

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale

in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea Magistrale

**Fessurazione discreta di tiranti in c.a.
soggetti a deformazioni impresse**



Relatore

Prof. Gabriele Bertagnoli

Candidato

Giovanni Ferraina

Anno accademico 2018/2019

Indice

1. INTRODUZIONE	1
1.1. Resistenza a trazione del calcestruzzo	1
1.2. Formazione delle fessure	2
1.3. Obiettivo	4
2. MECCANISMI DI ADERENZA	7
2.1. Interazione barra-calcestruzzo	10
2.2. Crisi per pull-out e splitting	12
2.3. Fattori che influenzano le condizioni di aderenza	13
2.3.1. Influenza della geometria e del livello tensionale nella barra	14
2.3.2. Influenza della qualità del calcestruzzo	16
2.3.3. Influenza del confinamento trasversale	18
2.3.4. Effetti dell'ambiente esterno	19
2.3.5. Effetto della storia di carico.....	22
3. MATERIALI	23
3.1. Legame di aderenza	23
3.2. Effetti reologici del calcestruzzo	25
3.2.1. Considerazioni generali su ritiro e viscosità.....	25
3.2.2. Viscosità	28
3.2.3. Ritiro.....	29
3.2.4. Caratteristiche meccaniche	31
4. MODELLO AGLI ELEMENTI FINITI	35
4.1. Dati di input	35
4.1.1. Geometria	36
4.1.2. Condizioni al contorno e casi di carico	37
4.1.3. Modello FEM	38
4.2. Procedura di risoluzione del sistema non lineare.....	40
4.2.1. Newton Raphson Regolare	40
4.2.2. Newton Raphson Modificato.....	41
4.3. Interoperabilità tra DIANA FEA 10.2 e Python	42
5. ANALISI NUMERICA DEL MODELLO FEM	45
5.1. Modello con forza applicata all'estremità.....	45
5.1.1. Configurazione 2 barre ϕ 10	48
5.1.2. Configurazione 4 barre ϕ 10	51

5.1.3.	Configurazione 1 barre ϕ 14	54
5.1.4.	Configurazione 2 barre ϕ 14	57
5.1.5.	Configurazione 4 barre ϕ 14	60
5.1.6.	Configurazione 1 barre ϕ 20	63
5.1.7.	Configurazione 2 barre ϕ 20	65
5.2.	Modello con deformazione impressa	69
5.2.1.	Configurazione 2 barre ϕ 10	72
5.2.2.	Configurazione 2 barre ϕ 20	78
5.3.	Modello con ritiro e viscosità	96
6.	CONFRONTO CON LE NORMATIVE: MC1990, MC2010, EC2	101
6.1.	Model Code 1990.....	101
6.2.	Model Code 2010.....	103
6.3.	Eurocodice 2	104
6.4.	Confronti ampiezze fessura con forza applicata all'estremità	105
6.5.	Confronti ampiezze fessura con deformazione impressa.....	107
6.5.1.	Configurazione 2 barre ϕ 10	107
6.5.2.	Configurazione 4 barre ϕ 10	108
6.5.3.	Configurazione 1 barra ϕ 14	109
6.5.4.	Configurazione 2 barre ϕ 14	109
6.5.5.	Configurazione 4 barre ϕ 14	110
6.5.6.	Configurazione 1 barra ϕ 20	112
6.5.7.	Configurazione 2 barre ϕ 20	113
6.6.	Confronti ampiezze fessura con ritiro e viscosità	114
7.	CONCLUSIONI.....	117
8.	Bibliografia.....	119

Prefazione

Questo lavoro di tesi ha l'obiettivo di studiare il processo fessurativo di un tirante in calcestruzzo armato, mediante l'uso del software fem DIANA 10.2 e del linguaggio di programmazione Python. Il fine del lavoro è quello di indagare il comportamento di questi elementi strutturali quando si trovano soggetti ad azioni implicite come il ritiro del calcestruzzo o altre tipologie di deformazioni impresse. Infatti, in questi casi, le metodologie di verifica attualmente in uso possono non descrivere in modo accurato l'apertura e la distanza tra le fessure. Lo studio di questo processo passa attraverso l'analisi del meccanismo di aderenza, fenomeno grazie al quale si assicura la collaborazione tra i materiali. Il modello, di un tirante in c.a. a sezione circolare, è stato analizzato con differenti condizioni di carico e proprietà meccaniche. Sono state eseguite delle analisi per fasi al fine di individuare (tramite uno script Python) quali siano gli elementi che si fessurano, in modo da poterli escludere nelle fasi successive, in maniera casuale. Al fine di validare il modello, inizialmente si è operato caricando l'estremità libera della barra con una forza di trazione. I risultati ottenuti sono stati infine confrontati con quelli proposti dalle normative in vigore, che in questi casi forniscono risultati attendibili. In una seconda fase si opera invece applicando al modello le deformazioni impresse di cui sopra, per cui entrano in gioco gli effetti reologici del calcestruzzo quali ritiro e viscosità. Anche in questo caso si segue la medesima procedura che consente di disattivare gli elementi che raggiungono la tensione limite a trazione del calcestruzzo. In questo modo è possibile analizzare il processo fessurativo e mettere in luce le differenze rispetto alle formulazioni proposte dalle norme vigenti. Un confronto tra i risultati ottenuti a seguito dell'applicazione della forza di trazione e delle deformazioni implicite, è presentato come conclusine dell'elaborato.

1. INTRODUZIONE

Il comportamento delle strutture in calcestruzzo armato si mantiene elastico lineare fino a quando non compare la prima fessura nell'elemento. Il che renderebbe immediato pensare di ottimizzare la progettazione al fine di lavorare sempre in tale campo, tuttavia il processo fessurativo non è legato solo ad aspetti strutturali, ma anche a fenomeni fisici che riguardano il comportamento dei materiali. La considerazione di tutti questi aspetti induce a pensare che una progettazione mirata ad eliminare le elevate tensioni di trazione nel calcestruzzo risulta del tutto antieconomica. Da qui discendono le classiche teorie del calcestruzzo armato, nelle quali il comportamento a trazione della matrice cementizia viene del tutto trascurato, ammettendo di fatto la possibilità di far nascere le fessure, la cui ampiezza va opportunamente controllata.

Analizziamo ora il processo fessurativo, andando a vedere cosa succede prima e dopo la nascita della prima fessura.

1.1. Resistenza a trazione del calcestruzzo

Come accennato in precedenza, le non linearità nel comportamento strutturale compaiono solo dopo la nascita della prima fessura, dunque solo dopo che per la prima volta si è superato il valore di resistenza a trazione del calcestruzzo.

Dalla curva di frequenza, derivata per mezzo di prove sperimentali che individuano una nuvola di punti, si possono ottenere i frattili della grandezza in esame, rappresentata in tal caso dalla resistenza a trazione del calcestruzzo.

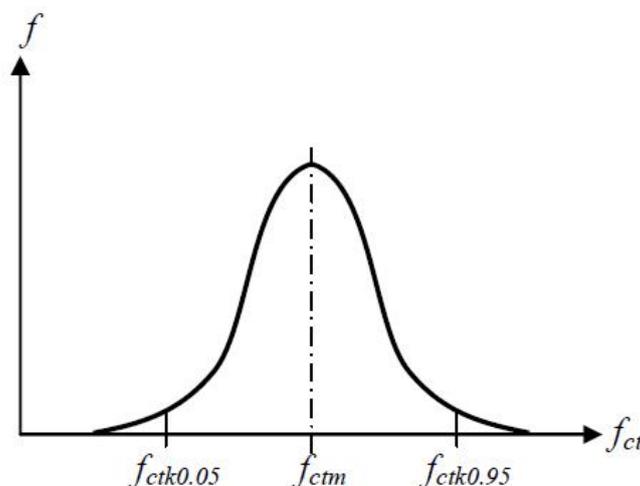


Figura 1.1 Frequenza della resistenza caratteristica a trazione

Ricordando la definizione di frattile, sappiamo che esso rappresenta il possibile valore della variabile aleatoria, rappresentata in tal caso dalla resistenza a trazione del calcestruzzo, associato ad una precisa probabilità di minoramento. Per cui il frattile al 5% rappresenta il valore di resistenza tale che, solo nel 5% dei casi sperimentali, si riscontrano valori uguali o più bassi. Per cui se la tensione nel calcestruzzo è pari ad $f_{ctk0.05}$, vi è il 5% di probabilità che l'elemento sia fessurato.

Il valore medio della resistenza a trazione si può calcolare con le seguenti relazioni fornite dal *fib Model code 2010* al paragrafo 5.1.5.1:

$$f_{ctm} = 0.3 * f_{ck}^{2/3} \quad \text{per calcestruzzi } C \leq C50$$

$$f_{ctm} = 2.12 * \ln(1 + 0.1 * (f_{ck} + \Delta F)) \quad \text{con } \Delta F = 8 \text{ MPa} \quad \text{per calcestruzzi } C > C50$$

I valori caratteristici estremi della resistenza a trazione possono essere calcolati, sempre secondo il *fib Model code 2010*, come segue:

$$f_{ctk,min} = 0.7 * f_{ctm}$$

$$f_{ctk,max} = 1.3 * f_{ctm}$$

1.2. Formazione delle fessure

È stato già affermato che è praticamente impossibile evitare la fessurazione in elementi in cemento armato, per cui è necessario studiare il fenomeno al fine di comprendere come la rigidità evolve durante lo sviluppo delle fessure.

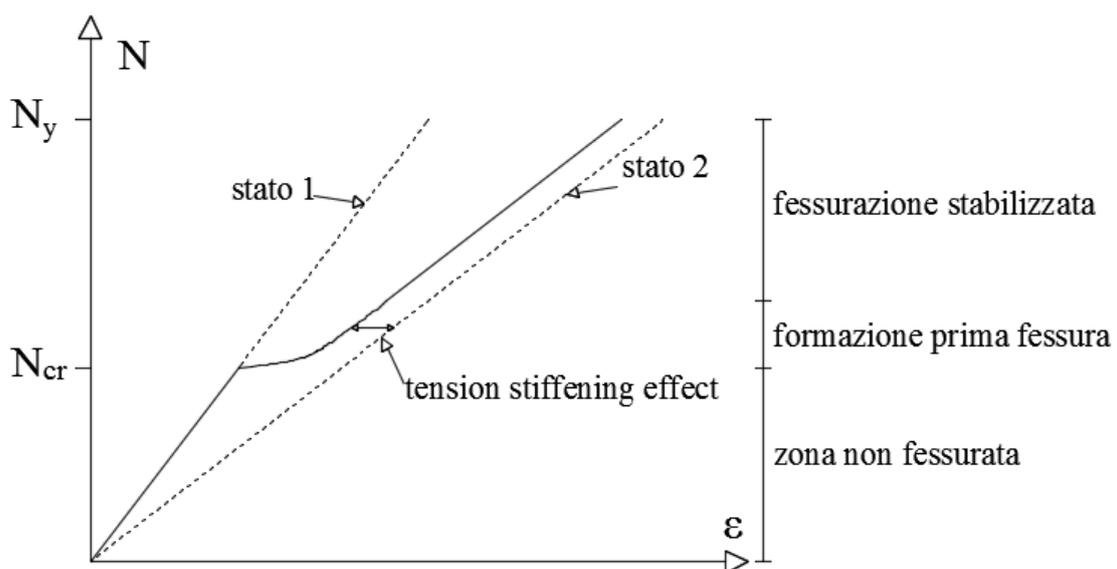


Figura 1.2 Processo fessurativo

Analizzando il comportamento di un tirante in c.a., si nota come fino al nascere della prima fessura il comportamento sia elastico lineare con una rigidezza detta rigidezza di stato 1. Sviluppata la prima fessura, che nasce nella zona che presenta micro difetti locali, o dove la resistenza è localmente inferiore a quella globale, la rigidezza si abbassa fino ad un valore di stato 2. Questa è la zona della fessurazione stabilizzata all'interno della quale le fessure che nascono lo fanno con una distribuzione ben definita e legata alla necessità di poter diffondere gli sforzi, dalla barra di armatura alla matrice cementizia circostante. La rigidezza in questa fase è di fatto pari a quella di una barra nuda, la differenza presente nella deformazione è legata all'effetto irrigidente del calcestruzzo tra 2 fessure successive ($E_c A_c > E_s A_s$). Superata questa fase all'aumento ulteriore del carico aumenta l'ampiezza della fessure ma non la loro quantità. Oltre il valore di snervamento della barra l'analisi non è di interesse perché si è già raggiunto il suo valore di tensione limite allo SLE.

Tramite un diagramma forza F , spostamento u , possiamo apprezzare come il comportamento strutturale sia diverso a seconda che il tirante sia analizzato in controllo di forza o in controllo di spostamento. Nel primo caso si nota un improvviso salto nello spostamento dovuto all'apertura della fessura. Mentre nel secondo la forza reattiva nel decade improvvisamente nel momento della nascita della fessura. Si nota tuttavia un unico fattore comune nelle due situazioni, la progressiva riduzione della rigidezza dell'elemento all'aumento delle fessure.

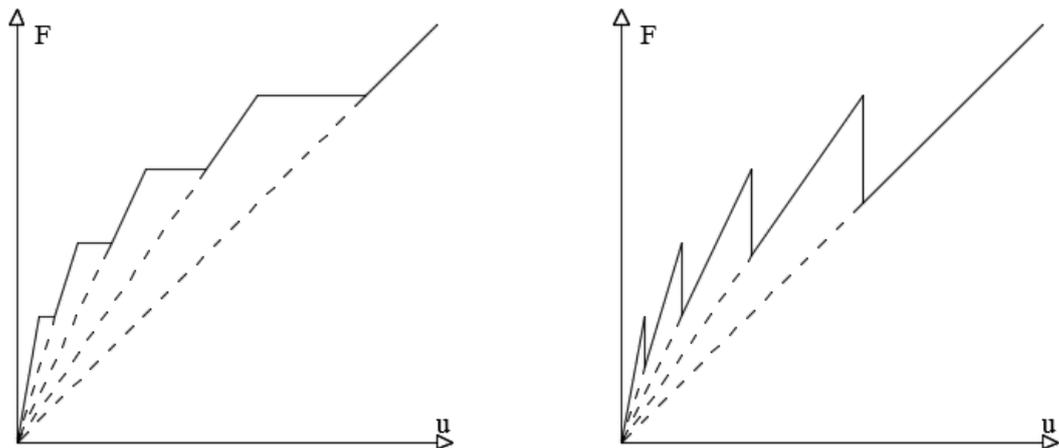


Figura 1.3 Diagrammi forza-spostamento

Nell'analisi fessurativa un ruolo non trascurabile è svolto dalle condizioni vincolari al contorno. Le azioni che inducono la formazione delle fessure sono spesso legate a fenomeni fisici del materiale, come il ritiro, lo sviluppo del calore di idratazione oppure la presenza di

variazioni termiche applicate all'elemento. In presenza di vincoli che garantiscono libertà di movimento nella direzione di queste azioni, le fessure non si sviluppano, non nascendo nell'elemento tensioni di trazione. Tuttavia quando i vincoli sono reattivi nella direzione duale all'azione di questi effetti agenti, le fessure possono nascere visto l'insorgere di tensioni di trazione nell'elemento. Con il termine reazioni vincolari si intende non solo l'azione esercitata dai vincoli esterni, ma anche quella dei vincoli interni, rappresentata dall'aderenza tra barre di armatura e calcestruzzo.

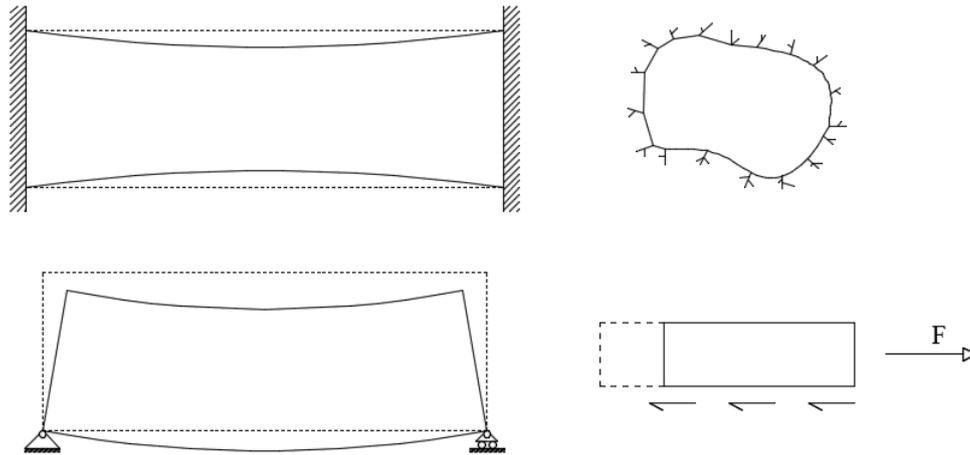


Figura 1.4 Condizioni vincolari

1.3. Obiettivo

Lo scopo della tesi è dunque quello di studiare il comportamento fessurativo di un tirante in cemento armato soggetto ad azioni di natura differente, siano esse azioni esterne (forze o variazioni termiche) o azioni interne (ritiro). L'analisi è svolta mediante l'utilizzo di un software agli elementi finiti DIANA FEA 10.2, tramite il quale è stato modellato un tirante in c.a. con sezione circolare. Lo stesso è stato soggetto a differenti condizioni di carico, siano esse azioni esterne o azioni endogene.

I primi capitoli della tesi forniscono delle indicazioni di base sulla teoria del processo fessurativo, sul comportamento fisico e meccanico del fenomeno di aderenza, il quale sta alla base della collaborazione tra i due materiali, e sul comportamento del calcestruzzo al variare del tempo, considerando quindi l'influenza dei fenomeni reologici, quali ritiro e viscosità. Nel capitolo 4 sarà presentato più nel dettaglio il modello FEM di cui si è fatto cenno e i tipi di analisi che sono state svolte. Inoltre si passerà a presentare come l'ausilio di un codice nel linguaggio di programmazione Python sia stato utile per l'elaborazione del modello e per lo

svolgimento delle analisi i cui risultati sono stati nuovamente elaborati tramite Python. Successivamente nel capitolo 5 saranno presentati i risultati ottenuti con le varie analisi e sulla base di questi si trarranno le conclusioni, a seguito anche di alcuni confronti con le normative vigenti.

2. MECCANISMI DI ADERENZA

Il processo di fessurazione è un fenomeno discreto in quanto il comportamento tra differenti sezioni è diverso. Il fenomeno dell'aderenza dunque va studiato non solo in termini globali, ma anche dal punto di vista locale, al fine di comprendere quali siano gli aspetti che più influenzano la collaborazione tra i due materiali. Basti pensare a quanto il comportamento di una barra liscia sia diversa da quello di una barra ad aderenza migliorata. Se nel primo caso l'aderenza è dovuta principalmente ad aspetti di tipo chimico tra i due materiali, nel secondo insorgono fenomeni di natura meccanica in cui le nervature della barra, sottoposta a trazione, comprimono localmente il calcestruzzo mobilitandone una resistenza.

L'analisi del fenomeno dell'aderenza passa da dati sperimentali ottenuti per mezzo di prove di laboratorio. Un tipico esempio di prova che mette in luce questo comportamento è rappresentato dal *pull-out test* (Figura 2.1):

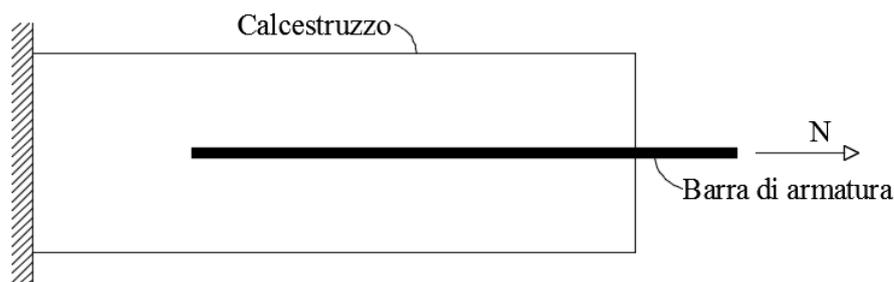


Figura 2.1 Pull-out test

Come riportato nella figura precedente la barra di armatura immersa nel calcestruzzo è sottoposta ad uno sforzo di trazione uniforme. Nel punto di applicazione della forza la stessa è portata interamente dalla barra, in seguito grazie alla presenza delle tensioni tangenziali che si attivano lungo la superficie di interfaccia tra i due materiali, lo sforzo è trasferito progressivamente al calcestruzzo. Per cui il calcestruzzo passa dall'aver tensioni nulle all'estremità in cui la barra esce dall'elemento ad essere teso in maniera uniforme ad una certa distanza da questa sezione. Visto l'incremento di tensione nel calcestruzzo risulta chiaro notare come le tensioni nella barra si riducano progressivamente, al fine di garantire le condizioni di equilibrio con la forza esterna. Questo tipo di prova è rappresentativo di quanto avviene in una trave soggetta ad una combinazione di carico tale da generare solo tensioni normali, come quella riportata in Figura 2.2. La presenza delle due forze verticali genera un momento flettente costante nella parte centrale della trave, e vista ivi l'assenza di tensioni

tangenziali, le direzioni principali di trazione saranno orizzontali. Sotto queste condizioni tensionali, le fessure saranno verticali per cui, nella zona evidenziata in Figura 2.2, si ritrovano le condizioni tipiche simulate in laboratorio con il *pull-out test*.

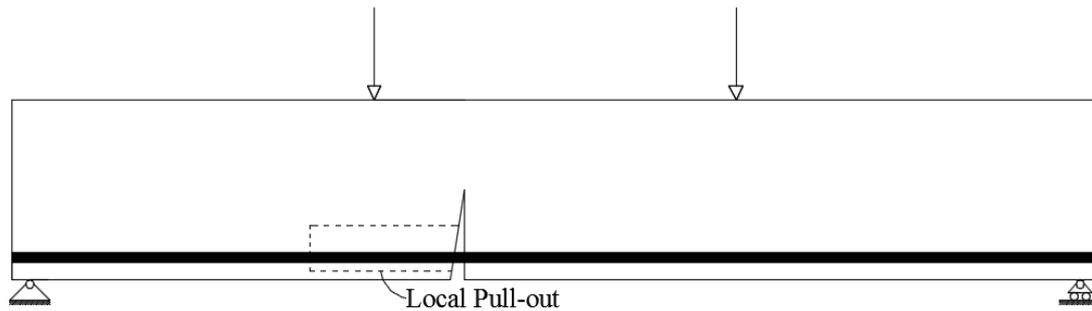


Figura 2.2 Local pull-out

Numerose ricerche scientifiche sono state svolte col fine di evidenziare come l'evoluzione del legame tra tensioni di aderenza e scorrimento tra i due materiali all'interfaccia, fosse alla base del processo di fessurazione.

Tra questi già nel 1971 *Goto* ha analizzato l'effetto della spinta generata dalle alette delle barre di armatura sul calcestruzzo confinante. Questi studi si sono basati su test eseguiti caricando un tirante in c.a. dalle estremità libere della barra. L'entità della forza agente era simile ma non uguale a quella che avrebbe indotto lo snervamento della barra stessa. In seguito per mezzo di un fluido di contrasto che mettesse in evidenza le fessure, *Goto* ha evidenziato come quelle radiali si formano con un angolo compreso tra 45 e 80 gradi rispetto alla direzione dell'asse della barra. Inoltre per livelli tensionali maggiori nell'armatura, le fessure longitudinali si propagano dalla superficie di interfaccia a quella esterna del calcestruzzo. *Goto* ha quindi concluso che la deformazione del calcestruzzo radialmente fessurato all'interfaccia tra i due materiali, può contribuire allo sviluppo di fessure longitudinali.

Anche *Gerstle* e *Ingraffea* (1982) tramite analisi sperimentali eseguite su provini in c.a. armati con una sola barra, hanno analizzato il progredire del danneggiamento del calcestruzzo legato alle tensioni di trazione.

I dati sperimentali hanno comunque confermato la presenza di 3 tipi di fratture:

- Primarie. Queste appaiono non appena si raggiunge la tensione di resistenza a trazione del calcestruzzo, f_{ct} . Tuttavia una volta sviluppata la prima fessura, la seconda deve necessariamente nascere ad una distanza tale da consentire ai materiali di ritrasferire le tensioni dalla sola barra al calcestruzzo. Per cui la distanza alla quale si sviluppano si

mantiene circa costante. Inoltre le fessure primarie appaiono più chiuse vicino alla superficie di interfaccia rispetto a quanto succede nella superficie esterna del provino.

- Secondarie. Solo in presenza di barre ad aderenza migliorata, immediatamente dopo la nascita delle fessure primarie, inizia un processo di fessurazione interna del calcestruzzo. Il tutto si sviluppa in corrispondenza delle alette delle barre, da qui la fessura secondaria nascente va verso quella primaria più vicina con una pendenza di circa 60 gradi (circa l'inclinazione della nervatura della barra). Mentre l'apice superiore della fessura è chiuso, quello inferiore, proveniente dal dente della barra si trova alla sua massima apertura.
- Splitting. Grazie all'azione attritiva scambiata tra gli elementi fessurati, si va incontro ad una fase di softening. Tuttavia la presenza di tensioni circonferenziali conduce alla nascita di fessure di splitting, qualora lo spessore dell'elemento in calcestruzzo non sia adeguato.

Per cui è chiaro come durante la formazione delle fessure sia necessario considerare un legame tra tensioni di aderenza e scorrimento all'interfaccia. Come vedremo questa legge costitutiva risulterà essere influenzata da diversi parametri geometrici e meccanici.

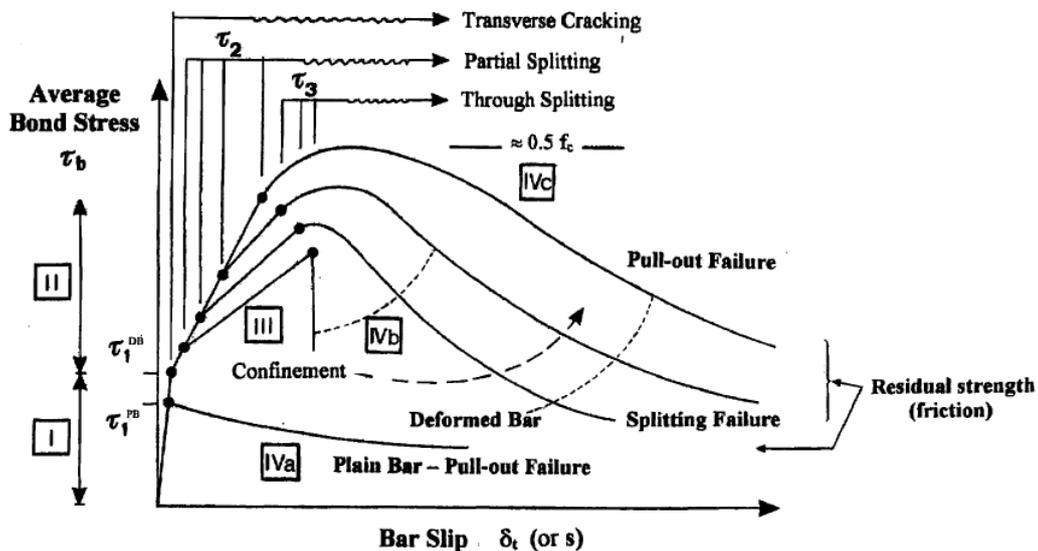


Figura 2.3 Tensioni di aderenza- scorrimento barra: Fasi dell'interazione acciaio-calcestruzzo. (Tassois, 1979)

2.1. Interazione barra-calcestruzzo

L'aderenza tra acciaio e calcestruzzo fa sì che tra i due materiali vi sia uno scambio tensionale, il che comporta, ovviamente, una variazione della forza che agisce in ognuno di essi lungo la lunghezza dell'elemento. La deformazione al quale si troveranno i due è diversa, soprattutto in casi in cui il carico esterno applicato risulta essere di notevole entità, il che ci porta a considerare doverosamente e in dettaglio il legame tra scorrimento (slip) e tensioni all'interfaccia. In Figura 2.3 è illustrata l'interazione tra tensione di aderenza e scorrimento della barra soggetta ad una forza di pull-out. Si notano ivi 4 differenti fasi, nelle quali la legge in questione cambia visibilmente comportamento:

- **Stadio 1:** in questa fase l'aderenza è dovuta principalmente a fenomeni di natura chimica, e se da un lato le tensioni tangenziali hanno valori piuttosto bassi ($\tau_b \leq \tau_1 = (0.2 - 0.8) f_{ct}$, circa 0.4-1MPa), dall'altro, in corrispondenza delle alette della barra ci sono tensioni normali abbastanza elevate (Figura 2.4). L'interazione tra i due materiali è influenzata leggermente anche dalla ruvidezza della barra, tuttavia in questa fase questo aspetto è del tutto trascurabile. È utile evidenziare come lo spostamento relativo tra i due materiali sia in realtà costituito da due differenti contributi. Il primo è rappresentato dallo scorrimento relativo all'interfaccia, il quale in questa fase è del tutto nullo. Il secondo invece, è legato alla deformazione a taglio del calcestruzzo (dovuta alle tensioni di aderenza), misurata ovviamente con riferimento alla condizione indeformata, come è ben visibile dalla Figura 2.5

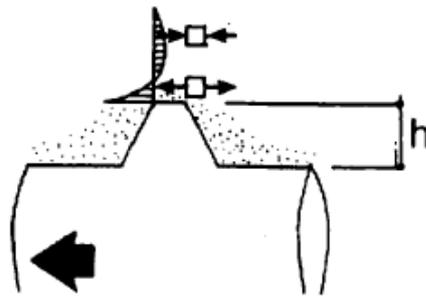


Figura 2.4 Tensioni aletta barra

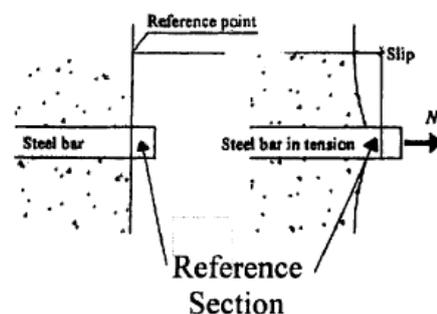


Figura 2.5 Deformazione calcestruzzo

- **Stadio 2:** in questa fase viene meno l'adesione di tipo chimico quando si registrano valori di tensione tangenziale $\tau_b > \tau_1$. La presenza delle nervature sulle barre ad aderenza migliorata induce un'azione spingente sul calcestruzzo confinante tale da generare ivi, delle micro fessure che permettono alla barra di scorrere (Figura 2.6).

Queste fessure non si propagano in quanto l'azione di incuneamento del calcestruzzo resta confinata, per cui ancora non nascono le fessure di splitting.

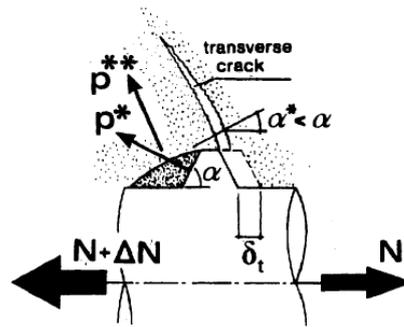


Figura 2.6 Scorrimento acciaio-calcestruzzo e azione di incuneamento della barra (Gambarova e Rosati, 1996)

- **Stadio 3:** in questo stadio le tensioni di aderenza continuano a crescere ($\tau_b > \tau_1 = (1-3) f_{ct}$), così come lo scorrimento. Questo è dovuto alla diffusione, in direzione radiale, delle fessure longitudinali, essendo l'azione di incuneamento incrementata dal calcestruzzo schiacciato davanti all'aletta della barra. Tepfers (1979, Figura 2.7) ha concluso che la componente p^{**} riportata in Figura 2.6 è equilibrata dalle tensioni circonferenziali che nascono nel calcestruzzo circostante, il che ci fa dedurre che questo sia in grado di esercitare un'azione di confinamento sulla barra. La tensione di aderenza e la rigidezza, sono dunque garantiti dal sistema costituito da: barra di armatura, calcestruzzo compresso in direzione radiale dalla barra stessa e dall'anello esterno di calcestruzzo non fessurato.

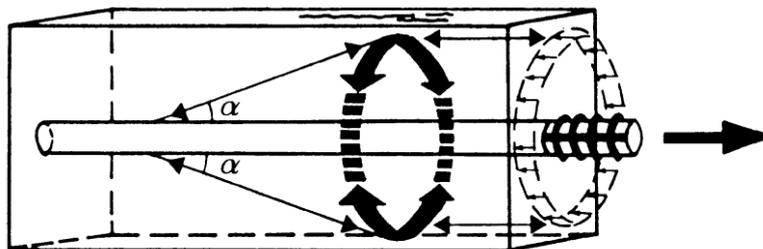


Figura 2.7 Interazione acciaio-calcestruzzo (Tepfers, 1979)

Lo stadio 4 può essere raggiunto solo se l'azione confinante è significativa, il che si traduce nella presenza di un opportuno copriferro ed eventualmente anche nella tenuta in conto delle staffe. In assenza di queste azioni, le fessure di splitting possono facilmente attraversare il calcestruzzo non danneggiato, causando il collasso del meccanismo di aderenza.

- Stadio 4: in questa fase lo scorrimento continua a crescere, mentre la tensione raggiunge il suo valore massimo per poi decrescere. Questo valore rappresenta, di fatto, la massima capacità portante del calcestruzzo schiacciato localmente tra le nervature della barra. Infatti superato questo valore il calcestruzzo viene danneggiato irreversibilmente mentre la barra continua a scorrere sfregandoci contro, senza alcun incremento dell'azione di incuneamento. In questa fase il comportamento dei due materiali arriva ad essere puramente di tipo attritivo.

La descrizione fatta del meccanismo di aderenza fa riferimento al comportamento locale di un segmento di barra ideale, ne consegue che il comportamento globale è influenzato da quanto avviene durante tutte le differenti fasi.

2.2. Crisi per pull-out e splitting

Lo stato tensionale al quale si trova soggetto il calcestruzzo, ci suggerisce quali possono essere i due differenti tipi di collasso del meccanismo di aderenza. Come si evince da quanto descritto nel paragrafo precedente, la crisi per splitting può precedere la crisi per pull-out, nel caso in cui le fessure longitudinali, dovute alla tensione di trazione radiale causata dalla compressione delle bielle di calcestruzzo adiacenti alla barra, si propaghino dalla superficie di interfaccia fino alla superficie esterna dell'elemento. Sicuramente per evitare questo tipo di collasso è consigliabile andare a lavorare sul confinamento, in modo da limitare la formazione e la propagazione delle fessure di splitting.

La crisi per pull-out si manifesta invece nel momento in cui il cuneo di calcestruzzo, compreso tra le nervature della barra e localmente compresso, viene completamente schiacciato causando il distacco dello stesso dal resto della matrice cementizia.

Come si evince, anche dalla Figura 2.3, il collasso per splitting è più repentino rispetto a quello per pull-out che conduce anche ad una resistenza residua maggiore, ma comunque limitata e governata da fenomeni puramente attritivi. Nella Figura 2.8 sono mostrati i differenti tipi di collasso:

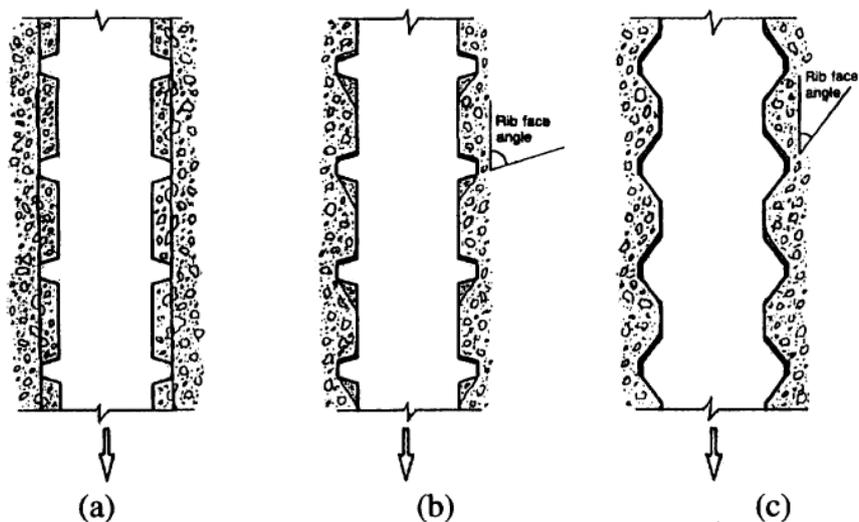


Figura 2.8 Tipi di collasso: (a) pull-out; (b) splitting e azione di incuneamento del calcestruzzo sotto le alette della barra; (c) splitting e scorrimento. (Carins, 1992; Anderesen, 1992)

2.3. Fattori che influenzano le condizioni di aderenza

Le analisi sperimentali sul legame tra tensione di aderenza (τ) e scorrimento (s) sono molto estese in quanto il fenomeno è influenzato da molteplici fattori. In ognuno di questi studi i parametri che entrano in gioco sono molteplici, per cui i risultati sperimentali variano ampiamente. Spesso queste campagne sono volte ad evidenziare un aspetto piuttosto che un altro al fine di comprendere effettivamente quale possa essere la sua influenza sulla legge $\tau - s$. Grazie al *Comitè International du Bèton (CEB) State of the Art Report on Reinforced Concrete (1996)* possiamo analizzare e vedere quali siano le grandezze che più influenzano il meccanismo di aderenza.

Sicuramente tra questi rientrano oltre alle grandezze di tipo geometrico (diametro della barra, numero di livelli di armatura, spazio libero tra le barre), anche parametri che descrivono la qualità dei materiali, la tipologia del carico, gli effetti del confinamento ed anche gli effetti delle condizioni ambientali.

Nei paragrafi seguenti ci occuperemo di descrivere i parametri ritenuti di maggiore interesse: influenza della geometria e del livello tensionale nella barra, influenza della tipologia di calcestruzzo, l'effetto del confinamento, l'effetto delle condizioni ambientali ed infine la tipologia di carico.

2.3.1. Influenza della geometria e del livello tensionale nella barra

La geometria della barra di armatura gioca un ruolo fondamentale nel meccanismo di aderenza. Come si è visto infatti le nervature determinano l'azione di incuneamento nel calcestruzzo dunque la loro geometria in termini di altezza (h_r) e di spaziatura (s_r) è significativa. A Rehm (1969) si deve la definizione di un indice di adeguata aderenza detto "indice di aderenza" o "area relativa delle alette", nel quale rientra anche la geometria della barra per mezzo del diametro (d_b):

$$f_r = \frac{A_R}{\pi * d_b * s_r}$$

In cui A_R rappresenta l'area della proiezione di una nervatura (fatta da 2 alette), sulla sezione della barra Figura 2.9:

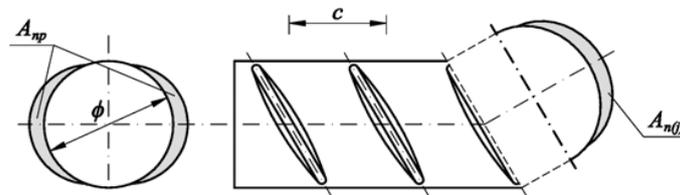


Figura 2.9 Parametri geometrici per il calcolo dell'indice di aderenza (Model Code 2010)

L'analisi dei risultati sperimentali consente di evidenziare come le condizioni di aderenza siano sostanzialmente uguali a condizione che l'indice di aderenza e le condizioni della superficie di interfaccia siano gli stessi e che l'inclinazione delle nervature, rispetto all'asse della barra, sia maggiore di 30 gradi.

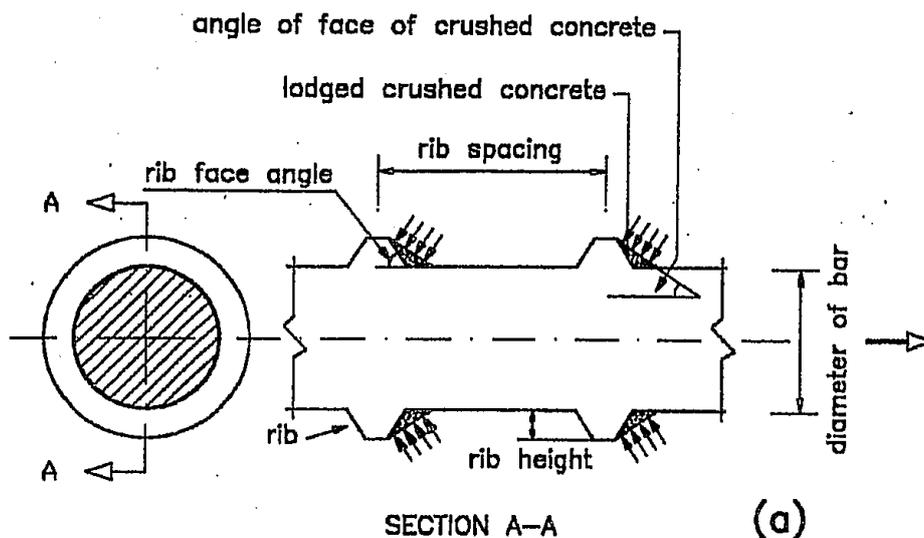


Figura 2.10 Inclinazione nervature e azione di incuneamento (Tepfers, 1979)

Un valore dell'indice di aderenza (f_r) compreso tra 0.05 e 0.1 rappresenta un buon compromesso in termini di tensione di aderenza ultima e in termini di condizioni di carico di esercizio. Ivi infatti l'apertura delle fessure è limitata ed è dunque necessario evitare il collasso per splitting. Inoltre questo valore si presta anche a rispettare i requisiti di produzione industriale. I dati presentati da Rehm et alii (1961) suggeriscono come la tensione di aderenza sia una funzione lineare dell'indice f_r , tuttavia studi più recenti hanno condotto a risultati contrastanti. Mentre Darwin e Grahm (1993) si sono concentrati sullo studio di provini incastrati e fortemente confinati, lo stesso Darwin con Tholen (1998) ha analizzato il comportamento di provini debolmente armati e semplicemente appoggiati. Se nel primo caso un incremento dell'indice di aderenza comporta un incremento della tensione di aderenza massima, nel secondo questo effetto è del tutto trascurabile infatti non si nota alcuna variazione nella capacità rotazionale della cerniera plastica, la quale invece dovrebbe risentirne.

Nel calcestruzzo precompresso si ricorre all'utilizzo di trefoli, costituiti da più cavi intrecciati tra loro. Utilizzare cavi dentellati con delle nervature consente sicuramente di garantire delle migliori condizioni di aderenza, anche se questo fa sì che si vada incontro alla fessurazione per splitting essendo i livelli tensionali ben superiori a quelli che si hanno negli elementi in c.a. È dunque necessario progettare delle opportune armature soprattutto nella zona in cui la precompressione si sta trasferendo al calcestruzzo.

Il comportamento non lineare della legge $\tau - s$ è legato al ramo di softening del calcestruzzo circostante alla barra. Dunque è influenzato da quanto succede in questa zona: fessurazione che nasce all'apice delle alette della nervatura, schiacciamento locale del calcestruzzo, nascita delle fessure radiali e longitudinali (splitting) e formazione dei piani di taglio che decretano infine il collasso per pull-out. I pull-out test spesso sono eseguiti in presenza di armatura che presenta una piccola lunghezza di immersione nella matrice cementizia, per cui le forze che vengono applicate non sono troppo alte e non ricoprono un ruolo significativo. Anche in situazioni in cui la lunghezza di ancoraggio è maggiore ma il meccanismo di trasferimento della forza dall'acciaio al calcestruzzo si basa sulla spinta esercitata dalla nervatura, l'effetto della tensione nella barra è trascurabile. Quando invece il meccanismo di trasferimento diventa di tipo attritivo (pull-out), allora si mette in evidenza come la tensione longitudinale alla barra abbia condotto ad una deformazione trasversale, dovuta all'effetto Poisson, che non è più trascurabile. A causa della riduzione del diametro della barra la spinta esercitata sul calcestruzzo confinante si riduce, per cui le condizioni di aderenza si degradano. Questo

effetto è ulteriormente aggravato qualora la tensione della barra raggiunga il valore di snervamento, il che causerebbe una eccessiva deformazione longitudinale e dunque anche trasversale.

Per rimarcare l'influenza della geometria delle nervature sul legame tra tensione di aderenza e scorrimento, Sorez e Holzenbeim hanno evidenziato come la probabilità di collasso per splitting sia crescente in presenza di crescente altezza delle nervature e loro spaziatura. Inoltre Tepfers e Olson (1979) dai risultati ottenuti su pull-out test, hanno dedotto varie conclusioni. I due hanno infatti notato come l'aumento dell'altezza delle nervature sia utile per incrementare la tensione di aderenza ad un dato livello dello scorrimento, e come la spaziatura delle alette deve essere tale da garantire la nascita del cuneo di spinta nel calcestruzzo circostante. Infatti qualora lo spazio tra due nervature successive si eccessivamente piccolo si corre il rischio di avere un comportamento del tutto identico a quello di una barra liscia. Tra le altre osservazioni conclusive di Tepfers e Olson vi è il fatto che lo scorrimento in condizioni di massimo carico, si riduce al crescere del coefficiente f_r . Inoltre l'azione di splitting è favorita da angoli, tra l'asse della barra e l'azione di incuneamento, alti. Questi a loro volta sono legati alla geometria, dunque all'indice di aderenza: indici di aderenza alti comportano angoli bassi.

2.3.2. Influenza della qualità del calcestruzzo

La qualità del calcestruzzo gioca un ruolo fondamentale, non solo in termini di parametri di resistenza, ma anche dal punto di vista dei dettagli costruttivi. Infatti le modalità di posa in opera delle barre di armatura e le modalità con cui il getto viene eseguito, influenzano notevolmente le caratteristiche di aderenza (il legame $\tau - s$).

Abbiamo visto come il calcestruzzo immediatamente adiacente alle nervature si trovi soggetto ad uno stato di compressione multi assiale, legato alla presenza delle nervature stesse e alla diffusione delle tensioni tangenziali. Dunque le condizioni di aderenza sono influenzate dal comportamento in compressione multi assiale, oltre che dal comportamento in trazione, legato direttamente alla formazione delle fessure. Se il primo condiziona maggiormente la crisi per pull-out nella quale il calcestruzzo adiacente alle nervature viene schiacciato al punto da distaccarlo dal resto della matrice, il secondo va ad intaccare la crisi per splitting, legata all'apertura di fessure all'apice delle alette delle barre. I pull-out test eseguiti da Martin e Noakowsky (1981), ci forniscono una serie di utili considerazioni sull'effetto della qualità del

calcestruzzo. Dalla Figura 2.11 possiamo notare la dipendenza della tensione di aderenza al variare della resistenza a compressione del calcestruzzo. I due grafici si riferiscono alle diverse direzioni di getto, mentre il fascio di curve evidenzia la dipendenza dallo scorrimento della barra all'estremità non caricata.

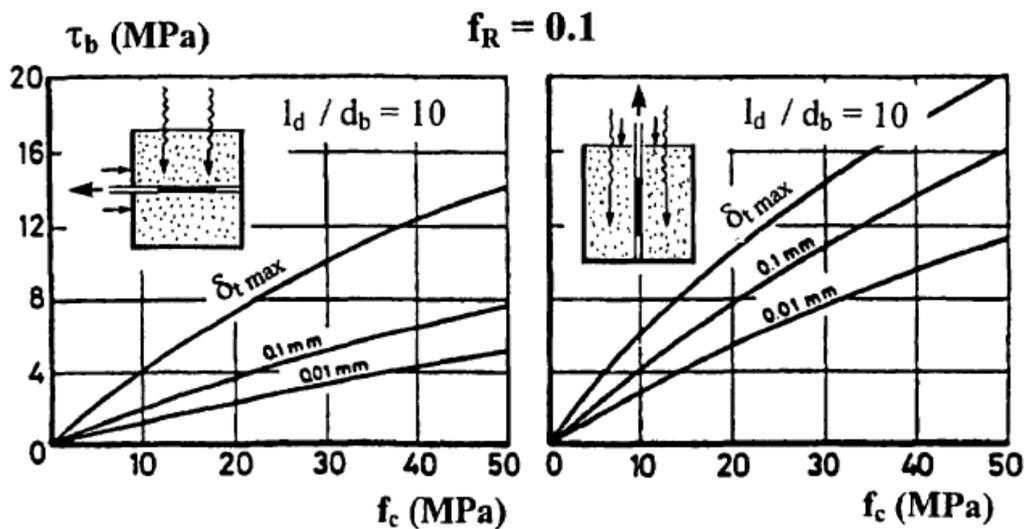


Figura 2.11 Effetto della qualità del calcestruzzo sulla tensione di aderenza (Martin e Noakowsky, 1981)

A parità di condizioni geometriche, stesso indice di aderenza ($f_r=0.1$) e stesso rapporto lunghezza di immersione nel calcestruzzo e diametro della barra ($l_d/d_b=10$), la posizione della stessa al momento del getto e durante l'indurimento del materiale è l'aspetto più influente, anche di più della stessa resistenza a compressione del calcestruzzo. Si nota inoltre come vi sia una certa proporzionalità tra tensione di aderenza e resistenza a compressione, la quale tuttavia risulta essere meno importante quando lo scorrimento è vicino ai valori estremi ($s \approx \delta_{tmax}$ e $s \leq 0.01 \text{ mm}$).

Martin ha anche evidenziato come la composizione del conglomerato cementizio abbia un'influenza sulla qualità del legame. Ad influire maggiormente sono la qualità degli aggregati, per cui la loro distribuzione come curva granulometrica e la qualità del mix-design. In particolare si è notato come la presenza di materiale fine vada a degradare le condizioni di aderenza, al contrario di quanto succede con materiali più grossolani. Inoltre La massima tensione di aderenza si ottiene con materiali la cui consistenza è molto solida e poco fluida.

Viste le condizioni alla quale si trova soggetto il calcestruzzo adiacente alle barre, non è da trascurare l'effetto di azioni trasversali ivi agenti. Infatti la presenza nel calcestruzzo circostante di uno stato tensionale trasversale può avere conseguenze positive o meno, a seconda che sia esso di trazione o di compressione. Infatti se si ha:

- Trazione trasversale: gli ancoraggi possono danneggiarsi facilmente e il meccanismo di collasso può passare da pull-out a splitting. Infatti le microfessure possono propagarsi più facilmente a causa del fatto che le tensioni circonferenziali si troveranno a dover assorbire due contributi di trazione. La situazione peggiora ulteriormente se ci troviamo in presenza di azioni trasversali legate alla differenza di temperatura o al ritiro.
- Compressione trasversale: questo effetto è sempre benefico per le condizioni di aderenza, tuttavia a seconda della sua natura ci sono alcune differenze. La presenza di un confinamento attivo, che si ha in presenza di forze esterne o comunque in zone dove si risente dell'effetto di un appoggio o di un vincolo di continuità, è utile per limitare i problemi legati allo splitting, ma diventa ininfluenza quando la resistenza è legata a meccanismi puramente attritivi. Il confinamento passivo invece, rappresentato dalla sola presenza delle staffe e del copriferro, richiede che si raggiungano determinati livelli di apertura della fessura, per far risentire della sua presenza. È dunque molto utile quando le fessure di splitting arrivano a propagarsi fino al copriferro e dunque fino alla superficie esterna.

L'effetto del confinamento è un aspetto fondamentale per le condizioni di aderenza, dunque lo si descriverà ulteriormente nel prossimo paragrafo.

2.3.3. Influenza del confinamento trasversale

Il confinamento riguarda tutti quei fenomeni che interessano la deformazione trasversale del calcestruzzo circostante alle barre. Ivi possono rientrare effetti legati alla presenza di armatura trasversale o di pressione agente in tale direzione o ancora legati allo spessore e alla resistenza del copriferro. L'influenza dell'armatura trasversale è stata trattata da Eligehausen, Popov e Bertero (1982). I tre mediante pull-out test hanno notato come i provini senza armatura trasversale subiscano callosi per splitting del copriferro in presenza di tensione di aderenza piuttosto bassa, la quale decade molto rapidamente. Nei provini che invece presentano armatura trasversale il comportamento è decisamente migliore e la crisi si ha per pull-out. Il tutto è ben visibile in Figura 2.12

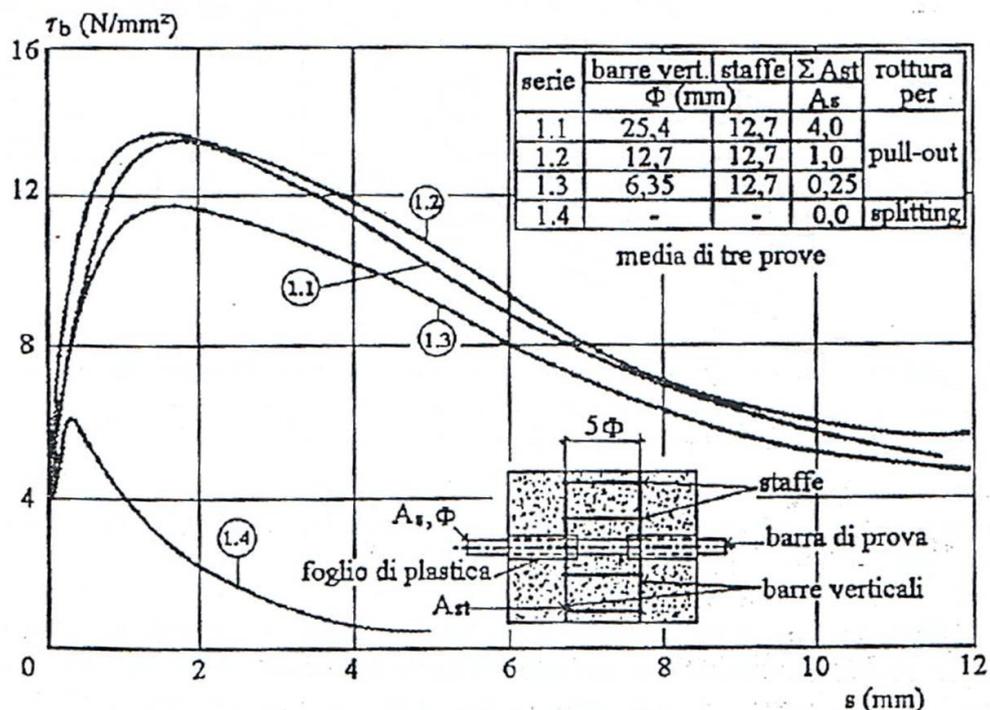


Figura 2.12 Influenza del confinamento tramite armatura trasversale (Eligehausen, Popov e Bertero, 1982)

L'effetto della presenza di pressione trasversale è stato invece analizzato da Untrauer e Henry (1965) i quali hanno applicato una pressione normale su due facce parallele del provino e hanno poi misurato lo scorrimento della barra all'estremità caricata. L'incremento nella tensione di aderenza è dovuto all'incremento del contributo attritivo tra calcestruzzo e armatura oltre che del contributo legato alla spinta delle alette delle barre.

Dorr ha usato invece provini cilindrici intagliati con una barra immersa al centro per considerare differenti valori della pressione esterna. L'intaglio era necessario al fine di localizzare le successive fessure trasversali. Incrementi della pressione esterna da 0 a 15 MPa hanno evidenziato un incremento del 100% della tensione di aderenza (un raddoppio) in corrispondenza di uno scorrimento di 0.1 mm.

2.3.4. Effetti dell'ambiente esterno

Gli aspetti ambientali che possono intaccare il fenomeno dell'aderenza sono molteplici, dunque in questa sezione ci dedicheremo allo studio di quelli principali, tra i quali si sono scelti: effetto della ruggine, quello della corrosione della barra ed infine l'effetto della temperatura.

- Ruggine: Questa si sviluppa a causa del fatto che le barre possono trovarsi esposte alle condizioni ambientali esterne. La presenza di umidità, condensa o inquinamento, può causare la formazione di uno strato di ossido di ferro il quale non degrada le condizioni di aderenza, piuttosto le migliora, rispetto ad una barra appena laminata (Morgan, 1998). Tuttavia la formazione di questo strato col tempo da luogo alla riduzione del diametro della barra. In letteratura si trova un range che va da 0.008 a 0.04 mm con una perdita della sezione fino al 1% nelle barre di diametro più piccolo. Questi valori sono ampiamente in accordo con le tolleranze imposte per la maggior parte dei prodotti standard (perdita del 6 – 10 %).

Per cui i risultati mostrano come la presenza di uno strato di ruggine aiuti le condizioni di aderenza, naturalmente fino al momento in cui la dimensione della nervatura non diventa troppo piccola. Andando oltre infatti si rischia di perdere l'effetto della cuneo di spinta che si localizza nel calcestruzzo adiacente alle alette. Inoltre la presenza della ruggine combinata ad un buon calcestruzzo può inibire l'ulteriore corrosione. Quindi possiamo concludere che se la riduzione del diametro rimane limitata nel tempo entro i valori di tolleranza, l'effetto della ruggine è solo positivo in termini di aderenza.

- Corrosione della barra: Questo fenomeno riguarda la corrosione dovuta a gas e ioni dell'ambiente esterno, tra cui ossigeno anidride carbonica e ioni di cloro. La facilità con la quale possono penetrare nel calcestruzzo dipende dalla porosità dello stesso, per cui il danneggiamento della barra dipende dalla qualità della matrice nella quale è immersa. La corrosione genera una riduzione della sezione dell'armatura con un conseguente indebolimento dell'aderenza a causa dell'accumulo di prodotti di corrosione all'interfaccia. Alcuni ricercatori (Carrera e Ghodoussi, 1992) hanno sfruttato procedure elettrochimiche accelerate al fine di evidenziare come il crescere della corrosione abbia un effetto benefico fino ad un valore massimo della tensione di aderenza, oltre il quale si ha un decadimento della stessa. Mentre il primo incremento è stato attribuito all'aumento di volume dell'ossido di ferro, la successiva caduta è stata imputata all'accumulo di materiale "morbido" all'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo.
- Effetto della temperatura: Indagare l'effetto della temperatura sull'aderenza non è immediato. I risultati trovati in letteratura si basano su prove eseguite su provini riscaldati ad una temperatura $T = 100 - 800 \text{ } ^\circ\text{C}$ e poi lasciati ad una temperatura

prefissata prima di farli raffreddare in condizioni quasi statiche. Schneider et al (1985) hanno evidenziato (Figura 2.13) come la tensione di aderenza a temperatura ambiente sia dello stesso ordine di grandezza di quella alle alte temperature, fintanto che ci si mantiene sotto i 400 °C circa. Tra i vari parametri investigati vi sono oltre ai tipi di aggregati e alla loro percentuale, anche la tipologia della barra (liscia o nervata), le condizioni di indurimento e la forma del provino. I risultati prodotti dalle prove mettono in luce come le barre lisce siano più suscettibili alle alte temperature rispetto a quelle ad aderenza migliorata. Si nota inoltre che la resistenza a compressione del calcestruzzo, così come il rapporto acqua/cemento, hanno un'influenza irregolare e di difficile valutazione. Al contrario il tipo di aggregato è molto influente, infatti più la sua stabilità termica è elevata, minore è il danneggiamento del calcestruzzo a causa delle minori sollecitazioni differenziali (dovute al ΔT).

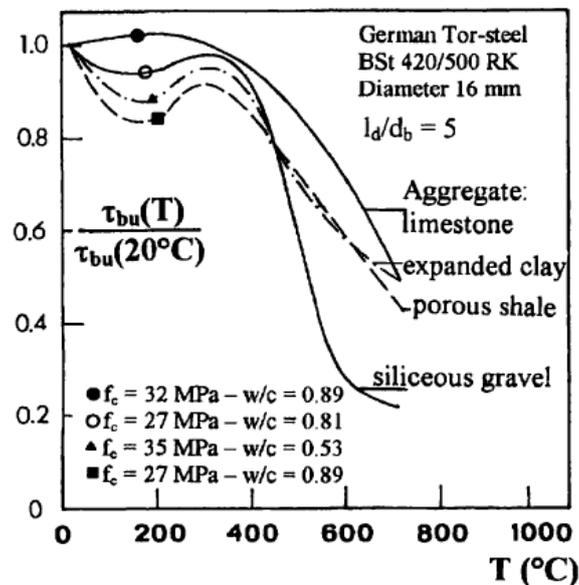


Figura 2.13 Tensione di aderenza ultima alle alte temperature (Schneider et al 1985)

Alle basse temperature i dati e le prove sono ancora più limitate. L'umidità gioca un ruolo fondamentale, basta fare riferimento ai risultati presentati da van der Veen (1992). Mentre i provini in aria asciutta presentano i valori più alti della tensione di aderenza massima, quelli sigillati con una certa percentuale di umidità hanno valori leggermente più bassi. In entrambi i casi si nota che la resistenza è maggiore alle basse temperature rispetto a quanto succede alle alte. Al ridursi della temperatura cambia anche il tipo di collasso, si passa dall'aver crisi per splitting alla temperatura ambiente, allo snervamento della barra per temperature inferiori a -80°C. In mezzo,

attorno ai -40°C la crisi è dovuta al pull-out. Gli effetti positivi sull'aderenza, delle basse temperature sono tangibili.

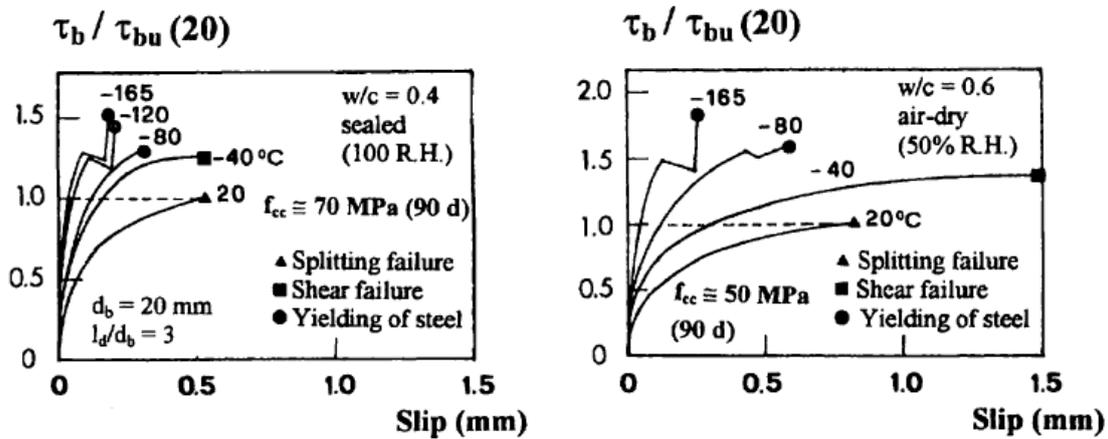


Figura 2.14 Legame tensione di aderenza scorrimento alle basse temperature (van der Veen, 1992)

2.3.5. Effetto della storia di carico

Le caratteristiche dell'aderenza sono influenzate anche dalla tipologia di carico esterno. Un carico costante nel tempo ha un effetto diverso da quello generato da un'azione di tipo ciclico. Ad essere interessati da questa variabilità non sono solo le caratteristiche meccaniche dei materiali e il legame $\tau - s$, ma anche i meccanismi di collasso, siano essi adesione chimica, splitting o pull-out. Sapendo che la crisi per splitting è legata alla resistenza a trazione del materiale, non ci sorprende notare come l'influenza della fatica sia la stessa nel meccanismo di collasso e nel parametro meccanico che ne governa il comportamento. Per quanto riguarda invece la crisi per pull-out, connessa allo schiacciamento del calcestruzzo adiacente alle nervature e alla generazione di piani di taglio paralleli all'asse della barra, gli effetti della fatica sono simili a quelli osservati su un provino piano di calcestruzzo caricato con un'azione centrata (con bassi e alti numeri di cicli). Infine è stato dimostrato che i cicli inversi in presenza di basse tensioni di aderenza hanno un effetto sulla stessa durante il ciclo, ma non vanno ad intaccare il suo valore ultimo. Discorso inverso vale nel caso in cui le tensioni di aderenza siano elevate, qui la presenza di un'azione ciclica inversa porta ad una caduta della resistenza ultima di aderenza.

3. MATERIALI

In questo capitolo verranno trattati i modelli utilizzati per la definizione dei materiali che sono stati presi in considerazione nella formulazione del modello. Verrà esposto il legame di aderenza tra acciaio e calcestruzzo con riferimento alle formulazioni proposte nel Model Code 2010. Inoltre si dovrà indagare anche il comportamento del calcestruzzo nel tempo, dunque sarà necessario descrivere le formulazioni utilizzate nella definizione degli aspetti reologici, quali ritiro e viscosità. In tal caso si farà riferimento alle formulazioni proposte dal Model Code 1990.

3.1. *Legame di aderenza*

Come si è visto nel capitolo precedente i parametri che governano questo legame sono molteplici. Nel capitolo 6 del Model Code 2010, sono contenute tutte le informazioni necessarie alla definizione numerica della curva $\tau - s$. Questa presenta una forma, ben visibile in Figura 3.1, caratterizzata da 3 parti fondamentali:

- un tratto crescente dovuto alla mobilitazione della resistenza del calcestruzzo adiacente alle nervature.
- un plateau orizzontale durante il quale il calcestruzzo tra le nervature si sta schiacciando arrivando alla formazione dei piani di taglio (crisi per pull-out). Questa situazione si verifica solamente se prima non si è raggiunta la crisi per splitting, dovuta alla propagazione delle fessure longitudinali. Per evitare questo fenomeno è necessario avere un buon grado di confinamento, considerando la presenza di un grande copriferro e/o di staffe.
- un tratto discendente dovuto alla crisi per pull-out che conduce ad una resistenza residua di tipo puramente attritivo tra le due superfici.

Graficamente risulta chiaro notare come sia necessario definire alcuni parametri limite per individuare la spezzata.

Le tensioni di aderenza sono quindi calcolate in funzione dello scorrimento, ovvero la differenza di spostamento tra i due materiali nella lunghezza di trasmissione degli sforzi. Infatti ove la sezione è fessurata il carico passa attraverso la barra e dopo una lunghezza di trasmissione i due materiali tornano a lavorare in maniera combinata.

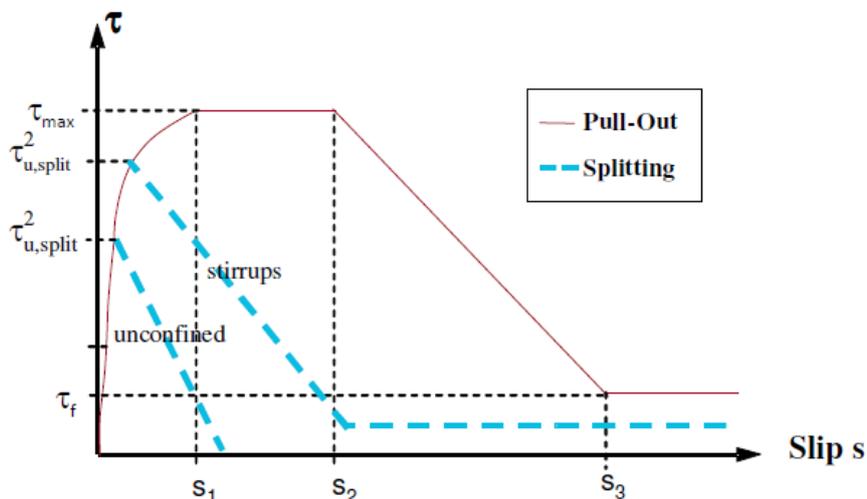


Figura 3.1 Tensioni di aderenza - scorrimento (Model Code 2010)

Dunque le formule proposte per il calcolo delle tensioni sono lo seguenti:

$$\tau_0 = \tau_{max} \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad 0 \leq s \leq s_1 \quad (4.1)$$

$$\tau_0 = \tau_{max} \quad s_1 \leq s \leq s_2 \quad (4.2)$$

$$\tau_0 = \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right) \quad s_2 \leq s \leq s_3 \quad (4.3)$$

$$\tau_0 = \tau_f \quad s > s_3 \quad (4.4)$$

I parametri presenti si valutano facendo riferimento alla seguente tabella. Ivi si nota la distinzione tra i due tipi di collasso e le condizioni di aderenza:

	1	2	3	4	5	6
	Pull-Out (PO)		Splitting (SP)			
	$\varepsilon_s < \varepsilon_{s,y}$		$\varepsilon_s < \varepsilon_{s,y}$			
	Good bond cond.	All other bond cond.	Good bond cond.		All other bond cond.	
			unconfined	stirrups	unconfined	stirrups
τ_{max}	$2.5\sqrt{f_{cm}}$	$1.25\sqrt{f_{cm}}$	$7.0 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{25} \right)^{0.25}$	$8.0 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{25} \right)^{0.25}$	$5.0 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{25} \right)^{0.25}$	$5.5 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{25} \right)^{0.25}$
s_1	1.0mm	1.8mm	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$	$s(\tau_{max})$
s_2	2.0mm	3.6mm	s_1	s_1	s_1	s_1
s_3	$c_{clear}^{1)}$	$c_{clear}^{1)}$	$1.2s_1$	$0.5c_{clear}^{1)}$	$1.2s_1$	$0.5c_{clear}^{1)}$
α	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
τ_f	$0.40\tau_{max}$	$0.40\tau_{max}$	0	$0.4\tau_{max}$	0	$0.4\tau_{max}$

1) c_{clear} is the clear distance between ribs

Figura 3.2 Parametri per il legame di aderenza (Model Code 2010)

3.2. *Effetti reologici del calcestruzzo*

In questa fase si evidenzia come il comportamento del calcestruzzo nel tempo sia variabile. Le formulazioni cui faremo riferimento saranno quelle fornite dal Model Code 1990 e risulteranno utili nel momento in cui il tirante sarà analizzato considerando come azione agente il ritiro effettivo. Naturalmente in questa fase si dovrà tenere in conto anche degli effetti della viscosità.

3.2.1. *Considerazioni generali su ritiro e viscosità*

La viscosità è quel fenomeno fisico per cui se il calcestruzzo è soggetto ad un carico costante questo nel tempo continua a deformarsi. Inoltre il calcestruzzo presenta anche un'ulteriore deformazione indipendente dalle tensioni che vi sono applicate per mezzo dei carichi. La deformazione cui stiamo facendo riferimento è il ritiro (o rigonfiamento) ed è dovuto alla variazione del contenuto di acqua del calcestruzzo a causa delle reazioni chimiche che si verificano nel tempo.

Un provino di calcestruzzo è soggetto nel tempo all'invecchiamento che comporta l'insorgere di deformazioni per ritiro. Quando lo stesso viene caricato a causa della viscosità va incontro ad un'ulteriore deformazione. La differenza tra questa deformazione totale, e quella che si avrebbe considerando solo la maturazione dell'elemento (ritiro nel tempo) e la deformazione elastica, che nasce all'atto dell'applicazione del carico, ci fornisce la deformazione dovuta al creep.

Il fenomeno è intrinsecamente non lineare, tuttavia per studiarlo ci riferiamo alla teoria della viscoelasticità lineare. Il che ci pone di fronte alla presenza di errori non trascurabili, soprattutto in presenza di alti livelli tensionali. In ogni caso per caratterizzare il comportamento dei materiali con un elevato grado di invecchiamento, nelle analisi si farà doverosamente ricorso a questa teoria semplificata.

Passando ad un'analisi matematica, la deformazione totale di un elemento in calcestruzzo, dovuta all'applicazione di un carico costante nel tempo, in direzione assiale all'elemento stesso, è:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) + \varepsilon_{cn}(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t, T)$$

In cui si ha:

$\varepsilon_{c\sigma}(t)$ deformazione totale dovuta all'applicazione del carico

$\varepsilon_{cn}(t)$ deformazione totale indipendente dalle condizioni di carico

- $\mathcal{E}_{ci}(t_0)$ deformazione elastica al momento dell'applicazione del carico
- $\mathcal{E}_{cc}(t, t_0)$ deformazione dovuta alla viscosità al tempo $t > t_0$
- $\mathcal{E}_{cs}(t)$ ritiro o rigonfiamento al tempo t
- $\mathcal{E}_{cT}(t, T)$ deformazione termica del calcestruzzo al tempo t

Trascurando le condizioni climatiche, dunque l'effetto della temperatura, nella Figura 3.3 possiamo notare l'andamento della deformazione, per effetto dell'applicazione di un carico di compressione dal tempo t_0 al tempo t_e . Guardando la figura si nota che il materiale sta subendo la deformazione dovuta al ritiro. L'applicazione del carico comporta la nascita della deformazione elastica ($\epsilon_{ci}(t)$), seguita anche da una deformazione plastica ($\epsilon_{cip}(t) \approx 10\% \epsilon_{ci}(t)$). Quest'ultimo termine tuttavia si può considerare compreso nella deformazione dovuta alla viscosità ($\epsilon_{cc}(t, t_0)$). Nel momento della rimozione del carico, si ha un ritorno elastico ($\epsilon_{ci}(t_e)$), il quale tuttavia è inferiore alla deformazione elastica iniziale. Questa differenza è causata dal fatto che durante l'invecchiamento il modulo di Young del calcestruzzo cresce, per cui aumentando la rigidezza, la sua deformazione sarà più piccola ($\epsilon_{ci}(t) > \epsilon_{ci}(t_e)$). In seguito nel tempo si ha anche una fase di elasticità ritardata che permette un recupero parziale della deformazione ($\epsilon_{cd}(t, t_0, t_e)$) che nel tempo può arrivare a circa il 50% della deformazione elastica iniziale valutata con un modulo elastico a 28 giorni ($\epsilon_{cd\infty}$). La deformazione restante è la deformazione residua, detta anche di plasticità ritardata ($\epsilon_{cc}(t > t_e)$).

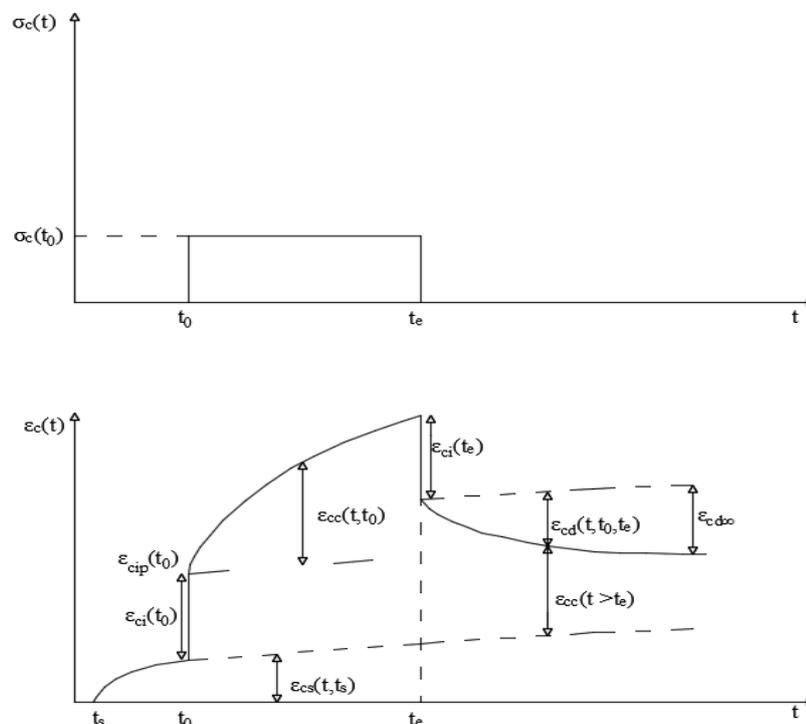


Figura 3.3 Componenti della deformazione di un provino in calcestruzzo soggetto ad un carico di compressione assiale

La valutazione della deformazione viscosa per effetto dell'applicazione del carico al tempo t_0 , può essere fatta in funzione del coefficiente di viscosità e della deformazione elastica al tempo t_0 :

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}} * \varphi(t, t_0)$$

In cui E_{ci} è il modulo elastico del calcestruzzo a 28 giorni, $\sigma_c(t_0)$ è la tensione che induce la deformazione elastica e $\varphi(t, t_0)$ è il coefficiente di viscosità al tempo t per effetto del carico applicato al tempo t_0 . Questo coefficiente permette di mettere in luce come l'effetto della viscosità sia notevole quando il calcestruzzo è giovane, mentre tende ad un valore asintotico quando invecchia. La deformazione totale, nel tempo, in funzione della tensione applicata, si può quindi esprimere come somma di due contributi:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}} * \varphi(t, t_0) + \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} = \left(\frac{\varphi(t, t_0)}{E_{ci}} + \frac{1}{E_c(t_0)} \right) * \sigma_c(t_0) = \sigma_c(t_0) * J(t, t_0)$$

La funzione $J(t, t_0)$ è la funzione di creep che permette di esprimere la deformazione totale al tempo t dovuta ad una tensione unitaria ($[F^{-1}L^2]$).

La valutazione della funzione J come visto è molto utile quando si vuole passare alla determinazione dell'evoluzione della deformazione nel tempo a seguito dell'applicazione di un carico. Tuttavia nelle nostre considerazioni la viscosità entrerà in gioco non rispetto alle azioni esplicite, quali forze o carichi direttamente applicati all'elemento strutturale. Piuttosto del suo effetto ne terremo conto quando il tirante si troverà soggetto all'effettiva azione del ritiro, la quale rappresenta una deformazione impressa. In questa situazione la viscosità del materiale fa sì che lo stesso, nel tempo, si trovi a subire un rilassamento delle tensioni, la cui entità è direttamente connessa alla variazione della deformazione cui è soggetto. Tale legame avviene mediante la funzione di rilassamento R ($[FL^{-2}]$), la quale è legata alla funzione di creep dall'integrale di Volterra:

$$\sigma_c(t) = \int_0^t R(t, \tau) \frac{\partial(\varepsilon_c(\tau) - \varepsilon_{cn}(\tau))}{\partial \tau} \partial \tau$$

In merito alla valutazione di dei parametri che entrano in gioco nella definizione delle funzioni suddette, si rimanda al paragrafo successivo ove vengono illustrate le formulazioni proposte dal Model Code 1990.

3.2.2. Viscosità

Come già accennato in precedenza il ritiro e la viscosità vanno considerati unitamente. Nel momento in cui viene applicato il carico insorge la deformazione elastica, ma nel frattempo il ritiro ha già iniziato ad agire sull'elemento. Per cui la deformazione viscosa si può esprimere come:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_c(t) - \varepsilon_{ci}(t_0) - \varepsilon_{cs}(t)$$

In cui $\varepsilon_c(t)$ rappresenta la deformazione totale al tempo t , $\varepsilon_{ci}(t_0)$ la deformazione elastica all'atto dell'applicazione del carico (t_0) ed $\varepsilon_{cs}(t)$ la deformazione dovuta al ritiro al tempo t . La trattazione proposta dal Model Code 1990 al capitolo 2.1.6.4.3 è valida per strutture in calcestruzzo ordinarie ($12\text{MPa} < f_{ck} < 80\text{MPa}$) che, al momento dell'applicazione del carico, siano soggette ad una tensione di compressione $\sigma_c \leq 0.4f_{cm}(t_0)$. Inoltre si considera una umidità relativa media all'interno di un intervallo che va dal 40 al 100% ad una temperatura media compresa tra 5 a 30°C. Il coefficiente di creep e $\phi(t, t_0)$ è quindi definito dal Model Code 1990 come segue:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi_0 \cdot \beta_c(t - t_0)$$

In cui si ha che il coefficiente di creep di base, ϕ_0 , vale:

$$\Phi_0 = \Phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm28}) \cdot \beta(t_0)$$

Con

$$\Phi_{RH} = 1 + \frac{1 - \frac{RH}{RH_0}}{0.46 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \beta(f_{cm28}) = \frac{5.3}{\left(\frac{f_{cm28}}{f_{cm0}}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_0^{\frac{1}{5}}}$$

In cui con h si definisce il rapporto tra il doppio dell'area della sezione e il perimetro esposto all'atmosfera $h=2A/u$ ([mm]), mentre h_0 ha un valore costante pari a 100 mm. Il valore RH [%] rappresenta l'umidità relativa ed è rapportata al valore di riferimento RH_0 che vale 100%. L'evoluzione della viscosità nel tempo è fornita dal coefficiente $\beta_c(t-t_0)$:

$$\beta_c(t - t_0) = \left(\frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right)^{0.3}$$

All'interno del quale il coefficiente β_H è calcolato come:

$$\beta_H = \min \left(1500, 150 \left(1 + \left(1.2 \frac{RH}{RH_0} \right)^{18} \right) \frac{h}{h_0} + 250 \right)$$

3.2.3. Ritiro

Con questo termine si indica il fenomeno che comporta una riduzione di volume dell'elemento in calcestruzzo per effetto della differenza del contenuto di umidità tra lo stesso elemento e l'aria dell'ambiente esterno nel quale si trova. Tuttavia il fenomeno è costituito da più componenti che possono manifestarsi contemporaneamente, come il ritiro plastico, quello autogeno e quello legato alla reazione di carbonatazione. Mentre il ritiro plastico avviene a causa della perdita di acqua quando il materiale è ancora nello stato plastico, il ritiro autogeno è una diretta conseguenza della reazione di idratazione del cemento. Per cui questo fenomeno è inevitabile ed indipendente dalle condizioni atmosferiche dell'ambiente circostante. Nel caso in cui il rapporto acqua cemento sia basso (calcestruzzi ad alta resistenza), esso può essere gravoso per le performance del materiale. Il ritiro dovuto alla carbonatazione è invece dovuto alla reazione dei componenti del legante idraulico (cemento) con l'anidride carbonica presente nell'atmosfera in presenza di umidità sostenuta.

In prima battuta il ritiro quindi si può considerare come direttamente legato alla riduzione del contenuto d'acqua per effetto dell'essiccamento (Verbeck e Helmuth, 1969). Risulta chiaro notare come le superfici esterne dell'elemento raggiungano prima una condizione di equilibrio con l'ambiente esterno, rispetto a quelle interne, in termini di umidità. Dunque il contenuto della stessa all'interno del volume dell'elemento non è costante essendo minore nei punti esterni rispetto a quelli interni. Questa differenza comporta la nascita di tensioni interne di trazione nelle superfici più esposte all'ambiente esterno. Le trazioni vanno dunque opportunamente controllate poiché potrebbero innescare un processo fessurativo nell'elemento strutturale, portandolo ad essere molto vulnerabile nei confronti delle azioni degradanti. Contrariamente i punti via via più interni si troveranno soggetti a livelli tensionali decrescenti che possono arrivare ad essere anche di compressione. Questa deformazione differenziale nella sezione dell'elemento non si verifica con il ritiro autogeno, il quale al contrario si sviluppa in maniera abbastanza uniforme.

Bisogna sempre tenere presente che il ritiro e la viscosità sono due fenomeni che vanno sempre considerati in concomitanza. Infatti in presenza di azioni deformative agenti sull'elemento strutturale, visto il comportamento viscoso del materiale, le tensioni nel tempo saranno soggette al fenomeno del rilassamento, direttamente legato alla variazione della deformazione impressa. Vi è dunque una completa sovrapposizione dei due fenomeni.

La trattazione analitica del ritiro si basa sulle formulazioni presenti al capitolo 2.1.6.4.4 del Model Code 1990. I fenomeni reologici del calcestruzzo non dipendono dai parametri di

resistenza o di deformabilità del materiale, piuttosto, come si può facilmente comprendere in base a quanto esposto nei precedenti capitoli, dalla composizione chimica dello stesso.

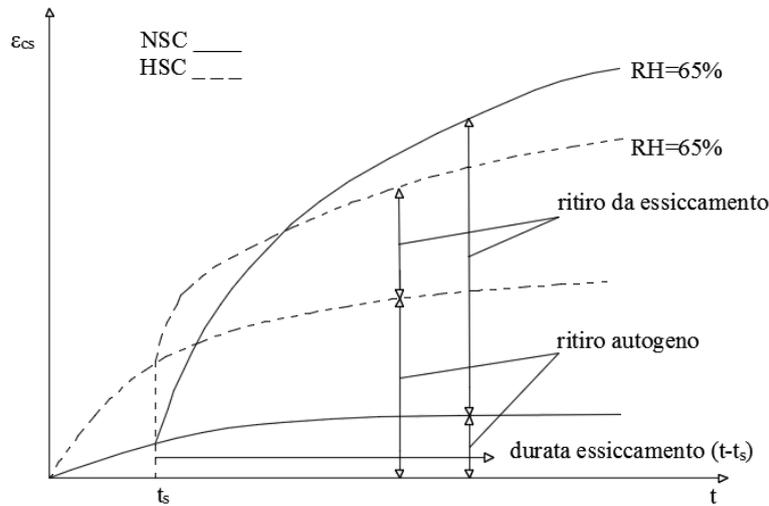


Figura 3.4 Evoluzione nel tempo del ritiro autogeno e da essiccamento

Il modello analitico che andremo a vedere considera solamente la variazione volumetrica dovuta all'essiccamento del calcestruzzo, senza quindi mettere in conto gli effetti legati al ritiro autogeno.

$$\varepsilon_S(t, t_S) = \varepsilon_{S0} \cdot \beta_S(t - t_S)$$

Mentre t rappresenta l'età del calcestruzzo espressa in giorni, t_S è invece l'istante temporale in cui il materiale inizia a subire il ritiro. Risulta chiaro quindi che la differenza $t - t_S$ rappresenta la durata effettiva del ritiro. Il termine ε_{S0} è invece definito come il ritiro di base, esso è funzione della resistenza media a compressione del calcestruzzo:

$$\varepsilon_{S0} = \varepsilon_S(f_{cm28}) \cdot \beta_{RH}$$

In cui a sua volta si ha:

$$\varepsilon_S(f_{cm28}) = \left(160 + 10 \cdot \beta \cdot \left(9 - \frac{f_{cm28}}{f_{cm0}} \right) \right) \cdot 10^{-6}$$

Ivi il coefficiente β è un parametro necessario per tenere in considerazione gli effetti legati al tipo di cemento che si utilizza nella produzione del calcestruzzo. IL suo valore cambia a seconda che si utilizzi un cemento con tempi e caratteristiche di presa differenti. I valori suggeriti dal Model Code 1990 in merito sono riassunti nella seguente tabella:

Tipi di cemento			
RS		N&R	SL
β	8	5	4

Tabella 3-1 Coefficienti in funzione della classe di resistenza del cemento (Model Code 1990)

In cui le sigle che indicano i tipi di cemento rappresentano:

- Cementi ad indurimento rapido con elevata resistenza **RS**;
- Cementi normali e a rapido indurimento **N&R**;
- Cementi ad indurimento lento **SL**.

Il coefficiente β_{RH} presente nella formula di ε_{s0} , considera invece l'effetto legato all'umidità dell'ambiente esterno, parametro fondamentale per definire il ritiro dovuto all'essiccamento del calcestruzzo:

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1.55 * \left(1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right) & 40\% \leq RH < 99\% \\ 0.25 & RH > 99\% \end{cases}$$

Infine la variazione del ritiro nel tempo è fornita dal coefficiente $\beta_S(t-t_s)$:

$$\beta_S(t - t_s) = \left(\frac{(t - t_s)}{350 \cdot \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + (t - t_s)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.2.4. Caratteristiche meccaniche

Le caratteristiche meccaniche del materiale vanno incontro nel tempo ad una variazione, in particolare crescente. Partendo dai valori medi e/o caratteristici indicati in normativa, tramite l'utilizzo di alcuni coefficienti che sono funzione dell'età del materiale, se ne ottiene la loro variazione. Le analisi saranno svolte considerando le caratteristiche meccaniche costanti nel tempo quando il tirante è soggetto alla forza esterna di trazione o a deformazioni impresse costanti. Utilizzeremo per tutti i casi studiati il calcestruzzo C20, calcolandone i parametri mediante le formulazioni proposte dal Model Code 1990 al capitolo 2:

- Resistenza media a compressione:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8MPa$$

- Modulo di Young:

$$E_{ci} = E_{co} \cdot \alpha_E \cdot \left(\frac{f_{cm}}{f_{cmo}}\right)^{1/3}$$

In cui si ha:

- E_{ci} è il modulo di elasticità del calcestruzzo a 28 giorno [MPa]
- $E_{co} = 2.15 \times 10^4 MPa$
- $f_{cmo} = 10 MPa$

α_E è un fattore di scala che dipende dalla tipologia degli aggregati

Tipo di aggregato	α_E
Basalto o calcari densi	1.2
Quarzite	1.0
Calcari	0.9
Arenaria	0.7

- Resistenza media a trazione:

$$f_{ctm} = f_{ctko,m} \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

In cui $f_{ck0}=10$ MPa ed $f_{ctko,m}= 1.4$ MPa.

Il modulo di Poisson è stato considerato pari a 0.2, mentre il coefficiente di dilatazione termica $10^{-5} K^{-1}$.

Quando passeremo invece all'applicazione del ritiro effettivo che subisce il calcestruzzo, allora necessariamente entreranno in gioco le grandezze variabili:

- Resistenza media a compressione: funzione del tipo di cemento, della temperatura e del tipo di indurimento. Gli effetti temporali sono considerati per mezzo del coefficiente $\beta_{cc}(t)$:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm28}$$

In cui f_{cm28} rappresenta la resistenza media del calcestruzzo a 28 giorni, mentre $\beta_{cc}(t)$ rappresenta il coefficiente di tempo equivalente, parametro utile a conglobare in un'unica grandezza i fenomeni legati alla variazione della temperatura e gli effetti del tempo:

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left(s \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t_{eq}}} \right) \right)$$

Il coefficiente s è riportato nella tabella seguente al variare del tipo di cemento:

Tipi di cemento			
	RS	N&R	SL
s	0.20	0.25	0.38

Il tempo equivalente si valuta invece mediante l'equazione:

$$t_{eq} = \int_0^t \exp \left(c_A \left(\frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T(\tau)} \right) \right) d\tau$$

In questa espressione $T(\tau)$ è la temperatura del calcestruzzo al tempo di τ giorni, T_{ref} è la temperatura di riferimento pari a 293 K, c_a è la costante di Arrhenius pari a 4000 K.

- Modulo elastico: in funzione dell'età del calcestruzzo esso vale:

$$E_c(t) = \sqrt{\beta_{cc}(t)} E_{c28}$$

Il coefficiente $\beta_{cc}(t)$ segue a formulazione fornita in precedenza, mentre E_{c28} rappresenta il modulo di elasticità del calcestruzzo a 28 giorni.

- Resistenza a trazione: espressa in funzione dell'età del calcestruzzo:

$$f_{tk}(t) = f_{tko,m} \left(\frac{f_{ck}(t)}{f_{cko}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

In cui si ha: $f_{ck}(t) = f_{cm}(t) - 8$ MPa, $f_{ck0} = 10$ MPa ed $f_{ctko,m} = 1.4$ MPa.

4. MODELLO AGLI ELEMENTI FINITI

Lo studio del processo fessurativo dovuto alle deformazioni imposte è stato effettuato utilizzando il metodo degli elementi finiti (FEM). Tramite l'utilizzo del software DIANA 10.2, si è costruito un modello geometrico che fosse in grado di rappresentare al meglio il processo in questione. Inoltre con l'ausilio di un script compilato mediante il linguaggio di programmazione Python si sono costruiti i file necessari per eseguire le analisi strutturali non lineari. I parametri fisici e meccanici dati in input al software sono stati valutati mediante le metodologie presentate nei capitoli precedenti.

4.1. *Dati di input*

Con il software DIANA 10.2 si può interagire in varie modalità. Se da un lato la moderna interfaccia grafica consente una lavorabilità più rapida ed intuitiva, dall'altro un approccio, che prevede l'utilizzo di file appositi (estensioni “.dat”, “.fgc”, “.tb”) per la definizione dei comandi necessari alla costruzione del modello, consente di avere un maggior controllo sullo stesso. Nel presente lavoro di tesi si è scelto di lavorare utilizzando quest'ultima procedura, in previsione del fatto che la gestione dei file, con le estensioni sopra citate, è più semplice a livello computazionale. Infatti mediante il linguaggio di programmazione Python è stato messo a punto uno script che consente di analizzare i file che contengono i risultati (.tb) e, sulla base di questi, costruire i file necessari per svolgere le analisi delle fasi successive (.dcf). Il tutto è stato reso possibile grazie all'interoperabilità tra il linguaggio di programmazione Python e il software DIANA FEA 10.2. Si scende ora più nel dettaglio della tipologia di file cui si è fatto cenno. In particolare quelli utilizzati sono tre:

- *file.dat*, necessario per la definizione della geometria del modello, oltre che dei parametri meccanici ed anche per la definizione della mesh assieme alla tipologia di elementi finiti da utilizzare per costruirla.
- *file.dcf*, necessario per definire le tipologie di analisi da svolgere, e i parametri con la quale la stessa viene eseguite: dimensione e numero dei “time step” (pari ad uno per ogni fase), massimo numero di iterazioni (10), tolleranza nella risoluzione del sistema di equazioni (0.02)

- *file.tb*, sono i file di output del software in forma tabellare. All'interno degli stessi si può inserire qualunque tipologia di risultati specificandolo nel relativo blocco di istruzioni del *file.dcf*.

Dunque i dati in input per lo studio del modello sono costituiti dai primi due file appena descritti, in quanto il *file.tb* rappresenta l'output delle analisi che vengono eseguite dal software agli elementi finiti.

4.1.1. Geometria

Il modello geometrico del tirante in calcestruzzo armato è molto semplice. La sezione di calcestruzzo è circolare, così come la barra di armatura che contiene. Nella Figura 4.1 sono riportate le dimensioni longitudinali e la sezione trasversale. Mantenendo costante il diametro della sezione in calcestruzzo, sono state analizzate differenti configurazioni di armatura. L'obiettivo è mostrare come si possano raggiungere differenti livelli tensionali nei due materiali, ovviamente tali da influenzare la quantità delle fessure che si possono sviluppare nel tirante. Nella tabella sottostante si riportano le diverse configurazioni studiate:

ϕ_c [mm]	A_c [mm ²]	n° barre [-]	ϕ_s [mm]	A_s [mm ²]	ϕ_{equ} [mm]
200	31416	2	10	157	14.14
200	31416	4	10	314	20.00
200	31416	1	14	154	14.00
200	31416	2	14	308	19.80
200	31416	4	14	616	28.00
200	31416	1	20	314	20.00
200	31416	2	20	628	28.28

Risulta chiaro osservare come, in presenza di un numero di barre maggiore ad uno, nel modello FEM si è utilizzato un diametro equivalente (riportato nell'ultima colonna della tabella), tale quindi da avere la stessa area delle barre presenti nel modello geometrico.

In definitiva questo modello geometrico sarà suddiviso in elementi finiti tali da poterne descrivere il comportamento durante il processo fessurativo.

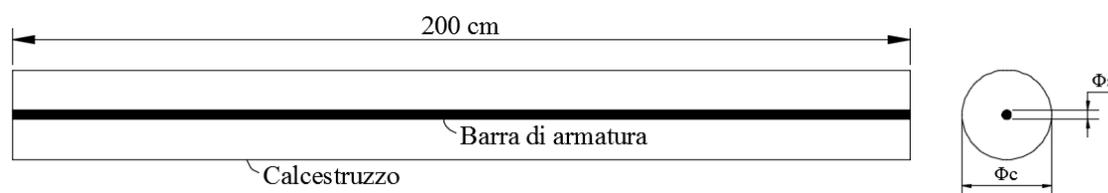


Figura 4.1 Geometria del modello

4.1.2. Condizioni al contorno e casi di carico

Il modello è stato vincolato all'estremità sinistra nei confronti delle traslazioni orizzontali e verticali. In particolare in questa sezione, sia il calcestruzzo che l'acciaio sono stati vincolati nei confronti dei suddetti spostamenti. Lungo lo sviluppo del tirante si sono posti dei soli vincoli verticali. Tuttavia all'estremità di destra vi è un elemento di calcestruzzo in meno (SP2TR, vedi §4.1.3) rispetto a quelli della barra di armatura. Questa assunzione è in accordo con il considerare ivi la sezione già fessurata, per cui le forze che saranno applicate in questo punto saranno portate, ivi, solamente dal rinforzo, prima di diffondersi nel calcestruzzo grazie all'aderenza.

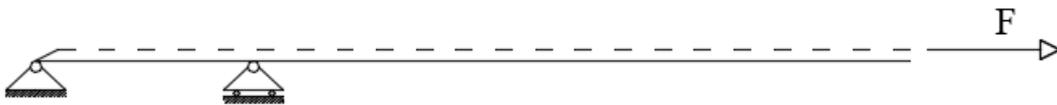


Figura 4.2 Condizione vincolare Forza esterna

Per quanto riguarda le condizioni di carico, durante le analisi si è fatto riferimento a due differenti azioni. Il primo caso consiste nell'applicazione di una forza, all'estremità vincolata solo lato acciaio, utile alla validazione del modello per mezzo dei confronti con le formulazioni fornite dalle normative (MC90, MC2010, EC2). Il secondo caso di carico è rappresentato invece dall'applicazione di una deformazione impressa, rappresentata dal ritiro. Questo, in assenza di armatura, comporterebbe un semplice accorciamento dell'elemento in calcestruzzo. Tuttavia la presenza della barra comporta la nascita di uno stato tensionale di trazione, che può raggiungere il valore massimo supportato dal calcestruzzo. In questa situazione si è scelto di prendere in considerazione una diversa condizione vincolare. Se da un'estremità entrambi i materiali sono vincolati nei confronti delle traslazioni verticali ed orizzontali, dall'altra solo la barra di armatura rispetta queste condizioni. A differenza del caso precedente, compare ora un'iperstaticità assiale dettata dal doppio vincolo alla barra di armatura nelle due sezioni di estremità.

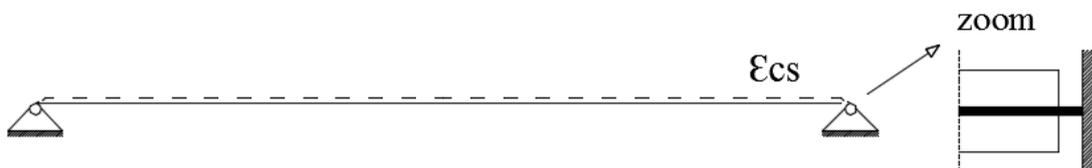


Figura 4.3 Condizioni vincolari con il ritiro

4.1.3. Modello FEM

Il modello agli elementi finiti del tirante è stato creato suddividendo in 400 elementi il tirante di lunghezza 2 m, per cui la dimensione di ogni elemento è di 5 mm. Mentre i nodi della barra di armatura sono collegati da soli elementi di tipo L2TRU a due nodi, per quanto riguarda i nodi del calcestruzzo si è seguita una procedura diversa. Gli stessi infatti, sono stati sdoppiati al fine di interporvi degli elementi molla SP2TR. Per cui il calcestruzzo è stato modellato con una combinazione di elementi, da un lato quelli L2TRU collegano i nodi posti a 5 mm di distanza, dall'altro quelli SP2TR collegano i nodi coincidenti. Quest'operazione è molto utile in quanto consente di avere per via indiretta il valore dell'ampiezza della fessura.

La tipologia di analisi strutturale che viene eseguita sul modello FEM è necessariamente non lineare, a causa della presenza del legame di aderenza tra i materiali e a causa anche degli effetti reologici del calcestruzzo. Il software agli elementi finiti DIANA 10.2, permette inoltre di definire un'analisi detta "Phased Analysis", ovvero "Analisi per fasi". Essa risulta essere molto utile nel presente lavoro, infatti permette di apportare modifiche al modello FEM da una fase all'altra. In particolare, nel caso in esame, si può decidere di attivare o disattivare parte del modello in una fase, per attivarla o disattivarla in una fase successiva.

L'utilizzo del linguaggio di programmazione Python si è rivelato un utile strumento nella selezione proprio degli elementi da disattivare nelle fasi via via successive. In particolare, partendo dal modello completamente attivo è stata svolta una prima analisi strutturale non lineare e successivamente si sono analizzati i risultati tensionali mediante uno script in Python. Trovando dei valori tensionali abbastanza vicini alla resistenza a trazione del calcestruzzo, si è individuato in maniera del tutto casuale, il nodo dell'elemento da disattivare nelle fasi successive. Noto il nodo dell'elemento che raggiunge la tensione limite, si individua il nome dell'elemento di tipo SP2TR che verrà disattivato nelle ulteriori fasi dell'analisi. Il processo va avanti in maniera ricorsiva fino a quando i livelli tensionali si abbassano a valori tali da non fessurare ulteriormente il calcestruzzo. Durante le analisi strutturali delle fasi in cui un elemento è disattivato, la differenza di spostamento tra i nodi, che nella fase precedente erano collegati dall'elemento rimosso, ci fornisce direttamente il valore dell'ampiezza della fessura.

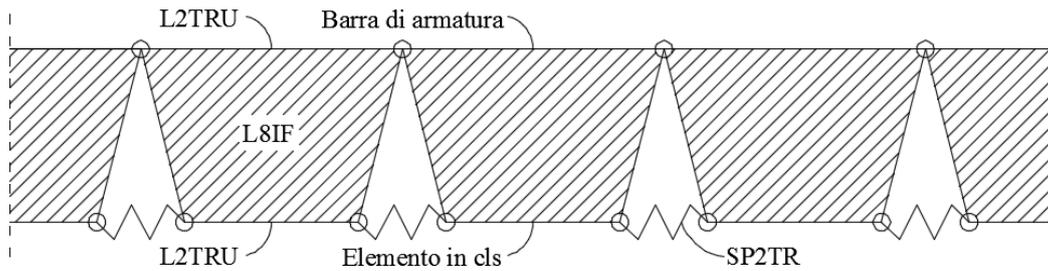


Figura 4.4 Modello FEM

La rigidità delle molle SP2TR deve necessariamente essere considerata molto grande rispetto a quella degli elementi che connette. È necessario operare in questo modo per evitare l'insorgere di spostamenti tra i nodi connessi, in fasi in cui l'elemento non è fessurato in questi punti. Per quanto riguarda i parametri da inserire nella definizione degli elementi di interfaccia, si devono considerare non solo la legge la $\tau - s$, ma anche due parametri di rigidità, DSSX e DSNY. Il primo rappresenta la rigidità tra la forza tagliante in direzione dell'asse dell'elemento e lo spostamento relativo nella medesima direzione. Il secondo rappresenta invece la rigidità tra la forza di trazione normale alla direzione dell'elemento e lo spostamento duale. Questi valori sono rigidità (forze per unità di area) per unità di lunghezza dell'elemento, per cui sono delle forze per unità di volume. In merito al loro valore numerico, il manuale del software suggerisce di calcolarle come segue:

- Bisogna individuare il valore minimo tra i moduli elastici dei materiali connessi dagli elementi di interfaccia e dividendo questo per la lunghezza dell'elemento finito (nel nostro caso, 5 mm), si ottiene la rigidità DSNY. Dividendo a sua volta questo valore per 10, otteniamo DSSX:

$$E = \min(E_c; E_s)$$

$$DSNY = \frac{E}{l_{elm}}$$

$$DSSX = \frac{DSNY}{10}$$

In aggiunta a questi parametri, nella definizione della geometria degli elementi di interfaccia, è necessario inserire anche il perimetro della barra, il quale rappresenta di fatto, la zona dove si sviluppano le tensioni legate al meccanismo di aderenza. Anche in questo caso nel modello FEM si è inserito, non il perimetro della barra con il diametro equivalente, bensì quello della configurazione geometrica relativa, considerando quindi l'effettivo numero di barre presenti.

4.2. *Procedura di risoluzione del sistema non lineare*

La presenza del legame di aderenza e del ritiro fa sì che il modello in questione presenti delle non linearità. Risulta chiaro dunque che le analisi strutturali da svolgere dovranno essere a loro volta non lineari. Tuttavia così come per le analisi lineari, anche in questi casi, è necessario trovare quel vettore di spostamenti al quale corrisponde una condizione di equilibrio tra forze interne ed esterne. La procedura seguita è di tipo incrementale e iterativa. Infatti l'incremento di spostamento tra due istanti temporali successivi Δu è calcolato in maniera iterativa per mezzo incrementi più piccoli δu fino al soddisfacimento delle equazioni di equilibrio (rispettando dunque la tolleranza stabilita nell'analisi). L'incremento di spostamento ad ogni iterazione viene calcolato come segue:

$$\Delta u_{i+1} = \Delta u_i + \delta u_{i+1}$$

Il calcolo dell'incremento iterativo δu viene eseguito per mezzo della matrice di rigidezza \mathbf{K} e del vettore di forza non bilanciato g ($g = f_{ext} - f_{int}$). Quella che viene definita matrice di rigidezza, rappresenta in realtà una forma linearizzata del legame tra vettore forza e vettore spostamento. Inoltre, nella procedura da noi utilizzata, viene valutata ad ogni iterazione, così come g , dunque possiamo scrivere:

$$\delta u_i = K_i^{-1} * g_i$$

Basandosi sulle equazioni appena scritte notiamo che ci sono due differenti procedure che conducono alla soluzione del problema non lineare. Mentre il metodo di Newton-Raphson Regolare prevede il calcolo della matrice di rigidezza ad ogni iterazione, quello di Newton-Raphson Modificato si basa sul calcolo della stessa matrice solo all'inizio di ogni incremento temporale.

4.2.1. *Newton Raphson Regolare*

La matrice di rigidezza \mathbf{K}_i viene dunque calcolata ad ogni iterazione, in Figura 4.5 infatti si nota come la pendenza della tangente alla curva $f-u$, all'interno dello stesso time step, risulti variabile:

$$K_i = \frac{\partial g}{\partial \Delta u}$$

Ne consegue che ogni valore δu_i si basa su quello dell'iterazione precedente che può non essere di equilibrio. Generalmente il metodo converge alla soluzione con poche iterazioni, tuttavia la necessità di passare attraverso il calcolo della matrice di rigidezza può allungare significativamente il tempo computazionale.

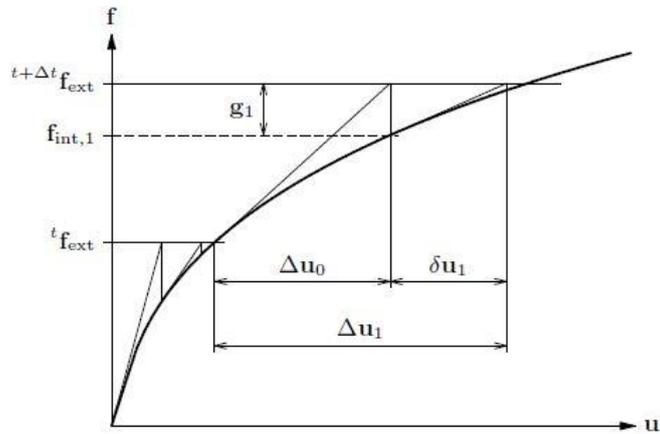


Figura 4.5 Newton-Raphson Regolare

4.2.2. Newton Raphson Modificato

La matrice di rigidezza in questo caso è valutata solo all'inizio dell'incremento temporale, dunque in una condizione che è sicuramente di equilibrio, essendo l'istante finale di uno step precedente che ha rispettato la tolleranza imposta. Il che è tangibile dalla Figura 4.6, ivi si nota che all'interno del medesimo time step la pendenza della tangente rimane costante, per cui il valore presunto di δu_i è sempre basato su uno stato di equilibrio che converge. Questa procedura necessita generalmente di un maggior numero di iterazioni per giungere alla convergenza, ma non vi è lo stesso onere computazionale della metodologia precedente in quanto non è necessario ricalcolare ogni volta la matrice di rigidezza.

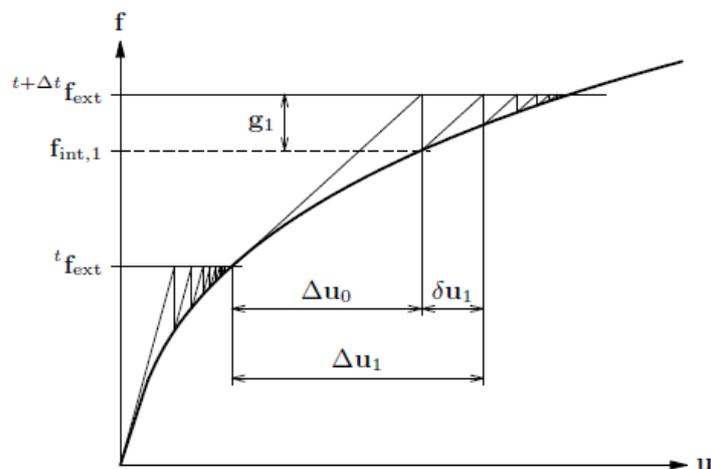


Figura 4.6 Newton-Raphson Modificato

4.3. *Interoperabilità tra DIANA FEA 10.2 e Python*

Una volta visto il modello FEM vediamo come il suo studio è stato agevolato dall'utilizzo del linguaggio di programmazione Python. DIANA può essere gestito mediante degli appositi comandi scritti proprio in tale linguaggio di programmazione. Il che ci permette di definire, all'interno del nostro script, una serie di istruzioni tali da generare dei file con estensione .py (python). Questo file è dato in input al software DIANA tramite la libreria di Python "subprocess", con annessa funzione, "subprocess.run". Questa consente di eseguire in maniera automatica un software e dargli in input un file eseguibile dallo stesso. DIANA quindi essendo in grado di leggere il file con estensione .py eseguirà le istruzioni in esso contenute. In particolare DIANA si occuperà di:

- importare il modello FEM tramite la funzione "importModel('directoryModelFile.dat')";
- di creare l'analisi da eseguire con "addAnalysis('nameAnalysis')";
- di caricare i comandi per eseguire l'analisi appena creata "loadAnalysisCommands('nameAnalysis','directoryFile.dcf')";
- di salvare il progetto in una qualunque directory "saveProjectAs()";
- di eseguire l'analisi sul modello "runSolver('nameAnalysis')".

Le funzioni appena citate sono presenti all'interno del Manuale del software di DIANA, in particolare nell'appendice C del volume "Getting Started". L'automatizzazione del processo quindi permette di lanciare una prima analisi con una sola fase (file.dcf) all'interno della quale tutti gli elementi del modello sono attivi. Una volta ottenuti i risultati (file.tb), questi vengono analizzati e qualora si ritrovano valori tensionali nel calcestruzzo pari alla massima resistenza a trazione si procede con la disattivazione di un elemento in maniera casuale (come già accennato al par. 4.1.3). Il tutto è stato svolto grazie alla libreria "random" di Python, la quale con la funzione "random.randint()" permette di individuare in maniera casuale un numero compreso tra due estremi. Avendo inserito i risultati all'interno di una struttura iterabile, è bastato scegliere con la funzione appena citata un numero che rappresentasse la posizione di un nodo con tensione pari alla massima resistenza a trazione del materiale. Dal file ".tb" si è quindi passati al file ".dat" al fine di trovare il nome dell'elemento da disattivare in modo da rimuoverlo dal file ".dcf" della fase successiva.

In questo modo il processo è totalmente automatizzato in quanto anche i file .dcf vengono opportunamente modificati, mediante lo stesso script in Python, a seconda dei risultati che si

trovano dalle analisi svolte in precedenza. Per cui ogni volta che viene eseguita una nuova analisi vengono analizzati i file dei risultati (.tb) e se necessario si esegue un'ulteriore fase. Il tutto è possibile grazie all'interoperabilità tra il linguaggio di programmazione Python e il software DIANA FEA 10.2.

5. ANALISI NUMERICA DEL MODELLO FEM

Sulla base di quanto esposto nei capitoli precedenti, si presenteranno qui i risultati ottenuti mediante l'esecuzione di analisi non lineari svolte sul modello FEM. Inizialmente si presenteranno i risultati delle analisi svolte considerando il calcestruzzo e la barra di armatura come materiali elastici lineari, mentre per quanto riguarda il legame di aderenza si rispetteranno le formulazioni presentate nel capitolo 3.

Risulta chiaro dunque che le uniche non linearità del modello risiedono, in questa prima fase, solo nel legame $\tau - s$.

5.1. Modello con forza applicata all'estremità

I materiali utilizzati in questa fase preliminare sono:

- Calcestruzzo C20:

Classe calcestruzzo	f_{ck}	f_{cm}	f_{ctm}	E_{cm}	ν
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]
C20	20.00	28.00	2.21	30303	0.2

Le grandezze riportate in tabella sono state calcolate facendo riferimento alle indicazioni presenti all'interno del Model Code 2010, le cui formulazioni sono di seguito indicate:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8MPa$$

$$f_{ctm} = 1.4 MPa \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10 MPa} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$E_{cm} = 21500 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3}$$

- Acciaio B450C:

Acciaio per armatura	f_{yk}	E_s	ν
	[MPa]	[MPa]	[-]
B450C	450.00	200000	0.3

Per il calcolo della forza da applicare alla barra in modo da indurre nel calcestruzzo la tensione pari alla sua resistenza a trazione, è necessario riferirsi alle caratteristiche geometriche omogeneizzate. Definendo quindi il coefficiente di omogeneizzazione αE come il

rapporto tra il modulo elastico dell'acciaio e quello del calcestruzzo, l'area omogeneizzata può essere espressa come:

$$A_0 = A_c + \alpha_E * A_s$$

In cui A_c è l'area della sezione in calcestruzzo, mentre A_s rappresenta l'area delle barre presenti. La forza che conduce alla fessurazione sarà quindi pari a:

$$F = f_{ctm} * A_0$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori ottenuti per le differenti configurazioni geometriche del modello, nel quale si ricorda, a variare è solo il quantitativo di armatura presente:

ϕ_c	A_c	n° barre	ϕ_s	A_s	α_E	A_0	F
[mm]	[mm ²]	[-]	[mm]	[mm ²]	[-]	[mm ²]	[N]
200	31416	2	10	157	6.6	32452.64	7.17E+04
200	31416	4	10	314	6.6	33489.35	7.40E+04
200	31416	1	14	154	6.6	32431.91	7.17E+04
200	31416	2	14	308	6.6	33447.88	7.39E+04
200	31416	4	14	616	6.6	35479.84	7.84E+04
200	31416	1	20	314	6.6	33489.35	7.40E+04
200	31416	2	20	628	6.6	35562.78	7.86E+04

Bisogna inoltre considerare anche la presenza del legame di aderenza, il quale per i materiali in questione risulta avere il seguente andamento:

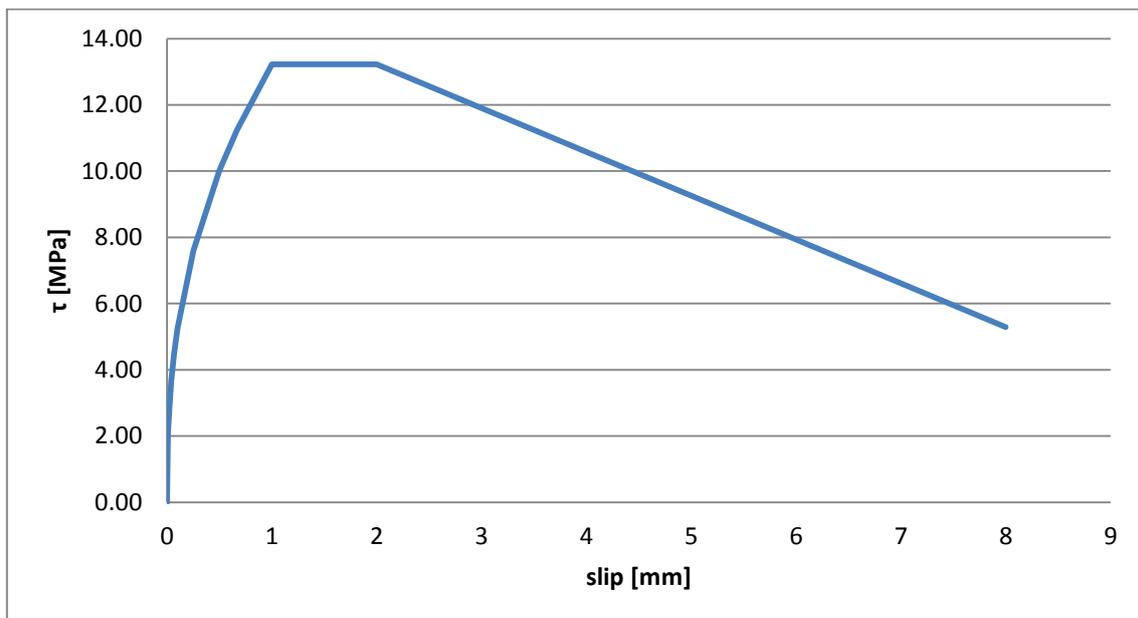


Figura 5.1 Legame di aderenza C20

I parametri utilizzati per la definizione della legge $\tau - s$ sono riportati nella tabella seguente e sono stati valutati secondo le indicazioni fornite al capitolo 3.1.

s_1	s_2	s_3	τ_f	α	τ_{max}
[mm]	[mm]	[mm]	[MPa]	[-]	[MPa]
1	2	8	5.29	0.4	13.23

Inoltre tra i parametri inserire in input durante la definizione del modello FEM vi è anche il perimetro delle barre che sono a contatto con il calcestruzzo. Questo di fatto rappresenta l'area unitaria attraverso il quale i due materiali collaborano trasferendosi le azioni tangenziali. Per cui in base alle diverse configurazioni di armatura presente, si è calcolato questa grandezza indicandola con il termine THICK:

n° barre	ϕ_s	A_s	THICK
[-]	[mm]	[mm ²]	[mm]
2	10	157	62.83
4	10	314	125.66
1	14	154	43.98
2	14	308	87.96
4	14	616	175.93
1	20	314	62.83
2	20	628	125.66

Per ogni configurazione di armatura si sono svolte 30 diverse analisi non lineari, al fine di indagare una correlazione tra la posizione della prima fessura, rappresentata dal punto di applicazione della forza, e la posizione di quelle che compaiono nelle fasi successive. Di seguito si riportano i risultati di un'analisi per ogni diversa configurazione di armatura, al fine di mettere in evidenza come i livelli tensionali nella barra e gli scorrimenti tra i due materiali siano diversi.

Si riportano inoltre alcune tabelle che contengono l'apertura delle fessure per le 30 analisi svolte per ogni configurazione geometrica del modello. In particolare ogni tabella contiene oltre che l'apertura delle fessure, anche la distanza tra la posizione della fessura i -esima e la prima, ovvero quella in cui è applicata la forza. Essendo il modello già fessurato nella sezione in cui si applica la forza, lo scorrimento avviene solamente in una direzione, per cui l'apertura della fessura i -esima è circa la metà rispetto alle fessure che si aprono ad una distanza maggiore dai vincoli. Questa stessa evidenza è inoltre ben visibile anche quando le fessure nascono nella sezione totalmente vincolata. Per ogni configurazione inoltre, sono calcolati i valori medi dell'ampiezza delle fessure. Questi saranno utili ai fini del confronto con le normative.

Nella Figura 5.2 è rappresentato per via grafica il metodo utilizzato per l'individuazione delle distanze riportate nelle tabelle:

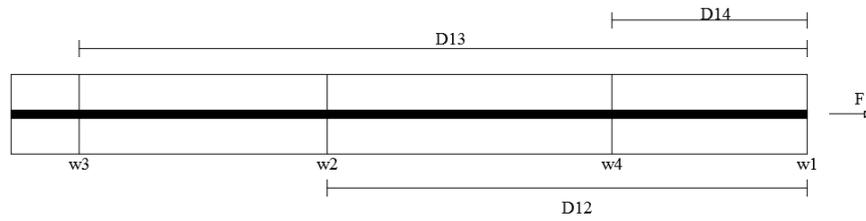
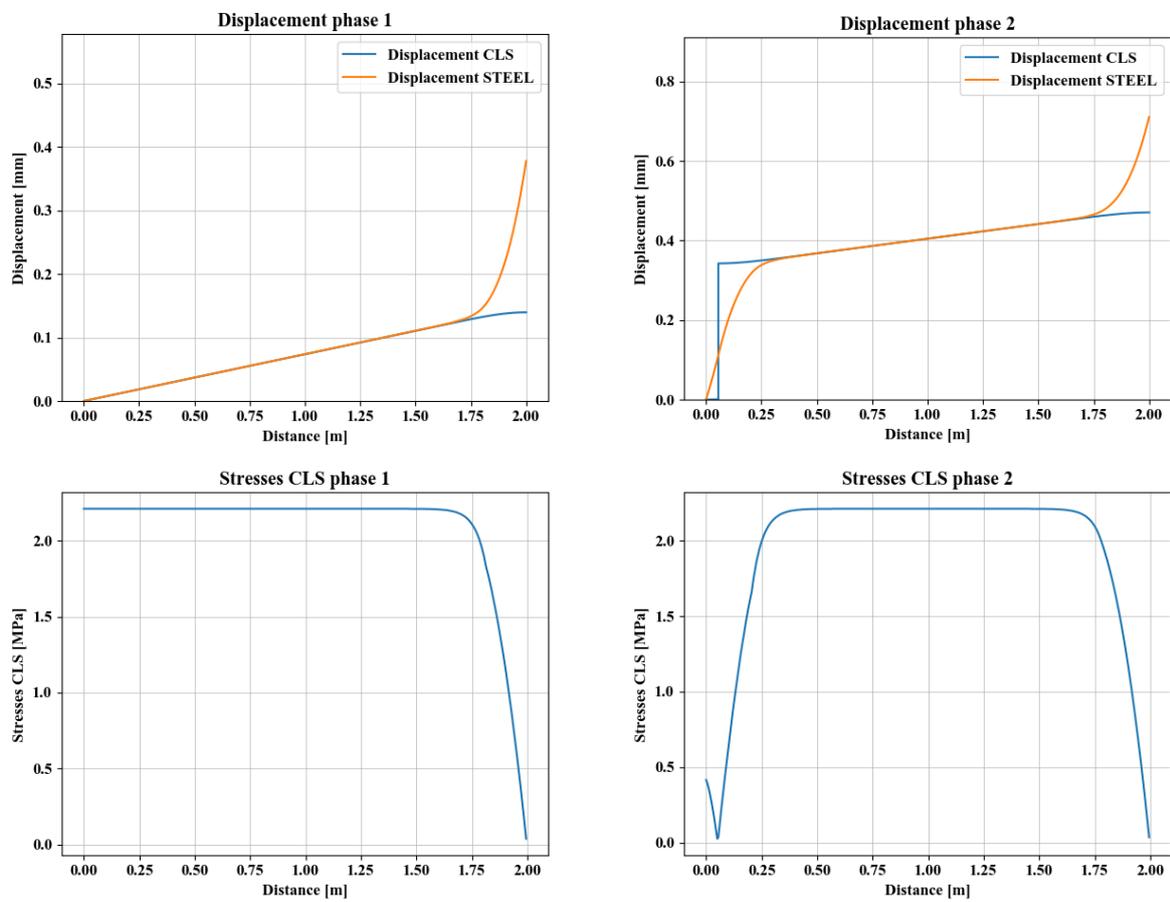


Figura 5.2 Distanze tra le fessure

5.1.1. Configurazione 2 barre $\phi 10$



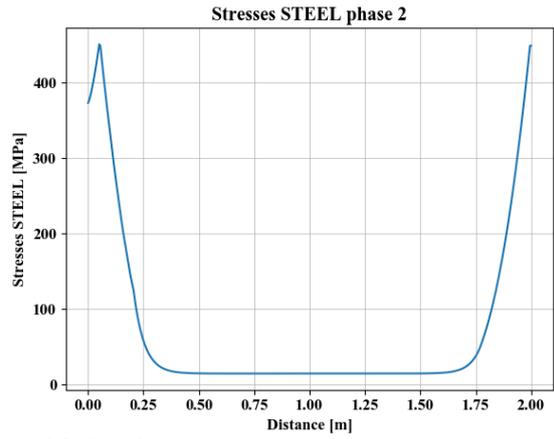
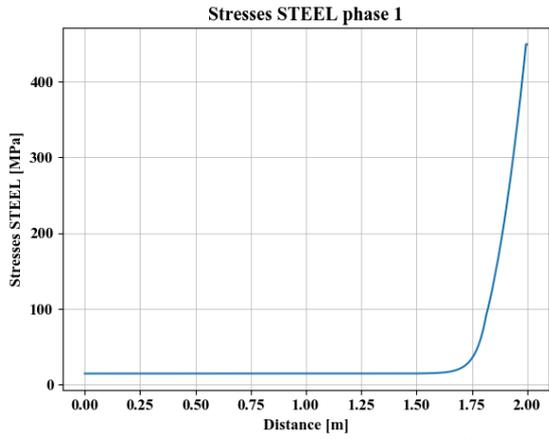
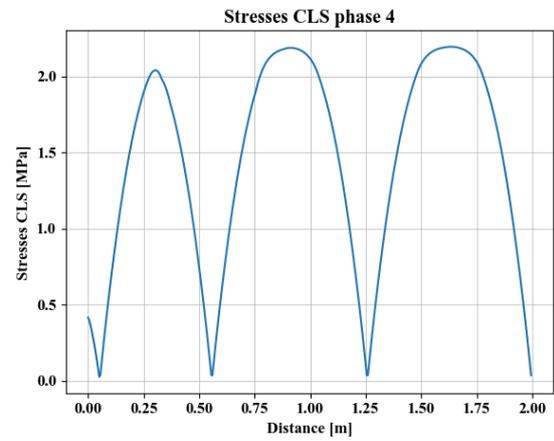
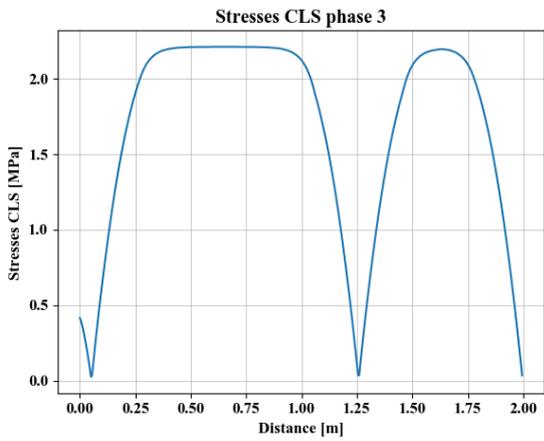
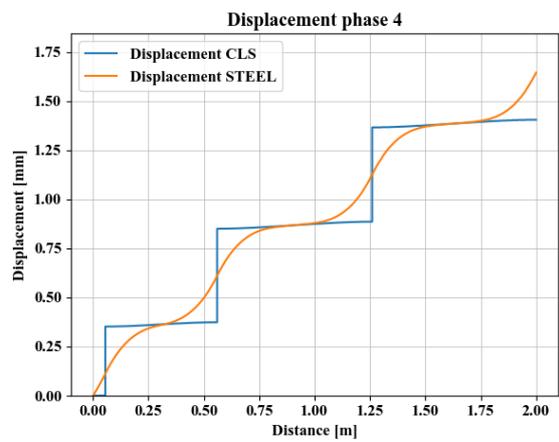
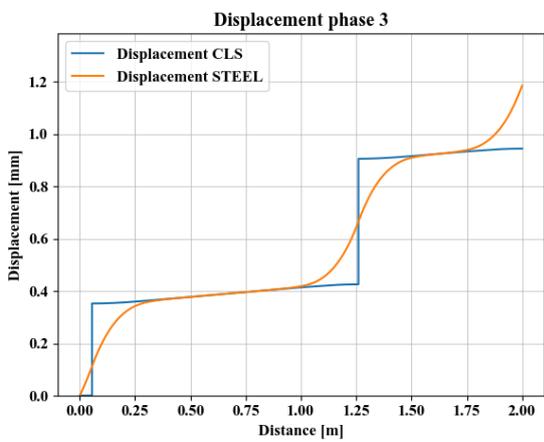


Figure 5-1 Diagrammi fasi 1 e 2



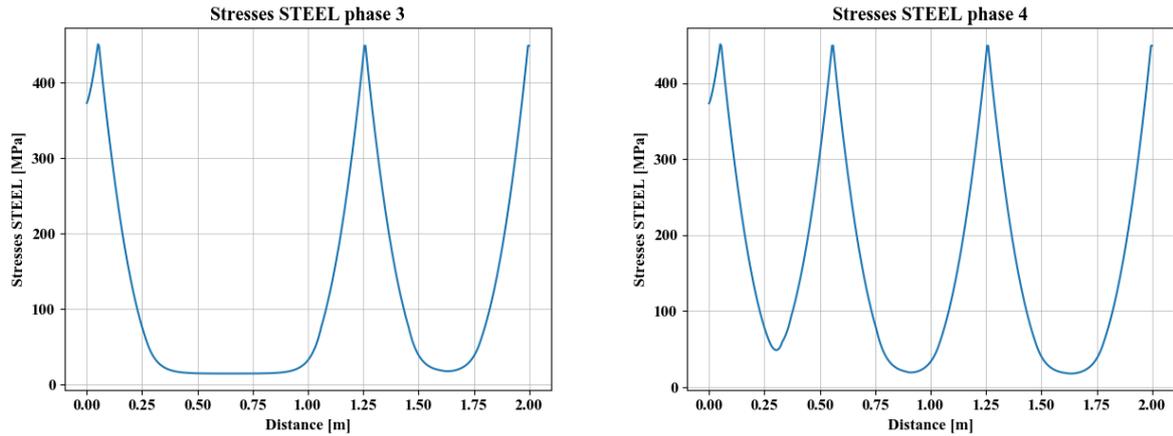


Figure 5-2 Diagrammi fasi 3 e 4

n° analisi	Apertura fessure [mm]				Distanza rispetto alla prima fessura [m]		
	w1	w2	w3	w4	D12	D13	D14
1	0.240	0.342	0.479	0.477	1.945	0.74	1.44
2	0.240	0.474	0.473	0.418	0.505	0.995	1.895
3	0.240	0.480	0.480		1.54	0.755	
4	0.240	0.472	0.476	0.270	0.865	1.465	1.985
5	0.240	0.480	0.477	0.389	1.23	0.525	1.915
6	0.240	0.476	0.467	0.473	0.73	1.715	1.25
7	0.240	0.480	0.478	0.389	1.375	0.58	1.915
8	0.240	0.479	0.471	0.457	1.32	0.855	1.82
9	0.240	0.480	0.479	0.476	1.69	0.65	1.17
10	0.240	0.472	0.480	0.472	0.47	1.705	1.165
11	0.240	0.477	0.475	0.479	1.77	1.245	0.63
12	0.240	0.479	0.475	0.477	1.095	1.67	0.52
13	0.240	0.479	0.473	0.355	1.465	0.78	1.94
14	0.240	0.476	0.476	0.282	0.71	1.3	1.98
15	0.240	0.450	0.480	0.476	1.835	0.665	1.34
16	0.240	0.473	0.476	0.470	0.485	1.265	1.79
17	0.240	0.479	0.476	0.426	1.065	0.505	1.88
18	0.240	0.415	0.479	0.478	1.89	0.755	1.29
19	0.240	0.475	0.475	0.438	0.785	1.345	1.87
20	0.240	0.480	0.478	0.470	1.69	0.535	1.075
21	0.240	0.480	0.447	0.473	0.995	1.86	0.5
22	0.240	0.473	0.474	0.399	0.495	1.38	1.91
23	0.240	0.475	0.480	0.474	0.55	1.555	1.06
24	0.240	0.479	0.471	0.244	1.235	0.675	1.995
25	0.240	0.479	0.474	0.382	1.045	0.47	1.92
26	0.240	0.477	0.472	0.479	1.77	1.3	0.66
27	0.240	0.480	0.475	0.474	1.575	1	0.485
28	0.240	0.333	0.470	0.479	1.95	1.505	0.62
29	0.240	0.441	0.479	0.474	1.855	0.74	1.385
30	0.240	0.479	0.479	0.474	1.735	0.73	1.215

5.1.2. Configurazione 4 barre $\phi 10$

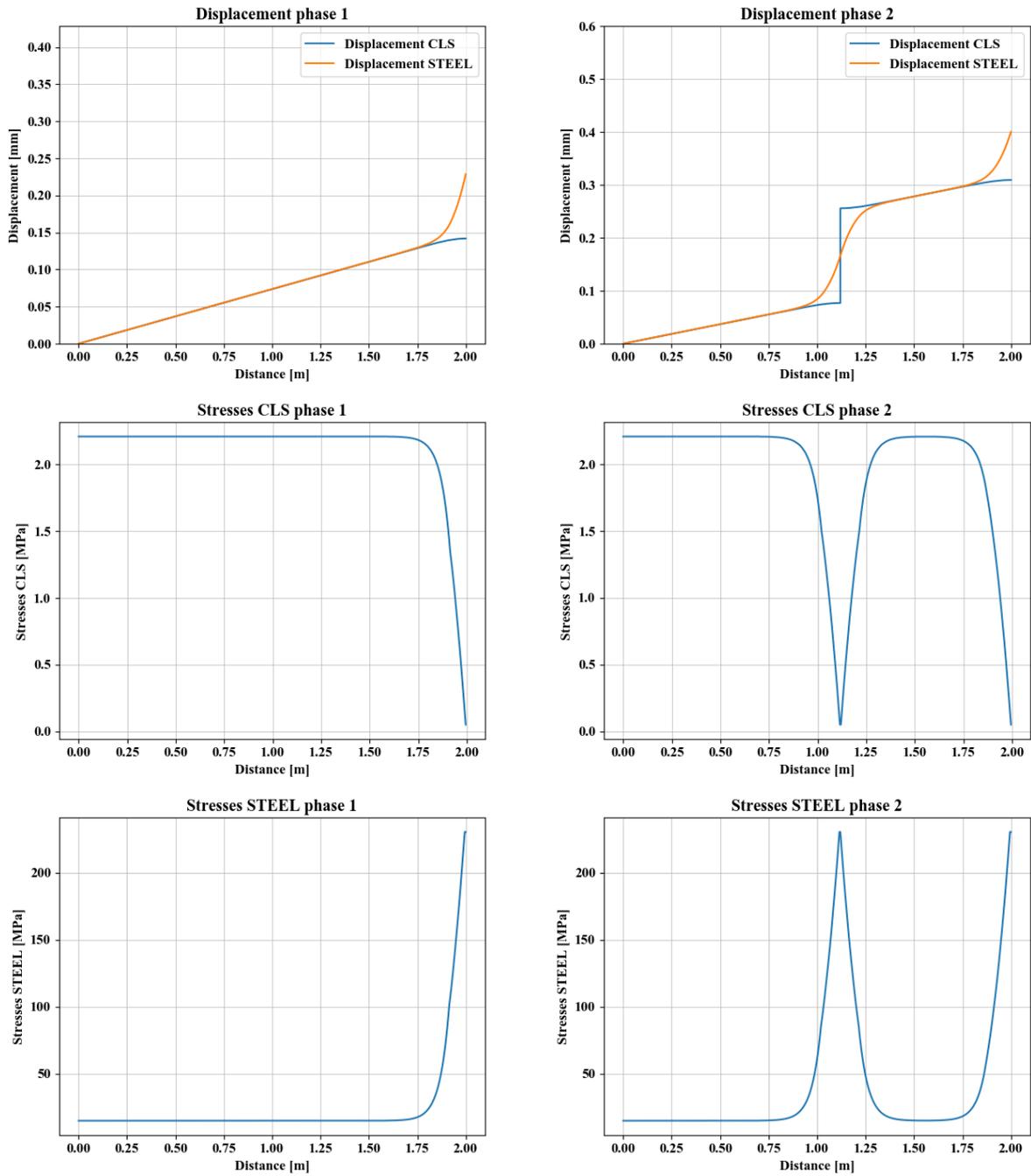


Figure 5-3 Diagrammi fasi 1 e 2

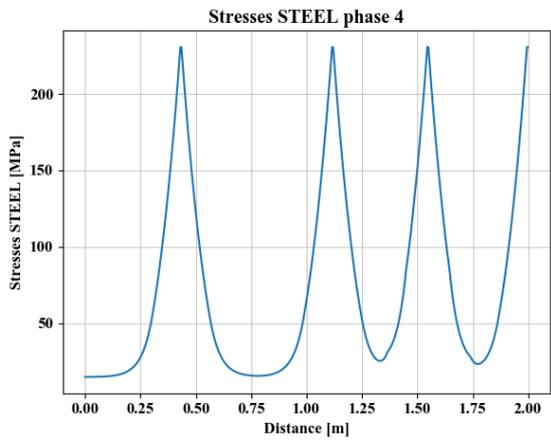
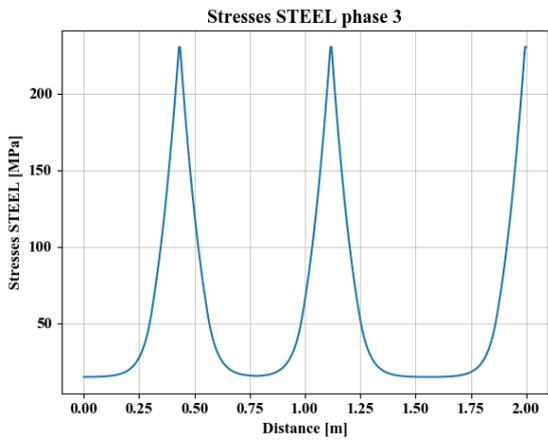
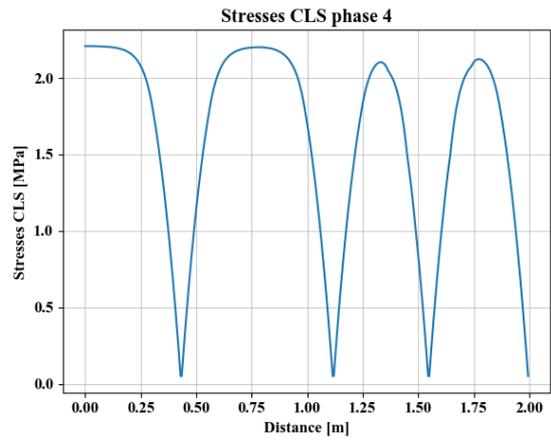
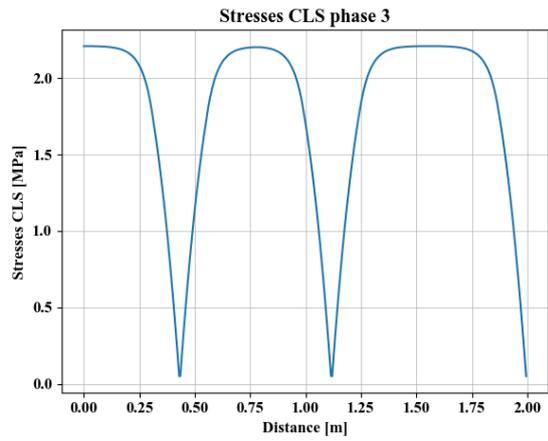
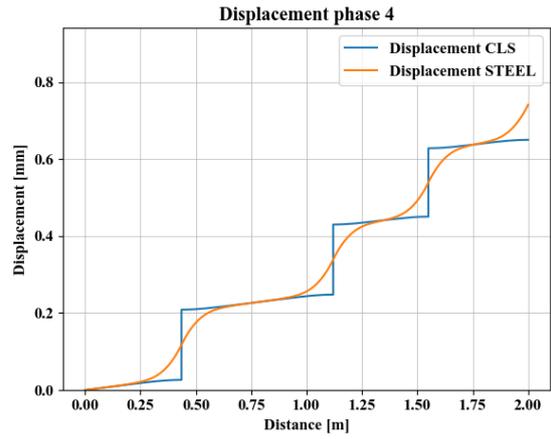
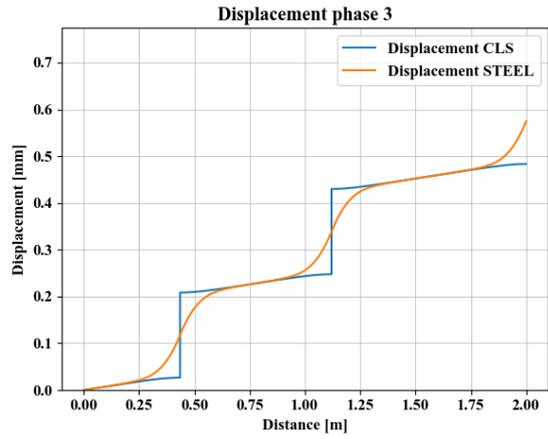


Figure 5-4 Diagrammi fasi 3 e 4

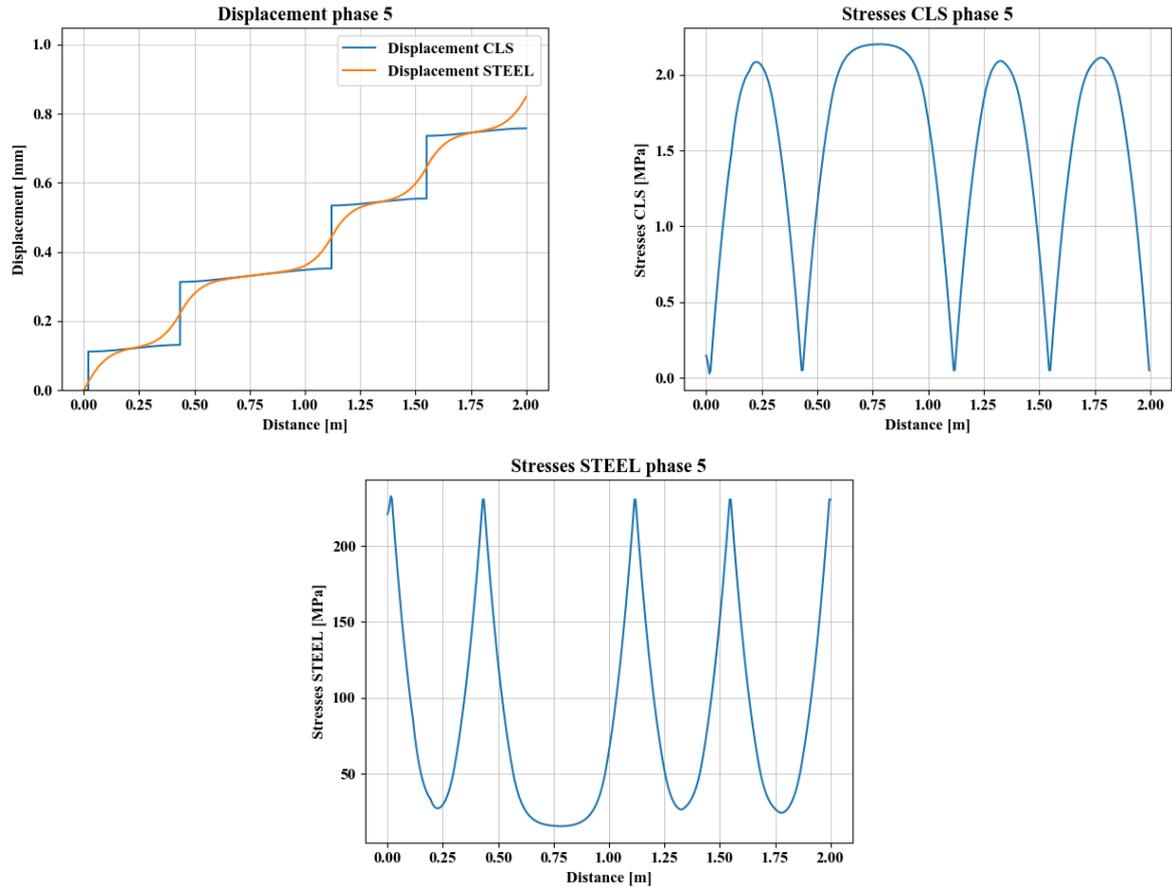
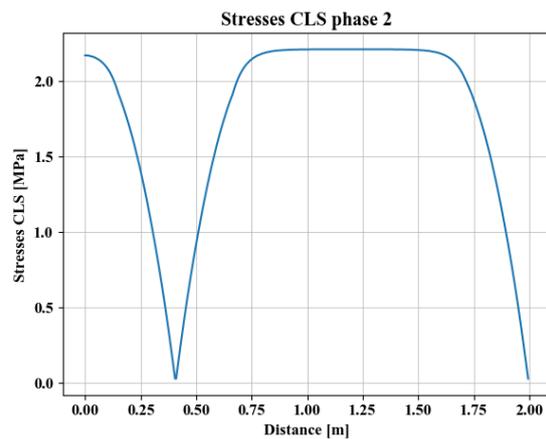
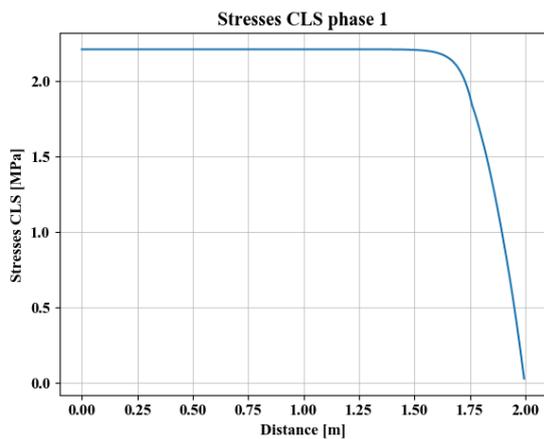
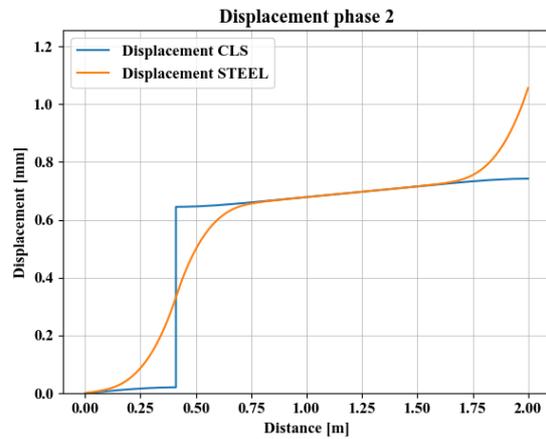
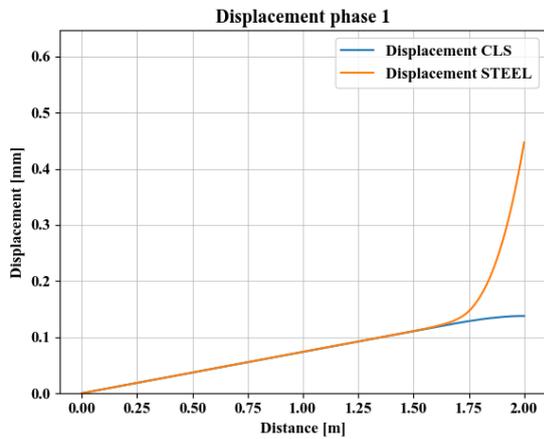


Figure 5-5 Diagrammi fase 5

n° analisi	Apertura fessure [mm]					Distanza rispetto alla prima fessura [m]			
	w1	w2	w3	w4	w5	D12	D13	D14	D15
1	0.091	0.179	0.182	0.178	0.111	0.88	1.565	0.45	1.98
2	0.091	0.180	0.182	0.150		0.82	1.445	1.935	
3	0.091	0.179	0.166	0.178	0.178	0.95	1.905	0.4	1.39
4	0.091	0.151	0.182	0.178	0.178	1.935	1.24	0.43	0.835
5	0.091	0.179	0.182	0.095		1.305	0.7	1.995	
6	0.091	0.181	0.180	0.180		0.41	1.645	1	
7	0.091	0.179	0.182	0.123	0.178	1.14	0.71	1.97	1.55
8	0.091	0.179	0.182	0.155		1.355	0.805	1.93	
9	0.091	0.136	0.182	0.179		1.955	1.25	0.56	
10	0.091	0.179	0.182	0.180		1.83	1.23	0.805	
11	0.091	0.182	0.181	0.182		0.68	1.095	1.665	
12	0.091	0.182	0.181	0.182		0.495	0.95	1.635	
13	0.091	0.182	0.180	0.145	0.178	0.45	1.38	1.945	0.865
14	0.091	0.179	0.182	0.181		1.25	0.77	1.83	
15	0.091	0.182	0.181	0.180		0.44	1.26	1.845	
16	0.091	0.182	0.182	0.177		0.765	1.405	1.825	
17	0.091	0.182	0.180	0.179	0.178	0.445	1.805	0.98	1.41

18	0.091	0.140	0.180	0.178	0.181	1.95	0.97	0.4	1.39
19	0.091	0.182	0.182	0.179		0.53	1.165	1.735	
20	0.091	0.168	0.178	0.180	0.181	1.9	0.41	1.51	0.975
21	0.091	0.182	0.180	0.182		0.485	1.725	1.26	
22	0.091	0.179	0.181	0.180	0.124	1.515	1.105	0.545	1.965
23	0.091	0.179	0.181	0.180		1.36	1.775	0.675	
24	0.091	0.182	0.181	0.180		0.765	1.63	1.24	
25	0.091	0.179	0.181	0.182	0.173	1.02	0.595	1.46	1.87
26	0.091	0.181	0.170	0.179	0.178	0.415	1.89	1.07	1.495
27	0.091	0.182	0.180	0.179		0.53	1.7	1.025	
28	0.091	0.179	0.148	0.180	0.180	1.01	1.94	0.61	1.48
29	0.091	0.180	0.182	0.179		1.615	0.99	0.475	
30	0.091	0.180	0.182	0.178		1.71	1.175	0.395	

5.1.3. Configurazione 1 barre $\phi 14$



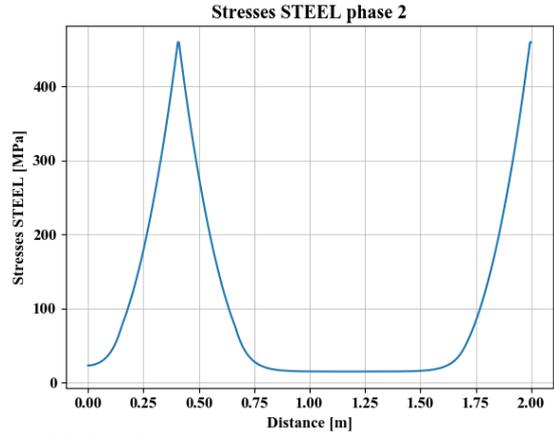
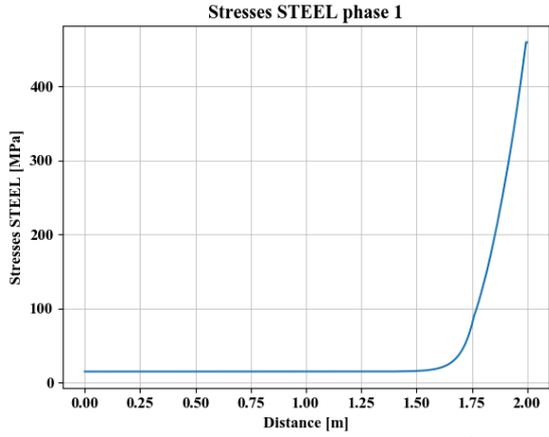


Figure 5-6 Diagrammi fasi 1 e 2

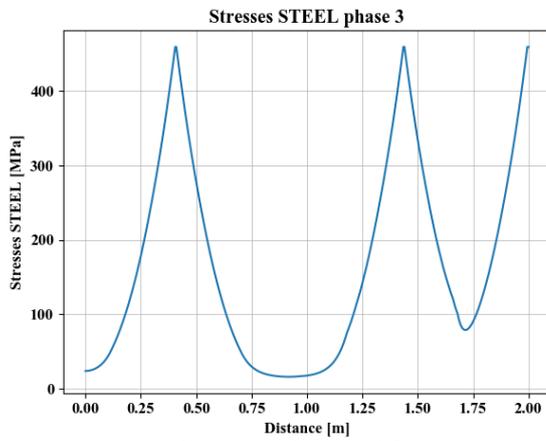
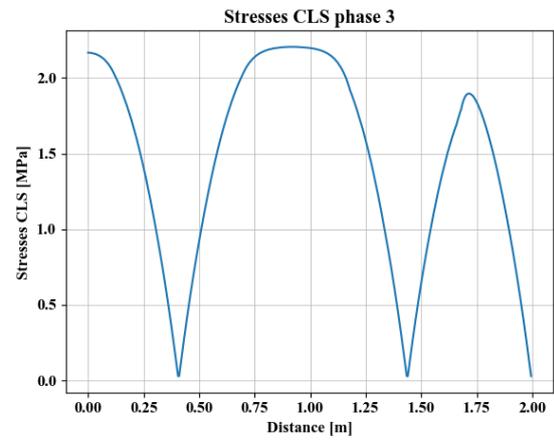
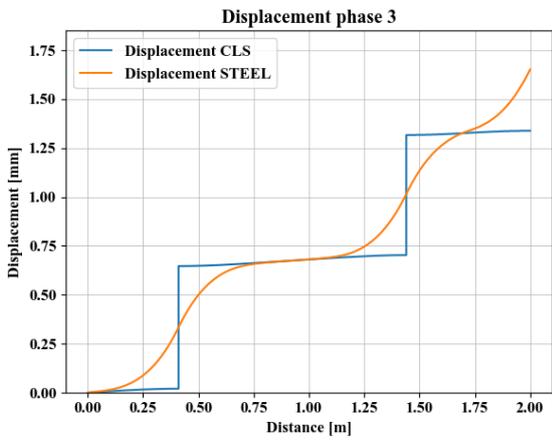


Figure 5-7 Diagrammi fase 3

Apertura fessure [mm]					Distanza rispetto alla prima fessura [m]		
n° analisi	w1	w2	w3	w4	D12	D13	D14
1	0.314	0.625	0.614		1.59	0.56	
2	0.314	0.606	0.624		1.78	0.81	
3	0.314	0.624	0.613		1.625	0.895	
4	0.313	0.609	0.612		1.08	1.695	
5	0.313	0.623	0.608	0.607	1.68	0.52	1.045
6	0.313	0.623	0.621		1.685	0.645	
7	0.313	0.622	0.622		1.7	0.675	
8	0.314	0.558	0.613		1.855	1	
9	0.314	0.625	0.516	0.611	1.285	1.885	0.755
10	0.314	0.625	0.566	0.613	1.275	1.83	0.71
11	0.314	0.531	0.608	0.607	1.88	0.525	1.13
12	0.314	0.613	0.427		1.04	1.945	
13	0.313	0.617	0.572	0.607	0.68	1.83	1.225
14	0.314	0.625	0.607	0.506	1.345	0.78	1.89
15	0.314	0.625	0.614	0.589	1.245	0.58	1.79
16	0.314	0.625	0.607		1.485	0.945	
17	0.314	0.625	0.604	0.607	1.135	0.53	1.735
18	0.314	0.625	0.386	0.611	1.2	1.965	0.62
19	0.313	0.618	0.575		0.87	1.83	
20	0.313	0.615	0.601	0.607	0.635	1.77	1.21
21	0.314	0.613	0.615		0.605	1.655	
22	0.313	0.624	0.626		1.65	0.85	
23	0.314	0.625	0.602	0.455	1.27	0.73	1.93
24	0.314	0.618	0.616		0.9	1.69	
25	0.314	0.625	0.622		1.515	0.675	
26	0.314	0.612	0.618	0.405	0.59	1.415	1.95
27	0.313	0.625	0.553	0.606	1.165	1.855	0.535
28	0.314	0.611	0.616		1.765	1.025	
29	0.313	0.617	0.487		0.98	1.91	
30	0.314	0.625	0.623		1.505	0.685	

5.1.4. Configurazione 2 barre $\phi 14$

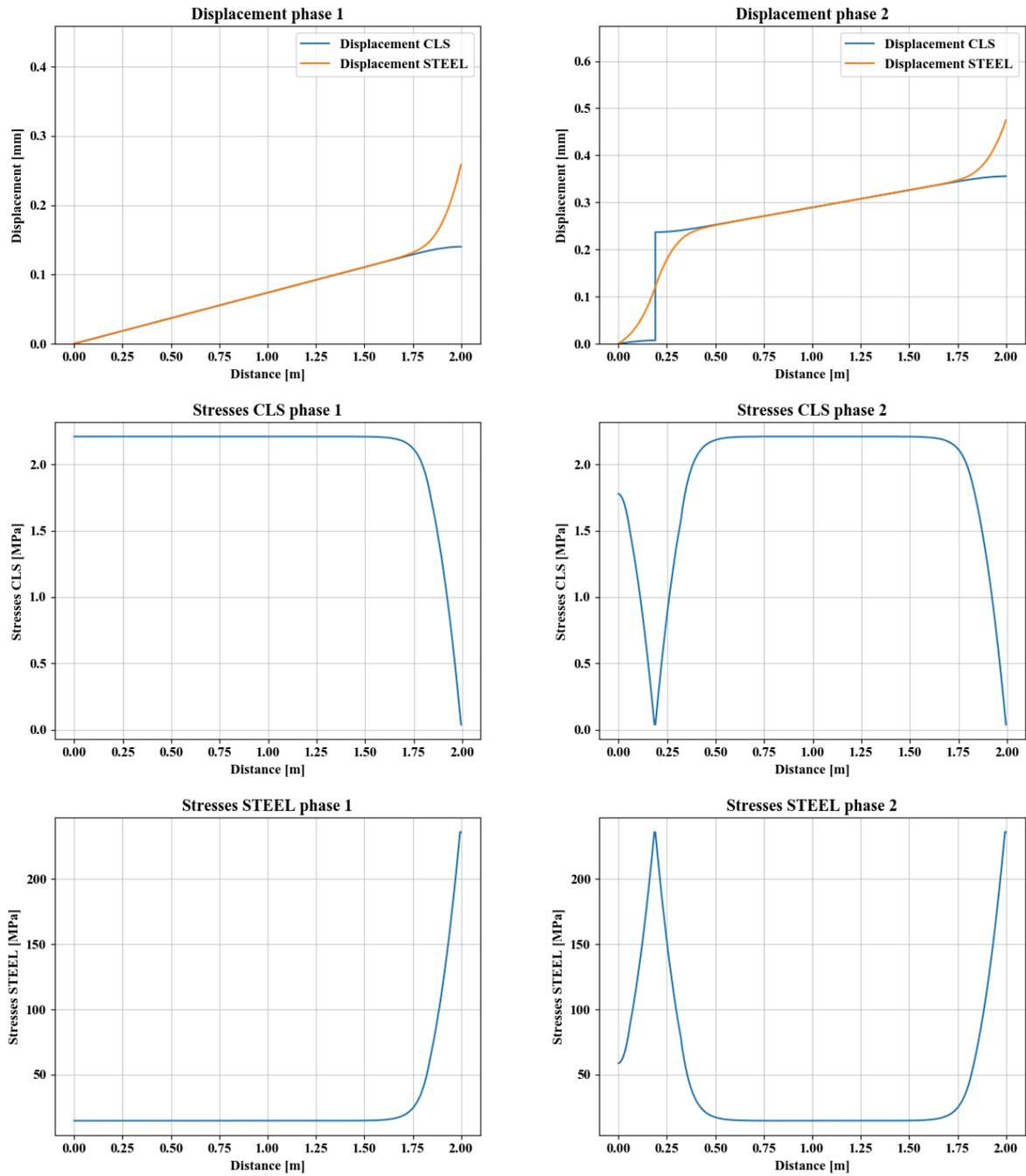


Figure 5-8 Diagrammi fasi 1 e 2

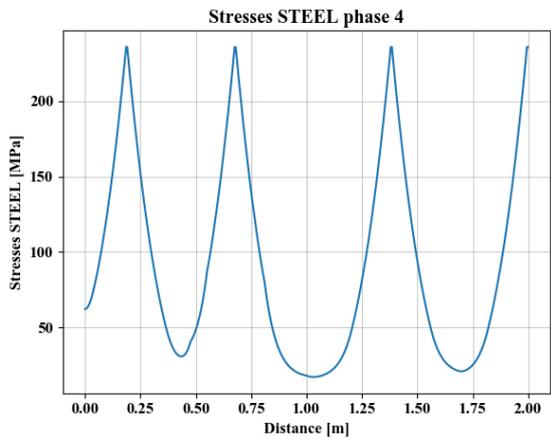
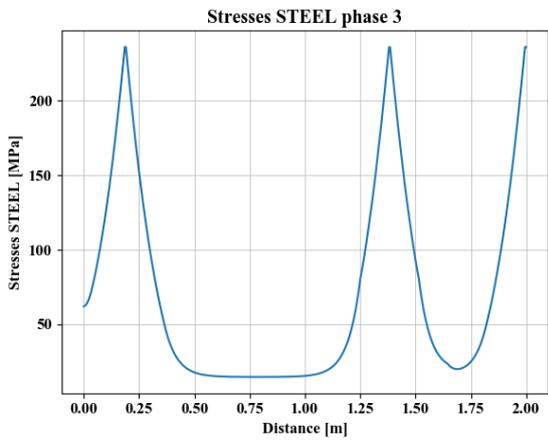
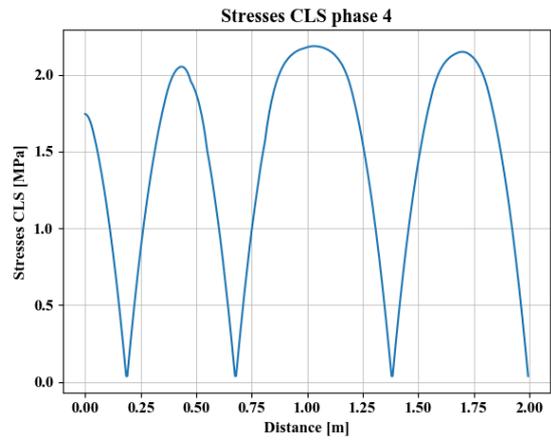
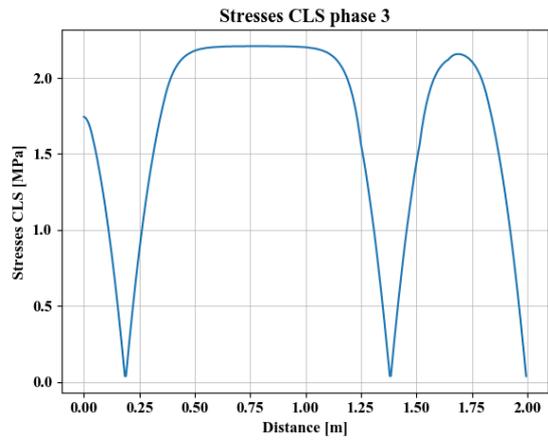
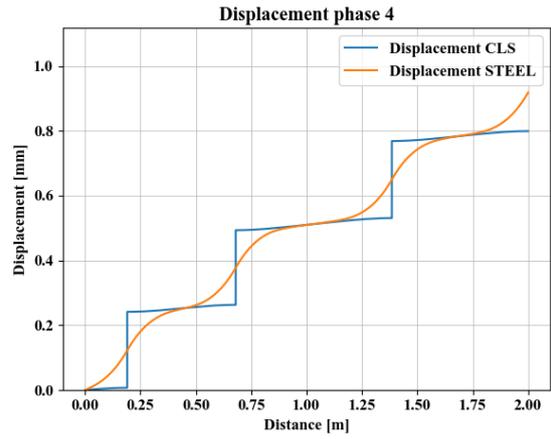
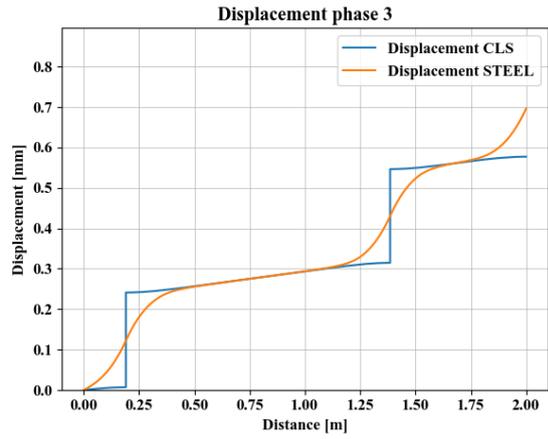


Figure 5-9 Diagrammi fasi 3 e 4

Apertura fessure [mm]					Distanza rispetto alla prima fessura [m]		
n° analisi	w1	w2	w3	w4	D12	D13	D14
1	0.119	0.230	0.232	0.231	1.81	0.615	1.32
2	0.119	0.232	0.237		0.905	1.58	
3	0.119	0.232	0.236	0.231	1.15	1.765	0.56
4	0.119	0.232	0.232		1.59	0.64	
5	0.119	0.232	0.211		0.93	1.895	
6	0.119	0.232	0.221	0.231	1.17	1.87	0.61
7	0.119	0.232	0.237	0.133	0.7	1.39	1.985
8	0.119	0.232	0.235	0.231	1.25	1.735	0.55
9	0.119	0.206	0.232	0.231	1.9	0.64	1.34
10	0.119	0.232	0.213	0.231	1.28	1.89	0.535
11	0.119	0.232	0.136	0.232	0.95	1.985	1.465
12	0.119	0.231	0.237	0.235	1.8	1.115	0.6
13	0.119	0.232	0.205		0.985	1.905	
14	0.119	0.232	0.237		0.72	1.53	
15	0.119	0.232	0.237		1.505	0.885	
16	0.119	0.161	0.232	0.235	1.96	0.625	1.27
17	0.119	0.221	0.237	0.232	1.865	1.315	0.6
18	0.119	0.232	0.168	0.231	1.095	1.955	0.595
19	0.119	0.232	0.237	0.163	0.655	1.255	1.96
20	0.119	0.232	0.237	0.207	0.765	1.355	1.9
21	0.119	0.231	0.237	0.215	0.53	1.125	1.885
22	0.119	0.232	0.237		0.97	1.635	
23	0.119	0.232	0.219	0.231	1.27	1.875	0.76
24	0.119	0.232	0.231	0.235	1.655	0.52	1.055
25	0.119	0.232	0.237		0.835	1.645	
26	0.119	0.232	0.237		1.605	0.96	
27	0.119	0.232	0.237	0.230	1.05	1.67	0.545
28	0.119	0.231	0.237	0.130	0.55	1.115	1.99
29	0.119	0.232	0.230	0.231	0.635	1.82	1.14
30	0.119	0.232	0.237		0.735	1.635	

5.1.5. Configurazione 4 barre $\phi 14$

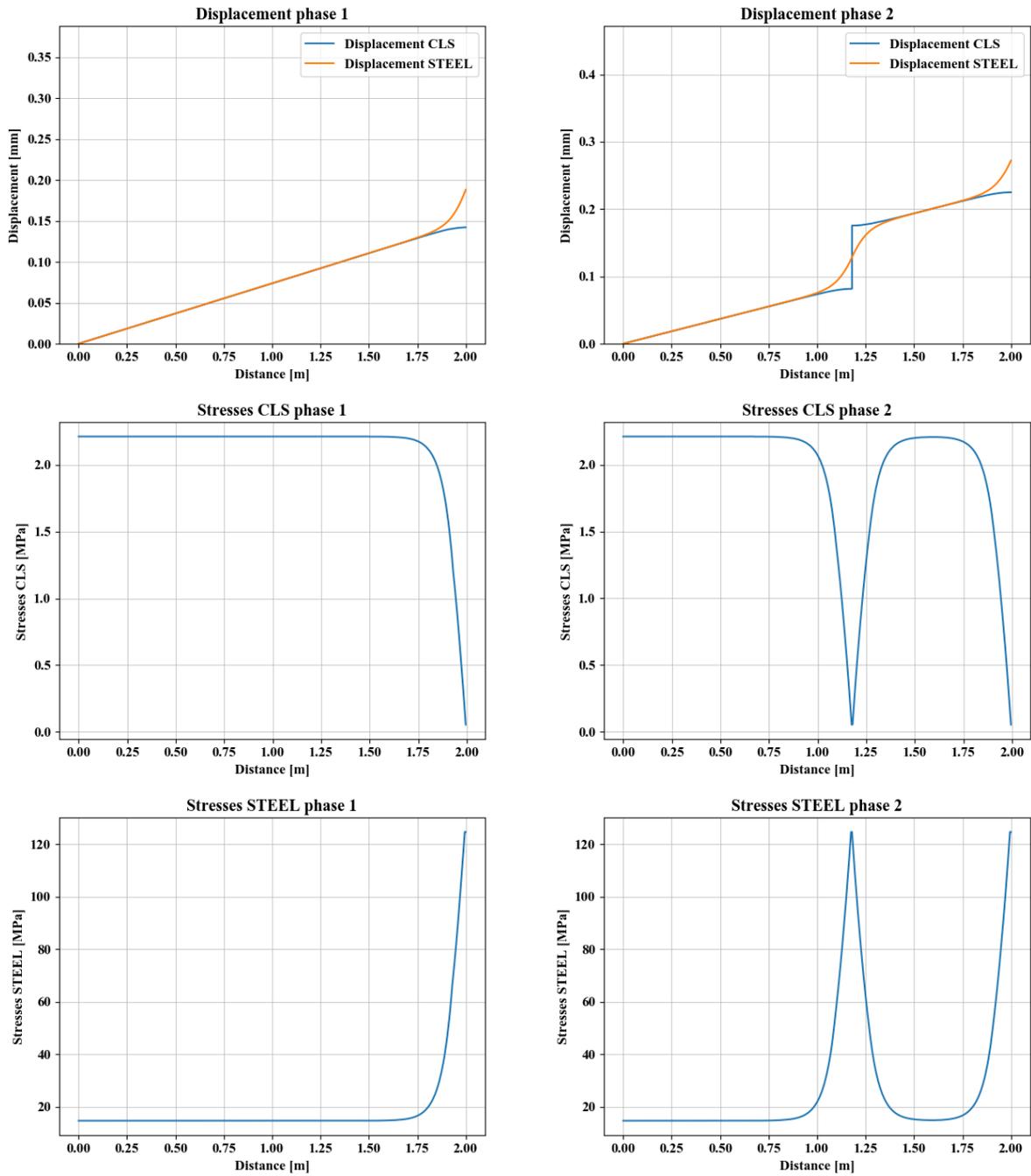


Figure 5-10 Diagrammi fasi 1 e 2

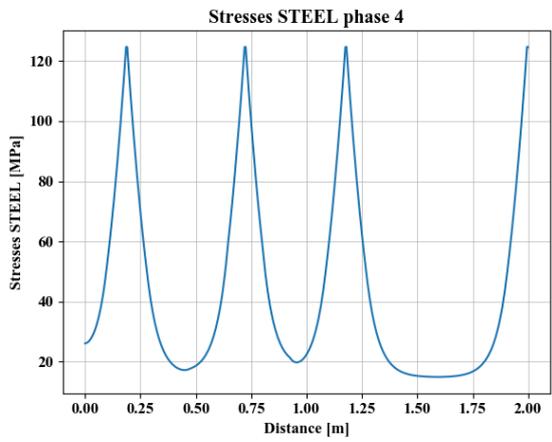
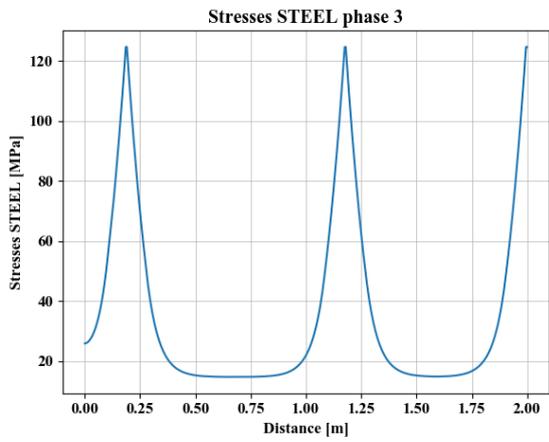
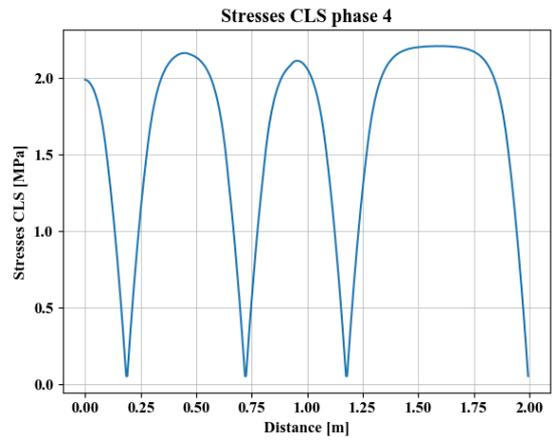
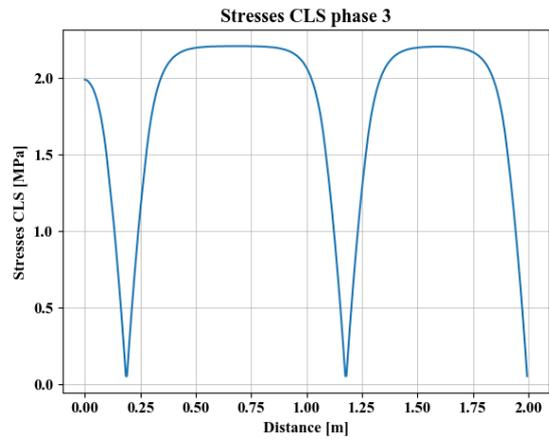
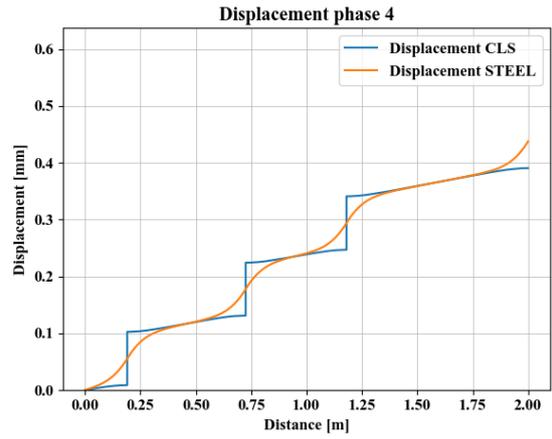
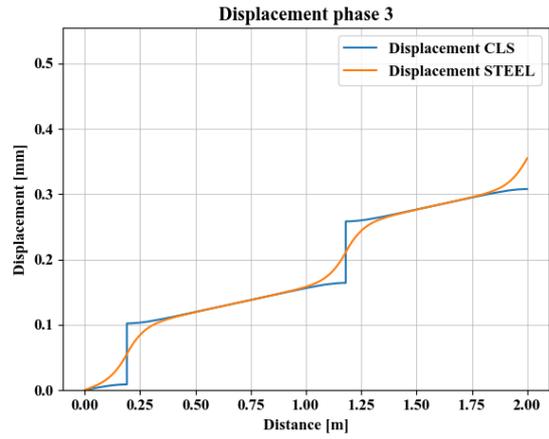


Figure 5-11 Diagrammi fasi 3 e 4

Apertura fessure [mm]						Distanza rispetto alla prima fessura [m]			
n° analisi	w1	w2	w3	w4	w5	D12	D13	D14	D15
1	0.047	0.094	0.093	0.093		0.82	1.81	1.275	
2	0.047	0.092	0.092	0.092		0.665	1.14	1.635	
3	0.047	0.092	0.050	0.093		0.75	1.995	1.23	
4	0.047	0.093	0.092	0.092	0.093	1.745	1.305	0.88	0.42
5	0.047	0.093	0.094	0.093		1.19	0.665	1.82	
6	0.047	0.093	0.090	0.093	0.093	1.335	1.87	0.515	0.935
7	0.047	0.093	0.080	0.093		1.285	1.93	0.505	
8	0.047	0.093	0.092	0.093		1.015	1.69	0.425	
9	0.047	0.093	0.092	0.093		1.665	1.19	0.525	
10	0.047	0.092	0.092	0.092	0.058	0.44	1.025	1.565	1.98
11	0.047	0.094	0.092	0.092	0.093	0.87	1.295	1.785	0.405
12	0.047	0.093	0.092	0.093		1.77	1.285	0.465	
13	0.047	0.093	0.093	0.079	0.092	1.355	0.495	1.935	0.96
14	0.047	0.094	0.091	0.092		0.8	1.875	1.485	
15	0.047	0.093	0.092	0.093		0.925	1.72	0.42	
16	0.047	0.067	0.092	0.093	0.094	1.965	1.55	0.535	1
17	0.047	0.092	0.094	0.091	0.093	0.455	1.42	1.82	0.84
18	0.047	0.088	0.092	0.094		1.895	1.135	0.57	
19	0.047	0.093	0.092	0.093	0.091	1.345	1.735	0.965	0.575
20	0.047	0.093	0.094	0.091		1.295	0.685	1.87	
21	0.047	0.093	0.061	0.093		1.17	1.975	0.445	
22	0.047	0.088	0.093	0.093		1.9	0.79	1.445	
23	0.047	0.093	0.088	0.093		1.07	1.895	0.475	
24	0.047	0.094	0.092	0.093	0.093	1.76	1.36	0.46	0.895
25	0.047	0.092	0.092	0.092		0.64	1.295	1.7	
26	0.047	0.094	0.092	0.092		0.785	1.865	1.42	
27	0.047	0.093	0.093	0.092		1.275	0.56	1.77	
28	0.047	0.094	0.092	0.055	0.093	0.845	1.295	1.985	0.44
29	0.047	0.092	0.092	0.092		0.565	0.99	1.74	
30	0.047	0.093	0.092	0.092		1.275	0.765	1.86	

5.1.6. Configurazione 1 barre $\phi 20$

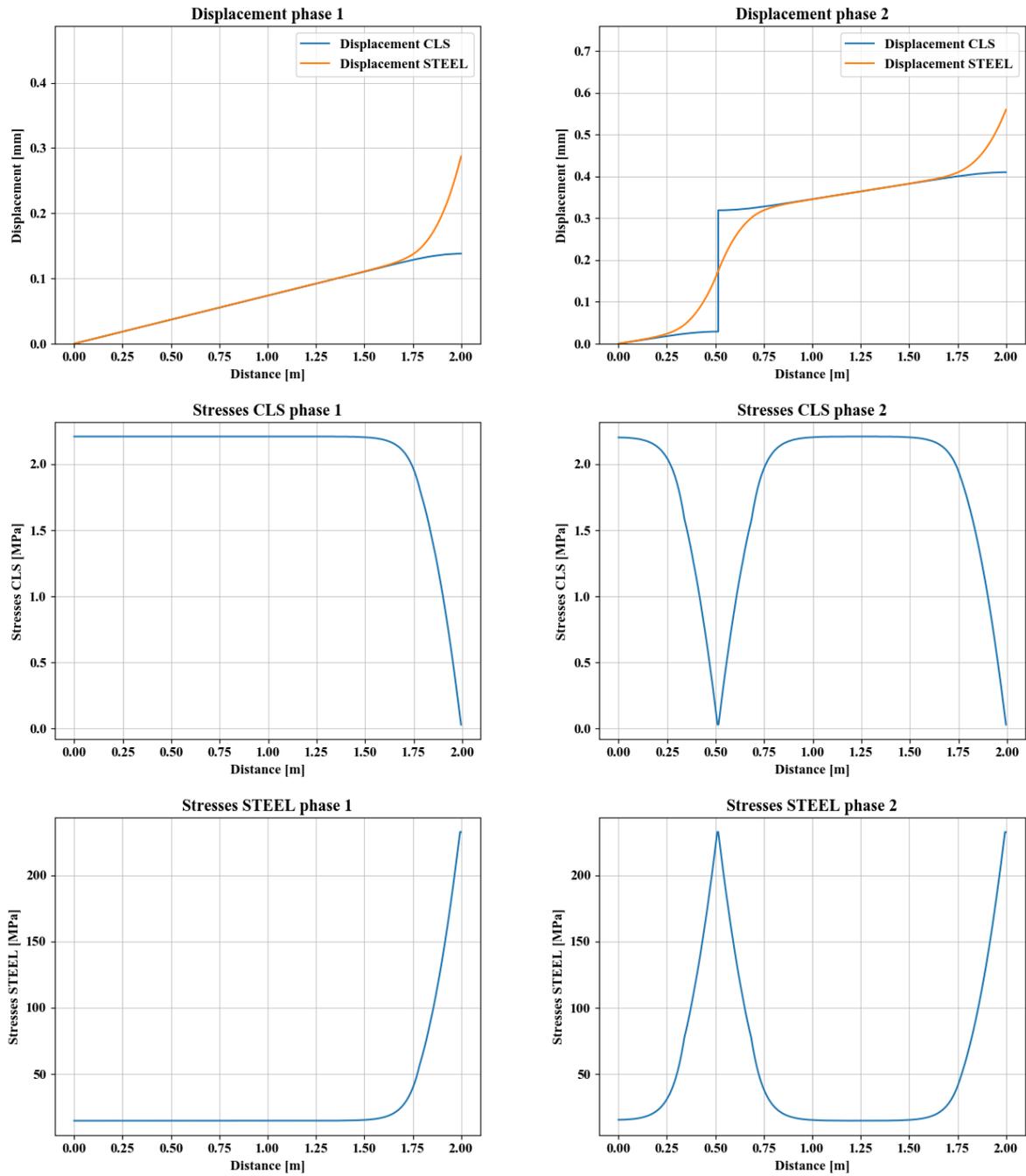


Figure 5-12 Diagrammi fasi 1 e 2

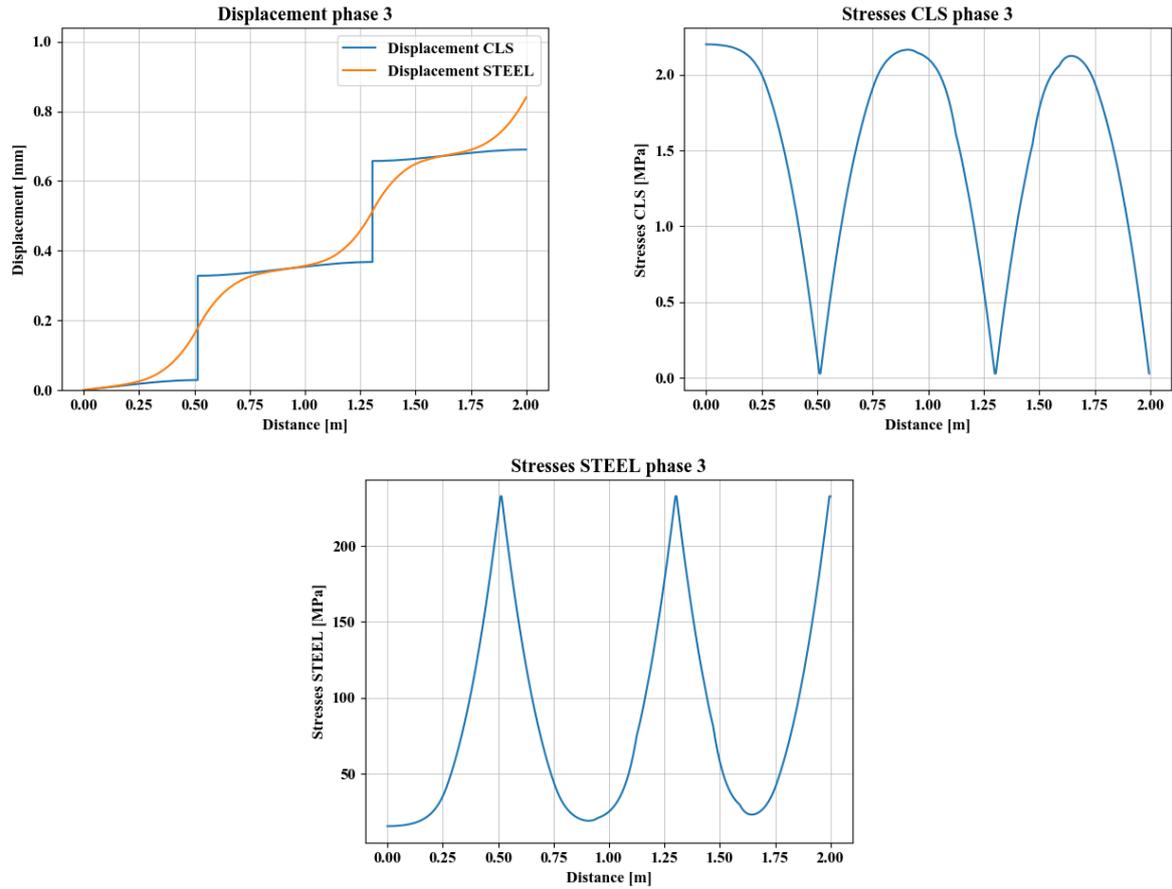
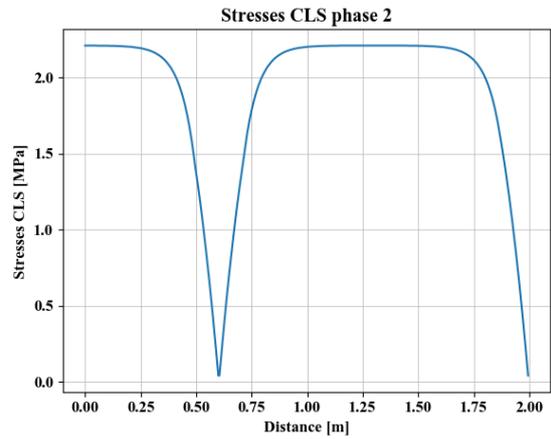
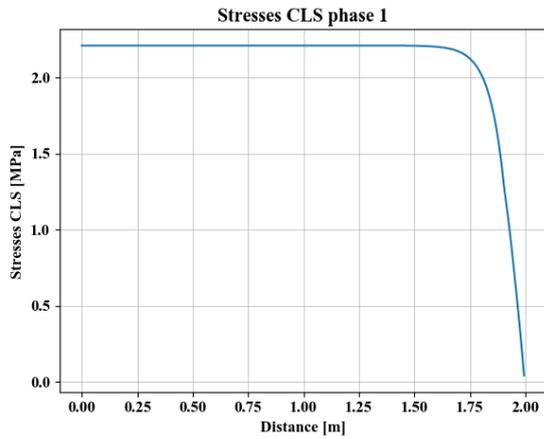
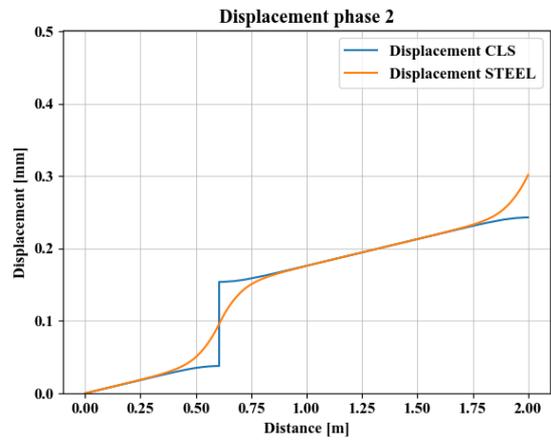
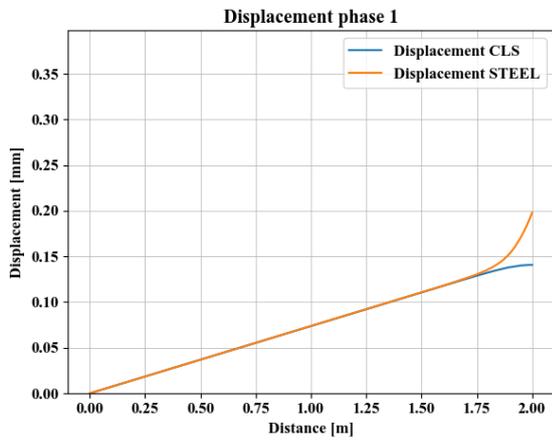


Figure 5-13 Diagrammi fase 3

n° analisi	Apertura fessure [mm]				Distanza rispetto alla prima fessura [m]		
	w1	w2	w3	w4	D12	D13	D14
1	0.150	0.296	0.251		1.115	1.89	
2	0.150	0.288	0.288		1.735	0.63	
3	0.150	0.157	0.290		1.99	0.805	
4	0.150	0.168	0.290		1.98	0.895	
5	0.150	0.290	0.290		1.485	0.695	
6	0.150	0.298	0.296		0.995	1.625	
7	0.150	0.283	0.297		1.79	1.02	
8	0.150	0.297	0.188		0.765	1.965	
9	0.150	0.247	0.297		1.89	1.12	
10	0.150	0.297	0.297		0.75	1.67	
11	0.150	0.290	0.294		1.37	0.78	
12	0.150	0.209	0.290		1.94	0.865	
13	0.150	0.290	0.275		1.245	1.835	
14	0.150	0.290	0.295		1.705	1.13	
15	0.150	0.290	0.293	0.154	1.335	0.74	1.995
16	0.150	0.296	0.298		0.61	1.54	
17	0.150	0.290	0.291		1.415	0.675	
18	0.150	0.290	0.296		1.59	0.97	

19	0.150	0.297	0.297		0.685	1.66	
20	0.150	0.290	0.287		1.675	0.595	
21	0.150	0.298	0.234		1.015	1.915	
22	0.150	0.285	0.297		1.775	1.07	
23	0.150	0.237	0.297		1.905	1.1	
24	0.150	0.290	0.290		1.425	0.67	
25	0.150	0.290	0.291		1.58	0.745	
26	0.150	0.297	0.177		1.055	1.975	
27	0.150	0.297	0.234		1.08	1.915	
28	0.150	0.265	0.297		1.855	1.07	
29	0.150	0.290	0.287		1.43	0.61	
30	0.150	0.290	0.182	0.290	1.28	1.97	0.635

5.1.7. Configurazione 2 barre ϕ 20



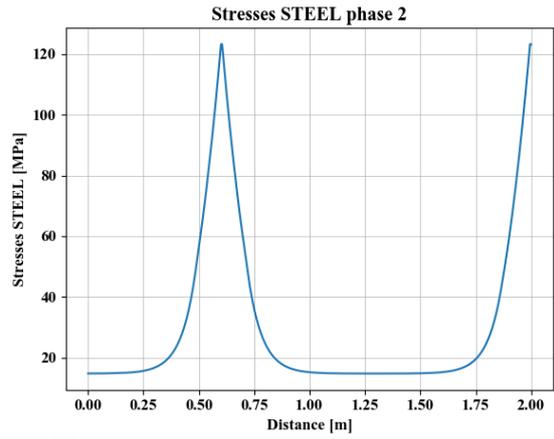
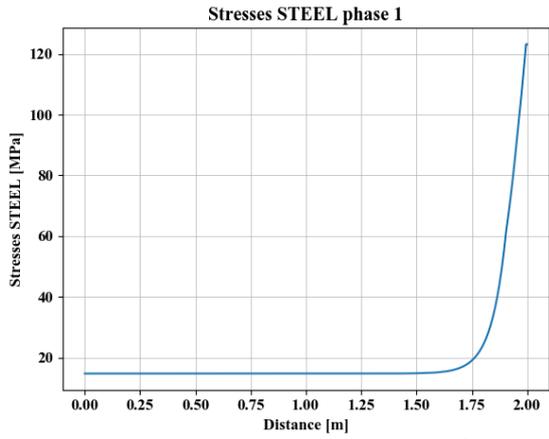
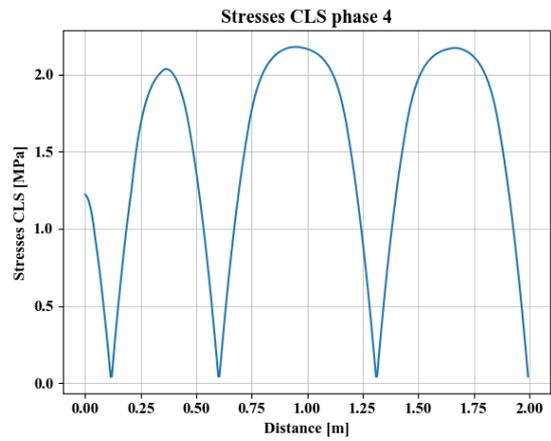
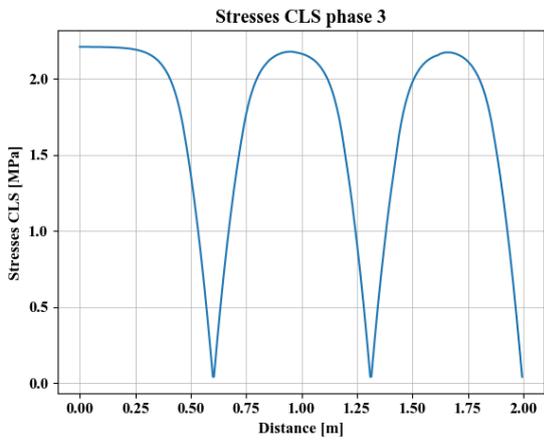
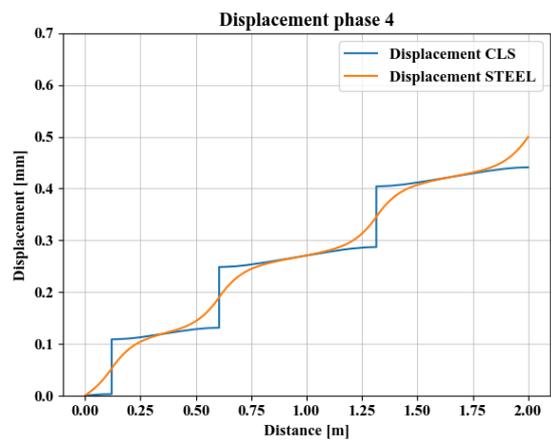
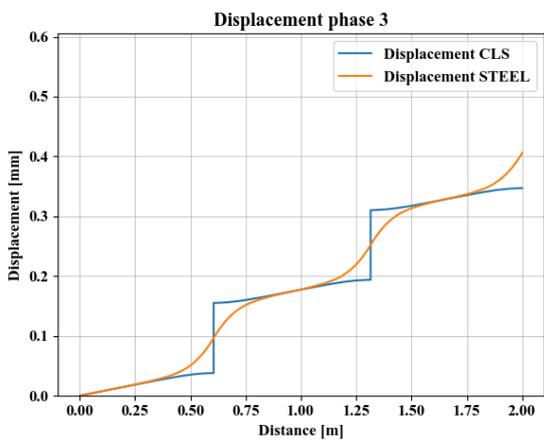


Figure 5-14 Diagrammi fasi 1 e 2



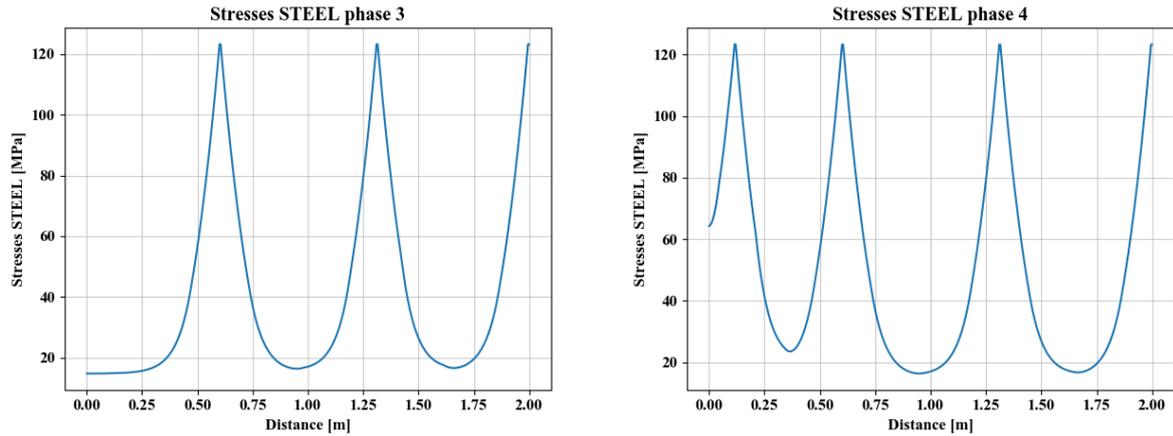


Figure 5-15 Diagrammi fasi 3 e 4

n° analisi	Apertura fessure [mm]				Distanza rispetto alla prima fessura [m]		
	w1	w2	w3	w4	D12	D13	D14
1	0.059	0.116	0.117	0.106	1.395	0.685	1.88
2	0.059	0.114	0.114	0.109	0.71	1.22	1.86
3	0.059	0.114	0.113	0.112	0.66	1.125	1.82
4	0.059	0.113	0.116	0.115	1.84	0.825	1.37
5	0.059	0.113	0.111		0.93	1.84	
6	0.059	0.116	0.116	0.113	1.315	0.76	1.84
7	0.059	0.116	0.116	0.085	1.44	0.53	1.95
8	0.059	0.116	0.115	0.073	1.125	0.48	1.975
9	0.059	0.116	0.114	0.115	1.755	1.125	0.49
10	0.059	0.086	0.117	0.115	1.95	0.99	0.515
11	0.059	0.117	0.113	0.115	1.01	1.8	0.505
12	0.059	0.115	0.116	0.117	1.815	0.595	1.155
13	0.059	0.116	0.114	0.115	1.725	1.14	0.51
14	0.059	0.113	0.114	0.082	0.465	1.385	1.955
15	0.059	0.114	0.114	0.116	0.64	1.83	1.16
16	0.059	0.090	0.116	0.115	1.94	0.91	1.455
17	0.059	0.116	0.115	0.077	1.325	0.465	1.965
18	0.059	0.114	0.070	0.116	0.615	1.98	1.225
19	0.059	0.116	0.114		1.505	0.935	
20	0.059	0.116	0.060	0.115	1.19	1.995	0.485
21	0.059	0.116	0.116	0.116	1.785	0.605	1.215
22	0.059	0.114	0.114		0.7	1.56	
23	0.059	0.116	0.115	0.063	1.345	0.48	1.99
24	0.059	0.116	0.116		1.545	0.685	
25	0.059	0.114	0.112	0.115	0.77	1.86	1.285
26	0.059	0.115	0.116	0.115	1.8	0.78	1.3
27	0.059	0.114	0.114	0.115	1.82	1.27	0.49
28	0.059	0.114	0.109	0.115	0.8	1.88	1.395
29	0.059	0.116	0.116	0.063	1.495	0.64	1.99
30	0.059	0.114	0.114	0.093	0.505	1.295	1.93

Le figure appena riportate descrivono gli spostamenti dei due materiali nelle varie fasi dell'analisi svolta. Dal primo grafico è ben visibile come lo spostamento nella sezione terminale del modello sia diverso nei due materiali. Questo è dovuto al fatto che, come già accennato nei capitoli precedenti, la sezione qui è già considerata fessurata. Il legame di aderenza permette ai due materiali di lavorare in maniera complementare, tuttavia vi è una zona di transizione in cui vi è uno scorrimento, oltre questa lunghezza i due materiali subiscono il medesimo spostamento. Notiamo che questo effetto è visibile anche dai diagrammi delle tensioni, infatti la forza applicata all'estremità è portata dalla barra di armatura e solamente dopo la lunghezza di trasmissione essa viene trasferita, in parte, al calcestruzzo. Come già descritto in precedenza, analizzando i risultati delle tensioni nel calcestruzzo, si va ad individuare quale sia la zona in cui le tensioni sono pari alla resistenza massima a trazione. Individuato questo tratto del tirante, si sceglie in maniera casuale quale sia l'elemento SP2TR da rimuovere per le analisi delle fasi successive. L'analisi viene dunque rieseguita con questo elemento disattivato nelle fasi seguenti. I risultati forniti mettono in luce, in termini di spostamento, un salto improvviso. Questo salto rappresenta proprio l'ampiezza della fessura in quanto è la differenza di spostamento tra i nodi che erano connessi, nella fase precedente dall'elemento SP2TR, ora non attivo. In termini tensionali, com'è ovvio, si nota una crescita nelle tensioni della barra e una caduta in quelle del calcestruzzo. Nella sezione fessurata infatti lo sforzo è interamente portato dalla barra e poi trasmesso tramite il legame di aderenza al calcestruzzo. Si segue quindi la medesima procedura della fase precedente al fine di valutare quale possa essere l'elemento da rimuovere per le ulteriori ed eventuali fasi successive. Il ragionamento è del tutto analogo e nei grafici relativi ad ogni fase si notano tutti i salti, sia a livello tensionale che a livello deformativo.

È evidente notare come le aperture delle fessure maggiori si ottengono in presenza di piccole percentuali del contenuto di armatura. Infatti nel caso in cui il tirante risulta armato da una barra da 14 mm oppure da 2 barre da 10 mm, si ottengono valori di apertura della fessura rispettivamente di circa 0.62 mm e di 0.48 mm. Questo effetto è visibile anche facendo riferimento alla prima fessura che, come già detto, presenta un'apertura pari a circa la metà di quelle che si localizzano ad una distanza tale dai vincoli tale da consentire lo scorrimento della barra rispetto al calcestruzzo, da ambedue le parti. In queste situazioni inoltre, come si nota dai diagrammi delle tensioni riportati in precedenza, si raggiungono elevate tensioni di trazione nell'armatura che nel particolare caso in cui il tirante è armato con una barra da 14 mm, conducono allo snervamento della stessa.

5.2. *Modello con deformazione impressa*

In questa fase si passa ad analizzare il tirante soggetto ad una deformazione impressa che verrà incrementata al fine di valutare lo sviluppo del processo fessurativo. In particolare l'azione esterna è applicata al solo calcestruzzo, al fine di modellare il comportamento del tirante quando lo stesso si trova soggetto alle azioni indotte dal fenomeno del ritiro. Il calcestruzzo in assenza di armatura tenderebbe ad accorciarsi liberamente, tuttavia la presenza delle barre comporta la nascita di uno stato tensionale di trazione all'interno del conglomerato. Questo può a sua volta condurre alla nascita di fessure, qualora tali valori superino la resistenza a trazione del calcestruzzo. In una fase successiva si considererà il comportamento del tirante quando lo stesso è soggetto effettivamente al ritiro, che dunque avrà un andamento crescente nel tempo, fino ad un valore asintotico.

Lo schema statico questa volta prevede un vincolo alla traslazione anche nel nodo della barra posto all'estremità destra del modello (in accordo con quanto spiegato nel capitolo 4). Dunque l'elemento che si sta considerando è di fatto già prefessurato, l'applicazione della deformazione di prima fessurazione comporterà quindi lo sviluppo, lungo il tirante, di livelli tensionali inferiori alla resistenza a trazione del calcestruzzo. Solamente incrementando questa deformazione, si andrà incontro alla nascita di ulteriori fessure. La deformazione che comporta la rottura a trazione del calcestruzzo è ovviamente solo funzione della classe del calcestruzzo stesso, in particolare essa vale:

$$\varepsilon_{cr1} = \frac{f_{ctm}}{E_c}$$

Dunque in tutte le differenti configurazioni di armatura si è applicata una deformazione, in fase 1, che vale:

Classe calcestruzzo	f_{ctm}	E_{cm}	ε_{cr1}
	[MPa]	[MPa]	[-]
C20	2.21	30303	7.26E-05

Anche in questo caso è stata svolta un'analisi non lineare al fine di evidenziare come, partendo da una configurazione già prefessurata, il tirante si trovi soggetto a livelli tensionali tali da impedire la nascita di ulteriori fessure. Tuttavia il fine della tesi è quello di studiare il processo fessurativo indotto dalle deformazioni impresses di qualunque natura, siano esse di origine termica o legate al fenomeno del ritiro. Si è operato quindi, in questa fase, applicando al calcestruzzo una deformazione sempre crescente e tale da generare nel materiale una tensione pari alla sua resistenza a trazione, in modo da innescare il processo fessurativo. I

valori della deformazione da imprimere al conglomerato cementizio sono stati ricavati per via iterativa a partire dalle tensioni indotte dalla deformazione applicata nella fase precedente. Infatti lo stesso valore di deformazione che conduce il calcestruzzo alla fessurazione, deve essere applicato in due fasi contigue. Nella fase i -esima le tensioni massime nel calcestruzzo saranno pari alla sua resistenza a trazione, mentre nella fase successiva ($i+1$), dopo aver disattivato un elemento SP2TR in maniera casuale, dunque dopo aver modellato la nascita della fessura, le tensioni nei materiali si abbasseranno. A partire da tali valori si determinerà il valore di deformazione impressa da applicare nell'ulteriore fase successiva ($i+2$), al fine di portare ivi le tensioni massime del calcestruzzo al valore della sua resistenza a trazione. L'operazione è stata portata avanti fino a raggiungere valori della deformazione impressa congrui con i problemi fisici. Dunque considerando l'ipotetica presenza contemporanea di fenomeni quali ritiro e variazioni termiche, si è scelto come limite superiore della deformazione da imprimere il valore di 0.001. Dal punto di vista analitico dunque, il problema può essere riassunto come segue:

- In fase 1 si è sempre applicata la deformazione ε_{cr1} la quale induce, nella stessa fase, essendo il tirante prefessurato, una tensione nel calcestruzzo σ_{cr1} minore di f_{ctm} . Il valore della deformazione da applicare in fase 2 si calcola iterando attorno alla seguente quantità:

$$\varepsilon_{cr2} = \varepsilon_{cr1} * \frac{f_{ctm}}{\sigma_{cr1}}$$

- Dunque in fase 2 il calcestruzzo si troverà soggetto ad una tensione pari proprio alla sua resistenza a trazione. In generale quindi, per innescare la fessurazione nella fase i -esima dobbiamo applicare una deformazione iterata attorno al valore:

$$\varepsilon_{cr(i)} = \varepsilon_{cr(i-1)} * \frac{f_{ctm}}{\sigma_{cr(i-1)}}$$

In cui il valore di $\sigma_{cr(i-1)}$ rappresenta la tensione indotta dalla deformazione $\varepsilon_{cr(i-1)}$ dopo l'apertura della fessura in fase $i-1$, avendo precedentemente raggiunto f_{ctm} in fase $i-2$.

Dipendendo i valori della deformazione impressa dai livelli tensionali raggiunti, risulta chiaro che questi sono differenti per ognuna delle configurazioni di armatura analizzate nel presente lavoro di tesi. Riassumeremo, in forma tabellare i livelli di deformazione raggiunti per indurre la nascita delle fessure, e noteremo come questi risultino essere decrescenti all'aumento della superficie di contatto tra i due materiali. Si riportano ora i risultati più significativi dei modelli analizzati, facendo ricorso ai diagrammi degli spostamenti e delle tensioni nei due materiali.

In particolare si riportano i risultati ottenuti per le configurazioni di armatura seguenti:

- 2 barre da 10 mm
- 2 barre da 20 mm

Questi due casi permettono di mettere in evidenza un particolare fenomeno legato alla caduta tensionale nei due materiali a seguito della nascita delle fessure. Infatti non appena nel tirante fessurato nasce un'ulteriore fessura, le tensioni nella barra di armatura, così come nel calcestruzzo, si abbassano al punto che dove il tirante era già fessurato e la barra è nuda, la stessa subisce un recupero elastico, non essendosi snervata. Inoltre considerando che le due percentuali di armatura sono differenti, questo effetto è diversamente visibile nei due casi. Il che ci permette di trarre ulteriori considerazioni sull'effetto del quantitativo di armatura nel processo fessurativo.

Si riportano quindi ora i risultati ottenuti, per le due configurazioni di cui sopra. A seguire si trovano i valori di deformazione impressa e tensione da essa indotta nel tirante, per ogni diversa configurazione di armatura analizzata.

5.2.1. Configurazione 2 barre $\phi 10$

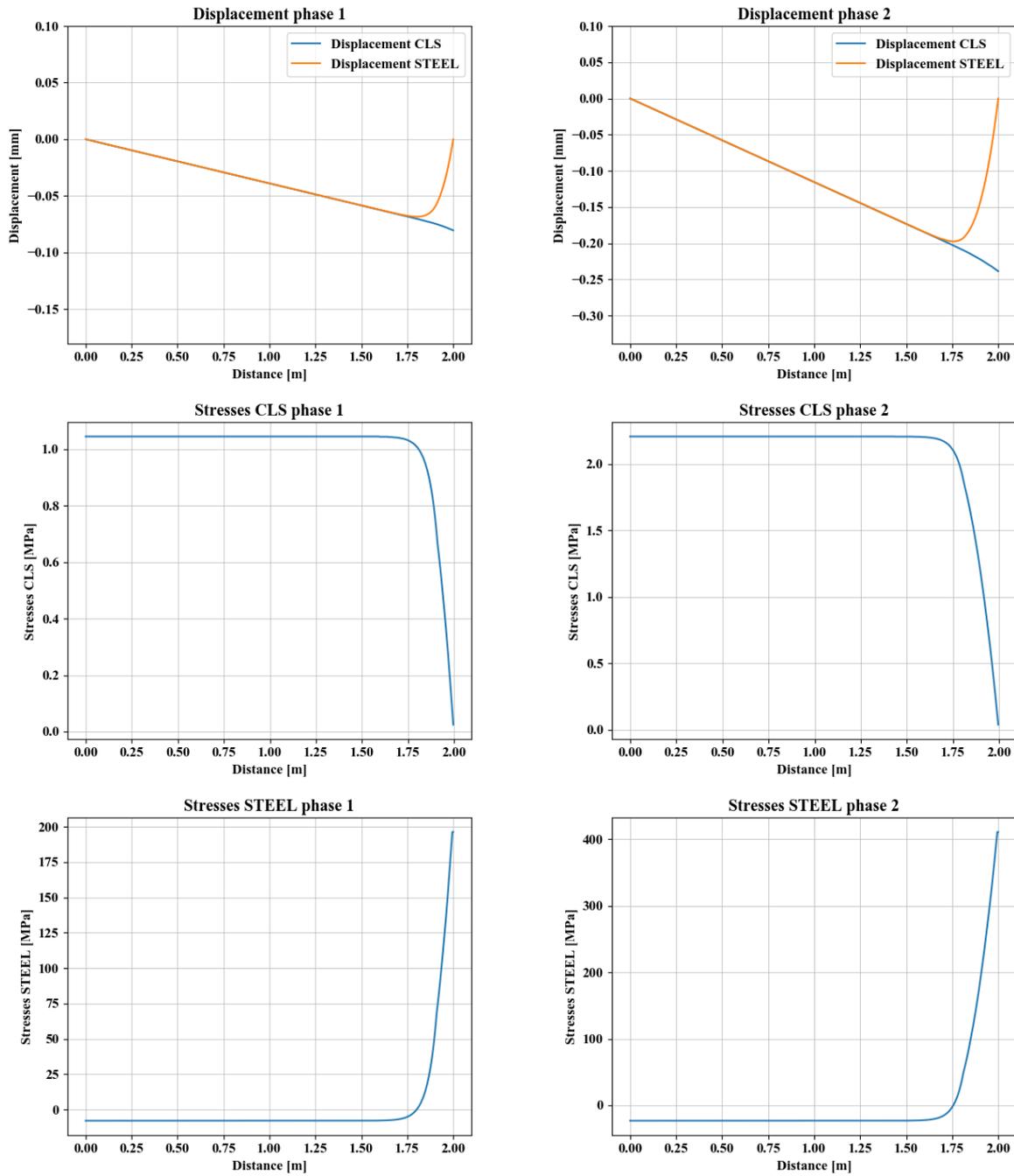


Figure 5-16 Diagrammi fasi 1 e 2

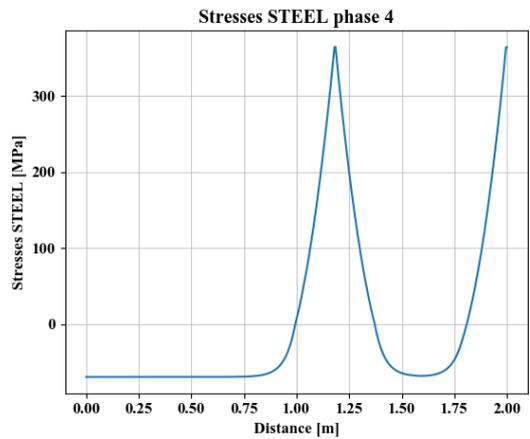
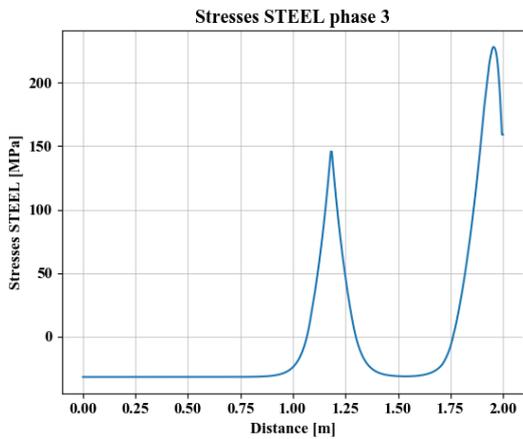
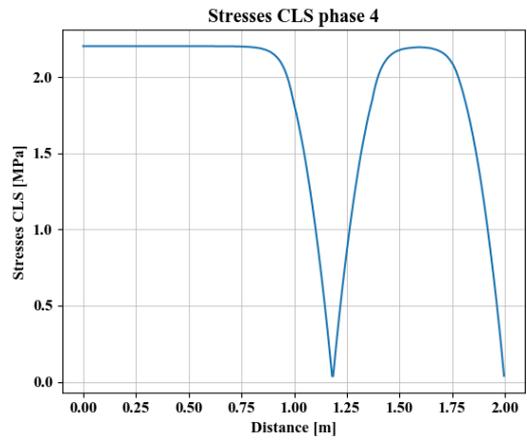
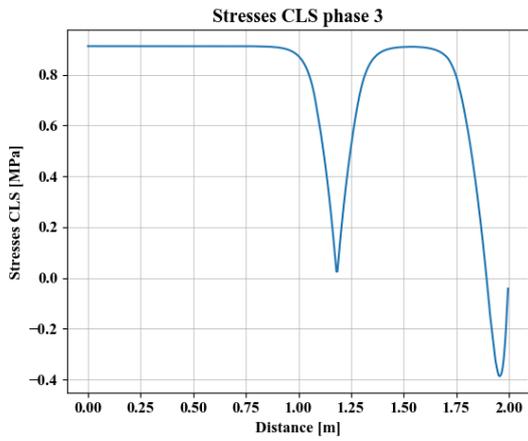
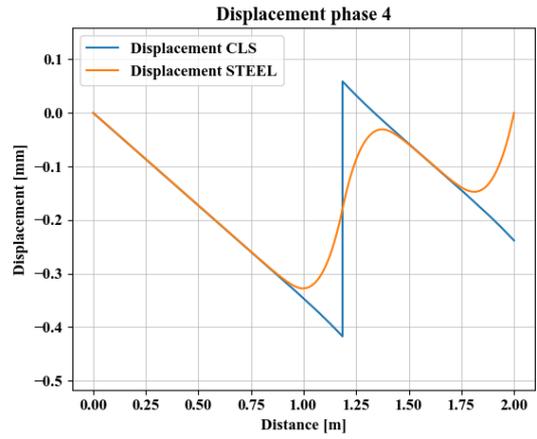
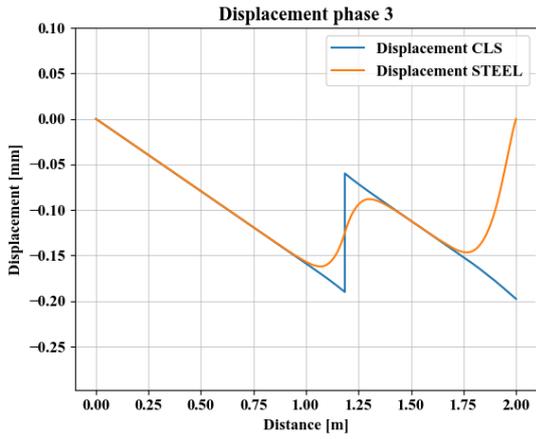


Figure 5-17 Diagrammi fasi 3 e 4

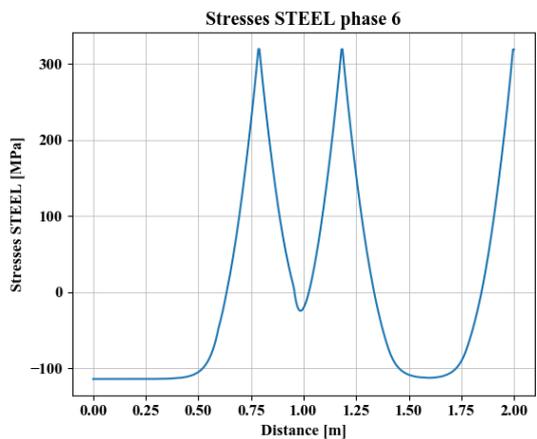
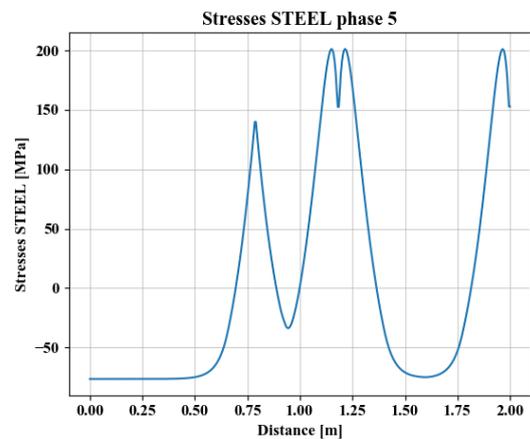
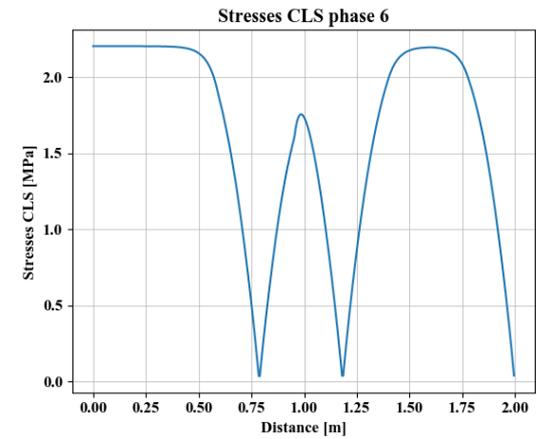
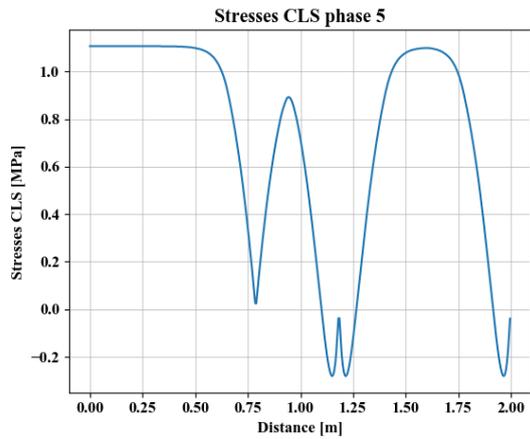
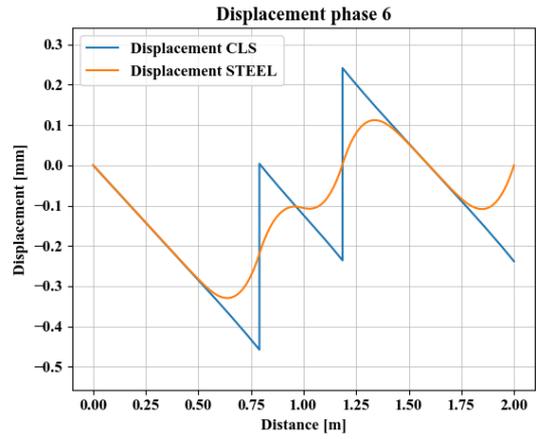
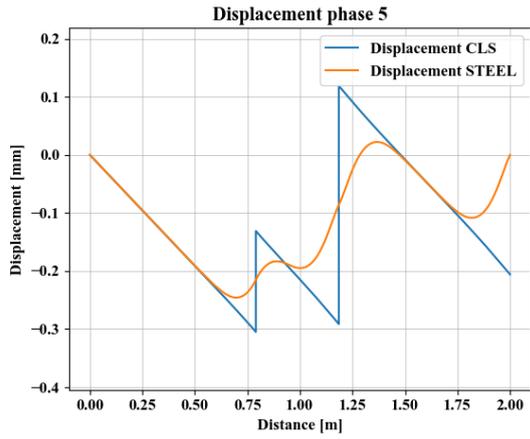


Figure 5-18 Diagrammi fasi 5 e 6

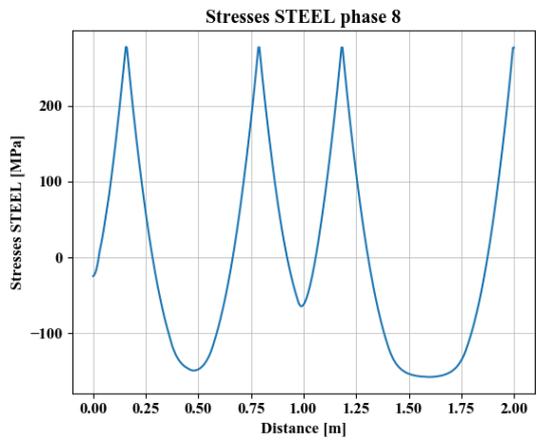
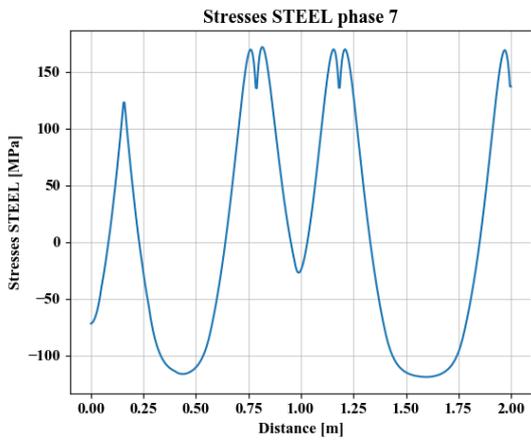
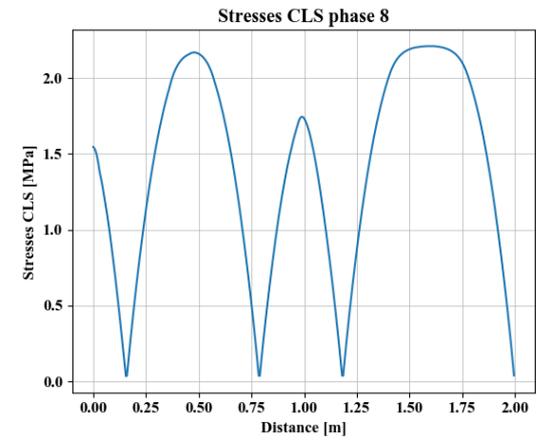
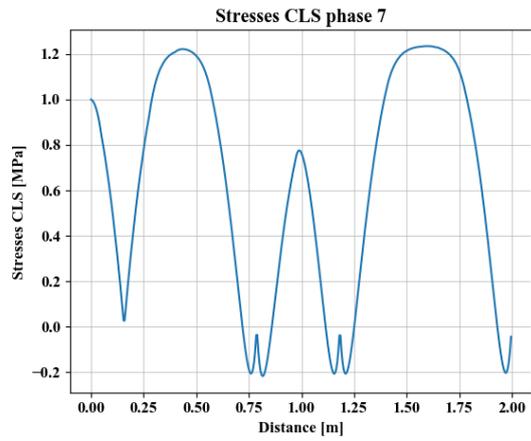
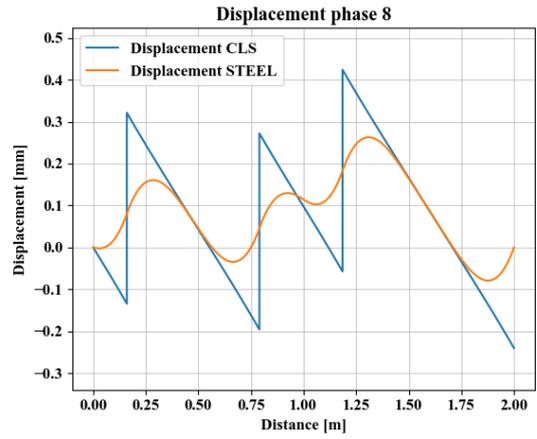
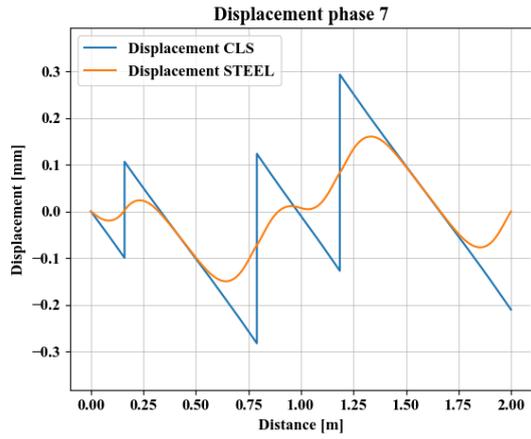


Figure 5-19 Diagrammi fasi 7 e 8

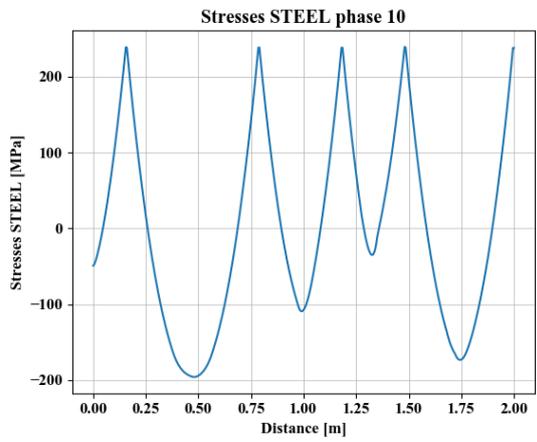
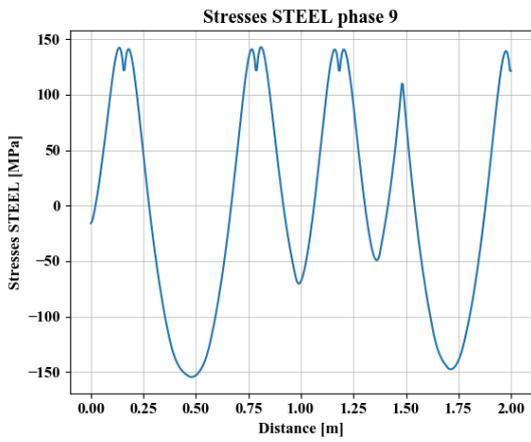
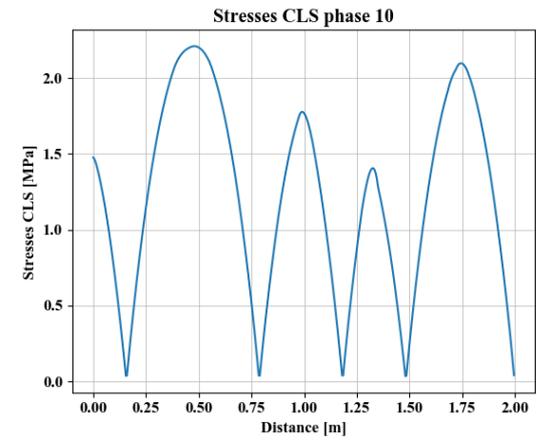
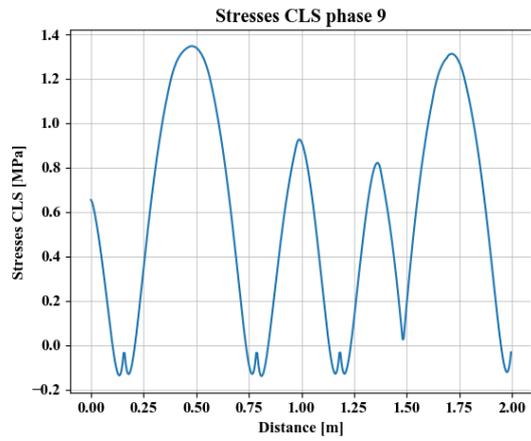
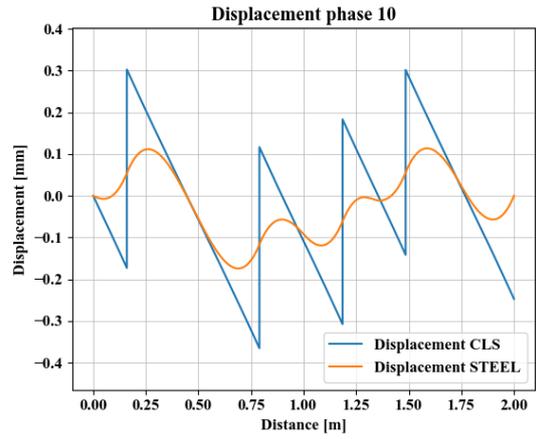
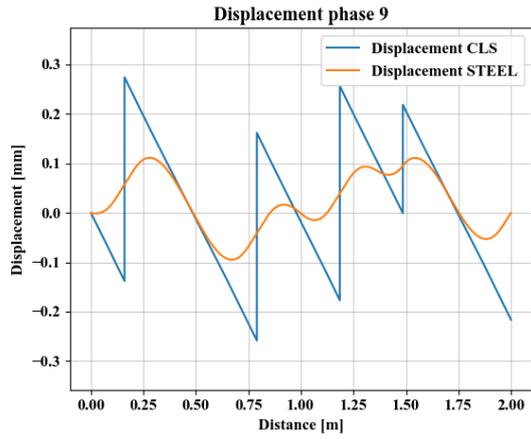


Figure 5-20 Diagrammi fasi 9 e 10

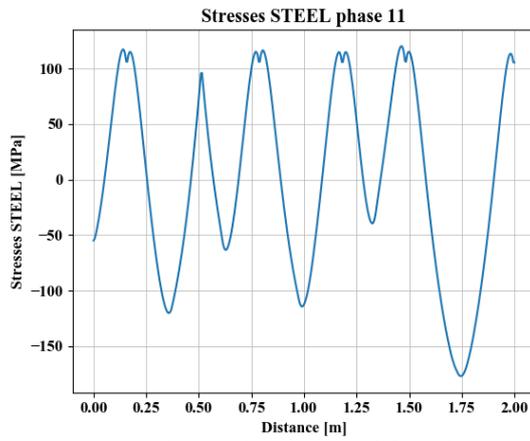
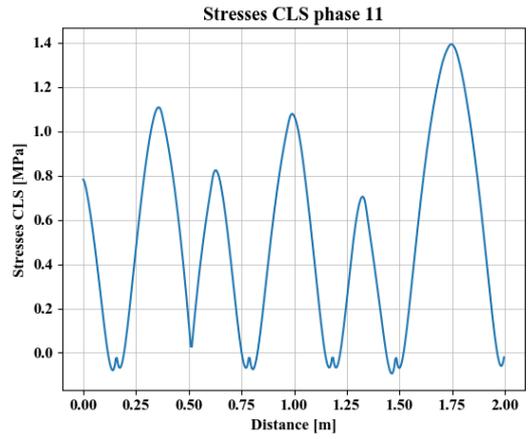
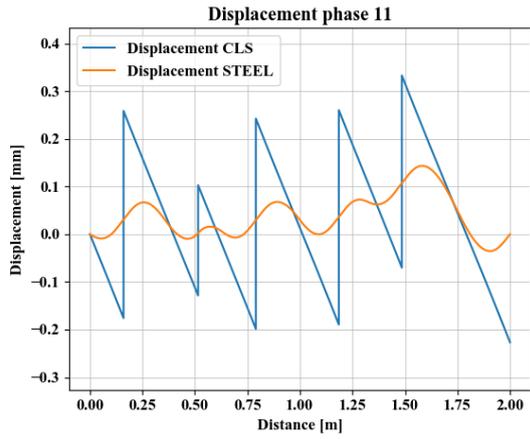


Figure 5-21 Diagrammi fase 10

5.2.2. Configurazione 2 barre $\phi 20$

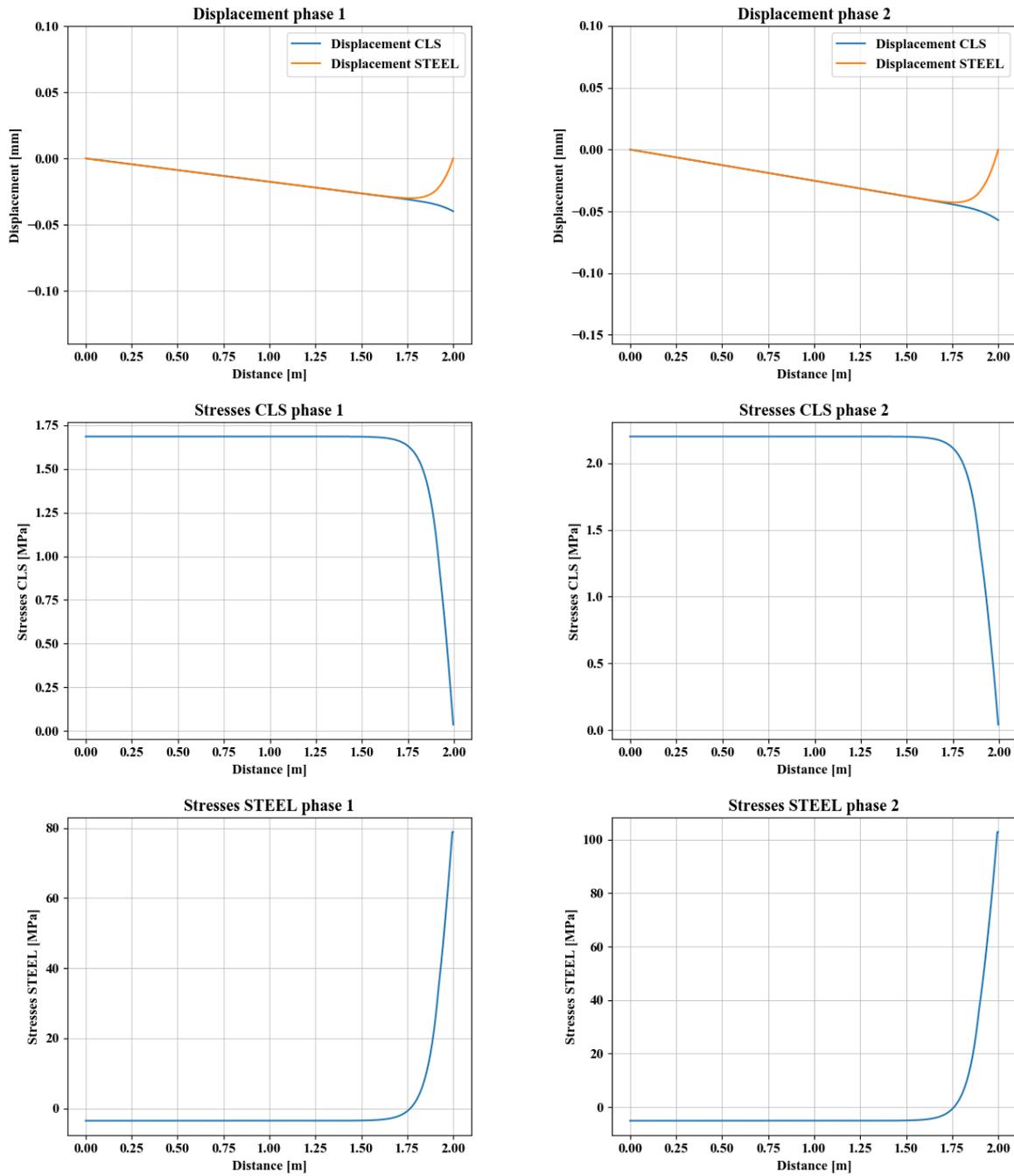


Figure 5-22 Diagrammi fasi 1 e 2

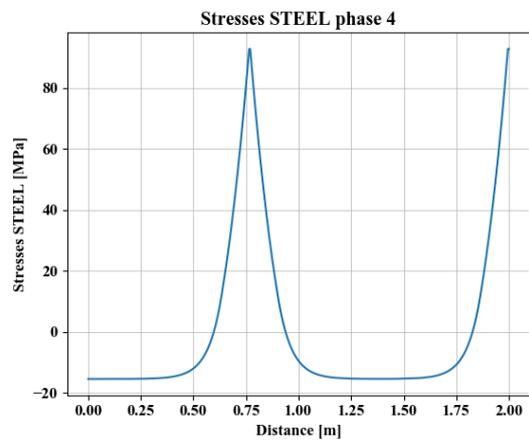
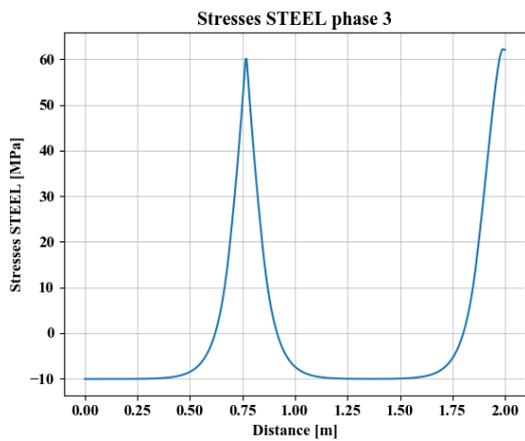
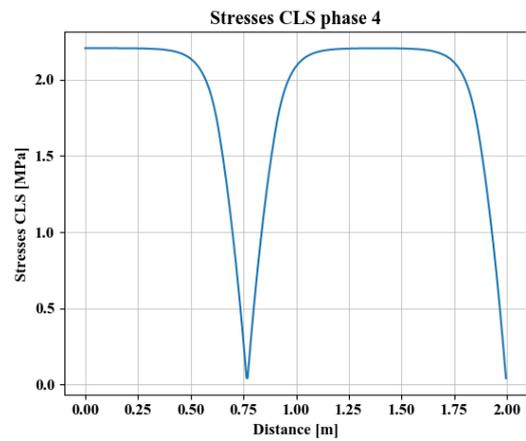
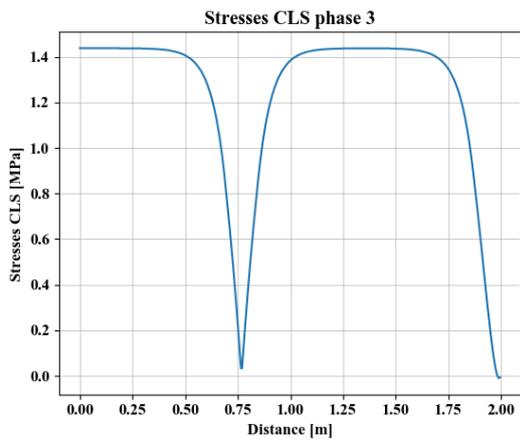
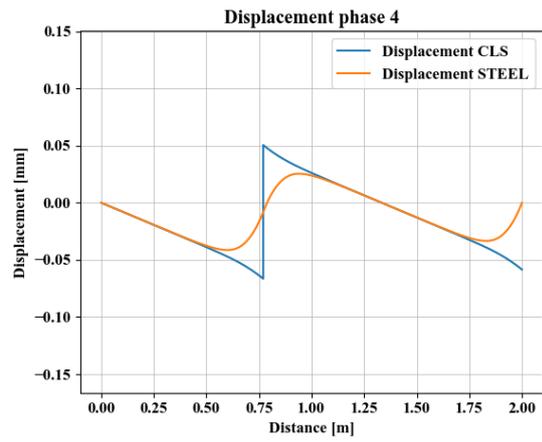
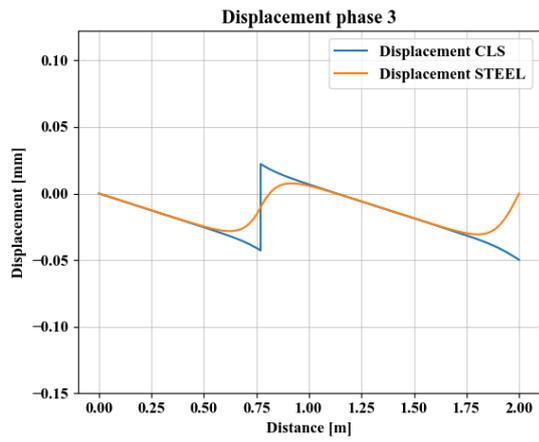


Figure 5-23 Diagrammi fasi 3 e 4

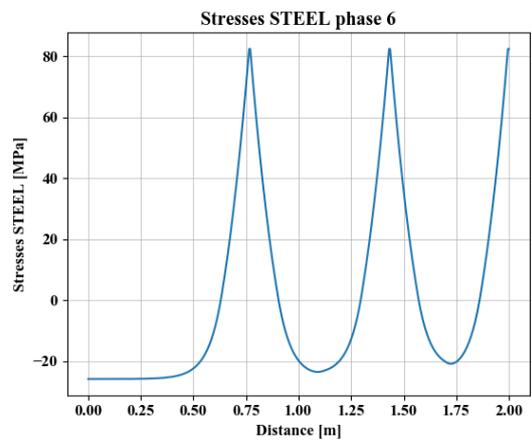
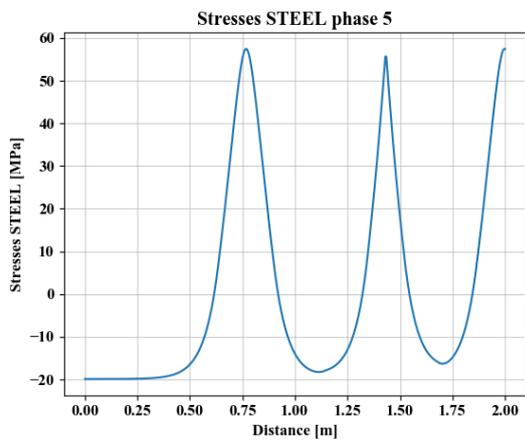
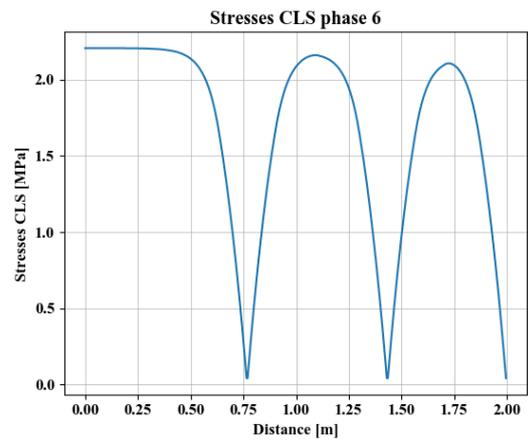
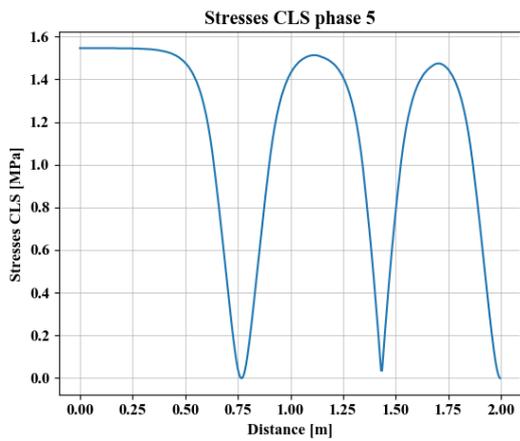
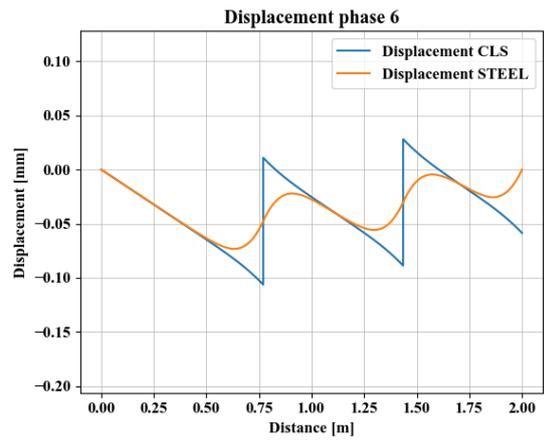
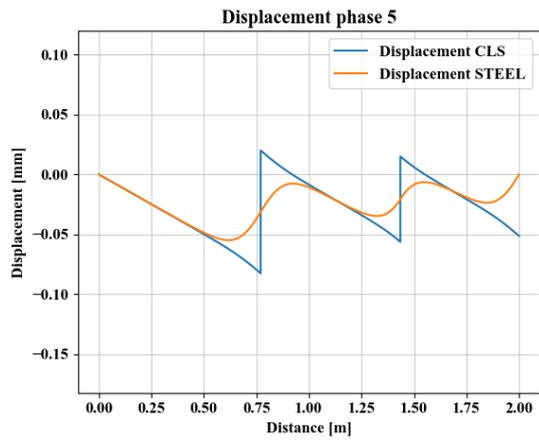


Figure 5-24 Diagrammi fasi 5 e 6

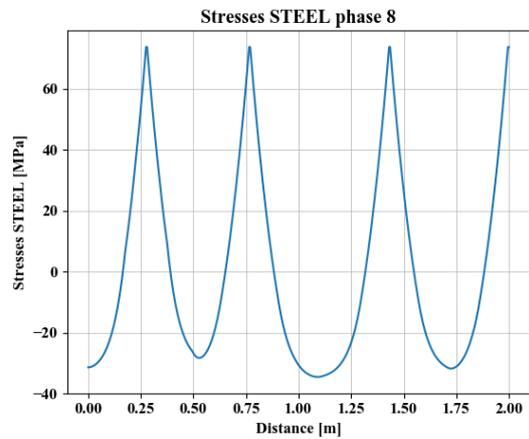
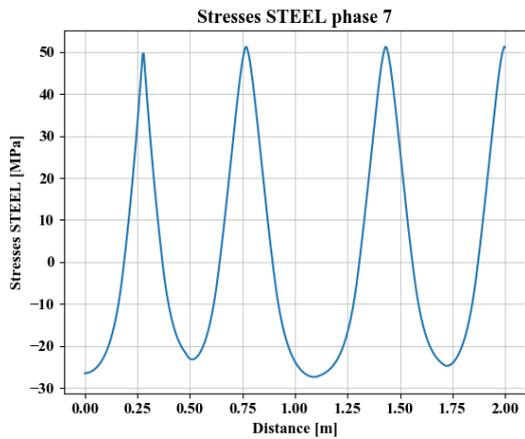
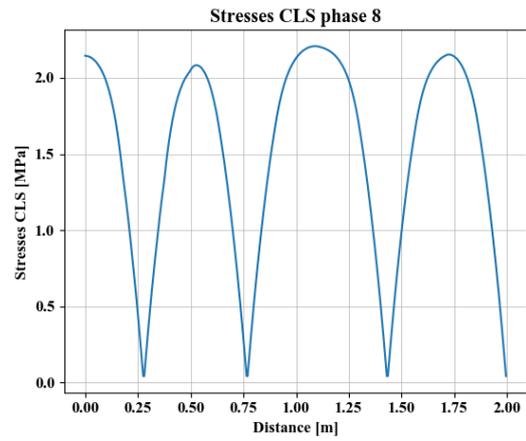
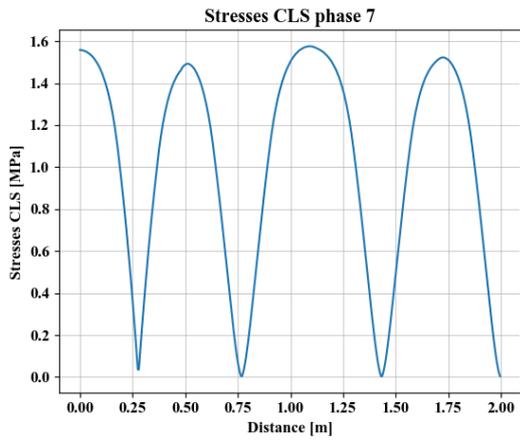
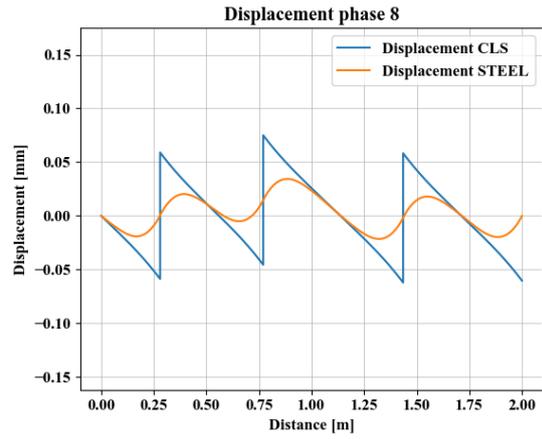
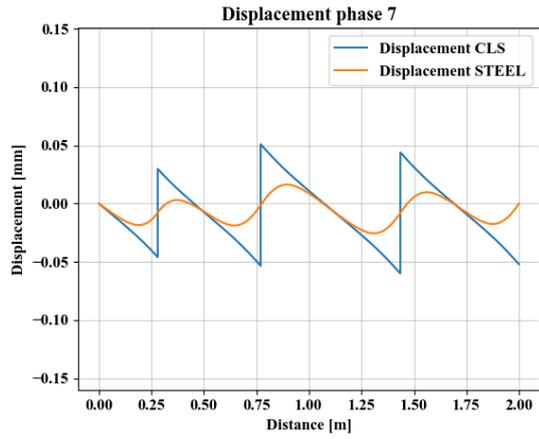


Figure 5-25 Diagrammi fasi 7 e 8

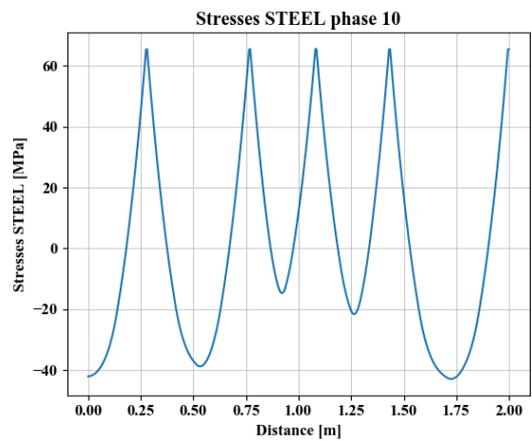
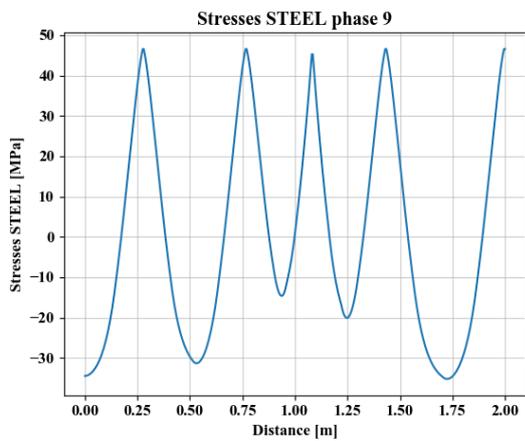
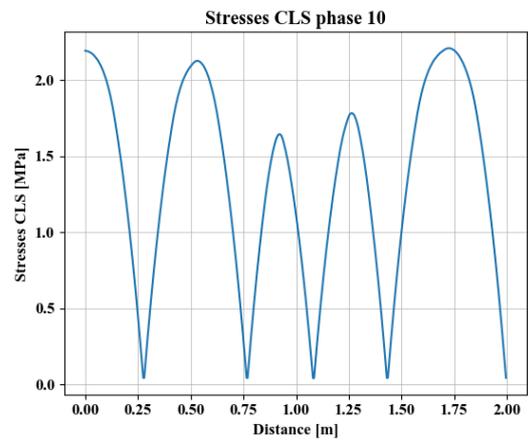
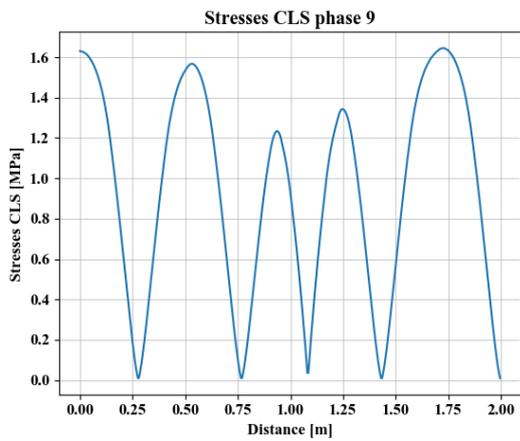
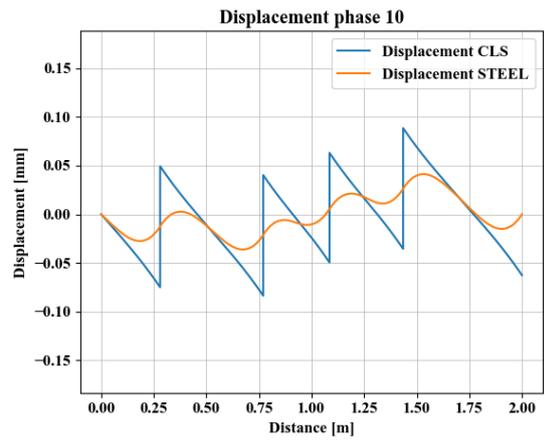
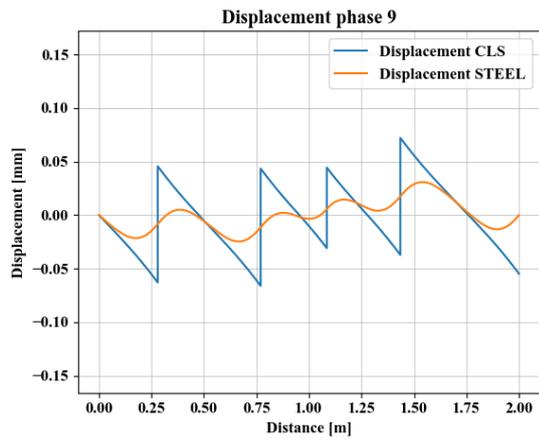


Figure 5-26 Diagrammi fasi 9 e 10

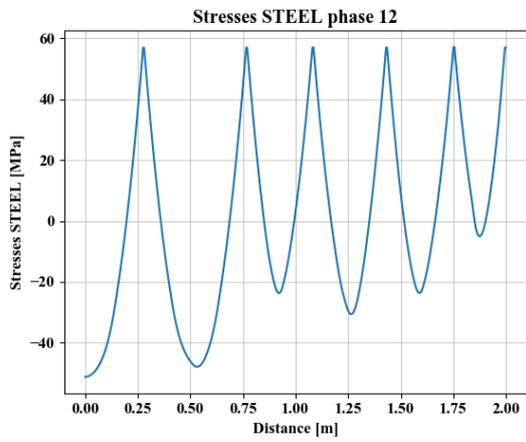
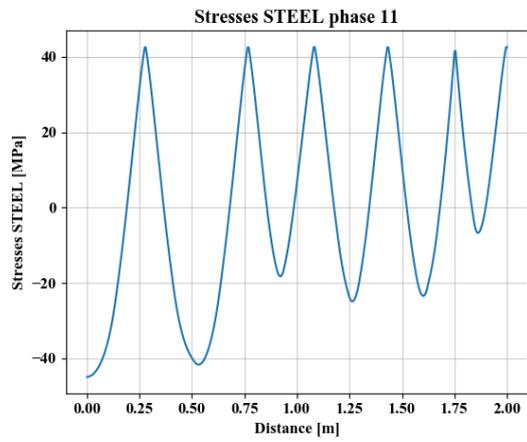
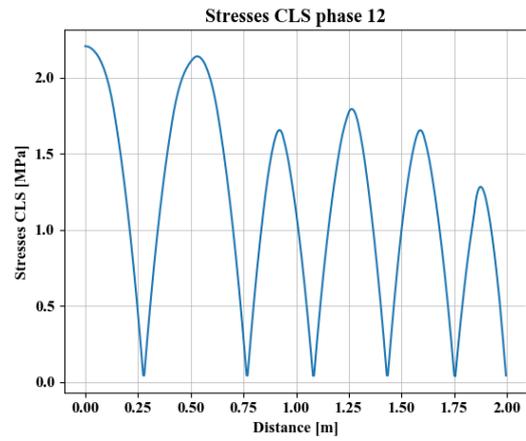
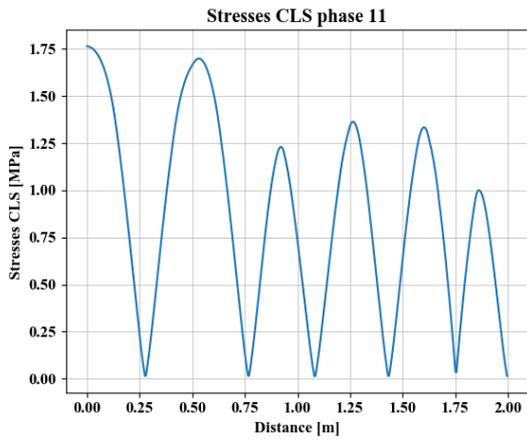
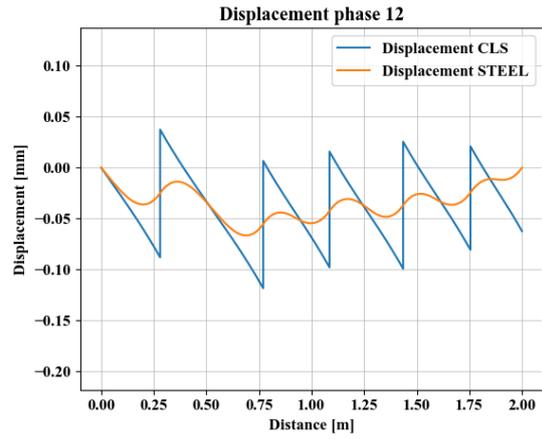
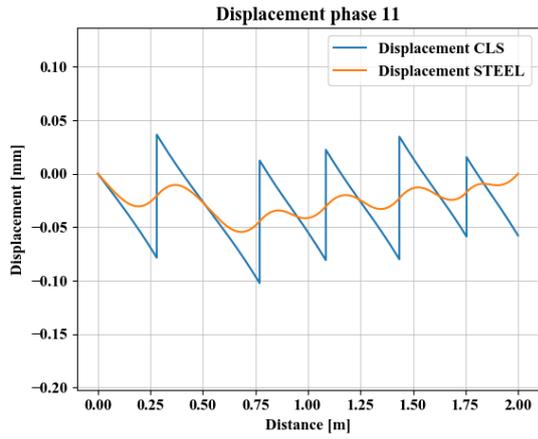


Figure 5-27 Diagrammi fasi 11 e 12

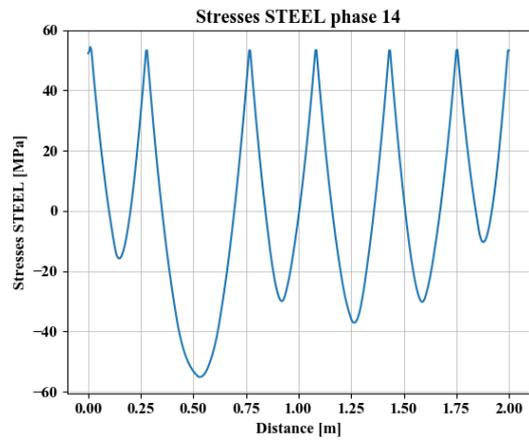
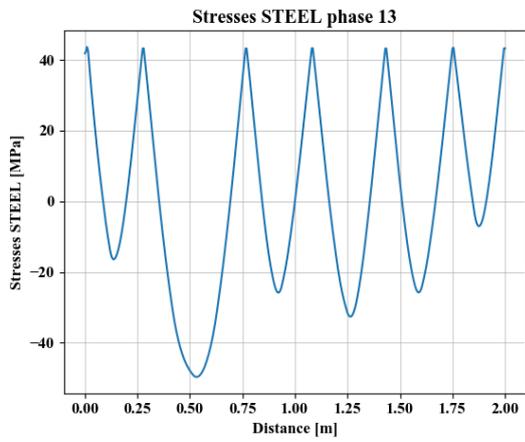
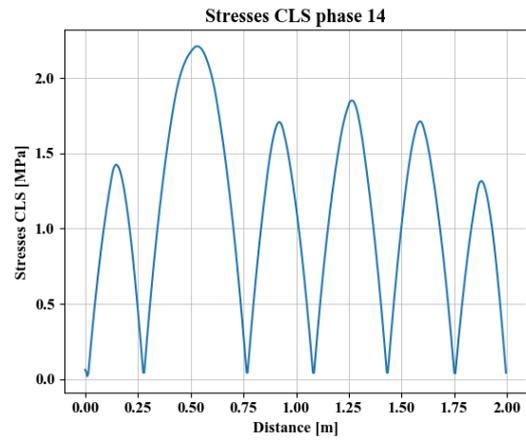
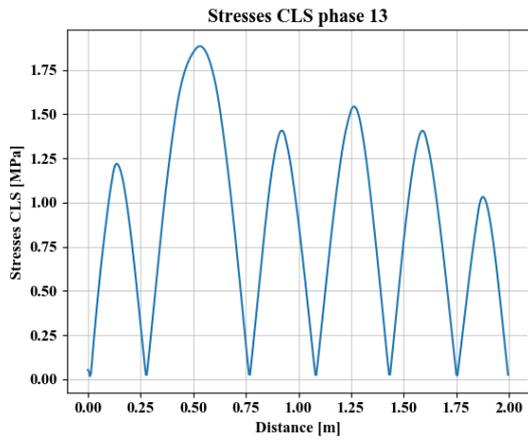
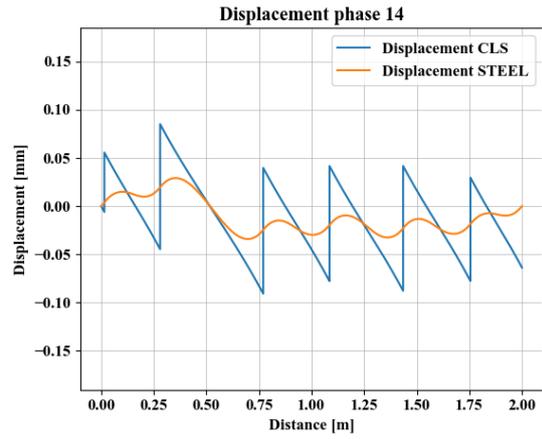
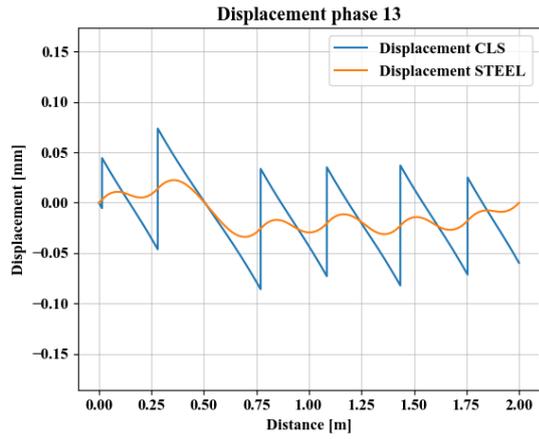


Figure 5-28 Diagrammi fasi 13 e 14

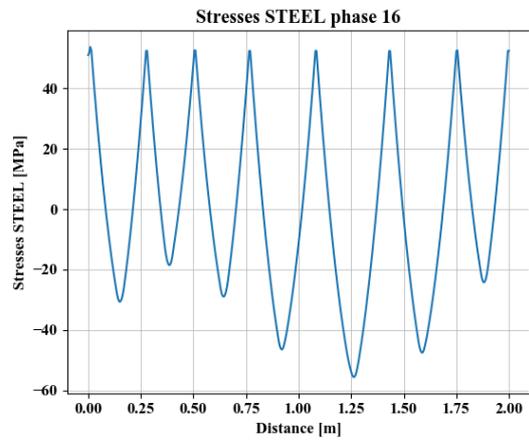
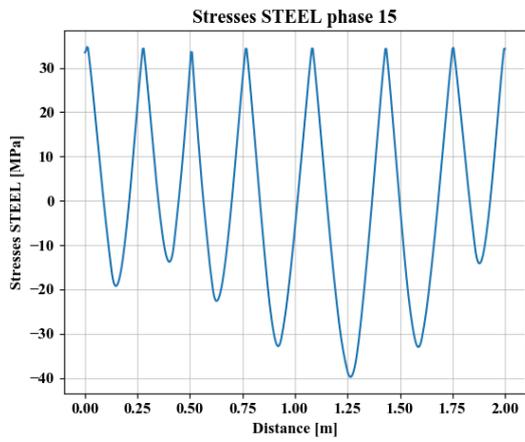
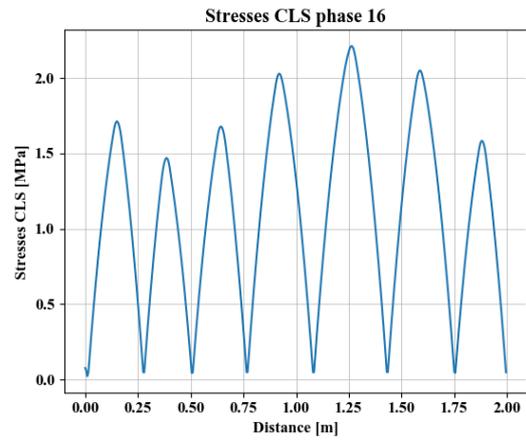
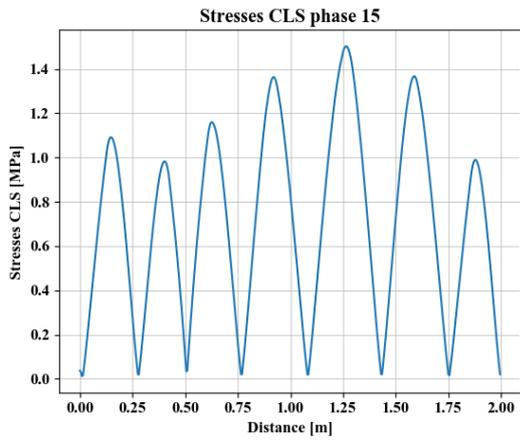
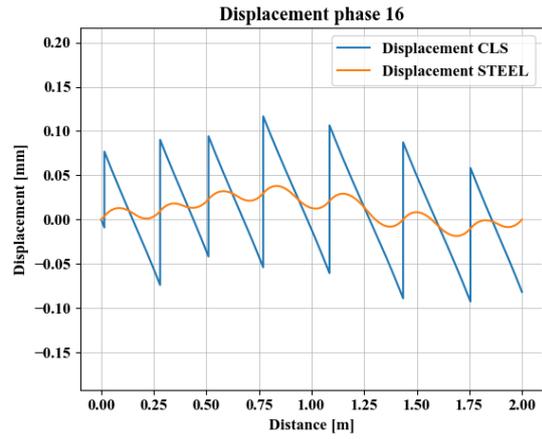
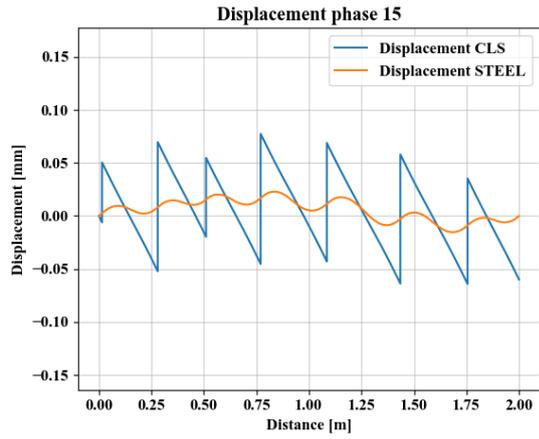


Figure 5-29 Diagrammi fasi 15 e 16

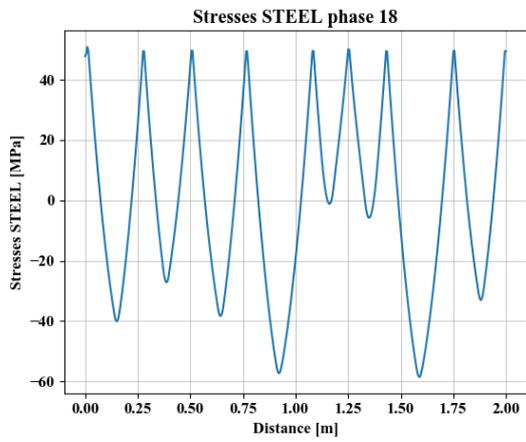
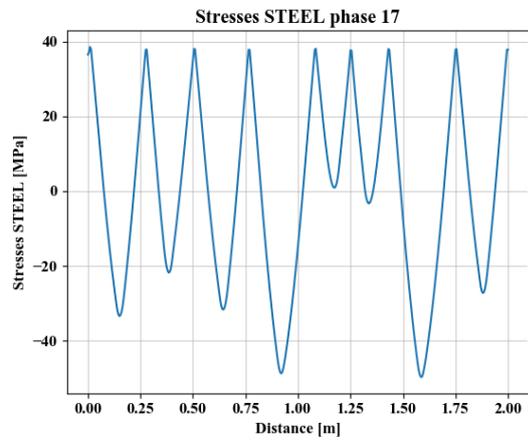
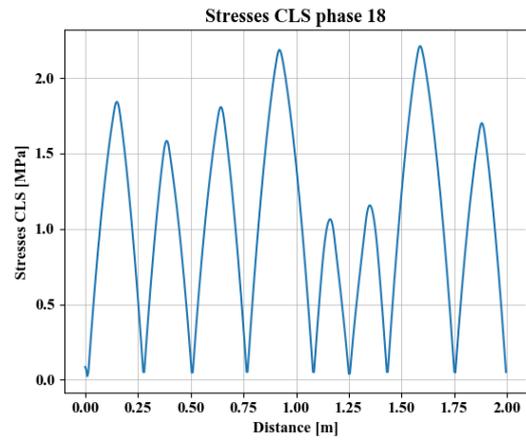
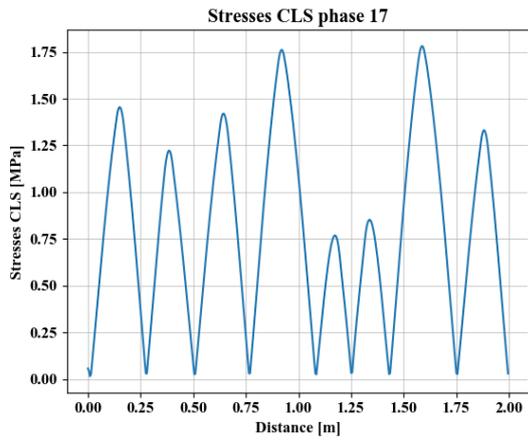
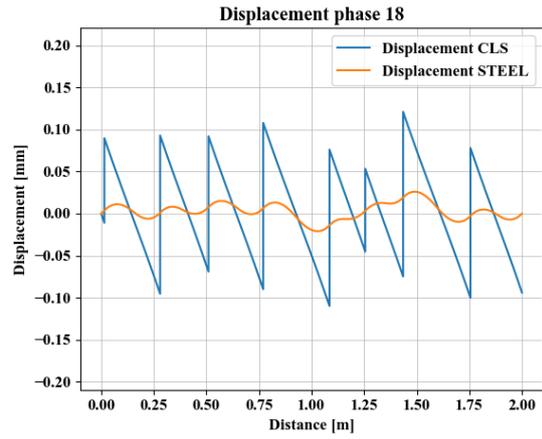
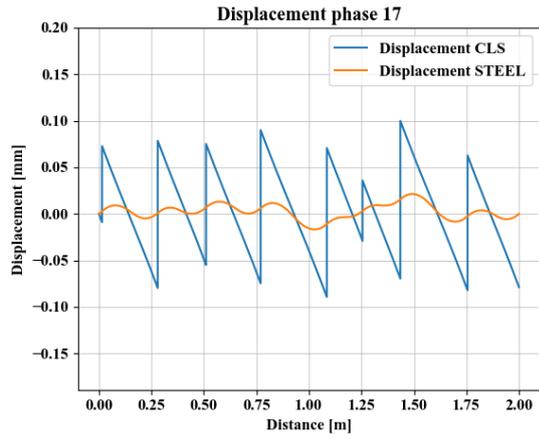


Figure 5-30 Diagrammi fasi 17 e 18

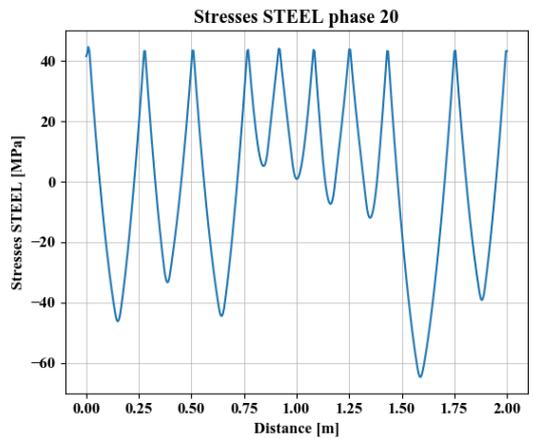
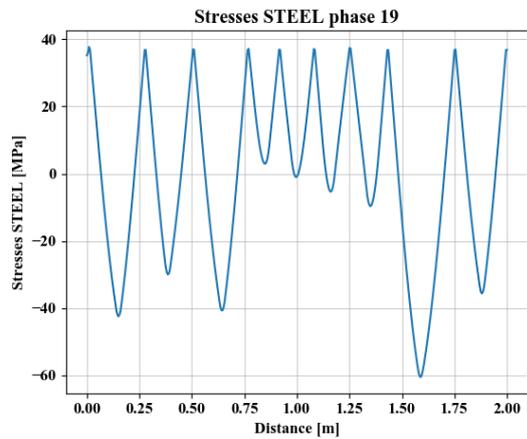
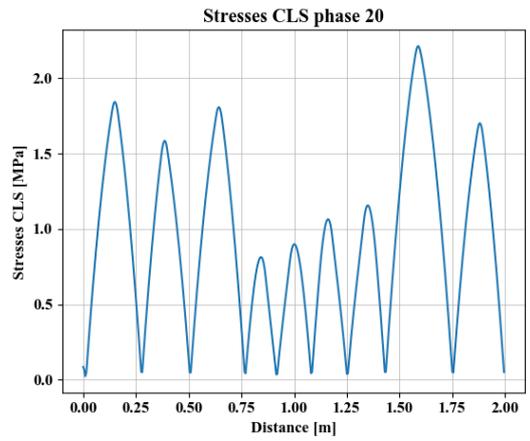
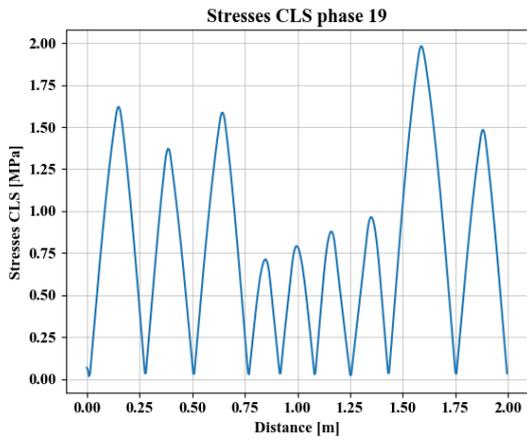
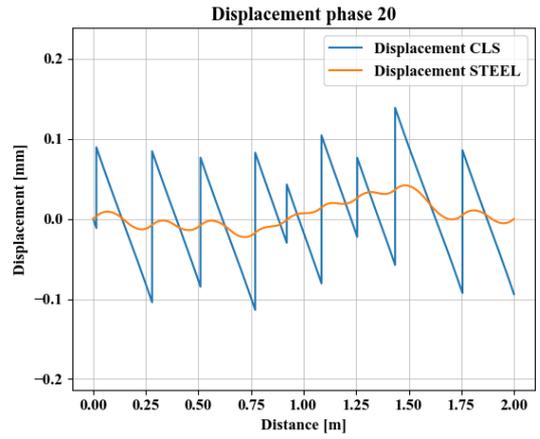
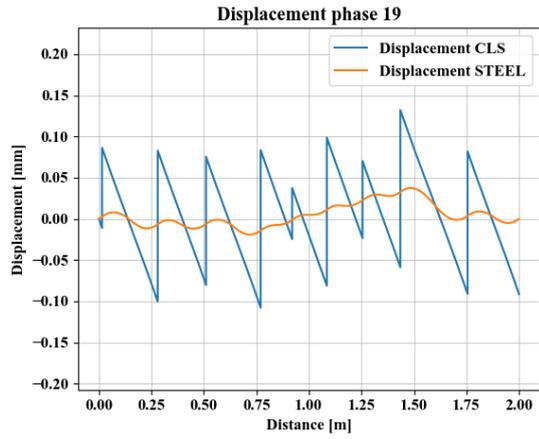


Figure 5-31 Diagrammi fasi 19 e 20

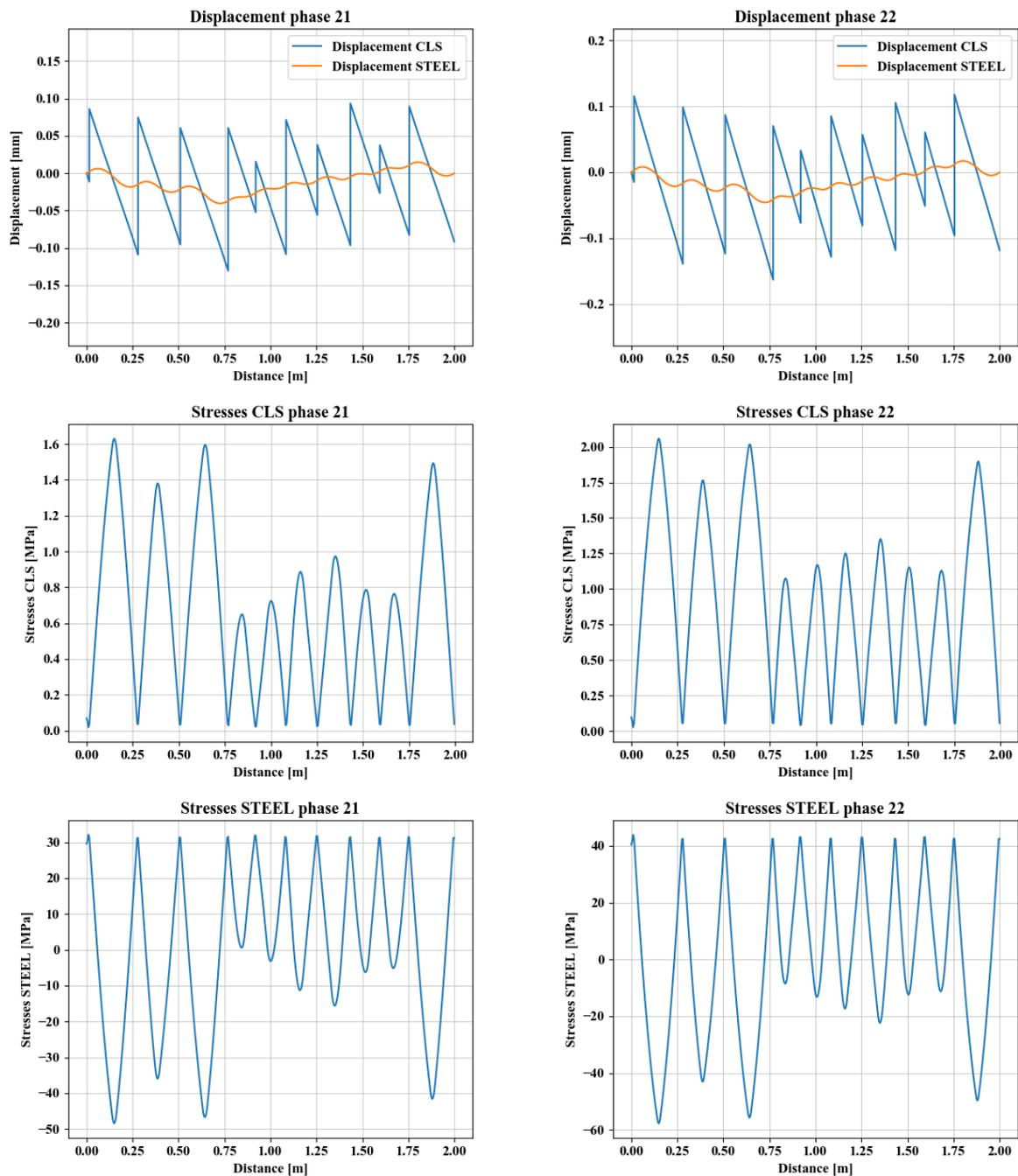


Figure 5-32 Diagrammi fasi 21 e 22

Come si può ben notare l'andamento delle curve degli spostamenti è differente rispetto al caso studiato applicando la forza di trazione alla barra nella sua estremità non vincolata. Ricordiamo infatti che ora l'armatura è vincolata ad entrambe le estremità, mentre il calcestruzzo lo è solo all'estremità sinistra. Questa configurazione conduce necessariamente i due materiali, a subire spostamenti diversi nell'intorno dell'estremità non vincolata lato calcestruzzo. Se infatti il calcestruzzo in corrispondenza dell'estremità destra è libero di spostarsi, mentre la barra ivi è vincolata, nasceranno necessariamente scorrimenti tra i due

materiali. Questi si annulleranno solamente una volta superata la lunghezza di trasmissione, la quale dipende oltre che da parametri meccanici, anche dalla geometria della barra e dunque dalla superficie di contatto. In particolare più la stessa è piccola (piccoli diametri) più la lunghezza di trasmissione è grande. Spostandoci quindi dall'estremità libera verso quella vincolata, iniziamo a notare l'effetto della barra di armatura, la quale mediante le tensioni di aderenza, costituisce di fatto un ulteriore vincolo per il calcestruzzo.

L'effetto della deformazione impressa conduce inoltre, alla nascita di tensioni nulle all'estremità libera, ove il materiale si deforma esattamente secondo la deformazione applicata. Man mano che i due materiali iniziano a collaborare la barra andrà in compressione, mentre il calcestruzzo tende ad andare sempre più in trazione.

Nella prima fase delle analisi, come già accennato in precedenza, si applica la deformazione di prima fessurazione al tirante già prefessurato. In questa situazione è ovvio che le tensioni nel calcestruzzo non arrivano al loro valore massimo. Dunque nella seconda fase si è incrementata la deformazione impressa col fine di condurre il calcestruzzo alla fessurazione. Tale deformazione è stata poi mantenuta costante anche in fase 3, al fine di valutare la tensione indotta sul tirante fessurato in modo da ottenere la deformazione da applicare in fase 4 per condurlo nuovamente a fessurazione. Dunque nelle fasi pari si porta il calcestruzzo alla sua tensione massima, mentre in quelle dispari si disattiva l'elemento SP2TR che rappresenta la fessura, e si continua ad applicare la deformazione della fase immediatamente precedente. Secondo quanto detto ad inizio paragrafo in merito alla valutazione della deformazione impressa, questa procedura è necessaria per evidenziare la caduta tensionale nei materiali e per ottenere il valore di $\sigma_{cr(i-1)}$.

Passiamo ora ad analizzare l'andamento tensionale dei due materiali lungo il tirante. Notiamo che nel caso in cui lo stesso risulta armato con 2 barre da 10 mm, in corrispondenza della formazione della fessura, le tensioni nel calcestruzzo si annullano mentre quelle nell'armatura crescono improvvisamente. Questo comportamento è del tutto normale in quanto all'atto della formazione della fessura il calcestruzzo naturalmente non può trasmettere ivi alcuna azione, quindi la barra deve sostituire l'effetto prima trasmesso dal conglomerato cementizio. Sorprende tuttavia notare l'insorgere di tensioni di compressione nell'intorno della fessura preesistente. Nelle fasi dispari infatti, non appena nasce la fessura, si registra una caduta tensionale improvvisa, in entrambi i materiali. Rimanendo la barra sempre in campo elastico, per i nostri regimi di "carico", non appena subisce una caduta tensionale, allora subisce anche un recupero elastico della deformazione. Analizziamo tale fenomeno scendendo più nel

dettaglio, considerando quanto succede tra la seconda e la terza fase. Giunti ad avere la tensione nel calcestruzzo pari ad f_{ctm} , si genera la fessura in maniera casuale continuando ad applicare al tirante ε_{cr2} (la deformazione che lo aveva condotto ad f_{ctm} in fase 2). Come già accennato più volte, la nascita della fessura comporta un abbassamento globale dei valori tensionali nei due materiali. Il rilassamento quindi comporta il rientro elastico, rispetto alla fase precedente, che è tuttavia impedito dalla presenza del calcestruzzo. La barra dunque vorrebbe “ritirarsi” di una certa quantità, ma questo gli è impedito dall’azione vincolante esercitata dal calcestruzzo. Per cui tale rientro ha l’effetto di mandare in compressione locale il calcestruzzo, mentre la barra nella stessa zona in cui il calcestruzzo va in compressione sarà soggetta ad un’azione di trazione. La deformazione in compressione del calcestruzzo parte dal valore di ε_{cr2} in quanto nell’estremità destra non è vincolato. Essa è incrementata, sempre in compressione, dall’azione indotta dal rientro della barra. Tale incremento è progressivamente legato all’insorgere delle tensioni tangenziali tra i due materiali, in quanto l’azione del rientro, in presenza di bassi quantitativi di armatura, è prevalente rispetto a quella del ritiro del calcestruzzo. Nella barra la situazione è duale, infatti la sua deformazione in trazione cresce per effetto dell’aumento della trazione dovuta all’azione vincolante esercitata dal calcestruzzo, nei confronti del rientro elastico dell’acciaio. Quando tale azione vincolante raggiunge il suo valore massimo, dettata dalle tensioni tangenziali all’interfaccia tra i due materiali, immediatamente inizia la decrescita delle tensioni di trazione nella barra. Inizia quindi a prevalere l’effetto del ritiro del calcestruzzo, che vista questa volta, l’azione vincolante della barra tende ad andare in trazione, partendo da uno stato in cui è compresso. Dunque prima si decompone e una volta raggiunto il valore di deformazione pari ad ε_{cr2} , va in trazione. Nella barra quindi si registrerà una riduzione dello stato di trazione, dettata dal ritiro del calcestruzzo, che porterà la barra stessa in compressione.

La quantità di armatura gioca un ruolo non indifferente. In particolare in presenza di alti quantitativi di armatura, la stessa si trova soggetta a spostamenti più piccoli. La formazione della seconda fessura abbassa i livelli tensionali al punto che il rientro elastico della barra ha un effetto “ininfluente” sullo stato del calcestruzzo. Infatti rispetto ai casi con poca armatura la caduta tensionale è inferiore, all’atto della nascita della seconda fessura, dunque lo è anche l’entità del rientro elastico. L’effetto del ritiro del calcestruzzo è quindi prevalente, per cui tale da farlo restare in trazione. Tuttavia la presenza del flesso, attorno alla fessura preesistente, è dovuta alla sovrapposizione, in questa zona, delle tensioni tangenziali derivanti dal rientro elastico della barra e dal ritiro del calcestruzzo, che sono opposte in verso. Se però

in presenza di bassi quantitativi di armatura le prime sono dominanti sulle seconde, e quindi comprimono il calcestruzzo, quando ci sono più barre a prevalere sono le tensioni tangenziali indotte dal ritiro, che quindi non generano compressione.

Notiamo inoltre che passando dalla fase 3 alla 4, la compressione scompare, in quanto si è aumentata la deformazione impressa al calcestruzzo per condurlo alla sua tensione massima (f_{ctm}). Questo fa sì che si vada ad incrementare lo stato tensionale della barra, annullando di fatto l'effetto del rientro elastico. Generando la nuova fessura anche qui si registra una riduzione dei livelli tensionali che conducono la barra a recuperare parte del suo spostamento. Tale fenomeno interessa ovviamente le zone in cui la barra è nuda, poiché in quel punto non si risente dell'effetto del calcestruzzo che lì è già fessurato. Appena nasce la 3° fessura, in fase 5, la barra si trova a livelli tensionali tali da subire un rientro elastico, rispetto a quanto succedeva in fase 4. Anche qui la barra tende a "ritirarsi", ma è sempre vincolata dal calcestruzzo. Il doppio picco in compressione, in corrispondenza della seconda fessura, è associato al fatto che la barra subisce il rientro da due lati. Infatti all'atto della nascita della terza fessura, la trazione presente nella barra si riduce, rispetto alla fase precedente, comportando un recupero elastico che si trasmette in maniera opposta sugli elementi adiacenti causando la compressione del calcestruzzo e l'aumento della trazione nella barra stessa.

Per tutte le configurazioni di armatura si riportano ora i valori di deformazione impressa applicata al calcestruzzo al fine di farlo fessurare nelle varie fasi delle analisi svolte. In corrispondenza della deformazione ε_{cri} si riporta anche la tensione massima (σ_{cri}) indotta dalla stessa deformazione, una volta che si è formata la fessura i -esima. Le configurazioni di armatura sono orinate in modo da avere il perimetro delle barre a contatto con il calcestruzzo crescente da sinistra verso destra. Questo permette di evidenziare come all'aumento della superficie di aderenza tra i due materiali, il numero di fessure che nascono è crescente, a causa dei livelli tensionali raggiunti dai due materiali. Configurazioni del tirante con bassi quantitativi di armatura dunque sviluppano meno fessure rispetto a quelle maggiormente armate. Questo è dovuto al fatto che per innescare lo sviluppo delle fessure in tiranti con poca armatura è necessario applicare deformazioni impresse elevate a causa della bassa rigidità del quantitativo di acciaio. In questi casi dunque si arriva prima alla deformazione limite che possiamo applicare ($\varepsilon_{lim}=0.001$). Il grafico seguente inoltre mostra l'andamento della deformazione ε_{cri} al crescere del perimetro della configurazione di armatura. Più esso è grande e più la deformazione da applicare è piccola, inoltre a parità di perimetro, le configurazioni con area di acciaio maggiore necessitano sempre di deformazioni impresse minori per

sviluppare la fessura i-esima. Tutto ciò è in accordo con quanto detto in merito alla rigidità del tirante al variare della percentuale di armatura presente.

		A1φ14	A2φ10	A1φ20	A2φ14	A4φ10	A2φ20	A4φ14
n° barre	[-]	1	2	1	2	4	2	4
φs	[mm]	14	10	20	14	10	20	14
Perimetro As	[mm]	44.0	62.8	62.8	88.0	125.7	125.7	175.9
Area As	[mm ²]	154	157	314	308	314	628	616
εcr1	[-]	7.26E-05						
σcr1	[MPa]	9.27E-01	1.05E+00	1.27E+00	1.37E+00	1.49E+00	1.69E+00	1.76E+00
εcr2	[-]	2.23E-04	1.89E-04	1.43E-04	1.26E-04	1.14E-04	9.85E-05	9.40E-05
σcr2	[MPa]	8.45E-01	9.12E-01	1.07E+00	1.12E+00	1.23E+00	1.44E+00	1.53E+00
εcr3	[-]	5.22E-04	4.19E-04	2.80E-04	2.41E-04	2.02E-04	1.51E-04	1.35E-04
σcr3	[MPa]	1.08E+00	1.11E+00	1.23E+00	1.31E+00	1.41E+00	1.55E+00	1.61E+00
εcr4	[-]	8.00E-04	6.43E-04	4.21E-04	3.50E-04	2.83E-04	2.03E-04	1.76E-04
σcr4	[MPa]	1.19E+00	1.24E+00	1.30E+00	1.65E+00	1.49E+00	1.58E+00	1.67E+00
εcr5	[-]	1.00E-03	8.70E-04	6.05E-04	4.14E-04	3.68E-04	2.60E-04	2.18E-04
σcr5	[MPa]	1.31E+00	1.35E+00	1.38E+00	1.43E+00	1.55E+00	1.65E+00	1.74E+00
εcr6	[-]		1.00E-03	8.20E-04	5.40E-04	4.55E-04	3.19E-04	2.58E-04
σcr6	[MPa]		1.76E+00	1.64E+00	1.46E+00	1.68E+00	1.77E+00	1.71E+00
εcr7	[-]			9.47E-04	7.10E-04	5.30E-04	3.66E-04	3.13E-04
σcr7	[MPa]			1.84E+00	1.69E+00	1.65E+00	1.88E+00	1.70E+00
εcr8	[-]			1.00E-03	8.12E-04	6.30E-04	4.08E-04	3.82E-04
σcr8	[MPa]			1.92E+00	1.71E+00	1.63E+00	1.50E+00	1.83E+00
εcr9	[-]				9.35E-04	7.78E-04	6.03E-04	4.34E-04
σcr9	[MPa]				1.49E+00	1.59E+00	1.78E+00	1.99E+00
εcr10	[-]				1.00E-03	1.00E-03	7.35E-04	4.70E-04
σcr10	[MPa]				1.5E+00	1.54E+00	1.98E+00	1.90E+00
εcr11	[-]						7.66E-04	5.20E-04
σcr11	[MPa]						1.63E+00	1.98E+00
εcr12	[-]						1.00E-03	5.50E-04
σcr12	[MPa]						1.86E+00	1.63E+00
εcr13	[-]							8.00E-04
σcr13	[MPa]							1.99E+00
εcr14	[-]							8.55E-04
σcr14	[MPa]							1.72E+00
εcr15	[-]							1.00E-03
σcr15	[MPa]							2.01E+00

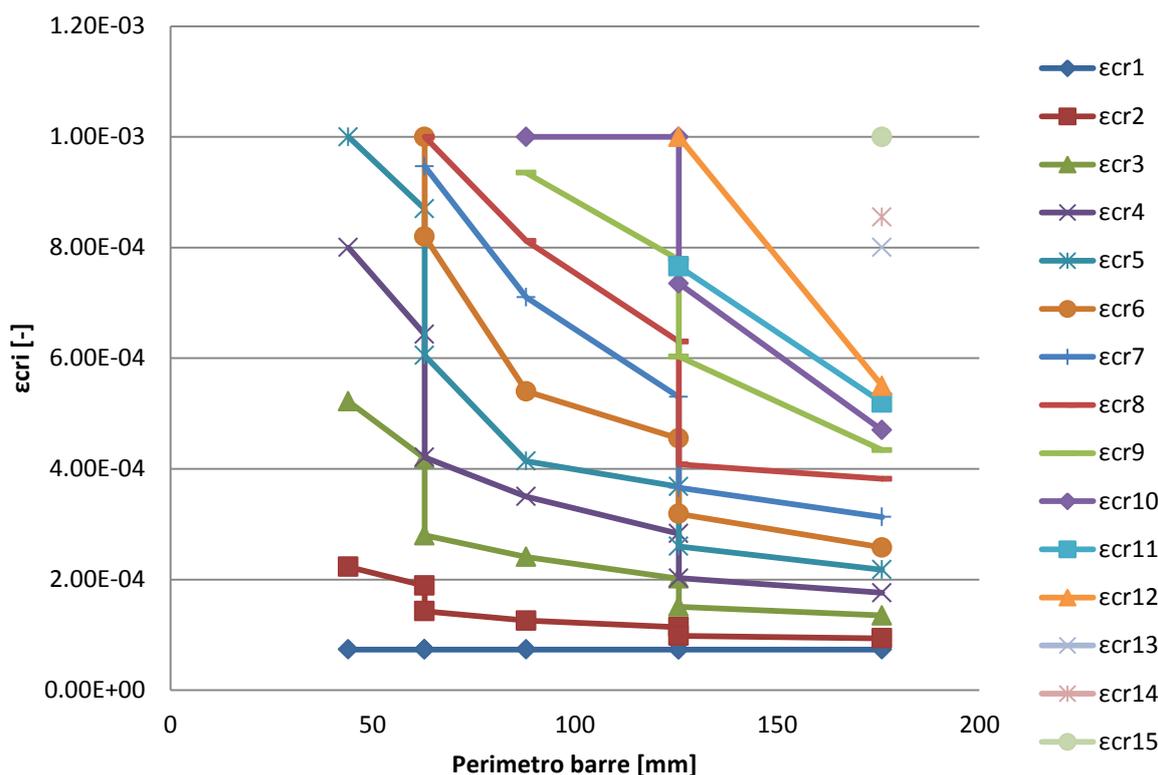


Figure 5-33 Deformazioni imprresse all'aumento della superficie di contatto tra i due materiali

È bene notare come nel momento in cui viene applicata la deformazione ϵ_{cri} , tale da portare il calcestruzzo alla sua tensione massima a trazione, l'apertura delle fessure preesistenti cresce. Questo fenomeno è dovuto naturalmente al fatto che il calcestruzzo, nelle sezioni fessurate, è libero di muoversi, a meno del vincolo opposto dalla barra. Per cui applicando una deformazione imprpressa maggiore, l'elemento tende a ritirarsi maggiormente, infatti nelle sezioni "libere" la deformazione, degli elementi di calcestruzzo, vale proprio quella imprpressa al tirante. Solo dopo la nascita della fessura i -esima, che comporta una caduta tensionale, si registra una lieve decrescita dell'ampiezza della fessura preesistente. Tuttavia questo fenomeno è limitato dal rientro elastico della barra. Infatti a seguito della nascita della nuova fessura, quelle preesistenti tenderebbero a chiudersi leggermente, ma il rientro elastico della barra si oppone, in parte, a questo meccanismo.

Per ognuna delle configurazioni di armatura si riportano ora i valori delle ampiezze delle fessure direttamente connesse all'applicazione della deformazione i -esima. In corrispondenza di tali valori si troverà anche la tensione raggiunta dal calcestruzzo a seguito dell'applicazione di ϵ_{cri} .

Armatura	n° fessura	ϵ_{cri}	w_i	σ_{cri}	Armatura	n° fessura	ϵ_{cri}	w_i	σ_{cri}
	[-]	[-]	[mm]	[MPa]		[-]	[-]	[mm]	[MPa]
2 ϕ 10	1	7.26E-05	0.08	1.05	1 ϕ 20	1	7.26E-05	0.07	1.27
	1	1.89E-04	0.24	2.2		1	1.43E-04	0.15	2.2
	2	1.89E-04	0.13	0.91		2	1.43E-04	0.10	1.07
	2	4.19E-04	0.48	2.2		2	2.80E-04	0.29	2.2
	3	4.19E-04	0.17	1.11		3	2.80E-04	0.13	1.23
	3	6.43E-04	0.46	2.2		3	4.21E-04	0.30	2.2
	4	6.43E-04	0.21	1.24		4	4.21E-04	0.15	1.30
	4	8.70E-04	0.46	2.2		4	6.05E-04	0.32	2.2
	5	8.70E-04	0.22	1.35		5	6.05E-04	0.14	1.38
	5	1.00E-03	0.44	2.2		5	8.20E-04	0.28	2.2
4 ϕ 10	6	1.00E-03	0.23	1.63	6	8.20E-04	0.14	1.64	
	6	1.00E-03	0.44	1.76	6	9.47E-04	0.21	2.20	
	1	7.26E-05	0.05	1.49	7	9.47E-04	0.09	1.84	
	1	1.14E-04	0.09	2.2	7	1.00E-03	0.11	1.92	
	2	1.14E-04	0.08	1.23	2 ϕ 20	1	7.26E-05	0.04	1.69
	2	2.02E-04	0.18	2.2		1	9.85E-05	0.06	2.2
	3	2.02E-04	0.09	1.41		2	9.85E-05	0.06	1.44
	3	2.83E-04	0.18	2.2		2	1.51E-04	0.12	2.2
	4	2.83E-04	0.10	1.49		3	1.51E-04	0.07	1.55
	4	3.68E-04	0.18	2.2		3	2.03E-04	0.12	2.2
5	3.68E-04	0.11	1.55	4		2.03E-04	0.08	1.58	
5	4.55E-04	0.18	2.2	4		2.60E-04	0.12	2.2	
6	4.55E-04	0.10	1.68	5		2.60E-04	0.08	1.65	
6	5.30E-04	0.14	2.20	5		3.19E-04	0.11	2.2	
1 ϕ 14	7	5.30E-04	0.12	1.65	6	3.19E-04	0.07	1.77	
	7	6.30E-04	0.17	2.2	6	3.66E-04	0.10	2.20	
	8	6.30E-04	0.11	1.63	7	3.66E-04	0.05	1.88	
	8	7.78E-04	0.18	2.2	7	4.08E-04	0.06	2.2	
	9	7.78E-04	0.11	1.59	8	4.08E-04	0.07	1.50	
	9	1.00E-03	0.18	2.2	8	6.03E-04	0.14	2.2	
	9	1.00E-03	0.10	1.54	9	6.03E-04	0.07	1.78	
	10	1.00E-03	0.10	1.54	9	7.35E-04	0.10	2.2	
1 ϕ 14	1	7.26E-05	0.09	0.93	10	7.35E-04	0.06	1.98	
	1	2.23E-04	0.31	2.2	10	7.66E-04	0.07	2.2	
	2	2.23E-04	0.15	0.85	11	7.66E-04	0.06	1.63	
	2	5.22E-04	0.62	2.2	11	1.00E-03	0.11	1.86	
	3	5.22E-04	0.20	1.08					
	3	8.00E-04	0.57	2.2					
	4	8.00E-04	0.25	1.19					
	4	1.00E-03	0.49	1.31					

Armatura	n° fessura	ϵ_{cri}	w_i	σ_{cri}	Armatura	n° fessura	ϵ_{cri}	w_i	σ_{cri}
	[-]	[-]	[mm]	[MPa]		[-]	[-]	[mm]	[MPa]
4 ϕ 14	1	7.26E-05	0.03	1.76	2 ϕ 14	1	7.26E-05	0.06	1.37
	1	9.40E-05	0.05	2.2		1	1.26E-04	0.11	2.2
	2	9.40E-05	0.06	1.53		2	1.26E-04	0.09	1.12
	2	1.35E-04	0.09	2.2		2	2.41E-04	0.24	2.2
	3	1.35E-04	0.06	1.61		3	2.41E-04	0.11	1.31
	3	1.76E-04	0.09	2.2		3	3.50E-04	0.23	2.2
	4	1.76E-04	0.06	1.67		4	3.50E-04	0.08	1.65
	4	2.18E-04	0.09	2.2		4	4.14E-04	0.13	2.2
	5	2.18E-04	0.07	1.74		5	4.14E-04	0.13	1.43
	5	2.58E-04	0.09	2.2		5	5.40E-04	0.24	2.2
	6	2.58E-04	0.07	1.71		6	5.40E-04	0.13	1.46
	6	3.13E-04	0.10	2.20		6	7.10E-04	0.23	2.20
	7	3.13E-04	0.07	1.70		7	7.10E-04	0.12	1.69
	7	3.82E-04	0.09	2.2		7	8.12E-04	0.18	2.2
8	3.82E-04	0.06	1.83	8	8.12E-04	0.13	1.71		
8	4.34E-04	0.08	2.2	8	9.35E-04	0.19	2.2		
9	4.34E-04	0.04	1.99	9	9.35E-04	0.13	1.49		
9	4.70E-04	0.04	2.2	9	1.00E-03	0.16	1.5		
10	4.70E-04	0.06	1.90						
10	5.20E-04	0.07	2.2						
11	5.20E-04	0.06	1.98						
11	5.50E-04	0.07	2.2						
12	5.50E-04	0.06	1.63						
12	8.00E-04	0.11	2.20						
13	8.00E-04	0.05	1.99						
13	8.55E-04	0.06	2.2						
14	8.55E-04	0.05	1.72						
14	1.00E-03	0.08	2.01						

Dall'osservazione delle tabelle appena presentate, si nota come l'entità dell'apertura della fessura sia direttamente legata al quantitativo di armatura. Inoltre anche il numero delle fessure è influenzato da questa variabile. Tale comportamento è quindi in accordo con il fenomeno fisico della fessurazione: i tiranti più rigidi tendono a formare più fessure ma con ampiezza minore rispetto a quelli meno armati.

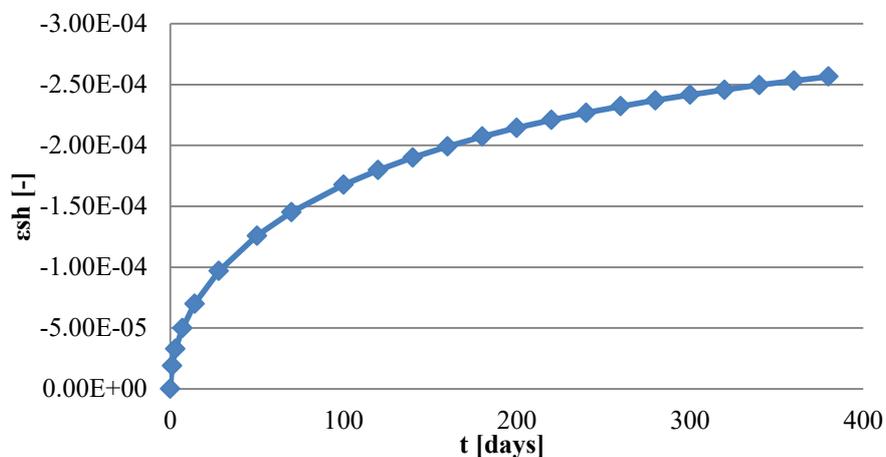
5.3. *Modello con ritiro e viscosità*

In questa fase si sono presi in considerazione gli effetti reologici del calcestruzzo al fine di analizzare l'evoluzione del processo fessurativo nel tempo. Tra i parametri che caratterizzano il comportamento variabile del calcestruzzo lungo la sua vita, rientrano non solo il ritiro e la viscosità, ma anche la variazione delle caratteristiche meccaniche. Infatti nel tempo il calcestruzzo tende ad incrementare la sua rigidità.

Il modello del tirante quindi, in questa fase, non è stato costruito facendo riferimento alle caratteristiche medie dei parametri del calcestruzzo, ma ricorrendo alle formulazioni proposte dal Model Code 1990, richiamandone la libreria all'interno del software agli elementi finiti.

I risultati che si ottengono presentano un andamento del tutto simile a quelli ottenuti nel modello soggetto alla deformazione impressa. Tuttavia questa volta l'incremento di deformazione tra una fase e quella successiva non è imposto dall'esterno, bensì è rappresentato dal valore corrispondente all'istante temporale che si sta analizzando, della deformazione di ritiro. Inoltre in questa fase si sta considerando anche l'effetto della viscosità, la quale in presenza di deformazioni impresse all'elemento, comporta un rilassamento delle tensioni. Tale fenomeno è funzione della variazione, nel tempo, dell'entità della deformazione applicata.

Considerando il ritiro mediante il Model Code 1990, si nota come lo stesso non presenti alcuna componente autogena, inoltre ponendo come tempo di partenza del fenomeno (t_s), quello dalla nascita del modello, allora avremo che il tirante fin dal tempo $t=0$ giorni sarà soggetto alla riduzione volumetrica. È banale notare come la grande crescita della deformazione di ritiro si ha nei primi giorni successivi al getto, per cui ivi i time step sono stati considerati più fitti. Nel grafico che segue si mostra l'andamento del ritiro nel tempo, valutato mediante le formulazioni fornite al capitolo 3:



I time step, come già accennato sono stati considerati più fitti nelle prime fasi, fino a 100 giorni, in modo da ottenere i risultati nei seguenti istanti temporali: 1, 3, 7, 14, 28 50 70 100 giorni. In seguito sono stati aumentati considerandoli di 50gg circa e variandoli a seconda delle configurazioni di armatura in base all'istante temporale in cui nasce la fessura. La scelta è stata dettata dal fatto che con il progredire del tempo le variazioni tensionali sono sempre più piccole.

Come nei casi precedenti il modello analizzato parte da una configurazione prefessurata, infatti il lembo posto all'estremità destra del tirante è vincolato solamente nella barra di armatura. Dunque le analisi sono volte ad individuare l'istante temporale in cui si sviluppa un'ulteriore fessura.

Indagando quindi il comportamento del tirante soggetto all'azione variabile del ritiro per ogni configurazione di armatura, si nota il medesimo trend in termini tensionali e deformativi. In particolare all'aumento della deformazione impressa le tensioni crescono sempre più, così come gli spostamenti. La differenza sostanziale risiede nelle tempistiche in cui si manifesta la fessura al variare della quantità di armatura. In particolare più l'elemento è armato e più la fessura compare prima. Questo comportamento è del tutto coerente con il fenomeno fisico, in quanto l'entità delle tensioni di trazione che si sviluppano nel calcestruzzo dipende dall'effetto vincolante esplicito dalle barre. Non appena nasce la fessura si ha la classica caduta tensionale, e nel caso di bassi quantitativi di armatura si nota nuovamente il fenomeno della compressione del calcestruzzo dovuta al rientro elastico della barra. Le tensioni poi tornano a crescere man mano che il ritiro cresce nel tempo, tuttavia, con il progredire dello stesso, tale incremento è sempre più piccolo per il fatto che il ritiro si sta attenuando. Inoltre l'effetto della viscosità comporta via via un rilassamento delle tensioni che quindi allunga i tempi in cui comparirebbero le fessure qualora non si tenesse in conto di tale effetto.

Crescendo nel tempo gli spostamenti è ovvio che l'ampiezza della fessura nella sezione che si è considerata prefessurata, cresce sempre di più. Tuttavia non appena nasce la seconda fessura si nota che l'apertura di quella preesistente tende a ridursi in tutte le configurazioni di armatura. Il fenomeno dunque è del tutto simile a quanto visto nel modello analizzato nel paragrafo 5.2.

Si riassumono di seguito le ampiezze delle fessure per ogni configurazione di armatura e l'istante temporale in cui nasce la seconda fessura. Viene inoltre indicato il valore della deformazione di ritiro che induce la fessura in questo istante temporale.

	t	$\epsilon_{sh}(t)$	w1		w2	
	[day]	[-]	[mm]		[mm]	
A2 ϕ 10	1000	3.06E-04	0.25	0.21	0.13	0.16
A4 ϕ 10	240	2.27E-04	0.10	0.08	0.09	0.11
A1 ϕ 14	3700	3.40E-04	0.32	0.27	0.18	0.18
A2 ϕ 14	300	2.42E-04	0.13	0.11	0.10	0.12
A4 ϕ 14	155	1.97E-04	0.05	0.05	0.05	0.05
A1 ϕ 20	400	2.60E-04	0.16	0.14	0.12	0.13
A2 ϕ 20	175	2.05E-04	0.06	0.06	0.08	0.10

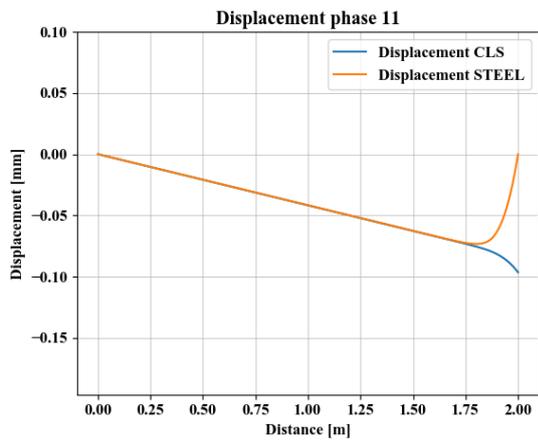
I valori dell'azione implicita al quale il tirante si trova soggetto al tempo "t" riportati in tabella, sono tali da indurre la prima fessurazione, escludendo la sezione prefessurata. Se confrontiamo questi valori con quelli che inducono la medesima fessurazione (ϵ_{cr2}) nel modello in cui non si sono considerati i fenomeni reologici, notiamo una differenza sostanziale. Infatti i valori del ritiro effettivo ($\epsilon_{sh}(t)$), che inducono la formazione della fessura indicata come w2, sono più alti dei corrispettivi valori di deformazione impressa del modello illustrato al paragrafo 5.2 (ϵ_{cr2}). Il che succede per ogni diversa configurazione di armatura. Questo fenomeno è imputabile alla viscosità, infatti il materiale nel tempo tende a rilassare le sue tensioni per effetto della storia di "carico" deformativo applicato negli istanti precedenti, per cui i valori di deformazione che conducono il materiali a far crescere le tensioni devono necessariamente essere molto grandi. Poichè via via nel tempo le tensioni si stanno rilassando per effetto delle deformazioni preagenti sull'elemento strutturale. Per puro confronto nella tabella seguente si riportano i valori cui si è fatto cenno:

$\epsilon_{sh}(t)$	[-]	3.06E-04	2.27E-04	3.40E-04	2.42E-04	1.97E-04	2.60E-04	2.05E-04
ϵ_{cr2}	[-]	1.89E-04	1.14E-04	2.23E-04	1.26E-04	9.40E-05	1.43E-04	9.85E-05

Si riportano a titolo di esempio, i diagrammi degli spostamenti e delle tensioni nei materiali, per una sola configurazione di armatura. In particolare si vuole mostrare come l'analogia con il modello in cui si aumentava la deformazione impressa in maniera iterativa, sia totale. L'unica sostanziale differenza risiede nelle tempistiche in cui si manifesta la fessura. Se infatti nel modello analizzato nel paragrafo 5.2 non si era preso in considerazione alcun effetto di tipo reologico, ora invece questo è l'aspetto predominante. I risultati riportati sono relativi alla configurazione di armatura costituita da 4 barre da 10 mm. In corrispondenza dei diagrammi inoltre si indica anche l'istante temporale della relativa fase dell'analisi svolta.

Nei diagrammi sottostanti è ben visibile il fenomeno del rientro elastico della barra di armatura e come lo stesso via via tende ad attenuarsi man mano che la deformazione del ritiro cresce.

Fase 11, t=740 gg



Fase 12, t=241 gg

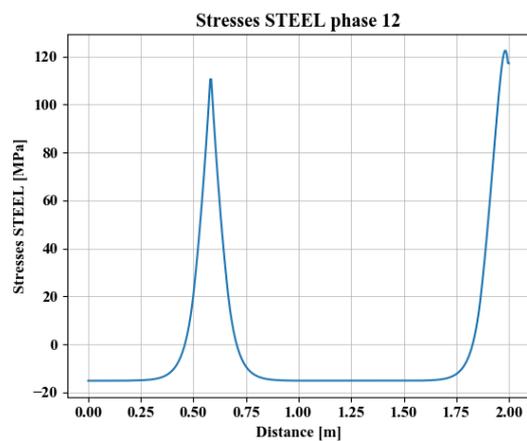
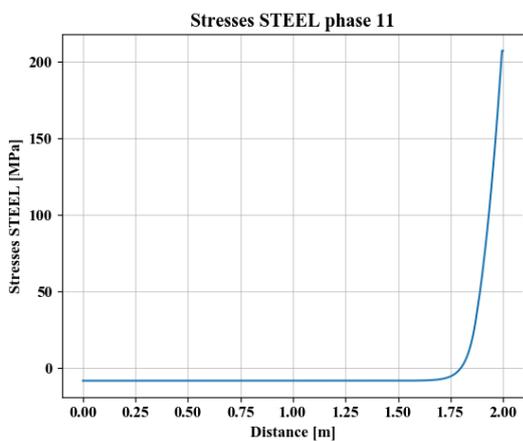
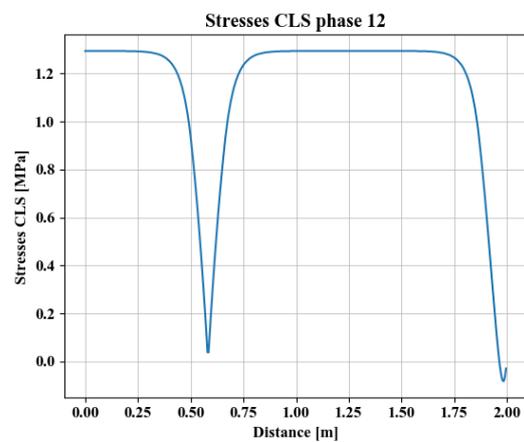
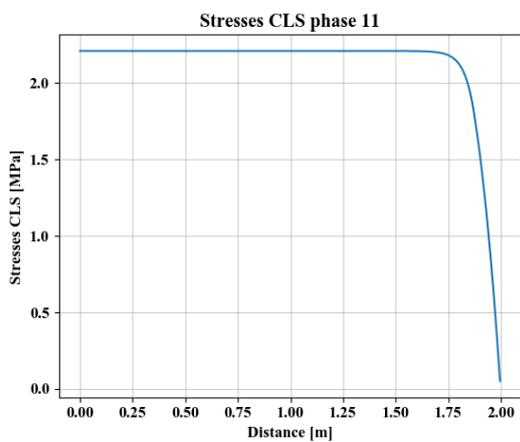
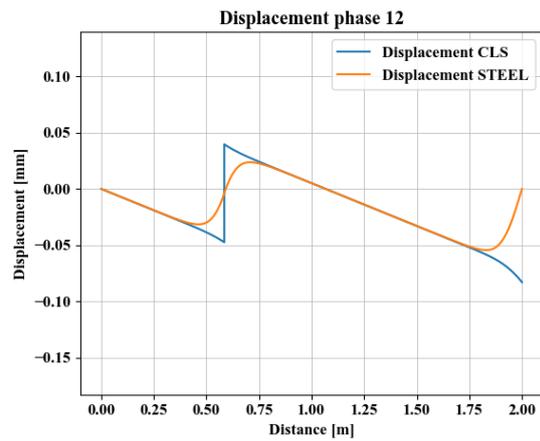


Figure 5-34 Diagrammi fasi 11 e 12

Fase 13, t=291 gg

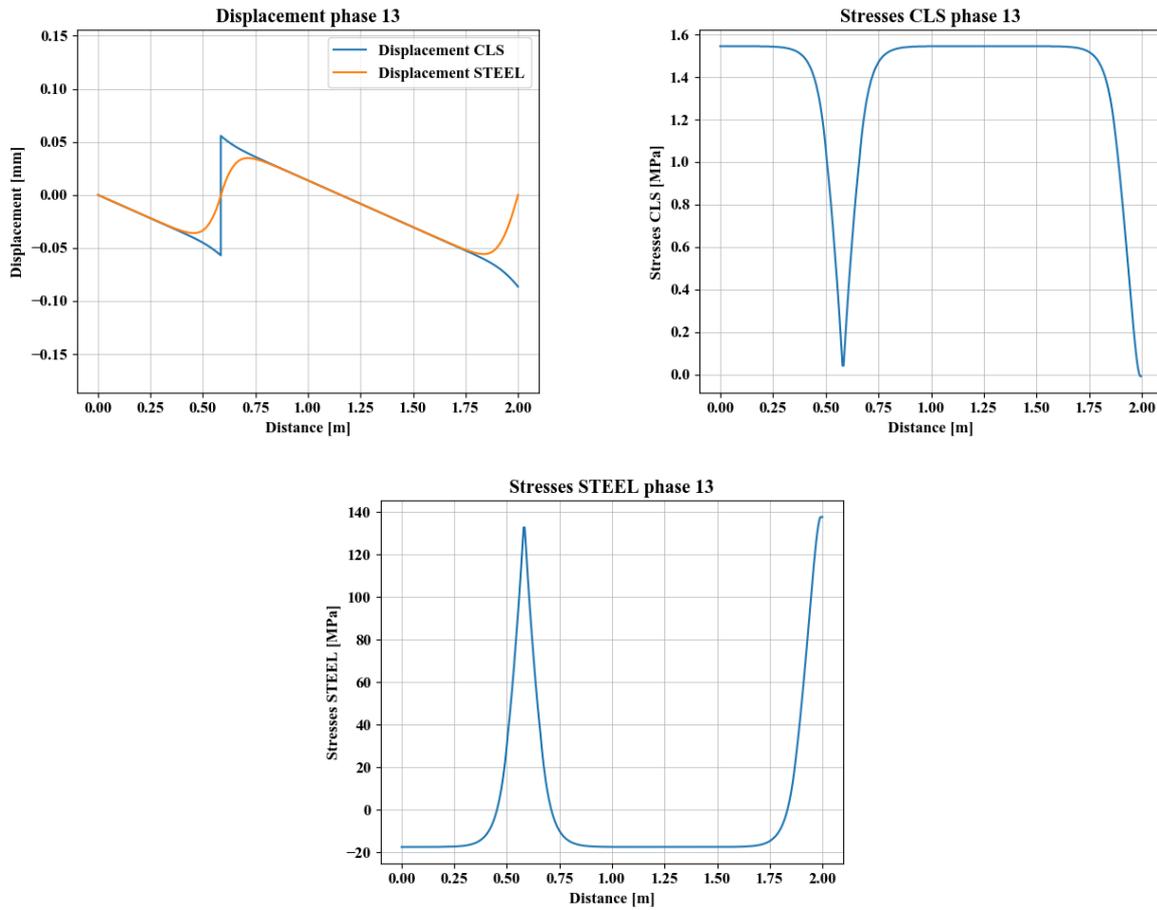


Figure 5-35 Diagrammi fase 13

Completata lo studio del processo fessurativo nei vari modelli, a questo punto si passa al confronto tra i risultati ottenuti. In particolare si confronteranno le ampiezze medie delle fessure delle varie analisi con le formulazioni proposte dalle normative.

6. CONFRONTO CON LE NORMATIVE: MC1990, MC2010, EC2

Le ampiezze delle fessure, calcolate tramite i modelli agli elementi finiti, vengono ora confrontate con le formulazioni proposte da alcune normative. In particolare, si ricorrerà all'utilizzo del Model Code 90, del Model code 2010 ed infine dell'Eurocodice 2. Come vedremo le formulazioni proposte hanno orientativamente la stessa struttura per giungere al calcolo dell'ampiezza della fessura. Infatti questa viene valutata passando attraverso il prodotto tra un valore medio della deformazione dell'elemento strutturale e una distanza tra le fessure. Noteremo inoltre come non tutte le normative tengano in considerazione gli effetti del ritiro del calcestruzzo, che tuttavia è un fenomeno di non poco conto. Inoltre è bene segnalare fin da subito che le formulazioni proposte forniscono in alcuni casi valori caratteristici dell'ampiezza della fessura (MC90, EC2), mentre altri valori di progetto (MC2010). Questi due valori possono essere considerati uguali, in virtù del fatto che il coefficiente di sicurezza in condizioni di esercizio si può considerare pari ad uno. Tuttavia nelle nostre analisi si calcola un valore medio dell'ampiezza della fessura in quanto ci siamo riferiti alle grandezze medie dei parametri meccanici dei materiali.

6.1. Model Code 1990

Nel Model Code 1990 le indicazioni riguardanti le condizioni di verifica agli stati limite di esercizio sono fornite al capitolo 7. In particolare al paragrafo 7.4.3.1 è riportata la verifica riguardante l'ampiezza delle fessure, in cui si trova che la stessa si può calcolare come:

$$w_k = l_{s,max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs})$$

Possiamo calcolare la lunghezza di trasferimento (ove è presente uno scorrimento tra i due materiali) mediante due differenti formulazioni a seconda della fase fessurativa che stiamo indagando:

$$l_{s,max} = \frac{\sigma_{s2}}{2 \cdot \tau_{bk}} \cdot \phi_s \cdot \frac{1}{(1 + \alpha_E \cdot \rho_{s,ef})} \quad \text{Fessura stabilizzata}$$

$$l_{s,max} = \frac{\phi_s}{3.6 \cdot \rho_{s,ef}} \quad \text{Formazione della singola fessura}$$

In cui si ha che:

$$\alpha_E = \frac{E_S}{E_C} \qquad \rho = \frac{A_S}{A_{c,eff}}$$

Per quanto riguarda la tensione di aderenza caratteristica tra barra e calcestruzzo, τ_{bk} , si riporta la tabella 7.4.1 presente al paragrafo 7.4.3.1, in cui sono riportati i vari valori da assumere al variare della fase fessurativa:

Table 7.4.2. Values for β and τ_{bk} (assuming that only deformed bars are used)

	Single crack formation		Stabilized cracking	
	β	τ_{bk}	β	τ_{bk}
Short term/instantaneous loading	0.6	$1.8f_{ctm}(t)$	0.6	$1.8f_{ctm}(t)$
Long term/repeated loading	0.6	$1.35f_{ctm}(t)$	0.38	$1.8f_{ctm}(t)$

Figura 6.1 Valori di τ_{bk} e β (Model Code 1990)

Il valore di σ_{s2} rappresenta la tensione nella barra di armatura in corrispondenza della sezione fessurata. Dunque deve essere in grado di trasferire la tensione prima trasmessa dal calcestruzzo e quindi pari a:

$$\sigma_s = \frac{(A_C + \alpha_E * A_S) \cdot f_{ctm}}{A_S}$$

In merito alla deformazione media lungo la lunghezza di trasferimento, notiamo che la stessa è definita per mezzo di 3 differenti grandezze:

- ϵ_{sm} rappresenta il valore di deformazione media delle barre di armatura proprio lungo la lunghezza l_{smax}
- ϵ_{cm} è la deformazione media del calcestruzzo sempre lungo la lunghezza di trasferimento
- ϵ_{cs} rappresenta infine la deformazione del calcestruzzo dovuta al ritiro

La differenza tra i primi due addendi deformativi si esprime come:

$$\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \epsilon_{s2} - \beta \cdot \epsilon_{sr2}$$

In cui ϵ_{s2} rappresenta la deformazione dell'armatura nella sezione fessurata ($(f_{ctm} * A_0) / (A_s * E_s)$), mentre ϵ_{sr2} vale, sempre facendo riferimento alle formulazioni proposte dal Model Code 1990:

$$\epsilon_{sr2} = \frac{f_{ctm}}{\rho_{s,ef} \cdot E_s} \cdot (1 + \alpha_E \cdot \rho_{s,ef})$$

Si sono indicati con α_E e $\rho_{s,ef}$ rispettivamente il coefficiente di omogenizzazione della sezione rispetto al calcestruzzo e la percentuale di armatura all'interno dell'area efficace di calcestruzzo:

$$\alpha_E = \frac{E_s}{E_c} \qquad \rho = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$$

Nelle nostre considerazioni, ci troviamo sempre in condizioni di carico tali da generare una trazione uniforme nella sezione, quindi l'intera area di calcestruzzo si può ritenere efficace.

Il contributo alla deformazione media dato dal ritiro, va considerato con il suo segno algebrico, dunque essendo una deformazione di compressione ne terremo conto utilizzando il segno negativo.

6.2. Model Code 2010

L'ampiezza della fessura è considerata dal Model Code 2010 come un valore di progetto, dunque affetto anche da coefficienti di sicurezza che possono essere diversi da uno. La formulazione proposta al capitolo 7.6.4, è la seguente:

$$w_d = 2 \cdot l_{s,max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs})$$

Come si nota i parametri che entrano in gioco sono gli stessi di quelli utilizzati dal Model Code 1990, tuttavia cambiano alcune formulazioni sulla loro valutazione, infatti si ha:

- $l_{s,max}$ che, ricordiamo rappresenta la lunghezza che consente al calcestruzzo di raggiungere nuovamente la sua massima resistenza a trazione si valuta come:

$$l_{s,max} = k \cdot c + \frac{1}{4} \cdot \frac{f_{ctm}}{\tau_{bms}} \cdot \frac{\phi}{\rho_{s,ef}}$$

I parametri ivi presenti hanno il seguente significato:

- k (considerato pari ad uno) rappresenta un coefficiente empirico per tenere in considerazione gli effetti del copriferro (c)
- τ_{bms} è la tensione di aderenza media tra calcestruzzo e armatura assunta, facendo riferimento alla tabella 7.6.2 del capitolo 7.6.4 del Model Code 2010, di seguito riportata:

Table 7.6-2: Values for τ_{bms} , β and η_r for deformed reinforcing bars

	Crack formation stage	Stabilized cracking stage
Short term, instantaneous loading	$\tau_{bms} = 1,8 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$	$\tau_{bms} = 1,8 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$
Long term, repeated loading	$\tau_{bms} = 1,35 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.6$ $\eta_r = 0$	$\tau_{bms} = 1,8 \cdot f_{ctm}(t)$ $\beta = 0.4$ $\eta_r = 1$

Figura 6.2 Valori di τ_{bk} e β (Model Code 1990)

La deformazione media si calcola invece mediante la seguente espressione:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs} = \frac{\sigma_s - \beta \cdot \sigma_{sr}}{E_s} + \eta \cdot \varepsilon_{sh}$$

In cui le grandezze presenti valgono:

$$\sigma_s = \frac{(A_c + \alpha_E \cdot A_s) \cdot f_{ctm}}{A_s}$$

$$\sigma_{sr} = \frac{f_{ctm}}{\rho} \cdot (1 + \alpha_E \cdot \rho_{s,ef})$$

6.3. Eurocodice 2

L' Eurocodice 2 è l'unica tra le normative prese in considerazione, che non tiene conto del contributo del ritiro nella valutazione della deformazione media dell'elemento strutturale. In particolare la formulazione proposta al capitolo 7.3.4 ci fornisce un valore caratteristico dell'ampiezza della fessura:

$$w_k = s_{r,max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

In cui i parametri presenti rappresentano:

- $s_{r,max}$ la distanza massima tra due fessure, valutabile mediante l'utilizzo di grandezze geometriche e di alcuni coefficienti:

$$s_{r,max} = k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_{s,ef}}$$

Ivi c rappresenta il copriferro e i coefficienti k_i tengono conto di differenti fenomeni:

- k_1 assunto pari a 0.8 per considerare le condizioni di buona aderenza tra i due materiali
- k_2 assunto pari ad 1 essendo il tirante soggetto solamente ad azioni di tipo assiale.
- k_3 e k_4 assunti rispettivamente pari a 3.4 e 0.425 essendo valori raccomandati.

- ε_{sm} la deformazione media delle barre di armatura
- ε_{cm} è la deformazione media del calcestruzzo compreso tra due fessure consecutive.

La differenza tra la deformazione media della barra e quella del calcestruzzo si esprime mediante la seguente formulazione:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \cdot \frac{f_{ctm}}{\rho_{s,ef}(1 + \alpha_E \cdot \rho_{s,ef})}}{E_s} \geq 0.6 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s}$$

Il coefficiente k_t serve per tenere in considerazione l'effetto della tipologia di carico agente (breve termine $k_t = 0.6$, lungo termine $k_t = 0.4$).

I risultati vengono presentati nello stesso ordine con cui sono stati analizzati i modelli, per cui troveremo prima i confronti tra le ampiezze delle fessure dovute all'applicazione della forza nell'estremità libera della barra ed inseguito i due blocchi relativi alle analisi con la deformazione impressa, prima quella variabile imposta dall'esterno ed inseguito il ritiro.

6.4. Confronti ampiezze fessura con forza applicata all'estremità

In questa fase, nelle formulazioni presentate nei paragrafi precedenti di questo capitolo, non si terrà in considerazione della presenza della deformazione dovuta al ritiro, in quanto stiamo considerando una verifica a breve termine, per cui non si risente degli effetti reologici. Sotto questa assunzione si trova che nella relativa tabella di ognuna delle tre normative prese in considerazione, si ha:

- MC90: $\tau_{bk} = 1.8 \cdot f_{ctm}$, $\beta = 0.6$
- MC2010: $\tau_{bm} = 1.8 \cdot f_{ctm}$, $\beta = 0.6$
- EC2: $k_t = 0.6$. In questo caso inoltre si è tralasciato il limite imposto sulla deformazione media dell'elemento $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) > 0.6 \sigma_s / E_s$, in quanto non risultando soddisfatto in alcuna configurazione di armatura.

In forma tabellare quindi si riportano i risultati in termini di ampiezza delle fessure medie per ognuna delle configurazioni analizzate. In particolare la media dell'ampiezza delle fessure è stata calcolata sulle 30 analisi svolte, per ognuna delle fessure che nascono nel tirante. Ricordiamo che l'ampiezza della prima fessura è quella posta nella sezione prefessurata, per cui il suo valore sarà circa la metà dei valori che si riscontrano quando la fessura compare nelle sezioni intermedie del tirante:

	Risultati FEM					MC90	MC2010	EC2
	w1m	w2m	w3m	w4m	w5m	wk	wd	wk
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
A2φ10	0.24	0.46	0.47	0.43		0.79	1.01	0.90
A4φ10	0.09	0.18	0.18	0.17	0.17	0.20	0.32	0.30
A1φ14	0.31	0.62	0.59	0.57		1.15	1.37	1.20
A2φ14	0.12	0.23	0.23	0.22		0.30	0.41	0.37
A4φ14	0.05	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.14	0.14
A1φ20	0.15	0.28	0.28	0.22		0.41	0.52	0.46
A2φ20	0.06	0.11	0.11	0.10		0.11	0.16	0.15

Passando ad analizzare il fenomeno in merito alla spaziatura tra le fessure si fa riferimento, nel modello FEM, ad un valore medio. Esso viene calcolato tra due fessure che si localizzano nella parte centrale del tirante, facendo la media per tutte le 30 analisi svolte per ogni differente configurazione di armatura. Si confrontano dunque le distanze tra due fessure che si localizzano in tale zona (indicate come d_w), con le formulazioni proposte dalle normative in merito alla loro spaziatura (valori di $2l_{smax}$ ed s_{rmax}). I risultati sono proposti di seguito in forma tabellare:

	FEM	MC90	MC2010	EC2
	d_w	$2 \cdot l_{smax}$	$2 \cdot l_{smax}$	s_{rmax}
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
A2φ10	625	1111	736	986
A4φ10	585	556	458	646
A1φ14	760	1587	980	1288
A2φ14	666	794	569	778
A4φ14	571	397	370	535
A1φ20	833	1111	736	986
A2φ20	674	556	438	612

I valori ricavati in termini di ampiezza della fessura possono considerarsi in accordo con le previsioni fornite dalle normative. Notiamo inoltre che avendo trascurato le fessure che nascono nella zona adiacente alla sezione in cui anche il calcestruzzo è vincolato, la distanza tra le fessure risulta essere in accordo con le formulazioni presenti nelle normative. Tuttavia bisogna sempre tenere a mente che tale analisi individua la posizione della fessura in maniera automatica tra tutti i punti che si trovano alla massima resistenza a trazione del calcestruzzo.

6.5. Confronti ampiezze fessura con deformazione impressa

Nell'analizzare questo fenomeno, necessariamente si deve tenere in considerazione della presenza della deformazione nelle formulazioni delle normative. Il valore utilizzato rappresenta la deformazione che si imprime ogni volta che si vuole generare una nuova fessura (ϵ_{cri}). Riferendoci quindi agli effetti a lungo termine, nella valutazione delle ampiezze delle fessure mediante le formulazioni presenti nelle norme, utilizzeremo i seguenti parametri:

- MC90: $\tau_{bk} = 1.8 \cdot f_{ctm}$, $\beta = 0.38$
- MC2010: $\tau_{bm} = 1.8 \cdot f_{ctm}$, $\beta = 0.4$
- EC2: $k_t = 0.4$.

Per ognuna delle configurazioni di armatura si riportano le tabelle contenenti l'evoluzione dell'ampiezza di ognuna fessura che nasce nel tirante l'incrementarsi della deformazione impressa. Questi valori verranno confrontati con le formulazioni proposte dalle normative, valutate mediante i parametri appena evidenziati. Si riportano inoltre anche i valori medi dell'ampiezza della fessura n-esima, calcolata mediando i due valori in corrispondenza dello stesso valore di deformazione impressa ϵ_{cri} .

6.5.1. Configurazione 2 barre $\phi 10$

Risultati FEM						
ϵ_{cri}	w1	w2	w3	w4	w5	w6
[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
7.26E-05	0.08					
1.89E-04	0.24					
1.89E-04	0.20	0.13				
4.19E-04	0.24	0.48				
4.19E-04	0.21	0.41	0.17			
6.43E-04	0.24	0.48	0.46			
6.43E-04	0.21	0.42	0.41	0.21		
8.70E-04	0.24	0.48	0.47	0.46		
8.70E-04	0.22	0.43	0.42	0.41	0.22	
1.00E-03	0.25	0.49	0.48	0.48	0.44	
1.00E-03	0.23	0.45	0.44	0.43	0.40	0.23

Risultati FEM ampiezze medie							MC90	MC2010	EC2
ϵ_{cri}	w1m	w2m	w3m	w4m	w5m	w6m	wk	wd	wk
[-]	[mm]	[mm]							
7.26E-05	0.08						0.83	1.06	1.35
1.89E-04	0.22						0.89	1.15	1.35

4.19E-04	0.22	0.44					1.02	1.32	1.35
6.43E-04	0.22	0.45	0.43				1.14	1.48	1.35
8.70E-04	0.23	0.46	0.44	0.43			1.27	1.65	1.35
1.00E-03	0.24	0.47	0.46	0.45	0.42	0.23	1.34	1.74	1.35

6.5.2. Configurazione 4 barre $\phi 10$

Risultati FEM										
ϵ_{cri}	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
[-]	[mm]									
7.26E-05	0.05									
1.14E-04	0.09									
1.14E-04	0.07	0.08								
2.02E-04	0.09	0.18								
2.02E-04	0.08	0.16	0.09							
2.83E-04	0.09	0.18	0.18							
2.83E-04	0.08	0.16	0.15	0.10						
3.68E-04	0.09	0.18	0.18	0.18						
3.68E-04	0.08	0.16	0.16	0.16	0.11					
4.55E-04	0.09	0.18	0.18	0.18	0.18					
4.55E-04	0.08	0.17	0.16	0.17	0.17	0.10				
5.30E-04	0.09	0.19	0.18	0.18	0.19	0.14				
5.30E-04	0.09	0.17	0.17	0.17	0.17	0.13	0.12			
6.30E-04	0.10	0.19	0.19	0.19	0.19	0.15	0.17			
6.30E-04	0.09	0.18	0.17	0.18	0.18	0.14	0.16	0.11		
7.78E-04	0.11	0.21	0.21	0.21	0.21	0.16	0.20	0.18		
7.78E-04	0.10	0.20	0.20	0.20	0.20	0.15	0.19	0.17	0.11	
1.00E-03	0.12	0.26	0.26	0.25	0.26	0.21	0.25	0.23	0.18	
1.00E-03	0.12	0.25	0.26	0.25	0.25	0.20	0.24	0.22	0.17	0.10

Risultati FEM ampiezze medie										
ϵ_{cri}	w1m	w2m	w3m	w4m	w5m	w6m	w7m	w8m	w9m	w10m
[-]	[mm]									
7.26E-05	0.05									
1.14E-04	0.08									
2.02E-04	0.09	0.17								
2.83E-04	0.09	0.17	0.16							
3.68E-04	0.09	0.17	0.17	0.17						
4.55E-04	0.09	0.18	0.17	0.17	0.17					
5.30E-04	0.09	0.18	0.17	0.18	0.18	0.14				
6.30E-04	0.09	0.19	0.18	0.18	0.19	0.14	0.17			
7.78E-04	0.11	0.20	0.20	0.21	0.20	0.16	0.19	0.17		
1.00E-03	0.12	0.26	0.26	0.25	0.25	0.20	0.25	0.22	0.18	0.10

	MC90	MC2010	EC2
ϵ_{cr}	wk	wd	wk
[-]	[mm]	[mm]	[mm]
7.26E-05	0.22	0.36	0.46
1.14E-04	0.23	0.38	0.46
2.02E-04	0.26	0.42	0.46
2.83E-04	0.28	0.45	0.46
3.68E-04	0.31	0.49	0.46
4.55E-04	0.33	0.53	0.46
5.30E-04	0.35	0.57	0.46
6.30E-04	0.38	0.61	0.46
7.78E-04	0.42	0.68	0.46
1.00E-03	0.48	0.78	0.46

6.5.3. Configurazione 1 barra $\phi 14$

Risultati FEM				
ϵ_{cr}	w1	w2	w3	w4
[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
7.26E-05	0.09			
2.23E-04	0.31			
2.23E-04	0.25	0.15		
5.22E-04	0.31	0.62		
5.22E-04	0.27	0.53	0.20	
8.00E-04	0.31	0.62	0.57	
8.00E-04	0.27	0.55	0.49	0.25
1.00E-03	0.30	0.60	0.54	0.49

	Risultati FEM ampiezze medie				MC90	MC2010	EC2
ϵ_{cr}	w1m	w2m	w3m	w4m	wk	wd	wk
[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
7.26E-05	0.09				1.20	1.44	1.80
2.23E-04	0.28				1.32	1.59	1.80
5.22E-04	0.29	0.57			1.56	1.88	1.80
8.00E-04	0.29	0.59	0.53	0.25	1.78	2.15	1.80
1.00E-03	0.30	0.60	0.54	0.49	1.94	2.35	1.80

6.5.4. Configurazione 2 barre $\phi 14$

Risultati FEM									
ϵ_{cr}	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9
[-]	[mm]								
7.26E-05	0.06								
1.26E-04	0.11								
1.26E-04	0.10	0.09							

2.41E-04	0.12	0.24								
2.41E-04	0.10	0.21	0.11							
3.50E-04	0.12	0.24	0.23							
3.50E-04	0.11	0.22	0.22	0.08						
4.14E-04	0.12	0.24	0.24	0.13						
4.14E-04	0.11	0.21	0.21	0.11	0.13					
5.40E-04	0.12	0.25	0.25	0.13	0.24					
5.40E-04	0.11	0.22	0.22	0.12	0.22	0.13				
7.10E-04	0.14	0.27	0.27	0.15	0.27	0.23				
7.10E-04	0.13	0.25	0.26	0.14	0.26	0.21	0.12			
8.12E-04	0.14	0.28	0.28	0.15	0.28	0.24	0.18			
8.12E-04	0.13	0.26	0.27	0.14	0.26	0.22	0.17	0.13		
9.35E-04	0.14	0.29	0.29	0.16	0.29	0.25	0.20	0.19		
9.35E-04	0.14	0.28	0.28	0.15	0.27	0.24	0.18	0.17	0.13	
1.00E-03	0.14	0.29	0.29	0.16	0.28	0.25	0.19	0.18	0.16	

Risultati FEM ampiezze medie										MC90	MC2010	EC2
ecri	w1m	w2m	w3m	w4m	w5m	w6m	w7m	w8m	w9m	wk	wd	wk
[-]	[mm]	[mm]										
7.26E-05	0.06									0.32	0.45	0.56
1.26E-04	0.10									0.35	0.48	0.56
2.41E-04	0.11	0.22								0.39	0.55	0.56
3.50E-04	0.11	0.23	0.22							0.43	0.61	0.56
4.14E-04	0.11	0.23	0.23	0.12						0.46	0.65	0.56
5.40E-04	0.12	0.24	0.24	0.13	0.23					0.51	0.72	0.56
7.10E-04	0.13	0.26	0.27	0.14	0.26	0.22				0.58	0.81	0.56
8.12E-04	0.14	0.27	0.27	0.15	0.27	0.23	0.18			0.62	0.87	0.56
9.35E-04	0.14	0.28	0.28	0.16	0.28	0.25	0.19	0.18	0.13	0.67	0.94	0.56
1.00E-03	0.14	0.29	0.29	0.16	0.28	0.25	0.19	0.18	0.16	0.69	0.98	0.56

6.5.5. Configurazione 4 barre $\phi 14$

Risultati FEM														
ecri	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10	w11	w12	w13	w14
[-]	[mm]													
7.26E-05	0.03													
9.40E-05	0.05													
9.40E-05	0.04	0.06												
1.35E-04	0.05	0.09												
1.35E-04	0.04	0.08	0.06											
1.76E-04	0.05	0.09	0.09											
1.76E-04	0.04	0.08	0.08	0.06										
2.18E-04	0.05	0.09	0.09	0.09										
2.18E-04	0.04	0.09	0.08	0.09	0.07									

2.58E-04	0.05	0.09	0.09	0.09	0.09									
2.58E-04	0.04	0.09	0.08	0.09	0.08	0.07								
3.13E-04	0.05	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10								
3.13E-04	0.05	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.07							
3.82E-04	0.05	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.09							
3.82E-04	0.05	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.09	0.06						
4.34E-04	0.06	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08						
4.34E-04	0.05	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.04					
4.70E-04	0.06	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.04					
4.70E-04	0.06	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.04	0.06				
5.20E-04	0.06	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.11	0.09	0.04	0.07				
5.20E-04	0.06	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.04	0.07	0.06			
5.50E-04	0.06	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.11	0.09	0.04	0.07	0.07			
5.50E-04	0.06	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.04	0.07	0.06	0.06		
8.00E-04	0.07	0.15	0.15	0.16	0.15	0.16	0.16	0.13	0.07	0.11	0.11	0.11		
8.00E-04	0.07	0.15	0.15	0.16	0.15	0.15	0.15	0.13	0.06	0.11	0.10	0.10	0.05	
8.55E-04	0.08	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.14	0.07	0.12	0.11	0.11	0.06	
8.55E-04	0.07	0.15	0.15	0.16	0.16	0.16	0.16	0.13	0.07	0.12	0.11	0.11	0.06	0.05
1.00E-03	0.08	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.16	0.08	0.14	0.13	0.13	0.08	0.08

ϵ_{cr}	w1m	w2m	w3m	w4m	w5m	w6m	w7m	w8m	w9m	w10m	w11m	w12m	w13m	w14m
[-]	[mm]													
7.26E-05	0.03													
9.40E-05	0.04													
1.35E-04	0.04	0.09												
1.76E-04	0.04	0.09	0.09											
2.18E-04	0.04	0.09	0.09	0.09										
2.58E-04	0.04	0.09	0.09	0.09	0.09									
3.13E-04	0.05	0.09	0.09	0.10	0.09	0.09								
3.82E-04	0.05	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.09							
4.34E-04	0.06	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08						
4.70E-04	0.06	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.08	0.04					
5.20E-04	0.06	0.12	0.11	0.12	0.12	0.11	0.11	0.09	0.04	0.07				
5.50E-04	0.06	0.12	0.11	0.12	0.12	0.12	0.11	0.09	0.04	0.07	0.07			
8.00E-04	0.07	0.15	0.15	0.16	0.15	0.16	0.16	0.13	0.07	0.11	0.11	0.11		
8.55E-04	0.08	0.15	0.15	0.16	0.16	0.16	0.16	0.14	0.07	0.12	0.11	0.11	0.06	0.05
1.00E-03	0.08	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.17	0.16	0.08	0.14	0.13	0.13	0.08	0.08

	MC90	MC2010	EC2
ϵ_{cr}	wk	wd	wk
[-]	[mm]	[mm]	[mm]
7.26E-05	0.09	0.17	0.20
9.40E-05	0.10	0.18	0.20
1.35E-04	0.11	0.19	0.20

1.76E-04	0.11	0.21	0.20
2.18E-04	0.12	0.22	0.20
2.58E-04	0.13	0.24	0.20
3.13E-04	0.14	0.26	0.20
3.82E-04	0.15	0.28	0.20
4.34E-04	0.16	0.30	0.20
4.70E-04	0.17	0.32	0.20
5.20E-04	0.18	0.33	0.20
5.50E-04	0.19	0.35	0.20
8.00E-04	0.24	0.44	0.20
8.55E-04	0.25	0.46	0.20
1.00E-03	0.28	0.51	0.20

6.5.6. Configurazione 1 barra $\phi 20$

Risultati FEM							
ϵ_{cri}	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7
[-]	[mm]						
7.26E-05	0.07						
1.43E-04	0.15						
1.43E-04	0.12	0.10					
2.80E-04	0.15	0.29					
2.80E-04	0.13	0.25	0.13				
4.21E-04	0.15	0.29	0.30				
4.21E-04	0.13	0.26	0.26	0.15			
6.05E-04	0.16	0.32	0.32	0.32			
6.05E-04	0.15	0.29	0.30	0.29	0.14		
8.20E-04	0.19	0.36	0.38	0.36	0.28		
8.20E-04	0.18	0.34	0.35	0.34	0.26	0.14	
9.47E-04	0.19	0.37	0.38	0.37	0.29	0.21	
9.47E-04	0.19	0.36	0.37	0.36	0.28	0.20	0.09
1.00E-03	0.20	0.37	0.38	0.37	0.29	0.22	0.11

ϵ_{cri}	Risultati FEM ampiezze medie							MC90	MC2010	EC2
	w1m	w2m	w3m	w4m	w5m	w6m	w7m	wk	wd	wk
[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
7.26E-05	0.07							0.45	0.57	0.70
1.43E-04	0.14							0.49	0.63	0.70
2.80E-04	0.14	0.27						0.56	0.73	0.70
4.21E-04	0.14	0.28	0.28					0.64	0.83	0.70
6.05E-04	0.15	0.31	0.31	0.31				0.74	0.97	0.70
8.20E-04	0.18	0.35	0.36	0.35	0.27			0.86	1.12	0.70
9.47E-04	0.19	0.37	0.38	0.36	0.28	0.21	0.09	0.93	1.22	0.70
1.00E-03	0.20	0.37	0.38	0.37	0.29	0.22	0.11	0.96	1.26	0.70

6.5.7. Configurazione 2 barre $\phi 20$

Risultati FEM											
ϵ_{cri}	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10	w11
[-]	[mm]										
7.26E-05	0.04										
9.85E-05	0.06										
9.85E-05	0.05	0.06									
1.51E-04	0.06	0.12									
1.51E-04	0.05	0.10	0.07								
2.03E-04	0.06	0.12	0.12								
2.03E-04	0.05	0.10	0.10	0.08							
2.60E-04	0.06	0.12	0.12	0.12							
2.60E-04	0.05	0.11	0.11	0.11	0.08						
3.19E-04	0.06	0.12	0.12	0.12	0.11						
3.19E-04	0.06	0.11	0.11	0.12	0.10	0.07					
3.66E-04	0.06	0.13	0.12	0.13	0.11	0.10					
3.66E-04	0.06	0.12	0.12	0.12	0.11	0.10	0.05				
4.08E-04	0.06	0.13	0.13	0.13	0.12	0.11	0.06				
4.08E-04	0.06	0.12	0.12	0.12	0.11	0.10	0.06	0.07			
6.03E-04	0.08	0.17	0.18	0.16	0.17	0.15	0.09	0.14			
6.03E-04	0.08	0.16	0.17	0.16	0.16	0.14	0.08	0.13	0.07		
7.35E-04	0.09	0.20	0.20	0.19	0.19	0.18	0.10	0.16	0.10		
7.35E-04	0.09	0.19	0.19	0.18	0.18	0.17	0.10	0.16	0.09	0.06	
7.66E-04	0.09	0.20	0.20	0.19	0.18	0.18	0.10	0.16	0.10	0.07	
7.66E-04	0.09	0.19	0.19	0.18	0.18	0.17	0.10	0.16	0.09	0.07	0.06
1.00E-03	0.12	0.23	0.22	0.24	0.21	0.21	0.13	0.21	0.14	0.11	0.11

Risultati FEM ampiezze medie											
ϵ_{cri}	w1m	w2m	w3m	w4m	w5m	w6m	w7m	w8m	w9m	w10m	w11m
[-]	[mm]										
7.26E-05	0.04										
9.85E-05	0.05										
1.51E-04	0.05	0.11									
2.03E-04	0.06	0.11	0.11								
2.60E-04	0.06	0.12	0.11	0.11							
3.19E-04	0.06	0.12	0.12	0.12	0.11						
3.66E-04	0.06	0.12	0.12	0.12	0.11	0.10					
4.08E-04	0.06	0.13	0.13	0.13	0.12	0.10	0.06				
6.03E-04	0.08	0.17	0.17	0.16	0.16	0.15	0.08	0.13			
7.35E-04	0.09	0.19	0.19	0.19	0.18	0.18	0.10	0.16	0.10		
7.66E-04	0.09	0.19	0.19	0.19	0.18	0.18	0.10	0.16	0.10	0.07	0.06
1.00E-03	0.12	0.23	0.22	0.24	0.21	0.21	0.13	0.21	0.14	0.11	0.11

	MC90	MC2010	EC2
ϵ_{cr}	wk	wd	wk
[-]	[mm]	[mm]	[mm]
7.268E-05	0.00	0.20	0.23
9.85E-05	0.14	0.21	0.23
1.51E-04	0.15	0.23	0.23
2.03E-04	0.16	0.25	0.23
2.60E-04	0.18	0.28	0.23
3.19E-04	0.20	0.30	0.23
3.66E-04	0.21	0.32	0.23
4.08E-04	0.22	0.34	0.23
6.03E-04	0.28	0.43	0.23
7.35E-04	0.31	0.49	0.23
7.66E-04	0.32	0.50	0.23
1.00E-03	0.39	0.60	0.23

Come si vede dai risultati presentati, le formulazioni proposte dalle normative risultano essere eccessivamente cautelative. Infatti in corrispondenza dei medesimi livelli deformativi le ampiezze delle fessure ottenute con il modello FEM sono sempre più piccole dei valori caratteristici o di progetto ricavati facendo riferimento alle norme.

6.6. Confronti ampiezze fessura con ritiro e viscosità

In questa fase, come nel caso precedente si tiene in conto della presenza del ritiro reale, dunque anche qui si svolge la verifica con i parametri definiti dalle azioni a lungo termine:

- MC90: $\tau_{bk} = 1.8 \cdot f_{ctm}$, $\beta = 0.38$
- MC2010: $\tau_{bm} = 1.8 \cdot f_{ctm}$, $\beta = 0.4$
- EC2: $k_t = 0.4$.

In questo caso naturalmente il valore di deformazione inserito nelle formule è esattamente il ritiro al tempo t in cui compare la fessura nel modello FEM. I valori dell'ampiezza della fessura del modello agli elementi finito sono due, il primo è relativo alla sezione prefessurata, mentre il secondo è relativo alla fessura che nasce all'istate temporale t . I risultati sono riassunti nella tabella seguente:

			Risultati FEM		MC90	MC2010	EC2
	t	$\epsilon_{sh}(t)$	w1	w2	wk	wd	wk
	[day]	[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
A2 ϕ 10	1000	3.06E-04	0.25	0.13	0.96	1.23	1.35
A4 ϕ 10	240	2.27E-04	0.10	0.09	0.27	0.43	0.46
A1 ϕ 14	3700	3.40E-04	0.32	0.18	1.42	1.70	1.80
A2 ϕ 14	300	2.42E-04	0.13	0.10	0.39	0.55	0.56
A4 ϕ 14	155	1.97E-04	0.05	0.05	0.12	0.21	0.20
A1 ϕ 20	400	2.60E-04	0.16	0.12	0.55	0.71	0.70
A2 ϕ 20	175	2.05E-04	0.06	0.08	0.16	0.25	0.23

Anche in questo caso, così come in quello precedente, le formulazioni presenti nelle normative conducono a risultati sostanzialmente differenti in termini di ampiezza della fessura. Ancora una volta si nota che le ampiezze ricavate mediante le tre normative conducono ad ampiezze maggiori rispetto a quelle ottenute con l'analisi del modello FEM.

7. CONCLUSIONI

L'obiettivo del presente lavoro era quello di analizzare il comportamento dei tiranti sotto l'azione delle deformazioni impresse, di qualunque natura esse siano. Dopo aver introdotto il fenomeno dell'aderenza il quale permette la collaborazione tra calcestruzzo e acciaio nella zona in cui si registra lo scorrimento tra gli stessi, si è passato ad analizzare un tirante in calcestruzzo armato, con differenti configurazioni di armatura, soggetto ad azioni di differente tipologia.

Inizialmente è stato indagato il suo comportamento sotto l'azione di una forza esterna di trazione, applicata alla barra di armatura, nella sezione di estremità considerata già fessurata. Mentre in una seconda fase si è studiato il comportamento del tirante, per le medesime configurazioni, sotto un'azione di tipo implicito. In particolare si sono considerati due casi: uno nella quale il calcestruzzo è stato modellato come un materiale elastico fino alla massima resistenza a trazione, ed un altro nella quale si è tenuto in conto degli effetti reologici dello stesso (ritiro e viscosità).

È utile notare che il fenomeno fisico della fessurazione nelle due tipologie di azioni analizzate è differente. Se infatti nel caso in cui si applica la forza le tensioni da essa indotte nell'elemento strutturale sono funzioni solamente dell'entità del carico applicato, nel caso in cui ad agire sono le deformazioni impresse, il ruolo importante è svolto dalla rigidità del tirante stesso. Infatti applicando la forza all'estremità del tirante, nel momento in cui nasce la fessura la tensione nel materiale non scende a livelli non fessurativi, e l'elemento continua a fessurarsi. Questa situazione non si verifica invece nei casi in cui viene impressa una deformazione al tirante. In questi casi, non appena la deformazione raggiunge livelli tali da far fessurare l'elemento, si registra una caduta tensionale molto rilevante, segno chiaro ed evidente della caduta di rigidità dell'elemento stesso. Il che ci ha posto di fronte alla necessità di incrementare la deformazione impressa, fino a valori congrui con i fenomeni fisici che le generano, al fine di valutare l'evoluzione del processo fessurativo.

Bisogna inoltre considerare come i risultati ottenuti nella valutazione delle ampiezze delle fessure siano sostanzialmente diversi a seconda della tipologia di azione agente. Se infatti in presenza di un'azione di tipo esplicito, come la forza appunto, l'ampiezza delle fessure si attesta su valori variabili da 0.1 a 0.6 mm circa, in funzione del quantitativo di armatura, in presenza di un'azione di tipo implicito, quale la deformazione impressa, tale range è molto più basso: da circa 0.1 mm a 0.4 mm. Inoltre queste aperture si raggiungono solo a seguito

dell'incremento della deformazione sul tirante già fessurato, infatti all'atto della nascita della fessura tale range è ulteriormente più basso in particolare: da circa 0.06 mm a 0.2 mm.

L'analisi svolta infine, tenendo in considerazione gli effetti reologici del calcestruzzo, mostra come il processo fessurativo si trasli nel tempo. Infatti l'analisi del tirante soggetto al ritiro reale e nella quale si consideri doverosamente anche l'effetto della viscosità, non conduce a risultati differenti, in termini di ampiezza della fessura, rispetto al caso in cui non si consideravano i fenomeni reologici. Tuttavia la presenza della viscosità comporta un rilassamento delle tensioni per cui allunga i tempi in cui si manifesta la fessura.

Per finire sono stati presentati i confronti tra i risultati ottenuti in termini di ampiezze delle fessure. I valori ricavati dalle analisi non lineari sul modello FEM sono stati confrontati con le formulazioni proposte dalle normative. Si sono evidenziate quindi le sostanziali differenze che si registrano soprattutto nei riguardi delle ampiezze relative all'applicazione di una qualunque deformazione impressa. Infatti le prescrizioni presenti nelle normative prese in esame conducono ad una sovrastima dell'apertura della fessura. Il discorso si inverte nel caso in cui il tirante si trovi soggetto ad un'azione di tipo esplicito. In tal caso infatti i risultati ottenuti tramite l'analisi del modello agli elementi finiti sono in accordo con quanto ritrovato sulle norme.

8. Bibliografia

CEN EN 1992-1-1, Eurocode 2 “Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings” (2004)

CEB (comité Euro-International du Béton)-FIP, Model Code 2010

CEB (comité Euro-International du Béton)-FIP, Model Code 1990

fib Bulletin No. 10 “Bond of reinforcement in concrete, state of art report”, Capitolo 1: “Bond mechanism including pull-out and splitting failures”, 2000, pp. 3-89

Costanza Anerdi et al., “Prediction of cracking induced by indirect actions in RC structures”, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2017

C. Anerdi, G. Bertagnoli, D. Gino, G. Mancini, “Self restrained cracking of reinforced concrete elements”, *fib Symposium 2017*, Maastricht, June 12-14-2017

Goto Y. “Cracks formed in concrete around deformed tension bars”, *ACI Journal* Vol.68, No. 2, pp. 244-251, 1971

Gerstle W., Ingraffea A.R., “Bond in concrete”, Applied Science Publishers, London 1982

DIANA FEA BV, “Diana Finite Element Analysis – User’s Manual Release 10.2”, Delft, Netherland

Costanza A. “Self restrained cracking in reinforced concrete element”, Tesi di Laurea, 2015

Cosenza E., Manfredi G., Pecce M. “Strutture in cemento armato”, HOEPLI, 2012

Python 3.7.3 documentation, Python Software Foundation, June 27-2018

«www.programmareinpython.it» (Online)