

# POLITECNICO DI TORINO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Tesi di Laurea Magistrale

## ***Modellazione strutturale delle cupole in muratura***

*Il caso della Chiesa della SS. Trinità di Torino*



**Relatore:**

Rosario CERAVOLO

**Correlatore:**

Giulia DE LUCIA

**Candidato:**

Alessandro ERCOLE

Aprile 2019



*A mia nonna,  
che sarebbe orgogliosa di questo mio traguardo*



## Indice

<b>Indice delle Figure .....</b>	<b>III</b>
<b>Indice delle Tabelle.....</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>IX</b>
<b>1    Analisi statica degli edifici in muratura.....</b>	<b>1</b>
1.1    Modelli costitutivi per simulare il comportamento della muratura .....	2
1.2    Comportamento strutturale delle cupole in muratura .....	3
1.3    Evoluzione dei processi costruttivi e di verifica delle cupole .....	4
<b>2    Modellazione strutturale degli edifici storici .....</b>	<b>7</b>
2.1    Metodo ad elementi finiti non lineari .....	7
2.1.1    Modelli continui (macro-modellazione).....	8
2.1.2    Modelli continui (meso-modellazione) .....	9
2.1.3    Modelli discontinui (micro-modellazione) .....	10
2.2    Metodo ad elementi di contorno.....	11
2.3    Metodo ad elementi distinti/discreti .....	11
2.4    Metodi semplificati o a macro-elementi .....	12
2.5    Modellazione numerica delle strutture a geometria curva.....	12
2.5.1    Micro modellazione semplificata per la cupola del Duomo di Firenze .....	13
2.5.2    Meso-macro modellazione per strutture in muratura a doppia curvatura .....	13
<b>3    Definizione dei modelli di riferimento per le analisi strutturali .....</b>	<b>15</b>
3.1    Analisi storico-critica.....	16
3.2    Rilievo geometrico-strutturale .....	16
3.3    Caratterizzazione meccanica dei materiali .....	18
3.4    Definizione dei livelli di conoscenza e fattori di confidenza .....	19
3.5    Valutazione delle azioni agenti sulla struttura.....	22
<b>4    Il caso della cupola della Chiesa della SS. Trinità di Torino .....</b>	<b>23</b>
4.1    Analisi storico-critica della Chiesa della SS. Trinità .....	23
4.2    Rilievo geometrico-strutturale della Chiesa della SS. Trinità .....	25
4.2.1    Indagine visiva della superficie mesh.....	27
4.2.2    Indagine preliminare dello stato deformativo .....	29
4.2.3    Creazione del modello 2D e approfondimento sullo stato deformativo .....	31
4.3    Creazione del modello geometrico della cupola della Chiesa della SS. Trinità.....	35
4.3.1    Pulizia e divisione della mesh.....	36
4.3.2    Semplificazione della mesh cupola .....	39

4.3.3	Costruzione del solido cupola .....	44
4.3.4	Assemblaggio del modello geometrico 3D finale.....	50
<b>4.4</b>	<b>Caratteristiche meccaniche dei materiali della Chiesa della SS. Trinità.....</b>	<b>52</b>
4.4.1	Caratteristiche meccaniche della muratura della Chiesa della SS. Trinità .....	54
4.4.2	Criterio di resistenza della muratura.....	57
4.4.3	Il modello elasto-plastico .....	58
4.4.4	Calibrazione dei parametri del modello.....	61
4.4.5	Parametri meccanici della muratura della Chiesa della SS. Trinità .....	64
<b>4.5</b>	<b>Valutazione dell'effetto di creep per la muratura della Chiesa della SS. Trinità .....</b>	<b>65</b>
4.5.1	Stima dei parametri relativi alla malta di calce .....	65
4.5.2	Stima dei parametri da associare alla muratura della cupola della SS. Trinità ...	70
4.5.3	Stima ai minimi quadrati per la definizione della curva di creep .....	70
<b>4.6</b>	<b>Definizione del livello di conoscenza e delle azioni agenti sulla struttura .....</b>	<b>73</b>
4.6.1	Definizione del livello di conoscenza e del fattore di confidenza .....	73
4.6.2	Analisi dei carichi agenti sulla struttura .....	74
<b>4.7</b>	<b>Modelli numerico-strutturali per la cupola della Chiesa della SS. Trinità .....</b>	<b>77</b>
4.7.1	Modello lineare ad elementi tridimensionali.....	78
4.7.2	Modello non-lineare ad elementi tridimensionali .....	83
4.7.3	Modello di creep ad elementi tridimensionali .....	85
<b>4.8</b>	<b>Analisi strutturali .....</b>	<b>87</b>
4.8.1	Analisi statica lineare.....	88
4.8.2	Analisi non lineare .....	89
4.8.3	Analisi di creep .....	91
<b>5</b>	<b>Risultati.....</b>	<b>93</b>
	<b>Conclusioni.....</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliografia.....</b>	<b>109</b>

## Indice delle Figure

Figura 1.1: classiche cupole rotazionali: (a) cupola emisferica; (b) cupola parabolica; (c) cupola ellittica.....	3
Figura 1.2: configurazione delle tensioni nella cupola.....	4
Figura 1.3: spessore minimo per le cupole sferiche (Simon e Bagi 2016).....	5
Figura 2.1: classificazione dei modelli FEM.....	8
Figura 2.2: esempio di definizione della cella elementare (Zucchini e Lourenço 2002) .....	9
Figura 2.3: (a) elemento modulare di un pannello in muratura; (b) micro-modellazione dettagliata; (c) micro-modellazione semplificata; (d) macro-modellazione (Pelà 2009).....	10
Figura 2.4: rappresentazione elemento SOLID 45.....	13
Figura 2.5: approccio di modellazione in due step per le cupole proposto da Milani e Tralli (2012).....	14
Figura 4.1: pianta della Chiesa della SS. Trinità (sinistra) e vista dell'interno .....	24
Figura 4.2: vista dell'altare maggiore e dell'altare destro (sinistra) e dettaglio dell'affresco <i>Gloria della Santissima Trinità in Paradiso</i> che abbellisce la cupola della Chiesa della SS. Trinità (destra).....	25
Figura 4.3: dettaglio della nuvola di punti rappresentante l'intradosso della cupola e della relativa <i>mesh</i> molto dettagliata.....	27
Figura 4.4: rappresentazione in modalità <i>ombreggiata</i> in vista frontale del gruppo <i>mesh</i> che descrive l'intradosso della cupola più il parziale lanternino.....	28
Figura 4.5: report del confronto tra l'intradosso della cupola e la sfera ad essa adattata in vista frontale (sinistra) e in vista dall'alto (destra).....	29
Figura 4.6: pianta contesto architettonico della Chiesa della SS. Trinità.....	30
Figura 4.7: (a) rappresentazione della <i>mesh</i> dell'intradosso della cupola con dettaglio della porticina ; (b) corretta orientazione della superficie risultato del report .....	30
Figura 4.8: sezioni radiali realizzate lungo la superficie l'intradosso della calotta .....	31
Figura 4.9: studio della geometria della superficie interna della cupola.....	32
Figura 4.10: confronto tra la sezione della cupola media e le altre sezioni nelle quattro direzioni principali .....	33
Figura 4.11: (a) sezione trasversale semplificata del modello tamburo-cupola-lanternino; (b) confronto tra la sezione generatrice della superficie interna della cupola e la sezioni maggiormente soggetta a deformazione.....	34
Figura 4.12: flow chart delle operazioni e dei programmi utilizzati per la modellazione geometrica-strutturale.....	35
Figura 4.13: rappresentazione <i>ombreggiata</i> della <i>mesh</i> senza tessitura in vista assonometrica dal basso (sinistra) e in vista frontale (destra).....	36
Figura 4.14: operazione di pulizia di una sezione della <i>mesh</i> .....	37

Figura 4.15: rappresentazione <i>ombreggiata</i> della <i>mesh</i> pulita in vista assonometrica dal basso (sinistra) e in vista frontale (destra).....	38
Figura 4.16: (a) rappresentazione <i>ombreggiata</i> del gruppo <i>mesh</i> cupola-lanternino; (b) rappresentazione <i>ombreggiata</i> della <i>mesh</i> dell'intradosso della cupola.....	38
Figura 4.17: generazione del campione. (A sinistra) Vengono scelti i campioni da un campionamento uniforme pre-generato della superficie. (A destra) Campioni che violano il vincolo di distanza minima vengono rimossi, eliminando tutti i campioni di cellule all'interno di una sfera di raggio $r$ .....	40
Figura 4.18: finestra di dialogo e nuvola di punti prodotta dalla semplificazione <i>Poisson-disk</i> .	41
Figura 4.19: finestra di dialogo <i>Compute normals for point sets</i> .....	42
Figura 4.20: l'algoritmo <i>Ball Pivoting</i> in 2D. Un cerchio di raggio $p$ ruota da punto di campionamento all'altro, collegandoli con i bordi.....	42
Figura 4.21: finestra di dialogo <i>Surface Reconstruction: Ball Pivoting</i> .....	43
Figura 4.22: rappresentazione della <i>mesh</i> semplificata dell'intradosso della cupola.....	44
Figura 4.23: rappresentazione passaggio da <i>mesh</i> irregolare (sinistra) a <i>mesh</i> regolare (destra).	45
Figura 4.24: operazione del comando <i>OffsetMesh</i> per ottenere la <i>mesh</i> chiusa.....	46
Figura 4.25: rappresentazione in modalità <i>wireframe</i> e vista frontale della poli-superficie chiusa originata dalla <i>mesh</i> dell'intradosso della cupola.....	48
Figura 4.26: rappresentazione in modalità <i>wireframe</i> e vista frontale del posizionamento del calco sulla poli-superficie chiusa.....	49
Figura 4.27: rappresentazione in modalità <i>wireframe</i> e in vista frontale del solido finale della cupola.....	50
Figura 4.28: rappresentazione <i>ombreggiata</i> (sinistra) e rappresentazione <i>wireframe</i> (destra) del modello finale.....	51
Figura 4.29: dettaglio <i>mesh</i> modello numerico.....	52
Figura 4.30: curva sforzo-deformazione per la muratura del campione No. 3 ("Il Giaione").....	55
Figura 4.31: curve di crisi di pannelli di muratura in regime biassiale per diverse orientazioni dei giunti.....	56
Figura 4.32: dominio di rottura di Mohr-Coulomb per stati di compressione e trazione monoassiale e identificazione del cut-off a trazione.....	57
Figura 4.33: (a) Superficie di Drucker-Prager nello spazio delle tensioni principali; (b) domino di resistenza di Drucker-Prager nel piano ( $\sigma_I$ , $\sigma_{II}$ ).....	60
Figura 4.34: confronto tra risultati numeri e sperimentali per test di taglio sul pannello COR2: solo modello plastico (sinistra) e combinazione dei modelli di plasticità e di rottura (destra)...	62
Figura 4.35: confronto legge elasto-plastica e curva sforzo-deformazione reale.....	64
Figura 4.36: deformazione totale di provini in malta di calce: campione a (sinistra) e campione c (destra).....	66
Figura 4.37: deformazione totale di provini in malta di calce: campione d (sinistra) e campione e (destra).....	66
Figura 4.38: deformazione totale di provini in malta di calce: campione f (sinistra) e campione g (destra).....	67



Figura 4.39: Andamento del coefficiente di viscosità $\varphi(t;t_0)$ per i sei campioni esaminati in Cominelli et al., 2014.....	68
Figura 4.40: valori dei moduli tangenziali effettivi della muratura con mattoni rigidi, malta di spessore 10 mm e con proprietà valutate a breve (a) e a lungo termine (b).....	69
Figura 4.41: valori dei moduli tangenziali effettivi della muratura con mattoni elastici, malta di spessore 10 mm e con proprietà valutate a breve (a) e a lungo termine (b).....	69
Figura 4.42: confronto tra le funzioni fluage della muratura e della malta.....	71
Figura 4.43: Funzione $J(t;t_0)$ ottenuta al secondo step della stima ai minimi quadrati.....	72
Figura 4.44: Funzione $\phi(t;t_0)$ ottenuta al secondo step della stima ai minimi quadrati.....	73
Figura 4.45: andamento del peso proprio lungo l'altezza del modello.....	75
Figura 4.46: andamento delle tensioni verticali lungo l'altezza del modello.....	75
Figura 4.47: foto dall'alto della cupola con dettaglio sull'elemento di copertura.....	76
Figura 4.48: rappresentazione in modalità <i>wireframe</i> e in vista frontale del modello "indeformato" utilizzato per l'analisi di creep.....	79
Figura 4.49: finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri elastici del materiale "muratura".....	80
Figura 4.50: finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri materiale "marmo".....	80
Figura 4.51: modello geometrico con rappresentazione dei carichi della copertura e dei vincoli alla base del tamburo.....	81
Figura 4.52: elemento solido CTE30.....	82
Figura 4.53: dettaglio <i>mesh</i> modello numerico.....	83
Figura 4.54: modello geometrico con dettaglio intradosso deformato.....	83
Figura 4.55: finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri materiale "muratura" con modello di plasticità di Drucker-Prager.....	85
Figura 4.56: finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri materiale "muratura" con modello di <i>multi-directional fixed crack</i> e creep.....	86
Figura 4.57: andamento della funzione di scorrimento $J(t, \tau)$ relativa allo studio del modello di creep effettuato per la muratura della cupola della SS. Trinità.....	87
Figura 5.1: tensioni verticale modello lineare (sinistra) e modello non-lineare (destra).....	94
Figura 5.2: tensioni verticale modello non lineare in vista dall'alto (sinistra) e dal basso (destra).....	95
Figura 5.3: spostamenti verticale modello lineare (sinistra) e modello non-lineare (destra).....	95
Figura 5.4: spostamento verticale modello non-lineare in vista dall'alto (sinistra) e dal basso (destra).....	96
Figura 5.5: confronto tra la <i>mesh</i> deformata dell'intradosso della cupola e deformazione dovuta all'abbassamento della cupola e del lanternino del modello 3D.....	97
Figura 5.6: spostamento verticale dell'elemento cupola in vista dall'alto (sinistra) e dal basso (destra).....	97
Figura 5.7: quote dei punti considerati considerando il livello zero come la base del modello..	98
Figura 5.8: andamento dello spostamento e della tensione verticale in relazione dell'altezza del modello.....	99

Figura 5.9: evoluzione dello spostamento verticale nel tempo a causa dell'effetto della viscosità per il modello indeformato (sinistra) e quello deformato (destra) .....	101
Figura 5.10: spostamento verticale in vista dall'alto (sopra) e dal basso (sotto) per 30 giorni e 55 anni.....	102
Figura 5.11: confronto tra gli andamenti nel tempo dei valori di spostamento verticale valutato per l'estradosso e l'intradosso a quote differenti, per il modello indeformato (sinistra) e quello deformato (destra) .....	103
Figura 5.12: confronto andamento delle tensioni verticali nel tempo per l'estradosso e l'intradosso della cupola a quota 17.2m (sopra) e 20.3m (sotto).....	104
Figura 5.13: risultato dell'analisi di creep a 400 anni per il modello deformato in termini di spostamento verticale in vista assonometrica (sinistra) dall'alto (centro) e dal basso (destra)..	105
Figura 5.14: andamento dello spostamento (sinistra) e della tensione (destra) verticale in relazione del modello per l'analisi di creep sul modello deformato a 400 anni .....	105

## Indice delle Tabelle

Tabella 3.1: valori di riferimento dei parametri meccanici della muratura, da usarsi nei criteri di resistenza di seguito specificati (comportamento a tempi brevi), e peso specifico medio per diverse tipologie di muratura. I valori si riferiscono a: $f$ = resistenza media a compressione, $\tau_0$ = resistenza media a taglio in assenza di tensioni normali, $f_{v0}$ = resistenza media a taglio in assenza di tensioni normali, $E$ = valore medio del modulo di elasticità normale, $G$ = valore medio del modulo di elasticità tangenziale, $w$ = peso specifico medio (Tabella C8.5.I della Normativa) .....	21
Tabella 3.2: coefficienti correttivi dei parametri meccanici indicati in Tabella C8.5.I (Tabella C8.5.II della Normativa) .....	21
Tabella 4.1: caratteristiche fisico-meccaniche del marmo. $E$ =modulo elastico; $\nu$ =coefficiente di Poisson; $\gamma$ =peso specifico; $f_c$ =resistenza di compressione; $f_t$ =resistenza di trazione .....	53
Tabella 4.2: caratteristiche dei campioni e risultati dei test .....	55
Tabella 4.3: caratteristiche fisico-meccaniche della muratura della SS. Trinità. $E$ =modulo elastico; $\nu$ =coefficiente di Poisson; $\gamma$ =peso specifico; $\sigma_{cm}$ =resistenza media di compressione; $f_t$ =resistenza di trazione .....	56
Tabella 4.4: parametri identificati per il solo modello plastico .....	63
Tabella 4.5: parametri identificati per il modello congiunto .....	63
Tabella 4.6: variabilità dei parametri identificati per il solo modello plastico .....	63
Tabella 4.7: variabilità dei parametri identificati per il modello congiunto .....	64
Tabella 4.8: : parametri della legge elasto-plastica e caratteristiche meccaniche della muratura della SS. Trinità .....	64
Tabella 4.9: studio delle masse e del peso proprio per gli elementi solido in cui è stato diviso il modello. $h$ =quota della sezione; $A$ =superficie della sezione; $V$ =volume dell'elemento tra due superfici consecutive; $\gamma$ =peso specifico del materiale; $N$ =peso che agisce sulla sezione; $\sigma_z$ =tensione verticale che agisce sulla sezione .....	74
Tabella 4.10: analisi dei carichi permanenti e variabili agenti sull'estradosso della cupola. $A$ =area superficie dell'elemento; $V$ =volume dell'elemento; $\gamma$ =peso specifico del materiale; $q$ =carico su superficie .....	77
Tabella 4.11: specifiche dei due modelli utilizzati per le analisi di creep .....	87
Tabella 5.1: specifiche e tempi macchina per le diverse analisi .....	93
Tabella 5.2: confronto tra valori di tensione verticale ala base del modello calcolati nelle diverse modalità .....	94
Tabella 5.3: valori di spostamento e tensione verticale per il modello lineare (sopra) e quello non lineare (sotto). $Z$ =quota del modello; $TDtZ$ =spostamento verticale; $SZZ$ =tensione verticale .....	98

Tabella 5.4: risultati di spostamento e tensione verticale per l'analisi di creep a 400 anni sul modello deformato. Z=quota del modello; TDtZ=spostamento verticale; SZZ=tensione verticale ..... 106

## Abstract

Il presente lavoro di tesi ha come oggetto la definizione del modello numerico della cupola della chiesa della SS. Trinità in Torino, allo scopo di analizzare e approfondire il comportamento strutturale dell'edificio. L'analisi del comportamento strutturale degli edifici storici, soprattutto se di rilevante valore artistico e architettonico, rappresenta oggi un prezioso strumento al fine di progettare e mettere in campo interventi di rinforzo e di tutela.

Una premessa necessaria in questo tipo di analisi è lo studio della geometria del caso studio, in questo caso il sistema cupola-tamburo, poiché i risultati di tipo metrico e di rilievo geometrico consentono una migliore valutazione della risposta strutturale e una conseguente progettazione di modelli numerici più attendibili. Lo studio della geometria della cupola parte dall'analisi di un accurato rilievo condotto con tecnologia Laser Scanner che ha fornito di una nuvola di punti dell'intradosso della calotta.

Le informazioni reperite dall'analisi di tipo geometrico hanno consentito l'elaborazione del modello geometrico ottenuto con software di modellazione sia bidimensionale che tridimensionale che è stato successivamente importato nel software ad elementi finiti. La possibilità di trarre informazioni sull'effettiva conformazione della calotta dal rilievo laser scanner ha permesso di evidenziare delle deformazioni, di cui si è tenuto conto nell'elaborazione del modello "deformato". Il modello numerico della cupola è stato integrato con i dati relativi alla caratterizzazione dei materiali, desunti da letteratura.

È stata quindi condotta un'analisi statica non lineare, che tiene così conto degli effetti del secondo ordine che si sviluppano a causa della non linearità geometrica del modello e di quella fisica relativa al materiale muratura. L'analisi è stata condotta sfruttando le potenzialità del codice ad elementi finiti (FE) DIANA FEA BV (*Displacement method ANALyser*).

Al fine di investigare le possibili cause che hanno portato alle depressioni dell'intradosso della calotta riscontrate nel rilievo, si è proceduto a creare un modello della cupola "indeformata", che fosse quindi conformata secondo quella che è considerata una plausibile geometria di partenza. Il modello "indeformato" e quello "deformato" sono stati utilizzati per svolgere un'analisi statica nella quale si è tenuto conto delle deformazioni viscosi che la muratura può aver subito nel tempo.

I risultati delle analisi permettono di appurare come il modello strutturale non lineare realizzato soddisfi le assunzioni fatte in particolare nella fase di modellazione geometrica. Inoltre consentono, in relazione alle varie semplificazioni adottate, di validare il fenomeno di deformazione viscosa, che la muratura ha subito nel tempo, come la causa delle deformazioni riscontrate nell'intradosso della cupola.

Questo lavoro di tesi, nonostante rappresenti uno studio preliminare del comportamento strutturale della cupola della SS. Trinità, rappresenta un esempio dell'importanza di un

approccio multidisciplinare negli studi per l'analisi e la conservazione dei beni architettonici. Lo studio infatti ha approfondito le problematiche relative al maneggiare dati di diverso genere (nuvole di punti, dati geometrici, dati materici) e di renderli utilizzabili ed efficaci nell'implementazione di modelli numerici.

## 1 Analisi statica degli edifici in muratura

L'analisi statica dei vecchi edifici in muratura risulta delicata e complessa in quanto la capacità portante della struttura appare fortemente condizionata dalle caratteristiche fisico-meccaniche dei materiali, dal sistema costruttivo, dallo stato di fatto e dall'interazione della struttura muraria con il terreno. Risulta dunque importante individuare il modello statico originario, le modifiche indotte dagli interventi successivi, l'origine e le cause dei dissesti, la determinazione delle prestazioni statico funzionali dei vari elementi costruttivi. La definizione del comportamento strutturale richiede quindi l'interpretazione di una realtà complessa e di difficile valutazione. Da qui nasce la necessità di riferirsi a modelli in genere rappresentativi di schematizzazioni limite (Carbone, Fiore e Pistone 2001) quali:

- modelli "globali", che riguardano il comportamento strutturale tridimensionale dell'edificio nel suo insieme, con l'eventuale presa in conto del fenomeno di interazione struttura-terreno;
- modelli "locali", che riguardano i singoli elementi strutturali analizzati separatamente, per esempio, archi, volte, pareti, solai ecc.

In funzione delle leggi comportamentali del materiale, i calcoli risultano poi di tipo:

- elastico: calcolo utilizzato in genere preliminarmente per ricavare l'andamento delle tensioni al fine di localizzare le eventuali zone di singolarità (zone con rilevanti tensioni di trazione ecc.);
- non lineare: si utilizza un'analisi di tipo incrementale con equazioni costitutive per i materiali non lineari;
- a rottura: si utilizzano modelli che caratterizzano il comportamento della struttura in condizioni prossime al collasso. In genere, oltre alla determinazione del massimo carico che porta al collasso la struttura, vengono effettuati controlli, per problemi di duttilità, sull'entità delle deformazioni.

E' particolarmente rilevante ricordare che le approssimazioni adottate devono essere prese in debito conto per una corretta interpretazione dei risultati e una corretta valutazione della sicurezza.

Nell'ambito di una modellazione globale, risulta importante studiare l'edificio in muratura nel suo insieme, quale elemento scatolare, composto da elementi monodimensionali (travi, colonne, pilastri) ed elementi tridimensionali (pareti, cupole, volte). Tale analisi, frutto della valutazione qualitativa del comportamento statico del sistema, conduce alla definizione di modelli geometrici e meccanici utili per lo studio dell'edificio. In questo contesto assume notevole importanza il calcolo automatico delle strutture, e più specificatamente il metodo degli elementi finiti. Individuato lo schema statico, i singoli elementi costituenti la struttura vengono rappresentati tramite una maglia di componenti elementari, ai quali viene attribuito

comportamento meccanico coerente con l'elemento originario. Ipotizzati i componenti elementari interconnessi tra di loro in un numero discreti di punti (detti nodi), il problema strutturale, sul piano formale estremamente complicato, viene ricondotto alla risoluzione di un sistema di equazioni (algebrizzazione del problema), la cui natura risulta funzione del tipo di problema studiato e delle caratteristiche dei materiali. Il modello discretizzato deve essere pensato in funzione del livello di approssimazione richiesto: alla semplicità dell'analisi elastica occorre contrapporre l'eventuale necessità di considerare il reale comportamento meccanico delle murature, considerando la limitata resistenza a trazione e la non linearità sia fisica che geometrica della struttura. I modelli in campo elastico lineare, sono gli unici che, con oneri computazionali non elevati, consentono una preliminare analisi di strutture complesse nella loro globalità. Per contro, un'analisi dettagliata del comportamento di una vecchia costruzione in muratura, richiede l'impiego di modelli di calcolo non lineare (Carbone, Fiore e Pistone 2001).

### *1.1 Modelli costitutivi per simulare il comportamento della muratura*

I modelli costitutivi per simulare il comportamento della muratura possono essere suddivisi in due classi distinte (Le Pape, Anthoine e Pegon 2001):

- I modelli discreti o micro-modelli. Questi modelli, tenendo conto della morfologia della muratura, e consentono di considerare separatamente ciascun elemento di muratura di base. L'elemento murario risulta dunque definito descrivendo in modo separato gli elementi singoli di muratura e i corsi di malta, ciascuno con la propria equazione costitutiva;
- I modelli continui o macro-modelli. Questi modelli sono anche chiamati omogenei e infatti l'elemento murario viene considerato realizzato con un materiale omogeneo, eventualmente anisotropo, dotato di una legge costitutiva appropriata.

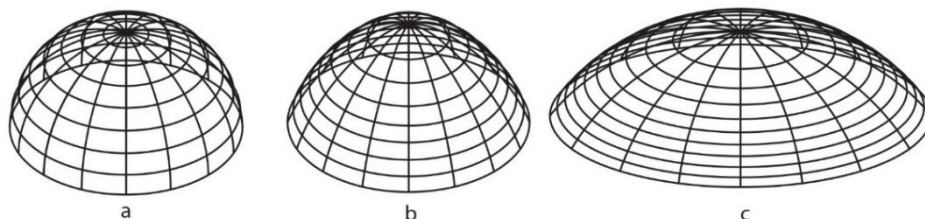
Ai fini di una analisi statica della struttura, l'approccio discreto è tradizionalmente utilizzato quando sono richiesti livelli più elevati di dettagli del modello. Questo approccio ricorre a diversi elementi per modellare le entità che compongono la muratura, ma è complesso da un punto di vista computazionale. In una versione completa di un modello discreto, vengono utilizzati elementi continui per modellare mattoni e giunti di malta, invece gli elementi discontinui sono usati per le relative interfacce. Il primo tipo di modello discreto è stato eseguito da Page (1978). Nel suo modello, la muratura è modellata come un gruppo di elementi elastici (mattoni), mentre tutta la non linearità del comportamento globale è concentrata nei giunti di malta. Per i giunti di malta vengono presi in considerazione due principali meccanismi di collasso. Altro caso rilevante è il modello proposto da Lourenço e Rots (1997) che, per la prima volta, era in grado di prendere in considerazione diversi meccanismi di collasso. Le differenze del modello di Lourenço e Rots rispetto ai precedenti è la locazione degli elementi dell'interfaccia, che ora non sono solo più concentrati al contatto tra i blocchi di muratura in corrispondenza dei giunti di malta. L'approccio continuo invece viene preferibilmente utilizzato



quando la porzione investigata della struttura è sufficientemente ampia da considerare la sollecitazione locale omogenea, senza distinzione tra blocchi e giunti. Tra i vari importanti contributi alla modellazione continua della muratura, un esempio rilevante di modellazione continua per la muratura storica, è proposto da Luciano e Sacco (1997). Considerando la forza della malta dell'antica muratura molto inferiore alla forza dei blocchi, questo modello presume che il danno possa svilupparsi solo all'interno della malta. Inoltre, a causa del piccolo spessore della malta, le fessure possono svilupparsi solo parallelamente alla direzione del giunto. Inoltre, si considera che i mattoni in muratura abbiano un comportamento indefinitamente elastico. In questo approccio, vengono presi in considerazione otto diversi stati di rottura e il materiale omogeneizzato varia modificando il modulo elastico globale del materiale per ogni livello di rottura raggiunto.

## 1.2 Comportamento strutturale delle cupole in muratura

Gli elementi strutturali che consentono alla muratura di coprire grandi spazi sono archi, volte e cupole. La capacità portante e il comportamento di deformazione di questi elementi sono influenzati da fattori geometrici relativi ai loro profili (Heyman 1969), tra i quali i più utilizzati sono il semicerchio, la parabola e l'ellisse. Tutte le superfici curve di strutture a volta e a cupola sono derivate da archi, un elemento curvo che resiste principalmente alla compressione. Le cupole rotazionali sono volte dove l'intradosso e l'estradosso sono due superfici di rivoluzione aventi lo stesso asse verticale e diverse forme possono essere ottenute ruotando un arco circolare, o una mezza ellisse o un settore parabolico. Le loro sezioni orizzontali sono chiamate paralleli, invece, i mezzi archi delle sezioni verticali sono chiamati meridiani.



**Figura 1.1: classiche cupole rotazionali: (a) cupola emisferica; (b) cupola parabolica; (c) cupola ellittica**

Sotto carichi gravitazionali, gli stress meridionali nelle cupole in muratura sono tutti in compressione. Invece, le tensioni degli anelli sono di compressione nella parte superiore (tra l'angolo di  $45^\circ$  e quello di  $60^\circ$  partendo dall'alto) e di trazione al di sotto di questa angolazione [ (Como 2010); (Lucchesi, et al. 2007); (Heyman 1982)], come mostrato in Figura 1.2.

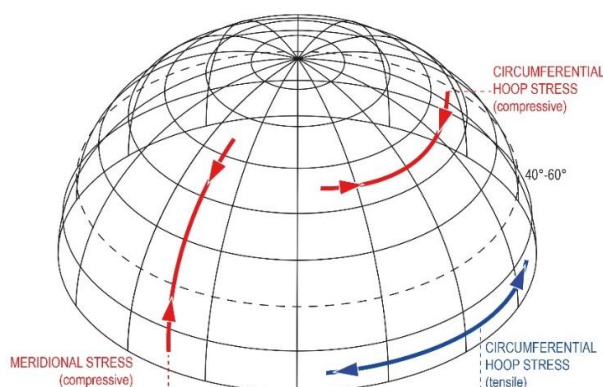


Figura 1.2: configurazione delle tensioni nella cupola

A causa della bassa resistenza alla trazione del materiale murario, è comune osservare aperture di crepe nelle cupole in muratura. Quando le tensioni dovute al peso proprio e ai carichi permanenti superano la debole resistenza a trazione della muratura, si verificano le prime fessure verticali e / o orizzontali. Le crepe orizzontali possono essere correlate allo sviluppo di meccanismi cinematici (Pavlovic, Reccia e Cecchi 2014). Invece, le crepe verticali si trovano nella parte inferiore della cupola e sono dovute alle forze del cerchio, ma di solito non causano problemi di stabilità. Le cupole in muratura, infatti, sono fondamentalmente progettate per sopportare carichi verticali e gravitazionali [Heyman (1966); (1967); (1977)]. Poiché la resistenza alla compressione delle cupole può essere considerata infinita e la resistenza per attrito è solitamente di livello piuttosto elevato, il cedimento sotto carichi statici non è caratteristico delle cupole. Pertanto, la questione fondamentale dell'analisi di sicurezza delle cupole è valutare se la geometria della struttura consenta di equilibrare il proprio peso proprio e gli altri carichi verticali permanenti. A questo scopo, sono stati numerosi gli studi condotti sul comportamento strutturale delle cupole in muratura specialmente negli ultimi decenni. Da qui la necessità di analizzare, se pur in maniera sommaria, le regole e le conoscenze dei metodi di costruzione delle cupole in muratura lungo il corso dei secoli.

### 1.3 Evoluzione dei processi costruttivi e di verifica delle cupole

Nonostante la costruzione di cupole in muratura risalga al passato, fino al XVIII secolo, gli architetti si sono avvicinati alla progettazione delle cupole mediante metodi proporzionali e regole geometriche, derivanti principalmente dall'esperienza. La progettazione strutturale degli edifici avveniva infatti attraverso criteri empirici ben lontani da quelli oggi alla base della scienza delle costruzioni. Si costruiva per confronto con edifici precedenti, utilizzando regole d'arte tratte da osservazioni di opere di costruttori illustri e rispettando quello che era il criterio fondamentale: la regola delle proporzioni (Nascè e Sabia 1997). Studi scientifici più accurati sul comportamento strutturale delle cupole risalgono al XVIII secolo, quando la regola delle proporzioni e le antiche regole d'arte vennero sempre di più sostituite dall'analisi statica delle

sollecitazioni. Coulomb infatti concentrò l'attenzione sulle verifiche statiche, introducendo il concetto di attrito nel meccanismo delle strutture in muratura [ (Pavlovic, Reccia e Cecchi 2014); (Cavalagli e Gusella 2014)]. Bouguer (1736) conduce il primo studio scientifico sulle cupole, fornendo una soluzione per il problema sulla migliore geometria di una cupola con il proprio peso. Un'altra fondamentale analisi strutturale delle cupole realizzate nel passato è stata lo studio condotto da Poleni (1748), basato sulla cupola della Basilica di San Pietro a Roma. Poleni ha proposto un metodo ispirato alla legge di Hooke e fondato sull'analogia tra la linea di spinta di un arco compresso e la forma di una catenaria rovesciata (Galassi, et al. 2017). In questo modo, Poleni ha aperto il primo rigoroso dibattito scientifico sulla stabilità delle cupole in muratura e la sua opera può essere considerata come la prima formulazione limitata del teorema statico delle analisi limite delle cupole in muratura (Como 2010). L'analisi di archi in muratura e cupole si amplia con le nuove idee della teoria dell'elasticità nel XIX secolo con gli studi di Navier (1826). Nel corso del secolo si diffusero le tecniche di statica grafica, utilizzate soprattutto per valutare la sicurezza degli archi e delle volte, basate sulla costruzione della curva delle pressioni formulata da Mery (1840). Per le costruzioni in muratura però, le difficoltà di individuazione di modelli statici semplici e di definizione delle caratteristiche meccaniche dei materiali, fanno sì che, accanto ai nuovi criteri, permangano le vecchie regole d'arte legate al progetto e alla realizzazione della struttura. Lo studio delle cupole come archi in muratura continuò nella prima metà del XX secolo con l'enunciazione del teorema della sicurezza e l'introduzione del metodo di analisi limite, entrambi introdotti da Heyman [ (1966); (1967); (1969); (1977)]. Il "fattore geometrico della sicurezza" fornisce un metodo intuitivo per valutare la sicurezza delle cupole in muratura valutandone lo spessore. Ha risolto il problema geometrico definendo uno spessore minimo per le cupole,  $t_{min}$ , per il quale la cupola è ancora in equilibrio sotto il suo stesso peso, utilizzando il metodo statico dell'analisi limite di plastica [ (Huerta 2001); (Heyman 1995)]. Il metodo di Heyman non può essere considerato realistico per le strutture esistenti, ma fornisce un metodo intuitivo di valutazione confrontando gli spessori reali della struttura con lo spessore minimo, che può ancora portare il proprio peso. Lau (2006) ha dato un importante contributo ai risultati di Heyman combinando la teoria della membrana con il metodo statico e quindi tenendo conto delle forze del cerchio. Inoltre, una descrizione accurata dei recenti metodi numerici che cercano di risolvere il problema dello spessore minimo della parete si può trovare in Simon e Bagi (2016).

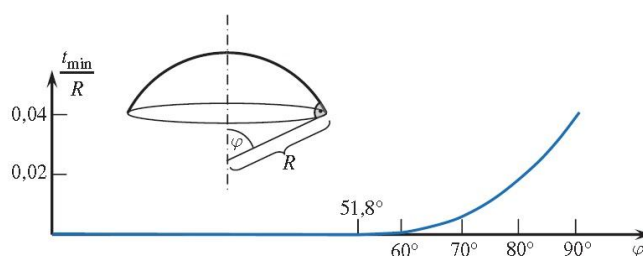


Figura 1.3: spessore minimo per le cupole sferiche (Simon e Bagi 2016)

In seguito, soprattutto grazie all'impulso dato dall'introduzione del metodo degli elementi finiti, si sono diffusi *modelli strutturali* sempre più raffinati, supportati anche dal progresso dei mezzi di calcolo. La ricerca era principalmente indirizzata verso l'applicazione di modelli strutturali semplificati, con lo scopo di contenere l'onere computazionale delle simulazioni numeriche, ma al contempo di consentire la modellazione globale di interi edifici.

Gli studi sul comportamento strutturale delle cupole in muratura hanno attraversato vari metodi nel corso dei secoli a causa della crescita della conoscenza umana e dello sviluppo tecnologico, ma anche a causa della recente e crescente richiesta di studi sulla protezione e la conservazione degli edifici monumentali antichi. A tal proposito, dalla prima metà del Novecento, sono iniziati interventi di restauro strutturale con l'obiettivo di un ripristino della funzionalità statica dell'edificio antico mediante l'introduzione di nuove strutture portanti, indipendenti dalle strutture originarie, in genere in grado di liberare queste ultime dalle loro funzioni statiche. Tale modalità di intervento è stata, negli ultimi decenni e dopo ampi dibattiti, completamente modificata: il recupero di un edificio antico deve conservare la struttura nella sua originaria funzione statica. Risulta allora evidente la difficoltà di una corretta interpretazione della costruzione, concepita e realizzata con metodologie non aderenti con agli attuali criteri di progettazione e di realizzazione. (Carbone, Fiore e Pistone 2001).

## 2 Modellazione strutturale degli edifici storici

La modellazione strutturale di edifici in muratura, in particolare delle strutture a carattere storico e monumentale, risulta estremamente complessa. Essa, infatti, deve essere tale da simulare numericamente comportamenti reali che risultano governati da grandezze fisiche difficilmente valutabili e pertanto rimane una questione aperta, per la quale sono proposte in letteratura svariate soluzioni. I vari metodi proposti comprendono da un lato soluzioni rigorose e di dettaglio poi difficilmente applicabili ad edifici nella pratica, dall'altro approcci semplificati che mirano alla valutazione della risposta globale del corpo del manufatto, sia in campo statico che dinamico. Negli ultimi decenni, l'estrema complessità associata alla modellazione delle strutture in muratura ha orientato la ricerca alla formulazione di molteplici metodi di modellazione, parecchio differenti tra loro per complessità, ipotesi di base, grado di dettaglio dei risultati e onere computazionale richiesto. Il principale discriminante è costituito dall'onere computazionale associato alla modellazione e al tipo di analisi che si intende effettuare ed è quindi possibile individuare una prima classificazione generale in termini di modellazione:

- *modelli ad elementi finiti non-lineari;*
- *modelli ad elementi di contorno;*
- *modelli ad elementi distinti/discreti;*
- *modelli semplificati o a macro-elementi.*

Nella prima parte del capitolo si è svolta una spiegazione generale dei differenti modelli proposti in letteratura, nell'ultimo paragrafo invece sono stati presentati due esempi di modelli ad elementi finiti applicati a strutture a geometria curva, come le cupole.

### 2.1 Metodo ad elementi finiti non lineari

L'approccio agli elementi finiti non lineari è il più versatile nell'ambito degli approcci più accurati disponibili in letteratura. È basato sulla descrizione di elementi finiti piani o solidi, ai quali vengono associati legami costitutivi con diverso comportamento a trazione e a compressione. In particolare le leggi costitutive sono caratterizzate da una resistenza a trazione limitata o nulla. In accordo con la classificazione proposta in letteratura (Lourenço, Milani, et al. 2007), i differenti approcci di modellazione per la simulazione del comportamento della muratura mediante elementi finiti non lineari possono essere suddivisi in due classi a diverse scale di modellazione:

- *modelli continui (o “macro-modelli”),* in cui viene utilizzato un unico elemento finito per rappresentare il comportamento della muratura pensata come solido omogeneo;
- *modelli discontinui (o “micro-modelli”),* in cui vengono discretizzati in maniera distinta gli elementi della muratura (blocchi o elementi lapidei) e i giunti di malta.

I primi si avvalgono di tecniche di omogeneizzazione allo scopo di poter definire un continuo equivalente alla tessitura muraria. In pratica, pur essendo la muratura composta di malta e mattoni, che sono elementi dotati di differenti caratteristiche dei materiali, vengono stabilite delle caratteristiche equivalenti per il materiale che può pertanto essere modellato come un continuo. Nei modelli discontinui, invece, ogni componente (conci e letti di malta) viene modellato separatamente, e a ciascuno vengono attribuite le corrispondenti proprietà costitutive.

La micro-modellazione presenta il vantaggio di risultare perfettamente coerente dal punto di vista teorico e formale, elegante dal punto di vista matematico, svincolata dalla necessità di introdurre a priori ipotesi sulla risposta, circostanza che la rende applicabile in modo del tutto generale e la colloca tra i metodi di modellazione più avanzata. Tuttavia essa richiede un onere computazionale estremamente elevato e in molti casi tale da renderla, allo stato attuale, inapplicabile per la simulazione della risposta non lineare di interi edifici. Per le loro caratteristiche i modelli continui sono orientati alla modellazione di interi edifici, mentre quelli discontinui sono rivolti a modellazioni di dettaglio.

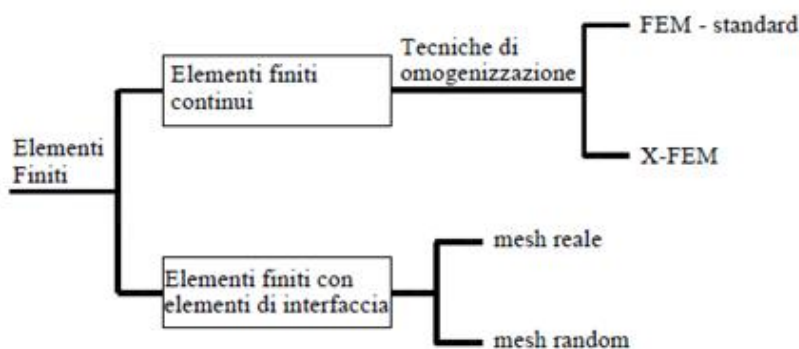


Figura 2.1: classificazione dei modelli FEM

### 2.1.1 Modelli continui (macro-modellazione)

La macro-modellazione è probabilmente l'approccio più popolare e comune a causa delle sue minori esigenze di calcolo. Questo tipo di modellazione è il più utile quando è necessario un compromesso tra precisione ed efficienza. Per analisi di grandi porzioni strutturali o strutture complete in muratura, una dettagliata descrizione dell'interazione tra unità e giunti di malta potrebbe non essere necessaria.

L'approccio con la macromodellazione non fa alcuna distinzione tra unità di muratura (mattoni, blocchi, pietre, ecc.) e i giunti di malta, mediando l'effetto della malta attraverso la formulazione di un materiale continuo fittizio. I macro-modelli, detti anche modelli del Continuo Meccanico agli elementi finiti, possono inoltre essere collegati alla plasticità o alle leggi costitutive di danno. Tuttavia essi incontrano una significativa limitazione nella loro incapacità di simulare forti discontinuità tra diversi blocchi o parti della muratura da costruzione. Tali discontinuità, corrispondenti ai giunti fisici o alle singole crepe formatesi più tardi nella struttura, possono

provocare fenomeni, quali separazione dei blocchi, rotazione o scorrimento per attrito, che non sono facilmente descrivibili per mezzo di un approccio FEM strettamente basato sulla meccanica del continuo. Un possibile modo di superare questi limiti consiste nell'inclusione all'interno del FEM di una mesh per gli elementi di interfaccia congiunti, in modo da modellare la risposta delle discontinuità.

### 2.1.2 Modelli continui (meso-modellazione)

Se risulta individuabile una disposizione regolare dei mattoni all'interno della muratura, le tecniche di omogeneizzazione rappresentano un potente strumento per l'analisi strutturale. Le tecniche di omogeneizzazione seguono un approccio di tipo macroscopico, nel quale non si distingue più tra gli elementi che costituiscono la tessitura muraria e i giunti di malta, ma viene introdotto un unico elemento finito, che ha il compito di simulare il comportamento globale del materiale "muratura".

Esistono due metodologie principali per la definizione di un modello continuo, entrambe basate sull'individuazione di una cella base. Il primo è basato sulla taratura del modello continuo mediante modellazioni di dettaglio o sperimentazioni dirette condotte esclusivamente sulla cella elementare[ (Anthoine 1997); (Pegon e Anthoine 1997)]. Il secondo approccio consiste nella semplificazione della geometria della cella, allo scopo di individuare delle soluzioni per l'omogeneizzazione in forma chiusa. Tale approccio, sebbene approssimato, è di più immediata interpretazione e pertanto più diffuso. Nell'ambito di tale metodo sono state avanzate numerose proposte, tra le più celebri ricordiamo quella di Zucchini e Lourenço (2002). I principali vantaggi di questo metodo sono i seguenti:

- la mesh degli elementi finiti non deve riprodurre il modello esatto delle unità in muratura né deve essere così fitta e può essere quindi realizzata automaticamente.
- una volta che le proprietà omogenee sono state calcolate, è possibile utilizzare il metodo degli elementi finiti standard per eseguire l'analisi evitando le complicazioni introdotte dalle interfacce degli elementi.

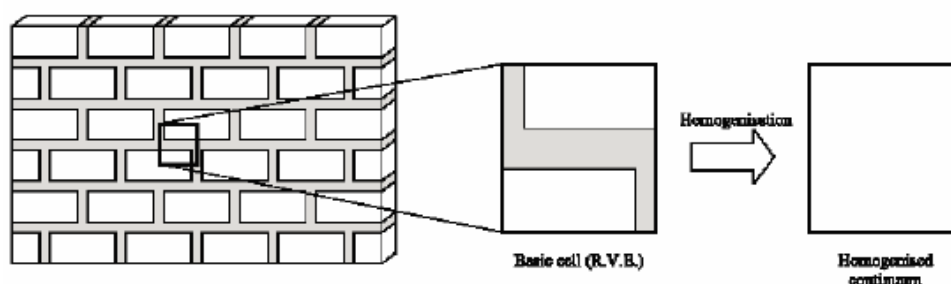


Figura 2.2: esempio di definizione della cella elementare (Zucchini e Lourenço 2002)

### 2.1.3 Modelli discontinui (micro-modellazione)

I modelli discontinui consistono nella modellazione separata dei mattoni, dei giunti di malta e dell'interfaccia mattone-malta (Fouchal, Lebon e Titeux 2009), adottando per ciascuna di tali componenti un'appropriata legge costitutiva. Questo approccio restituisce risultati molto accurati soprattutto a livello locale. I cosiddetti micro-modelli descrivono le unità e la malta dei giunti usando elementi finiti continui, mentre l'interfaccia unità-malta è rappresentata da elementi discontinui che rappresentano potenziali piani di rottura o slittamento. La scelta della mesh e la conseguente disposizione degli elementi di interfaccia può seguire due possibili criteri. Può essere proposta una mesh che riproduce fedelmente la tessitura muraria con gli elementi e i giunti di malta disposti secondo la reale distribuzione [ (Lofti e Shing 1994); (Page 1978); (Lourenço e Rots 1997)]. Oppure si può considerare una mesh generata in modo casuale, che sia comunque in grado di riprodurre l'effettiva distribuzione dei giunti di malta (Beer 1985).

Una micro-modellazione dettagliata è probabilmente lo strumento più accurato disponibile per simulare il reale comportamento della muratura ed è particolarmente adeguata a descrivere la risposta locale del materiale. Tuttavia, l'elevato livello di raffinatezza richiesto implica un intenso sforzo computazionale (cioè un grande numero di gradi di libertà del modello numerico), che limita l'applicabilità dei micro-modelli all'analisi di piccoli elementi o piccoli dettagli strutturali.

Esistono poi approcci leggermente semplificati, secondo i quali le proprietà della malta e dell'interfaccia con i mattoni sono concentrati in un unico elemento (Pelà 2009). Tali approcci da un lato riducono l'accuratezza della soluzione, ma dall'altro garantiscono un onere computazionale inferiore.

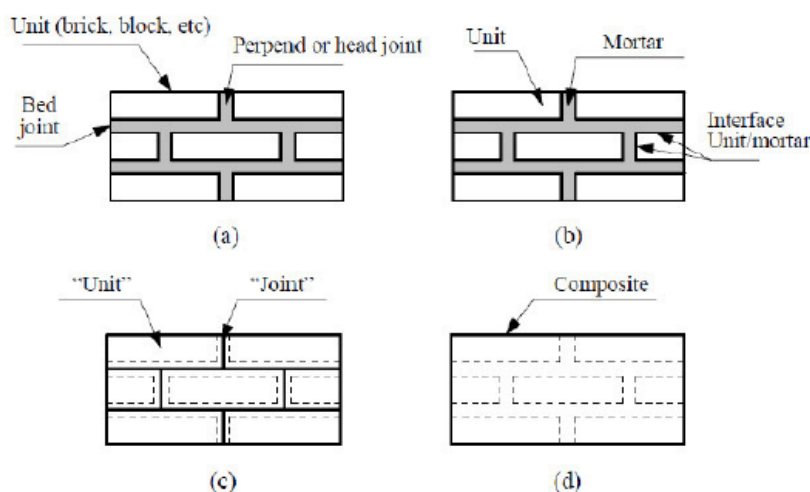


Figura 2.3: (a) elemento modulare di un pannello in muratura; (b) micro-modellazione dettagliata; (c) micro-modellazione semplificata; (d) macro-modellazione (Pelà 2009)



## 2.2 Metodo ad elementi di contorno

Il metodo agli elementi di contorno, o *Boundary Element Method (BEM)*, consiste nella discretizzazione del contorno dell'elemento strutturale. Esso è stato inizialmente proposto con riferimento a problemi geotecnici ed è stato successivamente esteso a quelli strutturali. Rimangono comunque molto limitate le applicazioni al campo delle strutture murarie, tra queste si possono ricordare quelle in relazione a un comportamento lineare della muratura (Panzeca, Cucco e Salerno 2008), mentre le proposte di altri autori [ (Rashed, Abdalla e Youssef 1997); (Hatzigeorgiou e Beskos 2002)], sono mirate a considerare il comportamento non lineare della muratura.

Esistono poi degli approcci ibridi, che combinano l'uso degli elementi di contorno con quello degli elementi finiti. Un esempio di questo approccio applicato alle strutture murarie è quello dovuto a Papia (1988).

## 2.3 Metodo ad elementi distinti/discreti

L'approccio agli *elementi distinti* (o *discreti*) è applicabile a tutti sistemi che possono essere considerati come assemblaggio di elementi (o blocchi), in genere rigidi, interagenti tra loro. Tale metodologia è stata proposta per la prima volta da Cundall (1971) che sulla base del modello concettuale ne derivò una prima formulazione numerica. Le applicazioni nel campo delle strutture murarie sono state avviate solo qualche anno dopo [ (Pagnoni 1994); (Pagnoni e Vanzi 1995)]. L'idea comune nelle diverse applicazioni del metodo agli elementi discreti alla muratura è l'idealizzazione del materiale come materiale discontinuo, dove i giunti sono modellati come superfici di contatto tra i diversi blocchi. Nell'utilizzo classico del metodo infatti non viene prevista nessuna omogeneizzazione o alterazione della reale tessitura muraria che nel modello viene fedelmente riprodotta. Questo approccio permette la modellazione di varie fonti di comportamento non lineare, come i grandi spostamenti, e una mesh indipendente per ogni blocco, in caso di blocchi deformabili. Tuttavia necessita di un gran numero di punti di contatto per una rappresentazione accurata degli stress dell'interfaccia e un tempo di analisi piuttosto lungo, in particolare per problemi 3D.

Il metodo degli elementi distinti sembra adattarsi meglio alla tipologia strutturale della muratura a blocchi quadrati con dimensioni rilevanti, una tipologia costruttiva cioè di tipo storico monumentale. Tale predisposizione è dovuta al fatto che in strutture del genere il numero di elementi risulta, comunque, relativamente contenuto, e l'estrema regolarità della tessitura muraria rende possibile una modellazione realistica della struttura. Esistono tuttavia delle applicazioni anche con riferimento a murature a tessitura irregolare: in questo caso gli elementi lapidei sono modellati come corpi rigidi mentre elementi di contatto deformabili dotati di coesione ed attrito simulano il comportamento dei giunti di malta.

## 2.4 Metodi semplificati o a macro-elementi

Gli approcci semplificati per la modellazione di edifici in muratura mirano ad una riduzione dell'onere computazionale e a questo scopo sono basati su una modellazione in cui l'elemento base è concepito per modellare una porzione finita di muratura. L'intera struttura viene ottenuta per assemblaggio di *macro-elementi* e si ottiene così un modello globale dell'edificio su cui possono essere effettuate analisi statiche e dinamiche non-lineari.

Il principale vantaggio che offre tale approccio è quello di ridurre considerevolmente l'onere computazionale dell'analisi rispetto alla modellazione agli elementi finiti, in quanto viene sostanzialmente ridotto il numero dei gradi di libertà ed inoltre il comportamento non lineare dell'elemento base viene generalmente descritto mediante legami costitutivi definiti in ambito mono-dimensionale. Tutti i parametri che caratterizzano un macro-elemento sono da intendersi come grandezze medie, e l'informazione di ciò che avviene localmente all'interno della porzione di struttura rappresenta una grandezza generalizzata. Le maggiori difficoltà che si riscontrano nello sviluppo di un macro-modello risiedono nelle procedure di taratura dei parametri che lo caratterizzano, specialmente se questi non hanno un significato fisico immediato o se risentono dell'influenza di diversi fattori.

## 2.5 Modellazione numerica delle strutture a geometria curva

Benché oggi elementi architettonici come volte e cupole abbiano funzione principalmente ornamentale, in passato ricorrere a queste tipologie strutturali era piuttosto una necessità che garantiva solidità, evitava l'insorgere di tensioni di trazione e assicurava un efficace scarico delle forze agli elementi portanti. All'interno del patrimonio architettonico, la cui conservazione è una sfida della società contemporanea, le cupole in muratura rappresentano un tratto caratteristico del patrimonio architettonico italiano ed europeo prima dell'avvento del calcestruzzo (Heyman 1992). Risulta indispensabile una metodologia che consenta la valutazione del comportamento non lineare di queste strutture, ma ne garantisca al tempo stesso l'impiego in ambito professionale, con costi computazionali ragionevoli. In questo contesto assume notevole importanza il metodo degli elementi finiti. Di seguito due esempi presenti in letteratura, un approccio micro e uno macro agli elementi finiti, vengono presentati per la struttura a geometria curva di interesse in questo lavoro di tesi, cioè la cupola in muratura.

Come si vedrà nel proseguo, unendo le idee di base proposte da due esempi proposti, si è deciso di utilizzare per questo lavoro di tesi un approccio di macro-modellazione. La muratura, considerata come un assemblaggio eterogeneo di blocchi, è stata sostituita con un materiale continuo, non-lineare, macroscopicamente equivalente. L'intera cupola è stata poi analizzata nel dominio non lineare mediante un codice di calcolo ad elementi finiti (FE) che ha permesso la discretizzazione del modello globale utilizzando elementi solidi tridimensionali.

### 2.5.1 Micro modellazione semplificata per la cupola del Duomo di Firenze

La modellazione numerica della cupola del Brunelleschi (Collura e Presenti 2010) è stata realizzata per gradi, partendo da un modello lineare a elementi tridimensionali, fino ad arrivare a un modello non lineare, che ha permesso di riprodurre sia qualitativamente che quantitativamente il reale comportamento della struttura. Il modello numerico globale è stato elaborato attraverso il codice di calcolo ad elementi finiti ANSYS, utilizzando elementi solidi tridimensionali a 8 nodi (SOLID 45) a comportamento elastico lineare (Figura 2.4).

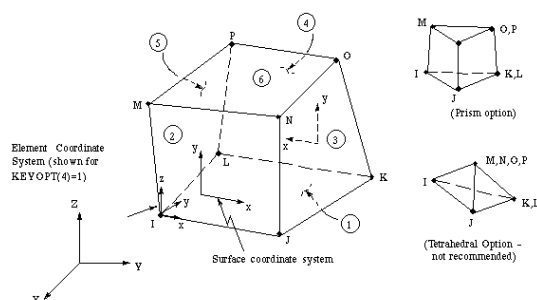


Figura 2.4: rappresentazione elemento SOLID 45

Il comportamento anelastico della muratura è stato riprodotto al discreto attraverso l'inserimento di elementi gap e elementi molle nelle zone maggiormente sollecitate passando così, da un modello elastico lineare ad un modello e quindi analisi di tipo non lineare. Per questo motivo, sul modello costituito interamente con elementi “brick”, ossia solidi tridimensionali isoparametrici, si inseriscono delle sconnessioni interne laddove si riscontrano zone di trazione elevate al fine di modellare al discreto il fenomeno della fessurazione, introducendo così a posteriori la condizione di rottura fragile a trazione del materiale muratura. Gli elementi gap (CONTAC 52) consentono la trasmissione di compressione e attrito fra i lembi delle fessure. L'inserimento degli elementi molle (LINK 10), è stato invece necessario in quanto agli estremi delle fessure siamo in presenza di una singolarità numerica dove, inevitabilmente, le trazioni andranno amplificandosi. Poiché tale fenomeno non ha significato fisico, sono state introdotte le molle al fine di attenuare le singolarità denunciate, confortati dal fatto che in entrambi i casi, con o senza molle, l'ampiezza delle fessure non subisce sostanziali variazioni non alterando quindi il comportamento strutturale.

### 2.5.2 Meso-macro modellazione per strutture in muratura a doppia curvatura

La modellazione in due step di un semplice modello 3D proposta da Milani e Tralli (2012) può essere utilizzata per la valutazione del comportamento non lineare delle strutture a doppia curvatura in muratura. Nel primo passo, chiamato meso-modellazione, la muratura, considerata come un assemblaggio eterogeneo di blocchi, è stata sostituita con un materiale omogeneo, non-lineare, macroscopicamente equivalente. Alla meso-scala, un elemento rappresentativo di volume con andamento curvo al bordo (REV) costituito da un mattone centrale interconnesso

con sei suoi mattoni vicini attraverso giunti a spessore zero è discretizzato con elementi cuneo a sei nodi e un'interfaccia rettangolare non lineare elasto-plastica con softening (giunti di malta e interfacce mattoni - mattoni). Gli elementi cuneo a sei nodi vengono considerati infinitamente rigidi, considerando per le articolazioni un comportamento di attrito di tensione limite ed è adottata una resistenza alla compressione che mostra softening. In questo modo, tutte le deformazioni (parte lineare e non lineare) sono concentrate esclusivamente su interfacce mattone-mattone (modellate assumendo un criterio di rottura Mohr-Coulomb) e sui giunti di malta. L'intero comportamento lineare e non lineare del REV può essere investigato in modo semplificato, ma con uno sforzo di calcolo molto limitato. Nella seconda fase - macro-modellazione - intere cupole in muratura vengono analizzate nel dominio non lineare mediante un codice di analisi limite ad FE. In analogia con il primo passo, il modello FE si basa su una discretizzazione del dominio attraverso cunei a sei nodi rigidi e infinitamente resistenti. Di nuovo, deformazioni elastiche e deformazioni inelastiche sono consentite solo alle interfacce tra elementi contigui. E' quindi richiesta solo la conoscenza delle relazioni macroscopiche sforzo-deformazione della muratura a determinati orientamenti delle interfacce rispetto alla direzione del giunto. Questo approccio consente potenzialmente di eseguire simulazioni numeriche su strutture di scala medio / grande con una frazione del tempo richiesto dal FE standard.

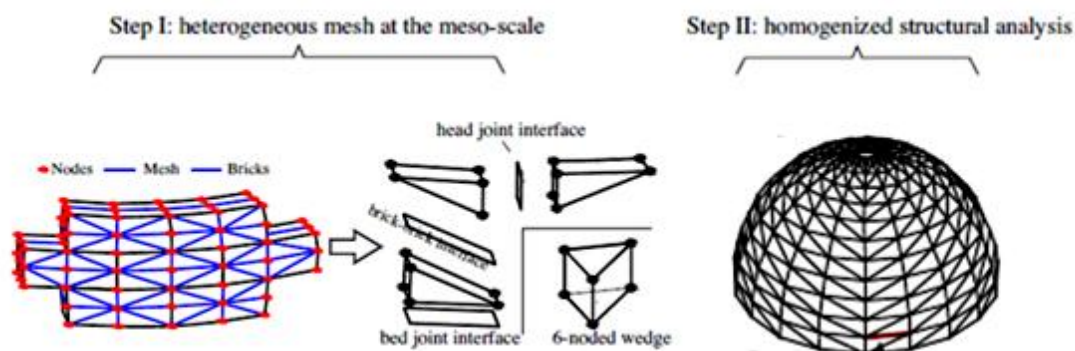


Figura 2.5: approccio di modellazione in due step per le cupole proposto da Milani e Tralli (2012)

### 3 Definizione dei modelli di riferimento per le analisi strutturali

La definizione del modello di riferimento, che descriva in maniera più realistica possibile il comportamento dell'edificio, costituisce una delle fasi più complesse dell'intera procedura di analisi. Tali problematiche diventano particolarmente rilevanti per le costruzioni in muratura, anche a causa delle numerose incertezze relative agli stati di sollecitazione in atto, ai tipi di materiale impiegati e al loro comportamento meccanico, oltre che agli eventuali interventi di trasformazione e riparazione attuati nel tempo. E' evidente quindi che l'analisi di un edificio storico sovente risulta un compito assai impegnativo [ (Del Piero 1984); (Carpinteri, Invernizzi e Lacidogna 2005)] e, in alcuni casi, i metodi utilizzati per estrapolare procedure analitiche sviluppate per edifici moderni appaiono inadeguati. Tutte queste difficoltà sono amplificate se gli oggetti sotto indagine appartengono al patrimonio culturale (CH). Poiché gli edifici CH possono essere considerati unici per le loro caratteristiche storiche, geometriche e strutturali, nonché per il loro valore architettonico e artistico, le linee guida attuali suggeriscono un processo di conoscenza accurato da seguire. Una corretta conoscenza degli edifici storici, seguendo la Normativa Italiana [ (Circolare 21-01-2019 n°7); (Decreto Ministeriale del 17-01-2018)], dovrebbe basarsi su:

- analisi storico-critica;
- rilievo geometrico-strutturale;
- caratterizzazione meccanica dei materiali;
- definizione dei livelli di conoscenza e fattori di confidenza;
- valutazione delle azioni agenti sulla struttura.

La definizione della strategia di modellazione delle costruzioni storiche in muratura non può prescindere da un accurato esame del corpo di fabbrica. Ogni edificio monumentale è, per definizione, un edificio unico caratterizzato dalla propria storia, spesso risultante in una miscela composita di elementi strutturali aggiunti o sostituiti, fortemente interagenti (Betti, Galano e Vignoli 2016). Pertanto, è fondamentale una buona comprensione del processo storico poiché le modifiche avvenute attraverso la storia dell'edificio hanno prodotto diverse incertezze nella definizione del modello. Questo passo preliminare è fondamentale per comprendere il comportamento qualitativo della struttura e per individuare i parametri di resistenza e di deformabilità che dovranno poi essere impiegati nelle analisi numeriche e soprattutto per la scelta, non banale, della modellazione da adottare. Tale scelta non può pertanto prescindere da un'attenta analisi dell'esistente e dei dettagli costruttivi, tuttavia il grado di dettaglio della modellazione deve essere il giusto compromesso tra costi e benefici, ovvero tra oneri computazionali e precisione dei risultati che ci si propone di ottenere.

Nel seguito del capitolo verranno presentate più nel dettaglio le fasi del processo di conoscenza multidisciplinare, necessarie per una corretta modellazione strutturale.

### *3.1 Analisi storico-critica*

L'indagine storica fornisce informazioni estremamente significative e deve essere considerata uno degli elementi più preziosi dell'analisi sugli edifici storici. Coisson e Ottoni (2013) definiscono il "monitoraggio storico" il primo passo di qualsiasi ricerca sulle strutture storiche. Interpretare correttamente i dati storici e collegarli alle reali caratteristiche strutturali o morfologiche dell'edificio (costruzione, proprietà dei materiali, riparazioni, alterazioni, danni) può essere uno strumento molto efficace per avere una panoramica completa del comportamento strutturale dell'edificio. L'analisi storico-critica permette quindi ricostruire il processo di realizzazione e le successive modifiche subite nel tempo dalla costruzione, nonché gli eventi che l'hanno interessata fino alla configurazione finale in esame. Il processo di indagine inizia con il reperire tutti i documenti disponibili sulle origini del fabbricato, elaborati e rilievi già prodotti, con particolare attenzione su:

- epoca di costruzione;
- tecniche, regole costruttive e, se esistenti, norme tecniche dell'epoca di costruzione;
- forma originaria e le successive modifiche;
- traumi subiti e le alterazioni delle condizioni al contorno;
- deformazioni, dissesti e quadri fessurativi, con indicazioni, ove possibile, della loro evoluzione nel tempo;
- aspetti urbanistici e storici che hanno regolato lo sviluppo dell'aggregato edilizio di cui l'edificio è parte.

Tuttavia, sezioni accurate della configurazione originale e una descrizione dettagliata delle alterazioni non sono sempre disponibili, anche nel caso di edifici molto importanti, perché tali informazioni possono avere carenze significative o lasciare irrisolti alcuni aspetti cruciali.

In definitiva, questa fase deve permettere di interpretare la condizione attuale dell'edificio come risultato di una serie di vicende statiche e di trasformazioni che si sono sovrapposte nel tempo.

### *3.2 Rilievo geometrico-strutturale*

Le indagini geometriche rappresentano un passo importante nel processo di investigazione e diagnosi dello stato di conservazione dell'edificio e della salute strutturale (Pintus, et al. 2014). Il rilievo geometrico dovrà essere riferito alla geometria complessiva del corpo dell'edificio, comprendendo anche i rapporti con le eventuali strutture in aderenza. Il rilievo deve individuare l'organismo resistente della costruzione, tenendo anche presenti la qualità e lo stato di conservazione dei materiali e degli elementi costitutivi. Nel rilievo si possono individuare tre livelli di indagine, in relazione al loro grado di approfondimento:

- *Indagini limitate*: sono generalmente basate su indagini di tipo visivo che, al rilievo geometrico delle superfici esterne degli elementi costruttivi, uniscono saggi che consentano di esaminare, almeno localmente, le caratteristiche della muratura.
- *Indagini estese*: i rilievi e le indagini in-situ indicati al punto precedente, sono accompagnati da saggi più estesi e diffusi così da ottenere informazioni sulle caratteristiche dei materiali e costruttive fedeli alla reale varietà della costruzione.
- *Indagini esaustive*: oltre a quanto indicato al punto precedente, le indagini sono estese in modo sistematico con il ricorso a saggi che consentano di ottenere un'opinione chiara sulla morfologia e sulla qualità delle murature.

Le indagini geometriche possono essere realizzate attraverso tecnologie moderne, utilizzate anche simultaneamente, per avere un migliore risultato. Tra le tecniche più utilizzate, vale la pena menzionare:

- **Fotogrammetria**: questa pratica determina le proprietà geometriche delle immagini fotografiche. In questo modo, consente di ottenere una rappresentazione oggettiva e rigorosa dell'edificio. La fotogrammetria può essere considerata una tecnica relativamente economica, ma il costo e altri svantaggi sono spesso in secondo piano rispetto alla precisione e all'affidabilità dei risultati.
- **Teodolite con stazione totale**: in questa tecnica, un teodolite elettronico è integrato con un misuratore di distanza elettronico ed è in grado di leggere le distanze dallo strumento a un punto particolare. Nonostante la misura può essere molto precisa e può sembrare che riduca i costi rispetto alla fotogrammetria, richiede operazioni specializzate e operatori esperti.
- **Laser Scanner 3D (LIDAR)**: è una tecnologia ottica di telerilevamento in grado di misurare la distanza dal bersaglio utilizzando l'impulso di un laser. Questa tecnica può catturare un gran numero di punti precisi a grande velocità ed è molto utile comprendere geometrie complesse di edifici storici (Salonia, et al. 2007).

Le indagini geometriche devono essere condotte usando la regola pratica quando sono finalizzate alla valutazione strutturale, e quindi considerando la geometria globale e gli elementi isolati e di dettaglio che caratterizzano il manufatto. Tuttavia, i modelli ottenuti dal rilievo geometrico non dovrebbero essere troppo dettagliati per evitare la complessità computazionale, infatti gli elementi architettonici che non hanno un ruolo strutturale nell'edificio possono essere omessi, in quanto non giocano un ruolo di primo piano nella risposta statica dell'edificio. Un altro aspetto importante riguardo l'indagine geometrica per la valutazione strutturale è la mappa delle deformazioni come abbassamento o rigonfiamento [ (Ottoni 2008); (Macchi 2001)]. La finalità è di consentire, nella successiva fase diagnostica, l'individuazione dell'origine e delle possibili evoluzioni delle problematiche strutturali dell'edificio.

### 3.3 Caratterizzazione meccanica dei materiali

Per condurre indagini strutturali complete, è richiesta una accurata caratterizzazione meccanica dei materiali al fine di conseguire un'adeguata conoscenza delle proprietà dei materiali e del loro degrado. La misura diretta delle caratteristiche meccaniche della muratura avviene mediante l'esecuzione di prove in-situ su porzioni di muratura, o di prove in laboratorio su elementi indisturbati prelevati in-situ. Le prove possono essere di compressione e di taglio, scelte in relazione alla tipologia muraria e al criterio di resistenza adottato per l'analisi. Tuttavia, le difficoltà legate all'accessibilità e al campionamento distruttivo irreversibile non consentono un uso estensivo di questi metodi sugli edifici storici, specialmente se appartengono a eredità culturale. Infatti, gli edifici storici presentano spesso peculiarità artistiche come decorazioni, affreschi o mosaici, quindi sono preferibili tecniche non distruttive (NDT) o tecniche indirette. Si possono distinguere, in relazione al loro grado di approfondimento, tre livelli di prova per la caratterizzazione dei materiali:

- *Prove limitate*: Si tratta di indagini non dettagliate e non estese, basate principalmente su esami visivi delle superfici, che prevedono limitati controlli degli elementi costituenti la muratura. Scopo delle indagini è consentire l'identificazione delle tipologie di muratura alla quale fare riferimento ai fini della determinazione delle proprietà meccaniche; questo prevede il rilievo della tessitura muraria dei paramenti ed una stima della sezione muraria.
- *Prove estese*: Si tratta di indagini visive, diffuse e sistematiche, accompagnate da approfondimenti locali. Si prevedono saggi estesi, sia in superficie sia nello spessore murario (anche con endoscopie), mirati alla conoscenza dei materiali e della morfologia interna della muratura, all'individuazione delle zone omogenee per materiali e tessitura muraria, oltre che dei fenomeni di degrado. E inoltre prevista l'esecuzione di analisi delle malte e, se significative, degli elementi costituenti, accompagnate da tecniche diagnostiche non distruttive (penetrometriche, sclerometriche, soniche, termografiche, radar, ecc.) ed eventualmente integrate da tecniche moderatamente distruttive (ad esempio martinetti piatti), finalizzate a classificare in modo più accurato la tipologia muraria e la sua qualità.
- *Prove esaustive*: In aggiunta alle richieste della categoria precedente, si prevedono prove dirette sui materiali per determinarne i parametri meccanici. Le prove devono essere eseguite o in situ o in laboratorio su elementi indisturbati prelevati in situ e possono comprendere: prove di compressione (su pannelli o tramite martinetti piatti doppi); prove di taglio (compressione e taglio, compressione diagonale, taglio diretto sul giunto), selezionate in relazione alla tipologia muraria e al criterio di resistenza adottato per l'analisi.

Per una corretta valutazione strutturale, è importante raggiungere anche una buona conoscenza del deterioramento dei materiali degli edifici storici. Il decadimento dei materiali da costruzione



può essere definito come la degradazione nel tempo delle proprietà del materiale e può essere dovuto a fattori intrinseci ed estrinseci (Moropoulou, et al. 2013):

- i fattori intrinseci includono il tipo di materiali da costruzione e le loro proprietà, la loro massa, la tecnologia di costruzione e la loro compatibilità con altri tipi di materiali;
- i fattori estrinseci comprendono le condizioni al contorno come le caratteristiche climatiche, la distribuzione, l'esposizione, le condizioni ambientali, il microclima prevalente, il tipo e la qualità dell'atmosfera (urbana, marina, ecc.), La presenza di acqua (vento, pioggia, condensazione, cristallizzazione del sale), il livello di umidità.

### 3.4 Definizione dei livelli di conoscenza e fattori di confidenza

Le restrizioni imposte alle ispezioni e all'esecuzione di valutazioni quantitative affidabili si traducono in informazioni limitate sul sistema costruttivo e sulle proprietà dei materiali (Betti, Galano e Vignoli 2016). Dunque non sempre per tutte le costruzioni è possibile ottenere il medesimo grado di conoscenza, tantomeno è sempre possibile o certo arrivare ad un livello di conoscenza approfondito. La Normativa, interpreta la problematica e introduce il concetto di livello di conoscenza per edifici monumentali specificando, in relazione ad esso, opportuni fattori di confidenza. I fattori di confidenza sono utilizzati per la riduzione dei valori dei parametri meccanici dei materiali e devono essere intesi come indicatori del livello di approfondimento raggiunto. Di seguito, con riferimento alle specifiche contenute al paragrafo 8.5 delle NTC, è riportata la guida alla stima dei *Fattori di Confidenza* (FC), definiti con riferimento ai tre *Livelli di Conoscenza* (LC) crescenti, secondo quanto riportato al paragrafo C8.5.4 (Circolare 21-01-2019 n°7).

- **LC1:** si intende raggiunto quando siano stati effettuati, come minimo, l'analisi storico-critica commisurata al livello considerato, il rilievo geometrico completo, indagini limitate sui dettagli costruttivi e prove limitate sulle caratteristiche meccaniche dei materiali; il corrispondente fattore di confidenza è **FC=1.35**.
- **LC2:** si intende raggiunto quando siano stati effettuati, come minimo, l'analisi storico-critica commisurata al livello considerato, il rilievo geometrico completo, indagini estese sui dettagli costruttivi e prove estese sulle caratteristiche meccaniche dei materiali; il corrispondente fattore di confidenza è **FC=1.2**.
- **LC3:** si intende raggiunto quando siano stati effettuati l'analisi storico-critica commisurata al livello considerato, il rilievo geometrico, completo ed accurato in ogni sua parte, indagini esaustive sui dettagli costruttivi e prove esaustive sulle caratteristiche meccaniche dei materiali; il corrispondente fattore di confidenza è **FC=1** (da applicarsi limitatamente ai valori di quei parametri per i quali sono state eseguite le prove e le indagini su citate, mentre per gli altri parametri meccanici il valore di **FC** è definito coerentemente con le corrispondenti prove limitate o estese eseguite).

Dai livelli di conoscenza definiti vengono a dipendere i valori dei parametri meccanici del materiale impiegati e la normativa fornisce dei range di valori per i moduli elastici e di resistenza delle più comuni tipologie murarie. I valori medi dei parametri meccanici da utilizzare per le verifiche possono essere definiti, con riferimento alla tipologia muraria in considerazione per i diversi livelli di conoscenza, come segue:

- LC1:
  - Resistenze: i valori minimi degli intervalli riportati in Tabella C8.5.I;
  - Moduli elastici: i valori medi degli intervalli riportati nella tabella suddetta;
- LC2:
  - Resistenze: i valori medi degli intervalli riportati in Tabella C8.5.I;
  - Moduli elastici: valori medi degli intervalli riportati nella tabella suddetta;
- LC3: i valori delle resistenze e dei moduli elastici riportati in Tabella C.8.5.I individuano una distribuzione a-priori che può essere aggiornata sulla base dei risultati delle misure eseguite in sito.

La tabella C8.5.I - ripresa in questo elaborato in Tabella 3.1 - riporta, per il comportamento delle tipologie murarie più ricorrenti, indicazioni, non vincolanti, sui possibili valori dei parametri meccanici, identificati attraverso il rilievo degli aspetti costruttivi e relativi, con l'eccezione dell'ultima riga, a precise condizioni: malta di calce di modeste caratteristiche, assenza di ricorsi (listature), paramenti semplicemente accostati o mal collegati, tessitura (nel caso di elementi regolari) a regola d'arte, muratura non consolidata. Le caratteristiche meccaniche della muratura, in uno stato di fatto migliore di quello indicato nella Tabella C8.5.I, possono ottenersi applicando (indicativamente e salvo più dettagliate valutazioni) i coefficienti migliorativi di Tabella C8.5.II (riportati in Tabella 3.2). Tali coefficienti possono essere applicati in combinazione tra loro, considerando la concomitanza al più dei due effetti che hanno i coefficienti moltiplicativi più alti, e sono stati definiti in funzione dei seguenti fattori:

- *malta di buone caratteristiche*: il coefficiente indicato in Tabella C8.5.II, diversificato per le varie tipologie, si può applicare sia ai parametri di resistenza ( $f$ ,  $\tau_0$  e  $f_{v0}$ ), sia ai moduli elastici ( $E$  e  $G$ );
- *presenza di ricorsi (o listature)*: il coefficiente di tabella si può applicare ai soli parametri di resistenza ( $f$  e  $\tau_0$ ); tale coefficiente ha significato solo per le tipologie murarie in cui si riscontra tale tecnica costruttiva;
- *presenza sistematica di elementi di collegamento trasversale tra i paramenti*: il coefficiente indicato in tabella si può applicare ai soli parametri di resistenza ( $f$ ,  $\tau_0$  e  $f_{v0}$ ).

I valori per le verifiche saranno ottenuti, a partire dai valori medi presenti in Tabella 3.1, utilizzando misure sperimentali dirette sull'edificio, tenendo conto dell'attendibilità del metodo di prova. In sostituzione, possono essere considerati i risultati di prove eseguite su altre costruzioni della stessa zona, in presenza di chiara e comprovata corrispondenza tipologica per materiali e morfologia.

**Tabella 3.1: valori di riferimento dei parametri meccanici della muratura, da usarsi nei criteri di resistenza di seguito specificati (comportamento a tempi brevi), e peso specifico medio per diverse tipologie di muratura. I valori si riferiscono a:  $f$  = resistenza media a compressione,  $\tau_0$  = resistenza media a taglio in assenza di tensioni normali,  $f_{v0}$  = resistenza media a taglio in assenza di tensioni normali,  $E$  = valore medio del modulo di elasticità normale,  $G$  = valore medio del modulo di elasticità tangenziale,  $w$  = peso specifico medio (Tabella C8.5.I della Normativa)**

Tipologia di muratura	$f$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\tau_0$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{v0}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	$G$ (N/mm <sup>2</sup> )	$w$ (kN/m <sup>3</sup> )
	min-max	min-max		min-max	min-max	
Muratura in pietrame disordinata (ciottoli, pietre erratiche e irregolari)	1,0-2,0	0,018-0,032	-	690-1050	230-350	19
Muratura a conci sbozzati, con paramenti di spessore disomogeneo (*)	2,0	0,035-0,051	-	1020-1440	340-480	20
Muratura in pietre a spacco con buona tessitura	2,6-3,8	0,056-0,074	-	1500-1980	500-660	21
Muratura irregolare di pietra tenera (tufo, calcarenite, ecc.,)	1,4-2,2	0,028-0,042	-	900-1260	300-420	13 + 16(**)
Muratura a conci regolari di pietra tenera (tufo, calcarenite, ecc.,) (**)	2,0-3,2	0,04-0,08	0,10-0,19	1200-1620	400-500	
Muratura a blocchi lapidei squadriati	5,8-8,2	0,09-0,12	0,18-0,28	2400-3300	800-1100	22
Muratura in mattoni pieni e malta di calce (***)	2,6-4,3	0,05-0,13	0,13-0,27	1200-1800	400-600	18
Muratura in mattoni semipieni con malta cementizia (es.: doppio UNI foratura ≤40%)	5,0-8,0	0,08-0,17	0,20-0,36	3500-5600	875-1400	15

(\*) Nella muratura a conci sbozzati i valori di resistenza tabellati si possono incrementare se si riscontra la sistematica presenza di zeppe profonde in pietra che migliorano i contatti e aumentano l'ammorsamento tra gli elementi lapidei; in assenza di valutazioni più precise, si utilizzi un coefficiente pari a 1,2.

(\*\*) Data la varietà litologica della pietra tenera, il peso specifico è molto variabile ma può essere facilmente stimato con prove dirette. Nel caso di muratura a conci regolari di pietra tenera, in presenza di una caratterizzazione diretta della resistenza a compressione degli elementi costituenti, la resistenza a compressione  $f_{cm}$  può essere valutata attraverso le indicazioni del § 11.10 delle NTC.

(\*\*\*) Nella muratura a mattoni pieni è opportuno ridurre i valori tabellati nel caso di giunti con spessore superiore a 13 mm; in assenza di valutazioni più precise, si utilizzi un coefficiente riduttivo pari a 0,7 per le resistenze e 0,8 per i moduli elastici.

**Tabella 3.2: coefficienti correttivi dei parametri meccanici indicati in Tabella C8.5.I (Tabella C8.5.II della Normativa)**

Tipologia di muratura	Stato di fatto			Interventi di consolidamento			
	Malta buona	Ricorsi o listature	Connessione trasversale	Iniezione di miscele leganti (*)	Intonacoarmato (**)	Risilatura armata con connessione dei paramenti (**)	Massimo coefficiente complessivo
Muratura in pietrame disordinata (ciottoli, pietre erratiche e irregolari)	1,5	1,3	1,5	2	2,5	1,6	3,5
Muratura a conci sbozzati, con paramenti di spessore disomogeneo	1,4	1,2	1,5	1,7	2,0	1,5	3,0
Muratura in pietre a spacco con buona tessitura	1,3	1,1	1,3	1,5	1,5	1,4	2,4
Muratura irregolare di pietra tenera (tufo, calcarenite, ecc.,)	1,5	1,2	1,3	1,4	1,7	1,1	2,0
Muratura a conci regolari di pietra tenera (tufo, calcarenite, ecc.,)	1,6	-	1,2	1,2	1,5	1,2	1,8
Muratura a blocchi lapidei squadriati	1,2	-	1,2	1,2	1,2	-	1,4
Muratura in mattoni pieni e malta di calce	(***)	-	1,3 (****)	1,2	1,5	1,2	1,8
Muratura in mattoni semipieni con malta cementizia (es.: doppio UNI foratura ≤40%)	1,2	-	-	-	1,3	-	1,3

(\*) I coefficienti correttivi relativi alle iniezioni di miscele leganti devono essere commisurati all'effettivo beneficio apportato alla muratura, riscontrabile con verifiche sia nella fase di esecuzione (iniettabilità) sia a-posteriori (riscontri sperimentali attraverso prove soniche o similari).

(\*\*) Valori da ridurre convenientemente nel caso di pareti di notevole spessore (p.es. > 70 cm).

(\*\*\*) Nel caso di muratura di mattoni si intende come "malta buona" una malta con resistenza media a compressione  $f_m$  superiore a 2 N/mm<sup>2</sup>. In tal caso il coefficiente correttivo può essere posto pari a  $f_m^{0,30}$  ( $f_m$  in N/mm<sup>2</sup>).

(\*\*\*\*) Nel caso di muratura di mattoni si intende come muratura trasversalmente connessa quella apparecchiata a regola d'arte.

### 3.5 Valutazione delle azioni agenti sulla struttura

Le azioni di calcolo considerate, in relazione alle prescrizioni del NTC 2018 (Decreto Ministeriale del 17-01-2018), sono:

- peso proprio, calcolato sulla base delle dimensioni effettive degli elementi strutturali (muratura portante al netto delle aperture, cordoli perimetrali);
- carico permanente della copertura, calcolato sulla base delle stratigrafie dei sovraccarichi in progetto/rilevati in sito;
- azione della neve, valutata secondo quanto esposto nel capitolo 3.4 del D.M. 17/01/2018.

Ai fini delle verifiche degli stati limite, la combinazione di carico valutata è la combinazione fondamentale, generalmente impiegata per gli stati limite ultimi (SLU):

$$\gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_P \cdot G_P + \gamma_{Q1} \cdot Q_{k1} + \gamma_{Q2} \cdot \psi_{Q2} \cdot Q_{k2} + \gamma_{Q3} \cdot \psi_{Q3} \cdot Q_{k3} + \dots$$

I valori dei coefficienti di combinazione sono riportati nella Tabella 2.5.I del D.M. 17/01/2018 e in particolare si è tenuto conto dell'incidenza del carico neve, il cui involuppo degli effetti viene considerato per le verifiche dell'edificio ai carichi verticali.

Le verifiche agli stati limite devono essere eseguite per la più gravosa condizione di carico che può agire sulla struttura, valutando gli effetti della combinazione fondamentale.

Per la progettazione di componenti strutturali che non coinvolgano azioni di tipo geotecnico, le verifiche nei confronti degli stati limite ultimi strutturali (STR) si eseguono adottando i coefficienti parziali di sicurezza riportati nella colonna A1 della Tabella 2.6.I del D.M. 17/01/2018. Sono stati pertanto assunti i seguenti valori:

- coefficiente parziale del peso proprio della struttura:  $\gamma_{G1} = 1.3$ ;
- coefficiente parziale del peso proprio degli elementi non strutturali:  $\gamma_{G2} = 1.5$ ;
- coefficienti parziali delle azioni variabili:  $\gamma_Q = 1.5$ .

## 4 Il caso della cupola della Chiesa della SS. Trinità di Torino

Realizzato un inquadramento generale della comportamento statico delle cupole, definite le differenti tipologie di modelli strutturali adottabili per gli edifici storici in muratura e individuato il modello di riferimento da seguire per le analisi, è possibile applicare questo approccio multidisciplinare al caso della cupola della Chiesa della SS. Trinità di Torino. In generale, lo scopo della modellazione strutturale è quello fornire gli strumenti per simulare il comportamento strutturale di un edificio sia in condizioni operative che in presenza di danni. Il modello numerico quindi deve essere in grado di acquisire le caratteristiche geometriche, meccaniche e fisiche in modo accurato e simulare i probabili scenari di danno dell'edificio. Gli strumenti, che possono contribuire all'analisi del comportamento strutturale, sono:

- Tecnologie di rilevamento strumentale (fotogrammetria, scanner laser, ecc...) per definire con precisione dimensioni e dettagli strutturali.
- Strumenti di rappresentazione grafica (CAD, database). Questi strumenti rappresentano il primo passo nella modellazione geometrica e nell'identificazione strutturale.
- Modelli numerici che possono essere eseguiti secondo diversi livelli di risoluzione. I metodi più comunemente implementati sono il FEM (generalmente il più usato), il metodo degli elementi al contorno (BEM) e il metodo delle differenze finite (FDM).

La definizione della strategia di modellazione strutturale da adottare, come già affermato, non può prescindere da un accurato esame del corpo di fabbrica. Ogni passaggio introdotto nel Capitolo è ora presentato nel dettaglio per il caso in studio e permettere di raggiungere una livello di conoscenza tale da proseguire con le successive fasi di modellazione geometrica e numerica e in fine con le opportune analisi strutturali.

### 4.1 *Analisi storico-critica della Chiesa della SS. Trinità*

Nel periodo successivo al Concilio di Trento (1545-1563), l'attività religiosa della città di Torino venne affidata alle confraternite, ossia gruppi di laici consacrati ai principali misteri della vita cristiana, ma al tempo stesso impegnati in attività caritative. Le sedi delle confraternite necessitavano di spazi di culto per le funzioni liturgiche che, in una sorta di competizione nella magnificenza della devozione, nel corso del Sei/Settecento assunsero la forma di vere e proprie chiese monumentali. La confraternita della Santissima Trinità venne fondata nel 1577 con una prima sede presso l'antichissima chiesetta di San Pietro de *curte Ducis*, tra l'attuale cattedrale e la sede del comune. Nel 1583, per sopperire alla mancanza di una sede adeguata e per trovare nuovi spazi, i confratelli ottennero l'abbattimento della pericolante chiesa di Sant'Agnese e di alcuni edifici adiacenti, nell'area posta all'incrocio tra il principale asse retto della città (via Dora Grossa, attuale via Garibaldi) e la direttrice verso il Duomo (attuale via XX Settembre). La costruzione della nuova chiesa iniziò nel 1598 e venne affidata all'architetto ducale e membro della confraternita Ascanio Vitozzi (1539-1615), che in seguito venne sepolto in questo stesso

tempio. L'opera è contemporanea ai lavori del Vitozzi per il santuario di Vicoforte, per la chiesa dei Cappuccini e per il nuovo palazzo ducale a Torino. L'architetto, propose un progetto frutto di una meditata scelta progettuale, densa di significati simbolici relativi al motivo della Trinità, ma fondata su precise regole geometriche. La chiesa viene impostata su pianta centrale formata da un cerchio in cui è inscritto un doppio triangolo equilatero polarizzato su tre altari e tre ingressi, a formare una ideale stella a sei punte. Il vano inferiore è concluso da un robusto cornicione, sulla cui circonferenza perfetta si impone un alto tamburo balaustrato e, oltre un secondo marcato cornicione, s'innalza un'alta cupola a sesto fortemente rialzato (di un terzo rispetto ad un pieno centro), aperta su un vertiginoso cupolino a conclusione emisferica, completato poi nei decenni successivi (Vigilino Davico 2003). Complessivamente la struttura cilindrica parietale è in altezza di parecchio inferiore a quella degli elementi di copertura (cupola e lanternino). Questa configurazione risulta essere abbastanza inusuale per l'epoca, come nota anche Scotti (1969) quando afferma: "la tradizione cinquecentesca aveva sempre risolto il rapporto pareti-cupola a vantaggio del primo termine; in questo caso il rapporto è invertito e il movimento verso l'alto, che è piuttosto blando nel corpo della chiesa, viene accentuato nella cupola e poi raccolto e, di scatto, portato molto più in alto dalla lanterna".



Figura 4.1: pianta della Chiesa della SS. Trinità (sinistra) e vista dell'interno

L'edificio è officiato dal 1606, ma l'allestimento liturgico è oggetto di completamenti successivi, che seguirono sia le esigenze di cambiamento di gusto, sia i flussi di finanziamento. L'interno, in marmi policromi è prevalentemente opera del celebre architetto messinese Filippo Juvarra che a partire dal 1718 è stato a capo di un'operazione di ridecorazione complessiva, completata nel corso dei decenni successivi dal suo allievo Giovanni Pietro Baroni di Tavigliano. L'altare destro (1734) è stato realizzato proprio nell'ambito di questa operazione, e su di esso è posta la pala con la *Madonna e i santi Agnese, Stefano e Filippo Neri* di Ignazio Nepote, che presenta la sintesi della fondazione della confraternita della Trinità romana, promossa da san Filippo nel 1548. Di inizio Ottocento è invece l'altare maggiore (1699-1703), realizzato da Francesco Aprile, su progetto di Michelangelo Garove. Sulla mensa d'altare è collocato un imponente tabernacolo eucaristico, sulla cui anta è raffigurato il Cristo Risorto; sopra il tabernacolo, nella cornice di una imponente schema di colonne libere in marmo rosa, è

ora posto un crocifisso settecentesco. Mentre l'arredo liturgico più vicino all'assetto originario è l'altare sinistro (1635), realizzato su progetto di Carlo di Castellamonte per dono del confratello presidente Silvestro de Montoliveto. Sull'altare è dipinta una rappresentazione della *Santa Maria del Popolo*, realizzata verso la metà del Cinquecento dal pittore fiammingo Giovanni Caracca (Jean Kraeck), artista di corte del duca Emanuele Filiberto, anch'egli membro della confraternita. La sagrestia, realizzata su disegno del conte di Tavigliano nel 1739, rappresenta un piccolo gioiello poco conosciuto e all'interno vi è conservato il pregevole affresco del Beaumont che rappresenta il Sacrificio di Melchisedec. La facciata su via Garibaldi è intervento del 1830 con progetto di Angelo Marchini. La cupola, dopo il restauro condotto nel 1846 da Giuseppe Leoni, è affrescata da Luigi Vacca e Francesco Gonin secondo il tema della *Gloria della Santissima Trinità in Paradiso*. Durante la seconda guerra mondiale, i bombardamenti sulla città di Torino del 13 luglio del 1943 causarono gravi danni all'edificio, in particolare la distruzione del coro situato oltre il colonnato dell'altare maggiore, che fu poi ricostruito nel Dopoguerra, e con esso le decorazioni, gli arredi e l'archivio.



Figura 4.2: vista dell'altare maggiore e dell'altare destro (sinistra) e dettaglio dell'affresco *Gloria della Santissima Trinità in Paradiso* che abbellisce la cupola della Chiesa della SS. Trinità (destra)

Nell'aprile del 2108 sono cominciati i lavori di restauro diretti dallo Studio di Architettura Associato arch. Michele Ruffino e arch. Lauretta Musso e che dovrebbero interessare via via l'intero complesso. L'intervento attuale coinvolge la cupola e per questo è stato montato un "castello" di tubi per la misura complessiva di circa 14 chilometri, pesante 35 tonnellate, su cui sono appoggiati 1500 metri quadrati di piani di lavoro. Il sostegno della Compagnia di San Paolo per questi primi lavori rientra nel vasto progetto di restauro delle chiese del centro storico di Torino, avviato da anni per contribuire, con la valorizzazione degli edifici religiosi di pregio, al distretto culturale urbano.

#### 4.2 Rilievo geometrico-strutturale della Chiesa della SS. Trinità

Le informazioni di carattere geometrico-strutturale relative al progetto di rilievo sono state raccolte in uno specifico elaborato grafico redatto dallo Studio di Architettura Associato arch. Michele Ruffino e arch. Lauretta Musso. Lo studio è a direzione dei lavori di restauro della



chiesa della SS. Trinità iniziati nell'aprile del 2018. La visione di questo elaborato permette di raccogliere informazioni relative a:

- identificazione dell'aggregato attraverso:
  - estratto di mappa della planimetria catastale dell'aggregato;
  - stralcio planimetrico dello stato di fatto dell'aggregato con indicazione di tutti i fabbricati presenti;
- rilievo costruttivo-strutturale attraverso:
  - piante con indicazione delle tipologie verticali e tessitura dei solai;
  - prospetti e sezioni trasversali globali e con dettagli costruttivi .

Di particolare interesse per questo lavoro di tesi è la conoscenza dello stato di conservazione attuale della maestosa cupola della Trinità. A favore di ciò, è stato possibile ottenere un rigoroso rilievo Laser Scanner 3D del sistema cupola-tamburo eseguito attraverso lo strumento laser LEICA BLK360 e coordinato sempre dallo Studio degli architetti Ruffino e Musso. Le scansioni sono state effettuate da sei punti di misura, tutte in alta risoluzione, con un risultato di un punto ogni 5mm a 10 m. Le immagini panoramiche, usate dallo strumento per la colorazione della nuvola sono state catturate con l'opzione HDR attiva. L'elaborazione delle scansioni ha generato un'univoca "nuvola di punti" che permette di apprezzare in maniera tridimensionale il dato metrico e la conformazione dell'intradosso della cupola attraverso dati tridimensionali con un'altissima densità di informazioni.

La così detta nuvola di punti (*point cloud*), altro non è che l'insieme dei milioni di punti 3D misurati in un determinato ambiente, caratterizzati dalla loro posizione in un sistema di coordinate e da eventuali valori di intensità (colore, profondità, ecc.) ad essi associati. La densità dei punti "catturati" dallo strumento laser è proporzionale al tempo di acquisizione e, più la nuvola risulta densa, maggiore sarà la chiarezza della caratterizzazione dell'oggetto. La nuvola di punti rappresenta quindi un modello tridimensionale dell'oggetto rilevato e nel caso di studio, tale modello rappresenta appieno la configurazione geometrica e i dettagli strutturali ed artistici propri dell'interno dell'edificio, con particolare attenzione nei confronti dell'intradosso della cupola. In generale, la nuvola di punti racchiude con se tutte le informazioni del rilievo e permette di:

- visualizzare in tridimensionale l'oggetto rilevato;
- misurare le distanze tra punti;
- effettuare confronti tra modelli.

Esse possono essere finalizzate a diversi scopi: la creazione di modelli CAD tridimensionali (*Computer-Aided Design*), la misura di precisione e il controllo qualità dei prodotti. Nel caso in esame, la nuvola di punti è stata utilizzata come dato di partenza per la creazione di una superficie *mesh* poligonale, che sarà utilizzata poi per la modellazione CAD. Una *mesh* poligonale è un reticolo che definisce un oggetto nello spazio collegando ogni punto di misura



con celle di superficie, triangolari o quadrangolari, che ne rispettano la posizione spaziale. I componenti visibili di una *mesh* sono:

- Vertice (*vertex*)– Punto dello spazio, dotato quindi di coordinate che ne determinano la posizione
- Spigolo (*edge*) – Segmento che congiunge due vertici nello spazio. In inglese: *edge*.
- Faccia (*face*) – Definita attraverso la connessione e chiusura di almeno tre spigoli (Siddi 2014).

La *mesh*, diversamente da un oggetto solido reale, non presenta una massa ed è quindi una sorta di volume vuoto, privo di spessore, le cui facce sono appunto dei "veli" superficiali (Villa 2016). Dalla nuvola di punti è stata così creata la *mesh* dell'intradosso della cupola con due diversi livelli di dettaglio: una *mesh* molto dettagliata e una ridotta. Per semplici motivi di capacità e potenza dell'elaboratore elettronico a disposizione, è stato necessario operare con la *mesh* ridotta, in quanto solo strumentazioni e programmi specifici di ricerca sono in grado di aprire e gestire quella molto dettagliata. Questa *mesh* sarà il punto di partenza per le considerazioni a venire e per la creazione del modello 3D.



Figura 4.3: dettaglio della nuvola di punti rappresentante l'intradosso della cupola e della relativa *mesh* molto dettagliata

#### 4.2.1 Indagine visiva della superficie *mesh*

La *mesh* ridotta a disposizione per questo lavoro è stata fornita in formato *OBJ*. L'estensione del file *OBJ*, conosciuta come *Wavefront 3D Object File*, è stata sviluppata dalla *Wavefront Technologies*. Si tratta di un formato semplice, con un *data-format* che rappresenta solamente la geometria 3D, ossia la posizione di ogni vertice, la posizione di ogni coordinata UV per le *texture*, le normali e le facce che compongono il modello. Questo tipo di file può essere aperto mediante diversi software specifici, che permettono di creare e manipolare nuvole di punti e le relative *meshes*. In questo caso la *mesh* dell'intradosso della cupola è stata visualizzata attraverso la versione *free demo* del programma *3DReshaper*.

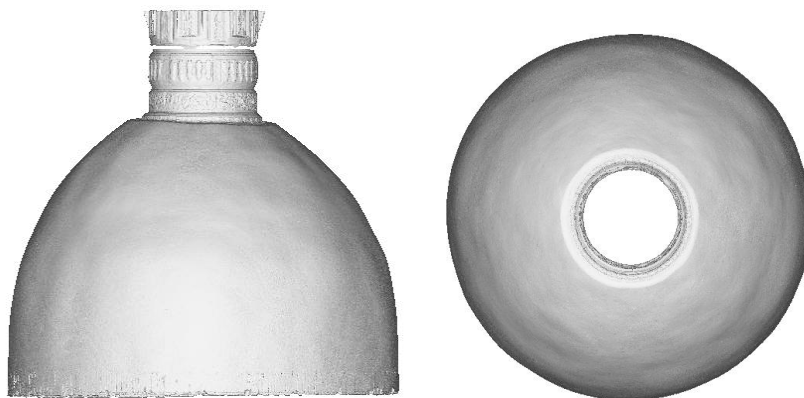
*3DReshaper* è software sviluppato da *Technodigit SARL* e dedicato alla modellazione 3D di nuvole di punti provenienti da qualunque tipo di hardware. Il programma consente di elaborare facilmente modelli 3D estremamente raffinati grazie a numerosi strumenti rapidi e semplici. In oltre, il software nella sua versione base fornisce anche le seguenti funzionalità:

- Estrazione automatica di sezioni secondo piani paralleli o secondo assi lineari, radiali, curvi.
- Confronto tra due oggetti 3D.
- Ispezioni 3D con redazione di report grafici e numerici.

All'apertura del file, *3DReshaper* consente la creazione di due gruppi *mesh*:

- la superficie *mesh* che descrive l'intradosso della cupola unita, in sommità, alla parziale superficie dell'intradosso del lanternino;
- la superficie *mesh* del tamburo incompleto, dove sono anche rappresentati i dettagli architettonici, strutturali e non, catturati durante l'operazione di rilevamento laser.

In questo paragrafo il lavoro si è focalizzato solo sul primo gruppo *mesh*, cioè quello contenente la superficie tridimensionale dell'intradosso della cupola (Figura 4.4).



**Figura 4.4:** rappresentazione in modalità *ombreggiata* in vista frontale del gruppo *mesh* che descrive l'intradosso della cupola più il parziale lanternino

Dopo una rapida indagine visiva si intuisce subito l'alto livello di dettaglio della *mesh*. Infatti, è immediato notare come l'intradosso della cupola risulti essere molto irregolare, caratterizzato da diversi bozzi ed avvallamenti. E' possibile riscontrare nella parte alta della cupola una depressione particolarmente evidente e, come probabile conseguenza, un'inclinazione della parte di collegamento tra la cupola e il lanternino. Tutte queste informazioni desunte dalla *mesh* ridotta, ma comunque caratterizzata da un alto livello di dettaglio, forniscono un'idea del livello deformativo che caratterizza l'intradosso della cupola reale.

#### 4.2.2 Indagine preliminare dello stato deformativo

Un obiettivo del presente lavoro di tesi è quello di valutare le diverse deformazioni presenti lungo la superficie dell'intradosso della calotta e di ipotizzarne le possibili cause. Il primo passo in questa direzione è stato quello di operare indagini più approfondite per cercare di quantificare il valore dell'avvallamento più profondo.

Sfruttando la potenzialità del software *3DReshaper*, si è realizzato un confronto tra l'intradosso della cupola in formato *mesh* e una sfera centrata e adattata sulla cupola stessa. Il risultato, rappresentato in Figura 4.5, viene presentato come un report che riporta una scale di variazione di colori con l'aumento della distanza tra la superficie della cupola e quella della sfera. Dal report si può osservare come nella fascia centrale, lungo tutta la curvatura della cupola, ci siano diverse variazioni di colore tra il blu scuro e l'azzurro chiaro. Questo confronto fornisce un'ulteriore conferma del fatto che la superficie dell'intradosso della cupola sia non regolare e caratterizzata da un elevato livello deformativo.

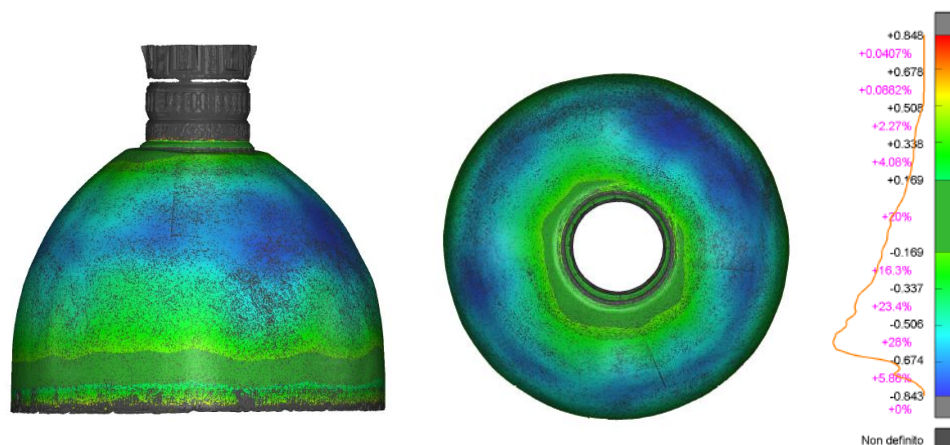


Figura 4.5: report del confronto tra l'intradosso della cupola e la sfera ad essa adattata in vista frontale (sinistra) e in vista dall'alto (destra)

Come prima cosa, si è cercato di quantificare in termini metrici la depressione più profonda. Se, nella fascia sotto analisi, si imposta l'azzurro chiaro come colore che caratterizza la distanza media della superficie cupola con la sfera, allora all'aumentare della gradazione di blu possiamo immaginare che la distanza tra le due superfici aumenti. Considerato come valore medio associato al colore azzurro chiaro una di distanza pari a circa *60 cm* e come valore di distanza associato al colore blu un valore di *80 cm* circa, allora con un semplice operazione di sottrazione si può ottenere un'idea del valore della profondità dell'avvallamento, che risulta in alcuni punti essere pari a circa *20 cm*.

Il confronto tra le due superfici permette inoltre di identificare la posizione di tale depressione grazie all'elevato livello di dettaglio che caratterizza la nuvola di punti e quindi la *mesh* a disposizione. Osservando con attenzione la *mesh* dell'intradosso della cupola è infatti possibile notare, in Figura 4.7-a, la presenza di una porticina in corrispondenza della parte inferiore della

cupola. Identificata la reale posizione di tale porta, è possibile affermare che questa si trovi, all'interno della chiesa, in posizione diametralmente opposta all'altare maggiore. Dall'elaborato grafico contenente i dati geometrici è possibile ottenere una pianta del contesto architettonico in cui è inserita la Chiesa della SS. Trinità (Figura 4.6). L'ipotetico asse che passa per la porticina e l'altare maggiore è stato considerato come l'asse centrale che divide la Chiesa ed è messo in relazione con il nord geografico. Poiché l'angolo tra le due direzioni risulta minore di  $45^\circ$ , si è deciso di adottare questo asse come indicatore della direzione Sud-Nord, dove come Nord si è definita la posizione dell'altare maggiore e come Sud quella della porticina.

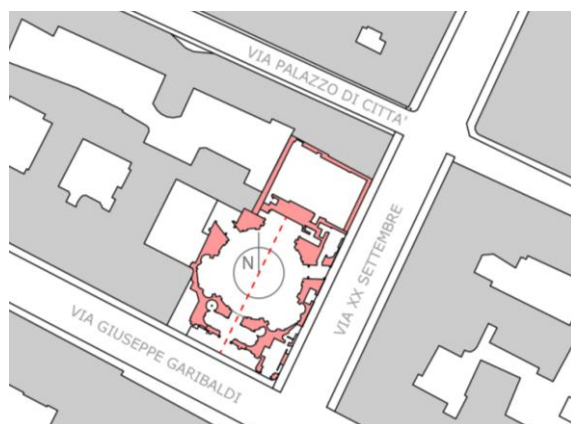


Figura 4.6: pianta contesto architettonico della Chiesa della SS. Trinità

Usando quindi l'altare come Nord e attraverso il dettaglio della porticina presente nella *mesh* è possibile orientare correttamente la superficie. Come in precedenza verificato, la depressione maggiore è caratterizzata da una gradazione blu scuro e, noto ciò, è facile stabilire da una semplice osservazione visiva della Figura 4.7-b che l'avvallamento più profondo si trova in direzione Nord-Est.

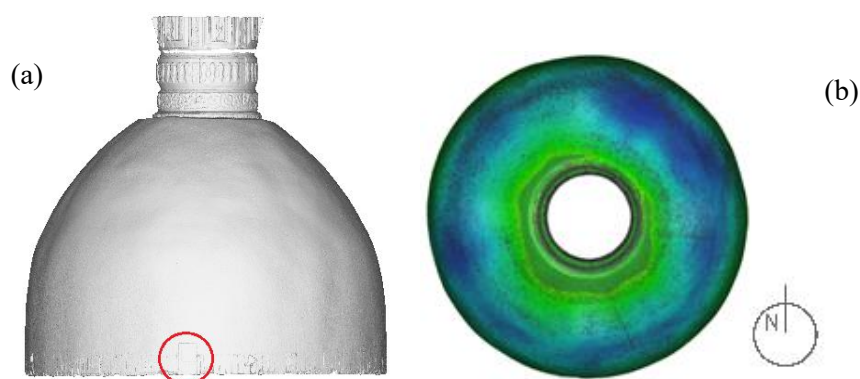


Figura 4.7: (a) rappresentazione della *mesh* dell'intradosso della cupola con dettaglio della porticina ; (b) corretta orientazione della superficie risultato del report

In conclusione, questa indagine preliminare permette di avere una prima valutazione della profondità dell'avvallamento e soprattutto di identificare la sua posizione lungo la superficie interna della calotta.

#### 4.2.3 Creazione del modello 2D e approfondimento sullo stato deformativo

Il punto di partenza dello studio della geometria della cupola della Chiesa della SS. Trinità è stata la superficie *mesh* ottenuta dal risultato del rilievo Laser Scanner del sistema cupola-tamburo. Lavorando sempre con *3DResheaper*, il software permette di creare sezioni planari e radiali relative ad una certa superficie, *mesh* o nuvola di punti. Sulla *mesh* ridotta dell'intradosso della cupola, è quindi possibile realizzare una serie di sezioni radiali lungo tutta la curvatura della superficie, andando semplicemente a impostare un passo di sezione. In questo caso si è scelto di effettuare una sezione ogni  $15^\circ$  (Figura 4.8).

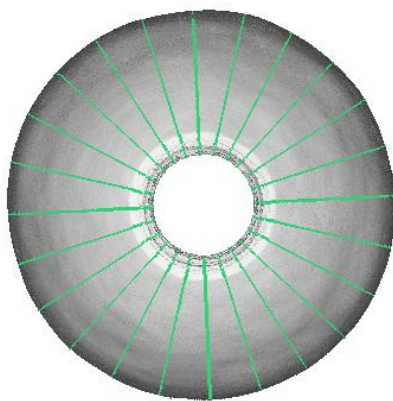


Figura 4.8: sezioni radiali realizzate lungo la superficie l'intradosso della calotta

Nel tentativo di investigare la geometria generatrice della cupola e non avendo disegni originari di progetto a cui poterci riferire direttamente, le rappresentazioni bidimensionali delle sezioni della superficie *mesh* consentono di proporre delle prime valutazioni. Le sezioni della cupola sono state trasferite sulla versione studenti del software di modellazione CAD (*Computer-Aided Drafting/Design*) *AutoCAD* e integrate alla sezione derivante dal rilievo geometrico tradizionale della struttura. *AutoCAD* è il primo software CAD sviluppato originariamente per PC ed introdotto nel mercato nel 1982 da *Autodesk*. È utilizzato principalmente per produrre disegni bi/tridimensionali in ambito ingegneristico, architettonico, meccanico ed elettrotecnico. Il documento prodotto è di tipo vettoriale, ovvero le entità grafiche sono definite come oggetti matematico-geometrici: questo permette, diversamente da quanto succede nei documenti grafici di tipo raster, di scalarle e ingrandirle indefinitamente senza perdita di risoluzione.

Tenendo in conto delle possibili approssimazioni che possono essere nate da errori in fase di costruzione, si è condotto uno studio delle dimensioni effettive della cupola e del probabile tracciamento della configurazione geometrica. Le cupole, indipendentemente dalla possibile configurazione geometrica, sono solitamente tracciate secondo rapporti proporzionali che

corrispondono al quinto, quarto, terzo acuto (in cui i centri di curvatura sono posti a distanza dall'estremo della cupola pari a  $4/5$ ,  $3/4$ ,  $2/3$  della lunghezza complessiva d'imposta) e a tutto sesto (ovvero a calotta semisferica). L'intradosso della cupola della SS. Trinità ha un diametro interno di  $16.4\text{ m}$ , si imposta sul volume cilindrico del tamburo e presenta un sesto fortemente rialzato (di un terzo rispetto al pieno centro) per raggiungere la quota di oltre  $34\text{ m}$  di altezza, oltre i quali si innalza il lanternino sovrastato dal relativo cupolino. In Figura 4.9-a è stata tracciata una possibile costruzione geometrica della cupola secondo il terzo acuto. La cupola sembra infatti essere stata realizzata su un ovale a quattro centri: i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono posizionati sull'asse minore dell'ovale in modo tale che la misura  $\overline{aP_2} = 2/3 \varnothing$  e  $\overline{P_1b} = 2/3 \varnothing$  (con  $\varnothing = \overline{ab}$ ); allo stesso modo, il centro di curvatura  $P_3$  risulta trovarsi sul semiasse maggiore, posizionato tale che  $\overline{P_3c} = 2/3 \overline{oc}$ .

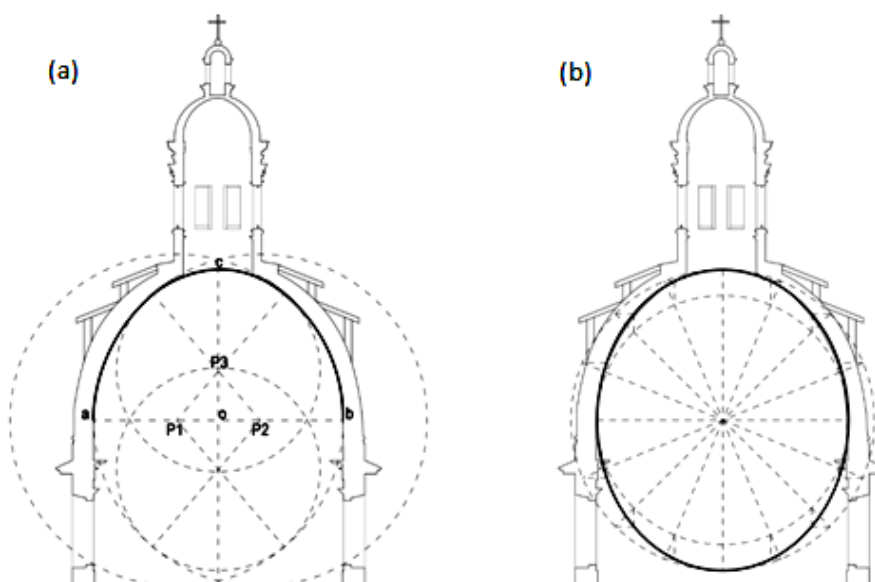


Figura 4.9: studio della geometria della superficie interna della cupola

Le cupole a sezione ovale hanno fatto il loro ingresso come forma geometrica da costruzione a partire dalla metà del XVI secolo, periodo da cui si avvia una larga sperimentazione sulle cupole a sesto rialzato costruite secondo tracciamento ovale. Questo anche grazie al diffondersi del trattato di Sebastiano Serlio (Serlio 1600) che include una discussione sulla costruzione degli ovali. Sebbene Serlio nel suo trattato trovi modo di distinguere la geometria ovale da quella ellittica, tuttavia bisogna considerare che i termini sono spesso usati come sinonimi benché le due forme geometriche siano estremamente distanti non solo geometricamente, ma anche e soprattutto nell'aspetto e nelle tecniche di tracciamento e di costruzione necessarie all'opera architettonica. L'ellisse è definita come la sezione piana di un cono quadratico e presenta una forma elegante, caratterizzata da una variazione graduale tra il raggio più ampio, in corrispondenza del semiasse minore, e il raggio più piccolo, in corrispondenza degli estremi dell'asse maggiore. L'ovale regolare invece è definito come una curva planare convessa chiusa,



soggetta a doppia simmetria ortogonale, costituita da almeno quattro archi tangenti. Questo causa un andamento più brusco della curvatura che può portare ad una sensazione di schiacciamento del profilo della curva. Sebbene le due figure possano essere considerate simili, le differenti modalità applicative hanno portato ad un maggiore utilizzo della forma ovale per le costruzioni architettoniche (S. Huerta 2007). L'ovale infatti può essere tracciato con la medesima tecnica del cerchio, tenendo solo presente che i centri dei rispettivi raggi di curvatura possono essere più di uno, in relazione agli archi che compongono la curva (minimo quattro, uguali due a due), e consente la possibilità di disegnare altri ovali concentrici utilizzando i medesimi centri di curvatura. Tuttavia, la maggiore eleganza della forma ellittica rispetto a quella ovale, ha portato, in epoca tardo rinascimentale e barocca, ad una continua sperimentazione con lo scopo di ottenere forme ovali sempre più tendenti all'ellisse per la costruzione delle cupole.

Anche la curva della cupola della SS. Trinità si avvicina ad un'ellisse (Figura 4.9-b), probabilmente proprio nel tentativo di raggiungere una forma geometrica più elegante. Tuttavia l'ovale di tracciamento che è stato precedentemente identificato approssima con miglior accuratezza il dato metrico ottenuto dal rilievo geometrico. A dimostrazione di ciò, si è provveduto a scegliere la sezione meno interessata dalle deformazioni tra quelle evidenziate in Figura 4.8, corrispondente con la sezione NO-SE. Questa è stata considerata come la sezione della superficie media, alla quale sono state poi comparate successivamente le altre sezioni nella quattro direzioni principali. Dalla Figura 4.10, dove è stato condotto un offset della curva identificata di  $\pm 7 \text{ cm}$ , è possibile vedere come il profilo interno della cupola, costruito dalle diverse sezioni, cada sempre nel range identificato. Questa verifica preliminare ci consente di assumere questa traiettoria geometrica come quella generatrice.

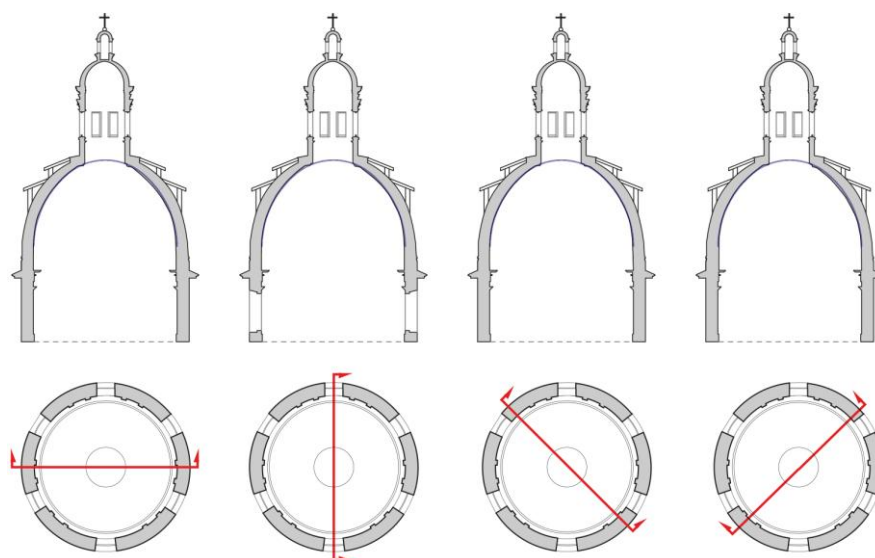
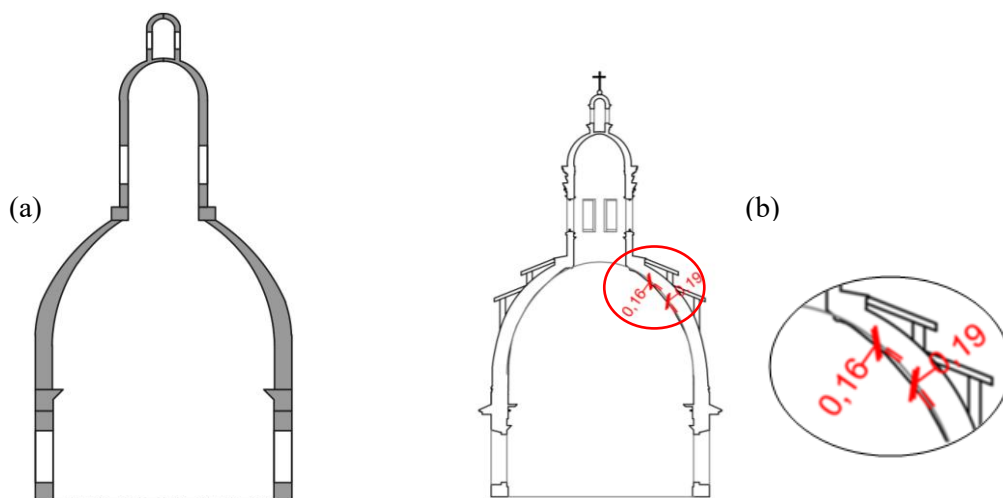


Figura 4.10: confronto tra la sezione della cupola media e le altre sezioni nelle quattro direzioni principali

Ottenuta la curva generatrice dell'intradosso della cupola e operando con l'appoggio delle sezioni presenti nell'elaborato sorto dal rilievo geometrico della struttura, è stato quindi possibile ricondursi alla sezione ideale del modello tamburo-cupola-lanternino. Gli elementi cordolo e lanternino, sono caratterizzati da tutti quei dettagli architettonici decorativi, tipici degli edifici storici, che ai fini strutturali portano ad una variazione di volume dell'elemento del tutto trascurabile e in oltre la loro presenza potrebbe causare problemi nella successiva fase di discretizzazione ad elementi finiti. Per cui si è svolta una semplificazione di questi elementi, ottenendo così una sezione trasversale della struttura semplificata (Figura 4.11-a), che sarà utilizzata come base geometrica per il proseguo del lavoro.



**Figura 4.11: (a) sezione trasversale semplificata del modello tamburo-cupola-lanternino; (b) confronto tra la sezione generatrice della superficie interna della cupola e la sezioni maggiormente soggetta a deformazione**

In fine, con lo scopo di investigare in maniera più precisa le deformazioni riscontrare nell'intradosso della calotta, si è provveduto a confrontare nel dettaglio la sezione generatrice della superficie interna della cupola con la sezione caratterizzata dal maggiore livello deformativo, quotando la distanza tra le due curve in quei punti dove questa risultava maggiore (Figura 4.11-b). Questa nuova indagine ha confermato i risultati di quella preliminare e ha permesso di ottenere una stima più accurata della depressione che si trova lungo la superficie dell'intradosso della cupola. Volendo in prima istanza effettuare un'analisi statica sulla reale e attuale configurazione deformata della cupola, uno stato deformativo, che in alcuni punti presenta avvallamenti profondi  $15 \div 20 \text{ cm}$ , è ritenuto rilevante. La sua presenza non può essere trascurata nella creazione del modello strutturale e dunque è necessario tenerne conto nella realizzazione del modello geometrico della cupola della Chiesa della SS. Trinità



### 4.3 Creazione del modello geometrico della cupola della Chiesa della SS. Trinità

Prendendo come punto di partenza i dati di natura geometrica analizzati nel paragrafo precedente, è stato possibile realizzare un modello geometrico in grado di rappresentare lo stato deformativo della cupola della Chiesa della SS. Trinità, cioè un modello che tenga conto di tutte i bozzi e gli avvallamenti che caratterizzano l'intradosso della calotta. Per fare ciò non è sufficiente ricondursi ad un modello 2D, andando a considerare una sezione media, ma è necessario realizzare un modello tridimensionale, in modo che questo rispecchi le dettagliate informazioni relative all'intradosso della cupola e la variazione di spessore delle pareti della medesima. I passaggi che dai dati geometrici hanno permesso di giungere alla costruzione del modello 3D si possono così sinteticamente riassumere:

- 1) Pulizia e divisione della *mesh*.
- 2) Semplificazione della *mesh* cupola.
- 3) Costruzione del solido cupola.
- 4) Assemblaggio del modello geometrico 3D finale.

Per completare tutte queste operazioni è stato necessario lavorare con un discreto numero di software di natura differente. Una semplice schematizzazione dei programmi utilizzati in relazione al passaggio svolto è riportata in Figura 4.12.

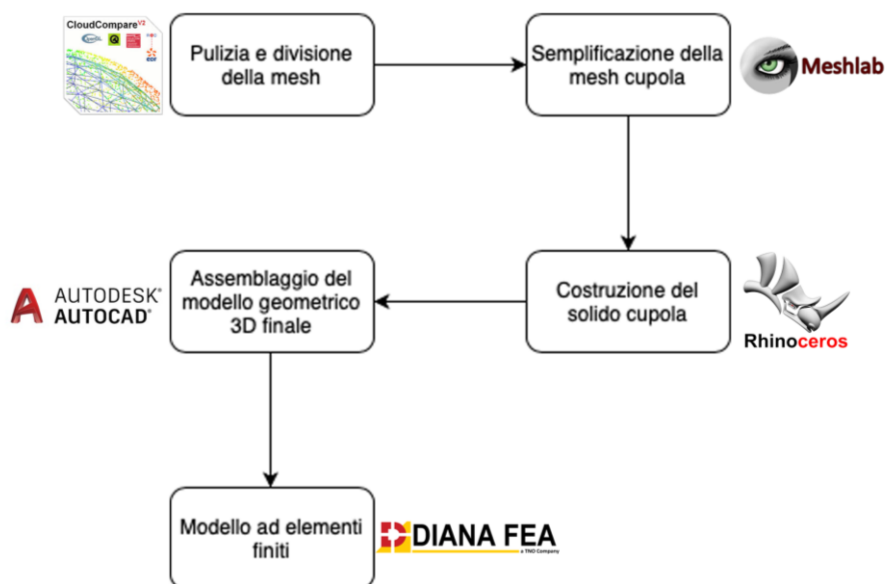


Figura 4.12: flow chart delle operazioni e dei programmi utilizzati per la modellazione geometrica-strutturale

Nel seguito sono state analizzate nel dettaglio le diverse fasi che hanno portato alla creazione del modello geometrico.

#### 4.3.1 Pulizia e divisione della mesh

La *mesh*, precedentemente introdotta al Paragrafo 4.2, è costituita da 1010447 vertici e 2000000 facce ed è formata da due gruppi:

- la rappresentazione dell'intradosso della cupola, la cui sommità è sormontata da un lanternino incompleto;
- una rappresentazione parziale del tamburo con sei finestre.

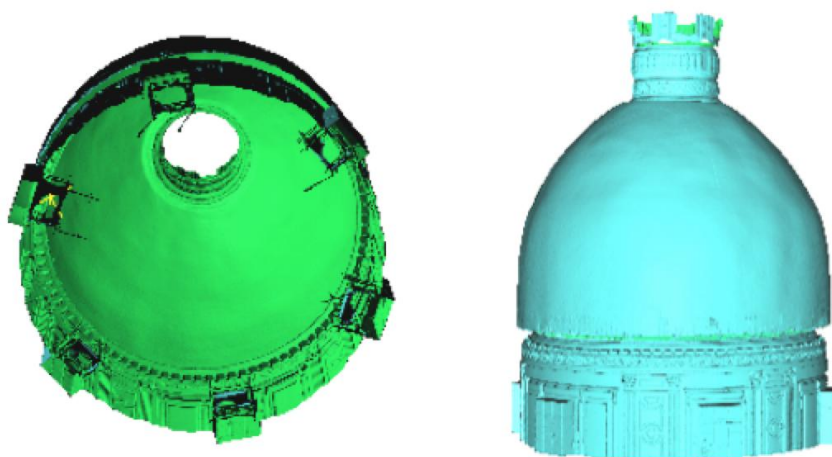


Figura 4.13: rappresentazione *ombreggiata* della *mesh* senza tessitura in vista assonometrica dal basso (sinistra) e in vista frontale (destra)

Operando una prima analisi visiva del *mesh*, si può chiaramente notare che questa rappresenta anche elementi non strutturali presenti in maniera permanente nella chiesa, quali ringhiere, corrimano, luci e finestre ed elementi di ponteggi innalzati per gli attuali lavori di restauro all'interno dell'edificio. Con lo scopo di utilizzare la superficie *mesh* come base per la creazione del modello geometrico, gli elementi citati devono essere cancellati dal modello. Si è quindi svolta un'operazione di "pulizia" della *mesh*, con l'obiettivo di eliminare i punti e le facce di quelle parti non strutturali comunque catturate nella fase di rilievo. Per attuare questa operazione si è fatto uso del programma *open source CloudCompare*.

*CloudCompare* è un software di elaborazione di nuvole di punti 3D e *mesh* triangolari rilasciato al pubblico nel 2009. È stato originariamente progettato per eseguire il confronto tra due nuvole di punti 3D dense (come quelle acquisite con rilievo scanner laser) o tra una nuvola di punti e una *mesh* a maglia triangolare. Si basa su una specifica struttura *Octree* dedicata a questo compito. Successivamente, è stato esteso a un software di elaborazione di nuvole di punti più generico, che include molti algoritmi avanzati (ricampionamento, gestione del colore / normale / campo scalare, segmentazione interattiva o automatica, ecc.).

*CloudCompare* principalmente permette la manipolazione di nuvole di punti, ma poiché una *mesh* triangolare generalmente non è altro che una nuvola di punti (vertici della *mesh*) con

un'associata topologia (facce triangolari), allora si può realizzare l'operazione di pulizia direttamente sulla *mesh* a disposizione. Nel caso specifico, tale procedura sarà un'operazione di segmentazione manuale. Il primo step consiste nel tagliare il modello "a fette", in questo modo si sfruttano delle sezioni per lavorare in maniera più efficace e comoda. Con la *mesh* selezionata, si segue il percorso *Tools - Segmentation - Cross Section*. Lavorando con le frecce (verde, blu e rossa) si manipola il parallelepipedo giallo dell'*Octree* fino ad arrivare ad avere una sezione orientata nel modo che si ritiene essere il migliore possibile per la successiva pulizia. E' possibile creare quante più sezione si reputano necessarie, senza però eccedere di numero, in quanto dovranno poi essere trattate tutte singolarmente e si rischierebbe di allungare di parecchio i tempi di elaborazione complessiva. Ora che si ha a disposizione il modello "a fette", è possibile pulire ogni singola sezione attivando il comando *Edit - Segment* (associato all'icona di una forbice). Appena si lancia il comando, è già attivo uno strumento di selezione poligonale, che permette di disegnare i confini dell'elemento da tagliare. Terminata la procedura di selezione, si hanno due possibilità: *Segment In* o *Segment Out*. *Segment In* lascia visibile l'area all'interno della selezione poligonale e spegne tutto il resto. *Segment Out* permette di fare il contrario. Questa operazione non distrugge nessun punto della nuvola e, nel particolare, si è scelto di fare sempre *Segment Out* semplicemente perché risulta molto più pratico durante la pulizia di una sezione. In Figura 4.14 è riportato il risultato dell'azione di *Segment Out* su una sezione.

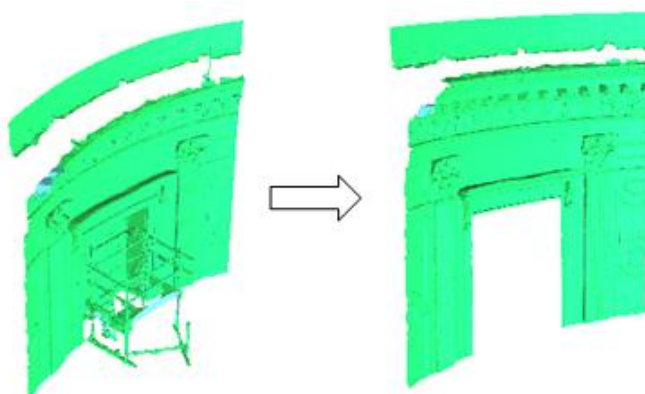


Figura 4.14: operazione di pulizia di una sezione della *mesh*

Una volta fatta questa scelta, il *Segment Tool* è ancora attivo e si può navigare il modello con gli strumenti classici (*pan*, *zoom*, *rotazione*) per spostarti in un'altra zona da pulire. Si genera una nuova selezione e si sceglie di nuovo il *Segment Out*. Terminata la pulizia della sezione, si clicca sulla spunta verde per confermare le operazioni effettuate. In questo modo vengono create due nuove nuvole di punti e, a seconda della scelta tra *Segment In* o *Out*, una delle due nuvola sarà la parte da tenere e l'altra quella da togliere.

Svolte queste operazioni per tutte le segmentazioni create, le corrispondenti sezioni pulite si compattano ottenendo così la *mesh* completa pulita, che risulta costituita da 820660 vertici e 1628148 facce.

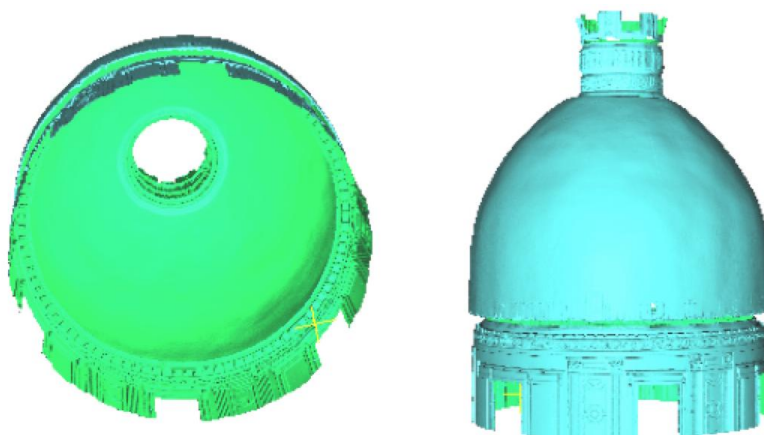


Figura 4.15: rappresentazione *ombreggiata* della *mesh* pulita in vista assonometrica dal basso (sinistra) e in vista frontale (destra).

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è quello di ottenere il modello della cupola più fedele possibile alla realtà e per questo motivo, oltre al fatto che la rappresentazione *mesh* del tamburo e del lanternino è solo parziale, si è isolato l'intradosso della cupola dalle altre parti costitutive della superficie. I due gruppi di partenza sono stati così separati, ottenendo un'unica *mesh* raffigurante la cupola e il parziale lanternino composta da 464197 vertici e 921143 facce triangolari (Figura 4.16-a). Un'ulteriore operazione di segmentazione ha permesso in conclusione di "tagliare" il lanternino dalla superficie *mesh*, ottenendo così la *mesh* dell'intradosso della sola calotta (Figura 4.16-b).

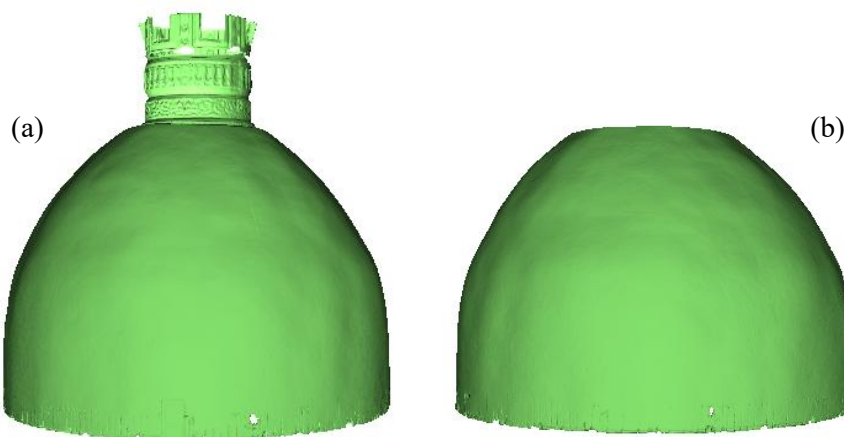


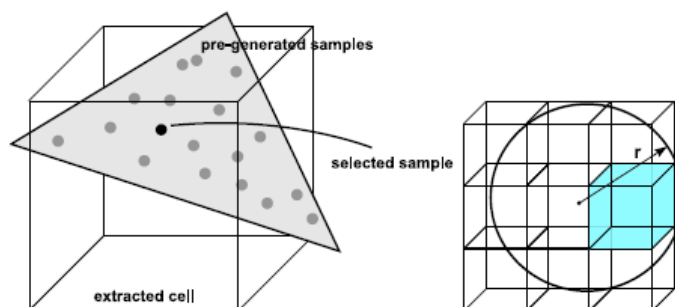
Figura 4.16: (a) rappresentazione *ombreggiata* del gruppo *mesh* cupola-lanternino; (b) rappresentazione *ombreggiata* della *mesh* dell'intradosso della cupola

#### 4.3.2 Semplificazione della mesh cupola

La *mesh* dell'intradosso della cupola è composta da 388217 vertici e 771615 facce, ciò significa che la nuvola di punti che la caratterizza è comunque ancora molto densa. Una *mesh* densa presenta vertici molto vicini tra loro e quindi facce triangolari caratterizzate da lati decisamente piccoli. L'obiettivo del seguente lavoro è quello di ottenere dalla *mesh* un modello geometrico in grado di essere utilizzato nel software di analisi strutturale. A questo scopo è necessario avere una *mesh* di partenza relativamente semplice, cioè con un numero di facce tali da rappresentare correttamente il modello fisico, ma allo stesso tempo costituita da lati di un'opportuna dimensione. Questa dimensione deve rispecchiare quella che poi sarà utilizzata nel software al momento del passaggio dal modello geometrico al modello numerico ad elementi finiti, quando appunto si andrà a definire il passo della maglia della *mesh*. Inoltre un modello "pesante" porta a tempi di elaborazione lunghi e, anche per questo motivo, è opportuno identificare la migliore dimensione delle facce della *mesh* in modo da realizzare analisi su un corretto modello fisico in tempi relativamente brevi. In relazione alle considerazioni appena svolte, si è deciso quindi di semplificare la *mesh* cupola, andando cioè a ridurre il numero di vertici e facce che compongono la superficie 3D. L'operazione di semplificazione è stata effettuata sfruttando le potenzialità del programma *open source MeshLab*.

*MeshLab* è un software che utilizza il sistema di *mesh processing* per sviluppare e modificare modelli 3D. E' stato sviluppato nel 2005 dall' università di Pisa, come software per la gestione e editing di strutture geometriche non strutturate e allineate, che si acquisiscono nel processo di scansione 3D. Il software mette a disposizione una serie di *tool* per pulire, gestire, visualizzare, modificare, renderizzare e convertire questo tipo di geometrie. Permette quindi sia di creare, sia di modificare modelli tridimensionali, intervenendo anche sui singoli *meshes*, cioè sui singoli poligoni che compongono il modello, e supporta anche la conversione da un modello con *mesh* triangolare a uno con *mesh* quadrangolare, e viceversa (Cicogni, et al. 2008).

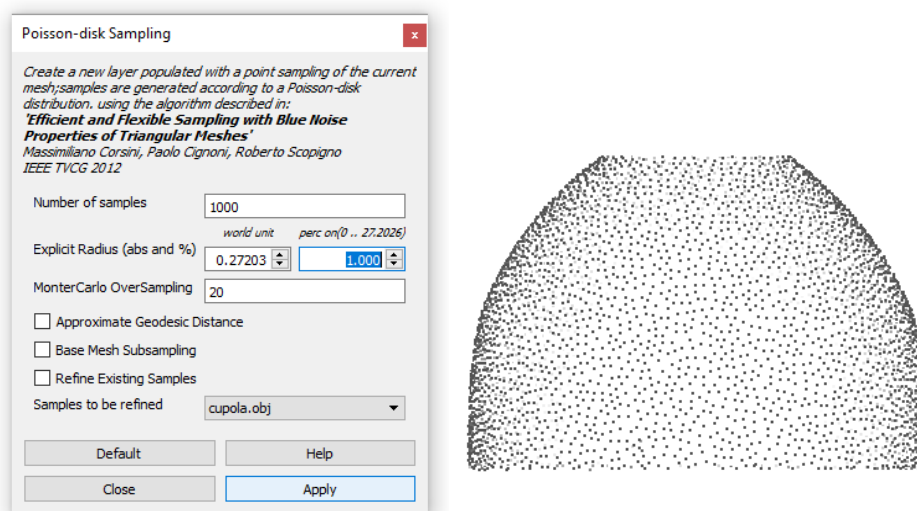
Uno strumento presente in *MeshLab* utile per l'operazione di semplificazione è il comando *Poisson-disk Sampling* (Ranzuglia, et al. 2012). Con esso è possibile rimuovere un certo numero di vertici della *mesh* in esame, ma tale semplificazione incide sulla qualità e la quantità di dettagli che il software calcolerà nella fase finale di elaborazione. Il campionamento *Poisson-disk* è uno degli schemi di campionamento più comuni nel contesto della *Computer Graphics* e consiste nel generare una distribuzione uniforme casuale, dove la distanza minima tra ciascun campione è  $2r$ . Questo equivale a dire che un disco di raggio  $r$  centrato su ciascun campione non si sovrappone con nessun altro disco.. Molti campioni vengono pre-generati uniformemente sulla superficie della *mesh*, costruendo così un gruppo di campioni ( $S$ ) e casualmente uno di questi viene selezionato (Figura 4.17 ).



**Figura 4.17:** generazione del campione. (A sinistra) Vengono scelti i campioni da un campionamento uniforme pre-generato della superficie. (A destra) Campioni che violano il vincolo di distanza minima vengono rimossi, eliminando tutti i campioni di cellule all'interno di una sfera di raggio  $r$

Dopo aver selezionato il campione, tutti i punti all'interno di una sfera di raggio  $r$  vengono rimossi da  $S$  per ottimizzare il controllo della violazione del vincolo rappresentato dal raggio della sfera. Al fine di pre-generare una distribuzione uniforme dei punti sulla superficie della *mesh*, è stato usato l'algoritmo Monte Carlo. Si noti che solo se la distribuzione Monte Carlo è perfettamente uniforme da un punto di vista statistico, questo approccio produce un campionamento *Poisson-disk* sulla *mesh* triangolare con buone proprietà in termini di *blue noise* e di riempimento del campione. Selezionando quindi il comando *Filters - Sampling - Poisson disk Sampling* si aprirà una finestra di dialogo dove dovranno essere inseriti i seguenti parametri di input:

- *Number of samples* serve a definire il numero assoluto di campioni;
- *Explicit Radius* definisce una spaziatura media tra i punti, quindi maggiore è il valore immesso nella stringa, maggiore sarà il numero di punti eliminati. E' possibile scegliere se immettere il valore in unità o in percentuale, in ogni caso il software indipendentemente dal campo compilato, calcolerà automaticamente il valore corrispondente non specificato.
- *MonteCarlo OverSampling* indica il tasso di sovra-campionamento utilizzato per generare i campioni iniziali di *Montecarlo*. I campioni di *Poisson-disk* generati sono un sottoinsieme di questi campioni iniziali di *Montecarlo*.



**Figura 4.18:** finestra di dialogo e nuvola di punti prodotta dalla semplificazione *Poisson-disk*

Impostati i dati di input si dà avvio al filtro cliccando su *Apply*. Nella finestra dei livelli comparirà un nuovo layer chiamato "*Poisson-disk Samples*". Visionando i dettagli di entrambi i livelli, ovvero quello di origine e quello in cui è stato applicato il filtro, è possibile vedere la quantità di vertici conservati, che risulta pari a 4403 punti. Con questo filtro in pratica, si estraggono e si decimano i vertici della *mesh* di origine ottenendo così una nuvola di punti ridotta, come mostrato in Figura 4.18.

Un aspetto da non trascurare quando si vuole elaborare una *mesh* è il ricalcolo delle normali, questo è un passaggio molto importante e saltarlo potrebbe compromettere la buona riuscita del lavoro. Per fare ciò è necessario selezionare: *Filter - Normals, Curvature and Orientations - Compute normals for point sets*. Comparirà la finestra di dialogo con i seguenti input:

- *Number of neighbors* è il numero di punti che vengono utilizzati per stimare un piano tangente in ogni punto della nuvola, è consigliabile quindi utilizzare un numero abbastanza basso (tra 10 e 30);
- *Flip normals w.r.t. viewpoint*, se selezionato, capovolgerà le normali. Questo comando influisce sulla ricostruzione della *mesh* in quanto comunica al software il "verso" da seguire durante la riparazione.
- *Viewpoint Pos.* e *Get* permettono di impostare la direzione delle normali.

Una volta compilata la finestra di dialogo si applicano le modifiche desiderate cliccando su *Apply*.

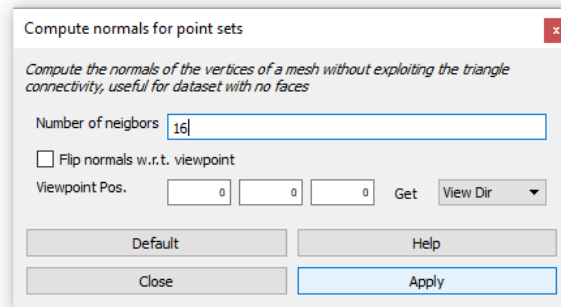


Figura 4.19: finestra di dialogo *Compute normals for point sets*

In fine per ricostruire la *mesh*, si utilizza il comando *Ball Pivoting* (Bernardini, et al. 1999). L'algoritmo *Ball Pivoting* (BPA) calcola una *mesh* triangolare interpolando una data nuvola di punti e seguendo il paradigma del fronte-avanzante. BPA prende come input l'elenco di punti  $\sigma_i$  del dato superficie-campione, ciascuno associato a una normale  $n_i$  (e altri attributi opzionali) e una sfera di raggio  $\rho$ . Il principio è molto semplice: tre punti formano i vertici di una faccia triangolare della *mesh* se la palla di raggio  $\rho$  li tocca senza contenere alcun altro punto. Partendo da un triangolo di base - tre punti noti ( $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ ) tali che la sfera di raggio  $\rho$  che li tocca non contenga altri punti - la palla ruota in maniera continua intorno al bordo di rotazione  $c_{(i,j)}$  rimanendo in contatto con i punti finali di  $c_{(i,j)}$ . Durante questo movimento, la palla può colpire un altro punto  $\sigma_k$ , ma se nessun punto viene colpito, il bordo è un bordo di confine. Il triangolo ( $\sigma_i, \sigma_k, \sigma_j$ ) è un nuovo triangolo valido, la palla nella sua posizione finale non contiene nessun altro punto ed è quindi una sfera di partenza valida per la successiva operazione di rotazione. Il un nuovo triangolo viene aggiunto alla *mesh* e l'algoritmo considera un nuovo bordo di delimitazione per la rotazione. Il processo continua fino a quando sono stati provati tutti i bordi raggiungibili e poi parte da un altro triangolo base, fino a quando tutti i punti sono stati considerati. Il processo può quindi essere ripetuto con un palla di raggio più ampio per gestire densità di campionamento irregolari.

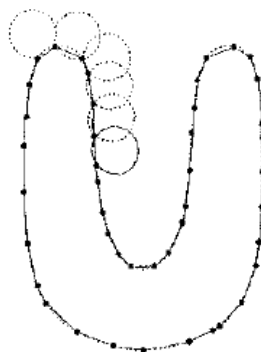


Figura 4.20: l'algoritmo *Ball Pivoting* in 2D. Un cerchio di raggio  $\rho$  ruota da punto di campionamento all'altro, collegandoli con i bordi



Una volta selezionato il comando *Filters - Remeshing, Simplification and Reconstruction - Surface Reconstruction: Ball Pivoting*, apparirà la finestra di dialogo che darà la possibilità di immettere dei valori nelle seguenti voci:

- *Pivoting Ball radius* in valore assoluto e in percentuale è il raggio della palla che ruota sui punti. Gli spazi più grandi del raggio della sfera non saranno riempiti, allo stesso modo le piccole fosse inferiori al raggio della sfera saranno riempite.
- *Clustering radius (% of ball radius)* viene inserito per evitare la creazione di triangolazioni troppo piccole, se un vertice viene trovato troppo vicino a uno precedente, viene raggruppato / unito ad esso.
- *Angle Threshold* in gradi è l'angolo di piega limite, superato il quale la rotazione della palla verrà interrotta.
- *Delete initial set of faces*, se selezionato la faccia iniziale della *mesh* viene cancellata e l'intera superficie viene ricostruita da zero, altrimenti le facce correnti vengono utilizzate come punto di partenza. Utile se si esegue più volte l'algoritmo con un raggio di palla crescente.

Settati i parametri di input, si applicano le modifiche lanciando il comando *Apply*.

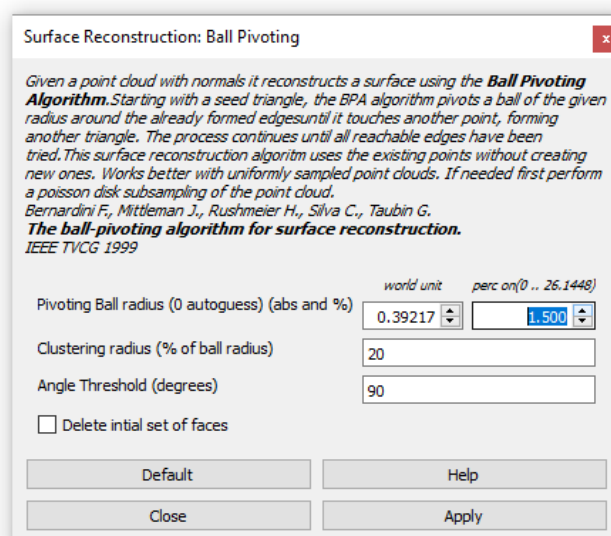


Figura 4.21: finestra di dialogo *Surface Reconstruction: Ball Pivoting*

Il risultato è un *mesh* formata da 4403 vertici, stesso valore della nuvola di punti dalla quale è stata ricostruita, e 8555 facce ricostruite (Figura 4.22). In questo modo si è ottenuta una *mesh* semplificata, ma che rispecchia l'andamento della superficie originale dell'intradosso della cupola. Questa sarà il punto di partenza intorno al quale verrà costruito il modello geometrico tridimensionale della cupola con l'obiettivo di ottenere un modello il più fedele possibile con la maestosa cupola della chiesa della SS. Trinità.

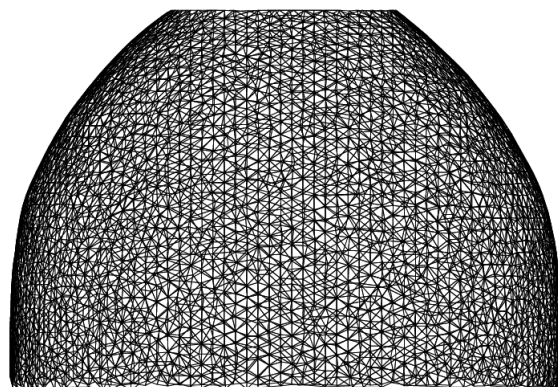


Figura 4.22: rappresentazione della *mesh* semplificata dell'intradosso della cupola

#### 4.3.3 Costruzione del solido cupola

Dalla *mesh* semplificata dell'intradosso della cupola si è risaliti al modello solido 3D della cupola con l'obiettivo di mantenere le informazioni di superficie fornite dalla *mesh*. Per fare ciò, è stato necessario il supporto dei programmi di modellazione CAD *Rhinoceros* e *AutoCAD* (versione studenti).

La *mesh* semplificata, ottenuta nel paragrafo precedente, è stata esportata da *MeshLab* in formato *.STL* (*STereo Lithography interface format* o acronimo di "Standard Triangulation Language"). Questo è un formato di file, binario o ASCII, nato per i software di stereolitografia CAD. È utilizzato nella prototipazione rapida (*rapid prototyping*) attraverso software CAD. Un file *.stl* rappresenta un solido la cui superficie è stata discretizzata in triangoli. Esso consiste delle coordinate X, Y e Z ripetute per ciascuno dei tre vertici di ciascun triangolo, con un vettore per descrivere l'orientazione della normale alla superficie. Si è scelto questo tipo di formato poiché una delle possibili estensioni che permettono di aprire oggetti *mesh* in *Rhino*. *Rhinoceros* è un software applicativo per la modellazione 3D di superfici libere (*free form*) realizzato da *Robert McNeel & Associates*, un'azienda di Seattle nello stato di Washington, negli USA. È normalmente utilizzato per il disegno industriale, l'architettura, il design navale, il design del gioiello, il design automobilistico, il CAD/CAM, per la prototipazione rapida, il *Reverse engineering* e per il design della comunicazione. In *Rhino*, tutte le entità geometriche sono rappresentate mediante *NURBS* (acronimo di *Non Uniform Rational B-Splines*). Molto semplicemente, le *NURBS* sono una rappresentazione matematica mediante la quale è possibile definire accuratamente geometrie 2D e 3D quali linee, archi e superfici a forma libera.

Importata la *mesh* semplificata nel software, come primo passo è necessario operare una modifica "manuale" di alcune facce della *mesh*. Questa modifica è stata fondamentale per una successiva corretta modellazione del solido della cupola. L'obiettivo è quello di ottenere una superficie 3D dell'intradosso che abbia in sommità e alla base due curve, definite come delle circonferenze irregolari, costituite dai lati di un certo numero di facce triangolari che presentino, per ogni

punto che li costituisce, tutti la stessa quota. I punti dei lati di interesse sono stati portati quindi alle corrette quote, coerentemente con i dati geometrici a disposizione, ottenendo così un *mesh* regolare dell'intradosso della cupola.

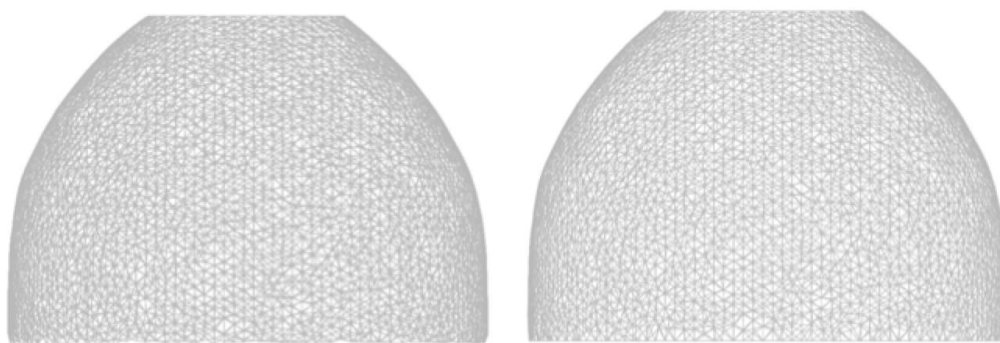


Figura 4.23: rappresentazione passaggio da *mesh* irregolare (sinistra) a *mesh* regolare (destra).

In seguito si è sfruttata la potenzialità del comando *OffsetMesh*, che ha permesso di dare un determinato spessore alla calotta. Il comando, infatti, copia la *mesh* cupola in modo tale che tutti i vertici della copia si trovino ad una stessa distanza da quelli originali. Gli input da inserire sono i seguenti:

- *Offset distance* imposta la distanza/spessore.
- *Increment* è il valore secondo il quale aumenta o diminuisce il valore specificato nella casella di selezione *Offset distance*.
- *Solid*, se selezionato riempie lo spazio esistente tra la *mesh* originale e quella nuova per creare una *mesh* chiusa.
- *BhotSides*, se settato disegna l'oggetto su entrambi i lati del punto iniziale, creando un oggetto di lunghezza doppia rispetto a quando specificato.
- *FlipAll* inverte la direzione dell'offset della mesh.

Ogni punto della *mesh* viene quindi estruso in direzione normale a se stesso della quantità inserita in fase di input e in questo modo si arriva ad avere una *mesh* chiusa (Figura 4.24).

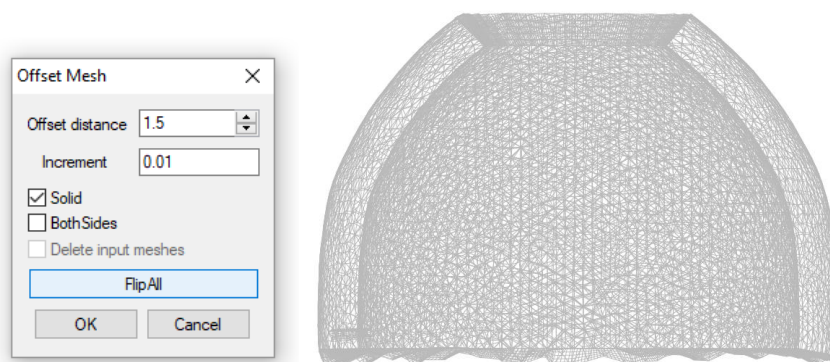


Figura 4.24: operazione del comando *OffsetMesh* per ottenere la *mesh* chiusa

Il passaggio successivo consiste nel passare dal solido *mesh* ad un oggetto che possa essere considerato come solido a tutti gli effetti e ciò è possibile attraverso il comando *MeshtoNURB*.

Per spiegare il funzionamento di questo comando, bisogna prima introdurre la differenza fondamentale che c'è tra un modello *Mesh* e un modello di superficie *NURBS*. Entrambi, infatti, sono modelli usati per rappresentare un oggetto tridimensionale in computer grafica, tuttavia lo fanno in modi completamente diversi. Una *mesh* rappresenta le superfici 3D come una serie di facce discrete, proprio come i pixel rappresentano un'immagine con una serie di punti colorati. Se le facce o i pixel sono abbastanza piccoli, l'immagine appare "liscia", tuttavia, se aumentiamo lo zoom, possiamo ancora vedere la "pixelizzazione" o la granularità e che l'oggetto risulta non essere localmente regolare e continuo. Le superfici *mesh* individuate in *Rhino* possono avere 3 lati (triangoli) o 4 lati (quad) e sono rappresentate in modalità *wireframe* come una serie di linee collegate, mentre nelle modalità *ombreggiate* a ogni faccia viene assegnata una "superficie" ai fini della visualizzazione. Le *NURBS* sono rappresentazioni matematiche di curve. Le superfici *NURBS* sono generate da una serie di curve *NURBS* in due direzioni (chiamate "U" e "V") interpolate per creare una superficie. Sono in grado di rappresentare superfici a geometria libera complesse e intrinsecamente lisce, che mantengono la loro forma regolare durante la modifica. Non c'è "pixelizzazione" o granularità come con una *mesh*, quindi si comportano più come il volto di una persona reale piuttosto che come un'immagine "pixelizzata" di quella stessa faccia. È importante notare che il modello *NURBS* può essere facilmente convertito in *Mesh* in qualsiasi momento, nello stesso modo in cui si può facilmente scattare un'immagine digitale del volto di una persona con una fotocamera. Invece, passare da *Meshes* a *NURBS* è come provare a ricostruire il volto di una persona da un'immagine digitale "pixelizzata", risulta quindi essere un compito molto più difficile e non ci sono metodi rapidi e automatici. La trasformazione di oggetti *mesh* in oggetti *NURBS* a superficie liscia è conosciuta in letteratura come problema di "*reverse engineering*".

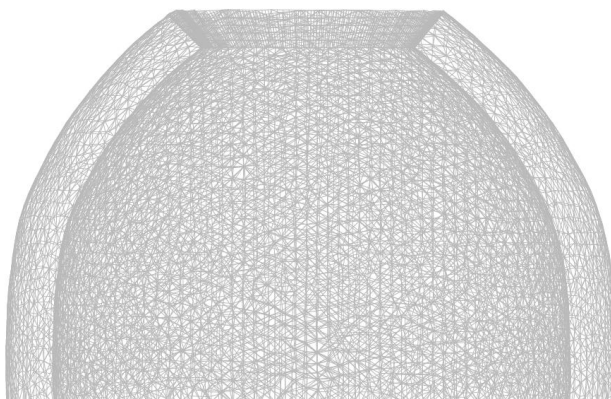
Il processo di *reverse engineering* (anche chiamato in italiano *ingegneria inversa*) consiste nell'analisi dettagliata del funzionamento, progettazione e sviluppo di un oggetto al fine di produrre un secondo oggetto che abbia un funzionamento analogo, magari migliorando o

aumentando l'efficienza dello stesso, senza in realtà copiare niente dall'originale (Song e Kim 1997). Nell'ambito della modellazione architettonica, gli edifici storici sono opere costituite principalmente da superfici libere, di difficile gestione da parte di programmi CAD tradizionali. Infatti la progettazione di tali edifici comincia dal modello tridimensionale reale, che verrà rilevato attraverso laser scanner per digitalizzare tali forme e viene poi gestita per mezzo di software di modellazione 3D. Appare chiara, quindi, l'utilità di una tecnica finalizzata alla creazione, in modo automatico ed in tempi brevi, del modello CAD dell'oggetto fisico da realizzare. Il compito dell'ingegneria inversa è proprio quello di soddisfare questa esigenza (De Luca e Nardini 2002). Ci sono alcuni software, definiti "Mesh to CAD reverse engineering software", che permettono, nello stesso ambiente, di eseguire prima l'acquisizione tridimensionale del pezzo collegando un sistema di scansione 3D e, in continuità, di compiere la ricostruzione delle superfici matematiche. Il dato che viene acquisito con strumenti di scansione 3D è in forma di nuvola di punti, questi saranno poi uniti attraverso il software 3D in poligoni, con un processo di triangolazione, per ottenere una *mesh* poligonale. Con un software di scansione 3D aggiornato e performante, tale elaborazione si esegue in tempo reale. Ottenuto il file *mesh*, con opportuni processi indicati dall'operatore, il software di *reverse engineering* elaborerà i dati in superfici matematiche, anche conosciute come *NURBS* o entità solide, che saranno il punto di partenza del disegno 3D che si intende modificare o riprodurre.

E' possibile affermare che l'obiettivo di questa tesi è svolgere una sorta di *reverse engineering*: partendo dalla *mesh* ricavata da una nuvola di punti rilevata tramite laser scanner, si è cercato di risalire alla superficie *NURBS* dell'oggetto per poi ottenere il modello CAD tridimensionale. Non avendo la possibilità di utilizzare un software specifico per questo compito, si sono svolte tutte le operazioni dovute fino al passaggio cruciale da *mesh* a *NURB*, il quale come detto, è stato possibile grazie al plug-in di *Rhino MeshtoNurb*. *MeshToNurb* permette, infatti, di convertire una struttura reticolare in una struttura *NURB*, creando una superficie *NURBS* per ogni faccia *mesh* nell'oggetto originale e unendo il risultato con una *poli-superficie*. Il comando produce quindi delle superfici "bilineari" definite da curve *NURBS* di grado 1 (cioè linee) in entrambe le direzioni. Quando tutti i bordi della superficie *NURBS* corrispondono alle curve originali che l'hanno generata (bordi "naturali"), la superficie viene chiamata non tagliata. Se la superficie è stata tagliata con una curva diversa dal suo bordo naturale, viene chiamata tagliata. Nel dettaglio, le *mesh* a maglia quadrangolare vengono convertite in superfici *NURBS* di grado 1 non tagliate su 4 lati. Pertanto, i bordi di definizione della superficie *NURBS* in questo caso sono gli stessi delle linee che rappresentano i bordi della faccia della *mesh*. Ciò implica due cose: se la faccia quadrangolare originale era definita da 4 punti complanari, tutte le linee del bordo si trovano nello stesso piano e la superficie *NURBS* risultante sarà planare. Se i quattro vertici *mesh* della faccia quadrata non sono complanari, le linee di bordo della superficie *NURBS* non saranno complanari e la superficie risulterà deformata. Questo tipo di superficie può anche essere chiamata "superficie rigata". I triangoli invece sono per definizione planari e quindi *MeshToNurb* converte le *mesh* triangolari in superfici *NURBS* planari tagliate. La superficie *NURBS* sarà una superficie di grado 1 x 1 come per i quad, solo con una metà tagliata

per formare un triangolo. *MeshToNurb* non è in grado di suddividere le aree quad in triangoli per creare superfici planari ed essendo alla ricerca di superfici planari, è necessario l'utilizzo di una *mesh* a maglie triangolari, proprietà che caratterizza la *mesh* ridotta ricavata precedentemente. La poli-superficie risultante da *MeshToNurb* avrà quindi esattamente gli stessi bordi del modello *mesh* originale e sarà composta interamente da superfici *NURBS* di grado 1 x 1 (bilineare) triangolari, planari e tagliate.

Nel caso in esame però, avendo come dato di origine una *mesh* chiusa (o solido *mesh*), questa operazione permette di ottenere rapidamente un modello *NURBS* pulito, definito come poli-superficie chiusa, che può essere tranquillamente considerato come un'entità solido. Il risultato di questa operazione non risulta tuttavia essere ancora il solido finale che rappresenta la reale configurazione la cupola, in quanto lo spessore inserito in fase di estrusione è di un valore fittizio e comunque il comando *OffsetMesh* estrude ogni vertice della *mesh* in direzione normale a se stessa.



**Figura 4.25: rappresentazione in modalità *wireframe* e vista frontale della poli-superficie chiusa originata dalla *mesh* dell'intradosso della cupola**

Osservando la sezione del modello lanternino-cupola-tamburo ricavata dai dati geometrici a disposizione e successiva agli accorgimenti presentati al Paragrafo 4.2, si nota che lo spessore murario della calotta diminuisce da un valore di circa  $1.27\text{ m}$  in corrispondenza della base della cupola (attacco tra cupola e tamburo) ad un valore di circa  $0.8\text{ m}$  in sommità, cioè dove la cupola si collega con il cordolo del lanternino.

E' stato necessario quindi risalire dal modello della cupola costituito dalla poli-superficie chiusa e caratterizzato da uno spessore murario costante, ad un modello solido che rispecchiasse la reale variazione dello spessore delle pareti con l'altezza. Per fare ciò si è svolta una serie di operazioni booleane relative alla modellazione di solidi, possibili grazie all'utilizzo del software di modellazione *AutoCad*.

Osservando la sezione trasversale del modello precedentemente introdotta, si è focalizzata l'attenzione sulla curva che in 2D rappresenta l'estradosso della cupola. Sull'estradosso non si hanno ulteriori informazioni a parte la sua curva tipo desunta dal rilievo metrico e per questo

motivo si è deciso di realizzare un estradosso regolare e simmetrico in ogni direzione. Per ricreare la superficie tridimensionale dell'estradosso, si può operare una semplice rivoluzione dalla curva base intorno all'asse centrale, cioè quell'asse che passa per i centri delle circonferenze di base e di sommità della superficie estradosso della cupola. Ora però immaginiamo di considerare la superficie estradosso come un "calco", nel senso che questa deve essere "incisa" sul solido dell'intradosso nella corretta posizione e tenendo conto del reale spessore della calotta. Prima di operare la rivoluzione della curva, è necessario quindi disegnare uno spessore fittizio in modo da ottenere una sezione chiusa avente come linea interna proprio la curva dell'estradosso. Questa sezione si è fatta poi ruotare intorno all'asse centrale ottenendo così un cilindro di rivoluzione con un'apertura al centro, che rappresenta proprio la superficie tridimensionale dell'estradosso della cupola. Il calco è stato poi posizionato e centrato sul solido ricavato dalla *mesh* dell'intradosso, prendendo come riferimento la distanza tra intradosso ed estradosso alla base della calotta (Figura 4.26).

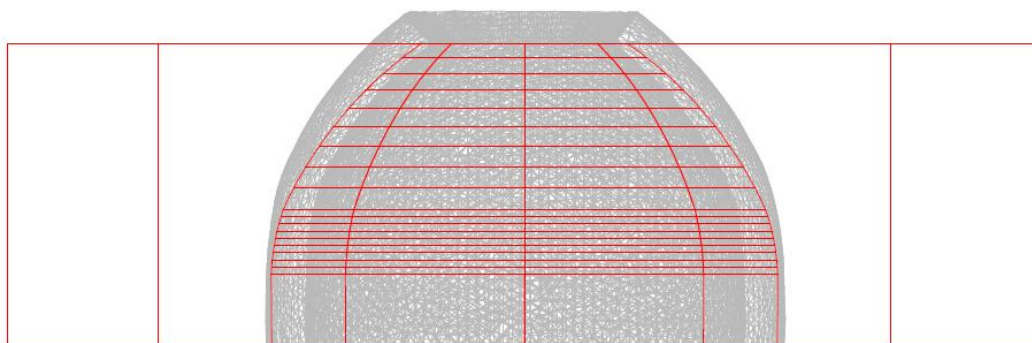


Figura 4.26: rappresentazione in modalità *wireframe* e vista frontale del posizionamento del calco sulla poli-superficie chiusa

Si hanno a questo punto a disposizione due solidi centrati l'uno con l'altro nella corretta posizione e da questi si vuole ottenere un unico solido cavo. Questo passaggio è possibile con *AutoCad* grazie all'operazione booleana di sottrazione, che permette di sottrarre al solido creato dalla *mesh* dell'intradosso il "calco" dell'estradosso, ottenendo così il nuovo solido (Figura 4.27). Il comando *Sottrai* consente infatti di creare un solido 3D sottraendo un gruppo di solidi 3D esistente da un altro gruppo sovrapposto. Il controverso passaggio da *mesh* chiusa e *poli-superficie* chiusa (solido) operato nelle fasi precedenti per l'intradosso della cupola è stato necessario al fine di permettere questa operazione booleana, infatti non è possibile utilizzare *Sottrai* con oggetti *mesh*.



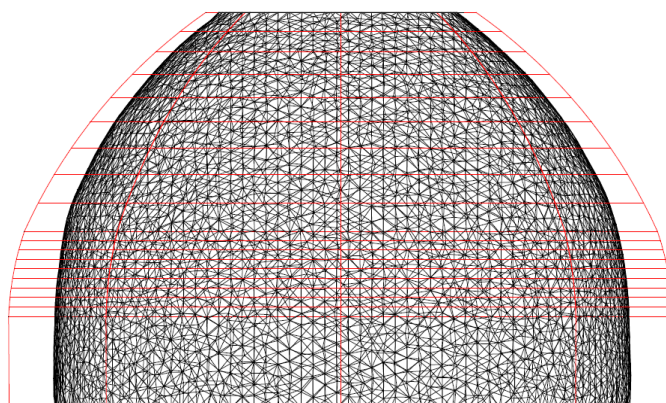


Figura 4.27: rappresentazione in modalità *wireframe* e in vista frontale del solido finale della cupola

Il solido cupola finale rispecchia in pieno la reale configurazione del modello della cupola: come intradosso possiede la superficie nata dalla *mesh* triangolare ottenuta dal rilevamento laser opportunamente semplificata, come estradosso quello sviluppato dall'analisi della sezione fornita dallo studio del rilievo e tra i due la corretta variazione dello spessore della parete con l'aumentare dell'altezza della cupola.

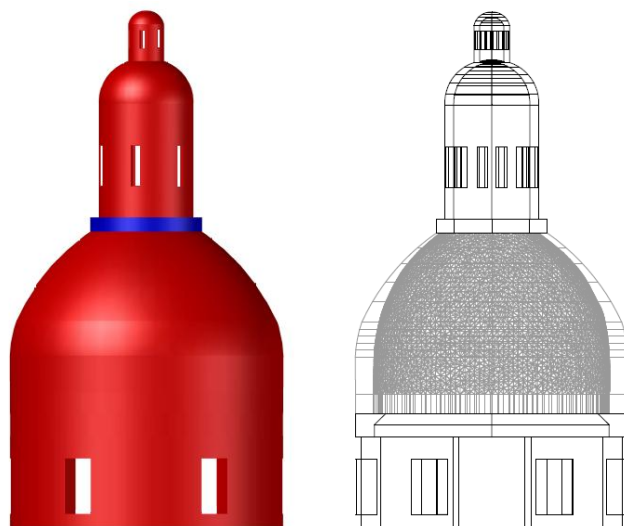
#### 4.3.4 Assemblaggio del modello geometrico 3D finale

Ora che si ha a disposizione il modello finale della cupola, è necessario ricostruire i solidi 3D del lanternino, del tamburo e dei relativi cordoli, in modo da assemblare il modello lanternino-cupola-tamburo da utilizzare nelle analisi.

Come dato di partenza si utilizza la sezione semplificata del modello ottenuta dallo studio del rilievo geometrico e dai successivi passaggi introdotti al Paragrafo 4.2. Si è posta quindi l'attenzione su quelle parti ancora da modellare: tamburo (con relativi aperture delle finestre), lanternino (con relativa doppia serie di finestre) e il relativo cordolo. Tutti questi elementi sono simmetrici rispetto all'asse verticale dell'edificio che è stata impostata come l'asse che passa per il centro della circonferenza del cornicione sopra finestra del tamburo. Dalla sezione trasversale quindi si può risalire alla curva base di ogni elemento e, utilizzando la modalità di modellazione 3D di *AutoCad*, è stato possibile risalire ai relativi solidi di rivoluzione, facendo ruotare appunto la parte della sezione di interesse attorno all'asse centrale. Successivamente per il tamburo e il lanternino si sono ricostruiti i fori delle finestre. Con un'opportuna analisi della sezione e dalla pianta dell'edificio presente nell'elaborato grafico contenente i dati geometrici è stato quindi possibile risalire al corretto dimensionamento e posizionamento delle finestre. Il tamburo presenta una cerchia di 6 finestre di altezza  $3.9\text{ m}$  e larghezza  $1.3\text{ m}$  che si aprono ad un'altezza pari a  $1.3\text{ m}$  dalla base del tamburo. Il lanternino presenta invece due serie di finestre, quelle inferiori presentano un'altezza di  $2.9\text{ m}$  e una larghezza di  $0.6\text{ m}$ , mentre quelle superiori un'altezza di  $1.3\text{ m}$  e una larghezza di  $0.35\text{ m}$ .



Le varie parti dell'edificio ottenute nella fase di modellazione, vale a dire tamburo, cupola, cordolo e lanternino, possono essere a questo punto assemblate per formare il modello geometrico finale riportato in Figura 4.28.



**Figura 4.28: rappresentazione *ombreggiata* (sinistra) e rappresentazione *wireframe* (destra) del modello finale**

Il modello geometrico così ottenuto, sarà poi utilizzato nel software per la modellazione strutturale e le analisi. A questo scopo è stato necessario esportare il modello in formato IGES, in quanto estensione valida per importare un modello CAD nel software di analisi strutturale DIANA. Initial Graphics Exchange Specification (IGES) definisce un formato dati neutrale che consente lo scambio di dati, file grafici e informazioni tra sistemi CAD. Lo standard IGES definisce due formati di file: ASCII a lunghezza fissa, nel quale vengono memorizzate le informazioni in record di 80 caratteri, e ASCII compresso. Usando l'estensione IGES, è infatti possibile scambiare i dati del modello prodotto in forma di diagramma del circuito modello wireframe, modelli liberi di superfici o modellazione solida 3D.

Dal modello geometrico è stato possibile ricondursi ad un modello strutturale utilizzando un approccio di macro-modellazione. La discretizzazione ad elementi finiti con il software DIANA permette di creare la mesh dalla geometria, ottenendo così il modello numerico per la successiva fase di analisi.

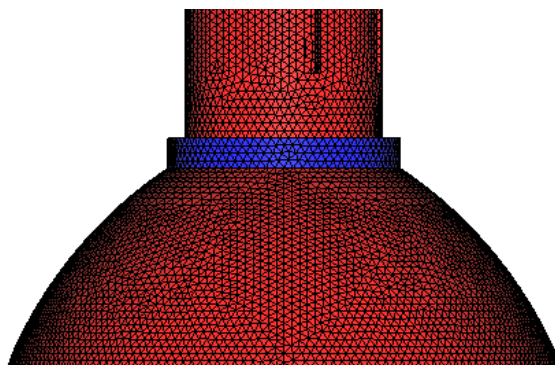


Figura 4.29: dettaglio *mesh* modello numerico

La modellazione numerica, come anche la fase della analisi, saranno ampiamente riprese nel proseguo della tesi.

#### 4.4 *Caratteristiche meccaniche dei materiali della Chiesa della S.S. Trinità*

Le murature che caratterizzano gli edifici storici, sono quasi esclusivamente costituite da pietre e/o mattoni laterizi, uniti da malte di calce. Questi materiali presentano grosse aleatorietà per quanto riguarda la provenienza, le modalità di formazione, la preparazione e la cottura, tutte caratteristiche che ne variano le resistenza e le proprietà meccaniche. Per quanto riguarda i mattoni, uno dei parametri più significativi è il grado di cottura. Un tempo la cottura avveniva in cataste raccolte attorno ad una fonte di calore e i vari elementi presentavano un grado di cottura altamente disomogeneo in relazione alla distanza dal fuoco. La mancanza di un controllo sistematico della temperatura della fonte di calore, l'impossibilità di garantire tempi di cottura costanti per ogni singola partita, la scelta di argille contenenti impurità e di composizione variabile facevano sì che mattoni, aventi anche la medesima provenienza, si presentassero spesso con proprietà diverse. Un secondo importante aspetto riguarda il procedimento di formazione dei mattoni: fino ai primi decenni del Novecento essi furono ottenuti per pressatura manuale dell'argilla entro stampi. Questo procedimento ha accentuato l'anisotropia degli elementi, che presentano proprietà diverse in funzione della direzione di carico. Sempre nell'ambito dei laterizi antichi, anche l'epoca e il luogo in cui furono fabbricati, risulta importante per la valutazione della loro qualità. Soffermandoci sull'epoca alla quale risale la costruzione della S.S. Trinità, si è osservato che in Piemonte i laterizi del Seicento rivelano proprietà mediocri e sono caratterizzati da una tecnica costruttiva scadente. Per quanto riguarda i leganti delle malte antiche, questi si riducono quasi totalmente alla calce idraulica e al gesso. Anche per le malte vale il discorso fatto a proposito dell'enorme variabilità dei mattoni: la cottura delle calce aeree avveniva in modo simile a quella dei laterizi, con diversi gradi di cottura, e le sabbie utilizzate erano ricche d'impurità e piuttosto grossolane (Carbone, Fiore e Pistone 2001).

Per quanto riguarda le pietre da costruzione e le loro principali caratteristiche meccaniche, si può fare riferimento al lavoro di diversi autori [ (Peretti 1938); (Colombo 1997); (Consiglio 1972); (Bernardini, et al. 1984)]. Per il proseguo di questo lavoro di tesi sono di interesse i parametri relativi al marmo da costruzione evidenziati in Tabella 4.1.

**Tabella 4.1: caratteristiche fisico-meccaniche del marmo.  $E$ =modulo elastico;  $\nu$ =coefficiente di Poisson;  $\gamma$ =peso specifico;  $f_c$ =resistenza di compressione;  $f_t$ =resistenza di trazione**

$E$ [MPa]	$\nu$ [-]	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$f_c$ [MPa]	$f_t$ [MPa]
60000	0.2	27	120	4

La muratura antica invece, se realizzata con la stessa regolarità di quella moderna, può seguire le attuali teorie sullo studio del suo comportamento. Tuttavia attraverso prove sperimentali, si è notato che il mattone antico, oltre alla compressione assiale, può subire anche un'inflexione nel piano verticale e così giungere a rottura. La presenza di rotture per flessione in provini di mattoni o pietre soggetti a compressione si riscontra tanto più frequentemente, quanto più è irregolare la composizione del solido murario. Un altro tipico fenomeno che provini di muratura compressi possono subire è lo stato di presso-flessione. Queste osservazioni ci permettono di dire che il comportamento della muratura antica può seguire solo parzialmente le teorie relative alla muratura moderna. Molto diverso risulta invece il comportamento delle murature realizzate con ciottoli e malta, che si comportano in maniera molto simile ad un conglomerato. La rottura in questo caso può essere varia e andare da un complesso di fessurazioni verticali ad un distacco di blocchi laterali. Diverso ancora è il caso della muratura a sacco. Di questa tipologia di muratura non sono reperibili in letteratura molte prove, tuttavia è ipotizzabile che la sollecitazione di compressione si ripartisca tra paramenti ed interno in funzione delle rispettive rigidezze e che vista la maggiore rigidezza dei paramenti, siano proprio questi ultimi a subire la maggior parte del carico. Come conseguenza si ha che la sezione resistente sia particolare esigua e, per la mancanza di collegamento con l'interno, soggetta a fenomeni di presso-flessione ed instabilità. In questo tipo di muratura infatti è frequente notare imbozzamenti localizzati o fenomeni di curvatura generalizzati a intere pareti (Carbone, Fiore e Pistone 2001).

Prove meccaniche recenti su materiali antichi sono state eseguite in quantità piuttosto scarse, tuttavia presso il Politecnico di Torino sono state realizzate, negli ultimi vent'anni, prove su materiali storici piemontesi. La maggior parte riguarda murature caratterizzate da una buona regolarità o campioni indisturbati o ricostruiti con materiali originali e malte che riproducono quelle originarie. Tutte le prove condotte sono sempre state di tipo ciclico e i diagrammi ottenuti denotano deformazioni permanenti residue ad ogni ciclo con valori di carico crescenti. Si è potuto osservare in parecchie di queste prove un particolare comportamento della muratura antica, che si può definire come una sorta di "accomodamento": dopo una prima fase anelastica, la muratura assume un comportamento tendenzialmente elastico e ciò può essere da imputare alle malte presenti in essa. Questo fenomeno ha un effetto benefico sul comportamento statico delle strutture in muratura, in quanto porta ad un miglioramento delle proprietà meccaniche del

materiale. In particolare si può sottolineare come per edifici antichi, i processi graduali di costruzione e la maggior importanza dei carichi permanenti rispetto ai variabili, favorisca questo fenomeno rendendo la struttura in grado di offrire una risposta sostanzialmente elastica e stabile ai tipici carichi di esercizio. (Carbone, Fiore e Pistone 2001).

#### 4.4.1 *Caratteristiche meccaniche della muratura della Chiesa della SS. Trinità*

Di particolare interesse per questo lavoro di tesi, sono una serie di test svolti da Pistone e Roccati (1988). Queste prove si prefissavano di fornire una stima abbastanza accurata delle proprietà meccaniche della vecchia muratura. A tale scopo, i test furono principalmente finalizzati a tracciare le curve sforzo-deformazione degli elementi murari al fine di identificare i loro tipici schemi di rottura e le modalità di collasso. I test sono stati eseguiti su campioni di forma prismatica ottenuti direttamente da due importanti edifici locati a Torino risalenti a periodi temporali diversi. In questa trattazione è d'interesse soffermarsi in particolare su una serie di campioni provenienti dal complesso "Il Giaione" situato a Torino e risalente ai primi anni del XVIII secolo, in quanto luogo e periodo sono assimilabili con quelli relativi alla costruzione della chiesa della S.S. Trinità. I provini n. 1, 2 e 3 sono di campioni indisturbati di dimensioni medie, ottenuti da vecchie colonne in muratura. Si è potuto osservare come il comportamento strutturale di queste unità in muratura differiva in misura considerevole da quello di campioni risalenti ad edifici locati sempre a Torino, ma di epoche successive, sia a causa della scarsa lavorazione, sia per l'utilizzo di materiali di qualità inferiore. I campioni sono stati caricati fino a collasso attraverso cicli di carico e scarico applicati in fasi progressivamente crescenti e si è osservato che i campioni n. 1, 2 e 3, del complesso "Il Giaione", si sono complessivamente comportati in modo simile. Nel dettaglio:

- nel campione n. 1, un piccolo prisma indisturbato, le prime fessure sono apparse sul lato "interno" della muratura a 3.09 MPa, mentre la rottura è avvenuta per un valore di sforzo pari a 5.56 MPa.
- il campione n. 2 ha rivelato la prima formazioni di crack sotto un carico unitario di 3.27 MPa e le fessure hanno immediatamente formato uno schema diffuso; il collasso si è verificato durante il successivo ciclo di carico a 4.54 MPa.
- nel campione n. 3, un piccolo pannello a parete, le prime crepe sono state rilevate a 4.39 MPa e il collasso si è verificato durante lo stesso ciclo di caricamento a 5.96 MPa.

I dati relative all'origine, forma e caratteristiche dei campioni e i valori di resistenza ottenuti sono elencati in Tabella 4.2.

Tabella 4.2: caratteristiche dei campioni e risultati dei test (Pistone e Roccati 1988)

Sample	Type	Origin Epoch	Dimensions a x b x h (cm)	Cracking vi- sually observed (MPa)	Failure stress (MPa)	Cracking stress vs failure stress %
1	undist. prism		28x34x25	3.09	5.56	56
2	"	Complesso "Il Giaione"	30x36x27	3.27	4.54	72
3	undist. wall	(18th century)	12,5x50,35	4.39	5.96	74

Come valore caratteristico delle resistenza a rottura a compressione della muratura del complesso "Il Giaione" può essere preso il valore medio delle resistenze ottenute per i tre diversi campioni, come espressa dalla seguente equazione:

$$\sigma_{cm} = \frac{5.56 + 4.54 + 5.96}{3} = 5.35 \text{ MPa} \quad 4.1$$

A seguito delle prove di compressione eseguite su questi campioni è stato infine possibile ricavare il grafico sforzo-deformazione di Figura 4.30.

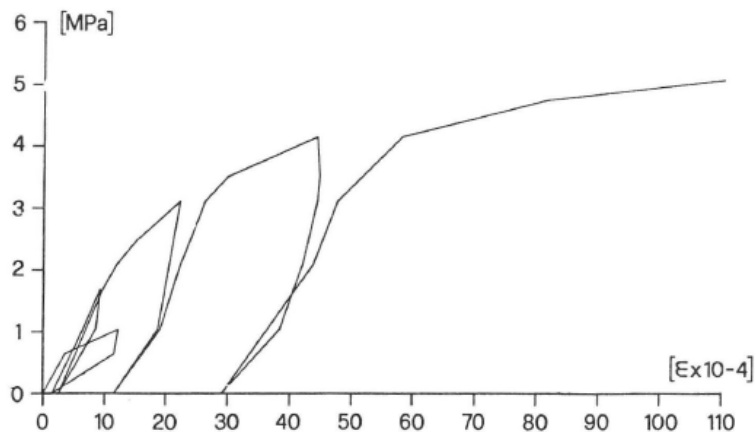


Figura 4.30: curva sforzo-deformazione per la muratura del campione No. 3 ("Il Giaione") (Pistone e Roccati 1988)

Un parametro significativo per caratterizzare la deformabilità della muratura è il modulo elastico  $E$ , da intendersi come rapporto tra la tensione e la corrispondente deformazione unitaria. Facendo riferimento al diagramma precedete, è possibile quindi ricavare il modulo elastico iniziale relativo alla muratura dei campioni del complesso "Il Giaione", così come espresso nell'Equazione 4.2:

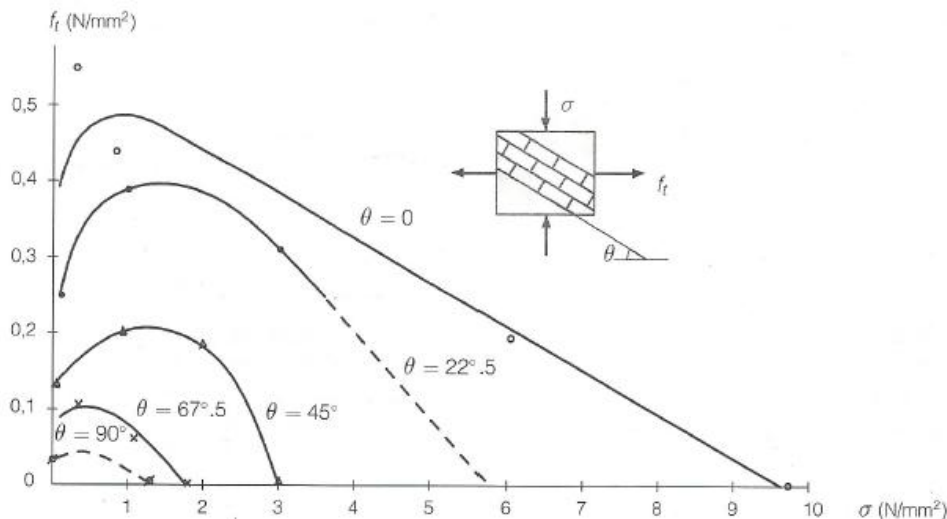
$$E \cong \frac{1.75}{10 \cdot 10^{-4}} = 1750 \text{ MPa} \quad 4.2$$

I valori di resistenza di compressione e del modulo elastico appena ottenuti possono essere presi come riferimento anche per la muratura che caratterizza la cupola della chiesa della S.S. Trinità. Infatti le due costruzioni sono state entrambe realizzate nella città di Torino con meno di un secolo di distanza uno dall'altro, ma entrambi in un periodo dove nella città Sabauda la muratura rivelava proprietà mediocri nei suoi costituenti. In conclusione, dalle considerazioni appena svolte, le caratteristiche meccaniche di interesse per la muratura da associare alla Chiesa della SS. Trinità di Torino si possono riassumere in Tabella 4.3:

**Tabella 4.3: caratteristiche fisico-meccaniche della muratura della SS. Trinità.  $E$ =modulo elastico;  $\nu$ =coefficiente di Poisson;  $\gamma$ =peso specifico;  $\sigma_{cm}$ =resistenza media di compressione;  $f_t$ =resistenza di trazione**

$E$ [MPa]	$\nu$ [-]	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$\sigma_{cm}$ [MPa]	$f_t$ [MPa]
1750	0.25	18	5.35	0.24

Il valore di resistenza a trazione è stato dedotto facendo riferimento al diagramma di Figura 4.31 redatto da Samarasinghe (1980) come risultato dello studio effettuato da Page (1978). Secondo gli autori [ (Hendry 1986); (Page, Samarasinghe e Hendry 1980)] il valore della tensione principale di trazione al collasso non è costante dal momento che la sua inclinazione rispetto all'orizzontale diminuisce al crescere di  $\sigma_c$  e a causa dall'anisotropia della muratura. Perciò le condizioni di collasso per compressione e taglio devono essere definite da una superficie funzione di  $\sigma_c$ ,  $\sigma_t$  e  $\theta$ , che rappresenta l'inclinazione della direzione principale di compressione.



**Figura 4.31: curve di crisi di pannelli di muratura in regime biassiale per diverse orientazioni dei giunti (Samarasinghe 1980)**

#### 4.4.2 Criterio di resistenza della muratura

La muratura è un tipico materiale composito, i cui due costituenti, la malta e il laterizio (mattoni/pietre), presentano caratteristiche meccaniche diverse. In particolare si possono trarre le seguenti conclusioni (Del Piero 1983):

- entrambi i materiali presentano una resistenza molto più elevata a compressione che a trazione;
- rispetto alla malta, il laterizio presenta tensioni di rottura e modulo elastico maggiori;
- il laterizio presenta una rottura fragile, mentre la malta presenta una rottura duttile, cioè è caratterizzata dalla presenza di una fase finale di grandi deformazioni.

Risulta difficile quantificare queste proprietà a causa della larga variabilità sia dei materiali naturali di cui malte e laterizi sono composti, che dalle procedure di formazione. Per stati di sollecitazione pluriassiali, il comportamento a rottura di malta e laterizio, e quindi della muratura risultante, può essere descritto in prima approssimazione dal criterio di Mohr-Coulomb:

$$|\tau| = c - \sigma \cdot \tan \phi \quad 4.3$$

Dove  $c$  sta ad indicare la "coesione" naturale del materiale, cioè l'intensità della tensione di taglio capace di produrre, in assenza di compressione, deformazioni plastiche a sforzo costante, mentre  $\phi$  da la misura dell'angolo di attrito interno del materiale.

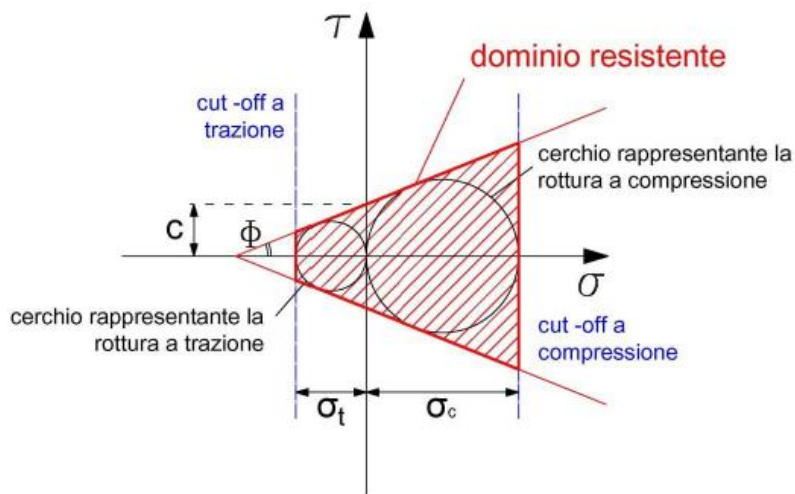


Figura 4.32: dominio di rottura di Mohr-Coulomb per stati di compressione e trazione monoassiale e identificazione del cut-off a trazione

Nella rappresentazione del piano  $(\sigma, \tau)$  (Figura 4.32) i punti che soddisfano la 4.3 occupano la regione delimitata dalle due rette inclinate di  $\phi$  e che incontrano l'asse  $\tau$  ad una distanza  $c$  dall'origine. I due cerchi riportati in figura corrispondano alla rottura per compressione e trazione monoassiale e le corrispondenti tensioni di rottura sono:

$$\sigma_c = \frac{2c \cdot \cos\phi}{1 - \sin\phi}, \quad \sigma_t = \frac{2c \cdot \cos\phi}{1 + \sin\phi} \quad 4.4$$

Il criterio di Mohr-Coulomb potrebbe tuttavia risultare irrealistico ed eccessivamente ottimistico per rappresentare la condizione di resistenza della muratura principalmente per due motivi:

- la resistenza a trazione della muratura è in genere molto modesta, se non nulla;
- la muratura ha un comportamento tipicamente anisotropo.

Per questi motivi si tende a modificare il dominio di resistenza mediante l'assunzione di una tensione limite a trazione ridotta rispetto a quella definita dal cerchio di Mohr (cut-off a trazione). In oltre, si formula l'ipotesi di materiale isotropo "conservativo", nel senso che si assume per  $\phi$  e  $c$  un valore che tenga conto dei valori minimi raggiunti studiando il comportamento del materiale al variare dell'orientamento delle tensioni principali rispetto alla direzione dei corsi di mattoni (Contro e Nova 1983). Come detto, si può ragionevolmente assumere per la muratura che il dominio di resistenza sia quello di Mohr-Coulomb nella versione "modificata" con tension cut-off (Figura 4.32).

Per riprodurre il comportamento non-lineare della muratura da utilizzare nel presente lavoro di tesi, si è scelto invece di adottare, anche in conformità con il software utilizzato nelle analisi, un modello elasto-plastico basato sul criterio di plasticità di Drucker-Prager (DP) (Drucker e Prager 1952).

#### 4.4.3 Il modello elasto-plastico

In accordo con la tessitura caotica che caratterizza le murature in molti edifici storici esistenti, si è considerato un materiale con comportamento isotropo. Il comportamento elastico del continuum equivalente è governato dalle classiche equazioni del legame costitutivo di tipo elastico espresse nella 4.5 e 4.6:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon^{el} = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad 4.5$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 4.6$$

dove  $E$  e  $G$  denotano i moduli longitudinale e il modulo tangenziale di elasticità,  $\nu$  è il coefficiente di Poisson e infine  $\sigma$  e  $\varepsilon$  indicano rispettivamente lo stress e la deformazione totale. Per caratterizzare la curva di tensione-deformazione elastica di un materiale omogeneo e isotropico sono dunque richieste solo due costanti. La legge di plasticità, che caratterizza il comportamento del materiale oltre il limite elastico, invece richiede la definizione delle seguenti tre condizioni (Betti, Galano e Vignoli 2016):

- una funzione di snervamento che circonda il dominio elastico (che identifica la condizione alla quale inizia il flusso plastico);



- una regola del flusso plastico, che mette in correlazione l'aumento della deformazione plastica allo stato attuale di stress;
- una regola di "hardening" che modifica la funzione di snervamento durante il flusso plastico.

Tenendo conto delle leggi sui materiali disponibili nel codice DIANA, questi requisiti sono raggiunti assumendo per il materiale il modello di plasticità di Drucker-Prager (DP) (Drucker e Prager 1952). Questo è tipicamente impiegato per materiali inelastici dipendenti dalla pressione, come suoli, rocce e calcestruzzi, ed è una modifica del criterio di Von Mises che tiene conto della componente di stress idrostatico (la pressione di confinamento). La legge costitutiva di DP è la seguente:

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad 4.7$$

dove  $I_1$  è il primo invariante delle tensioni di Cauchy e  $J_2$  il secondo invariante dello stato deviatorico delle medesime tensioni. Le costanti  $\alpha$  e  $k$  sono legate all'angolo di attrito interno  $\varphi$  e alla coesione naturale del materiale  $c$ , in accordo che le seguenti equazioni:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}; \quad k = \frac{6c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad 4.8$$

I due parametri  $\alpha$  e  $k$  permettono di calcolare le tensioni di snervamento per trazione e compressione uniassiale,  $f_{tDP}$  e  $f_{cDP}$  rispettivamente, come:

$$f_{tDP} = \frac{k}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \alpha}; \quad f_{cDP} = \frac{k}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha} \quad 4.9$$

In caso di comportamento elastico-perfettamente plastico, l'angolo di attrito  $\varphi$  e la coesione  $c$  sono costanti e non dipendono dalla deformazione plastica. La rottura avviene spesso per fessurazione, quindi è abbastanza naturale pensare che il materiale muratura (come le rocce o i calcestruzzi) manifesti una diminuzione della propria densità apparente, cioè un aumento del volume specifico. Questo fenomeno è definito dilatanza del materiale. I risultati sperimentali disponibili per suoli e rocce mostrano che la dilatazione volumetrica predetta dalla legge di flusso associata a DP è spesso maggiore di quella ottenuta dagli esperimenti effettuati. Pertanto, dovrebbe essere introdotta, attraverso una corretta definizione del potenziale plastico, una legge di flusso non direttamente associata al criterio di rottura. In queste circostanze viene introdotto un terzo parametro per il comportamento di plasticità di DP, chiamato angolo di dilatazione  $\delta$ . Questo parametro regola il grado associatività della legge di flusso. Se  $\delta = \varphi$  il flusso è associato, mentre se  $\delta = 0$  non verranno prodotti sforzi volumetrici plastici. In conclusione, la definizione del modello di Drucker-Prager richiede tre parametri: l'angolo di attrito interno  $\varphi$  che descrive l'inclinazione della superficie di snervamento (se  $\varphi = 0$  non c'è dipendenza dalla pressione idrostatica), la coesione  $c$  (tensione di snervamento a pressione idrostatica nulla) e l'angolo di dilatanza  $\delta$ . La superficie di snervamento di DP può essere considerata come una

versione liscia della superficie di Mohr-Coulomb, e di solito i parametri  $c$  e  $\varphi$  sono introdotti in modo tale che il cono circolare di DP corrisponda al vertice esterno della superficie esagonale di Mohr-Coulomb. La superficie risultante è un cono circolare come mostrato in Figura 4.33-a. Il dominio di resistenza di DP per uno stato di tensione piano, può assumere diverse possibili forme coniche a seconda dal rapporto  $f_{tDP}/f_{cDP}$ . Queste forme possono essere analizzate efficacemente nello spazio bidimensionale ( $\sigma_{III} = 0$ ), considerando la sezione trasversale del cono DP nel piano ( $\sigma_I, \sigma_{II}$ ) (Figura 4.33-b).

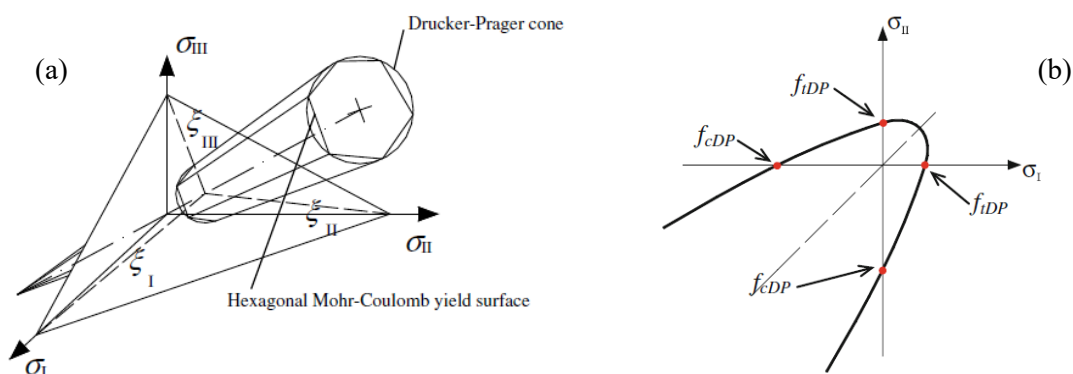


Figura 4.33: (a) superficie di Drucker-Prager nello spazio delle tensioni principali; (b) dominio di resistenza di Drucker-Prager nel piano ( $\sigma_I, \sigma_{II}$ )

In conclusione possiamo allora affermare che il modello elasto-plastico prende forma considerando il materiale muratura come un continuum isotropico in grado di mostrare una deformazione plastica, e i parametri richiesti sono i seguenti:

- parametri elastici  $E$  e  $\nu$  dedotti dalle prove sperimentali analizzata nel Paragrafo 4.4.1;
- parametri plastici di Drucker-Prager  $c$ ,  $\varphi$  e  $\delta$ ;
- parametri di rottura  $\sigma_c$  e  $\sigma_t$  che saranno analizzati al Paragrafo 4.4.5.

La corretta combinazione di queste caratteristiche consente un comportamento elastico-fragile in caso di sforzi di trazione biassiali o sollecitazioni di trazione-compresione biassiali con basso livello di compressione. Al contrario, il materiale è elasto-plastico in caso di sollecitazioni di compressione biassiali o sollecitazioni di trazione-compresione biassiali ad alto livello di compressione.

L'assegnazione dei parametri meccanici necessari per la definizione del criterio di DP richiede un'attenta calibrazione (Chiostrini e Vignoli 1994). Nel paragrafo successivo si discuterà l'identificazione di tali valori attraverso i risultati di indagini sperimentali ottenuti da Betti, Galano e Vignoli (2016).

#### 4.4.4 Calibrazione dei parametri del modello

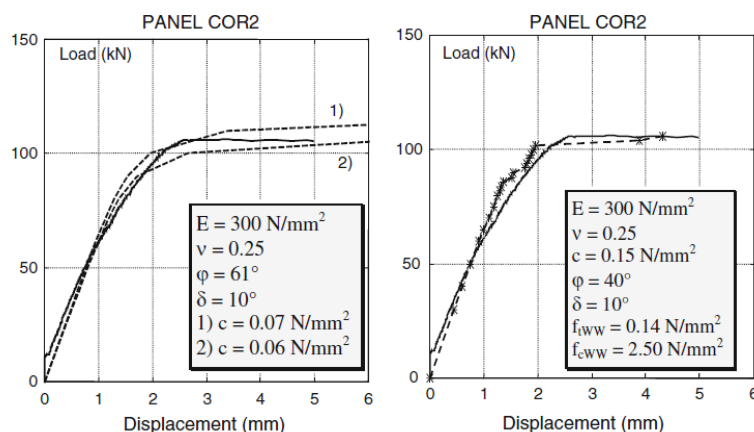
E' necessario fare la premessa che nel modello elasto-plastico proposto dagli autori (Betti, Galano e Vignoli 2016), il criterio di plasticità di DP è stato combinato con il criterio di rottura di Willam e Warnke (WW), originariamente proposto per calcestruzzo (William e Warnke 1975), che introduce sia le modalità di rottura che di frattura del materiale. Il modello di WW considera un comportamento lineare elastico del materiale limitato da una superficie di rottura definita da cinque parametri: la forza di compressione uniassiale  $f_{cWW}$ , la forza di trazione uniassiale  $f_{tWW}$ , la forza di compressione biassiale  $f_{cb}$  e due parametri aggiuntivi  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Nella maggior parte dei casi pratici tuttavia la definizione della superficie di rottura può essere esaurita mediante due sole costanti,  $f_{cWW}$  e  $f_{tWW}$ , poiché gli altri valori possono essere assunti come segue:

$$f_{cb} = 1.2f_{cWW}, \quad \rho_1 = 1.45f_{cWW}, \quad \rho_2 = 1.725f_{cWW} \quad 4.10$$

In generale, i parametri costitutivi del modello dovrebbero essere valutati sulla base delle proprietà meccaniche in situ delle pareti in muratura. Ciò richiede di eseguire una serie di indagini sperimentali, ma vale la pena notare che le difficoltà nella rimozione di provini in edifici di valore storico suggeriscono la calibrazione dei parametri utilizzando risultati sperimentali disponibili da strutture di muratura simili.

A tal proposito, gli autori hanno confrontato la loro sperimentazione numerica con i risultati di ricerche sperimentali passate, finalizzate a valutare sia la resistenza che la deformabilità delle pareti in muratura di edifici storici in muratura in Toscana. Queste ricerche sperimentali fanno riferimento a differenti test di laboratorio e prove distruttive in situ su pannelli in muratura, in particolare test di taglio diretto (S), prove di compressione a taglio (SC) e prove di compressione diagonale (DC). Nella prima campagna sperimentale [Chiostriani e Vignoli (1992); (1994)] sono stati eseguiti test S e SC su nove pannelli selezionati da diversi edifici: il monastero di S. Orsola nel centro storico di Firenze (quattro pannelli: T1, T2, T3 e T4), un vecchio edificio residenziale a Firenze (tre pannelli: COR1, COR2 e COR3) e due edifici a Pontremoli (Lunigiana, Toscana centrale), l'Istituto Belmesseri e il Municipio (un pannello per ogni caso: BEL e COM). Nella seconda indagine sperimentale [Chiostriani, Galano e Vignoli (2000); (2003)] sono stati eseguiti tre test di compressione-taglio, su tre pannelli (A, B e C) e quattro test di compressione diagonale su sette pannelli in muratura selezionati in cinque diversi edifici rurali. Per identificare i parametri del modello sono stati utilizzati dagli autori i test di taglio diretto sui pannelli COR2, BEL e COM e i test di compressione a taglio sui pannelli A e B. La configurazione di entrambi i test è stata modellata utilizzando l'elemento finito isoperimetrico a 8 nodi con tre gradi di libertà su ciascun nodo (Solid65). Sono stati considerati due casi: nel primo è stato utilizzato solo il modello di plasticità, nel secondo sono stati presi in considerazione sia i modelli di plasticità che quelli di collasso. Come esempio illustrativo, per il pannello COR2, la Figura 4.34 mostra un confronto tra il risultato numerico e quello sperimentale per entrambi i modelli di materiale (solo plasticità e modello congiunto plasticità e rottura). In entrambi i casi è possibile osservare una buona approssimazione del carico di

collasso, in particolare l'adozione del modello di crack in combinazione con il modello di plasticità consente di riprodurre con buona precisione anche lo spostamento di collasso (Figura 4.34). Al contrario, l'adozione del solo modello elastico perfettamente plastico non riproduce lo spostamento del collasso, poiché il pannello si comporta come un continuum elasto-plastico senza limiti di deformazione.



**Figura 4.34: confronto tra risultati numeri e sperimentali per test di taglio sul pannello COR2: solo modello plastico (sinistra) e combinazione dei modelli di plasticità e di rottura (destra)**

Adottare il modello congiunto di plasticità di DP e di rottura di WW, consente la corretta simulazione del comportamento della muratura negli stati di tensione e compressione. Dai risultati sperimentali si evidenzia, infatti, che usando solo il modello di plasticità, l'angolo di attrito  $\phi$  risulta essere significativamente più alto di quello corretto per i modelli combinati, mentre l'opposto accade per la coesione  $c$ . Inoltre, l'analisi ha evidenziato il ruolo del parametro di dilatanza  $\delta$  che ha sempre mostrato valori inferiori all'angolo di attrito e ciò conferma l'impossibilità di utilizzare la legge di flusso associato.

Un riassunto dei parametri costitutivi che ha permesso una buona riproduzione dei risultati sperimentali in termini di curve forza-spostamento è mostrato in Tabella 4.4 e Tabella 4.5. In particolare, la Tabella 4.4 riprende i parametri identificati per il solo modello DP, mentre la Tabella 4.5 riporta i parametri identificati per il modello DP utilizzato insieme al modello WW. Nelle tabelle vengono evidenziati:

- i parametri elastici identificati  $E$  e  $\nu$ ;
- i parametri plastici identificati (DP):  $c$ ,  $\phi$ ,  $\delta$  ( $f_{cDP}$  e  $f_{tDP}$ );
- i parametri identificati del modello di rottura (WW):  $f_{cWW}$ ,  $f_{tWW}$ .

Tabella 4.4: parametri identificati per il solo modello plastico

Panel ID	$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\nu$	$c$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\varphi$ (°)	$\delta$ (°)	$f_{cDP}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{iDP}$ (N/mm <sup>2</sup> )
COR2	300	0.25	0.065	61	10	0.503	0.049
COM	500	0.25	0.120	61	35	0.928	0.090
BEL	500	0.25	0.07	61	15	0.541	0.052
A	1500	0.25	0.28	40	15	1.201	0.353
B	1500	0.25	0.27	40	15	1.158	0.341

Tabella 4.5: parametri identificati per il modello congiunto

Panel ID	$c$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\varphi$ (°)	$\delta$ (°)	$f_{cWW}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{iWW}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{cDP}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{iDP}$ (N/mm <sup>2</sup> )
COR2	0.150	40	10	2.5	0.14	0.643	0.189
COM	0.215	40	30	2.5	0.20	0.922	0.271
BEL	0.110	40	20	2.5	0.102	0.472	0.139
A	0.240	38	15	5.0	0.24	0.984	0.314
B	0.230	38	15	5.0	0.23	0.943	0.301

In base ai risultati sperimentali, i pannelli possono essere suddivisi in tre classi (Chiostri, Galano e Vignoli 2000):

- HS (alta resistenza): pannelli A, B, COR3 e COM, che corrispondono a una muratura di buona qualità;
- MS (media resistenza): pannelli T1, T3, T4 e BEL, che corrispondono a una muratura con piccoli vuoti interni, ben riempiti da malta e unità di piccole dimensioni;
- LS (resistenza inferiore): i pannelli T2, COR1, COR2 ed E, che corrispondono ad assemblaggi molto poveri di blocchi e malta, con molti vuoti interni e pareti affacciate debolmente appuntate.

Sulla base di tale classificazione è quindi possibile identificare gli intervalli di variazione dei parametri per le tre classi di muratura (Tabella 4.6 per il modello DP e Tabella 4.7 per i modelli congiunti DP e WW). Considerando la difficoltà di ottenere risultati specifici da edifici monumentali, i valori riportati sono dati di riferimento tipologici che forniscono una stima ragionevole di questi parametri.

Tabella 4.6: variabilità dei parametri identificati per il solo modello plastico

Masonry	$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\nu$	$c$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\varphi$ (°)	$\delta$ (°)
HS	500–1500	0.25	0.12–0.28	40–61	15–35
MS	350–500	0.25	0.07–0.09	38–61	12.5–15
LS	100–300	0.25	0.065	38–61	10–12.5

Tabella 4.7: variabilità dei parametri identificati per il modello congiunto

Masonry	$c$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\varphi$ (°)	$\delta$ (°)	$f_{cww}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{tww}$ (N/mm <sup>2</sup> )
HS	0.22–0.24	38–40	15–30	2.5–5.0	0.20–0.24
MS	0.11	38–40	12.5–20	2.5–3.0	0.10–0.11
LS	0.08–0.15	38–40	10–12.5	2.5–3.0	0.08–0.14

#### 4.4.5 Parametri meccanici della muratura della Chiesa della SS. Trinità

Come primo passo è necessario ricavare una legge costitutiva del materiale che sia coerente con il modello prima descritto. Partendo dalla curva sforzo-deformazione di Figura 4.30, operando un opportuno confronto di aree, è stato possibile ricondursi al legame elasto-plastico da associare al modello numerico della muratura (Figura 4.35).

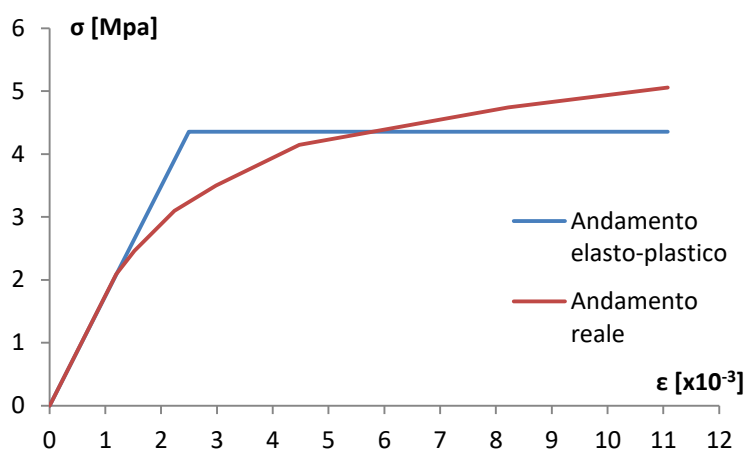


Figura 4.35: confronto legge elasto-plastica e curva sforzo-deformazione reale

Dalla legge elasto-plastica così ricavata, si evince che la resistenza a compressione della muratura vale:  $f_c = 4.36 \text{ MPa}$  e si può così dire che la muratura in considerazione ricade nella classe HS.

In considerazione delle valutazioni appena effettuate e di quelle dei Paragrafi 4.4.1 e 4.4.5, i parametri finali relativi alla muratura della SS. Trinità si possono riassumere in Tabella 4.8.

Tabella 4.8: : parametri della legge elasto-plastica e caratteristiche meccaniche della muratura della SS. Trinità

$E$ [MPa]	$\nu$ [-]	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$c$ [MPa]	$\varphi$ [°]	$\delta$ [°]	$f_c$ [MPa]	$f_t$ [MPa]
1750	0.25	18	0.24	38	15	4.36	0.24

#### 4.5 *Valutazione dell'effetto di creep per la muratura della Chiesa della SS. Trinità*

Il metodo utilizzato parte dalla ricostruzione delle curve di creep da attribuire alla muratura presente nella struttura della S.S. Trinità ed è stato ricostruito seguendo il lavoro proposto in una tesi di laurea magistrale elaborata al Politecnico di Torino (Spina 2018).

L'andamento delle deformazioni viscosi sotto carico costante, sarà studiato ricostruendo il comportamento della muratura a partire da quello della malta di calce, in quanto essa rappresenta la fase viscosa del materiale. I dati sulla malta presi in considerazione, sono riferiti a delle prove di compressione costante effettuate su sei differenti campioni in sola malta di calce, caratterizzati da diversi tempi di maturazione all'istante  $t_0$  di applicazione del carico (Cominelli 2014). A partire da tali dati, utilizzando il modello B3 (Bazant e Baweja 1995) sarà ricavata la curva  $\phi(t;t_0)$  della muratura sino a tempo infinito. Per fare questo, si utilizzerà una stima ai minimi quadrati per minimizzare l'errore tra la curva ricavata dall'applicazione del modello B3 e i dati di partenza. Nota la variazione del coefficiente di viscosità, la curva ottenuta verrà in seguito inserita come dato nel software per le analisi di creep, così da poter studiare l'evolversi di tensioni e spostamenti allo scorrere del tempo.

##### 4.5.1 *Stima dei parametri relativi alla malta di calce*

Come detto in precedenza l'obiettivo è ricostruire le curve dei coefficienti di viscosità  $\phi(t;t_0)$  che descrivono il comportamento di fluage della muratura della chiesa. Questo si è fatto partendo da prove a sforzo di compressione costante su campioni in malta di calce di caratteristiche note. Di tali prove, sono stati utilizzati i dati relativi all'andamento della deformazione totale, intesa come la somma della deformazione elastica istantanea più la deformazione viscosa variabile nel tempo (Cominelli 2014).

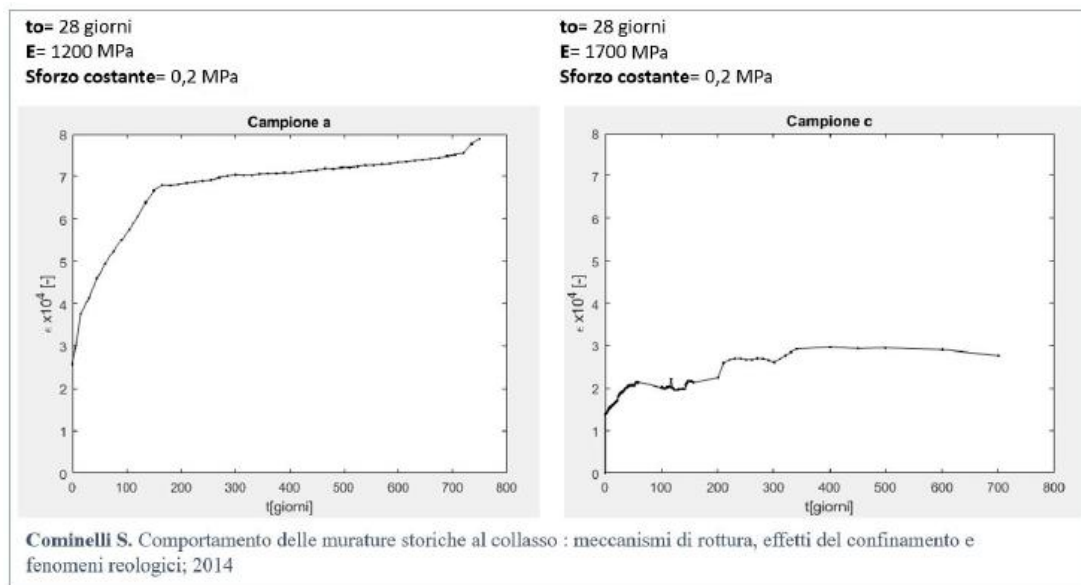


Figura 4.36: deformazione totale di provini in malta di calce: campione a (sinistra) e campione c (destra)

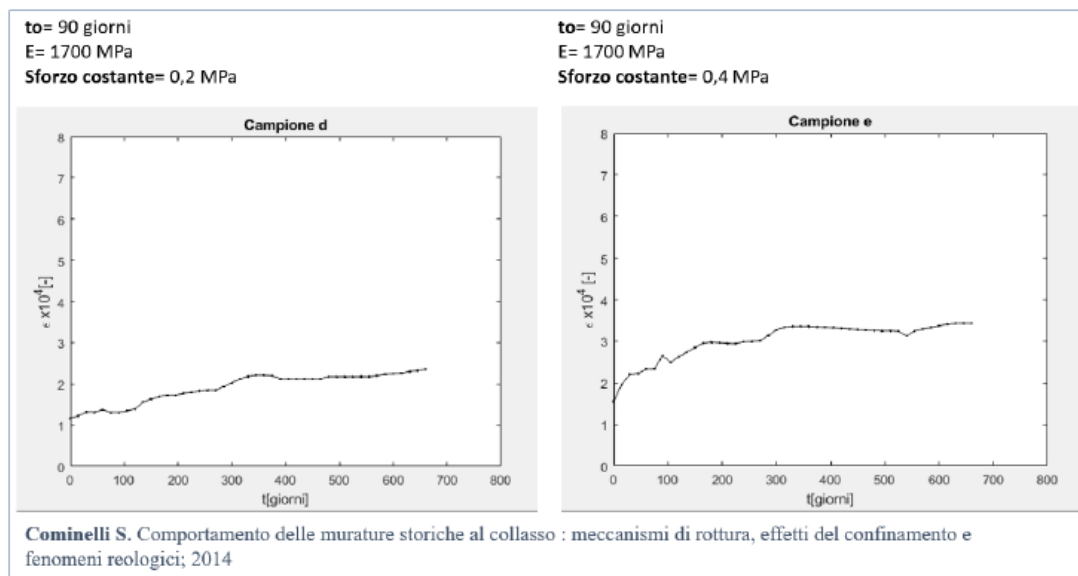
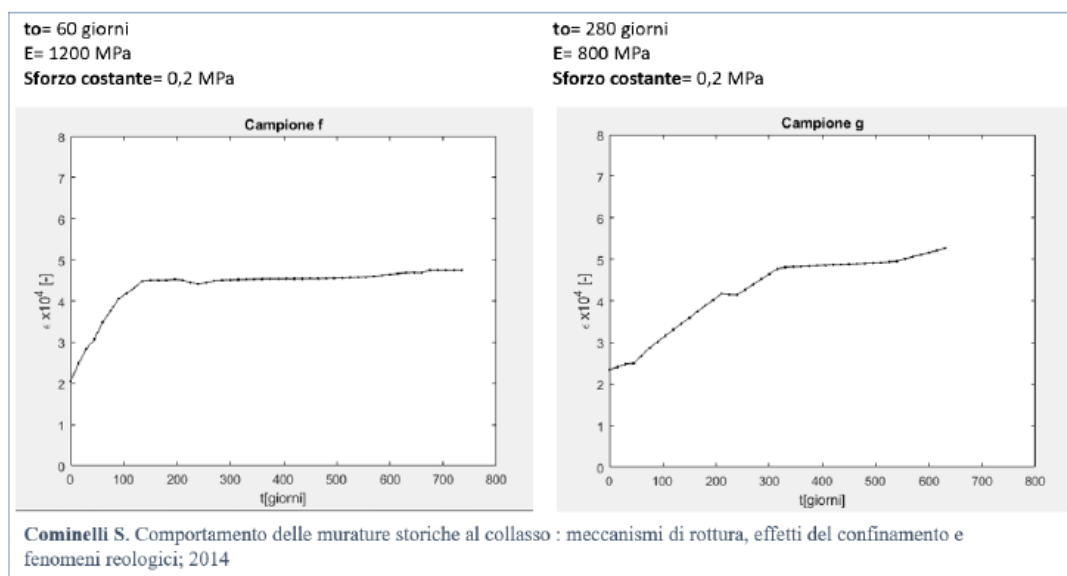


Figura 4.37: deformazione totale di provini in malta di calce: campione d (sinistra) e campione e (destra)





**Figura 4.38: deformazione totale di provini in malta di calce: campione f (sinistra) e campione g (destra)**

Dalle Figura 4.36, Figura 4.37 e Figura 4.38, è interessante notare come, a diversi tempi di messa in carico, corrisponda un comportamento abbastanza differente per i vari campioni in malta di calce. Per tempi di messa in carico maggiori, infatti, si può notare come l'entità della deformazione viscosa sia minore (si veda ad esempio la differenza tra il comportamento del campione a, con  $t_0=28$  giorni e il campione g, con  $t_0=280$  giorni). Ovviamente queste sono considerazioni di carattere del tutto generale, in quanto il comportamento nel tempo è influenzato dalla combinazione di diversi fattori, oltre al tempo di messa in carico, come ad esempio il rapporto malta/mattoni, il modulo elastico, la resistenza della muratura al tempo di messa in carico etc.

Come già affermato in precedenza, queste curve mettono in mostra l'andamento della deformazione totale della malta, che è il risultato della somma tra la deformazione elastica iniziale e la deformazione viscosa. Noti dunque il modulo elastico della malta e lo sforzo di compressione durante la prova, si può ricavare la deformazione elastica iniziale e poi con una semplice differenza, l'andamento della deformazione viscosa nel tempo, come illustrato dalla 4.11:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{tot,malta} &= \varepsilon_{el} + \varepsilon_{visc} \rightarrow \varepsilon_{visc,malta} = \varepsilon_{tot} - \varepsilon_{el} = \\ &= \varepsilon_{tot} - \left( \frac{\sigma}{E_{malta}} \right)\end{aligned}\quad 4.11$$

Una volta noto il valore della deformazione elastica e l'andamento della deformazione viscosa, sapendo che la seconda è pari a  $\varphi$  "volte" la prima, basta operare una semplice divisione per ricavare l'andamento del coefficiente di viscosità  $\varphi(t;t_0)$ , come espresso dalla 4.12:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{visc}(t; t_0) &= \varphi(t; t_0) \cdot \varepsilon_{el} \rightarrow \varphi(t; t_0)_{malta} = \frac{\varepsilon_{visc}(t; t_0)}{\varepsilon_{el}} \\ &= \varepsilon_{visc}(t; t_0) \cdot \left( \frac{E_{malta}}{\sigma} \right)\end{aligned}\quad 4.12$$

I passaggi analitici scritti nella 4.11e 4.12, sono stati svolti per i sei campioni riportati nelle Figura 4.36, Figura 4.37e Figura 4.38, ottenendo l'andamento del coefficiente di viscosità della malta  $\varphi(t; t_0)$  per ciascuno di essi (Figura 4.39).

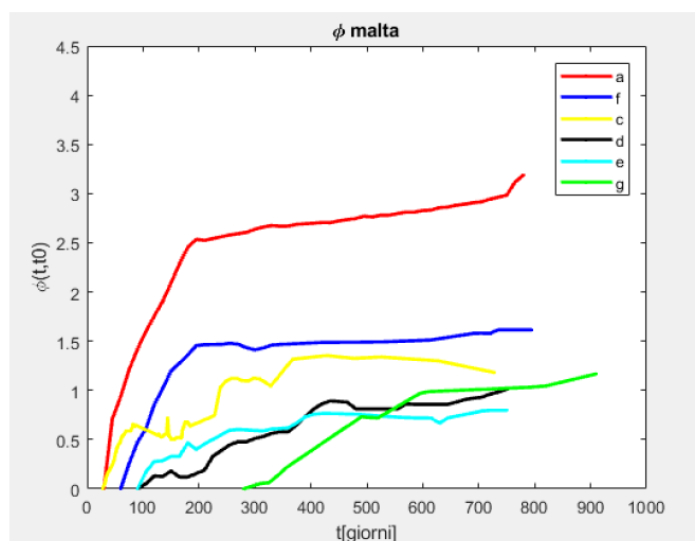


Figura 4.39: Andamento del coefficiente di viscosità  $\varphi(t; t_0)$  per i sei campioni esaminati in Cominelli et al., 2014

La Figura 4.39 mostra con chiarezza come il comportamento viscoso sia più accentuato per campioni con tempi di messi in carico bassi (campione f, campione a, campione c), mentre sia ampiamente abbattuto, sino a ridursi di circa la metà, per campioni messi in carico in tempi che superano i 60 giorni (campione d, campione e, campione g). Questo conferma il fatto che il comportamento viscoso dell'elemento malta costitutivo della muratura può essere assimilato al comportamento del calcestruzzo. Infatti a seguito di diverse analisi sperimentali Mc Henry arrivò alla conclusione che più il calcestruzzo è vecchio, cioè più tardi il provino viene caricato, minore è la viscosità (Mc Henry 1943).

Nel seguito di questo lavoro si è scelto di considerare l'andamento del campione "a" (in rosso nella Figura 4.39). Questa scelta è giustificata dal fatto che il campione citato risulta più "giovane" rispetto agli altri analizzati (minore tempo di applicazione del carico) e sembra avere una tendenza a sviluppare gran parte della deformazione viscosa nei primi giorni successivi alla messa in carico. Seguendo quanto sviluppato dagli autori (Rekik e Gasser 2016), tale scelta sembra la più idonea a rappresentare il comportamento della muratura. Gli autori hanno infatti studiato il fenomeno del creep nella muratura andando ad applicare una forza costante in punti selezionati lungo il confine del provino. Si riportano di seguito le evoluzioni temporali dei

coefficienti di viscosità tangenti forniti dal modello FE per murature con mattoni sia rigidi (Figura 4.40) che elastici (Figura 4.41) e malta, di spessore 10 mm, caratterizzata da differenti proprietà a breve e a lungo termine.

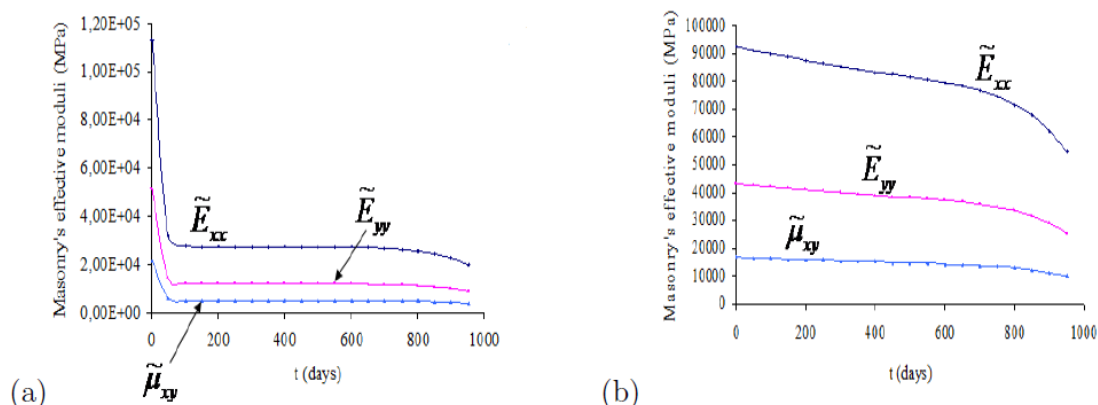


Figura 4.40: valori dei moduli tangenziali effettivi della muratura con mattoni rigidi, malta di spessore 10 mm e con proprietà valutate a breve (a) e a lungo termine (b)

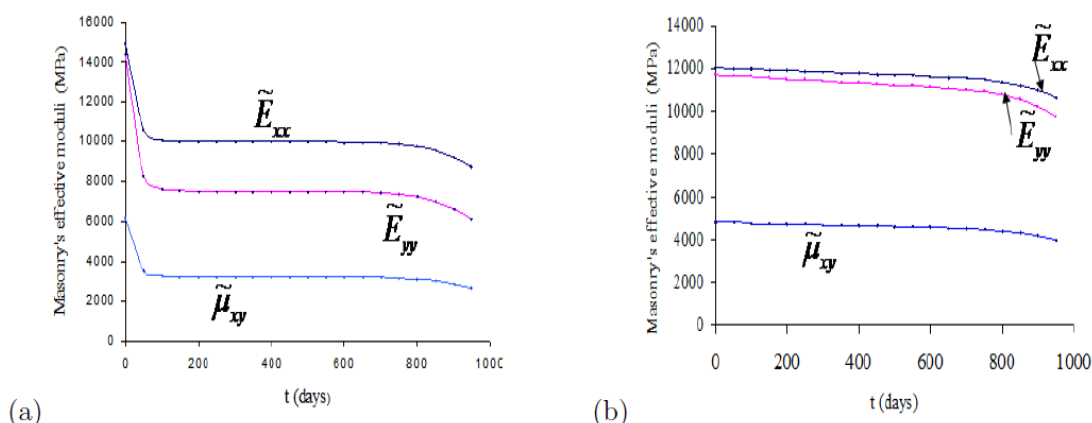


Figura 4.41: valori dei moduli tangenziali effettivi della muratura con mattoni elastici, malta di spessore 10 mm e con proprietà valutate a breve (a) e a lungo termine (b)

Nel complesso, si osserva che le previsioni FE per il modulo tangente effettivo della muratura diminuiscono con l'aumentare del tempo. Questo può essere spiegato dall'aumento del livello di danno. In particolare per la muratura caratterizzata sia con proprietà della malta a breve che a lungo termine e mattoni elastici o rigidi, i moduli efficaci diminuiscono significativamente durante i primi cinquanta giorni. Mentre dopo quasi 100 giorni, la diminuzione del modulo effettivo risulta molto più lenta.

#### 4.5.2 Stima dei parametri da associare alla muratura della cupola della SS. Trinità

L'andamento del campione "a" in Figura 4.39 è però riferiti ad un campione in malta di calce e quindi non può essere direttamente utilizzato per stimare il comportamento della muratura della chiesa della Trinità, in quanto la malta costituisce solo una delle fasi presenti nel materiale. E' stato perciò necessario definire un modello fisico che descrivesse il comportamento complessivo della muratura, a partire dai dati riferiti alla sola malta di calce, ipotizzando che tutte le caratteristiche di viscosità del materiale siano concentrate nella sola malta, mentre i mattoni (e il pietrame generico) avessero comportamento perfettamente elastico. In questo modo, stabilendo un rapporto malta:mattoni ovvero un rapporto in volume tra la fase viscosa e quella elastica, è stato possibile ricavare la funzione fluage  $J(t;t_0)$  riferita alla muratura. Ipotizzando un rapporto malta:mattoni di 1:4, è possibile scrivere i passaggi algebrici presenti nella 4.13:

$$\begin{aligned}
 J(t; t_0)_{muratura} &= \frac{\varepsilon_{malta} + 4 \cdot \varepsilon_{mattoni}}{5} = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot [(\varepsilon_{el} + \varepsilon_{visc})_{malta} + 4 \cdot \varepsilon_{mattoni}] = \\
 &= \frac{\varepsilon_{visc_{malta}}}{5} + \left( \frac{\varepsilon_{el_{malta}}}{5} + 4 \cdot \frac{\varepsilon_{el_{mattoni}}}{5} \right) = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{\varphi(t; t_0)_{malta}}{E_{malta}} + \frac{1}{E_{muratura}}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Nel seguito, il modello fisico sarà utilizzato per adattare alla muratura le curve riferite ai campioni di malta non invecchiati. Per fare questo, sarà preso in considerazione il modello B3 di Bažant, i cui parametri fondamentali saranno ricavati da una stima ai minimi quadrati.

#### 4.5.3 Stima ai minimi quadrati per la definizione della curva di creep

I dati riferiti ai campioni in malta di calce, devono essere adattati al modello fisico del materiale costituente la cupola della S.S. Trinità di Torino. Per fare ciò, coerentemente a quanto scritto nell'Equazione 4.13, si è partiti dall'andamento del coefficiente  $\varphi(t;t_0)$  per il campione "a" di malta (Figura 4.39). Dapprima è stato calcolato l'andamento della sola deformazione viscosa nel tempo, dividendo il valore del coefficiente di viscosità per il modulo elastico della malta (1200 MPa), poi il valore ottenuto è stato moltiplicato per un coefficiente che dipende dal rapporto malta:mattoni considerato. Sommando ai valori della deformazione viscosa il contributo della deformazione elastica relativa alla muratura espresso dal rapporto  $1/E_{muratura}$ , si ottiene l'andamento della funzione  $J(t;t_0)$ , ovvero la deformazione totale per carico unitario, da assegnare alla muratura. L'andamento della funzione fluage della muratura è diagrammato in Figura 4.42, dove viene messo a confronto con l'andamento della funzione  $J$  della sola malta in calce, ricavata attraverso la classica equazione adottata per il calcestruzzo espressa dalla 4.14.

$$J(t; t_0)_{malta} = \frac{1}{E_{malta}} + \frac{\varphi(t; t_0)_{malta}}{E_{malta}} \quad 4.14$$

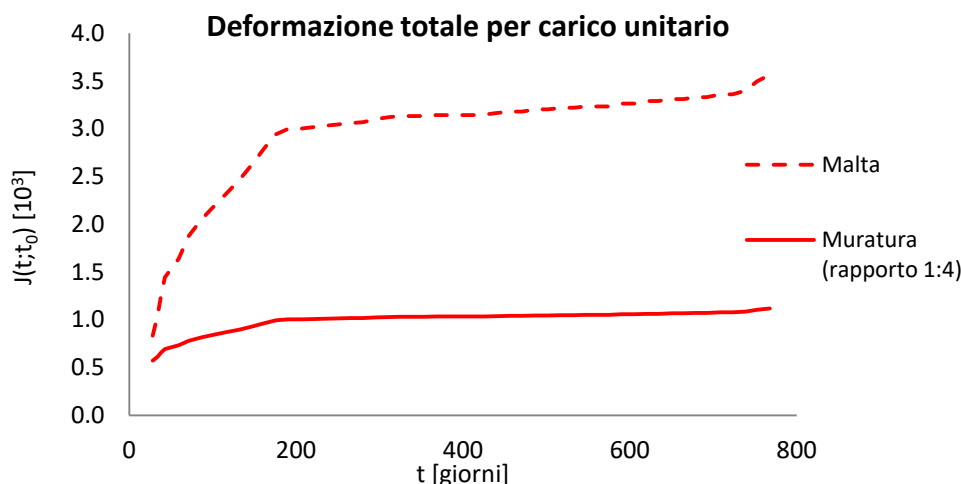


Figura 4.42: confronto tra le funzioni fluage della muratura e della malta

Come si vedrà nel seguito della relazione, i tempi dell'analisi saranno fissati a un numero di giorni tale per cui il valore del coefficiente  $\varphi$  sia circa pari al suo valore a tempo infinito (dove con tempo infinito s'intendono circa 700 anni), in modo da semplificare l'analisi senza però che questo produca risultati meno consistenti. E' necessario quindi realizzare una stima del coefficiente di viscosità fino a tempo infinito, partendo dai dati iniziali ricavati per il materiale muratura riferiti a un lasso di tempo di 780 giorni. Questo problema sarà risolto utilizzando il modello B3 di Bazant, grazie al quale si può stimare l'andamento delle  $\varphi(t; t_0)$ ,  $J(t; t_0)$  a partire da pochi dati di riferimento. Il modello si basa essenzialmente sulle formule scritte nelle Equazioni 4.15-4.19 (Bazant e Baweja 1995) in cui  $t'$  rappresenta il tempo di messa in carico (nel caso in esame 30 giorni),  $E(t')$  è il modulo elastico al tempo di messa in carico del provino (nel caso in esame 1750 MPa),  $C_0(t; t')$  è una funzione che tiene in conto il creep primario,  $Q(t; t')$  è una funzione che influenza il creep primario e che deriva da integrazioni precedenti (Bazant e Baweja 1995).

$$J(t; t') = q_1 + C_0(t; t') \quad 4.15$$

$$\varphi(t; t') = E(t') \cdot J(t; t') - 1 \quad 4.16$$

$$C_0(t; t') = q_2 \cdot Q(t; t') + q_3 \cdot \ln[1 + (t - t')^n] + q_3 \cdot \ln\left(\frac{t}{t'}\right) \quad 4.17$$

$$Q(t; t') = Q_f(t') \cdot \left[ 1 + \left( \frac{Q_f(t')}{Z(t; t')} \right)^{r(t')} \right]^{-1/r(t')} \quad 4.18$$

$$\begin{aligned} r(t') &= 1.7(t')^{0.12} + 8; & Z(t; t') &= (t')^{-m} \cdot \ln[1 + (t - t')^n]; \\ Q_f(t') &= [0.086(t')^{2/9} + 1.21(t')^{4/9}]^{-1}; & m &= 0.5, n = 0.1 \end{aligned} \quad 4.19$$

Nelle precedenti equazioni sono presenti i parametri  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$  che rappresentano rispettivamente la deformazione elastica istantanea dovuta a sforzo unitario, il fattore di invecchiamento dovuto alla viscoelasticità, un fattore sempre legato alla viscoelasticità ma riferito al materiale non invecchiato e un fattore di conformità di flusso. Questi quattro parametri saranno fissati come celle variabili per la stima ai minimi quadrati, utilizzando il foglio di calcolo Excel; la cella da minimizzare corrisponderà alla sommatoria degli scarti al quadrato tra la funzione  $J(t; t')$  calcolata come nella 4.15 e la funzione  $J(t; t_0)$  riferita ai dati disponibili.

Utilizzando le Equazioni 4.15-4.19, è stato possibile impostare i dati per il calcolo della funzione di creep con il modello B3, considerando un tempo totale di circa 700 anni. Si è effettuato un primo step in cui, minimizzando l'errore (scarto al quadrato) tra la  $J(t; t')$  del modello B3 e la  $J(t; 30)$  riferita ai dati sulla malta di calce, si ottiene la curva  $J(t; t')$ . Ripetendo la stima ai minimi quadrati, questa volta minimizzando lo scarto al quadrato tra la curva del modello B3 e i valori della funzione fluage ottenuti nel primo step si raffina la curva ottenuta, ottenendo l'andamento finale di Figura 4.43. In Figura 4.44, invece è rappresentato l'andamento del coefficiente di viscosità  $\phi(t; t_0)$  relativo sempre al secondo step.

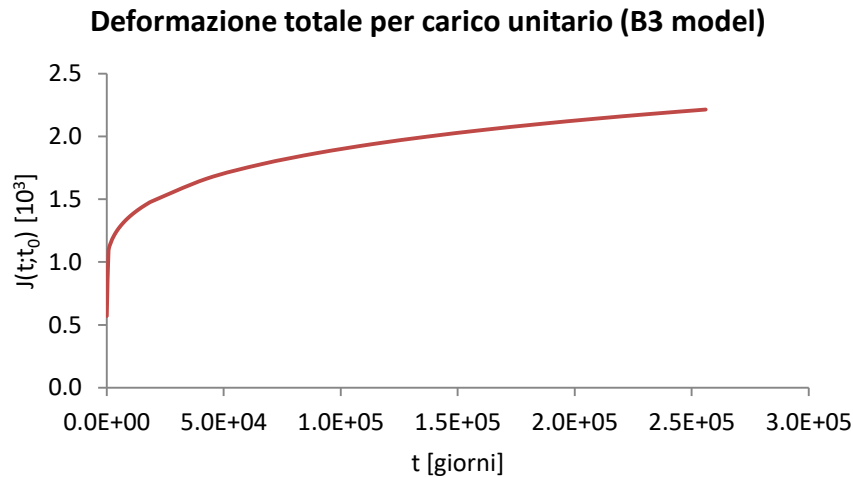


Figura 4.43: Funzione  $J(t; t_0)$  ottenuta al secondo step della stima ai minimi quadrati

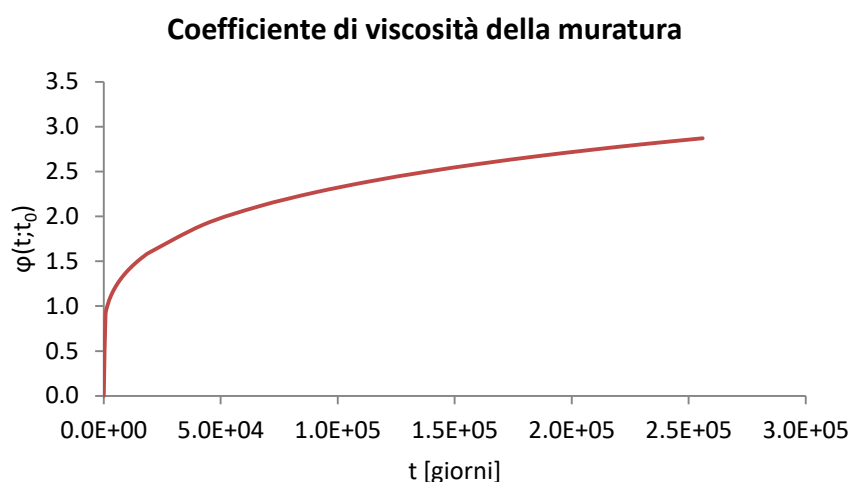


Figura 4.44: Funzione  $\phi(t;t_0)$  ottenuta al secondo step della stima ai minimi quadrati

## 4.6 Definizione del livello di conoscenza e delle azioni agenti sulla struttura

### 4.6.1 Definizione del livello di conoscenza e del fattore di confidenza

In relazione alle diverse disamine effettuate per la Chiesa della SS. Trinità e in relazione alla considerazioni effettuate riguardo alla caratterizzazione meccanica dei materiali, per la quale si rimanda al Paragrafo 4.4, è stato individuato il “livello di conoscenza” dei diversi parametri coinvolti nel modello (geometria, dettagli costruttivi e materiali). E' possibile così definire anche il relativo fattore di confidenza, da utilizzare come ulteriore coefficiente parziale di sicurezza per tenere in conto delle carenze nella conoscenza dei parametri del modello.

Per quanto riguarda la definizione del livello di conoscenza, le informazioni a disposizione risultavano:

- rilievo geometrico completo, con restituzione grafica dei quadri deformativi;
- identificazione ipotetica delle fasi costruttive basata su un limitato rilievo materico e degli elementi costruttivi associato alle diverse vicende storiche e costruttivi del corpo di fabbrica;
- parametri meccanici dei materiali desunti da dati già disponibili;
- limitate indagini sul terreno e le fondazioni in assenza di dati geotecnici e disponibilità d'informazione sulle fondazioni.

Queste informazioni permettono di definire, in relazione a quanto specificato nella Normativa (Circolare 21-01-2019 n°7), un livello di conoscenza LC3, al quale corrisponde un fattore di confidenza pari a  $FC = 1.35$ .

#### 4.6.2 Analisi dei carichi agenti sulla struttura

Nel seguito sono stati analizzati nel dettaglio i carichi verticali che agiscono sulla cupola della Chiesa della SS. Trinità di Torino. Per quanto riguarda il peso proprio dell'intera struttura, questo può essere calcolato manualmente operando precedentemente un'analisi delle masse dei solidi che compongono il modello. Come noto, questi elementi sono: il lanternino, il cordolo del lanternino, la cupola deformata e il tamburo. Il lanternino, la cupola e il tamburo vengono ulteriormente divisi, in modo da ricavare 14 sezioni del modello che permettono di realizzare un'analisi più accurata. Di queste 14 sezioni si calcola la superficie e la massa che agisce su ognuna di esse, cioè il peso che l'elemento solido, che appoggia sulla sezione considerata, scarica sulla superficie della sezione stessa. Note le masse per ricavare il peso è necessario applicare ad ogni elemento solido il relativo peso specifico. Come introdotto nel Paragrafo 4.4 relativo alle caratteristiche dei materiali, il marmo assegnato all'elemento cordolo presenta un peso specifico di  $27 \text{ kN/m}^3$ , mentre il valore del peso specifico della muratura che caratterizza gli elementi lanternino, cupola e tamburo è pari a  $18 \text{ kN/m}^3$ . Da una semplice operazione di moltiplicazione tra i volumi prima ricavati e i relativi pesi specifici è possibile trovare il peso in kN degli elementi del modello. I valori nati dalla studio delle masse e dei pesi sono riportati in Tabella 4.9.

**Tabella 4.9: studio delle masse e del peso proprio per gli elementi solido in cui è stato diviso il modello.**  
 $h$ =quota della sezione;  $A$ =superficie della sezione;  $V$ =volume dell'elemento tra due superfici consecutive;  
 $\gamma$ =peso specifico del materiale;  $N$ =peso che agisce sulla sezione;  $\sigma_z$ =tensione verticale che agisce sulla sezione

Sezione	$h$ [m]	$A_i$ [m <sup>2</sup> ]	$V_i$ [m <sup>3</sup> ]	$\gamma_i$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$N_i$ [kN]	$N$ [kN]	$\sigma_z$ [MPa]
Punta lanternino	36.34	0	0	18	0	0	0.00
Base primo cupolino	32.79	2	8	18	147	147	0.06
Base cupolino	29.82	12	30	18	539	686	0.11
Sopra finestre lanternino	26.87	12	35	18	622	1308	0.16
Sotto finestre lanternino	23.97	12	27	18	494	1802	0.20
Base lanternino	21.79	12	26	18	460	2262	0.24
Base cordolo lanternino	20.79	26	26	27	693	2955	0.27
Sezione cupola 1	17.60	32	64	18	1149	4104	0.30
Sezione cupola 2	14.42	63	150	18	2697	6801	0.35
Sezione cupola 3	11.23	72	225	18	4059	10860	0.40
Base cupola	8.05	74	231	18	4150	15009	0.46
Base cordolo tamburo	6.43	111	134	27	3616	18625	0.49
Metà finestre tamburo	2.94	80	244	18	4396	23021	0.55
Base tamburo	0.00	80	199	18	3589	26610	0.59

E' stato interessante inoltre valutare la variazione del valore del peso proprio con l'altezza del modello. Facendo riferimento alle quote delle sezioni prima introdotte è possibile trovare i



valori di peso progressivi che agiscono sulla superficie della sezione a quella determinata quota e così diagrammare la variazione del peso proprio con l'altezza (Figura 4.45).

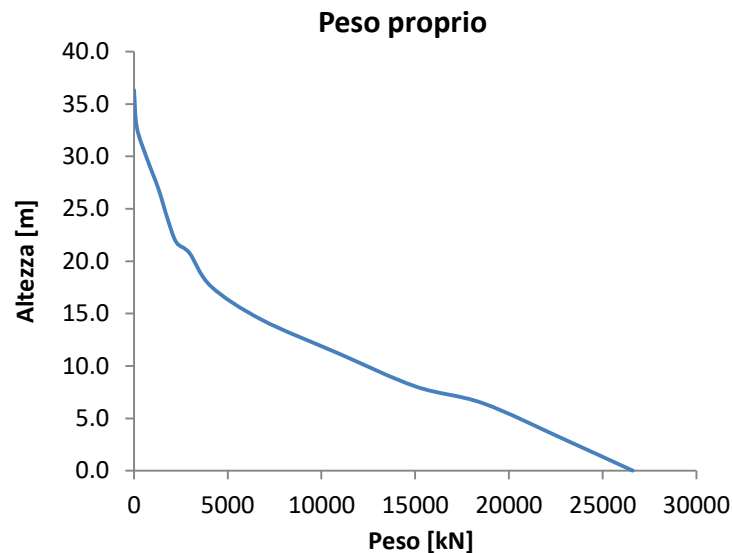


Figura 4.45: andamento del peso proprio lungo l'altezza del modello

Similmente, noto il carico in kN che agisce su una superficie ad una determinata quota e il valore dell'area della superficie, è possibile conoscere la tensione relativa alla sezione e quindi l'andamento della tensione verticale che agisce sulla struttura in relazione all'altezza del modello (Figura 4.46).

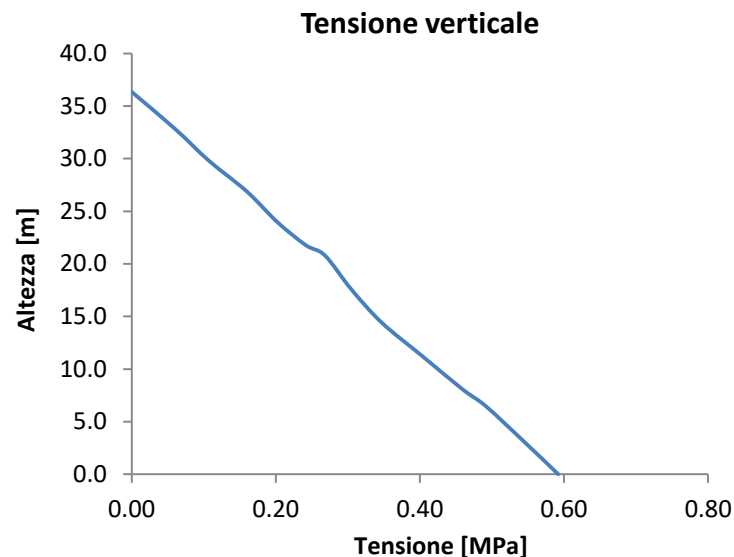


Figura 4.46: andamento delle tensioni verticali lungo l'altezza del modello

Si è scelto di effettuare questa analisi di peso e tensione solo nei confronti dei valori del peso proprio della muratura in quanto questo gioca un ruolo prevalente rispetto ai carichi permanenti e accidentali. Il peso proprio ha una posizione di primissimo piano, fino a rendere quasi trascurabili gli altri carichi in gioco, quando si va a studiare l'evolversi delle deformazione nel tempo, come anche della distribuzione delle tensioni verticali lungo l'altezza del modello. In particolare il valore di tensione verticale alla base dovuto all'azione del peso proprio, sarà utilizzato nel seguito di questo lavoro per delle considerazioni riguardo alla consistenza del modello FEM, oltre che per operare dei confronti con i risultati ottenuti dalla modellazione.

I carichi permanenti e variabili sono stati comunque analizzati al fine di trovare il valore di carico da applicare al modello strutturale nella fase di analisi. Il carico permanente che agisce sulla cupola è quello dovuto all'elemento di copertura. Questa scarica il proprio peso su due serie costituite da 20 falsi puntoni l'una, in corrispondenza di due differenti quote dell'estradosso della cupola. I falsi puntoni sono caratterizzati dalla stessa muratura della cupola e quindi presentano un peso specifico di  $18 \text{ kN/m}^3$ . L'elemento di copertura è costituito da un tetto a falda unica circolare su due livelli caratterizzato da un manto di copertura in coppi, più listelli e isolante, il cui peso superficiale risulta pari a  $0.95 \text{ kN/m}^2$ .



Figura 4.47: foto dall'alto della cupola con dettaglio sull'elemento di copertura

Dalla rilievo geometrico e dalla studio delle sezione è stato possibile ricostruire i diversi volumi della falda di copertura e dei falsi punti e individuare la posizione dei punti, sulla superficie esterna della cupola, dove ogni falso puntone scarica il peso a cui è soggetto più il proprio peso. A questo punto è stato possibile ricavare il valore della forza puntuale in kN che ogni appoggio scarica sull'estradosso della cupola. Per quanto riguarda il carico variabile, è stato preso in considerazione solo il carico neve che può agire sulla copertura. Lo studio delle aree, dei volumi e delle forze che i falsi puntoni scaricano sulla cupola, in corrispondenza dei due diversi livelli, sono presentati in Tabella 4.10.

Tabella 4.10: analisi dei carichi permanenti e variabili agenti sull'estradosso della cupola. A=area superficiale dell'elemento; V=volume dell'elemento;  $\gamma$ =peso specifico del materiale; q=carico su superficie

1° livello			2° livello		
<b>Falso puntone</b>			<b>Falso puntone</b>		
A	1.12	m <sup>2</sup>	A	0.47	m <sup>2</sup>
V	0.49	m <sup>3</sup>	V	0.21	m <sup>3</sup>
$\gamma_{\text{muratura}}$	18	kN/m <sup>3</sup>	$\gamma_{\text{muratura}}$	18	kN/m <sup>3</sup>
<b>Peso proprio appoggio</b>	<b>8.9</b>	<b>KN</b>	<b>Peso proprio appoggio</b>	<b>3.8</b>	<b>KN</b>
<b>Copertura</b>			<b>Copertura</b>		
V	43.65	m <sup>3</sup>	V	33.52	m <sup>3</sup>
A	132.26	m <sup>2</sup>	A	101.59	m <sup>2</sup>
A <sub>i</sub>	6.61	m <sup>2</sup>	A <sub>i</sub>	5.08	m <sup>2</sup>
q <sub>copertura</sub>	0.95	kN/m <sup>2</sup>	q <sub>copertura</sub>	0.95	kN/m <sup>2</sup>
<b>Peso copertura su appoggio</b>	<b>6</b>	<b>kN</b>	<b>Peso copertura su appoggio</b>	<b>4.8</b>	<b>kN</b>
q <sub>neve</sub>	1.20	kN/m <sup>2</sup>	q <sub>neve</sub>	1.20	kN/m <sup>2</sup>
<b>Peso neve su appoggio</b>	<b>8</b>	<b>kN</b>	<b>Peso neve su appoggio</b>	<b>6.1</b>	<b>kN</b>
<b>Forza totale su appoggio (SLU)</b>	<b>23.1</b>	<b>KN</b>	<b>Forza totale su appoggio (SLU)</b>	<b>14.7</b>	<b>KN</b>

#### 4.7 Modelli numerico-strutturali per la cupola della Chiesa della SS. Trinità

Il comportamento strutturale della cupola della Chiesa della SS. Trinità di Torino è stato analizzato attraverso una completa analisi 3D, utilizzando la tecnica ad elementi finiti (FE) e la strategia di macro-modellazione. La muratura, considerata come un assemblaggio eterogeneo di blocchi, è stata sostituita con un materiale continuo, macroscopicamente equivalente. I singoli elementi costituenti la struttura vengono rappresentati tramite una *mesh* di componenti elementari tridimensionali, ipotizzati essere interconnessi tra di loro in un numero discreti di punti (detti nodi). Il problema strutturale, sul piano formale estremamente complicato, viene ricondotto in questo modo alla risoluzione di un sistema di equazioni, la cui natura risulta funzione del tipo di problema studiato e delle caratteristiche dei materiali. Il modello strutturale deve essere in grado di acquisire le caratteristiche geometriche, meccaniche e fisiche in modo accurato e simulare i probabili scenari di danno dell'edificio. Tuttavia la discretizzazione deve essere pensata in funzione del livello di approssimazione richiesto: alla semplicità dell'analisi elastica occorre

contrapporre l'eventuale necessità di considerare il reale comportamento meccanico delle murature, considerando la limitata resistenza a trazione e la non linearità sia fisica che geometrica della struttura. La modellazione numerica è proceduta quindi per gradi, partendo da un modello lineare a elementi tridimensionali fino ad arrivare a un modello non lineare, comprensivo delle principali deformazioni opportunamente identificate, che ha permesso di riprodurre sia qualitativamente che quantitativamente il reale comportamento della struttura. In fine, è stato proposto un modello di creep con lo scopo di valutare l'effetto delle deformazioni viscosi sia su un modello geometrico "deformato" che su uno "indeformato". In generale però, ed indipendentemente dalla complessità dell'approccio numerico adottato, la qualità dei risultati ottenuti dipende prevalentemente dalla quantità e affidabilità delle ipotesi di analisi adottate. Data infatti l'impossibilità pratica di tener conto in un modello numerico di tutti i fattori geometrici e meccanici che intervengono in una costruzione reale, è necessario operare delle semplificazioni di notevole entità, comunque sempre in funzione della migliore corrispondenza del modello alla realtà. Nel paragrafo successivo, verranno poi illustrate le analisi numeriche eseguite al fine di individuare la statica della parte di struttura analizzata e una delle possibili cause che hanno portato allo stato deformativo ad oggi presente sulla superficie interna della cupola.

La modellazione e le analisi strutturali sono state effettuate grazie al codice FE DIANA. DIANA (*Displacement method ANAlyser*) è un codice di elementi finiti di uso generico, basato sul metodo degli spostamenti. È in fase di sviluppo presso la *Nederlandse Organisatie voor toegepast-natuurwetenschappelijk onderzoek (TNO)* dal 1972. All'inizio del 2003 è stata fondata una nuova organizzazione che si occupa dello sviluppo di DIANA, TNO DIANA BV, che a partire dal 1 ° luglio 2016 ha cambiato il nome in DIANA FEA BV. DIANA FEA BV rimane un'azienda TNO, ma si distingue come una società di sviluppo software che si concentra sull'analisi degli elementi finiti per il settore edilizio del futuro ed è ora lo sviluppatore e il distributore del codice FE DIANA.

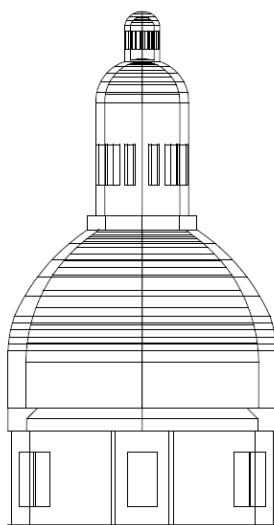
#### 4.7.1 Modello lineare ad elementi tridimensionali

Seguendo il *work flow* tipico di DIANA, per un nuovo progetto, sono stati definiti i seguenti parametri:

- Tipo di analisi: strutturale;
- Dimensioni del modello: tridimensionale;
- Tipo di mesh: tetraedrica/triangolare;
- Ordine mesh: quadratico.

Il modello geometrico è stato realizzato esternamente con programmi CAD e poi importato nel codice FE come file *.iges* (estensione supportata da DIANA). A questo scopo è stato necessario ricostruire il modello "indeformato" della cupola partendo dall'indagine sul metodo costruttivo adottato dal Vitozzi per il progetto della Trinità. Dalla sezione semplificata, ricostruita con i

passaggi presentati al Paragrafo 4.2.3, si sono estrapolate le curva tipo del profilo dell'intradosso e dell'estradosso della cupola. Queste sono distanziate l'una d'altra dalla reale variazione dello spessore della calotta e unendo queste considerazioni si è giunti alla superficie di base della cupola vista in sezione trasversale. Da una semplice rivoluzione di questa superficie intorno all'asse centrale della struttura, cioè quello che passa per il centro della circonferenza che caratterizza il cilindro del tamburo, è possibile ottenere il solido cupola "indeformato", cioè quel solido che dovrebbe rappresentare il modello tridimensionale reale della cupola al momento della sua messa in opera, o almeno il modello immaginato nel progetto architettonico originale. Il modello da importare nel codice ad elementi finiti è completato con il tamburo, il lanternino e il relativo cordolo ottenuti sempre come solidi di rivoluzione e già introdotti al Paragrafo 4.3.4.



**Figura 4.48: rappresentazione in modalità *wireframe* e in vista frontale del modello "indeformato" utilizzato per l'analisi di creep**

Dopo aver caricato la geometria, il passo successivo è stato quello di collegare le varie proprietà del modello. Le proprietà dei materiali, dei carichi e dei supporti sono infatti tutte definite nella geometria. Per il modello lineare è sufficiente assegnare al materiale "muratura" le proprietà lineari analizzate al paragrafo x andando ad inserirle nella finestra di dialogo delle proprietà del materiale riportata in Figura 4.49.

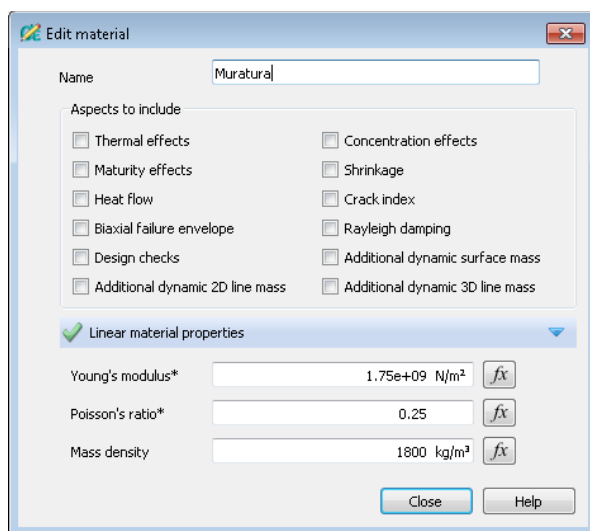


Figura 4.49: finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri elastici del materiale "muratura"

Il materiale "muratura" è stato assegnato al tamburo, alla cupola e al lanternino, mentre per il cordolo del lanternino è stato assegnato il materiale "marmo". La presenza di un cordolo in marmo alla base del lanternino è stata supposta dall'osservazione dell'elaborato grafico prodotto dal rilievo geometrico e dal risultato del rilievo Laser Scanner, dove era evidente la presenza di un "gradino" in questa posizione. Questa scelta può essere anche appoggiata dalle usanze costruttive di inserire un elemento di rigidità in sommità della cupola. Le proprietà di questa pietra naturale da costruzione sono sempre state valutate nel campo lineare al Paragrafo 4.4 e vengono assegnate all'elemento cordolo come dati di input nella finestra di dialogo di DIANA riprodotta in Figura 4.50.

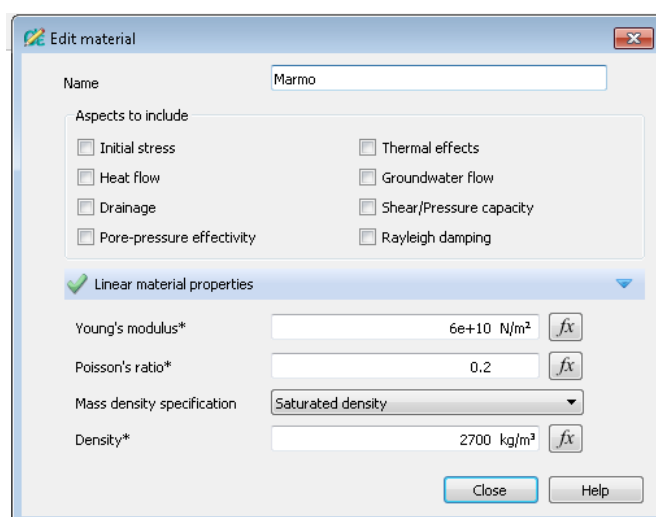
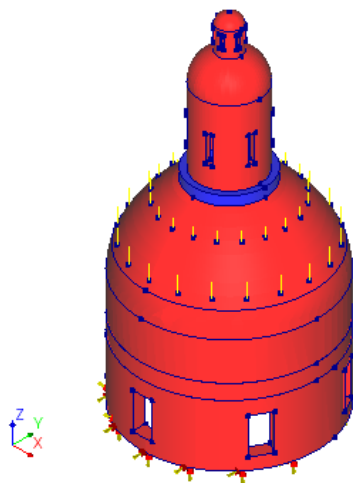


Figura 4.50: finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri materiale "marmo".

Con lo scopo di indagare la statica del modello, i carichi considerati sono il peso proprio, il carico permanente che la copertura trasmette alla superficie esterna della cupola e il carico neve che agisce sulla copertura. La copertura trasmette il carico attraverso due serie a livelli diversi di 20 falsi puntoni l'una. L'analisi dei carichi è stata effettuata al Paragrafo 4.6.2 e i valori che ogni appoggio trasmette come carico puntuale all'estradosso della cupola sono  $23.1 \text{ kN}$  per il primo livello e  $14.7 \text{ kN}$  per il secondo livello. Il peso proprio è stato inserito come carico globale applicato all'intero modello, mentre i carichi della copertura sono inseriti come forze nodali applicate a nodi precedentemente riportati sulla geometria. Peso proprio e carichi copertura vengono così assegnati a due casi di carico differenti, i quali sono stati poi combinati secondo la combinazione SLU fondamentale introdotta al Paragrafo 3.5. Questa combinazione di carico verrà trasmessa alla *mesh* e sarà utilizzata per il settaggio delle analisi e i risultati di output.

Il modello geometrico importato, come noto, presenta il lanternino, la cupola e il tamburo. Quest'ultimo elemento, come si può osservare dall'elaborato relativo al rilievo geometrico presentato al Paragrafo 4.2 è ovviamente collegato alla base al resto della struttura. Dalle piante si può osservare che le pareti murarie degli elementi su cui il tamburo poggia risultano particolarmente spesse e la struttura in generale risulta in pianta molto più ampia rispetto al circonferenza di base del tamburo. Di conseguenza possiamo affermare che il tamburo poggia su una struttura particolarmente massiccia e quindi la sua base non abbia possibilità di alcun spostamento relativo con il resto della struttura. Per assegnare questa proprietà al modello in DIANA, la superficie di base del tamburo è stata vincolata con elementi incastro, cioè elementi che bloccano la traslazione e la rotazione in tutte e tre le direzioni spaziali (modello a base fissata). Anche i supporti saranno passati direttamente alla *mesh*.



**Figura 4.51: modello geometrico con rappresentazione dei carichi della copertura e dei vincoli alla base del tamburo**

Il passaggio successivo alla modellazione è stata la discretizzazione della geometria attraverso la creazione della *mesh* ad elementi finiti per ottenere il modello numerico da utilizzare poi nelle analisi. DIANA offre una grande varietà di elementi (solidi, membrane, piastre, gusci, ecc.) che

possono essere combinati in un particolare modello ad elementi finiti. Nel caso di studio, sono stati utilizzati elementi solidi per la modellazione FE in quanto tale tipologia di elemento è utilizzata per modellare e analizzare oggetti complessi nei quali si vuole tenere conto ad esempio della disomogeneità dell'oggetto stesso senza perderne importanti caratteristiche. Gli elementi solidi sono elementi generici molto utilizzati, poiché le geometrie arbitrarie possono essere facilmente riempite con questa tipologia di elementi. Negli anni precedenti, a causa della loro tendenza a produrre sistemi di equazioni di grandi dimensioni, questi elementi venivano solitamente applicati solo quando altri elementi non erano adatti o producevano risultati di analisi imprecisi. Oggi, poiché l'hardware è molto potente, le procedure di analisi sono molto efficienti e gli elementi solidi possono essere utilizzati in modo efficiente nel lavoro di ingegneria quotidiano. Gli elementi solidi sono caratterizzati dalle seguenti proprietà: il flusso di tensione è tridimensionale, la fase di carico può essere arbitraria e le dimensioni nelle tre direzioni assiali  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  sono dello stesso ordine di grandezza. I tipi di elementi strutturali tridimensionali regolari disponibili in DIANA per la modellazione dei corpi solidi possono essere tetraedri, pentaedri o esaedri. Gli elementi possono avere funzioni di interpolazione lineare, quadratica o cubica per il campo di spostamenti. Per gli elementi con funzioni di interpolazione lineare ci sono due nodi per ogni spigolo, mentre per gli elementi con funzioni di interpolazione quadratica ci sono tre nodi per ogni spigolo, e per gli elementi con funzioni di interpolazione cubica il numero di nodi lungo un arco è uguale a quattro. In questo caso è stata utilizzata la tipologia CTE30 (Figura 4.52), cioè un elemento solido tetraedrico a dieci nodi e isoparametrico su tre lati. Questo elemento è basato su un'interpolazione quadratica e integrazione numerica.

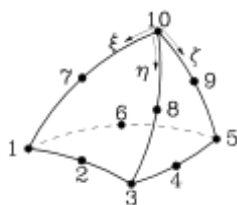


Figura 4.52: elemento solido CTE30

Per quanto riguarda le informazioni restituite da una analisi con elementi solidi, è possibile avere dei dettagli di output più specifici rispetto a una modellazione in due dimensioni. Per esempio, per quanto concerne la distribuzione delle tensioni questa tipologia offre interessanti informazioni riguardo i valori medi per ogni elemento o quelli relativi a ogni singolo nodo. Proprio per questo motivo è utile modellare con elementi solidi gli spessori aventi intradosso ed estradosso con caratteristiche differenti, come quelli che caratterizzano la cupola del modello in esame.

Le proprietà quali tipo di *mesh* e ordine di *mesh* erano già state assegnate nella creazione del nuovo progetto, quindi ora è necessario solamente definire le dimensioni delle maglie della *mesh*. In questo caso si è impostata una divisione del modello in elementi caratterizzati da una dimensione base di 30 cm. Questo è un valore di riferimento che il meshatore di DIANA



cercherà di adottare il più possibile, tuttavia non è garantito che tutti gli elementi avranno la stessa dimensione base. Tutte queste scelte influenzeranno la qualità e i tempi di elaborazione della *mesh*. DIANA genera in automatico, nella definizione geometrica, una *mesh* ad elementi finiti che ha come obiettivo quello di avvicinare le proprietà della *mesh* prima definite. Proprietà, come materiali, carichi, vincoli e le proprietà fisiche vengono direttamente passate dalla geometria alla *mesh*.

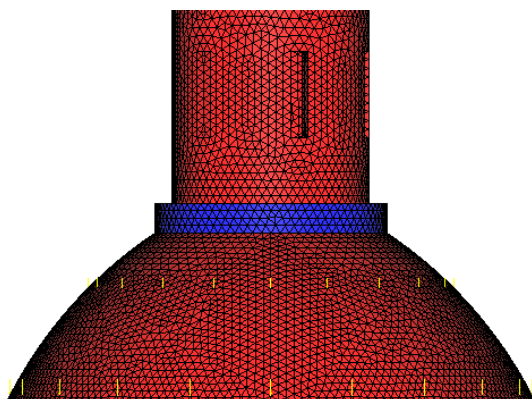


Figura 4.53: dettaglio *mesh* modello numerico

Il modello numerico 3D ottenuto risulta costituito da 627202 nodi e 413850 elementi solido CTE30.

#### 4.7.2 Modello non-lineare ad elementi tridimensionali

Il modello geometrico che tiene conto dello stato deformativo delle superficie interna della cupola è stato realizzato esternamente con i passaggi presentati al Paragrafo 4.3 e viene ora importato nel codice FE come file *.iges*.

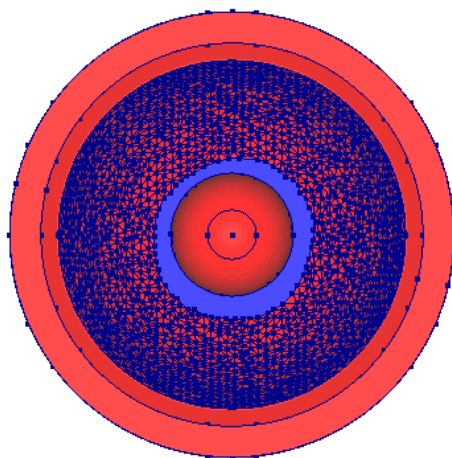
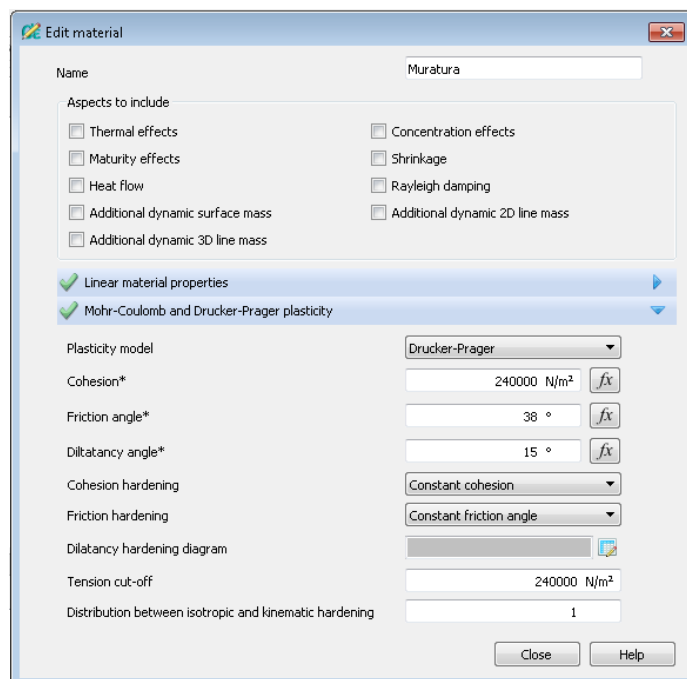


Figura 4.54: modello geometrico con dettaglio intradosso deformato

Le considerazioni relative al modello geometrico "deformato" sono le stesse effettuate per il modello lineare per quanto concerne i carichi e i vincoli. Ciò che cambia è che in questo caso al materiale "muratura" non è stata assegnata una legge lineare, ma un legame costitutivo elastico-plastico. DIANA offre un'ampia varietà di modelli di materiali che possono essere applicati per la muratura. Come già ampiamente dibattuto nel Capitolo 2, le strutture in muratura possono essere analizzate su due livelli diversi: il livello macro in cui viene simulato il comportamento globale e il livello micro in cui il comportamento viene analizzato in modo più dettagliato. Per il primo caso, DIANA offre il modello *multi-directional fixed crack*, il modello *Engineering Masonry* e i modelli di plasticità per simulare rispettivamente il cracking e lo schiacciamento. Tuttavia, la natura ortotropica della muratura non può essere modellata con i modelli *fixed crack* e di plasticità standard, poiché questi implicano l'elasticità isotropa e non consentono la combinazione con l'elasticità ortotropica. Il modello di plasticità anisotropico di Rankine-Hill è appropriato per la modellazione della muratura, poiché consente di utilizzare l'elasticità ortotropica e incorpora diversi parametri di resistenza e degradazione per simulare il diverso comportamento parallelo e perpendicolare alle articolazioni dei giunti della muratura. L'ortotropia della muratura può essere modellata anche tramite l'approccio a livello meso, dove i mattoni sono modellati da elementi di continuità e le articolazioni da elementi di interfaccia. Per questo tipo di modellazione sono disponibili vari modelli per descrivere il comportamento dell'interfaccia: un modello di crack discreto, un modello di attrito di Coulomb e un modello combinato di attrito / taglio / compressione di Coulomb. In alcuni casi, l'inclusione dell'ortotropia elastica della muratura può non essere essenziale e può essere applicato anche un modello *multi-directional fixed crack* standard o un modello di deformazione totale con elasticità isotropa. Questo, ad esempio, è il caso in cui il fattore ortotropico è basso o quando si prevede che le cricche si verifichino prevalentemente in una sola direzione.

Nel caso in esame, le informazioni sulla muratura utilizzata per la costruzione della cupola erano pressoché nulle. Anche per questo motivo si è scelto di trascurare l'ortotropia elastica e di considerare un macro-modello caratterizzato dal legame plastico di Drucker-Pracker con cut-off della tensione di trazione. Al fine di ridurre il numero dei parametri utilizzati per rappresentare il comportamento non lineare della muratura, è stato impiegato nel modello il criterio Drucker-Prager perfettamente plastico, evitando la necessità di specificare una regola di *hardening*. In questo modo, la coesione e l'angolo di attrito interno sono stati assunti come gli unici due parametri materiali necessari per definire la superficie di snervamento. I parametri di questo modello sono già stati analizzati al Paragrafo 4.4.5 e riportati in Figura 4.55 attraverso la finestra di dialogo di DIANA per la definizione delle proprietà del materiale "muratura".



**Figura 4.55:** finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri materiale "muratura" con modello di plasticità di Drucker-Prager

A questo punto è stato possibile definire le proprietà della *mesh* e si è impostata sempre una tipologia di *mesh* ad elementi solidi tetraedrici di ordine quadratico, con dimensione base pari a di 30 cm. Il modello strutturale 3D così ottenuto risulta costituito da 638756 nodi e 416762 elementi solido CTE30.

#### 4.7.3 Modello di creep ad elementi tridimensionali

Il modello di creep è stato realizzato usando come base sia il modello geometrico "indeformato" costruito per il modello lineare, sia quello "deformato" utilizzato per il modello non lineare. Si vuole infatti indagare l'effetto delle deformazioni viscosi su entrambi i modelli, in modo da valutare una possibile causa che potrebbe aver portato alla formazione del quadro deformativo che caratterizza la superficie dell'intradosso della cupola

Il modelli, entrambi costruiti in ambiente CAD, sono stato importati in formato *.iges* nel codice DIANA FEA BV in due progetti differenti. Le proprietà da assegnare alla geometria sono le stesse assegnate ai modelli già realizzati per quanto riguarda i carichi, peso proprio e copertura, e i vincoli, incastri applicati sulla superficie di base del tamburo. Impostata la combinazione SLU fondamentale per i due casi di carico, nel caso di una analisi viscosa, questa deve essere spalmata nel tempo. E' stato quindi necessario associare alla combinazione di carico una dipendenza temporale, in modo che il carico entri in azione, con coefficiente unitario, dal tempo zero di applicazione fino ad un tempo superiore al tempo totale che verrà preso in

considerazione nell'analisi. Per quanto riguarda le proprietà del materiale "muratura" è invece necessario effettuare delle differenti considerazioni. Si è scelto sempre di lavorare al macro-livello e la muratura è stata modellata con un modello *fixed crack* multi-direzionale in combinazione con un modello di creep lineare. Il modello di crack è stato scelto sulla base delle considerazioni fatte al paragrafo precedente con le quali si era constatata la mancanza di sufficienti informazioni sulla muratura della Trinità per poter tenere in conto l'ortotropia del materiale. Quando infatti l'inclusione dell'ortotropia della muratura può essere trascurata, può essere applicato il modello *multi-directional fixed crack* standard che, in combinazione con il modello di creep, fornisce valide informazioni sull'effetto della viscosità nel tempo. I parametri della legge di crack sono riportati, in Figura 4.56, attraverso la finestra di dialogo che si apre in DIANA per la definizione delle proprietà del materiale muratura.

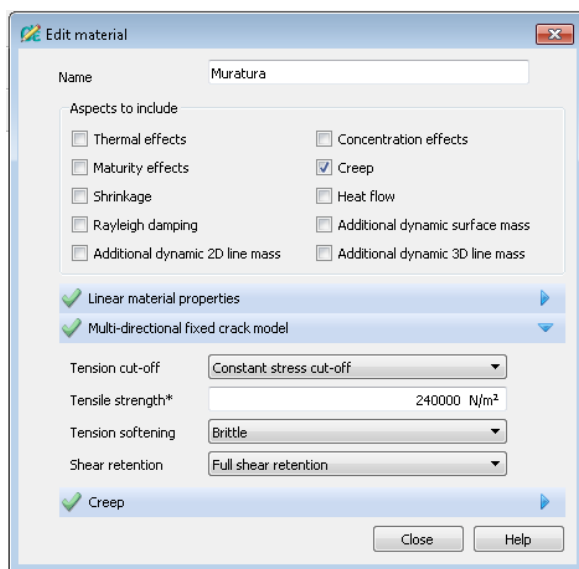


Figura 4.56: finestra di dialogo di DIANA per l'input dei parametri materiale "muratura" con modello di *multi-directional fixed crack* e creep

Il valore della tensione di trazione utilizzato è lo stesso individuato al Paragrafo 4.4 e utilizzato per il cut-off di trazione nel modello DP. Per la valutazione della deformazione viscosa della muratura si rimanda invece al Paragrafo 4.5 di questo elaborato. Il comportamento viscoelastico è stato implementato in DIANA attraverso il modello Kelvin Chain, che permette di rappresentare l'andamento della funzione di scorrimento  $J(t, \tau)$  (Figura 4.57). Una parte vitale dell'implementazione degli elementi finiti dei modelli viscoelastici è quella di trovare un algoritmo in cui non sia necessario "ricordare" la cronologia completa dello sforzo o dello stress, poiché ciò richiederebbe troppa memoria del computer per strutture reali. Il modello viscoelastico di Kelvin Chain possiede questa capacità

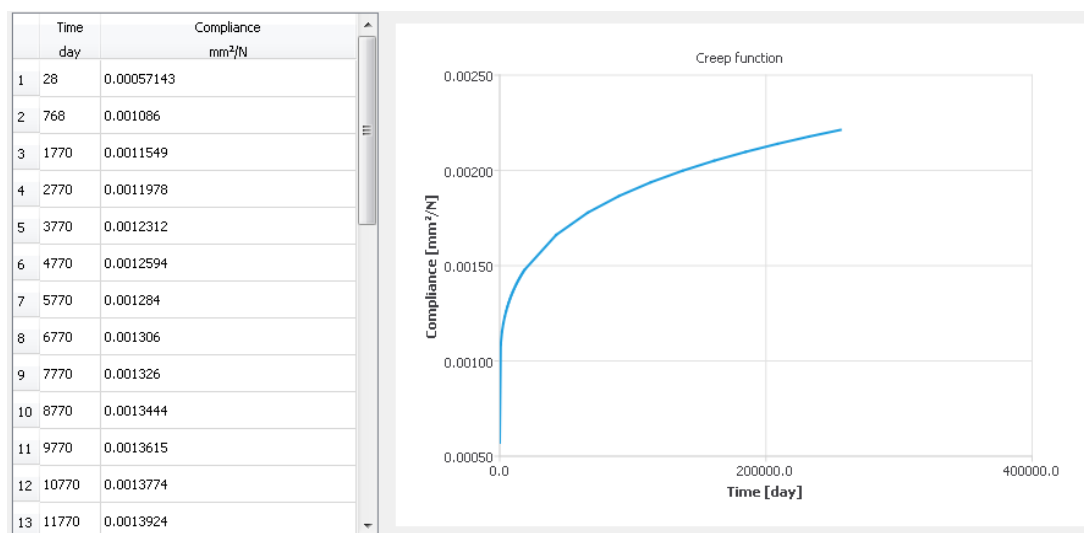


Figura 4.57: andamento della funzione di scorrimento  $J(t, \tau)$  relativa allo studio del modello di creep effettuato per la muratura della cupola della SS. Trinità

Definite le proprietà della geometria si realizza la discretizzazione *mesh* andando, come precedentemente già effettuato, ad impostare un *mesh* di ordine quadratico e con elementi tetraedrici di dimensione base 30 cm. Il modello ad elementi finiti risulterà costituito da elementi solido tetraedrici quadratici (CTE30) per entrambi i progetti realizzati, in numero uguale al rispettivo modello lineare o non lineare che aveva come base lo stesso modello geometrico (Tabella 4.11).

Tabella 4.11: specifiche dei due modelli utilizzati per le analisi di creep

	Modello "indeformato"	Modello "deformato"
<b>Nodi</b>	627202	638756
<b>Elementi (CTE30)</b>	413850	416762

Generata la discretizzazione *mesh* ad elementi finiti è possibile passare alla definizione del tipo di analisi.

#### 4.8 Analisi strutturali

Nel seguito, verranno illustrate le analisi numeriche eseguite al fine di individuare la statica della struttura e le possibili cause che hanno portato allo stato deformativo ad oggi presente.

Una preliminare analisi statica elastico lineare è stata effettuata con lo scopo di ottenere informazioni base sul comportamento globale della struttura con le quali poter effettuare un confronto con le successive analisi. I modelli in campo elastico lineare difatti, sono gli unici che, con oneri computazionali non elevati, consentono una preliminare analisi di strutture

complesse nella loro globalità. Successivamente si è svolta un'analisi statica non-lineare dove è stata specificata la non linearità sia geometrica del modello, sia fisica del legame costitutivo attribuito alla muratura, in modo così da ottenere risultati coerenti con il modello reale studiato. Questo tipo di analisi consente di stimare la posizione e le conseguenze di eventuali fenomeni di danno nella struttura. In fine con lo scopo di identificare una possibile causa del livello deformativo che contraddistingue la superficie interna della cupola, si è svolta un'analisi di creep. Per interpretare fenomeni pregressi e/o per cercare di stimare fenomeni futuri a tempi lunghi e infatti necessario considerare che nel materiale muratura sono presenti fenomeni consistenti di deformazioni lente plastiche e di viscosità, con comportamenti meccanici anche notevolmente differenti da quelli a tempi brevi.

Terminata la procedura di discretizzazione *mesh* e quindi ottenuto il modello numerico, è possibile procedere con l'aggiunta e l'impostazione dell'analisi che si vuole effettuare nel codice FE. Il processo di analisi seguito da DIANA presenta le seguenti operazioni:

- Valutazione del modello. Durante la valutazione del modello vengono verificate le definizioni degli elementi, incluse le proprietà materiali e geometriche assegnate ad ogni elemento. Vengono poi definiti l'ordinamento degli elementi, le variabili nodali nel sistema dei gradi di libertà e le matrici di rigidezza dell'elemento; infine sono impostati i vettori di carico.
- Risoluzione del sistema di equazioni. DIANA può risolvere il sistema di equazioni attraverso quattro differenti metodi:
  - Metodo di soluzione Intel PARDISO, solutore *Parallel Direct Sparse* (predefinito). Per i modelli con molti elementi *shell* curvi, il metodo *Parallel Direct Sparse* (PARDISO) può essere una buona scelta perché questo risolutore può gestire efficientemente il diverso ordine di contributi dalle rotazioni e dalle traslazioni alla matrice di rigidezza.
  - Metodo di soluzione sparsa di Cholesky. Con questo risolutore, Diana sceglierà automaticamente una procedura di soluzione ottimale inizialmente basata su un metodo Sparse Cholesky.
  - Metodo di soluzione iterativo. Per i modelli con oltre 100.000 elementi solidi, il risolutore iterativo può essere un'alternativa efficiente poiché questi modelli in generale hanno una buona condizione numerica e il risolutore iterativo può fornire una soluzione con un utilizzo minimo della memoria in un tempo relativamente breve.
  - Metodo di soluzione diretta di Gauss.
- Output. Vengono restituite dall'analisi i dati di output precedentemente impostati.

#### 4.8.1 Analisi statica lineare

Come sottolineato in precedenza, un'analisi preliminare lineare dell'edificio in muratura viene eseguita al fine di ottenere alcune informazioni di base sul comportamento globale dell'edificio.

Sebbene l'ipotesi del comportamento elastico del materiale murario non sia strettamente corretta, questo passo preliminare è in grado di offrire alcuni risultati di base riguardanti la distribuzione delle tensioni che agisce all'interno degli elementi solidi del modello e sugli spostamenti, con ridotti oneri computazionali.

In questo caso nella finestra di analisi di DIANA è sufficiente definire un'analisi di tipo statica lineare. Questa richiede di specificare il metodo di risoluzione del sistema di equazioni lineari e, sebbene sarebbe possibile utilizzare il metodo di soluzione iterativo, per accorciare i tempi di analisi si è utilizzato il metodo predefinito *Parallel Direct Sparse*. Impostati i parametri di output, è possibile lanciare l'analisi.

#### 4.8.2 Analisi non lineare

L'analisi statica effettuata considerando gli effetti non-lineari che caratterizzano il modello strutturale, permette di ottenere dei risultati più coerenti con il reale comportamento della struttura rispetto all'analisi statica lineare.

Nel riquadro di analisi, si sceglie l'analisi strutturale non lineare alla quale è necessario aggiungere il comando relativo alla fase di incremento carico. In questo caso è stata impostata un'unica fase di carico, cioè si immagina che tutto il carico sia applicato in un solo momento e non sia discretizzato nel tempo. Questo perché ci interessa sapere la risposta della struttura soggetta al carico totale, in quanto il peso proprio agisce completamente ed immediatamente non appena la cupola viene messa in opera. Successivamente sono stati specificati gli effetti non lineari da tenere in considerazione durante l'analisi. La non-linearità fisica è stata tenuta in conto considerando per il materiale il modello di plasticità di Drucker-Prager, mentre per la non-linearità geometrica offre due tipi di descrizione: Lagrange Totale e Lagrange Aggiornata. Una descrizione di Lagrange Totale è utile se le rotazioni e gli spostamenti sono grandi, ma le tensioni sono piccole, e i valori di deformazioni e tensioni sono definiti in riferimento ad una geometria in deformata. Mentre una definizione di Lagrange Aggiornata può essere utilizzata vantaggiosamente in caso di grandi deformazioni plastiche e, contrariamente a quella Totale, utilizza una geometria di riferimento aggiornata. La scelta del tipo di analisi di geometria non lineare determina le misure di sollecitazione e deformazione che verranno utilizzate. In una combinazione di non-linearità fisica e geometrica, la relazione sforzo-deformazione risultante deve essere compatibile con le misure di sollecitazione e deformazione utilizzate nella descrizione della geometria non lineare. In questo caso avendo importato un modello geometrico che tiene conto dello stato deformativo e discretizzato con elementi solidi, si è scelto di applicare la descrizione di Lagrange Aggiornata.

Infine è stato necessario definire il metodo di soluzione del sistema non lineare. Nell'analisi agli elementi finiti non lineari la relazione tra un vettore di forza e un vettore di spostamento non è più lineare e gli spostamenti spesso dipendono dagli spostamenti nelle fasi precedenti. Proprio come con un'analisi lineare, vogliamo calcolare un vettore di spostamento che equilibra le forze interne ed esterne. Nel caso lineare, il vettore della soluzione potrebbe essere calcolato

immediatamente, ma nel caso non lineare questo non è possibile, il sistema non lineare delle equazioni deve essere risolto iterativamente fino al raggiungimento dell'equilibrio. DIANA offre, come possibile metodi di iterazione, tre procedure pure: il metodo Newton-Raphson, il metodo Quasi-Newton e il metodo a Rigidezza Costante o Lineare. Sono anche disponibile due varianti che possono essere utilizzate in combinazione con queste procedure: il metodo di continuazione, il metodo di ricerca lineare.

- All'interno della classe dei metodi di Newton-Raphson, generalmente si distinguono due sottoclassi: il metodo di Newton-Raphson Normale e Modificato. Nella versione Normale Newton-Raphson la matrice di rigidezza viene valutata ogni iterazione. Ciò significa che la previsione del vettore di spostamento si basa sull'ultima situazione nota o prevista, anche se questo non è uno stato di equilibrio. Normalmente il metodo Newton-Raphson ha bisogno solo di poche iterazioni, ma ogni iterazione richiede abbastanza tempo in quanto la matrice di rigidezza deve essere reimpostata ad ogni iterazione. Il metodo Modificato di Newton-Raphson invece valuta solo la matrice di rigidezza all'inizio dell'incremento. Ciò significa che la previsione è sempre basata su uno stato di equilibrio convergente. Il metodo Modificato di Newton-Raphson di solito ha bisogno di più iterazioni, ma ogni iterazione è più veloce rispetto a Newton-Raphson normale.
- Il metodo Quasi-Newton (chiamato anche "metodo Secante") utilizza essenzialmente l'informazione dei precedenti vettori di soluzione e dei vettori di forza fuori equilibrio durante l'incremento per ottenere una migliore approssimazione. A differenza del Newton-Raphson normale, il metodo Quasi-Newton non imposta una matrice di rigidezza completamente nuova ogni iterazione.
- I metodi di iterazione Lineare e Costante della Rigidezza possono essere utilizzati se gli altri metodi diventano instabili o se è opportuno mantenere determinate caratteristiche. Il metodo di iterazione della Rigidezza Lineare usa sempre la matrice di rigidezza lineare. Il metodo di rigidità lineare può anche essere vantaggioso se è desiderabile che la matrice di rigidezza rimanga simmetrica dove la matrice di rigidezza tangenziale diverrebbe non simmetrica. Il metodo di Rigidezza Costante usa la matrice di rigidezza lasciata indietro dall'incremento precedente. Il metodo di Rigidezza Costante può essere utilizzato se i metodi Newton-Raphson o Quasi-Newton falliscono dopo un numero di incrementi.

Il processo di iterazione deve essere interrotto se i risultati sono soddisfacenti. Per questo scopo, Diana offre diverse norme di convergenza: forza, spostamento, energia e residuo. Oltre a fermare l'iterazione in caso di convergenza, il processo di iterazione viene arrestato anche se è stato raggiunto un numero massimo specificato di iterazioni o se l'iterazione porta ovviamente a divergenza. Nel caso in esame è stato scelto come procedura iterativa il metodo di Newton-Raphson nella versione Normale e come norma di convergenza quella continua di forza e spostamento. Una volta impostate tutte queste proprietà è possibile eseguire l'analisi, indicando i parametri di output da restituire.



#### *4.8.3 Analisi di creep*

L'analisi di creep è stata realizzata per indagare una possibile causa delle deformazione, avvallamenti e bozzi, che caratterizzano la superficie dell'intradosso della cupola della SS. Trinità.

In questo caso si è operata un'analisi fisica non lineare per il modello di viscosità del materiale definiti al Paragrafo 4.5. La viscoelasticità è un tipo di comportamento materiale con memoria, vale a dire che la cronologia delle sollecitazioni influisce sugli stress attuali. Negli esperimenti di creep viene applicata una sollecitazione al tempo zero e le deformazioni vengono registrate in funzione del tempo, ciò permette la definizione della funzione di scorrimento. Nella formulazione della viscoelasticità lineare allora, lo scorrimento viscoso può essere utilizzato per calcolare la deformazione in funzione della storia dello stress, in base al principio di sovrapposizione. Per osservare gli effetti del creep nella muratura è necessario studiare l'effetto del carico in step temporali diversi. Nel riquadro di analisi, si sceglie l'analisi strutturale non lineare alla quale è necessario quindi aggiungere il comando relativo alla fase di incremento di tempo. Data la pesantezza del modello a elementi solidi, intesa come gran numero di nodi ed elementi e dunque tempi di analisi lunghi, si è deciso di considerare, per l'analisi di creep, un tempo totale pari a 55 anni. Le deformazioni viscosi nei grossi edifici in muratura evolvono nel tempo in maniera lenta ma inesorabile, dunque bisogna tener conto di tempi lunghi se si vuole dare una stima consistente dell'evoluzione delle tensioni e degli spostamenti col passare del tempo. In un lasso di tempo di circa 50 tuttavia si ha la variazione maggiore del coefficiente di viscosità. Nel dettaglio sono stati considerati 15 step temporali, dei quali il primo corrisponde all'età di messa in carico (30 giorni) e l'ultimo permette di raggiungere il tempo di 55 anni, al quale corrisponde un valore del coefficiente di viscosità pari a circa l'80% del valore finale. In combinazione con la non linearità fisica dovuta al creep è possibile applicare, come per l'analisi non lineare sul modello deformato, il modello di Lagrange Aggiornato per la descrizione della non linearità geometrica, oppure il modello Totale di Lagrange nel caso del modello indeformato. Come metodo di soluzione è stata di nuovo scelta la procedura iterativa di Newton-Raphson nella versione Normale e come norma di convergenza quella continua di forza e spostamento.



## 5 Risultati

Come conclusione dello studio del comportamento statico della cupola della Chiesa della SS. Trinità di Torino, vengono di seguito esposti i risultati delle differenti tipologie di analisi effettuate con i diversi modelli, sia geometrici che strutturali, adottati. Un primo confronto verrà eseguito tra i risultati dell'analisi lineare e quella non lineare, successivamente sarà presentata la differente risposta della struttura all'analisi di creep quando è stato utilizzato il modello geometrico "indeformato" o quello "deformato".

Il modello ad elementi solidi tridimensionali permette di considerare l'evoluzione dello stato tensionale all'interno di ogni singolo elemento e quindi valutare la differente risposta in relazione allo spessore della calotta. Tuttavia questo tipo di modellazione ha dei limiti rappresentati per lo più dalla pesantezza del modello, intesa come numero di gradi di libertà, la quale induce tempi macchina per le analisi anche molto lunghi.

**Tabella 5.1: specifiche e tempi macchina per le diverse analisi**

	<b>Analisi lineare</b>	<b>Analisi non lineare</b>	<b>Analisi di creep modello "indeformato"</b>	<b>Analisi di creep modello "deformato"</b>
<b>Gradi di libertà (DOF)</b>	413850	416762	413850	416762
<b>Tempi macchina per l'analisi</b>	6 minuti	33 minuti	1 ora e 40 minuti	1 ora e 54 minuti
<b>Dimensione file output</b>	12.4 GB	12.5 GB	24.9 GB	25.2 GB

Dal confronto tra i diversi modelli utilizzati esposto in Tabella 5.1 è possibile verificare come i tempi di analisi crescano in maniera esponenziale all'aumentare della qualità dell'analisi. I modelli in campo elastico lineare, sono gli unici che, con oneri computazionali non elevati, consentono una preliminare analisi di strutture complesse nella loro globalità. Per contro, un'analisi dettagliata del comportamento di una costruzione storica in muratura, richiede l'impiego di modelli di calcolo non lineare con tempi macchina più lunghi. Infatti l'analisi non lineare richiede un tempo superiore rispetto a quella lineare a causa della risoluzione del sistema non lineare di equazioni, mentre l'analisi di creep comporta un'ulteriore dilatazione dei tempi in quanto la matrice di rigidità del modello deve essere ricalcolata per ogni step temporale specificato.

La consistenza del modello è stata anzitutto comprovata da una verifica riguardo al valore della tensione verticale alla base del modello, confrontando i risultati ottenuti dalle diverse modellazioni 3D con quelli ottenuti dal calcolo manuale nel Paragrafo 4.6.2. Il risultato del confronto tra le due modellazioni e il calcolo manuale è schematizzato in Tabella 5.2, in cui è riportato anche l'errore relativo percentuale rispetto al risultato ottenuto con il calcolo manuale.

Tabella 5.2: confronto tra valori di tensione verticale ala base del modello calcolati nelle diverse modalità

	$\sigma_z$ [Mpa] alla base	Errore relativo
<b>Calcolo manuale</b>	0.59	-
<b>Modello lineare</b>	0.56	3%
<b>Modello non lineare</b>	0.53	6%

L'errore relativo tra la modalità di calcolo manuale e quella automatica nasce dal fatto che, mentre nel calcolo a mano la tensione è data semplicemente dal rapporto tra lo sforzo normale alla base e l'area della sezione, nella modellazione 3D si è dovuta operare una media tra i valori di tensione nello spessore della parete del tamburo, ottenendo quindi un risultato maggiormente soggetto ad errore in quanto frutto di una media. L'errore relativo è maggiore per il modello non lineare, in quanto il valore della tensione è stato calcolato manualmente lavorando nel campo dell'elasticità lineare, mentre in questo modello 3D è stato tenuto conto della non linearità sia fisica che geometrica.

I risultati dell'analisi statica sul modello 3D lineare e non-lineare, sotto carichi verticali costanti derivanti dal peso proprio e dai carichi del tetto, sono riportati in termini di tensioni verticali in Figura 5.1.

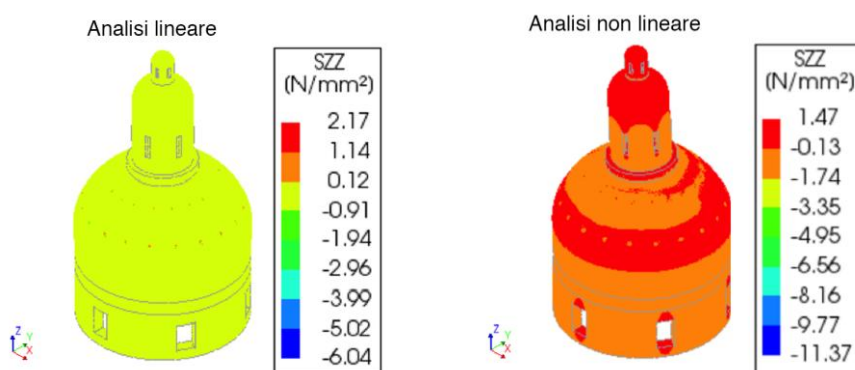
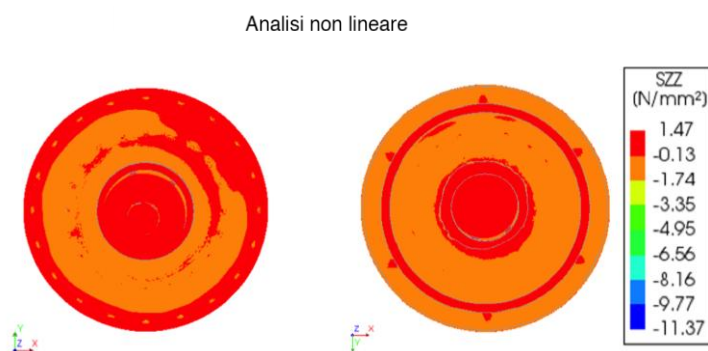


Figura 5.1: tensione verticale modello lineare (sinistra) e modello non lineare (destra)

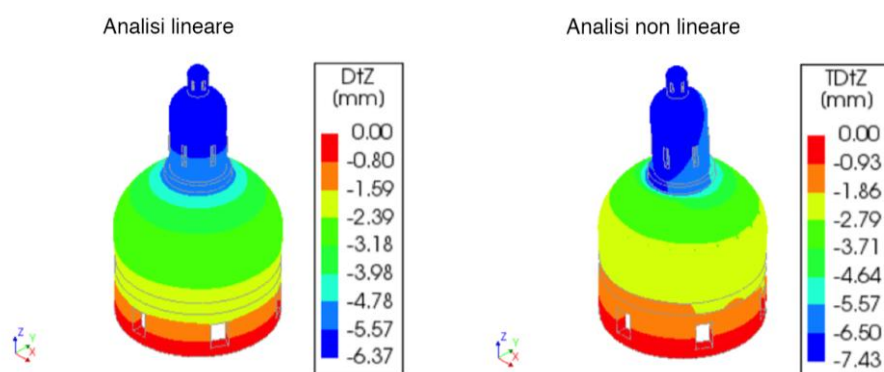
In generale, lo stato di tensione indotto dai carichi verticali statici è piuttosto moderato. La sollecitazione di compressione media sulle pareti esterne della cupola è di circa  $0.9 \text{ N/mm}^2$  per il modello lineare, mentre di circa  $1.7 \text{ N/mm}^2$  per il modello non lineare. Sostanzialmente questi valori confermano che la cupola è adeguata a sopportare i carichi gravitazionali e ciò è abbastanza comune per tale tipologia strutturale. Osservando il modello lineare, si nota che dei valori di trazione compaiono sulla superficie superiore della cupola, in corrispondenza dei punti di scarico dei falsi puntoni della copertura. Principalmente, questo è un effetto numerico locale che dipende dall'applicazione di carichi puntuali su elementi solidi. Considerazioni più interessanti si possono svolgere sul modello non lineare. In questo caso, si nota l'insorgere di tensione che tende ad un valore positivo in sommità del lanternino e nella fascia centrale della superficie della cupola, con un'espansione nella zona dove l'intradosso era caratterizzato

dall'avvallamento più profondo. Tale comportamento si può osservare con maggiore chiarezza in Figura 5.2 e può essere interpretato con considerazioni relative alla non linearità del modello. Infatti per l'analisi non lineare si è utilizzato un modello geometrico non simmetrico, che tiene conto, il più possibile, dello stato deformativo che caratterizza l'intradosso della cupola. Questo fatto, nel modello numerico ad elementi solido, ha portato alla conseguente nascita di tensioni tendenti allo zero anche sull'estradosso della calotta, che nel modello geometrico risulta non deformato. Lo studio dell'andamento delle tensioni, risultato da una analisi statica non lineare, permette infatti di localizzare le eventuali zone di singolarità, che risultano appunto essere zone con rilevanti tensioni di trazione. In oltre è noto che, sotto carichi gravitazionali, generalmente la risposta statica delle cupole lungo gli anelli porta alla nascita di tensioni di compressione nella parte superiore, tra un angolo di  $45^\circ$  e uno di  $60^\circ$ , e di trazione al di sotto di questa angolazione. E' così spiegata la nascita di componenti di tensione positiva nel settore di cupola in prossimità dei falsi puntoni e nel cupolino della lanterna.



**Figura 5.2: tensione verticale modello non lineare in vista dall'alto (sinistra) e dal basso (destra)**

Ancora più interessanti dei risultati tensionali sono gli spostamenti verticali che i nodi del modello subiscono sotto l'azione dei carichi verticali (Figura 5.3).



**Figura 5.3: spostamento verticale modello lineare (sinistra) e modello non lineare (destra)**

In generale la struttura a causa principalmente dell'azione del peso proprio tende ad abbassarsi con valori di spostamento che aumentano al crescere dell'altezza del modello. Il tamburo infatti

risulta incastrato alla base, quindi la prima fascia del modello 3D risulta soggetta a spostamenti nulli. Man mano che si sale di quota, il valore dell'abbassamento aumenta e in particolare si nota una forte gradiente, cioè una rapida variazione dello spostamento verticale, in corrispondenza della sommità della cupola a contatto con il cordolo del lanternino. Passando al confronto tra i due modelli, il valore dell'abbassamento massimo che subisce il modello non-lineare risulta circa  $1\text{ mm}$  maggiore di quello che subisce il modello lineare. Se per il modello lineare lo spostamento verticale presenta lo stesso valore lungo la superficie della cupola ad una stessa quota, altrettanto non si può dire per quanto concerne il modello non lineare. Infatti la non linearità geometrica del modello porta ad uno spostamento non simmetrico che tende a raggiungere valori maggiori, ad una medesima altezza, in corrispondenza della zona dell'intradosso della calotta maggiormente soggetta a deformazioni. Dalla Figura 5.4 si può notare come questo fatto sia valido sia per l'intradosso che per l'estradosso della cupola. Quest'ultimo era costituito da una superficie non deformata nel modello geometrico, tuttavia avendo realizzato un modello strutturale ad elementi solidi, questi sono in grado di trasferire le sollecitazioni lungo lo spessore della calotta. In questo modo anche la superficie esterna subisce un abbassamento maggiore in corrispondenza delle zona della superficie interna maggiormente deformata.

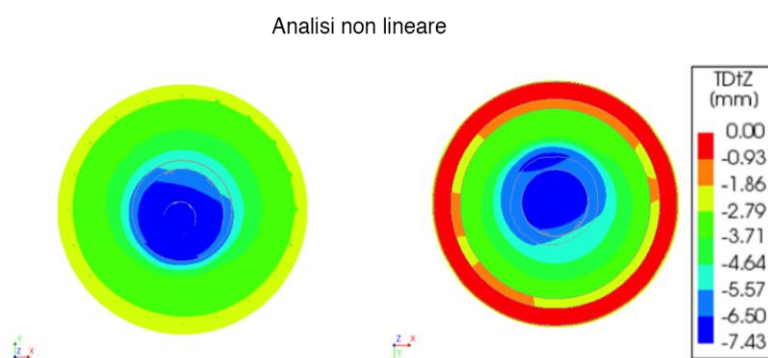


Figura 5.4: spostamento verticale modello non lineare in vista dall'alto (sinistra) e dal basso (destra)

E' particolarmente interessante analizzare ora la configurazione deformata che subisce il modello a causa dell'abbassamento dovuto all'azione dei carichi gravitazionali. Viene quindi presentato il confronto tra la deformata del modello, sempre andando a rappresentare lo spostamento verticale, e lo stato deformativo della superficie interna della cupola, ottenuto dal confronto tra la *mesh* dell'intradosso stesso e la sfera adattata come spiegato al Paragrafo 4.2.2. E' chiaro che si sta operando un confronto tra un modello 3D ad elementi finiti e una superficie *mesh* e da un punto di vista visivo, tra la superficie esterna e quella interna della cupola. Tuttavia avendo già verificato come nel modello FE la superficie esterna possa subire deformazioni simili a quelle che caratterizzano l'intradosso, allora, limitandoci ad un confronto tra superfici, questo può essere ritenuto congruo. In Figura 5.5 si può osservare tale confronto e in particolare come il contorno deformato del modello rispecchi abbastanza chiaramente il contorno della superficie *mesh*. Si nota inoltre come un valore di abbassamento maggiore, ad

uno stesso livello di quota, caratterizzi quella zona che risulta di un blu più scuro nella rappresentazione *mesh*, cioè quella zona dove l'avvallamento dell'intradosso risulta più profondo.

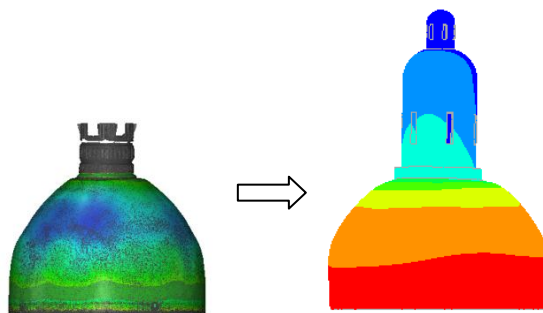


Figura 5.5: confronto tra la *mesh* deformata dell'intradosso della cupola e deformazione dovuta all'abbassamento della cupola e del lanternino del modello 3D

Il confronto tra la *mesh* e il modello FE permette di appurare come il modello strutturale non lineare realizzato validi le assunzioni fatte in particolare nella fase di modellazione geometrica. Il modello geometrico deformato è stato realizzato partendo dalla superficie *mesh* dell'intradosso della cupola ottenuta da una nuvola di punti catturata da un rilevamento laser scanner. Nonostante i possibili errori di costruzione nati durante le operazioni di modellazione 3D effettuate per la realizzazione del modello geometrico e le ipotesi semplificative adottate per la caratterizzazione del materiale "muratura", si è comunque ottenuto un modello ad elementi finiti che rispecchia lo stato deformativo del dato di partenza e quindi il reale comportamento della struttura.

Focalizzando l'attenzione solo sulla cupola (Figura 5.6) si può osservare, in corrispondenza della zona maggiormente deformata, come sia l'estradosso che l'intradosso presentino un forte gradiente dello spostamento verticale.

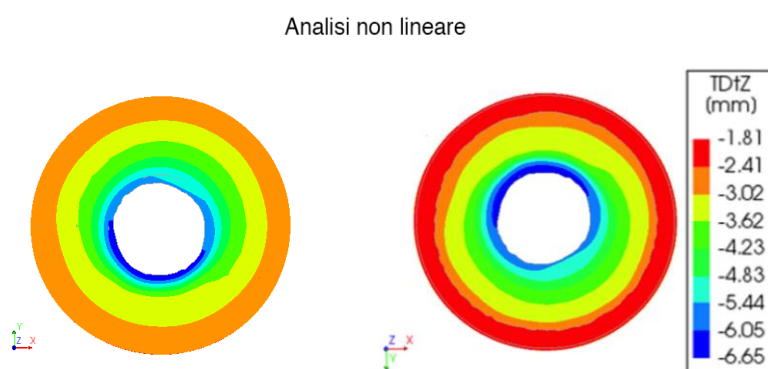


Figura 5.6: spostamento verticale dell'elemento cupola in vista dall'alto (sinistra) e dal basso (destra)

Sono stati selezionati cinque punti a diverse quote, ognuno in prossimità di uno stacco della variazione del colore e quindi del valore dell'abbassamento. Impostato come livello zero la base del modello, cioè la quota di imposta del tamburo, le quote dei punti considerati sono raffigurate in Figura 5.7.

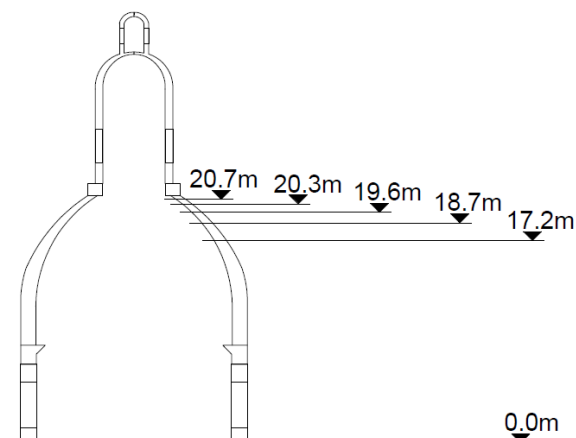


Figura 5.7: quote dei punti considerati considerando il livello zero come la base del modello

Per questi punti sono stati calcolati i valori di spostamento verticale che i nodi hanno subito all'estradosso e all'intradosso ad una medesima altezza e, alle stesse quote, i valori delle tensioni verticali che agiscono all'interno degli elementi solidi che costituiscono il modello discretizzato. I valori di spostamento e tensione verticale sono presentati in Tabella 5.3 per il modello lineare e quello non lineare, invece in Figura 5.8 sono rappresentati i relativi grafici. Nel dettaglio, vengono mostrati i confronti, per i due modelli, tra i risultati per l'estradosso e l'intradosso in relazione all'altezza del modello.

Tabella 5.3: valori di spostamento e tensione verticale per il modello lineare (sopra) e quello non lineare (sotto). Z=quota del modello; TDtZ=spostamento verticale; SZZ=tensione verticale

Z [m]	Modello lineare			
	Estradosso		Intradosso	
	TDtZ [mm]	SZZ [N/mm <sup>2</sup> ]	TDtZ [mm]	SZZ [N/mm <sup>2</sup> ]
17.20	-3.16	-0.116	-3.40	-0.187
18.70	-3.56	-0.120	-3.90	-0.197
19.60	-3.93	-0.108	-4.44	-0.216
20.30	-4.42	-0.138	-4.99	-0.085
20.70	-4.73	-0.201	-5.10	-0.012



Z [m]	Modello non lineare			
	Estradosso		Intradosso	
	TDtZ [mm]	SZZ [N/mm <sup>2</sup> ]	TDtZ [mm]	SZZ [N/mm <sup>2</sup> ]
17.20	-3.10	-0.129	-3.37	-0.160
18.70	-3.56	-0.132	-3.83	-0.198
19.60	-3.95	-0.111	-4.38	-0.287
20.30	-4.48	-0.140	-5.10	-0.149
20.70	-4.99	-0.245	-5.40	-0.020

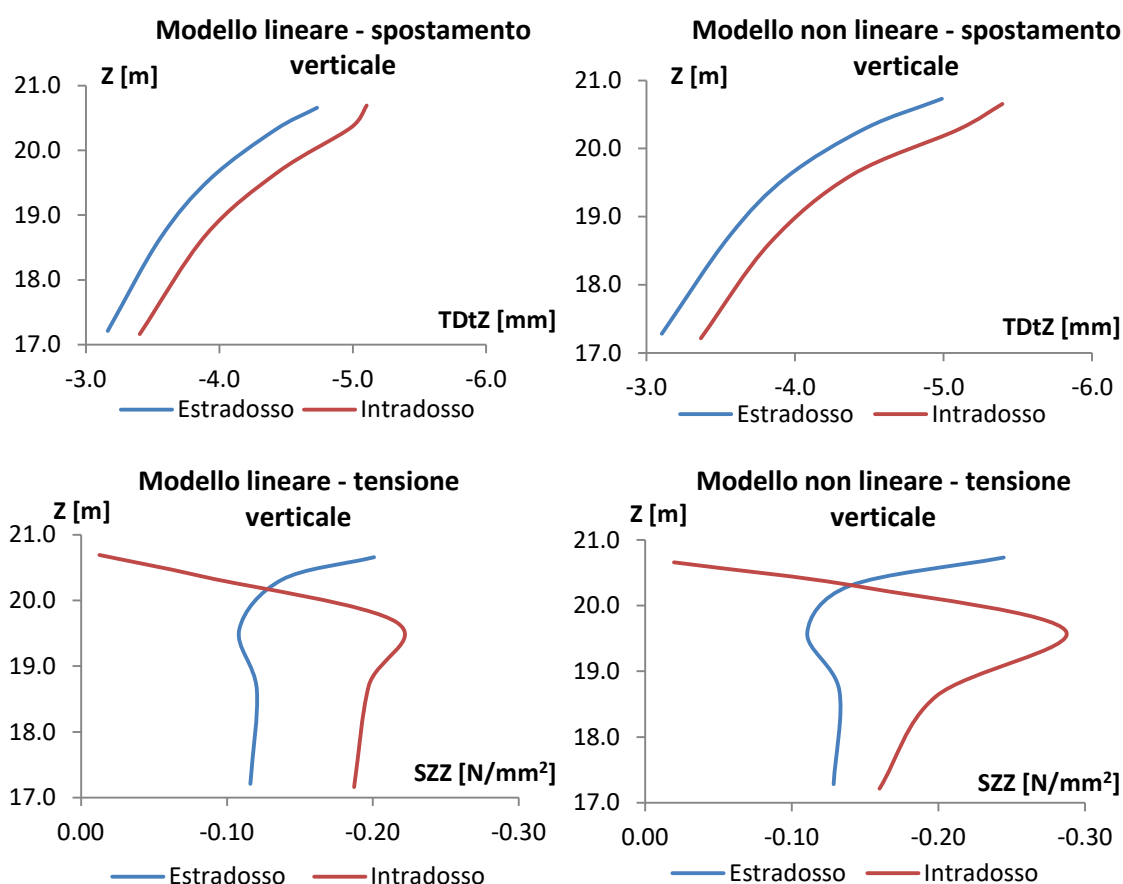


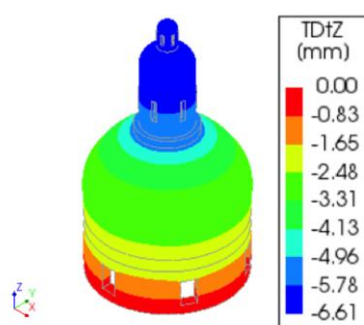
Figura 5.8: andamento dello spostamento e della tensione verticale in relazione dell'altezza del modello

I valori di spostamento verticale aumentano con il crescere della quota del modello sia per l'intradosso che per l'estradosso. Ovviamente, avendo considerato punti a quote diverse, la curva interpolante tali valori rappresenta la configurazione deformata dell'estradosso e dell'intradosso in qual range di altezza. Interessante è il comportamento della tensione verticale: al diminuire della quota si nota come i valori di tensione verticale dell'estradosso e dell'intradosso tendano ad avvicinarsi. Invece, alle quote più alte, cioè in sommità della cupola, l'intradosso tende a

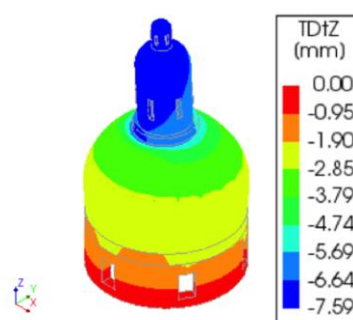
scaricarsi e l'estradosso a caricarsi. In altre parole, l'estradosso, prima soggetto ad una tensione minore rispetto alla superficie interna, subisce una maggiore compressione, invece l'intradosso tende verso valori di tensione positivi (trazione). Questo fatto può essere spiegato, in modo approssimato, con l'analisi della statica dell'arco proposta da Navier (1826) e ripresa poi da Mery (1840). La verifica di equilibrio dell'arco, secondo gli autori, consiste nell'accertare che nelle diverse sezioni non siano presenti forze di trazione. Navier ipotizzò che, per avere solo sforzi di compressione, la curva delle pressioni doveva essere contenuta all'interno della fascia delimitata dal terzo medio in tutte le sezioni trasversali (nocciolo centrale d'inerzia). In questo modo si ha la condizione limite di diagramma triangolare delle tensioni di compressione all'interno della sezione: con un valore nullo in corrispondenza del punto in cui ha inizio lo scorrimento, in caso di rottura, e valore massimo in corrispondenza del centro di rotazione. Questo comportamento può dunque fornire un'ulteriore conferma della bontà del modello adottato. Infatti giustifica il fatto che la zona conclusiva della cupola sia caratterizzata da un'alta deformazione all'intradosso.

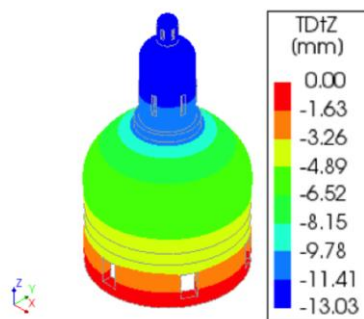
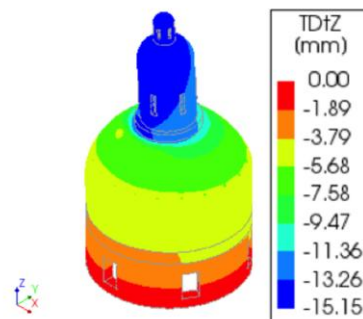
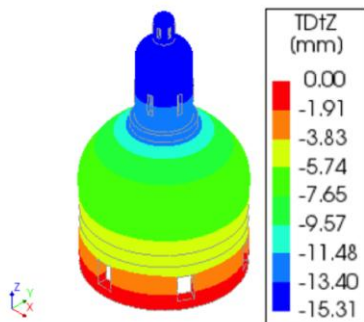
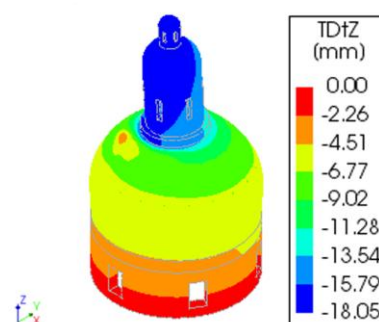
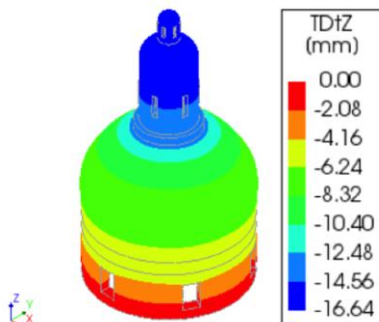
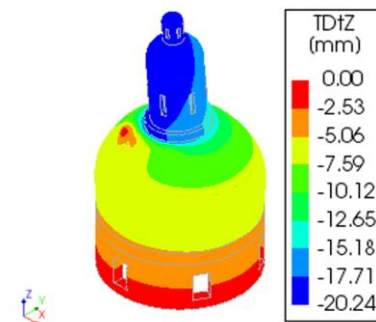
Per quanto riguarda l'analisi di creep, questa è stata realizzata per indagare una possibile causa delle deformazioni che caratterizzano la superficie dell'intradosso della cupola della SS. Trinità. L'analisi è stata effettuata prima sul modello indeformato, poi, appurata anche grazie ai risultati dell'analisi non lineare la validità del modello deformato, la stessa analisi è stata svolta sul modello deformato. In entrambi i casi si è calcolata la variazione della risposta nel tempo della struttura, soggetta ai soli carichi gravitazionali, a causa della deformazione viscosa. L'intervallo di tempo per le analisi di creep è stato suddiviso in 15 step, ognuno dei quali riferito a un'ascissa temporale differente. Per ciascuno step temporale il software salva i risultati dell'analisi, in modo che possano essere visualizzati come risultato di output. L'evoluzione nel tempo del valore degli spostamenti verticali appare chiara dai risultati riportati in Figura 5.9, dove il confronto tra l'abbassamento subito dal modello indeformato e quello subito dal modello deformato è riportato per quattro dei 15 step temporali impostati per l'analisi.

Analisi di creep - Modello Indeformato  
Time step 1 = 30 giorni



Analisi di creep - Modello Deformato  
Time step 1 = 30 giorni



Analisi di creep - Modello Indeformato  
Time step 5 = 5 anniAnalisi di creep - Modello Deformato  
Time step 5 = 5 anniAnalisi di creep - Modello Indeformato  
Time step 10 = 30 anniAnalisi di creep - Modello Deformato  
Time step 10 = 30 anniAnalisi di creep - Modello Indeformato  
Time step 15 = 55 anniAnalisi di creep - Modello Deformato  
Time step 15 = 55 anni

**Figura 5.9: evoluzione dello spostamento verticale nel tempo a causa dell'effetto della viscosità per il modello indeformato (sinistra) e quello deformato (destra)**

Osservando i risultati per il modello indeformato, si vede come il valore massimo di spostamento verticale passi da un valore pari a  $6.6 \text{ mm}$  relativo al primo step temporale (30 giorni) ad un valore di  $16.6 \text{ mm}$  relativo all'ultimo step temporale (55 anni). Il valore dell'abbassamento a 30 gironi è all'incirca uguale a quello trovato per l'analisi statica sul modello lineare, in quanto in quell'intervallo le proprietà del materiale non hanno ancora subito

l'effetto della viscosità. L'effetto della deformazione viscosa risulta invece evidente man mano che aumenta l'ascissa temporale, fino a causare, in tutte le zone del modello, un aumento del valore dello spostamento verticale di circa  $10\text{ mm}$ . In particolare si nota come nella zona compresa nell'intervallo di altezza dove si è localizzata la deformazione maggiore all'intradosso ci sia un forte gradiente di variazione dello spostamento verticale. Similmente, le considerazioni appena svolte sono valide per il modello deformato. Anche in questo caso l'effetto della viscosità è evidente e causa una variazione dell'abbassamento massimo da un valore di  $7.6\text{ mm}$  per il primo step, ad un valore di  $20.2\text{ mm}$  per l'ultimo step temporale. Molto interessante è notare come, con il passare del tempo, ad una stessa quota, nella zona interessata del maggiore livello deformativo all'intradosso, si trovi un valore di spostamento verticale maggiore rispetto alla zona diametralmente opposta (Figura 5.10). Questo indica che la cupola tende ad abbassarsi di più dal lato dove il suo intradosso risultava maggiormente deformato.

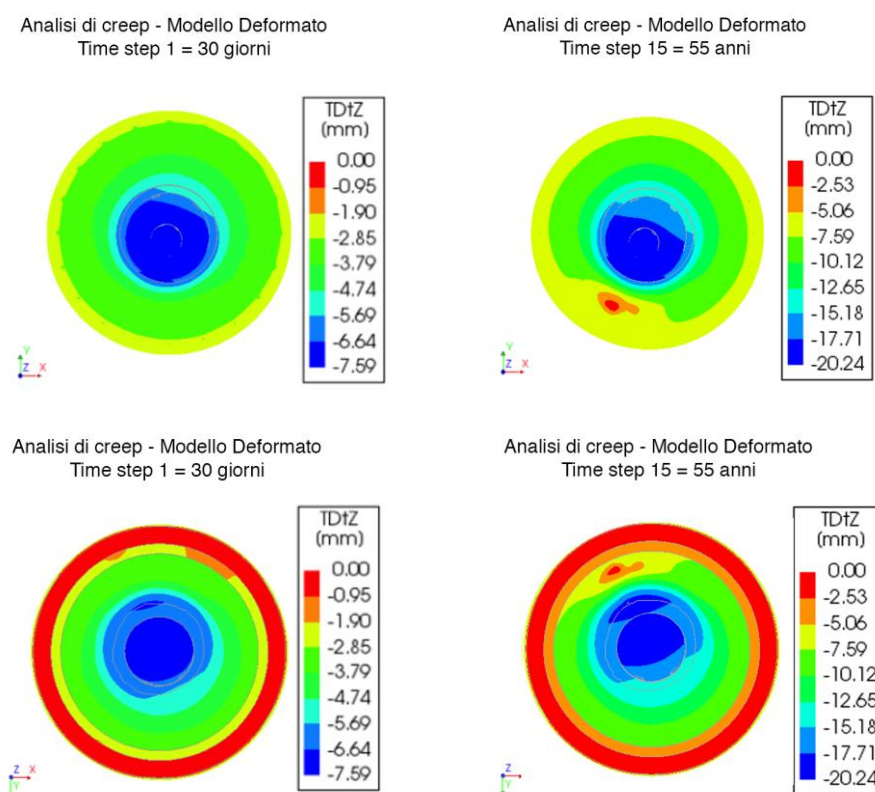


Figura 5.10: spostamento verticale in vista dall'alto (sopra) e dal basso (sotto) per 30 giorni e 55 anni

E' necessario premettere che questi risultati sono frutto di un modello strutturale creato adottando molteplici semplificazioni sia nella fase di modellazione geometrica, sia in quella di modellazione numerica. Tuttavia consentono di validare il fenomeno di deformazione viscosa, che la muratura ha subito nel tempo, come la causa delle deformazioni riscontrate nell'intradosso della cupola della Chiesa della SS. Trinità. Infatti il fatto di aver realizzato il

modello strutturale tenendo conto della non linearità geometrica e del creep ha portato ad una concentrazione del gradiente dello spostamento verticale in quella zona dove si era identificata la posizione dell'avvallamento più profondo lungo la superficie interna della calotta.

Per gli stesi punti a quote diverse utilizzati per presentare i risultati di spostamento e tensione verticale in Tabella 5.3, sono stati valutati gli andamenti nel tempo dei valori di abbassamento e tensione per entrambi i modelli utilizzati nelle analisi di creep. I valori dello spostamento verticale, causato dei carichi gravitazionali, in relazione al tempo sono rappresentati in Figura 5.11 per le analisi di creep effettuate rispettivamente sul modello indeformato e su quello deformato.

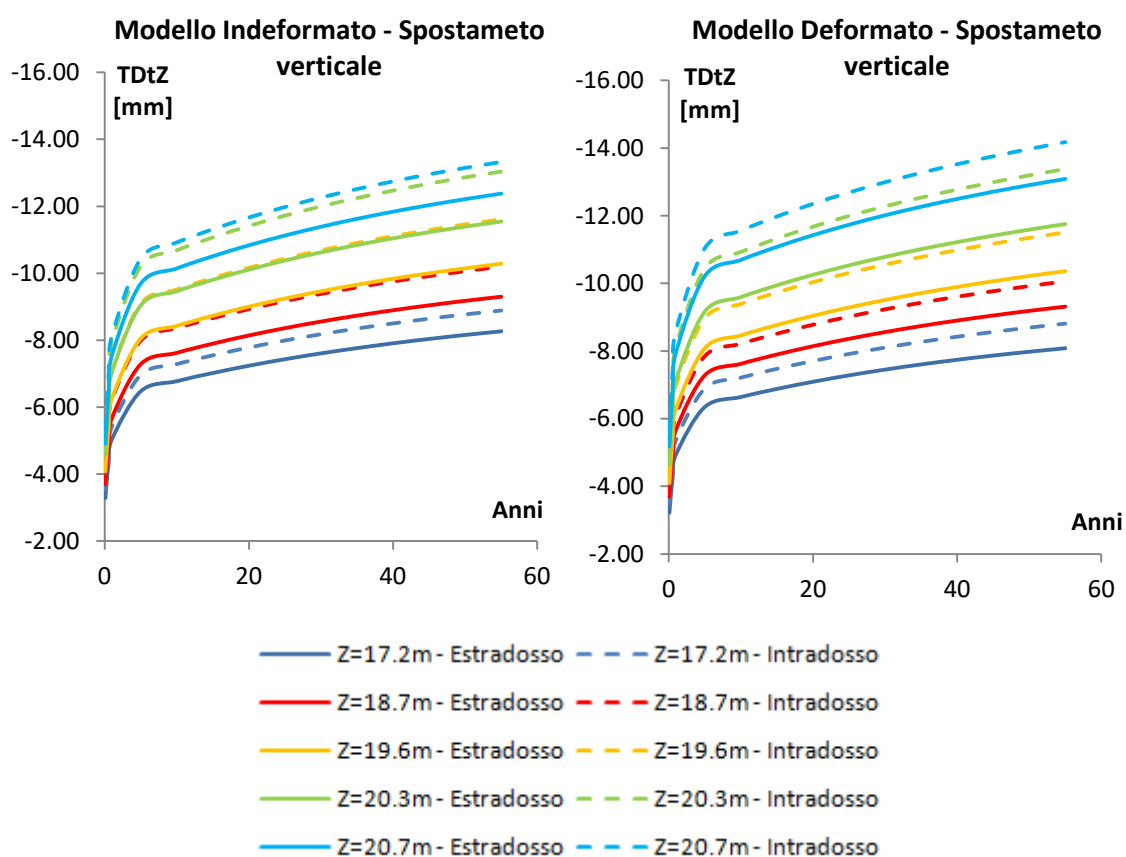


Figura 5.11: confronto tra gli andamenti nel tempo dei valori di spostamento verticale valutato per l'estradosso e l'intradosso a quote differenti, per il modello indeformato (sinistra) e quello deformato (destra)

I risultati di tali grafici confermano il fatto che i valori dell'abbassamento, oltre ad aumentare nel tempo, aumentano al crescere dell'altezza del modello. In particolare è possibile notare come, ad una stessa quota, il valore di spostamento verticale dell'intradosso sia maggiore rispetto a quello relativo all'estradosso. Questo comportamento è maggiormente accentuato per il modello deformato e può essere giustificato con il fatto che la superficie dell'intradosso è stata realizzata considerando lo stato deformativo che la contraddistingue.

Per quanto riguarda i valori delle tensioni, i risultati dell'analisi di creep nel tempo rispecchiano le considerazioni fatte per l'andamento delle tensioni con l'altezza del modello. Osservando la Figura 5.12 si può notare come, ad una quota di  $17.2\text{ m}$ , l'estradosso tenda a scaricarsi e a trasferire le tensioni all'intradosso, che quindi si carica a compressione. Invece, raggiunta un'altezza di  $20.3\text{ m}$  nel modello, si osserva il comportamento opposto: si ha una migrazione delle tensioni dalla superficie interna, che si scarica, alla superficie esterna che quindi si carica. Questo comportamento può essere interpretato come la causa di un effetto di coazione che si sviluppa negli elementi solidi del modello FE e che porta ad una redistribuzione di tensioni interne.

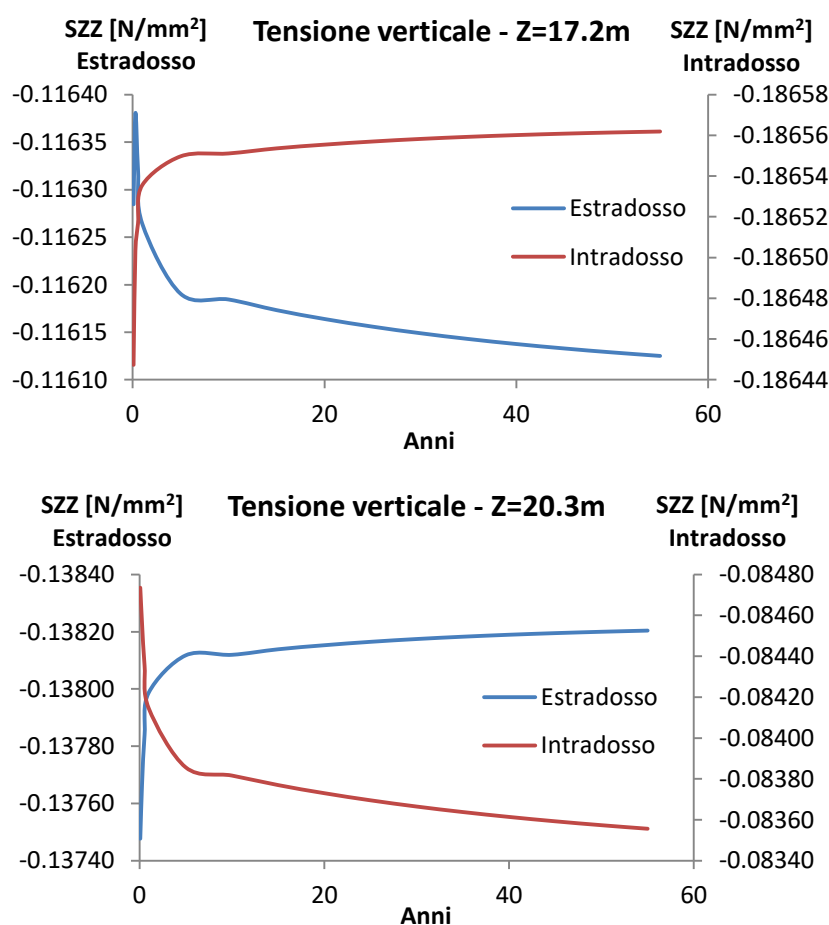


Figura 5.12: confronto andamento delle tensioni verticali nel tempo per l'estradosso e l'intradosso della cupola a quota 17.2m (sopra) e 20.3m (sotto)

Come ulteriore conferma delle considerazioni effettuate nella parte iniziale del capitolo si può operare un'attenta lettura delle scale grafiche di questi grafici. E' possibile notare come la scala di destra relativa all'intradosso presenti valori di tensione che tendono allo zero per la quota maggiore, invece la scala di sinistra ha valori di compressione crescenti.

Osservando i risultati ottenuti in Figura 5.11 si nota come per lo step finale di 55 anni i valori di spostamento verticale non si siano assestati, ma tendono ancora ad aumentare. Per questo motivo l'analisi di creep per il modello deformato è stata allungata fino ad uno step temporale finale pari a 400 anni. Questo lasso temporale può essere associato con il tempo effettivo che è passato dalla costruzione della Chiesa ad oggi. I risultati a 400 anni sono presentati in Figura 5.13 in termini di spostamento verticale. In Figura 5.14 invece, gli stessi grafici redatti in Figura 5.8 sono stati ricostruiti con i risultati dell'analisi a 400 anni per il modello deformato sempre in relazione all'altezza del modello.

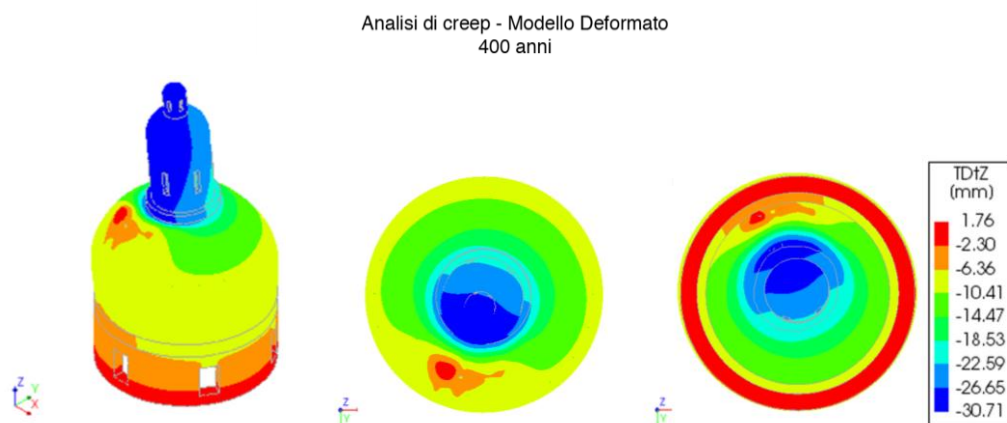


Figura 5.13: risultato dell'analisi di creep a 400 anni per il modello deformato in termini di spostamento verticale in vista assonometrica (sinistra) dall'alto (centro) e dal basso (destra)

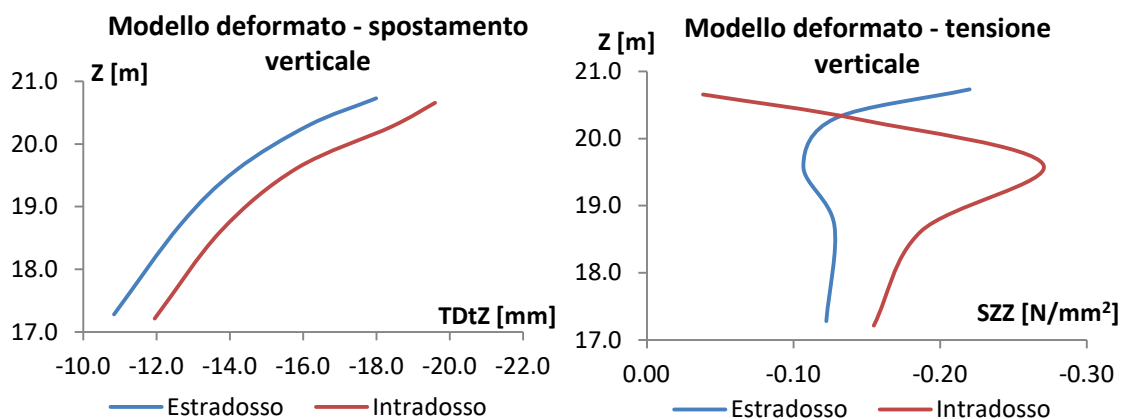


Figura 5.14: andamento dello spostamento (sinistra) e della tensione (destra) verticale in relazione dell'altezza per l'analisi di creep sul modello deformato a 400 anni

**Tabella 5.4:** risultati di spostamento e tensione verticale per l'analisi di creep a 400 anni sul modello deformato. Z=quota del modello; TDtZ=spostamento verticale; SZZ=tensione verticale

Z [m]	Modello Deformato			
	Estradosso		Intradosso	
	TDtZ [mm]	SZZ [N/mm <sup>2</sup> ]	TDtZ [mm]	SZZ [N/mm <sup>2</sup> ]
17.20	-10.84	-0.129	-11.95	-0.160
18.70	-12.65	-0.132	-13.76	-0.198
19.60	-14.18	-0.111	-15.82	-0.287
20.30	-16.15	-0.140	-18.42	-0.149
20.70	-17.99	-0.245	-19.60	-0.020

Da questi risultati si nota come, allungando i tempi di analisi, i valori dell'abbassamento sia ancora aumentati e si concentrino maggiormente nell'area caratterizzata dalla deformazione all'intradosso. Questa è un'ulteriore conferma di come il fenomeno di deformazione viscosa che la muratura ha subito nel tempo, sia, in concatenazione con altri fattori, una delle cause che hanno portato alla formazione delle deformazioni riscontrate lungo l'intradosso della cupola della Chiesa della SS. Trinità.



## Conclusioni

L'obiettivo principale di questa tesi è stata la modellazione strutturale di una cupola in muratura, studiando nello specifico la Chiesa della SS. Trinità di Torino. Tale caso studio è un edificio storico dalla geometria complessa e dalle grandi dimensioni, in cui il peso proprio gioca un ruolo primario nella definizione del comportamento strutturale.

Lo scopo della modellazione strutturale è fornire gli strumenti per simulare il comportamento strutturale sia in condizioni operative che in presenza di danni. Il modello strutturale deve essere in grado di acquisire le caratteristiche geometriche, meccaniche e fisiche in modo accurato e simulare i probabili scenari di danno dell'edificio. Un accurato rilievo condotto con tecnologia Laser Scanner, operato all'interno della struttura, ha permesso di evidenziare un esteso e importante stato deformativo lungo l'intradosso della cupola della Chiesa. Questa caratteristica non è stata trascurata durante l'elaborazione del modello strutturale e costituisce uno dei passaggi principali di questa trattazione.

La definizione della strategia di modellazione delle costruzioni storiche in muratura non può prescindere da un accurato esame del corpo di fabbrica per cui è necessario un approccio multidisciplinare. I dati disponibili hanno condotto alla definizione della geometria del caso studio, attraverso l'elaborazione del modello geometrico ottenuto con software di modellazione sia bidimensionale che tridimensionale, e alla caratterizzazione dei materiali, i cui parametri sono stati desunti da letteratura.

La definizione del modello di riferimento, che descriva in maniera più realistica possibile il comportamento dell'edificio, ha costituito una delle fasi più complesse dell'intera procedura di analisi. In particolare, il modello geometrico è stato realizzato a partire da un *mesh* semplificata dell'intradosso della calotta, ottenuta dalla triangolazione della nuvola di punti catturata durante il rilievo e successive operazioni di modellazione.

Il comportamento strutturale della cupola della Chiesa della SS. Trinità di Torino è stato analizzato attraverso una completa analisi 3D, utilizzando la tecnica ad elementi finiti (FE) e la strategia di macro-modellazione. La muratura, considerata come un assemblaggio eterogeneo di blocchi, è stata sostituita con un materiale continuo, macroscopicamente equivalente. I singoli elementi costituenti la struttura vengono rappresentati tramite una *mesh* di componenti elementari tridimensionali, ipotizzati essere interconnessi tra di loro in un numero discreto di punti (detti nodi).

La modellazione numerica è proceduta per gradi, partendo da un modello lineare a elementi tridimensionali fino ad arrivare a un modello non lineare, comprensivo delle principali deformazioni opportunamente identificate. Sfruttando le potenzialità del codice ad elementi finiti, una preliminare analisi statica lineare è stata effettuata con lo scopo di ottenere informazioni di base sul comportamento globale della struttura. Successivamente si è svolta

un'analisi statica non-lineare, dove è stata specificata la non linearità sia geometrica del modello, sia fisica del legame costitutivo attribuito alla muratura, in modo così da ottenere risultati coerenti con il modello reale studiato.

In fine, con lo scopo di identificare una possibile causa del livello deformativo che contraddistingue la superficie interna della cupola, si è svolta un'analisi di creep. Per interpretare fenomeni pregressi è necessario considerare che nel materiale muratura sono presenti fenomeni consistenti di lente deformazioni plastiche e viscosi, con comportamenti meccanici anche notevolmente differenti da quelli a tempi brevi. Per valutare l'effetto delle deformazioni viscosi, è stato realizzato un modello di creep utilizzando come modello geometrico sia quello "indeformato", sia quello "deformato".

I risultati delle analisi, seppur in una fase preliminare, consentono di validare il fenomeno di deformazione viscosa, che la muratura ha subito nel tempo, come la causa delle deformazioni riscontrate nell'intradosso della cupola. Infatti la realizzazione di un modello strutturale che tiene conto della non-linearità geometrica e del creep ha portato ad una concentrazione del gradiente dello spostamento verticale in quella zona dove si era identificata la maggiore estensione della deformazione lungo la superficie interna della calotta.

Questo lavoro di tesi, nonostante rappresenti uno studio preliminare del comportamento strutturale della cupola della Chiesa della SS. Trinità, rappresenta un esempio dell'importanza di un approccio multidisciplinare negli studi per l'analisi e la conservazione dei beni architettonici. Lo studio infatti ha approfondito le problematiche relative al maneggiare dati di diverso genere (nuvole di punti, dati geometrici, dati materici) e di renderli utilizzabili ed efficaci nell'implementazione di modelli numerici.

## Bibliografia

- Anthoine, A. "Homogenisation theory." *International Journal of Solids and Structures* 32 (1997): 137-163.
- Bazant, Z.C.B.P., and S. Baweja. "Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: model B3." *Materials and Structures* 28 (1995): 357-365.
- Beer, G. "An Isoparametric joint\interface element for finite element analysis." *Int. J. Numer. Meth. Enging* 21 (1985): 585-600.
- Bernardini, A., et al. "Determinazione delle capacità portanti per carichi verticali e laterali di pannelli murati in tufo." *Atti del II Congresso Nazionale "La città difficile" dell'Associazione Italiana Ristrutturazioni e Consolidamento Costruzioni (ASS.I.R.C.CO)*, Maggio-Giugno 1984.
- Bernardini, F., J. Mittleman, H. Ruchmeier, C. Silva, and G. Taubin. "The Balla-Pivotin Algorithm for Surface Reconstruction." *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics* 5, no. 4 (October-December 1999).
- Betti, M., L. Galano, and A. Vignoli. "Finite Element Modelling for Seismic Assessment of Historic Masonry Buildings." In *Earthquakes and Their Impact on Society*. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- Bouguer, P. *Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en dôme*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Paris, France, 1736.
- Carbone, I.V., A. Fiore, and G. Pistone. *Le costruzioni in muratura: interpretazione del comportamento statico e tecniche di intervento*. Milano: Hoepli, 2001.
- Carpinteri, A., S. Invernizzi, and G. Lacidogna. "In situ damage assessment and nonlinear modelling of a historical masonry tower." *Engineering Structures* 27 (2005): 387-395.
- Cavalagli, N., and V. Gusella. "Structural Investigation of 18th-Century Ogival Masonry Domes: From Carlo Fontana to Bernardo Vittone." *International Journal of Architectural Heritage* 9 (2014): 265-276.
- Chiostrini, S., and A. Vignoli. "An experimental research program on the behavior of stone masonry structures." *ASTM Journal of Testing and Evaluation* 20 (1992): 190-206.
- Chiostrini, S., and A. Vignoli. "In-situ determination of the strength properties of masonry walls by destructive shear and compression tests." *Masonry International* 7 (1994): 87-96.
- Chiostrini, S., L. Galano, and A. Vignoli. "In situ shear and compression tests in ancient stone masonry walls of Tuscany, Italy." *ASTM Journal of Testing and Evaluation* 31 (2003): 289-304.
- Chiostrini, S., L. Galano, and A. Vignoli. "On the determination of strength of ancient masonry walls via experimental tests." In *Proceedings of 12 WCEE*, January 2000.

- Cicogni, P., M. Callieri, F. Ganovelli, M. Corsini, M. Dellepiane, and G. Ranzuglia. "MeshLab: an Open-Source Mesch Processing Tool." *Sixth Eurographics Italian Chapter Conference*, 2008: 129-136.
- Coisson, E., and F. Ottoni. "Monitoring historical structures, from their past to their future." *Built Heritage 2013 Monitoring Conservation Management*. 2013.
- Collura, F., and F. Presenti. "La cupola del Brunelleschi: studio di vulnerabilità sismica attraverso modellazione agli elementi finiti e modelli piani semplificati." *Bollettino Ingegneri Firenze*. 2010. 13-26.
- Colombo, G. *Manuale dell'ingegnere*. 83° edizione. Milano: Hoepli, 1997.
- Cominelli, S. "Comportamento delle murature storiche al collasso : meccanismi di rottura, effetti del confinamento e fenomeni reologici." Quaderno del Dottorato, DICATAM, Università degli Studi di Brescia, 2014, 127-165.
- Como, M. *Statica delle costruzioni storiche in muratura*. Roma, Italy: Aracne Editrice, 2010.
- Consiglio, A. *Guida Tecnica per l'impiego razionale del marmo*. Edited by Industria Italiana dal Marmo. Milano : Rizzoli Grafica, 1972.
- Contro, R., and R. Nova. "., Modello fisico e matematico del legame sforzi-deformazioni e del comportamento a rottura della muratura." *Corso di I.P. sul Comp. Statico e Sismico delle Strutture Murarie*. Bergamo: ISMES, 1983.
- Cundall, P.A. "A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems." in *Proceedings of the Symposium on Rock Fracture (ISRM)* 1, paper II-8 (1971).
- De Luca, F., and M. Nardini. *Dietro le quinte. Tecniche d'avanguardia nella progettazione contemporanea*. Vol. 135, in *Universale di architettura*, edited by A. Saggio. Torino: Testo & Immagine, 2002.
- Del Piero, G. "Le costruzioni in muratura." *Lezioni tenute al 2° convegno di studio sul consolidamento delle costruzioni*. Udine, 1983.
- Del Piero, G. *Le costruzioni in muratura*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984.
- Drucker, D.C., and W. Prager. "Soil mechanics and plastic analysis or limit design." *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952): 157-165.
- Fouchal, F., F. Lebon, and I. Titeux. "Contribution to the modelling of interfaces in masonry construction." *Construction and Building Materials* 23 (2009): 2428-2441.
- Galassi, S., G. Misseri, L. ROvero, and G. Tempesta. "Equilibrium analysis of masonry domes, on the analytical interpretation of the Eddy- Lévy graphical method." *International Journal of Architectural Heritage* 11 (2017): 1195-1211.

- Hatzigeorgiou, G.D., and D.E. Beskos. "Static analysis of 3D damaged solids and structures by BEM." *Engineering Analysis with Boundary Element* 26 (2002): 521-526.
- Hendry, A.W. *Statica delle strutture in muratura di mattoni*. Pàtron, 1986.
- Heyman, J. *Equilibrium of shell structures*. Oxford, UK: Clarendon Press, 1977.
- Heyman, J. "Masonry Construction: Structural Mechanics and Other Aspect." (C.R. Calladine) 1992.
- Heyman, J. "On shell solutions of masonry domes." *International Journal of Solids and Structures* 2 (1967): 227-240.
- Heyman, J. *The masonry arch*. Chichester, UK: Ellis Horwood, 1982.
- Heyman, J. "The safety of masonry arches." *International Journal of Mechanical Sciences* 11 (1969): 363-385.
- Heyman, J. "The stone skeleton." *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249-279.
- Heyman, J. "The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture." Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- Huerta. "Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach." *Historical constructions* (P. B. Lourenco and P. Roca), 2001.
- Huerta, Santiago. "Oval Domes: History, Geometry and Mechanics." *Nexus Network Journal*, 9 (2), 2007: 211-248.
- Lau, W.W. "Equilibrium analysis of masonry domes." MSc Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 2006.
- Le Pape, Y., A. Anthoine, and P. Pegon. "Seismic assessment of masonry structures - Multi-scale numerical modelling." *Historical Constructions* (P. Roca), 2001.
- Lofti, H.R., and P.B. Shing. "Interface model applied to fracture of masonry structures." *J. Struct. Engrg. ASCE* 120 (1994): 63-80.
- Lourenço, P.B., and J. Rots. "A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures." *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 123 (1997): 660-668.
- Lourenço, P.B., G. Milani, A. Tralli, and A. Zucchini. "Analysis of masonry structures: review of and recent trends in homogenization techniques." *Can. J. Civ. Eng.* 34 (2007): 1443-1457.
- Lucchesi, M., C. Padovani, G. Pasquinelli, and N. Zaini. "Static analysis of masonry vaults, constitutive model and numerical analysis." *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 2 (2007): 221-244.
- Luciano, R., and E. Sacco. "Homogenization technique and damage model for old masonry material." *Int. J. Solids Structures* 34 (1997): 3191-3208.

- Macchi, G. "Diagnosis of the facade of St. Peter's Basilica in Rome." *Historical Constructions* (Lourenço, P.B.; Roca, P.), 2001.
- Mc Henry, D. *A new Aspect of 'Creep of Concrete and its application to design'*. Proc. ASTM, 1943.
- Mery, E.H.F. "Sur l'équilibre des voûtes en berceau." *Annales des ponts et chaussées*, 1840: 50-70.
- Milani, G., and A. Tralli. "A simple meso-macro model based on SQP for the non-linear analysis of masonry double curvature structures." *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012): 808-834.
- Ministero delle infrastrutture e dei trasporti. "Istruzioni per l'applicazione dell' "Aggiornamento delle "Norme Tecniche per le Costruzioni"" di cui al D.M. 17-01-2018." *Gazzetta Ufficiale* , 11 02 2019, suppl. ord. n.5 ed.
- Ministero delle instrastutture e dei trasporti. "Aggiornamento delle "NOrme Tecniche per la Costruzioni". " *Gazzetta Ufficiale*, 20 02 2018, suppl. ord. n.8 ed.
- Moropoulou, A., K.C. Labropoulos, E.T. Delegou, M. Karoglou, and A. Bakolas. "Non-destructive techniques as a tool for the protection of built cultural heritage." *Construction and Building Materials* 48 (2013): 1222-1239.
- Nascè, V., and D. Sabia. "Teoria e pratica nella costruzione nei ponti in muratura tra XVIII e XIX secolo." In *Carlo Bernardo Mosca, 1792-1867 : un ingegnere architetto tra Illuminismo e Restaurazione*, 29-38. 1997.
- Navier, C. *Résumé des leçons données a l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique a l'établissement des constructions et des machines*. Paris: Didot, 1826.
- Ottoni, F. "From geometrical and crack survey to static analysis method: The case study of Santa Maria del Quartiere dome in Parma (Italy)." *Structural Analysis of Historic Construction* (Taylor & Francis Group), 2008.
- Page, A.W. *A Model for the In-Plane Deformation and Failure of Brickwork*. Engineering bulletin (University of Newcastle (N.S.W.). Dept. of Civil Engineering) ; CE8, 1978.
- Page, A.W. "Finite element model for masonry." *J. Struct. Div. ASCE* 104 (1978): 1267-1285.
- Page, A.W., W. Samarasinghe, and A.W. Hendry. "On the Failure of Masonry Shear Walls." *Int. J. Masonry Constr.* 1 (1980).
- Pagnoni, T. "Seismic analysis of masonry and block structures with the discrete element method." *Proceedings of the 10th European Conference on Earthquake Engineering*. Rotterdam: G. Duma, 1994. 1669-1674.

- Pagnoni, T., and I. Vanzi. "Experimental and numerical study of the seismic response of block structures." *Computer Methods in Structural Masonry* (3, eds. J. Middleton and G. N. Pande, Swansea: Books & Journal International), 1995: 213-222.
- Panzeca, T., F. Cucco, and M. Salerno. "Impiego dei sottodomini via SBEM nell'analisi delle murature." *XVII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale*. Alghero (Italy), 2008.
- Papia, M. "Analysis of infilled frames using a coupled finite element and boundary element solution scheme." *nt. J. Numerical Meth. in Engrg.* 26 (1988): 731-772.
- Pavlovic, M., E. Reccia, and A. Cecchi. "A Procedure to Investigate the Collapse Behavior of Masonry Domes: Some Meaningful Cases." *International Journal of Architectural Heritage* 10 (2014): 67-83.
- Pegon, P., and A. Anthoine. *Numerical strategies for solving continuum damage problems with softening: application to the homogenization of masonry*. Vol. 64, in *Computer and Structures*, 623-642. 1997.
- Pelà, L. "Continuum Damage Model for Nonlinear Analysis of Masonry Structures." Ph. D. Thesis, Barcelona, Spain, 2009.
- Peretti, L. "Rocce del Piemonte usate come pietre da taglio e da decorazione." *Marmi Pietre Graniti*, Marzo-Aprile 1938.
- Pintus, R., K. Pal, Y. Yang, T. Weyrich, E. Gobetti, and H. Ruchmeier. "Geometric Analysis in Cultural Heritage." *EUROGRAPHICS Workshops on Graphics and Cultural Heritage*. Klein, R.; Santos, P., 2014.
- Pistone, G., and R. Roccati. "Testing of Large Undisturbed Sample of Old Masonry." *Proceedings of the eighth International Brick/Block Masonry Conference*, 1988.
- Poleni, G. *Memorie storiche della gran cupola del tempio vaticano e de' danni di essa, e de' ristoramenti loro*. Padua, Italy: Stamperia del Seminario, 1748.
- Ranzuglia, G., M. Callieri, M. Dellepiane, P. Cignoni, and R. Scopigno. "Efficient and Flexible Sampling with Blue Noise Properties of Triangular Meshes." *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics* 18, no. 6 (2012): 914-924.
- Rashed, Y.F., M.H. Abdalla, and M.A.R. Youssef. "Boundary element analysis of masonry structures." Edited by Wesswx Institute if technology. *Boundary Element XIX* (Brescia, C.A.), 1997.
- Rekik, A., and A. Gasser. "Numerical homogenization model for effective creep properties of microcracked masonry." *International Journal of Solids and Structures*, 2016.
- Salonia, P., V. Bellucci, S. Scolastico, A. Marcolongo, and T. Leti Messina. "3D survey technologies for reconstruction, analysis and diagnosis in the conservation process of cultural heritage." *XXI International CIPA Symposium*. Athens, Greece, 2007.

Samarasinghe, W. “In Plane Strength of Brickwork.” Ph.D. Thesis, University of Edinburgh, 1980.

Scotti, A. *Ascanio Vitozzi ingegnere ducale a Torino*. Firenze: La Nuova Italia, 1969.

Serlio, Sebastiano. *Tutte le opere di Architettura et Prospettiva di Sebastiano Serlio*. Venezia: presso gli heredi di Francesco de’ Franceschi, 1600.

Siddi, Francesco. *Grafica 3D con Blender*. Apogeo, 2014.

Simon, J., and K. Bagi. “Discrete Element Analysis of the Minimum Thickness of Oval Masonry Domes.” *International Journal of Architectural Heritage*, 2016: 457-475.

Song, C.K., and S.W. Kim. “Reverse Engineering: Autonomus Digitization of Free-Formed Surfaces on a CNC Coordinate Measuring Machine.” *Int. J. Mach. Tool Manufact* 37, no. 7 (1997): 1041-1051.

Spina, Alessio. “Analisi degli effetti del comportamento a breve e lungo termine di torri in muratura: il caso della torre campanaria del Duomo di Torino.” Tesi di laurea magistrale, Collegio di Ingegneria Civile, Politecnico di Torino, Torino, 2018.

Viglino Davico, M. *Ascanio Vitozzi: ingegnere militare, urbanista, architetto (1539-1615)*. Ponte San Giovanni: Quattroemme, 2003.

Villa, Werner Stefano. *Autodesk AutoCad 2017. Guida completa per architettura, meccanica e design*. Tecniche Nuove, 2016.

William, K.J., and E.D. Warnke. “Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete.” *In Proceeding of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, 1975.

Zucchini, A., and P-B. Lourenço. “A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry.” *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002): 3233-3255.