# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di laurea magistrale

# Validazione di un codice immersed boundary su corpi assialsimmetrici in regime ipersonico





**Relatore** prof. Domenic D'Ambrosio

> **Candidato** Stefano Miccio

Referente aziendale OPTIMAD Engineering Srl Haysam Telib

Dicembre 2019

A Alessandro, Ilenia, mamma e papà

# Indice

enco	delle figure		3
enco	delle tabelle		6
omma	ario		8
bstra	act		9
$\operatorname{Intr}$	roduzione		11
Gen 2.1 2.2 2.3	neralità sui metodi immersed boundaryIntroduzione delle condizioni al contorno2.1.1Continuous forcing approach2.1.2Discrete forcing approachMetodo ghost-cellMetodo cut-cell	· · · · · ·	<b>16</b> 17 17 18 19 23
Car	atteristiche principali del solutore CFD gloria		25
3.1 3.2 3.3 3.4	bitpitPABLO - PArallel Balanced Linear OctreePABLO - PArallel Balanced Linear OctreeControlDictSchema al secondo ordine per flussi euleriani compressibili3.4.1Trattazione del dominio fluido3.4.2Gestione dell'immersed boundary	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	25 26 27 29 29 30
Este	ensione del codice al caso assialsimmetrico		34
1 1			
4.1 4.2 4.3 4.4	Equazioni di governoFormulazione ai volumi finitiModifiche effettuate al codiceValidazione delle modifiche4.4.1Calcolo delle grandezze utili nel flusso di Poiseuille4.4.2Setup in gloria4.4.3Modifiche del codice per BC e C.I.4.4.4Risultati	<ul> <li>.</li> <li>.&lt;</li></ul>	35 38 40 43 44 46 47 47
4.1 4.2 4.3 4.4 Reg	Equazioni di governo       Formulazione ai volumi finiti         Formulazione ai volumi finiti       Modifiche effettuate al codice         Modifiche effettuate al codice       Validazione delle modifiche         Validazione delle modifiche       Validazione delle modifiche         4.4.1       Calcolo delle grandezze utili nel flusso di Poiseuille         4.4.2       Setup in gloria         4.4.3       Modifiche del codice per BC e C.I.         4.4.4       Risultati         gime ipersonico         Conni sterioi	<ul> <li>.</li> <li>.&lt;</li></ul>	35 38 40 43 44 46 47 47 55 55
	enco omma bstra Inti 2.1 2.2 2.3 Car 3.1 3.2 3.3 3.4 Est	enco delle tabelle mmario bstract Introduzione Generalità sui metodi immersed boundary 2.1 Introduzione delle condizioni al contorno 2.1.1 Continuous forcing approach 2.1.2 Discrete forcing approach 2.2 Metodo ghost-cell 2.3 Metodo cut-cell 3.1 bitpit Caratteristiche principali del solutore CFD gloria 3.1 bitpit 3.2 PABLO - PArallel Balanced Linear Octree 3.3 ControlDict 3.4 Schema al secondo ordine per flussi euleriani compressibili 3.4.1 Trattazione del dominio fluido 3.4.2 Gestione dell'immersed boundary Estensione del codice al caso assialsimmetrico	enco delle tabelle mmario bstract Introduzione Generalità sui metodi immersed boundary 2.1 Introduzione delle condizioni al contorno 2.1.1 Continuous forcing approach 2.2 Metodo ghost-cell 2.3 Metodo cut-cell 2.3 Metodo cut-cell 2.4 Discrete forcingali del solutore CFD gloria 3.5 PABLO - PArallel Balanced Linear Octree 3.3 ControlDict 3.4 Schema al secondo ordine per flussi euleriani compressibili 3.4.1 Trattazione del dominio fluido 3.4.2 Gestione dell'immersed boundary

5.5.4	Stair step approximation $\dots \dots \dots$
Conclusioni	109
Bibliografia	112
Ringraziame	nti 116

# Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione del dominio conseguente all'utilizzo del <i>ghost-cell me-</i> <i>thod</i> : si distinguono le celle fluide, dove vengono risolte le equazioni di	
	governo, quelle solide, la cui soluzione è banale, e quelle fantasma uti-	
	li per imporre la condizione al contorno in corrispondenza dell' <i>immersed</i>	
	boundary. [28]	12
1.2	Campo scalare della velocità normalizzata e linee di corrente in corrispon-	
	denza della bolla di separazione: i risultati derivano da una simulazione in	
	gloria mediante l'uso del codice sviluppato.	13
2.1	Confronto tra una tipica griglia di calcolo conforme al corpo immerso (a	
	sinistra) ed una nonbody conformal (a destra) legata al metodo IB. [2]	16
2.2	Esempio di utilizzo della <i>level set function</i> nel caso del bordo di attacco di	
	un profilo NACA 0012	19
2.3	Schema esemplificativo di un <i>immersed boundary</i> su di una generica mesh	
	curvilinea con indicazione delle varie tipologie di celle. [3]	20
2.4	Schema esemplificativo di Figura 2.3 con i tre possibili casi riguardanti le	
	celle che circondano l' <i>image point</i> . [3]	21
2.5	Schema della cella trapezoidale formatasi in corrispondenza dell' $IB$ con i	
	relativi flussi $f$ (a sinistra) e stencil computazionale utile al calcolo di $f_{sw}$	
	$(a destra). [2] \ldots \ldots$	23
3.1	Particolare della suddivisione di un dominio quadtree	26
3.2	Esempio di utilizzo di una regione rettangolare per raffinare la mesh in	
	corrispondenza del trailing edge di un profilo NACA 0012	28
3.3	Schema di un dominio 1D raffigurante i nodi della mesh, l' $IB$ e le pendenze	
	utilizzabiili nel calcolo della velocità all'interfaccia $i + 1/2$	30
3.4	Schema rappresentativo dei centri-cella e delle pendenze utili alla funzione	
	$limiter. [7] \ldots \ldots$	31
3.5	Schema di un dominio 2D con evidenza delle informazioni geometriche	
	all'interfaccia. [1]	32
4.1	Cella tridimensionale e relativa sezione nel piano $x - y$ . [10]	36
4.2	Esempio di discretizzazione di un dominio bidimensionale, dove sono ripor-	
	tati gli indici, le superfici laterali e il volume delle celle. [10]	39
4.3	Rappresentazione del dominio e delle condizioni al contorno per il <i>fully</i>	
	developed axisymmetric pipe flow. [14]	44
4.4	Rappresentazione del dominio geometrico e di quello computazionale, ot-	
	tenuto a partire dalla <i>region</i> rettangolare in bianco	46
4.5	Andamento dei residui in norma 2 durante la simulazione di riferimento.	48
4.6	Andamento dei residui in norma infinito durante la simulazione di riferimento.	48
4.7	Profili di velocità calcolati con uno schema al 1 ordine in una sezione	
	generica del tubo, al variare della griglia utilizzata.	49
4.8	Profili di velocità calcolati con uno schema al II ordine in una sezione	-
	generica del tubo, al variare della griglia utilizzata.	50
4.9	Ingrandimenti in prossimità del valore massimo di velocità delle Figure 4.7	<b>.</b>
1 1 0	e 4.8.	50
4.10	Profili di velocità calcolati con una griglia $512 \times 102$ in una sezione generica	
	del tubo, al variare dell'ordine dello schema utilizzato	51

4.11	Profili di velocità calcolati con una griglia $1024 \times 204$ in una sezione generica	
	del tubo, al variare dell'ordine dello schema utilizzato	52
4.12	Profili di velocità calcolati con una griglia $2048 \times 408$ in una sezione generica	
	del tubo, al variare dell'ordine dello schema utilizzato	52
4.13	Ingrandimenti in prossimità del valore massimo di velocità delle Figure 4.11	
	e 4.12	53
5.1	Viste di un Lockheed F-104 progettato negli anni '50	56
5.2	Viste di un Boeing X-20A Dynasoar risalente al 1963. [15]	56
5.3	Modulo di comando Columbia dell'Apollo 11	57
5.4	Curva $\theta - \beta - M$ . [16]	58
5.5	Tipico profilo di temperatura all'interno di uno strato limite ipersonico. [15]	60
5.6	Regimi del flusso ed equazioni di riferimento al variare del numero di	
	Knudsen. [17]	61
5.7	Fenomeni fisici caratteristici del flusso ipersonico. [15]	61
5.8	Esempio di un dominio fisico nel caso di un <i>blunt body</i> in regime ipersonico.	
		62
5.9	Geometria e dimensioni della configurazione hollow cylinder-flare. [22]	64
5.10	Disposizione delle prese di pressione e delle termocoppie sul modello di	
~	hollow cylinder-flare. [22]	65
5.11	Setup sperimentale implegato dall'ONERA. [21]	66
5.12	Coordinate del dominio e griglia utilizzata da D'Ambrosio et al. per la	
	simulazione della configurazione hollow cylinder-flare. [19]	67
5.13	Suddivisione del dominio impiegata per la simulazione della configurazione	
	hollow cylinder-flare.	68
5.14	Griglia di calcolo finale utilizzata per la simulazione della configurazione	<u> </u>
F 1 F	hollow cylinder-flare.	69 69
5.15	Step di ramnamento utili al raggiungimento della griglia finale impostata.	09 79
5.10	Andersonte dei regidui in norma 2 demonte la simulation e	12
0.17	Andamento del residui in norma 2 durante la simulazione.	( <u>7</u> 2
0.18	Andamento del residui in norma immito durante la simulazione	13
5.19	Campo scalare di velocita normalizzata.	74
0.20 5.91	Campo scalare di pressione normalizzata. $\ldots$	14
0.21	Isolinee del $tog_{10}(p/p_{ref})$ colorate in base al valore di pressione normalizzata	75
5 99	Icolinee di pressione e linee di corrente nelle zone interessete delle helle	10
0.22	relative alla gimulazione di D'Ambrecio et al. [10]	75
5 92	Linea di corrente colorate in base al valore della valorità normalizzata	75 76
5.20	Andamento del coefficiente di pressione a parete	77
5.24	Campo scalaro di tomporatura normalizzata	78
5.26	Andamento del numero di Stanton a pareto	70
5.20 5.97	Andamento del coefficiente di sforze d'attrite a parete	80
5.28	Confronto di $c_{10}$ St tra il caso assialsimmetrico o quello bidimensionalo [20]	81
5.20 5.20	Andamento del numero di Stanton al variaro di $R_{e,o}$ Ma [18]	89
5.29 5.20	Step di reffinemento per la prima simulazione che ha provisto l'uso di una	04
0.00	mosh adattativa	85
5 31	Step di raffinamento per la seconda simulazione che ha previsto l'uso di	00
0.01	una mesh adattativa	86
		00

5.32	Suddivisione del dominio impiegata per la terza simulazione della configu- razione <i>hollow culinder-flare</i> nel caso di mesh adattativa.		87
5.33	Step di raffinamento per la terza simulazione che ha previsto l'uso di una	•	
	mesh adattativa.	. 8	38
5.34	Confronto tra le diverse griglie in prossimità della zona interessata dalla		
	bolla di separazione.	. 8	88
5.35	Andamento del coefficiente di pressione a parete	. 8	89
5.36	Andamento del numero di Stanton a parete.	. !	90
5.37	Andamento del coefficiente di sforzo d'attrito a parete.	. !	91
5.38	Rappresentazione grafica delle ascisse normalizzate dei punti di separazione		
	e riattacco.	. !	92
5.39	Geometria e dimensioni della configurazione sharp double cone. [30]	. !	94
5.40	Parametri e risultati corrispondenti alle griglie più fini per i solutori G2 (a		
	sinistra) e DAC (a destra). [30]	. !	96
5.41	Suddivisione del dominio impiegata per la simulazione della configurazione		
	sharp double cone	. !	97
5.42	Step di raffinamento utili al raggiungimento della griglia finale impostata.	. !	98
5.43	Griglia di calcolo finale utilizzata per la simulazione della configurazione		
	sharp double cone	. !	99
5.44	Campo scalare di pressione normalizzata	. 10	00
5.45	Campo scalare di velocità normalizzata e <i>streamlines</i> nella zona interessata		
	dalla bolla di separazione.	. 10	01
5.46	Andamento del coefficiente di pressione a parete	. 10	02
5.47	Andamento del flusso di calore normalizzato a parete	. 10	03
5.48	Andamento del coefficiente di sforzo d'attrito a parete.	. 1	04
5.49	Oil flow visualization sul modello impiegato di sharp double cone. [29]	. 1	04
5.50	Schema rappresentativo dell'infittimeno in prossimità dello spigolo.	. 10	96
5.51	Esempio di $nAn$ individuato mediante debug per $CFL = 0.1$	. 1	06
5.52	Rappresentazione della struttura a gradino per tutti gli step di raffinamente	5. <b>1</b>	07
5.53	Andamento delle oscillazioni per il coefficiente di pressione a parete in		
	corrispondenza del bordo di fuga del secondo cilindro	. 10	07
5.54	Schema rappresentativo della modalità alternativa di tagging per un meto-		
	do immersed boundary	. 1	08

## Elenco delle tabelle

1	Dati disponibili per il <i>test case</i> in esame	44
2	Risultati ottenuti dalle diverse simulazioni al variare della griglia e dell'or-	
	dine dello schema	51
3	Condizioni ambiente per la prova sperimentale condotta all'ONERA	66
4	Coordinate adimensionali dei punti di separazione e riattacco nel caso delle	
	due simulazioni confrontate.	80
5	Coordinate adimensionali dei punti di separazione e riattacco nel caso delle	
	cinque simulazioni confrontate.	92
6	Condizioni ambiente e al contorno per la prova sperimentale condotta	
	all'ONERA	94
7	Coordinate adimensionali dei punti di separazione e riattacco per le tre	
	simulazioni a disposizione.	105

## Sommario

La tesi prevede una fase iniziale di studio di un codice CFD *immersed boundary* sviluppato dalla OPTIMAD Engineering srl, allo scopo di capirne la struttura e le modalità di utilizzo. Il secondo step consiste nell'estensione al caso assialsimmetrico a partire da quello bidimensionale: la trattazione coinvolge la variazione delle equazioni di governo e della formulazione ai volumi finiti derivante, da cui si deducono le modifiche da apportare al codice considerato ed alcuni accorgimenti significativi. Le operazioni fin qui effettuate vengono validate mediante l'uso di un caso test a basso numero di Reynolds, corrispondente al flusso assialsimmetrico completamente sviluppato all'interno di un tubo: è necessario imporre il profilo di velocità di Poiseuille sia come condizione iniziale sia come condizione in ingresso e ciò richiede un'ulteriore modifica del codice in esame. Il terzo step introduce il regime ipersonico e le sue caratteristiche principali al fine di presentare il caso test impiegato per la validazione del codice immersed boundary su corpi assialsimmetrici in regime ipersonico, che rappresenta l'obiettivo principale della tesi. Si sceglie di replicare una prova sperimentale condotta nella galleria del vento a bassa densità R5Ch dell'ONERA su una configurazione di hollow cylinder/flare a temperature relativamente basse in modo tale da non dover considerare gli effetti derivanti dal disequilibrio chimico e vibrazionale. Vengono descritti sia il setup sperimentale sia quello interno al codice e la fase di *Post Processing* prevede un'analisi qualitativa dei campi scalari delle grandezze fondamentali ed una quantitativa di alcuni parametri adimensionali, mediante il confronto con altri dati numerici nonché sperimentali. Il caso test in oggetto è particolarmente significativo poiché consente di studiare dei fenomeni tipici del regime ipersonico, quali la nascita di onde d'urto, l'interazione tra le stesse e l'evoluzione nel tempo di una bolla di separazione. La soluzione del caso è fortemente dipendente dalla griglia e, di conseguenza, si riporta un confronto aggiuntivo tra una mesh statica ed una adattativa, evidenziando i limiti di quest'ultima. A completamento di quanto fatto, si è scelto di replicare un'ulteriore prova sperimentale condotta all'ONERA e anche dalla NA-SA, la quale riguarda il flusso ipersonico attorno ad uno  $25^{\circ}/65^{\circ}$  sharp double cone. Esso consente di mettere in evidenza la criticità degli spigoli per i metodi *immersed boundary* e l'uso che segue del CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) allo scopo di risolvere il problema. L'ultimo step è focalizzato sul disequilibrio chimico e vibrazionale: una collaborazione con il Prof. D'Ambrosio ha permesso di impostare la struttura base di un codice Fortran, allo scopo di verificarne un altro scritto in C++ utile al calcolo dei termini sorgente per le equazioni di conservazione aggiuntive, in un caso non viscoso. Si desidera precisare che tale parte non è inserita nella tesi in oggetto, ma può essere il punto di partenza per un nuovo lavoro volto all'implementazione di fenomeni di alta temperatura nel codice CFD studiato e modificato.

## Abstract

The thesis foresees an initial phase of study of an immersed boundary CFD code developed by OPTIMAD Engineering srl in order to understand its structure and how it has been used. The second step consists in the extension to the axisymmetric case starting from the two-dimensional one: the discussion involves the modification of the governing equations and of the consequent finite volume formulation, from which we deduce the modifications to be made to the code in question and some relevant arrangements. The operations carried out so far are validated using a low Reynolds number test case, corresponding to the fully developed axisymmetric pipe flow: it is necessary to set the Poiseuille speed profile both as initial condition and as inlet condition and it requires another modification of the code under consideration. The third step introduces the hypersonic regime and its fundamental features in order to describe the test case used for the validation of the immersed boundary code on axisymmetric bodies in the hypersonic regime, that is the main purpose of the thesis. An experimental test performed in the low density wind tunnel R5Ch of ONERA concerning an hollow cylinder/flare configuration is selected because it is characterized by relatively low temperature in such a way that the effects of chemical and vibrational disequilibrium shall not be considered. Both the experimental setup and the code setup are described and the Post Processing includes a qualitative analysis of the scalar fields of key variables as well as a quantitative one, using the comparison with numerical and experimental data. The test case under investigation is particularly significant since it allows to study the typical phenomena of the hypersonic regime, such as the origin of shock waves, the interaction between them and the time evolution of a separation bubble. The solution of the case is highly grid-dependent and, consequently, an additional comparison between a static and an adaptive mesh is introduced, highlighting the limitations of the latter. To complete what has been done, it was decided to replicate another experimental test conducted at ONERA and also by NASA, which concerns hypersonic flow about a  $25^{\circ}/65^{\circ}$  sharp double cone. It allows to highlight the criticality of the edges for an immersed boundary method and the subsequent use of the CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) in order to solve the problem. The last step is focused on the chemical and vibrational disequilibrium: a collaboration with Prof. D'Ambrosio allowed to set the basic structure of a Fortran code, in order to verify another one written in C++, which is useful for calculating the source terms for additional conservation equations in an inviscid case. We wish to specify this part is not included in the thesis above, but may be the starting point for a new work aimed at implementing high temperature phenomena in the CFD code studied and modified.

## 1 Introduzione

L'aerodinamica presenta vari settori tra i quali quello relativo all'aerotermodinamica, che analizza la cinetica e la termodinamica delle miscele gassose e, in particolare, fa riferimento al regime di flusso caratterizzato convenzionalmente da un Mach superiore a 5. Esso prende il nome di ipersonico e risulta opportuno differenziarlo dal più comune supersonico poiché entrano in gioco dei fenomeni, i quali diventano sempre più significativi man mano che le velocità aumentano. L'alba del moto ipersonico risale al 1949, anno in cui per la prima volta un oggetto costruito dall'uomo fu capace di superare più di cinque volte la velocità del suono: si trattava del WAC Corporal, un razzo a forma di ago che costituiva il secondo stadio del V-2 di importazione tedesca. Dodici anni dopo, Yuri Gagarin diventò il primo uomo a volare in regime ipersonico all'interno della capsula sferica Vostok 1, la quale orbitò attorno alla terra e rientrò in atmosfera ad un Mach di circa 25. Le applicazioni legate al trasporto spaziale ne fanno uno degli ambiti più affascinanti sia per chi si occupa di ingegneria aerospaziale sia per chi va semplicemente ad interessarsi della comunità scientifica. Il suo studio è contraddistinto da uno sviluppo continuo dettato da motivazioni sia commerciali sia scientifiche, dal momento che si desidera ridurre le spese di accesso allo spazio a partire dalla realizzazione di lanciatori completamente o parzialmente riutilizzabili come il Falcon 9 progettato da SpaceX.

La fluidodinamica computazionale rappresenta uno strumento utile per la trattazione della tematica in oggetto, le cui peculiarità rendono indispensabile la validazione del codice in questo specifico regime. I casi test utilizzati sono riferiti a delle geometrie tali per cui si formano degli urti che poi interagiscono tra di loro, generando dei picchi di pressione e temperatura che vanno monitorati e tenuti in considerazione nel progetto, allo scopo di evitare delle catastrofi come nel caso dello Space Shuttle Columbia del 2003. Vale a dire che gli output delle simulazioni CFD assumono un ruolo importante nel progetto del sistema di protezione termica e nella determinazione delle caratteristiche aerodinamiche di un veicolo da rientro atmosferico. L'entità del riscaldamento aerodinamico si può valutare definendo la frazione di energia trasmessa al corpo rispetto a quella totale dissipata, denominata come  $\eta_Q$ . Si tratta di un parametro adimensionale ottenuto a partire dal rapporto tra il coefficiente d'attrito e il coefficiente di resistenza, il quale fornisce l'indicazione circa il rallentamento di un corpo in assenza di un eccessivo riscaldamento dello stesso: lo si vuole minimizzare aumentando la resistenza di forma a discapito di quella d'attrito e tale obiettivo può essere raggiunto mediante l'uso di forme tozze tipiche delle capsule. Inoltre, i bordi d'attacco sono arrotondati allo scopo di limitare i flussi termici, che diminuiscono all'aumentare del raggio di curvatura. Quanto esposto spiega l'uso di corpi assialsimmetrici ai fini della validazione del codice in oggetto.

La tesi è stata svolta in collaborazione con la OPTIMAD Engineering srl, una ex spin-off del Politecnico di Torino, che si occupa dello sviluppo di prodotti utili alla soluzione di problemi in ambito ingegneristico: si concentra sulla fluidodinamica computazionale e sugli aspetti ad essa legata come l'HPC (*High Performance Computing*) e va a differenziarsi dalla media per la capacità di fare innovazione e ricerca. L'obiettivo principale del lavoro in esame è la validazione del solutore CFD da loro sviluppato su corpi assialsimmetrici in regime ipersonico. Il software considerato, di nome **gloria**, consente di effettuare l'analisi di flussi in regime sia comprimibile sia incomprimibile ed il suo tratto peculiare sta nell'uso di un metodo *immersed boundary*. Esso viene descritto nel Capitolo 2 e, in breve, si differenzia dal solito approccio *body conformal* poiché permette di studiare il comportamento del flusso attorno ad un corpo mediante una griglia non conforme ai contorni dello stesso. Così facendo, si può impiegare una griglia cartesiana o una più elaborata griglia *octree*, all'interno della quale risulta necessario esplicitare la presenza dell'*IB* modificando localmente le equazioni di governo. Nel Capitolo di cui sopra viene spiegata la metodologia di introduzione delle condizioni al contorno, facendo una distinzione tra i due approcci possibili; si spiega nel dettaglio il metodo *ghost-cell*, utilizzato all'interno del codice, e si presenta brevemente quello *cut-cell* che ne rappresenta l'alternativa.



Figura 1.1: Rappresentazione del dominio conseguente all'utilizzo del *ghost-cell method*: si distinguono le celle fluide, dove vengono risolte le equazioni di governo, quelle solide, la cui soluzione è banale, e quelle fantasma utili per imporre la condizione al contorno in corrispondenza dell'*immersed boundary*. [28]

Il Capitolo 3 focalizza l'attenzione sulle caratteristiche principali di **gloria**: si introduce la libreria C++ usata al suo interno, il modulo adibito alla generazione della griglia, la compilazione del file.dat per farlo funzionare correttamente ed una descrizione semplificata dello schema numerico di base nel caso di flussi compressibili non viscosi. Il Capitolo 4 è di fondamentale importanza ai fini dello svolgimento della tesi poiché riporta l'estensione del codice al caso assialsimmetrico: si confrontano le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane con quelle in coordinate cilindriche, semplificate dall'assunzione di assialsimmetria; si evidenziano i termini aggiuntivi da tenere in considerazione e si deduce la nuova formulazione ai volumi finiti derivante. Le modifiche ed altri accorgimenti aggiuntivi vengono implementati all'interno del codice con un linguaggio di programmazione C++ e sono poi validati sfruttando un caso test a basso numero di Reynolds: si tratta di un flusso assialsimmetrico completamente sviluppato all'interno di un tubo, del quale si propone uno studio di convergenza della griglia ed un confronto tra gli schemi al I e II ordine. Si vuole precisare come esso richieda un ulteriore intervento, volto all'implementazione delle condizioni iniziale e d'ingresso relative al profilo di velocità di Poiseuille.

Il Capitolo 5 affronta il tema principale della tesi, ovvero l'applicazione del codice CFD modificato in regime ipersonico su corpi assialsimmetrici e lo fa a valle dell'introduzione della tipologia di moto in esame, dei suoi fenomeni caratteristici e delle peculiarità che contraddistinguono la relativa simulazione numerica. Il primo caso test riguarda un esperimento condotto nel centro di ricerca aerospaziale ONERA, all'interno della galleria a bassa densità R5Ch: si va a studiare una configurazione di hollow cylinder-flare, descrivendo sia il setup sperimentale sia l'impostazione del caso in **gloria**, si riportano alcune modifiche necessarie e si commentano i risultati in termini sia qualitativi sia quantitativi, mediante il confronto con dati sperimentali e altri dati numerici. La forte dipendenza della soluzione dalla griglia offre lo spunto per un confronto tra i risultati dedotti con una mesh statica e quelli ricavati a partire da una adattativa, evidenziando così i limiti delle due vie e proponendo alcune possibili migliorie. Il secondo caso test è riferito ad una configurazione di tipo sharp double cone, la quale è stata oggetto di prove sperimentali sia nella galleria a bassa densità dell'ONERA sia da parte della NASA: esso è utile ai fini del completamento della validazione effettuata perchè consente di porre maggiore rilievo sull'utilizzo del numero di Courant, in merito ai problemi derivanti dagli spigoli per i metodi IB.

La Figura 1.2 mostra uno dei possibili output delle simulazioni realizzabili con il codice sviluppato e validato: si tratta del campo scalare di velocità normalizzata, a cui vengono sovrapposte delle linee di corrente in prossimità della bolla di separazione. La geometria esaminata è riferita al veicolo spaziale Mars Pathfinder, utilizzato dalla NASA nell'omonima missione: si nota la presenza della tipica onda d'urto staccata rispetto al *leading edge*, del fascio d'espansione alla fine del cono anteriore e della bolla di separazione. La simulazione è stata condotta con successo ma viene presentata solo a titolo esemplificativo nell'Introduzione, allo scopo di mettere in luce una comune applicazione del lavoro svolto nella tesi in oggetto.



Figura 1.2: Campo scalare della velocità normalizzata e linee di corrente in corrispondenza della bolla di separazione: i risultati derivano da una simulazione in **gloria** mediante l'uso del codice sviluppato.

Nel corso delle ultime settimane di attività per la tesi, ho avuto il piacere di collaborare con il Professor Domenic D'Ambrosio presso il Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale: l'attività si è concentrata sugli effetti legati alle alte temperature che rendono indispensabile lo studio del flusso in condizioni di disequilibrio chimico e vibrazionale, di modo tale da assicurare una corretta predizione delle quantità d'interesse in fase di progetto. Sono state poste le basi per la verifica di un codice scritto in C++ da terzi, utile al calcolo dei termini sorgente per le equazioni di conservazione aggiuntive in un caso non viscoso: ciò è reso possibile mediante il confronto della storia temporale delle specie presenti con quella derivante da un codice Fortran, del quale è stata impostata la struttura principale; così facendo, esso può diventare oggetto di una nuova tesi al fine di implementare la simulazione di fenomeni di alta temperatura nel codice CFD sviluppato dalla OPTIMAD Engineering.

## 2 Generalità sui metodi immersed boundary

Il nome è stato utilizzato per la prima volta al fine di descrivere un metodo sviluppato da Peskin (1972) volto a simulare l'azione del cuore e del relativo flusso sanguigno, la cui particolarità risiedeva nell'utilizzo di una griglia cartesiana non conforme alla geometria dell'organo stesso [2]. Sebbene siano state sviluppate diverse varianti del metodo, l'articolo di Mittal e Iaccarino focalizza l'attenzione sul termine *immersed boundary (IB)* in relazione a tutti quei metodi numerici che consentono di studiare la presenza di un corpo all'interno di un flusso viscoso mediante l'uso di una griglia non conforme ai contorni dello stesso. Quanto detto differisce dal convenzionale approccio *body conformal*, il quale prevede l'impiego di una griglia strutturata o non che tiene conto della presenza del corpo e la cui generazione segue due fasi quali una prima mesh di superficie che va a discretizzare l'area delimitata da  $\Gamma_b$  ed una successiva di volume destinata al dominio esterno  $\Omega_f$  occupato dal flusso. La differenza è evidente in Figura 2.1 poiché il metodo *IB* è caratterizzato da una semplice griglia di calcolo cartesiana, la quale necessita poi di esplicitare la presenza del contorno del corpo, ovvero dell'*immersed boundary*, attraverso una modifica locale delle equazioni di governo.



Figura 2.1: Confronto tra una tipica griglia di calcolo conforme al corpo immerso (a sinistra) ed una *nonbody conformal* (a destra) legata al metodo *IB*. [2]

I vantaggi derivanti dall'uso di un metodo *immersed boundary* si possono articolare in due punti principali:

- 1. la generazione della griglia risulta di gran lunga semplificata dal momento che la complessità della geometria da discretizzare non ne influenza né la conformazione né la qualità. Di contro, gli approcci *body conformal* strutturati o non hanno spesso bisogno di processi iterativi, nei quali gli input forniti da colui che fruisce del codice sono molto importanti. In particolare, una griglia strutturata prevede la decomposizione di geometrie complesse in sottodomini, per ognuno dei quali viene realizzata una mesh: ciò implica sia una maggiore difficoltà nella scrittura dell'algoritmo sia la possibilità di avere una griglia meno *smooth* all'interfaccia tra i sottodomini. Si preferisce dunque l'uso della categoria non strutturata con la consapevolezza di un degrado della qualità quanto più la geometria è elaborata;
- 2. i corpi in movimento vengono trattati in modo abbastanza facile grazie alla stazionarietà ed indeformabilità di una griglia cartesiana. Una mesh conforme al corpo esige, invece, di essere aggiornata ad ogni passo temporale al fine di proiettarvi la nuova soluzione e questo incide negativamente in termini di semplicità, accuratezza, robustezza e costo computazionale.

L'impiego del metodo in esame presenta anche degli svantaggi quali la trattazione delle condizioni al contorno che influiscono circa l'accuratezza e la conservatività dello schema numerico, e il peggior controllo della risoluzione della griglia in prossimità del corpo da cui consegue un maggior numero di celle al crescere del numero di Reynolds. Si può verificare quanto scritto per un corpo 2D (Figura 2.1) di lunghezza caratteristica L e con spessore di strato limite  $\delta$ , dove  $\Delta_n$  e  $\Delta_t$  corrispondono rispettivamente alle spaziature della griglia body conformal in direzione normale e tangenziale. Ricordando che  $\delta \ll L$ , la taglia di una griglia conforme è proporzionale a  $(L/\Delta_t)(\delta/\Delta_n)$ , mentre quella cartesiana a  $(L^2/\Delta_n^2)$ , e assumendo che  $\Delta_t \propto L$  e  $\Delta_n \propto \delta$  segue che il rapporto tra le dimensioni di quest'ultima rispetto alla precedente varia come  $(L/\delta)^2$ . Uno strato limite laminare è contraddistinto da una relazione del tipo  $(L/\delta)^2 \propto Re^{0.5}$ , a sua volta proporzionale a Re per corpi bidimensionali: si deduce come la dimensione di una griglia cartesiana cresca più velocemente, tenendo però conto che solo una frazione rende il calcolo più oneroso perchè le equazioni non vengono risolte nelle celle all'interno del corpo, dove la soluzione è banale.

#### 2.1 Introduzione delle condizioni al contorno

Si consideri un caso analogo a quello di Figura 2.1, laddove il comportamento del flusso è regolato dal seguente sistema:

$$\begin{cases} L(\mathbf{U}) = 0 \ in \ \Omega_f \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_{\Gamma} \ su \ \Gamma_b \end{cases}$$
(2.1)

con L che è un operatore rappresentativo delle equazioni di Navier-Stokes e  $\mathbf{U} = (\vec{u}, p)$  [2]. I metodi convenzionali prevedono la discretizzazione della prima equazione del sistema 2.1 su di una griglia *body conformal* con la condizione al contorno che viene applicata direttamente sul contorno. Un metodo *immersed boundary*, invece, fa uso di una griglia cartesiana non conforme e la condizione al contorno viene imposta in maniera indiretta attraverso la modifica dell'equazione in oggetto: ciò avviene con l'aggiunta di un termine sorgente o *forcing function* che ha il compito di riprodurre l'effetto del *boundary*.

La relativa implementazione può essere sviluppata in due modi, noti come *continuous* forcing approach e discrete forcing approach, discussi di seguito.

#### 2.1.1 Continuous forcing approach

Il termine sorgente, indicato come  $\mathbf{f}_b$ , viene introdotto nel sistema di equazioni a livello continuo ottenendo:

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{f}_b \tag{2.2}$$

e tale forma viene poi discretizzata su una griglia cartesiana deducendo il seguente sistema discreto, il quale è risolto nell'intero dominio  $\Omega_f + \Omega_b$ :

$$[L]{\mathbf{U}} = {\mathbf{f}}_b$$

I metodi, basati sul *continuous forcing approach*, risultano così indipendenti dalla discretizzazione spaziale adoperata e sono particolarmente adatti per studiare dei casi in cui compaiono delle pareti elastiche. L'*immersed boundary* è rappresentato da una serie di fibre elastiche, la cui posizione è definita, con un approccio lagrangiano, da punti privi di massa che si muovono alla stessa velocità locale del fluido. L'effetto dell'*IB* viene replicato trasmettendo una forza, legata alla deformazione delle fibre attraverso la legge di Hooke, al fluido circostante: ciò viene realizzato mediante l'introduzione di un termine forzante nell'equazione di bilancio della quantità di moto.

Tale approccio può essere utilizzato anche per trattare corpi con pareti rigide con l'accortezza di assumere la rigidezza delle fibre elastiche molto elevata, da cui ne deriva un grande limite nell'uso. In particolare, i modelli così costruiti possono creare dei problemi per quanto riguarda l'accuratezza dello schema numerico e la stabilità ed una *forcing function* più o meno *smooth* è legata ad una rappresentazione più o meno *sharp* dell'*IB*, tanto più utile quanto più il numero di Reynolds è elevato. Inoltre, i metodi descritti prevedono la risoluzione delle equazioni anche all'interno del corpo immerso e questo può diventare molto dispendioso per flussi ad alto numero di Reynolds, come scritto all'inizio del capitolo.

#### 2.1.2 Discrete forcing approach

Le equazioni di governo vengono inizialmente discretizzate su di una griglia cartesiana senza tenere in considerazione dell'*immersed boundary*, da cui:

$$[L]{\mathbf{U}} = 0 \tag{2.4}$$

La presenza di quest'ultimo comporta la modifica del sistema di equazioni 2.4 con l'aggiunta di un vettore di termini noti  $\{\mathbf{r}\}$  legato alle condizioni al contorno sulla superficie immersa, ottenendo:

$$[L']{\mathbf{U}} = {\mathbf{r}}$$

con L' rappresentativo di un operatore discreto modificato. Si pone  $\{\mathbf{f}'_b\} = \{\mathbf{r}\} + [L]\{\mathbf{U}\} - [L']\{\mathbf{U}\}\ e$  si riscrive il sistema 2.5, in analogia con quanto fatto nella sezione precedente, come:

$$[L]{\mathbf{U}} = {\mathbf{f}'_b}$$
(2.6)

L'approccio in esame è fortemente dipendente dalla discretizzazione utilizzata e difatti il termine sorgente viene aggiunto in una fase successiva: ciò permette un controllo diretto di accuratezza, stabilità e conservatività dello schema.

I metodi basati sul discrete forcing approach sono suddivisibili in quelli che impongono le condizioni al contorno indirettamente sull'IB e quelli che lo fanno direttamente. I primi deducono il termine forzante da una discretizzazione delle Navier-Stokes, la quale non presenta alcuna modifica dovuta alla presenza dell'*immersed boundary*, nella forma  $[L]{\mathbf{U}^*} = 0$  dove  ${\mathbf{U}^*}$  è una stima del campo di velocità vero. I secondi, di maggiore interesse nella tesi in oggetto, modificano lo stencil computazionale in prossimità dell'IBal fine di imporre la condizione al contorno in maniera diretta: così facendo, viene garantita una rappresentazione netta del contorno, la quale è fondamentale se si vuole risolvere accuratamente lo strato limite per elevati numeri di Reynolds. Nelle sezioni successive vengono descritti due metodi che fanno parte di questa tipologia.

A completamento di quanto detto, il *discrete forcing approach* non introduce vincoli aggiuntivi circa la stabilità dello schema, disaccoppia la risoluzione delle equazioni per le celle fluide e solide (desiderabile per flussi ad elevato numero di Reynolds) e richiede, a differenza del *continuous forcing approach*, una condizione al contorno per la pressione sull'*immersed boundary*.

#### 2.2 Metodo ghost-cell

L'approccio in esame deriva dal *ghost-fluid method* sviluppato da Fedkiw e consente di imporre una corretta condizione al contorno all'interfaccia estrapolando il valore nelle cosiddette *ghost cells* a partire dalle celle fluide. Si tenga presente che queste particolari celle sono definite come quelle presenti all'interno del solido, ma aventi almeno una cella vicina appartenente al dominio fluido [1].

Risulta opportuno introdurre brevemente il concetto di *level set function*, la quale è stata ideata da Osher e Sethian [4] e consente di specificare la posizione dell'interfaccia solida nel dominio computazionale valutando la distanza tra un punto sulla parete ed uno appartenente alla normale alla parete stessa. In particolare, la funzione è definita come:

$$\varphi(x) = \begin{cases} dist_{\Sigma}(x) & al \ di \ fuori \ del \ solido \\ -dist_{\Sigma}(x) & all'interno \ del \ solido \end{cases}$$
(2.7)

dove  $dist_{\Sigma}(x)$  rappresenta il modulo dell'informazione geometrica necessaria. L'isolinea a cui corrisponde un livello di *level set* pari a zero indica il contorno  $\Sigma$  del corpo immerso, un valore positivo è assunto all'esterno del corpo ed uno negativo al suo interno come si evince dalla Figura 2.2.



Figura 2.2: Esempio di utilizzo della *level set function* nel caso del bordo di attacco di un profilo NACA 0012.

Inoltre gode di un'utile proprietà, ovvero il gradiente della *level set function* consente di ricavare il vettore normale uscente dal corpo come di seguito [1]:

$$\mathbf{n}(x) = \nabla \varphi(x) \tag{2.8}$$

Il primo passo del metodo consiste nella definizione dell'*immersed boundary*, delle celle fluide, solide e *ghost*: si possono seguire diverse strade, che non vengono riportate nella trattazione corrente, ma la situazione finale è visibile in Figura 2.3.



Figura 2.3: Schema esemplificativo di un *immersed boundary* su di una generica mesh curvilinea con indicazione delle varie tipologie di celle. [3]

L'obiettivo è la ricerca di uno schema che permetta di calcolare il valore delle variabili in ogni nodo delle *ghost cell* al fine di soddisfare la condizione al contorno sul punto corrispondente, posizionato sull'*immersed boundary* e ricavato a partire dalla relativa normale rispetto al nodo fantasma. Le condizioni al contorno da applicare possono essere di due tipi, quali:

$$\phi_{BI} = \Phi \quad Dirichlet \tag{2.9}$$

$$(\hat{n} \cdot \nabla \phi)_{BI} = \Psi \quad Neumann \tag{2.10}$$

laddove  $\phi$  è una generica variabile. Si procede estendendo la normale al contorno del corpo (*BI*) di una quantità pari alla distanza tra IB e nodo della *ghost cell* e si definisce convenzionalmente l'estremo come *image-point*: si vuole esprimere il valore di quest'ultimo in funzione di quello dei nodi circostanti e, di conseguenza, usarlo assieme alla condizione al contorno per dedurre le grandezze d'interesse nel nodo fantasma (Figura 2.4). Una volta note le coordinate dell'*image point* nel dominio computazionale, il valore viene espresso attraverso un'interpolazione bilineare nella forma:

$$\phi = C_1 y_{1_{IP}} y_{2_{IP}} + C_2 y_{1_{IP}} + C_3 y_{2_{IP}} + C_4 \tag{2.11}$$

dove i coefficienti incogniti  $C_i$  si ottengono a partire dai valori delle variabili nei quattro nodi circostanti l'*image point* [3].



Figura 2.4: Schema esemplificativo di Figura 2.3 con i tre possibili casi riguardanti le celle che circondano l'*image point*. [3]

La Figura 2.4 mette in evidenza tre possibili situazioni, delle quali la più semplice risulta quella in cui i quattro nodi appartengono alla regione fluida, risolvibile mediante la seguente equazione:

$$\{\phi\} = [V]\{C\} \tag{2.12}$$

da cui, esplicitando i vari termini:

$$\begin{cases} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{cases} = \begin{bmatrix} y_1 y_2 |_1 & y_1 |_1 & y_2 |_1 & 1 \\ y_1 y_2 |_2 & y_1 |_2 & y_2 |_2 & 1 \\ y_1 y_2 |_3 & y_1 |_3 & y_2 |_3 & 1 \\ y_1 y_2 |_4 & y_1 |_4 & y_2 |_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{cases}$$
(2.13)

dove V è la matrice di Vandermonde corrispondente alla schema d'interpolazione bilineare. Le costanti si possono ottenere invertendo l'equazione 2.12 e il valore all'*image point* si può desumere dalla 2.11 come:

$$\phi_{IP} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \phi_i \tag{2.14}$$

dove  $\alpha_i$  è legato alle costanti e alle coordinate.

Il secondo caso si verifica quando uno dei nodi circostanti l'*image point* coincide con uno fantasma e, al suo posto, viene usata la condizione al contorno al *body-intercept point* (*BI* in Figura 2.4) così da ottenere uno schema ben posto. La presenza della condizione al contorno di Dirichlet si tiene in considerazione semplicemente sostituendo il valore noto assunto nel *BI* nella posizione corrispondente al nodo fantasma nel vettore  $\{\phi\}$ . Una condizione alla Neumann necessita, invece, di una trasformazione per essere espressa in funzione dello schema d'interpolazione bilineare come segue:

$$N_1(C_1 y_{2_{BI}} + C_2) + N_2(C_1 y_{1_{BI}} + C_3) = \Psi$$
(2.15)

Subiscono, di conseguenza, delle modifiche anche la matrice di Vandermonde e il vettore  $\{\phi\}$ , da cui assumendo che il quarto nodo dello stencil corrisponda a quello fantasma, si

ricava:

$$V = \begin{bmatrix} y_1 y_2 |_1 & y_1 | 1 & y_2 | 1 & 1 \\ y_1 y_2 |_2 & y_1 | 2 & y_2 | 2 & 1 \\ y_1 y_2 |_3 & y_1 | 3 & y_2 | 3 & 1 \\ N_1 y_{2_{BI}} + N_2 y_{1_{BI}} & N_1 & N_2 & 0 \end{bmatrix}$$
(2.16)

$$\{\phi\} = \begin{cases} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \Psi \end{cases}$$
(2.17)

Così facendo si deduce un caso analogo al precedente e si può determinare la soluzione ricorrendo all'equazione 2.14. Il terzo caso si verifica quando è presente più di un *ghost-node* all'interno dello stencil e si può trovare come l'utilizzo del relativo valore della variabile rende lo schema consistente con la solita procedura risolutiva, tale per cui il nodo non ha bisogno di alcun trattamento particolare.

Una volta trattate tutte le diverse possibilità, si può valutare il valore della variabile nel nodo fantasma ricorrendo ad un'interpolazione lineare lungo la normale da cui:

$$\phi_{GC} = \zeta \phi_{IP} + \Gamma \tag{2.18}$$

 $\operatorname{con}$ 

$$\begin{cases} \zeta = -1 \ e \ \Gamma = 2\Phi \ Dirichlet \\ \zeta = 1 \ e \ \Gamma = \Psi \cdot \Delta l \ Neumann \end{cases}$$
(2.19)

con  $\Delta l$  pari alla lunghezza della normale nel dominio computazionale. Sostituendo l'equazione 2.14 nella precedente si deduce quella finale:

$$\phi_{GC} = \zeta \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \phi_i + \Gamma \tag{2.20}$$

la quale può essere risolta assieme alle equazioni di governo per i nodi fluidi e la soluzione banale  $\phi = 0$  per quelli solidi [3].

L'accuratezza dei *ghost-cell methods* dipende da come vengono calcolati i valori nelle celle fantasma e, a parità di risoluzione della griglia cartesiana di base, essa risulta minore di quella dei metodi *cut-cell* a causa della rappresentazione implicita dell'interfaccia solida. I vantaggi principali risiedono nella facile implementazione e nell'efficienza computazionale poiché non sono previste né modifiche circa il calcolo dei flussi né variazioni della forma delle celle.

Si riporta, in breve e per completezza, l'idea alla base dell'articolo di Chi, Lee e Im [5] nel quale viene proposta una soluzione al degrado dell'accuratezza derivante da un'interpolazione bilineare incompleta per le ghost-cells vicino al contorno. Si parla di un improved ghost-cell method: quando la distanza tra il nodo fantasma e l'IB è minore di una certa soglia specificata, l'image-point viene proiettato ad una quota  $\delta$  tale da essere completamente circondato da quattro celle fluide al fine di garantire un'interpolazione bilineare completa. Casi bidimensionali prevedono tipicamente  $\delta = \sqrt{2}\Delta x$ , dove  $\Delta x$  è la dimensione della cella mentre  $\delta$  non può assumere valori troppo elevati perchè ne risulterebbe una condizione al contorno fisicamente non corretta. Una particolare attenzione viene riservata ai casi nei quali un'onda d'urto è posizionata tra l'image-point e l'extra image-point, ovvero quello a distanza  $\delta$ , dal momento che si deducono una pressione o densità negative nella cella fantasma. Si risolve tale problema mediante l'introduzione di un parametro così definito:

$$\alpha = max \left\{ \frac{max(p|_{image}, p|_{extra})}{min(p|_{image}, p|_{extra})}, \frac{max(\rho|_{image}, \rho|_{extra})}{min(\rho|_{image}, \rho|_{extra})} \right\}$$
(2.21)

Quando esso è al di sopra di un *threshold* imposto  $\alpha_0$ , l'estrapolazione per le *ghost-cells* viene ridotta ad un primo ordine; inoltre, dei valori tipici risultano quelli compresi tra 1.2 e 2.0 con la soluzione che è più stabile per quelli bassi e più accurata per quelli alti.

#### 2.3 Metodo cut-cell

Tale approccio non viene esaminato nel dettaglio come il precedente dal momento che non se ne fa uso nel codice implementato e adoperato per le varie simulazioni descritte successivamente. Il metodo risulta però interessante in quanto è l'unico, finora introdotto, capace di garantire le leggi di conservazione della massa e della quantità di moto in prossimità dell'*immersed boundary* e, quindi, in tutto il dominio: è correlato principalmente ad uno schema ai volumi finiti. Il principio base risiede nell'identificare le celle che sono attraversate dall'*IB*: se il relativo centro cella cade nel fluido, la parte che cade nel solido viene tagliata ottenendo delle celle caratterizzate da una nuova forma; viceversa, le celle vengono incorporate da quelle vicine [2]. Così facendo, si formano dei volumi di controllo trapezoidali caratterizzati dall'unione di più celle all'esterno del corpo e lo si può vedere in Figura 2.5.



Figura 2.5: Schema della cella trapezoidale formatasi in corrispondenza dell'IB con i relativi flussi f (a sinistra) e stencil computazionale utile al calcolo di  $f_{sw}$  (a destra). [2]

I flussi utili nella discretizzazione ai volumi finiti delle Navier-Stokes necessitano di essere calcolati sulle facce delle celle trapezoidali. L'idea è quella di esprimere una variabile di flusso nota mediante una funzione interpolante polinomiale bidimensionale come:

$$\phi = C_1 x_1 x_2^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_1 x_2 + C_4 x_1 + C_5 x_2 + C_6 \tag{2.22}$$

dove  $C_i$  indica i coefficienti incogniti ricavabili a partire dal valore assunto da  $\phi$  nei punti dello stencil computazionale (Figura 2.5). I flussi, come ad esempio  $f_{sw}$ , vengono dedotti proprio a partire dalle grandezze note nei sei vertici dello stencil. L'equazione 2.22 è la forma più compatta da cui deriva uno schema accurato al secondo ordine sia da un punto di vista locale sia globale, il quale soddisfa le leggi di conservazione indipendentemente dalla risoluzione della griglia. Nonostante il vantaggio appena esposto, il *cut-cell method* può portare alla formazione di celle molto piccole e, al fine di rispettare le condizioni di stabilità, ciò implica dei ridotti intervalli temporali ed un costo computazionale maggiore [5].

## 3 Caratteristiche principali del solutore CFD gloria

Il codice di calcolo, utilizzato e modificato nell'ambito della tesi, è sviluppato dalla OP-TIMAD Engineering srl: prevede una formulazione ai volumi finiti e consente di studiare flussi in regime comprimibile e non mediante l'applicazione di un metodo *immersed boundary*, già descritto nel Capitolo 2.

Le sezioni successive, dalla 3.1 alla 3.3, sono utili a focalizzare l'attenzione sulla libreria C++ usata al suo interno, sulla generazione della griglia e sulle informazioni necessarie affinché esso funzioni nel modo corretto. Le restanti, invece, offrono una panoramica dello schema numerico utilizzato all'interno del codice nel caso semplice di flussi compressibili non viscosi.

### 3.1 bitpit

Si tratta di una libreria open source per High Perfomance Computing a livello scientifico sviluppata dalla OPTIMAD Engineering srl: l'obiettivo è quello di semplificare la scrittura dei programmi fornendo i building blocks più comuni e necessari alle varie applicazioni. Si articola in una serie di moduli, contenuti nelle sorgenti, a partire da quelli base come operatori e containers, per poi proseguire con funzioni di basso livello come la gestione di Input/Output o di algebra lineare e di alto livello riguardanti algoritmi, mesh e level set. Essi non sono installati di default ma vengono aggiunti qualora fossero necessari, a cominciare dal modulo LA (Linear Algebra) che contiene le operazioni fondamentali tra vettori e matrici e rappresenta il minimo indispensabile per assicurare il funzionamento di bitpit. Si tenga presente che dei moduli sono in conflitto tra di loro, mentre alcuni non possono essere installati in assenza di altri.

La costruzione o *build* del programma segue una prima fase di compilazione, durante la quale si leggono le sorgenti, si assemblano una volta rispettate certe relazioni e si genera un *file object* (.o) ed una seconda di *linking*, dove si costruisce l'eseguibile unendo i vari file.o. L'ambiente Linux prevede l'esistenza di due diverse tipologie di librerie, generate in base al caso specifico, quali:

- 1. statiche (.a) se vengono installate nell'eseguibile del programma prima che questo possa essere lanciato. Vale a dire che ogni applicazione possiede una copia distinta e, se essi vengono eseguiti contemporaneamente nello stesso sistema, i requisiti di memoria si moltiplicano anche se ospitano funzioni identiche;
- 2. dinamiche (.so) se non sono inserite direttamente nel file eseguibile ma esiste una singola copia di un modulo condivisa tra diverse applicazioni nello stesso sistema operativo. Ciò comporta dei programmi più snelli, tali per cui si risparmiano delle risorse per farli girare.

Il codice può essere compilato, a seconda delle esigenze, in diversi modi quali *Debug* se viene eseguito così come è scritto, *Release* se viene stravolto ai fini di un'ottimizzazione e *RelwithDebInfo* se mantiene la struttura originaria con una migliore performance. Le modalità hanno un impatto sulla velocità di calcolo ma non devono averlo sui risultati, a meno che non siano presenti problemi come il passaggio alle subroutine o l'allocazione di memoria, i quali sono nascosti nella modalità utile al *debugging*.

Si precisa come venga installata anche la libreria, non più open source, **bitpit-private** la quale risulta molto utile in **gloria** e richiede l'aggiunta del modulo di algebra lineare per sistemi sparsi **petsc**.

## 3.2 PABLO - PArallel Balanced Linear Octree

**PABLO** è il modulo di **bitpit** adibito alla generazione della griglia di tipo *octree* in un caso tridimensionale o *quadtree* nel 2D, situazione d'interesse nella tesi in oggetto. La Figura 3.1 mette in evidenza la proprietà di questa tipologia di reticolo: ciascun ottante *parent*, per esempio A, viene diviso in 4 ottanti *children*, come 1, 2, 3 e 4, e così via fino al completamento della discretizzazione.



Figura 3.1: Particolare della suddivisione di un dominio quadtree.

Il numero massimo di livelli di raffinamento possibili è pari a 20 e si può impostare il salto massimo di livello tra due celle contigue, il quale è solitamente pari a 1 in modo tale da avere uno schema robusto. La zona di transizione della mesh tra una taglia e l'altra può essere ulteriormente estesa diminuendo il parametro max\_grad, presente all'interno del ControlDict.dat descritto successivamente, il cui valore massimo è 1 al fine di assicurare il requisito minimo evidenziato.

Si precisa come il modulo **surfunstructured** gestisca la mesh di superficie, la quale risulta 2D o 1D rispettivamente se lo spazio è tridimensionale o bidimensionale; un discorso analogo vale per il modulo **volunstructured** il cui elemento base 3D è un tetraedro mentre **volcartesian** e **voloctree** sono i moduli riferiti alla mesh di volume nei casi di griglia cartesiana o *quadtree/octree*.

La generazione della griglia o *Preprocess* e la successiva fase di *Computation* possono essere eseguiti in parallelo, ovvero una singola riga di codice viene letta da più esecutori chiamati *task*. In particolare, si distinguono due tipologie di parallelismo:

- a memoria condivisa, dove tutti i *thread* sono abilitati alla lettura di qualsiasi posizione in memoria. Vale a dire che, a fronte di 4 core fisici per esempio, se ne hanno 8 virtuali e si vanno a sfruttare le latenze del codice migliorando il multitasking e le prestazioni dello stesso fino a circa il 50%, non potendo ovviamente eguagliare una CPU con 8 core fisici. Tale logica è alla base della tecnologia *Hyper-Threading* di Intel ma non viene utilizzata in **bitpit**;
- 2. a memoria distribuita, dove si parla di processi e si va, a titolo d'esempio, a dividere la memoria in 4 parti in modo da bilanciare il carico computazionale e scambiando le informazioni tramite il protocollo MPI (*Message Passing Interface*), da abilitare con un'apposita libreria. **bitpit** agisce secondo tale logica, la quale può incorrere in problemi di *overhead* facilmente evitabili con una buona ottimizzazione e può raggiungere un'efficienza comparabile con la precedente.

### 3.3 ControlDict

Viene così chiamato il file.dat, letto poi dal solutore, che deve essere compilato opportunamente nelle varie sezioni, articolate come segue:

- Solver settings
  - *Solver global settings*, dove è possibile scegliere quale tipologia di calcolo effettuare in termini di dimensione, caso comprimibile e contributo della diffusione per esempio;
  - Normalization, dove si possono impostare alcune delle grandezze di riferimento le quali risultano particolarmente utili perchè **gloria** risolve delle equazioni in forma adimensionale. Si tenga in considerazione che il codice è scritto e pensato per risolvere il problema di Riemann a partire da una costante universale dei gas normalizzata pari a 1 e, di conseguenza, nel *Preprocess* viene suggerito il valore appropriato di una grandezza di riferimento tale da ottenere il risultato desiderato;
  - *Numerical fluxes*, dove si inseriscono l'ordine di accuratezza dello schema utilizzato per il calcolo dei flussi e la tipologia di *limiter* preferita, la quale sarà presa in considerazione solo per il secondo ordine;
  - *Time integration*, dove si settano il metodo utilizzato per avanzare nei vari step temporali, il relativo ordine e il CFL o numero di Courant che è legato alla stabilità dello schema.
- Stopping criteria, dove si stabilisce un criterio come il numero di iterazioni o il valore dei residui e, una volta raggiunto, la simulazione termina la fase di Computation;
- *Fluid settings*, dove si dichiara il modello di fluido utilizzato, per esempio l'aria, e le relazioni che vengono richiamate per il calcolo delle grandezze relative come l'equazione di stato dei gas perfetti o la legge di Sutherland;
- Geometry settings
  - Region settings, dove è possibile caricare le regioni e stabilirne il verso della normale. Esse sono rappresentate da geometrie 1D, all'interno di uno spazio bidimensionale, e vengono definite con dei file.dgf (.stl nel caso 3D) attraverso un elenco di punti ed una rispettiva matrice di connessione. Risulta di fondamentale importanza scrivere i punti secondo un certo ordine di percorrenza al fine di ottenere la normale desiderata. Le regioni sono utili sia per inizializzare parti del campo sia per raffinare o deraffinare alcune zone del dominio computazionale, laddove la transizione tra le varie taglie di mesh è gestita automaticamente da gloria;



Figura 3.2: Esempio di utilizzo di una regione rettangolare per raffinare la mesh in corrispondenza del *trailing edge* di un profilo NACA 0012.

- *Body settings*, dove si inseriscono i corpi nello stesso formato delle regioni e si assegna loro una opportuna condizione al contorno. Si ricorda come le equazioni di governo non siano risolte al loro interno poiché la soluzione è banale e, di conseguenza, la griglia sarà quanto più rada possibile.
- Test case settings
  - *Initial data*, dove si inizializzano le regioni con certi valori di velocità, pressione e temperatura;
  - *Far field data*, dove si assegnano dei valori, tipicamente coincidenti con quelli iniziali, alla corrente indisturbata di monte;
  - *List of boundary conditions*, dove si elencano tutte le condizioni al contorno poi utilizzate.
- Mesh settings
  - Settings for background quadtree mesh, dove si definisce il dominio computazionale, quadrato per quanto detto nella sezione 3.2, e si assegnano le condizioni al contorno a ciascuno dei quattro lati. Si imposta una taglia globale della mesh e si possono introdurre delle *regions* o dei box al fine di raffinarla secondo una *minimum cell size* ed una *maximum cell size*;
  - *Mesh update settings*, dove si può scegliere se ricorrere ad una mesh progressiva indicando il numero di step, il *threshold* iniziale raggiunto il quale comincia il raffinamento e il criterio di transizione da uno step all'altro, oppure una *Adaptive Mesh Refinement*, la quale si adatta al variare della soluzione come nel caso di spostamento della posizione di un urto.
- *Output settings*, dove è possibile decidere il numero di iterazioni dopo il quale si stampano i risultati sullo schermo e viene scritto un file di salvataggio automatico. A tale proposito, quando si esegue un conto in parallelo, il dominio viene diviso in

#### 3.4 Schema al secondo ordine per flussi euleriani compressibili

La sezione riporta la descrizione di uno schema al secondo ordine ispirato al metodo *ghost-cell*, la cui trattazione viene semplificata nel caso di flussi compressibili non viscosi ovvero facendo riferimento alle equazioni di Eulero. Il lavoro di Gorsse e al. [1] prevede un classico schema ai volumi finiti, basato sulla risoluzione di un problema di Riemann approssimato, all'interno del dominio fluido, mentre sul *boundary* se ne risolve uno appropriato mediante una opportuna definizione della velocità della discontinuità di contatto. Tale idea è alla base del solutore CFD **gloria** e può essere applicata anche a schemi il cui ordine di accuratezza è superiore al secondo.

#### 3.4.1 Trattazione del dominio fluido

Le equazioni di governo di un flusso compressibile inviscido sono quelle di Eulero, così formulate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I}\right) = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( (E+p)\mathbf{u} \right) = 0 \tag{3.3}$$

Esse, nel caso di gas perfetto, sono accoppiate con le seguenti relazioni:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2, \quad p = \rho RT, \quad c = \sqrt{\gamma RT}$$
(3.4)

Le equazioni si possono scrivere, in modo compatto, nella forma integrale conservativa dove  $\mathbf{W}$  rappresenta il vettore delle variabili conservative mentre  $\mathbf{F}(\mathbf{W})$  quello dei flussi convettivi, da cui:

$$\int_{V} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dV + \int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$
(3.5)

 $\cos$ 

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{cases}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{cases} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u}^2 + p \\ (E+p)\mathbf{u} \end{cases}$$
(3.6)

Si consideri un caso bidimensionale con una griglia cartesiana equispaziata nelle direzioni  $x \in y$  rispettivamente di  $\Delta_x \in \Delta_y \in u$  e su di essa si integra l'equazione 3.5, ricavando:

$$\frac{dW_{ij}}{dt} + \frac{1}{\Delta_x} (F_{i+1/2j}^x - F_{i-1/2j}^x) + \frac{1}{\Delta_y} (F_{j+1/2i}^y - F_{j-1/2i}^y) = 0$$
(3.7)

laddove  $W_{ij}$  è la media integrale delle variabili conservative nella cella ij considerata e  $F_{i+1/2j}^x$  il flusso medio uscente dall'interfaccia i + 1/2j lungo la direzione x. Quest'ultimo

viene calcolato con un solutore approssimato alla Osher, nel quale si approssimano tutte le onde con dei fasci isentropici quindi le espansioni e le *contact surface* rimangono tali, mentre si commette un errore con gli urti tanto più grande quanto essi sono più forti. Si può scrivere allora:

$$F_{i+1/2j}^{x} \approx F^{x}(W_{-}) + \int_{W_{-}}^{W_{+}} A_{x}^{-}(W)dW$$
(3.8)

dove  $W_-$  e  $W_+$  sono i valori delle variabili conservative a sinistra e a destra dell'interfaccia in esame e dedotti a partire da una ricostruzione MUSCL (*Monotonic Upwind Scheme* for Conservation Laws) delle variabili primitive, mentre  $A_x^-(W)$  è la parte negativa di  $A_x(W) = \partial F^x / \partial W$  [6, 8].

L'integrazione nel tempo prevede l'uso di uno schema di Runge-Kutta al secondo ordine dove  $R(W^n)$  indica il *right-hand side* (RHS) dell'equazione 3.7:

$$\begin{cases} W^{(1)} = W^n - \Delta t F(W^n) \\ W^{n+1} = W^n - \frac{\Delta t}{2} (F(W^n) + F(W^{(1)})) \end{cases}$$
(3.9)

#### 3.4.2 Gestione dell'immersed boundary

La condizione al contorno sull'interfaccia solida deriva dall'assunzione di impermeabilità e, volendo raggiungere il secondo ordine in termini di accuratezza, è necessario ricorrere all'uso della *level set function* come già scritto nella sezione 2.2.

L'obiettivo è quello di modificare il classico problema di Riemann in prossimità dell'interfaccia più vicina al contorno del corpo, così da poter imporre la condizione al contorno all'*IB* con l'accuratezza desiderata.

Si consideri, a titolo esemplificativo, un caso 1D come quello in Figura 3.3: la procedura consiste nella definizione di uno stato fluido fittizio alla destra dell'interfaccia i + 1/2 in modo da ricavare la velocità della discontinuità di contatto  $u^*$ , la quale deriva dalla soluzione del problema di Riemann tra  $i \in i+1$ . Essa deve essere tale da imporre la condizione al contorno desiderata in  $x_b$ , che coincide con l'*immersed boundary* e per la quale difatti la funzione level set  $\varphi(x_b) = 0$ : per esempio  $u_b = u(x_b) = 0$  se il corpo è fermo.



Figura 3.3: Schema di un dominio 1D raffigurante i nodi della mesh, l'IB e le pendenze utilizzabiili nel calcolo della velocità all'interfaccia i + 1/2.

La velocità  $u^*$  può essere calcolata ricorrendo ad un'interpolazione lineare del tipo:

$$u^* = u_b + \left(\frac{1}{2} - d\right) s_b$$
 (3.10)

dove  $u_b$  è la velocità della parete,  $d = \frac{\varphi_i}{\Delta x}$  una distanza adimensionale con  $\varphi_i$  pari al valore assunto dalla *level set* nel centro cella i-esimo e  $s_b = ds_1 + (1-d)s_2$  una generica pendenza

dedotta come media pesata delle altre due presenti in Figura 3.3, ovvero:

$$s_1 = \frac{u_b - u_i}{d}, \ s_2 = \frac{u_b - u_{i-1}}{1 + d}$$
 (3.11)

Così facendo, è possibile evitare vincoli circa la stabilità quando  $x_b$  è vicino a  $x_i$ ; nel caso in cui fosse necessario l'utilizzo di un *limiter*, si definisce  $s_b^l = minmod(s_b, s_3)$  con  $s_3 = u_i - u_{i-1}$ . A tale proposito, il *limiter* è l'operatore matematico che permette di decidere quale pendenza assegnare ad un certo centro-cella e viene definito in generale come [7]:

$$\sigma_P = LIMITER\left[\frac{\varphi_E - \varphi_P}{x_E - x_P}, \frac{\varphi_P - \varphi_W}{x_P - x_W}\right] = LIMITER[\sigma_P^L, \sigma_P^R]$$
(3.12)



Figura 3.4: Schema rappresentativo dei centri-cella e delle pendenze utili alla funzione *limiter*. [7]

In riferimento alla Figura 3.4 e nel caso particolare del *minmod*, si può scrivere la limiter function  $\Lambda$ , dove  $\theta_P = \sigma_P^R / \sigma_P^L$ :

$$\Lambda(\theta_P) = max(0, min(1, \theta_P)) \tag{3.13}$$

da cui si deduce  $\sigma_P = \Lambda(\theta_P) \sigma_P^L$ .

Lo scopo iniziale, ovvero la modifica locale del problema di Riemann, passa per la definizione di uno stato fittizio alla destra dell'interfaccia  $x_{i+1/2}$  quale  $U_+ = (-u_- + 2u^*, p_-, c_-)$ : esso viene accoppiato a quello sinistro vero  $U_- = (u_-, p_-, c_-)$ , ottenuto con una ricostruzione MUSCL, da cui si deduce la velocità della discontinuità di contatto pari a  $u^*$ . Si può notare come, essendo la pressione e la velocità del suono identiche nei due stati, le onde della prima e della terza famiglia rappresentano o delle espansioni o degli urti.

Lo schema introdotto non è conservativo in prossimità dell'interfaccia  $x_{i+1/2}$ , ma ciò risulta trascurabile dal momento che gli altri punti sono caratterizzati da un'accuratezza al secondo ordine per la pressione e tra il primo e il secondo per le altre grandezze: quanto esposto viene verificato con il caso di una riflessione su di una parete localizzata in un nodo della griglia, dove si impone la BC senza alcuna approssimazione.

Si vuole estendere quanto detto ad un caso bidimensionale mediante l'applicazione del metodo presentato nelle due direzioni, ma occorre prestare attenzione alla nuova condizione al contorno da imporre quale  $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$  dove  $\mathbf{u}_A$  è la velocità del flusso a parete e  $\mathbf{n}_A$  il vettore normale uscente dal corpo. In particolare, risulta necessario valutare l'orientamento di  $\mathbf{n}_A$  rispetto alla normale alla faccia della cella  $\mathbf{n}_{cell}$  su cui si vuole modificare localmente il problema di Riemann: se sono perpendicolari l'effetto è praticamente nullo, in alternativa bisogna valutare l'entità di  $\alpha = \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_{cell}$  e, ad esempio, se esso è pari a uno si torna al caso 1D. La modifica del problema di Riemann all'interfaccia (i + 1/2, j) prevede il calcolo dello stato sinistro  $U_- = (u_-, v_w, p_-, c_-)$  mediante una ricostruzione MUSCL

mentre quello destro, come si evince dalla Figura 3.5, è  $U_+ = (-u_- + 2u_w, v_w, p_w, c_w)$ . Le grandezze con il pedice w sono dettate da una media pesata, dipendente da  $\alpha$ , di variabili simili a quelle del caso 1D e di altre derivanti da una estrapolazione del fluido mediante un'interpolazione lineare a partire dalla cella più vicina secondo una logica *upwind*:



Figura 3.5: Schema di un dominio 2D con evidenza delle informazioni geometriche all'interfaccia. [1]

Le velocità  $u^* \in v^*$  si calcolano in maniera analoga a quanto fatto per la prima in 1D e, una volta calcolate le normali  $\mathbf{n}_{i,j} \in \mathbf{n}_{i+1,j}$  a partire dal gradiente della *level set function*, si assumono parallele e si valuta la distanza adimensionale tra  $x_{i,j} \in A$  come:

$$d = \frac{|\varphi_{i,j}|}{|\varphi_{i,j}| + |\varphi_{i+1,j}|} \tag{3.15}$$

Essa viene utilizzato per il calcolo del vettore normale  $\mathbf{n}_A$  da cui:

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_{i,j} + d(\mathbf{n}_{i+1,j} - \mathbf{n}_{i-1,j}) \tag{3.16}$$

Si può ricavare la velocità della discontinuità di contatto  $\mathbf{u}^*$  tale da imporre la BC  $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$  con un secondo ordine di accuratezza, come:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}_A = \mathbf{u}_n^* = \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A + (1/2 - d) s_A^n \\ \mathbf{u}^* \cdot \tau_A = \mathbf{u}_\tau^* = \mathbf{u}_- \cdot \tau_A \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_n^* n_x + u_\tau^* \tau_x \\ u_n^* n_y + u_\tau^* \tau_y \end{pmatrix}$$
(3.17)

Si precisa che  $\mathbf{u}_A$  è la velocità del corpo,  $\mathbf{n}_A = (n_x, n_y)^t$ ,  $\tau_A = (\tau_x, \tau_y)^t$  e la pendenza  $s_A^n$  si ottiene come:

$$s_A^n = \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_A + \frac{1-d}{1+d} (\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A - \mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_A)$$
(3.18)

Il metodo descritto può essere impiegato anche in un caso tridimensionale e si fa riferimento all'articolo di Gorsse e al. [1] per le correzioni apportate.
# 4 Estensione del codice al caso assialsimmetrico

Lo studio dei corpi assialsimmetrici risulta di particolare interesse in regime ipersonico dal momento che vengono associati ad una condizione di minima resistenza d'attrito, la quale è importante in relazione all'*aerodynamic heating*. Un flusso si definisce tale se, a partire da uno spazio tridimensionale in coordinate cilindriche  $x, r \in \theta$ , valgono le seguenti ipotesi:

• una generica grandezza fluidodinamica f non varia in direzione azimutale da cui:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \tag{4.1}$$

• la componente della velocità  $v_{\theta} = 0$ .

Nel Capitolo in esame viene spiegato come modificare le equazioni di governo e la formulazione ai volumi finiti nel caso di un flusso viscoso compressibile, si elencano poi le modifiche apportate al codice e la successiva validazione con un caso test a basso numero di Reynolds.

Si vuole spiegare come valutare l'entità del riscaldamento aerodinamico nel caso semplice di un corpo che segue una traiettoria verticale, per la quale si ottiene la seguente equazione del moto, trascurando la forza peso:

$$M\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}\rho V^2 C_D S \tag{4.2}$$

dove M è la massa del corpo. Si definisce il numero di Stanton medio sulla superficie del corpo:

$$\bar{St} = \frac{\bar{q}}{\rho V \left[\frac{V^2}{2} + C_P (T_\infty - \bar{T}_w)\right]} \tag{4.3}$$

e assumendo assente il contributo della radiazione, l'energia entrante nel corpo nell'intervallo dt è  $dQ = \bar{q}Sdt$ , da cui:

$$dQ = A\bar{S}t\rho V \left[\frac{V^2}{2} + C_P(T_\infty - \bar{T}_w)\right] dt$$
(4.4)

Si trascura il termine relativo alla parte termica rispetto alla cinetica, si rielaborano le relazioni finora scritte e, integrando tra la velocità iniziale  $V_i$  ed una generica V, si ottiene:

$$\Delta Q = \frac{\bar{S}t}{C_D} M \frac{V_i^2 - V^2}{2}$$
(4.5)

Si può allora scrivere la frazione percentuale di energia come:

$$\eta_Q = \frac{\Delta Q}{M\left(\frac{V_i^2 - V^2}{2}\right)} \cong \frac{\bar{S}t}{C_D} \tag{4.6}$$

e la si deve minimizzare allo scopo di limitare l'aerodynamic heating. La formula può essere semplificata ricorrendo all'analogia di Reynolds nel caso di  $V \ll V_i$ , per la quale  $\bar{S}t = \bar{C}_f/2$ , e di conseguenza:

$$\eta_Q = \frac{\bar{C}_f}{2C_D} \tag{4.7}$$

Si evince come sia necessario l'aumento della resistenza di forma a discapito di quella d'attrito per raggiungere l'obiettivo desiderato e, pertanto, si ricorre a delle forme tozze in analogia a quelle delle capsule di rientro. Ulteriore vantaggio dei corpi in esame è il minor incremento di temperatura nel tempo poiché, dall'equazione di bilancio termico, si deduce:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{S}{cM}(\dot{q} - \dot{q}_r) \tag{4.8}$$

dove c indica il calore specifico e  $\dot{q}_r$  il flusso di calore radiativo netto dal corpo verso l'esterno. Risulta di facile verifica che l'aumento della temperatura è tanto più basso quanto è più piccolo il rapporto S/M, confondibile con S/V: esso risulta elevato per i corpi affusolati che presentano, difatti, dei picchi di temperatura alla punta e un bordo d'attacco non arrotondato, dove è tecnologicamente difficile predisporre un sistema di raffreddamento. A completamento di quanto detto, è bene ricordare che la misura dei flussi termici è inversamente proporzionale al raggio di curvatura e si può affermare che il breve ragionamento fatto è utile per capire le motivazioni dietro l'impiego di corpi assialsimmetrici in regime ipersonico.

### 4.1 Equazioni di governo

Il primo passo consiste nel confrontare le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane, ovvero quelle attualmente implementate nel codice, con le stesse in un sistema di riferimento cilindrico, a cui viene poi applicata l'ipotesi di assialsimmetria.

Per un generico flusso viscoso e compressibile, in coordinate cartesiane e in assenza di forze esterne, si può scrivere:

$$mass: \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$
(4.9)

$$x - momentum : \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (4.10)$$

$$y - momentum : \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (4.11)$$

$$z - momentum : \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (4.12)$$

dove  $u, v \in w$  sono le componenti del vettore velocità e  $\tau_{ij}$  il generico elemento del tensore degli sforzi.

Le stesse equazioni, in un sistema di riferimento cilindrico, assumono la seguente forma:

$$mass: \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho rv) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_{\theta}) = 0$$
(4.13)

$$x - momentum : \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} \right)$$
(4.14)

$$r - momentum : \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}^2}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left( \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right)$$
(4.15)

$$\theta - momentum : \rho \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial v_{\theta}}{\partial x} + v \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{vv_{\theta}}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta \theta}}{\partial \theta} \right)$$
(4.16)

Si considera ora un caso bidimensionale e si applica l'ipotesi di flusso assialsimmetrico al fine di ottenere le equazioni utilizzate nella tesi, quali:

$$mass: \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho rv) = 0$$
(4.17)

$$x - momentum : \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rx})\right)$$
(4.18)

$$r - momentum : \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\right) \quad (4.19)$$

Dal confronto si evince come l'estensione al caso 2D assialsimmetrico sia possibile aggiungendo due termini sorgente all'equazione di quantità di moto lungo la direzione radiale ye modificando l'espressione delle superfici laterali e dei volumi delle celle. In particolare, si può isolare una cella tridimensionale il cui spessore in direzione azimutale sia molto piccolo e pari a  $d\theta$ , e se ne rappresenta la sezione sul piano x - y che verrà poi usato per tutte le rappresentazioni dei campi di moto.



Figura 4.1: Cella tridimensionale e relativa sezione nel piano x - y. [10]

Le superfici laterali e i volumi della cella in oggetto, in riferimento alla Figura 4.1, vengono calcolati come:

$$\Delta S_i = s_i y_i d\theta \tag{4.20}$$

$$\Delta V = A y_c d\theta \tag{4.21}$$

con  $y_i$  raggio del centro-faccia e  $y_c$  raggio del centro-cella. Il primo termine sorgente è legato all'azione della pressione sulle superfici laterali, da cui deriva una forza pari a:

$$F_y = -2psin\frac{d\theta}{2}A \simeq -2p\frac{d\theta}{2}A = -pd\theta A \tag{4.22}$$

come è evidente dalla Figura 4.1 e tenendo conto che sulle stesse facce non è presente alcun contributo dei flussi convettivi a causa della simmetria assiale [10]. Il secondo termine sorgente è legato alla sforzo  $\tau_{\theta\theta}$  che agisce sulla faccia laterale come la pressione ma con segno opposto [9].

Per una corretta e completa implementazione occorre considerare anche come varia l'espressione della divergenza del vettore velocità e degli elementi del tensore degli sforzi, da un sistema di riferimento cartesiano ad uno cilindrico. Nel primo caso si può scrivere:

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.23)

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.24)

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.25)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tag{4.26}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$
(4.27)

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \tag{4.28}$$

Nel secondo, invece:

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta}$$
(4.29)

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.30)

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.31)

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.32)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$
(4.33)

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{\theta}}{r} \right) \right]$$
(4.34)

$$\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$
(4.35)

Si applica allora l'ipotesi di flusso assialsimmetrico di modo tale da ottenere quanto interessa per il caso di studio:

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}$$
(4.36)

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.37)

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{q}$$
(4.38)

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{v}{r}\right) - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{q} \tag{4.39}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tag{4.40}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \tag{4.41}$$

$$\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta} = 0 \tag{4.42}$$

### 4.2 Formulazione ai volumi finiti

Le equazioni 4.17, 4.18 e 4.19, ricavate nella sezione precedente, vanno discretizzate con il metodo ai volumi finiti, il quale è stato già introdotto nel Capitolo 3 per le equazioni di Eulero e viene usato nei moderni codici CFD. Ricapitolando quanto detto in precedenza, la differenza rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano sta nell'aggiunta dei due termini sorgente e nella moltiplicazione delle superfici laterali e dei volumi per i rispettivi raggi, da cui:

$$mass: \frac{\Delta\rho_{N,M}}{\Delta t} \Delta V_{N,M} + \sum_{i=1}^{4} \rho_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i = 0$$
(4.43)

$$x - momentum : \frac{\Delta(\rho u)_{N,M}}{\Delta t} \Delta V_{N,M} + \sum_{i=1}^{4} (p_i n_{xi} + \rho_i u_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n}_i - \vec{\tau}_x \cdot \mathbf{n}_i) \Delta S_i = 0 \quad (4.44)$$

$$y-momentum: \frac{\Delta(\rho v)_{N,M}}{\Delta t} \Delta V_{N,M} + \sum_{i=1}^{4} (p_i n_{yi} + \rho_i v_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n}_i - \vec{\tau}_y \cdot \mathbf{n}_i) \Delta S_i - p A_{N,M} d\theta + \tau_{\theta\theta} A_{N,M} d\theta = 0$$

$$(4.45)$$

con  $\Delta S_i = s_i y_i d\theta$  e  $\Delta V_{N,M} = A_{N,M} y_{c_{N,M}} d\theta$  [10]. Si ricorda come gli integrali di superficie, che compaiono nella forma integrale delle equazioni, vengono ora rappresentati con delle sommatorie sulle quattro facce del volume di controllo e lo si può notare nel caso 2D di Figura 4.2.



Figura 4.2: Esempio di discretizzazione di un dominio bidimensionale, dove sono riportati gli indici, le superfici laterali e il volume delle celle. [10]

Risulta opportuno effettuare un controllo circa la formulazione ai volumi finiti ottenuta, in particolare si devono ricavare le equazioni in forma differenziale in coordinate cilindriche e si svolgono i calcoli per quella relativa alla quantità di moto lungo y dal momento che presenta il maggior numero di modifiche. Il primo passaggio consiste nel semplificare  $d\theta$  nell'equazione 4.45 e far comparire gli integrali di volume e superficie in modo tale da ottenere la forma integrale dell'equazione, tenendo conto che il volume di controllo è fisso nel tempo e si può così portare all'interno la derivata temporale:

$$\frac{\Delta(\rho v)_{N,M}}{\Delta t}A_{N,M}y_{c_{N,M}} + \sum_{i=1}^{4} (p_i n_{yi} + \rho_i v_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n}_i - \vec{\tau}_y \cdot \mathbf{n}_i)s_i y_i - pA_{N,M} + \tau_{\theta\theta}A_{N,M} = 0 \quad (4.46)$$

$$\int_{V} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} r_{c} dV + \int_{S} (p_{y} + \rho v \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) r dS - \int_{V} p dV - \int_{S} (\vec{\tau}_{y} \cdot \mathbf{n}) r dS + \int_{V} \tau_{\theta\theta} dV = 0 \quad (4.47)$$

dove  $r \in r_c$  indicano rispettivamente il raggio del centro-faccia e quello del centro-cella. Si applica il teorema di Gauss al fine di trasformare gli integrali di superficie in quelli di volume:

$$\int_{V} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} r_{c} dV + \int_{V} \nabla \cdot (\rho v r \mathbf{q}) dV + \int_{V} \nabla (p_{y} r) dV - \int_{V} p dV - \int_{V} \nabla \cdot (\vec{\tau}_{y} r) dV + \int_{V} \tau_{\theta \theta} dV = 0$$

$$\tag{4.48}$$

Il volume di controllo è anche arbitrario e, di conseguenza, è sufficiente che si annulli la funzione integranda da cui:

$$\int_{V} \left[ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} r_{c} + \nabla \cdot (\rho v r \mathbf{q}) + \nabla(p_{y} r) - p - \nabla \cdot (\vec{\tau}_{y} r) + \tau_{\theta \theta} \right] dV = 0$$
(4.49)

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}r_c + \nabla \cdot (\rho v r \mathbf{q}) + \nabla(p_y r) - p - \nabla \cdot (\vec{\tau}_y r) + \tau_{\theta\theta} = 0$$
(4.50)

la quale rappresenta la forma differenziale dell'equazione di quantità di moto lungo y. Si vanno a sviluppare gli operatori divergenza e gradiente nel caso bidimensionale:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}r_c + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v r u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r v) + r\frac{\partial p}{\partial y} + p\frac{\partial r}{\partial y} - p - \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx}r) - \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}r) + \tau_{\theta\theta} = 0 \quad (4.51)$$

Si tenga presente che  $\partial r/\partial y = 1$  poiché y è la coordinata radiale stessa, quindi i termini  $p\frac{\partial r}{\partial y}$  e p si elidono. Si procede con lo sviluppo di alcune derivate ottenendo:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}r_c + (\rho vu)\frac{\partial r}{\partial x} + r\frac{\partial}{\partial x}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vrv) + r\frac{\partial p}{\partial y} - r\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \tau_{yx}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}r) + \tau_{\theta\theta} = 0$$
(4.52)

L'equazione 4.45 si può semplificare tenendo conto che  $\partial r/\partial x=0$ e dividendo per  $r_c$  si deduce:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{r}{r_c}\frac{\partial}{\partial x}(\rho vu) + \frac{1}{r_c}\frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 r) = -\frac{r}{r_c}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{r}{r_c}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{r_c}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}r) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r_c}$$
(4.53)

Si manipola il primo membro dell'equazione come di seguito:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{r}{r_c} \left[ v \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{1}{r_c} \left[ v \frac{\partial}{\partial y} (\rho vr) + \rho vr \frac{\partial v}{\partial y} \right] =$$

$$- \frac{r}{r_c} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{r}{r_c} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}r) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r_c}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{r}{r_c} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{r}{r_c} v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial y} (\rho vr) \right] =$$

$$- \frac{r}{r_c} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{r}{r_c} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}r) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r_c}$$

$$(4.55)$$

L'equazione 4.55 può essere definitivamente semplificata tenendo in considerazione che il termine in parentesi, moltiplicato per v, corrisponde all'equazione di continuità 4.17 e risulta dunque pari a zero; inoltre, si pone  $r_c = r$  e si ottiene un'equazione analoga alla 4.19 a testimonianza della bontà della discretizzazione effettuata.

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}r) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\right)$$
(4.56)

### 4.3 Modifiche effettuate al codice

Nella sezione in oggetto le modifiche (riportate in verde), precedentemente dedotte a livello teorico, vengono implementate all'interno del codice tenendo ben presente alcuni accorgimenti aggiuntivi.

Il primo step riguarda le superfici laterali e si individua la subroutine **compressible.cpp** come quella su cui intervenire, analizzandone prima la struttura basata sui seguenti punti:

- 1. registrazione delle boundary conditions;
- 2. scelta dei modelli di turbolenza e galleggiamento;
- 3. setup dei parametri del solutore come l'ordine di approssimazione dei flussi;
- 4. calcolo del  $\Delta t_{max}$  riferito alla specifica cella;
- 5. scelta delle variabili di riferimento rispetto alle quali adimensionare le equazioni;
- 6. avanzamento esplicito nel tempo delle primitive, da cui ricavare poi le conservative;

7. calcolo dei flussi all'interfaccia mediante l'uso delle funzioni **evalFluxesInner** e **evalFluxesBoundary**, le quali sono reindirizzate alla classe **CompressibleSol-ver**: il procedimento viene eseguito sia per i flussi convettivi sia per quelli diffusivi.

Le due funzioni indicate sopra prevedono il calcolo di coefficienti pari all'area dell'interfaccia  $\Delta S_i$  in un semplice caso 2D, i quali vanno invece moltiplicati per il raggio del centro-faccia  $y_i$  come segue, ai fini dell'estensione al caso assialsimmetrico:

```
// Evaluate inner interface coefficients
const std::array<double,3> interfaceCentroid = interfaceCursor.
  getCentroid()
interfaceCoefficients[k] = interfaceArea * interfaceCentroid[1];
// si sceglie la componente del vettore corrispondente alla
  coordinata radiale
// Evaluate boundary interface coefficients
const std::array<double,3> interfaceCentroid = interfaceCursor.
  getCentroid()
interfaceCoefficients[k] = interfaceSign * interfaceArea *
```

```
interfaceCentroid [1];
```

Nel caso in esame la modifica apportata è molto semplice e si preferisce non riportare l'estratto di codice completo, all'interno del quale essa è stata inserita.

Il secondo step prevede la variazione del termine  $\Delta V_{N,M}$  e l'aggiunta dei termini sorgente all'equazione di quantità di moto lungo y: si fa riferimento alla subroutine **solver.cpp**. Una classica formulazione ai volumi finiti consente di aggiornare, ad ogni intervallo temporale, il vettore delle variabili conservative **W** come segue:

$$\mathbf{W}_{N,M}^{k+1} = \mathbf{W}_{N,M}^{k} - \frac{\Delta t}{\Delta V_{N,M}} \sum_{i=1}^{4} \mathbf{F}_{i} \cdot \mathbf{n}_{i} \Delta S_{i}$$
(4.57)

dove  $\mathbf{F}_i$  è il tensore contenente i flussi convettivi e diffusivi. Tale operazione è presente nel codice in **compressible.cpp** e viene indicata come:

```
const double *rhs = cellCursor.getRHSPtr();
for (int k = 0; k < nFields, ++k) {
    updateConservative[k] -= dt * rhs[k];
}
```

Si deduce come il *right hand side* sia calcolato prima dell'integrazione esplicita e sia pari al rapporto tra i residui e il volume della cella, laddove il numeratore corrisponde a tutti i termini che non siano del tipo  $\partial W/\partial t$ . Le modifiche da integrare interessano allora la funzione **computeEvolvedResiduals** e vengono elencate di seguito:

```
for (std::size_t n = 0; n < nBlockCells; ++n) {
    CSolverLocation &cellLocation = cellBlockData.getLocations()
        .getCursor(n)[0];
    CSolverCursor &cellCursor = cellLocation.getCursor();
    const double cellVolume = cellCursor.getVolume();
    const std::array<double, 3> centroid = cellCursor.getCentroid
        ();
```

}

```
const reference t & reference = m parameters->reference;
 double m ref Re = reference. Reynolds;
 const FluidMixture mixture = cellCursor.getMixture();
 double T = cellCursor.getValues(fid T);
 double mu = mixture.mu(T);
 double lambda = -2. / 3. * mu * :: utils :: divergence (
    cellCursor.getGradsPtr() , cellCursor.getValuesPtr(),
    centroid);
 double tau_thth = (mu * 2. * (cellCursor.getValues(fid_u_y))
    /(\text{centroid}[1]) + \text{lambda})/(\text{m ref Re});
 double * restrict cellRHS = cellCursor.getRHSPtr();
 const double *cellSources = cellBlockSources.getConstCursor(
   n).getDataPatr();
cellRHS [eid momentum y] -= cellCursor.getValues(fid p) *
   cellVolume - tau thth * cellVolume;
 for (int k = 0; k < nEvolvedFields, ++k) {
     const double cellSource = cellSources [k];
     cellRHS[k] = cellRHS[k] / (cellVolume * centroid[1]) +
        cellSource;
 }
```

I termini sorgente vanno inseriti in questa subroutine perchè sono da calcolare nelle celle e non sulle facce: quello legato alla pressione è di facile implementazione dal momento che è sufficiente richiamare il valore normalizzato, già ricavato all'interno del codice; quello relativo allo *shear stress* necessita invece di una spiegazione esaustiva.

Esso viene determinato a partire dall'Equazione 4.39 ma occorre che sia diviso per il numero di Reynolds di riferimento poiché **gloria** risolve le equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale, come accennato nel Capitolo 3. Per completezza si procede con la normalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes, nel caso semplice di flussi incompressibili, al fine di mostrare l'origine del fattore 1/Re. Si introducono delle grandezze adimensionali quali:

$$\widetilde{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \widetilde{u}_i = \frac{u_i}{V}, \quad \widetilde{t} = \frac{t}{T} = \frac{t}{L/V}$$

$$(4.58)$$

dove L rappresenta una lunghezza di riferimento caratteristica e V tipicamente la velocità indisturbata a monte [11].

Si pone l'attenzione esclusivamente sul bilancio di quantità di moto e, a partire dall'equazione in forma dimensionale, si sostituiscono le relative grandezze in funzione di quelle normalizzate ottenendo:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{4.59}$$

$$\left(\frac{V^2}{L}\right) \left[\frac{\partial \widetilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\widetilde{\mathbf{V}} \cdot \widetilde{\nabla}) \widetilde{\mathbf{V}}\right] = -\frac{V^2}{L} \widetilde{\nabla} \left(\frac{p}{\rho V^2}\right) + \frac{\nu V}{L^2} \widetilde{\nabla}^2 \widetilde{\mathbf{V}}$$
(4.60)

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\widetilde{\mathbf{V}} \cdot \widetilde{\nabla}) \widetilde{\mathbf{V}} = -\widetilde{\nabla} \widetilde{p} + \frac{1}{Re} \widetilde{\nabla}^2 \widetilde{\mathbf{V}}$$
(4.61)

dove  $\widetilde{\nabla}$ , in coordinate cartesiane, è pari a

$$\widetilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \mathbf{k}$$
(4.62)

Il calcolo di  $\tau_{\theta\theta}$  e del tensore degli sforzi, con la funzione **calcStressTensor** all'interno di compressible diffusion.cpp, richiede la modifica dell'espressione della divergenza in accordo con l'Equazione 4.36. Tale operazione rende necessaria la modifica di alcune funzioni e relativi *header* al fine di poter usare l'informazione circa la coordinata radiale e, in particolare, la funzione **divergence** ha subito i seguenti cambiamenti:

```
double divergence ( const std::array<double, 3> *grads, const
   double *values, const std::array<double, 3> centroid)
{
  if (centroid [1]!=0)
     return (grads[fid_u_x][0] + grads[fid_u_y][1] + grads[
        fid_u_z][2] + (values[fid_u_y])/(centroid[1])); }
     else {
     return (grads[fid_u_x][0] + 2 * grads[fid_u_y][1] + grads[
        fid u z ] [2]); }
```

}

Si nota come l'espressione fornita dall'Equazione 4.36 sia utilizzabile sempre tranne nel caso in cui il raggio sia pari a zero dal momento che ciò implica la presenza di una singolarità, la quale fa divergere immediatamente la simulazione. Il problema si manifesta solamente nel calcolo dei flussi poiché il raggio di un centro-faccia può essere effettivamente pari a zero se esso è posizionato sull'asse di simmetria, mentre per i centro-cella questo non può accadere. La soluzione più semplice, già testata in letteratura [12, 13] e implementata nel codice in esame, consiste nell'affermare che:

$$\frac{dv}{dr} = \lim_{r \to 0} \frac{v}{r} \tag{4.63}$$

da cui si deduce la nuova formula per il calcolo della divergenza. Si possono trovare maggiori dettagli circa i modi alternativi per trattare la singolarità negli articoli di Prochnow et al. [12] o Peres et al. [13].

Si precisa come l'equazione dell'energia subisca un trattamento analogo alle altre equazioni, fatta eccezione per quella relativa alla quantità di moto lungo y. Una prima validazione consiste nell'impostare un flusso uniforme in entrata, tale per cui i residui sono subito pari a zero, mentre nella sezione successiva viene presentato un vero e proprio test case assialsimmetrico.

#### Validazione delle modifiche 4.4

Si vogliono validare preliminarmente le modifiche apportate a gloria con un caso test assialsimmetrico a basso numero di Reynolds, per poi passare alla trattazione del regime ipersonico nel Capitolo seguente. La scelta è ricaduta su di un esempio utilizzato per validare in prima battuta la versione 2D/assialsimmetrica di Proteus, un codice CFD della NASA, e un modello di turbolenza  $k - \epsilon$  introdotto al suo interno. Il solutore è stato testato con vari casi di studio sia laminari sia turbolenti, quali: il flusso incompressibile completamente sviluppato all'interno di un canale 2D, il flusso assialsimmetrico completamento sviluppato all'interno di un tubo, il flusso di strato limite su di una placca piana

e il flusso turbolento all'interno di diffusori transonici Sajben [14]. Per quanto detto, il *fully developed axisymmetric pipe flow* è utile ai fini della tesi in oggetto: si tratta di un flusso laminare ma viene impiegato anche nel *testing* di codici turbolenti dato l'elevato livello di confidenza e la possibilità di provare diverse condizioni iniziali e al contorno.

Il test case è caratterizzato da un flusso laminare, incompressibile e completamente sviluppato all'interno di un tubo assialsimmetrico: viene quindi processato in assenza di un modello di turbolenza, il numero di Mach corrispondente all'asse di simmetria è pari a 0.05 e il numero di Reynolds, costruito con il raggio R, è uguale a 100. La griglia impiegata è uniforme sia in direzione assiale sia in direzione radiale  $(5R \times R)$ , viene imposto il profilo di velocità di Poiseuille come condizione iniziale del flusso e le condizioni al contorno vengono riportate in Figura 4.3.



Figura 4.3: Rappresentazione del dominio e delle condizioni al contorno per il *fully* developed axisymmetric pipe flow. [14]

Si vuole precisare come la griglia e le BC riguardanti l'energia cinetica turbolenta k e il suo tasso di dissipazione  $\epsilon$  siano riferite ad un caso test della stessa tipologia ma avente un flusso turbolento: ciò è evidente dal momento che è presente un raffinamento sul bordo del tubo, caratterizzato da un certo *stretching factor*, allo scopo di discretizzare al meglio lo strato limite formatosi.

#### 4.4.1 Calcolo delle grandezze utili nel flusso di Poiseuille

Il flusso in esame rientra nella ristretta serie di soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes e fa parte della categoria dei flussi paralleli, per i quali solo una componente del vettore velocità è diversa da zero. Si riportano in Tabella 1 i dati disponibili, poi usati per i successivi calcoli.

Grandezza	Valore
$M_{centerline}$	0.05
$Re_R$	100
$T_{\infty}$	$293.15 \ K$
$\mu_\infty$	$1.86\cdot10^{-5}\mathrm{Pa}\cdots$
$ ho_\infty$	$1.188 \ kg/m^{3}$
$p_{\infty}$	$10^5 \mathrm{Pa}$

Tabella 1: Dati disponibili per il test case in esame

Si ricava la velocità del suono sfruttandone la definizione come segue:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_{\infty}} \tag{4.64}$$

Si determina la velocità al centro del tubo, la quale risulta anche quella massima data la forma parabolica del profilo di Poiseuille:

$$u_{centerline} = M_{centerline}a \tag{4.65}$$

La velocità media è pari alla metà di quella massima e tale assunzione viene dimostrata a partire dall'equazione della quantità di moto lungo x in coordinate cilindriche, la quale assume la forma seguente nel caso specifico:

$$\mu\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{du}{dy}\right) = \frac{dp}{dx}$$
(4.66)

Si può riscrivere l'Equazione 4.66 come di seguito e poi la si integra due volte in y:

$$\frac{d}{dy}\left(y\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y\tag{4.67}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{2} + \frac{C_1}{y} \tag{4.68}$$

$$u(y) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 \log(y) + C_2$$
(4.69)

Le costanti di integrazione si ricavano a partire dalle condizioni al contorno:

- u ha un valore finito per y = 0, da cui si deduce che  $C_1 = 0$ ;
- u = 0 in y = R dal momento che non si ha scivolamento lungo la parete del tubo e, di conseguenza,  $C_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2$

Il profilo di velocità, a valle di queste considerazioni, assume la forma seguente dalla quale è semplice ottenere il valore massimo:

$$u(y) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2)$$
(4.70)

$$u_{max} = u(y=0) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2$$
(4.71)

La velocità media, considerando  $A = \pi R^2$ , risulta pari a:

$$\bar{u} = 2\frac{\int_0^R yu(y)dy}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{1}{2}u_{max}$$
(4.72)

così da dimostrare quanto desiderato. Così facendo, si possono determinare il raggio del tubo e la relativa lunghezza:

$$R = \frac{Re_R\mu_\infty}{\rho_\infty \bar{u}}, \quad L = 5R \tag{4.73}$$

L'ultima quantità da calcolare è la pressione in corrispondenza della sezione d'uscita del tubo, utile per imporre la condizione di *pressure outlet*, la quale deriva dall'espressione della portata:

$$Q = \bar{u}\pi R^2 = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \tag{4.74}$$

$$\Delta p = \frac{8\mu QL}{\pi R^4} \Rightarrow p_{exit} = p_{inlet} - \Delta p \tag{4.75}$$

## 4.4.2 Setup in gloria

Il dominio, per quanto detto nel Capitolo 3, è un quadrato di lato pari a 5R la cui origine coincide con quella degli assi, mentre il dominio computazione d'interesse per il caso test in oggetto è un tubo, in particolare una metà dello stesso per evidenti motivi di simmetria. In un caso bidimensionale quest'ultimo coincide con un rettangolo, ma non avendo la possibilità di creare una geometria del genere dal ControlDict.dat, si adotta la soluzione mostrata in Figura 4.4: si definisce una regione di vertici  $A = (-\Delta, R), B = (5R + \Delta, R), C = (5R + \Delta, 5R + \Delta), D = (-\Delta, 5R + \Delta)$  e con la riga di testo scope outside si impone la risoluzione del campo di moto solo al di fuori di essa.



Figura 4.4: Rappresentazione del dominio geometrico e di quello computazionale, ottenuto a partire dalla *region* rettangolare in bianco.

Si evidenzia come la taglia delle celle nella zona non interessata dal calcolo sia la più grande possibile: esse sono caratterizzate da una soluzione banale e tale accorgimento permette di evitare uno sbilanciamento del carico computazionale tra i vari processi MPI, dal momento che esso non è pensato per pesare le celle in base al costo di ognuna. Il dominio fluido appare di colore blu perchè le celle sono molto più fitte rispetto a quello solido.

Le condizioni al contorno impostate, in riferimento alla Figura 4.3, vengono elencate di seguito:

- *far field* in ingresso per evitare l'entrata di un flusso uniforme pari a zero, il quale comporterebbe un *nAn* per diffusione. Esso deve replicare il profilo di velocità alla Poiseuille e rende necessaria la modifica del codice poiché non è contemplato all'interno dello stesso;
- *reflective* in corrispondenza dell'asse del tubo, la quale specifica la condizione di simmetria ponendo le derivate a zero di default;
- pressure outlet sulla sezione d'uscita, introducendo il valore  $p_{exit}$  ricavato dall'Equazione 4.68;
- wall sulla parete del tubo, che implica la condizione di non scivolamento e di isotermia con  $T_w = T_\infty$ .

# 4.4.3 Modifiche del codice per BC e C.I.

Il profilo di velocità alla Poiseuille non può essere impostato né come condizione al contorno né come condizione iniziale in base alla struttura attuale del codice e, di conseguenza, vanno apportate le modifiche spiegate nella sezione in oggetto.

La condizione iniziale va impostata nella subroutine **run\_manager.cpp**, in particolare all'interno della funzione **assignInitialFieldsets**, specificando cosa accade per la regione 1 che corrisponde al tubo.

```
if (region == 1)
{
    std::array<double, 3> position = cellCursor.getCentroid();
    double R = 0.00018246; // raggio del tubo
    double value = 0.0592 * (1 - pow((position[1]/R), 2)); //
        profilo di Poiseuille u(y)
        double novalue = 0.0;
        cellCursor.setValues(fid_u_x, value);
        cellCursor.setValues(fid_u_y, novalue);
        cellCursor.setValues(fid_u_z, novalue);
}
```

Il solutore lavora con delle grandezze adimensionali, pertanto il profilo di velocità è scritto come:

$$u(y) = \frac{u_{max}}{V_{ref}} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \tag{4.76}$$

con  $V_{ref} = \sqrt{RT_{ref}}$  che rappresenta la velocità di riferimento rispetto alla quale normalizzare le opportune grandezze.

La condizione al contorno viene inserita nella subroutine **compressible\_BC**, dove si modificano in maniera analoga le funzioni **evalAdvectionPrimitiveFluxes** e **evalDif**fusionPrimitiveFluxes affini alla classe **FarFieldBC**.

### 4.4.4 Risultati

L'estensione del codice al caso assialsimmetrico è stata ritenuta valida solo dopo aver ottenuto con **gloria** dei risultati analoghi a quelli di *Proteus*, per il caso test in oggetto. La sezione intende riportare lo studio di convergenza della griglia che ha permesso di raggiungere l'obiettivo prefissato: la simulazione di riferimento presenta un totale di 1024 punti in direzione assiale e 204 in quella radiale, ha girato per circa 27 ore su 10 processi in parallelo ed è stata interrotta dopo poco meno di 550000 iterazioni.



Figura 4.5: Andamento dei residui in norma 2 durante la simulazione di riferimento.



Figura 4.6: Andamento dei residui in norma infinito durante la simulazione di riferimento.

Il criterio di convergenza imposto prevede l'interruzione della simulazione una volta che i residui in norma 2 diminuiscono di 6 ordini di grandezza, analogamente a quanto indicato nell'articolo di Bui [14] così da poter comparare i valori ottenuti. Le Figure 4.5 e 4.6 consentono di valutare l'andamento dei residui nel tempo a conferma della conver-

genza raggiunta: esse forniscono informazioni diverse poiché i residui in norma 2 sono caratterizzati da una norma integrale, che offre un'idea della convergenza globale su tutto il dominio; quelli in norma infinito, invece, offrono un'idea puntuale di convergenza. Si vuole effettuare un confronto tra le tre configurazioni di griglia utilizzate a parità di ordine dello schema e, a tale proposito, sono di particolare interesse le Figure dalla 4.7 alla 4.9.



Figura 4.7: Profili di velocità calcolati con uno schema al I ordine in una sezione generica del tubo, al variare della griglia utilizzata.

Si ricorda come uno schema al primo ordine sia esatto per una soluzione il cui andamento è lineare, mentre risulta approssimato negli altri casi come quello parabolico in Figura 4.7. Si nota che la griglia più rada non consente di mantenere, all'interno del tubo, il profilo di velocità imposto alla Poiseuille dal momento che sono presenti delle evidenti differenze sia nel valore massimo sia in quello a parete, che dovrebbe essere pari a zero a maggior ragione per la presenza della *no-slip condition*. Raddoppiando il numero di punti in entrambe le direzioni, è visibile come il risultato sia migliore soprattutto nel tratto di parabola che meglio potrebbe essere approssimato con una retta: detto ciò, e in riferimento alla Figura 4.9, risulta necessario un ulteriore infittimento della mesh al fine di ottenere un errore comparabile con quello desiderato mediante l'uso di uno schema al I ordine.

Lo schema al II ordine è esatto per funzioni paraboliche e lo si evince dalla Figura 4.8 dal momento che il profilo ottenuto a partire dalla griglia più rada è confrontabile con quello ricavato dalla più fitta del caso precedente e se ne ha la conferma osservando quanto accade in prossimità dell'asse del tubo in Figura 4.9. Di contro, una griglia più fine è utile anche con uno schema al secondo ordine poiché evita la formazione del flesso osservabile in Figura 4.8, il quale non è contemplato nella soluzione esatta del flusso di Poiseuille. Le soluzioni derivanti dalle griglie  $1024 \times 204$  e  $2048 \times 408$  sono quasi sovrapposte tra di loro a testimonianza del raggiungimento della convergenza di griglia e viene scelta la

prima come riferimento dal momento che il beneficio derivante dall'uso della seconda è meno rilevante del numero di ore di calcolo addizionali necessarie.



Figura 4.8: Profili di velocità calcolati con uno schema al II ordine in una sezione generica del tubo, al variare della griglia utilizzata.



Figura 4.9: Ingrandimenti in prossimità del valore massimo di velocità delle Figure 4.7 e 4.8.

Il confronto viene fatto anche dal punto di vista complementare al precedente, ovvero tra gli ordini dello schema a parità di griglia utilizzata e si fa riferimento alle Figure dalla 4.10 alla 4.13. Risulta evidente come la differenza tra i profili ottenuti è tanto maggiore quanto più la griglia è rada: ciò si può spiegare dal momento che, all'aumentare del numero di nodi, si commette un errore minore nell'approssimare un andamento parabolico con dei tratti lineari. Ribadendo quanto già scritto e in riferimento alla Figura 4.13, lo scostamento più rilevante tra le soluzioni ottenute si ha in prossimità dell'asse di simmetria del tubo, dove la velocità è massima. A tale proposito, si vuole valutare l'errore percentuale  $\varepsilon$  commesso nel calcolare la velocità massima normalizzata al fine di confrontarlo con quello derivante da *Proteus*; inoltre, si quantifica il salto di pressione e lo si paragona a quello teorico a conferma della bontà dei risultati raggiunti. Noti  $u_{max_{th}}/V_{ref} = 0.0592$  e  $\Delta p_{th} = 35 \ Pa$  (dall'Equazione 4.75), si riportano in Tabella 2 i valori ottenuti al variare dell'ordine di approssimazione e della griglia impiegati.

Griglia	Ordine	$\varepsilon$ [%]	$\Delta p \left[ Pa  ight]$
$512 \times 102$	Ι	11.11	291
$512 \times 102$	II	1.35	51
$1024 \times 204$	Ι	3.75	182
$1024 \times 204$	II	0.61	40
$2048\times408$	Ι	1.01	115
$2048\times408$	II	0.32	37

Tabella 2: Risultati ottenuti dalle diverse simulazioni al variare della griglia e dell'ordine dello schema



Figura 4.10: Profili di velocità calcolati con una griglia  $512 \times 102$  in una sezione generica del tubo, al variare dell'ordine dello schema utilizzato.



Figura 4.11: Profili di velocità calcolati con una griglia  $1024 \times 204$  in una sezione generica del tubo, al variare dell'ordine dello schema utilizzato.



Figura 4.12: Profili di velocità calcolati con una griglia  $2048 \times 408$  in una sezione generica del tubo, al variare dell'ordine dello schema utilizzato.



Figura 4.13: Ingrandimenti in prossimità del valore massimo di velocità delle Figure 4.11 e 4.12.

Le considerazioni fin qui evidenziate sono sufficienti a validare l'estensione del codice al caso assialsimmetrico: i valori ottenuti sono comparabili con quelli derivanti dal codice CFD *Proteus* della NASA, laddove l'errore percentuale  $\varepsilon$  sulla quantità  $u_{max}/V_{ref}$  è pari allo 0.58% rispettando gli stessi requisiti riguardanti la convergenza della simulazione.

# 5 Regime ipersonico

Il Capitolo in oggetto presenta inizialmente alcuni dati storici utili a capire le motivazioni nascoste dietro lo studio dei flussi ipersonici, vengono poi evidenziate le caratteristiche di questi ultimi nonché le tipiche modalità di approccio da un punto di vista numerico. Segue lo studio di un caso test in regime ipersonico al fine di validare il codice modificato nel Capitolo 4: tale punto costituisce l'obiettivo principale e viene affrontato con diversi approcci, al fine di ottenerne una visione più completa.

# 5.1 Cenni storici

Il termine ipersonico è riferito ad un flusso supersonico che si muove ancora più velocemente, a tal punto da far intercorrere nuovi fenomeni. L'interesse crescente nei confronti di questo regime è legato alla volontà dell'uomo di viaggiare e trasportare *payload* a velocità sempre più elevate e, inoltre, caratterizza l'entrata nell'atmosfera planetaria.

Il 24 Febbraio 1949 è il giorno in cui, per la prima volta, un veicolo costruito dall'uomo entra in regime ipersonico: il traguardo venne raggiunto nel tentativo di dimostrare che un rocket multistadio raggiunge velocità ed altitudini maggiori, nell'ambito del programma Bumper dell'U.S. Army. Il primo stadio era un classico V-2 risalente alla Seconda Guerra Mondiale, il quale raggiungeva un'altezza di 160 chilometri ad una velocità di 1565 metri al secondo, al fine di innescare il secondo stadio costituito da uno slender needle-like rocket denominato WAC Corporal. Esso riuscì ad accelerare fino a 2235 m/s stabilendo il record di altitudine pari a 393 km e, raggiunto tale picco, rientrò in atmosfera a velocità tipiche del regime ipersonico.

Anni dopo, il 12 Aprile 1961 Yuri Gagarin diventò il primo essere umano a volare nello spazio, nonché protagonista di un volo ipersonico entrando in atmosfera a M > 25: era a bordo della prima *spaceship* Vostok I, la quale gli permise di orbitare attorno alla terra e rientrare alla base in sicurezza.

Lo stesso anno viene ricordato per altri due importanti eventi quali: il 5 Maggio Alan B. Shepard diventò il secondo uomo nello spazio grazie ad un volo suborbitale sopra l'Oceano Atlantico, entrando in atmosfera a M > 5; il 23 Giugno il Maggiore Robert White dell'U.S. Air Force raggiunse la velocità massima record di 3603 *mph* per un aereo, l'X-15 [15].

Si vuole mettere in evidenza la differenza esistente tra l'aerodinamica ipersonica e quella supersonica, da un punto di vista qualitativo, mediante il confronto tra le forme dei veicoli appartenenti alle due categorie. La Figura 5.1 mostra un Lockheed F-104, il primo *fighter* progettato per un volo supersonico a Mach 2: è caratterizzato da un naso estremamente affilato, una fusoliera snella, delle ali molto sottili e delle superfici di coda con un bordo d'attacco molto *sharp* al fine di minimizzare la *wave drag* in campo supersonico.



Figura 5.1: Viste di un Lockheed F-104 progettato negli anni '50.

In Figura 5.2 è visibile un esempio di veicolo ipersonico, il Boeing X-20A Dynasoar: esso è contraddistinto da un'ala a delta con un bordo d'attacco smussato ed una fusoliera piuttosto spessa con un naso arrotondato, la quale è posizionata al di sopra dell'ala di modo tale che il fondo dell'*aircraft* sia piatto.

Il concetto viene rafforzato dalla Figura 5.3 dove è rappresentato il modulo di comando dell'Apollo 11, un *blunt body* privo di ali e progettato per il rientro dell'equipaggio dalla luna a Mach 36: si evince come le diversità nella forma di veicoli ipersonici e supersonici sia uno dei punti chiave per spiegare l'esistenza di uno studio specifico dell'aerodinamica nei due casi. A tale proposito, è evidente come un veicolo supersonico sia provvisto di componenti, come ali, motori e fusoliera, ascrivibili a corpi aerodinamici separati, la cui influenza reciproca è moderata a differenza di quanto caratterizza un caso analogo in ipersonico, dove essi sono integrati.



Figura 5.2: Viste di un Boeing X-20A Dynasoar risalente al 1963. [15]



Figura 5.3: Modulo di comando Columbia dell'Apollo 11.

# 5.2 Introduzione alle caratteristiche di un flusso ipersonico

Convenzionalmente un flusso si definisce ipersonico se il numero di Mach è maggiore di 5, ma viene descritto in modo più appropriato se lo si vede come la condizione tale per cui alcuni fenomeni fisici diventano sempre più importanti man mano che le velocità in gioco crescono. Essi vengono introdotti di seguito così come sono riportati da Anderson [15]:

# • Thin Shock Layers

La teoria dell'urto obliquo suggerisce che la densità aumenta attraverso l'onda d'urto man mano che il numero di Mach aumenta e, di conseguenza, la portata riesce a essere smaltita in aree più piccole. Vale a dire che la regione tra la parete e l'urto, denominata *shock layer*, può essere molto sottile in regime ipersonico e se ne vuole dare una spiegazione ricorrendo alla Figura 5.4. Le relazioni per i cosiddetti urti ipersonici si ricavano a partire da quelle valide nel caso supersonico specificando la condizione limite di  $M_{\infty} \rightarrow \infty$ : essa corrisponde alla curva più esterna di Figura 5.4, la quale passa per l'origine degli assi ed implica che gli angoli  $\theta \in \beta$  sono piccoli [16]. Detto ciò, valgono le semplificazioni seguenti:

$$sen\beta \approx \beta, tg\beta \approx \beta, cos2\beta \approx 1, tg\theta \approx sen\theta \approx \theta$$
 (5.1)

da cui la relazione  $\theta-\beta-M$  viene semplificata come

$$tg\theta = \frac{2}{tg\beta} \left[ \frac{M_1^2 sen^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \Rightarrow \theta = \frac{2}{\beta} \left[ \frac{M_1^2\beta^2 - 1}{M_1^2(\gamma + 1) + 2} \right] \Rightarrow \beta = \frac{\gamma + 1}{2} \theta \quad (5.2)$$



Figura 5.4: Curva  $\theta - \beta - M$ . [16]

Si deduce come l'inclinazione dell'urto ipersonico  $\beta$  sia indipendente dal numero di Mach e proporzionale all'inclinazione della parete  $\theta$ : nel caso di un gas caloricamente perfetto,  $\gamma = 1.4$  e  $\theta = 15^{\circ}$ , si ottiene  $\beta = 18^{\circ}$  a testimonianza di quanto sia sottile la regione intermedia.

L'urto può essere ancora più schiacciato a parete quando intercorrono gli effetti legati alle alte temperature e da ciò deriva l'intersezione tra l'onda d'urto e il viscous boundary layer sviluppatosi sul corpo, particolarmente problematico a bassi numeri di Reynolds. Di contro, quando il Reynolds è elevato, lo shock layer è praticamente inviscido e si può applicare la thin shock-layer theory.

Il regime in questione può essere studiato ricorrendo alla teoria Newtoniana, la quale fu ricavata allo scopo di descrivere la resistenza dei corpi investiti da una corrente a bassa velocità, ma va a rappresentare in maniera adeguata la distribuzione di pressione attorno a corpi immersi in flussi ipersonici. Quanto detto risulta vero nel limite di  $M_{\infty} \to \infty$  poiché si crea un urto a ridosso della parete tale che i disturbi introdotti dal corpo non possono risalire a monte e, di conseguenza, le particelle non vedono modificare la loro velocità e direzione cosicché la forza è dovuta solo alla componente normale della quantità di moto, in accordo con le assunzioni della teoria stessa. Si vuole precisare che quanto più il numero di Mach è elevato e l'urto è vicino al corpo, tanto più le ipotesi alla base di quanto enunciato sono valide e la soluzione esatta dell'urto obliquo ad elevati valori di M tende a quella di Newton per  $\gamma \to 1$ .

### • Entropy Layer

Si consideri un cono il cui bordo d'attacco sia smussato e, per quanto detto, a velocità ipersoniche lo *shock layer* nelle sue vicinanze è molto sottile. L'urto formatosi è curvo e le particelle che lo attraversano sono soggette a salti di entropia di intensità minore man mano che la distanza dall'asse di simmetria aumenta, dal momento che l'urto risulta sempre meno retto e quindi più debole. Il risultato è un *entropy layer*, caratterizzato da forti gradienti, che si sviluppa lungo il corpo ed interagisce con lo

strato limite fino a quando non viene inglobato da quest'ultimo una volta lontani dal *leading edge*. Lo strato è caratterizzato da forti gradienti di entropia e ciò implica la presenza di vorticità all'interno della regione come suggerito dal teorema di Crocco:

$$\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = -T\nabla S \tag{5.3}$$

da cui si deduce una forte interazione tra *shock layer* e *boundary layer* nota come *vorticity interaction*. La presenza di tale strato può creare dei problemi dal punto di vista analitico quando si vuole effettuare un calcolo classico di strato limite poiché è difficile stabilire quali siano le condizioni giuste da imporre sul bordo esterno del *boundary layer*.

#### • Viscous Interaction

Un flusso ipersonico è caratterizzato da una quantità considerevole di energia cinetica, la quale viene dissipata in energia interna a seguito degli effetti dissipativi nello strato limite: ciò determina un incremento della temperatura. Si hanno due conseguenze quali: l'aumento della viscosità dinamica da cui l'ispessimento dello strato limite e la decrescita della densità, a partire dall'equazione di stato dei gas perfetti considerando la pressione costante in direzione normale alla parete. Il secondo punto implica l'ulteriore aumento di spessore da parte del *boundary layer* al fine di smaltire la portata richiesta, nonostante la diminuzione della densità.

L'azione combinata di questi fenomeni fa sì che lo strato limite ipersonico cresca più rapidamente rispetto ad un caso a basse velocità e, nel caso laminare e compressibile di una placca piana, si riscontra:

$$\delta \propto \frac{M_{\infty}^2}{\sqrt{Re_x}} \tag{5.4}$$

dove  $\delta$  è lo spessore di strato limite e  $Re_x$  indica il numero di Reynolds locale. Per quanto detto, lo spessore del corpo appare maggiore di quanto non sia nella realtà e ciò influenza il flusso inviscido esterno che viene deviato più del previsto: l'accoppiamento tra le regioni interna ed esterna allo strato limite prende il nome di viscous interaction. Il fenomeno in oggetto può modificare la distribuzione superficiale della pressione e, di conseguenza, portanza, resistenza e stabilità nonché determinare un aumento del coefficiente di sforzo d'attrito a parete e del flusso di calore. Da un punto di vista risolutivo, possono sorgere dei problemi quando lo strato limite è tanto spesso da intersecare l'onda d'urto: in tal caso, non è possibile distinguere tra regione interna ed esterna al boundary layer il quale va trattato come fully viscous.

#### • High-Temperature Flows

Il regime ipersonico è contraddistinto da flussi ad alta temperatura derivanti sia dalla dissipazione viscosa all'interno dello strato limite sia dalla presenza di urti forti: la logica conseguenza è rappresentata dallo studio del flusso termico e dalla successiva progettazione di opportuni *thermal protection system* (TPS). Le temperature raggiunte possono essere così elevate da eccitare i gradi di libertà vibrazionali delle molecole, fino a provocarne la dissociazione e poi la ionizzazione e, per tale motivo, si parla di *chemically reacting flow* in campo ipersonico. Nel caso in cui siano presenti degli scudi ablativi, si devono contemplare anche le reazioni chimiche degli idrocarburi. L'analisi dei fenomeni termochimici è di fondamentale importanza allo scopo di ricavare le forze e i momenti corretti agenti sul corpo e la trattazione viene complicata quando i tempi caratteristici della chimica sono più lenti di quelli del corpo in moto poiché va considerato il flusso in non equilibrio. La grandezza nei confronti della quale occorre prestare maggiore attenzione è l'*aerodynamic heating*, inteso come il flusso di calore dallo strato limite caldo alla parete fredda: è inversamente proporzionale al raggio di curvatura del bordo d'attacco e ciò spiega l'uso di corpi assialsimmetrici in ipersonico, a differenza di quanto accade in supersonico.

Un altro effetto, significativo per temperature ancora superiori, è legato al *radiative heating* che contribuisce al flusso termico in maniera decisa quando le velocità in gioco sono molto alte e l'energia del flusso è elevata; di contro, per basse velocità si parla di *surface radiation-cooling* come effetto benefico utile al raffreddamento delle superfici.

Un ulteriore incremento di T produce la ionizzazione da cui deriva il *communications black-out* tipico delle prime fasi del rientro atmosferico, durante le quali le frequenze radio vengono assorbite dagli elettroni liberi presenti.

Una maggiore attenzione viene riservata ai fenomeni descritti in una sezione successiva, al fine di implementare e validare gli effetti derivanti dal disequilibrio chimico e vibrazionale limitatamente al caso di flusso non viscoso, il cui comportamento è regolato dalle equazioni di Eulero.



Figura 5.5: Tipico profilo di temperatura all'interno di uno strato limite ipersonico. [15]

### • Low-Density Flow

I fenomeni in oggetto sono legati ai veicoli che viaggiano a quote elevate tali per cui l'aria diventa più rarefatta e, pertanto, non sono strettamente correlati solo a quelli ipersonici.

La maggior parte dei problemi aerodinamici prevede l'assunzione dell'ipotesi del continuo e l'uso delle equazioni di Navier-Stokes, i quali risultano validi quando il libero cammino medio  $\lambda$ , ovvero la distanza media tra collisioni successive tra molecole, è molto più piccolo rispetto ad una dimensione caratteristica del corpo: il parametro adimensionale che ne regola il comportamento è il numero di Knudsen  $Kn = \lambda/L$ . Man mano che la densità diminuisce, per esempio all'aumentare della quota, il libero cammino medio diventa sempre più grande così come il numero di Knudsen e l'ipotesi del continuo inizia a perdere la sua validità, da cui derivano i diversi flow regimes riportati in Figura 5.6.



Figura 5.6: Regimi del flusso ed equazioni di riferimento al variare del numero di Knudsen. [17]

In virtù di quanto detto, occorre cambiare approccio nei confronti dell'aerodinamica mediante l'uso di concetti derivanti dalla teoria cinetica. Quando 0.01 < Kn < 0.1 la no-slip condition perde validità dal momento che non è più trascurabile l'effetto del flusso rarefatto sulle molecole adiacenti alla parete e bisogna aggiungere la velocity-slip condition e la temperature-slip condition alla descrizione finora effettuata circa i classici metodi continuum-based. Per valori ancora più bassi della densità, l'ipotesi del continuo non può più essere corretta ma va abbandonata a favore di metodi derivanti dalla teoria cinetica e si parla di transition regime e free-molecule flow, dove risultano importanti i singoli impatti delle molecole sulla superficie: lo studio può essere svolto con un metodo DSMC (Direct Simulation Monte Carlo).

La Figura 5.7 è utile per riassumere in maniera schematica gli effetti introdotti nella sezione in esame.



Figura 5.7: Fenomeni fisici caratteristici del flusso ipersonico. [15]

# 5.3 Simulazione numerica di un flusso ipersonico viscoso

La sezione è utile a focalizzare l'attenzione su alcuni accorgimenti circa la simulazione di un flusso ipersonico riguardanti il dominio, le condizioni al contorno e la cattura dell'urto; le restanti informazioni relative alle equazioni di governo, alla formulazione ai volumi finiti e al calcolo dei flussi sono presenti nei Capitoli 3 e 4.

Il dominio tipico nel caso di un flusso attorno ad un *blunt body* ipersonico è visibile in Figura 5.8: esso va scelto in maniera tale che eventuali regioni subsoniche siano contenute all'interno di esso così da poter imporre, senza particolari artifici, una condizione al contorno supersonica all'*outflow boundary*. Inoltre, se il corpo è simmetrico e l'angolo di incidenza nullo così come quelli considerati nella tesi in oggetto, si può applicare una condizione al contorno di simmetria in corrispondenza dell'asse.



Figura 5.8: Esempio di un dominio fisico nel caso di un  $blunt \ body$  in regime ipersonico. [10]

La BC da imporre all'*inflow boundary* è legata alla modalità di cattura dell'urto, la quale può essere distinta in [10]:

- *shock capturing*, ovvero l'urto si trova all'interno del dominio di calcolo e viene rilevato automaticamente dalla soluzione del campo di moto come un rapido cambiamento tra le proprietà caratteristiche del flusso. Esso viene quindi discretizzato con un certo numero di nodi della griglia e permette di imporre una condizione al contorno supersonica in ingresso;
- *shock fitting*, ovvero l'urto è trattato in modo esplicito come una vera e propria discontinuità e costituisce il bordo stesso del dominio. La soluzione evolve iterazione dopo iterazione e ciò comporta lo spostamento dell'urto e, di conseguenza, la

modifica del dominio di calcolo al fine di non avere dei punti della griglia superflui: il procedimento è reso possibile dall'utilizzo delle relazioni dell'urto obliquo per definire la nuova posizione del *moving outer boundary*.

Il secondo metodo brevemente descritto consente di ottenere una discretizzazione elegante dell'urto che non risente del problema dovuto alla sua cattura con un numero finito di punti; di contro, non è molto robusto e può diventare eccessivamente complicato in applicazioni pratiche che prevedono per esempio l'interazione dell'urto con altre discontinuità: quanto evidenziato spiega il motivo per il quale viene preferito il primo modo di agire nella tesi in oggetto.

La parete presenta la classica condizione al contorno di aderenza, da cui si deduce che  $\mathbf{V}_{wall} = 0$ : essa è valida nella maggior parte dei casi a meno che, come introdotto nella sezione precedente, il numero di Knudsen non sia tanto grande da dover considerare lo *slip flow regime*. Il flusso d'interesse è compressibile e viscoso e necessita di un ulteriore condizione al contorno dettata dalla presenza dell'equazione dell'energia, la quale può interessare la temperatura o il flusso di calore a parete. La temperatura di parete deve essere fornita come una costante, in analogia con il successivo caso test studiato, oppure come funzione di una coordinata che scorre lungo la parete stessa: tale modo di fare ha senso per gli esperimenti che vengono condotti in gallerie del vento ipersoniche a temperature fissate su di un certo livello. La condizione al contorno sul flusso di calore a parete può essere imposta solo se lo stesso è noto, ma solitamente ciò non vale ed è necessario il calcolo dell'*heat flux* all'interno del corpo in modo tale da poter scrivere la BC come:

$$(q_w)_{fluid} = (q_w)_{solid} \Rightarrow (k_w)_{fluid} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_w \right]_{fluid} = (k_w)_{solid} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_w \right]_{solid}$$
(5.5)

Si vuole precisare come in questo ultimo caso la temperatura a parete sia incognita e si evidenzia un caso limite corrispondente alla condizione al contorno di parete adiabatica, dove:

$$q_w = -k_w \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w = 0 \tag{5.6}$$

Analogamente a quanto detto per la velocità, è opportuno tenere conto della temperatureslip condition nel caso in cui Kn > 0.01.

### 5.4 ONERA hollow cylinder-flare test case

Il centro di ricerca aerospaziale ONERA ha offerto un contributo importante agli studi relativi al campo ipersonico, a partire dalla missione ELECTRE per poi passare al progetto Hermès: quest'ultimo ha consentito di effettuare degli investimenti in strutture quali la galleria del vento a bassa densità R5Ch e la *high enthalpy wind tunnel* F4. Con il passare degli anni e con l'avvento della fluidodinamica computazionale, le *facilities* di cui sopra sono state largamente impiegate per realizzare degli esperimenti, poi utilizzati come casi test per la validazione di codici CFD [21].

L'obiettivo della sezione è la riproduzione di uno di questi esperimenti mediante l'uso di **gloria** al fine di validare il codice, comprensivo dell'estensione al caso assialsimmetrico. La scelta ricade sullo studio della configurazione *hollow cylinder-flare*: essa permette di analizzare la nascita di onde d'urto, l'interazione tra le stesse e soprattutto l'evoluzione della bolla di ricircolo che si forma in corrispondenza dell'angolo tra il primo cilindro e l'allargamento. Tale geometria 2D assialsimmetrica nasce per evitare il problema relativo

alla presenza delle pareti laterali nel caso analogo di *flat plate-ramp*: così facendo, si ottiene un campo di moto molto simile che risente dell'influenza del raggio del cilindro, ma non presenta l'effetto spurio delle pareti laterali su forma e dimensione della bolla [19]. La simulazione numerica è affetta da alcune criticità quali:

- la necessità di un'elevata accuratezza per catturare al meglio i gradienti caratterizzanti la bolla di ricircolo;
- il numero elevato di iterazioni al fine del raggiungimento dello stato stazionario per la bolla, la cui evoluzione è lenta a causa della convezione all'interno del *viscous layer*;
- la posizione del punto di separazione  $(C_f = 0)$  è estremamente grid-sensitive così come la lunghezza d'influenza della corrente a monte ed il picco del flusso di calore, che tende a diminuire quanto più la griglia è fitta [18, 20].

I risultati, ottenuti sia con una mesh standard sia con una adattativa (*Adaptive Mesh Refinement*), vengono confrontati con dati numerici provenienti da altri codici nonché dati sperimentali.

# 5.4.1 Setup sperimentale

Il modello di *hollow cylinder-flare* è costituito da un bordo d'attacco *sharp*, seguito da un allargamento che termina con un secondo cilindro: la lunghezza di riferimento L, intesa come distanza dal *leading edge* all'inizio dell'allargamento, è pari a 0.1017 metri mentre per le altre misure si fa riferimento alla Figura 5.9. Il corpo è stato equipaggiato con prese di pressione e termocoppie, al fine di misurare la distribuzione di pressione ed il flusso di calore in corrispondenza della superficie (Figura 5.10).



Figura 5.9: Geometria e dimensioni della configurazione hollow cylinder-flare. [22]



Figura 5.10: Disposizione delle prese di pressione e delle termocoppie sul modello di *hollow* cylinder-flare. [22]

La Figura 5.11 mostra il setup sperimentale della prova condotta nella galleria a bassa densità R5Ch dell'ONERA. La struttura prevede un ugello sagomato di rivoluzione che assicura un Mach uniforme pari a 9.91 in condizioni nominali di  $p^0 = 2.5 \cdot 10^5 Pa$  e  $T^0 = 1050 K$ . Le misure relative al campo di densità sono state eseguite con un sistema a raggi-X grazie all'attività congiunta con *l'Institute of Thermophysics of Novosibirsk*. La tecnica prevede un *electron gun* posizionato sulla sommità della camera di prova e risulta opportuno far passare il fascio di elettroni all'interno di un tubo di 2 mm allo scopo di limitare l'interferenza in termini di radiazione emessa dal materiale di cui è costituito il corpo: così facendo, sono possibili delle misure a circa 1 mm dalla superficie senza incorrere in problematiche simili. Il *detector* è composto da un collimatore Soller, il quale è costituito da due placchette lunghe 80 mm e distanti 0.8 mm, e da un rilevatore in silicio: si utilizzano due dispositivi del genere, dei quali uno misura la densità di riferimento nella corrente indisturbata di monte e l'altro viene spostato all'interno dello strato limite. La corrente corrispondente al fascio di elettroni è pari a 0.5 mA, da cui risulta un tempo di integrazione di 10 secondi per punto [21].

Le condizioni ambiente relative al test sono correlate a quelle operative utili al calcolo dei carichi meccanici e termici sulle superfici di veicoli ipersonici, come i *Reusable Launch Vehicles* (RLV) o lo *Space Shuttle*, al fine di progettare in modo opportuno la forma aerodinamica e il sistema di controllo termico. In particolare, le superfici di controllo come elevoni e flaps sono immerse in una corrente che è largamente dominata da interazioni tra onde d'urto e strato limite: ciò può provocare separazioni, transizioni da laminare a turbolento, picchi di calore localizzati, incremento di resistenza, variazione del momento di cerniera e perdita dell'efficienza aerodinamica. La complessità di questi fenomeni e la conseguente variazione significativa della performance di un velivolo rende fondamentale la validazione del codice CFD in situazioni simili.



Figura 5.11: Setup sperimentale impiegato dall'ONERA. [21]

Si riportano in Tabella 3 i dati necessari per impostare correttamente la simulazione numerica.

Grandezza	Valore
$T^0$	1050  K
$p^0$	$2.5\cdot 10^5Pa$
$T_{\infty}$	51 K
$p_{\infty}$	6.3  Pa
$M_{\infty}$	9.91
$Re_{\infty}$	$1.86 \cdot 10^5  m^{-1}$
$T_w$	293 K

Tabella 3: Condizioni ambiente per la prova sperimentale condotta all'ONERA.

Si precisa come le temperature in gioco siano relativamente basse e tali da poter non considerare gli effetti legati al disequilibrio chimico e vibrazionale: risulta così valido il modello di aria come gas perfetto con  $\gamma$  costante, composta al 21% da  $O_2$  e al 79% da  $N_2$ .

#### 5.4.2 Setup in gloria e modifiche effettuate

La Figura 5.12 riporta le coordinate del dominio utilizzato per replicare l'esperimento condotto all'ONERA e mostra la griglia utilizzata da D'Ambrosio et al. [19]; essa è composta da 99 punti in direzione normale e 299 in quella tangenziale, presenta una spaziatura costante in direzione x pari a  $\Delta(x/L) = 0.57471 \cdot 10^{-2}$  e la funzione di trasformazione seguente per definire lo *stretching factor* in direzione y:

$$y(J) = y_w + (y_{max} - y_w) \left[ 1 - \beta_y + \frac{2\beta_y}{1 + \left(\frac{\beta_y + 1}{\beta_y - 1}\right)^{\psi}} \right]$$
(5.7)

 $\cos \psi = (J_{max} - J)/J_{max}$  e *J* rappresenta l'indice che scorre in direzione *y* da 0 per  $y = y_w$ a  $J_{max}$  per  $y = y_{max}$ . Si sottolinea come la forma del dominio sia studiata allo scopo di contenere interamente gli urti.



Figura 5.12: Coordinate del dominio e griglia utilizzata da D'Ambrosio et al. per la simulazione della configurazione *hollow cylinder-flare*. [19]

Una griglia strutturata del genere non può essere impiegata in **gloria** e si deve ricorrere ad una diversa suddivisione del dominio, come quella esposta in Figura 5.13. Il dominio viene generato da **PABLO** in modalità quadtree e, pertanto, è un quadrato la cui origine è posta in (-0.0023379813, 0.0), di lato pari a 0.1743330213 metri. All'interno di esso vengono definiti due corpi (in verde) la cui forma è tale che la parte rimanente del dominio, ovvero quella influente sul carico computazionale e caratterizzata da una soluzione non banale, sia analoga a quella presente in Figura 5.12. Si imposta la taglia degli ottanti più grande possibile uguale a circa 50 mm allo scopo di evitare uno sbilanciamento del carico tra i processi MPI, come già sottolineato per il caso test a basso numero di Reynolds. Si precisa come sia presente un altro corpo (in rosso), denominato feeder block, al fine di poter applicare una diversa condizione al contorno nel tratto corrispondente, la cui utilità viene spiegata successivamente.

Sono state create diverse regioni, in formato .dgf, in modo da ottenere i livelli di raffinamento desiderati per la griglia. La più estesa presenta delle dimensioni identiche a quelle del dominio utilizzato da D'Ambrosio et al. [19] e garantisce una taglia massima delle celle pari a 0.00069 m, comparabile con la spaziatura costante in x impiegata nell'articolo sopra citato. Vengono poi predisposte altre due regioni (in blu): quella più schiacciata a parete ha il compito di discretizzare al meglio lo strato limite con una mesh size massima di 0.00017 m, mentre l'altra è utile per assicurare una corretta transizione della mesh, in modo da replicare una sorta di stretching factor, ed un raffinamento pari a 0.0003 m allo scopo di catturare le onde d'urto, l'interazione tra le stesse e soprattutto l'evoluzione della bolla di ricircolo. Si può notare come sia presente un ulteriore area di refinement, la cui taglia massima è pari a 0.00085 m, la quale è stata introdotta per evitare le oscillazioni in termini di  $c_p$  manifestatesi in una simulazione precedente nella zona di interazione tra gli urti.



Figura 5.13: Suddivisione del dominio impiegata per la simulazione della configurazione *hollow cylinder-flare*.

La griglia finale mostrata in Figura 5.14, la quale garantisce l'accuratezza richiesta, viene ottenuta attraverso quattro step di raffinamento mediante una progressione lineare. Si imposta la taglia finale desiderata e, una volta raggiunto un *initial refine threshold* specificato, ha inizio il processo di raffinamento progressivo da cui hanno origine quattro griglie intermedie (Figura 5.15): una simulazione viene fatta girare su ciascuna di esse e si passa da una a quella successiva mediante un certo *trigger*, ovvero dopo che i residui in norma 2 sono diminuiti di sei ordini di grandezza. Il calcolo allo step successivo presenta come condizioni iniziali i risultati di quello precedente e tale modalità di generazione della griglia consente di accelerare la convergenza del caso.

Le condizioni al contorno impostate vengono elencate di seguito:

- farfield sui bordi sinistro e superiore del dominio computazionale, definita a partire da  $V_{\infty} = 1419.2 \ m/s, \ p_{\infty} \ e \ T_{\infty};$
- *reflective* in corrispondenza del *feeder block*, allo scopo di applicare la *slip-condition* di modo tale che il primo urto non si generi esattamente sul bordo del dominio, ma nel punto posto nell'origine degli assi;
- wall sulla parete o bordo inferiore del dominio computazionale, che implica la noslip condition ed una temperatura costante  $T_w$  giustificabile in base alle modalità di svolgimento della prova sperimentale in wind tunnel;
- *extrapolated* sul bordo destro o d'uscita del dominio, la quale permette di estrapolare i valori dal campo di moto interno una volta sicuri che si tratti di un *supersonic outflow boundary*, ovvero che le eventuali zone subsoniche siano interne alla regione di calcolo.


Figura 5.14: Griglia di calcolo finale utilizzata per la simulazione della configurazione *hollow cylinder-flare*.



(a) Primo step: raffinamento base dell'intero dominio computazionale



(c) Terzo step: ingrandimento in corrispondenza della regione utile alla discretizzazione dello strato limite



(b) Secondo step: regione di raffinamento utile alla cattura degli urti e della bolla di ricircolo



(d) Quarto step: ingrandimento in corrispondenza del secondo spigolo, zona di interazione tra gli urti

Figura 5.15: Step di raffinamento utili al raggiungimento della griglia finale impostata.

Si desidera precisare come la viscosità sia calcolata mediante l'uso della legge di Sutherland, già correttamente implementate nel codice come segue:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$
(5.8)

con  $\mu_0 = 1.716 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s, T_0 = 273.15 K e S = 110.4 K.$ 

Il confronto tra i risultati ottenuti e quelli derivanti da altri codici e dalla prova sperimentale condotta dall'ONERA viene eseguito su parametri normalizzati quali il coefficiente di pressione, il coefficiente di sforzo d'attrito a parete e il numero di Stanton: sono quindi richiesti in output i valori di  $\tau_w$ ,  $q_w \in T_w$ . Ciò comporta la modifica del codice mediante l'introduzione di un *branch* aggiuntivo, il quale permette di visualizzare in *Paraview* le grandezze d'interesse esclusivamente in corrispondenza della parete. La versione iniziale prevedeva il *plot* di pressione e velocità, ma sono state apportate le modifiche seguenti alla classe **writeSurfaceOutput** all'interno di **solver.cpp** al fine di visualizzare anche i contributi relativi a temperatura, flusso di calore e sforzo d'attrito a parete.

```
std :: vector <double> heat_flux (interfaceCount);
std :: vector <double> tau_wall(interfaceCount);
std :: vector <double> temperature(interfaceCount);
```

```
for (const auto &partBCEntry : bodyBCEntry.second) {
    int partId = partBCEntry.first;
```

```
for (const long & interfaceId : partBCEntry.second ->
  getInterfaces() ) {
    interfaceCursor.set(interfaceId);
    const IBoundaryInfo & interfaceInfo = interfaceCursor.
       getBoundaryInfo();
    const grid :: IMBGeometricInfo & imb = interfaceInfo.imb;
   const darray3 &tb = imb.tangentialInfo[0].versor; //
      definizione del versore tangente in un caso 2D
   const FluidMixture mixture = fluidCellCursor.getMixture
      ();
    const darray3 & nb = imb.normal;
    .
   double k = mixture.k(boundaryFields[fid T]);
    darray3 q = -k * fluidCellCursor.getGradsPtr()[fid T];
    double mu = mixture.mu(boundaryFields[fid T]);
    const std::array<double, 3> location = imb.x;
    double lambda = -2. / 3 * mu * :: utils :: divergence (...)
    darray33 stress tensor = mu * 2 * :: utils :: strainRate
       (...);
    stress tensor [0][0] += lambda;
```

```
stress_tensor[1][1] += lambda;
stress_tensor[2][2] += lambda;
.
.
.
heat_flux[counter] = dotProduct(q, nb);
tau_wall[counter] = dotproduct(linearalgebra::matmul(
stress_tensor, nb), tb);
temperature[counter] = boundaryFields[fid_T];
++counter;
}
```

Il flusso di calore e lo sforzo d'attrito a parete vengono calcolati con le formule che seguono:

$$q_w = -k\nabla T \cdot \vec{n} \tag{5.9}$$

$$\tau_w = (\bar{\bar{\tau}}\vec{n}) \cdot \vec{t} \tag{5.10}$$

#### 5.4.3 Risultati

Il test case in esame presenta alcune criticità, tra le quali la più significativa è la presenza di una bolla di ricircolo caratterizzata da una lenta evoluzione a causa del fenomeno di convezione all'interno del viscous layer. Ciò influenza il criterio di convergenza da utilizzare, nel senso che risulta opportuno monitorare l'estensione della bolla fino a quando essa non si stabilizza piuttosto che osservare, come si è soliti fare, l'andamento dei residui. La crescita della zona di ricircolo viene controllata riportando i punti di separazione e riattacco del flusso, ovvero quelli in cui lo skin friction coefficient  $c_f$  è pari a zero o, in alternativa, cambia segno.

La Figura 5.16 mostra come la dimensione della bolla si assesti dopo circa  $2.5 \cdot 10^6$  iterazioni e la simulazione viene interrotta dopo ulteriori  $9 \cdot 10^5$  iterazioni allo scopo di evidenziare sia la stabilità raggiunta dall'area d'interesse sia la convergenza dei residui, in termini di riduzione degli stessi in norma 2 e infinito di almeno 7 ordini di grandezza.

Le Figure 5.17 e 5.18 sono utili a testimoniare quanto scritto nella sezione precedente: vale a dire che si fa uso di quattro step di raffinamento e si passa da uno all'altro solo dopo che i residui in norma due diminuiscono di 6 ordini di grandezza. Tale procedimento accelera il processo di convergenza della griglia finale, la quale è composta da 142495 celle: la simulazione, nel suo complesso, viene interrotta dopo aver girato per circa 65 ore su 10 processi in parallelo.

Si riportano i residui nelle due norme per completezza dal momento che, come già evidenziato per il caso test a basso numero di Reynolds, sono legati gli uni alla convergenza globale su tutto il dominio e gli altri a quella locale.



Figura 5.16: Evoluzione temporale della bolla di separazione.



Figura 5.17: Andamento dei residui in norma 2 durante la simulazione.



Figura 5.18: Andamento dei residui in norma infinito durante la simulazione.

Si procede con una panoramica qualitativa dei risultati ottenuti e processati in *Pa-raview*, a partire dalla scena di velocità normalizzata rispetto a quella di riferimento  $V_{ref} = \sqrt{RT_{ref}}$  in Figura 5.19: si nota la presenza di un urto obliquo in corrispondenza del *leading edge* del cilindro, dovuto alla formazione di uno strato limite sulla parete che devia le particelle dalla direzione parallela alla stessa e dipende dai parametri adimensionali *Ma* e *Re*. L'area in blu corrisponde a quella interessata dalla bolla di separazione e si può distinguere una fascia leggermente più scura, legata alla diminuzione di velocità a valle dell'onda di compressione ivi presente. Si precisa come gli urti nella zona in esame siano due ed occorre una griglia sufficientemente fitta per discretizzarli entrambi al meglio: nel caso in esame, la Figura 5.20 è sicuramente più esplicativa.

In prossimità del secondo cilindro è identificabile un ulteriore urto, il cui effetto è limitato velocemente dal fascio di espansione a cui il flusso è soggetto nel secondo spigolo.

Le Figure 5.19 e 5.23 permettono anche di avere un riscontro in termini qualitativi dell'applicabilità dell'*extrapolated condition* dal momento che le porzioni subsoniche sono completamente contenute nel dominio nonché della corretta dimensione del dominio stesso visto che gli urti e i vari fenomeni analizzati sono sufficientemente distanti dai bordi.



Figura 5.19: Campo scalare di velocità normalizzata.



Figura 5.20: Campo scalare di pressione normalizzata.

Si focalizza ora l'attenzione sulle scene di pressione sia in termini di campo scalare sia di curve iso-livello (Figure 5.20 e 5.21). La pressione a valle del primo urto obliquo aumenta a tal punto che viene indotta la separazione della vena fluida e la conseguente formazione della bolla: essa, come affermato anche da D'Ambrosio et al. [19], fa sì che la pendenza tra il primo cilindro e l'allargamento sia più dolce e che l'influenza dello spigolo sia percepita in una zona dove la pressione totale è alta.

Tipicamente il campo di moto è caratterizzato da una serie di onde di compressione che si intersecano dando vita ad un'onda d'urto, ovviamente al di fuori della zona subsonica presente nel viscous layer. Nel caso in esame, invece, si formano due urti di lieve entità come è ben visibile dalla Figura 5.21: uno è posizionato davanti al punto di separazione e l'altro prima di quello di riattacco, dove la pendenza del bordo superiore della bolla è maggiore di quella relativa alle linee di corrente incidenti dal momento che essa deve raccordarsi con l'inclinazione del *flare*.



Figura 5.21: Isolinee del  $log_{10}(p/p_{ref})$  colorate in base al valore di pressione normalizzata e *streamlines* nella zona interessata dalla bolla di separazione.



Figura 5.22: Isolinee di pressione e linee di corrente nella zona interessata dalla bolla relative alla simulazione di D'Ambrosio et al. [19]

Le Figure 5.20 e 5.21 consentono di visualizzare come l'urto al *leading edge* e le due onde di compressione dovute alla presenza della bolla si intersecano dando vita ad un ulteriore urto, la cui pendenza è dettata da quella della *shock wave* in prossimità del punto di riattacco: ciò accade poiché si tratta dell'urto di maggiore entità, come si evince dai valori della pressione in gioco, a differenza del primo che è il più debole.

La Figura 5.22 viene inserita allo scopo di visualizzare in maniera strettamente qualitativa come le isolinee derivanti dall'integrazione in **gloria** siano confrontabili con buona approssimazione con quelle relative alla simulazione di D'Ambrosio et al [19].



Figura 5.23: Linee di corrente colorate in base al valore della velocità normalizzata.

La Figura 5.23 riporta le linee di corrente utili alla descrizione del campo di velocità: in particolare, risulta evidente la bolla di separazione una volta raggiunta la convergenza della stessa e si può verificare come la regione in esame sia caratterizzata da basse velocità; inoltre, si evince come il numero di Mach in prossimità del punto di riattacco sia elevato e, di conseguenza, i gradienti nell'area circostante sono significativi e tali per cui la taglia degli ottanti debba essere piccola rispetto alla zona esterna allo strato limite.

Come accennato nella sezione precedente, è necessario introdurre la definizione dei parametri adimensionali utilizzati per confrontare i risultati ottenuti con **gloria** sia con quelli ricavati da D'Ambrosio et al. [19] sia con quelli sperimentali, grazie all'ausilio delle prese di pressione e delle termocoppie disposte come in Figura 5.10. Le formule seguenti sono correlate rispettivamente al coefficiente di pressione, al coefficiente di sforzo d'attrito a parete e al numero di Stanton:

$$c_p = \frac{p_w - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \tag{5.11}$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \tag{5.12}$$

$$St = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty (H^0_\infty - h_w)} \tag{5.13}$$

dove l'entalpia di parete  $h_w = c_p T_w$  rende necessario l'output della temperatura al bordo, poi utilizzata anche per il calcolo dell'entalpia totale  $H^0_{\infty} = h_w + V^2_{\infty}/2$ .

Il *Post Processing* viene eseguito attraverso l'utilizzo di un programma *Matlab*, dove vengono plottati i vari grafici una volta ricavate le quantità normalizzate appena introdotte. Risulta però opportuno specificare che **gloria** stampa dei valori adimensionali, mentre i termini che compaiono nelle formule 5.11, 5.12 e 5.13 sono dimensionali e pertanto occorre moltiplicarli come segue:

$$p = \tilde{p}p_{ref} \tag{5.14}$$

$$\tau \sim \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Rightarrow \tau = \tilde{\tau} \frac{\mu_{ref} U_{ref}}{L_{ref}^2}$$
 (5.15)

$$q \sim k\nabla T \Rightarrow q = \tilde{q} \frac{k_{ref}}{L_{ref}} T_{ref}$$
(5.16)

dove  $\tilde{f}$  indica la generica grandezza normalizzata e ricordando che in **gloria**  $L_{ref} = 1$  di default.



Figura 5.24: Andamento del coefficiente di pressione a parete.

La Figura 5.24 mostra l'andamento del coefficiente di pressione a parete: si evince un picco iniziale in corrispondenza dell'urto obliquo al *leading edge* ed una successiva diminuzione del parametro dettata dall'interazione con lo strato limite, di per sé viscoso a differenza della zona esterna. L'interazione è tale da causare la separazione del flusso per  $x/L \sim 0.7$ , la quale è seguita dalla formazione della bolla di ricircolo ben identificabile dalla distribuzione della pressione a valle della prima onda di compressione. Si nota come il flusso subisca una rapida compressione nelle vicinanze del punto di riattacco, per  $x/L \sim 1.3$ , che viene seguita immediatamente dall'espansione dovuta al passaggio dal flare al secondo cilindro.

Si vuole sottolineare come i risultati ottenuti in **gloria** siano quasi perfettamente sovrapponibili a quelli ricavati da D'Ambrosio: in particolare quanto detto vale soprattutto per l'urto al bordo d'attacco e la bolla di separazione, mentre si osserva una differenza nel picco del  $c_p$ . Essa è dovuta probabilmente ad una taglia della mesh abbastanza diversa tra le due simulazioni, come si può osservare anche graficamente dal numero di punti che compaiono: nella simulazione in oggetto, infatti, è stata inserita una regione di raffinamento esattamente in corrispondenza del secondo spigolo (Figura 5.15d) al fine di evitare delle oscillazioni manifestatesi in un precedente caso e si può verificare la sua presenza notando uno *swirl* dei dati riportati a  $x/L \sim 1.4$  causato dal cambiamento della taglia degli ottanti, la quale implica delle difficoltà nel calcolo della derivata in quel punto.

A valle di queste considerazioni, i dati numerici risultano sufficientemente vicini a quelli sperimentali e ciò vale anche in corrispondenza del picco del  $c_p$ , a testimonianza della bontà dei risultati ottenuti infittendo la griglia localmente.



Figura 5.25: Campo scalare di temperatura normalizzata.



Figura 5.26: Andamento del numero di Stanton a parete.

La Figura 5.26 consente di visualizzare l'andamento del numero di Stanton a parete: si osserva una caratteristica forma a V del grafico nella zona d'interazione tra gli urti presenti e segue una ripida decrescita dettata dall'espansione in prossimità del secondo spigolo. Il picco di flusso di calore si ha nelle vicinanze del punto di riattacco della corrente e ciò è dovuto ai forti gradienti che caratterizzano l'area in esame, in analogia con quanto detto per il numero di Mach: un riscontro si può avere da un'analisi qualitativa del campo di temperatura adimensionale in Figura 5.25. La presenza della bolla di separazione è meno evidente della rappresentazione precedente ma risulta comunque identificabile notando il cambiamento di pendenza in corrispondenza di  $x/L \sim 0.7$ .

Si nota come i risultati ottenuti a partire da **gloria** siano ben aderenti a quelli sperimentali nonché a quelli ricavati da D'Ambrosio: a tale proposito, le differenze più significative tra gli andamenti blu e rosso si riscontrano nell'urto al *leading edge* e in prossimità del secondo spigolo. La causa degli stessi può essere nuovamente correlata alla diversa *mesh size* ma la validità dell'analisi effettuata viene testimoniata dalla perfetta aderenza dei dati numerici e sperimentali per 0.2 < x/L < 0.4e dalla cattura netta del picco di temperatura nel passaggio da flare a cilindro.



Figura 5.27: Andamento del coefficiente di sforzo d'attrito a parete.

La Figura 5.27 mostra l'andamento dello *skin friction coefficient* e permette di identificare i punti di separazione e riattacco della corrente, laddove il  $c_f$  ha un valore nullo o cambia segno. Si riportano in Tabella 4 le coordinate normalizzate di tali punti, determinate sia con **gloria** sia da D'Ambrosio, al fine di effettuare un'analisi quantitativa oltre che qualitativa.

x/L	gloria	D'Ambrosio
separazione riattacco	$0.730 \\ 1.307$	$0.717 \\ 1.348$

Tabella 4: Coordinate adimensionali dei punti di separazione e riattacco nel caso delle due simulazioni confrontate.

Si osservano delle differenze, tra le quali quella più significativa riguarda il punto di riattacco e va a testimoniare quanto l'evoluzione della bolla e, di conseguenza, il campo di moto siano dipendenti dalla griglia: infatti, come ribadito più volte, la zona d'interesse è quella provvista della regione di raffinamento della mesh.

A valle della descrizione dei tre grafici relativi ai parametri adimensionali studiati, si può evidenziare come il picco sia sempre in corrispondenza della fine del *flare*, ovvero dopo il punto di riattacco, e viene seguito da un improvviso calo dettato dal fascio d'espansione esistente: come sottolineato da D'Ambrosio et al. [19] il massimo del numero di Stanton è importante ai fini dell'attendibilità della simulazione e, a tale proposito, si può essere soddisfatti a posteriori del risultato ottenuto confrontandolo con gli altri dati numerici a disposizione.

Le sottili discrepanze con i dati sperimentali possono derivare, come suggerito da Marini [20], dalla scarsa risoluzione spaziale dell'apparecchiatura utilizzata, dove si ha un numero finito di prese ben più piccolo rispetto ai punti della griglia numerica. Nello stesso articolo, viene riportato un confronto con la geometria 2D dove si mettono in luce i seguenti effetti dovuti ad uno strato limite più spesso: la bolla di separazione è più estesa così come il *plateau* di pressione e i picchi relativi a  $c_p$  e St sono meno intensi (Figura 5.28).



Figura 5.28: Confronto di  $c_p$  e St tra il caso assialsimmetrico e quello bidimensionale. [20]

A completamento di quanto detto finora, si riporta anche il confronto effettuato da Gnoffo [18] volto a dedurre gli effetti dei numeri di Reynolds e Mach: la Figura 5.29 mette in luce come la zona di separazione diventi man mano più ampia al crescere del Re, in accordo con quanto accade in maniera più significativa anche per il Ma.



Figura 5.29: Andamento del numero di Stanton al variare di  $Re \in Ma$ . [18]

I risultati fin qui mostrati sono soddisfacenti e permettono di validare l'utilizzo di **gloria** in regime ipersonico su corpi assialsimmetrici, in particolare per valori della temperatura tali da non indurre il disequilibrio chimico e vibrazionale: quanto detto può essere ulteriormente confermato dal confronto con i dati numerici di D'Ambrosio e quelli sperimentali derivanti dalla prova svolta nella galleria R5Ch dell'ONERA.

La sezione successiva è focalizzata sullo studio dell'*Adaptive Mesh Refinement* utilizzabile in **gloria**, allo scopo di verificare la forte dipendenza dalla griglia che caratterizza la soluzione dell'*hollow cylinder-flare test case*.

#### 5.4.4 Confronto tra mesh statica ed adattativa

L'Adaptive Mesh Refinement è un metodo utile a garantire un'opportuna risoluzione spaziale e temporale nelle zone del dominio ove è necessario un livello di accuratezza maggiore: la griglia viene modificata in maniera dinamica man mano che la soluzione evolve nel tempo. Tale logica consente di impostare una griglia iniziale rada e di identificare successivamente le aree in cui è necessario infittire la mesh: così facendo, è possibile ottenere un'accuratezza maggiore per la soluzione con un numero limitato di celle, di modo che il calcolo sia meno oneroso dal punto di vista computazionale rispetto ad un caso statico. L'introduzione della tecnica in oggetto si deve a Berger, Oliger e Colella [23, 24] e maggiori dettagli, rispetto a quelli riportati di seguito, possono essere trovati negli articoli presenti in Bibliografia. Essa prende il nome di *local adaptive mesh refinement*, deriva dalle necessità di minimizzare l'errore di discretizzazione e massimizzare l'efficienza del metodo risolutivo, scontrandosi con problemi quali la presenza delle discontinuità e l'utilizzo della memoria e della CPU. L'approccio consiste nella generazione di sotto-griglie di raffinamento in alcune regioni del dominio determinate a partire dall'errore locale di troncamento e, nel caso di un problema *time-dependent*, queste cambiano nel tempo e la mesh di conseguenza deve subire delle variazioni. In accordo con altri autori come Pereyra e Sewell [25], si vuole equidistribuire l'errore cosicché il numero minimo di nodi sia sufficiente per assicurare il livello di accuratezza desiderato per la griglia completa. Il local grid refinement presenta lo svantaggio di dover trattare in maniera particolare le interfacce ma viene preferito al *moving grid point*, il quale è volto alla ricerca di una certa accuratezza a costo fissato, ma tende ad introdurre dei termini per la regolarizzazione della griglia che vanno a complicare il codice.

La mesh sviluppata è caratterizzata da una serie di livelli  $l = 1, ..., l_{max}$ , dalla più grossolana alla più fine, e viene indicata come:

$$G = \bigcup G_l = \bigcup_k G_{l,k} \tag{5.17}$$

dove  $G_{l,k}$  ne indica una generica con spaziatura  $h_l$ . Il salto di livello viene regolato da due criteri quali:

- 1. la griglia più fine comincia e termina in corrispondenza di una cella appartenente a quella più rada;
- 2. tra i livelli  $l \in l+2$  deve esistere almeno una cella corrispondente a l+1, in analogia con quanto descritto per **PABLO** dove è previsto al più un salto di livello.

Inoltre, la griglia viene raffinata in spazio e tempo con lo stesso mesh refinement ratio definito come  $r = \Delta x_{l-1}/\Delta x_l$  e ciò implica come siano necessari un numero maggiore di step temporali per le griglie più fini, in accordo con la ricerca di una maggiore accuratezza. In particolare, l'algoritmo di generazione della stessa include quattro fasi principali:

- inserimento di una zona di transizione (*buffer zone*) attorno a ciascuna griglia, di modo tale che le regioni ad alto errore come le discontinuità non vadano a propagare al di fuori dell'area di raffinamento, prima di un ulteriore step;
- *tagging* delle celle dove si registra un errore di troncamento al di sopra di una certa soglia al fine di individuare la zona da raffinare;
- generazione dei box rettangoli di infittimento;
- controllo dei criteri imposti allo scopo di verificare il soddisfacimento degli stessi.

Si pone l'attenzione sul criterio in base al quale la griglia viene raffinata, dal momento che lo si vuole poi confrontare con quanto viene fatto in **gloria**. Le soluzioni in letteratura sono molteplici: Gropp [26] fa uso del gradiente della soluzione ma ciò funziona solo in un limitato numero di situazioni perchè, per esempio, una soluzione lineare contraddistinta da un elevato gradiente non ha bisogno di una griglia più fine; Dwyer et al. [27] utilizzano una combinazione tra il gradiente e la curvatura della soluzione e anche questo metodo funziona bene ma esclusivamente sotto certe ipotesi; allora, Berger et al. [24] propongono un approccio sistematico basato sulla stima di un errore locale di troncamento mediante l'estrapolazione di Richardson. Una soluzione sufficientemente *smooth* è legata ad un errore del tipo [24]:

$$\| u(t+k) - Qu(t) \| = k(k^{q_1}a(t) + h^{q_2}b(t)) + kO(k^{q_1+1} + h^{q_2+1}) = \tau + kO(k^{q_1+1} + h^{q_2+1})$$
(5.18)

dove Q è un operatore differenziale esplicito di secondo livello e  $\tau$  rappresenta il *leading* term dell'errore stesso. Si assume che l'accuratezza di Q sia q sia in spazio sia in tempo e se ne considerano due step cosicché l'errore sia  $2\tau$ , da cui:

$$u(t+2k) - Q^2 u(t) = 2\tau + kO(k^{q+1} + h^{q+1})$$
(5.19)

Si definisce  $Q_{2h}$  come un operatore analogo a Q ma basato su delle spaziature doppie della mesh e si arriva ad una stima dell'errore di troncamento al tempo t come:

$$\frac{Q^2 u(t) - Q_{2h} u(t)}{2^{q+1} - 2} = \tau + O(h^{q+2})$$
(5.20)

Si può dunque fornire un esempio circa il *tagging* dei nodi della griglia appartenenti al livello l: si va a stimare l'errore per tutti i punti, si selezionano i nodi  $\tilde{x}$  dove  $e(\tilde{x}) > \epsilon$  che verranno raffinati al livello l+1, ma è importante precisare come vengano individuati anche quelli interni al livello l+2, anche se  $e(\tilde{x}) < \epsilon$ , così da deraffinare il reticolo assicurando il salto di un solo livello come stabilito nei criteri di cui sopra.

Il solutore CFD sviluppato dalla OPTIMAD presenta una routine specifica per la mesh adattativa denominata come **solver\_adaption.cpp**, della quale interessa descrivere il processo logico seguito per raffinare o deraffinare la griglia. Il ragionamento che sta alla base è più semplice rispetto a quello introdotto da Berger et al. [24] e si può riassumere come segue:

- la subroutine specificata consente di calcolare un indicatore per ciascuna cella;
- all'interno del *ControlDict* si impostano due valori soglia, uno oltre il quale raffinare e l'altro sotto il quale deraffinare;
- nello stesso file si inseriscono anche le taglie minime e massime raggiungibili dagli ottanti nonché il numero di step di raffinamento e un certo *trigger*, legato al numero di iterazioni o ai residui, utile a gestire il passaggio da uno step all'altro.

In particolare, gli indicatori vengono calcolati come di seguito:

$$cell indicator = \frac{|cell variable - neighcell variable|}{max(cell variable, neighcell variable)}$$
(5.21)

dove *cell variable* indica una grandezza corrispondente alla cella di cui si vuole conoscere l'indicatore, mentre *neighcell variable* è riferito alle celle limitrofe dal momento che l'Equazione 5.21 è inserita all'interno di un ciclo, che permette di effettuare il calcolo per ogni interfaccia della cella in esame, fatta eccezione per quelle appartenenti al bordo esterno del dominio. L'operazione viene eseguita per ciascuna delle grandezze fondamentali, quali le tre componenti del vettore velocità, la pressione e la temperatura, in modo tale da scegliere l'indicatore massimo risultante.

Una serie di prove volte a tarare gli indicatori hanno evidenziato la necessità di una modifica del codice: in riferimento alla Figura 5.13, è opportuno ricordare che una regione corrisponde al dominio computazionale mentre la restante parte è ascrivibile a due corpi, all'interno dei quali la soluzione è banale e, di conseguenza, le equazioni non vengono risolte. Vale a dire che devono essere escluse dal ciclo anche le interfacce corrispondenti ai bordi dei corpi immersi nel dominio poiché altrimenti l'indicatore della cella assume sempre il valore massimo pari a 1, dettato dal fatto che si va a dividere la quantità assunta dalla grandezza nella cella per se stessa poiché all'interno del corpo non può che essere uguale a 0: ciò consente di generalizzare il codice di modo tale che si possa utilizzare per qualsiasi configurazione del dominio computazionale.

Una volta effettuata la taratura dei *threshold* da inserire all'interno del *ControlDict*, si imposta un numero di step pari a quattro tali per cui il passaggio da uno all'altro avviene dopo 400000 iterazioni e si procede replicando l'ONERA *hollow cylinder-flare test case* ottenendo una griglia composta da 116261 celle.



(c) Terzo step



Figura 5.30: Step di raffinamento per la prima simulazione che ha previsto l'uso di una mesh adattativa.

Si precisa come le simulazioni effettuate mediante l'uso di una mesh statica ed adattativa siano caratterizzate da parametri identici e, inoltre, si vuole specificare che la taglia minima raggiungibile dagli ottanti è pari a  $0.000085 \ m$ , ovvero uguale a quella della regione più fine della simulazione analizzata nella sezione precedente, mentre quella massima conseguente ad un eventuale deraffinamento è di  $0.00069 \ m$  così come la regione più rada della medesima simulazione.

La Figura 5.30, a partire dal primo step, mostra la presenza di una regione di raffinamento della griglia a parete (in rosso in Figura 5.32): essa è indispensabile per discretizzare in maniera sufficientemente buona lo strato limite dal momento che, per come sono costruiti gli indicatori, non è possibile un infittimento automatico nella zona d'interesse e tale problema verrà meglio esaminato nella parte conclusiva della sezione in esame. I grafici risultano utili anche per osservare come sia ridotta la zona di infittimento della mesh in corrispondenza della bolla di separazione e ciò, come verrà meglio descritto nella fase di analisi quantitativa dei risultati, ne comporta un'errata cattura.

L'ultimo problema evidenziato è il principale input circa la realizzazione di una nuova simulazione, nella quale tutti i parametri rimangono inalterati, a meno del valore soglia dell'indicatore sopra il quale raffinare, dal momento che esso viene diminuito di circa il 25%.



(c) Terzo step





L'obiettivo della seconda simulazione è quello di capire se una diminuzione significativa dell'indicatore possa o meno facilitare la cattura della bolla di separazione e, da un punto di vista qualitativo, la Figura 5.31 è abbastanza esplicativa. Si può infatti notare come non ci siano delle differenze significative in prossimità dell'area interessata dalla bolla di separazione rispetto al caso precedente e lo si andrà a verificare nella fase successiva di analisi quantitativa. Inoltre, è evidente un'area estesa di raffinamento in una zona dove, ad eccezione dei due urti e in accordo con quanto descritto per il caso test studiato con una mesh statica, non accade nessun fenomeno tale da giustificare una griglia del genere. Quanto visto si verifica perchè l'indicatore delle celle considerate assume un valore superiore alla soglia imposta e ciò fa sorgere ulteriori dubbi circa il calcolo degli indicatori, soprattutto in relazione alla modalità di normalizzazione degli stessi: come detto sopra, il problema verrà meglio affrontato nella parte conclusiva della sezione.

La seconda simulazione e, di conseguenza, la diminuzione della soglia dell'indicatore rappresenta una soluzione da non tenere in considerazione poiché si ha un numero maggiore di celle rispetto al caso statico, al quale però non corrisponde neanche un livello più elevato di accuratezza: questo porta a dire che l'uso di un *AMR* sarebbe del tutto inutile.

A valle delle simulazioni brevemente analizzate, se ne sviluppa una terza caratterizzata da due accorgimenti quali:

 l'introduzione di una regione di raffinamento aggiuntiva, in blu in Figura 5.32, la cui mesh size è pari a 0.00017 m così come quella corrispondente alla regione interessata dalla bolla di separazione nel caso della mesh statica; • l'impostazione dei valori di *threshold* della prima simulazione di modo tale da evitare il raffinamento superfluo, evidente in Figura 5.31;



Figura 5.32: Suddivisione del dominio impiegata per la terza simulazione della configurazione *hollow cylinder-flare* nel caso di mesh adattativa.

La Figura 5.33 consente di verificare la bontà degli accorgimenti presi dal momento che gli urti sono ben catturati, evitando l'inutile area di raffinamento che si sviluppava tra di essi, e la regione interessata dalla bolla di separazione appare più fitta rispetto alle due simulazioni precedenti, così da assicurarne una corretta discretizzazione come verrà mostrato successivamente. Il numero complessivo di punti è pari a 278968 e risulta comunque superiore a quello relativo alla mesh statica: ciò implica la necessità di migliorare il codice ma la terza simulazione è da tenere in considerazione dal momento che garantisce una migliore accuratezza.

L'ultimo punto può essere spiegato a partire dalla Figura 5.34, dove vengono confrontate le diverse griglie in prossimità della zona interessata dalla bolla di separazione rispettivamente per la prima e terza simulazione. Risulta particolarmente evidente la differenza nella taglia degli ottanti tra i due casi, la quale corrisponde addirittura a tre salti di livello in alcune aree: essa è responsabile di una cattura più o meno opportuna della bolla di separazione, testimoniata dai dati quantitativi elaborati alla fine della sezione. Si precisa poi come la terza simulazione sia caratterizzata da una mesh più fine di un livello rispetto a quella statica assicurando così una maggiore accuratezza e quanto affermato può essere validato notando l'ulteriore raffinamento in prossimità delle due onde di compressione, di cui una si forma prima del punto di separazione e l'altra prima di quello di riattacco: tale risultato è frutto dell'utilizzo della mesh adattativa e non si ottiene con una statica, come è visibile in Figura 5.15.



(c) Terzo step

bolla di separazione.

(d) Quarto step

Figura 5.33: Step di raffinamento per la terza simulazione che ha previsto l'uso di una mesh adattativa.



Figura 5.34: Confronto tra le diverse griglie in prossimità della zona interessata dalla

Le considerazioni, finora esposte, possono essere validate mediante un confronto in termini quantitativi con i dati a disposizione circa la mesh statica, la configurazione usata

da D'Ambrosio et al. [19] e la prova sperimentale condotta nella galleria a bassa densità dell'ONERA.



Figura 5.35: Andamento del coefficiente di pressione a parete.

La Figura 5.35 consente di puntualizzare vari temi affrontati quali:

- i due urti principali, ed in particolare quello al *leading edge*, sono ben catturati con qualsiasi settaggio della mesh adattativa. Ciò testimonia come gli indicatori siano costruiti in modo opportuno e calibrati per una corretta discretizzazione di tali discontinuità;
- l'estensione della bolla di separazione è confrontabile con quella relativa alla mesh statica e a D'Ambrosio solo per la terza simulazione con AMR, come era stato messo in evidenza dalla sola visualizzazione degli step di raffinamento. Si nota poi come le prime due simulazioni con AMR siano molto vicine ai risultati ottenuti sperimentalmente e si ipotizza che ciò accada poiché l'insufficiente numero di punti è comparabile alla limitata risoluzione degli strumenti impiegati;

• lo *swirl* dei dati, presente a  $x/L \sim 1.4$  nel caso statico, sparisce dal momento che si ha una regione di raffinamento uniforme che corre lungo tutta la parete e favorisce l'ottenimento di una soluzione più *smooth*.



Figura 5.36: Andamento del numero di Stanton a parete.

La Figura 5.36 è particolarmente significativa ai fini dell'attendibilità delle varie simulazioni poiché il picco del numero di Stanton, ovvero il valore massimo raggiunto dal flusso di calore, è sempre situato in corrispondenza del punto di riattacco del flusso. Inoltre, come suggerito da Marini [20], tale picco diminuisce man mano che la griglia è più fine a testimonianza della palese dipendenza della soluzione dalla stessa: lo si può verificare proprio dal grafico in esame, raggiungendo così lo scopo principale del confronto tra la mesh statica e quella adattativa. Si osserva una sorta di scalino nei grafici relativi all'AMR per 0.6 < x/L < 0.8: è probabile che esso sia dovuto alla maggiore accuratezza nella cattura degli urti da parte della mesh adattativa, la quale consente un infittimento automatico locale tale da evidenziare meglio i due deboli urti di compressione in prossimità della bolla di separazione.



Figura 5.37: Andamento del coefficiente di sforzo d'attrito a parete.

La Figura 5.37 permette di sottolineare la differenza sostanziale che intercorre tra la terza simulazione con AMR e le restanti due, dal momento che il relativo andamento è l'unico a porsi tra quello della mesh statica e quello di D'Ambrosio: risulta particolarmente evidente in corrispondenza del picco del grafico, ma è difficile dire quanto sono distanti i punti di separazione e riattacco nei vari casi e, a tale fine, si fa riferimento alla Figura 5.38 e alla Tabella 5.

Si nota subito come le prime due simulazioni con *AMR* siano contraddistinte da una errata discretizzazione della bolla di separazione: i punti sono distanti da quelli relativi alle altre griglie, con un errore che si attesa su circa il 10%. A conferma di quanto detto per lo studio del *test case* con mesh statica, la regione più difficile da caratterizzare è quelle legata al punto di riattacco del flusso e ad essa corrispondono le maggiori differenze anche nei punti calcolati.



Figura 5.38: Rappresentazione grafica delle ascisse normalizzate dei punti di separazione e riattacco.

x/L	separazione	riattacco
gloria	0.730	1.307
D'Ambrosio	0.717	1.348
$AMR\ caso\ 1$	0.806	1.228
$AMR\ caso\ 2$	0.808	1.225
$AMR\ caso\ 3$	0.698	1.308

Tabella 5: Coordinate adimensionali dei punti di separazione e riattacco nel caso delle cinque simulazioni confrontate.

Il confronto tra la mesh statica e quella adattativa ha permesso di individuare i limiti di quest'ultima in termini di modalità di calcolo degli indicatori, i quali vengono riassunti di seguito proponendo alcune soluzioni impiegabili:

- la formula degli indici delle celle consiste in una differenza normalizzata, la quale funziona bene nel caso di un conto al primo ordine, ma è riduttivo per il secondo poiché esso permette di risolvere in maniera esatta un qualsiasi andamento lineare indipendentemente dal salto. Sarebbe opportuno effettuare una ricostruzione all'interfaccia e, nel caso in cui le pendenze calcolate non fossero uguali, si dovrebbe valutare cosa accade in presenza del salto;
- i coefficienti sono adimensionati rispetto a dei valori locali, ma ciò non è sempre corretto perchè laddove le grandezze assumono valori molto piccoli, si ricava un indicatore elevato quando nella realtà l'area non è soggetta ad elevati gradienti e

non avrebbe dunque bisogno di alcun raffinamento. Il problema descritto è presumibilmente quello che si manifesta nella seconda simulazione e a tale proposito, si consiglia l'utilizzo delle grandezze di monte ai fini della normalizzazione;

• gli indicatori dovrebbero contemplare anche il raffinamento in corrispondenza dello strato limite, così da evitare l'inserimento manuale di qualsiasi regione di infittimento. Ciò garantirebbe la diminuzione del numero di celle utilizzate e quindi la bontà dell'impiego di una mesh adattativa, nonché una migliore transizione tra le diverse taglie degli ottanti.

# 5.5 ONERA sharp double cone test case

La sezione presenta lo studio di un'ulteriore prova sperimentale condotta presso il centro di ricerca aerospaziale ONERA, allo scopo di completare quanto esposto finora, mediante un'analisi più approfondita degli altri codici numerici impiegati per la simulazione del medesimo caso test. La configurazione presa in considerazione è quella relativa ad uno *sharp double cone*, il cui interesse deriva dalle interazioni urto/urto e urto/strato limite che influenzano le performance e il design dei veicoli ipersonici: di conseguenza, risulta di fondamentale importanza la bontà dei risultati ottenuti con il codice CFD [30]. I parametri ricavati vengono confrontati sia con i risultati sperimentali sia con quelli derivanti da altri tre codici quali: NASCA, un solutore 2D delle Navier-Stokes sviluppato all'ONERA, e due codici *DSMC* della NASA denominati come DAC e G2.

Si vuole precisare come la blow-down wind tunnel R5Ch sia caratterizzata da un libero cammino medio di  $5 \cdot 10^{-4}$  m nella corrente indisturbata di monte e ciò assicura la presenza di un flusso completamente laminare. Vale a dire che l'ipotesi del continuo è valida e le equazioni di Navier-Stokes possono essere impiegate senza particolari accorgimenti ma, nonostante questo, anche le Direct Simulation Monte-Carlo sono utilizzabili sebbene siano pensate per regimi di transizione e più rarefatti. Quanto specificato vuole solo chiarire la motivazione dietro alla quale diventa lecito effettuare un confronto tra queste due diverse tipologie di codice, tenendo conto che i tempi di calcolo sono notevoli a causa dell'elevato tasso di densità relativa in galleria [29].

Il caso test prevede le stesse criticità di quello precedente, alle quali si aggiunge la presenza di uno spigolo molto pronunciato, a causa dell'angolo di 65°, che va a creare dei problemi nei metodi *immersed boundary*, evidenziati nelle analisi successive. Si ricorda come la configurazione assialsimmetrica sia la più adatta per replicare la condizione di allungamento infinito tipico di un caso 2D, di modo tale da evitare gli effetti delle estremità, particolarmente evidenti quando il flusso va a separare.

### 5.5.1 Setup sperimentale

Il modello di sharp double cone è stato definito dalla NASA ai fini delle applicazioni numeriche e sperimentali: è composto da due coni di uguale lunghezza pari a 0.02257 m, i quali presentano degli angoli di inclinazione rispetto alla direzione della corrente di monte rispettivamente pari a 25 e 65 gradi. La proiezione della lunghezza del primo cono sull'asse delle ascisse rappresenta la lunghezza di riferimento L = 0.02046 m, rispetto alla quale normalizzare le coordinate dimensionali. Il secondo cono è seguito da un cilindro di diametro d = 0.06 m e lungo 0.00612 m: tutte le misure riportate sono riassunte nella Figura 5.39. Il corpo viene fissato alla camera di prova della galleria del vento mediante un supporto sting, opportunamente adattato al modello in esame.



Figura 5.39: Geometria e dimensioni della configurazione sharp double cone. [30]

Il setup sperimentale della prova è identico a quello del caso test precedente, ma è interessante notare come l'ONERA abbia realizzato due diversi modelli: uno in alluminio, utile alla visualizzazione del flusso mediante la tecnica EBF (*Electron Beam Fluorescence*), favorita dalla bassa densità in galleria; uno in Plexiglas per le misure del flusso di calore attraverso la metodologia IRT (*Infrared Thermography*) e sottili film di platino [29]. Le condizioni ambiente relative al test, in analogia con quanto detto per l'*hollow cylinder-flare*, fanno capo a quelle operative dei veicoli ipersonici e vengono riassunte in Tabella 6, assieme alle condizioni al contorno utili per la corretta impostazione della simulazione numerica.

Grandezza	Valore
$T^0$	1050  K
$p^0$	$2.5\cdot 10^5Pa$
$T_{\infty}$	48.5  K
$p_{\infty}$	6.3  Pa
$M_{\infty}$	9.91
$Re_{\infty,d}$	12124
$T_w$	290 K

Tabella 6: Condizioni ambiente e al contorno per la prova sperimentale condotta all'ONERA.

Si precisa come la superficie del modello sia caratterizzata da una temperatura costante  $T_w$  e le simulazioni sono condotte utilizzando il modello di aria come gas perfetto, dal momento che le temperature in gioco sono relativamente basse.

# 5.5.2 Setup in gloria

L'impostazione del caso in oggetto in **gloria** viene preceduta da una breve descrizione degli altri codici numerici usati a titolo comparativo, allo scopo sia di evidenziarne i tratti principali sia di trarne delle informazioni utili alla simulazione da realizzare. Si concentra inizialmente l'attenzione sulla parte computazionale del problema:

- il solutore NASCA si basa su di un metodo ai volumi finiti e, dovendo studiare un caso stazionario, si preferisce l'uso della discretizzazione temporale *Beam Warming*, la quale risulta accurata al primo ordine nel tempo. Nello spazio si fa uso di un particolare schema *upwind*, legato all'approccio di Osher e Chakrawarthy per una mesh che localmente può non essere uniforme ed ortogonale, mentre i termini viscosi prevedono uno schema centrato [29]. Maggiori dettagli a riguardo possono essere trovati negli articoli [31, 32] presenti in Bibliografia;
- i codici *DSMC* poggiano le basi sul modello statistico di Larsen-Borgnakke circa lo scambio di energia tra quella cinetica e i modi interni. Si differenziano poiché uno, il G2, ha un solo processore mentre l'altro, il DAC, può girare in parallelo: quest'ultimo verrà preso maggiormente in considerazione perchè consente di ridurre i tempi di calcolo rispetto al precedente.

Il codice DAC è caratterizzato dalla possibilità di disaccoppiare le griglie usate per discretizzare il campo di moto e la superficie del corpo. In particolare, la geometria prevede una mesh triangolare non strutturata la quale garantisce un'elevata flessibilità delle condizioni al contorno a parete, mentre una griglia cartesiana a due livelli viene usata per il flusso esterno allo scopo di rilevare le variazioni delle grandezze in maniera più dettagliata [30]. Il principio base di generazione della griglia è legato al concetto di adattamento progressivo: a partire dal primo livello costituito da una mesh cartesiana uniforme, la quale assicura una certa risoluzione minima desiderata, si passa al secondo step di raffinamento nelle zone soggette ai gradienti più elevati, con una spaziatura variabile in ogni direzione. La soluzione allo step successivo presenta come condizione iniziale i risultati della fase precedente e la transizione tra le due viene gestita attraverso dei parametri di controllo, come il libero cammino medio e i gradienti locali.

Il solutore G2 prevede la divisione del dominio computazionale in un certo numero di regioni, ognuna delle quali conta delle celle a loro volta suddivise in sotto-celle allo scopo di migliorare la risoluzione spaziale e di limitare gli errori derivanti dalla perdita di momento angolare e dal trasporto viscoso. Le dimensioni delle celle sono tipicamente non uniformi nelle varie direzioni e possono differire anche di un ordine di grandezza in alcune aree. Si vuole precisare come il time step non sia uguale in tutte le regioni e, di conseguenza, i risultati finali mediati nel tempo vanno generati solo dopo aver raggiunto lo stato stazionario.



Figura 5.40: Parametri e risultati corrispondenti alle griglie più fini per i solutori G2 (a sinistra) e DAC (a destra). [30]

Le tipologie di griglie descritte finora non possono essere replicate in **gloria**, dove si deve ovviare al problema ricorrendo ad una suddivisione del dominio come quella presentata in Figura 5.41: essa viene creata da **PABLO** in modalità *quadtree* e, di conseguenza, è un quadrato la cui origine è posta in (-0.02588, 0.0), di lati pari a 0.062 metri. Al suo interno vengono inseriti due corpi (in verde) di modo tale che la parte restante del dominio abbia circa le stesse dimensioni di quella impiegata nel codice DAC: così facendo, si può affermare con assoluta sicurezza che l'evoluzione del campo di moto sia interamente contenuta nella regione di calcolo. La taglia degli ottanti relativa ai due corpi è la più grande possibile e risulta pari a 0.00775 metri, al fine di evitare lo sbilanciamento del carico come già evidenziato per le simulazioni condotte in precedenza.

Le regioni di raffinamento sono necessarie per tentare di emulare quanto viene fatto con delle celle caratterizzate da un elevato aspect ratio: vale a dire che le dimensioni delle stesse sono significative nella direzione del flusso rispetto a quella normale ad essa e ciò consente sia di ridurre il carico computazionale sia di descrivere in maniera opportuna le interazioni tra gli urti. L'impiego di una soluzione del genere consentirebbe di avere delle celle con una dimensione comparabile a quella del libero cammino medio, svincolando così la soluzione dalla dipendenza della griglia [30]. La regione più estesa è contraddistinta da una dimensione uguale a quella del dominio computazionale ed assicura un livello minimo di raffinamento pari a 0.00032 metri . Sono poi visibili altre tre regioni (in blu), la cui mesh size passa da 0.00016 a 0.00004 con l'obiettivo di gestire una corretta transizione della taglia degli ottanti, garantendo il livello di accuratezza richiesto. La dimensione più piccola impostata è dettata dal fatto che il  $\Delta x_{min}$  è pari a 40  $\mu m$  per il codice NA-SCA e qui si va ad estendere ulteriormente l'area interessata da tale valore allo scopo di sopperire, almeno in parte, all'assenza di un vero e proprio stretching factor. Come riportato nell'articolo di Chanetz et al. [29], la spaziatura della mesh, sebbene il flusso sia laminare, può essere facilmente correlata alla variabile di parete  $y^+$  tipica dello strato limite turbolento, così espressa:

$$y^{+} = \Delta \eta \sqrt{\frac{\rho_{w}}{\mu_{w}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{w}}$$
(5.22)

dove le variabili si intendono di parete,  $\Delta \eta$  è la spaziatura e  $y^+$  è sempre minore di 1 durante la sua evoluzione.



Figura 5.41: Suddivisione del dominio impiegata per la simulazione della configurazione sharp double cone.

La griglia finale mostrata in Figura 5.43 viene ottenuta attraverso quattro step di raffinamento mediante una progressione lineare (Figura 5.42), che segue esattamente la logica dell'hollow cylinder-flare test case e risulta in accordo con quanto previsto dal codice DAC. Si vuole precisare come la dimensione più opportuna per le celle di parete sia stata determinata a valle di una simulazione che ha evidenziato alcuni interessanti problemi, descritti nella sezione successiva.

Le condizioni al contorno impostate vengono elencate di seguito:

- farfield sui bordi sinistro e superiore del dominio computazionale, definita a partire da  $V_{\infty} = 1382.6 \ m/s, \ p_{\infty} \ e \ T_{\infty};$
- *reflective* in corrispondenza del tratto orizzontale antecedente il bordo d'attacco del primo cono, al fine di applicare la *slip-condition* di modo che l'urto non si generi esattamente sul bordo del dominio;
- wall sulla parete della configurazione biconica, imponendo così la no-slip condition ed una temperatura costante  $T_w$  in base alle assunzioni fatte;
- *extrapolated* sul bordo destro del dominio, per quanto già detto nel caso test precedente.

Le condizioni del flusso relative alla galleria a bassa densità R5Ch rendono necessario l'uso della legge di Sutherland per il calcolo della viscosità.



(a) Primo step: raffinamento base dell'intero dominio computazionale



(c) Terzo step: ulteriore regione di raffinamento utile alla transizione della mesh tra i livelli 2 e4



(b) Secondo step: regione di raffinamento utile alla cattura dei fenomeni significativi all'interno del campo di moto



(d) Quarto step: si imposta la taglia minima degli ottanti pari a quella del codice NASCA

Figura 5.42: Step di raffinamento utili al raggiungimento della griglia finale impostata.



Figura 5.43: Griglia di calcolo finale utilizzata per la simulazione della configurazione sharp double cone.

# 5.5.3 Risultati

Il *test case* in esame viene presentato in maniera meno dettagliata rispetto al precedente, dal momento che il suo fine è quello di evidenziare un limite dei metodi *immersed boundary* ed il conseguente uso del CFL per ovviare, almeno in parte, a tale problema. A testimonianza di quanto scritto, non sono riportati gli andamenti dei residui poiché la loro forma è analoga a quella della prova precedente, i tempi di calcolo si aggirano sulle 100 ore con la simulazione che ha girato su 10 processi in parallelo e ciò non deriva tanto dall'aumento del numero di celle, pari a 315191, quanto più al valore assunto dal numero di Courant del quale si discuterà alla fine della sezione.

Si descrivono i risultati qualitativi ottenuti e processati in *Paraview*, cominciando dalla scena di pressione normalizzata rispetto a quella di riferimento, in Figura 5.44. Si nota come sia presente un urto di lieve entità in corrispondenza del bordo d'attacco del primo cono, dovuto alla formazione di uno strato limite sulla parete che è particolarmente difficile da catturare e se ne avrà conferma durante l'analisi quantitativa, nel corso della quale saranno fornite le dovute spiegazioni. Si distinguono poi due onde d'urto, la cui entità è significativa, in  $x/L \sim 0.4$  e  $x/L \sim 1.2$ , mentre l'area compresa tra queste due posizioni è caratterizzata da una distribuzione quasi uniforme della pressione, la quale può essere correlata al *plateau* tipico della bolla di separazione. In prossimità del *trailing edge* del secondo cilindro, è ben visibile il fascio d'espansione del quale si può valutare qualitativamente anche l'apertura.



Figura 5.44: Campo scalare di pressione normalizzata.

La Figura 5.45 è utile per completare quanto introdotto sopra poiché si verifica sia la presenza dei vari urti sia la difficoltà nella cattura del *boundary layer* e si può già affermare che il numero di celle opportuno per una corretta discretizzazione è oggi fuori portata, visti i tempi di calcolo necessari. Le linee di corrente sono riportate allo scopo di evidenziare la formazione della bolla di separazione la quale, come è lecito aspettarsi, è una regione a bassissima velocità. Si deduce come essa vada a formarsi proprio in prossimità di  $x/L \sim 0.4$ : vale a dire che il livello di pressione raggiunto a valle della shock wave è tale per cui viene indotta la separazione della vena fluida e, in linea con il ragionamento in esame, l'urto successivo precede il punto di riattacco testimoniato dal picco di pressione in Figura 5.44. Si può ancora considerare come l'*extrapolated condition* sia applicabile visto che le porzioni subsoniche sono interamente contenute nel dominio, le cui dimensioni permettono di visualizzare tutti i fenomeni significativi del campo di moto.

In analogia con quanto fatto per l'*hollow cylinder flare test case*, si richiamano i parametri adimensionali utili a confrontare i risultati quantitativi ricavati sia con quelli dei codici DAC e NASCA [29, 30] sia con quelli sperimentali dell'ONERA, disponibili grazie al sistema IRT. Occorre precisare come si faccia uso di una differente normalizzazione del flusso di calore, mediante l'introduzione del parametro così definito:

$$C_H = \frac{q}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^3} \tag{5.23}$$

L'operazione di *Post Processing* viene eseguita sempre attraverso l'impiego di un programma *Matlab*, ma si fa uso anche di *GetData Graph Digitizer* allo scopo di ottenere i dati da plottare a partire dagli articoli trovati in letteratura: di conseguenza, il numero di punti che compare nei successivi grafici non è quello relativo alla griglia impiegata, bensì quello legato al numero con cui viene campionata la curva dal programma in oggetto.



Figura 5.45: Campo scalare di velocità normalizzata e *streamlines* nella zona interessata dalla bolla di separazione.

La Figura 5.46 mette in luce l'andamento del coefficiente di pressione a parete: si osservano due salti significativi corrispondenti alle onde d'urto che precedono i punti di separazione e riattacco della corrente. La presenza della bolla di ricircolo è confermata dalla distribuzione piatta di pressione nell'area da essa interessata, la quale fornisce anche un'indicazione preliminare sull'estensione della bolla stessa che non differisce molto da quella calcolata mediante il solutore DAC. Lo scostamento presente tra i due andamenti è riconducibile a due fattori principali: il tipo di metodo impiegato e il numero di celle utilizzato, tenendo ben presente che tutti i valori riportati sono riferiti alle mesh più fini dei codici DAC e NASCA, con un numero di punti pari rispettivamente a 1613924 e 52281. Il grafico in oggetto consente di confermare due aspetti precedentemente trattati: la presenza del fascio di espansione, visibile grazie alla repentina decrescita del coefficiente di pressione, e la criticità dello strato limite caratterizzante il primo tratto, da cui derivano le oscillazioni più evidenti della soluzione.



Figura 5.46: Andamento del coefficiente di pressione a parete.

La Figura 5.47 permette di descrivere l'andamento del flusso termico normalizzato a parete e risulta di notevole interesse data la presenza di risultati sperimentali. Essi sono stati ottenuti mediante la tecnica IRT solo a partire da x/L = 0.5, di modo tale da essere sufficienti per la localizzazione del punto di separazione: nuovi test sono stati poi programmati allo scopo di completare l'evoluzione come suggerito da Chanetz et al. [29]. Si nota come la diminuzione di  $C_H$  sia aderente ai risultati sperimentali e numerici con una buona approssimazione ed essa è legata alla separazione laminare, motivo per il quale il successivo tratto di curva è grossomodo orizzontale. Il picco del flusso di calore si ha in prossimità del punto di riattacco a causa degli elevati gradienti che caratterizzano l'area in esame: si nota come la relativa entità sia uguale a quella stimata dagli altri codici, mentre è visibile uno sfasamento riconducibile ai due fattori enunciati in precedenza. Si deduce come intercorra una differenza sostanziale tra il picco di temperatura sperimentale e quello numerico e ciò testimonia come risulti indispensabili una nuova campagna di prove in galleria ed una eventuale ricalibrazione dei modelli numerici.



Figura 5.47: Andamento del flusso di calore normalizzato a parete.

La Figura 5.48 mostra l'andamento dello *skin friction coefficient* e consente di valutare con esattezza l'estensione della bolla di separazione poiché si identificano i punti di separazione e riattacco della corrente, come quelli laddove il  $c_f$  è pari a zero o cambia segno. Risulta di particolare importanza notare, per quanto sarà detto successivamente, come il flusso separi a valle del bordo d'uscita del secondo cilindro e, di conseguenza, non sia presente uno strato limite. L'andamento della curva ottenuta con **gloria** presenta alcune differenze rispetto alle altre, sebbene il picco del coefficiente sia uguale a quello calcolato con il codice DAC, e ciò si può sempre riferire ai fattori evidenziati sopra e spiegati successivamente.

La posizione sperimentale del punto di separazione è nota grazie all'uso di una tecnica di visualizzazione mediante l'impiego di olio: nella galleria a bassa densità R5Ch la forza di gravità è più forte di quelle d'attrito a parete e ciò permette all'olio di accumularsi sulla superficie del modello. La Figura 5.49 consente di identificare il punto in questione ma non quello di riattacco, ottenendo un valore sperimentale di  $(x/L)_{sep} = 0.57 \pm 3\%$ , da confrontare con gli altri riportati in Tabella 7 [29].



Figura 5.48: Andamento del coefficiente di sforzo d'attrito a parete.



Figura 5.49: Oil flow visualization sul modello impiegato di sharp double cone. [29]
x/L	separazione	riattacco
gloria	0.432	1.306
DAC	0.476	1.265
NASCA	0.51	1.280

Tabella 7: Coordinate adimensionali dei punti di separazione e riattacco per le tre simulazioni a disposizione.

I risultati fin qui presentati sono confrontabili tra di loro una volta fatte certe premesse: vale a dire che si ha un codice *DSMC*, di per sé diverso dagli altri, e due codici che vanno a risolvere le equazioni di Navier Stokes mediante un numero di punti largamente diverso e sfruttando un approccio differente, dal momento che la peculiarità di **gloria** sta nel metodo *immersed boundary*. L'affidabilità dei risultati ottenuti è però garantita dal verificarsi di tre punti, classificabili come segue secondo Moss et al. [30]:

- il punto di separazione deve essere vicino sia a quello che precede la massima inflessione dell'iniziale crescita di pressione sia a quello relativo alla significativa decrescita del flusso di calore;
- la pressione raggiunge una distribuzione pressoché uniforme per un ampio tratto legato alla regione di separazione e, nella stessa area, la temperatura assume il suo valore minimo;
- le due grandezze finora considerate raggiungono un minimo in corrispondenza dell'intersezione dei due coni  $(x/L \sim 1)$  per poi aumentare rapidamente e raggiungono il valore massimo nelle vicinanze del punto di riattacco.

## 5.5.4 Stair step approximation

Il caso test studiato nella sezione in oggetto è stato selezionato al fine di evidenziare le problematiche connesse alla presenza di spigoli nel caso di un metodo *immersed boundary*, le quali sono visibili nelle Figure 5.46, 5.47 e 5.48 a causa delle oscillazioni presenti nella soluzione. Esse derivano dalla cosiddetta stair step approximation o approssimazione a gradino, nel senso che l'insieme delle celle assume tale forma caratteristica in corrispondenza del contorno del corpo, a causa della loro tipologia e della modalità di taqqinq. La criticità sta nel fatto che, raffinando nel corso delle iterazioni, nascono delle nuove celle (2) le quali non sono figlie di 1 in riferimento alla Figura 5.50 ma, nonostante ciò, la loro soluzione viene ottenuta mediante un'interpolazione a partire proprio da 1. Il problema sorge perchè 1 non tiene conto in alcun modo della presenza dello spigolo, mentre 2 è molto vicino ad esso e non può non risentirne: si creano allora delle instabilità non lineari che vanno controllate utilizzando un numero di Courant più basso. Esso permette di spalmare l'evoluzione su più iterazioni, evitando la formazione di un nAn (Figura 5.51): per tale motivo la simulazione relativa allo sharp double cone presenta un CFL = 0.02rispetto allo 0.1 dell'hollow cylinder flare e da ciò consegue un significativo aumento dei tempi di calcolo. Tale accorgimento consente di infittire la griglia senza incorrere in una divergenza del caso, diminuendo l'ampiezza delle oscillazioni della soluzione ma non eliminandole: ciò può essere spiegato consultando la Figura 5.52, dove è ben visibile come la struttura a gradino si conservi per tutti gli step di raffinamento e la sua alternanza,

ovvero un blocco da 3 celle <br/>e6 blocchi da 2 celle, si ripercuote esattamente sulla soluzione come visto in Figura <br/> 5.53.



Figura 5.50: Schema rappresentativo dell'infittimeno in prossimità dello spigolo.



Figura 5.51: Esempio di nAn individuato mediante debug per CFL = 0.1.



Figura 5.52: Rappresentazione della struttura a gradino per tutti gli step di raffinamento.



Figura 5.53: Andamento delle oscillazioni per il coefficiente di pressione a parete in corrispondenza del bordo di fuga del secondo cilindro.

Si vuole sottolineare come le oscillazioni siano diminuite notevolmente nella simulazione di riferimento rispetto a quelle iniziali caratterizzate da una mesh più rada: in particolare, ciò si nota in corrispondenza del punto fascio d'espansione, dove il flusso separa e non sussiste alcun problema legato alla discretizzazione dello strato limite.

Vale la pena precisare anche la modalità di *tagging* utilizzata in **gloria**: una cella si considera fluida solo se non viene intersecata dal contorno del corpo, in tal modo i flussi non vengono mai calcolati nella regione solida a differenza di quanto veniva fatto nella precedente versione, dove si stabiliva la tipologia della cella in base alla posizione del suo centro. L'aggiornamento è stato pensato allo scopo di evitare l'estrapolazione utile al calcolo di una cella fluida, ma intersecante il corpo.

Alcuni metodi *immersed boundary* impiegano la seguente procedura: una cella intersecata dal corpo viene taggata come interpolata (I), similmente al concetto di *ghost-cell*, e la soluzione al suo interno viene dedotta a partire dalla cella fluida F e dalla condizione al contorno (Figura 5.54). Tale logica funziona nel caso delle equazioni di Navier-Stokes poiché la pressione è praticamente costante all'interno dello strato limite e il profilo di velocità è noto, mentre può creare dei problemi nel caso delle equazioni di Eulero per esempio e, per tale motivo, la OPTIMAD ha scelto di non percorrere questa strada. I problemi possono derivare dal fatto che, per Eulero, è noto come la componente normale della velocità sia nulla, ma quella tangenziale non può essere ricavata da F poiché essa è costante lungo le linee di corrente parallele alla parete.



Figura 5.54: Schema rappresentativo della modalità alternativa di *tagging* per un metodo *immersed boundary*.

## Conclusioni

L'obiettivo principale di questa tesi era l'analisi, l'estensione al caso assialsimmetrico e la successiva validazione di un codice CFD ai volumi finiti con metodo *immersed boundary* in regime ipersonico. Si tratta di un'operazione indispensabile a causa dei fenomeni che distinguono tale regime dal più comune ipersonico e che influenzano in maniera significativa la performance dei corpi considerati.

L'analisi ha occupato un intervallo temporale non indifferente allo scopo di studiare in maniera dettagliata il codice, le sue peculiarità e il relativo linguaggio di programmazione, così da poter procedere più velocemente nel seguito.

Il Capitolo 4 è stato incentrato sull'estensione del codice al caso assialsimmetrico, svolgendo una descrizione puntuale di tutti i passaggi matematici e fisici utili alla derivazione della nuova formulazione ai volumi finiti, dalla quale è stato possibile dedurre le modifiche implementate nel codice. Gli strumenti di debug hanno consentito l'introduzione di opportuni accorgimenti ai fini del corretto funzionamento del codice. Esso è stato validato preliminarmente con un caso test a basso numero di Reynolds, corrispondente al flusso laminare completamente sviluppato all'interno di un tubo, il quale ha richiesto una nuova implementazione circa la possibilità di inserire come condizione iniziale o al contorno il profilo di velocità di Poiseuille. Uno studio di convergenza della griglia e un confronto tra gli schemi al I e II ordine hanno permesso di validare il lavoro fatto, in maniera tale da poter procedere con la sezione fondamentale della tesi. Prima di far questo, si vogliono però suggerire due possibili migliorie da considerare ed, eventualmente, inserire nel codice: eliminare la dipendenza dall'asse di simmetria, coincidente con quello delle ascisse, di modo tale da poter simulare anche dei corpi caratterizzati da un certo angolo di incidenza; trattare in maniera differente la singolarità in corrispondenza dell'asse, in accordo con alcuni testi trovati in letteratura, e verificare se ciò va a cambiare o meno i risultati.

Il Capitolo 5 rappresenta il cuore della tesi e ha previsto lo sviluppo di due casi test, entrambi volti a replicare delle prove sperimentali condotte presso la galleria a bassa densità R5Ch del centro di ricerca aerospaziale ONERA. Il primo, riguardante la configurazione di hollow cylinder flare, risulta sufficiente a validare il codice per l'utilizzo in regime ipersonico, dal momento che si ottiene un andamento estremamente simile sia ai dati numerici di D'Ambrosio [19] sia a quelli sperimentali provenienti dall'ONERA. Il raggiungimento di questo risultato ha comportato la precedente modifica del codice, mediante l'implementazione di una routine per la visualizzazione di alcune particolari grandezze a parete, utili per i confronti effettuati. La forte dipendenza della soluzione dalla griglia ha reso interessante il confronto tra una mesh statica ed una adattativa: l'algoritmo alla base di quest'ultima è stato parzialmente modificato ed uno studio specifico ha consentito di evidenziarne i limiti e, di conseguenza, dei possibili sviluppi futuri circa il criterio di raffinamento e la modalità di calcolo degli attuali indicatori. Il secondo, riguardante la configurazione di sharp double cone, è stato selezionato allo scopo di porre l'attenzione su alcune problematiche derivanti dall'uso della stair step approximation nell'ambito dei metodi *immersed boundary*. Ciò ha favorito il completamento dello sviluppo delle capacità critiche in merito ad un codice CFD, le quali saranno sicuramente utili nell'impiego, maggiormente consapevole e con cognizione di causa, di un codice CFD commerciale in futuro.

L'ultima parte, non riportata nella tesi in oggetto, è stata riservata ad una collaborazione con il Professor D'Ambrosio, incentrata sugli effetti legati alle alte temperature che rendono indispensabile lo studio del flusso in condizioni di disequilibrio chimico e vibrazionale. Sono state poste le basi per la verifica di un codice scritto in C++ da terzi, utile al calcolo dei termini sorgente per le equazioni di conservazione aggiuntive in un caso non viscoso: ciò è possibile mediante il confronto della storia temporale delle specie presenti con quella derivante da un codice Fortran, del quale è stata impostata la struttura principale; così facendo, esso può diventare oggetto di una nuova tesi al fine di implementare la simulazione di fenomeni di alta temperatura nel codice CFD sviluppato dalla OPTIMAD Engineering.

## Bibliografia

[1] Yannick Gorsse, Angelo Iollo, Haysam Telib, and Lisl Weynans. A simple second order cartesian scheme for compressible Euler flows. *Journal of Computational Physics*, 231(23):7780 - 7794, 2012.

[2] Rajat Mittal and Gianluca Iaccarino. Immersed boundary methods. Annual Review of Fluid Mechanics, 37(1):239 - 261, 2005.

[3] R. Ghias, R. Mittal, and H. Dong. A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 225(1):528 – 553, 2007.

[4] Stanley Osher and James A Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. Journal of Computational Physics, 79(1):12 - 49, 1988.

[5] Cheng Chi, Bok Jik Lee, and Hong G. Im. An improved ghost-cell immersed boundary method for compressible flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 83:132 - 148, 2016.

[6] Osher, S., and Soloman, F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Math. Comp.* 38, 158 (April 1982), 339–374.

[7] Domenic D'Ambrosio. Computational fluid dynamics : slide del corso. 2018.

[8] Eleuterio Toro. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. 03 2009.

[9] Domenic D'Ambrosio. Finite-Volume formulation for axial-symmetric flows. 2019.

[10] Domenic D'Ambrosio. High-temperature hypersonic flows : slide del corso. 2019.

[11] Renzo Arina. *Fondamenti di aerodinamica*. Levrotto & Bella Editrice S.a.s, Torino, 2015.

[12] B. Prochnow, O. O'Reilly, E. M. Dunham, and N. A. Petersson. Treatment of the polar coordinate singularity in axisymmetric wave propagation using high-order summationby-parts operators on a staggered grid. *Computers and Fluids*, 149 (June 2017), 138–149.

[13] N. Peres, S. Poncet, and E. Serre. Numerical treatment of cylindrical coordinate singularities. V European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECCOMAS CFD 2010), June 2010.

[14] T. T. Bui. Implementation/Validation of a Low Reynolds Number Two-EquationTurbulence Model in the Proteus Navier-Stokes Code–Two-Dimensional/Axisymmetric. *NASA Technical Memorandum 105619*, 1992.

[15] John D. Anderson. *Hypersonic and High-temperature Gas Dynamics*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.

[16] Gaetano Iuso. Gasdinamica : slide del corso. 2018.

[17] Huidan Yu. Lattice boltzmann equation simulations of turbulence, mixing, and combustion. 01 2004.

[18] Peter A. Gnoffo. CFD Validation Studies for Hypersonic Flow Prediction. 39<sup>th</sup> Aerospace Science Meeting and Exibit, (Reno, NV), January 2001. AIAA 2001-1025.

[19] D. D'Ambrosio and M. Pandolfi. Contribution to problem T2-97: Hollow cylinder-Flare. *First US-Europe High Speed Flow Field Database Workshop - Part II* (S. Borrelli et al., ed.), (Naples, Italy), CIRA, AIAA, 12-14 November 1997.

[20] M. Marini. Analysis of hypersonic compression ramp laminar flows under sharp leading edge conditions. *Aerosp. Sci. Technol.*, no.5, pp. 257-271, 2001.

[21] B. Chanetz, T. Pot, R. Bur, V. Joly, S. Larigaldie, M. Lefebvre, C. Marmignon, A. K Mohamed, J. Perraud, D. Pigache, et al. High-enthalpy hypersonic project at ONE-RA. *Aerospace Science and Technology*, 4(5):347-361, 2000.

[22] Holden, M. S. Experimental Database from CUBRC Studies in Hypersonic Laminar and Turbulent Interacting Flows including Flowfield Chemistry. *RTO Code Validation of DSMC and Navier-Stokes Code Validation Studies CUBRC Report*, June 2000.

[23] Berger M. J. and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*. 82(1):64-84, May 1989.

[24] Berger M. J. and J. Oliger. Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial-Differential Equations. *Journal of Computational Physics*. 54(1):484-512, 1984.

[25] Pereyra V. and Sewell E. Mesh Selection for Discrete Solution of Boundary Problems in Ordinary Differential Equations. *Numer. Math.* 23, 261-268, 1975.

[26] Gropp W.D. A Test of Moving Mesh Refinement for 2-D Scalar Hyperbolic Problems. *SIAM J. Sci. and Stat. Comp.* 1, 191-197, 1980.

[27] Dwyer H., Kee R. and Sanders B. Adaptive Grid Method for Problems in Fluid Mechanics and Heat Transfer. *AIAA J.*. 18, 1205-1212, 1980.

[28] Cheng Liu and Changhong Hu. An immersed boundary solver for inviscid compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 85(11):619–640, 2017.

[29] Chanetz, B., Pot, T. Benay, R, and Moss, J. New Test Cases in Low Density Hypersonic Flow. *Rarefied Gas Dynamics: 23rd International Symposium*, pp. 449-456, 2003.

[30] J. N. Moss, G. J. LeBeau and C. E. Glass. Hypersonic Shock Interactions About a 25°/65° Sharp Double Cone. *Rarefied Gas Dynamics: 23rd International Symposium*, pp. 425-432, 2003.

[31] Warming R., and Beam R. On the Construction and Application of Implicit Factored Schemes for Conservation Laws. *SIAM-AMS Proceedings*, 11/1978.

[32] Osher S. and Chakrawarthy S. Very High Order Accurate TVD Schemes. NASA Report N°88-44, 09/1984.

## Ringraziamenti

Cinque anni fa si apriva un capitolo fondamentale della mia vita e per me che arrivo da un piccolo paesino, Brecciarola, si trattava di un salto nel buio con tante aspettative e poche certezze. Oggi posso dire di essere soddisfatto, in parte per quello che ho realizzato ma, soprattutto, per ciò che potrò fare da domani: Torino, il Politecnico e alcune delle persone che ho avuto modo di conoscere mi hanno fatto realizzare che nella vita non bisogna porsi dei limiti, bensì degli obiettivi. E desidero aggiungere che tali obiettivi saranno centrati pienamente solo quando riusciranno a soddisfare tutte le sfere personali: vale a dire che la crescita deve essere continua e quello che sembrava un punto di arrivo cinque anni fa, ora è un nuovo stimolante punto di partenza.

Non si cresce da soli, spesso l'aiuto arriva senza alcuna richiesta da parte di esso e non si può che ringraziare di cuore. Grazie alla mia famiglia: a voi mamma e papà che non mi avete fatto mancare mai niente sotto tutti i punti di vista e a te Ale, che sei stato il loro regalo più bello e ogni volta non vedo l'ora di rivederti. Grazie a te Ili perchè sette anni e mezzo hanno un significato e ne hanno tutt'altro se cinque di questi sono stati vissuti a 700 chilometri di distanza, hai fatto una scelta difficile e non banale per me, ora siamo qui e te lo prometto ancora una volta: mai più lontani. Grazie ai miei nonni, Giovanni, Maria, Giuseppe e Giuseppina perchè sono un valore aggiunto in tutto e per tutto e so quanto sia un privilegio per me poter condividere queste emozioni con loro. Grazie a mia zia Sonia perchè mi vuole un bene dell'anima e a zio Gianni, zia Manola, Alisia e Aurora che fanno sempre sentire il loro supporto. Un pensiero non può che andare alla mia bisnonna Assunta.

Grazie agli amici di sempre Daniele, Pierpaolo, Giorgio e Michele perchè stiamo troppo bene insieme, sappiamo come farci certe risate assurde e non vi voglio perdere. Grazie al Collegio Einaudi per cinque anni che non dimenticherò mai, so bene e sono ancora più convinto che non ci sia un posto migliore dove trascorrerli, a tal punto da affidarvi qualcuno di speciale, ma solo per qualche tempo. A tale proposito, non posso non ringraziare il mitico Piano Zero, praticamente i primi veri amici conosciuti a Torino: Alberto, Diego, Leo, Fuso, Jordy e Luca perchè dovunque saremo, non perderemo mai i contatti e ci sarà sempre l'occasione per incontrarci. Halma: una notte ci ha uniti ufficialmente dopo pranzi, cene, ansie, cv, fritture di ogni tipo e allora grazie Matteo, Casà, Alberto, Flocco e Zupa. Il cuore sarà bianconero fino alla fine ma grazie a tutta l'A.C. Coria perchè è stata un'esperienza a dir poco travolgente.

Grazie al professor D'Ambrosio per avermi indirizzato verso questa esperienza diversa da quanto avevo affrontato finora, per il supporto, per i consigli sul futuro e per il suo esempio. Grazie a Haysam, Marco e Andrea della OPTIMAD per il sostegno, per le spiegazioni, per tutto quanto ho imparato e, lo dico solo ora a posteriori avendone capito l'importanza, per avermi lasciato solo alcune volte davanti alle difficoltà.

E infine grazie a te Abruzzo.