POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO di INGEGNERIA MECCANICA e AEROSPAZIALE

CORSO DI LAUREA IN SISTEMI PROPULSIVI

TESI DI LAUREA

“Analisi dinamica di un disco palettato di turbina con smorzamento per attrito.”

Relatore: **Stefano Zucca**

Candidato: **Umberto Cian, 249921**

Indice

1 Introduzione **5**

2 Sistema dinamico forzato **9**

2.1 Sistema con un grado di libertà 9

2.2 Sisitema con N gradi di libertà 11

2.2.1 Sistema libero non smorzato 13

2.2.2 Sistema forzato 13

2.3 Coordinate modali 14

3 Smorzamento per attrito **17**

3.1 Equazioni del moto 17

3.2 Metodo del Bilanciamento Armonico (HBM) 18

3.3 Modello di contatto 20

3.3.1 Piccole oscillazioni 23

3.3.2 Grandi oscillazioni 23

3.4 Coefficienti di Fourier 25

3.5 Metodi di riduzione 26

3.5.1 Risposta del sistema con supporti in movimento 28

3.5.2 Metodo di Craig-Bampton 30

4 Simmetria ciclica **33**

4.1 Sistema con due gradi di libertà in simmetria ciclica 33

4.2 Proprietà modali dei solidi in simmetria ciclica 36

4.2.1 Modi complessi 39
4.2.2 Angoli di sfasamento φ ammessi 41
4.2.3 Relazioni tra modi reali e modi complessi 42
4.3 Risposta forzata 43
4.3.1 Diagramma di Campbell 45

5 Analisi **51**
5.1 Sistema con N gradi di libertà 51
5.2 Trave beam 55
5.2.1 Risultati 58
5.3 Paletta di turbina 62
5.3.1 Simmetria ciclica 63

6 Conclusioni **73**
6.1 Sviluppi futuri 74

A Diagrammi di flusso **77**

If you want to find the secrets of the universe,
think in terms of energy, frequency and vibration.

(*N. Tesla*)

Capitolo 1

Introduzione

Al giorno d'oggi l'industria aeronautica è arrivata a un plateau della curva di sviluppo di nuove tecnologie, e la gran parte delle ricerche vertono sul migliorare e ottimizzare le tecnologie già esistenti.

Per quanto riguarda la propulsione le migliorie possono riguardare principalmente aspetti fluidodinamici e meccanici. Dal punto di vista meccanico, c'è la necessità di ridurre il peso delle strutture senza però modificare negativamente le prestazioni della turbomacchina. La riduzione del peso comporta inevitabilmente alla diminuzione della rigidezza del sistema, che può portare all'aumento delle ampiezze delle vibrazioni degli elementi meccanici, con la conseguente nascita di elevate tensioni alternate, problematiche per il danno da fatica.

L'intento di questa tesi è quello di analizzare il comportamento vibrazionale delle palette di turbina: come prevederne le frequenze di risonanza e le ampiezze delle oscillazioni e come valutare gli effetti dell'applicazione di alcune possibili soluzioni tecnologiche.

In una turbomacchina, che comprende essenzialmente un rotore in rotazione intorno all'asse della macchina e alloggiato in uno statore, avviene uno scambio di energia fra il fluido di lavoro e le palette, calettate sul rotore e sullo statore, al fine di ottenere potenza meccanica, fluidodinamica o entrambe.

Durante il funzionamento della macchina le palette deviano la direzione del fluido, e pertanto sono soggette a forze di pressione variabili nel tempo con una frequenza che dipende dalla

velocità di rotazione del rotore. Queste forze producono deformazioni e tensioni anch'esse variabili nel tempo. L'analisi statica non permette di valutare correttamente le deformazioni dovute a una forzante in frequenza, occorre quindi sviluppare uno strumento per analizzare l'effetto delle sollecitazioni cicliche sulle palette e i dischi palettati. È importante che questo strumento possa prevedere e controllare le frequenze di risonanza di un sistema complesso come un disco palettato, in modo tale che l'ampiezza delle oscillazioni sia limitata in tutto il campo di frequenze operativo della macchina.

Una paletta di una turbomacchina è assimilabile a una trave semplicemente incastrata, svergolata ed avente la sezione trasversale a profilo alare. Può presentare inoltre un tettuccio di sommità, chiamato *shroud*, come in figura 1.1. La soluzione con tettuccio, chiamata *shrouded blade*, viene utilizzata solitamente nelle palette di turbina per controllare le frequenze e le ampiezze delle oscillazioni della paletta. Le scanalature del tettuccio vengono messe in contatto con le scanalature degli *shroud* delle palette adiacenti, il che provoca due effetti principali: si ottiene un irrigidimento aggiuntivo dovuto all'applicazione di ulteriori vincoli al sistema e, nel caso di moto relativo tra le superfici di contatto, si genera una forza di attrito che dissipa energia con effetto smorzante. Questa soluzione è particolarmente vantaggiosa in quanto permette di ottenere in fase di progettazione un certo controllo sulla posizione delle frequenze con ampiezza massima, ovvero quelle più pericolose per il danno da fatica.

L'obiettivo della tesi è quello di sviluppare un software che permetta di calcolare la risposta forzata di un modello agli elementi finiti FEM (*finite element method*) di una paletta di turbina, ovvero l'effetto di una forzante che eccita la paletta con diverse frequenze. La paletta è provvista di uno *shroud* con due superfici che entrano in contatto con le palette adiacenti, generando una forza di attrito che presenta un andamento non lineare. Inoltre, la paletta è inserita all'interno di un sistema con simmetria ciclica.

Esistono software commerciali, quale ad esempio Ansys®, che sono in grado di eseguire questo tipo di analisi, ma per modelli molto complessi il tempo di calcolo può essere molto lungo e difficilmente gestibile in fase di progettazione. Per sviluppare il programma nell'ambito di questa tesi si è scelto di utilizzare il linguaggio di programmazione Python, che in certe condizioni permette di eseguire i calcoli in parallelo su più *core* del processore, limitando i tempi di

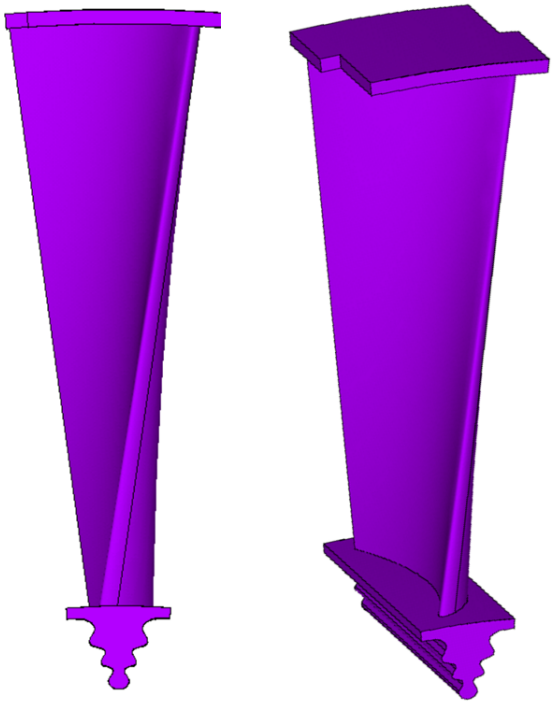

Figura 1.1: Paletta con tettuccio (*shrouded blade*).

calcolo. Inoltre, è possibile implementare l'algoritmo per utilizzare un *cluster* di computer così da permettere di eseguire i calcoli su più macchine collegate in rete.

Una prima parte del lavoro è stata dedicata allo sviluppo del programma per l'analisi modale e l'analisi della risposta forzata di sistemi ad elementi finiti con alcuni nodi in contatto strisciante con un supporto fisso rispetto al sistema di riferimento, chiamato terra, allo scopo di imparare a gestire le forze di contatto, che generalmente hanno un andamento non-lineare, per un modello FEM. Successivamente il programma è stato modificato per poter ricevere in input le proprietà di massa e di rigidezza di un modello FEM di una paletta di turbina allo scopo di effettuare l'analisi modale e l'analisi della risposta forzata in simmetria ciclica. Per ricavare le matrici di massa e di rigidezza del modello è stato utilizzato il software commerciale Ansys®.

Nel seguito viene descritto il processo logico alla base dello sviluppo del programma: partendo dallo studio di un semplice sistema massa-molla-smorzatore, sono stati poi aggiunti gli elementi necessari per gestire un maggiore numero di gradi di libertà e per considerare le forze non lineari dovute a un contatto strisciante. Il programma è stato utilizzato per analizzare una trave

discretizzata con elementi di tipo beam, per permettere la gestione di matrici di sistemi più complessi, in vista dell'analisi di una paletta di turbina. Infine, il programma è stato implementato per considerare la paletta all'interno di un sistema con simmetria ciclica.

Capitolo 2

Sistema dinamico forzato

In questo capitolo viene analizzato un sistema dinamico con un singolo grado di libertà, per ricavarne la soluzione in termine di oscillazioni. Il sistema è eccitato da una forza con andamento sinusoidale e frequenza costante, chiamata *forzante*. Si vedrà come l'ampiezza delle oscillazioni del sistema dipenda dalla frequenza della forzante. Successivamente, al sistema verranno aggiunti ulteriori gradi di libertà e elementi che influenzano la dinamica del sistema allo scopo di derivare una soluzione generale per i sistemi dinamici.

2.1 Sistema con un grado di libertà

Si consideri il sistema con un grado di libertà della figura 2.1, composto da una massa m, una molla con rigidezza k e uno smorzatore con costante di smorzamento c. L'equazione del moto della massa si ottiene imponendo l'equilibrio delle forze che agiscono sul sistema, secondo la relazione:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \tag{2.1}$$

dove $x(t)$ rappresenta lo spostamento, $\dot{x}(t)$ la velocità e $\ddot{x}(t)$ l'accelerazione della massa. La forzante dipende dal tempo e ha andamento armonico del tipo:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

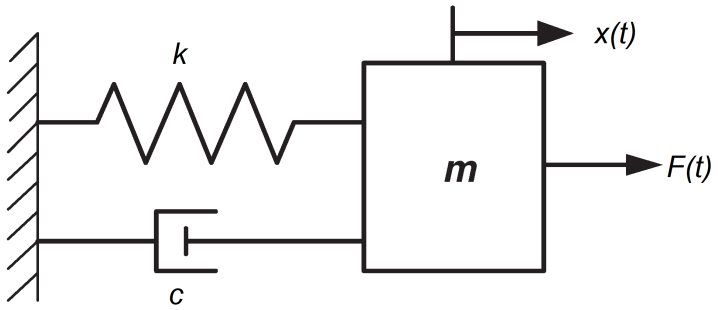

Figura 2.1: Sistema forzato massa-molla-smorzatore, 1 DOF

Questa forzante può essere considerata come la parte reale di una forzante complessa:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} = F_0 \left[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right]$$

La soluzione dell'equazione (2.1) viene chiamata *risposta*, la quale avrà andamento armonico se l'andamento della forzante è armonico. Scrivendo la risposta in notazione esponenziale con la formula di Eulero si ha che:

$$x(t) = x_0 \left[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)\right] = x_0 e^{i\omega t + \varphi} = x_0 e^{\varphi} e^{i\omega t} = \overline{x} e^{i\omega t}$$

dove φ è la fase della risposta rispetto alla forzante. Le derivate prima e seconda sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione della massa m, e hanno espressione:

$$\dot{x} = i\omega \overline{x} e^{i\omega t} \qquad \ddot{x} = -\omega^2 \overline{x} e^{i\omega t} \tag{2.2}$$

Sostituendo nella (2.1) si ottiene:

$$(k - \omega^2 m + i\omega c)\overline{x} = F_0 \tag{2.3}$$

dove il termine che moltiplica $\overline{x}$ viene chiamato *rigidezza dinamica* e dipende dalla pulsazione della forzante. Raccogliendo k ed esplicitando $\overline{x}$, la (2.3) diventa:

$$\overline{x} = \frac{F_0}{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2i\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \tag{2.4}$$

dove ζ è detto *smorzamento relativo* e può essere espresso come:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

Si osserva che per $\omega = \omega_n$ i primi due termini a denominatore della (2.4) si elidono, per cui la risposta del sistema diventa:

$$\overline{x} = \frac{F_0}{i\omega_n c} = \frac{F_0}{2ik\zeta}$$

ovvero l'ampiezza delle oscillazioni è inversamente proporzionale allo smorzamento. Inoltre, essendo la parte reale nulla, la fase vale $\varphi = \pi$ rispetto alla forzante.

L'andamento della risposta forzata e della fase in funzione della pulsazione ω della forzante per $m = 1$, $k = \pi^2$ e $F_0 = 2$ è rappresentato in figura 2.2. Si può notare che all'aumentare del coefficiente di smorzamento c l'ampiezza della risposta diminuisce. La fase, con l'aumentare della frequenza della forzante, passa da valore nullo (oscillazione in fase con la forzante) a $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ per $\omega = \omega_n$ (ovvero è in ritardo di $90°$), per poi tendere a $-\pi$. Il coefficiente di smorzamento c influisce sulla pendenza dell'andamento della fase: infatti all'aumentare dello smorzamento la variazione della fase diminuisce ed è meno rapida.

2.2 Sisitema con N gradi di libertà

Si consideri ora il sistema precedente al quale viene aggiunta una seconda massa, collegata alla prima tramite un elemento elastico ed uno smorzatore, come illustrato in figura 2.3. L'equilibrio del sistema si esprime con le due seguenti equazioni:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_c)\dot{x}_1 - c_c\dot{x}_2 + (k_1 + k_c)x_1 - k_c x_2 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_c)\dot{x}_2 - c_c\dot{x}_1 + (k_2 + k_c)x_2 - k_c x_1 = F_2 \end{cases} \tag{2.5}$$

Il sistema (2.5) può essere scritto nella forma matriciale, evidenziando il vettore degli spostamenti $\{x\}$ e le sue derivate:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_c & -c_c \\ -c_c & c_2 + c_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

che nella forma compatta diventa:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \tag{2.6}$$

Si noti che l'equazione (2.6) è formalmente identica alla (2.1).

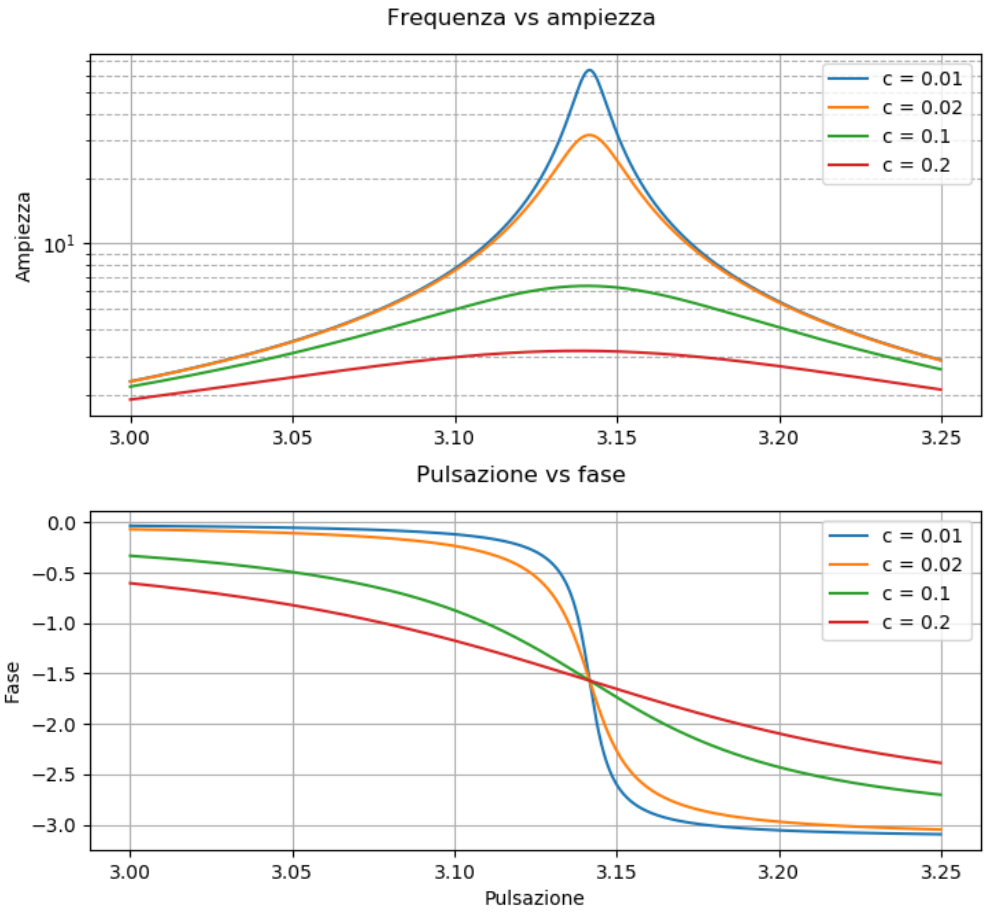

Figura 2.2: Risposta del sistema con un grado di libertà.

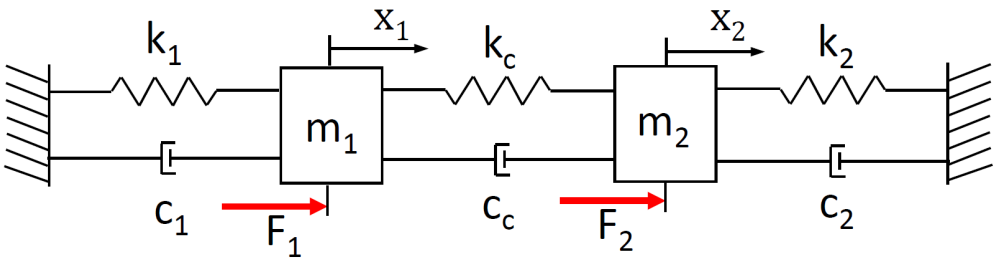

Figura 2.3: Sistema forzato massa-molla-smorzatore, 2 DOF

2.2.1 Sistema libero non smorzato

Si prenda ora in considerazione il caso del sistema libero, $\{F\} = \{0\}$, e con smorzamento nullo $[C] = 0$. Come nel caso con un grado di libertà, se si suppone la soluzione in forma complessa $\{x\} = \{\overline{x}\}e^{i\omega t}$, e se si sostituiscono alle derivate dello spostamento le espressioni (2.2), l'equazione (2.6) diventa:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

Sviluppando il temine tra le parentesi tonde, che corrisponde alla rigidezza dinamica, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & -\omega^2 m_2 + k_2 + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Questo è un problema generalizzato agli autovalori, e la soluzione si può otterere imponendo che il polinomio caratteristico sia nullo e risolvendolo rispetto a ω^2. Dal punto di vista algebrico le soluzioni trovate sono gli autovalori del sistema, mentre dal punto di vista fisico rappresentano le pulsazioni naturali. In generale, per sistemi con N gradi di libertà, si hanno N autovalori, ovvero il sistema possiede N pulsazioni naturali. Calcolati gli autovalori è possibile ricavare anche gli autovettori, che dal punto di vista fisico rappresentano i modi propri del sistema.

In generale, un sistema a N gradi di libertà si può utilizzare la forma compatta (2.6), che impiegando la notazione complessa, diventa:

$$\left(-\omega^2[M] + [K]\right) \{\overline{x}\}e^{i\omega t} = \{0\} \tag{2.8}$$

Il procedimento per un sistema con N gradi di libertà è analogo a quello impiegato per il sistema a due gradi di libertà:: si calcolano N autovalori (frequenze naturali) associati a N autovettori (modi propri). Solitamente gli autovettori sono raggruppati in una matrice di dimensione $N \times N$, contenente gli autovettori disposti sulle colonne:

$$[\Psi] = [\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots, \Psi_N]$$

2.2.2 Sistema forzato

Partendo dalle equazioni del moto del sistema (2.6), viene utilizzata una forzante con andamento armonico $\{F\} = \{F_0\}e^{i\omega t}$. La soluzione è armonica con la forma $\{x\} = \{\overline{x}\}e^{i\omega t}$. Riscrivendo

la (2.6) per uno smorzamento $[C]$ non nullo:

$$\left(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]\right)\{\overline{x}\} = \{F\}$$
$$[D(\omega)]\{\overline{x}\} = \{F\}$$

la cui soluzione è:

$$\{\overline{x}\} = [D(\omega)]^{-1}\{F\} = [A(\omega)]\{F\} \tag{2.9}$$

La matrice $[D(\omega)]$ è la cosiddetta matrice di rigidezza dinamica, mentre la matrice $[A(\omega)]$ viene chiamata *matrice di recettanza*. Il calcolo della matrice di recettanza è possibile per ogni pulsazione, ma il calcolo di una matrice inversa è molto oneroso nel caso di molti gradi di libertà. Per questo motivo vengono introdotte le coordinate modali.

2.3 Coordinate modali

Per definire la configurazione del sistema in un generico istante di tempo è possibile utilizzare le forme modali.

Viene definito un vettore di gradi di libertà modali $\{\overline{q}\}$, il cui termine $\{q_i\}$ rappresenta l'ampiezza del modo i-esimo. La relazione algebrica:

$$\{\overline{x}\} = [\Psi]\{\overline{q}\} \tag{2.10}$$

esprime il legame tra i gradi di libertà fisici con quelli modali.

Sostituendo la relazione (2.10) nella (2.8) e pre-moltiplicando per $[\Psi]^T$ si ottiene:

$$[\Psi]^T\left(-\omega^2[M] + [K]\right)[\Psi]\{\overline{q}\}e^{i\omega t} = \{0\}$$
$$\left(-\omega^2[\Psi]^T[M][\Psi] + [\Psi]^T[K][\Psi]\right)\{\overline{q}\}e^{i\omega t} = \{0\}$$
$$\left(-\omega^2[M_{mod}] + [K_{mod}]\right)\{\overline{q}\}e^{i\omega t} = \{0\}$$

Le matrici $[M_{mod}] = [\Psi]^T[M][\Psi]$ e $[K_{mod}] = [\Psi]^T[K][\Psi]$ prendono il nome rispettivamente di *matrice modale di massa* e *matrice modale di rigidezza*. È possibile dimostrare che le matrici modali sono diagonali [1]. Inoltre, siccome i modi propri del sistema (autovettori) sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, è possibile normalizzarli. In particolare, l'operazione di normalizzazione viene eseguita rispetto alla matrice $[M]$, in modo tale che la matrice modale di

massa sia uguale alla matrice identità $[M_{mod}] = [I]$. Viene allora definito un fattore di scala α_n per il modo n-esimo, la cui espressione è:

$$\alpha_n = \sqrt{[\Psi_n]^T[M][\Psi_n]}$$

Il modo m-normalizzato si ottiene con la relazione:

$$[\Phi_n] = \frac{[\Psi_n]}{\alpha_n}$$

Utilizzando la matrice $[\Phi]$ per diagonalizzare le matrici di massa e di rigidezza, si ottiene:

$$\begin{aligned}\left(-\omega^2[\Phi]^T[M][\Phi] + [\Phi]^T[K][\Phi]\right)\{\overline{q}\}e^{i\omega t} &= \{0\}\\ \left(-\omega^2[I] + [\widetilde{K}_{mod}]\right)\{\overline{q}\}e^{i\omega t} &= \{0\}\end{aligned}$$

Il contenuto della matrice $[\widetilde{K}_{mod}]$ può essere determinato considerando che la matrice di rigidezza normalizzata deve diventare singolare quando $\omega^2 = \omega_n^2$, il che implica che nella matrice $[\widetilde{K}_{mod}]$ è composta dal quadrato delle pulsazioni naturali.

Infine si ha che:

$$\begin{aligned}\left(-\omega^2[\Phi]^T[M][\Phi] + [\Phi]^T[K][\Phi]\right)\{\overline{q}\}e^{i\omega t} &= \{0\}\\ \left(-\omega^2[I] + \text{diag}[\omega_n^2]\right)\{\overline{q}\}e^{i\omega t} &= \{0\}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Per considerare anche la presenza di uno smorzamento si introduce il modello di smorzamento proporzionale, definendo la matrice $[C]$ come combinazione lineare[1] delle matrici $[M]$ e $[K]$:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

Siccome $[C]$ è combinazione di $[M]$ e $[K]$, che sono matrici simmetriche, anche $[C]$ è simmetrica e il prodotto $[\Phi]^T[C][\Phi]$ è una matrice diagonale:

$$[C_{mod}] = [\Phi]^T[C][\Phi] = \text{diag}(c_n)$$

L'equazione del moto in coordinate modali diventa quindi:

$$\{\ddot{q}\} + \text{diag}(c_n)\{\dot{q}\} + \text{diag}(\omega_n^2)\{q\} = \{0\}$$

[1] Lo smorzamento è generalmente prodotto da molteplici fattori, non facilmente modellabili. Nei sistemi lineari è prassi utilizzare il modello proporzionale, dove i coefficienti α e β sono calcolati sperimentalmente oppure vengono valorizzati sulla base dell'esperienza.

e la singola equazione modale associata al modo n-esimo è:

$$\ddot{q}_n + c_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0$$

che ha la forma di un'equazione di un sistema ad con un unico grado di libertà.

Con riferimento al paragrafo 2.2.2, si può applica il cambio di coordinate alle equazioni del moto del sistema forzato, effettuando la sostituzione $\{\overline{x}\} = [\Phi]\{\overline{q}\}$ e pre-moltiplicando per $[\Phi]^T$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T \left[-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]\right] [\Phi]\{\overline{q}\} &= [\Phi]^T\{F_0\} \\ \left[-\omega^2[I] + i\omega \text{diag}(c_n) + \text{diag}(\omega_n^2)\right] \{\overline{q}\} &= [\Phi]^T\{F_0\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il termine tra parentesi quadre è una matrice diagonale, essendo la somma di matrici diagonali. Applicando la relazione (2.9), la soluzione diventa:

$$\begin{aligned} \{\overline{x}\} &= [A(\omega)]\{F\} \\ \{\overline{x}\} &= [\Phi]\text{diag}\left(\frac{1}{-\omega^2 + i\omega c_n + \omega_n^2}\right) [\Phi]^T\{F_0\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

ovvero:

$$[A(\omega)] = [D(\omega)]^{-1} = [\Phi]\text{diag}\left(\frac{1}{-\omega^2 + i\omega c_n + \omega_n^2}\right) [\Phi]^T \tag{2.14}$$

In questo modo, il calcolo dell'inversa della matrice di rigidezza dinamica si riduce al calcolo dell'inverso dei coefficienti.

Questo procedimento evidenzia come sia possibile ottenere un sistema a N gradi di libertà in cui ogni equazione viene risolta come se fosse un sistema a un solo grado di libertà, combinando poi il risultato con la sovrapposizione degli effetti. Il vantaggio è che il calcolo della soluzione per mezzo della (2.13) è più diretto rispetto alla forma dell'equazione (2.9), requisito fondamentale per le strutture complesse quali quelle agli elementi finiti. Inoltre, questa soluzione è facilmente implementabile su un calcolatore. Nel caso di implementazione di un algoritmo per l'analisi modale di sistemi complessi, questo comporta il vantaggio di tempi di esecuzione minori rispetto a quelli richiesti per un sistema in coordinate fisiche.

Capitolo 3

Smorzamento per attrito

Si è fino ad ora considerato il comportamento di sistemi dinamici con riferimento ai soli sistemi lineari. Nella realtà i sistemi dinamici possono manifestare un comportamento non lineare, dovuto principalmente a tre cause:

- non-linearità geometriche in presenza di grandi deformazioni elastiche;
- non-linearità del materiale in presenza di deformazioni e tensioni in campo plastico;
- non-linearità di contatto, in presenza di superfici in moto relativo rispetto ad altre superfici.

A partire dal sistema considerato nel capitolo 2, viene ora considerato il caso in cui vi sia un contatto strisciante su uno dei gradi di libertà, per valutarne il contributo sulla dinamica del sistema.

3.1 Equazioni del moto

Come illustrato nella figura 3.1, si prenda in esame il sistema con un singolo grado di libertà in presenza di un contatto strisciante agente tangenzialmente tangenzialmente. Il contatto è caratterizzato da una forza normale alla superficie N_0 (costante), da un coefficiente di attrito μ e da una rigidezza di contatto tangenziale k_t. Considerando la forza di attrito nell'equazione del

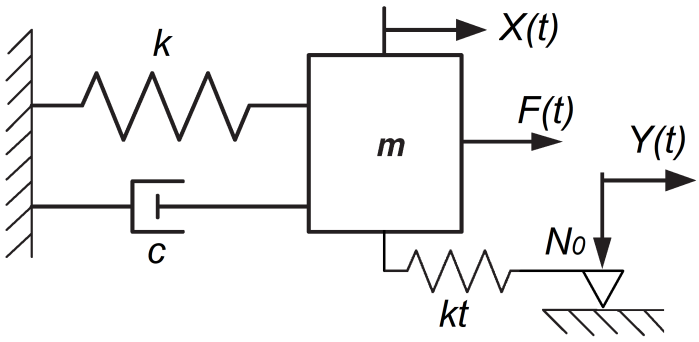

Figura 3.1: Sistema forzato massa-molla-smorzatore con contatto strisciante.

moto si può scrivere che:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) - F_c(\ddot{x}, x, t) \tag{3.1}$$

dove il segno della forza di contatto è opposto a quello della forzante in quanto si oppone al moto. La forza di attrito dipende dall'accelerazione $\ddot{x}$, dalla posizione x e dal tempo t.

Nel caso senza contatto era possibile affermare che se $F = F_0 e^{i\omega t}$ aveva andamento armonico, allora anche $x = \overline{x} e^{i\omega t}$ avrebbe avuto un andamento armonico. In presenza di forze non lineari, come nel caso di forze di attrito, questo non è più vero: il sistema può avere una risposta periodica (ma non armonica) oppure non periodica (caotica). Nel primo caso si può analizzare l'andamento delle forze non lineari sfruttando l'analisi di Fourier.

3.2 Metodo del Bilanciamento Armonico (HBM)

Dall'analisi di Fourier, una funzione periodica si può esprimere come la somma di un numero infinito di funzioni armoniche. Siccome vuole trovare una risposta periodica, è necessario che anche la forza di contatto F_c lo sia, entrambe con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. È possibile ottenere un'approssimazione tramite lo sviluppo in serie di Fourier, troncato a un numero N di armoniche:

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &\cong x_0 + \sum_{n=1}^{N} \overline{x}^{(n)} e^{in\omega t} \\ F_c(x, \dot{x}, t) &\cong F_{c,0}(x, \dot{x}) + \sum_{n=1}^{N} F_c^{(n)}(x, \dot{x}) e^{in\omega t} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sostituendo le equazioni (3.2) nel sistema (3.1) e trascurando i termini statici, le equazioni prendono la forma:

$$m\left(\sum_{n=1}^{N}-(n\omega)^2\overline{x}^{(n)}e^{in\omega t}\right)+c\left(i\sum_{n=1}^{N}n\omega\overline{x}^{(n)}e^{in\omega t}\right)+k\left(\sum_{n=1}^{N}\overline{x}^{(n)}e^{in\omega t}\right)=$$
$$=F_0e^{i\omega t}-\sum_{n=1}^{N}F_c^{(n)}e^{in\omega t}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left[-(n\omega)^2m+in\omega c+k\right]\overline{x}^{(n)}e^{in\omega t}=F_0e^{i\omega t}-\sum_{n=1}^{N}F_c^{(n)}e^{in\omega t}$$

I termini della sommatoria possono essere separati ponendo uguali tra di loro i termini n-esimi. Si ottiene quindi un'equazione per ogni n:

$$n=1\rightarrow\left(-\omega^2m+i\omega c+k\right)\overline{x}^{(1)}e^{i\omega t}=\left(F_0-F_c^{(1)}\right)e^{i\omega t}$$
$$n>1\rightarrow\left(-n^2\omega^2m+in\omega c+k\right)\overline{x}^{(n)}e^{in\omega t}=-F_c^{(n)}e^{in\omega t}$$

Semplificando il termine dipendente dal tempo si ottiene:

$$\begin{aligned}n=1&\rightarrow\left(-\omega^2m+i\omega c+k\right)\overline{x}^{(1)}=F_0-F_c^{(1)}(x,\dot{x})\\ n>1&\rightarrow\left(-n^2\omega^2m+in\omega c+k\right)\overline{x}^{(n)}=-F_c^{(n)}(x,\dot{x})\end{aligned}\tag{3.3}$$

Le equazioni (3.3) formano un sistema a coefficienti complessi, dove tutte le equazioni sono accoppiate per il fatto che $F_c^{(n)}=F_c^{(n)}(x,\dot{x})$, e quindi dipende da tutti i coefficienti di Fourier $\overline{x}^{(n)}$. Il metodo descritto prende il nome di *Metodo del Bilanciamento Armonico* (*HBM*). L'accuratezza della soluzione dipende dal numero N di armoniche utilizzate, e coincide con la soluzione per $N\rightarrow\infty$.

Il contributo principale della risposta viene dato dalla prima armonica ($n=1$), che viene chiamata *armonica fondamentale*. Concentrandosi allora sulla prima delle relazioni (3.3), essa può essere riscritta separando i coefficienti reali da quelli immaginari:

$$\left(-\omega^2m+i\omega c+k\right)\left(\Re\left(\overline{x}^{(1)}\right)+i\Im\left(\overline{x}^{(1)}\right)\right)=\Re(F_0)-\Re\left(F_c^{(1)}\right)-i\Im\left(F_c^{(1)}\right)$$
$$\begin{bmatrix}-\omega^2m+k & -\omega c\\ \omega c & -\omega^2m+k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Re\left(\overline{x}^{(1)}\right)\\ \Im\left(\overline{x}^{(1)}\right)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_0\\ 0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\Re\left(F_c^{(1)}\right)\\ \Im\left(F_c^{(1)}\right)\end{Bmatrix}$$

dove i termini:

$$\Re\left(F_c^{(1)}\right)=\Re\left(F_c^{(1)}(\Re(\overline{x}^{(1)}),\Im(\overline{x}^{(1)}))\right)$$
$$\Im\left(F_c^{(1)}\right)=\Im\left(F_c^{(1)}(\Re(\overline{x}^{(1)}),\Im(\overline{x}^{(1)}))\right)$$

non sono lineari. Portando tutto a primo membro si ottiene il sistema non lineare che descrive il moto della massa:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m + k & -\omega c \\ \omega c & -\omega^2 m + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Re\left(\overline{x}^{(1)}\right) \\ \Im\left(\overline{x}^{(1)}\right) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Re\left(F_c^{(1)}\right) \\ \Im\left(F_c^{(1)}\right) \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.4}$$

L'equazione (3.4) può essere risolta con un metodo iterativo (ad esempio il metodo di Newton-Raphson). Per scrivere completamente le equazioni del moto occorre però definire un modello di contatto per ricavare i coefficienti $\Re\left(F_c^{(1)}\right)$ e $\Im\left(F_c^{(1)}\right)$ in funzione di $\Re\left(\overline{x}^{(1)}\right)$ e $\Im\left(\overline{x}^{(1)}\right)$.

3.3 Modello di contatto

Considerando due generici corpi in contatto reciproco, al contatto è associata una rigidezza che agisce come un elemento elastico. Essa è definita come la derivata della forza di contatto rispetto allo spostamento relativo tra i due corpi. Il modello di contatto considerato in questa analisi è il più semplice, ovvero quello che ne considera la rigidezza costante. Inoltre, lo strisciamento può avvenire in direzione tangenziale (con rigidezza k_t) oppure normale (con rigidezza k_n).

Con riferimento alla figura 3.1 vengono definite le varie grandezze presenti in un modello a un grado di libertà con attrito:

- m: massa;
- c: coefficiente di smorzamento;
- k: rigidezza della molla;
- $F(t)$: forza applicata alla massa, dipendente dal tempo;
- $x(t)$: spostamento della massa, dipendente dal tempo;
- μ: coefficiente di attrito;
- k_t: rigidezza del contatto;
- $y(t)$: spostamento relativo tra il punto di contatto e la superficie di contatto;
- N_0: carico normale alla superficie di contatto.

Il contatto può assumere due diverse condizioni: *stick*, con $y(t) = 0$ (non c'è moto relativo tra la massa e la superficie di contatto) e *slip*, con $y(t) \neq 0$ (c'è moto relativo). Nel primo caso, la rigidezza di contatto si somma alla rigidezza k dell'elemento elastico e la forza di attrito è proporzionale allo spostamento della massa rispetto alla superficie di contatto. Nel secondo caso, la forza di attrito ha raggiunto il valore massimo e rimane costante. In generale la forza di attrito in ogni istante di tempo vale:

$$F_c(t) = k_t \left(x(t) - y(t)\right) \tag{3.5}$$

Dalla (3.5) si ricava la convenzione caratteristica dei problemi di contatto:

$$\text{se } F_c > 0 \;\rightarrow\; \text{la molla } k_t \text{ è compressa}$$
$$\text{se } F_c < 0 \;\rightarrow\; \text{la molla } k_t \text{ è tesa}$$

Il modello di contatto utilizzato è quello di Coulomb, che prevede la transizione *stick-slip* (inizio dello strisciamento) quando $|F_c(t)| = \mu N_0$. Se invece il contatto si trova nella condizione di *slip*, la forza di contatto è costante $|F_c(t)| = \mu N_0$ e l'elemento elastico k_t non si deforma. In questa condizione gli spostamenti $x(t)$ e $y(t)$ sono uguali.

La transizione *slip-stick* avviene quando si verifica un'inversione del moto della massa, ovvero quando la velocità $\dot{x}(t)$ cambia di segno.

Essendo la risposta periodica, e considerando solo l'armonica fondamentale, si può scrivere che:

$$x = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \cos(\theta)$$
$$\dot{x} = -\omega x_0 \sin(\omega t) = -\omega x_0 \sin(\theta)$$

Con riferimento al grafico della figura 3.2, si ha allora che:

- per $\theta = 0$ lo spostamento della massa $x(t) = x_0$ è massimo e la velocità $\dot{x}(t)$ sta cambiando di segno;

- per $\theta = \pi$ lo spostamento della massa $x(t) = -x_0$ è minimo e la velocità $\dot{x}(t)$ sta cambiando di segno.

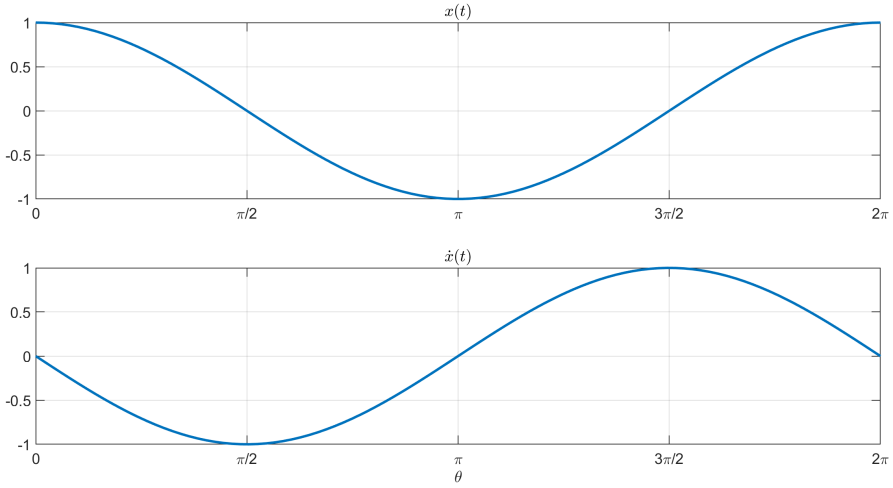

Figura 3.2: Andamento qualitativo dello spostamento e della velocità.

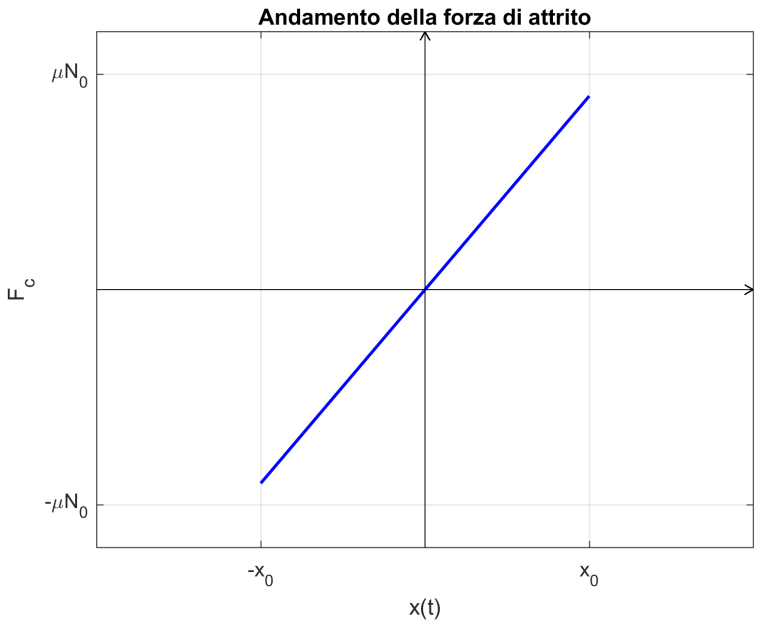

Figura 3.3: Andamento della forza di attrito in funzione dello spostamento $x(t)$, caso completamente *stick*.

3.3.1 Piccole oscillazioni

Si consideri ora il caso di piccole ampiezze di oscillazione $x(t)$, tali per cui la forza massima di attrito è sempre $|F_c(t)| < \mu N_0$, ovvero è solo presente la condizione *stick*. Nella figura 3.3 è illustrato l'andamento di $F_c(t)$ in funzione di $x(t)$. In questa situazione $y(t) = 0$ per tutto il periodo e, utilizzando la (3.5), la forza di contatto diventa:

$$F_c(t) = k_t x(t) = k_t x_0 \cos(\omega t)$$

In questo caso l'andamento della forza di contatto è lineare e la rigidezza del contatto si somma in parallelo con la rigidezza k.

3.3.2 Grandi oscillazioni

Definito x_{cr} lo spostamento per il quale si ha che $F_c(t) = \mu N_0$, se $x(t) > x_{cr}$ ha inizio una fase di strisciamento. Siccome in condizioni critiche la forza di contatto vale

$$F_c(t) = k_t x_{cr} \cos(\omega t)$$

si può calcolare il valore di x_{cr} per $t = 0$:

$$|F_c(t)|_{max} = k_t x_{cr} = \mu N_0 \;\rightarrow\; x_{cr} = \frac{\mu N_0}{k_t}$$

Se lo spostamento è tale per cui $x > x_{cr}$, si ha la transizione *stick-slip*: la forza di contatto $|F_c(t)|$ rimane costante e lo spostamento $x(t)$ aumenta fino a x_0, che corrisponde al punto A del grafico della figura 3.4. Dopo questa fase di transizione,si verifica per il contatto una sorta di ciclo di isteresi, definito da quattro estremi. Per ogni punto del ciclo è possibile calcolare il valore della forza di contatto F_c e lo spostamento del punto di contatto $y(x_0)$:

A - In questo punto $F_c(t) = \mu N_0$. La velocità $\dot{x}(t)$ cambia di segno e si ha la transizione *slip-stick*. Siccome il contatto si comporta come un elemento elastico precompresso, negli istanti successivi (percorso da A a B) inizia a scaricarsi. In questo punto si ha $\theta = 0$ e quindi:

$$F_c = k_t(x_0 - y_A) = \mu N_0 \;\rightarrow\; y_A = x_0 - \frac{\mu N0}{k_t}$$

Il contatto rimane in *stick* fino a B.

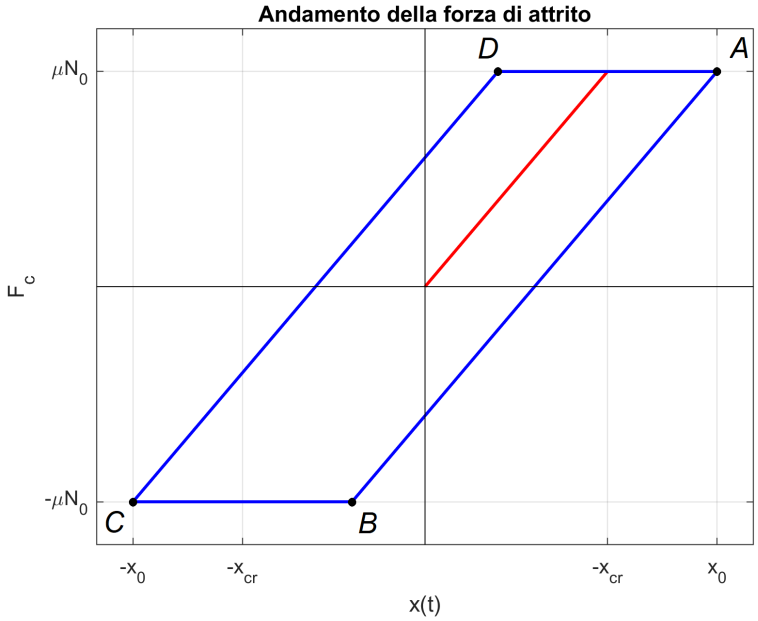

Figura 3.4: Andamento della forza di attrito in funzione dello spostamento $x(t)$, caso *slip-stick*.

$\overline{AB}$ - Condizione di *stick*:

$$F_c = k_t[x_0 \cos(\theta) - y_A] = \mu N_0 + k_t x_0[\cos(\theta) - 1]$$

Nella condizione *stick* y_A rimane costante.

B - In questo punto $F_c(t) = -\mu N_0$. Vi è la transizione *stick-slip* e il contatto si trova nella condizione *slip* fino a C. La forza di contatto può essere espressa in funzione di θ:

$$\begin{aligned}
&F_c(\theta) = \mu N_0 + k_t x_0[\cos(\theta_B) - 1] = -\mu N_0 \\
&k_t x_0[\cos(\theta_B) - 1] = -2\mu N_0 \\
&\cos(\theta_B) = 1 - 2\frac{\mu N_0}{k_t x_0} \\
&\theta_B = \arccos\left(1 - 2\frac{\mu N_0}{k_t x_0}\right)
\end{aligned}$$

$\overline{BC}$ - Condizione *slip*:

$$F_c(\theta) = -\mu N_0$$

La forza di contatto rimane costante.

C - Come per il punto A si verifica la transizione *slip-stick* siccome $\dot{x}(t)$ cambia segno, e il contatto inizia a scaricarsi rimanendo in *stick*. In questo punto si ha $\theta = \pi$ e $x = -x_0$:

$$F_c = k_t(-x_0 - y_C) = -\mu N_0 \;\rightarrow\; y_C = -x_0 + \frac{\mu N0}{k_t} = -y_A$$

$\overline{CD}$ - Condizione *stick*:

$$F_c = k_t[x_0 \cos(\theta) - y_C] = -\mu N_0 + k_t x_0[\cos(\theta) + 1]$$

Anche nel tratto $\overline{CD}$ lo spostamento y_C rimane costante.

D - La forza di contatto raggiunge di nuovo il massimo $F_c(t) = \mu N_0$ e avviene la transizione *stick-slip*. Il contatto rimane nella fase *slip* fino a tornare al punto A. Come per il punto B la forza ha modulo massimo, in particolare:

$$F_c(\theta) = \mu N_0$$

e per simmetria $\theta_D = \pi + \theta_B$

$\overline{DA}$ - Condizione di *slip*:

$$F_c(t) = \mu N_0$$

Il caso è analogo a $\overline{BC}$, con segno invertito.

3.4 Coefficienti di Fourier

Una volta definito il modello di contatto è necessario definire i coefficienti di Fourier di primo ordine di $F_c(t)$ da utilizzare nella relazione (3.4). Se si ha che:

$$\begin{aligned} F_c(t) &= \left[\Re\left(F_c^{(1)}\right) + i\Im\left(F_c^{(1)}\right)\right] e^{i\omega t} = \\ &= \left[\Re\left(F_c^{(1)}\right)\cos(\omega t) - \Im\left(F_c^{(1)}\right)\sin(\omega t)\right] + i\left[\Re\left(F_c^{(1)}\right)\sin(\omega t) + \Im\left(F_c^{(1)}\right)\cos(\omega t)\right] \end{aligned}$$

la cui parte reale è:

$$\Re\left(F_c^{(1)}\right)\cos(\omega t) - \Im\left(F_c^{(1)}\right)\sin(\omega t)$$

Dal momento che si conosce $F(\theta)$, i coefficienti di Fourier si ottengono risolvendo gli integrali[1]:

$$\begin{aligned} \Re\left(F_c^{(1)}\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_c(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\ \Im\left(F_c^{(1)}\right) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_c(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si possono distinguere due casi:

- per $x_0 < x_{cr}$ (condizione *full stick*):

$$\begin{aligned} \Re\left(F_c^{(1)}\right) &= k_t x_0 \\ \Im\left(F_c^{(1)}\right) &= 0 \end{aligned}$$

  ovvero la forza di contatto ha andamento lineare e il contatto agisce come un elemento puramente elastico di rigidezza k_t in serie a k. Inoltre, essendo la parte immaginaria nulla, la forza di contatto è in fase con lo spostamento.

- per $x_0 < x_{cr}$ (condizioni *slip-stick* alternate):

$$\begin{aligned} \Re\left(F_c^{(1)}\right) &= \frac{k_t x_0}{\pi}\left[\theta_B - \frac{1}{2}\sin(2\theta_B)\right] \\ \Im\left(F_c^{(1)}\right) &= 4\frac{\mu N_0}{\pi}\left(1 - \frac{\mu N_0}{k_t x_0}\right) \end{aligned}$$

Questi coefficienti vengono sostituiti nell'equazione (3.4), che può essere risolta in con metodi matematici, quale ad esempio il metodo di Newton-Raphson.

3.5 Metodi di riduzione

Per sistemi con un elevato numero di gradi di libertà può risultare conveniente sostituire il sistema delle equazioni di equilibrio con una forma ridotta, ovvero rappresentare il sistema con N gradi di libertà come la combinazione lineare di n autovettori. Nella forma più generale le equazioni di governo sono:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F_E\} + \{F_{NL}\} \tag{3.7}$$

[1]Gli integrali (3.6) si possono calcolare analiticamente: Menq, Chia-Hsiang [2].

dove il vettore F_{NL} è un vettore contenente le forze non lineari del sistema. È possibile mettere in evidenza nei vettori e nelle matrici del sistema gli elementi che si riferiscono ai gradi di libertà, dividendo i termini lineari da quelli non lineari:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_L \\ x_N \end{Bmatrix} \qquad \{F_E\} = \begin{Bmatrix} F_{E,L} \\ F_{E,N} \end{Bmatrix} \qquad \{F_{NL}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_N\left(x_N, \dot{x}_N\right) \end{Bmatrix}$$

Il sistema (3.7) viene riscritto come:

$$\begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LN} \\ M_{NL} & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_L \\ \ddot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LN} \\ C_{NL} & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LN} \\ K_{NL} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_L \\ x_N \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} F_{E,L} \\ F_{E,N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_N \end{Bmatrix}$$

Passando al dominio delle frequenze il sistema diventa:

$$\left(-(h\omega)^2 \begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LN} \\ M_{NL} & M_{NN} \end{bmatrix}^{(h)} + \begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LN} \\ C_{NL} & C_{NN} \end{bmatrix}^{(h)} + ih\omega \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LN} \\ K_{NL} & K_{NN} \end{bmatrix}^{(h)} \right) \begin{Bmatrix} \overline{x}_L^{(h)} \\ \overline{x}_N^{(h)} \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} \overline{F}_{E,L}^{(h)} \\ \overline{F}_{E,N}^{(h)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{F}_N^{(h)} \end{Bmatrix}$$

Per rappresentare il sistema in forma ridotta viene introdotta la relazione:

$$\{x\} = \sum_{p=1}^{n} \Psi_p q_p = [\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n]\{q\} = [R]\{q\}$$

dove il vettore $\{q\}$ ha dimensione $n \times 1$, mentre la matrice $[R]$ ha dimensione $N \times n$ e viene chiamata *matrice di riduzione*. Sostituendo il risultato trovato nel sistema (3.7) si ottiene il *sistema intermedio*:

$$[M][R]\{\ddot{q}\} + [C][R]\{\dot{q}\} + [K][R]\{q\} = \{F_E\} + \{F_{NL}\}$$

In termini algebrici l'operazione $\{x\} = [R]\{q\}$ è la proiezione dello spazio vettoriale $\Re^N$ nel sotto-spazio $\Re^n$ definito dai vettori $[\Psi]$. Riscrivendo il sistema intermedio si calcola il vettore dei residui:

$$\{r\} = [M][R]\{\ddot{q}\} + [C][R]\{\dot{q}\} + [K][R]\{q\} - \{F_E\} - \{F_{NL}\} = 0$$

Dato che le equazioni di governo sono state proiettate in un sotto-spazio vettoriale, la componente del vettore dei residui appartenente a quel sotto-spazio deve essere nulla:

$$[R]^T\{r\} = 0$$

Infine, il sistema ridotto diventa:

$$[R]^T[M][R]\{\ddot{q}\} + [R]^T[C][R]\{\dot{q}\} + [R]^T[K][R]\{q\} = [R]^T\{F_E\} + [R]^T\{F_{NL}\}$$
$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{f_E\} + \{f_{NL}\}$$

e nel dominio delle frequenze:

$$\left\{-(h\omega)^2[m]^{(h)} + ih\omega[c]^{(h)} + [k]^{(h)}\right\}\left\{q^{(h)}\right\} = \left\{\overline{f}_E^{(h)}\right\} + \left\{\overline{f}_{NL}^{(h)}\right\}$$

nel caso di un sistema lineare la matrice di riduzione è la matrice dei modi propri del sistema:

$$[R] = [\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n]$$

e le matrici ridotte sono matrici diagonali:

$$\begin{aligned} &[m] = [R]^T[M][R] = [I] \qquad [c] = [R]^T[C][R] = \text{diag}\,(c_p) \\ &[k] = [R]^T[K][R] = \text{diag}\left(\omega_p^2\right) \qquad \{f_E\} = [R]^T\{F_E\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

I modi propri del sistema lineare non possono però essere utilizzati per la riduzione di matrici di sistemi con zone di contatto, perché le forze di contatto dipendono dalle ampiezze delle oscillazioni e dal pre-carico del contatto.

3.5.1 Risposta del sistema con supporti in movimento

Si vuole ora trovare la risposta di un sistema i cui supporti sono in movimento, come nella figura 3.5. Chiamando x_1 il set di gradi di libertà dei nodi della struttura e x_2 il set di gradi di libertà dei nodi vincolati sui supporti mobili, l'equazione di equilibrio è:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_2 \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

dove r_2 sono le reazioni vincolari. Sviluppando il sistema si ottengono due equazioni, la prima si riferisce ai gradi di libertà interni e la seconda a quelli vincolati:

$$M_{11}\ddot{x}_1 + K_{11}x_1 = -K_{12}x_2 - M_{12}\ddot{x}_2$$
$$r_2 = M_{21}\ddot{x}_1 + M_{22}\ddot{x}_2 + K_{21}x_1 + K_{22}x_2$$

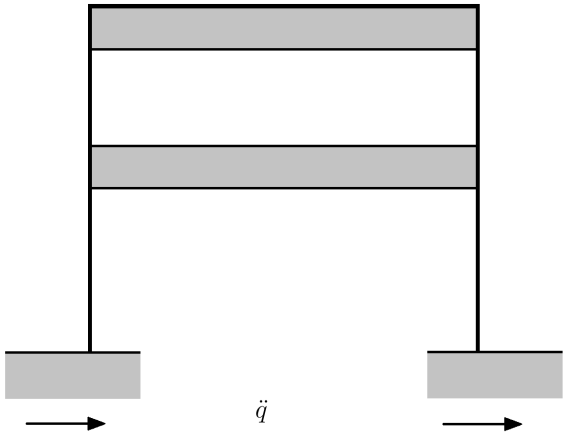

Figura 3.5: Sistema con supporti in movimento.

Trascurando i termini inerziali, la prima equazione diventa:

$$x_1 = -K_{11}^{-1} K_{12} x_2$$

In questo modo la risposta del sistema (3.9) si riscrive come segue:

$$x = \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

dove y_1 è la componente dinamica della risposta e

$$T = -K_{11}^{-1} K_{12}$$

Sostituendo nell'equazione (3.9) si ha che:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

Infine, la parte dinamica della risposta y_1 può essere espressa come la combinazione lineare delle forme modali dei nodi vincolati:

$$y_1 = \Phi_1 q_1 \qquad \rightarrow \qquad x = \begin{bmatrix} \Phi_1 & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

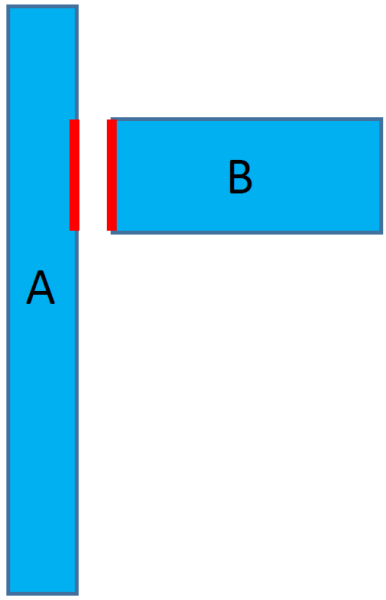

Figura 3.6: Schema dell'accoppiamento ala-fusoliera.

3.5.2 Metodo di Craig-Bampton

Il metodo di Craig-Bampton [3] esprime la dinamica del sistema come combinazione lineare dei modi statici, chiamati modi vincolati. L'espressione della risposta vale:

$$x = [R] \begin{Bmatrix} q \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

dove la prima colonna della matrice di riduzione si riferisce ai modi lineari con le interfacce fisse (sistema dinamico lineare), mentre la seconda si riferisce ai modi vincolati alle interfacce mobili.

Sistemi composti

Il metodo di riduzione di Craig-Bampton può essere utilizzato per effettuare l'analisi modale di strutture composte da sotto-strutture. Ad esempio è possibile eseguire l'analisi del sistema "aereo" studiando separatamente i sistemi "ala" e "fusoliera". Per la generica sotto-struttura, i gradi di libertà vengono suddivisi in due set:

$x_1 \rightarrow$ nodi interni (*slave*)

$x_2 \rightarrow$ nodi delle interfacce (*master*)

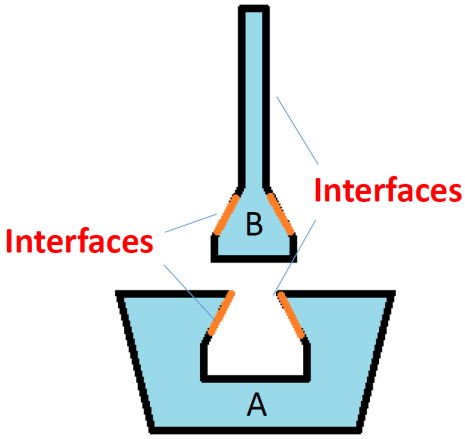

Figura 3.7: Schema dell'accoppiamento paletta-slot.

dove il primo set corrisponde ai modi lineari mentre il secondo ai modi vincolati. In questo caso vengono definite le matrici di massa e di rigidezza dei due sistemi, e le relative matrici di riduzione. Chiamando A il sistema della fusoliera e B il sistema dell'ala si ha:

$$[M^A] = \begin{bmatrix} M^A_{11} & M^A_{12} \\ M^A_{21} & M^A_{22} \end{bmatrix} \qquad [K^A] = \begin{bmatrix} K^A_{11} & K^A_{12} \\ K^A_{21} & K^A_{22} \end{bmatrix} \qquad [R^A] = \begin{bmatrix} \Phi^A & T^A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$[M^B] = \begin{bmatrix} M^B_{11} & M^B_{12} \\ M^B_{21} & M^B_{22} \end{bmatrix} \qquad [K^B] = \begin{bmatrix} K^B_{11} & K^B_{12} \\ K^B_{21} & K^B_{22} \end{bmatrix} \qquad [R^B] = \begin{bmatrix} \Phi^B & T^B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Le matrici ridotte sono calcolate allo stesso modo della (3.8).

L'assemblaggio delle matrici di massa e di rigidezza segue la stessa logica dell'assemblaggio delle matrici degli elementi finiti, ovvero si ottiene costruendo una matrice diagonale a blocchi con le matrici ridotte dei sistemi A e B, sovrapponendo gli elementi relativi ai gradi di libertà di interfaccia delle matrici del sistema A con gli elementi di interfaccia delle matrici del sistema B. Infatti vale la relazione:

$$\{x^A_2\} = \{x^B_2\}$$

Sistemi in contatto

Se i sistemi A e B sono in contatto è possibile che ci sia un moto relativo tra le interfacce, come ad esempio nel caso di una paletta di un disco palettato inserita nello slot. In questo caso i set

dei gradi di libertà sono:

$$x_L \rightarrow \text{nodi interni (}\textit{slave}\text{)}$$

$$x_N \rightarrow \text{nodi delle interfacce (}\textit{master}\text{)}$$

Come nel caso precedente le matrici ridotte hanno la stessa espressione:

$$[M^A] = \begin{bmatrix} M^A_{LL} & M^A_{LN} \\ M^A_{NL} & M^A_{NN} \end{bmatrix} \qquad [K^A] = \begin{bmatrix} K^A_{LL} & K^A_{LN} \\ K^A_{NL} & K^A_{NN} \end{bmatrix} \qquad [R^A] = \begin{bmatrix} \Phi^A & T^A \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$[M^B] = \begin{bmatrix} M^B_{LL} & M^B_{LN} \\ M^B_{NL} & M^B_{NN} \end{bmatrix} \qquad [K^B] = \begin{bmatrix} K^B_{LL} & K^B_{LN} \\ K^B_{NL} & K^B_{NN} \end{bmatrix} \qquad [R^B] = \begin{bmatrix} \Phi^B & T^B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Siccome può esistere un moto relativo tra le interfacce di contatto, i gradi di libertà delle interfacce di contatto dei due sistemi non corrispondono:

$$\left\{x^A_N\right\} \neq \left\{x^B_N\right\}$$

In questo caso l'assemblaggio delle matrici di massa e di rigidezza avviene senza la sovrapposizione degli elementi che si riferiscono ai gradi di libertà delle zone di contatto. La forma finale delle equazioni di governo è:

$$\begin{bmatrix} m^A & 0 \\ 0 & m^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}^A \\ \ddot{q}^B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c^A & 0 \\ 0 & c^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^A \\ \dot{q}^B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k^A & 0 \\ 0 & k^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^A \\ q^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^A_E \\ f^B_E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f^A_{NL} \\ f^B_{NL} \end{Bmatrix}$$

Capitolo 4

Simmetria ciclica

Le turbomacchine sono composte da elementi soggetti a rotazione e sollecitati ciclicamente da forze di diversa natura, quali ad esempio forze di pressione e forze di attrito. Nei capitoli precedenti si è focalizzata l'attenzione su un elemento singolo (una trave o una paletta) senza considerare che nel caso reale di una turbomacchina questi elementi possono essere presenti in simmetria ciclica, come si verifica in un disco palettato, ovvero in un sistema composto da tanti settori circolari identici. In questa configurazione il comportamento del sistema completo può essere determinato a partire da un singolo settore della simmetria per poi estendere il risultato al sistema completo, imponendo determinate condizioni al contorno.

4.1 Sistema con due gradi di libertà in simmetria ciclica

Si supponga di operare con un sistema a due gradi di libertà in simmetria ciclica, che rappresenta una paletta di turbina incastrata in un settore di un disco rotore (figura 4.1). In questo caso la massa m_1 è la massa del settore del disco legata a terra dalla rigidezza k_1, la massa m_2 è la massa della paletta legata al settore del disco dalla rigidezza k_2. Replicando il modello per N settori e accoppiandoli tra settori adiacenti si può ottenere il sistema completo in simmetria ciclica, visibile nella figura 4.2. Le equazioni di equilibrio del settore n-esimo sono:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1^{(n)} + k_1 x_1^{(n)} + k_2\left(x_1^{(n)} - x_2^{(n)}\right) + k_c\left(x_1^{(n)} - x_1^{(n+1)}\right) + k_c\left(x_1^{(n)} - x_1^{(n-1)}\right) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2^{(n)} + k_2\left(x_2^{(n)} - x_1^{(n)}\right) = 0 \end{cases}$$

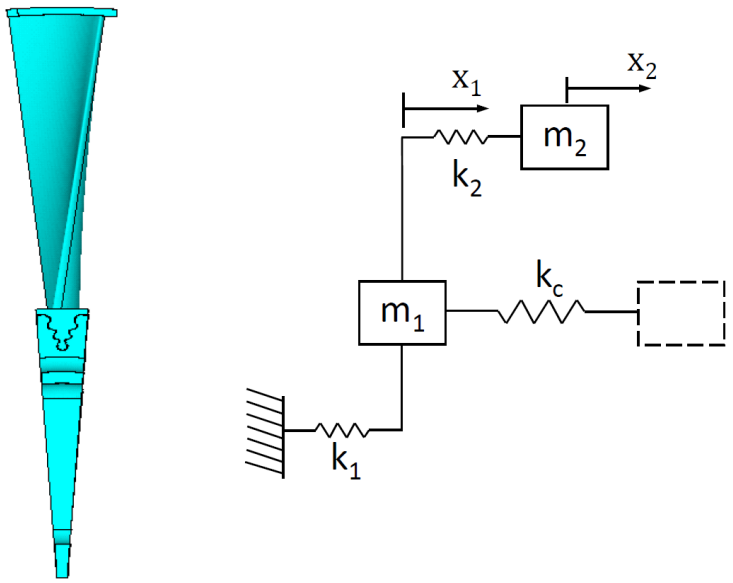

Figura 4.1: Settore in simmetria ciclica di una paletta di turbina (tratto da [1]).

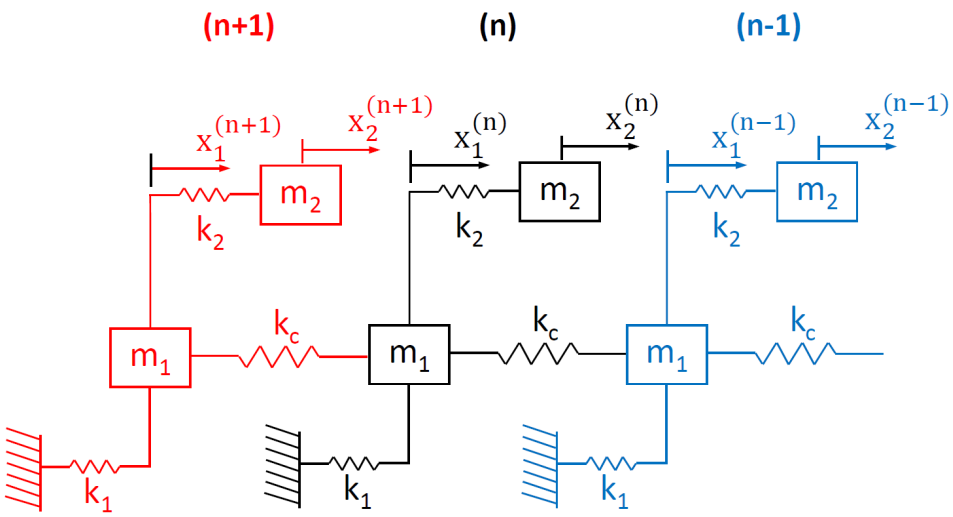

Figura 4.2: Accoppiamento di N paletta in simmetria ciclica (tratto da [1]).

dove i termini:

$$k_c\left(x_1^{(n)} - x_1^{(n+1)}\right), \qquad k_c\left(x_1^{(n)} - x_1^{(n-1)}\right)$$

rappresentano l'accoppiamento con i settori adiacenti. Raggruppando i termini delle equazioni di equilibrio in modo da evidenziare i vettori dei gradi di libertà di ogni settore, si possono riscrivere le equazioni in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1^{(n)} \\ \ddot{x}_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_c & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -k_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(n-1)} \\ x_2^{(n-1)} \end{Bmatrix} = 0$$

e in forma compatta:

$$\left[m^{(n)}\right]\left\{\ddot{x}^{(n)}\right\} + \left[k^{(n)}\right]\left\{x^{(n)}\right\} + \left[k_c^{(n)}\right]\left\{x^{(n+1)}\right\} + \left[k_c^{(n)}\right]\left\{x^{(n-1)}\right\} = 0 \tag{4.1}$$

Le equazioni di equilibrio (4.1) valgono per ogni settore del disco palettato, con $n = [1, N]$. Per il primo settore e per il settore N la (4.1) diventa:

$$n = 1: \quad \left[m^{(1)}\right]\left\{\ddot{x}^{(1)}\right\} + \left[k^{(1)}\right]\left\{x^{(1)}\right\} + \left[k_c^{(1)}\right]\left\{x^{(2)}\right\} + \left[k_c^{(1)}\right]\underline{\left\{x^{(N)}\right\}} = 0$$

$$n = \mathrm{N}: \quad \left[m^{(N)}\right]\left\{\ddot{x}^{(N)}\right\} + \left[k^{(N)}\right]\left\{x^{(N)}\right\} + \left[k_c^{(N)}\right]\underline{\left\{x^{(1)}\right\}} + \left[k_c^{(N)}\right]\left\{x^{(N-1)}\right\} = 0$$

I termini sottolineati evidenziano la ciclicità del sistema. Scrivendo le equazioni di equilibrio di tutti i settori del sistema:

$$\left[m^{(1)}\right]\left\{\ddot{x}^{(1)}\right\} + \left[k^{(1)}\right]\left\{x^{(1)}\right\} + \left[k_c^{(1)}\right]\left\{x^{(2)}\right\} + \left[k_c^{(1)}\right]\left\{x^{(N)}\right\} = 0$$

$$\dots$$

$$\left[m^{(n)}\right]\left\{\ddot{x}^{(n)}\right\} + \left[k^{(n)}\right]\left\{x^{(n)}\right\} + \left[k_c^{(n)}\right]\left\{x^{(n+1)}\right\} + \left[k_c^{(n)}\right]\left\{x^{(n-1)}\right\} = 0$$

$$\dots$$

$$\left[m^{(N)}\right]\left\{\ddot{x}^{(N)}\right\} + \left[k^{(N)}\right]\left\{x^{(N)}\right\} + \left[k_c^{(N)}\right]\left\{x^{(1)}\right\} + \left[k_c^{(N)}\right]\left\{x^{(N-1)}\right\} = 0$$

possono essere raggruppate in un'unica equazione in forma matriciale che rappresenta tutto il sistema:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0$$

con:

$$[M] = \begin{bmatrix} m^{(1)} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & m^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & m^{(N-1)} & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & m^{(N)} \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k^{(1)} & k_c^{(1)} & \dots & 0 & k_c^{(1)} \\ k_c^{(2)} & k^{(2)} & k_c^{(2)} & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & k_c^{(N-1)} & k^{(N-1)} & k_c^{(N-1)} \\ k_c^{(N)} & 0 & \dots & k_c^{(N)} & k^{(N)} \end{bmatrix}$$

Siccome tutti i settori sono in prima approssimazione identici, gli elementi della matrice di massa sono tutti uguali e $[M]$ è una matrice diagonale a blocchi composta dalle matrici di massa dei singoli settori, mentre $[K]$ è una matrice circolante a blocchi, ovvero le righe e le colonne esterne contengono i tre blocchi contenuti anche nelle altre righe/colonne, con una sequenza circolante:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & m & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & m \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k & k_c & \dots & 0 & \boxed{k_c} \\ k_c & k & k_c & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & k_c & k & k_c \\ \boxed{k_c} & 0 & \dots & k_c & k \end{bmatrix}$$

4.2 Proprietà modali dei solidi in simmetria ciclica

In un solido con simmetria ciclica di N settori, i modi propri del sistema rimangono sé stessi anche dopo la rotazione rigida di un angolo pari a $\varphi = 2\pi/N$, che corrisponde all'ampiezza angolare di un settore. I modi propri del sistema sono organizzati in un vettore, divisi per ogni settore:

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \\ \vdots \\ \Phi^{(N-1)} \\ \Phi^{(N)} \end{Bmatrix}$$

Ogni settore ha J gradi di libertà, per N settori. La dimensione di una forma modale è $J \cdot N \times 1$.

Per soddisfare il requisito della rotazione dei modi, le tipologie di modi possibili sono divise in tre categorie:

a. Le forme modali sono uguali in ogni settore: $\Phi^{(n)} = \Phi^{(n+1)}$.

b. Le forme modali sono uguali ma di segno opposto: $\Phi^{(n)} = -\Phi^{(n+1)}$.

c. Le forme modali sono differenti dalle altre due categorie.

Ci si concentra ora sulla tipologia *c*, in quanto le tipologie *a* e *b* sono dei casi particolari della *c*.

Forme modali di tipo *c*

Se $\{\Phi\}$ è un vettore delle forme modali, per il requisito della rotazione delle forme modali il vettore ottenuto dalla rotazione rigida di $\{\Phi\}$ di un angolo pari all'ampiezza di un settore:

$$\{\Phi'\} = \begin{Bmatrix} \Phi^{(N)} \\ \Phi^{(1)} \\ \vdots \\ \Phi^{(N-2)} \\ \Phi^{(N-1)} \end{Bmatrix}$$

è anch'esso una forma modale del sistema. Una forma modale $\{\Phi'\}$ ottenuta con questa rotazione, ha la stessa pulsazione naturale ω_n di $\{\Phi\}$. È possibile anche definire una forma modale $\{\hat{\Phi}\}$ ortogonale a $\{\Phi\}$, tale che la sua combinazione lineare con $\{\Phi\}$ sia:

$$\{\Phi'\} = c\{\Phi\} + s\{\hat{\Phi}\} \tag{4.2}$$

Se i vettori $\{\Phi\}$ e $\{\hat{\Phi}\}$ sono normalizzati (il loro modulo è unitario) allora per i parametri c e s vale la relazione:

$$c = \cos(\varphi) \qquad s = \sin(\varphi)$$

con $\varphi = 2\pi/N$. Una visualizzazione geometrica della combinazione (4.2) è riportata nella figura 4.3. Si può dimostrare che il vettore $\{\hat{\Phi}\}$ è anch'esso un autovettore associato alla pulsazione naturale ω_n[1]. È possibile ottenere inoltre un altro autovettore normalizzato $\{\hat{\Phi}'\}$ ortogonale a $\{\Phi'\}$ tale che:

$$\{\hat{\Phi}'\} = -s\{\Phi\} + c\{\hat{\Phi}\}$$

La visualizzazione degli autovettori è riportata nella figura 4.4. Componendo i risultati ottenuti

[1]La dimostrazione completa è riportata nel materiale del corso di *Dinamica dei Rotori per Applicazioni Aerospaziali* [1].

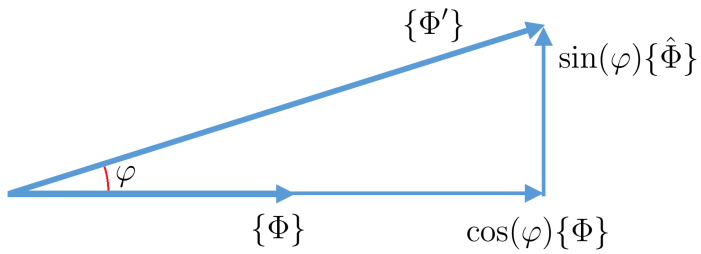

Figura 4.3: Visualizzazione della combinazione tra $\{\Phi\}$ e $\{\hat{\Phi}\}$.

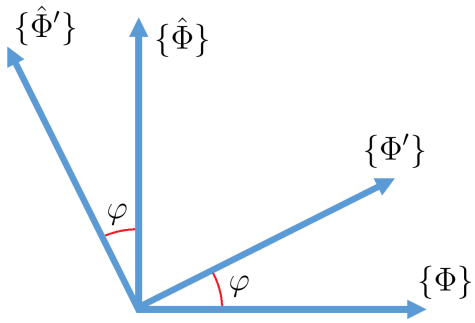

Figura 4.4: Visualizzazione degli autovettori $\{\Phi\}$, $\{\hat{\Phi}\}$, $\{\Phi'\}$ e $\{\hat{\Phi}'\}$.

si può scrivere che:

$$\begin{Bmatrix} \Phi' \\ \hat{\Phi}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{NJ}\cos(\varphi) & I_{NJ}\sin(\varphi) \\ -I_{NJ}\sin(\varphi) & I_{NJ}\cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi \\ \hat{\Phi} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

dove I_{NJ} è una matrice identità di dimensione $N \cdot J$, numero di gradi di libertà del modello completo.

Essendo i vettori $\{\Phi\}$ e $\{\hat{\Phi}\}$ perpendicolari, il loro prodotto vettoriale è:

$$\{\Phi\}^T\{\hat{\Phi}\} = 0$$

Siccome anche $\{\Phi'\}$ e $\{\hat{\Phi}'\}$ sono perpendicolari e quindi deve valere:

$$\{\Phi'\}^T\{\hat{\Phi}'\} = 0$$

conoscendo la forma di $\{\Phi'\}$ si ha che:

$$\{\Phi'\} = \begin{Bmatrix} \Phi^{(N)} \\ \Phi^{(1)} \\ \vdots \\ \Phi^{(N-2)} \\ \Phi^{(N-1)} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \{\hat{\Phi}'\} = \begin{Bmatrix} \hat{\Phi}^{(N)} \\ \hat{\Phi}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\Phi}^{(N-2)} \\ \hat{\Phi}^{(N-1)} \end{Bmatrix}$$

È possibile quindi utilizzare la relazione (4.3) per scrivere la coppia di modi $\{\Phi''\}$ e $\{\hat{\Phi}''\}$ come rotazione rigida dei modi $\{\Phi'\}$ e $\{\hat{\Phi}'\}$:

$$\begin{Bmatrix} \Phi'' \\ \hat{\Phi}'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{NJ}\cos(\varphi) & I_{NJ}\sin(\varphi) \\ -I_{NJ}\sin(\varphi) & I_{NJ}\cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi' \\ \hat{\Phi}' \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

Il significato del risultato ottenuto è che è possibile ottenere una qualsiasi coppia di modi come combinazione lineare dei modi iniziali $\{\Phi\}$ e $\{\hat{\Phi}\}$. Inoltre, vi è la conseguenza che i modi di tipo c danno molteplicità doppia, ovvero esistono coppie di modi con la stessa pulsazione naturale ω_n.

4.2.1 Modi complessi

Nel paragrafo 4.2 si è visto che la combinazione lineare di due autovettori normalizzati ortogonali associati allo stesso autovalore fornisce come risultato un altro autovettore:

$$\{\Phi'\} = a\{\Phi\} + b\{\hat{\Phi}\}$$

Se i coefficienti a e b sono reali, allora anche l'autovettore $\{\Phi'\}$ combinazione lineare è reale. È tuttavia possibile scegliere coefficienti complessi, nel qual caso il risultato sarà comunque un autovettore associato allo stesso autovalore. In particolare, se si scelgono i parametri:

$$a = 1\,, \qquad b = i$$

la combinazione lineare tra $\{\Phi\}$ e $\{\hat{\Phi}\}$ diventa:

$$\{\overline{\Theta}\} = \{\Phi\} + i\{\hat{\Phi}\}$$

soluzione dell'equazione del sistema omogeneo non smorzato. Come per il caso degli autovettori reali, si definisce $\{\overline{\Theta}'\}$ l'autovettore ottenuto dalla rotazione del modo complesso $\{\overline{\Theta}\}$:

$$\{\overline{\Theta}'\} = \{\Phi'\} + i\{\hat{\Phi}'\}$$

La relazione tra $\{\overline{\Theta}\}$ e $\{\overline{\Theta}'\}$ è:

$$\{\overline{\Theta}'\} = \{\overline{\Theta}\}e^{-i\varphi}$$

che se si esplicita con la sua rappresentazione polare si ottiene:

$$\{\Phi'\} + i\{\hat{\Phi}'\} = \left(\{\Phi\} + i\{\hat{\Phi}\}\right)(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$$

Se si uguagliano le parti reali e le parti immaginarie si ottengono le due relazioni:

$$\begin{aligned}\{\Phi'\} &= \{\Phi\}\cos(\varphi) + \{\hat{\Phi}\}\sin(\varphi)\\ \{\hat{\Phi}'\} &= -\{\Phi\}\sin(\varphi) + \{\hat{\Phi}\}\cos(\varphi)\end{aligned}$$

che scritte in forma matriciale diventano l'equazione (4.3). Dato che il vettore complesso delle forme modali $\{\overline{\Theta}'\}$ può essere ottenuto dalla rotazione rigida di $\{\overline{\Theta}\}$, valgono le relazioni:

$$\{\overline{\Theta}\} = \begin{Bmatrix} \overline{\Theta}^{(1)} \\ \overline{\Theta}^{(2)} \\ \vdots \\ \overline{\Theta}^{(N-1)} \\ \overline{\Theta}^{(N)} \end{Bmatrix}, \qquad \{\overline{\Theta}'\} = \begin{Bmatrix} \overline{\Theta}^{(N)} \\ \overline{\Theta}^{(1)} \\ \vdots \\ \overline{\Theta}^{(N-2)} \\ \overline{\Theta}^{(N-1)} \end{Bmatrix}, \qquad \{\overline{\Theta}'\} = \{\overline{\Theta}\}e^{-i\varphi}$$

ovvero per il generico settore vale la relazione:

$$\left\{\overline{\Theta}^{(n-1)}\right\} = \left\{\overline{\Theta}^{(n)}\right\} e^{-i\varphi} \tag{4.5}$$

Questo risultato permette di capire che le forme modali di tutto il sistema possono essere calcolate a partire dalla forma modale di un settore, chiamato *settore fondamentale*. In particolare le forme modali di due settori adiacenti saranno uguali ma sfasate di un angolo φ. Prendendo come riferimento il primo settore:

$$\left\{\overline{\Theta}^{(n)}\right\} = \left\{\overline{\Theta}^{(1)}\right\} e^{-i(n-1)\varphi} \tag{4.6}$$

4.2.2 Angoli di sfasamento φ ammessi

Dopo un numero N di rotazioni di un modo, si deve ottenere nuovamente il vettore iniziale. Si introduce l'*indice armonico*, h, ovvero il numero intero di giri che deve compiere l'angolo φ ruotando attraverso N settori. Da questa definizione si ottiene la relazione:

$$N\varphi = 2\pi h$$

dalla quale si ricavano i valori ammessi dell'angolo φ, chiamato *Inter-Blade Phase Angle* (IBPA):

$$\varphi = h\frac{2\pi}{N} \tag{4.7}$$

Ricordando la (4.5) si ha che:

- per $h = 0 \;\rightarrow\; \varphi = 0$: la forma modale di ogni settore è uguale alla forma modale dei settori adiacenti, ovvero corrisponde al modo di tipo *a*;
- per $h = N/2 \;\rightarrow\; \varphi = \pi$: la forma modale di ogni settore è uguale alla forma modale dei settori adiacenti con segno invertito, ovvero corrisponde al modo di tipo *b*. Questa forma modale esiste solo se il numero di settori N è pari;
- per tutti gli altri valori di h si ha il modo di tipo *c*.

Nei casi $h = 0$ e $h = N/2$ i modi propri sono reali, e lo sfasamento vale rispettivamente 0 e π.

Si noti inoltre che essendo la funzione esponenziale e^{ix} periodica, si ha che:

$$e^{i\varphi} = e^{ih\frac{2\pi}{N}} = e^{i\left(h\frac{2\pi}{N}-2\pi\right)} = e^{i(h-N)\frac{2\pi}{N}}$$

ovvero lo sfasamento dovuto a $h = -1$ è uguale allo sfasamento $h = N - 1$, lo sfasamento dovuto a $h = -2$ è uguale allo sfasamento $h = N - 2$ e così via fino a $h = N/2$[2]. Quindi un modo calcolato con h negativo è equivalente ad un modo calcolato con h positivo. Se si definiscono due IBPA associati allo stesso indice armonico h con segno invertito:

$$\varphi_+ = h\frac{2\pi}{N}\,, \qquad \varphi_- = -h\frac{2\pi}{N}$$

[2]Se il numero dei settori è pari, h arriva fino a $N/2$, mentre per un numero di settori dispari h arriva fino a $(N-1)/2$

e se si scrive il modo associato all'angolo φ_+ come combinazione lineare di due modi reali associati allo stesso autovalore:

$$\{\overline{\Theta}_+\} = \{\Phi\} + i\{\hat{\Phi}\} \tag{4.8}$$

si può scrivere il modo associato all'angolo φ_- come:

$$\{\overline{\Theta}_-\} = \{\Phi\} - i\{\hat{\Phi}\} \tag{4.9}$$

In conclusione, siccome gli autovettori complessi $\{\overline{\Theta}_+\}$ e $\{\overline{\Theta}_-\}$ sono ricavati dalla combinazione lineare tra $\{\Phi\}$ e $\{\hat{\Phi}\}$, essi sono associati a due onde contro-rotanti che si riferiscono allo stesso autovalore. Quindi, calcolati i modi e le frequenze del sistema associati a indici armonici h positivi, non è necessario calcolare modi e frequenze anche per gli indici armonici negativi. Riassumendo, si possono calcolare solo i modi con $0 \leq h \leq N/2$ per N pari e $0 \leq h \leq (N-1)/2$ per N dispari:

$$N \textbf{ pari:} \quad \begin{cases} h = 0 & \rightarrow \text{modo di tipo } a. \\ 0 < h < \frac{N}{2} & \rightarrow \text{modi di tipo } c\text{, molteplicità doppia.} \\ h = \frac{N}{2} & \rightarrow \text{modo di tipo } b. \end{cases}$$

$$N \textbf{ dispari:} \quad \begin{cases} h = 0 & \rightarrow \text{modo di tipo } a. \\ 0 < h \leq \frac{N-1}{2} & \rightarrow \text{modi di tipo } c\text{, molteplicità doppia.} \end{cases}$$

Il modo di tipo *b* non esiste per N dispari.

4.2.3 Relazioni tra modi reali e modi complessi

Ricordando le espressioni (4.8) e (4.9) dei modi complessi, si definiscono le loro combinazioni lineari dalle quali si ottengono i modi reali:

$$\{\Phi\} = \frac{\{\overline{\Theta}_+\} + \{\overline{\Theta}_-\}}{2} \qquad \{\hat{\Phi}\} = \frac{\{\overline{\Theta}_+\} - \{\overline{\Theta}_-\}}{2} \tag{4.10}$$

Per il generico settore n le relazioni (4.8) e (4.9) sono:

$$\{\overline{\Theta}_+^{(n)}\} = \{\Phi^{(n)}\} + i\{\hat{\Phi}^{(n)}\} \qquad \{\overline{\Theta}_-^{(n)}\} = \{\Phi^{(n)}\} - i\{\hat{\Phi}^{(n)}\}$$

La prima delle (4.10) diventa allora:

$$\{\Phi\} = \frac{\{\overline{\Theta}_+\} + \{\overline{\Theta}_-\}}{2} = \begin{Bmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(1)}\cos(\varphi) - \hat{\Phi}^{(1)}\sin(\varphi) \\ \vdots \\ \Phi^{(1)}\cos((n-1)\varphi) - \hat{\Phi}^{(1)}\sin((n-1)\varphi) \\ \vdots \\ \Phi^{(1)}\cos((N-1)\varphi) - \hat{\Phi}^{(1)}\sin((N-1)\varphi) \end{Bmatrix}$$

In generale allora:

$$\{\Phi^{(n+1)}\} = \Phi^{(1)}\cos(n\varphi) - \hat{\Phi}^{(1)}\sin(n\varphi)$$

e per il generico grado di libertà j:

$$\Phi_j^{(n+1)} = \Phi_j^{(1)}\cos(n\varphi) - \hat{\Phi}_j^{(1)}\sin(n\varphi)$$

4.3 Risposta forzata

L'analisi modale è molto utile per individuare le pulsazioni di risonanza del sistema, ma è necessario effettuare anche l'analisi della risposta forzata per evitare che le frequenze delle forzanti siano simili alle frequenze naturali.

Nel caso di un disco palettato in rotazione con velocità Ω, esso è inserito in un condotto assial-simmetrico. Se fosse l'unico elemento meccanico, il campo di pressione sarebbe anch'esso assial-simmetrico. La presenza altri elementi all'interno del condotto, quali soprattutto le palettature statoriche a monte e a valle dello stadio rotorico, determina un campo di pressione variabile che si traduce in una forzante periodica con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Essendo la forzante periodica, la si può approssimare con lo sviluppo in serie di Fourier, ovvero come la somma di un numero finito di componenti armoniche. Chiamando α l'angolo di rotazione del settore circolare e l'*engine order* l'ordine dello sviluppo, si scrive:

$$F(\alpha) = F_0 + \sum_{\text{eo}} \left[F_c^{(\text{eo})}\cos(\text{eo}\cdot\alpha) + F_s^{(\text{eo})}\sin(\text{eo}\cdot\alpha)\right] = F_0 + \sum_{\text{eo}} F^{(\text{eo})}\cos(\text{eo}\cdot\alpha + \delta)$$

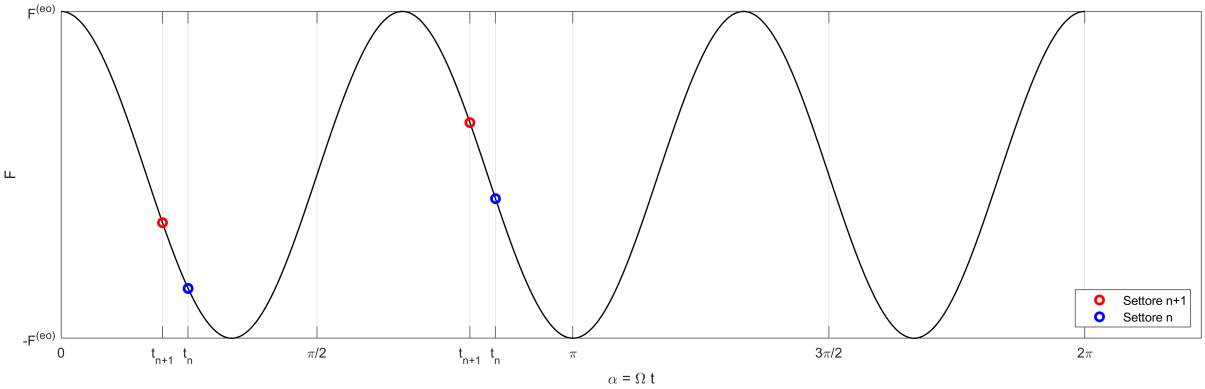

Figura 4.5: Andamento della forzante su un disco palettato per il settore n e $n+1$.

dove:

$$F^{(\mathrm{eo})} = \sqrt{\left(F_c^{(\mathrm{eo})}\right)^2 + \left(F_s^{(\mathrm{eo})}\right)^2} \qquad \tan(\delta) = -\frac{F_s^{(\mathrm{eo})}}{F_c^{(\mathrm{eo})}}$$

Se la velocità Ω è costante e il campo di pressione è stazionario, tutti i settori circolari del disco vengono sollecitati allo stesso modo con un ritardo Δt tra settori consecutivi. In figura 4.5 è illustrato un possibile andamento della forzante su due settori del disco rotore per eo $= 3$: lo spettro di carico è identico per entrambi i settori ma il settore $n+1$ è in ritardo di $t_n - t_{n+1} = \Delta t$. La pulsazione della forzante sul singolo settore vale:

$$\omega = \mathrm{eo} \cdot \Omega$$

L'andamento della forzante allora si può esprimere con la relazione:

$$F^{(n)} = F^{(\mathrm{eo})} \cos(\omega t + \delta)$$

dove δ è una generica fase. Per due settori consecutivi, distanziati un angolo $\varphi = 2\pi/N$, il ritardo Δt del settore $n+1$ è:

$$t_n - t_{n+1} = \Delta t = \frac{2\pi}{N\Omega}$$

Per il generico settore consecutivo $n+1$, in presenza di un certo *engine order* le forze che agiscono su due settori consecutivi sono sfasate di un angolo ψ:

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= F^{(\mathrm{eo})} \cos(\omega t + \delta) \\ F^{(n+1)} &= F^{(\mathrm{eo})} \cos\left(\omega t - \mathrm{eo}\frac{2\pi}{N} + \delta\right) = F^{(\mathrm{eo})} \cos(\omega t - \psi + \delta) \\ \psi &= \mathrm{eo}\frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

Esprimendo il vettore dei carichi utilizzando la notazione complessa per il settore n e $n+1$ si ottiene la relazione:

$$F^{(\mathrm{n})} = F^{(\mathrm{eo})} e^{i\omega t} e^{i\delta} = \overline{F}^{(\mathrm{eo})} e^{i\omega t}$$
$$F^{(\mathrm{n+1})} = F^{(\mathrm{eo})} e^{i\omega t} e^{i\delta} e^{-i\psi} = F^{(\mathrm{n})} e^{-i\psi}$$

Il vettore delle forzanti per l'intero disco associato a un determinato *engine order* si può allora scrivere come:

$$\{F_{\mathrm{eo}}\} = \begin{Bmatrix} I_J \\ I_J e^{-i\psi} \\ \vdots \\ I_J e^{-i(n-1)\psi} \\ \vdots \\ I_J e^{-i(N-2)\psi} \\ I_J e^{-i(N-1)\psi} \end{Bmatrix} \{F^{(\mathrm{eo})}\}$$

dove I_J è la matrice identità di dimensione J, il numero dei gradi di libertà del singolo settore.

4.3.1 Diagramma di Campbell

Il diagramma di Campbell è molto utile per prevedere quali saranno le frequenze naturali di un sistema con simmetria ciclica. Esso presenta in ascissa la velocità angolare del rotore e in ordinata le frequenze che eccitano il sistema. Considerando in prima approssimazione costanti le frequenze naturali[3] appartenenti a una famiglia di frequenze di risonanza, esse sono rette parallele all'asse delle ascisse. Si è vista nel paragrafo precedente la relazione tra la frequenza eccitante e la velocità di rotazione del rotore:

$$\omega = \mathrm{eo} \cdot \Omega$$

che, riportata sul diagramma di Campbell, è rappresentata da una semiretta del primo quadrante con coefficiente angolare l'*engine order*. Il diagramma è visibile nella figura 4.6. L'incrocio tra la pulsazione della forzante e la pulsazione naturale è un possibile punto di risonanza. Considerando anche le altre famiglie modali, nella figura 4.7 sono illustrati altri possibili punti di

[3] Nella realtà le frequenze di risonanza per un rotore aumentano all'aumentare della velocità di rotazione Ω, che ha un effetto irrigidente sul sistema.

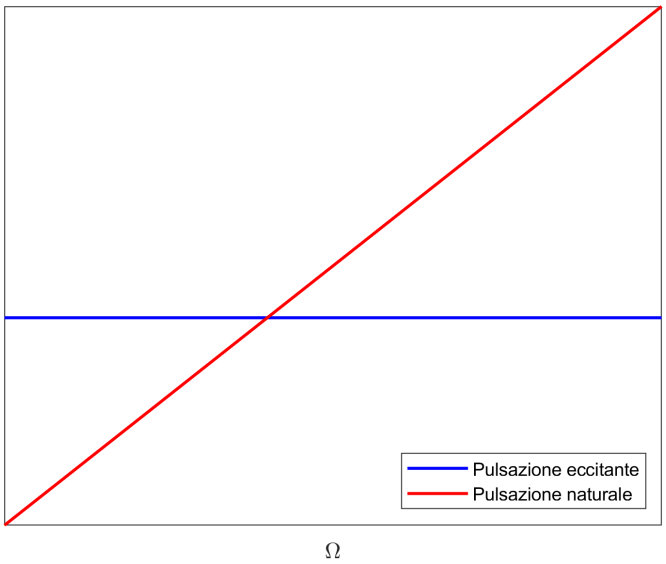

Figura 4.6: Diagramma di Campbell.

incrocio, ognuno dei quali rappresenta potenzialmente una risonanza. Occorre però verificare quali siano i requisiti, oltre agli incroci, per trovare le velocità angolari Ω associate alle frequenze naturali. Come affermato nel capitolo 2, si ricercano le frequenze naturali risolvendo il problema agli autovalori dell'equazione (2.12):

$$\text{diag}\left(-\omega^2 + i\omega c_n + \omega_n^2\right)\{\overline{q}\} = [\Phi]^T\{\overline{F}\}$$

che per il generico modo n diventa:

$$\overline{q}_n = \frac{[\Phi]_n^T\{\overline{F}\}}{-\omega^2 + i\omega c_n + \omega_n^2} = \frac{\overline{f}_n}{-\omega^2 + i\omega c_n + \omega_n^2}$$

Questo significa che affinché il sistema sia in risonanza devono sussistere due condizioni:

$$\begin{cases} \omega = \omega_n \\ \overline{f}_n = [\Phi]_n^T\{\overline{F}\} \neq 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Si è visto nel paragrafo precedente come la forzante applicata a un generico settore sia la stessa per tutti i settori del sistema, sfasata di un angolo $\psi = \text{eo} \cdot 2\pi/N$. Per quanto riguarda i modi

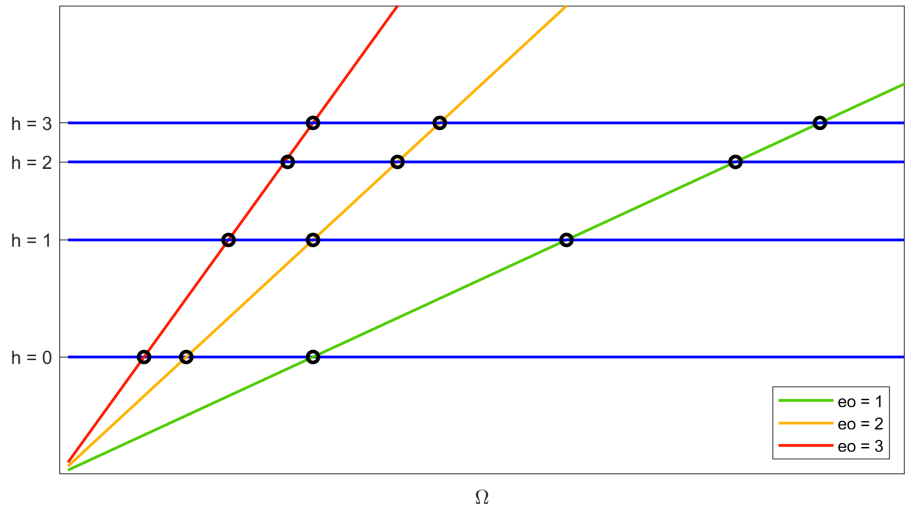

Figura 4.7: Diagramma di Campbell per eo $= 1, 2, 3$.

del sistema, essi seguono la (4.6):

$$\{\overline{\Theta}_P\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\varphi} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\varphi} \\ \vdots \\ e^{-i(N-1)\varphi} \end{Bmatrix} \{\overline{\Theta}_P^{(1)}\}$$

per verificare la seconda delle condizioni (4.11), si effettua il prodotto scalare tra il vettore delle forzanti e il vettore delle forme modali:

$$\{\overline{\Theta}_P\}^T\{F_P\} = \{\overline{\Theta}_P^{(1)}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\varphi} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\varphi} \\ \vdots \\ e^{-i(N-1)\varphi} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\psi} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\psi} \\ \vdots \\ e^{-i(N-1)\psi} \end{Bmatrix} \{F_P^{(\mathrm{eo})}\}$$

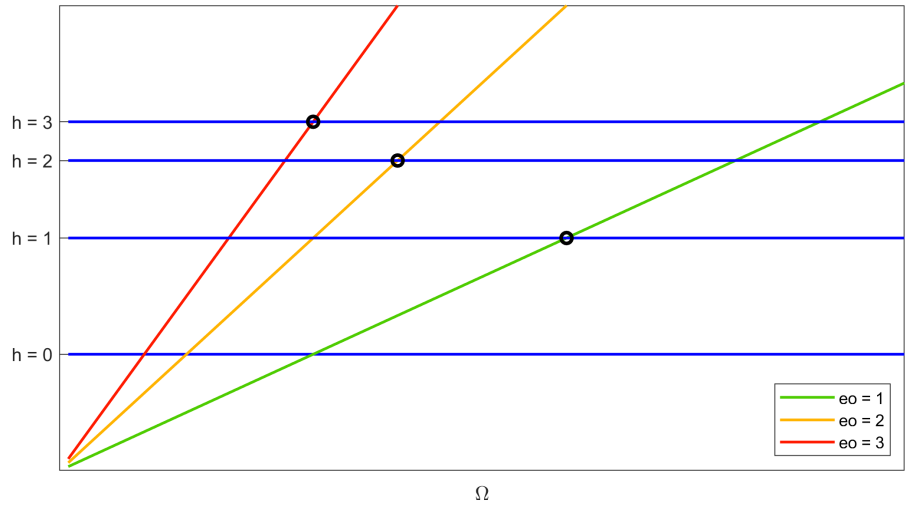

Figura 4.8: Diagramma di Campbell: frequenze di risonanza.

Analizzando solamente il prodotto scalare tra le matrici:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\varphi} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\varphi} \\ \vdots \\ e^{-i(N-1)\varphi} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\psi} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\psi} \\ \vdots \\ e^{-i(N-1)\psi} \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varphi} e^{-in\psi} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(h-\mathrm{eo})\frac{2\pi}{N}} \tag{4.12}$$

dato che:

$$\varphi = h\frac{2\pi}{N} \qquad \psi = \mathrm{eo}\frac{2\pi}{N}$$

La soluzione della sommatoria (4.12) è:

$$\begin{aligned} &\text{Per } h = \mathrm{eo} \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(h-\mathrm{eo})\frac{2\pi}{N}} = N \\ &\text{Per } h \neq \mathrm{eo} \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(h-\mathrm{eo})\frac{2\pi}{N}} = 0 \end{aligned} \quad , \qquad \text{per } 0 < \mathrm{eo} < N$$

Quindi le velocità angolari che determinano la risonanza del sistema sono solamente quelle per cui $h = \mathrm{eo}$, come illustrato nella figura 4.8. I risultati ottenuti sono validi per $0 < \mathrm{eo} < N$, ma è possibile che l'*engine order* sia maggiore del numero dei settori. Per estendere il risultato

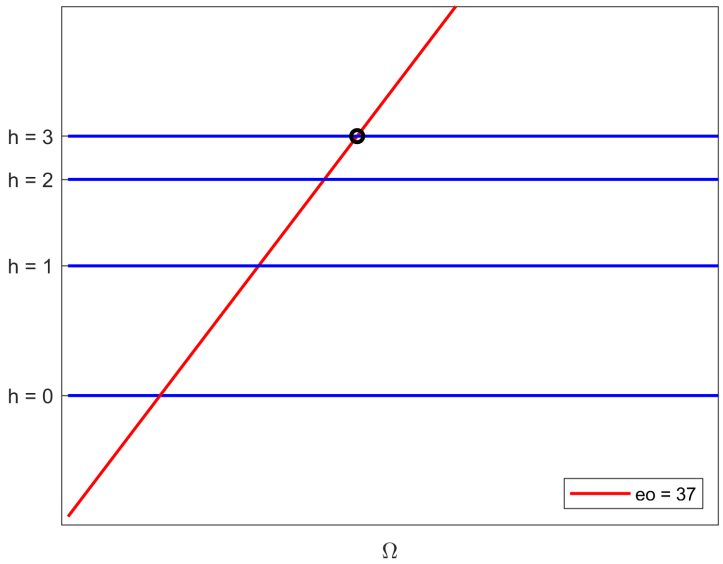

Figura 4.9: Diagramma di Campbell: frequenza di risonanza per eo $= 37$.

precedente la sommatoria (4.12) diventa:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{inh\frac{2\pi}{N}} e^{-in\text{eo}\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{inh\frac{2\pi}{N}} e^{-in(kN+\text{eo}')\frac{2\pi}{N}} =$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{inh\frac{2\pi}{N}} e^{-in(\text{eo}')\frac{2\pi}{N}} e^{-ink2\pi N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{inh\frac{2\pi}{N}} e^{-in(\text{eo}')\frac{2\pi}{N}}$$

dove $0 < \text{eo}' < N$. La condizione di risonanza si ha per:

$$\text{eo}' = |\text{eo} - kN| = h$$

Ad esempio per eo $= 37$ riferito a un sistema composto da 40 settori, le frequenze di risonanza si troveranno in corrispondenza di $h = |\text{eo} - kN| = |37 - 40| = 3$, come illustrato nella figura 4.9.

Capitolo 5

Analisi

In questo capitolo viene descritto come è stato concepito l'algoritmo, sviluppato a partire dal caso del sistema a un solo grado di libertà (paragrafo 2.1) fino all'analisi di una paletta di turbina con tettuccio. La prima parte è stata realizzata completamente con il linguaggio di programmazione Python, dalla costruzione delle matrici di rigidezza e di massa alla vera e propria analisi modale. Nella seconda parte, l'analisi della paletta, per l'assemblaggio delle matrici di massa e rigidezza si è utilizzato il programma Ansys®. Le matrici sono poi state utilizzate all'interno dell'algoritmo implementato per l'analisi modale e per la risposta forzata.

5.1 Sistema con N gradi di libertà

In modo corrispondente a quanto esposto nel paragrafo 2.2, si è considerato un sistema composto da N masse collegate tra di loro con un elemento elastico e un elemento smorzante. Vi è un unico grado di libertà per ogni massa, per un totale di N gradi di libertà. Scrivendo l'equazione di equilibrio per la generica massa n si ha:

$$m_n\ddot{x}_n + (c_n + c_{n+1})\dot{x}_n - c_n\dot{x}_{n+1} + (k_n + k_{n+1})\dot{x}_n - k_n x_2 = F_1$$

In generale, per un sistema composto da N gradi di libertà, le equazioni di equilibrio si possono scrivere nella forma compatta (2.6):

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

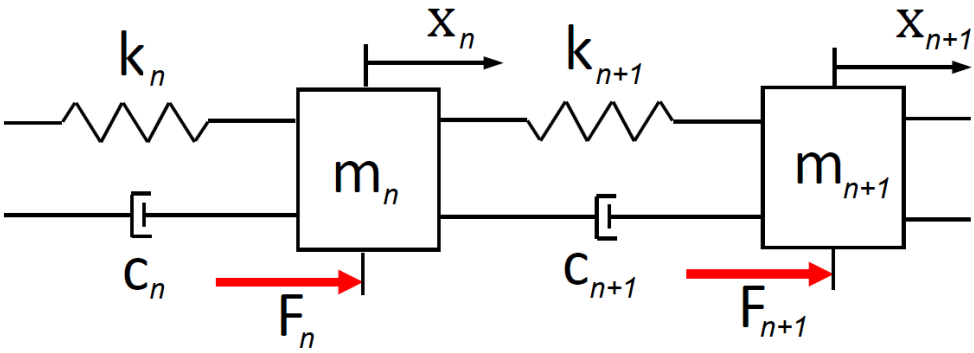

Figura 5.1: Sistema forzato massa-molla-smorzatore, N DOF

dove le matrici di massa, smorzamento e rigidezza hanno la forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & m_{N-1} & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & m_N \end{bmatrix} \rightarrow [M] = \text{diag}(m_n)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ & & & & \\ \dots & & & & \\ & & & & \\ & & 0 & -c_{N-1} & c_{N-1} + c_N \end{bmatrix} \rightarrow [C] = \text{tridiag}(-c_n - 1, c_n + c_{n+1}, -c_{n+1})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ & & & & \\ \dots & & & & \\ & & & & \\ & & 0 & -k_{N-1} & k_{N-1} + k_N \end{bmatrix} \rightarrow [K] = \text{tridiag}(-k_{n-1}, k_n + k_{n+1}, -k_{n+1})$$

Per mezzo delle matrici di massa e di rigidezza sono stati calcolati gli autovalori, disposti in un vettore, e gli autovettori del sistema, disposti nella matrice $[\Psi]$, utilizzando le funzioni dedicate all'algebra lineare [4].

Successivamente è stato calcolato il fattore di scala α_n con la metodologia descritta nel paragrafo 2.3. Il fattore di scala è stato utilizzato per m-normalizzare la matrice dei modi di oscillazione:

$$[\Phi_n] = \frac{[\Psi_n]}{\alpha_n}$$

La matrice dei modi m-normalizzati è stata poi usata per diagonalizzare la matrice di smorzamento $[C]$ del sistema. Non occorre applicare il procedimento alle matrici di massa e di rigidezza essendo nota a priori la loro forma normalizzata. Infatti dalla (2.11):

$$[M_{mod}] = [I]$$
$$[K_{mod}] = \text{diag}\left(\omega_n^2\right)$$

Conoscendo la forma della matrice di recettanza, espressa dalla (2.14):

$$[A(\omega)] = [\Phi]\text{diag}\left(\frac{1}{-\omega^2 + i\omega c_n + \omega_n^2}\right)[\Phi]^T$$

è stato possibile infine calcolare le ampiezze massime di oscillazione in coordinate fisiche utilizzando la prima delle (2.13):

$$\{\overline{x}\} = [A(\omega)]\{F\}$$

Nella figura 5.2 sono presentati i grafici delle ampiezze di oscillazione in funzione della frequenza della forzante F di un sistema a $N = 2$ e di un sistema a $N = 10$ dieci gradi di libertà. In questo caso sono state utilizzate tutte le masse uguali ($m_1 = m_2 = \cdots = m_N = 1$), tutti gli smorzamenti uguali ($c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0.01$) e tutte le rigidezze uguali ($k_1 = k_2 = \cdots = k_N = 10$). La forzante è stata posta solamente su una massa. Si nota che le frequenze di risonanza sono pari al numero di gradi di libertà: infatti il problema agli autovalori ha un numero di soluzioni pari alla dimensione delle matrici $[M]$ e $[K]$, ovvero N.

Modello di contatto

Il contatto è stato modellizzato effettuando l'analisi dei coefficienti di Fourier. A partire dagli spostamenti dei nodi di contatto ricavati dall'analisi lineare e impostando una forza normale di contatto N_0 tale per cui:

$$F_c = \mu N_0$$

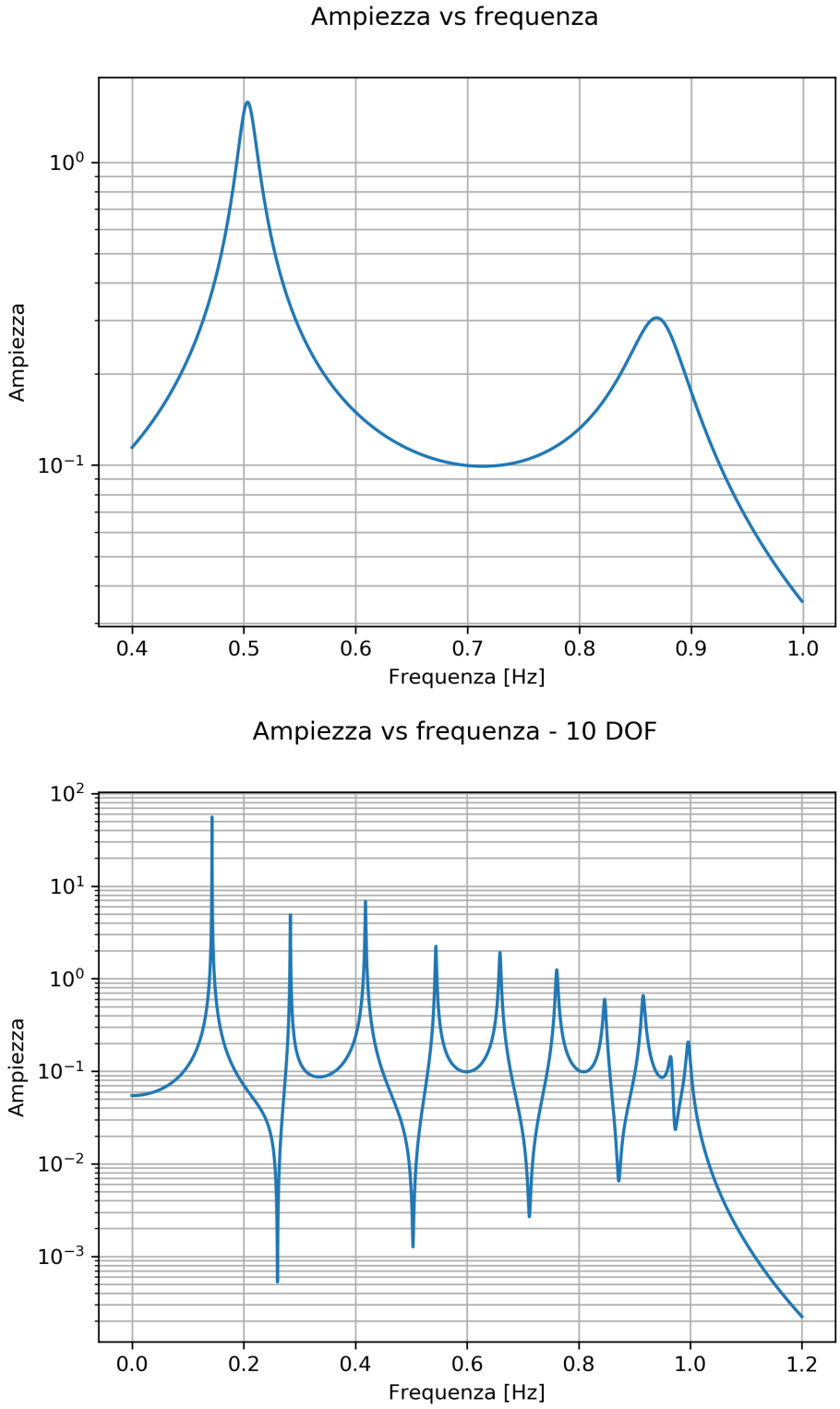

Figura 5.2: Sistema forzato con $N = 2$ e $N = 10$ DOF

L'andamento periodico degli spostamenti tangenziali e l'andamento della forza di contatto tangenziale sono stati calcolati tramite la trasformata di Fourier inversa. Definito il ciclo della forza di contatto, ne sono stati ricavati i coefficienti di Fourier, poi utilizzati per la risoluzione del sistema (3.4)[1]. Il sistema è stato risolto con il metodo iterativo Newton-Raphson.

Per il calcolo della risposta forzata è stata inclusa anche la matrice di smorzamento, considerata proporzionale alle matrici di massa e rigidezza con costante di proporzionalità α:

$$[C] = \alpha\left([M] + [K]\right)$$

Per inizializzare il metodo iterativo occorre fornire un valore iniziale per la stima della soluzione. Per aumentare la stabilità del metodo, come valore iniziale è stata fornita la soluzione del caso *stick* completo, calcolata sommando alla matrice di rigidezza del sistema la rigidezza del contatto k_t in corrispondenza dei nodi di contatto.

Il grafico della risposta forzata del sistema a un grado di libertà con attrito è visibile nella figura 5.3: al variare della forza di contatto la soluzione tende all'andamento del caso *full stick*. Nella figura 5.4 sono presenti i diagrammi di ottimizzazione.

5.2 Trave beam

Con riferimento alla figura 5.5, l'elemento beam è un elemento di tipo trave composto da due nodi, ai quali sono associati due gradi di libertà, uno di traslazione perpendicolare all'orientamento dell'elemento (w_1 per il primo nodo) e uno di rotazione intorno al nodo (w_1' per il primo nodo). All'elemento, di lunghezza L, sono associate le proprietà del materiale, il modulo di Young E e la densità ρ, e le proprietà geometriche, riassunte nel momento di inerzia J.

Matrice di massa e matrice di rigidezza

Per il singolo elemento è possibile ricavare le espressioni della matrice di massa e della matrice di rigidezza a partire dalle funzioni di forma associate all'elemento. In generale le matrici di

[1] La metodologia utilizzata per la scrittura dell'algoritmo che genera il ciclo di isteresi della forza di contatto è descritta nell'articolo "*Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces*" [5].

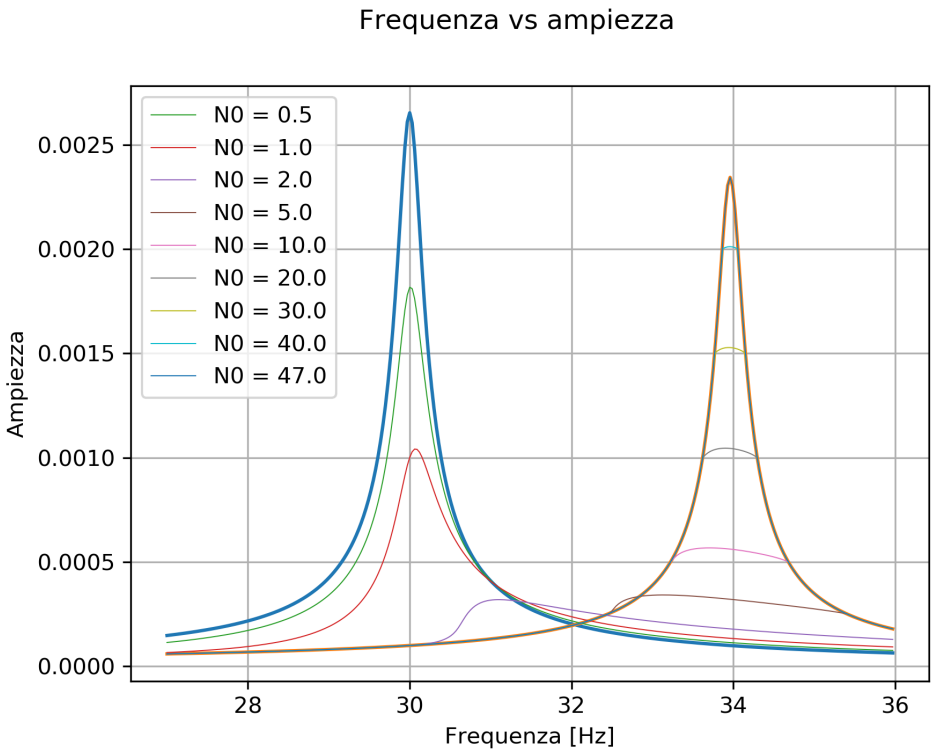

Figura 5.3: Risposta forzata del sistema a un grado di libertà.

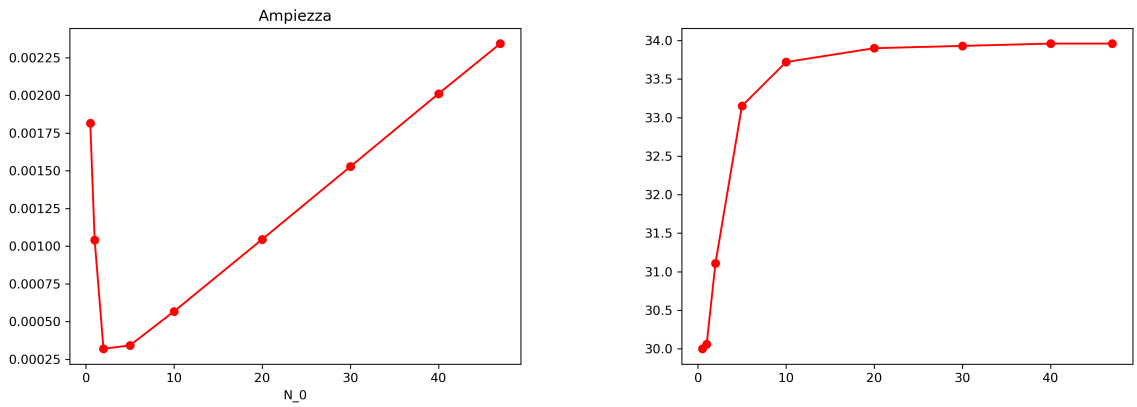

Figura 5.4: Diagrammi di ottimizzazione del sistema a un grado di libertà.

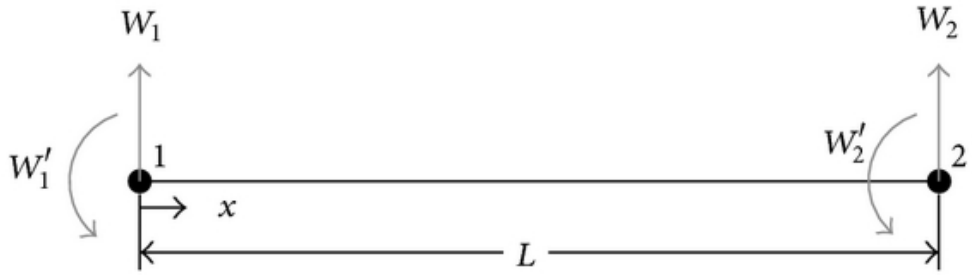

Figura 5.5: Elemento beam.

massa e di rigidezza dipendono dal tipo di elemento e dal tipo di gradi di libertà associati ai nodi. Le matrici di massa e di rigidezza dell'elemento beam sono simmetriche e hanno espressione:

$$M_e = A\rho L \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13L}{420} \\ & \frac{L^2}{105} & \frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ & & & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix}, \qquad K_e = \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

dove le prime due righe e le prime due colonne si riferiscono a w_1 e w_1' mentre le ultime due righe e colonne si riferiscono a w_2 e w_2'. Nel caso di una discretizzazione con un singolo elemento, l'equazione di equilibrio ha la solita forma della relazione (2.6), dove:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

ovvero i primi due termini del vettore delle incognite sono rispettivamente la traslazione e la rotazione del primo nodo, il terzo e il quarto termine sono la traslazione e la rotazione del secondo nodo, mentre il vettore dei carichi contiene le forze e i momenti applicati al nodo indicato.

Nel caso di una discretizzazione con più elementi, le matrici di massa e di rigidezza del sistema si ottengono con l'assemblaggio delle matrici di tutti gli elementi, ovvero generando delle matrici diagonali a blocchi dove i blocchi sono le matrici dei singoli elementi, sovrapposti sui gradi di libertà di congiunzione degli elementi. Le matrici finali del sistema sono state ottenute

eliminando le righe e le colonne relative ai gradi di libertà vincolati delle matrici complete. In questo caso sono state rimosse le prime due righe e le prime due colonne delle matrici complete, ovvero sono stati vincolati i gradi di libertà del primo nodo del primo elemento[2].

Ottenute le matrici del sistema, è stato possibile eseguire l'analisi modale utilizzando le coordinate modali, come descritto nel paragrafo 2.3.

5.2.1 Risultati

In primo luogo è stata effettuata un'analisi modale della trave, così da localizzare le frequenze di risonanza della trave, utilizzando un ampio campo di frequenze. Successivamente è stato ridotto l'intervallo delle frequenze per analizzare nel dettaglio solo la prima frequenza di risonanza e l'effetto della presenza di gradi di libertà con attrito.

Risultati dell'analisi modale

Per la validazione dell'algoritmo, i risultati ottenuti sono stati confrontati con la soluzione analitica. Le frequenze naturali per una trave semplicemente incastrata si possono calcolare con la formula:

$$f_n = \frac{\alpha^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$$

con α che dipende dalla frequenza calcolata. Per le prime tre frequenze di risonanza si ha:

$$\alpha_1 = 1.875, \qquad \alpha_2 = 4.694 \qquad \alpha_3 = 7.885$$

Per la trave con le caratteristiche indicate nella tabella 5.1, sono riportate le prime tre frequenze naturali, calcolate utilizzando modelli di discretizzazione con differenti numeri di elementi. I risultati sono nella tabella 5.2.

[2] Il procedimento completo utilizzato per ottenere $[M]$ e $[K]$ del sistema, a partire dall'integrazione delle funzioni di forma fino all'assemblaggio delle matrici degli elementi, è esposto nell'articolo di M. Arafa [6]

Modulo di Young	80	$[GPa]$
Altezza della sezione	20	$[mm]$
Spessore della sezione	0.4	$[mm]$
Lunghezza	0.2	$[m]$
Densità ρ	2700	$[kg/m^3]$

Tabella 5.1: Dati geometrici e del materiale.

All'aumentare del numero di elementi della discretizzazione, la soluzione si avvicina alla soluzione analitica[3].

Numero di elementi	$f_{n,1}$ $[Hz]$	$f_{n,2}$ $[Hz]$	$f_{n,3}$ $[Hz]$
2	8.7974	55.5732	187.9587
3	8.7940	55.2866	156.2198
4	8.7934	55.1698	155.4919
5	8.7932	55.1331	154.8515
6	8.7932	55.1192	154.5796
10	8.7931	55.1074	154.3365
Soluzione analitica	8.7922	55.1034	154.3461

Tabella 5.2: Frequenze di risonanza per una trave incastrata.

Risultati della risposta forzata

La risposta forzata è stata calcolata risolvendo il sistema (3.4) con il metodo del bilanciamento armonico (paragrafo 3.2). L'algoritmo implementato permette di scegliere il numero delle armoniche da utilizzare, il numero e il modulo delle forzanti, il numero di vincoli e il numero di punti di contatto.

L'analisi modale eseguita per una trave semplicemente incastrata e discretizzata con 5 elementi, con due gradi di libertà con contatto e una forzante è illustrata nella figura 5.6. Nell'immagine è riportata la condizione di *full slip*, ovvero contatto aperto, e la condizione di *full stick*, ovvero

[3] I risultati concordano con l'analisi effettuata da M. Arafa [6], utilizzata per la validazione dell'analisi modale implementata.

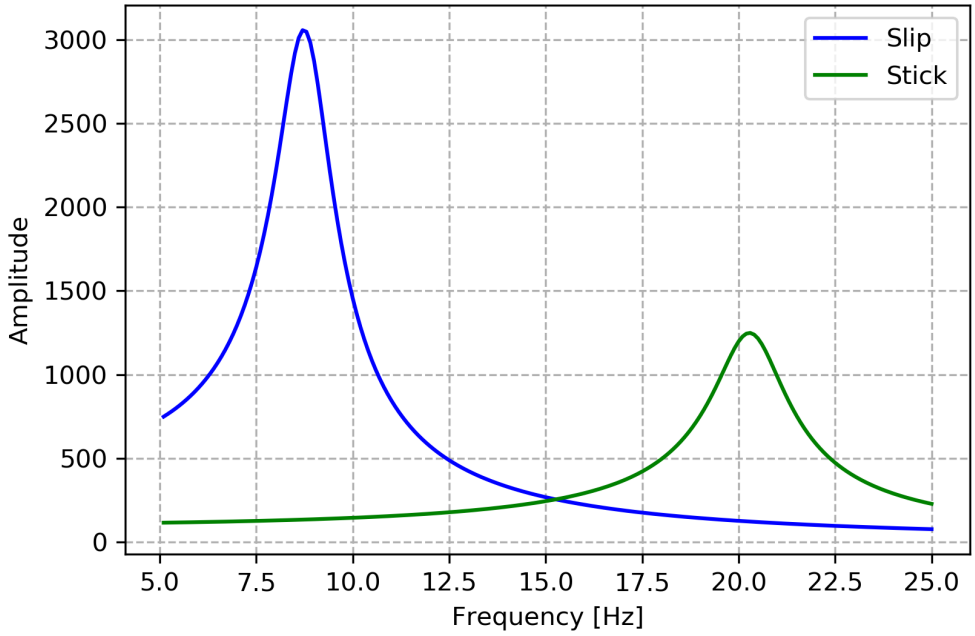

Figura 5.6: Risposta forzata di una trave semplicemente incastrata.

contatto chiuso e senza strisciamento, della prima frequenza di risonanza[4]. La frequenza di risonanza della trave in *stick* è spostata verso frequenze maggiori e ha ampiezza minore. Effettuando l'analisi non lineare con diversi valori di forza normale di contatto si riporta nella figura 5.7 il grafico della risposta forzata.

All'aumentare della forza normale di contatto le ampiezze delle oscillazioni diminuiscono e le frequenze di risonanza si spostano verso valori maggiori. Per bassi valori di N_0 l'andamento è simile alla condizione di *slip*, mentre all'aumentare della forza normale di contatto l'andamento tende alla condizione di *stick*. Per $N_0 = 100$ la risposta coincide con la risposta del caso *stick* (le curve sono sovrapposte).

Nel grafico 5.8 sono visibili gli andamenti dell'ampiezza massima e della frequenza al variare della forza normale di contatto.

[4]I grafici di questa sezione si riferiscono al grado di libertà numero 6, che corrisponde alla traslazione verticale del quarto nodo, contato a partire dall'estremità libera della trave.

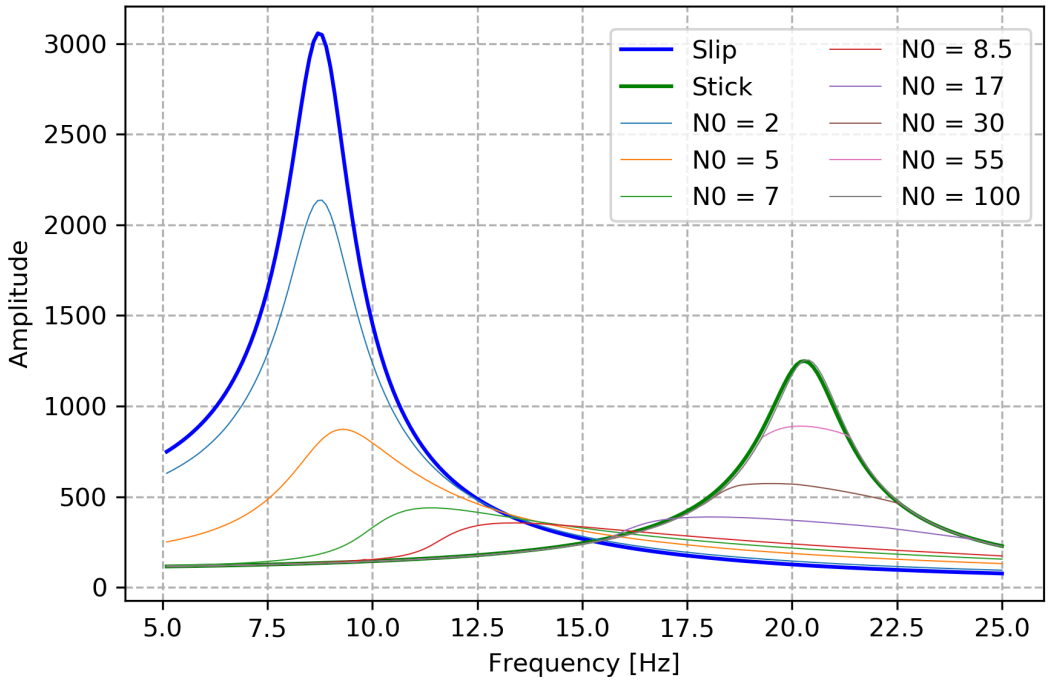

Figura 5.7: Risposta forzata della trave con contatto della trave semplicemente incastrata

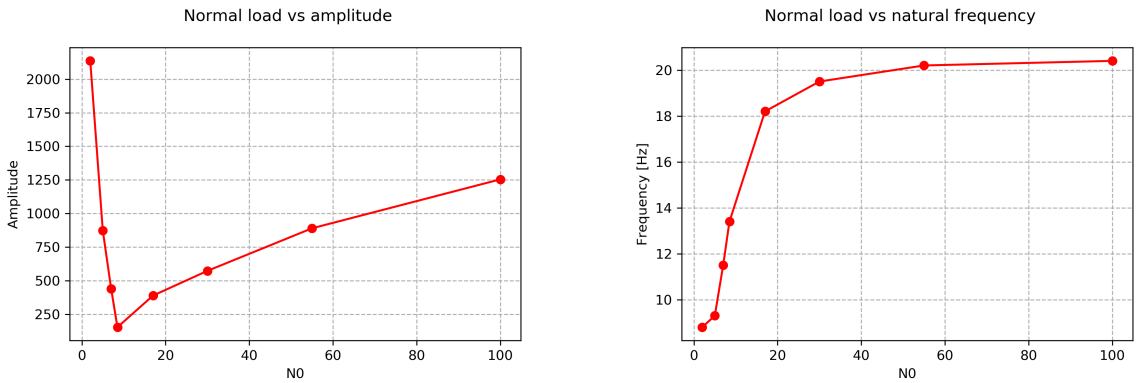

Figura 5.8: Diagrammi di ottimizzazione di una trave.

5.3 Paletta di turbina

L'algoritmo implementato per l'analisi della trave è stato adattato per l'analisi di una paletta di turbina con tettuccio, su cui sono presenti due superfici che entrano in contatto con le rispettive superfici delle palette adiacenti. La rappresentazione della palette è visibile nella figura 5.9.

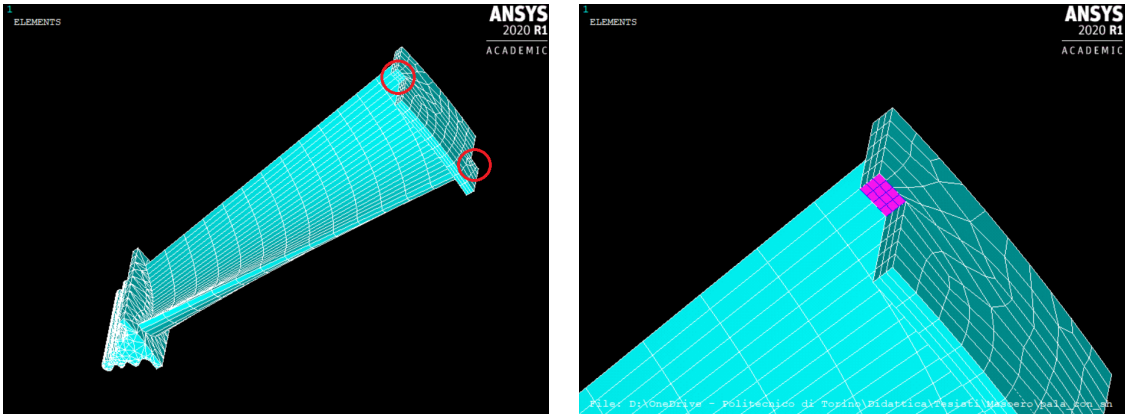

Figura 5.9: Paletta di turbina con tettuccio, particolare di una delle due zone di contatto

Matrice di massa e matrice di rigidezza

Per la generazione delle matrici di massa $[M]$ e di rigidezza $[K]$ è stato utilizzato il programma commerciale Ansys®. Tramite l'inizializzazione dell'analisi modale su Ansys®, è possibile estrarre le matrici di massa e rigidezza e scriverle su un file di testo esterno[5]. Siccome le matrici di un modello composto da N gradi di libertà hanno dimensione $N \times N$, e il modello della paletta è composto da circa 4000 nodi con tre gradi di libertà per nodo, sono state estratte le matrici $[M]$ e $[K]$ ridotte con il metodo di riduzione di Craig-Bampton. È stato quindi possibile effettuare i calcoli per pochi set di nodi:

- i nodi delle due superfici di contatto;
- un nodo sul quale applicare la forzante;
- alcuni nodi lungo l'estensione della paletta per la verifica degli spostamenti.

[5]Il formato di scrittura utilizzato è quello di Howell-Boeing, che permette di immagazzinare matrici sparse, come nel caso di $[M]$ e $[K]$, in un file di dimensioni ridotte.

Risultati dell'analisi modale e della risposta forzata

I risultati dell'analisi modale sono riportati nella tabella 5.3, dove si può notare che le frequenze naturali calcolate sono molto simili a quelle ricavate da Ansys®.

Nella figura 5.10 è riportato il grafico della risposta forzata nei casi *slip* e *stick* all'aumentare della forza di contatto, ottenuto a seguito dell'effettuazione dell'analisi della risposta forzata con contatto per la prima frequenza naturale. In legenda è presente il valore della forza normale di contatto. L'andamento è molto simile al caso della trave beam (figura 5.7).

SET	FREQ $[Hz]$ Ansys®	FREQ $[Hz]$ Algoritmo
1	59.146	59.149
2	163.33	163.39
3	249.36	249.59
4	452.91	453.41
5	762.11	763.35
6	992.10	994.72

Tabella 5.3: Confronto tra le frequenze di risonanza calcolate con l'algoritmo e con Ansys®.

5.3.1 Simmetria ciclica

I risultati ottenuti per una singola paletta possono essere estesi ad una condizione di simmetria ciclica: utilizzando l'equazione (4.5), si possono calcolare gli spostamenti modali dei settori adiacenti a partire dagli spostamenti del settore fondamentale:

$$\left\{\overline{\Theta}^{(n+1)}\right\} = \left\{\overline{\Theta}^{(n)}\right\} e^{i\varphi} \rightarrow \overline{x}^{(n+1)} = \overline{x}^{(n)} e^{i\varphi}$$

dove l'angolo di sfasamento è definito dalla relazione (4.7):

$$\varphi = h\frac{2\pi}{N}$$

I nodi del settore fondamentale corrispondono alla composizione di tre set di nodi differenti: i nodi del contatto destro, i nodi del contatto sinistro e i nodi interni. Riordinando il vettore degli

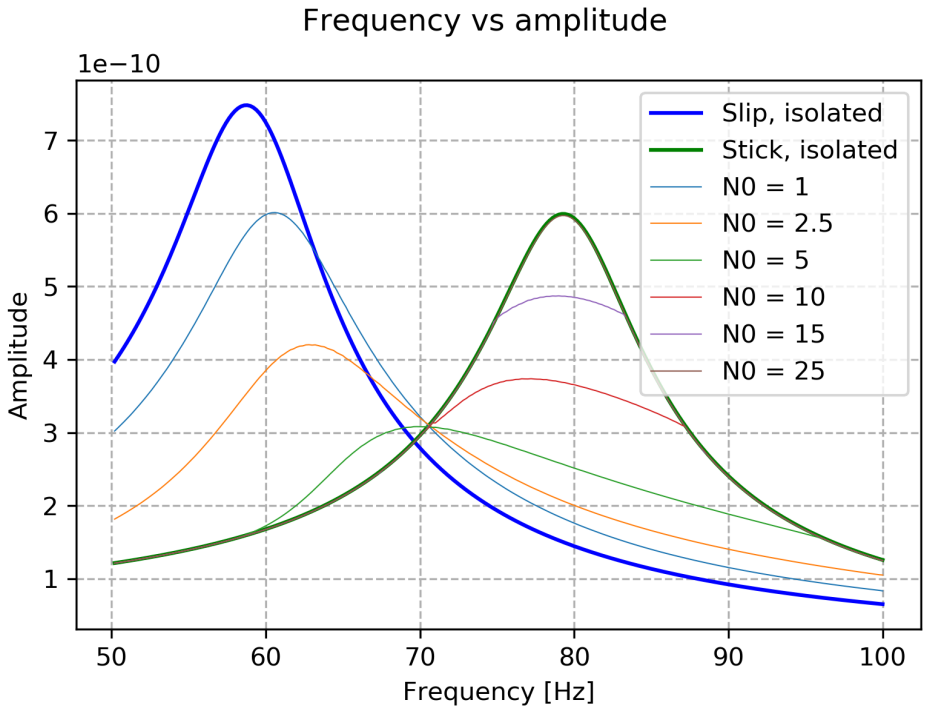

Figura 5.10: Risposta forzata della paletta di turbina isolata

spostamenti mettendo in evidenza i nodi di contatto si può scrivere:

$$\{x^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} x_D^{(n)} \\ x_S^{(n)} \\ x_I^{(n)} \end{Bmatrix}$$

Partendo dall'ipotesi che il contatto sia in condizione di *stick*, gli spostamenti del contatto destro sono uguali agli spostamenti del contatto sinistro, sfasati dell'angolo φ. Si ha allora che:

$$\begin{Bmatrix} x_D^{(n)} \\ x_S^{(n)} \\ x_I^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_D^{(n)} \\ x_D^{(n+1)} \\ x_I^{(n)} \end{Bmatrix}$$

Si può quindi definire una matrice di trasformazione che permette di esprimere tutti gli spostamenti di un settore in funzione solamente dei nodi del contatto destro e dei nodi interni del modello:

$$\{x^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} x_D^{(n)} \\ x_D^{(n+1)} \\ x_I^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_D & 0 \\ I_D e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & I_I \end{bmatrix} = [T]\,\{x_{SC}^{(n)}\} \tag{5.1}$$

dove I è la matrice identità. Applicando la matrice di trasformazione[6], il sistema matriciale da risolvere si modifica come segue:

$$\left(-\omega^2 \left[m_{sc}^{(h)}\right] + \left[k_{sc}^{(h)}\right]\right) = 0$$

dove:

$$\left[m_{sc}^{(h)}\right] = [T]^T \left[m^{(h)}\right] [T]$$
$$\left[k_{sc}^{(h)}\right] = [T]^T \left[k^{(h)}\right] [T]$$

Possono quindi essere calcolate le frequenze naturali del sistema nel caso in cui gli spostamenti della superficie di contatto destra siano gli stessi della superficie sinistra. Questo significa che la condizione analizzata è quella di *full stick*, ovvero senza strisciamento.

Risultati dell'analisi modale

In assenza di nodi di contatto, poiché il disco è stato considerato essere infinitamente rigido, il singolo settore è libero di vibrare con i modi propri del settore isolato, senza essere influenzato dai settori adiacenti. In questo caso le frequenze di risonanza sono uguali per tutti gli indici armonici h, come illustrato nella figura 5.11, e possono essere raggruppate per famiglia, ovvero tutte le prime frequenze naturali per $0 < h < N/2$ costituiscono la prima famiglia, tutte le seconde frequenze naturali per $0 < h < N/2$ costituiscono la seconda famiglia e così via. Si può notare come i valori corrispondono a quelli riportati nella tabella 5.3.

Tracciando il diagramma di Campbell, riportato nella figura 5.12, con riferimento alle frequenze della prima famiglia, è possibile verificare a quali *engine order* esse appartengono, e ricavare le velocità angolari del disco che eccitano le frequenze naturali delle palette. Nella tabella 5.4 sono illustrati i valori di alcune velocità angolari Ω.

[6]La matrice trasposta di una matrice a coefficienti complessi, come la matrice $[T]$, è la matrice trasposta dei complessi coniugati dei coefficienti:

$$[T]^T = \begin{bmatrix} I_D & I_D e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & I_I \end{bmatrix}$$

.

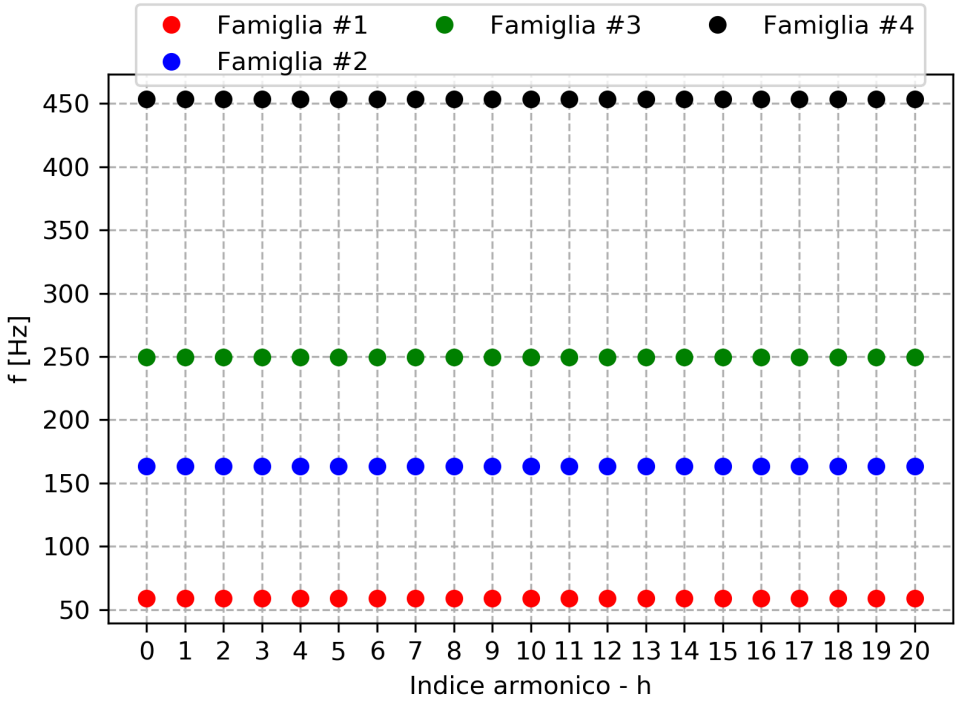

Figura 5.11: Analisi modale di una paletta di turbina in simmetria ciclica - *full slip*.

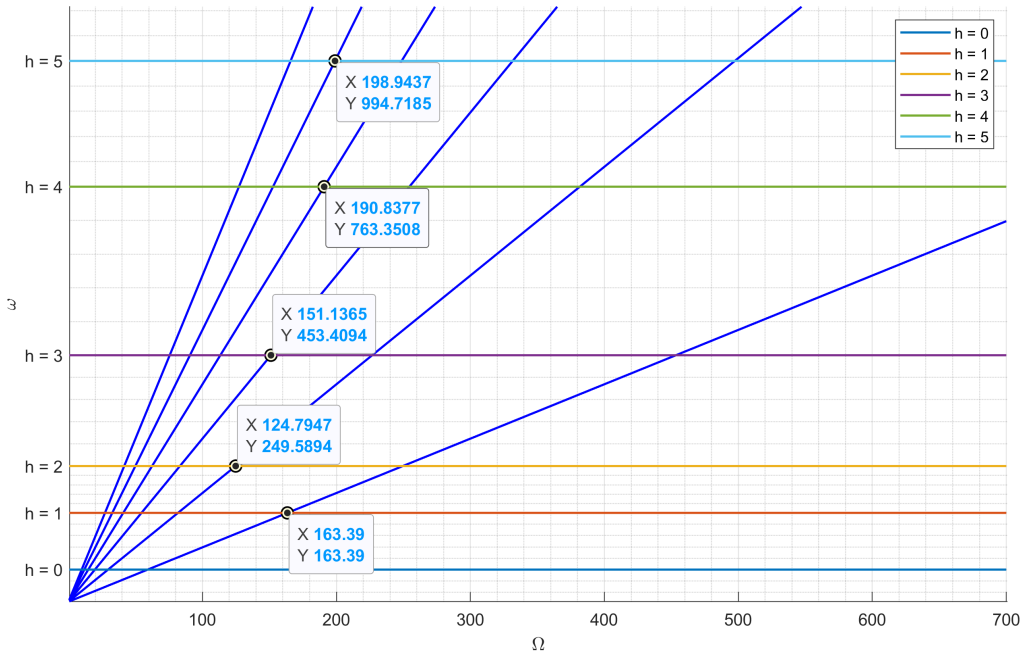

Figura 5.12: Diagramma di Campbell del disco palettato senza contatto.

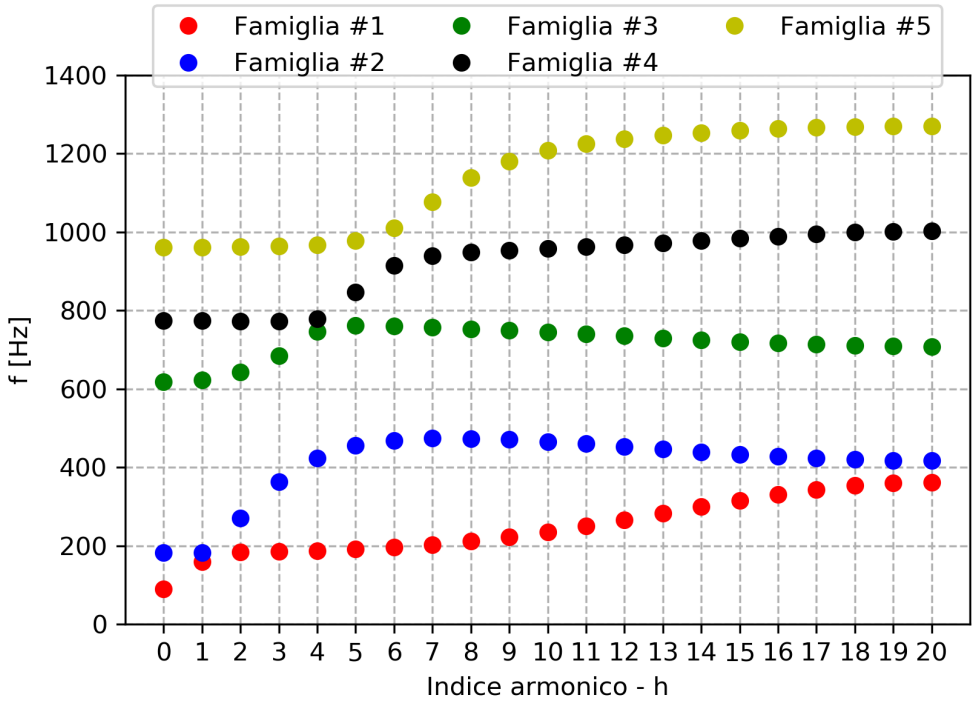

Figura 5.13: Analisi modale di una paletta di turbina in simmetria ciclica - *full stick*.

eo	ω $[rad/s]$	Ω $[rpm]$
1	163.39	9803.39
2	249.58	7487.68
3	453.41	9068.19
4	763.35	11450.26
5	994.72	11936.62

Tabella 5.4: Velocità angolari di risonanza del disco.

Invece, nel caso in cui i nodi di contatto siano nella condizione *full stick*, si applica al sistema la matrice di trasformazione della relazione (5.1): l'analisi modale è lineare e presenta diversi valori di frequenze per ogni indice armonico h. Nella figura 5.13 sono rappresentate le frequenze naturali divise per famiglia della paletta di turbina in simmetria ciclica con 40 settori.

h	$f_{n,1}\,[Hz]$	$f_{n,2}\,[Hz]$	$f_{n,3}\,[Hz]$	$f_{n,4}\,[Hz]$	$f_{n,5}\,[Hz]$
0	88.94	182.13	617.62	773.72	960.99
1	159.63	182.42	623.09	773.48	961.22
2	183.23	269.75	642.41	772.81	962.01
3	184.79	363.47	683.79	772.20	963.75
4	187.28	424.14	746.64	778.39	967.56
5	190.95	455.15	762.08	847.37	977.59
6	196.10	468.88	760.27	914.17	1,010.842
7	202.98	473.67	757.01	939.45	1,076.274
8	211.79	473.60	753.15	948.31	1,138.245
9	222.60	470.62	748.88	953.55	1,181.295
10	235.36	465.82	744.35	957.98	1,208.158
11	249.86	459.86	739.63	962.46	1,225.426
12	265.74	453.22	734.82	967.28	1,237.498
13	282.48	446.31	730.02	972.53	1,246.553
14	299.44	439.51	725.32	978.15	1,253.604
15	315.86	433.14	720.85	983.98	1,259.130
16	330.90	427.53	716.77	989.71	1,263.373
17	343.69	422.95	713.28	994.93	1,266.480
18	353.44	419.61	710.57	999.17	1,268.574
19	359.52	417.62	708.85	1,001.949	1,269.770
20	361.58	416.96	708.26	1,002.919	1,270.157

Tabella 5.5: Frequenze naturali di un disco palettato con 40 settori - *full stick*.

I casi senza contatto e con contatto *full stick* sono le condizioni più estreme: la prima è la condizione meno rigida, caratterizzata dalle frequenze di risonanza minori e costanti per ogni h, mentre la seconda è la più rigida e le frequenze di risonanza sono più elevate e differenti per ogni indice armonico. In questo caso infatti si verifica la presenza di ulteriori vincoli del sistema che ne aumentano la rigidezza. Se la forza normale di contatto permette il moto relativo tra le superfici di contatto, le frequenze di risonanza si trovano a metà strada tra la condizione

full slip e *full stick*.

Risultati dell'analisi non lineare

Si riportano ora i risultati dell'analisi della dinamica del disco palettato per diversi valori dell'indice armonico h, e con la presenza di attrito, effettuata per diversi valori della forza normale di contatto, in modo da permettere di valutare il campo di variazione dei valori delle frequenze di risonanza e il legame tra le ampiezze di oscillazione e l'indice armonico.

Anche per il disco palettato, come si verifica per la paletta isolata, all'aumentare della forza normale di contatto, le frequenze con ampiezza maggiore si spostano verso la soluzione *full stick*.

Nella figura 5.14 è illustrato l'andamento della risposta della prima frequenza naturale all'aumentare della forza di contatto per il primo indice armonico, $h = 0$. Nel grafico è illustrata anche la risposta forzata della paletta isolata nei casi *full slip* e *full stick*, per confrontare l'effetto dello smorzamento per attrito della simmetria ciclica. Come si nota, la risposta è quasi coincidente al caso senza attrito della paletta isolata e la presenza della forza di attrito ha un effetto limitato.

Nelle figure successive (figure 5.15, 5.16, 5.17, 5.18) l'indice armonico aumenta, assumendo i valori $h = 5, 11, 15, 20$. Si può notare il doppio effetto sulla dinamica del sistema: le frequenze di risonanza si spostano verso valori più elevati e le ampiezze delle oscillazioni diminuiscono all'aumentare dell'indice armonico. In questo modo si ha un progressivo aumento della rigidezza del sistema e dello smorzamento. Inoltre, in caso di indice armonico basso la condizione *full stick* viene raggiunta per forze di contatto più basse, mentre all'aumentare di h è necessaria una forza normale più elevata per ottenere la condizione *full stick*.

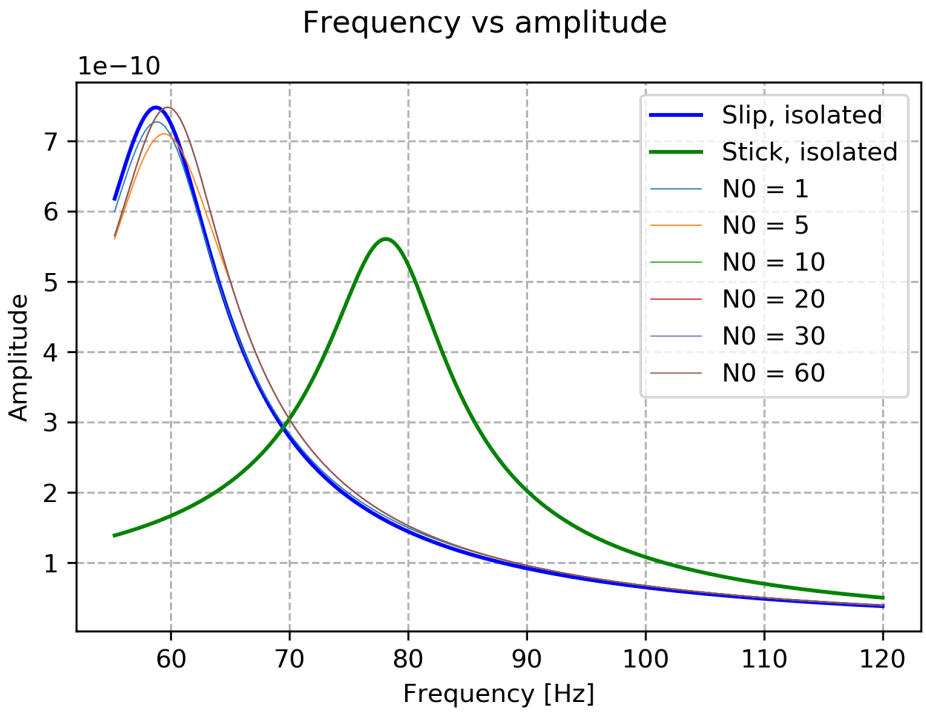

Figura 5.14: Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 0$.

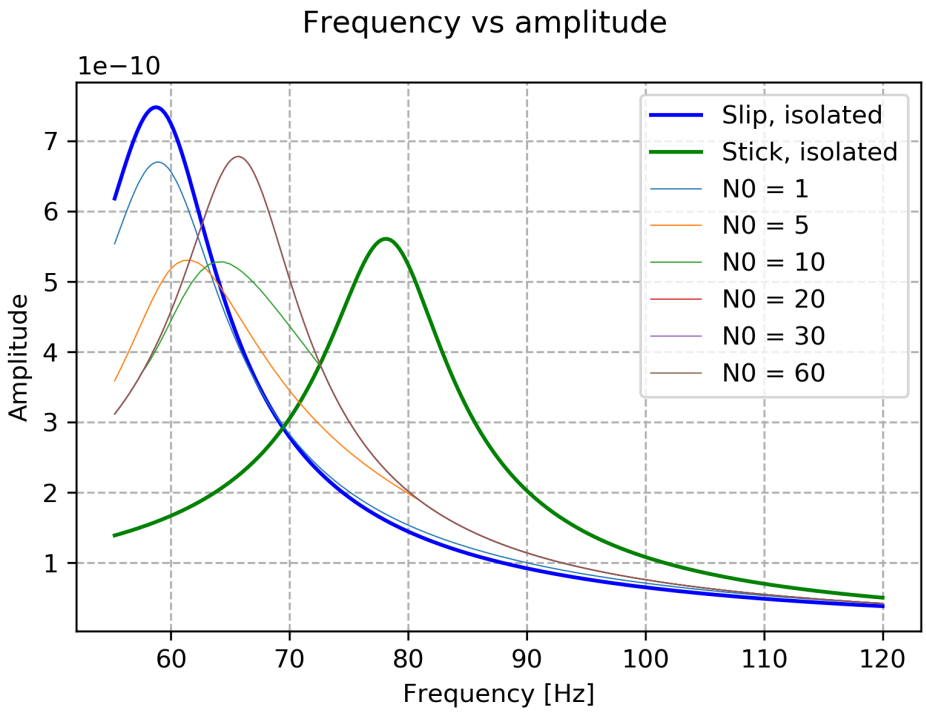

Figura 5.15: Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 5$.

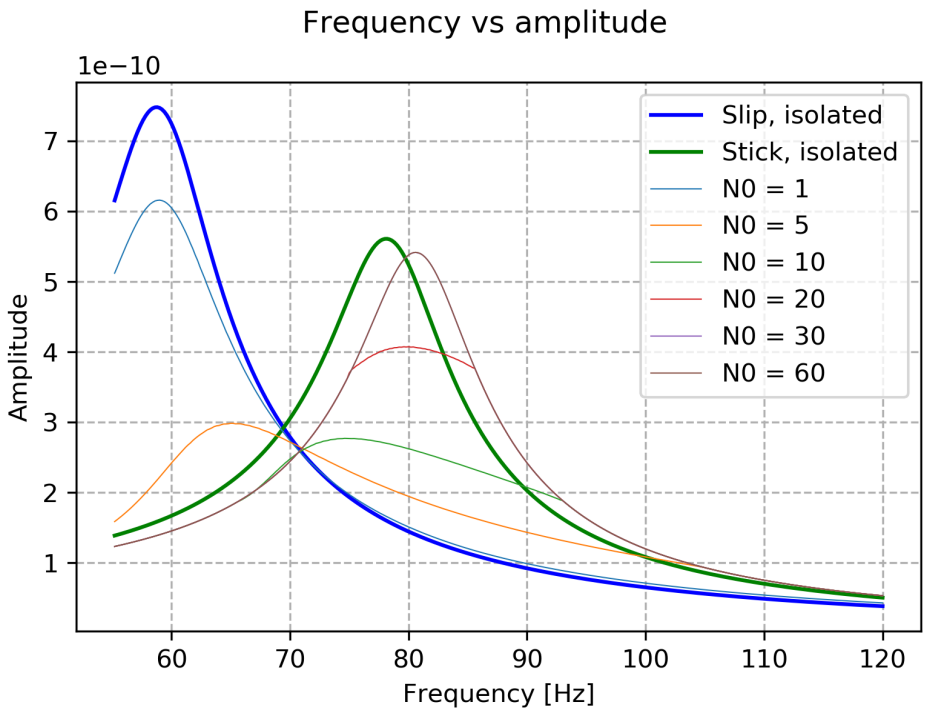

Figura 5.16: Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 11$.

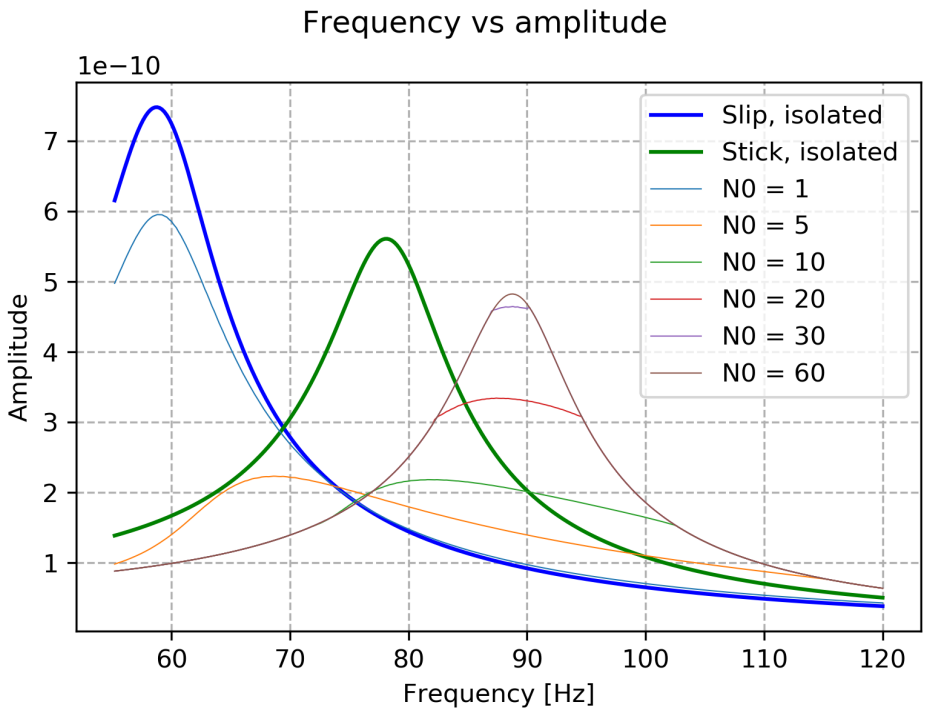

Figura 5.17: Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 15$.

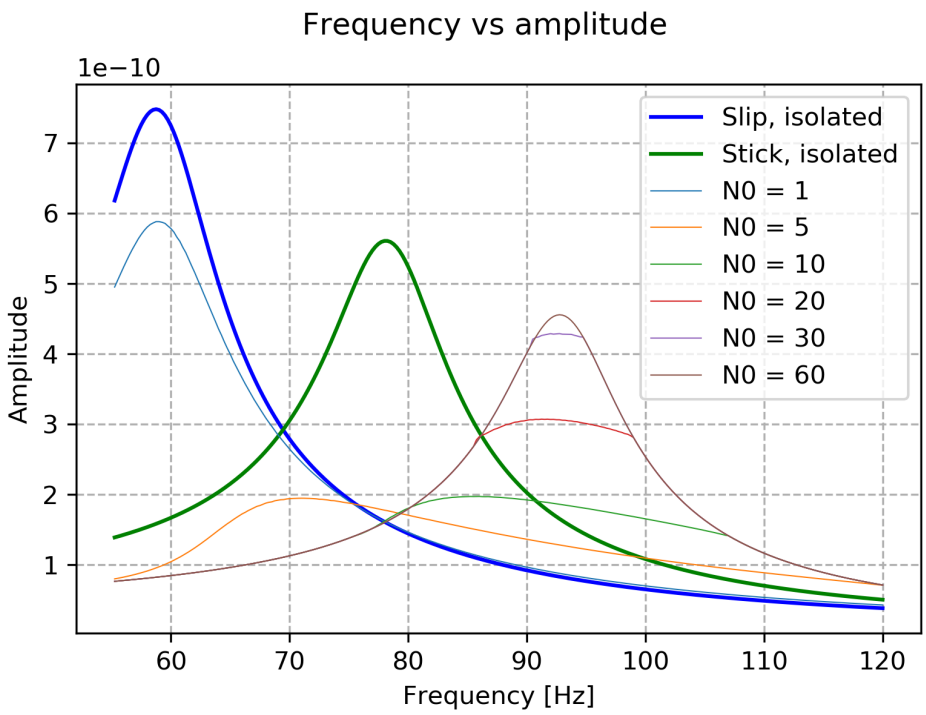

Figura 5.18: Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 20$.

Capitolo 6

Conclusioni

Il software sviluppato ai fini di questa tesi è in grado di eseguire l'analisi modale e l'analisi della risposta forzata di un modello a elementi finiti, inserito in una simmetria ciclica e con alcuni gradi di libertà in contatto strisciante, con relativa forza di attrito. Gli effetti che derivano dall'applicazione di una forza di attrito sulla dinamica del sistema sono principalmente due: il primo è uno smorzamento che comporta la diminuzione delle ampiezze delle oscillazioni, il secondo è un aumento della rigidezza del sistema, che provoca l'incremento delle frequenze di risonanza.

I risultati dell'analisi lineare ottenuti con il software sviluppato sono in linea con i risultati teorici dell'analisi modale di simmetrie cicliche. Essi inoltre sono stati confrontati con quelli ottenuti utilizzando il software commerciale Ansys®, con il quale è stato possibile verificare la congruenza delle soluzioni lineari.

Per quanto riguarda la soluzione del caso con smorzamento per attrito, sono stati evidenziati gli aspetti che rendono questa tecnica efficace per fornire un controllo del valore delle frequenze di risonanza e delle ampiezze della risposta forzata.

È necessario sottolineare che la soluzione calcolata rientra nel caso ideale di una geometria con simmetria ciclica nella quale tutti i settori sono identici tra di loro; nella realtà esistono sempre differenze tra i vari settori, dovute a:

- tolleranze di lavorazione;

- non-omogeneità del materiale;
- disuniformità di montaggio;
- usura;
- danneggiamento delle palette.

La presenza di queste differenze tra i vari settori è denominata *mistuning*, a seguito delle quali i risultati dell'analisi modale e della risposta forzata in simmetria ciclica potrebbero avere una validità limitata. Infatti, a causa del *mistuning* si possono verificare alcuni effetti indesiderati, quali lo sdoppiamento delle frequenze naturali doppie, la distorsione delle forme modali e la localizzazione della risposta.

Per analizzare il comportamento di un *misutuned bladed disk* occorre utilizzare il modello del disco completo, e data la natura casuale del *mistuning* è necessario effettuare un elevato numero di analisi per avere una valenza statistica del fenomeno.

Il problema del *mistuning* può essere affrontato con il software sviluppato utilizzando il modello completo, sebbene l'elevato numero di gradi di libertà possa facilmente rendere pesante l'analisi da un punto di vista dei tempi di calcolo.

6.1 Sviluppi futuri

Il programma sviluppato si presta ad ulteriori modifiche, allo scopo di migliorarne la flessibilità d'impiego: sebbene la funzionalità sia stata validata, presenta ancora alcune problematiche dovute alle approssimazioni effettuate, che ne limitano il campo di utilizzo.

In primo luogo, è necessario l'impiego complementare di software commerciali, come Ansys®, per ricavare le matrici di massa e di rigidezza ridotte con il metodo Craig-Bampton: sebbene le routine di questi programmi siano molto ottimizzate, implementando all'interno dello stesso programma il metodo di riduzione di Craig-Bampton, il suo funzionamento risulterebbe più flessibile, permettendo così l'elaborazione diretta delle matrici intere.

In secondo luogo, la logica del programma prevede che la forza normale e la rigidezza di contatto siano costanti durante tutto il moto di strisciamento relativo. Pertanto, un altro aspetto

che potrebbe essere migliorato consiste nell'inserimento di un modello di attrito che si avvicina maggiormente al caso reale, in cui sia la forza normale sia la rigidezza del contatto dipendono dalla posizione relativa delle superfici di contatto.

Infine, il software richiede di essere implementato per eseguire i calcoli in parallelo su più *core* del processore: piccole modifiche del codice permetterebbero di eseguire contemporaneamente i calcoli indipendenti, garantendo una riduzione significativa del tempo necessario per le analisi. In aggiunta, per diminuire ulteriormente i tempi di elaborazione, si potrebbe anche permettere al programma di lavorare all'interno di un *cluster* di computer, utilizzando così le risorse computazionali di più macchine collegate in rete. Tuttavia questo approccio necessita della comunicazione tra il programma e il fornitore del servizio di rete, che richiede l'uso di linguaggi di programmazione differenti.

In conclusione, il programma sviluppato si è dimostrato efficace per affrontare l'analisi modale e la risposta forzata di un disco palettato. Le soluzioni ottenute con il suo impiego si sono dimostrate attendibili e conformi a quelle che possono essere ottenute impiegando software commerciali. Inoltre, applicando le modifiche sopra citate, i risultati delle analisi potrebbero migliorare ulteriormente e rispecchiare quelli riscontrabili in un caso reale.

Appendice A

Diagrammi di flusso

In questa appendice è presente una descrizione del funzionamento del programma attraverso l'utilizzo di diagrammi di flusso. La legenda utilizzata è in figura A.1.

In figura A.2 è riportato il diagramma di flusso del programma principale, in figura A.3 il diagramma di flusso relativo alla funzione che esegue l'analisi modale lineare (senza forze di contatto) di un modello agli elementi finiti, mentre in figura A.4 il diagramma di flusso del solutore non lineare, che calcola le forze di contatto e risolve il sistema:

$$\left(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]\right)\{x\} - \{F\} - \{F_{NL}\} = 0$$

con il metodo del bilanciamento armonico.

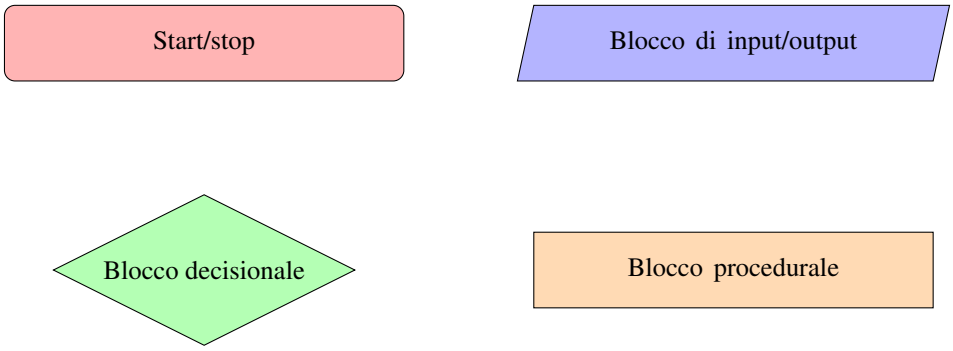

Figura A.1: Legenda del diagramma di flusso.

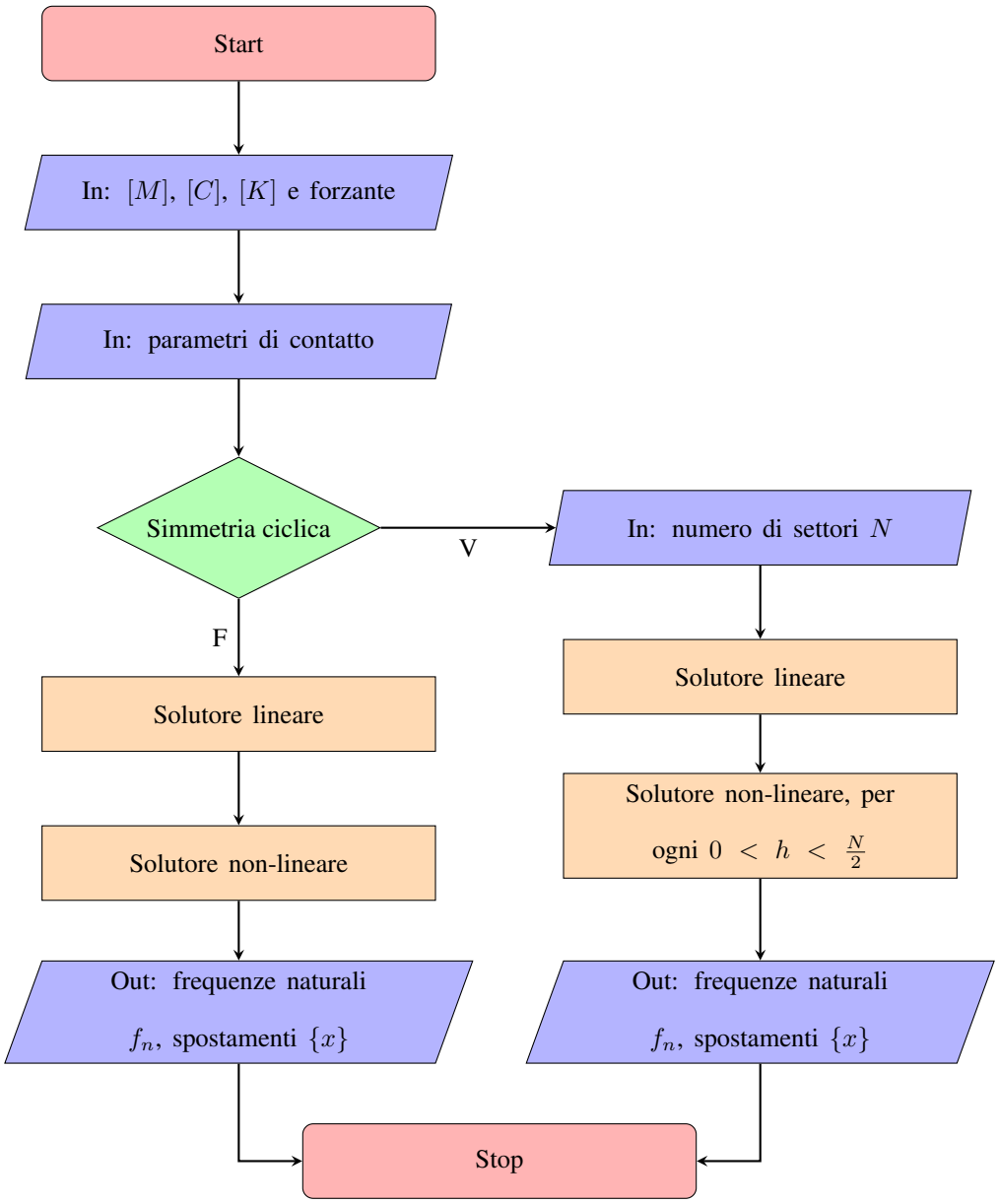

Figura A.2: Diagramma di flusso del programma.

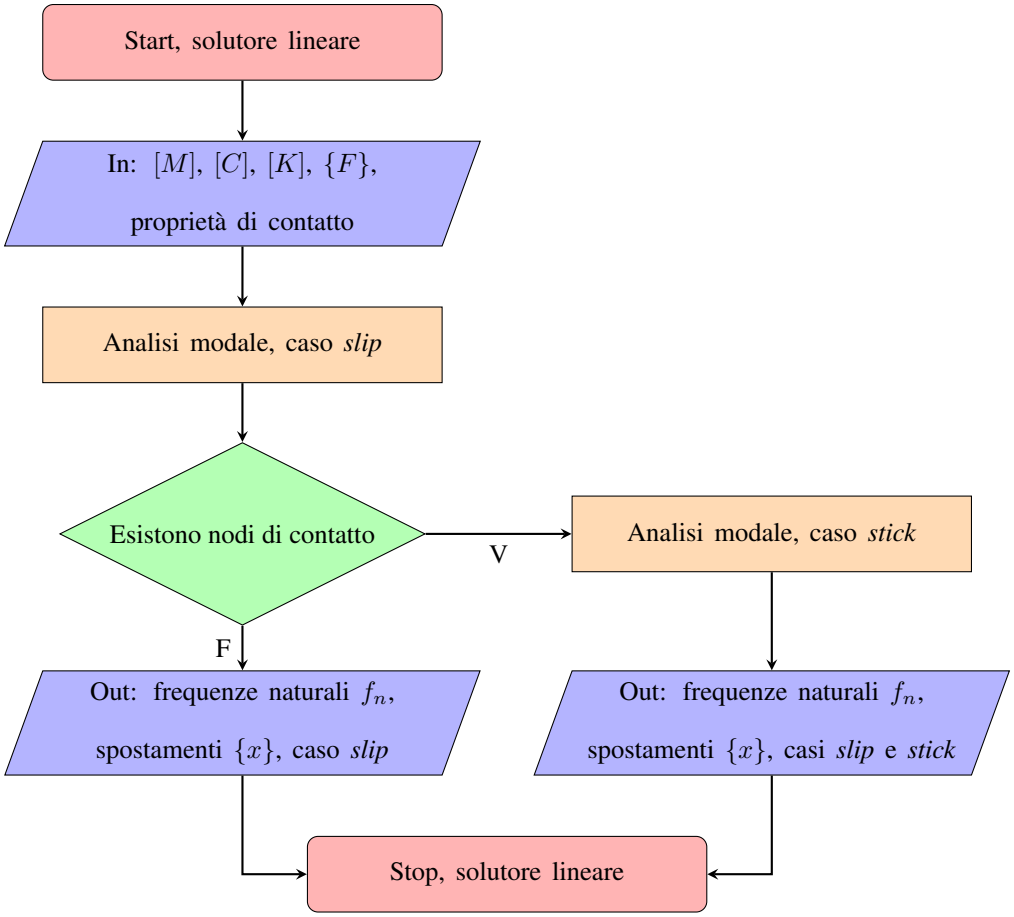

Figura A.3: Diagramma del solutore lineare.

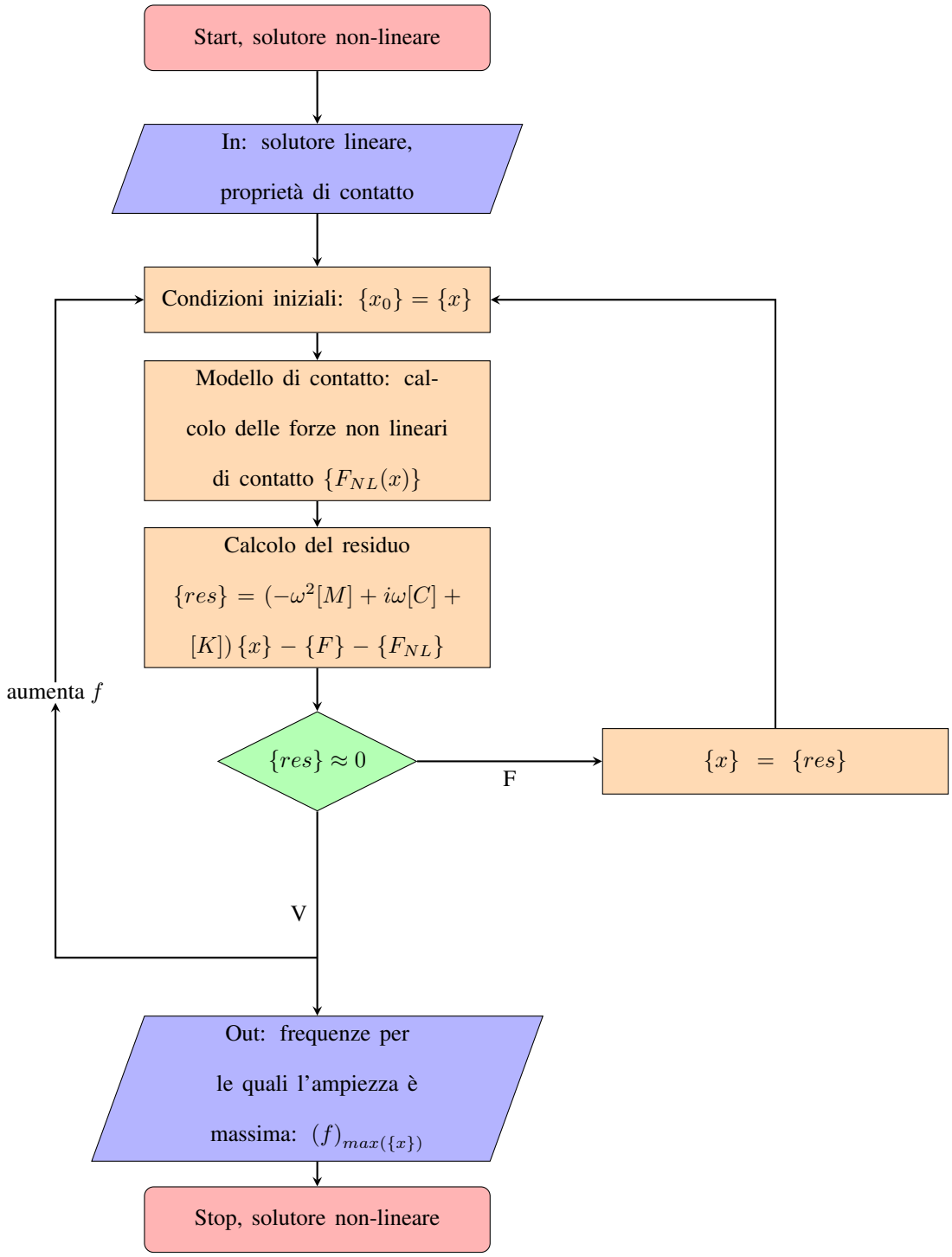

Figura A.4: Diagramma del solutore non-lineare.

Elenco delle figure

1.1 Paletta con tettuccio (*shrouded blade*). 7

2.1 Sistema forzato massa-molla-smorzatore, 1 DOF 10

2.2 Risposta del sistema con un grado di libertà. 12

2.3 Sistema forzato massa-molla-smorzatore, 2 DOF 12

3.1 Sistema forzato massa-molla-smorzatore con contatto strisciante. 18

3.2 Andamento qualitativo dello spostamento e della velocità. 22

3.3 Andamento della forza di attrito in funzione dello spostamento $x(t)$, caso completamente *stick*. 22

3.4 Andamento della forza di attrito in funzione dello spostamento $x(t)$, caso *slip-stick*. 24

3.5 Sistema con supporti in movimento. 29

3.6 Schema dell'accoppiamento ala-fusoliera. 30

3.7 Schema dell'accoppiamento paletta-slot. 31

4.1 Settore in simmetria ciclica di una paletta di turbina (tratto da [1]). 34

4.2 Accoppiamento di N paletta in simmetria ciclica (tratto da [1]). 34

4.3 Visualizzazione della combinazione tra $\{\Phi\}$ e $\{\hat{\Phi}\}$. 38

4.4 Visualizzazione degli autovettori $\{\Phi\}$, $\{\hat{\Phi}\}$, $\{\Phi'\}$ e $\{\hat{\Phi}'\}$. 38

4.5 Andamento della forzante su un disco palettato per il settore n e $n+1$. 44

4.6 Diagramma di Campbell. 46

4.7 Diagramma di Campbell per eo $= 1, 2, 3$. 47

4.8 Diagramma di Campbell: frequenze di risonanza. 48

4.9 Diagramma di Campbell: frequenza di risonanza per eo $= 37$. 49

5.1 Sistema forzato massa-molla-smorzatore, N DOF 52
5.2 Sistema forzato con $N = 2$ e $N = 10$ DOF 54
5.3 Risposta forzata del sistema a un grado di libertà. 56
5.4 Diagrammi di ottimizzazione del sistema a un grado di libertà. 56
5.5 Elemento beam. 57
5.6 Risposta forzata di una trave semplicemente incastrata. 60
5.7 Risposta forzata della trave con contatto della trave semplicemente incastrata . 61
5.8 Diagrammi di ottimizzazione di una trave. 61
5.9 Paletta di turbina con tettuccio, particolare di una delle due zone di contatto . . 62
5.10 Risposta forzata della paletta di turbina isolata 64
5.11 Analisi modale di una paletta di turbina in simmetria ciclica - *full slip*. 66
5.12 Diagramma di Campbell del disco palettato senza contatto. 66
5.13 Analisi modale di una paletta di turbina in simmetria ciclica - *full stick*. 67
5.14 Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 0$. 70
5.15 Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 5$. 70
5.16 Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 11$. 71
5.17 Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 15$. 71
5.18 Analisi non-lineare di un disco palettato con indice armonico $h = 20$. 72

A.1 Legenda del diagramma di flusso. 77
A.2 Diagramma di flusso del programma. 78
A.3 Diagramma del solutore lineare. 79
A.4 Diagramma del solutore non-lineare. 80

Bibliografia

[1] S. Zucca, "Materiale del corso di dinamica dei rotori per applicazioni aerospaziali," 2020.

[2] C.-H. Menq and J. Griffin, "A comparison of transient and steady state finite element analyses of the forced response of a frictionally damped beam," 1985.

[3] R. R. Craig Jr and M. C. Bampton, "Coupling of substructures for dynamic analyses.," *AIAA journal*, vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319, 1968.

[4] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. Jarrod Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. Carey, İ. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. Vand erPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and S. . . Contributors, "SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python," *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261–272, 2020.

[5] C. Siewert, L. Panning, J. Wallaschek, and C. Richter, "Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 132, no. 8, 2010.

[6] M. Arafa, "Finite element vibration analysis," 2010.

[7] M. Avcar, "Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions," *system*, vol. 4, no. 2, p. 2, 2014.

[8] E. Petrov, "A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks," *J. Turbomach.*, vol. 126, no. 1, pp. 175–183,

2004.

[9] C. M. Firrone and S. Zucca, "Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks," *Numerical Analysis-Theory and Application*, pp. 301–334, 2011.

[10] P. Van der Valk, "Model reduction & interface modeling in dynamic substructuring: application to a multi-megawatt wind turbine," 2010.

Ringraziamenti

Questa tesi è il lavoro conclusivo di un percorso che per me è stato lungo e tortuoso, costellato di difficoltà ma anche di soddisfazioni. Per me è stato un po' come un viaggio nel quale sono stato messo alla prova, e proprio come un viaggio ho incontrato tanti viaggiatori che hanno condiviso con me questo percorso: ci sono state alcune persone che mi hanno accompagnato per un pezzo di strada, alcune che mi hanno dato indicazioni, alcune che sono rimaste indietro e altre che sono andate avanti. Tutti questi incontri mi hanno aiutato ad arrivare alla fine, e vorrei ringraziare quelle persone che per me sono state fondamentali.

Primi tra tutti mamma e papà, che mi avete sempre sostenuto e indirizzato, lasciando che potessi fare le cose a modo mio e con i miei tempi. A voi grazie, siete sempre stati fondamentali per me.

Carlo e Enrico, siete i miei fratelli e i miei migliori amici. Grazie per i vostri consigli e il vostro supporto, senza di esso non so come avrei potuto arrivare alla fine.

Un grazie al GDM, compagni di una vita. Grazie per essere stati la mia valvola di sfogo, per avermi confortato e per essere sempre stati lì quando serviva.

Andrea, Francesco, Anita e tutti i compagni di sala studio, quelli di un giorno e quelli di sessioni intere. Grazie, perché è grazie anche al vostro sostegno che mi è stato possibile aprire il libro ogni giorno.

Filippo, che a partire dal liceo sei stato spesso la luce nella nebbia. Grazie, perché senza di te non sarei riuscito a fare la metà della mia tesi.

Sergio, Edmondo e Luca, siete i miei compagni di corso e coloro che hanno condiviso le mie

stesse fatiche. Grazie a voi ho imparato che con dei compagni il viaggio è meno lungo e più bello, e i risultati che si raggiungono insieme sono quelli che valgono di più.

Stefano Zucca, il mio relatore. Grazie per avermi saputo indirizzare sempre nella giusta direzione e per avermi guidato nella realizzazione della tesi con interesse, disponibilità e perizia.

Siete solamente una piccola parte delle persone che mi hanno accompagnato in questo viaggio, ma siete quelli che hanno maggiormente influito sulla mia formazione, e non riesco a immaginare come avrei potuto andare avanti senza di voi. Il mio futuro è ancora ignoto, ma spero, almeno per un tratto, di poterlo affrontare con voi.