il costo teorico di un cambio di inclinazione per giustificare la scelta di incontrare gli asteroidi ai loro nodi, al fine di limitare la spesa di cambio del piano orbitale.

Aggiustamento degli apsi

Un modo molto efficace per cambiare l'altezza di un apside consiste nell'incrementare la velocità in quello opposto. In questo modo si varia il semiasse maggiore (e anche l'eccentricità) senza variare la sua direzione. Se l'innalzamento è di Δz , allora la variazione di semiasse maggiore sarà:

$$\Delta a = \frac{\Delta z}{2}$$

Conoscendo il Δa richiesto, si può ricavare il Δz e da lì si può ricavare il V_2 necessario e il ΔV . Si noti che il ΔV al periastro è molto efficace, mentre quello all'apoastro è sconveniente per via delle perdite per gravità. Una rappresentazione grafica di queste manovre sono date in figure 3.9a e 3.9b.

Da considerazioni energetiche si trova che:

$$VdV = \frac{\mu}{2a^2} da$$

che, per un'orbita quasi circolare diventa:

$$\frac{dV}{V} = \frac{da}{2a}$$

La variazione percentuale di semiasse maggiore è doppia rispetto alla variazione percentuale della velocità.

Rotazione della linea degli apsi

La linea degli apsi è determinata sul piano orbitale dall'angolo ω . Per ruotare tale linea di un angolo $\Delta\omega$ con un semplice impulso è necessario che il punto in cui avviene l'impulso sia comune all'orbita di

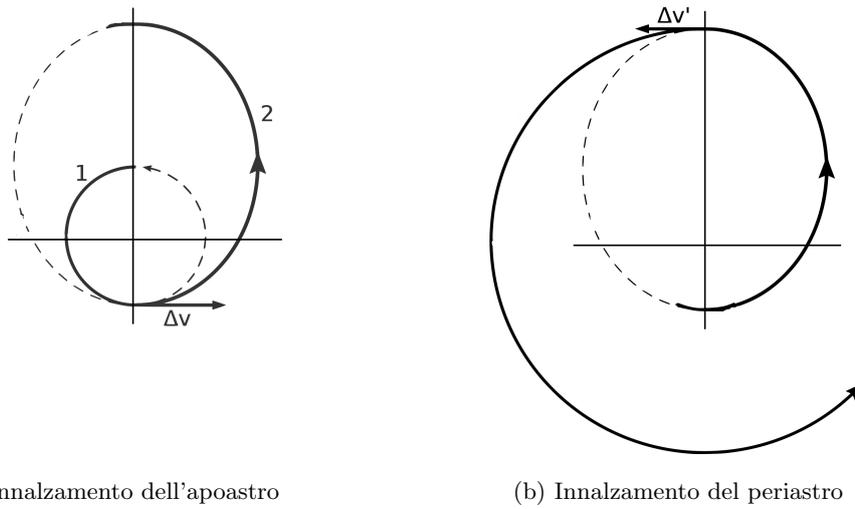


Figura 3.9

partenza e quella di arrivo: una delle due intersezioni delle ellissi.
Le condizioni di manovra saranno:

$$r_2 = r_1 \quad \nu_2 = \nu_1 - \Delta\omega$$

Energia e momento angolare non variano in quanto la forma e la dimensione dell'orbita rimangono costanti, essendo il raggio costante anche la velocità tangenziale rimane costante, così come il modulo della velocità. Per far ciò è necessario variare il verso della velocità radiale, per cui:

$$\Delta V = 2V_r = \frac{2\mu e}{h} \sin \nu$$

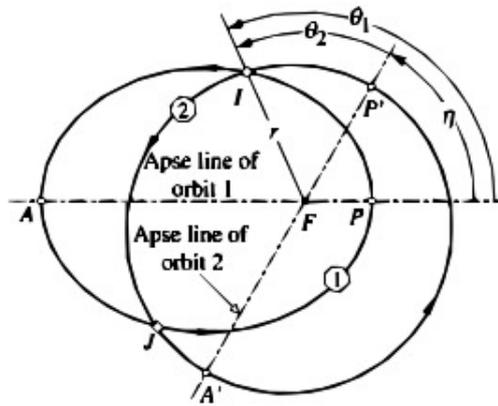


Figura 3.10: Rotazione della linea degli apsi

Cambiamento del piano orbitale

Il cambiamento del piano orbitale necessita di un ΔV con una componente perpendicolare al piano orbitale di partenza. La manovra avviene con un solo impulso a raggio, energia e momento angolare

costanti.

I moduli di V , V_r e V_t restano costanti, varia solo la direzione di V_t nel piano tangente alle due orbite nel punto di manovra.

Il costo della manovra è pari a:

$$\Delta V = 2V_t \sin \frac{\Delta\psi}{2}$$

Dove $\Delta\psi$ è l'angolo compreso tra la velocità tangenziale nell'orbita di partenza e la velocità tangenziale nell'orbita di arrivo. È necessario notare che il costo è direttamente proporzionale alla velocità orbitale, per cui, negli intorno dell'orbita terrestre attorno al Sole, una variazione di inclinazione di soli 2° comporta un ΔV di oltre $1km/s$, eccessivo per il tipo di missione che ci si propone di studiare. Si può osservare graficamente la strategia di manovra in figura 3.11.

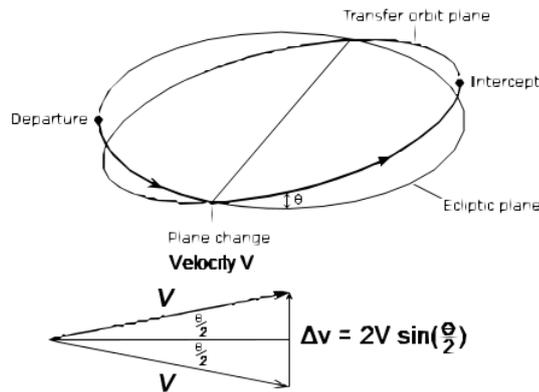


Figura 3.11: Manovra di cambiamento di piano orbitale

Cambio del tempo di passaggio al periastro

È una manovra a due impulsi con lo scopo di cambiare la fase del veicolo spaziale sull'orbita. L'anomalia vera e il tempo sono due variabili intercambiabili, motivo per cui questa manovra si può vedere come un cambiamento di tempo di passaggio da un punto specifico dell'orbita, molto spesso il periastro.

Se si assume di voler ritardare il tempo di passaggio in un punto dell'orbita (il discorso è analogo per l'anticipo), con un impulso si mette il veicolo in un'orbita di *waiting* a semiasse maggiore più grande, che aumenta il periodo orbitale in modo che al nuovo passaggio è trascorso un tempo maggiore. Il secondo impulso rimette il veicolo sulla sua orbita e avviene nello stesso punto.

Il *phasing* può avvenire utilizzando un ΔV piccolo e aspettando più periodi o viceversa. Il tutto è un compromesso tra costo e tempo di manovra. In particolare si può scrivere che $\Delta T = n\Delta T_p$, con $T_p = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ per cui il ΔT è legato univocamente al Δa .

Si noti che se il fasamento richiesto è di oltre 180° , allora conviene fare un fasamento in senso opposto. In questo caso l'orbita viene detta di *catching* ed ha semiasse maggiore più piccolo dell'orbita di partenza. Gli impulsi richiesti sono effettuati nello stesso punto a tempi differenti, essi hanno stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto, come mostrato in figura 3.12.

trasferimenti tra orbite circolari complanari

In missioni a bassa spinta, molto spesso è possibile approssimare l'orbita in ogni momento ad un'orbita circolare, motivo per cui verranno in questo paragrafo analizzate le trasferte tra orbite circolari, sia nel caso impulsivo che nel caso di spinta continua.

Volendo passare da un'orbita di raggio r_1 ad una di raggio r_2 maggiore sullo stesso piano (ragionamenti analoghi si possono implementare nel caso di raggio finale minore), l'orbita di trasferimento deve intersecare entrambe le orbite: il periastro deve essere minore o uguale del raggio di partenza e l'apoaastro

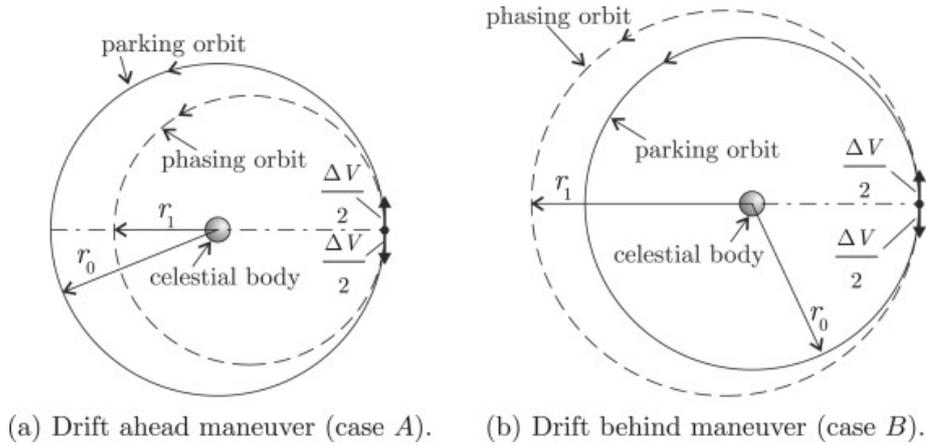


Figura 3.12: Manovra di phasing: waiting e catching orbit

deve essere maggiore o uguale al raggio finale. In formule:

$$r_{pt} = \frac{p_t}{1 + e_t} \leq r_1 \quad r_{at} = \frac{p_t}{1 - e_t} \geq r_2$$

Le combinazioni di semilatus rectum e eccentricità sono infinite e possono portare a trasferimenti ellittici, parabolici e iperbolici. È possibile dimostrare che l'ellisse bitangente alle due orbite è quella ad energia e spesa minore. Il ΔV per questo tipo di trasferta a due impulsi è il minore possibile. Se si considerano trasferimenti a tre impulsi il discorso non vale, una trasferta biparabolica o biellittica può essere più conveniente, per ulteriori informazioni su queste trasferte si rimanda a [7].

La trasferta ellittica bitangente è detta *trasferta di Hohmann* ed ha le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} r_{pt} &= r_1 & r_{at} &= r_2 \\ a_t &= \frac{r_1 + r_2}{2} & E_t &= -\frac{\mu}{r_1 + r_2} \\ \Delta V_1 &= V_{c1} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) & \Delta V_2 &= V_{c2} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \\ \Delta T_t &= \frac{T_{pt}}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu}} \end{aligned}$$

Una rappresentazione grafica è riportata in figura 3.13. Per trasferte verso raggi più piccoli il discorso si ribalta, gli impulsi hanno la stessa entità ma verso opposto.

Nel caso di trasferte con propulsione continua il discorso cambia. Di seguito si riporta parte dell'approssimazione di Edelbaum per i cambiamenti di semiasse maggiore ed eccentricità. L'approssimazione prevede anche manovre con cambi combinati di semiasse e inclinazione, tuttavia non verranno riportati perché non si analizzeranno cambiamenti di inclinazione nel corso dell'ottimizzazione delle traiettorie, come già accennato in precedenza.

L'approssimazione di Edelbaum consiste nel considerare orbite circolari, a bassa inclinazione e un veicolo con bassi livelli di spinta se confrontati con il campo gravitazionale in cui si trova. Queste tre assunzioni permettono di semplificare le equazioni di Gauss per le variazioni dei parametri orbitali classici,

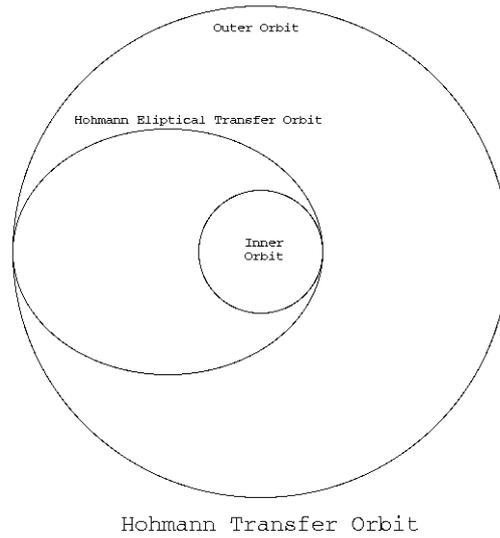


Figura 3.13: Trasferta di Hohmann

ottenendo:

$$\begin{aligned}\frac{V\dot{a}}{a} &= 2\frac{T_t}{m} \\ V\dot{e} &= 2\cos\nu\frac{T_t}{m} + \sin\nu\frac{T_r}{m} \\ V\dot{i} &= \cos(\omega + \nu)\frac{T_w}{m}\end{aligned}$$

La spinta, in una generica direzione, può essere scomposta in componente tangenziale (pedice t), radiale (pedice r) e normale (pedice w). Definendo l'angolo α tra la proiezione sul piano orbitale della spinta e la direzione tangenziale e l'angolo β tra la spinta e il piano orbitale, è possibile esprimere queste componenti come:

$$\begin{aligned}T_t &= T \cos \beta \cos \alpha \\ T_r &= T \cos \beta \sin \alpha \\ T_w &= T \sin \beta\end{aligned}$$

Integrando le equazioni di Gauss semplificate su un'orbita, si ottiene, per semiasse maggiore ed eccentricità:

$$\begin{aligned}\Delta a &= \frac{2aT}{nmV} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \beta d\nu \\ \Delta e &= \frac{T}{nmV} \int_0^{2\pi} (2\cos \nu \cos \alpha + \sin \nu \sin \alpha) \cos \beta d\nu \\ \Delta i &= \frac{T}{nmV} \int_0^{2\pi} \cos(\omega + \nu) \sin \beta d\nu\end{aligned}$$

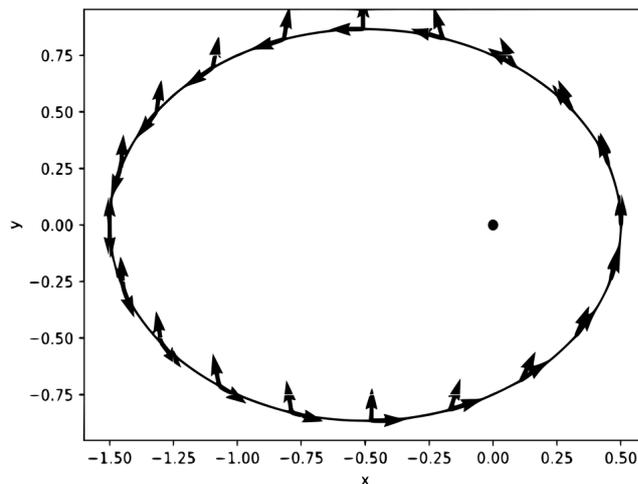


Figura 3.14: Direzione della spinta per cambiamenti di eccentricità e semiasse maggiore

Si noti che le assunzioni espresse in precedenza, rendono indefinibile l'argomento del periastro e dell'anomalia vera. Nel caso di cambio di eccentricità, si sceglie il riferimento dell'anomalia vera in modo che la manovra crei il semiasse maggiore proprio in direzione del riferimento scelto. Stessa cosa per i cambiamenti di inclinazione, il riferimento scelto diventerà la linea dei nodi dell'orbita finale.

Per massimizzare il cambiamento di a , è banale che bisogna avere la spinta con $\alpha = \beta = 0$, per cui in direzione della velocità, come d'altronde nelle manovre impulsive. Per massimizzare il cambiamento di e invece il discorso è più complicato: prendendo l'espressione all'interno dell'integrale, derivandola e trovando l'ottimo, si ottiene un'espressione del tipo:

$$\tan \alpha = \frac{\tan \nu}{2}; \quad \beta = 0$$

Tale espressione dice che la direzione della spinta varia in base all'anomalia vera del punto in cui ci si trova. È possibile semplificare l'espressione imponendo approssimativamente $\nu = \alpha$ e quindi avere la spinta nella stessa direzione in un sistema di riferimento inerziale. Una rappresentazione grafica di queste manovre è data in figura 3.14.

Queste considerazioni saranno cruciali nella scelta delle sequenze degli asteroidi, in modo da capire quale arco è possibile seguire minimizzando il costo di manovra.

3.6 Sfera di influenza e cenni su traiettorie interplanetarie

Le traiettorie interplanetarie si basano sulla *patched conics approximation*, per cui in ogni fase del moto di un veicolo spaziale si considera agente solo la forza gravitazionale di un corpo, quello con influenza maggiore. Quando il veicolo si trova vicino ad un pianeta è soggetto praticamente solo alla sua influenza, per cui descriverà una conica (in generale perturbata dagli altri corpi) attorno al pianeta in questione. Quando il veicolo si allontana abbastanza, l'influenza del pianeta diventa così bassa da essere trascurata rispetto all'interazione gravitazionale del Sole. Il veicolo descriverà un'altra conica, stavolta attorno alla stella ed è raccordata con quella attorno al pianeta. Per definire quando inizia una conica e finisce un'altra è necessario introdurre il concetto di sfera d'influenza.

La sfera d'influenza è una regione sferica centrata nel corpo celeste all'interno della quale la sua influenza gravitazionale è dominante rispetto ogni altra forza. I confini non sono ovviamente netti, tuttavia per convenzione si pone un limite. Esistono due tipi di sfera di influenza:

- Sfera d'influenza di Hill: è la regione nella quale un'orbita attorno al corpo in questione risulta stabile, al di fuori di essa, seppur dopo un tempo molto grande, l'orbita perde le sue proprietà in quanto instabile;
- Sfera d'influenza di Laplace: è la regione in cui è possibile applicare un certo modello numerico, al di fuori della regione è necessario cambiare modello per ottenere risultati accurati.

Laplace ha ottenuto una formula per trovare il raggio della sfera d'influenza di un corpo rispetto ad un altro:

$$\rho_L = \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{2}{5}} r_{12}$$

La formula per la sfera d'influenza di Hill è leggermente diversa:

$$\rho_H = \sqrt{\frac{m_2}{3m_1}} r_{12}$$

La natura del sistema solare è eliocentrica, per cui molto spesso m_2 si riferisce proprio al Sole. I pianeti hanno la propria sfera che resta di dimensioni costanti per via del fatto che la maggior parte di essi seguono orbite praticamente circolari e molto poco inclinate.

Si può affermare che nei voli interplanetari il tempo di permanenza nella sfera d'influenza di un pianeta è molto basso rispetto a quello impiegato nella fase eliocentrica della missione, motivo per cui nell'analisi dei flyby multipli di asteroidi non verrà presa in considerazione la parte planetocentrica, ma si fa partire il veicolo al di fuori della sfera d'influenza terrestre con un eccesso iperbolico di velocità adeguato nel punto più adatto per la traiettoria. Si suppone che il veicolo sia stato portato in quel punto tramite opportune manovre nella sfera d'influenza terrestre.

La manovra più conveniente per spostarsi nel sistema solare è ovviamente una Hohmann, tuttavia non è sempre possibile effettuarla in quanto quando si arriva all'orbita desiderata è necessario che il target che si vuole raggiungere sia effettivamente lì. Esiste una finestra di lancio per effettuare le manovre, per la quale si incontra il target. Nel caso della Hohmann è una finestra molto stretta e se si perde è necessario aspettare un periodo sinodico, in modo da dare ai pianeti il modo di rifarsi come in precedenza. Il periodo sinodico si calcola come:

$$\tau = \frac{2\pi}{n_2 - n_1}$$

con n velocità angolare del pianeta di partenza e del target.

Solitamente si può sorpassare questo problema non effettuando una Hohmann ma una manovra più costosa, tuttavia nel caso dei flyby di asteroidi, questi ultimi è necessario incontrarli ai nodi, se si incontrano anche con giorni di differenza, sarebbe necessario cambiare l'inclinazione del veicolo con i conseguenti consumi di combustibile eccessivi.

In generale, nell'ottimizzazione delle traiettorie non vengono seguite Hohmann impulsive, ma traiettorie genericamente più complesse, tuttavia questo principio è fondamentale dal punto di vista concettuale.

4

Selezione preliminare degli asteroidi

Tutti gli asteroidi conosciuti sono categorizzati dalla NASA in due database distinti:

1. Asteroidi numerati;
2. Asteroidi non numerati.

Ai primi è stato dato, oltre che il nome, anche un numero di classificazione univoco, ai secondi tale numero non è stato ancora dato, ma sono classificati in ordine cronologico di scoperta. L'assenza del numero non è in realtà solo una questione di catalogo, gli asteroidi vengono numerati nel momento in cui si hanno dati certi sulle sue caratteristiche fisiche e orbitali, gli asteroidi non numerati hanno infatti un'incertezza molto elevata sui loro parametri orbitali per via della mancanza di osservazioni e di grandi quantità di dati che li concernono.

Ai fini della selezione, vengono trattate entrambe le categorie assumendo che anche i parametri degli asteroidi non numerati siano esatti e costanti. Si utilizzano le tabelle ufficiali NASA aggiornate al 2020, in cui sono presenti tutti i parametri orbitali di ogni asteroide (in unità astronomiche e gradi) e l'epoca a cui si riferiscono (in giorni MJD). I dati su magnitudine assoluta e variazione di magnitudine, seppur presenti, non verranno utilizzati nella selezione, ma solo per verificare a posteriori le dimensioni degli asteroidi che si incontrano nelle possibili missioni.

4.1 Step di selezione

In questa sezione si analizzeranno i vari step che sono stati seguiti per trovare i perfetti candidati per la missione in questione.

4.1.1 Preparazione dei file

Prima di effettuare i calcoli, è stato necessario creare dei file su cui lavorare, le tabelle NASA non sono computazionalmente utilizzabili specie nell'architettura matriciale di Matlab. Molti nomi degli asteroidi sono composti da più parole, considerate come stringhe diverse dal compilatore, per cui, sono state create due tabelle diverse per i nomi e i parametri orbitali in due file distinti, aggiornati contemporaneamente ad ogni passo. Onde evitare incomprensioni di nomenclatura, è stato assegnato un numero crescente su base cronologica agli asteroidi non numerati, mentre il numero di quelli numerati è stato sommato a 1000000 in modo da non avere due asteroidi con lo stesso numero identificativo.

4.1.2 Bassa inclinazione e nodi vicini

La prima scrematura della lista di asteroidi viene effettuata in base ai loro parametri orbitali. Si possono definire due classi di asteroidi interessanti:

- Prima classe: asteroidi a bassa inclinazione con orbita intersecante (o quasi) quella terrestre in un punto qualsiasi (fig. 4.1b);
- Seconda classe: asteroidi, anche ad alta inclinazione ed eccentricità, che hanno uno dei due nodi vicino all'orbita terrestre (fig. 4.1a).



(a) Asteroide con nodo ascendente passante vicino all'orbita terrestre
(b) Asteroide con perielio vicino all'orbita terrestre e bassa inclinazione

Figura 4.1

Per la selezione è stato creato un programma Matlab che legge in input la lista completa degli asteroidi e fornisce come output le due liste che competono alle classi appena definite.

In particolare, le tabelle NASA danno solo i sei parametri classici, per cui è necessario effettuare i seguenti calcoli:

1. Calcolo del raggio ai nodi: per trovare gli asteroidi della seconda classe è necessario trovare la distanza dal Sole degli asteroidi ai propri nodi, in particolare vengono implementate le formule:

$$r_{asc} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(-\omega)} \quad r_{disc} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\pi - \omega)}$$

2. Calcolo dei raggi agli apsi: per trovare gli asteroidi della prima classe è necessario calcolare la distanza dal Sole degli asteroidi ai propri apsi, in modo da capire se la proiezione della loro orbita sull'eclittica possa in qualche modo intersecare quella terrestre. Vengono implementate le formule:

$$r_p = \frac{a}{(1 + e)} \quad r_a = \frac{a}{(1 - e)}$$

Una volta noti questi parametri è possibile imporre i criteri caratteristici;

1. Prima classe:

- (a) Raggio al perielio minore di 1.1UA oppure raggio all'afelio maggiore di 0.9UA;
- (b) inclinazione minore di 3°.

2. Seconda classe: raggio ai nodi ascendente o al nodo discendente compreso tra 0.9UA e 1.1UA

Gli asteroidi che soddisfano le condizioni imposte sono 3084 per la prima classe e 11086 per la seconda.

4.1.3 Valutazione temporale dei passaggi

Le caratteristiche dell'orbita di un asteroide non sono sufficienti per effettuare un flyby a basso costo in un tempo accettabile, è necessario che il pianeta Terra si trovi nei pressi dell'asteroide di seconda classe quando questo passa al nodo di interesse, o nei pressi dell'asteroide di prima classe quando questo si trova ad una distanza dal Sole di circa 1UA. In questo modo il veicolo deve percorrere solo una piccola distanza per raggiungere il luogo del flyby, con la speranza che il costo sia basso.

Anche in questo caso è stato implementato un programma Matlab che dagli input forniti dalla lista delle due classi, definite nel paragrafo precedente, fornisce in output una lista unificata di asteroidi passanti vicino la Terra dal 2028 in avanti.

Lo scopo della valutazione temporale è anche quello di trovare l'epoca più favorevole per effettuare il flyby, ovvero quella in cui la distanza relativa con la Terra è minima. Dato che si suppone che il veicolo viaggi nei pressi dell'eclittica, l'angolo ϕ di declinazione dall'eclittica non viene considerato perché supposto sempre nullo, mentre la distanza radiale, essendo stata valutata nel paragrafo precedente, non viene calcolata. La distanza relativa con la Terra si riduce nella differenza di angolo θ tra l'asteroide e la terra nel punto d'incontro.

Per il calcolo, serve conoscere i parametri orbitali terrestri, sono stati scelti quelli all'epoca 54000MJD: L'angolo iniziale dalla direzione x del sistema di coordinate eliocentrico eclittico è facilmente calcolabile

Parametro	Valore
<i>Epoch</i>	54000
<i>a</i> [UA]	0.9999
<i>e</i>	0.0167
<i>i</i> [°]	0.0010
Ω [°]	175.41
ω [°]	287.62
<i>M</i> [°]	257.61

Tabella 4.1: Parametri orbitali terrestri

per via della bassissima inclinazione dell'orbita terrestre. In questo caso si può infatti approssimare l'orbita come perfettamente giacente sull'eclittica, per cui $\theta = \Omega + \omega + \nu$, inoltre, per via dell'eccentricità molto bassa, si può confondere l'anomalia vera ν con l'anomalia media M e considerare un moto circolare uniforme. All'epoca considerata, θ è all'incirca 0.6° .

Per gli asteroidi il calcolo del θ è più complesso. Di seguito vengono riportati i passi principali da seguire:

1. Si calcola il periodo delle orbite in giorni con la formula:

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24}$$

2. Conoscendo l'anomalia media in radianti, si può ricavare il tempo di passaggio al periastro:

$$EP_p = EP - \frac{T_p}{2\pi} M$$

3. Per la prima classe di asteroidi:

- (a) Si calcolano due valori di anomalia vera per cui la distanza dal Sole è nei pressi di 1UA. In particolare, si impone $r = 1$ e, invertendo la formula

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

si ottiene l'anomalia vera. Ciò non è possibile con le orbite con periastro maggiore di 1 UA o apoastro minore di 1 UA. Per questi due casi particolari, viene imposta una distanza dal

Sole $r = 1.1$ UA e $r = 0.9$ UA rispettivamente. Resta scoperto il caso di orbite circolari con raggio compreso sempre tra 1 UA e 1.1 UA o tra 0.9 UA e 1 UA, tuttavia, nessuna delle orbite considerate ricade in questi casi particolari.

I valori di anomalia vera sono due perché si ricorda che il coseno è una funzione pari.

- (b) Dall'anomalia vera, si può calcolare l'anomalia eccentrica tramite:

$$E = \arccos\left(\frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}\right)$$

- (c) Dall'anomalia eccentrica e dal periodo, si ricava il tempo di passaggio ai nodi:

$$t_{near1,2} = \frac{T_p}{2\pi}(E_{near1,2} - e \sin(E_{near1,2})) \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$$

e la rispettiva epoca:

$$EP_{near1,2} = t_{near1,2} + EP_p$$

Per trovare l'epoca utile per il flyby, si aggiunge a questo valore un multiplo intero del periodo orbitale dell'asteroide fino a raggiungere un'epoca successiva al 1° gennaio 2028. In particolare, visto che la durata della missione è di 3 anni, e molti asteroidi hanno periodo orbitale minore di questo valore, vengono presi in considerazione otto passaggi ravvicinati alla Terra successivi all'inizio del 2028, che competono a quattro periodi dell'asteroide.

- (d) L'angolo θ si trova approssimando l'orbita anche in questo caso ad orbita giacente sull'eclittica. Questa approssimazione è più grossolana di quella fatta per la Terra, in quanto l'inclinazione può arrivare fino a 3°. La formula utilizzata è dunque:

$$\theta = \Omega + \omega + \nu$$

- (e) Conoscendo queste otto epoche utili ai flyby, per ognuna di esse è possibile calcolare il θ della Terra. Assumendo che la Terra abbia un'orbita praticamente circolare:

$$\theta_{earth} = \frac{\mu}{a^3}(EP_{asc,disc} - EP_{0,earth}) + \theta_{0,earth}$$

Riscalato opportunamente su un angolo giro.

- (f) A questo punto è possibile imporre le condizioni sulla prima classe. In particolare è necessario che la differenza $\theta_{ast} - \theta_{earth}$ sia minore di 10°.

4. Per la seconda classe di asteroidi:

- (a) Dall'anomalia vera del nodo ascendente ($\nu = -\omega$) e di quello discendente ($\nu = \pi - \omega$), si calcola la rispettiva anomalia eccentrica:

$$E_{asc} = \arccos\left[\frac{e + \cos(-\omega)}{1 + e \cos(-\omega)}\right] \quad E_{disc} = \arccos\left[\frac{e + \cos(\pi - \omega)}{1 + e \cos(\pi - \omega)}\right]$$

Da considerare negativo se $-\omega$ è maggiore di $-\pi$ per via del dominio limitato della funzione arcoseno.

- (b) Dall'anomalia eccentrica e dal periodo, si ricava il tempo di passaggio ai nodi:

$$t_{asc} = \frac{T_p}{2\pi}(E_{asc} - e \sin E_{asc}) \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} \quad t_{disc} = \frac{T_p}{2\pi}(E_{disc} - e \sin E_{disc}) \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$$

e la rispettiva epoca:

$$EP_{asc} = t_{asc} + EP_p \quad EP_{disc} = t_{disc} + EP_p$$

Per trovare l'epoca utile per il flyby, si aggiunge a questo valore un multiplo intero del periodo orbitale dell'asteroide fino a raggiungere un'epoca successiva al 1° gennaio 2028. In particolare, visto che la durata della missione è di 3 anni, e molti asteroidi hanno periodo orbitale minore di questo valore, vengono presi in considerazione quattro passaggi al nodo ascendente e quattro al nodo discendente successivi all'inizio del 2028.

- (c) L'angolo θ in questo caso è semplicemente Ω per il nodo ascendente e $\pi + \Omega$ per il nodo discendente.
- (d) Conoscendo le otto epoche utili ai flyby, per ognuna di esse è possibile calcolare il θ della Terra. Assumendo che la Terra abbia un'orbita praticamente circolare:

$$\theta_{earth} = \frac{\mu}{a^3}(EP_{asc,disc} - EP_{0,earth}) + \theta_{0,earth}$$

Riscalato opportunamente su un angolo giro.

- (e) A questo punto è possibile imporre le condizioni sulla seconda classe. In particolare è necessario che la differenza $\theta_{ast} - \theta_{earth}$ sia minore di 3° .

Dall'analisi descritta, si è ottenuto un totale di 936 asteroidi candidati. Alcuni dei quali sono doppiati perché ricadono sia nella prima che nella seconda classe, che dovranno essere eliminati in seguito.

4.1.4 Suddivisione dei quattro passaggi

Grazie ai calcoli effettuati nelle sezioni precedenti si hanno tutte le informazioni necessarie per effettuare le ottimizzazioni, tuttavia è necessario rispettare i vincoli di missione imposti. Si scartano, dunque tutti gli asteroidi i cui tempi utili per i flyby cadono fuori dall'intervallo utile alla missione: dalla metà del 2028 alla metà del 2030.

Sono stati definiti quattro intervalli temporali in cui si vuole che ricada ogni flyby. A questo fine il periodo di missione (dal primo all'ultimo flyby, ipotizzato pari a 2 anni) è stato diviso esattamente in quattro intervalli equispaziati di circa sei mesi. Ogni asteroide verrà intercettato in un semestre diverso a partire dal secondo semestre del 2028 fino al primo semestre del 2030. Il tempo impiegato a raggiungere il primo asteroide varia da qualche mese a un anno, portando la durata complessiva della missione a oscillare tra i 2 e i 3 anni.

Con quest'ultima suddivisione si sono trovati 125 asteroidi candidati per il primo flyby, 136 per il secondo, 143 per il terzo e 130 per il quarto.

4.2 Riassunto criteri e altre considerazioni

Nella tabella seguente sono stati riassunti i criteri di candidatura utilizzati per ottenere la lista degli asteroidi utilizzati nel calcolo di ottimizzazione. Si nota che anche con questi criteri e la suddivisione

	Criterio	Valore
Prima classe	raggio perielio [UA]	$r \leq 1.1$
	raggio afelio [UA]	$r \geq 0.9$
	inclinazione [$^\circ$]	$i \leq 3^\circ$
	distanza rel. Terra	$\Delta\theta \leq 10^\circ$
	tempo flyby	$mid\ 2028 \leq t \leq mid\ 2030$
Seconda classe	raggio nodo ascendente	$0.9 \leq r_{asc} \leq 1.1$
	raggio nodo discendente	$0.9 \leq r_{disc} \leq 1.1$
	distanza rel. Terra	$\Delta\theta \leq 3^\circ$
	tempo flyby	$mid\ 2028 \leq t \leq mid\ 2030$

Tabella 4.2: Criteri di selezione

in quattro intervalli temporali, il numero di combinazione è elevatissimo. Sono oltre 316 milioni di combinazioni a quattro asteroidi. Si è stimato, per la potenza computazionale a disposizione, un tempo di ottimizzazione medio di circa 1 minuto, dunque se si volessero esplorare tutte le combinazioni sarebbe necessario un tempo di calcolo di 600 anni.

Per ovviare a questo problema, si dovranno studiare dei pattern che preselezionino ulteriormente le sequenze che si vogliono analizzare. Tali pattern verranno analizzati in dettaglio nel capitolo 9.

4.3 Asteroidi candidati

Si riportano nelle pagine che seguono i nomi degli asteroidi candidati per la missione, divisi in base al numero del flyby per cui è candidato. La conferma di validità della preselezione è data dal fatto che il 70% delle traiettorie ottimizzate verso il primo asteroide convergono con un ΔV inferiore a 1km/s.

Primo Flyby			Secondo Flyby		
1997 XF11	2017 FR2	2016 XE	Apophis	2015 WJ2	2000 UK11
2001 WN5	2017 HP49	2017 CO1	2004 QY2	2016 BY	2006 UQ216
2004 CL	2017 OO1	2017 EU2	2006 SU49	2016 CJ29	2008 CT1
2000 CO101	2017 SO21	2017 FF3	2005 GO21	2016 CO29	2008 EA8
2009 WZ104	2017 WW1	2017 FL64	2011 BO24	2016 FY12	2009 CV
2000 RK12	2017 XF	2017 KX4	2009 XF2	2016 GX	2010 XO69
2005 RA3	2018 SA2	2017 QO1	2009 SP171	2016 JB	2012 WR10
2005 UG3	2018 TZ	2017 VN2	2009 BL71	2016 OJ	2012 XK134
2005 VK1	2018 VP1	2018 GR4	2001 BE16	2017 BL30	2013 GM3
2007 MJ13	2018 VN7	2018 KR	2001 MS3	2017 BU32	2013 OY3
2008 EY84	2018 XB4	2019 GE1	2002 PX39	2017 BM123	2014 GQ17
2009 WR52	2018 XC4	2019 KF2	2004 EL20	2017 GK6	2015 CR
2009 YF	2019 AE3	2019 KN2	2004 HF12	2017 HW2	2015 RT1
2010 CA	2019 BG2	2019 OV3	2006 BM8	2017 HG4	2016 CO29
2010 LM34	2019 JE	2020 GE	2006 DU62	2017 MZ3	2016 DY30
2010 XS45	2019 KF2	YORP	2006 YP	2017 QO	2016 FY2
2011 GR59	2019 NW5	Kamo'oalewa	2007 RY8	2017 SV19	2016 FY13
2011 LJ19	2019 OM	2012 VE26	2007 WA	2017 WC14	2016 GX
2011 XC2	2019 RB3	2016 NB1	2008 DX22	2018 AW11	2016 RB1
2012 KB4	2019 SG4		2008 EM7	2018 BQ6	2017 BL30
2012 XE133	2019 UW		2008 WM	2018 CB2	2017 XS2
2013 AC32	2019 UU5		2009 BH58	2018 CV2	2018 FM2
2013 JL14	2019 VY2		2009 QT	2018 JJ1	2018 RW
2013 VX4	2019 XE2		2010 NG	2018 RS	2018 SB3
2013 WY	2019 YL6		2011 DR	2018 RS3	2018 XR2
2013 XA22	1998 HL3		2011 FS9	2018 RT5	2019 GA
2014 MP	1999 VX25		2011 GE	2018 SJ1	2019 JU5
2014 MR41	2005 VN5		2011 UY192	2018 SX2	2019 PQ2
2014 TM	2006 TU7		2012 JN4	2018 TM6	YORP
2014 UY	2006 XP4		2013 AG69	2019 BU1	2019 BS1
2014 WY4	2010 WR7		2013 CW87	2019 BX1	Kamo'oalewa
2014 XL8	2011 DS		2013 ES41	2019 BE5	2012 VE26
2015 FB	2011 GJ3		2013 GM3	2019 CC5	2017 XQ60
2015 FA341	2013 HT15		2013 OY3	2019 DP	2015 BG92
2015 MA	2013 XA22		2013 RZ73	2019 GV20	2017 SL16
2015 VL64	2014 UU56		2014 HC199	2019 JF1	2016 NB1
2015 XB2	2014 XC8		2014 OC4	2019 JG2	2016 CV246
2016 EP84	2015 HK10		2015 BN311	2019 JU5	2001 AD2
2016 PQ38	2015 VC2		2015 CD1	2019 NJ	2015 RW83
2016 WA8	2016 AE2		2015 CT13	2019 QV1	
2016 XE	2016 CU246		2015 DC155	2020 BP	
2017 AD5	2016 RZ		2015 LK	2020 BZ14	
2019 BS1	2016 CV246		2015 QH3	2020 CD1	
2017 XQ60	2015 XF261		2015 QP3	2020 FL4	
2017 SL16	2015 BG92		2015 RT1	2020 GM	

Tabella 4.3: Asteroidi candidati per il primo e il secondo flyby

Terzo Flyby			Quarto Flyby		
2001 WL15	2016 LK10	2011 AX22	2010 JT34	2015 XH55	2014 HO2
2007 VY7	2016 US4	2011 BP40	1995 NA	2016 AO131	2014 HY198
2008 LV16	2016 UA6	2013 CW129	2000 TU28	2016 AG193	2015 MZ53
2002 XY38	2016 VY1	2013 US1	2000 UQ30	2016 NL39	2016 AF2
2001 CP36	2016 VM3	2015 DU	2002 TZ57	2016 PQ8	2016 WY
2001 VG16	2016 WX	2015 XG55	2003 UB22	2016 TJ10	2017 BY32
2001 WM15	2017 BT	2016 CK137	2003 WT153	2016 UC31	2017 FZ2
2002 VR14	2017 BG30	2016 FC	2004 HQ1	2016 VW2	2017 FB3
2003 AF23	2017 BN32	2016 HD3	2004 TL10	2016 VK6	2017 FS91
2004 HG12	2017 FY	2016 UE	2004 TP13	2016 WU2	2017 HZ4
2004 MO3	2017 FN102	2017 HE	2005 LD	2016 XD2	2017 RO17
2005 AU3	2017 FR102	2018 CC1	2006 BF	2017 GA8	2018 RY1
2006 HE2	2017 NR6	2018 LB	2006 BW39	2017 OE20	2019 LR5
2006 SF77	2017 RO2	2018 LM2	2006 CL9	2017 SZ32	2019 RF2
2007 KO4	2017 UQ1	2018 TG6	2006 WQ127	2017 TD1	2019 WS3
2007 TT18	2017 WW27	2018 UM1	2007 RF1	2017 UY	2020 AE
2008 EO	2017 WL28	2019 AR8	2007 UT3	2017 VL1	2020 BW13
2008 WE96	2017 XS	2019 JJ	2007 VW7	2017 XV61	2020 FM1
2009 FT23	2017 YL1	2019 TZ	2008 BC15	2018 KS	YORP
2009 UY17	2018 BA3	2019 UD	2008 TC2	2018 LB	Kamo'oalewa
2009 VM24	2018 CA1	2019 VV	2008 UR2	2018 QR1	
2009 WC	2018 CY14	2019 WB7	2008 UD95	2018 WH	
2010 GD6	2018 DZ3	2019 YA3	2008 YB29	2019 CL2	
2010 WH1	2018 FT3	2019 YA4	2009 DB43	2019 GM1	
2010 WA9	2018 JY2	YORP	2009 WB105	2019 RF2	
2010 XA11	2018 NT2	Kamo'oalewa	2010 RE	2019 TB7	
2011 EX4	2018 WO	2020 DX1	2011 BV59	2019 UH5	
2011 EJ47	2019 CS1	2012 VE26	2011 KC15	2019 XQ3	
2011 KK15	2019 CD3	2019 BS1	2011 UB64	2019 YA1	
2011 YV62	2019 DY1	2015 BG92	2011 YC29	2020 BU10	
2012 HB2	2019 EE1	2016 CV246	2012 FN35	2020 FM1	
2012 SY49	2019 HA4	2017 XQ60	2012 VL6	2001 CQ36	
2012 TQ231	2019 JJ	2016 NB1	2012 XQ2	2002 LY1	
2012 WH1	2019 KN	2017 SL16	2013 AT27	2003 WT153	
2013 AR72	2019 SD10		2013 TM69	2004 QA22	
2014 CG13	2019 UK		2014 BG25	2005 XY4	
2014 FP38	2019 UM2		2014 NE3	2006 GB1	
2014 GG45	2019 VM2		2014 XG32	2009 DB43	
2014 JG15	2019 VU2		2015 MQ116	2009 YR	
2014 YP34	2020 FO		2015 TK238	2010 FV9	
2015 DJ155	2020 FH4		2019 BS1	2016 CV246	
2015 JC1	2002 EZ11		2017 XQ60	2015 XF261	
2015 TD144	2002 XY38		2017 SL16	2015 BG92	
2015 XO	2004 JN1		2016 NB1	2012 VE26	

Tabella 4.4: Asteroidi candidati per il terzo e il quarto flyby

5

Modelli matematici

Prima ancora di impostare il problema di ottimizzazione delle traiettorie spaziali, è necessario comprendere e scegliere i modelli che rappresentano la dinamica di un veicolo spaziale in moto nello spazio. Per modello si intende l'insieme di equazioni differenziali ordinarie che rappresentano l'evoluzione (la storia temporale) della posizione e della velocità del veicolo. Nella forma più generale possibile, le equazioni della dinamica possono essere scritte come:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

Dove t è la variabile indipendente tempo, \vec{x} è il vettore di stato, che in generale ha n componenti e descrive completamente lo stato attuale del veicolo (nel caso in esame conterrà posizione, velocità e massa del veicolo), $\vec{u}(t)$ è il vettore dei controlli, che generalmente è vettore di dimensione diversa dal vettore di stato in quanto non tutte le variabili di stato possono essere controllate in maniera diretta. Il vettore dei controlli agisce da input per variare il moto di un veicolo spaziale. Si noti che la generica funzione f può essere una funzione matriciale lineare o, nel caso di dinamiche complesse, un sistema di espressioni non lineari.

Il modello matematico, ovvero il set di equazioni differenziali, non è univoco. In base al caso in esame esistono vari sistemi di equazioni che possono essere utilizzati, ognuno dei quali solitamente viene ricavato effettuando alcune specifiche semplificazioni da un modello estremamente generale e complesso, nel caso in cui determinati fenomeni risultano trascurabili sul moto complessivo del veicolo. Ad esempio molte volte l'azione gravitazionale di alcuni corpi risulta irrilevante rispetto a quella di altri corpi, più vicini o più massicci. In questo caso le prime possono essere trascurate rispetto alle seconde. In altri casi, i tempi di azione del vettore dei controlli è ordini di grandezza più piccolo dei tempi di manovra, per cui un modello a controlli impulsivi è implementabile senza commettere grandi errori.

Il modello matematico è dunque la prima macro-scelta da fare per definire il problema di ottimizzazione. In figura 5.1 sono schematizzate in maniera esaustiva le varie possibilità che si incontrano nella definizione del modello dinamico.

Il tutto è stato diviso sostanzialmente in due tipi di scelte di alto livello, sotto le quali si estendono ulteriori biforcazioni. È necessario scegliere il tipo di trasferta e il tipo di equazioni del moto da considerare, che influenzano rispettivamente la forma del vettore \vec{u} e la forma delle funzioni $f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$.

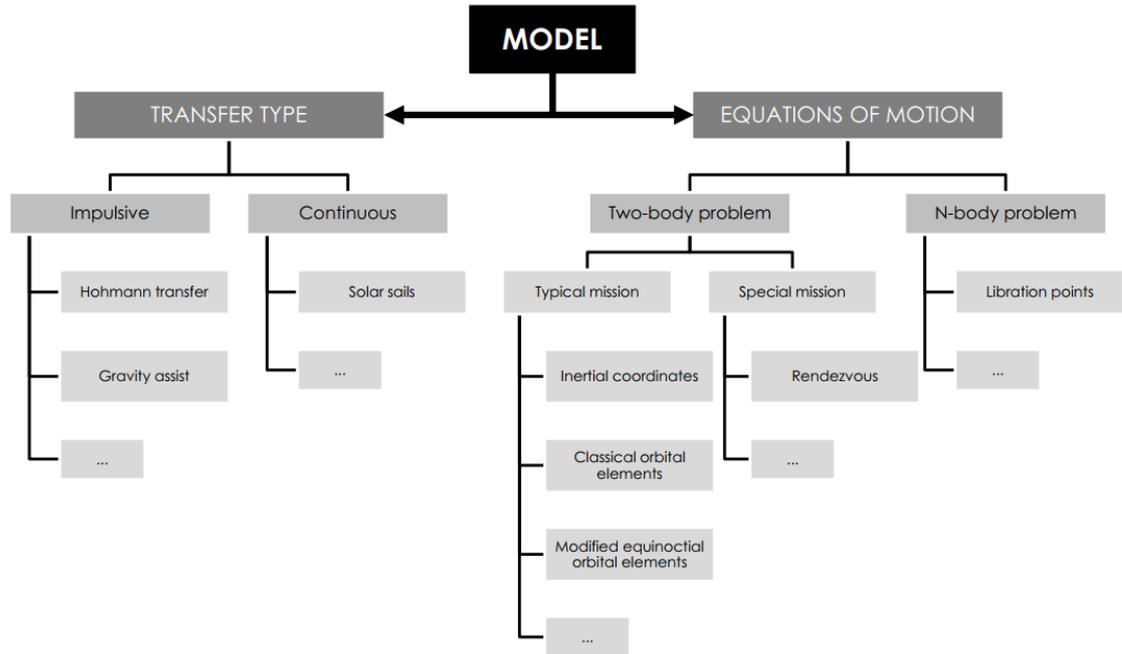


Figura 5.1: Scelte per il modello matematico

5.1 Tipo di trasferta

Il tipo di trasferta influenza largamente tutto il problema di ottimizzazione e soprattutto la sua risoluzione. In funzione del tipo di missione, si può assumere che le trasferte siano impulsive, con il vettore dei controlli identicamente nullo in tutta la trasferta ma con possibili discontinuità di velocità, oppure continue, con un andamento continuo del vettore \vec{u} nel tempo e senza nessuna discontinuità di velocità, in quanto i tempi di attivazione dei dispositivi di controllo sono molto grandi e le accelerazioni sono molto piccole.

5.1.1 Modello impulsivo

Il modello impulsivo è quello utilizzato tradizionalmente nelle manovre basate sulla propulsione chimica, caratterizzata nella maggior parte dei casi da grandi spinte.

Come anticipato, si assume che gli input del sistema siano nulli ($\vec{u} = 0$) e che ogni azione per variare la traiettoria del veicolo spaziale si possa considerare come una variazione istantanea di velocità ΔV . Tale incremento fisicamente è creato facendo agire una forza propulsiva per un certo tempo, ma se la forza è molto grande, i tempi di azione sono molto piccoli e assimilabili a zero ($\Delta t \simeq 0$).

Questo tipo di modello risulta molto semplice e relativamente accurato per la simulazione di traiettorie caratterizzate da grandi accelerazioni e risposte molto rapide del sistema propulsivo alle manovre comandate. In tali situazioni solitamente le variazioni di parametri orbitali sono molto grandi e avvengono in tempi molto brevi.

I propulsori con cui spesso si usa un tipo di trasferta impulsiva sono caratterizzati da impulso specifico basso e alti livelli di spinta. Non è tuttavia una loro esclusiva, anche propulsori a bassa spinta possono essere modellati in modo accurato da questo tipo di modello se il tempo di missione è molto più lungo del tempo di attuazione del propulsore. Un esempio di traiettoria con impulsi di velocità è rappresentato in figura 5.2. Quando viene impiegato un modello impulsivo, ogni segmento temporale tra un impulso

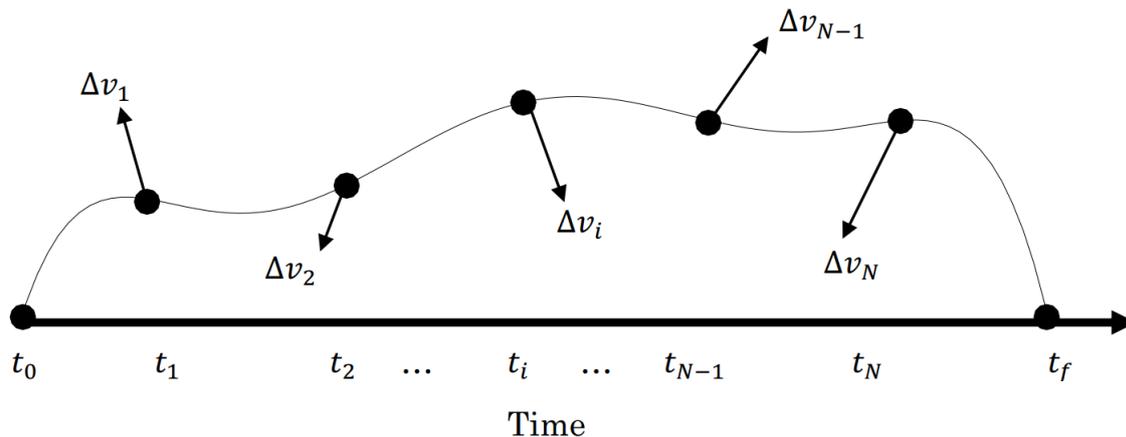


Figura 5.2: Traiettoria con controllo impulsivo

e il successivo viene trovato semplicemente propagando il modello kepleriano, in cui il corpo è soggetto alle Sole forze gravitazionali (ed eventuali perturbazioni) e dunque segue traiettorie ben precise, che nel caso di modello dei due corpi ristretto, coincidono con la famiglia delle coniche. In questo ultimo caso, non è necessario integrare alcuna equazione del moto, perché sapendo le condizioni iniziali del segmento è possibile utilizzare una soluzione analitica in forma chiusa. Ciò porta, tra i vantaggi del modello di trasferta impulsiva, a un onere computazionale molto basso in assenza di perturbazioni. L'ottimizzazione, nel caso di trasferta impulsiva, consiste complessivamente nel derivare il valore e la posizione dei ΔV da dare al veicolo.

Un concetto ibrido ai due tipi di trasferta è il cosiddetto *impulsive thrusting*, in questo modello, la traiettoria è trattata localmente come continua nel periodo in cui il propulsore risulta attivo, mentre nel suo complesso la traiettoria viene trattata come impulsiva. In questo modello solitamente le fasi di spinta sono molto corte rispetto ai tempi di missione e vengono dunque modellati come archi isolati, in modo da poter effettuare l'ottimizzazione solo su questi archi specifici e discreti. Se il ΔV richiesto all'inizio di un segmento è nullo, l'ottimizzazione parte mantenendo a zero il valore dell'impulso.

5.1.2 Modello continuo

I modelli matematici che si basano sul continuo sono generalmente più precisi di quelli impulsivi con discontinuità di velocità, tuttavia sono molto complicati perché nelle equazioni differenziali l'input (il termine noto delle equazioni) è diverso da zero, per cui ritorna un termine che prima veniva trascurato. La maggior accuratezza dei modelli continui è una caratteristica che si osserva sempre, tuttavia, quando la spinta è molto grande lo svantaggio computazionale del modello continuo può risultare molto pesante per ottenere un'accuratezza di poco migliore, per cui solitamente non si impiega questo modello. Questo è il motivo per cui comparare un modello matematico impulsivo e uno continuo è tutto sommato equivalente a comparare una missione ad alta spinta con una a bassa spinta.

Le sfide sono diverse: la spinta solitamente è estremamente bassa, anche più bassa della forza gravitazionale che tiene il veicolo in orbita, i tempi di trasferta sono ordini di grandezza più grandi di quelli delle trasferte con propulsione ad alta spinta. La combinazione delle due caratteristiche sopracitate porta a pensare che nella maggior parte della traiettoria i propulsori siano accesi a un certo livello di spinta e direzione variabile, giustificando la necessità del modello continuo.

Il modello continuo più generale può essere rappresentato nel modo più generale possibile come un'e-

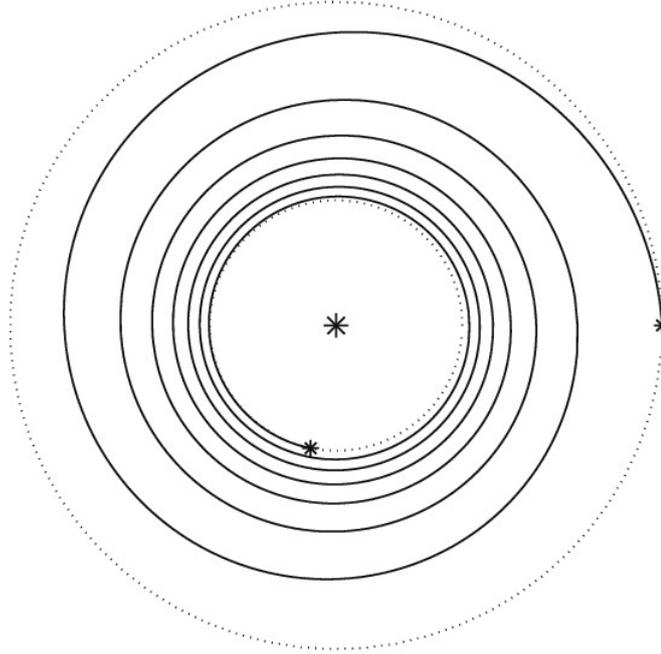


Figura 5.3: Tipica traiettoria a spinta bassa e continua

stensione dell'equazione gravitazionale di Newton espressa per N corpi:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \vec{\Gamma}$$

Dove \vec{r} è la posizione del veicolo spaziale, \vec{r}_i è la posizione dell' i -esimo corpo celeste caratterizzato da massa m_i e G è la costante di gravitazione universale (si riporta al capitolo 3 per ulteriori dettagli). Il vettore $\vec{\Gamma}$ è l'unica differenza dal modello degli N corpi presentato nel capitolo 3, esso rappresenta la somma di tutte le accelerazioni dovute a fenomeni diversi da quello gravitazionale: perturbazioni gravitazionali, pressione solare, resistenza atmosferica, ma anche la spinta data dal sistema di propulsione. In questo caso $[0, \vec{\Gamma}]^T$ è assimilabile al vettore dei controlli, mentre il vettore $\vec{x} = [\vec{r}, \dot{\vec{r}}]^T$ diventerà il vettore di stato. Si può dunque scrivere nello spazio di stato quanto segue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}} \\ -G \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\Gamma} \end{bmatrix}$$

Si noti che ponendo il vettore dei controlli a 0 e considerando delle discontinuità di velocità si ricade nel caso impulsivo, in quanto quest'ultimo non è altro che una semplificazione del modello continuo. L'equazione scritta in precedenza, semplificata a due corpi di cui uno di massa trascurabile, è quella che si usa per propagare una certa orbita in campo eliocentrico. Nel caso in cui l'orbita possa essere considerata non perturbata e il vettore dei controlli è nullo, la propagazione non è necessaria perché basta definire i parametri orbitali, che rimangono costanti.

5.1.3 Scelta del tipo di trasferta

Comparando la missione definita al capitolo 2 con le caratteristiche dei tipi di trasferta qui riportati, la scelta più saggia è quella di impiegare un modello continuo di trasferta. Nel caso di traiettorie

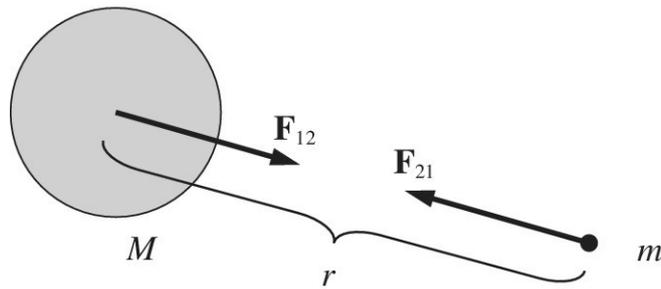


Figura 5.4: Tipico problema dei due corpi

eliocentriche, per quanto bassa sia la spinta i tempi di attuazione risultano comunque molto brevi rispetto ai tempi di trasferta, per cui un modello impulsivo a tratti potrebbe risultare non del tutto errato. La scelta di un modello ibrido può migliorare l'accuratezza dei risultati per avere un'idea più precisa del consumo di propellente e della traiettoria seguita, tuttavia ciò aumenta la complessità del modello. Per i fini che ci si pone il modello continuo è l'unico che può delineare con precisione la traiettoria seguita durante la missione, la storia temporale del vettore dei controlli e la massa di propellente utilizzata. Inoltre, il problema di ottimizzazione per trasferte impulsive si basa su semplificazioni che non danno informazioni sul vettore dei controlli, dunque sul modulo, sulla direzione e sul verso del vettore spinta ad ogni istante, dati di particolare importanza nel lavoro di tesi.

5.2 Equazioni del moto

Oltre alla distinzione che compete il termine di controllo, è necessario scegliere le equazioni del moto in base alle semplificazioni che si considerano nella dinamica a cui è soggetto il veicolo spaziale. Solitamente in una missione si può passare da un modello di equazioni all'altro in base alla posizione relativa del veicolo rispetto ad altri corpi celesti. A titolo d'esempio, in una trasferta interplanetaria viene assunto un modello matematico dei due corpi ristretto per le fasi planetocentriche ed eliocentriche, ma nei pressi dell'inizio delle sfere d'influenza dei due pianeti, le interazioni gravitazionali degli ultimi sono comparabili con quelle dovute al Sole, per cui è opportuno impiegare un modello dei 3 corpi ristretto o, nel caso del sistema Terra-Luna-Sole, un modello degli N-corpi ristretto. Un altro esempio riguarda il rendezvous, per il quale si utilizzano le equazioni del problema dei due corpi ristretto finché il veicolo *chaser* non si trova nei pressi del veicolo *target*, dal qual momento si iniziano ad utilizzare le equazioni di Hill (Clohessy-Wiltshire) fino alla fine della missione, perché semplificate e computazionalmente meno onerose. È importante notare come la distinzione del tipo di equazioni va in parallelo con la distinzione tra modello impulsivo e modello continuo: è possibile utilizzare sia un modello continuo che discreto con ogni modello presentato nei paragrafi a venire.

5.2.1 Problema dei due corpi

Si parte ad analizzare il problema dei due corpi, perché è tendenzialmente il modello più semplice e perché la sua generalizzazione, il problema degli N-corpi è stato già riportato nel caso di manovre continue. Il problema dei due corpi descrive l'interazione gravitazionale mutuale di due corpi massivi considerati come punti materiali. In questo modello, molto spesso si assume che la massa di uno dei due corpi (il veicolo spaziale) sia molto più piccola della massa dell'altro corpo, detto corpo principale, attorno al quale il primo orbita. Solitamente, con questa assunzione ulteriore, il modello viene denominato come problema dei due corpi ristretto.

Se la massa del veicolo viene trascurata, anche il suo contributo di forza sul corpo più grande può essere visto come nullo, inoltre, un sistema di riferimento solidale al corpo più grande e non rotante può essere considerato come inerziale, il che permette di poter derivare ogni grandezza in questo sistema di

riferimento senza andare a considerare il moto relativo.

In un modello dei due corpi, come nel modello degli N-corpi, l'assunzione più stringente che spesso porta a imperfezioni ed errori è quella per cui si considerano solo forze gravitazionali, trascurando tutte le altre, compresa la spinta.

Non volendo trascurare le altre forze, che possono essere importanti (specie se derivanti dal sistema propulsivo) il modello dei due corpi può essere espresso con l'equazione non kepleriana dei due corpi:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{\gamma}$$

Dove, come si vede comparandola con l'espressione degli N-corpi scritta in precedenza, \vec{r} è la posizione del corpo secondario rispetto a un sistema di riferimento centrato nel centro di massa del corpo primario. Inoltre $\mu = GM$ è il prodotto tra la costante di gravitazione universale e la massa del corpo più grande e $\vec{\gamma}$ è l'accelerazione dovuta dai propulsori più le accelerazioni di disturbo. Volendo far comparire il vettore di stato, si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{r}} \\ -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\gamma} \end{bmatrix}$$

Queste equazioni del moto sono usate grandemente nei problemi di ottimizzazione delle traiettorie, in particolare quando le orbite sono perturbate e la propulsione è a bassa spinta. La generalizzazione al problema degli N-corpi è stata completamente trattata nella sezione precedente e non verrà qui ripresa. Solitamente le equazioni del moto sono scritte in forma cartesiana o in coordinate cilindriche (a volte anche sferiche), oppure in termini di parametri orbitali classici o equinoziali. I parametri orbitali possono essere ricavati conoscendo la velocità e la posizione del veicolo in un certo punto e cambiano se si imprime un'accelerazione diversa da quella gravitazionale. Trascurando le perturbazioni (che se ci fossero si andrebbero semplicemente a sommare alle forze propulsive), le equazioni del moto in termini di parametri orbitali coincidono con le equazioni perturbative di Gauss:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= 2a^2 \sin \theta \frac{\gamma_r}{n\sqrt{p}} + 2a^2 \frac{p}{r} \frac{\gamma_t}{n\sqrt{p}} \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= p \sin \theta \frac{\gamma_r}{n\sqrt{p}} + p(\cos \theta + \cos E) \frac{\gamma_t}{n\sqrt{p}} \\ \frac{\partial i}{\partial t} &= r \cos(\theta + \omega) \frac{\gamma_w}{n\sqrt{p}} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{p \cos \theta}{e} \frac{\gamma_r}{n\sqrt{p}} + \frac{r+p}{e} \sin \theta \frac{\gamma_t}{n\sqrt{p}} - r \sin(\theta + \omega) \cot i \frac{\gamma_w}{n\sqrt{p}} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \frac{\gamma_w r \sin(\theta + \omega)}{n\sqrt{p} \sin i} \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\sqrt{1+e^2}}{e} \left((p \cos \theta - 2er) \frac{\gamma_r}{n\sqrt{p}} - (r+p) \sin \theta \frac{\gamma_t}{n\sqrt{p}} \right) \end{aligned}$$

Dove a , e , i , Ω , ω , M, p sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'inclinazione, la longitudine del nodo ascendente, l'argomento del periastro, l'anomalia media e semilato retto dell'orbita osculatrice della traiettoria nel punto considerato. n è il *mean motion*, ovvero la velocità angolare attorno al corpo principale e θ è l'anomalia vera (denominata anche ν nel capitolo 3). I parametri γ_i rappresentano le accelerazioni radiali, tangenziali e normali all'orbita.

Il vantaggio di utilizzare queste equazioni apparentemente complesse è che ricavano le variazioni dei parametri orbitali direttamente dalla conoscenza delle accelerazioni, senza necessitare delle variabili fisiche di posizione e velocità. Tuttavia, tali equazioni hanno genericamente molte singolarità che tendono a complicare il tutto. Ad esempio, uno o più dei sei parametri presentati può non essere definibile come spiegato nel capitolo 3. Per ovviare questo problema si possono utilizzare delle parametrizzazioni differenti, come ad esempio i parametri orbitali equinoziali modificati, che tuttavia non sono intuitivi

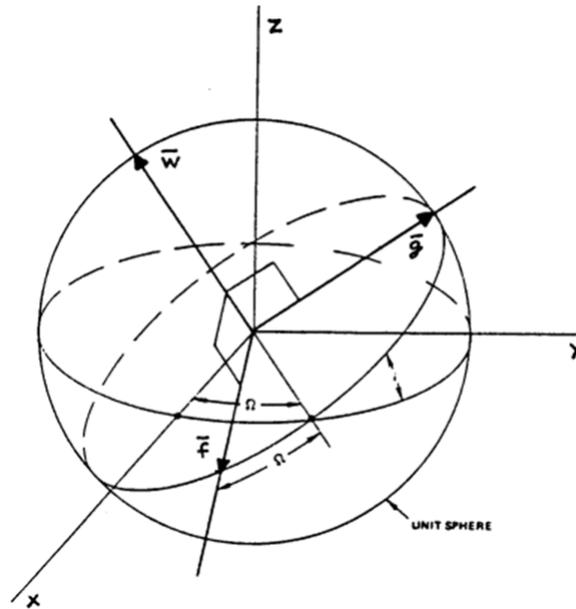


Figura 5.5: Rappresentazione dei vettori rappresentanti gli elementi orbitali equinoziali

come i parametri orbitali classici. Per semplicità non si riportano le equazioni che coinvolgono questi tipi di parametri, che possono essere trovate in [3]. Si fa notare soltanto che non sono difficili da trovare in alcune trattazioni e risultano veramente utili negli studi di trasferte interplanetarie con gravity assists. I parametri orbitali classici e quelli equinoziali sono solo due di molteplici set di parametri che possono essere usati per descrivere il moto di un veicolo spaziale, ognuno dei quali con le rispettive equazioni differenziali. Nello specifico sono stati identificati ventidue gruppi di parametri, più le rispettive modificazioni (parametri di Eulero, funzioni degli elementi orbitali classici, ...). Alcuni di questi sono spiegati molto in dettaglio in [4].

Anche se gli elementi orbitali classici sono spesso usati per il loro intuitivo significato fisico, quasi sempre nel problema di ottimizzazione delle traiettorie vengono impiegati i parametri fisici del veicolo, ovvero la posizione e velocità. I parametri fisici non danno intuitivamente informazioni sull'orbita in esame, a differenza degli elementi orbitali classici, ma è facile estenderli in altre forme, non soffrono di singolarità e presentano delle equazioni molto più semplici. Inoltre, i parametri orbitali classici possono essere calcolati in seconda battuta dai parametri fisici (posizione e velocità) del veicolo. Anche gli elementi equinoziali possono essere facilmente ricavati dai parametri fisici, in quanto possono giovare di alcuni vantaggi in casi particolari e non presentano delle singolarità.

5.2.2 Rendezvous

L'equazione generale del moto nel modello dei due corpi può essere riformulata in maniera diversa in base al tipo di missione che ci si pone di compiere. Una missione degna di nota è il rendezvous di due veicoli spaziali (o tra un veicolo e un asteroide), uno attivo, il chaser, e uno passivo, il target. Il rendezvous finisce quando i due veicoli si trovano a pochi metri di distanza (quindi hanno all'incirca la stessa posizione) con velocità relativa uguale a zero. All'inizio di un rendezvous invece i due veicoli sono spesso molto distanti e con velocità molto differenti. La manovra viene divisa in varie fasi: una prima fase di *phasing* aggiusta la fase relativa dei due corpi dopodiché si inizia a parlare di *proximity operations*, si ha una fase di *far-range rendezvous* in cui i due veicoli vengono posti sulla stessa orbita, una fase di *close-range rendezvous* in cui i due satelliti si avvicinano e una fase di *final approach* che si conclude con

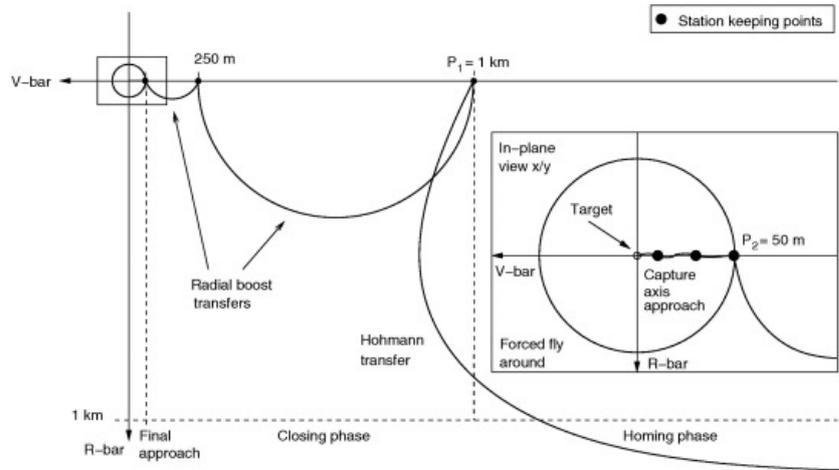


Figura 5.6: rendezvous visto in un sistema di riferimento LVLH centrato nell'oggetto target

la fase finale di *docking o berthing* nel caso in cui i due veicoli debbano unirsi. In questo tipo di missione non è interessante il moto dei singoli veicoli, ma quello relativo ai due, per cui viene scelto un sistema quasi-inerziale fissato nel centro di massa del target (sistema LVLH, Local Vertical Local Horizontal) e sono impiegate le equazioni del moto di Clohessy-Wiltshire, che non sono altro che le stesse equazioni del moto scritte per un sistema di riferimento non inerziale e rotante con velocità angolare pari al mean motion del target e semplificate per orbite circolari e distanze dei due corpi molto minori del semiasse maggiore delle orbite considerate. Esse si possono scrivere come:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} \\ \ddot{z} + n^2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

Tali equazioni sono ovviamente semplificazioni di quelle generali per orbite circolari e distanze piccole, pertanto introducono errori e incongruenze con la realtà, specie se le distanze tra i due corpi supera i dieci chilometri. Tuttavia sono molto utili nelle fasi di *approach*, in quanto possono mostrare in maniera molto intuitiva lo spostamento da una traiettoria di riferimento indotto da impulsi, manovre o perturbazioni.

5.2.3 Libration points

I punti di librazione, detti anche punti di Lagrange, sono essenzialmente dei punti di equilibrio nella meccanica celeste che competono l'interazione di due corpi con masse molto importanti. Un veicolo spaziale può stazionare nei suddetti punti senza consumare propellente, in quanto le due forze di gravità bilanciano quelle apparenti e non è necessaria alcuna spinta per mantenere la posizione. Proprio per questa peculiare caratteristica, i punti lagrangiani sono di interesse per diverse missioni e spesso possono prevedere l'accumulo di numerosi asteroidi al loro interno, come nel caso dei punti lagrangiani equilaterali del sistema Sole-Giove. Per lo studio di una traiettoria verso uno di questi punti non è possibile utilizzare un modello con due corpi perché ci sono almeno due corpi principali che contribuiscono alla forza gravitazionale complessiva. Bisogna quindi considerare il problema degli N-corpi e se il veicolo ha massa trascurabile rispetto agli altri due corpi si può considerare il relativo problema ristretto. Nel caso di punti lagrangiani del sistema Terra-Sole o Terra-Luna o anche Giove-Sole, è molto spesso utilizzato il modello *CR3BP*, ovvero il *Circular Restricted Three-Body Problem* (problema dei tre corpi circolare ristretto). Esso è il modello più semplice che si possa concepire e tratta le orbite dei due corpi principali come circolari, concentriche al loro baricentro e coplanari e la massa del terzo corpo come trascurabile. Molto spesso tuttavia un modello così semplice non è accurato per applicazioni astronomiche.

Le equazioni del moto di questo problema sono:

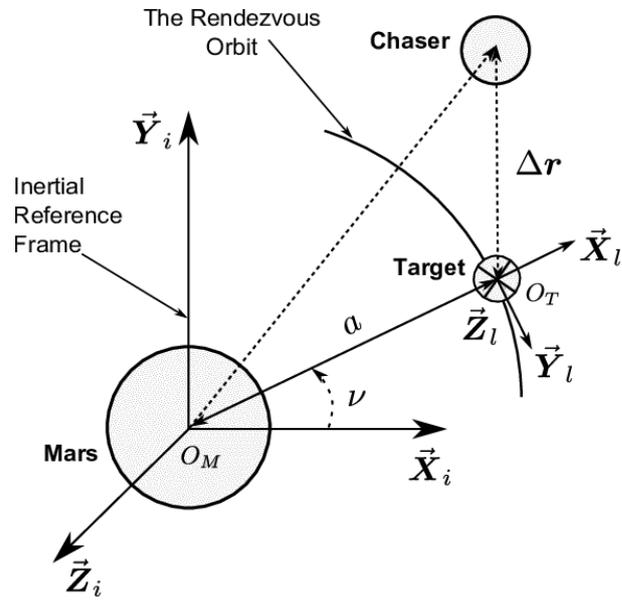


Figura 5.7: Configurazione di rendezvous

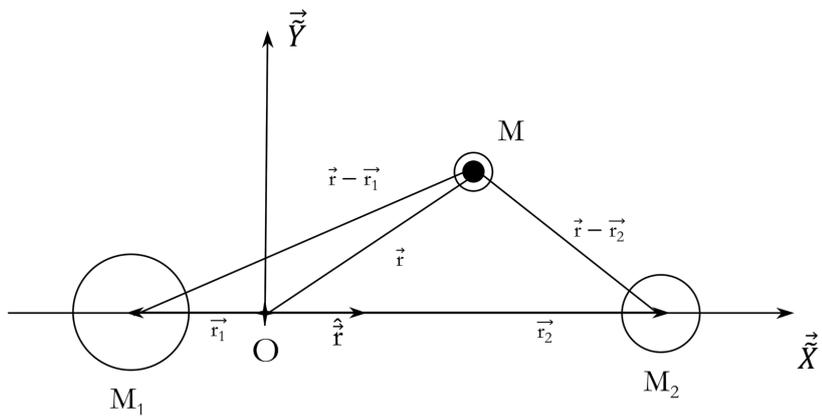


Figura 5.8: Configurazione del problema dei tre corpi ristretto in 3D

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \end{bmatrix}$$

Con:

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}$$

Dove:

$$\mu = \frac{m_2}{m_2 + m_1} \text{ ipotizzando che la massa 2 sia pi\u00f9 piccola}$$

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + (y)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + (y)^2}$$

Ovviamente le coordinate x e y sono normalizzate rispetto alla distanza tra i due corpi principali, r_1 e r_2 denotano le distanze del veicolo dai corpi principali 1 e 2, μ non \u00e8 la costante gravitazionale ma \u00e8 detto parametro di massa del problema.

Il problema dei tre corpi ristretto pu\u00f2 essere esteso al caso non planare aggiungendo la coordinata cartesiana z . Il sistema generale del moto relativo al sistema dei due corpi principali diventa:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} \\ -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\ -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}$$

In un sistema inerziale ci\u00f2 si traduce nella pi\u00f9 generale forma degli N-corpi, scritta in precedenza e riportata per chiarezza:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_{sun}}{r^3} + \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) + \vec{\Gamma}$$

Anche nel caso dei punti lagrangiani questi sono solo alcuni dei modelli possibili, un'altra rappresentazione pi\u00f9 accurata \u00e8 il problema ellittico dei quattro corpi, nel quale si introduce la presenza sia del Sole che della Luna in orbite ellittiche nello stesso piano.

5.2.4 Scelta del set di equazioni

Come detto nel capitolo 2, la missione assume come gi\u00e0 effettuate le manovre che portano il veicolo dalla Terra al punto lagrangiano L2 e da esso al punto di inizio della trasferta eliocentrica, che si trova sull'orbita della Terra in anticipo di un paio di milioni di chilometri (e quindi fuori dalla sfera d'influenza terrestre).

Gli asteroidi che si considerano hanno dimensioni molto ridotte (si riporta che il near-earth asteroid pi\u00f9 grande sia 1036 Ganymed con una dimensione di 38km e che non interseca neppure l'orbita terrestre) e la loro interazione gravitazionale con il veicolo \u00e8 del tutto trascurabile rispetto a quella del Sole. Inoltre tempi di interazione tra i corpi \u00e8 trascurabile nel caso dei flyby (velocit\u00e0 relative relativamente elevate). La traiettoria risulta completamente in campo eliocentrico e nessun'altra interazione \u00e8 presente, per cui \u00e8 possibile utilizzare le equazioni differenziali ordinarie del modello due corpi ristretto, con l'aggiunta del termine noto dato dal sistema propulsivo, non nullo solo nei tratti in cui la spinta \u00e8 non nulla. Si riporta di seguito l'espressione estesa delle equazioni in coordinate sferiche, che sono quelle usate

nell'ottimizzazione.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ -\frac{\mu}{r^2} + r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + r\dot{\phi}^2 \\ \frac{1}{r \cos \phi} (-2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi) \\ \frac{1}{r} (-2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{T_r}{m} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{T_\theta}{m} \\ \frac{1}{r} \frac{T_\phi}{m} \\ \frac{\sqrt{T_r^2 + T_\theta^2 + T_\phi^2}}{c} \end{bmatrix}$$

Dove sono presenti anche contributi apparenti perché il sistema di coordinate sferiche ha la terna cartesiana mobile nello spazio inerziale. Anche in questo caso si è separato il vettore dei controlli, a cui è stato impropriamente aggiunto il termine di portata che è un'equazione caratteristica del sistema propulsivo.

6

Obiettivi di missione

In questo capitolo verrà trattato il secondo macro-step che è necessario seguire per ottimizzare una traiettoria spaziale: la scelta dell'obiettivo da conseguire. Essa si basa sostanzialmente sui requisiti della missione: se è necessario portare una certa massa di payload il più lontano possibile, al più basso costo propulsivo o nel minor tempo possibile, ma anche se è necessario che il fattore di carico (inerziale, termico o di radiazione) sul veicolo sia sempre ragionevole (onde evitare cedimenti strutturali o malfunzionamenti) o che i tempi di propulsione non superino una certa soglia.

Gli obiettivi sono tradotti matematicamente in funzioni obiettivo, ovvero in funzioni (spesso scalari) a più variabili che delineano una quantità importante della missione. Esse sono anche chiamate funzioni costo, non perché rappresentano un costo economico, ma perché rappresentano qualcosa che è difficile ottenere e che dunque se ne vuole minimizzare la quantità. Solitamente nella terminologia del controllo ottimale ci si riferisce a *funzioni costo*, mentre nel linguaggio informatico si parla di *funzioni obiettivo*. Molto spesso, le funzioni costo sono dei parametri fisici sensati, come ad esempio la massa di propellente, il ΔV totale, il tempo di trasferta o l'accelerazione. Tuttavia non è sempre così: si pensi ad esempio quando si vogliono conseguire in parallelo due obiettivi contrastanti (ad esempio si vuole minimizzare il tempo di trasferta e il consumo di propellente), in questo caso il minimo di delle due rispettive funzioni costo non coincidono, per cui sarà necessario scrivere una funzione costo complessiva che annovera i contributi dei singoli obiettivi con opportuni pesi. Sommando un termine rappresentativo di un tempo e uno rappresentativo di una massa non si ottiene assolutamente nulla di fisico.

6.1 Tipi di funzioni obiettivo

Si è detto che le funzioni obiettivo possono essere diverse perché variano da problema a problema. La forma più generale di una funzione obiettivo è la *funzione costo di Bolza*, definita come:

$$J(\vec{x}, \vec{u}, t) = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

Dove t_0 e t_f sono il tempo iniziale e il tempo finale della trasferta. Si vede che in generale una funzione costo può essere composta da un pezzo che è funzione solo delle condizioni finali, detto anche *termine di Mayer* e un pezzo dipendente da tutto il percorso effettuato, detto *termine di Lagrange* (o di costo corrente).

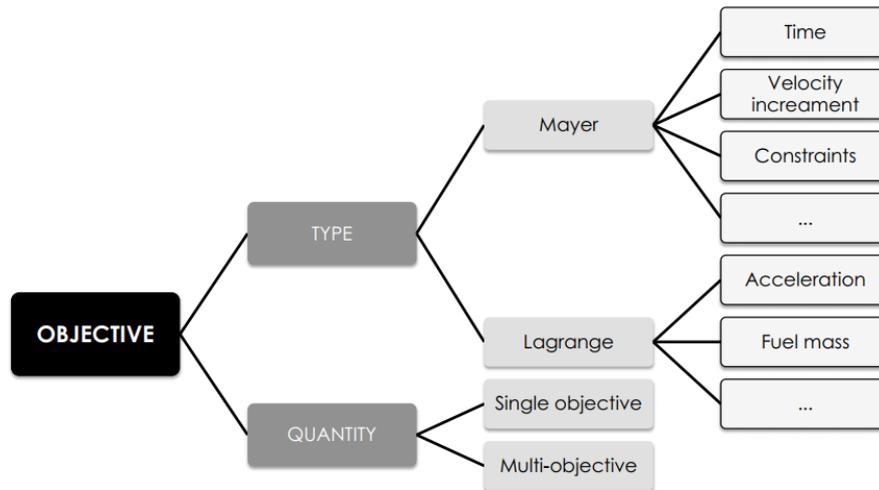


Figura 6.1: Tipi e quantità di obiettivi

Trovare una funzione costo con entrambi i termini non è raro, ma comunque poco frequente. Solitamente è presente solo il termine di Mayer o il termine di Lagrange, dipende da ciò che si vuole ottimizzare. La suddivisione in base al tipo di obiettivo è molto utilizzata, ma non è la sola: è possibile categorizzare una funzione obiettivo anche in base al numero di obiettivi che si vogliono raggiungere e come essi vengono integrati tra loro. Se è presente solo uno obiettivo è possibile che la funzione sia un parametro fisico, se sono diversi è raro che ciò accada. Le due categorizzazioni sono rappresentate intuitivamente in figura 6.1.

Anche se le funzioni obiettivo possono essere molto numerose, per il problema di ottimizzazione di traiettorie spaziali ci si può ricondurre sostanzialmente a due macro-casi: minimizzare il tempo di missione (espresso in forma di Mayer), e minimizzare il controllo del veicolo (espresso in forma di Lagrange).

6.1.1 Funzioni obiettivo di Mayer

Gli obiettivi che ricadono nella prima categoria, sono quelli scrivibili sotto forma di termine di Mayer. Questi sono operativamente delle funzioni delle variabili di stato alla fine della trasferta spaziale.

Tempo

La funzione obiettivo più semplice è il tempo di trasferta. Si può scrivere in maniera del tutto generale che se si vuole minimizzare il tempo, la funzione costo assume la forma:

$$J = t_f$$

Incremento di velocità

L'obiettivo può anche essere quello di minimizzare la "distanza propulsiva", ovvero lo sforzo propulsivo per raggiungere una determinata meta. Tale obiettivo può essere visto come la somma degli incrementi di velocità ΔV dati dai singoli impulsi (nel caso di modello impulsivo), mentre nel caso di modello continuo la forma è leggermente diversa.

$$J = \sum_{i=0}^N |\Delta V_i|$$

Si noti che una funzione obiettivo di questo tipo è strettamente legata al consumo di propellente, in quanto ottenere un ΔV è la causa della differenza tra massa finale e iniziale. È quindi un'ottima funzione obiettivo quando si vuole risparmiare propellente.

Condizioni iniziali e finali

Molto spesso le condizioni iniziali e finali sono viste come condizioni al bordo, o comunque come vincoli della traiettoria. Tuttavia in alcuni casi è possibile trattarle come obiettivi, ad esempio nel caso in cui si vuole percorrere la distanza più grande con una certa quantità di propellente. La forma della funzione costo in questo caso sarà:

$$J = \phi(\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_f))$$

Dove la funzione ϕ è la funzione vincolare.

6.1.2 Funzioni obiettivo di Lagrange

Gli obiettivi appartenenti al secondo tipo sono quelli scritti in forma di Lagrange. Il costo qui è espresso con una funzione integrale sul tempo, la cui funzione integranda è un'opportuna combinazione di variabili di stato e controlli.

Accelerazione

Una funzione molto spesso utilizzata nei viaggi spaziali è data dall'integrale del modulo quadro dell'accelerazione su tutta la traiettoria. Scritta in formule:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \gamma^2 dt$$

L'accelerazione è da intendere come quella fornita dal sistema propulsivo, escludendo i contributi perturbativi. Minimizzare questo integrale corrisponde a minimizzare l'utilizzo della spinta nella trasferta. Tale funzione risulta particolarmente utile quando le variabili di stato vengono trovate come interpolazioni polinomiali, per cui l'accelerazione consiste in una funzione diretta delle variabili di ottimizzazione. Un altro modo di scrivere tale funzione obiettivo è facendone la radice quadrata, in questo caso la funzione costo assume un altro significato: l'incremento di velocità lungo la traiettoria con un modello di propulsione a bassa spinta continuo:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} dt$$

Dove ovviamente γ_i è l'accelerazione lungo l'asse i .

In alcuni lavori di ottimizzazione tale funzione è stata equivalentemente scritta come:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt$$

Dove T e m sono rispettivamente il modulo della spinta e la massa del veicolo spaziale.

Nel caso in cui la velocità efficace di scarico sia costante ($c = \text{cost}$), la spinta è proporzionale alla portata in massa:

$$T = \dot{m}c \Rightarrow T \propto \dot{m}$$

E considerando una massa media sulla trasferta, la funzione obiettivo, essendo un'integrale sulla durata totale, è proporzionale a:

$$J \propto \frac{m_f - m_0}{m_{avg}}$$

se la massa iniziale è fissa, tralasciando il denominatore, la funzione obiettivo è proporzionale alla massa finale del veicolo, che è una funzione obiettivo nella forma di Mayer.

massa di propellente

La massa di propellente è funzione dell'energia richiesta dalla trasferta. Ci sono diverse funzioni obiettivo che riguardano la massa di propellente, sia nella forma di Mayer sia nella forma di Lagrange, per l'ultimo caso un esempio è:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} m_p dt$$

dove m_p è la massa del propellente nella trasferta. In una funzione del genere è presente una dipendenza con il tipo di percorso e con il tempo impiegato per percorrerlo. Se si utilizzasse la forma di Mayer (es. $J = m_f$) questa dipendenza andrebbe persa, ogni traiettoria ottimale avrebbe lo stesso valore di funzione costo, a prescindere dal tempo impiegato o dal percorso effettuato.

6.1.3 Altre funzioni obiettivo

Gli esempi presentati nelle sottosezioni precedenti rappresentano solo le funzioni costo più comunemente utilizzate nell'ottimizzazione delle traiettorie spaziali, ma non sono le Sole. Ad esempio, funzioni più complesse sono impiegate per ottenere delle traiettorie più regolari, per gestire costellazioni o sciami di satelliti (dove è necessario includere nella funzione obiettivo collisioni, lunghezza del percorso, tempo di trasferta e propellente consumato).

6.2 Scalarizzazione della funzione obiettivo

Le funzioni obiettivo vengono anche categorizzate a seconda del numero di obiettivi. Per quanto riguarda le funzioni a obiettivo singolo, esse utilizzano un solo criterio per raggiungere il risultato richiesto, mentre le funzioni multi-obiettivo cercano generalmente un trade-off tra diversi criteri, molto spesso contrastanti. È possibile in questi casi trovare delle funzioni di ottimo paretiane, ovvero soluzioni in cui non si può migliorare una condizione senza peggiorarne altre. In questi casi non ci sono delle soluzioni uniche per tutti gli obiettivi.

Il concetto che sta dietro a questi trade-off è simile all'incremento della funzione costo che viene fatta nel caso di ottimizzazione vincolata (Vedi appendice A): i vincoli vengono aggiunti alla funzione obiettivo e moltiplicati per un coefficiente ponderante, ottenendo una *funzione aumentata*. Anche in questo caso le varie funzioni obiettivo vengono *scalarizzate* in un'unica funzione obiettivo sommandole con determinati pesi.

La scalarizzazione delle funzioni obiettivo è il processo più difficile nella creazione di un'opportuna funzione obiettivo totale, in quanto ci sono infinite combinazioni dei pesi delle singole funzioni.

La scrittura di una funzione obiettivo generale che presenta sia un termine di Mayer che un termine di Lagrange è la seguente:

$$J(\vec{x}, \vec{u}, t) = h(\vec{x}(t_f), t_f) + \alpha \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

Dove α rappresenta il peso che determina l'importanza relativa tra i due termini. Solitamente α viene scelto per portare i due termini sullo stesso ordine di grandezza (che spesso differiscono e anche di molto) e scegliere anche quale debba avere più importanza dell'altro.

Nel caso in cui si abbiano diverse funzioni obiettivo nella forma di Mayer e nella forma di Lagrange, il processo di scalarizzazione diventa più operoso. Nel caso in cui le funzioni non vengano pesate, si può scrivere:

$$J = \sum_{i=1}^n J_i$$

Per cui le funzioni vengono semplicemente sommate tra loro. Si possono anche sommare con pesi:

$$J = \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i$$

O utilizzando dei pesi per normalizzare le funzioni:

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{J_i}{\alpha_i}$$

Oppure, nel caso in cui le funzioni abbiano segni diversi, si può utilizzare un metodo di quadratura come:

$$J = \sum_{i=1}^n J_i^2$$

Che può essere anch'esso pesato.

Per scegliere i pesi delle singole funzioni non esiste un unico metodo deterministico. Molte ricerche sono state fatte per ottenere qualche criterio specifico, come quello per scegliere il massimo step temporale possibile e via dicendo.

6.3 Formulazione del problema di ottimizzazione

In generale il problema di ottimizzazione di una traiettoria prevede di trovare la traiettoria per un numero n di fasi della missione, nella trattazione verrà considerato il problema per una fase generica. Il problema ha un numero $n_x + n_u$ di variabili, definito come la somma del numero di componenti del vettore di stato e del vettore dei controlli.

Tipicamente la dinamica del sistema viene definita da un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, scritte in forma esplicita come:

$$\dot{\vec{x}}(t) = f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}, t)$$

Dove \vec{p} è il numero di parametri costanti, ovvero non tempo-dipendenti.

Le condizioni iniziali e finali del problema sono espresse come:

$$\psi_{0,t} \leq \psi(\vec{x}(t_0), \vec{u}(t_0), \vec{p}, t_0) \leq \psi_{0,u}$$

$$\psi_{f,t} \leq \psi(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), \vec{p}, t_f) \leq \psi_{f,u}$$

Il sistema deve rispettare alcune espressioni vincolari su tutto il percorso, del tipo:

$$g_l \leq g(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{p}, t) \leq g_u$$

Le più semplici espressioni vincolari limitano il vettore dei controlli e il vettore di stato a stare in un determinato intervallo. In generale i vincoli possono essere di disuguaglianza o di uguaglianza (ponendo uguali l'estremo inferiore e quello superiore).

Lo scopo generale del problema è determinare $\vec{u}(t)$ tale per cui si minimizza la funzione di costo, che funge da indice di performance:

$$J = \phi(\vec{x}(t_f), t_f)$$

Che per semplicità ha la forma di Mayer.

Tipicamente, un problema di controllo ottimale è diviso in fasi, definendo $p \in [1, \dots, P]$ fasi collegate tra di loro, è possibile riformulare il problema come segue. Si deve trovare il controllo ottimale che ottimizzi la funzione costo:

$$J = \sum_{k=1}^P J^{(k)}$$

Dove $J^{(k)}$ è la funzione costo di ogni fase che ha la forma di Mayer per semplicità come nel problema di ottimizzazione a una sola fase.

Il tutto rispettando le equazioni (vincolo) della dinamica:

$$\dot{\vec{x}}^{(k)}(t) = f(\vec{x}^{(k)}(t), \vec{u}^{(k)}(t), \vec{p}^{(k)}, t)$$

Le condizioni al contorno:

$$\psi_{0,i}^{(k)} \leq \psi^{(k)}(\vec{x}^{(k)}(t_0^{(k)}), \vec{u}^{(k)}(t_0^{(k)}), \vec{p}^{(k)}, t_0^{(k)}) \leq \psi_{0,u}^{(k)}$$

$$\psi_{f,i}^{(k)} \leq \psi^{(k)}(\vec{x}^{(k)}(t_f^{(k)}), \vec{u}^{(k)}(t_f^{(k)}), \vec{p}^{(k)}, t_f^{(k)}) \leq \psi_{f,u}^{(k)}$$

I vincoli di percorso:

$$gl^{(k)} \leq g^{(k)}(\vec{x}^{(k)}(t), \vec{u}^{(k)}(t), \vec{p}^{(k)}, t^{(k)}) \leq g_u^{(k)}$$

E i vincoli di collegamento:

$$L_i^{(s)} \leq L^{(l_s)}(\vec{x}^{(l_s)}(t_f^{(l_s)}), \vec{u}^{(l_s)}(t_f^{(l_s)}), \vec{p}^{(l_s)}, t_f^{(l_s)}, \vec{x}^{(r_s)}(t_f^{(r_s)}), \vec{u}^{(r_s)}(t_f^{(r_s)}), \vec{p}^{(r_s)}, t_f^{(r_s)})$$

Dove il parametro s è il numero di coppie di fasi che devono essere collegate, r_s e l_s sono le fasi destra e sinistra di una coppia, il vincolo di collegamento è valido solo se queste due fasi non coincidono.

6.4 Scelta della funzione obiettivo

Nel caso di studio della tesi viene preferita una formulazione della funzione obiettivo nella forma di Mayer, più facile da implementare. I tempi dei flyby e di partenza sono stati fissati definendo la missione, per cui essi fungono da vincoli. L'accelerazione e dunque l'intensità del controllo lungo la traiettoria non costituiscono un problema visto l'entità della spinta rispetto alla grande massa del veicolo.

La funzione da ottimizzare che è stata scelta è dunque la massa finale del veicolo (carico utile), che deve essere massimizzata.

$$J = m_f$$

Nel caso in esame si ha una velocità efficace di scarico e una massa iniziale costanti, per cui la massa finale risulta univocamente legata alla distanza propulsiva percorsa, dunque al ΔV della traiettoria, che viene ovviamente minimizzata. Essendo una funzione scalare e singola, non è necessario scalarizzarla.

Le condizioni al contorno, nel caso in esame sono:

- $r_0 = R_{earth}(t_0)$ per la partenza;
- $V_0 = V_{earth}(t(0))$ per la partenza;
- $r_i = r_T(t_i)$ per il flyby i -esimo;

a cui si aggiungono le condizioni di congruenza dei vari archi, che fungono anch'esse da condizioni al contorno perché si implementa un multi-shooting dove ogni arco rappresenta un problema alle condizioni al bordo. Esse sono:

- $r_{i+} = r_{i+1-}$;
- $v_{i+} = v_{i+1-}$;
- $t_{i+} = t_{i+1-}$;

7

Approcci, metodi e tecniche di ottimizzazione

Si parla di approcci di risoluzione solo nel momento in cui il problema e il modello con cui si rappresenta la dinamica sono ben conosciuti e definiti. Si deve avere un framework, una funzione da minimizzare, dei vincoli da rispettare, delle condizioni iniziali e finali.

In questo capitolo si analizzeranno gli aspetti risolutivi del processo di ottimizzazione delle traiettorie, quindi come è effettivamente possibile trovare il controllo ottimale che minimizzi la funzione obiettivo rispettando gli obiettivi e le equazioni del moto.

Prima di entrare nel cuore degli approcci di risoluzione, è conveniente distinguere due termini che solitamente vengono utilizzati come sinonimi: *ottimizzazione di traiettorie* e *controllo ottimale*. Si parla di ottimizzazione di traiettorie quando gli input del sistema sono parametri statici ed è necessario trovare quelli che ottimizzano la funzione obiettivo, mentre si parla di controllo ottimale quando questi input sono delle funzioni ed è necessario trovarle in modo che ottimizzino la funzione obiettivo (trattazione analitica).

Dai capitoli precedenti sono state ricavate tutte le informazioni necessarie per formulare in maniera corretta e completa il problema di ottimizzazione. Si è definita la funzione obiettivo, le equazioni della dinamica e alcuni vincoli. In particolare, in base al punto di inizio e di fine missione si possono ricavare delle condizioni al contorno, mentre da limiti fisici, di percorso o di tempo possono essere scritti dei vincoli (es. spinta compresa tra un valore minimo e un valore massimo, non ha senso andare a cercare soluzioni che richiedono livelli di spinta superiori a quelli ottenibili). La forma generale di un vincolo è la seguente:

$$\phi_l < \phi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) < \phi_u$$

In generale, come si può vedere matematicamente nell'appendice A, i vincoli possono essere di uguaglianza o di disuguaglianza. La formula precedente è generale perché se $\phi_l = \phi_u$ il vincolo è di uguaglianza, altrimenti di disuguaglianza. Inoltre se la funzione ϕ dipende dal tempo, dal vettore di stato e dal vettore dei controlli di ogni punto della traiettoria, viene detto che il vincolo è di *path*, di percorso. Se invece ϕ è una funzione delle Sole condizioni iniziali o finali, si parla di condizioni al bordo.

La formulazione del problema, scritta già nel capitolo precedente, può essere schematizzata come in figura 7.1: si vuole trovare l'evoluzione del controllo che minimizza una certa funzione costo lungo una traiettoria che segue delle leggi della dinamica, con determinate condizioni iniziali e finali e rispettando una serie di vincoli di percorso.

In generale esistono due tipi di approcci di risoluzione dei problemi di ottimizzazione: l'approccio analitico e l'approccio numerico. Gli approcci numerici si suddividono in metodi diretti e indiretti, nei quali possono essere utilizzate diverse tecniche. Il tutto è rappresentato in figura 7.5.

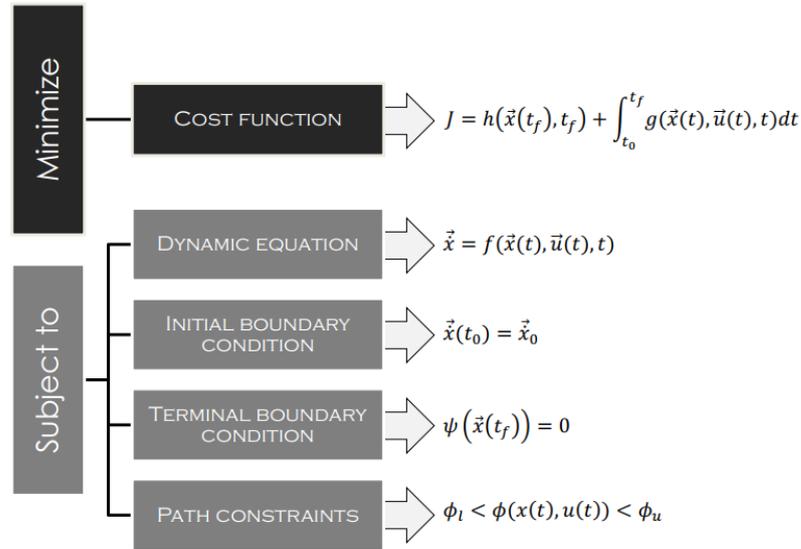


Figura 7.1: Definizione del problema

Prima di andare ad analizzare nel dettaglio approcci, metodi, tecniche e algoritmi è necessario presentare alcune nozioni della teoria del controllo ottimale e il principio di Pontryagin, sui quali si basano alcune tipologie di metodi.

7.1 Teoria del controllo ottimale

Si considera dapprima un caso semplice, di ottimizzazione senza vincoli, dopodiché si aumenterà la difficoltà introducendo vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza.

Bisogna trovare l'andamento temporale del vettore dei controlli $\vec{u}(t)$ tale per cui sia minima la funzione $J = \phi(\vec{x}(t_f), t_f) = m_f$ soggetto alle equazioni della dinamica:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$$

E alle condizioni al contorno:

$$\vec{\psi}(\vec{x}(t_f), t_f) = 0$$

Dove si considerano date le condizioni iniziali $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ mentre il tempo finale può essere libero. Si noti che le equazioni della dinamica non sono altro che dei vincoli di percorso (da mantenere per tutta la traiettoria) in forma di uguaglianza, mentre le condizioni al contorno sono dei vincoli in punti discreti della traiettoria (iniziale e finale).

Viene definita una funzione lagrangiana aumentata, scelta come segue:

$$\hat{J} = [\phi + \vec{\nu}^T \vec{\psi}]_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \vec{\lambda}^T(t) [\vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) - \dot{\vec{x}}] dt$$

Si noti che i moltiplicatori di Lagrange per i vincoli discreti (condizioni al bordo) non sono tempo-dipendenti, mentre quelli all'interno dell'integrale, che competono alle equazioni della dinamica, hanno una dipendenza temporale e sono delle vere e proprie variabili aggiuntive.

È conveniente, per la trattazione che segue, introdurre due funzioni:

- Funzione Hamiltoniana:

$$H = \vec{\lambda}^T(t) \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$$

- Funzione Ausiliaria:

$$\Phi = \phi + \vec{v}^T \vec{\psi}$$

Da cui è possibile riscrivere la funzione di Lagrange aumentata come:

$$J = \Phi_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} H(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt - [\vec{\lambda}^T \vec{x}]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \vec{\lambda}^T(t) \vec{x}(t) dt$$

Dove il secondo termine dell'integrale è stato integrato per parti. Le condizioni necessarie per l'ottimo, sono ottenibili ponendo il gradiente della funzione di Lagrange aumentata pari a zero. Nel caso discreto di un intervallo $[j-1, j]$, è necessario porre $\Delta \hat{J} = 0$. Scrivendo per convenzione un + per l'estremo destro dell'intervallo e - per quello sinistro, si trova che:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{J} = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \Delta t_{(j-1)_+} + \left(-H_{j_-} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_{j_-}} \right) \Delta t_{j_-} \\ & + \left(\vec{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \nabla_{x, (j-1)_+} \Phi \right) \cdot \Delta \vec{x}_{(j-1)_+} + \left(\vec{\lambda}_{j_-}^T + \nabla_{x, j_-} \Phi \right) \cdot \Delta \vec{x}_{j_-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left[\left(\nabla_x H + \dot{\vec{\lambda}} \right) \Delta \vec{x} + \nabla_u H \Delta \vec{u} \right] dt \end{aligned}$$

Da questa espressione è possibile ricavare:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} &= -\nabla_x H \\ 0 &= \nabla_u H \\ \vec{x} &= \nabla_{\lambda} H \end{aligned}$$

Dove si può notare che l'ultima equazione non è che una manipolazione delle equazioni della dinamica, in quanto l'andamento delle variabili di stato viene effettivamente ottenuto integrando numericamente queste equazioni una volta ottenuto il valore del vettore dei controlli. Il primo set di equazioni viene detto set delle equazioni aggiunte, perché riguardano le variabili di *co-state* (anche dette variabili aggiunte), mentre il secondo set di equazioni viene detto set di equazioni del controllo.

Oltre a quelli di stato, ci sono anche altri parametri tempo-indipendenti che è necessario trovare, per i quali bisogna dare delle equazioni aggiuntive, tra cui, le condizioni di trasversalità (*transversality conditions*). Esse sono le condizioni che riguardano l'orizzonte temporale che si considera, nel caso in cui il tempo o la posizione iniziale o finale siano considerati nell'ottimizzazione. Possono essere di vario tipo in base al tipo di condizione al bordo:

- Se si vuole fissare x_f e trovare il tempo finale come parametro di ottimizzazione, si deve imporre anche $\frac{\partial \hat{J}}{\partial t_f} = 0$, perché se fosse diverso da zero un aumento o una diminuzione di t_f porterebbe a una riduzione ulteriore di \hat{J} , per cui il punto considerato non sarebbe di minimo.:

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial t_f} = \Phi_t|_{t=t_f} + H(\vec{x}(t_f), \vec{u}(t_f), t_f) - \frac{\partial}{\partial t_f} (\vec{\lambda}^T(t_f) \vec{x}(t_f)) + \frac{\partial}{\partial t_f} (\vec{\lambda}^T(t_0) \vec{x}(t_0)) + (\vec{\lambda}^T(t) \vec{x})_{t_f} = 0$$

Da cui risolvendo e ricordando che $\vec{x}(t_f)$ è stato fissato (quindi è costante e la sua derivata è nulla) si ricava:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \right)_{t=t_f} = 0$$

- Se invece è il tempo finale ad essere fissato e si vuole arrivare nel punto $x(t_f)$ che minimizza la funzione di Lagrange aumentata, si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial \vec{x}_i(t_f)} = \nabla_x \hat{J}|_{t_f} = \nabla_x \Phi|_{t_f} - \vec{\lambda}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\nabla_x H|_{t_f} + \dot{\vec{\lambda}}) dt = 0$$

Da cui, sostituendo l'equazione vettoriale delle variabili aggiunte:

$$\nabla_x \Phi |_{t_f} - \vec{\lambda}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (-\vec{\lambda} + \vec{\lambda}) dt = 0$$

Per cui si trova:

$$\nabla_x \Phi |_{t_f} - \vec{\lambda}(t_f) = 0$$

- In generale, se ciò che è fissato è una funzione temporale che lega la posizione finale al tempo finale, del tipo $\vec{x}_f = \vec{\varphi}(t_f)$, la condizione di trasversalità che si ottiene è:

$$H(t_f, \vec{x}_f, \vec{u}_f, \vec{\lambda}_f) = \vec{\lambda}^T(t_f) \vec{\varphi}(t_f)$$

Di cui si tralascia la dimostrazione.

- Se si fissa il punto iniziale della traiettoria ma non il tempo di partenza, è possibile considerare anche t_0 come parametro di ottimizzazione, e seguendo il procedimento del primo punto si arriva ad un'espressione del tipo:

$$0 = \vec{\lambda}(t_0)$$

7.1.1 Principio di Pontryagin

Ciò che è stato descritto non è altro che l'applicazione del principio del massimo di Pontryagin. Il principio afferma in generale che, per minimizzare un funzionale F soggetto a dei vincoli di uguaglianza $\vec{x} = f$, è possibile definire un vettore dei controlli ammissibile $\vec{u}(t)$ che porta da una condizione (t_0, \vec{x}_0) a una (t_f, \vec{x}_f) percorrendo la traiettoria $\vec{x}(t)$, in modo che esista un vettore $\vec{p}(t)$ e uno scalare p_0 tale per cui:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \nabla_p H \\ \dot{\vec{p}} &= -\nabla_x H \end{aligned}$$

E tutti i vincoli siano stati soddisfatti. H è l'Hamiltoniana $H = \sum_{i=0}^n p_i f_i$ con $p_0 = 1$. In sostanza tale principio consiste nel sistema di equazioni algebriche dato dalle equazioni aggiunte, del controllo e della dinamica, con condizioni al contorno contenute nelle equazioni di trasversalità.

7.1.2 Generalizzazione del problema con vincoli di uguaglianza

Un caso più generale è quello di ottimizzazione con vincoli algebrici sul percorso con relazioni di uguaglianza. Essi sono esprimibili nella forma:

$$0 = \vec{g}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

Che si aggiungono alle condizioni al contorno $\vec{\psi}$. In questo caso ci sono diverse possibilità:

1. Se la matrice $\nabla_u \vec{g}$ ha rango massimo, allora il procedimento descritto nella trattazione precedente è valido con la condizione di definire la matrice Hamiltoniana come:

$$H = \vec{\lambda}^T \vec{f} + \vec{\mu}^T \vec{g}$$

Con $\vec{\mu}$ vettore dei moltiplicatori di Lagrange della funzione vincolo. Ciò porta alla modifica anche del set di equazioni aggiunte, in quanto i moltiplicatori di Lagrange saranno di più.

2. Se la matrice $\nabla_u \vec{g}$ non ha rango massimo, allora è possibile differenziare le equazioni vincolari come segue:

$$0 = (\nabla_x \vec{g}) \vec{x} + (\nabla_u \vec{g}) \vec{u} + \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right) = \vec{g}'$$

Si è ottenuto in questo caso un nuovo set di equazioni vincolari denominato \vec{g}' , che è matematicamente equivalente al vincolo iniziale. Si ridefinisce l'Hamiltoniana sostituendo \vec{g}' a \vec{g} e si procede come in precedenza. Se il rango di $\nabla_u \vec{g}'$ è non massimo, si ripete la procedura di differenziazione finché non si trova una matrice di rango massimo, e si modifica l'Hamiltoniana di conseguenza.

Archi singolari

Tutto il discorso vale quando l'equazione $\nabla_u H = 0$ riesce a dare una soluzione per il vettore dei controlli, ovvero se esiste una $\vec{u}(t)$ tale per cui l'Hamiltoniana risulta veramente minimizzata. Ciò non è vero quando la matrice delle derivate seconde H_{uu} è singolare, ovvero quando l'Hamiltoniana risulta lineare rispetto ad uno dei controlli vincolari, per cui non è possibile dire che si è in presenza di un vero minimo. In tal caso è necessario imporre condizioni sulle derivate successive di g , come spiegato in precedenza finché non si arriva ad una matrice non singolare. In particolare è possibile dimostrare che a tal scopo si deve derivare un numero pari di volte. La metà del numero di derivazione è detto ordine di singolarità dell'arco.

7.1.3 Generalizzazione del problema con vincoli di disuguaglianza

Nel caso in cui i vincoli siano di disuguaglianza, si fa la divisione tra vincoli attivi e vincoli non attivi. In un generico arco si considerano solo i vincoli attivi come semplici vincoli di uguaglianza. La difficoltà sta nel cercare gli archi dove questi vincoli risultano attivi e modificare la formulazione di conseguenza. Il dominio della traiettoria risulterà dunque diviso in archi vincolati e archi liberi. Le complicazioni riguardano il numero di archi vincolati, che non è noto a priori, i punti in cui i vincoli si attivano, anch'essi non noti e la discontinuità su questi punti del vettore dei controlli e dei moltiplicatori di Lagrange.

7.1.4 Ulteriori osservazioni sulla teoria del controllo ottimale

Vengono qui riportati delle utili osservazioni riguardo la teoria:

- La legge di controllo è indipendente dal massimo (o minimo) della funzione obiettivo J , che compare nelle condizioni al bordo;
- Quando si assegna una variabile in un estremo, la variabile aggiunta corrispondente è libera nell'estremo considerato;
- Quando una variabile non compare nelle condizioni al bordo ad un estremo, la variabile aggiunta risulta nulla nel punto considerato;
- Quando una variabile è libera e continua in un punto qualsiasi, anche la variabile aggiunta risulta continua;
- Quando una variabile è continua e assegnata in un punto qualsiasi, la corrispondente variabile aggiunta è discontinua e libera nello stesso;
- Se il tempo ad un estremo è libero, l'Hamiltoniana è nulla in quel punto;
- Se il tempo ad un estremo è assegnato, l'Hamiltoniana risulta libera in quel punto;
- Se un punto qualsiasi è continuo e libero, l'Hamiltoniana è anch'essa continua e libera;
- Quando un punto qualsiasi ha il tempo assegnato, l'Hamiltoniana presenta una discontinuità libera in quel punto;

7.2 Approcci di risoluzione

7.2.1 Approcci analitici

L'approccio analitico consiste nel trovare una soluzione analitica per la traiettoria ottimale. Ovviamente una soluzione analitica è sempre desiderabile, in quanto non scomoda potenza computazionale per risolvere il problema e perché si tratta di soluzioni esatte, prive di errori. Solitamente tuttavia tali soluzioni non esistono per via della complessità del problema, ma sono ottenibili solo in casi molto particolari e semplici (ad esempio nel caso di aumento del semiasse maggiore con bassa spinta) e molto spesso senza che si considerino gli effetti perturbativi. Per missioni anche solo leggermente più complesse questo tipo di approccio non è applicabile. La complessità che la risoluzione analitica non riesce a superare sono di

tipo matematico (del modello della dinamica) o riguardano la complessità delle funzioni obiettivo. Un esempio di una soluzione analitica riguarda la manovra di Hohmann impulsiva, il risultato è esatto ma per un problema estremamente semplice. Un esempio sul continuo riguarda la manovra di Edelbaum, che richiede molte ipotesi molto particolari e pesanti da mantenere in un caso leggermente più generale. Nel caso di dominio continuo, generalmente il processo di ottimizzazione consiste nell'applicazione della teoria del controllo ottimale e del principio di Pontryagin, come per i metodi numerici indiretti. Nel processo la presenza delle variabili aggiunte complica ulteriormente il problema, che diventa difficile da risolvere analiticamente.

7.2.2 Approcci numerici

Gli approcci numerici sono quelli utilizzati praticamente in ogni missione e quelli per cui è stata fatta un'estesa attività di ricerca e sviluppo. A grandi linee si distinguono due grandi categorie di metodi: Metodi diretti e metodi indiretti, di cui si parlerà esaustivamente nelle sezioni successive. In figura 7.4 si può osservare la suddivisione.

7.3 Algoritmi di risoluzione

Gli algoritmi di risoluzione consistono nella programmazione che permette di ottenere numericamente ciò che si vuole ottenere, è la parte più operativa e per questo viene presentata per prima. A parte per gli approcci analitici, per i quali non è necessaria alcuna iterazione per ottenere la soluzione, che deriva direttamente dal problema e risulta esatta, gli approcci numerici hanno la necessità di effettuare anche migliaia di iterazioni seguendo, appunto determinati algoritmi.

Alla base di un metodo di risoluzione per problemi di controllo ottimale, sia indiretto che diretto, esistono tre pilastri:

1. Un algoritmo per risolvere equazioni differenziali e integrare funzioni;
2. Un algoritmo per risolvere sistemi non lineari di equazioni algebriche;
3. Un algoritmo di risoluzione per problemi di ottimizzazione non lineari.

In particolare, in un metodo indiretto, la soluzione numerica delle equazioni differenziali è combinata alla risoluzione di sistemi non lineari di equazioni algebriche derivato da un problema alle condizioni al bordo, mentre in un metodo diretto, la soluzione del problema è associata alla programmazione e all'ottimizzazione non lineare.

In questa sezione si descriveranno i tre pilastri sopraelencati, in modo da comprendere nella sezione successiva al meglio la distinzione tra metodi diretti e metodi indiretti. In particolare ci si soffermerà sull'integrazione delle equazioni differenziali e sul metodo di Newton, che sono la base dei metodi indiretti utilizzati nella tesi.

7.3.1 Risoluzione di equazioni differenziali

Si consideri un problema ai valori iniziali del tipo:

$$\dot{x} = f(x(t), t)$$

con $x(t_i) = x_i$. Si consideri un intervallo temporale $[t_i, t_{i+1}]$ sulla quale si vuole trovare una soluzione. Integrando si può ottenere:

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x(t'), t') dt'$$

Numericamente questa espressione può essere risolta in diversi modi. Qui verranno riportate solo i metodi di *time marching*, utilizzati nei metodi indiretti di impiego nel lavoro di tesi. La soluzione dell'equazione differenziale ad ogni step t_k è ottenuta sequenzialmente dalle informazioni della soluzione ai passi precedenti e quello attuale. In base al numero e al tipo di step precedenti che servono per determinare il

valore dello step successivo, questi metodi si dividono in *multiple-step* e *multiple-stage*.

Nella prima categoria la soluzione si ottiene da un numero predefinito di step precedenti. Il più semplice metodo multi-step è il metodo di Eulero, della forma esplicita:

$$x_{k+1} = x_k + h_k[f_k]$$

o implicita:

$$x_{k+1} = x_k + h_k[f_{k+1}]$$

Altri metodi più complessi e accurati utilizzano più di uno step temporale nel calcolo. In particolare nell'algoritmo utilizzato si implementa l'algoritmo di Adams-Moulton a passo e ordine variabile. Per ulteriori dettagli a riguardo si riporta a [10]. Fino al quarto ordine le espressioni implementate sono:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \\ y_{n+2} &= y_{n+1} + h\left(\frac{5}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n)\right) \\ y_{n+3} &= y_{n+2} + h\left(\frac{9}{24}f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{19}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{5}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{24}f(t_n, y_n)\right) \\ y_{n+4} &= y_{n+3} + h\left(\frac{251}{720}f(t_{n+4}, y_{n+4}) + \frac{646}{720}f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \frac{264}{720}f(t_{n+2}, y_{n+2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{106}{720}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{19}{720}f(t_n, y_n)\right) \end{aligned}$$

Nella seconda categoria, si considerano dei sotto-intervalli $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, l'integrale complessivo può essere in questo modo approssimato in quadratura sui sotto-intervalli utilizzando il metodo di quadratura più appropriato, da un semplice metodo dei trapezi al metodo di Cavalieri-Simpson.

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x(s), s)ds \simeq h_i \sum_{j=1}^K \beta_j f(x_j, \tau_j)$$

In questo metodo tuttavia serve conoscere i valori intermedi della funzione ad ogni intervallo, questi valori possono essere ottenuti come:

$$x(\tau_j) = x(t_i) + h_i \sum_{l=1}^K \gamma_{jl} f(x_l, \tau_l)$$

dove γ è un coefficiente dettato dal metodo. Anche in questo caso esistono diversi metodi con diverse quadrature, che in generale portano ai metodi di Runge-Kutta di ordine K. Per ulteriori dettagli anche qui si rimanda a [10].

Nel caso generico in cui la funzione obiettivo è una funzione di Bolza, il termine integrale dovrà essere anch'esso discretizzato. La funzione obiettivo, in particolare, dovrà essere discretizzata utilizzando lo stesso metodo che è stato utilizzato per le equazioni del moto per ragioni di coerenza. Ogni funzione di Bolza può essere, così, convertita in una funzione di Mayer, aggiungendo lo stato x_{n+1} e la rispettiva equazione differenziale:

$$\dot{x}_{n+1} = L(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t, \vec{p})$$

con la condizione iniziale $x_{n+1}(t_0) = 0$. La funzione di Mayer ottenuta sarà del tipo:

$$J = \Phi(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{x}(t_f), t_f, \vec{p}) + x_{n+1}(t_f)$$

Traduzione del problema del controllo ottimale in algoritmi (Metodi indiretti)

La teoria del controllo ottimale si può trasformare in un problema di programmazione, in particolare non si discretizza la traiettoria, ma la soluzione per punti è frutto dell'integrazione numerica delle condizioni necessarie dell'ottimo. Viene riportato il flusso logico che vale per i metodi indiretti, quelli impiegati nel lavoro di tesi. In particolare, per semplicità si riporta l'implementazione con il metodo di Eulero esplicito a passo fisso, quando nella realtà, si ricorda, verrà implementato un algoritmo di Adams-Moulton a passo e ordine variabili.

Innanzitutto viene definita una variabile complessiva:

$$\vec{y} = [u_0, x_1, u_1, x_2, \dots, \dots, x_M, u_M]$$

Come i valori del controllo e delle variabili di stato valutate agli istanti temporali $t_0, t_1, t_2, \dots, t_M$. Il passo temporale, in generale variabile, viene in questo caso considerato costante e pari a $h = \frac{t_f}{M}$. La generica derivata al punto k-esimo è valutabile in modo discreto come:

$$\vec{x} = \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}}{h}$$

Sostituendo questa approssimazione nelle equazioni della dinamica, si trova un sistema non lineare discreto del tipo:

$$c_k(\vec{y}) = \vec{x}_k - \vec{x}_{k-1} - h\vec{f}(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_{k-1}) = 0$$

Per ogni k da 1 a M.

La funzione lagrangiana aumentata è scrivibile come:

$$L(\vec{y}, \vec{\lambda}) = \phi(\vec{x}_M) - \sum_{k=1}^M \vec{\lambda}_k^T [\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1} - h\vec{f}(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_{k-1})]$$

Per cui si possono ricavare le condizioni necessarie (equazioni del controllo e equazioni aggiunte), le equazioni del moto e di trasversalità nel caso discreto:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_{k+1} - \vec{\lambda} + h\lambda_{k+1}^T \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_k} &= 0 \\ h\vec{\lambda}_{k+1}^T \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}_k} &= 0 \\ \vec{x}_{k+1} - \vec{x} - h\lambda_{k+1}^T \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\lambda}_k} &= 0 \\ -\vec{\lambda}_M + \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_M} &= 0 \end{aligned}$$

I metodi indiretti non si esauriscono alla sola integrazione numerica, ma utilizzano altri algoritmi. Nel caso si utilizzino delle tecniche di shooting, come nel lavoro svolto, è necessario implementare l'algoritmo di Newton sulle condizioni di trasversalità appena scritte, in modo da cercare di annullarle ad ogni iterazione. Essi vengono analizzati nella sezione seguente.

7.3.2 Risoluzione di sistemi non lineari algebrici

Gli algoritmi di programmazione non lineare si basano sui metodi del gradiente, e utilizzano strategie di *line search* per aumentare il dominio di convergenza globale. Proprio per l'utilizzo del gradiente nella risoluzione, la convergenza solitamente è molto veloce e porta a risultati molto accurati. Questo algoritmo, nel particolare lavoro di tesi, viene impiegato per annullare l'errore sulle condizioni di ottimo date dalla teoria del controllo ottimale.

Gli algoritmi di *non linear programming* più usati e intuitivi si basano sul metodo di Newton o suoi derivati. Seppur a prima vista sembra che tali algoritmi siano molto convenienti, sorgono tuttavia diversi problemi: viene richiesta una stima iniziale di tutti i parametri del problema. Nei metodi diretti,

il vettore di stato e il vettore dei controlli *in ogni nodo* costituiscono dei parametri ed è necessario "indovinarli" tutti. Una stima iniziale distante dalla soluzione ottimale può portare alla non convergenza della traiettoria o alla convergenza ad una soluzione non globalmente ottimale.

L'algoritmo di base per risolvere un problema di programmazione non lineare è quello proposto da Newton secoli fa. Si ha un'equazione algebrica non lineare del tipo

$$\vec{a}(\vec{x}) = 0$$

E se ne vuole trovare una radice \vec{x}^* . Il primo passo da fare è dare una stima iniziale della radice, x . È possibile trovare una stima migliore della radice tramite un'espressione del tipo:

$$\tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \alpha \vec{p}$$

Dove \vec{p} è un vettore *di puntamento*, calcolato risolvendo l'equazione lineare:

$$[A](\vec{x})\vec{p} = -\vec{a}(\vec{x})$$

Dove A è la matrice delle derivate delle equazioni non lineari, ovvero $\nabla \vec{a}$.

Nel metodo di Newton originario $\alpha = 1$, in quanto viene sostituita \vec{a} con la sua espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine (si ottiene infatti un termine lineare), tuttavia è possibile variare questo valore per stabilizzare le iterazioni e evitare la divergenza per valori di \vec{x} troppo distanti dalla radice. In pratica si varia α per ridurre la lunghezza del passo che viene fatto, procedura detta di *line search*, che nel lavoro di tesi viene portato a $\alpha = 0.01$.

Ovviamente il tutto vale solo se la matrice A è non singolare e quindi se è possibile invertirla e se la stima iniziale della soluzione è abbastanza vicina alla radice vera. Se queste due supposizioni sono corrette e il metodo funziona, è possibile dimostrare che ha una convergenza quadratica.

Ad ogni modo, a parte per tecniche di stabilizzazione per iterazioni lontane dalla radice reale, come la *line search* o la *trust region*, nei pressi della radice tutti i metodi cercano di imitare il processo di Newton.

Traduzione dell'ottimizzazione in programmazione non lineare (Metodi diretti)

Si riporta per completezza la logica che sta dietro ad un metodo diretto, prendendo come esempi casi semplici. Ciò non verrà implementato ai fini di questo lavoro.

Il più semplice problema di ottimizzazione è l'ottimizzazione libera. L'equazione non lineare a cui si può ridurre il problema, per poi applicare il metodo di Newton è:

$$g(\vec{x}^*) = \nabla_x F = 0$$

Dove F è la funzione da massimizzare. Introducendo la matrice delle derivate seconde (matrice hessiana) H , è possibile trovare \vec{p} tramite il sistema di equazioni lineari:

$$[H](\vec{x})\vec{p} = -g(\vec{x})$$

Ovviamente questo algoritmo non è sufficiente per la determinazione del minimo della funzione, in quanto l'annullamento del gradiente è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'ottimo. Per cui è necessario introdurre la condizione del secondo ordine, ovvero quella per cui la matrice hessiana sia definita positiva (per avere un minimo, definita negativa per avere un massimo). Questa condizione permette di puntare \vec{p} verso zone in cui la funzione scende e quindi che si vada effettivamente verso il valore di minimo.

Nel caso di minimizzazione vincolata di una funzione F soggetta a vincoli del tipo:

$$\vec{c}(x) = 0$$

Si introduce la funzione lagrangiana scalare:

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = F(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \vec{c}(\vec{x})$$

Affinché il vettore $[\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*]$ sia un minimo vincolato, è necessario che:

$$\nabla L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \begin{bmatrix} \nabla_x L(\vec{x}, \vec{\lambda}) \\ \nabla_{\lambda} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{g}(x) - [G]^T(\vec{x})\lambda \\ -c(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove $[G](\vec{x})$ è il gradiente del vettore dei vincoli $\vec{c}(\vec{x})$.

Usando il metodo di Newton esattamente come nel caso non vincolato, si ottiene un'espressione per trovare la direzione \vec{p} da inserire nella formula del tipo:

$$\begin{bmatrix} [H_L] - \nabla_x([G]^T\lambda) & [G]^T \\ [G] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ -\vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{g} + [G]^T(\vec{x})\vec{\lambda} \\ -\vec{c} \end{bmatrix}$$

Dove $[H_L]$ è la matrice hessiana della funzione di Lagrange (rispetto solo a \vec{x}), definita come:

$$[H_L] = \nabla_x^2 F - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_x^2 c_i$$

Tuttavia l'espressione della formula di Newton è semplificabile manipolando leggermente le due equazioni. Moltiplicando la seconda riga per $\vec{\lambda}^T$:

$$\vec{\lambda}^T [G]\vec{p} + \vec{\lambda}^T \vec{c} = 0$$

Che è anche uguale a:

$$([G]^T \vec{\lambda})\vec{p} + \vec{c}^T \vec{\lambda} = 0$$

Facendone il gradiente e sostituendo nella prima riga, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} [H_L] & [G]^T \\ [G] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ -\vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{g} \\ -\vec{c} \end{bmatrix}$$

Nel caso ci siano vincoli di disuguaglianza il discorso è analogo al precedente, con la differenza che vengono considerati solo i vincoli detti *attivi*, ovvero quelli per cui vale l'uguaglianza stretta, in altre parole solo quei vincoli che stanno per essere violati. Gli altri possono essere trascurati perché "lontani" dal loro bordo, quando essi vengono attivati, vengono trattati sono dei veri e propri vincoli di uguaglianza. Ciò tuttavia complica la situazione perché c'è una situazione di vincoli "dinamica" e va stimato anche in quale segmento un vincolo si attiva e in quale diventa inattivo.

7.3.3 Risoluzione di problemi di ottimizzazione non lineari

L'ultimo dei tre pilastri consiste negli algoritmi di risoluzione di problemi di ottimizzazione non lineari. Tali algoritmi sono un'esclusiva dei metodi diretti, per cui verranno accennati ma non approfonditi. Essi consistono nel determinare il vettore \vec{x} in grado di minimizzare una funzione $f(\vec{x})$ soggetta a vincoli di uguaglianza o disuguaglianza. Per la teoria che giustifica gli algoritmi si rimanda all'appendice A, dove sono inoltre elencate le condizioni di ottimo di primo e di secondo ordine per i vari problemi. Gli algoritmi ricadono in due macro-categorie: quelli basati su metodi del gradiente e gli algoritmi euristici.

In un metodo del gradiente si fa una prima stima del vettore \vec{x} , da cui, per ogni iterazione viene definita una direzione di ricerca nello spazio di dimensione n e una lunghezza del passo per trovare l'iterazione successiva. Praticamente si ricercano α_k e \vec{p}_k tali per cui:

$$f(\vec{x}_{k+1}) \leq f(\vec{x}_k) + K \alpha_k \nabla f^T(\vec{x}_k) \vec{p}_k$$

La direzione di ricerca è calcolata risolvendo il problema di programmazione quadratica del tipo:

$$\min_{\vec{p}} \frac{1}{e} \vec{p}^T [W] \vec{p} + \nabla f^T(\vec{x}_k) \vec{p}$$

Tale che i vincoli c_i :

$$\nabla c_i^T(\vec{x}_k) \vec{p} - c_i(\vec{x}_k) = 0$$

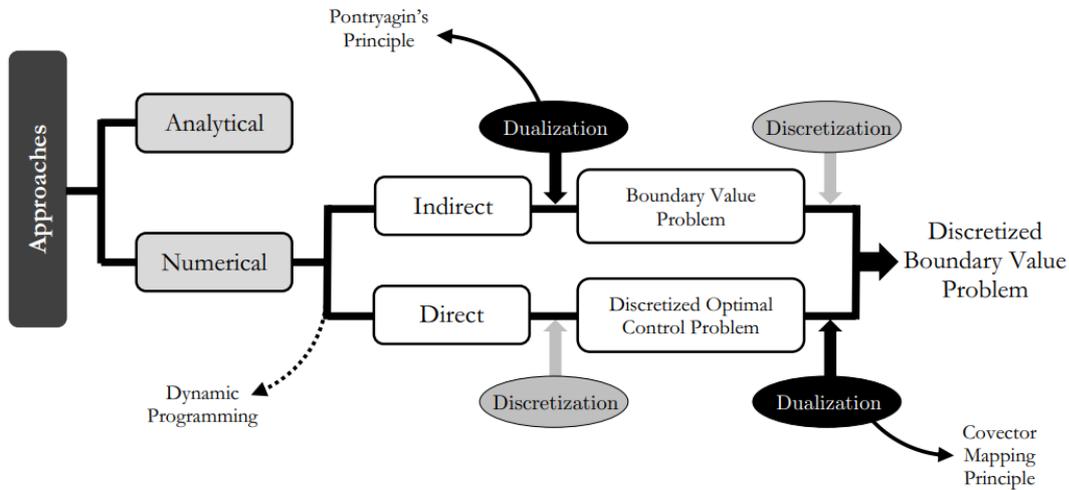


Figura 7.2: Approcci di risoluzione

Dove i è il generico vincolo attivo o inattivo. $[W]$ è invece la matrice semi definita positiva che rappresenta l'approssimazione della matrice Hessiana della funzione Lagrangiana $L = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^T \vec{c}$. L'algoritmo più conosciuto per la risoluzione di un problema di questo tipo è quello di *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*.

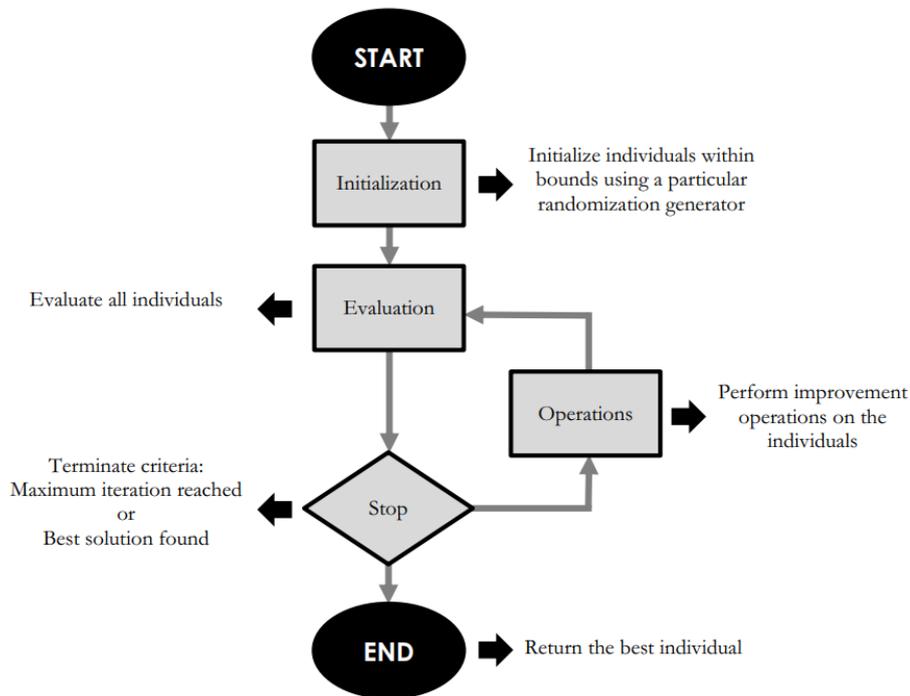


Figura 7.3: Schema di un algoritmo evolutivistico

L'euristica si stacca radicalmente dai metodi basati sul gradiente. Un metodo di ottimizzazione basato sui gradienti è un metodo locale che trova soluzioni di ottimo tendenzialmente locali. Un metodo euristico è invece un metodo globale: la ricerca delle traiettorie è fatta in maniera stocastica e non deterministica. Nella classe degli algoritmi euristici ci sono tutti gli algoritmi genetici, ovvero quelli che hanno un approccio evolutivo: una popolazione iniziale di possibili soluzioni viene stilata, ogni soluzione nel gruppo presenta un particolare *fitness*, che rispecchia la qualità di un certo gene. I geni vengono ricombinati e mutati (come i geni che vengono ricombinati nelle generazioni successive della popolazione), finché solo i geni con i migliori *fitness* sopravvivono, trovando la soluzione migliore al problema di ottimizzazione. Una chiara rappresentazione di questi algoritmi si può osservare in figura 7.3.

Molto spesso gli algoritmi evolutivi vengono utilizzati per modelli impulsivi, mentre sono meno usati per modelli continui. Inoltre ci sono alcuni risvolti negativi che li rendono non consoni come un metodo di prima battuta per trovare una soluzione al problema. Il problema principale deriva dal fatto che si sta parlando di algoritmi probabilistici, per cui le differenze tra due soluzioni trovate dallo stesso programma possono essere molto differenti. Inoltre non ci sono criteri di convergenza ben definiti, non ci sono condizioni sufficienti o necessarie come nel caso degli algoritmi di programmazione non lineare.

Altri tipi di algoritmi euristici riguardano l'approccio di *Simulated Annealing* in cui si associa ogni punto dello spazio ad una sorta di energia interna e si cerca di minimizzare l'energia complessiva della traiettoria, l'ottimizzazione *particle swarm*, basato sugli sciame o branchi animali. Sono molto simili agli algoritmi genetici ma senza mutazioni o ricombinazioni, ibridizzazioni e molti altri.

7.4 Metodi di risoluzione

In questa sezione verranno descritti più in dettaglio i metodi diretti e i metodi indiretti, delineandone i vantaggi e gli svantaggi che portano con loro.

I metodi indiretti si basano sul calcolo variazionale, che permette di trovare le condizioni di ottimo del primo ordine. Essi portano a un problema alle condizioni al bordo che ha come soluzione le traiettorie ottimali, ognuna di esse è poi analizzata per vedere se rispettano i vincoli e le condizioni al contorno e se si è in presenza di un massimo, un minimo o una sella, dopodiché quella con il costo minore viene selezionata.

I metodi diretti discretizzano il vettore di stato e quello dei controlli in modo da ottenere un problema di ottimizzazione non lineare (programmazione non lineare).

Si nota da questa definizione il motivo della scelta dei nomi: l'ottimizzazione indiretta risolve il problema di ottimo trasformandolo in un problema alle condizioni al bordo equivalente, la cui soluzione viene ottenuta tramite integrazione, mentre l'ottimizzazione diretta discretizza semplicemente il problema infinito-dimensionale in uno a dimensione finita in cui le incognite in gioco sono le discretizzazioni della traiettoria e del vettore dei controlli e ricava direttamente il controllo ottimo tramite programmazione non lineare. Nella figura 7.5 viene riassunta questa sostanziale differenza.

7.4.1 Metodi diretti

Nei metodi diretti, la soluzione viene trovata in maniera approssimata, tramite parametrizzazione delle variabili di stato e delle variabili di controllo. Nel caso in cui viene approssimato solo il vettore dei controlli, si parla di *metodo del controllo parametrizzato*, mentre se sia il vettore dei controlli che il vettore di stato sono approssimati si parla di *metodo dello stato e del controllo parametrizzati*. In ognuno dei due casi il problema si risolve come un'ottimizzazione non lineare. La parametrizzazione viene effettuata attraverso una discretizzazione temporale, ovvero si suddivide la traiettoria in un numero finito di punti, ognuno dei quali è un parametro di ottimizzazione. Tra i punti in cui si suddivide la traiettoria, la coerenza con le equazioni del moto viene garantita integrandole numericamente da un punto al successivo. Ciò porta alla generazione di espressioni vincolari (il punto finale di un'integrazione deve coincidere con quello iniziale della successiva) di tipo non lineare.

L'approssimazione derivante dai metodi diretti deriva dal fatto che ogni funzione continua, ogni equazione e ogni modello devono essere riscritte in forma discreta. Il problema dei metodi diretti è che la soluzione

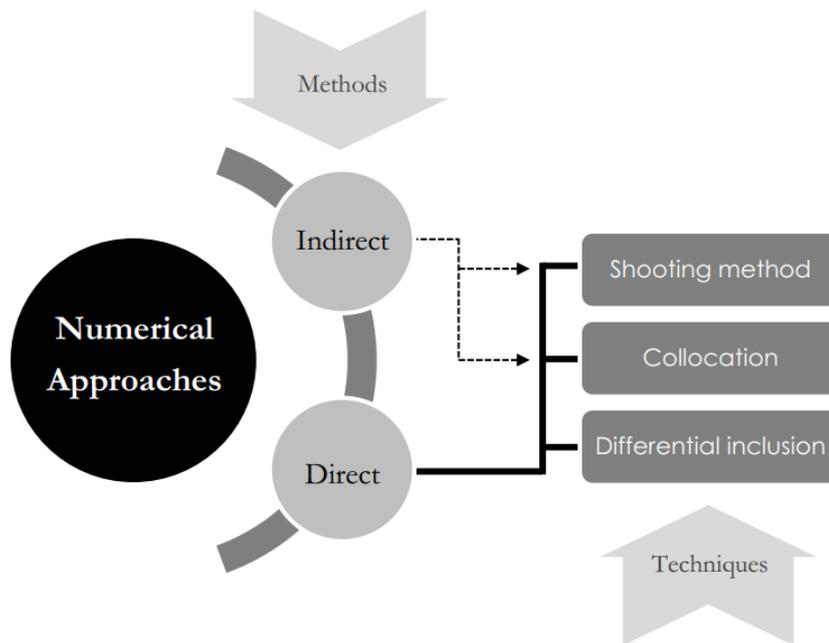


Figura 7.4: Metodi e tecniche numeriche

è molto più approssimata rispetto ai metodi indiretti e non c'è alcuna garanzia che essa sia effettivamente quella ottimale, inoltre la parametrizzazione mette in gioco un numero di parametri molto alto.

Tuttavia questa categoria di metodi ha i suoi vantaggi: sono molto facili da implementare e hanno un dominio di convergenza molto esteso. Rispetto ai metodi indiretti, non vengono chiamati in causa i moltiplicatori di Lagrange, per cui le dimensioni del problema si riducono.

Shape-based method

Un tipo molto comune di metodo diretto è il cosiddetto *shape-based method*, in cui vengono utilizzate come parametri solo le componenti del vettore di stato, mentre il vettore dei controlli compare nella funzione obiettivo.

Utilizzando tecniche basate sul gradiente della funzione, è possibile minimizzare la funzione cambiando le variabili di stato e trovando il controllo di conseguenza. Viene detto metodo basato sulla forma proprio perché si basa solo sulla geometria della traiettoria per l'ottimizzazione.

Ovviamente la semplicità del metodo è controbilanciata dalla non accuratezza della soluzione, che tuttavia può essere utilizzata come stima iniziale per altri metodi più complessi e accurati che soffrono tuttavia di domini di convergenza molto piccoli, come ad esempio i metodi indiretti.

7.4.2 Metodi indiretti

Per i metodi indiretti vengono utilizzate sostanzialmente le stesse tecniche dei metodi diretti, ma la filosofia di risoluzione è fondamentalmente differente. Si risolve il problema scrivendo e risolvendo in tempo le condizioni matematiche del primo ordine necessarie per l'ottimo. Tali condizioni permettono di ricavare delle equazioni in cui compaiono le variabili di stato e le variabili aggiunte (dette variabili di *co-state*) con apparentemente nessun senso fisico (appendice A). Le condizioni necessarie si basano sul principio di Pontryagin, spiegato in precedenza.

Nell'analisi classica (metodi diretti) l'obiettivo determina i punti che ottimizzano una funzione, nel calcolo variazionale (metodi indiretti) si determinano funzioni che ottimizzano una funzione di funzioni. In particolare, l'effettiva traiettoria viene ottenuta tramite integrazione delle equazioni del moto, e non come parametri incogniti, come nei metodi diretti ed è per questo che i metodi indiretti sono più precisi. I dettagli teorici dei metodi indiretti sono quelli del controllo ottimale, già pienamente analizzato.

Il problema dei metodi indiretti che è molto spesso difficile trovare una stima iniziale della soluzione (richiesta per il calcolo), soprattutto perché non è possibile capire i valori (o almeno gli ordini di grandezza) dei moltiplicatori di Lagrange da utilizzare. Inoltre, è necessario ricavare la forma analitica delle condizioni necessarie, dell'Hamiltoniana, delle condizioni di ottimo e di trasversalità.

Per finire le dimensioni del problema diventano molto grandi per via della comparsa delle variabili di *co-state*. In particolare, le incognite sono i tempi, le variabili di stato (posizione, velocità e massa) e le rispettive variabili aggiunte. La stima iniziale deve possedere i valori iniziali e quelli dopo ogni flyby di queste incognite.

7.5 Tecniche numeriche di risoluzione

Le tecniche numeriche consistono nei procedimenti operativi numerici che si possono impiegare per risolvere il problema di ottimo. Possono essere utilizzate indistintamente per i metodi diretti e per i metodi indiretti anche se alcune tecniche sono peculiari di uno dei due metodi.

7.5.1 Tecniche delle Inclusioni differenziali

Queste tecniche sono le uniche ad essere esclusivamente applicabili ai metodi diretti. Esse consistono nell'imporre la validità delle equazioni del moto ad ogni punto della discretizzazione tramite vincoli sulle derivate delle variabili di stato. Tali vincoli sono di disuguaglianza, e in particolare consistono nell'imporre un limite inferiore a controllo minimo e un limite superiore a controllo massimo, se il punto non rispetta uno dei due limiti vuol dire che è stata applicata una spinta maggiore di quella massima che si ha a bordo del veicolo spaziale. Se il vincolo viene rispettato, i nodi sono fisicamente ottenibili con una spinta ammissibile.

Facendo ciò si può non considerare l'ottimo rispetto alle variabili di controllo, perché per ogni set di nodi ammissibili, esse sono determinate univocamente. tuttavia, questa semplificazione si traduce in instabilità numerica e formulazione problema-dipendente.

7.5.2 Tecniche di Shooting

Le tecniche di shooting sono utilizzate per calcolare la storia temporale delle variabili di stato una volta nota la storia temporale del vettore dei controlli. Il vantaggio di utilizzare delle tecniche di shooting è quello di utilizzare un numero molto piccolo di variabili di ottimizzazione.

Le tecniche di shooting possono essere ulteriormente divise in tecniche di *single-shooting* e *multi-shooting*. Nello specifico nelle tecniche di shooting dirette, il vettore dei controlli viene parametrizzato temporalmente usando delle specifiche funzioni:

$$\vec{u}(t) \simeq \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(t)$$

Nell'ottimizzazione, le funzioni ψ sono note, mentre i parametri a sono quelli che devono essere determinati dall'ottimizzazione. Una volta trovati tali parametri, la dinamica è verificata tramite integrazione diretta con algoritmi di tipo *time-marching*.

Per quando riguarda la funzione obiettivo, essa è trovata tramite quadratura numerica.

Un'estensione dei metodi di shooting sono i metodi di *multi-shooting*, in cui l'intervallo complessivo viene diviso in $M + 1$ sottointervalli, e la tecnica di *single-shooting* è utilizzata in ogni sottointervallo. Per imporre la continuità, si impongono le condizioni di interfaccia scritte come:

$$x(t_i^-) = x(t_i^+)$$

Tale estensione aumenta la dimensione del problema, in quanto gli stati all'inizio di ogni intervallo sono delle incognite del problema.

Un semplice schema algoritmico di un'ottimizzazione diretta con tecniche di shooting è quello che segue:

1. **Input:** stima iniziale dei parametri del vettore dei controlli
2. **While:** la funzione obiettivo non è minima e i vincoli non sono soddisfatti:
 - (a) Integrazione della traiettoria da t_0 a t_f ;
 - (b) Calcolo dell'errore sulle condizioni di arrivo
 - (c) Ricalcolo delle condizioni iniziali spostando la funzione obiettivo a un valore più basso;
3. **End while**
4. **Output:** Valori ottimali dei parametri e la traiettoria ottimale

La tecnica è implementabile anche per metodi indiretti, basta introdurre le variabili aggiunte.

Dapprima si effettua una stima iniziale delle variabili ad un estremo dell'intervallo temporale, spesso quello iniziale, dopodiché si integra il sistema di equazioni della teoria del controllo ottimale fino all'altra estremità. All'arrivo, le condizioni all'altro estremo sono comparate con le condizioni su quel bordo, se differiscono di una quantità maggiore del limite imposto, si reitera il calcolo cambiando le condizioni all'altro estremo fino a convergenza.

Un vantaggio fondamentale delle tecniche di shooting è che le equazioni del moto sono imposte automaticamente tramite integrazione numerica e non compaiono come vincoli. Questo riduce effettivamente i tempi di calcolo per la riduzione del numero di vincoli applicati.

Un metodo indiretto con tecniche di shooting semplice è molto semplice da implementare, tuttavia presenta alcune importanti difficoltà numeriche per via del malcondizionamento della dinamica Hamiltoniana. Ciò porta, durante l'integrazione verso l'altro estremo, ad una facile amplificazione degli errori fatti sulla stima iniziale delle variabili al bordo di partenza, rendendo molto piccolo il dominio di convergenza e quindi portando serie difficoltà di convergenza alla soluzione ottimale. Il problema di malcondizionamento è sentito particolarmente quando il problema del controllo ottimale è *iper-sensibile*, ovvero quando l'intervallo di integrazione è molto lungo rispetto alla scala temporale del sistema Hamiltoniano nelle vicinanze della soluzione ottimale.

Per superare questi problemi computazionali e rendere meno sensibile la convergenza è possibile implementare un metodo indiretto multi-shooting: l'intervallo temporale di integrazione viene diviso in sotto-intervalli e per ognuno di essi viene applicato il metodo indiretto con tecniche di shooting semplice. Ovviamente in questo caso è necessario soddisfare la continuità imponendo le condizioni:

$$\vec{y}(t_i^-) = \vec{y}(t_i^+)$$

Dove \vec{y} è il vettore combinato sia delle variabili di stato che di *co-state*.

Il problema dei metodi indiretti multi-shooting sono l'incremento della dimensione del problema e l'incremento delle variabili per cui va trovata una stima iniziale.

Un semplice algoritmo di shooting semplice per i metodi indiretti è il seguente:

1. **Input:** Stima iniziale delle condizioni iniziali incognite
2. **While:** Errore alle condizioni finali è più grande di una certa tolleranza
 - (a) Integrazione della traiettoria tra t_0 e t_f ;
 - (b) Calcolo dell'errore alle condizioni finali;
 - (c) Modifica delle condizioni iniziali incognite;
3. **End**
4. **Output** Traiettoria ottimale

Per i metodi indiretti con tecniche di shooting è utile osservare che:

- Quando una variabile è assegnata ad un estremo, la corrispondente variabile aggiunta è libera;

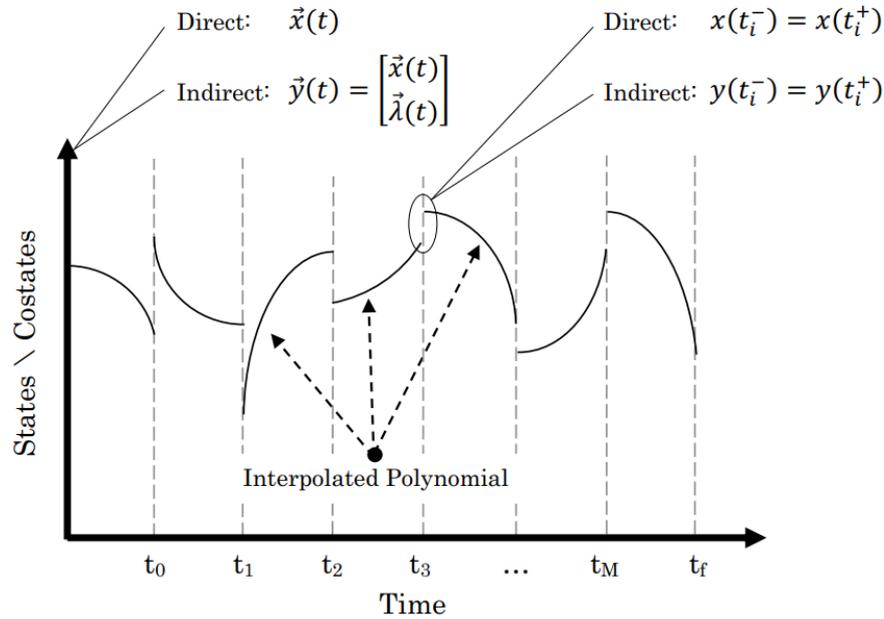


Figura 7.5: Approcci di risoluzione

- Quando una variabile estrema non compare nelle condizioni al contorno, il corrispondente co-stato è nullo
- Quando una variabile è continua e libera in un punto qualsiasi, anche la corrispondente variabile di co-stato è continua e libera in quel punto;
- Quando una variabile è continua e assegnata in un punto qualsiasi, la corrispondente variabile aggiunta presenta una discontinuità ed è libera in quel punto;
- Se il tempo ad un estremo è libero, l'Hamiltoniano è nullo in quel punto;
- Se il tempo ad un estremo è assegnato, l'Hamiltoniano risulta libero in quel punto;
- Se il tempo in un punto intermedio è assegnato, l'Hamiltoniano presenta una discontinuità ed è libero in quel punto.

7.5.3 Tecniche di collocazione

Le tecniche di collocazione, anche dette di trascrizione, rispettano le equazioni del moto tramite interpolazione. Mentre nelle tecniche di shooting si aveva una discretizzazione in valori in alcuni punti del dominio temporale, qui la parametrizzazione avviene per polinomi.

In generale esistono due forme di collocazione: locale e globale. La forma locale divide l'intervallo temporale in sotto-intervalli collegati da vincoli di compatibilità, della forma

$$\vec{x}(t_i^-) = \vec{x}(t_i^+)$$

Le funzioni interpolanti in questi sotto-intervalli sono trovate in modo che passino dai valori delle variabili di stato in alcuni punti e mantenga le sue derivate temporali in un determinato intervallo. La funzione interpolante è valutata in punti intermedi ai nodi, detti punti di collocazione. Ad ognuno di questi si impone un vincolo di uguaglianza tra la derivata della funzione interpolante e la derivata del vettore di stato "reale", in modo da imporre la correttezza delle equazioni del moto. Ovviamente si verificano solo

approssimativamente queste equazioni, viene definita una differenza tra queste due derivate chiamata appunto "difetto", che viene minimizzato ad ogni segmento.

La tecnica si basa su una fitta discretizzazione della traiettoria in piccoli segmenti, e su una discretizzazione quasi uniforme delle direzioni di spinta. Praticamente il problema si divide in sotto-fasi, ognuna delle quali ha come obiettivo la minimizzazione della spinta e delle violazioni dei vincoli. Il problema in questo caso può essere trasformato nel minimizzare la velocità caratteristica totale allo stato finale della traiettoria.

In altre parole, la tecnica può essere considerata come una programmazione non-lineare sequenziale. Ci sono tre step principali:

1. Conversione del sistema dinamico in un problema di dimensione finita (discretizzazione);
2. Risoluzione il problema di dimensione finita tramite un metodo di programmazione non lineare;
3. Verifica dell'accuratezza della soluzione e, se necessario, ripetere gli step precedenti.

Per ulteriori approfondimenti si veda [1] e [10].

7.6 Scelta dell'approccio, dei metodi, delle tecniche e degli algoritmi di risoluzione

L'approccio considerato nel caso dei flyby in analisi è quello numerico, questa non è propriamente una scelta perché, per le traiettorie considerate, è impossibile ricondursi a casi semplici, specie nel caso di flyby multipli. Trovare soluzioni analitiche è quindi da escludere totalmente.

Il metodo scelto è quello indiretto, per via della elevata precisione numerica e l'alto contenuto teorico che ci sta dietro.

Inoltre, essi permettono di tenere basso il numero di parametri utilizzati nell'ottimizzazione, per cui i tempi di calcolo risultano relativamente bassi. Le caratteristiche di precisione e rapidità sono state dunque preferite alla robustezza del calcolo e ai larghi domini di convergenza dei metodi diretti, che purtroppo soffrono di soluzioni approssimate non troppo precise e tempi di calcolo lunghi per via dell'alto numero di parametri di ottimizzazione.

Nel caso delle traiettorie spaziali, sono presenti alcune difficoltà numeriche intrinseche: i flyby costituiscono dei vincoli intermedi da soddisfare, inoltre la spinta risulta discontinua e spesso azionata per un tempo molto breve, ciò porta ad un aumento della difficoltà di integrazione.

Le tecniche utilizzate sono quelle di shooting per via della semplicità di applicazione al caso in esame. Per traiettorie ad un flyby è impiegata una tecnica di shooting semplice, in cui è necessario stimare solo le variabili all'inizio dell'arco, mentre nel caso di flyby multipli, visto che essi costituiscono dei vincoli intermedi sulla traiettorie, viene utilizzata una tecnica di *multiple-shooting*, divisa in tanti archi quanti sono i flyby da effettuare. Ogni arco inizia al flyby precedente, in modo che, sapendo la posizione dello stesso è possibile facilmente stimare le condizioni iniziali dello stesso.

La struttura della traiettoria è dunque assunta preventivamente e l'ottimizzazione avviene in ogni arco precedentemente delineato. In ogni arco vengono inoltre definite delle leggi di controllo omogenee e dei vincoli di continuità agli estremi degli stessi.

Per il calcolo è stato utilizzato un codice derivato da [11], in cui è implementato un integratore a passo e ordine variabili Adams-Moulton per la risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie e il metodo di Newton per la soluzione di sistemi di equazioni non lineari.

Nell'algoritmo utilizzato nell'ottimizzazione delle traiettorie per flyby multipli, viene usata una forma dell'Hamiltoniano del tipo:

$$H = \vec{\lambda}^T \vec{f} + \vec{\mu}^T \vec{g} + TS_F + \frac{qS}{m} A_F$$

Dove S_F è detto coefficiente di spinta (*switching function*):

$$S_F = \frac{\vec{\lambda}_v^T \vec{T}}{mT} - \frac{\lambda_m}{c}$$

Con λ_m coefficiente di Lagrange della massa e λ_v sono le variabili aggiunte che competono alle ultime tre equazioni della dinamica, quelle delle velocità (u, v, w) . Il coefficiente A_F è quello delle accelerazioni aerodinamiche, non trattato in questo caso. \vec{g} è il vettore delle condizioni al contorno a cui sono associati i moltiplicatori di Lagrange (costanti nel tempo) $\vec{\mu}$.

La direzione della spinta risulta parallela a $\vec{\mu}$ e si ha che:

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c}$$

Il modulo della spinta invece è derivato da una modalità di controllo *bang-bang*:

- massima se $S_F > 0$;
- minima (nulla) se $S_F < 0$
- arco singolare se $S_F = 0$

Visto che si è implementato una velocità efficace di scarico costante, il modulo della spinta è direttamente proporzionale alla portata e dunque alla potenza della spinta. Inoltre, come si vedrà nei risultati, la spinta varia di intensità media in un arco per via del cambio di duty cycle quando ci si trova in avvicinamento ad un asteroide.

8

Automatizzazione dell'algoritmo

Il codice di ottimizzazione indiretta con tecniche di shooting che si utilizza nell'analisi è un eseguibile protetto che prevede l'inserimento manuale di alcuni parametri, come le caratteristiche del veicolo, della traiettoria, dei tempi di flyby e alcuni parametri di calcolo. Inoltre, è necessario preparare un file di testo con la stima iniziale della soluzione e ulteriori parametri di traiettoria. L'inserimento manuale dei parametri sopracitati e la creazione del file di stima iniziale è un lavoro umanamente impossibile da svolgere per tutte le combinazioni di sequenze che verranno analizzate. Per questo motivo sono stati sviluppati alcuni programmi ausiliari e funzioni che preparano tutto il necessario per avviare con successo il calcolo ed eventualmente farlo partire. Uno schema della rete di programmi creati è riportato nella figura 8.1.

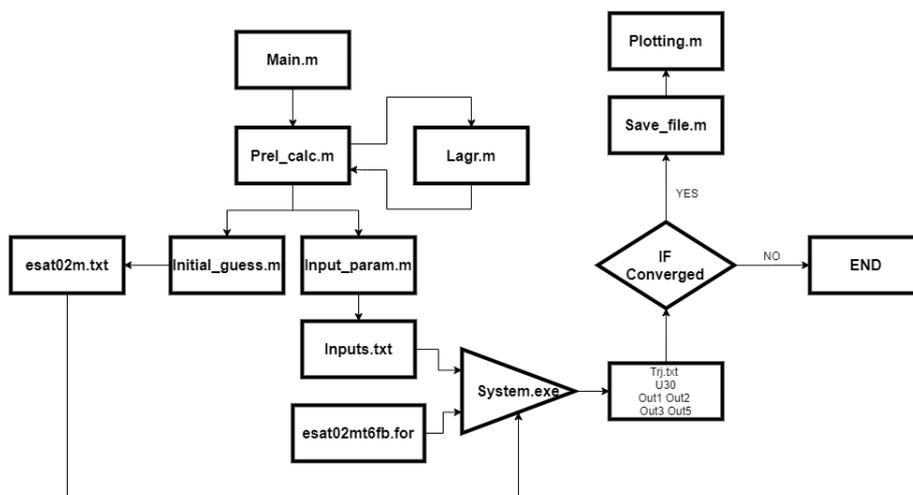


Figura 8.1: Schema a blocchi dei programmi e funzioni per l'automatizzazione del processo di ottimizzazione

8.1 Funzionamento dei vari programmi

In questa sezione si descrive più in dettaglio gli input e gli output di ognuno dei programmi dello schema in figura 8.1.

Main

Il programma `Main.m` rappresenta lo spazio di definizione dei parametri e di avvio, esso chiama sequenzialmente le altre funzioni e termina il calcolo salvando o scartando la traiettoria. È possibile scegliere tra avviamento manuale su traiettorie specifiche selezionate da utente o automatizzato su tutte le combinazioni presenti nel database creato per traiettorie a uno, due, tre o quattro flyby.

Nel programma vengono definiti:

- Parametri caratteristici della trasferta, come μ , l'unità astronomica, i vari parametri di conversione e la data di inizio della missione (definibile in termini di data MJD o in durata del primo arco);
- Parametri propri del veicolo, come la velocità efficace di scarico, il coefficiente di spinta e la massa iniziale;
- Parametri di calcolo: il coefficiente del metodo di Newton α fissato a 0.01, il numero massimo di iterazioni fissato a 4000 o il p_{bis} (parametro di iterazione) fissato a 2.2.

Se è stata impostata la modalità manuale, il programma richiede di scegliere fino a quattro asteroidi dal database fornito, altrimenti, se la modalità è automatica (si può scegliere di ottimizzare traiettorie con un numero da 1 a 4 asteroidi) il programma inizia le ottimizzazioni in ordine crescente di numero identificativo, fermandosi solo alla fine del database degli asteroidi selezionati.

La biforcazione logica `IF` che è visibile nello schema 8.1 è anche inclusa del `Main.m`, dal quale vengono chiamati anche `Save_file.m` e `Plotting.m`.

Calcoli preliminari

Il programma `Pre1.calc.m` riceve in input i parametri generali definiti da utente e le informazioni sulla traiettoria scelta per l'ottimizzazione (che sia quella selezionata da tastiera dall'utente o quella corrente del processo automatizzato).

Tramite numero identificativo vengono letti i parametri orbitali e le informazioni sull'epoca d'incontro calcolate nel capitolo 4. Da questi Input si ricavano la posizione e la velocità della Terra al tempo iniziale e si stima la posizione e la velocità del veicolo ai flyby nel caso in cui la traiettoria abbia più asteroidi. Per determinare la velocità al flyby sono state utilizzate due strategie: la prima ipotizza che l'energia dell'orbita rimane costante, per cui la velocità rimane tangenziale e con modulo calcolato dalla conservazione dell'energia meccanica, la seconda prende i valori esatti dall'ottimizzazione della traiettoria a $n - 1$ asteroidi dei tratti precedenti al flyby considerato.

Il programma dunque chiama la sotto-funzione `Lagr.m` e le passa in output le stime delle variabili fisiche all'inizio degli archi, nonché le epoche dei flyby e la durata complessiva della missione.

Stima moltiplicatori di Lagrange

Il programma fornisce in output il valore stimato dei moltiplicatori di Lagrange all'inizio di ogni arco, si segue il modello e l'algoritmo dettagliatamente riportati alla fine del capitolo.

Initial guess

Il programma `Initial_guess.m` crea un file di testo contenente la stima iniziale della traiettoria, la V_∞ , i tempi dei flyby e di partenza, i parametri di massa e di tempo di permanenza su un asteroide (zero nel caso di flyby). Il file verrà poi utilizzato nell'ottimizzazione vera e propria.

Parametri di Input

Il programma `Input_param.m` crea un file con tutti i parametri chiesti da tastiera all'utente dall'eseguibile protetto che implementa l'ottimizzazione indiretta tramite shooting: tempo di partenza e di flyby, numero identificativo degli asteroidi, massa e parametri di calcolo. Questo file viene letto durante l'esecuzione dell'ottimizzazione.

Salvataggio file e simulatore orbitale

Quando l'ottimizzazione è terminata, si ritorna nel `Main.m`, dove si controlla che la traiettoria sia andata a convergenza e, eventualmente, se le caratteristiche della traiettoria (in termini di ΔV e $V_{relativa}$) risultano accettabili: in caso affermativo si salva la traiettoria in una cartella e si avvia un simulatore orbitale dei corpi celesti di interesse per avere un riscontro visivo della missione e controllando ulteriormente che tutto vada come dovrebbe.

In figura 8.2 e 8.3 si possono vedere due viste del simulatore orbitale in questione, la prima con visuale eliocentrica e la seconda con visuale geocentrica. È necessario osservare che le dimensioni di Terra e Sole non sono in scala, tuttavia la dimensione della sfera d'influenza terrestre, rappresentata in trasparenza è esatta. Questo perché così è possibile controllare graficamente che il veicolo non rientri nella zona dove la gravità terrestre risulta non trascurabile rispetto a quella del Sole. Ciò significa controllare che il modello dei due corpi ristretto con il Sole abbia validità completa durante tutta la missione.

Le due visuali mostrano la traiettoria seguita dal veicolo spaziale (traiettoria risultato dell'ottimizzazione indiretta) e le posizioni ad un dato tempo di tutti i corpi celesti presi in considerazione: la Terra, il Sole, il veicolo e gli asteroidi scelti. Mentre il veicolo segue la traiettoria risultato del calcolo, gli altri corpi seguono la propria orbita propagata ipotizzando che i loro parametri orbitali restino costanti (a parte, ovviamente l'anomalia vera). Quest'assunzione risulta vera per tempi brevi come quelli della missione analizzata.

Nel caso di modalità automatizzata, se la traiettoria converge si salta la simulazione della missione e si ritorna al `Main.m` dove si ripete il calcolo per la sequenza successiva.

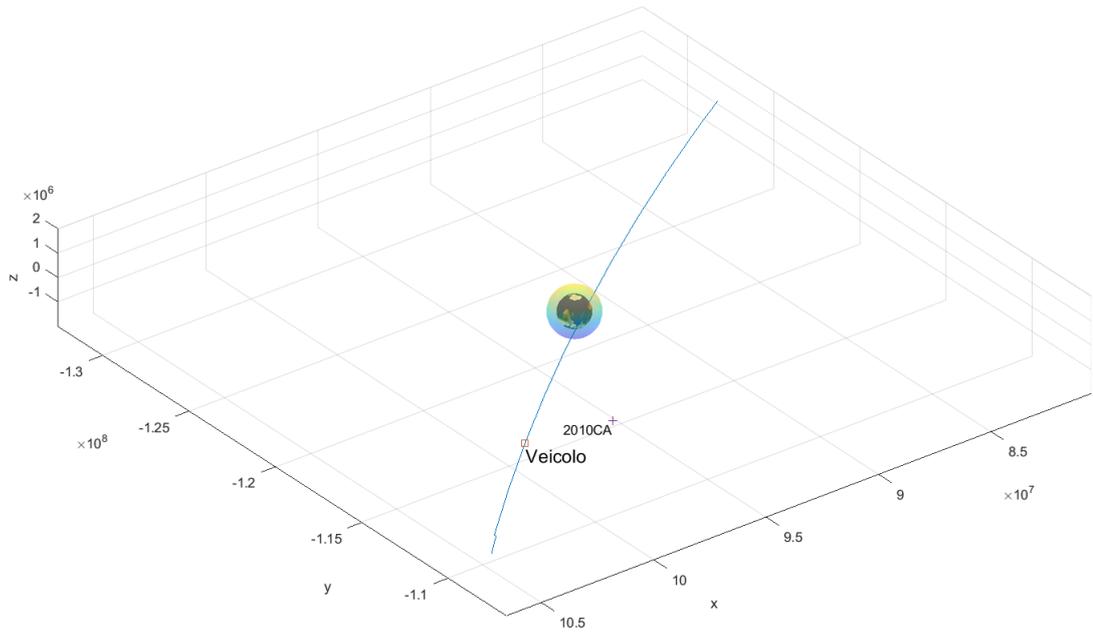


Figura 8.3: Simulatore orbitale: Visuale geocentrica

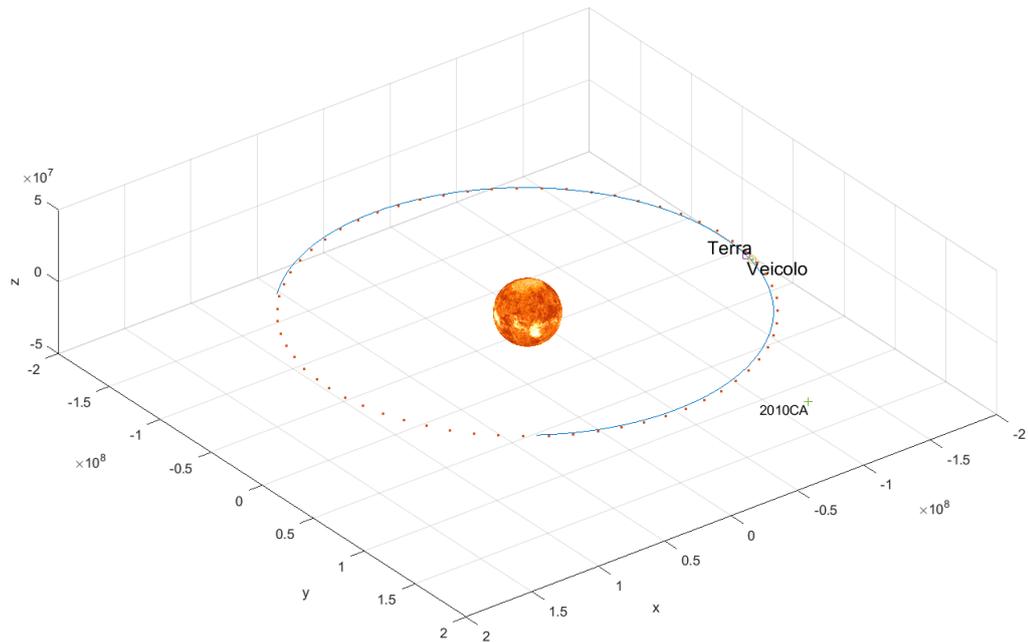


Figura 8.2: Simulatore orbitale: Visuale eliocentrica

8.2 Algoritmo di stima per i moltiplicatori di Lagrange

Il punto cruciale dell'automatizzazione dell'algoritmo di ottimizzazione è il processo di stima della soluzione iniziale, richiesta in input dal calcolatore. È un processo critico perché i metodi indiretti sono molto sensibili anche a piccoli scostamenti nelle stime iniziali ed è necessario che siano abbastanza accurate per portare il calcolo a convergenza.

I parametri fisici, dunque r , θ , ϕ , u , v e w sono facilmente calcolabili perché sono quelli della Terra, o del punto di partenza al tempo iniziale t_0 o quelli del veicolo al tempo del flyby t_i . Conoscendo i parametri orbitali e il tempo è possibile trovare i valori sopraelencati senza sforzo.

Le variabili aggiunte sono invece molto difficili da stimare in quanto molto spesso non hanno nessun significato fisico e apparentemente nessuna correlazione con la posizione e la velocità di partenza del veicolo.

È possibile scrivere alcune formule che stimano in maniera abbastanza accurata i moltiplicatori di Lagrange del punto di partenza. Le formule sono state ricavate implementando il modello proposto da Yan Hui e Wu Hongxin in [13], valido per metodi indiretti applicati a trasferte orbitali a bassa spinta. Nella pubblicazione le variabili aggiunte sono ottenute risolvendo le condizioni necessarie per l'ottimo linearizzate nelle vicinanze del tempo iniziale, dove le suddette variabili aggiunte possono essere espresse come espansioni in serie di Taylor.

Il metodo, come anche altri che si propongono di ottenere gli stessi risultati, consiste nel trasferire il problema di stimare qualcosa di non fisico, a stimare qualcosa di fisico (e noto). In altre parole si cerca di scrivere la stima iniziale delle variabili aggiunte in funzione del vettore di controllo e del vettore di stato nell'istante iniziale.

Nei pressi del tempo iniziale, le variabili aggiunte possono essere scritte come:

$$\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_0 + \left. \frac{\partial \vec{\lambda}}{\partial t} \right|_{t_0} t_n.$$

Dove t_n è il tempo nell'intorno di t_0 , $n \in [1, \dots, N]$ con N non minore del numero delle variabili aggiunte incognite.

Visto che le equazioni di stato non dipendono esplicitamente dal tempo, ma dal vettore di stato e il vettore dei controlli, è possibile approssimare l'Hamiltoniana ad una funzione costante nel tempo (ma non rispetto a \vec{x} e \vec{u}) e pari a

$$H = \vec{\lambda}^T \vec{f} + \underbrace{\vec{\mu}^T \vec{g} + S_F T}_0 = \vec{\lambda}^T \vec{f} = c$$

È necessario osservare che nell'intorno di t_0 si suppone per semplicità che la spinta sia inizialmente nulla e che i vincoli sul percorso siano tutti inattivi, per cui la forma dell'Hamiltoniana risulta semplificata al solo termine che compete le equazioni della dinamica.

Dalla definizione di Hamiltoniana e dalle equazioni aggiunte, unendoci l'espansione di Taylor arrestata al primo ordine esposta in precedenza, è possibile scrivere che:

$$\left(\vec{\lambda}_0 - \nabla_x H|_{t_0} t_n \right)^T \vec{f}_n = c$$

Esplicitando ulteriormente la forma dell'Hamiltoniana:

$$\left(\vec{\lambda}_0 - \vec{\lambda}_0^T \nabla_x \vec{f}_0 t_n \right)^T \vec{f}_n = c$$

Dove \vec{f}_n è il vettore delle equazioni della dinamica ($\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}(t), t)$) scelte, che si riportano per semplicità di seguito:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ -\frac{\mu}{r^2} + r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + r\dot{\phi}^2 \\ \frac{1}{r \cos \phi} \left(-2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi \right) \\ \frac{1}{r} \left(-2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{T_r}{m} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{T_\theta}{m} \\ \frac{1}{r} \frac{T_\phi}{m} \end{bmatrix}$$

La costante c è arbitraria, può assumere un qualsiasi valore tranne zero se il tempo finale è fissato.

Quando i punti temporali t_1, t_2, \dots, t_n sono presi nelle vicinanze di t_0 , si può scrivere un sistema di N equazioni lineari linearmente indipendenti l'una dall'altra, che avrà come soluzione proprio la stima dei moltiplicatori di Lagrange in t_0 .

Per implementare questo procedimento, è necessario prestare attenzione ad alcune accortezze numeriche: i tempi presi in considerazione devono essere abbastanza vicini a t_0 perché la linearizzazione sia valida, ma devono essere abbastanza distanti l'uno dall'altro per evitare il malcondizionamento della matrice del sistema lineare che si ottiene. Inoltre, la maggior parte delle traiettorie che si prendono in considerazione hanno bassissima inclinazione ed eccentricità, per cui gli angoli ϕ , le velocità radiali e normali sono molto prossimi allo zero. Ciò porta all'annullamento di intere colonne della matrice associata al sistema lineare, che dunque risulterà singolare e non risolvibile.

Onde evitare questi problemi, si scelgono tempi spazati di qualche giorno l'uno dall'altro e, nel caso in cui le tre variabili sopraelencate siano prossime allo zero, si aumentano di un valore fittizio per diminuire il numero di condizionamento del sistema lineare, contando sulla bontà della convergenza del metodo.

L'algoritmo utilizzato può essere schematicamente scritto come segue:

1. Definizione parametri fisici:
 - se $|\phi| < 0.01$ si aumenta di ± 0.2
 - se $|V_\theta| < 0.1$ si aumenta di ± 0.4
 - se $|V_\phi| < 0.1$ si aumenta di ± 0.4
2. Definizione di 6 punti temporali equispaziati su un intervallo di 15 giorni da t_0
3. Per t_i che va da t_1 a t_N , si calcola il valore di posizione e velocità e dunque il valore delle equazioni della dinamica
4. Valutazione del gradiente di \vec{f} in t_0 .
5. Calcolo della matrice del sistema lineare, dove l' n -esima riga è:

$$M = (I_d - \nabla_x \vec{f}_0 t_n) \vec{f}_n$$

Per ogni n da 1 a N .

6. Definizione del termine noto, come vettore colonna 6×1 di $c = 2$;
7. Risoluzione del sistema lineare per ottenere le variabili aggiunte.

È necessario notare come nella stima non compaia il moltiplicatore di Lagrange relativo alla massa, questo perché non ci sono vincoli sulla massa a t_0 , per cui la rispettiva variabile aggiunta è nulla. La condizione sulla massa in realtà esiste sul percorso ed è data dall'equazione della spinta, ma, appunto è sul percorso e non su t_0 .

La bontà dell'algoritmo di stima si può appurare dalla percentuale delle traiettorie portate a convergenza. Per quelle ad un asteroide, su 125 traiettorie analizzate, 105 sono andate a convergenza, per una percentuale di successo dell'84%. La percentuale diminuisce di parecchio per traiettorie a più di un flyby perché in questi casi è più difficile portare il tutto a convergenza (dominio di convergenza molto ristretto) ma soprattutto non è raro che due flyby della sequenza avvengano a distanze temporali troppo ristrette perché esista una traiettoria ammissibile, per via della scarsa autorità di comando.

9

Analisi delle sequenze a quattro asteroidi

Il database di asteroidi che è stato utilizzato nel loop di ottimizzazioni contiene:

1. 125 asteroidi candidati per il primo flyby;
2. 136 asteroidi candidati per il secondo flyby;
3. 143 asteroidi candidati per il terzo flyby;
4. 130 asteroidi candidati per il quarto flyby.

Il numero di combinazione a quattro asteroidi è elevatissimo anche solo per queste quattro classi, sono oltre 316 milioni di possibilità. Si è stimato un tempo di ottimizzazione medio di circa 1 minuto data la limitata potenza computazionale a disposizione, per cui se si volessero esplorare tutte sarebbe necessario un tempo di calcolo di 600 anni. Per ovviare a questo problema la scelta è stata di impiegare una filosofia di calcolo meno *time-consuming*. Essa consiste in due step:

1. Il primo step permette di trovare un numero limitato di traiettorie tra quelle a più basso ΔV in un tempo molto breve, di cui verranno studiate e analizzate le peculiarità;
2. Il secondo step ottimizza tutte e solo le sequenze che hanno le specifiche caratteristiche temporali e fisiche trovate dall'analisi dello step precedente.

9.1 Ottimizzazioni preliminari

La strategia di scelta preliminare è alquanto *greedy*, pur sempre ragionata ma comunque sub-ottimale: sono state ottimizzate con metodi indiretti tutte le traiettorie a un flyby e sono state tenute in considerazione solo le dieci di esse con il ΔV più basso. L'ottimizzazione indiretta è dunque stata fatta per le traiettorie a due asteroidi trovate come combinazioni tra le dieci a basso ΔV e gli asteroidi candidati per il secondo flyby, alla fine, anche in questo caso, sono state scelte solo le combinazioni con ΔV più basso. Lo stesso processo è stato applicato alle combinazioni a tre e a quattro asteroidi. Ciò permette di trovare traiettorie sicuramente a basso consumo, ma certamente non tutte, perché come detto il processo è intrinsecamente sub-ottimale.

Dal calcolo si sono ottenute 31 traiettorie, tutte che effettuano un primo flyby con l'asteroide 2001 WN5, per via dell'estrema facilità con cui si riesce a raggiungere. La velocità relativa dell'incontro è tuttavia al limite dell'accettabile, quasi 10km/s . Per includere traiettorie a velocità relativa più bassa, dunque con un tempo di permanenza nelle vicinanze dell'oggetto abbastanza elevato da poter effettuare le osservazioni che ci si è prefissati, è stato effettuato nuovamente il calcolo usando la stessa strategia ma

Basso ΔV				
	asteroide	data flyby	vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	08/09/2027	0.00km/s	
Primo flyby	2001 WN5	28/06/2028	9.64km/s	0.176km/s
Secondo flyby	2016 DY30	20/02/2029	15.19km/s	0.133km/s
Terzo flyby	2012 SY49	25/09/2029	15.74km/s	0.183km/s
Quarto flyby	2018 DZ3	04/03/2030	9.44km/s	0.044km/s
		Dur. 2.4y	Max. 15.74km/s	tot. 0.536km/s

Tabella 9.1: Caratteristiche di flyby della traiettoria a ΔV minore

Bassa V_{rel}				
	n. asteroide	data flyby	vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	14/01/2028	0.00km/s	
Primo flyby	2014 TM	02/10/2028	7.15km/s	0.188km/s
Secondo flyby	2015 CT13	16/02/2029	7.01km/s	0.2635km/s
Terzo flyby	2015 LK	03/07/2029	6.71km/s	0.110km/s
Quarto flyby	2015 XO	12/12/2029	6.01km/s	0.163km/s
		Dur. 1.9y	Max. 7.15km/s	tot. 0.724km/s

Tabella 9.2: Caratteristiche di flyby della traiettoria a velocità relativa minore

aggiungendo una condizione di salvataggio: la traiettoria andata a convergenza dovrà avere ΔV basso e una $V_{relativa}$ minore di $8.5km/s$ per essere selezionata.

Il processo, conclusosi in poche ore, ha generato un set complessivo di 44 traiettorie a quattro flyby con ΔV basso, di cui 14 che rispettano il vincolo sulla velocità relativa. I valori di ΔV e V_{rel} dei vari archi è riportata in tabella 9.3.

Nelle sezioni successive saranno analizzate le traiettorie in questione ai fini di trovare tutte le sequenze potenzialmente a basso costo in modo da ottimizzare solo quelle.

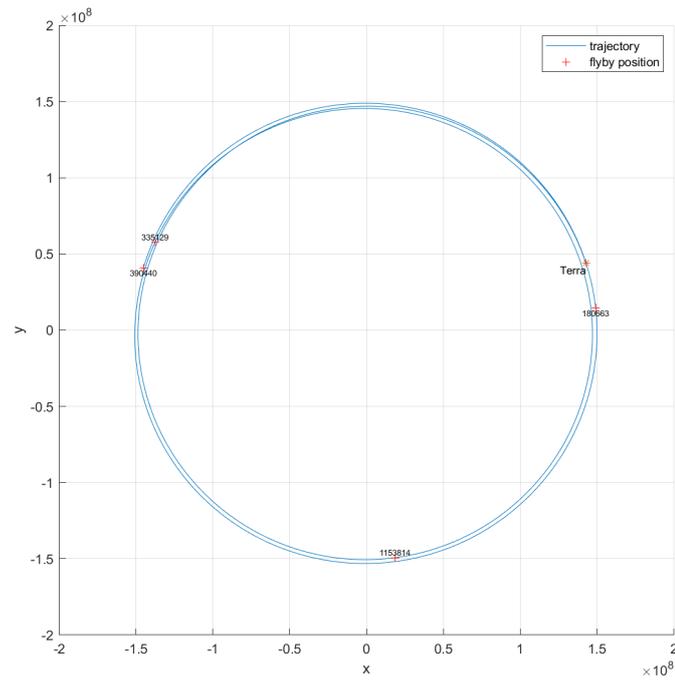
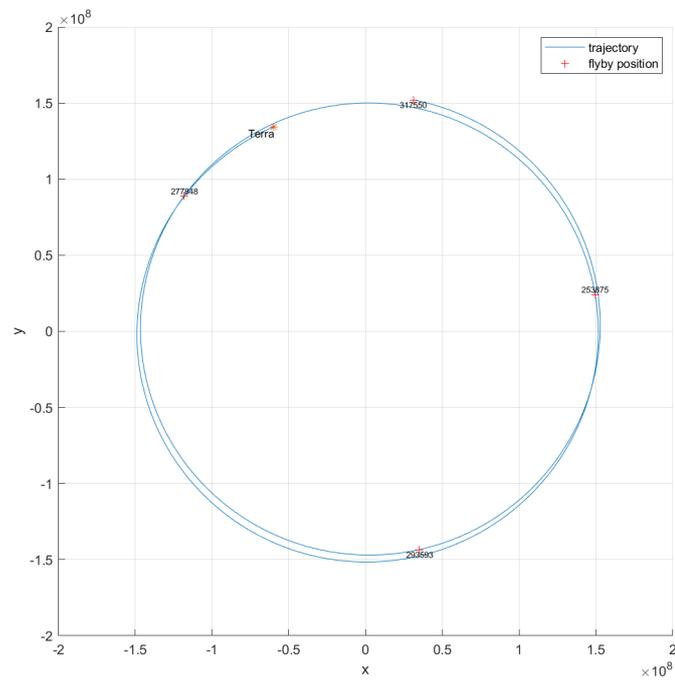
Si riportano alcuni grafici delle due traiettorie migliori, quella a più basso costo e quella a basse velocità relative con il consumo minore. Le tabelle 9.1 e 9.2 riassumono le caratteristiche delle due sequenze: sia il vincolo di durata che di partenza vengono rispettati, anche il vincolo di consumo è largamente soddisfatto, con una massa di propellente spesa di meno di 12kg e meno di 16kg rispettivamente per la missione a più basso ΔV e a più bassa V_{rel} .

Per entrambe le soluzioni, la traiettoria non discosta molto dall'orbita terrestre in ogni istante temporale, perché esse cambiano di molto poco l'energia dell'orbita (solo di qualche punto percentuale) e puntando di più sulle variazioni percentuali di eccentricità. L'inclinazione rimane molto bassa e non è molto importante nella trattazione, motivo per cui gli archi possono considerarsi complanari all'eclittica.

L'andamento del raggio in funzione del tempo è a grandi linee sinusoidale, con ampiezza e fase che cambiano leggermente per via delle brevi fasi di spinta, ma periodo sostanzialmente costante. Queste osservazioni sarà di fondamentale importanza per la selezione delle sequenze.

	$V_{rel,1}$	$V_{rel,2}$	$V_{rel,3}$	$V_{rel,4}$	ΔV_1	ΔV_2	ΔV_3	ΔV_4	V_{tot}
1	9,699	14,708	6,299	6,299	103,425	267,125	221,404	0,000	591,955
2	9,746	14,469	23,137	23,137	105,025	198,670	277,494	295,771	876,961
3	9,683	14,744	16,246	16,246	116,032	199,899	221,468	326,689	864,088
4	9,751	7,124	9,071	9,071	106,430	119,071	131,423	467,991	824,915
5	9,684	7,333	6,452	6,452	115,252	307,248	1,738	265,905	690,143
6	9,693	7,341	6,279	6,279	107,745	293,067	248,969	177,178	826,959
7	9,695	7,253	16,208	16,208	105,848	201,396	191,624	378,053	876,921
8	9,706	7,259	16,176	16,176	98,361	200,751	170,113	412,327	881,553
9	9,818	5,781	15,691	15,691	271,258	115,577	83,822	93,591	564,248
10	9,854	5,698	16,157	16,157	283,538	85,992	46,497	351,140	767,167
11	9,874	5,688	16,276	16,276	296,547	62,075	183,652	0,000	542,274
12	9,852	5,768	6,633	6,633	278,167	108,943	62,802	184,546	634,458
13	9,855	5,769	6,610	6,610	280,397	143,713	159,868	262,521	846,499
14	9,846	5,775	6,631	6,631	273,660	119,078	58,060	177,353	628,151
15	9,862	5,709	16,198	16,198	286,933	76,827	213,174	0,000	576,933
16	9,844	5,745	16,338	16,338	276,645	98,279	76,808	215,126	666,857
17	9,706	3,351	8,063	8,063	98,282	311,807	207,124	42,282	659,496
18	9,884	16,706	16,162	16,162	316,689	88,289	63,385	364,304	832,667
19	9,898	16,731	16,276	16,276	328,847	71,096	194,967	0,000	594,910
20	9,863	16,676	16,053	16,053	304,495	113,270	81,494	308,534	807,793
21	9,869	16,680	8,038	8,038	307,180	110,687	285,333	177,907	881,106
22	9,880	16,702	16,258	16,258	317,782	92,966	83,482	345,658	839,888
23	9,887	16,713	16,204	16,204	322,025	85,764	197,176	26,792	631,758
24	9,870	16,682	16,332	16,332	307,464	107,939	92,006	226,626	734,036
25	9,621	15,265	7,548	7,548	187,975	112,826	258,540	177,188	736,528
26	9,621	15,274	7,549	7,549	188,170	132,911	238,212	276,920	836,213
27	9,618	15,309	7,540	7,540	191,049	187,053	235,797	155,732	769,631
28	9,632	15,160	15,867	15,867	172,649	147,567	248,586	45,964	614,766
29	9,632	15,166	15,833	15,833	173,230	144,017	227,597	254,349	799,193
30	9,630	15,186	15,736	15,736	175,692	133,284	182,875	44,245	536,096
31	7,040	5,643	6,626	6,626	247,468	326,440	209,907	487,903	1271,718
32	7,046	5,613	6,552	6,552	241,194	308,040	460,834	163,435	1173,503
33	7,045	5,617	6,538	6,538	239,501	307,200	533,738	27,276	1107,715
34	7,044	5,625	6,576	6,576	242,882	310,560	334,693	203,005	1091,140
35	7,149	7,030	6,734	6,734	188,748	296,947	85,135	723,280	1294,111
36	7,148	7,013	6,710	6,710	187,936	263,515	109,544	162,667	723,662
37	3,805	3,294	7,594	7,594	356,770	40,355	386,453	209,098	992,676
38	3,806	3,280	7,282	7,282	353,775	12,577	646,027	18,420	1030,799
39	3,804	3,307	7,776	7,776	360,513	69,397	160,225	323,660	913,795
40	5,778	5,283	7,976	7,976	453,312	223,941	156,764	117,042	951,058
41	8,340	5,975	7,617	7,617	271,869	115,742	633,125	263,049	1283,785
42	7,556	3,294	7,594	7,594	356,770	40,355	386,453	209,098	992,676
43	7,557	3,280	7,282	7,282	353,775	12,577	646,027	18,420	1030,799
44	7,555	3,307	7,776	7,776	360,513	69,397	160,225	323,660	913,795

Tabella 9.3: ΔV e V_{rel} delle traiettorie ottimizzate

Figura 9.1: Traiettorie a ΔV minore nel piano dell'eclitticaFigura 9.2: Traiettorie a V_{rel} minore nel piano dell'eclittica

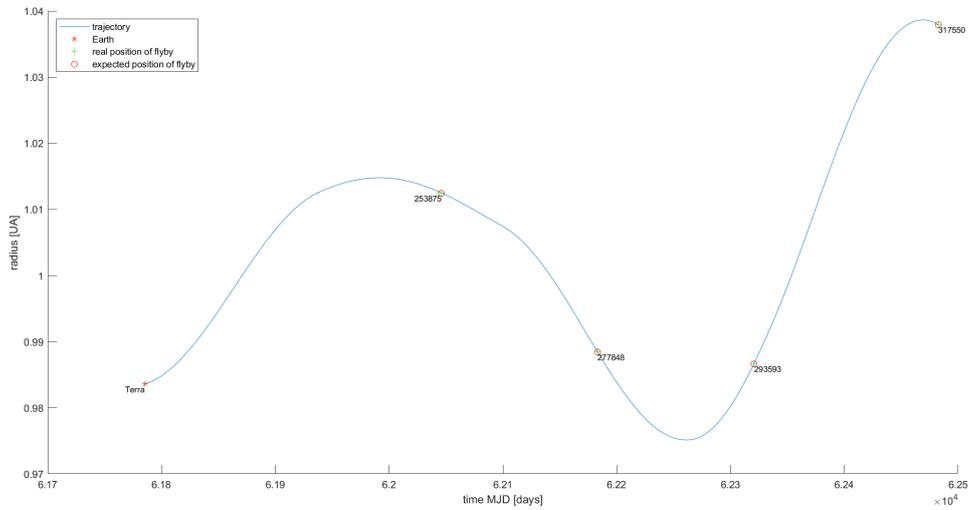


Figura 9.4: Grafico $r - t$ della traiettoria a V_{rel} minore

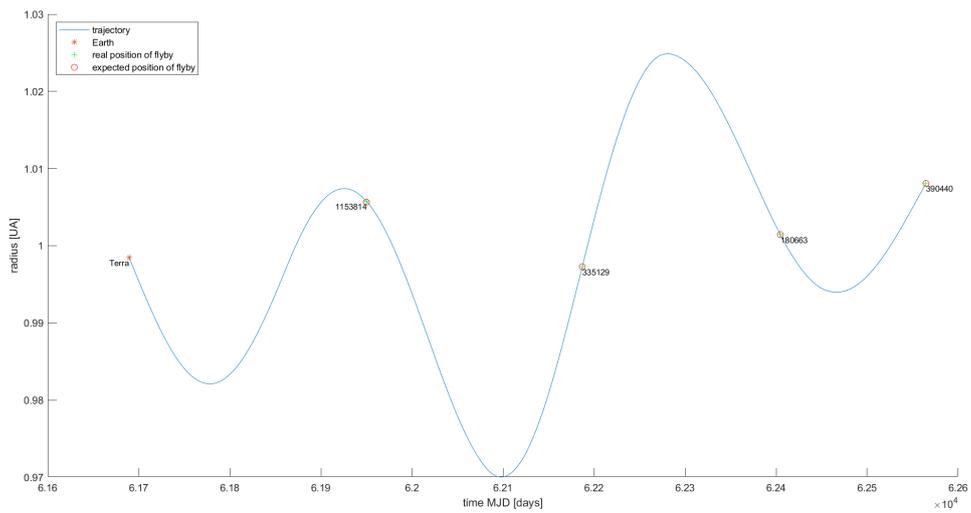


Figura 9.3: Grafico $r - t$ della traiettoria a ΔV minore

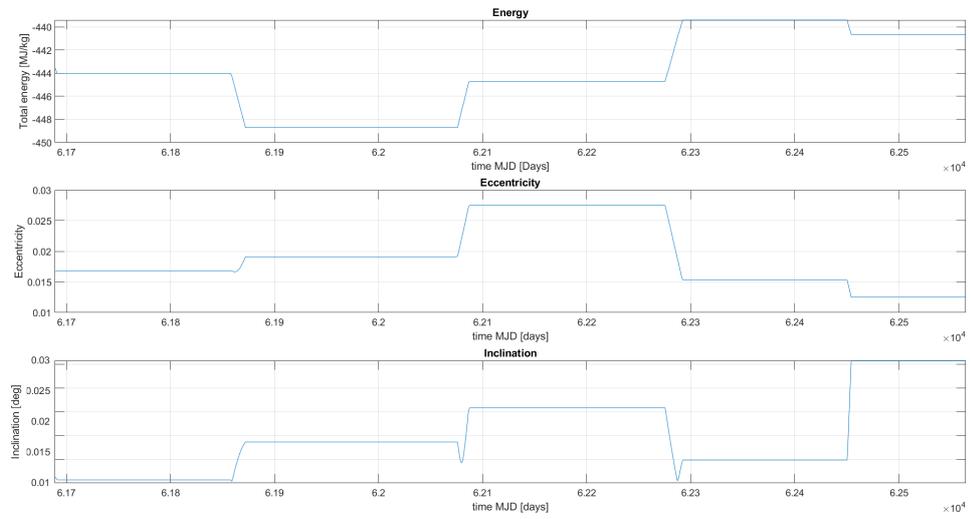


Figura 9.5: Parametri energetici, di forma e inclinazione in funzione del tempo per la traiettoria a ΔV minore

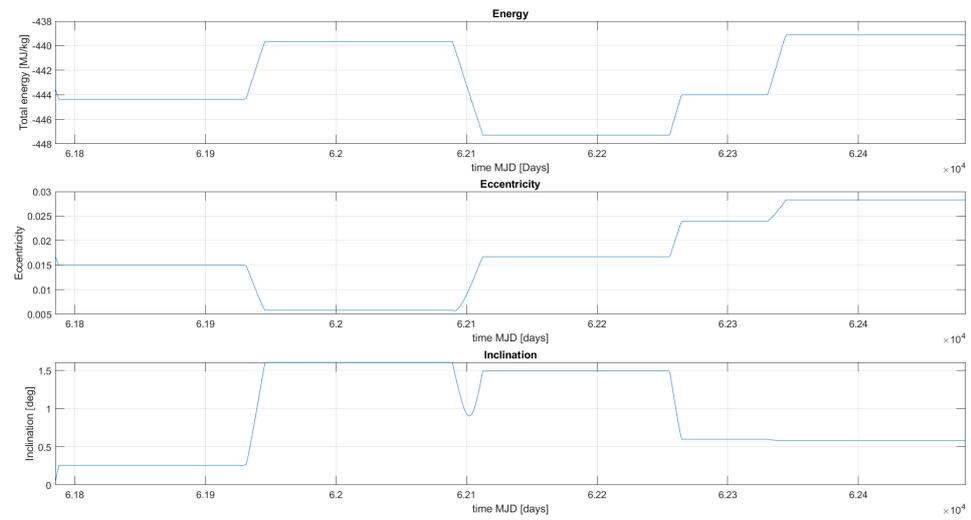


Figura 9.6: Parametri energetici, di forma e inclinazione in funzione del tempo per la traiettoria a V_{rel} minore

9.2 Caratterizzazione delle traiettorie a quattro flyby

Il numero delle traiettorie ottenute è troppo basso per essere considerato un campione statistico, tuttavia è molto utile per comprendere alcune caratteristiche comuni a tutte le traiettorie a basso costo, in modo da ricercare altre traiettorie aventi le stesse peculiarità e restringere il campo di ottimizzazione alle Sole combinazioni che hanno tutte le carte in regola per essere potenzialmente a basso ΔV .

Per confermare le congetture sulle correlazioni tra primo e secondo flyby, sono state analizzate statisticamente anche le traiettorie ottimali a due flyby con ΔV minore di 1km/s (che sono oltre 1500), così come per confermare le correlazioni tra secondo e terzo flyby sono state analizzate le traiettorie ottimali a tre flyby, sempre con ΔV minore di 1km/s (che sono oltre 1000). Queste traiettorie derivano da quelle scartate durante lo stesso calcolo sub-ottimale effettuato in precedenza, mantenendo condizioni leggermente meno stringenti. La conferma tuttavia non risulta rigorosa perché la velocità al flyby è un parametro libero dell'ottimizzazione, in modulo, direzione e verso. Infatti esso cambia in base alla posizione del flyby successivo, mentre assume il valore che massimizza in maniera assoluta la payload fraction nel caso in cui non esiste alcun arco dopo il suddetto flyby. Dunque, la strategia di spinta, il consumo di propellente e la traiettoria complessivamente ottenuta risultano diverse se il flyby considerato è interno alla traiettoria o no.

9.2.1 Caratterizzazione delle traiettorie a bassa spinta

Riepilogando, tutte le traiettorie a bassa spinta analizzate hanno tutte le seguenti caratteristiche generali:

- Raggio molto prossimo a quello della Terra ad ogni istante;
- $\Delta\theta$ tra Terra e asteroide al flyby è molto piccolo;
- Velocità angolare rispetto al Sole di circa 1° al giorno, molto prossima anch'essa alla velocità angolare della Terra;
- Andamento del raggio in funzione del tempo pseudo-sinusoidale;
- Inclinazione non superiore ai 3° ad ogni istante.
- Variazioni percentuali di eccentricità consistenti, ma con variazioni assolute sempre prossime allo zero;
- Energia dell'orbita all'incirca costante.

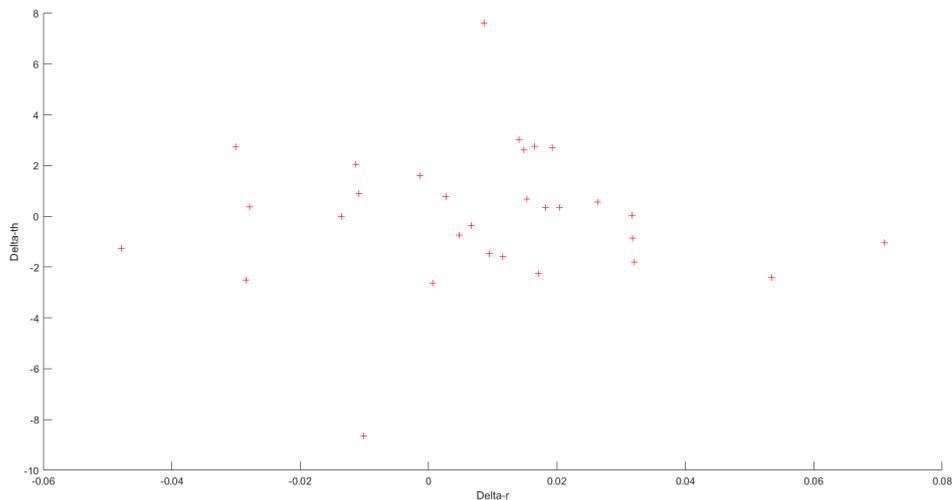


Figura 9.7: Grafico $r - \theta$ di tutti i flyby delle orbite in esame

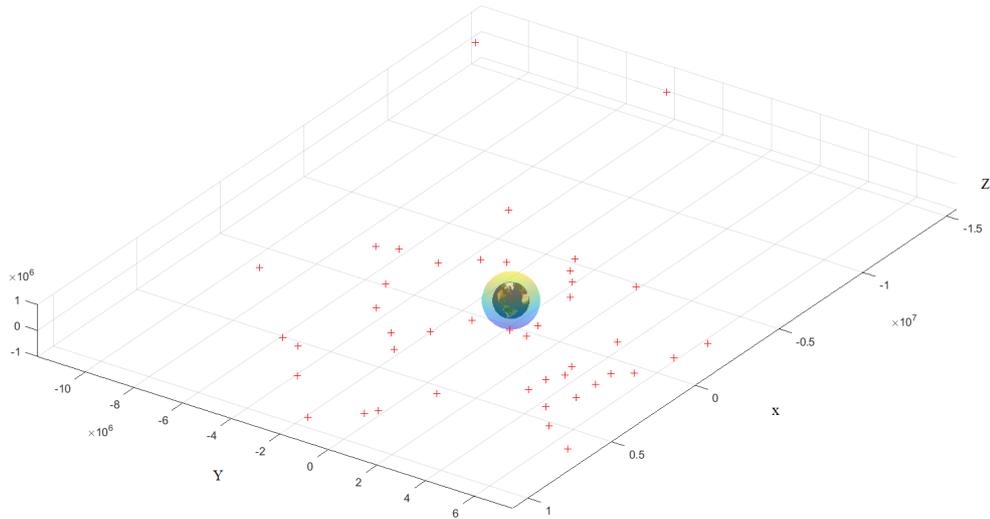


Figura 9.8: Grafico tridimensionale di tutti i flyby delle orbite in esame nel sistema ECI

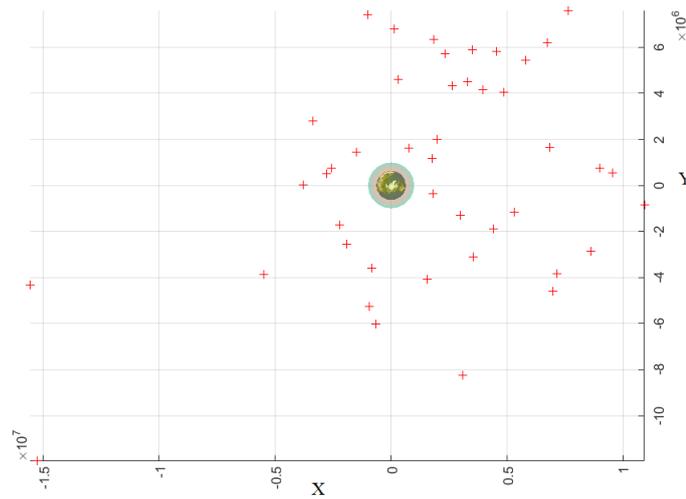


Figura 9.9: Grafico del piano xy di tutti i flyby delle orbite in esame nel sistema ECI

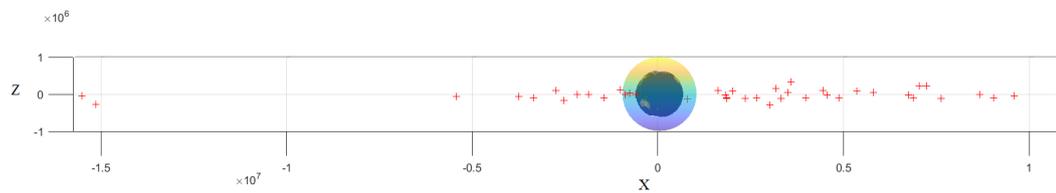


Figura 9.10: Grafico xz di tutti i flyby delle orbite in esame nel sistema ECI

Le caratteristiche sulle distanze relative alla Terra si possono osservare in figura 9.7, dove sull'asse delle ascisse è rappresentata la distanza radiale dalla Terra in unità astronomiche, mentre sull'asse delle ordinate la distanza su θ in gradi, un grafico più esplicitivo è il 9.11, che mostra il modulo delle distanze rispetto alla Terra per tutti i flyby. Nelle figure 9.8, 9.9 e 9.10 si può invece osservare la Terra (non in scala) con la sua sfera d'influenza (in scala) e le posizioni relative alla Terra dei flyby nello spazio fisico in coordinare ECI (Earth Centered Inertial). In particolare, si nota come la maggior parte dei flyby avvenga ad una distanza ravvicinata dalla Terra (qualche decina di milioni di chilometri) e tutti a distanza minima dall'eclittica. I flyby che non avvengono perfettamente su di essa sono effettuati con gli asteroidi appartenenti alla classe a bassa inclinazione e orbita intersecante quella della Terra, il cui limite era stato posto a 3° . Ogni grado di inclinazione corrisponde a circa 2.6 milioni di chilometri sull'asse normale all'eclittica, tuttavia i flyby non superano i 500000 chilometri lungo quella direzione, come si può vedere dai grafici. Questo avvalorava il fatto che anche una lieve variazione di inclinazione porta ad un aumento importante di ΔV , e informa sul fatto che anche gli asteroidi della suddetta categoria sono raggiungibili a basso costo solo nei dintorni dei nodi, ad eccezione di quelli con inclinazione molto più bassa del limite imposto.



Figura 9.11: Moduli delle distanze dalla Terra in milioni di chilometri

Dalle peculiarità descritte emergono alcune condizioni favorevoli per missioni a basso consumo, riportate nelle righe che seguono.

Anche se nella selezione si è imposto un raggio al flyby compreso tra 0.9UA e 1.1 UA, emerge che tutte le traiettorie analizzate (tranne tre flyby su 160) hanno distanza radiale dalla Terra ai flyby (Δr) compresa tra -0.04 UA e 0.04 UA, per cui la distanza dal Sole deve rientrare approssimativamente nell'intervallo tra 0.96UA e 1.04UA.

È molto raro che il punto di flyby successivo stia sull'orbita osculatrice alla traiettoria al flyby precedente e che il veicolo raggiunga il punto esattamente all'epoca voluta. Questo vale in generale per flyby interni (primo, secondo e terzo), alcuni archi che portano al quarto e ultimo asteroide, tuttavia, risultano avere ΔV nullo proprio perché possiedono queste due caratteristiche. Infatti, ponderando modulo, direzione e verso della V_{rel} rispetto al penultimo flyby, si riesce ad arrivare al punto finale esattamente al tempo finale senza alcuno sforzo propulsivo. In generale tuttavia ciò non accade ed è necessario dare al veicolo il tempo di modificare l'orbita azionando il sistema propulsivo per portarsi al punto finale al tempo scelto. Osservando le traiettorie preliminari, è possibile affermare che la finestra temporale per effettuare un flyby è tra i 130 e i 315 giorni dopo il flyby precedente (o la partenza). Quasi tutte le sequenze rispettano questa regola, tranne ovviamente casi particolari, come si può vedere in figura 9.12, dove il tempo è riportato in giorni giuliani.

Si era già notato che la distanza dal Sole ha un andamento temporale pseudo-periodico, con forma di sinusoidi ad ampiezza e fase variabile. Questa osservazione è rafforzata dalla leggera eccentricità dell'orbita osculatrice del veicolo, che cambia durante la missione nei brevi intervalli di tempo dove la spinta risulta non nulla. L'ipotesi preliminare è che se un flyby avviene a Δr_i positivo, dunque ad un raggio maggiore di quello terrestre a θ_i , allora il flyby successivo conviene che sia a Δr_{i+1} negativo, quindi a raggio minore dell'orbita terrestre a θ_{i+1} . L'ipotesi ha validità solo se i flyby avvengono a 180° l'uno dall'altro e se effettivamente ci si trova ad un apside dell'orbita osculatrice alla traiettoria, condizioni non sempre verificate. L'ipotesi è avvalorata dal fatto che se l'energia rimane costante e uguale a quella che compete ad un'orbita con semiasse maggiore pari a 1UA, se il veicolo si trova a $r > a$ allora esso tenderà *naturalmente* a scendere verso $r < a$ per via della propagazione kepleriana dell'orbita, viceversa

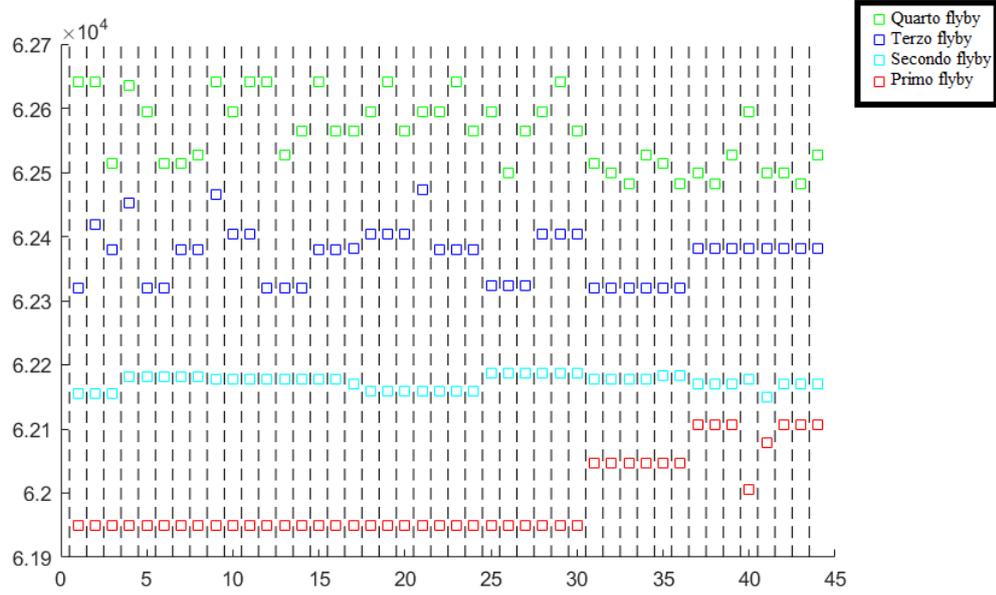


Figura 9.12: Tempi di percorrenza dei quattro archi.

se il veicolo si trova a $r < a$. C'è dunque un andamento di Δr che viene seguito in maniera naturale per via delle caratteristiche dell'orbita ellittica, se gli asteroidi vengono intercettati non lontano da questo andamento, il costo per deviare l'orbita e raggiungerli è molto basso.

Per generalizzare l'ipotesi, si stima che l'ampiezza della sinusoidale $\Delta r(t)$ sia $\pm 0.04\text{UA}$, e che parta con fase nulla alla partenza dalla Terra:

$$\Delta r_i = \pm 0.04 \sin(\phi_i) \quad \text{con} \quad \phi_i = \omega_{\oplus}(t_i - t_0)$$

Il Δr_{i+1} si può infine stimare come:

$$\Delta r_{i+1} = \pm 0.04 \sin(\phi_i + \omega_{\oplus} \Delta t_{i+1}) = \pm 0.04 \sin(\omega_{\oplus}(\Delta t_{i+1} + t_i - t_0)) = \pm 0.04 \sin(\omega_{\oplus}(t_{i+1} - t_0))$$

Con Δt_{i+1} tempo di percorrenza tra il flyby $i + 1$ e il precedente o tra il primo flyby e la Terra nel caso in cui $i = 0$. Il \pm dipende dal segno di Δr_1 , infatti se il primo flyby è a Δr positivo e si trova a meno di 180° dalla partenza allora la sinusoidale ha ampiezza positiva, altrimenti risulta ribaltata.

Il valore ± 0.04 viene ricavato dal valore di eccentricità massimo registrato (circa 0.03), in quanto è proprio l'eccentricità a dare l'ampiezza alla sinusoidale, se $e = 0$, allora non ci sarebbe moto oscillatorio sul raggio medio.

Applicando la condizione appena descritta alle traiettorie ottimali preliminari, si nota che il 98% (43 su 44) dei secondi e dei quarti flyby e il 91% (40 su 44) dei terzi conferma questo pattern. La condizione resta comunque abbastanza grossolana e non viene applicata sui valori numerici. Si usa soltanto per stimare il segno del Δr in modo da scegliere in maniera adeguata l'asteroide per il flyby successivo. Si riesce ad ottenere una congruenza maggiore aggiungendo una fase iniziale di -60° alla sinusoidale dal secondo flyby in poi, ottenendo una percentuale ancora più elevata anche per i terzi flyby. Questo aggiustamento può essere parzialmente giustificato dal fatto che la propagazione non è puramente kepleriana, ma, seppur molto piccola e per brevi periodi, è presente una spinta che modifica l'eccentricità e la posizione della linea degli apsidi dell'orbita dello spacecraft (e dunque l'ampiezza e la fase della sinusoidale). Il confronto tra i valori stimati e quelli reali dei Δr delle traiettorie ottimizzate preliminari è riportato in tabella 9.4. Per conferma della validità delle ipotesi utilizzate, è stata imposta una condizione anche sull'angolo θ di

ascensione retta dall'equinozio di primavera:

$$|(t_i - t_1)\omega_{\oplus} - (\theta_i - \theta_1 + k \cdot 360^\circ)| < 20^\circ$$

La condizione è sempre verificata per tutte le traiettorie, in quanto l'orbita è quasi circolare e l'ascensione retta θ e il tempo t risultano due variabili completamente intercambiabili (moto medio $\simeq 1^\circ/\text{giorno}$).

Confrontando le condizioni con le traiettorie a solo due e solo tre asteroidi (che hanno un numero abbastanza elevato da potersi considerare un campione statistico) si evincono alcune osservazioni degne di nota:

- Dal grafico in figura 9.13 e in figura 9.14, è possibile notare come le migliori traiettorie stiano tutte nell'intorno dell'origine, tuttavia, se ci si scosta dallo zero, si nota che tutte le traiettorie hanno un Δr grande con un piccolo $\Delta\theta$ o un Δr piccolo con un $\Delta\theta$ grande. In altre parole sembra che il ΔV della missione sia proporzionale ad una combinazione di funzioni monotone crescenti del $|\Delta r|$ e del $|\Delta\theta|$. Si stanno trattando delle traiettorie a costo molto basso che stanno nell'intorno del pianeta Terra, per cui ipotizzando una proporzione lineare del tipo:

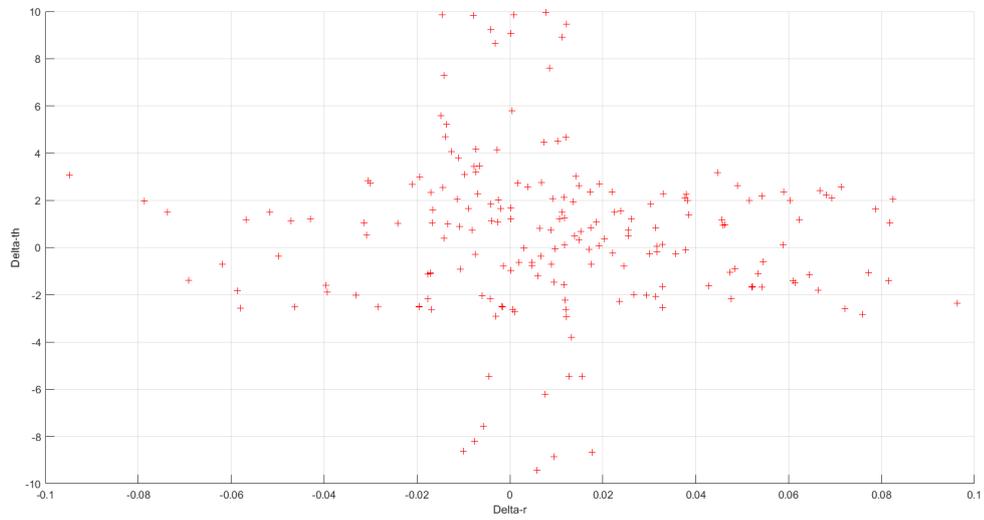
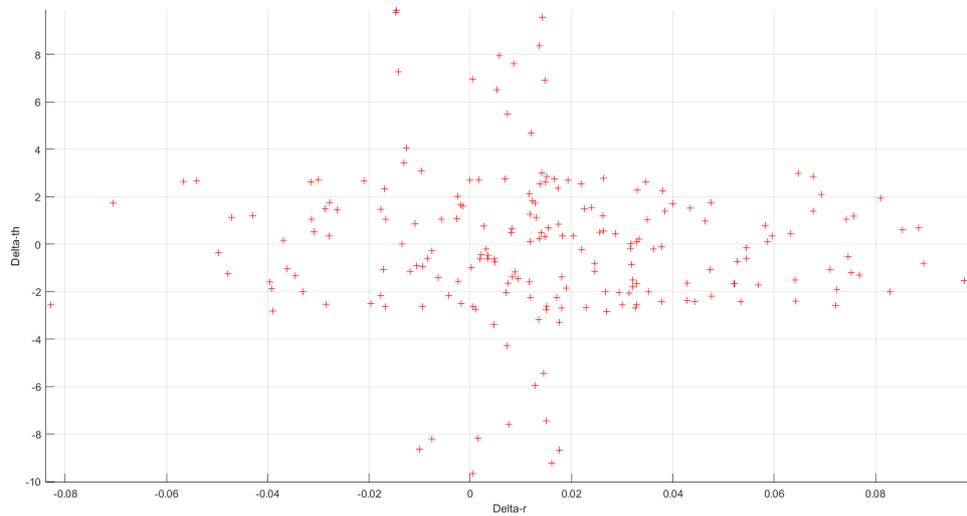
$$\Delta V \propto (\Delta\theta \pm 2)(\Delta r \pm 0.02) = \psi$$

È possibile imporre un ulteriore limite come $\psi \in [a, b]$. In particolare, si osserva che

$$\psi \in [-0.29^\circ \text{UA}, 0.18^\circ \text{UA}]$$

Il che ha un riscontro fisico, in quanto più ci si sposta in termini di Δr o $\Delta\theta$, più si paga in termini di propellente. Inoltre, quando Δr è positivo, la differenza di velocità circolare con la Terra porta naturalmente il veicolo a retrocedere a $\Delta\theta$ negativi, questo è il motivo per cui il limite negativo è più alto in valore assoluto, perché quando si varia il Δr , si ottiene un $\Delta\theta$ "gratuito" con segno opposto al Δr . Il discorso risulta del tutto analogo dal punto di vista angolare: per ottenere un $\Delta\theta$ positivo, è necessario aumentare la velocità del veicolo rispetto alla Terra, per cui è obbligatorio portare il veicolo a raggi più bassi e dunque a Δr negativi. L'esatto opposto vale per ottenere $\Delta\theta$ negativi.

- La condizione sui tempi tra un flyby all'altro risulta anche in questo caso molto accurata, quasi tutte le traiettorie hanno archi di durata dai 130 e 315 giorni, poche di queste superano tale range, ma in generale non scendono sotto i 110 giorni (ad eccezione del primo arco che dura a volte solo 50 giorni) e non salgono sopra i 340 giorni.
- La condizione su Δr rispecchia molto male gli archi verso l'ultimo asteroide della sequenza, perché, come già detto esso non è influenzato da archi successivi, mentre da un trend discreto per i flyby interni alle sequenze. Questo indica che la condizione è applicabile solo su Δr_2 e Δr_3 , mentre non si applica a Δr_4 nonostante la correlazione totale sulle traiettorie preliminari a quattro asteroidi.

Figura 9.13: Δr - $\Delta \theta$ delle sequenze a due asteroidiFigura 9.14: Δr - $\Delta \theta$ delle sequenze a tre asteroidi

9.2.2 Caratterizzazione delle traiettorie a basse velocità relative

La velocità relativa al flyby non dipende molto dalla traiettoria scelta, in quanto la velocità e la direzione del veicolo variano molto poco rispetto ai valori della Terra. Traiettorie diverse per uno stesso asteroide cambiano la velocità relativa al flyby di meno del 3%.

É possibile assumere quindi che la velocità relativa per flyby nello spazio near-earth è indipendente dalla soluzione utilizzata, ma dipende dai parametri orbitali dell'asteroide considerato. In particolare:

- Se il semiasse maggiore è molto più grande di quello della Terra, il modulo della velocità inerziale dell'asteroide sarà di gran lunga più elevata della velocità del veicolo a parità di raggio, per cui anche se le due velocità risultassero parallele e con verso concorde, la velocità relativa risulterebbe molto grande. Questa osservazione si deduce logicamente dalla conservazione dell'energia meccanica sull'orbita, sapendo che r è costante e nell'intorno di 1UA:

$$-\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu}{r} + \frac{V^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} \right)}$$

Per cui semiassi maggiori grandi comportano moduli di velocità alti;

- Se il semiasse maggiore è molto più piccolo di quello della Terra, il discorso è analogo. Il modulo della velocità inerziale dell'asteroide risulta molto più piccolo di quello del veicolo a parità di raggio per via della conservazione dell'energia meccanica sull'orbita, per cui qualsiasi siano le direzioni delle due velocità, la loro differenza vettoriale risulterà sempre molto grande;
- Se l'eccentricità è molto grande e il flyby non avviene al perielio dell'orbita dell'asteroide, la velocità di quest'ultimo avrà un angolo relativamente grande rispetto alla direzione della velocità del veicolo (circa quella tangenziale). Anche se i moduli delle velocità sono identiche, se l'angolo compreso tra di esse è maggiore di 20° (eccentricità maggiore di 0.34), la velocità relativa supera i 10km/s.

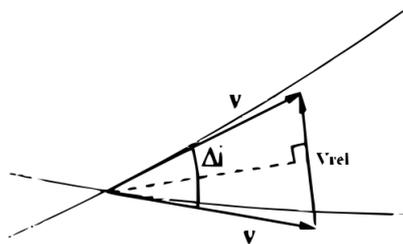


Figura 9.15: Velocità relativa con orbita a inclinazione elevata

- Se l'inclinazione è molto grande, vale lo stesso discorso sull'eccentricità, se si supera un certo angolo, anche se le velocità hanno lo stesso modulo, la velocità relativa sarà troppo elevata, come si può vedere in figura 9.15;

9.3 Riassunto condizioni favorevoli a traiettorie a basso costo

Variabile al flyby	Unità	Condizione
$ \Delta r $	[UA]	$ \Delta r < 0.04$
Δt	[Giorni]	$\Delta t \in [130, 315]$
Δr_{i+1}	[UA]	$\text{sign}(\Delta r_{i+1}) = \text{sign}(\pm 0.4 \sin(\omega_{\oplus}(t_{i+1} - t_0)))$
$\Delta t, \Delta \theta$	[Giorni] [°]	$ (t_i - t_1)\omega_{\oplus} - (\theta_i - \theta_1 + k \cdot 360^\circ) < 20^\circ$
$\Delta \theta, \Delta r$	[°] [UA]	$(\Delta \theta \pm 2)(\Delta r \pm 0.02) \in [-0.29, 0.18]$

Tabella 9.5: Riassunto condizioni

Con le condizioni sopraelencate si riesce a ridurre la ricerca a meno di 10000 possibili combinazioni, ben quattro ordini di grandezza in meno delle combinazioni iniziali, per un tempo di calcolo minore di sette giorni.

10

Soluzioni ottenute

In questo capitolo vengono riportate e commentate le traiettorie migliori che sono state ottenute dal processo di ottimizzazione descritto nei capitoli precedenti. In particolare verranno descritte sei traiettorie: le tre a consumo più basso, le tre a velocità relativa più bassa e costo propulsivo relativamente basso. Le caratteristiche di alcune altre sequenze, che hanno un alto valore scientifico vengono riportate alla fine del capitolo.

Il nuovo processo di ottimizzazione ha portato a ricavare molte altre traiettorie. In particolare, con tutti i processi automatizzati che sono stati effettuati (con diversi parametri per i moltiplicatori di Lagrange), sono state ottenute 105 traiettorie a un flyby, 1542 traiettorie a due flyby, 1378 traiettorie a tre flyby e 328 traiettorie a quattro flyby. Tutte con ΔV minore di 1km/s. Le tabelle che descrivono le caratteristiche di tutte le traiettorie a uno e quattro asteroidi sono riportate in appendice B. Le traiettorie a due e a tre asteroidi non vengono riportate nelle tabelle per via della loro numerosità. Le traiettorie migliori che verranno analizzate sono indicate con il numero progressivo delle tabelle dell'appendice B. In figura 10.1 è possibile vedere tutte le traiettorie in un grafico $\Delta V - V_{rel}$ in modo da avere un riscontro grafico sulle loro caratteristiche generali. La maggior parte delle traiettorie a quattro asteroidi (precisamente

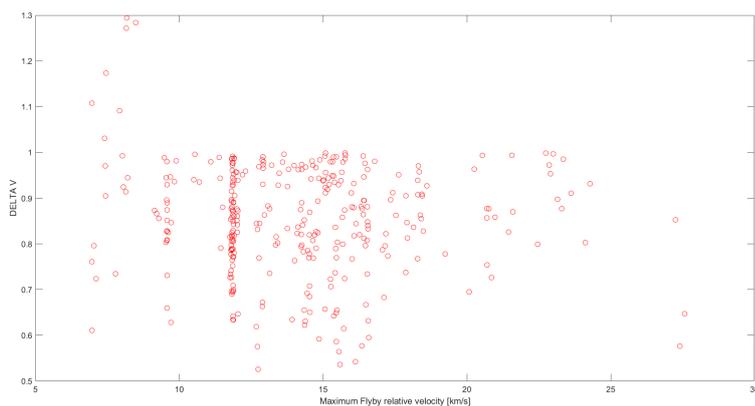


Figura 10.1: Grafico $\Delta V - V_{rel}$ di tutte le traiettorie a quattro flyby

168 su 328) effettua il primo flyby verso l'asteroide 2001 WN5. Il perché di questa singolarità è da ricercare nelle caratteristiche dell'arco in considerazione: in condizioni ottimali l'asteroide 2001 WN5 è raggiungibile con un ΔV di solo 0.0976km/s, il punto di flyby si trova quasi esattamente sull'orbita terrestre ($\Delta r = -0.01$) e sfasato di 0.88 gradi rispetto al pianeta, rendendolo facile da raggiungere e perfetto per arrivare a qualsiasi altro asteroide.

10.1 Traiettorie con il minor consumo

Le traiettorie a consumo minore sono quelle con la massa finale più grande e il ΔV più basso, possono essere considerate le traiettorie migliori da raggiungere dal punto di vista ingegneristico, ma molto spesso non sono quelle più interessanti dal punto di vista scientifico, non solo per via della velocità relativa con cui si effettuano i flyby, spesso molto alta, ma anche per via dell'interesse che l'oggetto suscita nella comunità scientifica.

Il processo di ottimizzazione ha portato alla scoperta di una nuova traiettoria con ΔV minore di quello minimo del set di traiettorie preliminari e con velocità relativa massima ancora più bassa. Questo giustifica il lavoro fatto per caratterizzare le traiettorie e conferma che il processo preliminare era intrinsecamente sub-ottimale.

10.1.1 Traiettoria 11

La sequenza 1153814-339253-1450237-398513 ha la traiettoria a quattro asteroidi con il consumo minore in assoluto, solo 11.6kg di propellente. Il motivo della sua convenienza è da ricercare nella durata della missione: quasi 3 anni. È noto che il costo propulsivo di una manovra è generalmente inversamente proporzionale con il tempo di manovra, per cui è probabile che sia proprio il prolungarsi della missione a fare di essa la traiettoria migliore.

	Asteroide	Data flyby	Vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	01/01/2028	0.00km/s	
Primo flyby	2001 WN5	19/04/2029	9.56km/s	0.137km/s
Secondo flyby	2016 FY12	26/06/2029	12.74km/s	0.172km/s
Terzo flyby	2002 XY38	20/02/2030	6.31km/s	0.114km/s
Quarto flyby	2018 WH	18/11/2030	7.40km/s	0.103km/s
		Dur. 2.9y	Max. 12.74km/s	tot. 0.526km/s

Tabella 10.1: Caratteristiche della traiettoria

La traiettoria è molto compatta sull'orbita terrestre e il raggio in funzione del tempo ha un andamento armonico molto regolare e, ovviamente, ad ampiezza variabile. La velocità del veicolo è sempre tangente alla traiettoria, e sebbene spesso abbia più o meno lo stesso modulo della velocità dell'asteroide si discosta da essa per via dell'eccentricità dell'orbita del oggetto. Ciò porta ad avere le velocità relative elevate che si vedono in tabella, soprattutto per il primo e per il secondo flyby.

Durante la missione la spinta è quasi sempre nulla, tranne in piccole finestre temporali. In queste finestre (figura 10.13) si distinguono due livelli di spinta ben definiti, che corrispondono ai due livelli di duty cycle: 0.9 e 0.7 in base alla vicinanza all'asteroide. Tuttavia, sebbene la spinta si aggiri al 90% o al 70% della spinta nominale nei tratti rispettivamente lontani e vicini dai punti di flyby, essa non risulta costante, in quanto la potenza ricevuta dai pannelli solari varia in base alla distanza dal Sole. La spinta si riscalda con la portata che si riscalda alla potenza della spinta e dunque alla potenza che si riesce a ottenere dalla radiazione solare.

La strategia di spinta consiste in 5 momenti in cui la spinta è non nulla. La prima spinge in direzione tangenziale e in direzione opposta al moto, diminuendo il periodo orbitale del moto per raggiungere il primo asteroide a un $\Delta\theta$ positivo (in anticipo) rispetto alla Terra e un Δr negativo. La seconda e la terza spinta avvengono a r maggiore di quello della Terra, sono sempre tangenziali ma stavolta concordi

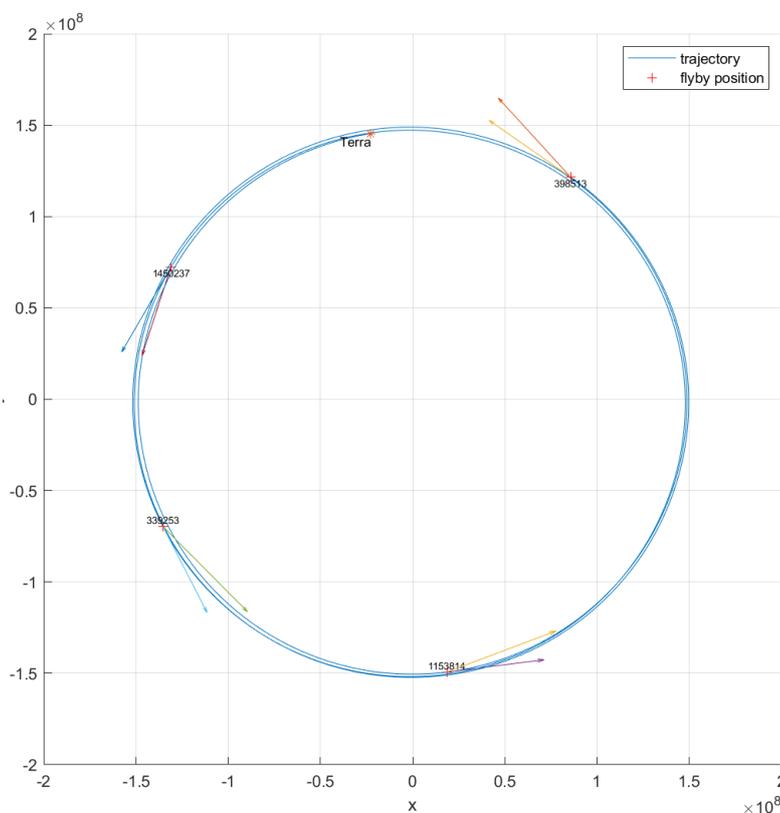


Figura 10.2: traiettoria nel piano x-y con velocità del veicolo e dell'asteroide

al moto, in modo da alzare il periastro e aumentare il periodo orbitale, raggiungendo il secondo asteroide a un raggio maggiore di quello della Terra e con una fase rispetto al pianeta più piccola. La quarta spinta diminuisce il periodo orbitale e il raggio medio dell'orbita avvenendo in opposizione al moto, per raggiungere il terzo asteroide a un $\Delta\theta$ positivo più grande del precedente e un raggio di poco maggiore a quello della Terra. La quinta e ultima spinta aumenta nuovamente l'energia orbitale raggiungendo il quarto asteroide a un $\Delta\theta$ e un Δr negativo. Il tutto può essere visto dai grafici $r - t$ e dagli archi in figura 10.9.

È importante notare che nell'ultimo tratto della missione il veicolo entra nella sfera d'influenza terrestre per un tempo molto piccolo, per poi uscirne ed incontrare l'ultimo asteroide (figura 10.8). Questo è un punto critico se si usa il modello dei due corpi ristretto, perché l'interazione con la gravità terrestre risulta rilevante per quel breve tratto. Ciò porta alcune complicazioni notevoli nello studio, perché ciò avviene, appunto, alla fine della traiettoria dove non c'è possibilità di correzione, inoltre passa per un'orbita ad altitudine abbastanza elevata e per un tempo non troppo piccolo. La deviazione cambierebbe in linea di massima la traiettoria e i consumi, ma non è detto che questi ultimi aumentino. Si potrebbe sfruttare la gravità terrestre per effettuare un leggero uno swing-by ed eseguire il flyby con un consumo anche più basso. Ad ogni modo sarebbe necessario un'analisi più dettagliata per osservare come la gravità della Terra influisce sui consumi e sulla fattibilità stessa della missione. Per l'analisi in questione questa traiettoria viene scartata.

I parametri orbitali del veicolo rimangono molto simili a quelli della Terra, la strategia ottimale in questi casi varia il semiasse maggiore e l'eccentricità. Il primo, legato all'energia influisce sul periodo orbitale e

sul raggio medio sull'orbita, il secondo influisce sulle stesse variabili ma in modo locale, infatti, quando l'eccentricità aumenta, aumenta anche l'ampiezza delle oscillazioni di Δr e di conseguenza anche quella delle oscillazioni di $\Delta\theta$, senza però variare il periodo orbitale complessivo.

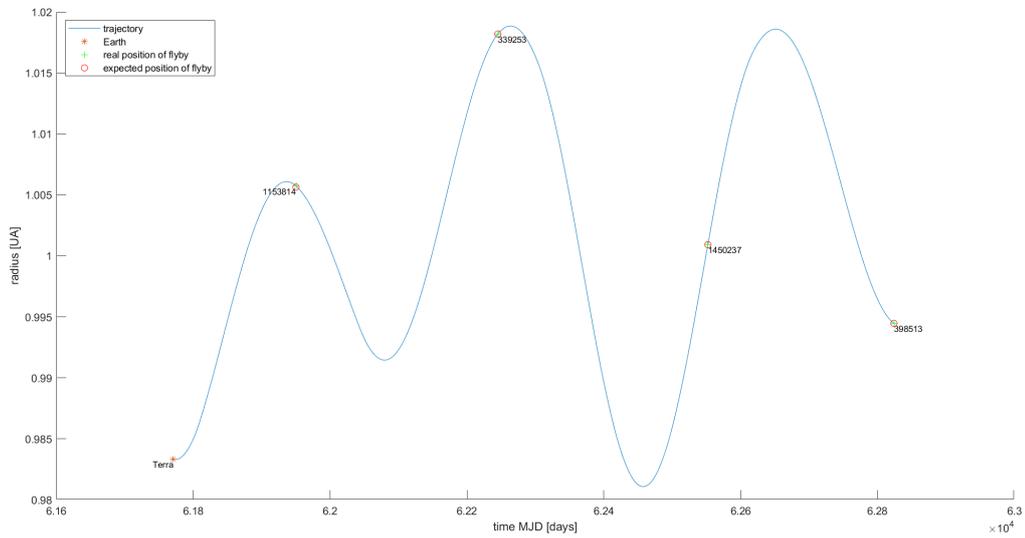


Figura 10.3: Grafico $r - t$

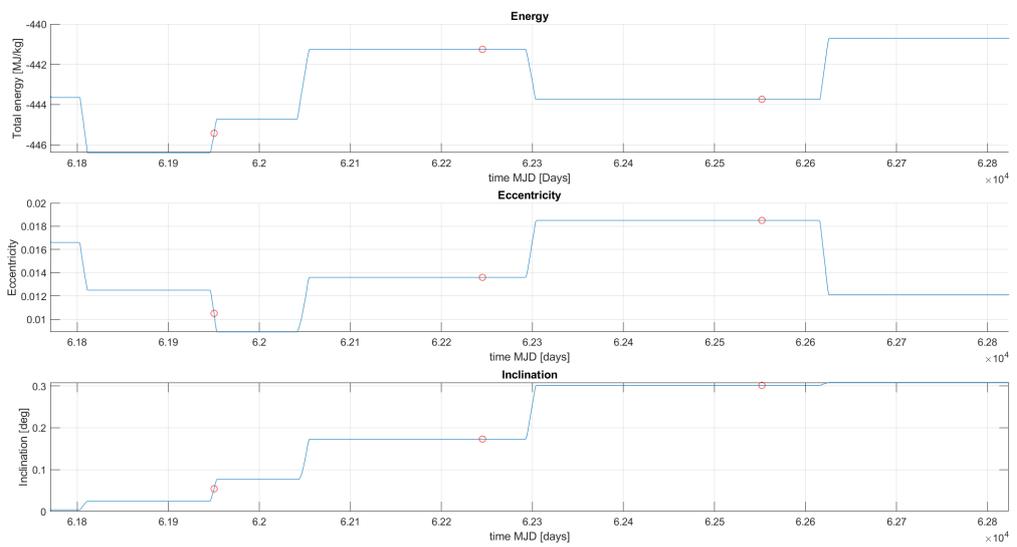


Figura 10.4: Energia, eccentricità e inclinazione dell'orbita osculatrice, in funzione del tempo

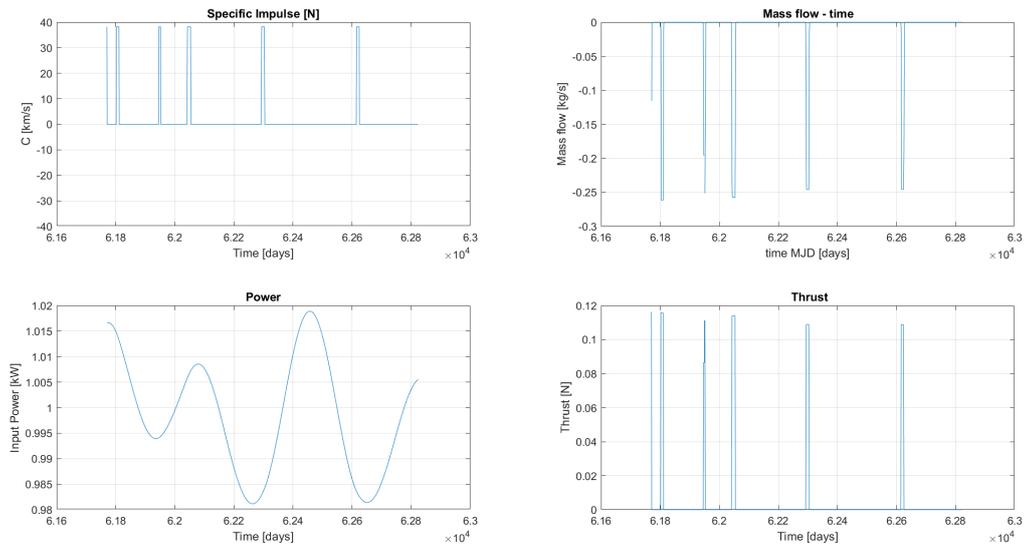


Figura 10.5: Velocità efficace di scarico, spinta, portata e potenza in funzione del tempo

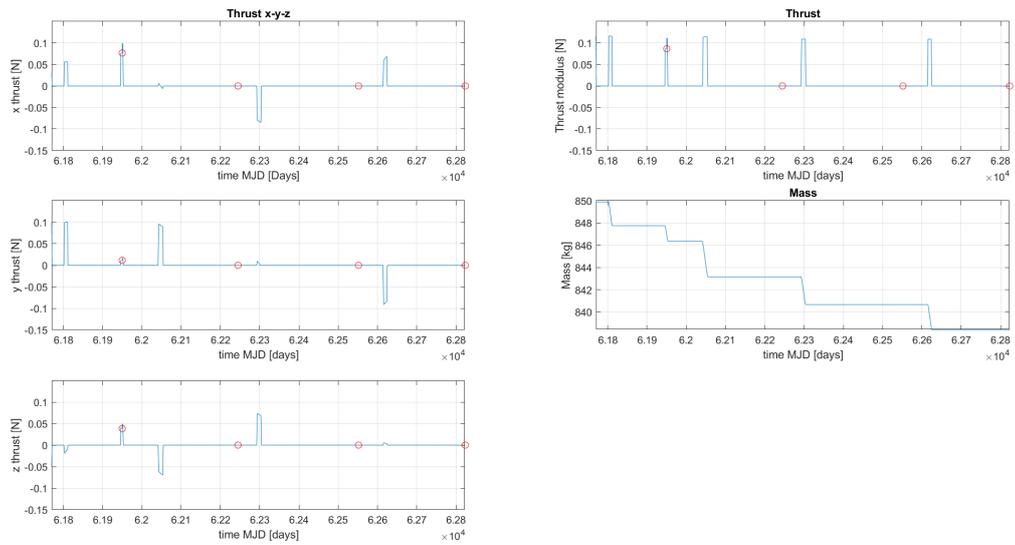


Figura 10.6: Spinta sui tre assi e massa in funzione del tempo

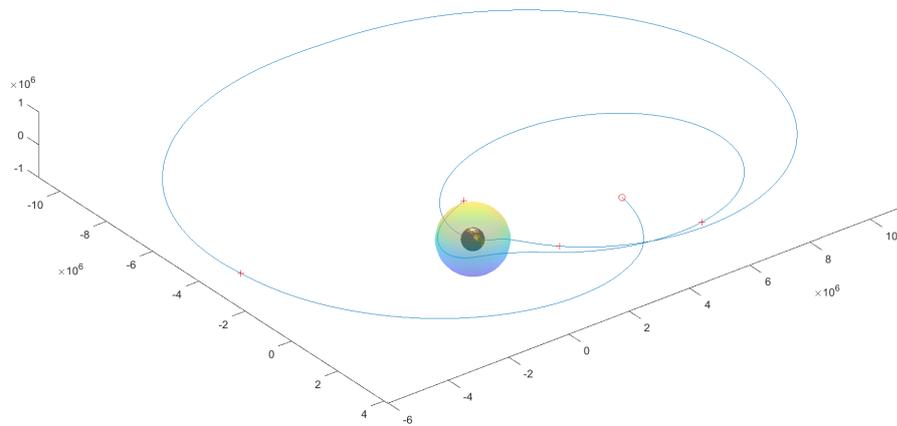


Figura 10.7: Traiettoria in riferimento ECI

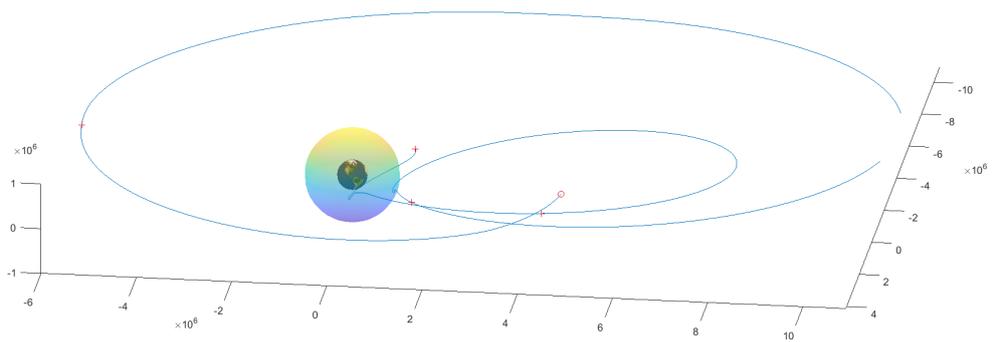


Figura 10.8: dettaglio traiettoria in ECI

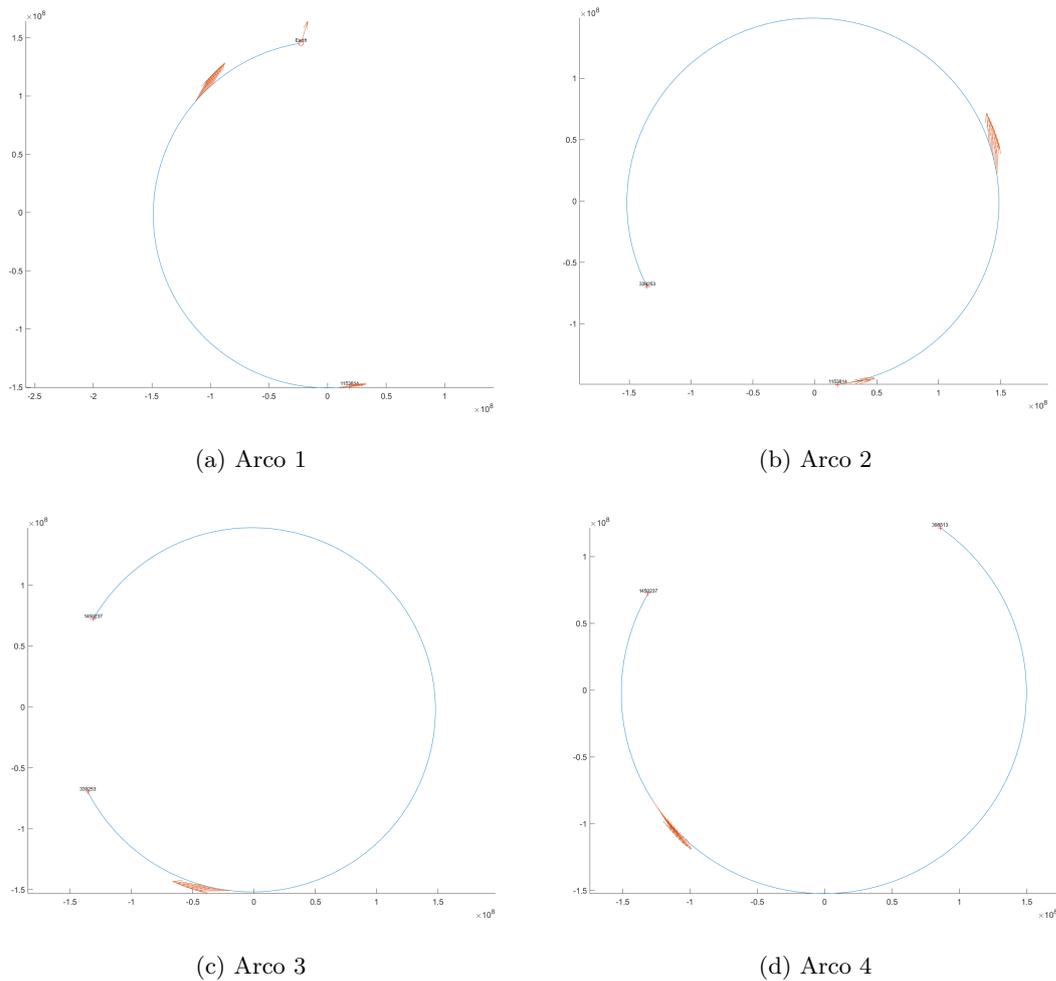


Figura 10.9: Direzione di spinta nei vari archi

10.1.2 Traiettoria 12

La seconda traiettoria più conveniente è quella che è stata già trovata nelle ottimizzazioni preliminari, la sequenza 1153814-335129-180663-390440. La partenza è imposta alla fine del 2027, si potrebbe portare all'inizio del 2028, tuttavia ciò non viene fatto per non variare il costo propulsivo (di 12kg di propellente). Ciò perché si ricorda che il ΔV è inversamente proporzionale alla durata della missione Δt . Essa è proprio la traiettoria più adatta per la missione preposta della classe a minor consumo, in termini di tempo, costo e modello. Anche in questo caso l'energia degli asteroidi è molto simile a quella terrestre, ma la loro eccentricità non trascurabile rende le velocità relative abbastanza elevate. La traiettoria del veicolo spaziale è molto vicino alla circonferenza di raggio 1UA e si mantiene tale per tutta la durata della missione, che in questo caso rispetta il limite dei 2.5 anni.

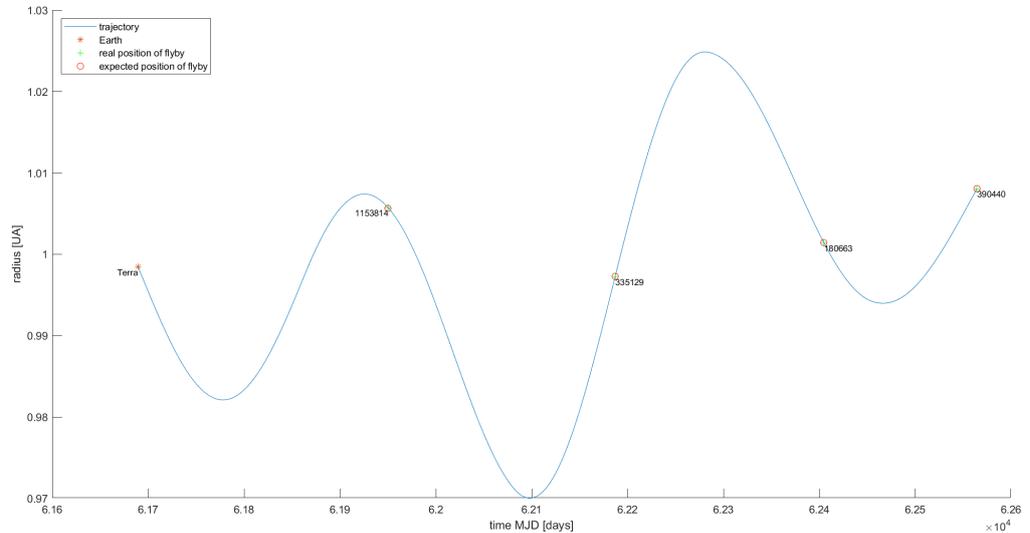
La spinta viene attivata quattro volte durante la missione e risulta praticamente sempre parallela alla tangente alla traiettoria, ma con verso variabile (figura 10.16). Nel primo arco, la spinta abbassa l'energia orbitale del veicolo, in modo da intercettare il primo asteroide, che è lo stesso della traiettoria al paragrafo precedente, a un $\Delta\theta$ positivo e un raggio molto prossimo all'unità astronomica, dopodiché, nel secondo arco una spinta concorde al moto aumenta il semiasse maggiore dell'orbita, visto che il secondo flyby

	Asteroide	Data flyby	Vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	08/09/2027	0.00km/s	
Primo flyby	2001 WN5	28/06/2028	9.50km/s	0.176km/s
Secondo flyby	2016 DY30	20/02/2029	15.34km/s	0.133km/s
Terzo flyby	2012 SY49	25/09/2029	15.59km/s	0.183km/s
Quarto flyby	2018 DZ3	04/03/2030	9.35km/s	0.103km/s
		Dur. 2.4y	Max. 15.59km/s	tot. 0.537km/s

Tabella 10.2: Caratteristiche della traiettoria

avviene a Δr negativi e si ha energia più grande, la velocità angolare risulta più alta rispetto a quella terrestre, motivo per cui il flyby avviene a ben 7° in anticipo. Un'altra spinta nel terzo arco concorde al moto accentua ancora di più l'aumento di semiasse, portando ad un terzo flyby a Δr positivi e a un $\Delta\theta$ più basso rispetto al precedente. Nel quarto arco una spinta discorde al verso del moto diminuisce il periodo orbitale riportando il raggio al flyby al di sotto di quello terrestre e aumenta il $\Delta\theta$. L'andamento sinusoidale è in questo caso composto da due sinusoidi, la prima che parte dalla Terra e arriva quasi al secondo asteroide ha un valor medio minore di 1UA, la seconda in contrapposizione ha un valor medio maggiore di 1UA, tale considerazione si può evincere anche dall'andamento dell'energia orbitale. Inoltre, la prima sinusoide presenta un'ampiezza ridotta rispetto alla seconda, ciò è confermato fisicamente dalla variazione dell'eccentricità tra la prima e la seconda metà della traiettoria. Nonostante le oscillazioni, che si tengono comunque sul 3% del raggio orbitale, i flyby avvengono a raggi che non si discostano del 0.5% da esso. Sarebbe impossibile soddisfare i vincoli temporali stando nello stesso range dei raggi dei flyby, per cui le grandi oscillazioni in raggio e fase risultano necessarie.

Come si osserva in figura 10.15, la traiettoria è consona al modello utilizzato, in quanto né il veicolo né gli asteroidi ricadono nella sfera d'influenza terrestre.

Figura 10.11: Grafico $r - t$

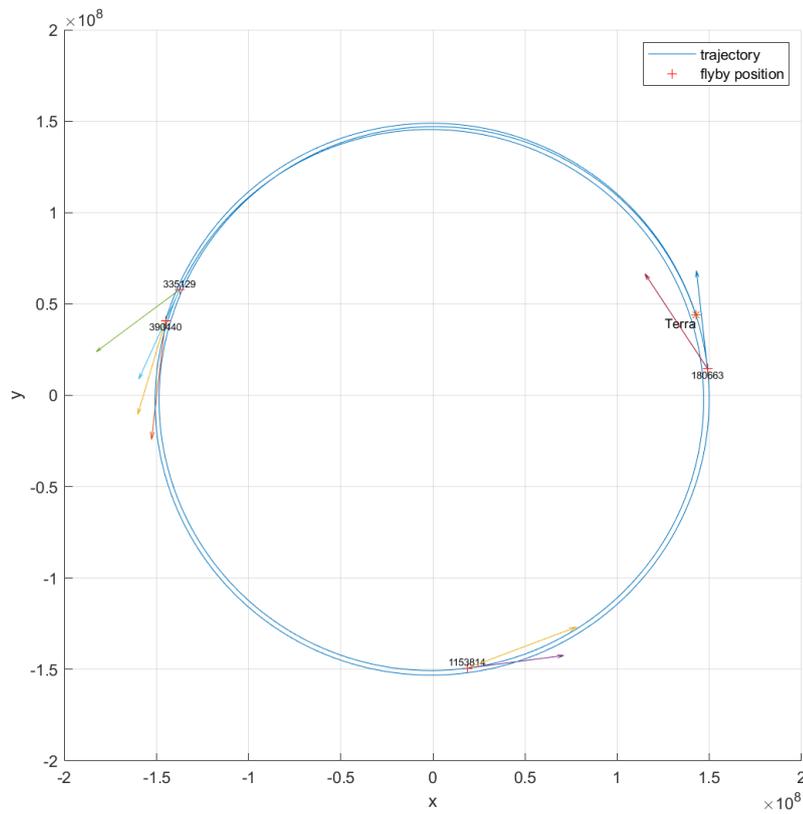


Figura 10.10: traiettoria nel piano x-y con velocità del veicolo e dell'asteroide

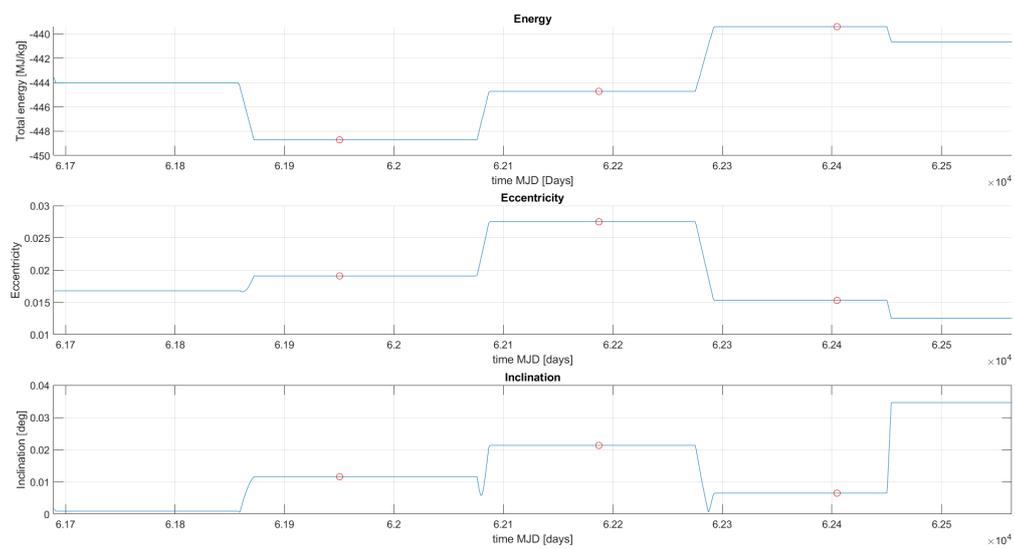


Figura 10.12: Energia, eccentricità e inclinazione dell'orbita osculatrice, in funzione del tempo

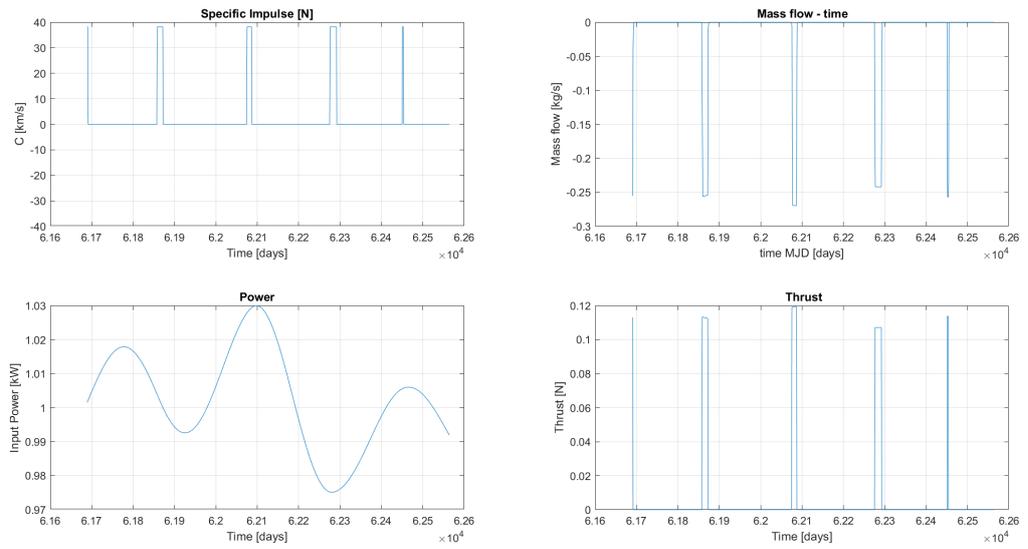


Figura 10.13: Velocità efficace di scarico, spinta, portata e potenza in funzione del tempo

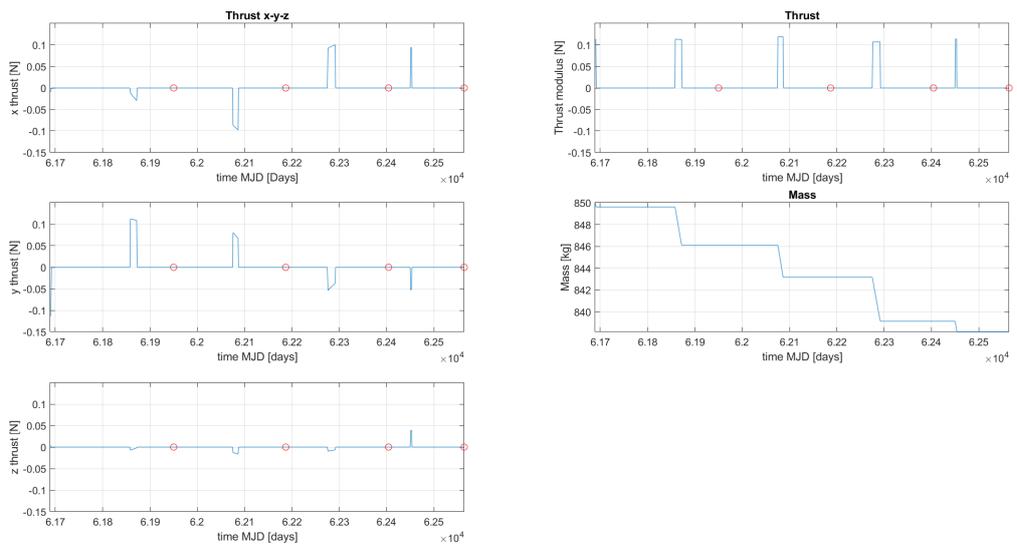


Figura 10.14: Spinta sui tre assi e massa in funzione del tempo

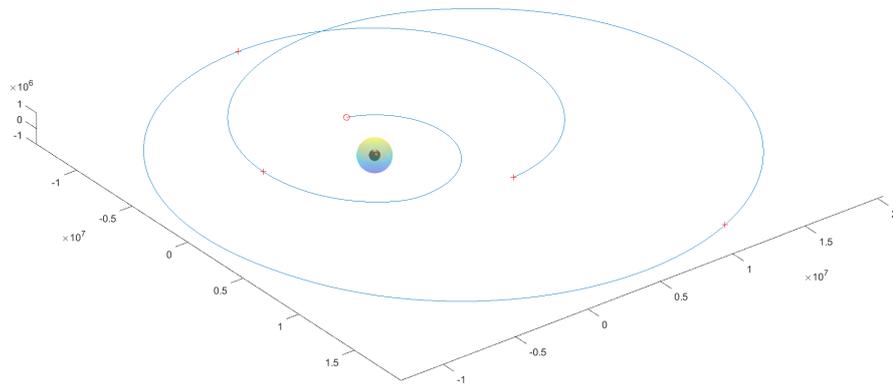
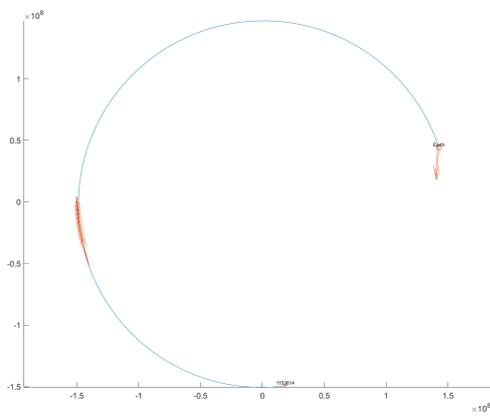
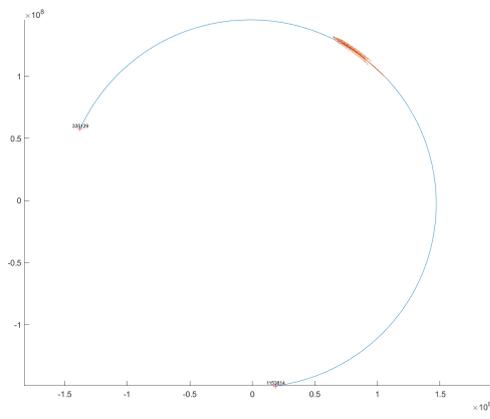


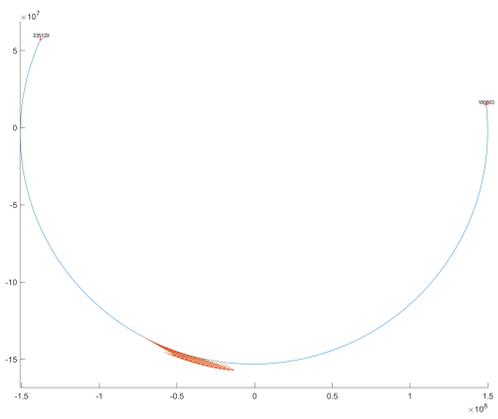
Figura 10.15: Traiettoria in riferimento ECI



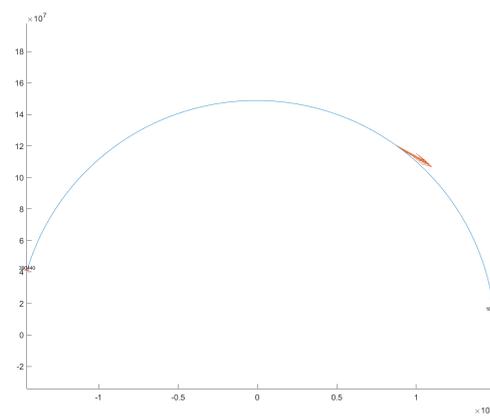
(a) Arco 1



(b) Arco 2



(c) Arco 3



(d) Arco 4

Figura 10.16: Direzione di spinta nei vari archi

10.1.3 Traiettoria 13

La terza traiettoria a più basso costo propulsivo condivide due asteroidi con la traiettoria precedente, è la sequenza 1153814-277676-180663-344485. È molto simile alle altre due ma anche in questo caso l'ultimo arco vede il veicolo rientrare nella sfera d'influenza terrestre, nondimeno in questo caso si deve prestare particolare attenzione alla gravità terrestre e le deviazioni che essa imprime sul veicolo: il passaggio avviene all'inizio di un arco, quindi si potrebbe correggere la traiettoria con una spesa minima, in modo da aggirare la sfera d'influenza. La peculiarità della traiettoria qui presentata è che non c'è spinta nel

	Asteroide	Data flyby	Vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	20/11/2027	0.00km/s	
Primo flyby	2001 WN5	28/06/2028	9.74km/s	0.296km/s
Secondo flyby	2015 CD1	10/02/2029	5.78km/s	0.062km/s
Terzo flyby	2012 SY49	25/09/2029	16.12km/s	0.184km/s
Quarto flyby	2016 JD18	20/05/2030	14.13km/s	0.00km/s
		Dur. 2.5y	Max. 16.12km/s	tot. 0.542km/s

Tabella 10.3: Caratteristiche della traiettoria

quarto ed ultimo arco. Si nota infatti una differenza sostanziale di velocità relativa (e quindi direzione della spinta) e ΔV del terzo arco rispetto allo stesso arco della sequenza di asteroidi precedente, questo perché, nonostante sia lo stesso asteroide, ci si prepara nell'arco precedente per riuscire ad incontrare due asteroidi con un'unica spinta propulsiva, magari più lunga e dispendiosa ma che alla fine fa risparmiare un'accensione del sistema propulsivo. È possibile dunque calibrare la velocità al terzo flyby in modo da mettersi già in rotta verso il quarto asteroide, che viene intercettato al momento desiderato.

Si può notare, osservando il secondo flyby, come la direzione della velocità del veicolo ha un angolo piccolo sul piano x-y rispetto a quella dell'asteroide, la velocità relativa risulta infatti molto bassa. Questo viene avvalorato dal fatto che pochi asteroidi tra quelli candidati hanno inclinazione eccessivamente grande.

La sequenza propulsiva consiste in sei momenti di spinta in cui si varia principalmente l'energia dell'orbita tramite forze parallele alla direzione del moto, solo la prima spinta ha una componente perpendicolare alla velocità importante, variando in maniera combinata sia l'eccentricità che l'energia. I Δr e i $\Delta \theta$ seguono perfettamente la sinusoide, con una sequenza positivo-negativo-positivo-negativo.

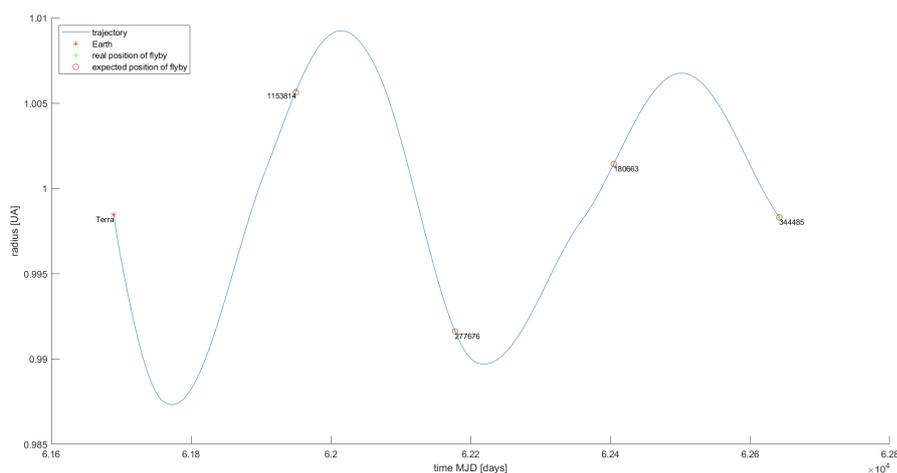


Figura 10.17: Grafico $r - t$

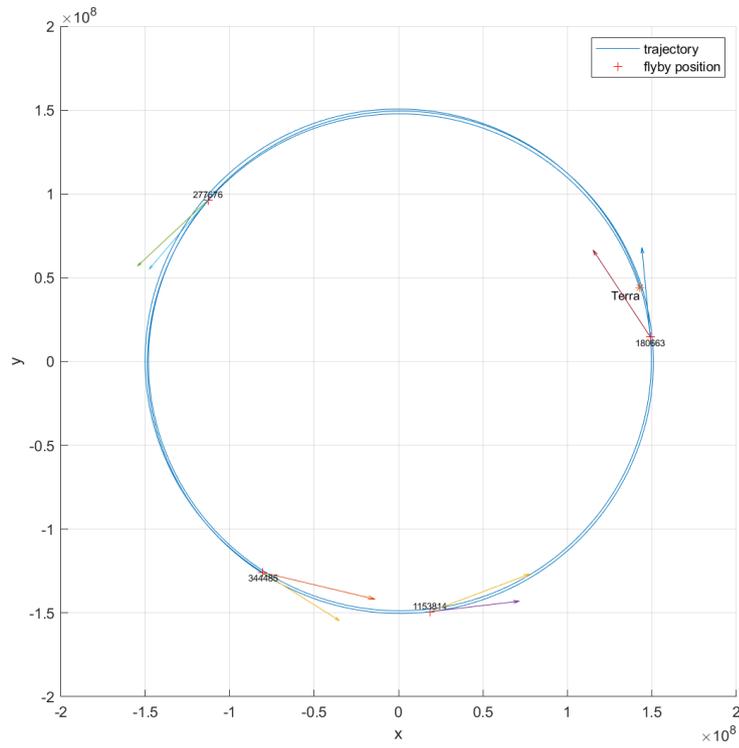


Figura 10.18: traiettoria nel piano x-y con velocità del veicolo e dell'asteroide

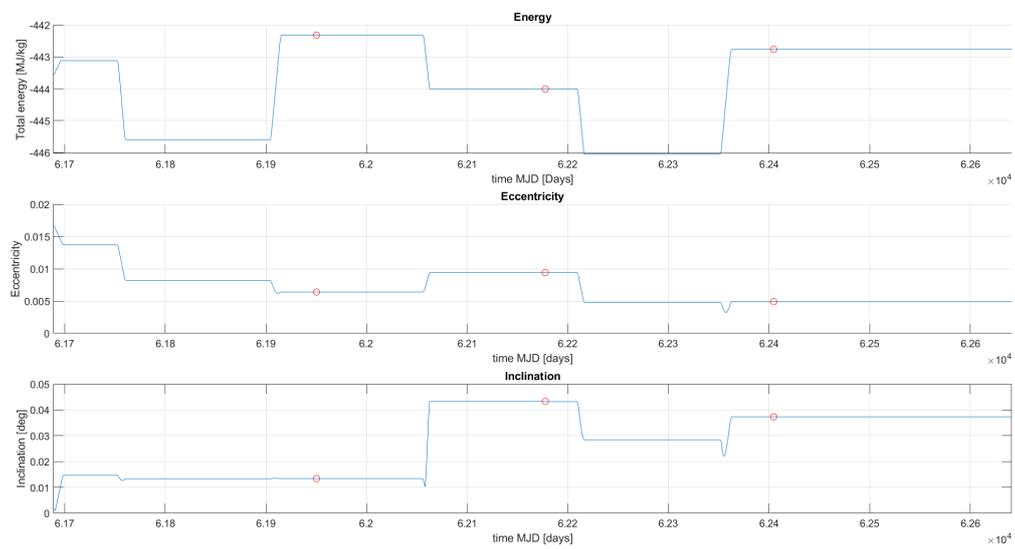


Figura 10.19: Energia, eccentricità e inclinazione dell'orbita osculatrice, in funzione del tempo

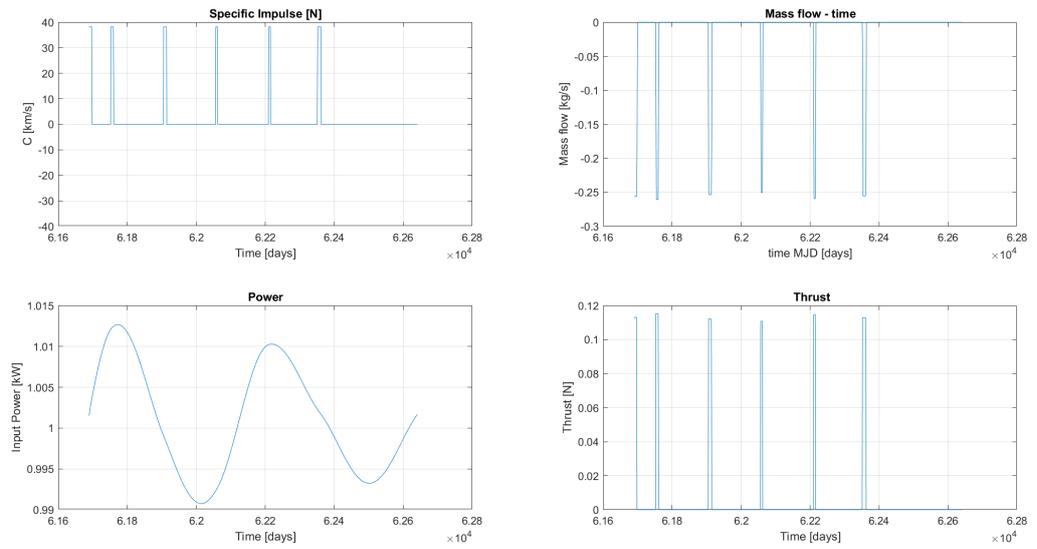


Figura 10.20: Velocità efficace di scarico, spinta, portata e potenza in funzione del tempo

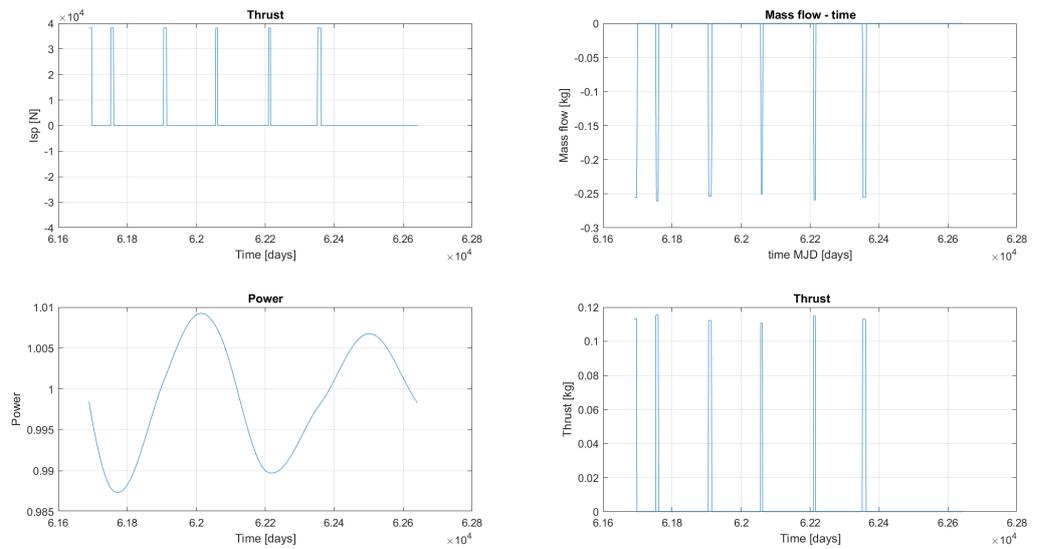


Figura 10.21: Spinta sui tre assi e massa in funzione del tempo

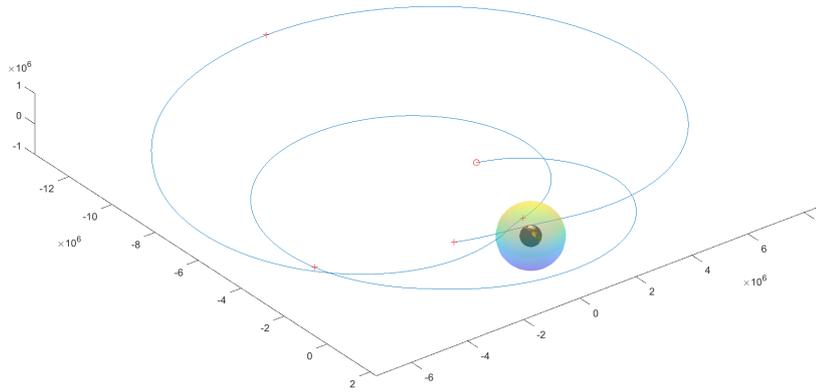
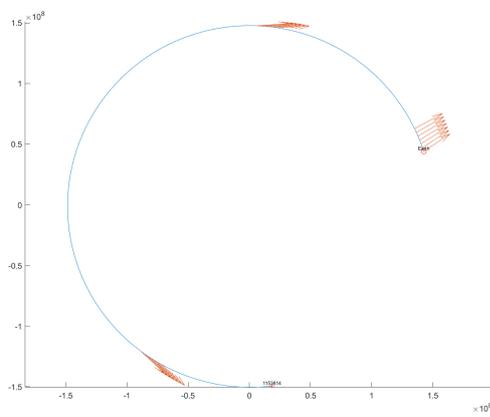
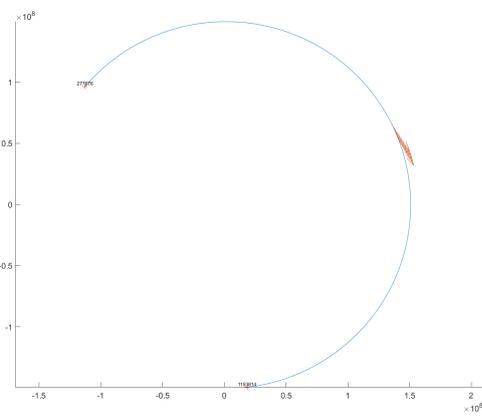


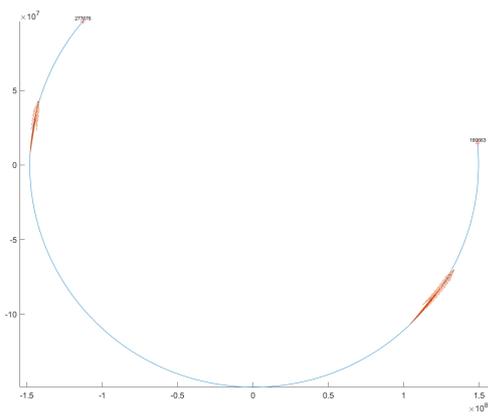
Figura 10.22: Traiettoria in riferimento ECI



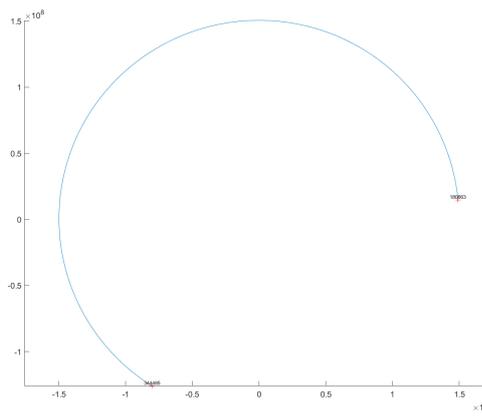
(a) Arco 1



(b) Arco 2



(c) Arco 3



(d) Arco 4

Figura 10.23: Direzione di spinta nei vari archi

10.2 Traiettorie con le velocità relative più basse

Sebbene le traiettorie con velocità relativa ai flyby più basse facilitino le osservazioni che si effettuano sull'asteroide, esse risultano leggermente più costose del gruppo precedente. Se il veicolo fosse equipaggiato con un tipo di propulsione chimica oltre che quella usata in fase eliocentrica, sarebbe possibile, in questo caso, effettuare un rendezvous ad un costo molto basso. Con la propulsione chimica infatti la manovra risulterebbe impulsiva e si avrebbe che il ΔV richiesto per effettuare il rendezvous è pari esattamente alla velocità relativa tra i due oggetti. Tale considerazione non vale rigorosamente per la propulsione elettrica, in quanto generalmente avere una spinta continua porta ad avere ΔV più grandi in tempi notevoli anche se il consumo complessivo risulta più basso per via dei grandi valori di c . Questa informazione è un'indicazione che per effettuare il rendezvous non si deve cambiare eccessivamente l'energia o l'inclinazione dell'orbita del veicolo, per cui un rendezvous potrebbe risultare a basso costo.

10.2.1 Traiettoria 218

La sequenza 253875-363269-363265-24920 è quella con il miglior compromesso tra velocità relative e ΔV . Con un consumo di soli 13.46kg si riescono ad effettuare quattro flyby a velocità relative rispettivamente di 6.96km/s, 6.74km/s, 2.57km/s, 4.04km/s per il primo, secondo, terzo e quarto flyby. Le velocità del veicolo al flyby sono, infatti, molto prossime a quelle degli asteroidi, risultando quasi parallele. Il veicolo entra nella sfera d'influenza della Terra, con un perigeo di qualche decina di migliaia di chilometri. A tale distanza non è più possibile trascurare la presenza del pianeta, anche per brevi periodi. La traiettoria non viene scartata perché il passaggio dalla Terra è distante dal flyby successivo, per cui con una correzione anche piccola si può evitare il problema.

	Asteroide	Data flyby	Vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	01/01/2028	0.00km/s	
Primo flyby	2014 TM	02/10/2028	6.96km/s	0.171km/s
Secondo flyby	2017 BL30	28/07/2029	6.74km/s	0.232km/s
Terzo flyby	2017 BG30	03/06/2030	2.57km/s	0.080km/s
Quarto flyby	2003 WT153	27/11/2030	4.04km/s	0.127km/s
		Dur. 2.9y	Max. 6.96km/s	tot. 0.610km/s

Tabella 10.4: Caratteristiche della traiettoria

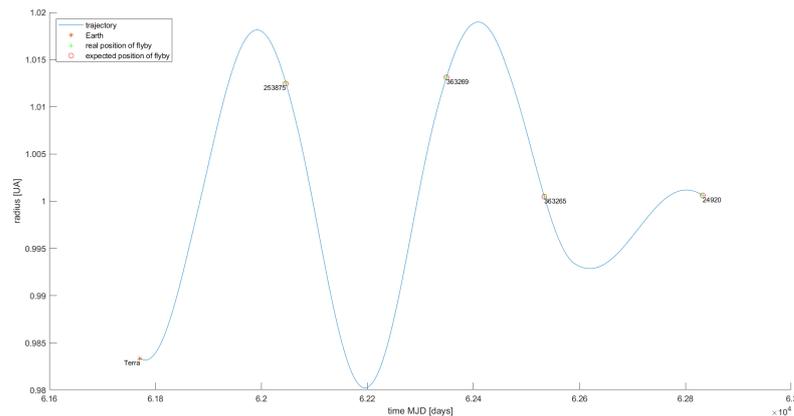


Figura 10.24: Grafico $r - t$

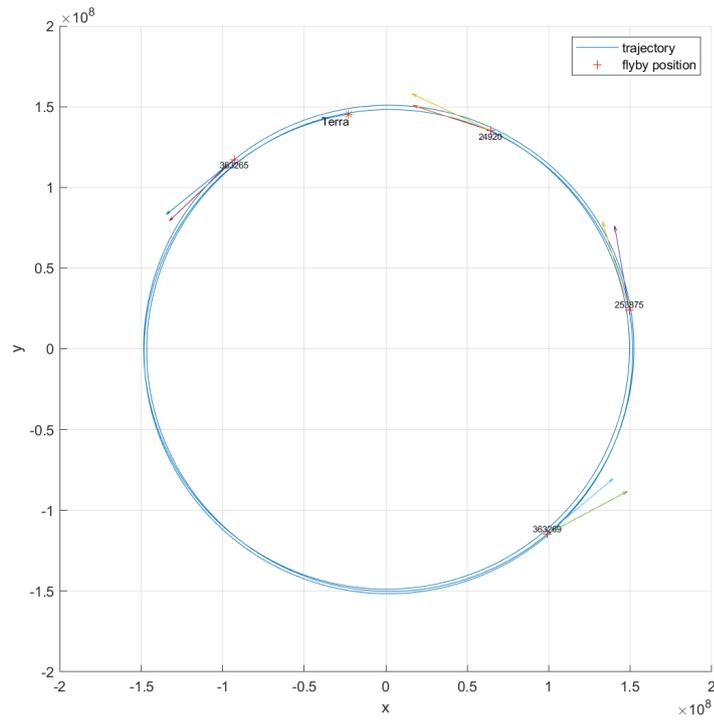


Figura 10.25: traiettoria nel piano x-y con velocità del veicolo e dell'asteroide

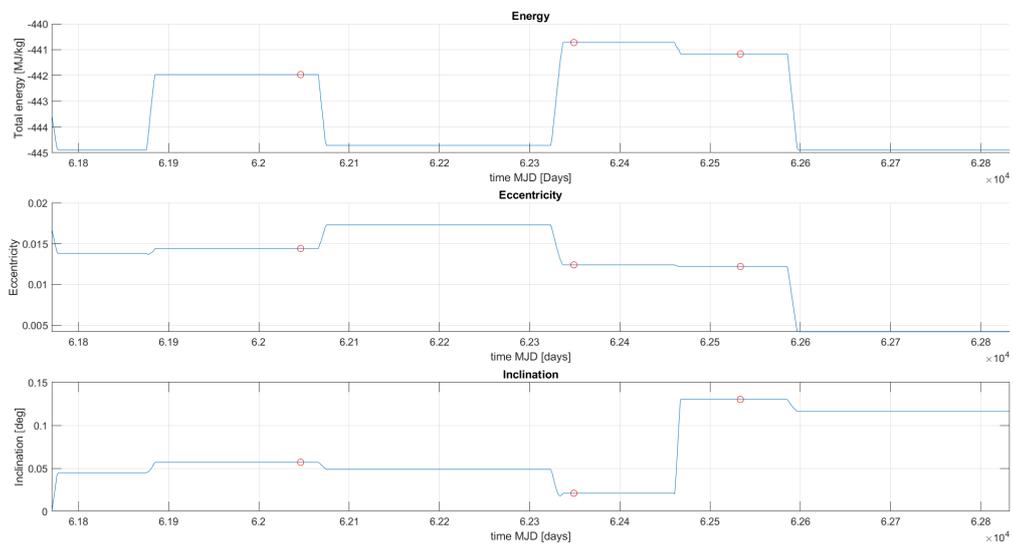


Figura 10.26: Energia, eccentricità e inclinazione dell'orbita osculatrice, in funzione del tempo

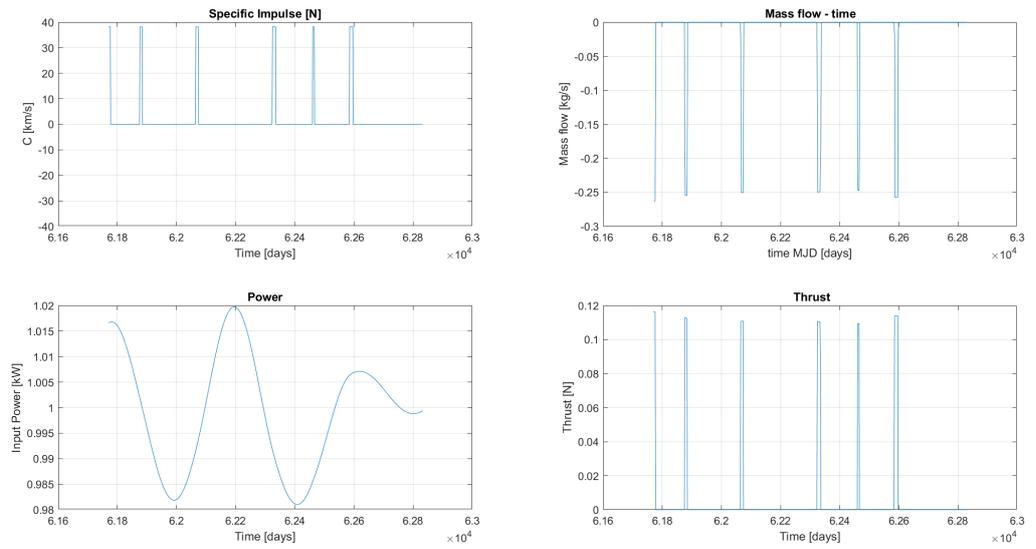


Figura 10.27: Velocità efficace di scarico, spinta, portata e potenza in funzione del tempo

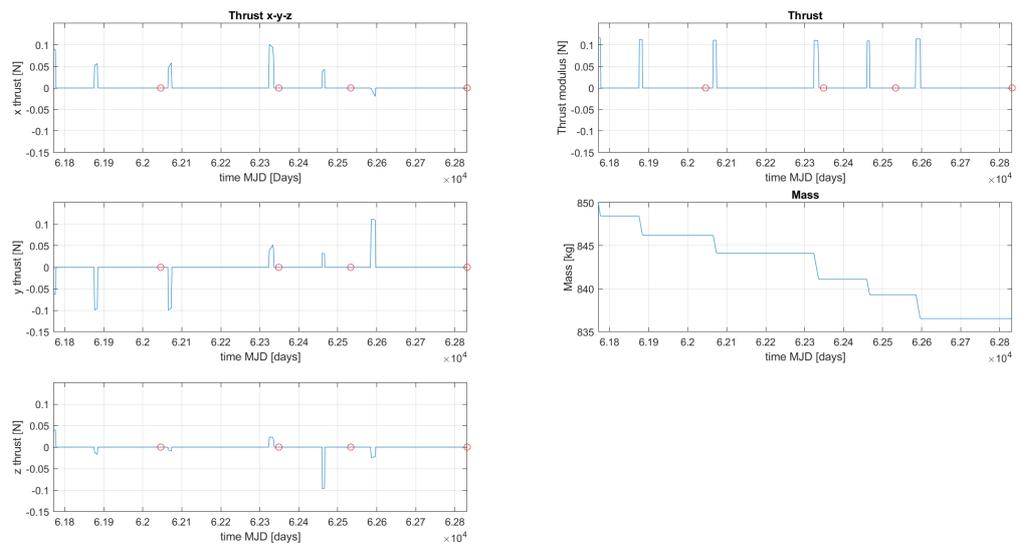


Figura 10.28: Spinta sui tre assi e massa in funzione del tempo

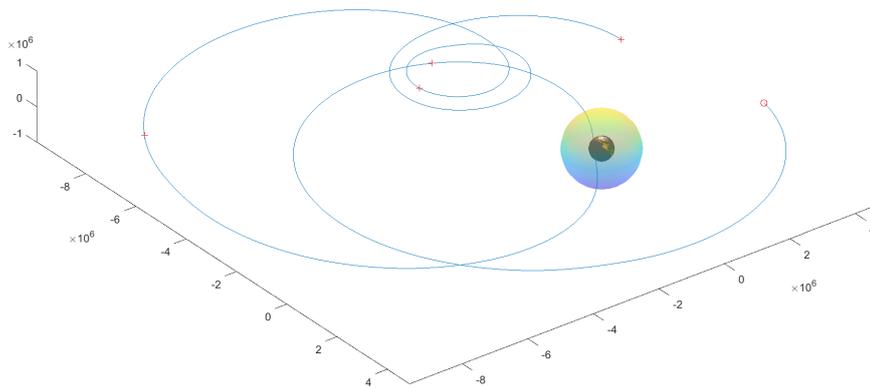
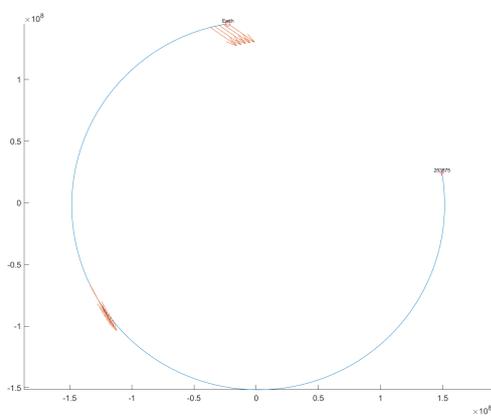
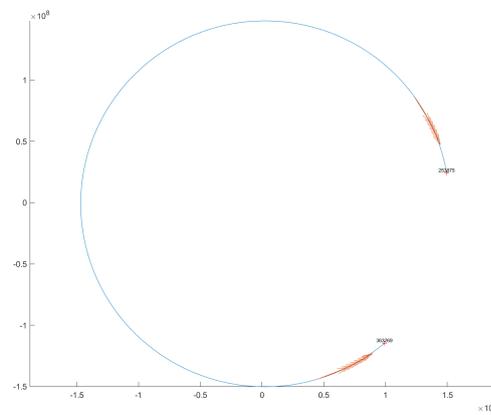


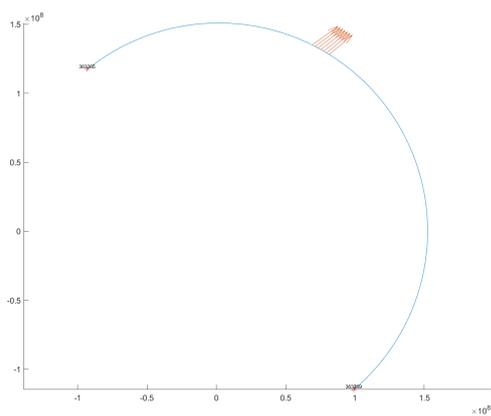
Figura 10.29: Traiettoria in riferimento ECI



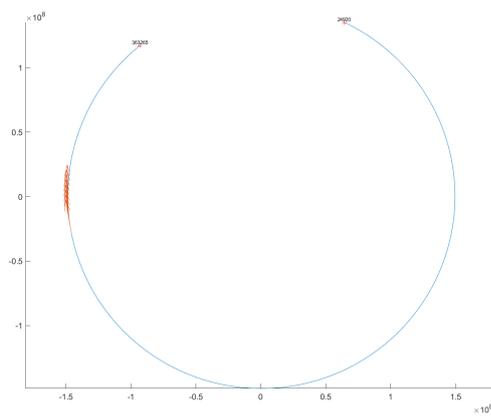
(a) Arco 1



(b) Arco 2



(c) Arco 3



(d) Arco 4

Figura 10.30: Direzione di spinta nei vari archi

10.2.2 Traiettoria 209

La sequenza 253875-277676-293593-317550 è invece la traiettoria che ha le velocità relative minori in assoluto, a scapito di qualche chilogrammo di combustibile in più. Nello specifico, con un consumo di 24.25kg si riescono ad effettuare quattro flyby a velocità relative di 6.96km/s, 5.71km/s, 6.47km/s e 6.00km/s rispettivamente per il primo, secondo, terzo e quarto flyby.

La traiettoria non risulta più compatta con l'orbita terrestre, il che spiega il consumo quasi doppio rispetto alle soluzioni descritte nella sezione precedente.

	Asteroide	Data flyby	Vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	25/01/2028	0.00km/s	
Primo flyby	2001 WN5	02/10/2028	6.96km/s	0.239km/s
Secondo flyby	2016 DY30	10/02/2029	5.71km/s	0.307km/s
Terzo flyby	2012 SY49	03/07/2029	6.47km/s	0.534km/s
Quarto flyby	2018 DZ3	12/12/2029	6.00km/s	0.027km/s
		Dur. 1.95y	Max. 6.96km/s	tot. 1.1km/s

Tabella 10.5: Caratteristiche della traiettoria

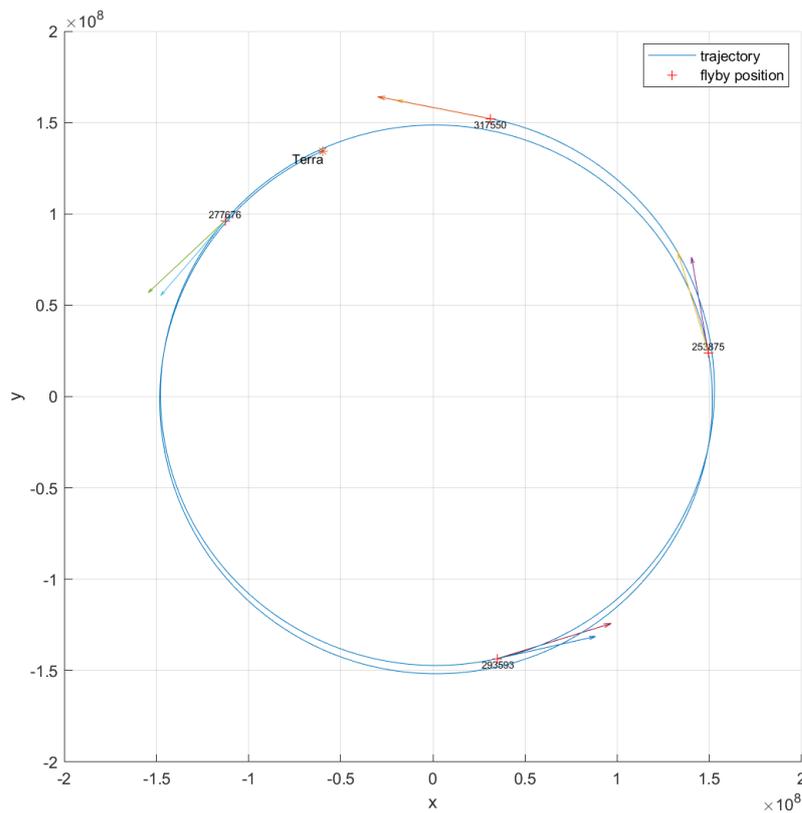


Figura 10.31: traiettoria nel piano x-y con velocità del veicolo e dell'asteroide

Si può notare che, rispetto alle altre traiettorie a spinta più bassa, che qui le fasi di spinta sono molto più lunghe e si perde la forma sinusoidale del raggio dell'orbita, rendendo indefinibili fase e ampiezza. Le variazioni dei parametri orbitali sono più nette e la direzione di spinta non è sempre tangenziale, ma varia nel tempo, come si può vedere in figura 10.37. Dai grafici è evidente che ci sono alcune fasi in cui la spinta mantiene la sua direzione in un sistema di riferimento inerziale, il che si riflette secondo l'approssimazione di Edelbaum sull'eccentricità orbitale e sull'energia (in quanto la spinta non è continua su tutto il periodo).

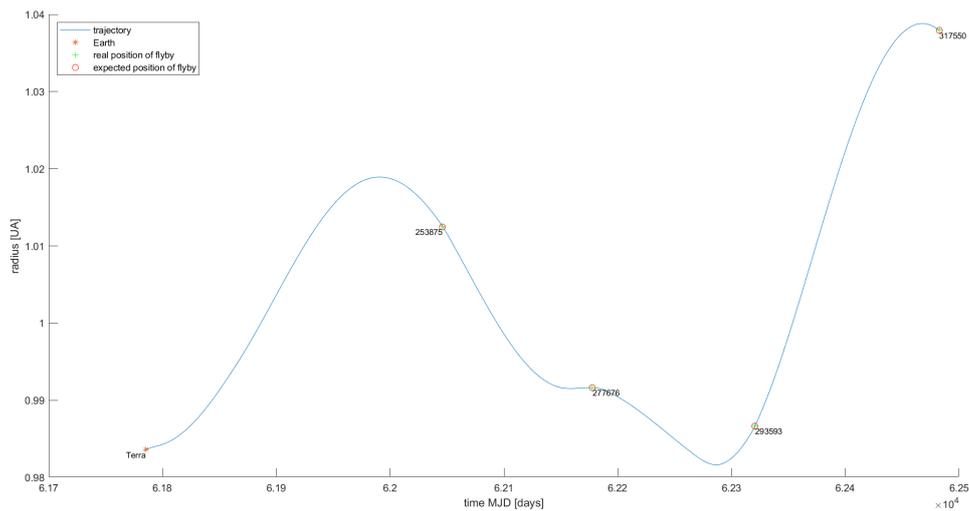


Figura 10.32: Grafico $r - t$

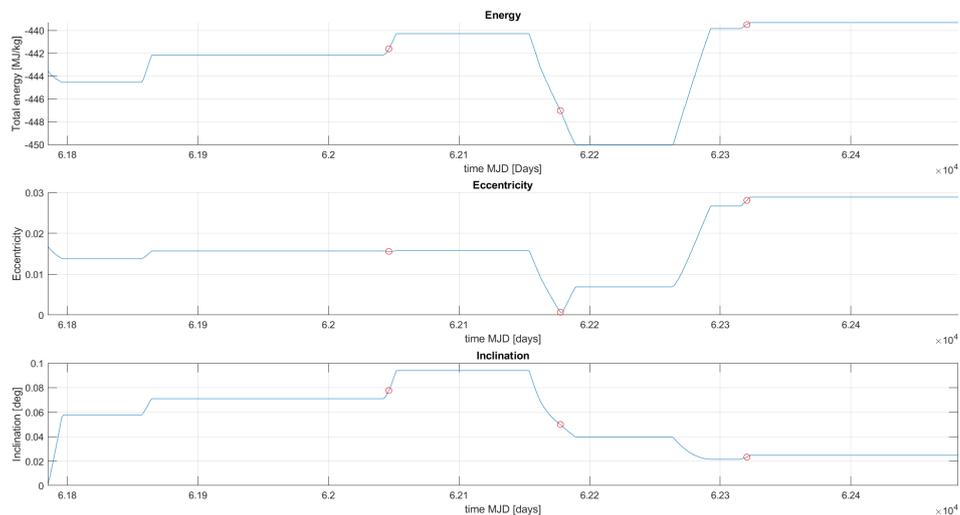


Figura 10.33: Energia, eccentricità e inclinazione dell'orbita osculatrice, in funzione del tempo

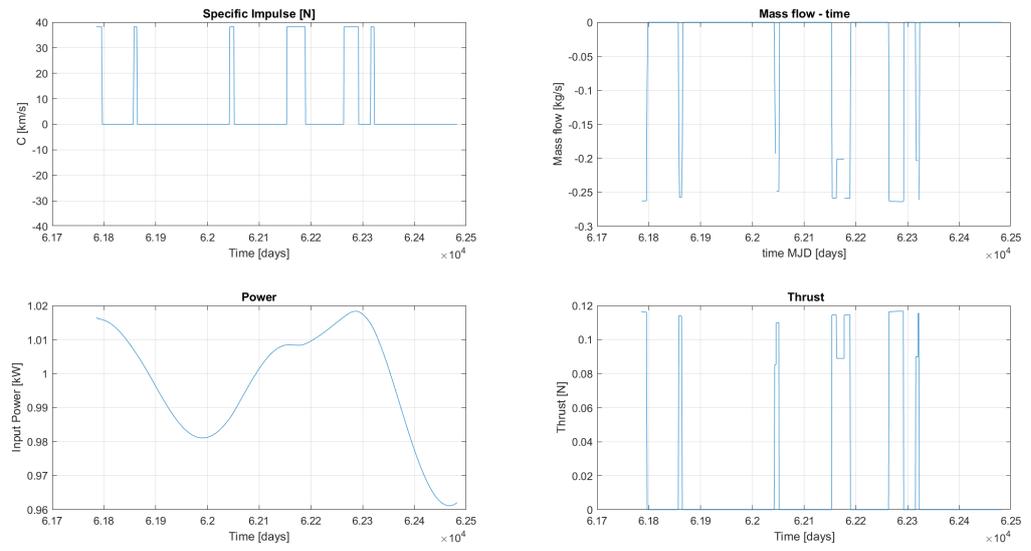


Figura 10.34: Velocità efficace di scarico, spinta, portata e potenza in funzione del tempo

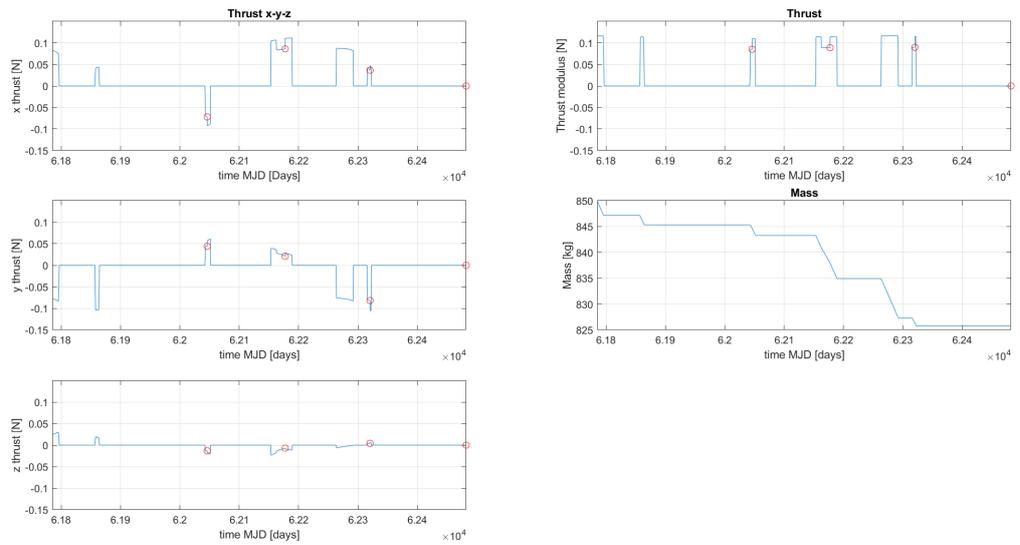


Figura 10.35: Spinta sui tre assi e massa in funzione del tempo

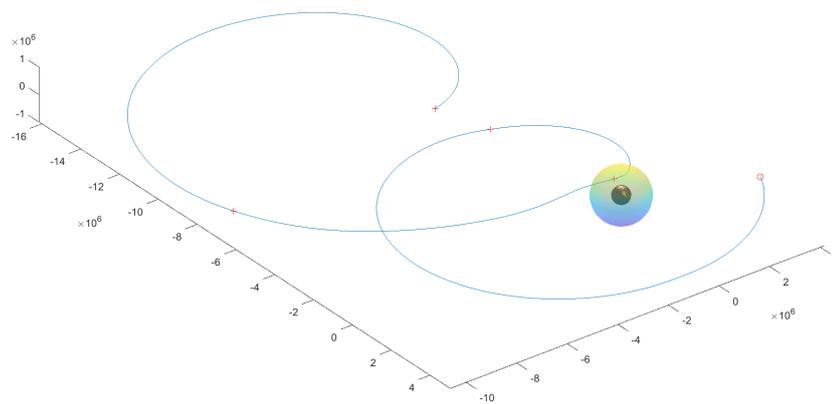
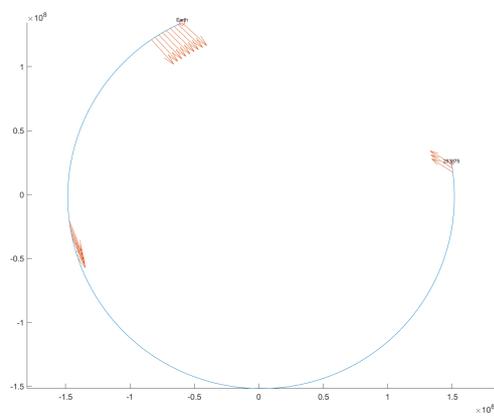
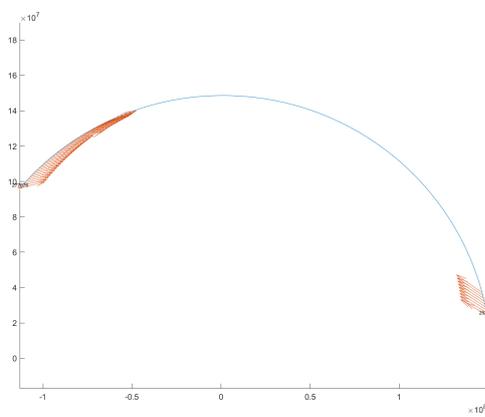


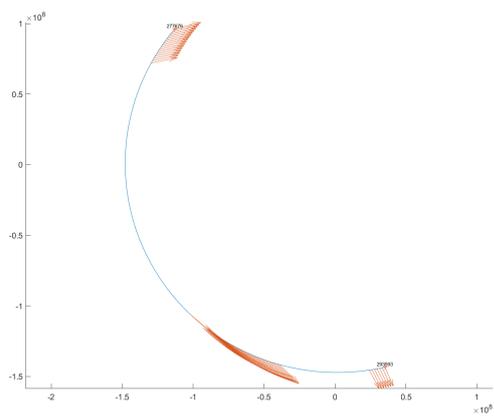
Figura 10.36: Traiettoria in riferimento ECI



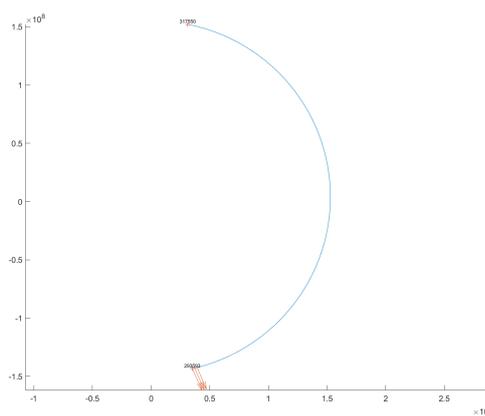
(a) Arco 1



(b) Arco 2



(c) Arco 3



(d) Arco 4

Figura 10.37: Direzione di spinta nei vari archi

10.2.3 Traiettoria 212

La traiettoria migliore in termini di ΔV e V_{rel} , che non soffre dei problemi di perturbazione gravitazionale della Terra come la prima sequenza presentata in questa sezione è la 253875-277848-293593-317550. Essa consente di consumare solo 15.9kg di carburante ed effettuare flyby tutti con velocità relativa al di sotto di 7.1km/s.

I limiti di partenza, di tempo e di massa sono tutti ampiamente rispettati, assicurando anche tempi di osservazione lunghi per via delle velocità ridotte. In conclusione è la traiettoria perfetta per la missione che ci si è preposti.

Anche in questo caso, nonostante i consumi abbastanza ridotti, nel grafico $r - t$ è presente solo un abbozzo di andamento sinusoidale, ciononostante l'alternarsi di Δr positivi e negativi in base alla loro fase è congruente con le traiettorie a bassa spinta. Inoltre la spinta risulta tangenziale in ogni momento e varia opportunamente eccentricità ed energia.

La spinta normale all'eclittica risulta molto bassa, come si riflette sull'inclinazione che arriva a massimo 6 centesimi di grado, non sprecando ulteriore propellente.

	Asteroide	Data flyby	Vel. relativa	ΔV
Partenza	Terra	01/01/2028	0.00km/s	
Primo flyby	2014 TM	02/10/2028	7.06km/s	0.188km/s
Secondo flyby	2015 CT13	16/02/2029	7.11km/s	0.263km/s
Terzo flyby	2015 LK	03/07/2029	6.64km/s	0.109km/s
Quarto flyby	2015 XO	12/12/2029	6.00km/s	0.163km/s
		Dur. 1.95y	Max. 7.11km/s	tot. 0.724km/s

Tabella 10.6: Caratteristiche della traiettoria

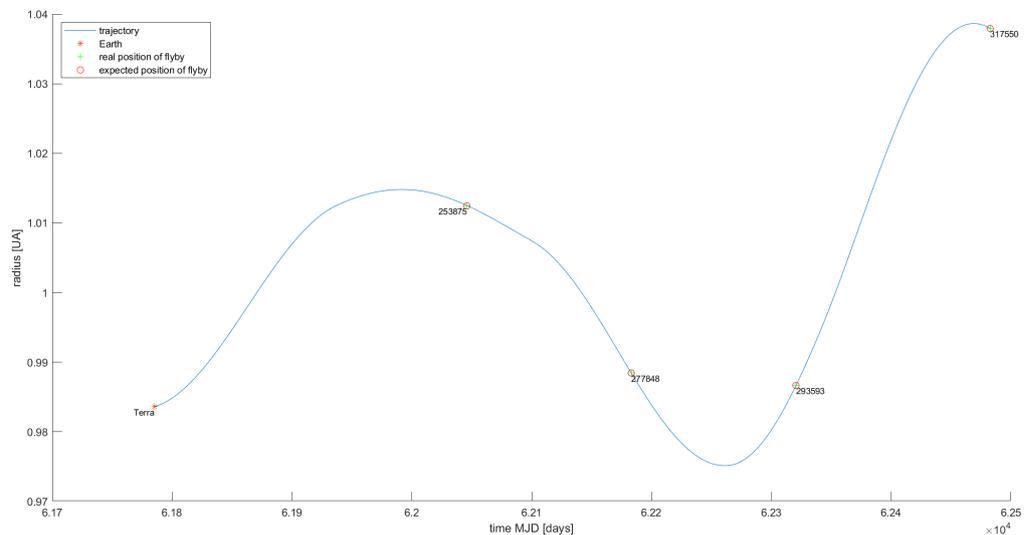


Figura 10.39: Grafico $r - t$

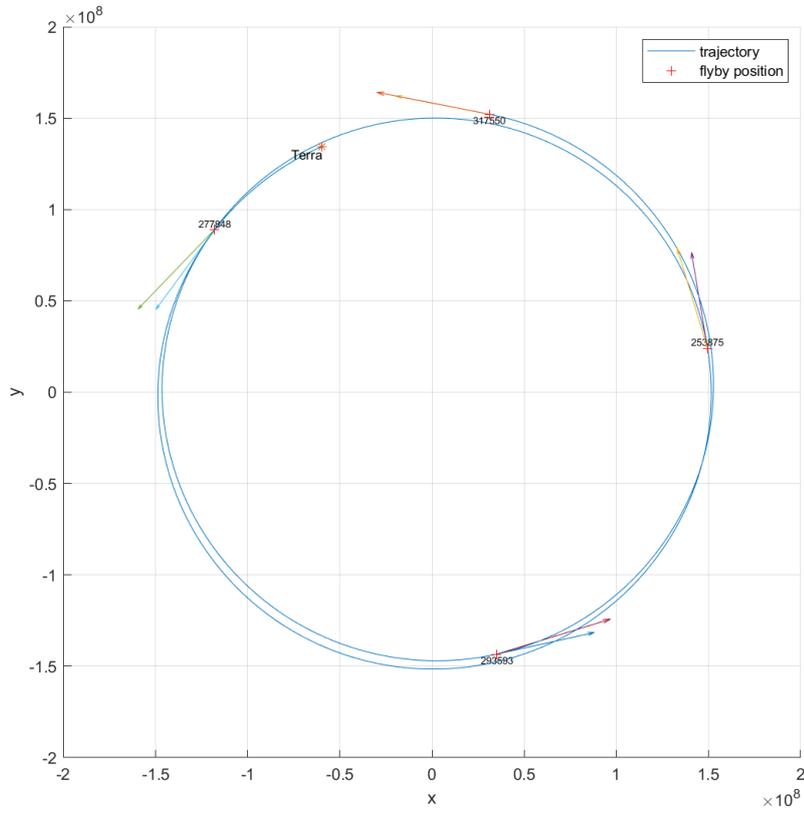


Figura 10.38: traiettoria nel piano x-y con velocità del veicolo e dell'asteroide

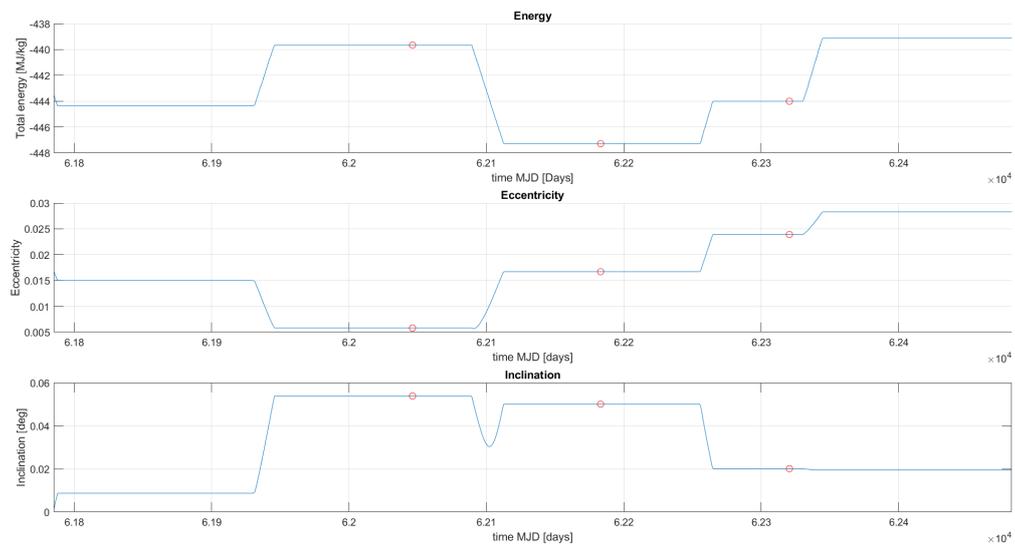


Figura 10.40: Energia, eccentricità e inclinazione dell'orbita osculatrice, in funzione del tempo

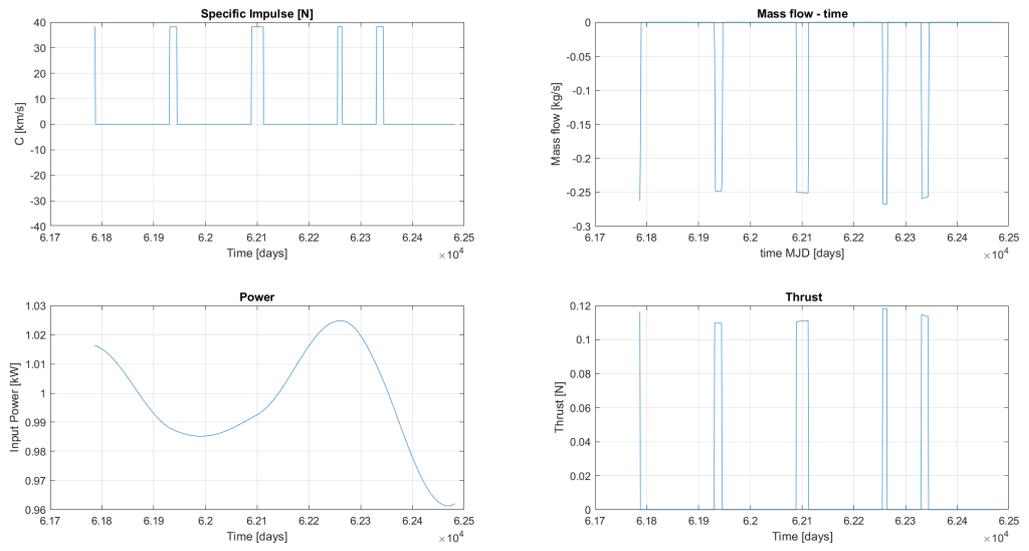


Figura 10.41: Velocità efficace di scarico, spinta, portata e potenza in funzione del tempo

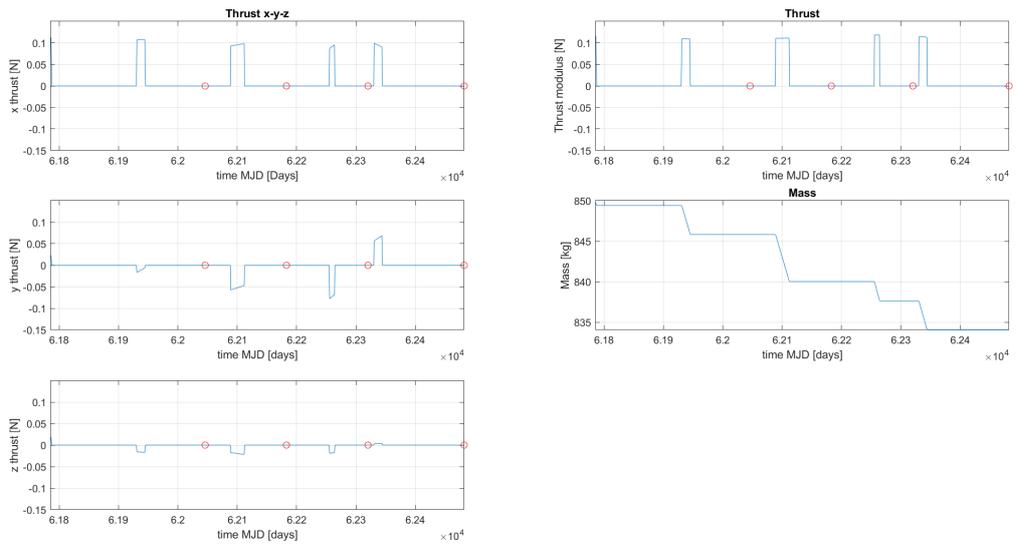


Figura 10.42: Spinta sui tre assi e massa in funzione del tempo

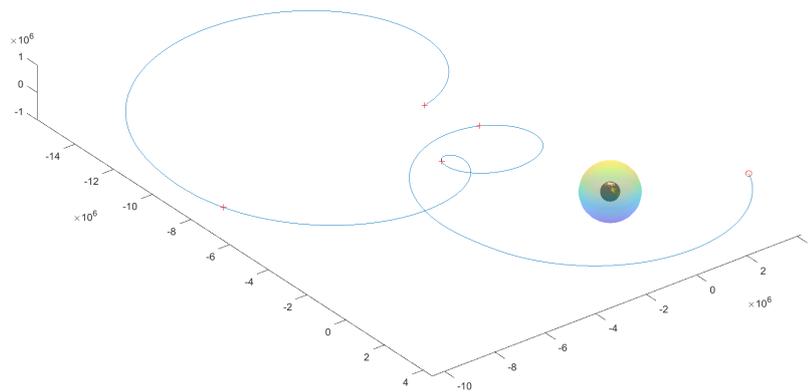
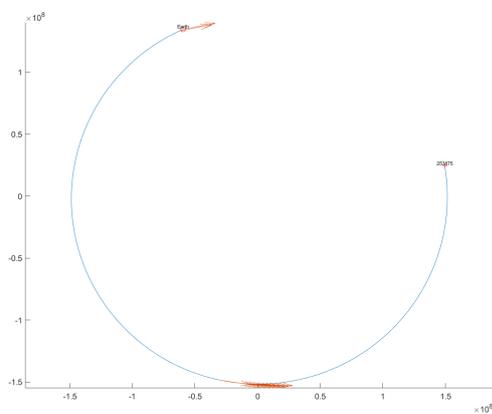
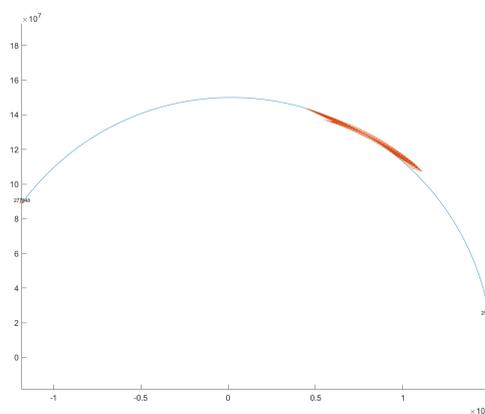


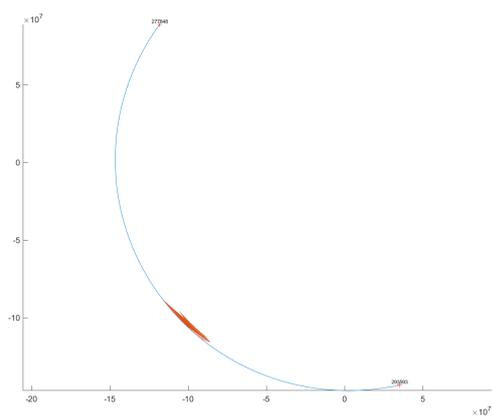
Figura 10.43: Traiettoria in riferimento ECI



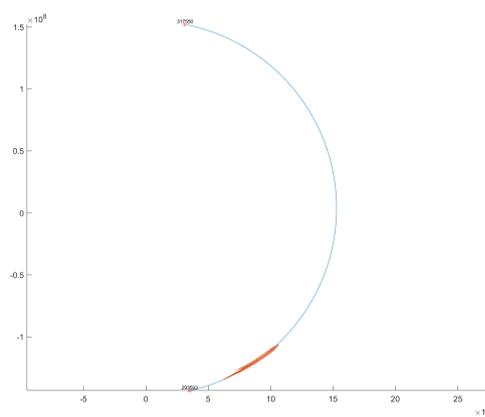
(a) Arco 1



(b) Arco 2



(c) Arco 3



(d) Arco 4

Figura 10.44: Direzione di spinta nei vari archi

10.3 Traiettorie scientificamente più interessanti

Si è accennato come le caratteristiche tipiche degli asteroidi più grandi siano tendenzialmente molto diverse da quelle degli asteroidi più piccoli. Per avere informazioni rilevanti su una determinata categoria di oggetti near-earth, può convenire fare più flyby possibili con gli asteroidi di una dimensione stimata appartenente ad un certo intervallo.

Nei paragrafi successivi si riportano le sequenze di asteroidi simili più convenienti, nonché alcune traiettorie che contengono uno o più PHO (*Potentially Hazardous Objects*).

Per stimare la dimensione di un asteroide è possibile utilizzare i dati combinati di magnitudine assoluta e albedo. Più la magnitudine cresce, più la dimensione caratteristica dell'oggetto diminuisce, e lo stesso vale per l'albedo.

Per albedo si intende la misura della riflessione diffusa della radiazione solare rispetto alla radiazione solare totale. Un albedo di 0 indica un corpo nero che assorbe tutta la radiazione incidente, un albedo di 1 corrisponde ad un corpo che riflette tutta la radiazione incidente. Esso infatti è il rapporto tra la radiazione riflessa e quella ricevuta in totale. Esso informa sulle caratteristiche medie della superficie del corpo celeste, dunque sulla sua forma e sulla sua dimensione.

La magnitudine assoluta è una misura della luminosità di un corpo celeste. Essa è pari alla magnitudine apparente che un oggetto avrebbe ad una distanza di 10 parsec (42.6 anni luce) dalla Terra.

Esiste una formula approssimata che lega le tre grandezze ed è quella che si usa per stimare il diametro di un oggetto celeste. Essa è:

$$A = \left(\frac{1329 \times 10^{-H/5}}{D} \right)^2$$

Dove A è l'albedo, H è la magnitudine assoluta e D è il diametro del corpo in km.

In questa sezione le traiettorie sono state divise in:

- Asteroidi di piccole dimensioni, se il loro diametro è minore di 50 metri (Magnitudine assoluta maggiore di 19.0);
- Asteroidi di medie dimensioni, se il loro diametro è compreso tra i 50 metri e il chilometro (Magnitudine assoluta compresa tra 17.5 e 18.9);
- Asteroidi di grandi dimensioni, se il loro diametro è maggiore al chilometro (Magnitudine assoluta minore di 17.4).

Gli asteroidi che ricadono nella categoria NEA sono per la maggior parte di piccola dimensione, in particolare, tutte e tre le traiettorie a più bassa velocità relativa interessano solo asteroidi con diametro minore di 50 metri, per cui sono adatte per osservare e analizzare questa categoria.

Nella tabella in appendice B, è possibile trovare le traiettorie che effettuano flyby con 1997 XF11 (dalla numero 1 alla numero 10), un asteroide Apollo che passerà nei dintorni della Terra il 26 ottobre del 2028, ad una distanza minima di 0.0063UA. L'asteroide, con magnitudine assoluta di 16.7, ha un diametro stimato tra gli 1.3 e i 2.8 chilometri e rappresenta, per il suo avvicinamento a meno di 2.5 volte la distanza Terra-Luna, un PHA. Tra le diverse traiettorie che lo includono, la più conveniente effettua altri tre flyby successivi con asteroidi di piccola taglia, consumando solo 17.45kg di propellente, per un costo propulsivo totale (ΔV) di solo 0.794km/s. La velocità relativa dell'incontro è oltre 14km/s e ciò rende ancora più pericoloso l'asteroide in quanto indica che l'energia cinetica di un possibile impatto con la Terra sarebbe notevole.

Ci sono diverse sequenze che effettuano flyby multipli di asteroidi di medie dimensioni, due degne di nota per il loro costo ridotto sono le sequenze sono la numero 19 e la numero 20.

Nella prima sequenza si effettua un primo flyby con il PHA della categoria Apollo denominato 2001 WN5, che ha un diametro di 0.932 chilometri e passerà il 27 giugno 2028, ad una distanza minore di quella Terra-Luna (250000 chilometri). Dopodiché vengono effettuati altri due flyby verso altri asteroidi più piccoli, per poi concludere la missione intercettando l'asteroide del gruppo Apollo 2002 SM, dalle dimensioni stimate da 0.732 a 1.637 chilometri, anch'esso considerato PHA, infatti passerà a 0.04 chilometri di distanza al flyby considerato il 10 aprile 2030 (la distanza si dimezza per un avvicinamento successivo, che avverrà il 3 aprile 2130). Le velocità relative con entrambi gli asteroidi è molto alta, indicando una elevata potenza cinetica sprigionata da un'eventuale impatto con la Terra. Il propellente usato per la

missione è di appena 13.54kg (ΔV pari a 0.614km/s)

La seconda sequenza passa sempre per 2001 WN5, ma effettua un secondo flyby verso 2011 BO24, asteroide di 0.463-1.034 chilometri di diametro stimato, che passa a meno di 0.04UA dalla Terra il 24 giugno 2029. Dopodiché la missione si conclude con due flyby di oggetti molto più piccoli. Le velocità relative con entrambi gli asteroidi è molto alta, indicando una elevata potenza cinetica sprigionata da un'eventuale impatto con la Terra. Il propellente usato per la missione è di appena 13.64kg (ΔV pari a 0.619km/s)

11

Conclusioni

Con il lavoro ivi presentato è stato possibile dimostrare la fattibilità di missioni con propulsione elettrica a bassa spinta nello spazio near-earth, in cui si prevedono flyby multipli di diversi asteroidi, tra cui PHA di medie dimensioni. La missione è caratterizzata da un consumo di carburante basso, da una durata molto breve e da velocità relative contenute.

A posteriori del lavoro svolto, è possibile affermare che i limiti imposti nella preselezione degli asteroidi candidati sono stati ben ponderati, perché l'85% delle traiettorie ad un flyby converge con un costo molto più basso del limite imposto, inoltre la totalità delle sequenze a quattro asteroidi con consumi di propellente minori di 25kg ha caratteristiche ben all'interno di tali limiti, suggerendo che essi siano anche fin troppo larghi.

Quasi tutti gli asteroidi delle sequenze migliori vengono intercettati esattamente sull'eclittica, mentre un numero molto contenuto si discosta da essa, mostrando che la categoria di asteroidi da raggiungere in maniera più semplice sia quella con i nodi, ascendente o discendente, vicini all'orbita terrestre. Ciò avvalorava il fatto che i cambi di inclinazione, anche piccoli, sono proibiti se si vuole mantenere un consumo di propellente il più possibile contenuto.

Il modello utilizzato nell'ottimizzazione, quello dei due corpi ristretto con spinta continua, è risultato coerente per quasi tutte le traiettorie. Solo alcune di quelle a più basso costo richiederebbero un modello più articolato perché entrano, seppur in modo marginale, nella sfera d'influenza della Terra. Sono proprio le piccole fasi di spinta che rendono gli scostamenti dal pianeta troppo lievi, incorrendo nell'incongruenza del modello. Molte di queste traiettorie non sono tuttavia da scartare, in quanto l'entrata nella sfera d'influenza avviene abbastanza lontano dai punti di flyby, per cui con pochi grammi di propellente è possibile correggere efficacemente la traiettoria in modo da evitare il passaggio indesiderato.

I metodi indiretti con tecniche di multi-shooting, dove ogni intervallo di shooting coincide con un arco tra due flyby, hanno portato a risultati eccellenti, con una precisione consona a quella richiesta e una percentuale di traiettorie che hanno raggiunto la convergenza molto alta. Inoltre, è possibile affermare che l'algoritmo di calcolo della stima iniziale dei moltiplicatori di Lagrange ha svolto il suo compito in modo decisamente soddisfacente, infatti si sono ottenute quasi sempre delle stime molto prossime ai valori della soluzione reale, il che ha ridotto di molto i tempi di convergenza e ha permesso l'automatizzazione del processo di ottimizzazione.

I risultati ottenuti dal processo di ottimizzazione finale hanno infine validato la caratterizzazione effettuata sulle traiettorie preliminari, confermandone la veridicità e indicando che esiste una correlazione stretta tra il consumo di propellente e i parametri spaziali e temporali d'incontro citati nello studio. La velocità relativa è anch'essa ben stimata dalle condizioni descritte sui parametri orbitali degli asteroidi,

rimanendo bassa solo se queste sono verificate.

In conclusione, sono state trovate 328 possibili traiettorie che rappresentano 328 possibili missioni che si possono svolgere con un basso costo e in tempi brevi, sfruttando un lancio tra la fine del 2027 e l'inizio del 2028. La maggior parte di queste prevedono flyby solo di asteroidi di piccola taglia, utili per lo studio dei corpi di dimensione dell'ordine del metro o della decina di metro, che rappresentano il mistero più grande della formazione planetaria. Inoltre alcune sequenze effettuano fino a due flyby consecutivi con PHA con diametro dell'ordine del chilometro e due flyby con asteroidi di taglia più piccola. Ciò è interessante per studiare più a fondo la composizione e l'orbita dei corpi più pericolosi per la vita sulla Terra.

È necessario appuntare, come studi futuri sulla missione in questione, che la massa del veicolo presa in considerazione è quella della proposta NEST ed è comprensiva di quattro sonde figlie e tutta la strumentazione per effettuare misurazioni radar dopo un rendezvous. Per i flyby non serve nulla di tutto ciò, per cui la massa iniziale della sonda (e con essa la massa del propellente utilizzato) è molto minore di quella utilizzata nello studio effettuato. Ciò potrebbe portare ad un'ulteriore risparmio in propellente: se si diminuisce la spinta in modo che il rapporto $\frac{T}{m_0}$ e l'impulso specifico rimangano costanti, il consumo si riduce perché si vedrebbe una riduzione della massa del propulsore, nonché della massa di propellente stesso, in quanto il rapporto $\frac{m_f}{m_0}$ rimarrebbe costante ma con un m_0 minore. Utilizzando invece lo stesso sistema propulsivo, con lo stesso livello di spinta, l'accelerazione media sulla traiettoria aumenterebbe al diminuire di m_0 , dando più autorità di comando al veicolo. È interessante studiare come queste condizioni influiscono sul costo propulsivo, sul tempo della missione e sulla convergenza dell'algoritmo di ottimizzazione indiretta.

Appendici



Problema di ottimizzazione

La modellizzazione del problema di ottimizzazione viene in questa appendice trattata per gradi. L'ottimo coincide, in base alle necessità, con il minimo o il massimo di una funzione ad una o più variabili, che rappresenta il costo o la performance di un determinato fenomeno. Verrà trattata prima l'ottimizzazione libera, successivamente si introdurranno dei vincoli, passando dunque all'ottimizzazione vincolata. I vincoli possono essere di uguaglianza o di disuguaglianza. Si cerca sempre l'ottimo (indistintamente massimo e minimo) con l'eccezione del problema con vincoli di disuguaglianza in cui le condizioni di ottimalità non sono le stesse tra problemi di minimo e problemi di massimo. Si tratta il problema di massimizzazione e ci si riconduce poi al problema di minimo tramite semplici considerazioni.

A.1 Massimi e minimi di una funzione scalare

Teorema 1. *Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare dipendente da n variabili reali e x_0 un punto all'interno del dominio. Allora:*

- x_0 è un punto di massimo globale (o minimo globale) per f se:

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ (o } f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in D$$

- x_0 è un punto di massimo locale (o minimo locale) per f se:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \text{ (o } f(x_0) \leq f(x))$$

La differenza tra un punto di ottimo globale e un punto di ottimo locale è che l'ultimo lo è esclusivamente in un suo intorno I_δ mentre il primo lo è su tutto il dominio D . Si noti inoltre che se x_0 è un punto di massimo globale (o minimo globale) esso sarà anche un massimo (o un minimo) locale della funzione f in D .

Teorema 2. *Se x_0 è un punto di massimo (o minimo) locale della funzione f , allora:*

- Se f è convessa (o concava) allora x_0 è un punto di massimo (o minimo) globale per f
- Se f è strettamente convessa (o strettamente concava) allora x_0 è l'unico punto di massimo (o minimo) globale per f

Teorema 3. Di Weierstrass: Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui sia di classe C^1 e D sia un compatto di \mathbb{R}^n . Allora f ammette almeno un punto di massimo globale e un punto di minimo globale.

A.2 Problema di ottimizzazione

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia β una proprietà (relazione vincolante) verificata nei punti $x \in K$ con $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x)\}$.

La funzione f viene detta funzione obiettivo e β la relazione vincolare (e $\beta(x)$ è detto vincolo). Inoltre l'insieme K è detto insieme vincolante perché vincola la soluzione a stare nell'insieme $V = D \cap K$.

A.2.1 Problema di massimizzazione

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 sottoposta al vincolo $\beta(x)$. Si ricerca un punto x_0 di massimo globale per la funzione f nella regione ammissibile. In formule:

$$x_0 \in D \cap K : f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D \cap K$$

O alternativamente si può scrivere:

$$x_0 = \max_{x \in V} [f(x)]$$

A.2.2 Problema di minimizzazione

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 sottoposta al vincolo $\beta(x)$. Si ricerca un punto x_0 di minimo globale per la funzione f nella regione ammissibile. In formule:

$$x_0 \in D \cap K : f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D \cap K$$

O alternativamente si può scrivere:

$$x_0 = \min_{x \in V} [f(x)]$$

È utile notare che il cercare il massimo di una funzione f è equivalente a cercare il minimo della funzione $-f$.

Se $x_0 \in V$ è ottimo di f in V $f(x_0)$ è il valore ottimale di f . x_0 è quindi un ottimo locale (o globale) se rispetta la condizione di ottimizzazione locale (o globale) del problema. Inoltre se l'ottimo globale (o locale) è unico allora $x \in V$ sarà un punto di ottimo forte (o ottimo debole).

A.3 Ottimizzazione libera

L'ottimizzazione libera sussiste nel momento in cui nessun vincolo è presente, o più in generale quando:

$$K = D = V$$

L'insieme ammissibile coincide con il dominio della funzione f , per cui il problema di massimizzazione o di minimizzazione diventa la ricerca del punto di massimo o di minimo della funzione f sul suo dominio. Per risolvere un problema di questo tipo si farà uso del calcolo differenziale, supponendo che $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e che sia di classe C^2 in \mathbb{R}^n .

Teorema 4. Il punto $x_0 \in D$ è detto punto stazionario per f se il suo gradiente valutato in x_0 è il vettore nullo. In caso contrario si dice che x_0 è un punto regolare. In formule:

$$\nabla f(x_0) = 0$$

Teorema 5. Ogni punto di massimo o minimo locale è un punto stazionario

Si noti che l'ultimo teorema non è invertibile, è una condizione necessaria per l'esistenza di punti di massimo o di minimo, ma non è una condizione sufficiente. In generale i punti stazionari di una funzione possono essere punti di ottimo (massimo o minimo) ma non è detto che lo siano, in quanto possono essere anche punti di sella.

Teorema 6. (condizione del secondo ordine). *Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 in \mathbb{R}^n e $x_0 \in D$ un punto stazionario. Allora valgono le seguenti proposizioni:*

- Se x_0 è un punto di minimo (o massimo) locale debole per f , allora la forma quadratica associata ad $H_f(x_0)$ è semidefinita positiva (o negativa).
- Se la forma quadratica associata a $H_f(x_0)$ è definita positiva (o negativa) allora x_0 è un punto di minimo (o massimo) forte per f .

A.4 Ottimizzazione vincolata

A.4.1 Ottimizzazione con vincoli di uguaglianza

Si considera ora il problema in cui $V = K \cap D \subset D$ e β una relazione vettoriale di uguaglianza che funge da vincolo. Quest'ultima può essere anche scritta nella forma:

$$g(x) = 0$$

Pertanto la regione ammissibile è scrivibile come:

$$V = \{x \in D \cap K : g(x) = 0\}$$

Tale problema di ottimizzazione può essere risolto mediante due tipi di metodi (sotto specifiche condizioni): il metodo di sostituzione e il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Metodo di sostituzione

Le relazioni di vincolo sono h e possono essere specificate come:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se ogni equazione nelle n variabili x è esplicitabile secondo una sola variabile, si possono riscrivere come

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \phi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_h = \phi_h(x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, x_n) \end{cases}$$

E risolvendo il sistema ad esempio per sostituzione si può scrivere:

$$\begin{cases} x_1 = \Phi_1(x_{h+1}, \dots, x_n) \\ x_2 = \Phi_2(x_{h+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_h = \Phi_h(h+1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, x_n) \end{cases}$$

La funzione da ottimizzare diventa:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_h, x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n)$$

Ovvero:

$$f(x) = \Phi(x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n)$$

funzione in $n - h$ incognite. L'ottimizzazione da questo punto è un'ottimizzazione libera nelle variabili $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$.

Si nota come tale procedura di risoluzione prevede l'esplicitazione diretta di alcune variabili in funzione di altre, cosa che risulta essere analiticamente possibile solo se si conosce l'espressione della relazione vincolare e se questa è risolvibile nella variabile d'interesse. Nella maggior parte dei casi questo non è possibile, per cui si usa il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 una funzione obiettivo e $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^h$ di classe C^1 una funzione vincolo. La regione ammissibile definita come $V = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Si definisce Lagrangiana di f la funzione scalare $L : D \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ scritta nella forma:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

Con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h)$ il vettore di dimensione h dei moltiplicatori di Lagrange.

Valgono allora le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= g_i(x) \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \lambda_j} &= \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i \lambda_j} &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

Si definisce la matrice H_f la matrice delle derivate seconde di L rispetto alle variabili x_i e si definisce G la matrice delle derivate seconde miste rispetto alle variabili x_i e λ_j , si può scrivere che:

$$G = \nabla g$$

E la matrice Hessiana di L è composta dai blocchi:

$$\begin{bmatrix} H_f & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$$

Definizione 2. Si dice che il vincolo sia qualificato se la funzione g è regolare in tutta la regione ammissibile, ovvero:

$$\nabla g(x) \neq 0 \quad \forall x \in V$$

Teorema 7. Se g è regolare in ogni punto della regione ammissibile e il vettore $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ è tale da essere soluzione locale al problema

$$\max_{x, \lambda} L(x, \lambda)$$

Allora \tilde{x} è soluzione locale al problema di massimo vincolato della funzione f .

Teorema 8. (Condizione del primo ordine): Sia \tilde{x} la soluzione locale del problema di massimo vincolato e $G(\tilde{x})$ la matrice $\nabla g_i(\tilde{x})$ $i = 1, 2, \dots, h$. Se $G(\tilde{x})$ è di rango massimo, allora esiste un unico vettore $\tilde{\lambda}$ tale per cui il vettore $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ sia soluzione locale del problema

$$\max_{(x, \lambda)} L(x, \lambda)$$

Il teorema appena espresso è una condizione necessaria ma non sufficiente per la determinazione del punto di massimo (o di minimo) vincolato della funzione f . Serve scrivere una condizione del secondo ordine:

Teorema 9. (Condizione del secondo ordine): *Sia il vettore $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ tale per cui $\nabla L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 0$, allora:*

- *Se \tilde{x} è un punto di massimo (o di minimo) locale di f nella regione ammissibile e $\tilde{\lambda}$ il suo moltiplicatore di Lagrange, allora l'Hessiana di L è semidefinita negativa (o positiva)*
- *Se l'Hessiana di L è definita negativa (o positiva) sul nucleo di $G(\tilde{x})$ allora \tilde{x} è un punto di massimo (o minimo) locale della funzione f nella regione ammissibile V*

A.4.2 Ottimizzazione con vincoli di disuguaglianza

Il problema di ottimizzazione non sempre ha relazioni di vincolo espresse tramite equazioni, ma alle volte esse possono essere disuguaglianze. In questo caso non è possibile trovare una formulazione generale del problema e della sua risoluzione, in quanto le condizioni di ottimo non sono le stesse nel caso di problema di massimizzazione e di minimizzazione. Si svolgerà di seguito la trattazione dei problemi di massimizzazione, definendo in seguito alcune regole per trasformare i problemi di minimo in modo da ricondurli sempre al caso del problema di massimizzazione.

Problema di massimo con vincoli di non positività

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione obiettivo di classe C^2 e $g : K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^h$ un set di funzioni vincolari di classe C^1 . Sia $b \in \mathbb{R}^h$ un vettore di h componenti reali, i vincoli sono espressi nella forma:

$$g_i(x) \leq b_i$$

La regione ammissibile può essere definita come $V = \{x \in D \cap K : g(x) \leq b\}$. Le disequazioni per cui vale l'uguaglianza vengono detti vincoli attivi (saturi, stringenti), mentre quelli per cui vale la disuguaglianza sono detti vincoli non attivi (non saturi, non stringenti).

Il problema di massimizzazione della funzione f con h vincoli di non positività si formula come:

$$\max_x f(x) : g(x) - b \leq 0$$

Si noti che nel caso in cui il vincolo fosse di non negatività, basterà moltiplicare ambo il membro a sinistra per -1 .

Si possono a questo punto definire h moltiplicatori (di Lagrange) per ogni vincolo di disuguaglianza, definendo una funzione lagrangiana $L : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^h$ definita come:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot (g(x) - b)$$

Teorema 10. (condizione del primo ordine): *Sia \tilde{x} la soluzione locale del problema di massimo e g tale per cui sia linearmente indipendenti i gradienti dei vincoli attivi in \tilde{x} . Allora esiste un $\tilde{\lambda}$ tale per cui sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) &= 0 \\ \nabla_\lambda L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) &\geq 0 \wedge \tilde{\lambda} \cdot \nabla_\lambda L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 0 \\ \tilde{\lambda} &\geq 0 \end{aligned}$$

Teorema 11. (Condizione del secondo ordine): *Siano f una funzione di classe C^2 debolmente concava e g una funzione di classe C^1 debolmente convessa per ogni $i = 1, \dots, h$. Se esistono $\tilde{\lambda}$ e \tilde{x} tali per cui sono soddisfatte le tre relazioni precedenti, se $\nabla f(\tilde{x}) \neq 0$ allora \tilde{x} è la soluzione del problema di massimo.*

Nel caso in cui i vincoli siano di non negatività di alcune variabili, ad esempio ai vincoli si aggiungono espressioni del tipo $x > 0$. In questo caso la funzione Lagrangiana non cambia, ma le condizioni diventano:

$$\nabla_x L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \leq 0 \wedge \tilde{x} \nabla_x L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda} L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) &\geq 0 \wedge \tilde{\lambda} \cdot \nabla_{\lambda} L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 0 \\ \tilde{x}, \tilde{\lambda} &\geq 0\end{aligned}$$

La condizione del secondo ordine è pressoché uguale a quella espressa precedentemente.

Per i problemi di minimo, è necessario risolvere comunque un problema di massimo, ma dove la funzione obiettivo è definita come $h(x) = -f(x)$.

B

Tabelle dei risultati

B.1 Traiettorie a un flyby

Asteroide	Data partenza	Data flyby	Durata	Δr	$\Delta\theta$	V_{rel}	ΔV tot
1997XF11	01/01/2028	27/10/2028	300,51	0,00	-2,73	14,10	28,39
2001WN5	01/01/2028	27/06/2028	178,81	-0,01	0,88	9,71	97,58
2004CL	01/01/2028	09/07/2028	190,71	-0,06	1,17	16,78	772,98
2000CO101	01/01/2028	11/09/2028	254,96	0,02	1,49	8,35	509,62
2009WZ104	01/01/2028	13/12/2028	348,22	0,03	-0,18	5,66	350,55
2000RK12	05/11/2027	01/09/2028	301,34	0,08	1,04	24,38	990,71
2005UG3	01/01/2028	21/10/2028	295,16	0,03	1,20	9,35	431,56
2005VK1	01/01/2028	31/10/2028	305,14	0,07	2,83	12,54	931,50
2008EY84	01/01/2028	16/09/2028	260,02	-0,03	-2,02	4,63	434,79
2009YF	01/01/2028	09/11/2028	313,57	0,01	2,06	17,09	564,12
2010CA	08/10/2027	03/08/2028	301,34	0,00	1,07	14,50	64,47
2010LM34	01/01/2028	07/06/2028	158,57	0,07	-1,45	16,33	947,26
2010XS45	01/01/2028	10/12/2028	345,03	0,03	-2,55	12,29	296,56
2011GR59	15/10/2027	11/08/2028	301,34	0,05	2,00	6,11	713,82
2011LJ19	01/01/2028	19/07/2028	200,74	0,03	-1,65	10,87	377,85
2011XC2	01/01/2028	28/11/2028	333,16	0,00	2,01	20,69	130,98
2013VX4	01/01/2028	11/12/2028	345,95	0,00	1,84	6,56	71,23
2013WY	01/01/2028	20/11/2028	325,09	0,02	2,36	4,79	307,18
2013XA22	01/01/2028	16/11/2028	321,26	0,01	4,52	4,28	545,45
2014MP	01/01/2028	21/06/2028	172,31	0,02	1,07	4,89	430,62
2014MR41	06/09/2027	02/07/2028	301,34	0,07	1,08	13,72	863,22
2014TM	01/01/2028	01/10/2028	274,70	0,01	-1,58	7,08	161,04
2014UY	01/01/2028	30/10/2028	304,26	0,07	-1,32	5,53	826,08
2014WY4	01/01/2028	16/11/2028	321,16	0,05	1,17	8,81	590,16
2015FB	01/01/2028	16/09/2028	260,25	0,05	-0,90	7,52	680,01
2015FA341	01/01/2028	18/10/2028	292,06	0,06	2,23	6,54	957,44
2015MA	17/02/2028	13/12/2028	301,34	-0,05	1,50	17,31	534,62
2015VL64	01/01/2028	02/11/2028	306,84	0,01	-0,36	4,07	146,57

2015XB2	01/01/2028	12/11/2028	317,15	0,04	-0,10	9,30	463,22
2016EP84	01/01/2028	26/12/2028	361,15	0,02	-0,08	8,00	224,76
2016PQ38	08/10/2027	03/08/2028	301,34	0,08	-0,02	12,52	972,06
2016WA8	01/01/2028	26/11/2028	330,37	0,02	-2,28	14,28	237,57
2016XE	01/01/2028	23/11/2028	327,81	0,05	0,95	7,47	565,23
2017AD5	01/01/2028	30/10/2028	303,66	-0,04	1,22	7,07	379,50
2017FR2	20/09/2027	17/07/2028	301,34	0,05	2,62	7,73	676,08
2017HP49	01/01/2028	04/06/2028	155,85	-0,01	2,28	8,99	154,80
2017OO1	01/01/2028	18/07/2028	199,75	0,00	1,20	10,05	215,02
2017SO21	01/01/2028	30/09/2028	273,47	0,04	1,38	5,74	653,84
2017XF	01/01/2028	19/12/2028	353,40	-0,05	-2,52	16,39	561,14
2018SA2	01/01/2028	23/08/2028	236,11	0,06	-1,49	9,25	858,16
2018VN7	01/01/2028	07/11/2028	311,67	0,01	-1,21	13,02	113,76
2018XB4	01/01/2028	20/12/2028	354,72	0,05	2,17	7,67	643,82
2018XC4	01/01/2028	22/12/2028	356,91	-0,02	2,99	7,39	152,45
2019AE3	01/01/2028	01/07/2028	183,20	-0,03	1,04	8,05	388,88
2019BG2	01/01/2028	17/08/2028	229,95	0,04	2,09	10,99	860,86
2019KF2	01/01/2028	03/05/2028	124,09	-0,01	1,64	11,03	694,56
2019NW5	04/09/2027	30/06/2028	301,34	0,07	2,98	17,00	920,29
2019OM	15/10/2027	10/08/2028	301,34	0,06	1,85	9,06	770,39
2019RB3	01/01/2028	14/09/2028	257,47	0,04	1,99	11,80	751,19
2019SG4	01/01/2028	24/09/2028	268,04	0,07	-1,01	14,05	871,66
2019UW	19/12/2027	14/10/2028	301,34	0,07	1,80	11,81	993,97
2019UU5	01/01/2028	15/10/2028	288,94	0,03	0,12	8,11	475,78
2019XE2	04/02/2028	01/12/2028	301,34	0,01	0,73	7,32	169,41
2019YL6	03/04/2028	19/12/2028	260,90	0,04	-0,27	4,25	472,30
1999VX25	01/01/2028	19/09/2028	263,29	0,00	-5,44	3,90	854,85
2005VN5	01/01/2028	28/10/2028	301,47	0,01	9,97	7,17	575,32
2006XP4	01/01/2028	19/11/2028	324,11	0,01	1,49	5,11	339,73
2011DS	01/01/2028	22/08/2028	234,67	-0,01	-8,63	5,24	854,72
2011GJ3	15/11/2027	10/09/2028	301,34	-0,01	-8,20	6,33	382,19
2013XA22	01/01/2028	16/11/2028	321,26	0,01	4,52	6,69	545,45
2014XC8	01/01/2028	01/12/2028	336,30	0,01	9,47	11,35	531,97
2015VC2	19/01/2028	14/11/2028	301,34	0,01	8,90	2,44	710,11
2016AE2	18/04/2028	03/01/2029	260,90	0,02	-0,70	6,72	352,34
2016RZ	01/01/2028	09/11/2028	313,87	0,01	4,37	5,00	840,95
2016XE	01/01/2028	23/11/2028	327,81	0,05	0,95	11,26	565,23
2017CO1	13/09/2027	10/07/2028	301,34	-0,01	9,86	11,97	444,02
2017EU2	01/01/2028	09/08/2028	222,09	-0,01	5,59	7,02	821,64
2017KX4	01/01/2028	28/11/2028	332,73	0,01	-2,24	10,35	333,77
2017VN2	01/01/2028	16/11/2028	320,98	0,01	-2,93	5,10	270,31
2018KR	01/01/2028	09/06/2028	160,82	-0,01	2,53	5,27	564,35
2019GE1	01/01/2028	04/11/2028	309,09	0,01	-6,20	6,55	601,43
2019KF2	01/01/2028	03/05/2028	124,09	-0,01	1,64	3,54	694,56
2019OV3	01/01/2028	23/11/2028	327,67	0,01	2,63	12,43	333,28
2020GE	01/01/2028	25/10/2028	299,09	0,01	-9,43	2,46	550,24
YORP	01/01/2028	21/07/2028	202,99	-0,02	-1,07	16,90	452,31
2012VE26	01/01/2028	04/11/2028	308,44	0,01	0,31	19,26	237,78
2015BG92	04/10/2027	30/07/2028	301,34	0,07	2,42	4,43	895,17
2016CV246	30/10/2027	25/08/2028	301,34	-0,01	3,08	5,64	135,15
2016NB1	15/09/2027	12/07/2028	301,34	0,08	2,00	6,88	976,00
2017SL16	01/01/2028	22/09/2028	265,55	0,03	0,50	6,03	458,25
2017XQ60	21/02/2028	17/12/2028	301,34	0,02	2,36	15,31	371,12

2019BS1	01/01/2028	22/07/2028	203,64	0,02	1,55	13,33	636,90
2020GE1	01/01/2028	08/10/2028	281,38	-0,03	0,52	4,43	257,57
1998VD32	01/01/2028	29/11/2028	333,53	0,02	-7,25	8,80	924,74
2000SG344	01/01/2028	01/05/2028	121,73	-0,01	0,73	54,70	404,97
2005TH50	01/01/2028	23/11/2028	327,86	0,01	-3,80	4,38	300,27
2009YF	01/01/2028	09/11/2028	313,57	0,01	2,06	3,11	564,12
2010XQ69	01/01/2028	15/11/2028	319,57	0,01	-0,70	13,04	510,23
2015VL64	01/01/2028	02/11/2028	306,84	0,01	-0,36	8,37	146,57
2016EP84	01/01/2028	26/12/2028	361,15	0,02	-0,08	3,21	224,76
2017UQ6	22/10/2027	17/08/2028	301,34	-0,01	4,06	2,87	161,52
2019VL5	01/01/2028	16/11/2028	320,60	0,01	-5,44	7,93	703,11

B.2 Traiettorie a quattro flyby

Numero	Sequenza	Partenza	Asteroide 1	Asteroide 2	Asteroide 3	Asteroide 4
1	1035396-412522-370068-206097	Earth	1997XF11	2020FL4	2017FR102	2013PG10
2	1035396-390049-5689-85324	Earth	1997XF11	2018CB2	2001CP36	2008BC15
3	1035396-412522-87509-104850	Earth	1997XF11	2020FL4	2008EO	2008YB29
4	1035396-412522-407947-85324	Earth	1997XF11	2020FL4	2019SD10	2008BC15
5	1035396-5081-146079-127133	Earth	1997XF11	2000UK11	2010XQ69	2010FV9
6	1035396-390049-5689-391844	Earth	1997XF11	2018CB2	2001CP36	2018KS
7	1035396-412522-87509-50332	Earth	1997XF11	2020FL4	2008EO	2006BW39
8	1035396-412522-1450237-401300	Earth	1997XF11	2020FL4	2002XY38	2019GM1
9	1035396-412522-1450237-407135	Earth	1997XF11	2020FL4	2002XY38	2019RF2
10	1035396-412522-87509-51648	Earth	1997XF11	2020FL4	2008EO	2006CL9
11	1153814-339253-1450237-398513	Earth	2001WN5	2016FY12	2002XY38	2018WH
12	1153814-335129-180663-390440	Earth	2001WN5	2016DY30	2012SY49	2018DZ3
13	1153814-277676-180663-344485	Earth	2001WN5	2015CD1	2012SY49	2016JD18
14	1153814-277676-10000-344485	Earth	2001WN5	2015CD1	2001WM15	2016JD18
15	1153814-339253-1450237-317085	Earth	2001WN5	2016FY12	2002XY38	2015WN1
16	1153814-277676-394075-344485	Earth	2001WN5	2015CD1	2018RS	2016JD18
17	1153814-50227-293593-344485	Earth	2001WN5	2006BM8	2015LK	2016JD18
18	1153814-328371-180663-344485	Earth	2001WN5	2016BY	2012SY49	2016JD18
19	1153814-335129-180663-1154269	Earth	2001WN5	2016DY30	2012SY49	2002SM
20	1153814-1453729-402472-30818	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2004TL10
21	1153814-1453729-109650-318155	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2015XH55
22	1153814-277676-293593-390440	Earth	2001WN5	2015CD1	2015LK	2018DZ3
23	1153814-1453729-109650-24920	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2003WT153
24	1153814-328371-394075-344485	Earth	2001WN5	2016BY	2018RS	2016JD18
25	1153814-1453729-400900-318155	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2015XH55
26	1153814-277676-293593-344485	Earth	2001WN5	2015CD1	2015LK	2016JD18
27	1153814-1453729-400900-360765	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2016WU2
28	1153814-1453729-402472-388329	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2017XQ60
29	1153814-1453729-400900-50332	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2006BW39
30	1153814-1453729-109650-411508	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2019XQ3
31	1153814-339253-373369-30818	Earth	2001WN5	2016FY12	2017NR6	2004TL10
32	1153814-1453729-109650-373779	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2017OE20
33	1153814-303698-394194-390440	Earth	2001WN5	2015RW83	2018RT5	2018DZ3
34	1153814-277676-394075-390440	Earth	2001WN5	2015CD1	2018RS	2018DZ3
35	1153814-1453729-169494-51648	Earth	2001WN5	2011BO24	2011YV62	2006CL9
36	1153814-339253-373369-142590	Earth	2001WN5	2016FY12	2017NR6	2010VQ
37	1153814-106777-293593-1154269	Earth	2001WN5	2009BH58	2015LK	2002SM

38	1153814-1453729-109650-266093	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2014YN
39	1153814-1453729-387082-310334	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2015TK238
40	1153814-1453729-377312-85324	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2008BC15
41	1153814-1453729-387082-383797	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2017TA6
42	1153814-1453729-368433-360765	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2016WU2
43	1153814-1453729-387082-373779	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2017OE20
44	1153814-1453729-377312-317085	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2015WN1
45	1153814-1453729-368433-85324	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2008BC15
46	1153814-1453729-402472-51648	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2006CL9
47	1153814-27157-411597-409748	Earth	2001WN5	2004EL20	2019YA3	2019TB7
48	1153814-1453729-387082-108584	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2009DB43
49	1153814-328371-394075-390440	Earth	2001WN5	2016BY	2018RS	2018DZ3
50	1153814-335129-134388-1154269	Earth	2001WN5	2016DY30	2010NG	2002SM
51	1153814-1453729-377312-318155	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2015XH55
52	1153814-1453729-5689-24920	Earth	2001WN5	2011BO24	2001CP36	2003WT153
53	1153814-1453729-5689-51648	Earth	2001WN5	2011BO24	2001CP36	2006CL9
54	1153814-277676-180663-1154269	Earth	2001WN5	2015CD1	2012SY49	2002SM
55	1153814-1453729-109650-150068	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2011CL50
56	1153814-339253-1450237-50182	Earth	2001WN5	2016FY12	2002XY38	2006BF
57	1153814-1453729-109650-29178	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2004QA22
58	1153814-335129-134388-390440	Earth	2001WN5	2016DY30	2010NG	2018DZ3
59	1153814-1453729-400900-401300	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2019GM1
60	1153814-1453729-400900-150068	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2011CL50
61	1153814-1453729-169494-354201	Earth	2001WN5	2011BO24	2011YV62	2016TJ10
62	1153814-1453729-402472-5093	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2000UQ30
63	1153814-1453729-368433-219196	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2014BG25
64	1153814-339253-146079-354201	Earth	2001WN5	2016FY12	2010XQ69	2016TJ10
65	1153814-339253-373369-98688	Earth	2001WN5	2016FY12	2017NR6	2008UR2
66	1153814-1453729-377312-104850	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2008YB29
67	1153814-1453729-402472-409748	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2019TB7
68	1153814-1453729-169494-1483508	Earth	2001WN5	2011BO24	2011YV62	2003CR1
69	1153814-1453729-387082-190038	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2012XQ2
70	1153814-1453729-387082-360258	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2016VW2
71	1153814-1453729-387082-206097	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2013PG10
72	1153814-1453729-387082-354201	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2016TJ10
73	1153814-1453729-169494-219196	Earth	2001WN5	2011BO24	2011YV62	2014BG25
74	1153814-1453729-10000-383797	Earth	2001WN5	2011BO24	2001WM15	2017TA6
75	1153814-1453729-387082-323698	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2016AF2
76	1153814-1453729-109650-142590	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2010VQ
77	1153814-335129-180663-344485	Earth	2001WN5	2016DY30	2012SY49	2016JD18
78	1153814-339253-146079-412113	Earth	2001WN5	2016FY12	2010XQ69	2020BW13
79	1153814-1453729-400900-323698	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2016AF2
80	1153814-1453729-377312-5093	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2000UQ30
81	1153814-27157-411597-400577	Earth	2001WN5	2004EL20	2019YA3	2019CL2
82	1153814-328371-180663-390440	Earth	2001WN5	2016BY	2012SY49	2018DZ3
83	1153814-400824-410375-400577	Earth	2001WN5	2019DP	2019UM2	2019CL2
84	1153814-1453729-377312-323698	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2016AF2
85	1153814-1453729-10000-398513	Earth	2001WN5	2011BO24	2001WM15	2018WH
86	1153814-1453729-387082-121418	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2009YR
87	1153814-1453729-377312-295684	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2015MQ116
88	1153814-371474-10000-155683	Earth	2001WN5	2017HW2	2001WM15	2011KK15
89	1153814-1453729-368433-323698	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2016AF2
90	1153814-1453729-109650-148069	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2011BV59

91	1153814-1453729-169494-5093	Earth	2001WN5	2011BO24	2011YV62	2000UQ30
92	1153814-1453729-402472-1483508	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2003CR1
93	1153814-106777-9784-155683	Earth	2001WN5	2009BH58	2001VG16	2011KK15
94	1153814-1453729-387082-409748	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2019TB7
95	1153814-1453729-109650-206097	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2013PG10
96	1153814-106777-293593-1337866	Earth	2001WN5	2009BH58	2015LK	2001WL15
97	1153814-400824-410375-407135	Earth	2001WN5	2019DP	2019UM2	2019RF2
98	1153814-339253-1450237-1226554	Earth	2001WN5	2016FY12	2002XY38	2003WR21
99	1153814-328371-180663-1154269	Earth	2001WN5	2016BY	2012SY49	2002SM
100	1153814-1453729-400900-1483508	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2003CR1
101	1153814-335129-134388-266446	Earth	2001WN5	2016DY30	2010NG	2014YP34
102	1153814-1453729-109650-313785	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2015UW67
103	1153814-328371-394075-1154269	Earth	2001WN5	2016BY	2018RS	2002SM
104	1153814-1453729-377312-384182	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2017UY
105	1153814-1453729-368433-29178	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2004QA22
106	1153814-339253-146079-403984	Earth	2001WN5	2016FY12	2010XQ69	2019LR5
107	1153814-339253-1450237-403984	Earth	2001WN5	2016FY12	2002XY38	2019LR5
108	1153814-277676-293593-389709	Earth	2001WN5	2015CD1	2015LK	2018BA3
109	1153814-328371-9784-73726	Earth	2001WN5	2016BY	2001VG16	2007RF1
110	1153814-1453729-377312-403984	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2019LR5
111	1153814-27157-411597-346775	Earth	2001WN5	2004EL20	2019YA3	2016NL39
112	1153814-1453729-109650-190038	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2012XQ2
113	1153814-1453729-402472-411508	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2019XQ3
114	1153814-1453729-377312-150068	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2011CL50
115	1153814-1453729-387082-119669	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2009WB105
116	1153814-1453729-368433-24920	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2003WT153
117	1153814-339253-373369-66354	Earth	2001WN5	2016FY12	2017NR6	2006WQ127
118	1153814-339253-146079-409748	Earth	2001WN5	2016FY12	2010XQ69	2019TB7
119	1153814-50227-394075-1337866	Earth	2001WN5	2006BM8	2018RS	2001WL15
120	1153814-1453729-109650-108584	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2009DB43
121	1153814-1453729-400900-190038	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2012XQ2
122	1153814-1453729-400900-377535	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2017RO17
123	1153814-1453729-28094-317085	Earth	2001WN5	2011BO24	2004HG12	2015WN1
124	1153814-27157-411597-394104	Earth	2001WN5	2004EL20	2019YA3	2018RY1
125	1153814-1453729-377312-385923	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2017VL1
126	1153814-106777-394075-1337866	Earth	2001WN5	2009BH58	2018RS	2001WL15
127	1153814-50227-384200-344485	Earth	2001WN5	2006BM8	2017UQ1	2016JD18
128	1153814-1453729-28094-206097	Earth	2001WN5	2011BO24	2004HG12	2013PG10
129	1153814-1453729-387082-148069	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2011BV59
130	1153814-1453729-28094-383797	Earth	2001WN5	2011BO24	2004HG12	2017TA6
131	1153814-328371-387082-1154269	Earth	2001WN5	2016BY	2017WL28	2002SM
132	1153814-106777-394075-389709	Earth	2001WN5	2009BH58	2018RS	2018BA3
133	1153814-339253-146079-385923	Earth	2001WN5	2016FY12	2010XQ69	2017VL1
134	1153814-199498-395445-73726	Earth	2001WN5	2013GM3	2018TG6	2007RF1
135	1153814-1453729-368433-226929	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2014HO2
136	1153814-1453729-151648-150068	Earth	2001WN5	2011BO24	2011EJ47	2011CL50
137	1153814-1453729-377312-51648	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2006CL9
138	1153814-1453729-109650-412113	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2020BW13
139	1153814-1453729-10000-50332	Earth	2001WN5	2011BO24	2001WM15	2006BW39
140	1153814-1453729-10000-373779	Earth	2001WN5	2011BO24	2001WM15	2017OE20
141	1153814-27157-411597-368481	Earth	2001WN5	2004EL20	2019YA3	2017FB3
142	1153814-1453729-377312-206097	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2013PG10
143	1153814-50227-384200-1154269	Earth	2001WN5	2006BM8	2017UQ1	2002SM

144	1153814-1453729-377312-119669	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2009WB105
145	1153814-50227-384200-343921	Earth	2001WN5	2006BM8	2017UQ1	2016HM3
146	1153814-1453729-18032-50332	Earth	2001WN5	2011BO24	2003AF23	2006BW39
147	1153814-1453729-377312-379922	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2017SL16
148	1153814-1453729-402472-384182	Earth	2001WN5	2011BO24	2019JJ	2017UY
149	1153814-1453729-333041-104850	Earth	2001WN5	2011BO24	2016CV246	2008YB29
150	1153814-199498-395445-36762	Earth	2001WN5	2013GM3	2018TG6	2005LD
151	1153814-1453729-400900-121418	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2009YR
152	1153814-1453729-387082-233979	Earth	2001WN5	2011BO24	2017WL28	2014NE3
153	1153814-1453729-368433-400577	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2019CL2
154	1153814-1453729-18032-412113	Earth	2001WN5	2011BO24	2003AF23	2020BW13
155	1153814-1453729-109650-315086	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2015VN64
156	1153814-1453729-10000-24920	Earth	2001WN5	2011BO24	2001WM15	2003WT153
157	1153814-1453729-400900-174073	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2012FN35
158	1153814-339253-146079-1469219	Earth	2001WN5	2016FY12	2010XQ69	Kamo'oalewa
159	1153814-1453729-18032-411548	Earth	2001WN5	2011BO24	2003AF23	2019YA1
160	1153814-1453729-109650-5093	Earth	2001WN5	2011BO24	2009FT23	2000UQ30
161	1153814-1453729-400900-53772	Earth	2001WN5	2011BO24	2019EE1	2006GB1
162	1153814-1453729-10000-150068	Earth	2001WN5	2011BO24	2001WM15	2011CL50
163	1153814-339253-146079-108584	Earth	2001WN5	2016FY12	2010XQ69	2009DB43
164	1153814-339253-343916-24920	Earth	2001WN5	2016FY12	2016HD3	2003WT153
165	1153814-27157-411597-313785	Earth	2001WN5	2004EL20	2019YA3	2015UW67
166	1153814-371474-180663-155683	Earth	2001WN5	2017HW2	2012SY49	2011KK15
167	1153814-50227-293593-390311	Earth	2001WN5	2006BM8	2015LK	2018CY14
168	1153814-106777-384200-344485	Earth	2001WN5	2009BH58	2017UQ1	2016JD18
169	1153814-1453729-377312-188232	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2012VL6
170	1153814-1453729-18032-388329	Earth	2001WN5	2011BO24	2003AF23	2017XQ60
171	1153814-1453729-368433-361627	Earth	2001WN5	2011BO24	2017FY	2016XD2
172	1153814-1453729-377312-361627	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2016XD2
173	1054509-389795-10000-344485	Earth	YORP	2000UK12	2015LK	2002SM
174	1153814-1453729-151648-206097	Earth	2001WN5	2011BO24	2011EJ47	2013PG10
175	1153814-411807-144885-192278	Earth	2001WN5	2020BP	2010WH1	2013AT27
176	1153814-1453729-377312-233979	Earth	2001WN5	2011BO24	2017RO2	2014NE3
177	1153814-1453729-28094-190038	Earth	2001WN5	2011BO24	2004HG12	2012XQ2
178	123636-389353-10000-155683	Earth	2010CA	2018AW11	2001WM15	2011KK15
179	123636-398714-387082-389709	Earth	2010CA	2018XC4	2017WL28	2018BA3
180	123636-400348-309053-155683	Earth	2010CA	2019BX1	2015TD144	2011KK15
181	1363067-277848-10000-344485	Earth	2000CO101	2015CT13	2001WM15	2016JD18
182	1363067-277848-309053-155683	Earth	2000CO101	2015CT13	2015TD144	2011KK15
183	1363067-85575-118900-1226554	Earth	2000CO101	2008CT1	2009WC	2003WR21
184	150892-277676-384200-1154269	Earth	2011DS	2015CD1	2017UQ1	2002SM
185	150892-277676-394194-1154269	Earth	2011DS	2015CD1	2018RT5	2002SM
186	150892-277676-394194-344485	Earth	2011DS	2015CD1	2018RT5	2016JD18
187	214007-394194-373369-266093	Earth	2013VX4	2018RT5	2017NR6	2014YN
188	214007-394194-373369-66354	Earth	2013VX4	2018RT5	2017NR6	2006WQ127
189	214763-339253-363265-315086	Earth	2013WY	2016FY12	2017BG30	2015VN64
190	214763-339253-363265-400577	Earth	2013WY	2016FY12	2017BG30	2019CL2
191	214763-87552-290904-383681	Earth	2013WY	2008EA8	2015JC1	2017TD1
192	214763-87552-387429-346775	Earth	2013WY	2008EA8	2017XS	2016NL39
193	253875-1453729-151364-119669	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2009WB105
194	253875-1453729-151364-1445305	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2010DM56
195	253875-1453729-151364-174073	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2012FN35
196	253875-1453729-151364-226929	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2014HO2

197	253875-1453729-151364-24920	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2003WT153
198	253875-1453729-151364-318155	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2015XH55
199	253875-1453729-151364-66354	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2006WQ127
200	253875-1453729-151364-73726	Earth	2014TM	2011BO24	2011EX4	2007RF1
201	253875-1453729-363317-360258	Earth	2014TM	2011BO24	2017BN32	2016VW2
202	253875-1453729-363317-409748	Earth	2014TM	2011BO24	2017BN32	2019TB7
203	253875-1453729-390023-66354	Earth	2014TM	2011BO24	2018CA1	2006WQ127
204	253875-1453729-392745-318155	Earth	2014TM	2011BO24	2018NT2	2015XH55
205	253875-1453729-409611-104850	Earth	2014TM	2011BO24	2019TZ	2008YB29
206	253875-1453729-72912-379922	Earth	2014TM	2011BO24	2007KO4	2017SL16
207	253875-277676-293593-1337866	Earth	2014TM	2015CD1	2015LK	2001WL15
208	253875-277676-293593-266446	Earth	2014TM	2015CD1	2015LK	2014YP34
209	253875-277676-293593-317550	Earth	2014TM	2015CD1	2015LK	2015XO
210	253875-277676-293593-389709	Earth	2014TM	2015CD1	2015LK	2018BA3
211	253875-277848-293593-1337866	Earth	2014TM	2015CT13	2015LK	2001WL15
212	253875-277848-293593-317550	Earth	2014TM	2015CT13	2015LK	2015XO
213	253875-363269-169494-266093	Earth	2014TM	2017BL30	2011YV62	2014YN
214	253875-363269-196381-317085	Earth	2014TM	2017BL30	2013CW129	2015WN1
215	253875-363269-363265-142590	Earth	2014TM	2017BL30	2017BG30	2010VQ
216	253875-363269-363265-190038	Earth	2014TM	2017BL30	2017BG30	2012XQ2
217	253875-363269-363265-22838	Earth	2014TM	2017BL30	2017BG30	2003UB22
218	253875-363269-363265-24920	Earth	2014TM	2017BL30	2017BG30	2003WT153
219	253875-363269-363265-36762	Earth	2014TM	2017BL30	2017BG30	2005LD
220	253875-363269-402472-119669	Earth	2014TM	2017BL30	2019JJ	2009WB105
221	265595-363269-373369-407135	Earth	2014XC8	2017BL30	2017NR6	2019RF2
222	265595-363269-400900-142590	Earth	2014XC8	2017BL30	2019EE1	2010VQ
223	315084-389353-394194-266446	Earth	2015VL64	2018AW11	2018RT5	2014YP34
224	361586-1054509-320678-142590	Earth	2016XE	YORP	2019JJ	2010VQ
225	361586-1054509-320678-360765	Earth	2016XE	YORP	2017NR6	2016WU2
226	361586-1054509-320678-403984	Earth	2016XE	YORP	2019EE1	2019LR5
227	361586-1054509-368433-383797	Earth	2016XE	YORP	2018RT5	2017TA6
228	361586-1453729-1450237-119669	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2009WB105
229	361586-1453729-1450237-188481	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2012VE26
230	361586-1453729-1450237-190038	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2012XQ2
231	361586-1453729-1450237-24920	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2003WT153
232	361586-1453729-1450237-266093	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2014YN
233	361586-1453729-1450237-360258	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2016VW2
234	361586-1453729-1450237-36762	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2005LD
235	361586-1453729-1450237-98688	Earth	2016XE	2011BO24	2002XY38	2008UR2
236	361586-1453729-226447-233979	Earth	2016XE	2011BO24	2014GG45	2014NE3
237	361586-1453729-226447-360258	Earth	2016XE	2011BO24	2014GG45	2016VW2
238	361586-1453729-226447-360765	Earth	2016XE	2011BO24	2014GG45	2016WU2
239	361586-1453729-226447-50332	Earth	2016XE	2011BO24	2014GG45	2006BW39
240	361586-1453729-331725-380240	Earth	2016XE	2011BO24	2016CK137	2017SZ32
241	361586-1453729-331725-401300	Earth	2016XE	2011BO24	2016CK137	2019GM1
242	361586-1453729-363265-119669	Earth	2016XE	2011BO24	2017BG30	2009WB105
243	361586-1453729-363265-211882	Earth	2016XE	2011BO24	2017BG30	2013TM69
244	361586-1453729-363265-24920	Earth	2016XE	2011BO24	2017BG30	2003WT153
245	361586-1453729-363265-385923	Earth	2016XE	2011BO24	2017BG30	2017VL1
246	361586-1453729-363265-400577	Earth	2016XE	2011BO24	2017BG30	2019CL2
247	361586-1453729-363265-98688	Earth	2016XE	2011BO24	2017BG30	2008UR2
248	361586-1453729-390440-1445305	Earth	2016XE	2011BO24	2018DZ3	2010DM56
249	361586-1453729-390440-226929	Earth	2016XE	2011BO24	2018DZ3	2014HO2

250	361586-293593-412519-219196	Earth	2016XE	2015LK	2020FH4	2014BG25
251	361586-293593-412519-393866	Earth	2016XE	2015LK	2020FH4	2018QR1
252	361586-293593-412519-411548	Earth	2016XE	2015LK	2020FH4	2019YA1
253	361586-302474-5689-385923	Earth	2016XE	2015RT1	2001CP36	2017VL1
254	361586-303698-394194-266446	Earth	2016XE	2015RW83	2018RT5	2014YP34
255	361586-303698-394194-317550	Earth	2016XE	2015RW83	2018RT5	2015XO
256	361586-303698-394194-389709	Earth	2016XE	2015RW83	2018RT5	2018BA3
257	361586-389353-180663-389709	Earth	2016XE	2018AW11	2012SY49	2018BA3
258	361586-394194-320678-411548	Earth	2016XE	2018RT5	2015XF261	2019YA1
259	361586-394194-392009-51648	Earth	2016XE	2018RT5	2018LB	2006CL9
260	361586-5081-146079-360258	Earth	2016XE	2000UK11	2010XQ69	2016VW2
261	361586-5081-146079-385923	Earth	2016XE	2000UK11	2010XQ69	2017VL1
262	361586-5081-146079-393866	Earth	2016XE	2000UK11	2010XQ69	2018QR1
263	361586-5081-370068-127133	Earth	2016XE	2000UK11	2017FR102	2010FV9
264	372479-371504-33423-98688	Earth	2017KX4	2017HG4	2005AU3	2008UR2
265	372479-394988-1450237-1445305	Earth	2017KX4	2018SJ1	2002XY38	2010DM56
266	372479-394988-1450237-380240	Earth	2017KX4	2018SJ1	2002XY38	2017SZ32
267	372479-394988-1450237-401300	Earth	2017KX4	2018SJ1	2002XY38	2019GM1
268	372479-395025-407947-377535	Earth	2017KX4	2018SB3	2019SD10	2017RO17
269	379922-328371-180663-344485	Earth	2017SL16	2016BY	2012SY49	2016JD18
270	384311-412522-384200-1154269	Earth	2017UQ6	2020FL4	2017UQ1	2002SM
271	384311-412522-384200-344485	Earth	2017UQ6	2020FL4	2017UQ1	2016JD18
272	384311-412600-180663-344485	Earth	2017UQ6	2020GM	2012SY49	2016JD18
273	395319-1453729-390023-22838	Earth	2018TZ	2011BO24	2018CA1	2003UB22
274	395319-1453729-390023-24920	Earth	2018TZ	2011BO24	2018CA1	2003WT153
275	395319-1453729-390023-411508	Earth	2018TZ	2011BO24	2018CA1	2019XQ3
276	395319-205816-266446-73726	Earth	2018TZ	2013OY3	2014YP34	2007RF1
277	395319-205816-371444-73726	Earth	2018TZ	2013OY3	2017HK1	2007RF1
278	395319-293593-377312-150068	Earth	2018TZ	2015LK	2017RO2	2011CL50
279	395319-293593-377312-394104	Earth	2018TZ	2015LK	2017RO2	2018RY1
280	395319-293593-377312-5093	Earth	2018TZ	2015LK	2017RO2	2000UQ30
281	395319-293593-400343-127133	Earth	2018TZ	2015LK	2019BS1	2010FV9
282	395319-371504-373369-119669	Earth	2018TZ	2017HG4	2017NR6	2009WB105
283	395319-371504-373369-127133	Earth	2018TZ	2017HG4	2017NR6	2010FV9
284	395319-371504-373369-24920	Earth	2018TZ	2017HG4	2017NR6	2003WT153
285	395319-371504-373369-356311	Earth	2018TZ	2017HG4	2017NR6	2016UC31
286	395319-371504-373369-360258	Earth	2018TZ	2017HG4	2017NR6	2016VW2
287	395319-371504-373369-377535	Earth	2018TZ	2017HG4	2017NR6	2017RO17
288	395319-371504-373369-407135	Earth	2018TZ	2017HG4	2017NR6	2019RF2
289	396539-1099942-315084-30818	Earth	2018VN7	APOPHIS	2017NR6	2004TL10
290	396539-1099942-388329-30818	Earth	2018VN7	APOPHIS	2011YV62	2004TL10
291	396539-1099942-388329-98688	Earth	2018VN7	APOPHIS	2011YV62	2008UR2
292	396539-1099942-5689-354201	Earth	2018VN7	APOPHIS	2019SD10	2016TJ10
293	396539-1099942-5689-368481	Earth	2018VN7	APOPHIS	2019SD10	2017FB3
294	396539-1099942-5689-50182	Earth	2018VN7	APOPHIS	2019SD10	2006BF
295	396539-1099942-5689-66354	Earth	2018VN7	APOPHIS	2019SD10	2006WQ127
296	396539-394988-169494-356311	Earth	2018VN7	2018SJ1	2011YV62	2016UC31
297	396539-394988-169494-361627	Earth	2018VN7	2018SJ1	2017NR6	2016XD2
298	396539-394988-169494-409748	Earth	2018VN7	2018SJ1	2011YV62	2019TB7
299	396539-394988-407947-150068	Earth	2018VN7	2018SJ1	2019SD10	2011CL50
300	396539-394988-407947-190038	Earth	2018VN7	2018SJ1	2019SD10	2012XQ2
301	396539-394988-407947-356311	Earth	2018VN7	2018SJ1	2019SD10	2016UC31
302	396539-394988-407947-360258	Earth	2018VN7	2018SJ1	2019SD10	2016VW2

303	410456-277848-293593-317550	Earth	2019UU5	2015CT13	2015LK	2015XO
304	410456-277848-293593-344485	Earth	2019UU5	2015CT13	2015LK	2016JD18
305	412618-335129-134388-1154269	Earth	2020GE1	2016DY30	2010NG	2002SM
306	412618-335129-134388-344485	Earth	2020GE1	2016DY30	2010NG	2016JD18
307	42355-191341-226447-317085	Earth	2005UG3	2012XK134	2014GG45	2015WN1
308	42355-340221-363265-411548	Earth	2005UG3	2016GX	2017BG30	2019YA1
309	42355-340221-363265-412448	Earth	2005UG3	2016GX	2017BG30	2020FM1
310	42355-340221-390023-119669	Earth	2005UG3	2016GX	2018CA1	2009WB105
311	42355-371474-146830-24920	Earth	2005UG3	2017HW2	2011AX22	2003WT153
312	42355-371474-146830-394104	Earth	2005UG3	2017HW2	2011AX22	2018RY1
313	42355-371474-146830-98688	Earth	2005UG3	2017HW2	2011AX22	2008UR2
314	42355-371474-400343-211882	Earth	2005UG3	2017HW2	2019BS1	2013TM69
315	42355-371474-400343-356311	Earth	2005UG3	2017HW2	2019BS1	2016UC31
316	42355-371474-400343-398513	Earth	2005UG3	2017HW2	2019BS1	2018WH
317	42355-371474-5689-318155	Earth	2005UG3	2017HW2	2001CP36	2015XH55
318	42355-82757-290904-73726	Earth	2005UG3	2007WA	2015JC1	2007RF1
319	42355-82757-411127-346775	Earth	2005UG3	2007WA	2019VM2	2016NL39
320	42355-82757-411127-79158	Earth	2005UG3	2007WA	2019VM2	2007UT3
321	67298-1453729-151364-388329	Earth	2006XP4	2011BO24	2011EX4	2017XQ60
322	67298-1453729-320678-85324	Earth	2006XP4	2011BO24	2015XF261	2008BC15
323	67298-1453729-390440-142590	Earth	2006XP4	2011BO24	2018DZ3	2010VQ
324	67298-1453729-407947-388329	Earth	2006XP4	2011BO24	2019SD10	2017XQ60
325	67298-205816-266446-98688	Earth	2006XP4	2013OY3	2014YP34	2008UR2
326	67298-205816-363265-119669	Earth	2006XP4	2013OY3	2017BG30	2009WB105
327	67298-205816-363265-142590	Earth	2006XP4	2013OY3	2017BG30	2010VQ
328	73226-412600-388600-174073	Earth	2007MJ13	2020GM	2017YL1	2012FN35

Numero	Data partenza	Data flyby 1	Data flyby 2	Data flyby 3	Data flyby 4	Durata [y]
1	30/12/2027	26/10/2028	07/04/2029	10/03/2030	05/02/2031	3,10
2	30/12/2027	26/10/2028	10/02/2029	19/02/2030	27/01/2031	3,08
3	30/12/2027	26/10/2028	07/04/2029	27/02/2030	04/01/2031	3,02
4	30/12/2027	26/10/2028	07/04/2029	27/03/2030	27/01/2031	3,08
5	30/12/2027	26/10/2028	24/07/2029	16/02/2030	02/10/2030	2,76
6	30/12/2027	26/10/2028	10/02/2029	19/02/2030	16/11/2030	2,88
7	30/12/2027	26/10/2028	07/04/2029	27/02/2030	30/01/2031	3,08
8	30/12/2027	26/10/2028	07/04/2029	18/02/2030	26/09/2030	2,74
9	30/12/2027	26/10/2028	07/04/2029	18/02/2030	21/08/2030	2,64
10	30/12/2027	26/10/2028	07/04/2029	27/02/2030	05/02/2031	3,10
11	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	18/02/2030	17/11/2030	2,88
12	10/10/2027	27/06/2028	18/02/2029	24/09/2029	03/03/2030	2,40
13	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	24/09/2029	19/05/2030	2,61
14	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	23/11/2029	19/05/2030	2,61
15	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	18/02/2030	11/11/2030	2,87
16	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	30/08/2029	19/05/2030	2,61
17	10/10/2027	27/06/2028	18/01/2029	02/07/2029	19/05/2030	2,61
18	10/10/2027	27/06/2028	21/01/2029	24/09/2029	19/05/2030	2,61
19	10/10/2027	27/06/2028	18/02/2029	24/09/2029	02/04/2030	2,48
20	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/05/2030	27/09/2030	2,74
21	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	01/12/2030	2,92
22	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	02/07/2029	03/03/2030	2,40
23	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	25/11/2030	2,91
24	10/10/2027	27/06/2028	21/01/2029	30/08/2029	19/05/2030	2,61
25	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	01/12/2030	2,92
26	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	02/07/2029	19/05/2030	2,61
27	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	24/11/2030	2,90
28	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/05/2030	17/12/2030	2,96
29	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	30/01/2031	3,08
30	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	17/12/2030	2,96
31	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	27/01/2030	27/09/2030	2,74
32	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	04/02/2031	3,10
33	10/10/2027	27/06/2028	01/02/2029	01/09/2029	03/03/2030	2,40
34	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	30/08/2029	03/03/2030	2,40
35	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	26/05/2030	05/02/2031	3,10
36	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	27/01/2030	02/12/2030	2,92
37	10/10/2027	27/06/2028	13/02/2029	02/07/2029	02/04/2030	2,48
38	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	15/11/2030	2,88
39	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	09/09/2030	2,69
40	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	27/01/2031	3,08
41	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	27/10/2030	2,82
42	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	24/11/2030	2,90
43	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	04/02/2031	3,10
44	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	11/11/2030	2,87
45	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	27/01/2031	3,08
46	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/05/2030	05/02/2031	3,10
47	30/12/2027	27/06/2028	15/03/2029	14/12/2029	07/10/2030	2,77
48	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	11/10/2030	2,78
49	10/10/2027	27/06/2028	21/01/2029	30/08/2029	03/03/2030	2,40
50	10/10/2027	27/06/2028	18/02/2029	04/07/2029	02/04/2030	2,48
51	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	01/12/2030	2,92
52	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	19/02/2030	16/11/2030	2,88

53	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	19/02/2030	05/02/2031	3,10
54	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	24/09/2029	02/04/2030	2,48
55	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	05/01/2031	3,02
56	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	18/02/2030	30/12/2030	3,00
57	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	16/12/2030	2,96
58	10/10/2027	27/06/2028	18/02/2029	04/07/2029	03/03/2030	2,40
59	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	26/09/2030	2,74
60	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	05/01/2031	3,02
61	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	26/05/2030	05/10/2030	2,77
62	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/05/2030	18/11/2030	2,88
63	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	23/01/2031	3,07
64	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	16/02/2030	05/10/2030	2,77
65	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	27/01/2030	24/10/2030	2,82
66	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	04/01/2031	3,02
67	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/05/2030	07/10/2030	2,77
68	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	26/05/2030	28/01/2031	3,08
69	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	02/12/2030	2,92
70	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	04/11/2030	2,85
71	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	05/02/2031	3,10
72	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	05/10/2030	2,77
73	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	26/05/2030	23/01/2031	3,07
74	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	23/11/2029	27/10/2030	2,82
75	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	26/12/2030	2,99
76	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	02/12/2030	2,92
77	10/10/2027	27/06/2028	18/02/2029	24/09/2029	19/05/2030	2,61
78	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	16/02/2030	26/11/2030	2,91
79	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	26/12/2030	2,99
80	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	18/11/2030	2,88
81	30/12/2027	27/06/2028	15/03/2029	14/12/2029	19/06/2030	2,47
82	10/10/2027	27/06/2028	21/01/2029	24/09/2029	03/03/2030	2,40
83	30/12/2027	27/06/2028	24/02/2029	12/10/2029	19/06/2030	2,47
84	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	26/12/2030	2,99
85	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	23/11/2029	17/11/2030	2,88
86	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	10/09/2030	2,70
87	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	31/12/2030	3,00
88	30/08/2027	27/06/2028	10/05/2029	23/11/2029	13/05/2030	2,70
89	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	26/12/2030	2,99
90	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	31/01/2031	3,09
91	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	26/05/2030	18/11/2030	2,88
92	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/05/2030	28/01/2031	3,08
93	10/10/2027	27/06/2028	13/02/2029	10/11/2029	13/05/2030	2,59
94	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	07/10/2030	2,77
95	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	05/02/2031	3,10
96	10/10/2027	27/06/2028	13/02/2029	02/07/2029	12/01/2030	2,26
97	30/12/2027	27/06/2028	24/02/2029	12/10/2029	14/08/2030	2,62
98	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	18/02/2030	13/06/2030	2,45
99	10/10/2027	27/06/2028	21/01/2029	24/09/2029	02/04/2030	2,48
100	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	28/01/2031	3,08
101	10/10/2027	27/06/2028	18/02/2029	04/07/2029	27/12/2029	2,22
102	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	16/08/2030	2,63
103	10/10/2027	27/06/2028	21/01/2029	30/08/2029	02/04/2030	2,48
104	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	10/10/2030	2,78
105	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	16/12/2030	2,96

106	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	16/02/2030	12/12/2030	2,95
107	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	18/02/2030	12/12/2030	2,95
108	10/10/2027	27/06/2028	09/02/2029	02/07/2029	25/01/2030	2,29
109	30/12/2027	27/06/2028	21/01/2029	10/11/2029	27/08/2030	2,66
110	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	12/12/2030	2,95
111	30/12/2027	27/06/2028	15/03/2029	14/12/2029	02/07/2030	2,51
112	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	02/12/2030	2,92
113	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/04/2030	17/12/2030	2,96
114	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	05/01/2031	3,02
115	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	22/11/2030	2,90
116	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	16/11/2030	2,88
117	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	27/01/2030	03/12/2030	2,93
118	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	16/02/2030	07/10/2030	2,77
119	10/10/2027	27/06/2028	18/01/2029	30/08/2029	12/01/2030	2,26
120	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	11/10/2030	2,78
121	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	02/12/2030	2,92
122	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	04/09/2030	2,68
123	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	21/04/2030	11/11/2030	2,87
124	30/12/2027	27/06/2028	15/03/2029	14/12/2029	05/10/2030	2,77
125	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	11/11/2030	2,87
126	10/10/2027	27/06/2028	13/02/2029	30/08/2029	12/01/2030	2,26
127	10/10/2027	27/06/2028	18/01/2029	09/10/2029	19/05/2030	2,61
128	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	21/04/2030	05/02/2031	3,10
129	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	31/01/2031	3,09
130	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	21/04/2030	27/10/2030	2,82
131	10/10/2027	27/06/2028	21/01/2029	02/12/2029	02/04/2030	2,48
132	10/10/2027	27/06/2028	13/02/2029	30/08/2029	25/01/2030	2,29
133	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	16/02/2030	11/11/2030	2,87
134	30/12/2027	27/06/2028	31/01/2029	29/10/2029	27/08/2030	2,66
135	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	26/11/2030	2,91
136	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	19/02/2030	05/01/2031	3,02
137	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	05/02/2031	3,10
138	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	26/11/2030	2,91
139	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	23/11/2029	30/01/2031	3,08
140	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	23/11/2029	04/02/2031	3,10
141	30/12/2027	27/06/2028	15/03/2029	14/12/2029	09/09/2030	2,69
142	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	05/02/2031	3,10
143	30/08/2027	27/06/2028	18/01/2029	09/10/2029	02/04/2030	2,59
144	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	22/11/2030	2,90
145	30/08/2027	27/06/2028	18/01/2029	09/10/2029	05/05/2030	2,68
146	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	04/01/2030	30/01/2031	3,08
147	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	21/09/2030	2,73
148	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/05/2030	10/10/2030	2,78
149	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	01/03/2030	04/01/2031	3,02
150	30/12/2027	27/06/2028	31/01/2029	29/10/2029	16/06/2030	2,46
151	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	10/09/2030	2,70
152	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	02/12/2029	18/01/2031	3,05
153	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	19/06/2030	2,47
154	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	04/01/2030	26/11/2030	2,91
155	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	01/11/2030	2,84
156	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	23/11/2029	16/11/2030	2,88
157	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	27/09/2030	2,74
158	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	16/02/2030	24/11/2030	2,90

159	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	04/01/2030	03/12/2030	2,93
160	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	25/03/2030	18/11/2030	2,88
161	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	11/03/2030	18/10/2030	2,80
162	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	23/11/2029	05/01/2031	3,02
163	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	16/02/2030	05/11/2030	2,85
164	30/12/2027	27/06/2028	17/04/2029	18/01/2030	25/11/2030	2,91
165	30/12/2027	27/06/2028	15/03/2029	14/12/2029	16/08/2030	2,63
166	30/08/2027	27/06/2028	10/05/2029	24/09/2029	13/05/2030	2,70
167	30/08/2027	27/06/2028	18/01/2029	02/07/2029	15/01/2030	2,38
168	30/08/2027	27/06/2028	13/02/2029	09/10/2029	19/05/2030	2,72
169	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	09/10/2030	2,78
170	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	04/01/2030	17/12/2030	2,96
171	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	17/03/2030	09/12/2030	2,94
172	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	09/12/2030	2,94
173	23/09/2027	21/07/2028	28/01/2029	23/11/2029	19/05/2030	2,65
174	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	19/02/2030	05/02/2031	3,10
175	30/12/2027	27/06/2028	18/01/2029	21/11/2029	15/07/2030	2,54
176	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	15/03/2030	18/01/2031	3,05
177	30/12/2027	27/06/2028	24/06/2029	21/04/2030	02/12/2030	2,92
178	07/10/2027	03/08/2028	13/01/2029	23/11/2029	13/05/2030	2,60
179	07/10/2027	03/08/2028	22/12/2028	02/12/2029	25/01/2030	2,30
180	07/10/2027	03/08/2028	11/01/2029	14/10/2029	13/05/2030	2,60
181	14/11/2027	11/09/2028	14/02/2029	23/11/2029	19/05/2030	2,51
182	14/11/2027	11/09/2028	14/02/2029	14/10/2029	13/05/2030	2,49
183	30/12/2027	11/09/2028	08/02/2029	17/11/2029	13/06/2030	2,45
184	25/10/2027	21/08/2028	09/02/2029	09/10/2029	02/04/2030	2,44
185	25/10/2027	21/08/2028	09/02/2029	01/09/2029	02/04/2030	2,44
186	25/10/2027	21/08/2028	09/02/2029	01/09/2029	19/05/2030	2,56
187	30/12/2027	11/12/2028	01/09/2029	27/01/2030	15/11/2030	2,88
188	30/12/2027	11/12/2028	01/09/2029	27/01/2030	03/12/2030	2,93
189	30/12/2027	20/11/2028	17/04/2029	31/01/2030	01/11/2030	2,84
190	30/12/2027	20/11/2028	17/04/2029	31/01/2030	19/06/2030	2,47
191	30/12/2027	20/11/2028	13/05/2029	11/11/2029	12/09/2030	2,70
192	30/12/2027	20/11/2028	13/05/2029	10/12/2029	02/07/2030	2,51
193	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	22/11/2030	2,90
194	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	08/09/2030	2,69
195	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	27/09/2030	2,74
196	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	26/11/2030	2,91
197	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	16/11/2030	2,88
198	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	01/12/2030	2,92
199	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	03/12/2030	2,93
200	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	19/02/2030	19/09/2030	2,72
201	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	31/01/2030	04/11/2030	2,85
202	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	31/01/2030	07/10/2030	2,77
203	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	06/02/2030	03/12/2030	2,93
204	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	27/01/2030	01/12/2030	2,92
205	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	30/04/2030	04/01/2031	3,02
206	30/12/2027	30/09/2028	24/06/2029	22/11/2029	21/09/2030	2,73
207	13/01/2028	30/09/2028	09/02/2029	02/07/2029	12/01/2030	2,00
208	13/01/2028	30/09/2028	09/02/2029	02/07/2029	27/12/2029	1,95
209	13/01/2028	30/09/2028	09/02/2029	02/07/2029	11/12/2029	1,91
210	13/01/2028	30/09/2028	09/02/2029	02/07/2029	25/01/2030	2,03
211	13/01/2028	30/09/2028	14/02/2029	02/07/2029	12/01/2030	2,00

212	13/01/2028	30/09/2028	14/02/2029	02/07/2029	11/12/2029	1,91
213	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	26/05/2030	04/01/2031	3,02
214	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	21/02/2030	11/11/2030	2,87
215	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	31/01/2030	02/12/2030	2,92
216	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	31/01/2030	02/12/2030	2,92
217	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	31/01/2030	25/10/2030	2,82
218	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	31/01/2030	25/11/2030	2,91
219	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	31/01/2030	16/06/2030	2,46
220	30/12/2027	30/09/2028	30/07/2029	25/04/2030	22/11/2030	2,90
221	30/12/2027	01/12/2028	26/07/2029	27/01/2030	21/08/2030	2,64
222	30/12/2027	01/12/2028	26/07/2029	11/03/2030	02/12/2030	2,92
223	15/02/2028	02/11/2028	13/01/2029	01/09/2029	27/12/2029	1,87
224	30/12/2027	30/11/2028	21/07/2029	08/04/2030	02/12/2030	2,92
225	30/12/2027	30/11/2028	21/07/2029	08/04/2030	24/11/2030	2,90
226	30/12/2027	30/11/2028	21/07/2029	08/04/2030	12/12/2030	2,95
227	30/12/2027	30/11/2028	21/07/2029	17/03/2030	27/10/2030	2,83
228	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	22/11/2030	2,90
229	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	03/11/2030	2,85
230	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	02/12/2030	2,92
231	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	16/11/2030	2,88
232	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	15/11/2030	2,88
233	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	04/11/2030	2,85
234	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	16/06/2030	2,46
235	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	18/02/2030	24/10/2030	2,82
236	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	10/04/2030	18/01/2031	3,05
237	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	10/04/2030	04/11/2030	2,85
238	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	10/04/2030	24/11/2030	2,90
239	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	10/04/2030	30/01/2031	3,09
240	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	26/01/2030	18/09/2030	2,72
241	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	26/01/2030	26/09/2030	2,74
242	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	27/01/2030	22/11/2030	2,90
243	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	27/01/2030	03/10/2030	2,76
244	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	27/01/2030	25/11/2030	2,91
245	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	31/01/2030	11/11/2030	2,87
246	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	27/01/2030	19/06/2030	2,47
247	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	27/01/2030	24/10/2030	2,82
248	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	03/03/2030	08/09/2030	2,69
249	30/12/2027	30/11/2028	24/06/2029	03/03/2030	26/11/2030	2,91
250	30/12/2027	30/11/2028	02/07/2029	25/03/2030	23/01/2031	3,07
251	30/12/2027	30/11/2028	02/07/2029	25/03/2030	21/08/2030	2,64
252	30/12/2027	30/11/2028	02/07/2029	25/03/2030	03/12/2030	2,93
253	30/12/2027	30/11/2028	14/08/2029	19/02/2030	11/11/2030	2,87
254	14/03/2028	30/11/2028	01/02/2029	01/09/2029	27/12/2029	1,79
255	14/03/2028	30/11/2028	01/02/2029	01/09/2029	11/12/2029	1,74
256	14/03/2028	30/11/2028	01/02/2029	01/09/2029	25/01/2030	1,87
257	03/02/2028	30/11/2028	13/01/2029	24/09/2029	25/01/2030	1,98
258	30/12/2027	30/11/2028	01/09/2029	08/04/2030	03/12/2030	2,93
259	30/12/2027	30/11/2028	01/09/2029	01/06/2030	05/02/2031	3,10
260	30/12/2027	30/11/2028	24/07/2029	16/02/2030	04/11/2030	2,85
261	30/12/2027	30/11/2028	24/07/2029	16/02/2030	11/11/2030	2,87
262	30/12/2027	30/11/2028	24/07/2029	16/02/2030	21/08/2030	2,64
263	30/12/2027	30/11/2028	24/07/2029	10/03/2030	02/10/2030	2,76
264	30/12/2027	27/11/2028	23/04/2029	05/01/2030	24/10/2030	2,82

265	30/12/2027	27/11/2028	14/09/2029	18/02/2030	08/09/2030	2,69
266	30/12/2027	27/11/2028	14/09/2029	18/02/2030	18/09/2030	2,72
267	30/12/2027	27/11/2028	14/09/2029	18/02/2030	26/09/2030	2,74
268	30/12/2027	27/11/2028	16/09/2029	27/03/2030	04/09/2030	2,68
269	25/11/2027	21/09/2028	21/01/2029	24/09/2029	19/05/2030	2,48
270	21/10/2027	17/08/2028	07/04/2029	09/10/2029	02/04/2030	2,45
271	21/10/2027	17/08/2028	07/04/2029	09/10/2029	19/05/2030	2,58
272	21/10/2027	17/08/2028	07/04/2029	24/09/2029	19/05/2030	2,58
273	30/12/2027	02/10/2028	24/06/2029	06/02/2030	25/10/2030	2,82
274	30/12/2027	02/10/2028	24/06/2029	06/02/2030	16/11/2030	2,88
275	30/12/2027	02/10/2028	24/06/2029	06/02/2030	17/12/2030	2,97
276	30/12/2027	02/10/2028	15/07/2029	27/12/2029	19/09/2030	2,72
277	30/12/2027	02/10/2028	15/07/2029	13/03/2030	19/09/2030	2,72
278	30/12/2027	02/10/2028	02/07/2029	15/03/2030	05/01/2031	3,02
279	30/12/2027	02/10/2028	02/07/2029	15/03/2030	05/10/2030	2,77
280	30/12/2027	02/10/2028	02/07/2029	15/03/2030	18/11/2030	2,89
281	30/12/2027	02/10/2028	02/07/2029	23/01/2030	02/10/2030	2,76
282	30/12/2027	02/10/2028	23/04/2029	27/01/2030	22/11/2030	2,90
283	30/12/2027	02/10/2028	23/04/2029	27/01/2030	02/10/2030	2,76
284	30/12/2027	02/10/2028	23/04/2029	27/01/2030	25/11/2030	2,91
285	30/12/2027	02/10/2028	23/04/2029	27/01/2030	29/10/2030	2,83
286	30/12/2027	02/10/2028	23/04/2029	27/01/2030	04/11/2030	2,85
287	30/12/2027	02/10/2028	23/04/2029	27/01/2030	04/09/2030	2,68
288	30/12/2027	02/10/2028	23/04/2029	27/01/2030	21/08/2030	2,64
289	30/12/2027	06/11/2028	13/04/2029	11/02/2030	27/09/2030	2,74
290	30/12/2027	06/11/2028	13/04/2029	16/12/2029	27/09/2030	2,74
291	30/12/2027	06/11/2028	13/04/2029	16/12/2029	24/10/2030	2,82
292	30/12/2027	06/11/2028	13/04/2029	19/02/2030	05/10/2030	2,77
293	30/12/2027	06/11/2028	13/04/2029	19/02/2030	09/09/2030	2,69
294	30/12/2027	06/11/2028	13/04/2029	19/02/2030	30/12/2030	3,00
295	30/12/2027	06/11/2028	13/04/2029	19/02/2030	03/12/2030	2,93
296	30/12/2027	06/11/2028	14/09/2029	26/05/2030	29/10/2030	2,83
297	30/12/2027	06/11/2028	14/09/2029	26/05/2030	09/12/2030	2,94
298	30/12/2027	06/11/2028	14/09/2029	26/05/2030	07/10/2030	2,77
299	30/12/2027	06/11/2028	14/09/2029	27/03/2030	05/01/2031	3,02
300	30/12/2027	06/11/2028	14/09/2029	27/03/2030	02/12/2030	2,92
301	30/12/2027	06/11/2028	14/09/2029	27/03/2030	29/10/2030	2,83
302	30/12/2027	06/11/2028	14/09/2029	27/03/2030	04/11/2030	2,85
303	18/12/2027	15/10/2028	14/02/2029	02/07/2029	11/12/2029	1,98
304	18/12/2027	15/10/2028	14/02/2029	02/07/2029	19/05/2030	2,42
305	11/12/2027	07/10/2028	18/02/2029	04/07/2029	02/04/2030	2,31
306	11/12/2027	07/10/2028	18/02/2029	04/07/2029	19/05/2030	2,44
307	30/12/2027	21/10/2028	18/08/2029	10/04/2030	11/11/2030	2,87
308	30/12/2027	21/10/2028	20/04/2029	27/01/2030	03/12/2030	2,93
309	30/12/2027	21/10/2028	20/04/2029	31/01/2030	09/10/2030	2,78
310	30/12/2027	21/10/2028	20/04/2029	06/02/2030	22/11/2030	2,90
311	30/12/2027	21/10/2028	10/05/2029	06/01/2030	16/11/2030	2,88
312	30/12/2027	21/10/2028	10/05/2029	06/01/2030	05/10/2030	2,77
313	30/12/2027	21/10/2028	10/05/2029	06/01/2030	24/10/2030	2,82
314	30/12/2027	21/10/2028	10/05/2029	23/01/2030	03/10/2030	2,76
315	30/12/2027	21/10/2028	10/05/2029	23/01/2030	29/10/2030	2,83
316	30/12/2027	21/10/2028	10/05/2029	23/01/2030	17/11/2030	2,88
317	30/12/2027	21/10/2028	10/05/2029	19/02/2030	01/12/2030	2,92

318	30/12/2027	21/10/2028	08/05/2029	11/11/2029	27/08/2030	2,66
319	30/12/2027	21/10/2028	08/05/2029	30/10/2029	02/07/2030	2,51
320	30/12/2027	21/10/2028	08/05/2029	30/10/2029	31/08/2030	2,67
321	30/12/2027	19/11/2028	24/06/2029	19/02/2030	17/12/2030	2,96
322	30/12/2027	19/11/2028	24/06/2029	08/04/2030	27/01/2031	3,08
323	30/12/2027	19/11/2028	24/06/2029	03/03/2030	02/12/2030	2,92
324	30/12/2027	19/11/2028	24/06/2029	27/03/2030	17/12/2030	2,96
325	30/12/2027	19/11/2028	15/07/2029	27/12/2029	24/10/2030	2,82
326	30/12/2027	19/11/2028	15/07/2029	31/01/2030	22/11/2030	2,90
327	30/12/2027	19/11/2028	15/07/2029	31/01/2030	02/12/2030	2,92
328	30/12/2027	17/06/2028	07/04/2029	13/12/2029	27/09/2030	2,74

Numero	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$	$\Delta\theta_4$	Δr_1	Δr_2	Δr_3	Δr_4
1	-2,73	-2,02	-0,61	-6,36	0,00	0,03	0,00	0,01
2	-2,73	-0,79	1,12	2,02	0,00	0,02	0,01	0,02
3	-2,73	-2,02	0,21	-2,01	0,00	0,03	0,03	0,02
4	-2,73	-2,02	-0,20	2,02	0,00	0,03	0,00	0,02
5	-2,73	1,04	2,54	4,11	0,00	-0,02	0,01	0,00
6	-2,73	-0,79	1,12	2,91	0,00	0,02	0,01	-0,07
7	-2,73	-2,02	0,21	-2,07	0,00	0,03	0,03	0,05
8	-2,73	-2,02	1,84	1,85	0,00	0,03	0,01	-0,03
9	-2,73	-2,02	1,84	-2,84	0,00	0,03	0,01	-0,01
10	-2,73	-2,02	0,21	2,82	0,00	0,03	0,03	0,04
11	0,88	0,49	1,84	-2,42	-0,01	0,01	0,01	0,01
12	0,88	7,61	1,60	2,76	-0,01	0,01	0,00	0,02
13	0,88	-0,75	1,60	0,00	-0,01	0,00	0,00	-0,01
14	0,88	-0,75	0,55	0,00	-0,01	0,00	0,03	-0,01
15	0,88	0,49	1,84	0,04	-0,01	0,01	0,01	0,01
16	0,88	-0,75	2,05	0,00	-0,01	0,00	-0,01	-0,01
17	0,88	3,00	2,72	0,00	-0,01	0,01	-0,03	-0,01
18	0,88	-1,46	1,60	0,00	-0,01	0,01	0,00	-0,01
19	0,88	7,61	1,60	-0,85	-0,01	0,01	0,00	0,03
20	0,88	-2,50	-2,64	2,93	-0,01	-0,02	-0,01	-0,03
21	0,88	-2,50	-1,50	-0,67	-0,01	-0,02	0,03	0,02
22	0,88	-0,75	2,72	2,76	-0,01	0,00	-0,03	0,02
23	0,88	-2,50	-1,50	-0,97	-0,01	-0,02	0,03	0,01
24	0,88	-1,46	2,05	0,00	-0,01	0,01	-0,01	-0,01
25	0,88	-2,50	-0,21	-0,67	-0,01	-0,02	0,04	0,02
26	0,88	-0,75	2,72	0,00	-0,01	0,00	-0,03	-0,01
27	0,88	-2,50	-0,21	-2,43	-0,01	-0,02	0,04	0,01
28	0,88	-2,50	-2,64	2,71	-0,01	-0,02	-0,01	0,02
29	0,88	-2,50	-0,21	-2,07	-0,01	-0,02	0,04	0,05
30	0,88	-2,50	-1,50	1,63	-0,01	-0,02	0,03	0,01
31	0,88	0,49	2,62	2,93	-0,01	0,01	0,03	-0,03
32	0,88	-2,50	-1,50	-2,10	-0,01	-0,02	0,03	0,05
33	0,88	0,04	-2,52	2,76	-0,01	0,03	-0,03	0,02
34	0,88	-0,75	2,05	2,76	-0,01	0,00	-0,01	0,02
35	0,88	-2,50	-1,13	2,82	-0,01	-0,02	-0,01	0,04
36	0,88	0,49	2,62	4,00	-0,01	0,01	0,03	0,01
37	0,88	2,62	2,72	-0,85	-0,01	0,01	-0,03	0,03
38	0,88	-2,50	-1,50	-3,12	-0,01	-0,02	0,03	0,01
39	0,88	-2,50	0,34	1,03	-0,01	-0,02	0,02	-0,04
40	0,88	-2,50	1,06	2,02	-0,01	-0,02	-0,01	0,02
41	0,88	-2,50	0,34	-9,20	-0,01	-0,02	0,02	0,01
42	0,88	-2,50	1,03	-2,43	-0,01	-0,02	0,03	0,01
43	0,88	-2,50	0,34	-2,10	-0,01	-0,02	0,02	0,05
44	0,88	-2,50	1,06	0,04	-0,01	-0,02	-0,01	0,01
45	0,88	-2,50	1,03	2,02	-0,01	-0,02	0,03	0,02
46	0,88	-2,50	-2,64	2,82	-0,01	-0,02	-0,01	0,04
47	0,88	2,13	-5,42	1,31	-0,01	0,01	0,01	0,01
48	0,88	-2,50	0,34	-4,86	-0,01	-0,02	0,02	0,00
49	0,88	-1,46	2,05	2,76	-0,01	0,01	-0,01	0,02
50	0,88	7,61	2,70	-0,85	-0,01	0,01	0,02	0,03
51	0,88	-2,50	1,06	-0,67	-0,01	-0,02	-0,01	0,02
52	0,88	-2,50	1,12	-0,17	-0,01	-0,02	0,01	0,03

53	0,88	-2,50	1,12	2,82	-0,01	-0,02	0,01	0,04
54	0,88	-0,75	1,60	-0,85	-0,01	0,00	0,00	0,03
55	0,88	-2,50	-1,50	-4,04	-0,01	-0,02	0,03	0,02
56	0,88	0,49	1,84	2,25	-0,01	0,01	0,01	-0,03
57	0,88	-2,50	-1,50	-4,07	-0,01	-0,02	0,03	0,02
58	0,88	7,61	2,70	2,76	-0,01	0,01	0,02	0,02
59	0,88	-2,50	-0,21	1,85	-0,01	-0,02	0,04	-0,03
60	0,88	-2,50	-0,21	-4,04	-0,01	-0,02	0,04	0,02
61	0,88	-2,50	-1,13	1,21	-0,01	-0,02	-0,01	0,00
62	0,88	-2,50	-2,64	2,06	-0,01	-0,02	-0,01	0,03
63	0,88	-2,50	1,03	0,99	-0,01	-0,02	0,03	0,06
64	0,88	0,49	2,54	1,21	-0,01	0,01	0,01	0,00
65	0,88	0,49	2,62	-2,59	-0,01	0,01	0,03	0,02
66	0,88	-2,50	1,06	-2,01	-0,01	-0,02	-0,01	0,02
67	0,88	-2,50	-2,64	1,31	-0,01	-0,02	-0,01	0,01
68	0,88	-2,50	-1,13	3,08	-0,01	-0,02	-0,01	0,05
69	0,88	-2,50	0,34	-2,81	-0,01	-0,02	0,02	0,05
70	0,88	-2,50	0,34	-1,07	-0,01	-0,02	0,02	0,03
71	0,88	-2,50	0,34	-6,36	-0,01	-0,02	0,02	0,01
72	0,88	-2,50	0,34	1,21	-0,01	-0,02	0,02	0,00
73	0,88	-2,50	-1,13	0,99	-0,01	-0,02	-0,01	0,06
74	0,88	-2,50	0,55	-9,20	-0,01	-0,02	0,03	0,01
75	0,88	-2,50	0,34	3,67	-0,01	-0,02	0,02	0,02
76	0,88	-2,50	-1,50	4,00	-0,01	-0,02	0,03	0,01
77	0,88	7,61	1,60	0,00	-0,01	0,01	0,00	-0,01
78	0,88	0,49	2,54	-8,47	-0,01	0,01	0,01	0,01
79	0,88	-2,50	-0,21	3,67	-0,01	-0,02	0,04	0,02
80	0,88	-2,50	1,06	2,06	-0,01	-0,02	-0,01	0,03
81	0,88	2,13	-5,42	-1,53	-0,01	0,01	0,01	-0,04
82	0,88	-1,46	1,60	2,76	-0,01	0,01	0,00	0,02
83	0,88	1,21	0,44	-1,53	-0,01	0,01	0,03	-0,04
84	0,88	-2,50	1,06	3,67	-0,01	-0,02	-0,01	0,02
85	0,88	-2,50	0,55	-2,42	-0,01	-0,02	0,03	0,01
86	0,88	-2,50	0,34	-6,27	-0,01	-0,02	0,02	-0,01
87	0,88	-2,50	1,06	1,10	-0,01	-0,02	-0,01	0,04
88	0,88	-2,63	0,55	-1,25	-0,01	-0,02	0,03	-0,05
89	0,88	-2,50	1,03	3,67	-0,01	-0,02	0,03	0,02
90	0,88	-2,50	-1,50	0,98	-0,01	-0,02	0,03	0,06
91	0,88	-2,50	-1,13	2,06	-0,01	-0,02	-0,01	0,03
92	0,88	-2,50	-2,64	3,08	-0,01	-0,02	-0,01	0,05
93	0,88	2,62	-2,24	-1,25	-0,01	0,01	0,02	-0,05
94	0,88	-2,50	0,34	1,31	-0,01	-0,02	0,02	0,01
95	0,88	-2,50	-1,50	-6,36	-0,01	-0,02	0,03	0,01
96	0,88	2,62	2,72	-1,05	-0,01	0,01	-0,03	0,07
97	0,88	1,21	0,44	-2,46	-0,01	0,01	0,03	-0,03
98	0,88	0,49	1,84	2,76	-0,01	0,01	0,01	-0,05
99	0,88	-1,46	1,60	-0,85	-0,01	0,01	0,00	0,03
100	0,88	-2,50	-0,21	3,08	-0,01	-0,02	0,04	0,05
101	0,88	7,61	2,70	-1,79	-0,01	0,01	0,02	0,03
102	0,88	-2,50	-1,50	0,94	-0,01	-0,02	0,03	-0,07
103	0,88	-1,46	2,05	-0,85	-0,01	0,01	-0,01	0,03
104	0,88	-2,50	1,06	0,12	-0,01	-0,02	-0,01	0,03
105	0,88	-2,50	1,03	-4,07	-0,01	-0,02	0,03	0,02

106	0,88	0,49	2,54	9,16	-0,01	0,01	0,01	0,01
107	0,88	0,49	1,84	9,16	-0,01	0,01	0,01	0,01
108	0,88	-0,75	2,72	0,77	-0,01	0,00	-0,03	0,00
109	0,88	-1,46	-2,24	3,07	-0,01	0,01	0,02	0,02
110	0,88	-2,50	1,06	9,16	-0,01	-0,02	-0,01	0,01
111	0,88	2,13	-5,42	0,54	-0,01	0,01	0,01	0,00
112	0,88	-2,50	-1,50	-2,81	-0,01	-0,02	0,03	0,05
113	0,88	-2,50	-2,82	1,63	-0,01	-0,02	-0,04	0,01
114	0,88	-2,50	1,06	-4,04	-0,01	-0,02	-0,01	0,02
115	0,88	-2,50	0,34	0,09	-0,01	-0,02	0,02	0,04
116	0,88	-2,50	1,03	-0,17	-0,01	-0,02	0,03	0,03
117	0,88	0,49	2,62	0,71	-0,01	0,01	0,03	-0,03
118	0,88	0,49	2,54	1,31	-0,01	0,01	0,01	0,01
119	0,88	3,00	2,05	-1,05	-0,01	0,01	-0,01	0,07
120	0,88	-2,50	-1,50	-4,86	-0,01	-0,02	0,03	0,00
121	0,88	-2,50	-0,21	-2,81	-0,01	-0,02	0,04	0,05
122	0,88	-2,50	-0,21	-5,41	-0,01	-0,02	0,04	-0,01
123	0,88	-2,50	-2,54	0,04	-0,01	-0,02	0,03	0,01
124	0,88	2,13	-5,42	6,29	-0,01	0,01	0,01	0,00
125	0,88	-2,50	1,06	-2,26	-0,01	-0,02	-0,01	0,04
126	0,88	2,62	2,05	-1,05	-0,01	0,01	-0,01	0,07
127	0,88	3,00	0,36	0,00	-0,01	0,01	-0,03	-0,01
128	0,88	-2,50	-2,54	-6,36	-0,01	-0,02	0,03	0,01
129	0,88	-2,50	0,34	0,98	-0,01	-0,02	0,02	0,06
130	0,88	-2,50	-2,54	-9,20	-0,01	-0,02	0,03	0,01
131	0,88	-1,46	0,34	-0,85	-0,01	0,01	0,02	0,03
132	0,88	2,62	2,05	0,77	-0,01	0,01	-0,01	0,00
133	0,88	0,49	2,54	-2,26	-0,01	0,01	0,01	0,04
134	0,88	1,94	5,50	3,07	-0,01	0,01	0,01	0,02
135	0,88	-2,50	1,03	-5,16	-0,01	-0,02	0,03	0,01
136	0,88	-2,50	-0,14	-4,04	-0,01	-0,02	0,05	0,02
137	0,88	-2,50	1,06	2,82	-0,01	-0,02	-0,01	0,04
138	0,88	-2,50	-1,50	-8,47	-0,01	-0,02	0,03	0,01
139	0,88	-2,50	0,55	-2,07	-0,01	-0,02	0,03	0,05
140	0,88	-2,50	0,55	-2,10	-0,01	-0,02	0,03	0,05
141	0,88	2,13	-5,42	-3,02	-0,01	0,01	0,01	-0,01
142	0,88	-2,50	1,06	-6,36	-0,01	-0,02	-0,01	0,01
143	0,88	3,00	0,36	-0,85	-0,01	0,01	-0,03	0,03
144	0,88	-2,50	1,06	0,09	-0,01	-0,02	-0,01	0,04
145	0,88	3,00	0,36	-0,51	-0,01	0,01	-0,03	0,07
146	0,88	-2,50	1,75	-2,07	-0,01	-0,02	0,05	0,05
147	0,88	-2,50	1,06	0,97	-0,01	-0,02	-0,01	0,03
148	0,88	-2,50	-2,64	0,12	-0,01	-0,02	-0,01	0,03
149	0,88	-2,50	-2,40	-2,01	-0,01	-0,02	0,06	0,02
150	0,88	1,94	5,50	-1,70	-0,01	0,01	0,01	0,02
151	0,88	-2,50	-0,21	-6,27	-0,01	-0,02	0,04	-0,01
152	0,88	-2,50	0,34	1,84	-0,01	-0,02	0,02	0,06
153	0,88	-2,50	1,03	-1,53	-0,01	-0,02	0,03	-0,04
154	0,88	-2,50	1,75	-8,47	-0,01	-0,02	0,05	0,01
155	0,88	-2,50	-1,50	1,54	-0,01	-0,02	0,03	0,02
156	0,88	-2,50	0,55	-0,17	-0,01	-0,02	0,03	0,03
157	0,88	-2,50	-0,21	0,21	-0,01	-0,02	0,04	0,00
158	0,88	0,49	2,54	2,00	-0,01	0,01	0,01	-0,05

159	0,88	-2,50	1,75	1,78	-0,01	-0,02	0,05	0,01
160	0,88	-2,50	-1,50	2,06	-0,01	-0,02	0,03	0,03
161	0,88	-2,50	-0,21	-8,25	-0,01	-0,02	0,04	0,00
162	0,88	-2,50	0,55	-4,04	-0,01	-0,02	0,03	0,02
163	0,88	0,49	2,54	-2,37	-0,01	0,01	0,01	-0,05
164	0,88	0,49	-7,45	-0,97	-0,01	0,01	0,01	0,01
165	0,88	2,13	-5,42	0,94	-0,01	0,01	0,01	-0,07
166	0,88	-2,63	1,60	-1,25	-0,01	-0,02	0,00	-0,05
167	0,88	3,00	2,72	-0,17	-0,01	0,01	-0,03	0,09
168	0,88	2,62	0,36	0,00	-0,01	0,01	-0,03	-0,01
169	0,88	-2,50	1,06	0,35	-0,01	-0,02	-0,01	0,04
170	0,88	-2,50	1,75	2,71	-0,01	-0,02	0,05	0,02
171	0,88	-2,50	1,03	-1,01	-0,01	-0,02	0,03	0,06
172	0,88	-2,50	1,06	-1,01	-0,01	-0,02	-0,01	0,06
173	-1,07	2,72	0,55	0,00	-0,02	0,00	0,03	-0,01
174	0,88	-2,50	-0,14	-6,36	-0,01	-0,02	0,05	0,01
175	0,88	-0,23	1,70	-1,24	-0,01	0,02	0,04	-0,07
176	0,88	-2,50	1,06	1,84	-0,01	-0,02	-0,01	0,06
177	0,88	-2,50	-2,54	-2,81	-0,01	-0,02	0,03	0,05
178	1,07	0,36	0,55	-1,25	0,00	0,02	0,03	-0,05
179	1,07	2,99	0,34	0,77	0,00	-0,02	0,02	0,00
180	1,07	-0,62	1,51	-1,25	0,00	0,00	0,04	-0,05
181	1,49	-2,62	0,55	0,00	0,02	0,00	0,03	-0,01
182	1,49	-2,62	1,51	-1,25	0,02	0,00	0,04	-0,05
183	1,49	-5,44	-2,83	2,76	0,02	0,02	0,03	-0,05
184	-8,63	-0,75	0,36	-0,85	-0,01	0,00	-0,03	0,03
185	-8,63	-0,75	-2,52	-0,85	-0,01	0,00	-0,03	0,03
186	-8,63	-0,75	-2,52	0,00	-0,01	0,00	-0,03	-0,01
187	1,84	-2,52	2,62	-3,12	0,00	-0,03	0,03	0,01
188	1,84	-2,52	2,62	0,71	0,00	-0,03	0,03	-0,03
189	2,36	0,49	-2,60	1,54	0,02	0,01	0,02	0,02
190	2,36	0,49	-2,60	-1,53	0,02	0,01	0,02	-0,04
191	2,36	4,18	-0,45	0,21	0,02	-0,01	0,00	0,02
192	2,36	4,18	-2,68	0,54	0,02	-0,01	0,02	0,00
193	-1,58	-2,50	2,84	0,09	0,01	-0,02	0,02	0,04
194	-1,58	-2,50	2,84	1,12	0,01	-0,02	0,02	-0,01
195	-1,58	-2,50	2,84	0,21	0,01	-0,02	0,02	0,00
196	-1,58	-2,50	2,84	-5,16	0,01	-0,02	0,02	0,01
197	-1,58	-2,50	2,84	-0,17	0,01	-0,02	0,02	0,03
198	-1,58	-2,50	2,84	-0,67	0,01	-0,02	0,02	0,02
199	-1,58	-2,50	2,84	0,71	0,01	-0,02	0,02	-0,03
200	-1,58	-2,50	2,84	-0,14	0,01	-0,02	0,02	0,00
201	-1,58	-2,50	-2,68	-1,07	0,01	-0,02	0,03	0,03
202	-1,58	-2,50	-2,68	1,31	0,01	-0,02	0,03	0,01
203	-1,58	-2,50	-1,86	0,71	0,01	-0,02	0,02	-0,03
204	-1,58	-2,50	-2,42	-0,67	0,01	-0,02	0,04	0,02
205	-1,58	-2,50	-0,92	-2,01	0,01	-0,02	-0,01	0,02
206	-1,58	-2,50	-1,65	0,97	0,01	-0,02	0,01	0,03
207	-1,58	-0,75	2,72	-1,05	0,01	0,00	-0,03	0,07
208	-1,58	-0,75	2,72	-1,79	0,01	0,00	-0,03	0,03
209	-1,58	-0,75	2,72	-2,42	0,01	0,00	-0,03	0,05
210	-1,58	-0,75	2,72	0,77	0,01	0,00	-0,03	0,00
211	-1,58	-2,62	2,72	-1,05	0,01	0,00	-0,03	0,07

212	-1,58	-2,62	2,72	-2,42	0,01	0,00	-0,03	0,05
213	-1,58	1,66	-1,13	-7,01	0,01	0,00	-0,01	0,02
214	-1,58	1,66	-3,18	0,04	0,01	0,00	0,01	0,01
215	-1,58	1,66	-2,60	4,00	0,01	0,00	0,02	0,01
216	-1,58	1,66	-2,60	-2,81	0,01	0,00	0,02	0,05
217	-1,58	1,66	-2,60	-2,42	0,01	0,00	0,02	0,06
218	-1,58	1,66	-2,60	-0,97	0,01	0,00	0,02	0,01
219	-1,58	1,66	-2,60	-1,70	0,01	0,00	0,02	0,02
220	-1,58	1,66	-2,82	0,09	0,01	0,00	-0,04	0,04
221	9,47	1,59	2,62	-2,84	0,01	-0,02	0,03	-0,01
222	9,47	1,59	-0,21	4,00	0,01	-0,02	0,04	0,01
223	-0,36	0,36	-2,52	-1,79	0,01	0,02	-0,03	0,03
224	0,69	-1,09	2,70	4,00	0,02	-0,02	0,00	0,01
225	0,69	-1,09	2,70	-2,43	0,02	-0,02	0,00	0,01
226	0,69	-1,09	2,70	9,16	0,02	-0,02	0,00	0,01
227	0,69	-1,09	1,03	-9,20	0,02	-0,02	0,03	0,01
228	0,69	-2,50	1,84	0,09	0,02	-0,02	0,01	0,04
229	0,69	-2,50	1,84	0,57	0,02	-0,02	0,01	0,01
230	0,69	-2,50	1,84	-2,81	0,02	-0,02	0,01	0,05
231	0,69	-2,50	1,84	-0,17	0,02	-0,02	0,01	0,03
232	0,69	-2,50	1,84	-3,12	0,02	-0,02	0,01	0,01
233	0,69	-2,50	1,84	-1,07	0,02	-0,02	0,01	0,03
234	0,69	-2,50	1,84	-1,70	0,02	-0,02	0,01	0,02
235	0,69	-2,50	1,84	-2,59	0,02	-0,02	0,01	0,02
236	0,69	-2,50	0,47	1,84	0,02	-0,02	0,01	0,06
237	0,69	-2,50	0,47	-1,07	0,02	-0,02	0,01	0,03
238	0,69	-2,50	0,47	-2,43	0,02	-0,02	0,01	0,01
239	0,69	-2,50	0,47	-2,07	0,02	-0,02	0,01	0,05
240	0,69	-2,50	8,38	-0,80	0,02	-0,02	0,01	-0,01
241	0,69	-2,50	8,38	1,85	0,02	-0,02	0,01	-0,03
242	0,69	-2,50	-2,65	0,09	0,02	-0,02	0,02	0,04
243	0,69	-2,50	-2,65	-2,73	0,02	-0,02	0,02	0,02
244	0,69	-2,50	-2,65	-0,97	0,02	-0,02	0,02	0,01
245	0,69	-2,50	-2,60	-2,26	0,02	-0,02	0,02	0,04
246	0,69	-2,50	-2,65	-1,53	0,02	-0,02	0,02	-0,04
247	0,69	-2,50	-2,65	-2,59	0,02	-0,02	0,02	0,02
248	0,69	-2,50	2,76	1,12	0,02	-0,02	0,02	-0,01
249	0,69	-2,50	2,76	-5,16	0,02	-0,02	0,02	0,01
250	0,69	2,72	-2,04	0,99	0,02	-0,03	0,01	0,06
251	0,69	2,72	-2,04	-1,91	0,02	-0,03	0,01	0,00
252	0,69	2,72	-2,04	1,78	0,02	-0,03	0,01	0,01
253	0,69	4,68	1,12	-2,26	0,02	-0,01	0,01	0,04
254	0,69	0,04	-2,52	-1,79	0,02	0,03	-0,03	0,03
255	0,69	0,04	-2,52	-2,42	0,02	0,03	-0,03	0,05
256	0,69	0,04	-2,52	0,77	0,02	0,03	-0,03	0,00
257	0,69	0,36	1,60	0,77	0,02	0,02	0,00	0,00
258	0,69	-2,52	2,70	1,78	0,02	-0,03	0,00	0,01
259	0,69	-2,52	3,44	2,82	0,02	-0,03	-0,01	0,04
260	0,69	1,04	2,54	-1,07	0,02	-0,02	0,01	0,03
261	0,69	1,04	2,54	-2,26	0,02	-0,02	0,01	0,04
262	0,69	1,04	2,54	-1,91	0,02	-0,02	0,01	0,00
263	0,69	1,04	-0,61	4,11	0,02	-0,02	0,00	0,00
264	-2,24	-2,17	-1,18	-2,59	0,01	0,00	0,01	0,02

265	-2,24	1,12	1,84	1,12	0,01	0,00	0,01	-0,01
266	-2,24	1,12	1,84	-0,80	0,01	0,00	0,01	-0,01
267	-2,24	1,12	1,84	1,85	0,01	0,00	0,01	-0,03
268	-2,24	-7,57	-0,20	-5,41	0,01	-0,01	0,00	-0,01
269	0,50	-1,46	1,60	0,00	0,03	0,01	0,00	-0,01
270	4,06	-2,02	0,36	-0,85	-0,01	0,03	-0,03	0,03
271	4,06	-2,02	0,36	0,00	-0,01	0,03	-0,03	-0,01
272	4,06	-0,28	1,60	0,00	-0,01	-0,01	0,00	-0,01
273	0,22	-2,50	-1,86	-2,42	0,00	-0,02	0,02	0,06
274	0,22	-2,50	-1,86	-0,17	0,00	-0,02	0,02	0,03
275	0,22	-2,50	-1,86	1,63	0,00	-0,02	0,02	0,01
276	0,22	-1,12	-1,79	-0,14	0,00	-0,02	0,03	0,00
277	0,22	-1,12	6,51	-0,14	0,00	-0,02	0,01	0,00
278	0,22	2,72	1,06	-4,04	0,00	-0,03	-0,01	0,02
279	0,22	2,72	1,06	6,29	0,00	-0,03	-0,01	0,00
280	0,22	2,72	1,06	2,06	0,00	-0,03	-0,01	0,03
281	0,22	2,72	-1,38	4,11	0,00	-0,03	0,02	0,00
282	0,22	-2,17	2,62	0,09	0,00	0,00	0,03	0,04
283	0,22	-2,17	2,62	4,11	0,00	0,00	0,03	0,00
284	0,22	-2,17	2,62	-0,97	0,00	0,00	0,03	0,01
285	0,22	-2,17	2,62	-1,56	0,00	0,00	0,03	0,05
286	0,22	-2,17	2,62	-1,07	0,00	0,00	0,03	0,03
287	0,22	-2,17	2,62	-5,41	0,00	0,00	0,03	-0,01
288	0,22	-2,17	2,62	-2,84	0,00	0,00	0,03	-0,01
289	-1,21	1,68	9,56	2,93	0,01	0,00	0,01	-0,03
290	-1,21	1,68	2,54	2,93	0,01	0,00	0,02	-0,03
291	-1,21	1,68	2,54	-2,59	0,01	0,00	0,02	0,02
292	-1,21	1,68	1,12	1,21	0,01	0,00	0,01	0,00
293	-1,21	1,68	1,12	-3,02	0,01	0,00	0,01	-0,01
294	-1,21	1,68	1,12	2,25	0,01	0,00	0,01	-0,03
295	-1,21	1,68	1,12	0,71	0,01	0,00	0,01	-0,03
296	-1,21	1,12	-1,13	-1,56	0,01	0,00	-0,01	0,05
297	-1,21	1,12	-1,13	-1,01	0,01	0,00	-0,01	0,06
298	-1,21	1,12	-1,13	1,31	0,01	0,00	-0,01	0,01
299	-1,21	1,12	-0,20	-4,04	0,01	0,00	0,00	0,02
300	-1,21	1,12	-0,20	-2,81	0,01	0,00	0,00	0,05
301	-1,21	1,12	-0,20	-1,56	0,01	0,00	0,00	0,05
302	-1,21	1,12	-0,20	-1,07	0,01	0,00	0,00	0,03
303	0,12	-2,62	2,72	-2,42	0,03	0,00	-0,03	0,05
304	0,12	-2,62	2,72	0,00	0,03	0,00	-0,03	-0,01
305	0,52	7,61	2,70	-0,85	-0,03	0,01	0,02	0,03
306	0,52	7,61	2,70	0,00	-0,03	0,01	0,02	-0,01
307	1,20	3,80	0,47	0,04	0,03	-0,01	0,01	0,01
308	1,20	-2,91	-2,65	1,78	0,03	0,00	0,02	0,01
309	1,20	-2,91	-2,60	0,26	0,03	0,00	0,02	0,00
310	1,20	-2,91	-1,86	0,09	0,03	0,00	0,02	0,04
311	1,20	-2,63	-2,77	-0,17	0,03	-0,02	0,02	0,03
312	1,20	-2,63	-2,77	6,29	0,03	-0,02	0,02	0,00
313	1,20	-2,63	-2,77	-2,59	0,03	-0,02	0,02	0,02
314	1,20	-2,63	-1,38	-2,73	0,03	-0,02	0,02	0,02
315	1,20	-2,63	-1,38	-1,56	0,03	-0,02	0,02	0,05
316	1,20	-2,63	-1,38	-2,42	0,03	-0,02	0,02	0,01
317	1,20	-2,63	1,12	-0,67	0,03	-0,02	0,01	0,02

318	1,20	2,33	-0,45	3,07	0,03	-0,02	0,00	0,02
319	1,20	2,33	0,67	0,54	0,03	-0,02	0,01	0,00
320	1,20	2,33	0,67	0,32	0,03	-0,02	0,01	0,02
321	1,49	-2,50	2,84	2,71	0,01	-0,02	0,02	0,02
322	1,49	-2,50	2,70	2,02	0,01	-0,02	0,00	0,02
323	1,49	-2,50	2,76	4,00	0,01	-0,02	0,02	0,01
324	1,49	-2,50	-0,20	2,71	0,01	-0,02	0,00	0,02
325	1,49	-1,12	-1,79	-2,59	0,01	-0,02	0,03	0,02
326	1,49	-1,12	-2,60	0,09	0,01	-0,02	0,02	0,04
327	1,49	-1,12	-2,60	4,00	0,01	-0,02	0,02	0,01
328	1,14	-0,28	1,75	0,21	0,01	-0,01	-0,03	0,00

Numero	V_{rel_1}	V_{rel_2}	V_{rel_3}	V_{rel_4}	ΔV_1	ΔV_2	ΔV_3	ΔV_4	ΔV totale
1	14,08	5,09	9,88	7,47	133,78	145,78	267,96	246,52	794,04
2	14,05	15,47	8,71	21,59	206,88	163,85	345,78	109,28	825,80
3	14,10	5,22	15,55	7,89	98,50	488,86	132,19	138,51	858,07
4	14,09	5,20	15,77	21,12	107,89	359,88	213,39	177,07	858,23
5	14,10	6,64	12,84	8,63	37,45	482,50	220,58	149,50	890,04
6	14,05	15,50	8,84	7,34	200,48	112,17	382,38	239,60	934,63
7	14,10	5,24	15,53	12,84	97,00	491,76	117,45	250,29	956,50
8	14,10	5,28	10,86	3,99	106,04	532,40	191,94	132,27	962,66
9	14,10	5,29	11,00	9,57	103,57	518,77	132,62	218,79	973,75
10	14,10	5,24	15,57	4,69	96,48	495,19	225,20	162,23	979,10
11	9,70	12,87	10,76	7,25	136,84	171,90	113,66	103,44	525,84
12	9,63	15,19	15,74	9,45	175,69	133,28	182,88	44,24	536,10
13	9,87	5,69	16,28	14,26	296,55	62,07	183,65	0,00	542,27
14	9,82	5,78	15,69	14,45	271,26	115,58	83,82	93,59	564,25
15	9,71	12,84	10,58	8,59	97,80	178,78	176,16	122,50	575,24
16	9,86	5,71	16,20	14,20	286,93	76,83	213,17	0,00	576,93
17	9,70	14,71	6,30	13,85	103,43	267,13	221,40	0,00	591,95
18	9,90	16,73	16,28	14,26	328,85	71,10	194,97	0,00	594,91
19	9,63	15,16	15,87	12,28	172,65	147,57	248,59	45,96	614,77
20	9,69	11,84	13,78	12,57	154,88	267,84	144,03	52,02	618,77
21	9,71	11,90	14,49	6,21	97,68	369,72	100,95	53,93	622,28
22	9,85	5,78	6,63	9,23	273,66	119,08	58,06	177,35	628,15
23	9,71	11,88	14,51	2,53	97,72	360,97	120,68	51,38	630,74
24	9,89	16,71	16,20	14,20	322,02	85,76	197,18	26,79	631,76
25	9,71	11,85	8,73	6,19	97,71	362,36	100,06	73,96	634,09
26	9,85	5,77	6,63	14,05	278,17	108,94	62,80	184,55	634,46
27	9,71	11,86	8,71	8,19	97,72	347,50	196,49	0,00	641,70
28	9,71	11,77	13,75	15,44	97,71	324,90	154,49	65,13	642,23
29	9,71	11,85	8,75	12,16	97,87	363,58	88,09	97,15	646,68
30	9,71	11,91	14,53	27,60	97,73	363,57	108,47	77,45	647,21
31	9,69	12,69	14,40	12,45	112,55	336,75	200,94	0,00	650,24
32	9,71	11,88	14,47	6,01	97,66	366,97	109,00	81,41	655,05
33	9,71	3,35	8,06	9,64	98,28	311,81	207,12	42,28	659,50
34	9,84	5,75	16,34	9,42	276,64	98,28	76,81	215,13	666,86
35	9,71	11,87	17,26	4,26	97,73	352,37	103,07	129,59	682,77
36	9,70	12,72	14,39	4,81	105,28	314,65	215,91	48,74	684,59
37	9,68	7,33	6,45	11,91	115,25	307,25	1,74	265,91	690,14
38	9,71	11,87	14,58	24,37	97,70	354,85	200,07	39,14	691,76
39	9,71	11,84	8,03	8,77	97,92	330,74	91,04	174,89	694,59
40	9,69	11,81	10,72	20,22	214,71	213,99	152,34	113,98	695,02
41	9,71	11,80	7,94	4,44	97,95	323,00	158,78	116,24	695,98
42	9,71	11,87	7,65	8,06	97,58	374,22	227,89	0,00	699,70
43	9,71	11,86	8,03	6,00	97,91	334,85	87,77	188,45	708,97
44	9,71	11,76	10,67	9,02	263,15	175,37	287,53	0,00	726,05
45	9,71	11,90	7,72	21,00	97,78	375,97	113,50	139,01	726,26
46	9,71	11,81	13,92	4,19	97,90	327,30	165,36	135,97	726,52
47	9,71	6,64	8,28	5,32	98,04	218,59	414,33	0,00	730,96
48	9,71	11,77	8,02	18,35	97,81	337,30	123,88	174,79	733,78
49	9,87	16,68	16,33	9,43	307,46	107,94	92,01	226,63	734,04
50	9,62	15,26	7,55	12,63	187,98	112,83	258,54	177,19	736,53
51	9,70	11,80	10,71	7,16	231,44	199,57	155,04	155,06	741,11
52	9,71	11,85	8,42	3,89	98,35	334,95	100,95	217,75	752,00

53	9,71	11,83	8,42	4,12	98,13	344,77	89,59	231,98	764,48
54	9,85	5,70	16,16	12,34	283,54	85,99	46,50	351,14	767,17
55	9,71	11,88	14,79	2,56	98,19	339,27	233,17	98,12	768,75
56	9,70	12,90	10,88	7,99	127,94	154,24	204,72	282,25	769,15
57	9,71	11,85	14,64	3,90	98,17	334,13	337,21	0,00	769,51
58	9,62	15,31	7,54	9,77	191,05	187,05	235,80	155,73	769,63
59	9,71	11,87	8,76	3,84	98,46	397,12	171,11	104,78	771,48
60	9,71	11,85	8,76	2,54	97,94	340,80	231,15	101,74	771,63
61	9,71	11,91	17,40	14,89	98,12	351,89	76,18	247,28	773,48
62	9,71	11,79	13,81	9,75	97,73	326,47	119,31	233,47	776,98
63	9,71	11,89	7,92	6,78	97,64	404,31	79,61	198,60	780,17
64	9,70	12,79	13,11	14,42	107,17	346,67	127,41	201,38	782,63
65	9,70	12,70	14,33	8,23	111,43	323,08	95,08	255,82	785,42
66	9,70	11,80	10,72	8,37	230,73	200,01	153,27	201,64	785,65
67	9,71	11,79	13,78	5,45	97,83	326,88	109,36	252,09	786,16
68	9,71	11,86	17,21	13,76	97,58	356,91	117,84	214,63	786,95
69	9,71	11,83	8,04	7,46	97,89	329,40	95,85	264,86	787,99
70	9,71	11,86	8,09	7,65	97,84	336,09	149,69	205,15	788,77
71	9,71	11,81	8,02	6,78	97,89	325,60	98,87	266,96	789,32
72	9,71	11,87	8,17	14,87	97,80	339,47	222,47	130,68	790,42
73	9,71	11,88	17,29	6,97	97,82	353,43	92,86	251,39	795,50
74	9,71	11,82	16,61	4,96	97,75	342,71	237,16	118,44	796,06
75	9,71	11,80	8,04	4,61	97,59	329,85	99,53	270,05	797,02
76	9,71	11,86	14,39	4,99	97,82	369,23	251,34	78,92	797,30
77	9,63	15,17	15,83	14,00	173,23	144,02	227,60	254,35	799,19
78	9,71	12,85	13,56	2,88	98,55	173,22	401,95	128,27	802,00
79	9,71	11,86	8,68	4,50	97,59	357,49	143,31	206,00	804,38
80	9,70	11,82	10,63	9,12	140,48	283,71	177,51	204,36	806,06
81	9,70	6,70	8,12	6,89	113,65	244,64	22,82	426,12	807,22
82	9,86	16,68	16,05	9,51	304,49	113,27	81,49	308,53	807,79
83	9,71	9,15	4,76	6,42	97,58	244,83	278,22	187,93	808,57
84	9,70	11,84	10,50	5,48	124,33	297,81	270,24	118,68	811,07
85	9,71	11,84	16,56	6,18	97,58	349,53	226,84	137,91	811,86
86	9,71	11,75	7,98	2,92	98,10	355,00	215,36	146,51	814,97
87	9,70	11,82	10,63	9,21	146,39	278,00	179,61	212,39	816,39
88	9,76	7,52	16,22	9,12	99,58	375,86	74,09	268,03	817,56
89	9,71	11,90	7,86	4,58	97,79	379,19	230,96	110,16	818,10
90	9,71	11,87	14,37	12,08	97,61	372,49	196,66	153,91	820,67
91	9,71	11,88	17,32	9,73	97,90	350,85	91,17	282,15	822,06
92	9,71	11,79	13,97	13,98	97,59	329,93	183,73	211,52	822,77
93	9,75	7,12	9,07	9,03	106,43	119,07	131,42	467,99	824,92
94	9,71	11,83	8,19	5,34	97,81	332,52	236,99	157,69	825,01
95	9,71	11,86	14,88	6,99	98,13	331,03	217,63	179,88	826,67
96	9,69	7,34	6,28	8,20	107,75	293,07	248,97	177,18	826,96
97	9,71	9,13	4,78	5,53	97,61	223,25	292,86	214,62	828,35
98	9,71	12,85	10,33	9,75	100,03	168,10	449,99	113,49	831,61
99	9,88	16,71	16,16	12,33	316,69	88,29	63,38	364,30	832,67
100	9,70	11,85	8,74	13,64	104,22	382,87	188,86	157,71	833,67
101	9,62	15,27	7,55	7,84	188,17	132,91	238,21	276,92	836,21
102	9,71	11,86	14,25	6,62	97,89	375,59	363,17	0,00	836,65
103	9,88	16,70	16,26	12,28	317,78	92,97	83,48	345,66	839,89
104	9,69	11,80	10,70	14,21	197,56	229,66	155,43	258,25	840,90
105	9,71	11,87	7,53	3,84	97,69	366,55	375,21	3,13	842,59

106	9,70	12,77	12,93	11,42	107,47	375,21	242,64	119,16	844,48
107	9,71	12,81	10,32	11,40	97,65	283,68	314,63	148,56	844,52
108	9,85	5,77	6,61	7,97	280,40	143,71	159,87	262,52	846,50
109	9,81	16,69	9,10	3,74	346,18	161,24	207,99	132,49	847,90
110	9,71	11,80	10,86	11,86	97,69	326,72	365,24	61,01	850,67
111	9,71	6,48	8,62	3,67	97,60	113,55	500,33	139,87	851,34
112	9,71	11,87	14,47	7,34	97,65	365,06	115,74	273,50	851,95
113	9,73	11,88	10,75	27,28	341,56	163,48	239,50	108,19	852,73
114	9,70	11,78	10,66	3,20	238,40	194,65	292,14	128,07	853,27
115	9,71	11,85	8,05	18,43	97,86	334,47	104,78	318,04	855,15
116	9,71	11,89	7,91	4,58	97,62	400,38	83,54	278,95	860,48
117	9,71	12,81	14,00	18,52	97,62	253,43	173,77	337,92	862,74
118	9,70	12,78	13,10	5,60	106,82	353,06	127,67	275,55	863,10
119	9,68	14,74	16,25	8,29	116,03	199,90	221,47	326,69	864,09
120	9,71	11,86	14,66	18,39	97,84	341,29	135,83	294,03	869,00
121	9,71	11,85	8,72	7,36	97,77	363,92	102,48	306,79	870,96
122	9,71	11,84	8,81	10,84	97,60	347,20	125,49	303,23	873,52
123	9,71	11,94	15,80	7,67	97,64	422,63	180,33	173,32	873,94
124	9,71	6,66	8,22	8,35	103,44	216,82	427,92	125,93	874,11
125	9,69	11,80	10,66	9,46	184,40	242,11	169,76	280,09	876,35
126	9,70	7,25	16,21	8,29	105,85	201,40	191,62	378,05	876,92
127	9,75	14,47	23,14	13,63	105,03	198,67	277,49	295,77	876,96
128	9,71	11,86	16,13	7,10	98,15	337,01	324,02	119,95	879,13
129	9,71	11,83	8,03	11,88	97,94	327,39	93,32	361,69	880,33
130	9,71	11,89	16,06	4,18	98,19	340,65	277,02	164,81	880,67
131	9,87	16,68	8,04	12,51	307,18	110,69	285,33	177,91	881,11
132	9,71	7,26	16,18	8,03	98,36	200,75	170,11	412,33	881,55
133	9,71	12,84	13,22	8,91	97,75	196,11	248,25	340,76	882,87
134	9,71	4,90	2,26	4,06	97,60	355,62	107,81	328,61	889,64
135	9,71	11,88	7,57	7,79	97,64	369,32	351,54	71,70	890,19
136	9,71	11,87	11,20	2,33	97,71	358,71	251,50	183,45	891,37
137	9,71	11,81	10,68	4,02	98,21	329,40	177,32	288,42	893,35
138	9,71	11,84	14,95	2,46	98,03	330,15	372,24	93,06	893,48
139	9,71	11,84	16,57	12,12	97,63	350,53	288,52	158,14	894,83
140	9,71	11,84	16,56	6,03	97,59	351,54	252,29	193,55	894,97
141	9,70	6,72	8,07	5,59	166,22	190,39	246,99	292,27	895,86
142	9,70	11,80	10,73	6,06	238,27	193,43	151,93	312,63	896,26
143	9,75	14,43	22,99	12,12	97,73	220,86	406,19	172,64	897,42
144	9,70	11,82	10,58	18,46	138,06	284,85	208,40	273,64	904,95
145	9,73	14,58	23,46	8,54	95,91	140,49	170,42	503,83	910,66
146	9,71	11,87	14,99	12,55	98,19	392,14	281,36	139,87	911,56
147	9,69	11,81	10,71	5,82	187,37	238,95	154,11	334,55	914,98
148	9,71	11,79	13,76	13,69	97,91	325,74	103,58	398,05	925,28
149	9,71	11,86	5,35	7,99	97,73	371,81	272,76	186,70	928,99
150	9,71	4,94	2,42	8,97	97,64	285,60	150,83	395,31	929,37
151	9,71	11,84	8,82	3,19	97,60	342,30	156,38	338,21	934,49
152	9,71	11,89	8,03	15,55	97,83	344,46	83,70	412,05	938,04
153	9,71	11,89	8,26	8,31	97,67	407,36	421,37	12,89	939,29
154	9,71	11,91	14,93	1,76	97,67	382,24	327,11	132,29	939,32
155	9,71	11,88	14,28	14,44	97,74	392,21	200,61	251,46	942,03
156	9,71	11,84	16,56	4,55	97,59	351,62	270,75	226,30	946,27
157	9,71	11,88	8,77	9,68	98,38	399,19	162,52	291,86	951,94
158	9,71	12,91	13,61	5,34	154,02	158,15	284,13	358,21	954,50

159	9,71	11,87	15,00	6,16	98,38	390,58	278,83	188,12	955,92
160	9,71	11,88	14,27	10,05	97,73	392,76	212,62	259,07	962,18
161	9,71	11,83	8,86	8,50	97,67	336,53	237,96	299,78	971,94
162	9,71	11,82	16,60	2,30	97,69	343,66	232,77	301,97	976,09
163	9,72	12,93	13,73	2,78	174,72	165,19	322,54	316,27	978,73
164	9,69	13,06	7,05	2,41	165,23	305,71	406,40	102,27	979,61
165	9,70	6,71	8,11	6,91	118,13	243,11	20,13	598,65	980,03
166	9,74	7,48	16,94	8,83	96,18	437,64	203,27	243,36	980,46
167	9,69	14,74	6,45	10,27	106,32	285,37	0,00	592,11	983,80
168	9,79	7,04	23,20	13,60	109,45	174,39	366,88	334,54	985,26
169	9,70	11,82	10,68	10,12	143,53	281,15	162,80	398,24	985,72
170	9,71	11,87	14,99	15,84	98,19	391,29	280,80	215,46	985,73
171	9,71	11,89	7,92	6,54	97,67	406,69	78,05	404,05	986,46
172	9,70	11,82	10,65	5,82	133,11	291,77	171,39	390,26	986,54
173	16,41	9,97	15,60	14,41	438,10	293,79	223,28	34,98	990,14
174	9,71	11,84	11,11	7,39	97,58	347,48	291,31	255,08	991,45
175	9,69	16,54	7,37	6,55	168,65	277,04	246,60	299,97	992,26
176	9,71	11,80	10,69	15,70	98,00	328,41	190,87	376,79	994,07
177	9,71	11,95	15,82	7,30	97,64	419,88	174,62	306,39	998,54
178	14,50	6,25	16,12	9,15	88,39	289,65	190,14	343,16	911,34
179	14,50	7,03	8,32	7,89	128,32	190,52	387,72	100,72	807,29
180	14,29	4,47	24,25	8,49	192,58	160,65	287,30	162,21	802,74
181	8,28	7,04	15,64	14,44	397,26	115,72	244,39	46,16	803,53
182	8,31	7,15	24,42	8,41	423,23	249,85	211,69	46,68	931,44
183	8,37	12,44	7,44	8,60	521,52	129,24	137,24	170,98	958,99
184	5,79	5,29	22,84	12,17	451,31	231,09	242,93	71,38	996,71
185	5,78	5,28	7,98	12,29	453,31	223,94	156,76	117,04	951,06
186	5,78	5,28	8,00	13,93	453,41	226,72	142,35	140,66	963,14
187	6,33	8,10	13,85	24,84	330,61	316,86	96,98	226,66	971,10
188	6,33	8,09	13,80	18,75	335,49	323,91	0,00	267,48	926,88
189	4,73	12,86	1,24	15,22	377,21	193,06	295,29	124,42	989,98
190	4,77	12,90	1,40	7,30	322,99	169,60	386,72	89,45	968,76
191	4,82	21,70	14,89	12,37	380,02	235,92	289,77	87,96	993,67
192	4,82	21,74	10,76	3,74	364,54	240,73	177,98	86,78	870,03
193	7,11	11,88	6,48	18,45	166,59	268,17	88,25	385,62	908,64
194	7,11	11,87	6,47	15,33	166,77	271,15	65,38	203,12	706,41
195	7,11	11,87	6,44	8,90	166,90	259,46	67,69	139,71	633,77
196	7,11	11,87	6,42	7,29	166,63	256,71	176,86	249,47	849,67
197	7,11	11,88	6,47	4,01	166,61	268,02	83,76	289,56	807,94
198	7,11	11,87	6,43	6,79	166,96	259,53	69,41	200,55	696,44
199	7,12	11,86	6,33	18,01	167,46	242,21	220,71	274,81	905,19
200	7,11	11,86	6,40	9,00	166,83	252,25	88,79	468,21	976,09
201	7,12	11,83	5,88	7,60	171,58	187,84	306,33	192,04	857,79
202	7,12	11,84	5,94	5,40	170,41	198,72	390,25	201,32	960,69
203	7,14	11,86	14,96	18,05	181,05	179,40	94,23	392,02	846,70
204	7,12	11,83	6,51	5,98	170,02	199,11	336,90	112,82	818,85
205	7,14	11,51	11,69	8,50	179,25	372,12	311,20	64,69	927,26
206	7,14	11,86	13,96	5,85	180,33	180,67	125,19	277,06	763,25
207	7,04	5,64	6,63	8,21	247,47	326,44	209,91	487,90	1271,72
208	7,05	5,61	6,55	7,53	241,19	308,04	460,83	163,44	1173,50
209	7,05	5,62	6,54	6,01	239,50	307,20	533,74	27,28	1107,71
210	7,04	5,63	6,58	7,95	242,88	310,56	334,69	203,01	1091,14
211	7,15	7,03	6,73	8,23	188,75	296,95	85,14	723,28	1294,11

212	7,15	7,01	6,71	6,00	187,94	263,51	109,54	162,67	723,66
213	7,05	6,51	18,29	2,25	166,53	216,86	58,03	394,84	836,27
214	7,06	6,61	15,90	8,55	172,74	252,68	97,81	200,95	724,18
215	7,05	6,62	0,98	4,09	171,51	244,96	190,44	153,88	760,79
216	7,05	6,65	1,01	7,73	172,38	241,24	169,26	151,66	734,54
217	7,05	6,67	1,04	9,76	173,15	205,93	230,71	326,14	935,93
218	7,05	6,60	1,02	2,57	170,92	232,24	80,45	127,12	610,73
219	7,05	6,60	1,05	9,79	171,52	230,69	67,65	476,79	946,66
220	7,07	6,34	10,90	18,30	162,47	294,81	228,58	81,55	767,41
221	10,86	5,40	14,50	9,30	647,29	123,05	123,26	78,04	971,66
222	10,94	5,42	8,56	4,83	682,73	89,22	206,71	0,80	979,46
223	4,11	5,98	7,62	8,11	271,87	115,74	633,12	263,05	1283,78
224	3,49	16,50	14,87	4,45	240,94	302,75	77,92	322,94	944,56
225	3,52	16,43	15,21	7,17	244,55	290,61	287,77	158,61	981,53
226	3,49	16,52	14,66	11,36	242,24	304,48	165,73	167,57	880,02
227	3,48	16,51	7,27	4,09	239,65	337,08	300,59	93,02	970,34
228	3,71	12,03	10,38	18,31	299,58	221,04	100,40	286,56	907,58
229	3,70	12,00	10,34	19,39	288,87	211,72	104,64	172,64	777,87
230	3,71	12,03	10,38	7,65	300,60	218,72	85,17	334,29	938,77
231	3,70	12,01	10,34	3,81	290,71	219,08	90,71	241,43	841,93
232	3,73	12,01	10,52	23,73	308,36	208,19	308,72	0,00	825,28
233	3,71	12,01	10,35	7,82	292,24	218,75	90,13	259,28	860,40
234	3,75	12,00	10,75	9,22	318,73	205,95	431,68	0,00	956,36
235	3,70	12,00	10,34	8,97	289,56	211,19	106,20	269,33	876,28
236	3,64	11,88	20,72	15,42	259,54	207,34	93,26	296,67	856,81
237	3,67	11,82	20,72	7,76	265,35	206,74	96,21	308,86	877,16
238	3,70	11,79	20,79	7,61	274,78	214,30	247,22	140,42	876,72
239	3,67	11,82	20,73	11,76	265,03	207,53	45,87	235,34	753,78
240	3,58	12,01	9,05	22,60	250,53	351,46	191,19	205,26	998,44
241	3,59	12,02	9,07	4,48	248,11	347,23	181,90	95,08	872,32
242	3,75	11,95	2,90	18,36	291,69	303,83	210,70	151,34	957,55
243	3,76	11,85	2,98	9,48	294,47	324,94	145,99	179,16	944,56
244	3,78	11,86	3,02	2,49	300,31	338,82	143,58	46,63	829,34
245	3,78	11,90	1,12	9,11	300,93	338,76	193,78	153,96	987,43
246	3,77	11,83	3,02	7,19	297,33	333,57	139,13	207,30	977,34
247	3,77	11,86	3,00	8,64	297,17	329,78	141,47	95,18	863,60
248	3,65	11,88	9,52	15,31	260,31	199,18	62,56	200,65	722,71
249	3,66	11,92	9,53	7,31	261,97	192,87	395,20	55,41	905,44
250	3,42	6,54	3,12	7,34	249,77	166,12	350,42	138,56	904,88
251	3,50	6,50	2,66	17,97	242,82	359,10	146,79	63,99	812,70
252	3,43	6,43	2,86	5,85	245,82	353,75	0,00	196,30	795,87
253	3,41	4,17	8,49	9,35	295,79	277,78	355,52	59,53	988,61
254	3,81	3,29	7,59	8,11	356,77	40,36	386,45	209,10	992,68
255	3,81	3,28	7,28	6,05	353,77	12,58	646,03	18,42	1030,80
256	3,80	3,31	7,78	8,18	360,51	69,40	160,23	323,66	913,79
257	3,63	6,40	16,42	8,00	366,11	58,33	251,92	143,75	820,11
258	3,68	8,00	14,85	5,70	266,94	185,54	320,78	30,18	803,44
259	3,68	8,11	7,32	4,06	266,73	278,32	68,12	331,48	944,65
260	3,37	6,56	13,04	7,65	278,59	313,18	136,78	201,73	930,27
261	3,37	6,56	13,05	9,03	280,99	307,64	138,66	245,44	972,72
262	3,38	6,54	13,18	17,66	278,45	312,58	177,48	182,46	950,97
263	3,42	6,47	11,25	8,73	255,17	394,67	290,14	49,20	989,18
264	10,30	3,97	14,46	8,99	349,64	412,82	68,85	149,82	981,13

265	10,67	15,08	10,33	15,59	458,64	99,59	231,39	139,52	929,15
266	10,62	15,11	10,45	22,31	440,64	96,59	161,86	99,99	799,08
267	10,65	15,13	10,42	4,07	438,17	106,80	149,32	229,18	923,47
268	10,39	5,71	16,19	11,37	433,41	236,50	190,04	71,91	931,87
269	6,34	16,69	16,28	14,26	463,70	127,02	371,86	0,00	962,58
270	2,89	4,75	22,75	12,19	276,03	478,65	99,87	98,62	953,17
271	2,89	4,78	22,70	13,90	281,95	478,55	95,01	116,81	972,33
272	2,49	8,81	16,30	14,26	513,29	86,45	173,88	70,39	844,01
273	12,76	11,90	15,03	9,54	318,13	101,89	109,34	462,54	991,89
274	12,74	11,91	15,03	4,06	328,47	94,53	88,30	145,98	657,28
275	12,76	11,88	14,98	27,44	316,37	111,00	55,46	93,48	576,31
276	12,85	12,25	7,76	8,46	221,73	299,47	290,16	154,20	965,55
277	12,85	12,34	2,88	9,61	212,28	424,23	313,02	40,96	990,50
278	12,82	6,57	10,54	3,42	238,35	317,72	314,65	112,83	983,55
279	12,83	6,55	10,50	8,44	224,12	298,82	72,86	67,15	662,94
280	12,83	6,55	10,53	8,98	226,40	324,35	90,91	30,46	672,12
281	12,81	6,61	13,57	8,31	269,14	400,13	135,82	190,99	996,07
282	12,83	4,20	14,61	18,50	253,96	248,68	91,19	233,94	827,77
283	12,83	4,20	14,68	9,08	253,03	273,12	89,20	209,01	824,36
284	12,83	4,19	14,39	2,57	257,01	223,28	157,22	70,16	707,67
285	12,83	4,20	14,61	7,69	253,87	249,84	82,13	380,82	966,66
286	12,83	4,19	14,56	7,79	255,07	239,94	87,58	236,84	819,44
287	12,83	4,19	14,25	10,98	258,08	216,34	259,11	234,21	967,75
288	12,83	4,19	14,38	9,27	257,01	223,07	160,10	179,44	819,62
289	13,17	5,86	9,14	12,98	183,15	246,08	433,60	109,12	971,95
290	13,12	5,70	15,44	12,41	159,02	313,23	314,41	161,66	948,32
291	13,12	5,67	15,39	8,46	162,17	334,14	315,01	168,30	979,62
292	13,11	5,76	8,42	14,63	152,46	231,98	267,28	126,28	778,00
293	13,10	5,81	8,58	5,12	150,35	186,22	104,49	435,71	876,77
294	13,10	5,87	8,68	7,75	146,74	142,73	136,42	309,80	735,70
295	13,11	5,87	8,67	18,01	146,70	137,89	160,43	292,47	737,49
296	13,01	15,47	17,67	7,86	118,03	230,22	49,37	464,69	862,32
297	13,01	15,45	17,56	6,50	119,56	234,93	107,77	449,79	912,07
298	13,02	15,43	17,49	5,44	120,42	246,80	146,37	382,70	896,28
299	13,03	15,54	15,17	3,05	118,67	226,53	215,49	94,17	654,87
300	13,02	15,51	15,10	7,73	114,94	210,35	124,36	199,40	649,05
301	13,02	15,50	15,09	7,67	115,37	209,39	128,32	336,45	789,53
302	13,02	15,51	15,10	7,91	115,18	210,84	128,05	132,22	586,29
303	8,10	7,04	6,67	6,01	529,28	23,10	226,08	145,98	924,43
304	8,10	7,04	6,74	14,35	526,80	13,49	149,07	185,57	874,93
305	4,60	15,16	7,54	12,68	369,28	80,45	316,65	182,70	949,09
306	4,60	15,10	7,56	14,67	367,82	0,00	387,68	223,89	979,39
307	9,35	5,39	20,57	8,57	502,62	199,58	291,11	0,00	993,31
308	9,35	8,11	3,10	5,90	432,37	223,44	0,00	134,99	790,81
309	9,34	8,09	1,02	2,80	432,12	193,40	244,15	73,79	943,45
310	9,34	8,05	15,12	18,33	432,42	259,40	83,80	194,85	970,47
311	9,39	7,52	10,40	3,64	459,27	102,93	323,19	110,43	995,82
312	9,37	7,58	10,55	8,45	435,54	118,60	332,59	48,37	935,09
313	9,38	7,54	10,36	9,05	441,32	86,70	326,81	85,44	940,27
314	9,35	7,61	13,30	9,77	432,83	120,19	81,07	181,10	815,20
315	9,35	7,62	13,37	7,49	432,11	144,82	68,84	282,51	928,28
316	9,36	7,58	13,28	7,31	433,24	59,16	239,23	65,83	797,46
317	9,36	7,63	8,48	6,91	431,98	188,31	167,32	67,86	855,46

318	9,25	5,19	15,00	3,63	532,90	69,70	196,82	143,94	943,36
319	9,23	5,20	14,96	4,00	542,52	193,97	82,32	118,93	937,74
320	9,25	5,27	15,04	7,89	541,69	212,95	62,72	181,21	998,57
321	4,98	11,91	6,61	15,24	366,81	292,99	124,92	159,34	944,07
322	4,97	11,94	14,77	20,40	372,73	273,01	317,71	0,00	963,45
323	4,99	11,96	9,42	4,35	363,63	288,54	167,83	137,16	957,16
324	4,94	11,88	15,00	15,27	389,70	307,52	160,93	71,68	929,82
325	5,01	12,38	7,92	8,36	360,16	132,35	279,98	93,60	866,10
326	4,99	12,31	1,01	18,30	365,22	169,00	270,27	134,33	938,82
327	4,98	12,30	0,96	3,99	369,02	169,61	265,91	68,60	873,14
328	11,48	9,66	15,00	8,10	414,11	204,46	143,15	157,42	919,14

Bibliografia

- [1] Francesco Rania, (2012-2013) *Dispensa di ottimizzazione* <https://web.unicz.it/uploads/2013/01/ottimizzazione.pdf>
- [2] Abolfazl Shirazi, Josu Ceberio, Jose A. Lozano (2018) *Spacecraft Trajectory Optimization: A review of Models, Objectives, Approaches and Solutions* https://www.researchgate.net/publication/326824787_Spacecraft_trajectory_optimization_A_review_of_models_objectives_approaches_and_solutions
- [3] J. T. Betts, *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming* SIAM, 2010
- [4] G. R. Hintz *Survey of orbit element sets* Journal of Guidance, Control, and Dynamics 31 (3) (2008) 785–790
- [5] B.N. Suresh, K. Sivan *Integrated Design for Space Transportation System* <https://link.springer.com/book/10.1007/978-81-322-2532-4>
- [6] G. Colasurdo, G. Avanzini (2006-07) *Astrodynamics: Space Exploration and Development Systems* http://dma.dima.uniroma1.it:8080/users/lss_mo/MATERIALE/AvanziniColasurdoAstrodynamics.pdf
- [7] R.R. Bate, D.D. Mueller, J.E. White *Fundamentals of astrodynamics* https://books.google.it/books/about/Fundamentals_of_Astrodynamics.html?id=UtJK8cetqGkC&redir_esc=y
- [8] Howard Curtis *Orbital Mechanics for Engineering students*
- [9] Robert G. Jahn (1968) *Physics of Electric Propulsion* https://books.google.it/books/about/Physics_of_Electric_Propulsion.html?id=xX43AQAACAAJ&redir_esc=y
- [10] Anil V. Rao, University of Florida (1968) *A Survey of Numerical Methods for Optimal Control* <https://www.researchgate.net/publication/268042868>
- [11] Gasparo, Macconi e Pasquali, Università di Firenze *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali* <https://www.mondadoristore.it/Risoluzione-numerica-problemi-Aldo-Pasquali-M-Grazia-Gasparo-Maria-Macconi/eai978883710173/>
- [12] David R. Brooks, William F. Hampshire II *Multiple asteroid flyby missions*
- [13] Yan Hui, Wu Hongxin *Initial Adjoint Variable Guess Technique and its Application in Optimal Orbital Transfer*
- [14] NASA *Double Asteroid Redirection Test* <https://www.nasa.gov/planetarydefense/dart>
- [15] NASA *New Horizons* https://www.nasa.gov/mission_pages/newhorizons/main/index.html
- [16] ESA *Near-Earth Space Trekker (NEST)* <https://www.oa-roma.inaf.it/nest/nest-science-goals/>