

POLITECNICO DI TORINO

Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea Magistrale

**Comportamento di elementi in calcestruzzo armato  
fibrorinforzato in campo fessurato**



Relatori:

Prof. Ing. Maurizio Taliano

Prof. Ing. Alessandro Pasquale Fantilli

Candidato:

Eleonora Vinci



## INDICE

INTRODUZIONE .....	5
CAPITOLO 1: CARATTERISTICHE DEL CALCESTRUZZO FRIBRORINFORZATO .....	7
1.1. Tipologie e proprietà delle fibre.....	7
1.1.1. Vantaggi delle fibre sulle proprietà del calcestruzzo .....	8
1.2. Fessurazione del calcestruzzo fibrorinforzato.....	8
1.2.1. Resistenza a trazione .....	8
1.2.2. Elementi di Meccanica della frattura .....	10
1.3. Calcolo dell'ampiezza della fessura nel RC (Modello di Balasz) .....	10
1.3.1. Fase di formazione della fessura e di fessurazione stabilizzata .....	10
1.3.2. Assunzioni.....	11
1.3.3. Leggi fisiche.....	12
1.3.4. Condizioni di equilibrio e compatibilità.....	13
1.3.5. Equazione differenziale.....	14
1.3.6. Soluzione per la fase di formazione della fessura .....	16
1.3.7. Soluzione per la fessurazione stabilizzata( Metodo delle differenze finite) .....	18
CAPITOLO 2: PROVE SPERIMENTALI E DISPOSIZIONI DEL MODEL CODE.....	25
2.1. Prove sperimentali di Wandevale.....	25
2.1.1. Parametri geometrici e meccanici .....	25
2.1.2. Procedura di prova .....	26
2.1.3. Risultati .....	27
2.2. Prove sperimentali di Dupont.....	29
2.2.1. Parametri geometrici e meccanici .....	29
2.2.2. Procedura di prova e Risultati .....	30
2.3. Model Code.....	31
CAPITOLO 3: MODELLO ANALITICO.....	33
3.1. Risposta meccanica dei compositi a base cementizia .....	33
3.2. Modello di interfaccia coesa fibra-matrice.....	34
3.2.1. Equazioni di equilibrio e compatibilità .....	36
3.2.2. Equazione differenziale.....	36

3.2.3.Leggi $\sigma$ -w e $\tau$ -s.....	37
3.2.4.Soluzione analitica per la lunghezza di trasmissione .....	38
3.2.5.Valore critico della frazione volumetrica di fibre .....	40
CAPITOLO 4: CONFRONTO CON I RISULTATI DI WANDEVALLE.....	43
4.1.Ampiezze di fessure .....	43
4.2.Spaziature di fessure.....	51
4.3. Conclusioni.....	52
CAPITOLO 5: CONFRONTO CON I RISULTATI DI DUPONT.....	54
5.1.Ampiezze di fessure .....	54
5.2.Spaziature di fessure.....	83
5.3 Conclusioni.....	84
CAPITOLO 6: APPLICAZIONE DEL MODELLO ANALITICO .....	86
6.1 Applicazione e Conclusioni .....	86
6.1.1.Wandevalle.....	86
6.1.2.Dupont.....	88
CAPITOLO 7: CONCLUSIONI.....	92
Bibliografia.....	93



## INTRODUZIONE

Questa tesi tratta del comportamento di elementi di calcestruzzo armato fibrorinforzato (FRC) valutato in campo fessurato.

L'aggiunta di fibre d'acciaio consente di migliorare la duttilità e la tenacità a frattura del calcestruzzo ordinario in modo da ottimizzarne il comportamento strutturale.

Infatti, il calcestruzzo fibrorinforzato è un materiale che viene ampiamente utilizzato per la costruzione di impalcati da ponte, tubi, pavimentazioni industriali e anche nel campo delle costruzioni di opere in sotterraneo, quali le gallerie, per la realizzazione di rivestimenti provvisori e finali.

Di notevole importanza, nell'ambito della progettazione delle opere civili, è il calcolo dell'ampiezza della fessura.

Per valutare la larghezza e spaziatura della fessura sono stati estrapolati i risultati di prove sperimentali su travi in calcestruzzo armato, con o senza rinforzo in fibre, soggette a flessione.

I valori sperimentali ottenuti sono stati confrontati con i valori massimi calcolati attraverso le disposizioni correnti del Model Code.

Inoltre in questa tesi verrà introdotto un Modello analitico per il calcolo della spaziatura della fessura, per il quale, la nascita di più fessure negli elementi di calcestruzzo fibrorinforzato, soggetti a tensione assiale, può essere studiata tracciando un'analogia con il comportamento dei tiranti in calcestruzzo armato ordinario.

Infine, con l'applicazione analitica del Modello, è stato possibile verificare se è un procedimento utilizzabile ai casi sperimentali considerati e, nel caso sia verificato, ci si propone di effettuare un confronto con i risultati sperimentali e con i valori ottenuti tramite il Codice Modello.



# CAPITOLO 1 : CARATTERISTICHE DEL CALCESTRUZZO FIBRORINFORZATO

## 1.1 Tipologie e proprietà delle fibre

Il calcestruzzo fibrorinforzato è un materiale composito caratterizzato da una matrice cementizia e dal rinforzo in fibra.

Alcuni tipi di fibra sono incollati insieme con colla solubile in acqua per ottenere una migliore distribuzione della fibra e una miscela di calcestruzzo lavorabile.

Il calcestruzzo utilizzato non deve contenere inerti con diametro troppo elevato, poiché potrebbe impedire una corretta distribuzione delle fibre. Infatti l'orientazione e la distribuzione delle fibre nel conglomerato influisce sulle proprietà meccaniche del calcestruzzo.

In funzione del tipo di materiale, si distinguono fibre in acciaio, vetro, materiale polimerico, carbonio e in materiali naturali, e vengono utilizzate con opportune proprietà geometriche e meccaniche. In modo particolare il rinforzo in fibra di acciaio è quello maggiormente utilizzato nelle applicazioni dell'ingegneria civile.

La dimensione comune delle fibre in acciaio è tra i 10 e i 60 mm di lunghezza, un diametro compreso tra 0.1 mm e 0.6 mm, un contenuto di fibra variabile tra lo 0.5% e il 2 % in volume, un rapporto d'aspetto, cioè il rapporto tra la lunghezza e il diametro della fibra, tra 30 e 100 e una resistenza a trazione non inferiore a  $345 \text{ N/mm}^2$ .

Qui di seguito si riporta una tabella con le proprietà meccaniche e geometriche di alcuni tipi di fibre:

Materiali	Diametro [μm]	Lunghezza [mm]	Modulo elastico [GPa]	Resistenza a trazione [MPa]	Deformazione ultima [%]	Contenuto di fibre [V%]
Carbonio	8-9	10	380-230	1800-2600	0.5-1	0.5-2
Polimeri	10-100	5	14-100	200-1000	7-150	0.1-6
Vetro	8-10	10-50	72	3500	4.8	2-8
Naturali	0.1-5	50-80	19-40	120-700	3-25	10-20

Tab.1 Proprietà geometriche e meccaniche delle fibre

### **1.1.1 Vantaggi delle fibre sulle proprietà del calcestruzzo**

Lo scopo principale dell'applicazione delle fibre è aumentare la duttilità del calcestruzzo, quindi incrementare la capacità di deformazione plastica del calcestruzzo sotto carico prima di giungere a rottura. Uno dei parametri che influenza la duttilità del materiale è il rapporto d'aspetto vale a dire che se questo aumenta, la duttilità aumenta tanto più quando le fibre sono miscelate correttamente con il calcestruzzo.

Inoltre, la presenza delle fibre aumenta la tenacità a frattura del conglomerato cementizio.

Questo parametro di tenacità è funzione oltre che della geometria delle fibre anche della composizione del calcestruzzo e condizioni di prova. Tuttavia, la determinazione appropriata e l'espressione accurata delle proprietà di tenacità sono ancora in discussione.

La presenza delle fibre in acciaio nel calcestruzzo provoca un aumento della resistenza a compressione che supera raramente il 25% e dipende da molti parametri tra cui la frazione in volume delle fibre, la geometria delle fibre e le proprietà della matrice.

Assume un ruolo importante, nel comportamento del materiale in esame, la fragilità della matrice che risulta essere più pronunciata per il calcestruzzo contenente ceneri volanti e fumi di silice. Però d'altra parte l'applicazione di fumi di silice fornisce un miglior legame tra calcestruzzo e fibre e quindi rende il prodotto più efficace dal punto di vista strutturale.

## **1.2 Fessurazione del calcestruzzo fibrorinforzato**

Il calcestruzzo, a causa della sua limitata resistenza a trazione, è soggetto inevitabilmente alla formazione di fessure. A tal proposito, il rinforzo in fibre fornisce il suo contributo al calcestruzzo quando viene raggiunta la fase di fessurazione, aumentandone, in alcuni casi, la resistenza a trazione.

### **1.2.1 Resistenza a trazione**

La corretta determinazione della resistenza a trazione del calcestruzzo fibrorinforzato è stato uno degli obiettivi principali degli ultimi decenni.

Si è appurato che un elevato dosaggio di fibre d'acciaio aumenta in modo non trascurabile la resistenza a trazione a discapito però della lavorabilità del calcestruzzo.

Infatti per piccole percentuali volumetriche di fibre (circa 0.2-2%) il legame carico-spostamento a trazione di un FRC presenta ancora un ramo discendente (comportamento degradante), ma è caratterizzato da una resistenza residua e da una maggiore tenacità (Figura 1.1a). Per percentuali volumetriche di fibre superiori (circa 2-8%), il comportamento può

diventare incrudente, grazie alla comparsa di una multi-fessurazione (Figura 1.1b).

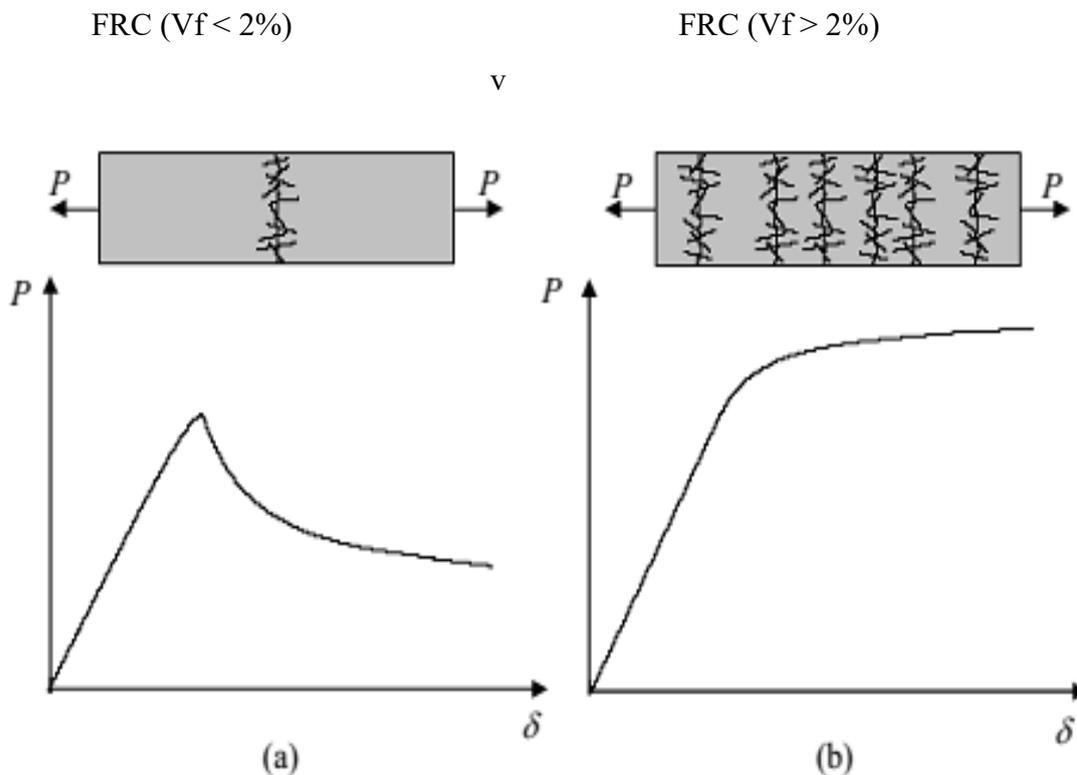


Figura. 1.1 Curva carico-spostamento per conglomerati fibrorinforzati caratterizzati da: basse percentuali di fibre (a) e alte percentuali di fibre (b).

Come detto il calcestruzzo in fibra di acciaio (SFC) è caratterizzato da una resistenza a trazione residua post-fessurazione. Quindi gli elementi in RSFC hanno un comportamento di cracking migliorato rispetto al calcestruzzo armato convenzione (RC). In particolare, gli elementi in RSFC hanno una ridotta spaziatura tra le fessure e minori tensioni dell'acciaio ordinario, come mostrato in figura 1.2.

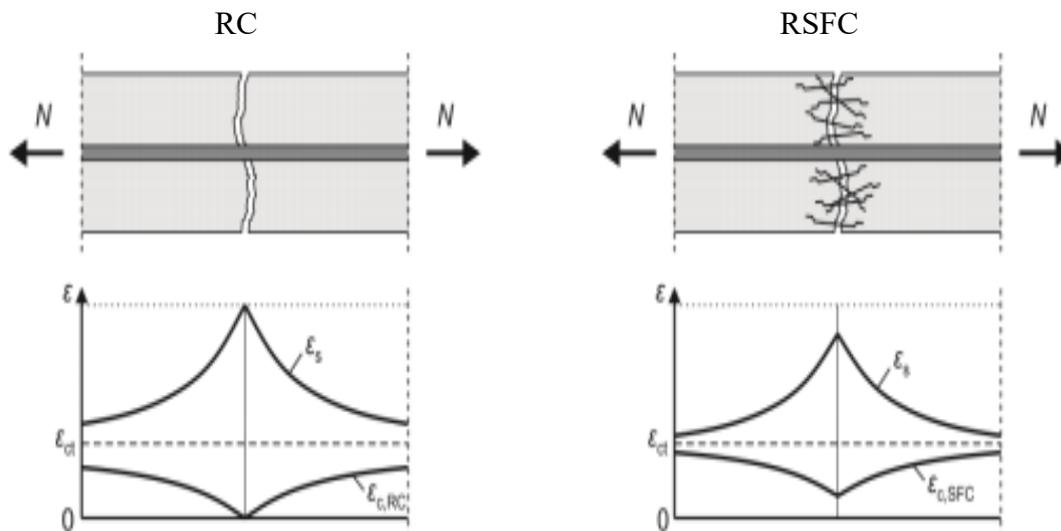


Figura 1.2 Distribuzione delle deformazioni di un tirante in calcestruzzo armato ordinario (sinistra) e calcestruzzo armato fibrorinforzato (destra).

## 1.2.2 Elementi di Meccanica della frattura

La meccanica della frattura si occupa di studiare gli effetti di cricche e difetti sulla stato di sforzo applicato ad un corpo.

Si è dimostrato che la rottura di un elemento può avvenire per un carico inferiore rispetto a quello massimo nel caso in cui siano presenti fessure o difetti.

Per questo motivo numerosi studiosi si sono occupati di questo ambito in modo da dare delle formulazioni analitiche che prevedano lo stato di sforzo in presenza di fessure.

Il fenomeno che si è osservato da questi studi è che la resistenza dell'elemento è funzione della dimensione e numerosità dei difetti e inoltre in esso avviene una concentrazione degli sforzi, che se non considerata, in fase di progettazione, può essere gravosa.

L'obiettivo che si vuole raggiungere con l'inclusione di fibre nel calcestruzzo è di aumentare l'energia di frattura del materiale per realizzare strutture con elevati gradi di duttilità. L'introduzione di elementi fibrosi dunque non deve concorrere tanto all'aumento della resistenza ultima, quanto a realizzare un meccanismo dissipativo di energia.

Risultati su prove sperimentali mostrano che resistenza a trazione e compressione nonché modulo elastico per provini di materiale fibrorinforzato aumentano poco, mentre il valore che subisce notevoli incrementi è l'energia di frattura.

## 1.3 Calcolo dell'ampiezza della fessura nel RC ( Modello di Balász )

Nel suo modello matematico Balász ha ipotizzato la presenza di una singola fessura (fase di formazione delle fessure) che attraversa la sezione del tirante e, tramite l'equazione differenziale della legge di aderenza, ha ricavato la soluzione in forma chiusa dell'ampiezza della fessura e della lunghezza di trasmissione per la fase di formazione della fessura.

Propone invece un procedimento iterativo per la fase di fessurazione stabilizzata.

### 1.3.1 Fase di formazione della fessura e di fessurazione stabilizzata

Una formulazione rigorosa dell'ampiezza delle fessure ( $w$ ) è basata sull'integrazione della differenza di deformazione dell'acciaio presente ( $\epsilon_{sx}$ ) e del calcestruzzo ( $\epsilon_{cx}$ ) sulla distanza ( $sr$ ):

$$w = \int_{sr} (\epsilon_{sx} - \epsilon_{cx}) dx \quad (1.1)$$

La **formazione della fessura** avviene in corrispondenza del superamento della resistenza a trazione del calcestruzzo che non reagisce più, per cui, nella sezione fessurata, è l'armatura

che sopporta tutto il carico di trazione. Invece risulta ancora reagente il calcestruzzo tra le fessure proprio perché dalla sezione fessurata avremo una zona di redistribuzione delle tensioni tale per cui la trazione passa dall'acciaio al calcestruzzo. Tale redistribuzione è possibile grazie alle tensioni di aderenza all'interfaccia acciaio-calcestruzzo.

Nella sezione in cui le tensioni di aderenza cominciano a svilupparsi, detta sezione di *zero-slip*, sia lo scorrimento  $s_0$  che la sua derivata  $s'_0$  sono uguali a zero.

$$s_0 = u_{s0} - u_{c0} = 0 \quad (1.2)$$

$$s'_0 = \varepsilon_{s0} - \varepsilon_{c0} = 0 \quad (1.3)$$

Si è visto che la fessura influenza le tensioni solamente entro una distanza di  $\pm lt$  (lunghezza di trasmissione) misurata dalla fessura. La fessura successiva si forma oltre questa regione.

Il problema della fessurazione è in teoria completamente sviluppato se tutti gli spazi tra le fessure variano tra  $lt$  e  $2lt$ . Questa fase si riferisce alla fase di **fessurazione stabilizzata**.

Le tensioni nell'acciaio raggiungono il loro minimo dove lo scorrimento è nullo e la tensione di aderenza cambia di segno. Questo punto è approssimativamente a metà tra le fessure, ma può essere spostato se si forma una nuova fessura nei pressi di  $lt$ , misurata dalla fessura precedente. Anche se lo scorrimento è nullo nel punto di tensione minima nell'acciaio, la derivata prima dello scorrimento (cioè la differenza delle deformazioni dell'acciaio e del calcestruzzo) non rimarrà nulla.

$$s_0 = u_{s0} - u_{c0} = 0 \quad (1.4)$$

$$s'_0 = \varepsilon_{s0} - \varepsilon_{c0} > 0 \quad (1.5)$$

L'equazione (1.5) conduce a una pendenza della distribuzione delle tensioni di aderenza che è differente da zero nella sezione a scorrimento nullo.

### 1.3.2 Assunzioni

Per lo sviluppo del modello matematico sono state considerate le seguenti assunzioni:

1. il calcestruzzo fornisce un contributo a trazione nel contrastare i carichi dovuti alla presenza di tensioni di aderenza eccetto in corrispondenza delle fessure;

2. gli scorrimenti si verificano a causa della differenza di spostamento tra acciaio e calcestruzzo. Gli scorrimenti producono tensioni di aderenza. La relazione tra tensioni di aderenza-scorrimento è una proprietà dell'interfaccia che si suppone essere valida lungo la barra dunque  $\tau_b(x) = \tau_b(s)$ ;
3. le tensioni di aderenza raggiungono lo zero dove  $\epsilon_s = \epsilon_c$  per la fase di formazione della fessura o metà della distanza tra due fessure per la fase di fessurazione stabilizzata;
4. l'ampiezza in corrispondenza della superficie dell'armatura è uguale alla differenza tra l'allungamento dell'acciaio e quello del calcestruzzo (ossia è la somma degli scorrimenti di ciascun lato);
5. la micro-fessurazione e la micro-rottura possono svilupparsi di fronte alla barra ancorata nel calcestruzzo (questo produce la non-linearità nella relazione tensioni di aderenza-scorrimento);
6. non si verificano splitting crack lungo le barre;
7. la risultante delle tensioni nell'acciaio e di quella delle tensioni di trazione del calcestruzzo coincidono.

### 1.3.3 Leggi fisiche

In esercizio, acciaio e calcestruzzo seguono la legge di Hooke, quindi verrà considerato, per entrambi i materiali, un comportamento elastico, lineare, omogeneo e isotropo.

Anche se le leggi fisiche elastiche lineari valgono sia per l'acciaio che per il calcestruzzo, il modello matematico diventa non-lineare nel caso in cui si utilizzi una relazione tra tensioni di aderenza all'interfaccia acciaio-calcestruzzo e lo scorrimento tra gli stessi di tipo non lineare  $\tau_b-s$ .

La relazione  $\tau_b-s$  è ottenuta dai test di pull-out o dai test sulla trave che mostrano un comportamento non lineare per le barre deformate.

Il fib Model Code 2010 (MC2010), a tal proposito, adotta un approccio non lineare che è stato proposto per la prima volta da Ciampi, Eligehausen, Bertero and Popov (1982) come una funzione di potenza, rappresentato in Figura 1.3:

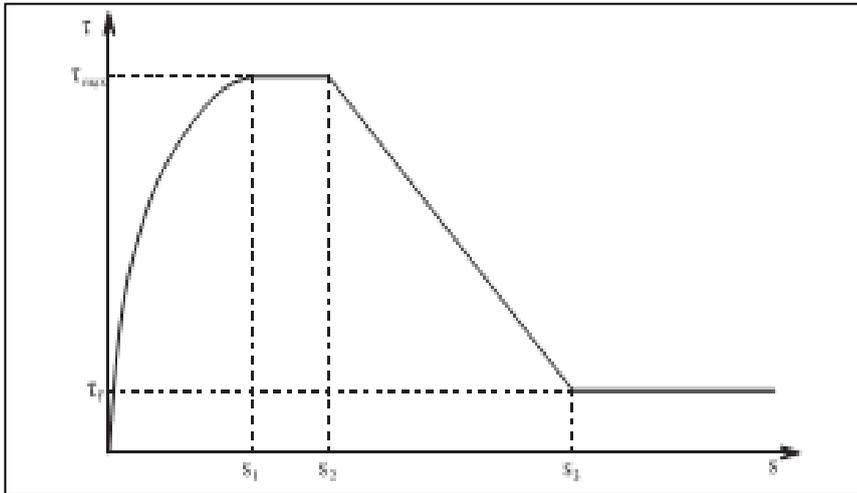


Figura 1.3. Andamento delle tensioni di aderenza in funzione dello scorrimento ( $\tau_b$ - $s$ ) secondo il MC2010.

$$\tau_b = \tau_{max} \left( \frac{s^\alpha}{s_1^\alpha} \right) \quad (1.6)$$

dove:

- $\tau_{max}$  è la tensione max di aderenza che vale:

- ✓  $2,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \left[ \frac{N}{mm^2} \right]$  per calcestruzzo confinato.
- ✓  $2,0 \cdot \sqrt{f_{ck}} \left[ \frac{N}{mm^2} \right]$  per calcestruzzo non confinato.

- $s_1$  è lo scorrimento corrispondente alla tensione max di aderenza e vale:

- ✓ 1,0 [mm] per calcestruzzo confinato;
- ✓ 0,6 [mm] per calcestruzzo non confinato.

- $\alpha$  è compreso tra  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Si noti che l'equazione (1.6) è valida per uno scorrimento fino  $s_1$ .

### 1.3.4 Condizioni di equilibrio e di compatibilità

Le equazioni di equilibrio:

- Equilibrio locale

$$\tau_{bx} \cdot \varphi \cdot \pi \cdot dx = d\sigma_{sx} \cdot A_s \quad (1.7)$$

oppure

$$\tau_{bx} \cdot \varphi \cdot \pi \cdot dx = d\sigma_{cx} \cdot A_c \quad (1.8)$$

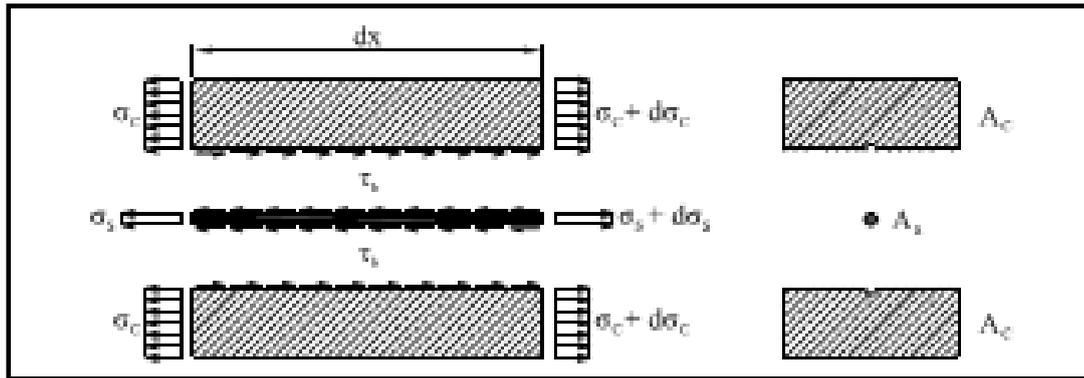


Figura 2.4. Forze nel conico infinitesimo di lunghezza  $dx$  per l'equilibrio locale

- Equilibrio globale

$$F_{sx} + F_{cx} = F \quad (1.9)$$

Le equazioni di compatibilità:

A causa degli spostamenti relativi tra le sezioni di acciaio e calcestruzzo, la compatibilità significa che il cambiamento locale di scorrimento è uguale alla differenza di deformazione:

$$s'_x = \varepsilon_{sx} - \varepsilon_{cx} \quad (1.10)$$

Lo scorrimento è ottenuto prendendo il suo integrale e mediando la differenza tra gli spostamenti assoluti delle sezioni di acciaio e calcestruzzo:

$$s_x = u_{sx} - u_{cx} \quad (1.11)$$

### 1.3.5 Equazione differenziale

Per ottenere l'equazione differenziale che regge il fenomeno dobbiamo utilizzare l'equazione fisica (1.6), le equazioni di equilibrio (1.7) e (1.8) e l'equazione di compatibilità (1.10).

Uguagliamo le equazioni (1.7) e (1.8) segue:

$$\tau_b = \frac{A_s}{\varphi \cdot \pi} \cdot \frac{d\sigma_s}{dx} = - \frac{A_c}{\varphi \cdot \pi} \cdot \frac{d\sigma_c}{dx} \quad (1.12)$$

L'equazione (1.8) viene cambiata in segno per ottenere la stessa direzione delle  $\tau_b$ .

Assumendo una legge costitutiva elastica lineare:

$$\frac{d\sigma_s}{dx} = E_s \cdot \frac{d\varepsilon_s}{dx} \quad (1.13)$$

$$\frac{d\sigma_c}{dx} = E_c \cdot \frac{d\varepsilon_c}{dx} \quad (1.14)$$

Sapendo che :

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad (1.15)$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_{ceff}} \quad (1.16)$$

Utilizzando le equazioni (1.12),(1.13) ,(1.14) ,(1.15) ,(1.16) si ottiene:

$$\frac{d\varepsilon_s}{dx} = \frac{1}{\alpha_e \cdot \rho_s} \cdot \frac{d\varepsilon_c}{dx} \quad (1.17)$$

Derivando la (1.10) si ottiene:

$$S''_x = \frac{d\varepsilon_s}{dx} - \frac{d\varepsilon_c}{dx} \quad (1.18)$$

Con l'equazione (1.17) posso riscrivere la (1.18) come:

$$S''_x = \frac{d\varepsilon_s}{dx} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_s) \quad (1.19)$$

Uguagliando l'equazione (1.7) alla (1.6) e considerando l'equazioni sopra scritte:

$$S''_x - \frac{\varphi \cdot \pi \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,eff})}{A_s \cdot E_s} \cdot \tau_{max} \cdot \left(\frac{s_x}{s_1}\right)^\alpha = 0 \quad (1.20)$$

L'area di una barra in acciaio vale:

$$A_s = \pi \cdot \frac{\varphi^2}{4} \quad (1.21)$$

Sostituendo otteniamo l'equazione differenziale del contatto di scorrimento:

$$S''_x - \frac{4 \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \tau_{max} \cdot \left(\frac{S_x}{s_1}\right)^\alpha = 0 \quad (1.22)$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea e non lineare.

### 1.3.6 Soluzione per la fase di formazione della fessura

Per risolvere l'equazione (1.22) si moltiplica ambo i membri per  $2 \cdot S'_x$ :

$$2 \cdot S'_x \cdot S''_x - 2 \cdot \frac{4 \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \tau_{max} \cdot \left(\frac{S_x}{s_1}\right)^\alpha \cdot S'_x = 0 \quad (1.23)$$

Integrando:

$$\int_0^{S'_x} 2 \cdot S'_x \cdot S''_x = \int_0^{S_x} 2 \cdot \frac{4 \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \tau_{max} \cdot \left(\frac{S_x}{s_1}\right)^\alpha \cdot S'_x \quad (1.24)$$

$$S'^2_x = 2 \cdot \frac{4 \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \frac{\tau_{max}}{s_1^\alpha} \cdot \frac{S_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (1.25)$$

$$S'_x = \frac{dS_x}{dx} = \sqrt{2 \cdot \frac{4 \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \frac{\tau_{max}}{s_1^\alpha} \cdot \frac{S_x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \quad (1.26)$$

Separando le variabili, eseguendo una seconda integrazione, in definitiva si ottiene:

$$S_x = \left( \frac{2 \cdot (1 - \alpha)^2 \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \cdot \tau_{max}}{(1 + \alpha) \cdot E_s} \cdot \frac{x^2}{\varphi \cdot s_1^\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{1 - \alpha}} \quad (1.27)$$

Sostituendo quest'ultima equazione nella (1.6) ottengo la tensione di aderenza:

$$\tau_b = \frac{\tau_{max}}{s_1^\alpha} \left( \frac{2 \cdot (1 - \alpha)^2 \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \cdot \tau_{max}}{(1 + \alpha) \cdot E_s} \cdot \frac{x^2}{\varphi \cdot s_1^\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{1 - \alpha}} \quad (1.28)$$

Espressione definita in modo da avere valore nullo in corrispondenza della sezione fessurata e raggiunge il massimo nelle vicinanze della fessura.

Per trovare la distribuzione delle tensioni all'interno dell'acciaio si considera l'equazione

(1.7) e (1.28) si integra dopo di che si sostituisce nella (1.7) la (1.21).

$$\frac{4 \cdot \tau_b}{\varphi} \cdot dx = d\sigma_{sx} \quad (1.29)$$

Integrando :

$$\int_0^x \frac{4 \cdot \tau_b}{\varphi} \cdot dx = \int_{\sigma_{s1}}^{\sigma_{sx}} d\sigma_{sx} \quad (1.30)$$

Si ottiene :

$$\sigma_{sx} = \sigma_{s1} + K \cdot \left( \frac{x^{(1+\alpha)}}{\varphi \cdot s_1^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (1.31)$$

Con :

$$K = \tau_{max} \frac{4 \cdot (1-\alpha)}{1+\alpha} \left( \frac{2 \cdot (1-\alpha)^2 \cdot (1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef}) \cdot \tau_{max}}{(1+\alpha) \cdot E_s} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (1.32)$$

Per trovare a quale distanza la tensione dell'acciaio  $\sigma_{s2}$  può essere trasferita al calcestruzzo:

$$\sigma_{s2} = \sigma_{sx} \quad (1.33)$$

Sostituendo:

$$\sigma_{s2} - \sigma_{s1} = \frac{\sigma_{s2}}{1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef}} \quad (1.34)$$

Per  $x = l_t$  :

$$\frac{\sigma_{s2}}{1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef}} = K \cdot \left( \frac{l_t^{(1+\alpha)}}{\varphi \cdot s_1^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (1.35)$$

$$l_t = \left[ \frac{(\varphi \cdot s_1^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \sigma_{s2}}{1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef} \cdot K} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (1.36)$$

Da cui si ottiene l'ampiezza della fessura al livello della barra:

$$w = 2 \cdot \left[ \frac{(1+\alpha) \cdot \varphi \cdot s_1^\alpha}{8 \cdot (1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef})} \cdot \frac{\sigma_{s2}^2}{\tau_{max} \cdot E_s} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (1.37)$$

Si è ottenuta, nel caso di prima fessurazione, l'ampiezza della fessura attraverso un procedimento in forma chiusa.

### 1.3.7 Fase di fessurazione stabilizzata ( metodo delle differenze finite )

Il numero di fessure è stabilizzato se la distanza tra le fessure è troppo piccola per permettere nuovamente lo sviluppo della resistenza a trazione del calcestruzzo. Lo scorrimento rimane uguale a zero nella sezione di zero slip, tuttavia, la derivata prima dello scorrimento diventa diversa da zero nel punto di tensione minima dell'acciaio, fornendo i valori iniziali alle equazioni differenziali. Dal punto di vista matematico, il cambiamento delle condizioni al contorno rende impossibile la soluzione dell'equazione differenziale in forma chiusa; tuttavia diversi metodi numerici sono disponibili per la soluzione.

L'equazione (1.23) rimane immutata, mentre, a causa delle diverse condizioni al contorno, l'equazione (1.24) diventa:

$$\int_c^{s'_x} 2 \cdot s'_x \cdot s''_x = \int_0^{s_x} 2 \cdot \frac{4 \cdot (1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \tau_{max} \cdot \left( \frac{s_x}{s_1} \right)^\alpha \cdot s'_x \quad (1.38)$$

Con c il valore per  $s'_x(x=0)$ .

$$s'^2_x - c^2 = 2 \cdot \frac{4 \cdot (1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \frac{\tau_{max}}{s_1^\alpha} \cdot \frac{s_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (1.39)$$

$$s'_x = \frac{ds_x}{dx} = \sqrt{2 \cdot \frac{4 \cdot (1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \frac{\tau_{max}}{s_1^\alpha} \cdot \frac{s_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c^2} \quad (1.40)$$

Separando le variabili ed eseguendo una seconda integrazione:

$$\int_0^{s_x} \frac{ds_x}{\sqrt{2 \cdot \frac{4 \cdot (1+\alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{\varphi \cdot E_s} \cdot \frac{\tau_{max}}{s_1^\alpha} \cdot \frac{s_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c^2}} = \int_0^x dx \quad (1.41)$$

In questo caso risulta impossibile determinare la primitiva del primo membro, quindi bisognerà passare all'integrazione per via numerica o ad altri strumenti per la risoluzione numerica tra cui:

Il **metodo delle differenze finite** che approssima modelli continui, costituiti da equazioni differenziali, con modelli discreti che coinvolgono solamente approssimazioni della soluzione del modello continuo in un numero finito di punti della regione di interesse  $R$ , come mostrato nella Figura 1.5, che possano essere risolti in modo "efficiente" con l'ausilio del calcolatore. L'idea consiste nel sostituire la regione  $R$  con un reticolo (rettangolare) di punti di  $R$ , "collocare" il sistema differenziale sui nodi del reticolo, e approssimare (nei nodi) le derivate parziali con formule (alle differenze finite) di derivazione numerica.

Un punto in un reticolo è detto interno se i suoi 4 nodi "vicini" sono nella regione  $R$ , contorno incluso. Gli altri punti appartenenti  $R$ , ma non interni, vengono chiamati punti di frontiera del reticolo (si veda la Figura 1.6).

Data una generica funzione  $u$  sufficientemente regolare, la sua derivata prima può essere espressa mediante la definizione di derivata, cioè del limite di rapporto incrementale.

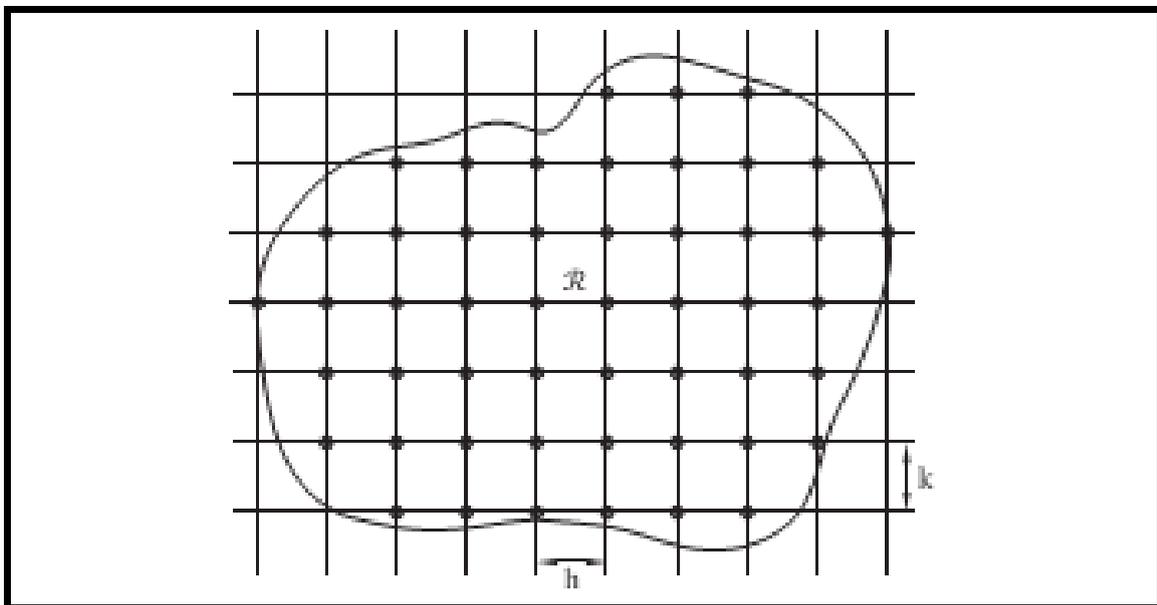


Fig.1.5 Regione  $R$  con discretizzazione

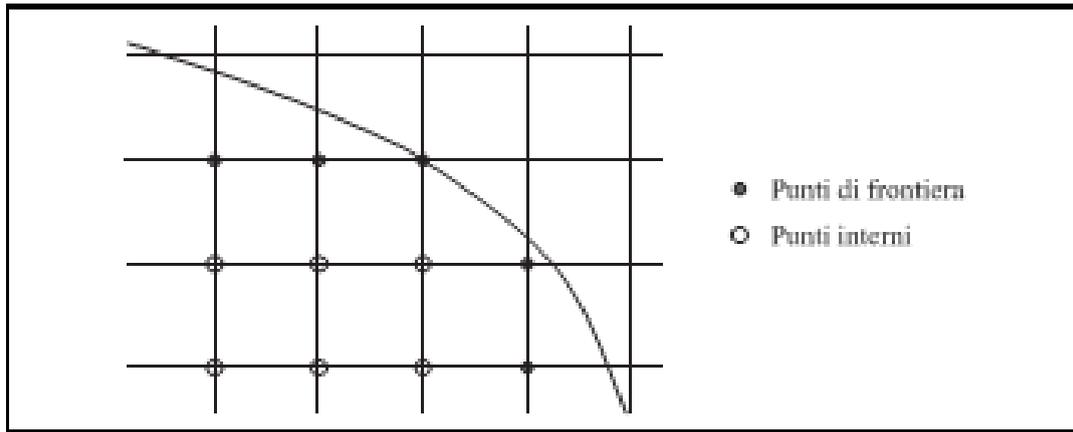


Fig. 1.6 Punti di frontiera e punti interni della regione R

Con riferimento alla Fig. 1.7 riportata di seguito:

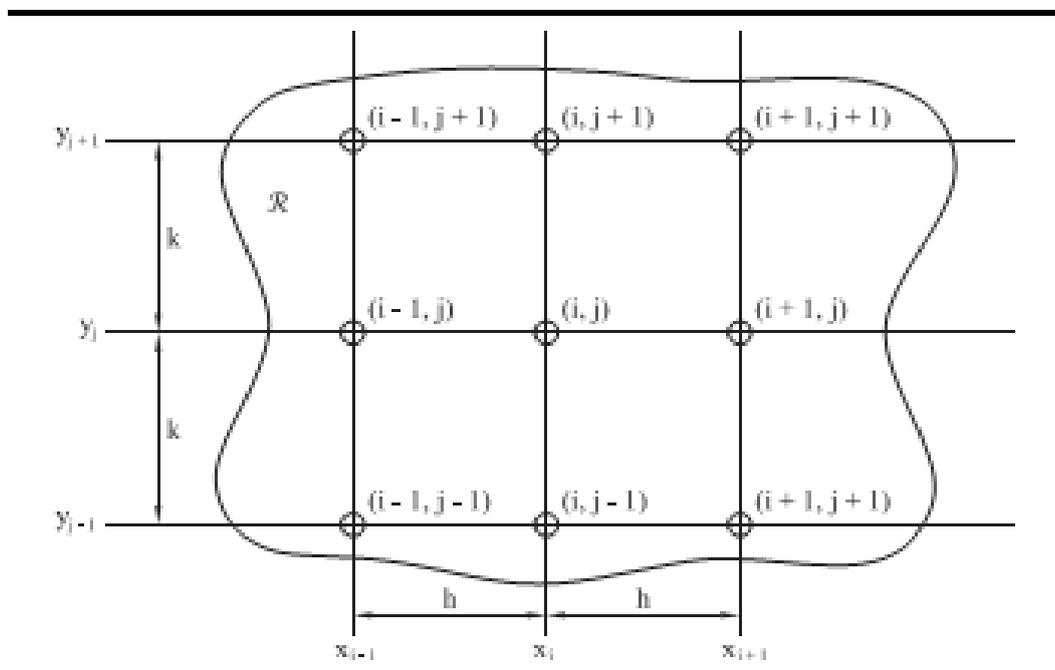


Fig.1.7 Convenzione della disposizione dei nodi in R

La derivata in direzione x varrà:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} + O(h) \quad (1.38)$$

Che è anche uguale a:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h} + O(h) \quad (1.39)$$

Uguagliando le due equazioni sopra:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2 \cdot h} + O(h^2) \quad (1.40)$$

Eseguendo gli stessi passaggi, la derivata prima in direzione y varrà:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2 \cdot k} + O(k^2) \quad (1.41)$$

Così facendo è possibile calcolare la derivata seconda lungo x e y e la derivata mista:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + O(h^2) \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} + O(k^2) \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j-1})}{4 \cdot h \cdot k} + O((h+k)^2) \quad (1.44)$$

Tale metodo viene utilizzato nella seguente scrittura:

$$s_x'' - B \cdot s_x^\alpha = 0 \quad (1.45)$$

Con B nel caso di più barre :

$$B = \frac{n_s \cdot \pi \cdot \varphi \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{s,ef})}{E_s \cdot A_{s,tot}} \cdot \frac{\tau_{max}}{s_1^\alpha} \quad (1.46)$$

Quest'ultima equazione può essere ricavata modificando l'equazione (1.7):

$$n_s \cdot \tau_{bx} \cdot \varphi \cdot \pi \cdot dx = d\sigma_{sx} \cdot A_{s,tot} \quad (1.47)$$

L'equazione (1.40) può essere opportunamente modificata al caso monodimensionale, in questo caso avremo:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}(x_i) = \frac{s_x(x_{i+1}) - s_x(x_{i-1})}{2 \cdot \Delta} + O(\Delta^2) \quad (1.48)$$

Dove  $\Delta$  rappresenta l'incremento.

Modificando l'equazione (1.42) al caso monodimensionale otterremo:

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2}(x_i) = \frac{s_x(x_{i+1}) - 2 \cdot s_x(x_i) + s_x(x_{i-1}))}{\Delta^2} + O(\Delta^2) \quad (1.49)$$

ma dall'equazione (1.45) sappiamo essere uguale a:

$$B \cdot s_x^\alpha(x_i) = \frac{s_x(x_{i+1}) - 2 \cdot s_x(x_i) + s_x(x_{i-1}))}{\Delta^2} + O(\Delta^2) \quad (1.50)$$

Per risolvere questa equazione è necessario dare almeno 2 informazioni in quanto abbiamo 3 incognite. Nel caso in cui la trave sia sottoposta a una forza assiale F abbiamo per  $x=0$  (cioè di scorrimento nullo tra acciaio e calcestruzzo):

- tensione nel calcestruzzo pari a quella di trazione:

$$\sigma_c(x=0) = \sigma_{cE} = f_{ctk,0.95} \quad (1.51)$$

- scorrimento nullo tra acciaio e calcestruzzo:

$$s_x(x_{i=0}) = 0 \quad (1.52)$$

Tramite equazione (1.51) è possibile ricavare le tensioni all'interno dell'acciaio (ipotizzando un comportamento elastico lineare):

$$\sigma_s(x=0) = \sigma_{sE} = \frac{F - f_{ctk,0.95} \cdot A_c}{A_s} = \sigma_{s2} - \frac{f_{ctk,0.95} \cdot A_c}{\rho_{s,ef}} \quad (1.53)$$

e le deformazioni del calcestruzzo e dell'acciaio:

$$\varepsilon_{cE} = \frac{\sigma_{cE}}{E_c} \quad (1.54)$$

$$\varepsilon_{sE} = \frac{\sigma_{sE}}{E_s} \quad (1.55)$$

Applicando la definizione della derivata scorrimento otteniamo:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}(x_{i=0}) = \varepsilon_{sE} - \varepsilon_{cE} = \frac{1}{E_s} \left[ \sigma_{s2} - \frac{f_{ctk,0.95} \cdot A_c}{\rho_{s,ef}} \cdot (1 + \alpha_e \rho_{s,ef}) \right] \quad (1.56)$$

Quindi la prima informazione delle due cercate è rappresentata dall'equazione (1.52) mentre la seconda sarà rappresentata dalla condizione in corrispondenza della fessura:

- tensione nel calcestruzzo nulla:

$$\sigma_{c2} = 0 \quad (1.57)$$

- deformazione nel calcestruzzo nulla:

$$\varepsilon_{c2} = 0 \quad (1.58)$$

Tramite l'equazione (1.57) è possibile ricavare la tensione all'interno dell'acciaio

(ipotizzando un comportamento elastico lineare):

$$\sigma_{s2} = \frac{F}{A_s} \quad (1.59)$$

e le deformazioni:

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\sigma_{s2}}{E_s} \quad (1.60)$$

Applicando la definizione della derivata scorrimento otteniamo:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}(x_{i=n}) = \varepsilon_{s2} - \varepsilon_{c2} = \frac{F}{E_s \cdot A_s} \quad (1.61)$$

dove n rappresenta il numero di divisioni dell'intervallo.

Abbiamo anche la simmetria degli scorrimenti:

$$s_x(x_i) = -s_x(x_{-i}) \quad (1.62)$$

L'equazione (1.48) può essere riscritta come:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}(x_i) = \frac{s_x(x_{i+1})}{\Delta} + O(\Delta^2) \quad (1.63)$$

Con le equazioni riportate fino ad ora possiamo descrivere la curva bond-slip però questa è una legge che porta ad avere una  $\tau_b$  crescente all'aumentare di  $s$  in modo indefinito, quindi non viene soddisfatto l'equilibrio alla traslazione espresso dall'equazione (1.7). Inoltre abbiamo ipotizzato che la tensione nel calcestruzzo a distanza  $x=lt$  sia pari a  $f_{ctk,0.95}$ . Per ovviare a questo problema si ipotizza un andamento di tipo lineare a partire dalla fessura del tipo:

$$\tau_b = m \cdot (lt - x) \quad (1.64)$$

in cui  $m$  rappresenta il coefficiente angolare cercato che soddisfa la seguente equazione di equilibrio:

$$F = \int_0^x \tau_b \cdot \varphi \cdot \pi \cdot dx + \int_x^{lt} \tau_b \cdot \varphi \cdot \pi \cdot dx \quad (1.65)$$

Dove il primo contributo è ricavato utilizzando l'equazione (1.6) mentre il secondo è ricavato utilizzando l'equazione (1.64). Se questa equazione risulta essere verificata si può calcolare l'apertura della fessura  $w$  come:

$$w = 2 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{\varepsilon_{s,i+1} - \varepsilon_{c,i+1}}{2} \cdot \Delta \quad (1.66)$$



## CAPITOLO 2 : PROVE SPERIMENTALI E DISPOSIZIONI DEL MODEL CODE2010

Uno dei principali contributi delle fibre di acciaio è il miglioramento delle capacità di deformazione del composito cementizio. In modo particolare, il miglioramento della deformazione in tensione, aiuta a ridurre le larghezze delle fessure e le distanze tra le stesse nelle strutture in calcestruzzo caratterizzate da una combinazione di rinforzo convenzionale e fibre di acciaio. A tal proposito sono state condotte delle indagini sperimentali di cui se ne occuparono vari autori tra cui Wandevally e Dupont che effettuarono delle prove di laboratorio su elementi in calcestruzzo armato, con o senza rinforzo in fibra.

### 2.1 Prove sperimentali di Wandevally

Si tratta di uno studio sperimentale sul comportamento in campo fessurato di travi in calcestruzzo con armatura longitudinale, considerando varie combinazioni e frazioni in volume di fibre in acciaio. I risultati di questo studio hanno fornito informazioni sull'effetto di questi fattori nel controllo della fessurazione.

#### 2.1.1 Parametri geometrici e meccanici

Sono state gettate e testate in totale 5 travi in scala reale per studiare il comportamento a rottura per flessione del calcestruzzo in fibra d'acciaio, con le seguenti dimensioni geometriche Fig 2.1:

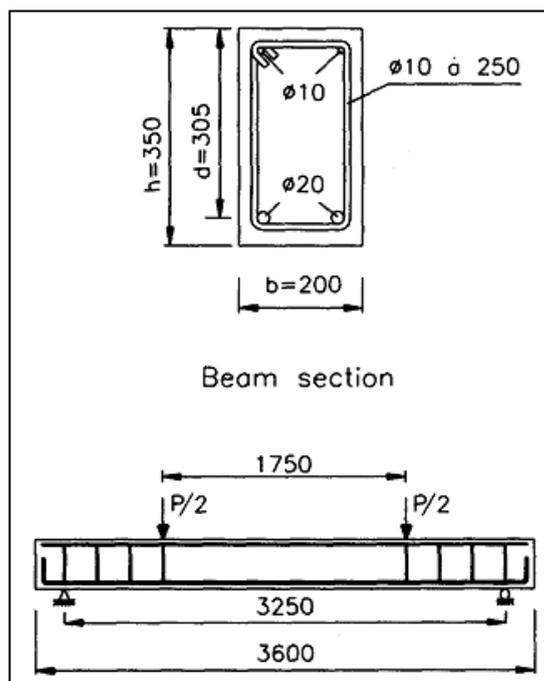


Fig.2.1 Dimensioni geometriche delle travi di prova

Le proprietà meccaniche del calcestruzzo fibrorinforzato sotto tensione sono state determinate per mezzo della prova di flessione su quattro punti specificata dalla Norma belga NBN B15-238. Il calcestruzzo di prova è fatto di calcestruzzo Portland CEM I 42.5 R, sabbia naturale fluviale e pietrisco (Tab. 2.1).

Constituents (kg/m <sup>3</sup> )	
Cement CEM I 42.5 R	300
Sand 0/5	750
Limestone 2/7	575
Limestone 7/14	575
Water	165

Tab. 2.1 Materiali costituenti il calcestruzzo di prova.

Le fibre di acciaio sono ad estremità uncinata in acciaio con un limite di snervamento minimo di 1100 MPa.

La lunghezza e le proporzioni in volume di fibre presenti sono menzionate nella Tab. 2.2.

Inoltre le fibre sono state unite con una colla idrosolubile per assicurare una buona dispersione nel calcestruzzo.

Le travi sono state esaminate con una resistenza cubica alla compressione  $f_{cm}$  di circa 42 MPa e sono caratterizzate da barre S500 di diametro 20 mm longitudinalmente, e di diametro 10 mm come rinforzo a taglio, come mostrato in Fig. 2.1.

Series		Steel fibers	
Beam	Prisms	$V_f$ (%)	
1	-	-	-
2	2	0.38 (= 30 kg/m <sup>3</sup> )	RC 65/35 BN (*)
3	3	0.56 (= 45 kg/m <sup>3</sup> )	RC 65/35 BN
4	4	0.38 (= 30 kg/m <sup>3</sup> )	RC 80/50 BN
5	5	0.56 (= 45 kg/m <sup>3</sup> )	RC 80/50 BN

Tab 2.2 (\*) R: fibre terminali uncinata, C: fibre incollate in gruppi, 65: rapporto d'aspetto ( $L/\phi$ ), 35: lunghezza della fibra (mm), B: nessun rivestimento, N: poco contenuto di carbonio con un limite di snervamento minimo di 1100 MPa.

### 2.1.2 Procedura di prova

Le travi su scala reale sono semplicemente supportate con una luce di 3250 mm e sottoposte a una prova di flessione su quattro punti (Fig. 2.1).

La distanza tra i due carichi è pari a 1750 mm.

Le travi sono state caricate con 16 incrementi fino alla rottura.

Ogni trave veniva ispezionata e tutte le fessure sono state contrassegnate sui due lati della trave. Il valore del carico totale applicato in quella fase è stato annotato dopo la formazione di ogni fessura. In questo modo, è stata registrata una cronologia completa di propagazione delle fessure.

L'ampiezza delle fessure, nella zona situata tra i due punti di applicazione del carico, è stata misurata su entrambi i lati della trave ad una distanza di 2 cm dalla parte inferiore della trave.

L'accuratezza del dispositivo di misurazione delle fessure era di 0,02 mm.

### 2.1.3 Risultati

In Fig. 2.3 vengono mostrati i quadri fessurativi delle travi di prova considerando per ciascuna di esse la stessa geometria e variando il contenuto di fibre presenti.

Si osserva come all'aumentare del quantitativo di fibre si riduca la distanza fra le fessure.

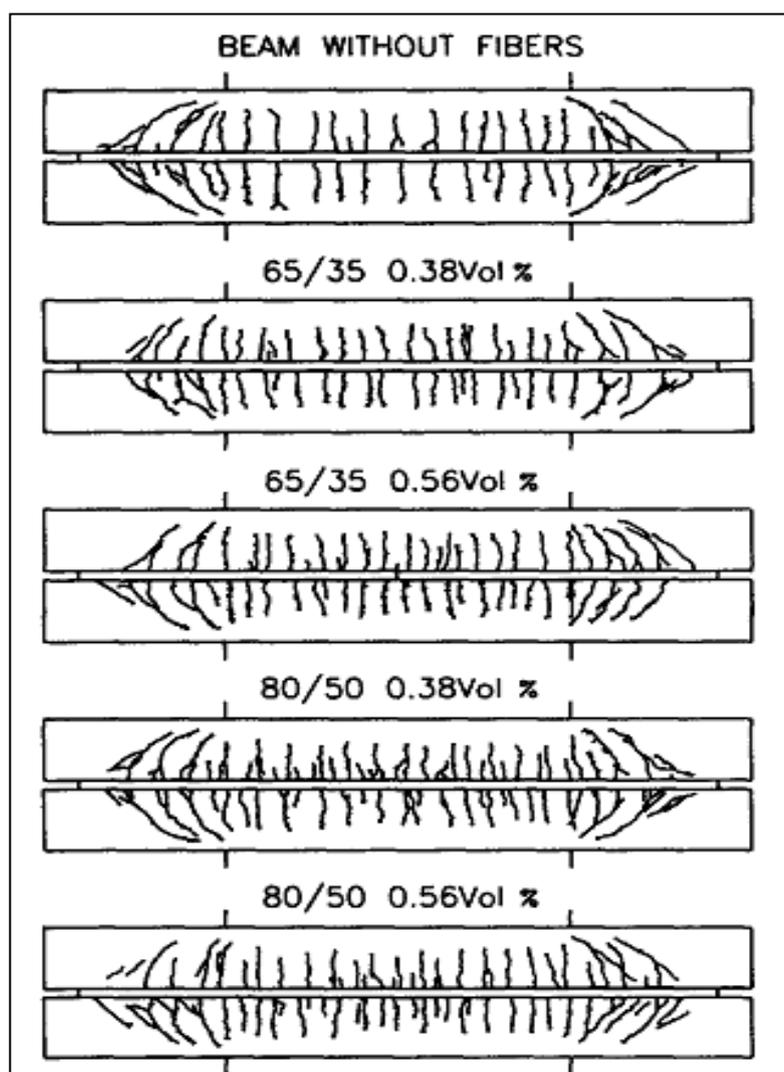


Fig. 2.3 Quadro fessurativo delle travi di prova

Per momenti più elevati, si è notato che aumentando le proporzioni della fibra di acciaio si riduceva la spaziatura delle fessure Fig 2.4:

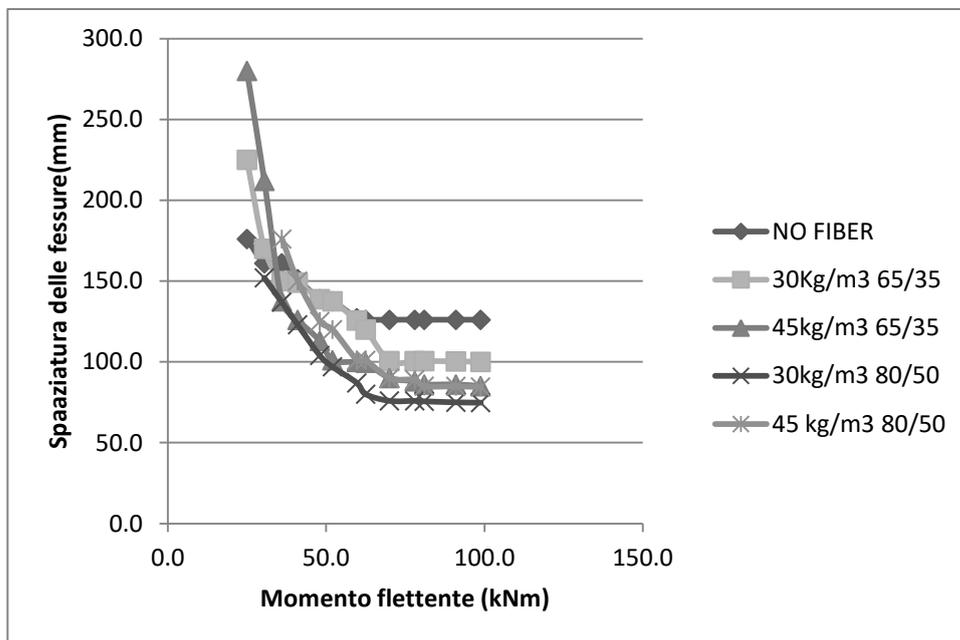


Fig 2.4 Legame Momento-Spaziatura delle fessure

L'effetto dell'aggiunta di fibre sul valore medio dell'ampiezza della fessura è mostrato in Fig. 2.5.

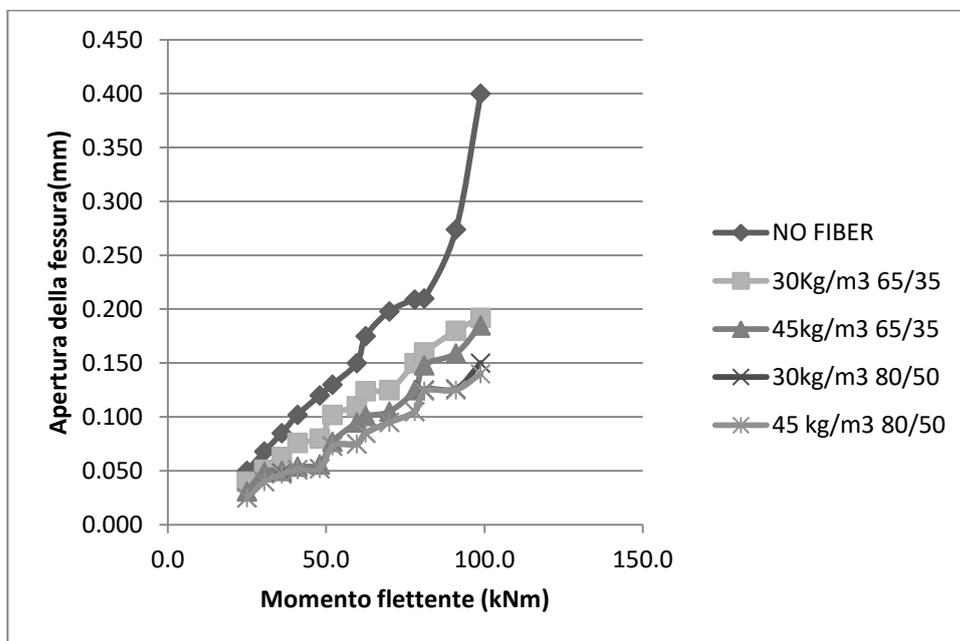


Fig.2.5 Legame Momento-larghezza della fessura

Allo stato limite di esercizio si è osservata una notevole riduzione, cioè + 37%, della larghezza della fessura dovuta alla presenza delle fibre. Per bassi momenti flettenti, né l'influenza delle proporzioni geometriche né quella del contenuto di fibre mettono in evidenza

una variazione positiva del comportamento del calcestruzzo rispetto a quello ordinario. Per momenti flettenti più elevati, si può notare una maggiore riduzione dell'ampiezza della fessura, in modo particolare, se si utilizzano fibre di acciaio con un rapporto d'aspetto più elevato.

## 2.2 Prove Sperimentali di Dupont

Il test, effettuato presso il Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università Cattolica di Leuven (Belgio), riguarda travi soggette a flessione pura in cui sono stati studiati il rapporto d'aspetto, il dosaggio e il tipo di fibre.

### 2.2.1 Parametri geometrici e meccanici

È stato eseguito un programma di test che ha comportato prove di flessione su 4 punti su 19 travi in scala reale considerando un differente dosaggio di fibre.

Tutte le travi avevano un'altezza di 300 mm e una larghezza di 200 mm.

I dettagli sono riportati nella Tab. 2.3 qui di seguito riportata:

Beam	Fibre dosage kg/m <sup>3</sup>	Fibre type	Span (*) mm	Reinforcement # $\phi$ x (mm)
1	0	-	1000	3 $\phi$ 20
2	20	RC 65/60 BN (**)	1000	3 $\phi$ 20
3	60	RC 65/60 BN	1000	3 $\phi$ 20
4	0	-	1000	3 $\phi$ 16
5	20	RC 65/60 BN	1000	3 $\phi$ 16
6	60	RC 65/60 BN	1000	3 $\phi$ 16
7	0	-	1000	3 $\phi$ 16
8	20	RL 45/50 BN	1000	3 $\phi$ 16
9	60	RL 45/50 BN	1000	3 $\phi$ 16
10	0	-	1000	3 $\phi$ 20
11	20	RL 45/50 BN	1000	3 $\phi$ 20
12	60	RL 45/50 BN	1000	3 $\phi$ 20
13	40	RC 65/60 BN	1000	3 $\phi$ 16
14	40	RC 80/35 BN	1000	3 $\phi$ 16
15	60	RC 80/35 BN	1000	3 $\phi$ 16
16	40	RC 65/60 BN	1000	3 $\phi$ 20
17	0	-	1500	3 $\phi$ 20
18	20	RC 65/60 BN	1500	3 $\phi$ 20
19	60	RC 65/60 BN	1500	3 $\phi$ 20

(\*): Span means here the zone between the loading points (= zone of constant moment in which the crack widths are measured)

(\*\*): R: hooked end fibre - C: fibres are glued in bundles, L: fibres are not glued - 65: aspect ratio of fibre (=length/diameter = L/ $\phi$ ) - 60: length of fibre (= L in mm) - B: no coating - N: low carbon, i.e. minimum yield strength of 1100 MPa.

Tab. 2.3 Proprietà geometriche e meccaniche

Per quanto riguarda le proprietà di resistenza dei materiali sono invece riportate in Tab 2.4:

Beam	$f_{cm}$ N/mm <sup>2</sup>	$f_{ct,0.300}$ N/mm <sup>2</sup>	$f_{R,1}$ N/mm <sup>2</sup>	$f_{R,4}$ N/mm <sup>2</sup>
1	40.2	3.6	0	0
2	40.0	3.5	1.6	1.1
3	38.7	3.9	4.2	3.5
4	40.2	3.6	0	0
5	40.0	3.5	1.6	1.1
6	38.7	3.9	4.2	3.5
7	29.8	3.4	0	0
8	26.8	3.2	1.1	0.8
9	27.5	2.8	2.7	2.1
10	29.8	3.4	0	0
11	26.8	3.2	1.1	0.8
12	27.5	2.8	2.7	2.1
13	48.0	4.7	4.1	3.7
14	46.0	4.5	4.9	2.9
15	50.6	5.0	6.1	3.8
16	47.4	4.4	4.0	3.5
17	40.0	3.5	0	0
18	41.2	4.2	2.3	1.5
19	40.3	4.6	5.9	4.7

Tab. 2.4 Proprietà meccaniche delle travi di prova.

$f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$  valori di resistenza residua a trazione del calcestruzzo fibrorinforzato.

### 2.2.2 Procedura di prova e Risultati

Le travi sono state testate in controllo di carico (Fig.2.6) .

Dopo ogni fase di carico, è stata misurata la larghezza e la spaziatura della fessura per ogni trave di prova.

Le larghezze delle fessure sono state misurate a 1 cm dal fondo della trave solo nella zona di momento costante cioè tra i punti di applicazione del carico.

La misurazione è stata effettuata con un microscopio calibrato di piccole dimensioni.

Si tratta di un dispositivo che stima le ampiezze di fessura non inferiori allo 0.02 mm.

Infatti, i valori inferiori allo 0.02-0.03 mm non sono stati rilevati e presi in considerazione nel calcolo della larghezza media della fessura .

Il risultato è che la media calcolata è sopravvalutata.

In modo particolare, il risultato è sovrastimato per travi con elevato rapporto d'aspetto e alto dosaggio di fibre proprio perché, per queste, il numero di piccole fessure non rilevate è risultato essere più elevato.

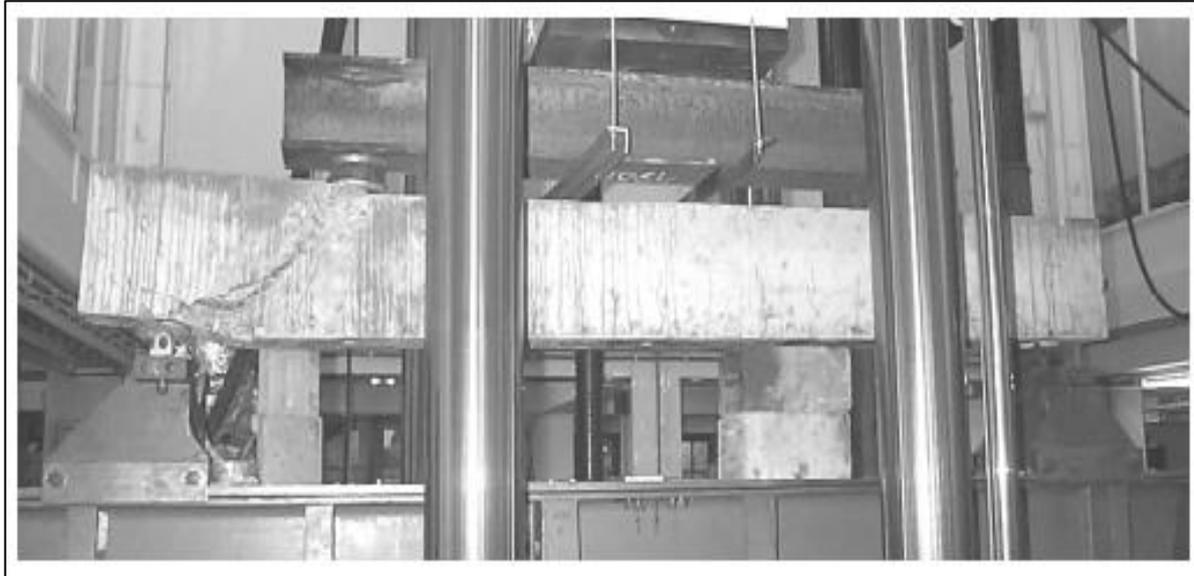


Fig.2.6 Test sperimentale

### 2.3 MODEL CODE 2010

Nel Model Code 2010, sezione 7.7.4.2, la larghezza della fessura degli elementi di calcestruzzo armato fibrorinforzati sotto carico a breve termine, nello stadio stabilizzato di cracking, è calcolata attraverso l'equazione (2.1):

$$w_{d,cal} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi_s}{\rho_{s,ef}} \cdot \frac{f_{ctm} - f_{Ftsm,MC}}{\tau_{bm}} \frac{1}{E_s} (\sigma_s - \beta \cdot \sigma_{sr}) \quad (2.1)$$

La lunghezza  $l_{s,max}$  su cui si verifica lo scorrimento tra calcestruzzo e acciaio (lunghezza di trasmissione) può essere calcolata utilizzando la seguente equazione:

$$l_{s,max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi_s}{\rho_{s,ef}} \cdot \frac{f_{ctm} - f_{Ftsm,MC}}{\tau_{bms}} \quad (2.2)$$

Con :

- $f_{Ftsm,MC}$ : resistenza a trazione residua che tiene conto della presenza delle fibre.

$$f_{Ftsm,MC} = 0.45 \cdot f_{R1} \quad (2.3)$$

- $f_{R1}$ : tensione residua corrispondente a un'apertura di fessura di 0.5 mm.
- $\rho_{s,ef}$ : percentuale geometrica di armatura efficace.

$$\rho_{s,ef} = \frac{A_s}{A_{c,ef}} \quad (2.4)$$

L'area efficace di calcestruzzo in trazione viene calcolata come prodotto tra la base dell'elemento considerato e l'altezza  $h_{c,ef}$ .



## CAPITOLO 3 : MODELLO ANALITICO

### 3.1 Risposta meccanica dei compositi a base cementizia

Una risposta duttile sotto carichi di trazione può essere ottenuta considerando compositi a base cementizia rinforzati con fibre discontinue. Nel caso di calcestruzzo tradizionale (Fig.3.1a), nella relazione sforzo-deformazione  $\sigma_c-\epsilon_c$ , viene raggiunto rapidamente il picco e successivamente un ramo softening, a causa del fatto che la deformazione si è localizzata in una singola fessura.

Secondo il modello di crack fittizio proposto da Hillerborg et al., può essere riprodotta la fase post-cracking della prova di trazione uniassiale considerando la relazione sforzo-apertura della fessura  $\sigma_c-w$  (Fig. 3.1 a).

Se vengono aggiunte le fibre alla miscela di calcestruzzo, il composito può mostrare una maggiore resistenza alla frattura sotto tensione uniassiale.

Si è dimostrato che la risposta meccanica dei compositi cementizi rinforzati (FRC) dipende dal tipo e dalla frazione in volume  $V_f$  di fibre presenti. Se viene aggiunta una bassa quantità di fibre ( $V_f < 1\%$ ), il comportamento post-picco di FRC non differisce molto da quello mostrato dal calcestruzzo ordinario (Fig. 3.1b). Ovviamente, l'FRC mostra una resistenza alla frattura più elevata del calcestruzzo tradizionale, vale a dire, un'area più ampia nel diagramma  $\sigma_c-w$  (Fig. 3.1b). Nel caso in cui la frazione in volume di fibre sia più elevata ( $V_f > 2\%$ ), i campioni in FRC sottoposti a carichi di trazione uniassiali mostrano un ramo hardening dopo la formazione della prima fessura. Di conseguenza, la resistenza alla trazione del composito,  $f_{max}$ , è più alta della  $f_{ct}$  che ho in corrispondenza della formazione della prima fessura. Inoltre, si è osservata la presenza di diverse fessure nella fase post-cracking, quando  $\epsilon_c > \epsilon_{c,cr}$ , e  $f_{ct} < \sigma_c < f_{max}$  (Fig. 3.1c). Questo è il caso dei cosiddetti compositi cementizi rinforzati con fibre ad alte prestazioni (HPFRCC), la cui frazione in volume di fibre è generalmente inferiore al 2%.

Sotto tensione di trazione uniassiale, i campioni HPFRCC (High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites) mostrano un comportamento molto duttile e un'elevata resistenza alla frattura, che è persino paragonabile a quella delle leghe di alluminio. Quindi regimi multipli di cracking caratterizzano la risposta meccanica di FRC (con  $V_f > 2\%$ ) e di campioni HPFRCC come mostrato in figura 3.1c.

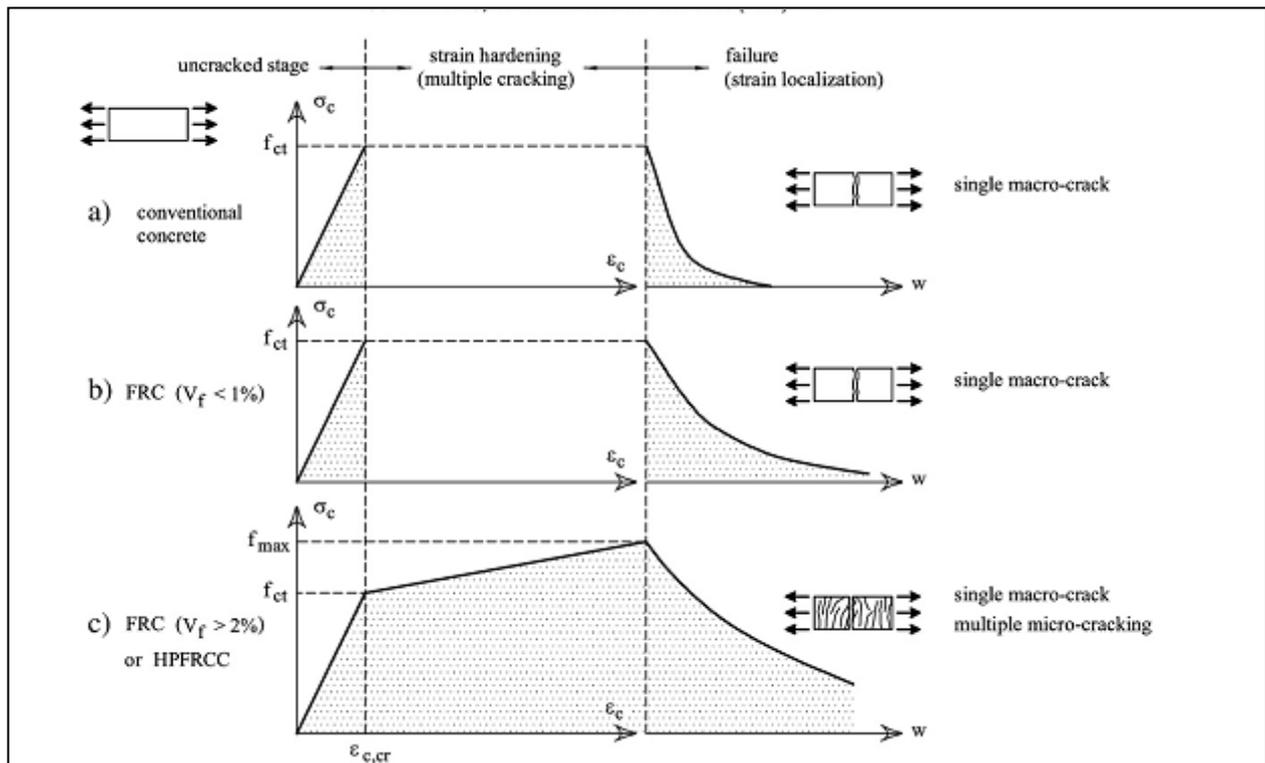


Fig.3.1 Risposta meccanica del calcestruzzo ordinario e rinforzato con fibre

## 4.2 Modello di interfaccia coesa fibra-matrice

La nascita di più fessure negli elementi di calcestruzzo fibrorinforzato soggetti a tensione assiale (Fig. 3.1c) può essere studiata tracciando un'analogia con il comportamento dei tiranti in calcestruzzo armato ordinario. La fibra è considerata come barra di rinforzo ( $A_s = A_f$ ) di un elemento in tensione avente una sola fessura nell'area di calcestruzzo di area (Fig. 3.2a):

$$A_c = \frac{A_f}{V_f} \quad (3.1)$$

Aumentando  $w$ , la risposta meccanica di questa struttura, in termini di  $N-w$  (Fig. 3.2c), dipende dagli scorrimenti tra fibra e matrice, la cui distribuzione lungo ( $z$ ) è mostrata qualitativamente in Fig 3.2b. Nel caso di fibre che si trovino simmetricamente rispetto alla fessura, lo slip massimo si trova nella sezione fessurata (dove  $s = w / 2$ ), da cui diminuisce progressivamente con l'aumentare della distanza  $z$  dalla fessura. In particolare:

$$s(z) = 0 \quad \text{Per } z \geq l_{tr}$$

Con  $l_{tr}$ : lunghezza di trasmissione.

Le tensioni di trazione sulla fibra,  $\sigma_s(z)$ , vengono trasferite alla matrice cementizia a causa della tensioni di aderenza  $\tau(z)$  agenti sull'interfaccia tra i materiali (Fig 3.2b).

Inoltre nel dominio  $0 \leq z \leq l_{tr}$ , le sollecitazioni di trazione nella matrice,  $\sigma_c(z)$ , aumentano allontanandoci dalla sezione fessurata (Fig 3.2b).

Invece oltre la lunghezza di trasmissione, non esistono né scorrimenti né tensioni di aderenza, e quindi per  $z > l_{tr}$  viene verificata la condizione di perfetta aderenza ( $\sigma_c = \text{costante}$  e  $\sigma_s = \text{cost}$ ). In questa zona la tensione nella matrice cementizia raggiunge il valore massimo  $\sigma_{c, \text{max}}$ . All'inizio del cracking, quando  $w \rightarrow 0$ ,  $\sigma_{c, \text{max}}$  è generalmente inferiore a  $f_{ct}$  e il diagramma N-w mostra un ramo softening (cioè  $N < N_{cr}$  in Fig. 3.2c). Se queste condizioni persistono per una maggiore larghezza della fessura, la rottura dell'elemento strutturale si verifica in presenza di una singola fessura. Quando  $\sigma_{c, \text{max}} = f_{ct}$ , che corrisponde al punto B della figura. 4.2c, compaiono nuove fessure e, con l'aumentare di  $w$ , avremo il ramo hardening che caratterizza il diagramma N-w (per  $N \geq N_{cr}$ ).

Secondo Fantilli et al., durante questa fase, la spaziatura media delle fessure varia tra  $l_{tr}$  e  $2 l_{tr}$  (Fig. 3.2c).

Sotto la condizione di simmetria raffigurato in Fig. 3.2 a-b, il regime di cracking multiplo è possibile se la semi-lunghezza della fibra è maggiore della spaziatura media delle fessure ( $1.5 l_{tr} < l_f/2$ ).

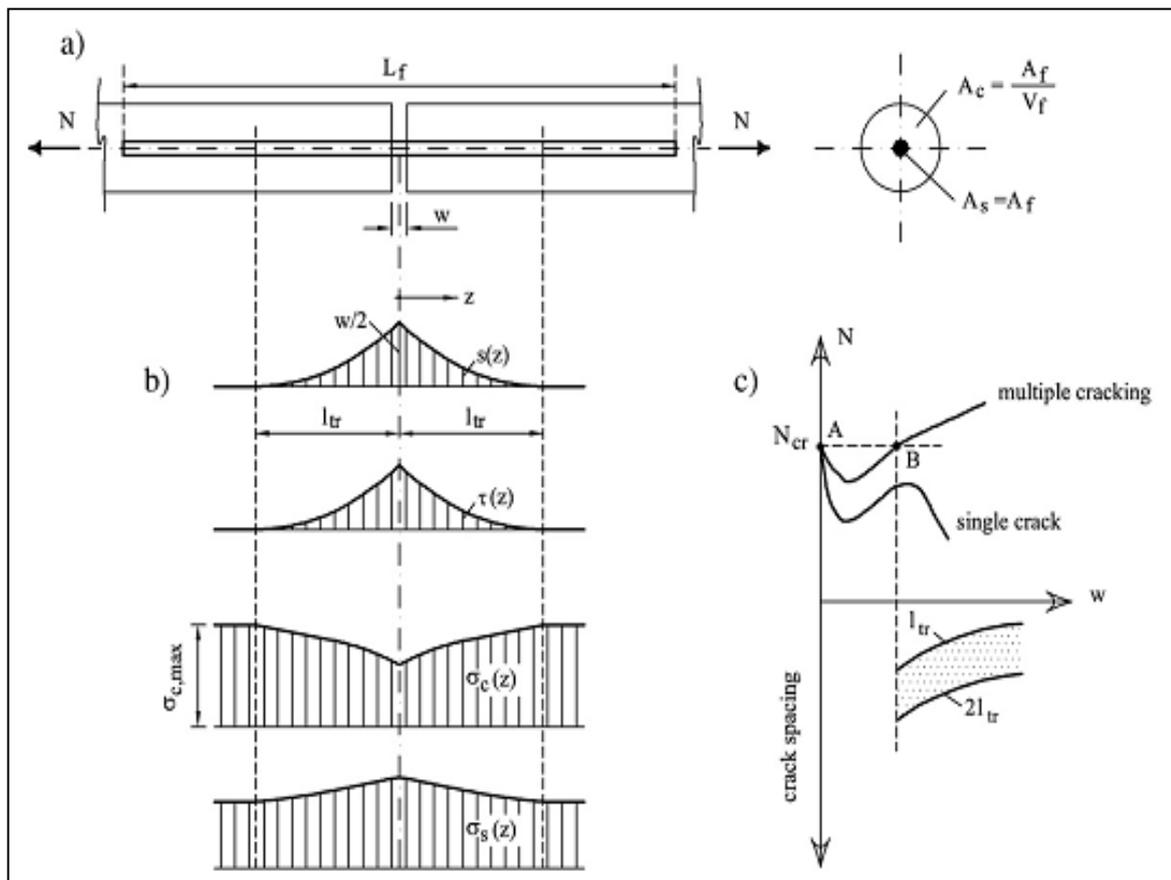


Fig.3.2 Modello di interfaccia coesa fibra-matrice:

- a) Proprietà geometriche dell'elemento;
- b) Diagramma degli slip  $s(z)$ , tensioni di aderenza  $\tau(z)$ , delle tensioni  $\sigma_c(z)$  e  $\sigma_s(z)$ ;
- c) Risposta meccanica in termini di N-w e spaziatura delle fessure- apertura delle fessure  $w$ .

### 3.2.1 Equazioni di equilibrio e compatibilità

L'analisi presente è relativa alla definizione di  $l_{tr}$  per cui può essere considerata l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. Facendo riferimento alla porzione del tirante in Fig 3.3 a, si considera l'equazione di **compatibilità** seguente:

$$s(z) = -(s_s(z) - s_c(z)) \quad (3.2)$$

Se i materiali si comportano elasticamente, possiamo scrivere:

$$\frac{ds}{dz} = -(\varepsilon_s - \varepsilon_c) = -\frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (3.3)$$

Nella porzione di lunghezza  $dz$ , l'equazione di **equilibrio** nella barra di rinforzo può essere scritta come:

$$\frac{d\sigma_s}{dz} = -\frac{\rho_f \cdot \tau}{A_f} \quad (3.4)$$

In ogni sezione del tirante deve essere soddisfatta la condizione di **equilibrio globale**:

$$N = \sigma_s \cdot A_f + \sigma_c \cdot A_c \quad (3.5)$$

Le equazioni (3.3) e (3.5) rappresentano la formulazione matematica del problema del tension-stiffening applicato all'elemento strutturale preso in considerazione.

### 4.2.2 Equazione differenziale

Già i primi studi sull'aderenza e la formazione delle fessure negli elementi in RC hanno risolto il problema riducendo il tutto a una singola equazione differenziale. Anche in questo caso si può derivare l'equazione (3.3) e (3.5) rispetto a  $z$ , ottenendo ( $N=\text{cost}$ ):

$$\frac{d^2s}{dz^2} = -\frac{1}{E_s} \frac{d\sigma_s}{dz} + \frac{1}{E_c} \frac{d\sigma_c}{dz} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\sigma_c}{dz} = -\frac{d\sigma_s}{dz} \frac{A_f}{A_c} = -\frac{d\sigma_s}{dz} \cdot V_f \quad (3.7)$$

Sostituendo l'equazione (3.7) nella (3.6) segue:

$$\frac{d^2s}{dz^2} = -\frac{d\sigma_s}{dz} \left( \frac{1}{E_s} + \frac{V_f}{E_c} \right) \quad (3.8)$$

Sostituendo ancora l'equazione (3.4) nella (3.8), otteniamo l'equazione che rappresenta il fenomeno del tension-stiffening:

$$\frac{d^2s}{dz^2} = \frac{\rho_f \cdot \tau}{A_f} \left( \frac{1}{E_s} + \frac{V_f}{E_c} \right) \quad (3.9)$$

La soluzione dell'equazione ottenuta rappresenta la funzione  $s(z)$  all'interno del dominio  $0 \leq z \leq l_{tr}$ .

#### 4.2.3 Leggi $\sigma_c$ - $w$ e $\tau$ - $s$

Per risolvere l'equazione (3.9) è possibile introdurre due condizioni al contorno.

La prima condizione riguarda la sezione fessurata.

Si considera la fibra posizionata simmetricamente rispetto alla fessura e in accordo alla relazione  $\sigma_c$ - $w$  proposta dal CEB-FIP Model Code (Fig.3.4 a), la tensione sulla sezione fessurata può essere valutata come segue:

$$\sigma_c = f_{ct} \cdot \left( 1 - 0.85 \cdot \frac{w}{w_c} \right) \quad \text{Se } 0 \leq w \leq w_1 \quad (3.10a)$$

$$\sigma_c = 0.15 f_{ct} \cdot \left( 1 - \frac{w - w_1}{w_c - w_1} \right) \quad \text{Se } w_1 < w \leq w_c \quad (3.10b)$$

$$\sigma_c = 0 \quad \text{Se } w > w_c \quad (3.10c)$$

Con  $w = 2s$ , mentre  $w_1$  e  $w_c$  sono definiti in funzione della resistenza a compressione del calcestruzzo.

Questa analisi riguarda la situazione in cui la prima fessura sta crescendo e le altre fessure si stanno sviluppando (punto B in Fig 3.2c), per cui il modello del crack fittizio può essere approssimato dal primo ramo lineare di Fig 3.4 a:

$$\sigma_c = f_{ct} - k_c \cdot w \quad (3.11)$$

Il parametro coesivo  $k_c$ , in accordo alla relazione proposta dal CEB-FIP Model Code, diventa:

$$k_c = \frac{0.85 f_{ct}}{w_1} \quad (3.12)$$

Mentre per la relazione  $\tau$ - $s$  tra fibre e matrice è stata proposta da FAntilli e Vallini che è un miglioramento e un'estensione della relazione proposta dal CEB-FIP Model Code per le barre di rinforzo. Il ramo ascendente e la fase post-picco, della relazione bond-slip proposta, sono definiti dalle seguenti equazioni (Fig.3.4b):

$$\tau = \tau_{max} \left( \frac{s}{s_1} \right)^{0.5} \quad \text{Se } s \leq s_1 \quad (3.13a)$$

$$\tau = \tau_{fin} + (\tau_{max} - \tau_{fin})e^{k(s_1-s)} \quad \text{Se } s > s_1 \quad (3.13b)$$

In questo caso, solo condizioni di multi-cracking e di ramo hardening devono essere definiti, per cui si considera solo il ramo ascendente  $\tau - s$  (dove gli slip sono vicini a zero).

Quindi quando  $s \rightarrow 0$  e altre fessure si stanno sviluppando, le tensioni di aderenza si assume siano in diretta proporzione con gli slips. Per questo motivo può essere presa in conto una legge approssimata di tipo lineare  $\tau-s$  (Fig. 3.4b):

$$\tau = s \cdot k_b \quad (3.14)$$

$k_b$  è un parametro di aderenza valutabile sperimentalmente.

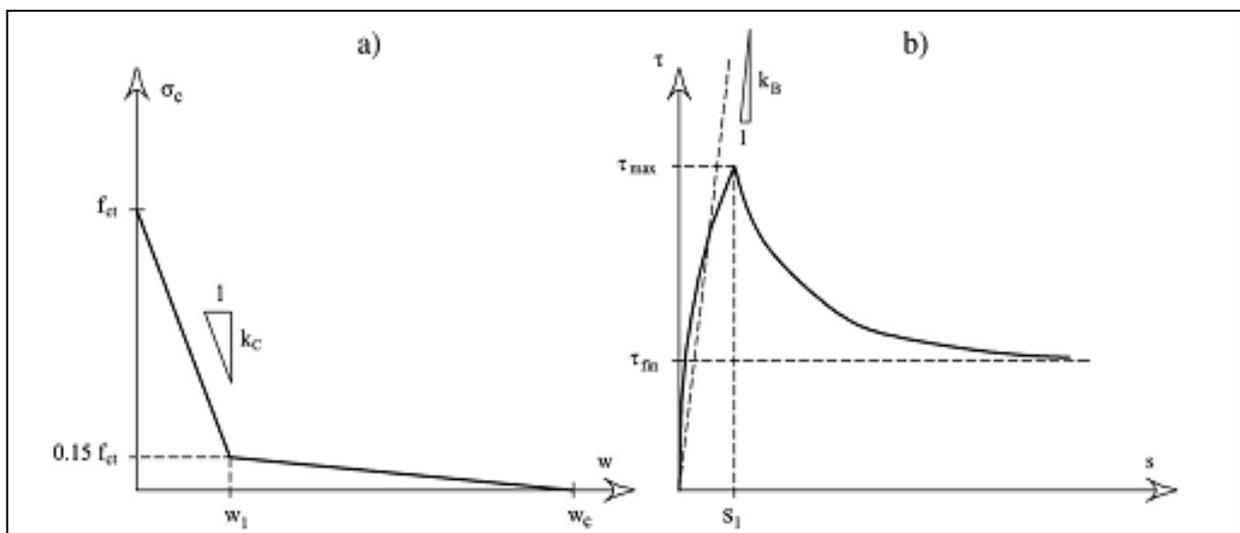


Fig.3.4 Leggi  $\sigma_c-w$  e  $\tau-s$  prese in considerazione .

### 3.2.4 Soluzione analitica per la lunghezza di trasmissione

Se sostituisco l'equazione (3.14) nella (3.9), il problema tension-stiffening del tirante è definito dall'equazione differenziale lineare così scritta:

$$\frac{d^2s}{dz^2} - \alpha s = 0 \quad (3.15)$$

il coefficiente  $\alpha$  dipende dalle seguenti proprietà:

$$\alpha = \frac{p_f \cdot k_b}{A_f} \cdot \left( \frac{1}{E_s} + \frac{v_f}{E_c} \right) \quad (3.16)$$

La soluzione della (3.15) può essere scritta come segue:

$$s(z) = C1 \cdot e^{z\sqrt{\alpha}} + C2 \cdot e^{-z\sqrt{\alpha}} \quad (3.17)$$

Le costanti C1 e C2 sono ottenute introducendo le condizioni al contorno considerando il dominio  $0 \leq z \leq ltr$ :

$$s=w/2 \quad \text{Se } z=0 \quad (3.18)$$

$$s=0 \quad \text{Se } z=ltr \quad (3.19)$$

Quindi l'equazione (3.17) diventa:

$$s(z) = \frac{w}{2(1-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}})} [-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}} + e^{-z\sqrt{\alpha}}] \quad (3.20)$$

Quando la funzione  $s(z)$  è nota, si possono calcolare le tensione sulle fibre e sulla matrice. Questo avviene sostituendo l'equazione (3.4) e (3.14) nella (3.7) :

$$\frac{d\sigma_c}{dz} = \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{A_f} s(z) \quad (3.21)$$

Se l'equazione (4.20) viene sostituita nella (4.21):

$$\frac{d\sigma_c}{dz} = + \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{A_f} \frac{w}{2(1-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}})} [-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}} + e^{-z\sqrt{\alpha}}] \quad (3.22)$$

Integrando:

$$\sigma_c(z) = C3 - \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{A_f} \frac{w}{2(1-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}})\sqrt{\alpha}} [e^{(z-2ltr)\sqrt{\alpha}} + e^{-z\sqrt{\alpha}}] \quad (3.23)$$

Con C3 ottenuta imponendo nell'equazione (3.11) la condizione di sezione fessurata (con  $z=0$ ):

$$C3 = fct - k_c w + \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{A_f} \frac{w}{2(1-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}})\sqrt{\alpha}} [e^{-2ltr\sqrt{\alpha}} + 1] \quad (3.24)$$

Di conseguenza con l'Equ. (3.23) si ha che:

$$\sigma_c(z) = fct - k_c w + \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{A_f} \frac{w}{2(1-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}})\sqrt{\alpha}} [e^{-2ltr\sqrt{\alpha}} + 1 - e^{(z-2ltr)\sqrt{\alpha}} - e^{-z\sqrt{\alpha}}] \quad (3.25)$$

A  $N=N_{cr}$  (punto B in Fig. 3.2c), viene raggiunta la condizione di multi-cracking e avremo che:

$$\sigma_c = fct \quad \text{Se } z=ltr \quad (3.26)$$

e l'Eq. (3.25) diventa :

$$0 = -k_c + \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{A_f} \frac{(e^{-2ltr\sqrt{\alpha}} + 1 - 2e^{-ltr\sqrt{\alpha}})}{2(1-e^{-2ltr\sqrt{\alpha}})\sqrt{\alpha}} \quad (3.27)$$

L'Eq. (3.27) fornisce la lunghezza di trasmissione indipendentemente da  $w$ .

Introducendo un coefficiente  $\beta$ :

$$\beta = \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{2A_f k_c \sqrt{\alpha}} \quad (3.28)$$

e una nuova variabile:

$$x = e^{-ltr\sqrt{\alpha}} \quad (3.29)$$

L'Eq. (3.27) diventa un'equazione algebrica:

$$(\beta + 1)x^2 - 2\beta x + (\beta - 1) = 0 \quad (3.30)$$

Le due soluzioni dell'equazione (3.30) sono:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\beta-1}{\beta+1} \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

con le rispettive ltr:

$$l_{tr} = -\frac{\ln \frac{\beta-1}{\beta+1}}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.32 a)$$

$$l_{tr} = 0 \quad (3.32b)$$

Riferendoci al diagramma N-w di Fig 3.2 c, quando  $N=N_{cr}$  ci saranno due possibili lunghezze di trasmissione. La soluzione (3.32b) è la situazione di un crack non sviluppato ( $w=0$ ) corrispondente al punto A della Fig 3.2c.

Al contrario con la (3.32 a) ci troviamo nella situazione di singolo crack ( $w>0$ ) mentre altre fessure si sviluppano (punto B Fig.3.2c).

Secondo Fantilli e Vallini il regime multi-cracking ,che inizia dal punto B di Fig.3.2c, può essere descritto dalla lunghezza di trasmissione definita dall'espressione (3.32a).

La ltr così ottenuta e  $2l_{tr}$  sono considerati rispettivamente, la distanza minima e massima tra le fessure in un elemento in tensione dell'FRC.

La risoluzione del problema così definito viene accettato se i materiali mostrano entrambi un comportamento elastico lineare.

Per semplicità, si va a controllare che la tensione nelle fibre  $\sigma_{s,cr}$  sia più bassa della resistenza  $f_u$ . Sotto l'ipotesi di sezione non fessurata, segue:

$$\sigma_{s,cr} = E_s \varepsilon_{c,cr} = E_s \frac{f_{ct}}{E_c} < f_u \quad (3.33)$$

L'ipotesi relativa alla posizione considerata simmetrica della fibra rispetto alla fessura, è ammessa se la lunghezza di trasmissione calcolata con l'equazione (3.32a) è considerevolmente più piccola della lunghezza della fibra. Infatti, in tal caso, slips e tensioni sono simmetricamente distribuiti attorno a ogni sezione fessurata.

Mentre le condizioni di multi-cracking e di ramo hardening li ottengo per distanze fra le

fessure che sono piccole e quindi piccole lunghezze di trasmissione.

Quindi le distribuzioni ideali rappresentate in Fig.3.2 b sono permesse in questa analisi.

### 3.2.5 Valore critico della frazione volumetrica di fibre

L'espressione (3.32 a) può essere utilizzata quando:

$$V_f \geq V_{f,cr}$$

Occorre quindi avere un certo dosaggio di fibre per ottenere il regime di multi-fessurazione.

Per calcolare  $V_{f,cr}$  si introduce la condizione per la quale  $\beta = 1$ :

$$\beta = \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_{f,cr}}{2A_f k_c \sqrt{\alpha}} = \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_{f,cr}}{2A_f k_c \sqrt{\frac{p_f \cdot k_B}{A_f} \cdot \left(\frac{1}{E_s} + \frac{V_{f,cr}}{E_c}\right)}} = 1 \quad (3.34)$$

Da cui si ottiene  $V_{f,cr}$ :

$$V_{f,cr} = \frac{A_f \cdot 2 \cdot (k_c)^2}{E_c \cdot p_f \cdot k_b} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{(E_c)^2 \cdot p_f \cdot k_b}{A_f \cdot E_s \cdot (k_c)^2}} \right) \quad (3.35)$$

L'espressione (3.35) mi permette di ottenere il valore critico della frazione volumetrica di fibre, a di sotto del quale, ci troviamo nella condizione in cui si ha la formazione di una singola fessura e non di una multi fessurazione.



## CAPITOLO 4 : CONFRONTO CON I RISULTATI DI WANDEVALLE

Noti i parametri geometrici e meccanici delle prove sperimentali è stato possibile effettuare un confronto dei valori di larghezza e spaziatura della fessura considerando le espressioni fornite dal Model Code (espressione (2.1) e (2.2) del capitolo 2).

Le travi in esame, descritte nel capitolo 2, sono in numero 5.

Ogni trave si differenzia per la percentuale di fibre presenti:

	DOSAGGIO (Kg/m <sup>3</sup> )	Tipo DI FIBRE
TRAVE 1	-	-
TRAVE 2	30	RC 65/35 BN
TRAVE 3	45	RC 65/35 BN
TRAVE 4	30	RC 80/50 BN
TRAVE 5	45	RC 80/50 BN

Tab. 4.1 Dosaggio e tipo di fibre per ogni trave

TRAVE	Vf(%)	lf(mm)	df(mm)
1	-	-	-
2	0.38	35	0.54
3	0.56	35	0.54
4	0.38	50	0.54
5	0.56	50	0.54

Tab. 4.2 Volume delle fibre, lunghezza e diametro della generica fibra per ogni trave

### 4.1. Ampiezza di fessura

Qui di seguito verranno riportati i risultati tabellati e i grafici di confronto dei risultati di ampiezza di fessura per le cinque travi in esame.

TRAVE 1	NO STEEL FIBRES	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
25.0	0.050	0.069
30.5	0.068	0.093
36.0	0.085	0.117
41.0	0.102	0.139
48.0	0.120	0.170
52.0	0.130	0.187
59.7	0.150	0.221
62.5	0.175	0.234
70.0	0.198	0.267
78.0	0.209	0.302
81.0	0.210	0.315
91.0	0.274	0.359
98.8	0.400	0.393

Tab. 4.3 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 1

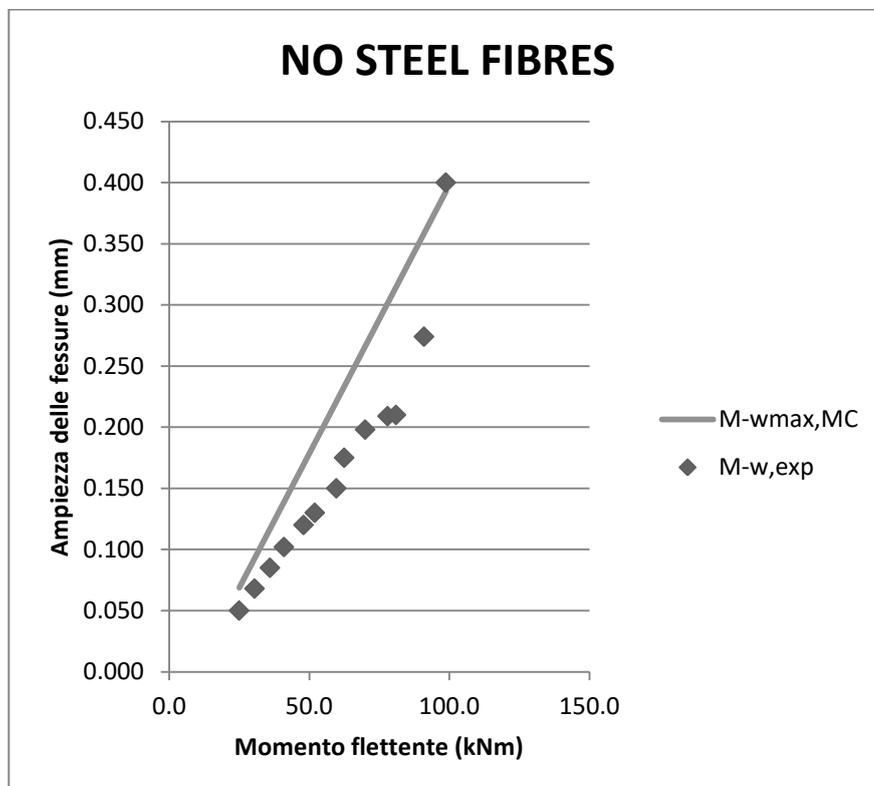


Fig. 4.1 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 1

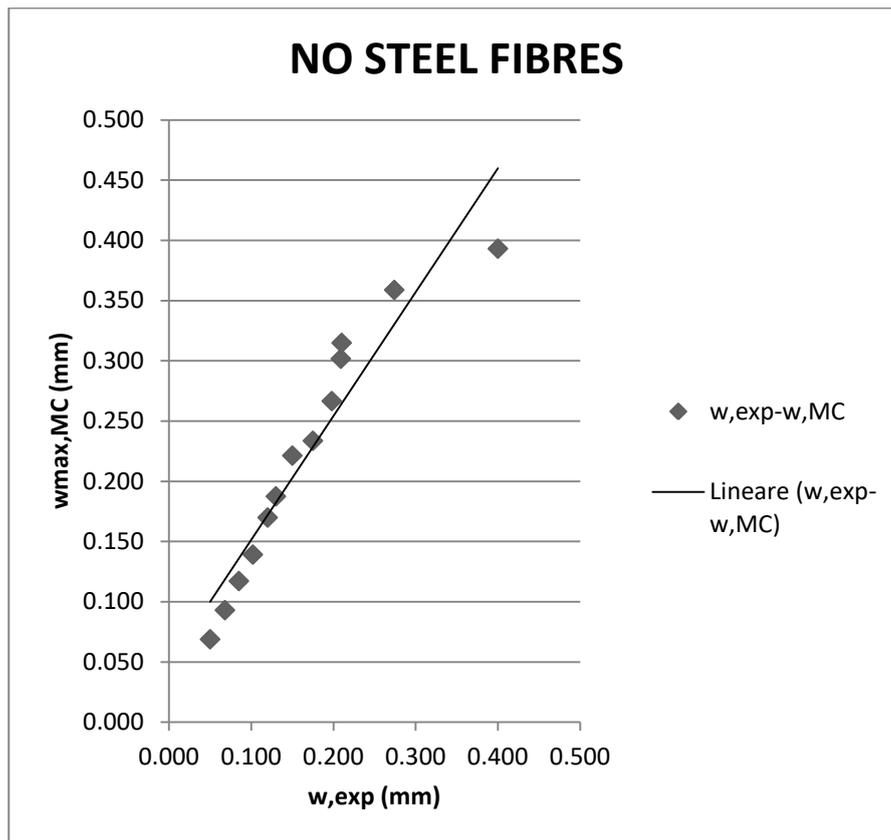


Fig.4.2 Confronto dei valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 1

TRAVE 2	30Kg/m <sup>3</sup> 65/35	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
25	0.040	0.025
30.5	0.051	0.033
36	0.063	0.042
41	0.076	0.050
48	0.088	0.061
52	0.102	0.067
59.7	0.110	0.079
62.5	0.124	0.083
70	0.125	0.095
78	0.150	0.108
81	0.160	0.112
91	0.180	0.128
98.8	0.192	0.140

Tab. 4.4 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 2

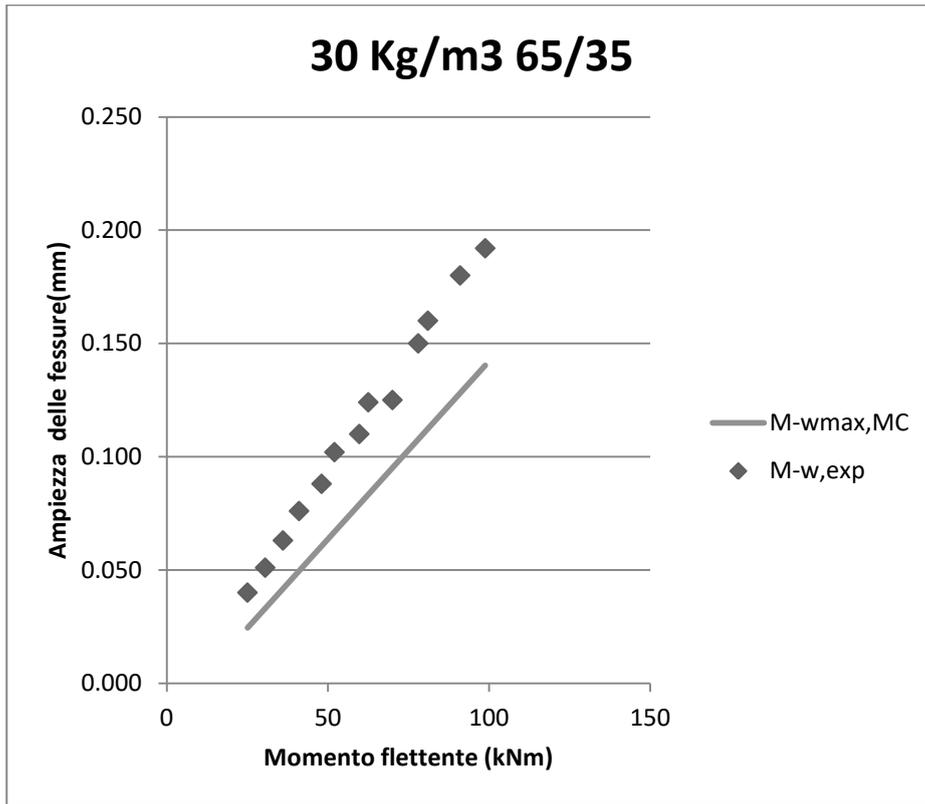


Fig. 4.3 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 2

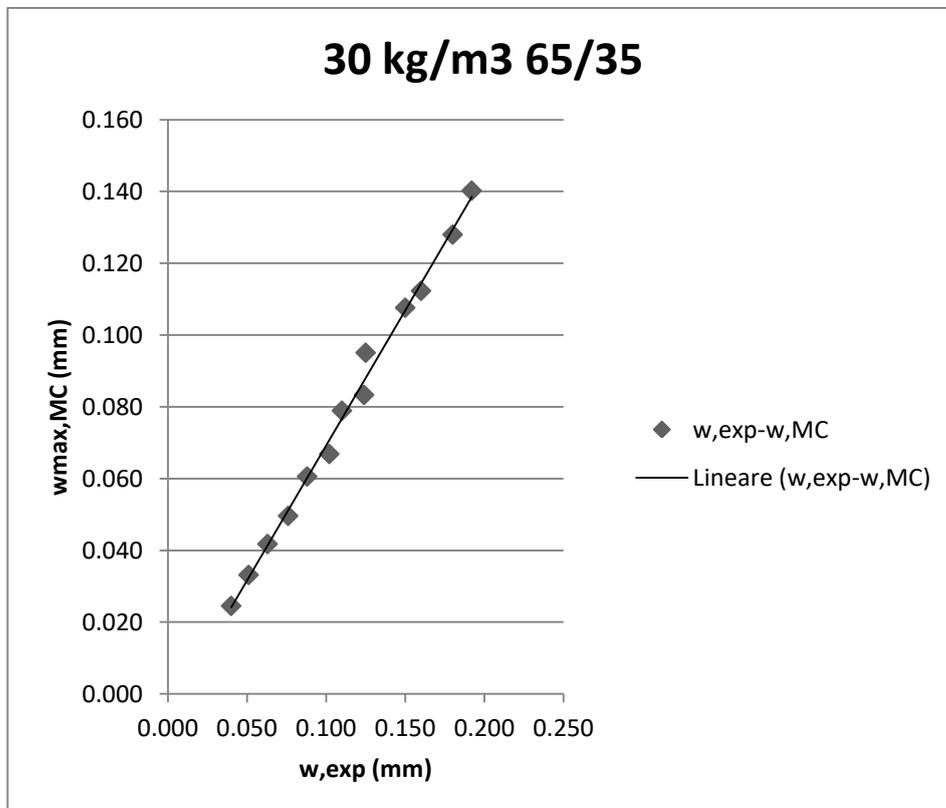


Fig. 4.4 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 2

TRAVE 3	45Kg/m3 65/35	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
25.0	0.031	0.026
30.5	0.049	0.035
36.0	0.050	0.043
41.0	0.054	0.052
48.0	0.073	0.063
52.0	0.077	0.070
59.7	0.095	0.082
62.5	0.101	0.087
70.0	0.105	0.099
78.0	0.125	0.112
81.0	0.148	0.117
91.0	0.159	0.133
98.8	0.185	0.146

Tab. 4.5 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 3

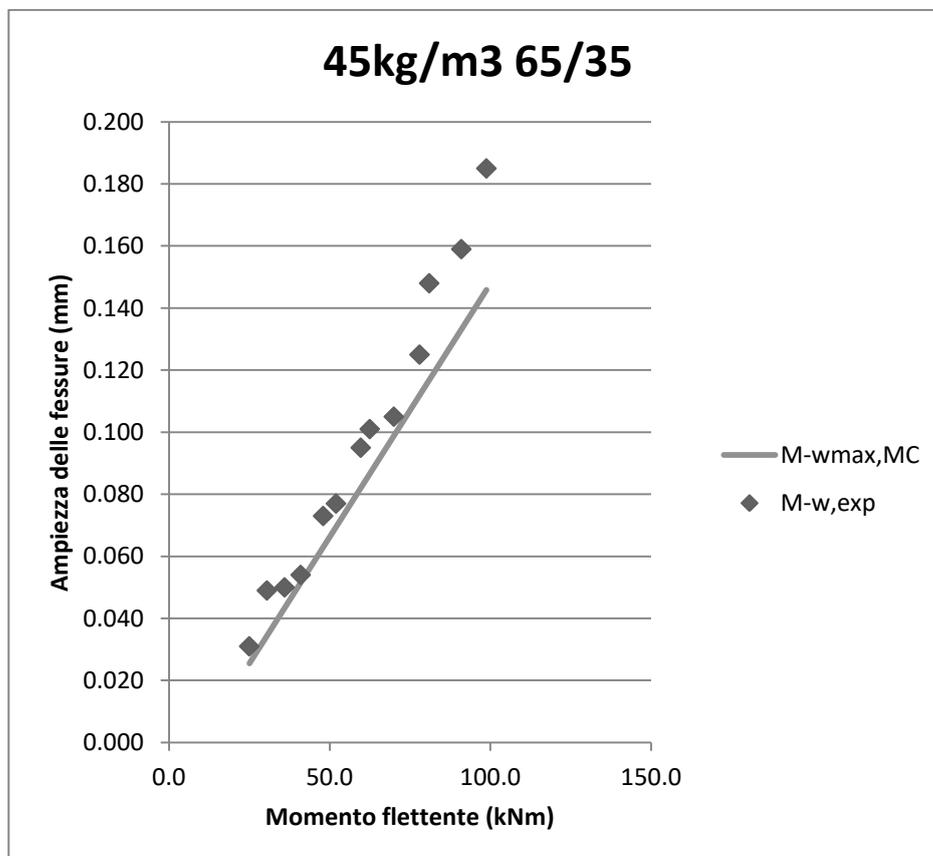


Fig. 4.5 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 3

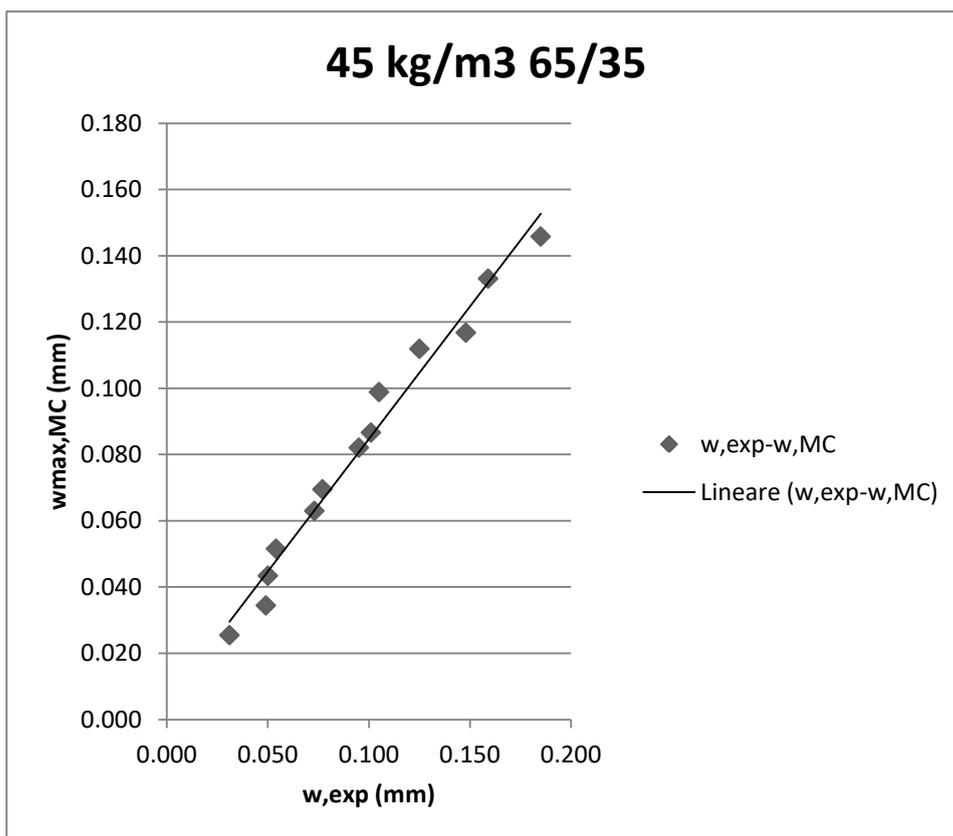


Fig. 4.6 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 3

TRAVE 4	30Kg/m <sup>3</sup> 80/50	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
25.0	0.025	0.026
30.5	0.040	0.035
36.0	0.048	0.043
41.0	0.051	0.052
48.0	0.068	0.063
52.0	0.073	0.070
59.7	0.075	0.082
62.5	0.085	0.087
70.0	0.095	0.099
78.0	0.105	0.112
81.0	0.125	0.117
91.0	0.126	0.133
98.8	0.150	0.146

Tab. 4.6 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 4

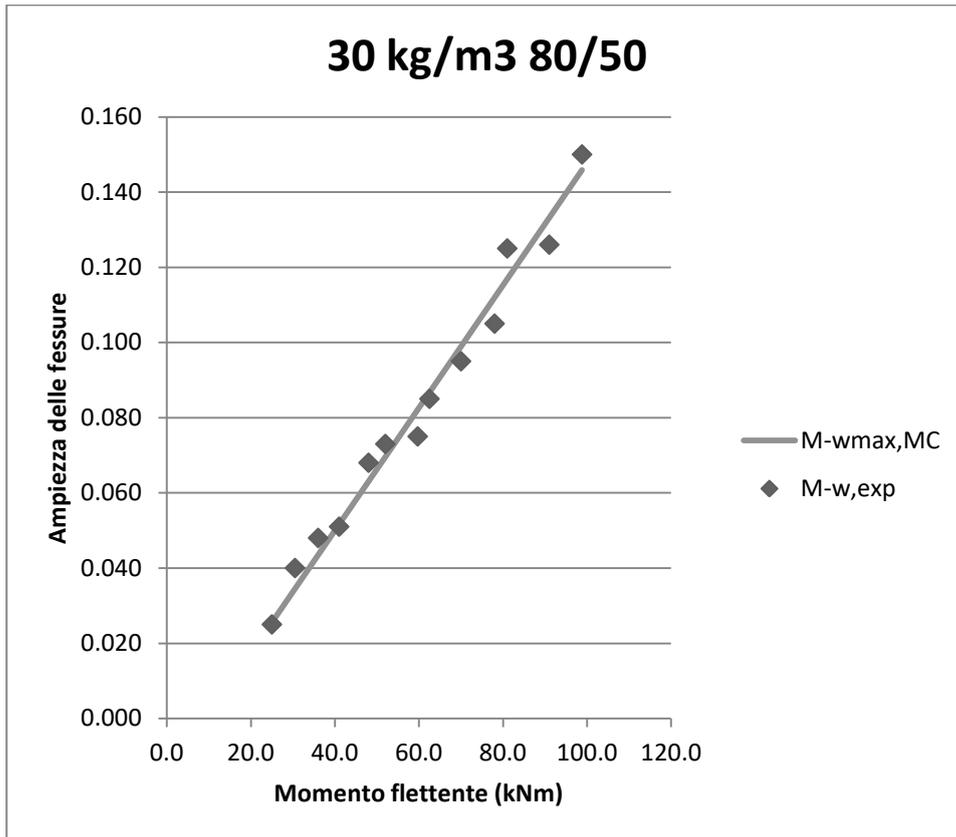


Fig. 4.7 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 4

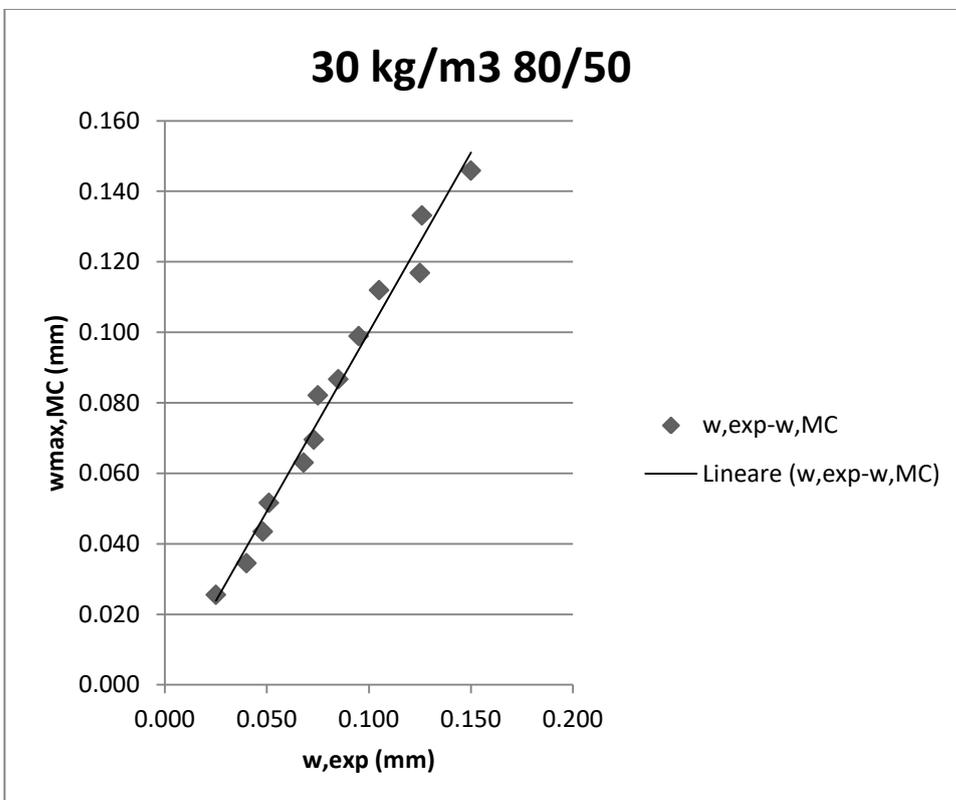


Fig.4.8 Confronto dei valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 4

TRAVE 5	45Kg/m3 80/50	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
25.0	0.025	0.020
30.5	0.040	0.027
36.0	0.047	0.033
41.0	0.051	0.040
48.0	0.068	0.048
52.0	0.073	0.053
59.7	0.075	0.063
62.5	0.085	0.067
70.0	0.095	0.076
78.0	0.105	0.086
81.0	0.124	0.090
91.0	0.125	0.102
98.8	0.140	0.112

Tab. 4.7 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 5

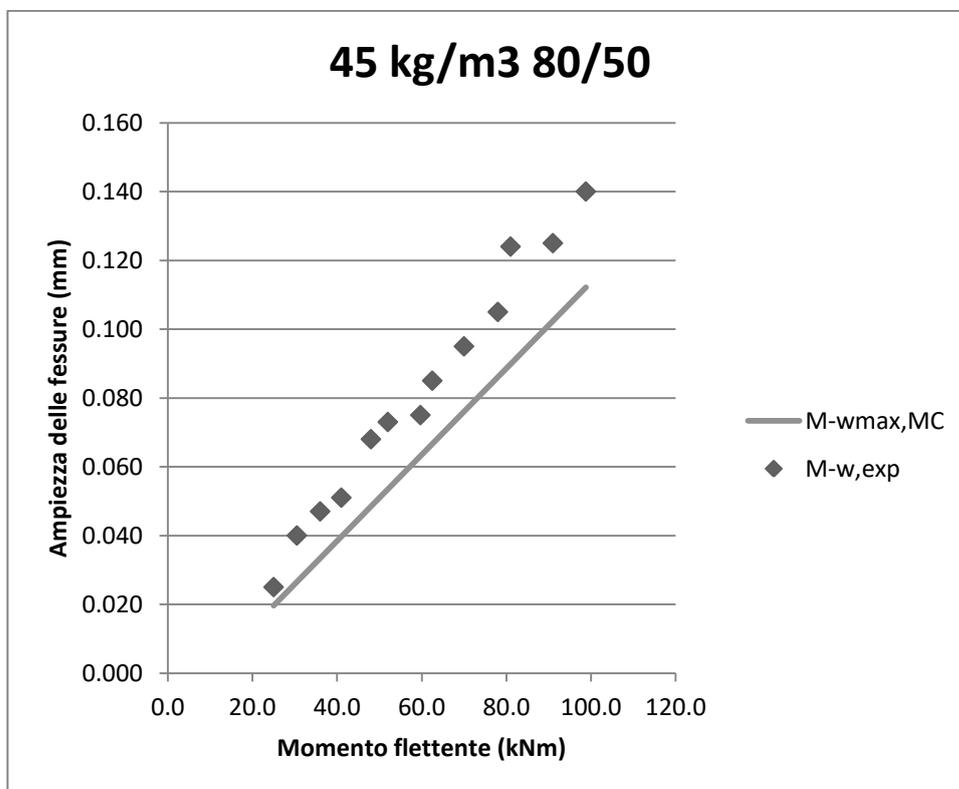


Fig. 4.9 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 5

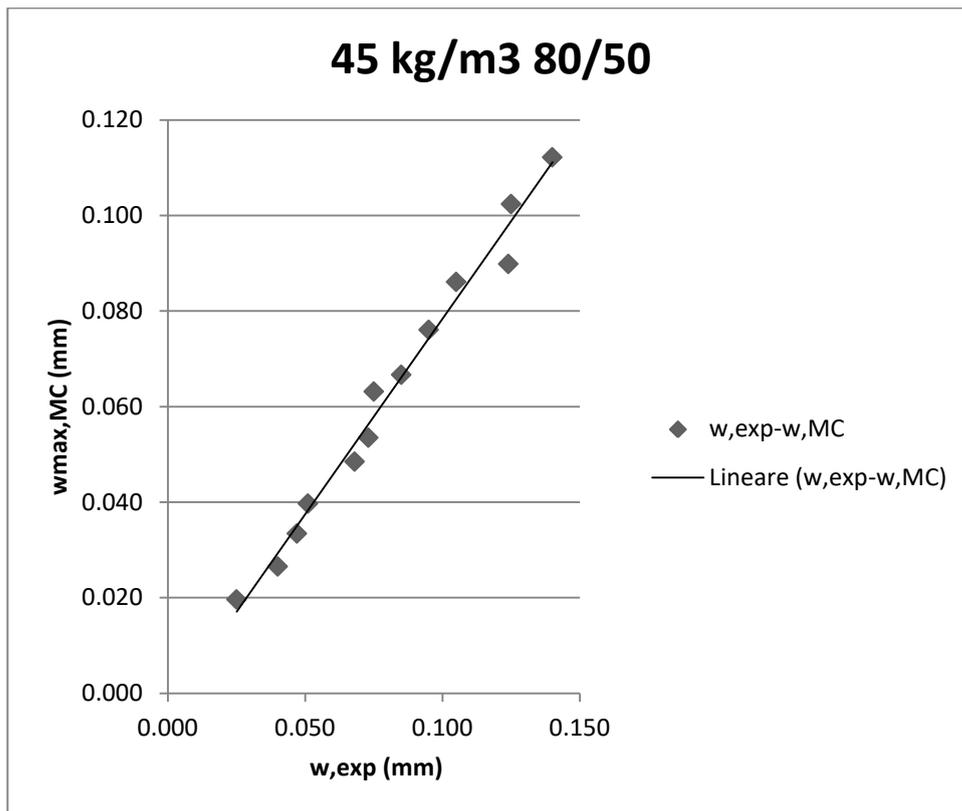


Fig.4.10 Confronto dei valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 5

## 4.2 Spaziature di fessura

Qui di seguito verranno riportati i risultati tabellati e i grafici di confronto dei risultati di spaziatura di fessura per le cinque travi di prova.

TRAVE	sr,exp (mm)	sr,max,MC(mm)
1	126	150.6
2	100	53.8
3	85	55.9
4	74.8	55.9
5	84.5	43.0

Tab. 4.8 Confronto delle spaziature delle fessure per le 5 travi di prova

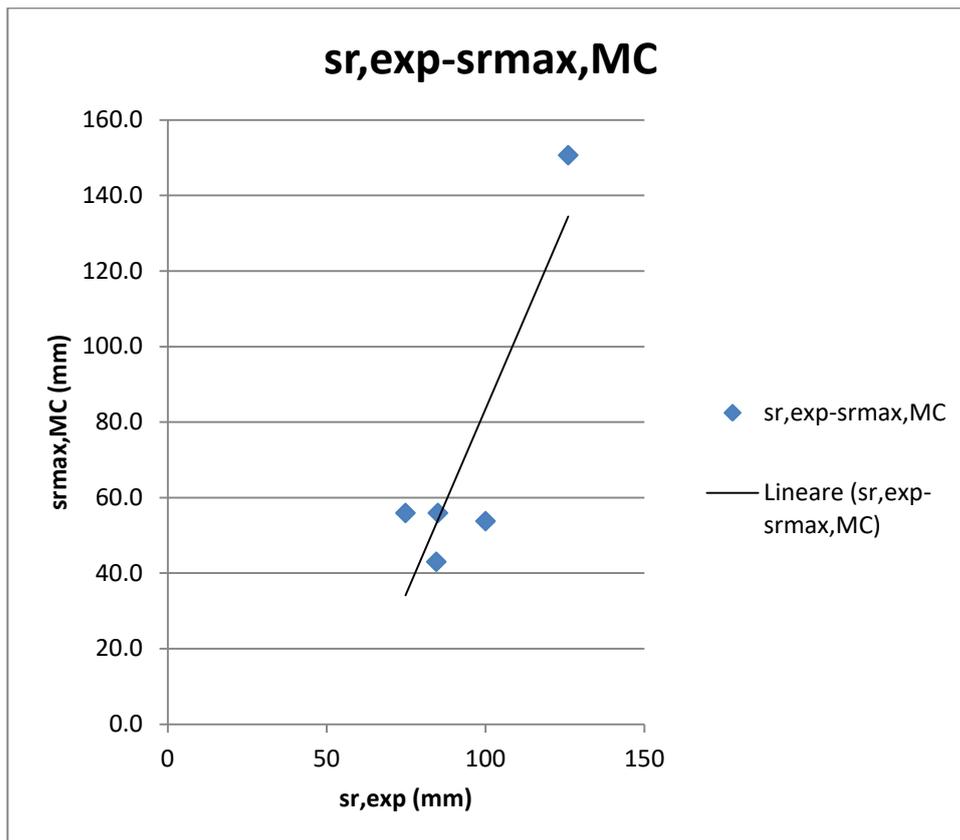


Fig. 4.11 Confronto delle spazature delle fessure per le 5 travi di prova

### 4.3 Conclusioni

I grafici di ampiezza di fessura ottenuti mettono in evidenza che i risultati sperimentali sono molto simili ai valori massimi ottenuti applicando l'espressione del Model Code (espressione (2.1) del capitolo 2).

In modo particolare per la trave 4 (Fig.4.7) tra i valori calcolati e quelli sperimentali si hanno differenze percentuali molto basse.

Mentre per la spaziatura delle fessure, la Tab.4.8 mostra il confronto tra i valori asintotici di spaziatura sperimentali estrapolati e quelli definiti dall'espressione (2.2) del capitolo 2.

La trave 1 è una semplice trave in calcestruzzo armato senza nessuna percentuale di fibre e mostra un valore di spaziatura massimo calcolato maggiore rispetto a quello sperimentale.

Mentre per le altre travi succede il contrario, anzi i valori calcolati di confronto sono addirittura circa la metà rispetto a quelli estrapolati .



## CAPITOLO 5: CONFRONTO CON I RISULTATI DI DUPONT

Noti i parametri geometrici e meccanici delle prove sperimentali è stato possibile effettuare un confronto dei valori di larghezza e spaziatura della fessura considerando le espressioni fornite dal Model Code2010.

Le travi in esame, descritte nel capitolo 2, sono in numero 19.

Ogni trave si differenzia per la percentuale di fibre presenti:

TRAVE	DOSAGGIO FIBRE (kg/m <sup>3</sup> )	TIPO FIBRE
1	0	-
2	20	RC 65/60 BN
3	60	RC 65/60 BN
4	0	-
5	20	RC 65/60 BN
6	60	RC 65/60 BN
7	0	-
8	20	RL 45/50 BN
9	60	RL 45/50 BN
10	0	-
11	20	RL 45/50 BN
12	60	RL 45/50 BN
13	40	RC 65/60 BN
14	40	RC 80/35 BN
15	60	RC 80/35 BN
16	40	RC 65/60 BN
17	0	-
18	20	RC 65/60 BN
19	60	RC 65/60 BN

Tab. 5.1 Dosaggio e tipo di fibre per ogni trave

### 5.1. Ampiezza di fessura

Qui di seguito verranno riportati i risultati tabellati e i grafici di confronto dei risultati di ampiezza di fessura per le 19 travi di prova.

TRAVE 1	NO STEEL FIBRES	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
15.8	0.031	0.017
20.5	0.043	0.025
24.5	0.050	0.032
28.6	0.057	0.039
32.0	0.068	0.045
36.2	0.075	0.053
40.0	0.084	0.060
43.8	0.094	0.066
47.5	0.100	0.073
51.2	0.100	0.080
55.6	0.120	0.087
60.0	0.127	0.095
63.8	0.135	0.102
67.5	0.147	0.109
76.0	0.160	0.124

Tab. 5.2 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 1

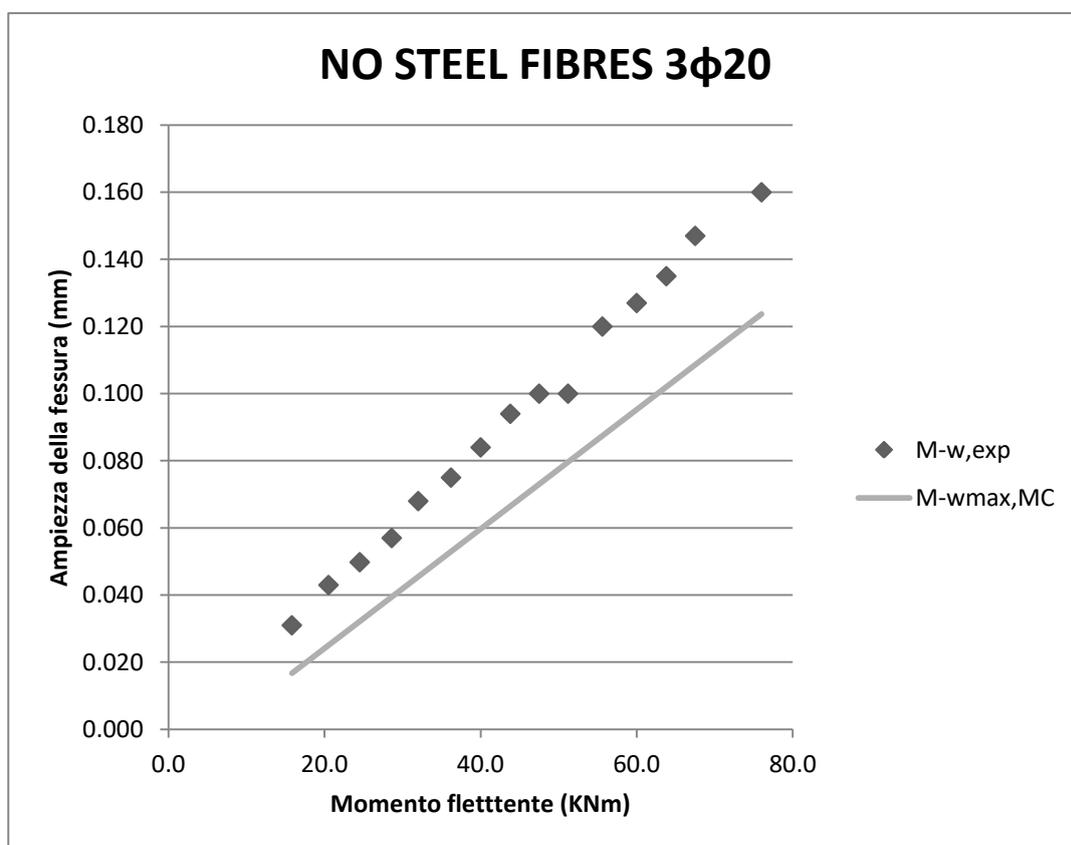


Fig. 5.1 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 1

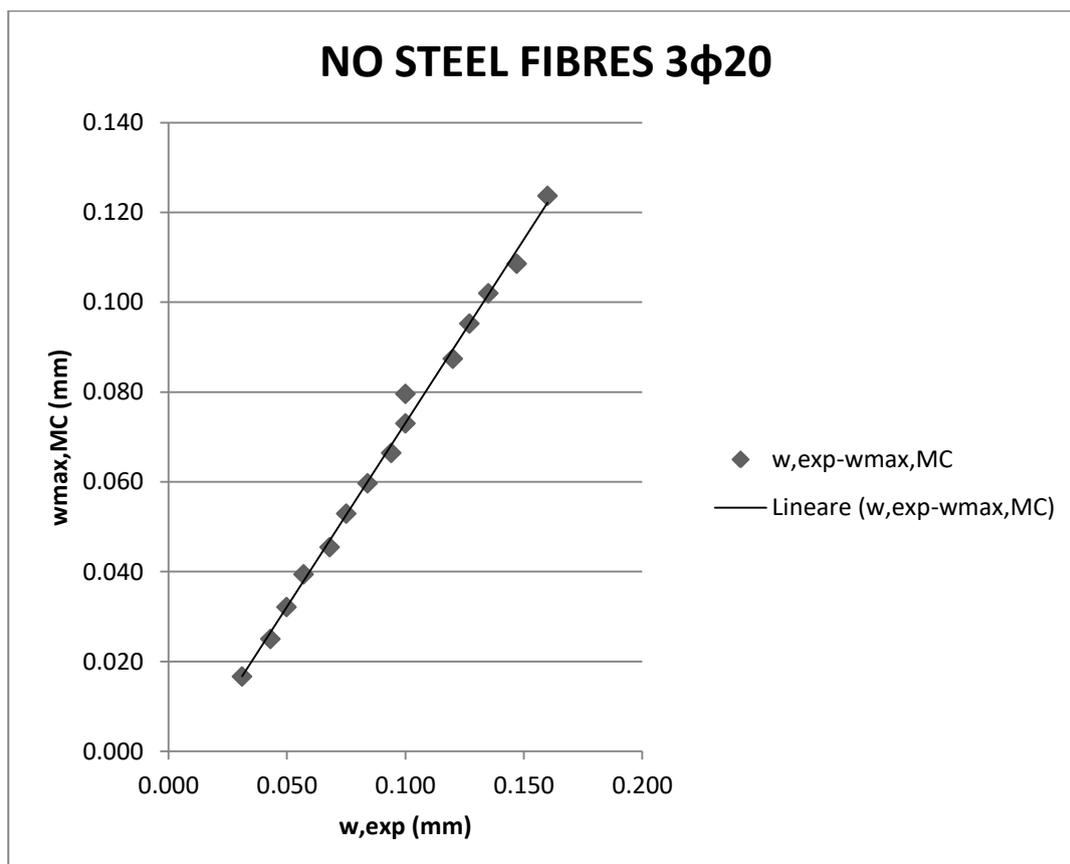


Fig.5.2 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 1

TRAVE 2	20 Kg/m <sup>3</sup> RC65/60 BN 3 $\phi$ 20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
19.8	0.025	0.018
24.5	0.037	0.025
30.4	0.048	0.033
36.5	0.059	0.041
42.0	0.075	0.048
48.0	0.091	0.056
53.8	0.104	0.064
60.0	0.120	0.073
65.8	0.125	0.080

Tab. 5.3 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 2

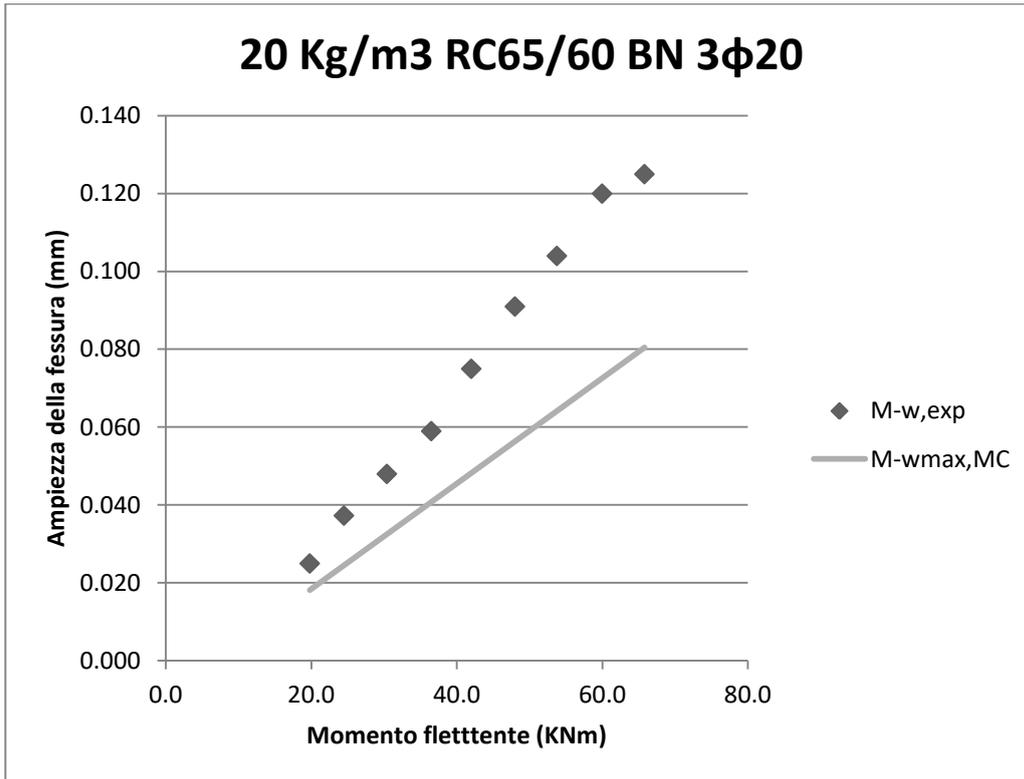


Fig. 5.3 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 2

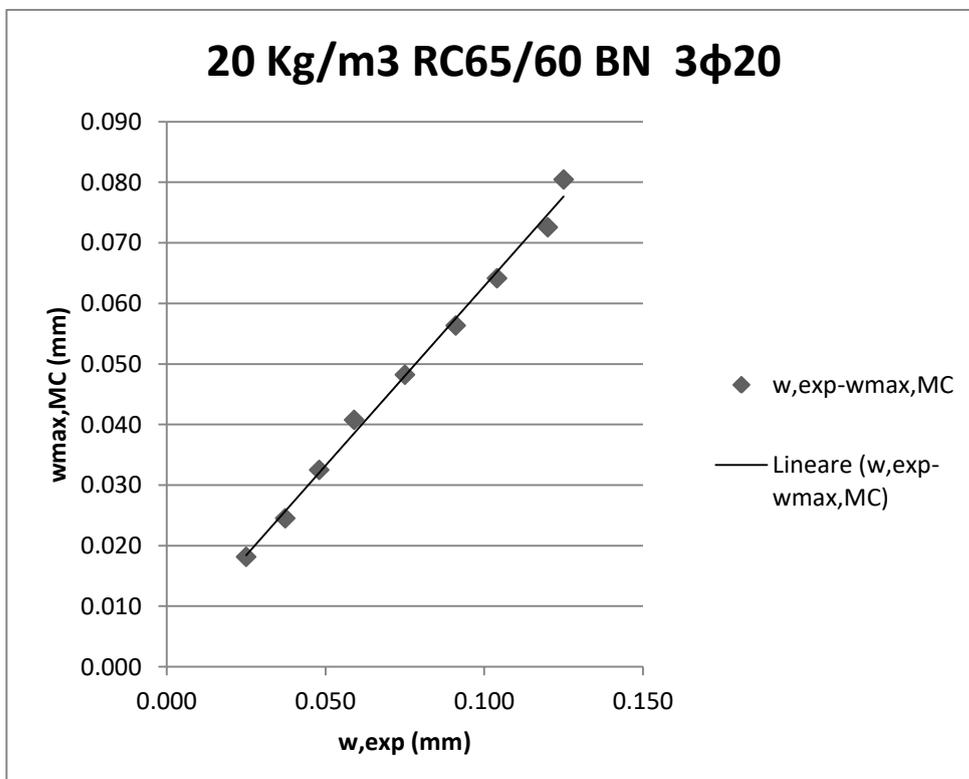


Fig.5.4 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 2

TRAVE 3	60 Kg/m <sup>3</sup> RC65/60 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
16.3	0.024	0.006
24.4	0.028	0.012
32.0	0.050	0.016
40.0	0.063	0.021
48.0	0.067	0.027
55.5	0.070	0.031
63.1	0.082	0.036
71.3	0.094	0.041
78.8	0.117	0.046
86.5	0.127	0.051

Tab. 5.4 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 3

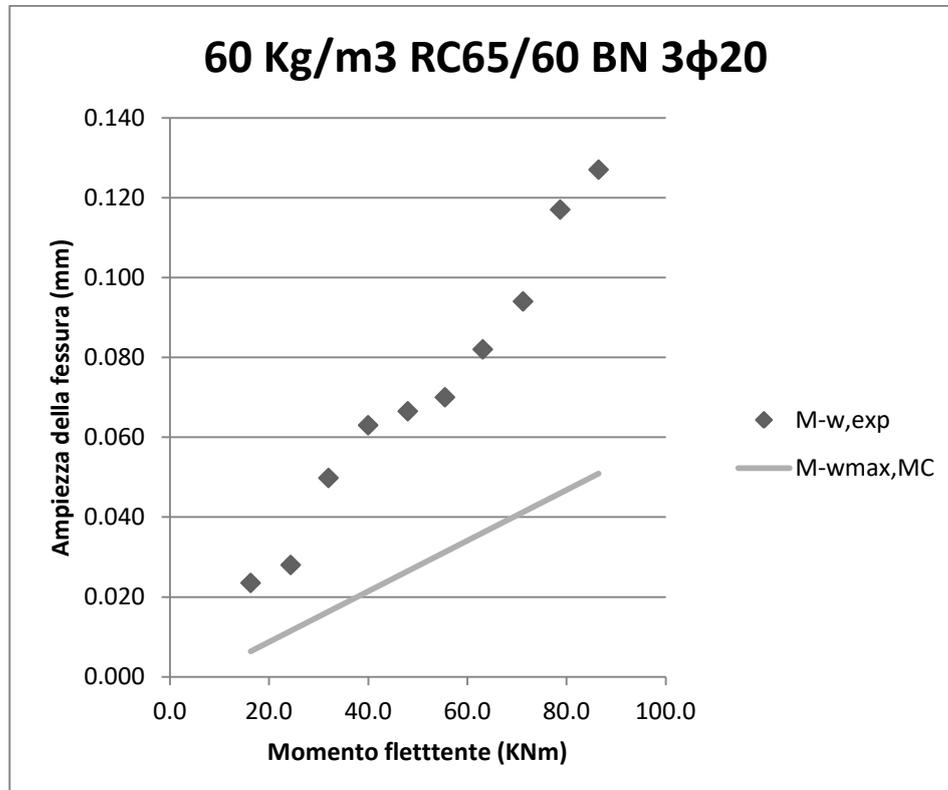


Fig. 5.5 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 3

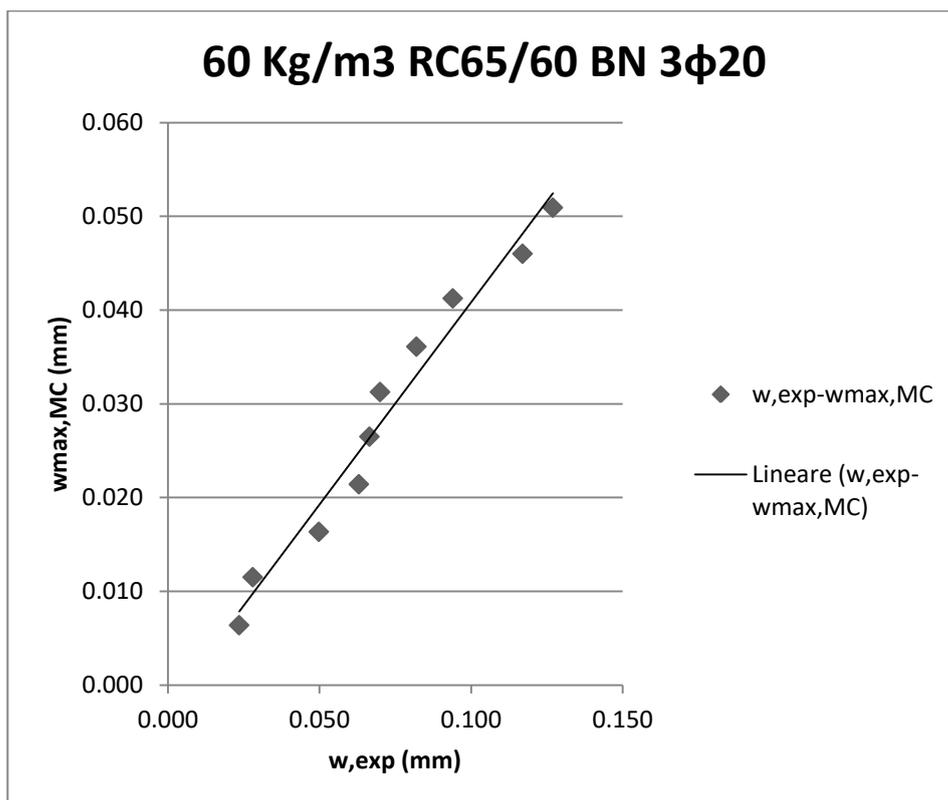


Fig.5.6 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 3

TRAVE 4	NO STEEL FIBRES 3φ16	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
18.8	0.060	0.044
24.6	0.087	0.065
30.3	0.106	0.086
36.1	0.125	0.107
41.8	0.150	0.128
47.6	0.180	0.149
53.3	0.193	0.170
59.1	0.210	0.192
64.8	0.234	0.213
70.6	0.260	0.234
80.0	0.294	0.268

Tab. 5.5 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 4

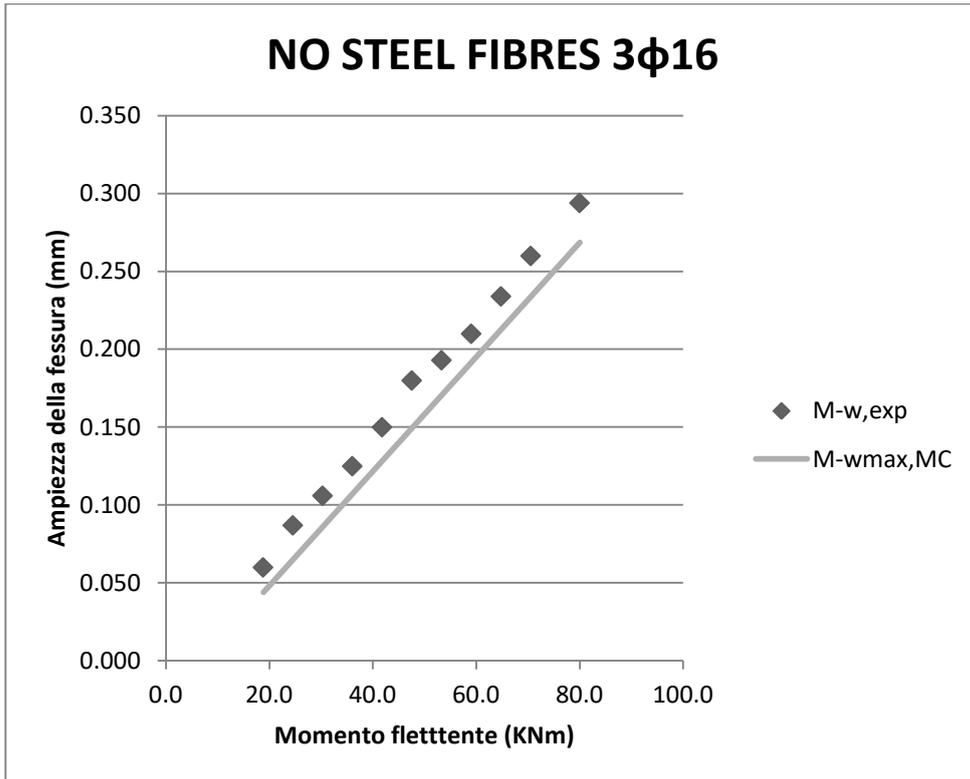


Fig. 5.7 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 4

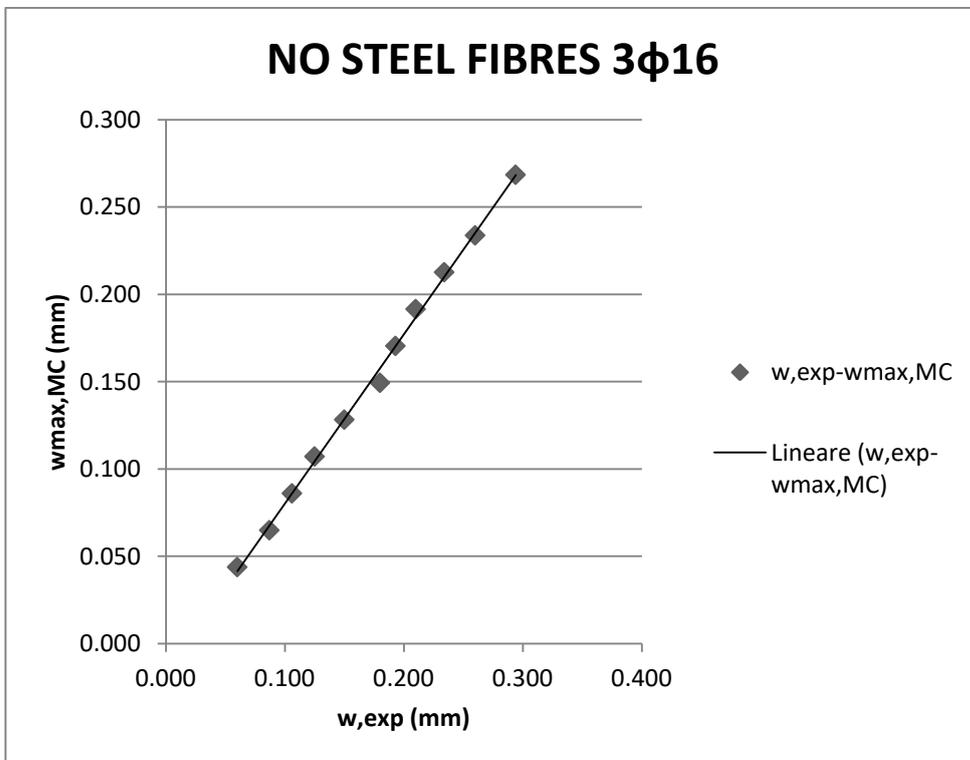


Fig.5.8 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 4

TRAVE 5	20 Kg/m <sup>3</sup> RC65/60 BN	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
15.5	0.025	0.024
20.5	0.038	0.038
25.5	0.058	0.052
30.5	0.075	0.066
35.5	0.099	0.080
40.5	0.105	0.094
45.5	0.119	0.108
50.5	0.133	0.122

Tab. 5.6 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 5

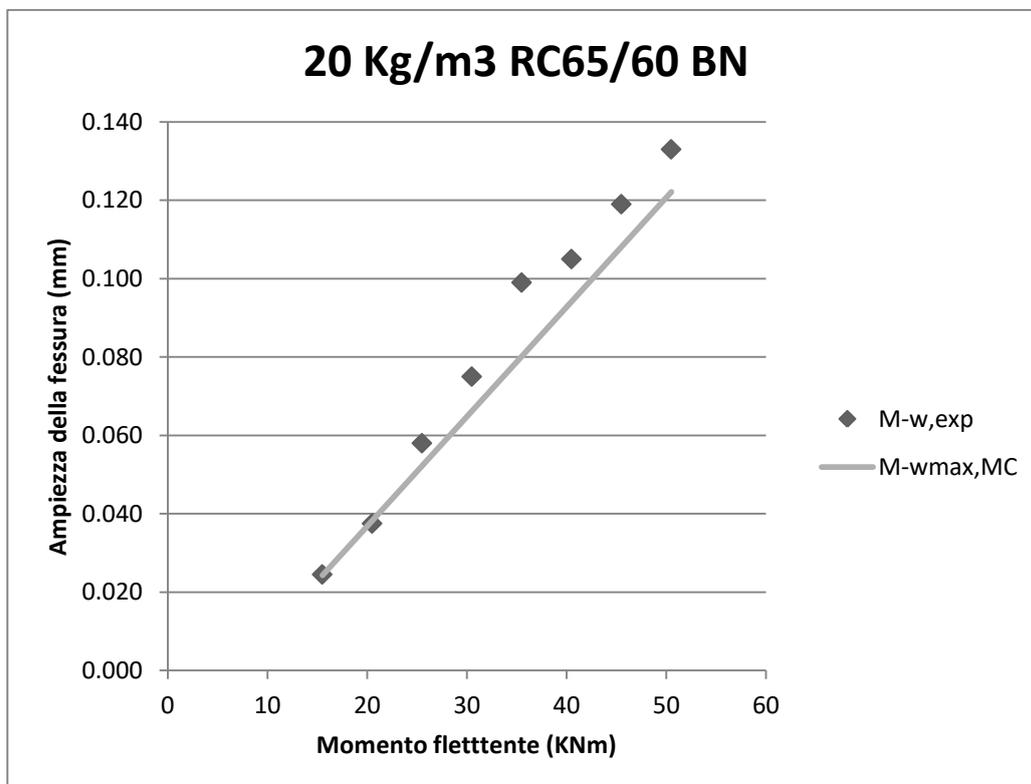


Fig. 5.9 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 5

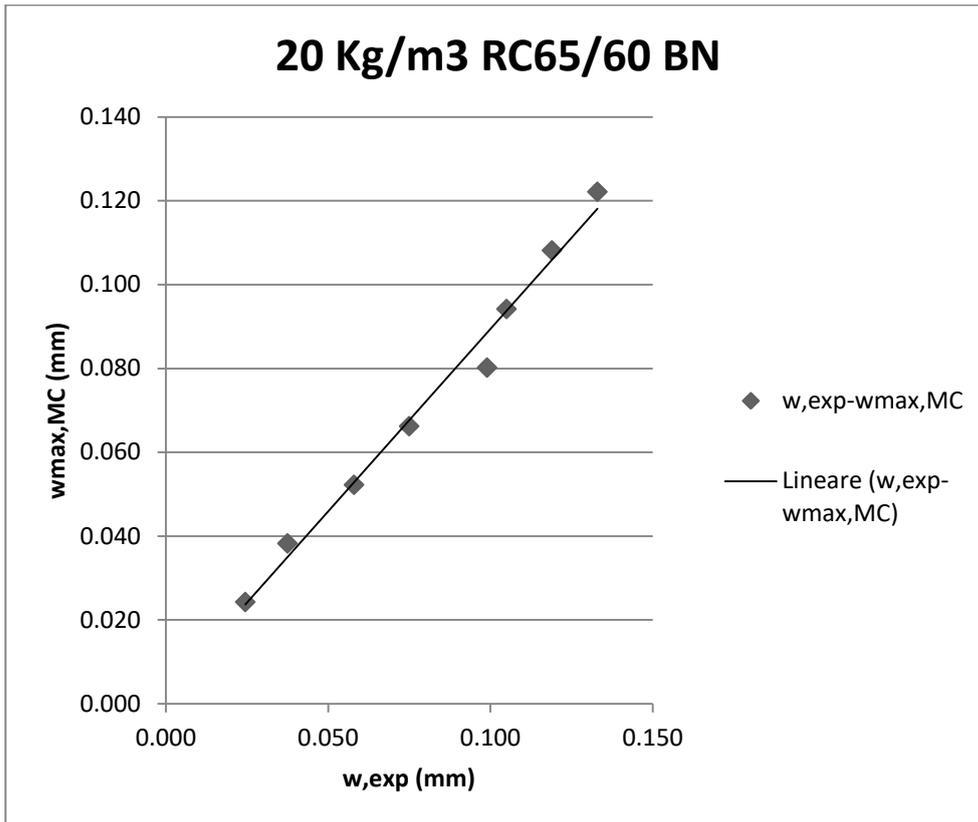


Fig.5.10 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 5

TRAVE 6	60 Kg/m <sup>3</sup> RC65/60 BN 3φ16	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
18.8	0.025	0.016
24.6	0.038	0.023
30.3	0.050	0.031
36.1	0.060	0.039
41.8	0.075	0.046
47.6	0.080	0.054
53.3	0.094	0.061
59.1	0.100	0.069
64.8	0.110	0.076

Tab. 5.7 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 6

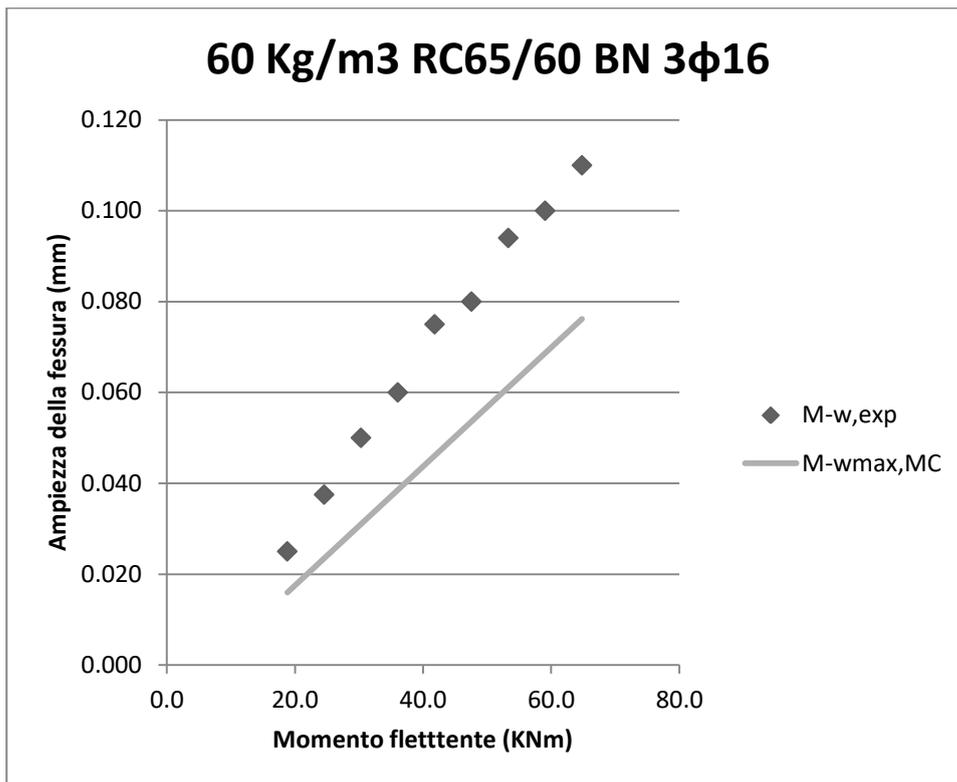


Fig. 5.11 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 6

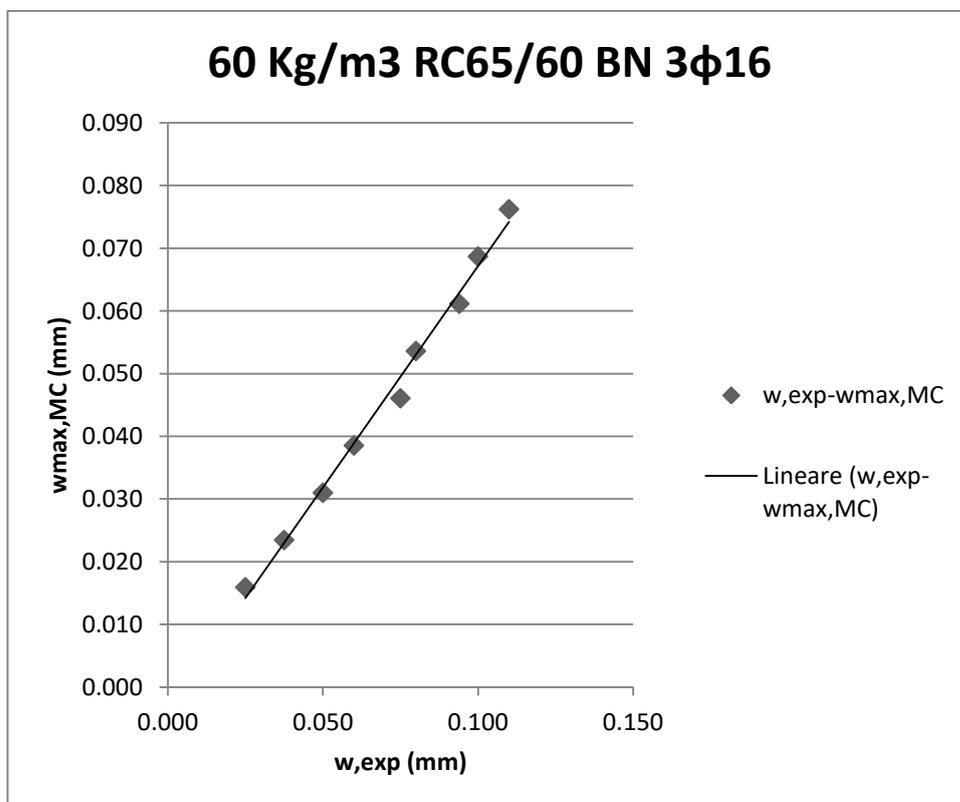


Fig.5.12 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 6

TRAVE 7	NO STEEL FIBRES 3 $\phi$ 16	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
10.2	0.019	0.018
13.4	0.038	0.030
16.6	0.055	0.041
19.8	0.081	0.053
23.0	0.092	0.065
26.2	0.110	0.076
29.4	0.125	0.088
32.6	0.133	0.099
35.8	0.151	0.111
39.0	0.170	0.123
42.2	0.200	0.134

Tab. 5.8 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 7

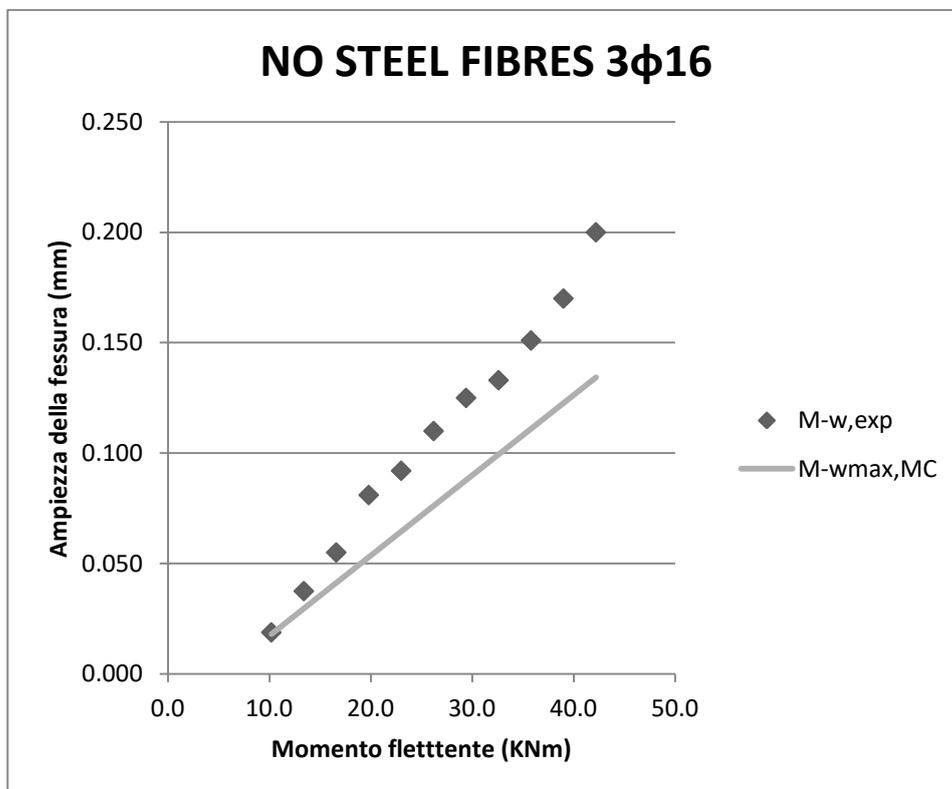


Fig. 5.13 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 7

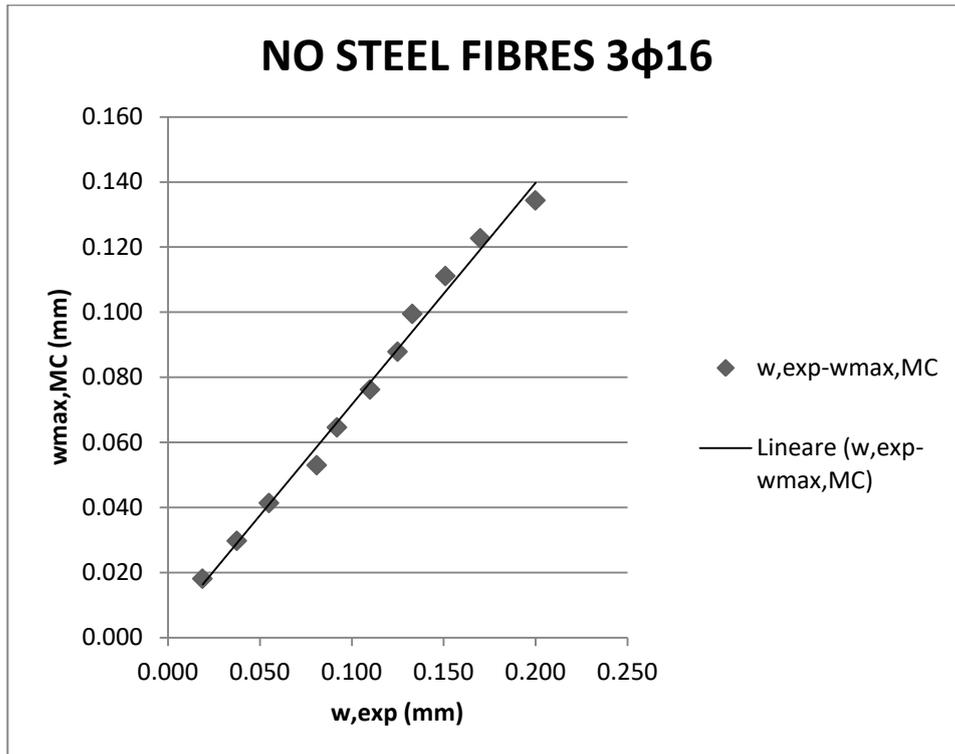


Fig.5.14 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 8

TRAVE 8	20 Kg/m <sup>3</sup> RC45/50 BN 3 $\phi$ 16	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
10.2	0.037	0.015
13.4	0.044	0.024
16.6	0.050	0.033
19.8	0.065	0.042
23.0	0.075	0.051
26.2	0.081	0.060
29.4	0.089	0.069
32.6	0.094	0.077
35.8	0.105	0.086
39.0	0.113	0.095
42.2	0.120	0.104
45.4	0.126	0.113
48.6	0.134	0.122
51.8	0.137	0.131
55.0	0.140	0.140
58.2	0.150	0.148
61.4	0.156	0.157

Tab. 5.9 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 8

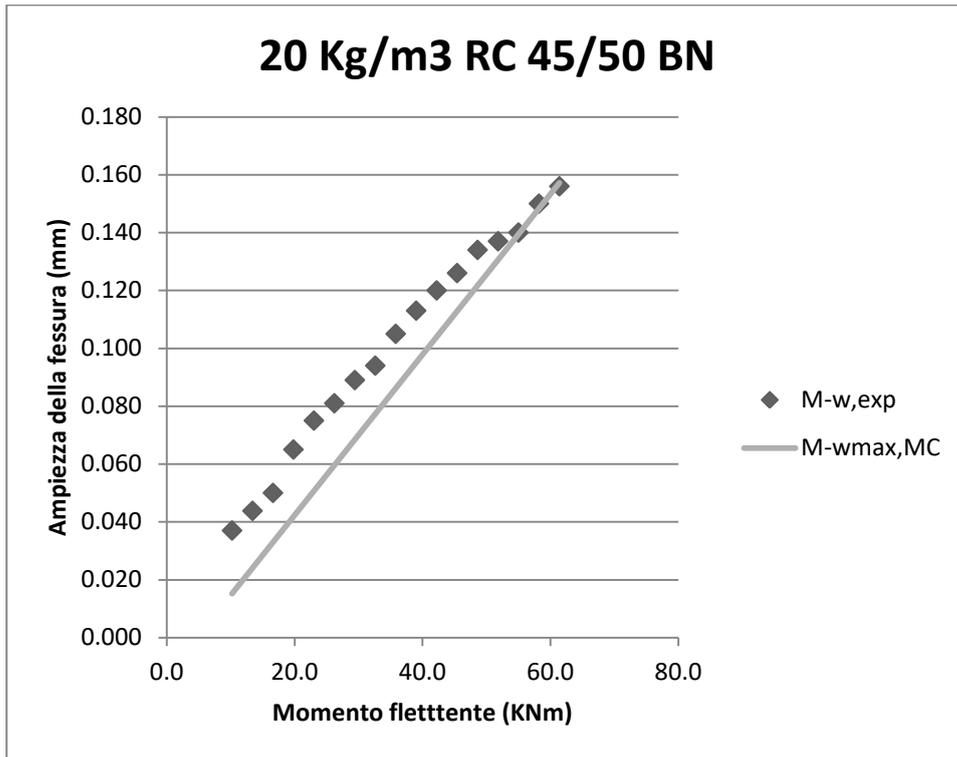


Fig. 5.15 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 8

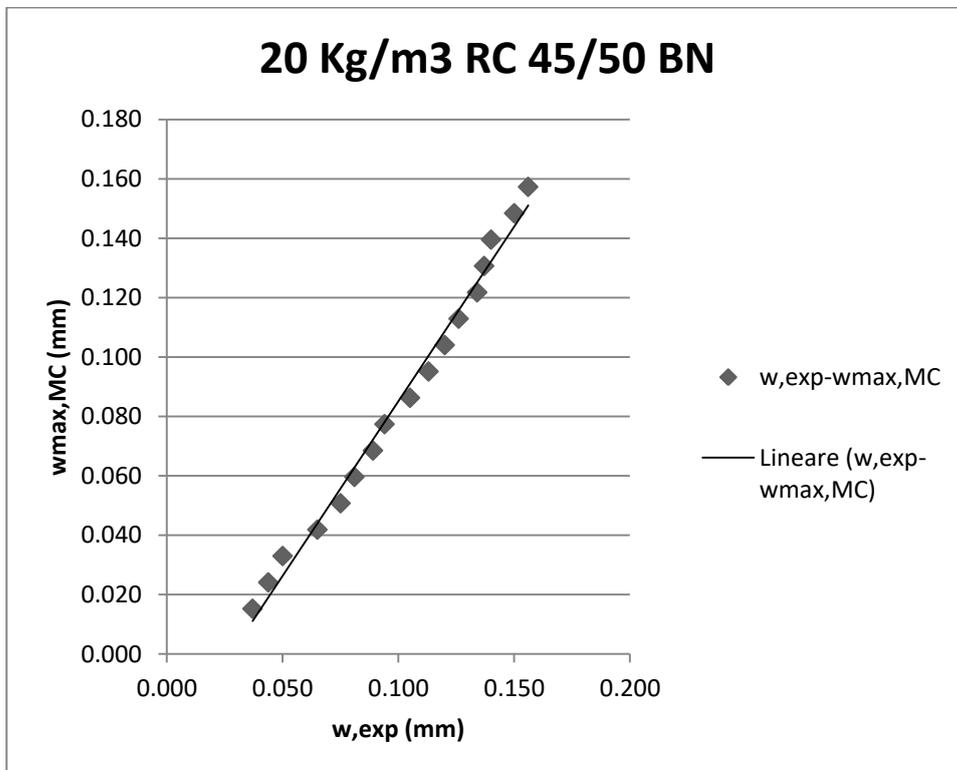


Fig.5.16 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 8

TRAVE 9	60 Kg/m <sup>3</sup> RC45/40 BN 3φ16	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
19.8	0.050	0.024
24.6	0.060	0.032
29.4	0.075	0.039
34.2	0.090	0.047
39.0	0.100	0.055
43.8	0.113	0.062
48.6	0.116	0.070
53.4	0.121	0.078
58.2	0.128	0.085
63.0	0.133	0.093
67.8	0.139	0.101
72.6	0.144	0.108

Tab. 5.10 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 9

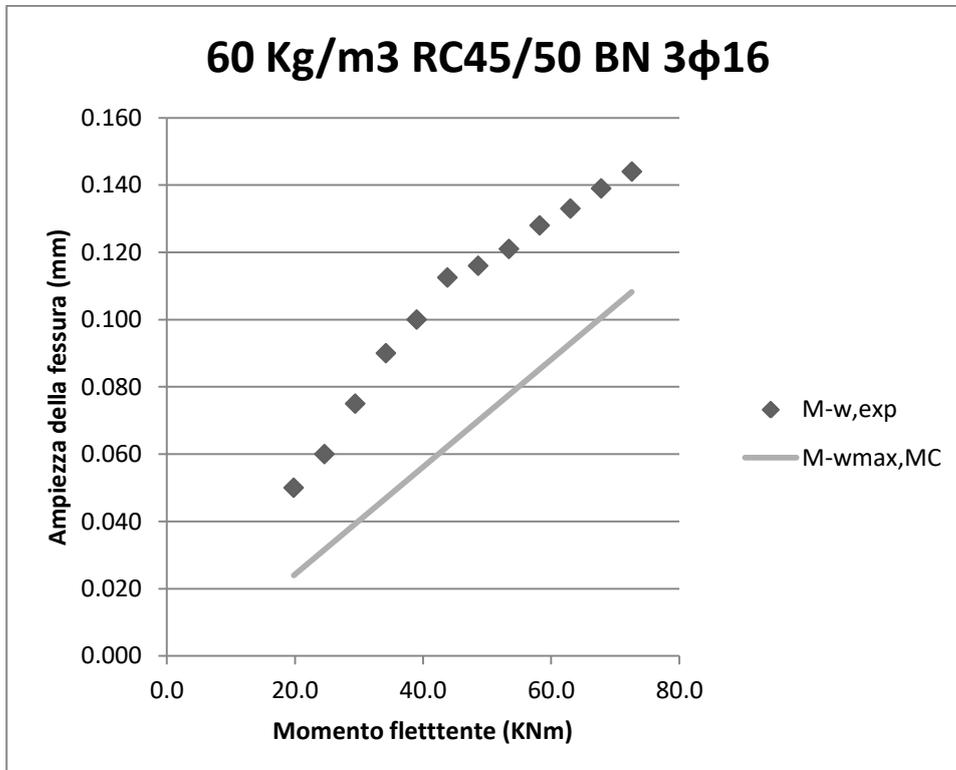


Fig. 5.17 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 9

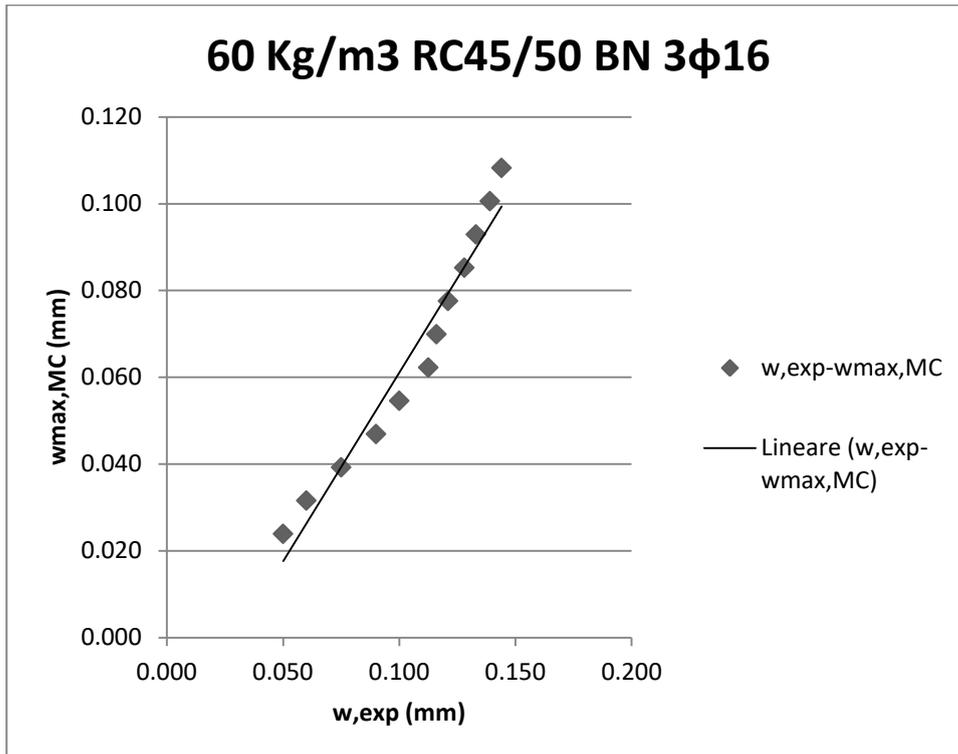


Fig.5.18 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 9

TRAVE 10	NO STEEL FIBRES 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
10.2	0.025	0.009
13.4	0.038	0.015
16.7	0.050	0.021
19.9	0.052	0.026
23.2	0.063	0.032
26.4	0.069	0.038
29.6	0.074	0.043
32.9	0.088	0.049
36.1	0.098	0.055
39.4	0.105	0.060
42.6	0.112	0.066
45.8	0.119	0.072
49.1	0.136	0.078
52.3	0.146	0.083

Tab. 5.11 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 10

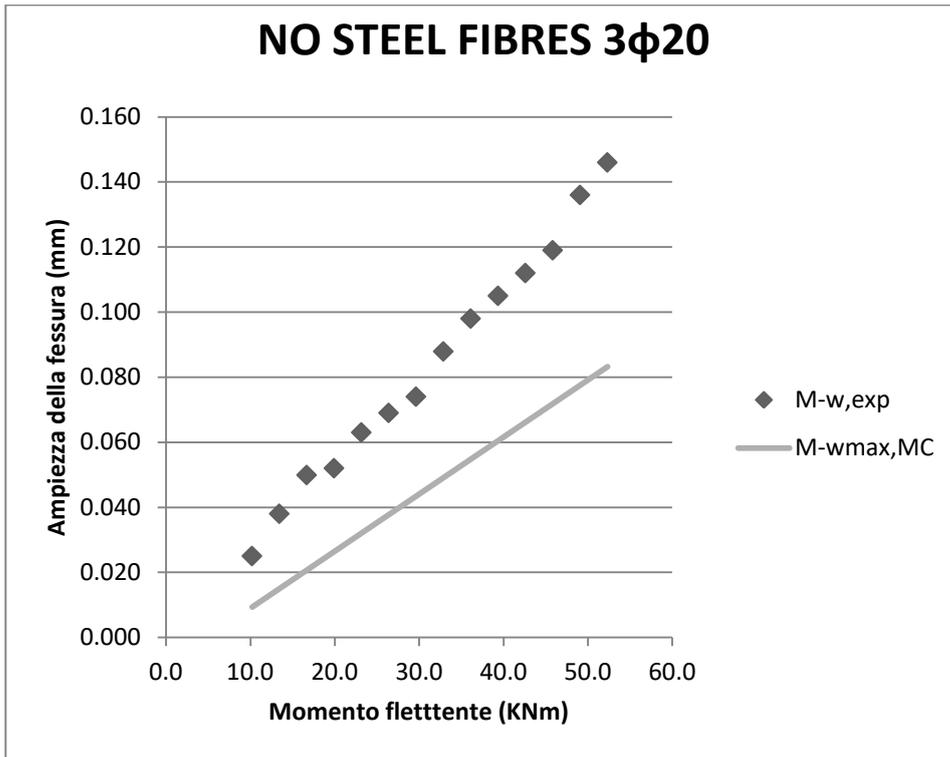


Fig. 5.19 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 10

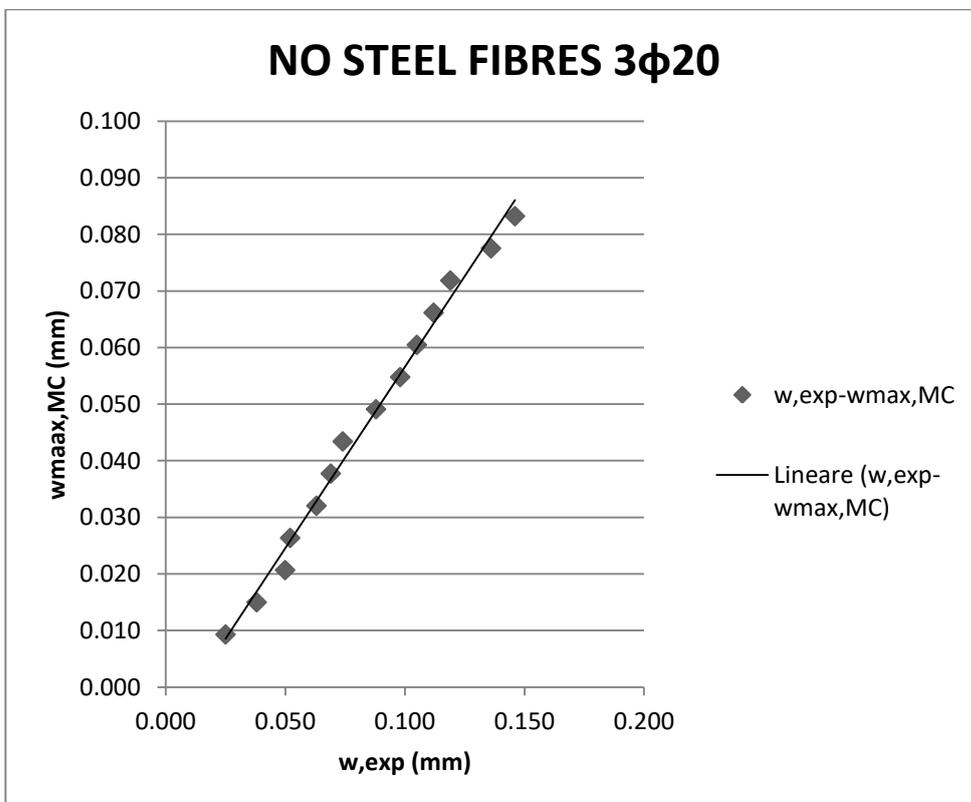


Fig.5.20 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 10

TRAVE 11	20 Kg/m3 RL45/40 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
10.1	0.038	0.008
13.4	0.044	0.012
16.6	0.051	0.016
19.9	0.055	0.021
23.2	0.070	0.025
26.5	0.076	0.030
29.7	0.085	0.034
33.0	0.088	0.038
36.3	0.090	0.043
39.5	0.108	0.047
42.8	0.120	0.051
46.1	0.128	0.056
49.3	0.130	0.060
52.6	0.129	0.065
55.9	0.144	0.069
59.2	0.150	0.073
62.4	0.152	0.078

Tab. 5.12 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 11

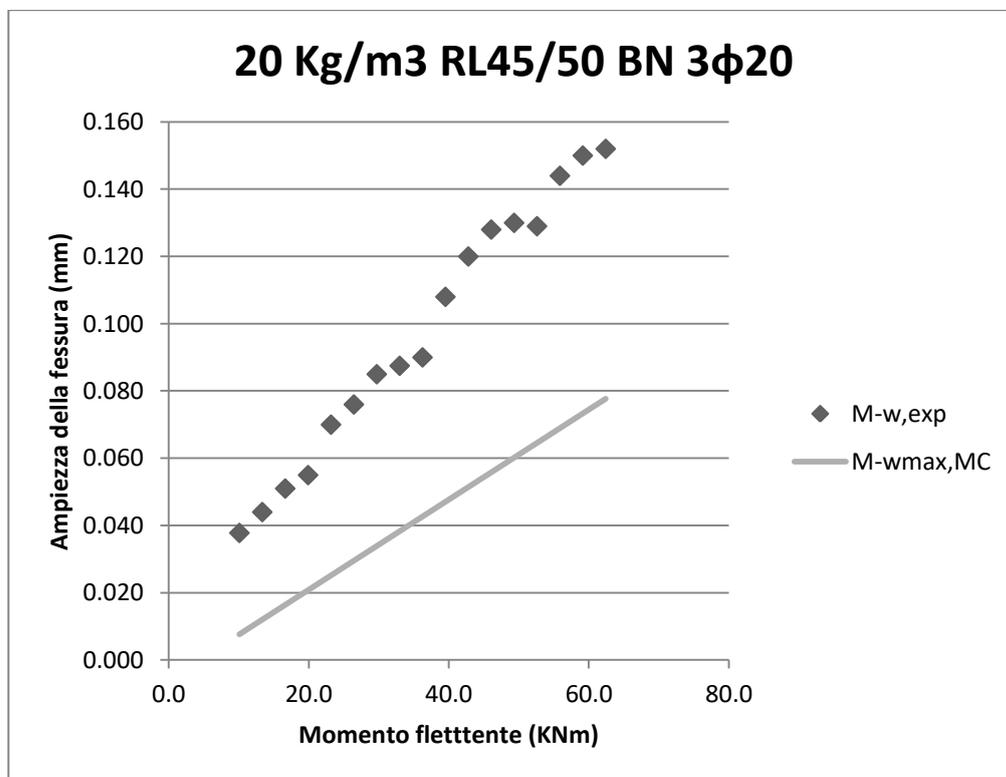


Fig. 5.21 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 11

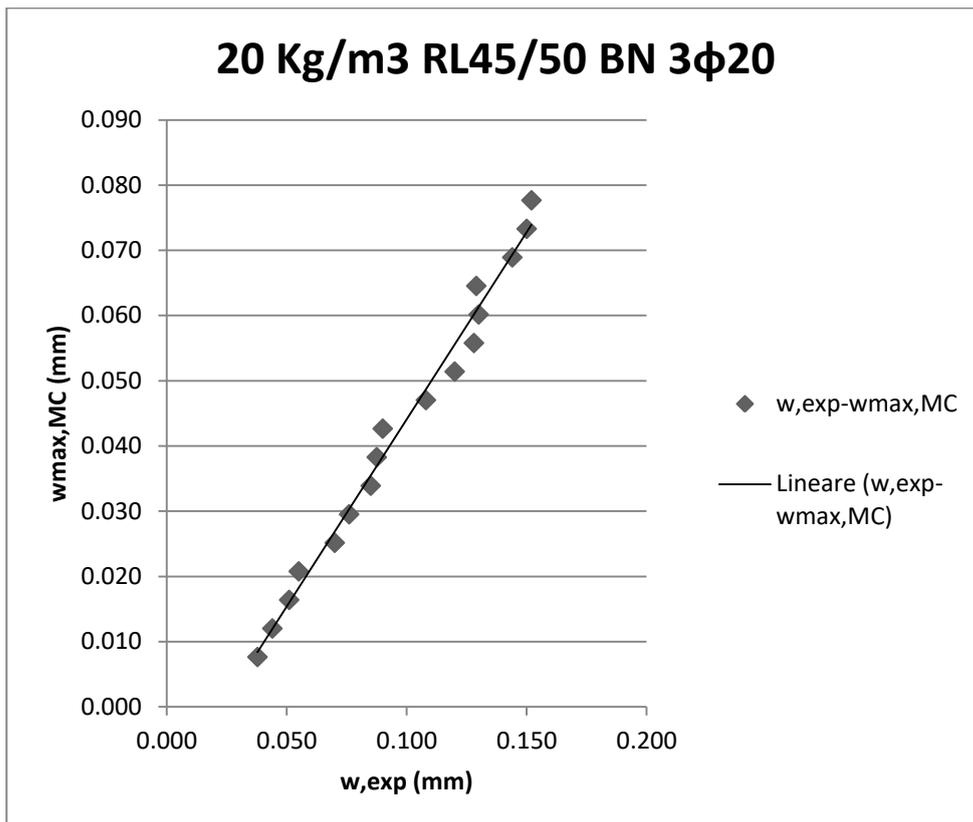


Fig.5.22 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 11

TRAVE 12	20 Kg/m <sup>3</sup> RL45/40 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
14.9	0.031	0.008
19.9	0.054	0.012
24.9	0.060	0.016
29.9	0.073	0.020
34.9	0.077	0.023
39.9	0.079	0.027
44.9	0.075	0.031
49.9	0.078	0.035
54.9	0.088	0.039
59.9	0.095	0.043
65.0	0.105	0.047
70.0	0.105	0.050
75.0	0.113	0.054

Tab. 5.13 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 12

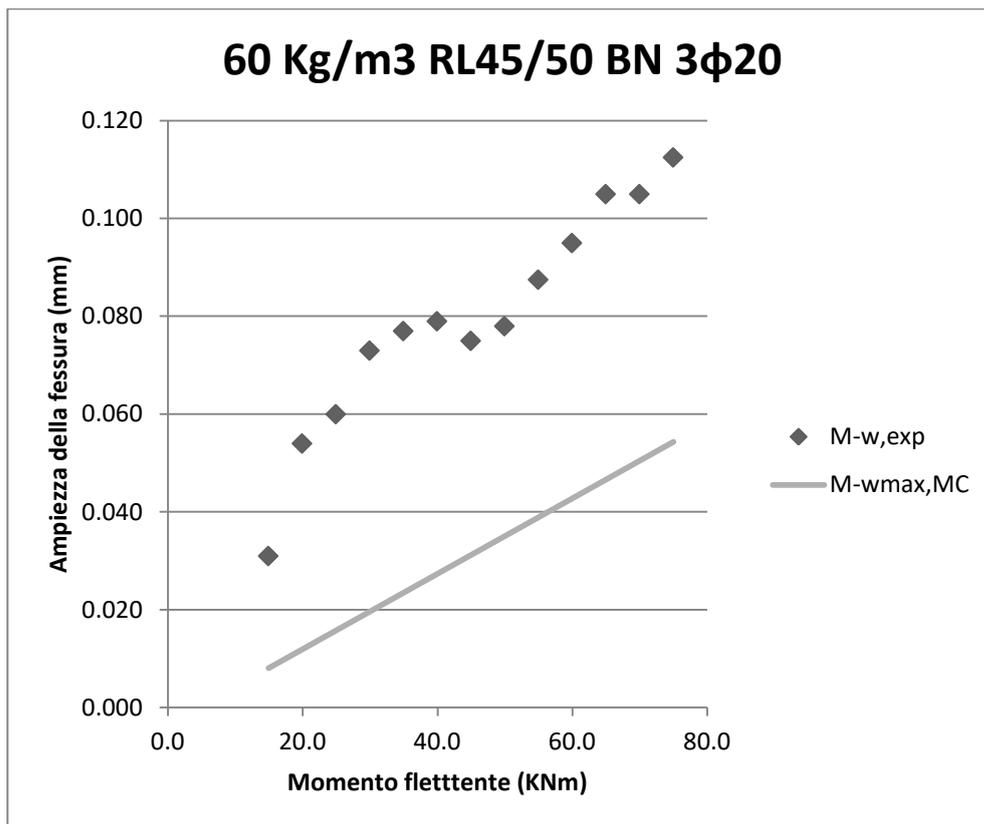


Fig. 5.23 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 12

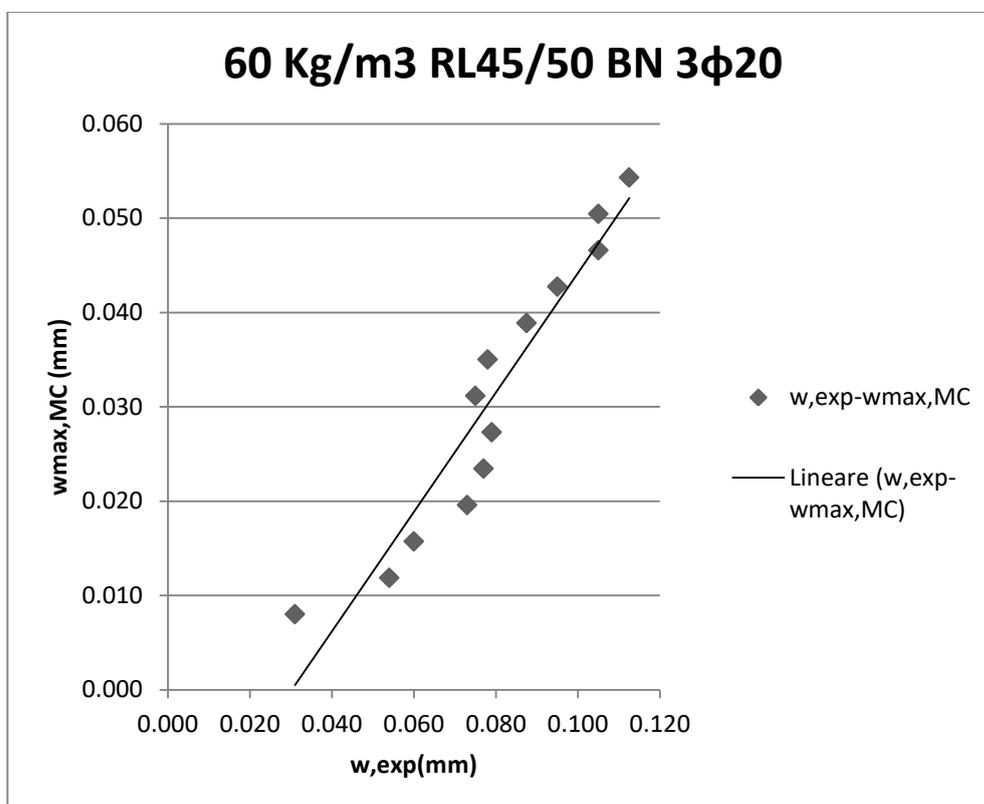


Fig.5.24 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 12

TRAVE 13	40 Kg/m <sup>3</sup> RC65/60 BN 3φ16	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
12.0	0.026	0.007
17.8	0.038	0.017
23.6	0.055	0.027
29.4	0.076	0.038
35.2	0.088	0.048
41.0	0.108	0.058
46.8	0.128	0.068
52.6	0.159	0.078
58.4	0.175	0.088
64.2	0.194	0.098
70.0	0.225	0.109

Tab. 5.14 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 13

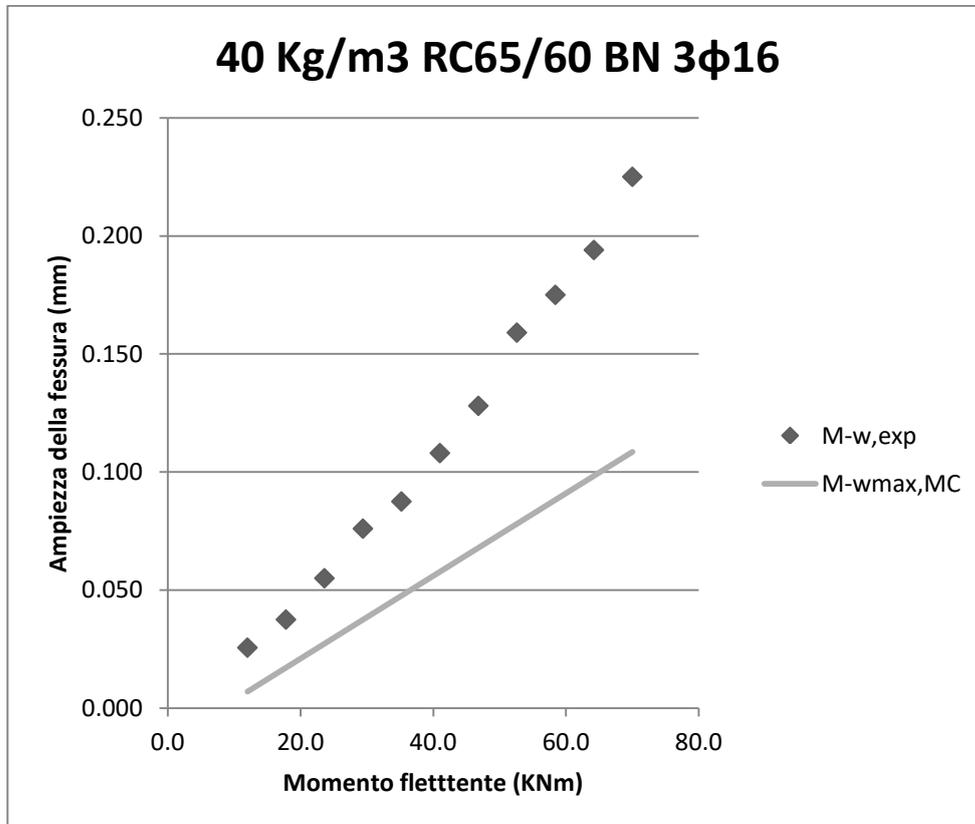


Fig. 5.25 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 13

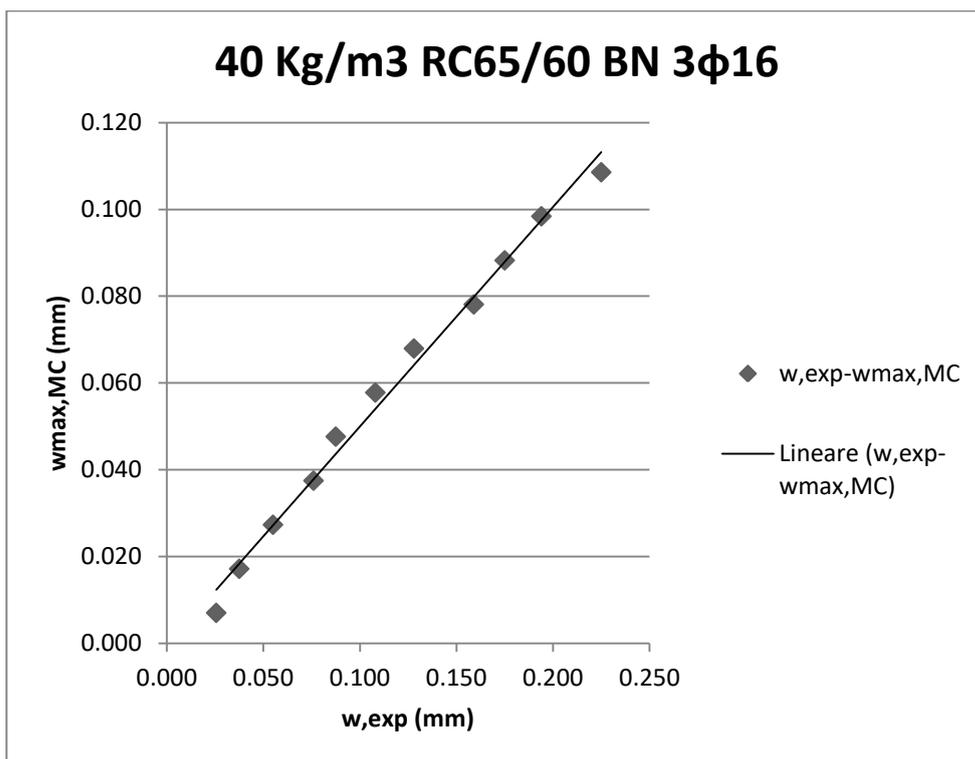


Fig.5.26 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 13

TRAVE 14	40 Kg/m <sup>3</sup> RC80/35 BN 3φ16	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
17.5	0.020	0.013
24.5	0.025	0.022
29.5	0.026	0.028
35.0	0.033	0.035
41.0	0.044	0.043
46.8	0.060	0.050
57.5	0.075	0.064
58.5	0.090	0.066
66.0	0.107	0.075
69.5	0.127	0.080
73.5	0.137	0.085
82.3	0.150	0.096
87.5	0.165	0.103
94.0	0.180	0.111

Tab. 5.15 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 14

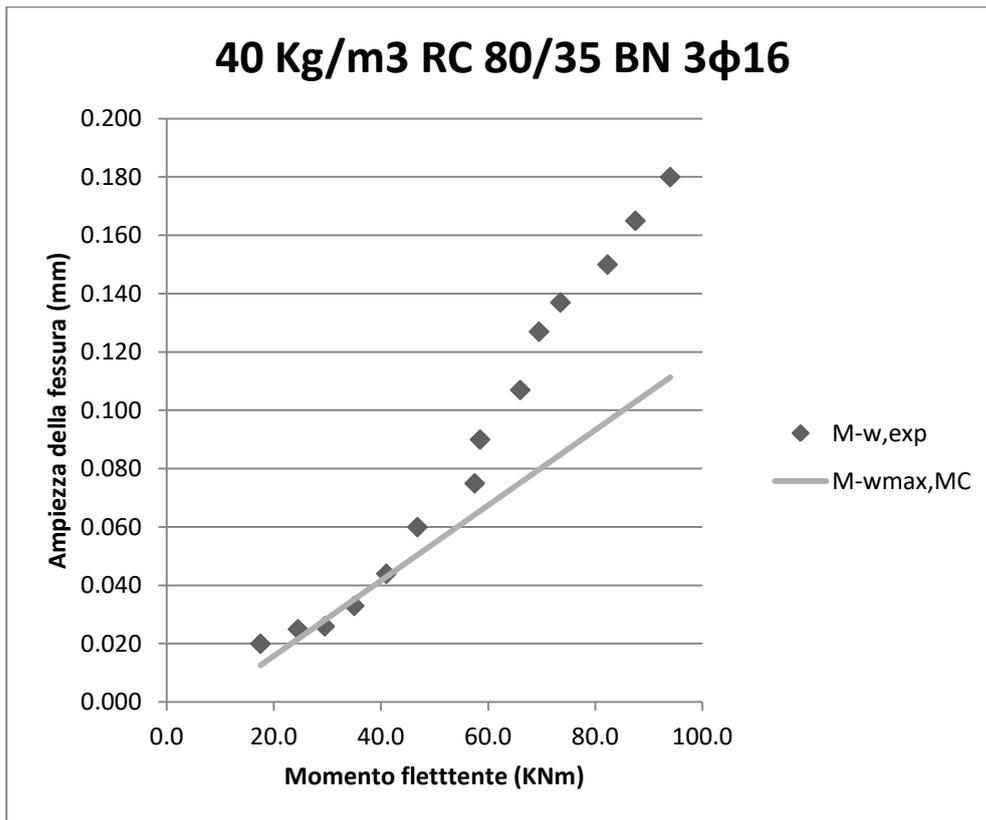


Fig. 5.27 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 14

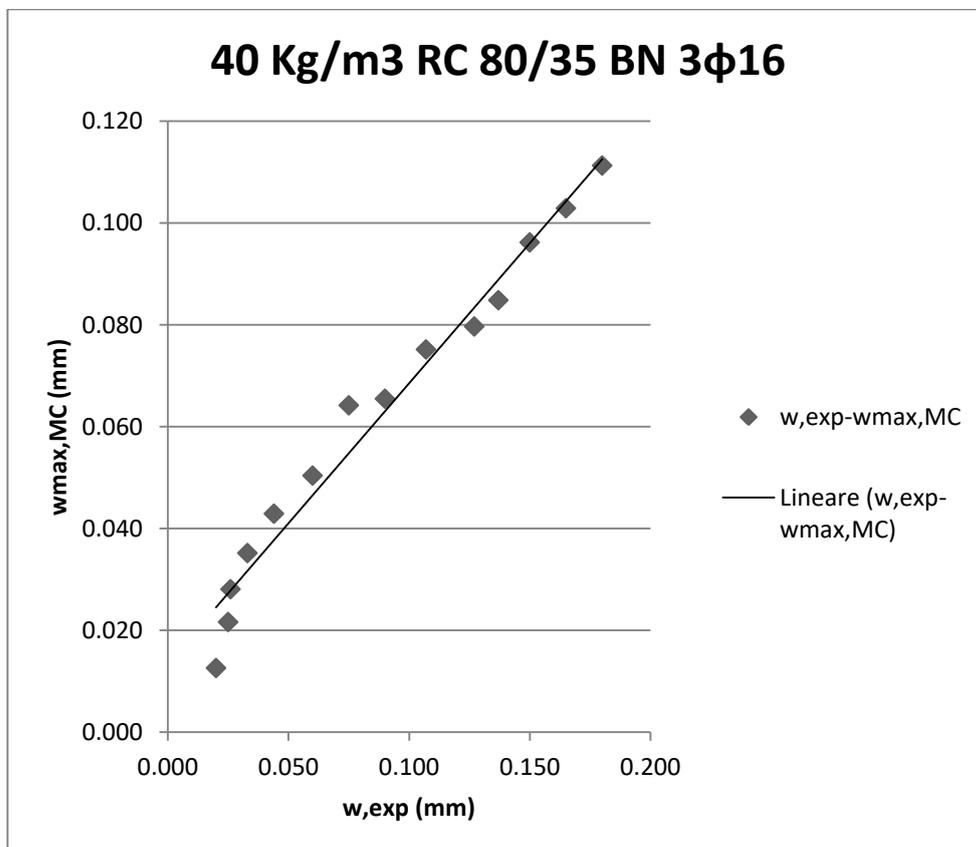


Fig.5.28 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 14

TRAVE 15	20 Kg/m <sup>3</sup> RL45/50 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
10.0	0.022	0.002
19.7	0.030	0.011
29.4	0.040	0.019
39.1	0.055	0.028
48.8	0.070	0.037
58.5	0.097	0.046
68.2	0.105	0.055
77.9	0.130	0.064

Tab. 5.16 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 15

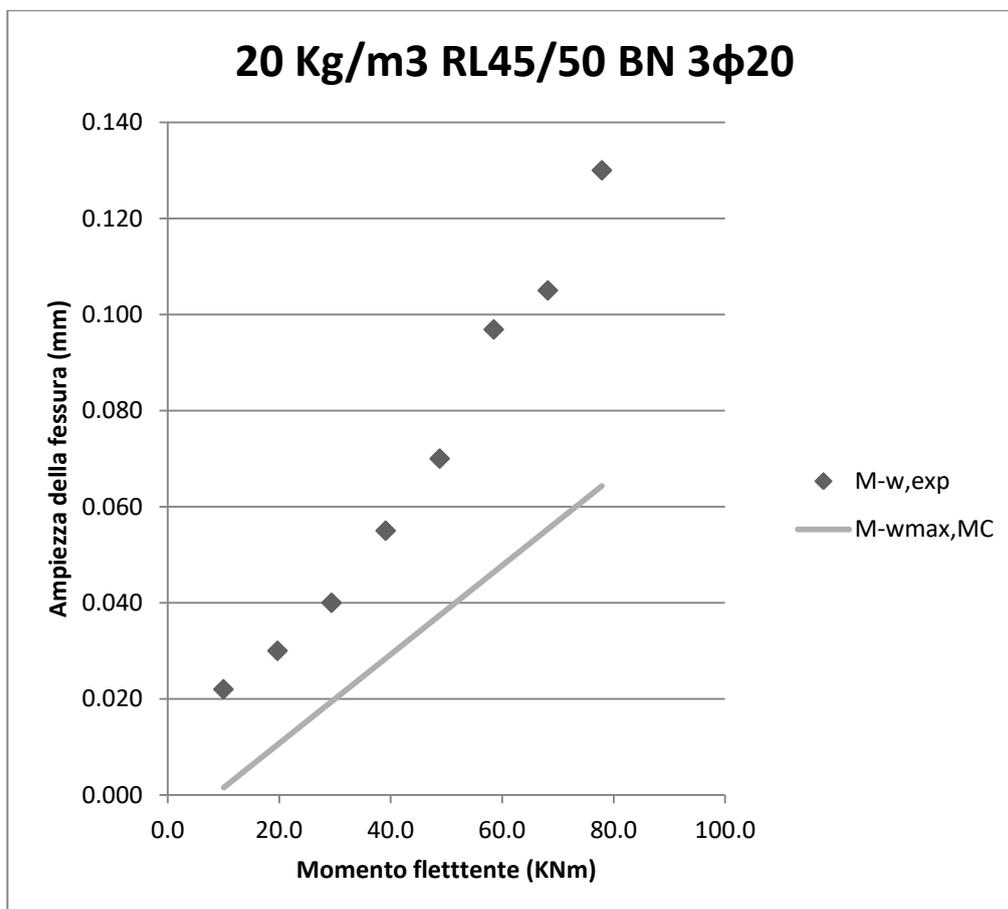


Fig. 5.29 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 15

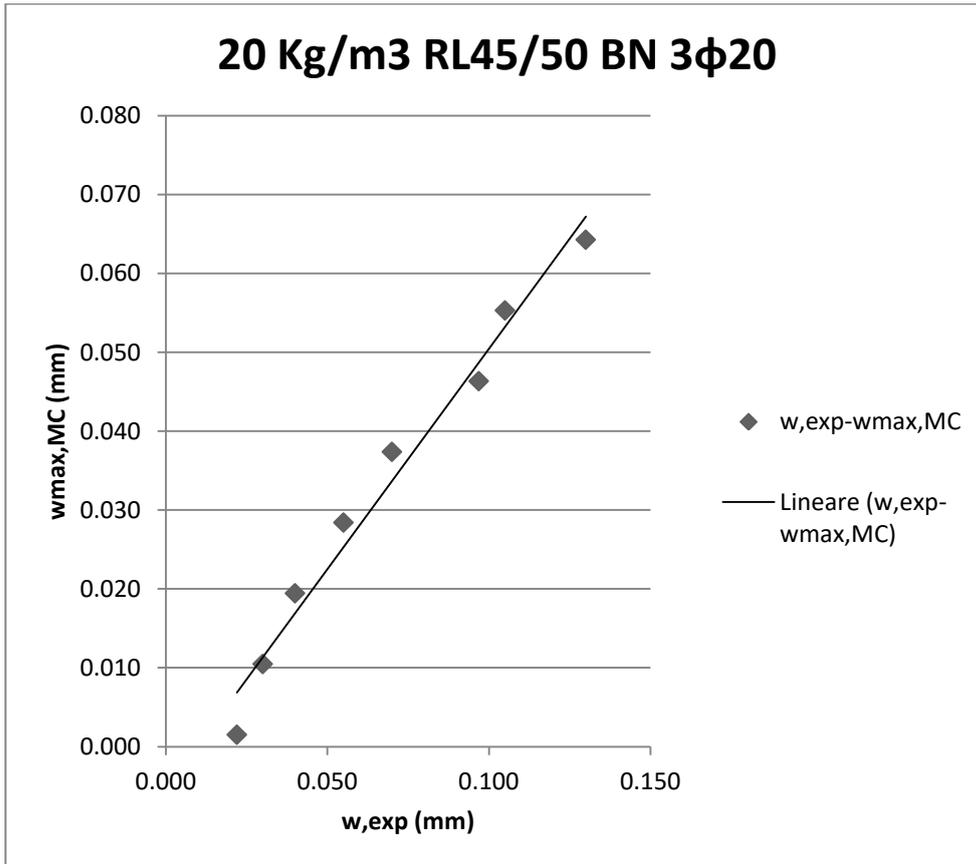


Fig.5.30 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 15

TRAVE 16	20 Kg/m <sup>3</sup> RL45/50 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
15.8	0.023	0.007
23.7	0.033	0.014
31.3	0.049	0.021
39.4	0.048	0.028
46.3	0.063	0.034
54.9	0.088	0.041
62.5	0.097	0.048
70.0	0.106	0.054
77.6	0.122	0.061
83.0	0.138	0.065
93.1	0.150	0.074

Tab. 5.17 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 16

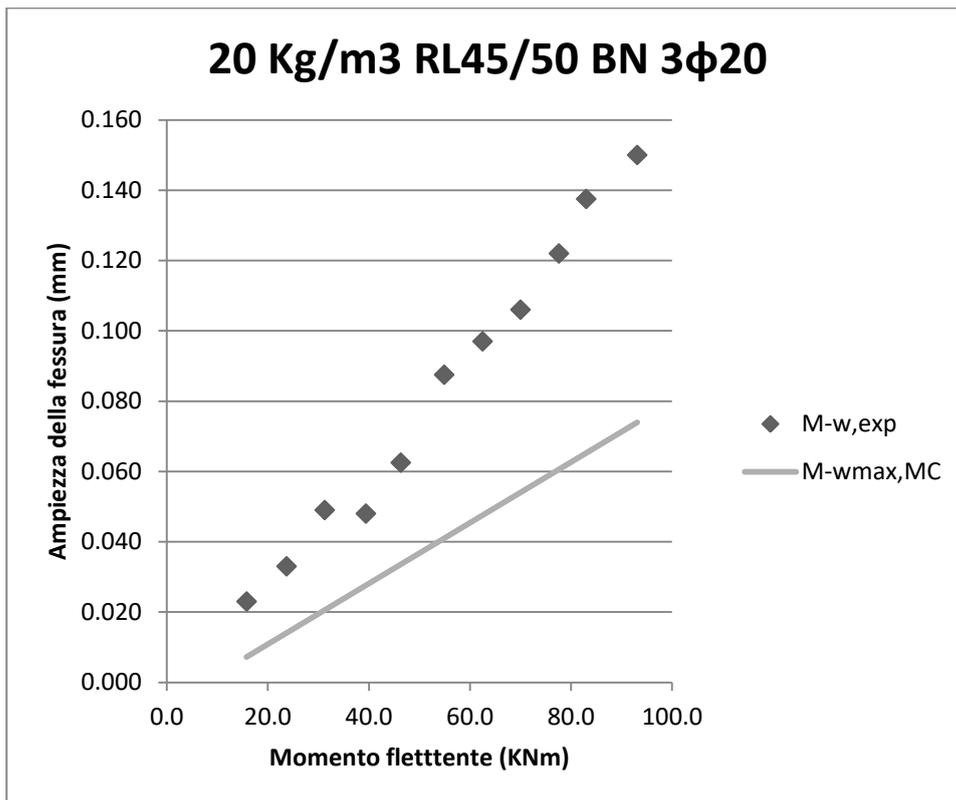


Fig. 5.31 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 16

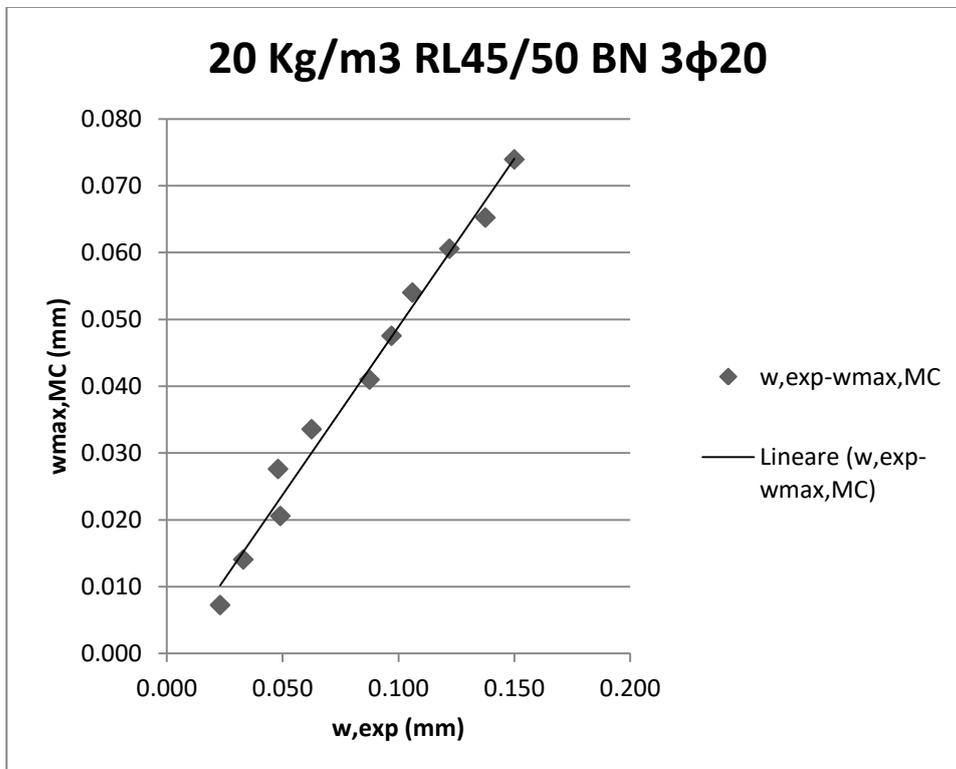


Fig.5.32 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 16

TRAVE 17	20 Kg/m <sup>3</sup> RL45/50 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
15.5	0.037	0.016
20.0	0.045	0.024
24.5	0.049	0.032
29.0	0.052	0.040
31.0	0.060	0.044
35.5	0.065	0.052
40.0	0.075	0.060
44.5	0.081	0.068
49.0	0.088	0.076
52.0	0.106	0.081
56.5	0.115	0.089
62.0	0.120	0.099
69.0	0.130	0.111
75.5	0.165	0.123

Tab. 5.18 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 17

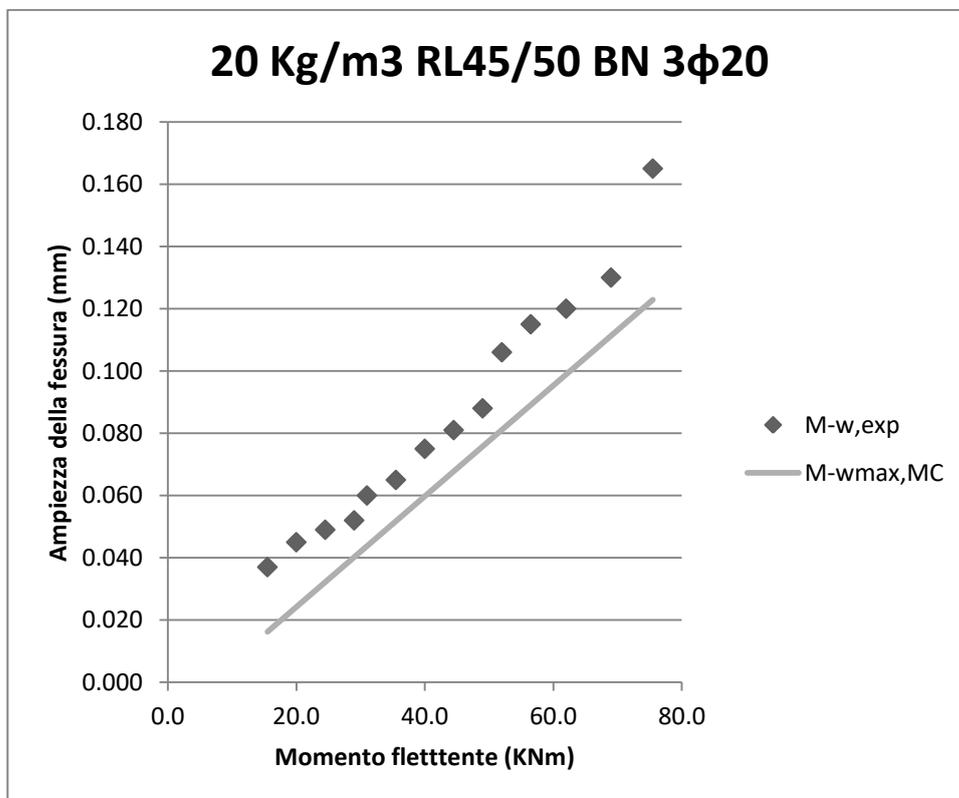


Fig. 5.33 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 17

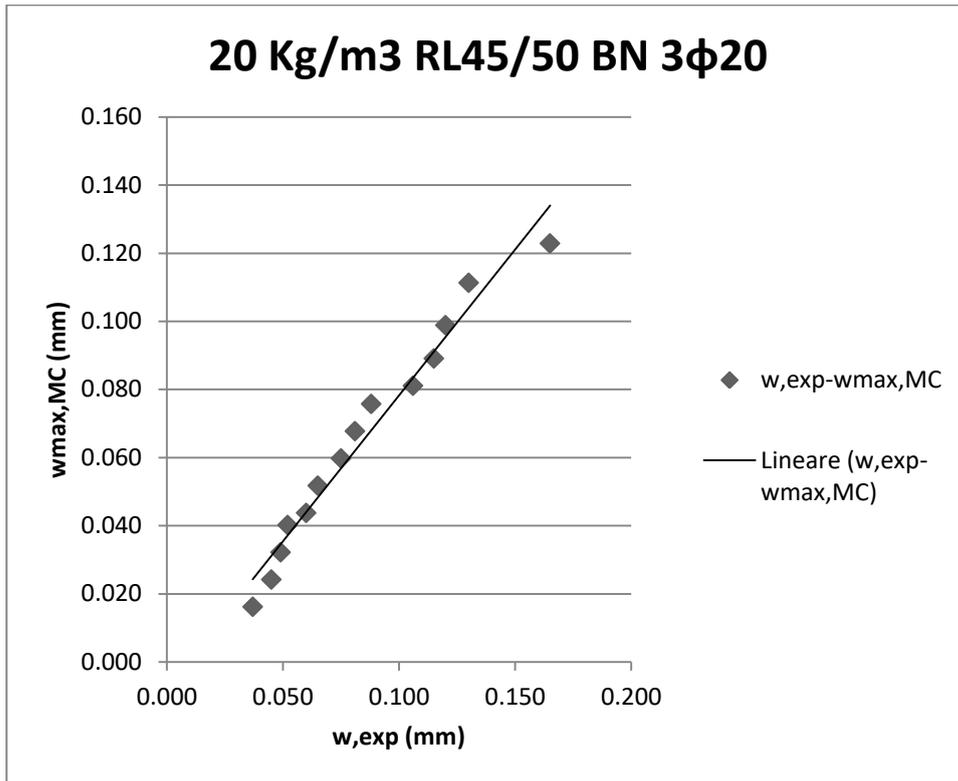


Fig.5.34 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 17

TRAVE 18	20 Kg/m <sup>3</sup> RL65/60 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
23.7	0.050	0.02
31.9	0.068	0.03
40.0	0.070	0.04
48.2	0.088	0.05
56.3	0.097	0.06
64.5	0.115	0.07
72.6	0.131	0.08
80.0	0.152	0.09
88.2	0.175	0.10
96.3	0.188	0.11

Tab. 5.19 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 18

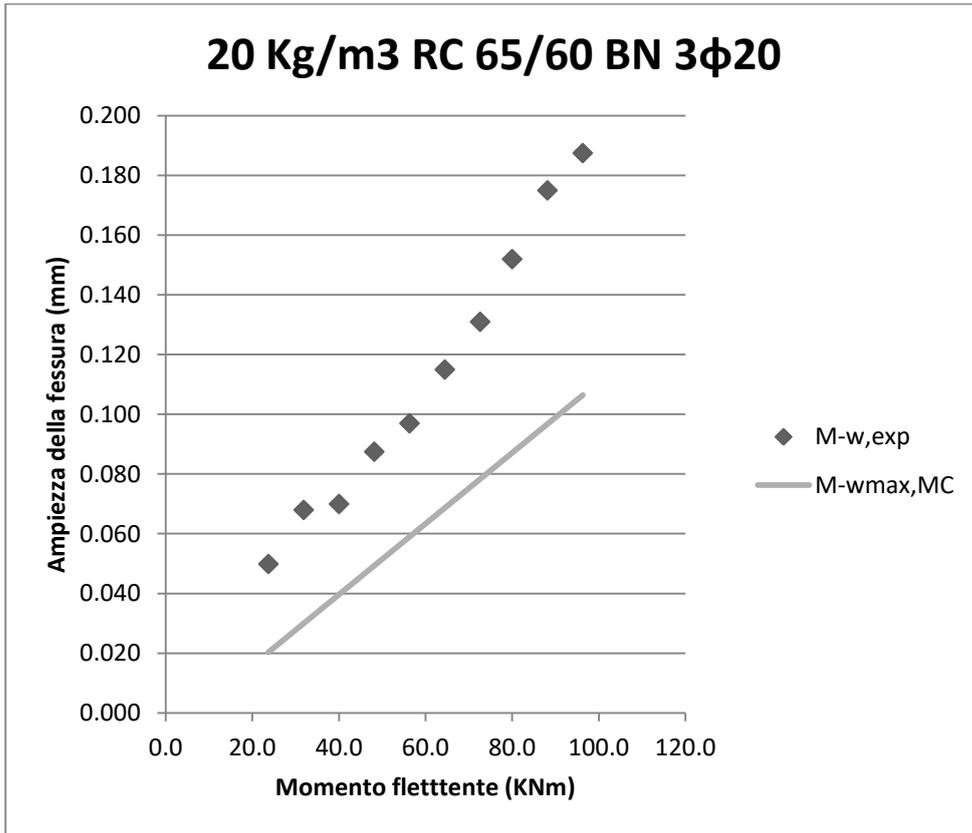


Fig. 5.35 Ampiezze di fessura teoriche e sperimentali per la trave 18

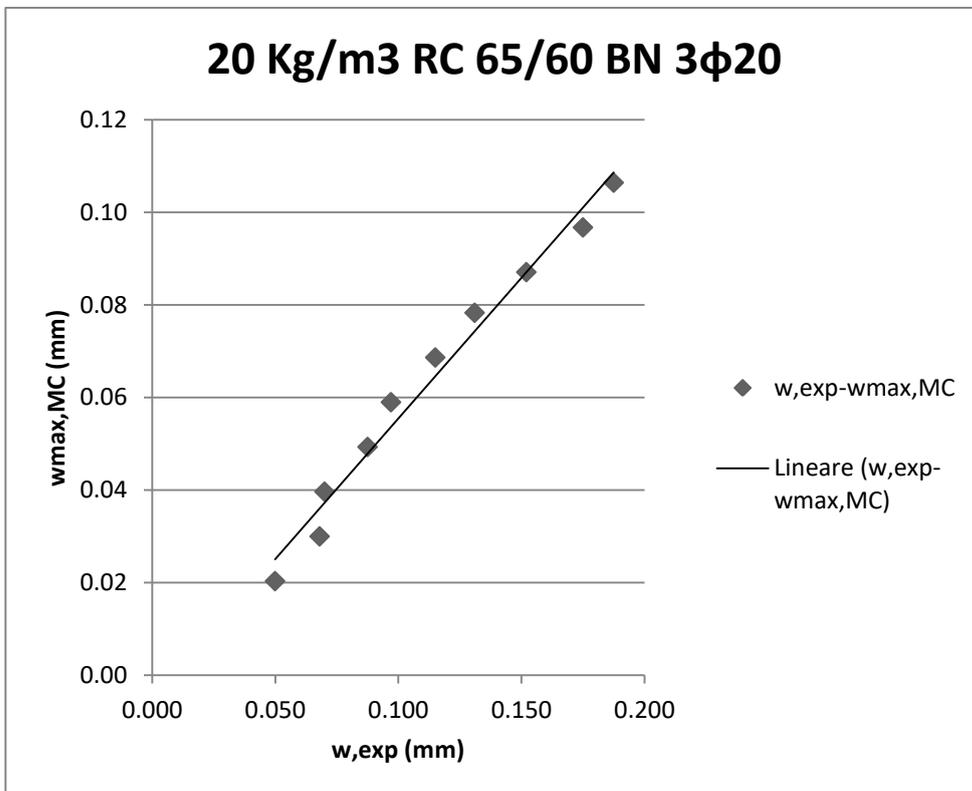


Fig.5.36 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 18

TRAVE 19	60 Kg/m <sup>3</sup> RL45/50 BN 3φ20	
M(kNm)	w,exp(mm)	wmax,MC(mm)
20	0.040	0.003
30	0.055	0.005
40	0.058	0.008
50	0.075	0.010
60	0.083	0.012
70	0.100	0.014
80	0.110	0.017
90	0.127	0.019
100	0.138	0.021

Tab. 5.20 Ampiezza di fessura teoriche e sperimentali per la trave 19

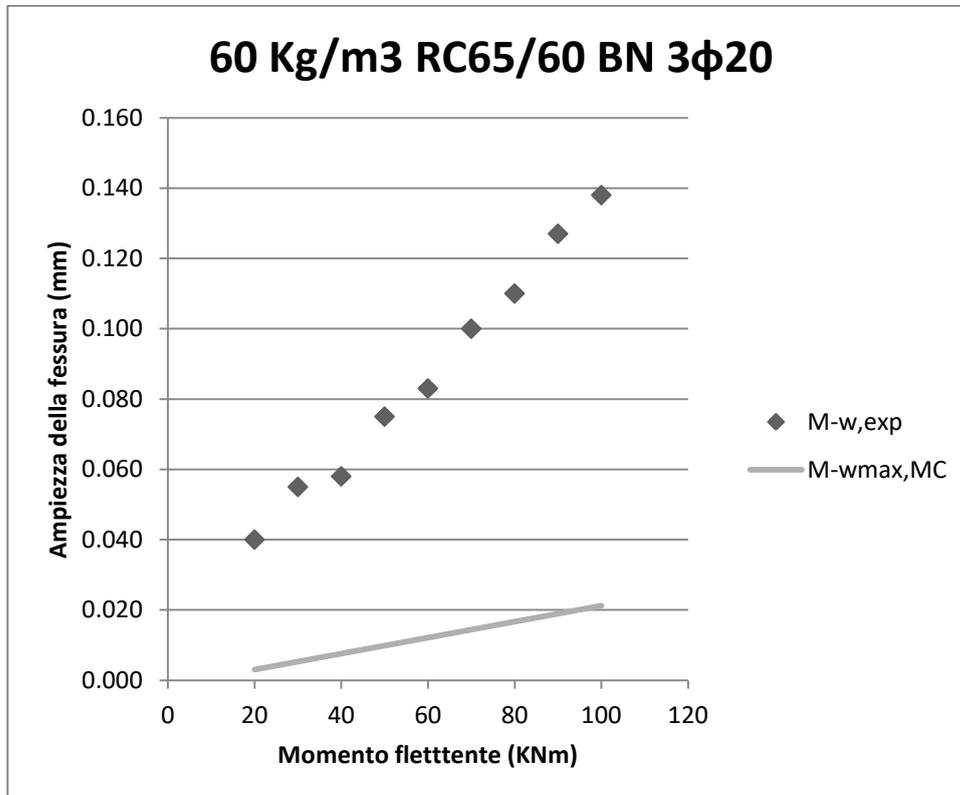


Fig. 5.37 Ampiezza di fessura teoriche e sperimentali per la trave 19

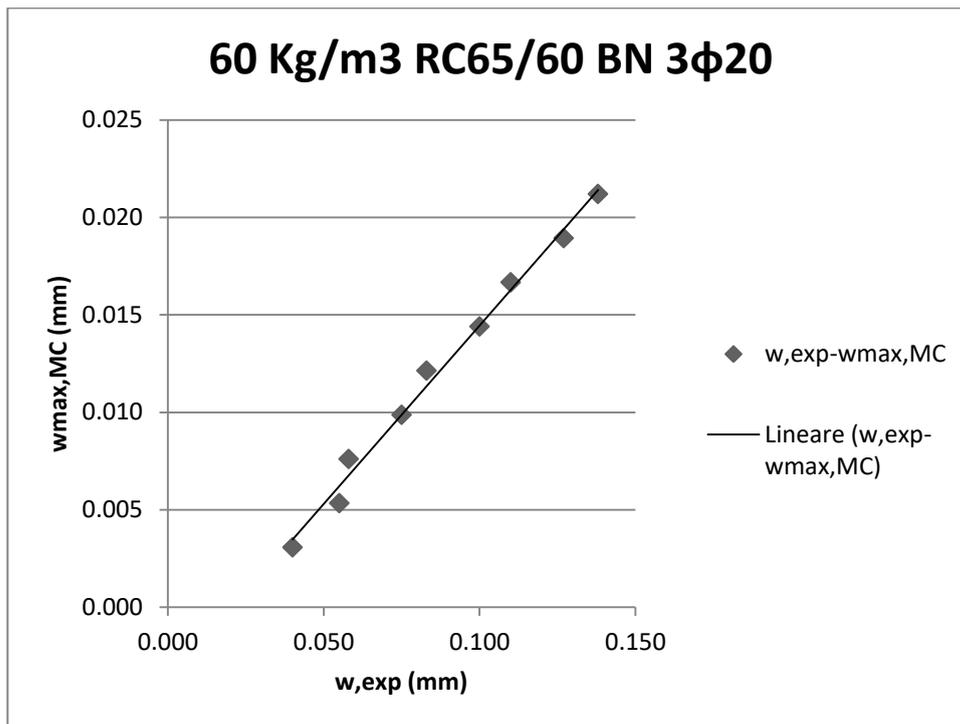


Fig.5.38 Confronto valori sperimentali e calcolati (MC) per la trave 19

## 5.2 Spaziature di fessura

Le spaziature finali delle fessure di tutte le travi sono state confrontate con i valori massimi calcolati con il Model Code2010.

TRAVE	srmax,MC (mm)	srexp,D (mm)
1	39.8	10.0
2	30.3	8.7
3	14.2	7.0
4	53.7	8.0
5	40.9	9.6
6	19.2	6.4
7	53.0	14.9
8	40.4	11.1
9	23.3	10.2
10	39.1	11.0
11	29.8	12.3
12	17.2	8.9
13	25.7	9.9
14	18.9	7.2
15	13.6	6.5
16	19.4	8.2
17	39.8	11.8
18	26.6	7.9
19	5.1	7.1

Tab. 5.21 Confronto fra le spaziature delle fessure

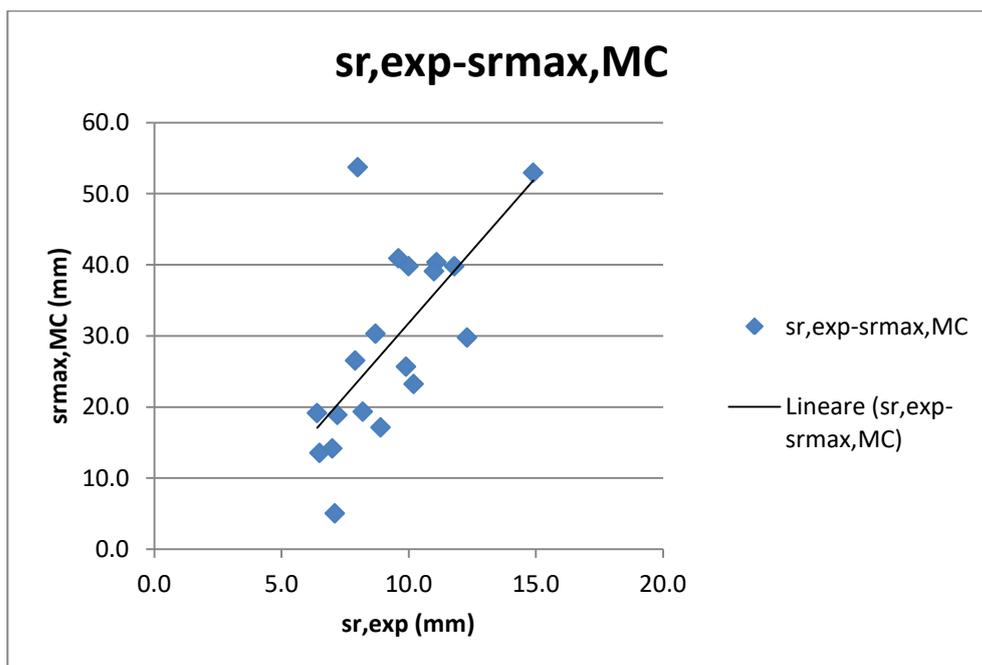


Fig. 5.39 Confronto fra le spaziature delle fessure

### 5.3 Conclusioni

I grafici di ampiezza di fessura mettono in evidenza che i risultati sperimentali sono molto simili ai valori massimi ottenuti applicando l'espressione del Model Code (espressione (2.1) del capitolo 2).

Per le travi 4,5,8 e 17 tra i valori calcolati e quelli sperimentali si hanno differenze percentuali molto basse.

Mentre per le travi 9, 10,11,12 e in modo particolare per la trave 19 si hanno delle variazioni maggiori tra i risultati.

Nella Tab. 5.21 i valori calcolati con l'approccio Model Code (espressione (2.2) del capitolo 2) fornisce valori di spaziatura più elevati rispetto a quelli ricavati sperimentalmente.



## CAPITOLO 6 : APPLICAZIONE DEL MODELLO ANALITICO

Il modello analitico descritto nel capitolo 3 è stato applicato considerando i dati sperimentali descritti nel capitolo 2 verificandone la sua utilizzabilità.

Nel caso il Modello porti a dei risultati attendibili ci si propone di effettuare un confronto con i valori ricavati sperimentalmente e con il Model Code.

### 6.1 Applicazione e Conclusioni

#### 6.1.1. Wandevalle

Le travi in esame, di cui sono noti parametri geometrici e meccanici descritti nel capitolo 2, sono state ricondotte a un tirante equivalente considerando il concetto di area efficace.

TRAVE	(h-x)/3(mm)	h/2 (mm)	2.5(h-d) (mm)	hc,ef(mm)	Ac,ef(mm2)
1	85.19	175	112.5	85.19	17037.3017
2	85.19	175	112.5	85.19	17037.3017
3	85.19	175	112.5	85.19	17037.3017
4	85.19	175	112.5	85.19	17037.3017
5	85.19	175	112.5	85.19	17037.3017

Tab. 6.1 Calcolo dell'area efficace per le 5 travi di prova

L'applicazione del metodo prevede l'ipotesi di considerare l'area dell'acciaio pari all'area delle fibre ( $A_s=A_f$ ).

Nota  $A_s$  e  $A_{c,ef}$  è stato possibile calcolare il volume percentuale di fibre:

TRAVE	$A_f=A_s(\text{mm}^2)$	$A_{c,ef}(\text{mm}^2)$	$V_f$
1	628	17037.30	0.04
2	894	17037.30	0.05
3	1020	17037.30	0.06
4	894	17037.30	0.05
5	1020	17037.30	0.06

Tab 6.2 Calcolo del Volume percentuale di fibre per ogni trave

Con i valori riportati in Tab. 6.2 e noti i valori di  $k_c$  e  $k_b$  ( definiti nel capitolo 3) si è giunti al calcolo della lunghezza di trasmissione considerando l'espressione (3.32 a) che si riporta di seguito:

$$l_{tr} = - \frac{\ln \frac{\beta-1}{\beta+1}}{\sqrt{\alpha}} \quad (6.1)$$

Con  $\beta$  e  $\alpha$  pari a:

$$\beta = \frac{p_f \cdot k_B \cdot V_f}{2A_f k_c \sqrt{\alpha}} \quad (6.2)$$

$$\alpha = \frac{p_f \cdot k_B}{A_f} \cdot \left( \frac{1}{E_s} + \frac{V_f}{E_c} \right) \quad (6.3)$$

TRAVE	$\alpha$	$\beta$
1	0.00002	0.20
2	0.00001	0.25
3	0.00001	0.27
4	0.00001	0.25
5	0.00001	0.27

Tab.6.3 Calcolo dei valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per ogni trave

Applicando la (6.1) il risultato che si ottiene mostra un argomento del logaritmo negativo cioè la lunghezza di trasmissione tende ad infinito.

Questo significa che non siamo in regime di multi fessurazione, per il quale si può applicare la formula (6.1), ma per  $l \rightarrow \infty$  significa che ci troviamo nel caso in cui si è formata un'unica fessura.

Infatti calcolando il volume critico di fibre, con l'espressione di seguito riportata:

$$V_{f,cr} = \frac{A_f \cdot 2 \cdot (k_c)^2}{E_c \cdot p_f \cdot k_b} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{(E_c^2) \cdot p_f \cdot k_b}{A_f \cdot E_s \cdot (k_c)^2}} \right) \quad (6.4)$$

Se  $V_{f,cr} \geq V_f$  allora significa che non si ha una percentuale volumetrica di fibre tale per cui si crea un regime di multi fessurazione.

Infatti, per ogni trave, confrontando  $V_f$  e  $V_{f,cr}$ :

TRAVE	$V_{f,cr}$	$V_f$
1	0.29	0.04
2	0.33	0.05
3	0.34	0.06
4	0.33	0.05
5	0.34	0.06

Tab. 6.4 Confronto tra il volume  $V_f$  e  $V_{f,cr}$  per ogni trave

Quindi i risultati ottenuti hanno messo in evidenza che con i dati sperimentali considerati, il Modello analitico non può essere utilizzato per un eventuale confronto con i valori di spaziatura ottenuti sia sperimentalmente che con il Model Code.

### 6.1.2 Dupont

Le travi in esame, di cui sono noti parametri geometrici e meccanici descritti nel capitolo 2, sono state ricondotte a un tirante equivalente considerando il concetto di area efficace.

TRAVE	(h-x)/3(mm)	h/2 (mm)	2.5(h-d) (mm)	hc,ef(mm)	Ac,ef (mm <sup>2</sup> )
1	67.6	150	75	67.6	13515.5
2	67.6	150	75	67.6	13511.5
3	67.4	150	75	67.4	13485.1
4	72.9	150	75	72.9	14589.4
5	72.9	150	75	72.9	14585.9
6	72.8	150	75	72.8	14562.9
7	71.9	150	75	71.9	14378.2
8	71.5	150	75	71.5	14302.2
9	71.6	150	75	71.6	14320.7
10	66.4	150	75	66.4	13274.2
11	65.9	150	75	65.9	13187.5
12	66.0	150	75	66.0	13208.6
13	73.6	150	75	73.6	14712.1
14	73.4	150	75	73.4	14682.8
15	73.7	150	75	73.7	14748.2
16	68.2	150	75	68.2	13646.2
17	67.6	150	75	67.6	13511.5
18	67.7	150	75	67.7	13535.0
19	67.6	150	75	67.6	13517.4

Tab. 6.5 Calcolo dell'area efficace per le 19 travi di prova

L'applicazione del metodo prevede l'ipotesi di considerare l'area dell'acciaio pari all'area delle fibre ( $A_s=A_f$ ).

Nota  $A_s$  e  $A_{c,ef}$  (Tab.6.4) è stato possibile calcolare la frazione in volume di fibre presente in ogni trave di prova:

$$V_f = \frac{A_s}{A_{c,ef}} \quad (6.5)$$

Mentre  $k_b$  si è ottenuto considerando la Fig. (3.4 b) del capitolo 3,  $k_c$  è definito invece dall'espressione fornita dal Model Code (Fig. 3.4 a).

Di seguito si riportano i valori determinati con la (6.5) per le 19 travi in esame:

TRAVE	Af=As(mm2)	Acef(mm2)	Vf
1	942	13515.5	0.07
2	1094	13511.5	0.08
3	1398	13485.1	0.10
4	603	14589.4	0.04
5	755	14585.9	0.05
6	1059	14562.9	0.07
7	603	14378.2	0.04
8	755	14302.2	0.05
9	1059	14320.7	0.07
10	942	13274.2	0.07
11	1094	13187.5	0.08
12	1398	13208.6	0.11
13	907	14712.1	0.06
14	907	14682.8	0.06
15	1059	14748.2	0.07
16	1246	13646.2	0.09
17	942	13511.5	0.07
18	1094	13535.0	0.08
19	1398	13517.4	0.10

Tab 6.6 Calcolo del Volume percentuale di fibre per ogni trave

Viene calcolata la lunghezza di trasmissione con l'espressione (6.1) in cui compaiono  $\alpha$  e  $\beta$  che di seguito riportiamo per ogni trave.

TRAVE	$\alpha$	$\beta$
1	1.46E-05	0.34
2	1.42E-05	0.37
3	1.35E-05	0.44
4	1.60E-05	0.24
5	1.50E-05	0.28
6	1.37E-05	0.36
7	1.35E-05	0.35
8	1.20E-05	0.46
9	1.14E-05	0.54
10	1.25E-05	0.49
11	1.15E-05	0.61
12	1.14E-05	0.68
13	1.58E-05	0.25
14	1.55E-05	0.27
15	1.56E-05	0.26
16	1.51E-05	0.33
17	1.46E-05	0.34
18	1.44E-05	0.36
19	1.38E-05	0.42

Tab.6.7 Calcolo dei valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per ogni trave

Applicando la (6.1) il risultato che si ottiene mostra un argomento del logaritmo negativo cioè la lunghezza di trasmissione tende ad infinito.

Questo significa che non siamo in regime di multi fessurazione, per il quale si può applicare la formula (6.1), ma per  $l_{tr} \rightarrow \infty$  significa che ci troviamo nel caso in cui si è formata un'unica fessura.

Infatti calcolando il volume critico di fibre, con l'espressione di seguito riportata:

$$V_{f,cr} = \frac{A_f \cdot 2 \cdot (k_c)^2}{E_c \cdot p_f \cdot k_b} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{(E_c^2) \cdot p_f \cdot k_b}{A_f \cdot E_s \cdot (k_c)^2}} \right) \quad (6.6)$$

Se  $V_{f,cr} \geq V_f$  allora significa che non si ha una percentuale volumetrica di fibre tale per cui si crea un regime di multi fessurazione.

Infatti, per ogni trave, confrontando  $V_f$  e  $V_{f,cr}$ :

TRAVE	$V_{f,cr}$	$V_f$
1	0.29	0.07
2	0.30	0.08
3	0.31	0.10
4	0.24	0.04
5	0.26	0.05
6	0.28	0.07
7	0.15	0.04
8	0.14	0.05
9	0.16	0.07
10	0.18	0.07
11	0.16	0.08
12	0.18	0.11
13	0.37	0.06
14	0.35	0.06
15	0.43	0.07
16	0.41	0.09
17	0.28	0.07
18	0.32	0.08
19	0.33	0.10

Tab. 6.6 Confronto tra il volume  $V_f$  e  $V_{f,cr}$  per ogni trave

Quindi i risultati ottenuti hanno messo in evidenza che con i dati sperimentali considerati, il Modello analitico non può essere utilizzato per un eventuale confronto con i valori di spaziatura ottenuti sia sperimentalmente che con il Model Code.



## CAPITOLO 7 : CONCLUSIONI

Il comportamento in campo fessurato del calcestruzzo armato fibrorinforzato è stato studiato considerando i risultati di prove sperimentali su travi soggette a flessione.

In regime fessurato, l'applicazione crescente del carico ha comportato l'aumento dell'ampiezza della fessura.

A tal proposito, si è visto che l'ampiezza della fessura può essere ridotta aggiungendo fibre di acciaio alla miscela di calcestruzzo.

Tale riduzione, si è dimostrato, risulta essere tanto più marcata quando il dosaggio di fibre viene aumentato.

In condizioni di fessurazione stabilizzata, è stato applicato il metodo di calcolo proposto dal Model Code che considera, nella formula della spaziatura massima delle fessure, il parametro di resistenza a trazione residua  $f_{F_{Tsm,MC}}$  per tener conto della presenza delle fibre.

Confrontando i valori ottenuti con l'espressione del Model Code 2010 con i valori sperimentali si è visto che i risultati teorici sono in buon accordo con i dati sperimentali.

Invece, in termini di spaziatura delle fessure, i valori di confronto risultano essere più discosti, in modo particolare, considerando i dati di Dupont.

Valutando la percentuale in volume di fibre presenti nella miscela cementizia, si è osservato un duplice comportamento:

- Per piccole percentuali volumetriche di fibre (circa 0.2-2%) il legame carico-spostamento a trazione di un calcestruzzo fibrorinforzato presenta ancora un ramo softening, ma è caratterizzato da una resistenza residua e da una maggiore tenacità.
- Per percentuali volumetriche di fibre superiori (circa 2-8%), il comportamento può diventare incrudente, grazie alla comparsa di una multi-fessurazione.

Il regime di multi fessurazione è stato studiato prendendo in considerazione il Modello Analitico sviluppato dal Prof. Ing. Fantilli.

Il modello permette il calcolo della lunghezza di trasmissione su tiranti ideali in calcestruzzo armato con rinforzo in fibre.

Considerando i dati sperimentali disponibili, si è giunti alla conclusione che non è possibile ottenere dei risultati attendibili a causa della bassa percentuale in volume di fibre presente in ogni trave di prova.

## BIBLIOGRAFIA

- Dupont, D. (2003), Modelling and experimental validation of the constitutive law ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) and cracking behaviour of steel fibre reinforced concrete. PhD-thesis, Katholieke Uni. Leuven, Belgium .
- Fib Model Code for Concrete Structures 2010. Fédération Internationale du Béton (fib), Lausanne, Switzerland. Lausanne, Switzerland .
- Vandewalle, L.(2000), Cracking behaviour of concrete beams reinforced with a combination of ordinary reinforcement and steel fibers. *Materials and Structures*, Vol. 33, No. 3, pp. 164-170.
- Istruzioni CNR-DT204/2006 CNR – Commissione di studio per la predisposizione e l'analisi di norme tecniche relative alle costruzioni .
- Fantilli A. P.,Mihashi H., Vallini P. Multiple cracking and strain hardening infiber-reinforced concrete under uniaxial tension .
- G. L. Balász e A. Borosnyói, «Models for flexural cracking in concrete: the state of the art,» *Structural Concrete*, vol. 6, n. 2, pp. 53-62, 2005.
- G. L. Balász, «Cracking Analysis Based on Slip and Bond Stresses,» *ACI Materials Journal* , pp. 340-348, July-August 1993.
- Di Prisco M. , Fibre-reinforced concrete for strong , durable and cost-saving structures and infrastructures .
- Ourjdal I., Analisi del comportamento di elementi di calcestruzzo armato in regime fessurato.
- Fantilli A.P. , Vallini P., Evoluzione del quadro fessurativo in elementi tesi di calcestruzzo armato in regime di trazione semplice .
- Empelmann M., Oettel V., Cramer J. , CRACK WIDTHS IN STEEL FIBRE CONCRETE MEMBERS WITH CONVENTIONAL REINFORCEMENT (iBMB, Division of Concrete Construction, TU Braunschweig, Germany) .
- P. G. Debernardi e M. Taliano, «An improvement to Eurocode 2 and fib Model Code 2010 method for calculating crack width in RC structures,» *Structural Concrete*, vol. 17, n. 3, pp. 365 - 376, 2016.