



POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

Calcolo dei coefficienti di rigidezza e smorzamento di cuscinetti ad aria a partire da prove sperimentali e analisi dei criteri di stabilità

Relatore:

Prof. Terenziano Raparelli

Candidato:

Giuseppe Testa

Correlatori:

Prof. Andrea Trivella

Prof. Federico Colombo

A.A. 2019/2020

RINGRAZIAMENTI

Prima di procedere con la trattazione, vorrei dedicare qualche riga a tutti coloro che mi hanno aiutato nella stesura della tesi, con suggerimenti, critiche ed osservazioni: a loro va la mia riconoscenza, anche se a me spetta la responsabilità di quanto scritto nel seguente lavoro.

Desidero ringraziare, per primi, il Professore Terenziano Raparelli, relatore della presente tesi, e il Professore Andrea Trivella, correlatore, per l'opportunità, a me fornita, di realizzare un lavoro di ricerca che mi ha interessato e appassionato e, in particolare, ringrazio il Professore Federico Colombo, altro correlatore, per la disponibilità e il prezioso aiuto prestatomi, anche a distanza, nella organizzazione e supervisione del procedimento e del contenuto della tesi.

Alla fine del mio percorso accademico, debbo esprimere la mia più sincera gratitudine alla mia famiglia e soprattutto a mia madre e a mio padre per il sostegno economico che mi hanno sempre assicurato in questi anni. Mi rendo conto di come ciò non sia stato facile! Ho sentito il loro affetto e la loro stima giorno dopo giorno, senza che mi fosse richiesto nulla in cambio. Inoltre desidero ringraziare di vero cuore le mie due sorelle, Federica e Mariachiara, per il supporto e i sorrisi che giornalmente sono riuscite a regalarmi.

Un ringraziamento speciale va poi ai miei nonni, Angela, Giuseppe e Nino, perché, anche se non ci sono più, li porto sempre nel cuore, per tutti i momenti passati insieme e per tutti i racconti che mi hanno regalato. È stato duro vederli sofferenti, ma la vita è anche fatta di questi momenti e il risultato che ho raggiunto è anche merito loro.

Desidero ringraziare mia nonna Maria per l'affetto che mi ha dimostrato in questi anni e per la disponibilità che in qualunque occasione mi ha dato. Mi ha visto piangere, mi ha visto sorridere, mi ha visto crescere. Le voglio tanto bene.

Ringrazio mia zia Cettina, la zia sempre disponibile e dedita ai nipoti, da sempre nostro punto di riferimento in qualunque difficoltà che la vita ci ha riservato.

Ringrazio mia zia Angela, zio Pippo e mia cugina Mara per la loro presenza costante in ogni momento importante della mia vita.

Ringrazio mia zia Gelsomina e mia cugina Francesca, per la disponibilità e il calore trasmessomi in questi anni.

Ringrazio i miei amici di sempre, per le mille avventure passate insieme, con la speranza che la nostra amicizia si conservi nel tempo. Sono felice di condividere questo mio importante traguardo insieme a loro.

Infine, dedico questo lavoro di tesi a me stesso, ai miei sforzi e alla mia costanza, che mi hanno permesso di arrivare fin qui.

SOMMARIO

Lo scopo principale di questa tesi è fornire un'analisi concernente i cuscinetti ad aria funzionanti ad alta velocità. Sebbene le conoscenze in merito a questi supporti, elaborate a partire dagli anni '60, siano ormai ben diffuse, è soprattutto negli ultimi decenni che l'indagine si è fatta più intensa. Difatti, in un mercato altamente competitivo, nel quale sono presenti un elevato numero di colossi industriali, le problematiche relative al comportamento dinamico dei cuscinetti ad aria sono al momento di estremo interesse.

Le caratteristiche uniche che possiedono, ne incoraggiano l'uso per le applicazioni ad alta velocità e a temperature estreme. Tanto è vero che, in queste condizioni operative, i cuscinetti ad aria riescono a garantire una bassa generazione di calore, bassi valori di attrito ed evitano i problemi di contaminazione che potrebbero derivare dall'uso di cuscinetti con lubrificanti convenzionali. Naturalmente esistono delle difficoltà associate all'alta usura durante la fase di *start-up* e *shutdown* e alle caratteristiche di comprimibilità del meato gassoso che comportano ridotte capacità di carico e bassi valori di smorzamento.

La presente tesi è divisa in quattro sezioni. Nel primo capitolo, introduttivo, viene presentata una classificazione dei vari tipi di cuscinetti disponibili sul mercato; e la differenziazione è incentrata sulla parte del cuscinetto che rende possibile il moto relativo tra gli organi. Inoltre, vengono presentati sinteticamente le applicazioni industriali ad alta velocità in cui si utilizzano tali supporti. Infine, si introducono i concetti e le ipotesi di base relativi alla teoria di linearizzazione utile allo studio del comportamento dinamico del cuscinetto. Nel secondo capitolo si presenta il calcolo dei coefficienti di rigidità e smorzamento a partire da prove sperimentali. Inizialmente viene esposta l'attività bibliografica svolta in questo lavoro di tesi e poi si focalizzerà in particolare l'attenzione sull'analisi di due metodologie numeriche idonee alla stima dei parametri dinamici. Il terzo capitolo è dedicato alla realizzazione di un banco prova virtuale in grado di simulare il comportamento reale di un rotore su cuscinetti. L'ambiente di sviluppo utilizzato è

Matlab™ con il supporto del tool Simulink® per le simulazioni dinamiche. L'ultimo capitolo è rivolto al problema della stabilità dinamica dei supporti a gas ad alte velocità. Verranno analizzati approfonditamente dei criteri di stabilità al fine di prevedere il punto di insorgenza di un moto di precessione instabile e fornire una visione nitida dei parametri che influenzano la stabilità. Sulla base di questi criteri è possibile progettare un cuscinetto a gas con una geometria adatta all'applicazione per cui è utilizzato. Infine, allo scopo di stimare il fattore di smorzamento globale attraverso il decremento logaritmico, si è costruito un modello a due gradi di libertà utilizzando il software di calcolo Matlab™ con il supporto del tool Simulink®.

INDICE DEI CONTENUTI

RINGRAZIAMENTI.....	II
SOMMARIO	IV
INDICE DELLE FIGURE.....	IX
INDICE DELLE TABELLE	XII
LISTA DEI SIMBOLI.....	XIII
Capitolo 1 INTRODUZIONE.....	1
1.1 Motivazioni e background.....	1
1.2 Classificazione dei cuscinetti	2
1.2.1 Cuscinetti volventi	2
1.2.2 Cuscinetti lubrificati con fluido incomprimibile.....	3
1.2.3 Cuscinetti lubrificati con fluido comprimibile.....	3
1.3 Cuscinetti a gas per applicazioni ad alte velocità.....	4
1.4 Concetti e ipotesi della teoria di linearizzazione.....	5
Capitolo 2 STIMA COEFFICIENTI A PARTIRE DA PROVA SPERIMENTALE	10
2.1 Overview	10
2.2 1° Metodologia numerica.....	12

2.3	2° Metodologia Numerica	18
Capitolo 3 BANCO PROVA VIRTUALE		22
3.1	Descrizione modello dinamico del rotore	22
3.2	Calcolo dei coefficienti a partire dai dati simulati con tale modello.....	23
Capitolo 4 STABILITÀ DINAMICA DEI CUSCINETTI A GAS.....		31
4.1	Premessa.....	31
4.2	Natura dei moti di precessione	32
4.3	Moti di precessione: sincrono e asincrono	34
4.4	Criteri di stabilità.....	37
4.4.1	Overview	37
4.4.2	Modello dinamico adottato	39
4.4.3	1° Criterio di stabilità.....	40
4.4.4	2° Criterio di stabilità.....	46
4.4.5	3° Criterio di stabilità.....	49
4.5	Stima del fattore di smorzamento ζ attraverso il decremento logaritmico	57
4.5.1	Descrizione modello dinamico del rotore	58
4.5.2	Calcolo del fattore di smorzamento ζ a partire da dati simulati	59
CONCLUSIONI		67
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....		69
Appendice A PROGRAMMA DI VERIFICA METODOLOGIA NUMERICA		73
1.	Script Matlab	73

2.	Schema a blocchi Simulink	79
Appendice B PROGRAMMA PER STIMA FATTORE DI SMORZAMENTO		80
1.	Script Matlab	80

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1.1: Accoppiamento rotore-cuscinetto nella posizione di equilibrio statico e forza di reazione ΔF causata a seguito di una perturbazione Δe . Tratto da Grassam e Powell [5]	6
Figura 2.1: Sistema in configurazione di regime ($\Omega \rightarrow \infty, \varepsilon = 0$)	12
Figura 2.2: Sistema perturbato in direzione X nell'intorno della configurazione di regime	13
Figura 2.3: Sistema perturbato in direzione Y nell'intorno della configurazione di regime	15
Figura 3.1: Schema a blocchi Simulink – eccitazione imposta in direzione X	24
Figura 3.2: Schema a blocchi Simulink – eccitazione imposta in direzione Y	25
Figura 3.3: Andamenti nel tempo delle grandezze cinematiche.....	26
Figura 3.4: Andamenti nel tempo delle grandezze fisiche	27
Figura 3.5: Termini diretti di rigidezza e smorzamento nelle direzioni X e Y.....	29
Figura 3.6: Termini misti di rigidezza e smorzamento nelle direzioni X e Y	29
Figura 3.7: Termini diretti di rigidezza e smorzamento nelle direzioni X e Y alla frequenza di eccitazione ω	30
Figura 3.8: Termini misti di rigidezza e smorzamento nelle direzioni X e Y alla frequenza di eccitazione ω	30
Figura 4.1: Stati di stabilità. Tratto da Czolczynski [3]	33
Figura 4.2: Tipica (e qualitativa) risposta sincrona che si osserva in un sistema rotante. Tratto da T.Waumans [15].	35

Figura 4.3: Risposta sincrona (qualitativa) che si osserva in un sistema rotante nel momento in cui si attraversa la velocità critica. Tratto da Grassam e Powell [5].	36
Figura 4.4: Diagramma sperimentale di Waterfall di una prova run-up in cui si osserva la risposta sincrona e asincrona. La risposta sincrona è segnata con 1x. Tratto da T.Waumans [15]	37
Figura 4.5: Modello dinamico rotore-cuscinetto. Tratto da Waumans [15]......	40
Figura 4.6: Velocità di insorgenza Ω_{onset} in funzione del rapporto di eccentricità ε	48
Figura 4.7: Tipico comportamento dinamico dei coefficienti dinamici k_{ii}, k_{ij} e c_{ii} in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω	53
Figura 4.8: Fattore di smorzamento globale ζ in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω . La linea in nero indica la soglia di instabilità (in termine inglese ‘instability threshold’)......	55
Figura 4.9: Fattore di smorzamento globale ζ corrispondente ad una velocità di rotazione del rotore $\Omega = 120000 \text{ rpm}$ (linea blu).	56
Figura 4.10: Modello dinamico rotore-cuscinetto. Tratto da Waumans [15]......	58
Figura 4.11: Schema a blocchi Simulink – stima fattore di smorzamento globale ζ	60
Figura 4.12: Coefficienti dinamici e fattore di smorzamento corrispondenti a tre velocità di rotazione prefissate	60
Figura 4.13: Andamento spostamento rotore lungo le direzioni X e Y (1° caso: $\Omega = 1,2 \cdot 105 \text{ rpm}$).....	62
Figura 4.14: Orbita del centro del rotore (1° caso: $\Omega = 1,2 \cdot 105 \text{ rpm}$).....	63
Figura 4.15: Andamento spostamento rotore lungo le direzioni X e Y (2° caso: $\Omega = 2,4 \cdot 105 \text{ rpm}$).....	63
Figura 4.16: Orbita del centro del rotore (2° caso: $\Omega = 2,4 \cdot 105 \text{ rpm}$).....	64

Figura 4.17: Andamento spostamento rotore lungo le direzioni X e Y (3° caso: $\Omega = 4,8 \cdot 105 \text{ rpm}$)..... 65

Figura 4.18: Orbita del centro del rotore (3° caso: $\Omega = 4,8 \cdot 105 \text{ rpm}$)..... 66

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 3.1: Parametri di Set – calcolo dei coefficienti a partire dai dati simulati.....	25
Tabella 3.2: Parametri Variabili – calcolo dei coefficienti a partire dai dati simulati....	26
Tabella 4.1: Parametri di Set – stima fattore di smorzamento globale ζ	61

LISTA DEI SIMBOLI

SIMBOLI

DEFINIZIONE

c_{ij}	Reazione del meato in termini di smorzamento nella direzione i ad uno spostamento nella direzione j ($N \cdot s/m$)
e	Eccentricità (m)
F	Forza di reazione del meato (N)
F_x	Forza di reazione del meato in direzione x (N)
F_y	Forza di reazione del meato in direzione Y (N)
f_{st}	Forza statica (N)
f_x	Forza dinamica esterna in direzione X (N)
f_y	Forza dinamica esterna in direzione Y (N)
G	Generica funzione adimensionale
$\bar{G}(s)$	Generica funzione a variabile complessa
g	Accelerazione gravitazionale (m/s^2)
H_{ij}	Funzione impedenza nella direzione i ad uno spostamento nella direzione j (N/m)

h	Altezza del meato in condizioni di eccentricità (m)
h_0	Altezza del meato in condizioni di coassialità (m)
i, j	x, y
k_{ij}	Reazione del meato in termini di rigidità nella direzione i ad uno spostamento nella direzione j (N/m)
L	Lunghezza del rotore (m)
M	Massa del rotore (kg)
m	Massa del cuscinetto (kg)
n	Distanza tra due periodi T
O_c	Centro di rotazione del cuscinetto
O_R	Centro di rotazione del rotore
r_c	Raggio del cuscinetto (m)
r_r	Raggio del rotore (m)
s	Variabile complessa di Laplace
T	Periodo del moto (s)

X, Y	Coordinate cartesiane del sistema di riferimento
Z_{ij}	Funzione impedenza nella direzione i ad uno spostamento nella direzione j (N/m)
β	Angolo di attitudine (rad)
δ	Decremento logaritmico
ε	Rapporto di eccentricità (\backslash)
θ	Coordinata angolare di un punto generico del cuscinetto (rad)
λ	Autovalore
μ	Viscosità dinamica ($Pa \cdot s$)
ν	Frequenza di perturbazione adimensionalizzata (\backslash)
ζ	Fattore di smorzamento globale (\backslash)
ζ_n	Fattore di smorzamento (\backslash)
ω	Frequenza di perturbazione (Hz)
ω_d	Pulsazione naturale smorzata (rad/s)
ω_n	Pulsazione naturale (rad/s)
Ω	Velocità di rotazione del rotore (rad/s)

Ω_n	Frequenza naturale (Hz)
Δ	Differenza dei punti di una funzione
\mathcal{C}	Numero complesso

Capitolo 1

INTRODUZIONE

1.1 Motivazioni e background

Il presente lavoro di tesi è frutto di un approfondimento sul tema riguardante i cuscinetti ad aria funzionanti ad alte velocità, con particolare attenzione alle metodologie numeriche idonee al calcolo dei coefficienti di rigidezza e smorzamento a partire da prove sperimentali e dall'analisi dei criteri di stabilità.

Le problematiche relative al comportamento dinamico dei cuscinetti ad aria, sebbene largamente approfondite già negli anni '60 [1]¹, sono attualmente di estremo interesse nel campo industriale: un mondo in cui le condizioni operative ad alta velocità sono altamente richieste.

I cuscinetti a gas rappresentano dei seri candidati per il rimpiazzo dei cuscinetti lubrificati con fluido incomprimibile o dei cuscinetti volventi nelle macchine rotanti ad alta precisione. Infatti, questi componenti meccanici garantiscono una bassa generazione di calore ad alte velocità e non necessitano di alcuna lubrificazione o sistema di pompaggio. L'utilizzo di tali supporti è tuttavia limitato dalla bassa capacità di carico e dall'alta usura durante la fase di *start-up* e *shutdown*, le quali possono compromettere la stabilità del sistema.

¹ I numeri in parentesi quadre rappresentano i riferimenti bibliografici collocati alla fine del lavoro di tesi.

1.2 Classificazione dei cuscinetti

I cuscinetti possono essere classificati in differenti categorie secondo diversi criteri. La classificazione esposta in questo paragrafo è desunta dal libro *Meccanica applicata* [2]. La differenziazione è incentrata sulla parte del cuscinetto che rende possibile il moto relativo tra gli organi. Se questo elemento è costituito da una corona di sfere o rulli, si parla di *cuscinetti volventi*; se invece l'elemento intermedio è costituito da un mezzo lubrificante, si parla di *cuscinetti lubrificati*. Questi ultimi possono essere ulteriormente classificati in base al tipo di fluido utilizzato, che può essere comprimibile o incompressibile. Alla luce di quanto detto sopra, avremo la seguente classificazione:

- Cuscinetti volventi;
- Cuscinetti lubrificati con fluido incompressibile (normalmente olii di vario tipo);
- Cuscinetti lubrificati con fluido comprimibile (normalmente aria).

Focalizzandoci sulle ultime due categorie, un'altra classificazione può essere fatta in merito alla realizzazione della distribuzione di pressione necessaria a supportare il carico applicato. Infatti, se la distribuzione di pressione è ottenuta in conseguenza del trascinamento del fluido da parte di una delle due superfici coniugate, all'interno di meati convergenti, si parla di *lubrificazione idrodinamica* (fluido incompressibile) o *aerodinamica* (fluido comprimibile). Mentre se la distribuzione di pressione è ottenuta con il supporto di una sorgente esterna di pressione, allora si verifica la cosiddetta *lubrificazione idrostatica* o *aerostatica*.

È utile osservare che non è stata fatta alcuna distinzione sulla direzione del carico che può supportare il cuscinetto. Quindi tutti i cuscinetti sopra citati possono supportare sia carichi assiali che carichi radiali.

1.2.1 Cuscinetti volventi

I cuscinetti volventi sono probabilmente i supporti più utilizzati in ambito industriale. Questi elementi possono essere opportunamente combinati per vincolare in vario modo le parti mobili di un meccanismo allo scopo di realizzare i vincoli di cerniera, carrello ed

incastro, oltre che per consentirne la rotazione relativa. In particolare, essi sono realizzati in numerosissime varianti standardizzate tali da soddisfare la maggior parte delle esigenze costruttive. La rigidità è legata al contatto tra anello interno ed elementi volventi oltre che al contatto tra elementi volventi ed anello esterno. Generalmente la rigidità degli elementi volventi (sfere o rulli conici) è molto elevata e gli effetti smorzanti sono relativamente bassi. Tuttavia, tali supporti volventi non saranno analizzati in questo lavoro di tesi.

1.2.2 Cuscinetti lubrificati con fluido incomprimibile

I cuscinetti lubrificati con fluido incomprimibile sono caratterizzati dalla presenza di un mezzo lubrificante interposto fra le superfici coniugate costituenti l'accoppiamento. Esso è realizzato con un certo gioco: infatti il diametro dell'albero è circa il $99,8 \div 99,9$ % rispetto al diametro della boccia. A causa della rotazione del rotore, il film di lubrificante assume una configurazione convergente e di conseguenza si sviluppa una distribuzione di pressione che può essere modellata attraverso l'equazione di Reynolds. Una complicazione riguardante il calcolo della distribuzione di pressione è data dalla geometria non circolare e dall'effetto di cavitazione.

1.2.3 Cuscinetti lubrificati con fluido comprimibile

I cuscinetti lubrificati con fluido comprimibile operano similmente ai cuscinetti descritti nel paragrafo 1.2.2. Essendo i gas dei fluidi comprimibili, in conseguenza alla rotazione dell'albero il meato di lubrificante si comprime. Ciò significa che la densità del lubrificante non sarà costante, come ipotizzato nei supporti lubrificati con fluido incomprimibile, ma cambierà proporzionalmente alla variazione della pressione. Pertanto la distribuzione di pressione risulta essere differente rispetto ai supporti analizzati nel paragrafo precedente. Questi componenti meccanici garantiscono una bassa generazione di calore ad alte velocità e non necessitano di alcuna lubrificazione. Ciò permette il loro utilizzo a temperature elevate, senza l'emissione di sostanze inquinanti nell'ambiente.

In base al conseguimento della distribuzione di pressione (come rilevato nel paragrafo 1.2) esistono due tipologie di cuscinetti ad aria:

- cuscinetti aerodinamici (in termine inglese '*Self-Acting Bearings*');

- cuscinetti aerostatici (in termine inglese '*Bearings with the Direct Feeding System*')

Tuttavia l'utilizzo di tali supporti è limitato dalla bassa rigidezza. Infatti una variazione del carico a cui sono sottoposti implica una variazione del meato di aria che può compromettere la stabilità del sistema. Il lavoro di tesi si limiterà allo studio di tali cuscinetti a gas, con particolare attenzione al calcolo dei coefficienti di rigidezza e smorzamento a partire da prove sperimentali e all'analisi dei criteri di stabilità.

1.3 Cuscinetti a gas per applicazioni ad alte velocità

In molti settori industriali la domanda di alta potenza e velocità collegata ad un funzionamento continuo e affidabile è sempre più pressante. A partire dagli anni '60 i cuscinetti a gas sono stati utilizzati a supporto di organi rotanti [3]. Essi sono stati impiegati per svariate applicazioni: macchine utensili, supporti della testa magnetica nel disco rigido di un computer, giroscopi. Col trascorrere degli anni si è scoperto che essi erano particolarmente adatti nelle applicazioni industriali ad altissima velocità, dove l'usura dei cuscinetti volventi avviene molto rapidamente, e cioè su:

- Microturbine a gas;
- giroscopi;
- compressori d'aria oil-free;
- mandrini;
- strumenti di misura.

I vantaggi rispetto ai cuscinetti lubrificati ad olio e ai cuscinetti volventi sono rilevanti su [4]:

- *ambiente* (nessuna contaminazione causata dai lubrificanti di vari tipi)
- *stabilità del lubrificante* (su estremi intervalli di temperatura non si verifica il fenomeno della vaporizzazione, solidificazione e cavitazione)
- *attrito e calore* (garantiscono una bassa generazione di calore e ridotti valori di attrito)

- *alte velocità* (permettono agli organi rotanti di raggiungere alte velocità)

Naturalmente esistono anche degli svantaggi e sono relativi a [4]:

- *capacità di carico* (ridotte capacità di carico dovute al fatto che il fluido presenta una bassa rigidità)
- *effetto smorzante* (bassi valori di smorzamento poiché il fluido presenta una bassa viscosità)
- *fasi di start-up e shutdown* (alta usura durante le fasi transitorie).

Pertanto nelle applicazioni in cui è concesso, avendo delle basse capacità di carico, i cuscinetti a gas sono necessariamente più grandi in termini di dimensioni e costretti a lavorare con film più sottili rispetto ai supporti volventi e lubrificati ad olio. Un meato più sottile richiede un controllo più accurato in termini di design e produzione del cuscinetto (tolleranze, rugosità superficiali, distorsioni termiche ed elastiche). Invece, i bassi valori di smorzamento rendono necessaria un'analisi dettagliata delle caratteristiche dinamiche del sistema meccanico, poiché lavorando in corrispondenza di una velocità critica potrebbe non esserci abbastanza smorzamento tale da non compromettere il danneggiamento del sistema.

1.4 Concetti e ipotesi della teoria di linearizzazione

In ambito industriale, la funzione essenziale dei cuscinetti è quella di agire a supporto dei rotori. Per svolgere tale funzione, i cuscinetti a gas si avvalgono della distribuzione di pressione che si forma tra la porzione del rotore supportato dal cuscinetto (in termine inglese '*Journal*') e il cuscinetto stesso (in termine inglese '*Bearing*'). Per analizzare il comportamento dinamico dei cuscinetti a gas si può ricorrere alla teoria di linearizzazione. Questa teoria si basa sulla soluzione completa dell'equazione di Reynolds² ai fini di ottenere la distribuzione di pressione in regime stazionario, e una linearizzazione locale del campo di

² La teoria della lubrificazione è basata sull'equazione di Reynolds. Uno studio approfondito di tale teoria è possibile trovarlo sul libro di *Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems* [3].

pressione a seguito di una piccola perturbazione nell'intorno della posizione di equilibrio statico. Tale metodo comporta la formulazione dei coefficienti dinamici rappresentanti la rigidità e lo smorzamento del meato gassoso. L'accoppiamento rotore-cuscinetto in una posizione di equilibrio statico è mostrato nella figura sottostante:

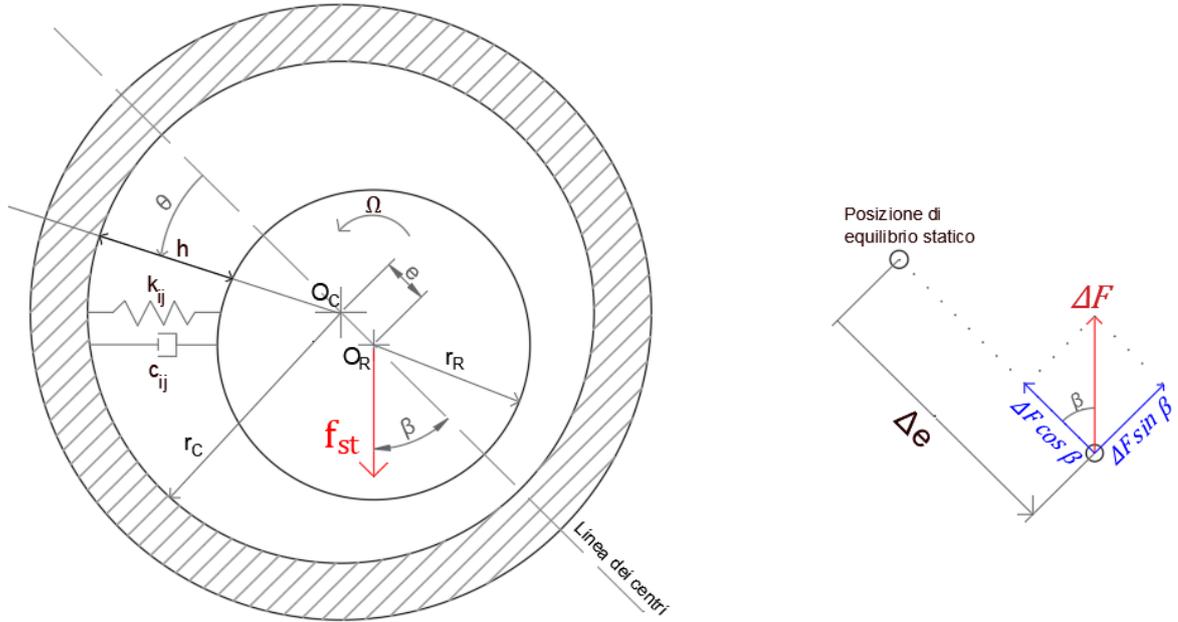


Figura 1.1: Accoppiamento rotore-cuscinetto nella posizione di equilibrio statico e forza di reazione ΔF causata a seguito di una perturbazione Δe . Tratto da Grassam e Powell [5]

Secondo la teoria di Grassam e Powell [5], la componente della forza di reazione $\Delta F \cdot \sin\beta$ genera l'accelerazione del rotore all'interno del moto di precessione (esaminato nel Capitolo 4).

Per la configurazione mostrata in Figura 1.1, la caratterizzazione dinamica completa richiede la conoscenza di otto coefficienti dinamici rappresentanti la rigidità e lo smorzamento del meato (quattro parametri di rigidità e quattro parametri di smorzamento). Ogni set di quattro parametri comprende due termini diretti e due termini misti. Quest'ultimi possono essere considerati come una reazione del meato in una direzione perpendicolare alla perturbazione subita dal rotore. In generale, le forze di reazione del meato lungo le direzioni X e Y sono esprimibili tramite le seguenti equazioni [1]:

$$F_x = k_{xx} \cdot X + k_{xy} \cdot Y + c_{xx} \cdot \dot{X} + c_{xy} \cdot \dot{Y} \quad (1.1)$$

$$F_y = k_{yx} \cdot X + k_{yy} \cdot Y + c_{yx} \cdot \dot{X} + c_{yy} \cdot \dot{Y} \quad (1.2)$$

Pertanto quando il cuscinetto si sposta in direzione X , la reazione del film ha anche delle componenti di forza in direzione Y dovute all'angolo di attitudine β , il quale è diverso da zero. Queste componenti sono proporzionali rispettivamente, ai termini misti di rigidezza k_{yx} e smorzamento c_{yx} . Analogo ragionamento si ha per uno spostamento in direzione Y . Di conseguenza, il comportamento dinamico del meato gassoso può essere espresso come segue:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

in cui k_{ij} e c_{ij} rappresentano le reazioni del meato in termini di rigidezza e smorzamento nella direzione i ad uno spostamento nella direzione j , mentre f_x e f_y rappresentano le forze dinamiche esterne agenti.

Rispetto ad una direzione generica x , i coefficienti di rigidezza sono delle derivate parziali di forza rispetto allo spostamento, mentre i coefficienti di smorzamento sono delle derivate parziali di forza rispetto alla velocità:

$$k_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

$$c_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \quad (1.5)$$

I coefficienti dinamici sono ottenuti perturbando lo spostamento nell'intorno della posizione di equilibrio statico:

$$-k_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial X} = \frac{F_x(X + \Delta X, Y, 0, 0) - F_x(X, Y, 0, 0)}{\Delta X} \quad (1.6)$$

$$-k_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial Y} = \frac{F_x(X, Y + \Delta Y, 0, 0) - F_x(X, Y, 0, 0)}{\Delta Y} \quad (1.7)$$

$$-k_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial Y} = \frac{F_y(X, Y + \Delta Y, 0, 0) - F_y(X, Y, 0, 0)}{\Delta Y} \quad (1.8)$$

$$-k_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial X} = \frac{F_y(X + \Delta X, Y, 0, 0) - F_y(X, Y, 0, 0)}{\Delta X} \quad (1.9)$$

Mentre i coefficienti di smorzamento sono ottenuti perturbando la velocità nell'intorno della posizione di equilibrio statico:

$$-c_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{X}} = \frac{F_x(X, Y, \Delta \dot{X}, 0) - F_x(X, Y, 0, 0)}{\Delta \dot{X}} \quad (1.10)$$

$$-c_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{Y}} = \frac{F_x(X, Y, 0, \Delta \dot{Y}) - F_x(X, Y, 0, 0)}{\Delta \dot{Y}} \quad (1.11)$$

$$-c_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{Y}} = \frac{F_y(X, Y, 0, \Delta \dot{Y}) - F_y(X, Y, 0, 0)}{\Delta \dot{Y}} \quad (1.12)$$

$$-c_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{X}} = \frac{F_y(X, Y, \Delta \dot{X}, 0) - F_y(X, Y, 0, 0)}{\Delta \dot{X}} \quad (1.13)$$

Nel caso generico, gli otto parametri dinamici sono diversi. Nell'ipotesi che il rapporto di eccentricità $\varepsilon = e/h_0$ tenda a zero (approssimazione valida nel caso di limitato carico verticale) esiste una simmetria del meato di lubrificante tale da ridurre il set a quattro parametri dinamici, infatti:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= k_{yy} \\ c_{xx} &= c_{yy} \\ k_{xy} &= -k_{yx} \\ c_{xy} &= -c_{yx} \end{aligned} \quad (1.14)$$

I coefficienti dinamici dipendono dalle condizioni di lavoro stazionarie, ovvero dall'angolo di inclinazione β , dal rapporto di eccentricità ε , dalla velocità di rotazione del rotore Ω , e per un fluido comprimibile anche dalla frequenza di perturbazione ω :

$$\begin{aligned}k_{ij} &= f(\beta, \varepsilon, \Omega, \omega) \\c_{ij} &= f(\beta, \varepsilon, \Omega, \omega)\end{aligned}\tag{1.15}$$

Se il carico statico agente sul cuscinetto ha un effetto limitato sul rapporto di eccentricità ε e sulla direzione, le espressioni (1.15) si semplificano nel seguente modo:

$$\begin{aligned}k_{ij} &= f(\Omega, \omega) \\c_{ij} &= f(\Omega, \omega)\end{aligned}\tag{1.16}$$

In conclusione, possiamo affermare che la caratterizzazione dinamica completa consiste nella valutazione dei parametri dinamici a differenti valori della velocità di rotazione Ω e della frequenza di perturbazione ω .

Capitolo 2

STIMA COEFFICIENTI A PARTIRE DA PROVA SPERIMENTALE

2.1 Overview

Nel corso degli anni, la stima teorica dei coefficienti dinamici è sempre stata una fonte di errore che conduceva a previsioni sbagliate riguardanti il comportamento dinamico di un sistema rotante supportato da cuscinetti. Tuttavia, ottenere delle stime teoriche affidabili è difficile. Ecco perché sono state introdotte delle metodologie numeriche utilizzabili nelle prove sperimentali. In questo modo è possibile fare un confronto tra i risultati teorici e i risultati ottenuti sperimentalmente.

Per il calcolo dei parametri dinamici, a partire da una prova sperimentale, esistono due metodi:

- *perturbazione imposta dall'esterno* (tramite l'utilizzo di shaker elettromagnetici o martello impulsivo);
- *risposta sincrona allo squilibrio*.

Nel 2004, Tiwari [1] ha pubblicato una rassegna dettagliata riguardante lo stato dell'arte dell'identificazione sperimentale dei parametri dinamici di vari tipi di cuscinetti. Egli si è focalizzato principalmente sui cuscinetti lubrificati con fluido comprimibile ed incompressibile.

Numerosi ricercatori nel mondo hanno proposto dei metodi sperimentali. Ad esempio San Andrés [6] presenta una procedura di identificazione per il calcolo dei parametri dinamici

attraverso la risposta sincrona dovuta allo squilibrio. Le misurazioni sono state eseguite per differenti valori di massa eccentrica su un banco prova composto da un rotore flessibile supportato da due cuscinetti idrodinamici con disegnazione a lobo. Inoltre, al fine di valutare la sensibilità al rumore, è stato eseguito uno studio tratto da Fritzen [7] che mostra la robustezza della procedura sperimentale ai disturbi esterni.

Qiu e Tieu [8] utilizzano un martello impulsivo per l'identificazione di 16 coefficienti dinamici corrispondenti a due cuscinetti idrodinamici differenti. Essi considerano che il metodo impulsivo sia il più economico e adeguato alla stima dei parametri. Un successivo articolo di Łukasz [9] è un aggiornamento della ricerca [8], che oltre a stimare i coefficienti con il metodo sviluppato da Qiu e Tieu, calcola la massa del rotore attraverso l'utilizzo di coefficienti di massa.

Nordmann e Schollhorn [10] identificano una metodologia numerica in cui il sistema rotante è eccitato attraverso un comando impulsivo. Tramite degli opportuni trasduttori sono stati misurati le forze applicate e gli spostamenti del rotore, e trasformando i segnali nel dominio della frequenza, si sono ricavati i coefficienti di rigidità e smorzamento. Il processo è stato validato poiché vi era uno scostamento accettabile tra i risultati teorici e i risultati ottenuti sperimentalmente.

Wang e Kim [11] utilizzano un martello impulsivo piezoelettrico per l'identificazione dei parametri dinamici di un cuscinetto a lamina d'aria ibrido (in termine inglese '*Hybrid Air Foil Bearing, HAFB*'). Per il calcolo dei coefficienti utilizzano un banco prova in cui il rotore è supportato da una coppia di cuscinetti volventi e il cuscinetto *HAFB* è mobile sull'albero. La metodologia numerica adottata in questo articolo, per l'identificazione nel dominio della frequenza, è basata sul metodo di Fritzen [12] denominato in termine inglese '*Instrumental Variable Filter (IVF)*'.

Matta e Arghir [13] utilizzano un banco prova per l'identificazione dei coefficienti di rigidità e smorzamento. Le eccitazioni dinamiche, applicate alla massa del cuscinetto (in termine inglese '*bearing housing*'), sono imposte tramite shaker elettromagnetici. I risultati sperimentali, eseguiti su un cuscinetto aerodinamico, mostrano alcuni limiti sul banco prova progettato. Infatti, al fine di calcolare i coefficienti dinamici con una certa accuratezza, tutte le frequenze modali dei componenti del banco prova dovrebbero essere evitate. Il loro

articolo [14] è un seguito della pubblicazione [13] citata in precedenza. L'obiettivo della loro prova è quello di ridurre la procedura di acquisizione dati e semplificare il processo di eccitazione, infatti gli shaker elettromagnetici sono stati rimpiazzati da un martello impulsivo. Il limite principale di questa procedura di identificazione è dovuto al fatto che non posso eccitare frequenze di elevato valore (in questo caso sopra i 280 Hz) con un rapporto segnale-disturbo accettabile.

Le metodologie numeriche esposte nel paragrafo successivo sono basate sulle attività di ricerca: [11], [13], [14]. Ciò significa che tali procedure sono valide per il calcolo dei parametri dinamici a partire da prove sperimentali in cui la perturbazione è imposta dall'esterno.

2.2 1° Metodologia numerica

La metodologia numerica esposta in questo paragrafo è basata sulle pubblicazioni scientifiche indicate nei riferimenti bibliografici ai numeri [13] e [14]. Al fine di ricavare i coefficienti dinamici attraverso tale metodo, è necessario applicare due forzanti esterne tra di loro indipendenti.

Si consideri allora il sistema in una configurazione di regime ($\Omega \rightarrow \infty, \varepsilon = 0$), in cui vi è il rotore fisso tramite dei supporti e il cuscinetto in prova mobile:

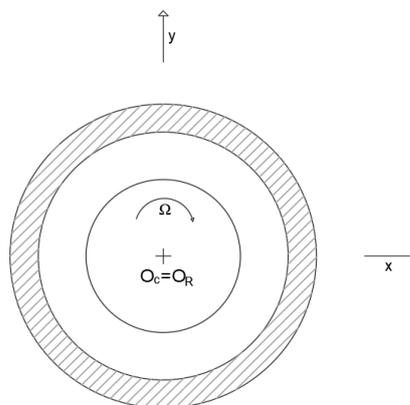


Figura 2.1: Sistema in configurazione di regime ($\Omega \rightarrow \infty, \varepsilon = 0$)

in cui:

- $\Omega =$ velocità di rotazione del rotore (rad/s);
- $O_c =$ centro di rotazione del cuscinetto;
- $O_R =$ centro di rotazione del rotore.

A seguito di una perturbazione nell'intorno della configurazione di regime tramite l'applicazione di una forzante esterna in direzione X , si ottiene la seguente configurazione:

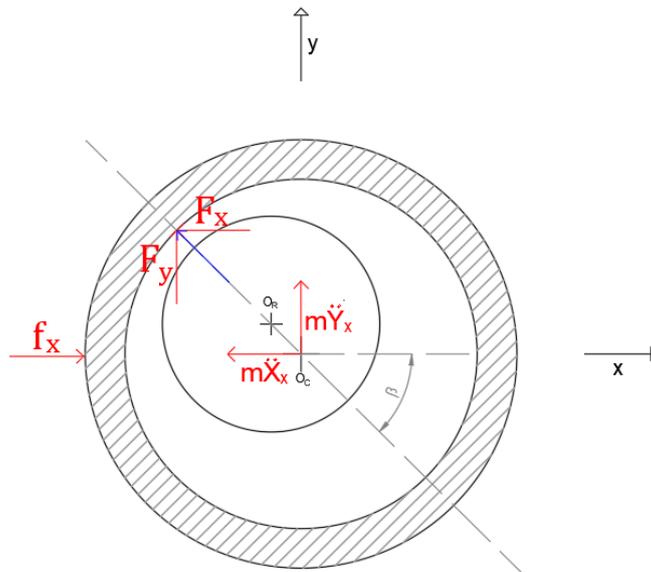


Figura 2.2: Sistema perturbato in direzione X nell'intorno della configurazione di regime

in cui:

- $f_x =$ forzante esterna (N);
- $F_x, F_y =$ forze di reazione (N);
- $\beta =$ angolo di attitudine (rad);
- $m =$ massa del cuscinetto (kg)

Come affermato nel paragrafo 1.4, è possibile esprimere le forze di reazione mediante opportuni parametri di rigidità e smorzamento, i quali sono ottenuti linearizzando il comportamento dinamico nell'intorno della configurazione di lavoro statico.

Passiamo ora a scrivere le equazioni di equilibrio lungo le direzioni X e Y scegliendo un opportuno sistema di coordinate rappresentato in Figura 2.2:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{X}_x = f_x - F_x \\ m \cdot \ddot{Y}_x = -F_y \end{cases} \quad (2.1)$$

sostituendo opportunamente le relazioni (1.1) e (1.2) all'interno del sistema di equazioni (2.1) si ottiene:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{X}_x + k_{xx} \cdot X_x + k_{xy} \cdot Y_x + c_{xx} \cdot \dot{X}_x + c_{xy} \cdot \dot{Y}_x = f_x \\ m \cdot \ddot{Y}_x + k_{yy} \cdot Y_x + k_{yx} \cdot X_x + c_{yy} \cdot \dot{Y}_x + c_{yx} \cdot \dot{X}_x = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

le equazioni del moto sopra ottenute sono trasformate nel dominio della frequenza attraverso la trasformata di Laplace. Tale operatore funzionale, contrariamente a quello che si può pensare, consente di apportare notevoli semplificazioni nei calcoli matematici. Ipotizzando le condizioni iniziali nulle e indicando con $s = j\omega$ la variabile complessa e con $\bar{G}(s)$ la generica funzione a variabile complessa (per non appesantire troppo la notazione la indicherò solamente con \bar{G}), otteniamo le seguenti espressioni nel dominio della frequenza:

$$\begin{cases} m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_x + k_{xx} \cdot \bar{X}_x + k_{xy} \cdot \bar{Y}_x + c_{xx} \cdot s \cdot \bar{X}_x + c_{xy} \cdot s \cdot \bar{Y}_x = \bar{f}_x \\ m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_x + k_{yy} \cdot \bar{Y}_x + k_{yx} \cdot \bar{X}_x + c_{yy} \cdot s \cdot \bar{Y}_x + c_{yx} \cdot s \cdot \bar{X}_x = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

raccogliendo a fattor comune i termini in \bar{X}_x e \bar{Y}_x e portando al 2° membro i termini inerziali si ottiene:

$$\begin{cases} (k_{xx} + s \cdot c_{xx}) \cdot \bar{X}_x + (k_{xy} + s \cdot c_{xy}) \cdot \bar{Y}_x = \bar{f}_x - m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_x \\ (k_{yx} + s \cdot c_{yx}) \cdot \bar{X}_x + (k_{yy} + s \cdot c_{yy}) \cdot \bar{Y}_x = -m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_x \end{cases} \quad (2.4)$$

dove i coefficienti dinamici del cuscinetto sono rappresentati dalla generica funzione impedenza Z_{ij} definita come:

$$Z_{ij} = k_{ij} + j\omega \cdot c_{ij} \quad (N/m) \quad \text{dove: } i, j = x, y \quad (2.5)$$

sostituendo l'espressione (2.5) all'interno del sistema (2.4) si ottiene:

$$\begin{cases} Z_{xx} \cdot \bar{X}_x + Z_{xy} \cdot \bar{Y}_x = \bar{f}_x - m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_x \\ Z_{yx} \cdot \bar{X}_x + Z_{yy} \cdot \bar{Y}_x = -m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_x \end{cases} \quad (2.6)$$

In notazione matriciale avremo che:

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X}_x \\ \bar{Y}_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x - m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_x \\ -m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_x \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Passiamo ora allo studio del sistema a seguito di una perturbazione nell'intorno della configurazione di regime (visibile in Figura 2.1) tramite l'applicazione di una forzante esterna in direzione Y . La configurazione che si ottiene è visibile nella figura sottostante:

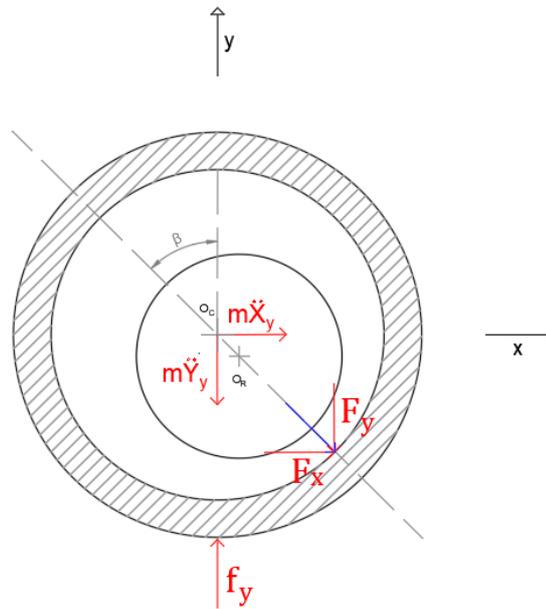


Figura 2.3: Sistema perturbato in direzione Y nell'intorno della configurazione di regime

Scegliendo un opportuno sistema di riferimento visibile in Figura 2.3, si possono scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione X e Y :

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{X}_y = -F_x \\ m \cdot \ddot{Y}_y = f_y - F_y \end{cases} \quad (2.8)$$

sostituendo opportunamente le relazioni (1.1) e (1.2) all'interno del sistema di equazioni (2.8) si ottiene:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{X}_y + k_{xx} \cdot X_y + k_{xy} \cdot Y_y + c_{xx} \cdot \dot{X}_y + c_{xy} \cdot \dot{Y}_y = 0 \\ m \cdot \ddot{Y}_y + k_{yy} \cdot Y_y + k_{yx} \cdot X_y + c_{yy} \cdot \dot{Y}_y + c_{yx} \cdot \dot{X}_y = f_y \end{cases} \quad (2.9)$$

Ipotizzando le condizioni iniziali nulle, le equazioni del moto sopra ottenute sono trasformate nel dominio della frequenza attraverso la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_y + k_{xx} \cdot \bar{X}_y + k_{xy} \cdot \bar{Y}_y + c_{xx} \cdot s \cdot \bar{X}_y + c_{xy} \cdot s \cdot \bar{Y}_y = 0 \\ m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_y + k_{yy} \cdot \bar{Y}_y + k_{yx} \cdot \bar{X}_y + c_{yy} \cdot s \cdot \bar{Y}_y + c_{yx} \cdot s \cdot \bar{X}_y = \bar{f}_y \end{cases} \quad (2.10)$$

raccogliendo a fattor comune i termini in \bar{X}_y e \bar{Y}_y e portando al 2° membro i termini inerziali si ottiene:

$$\begin{cases} (k_{xy} + s \cdot c_{xy}) \cdot \bar{Y}_y + (k_{xx} + s \cdot c_{xx}) \cdot \bar{X}_y = -m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_y \\ (k_{yy} + s \cdot c_{yy}) \cdot \bar{Y}_y + (k_{yx} + s \cdot c_{yx}) \cdot \bar{X}_y = \bar{f}_y - m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_y \end{cases} \quad (2.11)$$

sostituendo l'equazione (2.5) all'interno del sistema (2.11) si ricava:

$$\begin{cases} Z_{xy} \cdot \bar{Y}_y + Z_{xx} \cdot \bar{X}_y = -m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_y \\ Z_{yy} \cdot \bar{Y}_y + Z_{yx} \cdot \bar{X}_y = \bar{f}_y - m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_y \end{cases} \quad (2.12)$$

in notazione matriciale avremo che:

$$\begin{bmatrix} Z_{xy} & Z_{xx} \\ Z_{yy} & Z_{yx} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Y}_y \\ \bar{X}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_y \\ \bar{f}_y - m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_y \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

a questo punto, il sistema (2.14) contenente le equazioni (2.6) e (2.12) è composto da quattro equazioni nelle quattro incognite Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yx} e Z_{yy} :

$$\begin{cases} Z_{xx} \cdot \bar{X}_x + Z_{xy} \cdot \bar{Y}_x = \bar{f}_x - m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_x \\ Z_{yx} \cdot \bar{X}_x + Z_{yy} \cdot \bar{Y}_x = -m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_x \\ Z_{xy} \cdot \bar{Y}_y + Z_{xx} \cdot \bar{X}_y = -m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_y \\ Z_{yy} \cdot \bar{Y}_y + Z_{yx} \cdot \bar{X}_y = \bar{f}_y - m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_y \end{cases} \quad (2.14)$$

in notazione matriciale avremo che:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_x & \bar{Y}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X}_x & \bar{Y}_x \\ \bar{X}_y & \bar{Y}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X}_y & \bar{Y}_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \\ Z_{yx} \\ Z_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x - m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_x \\ -m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_x \\ -m \cdot s^2 \cdot \bar{X}_y \\ \bar{f}_y - m \cdot s^2 \cdot \bar{Y}_y \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Indicando con A_{ab} (m/s^2) la generica accelerazione relativa e sostituendo opportunamente sul sistema (2.15) si ottiene il seguente sistema adatto al calcolo dei coefficienti dinamici:

$$\begin{bmatrix} \overline{X_x} & \overline{Y_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{X_x} & \overline{Y_x} \\ \overline{X_y} & \overline{Y_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{X_y} & \overline{Y_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \\ Z_{yx} \\ Z_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{f_x} - m \cdot \overline{A_{xx}} \\ -m \cdot \overline{A_{yx}} \\ -m \cdot \overline{A_{xy}} \\ \overline{f_y} - m \cdot \overline{A_{yy}} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Si noti che al fine di ottenere la matrice del sistema (2.16) ben condizionata è necessaria l'applicazione di due forzanti esterne tra di loro indipendenti. Esso è un sistema lineare di quattro equazioni nelle quattro incognite $Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yx}, Z_{yy}$ e pertanto risulta risolvibile analiticamente visto che gli spostamenti relativi tra rotore e cuscinetto (X_i, Y_i) sono noti dai sensori di spostamento, le accelerazioni (A_{ab}) sono note dagli accelerometri mentre le forze (f_i) sono note dai trasduttori di forza. È importante osservare che i segnali delle vibrazioni acquisiti tramite un opportuno sistema di acquisizione dati contengono anche la risposta sincrona dovuta allo squilibrio del rotore. Quindi, una sottrazione del segnale è necessaria al fine di estrarre la vera risposta del cuscinetto alla perturbazione imposta dall'esterno. Per passare dal dominio del tempo al dominio della frequenza è possibile utilizzare la Fast Fourier Transform (FFT). Le impedenze calcolate, risolvendo il sistema (2.16), permettono il calcolo agevole dei coefficienti dinamici:

$$k_{ij} = Re (Z_{ij}) \quad (2.17)$$

$$c_{ij} = Im (Z_{ij})/\omega$$

Questa è la generica procedura utilizzata per identificare le caratteristiche dinamiche di un cuscinetto lubrificato per mezzo di un fluido incomprimibile (tipicamente olio) dove i coefficienti dinamici non variano con la frequenza di eccitazione ω^3 . Per un cuscinetto lubrificato per mezzo di un fluido comprimibile (tipicamente aria) i coefficienti dinamici mutano al variare di ω . Quindi è necessario l'utilizzo dell'approccio esposto nelle righe successive. Grazie alla similitudine tra la trasformata di Fourier e la trasformata di Laplace per una perturbazione sinusoidale è possibile approssimare l'impedenza complessa come una funzione di trasferimento del primo ordine di un modello viscoelastico:⁴

³ I "Tilting pad journal bearings" rappresentano un'eccezione visto che è possibile la variazione dei coefficienti dinamici al variare della frequenza di eccitazione ω ;

⁴ L'indice 'ij' è stato trascurato per chiarezza, ma ogni impedenza ha una propria approssimazione.

$$Z(\omega) = k + j\omega \cdot c = \frac{A_0 + j\omega \cdot A_1}{B_0 + j\omega} \quad (2.18)$$

I coefficienti A_0, A_1 e B_0 , basati sui valori misurati delle impedenze complesse a differenti frequenze di eccitazione, è possibile calcolarli attraverso una procedura di fitting, in cui la funzione errore è definita utilizzando il metodo dei minimi quadrati:

$$Err(A_0, A_1, B_0) = \sum_{i=1}^N \left[Z(\omega_i) - \frac{A_0 + j\omega_i \cdot A_1}{B_0 + j\omega_i} \right]^2 \quad (2.19)$$

In definitiva, i termini di rigidità e smorzamento dipendenti dalla frequenza di eccitazione ω sono dati da:

$$k(\omega) = \frac{A_0 \cdot B_0 + \omega^2 \cdot A_1}{B_0^2 - \omega^2}$$

$$c(\omega) = \frac{A_1 \cdot B_0 - A_0}{B_0^2 - \omega^2} \quad (2.20)$$

2.3 2° Metodologia Numerica

La metodologia numerica⁵ mostrata in questo paragrafo è incentrata sulla seguente attività di ricerca: [11]. È utile seguire tale approccio quando, oltre a ricavare i coefficienti di rigidità e smorzamento, si vuole determinare la massa del cuscinetto m . L'introduzione di questa incognita aggiuntiva può essere legata a due motivi:

- impossibilità di misurazione della massa a partire da prove sperimentali;
- confronto con il valore noto di massa per verificare l'accuratezza della metodologia.

⁵ La metodologia numerica è valida per una configurazione in cui vi è il rotore fisso tramite dei supporti e il cuscinetto in prova mobile.

Prima di passare all'esposizione dettagliata dell'approccio è bene osservare che, al fine di ricavare le incognite, è necessario applicare due forzanti esterne tra di loro indipendenti. Dunque, in analogia al caso esposto nel paragrafo 2.2 è possibile ricavare le equazioni del moto (2.2) e (2.9).

In contrasto alla 1° metodologia, volendo identificare la massa del cuscinetto m , si suppone che la matrice di massa non contiene solamente i valori della diagonale principale ma contiene anche dei termini misti. Pertanto, esprimiamo in forma matriciale le equazioni del moto (2.2) ottenute per un'eccitazione imposta in direzione X :

$$\begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{X}_x \\ \ddot{Y}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{X}_x \\ \dot{Y}_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_x \\ Y_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

l'interpretazione dei coefficienti di massa vale come segue: i coefficienti di massa m_{xx} e m_{yy} sono equivalenti alla massa del cuscinetto m dato che la traslazione lungo le direzioni X e Y avviene coinvolgendo l'intera massa del supporto. Invece i coefficienti di massa m_{xy} e m_{yx} sono dei termini 'fittizi' utili alla verifica della metodologia numerica. Difatti per un corretto svolgimento della prova il loro valore deve essere tendente a zero. Adesso, ipotizzando le condizioni iniziali nulle, le equazioni del moto sopra ottenute sono trasformate nel dominio della frequenza attraverso la trasformata di Laplace ($s = j\omega$):

$$\begin{bmatrix} k_{xx} - m_{xx} \omega^2 + c_{xx} j\omega & k_{xy} - m_{xy} \omega^2 + c_{xy} j\omega \\ k_{yx} - m_{yx} \omega^2 + c_{yx} j\omega & k_{yy} - m_{yy} \omega^2 + c_{yy} j\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X}_x \\ \bar{Y}_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Svolgendo i medesimi passaggi analitici per le equazioni del moto (2.9), ottenute per un'eccitazione imposta in direzione Y , si ottiene il seguente sistema espresso in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} k_{xx} - m_{xx} \omega^2 + c_{xx} j\omega & k_{xy} - m_{xy} \omega^2 + c_{xy} j\omega \\ k_{yx} - m_{yx} \omega^2 + c_{yx} j\omega & k_{yy} - m_{yy} \omega^2 + c_{yy} j\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X}_y \\ \bar{Y}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

a questo punto, il sistema (2.24) contenente le espressioni (2.22) e (2.23) è così composto:

$$\begin{bmatrix} k_{xx} - m_{xx} \omega^2 + c_{xx} j\omega & k_{xy} - m_{xy} \omega^2 + c_{xy} j\omega \\ k_{yx} - m_{yx} \omega^2 + c_{yx} j\omega & k_{yy} - m_{yy} \omega^2 + c_{yy} j\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X}_x & \bar{X}_y \\ \bar{Y}_x & \bar{Y}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x & 0 \\ 0 & \bar{f}_y \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

il primo termine dell'equazione sopra riportata definisce la matrice di impedenza $[H]$ in cui la generica funzione di impedenza H_{ij} è definita come:

$$H_{ij} = k_{ij} - m_{ij} \omega^2 + c_{ij} j\omega \quad (N/m) \quad \text{dove: } i, j = x, y \quad (2.25)$$

sostituendo opportunamente l'espressione (2.25) all'interno del sistema (2.24) si ottiene che:

$$\begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_x & \bar{X}_y \\ \bar{Y}_x & \bar{Y}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_x & 0 \\ 0 & \bar{f}_y \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

si può osservare che la matrice di impedenza $[H]$ contiene il sistema massa e i coefficienti di rigidità e smorzamento. Essa può essere scritta come:

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 & 0 & j\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 & 0 & j\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & m_{xx} & m_{yx} & c_{xx} & c_{yx} \\ k_{xy} & k_{yy} & m_{xy} & m_{yy} & c_{xy} & c_{yy} \end{bmatrix}^T \quad (2.27)$$

visto che gli spostamenti relativi tra rotore e cuscinetto (X_i, Y_i) sono noti dai sensori di spostamento e le forze (f_i) sono note dai trasduttori di forza, dalla forma generale dell'equazione (2.26) si può misurare la matrice di impedenza $[H]$ per ogni frequenza di eccitazione $i = 1 \sim n$ (dove n è il numero delle componenti in frequenza):

$$\begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \bar{f}_x & 0 \\ 0 & \bar{f}_y \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_x & \bar{X}_y \\ \bar{Y}_x & \bar{Y}_y \end{pmatrix}_i^{-1} \quad (2.28)$$

Allo scopo di estrapolare il sistema massa e i coefficienti dinamici, si può pensare di applicare il metodo di Fritzen⁶ [12] denominato in termine inglese 'Instrumental Variable Filter (IVF)'. Al riguardo, definiamo la matrice di flessibilità $[C]_i$ per ogni frequenza di eccitazione i come:

$$[C]_i = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{pmatrix}_i^{-1} \quad (2.29)$$

⁶ Il metodo di Fritzen è essenzialmente un metodo dei minimi quadrati in cui viene applicata una regressione multi-variabile. Uno studio approfondito di tale approccio è possibile trovarlo sulla pubblicazione scientifica [12].

dal momento in cui la matrice di flessibilità è stata misurata per tutte le frequenze di perturbazione ω di interesse, il metodo di regressione multi-variabile può essere applicato utilizzando la seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} \text{Re} \left[[C]_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & j\omega_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & j\omega_1 \end{bmatrix} \right] \\ \text{Im} \left[[C]_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & j\omega_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & j\omega_1 \end{bmatrix} \right] \\ \vdots \\ \text{Re} \left[[C]_n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & j\omega_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & j\omega_n \end{bmatrix} \right] \\ \text{Im} \left[[C]_n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & j\omega_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & j\omega_n \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \\ m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \\ c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{pmatrix} = [I] + [E] \quad (2.30)$$

dove $[I]$ è la matrice d'identità derivata dal prodotto tra la matrice di cedevolezza $[C]$ e la matrice di impedenza $[H]$. La matrice $[E]$ rappresenta l'errore che deve essere minimizzato. È importante osservare che i segnali delle vibrazioni acquisiti tramite un opportuno sistema di acquisizione dati contengono anche la risposta sincrona dovuta allo squilibrio del rotore. Quindi, una sottrazione del segnale è necessaria al fine di estrarre la vera risposta del cuscinetto alla perturbazione imposta dall'esterno.

Capitolo 3

BANCO PROVA VIRTUALE

3.1 Descrizione modello dinamico del rotore

Al fine di poter applicare la metodologia descritta al Capitolo 2 anche in assenza di dati sperimentali, si è utilizzato un banco prova virtuale in grado di simulare il comportamento reale di un rotore su cuscinetti. Tale banco prova consiste in un modello di rotore con massa concentrata, supportato da un cuscinetto a gas montato rigidamente⁷. Le reazioni del film gassoso sono espresse in termini di rigidezza e smorzamento lungo le direzioni X e Y .

Si sono adottate le seguenti ipotesi semplificative:

- il rotore è perfettamente bilanciato;
- le forzanti esterne applicate f_x e f_y sono di tipo sinusoidale;
- la frequenza di perturbazione ω è fissata unicamente dalle forzanti esterne applicate.

L'ambiente di sviluppo utilizzato è Matlab™ con il supporto del tool Simulink®. Lo script e lo schema a blocchi sono riportati in Appendice A.

⁷ Per cuscinetto montato 'rigidamente' si intende che esso è fissato direttamente sulla carcassa senza l'interposizione di supporti viscoelastici.

3.2 Calcolo dei coefficienti a partire dai dati simulati con tale modello

Per ottenere le grandezze cinematiche $X_x, Y_x, \ddot{X}_x, \ddot{Y}_x$ e la grandezza fisica f_x si è costruito un modello a 2 gradi di libertà. Prendendo in considerazione il sistema di equazioni del moto (2.9) ottenuto per un'eccitazione imposta in direzione X avremo che:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{X}_x + k_{xx} \cdot X_x + k_{xy} \cdot Y_x + c_{xx} \cdot \dot{X}_x + c_{xy} \cdot \dot{Y}_x = f_x \\ m \cdot \ddot{Y}_x + k_{yy} \cdot Y_x + k_{yx} \cdot X_x + c_{yy} \cdot \dot{Y}_x + c_{yx} \cdot \dot{X}_x = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

tale sistema può essere espresso in forma matriciale:

$$M_x \cdot \ddot{q}_x + c_x \cdot \dot{q}_x + k_x \cdot q_x = F_x \cdot f_x \quad (3.2)$$

in cui:

- $M_x = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix};$
- $q_x = \begin{Bmatrix} X_x \\ Y_x \end{Bmatrix};$
- $c_x = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix};$
- $k_x = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix};$
- $F_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Isolando a primo membro il vettore delle coordinate generalizzate che presenta ordine di derivazione maggiore si è costruito il modello Simulink:

$$\ddot{q}_x = M_x^{-1} \cdot (F_x \cdot f_x - c_x \cdot \dot{q}_x - k_x \cdot q_x) \quad (3.3)$$

lo schema a blocchi è visibile nella figura sottostante:

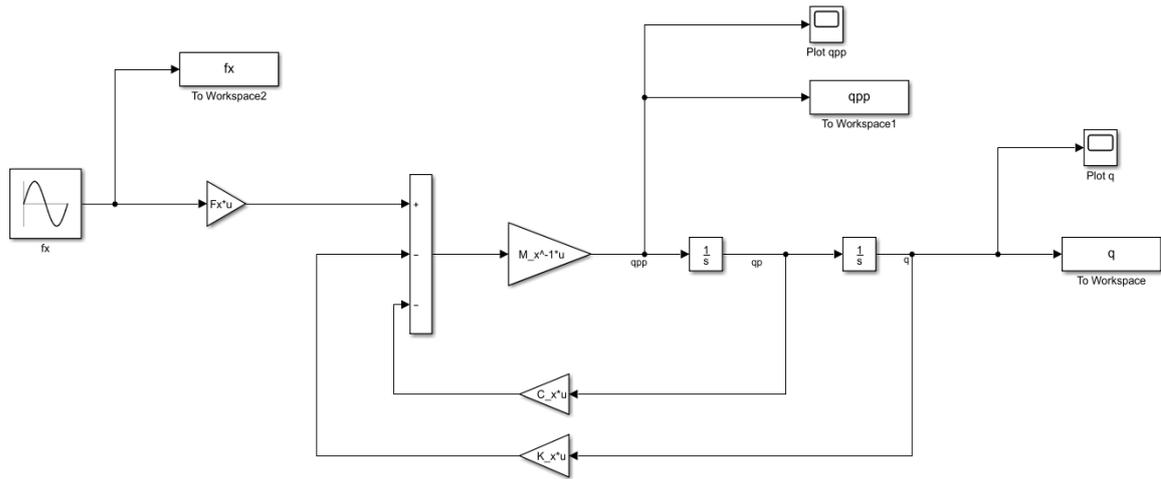


Figura 3.1: Schema a blocchi Simulink – eccitazione imposta in direzione X

Similmente a quanto sopra esposto, per ottenere le grandezze cinematiche $X_y, Y_y, \dot{X}_y, \dot{Y}_y$ e la grandezza fisica f_y si è costruito un altro modello a 2 gradi di libertà. Prendendo in considerazione il sistema di equazioni del moto (2.9) ottenuto per un'eccitazione imposta in direzione Y avremo che:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{X}_y + k_{xx} \cdot X_y + k_{xy} \cdot Y_y + c_{xx} \cdot \dot{X}_y + c_{xy} \cdot \dot{Y}_y = 0 \\ m \cdot \ddot{Y}_y + k_{yy} \cdot Y_y + k_{yx} \cdot X_y + c_{yy} \cdot \dot{Y}_y + c_{yx} \cdot \dot{X}_y = f_y \end{cases} \quad (3.4)$$

questo sistema può essere espresso in forma matriciale:

$$M_y \cdot \ddot{q}_y + c_y \cdot \dot{q}_y + k_y \cdot q_y = F_y \cdot f_y \quad (3.5)$$

in cui:

- $M_y = \begin{bmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{bmatrix};$
- $q_y = \begin{Bmatrix} Y_y \\ X_y \end{Bmatrix};$
- $c_y = \begin{bmatrix} c_{xy} & c_{xx} \\ c_{yy} & c_{yx} \end{bmatrix};$
- $F_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Isolando a primo membro il vettore delle coordinate generalizzate che presenta ordine di derivazione maggiore si è costruito il modello Simulink:

$$\ddot{q}_y = M_y^{-1} \cdot (F_y \cdot f_y - c_y \cdot \dot{q}_y - k_y \cdot q_y) \quad (3.6)$$

lo schema a blocchi è visibile nella figura sottostante:

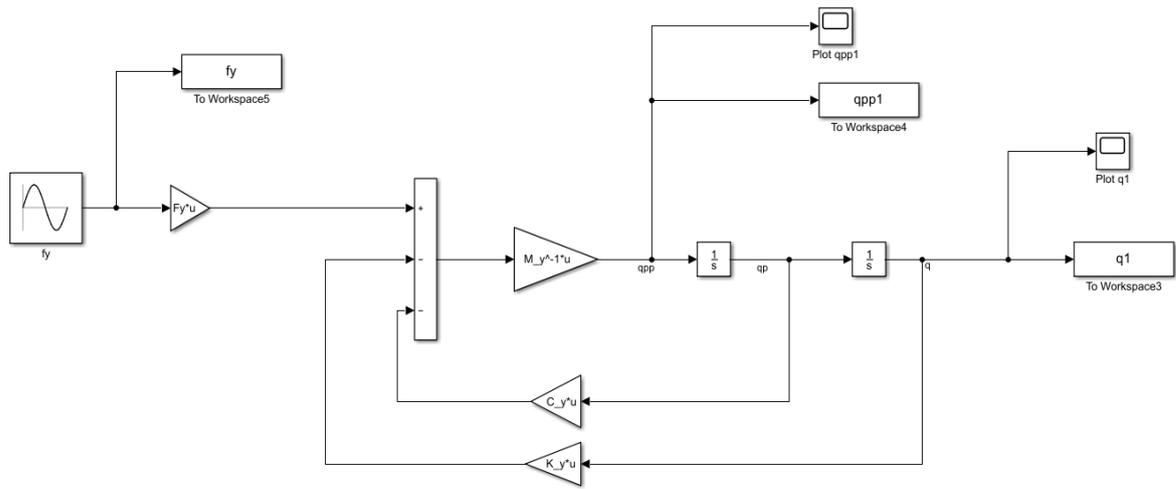


Figura 3.2: Schema a blocchi Simulink – eccitazione imposta in direzione Y

Allo scopo di ricavare le grandezze cinematiche e le grandezze fisiche dagli schemi a blocchi riportati in Figura 3.1 e Figura 3.2 si sono impostati i seguenti parametri di Set conformi all’attività di ricerca di Matta e Arghir [14] e dei valori ragionevoli di parametri variabili:

PARAMETRI DI SET		
m	0,7	kg
k_{xx}	$2,5 \cdot 10^6$	$\frac{N}{m}$
k_{yy}	$2,8 \cdot 10^6$	$\frac{N}{m}$
k_{xy}	$1,5 \cdot 10^6$	$\frac{N}{m}$
k_{yx}	$1 \cdot 10^6$	$\frac{N}{m}$
c_{xx}	$2,5 \cdot 10^3$	$\frac{N}{m}$
c_{yy}	$2,5 \cdot 10^3$	$\frac{N \cdot s}{m}$
c_{xy}	$-1,5 \cdot 10^3$	$\frac{N \cdot s}{m}$
c_{yx}	$1,5 \cdot 10^3$	$\frac{N \cdot s}{m}$

Tabella 3.1: Parametri di Set – calcolo dei coefficienti a partire dai dati simulati

PARAMETRI VARIABILI	Denominazione Script Matlab	
<i>frequenza di campionamento</i>	fs	500 Hz
<i>ampiezza segnale sinusoidale f_x</i>	Amplitude	30 N
<i>ampiezza segnale sinusoidale f_y</i>	Amplitude ⁸	30 N
<i>frequenza segnale sinusoidale f_x</i>	f_signal	10 Hz
<i>frequenza segnale sinusoidale f_y</i>	f_signal ⁹	10 Hz
<i>condizioni iniziali spostamento X,Y</i>	q_0	\emptyset
<i>condizioni iniziali velocità \dot{X}, \dot{Y}</i>	qp_0	\emptyset

Tabella 3.2: Parametri Variabili – calcolo dei coefficienti a partire dai dati simulati

Nelle figure sottostanti si riportano gli andamenti nel tempo delle grandezze cinematiche e fisiche ottenuti:

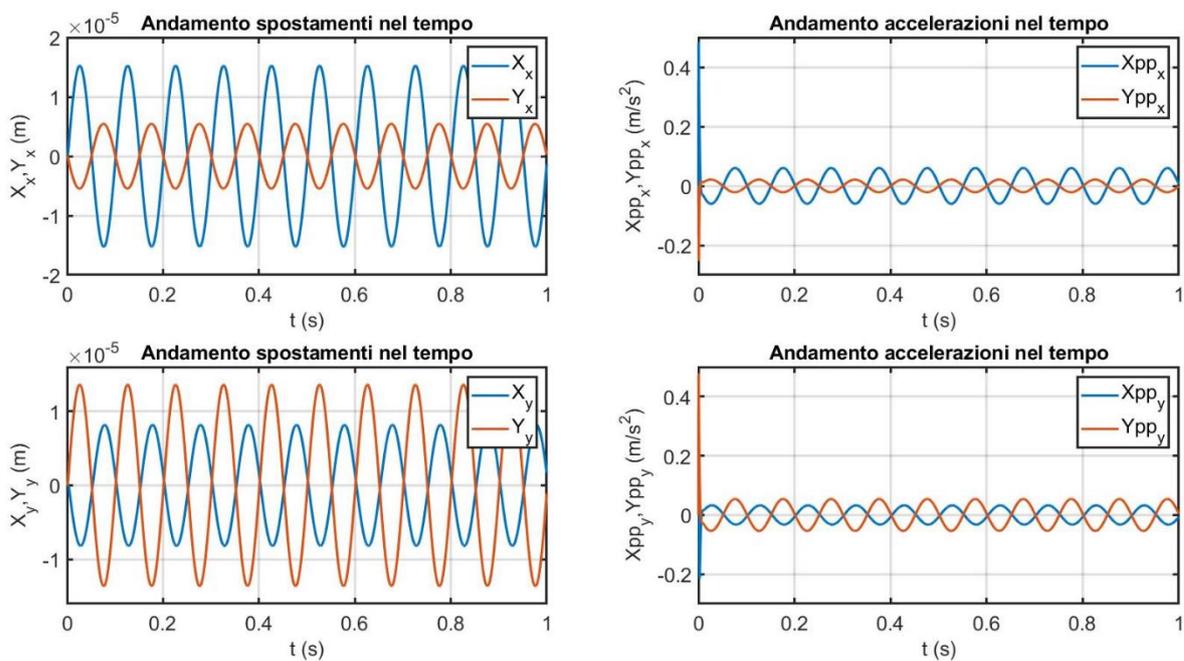


Figura 3.3: Andamenti nel tempo delle grandezze cinematiche

⁸ Per semplicità di trattazione l'ampiezza della forza f_y equivale all'ampiezza della forza f_x ;

⁹ Per semplicità di trattazione la frequenza della forza f_y è uguale alla frequenza della forza f_x .

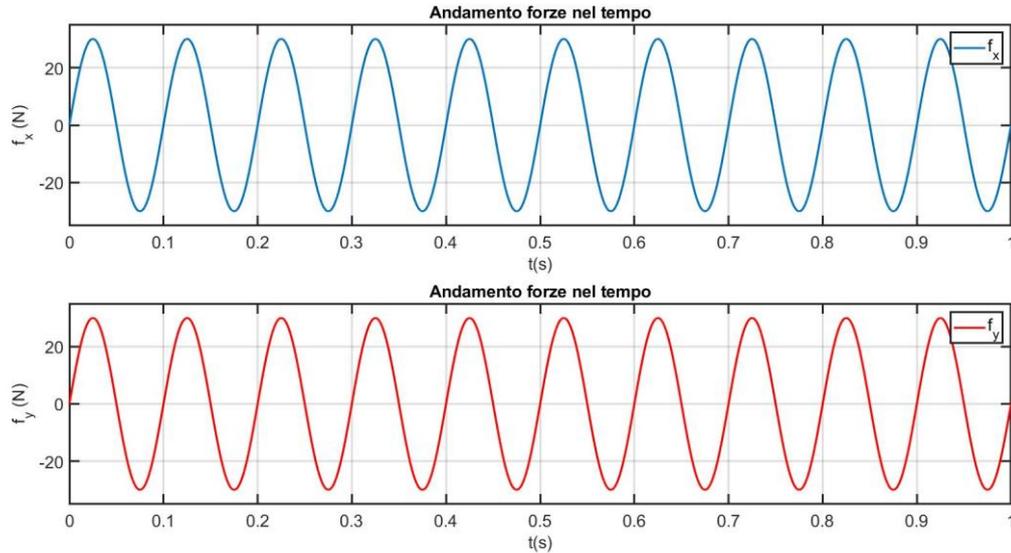


Figura 3.4: Andamenti nel tempo delle grandezze fisiche

Da una visualizzazione grafica si può constatare che le grandezze cinematiche ottenute per un'eccitazione imposta in direzione X sono diverse da quelle conseguite per un'eccitazione imposta in direzione Y . Tale risultato è dovuto all'asimmetria dei parametri di rigidezza e smorzamento.

Successivamente, utilizzando i comandi Matlab `Sym` e `Linsolve`, si è proceduti al calcolo simbolico delle impedenze Z_{xx} , Z_{xy} , Z_{yx} e Z_{yy} . Considerando il sistema di equazioni (2.15) espresso in forma matriciale e sostituendo $s = j\omega$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_x & \bar{Y}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X}_x & \bar{Y}_x \\ \bar{X}_y & \bar{Y}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X}_y & \bar{Y}_y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \\ Z_{yx} \\ Z_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x + m \cdot \omega^2 \cdot \bar{X}_x \\ m \cdot \omega^2 \cdot \bar{Y}_x \\ m \cdot \omega^2 \cdot \bar{X}_y \\ \bar{f}_y + m \cdot \omega^2 \cdot \bar{Y}_y \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

definendo:

- $F_{xx} = \bar{f}_x + m \cdot \omega^2 \cdot \bar{X}_x$;
- $F_{yx} = m \cdot \omega^2 \cdot \bar{Y}_x$;
- $F_{xy} = m \cdot \omega^2 \cdot \bar{X}_y$;
- $F_{yy} = \bar{f}_y + m \cdot \omega^2 \cdot \bar{Y}_y$.

tramite il comando `Sym` si creano le variabili simboliche delle grandezze cinematiche $\overline{X_x}, \overline{Y_x}, \overline{X_y}$ e $\overline{Y_y}$ e delle grandezze fisiche F_{xx}, F_{yx}, F_{xy} e F_{yy} . Poi mediante l'utilizzo del comando `Linsolve` si è risolto il sistema di equazioni (3.7), ottenendo i seguenti valori simbolici delle impedenze:

$$Z_{xx} = \frac{F_{xx} \cdot Y_y - F_{xy} \cdot Y_x}{X_x \cdot Y_y - X_y \cdot Y_x} = \frac{\text{num}(Z_{xx})}{\text{den}(Z_{xx})} \quad (3.8)$$

$$Z_{xy} = \frac{F_{xy} \cdot X_x - F_{xx} \cdot X_y}{X_x \cdot Y_y - X_y \cdot Y_x} = \frac{\text{num}(Z_{xy})}{\text{den}(Z_{xy})} \quad (3.9)$$

$$Z_{yx} = \frac{F_{yx} \cdot Y_y - F_{yy} \cdot Y_x}{X_x \cdot Y_y - X_y \cdot Y_x} = \frac{\text{num}(Z_{yx})}{\text{den}(Z_{yx})} \quad (3.10)$$

$$Z_{yy} = \frac{F_{yy} \cdot X_x - F_{yx} \cdot X_y}{X_x \cdot Y_y - X_y \cdot Y_x} = \frac{\text{num}(Z_{yy})}{\text{den}(Z_{yy})} \quad (3.11)$$

In seguito, utilizzando il comando Matlab `tfestimate` si è proceduti alla stima delle funzioni di trasferimento relative alle varie impedenze. In generale tale comando stima una funzione di trasferimento t_{xy} , dando un segnale di input x ed un segnale di output y ; inoltre restituisce un vettore di frequenze f , espresso in termini di frequenza di campionamento f_s , a cui viene stimata la funzione di trasferimento. Nel nostro caso di studio si è utilizzata la seguente sintassi:

```
[Zxx, f] = tfestimate(den(Zxx), num(Zxx), [], [], [], fs);
```

```
[Zxy, f] = tfestimate(den(Zxy), num(Zxy), [], [], [], fs);
```

```
[Zyx, f] = tfestimate(den(Zyx), num(Zyx), [], [], [], fs);
```

```
[Zyy, f] = tfestimate(den(Zyy), num(Zyy), [], [], [], fs).
```

Per ciascuna funzione di trasferimento, tramite i comandi `real` e `imag`, si sono estrapolati parte reale e parte immaginaria in modo tale da ottenere i parametri di rigidezza e smorzamento attraverso l'equazione (2.17). Nelle figure sottostanti si riportano gli andamenti dei coefficienti dinamici ottenuti al variare della frequenza:

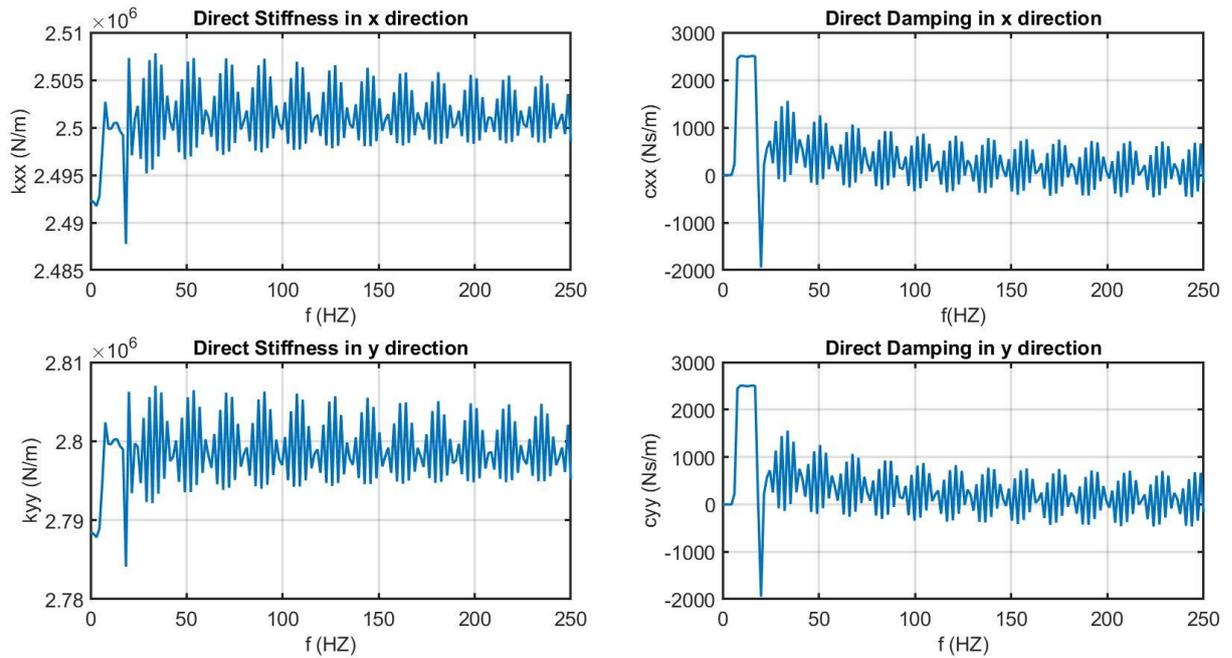


Figura 3.5: Termini diretti di rigidità e smorzamento nelle direzioni X e Y

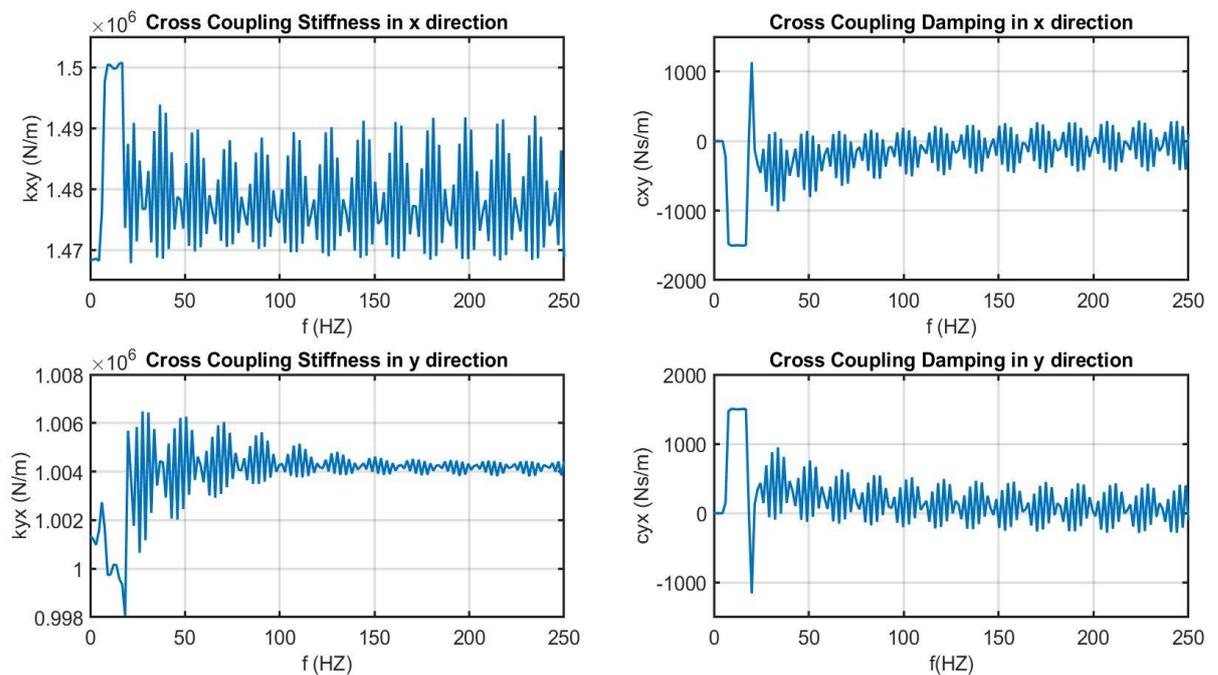


Figura 3.6: Termini misti di rigidità e smorzamento nelle direzioni X e Y

Al fine di validare la metodologia numerica esposta nel Capitolo 2, i parametri di rigidità e smorzamento ottenuti alla frequenza di eccitazione ω devono corrispondere ai valori dei parametri di Set impostati (vedi *Tabella 3.1*). Per constatare ciò, si è eseguito uno zoom alla frequenza di eccitazione ω :

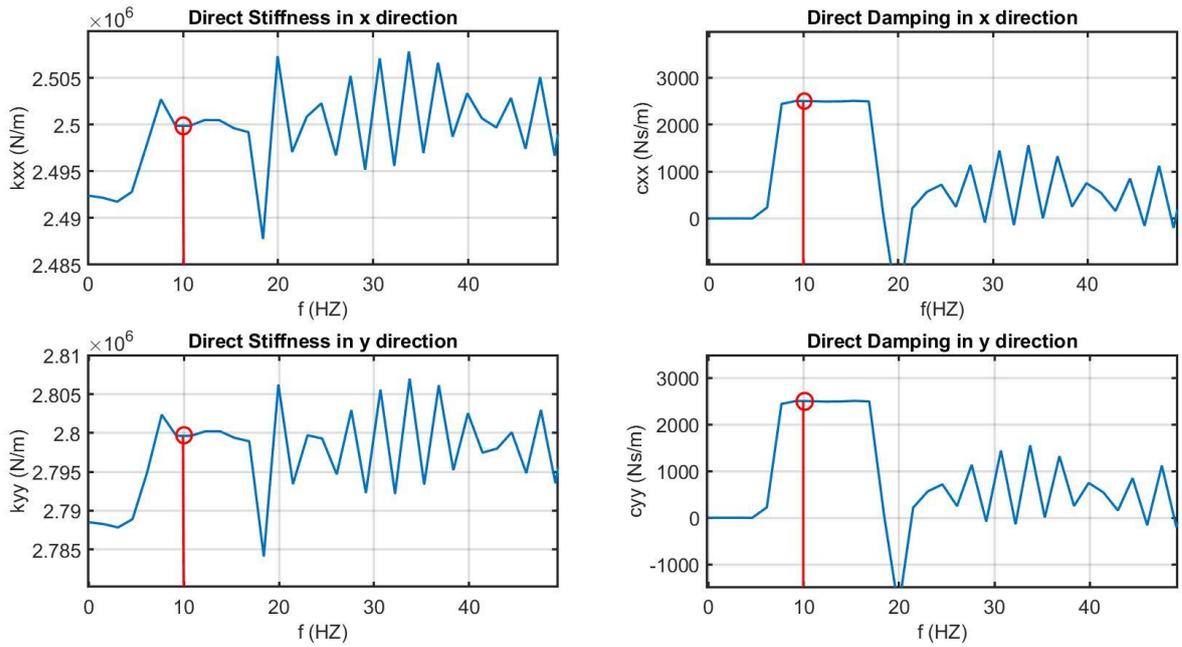


Figura 3.7: Termini diretti di rigidezza e smorzamento nelle direzioni X e Y alla frequenza di eccitazione ω

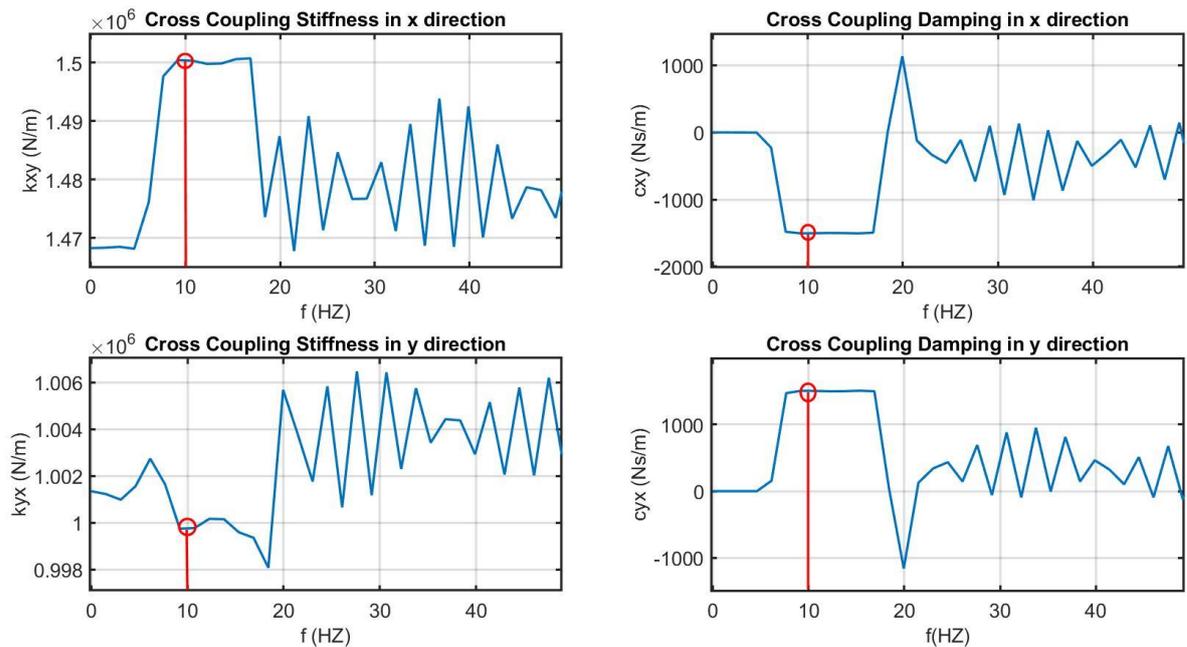


Figura 3.8: Termini misti di rigidezza e smorzamento nelle direzioni X e Y alla frequenza di eccitazione ω

Come atteso, i coefficienti dinamici ottenuti alla frequenza di eccitazione ω corrispondono ai parametri di Set impostati. Ciò comporta la validazione della metodologia numerica esposta nel Capitolo 2.

Capitolo 4

STABILITÀ DINAMICA DEI CUSCINETTI A GAS

4.1 Premessa

Al fine di progettare un cuscinetto a gas con una geometria adatta all'applicazione per cui è utilizzato, è necessaria un'analisi approfondita della stabilità dinamica attraverso dei criteri di stabilità. In base all'applicazione industriale considerata, avremo un range di velocità operativo nel quale vogliamo ottenere le migliori performance del supporto a gas. Se siamo in grado di rilevare la velocità critica per la quale il cuscinetto diventa instabile saremo in grado di progettare il supporto in modo che tale valore si trovi al di sopra del range di funzionamento.

Per un sistema rotante supportato da cuscinetti a gas, esistono due tipi di instabilità dinamiche [15]:

- martellamento pneumatico (in termine inglese '*pneumatic hammering*');
- moto di precessione asincrono ((in termine inglese '*non-synchronous whirling*').

Generalmente, il fenomeno del martellamento pneumatico si osserva nei cuscinetti aerostatici in cui la distribuzione di pressione è ottenuta tramite una sorgente esterna di pressione. Esso si manifesta con una perdita di smorzamento causata da un ritardo dovuto alla comprimibilità del gas. Tuttavia, il lavoro di tesi non si concentrerà sull'analisi di questo fenomeno poiché è stato studiato ampiamente in letteratura [16], [17], [18].

Il moto di precessione asincrono è il tipo di instabilità dinamica che analizzeremo in questo capitolo. Come discuteremo dettagliatamente in seguito, tale moto orbitale è di natura auto-eccitata e si manifesta ad una frequenza non sincrona¹⁰. Considerando il modello linearizzato del cuscinetto, tale fenomeno si manifesta come una perdita di smorzamento causata dalla presenza del termine misto di rigidità $k_{ij} \neq 0$.

In determinate condizioni operative, questa instabilità dinamica è una delle considerazioni più importanti ai fini della progettazione di un cuscinetto a gas poiché l'ampiezza delle vibrazioni supera il valore del gioco definito dalla distanza tra il cuscinetto ed il rotore. Ciò implica il contatto tra le superfici coniugate costituenti l'accoppiamento e di conseguenza il danneggiamento del rotore e del cuscinetto stesso [19].

Inizialmente, si discuterà della natura e la classificazione dei moti di precessione che è possibile incontrare in un sistema rotante supportato da cuscinetti a gas. Successivamente saranno analizzati in dettaglio i criteri di stabilità (noti in letteratura) utili alla progettazione del cuscinetto.

4.2 Natura dei moti di precessione

In una macchina rotante, lo studio del fenomeno di precessione diventa importante poiché potrebbe compromettere la stabilità del sistema. Il moto di precessione è causato da sbilanciamenti, vibrazioni libere, oppure da forzanti esterne dotate di una frequenza di perturbazione ω agenti in direzione perpendicolare rispetto all'asse di rotazione del rotore.

In un organo rotante supportato da cuscinetti lubrificati con fluido comprimibile, il moto di precessione è definito come la variazione istantanea della direzione dell'asse di rotazione dell'albero rispetto all'asse geometrico definito dai cuscinetti. Tale fenomeno si traduce in

¹⁰ Come discusso da Waumans [31], la frequenza non sincrona è solitamente pari a metà velocità di rotazione dell'albero.

una forma di vibrazione che avviene in un corpo in rotazione. Si possono distinguere due tipi di traiettorie di precessione: *circolare* (o traslatoria) e *conica* (o angolare), ed in funzione della velocità di precessione possiamo distinguere un moto di precessione *sincrono* ed un moto di precessione *asincrono*.

Considerando delle rotazioni successive del rotore, se la traiettoria tracciata si mantiene pressoché costante (in termini di dimensioni) il moto è detto *stabile*, mentre se la traiettoria incrementa il moto è detto *instabile*. Una classificazione accurata degli stati di stabilità è data da Czolczynski [3]. Egli espone sei stati di stabilità che si possono incontrare in un organo rotante supportato da cuscinetti a gas. Nella figura sottostante si riportano gli stati di stabilità:

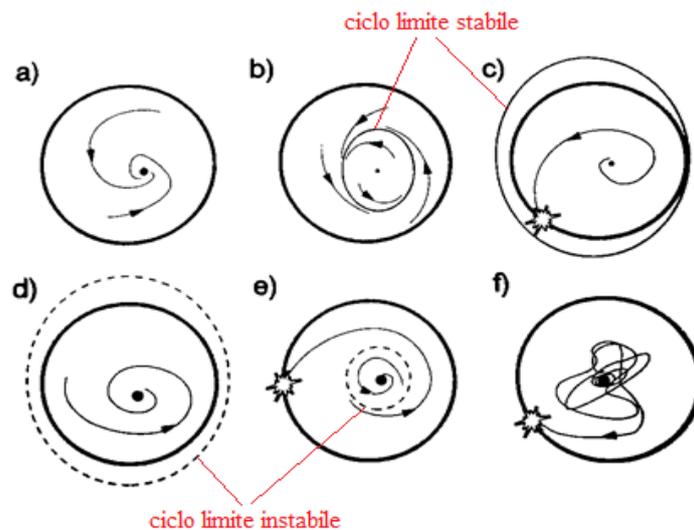


Figura 4.1: Stati di stabilità. Tratto da Czolczynski [3]

Da una visualizzazione grafica si può constatare che, quando l'albero ruota con una velocità di rotazione sufficientemente bassa, la traiettoria dell'albero si trova all'interno dell'anello (Figura 4.a) e conseguentemente la sua posizione di equilibrio statica è stabile. Quando la posizione di equilibrio perde stabilità (in conseguenza dell'aumento della velocità di rotazione) si osserva la formazione di un ciclo limite stabile; se il ciclo si trova all'interno dell'anello, l'instabilità può essere accettabile (Figura 4.b) mentre se il ciclo oltrepassa l'anello, l'instabilità risulta pericolosa e conseguentemente il cuscinetto sarà distrutto

rapidamente (*Figura 4.c*). La posizione di equilibrio statica può essere accompagnata anche da un ciclo limite instabile. Se il ciclo si trova all'esterno dell'anello (*Figura 4.d*) avremo una situazione analoga a quella osservata in *Figura 4.a*, mentre una situazione totalmente differente si ha quando il ciclo si trova all'interno dell'anello (*Figura 4.e*) poiché potrebbe causare un aumento improvviso delle vibrazioni autoeccitate con conseguenti danni al cuscinetto. Questo stato è il più pericoloso perché l'analisi di stabilità, che è basata su un modello linearizzato del cuscinetto, non può predire l'esistenza di un ciclo limite instabile. La traiettoria irregolare visibile in *Figura 4.f* non è accettabile in quanto il moto di precessione risulta imprevedibile.

Nei successivi paragrafi si discuterà dei vari tipi di precessione che è possibile incontrare in una macchina rotante, e successivamente saranno analizzati in dettaglio i criteri di stabilità utili alla progettazione del cuscinetto.

4.3 Moti di precessione: sincrono e asincrono

In un rotore supportato da cuscinetti a gas, il meato gassoso a supporto dell'albero rotante raramente si trova in una condizione operativa stazionaria. Ciò implica che è sempre possibile osservare un moto di precessione (in termine inglese '*Whirling motion*'). Come discusso precedentemente, tale fenomeno potrebbe compromettere la stabilità della condizione non stazionaria. Per questo motivo è importante distinguere vari tipi di precessione.

Il moto di precessione *sincrono* (in termine inglese '*Synchronous Whirling*'), ossia rotante alla medesima velocità di rotazione dell'albero, si verifica in presenza di sbilanciamento. Tale fenomeno è provocato dalla forza centrifuga agente sul baricentro che, non coincidente con il centro di rotazione, compie un'orbita in cui il vettore della forza ruota alla stessa velocità di rotazione del rotore. Se siamo in presenza di uno squilibrio statico è possibile osservare un'orbita circolare, mentre se lo squilibrio è dinamico si osserva un'orbita conica. Uno studio approfondito di tale fenomeno è possibile trovarlo sul libro di *Rotordynamics*

[20]. La figura sottostante mostra una tipica risposta sincrona che si osserva in un sistema rotante [15]:

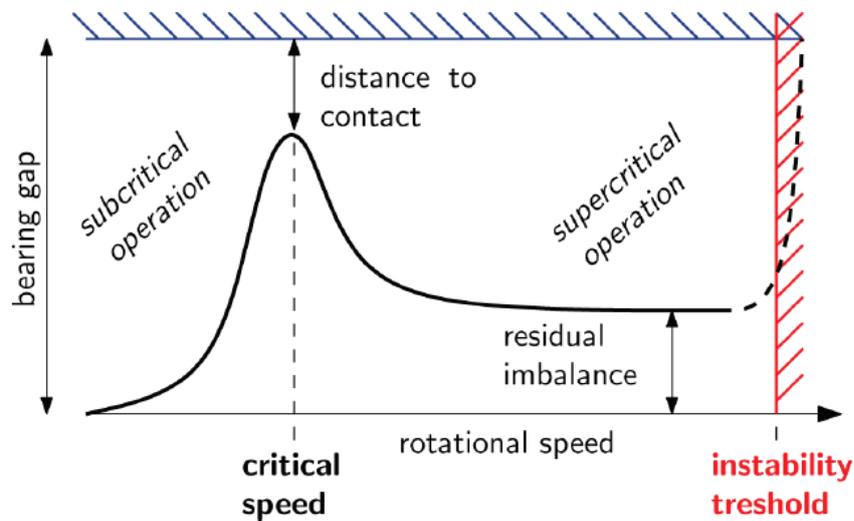


Figura 4.2: Tipica (e qualitativa) risposta sincrona che si osserva in un sistema rotante. Tratto da T.Waumans [15].

Da una visualizzazione grafica si può constatare che a basse velocità di rotazione l'ampiezza della risposta presenta dei valori relativamente ridotti (*campo operativo subcritico*). Ciò è dovuto al basso effetto della forza centrifuga che ha una dipendenza quadratica dalla velocità di rotazione dell'albero. Aumentando la velocità di rotazione, la risposta sincrona presenta un valore massimo di ampiezza in corrispondenza della velocità critica e, superato tale punto, l'ampiezza si riduce gradualmente fino a raggiungere un valore costante coincidente con l'eccentricità, ossia la distanza tra il centro geometrico di rotazione ed il baricentro del rotore (*campo operativo supercritico*).

Solitamente, i cuscinetti a gas possiedono una bassa rigidità rispetto ai cuscinetti lubrificati ad olio e ai cuscinetti volventi. Ciò implica che per le applicazioni ad alta velocità, il range operativo contiene delle frequenze di risonanze in corrispondenza delle velocità critiche. Limitando il valore dello sbilanciamento del rotore e avendo un opportuno valore di smorzamento del meato gassoso si riesce a garantire la stabilità del sistema al passaggio delle frequenze di risonanze. Nel momento in cui si attraversa la velocità critica, l'albero ruota intorno al suo baricentro e non più attorno al suo asse geometrico di rotazione. Tale fenomeno è detto *inversione* ed è visibile nella figura sottostante:

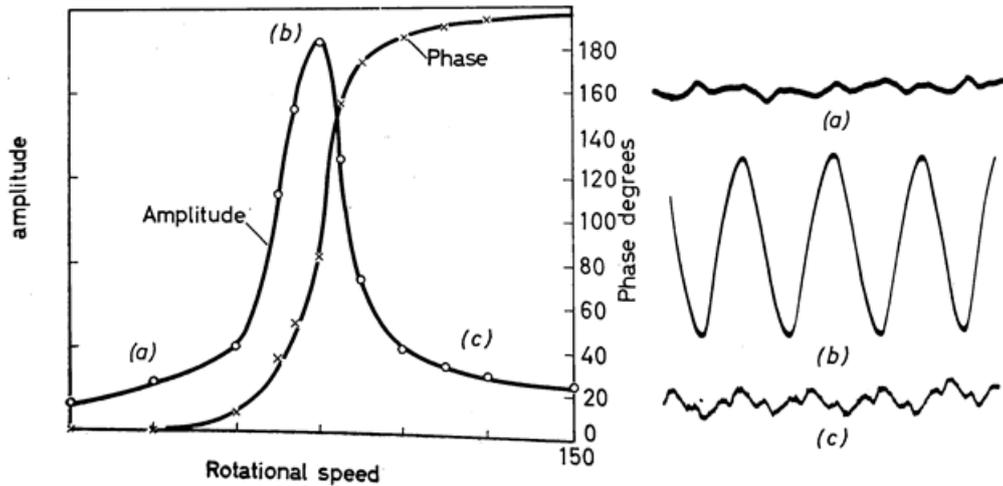


Figura 4.3: Risposta sincrona (qualitativa) che si osserva in un sistema rotante nel momento in cui si attraversa la velocità critica. Tratto da Grassam e Powell [5].

come riportato da Grassam e Powell [5], a basse velocità (a) l'albero ruota intorno al suo asse geometrico di rotazione. Dopo aver superato il valore massimo di ampiezza in corrispondenza della velocità critica (b), l'asse di rotazione dell'albero è determinato dal suo baricentro (c).

Dal momento in cui il sistema opera in campo operativo supercritico, aumentando la velocità di rotazione dell'albero si verifica un moto di precessione *asincrono* (in termine inglese '*Self-excited Whirling*') che comporta il danneggiamento del sistema. Tale instabilità dinamica è di natura auto-indotta e si manifesta ad una frequenza di perturbazione non sincrona. Grassam e Powell [5] definiscono la velocità di rotazione dell'albero all'inizio del quale si ha l'instabilità dinamica come '*onset speed*' o '*threshold speed*' (velocità di insorgenza). La più grande sfida riguardante la progettazione di un cuscinetto a gas per applicazioni ad altissime velocità è quella di posporre la velocità di insorgenza.

La figura sottostante, tratta da T.Waumans [15], mostra un grafico sperimentale di Waterfall in cui è possibile osservare la risposta *sincrona* e *asincrona* di un sistema rotante:

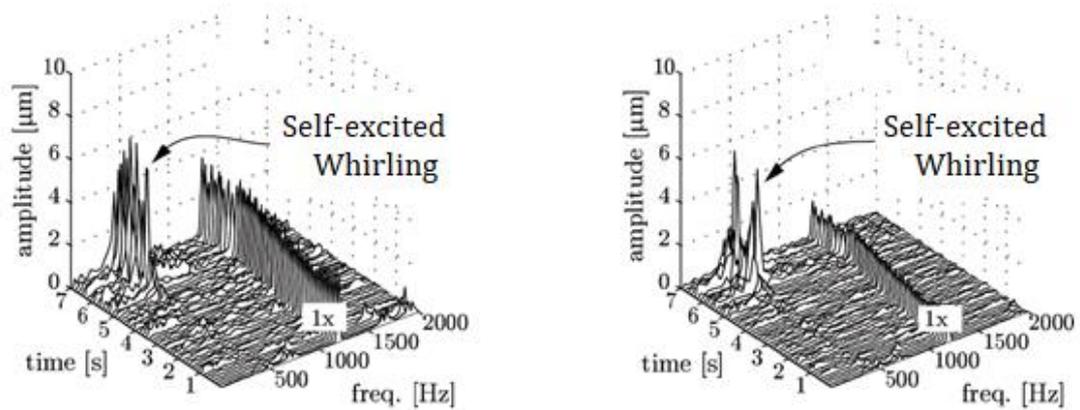


Figura 4.4: Diagramma sperimentale di Waterfall di una prova run-up in cui si osserva la risposta sincrona e asincrona. La risposta sincrona è segnata con 1x. Tratto da T.Waumans [15]

Da una visualizzazione grafica si può osservare che la risposta asincrona avviene ad una frequenza pari a circa metà velocità di rotazione dell'albero e ha un'ampiezza più elevata rispetto alla risposta sincrona.

4.4 Criteri di stabilità

4.4.1 Overview

I criteri di stabilità sono stati sviluppati al fine di predire i parametri coinvolti e la velocità all'inizio del quale si verifica l'instabilità dinamica, denominata in termine inglese 'onset speed'. Negli ultimi 70 anni la stabilità dinamica dei cuscinetti a gas è stata fonte di studio in molte attività di ricerca e ciò ha contribuito ad una migliore comprensione del comportamento dinamico di un sistema rotante supportato da cuscinetti a gas.

Fino agli anni '60, le attività di ricerca erano principalmente basati sulla sperimentazione. Nel corso del tempo, nacque l'esigenza di avere a disposizione dei metodi teorici al fine di predire la velocità di insorgenza. Nel 1980, Marsh [21] ha pubblicato uno studio riguardante i cuscinetti a gas, in cui rileva tre metodi teorici di analisi:

- soluzione delle equazioni del moto del rotore dipendenti dal tempo [22];

- *soluzione dell'equazione di Reynolds usando il metodo di Galërkin* [23];
- *teoria di linearizzazione per il comportamento dinamico dei cuscinetti* [24].

Numerosi ricercatori nel mondo hanno proposto dei metodi teorici, ad esempio Castelli ed Elrod [22] hanno proposto un approccio definito '*orbit method*' che utilizza un computer come banco prova virtuale. Egli integra numericamente le equazioni complete non lineari al fine di ottenere una moto di precessione del centro del rotore corrispondente a qualsiasi set di geometria, funzionamento e condizioni iniziali.

Considerando delle rotazioni successive del rotore, se la traiettoria tracciata si riduce o si mantiene pressoché costante (in termini di dimensioni) il sistema è *stabile*, mentre se la traiettoria incrementa il moto è detto *instabile*.

Questo metodo consente di determinare il punto in cui inizia l'instabilità e il comportamento del cuscinetto all'interno della regione di instabilità. I limiti principali sono i costi e la lunga durata del processo.

Czolczynski [3] implementa una leggera modifica a tale approccio per lo studio del comportamento dinamico di un sistema rotante supportato da cuscinetti a gas.

Cheng e Pan [23] ampliano l'approccio sviluppato da Cheng e Trumpler [25]. Essi studiano la stabilità dinamica di un rotore supportato da cuscinetti a gas di lunghezza finita usando il metodo di Galërkin. Tale metodo permette di passare dalla soluzione dell'equazione di Reynolds definita in uno spazio continuo alla risoluzione di tale equazione in uno spazio discreto al fine di trovare una soluzione analitica approssimata. Il limite principale di questa procedura è dovuto al calcolo della velocità di insorgenza per cuscinetti a gas che lavorano con elevati valori di eccentricità.

Uno dei più popolari approcci al fine di predire la stabilità della posizione a regime del sistema rotore-cuscinetto è basato sulla perturbazione nell'intorno della posizione di equilibrio statico (*teoria di linearizzazione*).

Questo metodo è stato usato da Lund [26], Ausman [27] e Sternlicht [28] e comporta la formulazione delle matrici di rigidità e smorzamento contenuti i termini diretti e i termini

misti che sono dipendenti dalla velocità di rotazione del rotore Ω e dalla frequenza di perturbazione ω ¹¹.

Una volta noti i coefficienti dinamici è possibile formulare dei criteri di stabilità e verificare i parametri coinvolti. Ad esempio, Fuller [29] ha proposto un criterio per un rotore supportato da due cuscinetti piazzati simmetricamente e un disco montato in mezzzeria.

Allo scopo di andare a calcolare la velocità all'inizio del quale si verifica l'instabilità dinamica, egli implementa delle forze di reazione del meato in funzione di vari parametri caratterizzanti il sistema. Boffey [30] formula un metodo teorico per un rotore supportato da due cuscinetti a gas montati su un supporto viscoelastico.

Per investigare sulla stabilità del sistema, egli implementa un algoritmo con il quale, andando a settare dei parametri di input, si riesce a determinare il punto in cui inizia l'instabilità (in termine inglese '*instability threshold*').

Invece, Waumans [15] ha proposto un criterio di stabilità per un modello dinamico Jeffcott che permette di ragionare sui vari parametri dinamici influenzanti il sistema. Tale metodo lo analizzeremo in dettaglio nel paragrafo successivo.

Il lavoro di tesi si limiterà allo studio dei criteri di stabilità basati sulla teoria di linearizzazione per il comportamento dinamico dei cuscinetti. In particolare, si analizzerà un modello di rotore con massa concentrata supportato da un cuscinetto montato rigidamente¹², in cui le reazioni del meato sono espresse in termini di rigidezza e smorzamento.

4.4.2 Modello dinamico adottato

Per i criteri di stabilità, esposti nei sotto paragrafi successivi, l'oggetto di studio consiste in un modello di rotore Jeffcott con massa concentrata M supportato da un cuscinetto a gas montato rigidamente. Le reazioni del meato gassoso sono espresse in termini di rigidezza e

¹¹ I termini di rigidezza e smorzamento possono essere determinati anche a partire da prove sperimentali come esposto nel Capitolo 2.

¹² Per cuscinetto montato 'rigidamente' si intende che esso è fissato direttamente sulla carcassa senza l'interposizione di supporti viscoelastici.

smorzamento lungo le direzioni X e Y . Il modello di studio è mostrato nella figura sottostante:

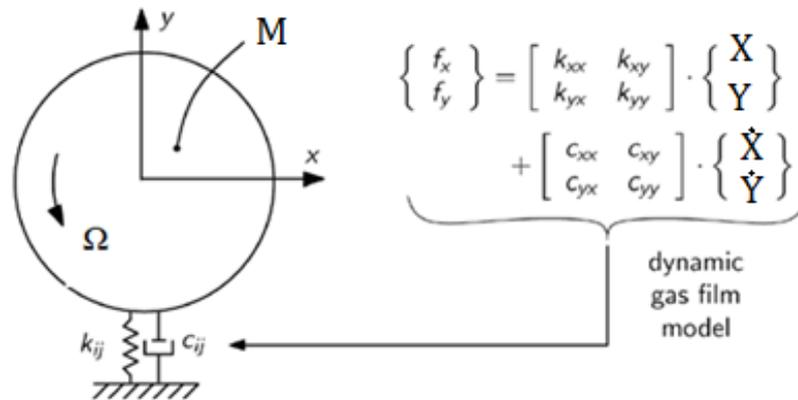


Figura 4.5: Modello dinamico rotore-cuscinetto. Tratto da Waumans [15].

Adottando questa semplice configurazione, l'analisi della stabilità dinamica ci consentirà di individuare i coefficienti dinamici responsabili delle vibrazioni di natura auto-indotta che provocano il danneggiamento del sistema.

4.4.3 1° Criterio di stabilità

Questo criterio, valido per cuscinetti a gas, è basato sulle seguenti pubblicazioni scientifiche, indicate in bibliografia: [31], [15]. È utile osservare che, per i cuscinetti a gas, i coefficienti dinamici sono in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω e della frequenza di perturbazione ω . Supponendo¹³ di conoscere i parametri dinamici a partire da prove sperimentali (come esposto nel paragrafo 2.2) e di adottare la configurazione mostrata in Figura 4.5, le equazioni del moto per il rotore sono date da:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{X} + k_{xx} \cdot X + k_{xy} \cdot Y + c_{xx} \cdot \dot{X} + c_{xy} \cdot \dot{Y} = 0 \\ M \cdot \ddot{Y} + k_{yy} \cdot Y + k_{yx} \cdot X + c_{yy} \cdot \dot{Y} + c_{yx} \cdot \dot{X} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

¹³ Per semplicità, supponiamo di conoscere i coefficienti dinamici ad una velocità di rotazione del rotore Ω fissata e alla frequenza di perturbazione ω di interesse. Se il moto di precessione è sincrono: $\Omega = \omega$.

Questo è un sistema di equazioni lineari. La soluzione omogenea è del tipo esponenziale¹⁴ [32]:

$$X = X_0 \cdot e^{\lambda t}, Y = Y_0 \cdot e^{\lambda t} \quad X_0, Y_0, \lambda \in \mathcal{C} \quad (4.2)$$

in cui λ è un numero complesso denominato autovalore:

$$\lambda = \alpha + j\omega \quad (4.3)$$

se:

- $\mathcal{R}_e(\lambda) = \alpha < 0 \rightarrow$ l'ampiezza del moto di precessione decrementa nel tempo e quindi il fenomeno risulta smorzato. Ciò implica una *condizione di stabilità dinamica*;
- $\mathcal{R}_e(\lambda) = \alpha > 0 \rightarrow$ l'ampiezza del moto di precessione incrementa nel tempo e ciò provoca il contatto tra le superfici coniugate costituenti l'accoppiamento e di conseguenza il danneggiamento del rotore e del cuscinetto stesso. Quindi si ha una *condizione di instabilità dinamica*.

Pertanto, il punto in cui inizia l'instabilità si ha quando $\mathcal{R}_e(\lambda) = \alpha = 0$ (smorzamento nullo) e quindi:

$$\lambda = j\omega \quad (4.4)$$

Nel suo lavoro per il dottorato di ricerca [31], Waumans si pone l'obiettivo di formulare un semplice criterio di stabilità che permette di ragionare sui vari parametri influenzanti il problema. Egli ipotizza un rapporto di eccentricità ε tendente a zero in modo tale da ridurre il set a quattro parametri dinamici (come mostrato nel paragrafo 1.4), infatti:

$$k_{ii} = k_{xx} = k_{yy} \quad (4.5)$$

$$c_{ii} = c_{xx} = c_{yy}$$

¹⁴ La soluzione generale, rappresentante il moto di precessione, può essere rappresentata attraverso il metodo dei vettori rotanti. Uno studio approfondito di tale approccio è possibile trovarlo sul testo *Mechanical Vibrations* [35].

$$k_{ij} = k_{xy} = -k_{yx}$$

$$c_{ij} = c_{xy} = -c_{yx}$$

sostituendo le relazioni (4.5) all'interno del sistema di equazioni (4.1) si ottiene:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{X} + k_{ii} \cdot X + k_{ij} \cdot Y + c_{ii} \cdot \dot{X} + c_{ij} \cdot \dot{Y} = 0 \\ M \cdot \ddot{Y} + k_{ii} \cdot Y - k_{ij} \cdot X + c_{ii} \cdot \dot{Y} - c_{ij} \cdot \dot{X} = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Ipotizzando le condizioni iniziali nulle, le equazioni del moto sopra ottenute sono trasformate nel dominio della frequenza attraverso la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} M \cdot s^2 \cdot \bar{X} + k_{ii} \cdot \bar{X} + k_{ij} \cdot \bar{Y} + c_{ii} \cdot s \cdot \bar{X} + c_{ij} \cdot s \cdot \bar{Y} = 0 \\ M \cdot s^2 \cdot \bar{Y} + k_{ii} \cdot \bar{Y} - k_{ij} \cdot \bar{X} + c_{ii} \cdot s \cdot \bar{Y} - c_{ij} \cdot s \cdot \bar{X} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

raccogliendo a fattor comune i termini in \bar{X} e \bar{Y} si ottiene:

$$\begin{cases} (M \cdot s^2 + c_{ii} \cdot s + k_{ii}) \cdot \bar{X} + (c_{ij} \cdot s + k_{ij}) \cdot \bar{Y} = 0 \\ (-c_{ij} \cdot s - k_{ij}) \cdot \bar{X} + (M \cdot s^2 + c_{ii} \cdot s + k_{ii}) \cdot \bar{Y} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

in notazione matriciale avremo che:

$$\begin{bmatrix} M \cdot s^2 + c_{ii} \cdot s + k_{ii} & c_{ij} \cdot s + k_{ij} \\ -c_{ij} \cdot s - k_{ij} & M \cdot s^2 + c_{ii} \cdot s + k_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

Gli autovalori¹⁵ del sistema (4.9) sono dati da:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c_{ii} + j c_{ij}) \pm \sqrt{(c_{ii} + j c_{ij})^2 - 4 \cdot M \cdot (k_{ii} + j k_{ij})}}{2 \cdot M} \quad (4.10)$$

trascurando il termine misto di smorzamento c_{ij} poiché ha poca influenza sulla soluzione (come mostrato da Waumans [31]), si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c_{ii} \pm \sqrt{c_{ii}^2 - 4 \cdot M \cdot (k_{ii} + j k_{ij})}}{2 \cdot M} \quad (4.11)$$

¹⁵ Per i cuscinetti a gas, il calcolo degli autovalori avviene tramite un processo iterativo esposto nel saggio *Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems* [3].

Il punto in cui inizia l'instabilità si ha quando $\mathcal{R}_e(\lambda) = 0$, per cui l'obiettivo che si è prefissato Waumans [31] è stato quello di trovare il valore del termine misto di rigidezza $k_{ij,onset}$ tale da annullare la parte reale della soluzione. Tale condizione è soddisfatta se:

$$\mathcal{R}_e\left(\sqrt{c_{ii}^2 - 4 \cdot M \cdot (k_{ii} + jk_{ij,onset})}\right) = c_{ii} \quad (4.12)$$

In generale, l'identità di un numero complesso $x + jy$ è espressa come:

$$\mathcal{R}_e\left(\sqrt{(x + jy) \cdot (x + jy)}\right) = x \quad (4.13)$$

$$\mathcal{R}_e\left(\sqrt{x^2 - y^2 + 2 \cdot jxy}\right) = x \quad (4.14)$$

Confrontando le equazioni (4.12) e (4.14) si può dedurre che:

$$x = c_{ii} \quad (4.15)$$

$$y = \sqrt{4 \cdot M \cdot k_{ii}} \quad (4.16)$$

$$2 \cdot jxy = 4 \cdot M \cdot jk_{ij,onset} \quad (4.17)$$

a questo punto, sostituendo opportunamente la relazione (4.16) all'interno dell'equazione (4.17) si ottiene l'espressione in forma chiusa del termine misto di rigidezza $k_{ij,onset}$:

$$|k_{ij,onset}| = \sqrt{\frac{k_{ii}}{M}} \cdot c_{ii} \quad (4.18)$$

Quindi, la condizione necessaria affinché il sistema si trovi in *condizione di stabilità dinamica* è data da:

$$|k_{ij}| \leq \sqrt{\frac{k_{ii}}{M}} \cdot c_{ii} \quad (4.19)$$

dividendo ambo i membri dell'espressione (4.18) per il termine di rigidezza k_{ii} si ottiene:

$$\left|\frac{k_{ij,onset}}{k_{ii}}\right| = \frac{1}{k_{ii}} \cdot \sqrt{\frac{k_{ii}}{M}} \cdot c_{ii} \quad (4.20)$$

$$\left| \frac{k_{ij,onset}}{k_{ii}} \right| = \sqrt{\frac{1}{M \cdot k_{ii}}} \cdot c_{ii} \quad (4.21)$$

moltiplicando e dividendo il secondo membro dell'equazione (4.21) per il termine quadratico della massa del rotore m avremo che:

$$\left| \frac{k_{ij,onset}}{k_{ii}} \right| = \sqrt{\frac{1/M^2}{k_{ii}/M}} \cdot c_{ii} = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{\frac{M}{k_{ii}}} \cdot c_{ii} \quad (4.22)$$

definendo:

- $\kappa = \frac{k_{ij}}{k_{ii}}$
- $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{ii}}{M}} = \text{pulsazione naturale (rad/s)}$
- $\zeta_n = \frac{c_{ii}}{2 \cdot M \cdot \omega_n} = \text{fattore di smorzamento (\)}$

otteniamo il criterio di stabilità nella seguente forma adimensionale:

$$|\kappa_{onset}| = 2 \cdot \zeta_n \quad (4.23)$$

$$|\kappa| \leq 2 \cdot \zeta_n \quad (4.24)$$

In definitiva, questo semplice criterio ci permette di eseguire un'analisi della stabilità dinamica ai fini della progettazione di un cuscinetto a gas con una geometria adatta all'applicazione industriale per cui è adoperato.

Successivamente, allo scopo di calcolare la velocità di rotazione del rotore Ω_{onset} all'inizio del quale si verifica l'instabilità dinamica, Waumans [31] suppone di trattare cuscinetti lubrificati con fluido incomprimibile. Quindi, i coefficienti dinamici dipendono soltanto dalla velocità di rotazione del rotore Ω :

$$k_{ii}, c_{ii}, k_{ij}, c_{ij} = f(\Omega) \quad (4.25)$$

tale supposizione è dovuta al fatto che, per cuscinetti a gas, non esiste un'espressione analitica in forma chiusa. Quando si tratta con fluido incomprimibile si può assumere che, al variare della velocità di rotazione Ω , i termini di rigidità e smorzamento k_{ii} e c_{ii} rimangono costanti mentre i termini misti k_{ij} e c_{ij} crescono linearmente:

$$\begin{aligned}
 k_{ii}(\Omega) &= k_{ii} \\
 c_{ii}(\Omega) &= c_{ii} \\
 k_{ij}(\Omega) &= k_{ij}(\emptyset^{16}) \cdot \Omega \\
 c_{ij}(\Omega) &= c_{ij}(\emptyset) \cdot \Omega
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

sostituendo opportunamente le relazioni (4.26) all'interno dell'equazione (4.18) si ottiene la velocità di insorgenza (in termine inglese 'onset speed') :

$$k_{ij}(\emptyset) \cdot \Omega_{onset} = \omega_n \cdot c_{ii} \tag{4.27}$$

$$\Omega_{onset} = \omega_n \cdot \frac{c_{ii}}{k_{ij}(\emptyset)} \tag{4.28}$$

ai fini di valutare le proprietà del meato in termini di rigidità e smorzamento si può applicare la soluzione completa di Sommerfeld in condizioni di eccentricità ε tendente a zero. Di seguito, si riportano le formule dei parametri dinamici c_{ii} e k_{ij} [33]:

$$k_{ij} \doteq \frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \Omega \cdot r_r^3 \cdot L}{h^3} \quad (\beta = 90^\circ) \tag{4.29}$$

$$c_{ii} \doteq \frac{12 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r_r^3 \cdot L}{h^3} \tag{4.30}$$

sostituendo tali espressioni all'interno dell'equazione (4.28) si ottiene:

$$\Omega_{onset} = 2 \cdot \omega_n \tag{4.31}$$

¹⁶ Il termine \emptyset indica il valore riferito alle condizioni di equilibrio statico.

Dunque, l'inizio dell'instabilità dinamica avviene per un valore pari al doppio della pulsazione naturale del sistema. Ciò ha comportato l'uso del termine '*half-frequency whirl*' o '*half-speed whirl*'. Per un cuscinetto a gas, gli scostamenti da questo valore teorico di velocità sono dovuti agli effetti di comprimibilità del gas, i quali comportano una dipendenza non lineare dalla velocità di rotazione del rotore Ω .

4.4.4 2° Criterio di stabilità

Il criterio di stabilità mostrato in questo paragrafo è valido per cuscinetti lubrificati con fluido incomprimibile. È bene osservare che, per questa tipologia di cuscinetti, i parametri dinamici sono soltanto in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω .

Dunque, ipotizzando di aver calcolato i parametri dinamici e di adottare la configurazione mostrata in Figura 4.5, le equazioni del moto per il rotore sono date da:

$$M \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.32)$$

Questo è un sistema di equazioni lineari, di cui la soluzione omogenea è espressa dalla relazione (4.2).

Di seguito, viene risolto il problema degli autovalori allo scopo di determinare la velocità di rotazione del rotore Ω_{onset} all'inizio del quale si verifica l'instabilità dinamica e la frequenza di perturbazione ω alla quale avviene il moto di precessione asincrono. Sostituendo opportunamente le equazioni (4.2) all'interno del sistema (4.32) si ottiene ($\lambda = j\omega$):

$$\begin{bmatrix} k_{xx} - M \cdot \omega^2 + j\omega \cdot c_{xx} & k_{xy} + j\omega \cdot c_{xy} \\ k_{yx} + j\omega \cdot c_{yx} & k_{yy} - M \cdot \omega^2 + j\omega \cdot c_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.33)$$

Al fine di ottenere una soluzione non banale, il determinante della matrice deve essere posto uguale a zero:

$$(k_{xx} - M \cdot \omega^2 + j\omega \cdot c_{xx}) \cdot (k_{yy} - M \cdot \omega^2 + j\omega \cdot c_{yy}) - (k_{xy} + j\omega \cdot c_{xy}) \cdot (k_{yx} + j\omega \cdot c_{yx}) = 0 \quad (4.34)$$

Separando parte reale (4.35) e parte immaginaria (4.36) si ricavano rispettivamente le seguenti espressioni:

$$(k_{xx} - M\omega^2) \cdot (k_{yy} - M\omega^2) - \omega c_{xx}c_{yy} - k_{xy}k_{yx} + \omega^2 c_{xy}c_{yx} = 0 \quad (4.35)$$

$$c_{yy} \cdot (k_{xx} - M\omega^2) + c_{xx} \cdot (k_{yy} - M\omega^2) - c_{yx}k_{xy} - c_{xy}k_{yx} = 0 \quad (4.36)$$

Introduciamo i seguenti coefficienti adimensionali, dove f_{st} rappresenta una forza statica:

$$K_{ij} = k_{ij} \cdot \frac{\delta}{f_{st}} \quad (4.37)$$

$$C_{ij} = c_{ij} \cdot \frac{\Omega \cdot \delta}{f_{st}}$$

Sostituendo opportunamente questi coefficienti all'interno dell'equazione (4.36) si ricava il prodotto tra la massa del rotore M e il quadrato della frequenza di perturbazione ω :

$$M \cdot \omega^2 = \frac{f_{st}}{\delta} \cdot \Gamma \quad (4.38)$$

in cui:

$$\Gamma = \frac{C_{xx} \cdot K_{yy} + C_{yy} \cdot K_{xx} - C_{yx} \cdot K_{xy} - C_{xy} \cdot K_{yx}}{C_{xx} + C_{yy}}$$

Inserendo il prodotto $M \cdot \omega^2$ all'interno dell'equazione (4.35) si ricava la frequenza di perturbazione ω in funzione della velocità di insorgenza Ω_{onset} :

$$\omega = \Omega_{onset} \cdot \Psi \quad (4.39)$$

in cui:

$$\Psi = \sqrt{\frac{K_{xx} \cdot K_{yy} - K_{xy} \cdot K_{yx} - \Gamma \cdot (K_{xx} + K_{yy}) + \Gamma^2}{C_{xx} \cdot C_{yy} - C_{yx} \cdot C_{xy}}}$$

Successivamente, al fine di calcolare la velocità di rotazione del rotore Ω_{onset} all'inizio del quale si verifica l'instabilità dinamica si suppone che l'eccentricità sia data solamente dalla forza gravitazionale e quindi il carico statico f_{st} sia equivalente alla forza peso:

$$f_{st} = M \cdot g \quad (4.40)$$

Sostituendo le relazioni (4.39) e (4.40) all'interno dell'equazione (4.38) si ricava la velocità di insorgenza:

$$M \cdot (\Omega_{onset} \cdot \Psi)^2 = \frac{M \cdot g}{\delta} \cdot \Gamma \quad (4.41)$$

$$\Omega_{onset} = \frac{1}{\Psi} \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \Gamma} \quad (4.42)$$

Come mostrato nel seguente grafico ricavato sperimentalmente, tale velocità può essere rappresentata in funzione del rapporto di eccentricità $\varepsilon = e/h_0$:

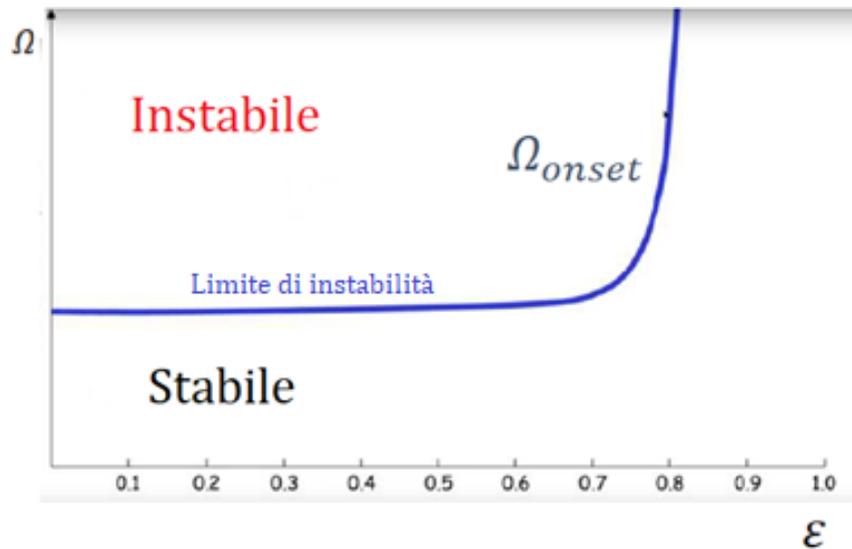


Figura 4.6: Velocità di insorgenza Ω_{onset} in funzione del rapporto di eccentricità ε

Da una visualizzazione grafica si può osservare che se la velocità di rotazione del rotore è più bassa di Ω_{onset} il moto di precessione è stabile, mentre se l'albero ruota ad una velocità più alta di Ω_{onset} il moto di precessione risulta instabile. Quando viene raggiunto il punto in cui inizia l'instabilità dinamica (in termine inglese *'instability threshold'*), il rotore mostrerà delle vibrazioni di natura auto-indotta che provocano il danneggiamento del sistema. Inoltre è possibile notare che, per alti valori di eccentricità, il sistema presenta una stabilità dinamica più elevata. Ciò è dovuto al fatto che i coefficienti dinamici hanno un valore diverso rispetto alla posizione di eccentricità nulla.

4.4.5 3° Criterio di stabilità

Questo semplice criterio, valido per cuscinetti a gas, ci permette di eseguire un'analisi della stabilità dinamica andando a valutare il valore del fattore di smorzamento globale. La seguente trattazione è basata sulle pubblicazioni scientifiche indicate in bibliografia: [31], [34].

Prima di passare all'esposizione dettagliata del criterio è utile osservare la generica soluzione omogenea di un sistema lineare [35]:

$$\lambda = \eta + j\omega_d \quad (4.43)$$

in cui ω_d rappresenta la pulsazione naturale smorzata.

È possibile definire il fattore di smorzamento globale ζ della soluzione come segue [31]:

$$\zeta = -\frac{\eta}{|\lambda|} = -\frac{\eta}{\omega_n} \quad (4.44)$$

quest'ultima quantità descrive lo smorzamento di un moto oscillatorio dopo aver applicato un disturbo.

Quindi, al fine di eseguire un'analisi della stabilità dinamica di un cuscinetto, se:

- $\mathcal{R}_e(\lambda) = \eta < 0 \rightarrow \zeta > 0$, l'ampiezza del moto di precessione decrementa nel tempo e quindi il fenomeno risulta smorzato. Ciò implica una *condizione di stabilità dinamica*;
- $\mathcal{R}_e(\lambda) = \eta > 0 \rightarrow \zeta < 0$, l'ampiezza del moto di precessione incrementa nel tempo e ciò provoca il contatto tra le superfici coniugate costituenti l'accoppiamento e di conseguenza il danneggiamento del rotore e del cuscinetto stesso. Quindi si ha una *condizione di instabilità dinamica*.

Passiamo ad occuparci della descrizione del criterio di stabilità. Ipotizzando di aver calcolato i parametri dinamici e di adottare la configurazione mostrata in Figura 4.5, le equazioni del moto per il rotore sono date da:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{X} + c_{xx} \cdot \dot{X} + c_{xy} \cdot \dot{Y} + k_{xx} \cdot X + k_{xy} \cdot Y = 0 \\ M \cdot \ddot{Y} + c_{yy} \cdot \dot{Y} + c_{yx} \cdot \dot{X} + k_{yy} \cdot Y + k_{yx} \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

nel caso di un rapporto di eccentricità ε tendente a zero il set di otto coefficienti dinamici si riduce a quattro (come mostrato nell'equazione 4.5). Questa assunzione semplifica il precedente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{X} + c_{ii} \cdot \dot{X} + c_{ij} \cdot \dot{Y} + k_{ii} \cdot X + k_{ij} \cdot Y = 0 \\ M \cdot \ddot{Y} + c_{ii} \cdot \dot{Y} - c_{ij} \cdot \dot{X} + k_{ii} \cdot Y - k_{ij} \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

dividendo ambo i membri per la massa del rotore M e moltiplicando e dividendo il quarto termine del 1° membro per il termine diretto di rigidità k_{ii} si ottiene:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \frac{c_{ii}}{M} \cdot \dot{X} + \frac{c_{ij}}{M} \cdot \dot{Y} + \frac{k_{ii}}{M} \cdot X + \frac{k_{ij}}{M} \cdot \frac{k_{ij}}{k_{ii}} \cdot Y = 0 \\ \ddot{Y} + \frac{c_{ii}}{M} \cdot \dot{Y} - \frac{c_{ij}}{M} \cdot \dot{X} + \frac{k_{ii}}{M} \cdot Y - \frac{k_{ij}}{M} \cdot \frac{k_{ij}}{k_{ii}} \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

introducendo il seguente rapporto adimensionale $\kappa = \frac{k_{ij}}{k_{ii}}$ e considerando la definizione della pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{k_{ii}/M}$ avremo che:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \frac{c_{ii}}{M} \cdot \dot{X} + \frac{c_{ij}}{M} \cdot \dot{Y} + \omega_n^2 \cdot X + \omega_n^2 \cdot \kappa \cdot Y = 0 \\ \ddot{Y} + \frac{c_{ii}}{M} \cdot \dot{Y} - \frac{c_{ij}}{M} \cdot \dot{X} + \omega_n^2 \cdot Y - \omega_n^2 \cdot \kappa \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

nella trattazione che segue, queste due equazioni saranno convertite in una singola equazione introducendo un opportuno vettore rotante $Z = X + jY$. A tal proposito, adottando un cambio di variabile del tempo $\tau = \omega_n \cdot t$ in modo tale che:

$$d\tau = \omega_n \cdot dt \quad (4.49)$$

$$d\tau^2 = \omega_n^2 \cdot dt^2$$

e definendo le derivate di X e Y rispetto alla nuova variabile di tempo τ introdotta:

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dX}{d\tau}; & Y' &= \frac{dY}{d\tau} \\ X'' &= \frac{d^2X}{d\tau^2}; & Y'' &= \frac{d^2Y}{d\tau^2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} X'' \cdot \omega_n^2 + \frac{c_{ii}}{M} \cdot X' \cdot \omega_n + \frac{c_{ij}}{M} \cdot Y' \cdot \omega_n + \omega_n^2 \cdot X + \omega_n^2 \cdot \kappa \cdot Y = 0 \\ Y'' \cdot \omega_n^2 + \frac{c_{ii}}{M} \cdot Y' \cdot \omega_n - \frac{c_{ij}}{M} \cdot X' \cdot \omega_n + \omega_n^2 \cdot Y - \omega_n^2 \cdot \kappa \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

dividendo ambo i membri per il termine quadratico della pulsazione naturale ω_n e, moltiplicando e dividendo il terzo termine del 1° membro per il doppio del termine diretto di smorzamento c_{ii} si ottiene:

$$\begin{cases} X'' + \frac{c_{ii}}{M \cdot \omega_n} \cdot X' + \frac{2 \cdot c_{ii}}{2 \cdot c_{ii}} \frac{c_{ij}}{M \cdot \omega_n} \cdot Y' + X + \kappa \cdot Y = 0 \\ Y'' + \frac{c_{ii}}{M \cdot \omega_n} \cdot Y' - \frac{2 \cdot c_{ii}}{2 \cdot c_{ii}} \frac{c_{ij}}{M \cdot \omega_n} \cdot X' + Y - \kappa \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

definendo:

$$\begin{aligned} - \gamma &= \frac{k_{ij}}{k_{ii}} \\ - \zeta_n &= \frac{c_{ii}}{2 \cdot M \cdot \omega_n} = \text{fattore di smorzamento} (\backslash) \end{aligned}$$

si ricavano le seguenti espressioni in forma adimensionale:

$$\begin{cases} X'' + 2 \cdot \zeta_n \cdot X' + 2 \cdot \gamma \cdot \zeta_n \cdot Y' + X + \kappa \cdot Y = 0 \\ Y'' + 2 \cdot \zeta_n \cdot Y' - 2 \cdot \gamma \cdot \zeta_n \cdot X' + Y - \kappa \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

rappresentando il moto di precessione nel piano complesso attraverso il metodo dei vettori rotanti, si può introdurre il vettore rotante $Z = X + jY$ e le sue derivate rispetto alla nuova variabile di tempo τ introdotta:

$$\begin{aligned} Z' &= X' + jY' \\ Z'' &= X'' + jY'' \end{aligned} \quad (4.54)$$

assumendo una traiettoria di precessione circolare, la risposta sarà di tipo sinusoidale. Ciò consente di scrivere le derivate del vettore Z come:

$$\begin{aligned} Z' &= j\nu \cdot Z = j\nu \cdot (X + jY) = \nu \cdot (jX - Y) \\ Z'' &= j\nu \cdot Z' = j\nu \cdot (X' + jY') = \nu \cdot (jX' - Y') \end{aligned} \quad (4.55)$$

dove ν equivale alla frequenza di perturbazione normalizzata rispetto a Ω_n . Sommando le due equazioni del sistema (4.53) e moltiplicando la seconda equazione per l'unità immaginaria si ottiene:

$$(X'' + jY'') + 2\zeta_n(X' + jY') + 2\gamma\zeta_n(Y' - jX') + (X + jY) + \kappa(Y - X) \quad (4.56)$$

sostituendo opportunamente le relazioni (4.54) e (4.55) all'interno dell'equazione (4.56) si ricava la singola equazione rappresentante il moto di precessione:

$$\left(1 - \frac{2 \cdot \gamma \cdot \zeta_n}{\nu}\right) \cdot Z'' + \left(2 \cdot \zeta_n - \frac{\kappa}{\nu}\right) \cdot Z' + Z = 0 \quad (4.57)$$

Quindi, la frequenza naturale Ω_n del sistema equivale a:

$$\Omega_n = \gamma \cdot \zeta_n \pm \sqrt{\gamma^2 \cdot \zeta_n^2 + 1} \quad (4.58)$$

trascurando il termine adimensionale γ poiché ha poca influenza sulla soluzione (come mostrato da Waumans [31]), si ottiene un'espressione in cui è possibile identificare il fattore di smorzamento globale ζ :

$$Z'' + \left(2 \cdot \zeta_n - \frac{\kappa}{\nu}\right) \cdot Z' + Z = 0 \quad (4.59)$$

$$\zeta = 2 \cdot \zeta_n - \frac{\kappa}{\nu} \quad (4.60)$$

il punto in cui inizia l'instabilità dinamica si ha quando $\zeta = 0$. Come esposto da Waumans [34], in questo stato neutralmente stabile l'autofrequenza del sistema coincide con la frequenza naturale Ω_n . Pertanto si ottiene il fattore di smorzamento globale ζ nella seguente espressione:

$$\zeta = 2 \cdot \zeta_n - \kappa \quad (4.61)$$

introducendo il rapporto adimensionale $\kappa = \frac{k_{ij}}{k_{ii}}$ e considerando la definizione del fattore di smorzamento $\zeta_n = \frac{c_{ii}}{2 \cdot \sqrt{k_{ii} \cdot M}}$ otteniamo il fattore di smorzamento globale in funzione dei coefficienti dinamici:

$$\zeta = \frac{c_{ii}}{\sqrt{k_{ii} \cdot M}} - \frac{k_{ij}}{k_{ii}} \quad (4.62)$$

In definitiva, andando a valutare il valore di ζ si può eseguire un'analisi della stabilità dinamica. Infatti se $\zeta > 0$ si ha una *condizione di stabilità dinamica*, mentre se $\zeta < 0$ si incontra una *condizione di instabilità dinamica*.

4.4.5.1 Validazione del 3° Criterio di stabilità

Al fine di poter validare il criterio di stabilità descritto nel paragrafo 4.4.5 anche in assenza di dati sperimentali, si sono costruiti dei grafici rappresentanti il comportamento tipico dei coefficienti dinamici¹⁷ e il risultante fattore di smorzamento globale ζ in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω . Tutti i valori quantitativi, conformi ai risultati del lavoro di dottorato di Waumans [31], sono stati ottenuti da calcoli numerici eseguiti su un rotore Jeffcott supportato da cuscinetti aerostatici. L'ambiente di sviluppo utilizzato è Matlab™.

Il comportamento tipico dei coefficienti di rigidezza e smorzamento è mostrato nella figura sottostante:

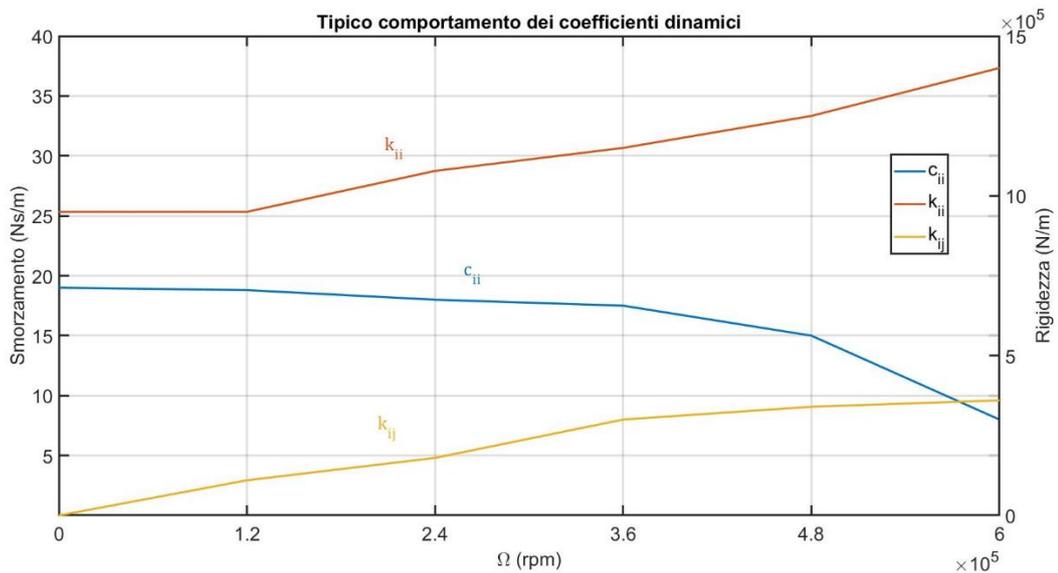


Figura 4.7: Tipico comportamento dinamico dei coefficienti dinamici k_{ii} , k_{ij} e c_{ii} in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω

Da una visualizzazione grafica si può constatare che il termine diretto di rigidezza k_{ii} e il termine misto di rigidezza k_{ij} incrementano all'aumentare della velocità di rotazione del rotore Ω . Il contrario può essere detto per il termine diretto di smorzamento c_{ii} , il quale

¹⁷ È stato trascurato il termine misto di smorzamento c_{ij} poiché ha poca influenza sull'analisi della stabilità dinamica (come mostrato da Waumans [31]).

decrementa gradualmente (per una frequenza di perturbazione $\omega \rightarrow \infty$ il meato gassoso non offre smorzamento¹⁸). Questo comportamento non lineare è dovuto agli effetti aerodinamici e di comprimibilità del gas, i quali comportano una dipendenza non lineare dalla velocità di rotazione del rotore Ω .

Ai fini di poter confrontare con la rappresentazione grafica mostrata nel lavoro di dottorato (Waumans, 2009, p.134) e di utilizzare la relazione (4.62) per la costruzione di un grafico rappresentante il fattore di smorzamento globale ζ in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω , è necessario il calcolo della massa del rotore M . Tale valore si può stimare nel punto in cui inizia l'instabilità dinamica ($\mathcal{R}_e(\lambda) = \eta = 0$) attraverso la relazione (4.18):

$$|k_{ij,onset}| = \sqrt{\frac{k_{ii}}{M}} \cdot c_{ii} \quad (4.63)$$

come mostrato da Waumans [31], tale punto si trova in corrispondenza di $\Omega = \Omega_{onset} = 240.000 \text{ rpm}$ e i corrispondenti valori dei parametri dinamici sono:

$$\begin{aligned} k_{ii} &= 1,1 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ k_{ij} &= 0,18 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ c_{ii} &= 18 \text{ N} \cdot \text{s/m} \end{aligned} \quad (4.64)$$

sostituendo tali valori all'interno dell'equazione (4.63) si ricava il valore della massa del rotore M :

$$M = \frac{k_{ii}}{k_{ij,onset}^2} \cdot c_{ii}^2 = 10,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (4.65)$$

il fattore di smorzamento globale ζ in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω è mostrato nella figura sottostante:

¹⁸ Se la frequenza di perturbazione ω è elevata, la distribuzione di pressione si avvicina al cosiddetto caso del "gas intrappolato". In altre parole il meato gassoso, poiché è parecchio compresso, non ha più il tempo di fluire (legge dell'isoterma, nota anche come legge di Boyle).

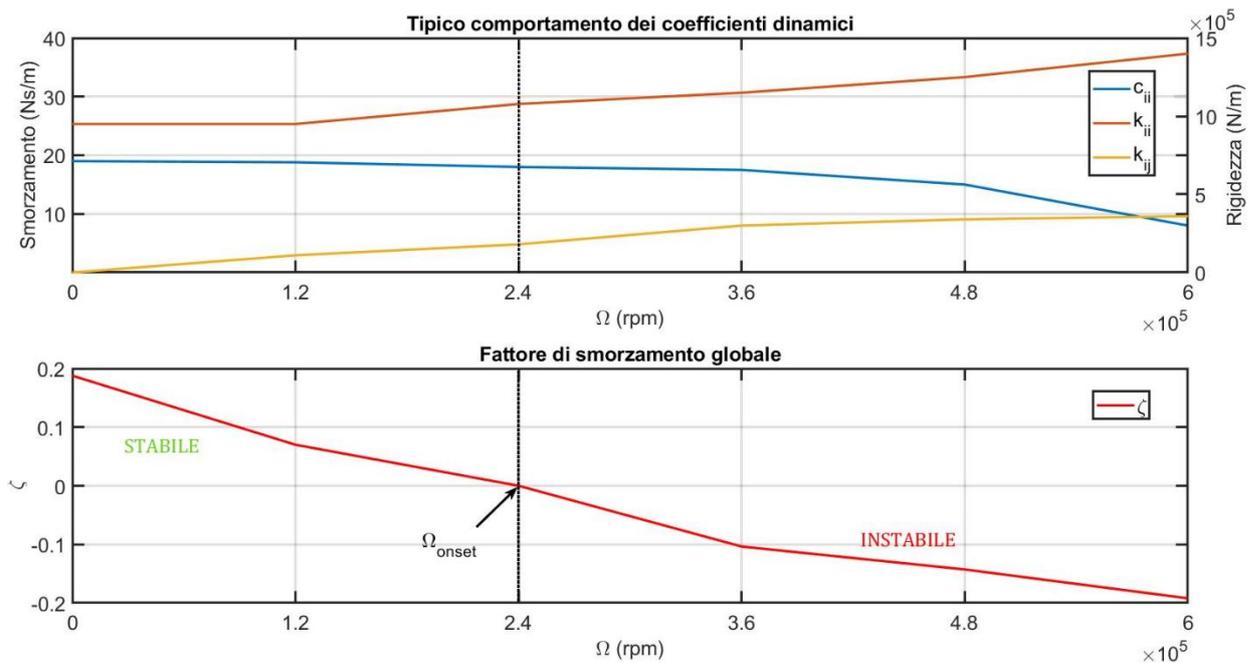


Figura 4.8: Fattore di smorzamento globale ζ in funzione della velocità di rotazione del rotore Ω . La linea in nero indica la soglia di instabilità (in termine inglese 'instability threshold')

Nella parte inferiore della figura si può osservare che il fattore di smorzamento globale ζ inizia con un valore massimo e, all'aumentare della velocità di rotazione Ω , diminuisce progressivamente fino a quando incontra la linea dello zero. In questo punto, lo smorzamento non è in grado di opporsi alla forza del meato destabilizzante rappresentata dal termine misto di rigidità k_{ij} . Pertanto, il rotore mostrerà delle vibrazioni di natura auto-indotta che provocano il danneggiamento del sistema.

La parte superiore della figura rende chiara l'origine della *condizione di instabilità dinamica*. Difatti a basse velocità di rotazione del rotore Ω , il valore del termine misto di rigidità k_{ij} è relativamente basso, mentre la capacità di smorzamento (rappresentata dal termine diretto di smorzamento c_{ii}) è sufficiente a mantenere una *condizione di stabilità dinamica*. Un aumento della velocità di rotazione Ω provoca un'attenuazione del termine diretto di smorzamento c_{ii} e un aumento del termine misto di rigidità k_{ij} . Quest'ultimo agisce da fattore destabilizzante e riduce il fattore di smorzamento globale del sistema ζ .

A titolo di esempio, noti i coefficienti dinamici, si riporta il calcolo del fattore di smorzamento globale ζ ottenuto ad una velocità di rotazione del rotore Ω prefissata visibile nella figura sottostante:

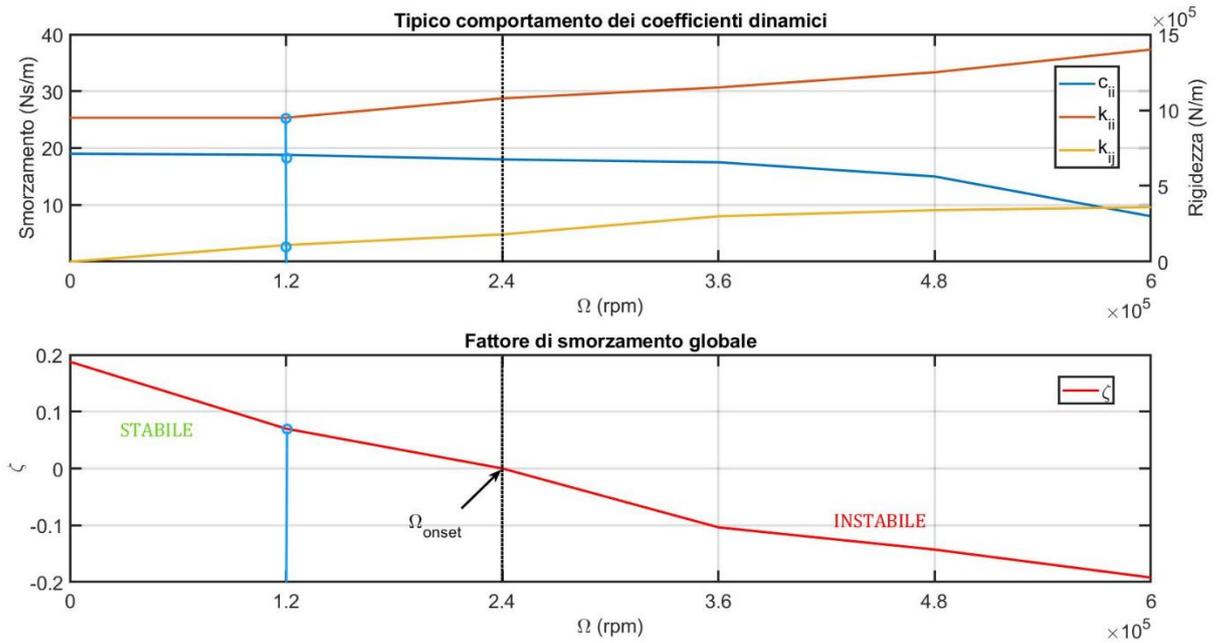


Figura 4.9: Fattore di smorzamento globale ζ corrispondente ad una velocità di rotazione del rotore $\Omega = 120000 \text{ rpm}$ (linea blu).

i corrispondenti valori dei coefficienti di rigidezza e smorzamento sono:

$$k_{ii} = 0,95 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$k_{ij} = 0,11 \cdot 10^6 \text{ N/m} \tag{4.66}$$

$$c_{ii} = 18,8 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

inserendo tali valori all'interno dell'equazione (4.62) si calcola il valore del fattore di smorzamento globale ζ :

$$\zeta = \frac{c_{ii}}{\sqrt{k_{ii} \cdot M}} - \frac{k_{ij}}{k_{ii}} = 0,07 \tag{4.67}$$

In conclusione, poiché $\zeta > 0$ si può affermare che ad una velocità di rotazione $\Omega = 120000 \text{ rpm}$, si ha una *condizione di stabilità dinamica*.

4.5 Stima del fattore di smorzamento ζ attraverso il decremento logaritmico

Tramite il calcolo del decremento logaritmico δ , definito come il rapporto tra il logaritmo naturale di due picchi, è possibile calcolare il fattore di smorzamento globale ζ . Prendendo in considerazione un generico andamento sinusoidale e due valori massimi di ampiezza a_1 e a_n (distante n periodi dal primo picco¹⁹) si può scrivere:

$$a_1 = X_0 \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \tag{4.68}$$

$$a_n = X_0 \cdot e^{-\zeta\omega_n(t+nT)}$$

rapportando si ottiene:

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{e^{-\zeta\omega_n(t+nT)}} = e^{-\zeta\omega_n nT} \tag{4.69}$$

il decremento logaritmico δ risulta quindi:

$$\delta = \ln \frac{a_1}{a_n} = \zeta\omega_n nT \tag{4.70}$$

osservando che il periodo $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$ e la pulsazione naturale smorzata $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ si ottiene:

$$\delta = 2\pi n \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{4.71}$$

svolvendo opportunamente i passaggi analitici è possibile ricavare il fattore di smorzamento globale ζ nella seguente forma:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}} \tag{4.72}$$

¹⁹ È opportuno utilizzare un "n" sufficientemente grande affinché la differenza tra i due picchi risulti apprezzabile.

Quindi, andando a valutare il valore di ζ si può eseguire un'analisi della stabilità dinamica. Infatti, se $\zeta > 0$ si ha una *condizione di stabilità dinamica*, mentre se $\zeta < 0$ si incontra una *condizione di instabilità dinamica*.

Nei sotto paragrafi successivi, allo scopo di stimare il fattore di smorzamento globale attraverso il decremento logaritmico, si descriverà il modello dinamico del rotore scelto e il calcolo del fattore a partire dai dati simulati con tale modello.

4.5.1 Descrizione modello dinamico del rotore

L'oggetto di studio consiste in un modello di rotore Jeffcott con massa concentrata M supportato da un cuscinetto a gas montato rigidamente. Le reazioni del meato gassoso sono espresse in termini di rigidezza e smorzamento lungo le direzioni X e Y . Il modello di studio è mostrato nella figura sottostante:

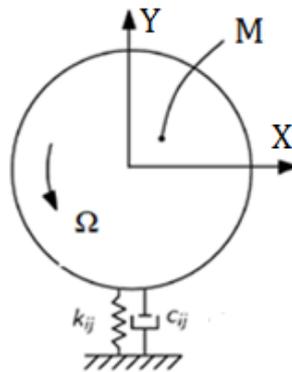


Figura 4.10: Modello dinamico rotore-cuscinetto. Tratto da Waumans [15]

Si sono adottate le seguenti ipotesi semplificative:

- rotore perfettamente bilanciato;
- assenza di forzanti esterne lungo le direzioni X e Y ;
- rapporto di eccentricità ε tendente a zero.

Adottando questa semplice configurazione, la stima del fattore di smorzamento globale ci consentirà di individuare se, per una velocità di rotazione del rotore Ω prefissata, siamo in *condizione di stabilità dinamica* o in *condizione di instabilità dinamica*.

4.5.2 Calcolo del fattore di smorzamento ζ a partire da dati simulati

Per stimare il fattore di smorzamento globale attraverso il decremento logaritmico si è costruito un modello a 2 gradi di libertà utilizzando l'ambiente di sviluppo Matlab™ con il supporto del tool Simulink®. Lo script Matlab è riportato in Appendice B.

Si prendono in considerazione le equazioni del moto del rotore (4.46) ottenute per la configurazione mostrata in Figura 4.10:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{X} + c_{ii} \cdot \dot{X} + c_{ij} \cdot \dot{Y} + k_{ii} \cdot X + k_{ij} \cdot Y = 0 \\ M \cdot \ddot{Y} + c_{ii} \cdot \dot{Y} - c_{ij} \cdot \dot{X} + k_{ii} \cdot Y - k_{ij} \cdot X = 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

questo sistema di equazioni può essere espresso in forma matriciale:

$$M_r \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = 0 \quad (4.74)$$

in cui:

$$\begin{aligned} - M_r &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; \\ - q &= \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}; \\ - c &= \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ -c_{ij} & c_{ii} \end{bmatrix}; \\ - k &= \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ -k_{ij} & k_{ii} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isolando a primo membro il vettore delle coordinate generalizzate che presenta ordine di derivazione maggiore si è costruito il modello Simulink:

$$\ddot{q} = M_r^{-1} \cdot (-c \cdot \dot{q} - k \cdot q) \quad (4.75)$$

lo schema a blocchi è visibile nella figura sottostante:

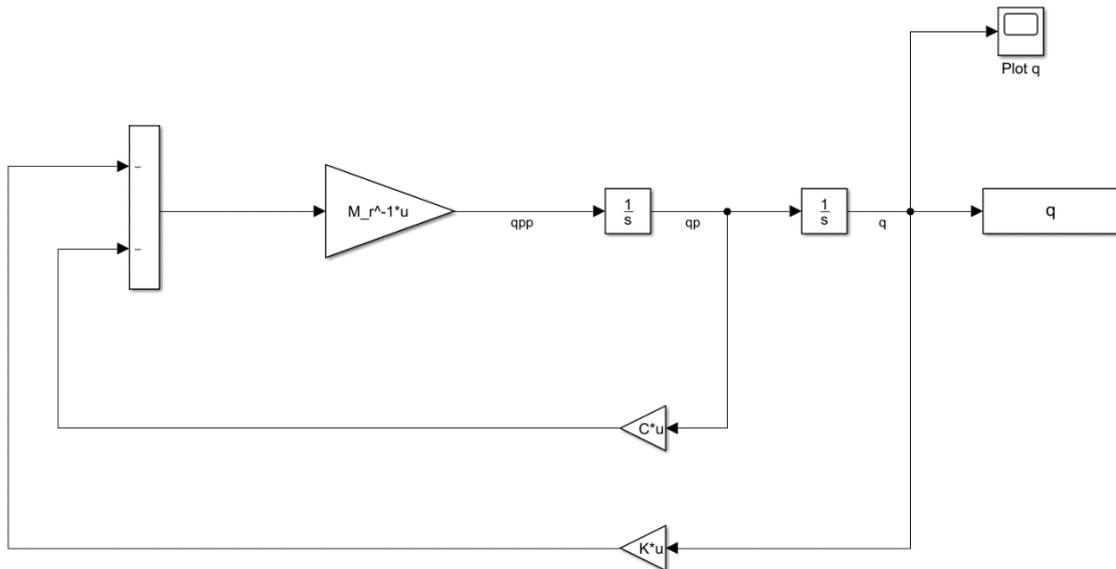


Figura 4.11: Schema a blocchi Simulink – stima fattore di smorzamento globale ζ

Per ottenere gli spostamenti del rotore lungo le direzioni X e Y si sono impostati dei parametri di *Set* conformi al grafico mostrato in Figura 4.8 e corrispondenti a tre velocità di rotazione del rotore Ω prefissate. Tale scelta è stata adottata per verificare se, tramite la stima del fattore di smorzamento attraverso il decremento logaritmico, si ottengono dei valori ragionevoli. Di seguito, si riportano il grafico e i valori dei parametri di *Set*:

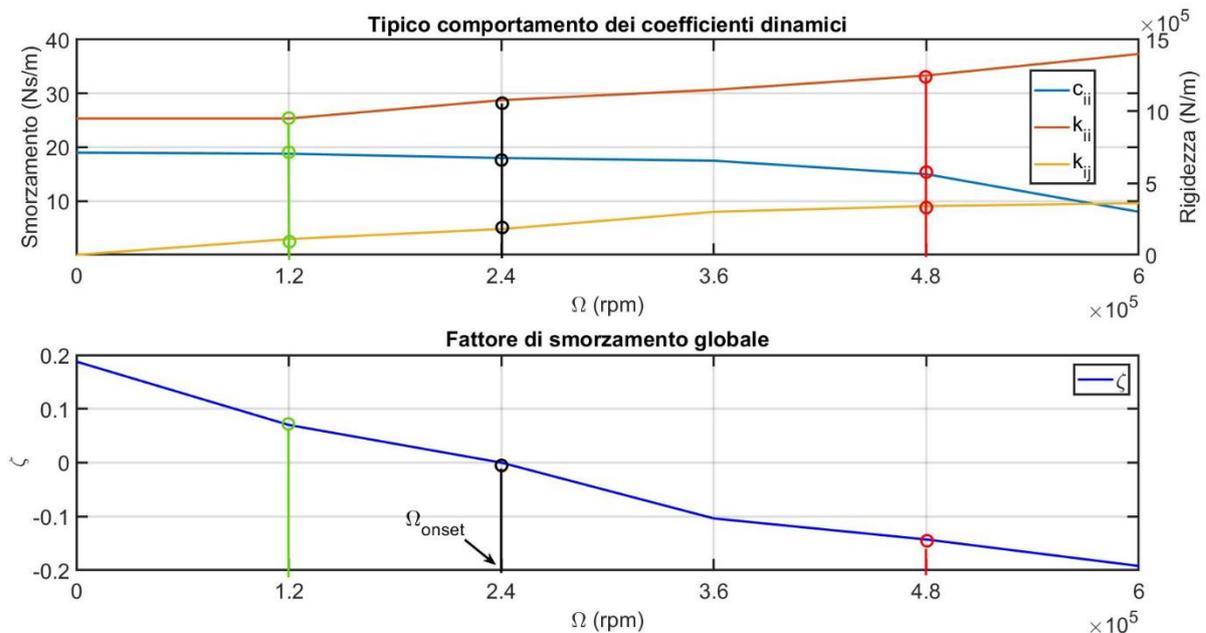


Figura 4.12: Coefficienti dinamici e fattore di smorzamento corrispondenti a tre velocità di rotazione prefissate

PARAMETRI DI SET	$\Omega = 1,2 \cdot 10^5 \text{ rpm}$	$\Omega = 2,4 \cdot 10^5 \text{ rpm}$	$\Omega = 4,8 \cdot 10^5 \text{ rpm}$
$k_{ii} \text{ (N/m)}$	$0,95 \cdot 10^6$	$1,1 \cdot 10^6$	$1,25 \cdot 10^6$
$k_{ij} \text{ (N/m)}$	$0,11 \cdot 10^6$	$0,18 \cdot 10^6$	$0,34 \cdot 10^6$
$c_{ii} \text{ (Ns/m)}$	18,8	18	17,5
$c_{ij}^{20} \text{ (Ns/m)}$	0	0	0
$X(t = 0^{21})$	$5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
$\dot{X}(t = 0)$	$6,3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$	$1,2 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$	$2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$
M	$10,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$		

Tabella 4.1: Parametri di Set – stima fattore di smorzamento globale ζ

Quindi, per i tre casi esaminati, si procede ad un confronto grafico degli andamenti oscillatori lungo le direzioni X e Y al fine di calcolare il fattore di smorzamento globale ed eseguire, allo stesso tempo, un'analisi della stabilità dinamica. Infatti, se l'ampiezza delle oscillazioni decrementa nel tempo si ha una *condizione di stabilità dinamica* ($\zeta > 0$), mentre se l'ampiezza incrementa nel tempo si ha una *condizione di instabilità dinamica* ($\zeta < 0$). Inoltre, se l'ampiezza si mantiene costante nel tempo siamo nel punto in cui ha inizio l'instabilità dinamica ($\zeta = 0$).

²⁰ È stato trascurato il termine misto di smorzamento c_{ij} poiché ha poca influenza sull'analisi della stabilità dinamica (come mostrato da Waumans [31]).

²¹ Le condizioni iniziali lungo la direzione Y sono nulle.

1° caso: $\Omega = 1,2 \cdot 10^5 \text{ rpm}$

Al fine di applicare la formula del fattore di smorzamento globale (4.72), è necessario leggere i valori delle ampiezze²² per almeno due picchi distanti n periodi. Nella figura sottostante si riportano gli andamenti delle grandezze cinematiche X e Y ottenute:

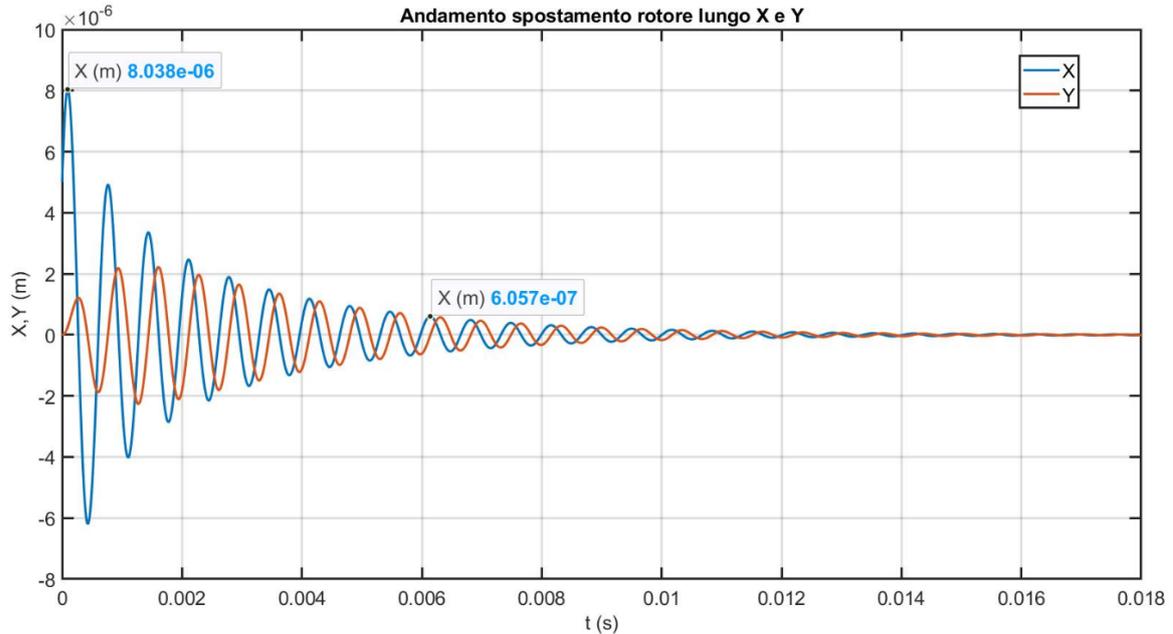


Figura 4.13: Andamento spostamento rotore lungo le direzioni X e Y (1° caso: $\Omega = 1,2 \cdot 10^5 \text{ rpm}$)

Come atteso, si ha una *condizione di stabilità dinamica* poiché l'ampiezza delle oscillazioni decrementa nel tempo. Si procede ad un confronto grafico dei due picchi nei 2 punti di misura distanti $n = 9$ periodi e si calcola il fattore di smorzamento globale ζ attraverso il decremento logaritmico δ :

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}} = 0,05 \quad (4.76)$$

Si può constatare che il fattore di smorzamento ottenuto si discosta lievemente dal valore mostrato in Figura 4.12. Quindi il risultato è apprezzabile. Inoltre, la *condizione di stabilità* può essere osservata tracciando l'orbita del centro del rotore:

²² La lettura del valore di ampiezza lungo la direzione X o Y è indifferente allo scopo di calcolare il fattore di smorzamento globale.

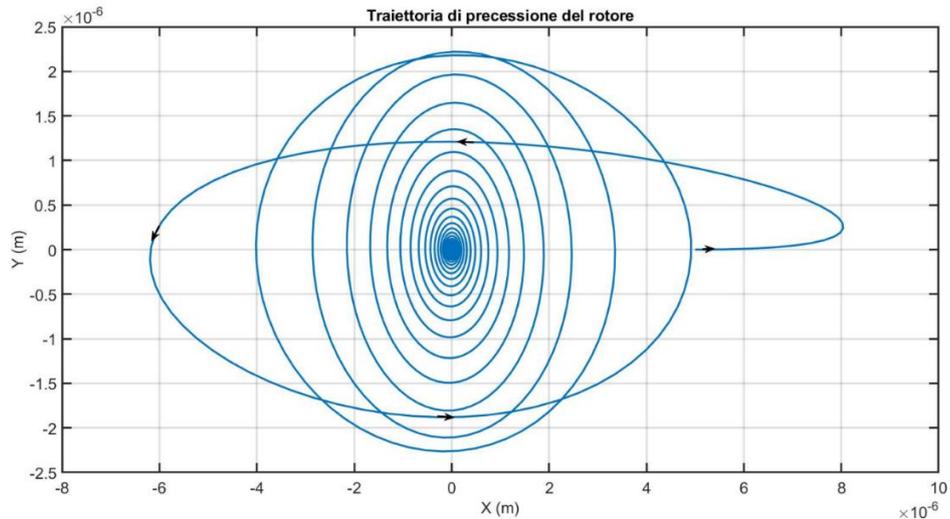


Figura 4.14: Orbita del centro del rotore (1° caso: $\Omega = 1,2 \cdot 10^5$ rpm)

Poiché la traiettoria di precessione converge verso il centro siamo in una condizione di stabilità.

2° caso: $\Omega = 2,4 \cdot 10^5$ rpm

Analogamente al caso esposto precedentemente, è necessario leggere i valori delle ampiezze per almeno due picchi distanti n periodi. Nella figura sottostante si riportano gli andamenti delle grandezze cinematiche X e Y ottenute:

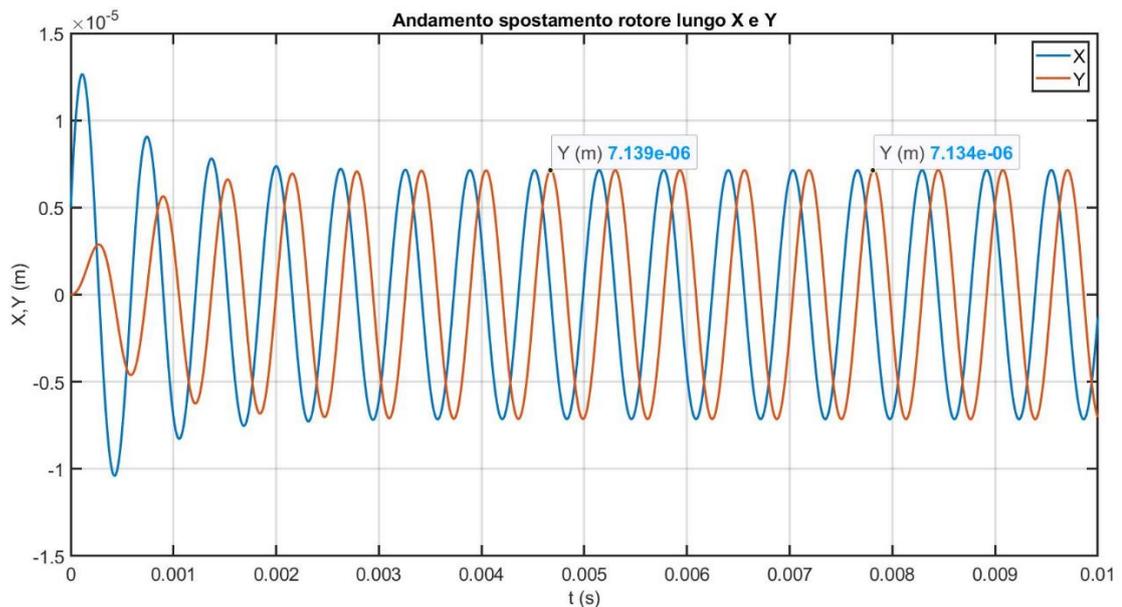


Figura 4.15: Andamento spostamento rotore lungo le direzioni X e Y (2° caso: $\Omega = 2,4 \cdot 10^5$ rpm)

Come previsto, poiché l'ampiezza delle oscillazioni si mantiene costante, siamo nel punto in cui ha inizio l'instabilità dinamica (in termine inglese '*instability threshold*') e pertanto la velocità di rotazione del rotore pari a $2,4 \cdot 10^5 \text{ rpm}$ equivale alla velocità di insorgenza Ω_{onset} . Si procede ad un confronto grafico dei due picchi nei 2 punti di misura distanti $n = 5$ periodi e si calcola il fattore di smorzamento globale ζ attraverso il decremento logaritmico δ :

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}} = 0 \quad (4.77)$$

Si può osservare che il fattore di smorzamento ottenuto corrisponde al valore mostrato in Figura 4.12. Quindi il risultato è ottimale. Per di più il punto in cui ha inizio l'instabilità dinamica si può osservare tracciando l'orbita del centro del rotore:

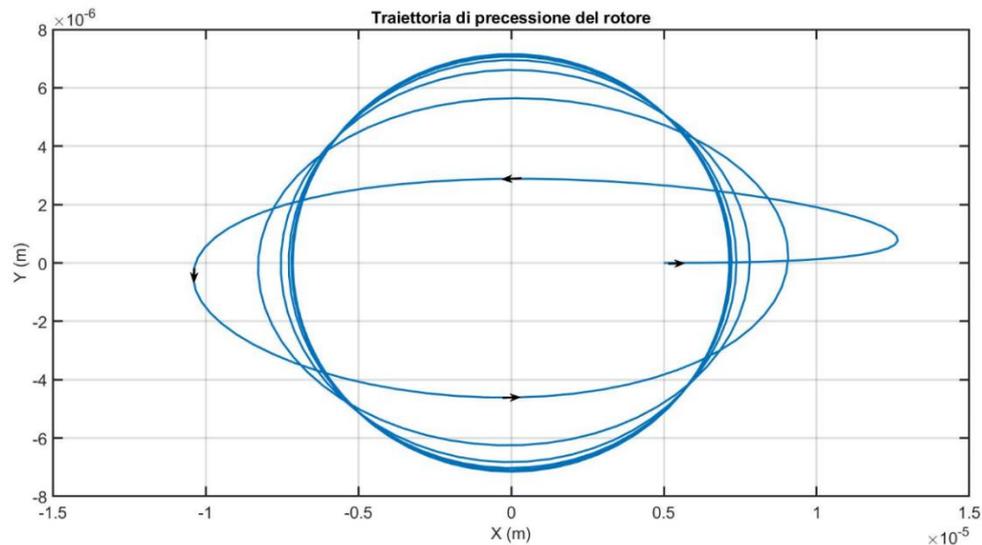


Figura 4.16: Orbita del centro del rotore (2° caso: $\Omega = 2,4 \cdot 10^5 \text{ rpm}$)

Dalla visualizzazione grafica si può constatare che, dopo una fase transitoria data dalle condizioni iniziali imposte, l'orbita del centro del rotore si mantiene costante.

3° caso: $\Omega = 4,8 \cdot 10^5 \text{ rpm}$

Analogamente ai due casi mostrati precedentemente, è necessario leggere i valori delle ampiezze per almeno due picchi distanti n periodi. Nella figura sottostante si riportano gli andamenti delle grandezze cinematiche X e Y ottenute:

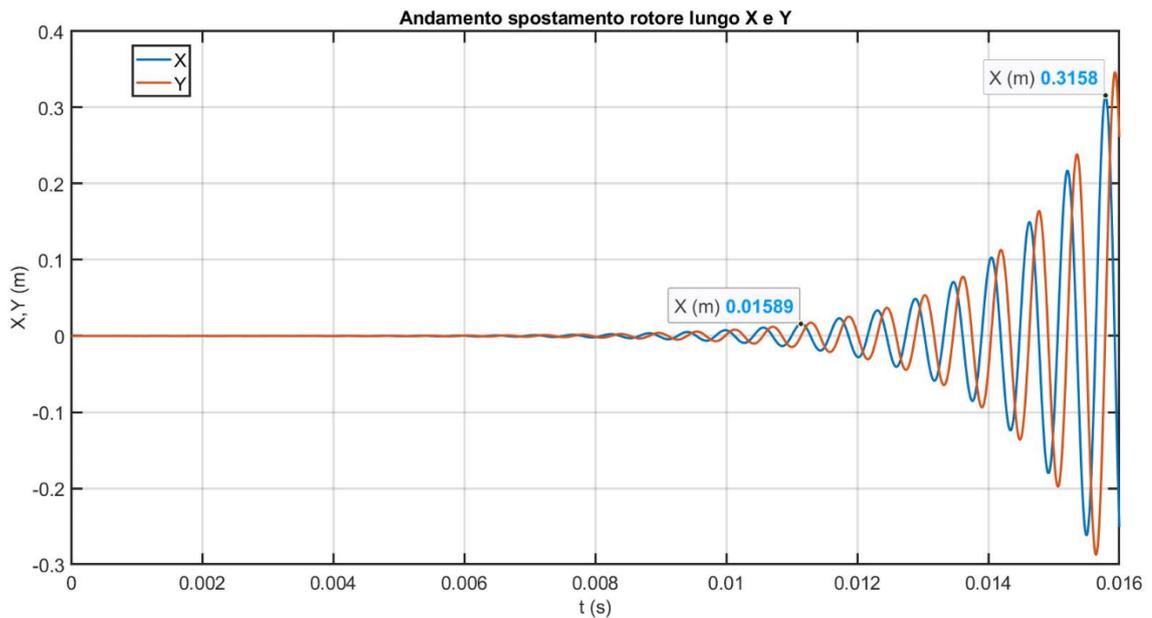


Figura 4.17: Andamento spostamento rotore lungo le direzioni X e Y (3° caso: $\Omega = 4,8 \cdot 10^5 \text{ rpm}$)

Come atteso, si ha una *condizione di instabilità dinamica* visto che l'ampiezza delle oscillazioni incrementa nel tempo. Si procede ad un confronto grafico dei due picchi nei 2 punti di misura distanti $n = 8$ periodi e si calcola il fattore di smorzamento globale ζ attraverso il decremento logaritmico δ :

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}} = -0,06 \quad (4.78)$$

Si può osservare che il fattore di smorzamento globale ottenuto si discosta dal valore mostrato in Figura 4.12, ma visto che il valore rimane negativo il risultato è comunque apprezzabile. Inoltre, la *condizione di instabilità* può essere osservata tracciando l'orbita del centro del rotore:

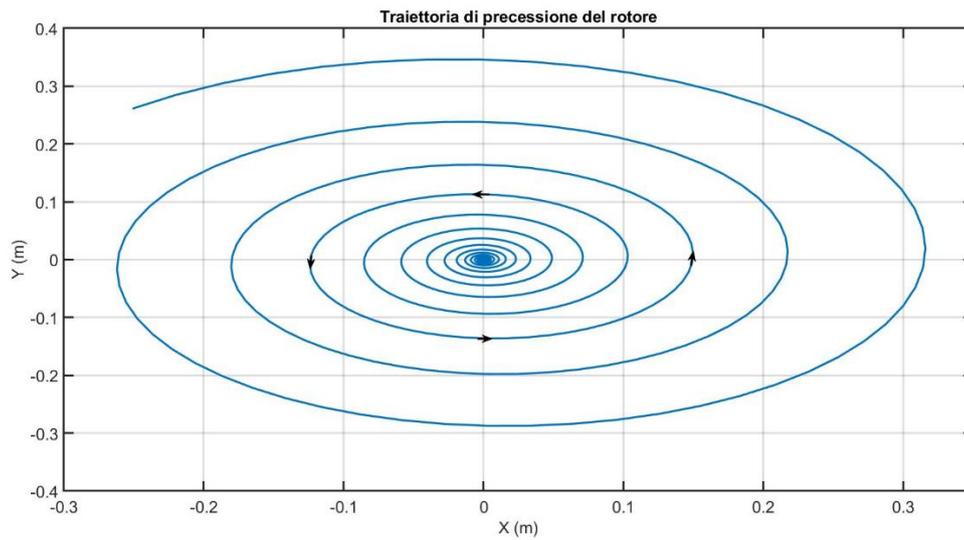


Figura 4.18: Orbita del centro del rotore (3° caso: $\Omega = 4,8 \cdot 10^5 \text{ rpm}$)

Da una visualizzazione grafica si può constatare che la traiettoria di precessione diverge dal centro, per cui siamo sicuramente in una condizione di instabilità.

CONCLUSIONI

Giunti al completamento dello studio svolto è opportuno trarre delle conclusioni. Nella presente tesi si è trattato in modo approfondito il tema riguardante i cuscinetti ad aria funzionanti ad alta velocità. In particolare sono stati focalizzati due macro-argomenti:

- le metodologie numeriche per la stima dei coefficienti di rigidità e smorzamento a partire da prove sperimentali;
- l'analisi della stabilità dinamica dei cuscinetti a gas.

Per quanto concerne il primo macro-argomento, è stata eseguita un'accurata analisi della letteratura inerente lo stato dell'arte sull'identificazione sperimentale dei parametri dinamici, e si sono approfondite analiticamente due metodologie numeriche in cui la perturbazione è imposta dall'esterno. Con l'obiettivo di verificare tali metodologie è stato sperimentato un banco prova virtuale in grado di simulare il comportamento reale di un rotore supportato da cuscinetti montati rigidamente.

Con lo studio svolto, sono stati raggiunti gli obiettivi prefissati inizialmente nel lavoro di tesi, mentre una raccomandazione per ulteriori ricerche future potrebbe essere quella di realizzare uno studio simile per determinare le metodologie numeriche dalla risposta sincrona allo squilibrio.

In seguito, dopo aver analizzato le varie architetture di banchi prova che permettono di calcolare i parametri a partire da prove sperimentali, si potrebbe pensare di realizzarne uno. Ovviamente la scelta della struttura del banco prova sarà legata alle risorse economiche disponibili per il progetto.

In merito all'analisi della stabilità dinamica dei cuscinetti a gas, si è offerta una panoramica dei criteri di stabilità esistenti in letteratura e si sono analizzati in dettaglio tre criteri di stabilità basati sulla teoria di linearizzazione per il comportamento dinamico dei cuscinetti.

I risultati ottenuti sono coerenti con l'aspettativa posta inizialmente, in quanto si è fornita una visione chiara dei coefficienti dinamici che influenzano la stabilità e si sono trovate varie formule utili al calcolo della velocità di rotazione del rotore in cui ha inizio l'instabilità dinamica (in termine inglese '*onset speed*'). I limiti dell'analisi svolta sono legati al semplice modello dinamico di rotore Jeffcott preso in considerazione. Infatti nei possibili sviluppi futuri si potrebbe pensare di ricercare delle espressioni analitiche, considerando delle configurazioni dinamiche più complesse e di ricercare delle tecniche che sono in grado di posporre la velocità di insorgenza.

Migliorare la stabilità dinamica rappresenta, infatti, la sfida più grande concernente la progettazione di un cuscinetto a gas per applicazioni ad altissime velocità.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] R. Tiwari, A. W. Lees e M. I. Friswell, «Identification of Dynamic Bearing Parameters,» *The Shock and Vibration Digest*, pp. 99-124, 2004.
- [2] C. Ferraresi e T. Raparelli, *Meccanica applicata*, Casa editrice CLUT, 2007.
- [3] K. Czolczynski, *Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems*, New York: Casa editrice Springer-Verlag, 1999.
- [4] F. D.D., «A Review of the State-of-the-Art for the Design of Self-Acting Gas-Lubricated Bearings,» *ASME*, 1969.
- [5] N. Grassam e J. Powell, *Gas Lubricated Bearings*, London: Butterworths, 1964.
- [6] O. De Santiago e L. San Andrés, «Experimental Identification of Bearing Dynamic Force Coefficients in A Flexible Rotor-Further Developments,» *Tribology Transactions*, 2007.
- [7] C. Fritzen, «Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems,» *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, n. 108, pp. 9-16.
- [8] Z. L. Qiu e A. K. Tieu, «Identification of sixteen force coefficients of two journal bearings from impulse responses,» *Wear*, vol. 212, pp. 206-212, 1997.
- [9] Ł. Breńkacz, «Identification of stiffness, damping and mass coefficients of rotor-bearing system using impulse response method,» *Journal of Vibroengineering*, vol. 17, 2015.
- [10] R. Nordmann e K. Schollhorn, «Identification of Stiffness and Damping Coefficients of Journal Bearings by Means of the Impact Method,» *Proceedings of*

the International Conference on Vibration in Rotating Machinery (ISROMAC), pp. 231-238, 1980.

- [11] Y. P. Wang e D. Kim, «Experimental Identification of Force Coefficients of Large Hybrid Air Foil Bearings,» *ASME Turbo Expo*, 2013.
- [12] C. Fritzen, «Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems,» *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, pp. 9-16.
- [13] P. Matta, M. Arghir e O. Bonneau, «Experimental Analysis of Cylindrical Air-Bearing Dynamic Coefficients,» *Tribology Transactions*, 2010.
- [14] P. Matta e M. Arghir, «Identification method for rotordynamic coefficients of cylindrical air bearing using an impact hammer,» *Journal of Engineering Tribology*, 2011.
- [15] T. Waumans, J. Peirs, D. Reynaerts e F. Al-Bender, «On the Dynamic Stability of High-Speed Gas Bearings: Stability Study and Experimental Validation,» *Laboratory Soete*, 2011.
- [16] E. Blondeel, R. Snoeys e L. Devrieze, «Dynamic stability of externally pressurised gas bearings,» *ASME - Journal of Lubrication Technology*, 1969.
- [17] W. A. Gross, L. A. Matsch, V. Castelli, A. Eshel, J. Vohr e M. Wildmann, *Fluid Film Lubrication*, New York: John Wiley & Sons Inc, 1980.
- [18] V. N. Constantinescu, «Gas Lubrication,» *ASME*, 1969.
- [19] K. Czolczynski, «Hopf Bifurcation in Gas Journal Bearings,» *ASME, Applied Mechanics Reviews*, pp. 392-399, 1993.
- [20] A. Muszyńska, *Rotordynamics*, Boca Raton: Taylor and Francis Group, LLC, 2005.

- [21] H. Marsh, «Stability and rotordynamics for gas lubricated bearings,» *Tribology International*, 1980.
- [22] V. Castelli e H. G. Elrod, «Solution of the Stability Problem for 360° Self-acting Gas Lubricated Bearings,» *Trans. A.S.M.E.*, pp. 199-212, 1965.
- [23] H. S. Cheng e C. H. T. Pan, «Stability Analysis of Gas Lubricated Self-acting Plain Cylindrical Journal Bearings of Finite Length Using Galerkin's Method,» *Trans. A.S.M.E.*, pp. 185-192, 1965.
- [24] H. Marsh, «The Stability of Aerodynamic Gas Bearings,» *Mech. Engng. Sci. Monograph No. 2*, 1965.
- [25] H. S. Cheng e P. R. Trumpler, «Stability of the High Speed Journal Bearing Under Steady Load,» *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME*, vol. 85, 1963.
- [26] J. W. Lund, «The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings with Flexible, Damped Supports,» *Trans. ASME, J. of Applied Mechanics*, pp. 911-920, 1965.
- [27] J. S. Ausman, «An Improved Analytical Solution for Self-Acting Gas-Lubricated Journal Bearings of Finite Length,» *Trans. ASME, J. of Basic Engineering*, pp. 188-194, 1963.
- [28] B. Sternlicht, «Elastic and Damping Properties of Cylindrical Journal Bearings,» *Trans. ASME, J. of Basic Engineering*, pp. 101-108, 1959.
- [29] D. D. Fuller, *Gas-Lubricated Bearings*, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1959.
- [30] D. A. Boffey, *Whirl Instability of a Rigid Rotor in a Flexibly Supported Gas Lubricated Journal Bearing, Thesis*, University of Edinburgh, 1972.

- [31] T. Waumans, *On the design of high-speed miniature air bearings: dynamic stability, optimisation and experimental validation, PhD thesis*, Katholieke Universiteit Leuven - Dept. Mechanical Engineering, 2009.
- [32] A. Fasana e S. Marchesiello, *Meccanica delle Vibrazioni*, Torino: Casa editrice CLUT, 2006.
- [33] B. J. Hamrock, S. R. Schmid e B. O. Jacobson, *Fundamentals of fluid film lubrication*, New York: Marcel Dekker, 2004.
- [34] T. Waumans, J. Peirs, F. Al-Bender e D. Reynaerts, «Aerodynamic journal bearing with a flexible, damped support operating at 7.2 million DN,» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2011.
- [35] J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1956.
- [36] W. J. Palm, *Matlab. Un'introduzione per gli ingegneri*, Casa editrice McGraw-Hill, 2011.
- [37] M. J. Goodwin, *Dynamics of Rotor-bearing Systems*, ISBN 0-04-621032-6, 1989.
- [38] J. M. Vance, *Rotordynamics of Turbomachinery*, New York: John Wiley & Sons, 1987.
- [39] S. Whitley, A. J. Bowhill e P. McEwan, «Half Speed Whirl and Load Capacity of Hydrodynamic Gas Journal Bearings,» *Lubrication and Wear Group*, 1962.

Appendice A

PROGRAMMA DI VERIFICA METODOLOGIA NUMERICA

Quest'appendice contiene lo script Matlab e lo schema a blocchi Simulink che sono stati utilizzati nella validazione della metodologia numerica esposta nel Capitolo 3. Per ottenere maggiori informazioni riguardo l'uso di Matlab si può consultare il manuale [36].

1. Script Matlab

```
%% inizializzazione dati parametri modello Simulink
clc
clear
close all

%% caricamento dati
% parametri banco prova virtuale
m=0.7; % (kg)
kxx=2.5e6; % (N/m)
kyy=2.8e6; % (N/m)
kxy=1.5e6; % (N/m)
kyx=1e6; % (N/m)
cxx=2.5e3; % (Ns/m)
cyy=2.5e3; % (Ns/m)
cxy=-1.5e3; % (Ns/m)
cyx=1.5e3; % (Ns/m)
q_0=[0;0]; % condizioni iniziali spostamento da inserire nel
blocco Integrator
qp_0=[0;0]; % condizioni iniziali velocità da inserire nel
blocco Integrator
M_x=[m 0;0 m];
```

```

M_y=[0 m;m 0];
K_x=[kxx kxy;kyx kyy];
C_x=[cxx cxy;cyx cyy];
K_y=[kxy kxx;kyy kyx];
C_y=[cxy cxx;cyx cyy];
Fx=[1;0];
Fy=[0;1];
% parametri sperimentali
f_signal = 10; % (Hz)
fs = 500; % (Hz)
% base tempi
ftime = max([max([10*f_signal,1000]), 10*fs]); % (Hz)
T_end = 1/f_signal*10;
t = [0:1/ftime:T_end]; % (s)

%% Simulazione del modello Simulink
sim banco_prova_virtuale

%% Creazione variabili sul Workspace
% creazione variabili
X_x=q(:,1); % (m)
Y_x=q(:,2); % (m)
Xpp_x=qpp(:,1); % (m/s^2)
Ypp_x=qpp(:,2); % (m/s^2)
X_y=q1(:,2); % (m)
Y_y=q1(:,1); % (m)
Xpp_y=qpp1(:,2); % (m/s^2)
Ypp_y=qpp1(:,1); % (m/s^2)
% grafica
figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(t,X_x,t,Y_x, 'linewidth',1.5),grid
xlabel('t (s)')

```

```

ylabel('X_x,Y_x (m)')
title('Andamento spostamenti nel tempo')
legend('X_x','Y_x')
subplot(2,2,2)
plot(t,Xpp_x,t,Ypp_x, 'linewidth',1.5),grid
xlabel('t (s)')
ylabel('Xpp_x,Ypp_x (m/s^2)')
title('Andamento accelerazioni nel tempo')
legend('Xpp_x','Ypp_x')
subplot(2,2,3)
plot(t,X_y,t,Y_y, 'linewidth',1.5),grid
xlabel('t (s)')
ylabel('X_y,Y_y (m)')
ylim([-1.6e-5 1.6e-5])
title('Andamento spostamenti nel tempo')
legend('X_y','Y_y')
subplot(2,2,4)
plot(t,Xpp_y,t,Ypp_y, 'linewidth',1.5),grid
xlabel('t (s)')
ylabel('Xpp_y,Ypp_y (m/s^2)')
title('Andamento accelerazioni nel tempo')
legend('Xpp_y','Ypp_y')

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t,fx, 'linewidth',1.5),grid
xlabel ('t(s)')
ylabel('f_x (N)')
ylim([-35 35])
legend('f_x')
title('Andamento forze nel tempo')
subplot(2,1,2)
plot(t,fy, 'r', 'linewidth',1.5),grid

```

```

xlabel ('t(s)')
ylabel('f_y (N)')
ylim([-35 35])
legend('f_y')
title('Andamento forze nel tempo')

%% Calcolo simbolico impedenze Zxx,Zxy,Zyx,Zyy
Xx=sym('X_x');
Yx=sym('Y_x');
Xy=sym('X_y');
Yy=sym('Y_y');
A=[Xx Yx 0 0;0 0 Xx Yx;Xy Yy 0 0;0 0 Xy Yy];
Fxx=sym('F_xx');
Fyx=sym('F_yx');
Fxy=sym('F_xy');
Fyy=sym('F_yy');
Fc=[Fxx;Fyx;Fxy;Fyy];
Z=linsolve(A,Fc);
disp(Z)

%% Calcolo impedenze Zxx, Zyy, Zxy, Zyx
w=2*pi*f_signal;
%Zxx
num_Zxx=-((m.*w^2.*Y_x.*Y_x)-((fx+m.*w^2.*X_x).*Y_y));
den_Zxx=(X_x.*Y_y-X_y.*Y_x);
[Zxx,f]=tfestimate(den_Zxx,num_Zxx,[],[],[],fs);
realZxx=real(Zxx);
imagZxx=imag(Zxx);
%Zyy
num_Zyy=((fy+m.*w^2.*Y_y).*X_x)-(m.*w^2.*Y_x.*X_y);
den_Zyy=(X_x.*Y_y-X_y.*Y_x);
[Zyy,f]=tfestimate(den_Zyy,num_Zyy,[],[],[],fs);
realZyy=real(Zyy);

```

```

imagZyy=imag(Zyy);
%Zxy
num_Zxy=( (m.*w^2.*X_y.*X_x)-((fx+m.*w^2.*X_x).*X_y));
den_Zxy=(X_x.*Y_y-X_y.*Y_x);
[Zxy,f]=tfestimate(den_Zxy,num_Zxy,[],[],[],fs);
realZxy=real(Zxy);
imagZxy=imag(Zxy);
%Zyx
num_Zyx=-(( (fy+m.*w^2.*Y_y).*Y_x)-(m.*w^2.*Y_x.*Y_y));
den_Zyx=(X_x.*Y_y-X_y.*Y_x);
[Zyx,f]=tfestimate(den_Zyx,num_Zyx,[],[],[],fs);
realZyx=real(Zyx);
imagZyx=imag(Zyx);
%grafica
figure(3)
subplot(2,2,1)
plot(f,realZxx,'linewidth',1.5),grid
xlabel('f (HZ)')
ylabel('kxx (N/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Direct Stiffness in x direction')
subplot(2,2,2)
plot(f,imagZxx/(2*pi*f_signal),'linewidth',1.5),grid
xlabel('f(HZ)')
ylabel('cxx (Ns/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Direct Damping in x direction')
subplot(2,2,3)
plot(f,realZyy,'linewidth',1.5),grid
xlabel('f (HZ)')
ylabel('kyy (N/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Direct Stiffness in y direction')

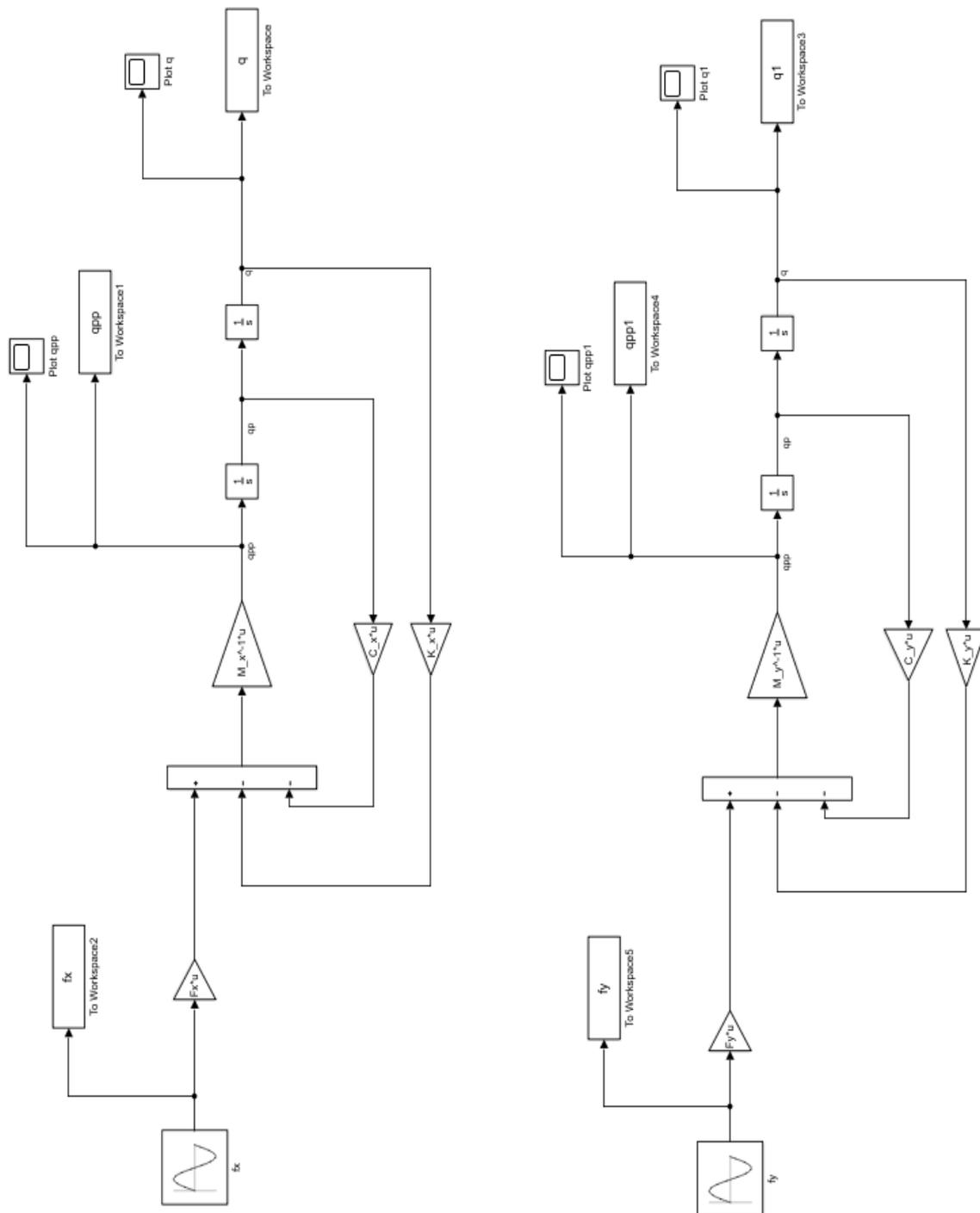
```

```

subplot(2,2,4)
plot(f,imagZyy/(2*pi*f_signal),'linewidth',1.5),grid
xlabel('f (HZ)')
ylabel('cyy (Ns/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Direct Damping in y direction')
figure(6)
subplot(2,2,1)
plot(f,realZxy,'linewidth',1.5),grid
xlabel('f (HZ)')
ylabel('kxy (N/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Cross Coupling Stiffness in x direction')
subplot(2,2,2)
plot(f,imagZxy/(2*pi*f_signal),'linewidth',1.5),grid
xlabel('f (HZ)')
ylabel('cxy (Ns/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Cross Coupling Damping in x direction')
subplot(2,2,3)
plot(f,realZyx,'linewidth',1.5),grid
xlabel('f (HZ)')
ylabel('kyx (N/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Cross Coupling Stiffness in y direction')
subplot(2,2,4)
plot(f,imagZyx/(2*pi*f_signal),'linewidth',1.5),grid
xlabel('f(HZ)')
ylabel('cyx (Ns/m)')
xlim([0 fs/2])
title('Cross Coupling Damping in y direction')

```

2. Schema a blocchi Simulink



Appendice B

PROGRAMMA PER STIMA FATTORE DI SMORZAMENTO

Quest'appendice contiene lo script Matlab che è stato utilizzato per la stima del fattore di smorzamento globale esposta nel Capitolo 4 . Per ottenere maggiori informazioni sull'uso di Matlab si può consultare il manuale [36].

1. Script Matlab

```
%% inizializzazione dati parametri modello simulink
clc
clear
close all

% caricamento dati
% parametri banco prova virtuale
Omega=120e3;      % velocità di rotazione del rotore (rpm)
w=Omega*2*pi/60; % velocità di rotazione del rotore (rad/s)
M=10.8e-3;       % massa rotore (kg)
kii=0.95e6;      % termine diretto di rigidezza (N/m)
kij=0.11e6;      % termine misto di rigidezza (N/m)
cii=18.8;        % termine diretto di smorzamento (Ns/m)
cij=0;           % termine misto di smorzamento (Ns/m)
ex=5e-6;         % eccentricità lungo la direzione X (m)
ey=0;           % eccentricità lungo la direzione Y (m)
q_0=[ex;ey];     % condizioni iniziali spostamento da
inserire nel blocco Integrator
qp_0=[ex*w;ey*w]; % condizioni iniziali velocità da inserire
nel blocco Integrator
M_r=[M 0;0 M];
```

```

K=[kii kij;-kij kii];
C=[cii cij;cij cii];

% Simulazione del modello Simulink per avere X(m),Y(m)
sim decremento_logaritmico

% Creazione variabili sul Workspace X(m),Y(m)
X=q(:,1);      % spostamento in direzione X (m)
Y=q(:,2);      % spostamento in direzione Y (m)

% grafica
figure(1)
plot(tout,X,tout,Y,'linewidth',1.5),grid
xlabel('t (s)')
ylabel('X,Y (m)')
title('Andamento spostamento rotore lungo X e Y')
legend('X','Y')
figure(2)
plot(X,Y)
title('Traiettoria di precessione del rotore')
xlabel('X (m)')
ylabel('Y (m)')
grid

%% calcolo zeta
a1=input('1°picco ampiezza lungo X o Y (m)= ');
a2=input('2°picco ampiezza lungo X o Y (m)= ');
n=input('periodi di distanza tra 1°picco e 2°picco = ');
delta=log(a1/a2);          %decremento logaritmico
zeta=(delta/sqrt((2*pi*n)^2+(delta)^2)) %fattore di
smorzamento globale

```