POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Metodi approssimati per analisi di missioni verso asteroidi con propulsione elettrica

Relatore

prof. Lorenzo Casalino

Candidato

Marco Tinnirello

Sommario

Abstract 5
1. Introduzione 6
1.1 Classificazione spettrale 8
1.2 Esplorazione 9
1.3 Near Earth Asteroids 10
1.4 Missioni verso NEAs 12
2. Il modello matematico 16
2.1 Introduzione 16
2.2 Orbite con inclinazione ed eccentricità ridotte 17
2.3 Legge di controllo ottimale tramite analisi di Edelbaum 20
2.4 Legge di controllo subottimale approssimata 23
2.4.1 Caso coplanare 23
2.4.2 Strategie di suddivisione delle manovre 25
2.4.3 Caso non coplanare 28
3. Correzioni dell'analisi approssimata 30
3.1 Introduzione 30
3.2 Caso 0: stima originale 31
3.3 Caso 1: correzione della manovra di cambio di piano in base al valore dell'argomento del periastro 34
3.4 Caso 2: correzione della manovra di cambio di piano tra manovra all'afelio ed al perielio 36
3.4 Caso 3: correzione del caso 1 in base al valore dell'argomento del periastro 38
4. Confronto tra le due stime 40
Bibliografia 48
Sitografia 49

Elenco delle figure

Figura 1. Distribuzione degli asteroidi nel Sistema Solare.....7
Figura 2. Locazione gruppo asteroidi Troiani.....7
Figura 3. Phobos e Deimos 9
Figura 4. Eros 9
Figura 5. Asteroidi Aten, Apollo e Amor 10
Figura 6. Scala Torino 11
Figura 7. Concept delle traiettorie della missione Dawn 13
Figura 8. Dettaglio della strumentazione della sonda della missione OSIRIS-REX.....13
Figura 9. Sonda Hayabusa.....14

Elenco delle tabelle

Tabella 1. Caso 0 - stima originale 32
Tabella 2. Caso 1 - prima correzione 34
Tabella 3. Caso 2 - seconda correzione 36
Tabella 4. Caso 3 - terza correzione 38

Abstract

L'obiettivo di questa tesi è di presentare un metodo veloce, efficiente e valido per calcolare il consumo di propellente ed il tempo necessario per una missione verso asteroidi. Questi corpi celesti rappresentano degli obiettivi di grande interesse: da essi si può capire l'origine del nostro Sistema Solare, tramite lo studio della loro composizione; inoltre, diversi studi ipotizzano il loro utilizzo come "stazioni di servizio" per future missioni extra-solari o comunque di lungo periodo. Alcuni asteroidi, la cui classe è studiata nel dettaglio in questa analisi, vengono detti "Near Earth Asteroids" e costituiscono dei corpi di enorme interesse scientifico in quanto hanno, come suggerisce il nome, un'orbita vicina a quella terrestre.

Possono dunque costituire un potenziale pericolo per la Terra se la loro orbita dovesse intercettare quella terrestre o quella lunare, con rischi non quantificabili per la vita. Allo stesso tempo però, la loro vicinanza ha il vantaggio di portare a delle possibilità concrete di missione, tanto è vero che già in passato ed ancora di più in futuro, questi corpi saranno al centro dell'interesse della comunità scientifica.

Nel capitolo 2 vi è l'introduzione agli asteroidi, ed in particolare ai NEAs, con la relativa definizione ed i corpi più importanti di questa classe. Inoltre, vi è una discussione sullo stato dell'arte della tecnologia che si possiede attualmente, attraverso l'analisi delle missioni che negli anni hanno riguardato i NEAs.

Nel capitolo 3 viene affrontata la trattazione matematica del problema: dall'analisi di Edelbaum, che definisce le leggi di controllo ottimali, si passa alla trattazione subottimale approssimata, che sarà poi quella effettivamente utilizzata nel seguito.

Nel capitolo 4 vengono discusse le correzioni dell'algoritmo originale del metodo approssimato: in particolare, in principio non vengono tenuti conto di possibili miglioramenti che si possono introdurre, attraverso degli opportuni fattori di correzione ed effettuando manovre, di per sé molto costose in termini di carburante, solo ai raggi più alti, dove è più conveniente manovrare. Vengono poi presentati i risultati ottenuti per ogni caso.

Nel capitolo 5 vi è un confronto tra i risultati ottenuti con l'algoritmo del metodo approssimato originale (caso "0") e quello con tutte le correzioni adottate (caso "3").

Capitolo 1

Introduzione

Per asteroide si intende un corpo celeste che per composizione è simile ad un pianeta di tipo terrestre, generalmente privo di forma sferica e con un diametro che nella maggior parte dei casi non supera il chilometro. Dal punto di vista della cosmogenesi, si pensa che gli asteroidi siano dei resti di protopianeti che non sono riusciti a diventare dei pianeti o ad essere inglobati da altri pianeti, durante la formazione del Sistema Solare.

La maggior parte degli asteroidi si trova nella cosiddetta fascia principale, tra le orbite di Marte e Giove, con orbite che spesso sono caratterizzate da un elevato valore di eccentricità. Le dimensioni e la massa degli asteroidi sono molto variabili, ed a seconda di tali valori si possono anche definire meteoroidi (con masse comprese tra i 10^{-9} ed i 10^{-7} kg).
Se un asteroide è composto perlopiù da ghiaccio, esso viene classificato come cometa. Esse, tramite i numerosi passaggi che effettuano vicino al Sole, perdono il loro ghiaccio e rimangono corpi composti prevalentemente da roccia.

In base alle teorie più avvalorate sulla genesi del Sistema Solare, gli asteroidi della fascia principale non riuscirono a formare un pianeta a causa della presenza gravitazionale di Giove, che distrusse il protopianeta in frammenti. A causa all'influenza gravitazionale di Giove, le collisioni tra questi frammenti aumentarono, andando di conseguenza ad incrementare il numero di oggetti presenti in questa zona. Dunque, gli asteroidi rappresentano i resti della formazione di tali protopianeti, mentre le comete rappresentano corpi di ancor più antica genesi.

Nel Sistema Solare sono stati identificati più di 600000 asteroidi, con diverse centinaia di migliaia che ancora devono essere catalogati e scoperti. Tra questi, il più grande è Cerere, nella fascia principale, con un diametro di 1000 km; successivamente vi sono Pallade e Vesta. Grazie alle loro notevoli dimensioni, questi tre asteroidi sono gli unici ad avere una forma pressoché sferica.

La maggior parte degli asteroidi si trovano suddivisi in tre fasce:

- la fascia principale, compresa tra le orbite di Marte e Giove;
- la fascia di Kuiper, oltre l'orbita di Nettuno;
- la nube di Oort, ai confini del Sistema Solare.

La popolazione più ricca è quella della fascia principale; in tale zona, vi sono due gruppi di asteroidi principali:

1. il gruppo dei Troiani, caratterizzati da orbite simili a quella di Giove. In particolare, alcuni di essi precedono l'orbita di Giove di 60°, mentre altri sono in ritardo della stessa distanza angolare. Tali punti non sono casuali, in quanto questi asteroidi occupano due dei cinque punti lagrangiani del sistema Sole-Giove, ed in particolare i punti L4 ed L5.
2. Il gruppo dei Centauri, caratterizzati da orbite oltre quella di Giove. L'ipotesi più accreditata è che essi siano asteroidi che, a causa delle influenze gravitazionali dei giganti gassosi, hanno subito modifiche dalle loro orbite originali.

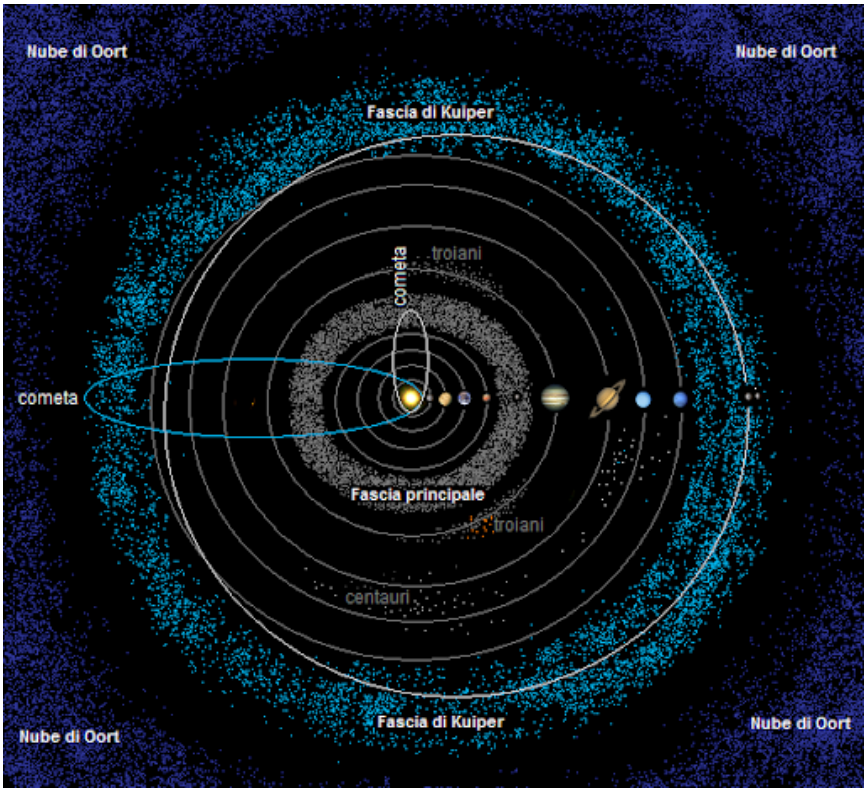


Figura 1. Distribuzione degli asteroidi nel Sistema Solare

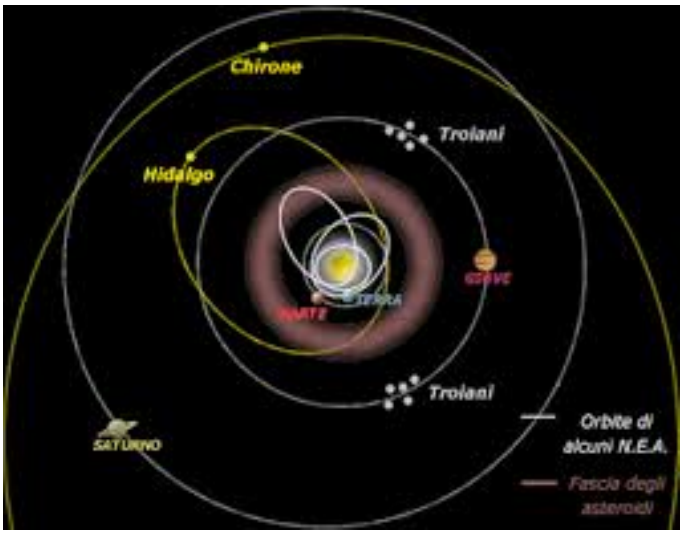


Figura 2. Locazione gruppo asteroidi Troiani

Tra i corpi principali della fascia di Kuiper si possono annoverare numerose comete; vi sono però anche importati asteroidi di notevoli dimensioni (circa come quelle di Plutone e Caronte) come Eris, Quaoar e Sedna.

1.1 Classificazione spettrale

È possibile classificare gli asteroidi in base al tipo spettrale, cioè a seconda del tipo di materiale presente sulla superficie dell'asteroide. Seguendo tale classificazione, troviamo:

- Asteroidi di tipo C: a tale classe appartengono la maggior parte degli asteroidi (circa il 75% del totale conosciuto). La lettera "C" indica il fatto che sono di tipo carbonaceo, con l'albedo, cioè la percentuale di luce solare riflessa, prossimo allo zero (circa 0.03), risultando così molto scuri. Per quanto riguardo lo spettro, esso è prossimo al blu.
- Asteroidi di tipo S: a tale classe appartiene circa il 17% degli asteroidi catalogati. La lettera "S" indica che sono composti principalmente da silicio, in particolare da silicati metallici di ferro, nichel e magnesio. Lo spettro è perlopiù tendente al rosso, simile a quello dei meteoriti di tipo ferroso.
- Asteroidi di tipo M: a tale classe appartengono gli asteroidi di tipo metallico, cioè la maggior parte dei restanti. Sono caratterizzati da un valore di albedo elevato (tra 0.1 e 0.18) in quanto composti principalmente da ferro e nichel.
- Asteroidi di tipo G: a tale classe appartiene ad esempio Cerere, e sono simili a quelli di tipo C tranne che per un diverso comportamento nell'assorbimento delle radiazioni ultraviolette.
- Asteroidi di tipo E: a tale classe appartengono alcuni corpi che orbitano nella parte interna della fascia principale, dove la E sta per enstatite.
- Asteroidi di tipo R: caratterizzati da uno spettro di tipo rossastro e da un medesimo colore.
- Asteroidi di tipo V: indica una classe di asteroidi simili a Vesta.

1.2 Esplorazione

Gli asteroidi sono stati, dall'inizio dell'era dell'esplorazione spaziale, oggetto di grande interesse in quanto, come detto, sono una miniera di potenziali informazioni riguardo l'origine del Sistema Solare.

Per tale motivo, sono state diverse le missioni con oggetto la visita di questi corpi, e molte altre missioni sono programmate per il futuro. Le prime immagini di questi oggetti furono ottenute nel 1971 dalla sonda Mariner 9, che riuscì a fotografare le due lune di Marte, Fobos e Deimos, le quali si pensa siano degli antichi asteroidi catturati dall'influenza gravitazionale marziana.

Le prime fotografie di un asteroide vero e proprio furono scattate dalla sonda Galileo: in questo caso si ottennero immagini di Gaspra ed Ida.
Queste due missioni precedenti non avevano però come scopo principale quello di fotografare degli asteroidi: la prima in tal senso fu la sonda NEAR Shoemaker della NASA, che nel 1997 effettuò un flyby di Mathilde, e nel 2001 riuscì con successo ad atterrare sulla superficie di Eros, analizzandone la densità tramite misure del suo campo gravitazionale.
La prima missione di una agenzia oltre la NASA fu la missione della JAXA, volta all'esplorazione dell'asteroide Itowaka tramite la sonda Hayabusa. In tal caso si riuscì anche a prelevarne dei frammenti che furono poi riportati sulla Terra alcuni anni dopo.

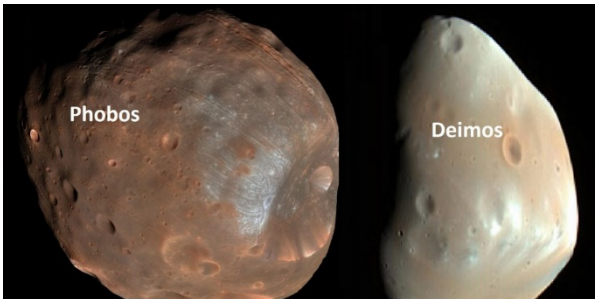


Figura 3. Phobos e Deimos

Tra le più recenti, si citano la missione DAWN, lanciata nel 2007, con l'obiettivo di visitare Cerere e Vesta, e la missione Rosetta del 2010, diretta verso la cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, transitata anche dagli asteroidi Steins e Lutetia.

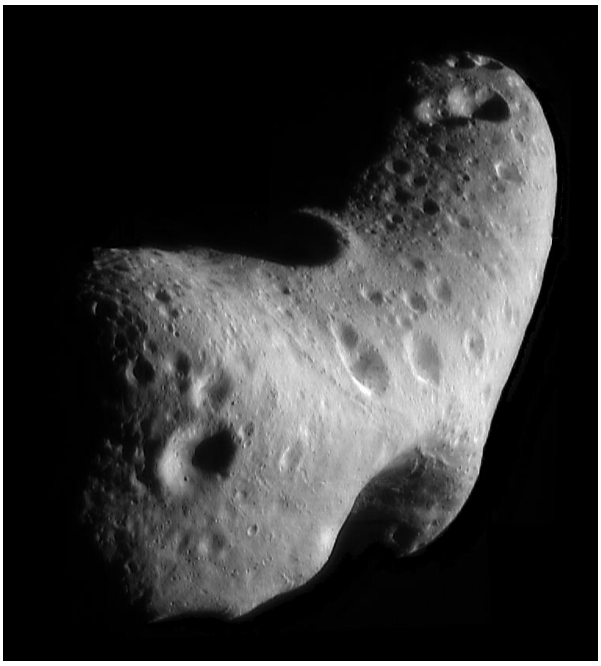


Figura 4. Eros

1.3 Near Earth Asteroids

I Near Earth Asteroids (abbreviati con la sigla NEAs) sono degli asteroidi caratterizzati da un'orbita vicina o addirittura intersecante quella terrestre, e dunque potenzialmente pericolosi: per tale motivo sono stati oggetto di missioni tramite sonde, tra cui la Hayabusa della JAXA e la NEA Rendezvous della NASA.

La popolazione di questo tipo di asteroidi è molto numerosa: sono circa 11000 i NEAs catalogati fino al 2014; di questi, circa 1500 sono potenzialmente pericolosi per la Terra a causa della loro orbita, che interseca quella terrestre, e la grandezza, abbastanza elevata da comportare un rischio.

I NEAs vengono generalmente classificati in tre famiglie:

- Asteroidi Aten: con semiasse maggiore dell'orbita inferiore ad una U.A;
- Asteroidi Apollo: con semiasse maggiore dell'orbita superiore ad una U.A. e perielio inferiore a 1.017 U.A.;
- Asteroidi Amor: con raggio medio compreso tra quello della Terra e quello di Marte e perielio compreso tra le 1.017 ed 1.3 U.A. Dati questi valori, tali asteroidi raramente intersecano l'orbita terrestre, mentre sono più frequente incontri ravvicinati con Marte. Si pensa addirittura che i due satelliti naturali di Marte, ovvero Deimos e Fobos, siano in realtà due NEAs catturati dalla gravità del pianeta.

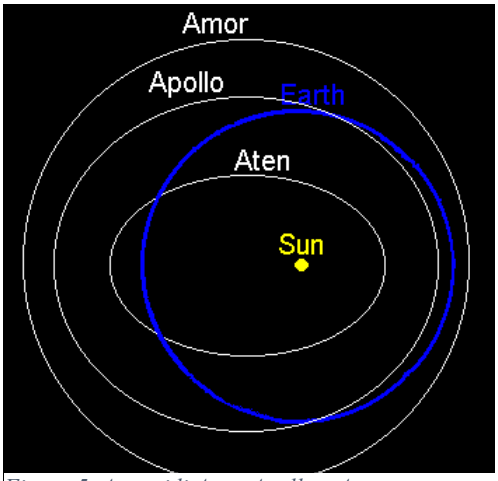


Figura 5. Asteoridi Aten, Apollo e Amor

Uno dei NEAs più famosi è certamente 99942 Apophis, che è fonte di grande preoccupazione ed attenzione dal 2004, quando fu calcolata una probabilità di impatto pari al 2.7% per l'anno 2029. Tramite successivi calcoli, tale probabilità si è abbassata a tal punto da escluderne l'impatto.

Un ulteriore metodo di classificazione è costituito dalle scale di pericolosità, che indicano la probabilità di impatto ed il potenziale pericolo in caso di collisione. Tra le più importanti si ricordano la scala Torino e la scala Palermo.

La scala Torino viene definita tramite la misura della probabilità di impatto di un asteroide relazionandola all'energia associata all'impatto, misurata in Megatoni. La scala va da 0 a 10, con la maggior parte degli asteroidi che si trovano a livello 0 (nessuna probabilità di impatto) ed 1 (piccolissima probabilità di impatto con successiva classificazione al livello 0). Finora solo 99942 Apophis, al momento della scoperta, ha superato il livello 1, essendo classificato addirittura con livello 4 (probabilità di impatto maggiore dell'1%).

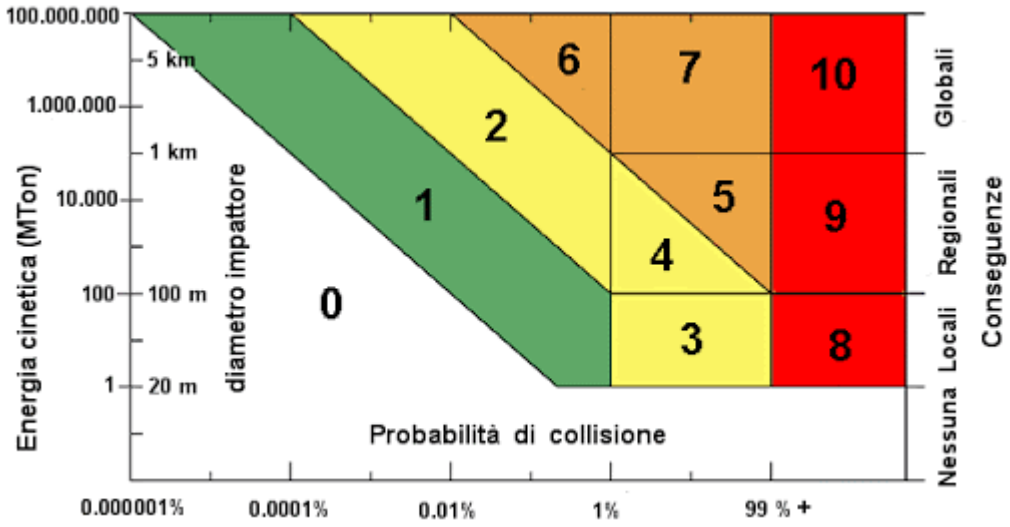


Figura 6. Scala Torino

La scala Palermo, a differenza della scala Torino, è una scala quantitativa: permette cioè di calcolare esattamente il valore di rischio, a partire dalla probabilità di impatto. E' una scala di tipo logaritmico, che calcola il livello di rischio attraverso la relazione:

$$P = \log_{10} \frac{p_i}{f_B T} \qquad (1)$$

Dove:

- T è il tempo, espresso in anni
- p_i è la probabilità di impatto
- f_B è la frequenza annua di impatto, definita come

$$f_B = 0.03E^{-0.8} \qquad (2)$$

Con E energia dell'impatto, misurata in Megatoni.

1.4 Missioni verso NEAs

1.4.1 Missione Dawn

La missione Dawn [4] è stata progettata per testare le ipotesi correnti riguardo l'origine e l'evoluzione del neonato Sistema Solare, visitando il più grande asteroide di tipo basaltico, 4 Vesta, il quale si crede sia un corpo sopravvissuto alla primissima formazione di corpi rocciosi di grandi dimensioni del Sistema Solare.

Le osservazioni sulla composizione mostrano come Vesta sia un corpo assimilabile, per caratteristiche, ai meteoriti Howardite, Eucrite e Diogenite: Vesta possiede infatti un nucleo ferroso ed una crosta eucritica-diogenitica.

La sua superficie è caratterizzata da un numero elevato di crateri da impatto, ma assenza di evidenze di attività vulcanica. Vesta possiede due bacini da impatto nell'emisfero sud, mentre l'emisfero Nord è più violentemente caratterizzato da crateri e contiene il terreno più antico.

Tracce significanti di OH e H possono essere presenti nella parte più superficiale della crosta.

Vesta ha dunque fornito prova di essere un potenziale testimone della formazione del Sistema Solare.

Dawn è la nona missione del programma Discovery, il cui scopo è l'esplorazione di diversi corpi del Sistema Solare. La missione prevede l'utilizzo di propulsione elettrica a ioni per lasciare la sfera di influenza terrestre ed una traiettoria a spirale per raggiungere il target nella fascia principale. Quando l'orbita eliocentrica combacia con il target, la propulsione a ioni è utilizzata per cadere nella sfera di influenza del target e portarsi nell'orbita adatta all'osservazione.

Una volta terminata la mappatura, il sistema propulsivo a ioni è nuovamente utilizzato per incrementare la quota dell'orbita e sfuggire dalla sfera di influenza gravitazionale del corpo. A questo punto, si aumenta la spinta del sistema propulsivo per raggiungere il target successivo.

Una missione del genere avrebbe avuto dei costi proibitivi utilizzando la propulsione chimica: tramite la potenza e l'economicità della propulsione a ioni è stato possibile realizzare una missione del genere, rendendola anzi quella più economica, in termini di costi, dell'intero programma Discovery; il suo risultato più importante è stato la mappatura dei corpi più interessanti e grandi della fascia principale, cioè Vesta e Cerere. Ha inoltre dimostrato l'affidabilità e la possibilità concreta, in termini di economicità dei costi, dell'uso di sistemi propulsivi elettrici al posto dei tradizionali propulsori

chimici, che avrebbero sicuramente riscontrato difficoltà per la continua serie di accensioni e spegnimenti programmati per l'esplorazione dei corpi.

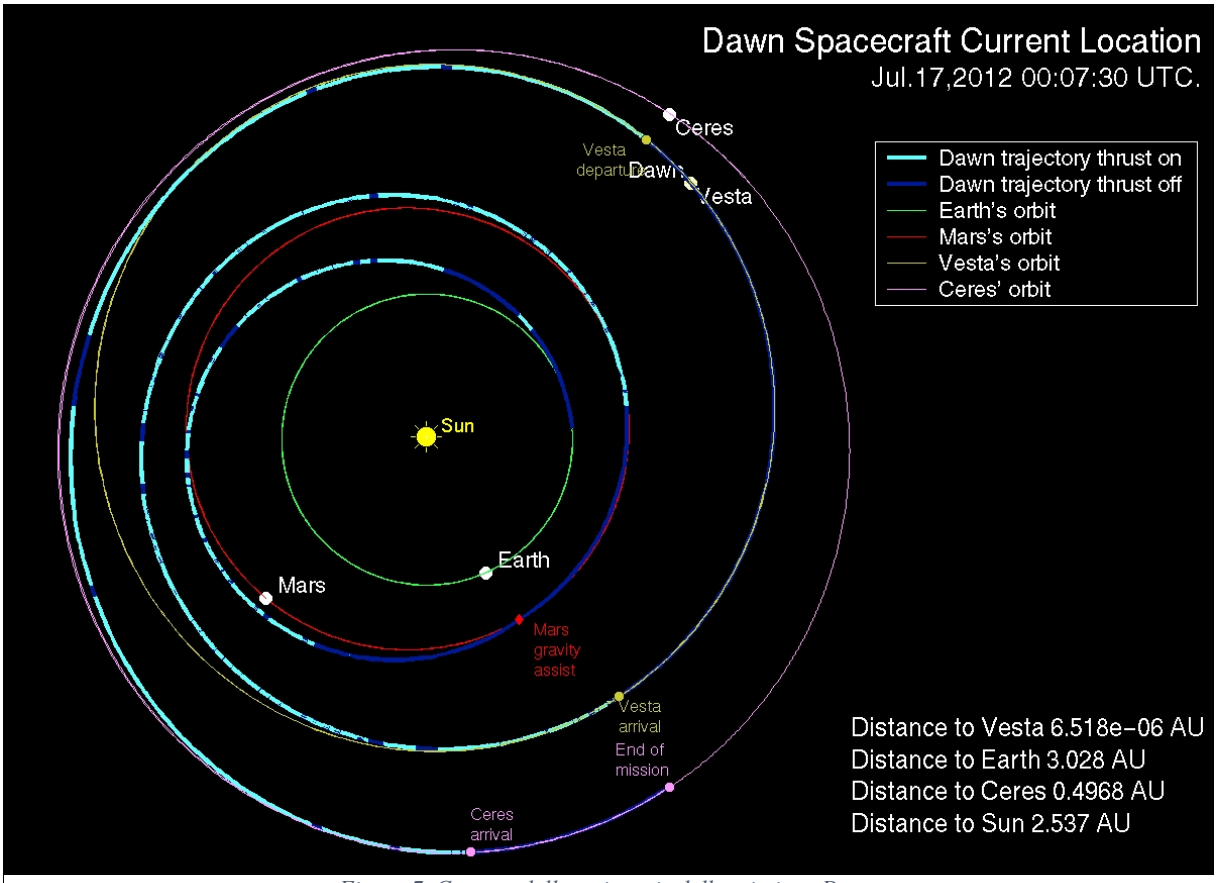


Figura 7. Concept delle traiettorie della missione Dawn

1.4.2 Missione Osiris-REX

La missione OSIRIS-REX [5] (che sta per Origins, Spectral Interpretation, Resource Identification and Security-Regolith Explorer) ha come obiettivo l'esplorazione del NEA Bennu.

La missione è stata lanciata nel 2016, con partenza per Bennu nel 2017. Dopo aver ottenuto con successo dei campioni della superficie nel 2018, la partenza alla volta della Terra è prevista per il 2021, con rientro della Sample Return Capsule (SRC) nel 2023.

Bennu è stato selezionato tra altri NEAs come target in quanto è l'unico di tipo carbonaceo ed è inoltre il NEAs conosciuto più pericoloso. La conoscenza della sua natura è fondamentale per capire come si formano i pianeti e l'origine della vita.

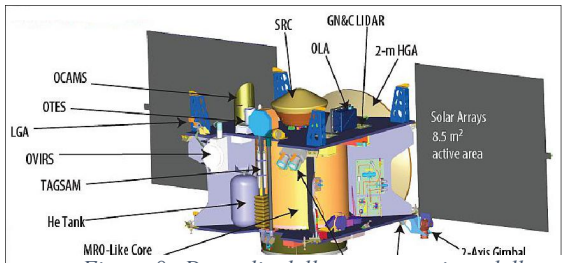


Figura 8. Dettaglio della strumentazione della sonda della missione OSIRIS-REX

Tale conoscenza può essere ottenuta esclusivamente tramite lo studio ed il campionamento dei materiali.

1.4.3 Missione Hayabusa

Hayabusa è una missione dell'agenzia spaziale giapponese, la JAXA, sviluppata con l'intento di testare l'affidabilità della tecnologia necessaria all'esplorazione della superficie di un asteroide e della raccolta di campioni dallo stesso.

E' stata lanciata nel 2003, rientrando sulla Terra nel 2010 e facendo cadere delle capsule, con all'interno i campioni prelevati dalla superficie dell'asteroide target Itokawa, sull'Australia.

Per raggiungere Itokawa, l'asteroide scelto come target, Hayabusa è stato dotato di un sistema propulsivo di tipo elettrico a ioni, ad alta efficienza; tramite questo sistema è stata possibile effettuare la manovra di rendez-vous nel 2005, una volta giunti in prossimità del target.

Nel sistema propulsivo a ioni scelto per la missione, lo Xenon è dapprima ionizzato da una scarica a microonde, seguito poi da un'accelerazione a causa di una grande differenza di potenziale per generare la spinta, la cui magnitudine, essendo un propulsore di tipo elettrico, è comunque molto ridotta rispetto all'omologo chimico. A differenza di questi ultimi però, questo tipo di propulsore permette di avere nel lungo periodo un'alta velocità di scarico: quattro motori del genere garantiscono una velocità di 2.2 km/s ed un'autonomia di 40000 ore.

Figura 9. Sonda Hayabusa

1.4.4 Missione M-ARGO

La missione M-ARGO rappresenta un'importante novità nel campo dell'esplorazione spaziale: è infatti la prima missione ESA che utilizza un CubeSat nello spazio profondo.
M-ARGO, Miniaturised-Asteroid Remote Geophysical Observer, è uno spacecraft miniaturizzato basato sull'architettura del CubeSat: è costituito da moduli di 10 cm^3, indipendenti dal punto di vista della dotazione elettrica, che possono essere poi assemblati successivamente.
L'obiettivo di M-ARGO è l'esplorazione un gruppo di NEAs orbitanti in una zona ben precisa: uno dei punti lagrangiani del sistema Sole-Terra, L5.
Lo spacecraft è dotato di un sistema propulsivo di tipo elettrico per raggiungere il target ed effettuare successivamente la manovra di rendezvous. I modelli sull'autonomia del sistema propulsivo prevedono di visitare da un minimo di 4 fino ad un massimo di 30 asteroidi.
Tutti i target sono caratterizzati dall'essere molto piccoli (meno di 50 cm di diametro) e da un'elevata velocità di spinning, che permette loro di possedere una superficie totalmente libera dalla polvere; rappresentano dunque un tipo di corpo mai visitato prima così nel dettaglio.

Capitolo 2

Il modello matematico

Si riportano di seguito i modelli matematici del metodo di Edelbaum [1] e del metodo approssimato [2], alla base dell'analisi condotta nel seguito.

Il modello approssimato utilizzato permette l'integrazione analitica (e non solo numerica come nel caso del metodo indiretto) delle equazioni differenziali che descrivono le variazioni dei parametri orbitali.

Per quanto concerne i costi di missione, occorre distinguere due casi separatamente: nel caso coplanare, il metodo fornisce una stima molto accurata; nel caso non-coplanare invece, in base alla combinazione dei parametri orbitali, è possibile ottenere dei risultati che presentano errori elevati rispetto al metodo indiretto.

2.1 Introduzione

Edelbaum, nella sua trattazione matematica, ha analizzato la missione di uno spacecraft dotato di un sistema propulsivo che fornisce bassa spinta, come quello di tipo elettrico, in un'orbita caratterizzata da eccentricità ridotta.

Tenendo conto di tali ipotesi, è possibile definire l'orbita come quasi-circolare: ciò porta il vantaggio di determinare facilmente le leggi di controllo per massimizzare le variazioni di semiasse maggiore *a*, eccentricità *e* ed inclinazione *i*.

L'analisi di Edelbaum valuta, in particolare, le variazioni ottenibili lungo una rivoluzione ed i rispettivi costi; tale analisi può inoltre essere estesa al caso di trasferimenti che prevedono più rivoluzioni. Prendendo in considerazione grandi variazioni simultanee di a ed i, si arriva a determinare un'equazione per calcolare il ΔV necessario ad un trasferimento tra due orbite circolari con cambio di inclinazione sotto le ipotesi precedentemente menzionate.

I limiti dell'analisi di Edelbaum diventano evidenti quando il tempo di missione diminuisce, ed in particolare non risulta essere un numero intero di rivoluzioni: essa è basata infatti sulle variazioni medie calcolabili durante una intera rivoluzione. A sostegno di questo limite si può notare come il tasso di variazione dell'eccentricità e dell'inclinazione dipende dalla posizione dello spacecraft lungo l'orbita e le variazioni corrispondenti non sono funzioni lineari del tempo e dell'angolo spazzato.

Si ha infatti, come sarà poi dimostrato nel seguito:

$$\frac{de_x}{d\vartheta} = (2\cos\vartheta\cos\alpha\cos\beta + \sin\vartheta\sin\alpha\cos\beta)\frac{T/m}{\mu/r^2} \qquad (3)$$

$$\frac{de_y}{d\vartheta} = (2\sin\vartheta\cos\alpha\cos\beta - \cos\vartheta\sin\alpha\cos\beta)\frac{T/m}{\mu/r^2} \qquad (4)$$

$$\frac{di_x}{d\vartheta} = \cos\vartheta \sin\beta \frac{\frac{T}{m}}{\frac{\mu}{r^2}} \qquad (5)$$

$$\frac{di_y}{d\vartheta} = \sin\vartheta \sin\beta \frac{\frac{T}{m}}{\frac{\mu}{r^2}} \qquad (6)$$

Inoltre, il metodo non tiene conto del caso possibile (e che in realtà è molto frequente) in cui è richiesta una variazione simultanea di eccentricità e semiasse maggiore.

Ancora più evidenti sono però i limiti dovuti all'introduzione, nelle manovre, degli archi di coasting, dovuti alla natura non impulsiva della propulsione elettrica: a differenza della propulsione chimica infatti, non si può manovrare solo in certi punti specifici e quindi vi è un certo arco di orbita in cui si aumenta la spinta. Inoltre, non si manovra per tutta l'orbita come nelle classiche manovre a propulsione elettrica ma solo in suddetti archi in quanto vi è una convenienza nell'aumentare la spinta solo in certe zone dell'orbita.

Il risultato dell'analisi è ottenere la soluzione numerica del sistema algebrico, che fornisce le leggi di controllo, richieste per ottenere le variazioni desiderate dei parametri orbitali, oltre a fornirne i rispettivi costi. Esse permettono inoltre di calcolare il tempo necessario e la lunghezza orbitale del trasferimento.

2.2 Orbite con inclinazione ed eccentricità ridotte

Il modello matematico di riferimento è quello di Gauss: le equazioni planetarie, formalizzate dapprima da Lagrange, sono un set di equazioni differenziali che descrivono la variazione dei parametri orbitali in funzione delle componenti dell'accelerazione perturbativa, che nel caso in questione è la spinta.

È possibile semplificare il modello quando si introduce l'ipotesi di orbite quasi circolari (cioè con eccentricità quasi nulla) e piccola inclinazione.

Valgono perciò le seguenti ipotesi:

1. $r \cong a \cong p$
2. $V^2 \cong \mu/r$
3. $e \cong 0$
4. $\sin i \cong i$, $\cos i \cong 1$
5. $E \cong \nu \cong M$
6. $\vartheta \cong \Omega + \omega + \nu$

Dove:

- r è il raggio vettore che unisce uno dei due fuochi alla posizione dello spacecraft
- p è il raggio vettore che indica la posizione del perielio
- μ/r è pari al quadrato della velocità circolare, con μ parametro gravitazionale
- E è l'angolo di anomalia eccentrica
- ν è l'angolo di anomalia vera
- M è l'angolo di anomalia media
- ϑ è l'angolo di ascensione retta
- Ω è l'angolo di ascensione retta del nodo ascendente
- ω è l'argomento del periastro

Sotto tali ipotesi le equazioni che governano il moto possono essere scritte nella forma:

$$\begin{cases} V\dfrac{da}{dt} = 2rA_T \\ V\dfrac{de}{dt} = 2\cos\nu\, A_T + \sin\nu\, A_R \\ V\dfrac{di}{dt} = \cos(\nu+\omega)A_W \\ iV\dfrac{d\Omega}{dt} = \sin(\nu+\omega)A_W \\ V\dfrac{d\omega}{dt} = -V\dfrac{d\Omega}{dt} + \dfrac{(2\sin\nu A_T - \cos\nu A_R)}{e} \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} = \dfrac{V}{r} \end{cases} \tag{7}$$

Con n definito parametro di moto medio, mentre A_T, A_R, A_W, sono rispettivamente le componenti tangenziale, radiale e fuori dal piano dell'accelerazione.

Questo set di equazioni, così per come è definito, è mal posto nel caso di piccoli valori di eccentricità ed inclinazione, proprio come nel caso oggetto di studio. Si rende quindi necessario definire delle nuove variabili:

- due componenti di eccentricità, legate alla variazione di eccentricità ed alla rotazione della linea degli absidi
  - $e_x = e\cos(\Omega+\omega)$
  - $e_y = e\sin(\Omega+\omega)$
- due componenti di inclinazione, legate alla variazione dell'inclinazione ed alla rotazione della linea degli absidi
  - $i_x = i\cos\Omega$

- $i_y = i \sin \Omega$

- ϑ diventa la nuova variabile indipendente, al posto del tempo
- α è l'angolo tra la proiezione della spinta e la direzione tangenziale
- β è l'angolo tra la direzione della spinta ed il piano dell'orbita.

Attraverso l'utilizzo di questi ultimi due angoli, si possono definire le componenti del vettore accelerazione:

$$\{\vec{A}\} = \begin{Bmatrix} A_R = \dfrac{T}{m} \sin \alpha \cos \beta \\ A_T = \dfrac{T}{m} \cos \alpha \cos \beta \\ A_W = \dfrac{T}{m} \sin \beta \end{Bmatrix}$$

Sostituendo le quantità nel set di equazioni differenziali si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{d\vartheta} = 2r \dfrac{T/m}{\mu/r^2} \cos \alpha \cos \beta \\ \dfrac{de_x}{d\vartheta} = (2 \cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta + \sin \vartheta \sin \alpha \cos \beta) \dfrac{T/m}{\mu/r^2} \\ \dfrac{de_y}{d\vartheta} = (2 \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \sin \alpha \cos \beta) \dfrac{T/m}{\mu/r^2} \\ \dfrac{di_x}{d\vartheta} = \cos \vartheta \sin \beta \dfrac{\frac{T}{m}}{\frac{\mu}{r^2}} \\ \dfrac{di_y}{d\vartheta} = \sin \vartheta \sin \beta \dfrac{\frac{T}{m}}{\frac{\mu}{r^2}} \\ \dfrac{dt}{d\vartheta} = \sqrt{\dfrac{r^3}{\mu}} \end{cases} \tag{8}$$

Si può notare come in questa nuova forma la variabile indipendente è ϑ, e non più il tempo. Tramite questa scrittura le equazioni differenziali dipendono solo dalla variabile indipendente, e non più dalle variabili di stato; inoltre, vengono rimosse tutte le singolarità.

2.3 Legge di controllo ottimale tramite analisi di Edelbaum

È definito il problema del trasferimento tra due orbite, fissato il tempo iniziale ed in condizioni di massima spinta e minimo tempo di trasferimento.

Viene massimizzato il valore di $-\vartheta_f$, dato il valore iniziale di ϑ_0. Si definisce a questo punto l'operatore Hamiltoniano: ciò è possibile introducendo una variabile ausiliaria λ per ogni equazione:

$$H = A\Big[\lambda_a 2r\cos\alpha\cos\beta + \lambda_{e_x}(2\cos\vartheta\cos\alpha\, cos\beta + sin\vartheta sin\alpha cos\beta) + \lambda_{e_y}(2\sin\vartheta\cos\alpha\, cos\beta - cos\vartheta sin\alpha cos\beta) + \lambda_{i_x} cos\vartheta sin\beta + \lambda_{i_y} sin\vartheta sin\beta\Big] \quad (9)$$

Dove $A = \frac{T/m}{\mu/r^2}$ è l'accelerazione adimensionata.

Essendo l'operatore Hamiltoniano indipendente dalle variabili di stato, le variabili aggiuntive sono in realtà delle costanti.

Le leggi di controllo ottimale si ottengono annullando:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0 \qquad (10)$$

Per risolvere il problema, è conveniente definire le seguenti grandezze:

- $\lambda_e = \pm\sqrt{\lambda_{e_x}^2 + \lambda_{e_y}^2}$, con il segno scelto in modo da essere concorde a λ_a
- $\vartheta_e = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda_{e_y}}{\lambda_{e_x}}\right)$, scegliendo il giusto quadrante il modo tale che $\lambda_{e_x} = \lambda_e\cos\vartheta_e$, $\lambda_{e_y} = \lambda_e\sin\vartheta_e$
- $\vartheta_i = \tan^{-1}\left(\lambda_{i_y}/\lambda_{i_x}\right)$, scegliendo il giusto quadrante il modo tale che $\lambda_{i_x} = \lambda_i\cos\vartheta_i$, $\lambda_{i_y} = \lambda_i\sin\vartheta_i$

Le leggi di controllo ottimale, oltre ad annullare le derivate parziali di H, devono massimizzare l'operatore Hamiltoniano, come esplicitato dal principio del massimo di Pontryagin:

$$\cos\alpha = \frac{2[\lambda_a r + \lambda_e\cos(\vartheta - \vartheta_e)]}{X_\alpha} \quad (11)$$

$$\sin\alpha = \frac{\lambda_e\sin(\vartheta - \vartheta_e)}{X_\alpha} \quad (12)$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{4[\lambda_a r + \lambda_e\cos(\vartheta - \vartheta_e)]^2 + [\lambda_e\sin(\vartheta - \vartheta_e)]^2}}{X_\beta} \quad (13)$$

$$\sin\beta = \frac{\lambda_i\cos(\vartheta - \vartheta_i)}{X_\beta} \quad (14)$$

Dove

$$X_\alpha^2 = 4[\lambda_a r + \lambda_e\cos(\vartheta - \vartheta_e)]^2 + [\lambda_e\sin(\vartheta - \vartheta_e)]^2 \quad (15)$$

$$X_\beta^2 = 4[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\vartheta - \vartheta_e)]^2 + [\lambda_e \sin(\vartheta - \vartheta_e)]^2 + [\lambda_i \cos(\vartheta - \vartheta_i)]^2 \quad (16)$$

Una volta fissato il valore di una delle variabili aggiuntive, le altre possono essere scalate in maniera arbitraria: tale scelta è giustificata dal fatto che l'operatore Hamiltoniano è omogeneo rispetto alle variabili aggiuntive precedentemente introdotte.

Il problema è quindi totalmente definito dalle cinque incognite (quattro variabili aggiuntive e la longitudine finale ϑ_f): il cui valore deve essere tale da ottenere le variazioni desiderate delle variabili di stato, cioè il semiasse maggiore, le due componenti di eccentricità e le due componenti di inclinazione.

Si distinguono tre casi:

1. Variazione del semiasse maggiore: $\lambda_{e_x} = \lambda_{e_y} = \lambda_{i_x} = \lambda_{i_y} = 0$, $\beta = 0$ (caso coplanare), $\alpha = 0, \pi$ rispettivamente se $\lambda_a, \Delta_a > 0$ oppure $\lambda_a, \Delta_a < 0$
2. Variazione dell'eccentricità: $\lambda_a = \lambda_{i_x} = \lambda_{i_y} = 0$, $\beta = 0$,
$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\tan(\vartheta - \vartheta_e)\right] \cong \vartheta - \vartheta_e \qquad (17)$$
3. Variazione di semiasse maggiore ed inclinazione: $\lambda_{e_x} = \lambda_{e_y} = 0$, $\alpha = 0, \pi$(in base al valore di λ_a, Δ_a)
$$\beta = \tan^{-1}\left[\frac{\lambda_i \cos(\vartheta - \vartheta_i)}{2\lambda_a r}\right] \qquad (18)$$
In questo caso si commettono degli errori se si utilizza $\beta = cost$ al posto del valore esatto ottenuto come risultato della legge di controllo; l'angolo deve variare segno ogni mezza rivoluzione, per rimanere coerente al segno di $\cos(\vartheta - \vartheta_i)$

Come detto precedentemente, tale metodo fornisce dei risultati ottimi quando il numero di rivoluzioni è intero.

In particolare, si può osservare che, dopo una rivoluzione, se si vogliono ottenere delle variazioni solo di semiasse maggiore si deve utilizzare un valore nullo di angolo fuori dal piano ($\beta = 0$); se invece si vogliono variare contemporaneamente semiasse maggiore ed inclinazione, si deve utilizzare $\beta = cost$, con

$$\frac{\Delta i_y}{\Delta i_x} = \tan \vartheta_i \qquad (19)$$

Quando si vuole variare l'eccentricità, si utilizzata per α il valore fornito dalla legge di controllo, con $\beta = 0$. Naturalmente, in tal modo si modifica solo il valore di e_x ed e_y, con

$$\frac{\Delta e_y}{\Delta e_x} = \tan \vartheta_e \qquad (20)$$

Tale relazione suggerisce che la direzione della spinta deve risultare praticamente perpendicolare al vettore eccentricità che si vuole ottenere; se invece si vuole cambiare il vettore eccentricità solo in termini di magnitudine, la spinta deve essere perpendicolare alla linea degli absidi.

Per ognuno dei tre casi, Edelbaum fornisce un valore di ΔV:

1. $\frac{\Delta V}{V} = 0.5\frac{\Delta a}{r}$
2. $\frac{\Delta V}{V} \cong 0.649\ \Delta e$
3. $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi}{2}\Delta i$

Tali relazioni sono valide anche in caso si utilizzi il valore $\beta = \text{cost}$ al posto del valore esatto fornito dalla legge di controllo ottimale.

Queste considerazioni sono valide, come detto in precedenza, solo nel caso di numeri interi di rivoluzioni; in caso di frazioni di rivoluzione, la componente tangenziale dell'accelerazione va a modificare anche l'eccentricità. Nel secondo caso invece le leggi di controllo producono anche cambiamenti del semiasse maggiore, in quanto esso dipende dalla posizione istantanea lungo l'orbita.

Inoltre, nel caso di frazioni di rivoluzione, le grandezze non variano uniformemente lungo l'orbita, mentre le formule sopra sono basate sulla media ottenibile dopo una rivoluzione completa.

Come regola generale, la spinta è utile ad ottenere le variazioni prefissate di semiasse maggiore ed eccentricità quando l'angolo ϑ è vicino alla direzione in cui punta anche il vettore $\overrightarrow{\Delta e}$ e meno utile in direzione opposta; viceversa, se si vuole ridurre il semiasse maggiore.

Nel caso di missione che preveda molte rivoluzioni, le perturbazioni periodiche possono essere trascurate e l'analisi di Edelbaum fornisce ottimi risultati. Essi potrebbero però non essere soddisfacenti nel caso di missioni dalla durata corta, come nel caso oggetto di studio, in quanto lo spacecraft si trova in zone favorevoli o non, in termini di accelerazioni perturbative, quando si muove su frazioni di rivoluzioni non intere.

Un altro limite dell'analisi di Edelbaum è che non viene preso in considerazione il caso in cui variano contemporaneamente i tre parametri orbitali: nella legge di controllo subottimale anche questa circostanza è studiata, presupponendo che le variazioni di semiasse maggiore ed eccentricità siano indipendenti ed ottenute attraverso le componenti normali dell'accelerazione.

In prima approssimazione si può assumere:

$$\Delta V = \sqrt{(k_a \Delta a)^2 + (k_e \Delta e)^2 + (k_i \Delta i)^2} \qquad (36)$$

Con:

- $k_a = \frac{V_0}{2a_0}$

- $k_e = 0.649\, V_0$
- $k_i = \frac{\pi}{2} V_0$
- $a_0 = \frac{(a_1+a_2)}{2}$

$$V_0 = \sqrt{\mu / a_0}$$

2.4 Legge di controllo subottimale approssimata

La legge di controllo approssimata presentata nel seguito è quella utilizzata per l'analisi condotta nello studio. Il problema considerato riguarda il trasferimento tra due orbite, con partenza da una certa posizione di longitudine ϑ_0. Come ipotesi, sono considerate piccole variazioni dei tre parametri orbitali (semiasse maggiore, eccentricità ed inclinazione).

Si analizza perciò dapprima il caso coplanare, che consente di ottenere una soluzione numerica; successivamente, la strategia di ripartizione delle manovre periastro-apoastro e viceversa; infine, vengono presentati i risultati per il caso non coplanare.

2.4.1 Caso coplanare

Nel caso coplanare si ha $\Delta i_x = \Delta i_y = 0 \rightarrow \lambda_{i_x} = \lambda_{i_y} = 0,\ \beta = 0$. La legge di controllo ottimale, secondo quando precedentemente ricavato, è:

$$\cos\alpha = \frac{2[\lambda_a r + \lambda_e \cos(\vartheta - \vartheta_e)]}{X_\alpha} \qquad \sin\alpha = \frac{\lambda_e \sin(\vartheta - \vartheta_e)}{X_\alpha} \tag{21}$$

Si nota che, a seconda del segno di λ_a e λ_e, tali espressioni possono assumere segno negativo o positivo. Questa relazione può essere approssimata tra $-\pi < \vartheta - \vartheta_e < \pi$ con la legge:

$$\alpha = \begin{cases} \Lambda(\vartheta - \vartheta_e) & se\ \lambda_a, \lambda_e > 0 \\ \Lambda(\vartheta - \vartheta_e) + \pi & se\ \lambda_a, \lambda_e < 0 \end{cases} \tag{22}$$

Con $0 \leq \Lambda \leq 1$ scelto appropriatamente in base al rapporto λ_e / λ_a. Per $\Lambda = 0$ si è nel caso di spinta puramente in direzione tangenziale, mentre per $\Lambda = 1$ si ha spinta in direzione costante.

Per $\lambda_a, \lambda_e > 0$ si ottiene, sostituendo ad α la relazione appena trovata:

$$\frac{da}{d\vartheta} = 2Ar \cos[\Lambda(\vartheta - \vartheta_e)] \tag{23}$$

$$\frac{de_x}{d\vartheta} = A\,\{2\cos\vartheta \cos[\Lambda(\vartheta - \vartheta_e)] + \sin\vartheta \sin[\Lambda(\vartheta - \vartheta_e)]\} \tag{24}$$

$$\frac{de_y}{d\vartheta} = A\{2\sin\vartheta \cos[\Lambda(\vartheta - \vartheta_e)] - \cos\vartheta \sin[\Lambda(\vartheta - \vartheta_e)]\} \tag{25}$$

Per valori negativi di λ_a si cambia semplicemente il segno del secondo membro e si ha:

$$\frac{de_x}{d\vartheta} = \frac{A}{2}\ \{3\cos[(1-\Lambda)\vartheta + \Lambda\vartheta_e] + \cos[(1-\Lambda)\vartheta - \Lambda\vartheta_e]\} \qquad (26)$$

$$\frac{de_y}{d\vartheta} = \frac{A}{2}\ \{3\sin[(1-\Lambda)\vartheta + \Lambda\vartheta_e] + \sin[(1-\Lambda)\vartheta - \Lambda\vartheta_e]\} \qquad (27)$$

Il metodo, come detto, permette l'integrazione analitica delle equazioni.

Integrando dunque tra ϑ_0 e ϑ_f si ottiene:

$$\Delta a = \frac{2Ar}{\Lambda}\{\sin[\Lambda(\vartheta_f - \vartheta_e)] - \sin[\Lambda(\vartheta_0 - \vartheta_e)]\} \qquad (28)$$

$$\begin{aligned}\Delta e_x = {} & \frac{3A}{2(1-\Lambda)}\{\sin[(1-\Lambda)\vartheta_f + \Lambda\vartheta_e] - \sin[(1-\Lambda)\vartheta_0 + \Lambda\vartheta_e]\} \\ & + \frac{A}{2(1+\Lambda)}\{\sin[(1+\Lambda)\vartheta_f - \Lambda\vartheta_e] \\ & - \sin[(1+\Lambda)\vartheta_0 - \Lambda\vartheta_e]\}\end{aligned} \qquad (29)$$

$$\begin{aligned}\Delta e_y = {} & \frac{3A}{2(1-\Lambda)}\{\cos[(1-\Lambda)\vartheta_f + \Lambda\vartheta_e] - \cos[(1-\Lambda)\vartheta_0 + \Lambda\vartheta_e]\} \\ & + \frac{A}{2(1+\Lambda)}\{\cos[(1+\Lambda)\vartheta_f - \Lambda\vartheta_e] \\ & - \cos[(1+\Lambda)\vartheta_0 - \Lambda\vartheta_e]\}\end{aligned} \qquad (30)$$

È importante osservare dei casi speciali, cioè i valori di Λ tali per cui il denominatore si annulla:

- $\Lambda = 0 \rightarrow\ \Delta a = 2Ar(\vartheta_f - \vartheta_0)$ (31)

- $\Lambda = 1 \rightarrow$

$$\begin{cases}\Delta e_x = \frac{3A}{2}(\vartheta_f - \vartheta_0)\cos\vartheta_e + \frac{A}{2}[\sin(2\vartheta_f - \vartheta_e) - \sin(2\vartheta_0 - \vartheta_e)] \\ \Delta e_y = \frac{3A}{2}(\vartheta_f - \vartheta_0)\sin\vartheta_e + \frac{A}{2}[\cos(2\vartheta_f - \vartheta_e) - \cos(2\vartheta_0 - \vartheta_e)]\end{cases} \qquad (32)$$

Per valutare i cambiamenti dopo una intera rivoluzione, basta imporre $\vartheta_0 = \vartheta_e - \pi$ e $\vartheta_f = \vartheta_e - \pi$, ottenendo:

$$(\Delta a)_{2\pi} = \frac{4\pi Ar}{\Lambda}\sin(\Lambda\Pi) \qquad (33)$$

$$(\Delta e_x)_{2\pi} = \left[\frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda}\right]\sin(\Lambda\Pi)\cos\vartheta_e \qquad (34)$$

$$(\Delta e_y)_{2\pi} = \left[\frac{3A}{1-\Lambda} - \frac{A}{1+\Lambda}\right]\sin(\Lambda\Pi)\sin\vartheta_e \qquad (35)$$

Anche in questo caso si analizzano le espressioni nel caso particolare in cui si annulli il denominatore:

- $\Lambda = 0 \rightarrow\ (\Delta a)_{2\pi} = 4\pi Ar, (\Delta e_x)_{2\pi} = (\Delta e_y)_{2\pi} = 0$
- $\Lambda = 1 \rightarrow\ (\Delta a)_{2\pi} = 0, (\Delta e_x)_{2\pi} = 3A\pi\cos(\vartheta_e), (\Delta e_y)_{2\pi} = 3A\pi\sin(\vartheta_e)$

Bisogna notare che le formule ottenute tramite l'integrazione analitica sono valide solo per gli intervalli:

$$\vartheta_e - \pi \leq \vartheta_0 \leq \vartheta_e + \pi$$
$$\vartheta_e - \pi \leq \vartheta_f \leq \vartheta_e + \pi$$

Nel caso in cui l'intervallo di integrazione non ricada nel caso sopra, allora esso deve essere diviso in modo tale da ricadere in tale intervallo.

Avendo come dati i parametri orbitali dei punti iniziali e finali, bisogna quindi, riassumendo il metodo, determinare Λ, ϑ_e e ϑ_f, al fine di poter calcolare $\Delta a, \Delta e_x$ e Δe_y. Per ottenere tali valori, si utilizza un metodo iterativo basato sul metodo di Newton: si parte da un valore di tentativo e si calcola la soluzione, la quale sarà affetta da un errore. Perturbando poi di una piccola quantità la soluzione, si calcola la derivata dell'errore rispetto ai parametri; tali derivate sono poi utilizzate per portare l'errore ad annullarsi.

2.4.2 Strategie di suddivisione delle manovre

La trasferta verso il target richiede la variazione dei parametri orbitali:

- $\Delta a = a_2 - a_1$
- $\Delta e = \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2} = \sqrt{\left(e_{x_2} - e_{x_1}\right)^2 + \left(e_{y_2} - e_{y_1}\right)^2}$
- $\Delta i = \sqrt{\Delta i_x^2 + \Delta i_y^2} = \sqrt{\left(i_{x_2} - i_{x_1}\right)^2 + \left(i_{y_2} - i_{y_1}\right)^2}$

Si suppone che la trasferta venga ottenuta con fasi propulse alternate al perielio ed afelio, le quali devono produrre specifici cambi dei parametri.

Nel caso di trasferimenti di piccola durata persiste comunque il problema dell'influenza reciproca tra semiasse maggiore ed eccentricità e quello della non-linearità delle variazioni in funzione di ϑ. Tale situazione è proprio quella del caso oggetto in esame: suddividendo la manovra infatti ha come risultato quello di ottenere degli archi corti di spinta, piuttosto che impulsi come nel caso chimico o spinta continua nel classico caso della propulsione di tipo elettrico.

La ricerca di una legge di controllo ottimale, come quella presentata da Edelbaum, prevede di ottenere le variazioni richieste delle cinque variabili di stato imponendo la condizione di durata del trasferimento più piccola possibile; bisogna poi integrare le equazioni del moto in maniera numerica.

Tale passaggio ha un costo computazione (e quindi di tempo) molto oneroso, per cui si tendono ad utilizzare delle leggi di controllo subottimali, come nel metodo presentato nel seguito.

Sono infatti assunte costanti grandezze come l'efficienza e l'impulso specifico. Utilizzando una propulsione SEP (Solar Electric Propulsion), la potenza disponibile e la spinta sono dipendenti dalla distanza come $1/r^2$.

Risolvendo il problema, si ottiene la lunghezza angolare $\vartheta_0 - \vartheta_f$. Con tale valore si può calcolare:

$$\Delta t = \frac{\Delta\vartheta}{V/r} \qquad (38)$$

$$m_f = m_0 - \frac{T}{c}\Delta t \qquad (39)$$

$$\Delta V = \Delta t \frac{T}{m} \qquad (40)$$

Utilizzando $r = a_0, V = V_0, m = \frac{m_0+m_f}{2}$.

Il primo passo del metodo richiede la definizione di una strategia sul come suddividere le variazioni dei parametri orbitali richieste. Bisogna quindi distinguere il caso di manovre coplanari e fuori dal piano.

Nel primo caso, il perielio e l'afelio vengono variate di una quantità pari a:

$$r_p = a_T(1 - e_T) \qquad (41)$$

$$r_a = a_T(1 + e_T) \qquad (42)$$

Dove il pedice 'T' sta ad indicare il target. Tali valori possono essere facilmente ottenuti con due impulsi spaziati di 180° l'uno dall'altro, in corrispondenza della linea degli absidi. Queste manovre producono delle variazioni pari a:

$$\Delta a_{PA} = \frac{(a_T - 1) + e_T}{2} \qquad \Delta e_{PA} = \frac{(a_T - 1) + e_T}{2} \qquad (43)$$

Nel caso di manovra effettuata in corrispondenza del perielio per alzare l'afelio e:

$$\Delta a_{AP} = \frac{(a_T - 1) - e_T}{2} \qquad \Delta e_{AP} = -\frac{(a_T - 1) - e_T}{2} \qquad (44)$$

Nel caso di manovra effettuata in corrispondenza dell'afelio per alzare il perielio.

Tali manovre non possono in realtà essere effettuate con propulsione elettrica, in quanto di natura impulsiva: le variazioni vengono dunque suddivise in diverse accensioni di lunghezza finita.

Le variazioni delle componenti del vettore eccentricità sono pari a:

$$\Delta e_x = e_T \cos(\Omega_T + \omega_T) - e_E \cos(\Omega_E + \omega_T) \qquad (45)$$

$$\Delta e_y = e_T \sin(\Omega_T + \omega_T) - e_E \sin(\Omega_E + \omega_T) \qquad (46)$$

Si ottiene alla fine:

$$\Delta a = a_2 - a_1 \qquad (46)$$

$$\Delta e = \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2} \qquad (47)$$

Tenendo conto della natura non impulsiva della propulsione elettrica, ad ogni passaggio al perielio si raggiungono tali valori finali tramite contributi tali a:

$$\Delta a_{PA} = \frac{\Delta a + |\Delta e|}{2n} \qquad (48)$$

$$\Delta e_{PA_x} = \frac{\Delta e_x}{\Delta \mathrm{e}} \frac{\Delta a + |\Delta e|}{2n} \qquad (49)$$

$$\Delta e_{PA_y} = \frac{\Delta e_y}{\Delta \mathrm{e}} \frac{\Delta a + |\Delta e|}{2n} \qquad (50)$$

Analogamente all'afelio:

$$\Delta a_{AP} = \frac{\Delta a - |\Delta e|}{2n} \qquad (51)$$

$$\Delta e_{AP_x} = -\frac{\Delta e_x}{\Delta \mathrm{e}} \frac{\Delta a - |\Delta e|}{2n} \qquad (52)$$

$$\Delta e_{AP_y} = -\frac{\Delta e_y}{\Delta \mathrm{e}} \frac{\Delta a - |\Delta e|}{2n} \qquad (53)$$

Per quanto riguarda la direzione della spinta, l'angolo di spinta nel piano α è assunto variare linearmente con la posizione angolare, tramite la legge $\alpha = \Lambda(\vartheta - \vartheta_e)$ oppure $\alpha = \pi + \Lambda(\vartheta - \vartheta_e)$, in base al segno di Δa.

Le costanti ϑ_e e Λ identificano rispettivamente:

- ϑ_e la direzione di spinta tangenziale
- Λ di quanto la spinta si muove dalla direzione tangenziale durante l'accensione.

Avendo come dati la posizione iniziale, la lunghezza angolare dell'arco e l'accelerazione, il metodo approssimato permette l'integrazione analitica delle equazioni del modello di Edelbaum.

2.4.3 Caso non coplanare

Nel caso di manovre fuori dal piano, che richiedono quindi un cambio di inclinazione, esso viene assunto proporzionale al contributo della manovra previsto, definito come:

$$\Delta PA = |\Delta a_{PA}| + |\Delta e_{PA}| \qquad (54)$$

$$\Delta AP = |\Delta a_{AP}| + |\Delta e_{AP}| \qquad (55)$$

$$\Delta i_{PA} = \left(\frac{\Delta PA}{\Delta PA + \Delta AP}\right)\frac{\Delta \mathrm{i}}{\mathrm{n}} \qquad (56)$$

$$\Delta i_{AP} = \left(\frac{\Delta AP}{\Delta PA + \Delta AP}\right)\frac{\Delta \mathrm{i}}{\mathrm{n}} \qquad (57)$$

In caso di variazione di inclinazione o di rotazione della linea dei nodi, si perde la simmetria della soluzione. Quando è necessario effettuare un cambio di piano, la componente di accelerazione fuori dal piano deve essere incrementata nei punti dove le direzioni della spinta per ottenere rispettivamente variazioni di semiasse maggiore ed eccentricità sono opposte, cioè per $\vartheta \cong \pi$ per $\Delta a, \Delta e > 0$. Inoltre, le componenti di accelerazione planare devono crescere dove le direzioni di spinta sopracitate sono concordi ($\vartheta \cong 0$ per $\Delta a, \Delta e > 0$).

Si nota anche che aumentare la magnitudine di accelerazione fuori dal piano risulta più conveniente vicino ai nodi se si vuole variare l'inclinazione o agli antinodi per variare Ω.

Per il caso non coplanare si adotta una strategia semplificata, anche al prezzo di sovrastimare i costi: si utilizza $\beta = cost$ ed una relazione lineare tra Δi e lunghezza angolare.

Sotto tali ipotesi, integrando tra $\vartheta_i - \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_i + \frac{\pi}{2}$, dopo metà rivoluzione si ha:

$$(\Delta i_x)_\pi = 2A \sin\beta \cos\vartheta_i \qquad (57)$$

$$\left(\Delta i_y\right)_\pi = 2A \sin\beta \sin\vartheta_i \qquad (58)$$

Cioè:

$$\Delta i_x = (\Delta i_x)_\pi \frac{\vartheta_f - \vartheta_0}{\pi} \qquad (59)$$

$$\Delta i_y = \left(\Delta i_y\right)_\pi \frac{\vartheta_f - \vartheta_0}{\pi} \qquad (60)$$

A partire dalla conoscenza delle variazioni richieste delle componenti dell'inclinazione, ad ogni iterazione queste due relazioni vengono risolte al fine di determinare i valori di β e ϑ_i. Si ha infatti che:

$$\vartheta_i = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta i_y}{\Delta i_x}\right) \qquad (61)$$

mentre il valore di β viene utilizzato nell'iterazione successiva per risolvere il caso planare, sostituendo al valore di accelerazione adimensionata A il

nuovo valore $A\cos\beta$, così da determinare i valori della lunghezza angolare $\vartheta_f - \vartheta_0$, Λ e ϑ_e. La soluzione approssimata fornisce degli ottimi risultati nel caso planare.

Per geometrie complicate, i risultati peggiorano ad esempio a causa dell'influenza delle posizioni delle linee degli absidi e dei nodi in relazione ai punti di partenza e di arrivo. Questo caso, così come altri che generano grandi errori, saranno trattati nel seguito con la correzione del metodo approssimato.

Capitolo 3

Correzioni dell'analisi approssimata

3.1 Introduzione

In un recente articolo pubblicato [2], il metodo approssimato viene utilizzato per l'analisi di fattibilità di missione verso un set di 75 possibili target, con il vincolo di consumo minimo di propellente. Oltre a questo, si hanno come dati:

- Massa dello spacecraft: 20 kg;
- Data di partenza: tra il 2020 ed il 2023
- Tempo massimo di missione: 3 anni
- Propulsione elettrica con le seguenti caratteristiche:
    - Impulso specifico: 3100 s
    - Spinta: 1.74 mN @1AU (la distanza va specificata in quanto la spinta è da essa dipendente)

Tra questi 75 target, non vengono considerati validi gli asteroidi che non rispettano le approssimazioni necessarie per utilizzare il metodo di Edelbaum, cioè:

- $i > 5°$
- $\Delta a > 0.2AU$
- $e > 0.25$

13 tra i 75 asteroidi non rispettano tali vincoli, per cui non saranno oggetto della trattazione.
Nell'articolo i risultati ottenuti sono molto soddisfacenti, ma per alcuni la distanza tra la soluzione di riferimento e quella dell'analisi approssimata è notevole, presentando errori con valori molto alti. Molti di questi asteroidi presentano infatti la linea dei nodi circa in quadratura con la linea degli absidi, per cui la manovra combinata cambio di inclinazione+cambio di perielio/afelio non può essere effettuata, con notevoli ripercussioni sul consumo di propellente.
Un altro caso di errore, stavolta per eccesso, si ha quando l'argomento del periastro è vicino ai valori di 0 o 180°: in questo caso si ha una sovrastima rispetto al caso reale, in quanto si tiene effettivamente conto della fattibilità della manovra combinata tra cambio di abside e cambio di piano in una singola manovra, che risulta più economica, ma non viene preso in considerazione il fatto che il cambio di piano può essere effettuato, almeno parzialmente, subito dopo aver superato l'afelio, risparmiando così

propellente. Infine, un'ultima fonte di errore proviene dal non considerare il risparmio ottenibile manovrando a raggi elevati.
Tutti e tre i casi verranno analizzati nel dettaglio nel seguito, spiegando anche le strategie adottate per la correzione dei risultati, ottenuti tramite il software di programmazione Visual Fortran.

3.2 Caso 0: stima originale

Il caso iniziale riguarda la stima spiegata sopra, con le tre problematiche individuate.

Si distinguono:

- $m_{p_{ref}}$ la massa di propellente di riferimento, calcolata con un metodo di ottimizzazione indiretto
- m_P la massa di propellente calcolata con il metodo approssimato

Come accennato sopra, si distinguono target che presentano grandi errori, sia con valori negativi che con valori positivi. I risultati sono riportati nella tabella 1.

Il consumo medio di propellente, calcolato con il metodo approssimato, è di 2.1 kg, valore che differisce rispetto a quello calcolato con il metodo indiretto di 0.21 kg. Sono considerati soddisfacenti errori al di sotto del 10-15%: in tale range ricadono la maggior parte dei target.

Un esempio di corretta predizione della strategia di ottimizzazione è quella dell'asteroide 2010 WR7: i cambiamenti richiesti degli absidi combaciano con la sequenza delle accensioni in ogni abside, con il cambio di piano che viene diviso abbastanza uniformemente tra le due manovre.

L'unica eccezione è rappresentata dall'accensione iniziale, effettuata per innalzare afelio e perielio, fatta in modo da ridurre il costo dei successivi cambi di piano.

Come detto prima, vi sono comunque valori di errore elevati, causati da un set di elementi orbitali che rendono la soluzione approssimata poco accurata.

I target con errore negativo sono caratterizzati da una piccola variazione di perielio e grandi variazioni di afelio; inoltre, la linea dei nodi è in quadratura rispetto la linea degli absidi: il cambio di piano richiesto non può essere quindi effettuato come una manovra combinata con quella per la variazione del perielio/afelio. La sequenza di accensione differisce quindi da quella predetta e la manovra di cambio di piano non è svolta efficientemente. Questo è il caso di target come 2014QH33.

Si hanno invece errori positivi quando l'argomento del periastro assume un valore vicino a 0° o 180°. In tal caso è possibile effettuare una manovra combinata per ottenere le variazioni richieste di semiasse maggiore ed inclinazione. Il cambio di piano può però essere effettuato nelle fasi

successive al superamento degli absidi, per cui l'errore positivo rappresenta una sovrastima del consumo di propellente. A titolo di esempio si può osservare l'errore che si ottiene per 2013WA44.

Alcuni target, come ad esempio 2013PA7 e 1996XB27, non ricadono nell'ultimo caso descritto; richiedono bensì un aumento rilevante sia del perielio che dell'afelio. La manovra ottimale viene effettuata posticipando il cambio di piano ai raggi più grandi, in modo da ottenere un notevole risparmio di propellente. Gli errori positivi maggiori si hanno per target che richiedono una grande variazione di inclinazione e una variazione limitata di semiasse maggiore ed eccentricità.

									caso0	
N°	Target	a	e	i	ω	rp	ra	mp,ref	mp	Δmp
71	2013 RV9	1.17	0.2	3.51	108.76	0.93	1.4	2.5338	2.227	-0.30704
23	2012 UW68	1.14	0.16	2.47	102.39	0.96	1.31	1.9101	1.661	-0.24898
35	2008 TX3	1.18	0.19	2.38	249.85	0.96	1.4	2.1363	1.915	-0.22092
58	2014 QH33	1.09	0.18	2.83	264.45	0.88	1.29	2.4971	2.285	-0.21222
40	2006 QV89	1.19	0.22	1.07	236.72	0.92	1.46	2.234	2.030	-0.20355
64	2012 UY68	1.18	0.23	2.9	35.76	0.91	1.44	2.4655	2.281	-0.18468
76	2016 TP11	1.04	0.18	1.54	108.17	0.58	1.22	2.1669	2.000	-0.16728
19	2012 HK31	1.07	0.12	2.21	96.69	0.94	1.2	1.8182	1.653	-0.1651
21	2015 PL57	1.12	0.14	1.63	115.26	0.96	1.28	1.7882	1.639	-0.1495
75	2011 CG2	1.18	0.16	2.76	283.85	0.99	1.36	2.1843	2.040	-0.14454
53	2017 EB3	1.04	0.15	2.84	247.51	0.88	1.2	2.2421	2.110	-0.13195
67	2016 UE	1.06	0.15	1.09	296.5	0.9	1.22	1.5172	1.396	-0.12161
69	2015 FG36	1.1	0.17	3.51	300.57	0.91	1.29	2.4807	2.362	-0.1188
14	2012 UV136	1.01	0.14	2.21	288.61	0.87	1.15	1.737	1.641	-0.09617
52	2014 UY	1.17	0.17	3.56	245.64	0.97	1.38	2.2895	2.203	-0.0865
9	2012 EC	1.15	0.14	0.91	333.91	0.99	1.31	1.5679	1.500	-0.06807
37	2007 UY1	0.95	0.18	1.02	273.57	0.78	1.12	2.0429	1.997	-0.04545
2	2016 TB57	1.1	0.12	0.3	147.8	0.97	1.24	1.0562	1.024	-0.0318
5	2016 CF137	1.06	0.1	2.44	301.5	0.65	1.2	1.4336	1.408	-0.02512
10	2009 CV	1.12	0.15	0.94	181.36	0.95	1.28	1.5367	1.520	-0.0164
6	2014 YD	1.07	0.09	1.74	34.12	0.98	1.16	1.1071	1.093	-0.01398
74	2017 BF30	1.04	0.13	3.62	256.14	0.91	1.18	2.1166	2.107	-0.00932
44	2007 DD	0.99	0.12	2.62	77.57	0.87	1.1	1.7034	1.695	-0.00834
4	2013 BS45	0.99	0.08	0.77	150.69	0.91	1.07	1.0066	1.010	0.003124
73	2010 WR7	1.05	0.24	1.56	159.14	0.8	1.29	2.3343	2.343	0.008289
17	2001 QJ142	1.06	0.09	3.1	63.97	0.97	1.15	1.7383	1.751	0.012753
22	2016 TB 18	1.08	0.08	1.53	305.61	0.99	1.17	1.0234	1.038	0.01496
24	2017 HK1	0.91	0.15	1.51	258.73	0.78	1.04	1.756	1.773	0.016695
55	2009 HC	1.04	0.13	3.78	269.9	0.91	1.17	2.027	2.061	0.034175
12	2004 JN1	1.09	0.18	1.5	2.12	0.89	1.28	1.6507	1.697	0.046597
36	2006 FH36	0.95	0.2	1.59	154.74	0.77	1.14	1.9701	2.041	0.071322
25	2004 VJ1	0.94	0.16	1.29	332.27	0.79	1.1	1.7722	1.864	0.091549
13	2003 SM84	1.13	0.08	2.8	87.37	1.03	1.22	1.675	1.771	0.096303
30	2001 CQ36	0.94	0.18	1.26	344.38	0.77	1.1	1.8559	1.957	0.10128
61	2017 HZ24	0.91	0.22	1.81	312.19	0.71	1.1	2.4285	2.540	0.111878
11	2009 OS5	1.14	0.1	1.7	120.85	1.03	1.26	1.467	1.623	0.156398
7	2015 BM510	0.95	0.12	1.59	357.34	0.83	1.06	1.4517	1.642	0.190394
32	2010 HA	0.96	0.2	2.18	185.72	0.77	1.15	1.9307	2.146	0.215243
46	2009 RT1	1.16	0.11	4.15	136.5	1.03	1.28	2.1505	2.370	0.219954
28	2014 YN	0.89	0.13	1.21	15.83	0.77	1.01	1.603	1.837	0.23419
33	2005 TG50	0.92	0.13	2.4	200.93	0.8	1.05	1.6832	1.930	0.24674
43	2000 AE205	1.16	0.14	4.46	150.32	1	1.32	2.2365	2.486	0.24901
3	2013 WA44	1.1	0.06	2.3	176.73	1.03	1.17	1.1974	1.473	0.275421
49	2016 FY2	0.87	0.18	187	204.97	0.72	1.02	2.1412	2.418	0.276573
70	2006 XP4	0.87	0.22	0.51	346.04	0.69	1.06	2.4187	2.728	0.30915
38	2013 XY20	1.13	0.11	2.86	18.19	1.01	1.25	1.5071	1.818	0.311142
51	2013 HP11	1.18	0.13	4.16	9.49	1.04	1.33	2.2058	2.539	0.332815
16	2017 BF29	1.18	0.13	2.61	203.77	1.02	1.34	1.7644	2.101	0.336257
39	2015 VV	1.14	0.1	4.01	177.19	1.02	1.26	1.87	2.220	0.349766
50	2003 LN6	0.86	0.21	0.66	211.57	0.68	1.04	2.1053	2.460	0.354624
8	2014 SD304	1.17	0.11	2.29	19.3	1.04	1.29	1.5896	1.950	0.360173
18	2013 EM89	1.18	0.12	2.41	189.95	1.04	1.32	1.6838	2.051	0.367038
20	2019 PA7	1.15	0.09	3.47	93.28	1.05	1.26	1.8033	2.207	0.404061
27	1999 AO10	0.91	0.11	2.62	7.98	0.81	1.01	1.5367	1.972	0.435536
63	2001 BB16	0.85	0.17	2.03	195.56	0.71	1	2.102	2.552	0.450232
15	1996 XB27	1.19	0.06	2.46	58.18	1.12	1.26	1.7672	2.235	0.468066
26	2015 TZ24	1.19	0.1	3.35	3.17	1.07	0.31	1.9495	2.422	0.47221
45	2014 MF18	0.89	0.16	2.61	350.35	0.74	1.03	1.762	2.243	0.480573
29	2007 TF 15	1.11	0.04	4.25	28.86	1.06	1.16	1.7674	2.266	0.498711
31	2014 EK24	1.01	0.07	4.8	63.75	0.94	1.08	1.8574	2.400	0.542832

Tabella 1. Caso 0-stima originale

3.3 Caso 1: correzione della manovra di cambio di piano in base al valore dell'argomento del periastro

La prima correzione ha riguardato gli errori che derivano dal valore dell'argomento del periastro ω: se esso assume valori vicini a 0°,180° o 360°, si ha una sovrastima del valore di massa di propellente; se invece è 90° o 270° si ha viceversa una sottostima. Nella maggior parte dei casi si aveva una sovrastima della massa di propellente necessaria, con conseguenti errori dal valore elevato.

Ciò è dovuto alla possibilità, o meno, di poter combinare la manovra di cambio di piano a quella di innalzamento (o abbassamento) degli absidi.

Si è tentata la correzione di tutti i valori di m_P tramite la variazione della relazione che determina di_x e di_y, e quindi alla fine il Δi. L'espressione cercata è:

$$correction = 1 - k\cos 2\omega \qquad (62)$$

Sono stati utilizzati dei valori di tentativo per k, pari rispettivamente a 0.05, 0.1 e 0.2.

Dopo un'analisi dei risultati ottenuti con i diversi fattori di correzione, si è scelto k=0.2, variando anche, come detto pocanzi, le relazioni che determinano il calcolo delle componenti dell'inclinazione:

$$di_x = [i * \cos(\Omega - i)\cos\Omega] * correction$$
$$di_y = [i * \sin(\Omega - i)\sin\Omega] * correction$$

Sfruttando tali correzioni, si ha che per:

- $\omega = 45° + n * 90°$, n=0,1,2,3 → $m_P \approx cost$
- $\omega = n * 180°$, n=0,1,2 → $m_P \downarrow$
- $\omega = 90° n * 180°$, n=0,1 → $m_P \uparrow$

Con la nuova stima, i cui risultati sono riportati nel seguito in tabella 2, si nota che nessun target ha ora un errore superiore al -10%, mentre diversi asteroidi rimangono con errori positivo maggiori del 10%. In particolare, tra questi si possono notare diverse caratteristiche che condizionano tali errori:

- n° 64,9 e 40: avendo $\omega = 30°$, la stima per m_P diminuisce e di conseguenza l'errore aumenta;
- n° 13 e 11: avendo $r_P \cong 1$, la manovra corretta prevede l'accensione solo all'afelio, per cui l'errore aumenta;
- n° 20 e 15: avendo $r_A, r_P \gg 1$, e non tenendo ancora conto della convenienza nel manovrare ai raggi più alti, l'errore aumenta;
- n° 31 e 60: sono richieste solo variazioni del piano di inclinazione e non di eccentricità e semiasse maggiore; il metodo tiene conto della possibile manovra combinata, e l'errore di conseguenza aumenta.

									caso 0		caso 1	
N°	Target	a	e	i	ω	rp	ra	mp,ref	mp	Δmp	mp	Δmp
71	2013 RV9	1.17	0.2	3.51	108.76	0.93	1.4	2.5338	2.227	-0.30704	2.3723	-0.1615
23	2012 UW68	1.14	0.16	2.47	102.39	0.96	1.31	1.9101	1.661	-0.24898	1.7861	-0.1240
35	2008 TX3	1.18	0.19	2.38	249.85	0.96	1.4	2.1363	1.915	-0.22092	1.9971	-0.1392
58	2014 QH33	1.09	0.18	2.83	264.45	0.88	1.29	2.4971	2.285	-0.21222	2.4295	-0.0676
40	2006 QV89	1.19	0.22	1.07	236.72	0.92	1.46	2.234	2.030	-0.20355	2.0385	-0.1955
64	2012 UY68	1.18	0.23	2.9	35.76	0.91	1.44	2.4655	2.281	-0.18468	2.2418	-0.2237
76	2016 TP11	1.04	0.18	1.54	108.17	0.58	1.22	2.1669	2.000	-0.16728	2.0461	-0.1208
19	2012 HK31	1.07	0.12	2.21	96.69	0.94	1.2	1.8182	1.653	-0.1651	1.7800	-0.0382
21	2015 PL57	1.12	0.14	1.63	115.26	0.96	1.28	1.7882	1.639	-0.1495	1.6804	-0.1078
75	2011 CG2	1.18	0.16	2.76	283.85	0.99	1.36	2.1843	2.040	-0.14454	2.1627	-0.0216
53	2017 EB3	1.04	0.15	2.84	247.51	0.88	1.2	2.2421	2.110	-0.13195	2.2312	-0.0109
67	2016 UE	1.06	0.15	1.09	296.5	0.9	1.22	1.5172	1.396	-0.12161	1.4189	-0.0983
69	2015 FG36	1.1	0.17	3.51	300.57	0.91	1.29	2.4807	2.362	-0.1188	2.4616	-0.0191
14	2012 UV136	1.01	0.14	2.21	288.61	0.87	1.15	1.737	1.641	-0.09617	1.7597	0.0227
52	2014 UY	1.17	0.17	3.56	245.64	0.97	1.38	2.2895	2.203	-0.0865	2.3315	0.0420
9	2012 EC	1.15	0.14	0.91	333.91	0.99	1.31	1.5679	1.500	-0.06807	1.4882	-0.0797
37	2007 UY1	0.95	0.18	1.02	273.57	0.78	1.12	2.0429	1.997	-0.04545	2.0279	-0.0150
2	2016 TB57	1.1	0.12	0.3	147.8	0.97	1.24	1.0562	1.024	-0.0318	1.0229	-0.0333
5	2016 CF137	1.06	0.1	2.44	301.5	0.65	1.2	1.4336	1.408	-0.02512	1.4867	0.0531
10	2009 CV	1.12	0.15	0.94	181.36	0.95	1.28	1.5367	1.520	-0.0164	1.4995	-0.0372
6	2014 YD	1.07	0.09	1.74	34.12	0.98	1.16	1.1071	1.093	-0.01398	1.0505	-0.0566
74	2017 BF30	1.04	0.13	3.62	256.14	0.91	1.18	2.1166	2.107	-0.00932	2.3415	0.2249
44	2007 DD	0.99	0.12	2.62	77.57	0.87	1.1	1.7034	1.695	-0.00834	1.8816	0.1782
4	2013 BS45	0.99	0.08	0.77	150.69	0.91	1.07	1.0066	1.010	0.003124	0.9936	-0.0130
73	2010 WR7	1.05	0.24	1.56	159.14	0.8	1.29	2.3343	2.343	0.008289	2.3120	-0.0223
17	2001 QJ142	1.06	0.09	3.1	63.97	0.97	1.15	1.7383	1.751	0.012753	1.8963	0.1580
22	2016 TB 18	1.08	0.08	1.53	305.61	0.99	1.17	1.0234	1.038	0.01496	1.0700	0.0466
24	2017 HK1	0.91	0.15	1.51	258.73	0.78	1.04	1.756	1.773	0.016695	1.8459	0.0899
55	2009 HC	1.04	0.13	3.78	269.9	0.91	1.17	2.027	2.061	0.034175	2.4469	0.4199
12	2004 JN1	1.09	0.18	1.5	2.12	0.89	1.28	1.6507	1.697	0.046597	1.6468	-0.0039
36	2006 FH36	0.95	0.2	1.59	154.74	0.77	1.14	1.9701	2.041	0.071322	2.0006	0.0305
25	2004 VJ1	0.94	0.16	1.29	332.27	0.79	1.1	1.7722	1.864	0.091549	1.8356	0.0634
13	2003 SM84	1.13	0.08	2.8	87.37	1.03	1.22	1.675	1.771	0.096303	1.9561	0.2811
30	2001 CQ36	0.94	0.18	1.26	344.38	0.77	1.1	1.8559	1.957	0.10128	1.9224	0.0665
61	2017 HZ24	0.91	0.22	1.81	312.19	0.71	1.1	2.4285	2.540	0.111878	2.5473	0.1188
11	2009 OS5	1.14	0.1	1.7	120.85	1.03	1.26	1.467	1.623	0.156398	1.6575	0.1905
7	2015 BM51	0.95	0.12	1.59	357.34	0.83	1.06	1.4517	1.642	0.190394	1.5625	0.1108
32	2010 HA	0.96	0.2	2.18	185.72	0.77	1.15	1.9307	2.146	0.215243	2.0404	0.1097
46	2009 RT1	1.16	0.11	4.15	136.5	1.03	1.28	2.1505	2.370	0.219954	2.3565	0.2060
28	2014 YN	0.89	0.13	1.21	15.83	0.77	1.01	1.603	1.837	0.23419	1.8015	0.1985
33	2005 TG50	0.92	0.13	2.4	200.93	0.8	1.05	1.6832	1.930	0.24674	1.8122	0.1290
43	2000 AE205	1.16	0.14	4.46	150.32	1	1.32	2.2365	2.486	0.24901	2.3495	0.1130
3	2013 WA44	1.1	0.06	2.3	176.73	1.03	1.17	1.1974	1.473	0.275421	1.3276	0.1302
49	2016 FY2	0.87	0.18	187	204.97	0.72	1.02	2.1412	2.418	0.276573	2.3661	0.2249
70	2006 XP4	0.87	0.22	0.51	346.04	0.69	1.06	2.4187	2.728	0.30915	2.7233	0.3046
38	2013 XY20	1.13	0.11	2.86	18.19	1.01	1.25	1.5071	1.818	0.311142	1.6780	0.1709
51	2013 HP11	1.18	0.13	4.16	9.49	1.04	1.33	2.2058	2.539	0.332815	2.3203	0.1145
16	2017 BF29	1.18	0.13	2.61	203.77	1.02	1.34	1.7644	2.101	0.336257	2.0238	0.2594
39	2015 VV	1.14	0.1	4.01	177.19	1.02	1.26	1.87	2.220	0.349766	1.9593	0.0893
50	2003 LN6	0.86	0.21	0.66	211.57	0.68	1.04	2.1053	2.460	0.354624	2.4553	0.3500
8	2014 SD304	1.17	0.11	2.29	19.3	1.04	1.29	1.5896	1.950	0.360173	1.8736	0.2840
18	2013 EM89	1.18	0.12	2.41	189.95	1.04	1.32	1.6838	2.051	0.367038	1.9577	0.2739
20	2019 PA7	1.15	0.09	3.47	93.28	1.05	1.26	1.8033	2.207	0.404061	2.4300	0.6267
27	1999 AO10	0.91	0.11	2.62	7.98	0.81	1.01	1.5367	1.972	0.435536	1.7946	0.2579
63	2001 BB16	0.85	0.17	2.03	195.56	0.71	1	2.102	2.552	0.450232	2.4737	0.3717
15	1996 XB27	1.19	0.06	2.46	58.18	1.12	1.26	1.7672	2.235	0.468066	2.2882	0.5210
26	2015 TZ24	1.19	0.1	3.35	3.17	1.07	0.31	1.9495	2.422	0.47221	2.2565	0.3070
45	2014 MF18	0.89	0.16	2.61	350.35	0.74	1.03	1.762	2.243	0.480573	2.0813	0.3193
29	2007 TF 15	1.11	0.04	4.25	28.86	1.06	1.16	1.7674	2.266	0.498711	2.0930	0.3256
31	2014 EK24	1.01	0.07	4.8	63.75	0.94	1.08	1.8574	2.400	0.542832	2.6502	0.7928
60	2011 AA37	1.1	0.02	3.82	131.51	1.08	1.11	1.5304	2.081	0.551092	2.1184	0.5880
66	2012 WH	0.91	0.15	4.09	8.69	0.78	1.04	2.2216	2.780	0.557975	2.4826	0.2610

Tabella 2. Caso 1- prima correzione

3.4 Caso 2: correzione della manovra di cambio di piano tra manovra all'afelio ed al perielio

La seconda correzione effettuata deriva dal non aver tenuto conto del possibile risparmio di propellente derivante dall'effettuare manovre a raggi elevati.

Per valutarne gli effettivi benefici, bisogna variare il valore di $\sin\beta$ utilizzato dall'algoritmo. In principio si aveva:

$$\sin\beta = \frac{\pi\Delta i}{2A\Delta\vartheta} \qquad (63)$$

Con:

$$A = \frac{(T/m)}{(\mu/r^2)} \qquad (64)$$

Si tiene conto adesso della velocità media, differenziata in caso di manovra al perielio o all'afelio:

$$\sin\beta = V\frac{\pi\Delta i}{2A\Delta\vartheta} \qquad (65)$$

Il valore di angolo di spinta fuori dal piano è poi utilizzato per calcolare $\Delta a, \Delta e_x$ e Δe_y e quindi di conseguenza andrà a cambiare la stima per la massa di propellente.

Si ottengono i valori riportati nel seguito nella tabella 3. Si nota un netto miglioramento degli errori da parte di tutti i target, con alcune eccezioni: i numeri 60, 15, 31, 20 vedono l'errore aumentare e rimanere molto alto: questo perché la sovrastima dovuta al caso 1 aumenta ancora di più il consumo previsto di propellente (che porta un errore che sarà abbattuto nel caso 3) e, avendo perielio ed afelio non molto diversi tra loro, manovrare solo in uno dei due absidi porta ad un consumo ulteriore di propellente rispetto alla stima originale.

									caso 0		caso 2	
N°	Target	a	e	i	ω	rp	ra	mp,ref	mp	Δmp	mp	Δmp
71	2013 RV9	1.17	0.2	3.51	108.76	0.93	1.4	2.5338	2.227	-0.3070	2.3368	-0.1970
23	2012 UW68	1.14	0.16	2.47	102.39	0.96	1.31	1.9101	1.661	-0.2490	1.7635	-0.1466
35	2008 TX3	1.18	0.19	2.38	249.85	0.96	1.4	2.1363	1.915	-0.2209	1.9826	-0.1537
58	2014 QH33	1.09	0.18	2.83	264.45	0.88	1.29	2.4971	2.285	-0.2122	2.4192	-0.0779
40	2006 QV89	1.19	0.22	1.07	236.72	0.92	1.46	2.234	2.030	-0.2036	2.0344	-0.1996
64	2012 UY68	1.18	0.23	2.9	35.76	0.91	1.44	2.4655	2.281	-0.1847	2.2273	-0.2382
76	2016 TP11	1.04	0.18	1.54	108.17	0.58	1.22	2.1669	2.000	-0.1673	2.0411	-0.1258
19	2012 HK31	1.07	0.12	2.21	96.69	0.94	1.2	1.8182	1.653	-0.1651	1.7730	-0.0452
21	2015 PL57	1.12	0.14	1.63	115.26	0.96	1.28	1.7882	1.639	-0.1495	1.6744	-0.1138
75	2011 CG2	1.18	0.16	2.76	283.85	0.99	1.36	2.1843	2.040	-0.1445	2.1577	-0.0266
53	2017 EB3	1.04	0.15	2.84	247.51	0.88	1.2	2.2421	2.110	-0.1319	2.2216	-0.0205
67	2016 UE	1.06	0.15	1.09	296.5	0.9	1.22	1.5172	1.396	-0.1216	1.4141	-0.1031
69	2015 FG36	1.1	0.17	3.51	300.57	0.91	1.29	2.4807	2.362	-0.1188	2.4510	-0.0297
14	2012 UV136	1.01	0.14	2.21	288.61	0.87	1.15	1.737	1.641	-0.0962	1.7477	0.0107
52	2014 UY	1.17	0.17	3.56	245.64	0.97	1.38	2.2895	2.203	-0.0865	2.3155	0.0260
9	2012 EC	1.15	0.14	0.91	333.91	0.99	1.31	1.5679	1.500	-0.0681	1.4873	-0.0806
37	2007 UY1	0.95	0.18	1.02	273.57	0.78	1.12	2.0429	1.997	-0.0455	2.0234	-0.0195
2	2016 TB57	1.1	0.12	0.3	147.8	0.97	1.24	1.0562	1.024	-0.0318	1.0224	-0.0338
5	2016 CF137	1.06	0.1	2.44	301.5	0.65	1.2	1.4336	1.408	-0.0251	1.4723	0.0387
10	2009 CV	1.12	0.15	0.94	181.36	0.95	1.28	1.5367	1.520	-0.0164	1.4982	-0.0385
6	2014 YD	1.07	0.09	1.74	34.12	0.98	1.16	1.1071	1.093	-0.0140	1.0456	-0.0615
74	2017 BF30	1.04	0.13	3.62	256.14	0.91	1.18	2.1166	2.107	-0.0093	2.3268	0.2102
44	2007 DD	0.99	0.12	2.62	77.57	0.87	1.1	1.7034	1.695	-0.0083	1.8685	0.1651
4	2013 BS45	0.99	0.08	0.77	150.69	0.91	1.07	1.0066	1.010	0.0031	0.9916	-0.0150
73	2010 WR7	1.05	0.24	1.56	159.14	0.8	1.29	2.3343	2.343	0.0083	2.3080	-0.0263
17	2001 QJ142	1.06	0.09	3.1	63.97	0.97	1.15	1.7383	1.751	0.0128	1.8908	0.1525
22	2016 TB 18	1.08	0.08	1.53	305.61	0.99	1.17	1.0234	1.038	0.0150	1.0633	0.0399
24	2017 HK1	0.91	0.15	1.51	258.73	0.78	1.04	1.756	1.773	0.0167	1.8373	0.0813
55	2009 HC	1.04	0.13	3.78	269.9	0.91	1.17	2.027	2.061	0.0342	2.3341	0.3071
12	2004 JN1	1.09	0.18	1.5	2.12	0.89	1.28	1.6507	1.697	0.0466	1.6437	-0.0070
36	2006 FH36	0.95	0.2	1.59	154.74	0.77	1.14	1.9701	2.041	0.0713	1.9943	0.0242
25	2004 VJ1	0.94	0.16	1.29	332.27	0.79	1.1	1.7722	1.864	0.0915	1.8304	0.0582
13	2003 SM84	1.13	0.08	2.8	87.37	1.03	1.22	1.675	1.771	0.0963	1.9783	0.3033
30	2001 CQ36	0.94	0.18	1.26	344.38	0.77	1.1	1.8559	1.957	0.1013	1.9186	0.0627
61	2017 HZ24	0.91	0.22	1.81	312.19	0.71	1.1	2.4285	2.540	0.1119	2.5384	0.1099
11	2009 OS5	1.14	0.1	1.7	120.85	1.03	1.26	1.467	1.623	0.1564	1.6637	0.1967
7	2015 BM51	0.95	0.12	1.59	357.34	0.83	1.06	1.4517	1.642	0.1904	1.5558	0.1041
32	2010 HA	0.96	0.2	2.18	185.72	0.77	1.15	1.9307	2.146	0.2152	2.0320	0.1013
46	2009 RT1	1.16	0.11	4.15	136.5	1.03	1.28	2.1505	2.370	0.2200	2.3834	0.2329
28	2014 YN	0.89	0.13	1.21	15.83	0.77	1.01	1.603	1.837	0.2342	1.7979	0.1949
33	2005 TG50	0.92	0.13	2.4	200.93	0.8	1.05	1.6832	1.930	0.2467	1.7986	0.1154
43	2000 AE205	1.16	0.14	4.46	150.32	1	1.32	2.2365	2.486	0.2490	2.3605	0.1240
3	2013 WA44	1.1	0.06	2.3	176.73	1.03	1.17	1.1974	1.473	0.2754	1.3369	0.1395
49	2016 FY2	0.87	0.18	187	204.97	0.72	1.02	2.1412	2.418	0.2766	2.3580	0.2168
70	2006 XP4	0.87	0.22	0.51	346.04	0.69	1.06	2.4187	2.728	0.3092	2.7228	0.3041
38	2013 XY20	1.13	0.11	2.86	18.19	1.01	1.25	1.5071	1.818	0.3111	1.6901	0.1830
51	2013 HP11	1.18	0.13	4.16	9.49	1.04	1.33	2.2058	2.539	0.3328	2.3441	0.1383
16	2017 BF29	1.18	0.13	2.61	203.77	1.02	1.34	1.7644	2.101	0.3363	2.0345	0.2701
39	2015 VV	1.14	0.1	4.01	177.19	1.02	1.26	1.87	2.220	0.3498	1.9737	0.1037
50	2003 LN6	0.86	0.21	0.66	211.57	0.68	1.04	2.1053	2.460	0.3546	2.4546	0.3493
8	2014 SD304	1.17	0.11	2.29	19.3	1.04	1.29	1.5896	1.950	0.3602	1.8854	0.2958
18	2013 EM89	1.18	0.12	2.41	189.95	1.04	1.32	1.6838	2.051	0.3670	1.9691	0.2853
20	2019 PA7	1.15	0.09	3.47	93.28	1.05	1.26	1.8033	2.207	0.4041	2.4881	0.6848
27	1999 AO10	0.91	0.11	2.62	7.98	0.81	1.01	1.5367	1.972	0.4355	1.7781	0.2414
63	2001 BB16	0.85	0.17	2.03	195.56	0.71	1	2.102	2.552	0.4502	2.4636	0.3616
15	1996 XB27	1.19	0.06	2.46	58.18	1.12	1.26	1.7672	2.235	0.4681	2.3341	0.5669
26	2015 TZ24	1.19	0.1	3.35	3.17	1.07	0.31	1.9495	2.422	0.4722	2.2920	0.3425
45	2014 MF18	0.89	0.16	2.61	350.35	0.74	1.03	1.762	2.243	0.4806	2.0683	0.3063
29	2007 TF 15	1.11	0.04	4.25	28.86	1.06	1.16	1.7674	2.266	0.4987	2.1427	0.3753
31	2014 EK24	1.01	0.07	4.8	63.75	0.94	1.08	1.8574	2.400	0.5428	2.6353	0.7779
60	2011 AA37	1.1	0.02	3.82	131.51	1.08	1.11	1.5304	2.081	0.5511	2.1840	0.6536
66	2012 WH	0.91	0.15	4.09	8.69	0.78	1.04	2.2216	2.780	0.5580	2.4524	0.2308

Tabella 3. Caso 2-seconda correzione

3.4 Caso 3: correzione del caso 1 in base al valore dell'argomento del periastro

La terza ed ultima correzione, i cui risultati sono visibili in tabella 3, riguarda il miglioramento della stima effettuata nel caso 1: la penalizzazione per $\omega = 90°, 270°$ è infatti eccessiva e determina un peggioramento dell'errore, mentre per i valori opposti (0°,180° e 360°) la riduzione del ΔV porta un notevole miglioramento della stima rispetto al caso originale.
Per ovviare a ciò, si è deciso di diversificare il valore del fattore di correzione tenendo conto di tale differenza:

- per $\omega = 90°, 270°$ si adotta un fattore correttivo k =0.1;
- per $\omega = 0°, 180°, 360°$ si mantiene il fattore correttivo k=0.2

Si nota un miglioramento notevole degli errori, con solo gli ultimi 5 target che conservano un errore considerevole, spiegabile con il fatto che per tali asteroidi sono richieste grandi variazioni di inclinazione e piccole di semiasse maggiore e/o eccentricità.

									caso 0		caso 3	
N°	Target	a	e	i	ω	rp	ra	mp,ref	mp	Δmp	mp	Δmp
2	2016 TB57	1.1	0.12	0.3	147.8	0.97	1.24	1.0562	1.024	-0.032	1.0224	-0.0338
3	2013 WA44	1.1	0.06	2.3	176.73	1.03	1.17	1.1974	1.473	0.275	1.3369	0.1395
4	2013 BS45	0.99	0.08	0.77	150.69	0.91	1.07	1.0066	1.010	0.003	0.9916	-0.0150
5	2016 CF137	1.06	0.1	2.44	301.5	0.65	1.2	1.4336	1.408	-0.025	1.4337	0.0001
6	2014 YD	1.07	0.09	1.74	34.12	0.98	1.16	1.1071	1.093	-0.014	1.0456	-0.0615
7	2015 BM51	0.95	0.12	1.59	357.34	0.83	1.06	1.4517	1.642	0.190	1.5558	0.1041
8	2014 SD304	1.17	0.11	2.29	19.3	1.04	1.29	1.5896	1.950	0.360	1.8854	0.2958
9	2012 EC	1.15	0.14	0.91	333.91	0.99	1.31	1.5679	1.500	-0.068	1.4873	-0.0806
10	2009 CV	1.12	0.15	0.94	181.36	0.95	1.28	1.5367	1.520	-0.016	1.4982	-0.0385
11	2009 OS5	1.14	0.1	1.7	120.85	1.03	1.26	1.467	1.623	0.156	1.6459	0.1789
12	2004 JN1	1.09	0.18	1.5	2.12	0.89	1.28	1.6507	1.697	0.047	1.6437	-0.0070
13	2003 SM84	1.13	0.08	2.8	87.37	1.03	1.22	1.675	1.771	0.096	1.8820	0.2070
14	2012 UV136	1.01	0.14	2.21	288.61	0.87	1.15	1.737	1.641	-0.096	1.6904	-0.0466
15	1996 XB27	1.19	0.06	2.46	58.18	1.12	1.26	1.7672	2.235	0.468	2.3060	0.5388
16	2017 BF29	1.18	0.13	2.61	203.77	1.02	1.34	1.7644	2.101	0.336	2.0345	0.2701
17	2001 QJ142	1.06	0.09	3.1	63.97	0.97	1.15	1.7383	1.751	0.013	1.8179	0.0796
18	2013 EM89	1.18	0.12	2.41	189.95	1.04	1.32	1.6838	2.051	0.367	1.9691	0.2853
19	2012 HK31	1.07	0.12	2.21	96.69	0.94	1.2	1.8182	1.653	-0.165	1.7084	-0.1098
20	2019 PA7	1.15	0.09	3.47	93.28	1.05	1.26	1.8033	2.207	0.404	2.3711	0.5678
21	2015 PL57	1.12	0.14	1.63	115.26	0.96	1.28	1.7882	1.639	-0.149	1.6536	-0.1346
22	2016 TB 18	1.08	0.08	1.53	305.61	0.99	1.17	1.0234	1.038	0.015	1.0479	0.0245
23	2012 UW68	1.14	0.16	2.47	102.39	0.96	1.31	1.9101	1.661	-0.249	1.7023	-0.2078
24	2017 HK1	0.91	0.15	1.51	258.73	0.78	1.04	1.756	1.773	0.017	1.8005	0.0445
25	2004 VJ1	0.94	0.16	1.29	332.27	0.79	1.1	1.7722	1.864	0.092	1.8304	0.0582
26	2015 TZ24	1.19	0.1	3.35	3.17	1.07	0.31	1.9495	2.422	0.472	2.2920	0.3425
27	1999 AO10	0.91	0.11	2.62	7.98	0.81	1.01	1.5367	1.972	0.436	1.7781	0.2414
28	2014 YN	0.89	0.13	1.21	15.83	0.77	1.01	1.603	1.837	0.234	1.7979	0.1949
29	2007 TF 15	1.11	0.04	4.25	28.86	1.06	1.16	1.7674	2.266	0.499	2.1427	0.3753
30	2001 CQ36	0.94	0.18	1.26	344.38	0.77	1.1	1.8559	1.957	0.101	1.9186	0.0627
31	2014 EK24	1.01	0.07	4.8	63.75	0.94	1.08	1.8574	2.400	0.543	2.5112	0.6538
32	2010 HA	0.96	0.2	2.18	185.72	0.77	1.15	1.9307	2.146	0.215	2.0320	0.1013
33	2005 TG50	0.92	0.13	2.4	200.93	0.8	1.05	1.6832	1.930	0.247	1.7986	0.1154
35	2008 TX3	1.18	0.19	2.38	249.85	0.96	1.4	2.1363	1.915	-0.221	1.9424	-0.1939
36	2006 FH36	0.95	0.2	1.59	154.74	0.77	1.14	1.9701	2.041	0.071	1.9943	0.0242
37	2007 UY1	0.95	0.18	1.02	273.57	0.78	1.12	2.0429	1.997	-0.045	2.0079	-0.0350
38	2013 XY20	1.13	0.11	2.86	18.19	1.01	1.25	1.5071	1.818	0.311	1.6901	0.1830
39	2015 VV	1.14	0.1	4.01	177.19	1.02	1.26	1.87	2.220	0.350	1.9737	0.1037
40	2006 QV89	1.19	0.22	1.07	236.72	0.92	1.46	2.234	2.030	-0.204	2.0306	-0.2034
43	2000 AE205	1.16	0.14	4.46	150.32	1	1.32	2.2365	2.486	0.249	2.3605	0.1240
44	2007 DD	0.99	0.12	2.62	77.57	0.87	1.1	1.7034	1.695	-0.008	1.7752	0.0718
45	2014 MF18	0.89	0.16	2.61	350.35	0.74	1.03	1.762	2.243	0.481	2.0683	0.3063
46	2009 RT1	1.16	0.11	4.15	136.5	1.03	1.28	2.1505	2.370	0.220	2.3834	0.2329
49	2016 FY2	0.87	0.18	187	204.97	0.72	1.02	2.1412	2.418	0.277	2.3580	0.2168
50	2003 LN6	0.86	0.21	0.66	211.57	0.68	1.04	2.1053	2.460	0.355	2.4546	0.3493
51	2013 HP11	1.18	0.13	4.16	9.49	1.04	1.33	2.2058	2.539	0.333	2.3441	0.1383
52	2014 UY	1.17	0.17	3.56	245.64	0.97	1.38	2.2895	2.203	-0.087	2.2514	-0.0381
53	2017 EB3	1.04	0.15	2.84	247.51	0.88	1.2	2.2421	2.110	-0.132	2.1610	-0.0811
55	2009 HC	1.04	0.13	3.78	269.9	0.91	1.17	2.027	2.061	0.034	2.1885	0.1615
58	2014 QH33	1.09	0.18	2.83	264.45	0.88	1.29	2.4971	2.285	-0.212	2.3450	-0.1521
60	2011 AA37	1.1	0.02	3.82	131.51	1.08	1.11	1.5304	2.081	0.551	2.1647	0.6343
61	2017 HZ24	0.91	0.22	1.81	312.19	0.71	1.1	2.4285	2.540	0.112	2.5349	0.1064
63	2001 BB16	0.85	0.17	2.03	195.56	0.71	1	2.102	2.552	0.450	2.4636	0.3616
64	2012 UY68	1.18	0.23	2.9	35.76	0.91	1.44	2.4655	2.281	-0.185	2.2273	-0.2382
66	2012 WH	0.91	0.15	4.09	8.69	0.78	1.04	2.2216	2.780	0.558	2.4524	0.2308
67	2016 UE	1.06	0.15	1.09	296.5	0.9	1.22	1.5172	1.396	-0.122	1.4026	-0.1146
69	2015 FG36	1.1	0.17	3.51	300.57	0.91	1.29	2.4807	2.362	-0.119	2.4012	-0.0795
70	2006 XP4	0.87	0.22	0.51	346.04	0.69	1.06	2.4187	2.728	0.309	2.7228	0.3041
71	2013 RV9	1.17	0.2	3.51	108.76	0.93	1.4	2.5338	2.227	-0.307	2.2660	-0.2678
73	2010 WR7	1.05	0.24	1.56	159.14	0.8	1.29	2.3343	2.343	0.008	2.3080	-0.0263
74	2017 BF30	1.04	0.13	3.62	256.14	0.91	1.18	2.1166	2.107	-0.009	2.2088	0.0922
75	2011 CG2	1.18	0.16	2.76	283.85	0.99	1.36	2.1843	2.040	-0.145	2.0955	-0.0888
76	2016 TP11	1.04	0.18	1.54	108.17	0.58	1.22	2.1669	2.000	-0.167	2.0177	-0.1492

Tabella 4. Caso 3- terza correzione

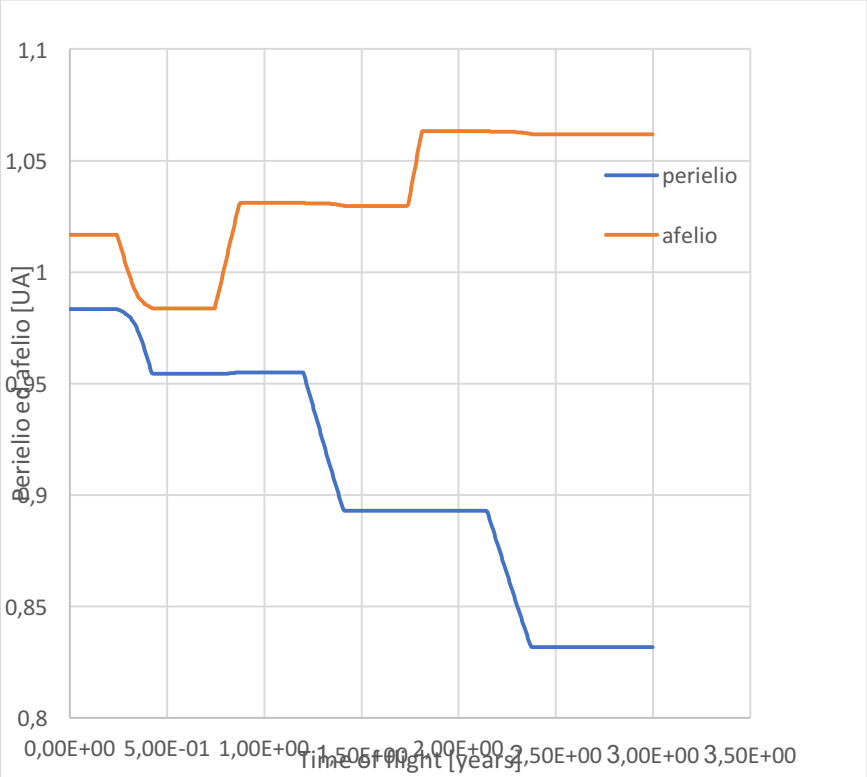
Capitolo 4

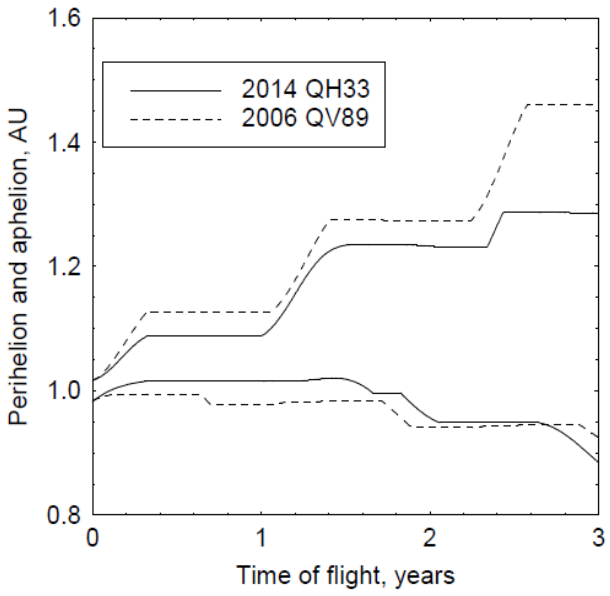
Confronto tra le due stime

Nell'ultimo capitolo si affronta il confronto tra le stime fornite dalle due diverse versioni del metodo approssimato: quelle cioè fornite dal caso "0" e dal caso con tutte le modifiche precedentemente spiegate (caso "3").

Nell'articolo si faceva particolarmente riferimento agli asteroidi n° 5 e n° 7 della lista dei target: il primo in quanto aveva un grande errore ed il secondo per quanto riguarda il problema del considerare il corretto fasamento alla fine delle manovre tra spacecraft ed asteroide.

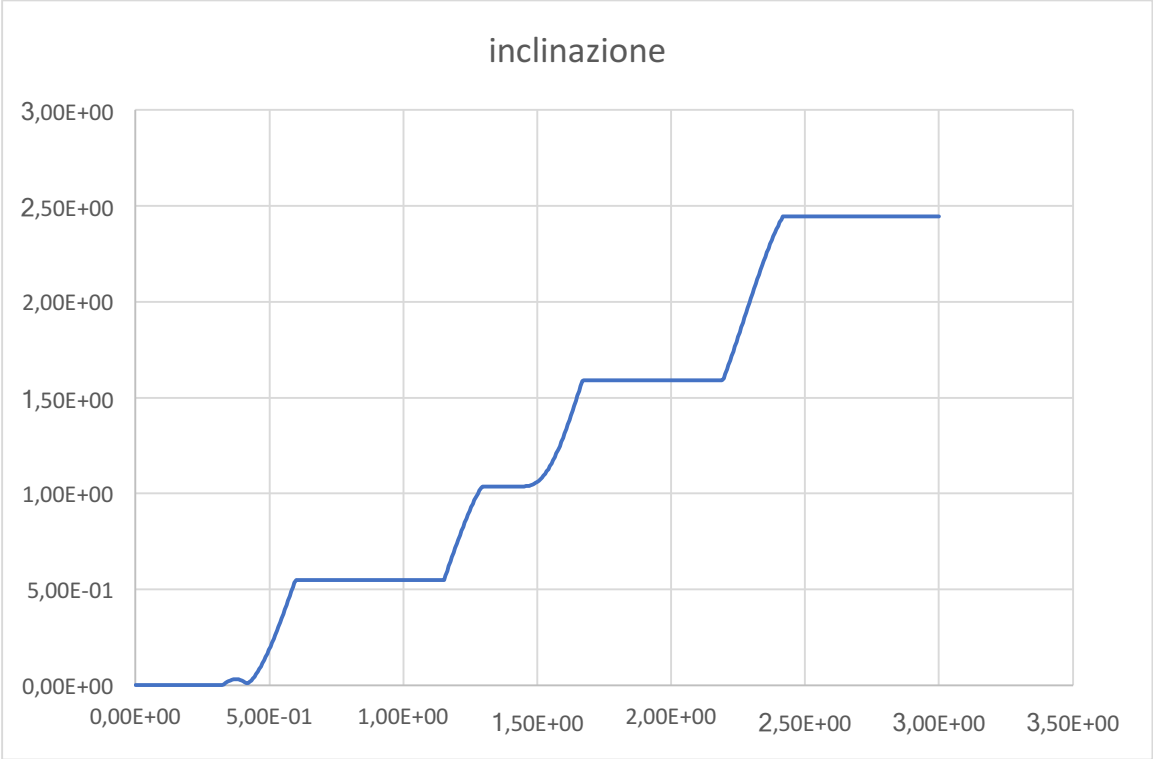
Si riportano dunque i risultati, in forma grafica per poter visualizzare come la stima sia migliorata e sia effettivamente più vicina a come dovrebbe essere nel caso ideale (linea continua).

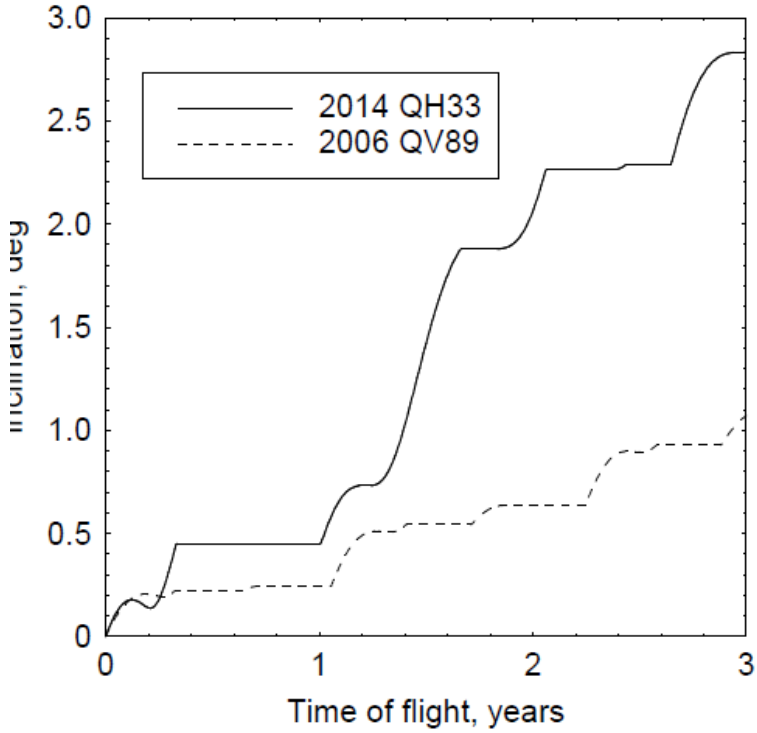




(a) Perihelion and aphelion.

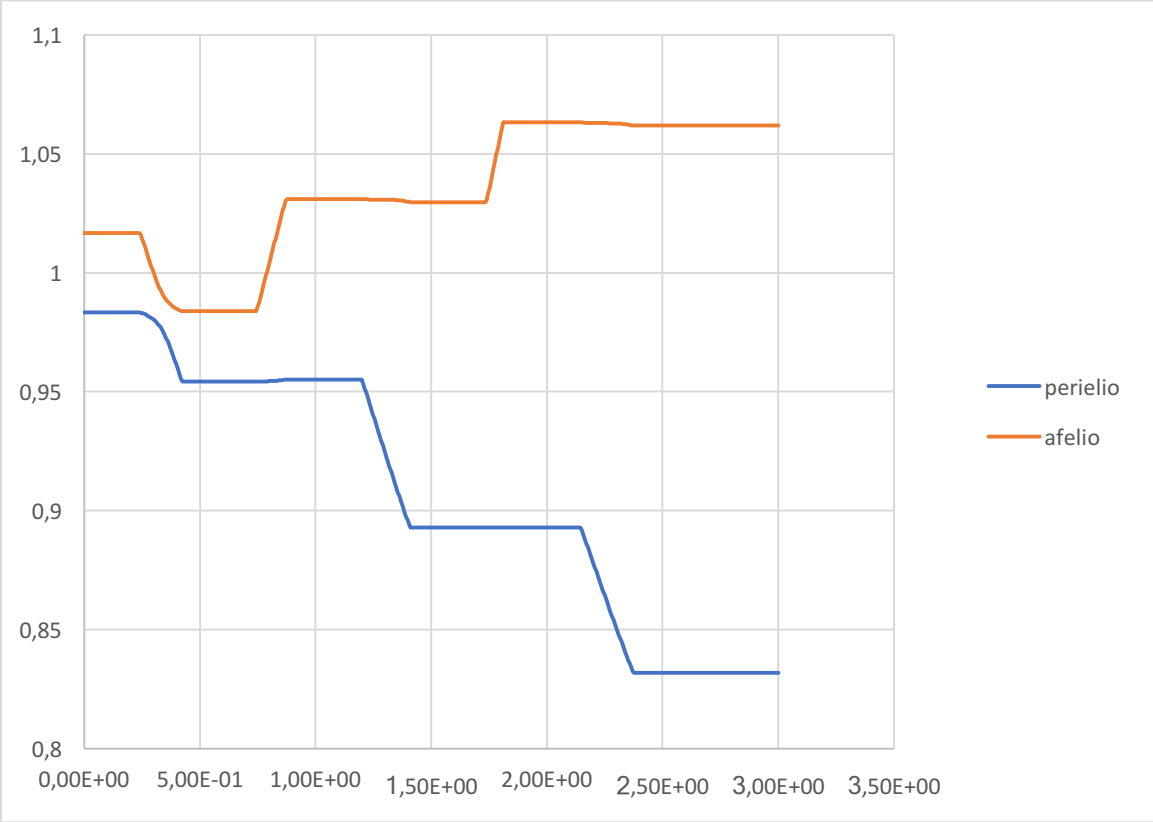
Per il numero 5 si riportano:

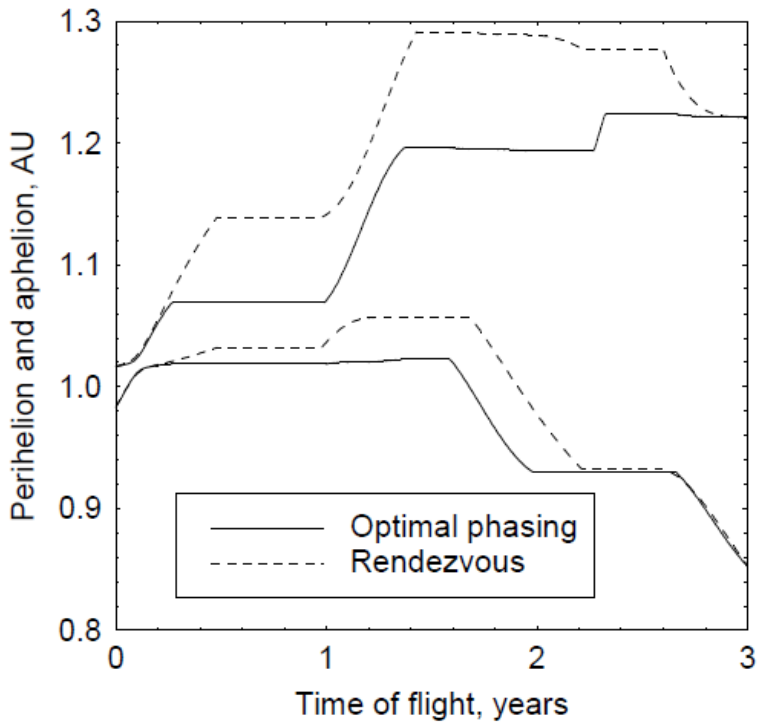




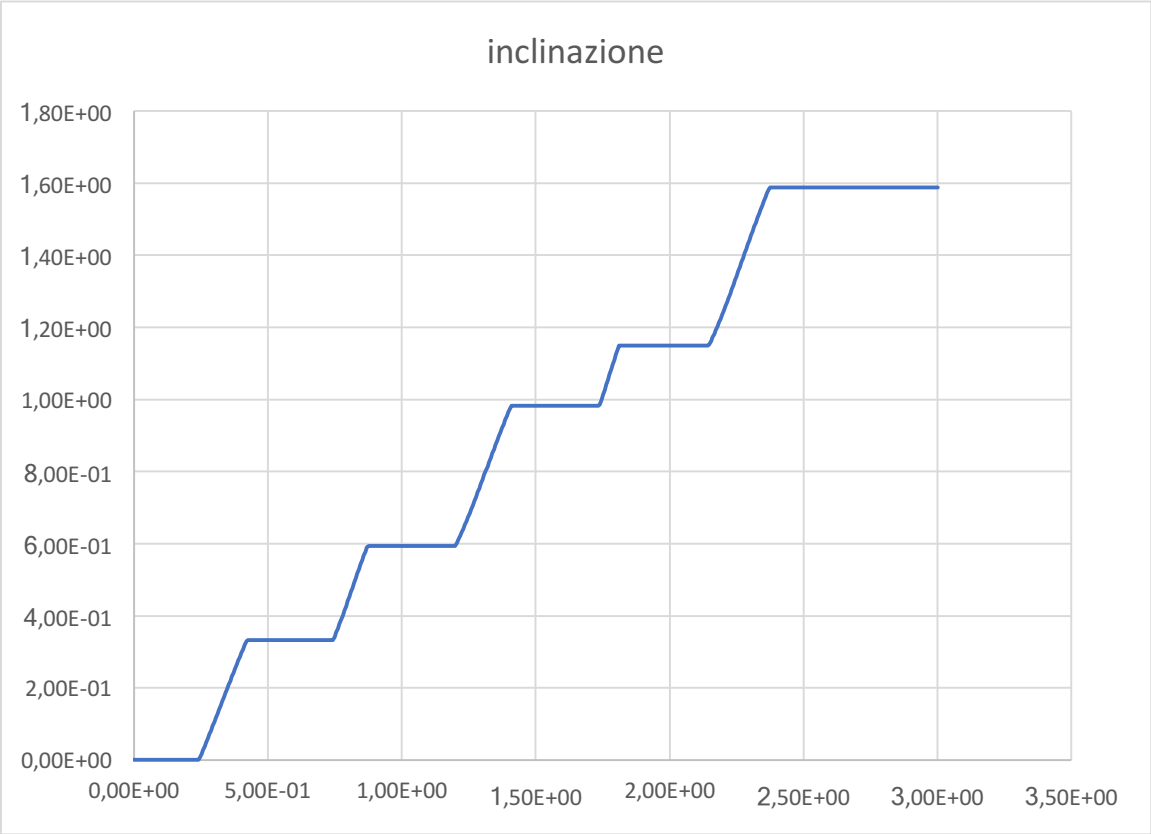
(b) Inclination.

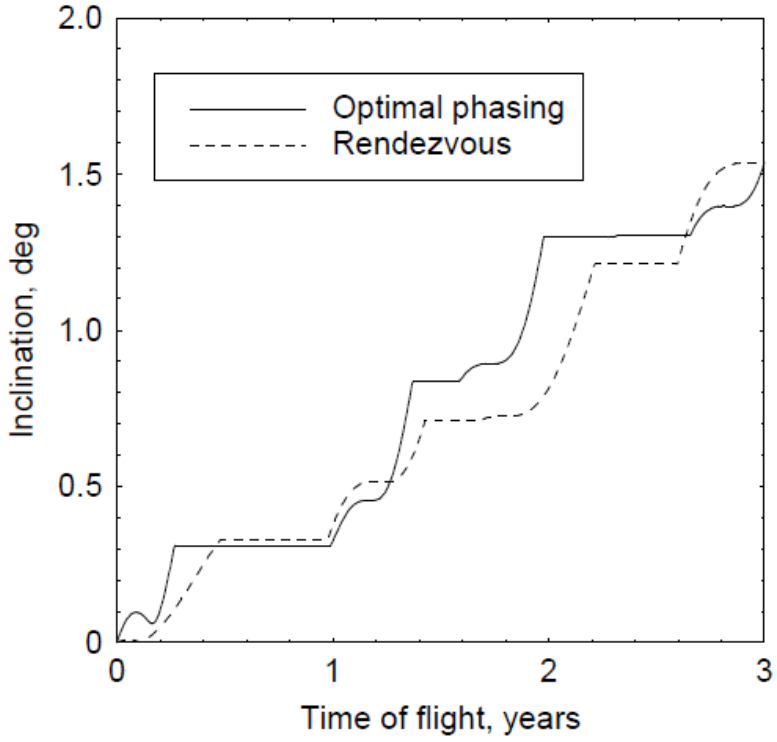
Per il numero 7:





(a) Perihelion and aphelion.



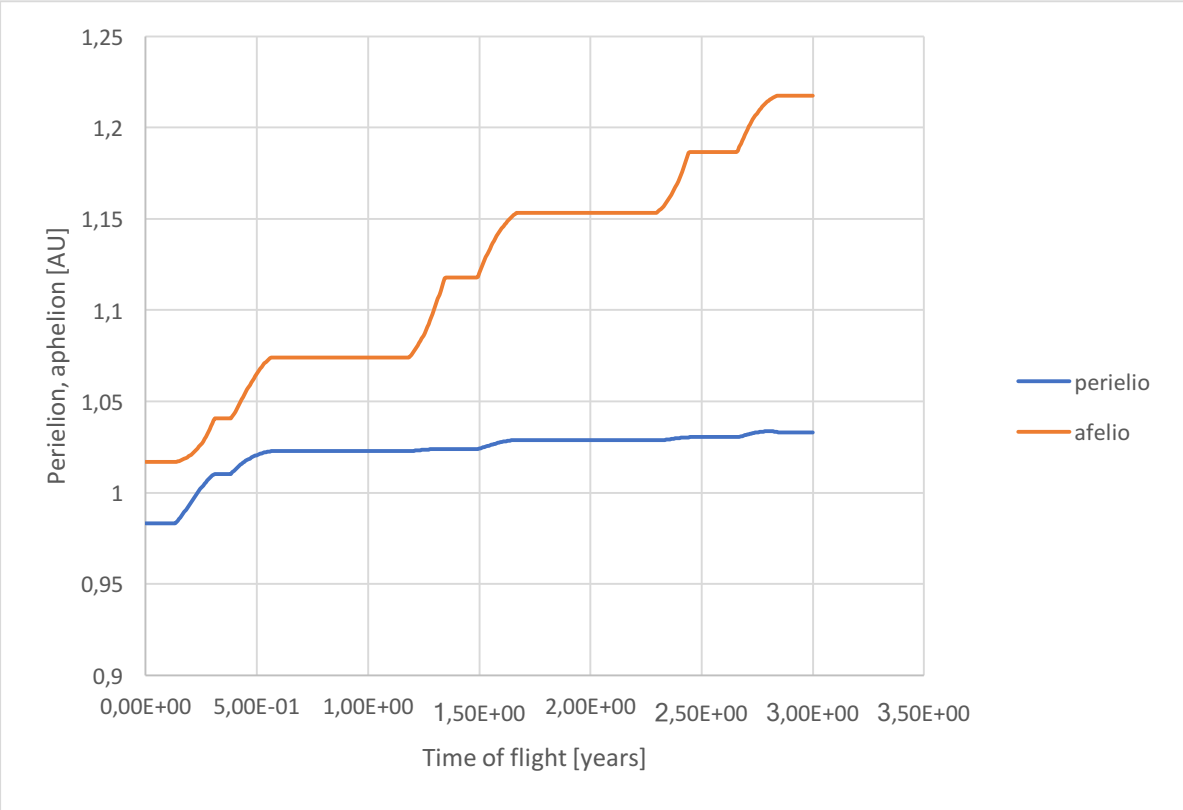


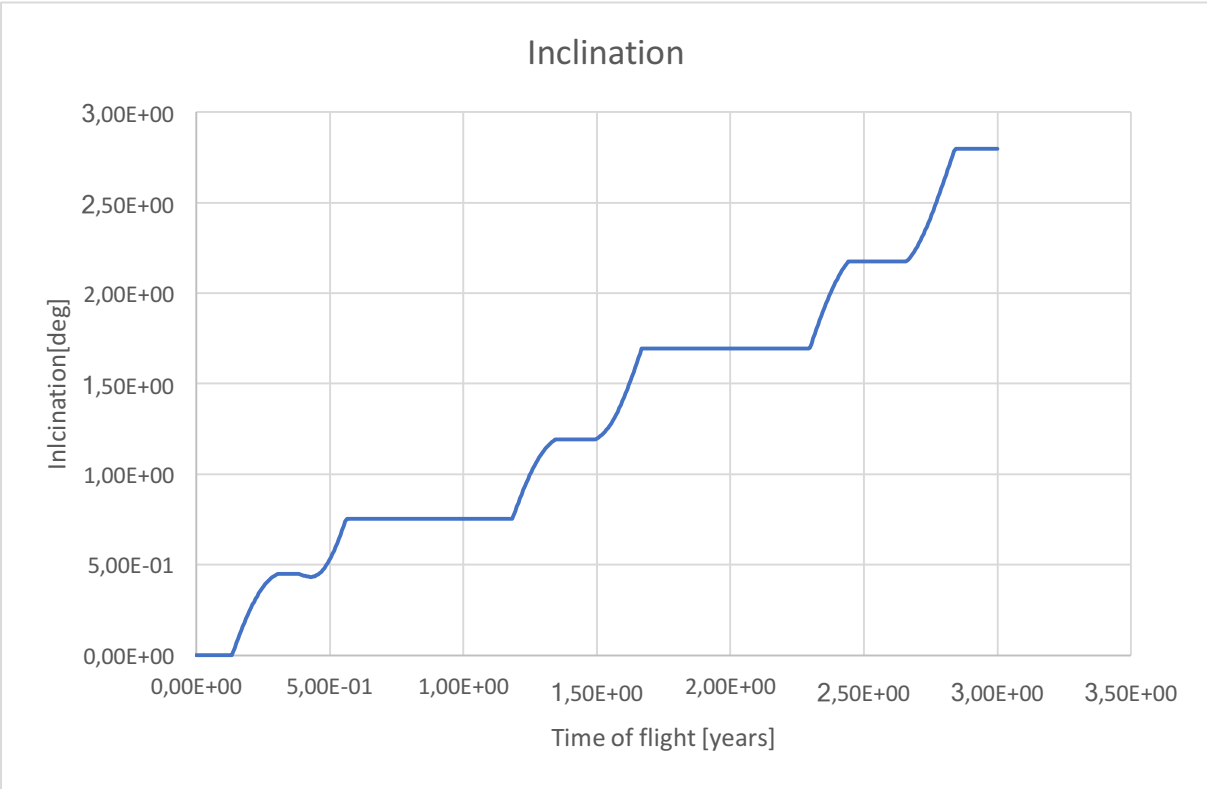
Dall'analisi dei risultati ottenuti, si nota che:

- per due asteroidi, il numero 13 ed il numero 24, l'errore dopo le tre correzioni peggiora e resta alto, passando da 0.09 a 0.11 per il primo e da 0.016 a 0.027 per il secondo
- per una mezza dozzina di asteroidi l'errore peggiora lievemente rispetto al caso "0" ma rimane basso ed ampiamente entro i limiti di successo del metodo, per cui non preoccupano particolarmente
- una decina di asteroidi subiscono un aumento sensibile dell'errore, ma anche in questo caso si rientra nei limiti di |0.1| di soddisfazione del risultato
- l'unica vera e propria eccezione è rappresentata dal numero 66, in quanto è l'unico asteroide che, dopo le correzioni, rimane con un errore al di sopra di 0.3

Si analizzano in particolare l'evoluzione nel tempo degli absidi e dell'inclinazione dei numeri 13 e 66.

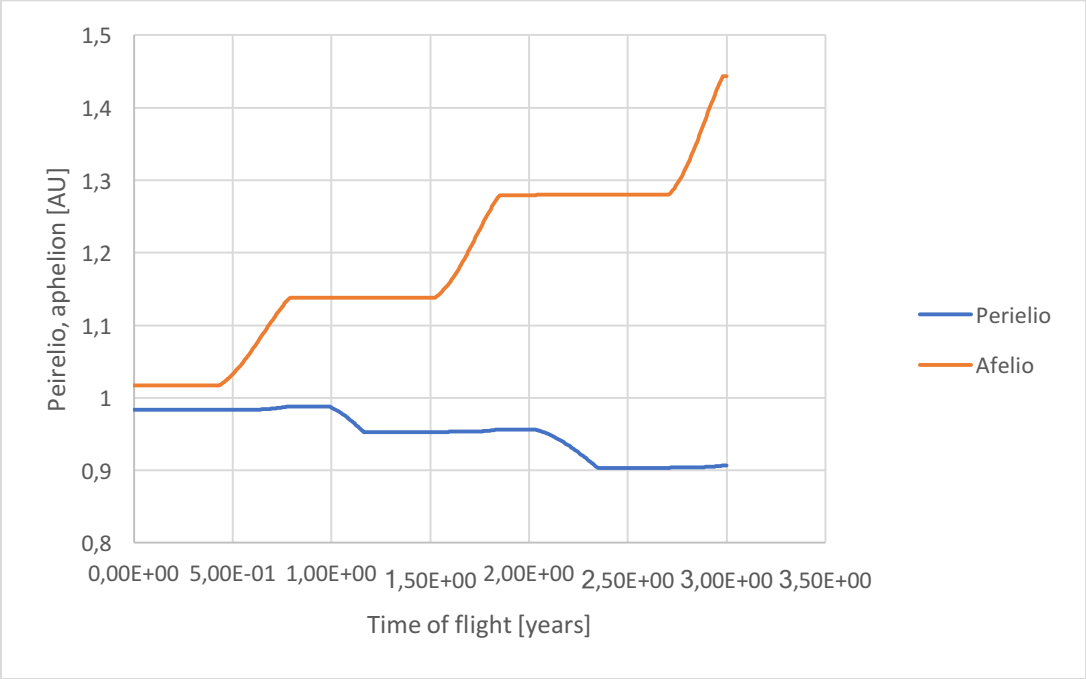
Per il 13:

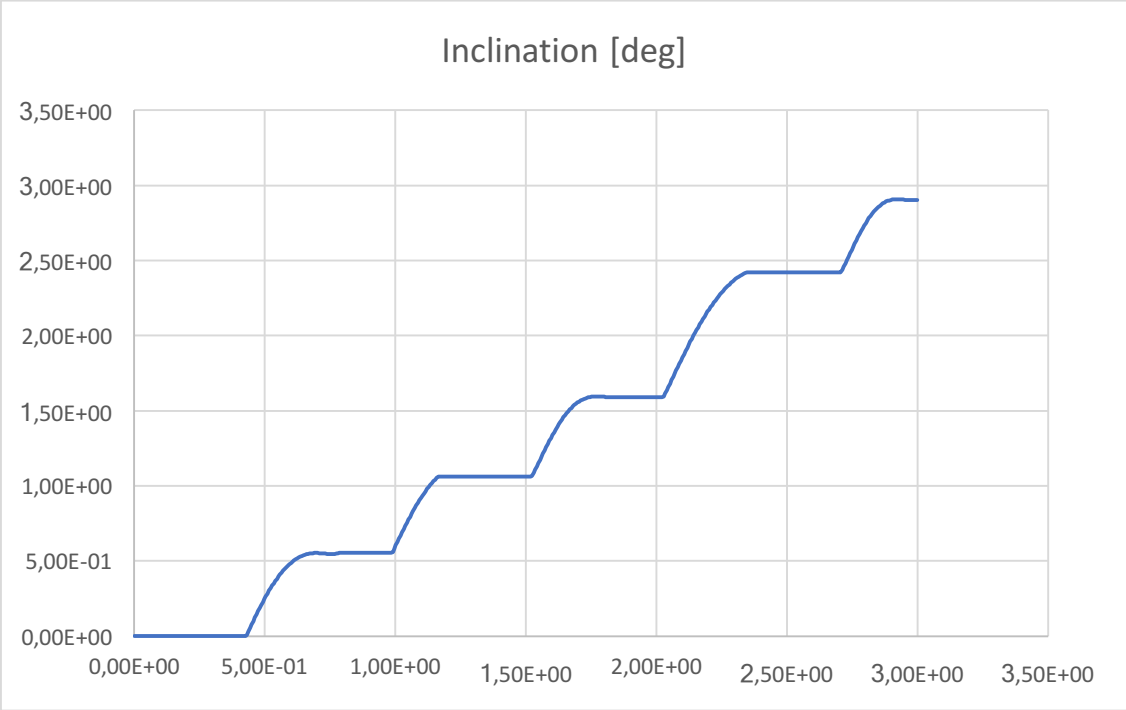

1,25
1,2
1,15
1,1
1,05
1
0,95
0,9
Perielion, aphelion [AU]
0,00E+00
5,00E-01
1,00E+00
1,50E+00
2,00E+00
2,50E+00
3,00E+00
3,50E+00
Time of flight [years]
perielio
afelio


Inclination
3,00E+00
2,50E+00
2,00E+00
1,50E+00
1,00E+00
5,00E-01
0,00E+00
Inlcination[deg]
0,00E+00
5,00E-01
1,00E+00
1,50E+00
2,00E+00
2,50E+00
3,00E+00
3,50E+00
Time of flight [years]

La causa dell'errore sta nel fatto che la combinazione dei parametri $\omega + \Omega$ è circa 270°, per cui le manovre vengono sempre effettuate ai nodi, in variano sia r_a, in maniera più vistosa, che r_p, in modo più contenuto; non vengono svolte manovre invece agli absidi: questo si può intuire dal fatto che r_a ha una derivata che varia continuamente, mentre nella manovra corretta la derivata varia in maniera costante e quasi lineare.

Per il 66:





In questo caso, nonostante le correzioni, la manovra del cambio di piano non è ancora combinata con quella necessaria ad ottenere le variazioni richieste di semiasse maggiore ed eccentricità.
Il problema è soprattutto al perielio, in quanto essendo richieste variazioni importanti di inclinazione, ed avendo già detto che conviene effettuare manovre ai raggi più alti, vi è ancora un errore elevato.

Bibliografia

[1] L.Casalino, “Approximate Optimization of Low-Thrust Transfers Between Low-Eccentricity Close Orbits”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2014, pp 1003-1008

[2] L.Casalino, L.Mascolo, A.Bosa, “Fast Estimation Method for trajectories to Near-Earth Asteroids”, 2019

[3] T.N.Edelbaum, “Propulsion Requirements for Controllable Satellites”, *ARS Journal*, 1961, Vol.31, No. 8, pp 1079-1089

[4] C.Russell, C.Raymond, “The Dawn Mission to Vesta and Ceres”, *Space Science Reviews*, 2011,Vol 163, No. ¼, pp 3-23

[5] J.Gal-Edd, A.Cheuvront, “The OSIRIS-REx Asteroids Sample Return – Mission Operation Design, 2014, AIAA

[6] JAXA, “Hayabusa, “A technology demonstrator for Sample and Return”, 2008, JAXA

[7] R. Walker, D.Binns, C.Bramanti, M.Casasco, P.Concari, D.Izzo, D.Felli, P.Hernandez, J.G.Fernandez, P.Hager, D.Koschny, V.Pesquita, N.Wallace, “Deep Space Cubesats: Thinking inside the box”, *A&G* , 2018, Vol.59, pp 5.24-5.30

[8] L.Casalino, A.Rossi, “Resonant Fly-by Missions to Near Earth Asteroids”, *Modern Celestial Mechanics: from theory to applications,* 2002

[9] B.W.Barbee, “Near-Earth Asteroids: Destination for Human Exploration”, *AIAA Mid-Atlantic Section Awards Dinner*, 2014

Sitografia

[1] https://solarsystem.nasa.gov/missions/dawn/overview/

[2] https://www.nasa.gov/osiris-rex

[3] https://www.jpl.nasa.gov/missions/hayabusa/

[4] http://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2017/06/M_Argo