POLITECNICO DI TORINO



CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

UTILIZZO DEL SUB-MODELING PER ANALISI FEM DI STRUTTURE AERONAUTICHE

CANDIDATO FABIO MESSINA RELATORE PROF. MARCO GHERLONE

OTTOBRE 2019

INDICE

1	INTRODUZIONE1					
2	METODOLOGIE DI ANALISI7					
2.1	Fondamenti del Metodo degli Elementi Finiti7					
2.2	Sub-Modeling17					
2.2.1	Analisi Global-Local (2-Step)18					
2.2.1.1	Approccio agli Spostamenti19					
2.2.1.2	Approccio alle Forze					
2.2.2	Analisi Integrata (1-Step) 20					
2.2.2.1	Mesh di Transizione 21					
2.2.2.2	22 Interpolazione con RSPLINE 22					
2.2.3	Superelementi					
2.2.3.1	Direct Matrix Input					
3	UTILIZZO E CONFRONTO DELLE TECNICHE DI SUB-MODELING 29					
3.1	Definizione del Modello di Prova 29					
3.2	Analisi di Convergenza 33					
3.3	Modello Globale 39					
3.4	Modello Locale 41					
3.5	Analisi mediante Sub-Modeling 43					
3.5.1	Analisi Global-Local agli spostamenti43					
3.5.2	Analisi Integrata con mesh di transizione					

3.5.3	Analisi Integrata con RSPLINE56				
3.5.4	Analisi con Superelemento61				
3.6	Confronto dei Metodi Sub-Modeling				
4	ANALISI DI UNA PORZIONE DI PANNELLO ALARE	.69			
4.1	Definizione e Analisi del Modello Globale	. 69			
4.2	Definizione e Analisi del Modello locale	. 83			
4.3	Analisi con Superelemento	. 95			
5	CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI	103			
6	BIBLIOGRAFIA	109			

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1 – Esempio di modello FEM di un velivolo (www.mscsoftware.com) 1
Figura 2 – Schema dell'ala del Boeing 707 (https://lessonslearned.faa.gov)
Figura 3 – Boeing 777 (www.bangaloreaviation.com)
Figura 4 - Portello di ispezione del cassone alare (www.twitter.com/stu_artaviation) 4
Figura 5 – Esempio di struttura tipica
Figura 6 – Elemento tipico
Figura 7 – Schema di Analisi Statica Lineare con metodo FEM 13
Figura 8 – Visualizzazione degli elementi tipici
Figura 9 – Processo di Analisi Global-Local a 2-Step
Figura 10 – Processo di Analisi Integrata a 1-Step 20
Figura 11 – Transizione di tipo <i>h-refinement</i>
Figura 12 – Transizione di tipo <i>p-refinement</i>
Figura 13 – Collegamento tramite RSPLINE
Figura 14 – Schema di RSPLINE 22
Figura 15 - Processo di Analisi mediante Superelemento 27
Figura 16 – Dimensioni del modello di prova
Figura 17 – Dimensioni del cutout
Figura 18 – Modello di prova – Carichi e Vincoli
Figura 19 - Fattori di concentrazione di tensione per diversi tipi di cutout - Rif. [17] Fig.6.1.1 32
Figura 20 – Analisi di Convergenza – Carichi e Vincoli
Figura 21 – Model 1 – MESH SIZE 50 mm
Figura 22 – Model 2 – MESH SIZE 25 mm
Figura 23 – Model 3 – MESH SIZE 12.5 mm
Figura 24 – Model 4 – MESH SIZE 6.25 mm
Figura 25 – Model 5 – MESH SIZE 3.13 mm
Figura 26 – Model 6 – MESH SIZE 1.56 mm
Figura 27 – Analisi di Convergenza
Figura 28 – Mesh del Modello Globale
Figura 29 - Confronto degli spostamenti tra soluzione globale e soluzione accurata 40
Figura 30 – Definizione dei modelli locali
Figura 31 – Curve per confronti

Figura 32 – Soluzione del modello globale – Plot degli spostamenti	43
Figura 33 – Creazione del campo di spostamenti – Finestra di controllo	44
Figura 34 – Imposizione degli spostamenti al contorno – Finestra di controllo	44
Figura 35 – Analisi Global Local agli spostamenti – Regione 1	45
Figura 36 – Analisi Global Local agli spostamenti – Confronto con soluzione accurata – Regione 1	.46
Figura 37 – Analisi Global Local agli spostamenti – Regione 2	47
Figura 38 – Analisi Global Local agli spostamenti – Confronto con soluzione accurata – Regione 2	.48
Figura 39 – Utility di divisione degli elementi – Finestra di controllo	50
Figura 40 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Regione 1	51
Figura 41 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Confronto con soluzione accurata – Region	ne 1
	52
Figura 42 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Regione 2	53
Figura 43 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Confronto con soluzione accurata – Region	ne 2
	54
Figura 44 – Analisi Integrata con RSPLINE – Regione 1	56
Figura 45 – Analisi Integrata con RSPLINE – Confronto con soluzione accurata – Regione 1	57
Figura 46 – Analisi Integrata con RSPLINE – Regione 2	58
Figura 47 – Analisi Integrata con RSPLINE – Confronto con soluzione accurata – Regione 2	59
Figura 48 – Analisi con Superelemento – Elementi da condensare	61
Figura 49 - Creazione del Superelemento - Estratto del File di Input di NASTRAN (*.bdf)	62
Figura 50 – Estratto del File di Output del Superelemento (*.pch)	63
Figura 51 – Analisi con Superelemento – Modello Locale	64
Figura 52 - Analisi del Modello Locale con Superelemento - Estratto del File di Input di NASTR	AN
(*.bdf)	65
Figura 53 – Analisi del Modello Locale con Superelemento – Plot delle Tensioni	66
Figura 54 – Tempi di calcolo dei metodi sub-modeling	68
Figura 55 – Requisiti di risorse dei metodi sub-modeling	68
Figura 56 – NASA Common Research Model – Rif. [15]	69
Figura 57 – Boeing 777 (sinistra) e uCRM (destra) – Rif. [14]	70
Figura 58 – Modello FEM del cassone alare uCRM	72
Figura 59 – Soluzione CFD e mesh del modello CRM – Rif. [14]	73
Figura 60 – Definizione degli elementi RBE3 di caricamento nel modello uCRM	74
Figura 61 – Calcolo della risultante di carico mediante <i>Freebody</i>	74
Figura 62 – Carico Aerodinamico distribuito del modello uCRM	75
Figura 63 – Carico Aerodinamico concentrato nel modello uCRM	75
Figura 64 – Confronto deformate [m] – Carico distribuito (sopra), concentrato (sotto)	76
Figura 65 – Modello Globale del cassone alare	77
Figura 66 – Modello Globale – Plot degli spessori dei pannelli alari	77
Figura 67 – Modello Globale – Plot degli spessori dei longheroni	78
Figura 68 – Modello Globale – Plot degli spessori delle centine	78

Figura 69 - Sezioni tipiche di irrigidenti dei pannelli alari (Rif. [17] Fig. 8.3.7)	79
Figura 70 – Modello Globale – Sezione tipica del cassone alare	79
Figura 71 – Modello Globale – Carichi e vincoli	80
Figura 72 – Modello Globale – Dettaglio sui nodi vincolati	80
Figura 73 – Modello Globale – Plot Von Mises Stress – Vista Superiore	81
Figura 74 – Modello Globale – Plot Von Mises Stress – Vista Inferiore	81
Figura 75 – Esempi di portello di accesso nel cassone alare (Rif. [17] Fig. 8.3.15, 8.3.16)	83
Figura 76 – Rinforzo intorno a un foro (Rif. [17] Fig. 8.3.17)	84
Figura 77 – Modello Locale – Porzione di cassone alare	84
Figura 78 – Modello Locale – Pannello alare	85
Figura 79 – Modello Locale – Irrigidimenti e angolari	85
Figura 80 – Modello Locale – Centine	86
Figura 81 – Modello Locale – Posizioni delle giunzioni	86
Figura 82 – Modello Integrato – Vista d'insieme	87
Figura 83 - Modello Integrato - Dettaglio con collegamenti RSPLINE	88
Figura 84 – Modello Integrato – Collegamento tra irrigidimenti	88
Figura 85 - Modello Integrato - Plot dello Stress di Von Mises	89
Figura 86 – Pannello Inferiore – Plot dello Stress di Von Mises	89
Figura 87 – Irrigidimenti – Plot dello Stress di Von Mises	90
Figura 88 – Profili a L – Plot dello Stress di Von Mises	90
Figura 89 - Centine - Plot dello Stress di Von Mises	91
Figura 90 – Giunzioni – Carico Assiale	92
Figura 91 – Giunzioni – Carico di Taglio	92
Figura 92 - Analisi con Superelemento - Elementi da condensare	95
Figura 93 – Analisi con Superelemento – Dettaglio zona di interfaccia	95
Figura 94 – Analisi con Superelemento – Modello Locale	96
Figura 95 - Analisi Locale con Superelemento - Plot dello Stress di Von Mises	97
Figura 96 - Analisi Locale con Superelemento - Plot dello Stress sul Pannello	97
Figura 97 – Confronto risorse utilizzate tra metodi sub-modeling	98
Figura 98 – Visualizzazione in 3D del portello	99
Figura 99 – Visualizzazione in 3D del pannello	99
Figura 100 - Analisi con Superelemento - Modello Locale con portelli	100
Figura 101 – Plot degli spessori – Modello Locale con portelli	100
Figura 102 - Pannello Inferiore - Plot dello Stress di Von Mises	101
Figura 103 – Portelli – Plot dello Stress di Von Mises	101
Figura 104 – Portelli – Carico sugli organi di collegamento	102

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 1 – Sistema consistente di unità di misura	5
Tabella 2 – Analisi di Convergenza	7
Tabella 3 – Analisi Global Local agli spostamenti4	9
Tabella 4 – Analisi Integrata con mesh di transizione5	5
Tabella 5 – Analisi Integrata con RSPLINE6	0
Tabella 6 – Tempo di calcolo medio dei metodi sub-modeling	7
Tabella 7 – Proprietà del modello uCRM – Rif. [15]7	1
Tabella 8 – Proprietà del materiale – Al serie 7000 – Rif. [15]7	2
Tabella 9 – Ammissibili a singolo taglio dei rivetti – Rif. [18]9	3
Tabella 10 – Confronto risorse utilizzate tra metodi sub-modeling9	8
Tabella 11 – Ammissibili a singolo taglio di organi di collegamento filettati – Rif. [18]10	2

SOMMARIO

In questa tesi verranno analizzate in dettaglio le diverse tecniche di sub-modeling applicabili alle analisi agli elementi finiti (FEM). Queste tecniche permettono di ottenere dei risultati accurati in una zona delimitata di un sistema globale, minimizzando le risorse necessarie all'analisi. L'obiettivo dello studio è confrontare le diverse metodologie di sub-modeling, evidenziandone pregi e difetti di ciascuna di queste.

Nel Capitolo 1 verrà fornita una breve introduzione al lavoro svolto in questa tesi. Successivamente nel Capitolo 2 verranno trattate le metodologie di analisi utilizzate. In particolare, dopo un'introduzione al metodo degli elementi finiti, analizzandone i principi basilari sui quali si sviluppa, verranno introdotte concettualmente le diverse tecniche di sub-modeling applicabili. Tali tecniche verranno implementate nel Capitolo 3 per analizzare un semplice modello di prova. I risultati ottenuti saranno quindi messi a confronto. Il Capitolo 4 avrà l'obiettivo di analizzare in dettaglio una tipica struttura aeronautica applicando la metodologia di sub-modeling prescelta. Verrà quindi definito il modello globale della struttura e analizzato il modello locale della zona di interesse. Nel Capitolo 5 si forniranno alcune osservazioni sui risultati ottenuti e degli spunti per possibili sviluppi futuri di ricerca.

1 INTRODUZIONE

Nell'ambito del calcolo strutturale, il metodo FEM è, al giorno d'oggi, il principale mezzo di analisi di strutture complesse. Negli ultimi 50 anni, da quando il primo software FEM commerciale è stato rilasciato, il ricorso alle simulazioni con elementi finiti ha subito una crescita esponenziale, arrivando ad essere preferito ai test fisici in tutti quei casi in cui le normative di certificazione lo consentano, permettendo alle aziende il risparmio economico dei costi necessari alla costruzione di un prototipo del prodotto da sottoporre a prove di carico. Inoltre con la possibilità di conoscere in tempi brevi la risposta della struttura alle sollecitazioni, si velocizza l'intero processo di design permettendo l'ottimizzazione della struttura, una riduzione del peso e una riduzione dei costi di produzione, evitando di incorrere in comportamenti inattesi o, peggio, in cedimenti strutturali in condizioni operative.



Figura 1 – Esempio di modello FEM di un velivolo (www.mscsoftware.com)

Per raggiungere tutti questi obiettivi è necessario che la soluzione numerica fornita dalle simulazioni risulti quanto più accurata possibile, di veloce esecuzione, con un utilizzo minimo di risorse informatiche.

Una metodologia utilizzata nel campo delle simulazioni FEM per focalizzare l'attenzione su una parte più o meno piccola di una struttura complessa, ottenendo il massimo dell'accuratezza della soluzione in quella zona di interesse, è quella del submodeling, che consiste nell'analizzare in dettaglio un sotto-modello di un modello FEM globale.

Lo scopo di questa Tesi è quello di esaminare le diverse tecniche di sub-modeling, analizzando le caratteristiche proprie di ciascun metodo, dal punto di vista teorico e pratico, applicando i metodi maggiormente utilizzati su di un modello di prova.

In un secondo momento, si è scelto come caso di studio di una struttura aeronautica l'analisi di una porzione di cassone alare. Poiché i metodi di sub-modeling risultano particolarmente efficienti in presenza di discontinuità della struttura, come per esempio fori e *cutout*, si è scelto di analizzare una zona caratteristica di moltissimi velivoli da trasporto, qual è l'apertura praticata nel pannello inferiore dell'ala per consentire l'accesso e l'ispezione del serbatoio alare. In condizioni operative ciascuna di queste aperture nell'ala viene chiusa e sigillata da appositi portelli.

Nella Figura 2 è riportato lo schema dell'ala di un velivolo Boeing 707 dove sono state evidenziate le aperture di ispezione. Nella fotografia in Figura 3 sono visibili i portelli installati nel pannello inferiore di un Boeing 777. Le foto in Figura 4 mostrano i suddetti portelli.



Figura 2 – Schema dell'ala del Boeing 707 (https://lessonslearned.faa.gov)



Figura 3 – Boeing 777 (www.bangaloreaviation.com)



Figura 4 – Portello di ispezione del cassone alare (www.twitter.com/stu_artaviation)

Il software utilizzato per le analisi agli elementi finiti è solitamente diviso in tre parti:

- un pre-processore, che viene utilizzato per la definizione del modello, creando o importando una geometria e definendo la griglia degli elementi, o *mesh*, con le relative proprietà, le condizioni di carico e i vincoli ed esportando in un file di testo il modello FEM così costruito;
- un solutore, che leggendo in input il file del modello precedentemente generato, crea e risolve le equazioni di stato del sistema, fornendo in output la soluzione richiesta;
- un post-processore, che consente di analizzare i risultati ottenuti, mostrando graficamente la soluzione attraverso dei *plot* o dei grafici, oppure permettendo all'analista uno studio dei dati ottenuti tramite report testuali.

Il lavoro svolto in questa tesi è stato effettuato utilizzando il software MSC Patran 2010 in qualità di pre-processore e post-processore, e MSC Nastran 2014 come solutore.

Il sistema di unità di misura scelto per la modellazione è il sistema internazionale SI, modificato come segue in modo da avere un sistema di misura consistente, comodo alla lettura delle tensioni in termini di megapascal.

Grandezza	Unità di misura		Equivalenza
Lunghezza	mm	millimetro	$1 mm = 1 \cdot 10^{-3} m$
Massa	ton	tonnellata	$1 ton = 1 \cdot 10^3 kg$
Тетро	S	secondo	-
Forza	N	Newton	$1 N = 1 kg \frac{m}{s^2} = 1 ton \frac{mm}{s^2}$
Tensione interna	MPa	megapascal	$1 MPa = 1 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} = 1 \frac{N}{mm^2}$
Densità	ton/mm ³	-	$1\frac{ton}{mm^3} = 1 \cdot 10^{12} \ \frac{kg}{m^3}$
Accelerazione di gravità	g	g	$1 g = 9.806 \frac{m}{s^2} = 9806 \frac{mm}{s^2}$

Tabella 1 – Sistema consistente di unità di misura

2 METODOLOGIE DI ANALISI

In questo capitolo sono riportate le metodologie di analisi utilizzate in questa tesi. In particolare sono analizzati i principi alla base del Metodo degli Elementi Finiti e le diverse tecniche di sub-modeling che possono essere applicate.

2.1 FONDAMENTI DEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Il metodo degli elementi finiti (FEM – "Finite Element Method") è una metodologia comunemente utilizzata al giorno d'oggi per la ricerca di soluzioni approssimate a problemi di natura fisica di vario tipo, impiegato in una moltitudine di discipline ingegneristiche, e vede la sua principale applicaz ione nella soluzione di problemi di analisi delle strutture. Tale metodo, per le sue peculiarità, si presta ottimamente ad una implementazione informatica.

Il metodo FEM fa parte di una categoria di metodi utilizzati per discretizzare un sistema continuo, che pertanto hanno alla base un processo di suddivisione di un sistema nei suoi componenti individuali, o elementi. L'approssimazione della soluzione risiede nella limitazione di utilizzare un numero finito di questi elementi. La soluzione approssimata raggiungerà quindi al limite la soluzione reale e continua, con l'aumentare del numero di tali elementi.

Come riportato da Zienkiewicz [1], la storia del metodo risale a partire dagli anni 40, quando nel campo della meccanica dei solidi si iniziava a ricercare un'analogia tra elementi discreti e piccole porzioni di un solido continuo, considerando che il comportamento di quelle piccole porzioni si poteva analizzare in una maniera semplificata. Ed è quindi da questa analogia che viene coniato il termine di "elemento finito", da Ray W. Clough nel 1960 [2].

Successivamente, grazie all'avanzata del progresso informatico e alla diffusione crescente di computer sempre più performanti, il metodo diventa più sofisticato e nasce il primo software commerciale, NASTRAN (acronimo di NASA STRucture ANalysis), rilasciato dalla MacNeal-Schwendler Corporation (MSC) nel 1971.

Nell'utilizzo del metodo FEM per l'analisi strutturale, la struttura viene divisa in un numero finito di parti, gli elementi, ognuno dei quali ha un comportamento descritto da un numero finito di parametri. La soluzione del sistema completo deriva dall'assemblaggio delle soluzioni dei suoi elementi costituenti. Si consideri per esempio il modello rappresentato nella figura seguente, dove una struttura bidimensionale è stata discretizzata in 3 elementi, connessi ai nodi numerati da 1 a 6.

Assumendo che le caratteristiche degli elementi siano note a priori, si può dire che le forze agenti sui nodi possono essere definite in funzione degli spostamenti di questi nodi e dal carico agente sulla struttura.



Figura 5 – Esempio di struttura tipica

Prendendo in considerazione come elemento tipico il n°1, associato ai nodi 1, 2, 3 si può definire il vettore delle forze agenti sui 3 nodi,

$$\boldsymbol{q}^{1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{1}^{1} \\ \boldsymbol{q}_{2}^{1} \\ \boldsymbol{q}_{3}^{1} \end{bmatrix}$$
(2.1)

e il vettore degli spostamenti nodali, dove lo spostamento di ciascun nodo è definito dalle componenti u_x e u_y .

$$\boldsymbol{u}^{1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1}^{1} \\ \boldsymbol{u}_{2}^{1} \\ \boldsymbol{u}_{3}^{1} \end{bmatrix}$$
(2.2)

Prendendo ad esempio il nodo 3 si ha:

$$\boldsymbol{q}_{3}^{1} = \begin{bmatrix} q_{x \ 3} \\ q_{y \ 3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_{3}^{1} = \begin{bmatrix} u_{x \ 3} \\ u_{y \ 3} \end{bmatrix}$$
(2.3)



Figura 6 – Elemento tipico

Assumendo un comportamento lineare elastico dell'elemento, la relazione caratteristica di questo sarà nella forma:

$$q^1 = K^1 u^1 + f^1 \tag{2.4}$$

dove, riepilogando, q^1 rappresenta le forze nodali indotte dagli spostamenti nodali u^1 . La matrice K^1 è detta matrice di rigidezza dell'elemento 1. Il vettore f^1 rappresenta le forze nodali necessarie a bilanciare qualsiasi carico agente sull'elemento.

Nell'esempio illustrato sopra, le equazioni sono valide per un elemento con tre nodi e con due gradi di libertà per ogni nodo. In generale si può dunque scrivere:

$$\boldsymbol{q}^{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{1}^{e} \\ \boldsymbol{q}_{2}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_{m}^{e} \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{u}^{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1}^{e} \\ \boldsymbol{u}_{2}^{e} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{m}^{e} \end{bmatrix}$$
(2.5)

dove ognuno dei vettori $q_i^e \in u_i^e$ ha un numero di componenti pari ai gradi di libertà di ciascun nodo. La matrice di rigidezza dell'elemento sarà sempre una matrice quadrata:

$$\mathbf{K}^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{e} \, \mathbf{K}_{12}^{e} \cdots \, \mathbf{K}_{11}^{e} \\ \mathbf{K}_{21}^{2} \, \mathbf{K}_{22}^{2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{m1}^{e} \, \cdots \, \mathbf{K}_{mm}^{e} \end{bmatrix}$$
(2.6)

Generalizzando la relazione caratteristica si ottiene dunque:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^e \\ \boldsymbol{q}_2^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^e \, \boldsymbol{K}_{12}^e \cdots \, \boldsymbol{K}_{11}^e \\ \boldsymbol{K}_{21}^e \, \boldsymbol{K}_{22}^e & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{K}_{m1}^e \, \cdots \, \boldsymbol{K}_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^e \\ \boldsymbol{u}_2^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_m^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^e \\ \boldsymbol{f}_2^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_m^e \end{bmatrix}$$
(2.7)

Tornando alla struttura di esempio riportata in Figura 5, per ottenere la soluzione completa del sistema è necessario assemblare gli elementi costituenti e per far questo bisogna imporre le condizioni di congruenza e di equilibrio ai nodi:

1. La congruenza degli spostamenti nodali, cioè gli spostamenti di un nodo devono avere lo stesso valore per tutti gli elementi di cui quel nodo fa parte. Dunque si avrà che per ogni elemento e, $\boldsymbol{u}_1^e = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2^e = \boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_n^e = \boldsymbol{u}_n$, per i nodi che vanno da 1 a n.

È quindi possibile definire il vettore degli spostamenti nodali di tutto il sistema.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$
(2.8)

2. L'equilibrio nel nodo delle forze esterne, cioè le forze esterne applicate in un nodo devono essere equilibrate dalle forze interne trasmesse dagli elementi che concorrono in quel nodo. Così come la condizione di equilibrio era stata già soddisfatta per un singolo elemento in (2.4), è necessario adesso stabilire l'equilibrio per tutti i nodi della struttura. Le forze interne di ciascun elemento possono essere ricavate utilizzando le caratteristiche proprie del tipo di elemento. La sommatoria dei contributi di forza degli elementi concorrenti in un nodo deve essere nulla:

$$\sum_{e=1}^{m} \boldsymbol{q}_{a}^{e} = \boldsymbol{q}_{a}^{1} + \boldsymbol{q}_{a}^{2} + \dots = \boldsymbol{0}$$
 (2.9)

dove q_a^e è il contributo di forza dell'elemento *e* nel nodo *a*.

Sostituendo i contributi di forza nel nodo a, calcolati dalla relazione caratteristica in (2.7) e considerando il vettore degli spostamenti nodali (2.8), si ottiene:

$$\left(\sum_{e=1}^{m} K_{a1}^{e}\right) u_{1} + \left(\sum_{e=1}^{m} K_{a2}^{e}\right) u_{2} + \dots + \sum_{e=1}^{m} f_{i}^{e} = \mathbf{0}$$
(2.10)

In forma compatta si ha:

$$Ku + f = 0 \tag{2.11}$$

Dove le sottomatrici sono del tipo

$$K_{ab} = \sum_{e=1}^{m} K_{ab}^{e}; \qquad f_{a} = \sum_{e=1}^{m} f_{a}^{e}$$
 (2.12)

L'equazione (2.11) rappresenta un sistema completo di equazioni algebriche lineari, a coefficienti costanti. Tale sistema ammette una soluzione unica a condizione che la matrice dei coefficienti K non sia singolare, e quindi abbia un determinante diverso da zero. Dal punto di vista meccanico ciò equivale a dire che la struttura non deve essere labile. Bisogna quindi imporre le condizioni al contorno della struttura per eliminare i moti di corpo rigido.

Nel caso dell'esempio riportato in Figura 5, i nodi 1 e 6 risultano vincolati, quindi i corrispondenti spostamenti devo essere nulli. Ciò equivale a sostituire $u_1 = u_6 = 0$. Una volta imposto il numero minimo di vincoli per impedire la labilità della struttura il sistema può essere risolto.

Per semplicità il vettore degli spostamenti può essere riorganizzato come segue

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_f \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Dove \mathbf{u}_f è il vettore dei gradi di libertà liberi e **0** il vettore nullo degli spostamenti vincolati.

Di conseguenza anche il vettore delle forze nodali diventa

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Dove \mathbf{F} è il vettore delle forze nodali che lavorano sui gradi di libertà liberi e \mathbf{R} è il vettore delle reazioni vincolari, in corrispondenza degli spostamenti nulli.

In forma partizionata la (2.11) diventa:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_f \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$
(2.15)

Da cui, sviluppando, si risolve il sistema, ottenendo gli spostamenti e le reazioni vincolari.

$$K_{11}u_f + F = \mathbf{0}$$

$$K_{21}u_f + R = \mathbf{0}$$

$$(2.16)$$

$$u_f = K_{11}^{-1}[-F]$$

$$R = K_{21}^{-1}K_{11}^{-1}[-F]$$
(2.17)

Noti gli spostamenti nodali, il problema strutturale è risolto. Le forze interne agli elementi, o le tensioni, possono essere ricavate utilizzando le caratteristiche definite per ogni tipologia di elemento.

L'intero procedimento di analisi dunque può essere riassunto nello schema seguente.



Figura 7 – Schema di Analisi Statica Lineare con metodo FEM

Nell'analisi agli elementi finiti può essere utilizzata una grande varietà di elementi diversi, ognuno dei quali rappresenta un fenomeno fisico differente. La scelta del tipo di elemento da utilizzare è molto importate ai fini di simulare un corretto comportamento della struttura. Gli elementi più utilizzati si possono classificare come:

- *Elementi scalari*, o 0-D, sono elementi che non hanno definita alcuna proprietà geometrica e del materiale, non posseggono un sistema di riferimento proprio. Essi vengono utilizzati per introdurre una quantità scalare, come per esempio la rigidezza di un elemento molla nel collegamento tra due nodi nella struttura (elementi CELAS) oppure una massa concentrata (elementi CMASS). Gli elementi 0-D dunque non derivano la loro rigidezza dalle proprie caratteristiche, ma questa viene immessa dall'analista.
- *Elementi monodimensionali*, o 1-D, rappresentano delle forze che agiscono lungo una linea. A differenza degli elementi 0-D posseggono una lunghezza, proprietà del materiale come densità, modulo di Young, coefficiente di Poisson, e proprietà geometriche come sezione trasversale e momenti d'inerzia. Si distinguono in elementi asta (CROD) e trave (CBEAM). L'elemento trave è in grado di trasmettere anche un momento flettente, rispetto all'elemento asta che trasferisce solo un carico assiale. Questi elementi vengono utilizzati per modellare strutture reticolari, correnti alari o di fusoliera, irrigidimenti di una piastra.
- *Elementi bidimensionali*, o 2-D, rappresentano delle forze che variano sopra una superficie. A differenza degli elementi 1-D posseggono dunque un'area, oltre alle proprietà del materiale e proprietà geometriche come lo spessore. Si distinguono principalmente per la loro forma e numero di nodi interconnessi. I più comuni sono gli elementi triangolari con tre nodi (CTRIA3) e quadrangolari con quattro nodi (CQUAD4). Vengono utilizzati per rappresentare delle aree nel modello dove una delle tre dimensioni è molto piccola in confronto alle altre, come lo spessore in una piastra. Un utilizzo tipico è la modellazione del fasciame di ali e fusoliera.
- *Elementi solidi*, o 3-D, rappresentano uno stato di tensione generale, che varia nelle tre dimensioni. Gli elementi solidi posseggono dunque anche un volume. I più comuni sono i tetraedri (CTETRA), i cunei (CPENTA) a gli esaedri (CHEXA). Vengono utilizzati principalmente per modellare elementi

strutturali che per le loro particolarità geometriche difficilmente possono essere rappresentati utilizzando elementi trave o elementi piastra, come per esempio un monoblocco di un motore a scoppio, un albero a gomiti, un'ordinata di forza o dei supporti con geometrie particolari.



Figura 8 – Visualizzazione degli elementi tipici

Il processo di discretizzazione della struttura, e quindi la suddivisione della geometria in un numero finito di elementi, viene detto *meshing* e una mesh è dunque la griglia degli elementi. L'adeguatezza di una mesh è spesso definita in termini di convergenza. Infatti si può dire che all'aumentare del numero di elementi della mesh, la soluzione approssimata converge verso la soluzione reale.

L'aumento del numero di elementi, e dunque dei gradi di libertà del sistema, incrementa drasticamente la richiesta di risorse computazionali: il tempo di calcolo per la soluzione del sistema infatti è proporzionale al quadrato dei gradi di libertà della struttura.

Nonostante la crescita esplosiva delle tecnologie informatiche dagli anni 60 ad oggi, e la disponibilità odierna della potenza di calcolo che può derivare da una economica *workstation* oppure da un più costoso sistema di calcolatori, quale un *supercomputer* o un *cluster* di calcolatori in rete, la simulazione in dettaglio di strutture complesse risulta essere molto dispendiosa, dal punto di vista temporale e dunque economico. In maniera particolare in campo aerospaziale, dove le complesse strutture dei velivoli richiedono dei modelli analitici sempre più sofisticati, a causa delle richieste di alte performance, basso peso e dei requisiti di certificazione molto stringenti. Sempre più spesso, inoltre, nell'economia di un progetto aerospaziale, viene preferita una simulazione FEM ad un test reale. Per questi motivi l'obiettivo dei ricercatori è sempre stato rivolto all'ottenimento di soluzioni accurate evitando gli alti costi computazionali.

Le metodologie utilizzate per la riduzione dei costi e dei tempi di calcolo possono essere identificate in tre macro categorie:

- *Modellazione efficiente*; una riduzione del costo dell'analisi può essere ottenuta in prima battuta con una modellazione semplice, che riesca a cogliere gli effetti principali nella risposta della struttura, identificando le aree di maggior sforzo e facendo un uso intelligente delle simmetrie della struttura. Un classico esempio può essere quello della scelta di modellare solo un quarto di una piastra forata al centro e caricata in maniera simmetrica.
- *Strategie computazionali;* si può ottenere una riduzione significativa di tempi di calcolo introducendo nel modello di analisi alcuni comportamenti fisici della struttura noti a priori, oppure calcolati precedentemente, in modo analitico o mediante simulazione FEM. Fanno parte di questa categoria le metodologie denominate *Global-Local*.
- *Algoritmi numerici;* appartengono a questa categoria tutti gli algoritmi utilizzati per velocizzare la risoluzione delle equazioni del sistema, così come gli algoritmi per il calcolo numerico parallelo utilizzati sui multiprocessori.

2.2 SUB-MODELING

Uno degli obiettivi principali in un'analisi agli elementi finiti è quello di fornire una soluzione numerica accurata, minimizzando i tempi di calcolo e le risorse necessarie. Per ottenere questo obiettivo, tra le varie tecniche presenti in letteratura, le metodologie di sub-modeling si sono dimostrate particolarmente efficaci, quando l'accuratezza della soluzione è richiesta in una piccola parte del modello. Questo può avvenire per esempio quando l'area di interesse è localizzata in una zona caratterizzata dalla presenza di discontinuità della struttura, come fori, intagli [3], cricche [4], *cutout* [5] dove, a causa del forte gradiente di tensione in prossimità della discontinuità, è necessario avere un gran numero di elementi finiti per ottenere una soluzione accurata.

L'idea alla base dei metodi di sub-modeling è quella di utilizzare un modello più piccolo e con una mesh fine, adeguatamente dettagliata, detto *submodel* o modello locale, per ottenere la soluzione ricercata nella zona di interesse, in combinazione con un modello *coarse* o modello globale, che rappresenta la struttura con una mesh grossolana, in modo da cogliere in maniera approssimata il comportamento al di fuori della zona di interesse. Il fondamento di queste metodologie deriva dal fatto che la presenza di una qualsiasi discontinuità della struttura influenza solo localmente la risposta della struttura. Per questo motivo non è necessario utilizzare una mesh fine ovunque per ottenere la risposta globale.

La combinazione dei modelli locale e globale fornisce una soluzione decisamente più veloce rispetto ad un modello interamente dettagliato, e i risultati ottenuti nella zona di interesse sono accurati.

Il modello locale può essere analizzato separatamente dal modello globale, in un processo a 2 step, detto *Global-Local*, oppure può essere direttamente collegato al modello globale, in una *Analisi Integrata*. Un ibrido tra i processi di analisi a 2-step e 1-step è rappresentato dal metodo detto del *Superelemento*, dove il modello locale è analizzato separatamente, ma viene matematicamente collegato alla struttura di interfaccia del modello globale.

2.2.1 Analisi Global-Local (2-Step)

La metodologia Global-Local prevede l'analisi di due modelli distinti. In un primo step viene effettuata l'analisi del modello globale, con una mesh *coarse*, in modo da avere una soluzione approssimata che rappresenti la risposta globale della struttura, al di fuori della zona di interesse. Il secondo step consiste nell'analisi di dettaglio del modello locale, utilizzando i risultati ottenuti dall'analisi globale come condizioni al contorno del modello locale.

In base alle quantità estratte dal modello globale che vengono utilizzate come condizioni al contorno, si possono distinguere fondamentalmente due approcci utilizzati in letteratura, l'approccio agli spostamenti e l'approccio alle forze.

L'intero processo di analisi a 2-Step è sintetizzato nel diagramma seguente.



Figura 9 – Processo di Analisi Global-Local a 2-Step

2.2.1.1 Approccio agli Spostamenti

L'approccio agli spostamenti si basa sul fatto che il campo di spostamenti calcolato con un'analisi agli elementi finiti, i quali sono formulati a partire dagli spostamenti nodali, converge più velocemente verso la soluzione esatta rispetto al campo delle tensioni. Ciò vuol dire che grazie ad una mesh *coarse* è possibile facilmente riuscire ad ottenere una soluzione agli spostamenti abbastanza accurata. Questa soluzione può quindi essere utilizzata per imporre al modello locale delle condizioni al contorno in forma di spostamenti ed effettuare un'analisi locale, ottenendo un campo di tensioni accurato.

Dato che la taglia della mesh locale sarà differente da quella della mesh globale sarà necessario interpolare gli spostamenti estratti dai nodi del modello globale, sui nodi della mesh fine del modello locale.

L'approccio agli spostamenti è senza dubbio il più utilizzato per la sua semplicità di implementazione, e fornisce risultati accurati [6]. Tuttavia non è indicato nei casi in cui la geometria e la rigidezza dei modelli globale e locale variano, come nei casi di usura del materiale dove varia la geometria del modello locale a causa della rimozione del materiale [7], oppure nelle analisi dei contatti, a causa della rigidezza variabile della zona di contatto [8].

2.2.1.2 Approccio alle Forze

Il secondo approccio supera i limiti del precedente in quanto in questo caso vengono applicate delle forze e dei momenti ai nodi di confine del modello locale, ricavati dal modello globale.

Le forze nodali estratte dalla mesh *coarse* però non possono essere interpolate sui nodi della mesh fine come per gli spostamenti, in quanto ne verrebbe influenzata la risultante del carico applicato.

Il limite maggiore di questo approccio è rappresentato proprio dall'estrema attenzione necessaria al trasferire queste forze. Bisogna quindi definire uno speciale algoritmo per mappare le forze da applicare al modello locale. Questo può essere evitato solo nel caso in cui la mesh al confine del modello locale coincida con la mesh globale.

2.2.2 Analisi Integrata (1-Step)

In quella che si può definire analisi integrata il modello locale è direttamente inglobato in quello globale in modo da effettuare un singolo step di analisi. Il modello FEM che ne risulta avrà quindi una mesh fine nella zona di maggior interesse ed una mesh *coarse* nella parte restante della struttura.

La zona di mesh fine dovrà essere opportunamente collegata alla zona *coarse*, data la grossa differenza nelle dimensioni degli elementi. Per questo collegamento vengono utilizzate principalmente due strategie, una mesh di transizione oppure un collegamento con elementi RSPLINE.

In entrambi i casi la transizione tra la mesh *coarse* e la mesh fine va fatta in una zona abbastanza lontana dall'area di interesse e in un'area dove non ci sono gradienti di tensione importanti.

L'intero processo di analisi a 1-Step è sintetizzato nel diagramma seguente.



Figura 10 – Processo di Analisi Integrata a 1-Step

2.2.2.1 Mesh di Transizione

La transizione da una mesh *coarse* ad una mesh fine può essere fatta utilizzando una zona di mesh intermedia tra le due, che abbia la stessa tipologia di elementi ma con dimensioni variabili. Questo metodo di variazione delle densità degli elementi è anche detto *h-refinement* [1]. Un esempio di applicazione è mostrato nella figura seguente, dove la transizione è stata effettuata dividendo alcuni elementi della mesh *coarse* in elementi triangolari.





Un secondo metodo di transizione detto *p-refinement* invece consiste nell'utilizzo di elementi con un grado polinomiale più alto nella loro definizione, quali per esempio i CQUAD8 (elementi quadrangolari con 8 nodi). Questo metodo però non è raccomandato in quanto distorce la distribuzione delle tensioni negli elementi adiacenti al cambio di mesh. In generale, infatti, se si utilizzano elementi di grado superiore, è sempre consigliato collegare tutti i nodi intermedi.



Figura 12 – Transizione di tipo p-refinement

2.2.2.2 Interpolazione con RSPLINE

Un'alternativa alla mesh di transizione è rappresentata dall'interpolazione degli spostamenti dei nodi di interfaccia tramite funzioni spline. Queste interpolanti sono ampiamente utilizzate in letteratura per analisi di tipo global-local ([8], [9], [10]).

In Nastran sono disponibili nativamente degli elementi spline che possono essere usati per questo scopo. Gli elementi RSPLINE, facenti parte della categoria MPC (MultiPoint Constraint), rappresentano una interpolazione elastica che connette n nodi intermedi, o *slave* tra due nodi indipendenti, o *master*.



Figura 13 – Collegamento tramite RSPLINE

Gli spostamenti dei nodi intermedi sono interpolati dalle equazioni di una trave elastica passante attraverso questi punti. Con riferimento alla figura seguente, l'elemento RSPLINE è dunque assimilabile ad un elemento trave definito tra due nodi indipendenti A e B.



Figura 14 – Schema di RSPLINE

L'equazione della trave impone le condizioni seguenti:

• in direzione longitudinale (x) gli spostamenti e le rotazioni sono interpolati linearmente tra A e B;

$$u_x^{n_1} = \frac{x_1}{L}(u_B - u_A) + u_A$$

$$\theta_x^{n_1} = \frac{x_1}{L}(\theta_B - \theta_A) + \theta_A$$

(2.18)

• nelle direzioni trasversali (y, z) gli spostamenti sono interpolati come una curva cubica;

$$u_y^{n_1} = a_y x_1^3 + b_y x_1^2 + c_y x_1 + d_y$$

$$u_z^{n_1} = a_z x_1^3 + b_z x_1^2 + c_z x_1 + d_z$$
(2.19)

• nelle direzioni trasversali (y, z) le rotazioni sono interpolate come una curva quadratica. Questa curva è la derivata degli spostamenti, come nella trave.

$$\theta_y^{n1} = 3a_y x_1^2 + 2b_y x_1 + c_y$$

$$\theta_z^{n1} = 3a_z x_1^2 + 2b_z x_1 + c_z$$
(2.20)

Applicando le condizioni al contorno ai nodi A e B per le direzioni trasversali si ha che in direzione y:

$$u_y^A = d_y$$

$$u_y^B = a_y L^3 + b_y L^2 + c_y L + d_y$$

$$\theta_y^A = c_y$$

$$\theta_y^B = 3a_y L^2 + 2b_y L + c_y$$
(2.21)

e in direzione z:

$$u_{z}^{A} = d_{z}$$

$$u_{z}^{B} = a_{z}L^{3} + b_{z}L^{2} + c_{z}L + d_{z}$$

$$\theta_{z}^{A} = c_{z}$$

$$\theta_{z}^{B} = 3a_{z}L^{2} + 2b_{z}L + c_{z}$$
(2.22)

Risolvendo questi sistemi di equazioni si ottengono le costanti dell'elemento RSPLINE ed è possibile ottenere gli spostamenti interpolati per i nodi intermedi.

2.2.3 Superelementi

Se da un punto di vista l'analisi integrata può sembrare migliore in termini di tempi di esecuzione totali, in quanto la soluzione ricercata si ottiene direttamente al primo e unico step di analisi, bisogna tenere in conto la maggiore complessità della realizzazione di un modello integrato, che richiederà un costo maggiore all'analista in termini di ore di lavoro. Inoltre i costi computazionali richiesti all'esecuzione dell'analisi integrata sono sicuramente maggiori di quelli richiesti all'analisi del solo modello locale, a maggior ragione se sono presenti più casi di carico da calcolare.

Per superare questi limiti è possibile approcciare il metodo sub-modeling utilizzando un ibrido tra i metodi 2-step e 1-step, utilizzando i superelementi. Un superelemento è definito come un raggruppamento di elementi finiti che, una volta assemblato, viene considerato come un singolo elemento dal punto di vista del calcolo. I superelementi consentono quindi di analizzare delle strutture complesse, riducendole in dei raggruppamenti di elementi [12].

Nelle metodologie di sub-modeling il superelemento può essere utilizzato per rappresentare la parte di struttura che non è area di interesse, in modo da ridurre i gradi di libertà totali del sistema. Questo permette di condensare tutti gli elementi della struttura esterna alla zona di interesse nel gruppo di gradi di libertà dei nodi di confine del superelemento, che rappresenta quella parte di struttura, riducendo in questo modo la matrice di rigidezza.

La tecnica utilizzata per ottenere le matrici ridotte è quella della Condensazione Statica [13]:

Si consideri l'equazione di equilibrio da ridurre (2.11) e si riorganizzi il vettore degli spostamenti in modo da dividere i gradi di libertà interni ed esterni (di confine). L'obiettivo della condensazione è dunque quello di omettere tutti i gradi di libertà interni, mantenendo quelli di confine.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_o \\ \boldsymbol{u}_a \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

dove:

 u_o sono gli spostamenti interni, che verranno eliminati (omessi);

 u_a sono gli spostamenti esterni o della zona di confine del superelemento, che verranno associati alla matrice di rigidezza ridotta.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{oo} & \mathbf{K}_{oa} \\ \mathbf{K}_{oa}^{T} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{o} \\ \mathbf{u}_{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{o} \\ \mathbf{F}_{a} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$
(2.24)

Sviluppando, dalla prima riga si ricavano gli spostamenti dei gradi di libertà interni.

$$\boldsymbol{K}_{oo}\boldsymbol{u}_{o} + \boldsymbol{K}_{oa}\boldsymbol{u}_{a} + \boldsymbol{F}_{o} = \boldsymbol{0} \tag{2.25}$$

$$u_o = K_{oo}^{-1} [-F_o - K_{oa} u_a]$$
(2.26)

Dalla seconda riga della (2.24) si ha:

$$\boldsymbol{K}_{oa}^{T}\boldsymbol{u}_{o} + \boldsymbol{K}_{aa}\boldsymbol{u}_{a} + \boldsymbol{F}_{a} = \boldsymbol{0}$$
 (2.27)

Sostituendo la (2.26) in questa si ottiene:

$$\boldsymbol{K}_{oa}^{T}\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}[-\boldsymbol{F}_{o}-\boldsymbol{K}_{oa}\boldsymbol{u}_{a}]+\boldsymbol{K}_{aa}\boldsymbol{u}_{a}+\boldsymbol{F}_{a}=\boldsymbol{0}$$
(2.28)

Raccogliendo \boldsymbol{u}_a

$$[K_{aa} - K_{oa}^{T} K_{oo}^{-1} K_{oa}] u_{a} + F_{a} - K_{oa}^{T} K_{oo}^{-1} F_{o} = \mathbf{0}$$
(2.29)

Questa può essere interpretata come

$$\boldsymbol{K}_{red}\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{F}_{red} = \boldsymbol{0} \tag{2.30}$$

Dove K_{red} è la matrice di rigidezza ridotta e F_{red} il vettore dei carichi ridotto.

$$K_{red} = [K_{aa} - K_{oa}^{T} K_{oo}^{-1} K_{oa}]$$
(2.31)

$$\boldsymbol{F}_{red} = \boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{K}_{oa}^T \boldsymbol{K}_{oo}^{-1} \boldsymbol{F}_o \tag{2.32}$$

2.2.3.1 Direct Matrix Input

Il procedimento detto *Direct Matrix Input* viene descritto in [18] come un metodo per introdurre dall'esterno le matrici necessarie alla soluzione delle equazioni di stato del sistema.

Come mostrato nel paragrafo 2.1, infatti, il Metodo degli Elementi Finiti assembla le matrici strutturali a partire dalle proprietà geometriche e dei materiali, dalla connettività degli elementi, dai carichi applicati e dalle condizioni al contorno. Il comportamento della struttura è ottenuto dalla soluzione delle equazioni matriciali.

Nel caso in cui tali matrici fossero disponibili dall'esterno, senza dunque fornire tutti gli input per la modellazione, si possono richiamare nella procedura di analisi.

Questa possibilità viene in favore delle metodologie di sub-modelling in quanto è possibile, in un primo step di analisi, creare con il metodo del superelemento le matrici ridotte di rigidezza e dei carichi della struttura globale di interfaccia, chiedendole in output al solutore Nastran. Tali matrici vengono scritte in un file di testo dal programma.

In questo modo tutta la struttura globale, fuori dalla regione di interesse, viene condensata nelle sue matrici ridotte. Il modello locale con mesh fine può dunque essere analizzato individualmente, in un secondo step, con un'analisi dove viene richiamato il superelemento tramite le matrici ridotte.

Poiché il superelemento condensa la struttura nei nodi di interfaccia, tali nodi devono essere condivisi con il modello locale, dunque è necessario costruire come modello di partenza un modello integrato. Per quanto riguarda la transizione tra mesh *coarse* del modello globale e mesh fine del modello locale entrambi i metodi descritti nei paragrafi 2.2.2.1 e 2.2.2.2 sono applicabili.

Il metodo direct matrix input risulta molto veloce nell'analisi del modello locale ed inoltre consente, una volta create le matrici ridotte, di modificare il modello locale, per esempio in un processo di ottimizzazione di questo, al variare delle proprietà geometriche, con la condizione che la struttura di interfaccia condensata nel superelemento resti invariata.
Il processo di analisi con superelemento è sintetizzato nel diagramma seguente.



Figura 15 – Processo di Analisi mediante Superelemento

3 UTILIZZO E CONFRONTO DELLE TECNICHE DI SUB-MODELING

In questo capitolo i metodi di sub-modeling analizzati nel capitolo precedente sono stati applicati all'analisi di un semplice modello di prova. I risultati ottenuti mediante l'utilizzo di ciascun metodo sono stati successivamente messi a confronto.

3.1 DEFINIZIONE DEL MODELLO DI PROVA

La geometria del modello di prova è stata definita in similitudine con la porzione di pannello alare che verrà analizzata nel Capitolo 4, in modo da avere un modello generico semplificato, utile a testare le metodologie di sub-modeling descritte nel paragrafo 2.2.

Il modello di prova consiste in una piastra piana, al centro della quale è stata praticata un'apertura a capsula o *cutout*, delle dimensioni tipiche di un portello di ispezione del serbatoio di carburante integrato nell'ala (*fuel tank inspection door*).

Le dimensioni principali della piastra sono mostrate nella figura seguente. La piastra è stata definita considerando le caratteristiche del pannello alare analizzato nel Capitolo 4, dove la distanza tra gli irrigidimenti è di 300 mm e la distanza tra le centine è di 640 mm.



Figura 16 – Dimensioni del modello di prova

Le dimensioni del cutout sono mostrate nel dettaglio seguente.



Figura 17 – Dimensioni del cutout

La piastra è sottoposta ad un carico di trazione di prova definito come carico distribuito linearmente sui bordi superiore e inferiore della piastra pari a 100 N/mm, come in Figura 18 ed è vincolata in maniera isostatica. In questo modo, per semplicità di calcolo e considerando che le analisi effettuate in questa tesi restano nel campo lineare, considerando uno spessore unitario della piastra (t = 1 mm), la tensione che si avrebbe sulla piastra integra, cioè priva di cutout, è di 100 MPa.

Infatti si ha che, definito $N_y = 100 N/mm$ il carico lineare ed L la lunghezza del bordo:

$$\sigma_y = \frac{P}{S} = \frac{N_y \cdot L}{L \cdot t} = \frac{N}{t} = \frac{100 \text{ N/mm}}{1 \text{ mm}} = 100 \text{ MPa}$$

dove P è il carico totale ed S l'area della sezione della piastra.



Figura 18 - Modello di prova - Carichi e Vincoli

Lo scopo di questa prova è quindi quello di trovare il picco di tensione dovuto alla presenza del cutout. Considerando i fattori di amplificazione K_t riportati nella figura

seguente ci si aspetta un K_t maggiore di 2.3 che è quello previsto per un cutout di forma ellittica, corrispondente ad un picco di tensione superiore quindi a 230 MPa.



Figura 19 – Fattori di concentrazione di tensione per diversi tipi di cutout – Rif. [17] Fig.6.1.1

3.2 ANALISI DI CONVERGENZA

Come definito nel paragrafo 2.1 un modello FEM risulta adeguato nel caso in cui, all'aumentare degli elementi del modello e quindi al diminuire della taglia della mesh converga verso la soluzione reale. In questo paragrafo dunque si vuol trovare una soluzione adeguata del problema, in modo da poter poi confrontare le soluzioni ottenute con le tecniche di sub-modeling con questa soluzione di riferimento.

Per verificare la convergenza verso la soluzione reale sono stati effettuati diversi step consecutivi di analisi dimezzando via via la taglia della mesh. Il parametro utilizzato in questa analisi è la tensione di picco ottenuta in prossimità del cutout (il Massimo Principale è stato preso in considerazione).

Con l'obiettivo di velocizzare i tempi di analisi si è sfruttata la simmetria della piastra, analizzando un quarto di questa, imponendo le condizioni al contorno per rispettare tale simmetria, come mostrato nella figura seguente.



Figura 20 – Analisi di Convergenza – Carichi e Vincoli

Per ogni step di analisi sono stati estratti lo stress Massimo Principale e gli spostamenti, riportati nelle figure seguenti. Si può notare come la soluzione degli spostamenti sia già particolarmente accurata fin dal primo step.



Figura 21 – Model 1 – MESH SIZE 50 mm



Figura 22 – Model 2 – MESH SIZE 25 mm



Figura 23 – Model 3 – MESH SIZE 12.5 mm



Figura 24 – Model 4 – MESH SIZE 6.25 mm



Figura 25 – Model 5 – MESH SIZE 3.13 mm



Figura 26 – Model 6 – MESH SIZE 1.56 mm

Estrapolando il picco di tensione in prossimità del foro ottenuto in ogni step di analisi e definendo il seguente indice di errore del modello j rispetto al modello precedente j-1,

$$\Delta e_{j-1} = \frac{\sigma_{peak}(j) - \sigma_{peak}(j-1)}{\sigma_{peak}(j-1)}$$
(3.1)

la convergenza alla soluzione esatta è stata raggiunta già con una taglia della mesh pari a 3 mm. I risultati ottenuti da questa analisi di convergenza sono riportati nella tabella seguente.

Model j	mesh size [mm]	Max Princ [MPa]	Δe_{j-1}	Grid points	Run time [s]	Error
1	50	195	-	316	2.4	20.7%
2	25	218	11.8%	1207	2.7	11.4%
3	12.5	238	9.2%	4649	3.2	3.3%
4	6.25	245	2.9%	18219	5.5	0.4%
5	3.13	246	0.4%	72476	17.4	0.0%
6	1.56	246	0.0%	289460	146.2	

Tabella 2 – Analisi di Convergenza

La soluzione del modello 6, con dimensione della mesh di 1.56 mm, è stata in ogni caso considerata come soluzione accurata del problema ed è presa a riferimento nei paragrafi successivi per i confronti con le soluzioni approssimate dei metodi di submodeling.

Dividendo il picco di tensione ottenuto per la tensione di riferimento pari a 100 MPa si ricava un fattore di concentrazione della tensione uguale a $K_t = 2.46$, in linea con quanto evidenziato in Figura 19.



Figura 27 – Analisi di Convergenza

3.3 MODELLO GLOBALE

Il modello globale della piastra definita nel paragrafo 3.1 è stato realizzato con elementi CQUAD4 con dimensioni tipiche di 150 mm lontano dal cutout. Con una transizione la taglia della mesh è stata ridotta di 1/3 a 50 mm al contorno del cutout. I vincoli e i carichi sono gli stessi riportati in Figura 18.



Figura 28 – Mesh del Modello Globale

Lo scopo del modello globale è quello di fornire velocemente una risposta globale del comportamento del sistema, principalmente al di fuori della zona di interesse. Come mostrato nella figura seguente, il campo di spostamenti ottenuto con il modello globale rappresenta con buona approssimazione la soluzione di riferimento ottenuta nel paragrafo precedente.



Figura 29 – Confronto degli spostamenti tra soluzione globale e soluzione accurata

3.4 MODELLO LOCALE

Nella definizione del modello locale sono state evidenziate due regioni nella figura seguente. La regione 1 coincide con l'area di interesse, delimitata nel pannello alare dagli irrigidimenti e dalle centine. L'analisi Global-Local è stata effettuata inizialmente generando un modello locale su questa regione. In un secondo momento ci si è allontanati maggiormente dal cutout, costruendo il modello locale nella regione 2, che è più grande della regione 1 delle dimensioni di un elemento *coarse*.



Figura 30 – Definizione dei modelli locali

Tutti i modelli locali sono stati creati con una taglia della mesh pari a 5 mm, che rappresenta un buon compromesso tra velocità di calcolo e accuratezza della soluzione, secondo quanto riportato in Tabella 2, con un errore sicuramente inferiore allo 0.4%.

All'interno della zona di interesse sono state definite tre curve, lungo le quali estrarre dei risultati caratteristici, utili al confronto della risposta ottenuta con i vari metodi di sub-modeling rispetto alla soluzione di riferimento del paragrafo 3.2. Le curve sono mostrate nella figura seguente; la curva 1 si trova al confine della zona di interesse, la curva 3 in corrispondenza del picco di tensione al cutout e la curva 2 è posta in posizione intermedia alle altre curve.



Figura 31 – Curve per confronti

3.5 ANALISI MEDIANTE SUB-MODELING

3.5.1 Analisi Global-Local agli spostamenti

Tra le metodologie di analisi Global-Local descritte nel paragrafo 0 si è scelto di utilizzare l'approccio agli spostamenti, per la semplicità di implementazione in MSC Patran/Nastran.

L'approccio agli spostamenti descritto nel paragrafo 2.2.1.1 necessita inizialmente della soluzione agli spostamenti del modello globale. Il plot del campo degli spostamenti è riportato nella figura seguente. In questa sono anche evidenziati i contorni dei modelli locali esaminati, in accordo alla Figura 30.



Figura 32 - Soluzione del modello globale - Plot degli spostamenti

Per poter imporre gli spostamenti del modello globale al contorno del modello locale è necessaria una interpolazione. Utilizzando la funzione *Fields* di Patran è possibile definire un campo di spostamenti continuo a partire dal plot di Figura 32. Dopo aver plottato gli spostamenti si procede creando il *Field* con le impostazioni mostrate nella figura seguente.

Action: Create	
Object: Spatial •	FEM Field Definition
Method: FEMT	C Discrete Continuous
Existing Fields	Field Type
	 Scalar Vector
	Mesh/Results Group Filter
	 Current Viewport
	Select Group
	default group
< >	< · · · ·
Field Name	
Displacements_global_model	[Options]

Figura 33 – Creazione del campo di spostamenti – Finestra di controllo

Ottenuto il campo di spostamenti, si può procedere applicando il *Field* come spostamenti imposti ai nodi di confine del modello locale.

Action: Croate	Load/BC Set Scale Factor
Cleate	1.
Object: Displacement •	,
Type: Nodal -	Translations <t1 t2="" t3=""></t1>
Option: Standard -	f:Displacements_global_model
	Rotations <r1 r2="" r3=""></r1>
Local analysis	Trans Phase <tn1 tn2="" tn3=""></tn1>
Type. Oldie	Rotation Phase <rp1 rp2="" rp3=""></rp1>
Red	< · · ·
Existing Sets	Spatial Fields
Imposed_bc_displ	Displacements_global_model
spc1.2	<u> </u>
spc1.3	< >
	EEM Dopondont Data
	Analysis Coordinate Frame
	7 maryors oboramater rame
	Coord 0
< >	Coord 0
New Set Name	OK Reset
New Set Name imposed_bc_displ	OK Reset
New Set Name imposed_bc_displ	OK Reset

Figura 34 – Imposizione degli spostamenti al contorno – Finestra di controllo

I risultati ottenuti con questo approccio sono mostrati in Figura 35 per il modello locale creato nella Regione 1 e in Figura 37 per quello creato nella Regione 2. In ognuna delle figure sono riportati: la mesh del modello locale, il plot degli spostamenti e il plot dello stress Massimo Principale, dove è evidenziato il picco di tensione al cutout.

L'andamento degli spostamenti e della tensione sono inoltre stati estratti e confrontati con la soluzione accurata lungo le tre curve definite in Figura 31, all'interno della regione di interesse.



Figura 35 – Analisi Global Local agli spostamenti – Regione 1



Figura 36 – Analisi Global Local agli spostamenti – Confronto con soluzione accurata – Regione 1

Il picco di stress ottenuto è pari a 238 MPa, con un errore dunque del 3.4% rispetto ai 246 MPa della soluzione accurata. Dalle curve mostrate in Figura 36 si nota una generale sottostima degli spostamenti e un andamento delle tensioni irregolare per quanto riguarda la curva 1.

Questi errori sono principalmente dovuti alle dimensioni del modello locale, che è stato ritagliato troppo vicino alla discontinuità causata dal cutout. Si procede quindi analizzando il modello locale sulla regione 2.



Figura 37 – Analisi Global Local agli spostamenti – Regione 2



Figura 38 – Analisi Global Local agli spostamenti – Confronto con soluzione accurata – Regione 2

Si nota subito un sostanziale miglioramento nella risposta in termini di tensione. Le curve 1 e 2 ricalcano perfettamente la soluzione di riferimento. La curva 3 che termina

sul cutout mostra una leggerissima sottostima; il picco di stress ottenuto è pari a 243 MPa, con un errore dunque del 1% rispetto ai 246 MPa della soluzione accurata.

La soluzione del modello locale sviluppato sulla regione 2 corregge dunque gli errori dell'approccio precedente e fornisce una soluzione approssimata accettabile del problema.

La tabella seguente mostra un riepilogo dei risultati ottenuti. Confrontando i tempi di calcolo impiegati si nota il notevole risparmio ottenuto.

Analysis	mesh size [mm]	Max Princ [MPa]	Grid points	Run time [s]	Error
Region 1	5.0	238	5198	3.2	3.4%
Region 2	5.0	243	20682	6.2	1.2%
Ref.Solution	1.56	246	289460	146.2	

Tabella 3 – Analisi Global Local agli spostamenti

3.5.2 Analisi Integrata con mesh di transizione

Il metodo di analisi integrato descritto nel paragrafo 2.2.2.1 richiede la definizione di una mesh di transizione tra il modello locale a mesh fine (taglia 5 mm) e il modello globale con mesh coarse (taglia 150 mm). Per creare la mesh di transizione si può optare per la suddivisione in più parti degli elementi coarse, utilizzando l'utility *Break Elements* di Patran che fornisce dei pattern di divisione degli elementi, oppure si può creare una mesh ex novo, posizionando i *mesh seed* sui nodi del modello locale in modo da avere la coincidenza dei nodi al contorno ed in seguito poter effettuare l'*equivalence* dei nodi.

È chiaro dunque che viene richiesto all'analista un costo elevato in termini di ore di lavoro per la realizzazione della mesh di transizione, tanto più è complesso il modello locale da collegare al modello globale.



Figura 39 – Utility di divisione degli elementi – Finestra di controllo

I risultati ottenuti con questo approccio sono mostrati in Figura 40 per il modello locale creato nella Regione 1 e in Figura 42 per quello creato nella Regione 2. In ognuna delle figure sono riportati: la mesh del modello integrato, il plot degli spostamenti e il plot dello stress Massimo Principale, dove è evidenziato il picco di tensione al cutout.

L'andamento degli spostamenti e della tensione sono inoltre stati estratti e confrontati con la soluzione accurata lungo le tre curve definite all'interno della regione di interesse, mostrate in Figura 31.



Figura 40 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Regione 1





Figura 41 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Confronto con soluzione accurata – Regione 1

La risposta ottenuta con il metodo integrato con mesh di transizione risulta particolarmente accurata già con l'analisi del modello locale sulla regione 1. Questo poiché la mesh di transizione garantisce una perfetta e naturale continuità tra il modello globale e il modello locale, a discapito del tempo necessario alla realizzazione di un modello integrato.

Il picco di stress ottenuto è pari a 245 MPa, con un errore dunque dello 0.4% rispetto ai 246 MPa della soluzione accurata. Nonostante la soluzione ottenuta sia già ampiamente accettabile è stato sviluppato anche il modello sulla regione 2 per confronto con gli altri metodi di sub-modeling.



Figura 42 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Regione 2





Figura 43 – Analisi Integrata con mesh di transizione – Confronto con soluzione accurata – Regione 2

Se già la soluzione precedente era accettabile, adesso tutte le curve si sovrappongono alla soluzione di riferimento. Lo stress massimo ottenuto è rimasto invariato.

La tabella seguente mostra un riepilogo dei risultati ottenuti. Confrontando i tempi di calcolo impiegati si nota il notevole risparmio ottenuto.

Analysis	mesh size [mm]	Max Princ [MPa]	Grid points	Run time [s]	Error
Region 1	5.0	245	8184	3.9	0.4%
Region 2	5.0	245	25428	7.7	0.4%
Ref.Solution	1.56	246	289460	146.2	

Tabella 4 – Analisi Integrata con mesh di transizione

3.5.3 Analisi Integrata con RSPLINE

Un metodo più veloce per realizzare il collegamento tra un modello locale ed il modello globale utilizza gli MPC di tipo RSPLINE, come è stato descritto nel paragrafo 2.2.2.2. Con gli RSPLINE infatti non è necessario creare una zona di transizione per dare continuità al modello, ma il modello locale e il modello globale restano due entità separate e discontinue ai bordi. Il collegamento tra i nodi indipendenti del modello globale e i nodi dipendenti del modello locale viene assicurato dall'elemento RSPLINE mediante interpolazione degli spostamenti. I risultati ottenuti per il modello sulla regione l sono mostrati nella figura seguente.



Figura 44 – Analisi Integrata con RSPLINE – Regione 1

Dal plot delle tensioni è evidente l'effetto provocato ai bordi del modello locale dalla presenza degli RSPLINE, che inducono delle tensioni non realistiche sui nodi dipendenti. A maggior ragione, quindi, facendo uso di questa tecnica di sub-modeling è necessario posizionare la transizione lontano dalla zona di interesse.





Figura 45 – Analisi Integrata con RSPLINE – Confronto con soluzione accurata – Regione 1

L'effetto di bordo è particolarmente marcato nella curva 1 dei grafici di Figura 45, che si trova proprio sul bordo superiore del modello locale. Da notare come le curve 2 e 3, lontane dai bordi, riproducono perfettamente lo stato tensionale della soluzione di riferimento. Infatti guardando esclusivamente lo stress massimo ottenuto (248 MPa) che sovrastima leggermente lo stress di riferimento (246 MPa) con un errore dello 0.8%, la soluzione sarebbe già accettabile.

Con lo scopo di allontanare gli effetti di bordo è necessario analizzare il modello locale sviluppato sulla regione 2. I risultati ottenuti sono mostrati nella figura seguente.



Figura 46 – Analisi Integrata con RSPLINE – Regione 2





Figura 47 – Analisi Integrata con RSPLINE – Confronto con soluzione accurata – Regione 2

Dal plot delle tensioni di Figura 46 è sempre evidente l'effetto degli RSPLINE ai bordi del modello locale, ma questo rimane fuori dalla zona di interesse. Tutte le curve dei grafici in Figura 47 infatti riproducono perfettamente lo stato tensionale della

soluzione di riferimento e sovrastimano leggermente gli spostamenti. Lo stress massimo ottenuto (247 MPa) riduce l'errore allo 0.4%.

La tabella seguente mostra un riepilogo dei risultati ottenuti. Confrontando i tempi di calcolo impiegati si nota il notevole risparmio ottenuto.

Analysis	mesh size [mm]	Max Princ [MPa]	Grid points	Run time [s]	Error
Region 1	5.0	248	5366	3.3	0.8%
Region 2	5.0	247	20790	6.6	0.4%
Ref.Solution	1.56	246	289460	146.2	

Tabella 5 – Analisi Integrata con RSPLINE

3.5.4 Analisi con Superelemento

Il metodo del superelemento consente di ridurre gli elementi del modello globale, in una analisi integrata, nelle matrici di rigidezza ridotte ai nodi di interfaccia, come mostrato nel paragrafo 2.2.3. Prendendo a riferimento l'analisi integrata con RSPLINE della Regione 2, nel paragrafo precedente, è quindi possibile condensare in un superelemento tutti gli elementi mostrati nella figura seguente.



Figura 48 – Analisi con Superelemento – Elementi da condensare

Utilizzando uno dei metodi di MSC Nastran per la definizione dei superelementi descritti in [19], detto *External Superelements*, il superelemento viene processato e rilasciato in output in un file di testo, in modo da poter essere utilizzato in un secondo momento. In questa maniera si ottengono le matrici di rigidezza ridotte che possono essere richiamate nell'analisi del modello locale.

Per creare il superelemento si procede creando un file di Input per Nastran (*.bdf) dove sono definiti esclusivamente gli elementi da condensare, mostrati in Figura 48. Nell'estratto di questo file riportato in Figura 49, sono messe in evidenza le stringhe di comando necessarie alla definizione del superelemento. Nel dettaglio si ha che:

- EXTSEOUT, richiede in output l'external superelement;
- STIF, LOADS, sono le matrici di rigidezza e il vettore dei carichi nodali, rispettivamente, calcolate sui nodi di confine;

- EXTID=1, è l'indice del superelemento, poco importante in questo caso visto che se ne definisce solo uno;
- DMIGPCH, richiede le matrici in output in formato DMIG, nello standard NASTRAN (file punch con estensione .pch).

I nodi di confine del superelemento sono elencati nel set di analisi (ASET1). Questi sono i nodi di interfaccia con il modello locale.

```
$ NASTRAN input file created by the Patran 2010 input file translator
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
S Linear Static Analysis, Database
SOL·101
CEND
$ TITLE = MSC.NASTRAN JOB CREATED ON 23-MAY-19 AT 16:17:52
ECHO · = · NONE
$$ · ----- · $$
$ External Superelement Creation Specification
EXTSEOUT (STIF, LOADS, EXTID=1, DMIGPCH)
$$ ------ $$
SUBCASE 1
SUBTITLE=DEFAULT
\cdots SPC \cdot = \cdot 4
\cdots LOAD \cdot = \cdot 5
····DISPLACEMENT (PLOT) =ALL
BEGIN BULK
$ The boundary points of the external superelement are specified by ASET1
ASET1 · · 123456 · 106 · · · 107 · · · 108 · · · 112 · · · 113 · · · 116 · · · 132
----- · SS
PARAM · · · · POST · · · -1
PARAM · · · PRTMAXIM · YES
```

Figura 49 – Creazione del Superelemento – Estratto del File di Input di NASTRAN (*.bdf)

Processando tramite Nastran si ottiene dunque in output un file .pch contenente le matrici richieste. Eliminando dal file le informazioni non necessarie, vanno mantenute esclusivamente la matrice di rigidezza detta KAAX e il vettore dei carichi chiamato PAX, mostrati in un estratto nella figura seguente.
1	DMIG···	KAAX	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · 6 ·	· · · · · 1 · ·	0	
2	DMIG* · ·	KAAX			····106··	• • • • • • • • • • • • 1	
3	*				1 . 3	.760165604E+04	
4	DMIG* ···	KAAX					
5	*				1-3	.722165232E+02	
6	*				5	128309598E+04	
7	DMTC*	KVVA			106	.12030535001.04	
· ·	*	NAAA	106		100	07007000+01	
0	DMTCH		100		100	.0722723706+01	
10	DMIGA	NAAA	100		2.0	0500001007 01	
10			106			.9596981698-01	
11	*				4 . 7	.466667550E+04	
12	DMIG* ···	KAAX			106	5	
13	* · · · · · ·					.505418600E+01	
14	* · · · · · ·				4-1	.481537961E+02	
15	* · · · · · ·				5 . 1	.448619853E+04	
16	DMIG* · ·	KAAX			····106··	б	
17	* · · · · · ·		·····106·		1–5	.484101665E+00	
18	*		···· 1 06·		· · · · · · 2 · 4	.067886964E+02	
19	* · · · · · ·		•••••••106•		· · · · · · 6 · 1	.306407477E+05	
20	DMIG* ···	KAAX				1	
21	*				1–1	.186716052E+04	
22	*		106 .		2 . 6	.182161146E+03	
3770	* • • • • •		175		· · · · · · · 2 ·	4.766247395E+01	
3771	*		175		· · · · · · · 6–	5.901867572E-01	
3772	*				• • • • • • • 1 •	2.146149934E+02	
3773	*					1.145554063E+02	
3774	*				6–	1.137914835E+00	
3775	*				1_	9.962559493E+01	
3776	*					2 178130693E+02	
3777	*				6-	1 158974400E+00	
2770	*				1 .	0 2445272268101	
2770	+		101		1	0 4006720158101	
2700	*		101			9.409072013E+01	
3760	DATO					1.9595663496+05	1
3781	DMIG	PAX	0				T
3782	DMIG* ·	· · PAX			· · · · · · · 1 ·	0	
3783	*				· · · · · · 1 ·	3.443166361E+03	
3784	*				2 .	2.214669710E+03	
3785	*				· · · · · · · 6 ·	3.192567715E+01	
3786	* · · · · ·				· · · · · 1 ·	3.662101340E+03	
3787	* • • • • •				2-	3.637978807E-12	
3788	* • • • • •				· · · · · · · 6–	3.907985047E-14	
3789	* · · · ·				· · · · · · 1 ·	2.087425744E+03	
3790	* • • • • •		···· 10 8		• • • • • • • • 2 •	4.988158846E+03	
3791	* • • • • •		···· 1 08		· · · · · · · 6 ·	7.178178320E+01	
3792	*		112		• • • • • • • 1 •	2.501110430E-12	
3831	*				1-	3.443166361E+03	
3832	*				2-	2.214669710E+03	
3833	* · · · · ·				6 .	3.192567715E+01	
3834	* · · · · ·					2.087425744E+03	
3835	* · · · · ·				2-	4.988158846E+03	
3836	* · · · · ·		176		· · · · · · · · 6 ·	7.178178320E+01	
3837	* • • • • •				· · · · · · 1 ·	5.702053707E+02	
3838	* • • • • •				2-	1.618579751E+04	
3839	*				<mark>6</mark> .	1.974273016E+01	
3840	* · · · · ·				1 .	5.064769043E+03	
3841	*					2.267228577E+04	
3842	* · · · · ·				6 .	2.001282568E+02	
0012			101		~		

Figura 50 – Estratto del File di Output del Superelemento (*.pch)

Il modello locale può essere analizzato eliminando tutti gli elementi del modello globale che sono stati condensati nel superelemento, e includendo le matrici di rigidezza ridotte. Si crea dunque un file di input per Nastran contenente esclusivamente il modello locale rappresentato nella figura seguente, con gli elementi RSPLINE collegati ai nodi di interfaccia.



Figura 51 – Analisi con Superelemento – Modello Locale

Le istruzioni necessarie per richiamare le matrici ridotte sono mostrate nell'estratto di Figura 52, dove in particolare i comandi K2GG e P2G richiamano la matrice di rigidezza, KAAX, e il vettore dei carichi nodali, PAX.

Il file *.pch contenente le matrici viene richiamato con un classico comando INCLUDE.

```
$ NASTRAN input file created by the Patran 2010 input file translator
$ Direct Text Input for Nastran System Cell Section
$ Linear Static Analysis, Database
SOL·101
CEND
$ TITLE = MSC.NASTRAN JOB CREATED ON 23-MAY-19 AT 16:17:52
ECHO \cdot = \cdot NONE
$$ · ----- · $$
$ Attach the reduced matrices previously generated
K2GG · = · KAAX ·
P2G \cdot = \cdot PAX
SUBCASE 1
····SUBTITLE=DEFAULT
···· DISPLACEMENT (PLOT) =ALL
···· SPCFORCES (PLOT) =ALL
···· STRESS (PLOT, BILIN) =ALL
GPFORCE (PLOT) =ALL
····OLOAD (PLOT) =ALL
BEGIN BULK
$$ ------$$
$ Bring in the punch file containing the DMIG format matrices
INCLUDE 'DMIG matrix.pch'
$$ ------ $$
PARAM · · · · POST · · · · -1
PARAM · · · PRTMAXIM · YES
$ Elements and Element Properties for region : pshell.1
$ Pset: "pshell.1" will be imported as: "pshell.1"
CQUAD4 10000 1 100379 100579 100578 100378 0. . . . . . .
CQUAD4 ··· 10001 ··· 1 ··· ··· 100380 ··100580 ··100579 ··100379 ··0. ··· ··0.
CQUAD4 ··· 10002 ··· 1 ··· ··· 100381 ··100581 ··100580 ··100380 ··0. ··· ··0.
```

Figura 52 – Analisi del Modello Locale con Superelemento – Estratto del File di Input di NASTRAN (*.bdf)



Figura 53 – Analisi del Modello Locale con Superelemento – Plot delle Tensioni

I risultati ottenuti con questo metodo sono identici a quelli prodotti da un'analisi integrale nel paragrafo 3.5.3, con un notevole risparmio di risorse nel caso in cui il modello globale condensato fosse di grandi dimensioni.

3.6 CONFRONTO DEI METODI SUB-MODELING

In questo paragrafo vengono confrontati i tempi di calcolo e le risorse utilizzate per le analisi riportate nei paragrafi precedenti.

Nella tabella seguente sono riportati i tempi di calcolo necessari per la soluzione di tutti i modelli analizzati. Le analisi sono state effettuate con un personal computer con processore Intel I7 serie 3 (2.20 GHz 8 core) con 8.0 GB di RAM installata. Per ogni modello sono stati effettuati 10 esecuzioni ed il tempo di calcolo è stato mediato.

MODEL	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	AVG
Global Model	2.48	2.36	2.35	2.43	2.42	2.61	2.47	2.40	2.42	2.40	2.43
Imposed Displ. Region 1	3.12	3.14	3.07	3.53	3.33	3.27	3.35	3.18	3.30	3.15	3.24
Imposed Displ. Region 2	6.09	6.06	6.09	6.40	6.43	6.25	6.34	6.18	6.13	6.10	6.21
Integrated with transition Region 1	3.77	3.75	3.78	4.38	3.95	3.98	3.92	3.90	3.84	3.80	3.91
Integrated with transition Region 2	7.70	7.52	7.51	7.99	7.86	7.78	7.79	7.70	7.72	7.70	7.73
Integrated with RSPLINE Region 1	3.27	3.22	3.25	3.54	3.32	3.35	3.40	3.34	3.37	3.31	3.34
Integrated with RSPLINE Region 2	6.53	6.37	6.32	7.02	6.65	6.61	6.83	6.49	6.46	6.44	6.57
Superelement Condensation	2.71	2.66	2.64	2.90	2.95	2.85	2.91	2.73	2.74	2.73	2.78
Superelement with RSPLINE Region 2	6.79	6.52	6.44	6.79	6.75	6.80	6.89	6.60	6.63	6.60	6.68

Tabella 6 – Tempo di calcolo medio dei metodi sub-modeling

Facendo quindi un confronto dei tempi necessari alla soluzione del modello locale sulla Regione 2, e considerando per i metodi a 2-step la somma dei tempi delle singole analisi si ottengono i dati mostrati nel grafico seguente in ordine crescente di tempo.

Si nota come il metodo integrato con RPSLINE sia il più veloce nell'esecuzione. Il metodo del superelemento purtroppo in questo caso non dimostra le sue potenzialità in quanto la porzione di modello globale che è stata condensata è molto piccola.



Figura 54 – Tempi di calcolo dei metodi sub-modeling

La richiesta di risorse di memoria di archiviazione stimate da Nastran per eseguire l'analisi sono riportate nel grafico seguente. In questo caso il metodo degli spostamenti imposti è quello con minor richiesta di risorse.



Figura 55 – Requisiti di risorse dei metodi sub-modeling

In conclusione, il metodo prescelto per l'analisi tramite sub-modeling è quello che fa uso degli elementi RSPLINE per collegare il modello locale al modello globale. Si verificherà nel prossimo capitolo, analizzando una struttura più complessa, come l'utilizzo della condensazione del modello globale migliori l'efficienza dell'analisi.

4 ANALISI DI UNA PORZIONE DI PANNELLO ALARE

In questo capitolo il metodo di sub-modeling di tipo integrato con elementi RSPLINE è stato applicato all'analisi di una piccola porzione di pannello alare di un tipico velivolo da trasporto, dove è presente un'apertura a capsula atta ad ospitare un portello rimovibile di ispezione.

4.1 DEFINIZIONE E ANALISI DEL MODELLO GLOBALE

Il modello globale utilizzato in questo capitolo è stato definito a partire dagli studi effettuati da Brooks, Kenway, Martin [14] sul modello agli elementi finiti di una struttura alare definita dal NASA Langley Research Center e reso di dominio pubblico con il nome di Common Research Model (CRM) in [15].



Figura 56 – NASA Common Research Model – Rif. [15]

Il modello CRM nasce come modello tipico di una struttura convenzionale di velivolo da trasporto a lungo raggio, e viene principalmente utilizzato per studi di aerodinamica computazionale (CFD). Per questo motivo la geometria di questo modello corrisponde alla condizione deflessa dell'ala in condizioni di volo operative, in crociera a 1g. Tale geometria è ideale dal punto di vista aerodinamico perché fornisce già la soluzione di deformazione aeroelastica dell'ala ma non è adatta per analisi strutturali dove è invece necessario un modello in condizioni inderformate al quale poter applicare i carichi e analizzare la risposta della struttura. Gli studi riportati in [14] hanno come scopo proprio la ricerca della geometria indeformata del CRM e la pubblicazione, con il nome di uCRM (*undeflected* CRM), di un modello utile a dei *benchmark* di analisi e ottimizzazione dell'ala.

Il cassone alare definito in [14] prende a riferimento la struttura del Boeing 777-200ER poiché tale velivolo risulta simile al CRM come dimensioni e performance. La figura seguente mostra un confronto tra il Boeing 777 a sinistra e uCRM a destra.



Figura 57 – Boeing 777 (sinistra) e uCRM (destra) – Rif. [14]

In similitudine con il Boeing 777, il modello uCRM è costituito da due pannelli alari, superiore ed inferiore, due longheroni, 49 centine e un attacco motore. Il bordo d'attacco presenta un'inginocchiatura in corrispondenza dell'intersezione ala-fusoliera mentre il bordo d'uscita ha un'ulteriore inginocchiatura in corrispondenza del punto detto *Yehudi Break*.

Le principali caratteristiche geometriche e di progetto riportate in [14] per il modello uCRM sono mostrate nella tabella seguente.

Wing specifications							
Aspect ratio	9						
Span	58.76	m					
Root chord	13.62	m					
Side of body chord	11.92	m					
Yehudi chord	7.26	m					
Tip chord	2.736	m					
Quarter chord sweep	35	deg					
Aircraft specifications							
Fuel capacity (both wings)	110000	kg					
Design range	7725	nm					
Design payload	34000	kg					
Cruise flight conditions							
Altitude	37000	ft					
Mach	0.85						
CL	0.5						
Fuel load	20	%					

Tabella 7 – Proprietà del modello uCRM – Rif. [14]

Il modello contiene delle masse non-strutturali che rappresentano gli attuatori con le superfici mobili, il motore e la distribuzione di carburante nell'ala. La massa del motore corrisponde alla massa del General Electric GE90-94B (7500 kg) mentre il carburante considerato raggiunge i 55000 kg, distribuiti in ciascuna semiala. Gli effetti inerziali di queste masse sono dunque presi in considerazione.



Figura 58 – Modello FEM del cassone alare uCRM

Tutti i componenti strutturali del cassone alare sono modellati considerando una lega di alluminio serie 7000, le cui proprietà sono riportate nella tabella seguente.

Material = Aluminum 7000 series						
Density	$\rho = 2780 \ kg/m^3$					
Young's modulus	E = 73100 MPa					
Poisson ratio	$\mu = 0.3$					
Yield Strength	Fty = 420 MPa					

Tabella 8 – Proprietà del materiale – Al serie 7000 – Rif. [14]

La distribuzione di carico aerodinamico utilizzata per risalire alla condizione deformata del modello CRM è stata calcolata mediante CFD. Il modello utilizzato per il calcolo aerodinamico è mostrato nella figura seguente.



Figura 59 - Soluzione CFD e mesh del modello CRM - Rif. [14]

Definita quindi la configurazione del cassone alare e fissati i carichi inerziali e aerodinamici, lo studio riportato in [14] utilizza un approccio detto *smeared-stiffeness* che distribuisce la rigidezza di tutti gli irrigidimenti all'interno delle proprietà del pannello alare, per poi effettuare una ottimizzazione strutturale. Gli irrigidimenti dell'ala non sono dunque inclusi in modo esplicito nel modello FEM che contiene esclusivamente elementi bidimensionali. Questo approccio può essere efficace per quanto riguarda gli studi di ottimizzazione dell'ala in campo aeroelastico, ma non è favorevole allo scopo di questa tesi, in quanto non rappresenta fedelmente i componenti strutturali oggetto di analisi.

Il modello globale utilizzato per le analisi seguenti è stato ricavato quindi dalla configurazione geometrica del modello uCRM, ripristinando però gli irrigidimenti in maniera analoga al modello CRM.

Le masse non-strutturali sono state mantenute invariate, mentre il carico aerodinamico, che nel modello uCRM veniva applicato come un carico di pressione distribuito su tutti i nodi delle superfici alari, è stato semplificato calcolando una risultante di carico in corrispondenza di ciascuna baia della semiala, ed è stato applicato con un elemento di tipo *Multi Point Constraint* RBE3 sul contorno di ogni centina. L'elemento RBE3 è utilizzato per questi scopi perché trasferisce i carichi senza incrementare la rigidezza del sistema. Questo metodo di caricamento è diffusamente utilizzato in campo strutturale poiché risulta indipendente dalla mesh utilizzata per il modello, in quanto i carichi non sono applicati direttamente ai nodi della mesh ma vengono scelti dei nodi

di introduzione del carico indipendenti dal modello. Il carico concentrato applicato in ogni nodo di caricamento viene poi distribuito sulla propria zona di competenza mediante un elemento RBE3. In questo modo si semplifica l'applicazione dei carichi sul cassone alare mantenendo sostanzialmente invariata la deformata dell'ala.





Il calcolo delle risultanti di carico per ogni baia è stato effettuato utilizzando lo strumento *Freebody* in Patran; selezionando gli elementi di una baia alla volta sono state estratte tutte le risultanti nei punti di caricamento scelti.

Un esempio del calcolo delle risultanti è mostrato nella figura seguente. Il contributo di ciascun nodo della baia è mostrato in verde. Le tre componenti di forza e le tre componenti di momento sono riportate nel computo dei totali nella tabella.



Figura 61 – Calcolo della risultante di carico mediante Freebody

Il carico così definito è stato applicato allo stesso modello per verificarne la bontà. Il confronto dei risultati ottenuti tra i due metodi di caricamento è riportato nelle figure seguenti. Le deformate del cassone alare di Figura 64 sono sostanzialmente uguali.



Figura 62 - Carico Aerodinamico distribuito del modello uCRM



Figura 63 – Carico Aerodinamico concentrato nel modello uCRM



Figura 64 – Confronto deformate [m] – Carico distribuito (sopra), concentrato (sotto)

La mesh del modello globale è stata ricostruita utilizzando una taglia maggiore rispetto al modello uCRM in maniera tale da avere una risposta veloce del comportamento globale del sistema, secondo i principi dei metodi global-local.

Il cassone alare è stato dunque modellato utilizzando elementi bidimensionali CQUAD4 e CTRIA3 per i pannelli alari, le centine e le anime dei longheroni e elementi monodimensionali CBEAM e CROD per tutti gli irrigidimenti e per le solette dei longheroni. Il modello globale risultante è rappresentato nella figura seguente.



Figura 65 – Modello Globale del cassone alare

Gli elementi costituenti del cassone alare sono mostrati nelle figure seguenti evidenziando gli spessori utilizzati nella definizione delle proprietà degli elementi.



Figura 66 – Modello Globale – Plot degli spessori dei pannelli alari



Figura 67 – Modello Globale – Plot degli spessori dei longheroni



Figura 68 – Modello Globale – Plot degli spessori delle centine

Gli irrigidimenti dei pannelli alari sono stati definiti considerando una tipica sezione a z, come evidenziato in Figura 69.



Figura 69 – Sezioni tipiche di irrigidenti dei pannelli alari (Rif. [17] Fig. 8.3.7)

Una sezione tipica del cassone alare è mostrata nella figura seguente dove sono mostrati in blu gli irrigidimenti dei pannelli e le solette dei longheroni, in una visualizzazione tridimensionale degli elementi 1-D sviluppata a partire dalle loro proprietà.



Figura 70 – Modello Globale – Sezione tipica del cassone alare

Il modello globale è caricato tramite elementi RBE3 collegati al contorno delle centine. Il carico aerodinamico è applicato tramite forze e momenti in 43 punti scelti in corrispondenza delle centine, come mostrato nella figura seguente. La struttura è vincolata in tutte le direzioni con un incastro sul piano di simmetria; tutti gli spostamenti e le rotazioni sulla centina più interna sono imposti uguali a zero. In più un ulteriore vincolo è definito sulla centina corrispondente all'intersezione alafusoliera. In questa posizione la centina è vincolata nelle direzioni verticale (z) e longitudinale (x).



Figura 71 – Modello Globale – Carichi e vincoli



Figura 72 – Modello Globale – Dettaglio sui nodi vincolati

I risultati ottenuti tramite il modello globale sono mostrati nelle figure seguenti in termini di Stress di Von Mises estratto su tutto il modello.



Figura 73 – Modello Globale – Plot Von Mises Stress – Vista Superiore



Figura 74 – Modello Globale – Plot Von Mises Stress – Vista Inferiore

Si può notare come la zona maggiormente sollecitata è localizzata sul pannello inferiore.

4.2 DEFINIZIONE E ANALISI DEL MODELLO LOCALE

Il modello locale costruito per analizzare una porzione di pannello alare è stato creato nella zona più sollecitata del pannello inferiore, circa ad 1/3 dell'apertura alare.

La tipologia di cutout che consente l'installazione di un portello di accesso per l'ispezione del serbatoio alare può essere dei due tipi riportati in Figura 75. La differenza principale si ha nell'utilizzo di un portello strutturale, collaborante con la struttura alare alla resistenza ai carichi, mostrato a sinistra della figura, oppure di un portello non strutturale, non collaborante con la struttura circostante, mostrato a destra.

In prima battuta si è scelto di utilizzare un portello non strutturale, che non consente un trasferimento di carico, per la semplice implementazione. Questa tipologia di portello inoltre si preferisce in quanto gli organi di collegamento non attraversando il pannello alare, minimizzano i problemi di fatica che potrebbero derivare da cricche innescate nei fori. Il portello non strutturale è stato quindi omesso nel modello locale, dove il pannello alare viene analizzato considerando il cutout aperto.



Figura 75 – Esempi di portello di accesso nel cassone alare (Rif. [17] Fig. 8.3.15, 8.3.16)

Al fine di evitare l'interruzione di un irrigidimento del pannello, poiché la geometria del pannello alare in esame e la spaziatura degli irrigidimenti lo consente, il foro per

l'installazione del portello è stato posizionato tra due irrigidimenti del pannello, in modo da garantirne la continuità.

Per ripristinare la struttura laddove è presente l'apertura si è previsto l'utilizzo di un *doubler* di rinforzo come da figura seguente. Lo spessore del pannello è stato maggiorato nelle vaschette contenenti le aperture.



Figura 76 – Rinforzo intorno a un foro (Rif. [17] Fig. 8.3.17)

Il modello locale è mostrato nella figura seguente. Esso è composto da una porzione di tre baie di pannello inferiore con le aperture a caspsula, da due irrigidimenti a sezione Z, da due porzioni di centine con foro di alleggerimento e da sei angolari a L che collegano le centine al pannello.



Figura 77 – Modello Locale – Porzione di cassone alare

Gli elementi costituenti del modello locale sono mostrati nelle figure seguenti evidenziando gli spessori utilizzati nella definizione delle proprietà degli elementi.



Figura 78 – Modello Locale – Pannello alare



Figura 79 – Modello Locale – Irrigidimenti e angolari



Figura 80 - Modello Locale - Centine

Le giunzioni tra gli elementi sono state realizzate con elementi di tipo CBUSH, utilizzati per modellare gli organi di collegamento, introducendo le rigidezze di questi. Sono stati scelti dei rivetti in alluminio di diametro 4.8 mm (3/16 in).

La posizione degli organi di collegamento è mostrata nella figura seguente. Gli organi sono stati equispaziati con un passo medio di 24 mm (5 volte il diametro).



Figura 81 – Modello Locale – Posizioni delle giunzioni

Le rigidezze degli organi di collegamento sono state calcolate utilizzando la teoria della trave per la rigidezza assiale K_{ax} e la formulazione di Huth-Schwarmann [16] per le rigidezze di taglio K_{sh} . Si ha:

$$K_{ax} = \frac{E_f A}{L} = \frac{E_f A}{t_1 + t_2}$$
(4.1)

$$K_{sh} = \frac{1}{f} \tag{4.2}$$

$$f = \left(\frac{t_1 + t_2}{2d}\right)^a \frac{b}{n} \left(\frac{1}{t_1 E_1} + \frac{1}{n t_2 E_2} + \frac{1}{2t_1 E_f} + \frac{1}{2n t_2 E_f}\right)$$
(4.3)

dove

- *E_f*, *d*, *A* sono le proprietà dell'organo di collegamento, rispettivamente il modulo elastico, diametro e area della sezione;
- *t*₁, *t*₂ sono gli spessori dei due strati collegati;
- E_1 , E_2 sono i moduli elastici dei due materiali collegati;
- *a*, *b* sono i due coefficienti definiti dalla formulazione di Huth-Schwarmann; dipendono dalla tipologia della giunzione; *a* = 2/5 e *b* = 2.2 nel caso di collegamento metallico rivettato;
- n è uguale a 1 in caso di giunzione a taglio singolo, vale 2 in caso di doppio taglio.

Il modello locale è stato collegato al modello globale tramite elementi RSPLINE come mostrato nelle figure seguenti. Tutti i nodi al contorno del modello locale sono stati collegati ai nodi indipendenti del modello globale, come si può vedere nel dettaglio di Figura 83.



Figura 82 – Modello Integrato – Vista d'insieme



Figura 83 – Modello Integrato – Dettaglio con collegamenti RSPLINE

Come si può notare dalla figura precedente, i due elementi RBE3 che insistono sulle centine modellate in dettaglio sono stati modificati in modo da includere i nodi del modello locale.

Per garantire la continuità degli irrigidimenti modellati in dettaglio con elementi bidimensionali, e i corrispettivi elementi monodimensionali del modello globale, all'estremità dei primi si è realizzato un collegamento tramite elementi RBE2 tra i nodi di confine dell'irrigidimento in dettaglio e il nodo dell'elemento monodimensionale, come mostrato nella figura seguente.



Figura 84 – Modello Integrato – Collegamento tra irrigidimenti

Dall'analisi del modello integrato sono stati ottenuti i risultati seguenti. Lo stato tensionale sulla zona di interesse è riportato nella figura seguente.



Figura 85 - Modello Integrato - Plot dello Stress di Von Mises

In particolare, lo stato tensionale del pannello inferiore è mostrato sotto. Il picco di tensione ottenuto è di 517 MPa, sul bordo dell'apertura a capsula della baia centrale analizzata. Si notano gli effetti di bordo causati dalla presenza del collegamento con RSPLINE, già evidenziati nel paragrafo 3.5.3. Per questo motivo i risultati ottenuti in prossimità del contorno non sono da ritenersi accurati.



Figura 86 - Pannello Inferiore - Plot dello Stress di Von Mises

Il plot del Von Mises sugli irrigidimenti del pannello è riportato nella figura seguente. Da notare che nel plot dei risultati le zone di estremità degli irrigidimenti non sono state considerate, poiché risultano influenzate dagli effetti di bordo dei collegamenti RSPLINE. Inoltre sono stati omessi gli elementi direttamente collegati ai nodi delle giunzioni poiché riportano dei picchi di tensione non realistici. Lo stress massimo sugli irrigidimenti è pari a 316 MPa.



Figura 87 – Irrigidimenti – Plot dello Stress di Von Mises

Il plot del Von Mises sui profili che collegano le centine al pannello è mostrato nella figura seguente. Lo stress massimo su questi elementi è pari a 175 MPa. Anche in questo caso sono stati omessi gli elementi direttamente collegati ai nodi delle giunzioni.



Figura 88 – Profili a L – Plot dello Stress di Von Mises

Infine lo stato tensionale delle porzioni di centine modellate in dettaglio è riportato nella figura seguente, utilizzando gli stessi criteri per il plot. Il picco di tensione ottenuto è di 149 MPa in prossimità del taglio necessario all'attraversamento degli irrigidimenti.



Figura 89 - Centine - Plot dello Stress di Von Mises

Il dettaglio degli organi di collegamento rappresentati singolarmente, con le proprie rigidezze, nel modello FEM consente l'estrazione dei carichi di taglio e trazione su ognuno di essi. I carichi sono strati estratti nelle figure seguenti come *Bushing Forces*.



Figura 91 - Giunzioni - Carico di Taglio

La giunzione più caricata è quella che collega a pacchetto con il pannello alare sia l'irrigidimento sia l'angolare di collegamento della centina, con un taglio massimo di 4373 N. In generale risulta che gli organi sugli angolari delle centine sono maggiormente caricati degli altri, anche con un carico assiale importante. In questo caso è auspicabile sostituire questi rivetti con un'altra tipologia di organi di collegamento più performanti, come per esempio gli organi filettati o i cosiddetti *Swaged Collar Fasteners*, costituiti da un pin e da un collare. Considerando il diametro ipotizzato (4.8 mm - 3/16 in) e gli ammissibili riportati nella tabella sotto, si può comunque scegliere una tipologia di rivetto tra quelle evidenziate, con ammissibile a taglio singolo uguale o superiore a 4826 N (1085 lbs).

Undriven			Driv	iven		Rivet Size							
Direct	F _{su}	(ksi)	F _{su} ^b (ksi)		Direct	1/16	3/32	1/8	5/32	3/16	1/4	5/16	3/8
Material	Min	Max	Material		Designation			Drive	en Single S	hear Streng	th, lbs ^c		
5056-H32	24	n/a	5056-H321 ^d	28°	Bt	99	203	363	556	802	1450	2290	3275
2117-T4	26	n/a	2117-T3	30°	AD	106	217	389	596	860	1555	2455	3510
2017-T4	35	42	2017-T3	38°	D	134	275	493	755	1085	1970	3115	4445
2024-T4	37	n/a	2024-T31	41 ^g	DD	145	297	532	814	1175	2125	3360	4795
7050-T73	41	46	7050-T731 ^d	43°	E^{h}	152	311	558	854	1230	2230	3520	5030
Monel	49	59	Monel	52°	М	183	376	674	1030	1490	2695	4260	6085
Ti-45Nb	50	59	Ti-45Nb	53°	Т	187	384	687	1050	1515	2745	4340	6200
A-286	85	95	A-286	90°	-	317	651	1165	1785	2575	4665	7375	10500

Tabella 9 – Ammissibili a singolo taglio dei rivetti – Rif. [20]

Considerando le proprietà del materiale scelto per gli elementi strutturali del cassone alare, riportate in Tabella 8, si ha che la tensione ammissibile a snervamento del materiale è pari a 420 MPa. Dal plot degli stress mostrati nelle figure precedenti si nota come la tensione massima ottenuta è di 517 MPa sul pannello inferiore, in corrispondenza del cutout. La configurazione analizzata non è dunque accettabile da un punto di vista strutturale in quanto causerebbe lo snervamento del materiale in quella zona, con un conseguente margine di sicurezza negativo, pari a:

$$M.S. = \frac{Fty}{f_{VM}} - 1 = \frac{420}{517} - 1 = -0.19$$

In questo caso dunque la tipologia di portello scelta, quella di tipo non strutturale, non è sufficiente a garantire la resistenza della struttura. Con un portello strutturale, che contribuisca dunque alla resistenza ai carichi del pannello alare, ripristinando la continuità del pannello stesso, sarà possibile ridurre lo stato tensionale nell'ala, pur richiedendo ulteriori verifiche strutturali, come per esempio una analisi a fatica sugli organi di collegamento del portello sull'ala.

Nel paragrafo seguente la metodologia di sub-modeling verrà ottimizzata applicando il procedimento della condensazione statica del modello globale in un superelemento. Successivamente si analizzerà la configurazione con portelli strutturali.

4.3 ANALISI CON SUPERELEMENTO

Utilizzando la stessa procedura applicata nel paragrafo 3.5.4, tramite condensazione statica è possibile ridurre tutti gli elementi del modello globale definito nel paragrafo 4.1, a meno degli elementi *coarse* delle parti che sono modellate in dettaglio, nelle matrici di rigidezza ridotte ai nodi di interfaccia con il modello locale.

Tutti gli elementi che possono essere condensati nel superelemento sono mostrati nella figura seguente.



Figura 92 – Analisi con Superelemento – Elementi da condensare

Da notare come sono stati rimossi gli elementi del modello globale che vengono analizzati con una mesh di dettaglio.



Figura 93 – Analisi con Superelemento – Dettaglio zona di interfaccia

Nella figura precedente sono evidenziati i nodi di interfaccia scelti per la condensazione del modello. Poiché nel modello di dettaglio sono presenti due RBE3 utilizzati per l'applicazione dei carichi, allora anche i nodi appartenenti a questi elementi sono inseriti tra i nodi di interfaccia.

Processando il modello tramite Nastran, similmente a quanto riportato nel paragrafo 3.5.4, si ottiene in output il file .pch contenente le matrici ridotte.

Il modello locale può essere analizzato adesso in maniera indipendente, includendo le matrici di rigidezza ridotte. Si crea dunque un file di input per Nastran contenente esclusivamente il modello locale rappresentato nella figura seguente, con gli MPC di tipo RSPLINE e RBE3 collegati ai nodi di interfaccia.



Figura 94 – Analisi con Superelemento – Modello Locale

Le istruzioni necessarie per richiamare le matrici ridotte sono le stesse di Figura 52, dove in particolare i comandi K2GG e P2G richiamano la matrice di rigidezza, KAAX, e il vettore dei carichi nodali, PAX. Il file *.pch contenente le matrici viene richiamato tramite comando INCLUDE.

I risultati ottenuti con questo metodo di analisi ottimizzato sono mostrati nelle figure seguenti. Il plot degli stress di Von Mises su tutto il modello di dettaglio mostrato in Figura 95 è identico a quello ottenuto dall'analisi integrata di Figura 85. Come ulteriore verifica, il picco di tensione sul panello riportato in Figura 96 è lo stesso analizzato nel paragrafo precedente.



Figura 95 – Analisi Locale con Superelemento – Plot dello Stress di Von Mises



Figura 96 – Analisi Locale con Superelemento – Plot dello Stress sul Pannello

Si valuti adesso il risparmio di risorse ottenuto con questa metodologia di analisi. Nella tabella sotto sono riportati i tempi di calcolo mediati su 10 ripetizioni, e le dimensioni del file di output rilasciato da Nastran.

MODEL	t_AVG [sec]	Output Disk Occupation [MB]				
Global Model	3.8	10.9				
Integrated Global-Local	39.3	65.3				
Superelement Local	35.5	58.6				

Tabella 10 – Confronto risorse utilizzate tra metodi sub-modeling

Dall'analisi dei dati, con il metodo del superelemento si è ottenuto un risparmio di tempo di calcolo pari al 10.2% e una diminuzione dello spazio utilizzato sul disco del 10.3%.




Mantenendo invariata la struttura condensata nel superelemento, si procede adesso modificando il modello di dettaglio, inserendo dei portelli di tipo strutturale. Ciascun portello è stato ipotizzato come mostrato nella figura seguente. Nel pannello alare è stata modificata la zona di interfaccia con il portello in modo da ospitare quest'ultimo mantenendo invariata la superficie esterna dell'ala. La baia del pannello dove è installato il portello è mostrata nella Figura 99. Gli organi di collegamento ipotizzati sono di tipo filettato, di diametro 6.35 mm (1/4 in).



Figura 98 – Visualizzazione in 3D del portello



Figura 99 – Visualizzazione in 3D del pannello

Il modello di dettaglio modificato con l'aggiunta dei portelli strutturali è dunque mostrato nella figura seguente.



Figura 100 – Analisi con Superelemento – Modello Locale con portelli



Figura 101 – Plot degli spessori – Modello Locale con portelli

Avendo già le matrici ridotte della struttura di interfaccia, è possibile analizzare rapidamente il modello locale così modificato. I risultati ottenuti dall'analisi sono mostrati nelle figure seguenti.



Figura 102 – Pannello Inferiore – Plot dello Stress di Von Mises



Figura 103 – Portelli – Plot dello Stress di Von Mises

La tensione massima ottenuta è pari a 391 MPa. Considerando le proprietà del materiale riportate in Tabella 8, si ricava adesso un margine di sicurezza pari a:

$$M.S. = \frac{Fty}{f_{VM}} - 1 = \frac{420}{391} - 1 = 0.07$$

Il carico estratto sugli organi di collegamento tra il portello e il pannello alare è riportato nella figura seguente. Il massimo carico estratto è pari a 14731 N.



Figura 104 – Portelli – Carico sugli organi di collegamento

Considerando la tabella di ammissibili a taglio singolo degli organi di collegamento filettati riportata sotto, sono individuati quelli con un ammissibile superiore al carico massimo riportato in figura.

Shear Stress of Fastener, ksi			35	38	75	90	95	108	125	132	145	156
Fastener Diameter Basic												
in.	Size	Shank Area	Ultimate Single Shear Strength, Ibs.									
0.112	#4	0.0098520	345	374	739	887	936	1060	1230	1300	1425	1535
0.125	1/8	0.012272	430	466	920	1105	1165	1325	1530	1620	1775	1910
0.138	#6	0.014957	523	568	1120	1345	1420	1615	1870	1970	2165	2330
0.156	5/32	0.019175	671	729	1435	1725	1820	2070	2395	2530	2780	2990
0.164	#8	0.021124	739	803	1580	1900	2005	2280	2640	2785	3060	3295
0.188	3/16	0.027612	966	1045	2070	2485	2620	2980	3450	3645	4005	4310
0.190	#10	0.028353	992	1075	2125	2550	2690	3060	3540	3740	4110	4420
0.216	#12	0.036644	1280	1390	2745	3295	3480	3955	4580	4840	5315	5720
0.219	7/32	0.037582	1315	1425	2815	3380	3570	4060	4700	4960	5445	5860
0.250	1/4	0.049087	1715	1865	3680	4420	4660	5300	6140	6480	7115	7660
0.312	5/16	0.076699	2680	2915	5750	6900	7290	8280	9590	10100	11100	11950
0.375	3/8	0.11045	3865	4200	8280	9935	10450	11900	13800	14550	16000	17200
0.438	7/16	0.15033	5260	5710	11250	13500	14250	16200	18750	19800	21750	23450
0.500	1/2	0.19635	6870	7460	14700	17650	18650	21200	24500	25900	28450	30600
0.562	9/16	0.24850	8700	9440	18600	22350	23600	26800	31050	32800	36000	38750
0.625	5/8	0.30680	10700	11650	23000	27600	29150	33100	38350	40500	44500	47900
0.750	3/4	0.44179	15450	16750	33100	39750	42000	47700	55200	58300	64000	68900
0.875	7/8	0.60132	21050	22850	45100	54100	57100	64900	75200	79400	87200	93800
1.000	1	0.78540	27450	29850	58900	70700	74600	84800	98200	103500	113500	122500
1.125	1-1/8	0.99402	34750	37750	74600	89500	94400	107000	124000	131000	144000	155000
			-									
1.250	1-1/4	1.2272	43000	46600	92000	110000	116500	132500	153000	162000	177500	191000
1.375	1-3/8	1.4849	52000	56400	111000	133500	141000	160000	185500	196000	215000	231500
1.500	1-1/2	1.7671	61800	67100	132500	159000	167500	190500	220500	233000	256000	275500

Tabella 11 – Ammissibili a singolo taglio di organi di collegamento filettati – Rif. [20]

5 CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Le simulazioni agli elementi finiti, dalle prime applicazioni fino ai giorni nostri, hanno subito un rapido progresso nella modellazione, analisi e visualizzazione della risposta di molteplici sistemi, parallelamente alla crescita della potenza di calcolo dei sistemi informatici e allo sviluppo costante dei software FEA (Finite Element Analysis).

Il metodo degli elementi finiti (FEM) annovera tra le sue principali applicazioni quella dell'analisi strutturale di sistemi complessi costituiti da numerosi componenti strutturali, in special modo in campo aerospaziale, dove la ricerca di strutture ottimizzate, a basso peso e alti standard di sicurezza, richiede al progettista un notevole impegno di calcolo. I principi basilari sui quali si sviluppa il metodo FEM sono stati analizzati nel paragrafo 2.1.

La ricerca di una soluzione particolarmente accurata in determinate zone di un sistema globale può essere attuata utilizzando il minimo delle risorse di calcolo necessarie, facendo uso delle metodologie di sub-modeling. Queste tecniche consentono di suddividere una struttura complessa in sottoinsiemi di elementi costituenti, da analizzare in maniera indipendente con dei modelli di dettaglio, senza però trascurarne le interfacce con la struttura circostante.

Le caratteristiche dei metodi principali di sub-modeling sono state analizzate nel paragrafo 2.2, quindi nel Capitolo 3 sono state applicate ad un semplice modello di *benchmark* in modo da poter confrontare i risultati ottenuti, in termini di accuratezza della soluzione, velocità di esecuzione e risorse richieste.

I metodi a 2-Step, pur ottenendo un'accuratezza della soluzione accettabile risultano, secondo personale opinione, eccessivamente macchinosi nell'applicazione, preferendovi a questi i metodi di analisi integrata. Tra le metodologie a 1-Step, o di tipo integrato, si ottengono risultati migliori in termini di accuratezza su tutto il modello utilizzando il collegamento tra modello di dettaglio e modello locale mediante mesh di transizione. Il grosso limite di questo approccio risiede nella complessità di definizione di tale mesh laddove il sistema sia particolarmente articolato, in quanto si rende necessario creare un'ampia zona di transizione nella mesh di ogni componente, con una variazione graduale della taglia degli elementi. La tecnica che risulta più agevole, secondo l'autore, è quella del collegamento mediante interpolazione degli spostamenti dei nodi con RSPLINE. Con questo approccio l'analista è libero di modellare la zona di interesse in dettaglio senza guardare alla continuità degli elementi sui confini del modello locale con il resto della struttura; il collegamento dei nodi sul contorno del modello di dettaglio con il modello globale è garantito infatti da MPC di tipo RSPLINE. In questa maniera si può dire che la mesh del modello di dettaglio viene "cucita" sul modello globale. Utilizzando questo metodo di sub-modeling bisogna però tenere in considerazione gli effetti locali che questo collegamento introduce. Come dimostrato in particolar modo nel paragrafo 3.5.3, l'interpolazione degli spostamenti dei nodi master del modello globale sui nodi slave del modello locale provoca delle tensioni non realistiche sugli elementi prossimi al collegamento RSPLINE. È necessario dunque prevedere questo collegamento in una zona sufficientemente lontana dalla regione di interesse e rimuovere poi dal plot dei risultati gli elementi sul contorno.

Un'evoluzione dei metodi di analisi integrata è rappresentata dalla possibilità di condensare tutto il modello globale in un *superelemento*, rappresentato matematicamente da una matrice di rigidezza e da una matrice dei carichi nodali, relative ai nodi di interfaccia con il modello locale. I risultati ottenuti da un'analisi del modello locale collegato matematicamente al superelemento sono esattamente identici a quelli ottenuti da un'analisi integrata, con il chiaro vantaggio di ridurre le risorse necessarie, ridurre gli output richiesti al solutore, in quanto i soli elementi che vengono calcolati sono quelli del modello locale, velocizzare i processi di ottimizzazione, dato che è possibile modificare esclusivamente il modello locale e procedere rapidamente ad una nuova iterazione di analisi, mantenendo invariate le condizioni al contorno.

Le peculiarità e le problematiche di un'analisi di tipo integrato sono state analizzate definendo un caso di studio verosimile, nel Capitolo 4. La scelta della tipologia di struttura da analizzare è ricaduta su una porzione di un pannello alare interessata dall'installazione di un portello di ispezione. Definito il modello globale di un cassone

alare con caratteristiche tipiche di un velivolo da trasporto, la regione di interesse è stata modellata con una mesh fine, in tutti i suoi componenti strutturali, ed è stata collegata tramite RSPLINE al modello globale. L'analisi del modello locale riportata nel paragrafo 4.2 ha mostrato la bontà del metodo di sub-modeling prescelto, evidenziando in particolar modo delle problematiche sul pannello alare, dovute alla configurazione proposta. Nel paragrafo successivo la stessa analisi è stata replicata utilizzando la condensazione statica del modello globale nel superelemento; il confronto con l'analisi precedente ha dimostrato l'effettivo risparmio di tempo di calcolo e di risorse ottenuto. Il modello locale è stato quindi modificato, rappresentando una nuova configurazione in grado di superare le criticità della precedente, e l'analisi è stata effettuata nuovamente, mostrando in questo modo l'efficacia dell'aver condensato tutta la struttura di interfaccia nel superelemento, che è rimasto invariato.

La tipologia di analisi effettuata in questa tesi è di tipo statico lineare. Questo tipo di analisi rappresenta solamente il primo passo di una verifica strutturale di un sistema complesso, mantenendo comunque una importanza fondamentale. Inoltre, restando in campo lineare, risulta accurata nel caso di piccoli spostamenti.

I metodi di sub-modeling vengono sicuramente in grande aiuto anche in caso di analisi strutturali di altre tipologie, quali per esempio le analisi modali o le analisi di instabilità della struttura, o *buckling*. In questi casi l'utilizzo di un modello di dettaglio, oltre a fornire localmente un comportamento accurato della struttura consente, con il metodo del superelemento, di analizzare esclusivamente la zona di interesse, evitando di avere in output dei dati non necessari, come per esempio degli autovalori con i corrispondenti modi di buckling localizzati fuori dalla regione di interesse.

I casi di analisi non lineari con metodi sub-modeling possono sicuramente rappresentare uno spunto futuro di ricerca, per esempio esplorando tutte le combinazioni possibili tra analisi lineare del modello globale e non lineare del modello locale, o viceversa. È possibile pensare di implementare un'analisi non lineare del modello locale per migliorare la rispondenza al vero della simulazione, utilizzando come condizioni al contorno i risultati di un'analisi lineare del modello globale e non lineare del modello globale e non lineare del modello globale e successivamente investigare le differenze tra un'analisi lineare o non lineare del modello locale.

I modelli FEM analizzati in questa tesi sono stati realizzati facendo uso esclusivamente di elementi al più bidimensionali. Questo approccio è comune in campo aerospaziale, dove la tipologia di elementi strutturali (fasciami, centine, ordinate) è facilmente rappresentabile con elementi piastra, visto che una dimensione, lo spessore, è decisamente inferiore alle altre. È meno frequente l'utilizzo di mesh tridimensionali, utilizzate in tutti quei casi in cui non è possibile schematizzare l'elemento come una piastra. In questi casi diventa più difficile realizzare un approccio di tipo submodeling; per esempio la connessione tra elementi tridimensionali non può essere realizzata mediante RSPLINE. Sarebbe interessante indagare l'utilizzo del submodeling su modelli a mesh solida, andando a ricercare le possibili soluzioni di collegamento tra mesh 3-D con dimensioni diverse, oppure ancora tra una mesh solida e una mesh bidimensionale. Una possibilità in questi casi è rappresentata dall'utilizzo di MPC di tipo RBE3 che raccolgano insieme tutti i nodi di una porzione di faccia libera del solido, collegandoli ad uno dei nodi del modello globale.

Il software utilizzato in questa tesi è MSC Patran per le fasi di pre-processing e postprocessing e MSC Nastran come solutore. Sono disponibili in commercio diversi software sostitutivi a Patran per la generazione del modello, che viene comunque esportato in formato compatibile con il solutore Nastran (Femap e Hypermesh, per citarne alcuni). Poiché l'interfaccia utilizzata in Patran per la definizione degli elementi RSPLINE risulta oggettivamente macchinosa, in quanto la sequenza dei nodi dipendenti va specificata manualmente, con un click su ogni singolo nodo, si potrebbe ricercare se altri pre-processori prevedano una funzione più agevole, oppure si potrebbe pensare di programmare una utility esterna adatta allo scopo. Per esempio sarebbe utile poter selezionare un intero bordo libero della mesh locale da collegare a due nodi indipendenti del modello globale, con una generazione automatica del collegamento RSPLINE.

Per quanto riguarda il solutore utilizzato, le metodologie di sub-modeling analizzate in questa tesi sono, in linea teorica, applicabili anche ad altri solutori FEM, senonché MSC Nastran è il più comune software commerciale utilizzato. Bisogna però notare che gli elementi MPC di tipo RSPLINE sono definiti con questo nome esclusivamente per un utilizzo specifico con Nastran. Nulla toglie che altri solutori prevedano un simile collegamento per interpolazione degli spostamenti, definito magari con una differente nomenclatura. Possibili spunti di ricerca sono dunque rappresentati

dall'implementazione delle tecniche di sub-modeling utilizzando dei solutori alternativi a Nastran, ricercando un collegamento analogo all'elemento RSPLINE, che sia questo disponibile nativamente o programmato ad hoc.

6 BIBLIOGRAFIA

- [1] Zienkiewicz The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals
- [2] R.W. Clough. The finite element method in plane stress analysis. In Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960
- [3] Jrad, Mohamed & Sunny, Mohammed & Kapania, Rakesh. (2014). Global– Local Analysis of Composite Plate with Thin Notch. Journal of Aircraft. 51. 967-974. 10.2514/1.C032618.
- [4] Haryadi, S. G., Kapania, R. K., and Haftka, R. T., "Global/Local Analysis of Composite Plates with Cracks," Composites Part B: Engineering, Vol. 29, No. 3, March 1998, pp. 271–276.
- [5] Kapania, R. K., Haryadi, S. G., and Haftka, R. T., "Global/Local Analysis of Composite Plates with Cutouts," Computational Mechanics, Vol. 19, No. 5, March 1998, pp. 386–396.
- [6] Sun CT, Mao KM. A global-local finite element method suitable for parallel computations. Comput Struct. 1988;29(2):309-315
- [7] Curreli C, Di Puccio F, Mattei L. Application of the finite element submodeling technique in a single point contact and wear problem. Int J Numer Methods Eng. 2018;116:708–722. doi:10.1002/nme.5940
- [8] Cormier NG, Smallwood BS, Sinclair GB, Meda G. Aggressive submodelling of stress concentrations. Int J Numer Methods Eng. 1999;46(6):889-909
- [9] Ransom JB, Knight Jr. NF. Global/local stress analysis of composite panels. ComputStruct 1990;37(4):375–95
- [10] Kondo M, Sinclair GB. A simple substructuring procedure for finite element analysis of stress concentrations. Communications in Applied Numerical Methods 1985; 1:215}218

- [11] Sracic M.W., Elke W.J. (2019) Effect of Boundary Conditions on Finite Element Submodeling. In: Kerschen G. (eds) Nonlinear Dynamics, Volume 1. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer, Cham
- [12] W Kuntjoro, AMH Abdul Jalil, J Mahmud, Wing Structure Static Analysis using Superelement, Procedia Engineering, Volume 41, 2012, Pages 1600-1606, ISSN 1877-7058, doi:10.1016/j.proeng.2012.07.356
- [13] Wilson, E. L. (1974). The static condensation algorithm. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8(1), 198–203. doi:10.1002/nme.1620080115
- [14] Brooks, Timothy, Kenway, G., and Martins, Joaquim R. R. A., "Benchmark Aerostructural Models for the Study of Transonic Aircraft Wings." AIAA Journal, 2018. doi:10.2514/1.J056603
- [15] NASA Langley Research Center Common Research Model (CRM) website https://commonresearchmodel.larc.nasa.gov
- [16] Chandregowda, S., & Reddy, G. R. C. "Evaluation of fastener stiffness modelling methods for aircraft structural joints" doi:10.1063/1.5029577
- [17] M. Niu Airframe Structural Design Practical Design Information and Data on Aircraft Structures – Second Edition
- [18] MSC Nastran 2014 Linear Static Analysis User's Guide
- [19] MSC Nastran 2014 Superelements User's Guide
- [20] Metallic Materials Properties Development and Standardization (MMPDS)