DIPARTIMENTO DI SCIENZE MATEMATICHE Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE



Formulazione "PDE-constrained three-field" per la simulazione di flussi in reti di fratture con discretizzazioni non conformi

Candidato: Denise Grappein

Relatore: Stefano Berrone

Corelatori: Stefano Scialò Sandra Pieraccini

Luglio 2019

Indice

Introduzione 3									
1	1 Definizione di un modello matematico per il flusso di un fluido in un mezzo fratturato								
	1.1	Formulazione del problema variazionale	• 7						
	1.1	1.1.1 Problema alle derivate parziali	7						
		1.1.2 Formulazione variazionale su una sola frattura	9						
		1.1.3 Formulazione Three-Field	11						
	1.2	Riscrittura come problema di minimo vincolato	13						
		1.2.1 Formulazione per traccia	13						
		1.2.2 Formulazione per frattura	15						
		1.2.3 Calcolo del controllo ottimo e metodo del gradiente co-							
	niugato								
	1.3 Formulazione matriciale discreta								
		1.3.1 Discretizzazione delle variabili	21						
		1.3.2 Le matrici $A, \mathcal{B} \in \mathcal{C}$	22						
		1.3.3 Riscrittura del funzionale J	24						
	1.4	Metodi risolutivi \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	26						
		1.4.1 Il sistema KKT	26						
		1.4.2 Metodo del gradiente coniugato	27						
		1.4.3 Metodo del gradiente coniugato precondizionato	30						
2	Ris	ultati numerici	31						
	2.1 Problema su 3 fratture (DFN3)								
	2.2 Problema su 10 fratture $(DFN10)$								
	2.3 Problema su 59 fratture $(DFN59)$								
Conclusione 57									
Appendici 59									
A	A XFEM: metodo degli elementi finiti esteso 59								
в	B Il metodo del gradiente coniugato 63								
	B.1 Versione standard								
	B.2 Versione precondizionata								
Bibliografia 67									

INDICE

Introduzione

La simulazione di flussi in mezzi fratturati è di fondamentale importanza per diverse applicazioni nel campo ambientale e idrogeologico. Un esempio è quello della gestione delle risorse idriche o idrocarburiche nel sottosuolo, ma anche dello studio del trasporto e della diffusione di contaminanti per valutare l'impatto ambientale di discariche o siti di stoccaggio per materiali tossici o radioattivi.

Simulare un flusso in un mezzo fratturato, anziché semplicemente poroso, può presentare diverse insidie, legate all'eterogeneità e all'incertezza delle proprietà dei materiali coinvolti, alla necessità di trattare flussi direzionali e all'intrinseca natura multiscala del fenomeno.

Uno dei possibili approcci al problema prevede l'utilizzo delle DFN, ovvero delle **Discrete Fracture Networks**, secondo il quale le fratture sono organizzate in una rete tridimensionale, ma sono di per sé poligoni piani che si intersecano lungo segmenti detti **tracce**.

Per reti particolarmente dense e lungo le quali le proprietà delle fratture come la dimensione o la conducibilità variano in maniera continua è possibile effettuare le simulazioni andando a definire un mezzo continuo equivalente. Per reti sparse in cui le proprietà non variano con continuità è invece più adeguato utilizzare l'approccio discreto delle DFN.

Tali reti di fratture possono essere geometricamente molto complesse, in quanto non è possibile ignorare casi di angoli di intersezione molto piccoli, tracce molto lunghe o molto corte e altri casi particolari che in un sistema di fratture naturale si possono ovviamente presentare.

La più grande difficoltà riguarda però la definizione di una discretizzazione conforme e di buona qualità per la risoluzione numerica del problema. La conformità della griglia richiede che per ogni traccia sia definita un'unica discretizzazione e che questa sia coerente con la griglia bidimensionale definita invece su ciascuna delle fratture che si intersecano lungo di essa. Avere una mesh che sia contemporaneamente conforme e di buona qualità comporta una grandissima quantità di elementi, rendendo così le simulazioni particolarmente onerose. L'eccessivo costo computazionale o la scarsa qualità della griglia sono problematiche che si riscontrano nei software commerciali già esistenti per la simulazione di flussi in mezzi fratturati.

Per risolvere questo tipo di problemi sono state proposte diverse soluzioni. Alcune di queste, presentate ad esempio in [8], [10], [14], prevedono un approccio adattativo, in cui la posizione reciproca delle tracce e degli elementi viene ritoccata in modo da garantire la conformità. Un'alternativa, che permette invece di aggirare parzialmente il problema, è presentata in [12], [13]. Essa ammette una griglia non conforme, ma richiede che le tracce appartengano all'insieme dei bordi degli elementi, ovvero che non vi siano elementi a cavallo delle tracce.

L'approccio utilizzato in questa tesi, e presentato da S. Berrone, S. Pieraccini e S. Scialò in [2], prevede invece la riformulazione del problema in uno di **ottimizzazione vincolata alla risoluzione di un'equazione alle derivate parziali** (*PDE-constrained optimization problem*).

Questo metodo permette di risolvere separatamente il problema su ciascuna frattura e elimina pertanto la necessità di una griglia conforme, in quanto ogni frattura può essere discretizzata in maniera indipendente dalle altre. Le soluzioni ottenute su fratture adiacenti devono rispettare specifiche condizioni di accoppiamento, che riguardano la **continuità del carico idraulico** e la **conservazione dei flussi**. Tali vincoli sono imposti andando a lavorare direttamente con variabili ristrette alle tracce e definite su discretizzazioni monodimensionali che possono essere indipendenti da quella bidimensionale delle fratture.

Grazie all'utilizzo degli **XFEM**, ovvero del metodo degli elementi finiti esteso, si ammette anche la presenza di elementi a cavallo delle tracce. Lungo di esse il flusso presenta infatti una discontinuità, ovvero il carico idraulico, vera incognita del problema, è caratterizzato da una discontinuità della derivata prima. Gli XFEM, come illustrato in appendice, permettono però di cogliere discontinuità localizzate in qualsiasi zona del dominio, non necessariamente allineate con i lati degli elementi utilizzati per calcolare tradizionalmente la soluzione [6].

Le condizioni di accoppiamento utilizzate in [2] e quelle che saranno invece presentate in seguito sono concettualmente le stesse, ma diverso è il modo in cui esse vengono imposte debolmente al momento della formulazione variazionale del problema. Nel caso di [2] il vincolo di continuità viene imposto richiedendo che la differenza tra i carichi idraulici definiti su fratture adiacenti e ristretti alla traccia in comune sia nulla. Per quanto riguarda la conservazione dei flussi viene introdotta, per ciascuna frattura e ognuna delle sua tracce, una variabile di controllo. Data una delle tracce della frattura, tale variabile corrisponde alla derivata conormale, lungo la traccia e in direzione uscente, del carico idraulico calcolato sulla frattura. Si richiede pertanto che la somma delle variabili di controllo definite su fratture adiacenti sia nulla, sottolineando che le due variabili avranno segno discorde, dato che rappresentano flussi in direzione opposta lungo la stessa traccia.

L'idea del metodo che sarà in seguito presentato è analoga, ma gli stessi vincoli vengono imposti andando a considerare **due variabili di controllo** e definendole univocamente **su ciascuna traccia** e non frattura per frattura. Per la continuità si impone che i carichi idraulici definiti su fratture adiacenti e ristretti alla traccia in comune eguaglino entrambi il valore della variabile di controllo sui carichi definita sulla traccia stessa. Per la conservazione dei flussi si impone invece che il valore assoluto dei flussi uscenti da fratture adiacenti lungo la traccia comune, e calcolati con la derivata conormale già utilizzata in [2], eguaglino entrambi la variabile di controllo sui flussi definita sulla traccia.

Introduzione

La formulazione del problema attraverso l'introduzione di due variabili di controllo è un'applicazione della **formulazione variazionale Three-Field** introdotta in [4] da F. Brezzi e L.D. Marini per problemi di domain decomposition definiti a partire da problemi ellittici.

Per quanto l'approccio di [2] e quello basato sulla formulazione Three-Field siano molto simili, si osserva, in fase di simulazione, che la scelta di andare a definire sulle tracce e non sulle fratture la variabile di controllo sui flussi permette di soddisfare in maniera più accurata il vincolo di conservazione. La variabile di controllo sul carico aumenta invece la stabilità e sarà il punto di partenza per la definizione del problema di ottimizzazione vincolata col quale sarà riformulato il problema iniziale. Il grande vantaggio di definire in maniera unica su ciascuna traccia le variabili di controllo riguarda la possibilità di disaccoppiare completamente il problema: cercando la soluzione su una delle fratture non è infatti necessario avere informazioni sul carico definito sulla frattura adiacente.

La trattazione che segue è organizzata in due capitoli.

Nel primo viene costruito passo passo il problema variazionale continuo che permette di modellare il flusso in una rete di fratture e la sua formulazione come problema di ottimizzazione vincolata. Viene inoltre affrontata nel dettaglio la sua riscrittura matriciale discreta, forma nella quale il metodo può essere implementato. Segue la presentazione dei metodi risolutivi che sono stati applicati per la risoluzione del problema.

Nel capitolo 2 sono invece presentati i risultati numerici ottenuti su 3 diverse DFN di dimensioni crescenti: 3, 10 e 59 fratture. Il primo caso è interessante in quanto è nota la soluzione esatta del problema ([3]) e quindi è possibile valutare l'accuratezza del metodo andando a calcolare direttamente l'errore commesso. Per il caso di 10 fratture è invece possibile identificare la frattura di ingresso e quella di uscita e pertanto fare alcune analisi sulla conservazione dei flussi. Inoltre si tratta di un problema già leggermente più complesso, per il quale può essere interessante valutare la performance di metodi iterativi per la sua soluzione. Il problema su 59 fratture permette infine di testare il metodo su un caso più complesso e di avvalorare la bontà di un precondizionatore introdotto per il 10 fratture.

INTRODUZIONE

Capitolo 1

Definizione di un modello matematico per il flusso di un fluido in un mezzo fratturato

1.1 Formulazione del problema variazionale

1.1.1 Problema alle derivate parziali

Si consideri un mezzo fratturato modellato attraverso una **Discrete Fracture Network** (DFN). Secondo questo approccio le fratture sono organizzate in una rete tridimensionale, ma sono di per sé enti poligonali piani che si intersecano lungo segmenti detti tracce.

Si vuole costruire un modello per la simulazione di un flusso sotterraneo che interessi unicamente le fratture. Si suppone pertanto che queste ultime siano circondate da una matrice rocciosa impermeabile.

La velocità di filtrazione del fluido, ovvero la quantità di fluido che attraversa un'area unitaria nell'unità del tempo, è regolata dalla **legge di Darcy**:

$$v = -\mathbf{K}\nabla H. \tag{1.1}$$

Avendo però approssimato le fratture con poligoni bidimensionali, tale velocità può essere immaginata come una velocità mediata sullo spessore che la frattura avrebbe in un caso reale. In (1.1) K rappresenta il tensore di conducibilità del mezzo ([m/s]), mentre H è il **carico idraulico**, definito come

$$H = z + \frac{p}{g\rho} \quad [m] \tag{1.2}$$

con z profondità, p pressione, ρ densità del fluido e $g = 9.81 m/s^2$.

La legge di conservazione di massa per il fluido si esprime come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \qquad (1.3)$$

ma per un fluido incomprimibile e un moto stazionario si ha che la derivata totale della densità si annulla, ovvero

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \cdot \nabla v = 0.$$
(1.4)

La (1.3) si riduce quindi a

$$\nabla \cdot v = 0. \tag{1.5}$$

che associata alla (1.1) dà

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla H) = 0 \tag{1.6}$$

o, in presenza di termini di sorgente,

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla H) = Q. \tag{1.7}$$

Si consideri per il momento una sola frattura $F \in \mathbb{R}^2$ definita da un poligono piano e aperto su cui sia definito un sistema di coordinate tangenziale. Il suo bordo, ∂F , può essere diviso in due sottoinsiemi, $\gamma_D \in \gamma_N$, tali che $|\gamma_D| \neq \emptyset$, $\gamma_D \cup \gamma_N = \partial F \in \gamma_D \cap \gamma_N = \emptyset$. γ_D indica la porzione di bordo sui cui sono imposte condizioni di Dirichlet, mentre γ_N è quella su cui si hanno condizioni di Neumann.

Il problema che descrive il moto di un fluido attraverso F può essere formulato come

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla H) = Q \qquad \qquad \text{su } F \qquad (1.8)$$

$$H_{|\gamma_D} = H_D \qquad \qquad \text{su } \gamma_D \tag{1.9}$$

dove $\frac{\partial H}{\partial \nu}$ indica la derivata conormale del carico idraulico, ovvero

$$\frac{\partial H}{\partial \nu} = n^T \boldsymbol{K} \nabla H \tag{1.11}$$

con n versore normale a γ_N , uscente da F.

Per estendere la formulazione del problema a una rete tridimensionale di fratture che si intersecano tra di loro si tenga conto delle notazioni seguenti, che rimarranno valide per tutto il resto della trattazione.

• Sia \mathcal{J} l'insieme degli indici che fanno riferimento alle fratture $\{F_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ costituenti la rete. La cardinalità di tale insieme sarà indicata con I. Si consideri

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} F_i$$

insieme connesso di bordo $\partial \Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \in \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, con $|\Gamma_D| \neq \emptyset \in \Gamma_N$ rispettivamente bordi di Dirichlet e di Neumann.

1.1. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA VARIAZIONALE

- Le fratture si intersecano **a due a due** lungo segmenti detti **tracce**. Sia S l'insieme di tutte le tracce contenute in $\Omega \in S_i$ il sottoinsieme di quelle che competono soltanto all'i-esima frattura. Le tracce $S_m \in S$ saranno indicizzate con $m \in \mathcal{M} = (1, ..., M)$ mentre per le $S_m \in S_i$ si considera $m \in \mathcal{M}_i = (1, ..., M_i)$. Si potrà fare riferimento ad una generica traccia con S.
- Infine si indicherà con $I_{S_m} = \{\underline{i}, \overline{i}\}$ la coppia degli indici delle fratture $F_{\underline{i}}$ e $F_{\overline{i}}$ che si intersecano lungo la traccia S_m . La frattura indicizzata da \underline{i} è quella per la quale si assume che i flussi di segno positivo siano uscenti lungo S_m . Per la seconda gli stessi flussi sono invece entranti.

La formulazione del problema su ciascuna della fratture $\{F_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ diventa pertanto

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla H_i) = Q_i \qquad \qquad \text{su } F_i, \ i \in \mathcal{J} \qquad (1.12)$$

$$H_{|_{\Gamma_D \cap \partial F_i}} = H_{iD} \qquad \qquad \text{su } \Gamma_{iD} = \Gamma_D \cap \partial F_i \qquad (1.13)$$

dove \mathbf{K}_i , $H_i \in Q_i$ rappresentano il tensore di conducibilità, il carico idraulico e il termine di sorgente relativi all'i-esima frattura, mentre $\Gamma_{iD} \in \Gamma_{iN}$ sono rispettivamente bordo di Dirichlet e di Neumann della frattura stessa, con $|\Gamma_{iD}| \neq \emptyset$, $\partial F_i = \Gamma_{iD} \cup \Gamma_{iN} \in \Gamma_{iD} \cap \Gamma_{iN} = \emptyset$. Il versore ν_{iN} è normale a Γ_{iN} , uscente da F_i .

Tale insieme di equazioni va però arricchito con delle **condizioni di compatibilità** da imporre sulle tracce, corrispondenti ai vincoli di continuità del carico idraulico e di conservazione flussi, ovvero

$$H_{\bar{i}|_{S_m}} - H_{\underline{i}|_{S_m}} = 0 \qquad \text{per } \bar{i}, \underline{i} \in I_{S_m} \quad \forall m \in \mathcal{M}$$
(1.15)

$$\left[\left| \frac{\partial H_{\bar{i}}}{\partial \nu_{\bar{i}}^m} \right| \right] + \left[\left| \frac{\partial H_{\underline{i}}}{\partial \nu_{\underline{i}}^m} \right| \right] = 0 \qquad \text{per } \bar{i}, \underline{i} \in I_{S_m}$$
(1.16)

dove $\left[\left|\frac{\partial H_i}{\partial \nu_i^m}\right|\right]$, con $i \in I_{S_m}$ e $\frac{\partial H_i}{\partial \nu_i^m} = n_i^{mT} \mathbf{K}_i \nabla H_i$, rappresenta il salto della derivata conormale del carico idraulico lungo la traccia S_m , indipendente dall'orientazione del versore normale n_i^m .

1.1.2 Formulazione variazionale su una sola frattura

Il problema costituito dalle equazioni (1.12)-(1.16) può essere riscritto in forma variazionale.

Si considerino, per ciascuna frattura, gli spazi

$$V_{i} = H_{0}^{1}(F_{i}) = \left\{ v \in H^{1}(F_{i}) : v_{|\Gamma_{iD}} = 0 \right\} \quad i \in \mathcal{J}$$
$$V_{i}^{D} = H_{D}^{1}(F_{i}) = \left\{ v \in H^{1}(F_{i}) : v_{|\Gamma_{iD}} = H_{iD} \right\} \quad i \in \mathcal{J}.$$

A partire dalla (1.12), integrando sull'i-esima frattura e moltiplicando per un'opportuna funzione test $v_i \in V_i$, si ottiene

$$-\int_{F_i} \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla H_i) \ v_i \ dF = \int_{F_i} Q_i \ v_i \ dF \qquad v_i \in V_i, \quad \forall i \in \mathcal{J}.$$

 $H_i \in V_i^D$ può essere riscritto come $H_i = H_i^0 + \mathcal{R}_i H_{iD}$, con $H_i^0 \in V_i \in \mathcal{R}_i H_{iD} \in V_i^D$ rilevamento al bordo della condizione di Dirichlet, ovvero funzione di V_i^D tale per cui la sua restrizione al bordo coincide con H_{iD} . Si ha così che

$$-\int_{F_i} \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla H_i) \, v_i \, dF = -\int_{F_i} \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla H_i^0) \, v_i \, dF - \int_{F_i} \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla \mathcal{R}_i H_{iD}) \, v_i \, dF$$

Tuttavia il carico idraulico presenta una discontinutà della derivata prima in corrispondenza delle tracce. Non è pertanto teoricamente possibile definire una derivata di ordine 2 su una frattura. Per ovviare al problema si considerino le due sottofratture $F_{i1} \in F_{i2}$ in cui la frattura F_i è divisa da una delle sue tracce $S_m \in S_i$. La traccia potrebbe anche non attraversare la frattura in tutta la sua larghezza, ma in tal caso è sufficiente supporte di prolungare il segmento fino al raggiungimento dei bordi di F_i . Integrando separatamente sulle due sottofratture e applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{split} -\int_{F_i} \nabla \cdot \left(\mathbf{K}_i \nabla H_i^0 \right) \, v_i \, dF &= \int_{F_{i1}} \mathbf{K}_i \nabla H_i^0 \cdot \nabla v_i \, dF - \int_{\partial F_{i1}} \frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_{i1}^m} \cdot v_i|_{\partial F_{i1}} \, dS + \\ &+ \int_{F_{i2}} \mathbf{K}_i \nabla H_i^0 \cdot \nabla v_i \, dF - \int_{\partial F_{i2}} \frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_{i2}^m} \cdot v_i|_{\partial F_{i2}} \, dS \end{split}$$

dove

$$\frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_{i1}^m} = n_{i1}^{mT} \boldsymbol{K}_i \nabla H_i^0, \qquad \frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_{i2}^m} = n_{i2}^{mT} \boldsymbol{K}_i \nabla H_i^0$$

con n_{i1}^m e $n_{i2}^m = -n_{i1}^m$ versori normali alla traccia in questione e uscenti rispettivamente dalla sottofrattura F_{i1} e F_{i2} .

Si osservi che, essendo $v_i \in V_i$, si ha che $v_{i|\partial F_k}$, k=1,2, da sempre contributo nullo sui bordi di Dirichlet Γ_{iD} . Pertanto rimangono solo i termini relativi ai lati di Neumann Γ_{iN} , dove il valore della derivata conormale del carico è noto da (1.14), e alla traccia S_m , ovvero

$$-\int_{F_i} \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla H_i^0) \ v_i \ dF = \int_{F_i} \mathbf{K}_i \nabla H_i^0 \cdot \nabla v_i \ dF - \int_{\Gamma_{iN}} \frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_{iN}} \cdot v_{i|_{\Gamma_{iN}}} \ dS + \\ -\int_{S_m} \left(\left[\frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_i^m} \cdot v_{i|_{S_m}} \right]^+ - \left[\frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_i^m} \cdot v_{i|_{S_m}} \right]^- \right) dS$$

dove

$$\begin{split} & \frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_{iN}} = n_{iN}^T \boldsymbol{K}_i \nabla H_i^0, \\ & \frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_i^m} = n_i^{mT} \boldsymbol{K} \nabla H_i^0 \end{split}$$

con n_{iN} versore normale ai lati di Neumann e uscente dall'i-esima frattura e $n_i^m=n_{i1}^m=-n_{i2}^m.$

Riscrivendo in forma compatta l'argomento dell'ultimo integrale e sostituendo la condizione al bordo di Neumann si ottiene infine

$$-\int_{F_{i}} \nabla \cdot (\mathbf{K}_{i} \nabla H_{i}^{0}) v_{i} dF = \int_{F_{i}} \mathbf{K}_{i} \nabla H_{i}^{0} \cdot \nabla v_{i} dF - \int_{\Gamma_{iN}} G_{iN} \cdot v_{i|_{\Gamma_{iN}}} dS + \int_{S_{m}} \left[\left| \frac{\partial H_{i}^{0}}{\partial \nu_{i}^{m}} \right| \right] \cdot v_{i|_{S}} dS.$$

$$(1.17)$$

Definito per ciascuna traccia $S \in S$ lo spazio $\mathcal{U}^S = H^{-\frac{1}{2}}(S)$ e il suo duale $\mathcal{U}^{S'}$ e posto

$$U_i^m = \left[\left| \frac{\partial H_i^0}{\partial \nu_i^m} \right| \right] \in \mathcal{U}^S, \qquad i \in I_{S_m}.$$
(1.18)

il problema (1.12)-(1.16), $\forall i \in \mathcal{J}$, può essere riscritto come

Trovare
$$H_i = H_i^0 + \mathcal{R}_i H_{iD}$$
 con $H_i^0 \in V_i$ tale che
 $(\mathbf{K}_i \nabla H_i^0, \nabla v_i)_{V_i} = (Q_i, v_i)_{V_i} + \langle U_i^m, v_{|S_m} \rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} + \langle G_{iN}, v_{|\Gamma_{iN}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{iN}), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{iN})} - (\mathbf{K}_i \nabla \mathcal{R}_i H_{iD}, \nabla v_i)_{V_i} \quad \forall v_i \in V_i.$

$$(1.19)$$

1.1.3 Formulazione Three-Field

La formulazione Three-Field è stata messa a punto da F. Brezzi e L.D Marini [4] per generici problemi ellittici del secondo ordine ed è particolarmente adatta ad essere utilizzata in problemi di *domain decomposition*. Essa permette infatti di definire e risolvere il problema indipendentemente su ogni sottodominio, introducendo degli opportuni vincoli per accoppiare tra di loro le soluzioni calcolate su sottodomini adiacenti. Tali vincoli vengono imposti con l'ausilio di due variabili apposite, definite su due spazi diversi da quello della soluzione, da cui il nome *Three-Field*. L'introduzione di tali variabili permette anche di aumentare la stabilità del problema. Precisamente i due spazi sono quello delle tracce della soluzione sull'intersezione fra i sottodomini e il suo duale.

Si consideri una traccia $S_m \in S$ e entrambe le fratture $F_{\overline{i}}$ e $F_{\underline{i}}$ che si intersecano lungo di essa. Si supponga per semplicità che siano ovunque imposte condizioni di Dirichlet omogenee.

Per le due fratture la (1.19) può quindi essere scritta come

$$\left(\boldsymbol{K}_{\underline{i}}\nabla H_{\underline{i}}, \nabla v_{\underline{i}}\right)_{V_{\underline{i}}'} - \left\langle U_{\underline{i}}^{m}, v_{\underline{i}|_{S_{m}}} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} = \left(Q_{\underline{i}}, v_{\underline{i}}\right) \qquad \forall v_{\underline{i}} \in V_{\underline{i}} \qquad (1.20)$$

$$\left(\boldsymbol{K}_{\bar{i}}\nabla H_{\bar{i}}, \nabla v_{\bar{i}}\right)_{V_{\bar{i}}'} - \left\langle U_{\bar{i}}^{m}, v_{\bar{i}|_{S_{m}}} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} = \left(Q_{\bar{i}}, v_{\bar{i}}\right) \qquad \forall v_{\bar{i}} \in V_{\bar{i}} \qquad (1.21)$$

Per associare tra di loro i problemi definiti separatamente sulle due fratture bisogna introdurre due condizioni di accoppiamento, derivanti dall'imposizione in forma debole dei vincoli di continuità del carico e di conservazione dei flussi (1.15)-(1.16). Definiti per ciascuna traccia del dominio gli spazi

$$\mathcal{H}^{S} = H^{\frac{1}{2}}(S) \qquad \mathcal{U}^{S} = H^{-\frac{1}{2}}(S)$$
 (1.22)

e i loro duali $\mathcal{H}^{S'} \in \mathcal{U}^{S'}$, si ha dunque che lungo la traccia S_m

$$\left\langle H_{\underline{i}|_{S_m}} - H_{\overline{i}|_{S_m}}, \mu_m \right\rangle_{\mathcal{H}^S, \mathcal{H}^{S'}} = 0 \qquad \forall \mu_m \in \mathcal{H}^{S'} \tag{1.23}$$

$$\left\langle U_{\underline{i}}^{m} + U_{\overline{i}}^{m}, \rho_{m} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} = 0 \qquad \qquad \forall \rho_{m} \in \mathcal{U}^{S'}. \tag{1.24}$$

Gli spazi \mathcal{H}^S e \mathcal{U}^S non sono in realtà che l'uno il duale dell'altro, ma si è scelto di indicarli comunque con simboli diversi per non perdere la struttura generale della formulazione Three-Field e distinguere più facilmente due spazi che saranno sfruttati in modo diverso.

Introducendo due opportune variabili $\Psi^m \in \mathcal{H}^S$ e $\Lambda^m \in \mathcal{U}^S$, che saranno chiamate **variabili di controllo** in opposizione al carico idraulico H_i che è la variabile osservata, si ha che

$$\begin{split} H_{\underline{i}}_{|S_m} - H_{\overline{i}}_{|S_m} &= (H_{\underline{i}}_{|S_m} - \Psi^m) - (H_{\overline{i}}_{|S_m} - \Psi^m) \\ U_{\underline{i}}^m + U_{\overline{i}}^m &= (U_{\underline{i}}^m - \Lambda^m) + (U_{\overline{i}}^m + \Lambda^m) \end{split}$$

Sia la (1.23) che la (1.24) possono così essere scomposte in due diverse condizioni, una per ciascuna frattura:

$$\left\langle U_{\underline{i}}^{m} - \Lambda^{m}, \rho_{m} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} = 0 \quad \forall \rho_{m} \in \mathcal{U}^{S'}$$

$$\left\langle U_{\overline{i}}^{m} + \Lambda^{m}, \rho_{m} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} = 0 \quad \forall \rho_{m} \in \mathcal{U}^{S'}$$

$$(1.25)$$

е

$$\left\langle H_{\underline{i}_{|S_m}} - \Psi^m, \mu_m \right\rangle_{\mathcal{H}^S, \mathcal{H}^{S'}} = 0 \quad \forall \mu_m \in \mathcal{H}^{S'}$$

$$\left\langle H_{\overline{i}_{|S_m}} - \Psi^m, \mu_m \right\rangle_{\mathcal{H}^S, \mathcal{H}^{S'}} = 0 \quad \forall \mu_m \in \mathcal{H}^{S'}$$

$$(1.26)$$

In (1.25) si osserva che Λ^m va considerato col segno positivo o negativo a seconda del verso del flusso. Si ricorda infatti che la frattura F_i è quella rispetto alla quale i flussi di segno positivo sono supposti uscenti lungo la traccia S_m , mentre, imponendo la conservazione, gli stessi flussi sono entranti in F_i .

Per ottenere una formulazione che valga in generale $\forall i \in I_{S_m}$ le condizioni di accoppiamento possono essere scritte come:

$$\left\langle H_{i|_{S_m}} - \Psi^m, \mu_m \right\rangle_{\mathcal{H}^S, \mathcal{H}^{S'}} = 0 \qquad \forall \mu_m \in \mathcal{H}^{S'} \qquad \forall i \in I_{S_m}$$
(1.27)

$$\left\langle U_i^m + (-1)^{(i==\bar{i})} \Lambda^m, \rho_m \right\rangle_{\mathcal{U}^S, \mathcal{U}^{S'}} = 0 \quad \forall \rho_m \in \mathcal{U}^{S'} \qquad \forall i \in I_{S_m} \tag{1.28}$$

La formulazione Three-Field del problema prende così la forma

Trovare $H_i \in V_i$, $i \in I_{S_m}$ tale che $(\mathbf{K}_i \nabla H_i, \nabla v_i)_{V'_i} - \langle U^m_i, v_{|S_m} \rangle_{\mathcal{U}^S, \mathcal{U}^{S'}} = (Q_i, v_i) \quad \forall v_i \in V_i \quad (1.29)$ $\left\langle U^m_i + (-1)^{(i==\bar{i})} \Lambda^m, \rho_m \right\rangle_{\mathcal{U}^S, \mathcal{U}^{S'}} = 0 \quad \forall \rho_m \in \mathcal{U}^{S'} \quad (1.30)$ $\left\langle H_i|_{S_m} - \Psi^m, \mu_m \right\rangle_{\mathcal{H}^S, \mathcal{H}^{S'}} = 0 \quad \forall \mu_m \in \mathcal{H}^{S'} \quad (1.31)$

e coinvolge gli spazi V_i , \mathcal{U}^S e \mathcal{H}^S e i rispettivi duali.

Inglobando direttamente la $\left(1.30\right)$ all'interno di $\left(1.29\right)$ si otti
ene infine il problema variazionale

Trovare
$$H_i \in V_i$$
, $i \in I_{S_m}$ tale che
 $(\mathbf{K}_i \nabla H_i, \nabla v_i)_{V'_i} - \left\langle (-1)^{(i==\bar{i})} \Lambda^m, v_i|_{S_m} \right\rangle_{\mathcal{U}^S, \mathcal{U}^{S'}} = (Q_i, v_i) \quad \forall v_i \in V_i$
(1.32)
 $\left\langle H_i|_{S_m} - \Psi^m, \mu_m \right\rangle_{\mathcal{H}^S, \mathcal{H}^{S'}} = 0 \quad \forall \mu_m \in \mathcal{H}^{S'}$
(1.33)

1.2 Riscrittura come problema di minimo vincolato

1.2.1 Formulazione per traccia

La condizione (1.33) non ha modo di essere inglobata direttamente all'interno di (1.32). Può però essere utilizzata per definire un funzionale di costo quadratico $J_i^m(\Lambda^m, \Psi^m)$ che penalizzi gli scostamenti del carico idraulico da Ψ^m lungo la traccia S_m . La soluzione esatta del problema soddisferà perfettamente il vincolo, annullando il funzionale. Trovare la soluzione equivarrà quindi a minimizzare il funzionale quadratico, andando a risolvere un problema di minimo vincolato.

Si consideri una traccia $S_m \in S$ e per ciascuna delle due fratture che si intersecano lungo di essa si definisca:

$$J_i^m(\Lambda^m, \Psi^m) = ||H_i|_{S_m}(\Lambda^m) - \Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2 \qquad m \in \mathcal{M}, \ i \in I_{S_m}$$

dove $H_i(\Lambda^m)$ indica il carico idraulico ottenuto sull'i-esima frattura risolvendo la (1.32) con Λ^m come variabile di controllo sulla traccia S_m . Definendo su S_m l'operatore

$$\Gamma_i^m : V_i \to \mathcal{H}^S \tag{1.34}$$
$$v_i \mapsto v_{i|_{S_m}}$$

tale funzionale può essere riscritto come

$$J_i^m(\Lambda^m, \Psi^m) = ||\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m) - \Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2 \qquad m \in \mathcal{M}, \ i \in I_{S_m}$$
(1.35)

Tenendo poi conto del contributo di entrambe le fratture che si intersecano lungo ${\cal S}_m$ si definisca

$$J^{m}(\Lambda^{m}, \Psi^{m}) = \sum_{i \in I_{S_{m}}} ||\Gamma_{i}^{m}H_{i}(\Lambda^{m}) - \Psi^{m}||_{\mathcal{H}^{S}}^{2} \qquad m \in \mathcal{M}.$$
(1.36)

Il problema (1.32)-(1.33) può così essere riscritto come

Trovare
$$H_i \in V_i$$
, $i \in I_{S_m}$ tale che
 $(\mathbf{K}_i \nabla H_i, \nabla v_i)_{V'_i} - \left\langle (-1)^{(i==\bar{i})} \Lambda^m, v_i|_{S_m} \right\rangle_{\mathcal{U}^S, \mathcal{U}^{S'}} = (Q_i, v_i) \quad \forall v_i \in V_i$
(1.37)
 $minJ^m(\Lambda^m)$ vincolato a (1.37)
(1.38)

Imponendo (1.33) non più in maniera diretta ma attraverso la minimizzazione di un funzionale quadratico, si trasforma il problema (1.32)-(1.33) in quello che viene detto un **PDE-constrained optimization problem**. Ci si trova infatti a risolvere un problema di ottimizzazione, la minimizzazione di J^m , vincolato dalla condizione che il controllo ottimo Λ^m sia tale per cui $H_i(\Lambda^m)$ è soluzione dell'equazione alle derivate parziali (1.37).

La formulazione del problema in questi termini richiede però di prestare attenzione alla sua buona postura. La trasformazione di (1.33) in un funzionale da minimizzare comporta infatti la scomparsa di quella che era formalmente una condizione di Dirichlet imposta sulla traccia. Se su uno dei bordi delle due fratture considerate è imposta un'altra condizione di Dirichlet non si presenta alcuna criticità. Se, al contrario, le fratture presentano solo condizioni di Neumann non è possibile trovare una soluzione unica al problema.

Per questo motivo è necessario modificare la (1.37) in modo da imporre in forma debole non più solo una condizione sul flusso, ma anche una condizione mista di Robin, che coinvolga contemporaneamente la soluzione e la sua derivata conormale sulla traccia:

$$(\boldsymbol{K}_{i}\nabla H_{i}, \nabla v_{i})_{V_{i}'} + \alpha (H_{i|_{S_{m}}}, v_{i|_{S_{m}}})_{\mathcal{H}^{S}} - \left\langle (-1)^{(i==\bar{i})} \Lambda^{m}, v_{i|_{S_{m}}} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} =$$
$$= \alpha (\Psi^{m}, v_{i|_{S_{m}}})_{\mathcal{H}^{S}} + (Q_{i}, v_{i})_{V_{i}}.$$
(1.39)

Il termine aggiunto a primo membro permette, insieme al termine in Λ^m , di imporre una condizione di Robin sulla traccia. Quello a secondo membro garantisce invece che la soluzione esatta, che soddisfa perfettamente la condizione (1.33), sia soluzione di un'equazione nella forma originale (1.32).

Una volta riscritta l'equazione in questa forma, anche il funzionale di costo J^m va leggermente modificato per tener conto del fatto che il carico idraulico dipende ora esplicitamente da entrambe le variabili di controllo:

$$J^m(\Lambda^m, \Psi^m) = \sum_{i \in I_{S_m}} ||\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2$$
(1.40)

In conclusione il problema di ottimizzazione vincolata per ciascuna delle due fratture che si intersecano lungo la traccia S_m prende la forma:

1.2. PROBLEMA DI MINIMO

Trovare $H_i \in V_i$, $i \in I_{S_m}$ tale che $(\mathbf{K}_i \nabla H_i, \nabla v_i)_{V'_i} + \alpha (H_{i|_{S_m}}, v_{i|_{S_m}})_{\mathcal{H}^S} - \left\langle (-1)^{(i==\bar{i})} \Lambda^m, v_{i|_{S_m}} \right\rangle_{\mathcal{U}^S, \mathcal{U}^{S'}} =$ $= \alpha (\Psi^m, v_{i|_{S_m}})_{\mathcal{H}^S} + (Q_i, v_i)_{V_i} \quad \forall v_i \in V_i \quad (1.41)$ $min \ J^m(\Lambda^m, \Psi^m) \text{ vincolato a } (1.41) \quad (1.42)$

Lo stesso problema può essere riscritto in maniera più compatta introducendo opportuni operatori. Siano

$$A_i: V_i \to V'_i \qquad \mathcal{B}^m_i: \mathcal{U}^{\mathcal{S}} \to V'_i \qquad \mathcal{C}^m_i: \mathcal{H}^{\mathcal{S}} \to V'_i$$

operatori lineari definiti come

$$\langle A_i H_i, v_i \rangle_{V'_i, V_i} = (\mathbf{K}_i \nabla H_i, \nabla v_i)_{V'_i} + \alpha (H_i|_{\mathcal{S}_m}, v_i|_{\mathcal{S}_m})_{\mathcal{H}^S} \qquad v_i \in V_i \quad (1.43)$$

$$\left\langle \mathcal{B}_{i}^{m}\Lambda^{m}, v_{i} \right\rangle_{V_{i}', V_{i}} = \left\langle (-1)^{(i==i)}\Lambda^{m}, v_{i|_{S_{m}}} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S}, \mathcal{U}^{S'}} \qquad v_{i} \in V_{i} \quad (1.44)$$

$$\langle \mathcal{C}_i^m \Psi^m, v_i \rangle_{V_i', V_i} = \alpha(\Psi^m, v_i|_{S_m})_{\mathcal{H}^S} \qquad v_i \in V_i \quad (1.45)$$

i cui aggiunti saranno indicati con

$$A_i^*: V_i \to V_i' \qquad \mathcal{B}_i^{m*}: V_i \to \mathcal{U}^{S_i'} \qquad \mathcal{C}_i^{m*}: V_i \to \mathcal{H}^{S_i'}.$$

Il problema (1.41)-(1.42) prende così la forma:

Trovare
$$H_i \in V_i$$
, $i \in I_{S_m}$ tale che
 $A_i H_i - \mathcal{B}_i^m \Lambda^m - \mathcal{C}_i^m \Psi^m = Q_i \quad \forall i \in I_{S_m}.$ (1.46)
 $min J^m (\Lambda^m, \Psi^m)$ vincolato a (1.46) (1.47)

1.2.2 Formulazione per frattura

Come detto in precedenza, l'utilizzo della formulazione Three-Field e la riscrittura del problema come problema di ottimizzazione vincolata, danno la possibilità di calcolare la soluzione separatamente su ciascuna frattura. Questo può essere molto vantaggioso per implementare in parallelo l'algoritmo risolutivo, scelta opportuna nel caso in cui si lavori con reti di fratture particolarmente estese.

Si consideri l'i-esima frattura $\{F_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ e l'insieme delle sue tracce \mathcal{S}_i . Su di esso sono definiti gli spazi

$$\mathcal{U}^{\mathcal{S}_i} = \prod_{m \in \mathcal{M}_i} H^{-\frac{1}{2}}(S_m) \qquad \mathcal{H}^{\mathcal{S}_i} = \prod_{m \in \mathcal{M}_i} H^{\frac{1}{2}}(S_m).$$
(1.48)

Si considerino inoltre le variabili

$$\Psi_i = \prod_{m \in \mathcal{M}_i} \Psi^m \in \mathcal{H}^{\mathcal{S}_i}; \qquad \Lambda_i = \prod_{m \in \mathcal{M}_i} \Lambda^m \in \mathcal{U}^{\mathcal{S}_i}.$$

 Siano

$$A_i: V_i \to V'_i \qquad \mathcal{B}_i: \mathcal{U}^{\mathcal{S}_i} \to V'_i \qquad \mathcal{C}_i: \mathcal{H}^{\mathcal{S}_i} \to V'_i$$

operatori lineari definiti come

$$\langle A_i H_i, v_i \rangle_{V'_i, V_i} = (\mathbf{K}_i \nabla H_i, \nabla v_i)_{V'_i} + \alpha (H_i|_{\mathcal{S}_i}, v_i|_{\mathcal{S}_i})_{\mathcal{H}} \mathcal{S}_i \qquad v_i \in V_i \quad (1.49)$$

$$\left\langle \mathcal{B}_{i}\Lambda_{i}, v_{i} \right\rangle_{V_{i}', V_{i}} = \left\langle (-1)^{(i==i)}\Lambda_{i}, v_{i|_{\mathcal{S}_{i}}} \right\rangle_{\mathcal{U}^{S_{i}}, \mathcal{U}^{S_{i}'}} \qquad v_{i} \in V_{i} \quad (1.50)$$

$$\langle \mathcal{C}_i \Psi_i, v_i \rangle_{V'_i, V_i} = \alpha (\Psi_i, v_i|_{\mathcal{S}_i})_{\mathcal{H}} s_i \qquad v_i \in V_i \quad (1.51)$$

di aggiunti

$$A_i^*: V_i \to V_i' \qquad \mathcal{B}_i^*: V_i \to \mathcal{U}^{S_i'} \qquad \mathcal{C}_i^*: V_i \to \mathcal{H}^{S_i'}.$$

Sia inoltre

$$\Gamma_i^m : V_i \to \mathcal{H}^{\mathcal{S}_i} \tag{1.52}$$
$$v_i \mapsto v_{i|_{\mathcal{S}_i}}.$$

Definito il funzionale

$$J_i(\Lambda_i, \Psi_i) = \sum_{m \in \mathcal{M}_i} J^m(\Lambda^m, \Psi^m) = ||\Gamma_i H_i(\Lambda_i, \Psi_i) - \Psi_i||^2_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}_i}}$$
(1.53)

con $H_i(\Lambda_i, \Psi_i) = A_i^{-1}(Q_i + \mathcal{B}_i\Lambda_i + \mathcal{C}_i\Psi_i)$, il problema formulato per l'i-esima frattura prende la forma

Trovare $H_i \in V_i, i \in \mathcal{J}$ tale che		
$A_i H_i - \mathcal{B}_i \Lambda_i - \mathcal{C}_i \Psi_i = Q_i$	$\forall i \in \mathcal{J}$	(1.54)
$minJ_i(\Lambda_i,\Psi_i)$ vincolato a	a(1.54)	(1.55)

1.2.3 Calcolo del controllo ottimo e metodo del gradiente coniugato

Si torni ora alla formulazione del problema traccia per traccia (1.46)-(1.47).

Proposizione 1. Il controllo ottimo (Λ^m, Ψ^m) che fornisce la soluzione a (1.47) è tale per cui

$$\Theta_{\mathcal{H}^S}^{-1} \mathcal{C}_i^m P_i - \Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) + \Psi^m = 0$$
(1.56)

$$\Theta_{\mathcal{U}^S}^{-1} \mathcal{B}_i^{m*} P_i = 0 \tag{1.57}$$

dove $P_i \in V_i, i \in \mathcal{J}$, è soluzione di

$$A_i^* P_i = \Gamma_i^{m*} \Theta_{\mathcal{H}^S} (\Gamma_i^{m*} H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m)$$
(1.58)

 $e \ \Theta_{\mathcal{H}^S}: \mathcal{H}^S \to \mathcal{H}^{S'} \ e \ \Theta_{\mathcal{U}^S}: \mathcal{U}^S \to \mathcal{U}^{S'} \ sono \ immersioni$

16

1.2. PROBLEMA DI MINIMO

Dimostrazione. Si ricordi innanzitutto che

$$J^{m}(\Lambda^{m}, \Psi^{m}) = \sum_{i \in I_{S_{m}}} ||\Gamma_{i}^{m}H_{i}(\Lambda^{m}, \Psi^{m}) - \Psi^{m}||_{\mathcal{H}^{S}}^{2} =$$
$$= \sum_{i \in I_{S_{m}}} (\Gamma_{i}^{m}H_{i}(\Lambda^{m}, \Psi^{m}) - \Psi^{m}, \Gamma_{i}^{m}H_{i}(\Lambda^{m}, \Psi^{m}) - \Psi^{m})_{\mathcal{H}^{S}}.$$

Si considerino gli incrementi $\delta\Lambda^m$ e $\delta\Psi^m$ relativi alle variabili di controllo Λ^m e Ψ^m e si calcolino le derivate seguenti:

$$\begin{split} \frac{\partial J^m}{\partial \Psi^m} (\Lambda^m, \Psi^m + \delta \Psi^m) &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left(\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \Gamma_i^m H_i(0, \delta \Psi^m) - \delta \Psi^m \right)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left(\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \Gamma_i^m H_i(0, \delta \Psi^m) \right)_{\mathcal{H}^S} + \\ &\quad - 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left(\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \delta \Psi^m \right)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle \Gamma_i^m \Theta_{\mathcal{H}^S} \left(\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m \right), H_i(0, \delta \Psi^m) \right\rangle_{V_i', V_i} + \\ &\quad - 2 \left(\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \delta \Psi^m \right)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle A_i^* P_i, A_i^{-1} C_i^m \delta \Psi^m \right\rangle_{V_i', V_i} + \\ &\quad - 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left(\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \delta \Psi^m \right)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle C_i^m P_i, \delta \Psi^m \right\rangle_{\mathcal{H}^{S'}, \mathcal{H}^S} + \\ &\quad - 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left(\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \delta \Psi^m \right)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left(\Theta_{\mathcal{H}^S}^{-1} C_i^m P_i - \Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) + \Psi^m, \delta \Psi^m \right)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle \Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \Gamma_i^m H_i(\delta \Lambda^m, 0)_{\mathcal{H}^S} \right) = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle \Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \Gamma_i^m H_i(\delta \Lambda^m, 0)_{\mathcal{H}^S} \right) = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle A_i^* P_i, H_i(\delta \Lambda^m, 0) \right\rangle_{V_i', V_i} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle A_i^* P_i, A_i^{-1} \mathcal{B}_i^m \delta \Lambda^m \right\rangle_{V_i', V_i} = \\ &= 2 \sum_{i \in I_{S_m}} \left\langle \mathcal{B}_i^m^* P_i, \delta \Lambda^m \right\rangle_{\mathcal{U}^S', \mathcal{U}^S} = \\ \end{aligned}$$

 $=2\sum_{i\in I_{S_m}}(\Theta_{\mathcal{U}^S}^{-1}\mathcal{B}_i^{m*}P_i,\delta\Lambda^m)_{\mathcal{U}^S}$

Le derivate appena calcolate costituiscono il gradiente della Lagrangiana associata al problema di minimo vincolato (1.47), dove P_i altro non è che il moltiplicatore di Lagrange definito sulle diverse fratture. Imponendo le condizioni di stazionarietà della Lagrangiana, ovvero annullando tali derivate, si trova il controllo ottimo (Λ^m, Ψ^m) che minimizza il funzionale J^m .

Il problema di minimo vincolato può però anche essere risolto con l'utilizzo di un metodo iterativo, come quello del **gradiente coniugato**. In tal caso le componenti del gradiente della Lagrangiana non vanno annullate, ma utilizzate a ogni passo per definire la direzione di *massima discesa* lungo cui muoversi per minimizzare il funzionale nel minor numero di iterazioni possibile.

La descrizione generale del metodo del gradiente coniugato è riportata nell'Appendice B e sarà riadattata al caso in esame dopo aver fornito un'espressione matriciale discreta del problema. Tuttavia le direzioni di discesa e l'ampiezza del passo di cui muoversi lungo di esse possono già essere calcolate in forma continua.

Si definiscano a tale scopo gli spazi

$$\mathcal{H} = \prod_{S \in \mathcal{S}} \mathcal{H}^S \qquad \mathcal{U} = \prod_{S \in \mathcal{S}} \mathcal{U}^S$$

e le variabili di controllo globali

$$\Psi = \prod_{m \in \mathcal{M}} \Psi^m \in \mathcal{H} \qquad \Lambda = \prod_{m \in \mathcal{M}} \Lambda^m \in \mathcal{U}$$

Esse sono definite come produttorie sulle tracce e non sulle fratture in quanto ogni traccia è condivisa da due fratture e si evitano in questo modo inutili ripetizioni.

Posto $W=(\Lambda,\Psi)$ si ha

$$J(W) = J(\Lambda, \Psi) = \sum_{m \in \mathcal{M}} J^m(\Lambda^m, \Psi^m) = \sum_{m \in \mathcal{M}} ||\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2.$$
(1.59)

Così come $\Psi \in \Lambda$, anche J va definito a partire dai funzionali J^m definiti in (1.40) su ogni traccia e non con i J_i definiti in (1.53) per ogni frattura.

Definite, a partire dalla proposizione precedente, le quantità

$$\delta\Psi^m = \Theta_{\mathcal{H}^S}^{-1} \mathcal{C}_i^{m*} P_i - \Gamma_i H_i(\Lambda^m, \Psi^m) + \Psi^m \qquad \delta\Lambda^m = \Theta_{\mathcal{U}^S}^{-1} \mathcal{B}_i^{m*} P_i \qquad (1.60)$$

$$\delta \Psi = \sum_{m \in \mathcal{M}} \left[\Theta_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}}}^{-1} \mathcal{C}_i^{m*} P_i - \Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) + \Psi^m \right] \qquad \delta \Lambda = \sum_{m \in \mathcal{M}} \left[\Theta_{\mathcal{U}^{\mathcal{S}}}^{-1} \mathcal{B}_i^{m*} P_i \right]$$
(1.61)

ci si chiede come vada calcolato il passo di cui muoversi lungo la direzione $(\delta\Lambda, \delta\Psi)$ per minimizzare progressivamente J.

1.2. PROBLEMA DI MINIMO

Proposizione 2. Data la variabile di controllo W, se ne consideri un incremento di un passo $\zeta \delta W$. Per l'applicazione del metodo del gradiente coniugato si ha che l'ampiezza del passo deve essere calcolata come

$$\zeta = \frac{\sum_{m \in \mathcal{M}} \left[(\delta \lambda^m, \delta \lambda^m)_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}}} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}}} \right]}{\sum_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}}} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}}} \right]}$$
(1.62)

dove

$$\delta \Psi^m = \Theta_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}}}^{-1} \mathcal{C}_i^{m*} P_i - \Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) + \Psi^m \in \mathcal{H}^{\mathcal{S}}$$
(1.63)

$$\delta\Lambda^m = \Theta_{\mathcal{U}^S}^{-1} \mathcal{B}_i^{m*} P_i \in \mathcal{U}^S \tag{1.64}$$

$$P_i \in V_i: \ A_i^* P_i = \Gamma_i^{m*} \Theta_{\mathcal{H}^S}(\Gamma_i^m H_i - \delta \Psi^m)$$
(1.65)

$$\delta H_i = H_i(\delta \Lambda^m, \delta \Psi^m) = A_i^{-1}(\mathcal{B}_i^m \delta \Lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m) \in V_i$$
(1.66)

$$\delta P_i \in V_i: \ A_i^* \delta P_i = \Gamma_i^{m*} \Theta_{\mathcal{H}} s \left(\Gamma_i^m \delta H_i - \delta \Psi^m \right) \tag{1.67}$$

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che

$$H_{i}(\Lambda^{m} + \zeta \delta \Lambda^{m}, \Psi^{m} + \zeta \delta \Psi^{m}) = A_{i}^{-1}(\mathcal{B}_{i}^{m}(\Lambda^{m} + \zeta \delta \Lambda^{m}) + \mathcal{C}_{i}^{m}(\Psi^{m} + \zeta \delta \Psi^{m}) + Q_{i}) =$$

$$= A_{i}^{-1}(\mathcal{B}_{i}^{m}\Lambda^{m} + \mathcal{C}_{i}^{m}\Psi^{m} + Q_{i}) + A_{i}^{-1}(\zeta \mathcal{B}_{i}^{m}\delta\Lambda^{m} + \zeta \mathcal{C}_{i}^{m}\delta\Psi^{m}) =$$

$$= H_{i}(\Lambda^{m}, \Psi^{m}) + \zeta H_{i}(\delta\Lambda^{m}, \delta\Psi^{m})$$

Segue che

$$\begin{split} J(W+\zeta\delta W) &= J(\Lambda+\zeta\delta\Lambda,\Psi+\zeta\delta\Psi) = \\ &= \sum_{m\in\mathcal{M}} ||\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m+\zeta\delta\Lambda^m,\Psi^m+\zeta\delta\Psi^m) - \Psi^m - \zeta\delta\Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2 \\ &= \sum_{i\in\mathcal{J}} (\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m+\zeta\delta\Lambda^m,\Psi^m+\zeta\delta\Psi^m) - \Psi^m - \zeta\delta\Psi^m, \\ \Gamma_i^m H_i(\Lambda^m,\Psi^m) + \zeta\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m,\delta\Psi^m) - \Psi^m - \zeta\delta\Psi^m)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= \sum_{m\in\mathcal{M}} (\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m,\Psi^m) + \zeta\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m,\delta\Psi^m) - \Psi^m - \zeta\delta\Psi^m)_{\mathcal{H}^S} = \\ &= J(\Lambda,\Psi) + \zeta \sum_{m\in\mathcal{M}} (\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m,\Psi^m) - \Psi^m,\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m,\delta\Psi^m) - \delta\Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + \\ &+ \zeta \sum_{m\in\mathcal{M}} (\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m,\delta\Psi^m) - \delta\Psi^m,\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m,\delta\Psi^m) - \delta\Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + \\ &= J(W) + 2\zeta \sum_{m\in\mathcal{M}} (\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m,\Psi^m) - \Psi^m,\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m,\delta\Psi^m) - \delta\Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + \\ &+ \zeta^2 \sum_{m\in\mathcal{M}} ||\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m,\delta\Psi^m) - \delta\Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2 \end{split}$$

$$\frac{\partial J(W+\zeta\delta W)}{\partial \zeta} = 2 \sum_{m \in \mathcal{M}} (\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m, \delta\Psi^m) - \delta\Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + 2\zeta \sum_{m \in \mathcal{M}} ||\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m, \delta\Psi^m) - \delta\Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2$$

Imponendo l'annullamento di quest'ultima derivata per trovare l'espressione di ζ che rende minimo il funzionale J si ottiene

$$\zeta = \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} (\Gamma_i^m H_i(\Lambda^m, \Psi^m) - \Psi^m, \Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m, \delta\Psi^m) - \delta\Psi^m)_{\mathcal{H}^S}}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} ||\Gamma_i^m H_i(\delta\Lambda^m, \delta\Psi^m) - \delta\Psi^m||_{\mathcal{H}^S}^2}.$$

Per una maggiore semplicità nella notazione si ponga

$$H_{i} = H_{i}(\Lambda^{m}, \Psi^{m}) = A_{i}^{-1}(\mathcal{B}_{i}^{m}\Lambda^{m} + \mathcal{C}_{i}^{m}\Psi^{m})$$

$$\delta H_{i} = H_{i}(\delta\Lambda^{m}, \delta\Psi^{m}) = A_{i}^{-1}(\mathcal{B}_{i}^{m}\delta\Lambda^{m} + \mathcal{C}_{i}^{m}\delta\Psi^{m})$$

$$A_{i}^{*}\delta P_{i} = \Gamma_{i}^{m*}\Theta_{\mathcal{H}^{S_{i}}}(\Gamma_{i}^{m}\delta H_{i} - \delta\Psi^{m}).$$

 ζ può così essere riscritto come:

$$\begin{split} \zeta &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[(\Gamma_i^m H_i - \Psi^m, \Gamma_i^m \delta H_i)_{\mathcal{H}^S} - (\Gamma_i^m H_i - \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S_i} \right]}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[(\Gamma_i^m \delta H_i, \Gamma_i^m \delta H_i - \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^{S_i}} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S_i} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]} = \\ &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \Gamma_i^m * \Theta_{\mathcal{H}^S} (\Gamma_i^m H_i - \Psi^m), A_i^{-1} (\mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m) \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m H_i - \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle A_i^{-1} (\mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m), A_i^* \delta P_i \rangle_{V_i, V_i'} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]} = \\ &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle A_i^* P_i, A_i^{-1} \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m \rangle_{V_i', V_i} + \langle A_i^* P_i, A_i^{-1} \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m H_i - \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]} = \\ &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]} = \\ &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]} = \\ \\ &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]} \right] \\ \\ &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]}{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_{V_i', V_i} - (\Gamma_i^m \delta H_i, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]} \right] \\ \\ \\ \\ &= \frac{\sum\limits_{m \in \mathcal{M}} \left[\langle \mathcal{B}_i^m \delta \Lambda^m + \mathcal{C}_i^m \delta \Psi^m, \delta P_i \rangle_$$

20

1.3 Formulazione matriciale discreta

1.3.1 Discretizzazione delle variabili

Per poter risolvere numericamente il problema costruito in precedenza è necessario riscriverlo in forma matriciale discreta, introducendo opportune basi definite sulla discretizzazione di fratture e tracce. I gradi di libertà rispetto a tali basi delle variabili continue definite precedentemente costituiscono la discretizzazione delle variabili stesse sulle griglie introdotte. La riformulazione del problema richiede inoltre la costruzione di matrici da sostituire agli operatori utilizzati per la formulazione continua.

Da questo momento in poi si indicheranno con lettere minuscole le approssimazioni delle variabili precedentemente utilizzate sulle basi che saranno a via a via introdotte. Più spesso la stessa notazione sarà utilizzata per indicare i vettori dei gradi di libertà delle variabili stesse. Il significato della notazione utilizzata sarà comunque sempre chiaro dal contesto.

Si consideri per ciascuna frattura $\{F_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ un'opportuna base $\{\varphi_{i,k}\}_{k=1,\ldots,N_H^i}$ con N_H^i numero dei gradi di libertà del carico idraulico sull'i-esima frattura. L'approssimazione del carico sulla frattura può quindi essere scritto come

$$h_i = \sum_{k=1}^{N_H^i} h_{i,k} \varphi_{i,k} \tag{1.68}$$

dove $h_{i,k}$ sono i valori assegnati ai gradi di libertà.

Per ogni traccia $S_m \in S$ si considerino invece le basi $\{\eta_k^m\}_{k=1,...,N_{\Lambda}^m} \in \{\theta_k^m\}_{k=1,...,N_{\Psi}^m}$, con $N_{\Lambda}^m \in N_{\Psi}^m$ numero dei gradi di libertà sulla m-esima traccia per le variabili di controllo $\Lambda^m \in \Psi^m$ rispettivamente. E' importante sottolineare come né la discretizzazione della traccia né la base scelta debbano coincidere per le due variabili di controllo. Siano

$$u_i^m = \sum_{k=1}^{N_A^m} (-1)^{(i==\bar{i})} \lambda_k^m \eta_k^m; \qquad \psi^m = \sum_{k=1}^{N_{\Psi}^m} \psi_k^m \theta_k^m$$
(1.69)

con $\lambda_k^m \in \psi_k^m$ valori assegnati gradi di libertà delle variabili $\Lambda^m \in \Psi^m$.

Come anticipato, notazioni analoghe a quelle appena introdotte verranno utilizzate anche per far riferimento al vettore dei gradi di libertà della variabile corrispondente. Si definiscano quindi i vettori colonna

$$h_i \in \mathbb{R}^{N_H^*} \ t.c, \ (h_i)_k = h_{i,k}$$
$$\lambda^m \in \mathbb{R}^{N_\Lambda^m} \ t.c. \ (\lambda^m)_k = \lambda_k^m \qquad \psi^m \in \mathbb{R}^{N_\Psi^m} \ t.c. \ (\psi^m)_k = \psi_k^m$$
$$\lambda_i = (\lambda_i^{1^T} \ \lambda_i^{2^T} \ \dots \ \lambda_i^{M_i^T})^T \in \mathbb{R}^{N_\Lambda^{S_i}} \qquad \psi_i = (\psi_i^{1^T} \ \psi_i^{2^T} \ \dots \ \psi_i^{M_i^T})^T \in \mathbb{R}^{N_\Psi^{S_i}}$$

con $N_{\Lambda}^{\mathcal{S}_i} = \sum_{m \in \mathcal{M}_i} N_{\Lambda}^m$ e $N_{\Psi}^{\mathcal{S}_i} = \sum_{m \in \mathcal{M}_i} N_{\Psi}^m$

1.3.2 Le matrici $A, \mathcal{B} \in \mathcal{C}$

Si richiamano alcuni degli operatori utilizzati per la formulazione continua del problema:

$$\langle A_i H_i, v_i \rangle_{V'_i, V_i} = \int_{F_i} \mathbf{K}_i \nabla H_i \nabla v_i \, dF_i + \alpha \int_{S_m} H_{i|_{S_m}} v_{i|_{S_m}} \, dS \qquad v_i \in V_i,$$

$$\langle \mathcal{B}_i^m \Lambda^m, v_i \rangle_{V'_i, V_i} = \int_{S_m} (-1)^{(i==\bar{i})} \Lambda^m v_{i|_{S_m}} \, dS \qquad v_i \in V_i,$$

$$\langle \mathcal{C}_i^m \Psi^m, v_i \rangle_{V'_i, V_i} = \int_{S_m} \Psi^m v_{i|_{S_m}} \, dS \qquad v_i \in V_i.$$

Si definiscano, a partire da essi e dalle basi appena definite, $\forall i \in \mathcal{J}, \forall m \in \mathcal{M}_i$, le matrici

$$(A_i)_{kl} = (K_i)_{kl} \int_{F_i} \nabla \varphi_{i,k} \nabla \varphi_{i,l} \, dF_i + \alpha \int_{S_m} \varphi_{i,k|_{S_m}} \varphi_{i,l|_{S_m}} \, dS$$
$$\implies \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{N_H^i \times N_H^i} \tag{1.70}$$

$$(\mathcal{B}_{i}^{m})_{kl} = (-1)^{(i==\bar{i})} \int_{S_{m}} \varphi_{i,k}{}_{|S_{m}} \eta_{l}^{m} dS \Longrightarrow \mathcal{B}_{i}^{m} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{i} \times N_{\Lambda}^{m}}$$
(1.71)

$$(\mathcal{C}_{i}^{m})_{kl} = \int_{S_{m}} \varphi_{i,k|_{S_{m}}} \theta_{l}^{m} dS \Longrightarrow \mathcal{C}_{i}^{m} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{i} \times N_{\Psi}^{m}}$$
(1.72)

Tali matrici permettono di scrivere la (1.46) in forma matriciale discreta come

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{m}} = q_{\boldsymbol{i}}$$
(1.73)

dove q_i rappresenta il vettore dei gradi di libertà del termine noto sull'i-esima frattura rispetto alla base $\{\varphi_{i,k}\}_{k=1,\ldots,N_H^i}$, ed è pertanto un vettore di $\mathbb{R}^{N_H^i}$

La formulazione matriciale discreta può anche essere data a livello di frattura introducendo le matrici

$$(A_i)_{kl} = (K_i)_{kl} \int_{F_i} \nabla \varphi_{i,k} \nabla \varphi_{i,l} \, dF_i + \alpha \int_{\mathcal{S}_i} \varphi_{i,k|_{\mathcal{S}_i}} \varphi_{i,l|_{\mathcal{S}_i}} \, dS$$
$$\implies \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{N_H^i \times N_H^i} \tag{1.74}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_{i} = Hcat \left[\boldsymbol{\mathcal{B}}_{i}^{\boldsymbol{m}}\right]^{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}_{i}} \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}_{i} = Hcat \left[\boldsymbol{\mathcal{C}}_{i}^{\boldsymbol{m}}\right]^{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}_{i}}$$
(1.75)

dove Hcat indica la concatenazione orizzontale di matrici. La (1.54) può quindi essere discretizzata come

$$\mathbf{A}_{i}h_{i} - \mathbf{\mathcal{B}}_{i}\lambda_{i} - \mathbf{\mathcal{C}}_{i}\psi_{i} = q_{i} \tag{1.76}$$

Per estendere la formulazione ottenuta a tutto il dominio Ω è necessario prestare attenzione ad alcuni aspetti.

La definizione del vettore globale dei gradi di libertà del carico idraulico non

presenta particolari criticità e può essere ottenuta direttamente a partire dalle h_i come

$$\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}_1^T \ \boldsymbol{h}_2^T \ \dots \ \boldsymbol{h}_I^T)^T \in \mathbb{R}^{N_H^r}$$

con $N_{H}^{F} = \sum\limits_{i \in \mathcal{J}} N_{H}^{i}$

Bisogna invece fare attenzione alla definizione dei vettori globali per i gradi di libertà delle variabili di controllo definite sulle tracce. Analogamente ad alcuni casi già riscontrati nel caso continuo, non è opportuno andare a comporre i λ_i e i ψ_i frattura per frattura. Si otterrebbero infatti dei vettori caratterizzati da inutili ripetizioni in corrispondenza di quelle fratture che condividono una stessa traccia. E' quindi necessario andare a comporre verticalmente i vettori $\lambda^m \in \psi^m \ \forall m \in \mathcal{M}$. Si ottengono così

$$\begin{split} \lambda &= [\lambda^1, ..., \lambda^M]^T \in \mathbb{R}^{N_\Lambda^T} \qquad \psi = [\psi^1, ..., \psi^M]^T \in \mathbb{R}^{N_\Psi^T} \\ \text{dove } N_\Lambda^T &= \sum_{m \in \mathcal{M}} N_\Lambda^m \text{ e } N_\Psi^T = \sum_{m \in \mathcal{M}} N_\Psi^m. \end{split}$$

Per costruire delle matrici globali $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ che possano premoltiplicare i vettori $\lambda \in \psi$ così costruiti, bisogna definire per ciascuna frattura delle matrici molto simili alle (1.75), ma che tengano dimensionalmente conto di tutte le tracce del dominio e non solo di quelle relative alla frattura stessa. Si definisca a tale scopo la funzione

$$f(i,m) = \begin{cases} 1 \text{ se } S_m \in \mathcal{S}_i \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

e a partire da essa le matrici

$$\boldsymbol{\mathcal{B}_{i}^{\mathcal{M}}} = Hcat \left[f(i,m) \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}_{i}^{m}} \right]^{m \in \mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{i} \times N_{\Lambda}^{T}}$$
(1.77)

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{i}^{\mathcal{M}}} = Hcat \left[f(i,m) \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}_{i}^{m}} \right]^{m \in \mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{i} \times N_{\Psi}^{T}}.$$
(1.78)

Tali matrici, per come sono definite, redistribuiscono i blocchi-colonna di \mathcal{B}_i^m e \mathcal{C}_i^m secondo la numerazione globale delle tracce, intervallandovi blocchi-colonna nulli in corrispondenza di quelle tracce che non competono all'i-esima frattura.

Si definiscano infine le matrici $\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ come

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = Vcat[\boldsymbol{\mathcal{B}}_{i}^{\boldsymbol{\mathcal{M}}}]^{i \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{F} \times N_{\Lambda}^{T}}$$
(1.79)

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = Vcat[\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{\mathcal{M}}}]^{i\in\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{F} \times N_{\Psi}^{T}}$$
(1.80)

dove Vcat indica la concatenazione verticale di matrici.

Si giunge in questo modo alla formulazione matriciale discreta globale del problema:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{q} \tag{1.81}$$

dove la matrice

$$\boldsymbol{A} = diag(\boldsymbol{A_1} \ \boldsymbol{A_2} \ \dots \ \boldsymbol{A_I}) \in \mathbb{R}^{N_H^F \times N_H^F}, \tag{1.82}$$

così come era stato per il vettore dei gradi di libertà del carico idraulico, non presenta particolari problematiche nella sua costruzione. Infine si ha $q = (q_1^T \ q_2^T \ \dots \ q_I^T)^T \in \mathbb{R}^{N_H^F}$

1.3.3 Riscrittura del funzionale J

Una volta ottenuta l'equazione (1.81) resta ancora da ricavare la formulazione discreta \tilde{J} per il funzionale (1.59), la cui minimizzazione è vincolata alla risoluzione della (1.81) stessa.

Sia $\mathcal{K}_i^m = \{k \in \{1, ..., N_H^i\} \ t.c. \ supp \{\varphi_{i,k}\} \cap S_m \neq \emptyset\}.$ La formulazione discreta del funzionale quadratico (1.40) definito traccia per traccia può essere ricavata come

$$\begin{split} \tilde{J}^{m}(\lambda^{m},\psi^{m}) &= \sum_{i \in I_{S_{m}}} ||h_{i}|_{S_{m}}(\lambda^{m},\psi^{m}) - \psi^{m}||_{\mathcal{H}^{S}}^{2} = \\ &= \sum_{i \in I_{S_{m}}} \left[\int_{S_{m}} \left(\sum_{k=1}^{N_{H}^{i}} h_{i,k}(\lambda^{m}_{k},\psi^{m}_{k})\varphi_{i,k}|_{S_{m}} - \sum_{k=1}^{N_{H}^{i}} \psi^{m}_{k}\theta^{m}_{k} \right)^{2} dS \right] = \\ &= \sum_{i \in I_{S_{m}}} \left[\sum_{k \in \mathcal{K}_{i}^{m}} h_{i,k}^{2}(\lambda^{m}_{k},\psi^{m}_{k}) \int_{S_{m}} \varphi_{i,k}|_{S_{m}} dS + \right. \\ &+ \left. \sum_{k,l \in \mathcal{K}_{i}^{m}} h_{i,k}(\lambda^{m}_{k},\psi^{m}_{k})h_{i,l}(\lambda^{m}_{l},\psi^{m}_{l}) \int_{S_{m}} \varphi_{i,k}|_{S_{m}} \varphi_{i,l}|_{S_{m}} dS + \right. \\ &+ \left. \sum_{k \in \mathcal{K}_{i}^{m}} \psi^{m2}_{k} \int_{S_{m}} \theta^{m2}_{k} dS + 2 \sum_{k,l \in \mathcal{K}_{i}^{m}} \psi^{m}_{k} \psi^{m}_{l} \int_{S_{m}} \theta^{m}_{k} \theta^{m}_{l} dS + \right. \\ &\left. - 2 \sum_{k \in \mathcal{K}_{i}^{m}} \sum_{l \in \mathcal{K}_{i}^{m}} h_{i,k}(\lambda^{m}_{k},\psi^{m}_{k})\psi^{m}_{l} \int_{S_{m}} \varphi_{i,k}|_{S_{m}} \theta^{m}_{l} dS \right] \end{split}$$

Per riscrivere il tutto in maniera più compatta si definiscano le matrici:

$$(G_{i,m}^{h})_{kl} = \int_{S_{m}} \varphi_{i,k|_{S_{m}}} \varphi_{i,l|_{S_{m}}} dS \Longrightarrow G_{i,m}^{h} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{i} \times N_{H}^{i}}$$
$$(G_{m}^{\psi})_{kl} = \int_{S_{m}} \theta_{k}^{m} \theta_{l}^{m} dS \Longrightarrow G_{m}^{\psi} \in \mathbb{R}^{N_{\Psi}^{m} \times N_{\Psi}^{m}}$$

Inoltre, per alleggerire la notazione, sia

$$h_i = h_i(\lambda^m, \psi^m) = \boldsymbol{A}_i^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{B}}_i^m \lambda^m + \boldsymbol{\mathcal{C}}_i^m \psi^m + q_i).$$

Si ottiene così, $\forall m \in \mathcal{M}$,

$$\tilde{J}^{m}(\lambda^{m},\psi^{m}) = \sum_{i \in I_{S_{m}}} \left[h_{i}^{T} \boldsymbol{G}_{i,m}^{h} h_{i} + (\psi^{m})^{T} \boldsymbol{G}_{m}^{\psi} \psi^{m} - h_{i}^{T} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{i}^{m} \psi^{m} - (\psi^{m})^{T} (\boldsymbol{\mathcal{C}}_{i}^{m})^{T} h_{i} \right].$$

Per passare a una formulazione relativa alle fratture si considerino le matrici

$$\boldsymbol{G_{i}^{h}} = \sum_{m \in \mathcal{M}_{i}} \boldsymbol{G_{i,m}^{h}} \in \mathbb{R}^{N_{H}^{i} \times N_{H}^{i}}$$
(1.83)

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{\psi}} = diag(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{\psi}} \; \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{\psi}} \; \dots \; \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{i}}}^{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathbb{R}^{N_{\Psi}^{\mathcal{M}_{\boldsymbol{i}}} \times N_{\Psi}^{\mathcal{M}_{\boldsymbol{i}}}}$$
(1.84)

1.3. FORMULAZIONE MATRICIALE DISCRETA

grazie alle quali la formulazione discreta di (1.53) prende la forma

$$\tilde{J}(\lambda_i, \psi_i) = h_i^T \boldsymbol{G}_i^{\boldsymbol{h}} h_i + \psi_i^T \boldsymbol{G}_i^{\boldsymbol{\psi}} \psi_i - h_i^T \boldsymbol{\mathcal{C}}_i \psi_i - \psi_i^T \boldsymbol{\mathcal{C}}_i^T h_i \quad \forall i \in \mathcal{J}.$$
(1.85)

Infine, per ottenere l'espressione globale del funzionale, si considerino le matrici

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}} &= diag(\boldsymbol{G}_{1}^{\boldsymbol{h}} \; \boldsymbol{G}_{2}^{\boldsymbol{h}} \; \dots \; \boldsymbol{G}_{I}^{\boldsymbol{h}}) \in \mathbb{R}^{N_{H}^{F} \times N_{H}^{F}} \\ \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{\psi}} &= 2 \cdot diag(\boldsymbol{G}_{1}^{\boldsymbol{\psi}} \; \boldsymbol{G}_{2}^{\boldsymbol{\psi}} \; \dots \; \boldsymbol{G}_{M}^{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathbb{R}^{N_{\Psi}^{T} \times N_{\Psi}^{T}} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda matrice si osserva innanzitutto come non sia possibile utilizzare per la sua costruzione le matrici G_i^{ψ} definite per ogni frattura. Se si costruisse una matrice diagonale a blocchi a partire da esse si otterrebbe infatti una matrice eccessivamente grande, con inutili ripetizioni e incoerente con la numerazione globale delle tracce. Per questo motivo è necessario utilizzare le G_m^{ψ} .

La necessità di moltiplicare per 2 la matrice così ottenuta sarà invece più chiara in seguito. E' comunque conseguenza diretta del fatto che per ogni traccia si ha sempre il contributo di due distribuzioni di carico idraulico, una per ciascuna delle due fratture che su di essa si intersecano, e che entrambe devono approssimare il valore di ψ imposto sulla traccia.

Utilizzando le matrici appena definite si ha

$$\tilde{J}(\lambda,\psi) = h^T \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}} h + \psi^T \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{\psi}} \psi - h^T \boldsymbol{\mathcal{C}} \psi - \psi^T \boldsymbol{\mathcal{C}}^T h$$
(1.86)

Si ottiene in questo modo la **formulazione matriciale discreta globale** del problema:

$$oldsymbol{A}h - oldsymbol{\mathcal{B}}\lambda - oldsymbol{\mathcal{C}}\psi = q$$
 (1.87)
 $min \tilde{J}(\lambda, \psi) ext{ subject to (1.87)}$ (1.88)

Ricordando che $h = h(\lambda) = A^{-1}\mathcal{B}\lambda + A^{-1}\mathcal{C}\psi + A^{-1}q$, il funzionale \tilde{J} può essere riscritto come

$$\begin{split} J(\lambda,\psi) &= (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \boldsymbol{A}^{-1}q)^{T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \boldsymbol{A}^{-1}q) + \\ &+ \psi^{T}\boldsymbol{G}^{\psi}\psi - (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \boldsymbol{A}^{-1}q)^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \\ &- \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \boldsymbol{A}^{-1}q) = \\ &= \lambda^{T}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda + \lambda^{T}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \\ &+ \lambda^{T}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}q + \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda + \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \\ &+ \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}q + q^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda + q^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \\ &+ q^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{A}^{-1}q + \psi^{T}\boldsymbol{G}^{\psi}\psi - \lambda^{T}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi - \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi + \\ &- q^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi - \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\lambda - \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{C}}\psi - \psi^{T}\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-1}q \end{split}$$

Distinguendo e accorpando opportunamente termini quadratici, lineari e co-stanti, si ha

Dove la matrice

$$\hat{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}^T \boldsymbol{A}^{-T} \boldsymbol{G}^h \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{B}} & \boldsymbol{\mathcal{B}}^T \boldsymbol{A}^{-T} (\boldsymbol{G}^h \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{\mathcal{C}} \\ \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^T (\boldsymbol{A}^{-T} \boldsymbol{G}^h - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{B}} & \boldsymbol{G}^{\psi} + \boldsymbol{\mathcal{C}}^T (\boldsymbol{A}^{-T} \boldsymbol{G}^h \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-T} - \boldsymbol{A}^{-1}) \boldsymbol{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$
(1.90)

è simmetrica e definita positiva.

1.4 Metodi risolutivi

1.4.1 Il sistema KKT

Per risolvere il problema (1.87)-(1.88) è possibile scegliere tra due diversi tipi di approccio.

Una prima possibilità è data dalla risoluzione diretta del sistema di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) le cui equazioni corrispondono ai vincoli sotto i quali il funzionale \tilde{J} va minimizzato. Tali vincoli sono dati da 4 equazioni: la stessa equazione (1.81)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{q},\tag{1.91}$$

le condizioni di stazionarietà della Lagrangiana ricavate nella proposizione 1

$$\Theta_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}_i}}^{-1} \mathcal{C}_i^* P_i - \Gamma_i H_i(\Lambda_i, \Psi_i) + \Psi_i = 0$$
(1.92)

$$\Theta_{\mathcal{U}^{\mathcal{S}_i}}^{-1} \mathcal{B}_i^* P_i = 0, \tag{1.93}$$

e l'equazione che definisce il moltiplicatore di Lagrange ${\cal P}_i$ introdotta nella stessa proposizione

$$A_i^* P_i = \Gamma_i^* \Theta_{\mathcal{H}^{\mathcal{S}_i}} (\Gamma_i H_i(\Lambda_i, \Psi_i) - \Psi_i).$$
(1.94)

Andando a riscrivere tutti i vincoli in forma matriciale discreta e introducendo il vettore p, ottenuto dalla concatenazione verticale dei gradi di libertà di P_i sulle varie fratture rispetto alla base $\{\varphi_{i,k}\}_{k=1,\ldots,N_H^i}$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\psi} = q \\ \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{\mathcal{C}}\boldsymbol{\psi} \\ -\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{h} + \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{p} = 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{p} = 0 \end{cases}$$
(1.95)

26

1.4. METODI RISOLUTIVI

dove le ultime 3 equazioni rappresentano, nell'ordine, la riscrittura matriciale discreta di (1.92), (1.93) e (1.94).

Considerando il vettore di incognite $\begin{bmatrix} h^T, \lambda^T, \psi^T, -p^T \end{bmatrix}^T$ e riordinando conseguentemente le equazioni, il sistema KKT può essere riscritto in forma compatta come

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\mathcal{C}} & \boldsymbol{A}^{T} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\mathcal{B}}^{T} \\ -\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{\psi}} & -\boldsymbol{\mathcal{C}}^{T} \\ \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{\mathcal{B}} & -\boldsymbol{\mathcal{C}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\psi} \\ -\boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$$
(1.96)

dove si nota come la matrice così ottenuta sia simmetrica.

Osservando la terza equazione del sistema (1.96) si chiarisce il motivo per cui la G^{ψ} è stata costruita moltiplicando per 2 la matrice diagonale a blocchi ottenuta a partire dalle G_m^{ψ} . Per come è stata costruita \mathcal{C} si ha infatti che l'operazione $\mathcal{C}^T h$ somma per ciascuna traccia i contributi delle distribuzioni di carico idraulico di entrambe le fratture che si intersecano lungo di essa. Per questo motivo le quantità così ottenute per ogni traccia dovranno approssimare il doppio del valore di ψ imposto sulla traccia stessa.

1.4.2 Metodo del gradiente coniugato

La scelta di risolvere il problema (1.87)-(1.88) passando attraverso il sistema KKT risulta adeguata solo per DFN di dimensioni ridotte. Per reti più estese la risoluzione diretta di un sistema lineare è infatti eccessivamente onerosa dal punto di vista computazionale.

E' allora possibile andare a minimizzare il funzionale \tilde{J} con un metodo iterativo, come quello del gradiente coniugato.

Il funzionale quadratico (1.86) può essere riscritto in forma compatta come

$$\tilde{J} = w^T \hat{G} w + 2d^T w + cost \tag{1.97}$$

dove $w = [\lambda^T, \psi^T]^T$, $\hat{\boldsymbol{G}}$ definita come in (1.90) e

$$d^{T} = q^{T} [\boldsymbol{A}^{-T} \boldsymbol{G}^{h} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{B}} \quad \boldsymbol{A}^{-T} (\boldsymbol{G}^{h} \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{\mathcal{C}}].$$
(1.98)

Il sistema lineare equivalente alla minimizzazione di tale funzionale, e ricavato andando a derivare lo stesso rispetto a *w*, prende la forma

$$\hat{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}. \tag{1.99}$$

L'algoritmo 1.1 rappresenta l'adattamento al sistema in esame di quello riportato in appendice B.

Si osservi però come, durante l'implementazione, non sia efficiente effettuare le operazioni che coinvolgono la matrice \hat{G} e il termine noto *d* applicando direttamente le definizioni date in (1.90) e (1.98). Queste infatti richiedono l'inversione di diverse matrici e sono quindi computazionalmente molto onerose.

Algoritmo 1.1: Metodo del gradiente coniugato per Mw+d=0

1 Sia dato $w_0 = [\lambda_0^T, \psi_0^T]^T$ guess iniziale 2 solve $Ah_0 = \mathcal{B}\lambda_0 + \mathcal{C}\psi_0 + q;$ $r_0 = \hat{G}w_0 + d;$ 4 $\delta w_1 = [\delta \lambda_1^T, \delta \psi_1^T]^T = -r_0;$ 5 solve $\mathbf{A}\delta h_1 = \mathbf{B}\delta\lambda_1 + \mathbf{C}\delta\psi_1;$ 6 solve $\boldsymbol{A}^T \delta p_1 = \boldsymbol{G}^h \delta h_1 - \boldsymbol{\mathcal{C}} \delta \psi_1;$ $\mathbf{7} \ \zeta_0 = \frac{r_0^T r_0}{\delta w_1^T \hat{\mathbf{G}} \delta w_1};$ **s** $w_1 = w_0 + \zeta_0 \delta w_1;$ 9 $h_1 = h_0 + \zeta_0 \delta w_1;$ 10 $r_1 = r_0 + \zeta_0 \hat{G} \delta w_1;$ 11 k = 1;12 while $\frac{r_k}{d} > toll$ do $\beta_k = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}};$ $\mathbf{13}$ $\delta w_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k \delta w_k;$ $\boldsymbol{A} \delta h_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{B}} \delta \lambda_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{C}} \delta \psi_{k+1};$ $\mathbf{14}$ 15 $\boldsymbol{A}^T \delta p_{k+1} = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}} \delta h_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{C}} \delta \psi_{k+1};$ 16 $\zeta_k = \frac{r_k^T r_k}{\delta w_{k+1}^T \hat{\boldsymbol{G}} \delta w_{k+1}};$ $\mathbf{17}$
$$\begin{split} w_{k+1} &= w_k + \zeta_k \delta w_{k+1}; \\ h_{k+1} &= h_k + \zeta_k \delta h_{k+1}; \end{split}$$
 $\mathbf{18}$ 19 $r_{k+1} = r_k + \zeta_k \hat{\boldsymbol{G}} \delta w_{k+1};$ $\mathbf{20}$ k = k + 1;21 22 end

Per la definizione del termine noto, posto

$$d^T = \begin{bmatrix} d_1^T & d_2^T \end{bmatrix}$$

è possibile ragionare in questo modo:

Algoritmo 1.2: Calcolo del termine noto d definito in (1.98)
1 solve $Ax = q;$
$2 \ y = \mathbf{G}^{\mathbf{h}} x;$
$s solve A^T z = y;$
$4 \ d_1 = \boldsymbol{\mathcal{B}}^T z;$
$ b \ d_2 = \boldsymbol{\mathcal{C}}^T \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mathcal{C}}^T \boldsymbol{x}; $

1.4. METODI RISOLUTIVI

Se, come spesso accade, il *guess* iniziale w_0 è nullo, l'unico caso in cui appare la matrice $\hat{\boldsymbol{G}}$ è in prodotti del tipo $\hat{\boldsymbol{G}}\delta w_{k+1}$. Per la loro implementazione si ragiona come segue:

$$\begin{split} \hat{\boldsymbol{G}}\delta\boldsymbol{w}_{k+1} &= \hat{\boldsymbol{G}}\begin{bmatrix}\delta\lambda_{k+1}\\\delta\psi_{k+1}\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{h}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\delta\lambda_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}(\boldsymbol{G}^{h}\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{\mathcal{C}}\delta\psi_{k+1}\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}(\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{h} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}}\delta\lambda_{k+1} + (\boldsymbol{G}^{\psi} + \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}(\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{h}\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-T} - \boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{\mathcal{C}})\delta\psi_{k+1}\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{G}^{h}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{B}}\delta\lambda_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{C}}\delta\psi_{k+1}) - \boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{\mathcal{C}}\delta\psi_{k+1}\\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}(\boldsymbol{G}^{h}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{B}}\delta\lambda_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{C}}\delta\psi_{k+1}) - \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{B}}\delta\lambda_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{C}}\delta\psi_{k+1}) + \boldsymbol{G}^{\psi}\delta\psi_{k+1}\end{bmatrix} \end{split}$$

 $\mathbf{Ponendo}$

$$\delta h_{k+1} = \boldsymbol{A}^{-1} (\boldsymbol{\mathcal{B}} \delta \lambda_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{C}} \delta \psi_{k+1}); \qquad \delta p_{k+1} = \boldsymbol{A}^{-T} (\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{h}} \delta h_k - \boldsymbol{\mathcal{C}} \delta \psi_k)$$

si ottiene:

$$\hat{\boldsymbol{G}}\delta\boldsymbol{w}_{k+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}(\boldsymbol{G}^{h}\delta\boldsymbol{h}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{C}}\delta\boldsymbol{\psi}_{k+1}) \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\boldsymbol{A}^{-T}(\boldsymbol{G}^{h}\delta\boldsymbol{h}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{C}}\delta\boldsymbol{\psi}_{k+1}) - \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\delta\boldsymbol{h}_{k+1} + \boldsymbol{G}^{\psi}\delta\boldsymbol{\psi}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}^{T}\delta\boldsymbol{p}_{k+1} \\ \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\delta\boldsymbol{p}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{C}}^{T}\delta\boldsymbol{h}_{k+1} + \boldsymbol{G}^{\psi}\delta\boldsymbol{\psi}_{k+1} \end{bmatrix}.$$
(1.100)

Ai fini dell'implementazione tutte le quantità richieste per il calcolo di $\hat{G} \delta w_{k+1}$ sono già disponibili nel flusso dell'algoritmo 1.1 e non prevedono l'inversione di alcuna matrice.

Si osservi come le espressioni in (1.100) altro non siano che la riscrittura matriciale discreta dei passi $\delta \Psi \in \delta \Lambda$ introdotti in (1.61). Inoltre il passo ζ_k che viene calcolato alla riga 17 dell'algoritmo 1.1 corrisponde

Inoltre il passo ζ_k che viene calcolato alla riga 17 dell'algoritmo 1.1 corrisponde alla discretizzazione di quello ottenuto in (1.62). Infatti:

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \frac{r_k^T r_k}{\delta w_{k+1}^T \hat{\boldsymbol{G}} \delta w_{k+1}} = \frac{r_k^T r_k}{\delta \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{\mathcal{B}}^T \delta p_{k+1} + \delta \psi_{k+1} \boldsymbol{\mathcal{C}}^T \delta p_{k+1} - \delta \psi_{k+1}^T \boldsymbol{\mathcal{C}}^T \delta h_{k+1} + \delta \psi_{k+1} \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{\psi}} \delta \psi_{k+1}} = \\ &= \frac{r_k^T r_k}{(\delta \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{\mathcal{B}}^T + \delta \psi_{k+1}^T \boldsymbol{\mathcal{C}}^T) \delta p_{k+1} - \delta \psi_{k+1}^T \boldsymbol{\mathcal{C}}^T \delta h_{k+1} + \delta \psi_{k+1}^T \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{\psi}} \delta \psi_{k+1}} \end{aligned}$$

dove la corrispondenza tra il denominatore ottenuto e quello in (1.62) è evidente, mentre $r_k^T r_k$ altro non è che il quadrato della norma del gradiente calcolata al passo k-esimo, ovvero l'equivalente dell'espressione

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \left[(\delta \lambda^m, \delta \lambda^m)_{\mathcal{U}^S} + (\delta \Psi^m, \delta \Psi^m)_{\mathcal{H}^S} \right]$$

della formulazione continua.

1.4.3 Metodo del gradiente coniugato precondizionato

Come si vedrà da alcuni risultati riportati nel capitolo successivo, l'applicazione dell'algoritmo 1.1 può richiedere un grande numero di iterazioni. Questo, nell'ottica di applicare il metodo a DFN molto estese, può rappresentare un problema.

Come riportato in appendice B, in particolare nella stima (B.15), la velocità di convergenza del metodo del gradiente coniugato è influenzata dal condizionamento della matrice del sistema sul quale viene applicato.

La causa principale del grande numero di iterazioni è quindi il cattivo condizionamento della matrice \hat{G} , definita in (1.90), e in particolare del blocco $\mathcal{B}^T A^{-T} G^h A^{-1} \mathcal{B}$, il cui condizionamento, così come sarà mostrato nel capitolo successivo, peggiora al raffinarsi della mesh definita sulle tracce per λ .

Per questo motivo, seguendo ancora quanto riportato in appendice B, è opportuno identificare un **precondizionatore** che permetta di aumentare la velocità di convergenza. In questo contesto si propone un precondizionatore definito come

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}^T \boldsymbol{A}^{-T} \boldsymbol{G}^{\mathbf{h}} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{B}} & \boldsymbol{0} \\ & & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{\psi}} \end{bmatrix}.$$
(1.101)

Si osserva nell'algoritmo B.2 che tale matrice interviene nella ridefinizione del residuo, ovvero, riadattando il primo passo al caso in esame e facendo riferimento alle notazioni dell'algoritmo 1.1:

$$r_0 = \hat{\boldsymbol{G}} w_0 + d$$

$$M z_0 = r_0 \Rightarrow z_0 = \boldsymbol{M}^{-1} (\hat{\boldsymbol{G}} w_0 + d).$$

Ciò significa che formalmente, anche se in realtà il tutto avviene attraverso la risoluzione di un sistema lineare, il blocco $\mathcal{B}^T A^{-T} G^h A^{-1} \mathcal{B}$ contenuto in \hat{G} viene premoltiplicato per il suo inverso, contenuto in M^{-1} . Questo permette di neutralizzare l'effetto che il cattivo condizionamento del blocco ha sulla velocità di convergenza del metodo.

La performance del precondizionatore M sarà riportata e discussa nel capitolo che segue.

Capitolo 2

Risultati numerici

Si riportano in questo capitolo i risultati ottenuti per alcuni problemi modello definiti su diverse DFN più o meno complesse. Tutte le simulazioni sono state effettuate implementando opportunamente in MATLAB quanto visto al capitolo precedente.

Ciascuno dei problemi è stato risolto con il metodo degli elementi finiti. In particolare, dato che è attesa una discontinuità del flusso lungo le tracce, si è fatto ricorso al metodo degli elementi finiti esteso [6], presentato in appendice A. Grazie all'*arricchimento* degli elementi della base nei nodi posti in un intorno della discontinuità, tale metodo permette infatti di cogliere al meglio il comportamento irregolare della soluzione.

Ogni frattura è stata discretizzata in elementi triangolari. Il grado di raffinamento della griglia è controllato dal parametro **GP**, che regola il numero minimo di triangoli per ciascuna frattura. Si ricorda che la formulazione scelta per il problema permette di discretizzare ogni frattura in maniera indipendente dalle altre, senza che vi sia la necessità di alcun tipo di conformità lungo le intersezioni.

Sulle tracce sono invece definite due diverse discretizzazioni monodimensionali, una per ciascuna variabile di controllo. Tali discretizzazioni sono indipendenti tra di loro e non necessitano di adattarsi in alcun modo alle griglie bidimensionali definite sulle fratture. Il grado di raffinamento è regolabile tramite i parametri $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$, che rappresentano il rapporto tra il numero di elementi definiti su ciascuna traccia per discretizzare rispettivamente λ e ψ e il numero di elementi della mesh indotta sulle tracce da quella bidimensionale definita sulle fratture. Essendo le mesh indipendenti, non è necessario che tale rapporto sia lo stesso per le due variabili di controllo.

Le variabili $\lambda \in \psi$ possono inoltre essere approssimate su basi di ordine polinomiale diverso. La scelta dell'ordine è regolata dai parametri $\lambda_{order} \in \psi_{order}$, che possono assumere valore 0 o 1. Il valore 0 indica la scelta di una base costante e tratti, mentre 1 rappresenta l'opzione lineare a tratti.

2.1 Problema su 3 fratture (DFN3)

Si consideri un dominio Ω dato dall'unione di 3 fratture piane definite come

$$F_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1/2, \ -1 \le y \le 1, \ z = 0 \}$$

$$F_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 0, \ y = 0, \ -1 \le z \le 1 \}$$

$$F_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1/2, \ -1 \le y \le 1, \ -1 \le z \le 1 \}.$$

Tali fratture si intersecano a due a due lungo le tracce

$$S_1 = F_1 \cap F_2$$
 $S_2 = F_1 \cap F_3$ $S_3 = F_2 \cap F_3.$

La geometria così ottenuta è riportata in figura 2.1.

Su tutti i bordi delle fratture sono imposte condizioni di Dirichlet omogenee mentre la conducibilità idraulica è definita su ciascuna frattura come

$$K(x, y, z) = 1 + 100(x^2 + y^2 + z^2).$$

Una DFN caratterizzata da così poche fratture non modella ovviamente il caso di un mezzo fratturato reale. Tuttavia essa permette di testare l'accuratezza del metodo, in quanto è nota la soluzione esatta del problema su di essa definito [3]. Tale soluzione prende la forma

$$H_1(x,y) = \frac{1}{10} \left(-x - \frac{1}{2} \right) \left[8xy(x^2 + y^2) \arctan(y,x) + x^3 \right], \qquad (2.1)$$

$$H_2(x,z) = \frac{1}{10} \left(-x - \frac{1}{2} \right) x^3 - \frac{4}{5} \pi \left(-x - \frac{1}{2} \right) x^3 |z|, \qquad (2.2)$$

$$H_3(y,z) = (y-1)y(y+1)(z-1)z$$
(2.3)

dove H_i , i = 1, 2, 3 indica il carico idraulico definito sull'i-esima frattura.



Figura 2.1: DFN composta da 3 fratture

2.1. PROBLEMA SU 3 FRATTURE (DFN3)

Per calcolare numericamente la soluzione è possibile risolvere direttamente il sistema (1.96) oppure optare per il metodo del gradiente coniugato riportato nell'algoritmo (1.1). Il secondo metodo è sicuramente da preferire nel caso di reti di fratture particolarmente estese, ma in questo caso semplice anche la risoluzione di un sistema lineare non risulta computazionalmente troppo onerosa. Nelle figure dalla 2.2 alla 2.4 sono riportate le soluzioni ottenute su ciascuna frattura risolvendo il sistema (1.96). I parametri di griglia utilizzati sono $GP = 500, \lambda_{nodenum} = 0.4 e \psi_{nodenum} = 0.3 mentre l'ordine polinomiale delle basi utilizzate sulle tracce è <math display="inline">\lambda_{order} = 0 e \psi_{order} = 1$.



Figura 2.2: DFN3: Carico idraulico ottenuto sulla prima frattura. Parametri utilizzati: $GP = 500, \lambda_{nodenum} = 0.4, \psi_{nodenum} = 0.3, \lambda_{order} = 0 e \psi_{order} = 1.$



Figura 2.3: DFN3: Carico idraulico ottenuto sulla seconda frattura. Parametri utilizzati: $GP = 500, \lambda_{nodenum} = 0.4, \psi_{nodenum} = 0.3, \lambda_{order} = 0 e \psi_{order} = 1.$



Figura 2.4: DFN3: Carico idraulico ottenuto sulla terza frattura. Parametri utilizzati: $GP = 500, \lambda_{nodenum} = 0.4, \psi_{nodenum} = 0.3, \lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.5: DFN3: Errore commesso al variare del numero di gradi di libertà per il carico. Altri parametri: $\lambda_{nodenum} = 0.4$, $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Per analizzare l'accuratezza della soluzione è stato valutato l'andamento dell'errore commesso rispetto alla soluzione esatta (2.1)-(2.3) all'aumentare di N_H , numero dei gradi di libertà totali per il carico idraulico definiti sulla DFN. Lo studio è stato effettuato per valori di GP=50, 200, 800, 3200, che hanno prodotto N_H =339, 900, 2669, 8976. I risultati sono riportati in figura 2.5, per $\lambda_{nodenum} = 0.4, \psi_{nodenum} = 0.3, \lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$. Gli errori sono stati calcolati in norma L^2 e H^1 e si osserva come essi approssimino l'andamento atteso dalla teoria degli elementi finiti. Definiti

$$err_{L^2} = ||H - h||_{L^2} = \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} (H_i - h_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
 (2.4)

$$err_{H^1} = \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} (H_i - h_i)^2 + \sum_{i \in \mathcal{J}} (\nabla (H_i - h_i))^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$
 (2.5)

ci si aspetta infatti

$$err_{L^2} \sim N_H^{-1} \Rightarrow log(err_{L^2}) \sim -1 \cdot log(N_H)$$

 $err_{H^1} \sim N_H^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow log(err_{H^1}) \sim -\frac{1}{2} \cdot log(N_H).$

La scelta di presentare i risultati ottenuti per $\lambda_{nodenum} = 0.4$, $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$ non è casuale. Essa è il risultato di un'attenta valutazione dell'impatto che tali parametri hanno sull'accuratezza e l'attendibilità della soluzione e sul soddisfacimento dei vincoli.

Per quanto riguarda l'attendibilità della soluzione, calcolata in questo caso andando a risolvere direttamente il sistema (1.96), è opportuno andare a valutare il condizionamento della matrice dei coefficienti del sistema stesso. Esso risulta influenzato sia dal numero di elementi utilizzati per le mesh di λ e di ψ che dall'ordine polinomiale delle basi sulle quali le variabili di controllo continue vengono approssimate. In figura 2.6 è riportato l'andamento del numero di condizionamento della matrice del sistema (1.96) al variare dei parametri $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ e per 4 diverse combinazioni di λ_{order} e ψ_{order} . Per il calcolo del numero di condizionamento è stata utilizzata la funzione condest di MATLAB, che permette di calcolare il numero di condizionamento in norma 1 di una matrice quadrata, ovvero

$$condest(A) = ||A^{-1}||_1 ||A||_1.$$
 (2.6)

La funzione non inverte direttamente la matrice, ma calcola l'inversa con un metodo iterativo [7] basato sulla risoluzione del problema di ottimo vincolato

$$\max_{||x||_1=1} ||A^{-1}x||_1.$$

Si osserva in 2.6 come il condizionamento sia influenzato quasi unicamente dalla scelta di $\lambda_{nodenum}$, mentre l'influenza di $\psi_{nodenum}$ è trascurabile. Questo sembra autorizzare la scelta di una discretizzazione molto rada per la variabile di controllo ψ , grazie alla quale una variabile introdotta principalmente per aumentare la stabilità del problema non peserebbe eccessivamente sul costo per calcolo della soluzione. Tuttavia, prima di arrivare a tale conclusione, è opportuno verificare che la scelta di una mesh poco fitta per ψ non comprometta l'accuratezza della soluzione e il soddisfacimento del vincolo sulla continuità del carico. Per la scelta di $\lambda_{nodenum}$ è invece chiaro che per avere dei valori bassi del condizionamento è necessario imporre valori piccoli del parametro. Anche in questo caso è però prima opportuno capire quale impatto abbia una scelta simile sulla soluzione.

Infine, per quanto riguarda la scelta dell'ordine polinomiale delle basi, emerge come sia più opportuno approssimare λ con una funzione costante a tratti $(\lambda_{nodenum} = 0)$, in quanto l'utilizzo di funzioni lineari porta il numero di condizionamento a raggiungere ordini addirittura di 10^{20} .

In tutti i risultati presentati saranno utilizzati $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.6: DFN3: Numero di condizionamento della matrice (1.96) al variare dei parametri $\lambda_{nodenum} \in \psi_{nodenum}$ e per diverse combinazioni di $\lambda_{order} \in \psi_{order}$. GP=500.

Per identificare dei buoni valori per $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ si procede studiando come la loro scelta si rifletta sull'accuratezza della soluzione. Per il momento l'andamento dell'errore è infatti stato valutato esclusivamente al variare del numero di gradi di libertà del carico e non al variare dei parametri che regolano i gradi di libertà delle variabili di controllo $\lambda \in \psi$.

Nelle figure 2.7 e 2.8 è rappresentato l'errore commesso in norma H_1 nel calcolo del carico idraulico per diversi valori di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ e rispettivamente per GP=200 e GP=800.

Nel primo caso si osserva come i valori minimi di errore possano essere ottenuti per una scelta di $\lambda_{nodenum}$ tra 0.4 e 0.5. Per tale scelta la dipendenza dal va-

2.1. PROBLEMA SU 3 FRATTURE (DFN3)

lore di $\psi_{nodenum}$ è pressoché assente. Valori più alti di $\lambda_{nodenum}$ fanno invece emergere una maggiore dipendenza da $\psi_{nodenum}$ e sono comunque da escludere per il cattivo condizionamento che comportano. Nonostante valori più piccoli di $\lambda_{nodenum}$ permetterebbero di migliorare il condizionamento, si vede da questa analisi come essi corrispondano al valore massimo di errore. Tuttavia la differenza rispetto ai valori ottenuti con scelte ottimali dei parametri non è particolarmente elevata.



Figura 2.7: DFN3: Andamento dell'errore commesso in norma H1 al variare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$. Altri parametri: GP=200, $\lambda_{order} = 0$, $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.8: DFN3: Andamento dell'errore commesso in norma H1 al variare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$. Altri parametri: GP=800, $\lambda_{order} = 0$, $\psi_{order} = 1$.

Per GP=800 il comportamento è simile ma si nota in generale un'influenza molto meno significativa di $\psi_{nodenum}$ per qualsiasi valore di $\lambda_{nodenum}$. Si osserva come $\lambda_{nodenum} > 0.2$ l'errore commesso si mantenga all'incirca costante. Al di sopra di questa soglia la scelta del valore da assegnare al parametro non è quindi particolarmente influente.

Come atteso, gli errori per GP=800 sono minori rispetto a quelli ottenuti per GP=200, in linea con la convergenza riportata in figura 2.5.

Per quanto riguarda la continuità del carico idraulico si ricordi che tale vincolo è imposto attraverso la minimizzazione del funzionale \tilde{J} definito in (1.86). Un primo controllo sul soddisfacimento del vincolo può quindi essere effettuato andando a studiare se e come $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$ influenzino il valore di tale funzionale calcolato nella soluzione.

In figura 2.9 è riportato l'andamento di \tilde{J} al variare dei due parametri per GP=200. In figura 2.10 per GP=800.

Si osserva come, in entrambi i casi, sia opportuno evitare valori molto bassi sia di $\lambda_{nodenum}$, in quanto portano il funzionale a raggiungere valori anche di 2 ordini di grandezza maggiori rispetto al valore minimo raggiungibile, che di $\psi_{nodenum}$. Tuttavia non è necessario prendere valori dei parametri troppo elevati che comprometterebbero il condizionamento e il costo computazionale. Si osserva infatti come per $\lambda_{nodenum} > 0.2$ e $\psi_{nodenum} > 0.3$ i valori raggiunti da \tilde{J} possano già essere ritenuti soddisfacenti.



Figura 2.9: DFN3: Andamento del funzionale \tilde{J} definito in (1.86) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: $GP = 200, \lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.10: DFN3: Andamento del funzionale \tilde{J} definito in (1.86) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: $GP = 800, \lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Il valore del funzionale \tilde{J} , per come è definito, non valuta però direttamente la continuità del carico, in quanto minimizza lo scarto sulle tracce tra $h \in \psi$ e non la differenza tra i carichi calcolati su fratture adiacenti. Per calcolare quest'ultima differenza è necessario, $\forall S_m \in \mathcal{S}$, restringere alla traccia il carico idraulico calcolato su ciascuna delle due fratture $F_i \in F_j$ che si intersecano lungo di essa e proiettarlo, ad esempio, sullo spazio delle funzioni lineari a tratti definite sulla traccia. Facendo riferimento alla notazione e alle basi introdotte nel capitolo precedente, la proiezione \tilde{h}_i del carico h_i è definita come

$$\int_{S_m} \left(\sum_{k=1}^{N_H^i} h_{i,k} \varphi_{i,k}|_{S_m} - \sum_{k=1}^{N_H^i} \tilde{h}_{i,k} \theta_k^m \right) \theta_l^m \, dS = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N_H^i} h_{i,k} \int_{S_m} \varphi_{i,k}|_{S_m} \theta_l^m \, dS - \sum_{k=1}^{N_H^i} \tilde{h}_{i,k} \int_{S_m} \theta_k^m \theta_l^m \, dS = 0$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{m}})^T h_i - \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\psi}} \tilde{h}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\psi}} \tilde{h}_i = (\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{m}})^T h_i \,.$$

Definizione analoga vale per la proiezione h_j .

Un indicatore globale della continuità del carico può essere definito come

$$||\tilde{h}_{i} - \tilde{h}_{j}||_{L^{2}(\mathcal{S})} = \sqrt{\sum_{m \in \mathcal{M}} ||\tilde{h}_{i} - \tilde{h}_{j}||_{L^{2}}^{2}}, \quad i, j \in I_{S_{m}}$$
(2.7)

L'andamento di (2.7) al variare di $\psi_{nodenum}$ e di $\lambda_{nodenum}$, per GP=200 e GP=800 è riportato rispettivamente nelle figure 2.11 e 2.12.

Si osserva come, anche in questo caso, vadano evitate mesh eccessivamente rade

per la variabile λ , ma $\lambda_{nodenum}>0.3$ garantisce già un buon soddisfacimento del vincolo di continuità. Per quanto riguarda $\psi_{nodenum}$ la dipendenza di (2.7) da questo parametro è meno significativa. La scelta di una mesh rada per la variabile di controllo ψ sembra però favorire la continuità del carico.



Figura 2.11: DFN3: Differenza del carico calcolato su fratture adiacenti (2.7) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 200, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.12: DFN3: Differenza del carico calcolato su fratture adiacenti (2.7) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 800, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

2.2 Problema su 10 fratture (DFN10)

In figura 2.13 è riportata una DFN composta da 10 fratture che si intersecano a due a due lungo 14 tracce.

A differenza del caso precedente, non si hanno condizioni di Dirichlet omogenee su tutto il bordo della DFN. Su uno dei lati della frattura 7 è imposta una condizione di Dirichlet $\Gamma_D = 1$, mentre su uno dei lati della 4 una condizione di Dirichlet omogenea $\Gamma_D = 0$. Su tutti gli altri bordi si hanno condizioni di Neumann omogenee.

Il fatto che siano imposte queste condizioni al bordo consente di identificare la frattura di ingresso del flusso nella DFN e quella di uscita, in questo caso rispettivamente la 7 e la 4. Nelle figure 2.14 e 2.15 è riportato il carico idraulico calcolato su queste due fratture per $\lambda_{nodenum} = 0.5$, $\psi_{nodenum} = 0.4$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Una DFN di 10 fratture non è ancora particolarmente complessa, pertanto il problema può essere risolto attraverso il sistema KKT. Essendo però un caso già più articolato del precedente, l'analisi della performance del metodo del gradiente coniugato può comunque essere interessante. Pertanto ad analisi analoghe a quelle effettuate per il caso DFN3, seguiranno alcuni risultati relativi all'applicazione dell'algoritmo 1.1 e al suo precondizionamento.

Per questo problema non è disponibile la soluzione esatta, ma è comunque possibile andare a valutare l'accuratezza della soluzione analizzando l'andamento del funzionale di costo (1.86) e il soddisfacimento dei vincoli. Inoltre il fatto che sia possibile identificare una frattura di ingresso e una di uscita permette di fare valutazioni riguardo la conservazione dei flussi.



Figura 2.13: DFN composta de 10 fratture



Figura 2.14: DFN10: Carico id
raulico sulla frattura 7. Parametri utilizzati: $GP=500,\,\lambda_{nodenum}=0.5,\,\psi_{nodenum}=0.3,\,\lambda_{order}=0$ e $\psi_{order}=1$



Figura 2.15: DFN10: Carico idraulico sulla frattura 4. Parametri utilizzati: $GP = 500, \lambda_{nodenum} = 0.5, \psi_{nodenum} = 0.3, \lambda_{order} = 0 e \psi_{order} = 1$

Come prima analisi si presentano i risultati relativi al condizionamento della matrice del sistema (1.96). In figura 2.16 è riportato l'andamento del numero di condizionamento al variare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ per diverse combinazioni di λ_{order} e ψ_{order} . Anche in questo caso è stata utilizzata la funzione condest di MATLAB, che opera come in (2.6). Salta immediatamente all'occhio come il condizionamento sia in generale migliore di quello calcolato per il caso DFN3. Esso varia infatti tra 10⁶ e 10¹² contro i numeri di condizionamento del caso precedente che erano compresi tra 10¹⁰ e 10²⁰. L'andamento al variare dei due parametri è però lo stesso, con una spiccata dipendenza dal valore assegnato a $\lambda_{nodenum}$ e un'influenza trascurabile di $\psi_{nodenum}$. Questo, come nel caso precedente, sembra autorizzare la scelta di valori bassi per $\psi_{nodenum}$, in modo che la variabile ψ non pesi eccessivamente sul costo computazionale del metodo. Per

un buon condizionamento è necessario scegliere valori bassi anche per $\lambda_{nodenum}$. Come per DFN3 è però opportuno analizzare come queste scelte si riflettano su aspetti quali il soddisfacimento dei vincoli.Per quanto riguarda la scelta delle basi su cui approssimare le variabili di controllo, i valori di condizionamento

più alti vengono anche in questo caso registrati per $\lambda_{order} = 1$, ovvero quando la variabile di controllo λ è approssimata con funzioni lineari a tratti. Tutti i risultati successivi saranno pertanto presentati per $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.16: DFN10: Numero di condizionamento della matrice (1.96) al variare dei parametri $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ e per diverse combinazioni di λ_{order} e ψ_{order} . GP=500.

Per quanto riguarda la continuità del carico, nelle figure 2.17 e 2.18 è invece riportato l'andamento del funzionale (1.86) al variare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$, per GP=200 e GP=800 rispettivamente.

Come in DFN3 l'influenza di $\lambda_{nodenum}$ è molto più significativa di quella di $\psi_{nodenum}$. Allo scopo di avere un valore basso di \tilde{J} sono però da escludersi valori eccessivamente bassi del secondo parametro, specialmente per valori mediamente alti del primo. Se nel caso precedente si osservava inoltre che per $\lambda_{nodenum} > 0.2$ il funzionale decresceva molto lentamente e che quindi, oltre tale soglia, il valore di $\lambda_{nodenum}$ influiva meno su quello di \tilde{J} , in questo caso l'andamento decrescente si mantiene rapido per tutto l'intervallo analizzato. I valori raggiunti dal funzionale sono però in generale più bassi rispetto a quelli ottenuti nel caso precedente, soprattutto se si confrontano le figure



2.9 e 2.17, ottenute per GP=200. Per questo motivo bastano anche valori non eccessivamente alti dei parametri per ottenere buoni risultati.

Figura 2.17: DFN10: Andamento del funzionale \tilde{J} definito in (1.86) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 200, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.18: DFN10: Andamento del funzionale \tilde{J} definito in (1.86) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 800, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Come per il problema precedente, la continuità vera e propria del carico va però studiata a partire dalla quantità (2.7). In figura 2.19 e 2.20 è riportato l'andamento di tale grandezza al variare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ per GP=200 e GP=800. Anche in questo caso i valori ottenuti sono in generale più bassi

di quelli del caso DFN3, evidenziando dunque un miglior soddisfacimento del vincolo di continuità. Come nel caso precedente sono però da evitare $\lambda_{nodenum}$ eccessivamente bassi che fanno registrare i valori massimi di (2.7).



Figura 2.19: DFN10: Differenza del carico calcolato su fratture adiacenti (2.7) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 200, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.20: DFN10: Differenza del carico calcolato su fratture adiacenti (2.7) al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 800, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Una differenza rispetto ai risultati riportati in 2.11 e 2.12 riguarda il fatto che i valori minimi di (2.7) non sono ottenuti per la combinazione di valori molto alti di $\lambda_{nodenum}$ e molto bassi di $\psi_{nodenum}$. Nel caso di GP=200 si osserva come il valore minimo si raggiunga per $\lambda_{nodenum} = \psi_{nodenum} = 0.9$, combinazione però da evitare per il cattivo condizionamento e l'eccessivo costo computazionale che ne consegue. Si osserva però come per $\lambda_{nodenum} \simeq 0.5$ e $\psi_{nodenum} \simeq 0.3$ si ottenga un valore vicinissimo al minimo. Per GP=800 il valore ottenuto per tale combinazione dei parametri non è altrettanto prossimo al minimo, che si ottiene in questo per $\lambda_{nodenum} = 0.9$ e $\psi_{nodenum} = 0.4$. Esso è comunque molto basso e già decisamente più piccolo di quanto si otteneva in DFN3. In generale, il migliore soddisfacimento del vincolo che si osserva per DFN10 è da imputarsi soprattutto al migliore condizionamento del problema, emerso in figura 2.16.

Come accennato in precedenza, il fatto che non tutte le fratture presentino bordi di Dirichlet permette di fare alcune valutazioni interessanti che riguardano la conservazione dei flussi. Innanzitutto, potendo identificare la frattura di ingresso e quella di uscita del flusso come le fratture che presentano un bordo di Dirichlet, è possibile andare a verificare se il flusso totale sia conservato, ovvero a quanto ammonti il valore assoluto della differenza tra flusso in uscita e flusso in entrata. Anche questo tipo di analisi è stato effettuato al variare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ e per due diversi gradi di raffinamento della mesh per il carico, rispettivamente GP=200 e GP=800. I risultati sono riportati nelle figure 2.21 e 2.22.

Si osserva come in generale i risultati possano essere ritenuti soddisfacenti, essendo la differenza tra flusso in uscita e flusso in entrata sempre al di sotto dell'ordine di 10^{-4} .



Figura 2.21: DFN10: Valore assoluto della differenza tra flusso in uscita e flusso in entrata al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 200, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.22: DFN10: Valore assoluto della differenza tra flusso in uscita e flusso in entrata al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: GP = 800, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Come per l'analisi di altre grandezze, i valori minimi si registrano per combinazioni dei parametri poco favorevoli dal punto di vista del condizionamento e del costo computazionale. Tuttavia si osserva come non sia necessario prendere valori così alti di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ per avere buoni risultati. Infine, come in altri casi, l'influenza di $\psi_{nodenum}$ è significativa solo per valori alti di $\lambda_{nodenum}$. Interessante osservare come, a differenza di altre quantità analizzate, l'aumento di GP non determini necessariamente migliori risultati in termini di conservazione del flusso.

Per verificare ancor meglio se i flussi siano conservati è però necessario accertarsi che la differenza piccola tra flusso in uscita e flusso in entrata non sia l'effetto di compensazioni casuali tra flussi non conservati nel passaggio tra le fratture interne. Per questo è stato analizzato il massimo del valore assoluto dei flussi netti nelle fratture di Neumann, ovvero quelle fratture che non presentano bordi di Dirichlet. Nelle figure 2.23 e 2.24, nuovamente ottenute al variare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$ e per GP=200 e GP=800, sono riportati i risultati ottenuti.

Per tutte le scelte dei parametri il flusso netto massimo nelle fratture interne risulta basso, con un andamento decrescente all'aumentare di $\lambda_{nodenum}$ e $\psi_{nodenum}$. Anche per questa grandezza l'aumentare di GP non determina risultati globalmente migliori, ma la decrescita più rapida che si osserva per GP=800 permette, per valori intermedi dei parametri, di avere risultati migliori in termini di conservazione.



Figura 2.23: DFN10: Massimo, in valore assoluto, dei flussi calcolati nelle "fratture di Neumann" al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: $GP = 200, \lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.24: DFN10: Massimo, in valore assoluto, dei flussi calcolati nelle "fratture di Neumann" al variare di $\psi_{nodenum}$ e $\lambda_{nodenum}$. Altri parametri: $GP = 800, \lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Come detto precedentemente, un problema definito su una DFN di 10 fratture può già rappresentare un caso interessante per analizzare la performance del metodo del gradiente, per quanto la risoluzione col sistema KKT non possa ancora essere considerata eccessivamente onerosa. In figura 2.25 è riportato l'andamento del funzionale \tilde{J} per diversi valori di GP all'aumentare del numero di iterazioni dell'algoritmo 1.1. Gli altri parametri del problema sono $\lambda_{nodenum} = 0.4$, $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$. Si osserva, come atteso, che al raffinarsi della mesh il numero di iterazioni totale aumenta, ma che il metodo permette anche di ottenere valori del funzionale a via a via più piccoli.



Figura 2.25: DFN10: Andamento del funzionale \hat{J} per diversi valori di GP al variare del numeri di iterazioni del metodo del gradiente. Altri parametri: $\psi_{nodenum} = 0.3$ e $\lambda_{nodenum} = 0.4$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Il numero di iterazioni richiesto è però abbastanza alto per un problema così semplice. Come accennato nel capitolo precedente, questo è dovuto al cattivo condizionamento della matrice (1.90) e in particolare del blocco

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^T \boldsymbol{A}^{-T} \boldsymbol{G}^h \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{B}}.$$
 (2.8)

Il numero di condizionamento di (2.8) cresce all'aumentare di $\lambda_{nodenum}$. Questo è osservabile nella figura 2.26 dove è riportato l'andamento del numero di condizionamento spettrale (B.16) della matrice al variare di $\lambda_{nodenum}$ e per diversi valori di GP. La dipendenza diretta della velocità di convergenza da tale numero di condizionamento, riportata nella stima (B.15), è confermata dalla figura 2.27, dove è riportato il numero massimo di iterazioni compiute dal metodo del gradiente coniugato al variare di $\lambda_{nodenum}$.



Figura 2.26: DFN10: Numero di condizionamento spettrale della matrice (2.8) al variare di $\lambda_{nodenum}$ e per diversi valori di GP. Altri parametri: $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.27: DFN10: Numero massimo di iterazioni compiute dal metodo del gradiente coniugato al variare di $\lambda_{nodenum}$ e per diversi valori di GP. Altri parametri: $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Per incrementare la velocità del metodo è stato applicato il precondizionatore riportato in (1.101), adattando l'algoritmo B.2 al caso in esame, ovvero inserendolo nel contesto dell'algoritmo 1.1. Si osserva in figura 2.28 come il numero di iterazioni richiesto per la minimizzazione di \tilde{J} , a parità dei parametri utilizzati in figura 2.25, si riduca notevolmente e come la sua dipendenza da GP diventi

praticamente trascurabile. In figura 2.29 si vede inoltre come il numero totale di iterazioni risenta meno del valore assegnato a $\lambda_{nodenum}$ rispetto al caso non precondizionato, in particolare per $\lambda_{nodenum} > 0.6$. Sotto tale soglia il grafico conferma inoltre come il numero di iterazioni vari poco con la scelta di GP.



Figura 2.28: DFN10: Andamento del funzionale \tilde{J} per diversi valori di GP al variare del numeri di iterazioni del metodo del gradiente precondizionato. Altri parametri: $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.29: DFN10: Numero massimo di iterazioni compiute dal metodo del gradiente coniugato precondizionato al variare di $\lambda_{nodenum}$ e per diversi valori di GP. Altri parametri: $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

2.3 Problema su 59 fratture (DFN59)

Questo problema, caratterizzato da una geometria decisamente più complessa, è stato costruito per verificare il funzionamento del modello su reti di fratture più estese. La geometria è riportata in figura 2.30, ed è caratterizzata dalla presenza di 59 fratture e 157 tracce. La frattura di ingresso, su uno dei bordi della quale è imposta una condizione di Dirichlet $\Gamma_D = 1$, è la 9, mentre quella di uscita, caratterizzata da un bordo con condizione di Dirichlet omogenea, è la 55. Su tutti gli altri bordi della DFN sono imposte condizioni di Neumann omogenee.



Figura 2.30: DFN composta de 59 fratture.

Nelle figure 2.31 e 2.32 sono rappresentate le soluzioni per il carico idraulico ottenute su tali fratture per GP = 500, $\lambda_{nodenum} = 0.5$, $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.31: DFN59: Soluzione ottenuta per il carico idraulico sulla frattura 9. Parametri utilizzati: GP = 500, $\lambda_{nodenum} = 0.5$, $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$



Figura 2.32: DFN59: Soluzione ottenuta per il carico idraulico sulla frattura 55. Parametri utilizzati: GP = 500, $\lambda_{nodenum} = 0.5$, $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$

In tabella 2.1 sono invece riportati alcuni dati relativi ai flussi DFN, ottenuti per la stessa scelta dei parametri. Nell'ordine si hanno: flusso netto totale attraverso la DFN, flusso netto attraverso la frattura di entrata, flusso netto attraverso quella di uscita, valore assoluto del flusso non conservato, minimo e massimo in valore assoluto dei flussi netti attraverso fratture di Neumann. Anche in questo caso i valori di flusso ottenuti confermano la conservazione dei flussi.

Tabella	2.1:	Dati	relativi	ai	$_{\mathrm{flussi}}$	per	la	DFN	da	59	fratture	э.	Param	etri
utilizzati	i: GP	' = 50	$0, \lambda_{node}$	num	h = 0.5	δ, ψ_n	oder	$_{num} =$	0.3	$, \lambda_{c}$	order = 0), ($\psi_{order} =$	= 1.

Flusso totale	5.810646018164500e-17					
FluxIn	-0.419095011990674					
FluxOut	0.419114178251102					
FluxOut - FluxIn	1.916626042797187 e-05					
MinNeumann	1.01676467290269e-08					
MaxNeumann	2.71370875616628e-06					

Data la dimensione della DFN, l'applicazione del metodo del gradiente coniugato è in questo caso da preferire. Tuttavia la sua versione non precondizionata richiede un numero di iterazioni tale da rendere proibitivo il suo costo in termini di tempo. Si osserva infatti in figura 2.34 come il numero di condizionamento spettrale della matrice (2.8) sia molto alto, già per valori di $\lambda_{nodenum}$ piccoli. Questo, secondo la stima (B.15), ha un impatto negativo sulla velocità di convergenza. Per questo motivo è necessario precondizionare il metodo, utilizzando, così come per DFN10, il precondizionatore riportato in (1.101). L'andamento del funzionale \tilde{J} per diversi valori di GP e all'aumentare del numero di iterazioni del metodo del gradiente coniugato precondizionato è riportato in figura 2.33, dove si osserva come il numero di iterazioni, grazie al precondizionamento, sia assolutamente accettabile. Infine, in figura 2.35 è riportato l'andamento del numero di iterazioni del metodo del gradiente precondizionato al variare di $\lambda_{nodenum}$ e per diversi valori di GP. Anche in questo caso, per valori non troppo alti del parametro, si osserva per GP fissato come il numero di iterazioni non cambi particolarmente al variare di $\lambda_{nodenum}$.



Figura 2.33: DFN59: Andamento del funzionale \tilde{J} per diversi valori di GP al variare del numeri di iterazioni del metodo del gradiente precondizionato. Altri parametri: $\lambda_{nodenum} = 0.5$, $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$



Figura 2.34: DFN59: Numero massimo di iterazioni compiute dal metodo del gradiente coniugato precondizionato al variare di $\lambda_{nodenum}$ e per diversi valori di GP. Altri parametri: $\psi_{nodenum} = 0.3$, $\lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.



Figura 2.35: DFN59: Numero massimo di iterazioni compiute dal metodo del gradiente coniugato precondizionato al variare di $\lambda_{nodenum}$ e per diversi valori di GP. Altri parametri: $\psi_{nodenum} = 0.3, \lambda_{order} = 0$ e $\psi_{order} = 1$.

Conclusione

In questa tesi è stato presentato un nuovo metodo numerico per la simulazione di flussi in mezzi fratturati. Questi ultimi sono stati modellati con l'utilizzo delle DFN, ovvero delle Discrete Fracture Networks.

La più grande difficoltà legata a questo tipo di approccio riguarda la costruzione di una discretizzazione conforme. Ottenere la conformità della griglia, ovvero definire un'unica discretizzazione sull'intersezione tra le fratture che sia coerente con le griglie bidimensionali definite sulle stesse, richiede spesso la definizione di un grande numero di elementi o la realizzazione di griglie di bassa qualità.

Il metodo qui presentato, partendo dalla formulazione variazionale della legge di Darcy, si basa invece sull'utilizzo della formulazione *Three-Field* del problema stesso. Essa permette di definire e risolvere il problema indipendentemente su ciascuna frattura e, associata all'utilizzo di tecniche di ottimizzazione vincolata a equazioni differenziali alle derivate parziali, non richiede alcun tipo di conformità della mesh. Le soluzioni ottenute su fratture adiacenti sono messe in relazione attraverso due condizioni di accoppiamento, imposte con l'introduzione di due variabili di controllo, per garantire l'una la continuità del carico idraulico e l'altra la conservazione dei flussi.

Dopo aver ricavato la formulazione matriciale discreta del problema, il metodo è stato applicato a 3 diversi casi di DFN, composti da 3, 10 e 59 fratture. Ciascuno dei casi è stato scelto in quanto presenta delle peculiarità che hanno consentito di svolgere analisi di tipo differente. Per il caso su 3 fratture è nota la soluzione esatta, ed è quindi stato possibile verificare come il metodo sia accurato e come l'errore rispetti l'ordine di convergenza atteso dall'utilizzo di tecniche agli elementi finiti. Il caso su 10 fratture dà la possibilità di identificare una frattura di ingresso e una di uscita ed è quindi stato possibile verificare efficacemente che i flussi fossero conservati. Infine il caso su 59 fratture è più complesso degli altri due e ha permesso di verificare che il metodo funzionasse adeguatamente anche su reti più estese.

In tutti e tre i casi sono inoltre state effettuate diverse analisi al variare dei parametri $\lambda_{nodenum} \in \psi_{nodenum}$. Questi ultimi regolano il numero di elementi utilizzato per discretizzare le variabili di controllo introdotte sull'intersezione tra le fratture. Nello specifico è stato studiato come questi parametri influenzino l'accuratezza e l'attendibilità della soluzione e il soddisfacimento dei vincoli.

Infine, per i casi da 10 e 59 fratture è stata valutata la performance del metodo del gradiente coniugato e di una sua versione precondizionata, che permette di

ridurre notevolmente il numero di iterazioni.

In questo studio, che ha riguardato reti di fratture mediamente piccole, i metodi risolutivi sono sempre stati implementati in forma seriale. Tuttavia, la possibilità di risolvere il problema separatamente sulle varie fratture ben si adatterebbe alla parallelizzazione del metodo, necessaria per la sua applicazione a reti molto più grandi che modellano mezzi fratturati reali.

Basandosi ancora sulla formulazione Three-Field di un problema ellittico e sull'utilizzo di tecniche di ottimizzazione *PDE-constrained*, il metodo potrebbe inoltre essere rielaborato e arricchito per modellare situazioni più complesse di quella di fratture piane in un mezzo impermeabile. Si potrebbe ad esempio integrare la modellazione del flusso in un mezzo poroso circostante, oppure tenere in considerazione lo spessore reale delle fratture. Un ulteriore spunto riguarda la possibile trattazione del problema *duale* a quello presentato in questa tesi: supponendo le fratture riempite di un materiale impermeabile, si potrebbe modellare il flusso nel mezzo poroso circostante, con le fratture a rappresentare in questo caso un ostacolo e non la via preferenziale per il fluido.

58

Appendice A

XFEM: metodo degli elementi finiti esteso

Il metodo degli elementi finiti (FEM) risulta particolarmente adeguato per approssimare soluzioni regolari. L'insorgere di discontinuità richiede di adottare diversi accorgimenti, che prevedono l'allineamento dei bordi degli elementi con la discontinuità e un notevole raffinamento della griglia nella zona in cui ci si attende un comportamento irregolare della soluzione. Queste necessità rendono ovviamente il processo di discretizzazione complesso e oneroso e non permettono comunque di cogliere sempre in maniera accurata le irregolarità della soluzione.

Gli XFEM aggirano questo problema, permettendo di tener conto della conoscenza a priori che si ha della soluzione, come ad esempio della presenza di una discontinuità, modificando direttamente lo spazio sul quale la si intende approssimare [6]. Questo può essere fatto andando ad *arricchire* le funzioni di base nei nodi che appartengono ad elementi che saranno interessati dal comportamento irregolare. Al di fuori di questi elementi la soluzione viene calcolata utilizzando i FE classici.

Sia \mathcal{I} l'insieme di tutti i nodi della discretizzazione di un certo dominio Ω e sia $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}$ il sottoinsieme di quelli che devono essere arricchiti. Sia inoltre $h(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, la soluzione approssimata, che col metodo degli elementi finiti standard sarebbe definita come

$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\boldsymbol{x}) h_i \tag{A.1}$$

con $N_i(\boldsymbol{x})$ funzione di base standard degli elementi finiti e h_i gradi di libertà della soluzione rispetto a tale base.

Per effettuare l'arricchimento dei nodi in \mathcal{I}^* l'idea è quella di andare ad identificare una funzione $\psi(\boldsymbol{x})$, detta *funzione di arricchimento globale*, che riproduca, nell'intorno della discontinuità, il comportamento della soluzione. Nel caso presentato in questa tesi, in cui la discontinuità riguarda la derivata prima della soluzione, una funzione adeguata potrebbe essere un valore assoluto centrato sulla traccia.

L'estensione del metodo degli elementi finiti prevede di andare ad approssimare la soluzione come

$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\boldsymbol{x}) h_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^*} M_i(\boldsymbol{x}) a_i$$
(A.2)

dove gli a_i sono nuovi gradi di libertà introdotti dall'estensione del metodo e $M_i(\boldsymbol{x})$, detta funzione di arricchimento locale nel nodo i-esimo, è definita da

$$M_i(\boldsymbol{x}) = N_i^*(\boldsymbol{x}) \cdot \psi(\boldsymbol{x}), \quad \forall i \in \mathcal{I}^*.$$
(A.3)

Le funzioni N_i^* costituiscono una **partizione dell'unità** in quegli elementi i cui nodi appartengono tutti al sottoinsieme \mathcal{I}^* :

$$\sum_{i\in\mathcal{I}^*}N_i^*(\boldsymbol{x})=1$$

Questo significa che in tali elementi la funzione di arricchimento globale $\psi(\boldsymbol{x})$ può essere riprodotta in maniera esatta, e per questo si parla di *reproducing* elements. Intorno a tali elementi vi sono poi i blending elements, che presentano nodi in comune con i reproducing elements e quindi arricchiti e nodi trattati invece con i FE standard. Sui blending elements le $N_i^*(\boldsymbol{x})$ non costituiscono una partizione dell'unità e su di essi la $\psi(\boldsymbol{x})$ non può pertanto essere riprodotta in maniera esatta.

Il fatto che i blending elements presentino due tipi di nodi diversi può generare delle complicazioni [6],[5]. Appaiono infatti, all'interno dell'approssimazione della soluzione, dei termini indesiderati che non vengono compensati in alcun modo dalla applicazione standard dei FE nei nodi circostanti. Se si suppone di avere q nodi per ciascun elemento e che un blending element presenti, ad esempio, un solo nodo arricchito, l'approssimazione della soluzione su tale elemento prende la forma

$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{q} N_i(\boldsymbol{x})h_i + N_j^*(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})a_j, \quad j \in \mathcal{I}^*.$$
(A.4)

Per $a_j \neq 0$ il secondo termine a secondo membro fa sì che sull'elemento considerato non sia più possibile approssimare la soluzione con lo stesso grado polinomiale utilizzato sui FE standard. Inoltre la presenza di un termine indesiderato può essere un ostacolo alla convergenza del metodo [5]. Si potrebbe pensare di imporre $N_i^*(\boldsymbol{x}) = 0$ sui blending elements, ma non sarebbe la scelta ottimale, in quanto comporterebbe di lavorare con una funzione di arricchimento locale $M_i(\boldsymbol{x})$ discontinua.

Per questo motivo è opportuno andare a correggere la formula in (A.3) definendo una *funzione di arricchimento globale modificata* [6]

$$\psi^{mod}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) \cdot R(\boldsymbol{x}), \qquad (A.5)$$

dove $R(\boldsymbol{x})$ è una funzione rampa definita come

$$R(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}^*} N_i^*(\boldsymbol{x}). \tag{A.6}$$

Di certo $\psi^{mod}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})$ sui reproducing elements e $\psi^{mod}(\boldsymbol{x}) = 0$ sui standard FE. Sui blending elements invece la $\psi^{mod}(\boldsymbol{x})$ varia in maniera continua tra zero e $\psi(\boldsymbol{x})$.

Posto $\mathcal{J}^*\subset\mathcal{I}$ sotto
insieme dei nodi appartenenti a reproducing o blending elements si defini
sce quindi

$$M_i^{mod}(\boldsymbol{x}) = N_i^*(\boldsymbol{x}) \cdot \psi^{mod}(\boldsymbol{x}), \quad \forall i \in \mathcal{J}^*.$$
(A.7)

ottenendo così l'approssimazione con **il metodo degli elementi finito esteso** modificato [6]:

$$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} N_i(\boldsymbol{x}) h_i + \sum_{i \in \mathcal{J}^*} M_i^{mod}(\boldsymbol{x}) a_i.$$
(A.8)

E' importante osservare come nulla cambi per i reproducing elements e per gli standard FE rispetto a (A.3). Infatti, grazie al fatto che $\psi^{mod}(\boldsymbol{x}) = 0$ su quegli elementi per cui solo alcuni dei nodi appartengono a \mathcal{J}^* , non si creano nuovi elementi "ibridi" che possano presentare le stesse problematiche che avevano i blending elements. Per ulteriori approfondimenti sull'applicazione degli XFEM si rimanda a [6].

Appendice B

Il metodo del gradiente coniugato

B.1 Versione standard

Il metodo del gradiente coniugato è un metodo iterativo che consente di risolvere sistemi lineari della forma

$$Ax = b \tag{B.1}$$

con A matrice simmetrica e definita positiva. La risoluzione del sistema (B.1) può anche essere vista come la minimizzazione di un funzionale del tipo

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \tag{B.2}$$

pertanto lo stesso metodo può essere interpretato come algoritmo per la minimizzazione di funzionali quadratici convessi. Si osservi che

$$\nabla \phi(x) = Ax - b = r(x). \tag{B.3}$$

ovvero il gradiente della funzione $\phi(x)$ altro non è che il residuo del sistema lineare (B.1).

Il metodo prevede di partire da un guess iniziale x_0 della soluzione e di scegliere una direzione di discesa p_1 lungo la quale spostarsi per minimizzare $\phi(x_1) = \phi(x_0 + \alpha_0 p_1)$, con α_0 ampiezza del passo da compiere lungo p_1 . Alla prima iterazione la direzione di discesa è scelta come l'opposto del residuo $r_0 = r(x_0)$ di (B.1), ovvero come la direzione opposta a quella del gradiente di $\phi(x_0)$. Tale direzione è effettivamente quella di massima discesa, ma si dimostra come alle iterazioni successive non sia conveniente, ai fini di incrementare la velocità di convergenza, scegliere la direzione data da $-\nabla \phi(x_k)$.

A ogni iterazione il valore ottimo del passo α_k che permette di minimizzare $\phi(x_{k+1}) = \phi(x_k + \alpha_k p_{k+1})$ è quindi calcolato come

$$\alpha_k = -\frac{p_{k+1}^T r_k}{p_{k+1}^T A p_{k+1}} \tag{B.4}$$

dove la direzione p_{k+1} per $k \neq 0$ è data da

$$p_{k+1} = -r_k + \beta_k p_k. \tag{B.5}$$

Non essendo perpendicolare al residuo r_k , tale scelta della direzione garantisce che l'ampiezza del passo non sia nulla.

Il coefficiente β_k è uno scalare ottenuto imponendo che le direzioni p_{k+1} e p_k siano A-coniugate, ovvero che soddisfino la relazione

$$p_k^T A p_{k+1} = 0. (B.6)$$

In generale si ha che

$$p_j^T A p_{k+1} = 0 \quad \forall j = 0, 1, \dots k$$
 (B.7)

Data questa l'ipotesi (B.6) si può calcolare β_k in questo modo:

$$p_{k+1} = -r_{k+} + \beta_k p_k \implies p_k^T A p_{k+1} = -p_k^T A r_k + p_k^T A \beta_k p_k = 0$$
$$\Rightarrow \beta_k = \frac{r_k^T A p_k}{p_k^T A p_k}$$
(B.8)

Una volta calcolati la direzione e il passo la soluzione viene aggiornata in

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_{k+1},\tag{B.9}$$

mentre per quanto riguarda il residuo si ha

$$\begin{cases} r_{k+1} = Ax_{k+1} - b \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_{k+1} \end{cases} \implies r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_{k+1}. \tag{B.10}$$

Le espressioni per α_k e β_k possono essere semplificate osservando che, utilizzando la (B.4) e la (B.10)

$$p_{k+1}^T r_{k+1} = p_{k+1}^T r_k + \alpha_k p_{k+1}^T A p_{k+1} =$$

= $p_{k+1}^T r_k - \frac{p_{k+1}^T r_k}{p_{k+1}^T A p_{k+1}} p_{k+1}^T A p_{k+1} = 0$ (B.11)

Tale proprietà vale anche più in generale, ovvero

$$p_i^T r_{k+1} = 0 \quad \forall i = 0, 1, ..., k+1.$$
 (B.12)

Ad esempio per i = k si ha

$$p_k^T r_{k+1} = p_k^T r_k + \alpha_k p_k^T A p_{k+1} = 0$$

dato che $p_k^T r_k = 0$ per (B.11) e $p_k^T A p_{k+1} = 0$ in quanto le due direzioni sono A-coniugate. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto $\forall i < k$.

Tenuto conto del risultato della (B.12), della (B.5) e della (B.10) si ha che α_k e β_{k+1} possono essere riscritti come

$$\alpha_k = -\frac{p_{k+1}^T r_k}{p_{k+1}^T A p_{k+1}} = -\frac{(-r_k + \beta_k p_k)^T r_k}{p_{k+1}^T A p_{k+1}} = \frac{r_k^T r_k}{p_{k+1}^T A p_{k+1}}$$
(B.13)

B.2. VERSIONE PRECONDIZIONATA

$$\beta_{k} = \frac{r_{k}^{T} A p_{k}}{p_{k}^{T} A p_{k}} = \frac{\frac{1}{\alpha_{k-1}} (r_{k}^{T} r_{k} - r_{k}^{T} r_{k-1})}{\frac{1}{\alpha_{k-1}} p_{k}^{T} (r_{k} - r_{k-1})} = \frac{r_{k}^{T} r_{k} - r_{k}^{T} (-p_{k} + \beta_{k} p_{k-1})}{(-r_{k-1} + \beta_{k} p_{k-1})^{T} (-r_{k-1})} = \frac{r_{k}^{T} r_{k}}{r_{k-1}^{T} r_{k-1}}$$
(B.14)

Algoritmo B.1: Metodo del gradiente coniugato

1 Sia dato x_0 , guess iniziale **2** $r_0 = Ax_0 - b;$ $p_1 = -r_0;$ 4 $\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{p_1^T A p_1};$ 5 $x_1 = x_0 + \alpha_0 p_1;$ 6 $r_1 = r_0 + \alpha_0 A p_1;$ $7 \ k = 1;$ s while $r_k \neq 0$ do $\beta_k = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}};$ 9 $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k;$ 10 $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_{k+1}^T A p_{k+1}};$ 11 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_{k+1};$ 12 $r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_{k+1};$ $\mathbf{13}$ k = k + 1;14 15 end

B.2 Versione precondizionata

Dato il sistema (B.1), la velocità di convergenza dell'algoritmo B.1 può essere valutata con la seguente stima [11], [9]:

$$||x - x_{k+1}||_A \le 2\left(\frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1}\right)^{k+1} ||x - x_0||_A \tag{B.15}$$

con x soluzione esatta del sistema e $x_0\ guess$ iniziale. La norma utilizzata nell'espressione rappresenta la cosiddetta norma energia

$$||x||_A = \sqrt{x^T A x},$$

mentre $K_2(A)$ è il numero di condizionamento spettrale della matrice A, ovvero

$$||A||_2 ||A^{-1}||_2 = \frac{\sigma_n}{\sigma_1},\tag{B.16}$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ autovalori reali positivi della matrice.

Per aumentare la velocità di convergenza è possibile utilizzare una tecnica detta di *precondizionamento*.

Data una matrice simmetrica non singolare C la (B.1) può essere riscritta come

$$C^{-1}AC^{-1}Cx = C^{-1}b.$$

 Posti

$$\tilde{A}=C^{-1}AC^{-1},\qquad \tilde{x}=Cx,\qquad \tilde{b}=C^{-1}b$$

si ottiene

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}.\tag{B.17}$$

Se la matrice C è tale per cui $K_2(\tilde{A}) \ll K_2(A)$, l'algoritmo B.1 applicato a (B.17) sarà evidentemente più veloce di quando applicato al sistema (B.1). Da \tilde{x} la soluzione potrà poi essere dedotta risolvendo il sistema

$$Cx = \tilde{x}.\tag{B.18}$$

In realtà il **metodo del gradiente coniugato precondizionato**, riportato nell'algoritmo B.2, non richiede mai la costruzione esplicita di C^{-1} , ma si basa sulla matrice $M = C^2$, detta **precondizionatore**. Essa deve essere tale per cui il sistema Mz = r sia di facile soluzione.

Algoritmo B.2: Metodo del gradiente coniugato precondizionato

1 Sia dato
$$x_0$$
, guess iniziale
2 $r_0 = Ax_0 - b$;
3 $solve M z_0 = r_0$;
4 $p_1 = -z_0$;
5 $\alpha_0 = \frac{r_0^T z_0}{p_1^T A p_1}$;
6 $x_1 = x_0 + \alpha_0 p_1$;
7 $r_1 = r_0 + \alpha_0 A p_1$;
8 $k = 1$;
9 while $r_k \neq 0$ do
10 $solve M z_k = r_k$;
11 $\beta_k = \frac{r_k^T z_k}{r_{k-1}^T z_{k-1}}$;
12 $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k$;
13 $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_{k+1}^T A p_{k+1}}$;
14 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_{k+1}$;
15 $r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_{k+1}$;
16 $k = k + 1$;

17 end

Bibliografia

- S. Berrone, S. Pieraccini, S. Scialò, F. Vicini, A parallel solver for large scale DFN flow simulations, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 37, No. 3, (2015), pp. C285-C306.
- [2] S. Berrone, S. Pieraccini, S. Scialò, A PDE-constrained optimization formulation for discrete fracture network flows, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 35, No. 2 (2013), pp. B487-B510.
- [3] S. Berrone, S. Pieraccini, S. Scialò, Towards effective flow simulations in realistic discrete fracture networks, J. Comput. Ph., 310, (2016), pp. 181-201.
- [4] F. Brezzi, L.D. Marini, A three-field domain decomposition method, Contemporary Mathematics, Vol 157 (1994).
- [5] J. Chessa, H. Wang, T. Belytschko, On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements, Internat. J. Numer. Methods Engrg., 57 (2003), pp.1015-1038.
- [6] T.P Fries, A corrected XFEM approximation without problems in blending elements, Internet. J. Numer. Methods Engrg., 75 (2008), pp. 503-532.
- [7] N. J. Higham, F. Tisseur, A Block Algorithm for Matrix 1-Norm Estimation with an Application to 1-Norm Pseudospectra, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol. 21, (2000), pp. 1185-1201.
- [8] T. Kalbacher, R. Mettier, C. McDermott, W. Wang, G. Kosakoswki, T. Taniguchi, O. Kolditz, Geometric modelling and object-oriented software concepts applied to a heterogeneous fracture network from the grimsel rock laboratory, Comput. Geosci., 11 (2007), pp. 9-26.
- [9] G. Monegato Metodi e algoritmi per il calcolo numerico, CLUT (2008), pp. 76-79.
- [10] H. Mustapha, K. Mustapha, A new approach to simulating flow in dicrete fracture networks with an optimized mesh, SIAM J. Sci. Comput., 29 (2007), pp. 1439-1459.
- [11] J. Nocedal, S. J. Wright, Numerical Optimization, Springer (2006), pp. 101-112.

- [12] G. Pichot, H. Erhel, J.-R. De Dreuzy, A mixed hybrif Mortar method for solving flow in discrete fracture networks, Appl. Anal., 89 (20120) pp. 1629-1643.
- [13] G. Pichot, H. Erhel, J.-R. De Dreuzy, A generalized mixed hybrid mortar method for solving flow in stochastic discrete fracture networks, SIAM J. Sci. Comput., 34 (2012), pp. B86-B105.
- [14] M. Vohralik, J. Maryska, O. Severyn, Mixed and nonconforming finite element methods on a system of polygons, Allp. Numer. Math., 51 (2007), pp.176-193.

68