

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale

in Ingegneria Meccanica

Tesi di Laurea Magistrale

**Ottimizzazione delle prestazioni dinamiche di un banco prova
trasmissioni HIL**



Relatori

Prof. Enrico Galvagno

Correlatori

Ing. Antonio Tota

Prof. Alessandro Vigliani

Ing. Mattia Martinengo

Candidato

Alessandro Riccio

10 Aprile 2019

A chi ci ha sempre creduto...

Indice

<i>Ringraziamenti</i>	4
<i>Introduzione</i>	5
1. Descrizione del banco	6
1.2. Componenti meccanici	7
1.2.1. Azionamenti elettrici	8
1.2.2. Rete CAN.....	9
1.2.3. Sensori di misura	9
1.2.4. Hardware per acquisizione dati e controllo del banco	10
1.2.5. Software per acquisizione dati e controllo del banco	13
2. Metodi e tecniche per l'analisi di un sistema meccanico controllato	14
2.1. Equazioni in open loop control OL: controllo di velocità M2	16
2.1.1. Approccio Newtoniano	16
2.1.2. Approccio Lagrangiano	17
2.1.3. Equazioni nel dominio del tempo	19
2.1.4. Equazioni nello spazio degli stati	21
2.1.5. Metodo di Duncan	26
2.2. Effetti del controllore PID sulle equazioni	27
2.3. Derivata limitata in banda	30
2.4. Funzione di trasferimento sistema non controllato e smorzato.....	34
2.5. Funzione di trasferimento per un sistema controllato in retroazione.....	38
2.6. Influenza del guadagno proporzionale	40
2.7. Influenza del guadagno derivativo.....	44
2.8. Influenza del guadagno integrativo.....	47
3. Studio del sistema controllato in CL con controllo di velocità sul motore M2	50
3.1. Modifica delle equazioni in closed loop	50
3.2. Analisi dei risultati tra CL e OL	55
3.3. Analisi dinamica del sistema non smorzato e non controllato.....	56
3.4. Analisi dinamica del sistema smorzato e non controllato	58
3.5. Recettanza del sistema smorzato e non controllato	60
3.5.1. Approccio con inversione della matrice di rigidità dinamica	60
3.5.2. Approccio modale	61
3.6. Analisi dinamica del sistema smorzato e controllato.....	66
3.7. Funzioni di trasferimento del sistema smorzato e controllato.....	68
3.8. Sensitività del modello con controllo di velocità M2	71
3.9. Scelta dei guadagni ottimali.....	80

3.10. Modello Simulink.....	83
4. Effetto dell'encoder sulle prestazioni del banco prova	86
4.1. Funzionamento dell'encoder	86
4.2. Modello Simulink dell'encoder.....	88
4.3. Effetti delle caratteristiche dell'encoder sul segnale	95
4.3. Effetti dell'encoder sulla rumorosità	108
4.3.1. Spettrogramma	108
4.4. Influenza encoder sul banco prova	109
<i>Conclusioni</i>	117
<i>Bibliografia</i>	118

Ringraziamenti

Il mio percorso universitario dopo tante fatiche è finalmente giunto al termine. Un percorso iniziato in salita visto lo scetticismo generale che ha suscitato in tutti la mia decisione di studiare ingegneria. Nonostante il superamento non brillantissimo del primo step, non contento, ho deciso di alzare ancora di più l'asticella, trasferendomi in una nuova città e iniziare una nuova vita puntando su me stesso e avendo la fortuna di avere persone che si sono ricredute e hanno iniziato anche loro a credere in me. Con una famiglia forte, sempre pronta a sostenerti e ad esserti vicino nei momenti di difficoltà siamo giunti ad oggi, al coronamento di un traguardo che solo a pensarci mette ancora i brividi.

Un ringraziamento particolare va al prof. Galvagno, fonte di sapienza inesauribile che con la sua disponibilità e professionalità, messa a mia disposizione, mi ha dato la possibilità di scoprire un mondo nuovo durante il mio percorso di tesi e di ampliare le mie conoscenze. Il suo aiuto è stato fondamentale per arrivare fin qui.

Grazie mamma e papà che ci siete sempre stati, che ci siete ora e che sarete sempre con me. Grazie per i valori trasmessi e i sacrifici che siete stati costretti a fare, ma so per certo che oggi benedite tutti quei giorni e ore in più passate a lavoro per essere qui oggi a godervi questa grande gioia e soddisfazione. Sono orgoglioso per quello che avete fatto per me, ed è solo grazie a voi e alla vostra forza d'animo se oggi sono diventato quello che sono e, anche se non sembra, ma la mela non cade mai lontano dall'albero.

Grazie a Ilaria, la mia sorellina che sta crescendo e che sono certo ci darà tante soddisfazioni. Sempre pronta ad una parola di conforto, a starmi vicino e a tirarmi su di morale quando le cose non vanno bene. Forse la prima a credere in me. Solo io e te sappiamo quello che abbiamo passato e, credimi, dobbiamo passarne ancora tante assieme.

Un grazie infinito va al mio amore da una vita, Monica. Grazie per aver scommesso su di me accettando compromessi che probabilmente nessuno avrebbe mai fatto, sacrificando il nostro rapporto affinché io mi sia potuto realizzare e coronare i miei obiettivi. Spero che un giorno possa ricambiare tutto ciò, non so come avrei fatto senza di te.

Grazie ai miei carissimi amici, sempre pronti ad aiutarmi nei momenti di difficoltà e spalle solide a cui chiedere consigli e distrazione nei momenti di studio più intenso. Grazie a Bruno, Manuel (o Gianluca vedi tu), Francesco, Mattia e Antonio, fratelli conosciuti a Torino, ma sembrava di conoscerli già da una vita vista la sana e forte amicizia che si è venuta a creare, che speriamo durerà per molto tempo ancora. Grazie a Giacomo, Daniele, Nello, Giovanni e Peppe, fratelli da una vita, cresciuti assieme e, nonostante la distanza, sempre vicini con il pensiero e il loro costante interesse per ciò che mi accade. Un punto di riferimento importante per me, sperando che un giorno tutti noi possiamo raggiungere e condividere insieme i nostri sogni come state facendo voi con me adesso.

Introduzione

Il seguente lavoro di tesi vuole descrivere il percorso effettuato per il miglioramento delle prestazioni dinamiche del banco trasmissioni, allestito nel laboratorio di meccanica del Politecnico di Torino, in particolare lo studio degli effetti dei controllori PID sul comportamento dinamico del banco.

Nel primo capitolo si spiega in sintesi quali sono le funzioni principali di un banco prova e qual è la sua utilità. Scendendo nel particolare si analizza tutta la componentistica che compone il banco prova sia lato software che hardware e le loro funzioni.

Nel secondo capitolo, ci si dedica in prima battuta allo studio di tecniche e di metodi per l'analisi di sistemi controllati. Inizialmente attraverso una modellazione a parametri concentrati del banco prova in open loop si ricavano le caratteristiche dinamiche del sistema, mentre successivamente si analizzano gli effetti del controllore PID e del filtro passa basso sulle prestazioni dinamiche del banco. Infine, si ricavano le funzioni di trasferimento e si studia l'effetto dei singoli parametri del controllore PID su di esse.

Nel terzo capitolo invece, si passa allo studio del banco nel caso di closed loop, in particolare nel momento in cui si attivi il controllo di velocità sul motore M2. In questo capitolo si studia l'effetto del controllo sulle equazioni e un'ampia parte viene dedicata al confronto tra i risultati ottenuti in open loop e quelli in closed loop. Ottenuti questi risultati ci si occupa della scelta dei parametri ottimali per il funzionamento ottimale del banco con questo controllo attivo.

Nel quarto capitolo, infine, si analizza anche l'effetto dell'encoder che influisce sulle prestazioni del banco. In particolare, si studia l'effetto della risoluzione e della frequenza di clock sia in termini di rumorosità prodotta sia in termini di prestazioni del banco vero e proprio. In questa ultima parte si comparano, inoltre anche un modello analitico dell'encoder che un modello simulato più preciso, dove si studiano in maniera più accurata gli errori che inevitabilmente porta l'utilizzo dell'encoder.

CAPITOLO 1

Banco prova trasmissioni

1. Descrizione del banco

La linea di trasmissione classica di un autoveicolo a trazione anteriore è costituita dal motore termico, da un volano per attenuare le irregolarità di coppia del motore, da un cambio, dal differenziale a cui sono collegati i due semiassi e i rispettivi gruppi ruota, fissati alla scocca per mezzo della sospensione. Il banco prova trasmissioni allestito vuole riprodurre la linea di trasmissione montata su Alfa Romeo Giulietta 1.4TB 170 CV per permettere di effettuare valutazioni dinamiche di NVH (Noise Vibration and Harshness) di alcuni suoi componenti, in particolare del cambio doppia frizione DCT635 di cui è equipaggiata, come se tali componenti fossero realmente montati sulla vettura.



Figura 1.1 – *Banco prova trasmissioni*

Alcuni di questi ultimi montati sul banco sono gli stessi montati sulla vettura in esame, come, ad esempio, il differenziale, il semiasse, il disco freno, la pinza freno e il mozzo ruota; altri sono stati modificati, come il differenziale che è stato bloccato per poter utilizzare una sola uscita; altri ancora, come il motore termico e il veicolo stesso, vengono emulati.

Sul banco sono stati riprodotti i cablaggi elettrici e la rete CAN realmente presente sul veicolo e sono disponibili numerosi sensori per l'acquisizione dei segnali di interesse.

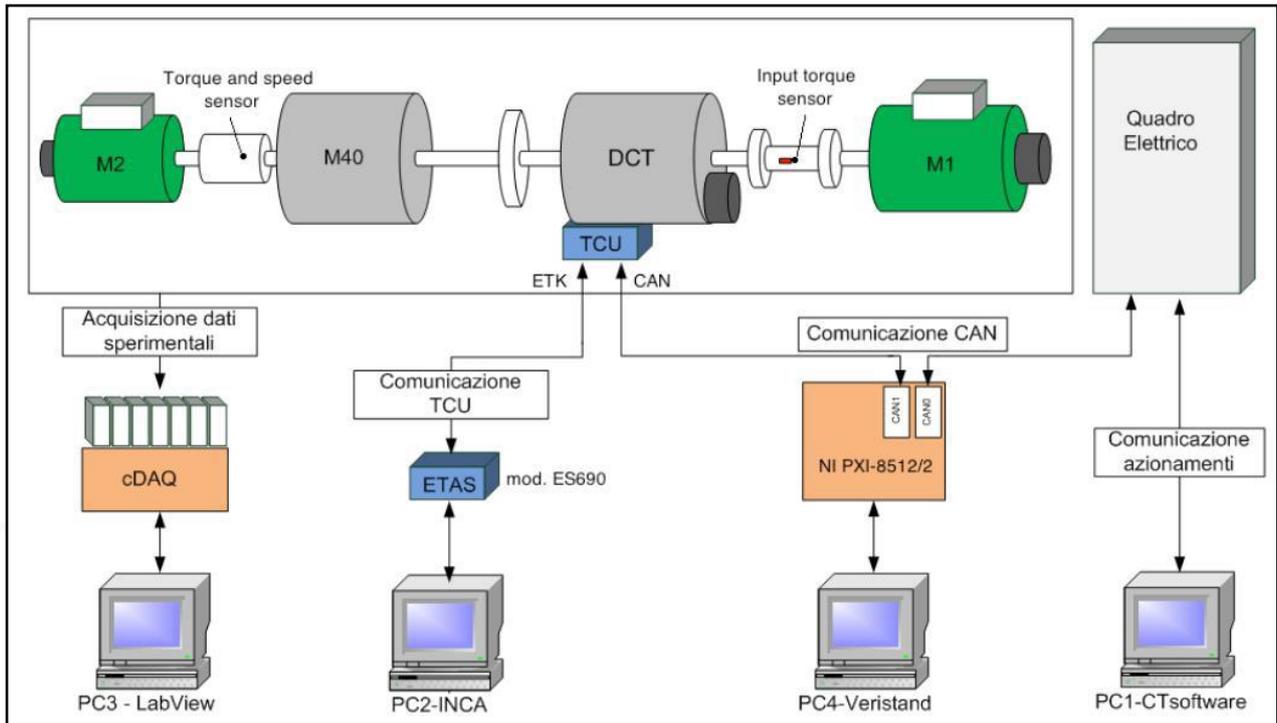


Fig.1.2 - Schema meccanico del banco

1.2. Componenti meccanici

Si descrivono brevemente i principali componenti meccanici montati sul banco¹:

- Motore M1: è un motore elettrico asincrono trifase ad una coppia polare da 37 kW. È caratterizzato da una coppia nominale di 121 Nm e da una velocità nominale 2920 rpm. È azionato mediante un inverter con capacità di sovraccarico del 150% che ne consente un controllo sui quattro quadranti del piano coppia-velocità. Per l'applicazione in questione viene controllato in coppia con una retroazione di velocità e di coppia ed è utilizzato per simulare il motore termico del veicolo.
- DMF: è il volano bi-massa montato sulle normali vetture di produzione del tipo indicato.
- Cambio DCT635: è il componente fondamentale del banco, quello di cui si vogliono valutare le prestazioni di NVH, è un cambio a doppia frizione con 6 rapporti + RM e una coppia massima trasmissibile di 350 Nm; è configurato per l'applicazione Alfa Romeo Giulietta 1.4TB 170 CV.

[1] Una descrizione approfondita dell'allestimento del banco è disponibile in A. CIVALLERI, *Allestimento di un banco prova per cambi a doppia frizione*, Tesi di Laurea Magistrale - Politecnico di Torino, 2014.

- Differenziale: si tratta del differenziale normalmente montato su vettura, modificato² per poter utilizzare una sola uscita, essendo interessati a simulare solo la dinamica longitudinale ma al tempo stesso non volendo perdere i giochi e i possibili rumori interni.
- Semiasse e mozzo ruota: sono gli stessi montati sui veicoli di produzione; non è presente né la ruota né lo pneumatico.
- Cambio M40: è un cambio meccanico a 6 rapporti + RM, che viene utilizzato per aumentare la flessibilità del banco permettendo di adattare, selezionando il rapporto opportuno, la zona di lavoro del motore M2.
- Motore M2: è un motore elettrico asincrono trifase a tre coppie polari da 11 kW. È caratterizzato da una coppia nominale di 110 Nm e da una velocità nominale 955 rpm. È azionato mediante un inverter con capacità di sovraccarico del 150% che ne consente un controllo sui quattro quadranti del piano coppia-velocità. Per l'applicazione in questione viene controllato in velocità con retroazione di velocità e di coppia ed è utilizzato per simulare il carico inerziale del veicolo, la resistenza all'avanzamento e la pendenza della strada.

1.2.1. Azionamenti elettrici

Come detto, i due motori elettrici vengono azionati mediante inverter che ne permettono il controllo in anello aperto o in anello chiuso, attraverso controllori PID, sia in coppia che in velocità.

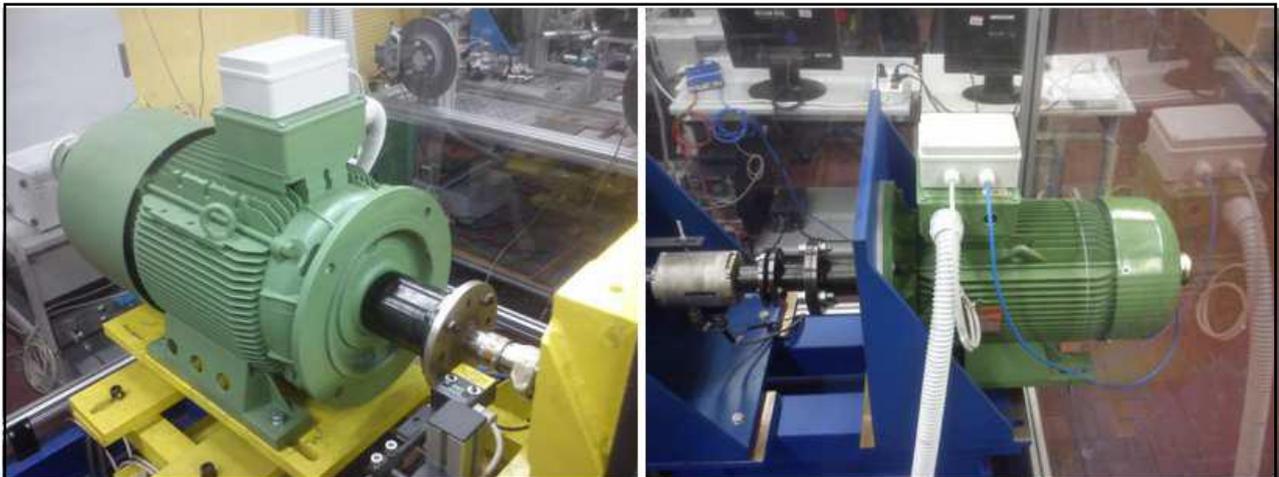


Fig.1.3 - Azionamenti

[2] Per le modifiche in dettaglio si veda N. VINCI, *Analisi sperimentale e modello torsionale di una trasmissione automobilistica*, Tesi di Laurea Magistrale - Politecnico di Torino, 2016.

Il quadro elettrico è dotato di un sistema detto Active Front End (AFE) che mette in comunicazione i due inverter tramite il bus in corrente continua consentendo lo scambio di energia ad alta efficienza e di rimandare nella rete del laboratorio il surplus di potenza che deriva dalla specifica condizione di funzionamento del banco (ad esempio frenata di entrambi i motori). Per il controllo in anello chiuso il microcontrollore presente all'interno del quadro elettrico utilizza le informazioni provenienti dai torsiometri e dagli encoder montati sul banco. Il quadro elettrico è dotato di un display con interfaccia di controllo e di una porta di rete per il collegamento di un pc, per il monitoraggio in tempo reale dei parametri degli inverter e per la loro programmazione.

1.2.2. Rete CAN

Sul banco sono state allestite due diverse reti CAN, ciascuna fornita del proprio database.

- CAN MOTORI: è la rete che è stata allestita per gestire la comunicazione tra gli azionamenti dei motori e la scheda CAN del PXI, a cui arrivano le richieste di coppie e velocità generate da un modello Simulink di controllo a dall'utente mediante il software VeriStand.
- CAN TCU: riproduce la rete CAN normalmente presente su una vettura; sul banco collega la TCU ad una seconda scheda CAN del PXI. Su questa rete è stato predisposto un nodo aggiuntivo a cui è possibile collegare un strumento chiamato CAN BUS Analyzer per registrare durante le prove tutti i segnali che transitano sulla rete, essendo questi di fondamentale importanza.

1.2.3. Sensori di misura

Sul banco prova sono montati molti sensori di diversa natura utilizzati per il controllo e la misura delle grandezze di interesse. Di seguito si riporta un elenco diviso per categoria.

- Encoder: sul motore M1 è montato un encoder bidirezionale con tacca di zero da 1024 impulsi al giro per misurarne la velocità di rotazione. La velocità del motore M2 è misurata con un encoder bidirezionale con tacca di zero da 4096 impulsi al giro.
- Torsiometri: a valle del motore M1 è montato un torsiometro Kistler³ particolarmente indicato per misure di coppia dinamiche; presenta una larghezza di banda di 3 kHz e una coppia massima di 500 Nm. A valle del motore M2 è montato un torsiotachimetro più datato, capace di resistere a coppie dinamiche di 226 Nm.

[3] Per il dettaglio della procedura di montaggio vedere S. CIRESA, *Controllo Hardware-in-the-Loop di un banco di prova per cambi a doppia frizione*, Tesi di Laurea Magistrale – Politecnico di Torino, 2014.



Fig.1.4 – a) Torsiometro motore 11 kW; b) Flangia strumentale motore 37 kW

- Sensori PickUp: il DCT è equipaggiato con sensori PickUp sulla seconda massa di volano, sulla corona differenziale, sul pignone differenziale del secondario inferiore e del secondario superiore, sulla prima e sulla terza marcia sul secondario inferiore e sulla seconda e sulla quarta marcia sul secondario superiore.
- Altri sensori: sul DCT sono montati anche due termocoppie, una per misurare la temperatura dell'olio di lubrificazione e l'altra per misurare quella del fluido idraulico, un accelerometro triassiale e un microfono.

1.2.4. Hardware per acquisizione dati e controllo del banco

L'acquisizione e il datalogging delle misure dei sensori è effettuato mediante un cDAQ di National Instrument. Si utilizza invece un Ni PXI-1031DC su cui sono montate: una scheda (NI PXI 8108) di ingressi ed uscite analogiche e digitali usata per sincronizzare con uno Start trigger le acquisizioni mediante cDAQ con il controllo mediante PXI e VeriStand, una scheda CAN (PXI 8512) con due porte per la gestione delle due reti CAN e una scheda FPGA (PXI 7813R) attualmente non utilizzata. La comunicazione e il controllo della TCU vengono effettuati mediante un modulo ETAS collegato alla stessa attraverso il cavo ETK.

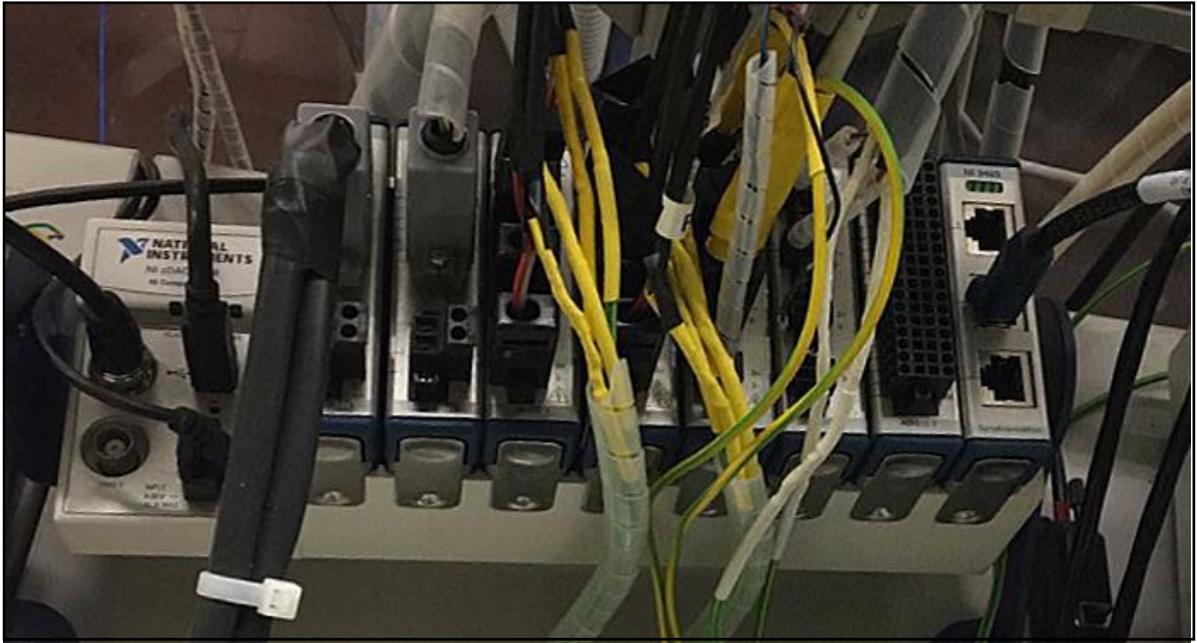


Fig.1.5 - cDAQ



Fig.1.6 – Schede CAN su PXI



Fig.1.7 – Modulo ETAS

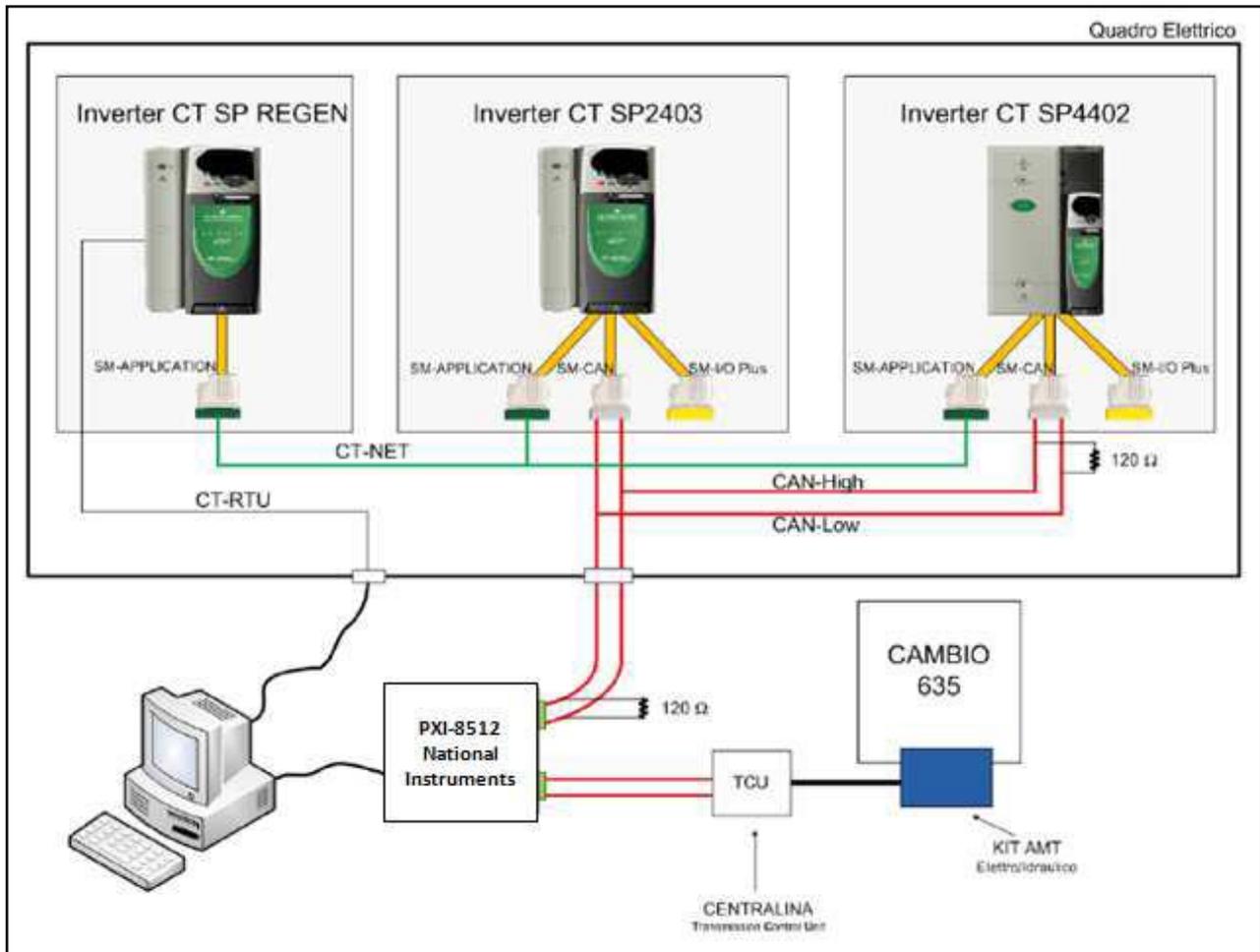


Fig.1.8 – Layout rete CAN

1.2.5. Software per acquisizione dati e controllo del banco

Per la comunicazione e il controllo del banco si utilizzano quattro diversi PC, ciascuno con funzioni diverse e software specifici:

- PC1: utilizzato per la programmazione e il controllo in tempo reale degli azionamenti elettrici tramite i software CTsoft, CTscope e SyptPro.
- PC2: collegato attraverso un cavo di rete al modulo ETAS, serve per il controllo in tempo reale della centralina attraverso il software INCA.
- PC3: è utilizzato per il datalogging, attraverso il software LabView, dei segnali acquisiti dalle schede cDAQ a cui è collegato mediante cavo USB.
- PC4: serve per la gestione del PXI e il controllo del banco attraverso il programma NI-VeriStand. Questo software permette infatti di realizzare un'interfaccia grafica intuitiva con cui controllare il banco e gestire il modello Simulink che, compilato sotto forma di DLL, viene mandato in esecuzione sul PXI.

CAPITOLO 2

Modellazione banco prova

2. Metodi e tecniche per l'analisi di un sistema meccanico controllato

Dopo una breve descrizione delle componenti del banco prova e di tutte le componenti necessarie per svolgere le prove di cui si ha bisogno, si intende svolgere all'interno di questo capitolo una descrizione un'analisi dinamica del sistema. In primis, si intende fare una modellazione a parametri concentrati del sistema complessivo, e poi successivamente si svolgono le analisi per studiare il comportamento del sistema in diverse condizioni. Nella figura sottostante viene riportato il modello a parametri concentrati del sistema, dove, in questa prima analisi si intende tener attivo solo il controllo di velocità sul motore M2 per riuscire a trovare in quelle condizioni i parametri ottimali per svolgere la prova.

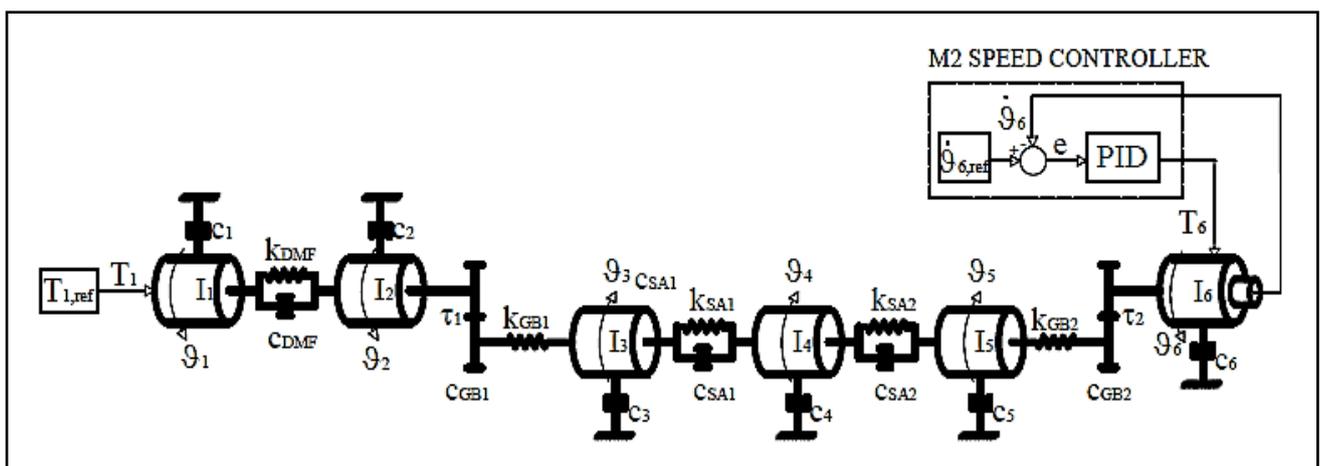


Figura 2.1 - Schema Banco prova

Con riferimento alla nomenclatura di fig.1, vengono riportati di seguito i dati del sistema:

Inerzie [kgm ²]		Smorzamenti [Nms/rad]		Rigidezza [Nm/rad]	
I ₁	0.1950	c ₁	0.1	k _{DMF}	458.37
I ₂	0.1479	c ₂	0.1,	k _{SA1}	61030
I ₃	0.1227	c ₃	0.01	k _{SA2}	2972.1
I ₄	0.1800	c ₄	0.17		
I ₅	0.1718	c ₅	4		
I ₆	0.0688	c ₆	0.2		
		c _{DMF}	20		
		c _{SA1}	0.15		
		c _{SA2}	0.45		
		c _{GB1}	0.5		
		c _{GB2}	0.5		

Tabella 1 – *Dati del sistema*

Per quanto riguarda, invece, i valori delle rigidezze dei cambi, ovviamente essi sono diversi in base alla marcia inserita. I dati vengono riportati nella seguente tabella:

	I	II	III	IV	V	VI
K_{GB1}	2945050,7	844431,6	103433,4	407695,7	35944,4	196535,4
K_{GB2}	382857,4	1097761	134463,42	530004	46727,7	255495,9

Tabella 2 – *Rigidezza DCT e M40 espressi in Nm/rad*

Vengono riportati anche i valori dei rapporti di trasmissione in base alla marcia scelta, dove per τ_1 si intendono i valori dei rapporti riferiti al DCT635, mentre per τ_2 quelli riferiti al cambio M40:

	I	II	III	IV	V	VI	R
τ_1	17.10	9.34	5.90	4.02	3.10	2.56	-16.47
τ_2	17.59	9.91	6.16	4.03	2.93	2.33	-17.23

Tabella 3 – *Rapporti di trasmissione*

2.1. Equazioni in open loop control OL: controllo di velocità M2

Per ricavare le equazioni in caso di OL del banco di prova, con controllo di velocità del motore M2, è possibile seguire due approcci che portano allo stesso risultato: l'approccio Newtoniano e quello di Lagrange.

2.1.1. Approccio Newtoniano

Il seguente approccio sfrutta il diagramma di corpo libero dell'oggetto che si vuole studiare andando a scrivere e riportare le forze che agiscono sull'oggetto stesso. Una volta scelto il verso positivo e negativo delle forze e dei momenti si ottiene l'equilibrio delle forze e dei momenti attorno ad un polo arbitrario. Facendo lo stesso procedimento per tutte le parti che costituiscono il sistema è possibile ricavare le matrici di massa [M], smorzamento [c] e rigidità [K] essendo un sistema a più gradi di libertà. Si riportano le equazioni così ottenute per ogni singolo elemento:

Motore M1

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{DMF}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_{DMF}(\theta_1 - \theta_2) + c_1 \dot{\theta}_1 = T_{M1} \quad (2.1)$$

DMF – Volano Bimassa

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 \dot{\theta}_2 + k_{GB1} \left(\frac{\theta_2}{\tau_1^2} - \frac{\theta_3}{\tau_1} \right) + \frac{c_{GB1} \dot{\theta}_2}{\tau_1^2} - k_{DMF}(\theta_1 - \theta_2) - c_{DMF}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = 0 \quad (2.2)$$

Cambio DCT635

$$I_3 \ddot{\theta}_3 + c_3 \dot{\theta}_3 + c_{SA1}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) + k_{SA1}(\theta_3 - \theta_4) - k_{GB1} \left(\frac{\theta_2}{\tau_2} - \theta_3 \right) = 0 \quad (2.3)$$

Freno

$$I_4 \ddot{\theta}_4 + c_4 \dot{\theta}_4 - k_{SA1}(\theta_3 - \theta_4) - c_{SA1}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) + k_{SA2}(\theta_4 - \theta_5) + c_{SA2}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) = 0 \quad (2.4)$$

Cambio M40

$$I_5 \ddot{\theta}_5 + c_5 \dot{\theta}_5 + k_{GB2} \left(\theta_5 - \frac{\theta_6}{\tau_2} \right) - k_{SA2}(\theta_4 - \theta_5) - c_{SA2}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) = 0 \quad (2.5)$$

Motore M2

$$I_6 \ddot{\theta}_6 + c_6 \dot{\theta}_6 - k_{GB2} \left(\frac{\theta_5}{\tau_2} - \frac{\theta_6}{\tau_2^2} \right) + \frac{c_{GB2} \dot{\theta}_6}{\tau_2^2} = T_{M2} \quad (2.6)$$

2.1.2. Approccio Lagrangiano

Questo tipo di approccio è di tipo analitico, basato su considerazioni di tipo energetico. Una volta scelto il vettore delle coordinate generalizzate $\{q\}$, si sfrutta l'energia cinetica T e potenziale del sistema U e la funzione dissipativa F per ricavare le equazioni del sistema attraverso delle derivate rispetto al vettore delle coordinate generalizzate e la sua derivata rispetto al tempo, come si vedrà in seguito.

Il vettore delle coordinate generalizzate è un vettore colonna dove al suo interno sono riportati tutti i gradi di libertà del sistema:

$$\{q\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}^T \quad (2.7)$$

Energia potenziale U

$$U = \frac{1}{2}k_{DMF}(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}k_{GB1}\left(\frac{\theta_2}{\tau_2} - \theta_3\right)^2 + \frac{1}{2}k_{SA1}(\theta_3 - \theta_4)^2 + \frac{1}{2}k_{SA2}(\theta_4 - \theta_5)^2 + \frac{1}{2}k_{GB2}\left(\theta_5 - \frac{\theta_6}{\tau_2}\right)^2 \quad (2.8)$$

Energia cinetica T

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}I_5\dot{\theta}_5^2 + \frac{1}{2}I_6\dot{\theta}_6^2 \quad (2.9)$$

La funzione dissipativa F viene introdotta nel momento in cui sono presenti smorzamenti o altri componenti che dissipano energia all'interno del sistema.

Funzione dissipativa di Rayleigh F

$$F = \frac{1}{2}c_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}c_{DMF}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}c_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}c_{GB1}\frac{\dot{\theta}_2^2}{\tau_2} + \frac{1}{2}c_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}c_{SA1}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4)^2 + \frac{1}{2}c_4\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}c_{SA2}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)^2 + \frac{1}{2}c_5\dot{\theta}_5^2 + \frac{1}{2}c_6\dot{\theta}_6^2 + \frac{1}{2}c_{GB2}\frac{\dot{\theta}_6^2}{\tau_2} \quad (2.10)$$

La forza generalizzate Q vengono ricavate dalle forze non conservative del sistema e, in base al vettore posizione r , è possibile ricavare il vettore Q_j , come segue:

$$F_{NC} = \{T_{M1}, T_{M2}\} \quad (2.11)$$

$$r = \{\theta_1\hat{i}, \theta_6\hat{i}\} \quad (2.12)$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^m F_{i,NC} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

Dove m è il numero di forza esterne applicate al sistema, mentre n è il numero di gradi di libertà del sistema.

Per ottenere un calcolo più rapido si introduce la funzione Lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$, ottenuta come si può vedere, dalla differenza tra l'energia potenziale e quella cinetica.

Una volta scritta la Lagrangiana per tutte l'equazione è possibile ottenere l'equazione del moto attraverso la seguente equazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2.14)$$

Si riportano di seguito tutti i passaggi necessari per ottenere l'equazione con $q_1 = \theta_1$, cioè le equazioni relative al primo grado di libertà. Ovviamente facendo gli stessi passaggi per tutti gli altri valori di $\{q\}$ si ottengono tutte le equazioni che descrivono il comportamento del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = I_1 \ddot{\theta}_1 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = k_{DMF}(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}_1} = c_1 \dot{\theta}_1 + c_{DMF}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (2.17)$$

$$Q_1 = T_{M1} \cdot \frac{\partial \theta_1 \hat{t}}{\partial \theta_1} + T_{M2} \cdot \frac{\partial \theta_2 \hat{t}}{\partial \theta_1} = T_{M1} \hat{t} \quad (2.18)$$

In definitiva, per $q_1 = \theta_1$ si ottiene:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + k_{DMF}(\theta_1 - \theta_2) + c_1 \dot{\theta}_1 + c_{DMF}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_{M1} \quad (2.19)$$

Quindi, facendo gli stessi passaggi per gli altri gradi di libertà si ottengono le seguenti equazioni:

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + k_{GB1} \left(\frac{\theta_2}{\tau_1^2} - \frac{\theta_3}{\tau_1} \right) - k_{DMF}(\theta_1 - \theta_2) + c_2 \dot{\theta}_2 - c_{DMF}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{c_{GB1} \dot{\theta}_2}{\tau_1^2} = 0 \quad (2.20)$$

$$I_3 \ddot{\theta}_3 + k_{SA1}(\theta_3 - \theta_4) - k_{GB1} \left(\frac{\theta_2}{\tau_2} - \theta_3 \right) + c_3 \dot{\theta}_3 + c_{SA1}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) = 0 \quad (2.21)$$

$$I_4 \ddot{\theta}_4 - k_{SA1}(\theta_3 - \theta_4) + k_{SA2}(\theta_4 - \theta_5) + c_4 \dot{\theta}_4 - c_{SA1}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) + c_{SA2}(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) = 0 \quad (2.22)$$

$$I_5 \ddot{\theta}_5 + k_{GB2} \left(\theta_5 - \frac{\theta_6}{\tau_2} \right) - k_{SA2} (\theta_4 - \theta_5) + c_5 \dot{\theta}_5 - c_{SA2} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) = 0 \quad (2.23)$$

$$I_6 \ddot{\theta}_6 - k_{GB2} \left(\frac{\theta_5}{\tau_2} - \frac{\theta_6}{\tau_2^2} \right) + c_6 \dot{\theta}_6 + \frac{c_{GB2} \dot{\theta}_6}{\tau_2^2} = T_{M2} \quad (2.24)$$

Ovviamente, come ci si poteva attendere, le equazioni che si ottengono utilizzando entrambi gli approcci sono uguali. Dalle equazioni si può notare che il sistema è del secondo ordine essendo governato da equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, ovvero un sistema lineare tempo invariante: LTI.

2.1.3. Equazioni nel dominio del tempo

Per riuscire ad ottenere e studiare il comportamento dinamico del sistema, le precedenti equazioni devono essere compattate all'interno di matrici. Le 3 matrici principali che si ottengono sono:

- $[M]$ la matrice di massa: una matrice diagonale dove gli unici elementi diversi da zero sono sulla diagonale principale e sono le inerzie degli elementi del sistema.
- $[C]$ la matrice di smorzamento: una matrice a banda che presenta gli elementi diversi da zero solo sulla diagonale principale e la sotto e sopra diagonale.
- $[K]$ la matrice di rigidità: anch'essa è una matrice a banda, dove valgono le stesse considerazioni fatte per la matrice di rigidità.

Vista la presenza dei vari rapporti di trasmissione, alcune rigidità e smorzamenti saranno opportunamente divisi per il quadrato del rapporto.

A questo punto, l'equazione del moto in forma matriciale avrà la seguente forma:

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{F\} \quad (2.25)$$

Dove:

$$[M] = \text{diag} \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\}^T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_{DMF} & -c_{DMF} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{DMF} & \frac{c_{GB1}}{\tau_1^2} + c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 + c_{SA1} & -c_{SA1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{SA1} & c_{SA1} + c_4 + c_{SA2} & -c_{SA2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{SA2} & c_5 + c_{SA2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 + \frac{c_{GB2}}{\tau_2^2} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{DMF} & -k_{DMF} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{DMF} & k_{DMF} + \frac{k_{GB1}}{\tau_1^2} & -\frac{k_{GB1}}{\tau_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_{GB1}}{\tau_1} & k_{GB1} + k_{SA1} & -k_{SA1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{SA1} & k_{SA1} + k_{SA2} & -k_{SA2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{SA2} & k_{GB2} + k_{SA2} & -\frac{k_{GB2}}{\tau_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{GB2}}{\tau_2} & \frac{k_{GB2}}{\tau_2^2} \end{bmatrix}$$

$$[F] = \{T_{M1}, 0, 0, 0, 0, T_{M2}\}^T$$

Le matrici $[M]$, $[C]$ e $[K]$ sono matrici che hanno una particolare composizione, cioè sono matrici a banda. La loro particolare composizione deriva dalla struttura seriale del sistema meccanico che si sta analizzando, ma non è ovviamente una regola generale. Queste matrici vengono dette matrici sparse i cui elementi diversi da zero sono tutti posti in una banda diagonale che comprende la diagonale principale e, opzionalmente, una o più diagonali alla sua destra od alla sua sinistra. Nel caso della matrice $[C]$ sulle diagonali a destra e a sinistra ci sono solo smorzamenti relativi che rappresentano l'accoppiamento tra due gradi di libertà consecutivi connessi mediante uno smorzamento viscoso. Nel caso della matrice $[K]$, invece, si può notare come sulla diagonale principale sono presenti le rigidezze relative all'elemento che si sta prendendo in considerazione in quella riga, mentre sulla diagonale a sinistra è presente la rigidezza che si trova a sinistra cambiato di segno, e di conseguenza, sulla diagonale a destra è presente la rigidezza presente a destra dell'elemento anch'essa cambiata di segno. Infatti, facendo l'esempio dell'elemento M40 caratterizzato dal grado di libertà θ_4 si può vedere che sulla diagonale principale saranno presenti le rigidezze a cui è collegato il cambio M40 quindi $k_{SA1} + k_{SA2}$, mentre sulla diagonale di sinistra avremo $-k_{SA1}$ che si trova appunto a sinistra del cambio, mentre sulla diagonale di destra avremo $-k_{SA2}$ che si trova a destra del cambio. In questo modo è possibile costruire la matrice di rigidezza $[K]$ partendo

anche dallo schema grafico del banco prova, però ricordando che in alcuni casi entra in gioco il rapporto di trasmissione τ che modifica alcune relazioni.

2.1.4. Equazioni nello spazio degli stati

Nell'analisi dei sistemi dinamici, una rappresentazione nello spazio degli stati è una descrizione di un sistema dinamico in cui si fa particolare riferimento alle variabili di stato del sistema. Le variabili di stato sono un sottoinsieme delle variabili del sistema, e ne rappresentano la situazione ad ogni dato istante di tempo.

Per il passaggio dal dominio del tempo allo spazio degli stati bisogna manipolare le matrici $[M]$, $[C]$ e $[K]$ per ottenere delle nuove matrici $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ che mettono in relazione le proprietà fisiche dell'oggetto con gli input e gli output.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu \\ y(t) = Cx(t) + Du \end{cases} \quad (2.26)$$

Dove x è il vettore di stato e y è il vettore contenente gli output.

Rispetto al caso precedente, si utilizzerà un cambio di notazione per lo spazio degli stati, dove la rotazione θ verrà sostituita con la x per coerenza con la formulazione utilizzata.

Operando la sostituzione seguente in modo da avere solo derivate del primo ordine:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \quad (2.27)$$

e, sostituendo nell'equazione (2.26), si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ M\dot{x}_2 + Cx_2 + Kx_1 = F \end{cases} \quad (2.28)$$

Isolando al primo membro le derivate si ottiene la prima equazione dello spazio degli stati:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[F] \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Dall'equazione (2.26) è possibile ricavare, nel seguente modo, le varie matrici dello spazio degli stati:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

La matrice $[A]$ così definita prende il nome "State Matrix" o "matrice dinamica", ed ha tante righe e tante colonne quanti sono gli stati definiti nel vettore x , cioè di dimensione

$2n \times 2n$. È una matrice quadrata, quindi, i cui valori all'interno sono numeri reali visto che derivano da grandezze fisiche.

Nel caso in esame è possibile scrivere, in maniera più compatta, la matrice in questo modo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0]_{6 \times 6} & [I]_{6 \times 6} \\ [A1]_{6 \times 6} & [A2]_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (2.31)$$

Dove

$$[A1] = [-[M]^{-1}[K]]_{6 \times 6} \quad (2.32)$$

La matrice A1, grazie alla struttura della matrice di massa M, è facilmente ottenibile, poiché: $[M] = \text{diag}(M_1, \dots, M_n)$ è invertibile se e solo se i valori M_1, \dots, M_n , che sono anche gli autovalori della matrice sono tutti invertibili, in particolare non nulli. In questo caso si ha:

$$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)^{-1} = \text{diag}(M_1^{-1}, \dots, M_n^{-1}) \quad (2.33)$$

Ovviamente, visto che i valori della matrice M sono tutti invertibili poiché, per definizione, un numero è invertibile se esiste nell'insieme di partenza un numero (il suo inverso) tale che moltiplicandoli si ottiene l'elemento neutro, cioè il valore 1. Visto che si lavora nel dominio dei numeri reali diversi da zero questa condizione è verificata.

Quindi, per il sistema in esame, ogni riga della sottomatrice [A1] sarà ottenibile come:

$$-\frac{1}{M_i} * \{K_i\} \quad (2.34)$$

Dove i è numero della riga ed $\{K_i\}$ è la riga della matrice [K]. Quindi:

$$\begin{aligned}
& \text{[A1]} \\
= & \begin{bmatrix}
-\frac{k_{DMF}}{I_1} & \frac{k_{DMF}}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{k_{DMF}}{I_2} & -\frac{k_{DMF} + \frac{k_{GB1}}{\tau_1^2}}{I_2} & \frac{k_{GB1}}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{k_{GB1}}{\tau_1 I_3} & -\frac{k_{GB1} + k_{SA1}}{I_3} & \frac{k_{SA1}}{I_3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{k_{SA1}}{I_4} & -\frac{k_{SA1} + k_{SA2}}{I_4} & \frac{k_{SA2}}{I_4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{k_{SA2}}{I_5} & -\frac{k_{GB2} + k_{SA2}}{I_5} & \frac{k_{GB2}}{\tau_2 I_5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{GB2}}{\tau_2 I_6} & -\frac{k_{GB2}}{\tau_2^2 I_6}
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Gli stessi passaggi e le stesse considerazioni che sono state fatte per la sottomatrice [A1] valgono per la matrice [A2], con la sola differenza che, in questo caso, si ottiene con la matrice degli smorzamenti [C].

$$[A2] = [-[M]^{-1}[C]]_{6 \times 6} \quad (2.35)$$

Quindi, la struttura della sottomatrice A2 sarà:

$$\begin{aligned}
& \text{[A2]} \\
= & \begin{bmatrix}
-\frac{c_1 + c_{DMF}}{I_1} & \frac{c_{DMF}}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{c_{DMF}}{I_2} & -\frac{\frac{c_{GB1}}{\tau_1^2} + c_2}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{c_3 + c_{SA1}}{I_3} & \frac{c_{SA1}}{I_3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{c_{SA1}}{I_4} & -\frac{c_{SA1} + c_4 + c_{SA2}}{I_4} & \frac{c_{SA2}}{I_4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{c_{SA2}}{I_5} & -\frac{c_5 + c_{SA2}}{I_5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_6 + \frac{c_{GB2}}{\tau_2^2}}{I_6}
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Il vettore di stato x nel caso specifico è definito nel seguente modo:

$$\{x\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6\}^T \quad (2.36)$$

La matrice $[B]$ è la matrice degli ingressi, cioè la matrice che moltiplica il vettore degli ingressi. Essa ha tante righe quanti sono gli stati e tante colonne quanti sono gli input.

Nel caso di anello aperto, gli input sono solo 2: T_{M1} e T_{M2} cioè le coppie erogate dai due attuatori collegati alle estremità del sistema meccanico considerato. Infatti, la matrice $[B]$ è una matrice 12×2 mentre $\{u\}$ è un vettore 2×1 :

$$\{u\} = \{T_{M1}, T_{M2}\}^T \quad (2.37)$$

Con riferimento all'equazione (2.30), è possibile quindi ottenere:

$$Bu = \begin{bmatrix} \{0\}_{nx1} \\ [M]^{-1}\{F\} \end{bmatrix}_{12 \times 1} \quad (2.38)$$

Risulta conveniente, per una più rapida realizzazione della matrice B , scrivere il vettore colonna delle forze $\{F\}$, come il prodotto tra una matrice e il vettore colonna degli input:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} T_{M1} \\ \{0\}_{4 \times 1} \\ T_{M2} \end{Bmatrix}_{nx1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \{0\}_{4 \times 1} & \{0\}_{4 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 2} \begin{Bmatrix} T_{M1} \\ T_{M2} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \quad (2.39)$$

Si introduce così una nuova matrice ausiliaria $[E]$, ottenuta dall'equazione (2.40) che moltiplica il vettore u . La matrice ausiliaria $[E]$, però, è una matrice che deve essere ottenuta a mano in modo da individuare la posizione degli ingressi nel vettore delle forze generalizzate. Fatto questo, però, il resto risulta automatico ed è possibile calcolare facilmente $[B]$.

In definitiva il vettore $\{F\}$ sarà:

$$[E]\{u\} \quad (2.40)$$

In questo modo, è possibile estrarre da F il vettore degli ingressi u .

La formulazione finale per ottenere Bu sarà la seguente:

$$Bu = \begin{bmatrix} \{0\}_{nxm} \\ [M]^{-1}[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{M1} \\ T_{M2} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Dove m è il numero degli ingressi. In definitiva, è possibile scrivere la matrice B come:

$$[B] = \begin{bmatrix} \{0\} \\ [M]^{-1}[E] \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (2.42)$$

A questo punto, è possibile ricavare le matrici relative alla seconda equazione dello spazio degli stati $y(t) = Cx(t) + Du$

Per quanto riguarda, invece, la matrice $[C]$ essa viene chiamata la matrice delle uscite, cioè la matrice che consente di definire come uscite del sistema delle combinazioni lineari degli stati del sistema. Ha tante righe quanti sono gli output e tante colonne quanti sono gli stati. Nel caso in esame, la matrice $[C]$ è una matrice identità di 12 righe e 12 colonne, nel caso in cui si vuole ottenere come uscite tutti gli stati del sistema, ovvero posizioni e velocità assolute di tutte le inerzie del sistema considerato.

$$[C] = [I]_{2n \times 2n} \quad (2.43)$$

Se ad esempio, la velocità media costante, le posizioni crescono linearmente e sono poco significative, meglio guardare le torsioni degli elementi elastici per comprendere il comportamento dinamico del sistema.

A titolo di esempio si scrive la matrice $[C]$ in maniera tale da ottenere in output la velocità al semiasse del cambio DCT: in questo caso la matrice $[C]$ diviene una matrice riga, formata da tutti 0, tranne nella posizione dove moltiplicherà nel vettore degli stati $\dot{\theta}_3$, dove sarà presenta 1. Quindi l'equazione di partenza risulta essere sempre la seconda della (2.27) e diviene:

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]\{x\} \quad (2.44)$$

Il vettore $\{x\}$ è riportato dall'equazione (2.37). Facendo i calcoli riga per colonna si ottiene che $y = \dot{\theta}_3$, ovvero proprio la velocità al semiasse del cambio DCT.

La matrice $[D]$ è la matrice di legame diretto input-output. Essa ha tante righe quanti sono gli output e tante colonne quanti sono gli input. La matrice $[D]$, in questo caso specifico, è formata da tutti 0, non essendoci legami diretti tra ingressi ed uscite:

$$[D] = [\{0\}_{2n \times 1} \ \{0\}_{2n \times 1}] \quad (2.45)$$

In definitiva, è possibile schematizzare un qualunque sistema lineare in anello aperto rappresentato secondo la formulazione dello spazio degli stati attraverso un diagramma a blocchi:

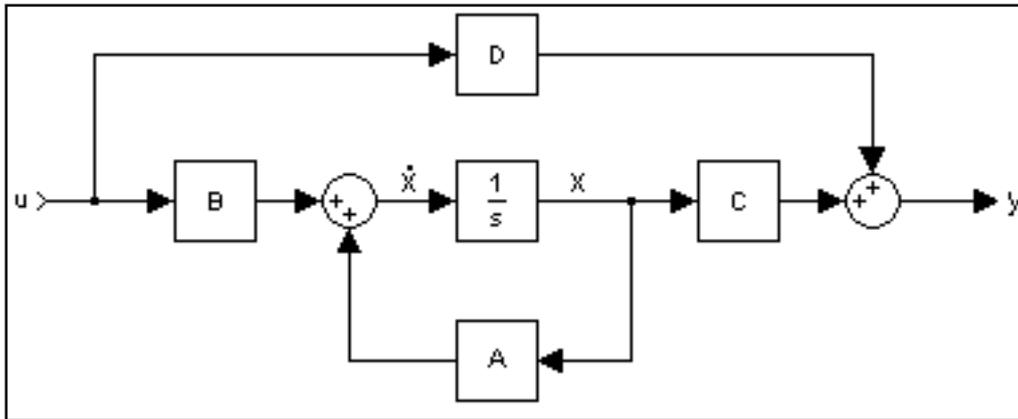


Figura 2.2 - Diagramma a blocchi spazio degli stati

Lo spazio degli stati può essere utilizzato per descrivere sia sistemi in anello aperto che sistemi in anello chiuso, come vedremo in seguito.

2.1.5. Metodo di Duncan

Le matrici [A] e [B] sono matrici non ottenibili in maniera immediata, alcune volte è possibile ottenerle attraverso il calcolo simbolico. Nel caso in esame, esse possono essere calcolate anche manualmente senza la necessità di utilizzare un software. Nel momento in cui per ottenere le matrici principali nello spazio degli stati, cioè le matrici [A] e [B], è necessario invertire la matrice di massa [M], la cui inversione può essere molto laboriosa se il sistema presenta molti gradi di libertà, è possibile utilizzare il metodo di Duncan per un calcolo più semplificato.

Dopo aver definito il vettore di stato e la sua derivata come:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix}_{2nx1} \quad e \quad \{\dot{y}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\ddot{x}\} \end{Bmatrix}_{2nx1} \quad (2.47)$$

Si riscrive l'equazione del moto in forma matriciale come segue:

$$[[c] \ [m]] \{\dot{y}\} + [[k] \ [0]] \{y\} = \{0\} \quad (2.48)$$

A questa equazione è possibile associare un'identità, ad esempio:

$$[[m] \ [0]] \{\dot{y}\} + [[0] \ -[m]] \{y\} = \{0\} \quad (2.49)$$

Quest'ultima equazione contraddistingue il metodo di Duncan, ma rappresenta solo una delle possibili scelte essendoci altre procedure da poter utilizzare.

Unendo le due equazioni si ottiene:

$$\begin{bmatrix} [c] & [m] \\ [m] & [0] \end{bmatrix} \{\dot{y}\} + \begin{bmatrix} [k] & [0] \\ [0] & -[m] \end{bmatrix} \{y\} = \{0\}_{2x1} \quad (2.50)$$

Ovvero:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{0\} \quad (2.51)$$

La soluzione dell'ultima equazione può essere cercata nella forma che viene utilizzata anche per il caso dell'equazione fondamentale della dinamica, ovvero $\{y\} = \{Y_0\}e^{st}$ e quindi la (2.51) diviene:

$$s[A]\{Y_0\} + [B]\{Y_0\} = \{0\} \quad (2.52)$$

È possibile ottenere la seguente equazione caratteristica:

$$\det(s[A] + [B]) = 0. \quad (2.53)$$

Dato che i coefficienti del polinomio caratteristico di grado $2n$ sono tutti reali, le sue radici saranno reali o complesse coniugate e quindi anche i corrispondenti autovettori saranno reali o complessi coniugati.

2.2. Effetti del controllore PID sulle equazioni

Nel caso di anello chiuso le equazioni rimangono invariate, tranne quella relativa all'equilibrio dinamico dell'inerzia del motore M2, dove il controllore implementato nell'azionamento elettrico per il controllo di velocità dei motori elettrici è un PID. Questo effetto verrà riscontrato anche successivamente, nel momento in cui si azionerà il controllo anche sul motore M1. Il controllore proporzionale-integrativo-derivativo, comunemente abbreviato come PID, è un sistema in retroazione negativa ampiamente impiegato nei sistemi di controllo. È il sistema di controllo in retroazione di gran lunga più comune nell'industria, in particolare nella versione PI (senza azione derivativa). Grazie a un input che determina il valore attuale, è in grado di reagire a un eventuale errore positivo o negativo tendendo verso il valore 0. La reazione all'errore può essere regolata e ciò rende questo sistema molto versatile. Il controllore acquisisce in ingresso un valore da un processo e lo confronta con un valore di riferimento. La differenza, il cosiddetto segnale di errore, viene quindi usata per determinare il valore della variabile di uscita del controllore, che è la variabile manipolabile del processo. Di conseguenza, bisogna tener conto del riferimento della velocità e dei parametri del controllore, cioè i guadagni k_p , k_i e k_d che permettono, attraverso la loro taratura, un diverso comportamento del controllore stesso e quindi del sistema in generale.

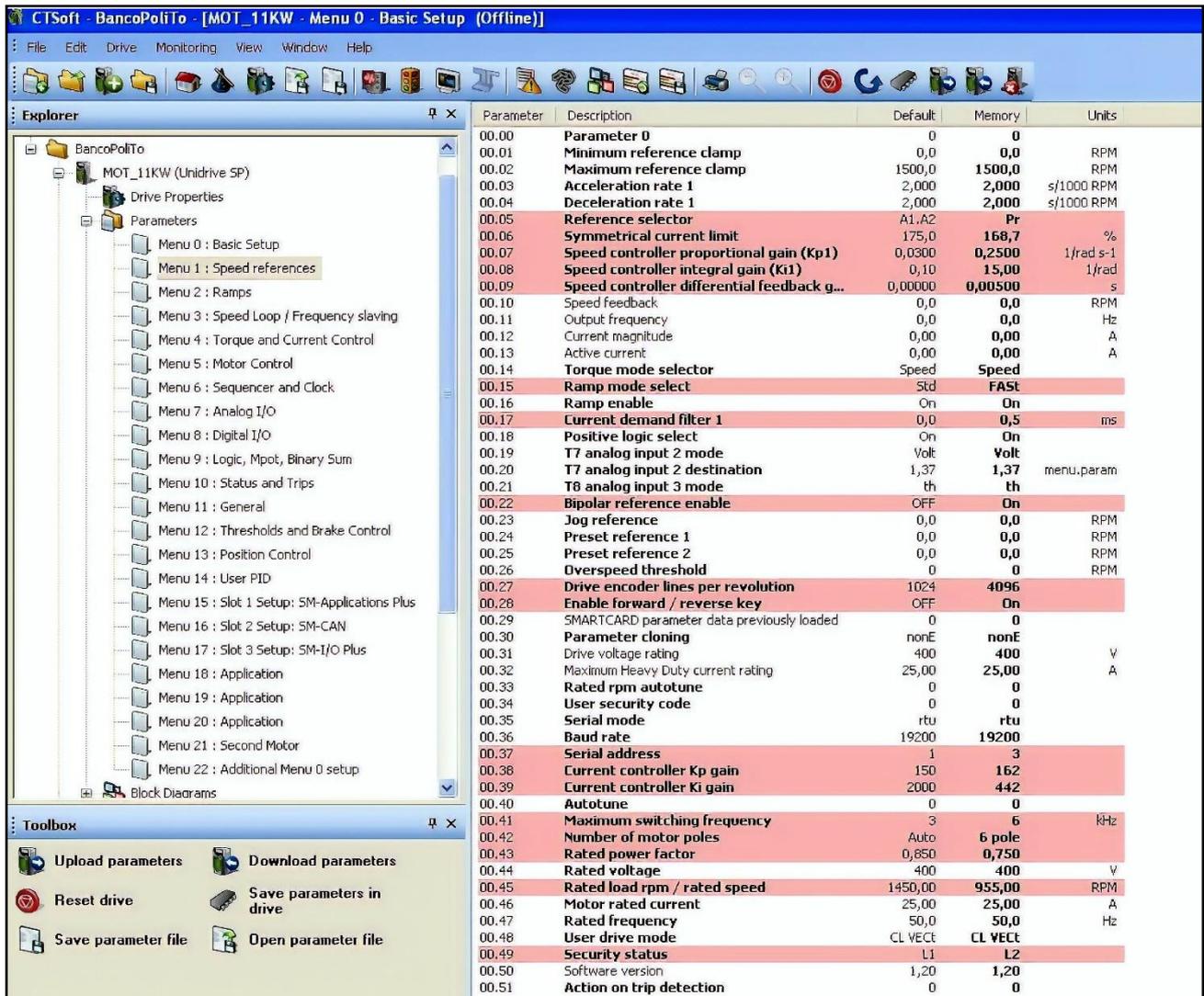


Figura 2.3 – Schermata principale CT-Soft

La fig.2.3 mostra la schermata principale del software che viene utilizzato per il tuning dei parametri del controllore. In questa schermata vengono riportate tutti i parametri che possono essere modificati su un qualsiasi controllore. In primis, è possibile notare come si può inserire i valori dei 3 guadagni principali del controllore, ovvero derivativo, integrativo e proporzionale individuati dalla sigla 00.07 fino a 00.09.

Oltre a questi 3 parametri, sono presenti molte funzioni per poter effettuare tuning, come per esempio, il tipo grandezza che si vuole controllare, infatti in questo caso quella controllata è la velocità, oppure la massima frequenza di switching e la costante di tempo τ che viene riportata in ms.

Il guadagno proporzionale k_p , moltiplica l'errore per una costante k_p , cioè l'azione di controllo è semplicemente proporzionale all'errore tra il valore di riferimento, in questo caso θ_{ref} e la variabile da controllare θ_6 . Tale differenza può essere ridotta aumentando il

guadagno proporzionale del controllore ma questo aumento può innescare un aumento delle oscillazioni generate a seguito di rapidi transitori.

Il guadagno integrale k_i , ha il compito di far sì che a regime la variabile controllata assuma il valore di set-point, cioè può essere vista come un dispositivo per l'azzeramento dell'errore a regime introdotto dall'azione proporzionale.

Il guadagno derivativo k_d , ha come scopo quello di migliorare la stabilità del ciclo chiuso. L'azione derivativa fornisce in uscita la derivata rispetto al tempo dell'errore. Essa, però, presenta l'inconveniente di amplificare il segnale con contenuto armonico a frequenze elevate, che tipicamente caratterizza il rumore elettromagnetico sovrapposto al segnale utile.

Ciò può introdurre una instabilità nel sistema compromettendo la qualità del controllo.

A questo punto, visti quali sono i vari effetti che porta l'introduzione di un controllore PID e soprattutto la regolazione di un parametro rispetto ad un altro, è possibile notare come esso introduca delle variazioni anche all'interno della dinamica del sistema. Infatti, il controllore PID, a causa dei suoi 3 effetti, tende a modificare le equazioni.

A titolo di esempio, si prende in considerazione il caso che verrà visto successivamente, ovvero come cambia l'input T_{M2} , dove è appunto applicato un controllo, per effetto di quest'ultimo:

$$T_{M2} = k_p(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}_6) + k_i \int (\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}_6) dt + k_d \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}_6) \quad (2.54)$$

Effettuando i calcoli si ottiene:

$$T_{M2} = k_p(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}_6) + k_i(\theta_{ref} - \theta_6) + k_d(\ddot{\theta}_{ref} - \ddot{\theta}_6) \quad (2.55)$$

Quindi l'equazione diviene:

$$\begin{aligned} (I_6 + k_d)\ddot{\theta}_6 + \left(c_6 + \frac{c_{GB2}}{\tau_2^2} + k_p\right)\dot{\theta}_6 + \left(\frac{k_{GB2}}{\tau_2^2} + k_i\right)\theta_6 - \frac{k_{GB2}}{\tau_2}\theta_5 \\ = k_d\ddot{\theta}_{ref} + k_p\dot{\theta}_{ref} + k_i\theta_{ref} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Come è possibile notare dalle equazioni (2.55) e (2.56) i valori dei guadagni del controllore PID si sommano ai contributi puramente meccanici del sistema: infatti il k_d incrementa l'inerzia, il k_p incrementa lo smorzamento e il k_i incrementa la rigidità.

2.3. Derivata limitata in banda

Come già anticipato in precedenza, il termine derivativo migliora i margini di stabilità ed introduce una azione di correzione dell'errore di tipo anticipativo. Dal punto di vista applicativo abbiamo una serie di problemi:

- Il termine derivativo amplifica i segnali a larga banda. Il rumore di misura è in genere un segnale a larga banda, e quindi viene esaltato dall'azione derivativa del PID.
- Il contributo del termine derivativo diviene teoricamente infinito nel caso in cui venga applicato un ingresso di riferimento a gradino, introducendo sollecitazioni potenzialmente dannose per gli organi di attuazione.

Per risolvere i problemi citati è possibile filtrare l'uscita del termine derivativo utilizzando un semplice filtro del primo ordine la cui espressione matematica nel dominio del tempo è la seguente:

$$\dot{y} = \frac{1}{\tau_F}(\dot{u} - y) \quad (2.57)$$

dove τ_F è la costante di tempo, y è l'uscita ed u è l'ingresso.

È solito scrivere l'equazione (2.57) nel dominio di Laplace per ottenere la funzione di trasferimento. Introducendo la variabile complessa s la (2.57) diviene:

$$s\bar{y} = \frac{1}{\tau_F}(s\bar{u} - \bar{y}) \quad (2.58)$$

Dalla (2.58) è possibile ottenere il rapporto $\frac{\bar{y}}{\bar{u}}$, cioè la funzione di trasferimento:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{s}{\tau_F s + 1} \quad (2.59)$$

Si osservi dalla (2.59) che il numeratore della funzione di trasferimento è la derivata pura, mentre il denominatore è il filtro passa basso.

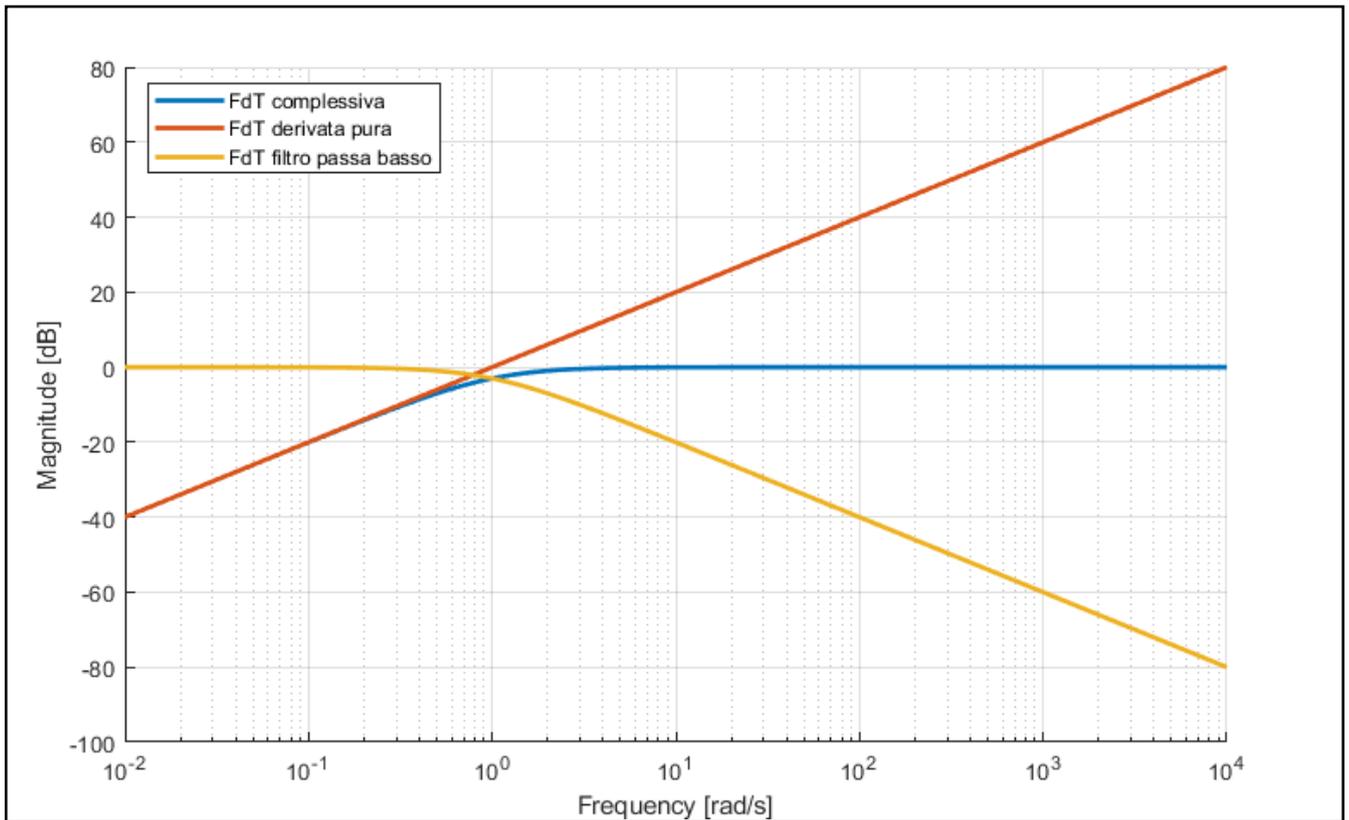


Figura 2.4 – Diagramma di Bode dei singoli effetti e combinazione

La fig.2.4 mostra, quindi, la funzione di trasferimento della derivata pura in rosso che, come si può vedere essa deriva su tutto il range di frequenze, mentre l'effetto del filtro passo basso è possibile vederlo in giallo. In blu, invece, viene rappresentato la combinazione degli effetti: a basse frequenze, quindi, si nota come il filtro non abbia alcun effetto visto che la derivata in banda riesce a derivare, mentre ad un certo valore di frequenze essa non riesce più a derivare vista la presenza del filtro passo basso.

Viene riportato, nella figura seguente, il diagramma di Bode della funzione di trasferimento al variare della costante di tempo τ :

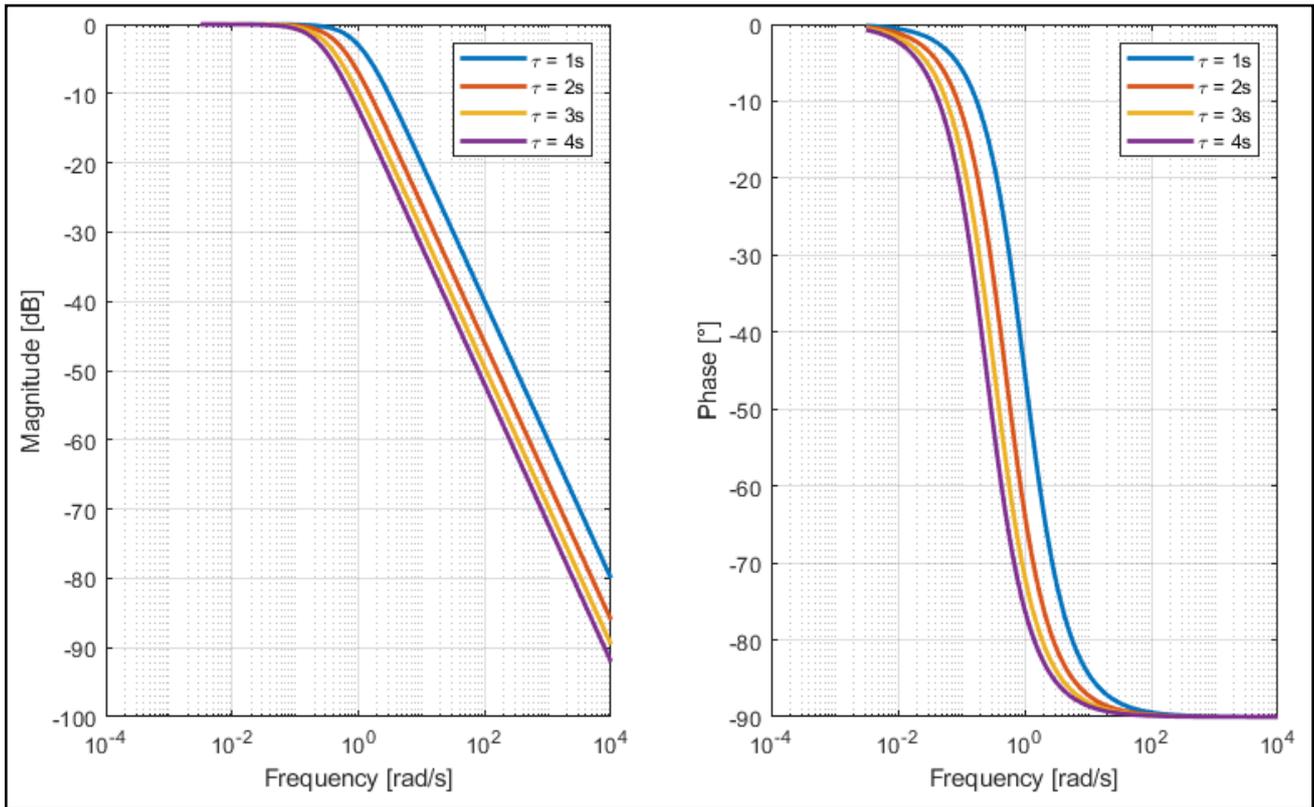


Figura 2.5 – Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $\frac{1}{\tau s+1}$

Risulta interessante notare dalla fig.2.5 come la frequenza di taglio ω_c varia al variare della τ_F usata, infatti essa è inversamente proporzionale alla costante di tempo scelta: $\omega_c = \frac{1}{\tau_F}$. La frequenza di taglio è convenzionalmente definita come la frequenza di attraversamento a -3dB.

Il compito del filtro passa basso, ovvero il denominatore della funzione di trasferimento è, appunto, quello di limitare il range di frequenze, per cui viene calcolata la derivata del segnale d'ingresso, e di permettere il passaggio solo alle frequenze al di sotto di una certa soglia data dalla frequenza di taglio.

Si cerca di evitare di andare a derivare il rumore per non avere un valore di derivata molto lontana da quello che effettivamente si aspetta dal segnale privo di rumore.

Per comprendere al meglio il contributo e l'effetto che può avere un filtro passa basso si considera un segnale di tipo sinusoidale affetto da rumore:

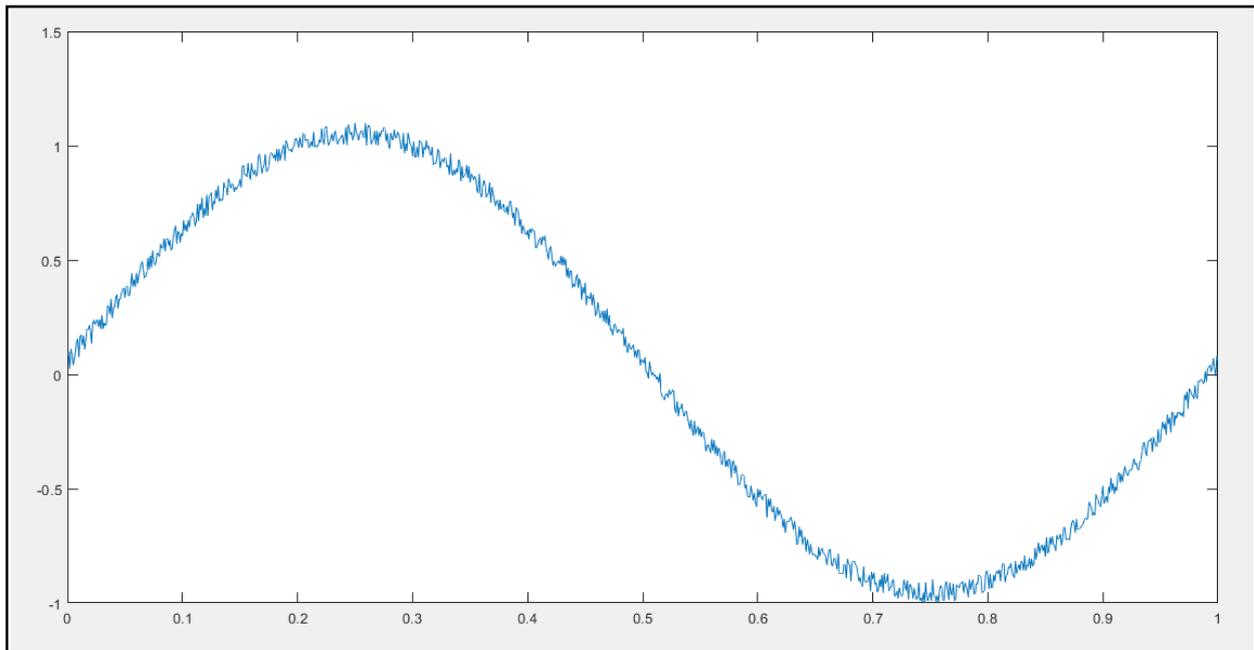


Figura 2.6 - Esempio segnale con andamento sinusoidale

Attraverso il comando di Matlab “lsim” è possibile simulare la risposta di un sistema applicando un filtro derivativo al variare dei valori di τ e confrontarlo con la risposta del sistema nel caso in cui non si ha una derivata in banda ma una derivata analitica.

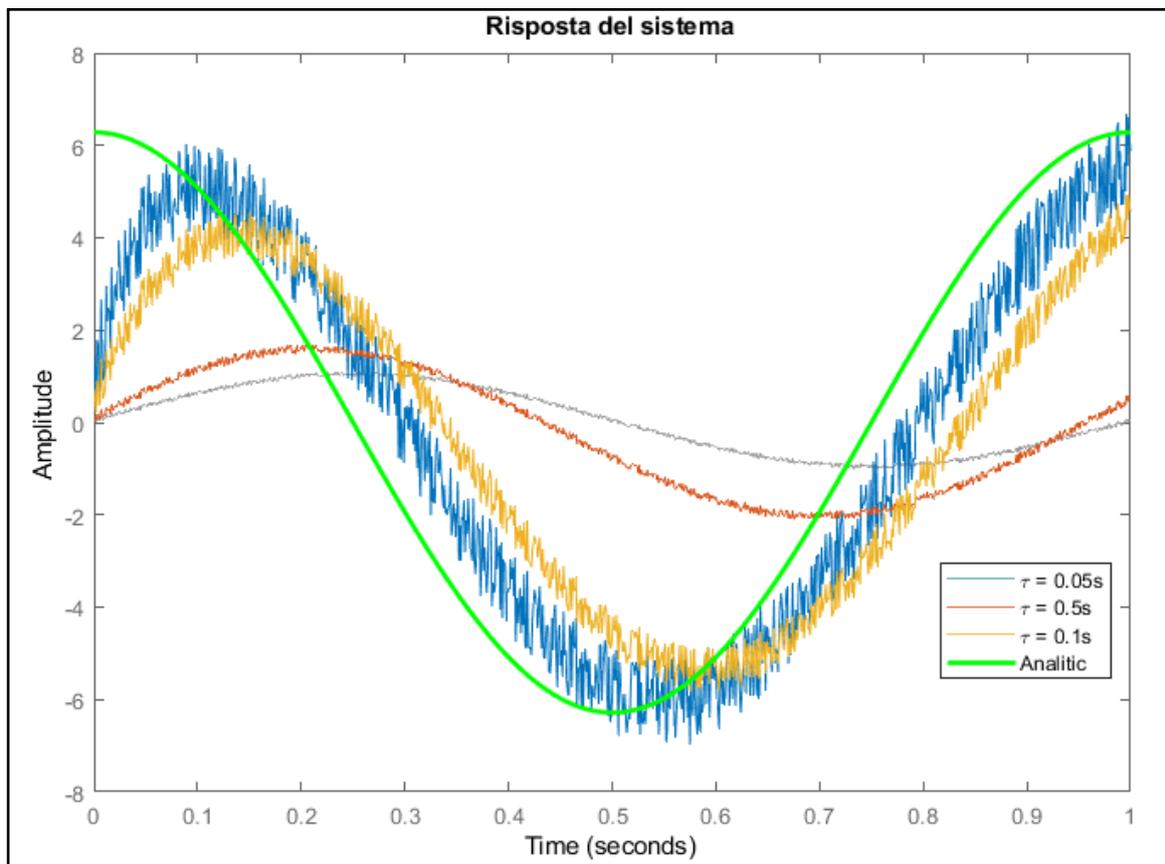


Figura 2.7 - Risposta del sistema al variare della costante di tempo τ

Nella fig.2.7 è possibile vedere in grigio la funzione in ingresso, in blu e rosso i valori della risposta derivata in banda che come si può vedere, aumentano il valore del rumore presente nel segnale in ingresso. Il segnale analitico è la derivata corretta, essa è sfasata di 90° perché è lo sfasamento che esiste tra seno e coseno. Le derivate numeriche, invece, hanno uno sfasamento rispetto alla derivata corretta, che è in questo caso quella analitica, via via crescente man mano che cresce la costante di tempo τ .

Se τ è troppo grande si attenua non solo il rumore ma anche l'ampiezza del segnale.

2.4. Funzione di trasferimento sistema non controllato e smorzato

Per descrivere la risposta y del sistema è possibile utilizzare l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\frac{d^n}{dt^n}(y) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(y) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt}(y) + a_n y = \frac{d^m}{dt^m}(u) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}(u) + \dots + b_{m-1} \frac{d}{dt}(u) + b_m u \quad (2.60)$$

Interessante risulta lo studio della funzione di trasferimento nel dominio di Laplace, per poter studiare ulteriori comportamenti del sistema e, dove il vantaggio, notevolissimo, è che il legame tra l'ingresso e l'uscita è di natura algebrica e non differenziale, come accade invece tra le rispettive funzioni del tempo.

Introducendo s , la variabile complessa pari a $s = \sigma + j\omega$ cioè la pulsazione complessa, essendo il sistema in esame governato da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, nel dominio della trasformata di Laplace, applicando la trasformata di Laplace all'equazione differenziale, invece di un'equazione differenziale, una equazione polinomiale della forma:

$$s^n y + a_1 s^{n-1} y + \dots + a_{n-1} s y + a_n y = s^m u + b_1 s^{m-1} u + \dots + b_{m-1} s u + b_m u \quad (2.61)$$

Per ottenere la funzione di trasferimento, se l'ingresso è del tipo $u = e^{st}$, l'uscita di un sistema lineare ha la forma $y = y_0 e^{st}$. Sostituendo nella (2.61) si ottiene:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) y_0 e^{st} = (s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) e^{st} \quad (2.62)$$

Da cui si ottiene:

$$y = y_0 e^{st} = \frac{b(s)}{a(s)} e^{st} = H(s)u(t) \quad (2.63)$$

Dove $a(s)$ e $b(s)$ sono i polinomi caratteristici dell'equazione. In definitiva possiamo scrivere la funzione di trasferimento nel seguente modo:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.64)$$

La (2.64) può essere riscritta nella forma fattorizzata come segue:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)}, \quad (2.65)$$

Dove $K = \frac{b_m}{a_n}$ è la costante di trasferimento.

Le radici del polinomio del numeratore z_1, z_2, \dots, z_m sono dette zeri e per questi valori la funzione di trasferimento si annulla, cioè $N(s) = 0$, mentre le radici del polinomio al denominatore p_1, p_2, \dots, p_n sono dette poli e per questi valori la funzione di trasferimento vale infinito, cioè $D(s) = 0$ e possono essere o reali o complessi coniugati. Poli e zeri hanno grande importanza in tutta una serie di problemi relativi alla teoria dei sistemi e del controllo, infatti i poli sono le radici del polinomio caratteristico, ovvero gli autovalori del sistema. La stabilità asintotica del sistema può essere studiata verificando che tutti i poli abbiano parte reale negativa.

Visto che i poli si ottengono con $D(s) = 0$, cioè quando si ha $s = p_i$, è possibile scrivere:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\omega_n \cos\phi \pm j\omega_n \sin\phi \quad (2.66)$$

Dove ω_n è la pulsazione naturale, cioè il modulo delle due radici e quindi, sul piano Re-Im indica la loro distanza dall'origine, mentre ϕ è l'angolo formato sul piano Re-Im dalla congiungente l'origine con le radici, rispetto al semiasse reale negativo.

Dalla (2.66) è possibile vedere come i poli siano dotati di una parte reale e una parte immaginaria. Risulta interessante studiare la mappa dei poli e degli zeri, cioè un diagramma dove in ascissa viene riportata la parte reale mentre in ordinata quella immaginaria dei poli e degli zeri. Attraverso il comando *pzplot* è possibile ottenere la mappa:

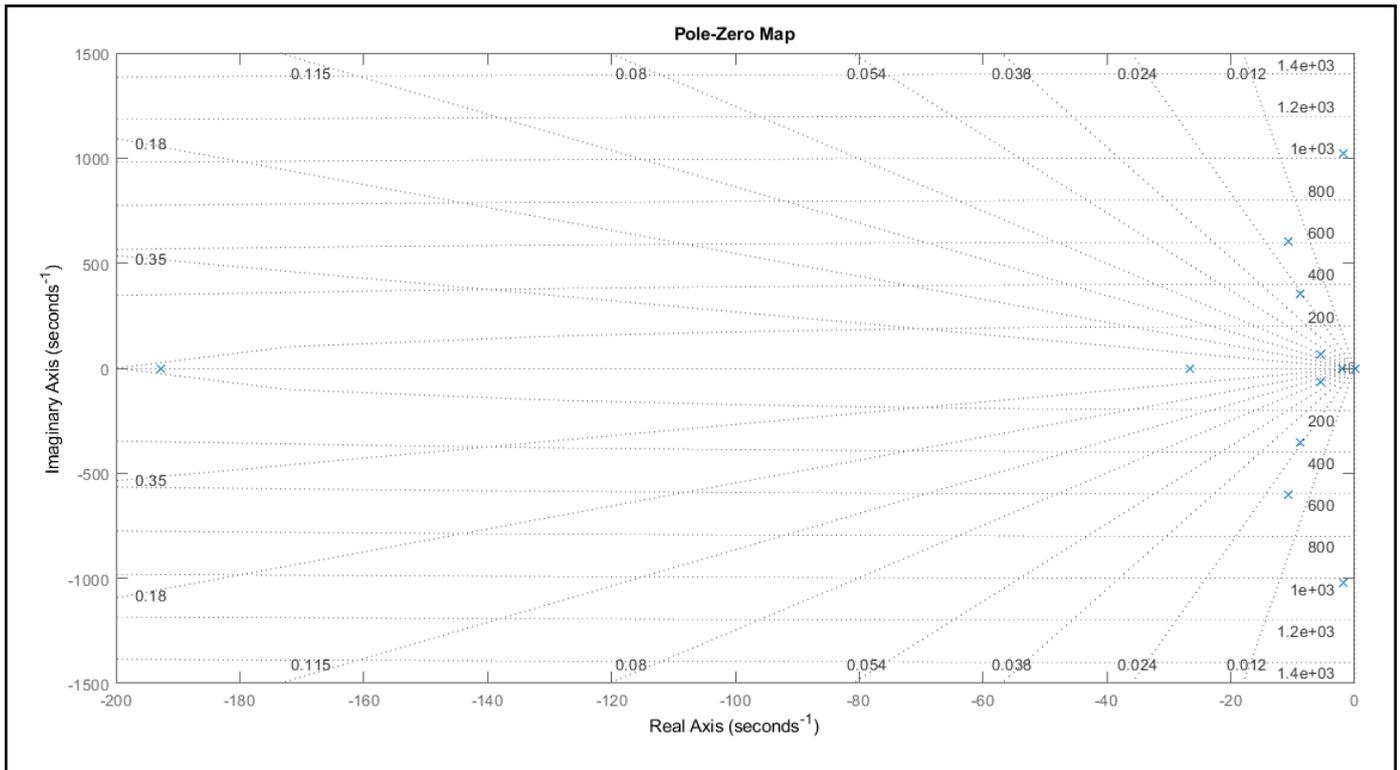


Figura 2.8 - Mappa dei poli OL

Nella mappa di fig.2.8 vengono segnati con la x la posizione dei poli e con il o quella degli zeri. Tramite questa mappa è possibile capire se il sistema è stabile o meno; nel seguente caso il sistema risulta stabile visto che tutti i poli della funzione di trasferimento del sistema hanno parte reale negativa, cioè si trovano nel semipiano sinistro. Infatti, basta che un solo polo si trovi nel semipiano destro per definire il sistema instabile.

Altra conclusione a cui è possibile giungere guardando la mappa è che il sistema in esame è un sistema a minima rotazione di fase essendo gli zeri e i poli compresi solo nel semipiano sinistro. In particolare si dice a fase minima un sistema (o un filtro) la cui funzione di trasferimento è quella che fra tutte le possibili funzioni di trasferimento con identica risposta in modulo introduce il minimo sfasamento possibile per ogni frequenza a cui essa è valutata.

Queste due conclusioni, ci permettono di affermare che il sistema è stabile asintoticamente.

Facendo riferimento alla mappa dei poli, risulta molto interessante riportare il singolo autovettore e autovalore sul piano Re-Im, per riuscire a dare un significato fisico a quelli che sono gli zeri e i poli e la loro posizione nel piano complesso.

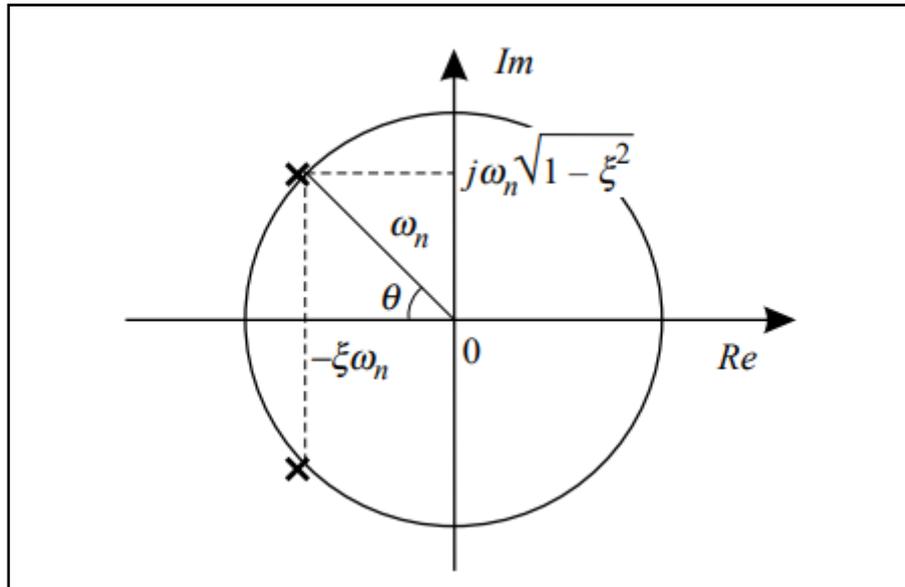


Figura 2.9 – Autovalori e autovettori nel piano Re-Im

Come è possibile notare dalla fig.2.9, riportando autovalore e autovettore di un sistema sottosmorzato, quindi con componente immaginario non nulla, è possibile ricavare, per via geometrica tutte le informazioni necessarie. Infatti, il modulo del vettore che interseca l'arco di circonferenza, è la frequenza naturale del sistema non smorzato, ovvero ω_n , mentre la proiezione del vettore lungo l'asse immaginario ci fornisce la ω_s , ovvero la pulsazione smorzata del sistema. Dal coseno che forma l'angolo θ , formato dalla congiungente l'origine con le radici è possibile calcolare il fattore di smorzamento attraverso la seguente espressione:

$$\xi = \cos(\theta) \quad (2.67)$$

Quindi dalle considerazioni appena fatte, risulta chiaro che se un polo è situato sull'asse verticale, il suo corrispondente modo di vibrare avrà un fattore di smorzamento nullo essendo $\theta = 1$, e di conseguenza $\xi = \cos(1) = 0$ e, di conseguenza, il valore della frequenza naturale sarà molto alto.

In conclusione, più è situato in alto all'interno della mappa il polo, più il fattore di smorzamento è basso mentre la frequenza aumenta.

2.5. Funzione di trasferimento per un sistema controllato in retroazione

Appare opportuno analizzare un caso semplificato di sistema controllato per trarre delle conclusioni prima di analizzare il sistema banco prova che si sta studiando più complesso. Questo esempio, risulterà molto utile ai fini di analizzare la sensitività del sistema ai vari guadagni del regolatore e riuscire a spiegare alcuni concetti chiavi.

Si prende come titolo d'esempio, un sistema del secondo ordine sottosmorzato controllato da un regolatore PID. Il classico schema di un sistema di questo tipo è il seguente:

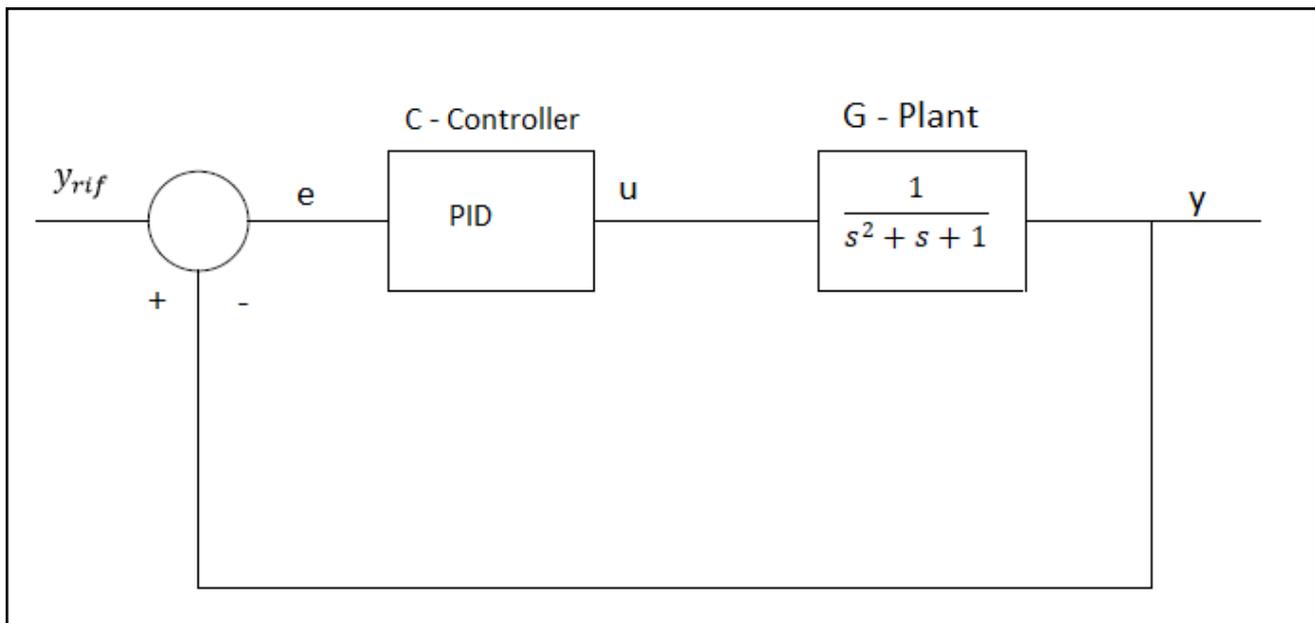


Figura 2.10 – Schema generale di un sistema controllato con PID

Come visto già in precedenza dall'equazione (2.54), il controllore PID aggiunge un'equazione, in maniera tale che l'errore uscente dal controllo presenti la seguente espressione:

$$\bar{u} = k_p \bar{e} + k_i \frac{\bar{e}}{s} + k_d s \bar{e} = \bar{e} \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) \quad (2.68)$$

Per la presenza del termine s che rappresenta la variabile di Laplace, si nota che l'equazione è stata riportata nel dominio di Laplace.

In questo caso, la funzione di trasferimento del solo controllore PID sarà il rapporto $\frac{\bar{u}}{\bar{e}}$ che verrà posto uguale a C per comodità.

A questo punto, è possibile anche scrivere la funzione di trasferimento del sistema vista come il rapporto tra l'uscita del sistema stesso y e l'entrata, che rappresenta l'uscita del controllore \bar{e} .

Posto $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, con $\omega_n = 2\text{Hz}$ e $\xi = 0.4$, allora la funzione di trasferimento sarà la seguente:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{e}} = C * G \quad (2.69)$$

Di conseguenza, è possibile ricavare l'output del sistema globale y nel seguente modo:

$$y = \bar{e} * C * G = (y_{rif} - y) * C * G \quad (2.70)$$

Dall'equazione (2.70), è possibile ricavare quanto segue:

$$y(1 + C * G) = y_{rif} * C * G \quad (2.71)$$

Dalla (2.71) è possibile calcolare infine, la funzione di trasferimento globale del sistema controllato e smorzato nel caso semplificato:

$$\frac{y}{y_{rif}} = \frac{C * G}{1 + C * G} \quad (2.72)$$

Quindi la (2.72) è la funzione di trasferimento in anello chiuso del sistema controllato con PID.

La funzione di trasferimento del sistema di secondo grado in esame può essere calcolata anche analiticamente seguendo la seguente formulazione:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{p_1 p_2}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (2.73)$$

Dove i termini p_1 e p_2 rappresentano i poli. Quindi dall'equazione (2.73) si capisce che in base a quelli che sono i valori dei poli del sistema di II grado la funzione di trasferimento avrà un certo andamento. Ogni singolo polo darà un singolo contributo alla funzione di trasferimento complessiva che appunto per questo motivo avrà l'andamento dei singoli poli. In questo caso si è preso in considerazione un sistema di secondo grado che ha restituito solamente 2 poli e, quindi, nell'equazione (2.73) sono presenti solo 2 contributi, altrimenti bisognerebbe fare la produttoria per gli n gradi di libertà del sistema.

2.6. Influenza del guadagno proporzionale

Una volta ricavate le funzioni di trasferimento e aver capito quali sono gli effetti che il controllore può avere un qualsiasi sistema, è opportuno andare a toccare con mano quali sono le effettive conseguenze nello scegliere un certo valore di guadagno proporzionale, derivativo e integrativo.

Considerando il sistema del secondo ordine sottosmorzato studiato nel paragrafo 2.5, lo si sottopone ad un'analisi sensitiva al variare dei valori di guadagno proporzionale del controllore PID. La funzione di trasferimento che si ottiene è la seguente:

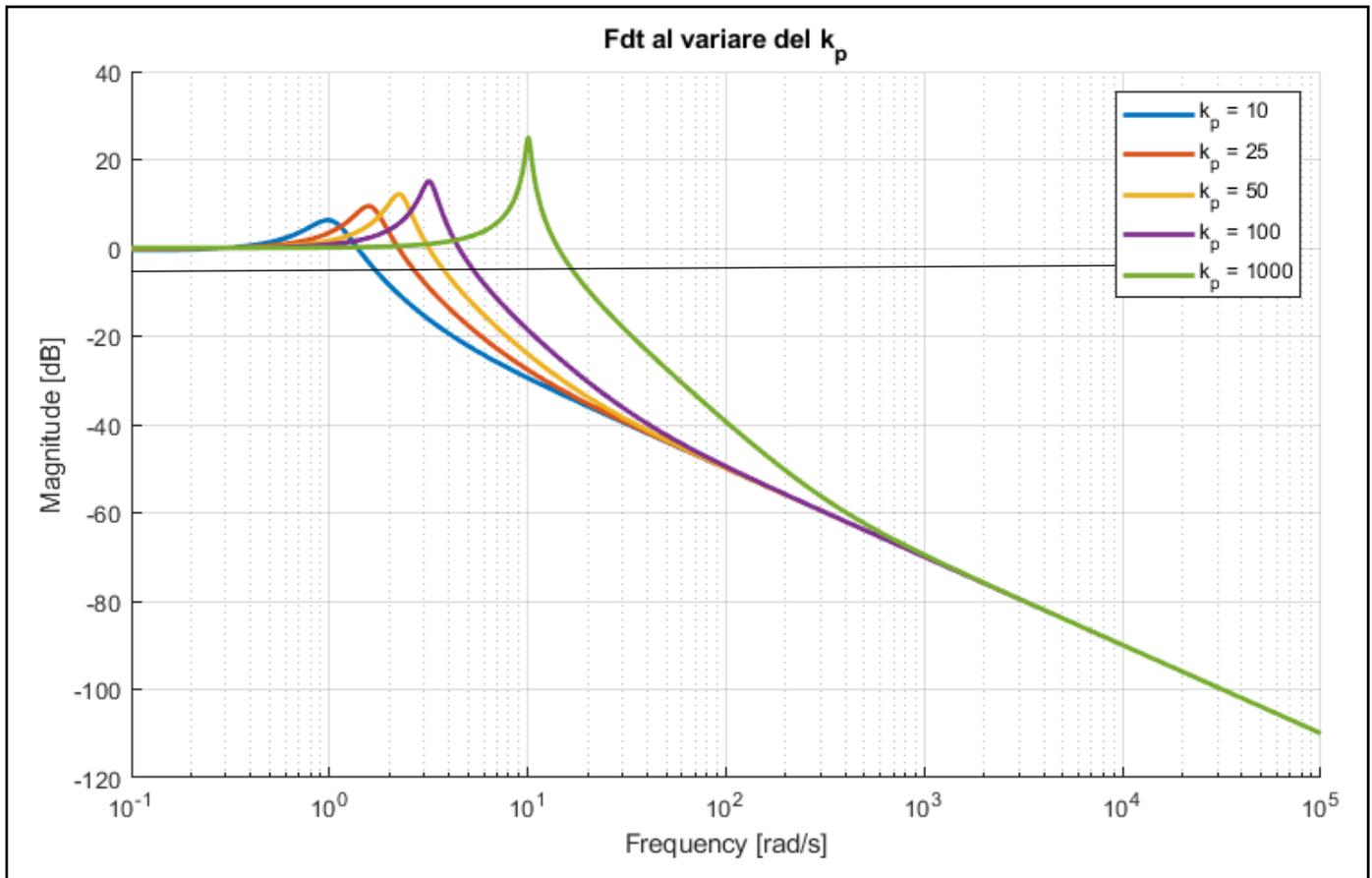


Figura 2.12 – Funzione di trasferimento al variare di k_p con $k_i = 5$ e $k_d = 0.5$

È interessante notare dalla fig. 2.12, come all'aumentare del guadagno proporzionale si hanno principalmente due fenomeni: il primo è quello di un aumento del picco, visibile ad occhio nudo, mentre il secondo effetto è quello dell'aumento della larghezza di banda del sistema e di conseguenza il cambio della frequenza di taglio del filtro. Questo secondo effetto è facilmente individuabile grazie alla retta orizzontale ad ordinata -3 dB, che quando interseca la funzione di trasferimento in quel punto, è leggibile la frequenza di taglio sulle ordinate. Dalla figura, è inoltre, anche possibile estrapolare il concetto di larghezza di banda, ovvero, il range di frequenza utilizzabile del sistema normalmente da 0Hz alla frequenza di taglio. Anche quest'ultimo, come è possibile vedere, tende ad aumentare all'aumento del guadagno proporzionale, infatti il sistema sarà quindi tanto più veloce

quanto più estesa è la sua banda passante, ossia l'estremo superiore della banda passante, ω_c , è un buon indice della velocità di risposta del sistema di controllo

Tutto ciò ha conseguenza su quello che è il comportamento del sistema quando gli viene imposto di inseguire un riferimento.

Altro effetto del guadagno proporzionale sul sistema è quello della possibilità di creare instabilità. Quando si sceglie un k_p dal valore elevato, i poli possono diventare reali, il che rende il sistema instabile. Prendendo come riferimento l'esempio precedente questo è chiaramente visibile scegliendo un k_p del valore di 1000.

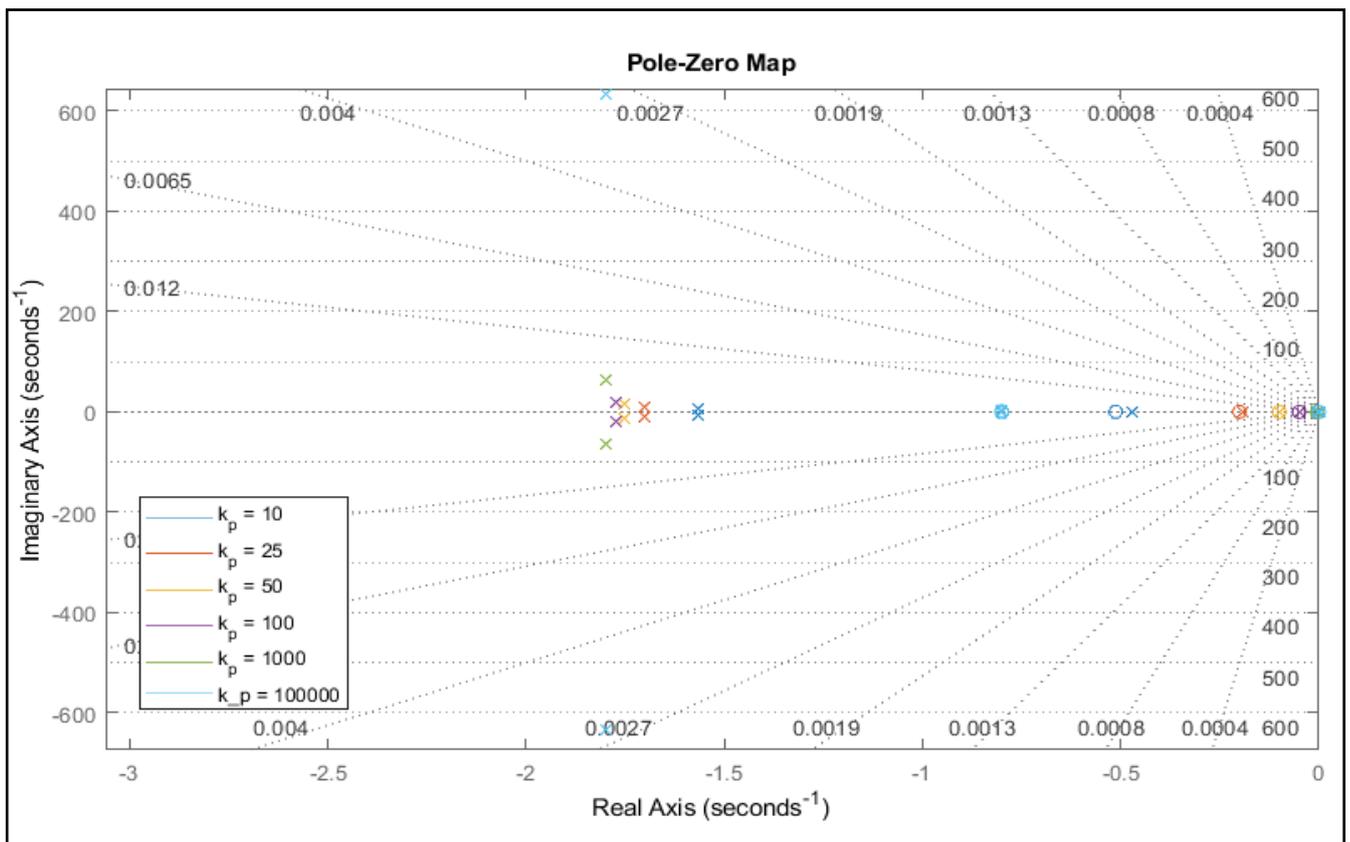


Figura 2.13 – Mappa dei poli al variare del k_p

In fig.2.13 vengono rappresentati i poli e gli zero del sistema sul piano complesso; affinché il sistema sia stabile, occorre che tutti i poli si trovino nel semipiano sinistro (parte reale negativa). Basta che ci sia un solo polo nel semipiano destro (parte reale positiva) affinché il sistema sia instabile.

Dalle fig.2.13 si nota anche come il guadagno proporzionale abbia effetto sullo smorzamento e ciò è strettamente legato anche alla stabilità del sistema. Presi in considerazione i poli in verde e in azzurro, ovvero quelli del $k_p = 100$ e $k_p = 10000$, si può vedere come lo smorzamento tende man mano ad aumentare, ricordando la relazione (2.67), andando ad aumentare ulteriormente il k_p . Avendo già scelto un valore di guadagno

proporzionale molto alto, risulta impensabile che, con il solo guadagno proporzionale, si possa portare ad instabilità questo sistema, ovvero far giacere il polo sul semipiano destro.

Questo ovviamente lo si può analizzare anche dalla funzione di trasferimento, dove all'aumentare del guadagno, oltre ad aumentare il picco dovuto alla riduzione dello smorzamento, il picco si sposta verso destra, quindi a valori di frequenze più alte.

Di alto interesse, a questo punto della trattazione, risulta studiare come risponde il sistema sollecitato ad un gradino al variare del guadagno proporzionale. Grazie alla funzione *step* su Matlab è possibile ricavare il seguente grafico nel dominio del tempo:

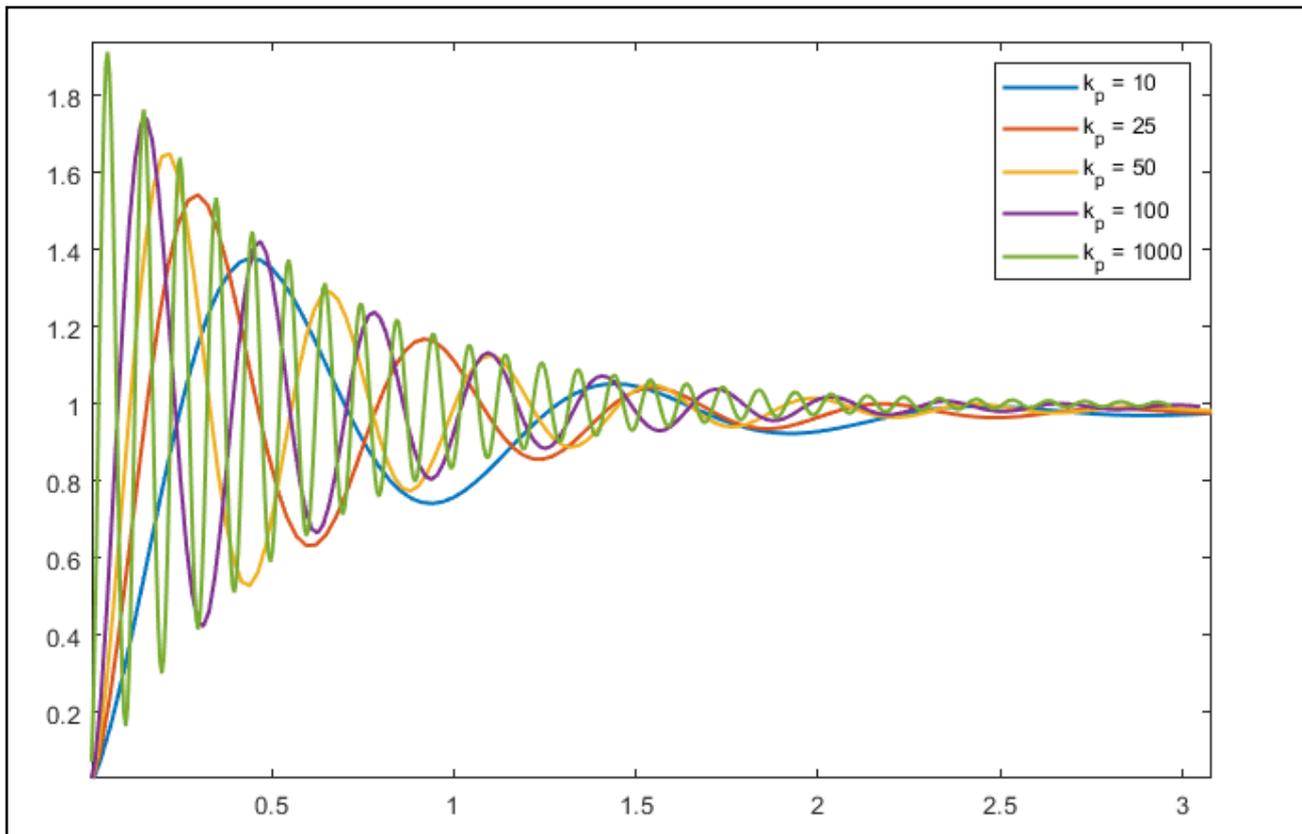


Figura 2.14 – Risposta del sistema ad un input a gradino al variare del guadagno proporzionale

Dalla fig.2.14 è possibile notare come intorno ai 3 secondi il tempo di decadimento risulta essere lo stesso per tutti i valori di guadagno proporzionale. Questo è dovuto alla relazione che lega il tempo di decadimento al fattore di smorzamento e alla frequenza propria:

$$T = \frac{1}{\omega_n * \xi} \quad (2.73)$$

Quindi, dalla (2.73) è possibile capire il motivo per cui il tempo di decadimento è lo stesso: dalle considerazioni fatte in precedenza, all'aumentare del guadagno, aumentava la frequenza propria del sistema ma contemporaneamente, diminuiva il fattore di smorzamento e quindi il risultato non cambia.

Come è possibile vedere dalla fig.2.14, più è alto il picco della funzione di trasferimento, cioè maggiore è il guadagno proporzionale maggiore sarà la capacità del sistema di seguire più velocemente il riferimento, ma maggiore sarà anche l'overshoot e di conseguenza anche l'undershoot, ovvero il tempo necessario per estinguere l'oscillazione, ovvero il tempo di risposta. Quindi maggiore sarà la larghezza di banda, cioè k_p alto, più veloce il mio sistema sarà a seguire il riferimento e salire con la risposta, ma come conseguenza si avrà un sistema più nervoso che risponderà in maniera brusca ai cambi di riferimento. Mentre con il guadagno proporzionale basso si può notare come il sistema sia più lento a seguire il riferimento e soprattutto si può notare la presenza di una oscillazione dopo il gradino che è sempre più piccola quanto minore è il valore del guadagno.

In definitiva, in base al risultato che bisogna ottenere dal sistema, è necessario scegliere un guadagno proporzionale opportuno sapendo quali rischi si corrono scegliendo un guadagno alto o basso relativo al sistema.

Ulteriore risultato che si può riscontrare da questa analisi è come, con un guadagno proporzionale alto, il sistema sale molto rapidamente per rispondere al gradino, ma l'oscillazione che ne segue è molto marcata e superiore rispetto ad un valore di guadagno più basso, dove il sistema sarà molto più lento nel salire per raggiungere il riferimento, ma l'oscillazione sarà meno marcata ed evidente e, come conseguenza, si avrà un sistema più morbido e meno nervoso nel rispondere ad un impulso.

2.7. Influenza del guadagno derivativo

Come visto per il paragrafo precedente, è possibile fare le stesse analisi anche al variare degli altri parametri. In questo caso si fa variare il guadagno derivativo. La funzione di trasferimento che si ottiene è la seguente:

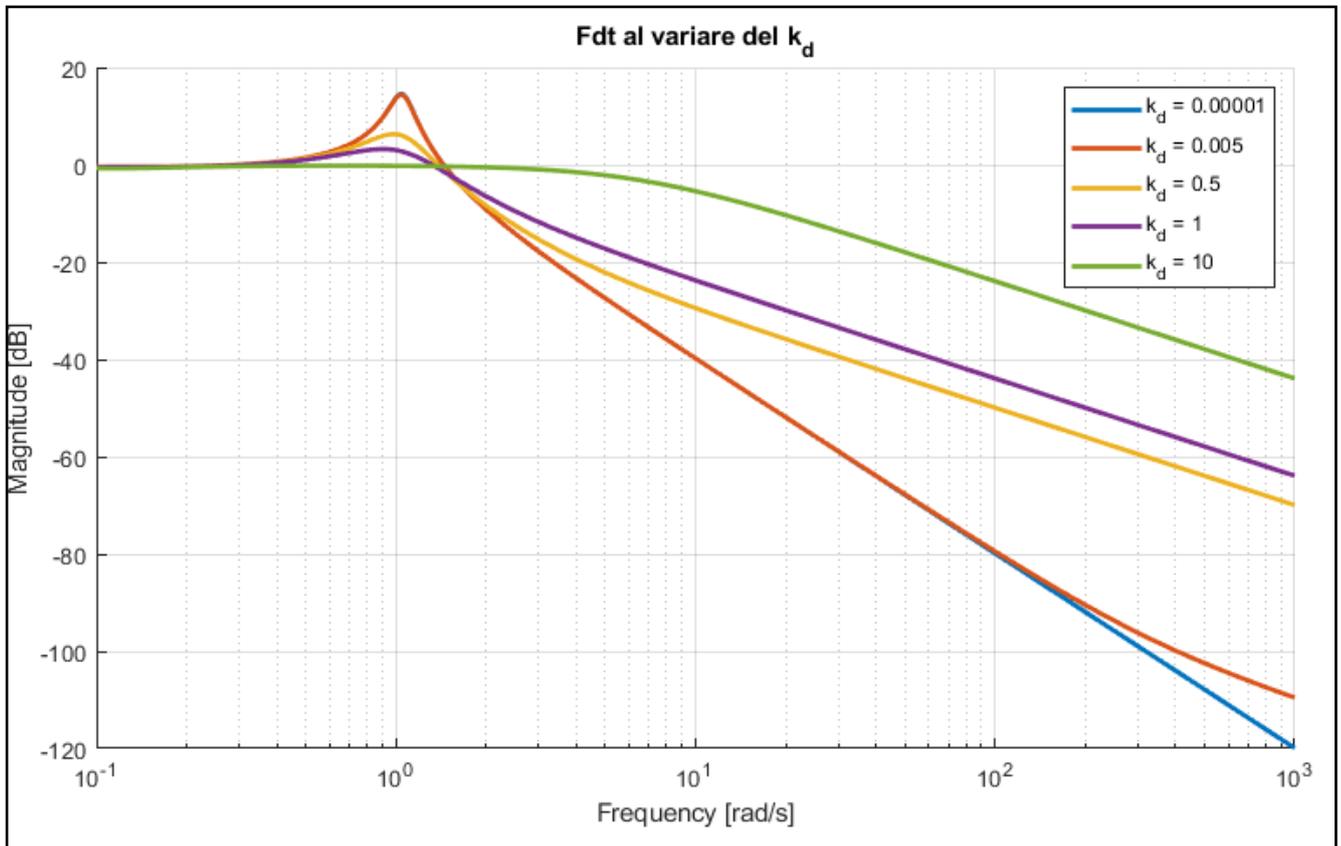


Figura 2.15 – Funzione di trasferimento al variare del k_d con $k_i = 5$ e $k_p = 0.5$

Anche in questo caso, come è possibile vedere dalla fig.2.15, gli effetti che si ottengono facendo variare il guadagno derivativo, sono per lo più gli stessi. A differenza del caso precedente, dove un aumento del guadagno proporzionale aveva influenza sull'aumento del picco, in questo caso, l'aumento del guadagno derivativo tende ad annullare quasi completamente i picchi della funzione di trasferimento. Anche in questo caso, all'aumentare del k_d aumenta la frequenza, e quindi, per gli stessi concetti espressi precedentemente, aumenta anche la larghezza di banda del sistema.

È possibile notare, come il valore di guadagno derivativo più piccolo utilizzato in questa trattazione, individuato dalla linea blu, sia quasi sovrapposto alla linea arancio, e si ha una piccola variazione di comportamento solo alle alte frequenze. Interessante, invece, notare come un valore di k_d molto alto, caso della linea verde, il picco scompaia quasi completamente e la funzione di trasferimento risulta essere quasi piatta ma con una larghezza di banda molto grande.

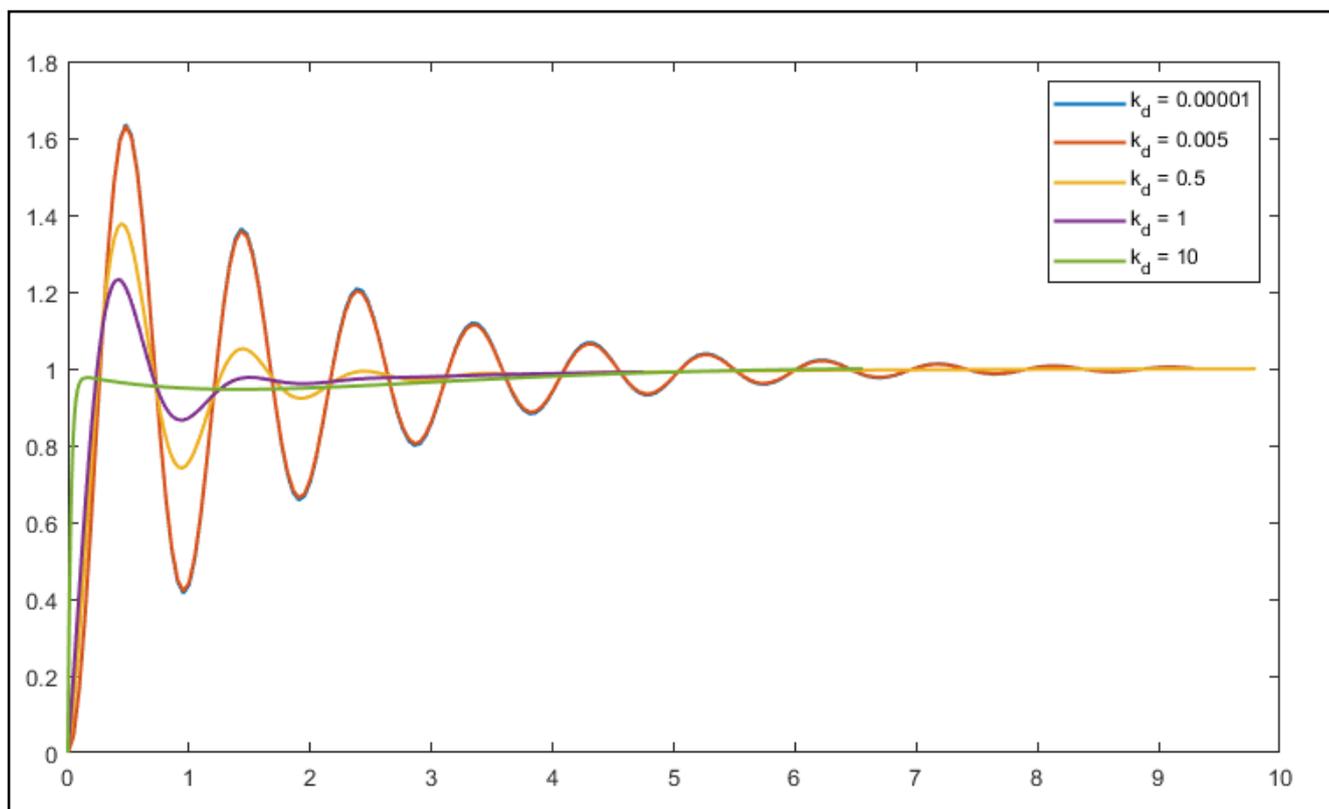


Figura 2.16 – Risposta del sistema ad un input a gradino al variare del guadagno derivativo

Ovviamente, il comportamento visto nella fig.2.15, viene confermato ulteriormente anche nella fig.2.16, dove si può notare come la linea verde, quella con un k_d molto alto, non presenti né overshoot né undershoot e come raggiunga il riferimento quasi immediatamente. Invece, come era prevedibile dalla fig.2.13, i valori di guadagno derivativo più basso presentano un comportamento diverso, con overshoot che aumenta al diminuire del guadagno derivativo e anche la velocità di salita del sistema è più lenta.

A differenza del caso precedente, invece, il tempo di decadimento T risulta essere diverso per i vari valori di guadagno scelti, infatti, come è possibile vedere da fig.2.15 per la linea verde, quindi k_d alto, il tempo di decadimento risulta essere il più basso con valore di circa 6.5s, mentre per $k_d = 1$, nel caso della linea viola, esso è addirittura più basso, con valore di circa 5s.

Questo comportamento è possibile spiegarlo analizzando la mappa dei poli:

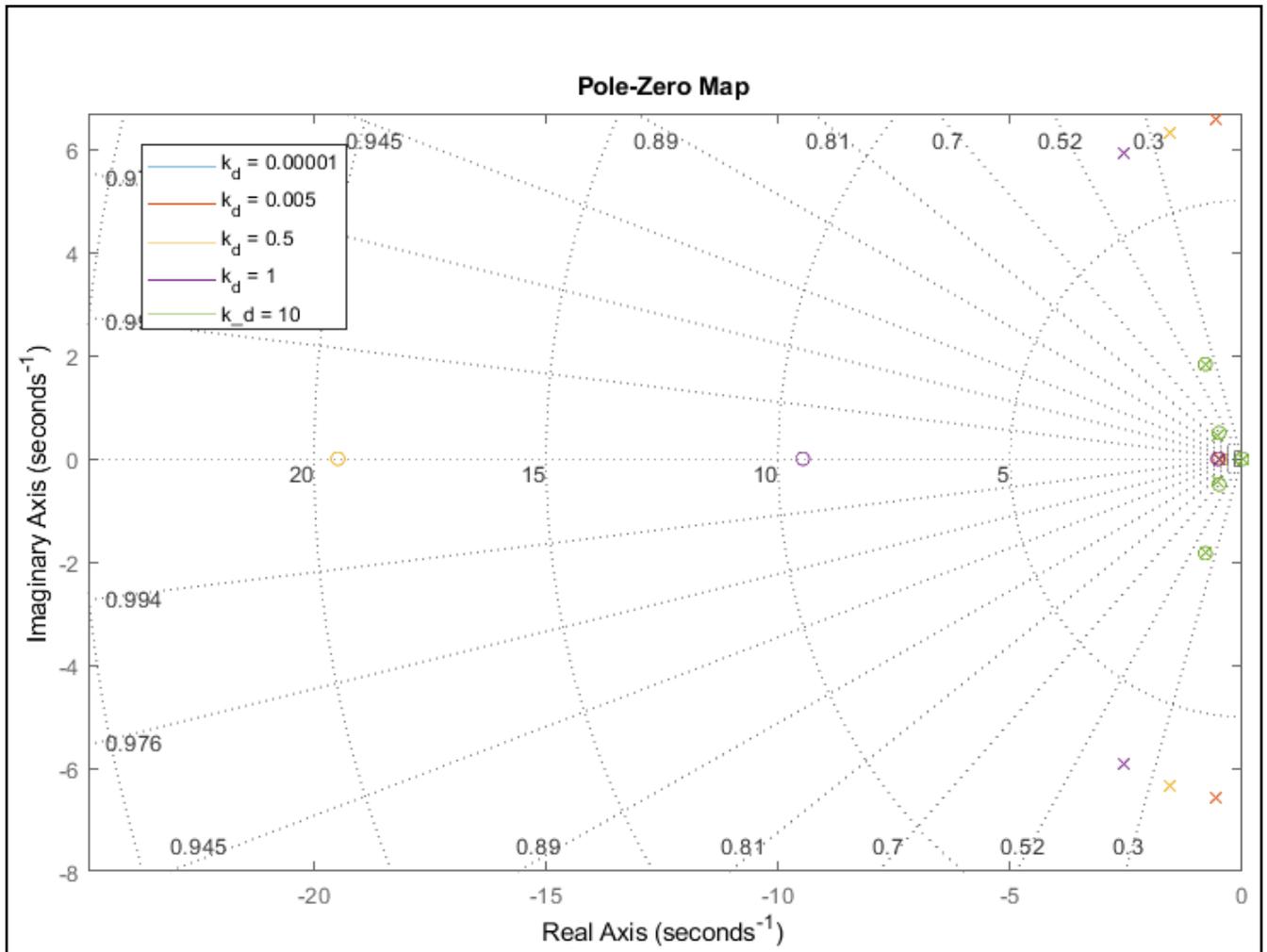


Figura 2.17 – Risposta del sistema ad un input a gradino al variare del guadagno proporzionale

Come è possibile vedere dalla fig.2.17, i valori di k_d più bassi sono quelli che presentano poli più vicini all'asse verticale, mentre aumentando ulteriormente il valore, i poli si spostano accentrandosi all'interno della mappa. Infatti, è possibile notare la presenza dei poli verdi molto vicini allo 0 e molto lontani dall'asse immaginario, quindi, come era possibile immaginare dallo studio delle figure precedenti, all'aumentare del guadagno derivativo il sistema tende a stabilizzarsi. In questo caso, il polo in rosso, cioè quello inerente al k_d più basso è sovrapposto a quello blu, quindi anche diminuendo di molto i parametri, risulta complicato instabilizzare il sistema.

2.8. Influenza del guadagno integrativo

Infine, ultimo caso che bisogna analizzare è quello inerente al guadagno integrativo.

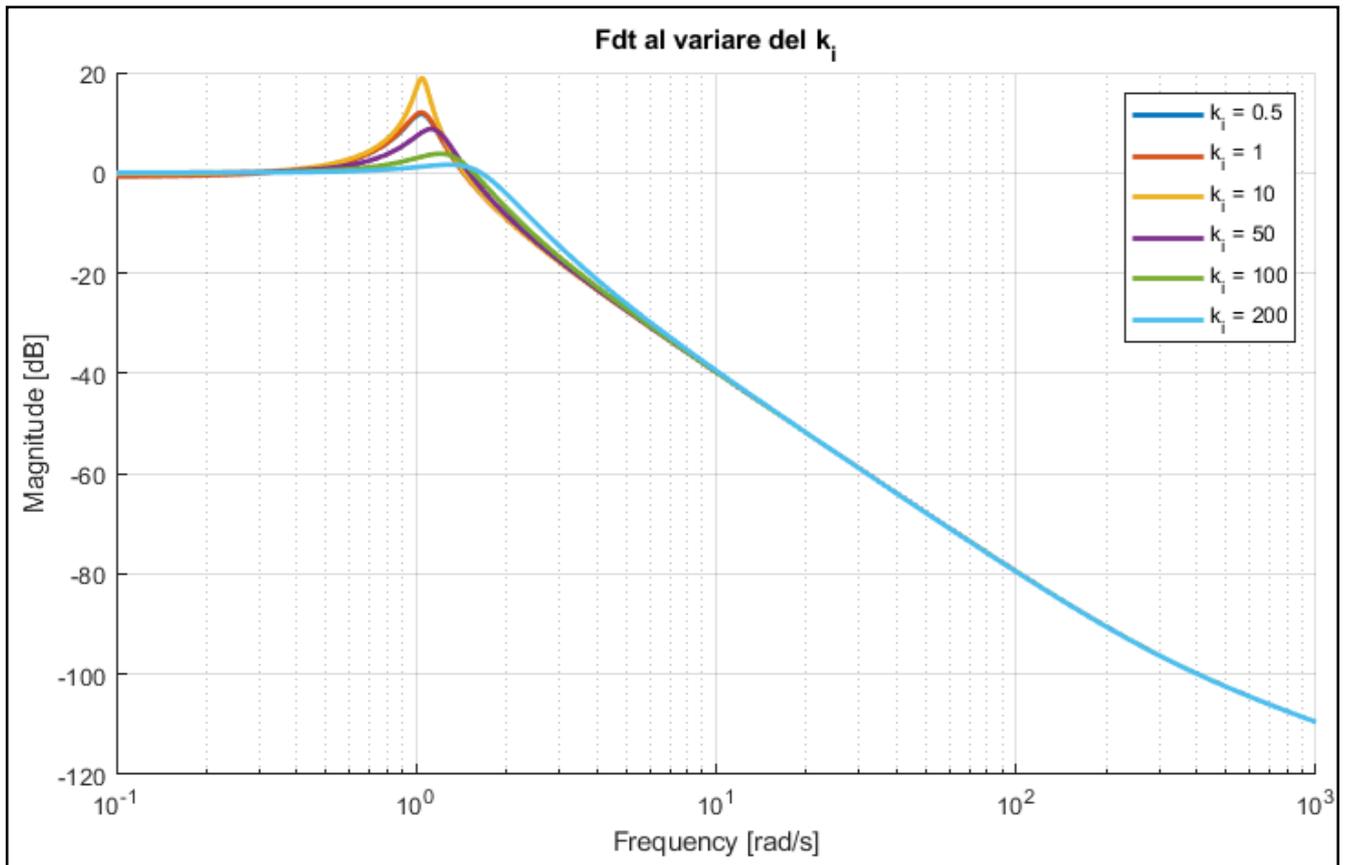


Figura 2.18 – Funzione di trasferimento al variare del k_i con $k_d = 0.05$ e $k_p = 10$

Come è possibile vedere dalla fig.2.18, l'aumento del guadagno integrativo tende a ridurre il picco della funzione di trasferimento che ad un certo punto diviene quasi piatto. Interessante notare come, nonostante la variazione del parametro in questione, alle alte frequenze il comportamento della funzione di trasferimento risulta essere uguale per tutti i valori scelti, mentre varia leggermente alle basse frequenze. In questo caso la frequenza di taglio risulta cambiare di poco per i diversi valori di k_i e, di conseguenza, anche la larghezza in banda.

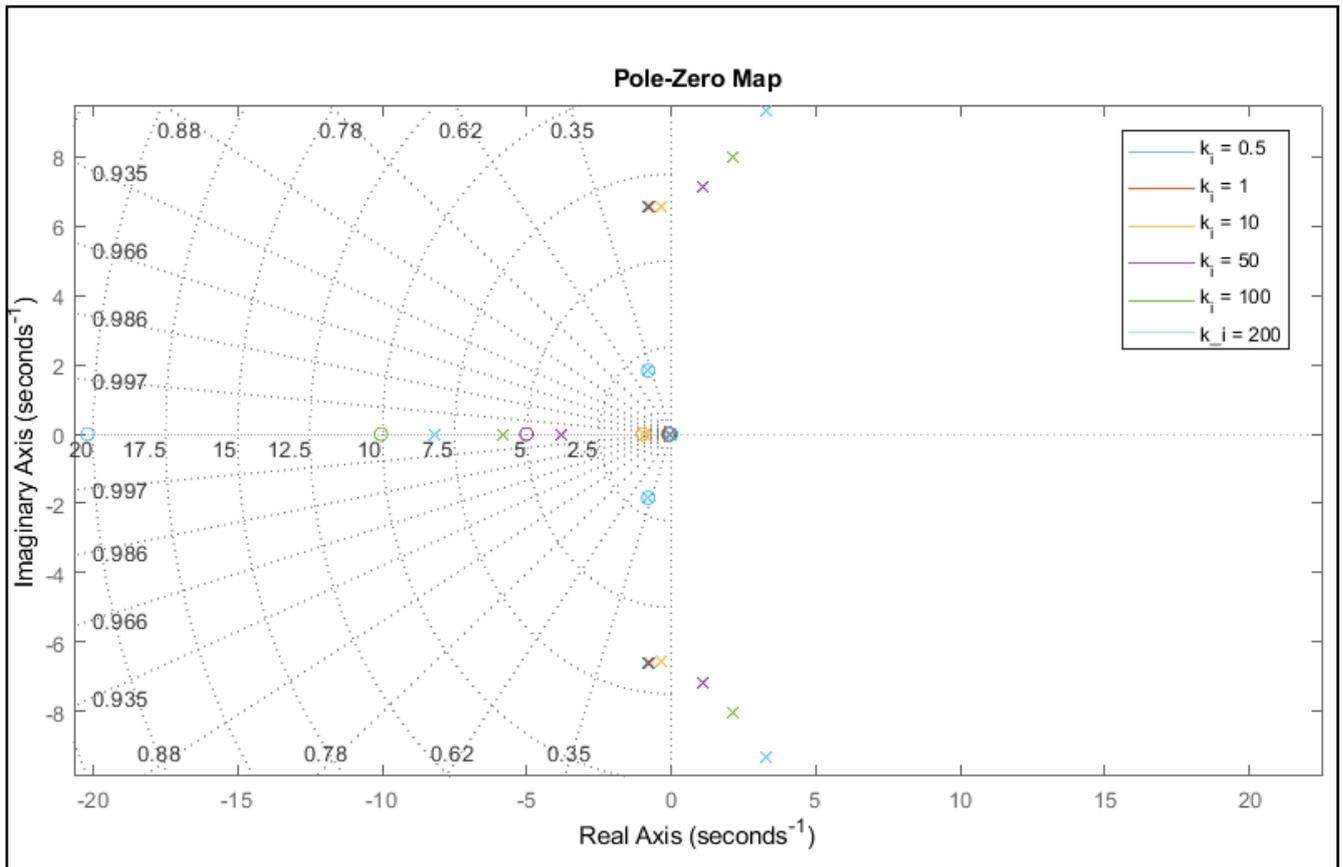


Figura 2.19 – Mappa dei poli al variare del guadagno integrativo

Molto interessante notare come lo studio della mappa dei poli porti a dei risultati non ancora trovati nei casi precedenti: l'eccessivo aumento del guadagno integrativo porta ad instabilità il sistema. Infatti, come è possibile notare, alcuni poli sono presenti nel semipiano destro del piano Re-Im, e ciò, per tutte le considerazioni già fatte in precedenza, significa che il sistema, in quelle condizioni risulta essere instabile.

A questo punto, si studia la risposta del sistema ad una risposta a gradino al variare del guadagno integrativo, eliminando le condizioni di instabilità.

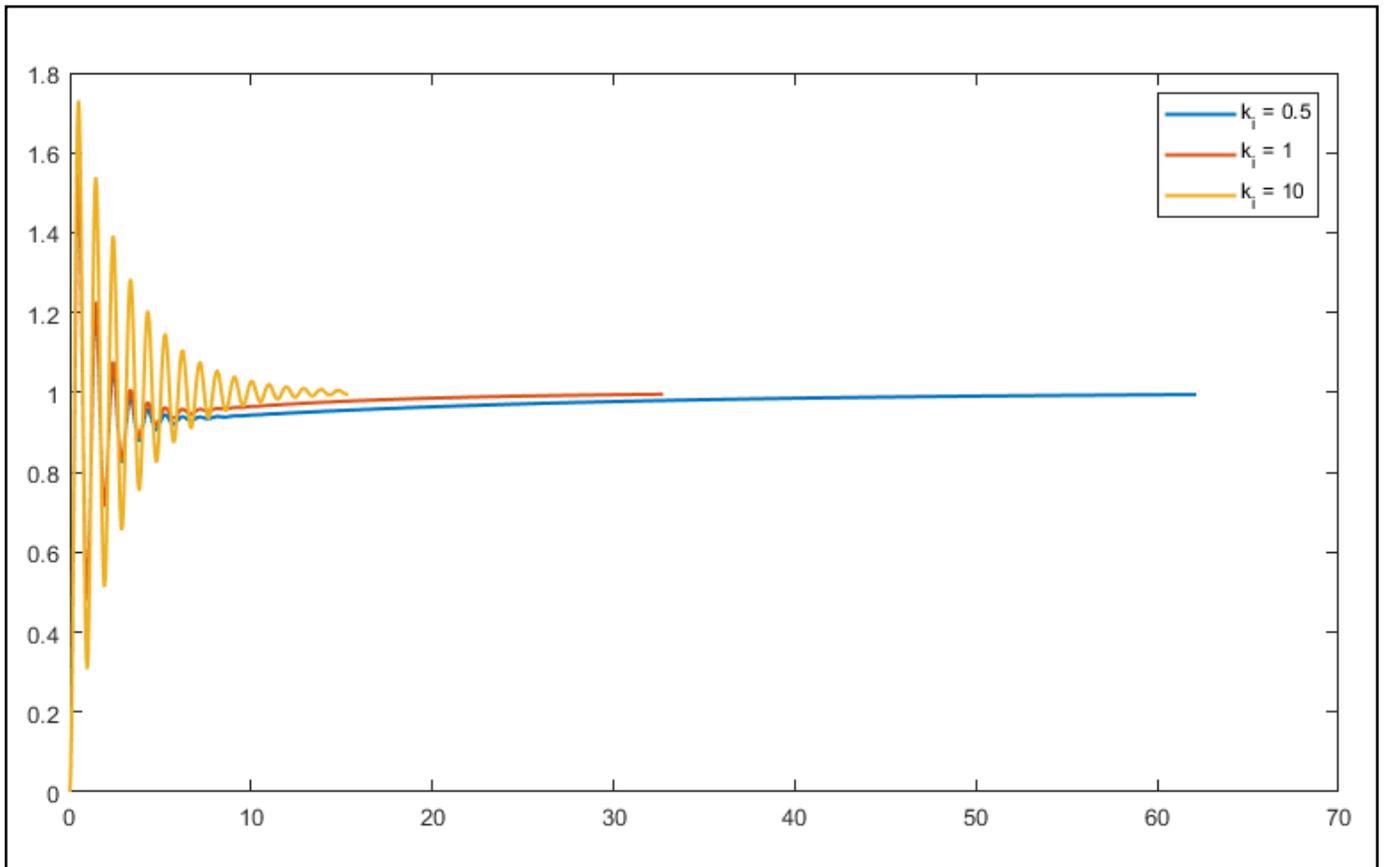


Figura 2.20 – *Mappa dei poli al variare del guadagno integrativo*

Quindi, dalla fig.2.20 è possibile notare come l'aumento del k_i aumenti l'overshoot del sistema ma anche la velocità del sistema a rispondere ad un input, che in questo caso è uno step. In particolare, l'aumento del guadagno integrativo riduce il tempo di decadimento che diminuisce all'aumentare del guadagno integrativo.

A questo punto, dopo aver analizzato tutti e 3 i casi si riporta una tabella riassuntiva del comportamento del sistema al variare dei parametri e soprattutto come variano tutte le caratteristiche considerate fino ad ora:

Parametro	Picco FdT	Frequenza di taglio	Stabilità sistema	Overshoot	Tempo di salita
Aumenta Kp	Aumenta	Aumenta	Diminuisce	Aumenta	Diminuisce
Aumenta Kd	Diminuisce	Aumenta	Aumenta	Diminuisce	Diminuisce
Aumenta Ki	Aumenta	Aumenta	Diminuisce	Aumenta	Diminuisce

Tabella 4 – *Tabella riassuntiva*

CAPITOLO 3

Modellazione banco prova in Closed Loop

3. Studio del sistema controllato in CL con controllo di velocità sul motore M2

Dopo aver analizzato la teoria, aver modellato il banco prova e studiato tutti gli effetti che può avere il controllore PID, si analizzano, dal punto di vista pratico, quali sono le conseguenze sul banco stesso.

3.1. Modifica delle equazioni in closed loop

Come è stato possibile vedere nel paragrafo 2.2, la presenza del controllore PID modifica l'equazione nel dominio del tempo, in particolare modifica l'input che dovrà tenere conto dei 3 effetti proporzionale, derivativo e integrativo con termine derivato limitato in banda. Bisogna, quindi, aggiungere tre ulteriori stati al sistema che saranno $\ddot{\theta}_{6,F}$, $\ddot{\theta}_{ref,F}$ e $\ddot{\theta}_6$ cioè la derivata limitata in banda della velocità del motore controllato e del riferimento e l'accelerazione del motore M2. In questo modo il comportamento del modello è più vicino a quello del sistema fisico.

La forzante T_{M2} la si può scrivere come:

$$T_{M2} = k_i(\theta_{ref} - \theta_6) + k_p(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}_6) + k_d(\ddot{\theta}_{ref,F} - \ddot{\theta}_{6,F}) \quad (3.1)$$

In definitiva, in questo caso, l'equazione completa, diviene:

$$\begin{aligned} I_6 \ddot{\theta}_6 + k_d \ddot{\theta}_{6,F} + \left(c_6 + \frac{c_{GB2}}{\tau_2^2} + k_p \right) \dot{\theta}_6 + \left(\frac{k_{GB2}}{\tau_2^2} + k_i \right) \theta_6 - \frac{k_{GB2}}{\tau_2} \theta_5 \\ = k_i \theta_{ref} + k_p \dot{\theta}_{ref} + k_d \ddot{\theta}_{ref,F} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dove, bisogna aggiungere in coda altre tre equazioni dove si definiscono gli altri tre stati:

$$\ddot{\theta}_{6,F} = \frac{1}{\tau_F} (\ddot{\theta}_6 - \ddot{\theta}_{6,F}) \quad (3.3)$$

$$\ddot{\theta}_{ref,F} = \frac{1}{\tau_F} (\ddot{\theta}_{ref} - \ddot{\theta}_{ref,F}) \quad (3.4)$$

$$\ddot{\theta}_6 = \frac{d\dot{\theta}_6}{dt} \quad (3.5)$$

A questo punto, ripercorrendo gli stessi passaggi del caso dell'anello aperto, si scrivono le matrici nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_C x(t) + B_C u \\ y(t) = C_C x(t) + D_C u \end{cases} \quad (3.6)$$

Per distinguere le matrici nello spazio degli stati tra il caso ad anello aperto e quello ad anello chiuso, si utilizza la simbologia con il pedice C per definire quelle in anello chiuso.

Si può notare come la presenza del filtro del primo ordine al termine derivativo comporta l'aggiunta di due gradi di libertà nella sesta equazione, quindi l'aggiunta di 3 stati, che porta la matrice [A] e la matrice [B] ad aumentare di 3 dimensioni e di conseguenza anche i vettori $x(t)$ e il vettore u . Infatti, nel vettore degli stati $x(t)$ all'ultimo termine vanno aggiunti nuovi stati $\ddot{\theta}_{6,F}$, $\ddot{\theta}_{6,ref}$ e $\ddot{\theta}_6$, mentre il vettore u diventerà un vettore 4x1 dove si aggiungono gli elementi che corrispondono alla derivata e all'integrale del riferimento di velocità.

A questo punto, prima di riscrivere le matrici si scrive, il vettore degli stati $x(t)$ e il vettore degli input u nel dominio del tempo con una simbologia semplificata, in maniera tale da ottenere più facilmente l'equazione.

Quindi:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_{6,F} \\ \ddot{\theta}_{ref,F} \\ \ddot{\theta}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_{14} \\ \dot{x}_{15} \end{pmatrix} & \quad \{x\} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_{6,F} \\ \ddot{\theta}_{ref,F} \\ \ddot{\theta}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{pmatrix} \\ \\ \{u\} &= \begin{pmatrix} T_{M1} \\ \int \omega_{ref} \\ \omega_{ref} \\ \dot{\omega}_{ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per il vettore $\{u\}$ nel caso di sistema controllato è possibile ottenerlo utilizzando una matrice ausiliaria $[Op]$ dove all'interno sono presenti gli operatori. Quindi:

$$\{u\} = [Op]_{4 \times 2} \left\{ \begin{array}{c} T_{M1} \\ \omega_{M2,ref} \end{array} \right\}_{2 \times 1} \quad (3.8)$$

In questo modo, partendo dalla (3.8), aggiungendo la matrice $[Op]$, si riesce ad ottenere come ingresso solo la coppia T_{M1} e la velocità di riferimento ω_{ref} , nel seguente modo:

$$\{u\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \int dt \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{array} \right]_{4 \times 2} \left\{ \begin{array}{c} T_{M1} \\ \omega_{ref} \end{array} \right\}_{2 \times 1} = [Op]_{4 \times 2} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_3 \end{array} \right\}_{2 \times 1} \quad (3.9)$$

In questo modo, le ultime 4 equazioni divengono:

$$I_6 \dot{x}_{12} + k_d x_{14} + \left(c_6 + \frac{c_{GB2}}{\tau_2^2} + k_p \right) x_{12} + \left(\frac{k_{GB2}}{\tau_2^2} + k_i \right) x_6 - \frac{k_{GB2}}{\tau_2} x_5 = k_i u_2 + k_p u_3 + k_d x_{15} \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_{13} = \frac{1}{\tau_F} (x_{15} - x_{13}) \quad (3.11)$$

$$\dot{x}_{14} = \frac{1}{\tau_F} (u_4 - x_{14}) \quad (3.12)$$

$$\dot{x}_{15} = \frac{dx_{15}}{dt} \quad (3.13)$$

In base alle considerazioni e alle modifiche che sono state fatte, è possibile riscrivere tutte le matrici e le sottomatrici che compongono il sistema:

$$[A_C] = \left[\begin{array}{ccc} [0]_{6 \times 6} & [I]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 3} \\ [A1_C]_{6 \times 6} & [A2_C]_{6 \times 6} & [A3_C]_{6 \times 3} \\ [0]_{3 \times 6} & [0]_{3 \times 6} & [A4_C]_{3 \times 3} \end{array} \right]_{15 \times 15}$$

Dove:

$$\begin{aligned}
& [A1_c] \\
= & \begin{bmatrix}
-\frac{k_{DMF}}{I_1} & \frac{k_{DMF}}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{k_{DMF}}{I_2} & -\frac{k_{DMF} + \frac{k_{GB1}}{\tau_1^2}}{I_2} & \frac{k_{GB1}}{\tau_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{k_{GB1}}{\tau_1 I_3} & -\frac{k_{GB1} + k_{SA1}}{I_3} & \frac{k_{SA1}}{I_3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{k_{SA1}}{I_4} & -\frac{k_{SA1} + k_{SA2}}{I_4} & \frac{k_{SA2}}{I_4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{k_{SA2}}{I_5} & -\frac{k_{GB2} + k_{SA2}}{I_5} & \frac{k_{GB2}}{\tau_2 I_5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{GB2}}{\tau_2 I_6} & -\frac{\frac{k_{GB2}}{\tau_2^2} + k_i}{I_6}
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [A2_c] \\
= & \begin{bmatrix}
-\frac{c_1 + c_{DMF}}{I_1} & \frac{c_{DMF}}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{c_{DMF}}{I_2} & -\frac{\frac{c_{GB1}}{\tau_1^2} + c_2}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{c_3 + c_{SA1}}{I_3} & \frac{c_{SA1}}{I_3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{c_{SA1}}{I_4} & -\frac{c_{SA1} + c_4 + c_{SA2}}{I_4} & \frac{c_{SA2}}{I_4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{c_{SA2}}{I_5} & -\frac{c_5 + c_{SA2}}{I_5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_6 + \frac{c_{GB2}}{\tau_2^2} + k_p}{I_6}
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[A3_c] = \begin{bmatrix}
\{0\}_{5 \times 1} & \{0\}_{5 \times 1} & \{0\}_{5 \times 1} \\
0 & 0 & -\frac{k_d}{I_6}
\end{bmatrix}$$

$$[A4_c] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_F} & 0 & \frac{1}{\tau_F} \\ 0 & -\frac{1}{\tau_F} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mentre, per quanto riguarda la matrice B si ha:

$$[B_c] = \begin{bmatrix} [0]_{6 \times 5} \\ [B1_C]_{7 \times 5} \end{bmatrix}_{14 \times 5}$$

Dove

$$[B1_c] = \begin{bmatrix} \{0\}_{6 \times 1} & \{0\}_{6 \times 1} & \{0\}_{6 \times 1} & \{0\}_{6 \times 1} \\ 1/I_1 & 0 & 0 & 0 \\ \{0\}_{4 \times 1} & \{0\}_{4 \times 1} & \{0\}_{4 \times 1} & \{0\}_{4 \times 1} \\ 0 & \frac{k_i}{I_6} & \frac{k_p}{I_6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{15 \times 4}$$

Mentre per le matrici $[C_c]$, a differenza del caso precedente, dove si era interessati ad avere tutti gli stati, in questo caso si vogliono delle misure specifiche per ottenere valori precisi, infatti nello specifico caso le funzioni di trasferimento a cui siamo interessati sono $\frac{\omega_{6,feed}}{\omega_{6,ref}}$ e $\frac{\omega_{6,feed}}{T_{M1}}$. Quindi, anziché avere una matrice $[C]$ formata da tanti 1, si avrà una matrice $[C_c]$ formata da tanti 0 e un solo 1 nella posizione che si vuole controllare. Poiché si è interessati alla $\omega_{6,feed}$ cioè il feedback della velocità del motore M2, si inserisce il numero 1 nella colonna 12 come segue:

$$[C_c] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

In questo modo, Matlab fornirà direttamente le funzioni di trasferimento tra gli ingressi e l'uscita selezionata mediante la matrice $[C_c]$.

Analogo discorso viene fatto nel caso della matrice $[D_C]$ dove si ha una matrice formata da 1 riga e 4 colonne, visto che bisogna tener conto del contributo del controllore PID e della presenza del filtro passo basso.

$$[D_C] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

3.2. Analisi dei risultati tra CL e OL

Nel caso di open loop control, si può notare come la scrittura sia molto semplice, con il vettore degli input formato semplicemente da due elementi: T_{M1} e T_{M2} e di conseguenza, la matrice B è una matrice formata da 12 righe e 2 colonne composta semplicemente dall'inverso della matrice M, che moltiplica gli input. In questo caso le matrici [A] e [B] sono ottenute in maniera molto semplice, quasi da prassi, senza la necessità di dover aggiungere e studiare alcuno stato aggiuntivo.

Nel caso di closed loop control entra in funzione il controllo PID, quindi bisogna tenere conto dei 3 guadagni del controllore: k_p guadagno proporzionale, k_i guadagno integrativo e infine k_d guadagno derivativo, che modificano la scrittura dell'input T_{M2} . Ulteriore modifica viene riportata nel momento in cui si considera l'utilizzo del filtro passo basso utilizzato per il termine derivativo che viene applicato sia per il riferimento sia per il feedback. Tutto ciò, porta all'implementazione di tre ulteriori equazioni, che nello spazio degli stati implica la presenza di tre ulteriori stati. Ovviamente, come conseguenza, si ha che le matrici scritte nello spazio degli stati aumentano le loro dimensioni: la matrice [A] da 12x12 diviene una matrice 15x15, la matrice [B], invece, diviene una matrice 15x4 così come cambiano le loro dimensioni i vettori contenente gli stati, il vettore contenente le derivate degli stati e il vettore che contiene gli input. Per la scrittura della matrice $[A_C]$ non si può utilizzare la scrittura precedente dove la matrice [A1] teneva conto solo dei valori di rigidità mentre la [A2] solo quelli di smorzamento, ma anzi c'è stata la necessità di aggiungere ulteriori due matrici nel caso CL per scrivere in maniera corretta le ultime equazioni aggiunte in coda. Anche le matrici [C] e [D] aumentano le loro dimensioni come diretta conseguenza, infatti la matrice $[C_C]$ diviene una matrice 1x15, mentre la matrice $[D_C]$ 1x4. A differenza del caso in OL le matrici [A] e [B] non possono ottenere in maniera semplificativa e meccanica dove è possibile ottenerle direttamente dalle matrici di massa, smorzamento e rigidità.

Ulteriore confronto dei risultati può essere fatto andando a confrontare i valori delle frequenze proprie e le forme modali nei due casi analizzati finora. Confronto aggiuntivo può essere fatto all'interno dei singoli casi dove è possibile analizzare il caso in cui non si tiene conto dello smorzamento, quindi, risolvere l'autoproblema e non tenere conto dello smorzamento, grazie alla funzione *eig* di matlab e il caso dove, attraverso la creazione della matrice A degli input e il comando *eig* si tiene conto anche dello smorzamento. Ulteriore comando che si utilizza per matlab è *damp*, grazie al quale si ricava, sempre nel caso della

matrice A, vettori all'interno dei quali ci sono i fattori di smorzamento, i poli e gli autovalori.

3.3. Analisi dinamica del sistema non smorzato e non controllato

Nel caso in cui si decide di utilizzare la funzione eig con le sole matrici M e K, si ottengono un numero di autovalori e di autovettori pari al numero di gradi di libertà del sistema, cioè 6. Questo perché non si tiene conto dello smorzamento, infatti la matrice C non viene considerata, quindi si tratta della soluzione dell'autoproblema:

$$([k] - \omega^2[m])\{X_0\} = \{0\} \quad (3.14)$$

Affinchè il vettore $\{X_0\}$ sia diverso dalla soluzione banale (ovvero nulla) deve valere la relazione:

$$\det([k] - \omega^2[m]) = 0 \quad (3.15)$$

Risolvendo la (3.15) si ottengono come soluzione le $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ cioè gli autovalori, le cui radici prendono il nome di pulsazioni proprie o pulsazioni naturali del sistema. Se si inseriscono, ad uno ad uno, gli autovalori nella (8.1) e si risolve il sistema algebrico, si ottengono le soluzioni $\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_n\}$, ovvero gli autovettori, che prendono anche il nome di forme modali del sistema. Quindi, risolvendo la (8.1) si ottengono due matrici: la matrice diagonale degli autovalori e la matrice modale, costruita ordinando gli autovettori per colonna.

Questi passaggi vengono fatti in automatico dal comando *eig* di Matlab che appunto restituisce le due matrici degli autovalori e degli autovettori. Le pulsazioni proprie, ottenute con Matlab, sono disposte in maniera non ordinata, infatti, prima di avanzare nella scrittura dello script e dalla soluzione, bisogna ordinarle in maniera crescente.

Se il sistema è non smorzato, e M, C e K sono simmetriche e definite positive gli autovettori e autovalori sono reali.

Si è, però, interessati alle frequenze naturali del sistema ottenute, a partire dalle pulsazioni come segue:

$$f_n = \frac{\sqrt{\omega_n^2}}{2\pi} \quad (3.16)$$

Nella tabella seguente vengono riportati i valori delle frequenze proprie in Hz del sistema non smorzato con il cambio DCT e il cambio D40 entrambi in V marcia:

f_{n1}	0 Hz
f_{n2}	8.6 Hz
f_{n3}	13.3 Hz
f_{n4}	56.7 Hz
f_{n5}	96.2 Hz
f_{n6}	162.8 Hz

Tabella 5 – Frequenza naturali sistema non smorzato e non controllato

Ovviamente, come per le frequenze proprie, anche gli autovettori, cioè le colonne dell'altra matrice ottenuta da *eig*, bisogna ordinarle secondo l'ordine crescente degli autovalori e in più, in questo caso, per ottenere le forme modali e per poterle confrontare tra di loro, è consigliabile normalizzare a 1 ogni autovettore. Per confrontare agevolmente tra loro gli autovettori, si riportano le rotazioni allo stesso asse, ad esempio a quello del primo grado di libertà (motore M1) mediante i due rapporti di trasmissione i singoli gradi di libertà, in maniera tale da confrontare tutti rispetto al motore M1: si moltiplicano quindi i singoli gdl, rappresentati dalle righe della matrice degli autovettori per i rapporti di trasmissione. Fatto ciò, quello che si ottiene, sono le seguenti forme modali:

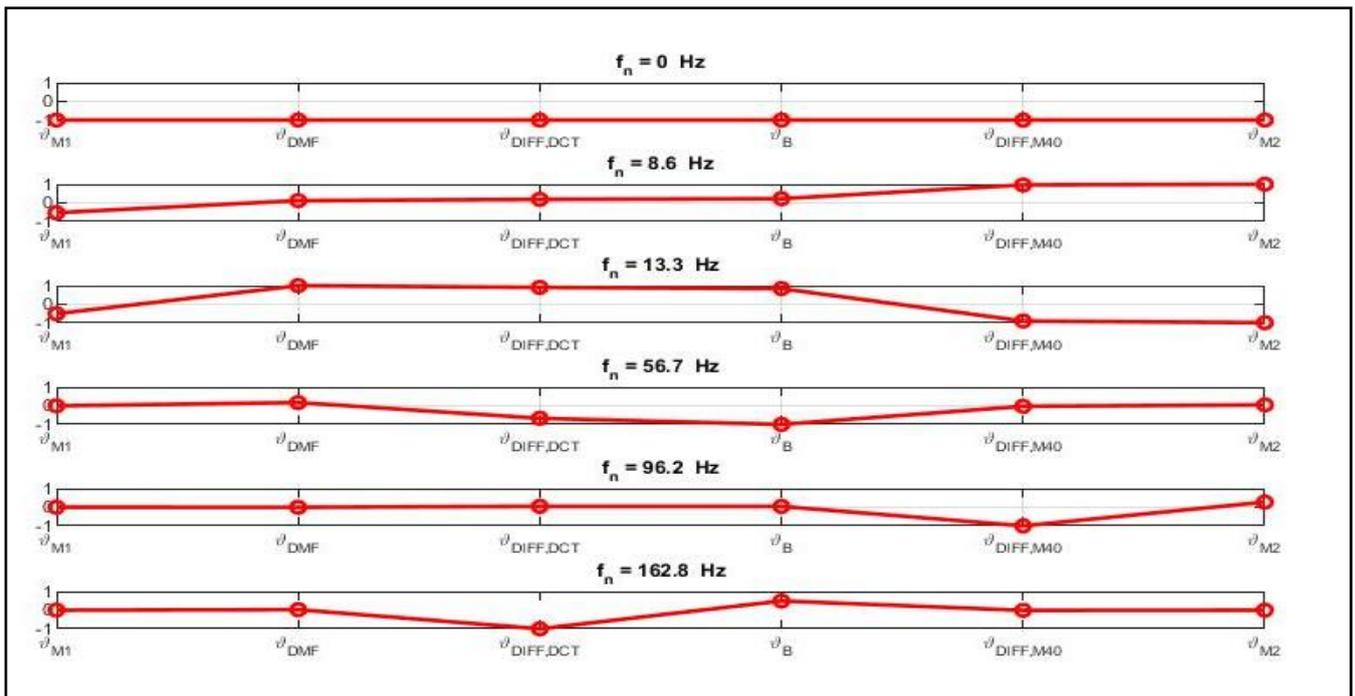


Figura 3.1 - Forme modali sistema OL con matrici M e K

Come si può notare dai grafici, la prima forma modale rappresenta il modo rigido del sistema essendo la frequenza nulla e gli elementi dell'autovettore corrispondente tutti uguali a -1.

3.4. Analisi dinamica del sistema smorzato e non controllato

È possibile, a questo punto, confrontare con il caso di smorzamento non nullo, quindi, anziché usare le sole matrici M e K si utilizza la matrice degli input A dove sono presenti tutte le proprietà del sistema.

In questo caso, per la presenza dello smorzamento e soprattutto, per le dimensioni della matrice A, che sono il doppio di quelle delle matrici M e K, si ottengono 12 autovalori e 12 autovettori. Per la presenza dello smorzamento e, quindi, del coefficiente di smorzamento, nel caso in cui quest'ultimo fosse minore di 1 si ottengono coppie di autovalori complessi e coniugati, e quindi, due autovettori uguali, mentre nel caso in cui è uguale a 1 si può avere la stessa situazione precedente, due autovalori reali distinti.

I modi sono pari al numero di gradi di libertà, quindi dovrebbero essere 6 in questo caso. Per ogni grado di libertà un modo e per ogni modo una coppia di autovalori complessi coniugati se sottosmorzati, se sovrasmorzati una coppia di autovalori reali.

Quindi dall'analisi del fattore di smorzamento, si nota la nascita di 8 modi propri di vibrare diversi tra di loro, quindi 8 autovalori e 8 autovettori diversi tra di loro. Come nel caso precedente, utilizzando la (3.16) si calcolano le frequenze proprie, dopo averlo ordinato in modo crescente a cui è associare a quel modo il fattore di smorzamento. È possibile così riportare in tabella le grandezze appena calcolate:

f_{n1}	0 Hz	ξ_1	100%
f_{n2}	0.3 Hz	ξ_2	100%
f_{n3}	4.2 Hz	ξ_3	100%
f_{n4}	10.2 Hz	ξ_4	8.8%
f_{n5}	30.7 Hz	ξ_5	100%
f_{n6}	55.9 Hz	ξ_6	2.5%
f_{n7}	96.1 Hz	ξ_7	1.8 %
f_{n8}	162.8 Hz	ξ_9	0.2 %

Tabella 6 – Frequenze naturali e fattore di smorzamento sistema non controllato

Gli autovettori con $\xi = 1$ non rappresentano effettivi modi di vibrare perché non indicano un comportamento oscillatorio, ma rappresentano un decadimento esponenziale dell'ampiezza.

Per quanto riguarda gli autovettori, essendo vettori di numeri complessi, è interessante calcolare sia il modulo che la fase. Per quanto concerne il modulo, l'autovettore viene normalizzato rispetto all'elemento dell'autovettore con modulo massimo e la fase, invece, viene riferita alla fase del primo elemento dell'autovettore, cioè del primo grado di libertà. La presenza della fase, rispetto al caso precedente, è dovuta appunto alla presenza dello smorzamento. Un tipico plot delle forme modali è il seguente:

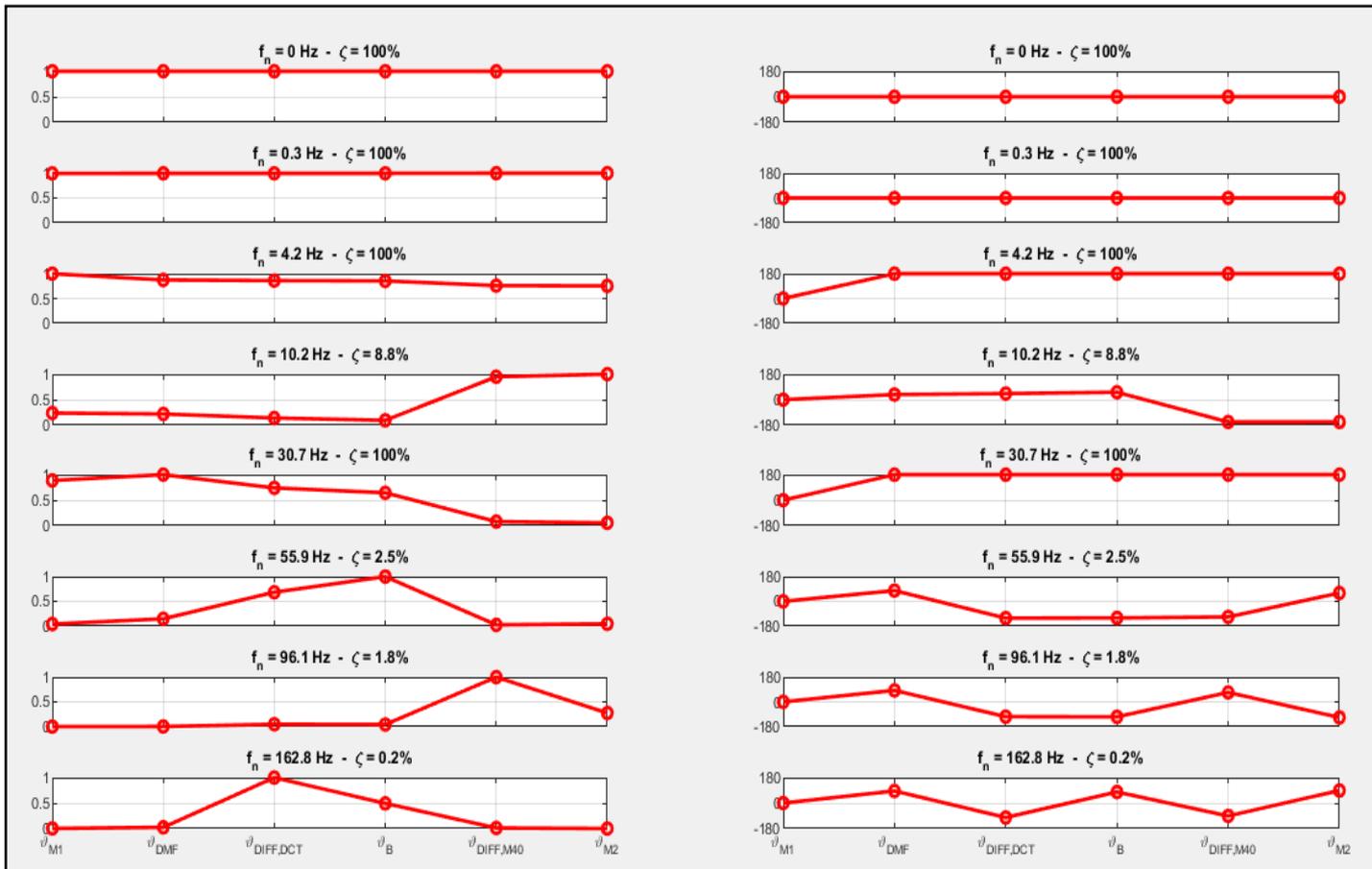


Figura 3.2 - Forme modali sistema in OL con smorzamento

Come è possibile vedere dalla fig.3.2 anche in questo caso sono presente due modi propri del sistema, che vengono rappresentati dai primi due modi con frequenze di 0Hz e fase nulla e fattore di smorzamento pari al 100%.

3.5. Recettanza del sistema smorzato e non controllato

3.5.1. Approccio con inversione della matrice di rigidità dinamica

Dopo aver studiato le forme modali del sistema è possibile studiare la funzione di trasferimento. Attraverso la funzione di Matlab $tf(SYS)$ è possibile creare le funzioni di trasferimento, cioè il rapporto tra la risposta del sistema e l'input, che vengono create automaticamente in base alle dimensioni delle matrici C e D. Usando la funzione "bode", si calcola il modulo e la fase delle funzioni di trasferimento. Nel diagramma del modulo si rappresenta, in scala volendo semilogaritmica, le frequenze sull'asse delle ascisse in Hertz, mentre su quello delle ordinate il modulo espresso in decibel.

Nel diagramma della fase si rappresentano le ampiezze assunte dall'argomento per diversi valori di ω . Anche in questo caso è utile servirsi della carta semilogaritmica indicando sull'asse delle ascisse le pulsazioni e sull'asse delle ordinate la fase espressa in gradi.

La funzione di trasferimento è possibile calcolarla anche attraverso il metodo della recettanza: supponendo che l'ingresso che prendiamo come esempio è il T_{M1} , ed è una funzione del tipo:

$$T_{M1} = T_M e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

Come conseguenza la risposta del sistema sarà:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (3.18)$$

Quindi, il sistema risponderà con la stessa legge dell'ingresso ma con un ritardo ϕ dovuto allo smorzamento ed oscillerà con una pulsazione ω che è la stessa pulsazione della forzante. Sostituendo la risposta del sistema all'interno della (1) (eq princ):

$$(-\omega^2[M] + i\omega[c] + [k])\theta_0 = T_M \quad (3.19)$$

Dove è possibile ottenere la funzione di trasferimento $H(\omega)$ come rapporto tra risposta del sistema e ingresso della forzante:

$$H(\omega) = \frac{\theta_0}{T_M} = (-\omega^2[M] + i\omega[c] + [k])^{-1} \quad (3.20)$$

Quindi la funzione di trasferimento $H(\omega)$ si ricava tramite l'inversione di una matrice che prende il nome di matrice di rigidità dinamica $[k_{dyn}]$, cioè:

$$H(\omega) = [k_{dyn}^{-1}(\omega)] = [\alpha(\omega)] \quad (3.21)$$

Dove la matrice $[\alpha(\omega)]$ prende il nome di matrice di recettanza.

Nel caso in cui, anziché analizzare lo spostamento θ_0 si fosse interessati ad analizzare l'accelerazione del sistema, quindi $\ddot{\theta}_0$, è possibile ricavarla attraverso una semplice derivata rispetto al tempo visto che l'ipotesi fatta è di moto armonico a regime è $e^{i\omega t}$.

Quindi:
$$\dot{\theta}_0 = i\omega\theta_0 \quad (3.22)$$

$$\ddot{\theta}_0 = -\omega^2\theta_0 \quad (3.23)$$

Di conseguenza, la funzione di trasferimento si può ottenere tranquillamente dalla matrice dinamica in maniera lineare e sarà:

$$G(\omega) = -\omega^2 H(\omega) = -\omega^2 [k_{dyn}]^{-1} = -\omega^2 [\alpha(\omega)] \quad (3.24)$$

Che prende il nome di inertanza.

3.5.2. Approccio modale

Altro metodo che può essere utilizzato per il calcolo della recettanza, di conseguenza dell'inertanza, considerando sempre di essere in regime di moto armonico, è utilizzare l'analisi modale.

Per l'utilizzo dell'analisi modale si parte dalla classica equazione di equilibrio dinamico per il sistema in esame:

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{F(t)\} \quad (3.25)$$

Dove la $\{F(t)\}$ è la stessa forzante presa in considerazione nella (3.17).

A questo punto risulta necessario risolvere l'autoproblema per ottenere autovalori e autovettori necessari per operare la trasformazione modale e per disaccoppiare le equazioni.

Definita con $[\Psi]$ la matrice contenente tutti gli autovettori, ovvero la matrice modale, e η il vettore delle coordinate modale, si sostituisce nella (3.25) la seguente posizione che permette di passare dalle coordinate reali a quelle modali:

$$\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\} \quad (3.26)$$

La (3.26) prende il nome di trasformazione modale diretta.

Sostituendo la (3.26) nella (3.25) e pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale $[\Psi]^T$ si ottiene:

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Psi]^T [C] [\Psi] \{\dot{\eta}(t)\} + [\Psi]^T [K] [\Psi] \{\eta(t)\} = [\Psi]^T \{F(t)\} \quad (3.27)$$

In virtù della m- e k-ortogonalità, e sotto l'ipotesi semplificativa di smorzamento viscoso proporzionale, ovvero $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$, possiamo definire 2 nuove matrici:

$$- [\Psi]^T [M] [\Psi] = \text{diag}(m_r) \text{ matrice delle masse modali} \quad (3.28)$$

$$- [\Psi]^T [K] [\Psi] = \text{diag}(k_r) \text{ matrice delle rigidità modali} \quad (3.29)$$

In virtù delle proprietà degli autovettori, si ottengono n equazioni del tipo:

$$m_r \ddot{\eta}_r + (\alpha m_r + \beta k_r) \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = Q_r(t) \quad (3.30)$$

Dove $Q_r(t) = [\Psi]^T \{f(t)\}$ che prende il nome di vettore delle forze modali.

Nel caso di smorzamento viscoso proporzionale la soluzione alla forzante armonica in forma modale diviene:

$$(k_r - \omega^2 m_r + i\omega c_r) \eta_r(t) = \{\Psi_r\}^T \{F_0\} e^{i\omega t} \quad (3.31)$$

Chiaramente anche le coordinate modali a regime saranno armoniche e pertanto:

$$\{x(t)\} = \{X_0\} e^{i\omega t} = \sum_{r=1}^n \{\psi_r\} \eta_r(t) = \sum_{r=1}^n \{\psi_r\} \eta_{r0} e^{i\omega t} \quad (3.32)$$

Dunque, il vettore delle ampiezze di oscillazione a regime è espresso dalla seguente formula:

$$\{X_0\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{\psi_r\}^T \{F_0\} \{\psi_r\}}{k_r - \omega^2 m_r + i\omega c_r} \quad (3.33)$$

A questo punto si definisce la recettanza, funzione complessa della frequenza di eccitazione, come:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \left. \frac{X_{j0}}{F_{k0}} \right|_{F_{i0}=0} \quad (3.34)$$

Si sottolinea il fatto che per una corretta definizione di recettanza è necessario che tutte le forze applicate siano nulle, tranne quella relativa al grado di libertà $k - \text{esimo}$.

Quindi, dalla (3.33) si ricava:

$$X_{j0} = \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{kr} F_{k0} \psi_{jr}}{k_r - m_r \omega^2 + i\omega c_r} \quad (3.35)$$

Che permette di scrivere l'espressione della recettanza:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{k_r - m_r\omega^2 + i\omega c_r} \quad (3.36)$$

Ovviamente il tutto se si considera che l'input è una funzione di tipo armonico, ma lo stesso ragionamento e gli stessi passaggi possono essere fatti per qualsiasi tipo di funzione nel momento in cui il sistema è lineare.

Nel caso di ineranza è possibile fare una distinzione tra cross-ineranza e auto-ineranza:

- Auto-ineranza è la funzione di risposta in frequenza tra una forza generalizzata applicata ad una massa del sistema e la risposta in termini di accelerazione misurata nello stesso punto.
- Cross-ineranza quando, invece, il punto di misura della risposta non coincide con il punto di applicazione dell'eccitazione.

In termini di recettanza, con riferimento alla simbologia usata nell'equazione (3.20) è possibile definire $\alpha(\omega)$ attraverso gli indici: $\alpha_{i,j}(\omega)$ dove il primo indice (i) indica la massa di cui misuriamo la risposta mentre il secondo indice (j) indica il punto di applicazione della forza generalizzata. Quindi gli elementi $\alpha_{1,1}(\omega)$, $\alpha_{2,2}(\omega)$ etc sono auto-recettanze mentre gli elementi $\alpha_{1,2}(\omega)$, $\alpha_{2,3}(\omega)$ etc sono le cross-ineranze.

Per le recettanze vale la relazione di reciprocità $\alpha_{i,j}(\omega) = \alpha_{j,i}(\omega)$ per il teorema di reciprocità di Maxwell, ovvero se scambio punto di applicazione e punto di misura la FRF è la stessa. Vista l'espressione (3.36) è facile, quindi, verificarla:

$$\sum_{r=1}^n \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{k_r - m_r\omega^2 + i\omega c_r} = \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{kr}\psi_{jr}}{k_r - m_r\omega^2 + i\omega c_r} \quad (3.37)$$

Infatti, come si può vedere nella figura sottostante, viene riportato proprio un esempio dove si può notare che viene verificata questa proprietà. Il sistema utilizzando per questo esempio è proprio il banco, dove per far notare la presenza delle antirisonanze si è annullato lo smorzamento:

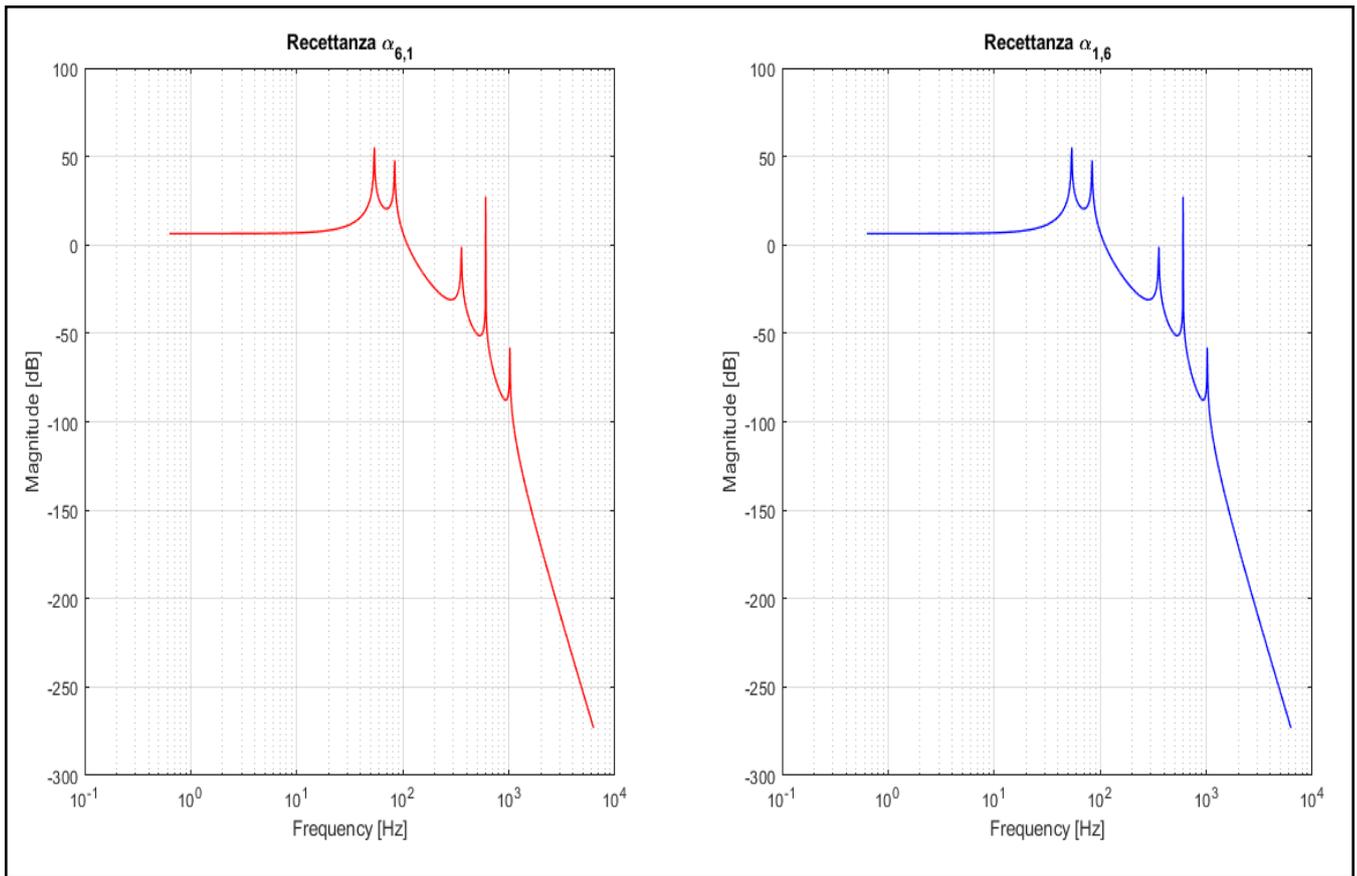


Figura 3.3 – Dimostrazione proprietà recettanza

La fig.3.3 è stata elaborata attraverso l'equazione (3.37) dove viene, quindi, dimostrata la proprietà di reciprocità del teorema di Maxwell essendo gli andamenti uguali.

Altra proprietà molto interessante per le recettanze è la presenza delle frequenze di antirisonanza tra due risonanze successive, ovvero frequenze in corrispondenza delle quali la recettanza è nulla in assenza di smorzamento. Inoltre, nel caso di auto-recettanze c'è sempre una antirisonanza tra due risonanze successive, mentre nel caso di cross-recettanza cioè non è vero. Il numero di antirisonanze generalmente si riduce allontanando il punto di misura dal punto di applicazione della forza. Quest'ultima proprietà la si può già notare in Fig.3.3 dove il punto di applicazione della forza, per entrambi i casi, si trova alla fine del sistema rispetto alla massa considerata e quindi, si può notare l'assenza di antirisonanze. In Fig.3.4 invece, viene mostrata la proprietà delle auto-recettanze ottenuta annullando lo smorzamento:

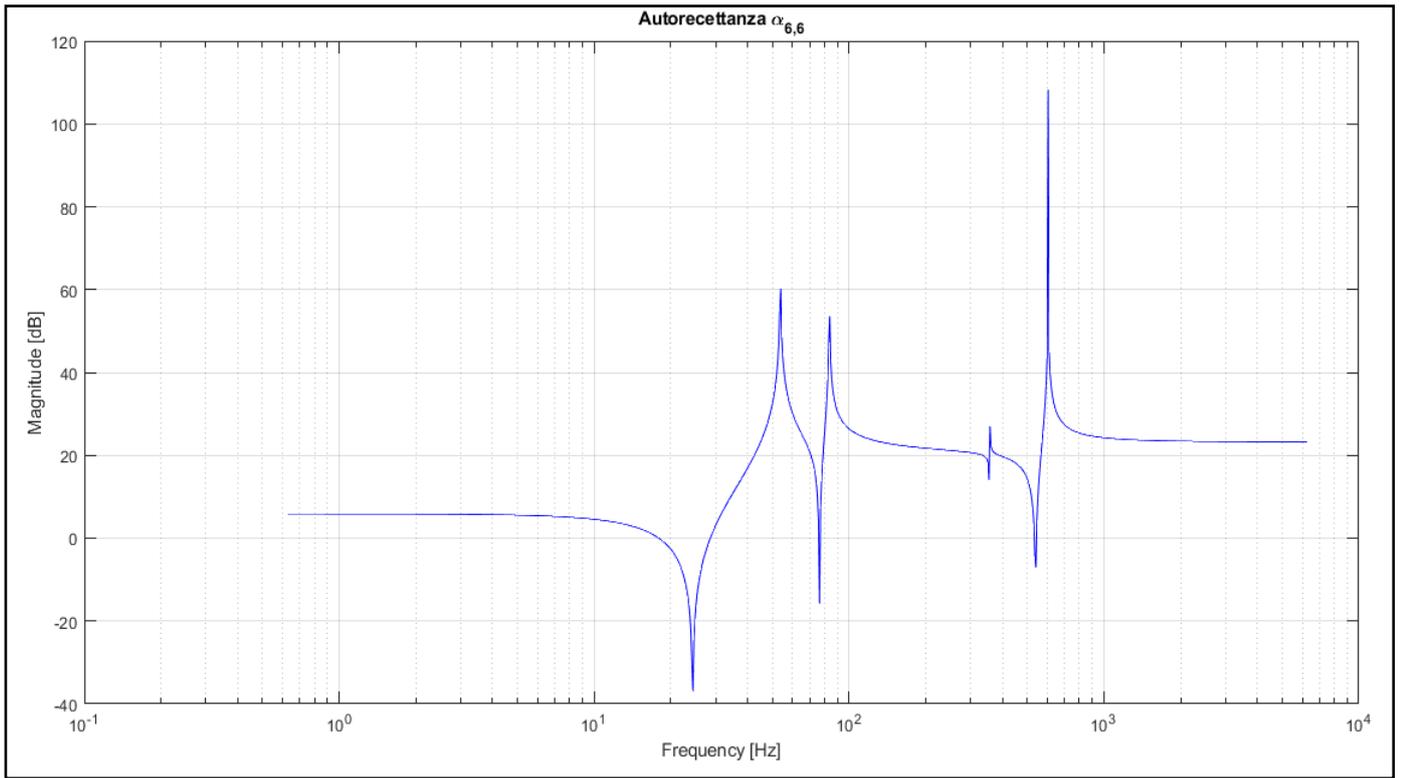


Fig.3.4 – *Dimostrazione proprietà delle auto-recettanze*

3.6. Analisi dinamica del sistema smorzato e controllato

Nel seguente caso, non è necessario fare l'analisi con le matrici M e K, e si passa direttamente all'analisi della matrice A e dei suoi rispettivi autovalori e autovettori. A differenza del caso precedente, la matrice A, sarà una matrice 15x15, di dimensione più grande rispetto al caso precedente. Di conseguenza ci saranno 15 autovalori e 15 autovettori. Con gli stessi e identici procedimenti fatti nel caso di OL si ricavano le frequenze proprie opportunamente ordinate, che si confrontano con quelle ottenute dal caso precedente:

Frequenza naturali e smorzamento in CL

Frequenza naturali e smorzamento in OL

f_{n1}	0.0 Hz	ξ_1	100%	f_{n1}	0 Hz	ξ_1	100%
f_{n2}	0.2 Hz	ξ_2	100%	f_{n2}	0.3 Hz	ξ_2	100%
f_{n3}	3.6 Hz	ξ_3	14.5%	f_{n3}	4.2 Hz	ξ_3	100%
f_{n4}	4.2 Hz	ξ_4	100%	f_{n4}	10.1 Hz	ξ_4	8.78%
f_{n5}	5.9 Hz	ξ_5	100%	f_{n5}	30.7 Hz	ξ_5	100%
f_{n6}	30.7 Hz	ξ_6	100%	f_{n6}	55.9 Hz	ξ_6	2.48%
f_{n7}	55.9 Hz	ξ_7	2.7 %	f_{n7}	96.1 Hz	ξ_7	1.77%
f_{n8}	93.3 Hz	ξ_8	7.8 %	f_{n8}	162.8 Hz	ξ_8	0.18%
f_{n9}	162.8 Hz	ξ_9	0.2 %				

Tabella 7 – Confronto frequenze naturali e fattori di smorzamento sistema controllato e non

È interessante osservare dalla tabella 5 come il comportamento alle alte frequenze non è influenzato dal controllo, infatti dal modo a 30Hz in poi i due sistemi sono equivalenti, ovvero stesse frequenze e stessi fattori di smorzamento

Come si può notare dalla tabella comparativa riportata sopra, le frequenze proprie sono aumentate rispetto al caso precedente, questo per la presenza del controllore PID attivo e quindi, dei guadagni che cambiano la struttura della matrice A.

Nella figura seguente sono riportate le forme modali:

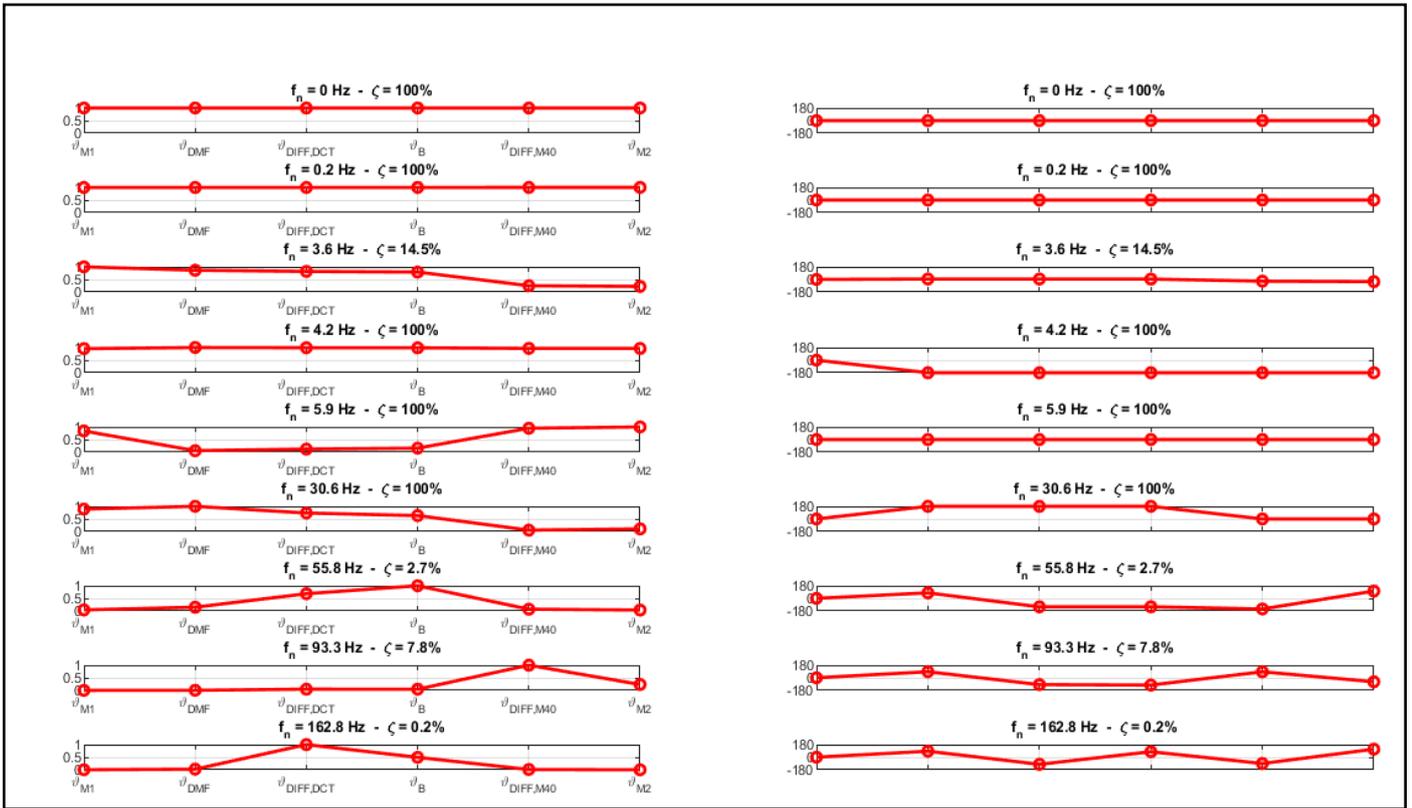


Figura 3.5 - Forme modali sistema in CL

Oltre alle frequenze proprie, sono cambiate anche le forme modali e i fattori di smorzamento.

Come nel caso precedente, si plotta la mappa dei poli:

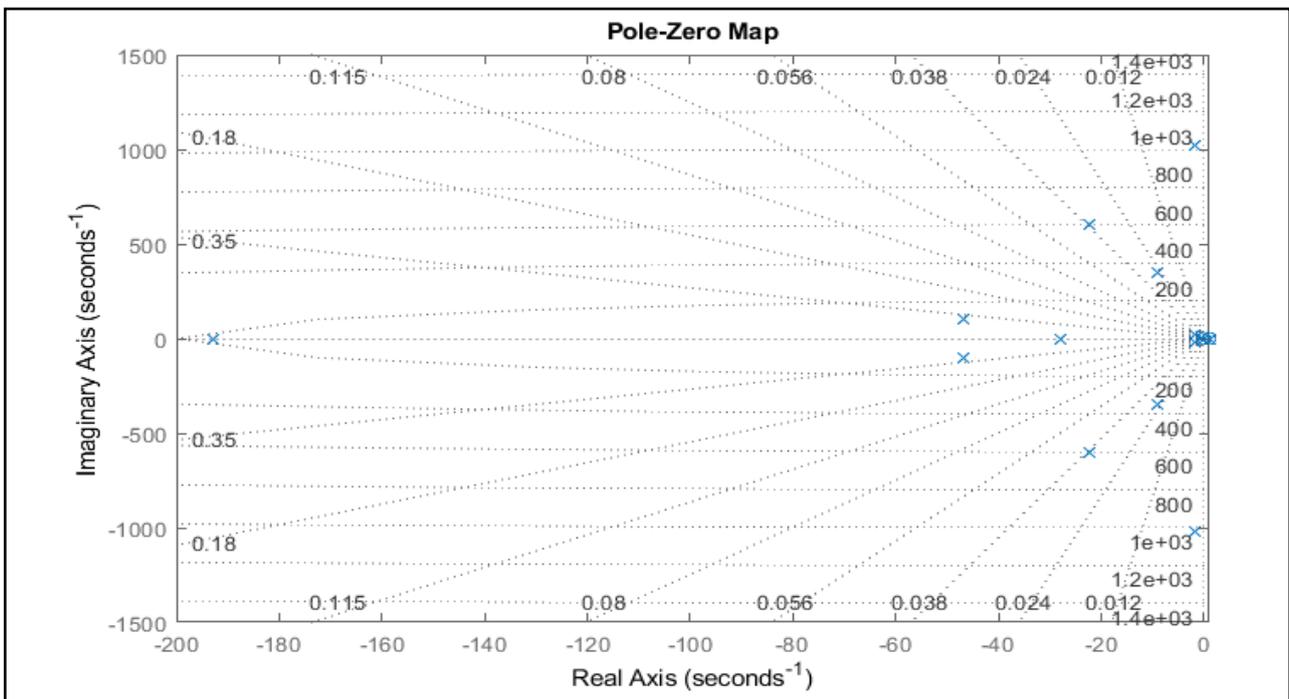


Figura 3.6 - Mappa dei poli CL con $k_i = 5$, $k_p = 0.05$ e $k_d = 0.0005$

Anche nel caso di sistema controllato si possono fare le stesse considerazioni dell'anello aperto dove si può notare dalla Fig.3.6 che i poli e gli zeri si trovano tutti nel semipiano di destra. In questo caso risulta fondamentale aggiungere specificare i valori dei 3 guadagni del controllore PID essendo che la stabilità del sistema è funzione del loro valore.

Quindi anche in questo caso visto che il sistema è anche di minima rotazione di fase, esso è sistema stabile e con minima rotazione di fase.

3.7. Funzioni di trasferimento del sistema smorzato e controllato

Avendo il sistema con anello chiuso si è interessati a confrontare il feedback di velocità $\omega_{6,feed}$ rispetto ai due input di riferimento che si inviano al banco: T_{M1} e $\omega_{6,ref}$.

Le funzioni di trasferimento a cui siamo interessati sono le seguenti:

- 1) $\frac{\omega_{6,feed}}{T_{M1}}$: immunità al disturbo di coppia erogata dall'altro motore elettrico M1
- 2) $\frac{\omega_{6,feed}}{\omega_{6,ref}}$: capacità di inseguimento del riferimento di velocità M2

La 1 si tratta di una classica funzione di mobilità tra l'ingresso di coppia applicata al grado di libertà 1 e la velocità del grado di libertà 6. Si ipotizza in questo contesto un comportamento ideale del sistema di controllo della coppia erogata dal motore M1, cioè coppia di riferimento = coppia erogata (feedback).

Tutte le considerazioni fatte per un sistema sottosmorzato di secondo grado nel paragrafo 2.4 e 2.5, devono essere applicate e valide anche al sistema banco prova in esame, dove è possibile, anche in questo caso analizzare la sua sensitività al variare dei vari guadagni.

Prima di poter fare tutto ciò, è necessario riuscire a calcolare in maniera analitica prima, e poi implementare in Matlab, la funzione di trasferimento relativa al controllore PID.

Come nel caso del sistema non controllato e smorzato, si ha la necessità di dover introdurre la variabile complessa s di Laplace per poter ottenere la funzione di trasferimento. In questo caso, quello di cui si ha bisogno è introdurre un operatore di derivazione e di integrazione che in termini, appunto, di variabile di Laplace si indica con s e con $\frac{1}{s}$ per poter applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, per riuscir ad ottenere la funzione di trasferimento $\frac{\omega_{6,feed}}{\omega_{6,ref}}$. Questo è dovuto al fatto che, essendo presente un controllore PID sul motore M2, ogni singolo guadagno ha effetto sull'input, quindi, per esempio, quello derivativo ha un effetto appunto derivativo sul riferimento e così via per i restanti 2 guadagni. Quindi, il riferimento globale sarà ottenuto come somma dei singoli contributi ognuno dipendente dall'altro e di conseguenza anche la funzione di trasferimento.

Quindi la funzione di trasferimento è ottenibile attraverso la sovrapposizione degli effetti, vista la linearità del sistema, dei singoli contributi del PID, proporzionale, derivativo e integrale.

Per ottenere la funzione di trasferimento si parte dalla seguente scrittura, che si basa sul principio di sovrapposizione degli effetti:

$$y = \frac{y}{u_2} * u_2 + \frac{y}{u_3} * u_3 + \frac{y}{u_4} * u_4 \quad (3.38)$$

Dove y è l'output ovvero la velocità controllata del motore M2, e le u_i sono gli input dovuti associati al riferimento di velocità del motore M2.

Indicando con G_{ij} la funzione di trasferimento avente come indice i per gli input e j per gli output è possibile riscrivere la (3.38) nella seguente forma:

$$y = G_{2,1} * u_2 + G_{3,1} * u_3 + G_{4,1} * u_4 \quad (3.39)$$

Sostituendo i termini per il caso specifico in esame, la (10.7) diviene:

$$y = \frac{\omega_{6,feed}}{\theta_{6,ref}} * \theta_{6,ref} + \frac{\omega_{6,feed}}{\omega_{6,ref}} * \omega_{6,ref} + \frac{\omega_{6,feed}}{\dot{\omega}_{6,ref}} * \dot{\omega}_{6,ref} \quad (3.40)$$

Queste espressioni che legano le singole funzioni di trasferimento sono scritte nel dominio di Laplace. È possibile, quindi, esprimere il legame tra gli ingressi, che è di natura differenziale in modo da far comparire l'unico vero ingresso del controllo di velocità, che è la velocità di riferimento:

$$\begin{cases} \theta_{6,ref} = \frac{1}{s} * \omega_{6,ref} \\ \dot{\omega}_{6,ref} = s * \omega_{6,ref} \end{cases} \quad (3.41)$$

Sostituendo i valori della (3.41) nella (3.40) e scrivendo tutto con la notazione abbreviata G_{ij} , si ottiene:

$$y = \omega_{6,ref} \left(\frac{G_{2,1}}{s} + G_{3,1} + G_{4,1} * s \right) \quad (3.42)$$

In questo modo è possibile ottenere la funzione di trasferimento complessiva cercata tra il riferimento di velocità ed il feedback:

$$G_{\frac{feed}{ref}} = \frac{\omega_{6,feed}}{\omega_{6,ref}} = \frac{G_{2,1}}{s} + G_{3,1} + G_{4,1} * s \quad (3.43)$$

Plottando la funzione di trasferimento del sistema in V marcia per il cambio DCT e il cambio M40, si ottiene:

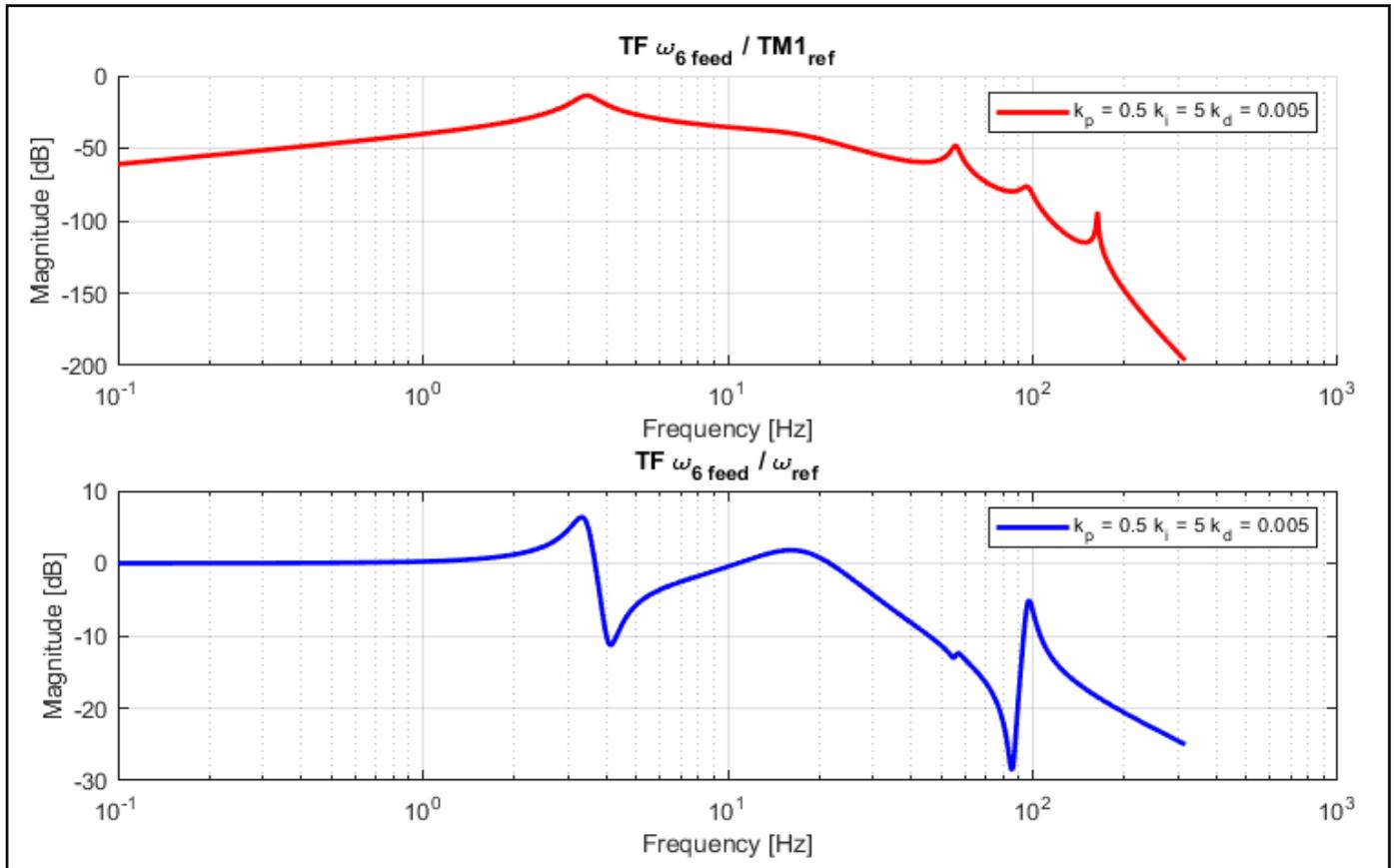


Figura 3.7 – Funzione di trasferimento

Si cerca di ottenere dalle funzioni di trasferimento in esame, è far sì che il disturbo sia quanto più attenuato possibile, quindi avere una funzione di trasferimento con valori di ampiezza molto bassi, o prossimi allo zero, mentre nel caso di funzione di trasferimento che insegue il riferimento, si cerca di conferire al sistema controllato il tipico andamento di un filtro passa-basso con guadagno unitario nella banda passante, basso ripple in banda passante, assenza di picchi nella funzione di risposta in frequenza e attenuazione dei disturbi di alta frequenza sul riferimento. Dal grafico si può anche notare la presenza di una risonanza a basse frequenze, circa 3.5 Hz e una antirisonanza a 4 Hz, mentre ad alte frequenze è possibile notare risonanze più marcate, ma essendo modi di vibrare strutturali, il problema non è di molto rilievo. Quello che si cercherà di fare è di ridurre entrambi i picchi e un modo per fare ciò è modificare i valori di guadagni, cosa che verrà fatta successivamente.

3.8. Sensitività del modello con controllo di velocità M2

Per le considerazioni fatti nel paragrafo 3.7 è necessario fare un'analisi sensitiva del sistema, ovvero, cercare attraverso la modifica dei vari guadagni migliorare la risposta in frequenza del sistema e cercare dei valori tali da ottenere le migliori prestazioni possibili.

In prima analisi, si studia la sensitività del sistema cambiando la marcia nel cambio DCT, con controllo sul motore M2 attivo e con i seguenti parametri del controllore: $k_p 0,05$, $k_i 0,5$ e $k_d 0,005$ con il cambio M40 posizionato in V° marcia.

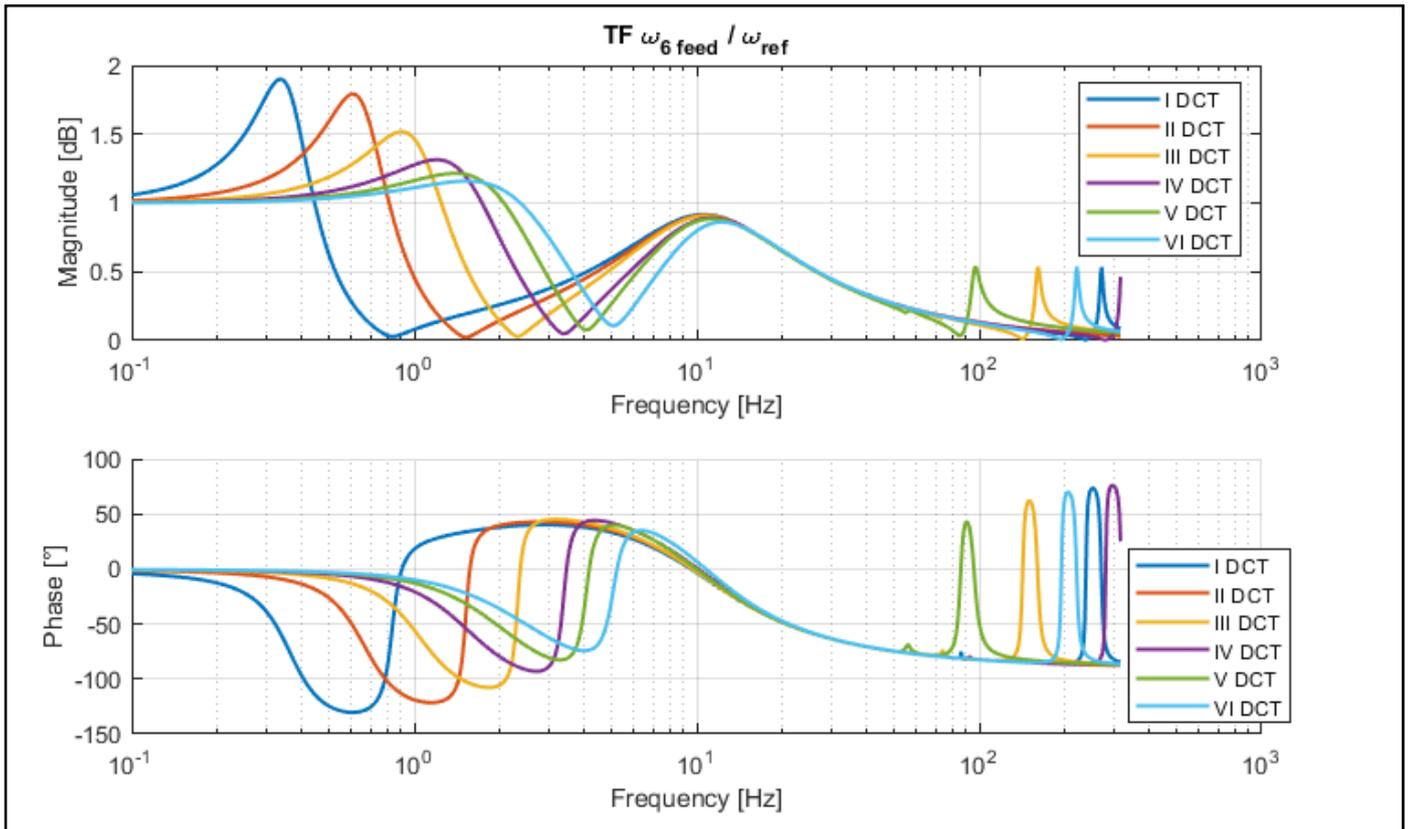


Figura 3.8 – Sensitività funzione di trasferimento del riferimento al rapporto di trasmissione

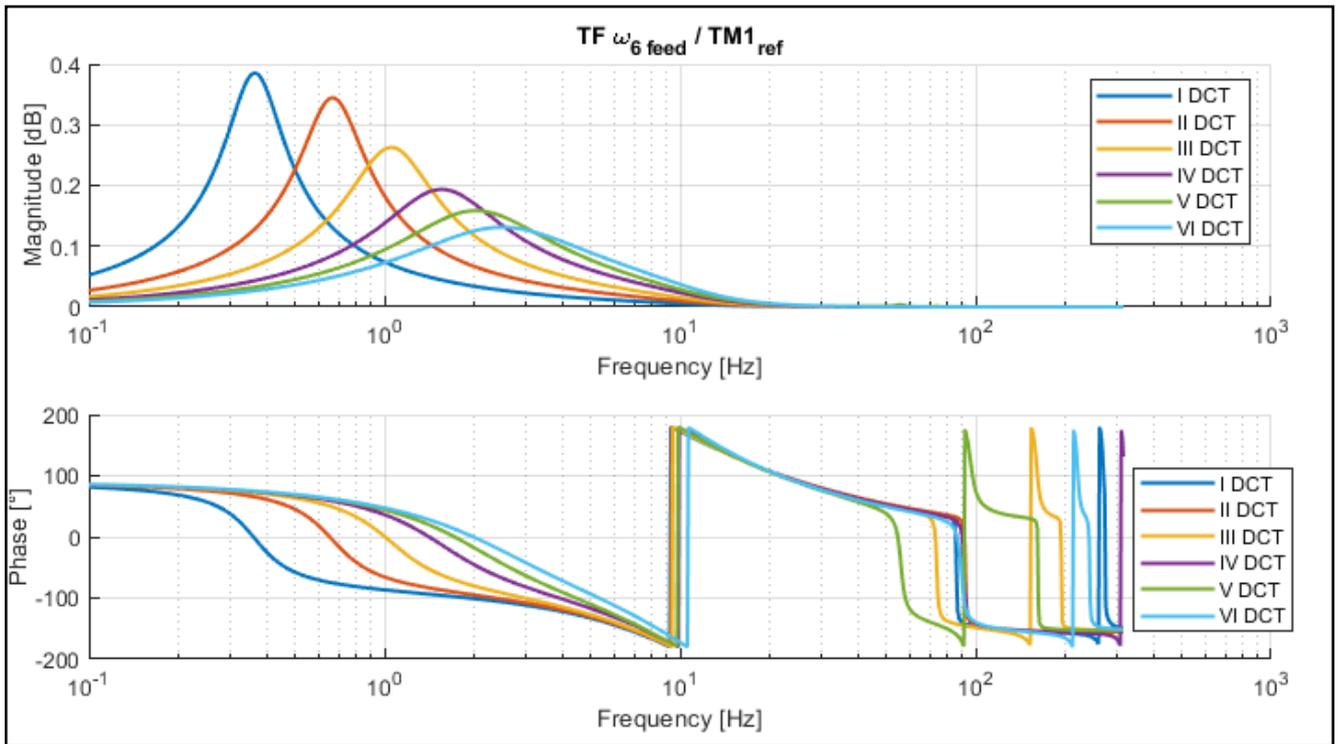


Figura 3.9 – Sensività funzione di trasferimento disturbo al rapporto di trasmissione

In questo caso, si preferisce riportare le ampiezze delle funzioni di trasferimento in decibel, in maniera tale da riuscire a leggere in maniera più intuitiva il grafico. Infatti, per la funzione di trasferimento che crea disturbo, si preferirebbe avere una funzione piatta con valore sempre pari a 0, in maniera tale da non avere interferenza tra il controllo di coppia del motore M1 ed il controllo di velocità di M2, a tutte le frequenze, mentre per quella che riguarda il riferimento vorremmo che fosse sempre pari a 1, così da avere il sistema che riesce a seguire sempre il riferimento.

Come è possibile notare dalla fig.3.8 e 3.9 all'aumentare del rapporto di trasmissione si ha un miglioramento del comportamento del sistema, ma è da notare la presenza di due risonanze a basse frequenze, e un'altra ad alta frequenza. Quest'ultima esula dai problemi del controllore essendo una frequenza di tipo strutturale, dovuta quindi alle rigidità e masse del sistema.

A sua volta, si passa allo studio della sensibilità dei vari guadagni del controllore PID avendo il controllo attivo solo sul motore M2. In prima analisi, si studia il comportamento del sistema facendo variare il valore del guadagno proporzionale tenendo fissi gli altri valori di guadagno integrativo e derivativo. Le marce usate sono la V marcia per il cambio DCT e la V marcia per il cambio M40, mentre i valori di $k_i = 0,5$ mentre $k_d = 0$. I risultati che si ottengono sono i seguenti:

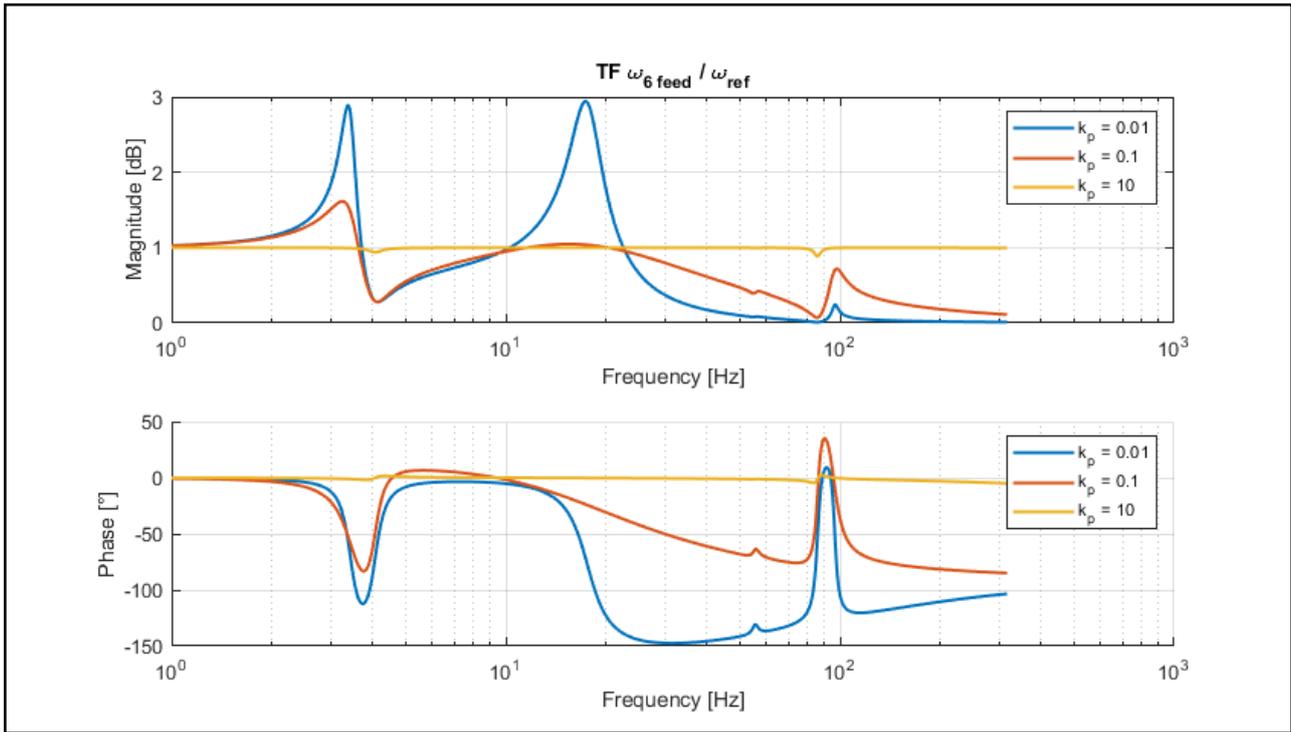


Figura 3.10 – Sensitività funzione di trasferimento del riferimento al guadagno proporzionale

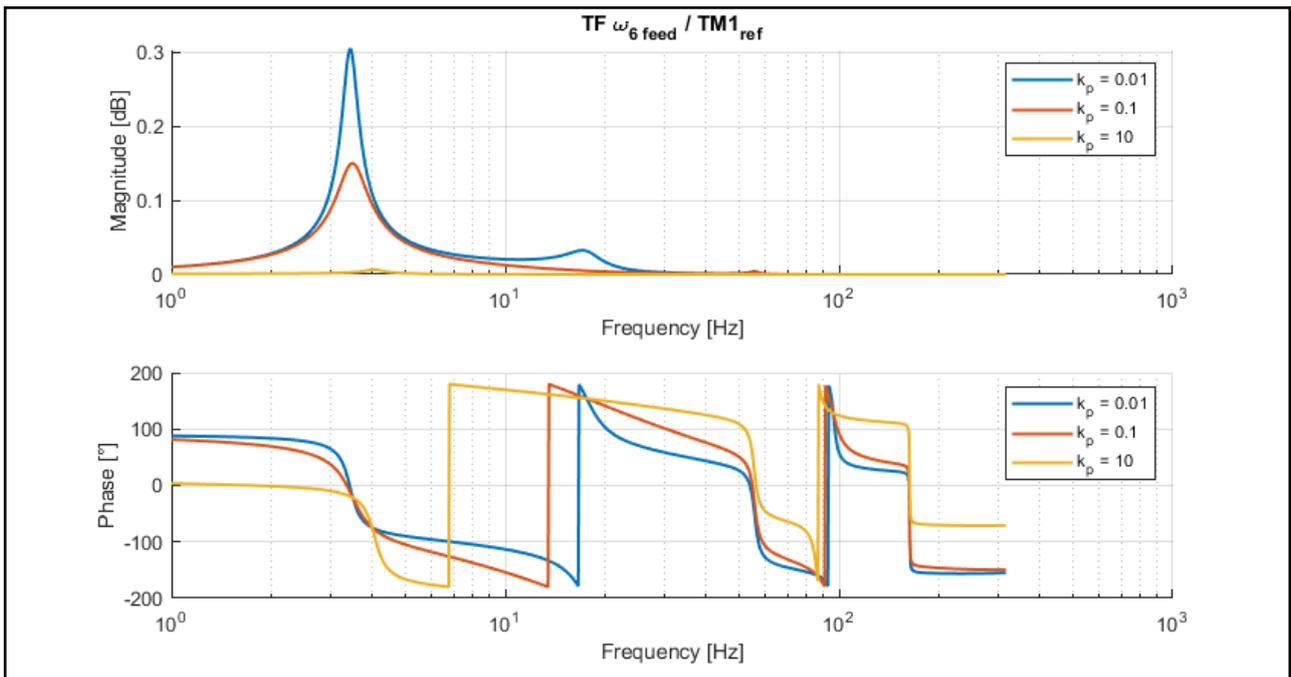


Figura 3.11 – Sensitività funzione di trasferimento del disturbo al guadagno proporzionale

È possibile notare dalla fig.3.10 e 3.11 come reagiscono il disturbo e l'inseguimento del riferimento del sistema al variare del guadagno proporzionale. Partendo da un valore molto basso, è evidente come il sistema abbia molta difficoltà ad inseguire il riferimento e come l'effetto del disturbo, in presenza di risonanze in particolare, sia molto elevato.

All'aumentare del valore in esame divengono sempre minori le ampiezze dei vari picchi di risonanza e di antirisonanza, in particolare al valore più grande proposto in questa

trattazione, sembra come la curva tenda quasi ad appiattirsi intorno all'1 nel caso della seconda funzione di trasferimento ed intorno allo 0 nel caso di disturbo. Se da una parte questo andamento è sicuramente ciò che si chiede ad un sistema controllato alle basse frequenze, dall'altra c'è il riscontro di avere un sistema molto reattivo ovvero un sistema che non attenua le alte frequenze, requisito necessario per filtrare il rumore eventualmente presente nel segnale misurato, come la misura dell'encoder che non è continua ma quantizzata e quindi introduce del rumore di alta frequenza. Tutto ciò può provocare a sollecitazioni meccaniche eccessive ai componenti del banco di prova. Da notare, anche come le risonanze dovute alle frequenze proprie strutturali, vengono del tutto eliminati massimizzando quindi l'area nel caso di inseguimento al riferimento e rendendola praticamente nulla nel caso di disturbo. Inoltre, guadagni molto alti possono portare il sistema a lavorare prevalentemente in condizioni di saturazione. Per cui l'approccio linearizzato che si è utilizzato fino a questo momento, sarebbe inadatto a descrivere il comportamento dinamico effettivo. Successivamente verrà presentato anche il modello Simulink, dove si tiene conto anche della non linearità introdotto dalla saturazione in coppia dei motori elettrici.

Altra caratteristica fondamentale che si ricerca nella funzione di trasferimento di inseguimento del riferimento, è che essa non abbia disturbi ad alte frequenze, ovvero che si comporti come un filtro passa basso. Il comportamento ricercato, quindi, è quello che alle alte frequenze si abbia un decadimento abbastanza rapido della funzione di trasferimento. Questo viene fatto per andare ad eliminare i disturbi che ci possono essere alle alte frequenze, perché può capitare che ci sia nel feedback che si riceve un rumore di alta frequenza che è un rumore tipico di misura, che se non opportunamente attenuato può provocare delle oscillazioni all'interno del sistema.

Appunto per l'oscillazione alle alte frequenze, non è conveniente aumentare in maniera indefinita i guadagni, visto che all'aumento del parametro la curva tende ad appiattirsi del tutto, il che comporterebbe un rumore abbastanza elevato.

Da notare, anche, come all'aumentare del parametro studiato anche la fase cambi. In particolare, nel caso di inseguimento al riferimento essa tende ad avere valore 0 con il valore più alto in questione, il che significa che non ci sarà sfasamento tra il riferimento e il feedback, mentre tende ad aumentare nel momento in cui diminuisce il guadagno proporzionale.

In definitiva, il lavoro principale del guadagno proporzionale è quello di lavorare sullo smorzamento, infatti come si può vedere all'aumentare del valore, il primo picco tende a diminuire sempre di più. Questo effetto, ha ripercussioni anche sul comportamento del sistema, ovvero, come detto già in precedenza nel capitolo 2, ha effetto sull'overshoot e sul tempo di decadimento della risposta del sistema ad una forzante.

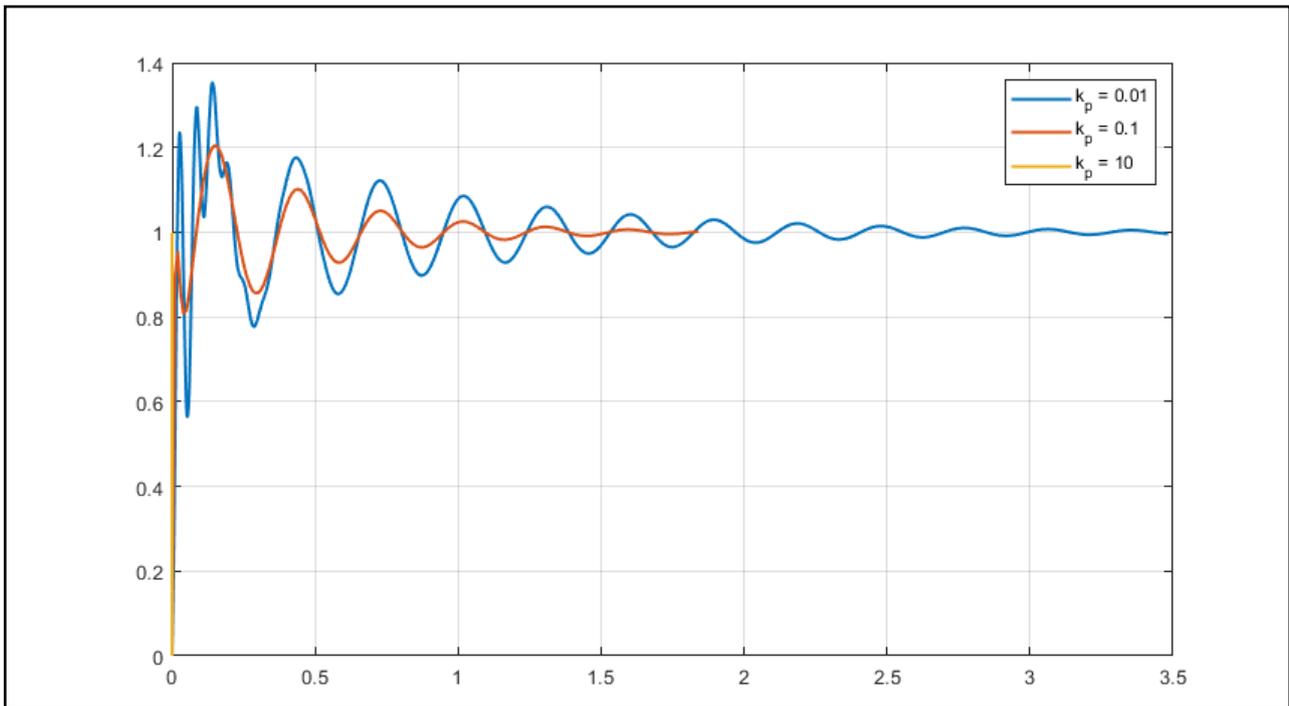


Figura 3.12 – Risposta ad uno step al variare del guadagno proporzionale

Nella fig.3.12, invece, viene riportata appunto la risposta nel dominio del tempo del sistema ad un input a gradino. È possibile vedere, le cose già dette nel caso semplificativo, ovvero con un valore di guadagno proporzionale molto basso l'overshoot è molto alto e anche il tempo di decadimento risulta essere elevato, mentre molto più lineare è il valore di $k_p = 0.1$ dove il sistema è molto rapido a salire e anche l'oscillazione è molto controllata e diminuisce anche il tempo di decadimento. Particolare, invece, risulta essere la curva gialla dove è possibile vedere come il sistema non oscilla e sale molto rapidamente. Quindi, in conclusione, si può vedere come il sistema con un guadagno proporzionale pari a 0.1 è quello più stabile tra i 3 valori in esame.

Interessante notare come, per il caso di guadagno proporzionale più basso in esame e quello più alto, sembra quasi che il sistema si comporti in maniera non lineari essendo che le risposte del sistema non sono perfettamente sinusoidali raggruppati in un andamento esponenziale decrescente. Ovviamente il sistema, in questa configurazione è lineare, ma la sua risposta, in particolari condizioni sembra non esserlo. Quindi, in definitiva il guadagno proporzionale agisce sulla stabilità del sistema.

Come per il caso appena preso in esame, si studia lo studio della sensitività del sistema e in questo caso si fa variare il guadagno integrativo. Anche in questo caso le marce restano sempre le stesse, mentre si sceglie come $k_p = 0.5$ e lo stesso valore di k_d scelto per le prove precedenti.

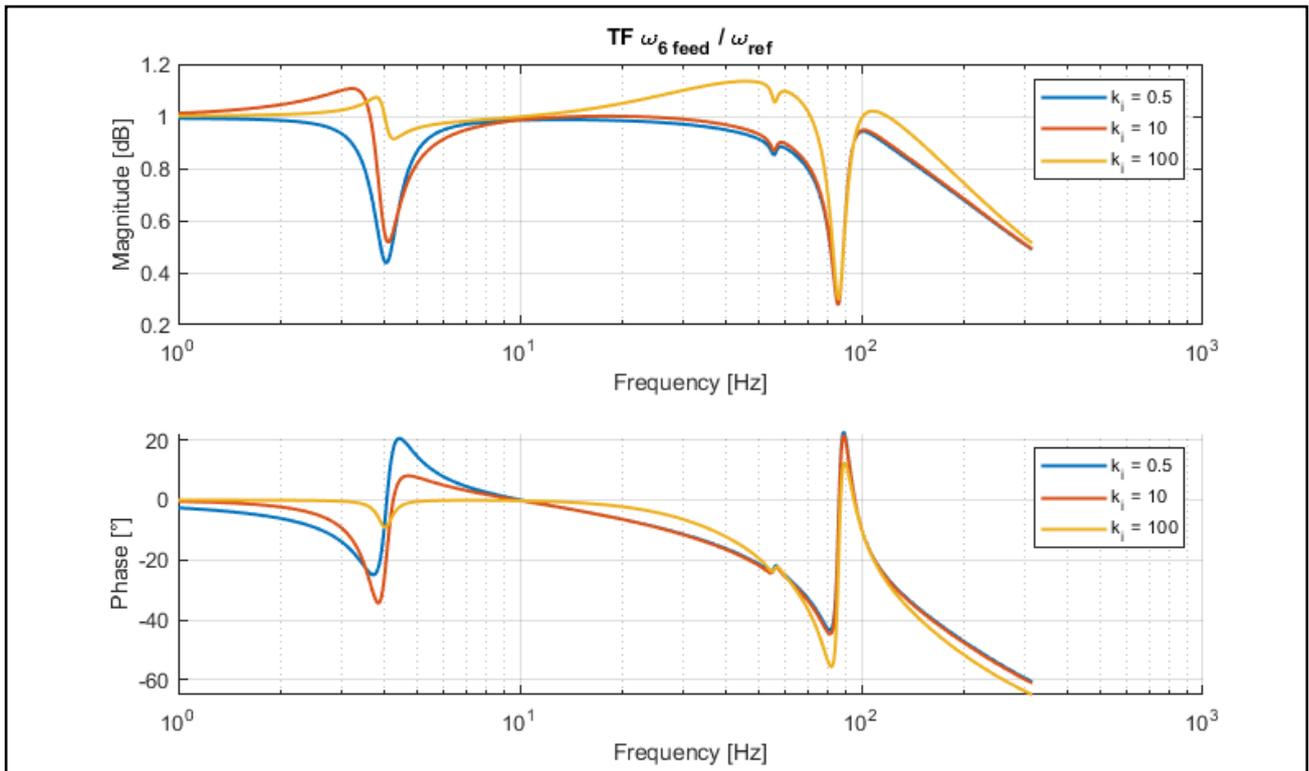


Figura 3.13 – Sensitività funzione di trasferimento del riferimento al guadagno integrativo

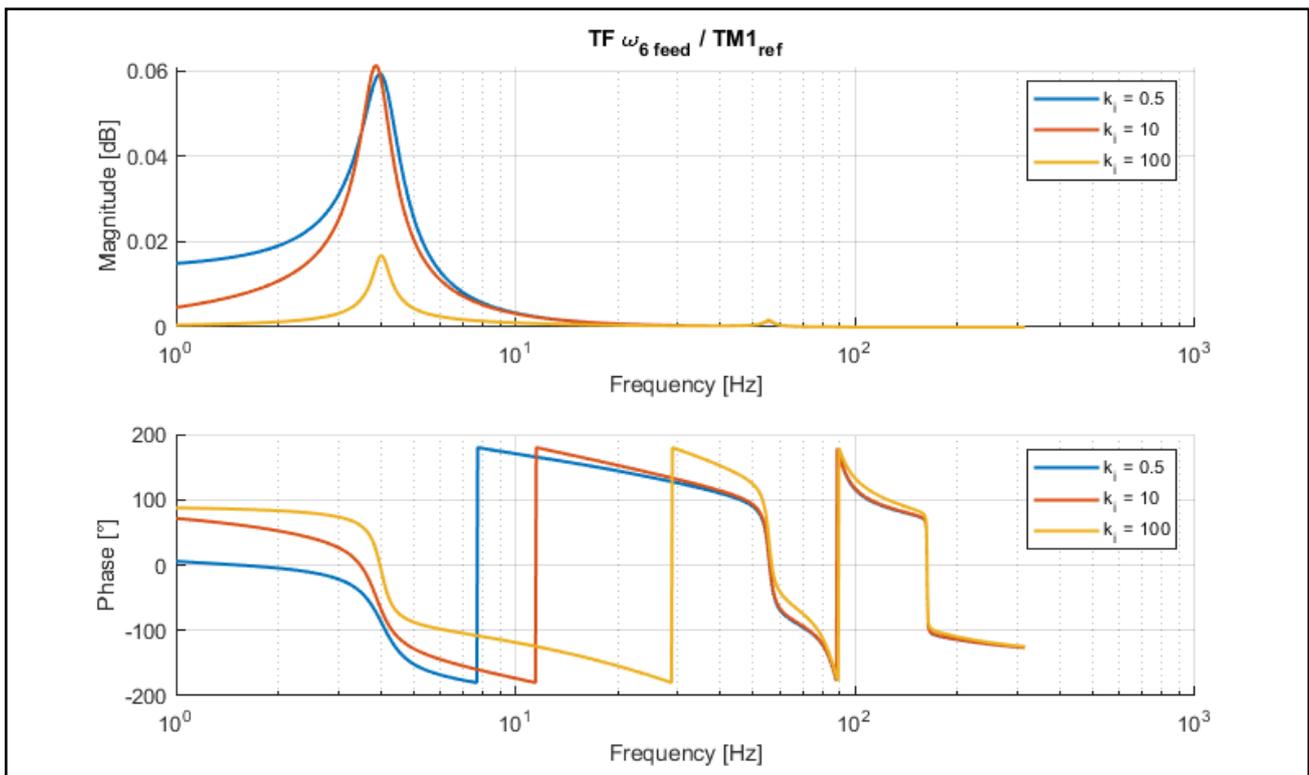


Figura 3.14 – Sensitività funzione di trasferimento del disturbo al guadagno integrativo

Dalla fig.3.13 e 3.14, si nota come il guadagno integrativo non ha molta influenza nel range di variabilità esplorato, in particolare alle alte frequenze dove le funzioni di trasferimento

sembrano essere quasi sovrapposte. In particolare, il parametro integrativo sembra non aver alcuna influenza alle alte frequenze dove è possibile notare come, anche con un valore molto alto, l'antirisonanza dovuta a frequenze di tipo strutturali, continui ad essere molto marcata.

Invece, per quanto riguarda le bassissime frequenze è possibile notare come una scelta di k_i più alta porti ad un picco più pronunciato ed un decadimento più rapido in prossimità dell'antirisonanza, mentre nel caso di guadagni più bassi l'andamento è più smorzato e morbido. Quindi aumentare il valore di guadagno integrativo porta il sistema a soddisfare alcuni dei parametri che vengono richiesti ad un sistema controllato come guadagno unitario nella banda passante, scomparsa di picchi di antirisonanza che diventano di risonanza ma con ampiezza meno pronunciata e soprattutto un aumento della frequenza di taglio. Gli stessi ragionamenti possono essere fatti anche per la fase, dove è possibile vedere come lo sfasamento tra riferimento e feedback diminuisca all'aumentare del guadagno integrativo.

Anche, per quanto riguarda il disturbo valgono le stesse considerazioni fatte per la funzione di trasferimento di inseguimento del riferimento, anche se, come è possibile notare dai valori sull'asse dell'ampiezza, si parla di disturbi molto molto piccoli.

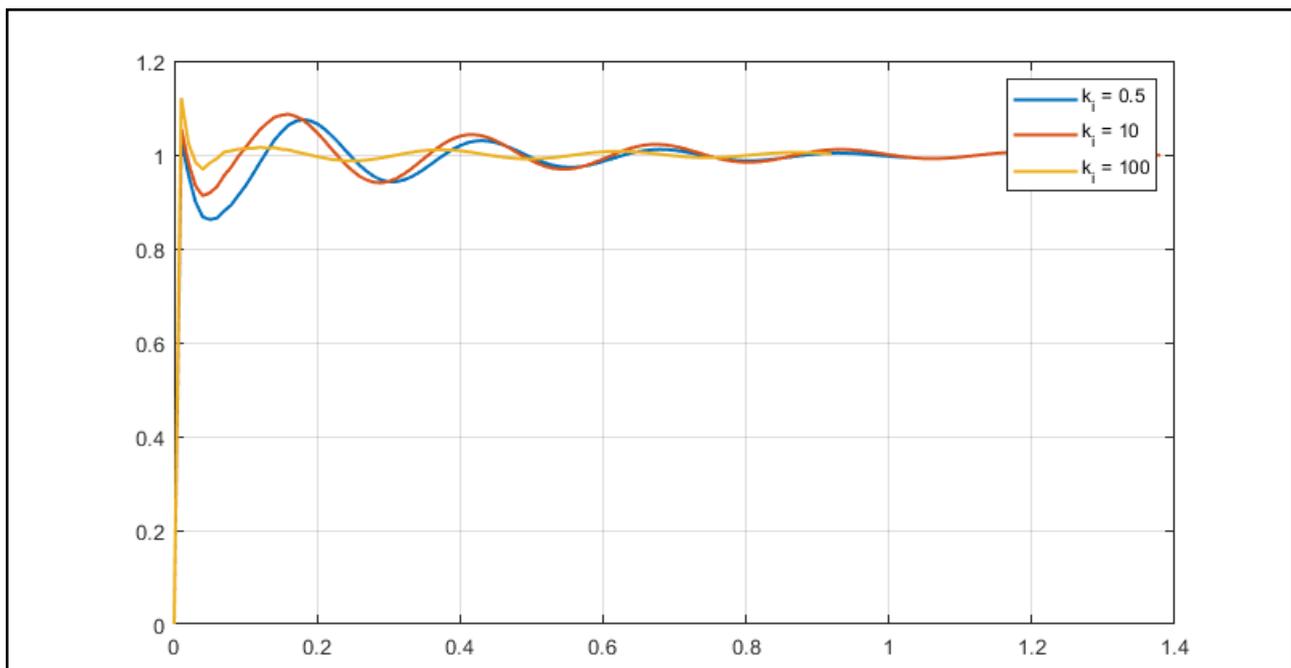


Figura 3.15 – Sensitività funzione di trasferimento del disturbo al guadagno integrativo

Infine, si analizza il caso di sensitività al variare del guadagno derivativo dove si utilizzano gli stessi parametri utilizzati per le altre prove.

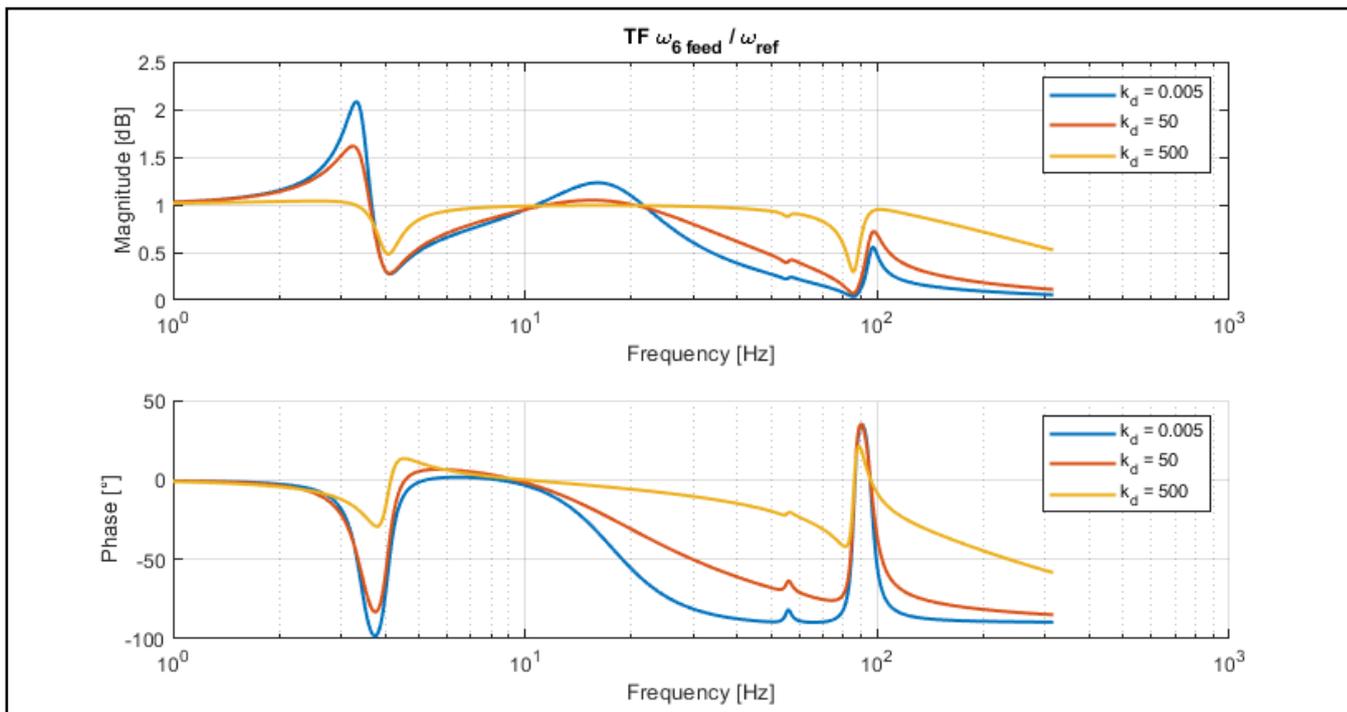


Figura 3.16 – Sensitività funzione di trasferimento del riferimento al guadagno derivativo

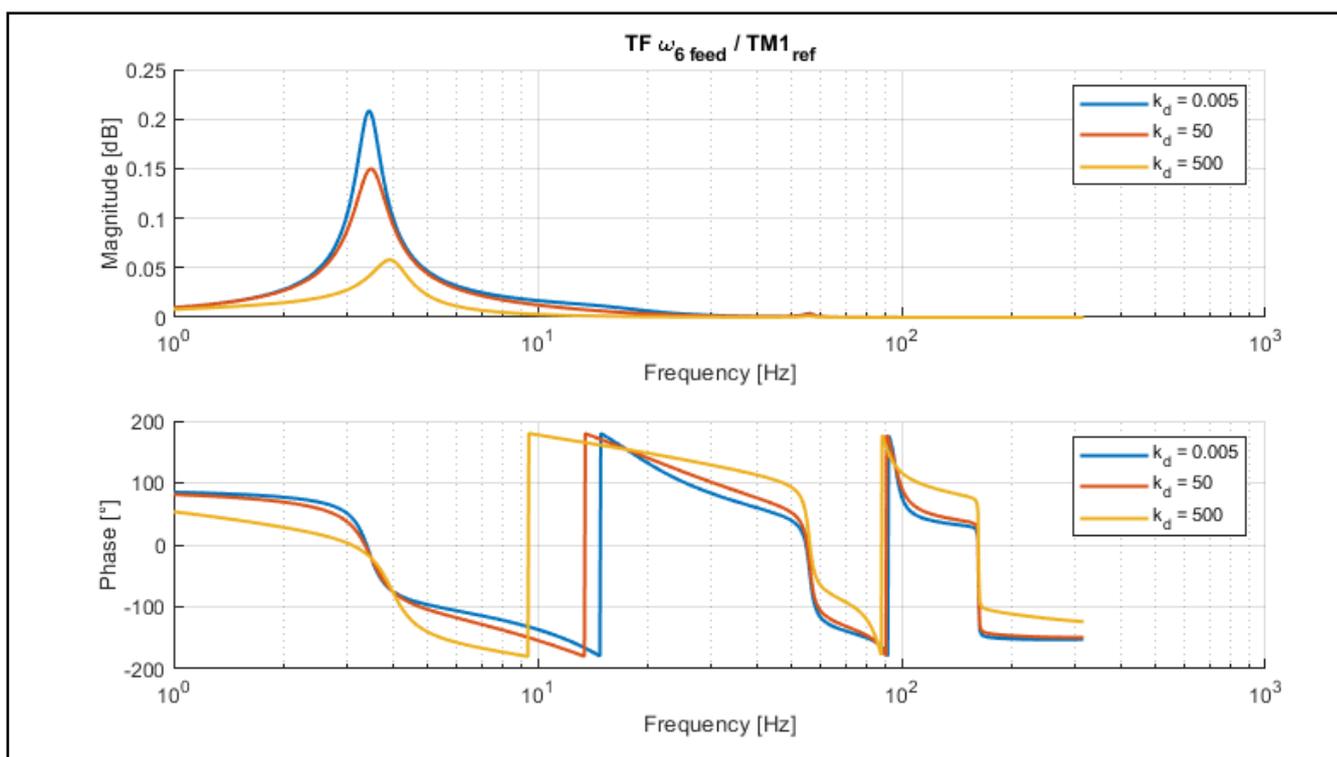


Figura 3.17 – Sensitività funzione di trasferimento del disturbo al guadagno derivativo

Dalla fig.3.16 e 3.17, invece, è possibile notare come il guadagno derivativo ha effetto anche egli sul picco della funzione di trasferimento. Infatti, alle bassissime frequenze anche una enorme variazione del valore del parametro non ha alcuna influenza su entrambe le funzioni di trasferimento. Invece, all'aumentare del guadagno derivativo è possibile vedere come varia l'ampiezza del picco della prima risonanza che incontra il sistema, ma

soprattutto è interessante notare come non varia né la frequenza di taglio e quindi, di conseguenza, come non varia la larghezza di banda passante. A differenza dei casi precedenti, è possibile notare come anche aumentando il guadagno derivativo il picco di antirisonanza non scompare anzi, esso non varia la sua ampiezza al variare del parametro in questione. Successivamente, è possibile vedere come alle medie frequenze è presente un picco poco marcato di risonanza, che è distinguibile solo nel caso in cui si utilizzano dei parametri bassi, mentre nel caso di valori più alti esso tende ad appiattirsi. Alle alte frequenze, infine, è possibile notare come è impossibile ottenere un guadagno unitario o quanto più prossimo allo 0 facendo variare solo il guadagno derivativo.

Analogo discorso è possibile farlo per quanto riguarda la fase della funzione di trasferimento di inseguimento dove risulta impossibile ottenere uno sfasamento nullo.

Per quanto riguarda, invece, la funzione di trasferimento del disturbo valgono le stesse considerazioni fatte per i casi precedenti.

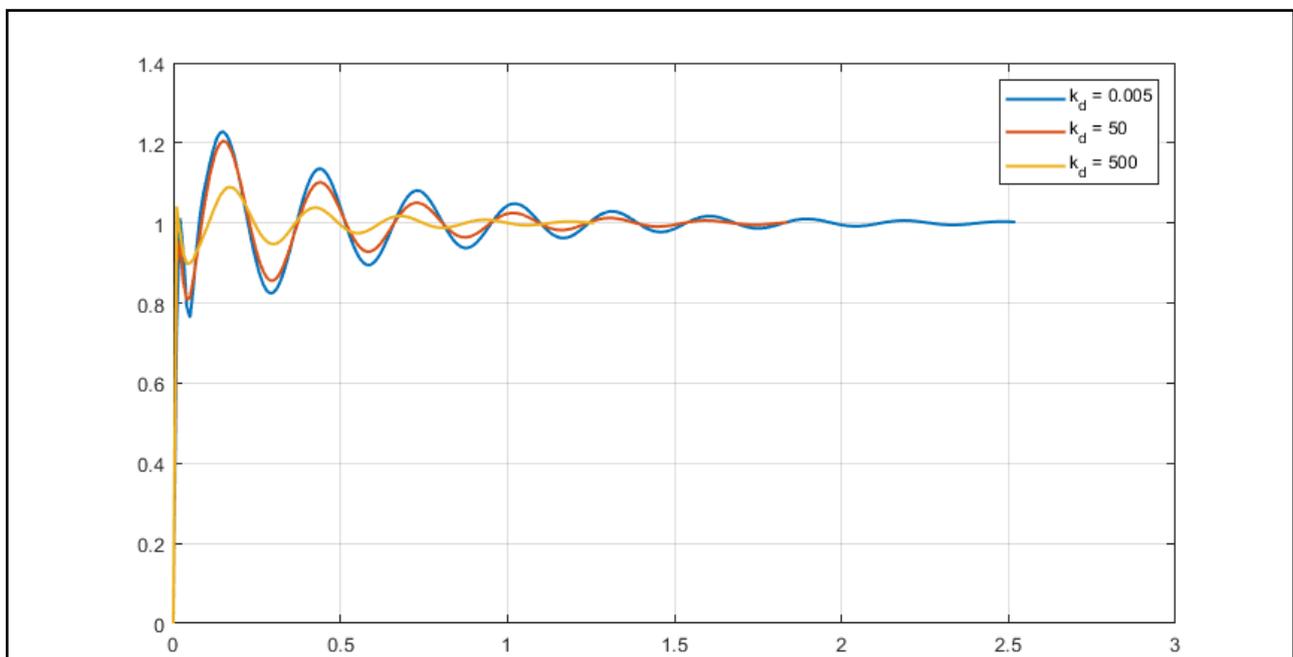


Figura 3.18 – Sensibilità funzione di trasferimento del disturbo al guadagno integrativo

3.9. Scelta dei guadagni ottimali

A questo punto, come fatto per il caso semplificato, si fa variare il guadagno proporzionale e quello integrativo tra valori accettabili, scelto un guadagno derivativo fisso, vista la sua poca influenza, e si studia la risposta del sistema in quelle particolari condizioni, per trovare la configurazione ottimale.

Si plotta, quindi, quelle che sono le due funzioni di trasferimento del sistema in esame e i grafici che si ottengono sono i seguenti:

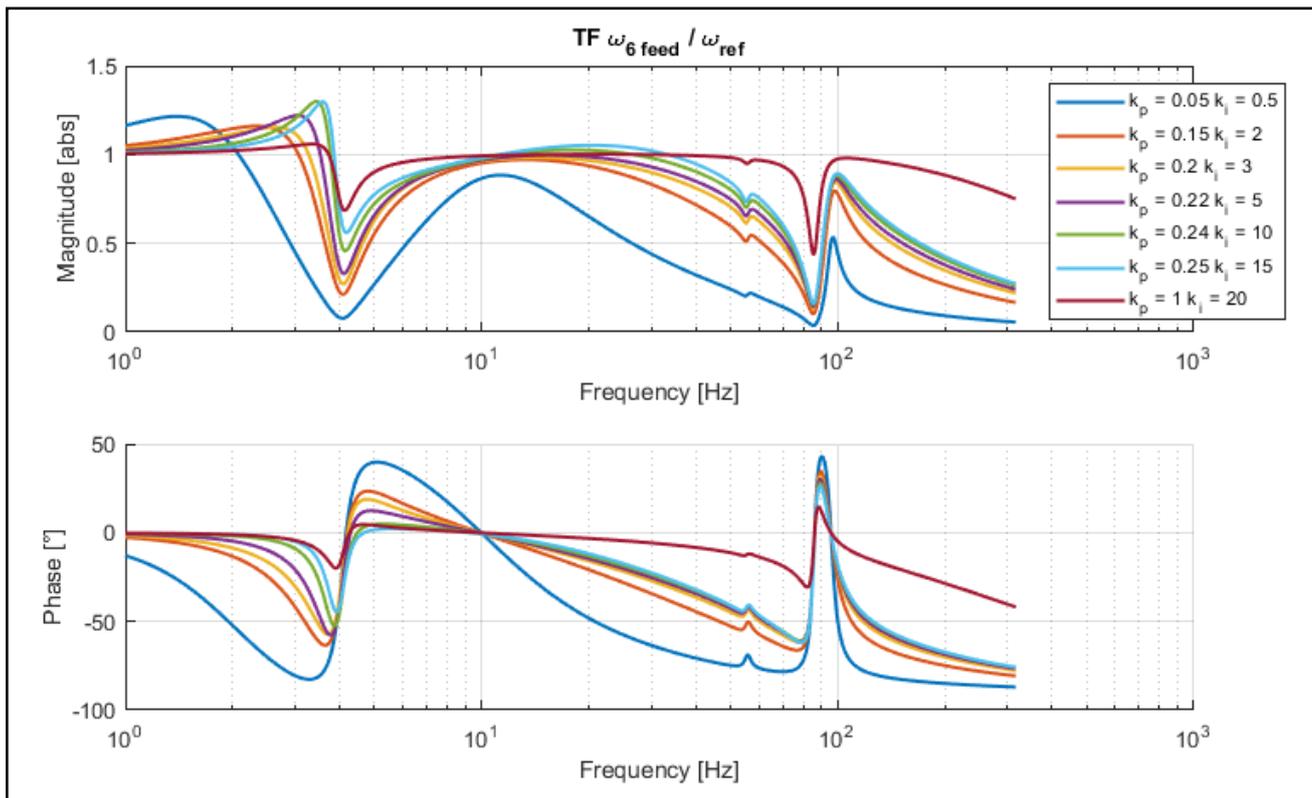


Figura 3.19 – Funzione di trasferimento $\frac{\omega_{6,feed}}{\omega_{6,ref}}$ al variare dei guadagni

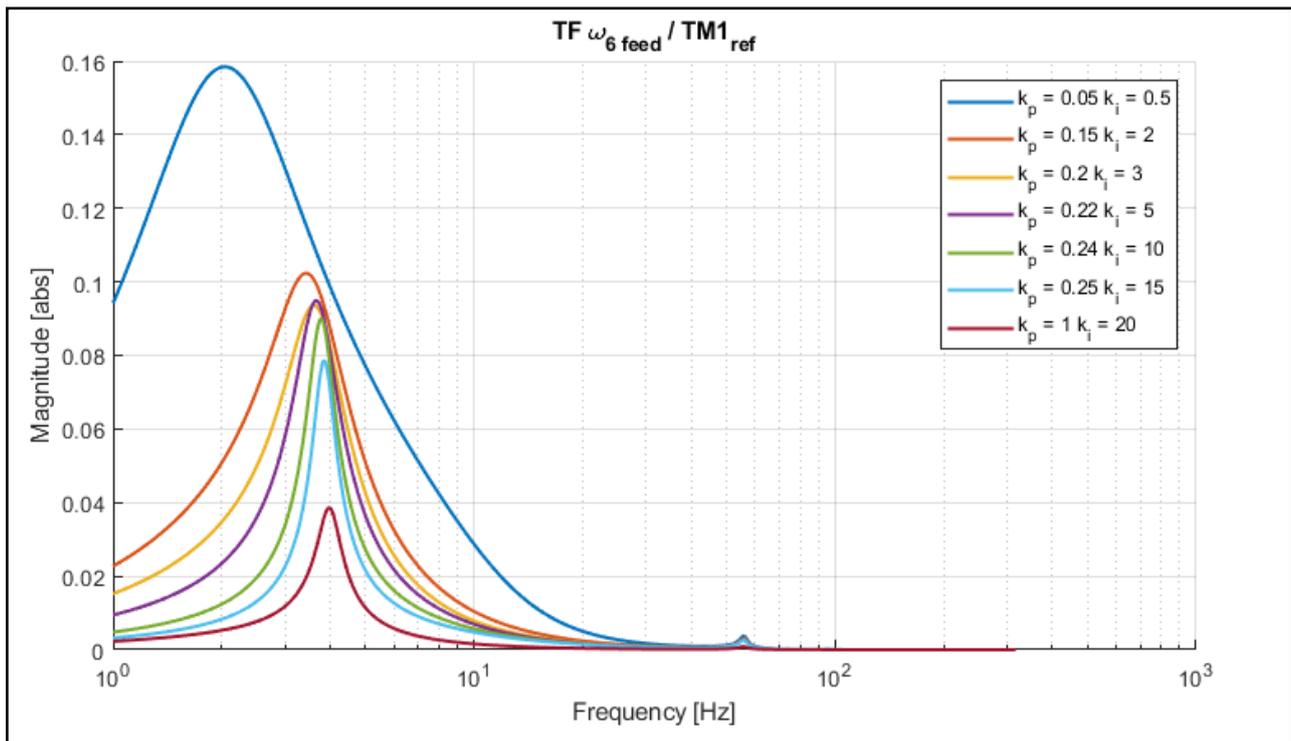


Figura 3.20 – Funzione di trasferimento $\frac{\omega_{6,feed}}{TM1_{ref}}$ al variare dei guadagni

Dalle fig.3.19 e fig.3.20, si notano ancora una volta, tutte le considerazioni fatte in precedenza.

Dall'analisi delle due figure è possibile fare una serie di considerazioni molto interessanti: se da un lato, un valore di k_p e k_i relativamente bassi non permettono di avere un comportamento del sistema ottimale, dall'altro dei valori molto alti permettono di avere curve abbastanza piatte e un andamento ottimale. Ovviamente, come detto in precedenza, bisogna trovare il giusto compromesso tra quelle che sono le capacità del sistema e quello che poi è la sua vera risposta e anche in base allo scopo del banco stesso.

Appunto per questo motivo, vengono riportate nella figura seguente, alcune prove per la scelta dei guadagni ottimali usati per il PID di velocità M2:

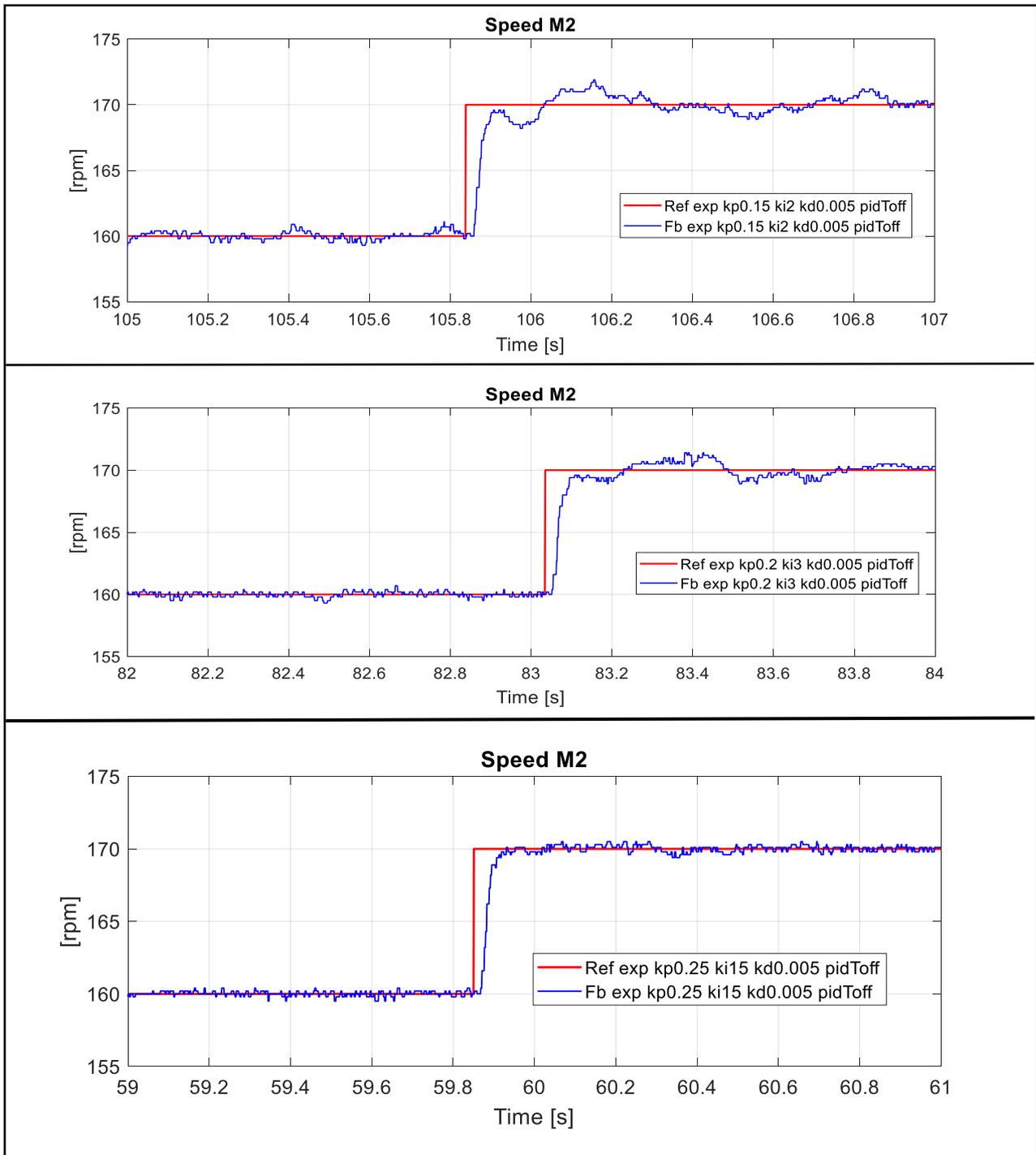


Figura 3.21 – Prove sperimentali per la scelta dei guadagni ottimali

Come è possibile vedere dalla fig.3.21 la miglior scelta ricade nell'ultima figurazione, dove si può notare come feedback e riferimento risultano essere quasi sovrapposti. In questo caso, è possibile notare come all'aumento dei valori di guadagno proporzionale e integrativo, il sistema tende a migliorare le sue performance nell'inseguimento al riferimento, rispettando tutte le considerazioni che sono state fatte precedentemente.

3.10. Modello Simulink

Per la simulazione del banco, una volta creato lo spazio degli stati e le opportune matrici, si utilizza anche un modello Simulink⁴ opportunamente creato per poter confrontare i risultati che si ottengono dalle prove sperimentali e quelli simulate, appunto. La creazione e tutte le componenti che vengono utilizzate per la simulazione del banco vengono spiegate nella tesi di Nikolas Vinci “Analisi sperimentale e modello torsionale di una trasmissione automobilistica”, dove viene spiegato anche l’intero processo di post processing dei dati prima acquisiti dal LabView e poi successivamente riportati su Matlab. Per il modello simulink si utilizza il modello del banco a 6 gradi di libertà poiché consente di poter analizzare anche il regime non stazionario, ovvero permette di studiare la saturazione dei due motori, ovvero andando ad aumentare di molto i guadagni del PID si potrebbero richiedere delle coppie troppo alte al motore che non è in grado di fornire. Questa problematica, nel caso in cui si utilizzi un modello simulink basato sullo spazio degli stati, non è possibile notarla poiché le funzioni di risposta in frequenza sono lineari e quindi, la risposta del sistema è una conseguenza delle richieste in input che si richiedono e non si tiene conto di questi effetti di saturazione. Il modello principale è il seguente:

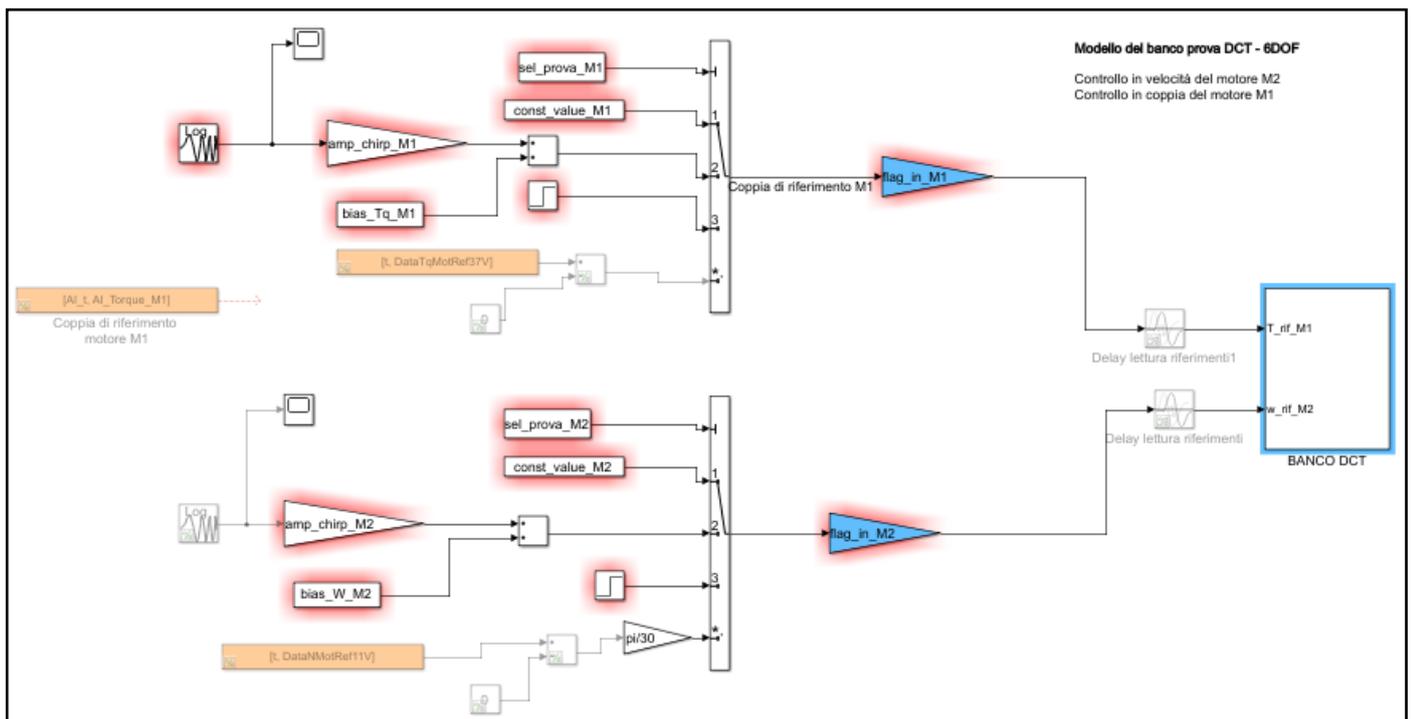


Figura 3.22 – Modello Simulink banco prova

[4] S. CIRESA, *Controllo Hardware-in-the-Loop di un banco di prova per cambi a doppia frizione*, Tesi di Laurea Magistrale – Politecnico di Torino, (2014)

A questo punto, si simula una prova sperimentale effettuata sul banco prova per testare quelli che sono i risultati ottenuti. La prova in esame, sarà una prova con riferimento sul motore M2 a cui verrà applicato un chirp con valore di ampiezza di 60 rpm e con un valor medio di 250 rpm, mentre sul motore M1 sarà applicato un carico costante pari a 30 Nm. I parametri del PID sul motore M2 sono i seguenti: $k_p = 0.1$, $k_d = 0.005$ e $k_i = 0.5$.

Quindi le funzioni di trasferimento che si ottengono andando a sovrapporre quella simulata con Simulink e quella ottenuta attraverso l'elaborazione dei dati sperimentali sono le seguenti:

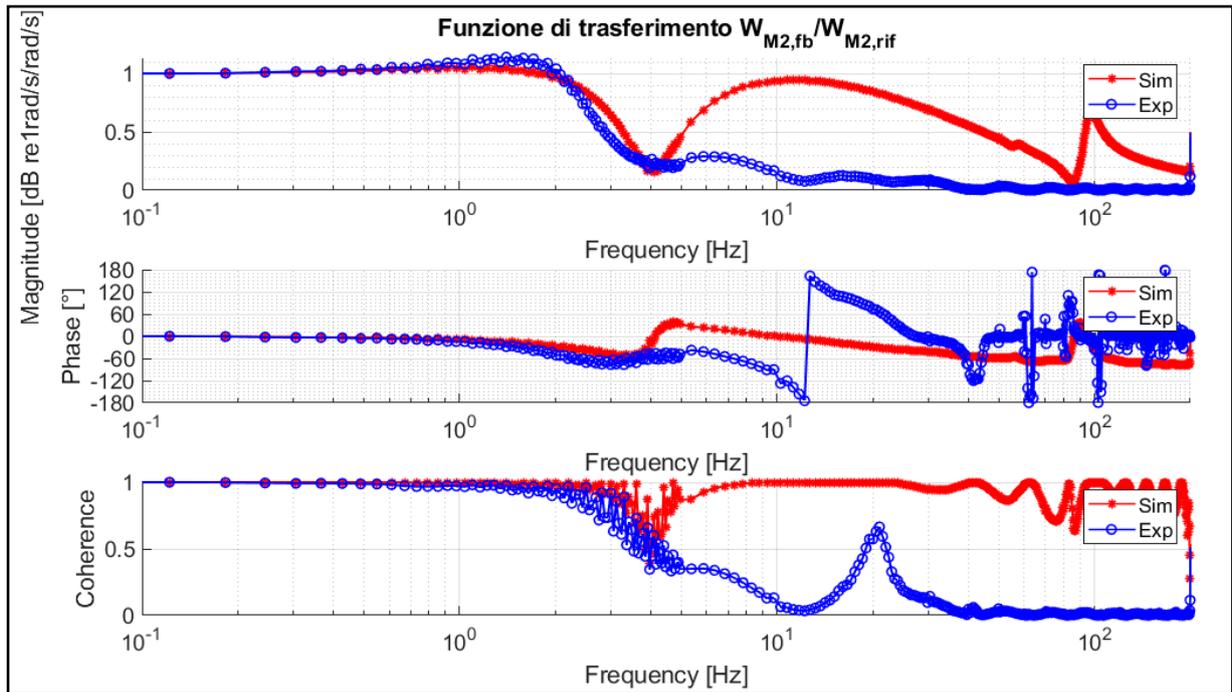


Figura 3.23 – Funzione di trasferimento inseguimento del riferimento sperimentale e simulata

In fig. 3.23 quindi, si può vedere come il modello Simulink creato riesce a rappresentare in maniera fedele la prova sperimentale del banco prova, almeno in queste condizioni e ciò può essere sufficiente per validare il modello creato e usato.

È possibile notare come nei grafici, oltre ad essere presente il modulo e la fase della funzione di trasferimento, è presente anche la coerenza, anche in questo caso, essa e come si ottengono le funzioni di trasferimento sono ampiamente spiegate nella tesi di Vinci.

Come è possibile vedere dalla fig.3.23 la funzione di trasferimento di inseguimento al riferimento. Per verificare l'inseguimento è necessario fare uno sweep di velocità di riferimento applicato al motore M2, in questo modo è possibile ottenere la risposta all'inseguimento visto che la velocità varia ed è possibile notare come il sistema insegue il riferimento che varia. Stessa cosa, ovviamente, viene fatta per studiare il disturbo di coppia.

Quindi la funzione di trasferimento di inseguimento risulta avere guadagno unitario alle basse frequenze per poi decadere ad una certa frequenza e avere valore prossimo allo zero

alle alte frequenze. Questa condizione è molto conveniente per tutto il range di frequenze, perchè l'aver un guadagno unitario alle basse frequenze permette di riuscire a seguire bene il riferimento mentre, un andamento decrescente alle alte frequenze può portare alla non amplificazione di rumori dovuti proprio alle alte frequenze. È possibile notare come da una certa frequenza in poi non ci sia più quasi sovrapposizione tra il modello Simulink e le prove sperimentali, infatti questo risultato porta ad avere anche valori di coerenza diversi soprattutto alle alte frequenze. Anche la fase alle basse frequenze risulta avere valore 0, ovvero non c'è alcun ritardo tra feedback e riferimento, ma come per il modulo, anche alle alte frequenze non si ha un comportamento uniforme tra modello Simulink e prove sperimentali.

Applicando, come fatto ed anticipato per il caso della funzione di trasferimento di inseguimento, uno sweep di coppia sul motore M1, è possibile ottenere la funzione di trasferimento del disturbo:

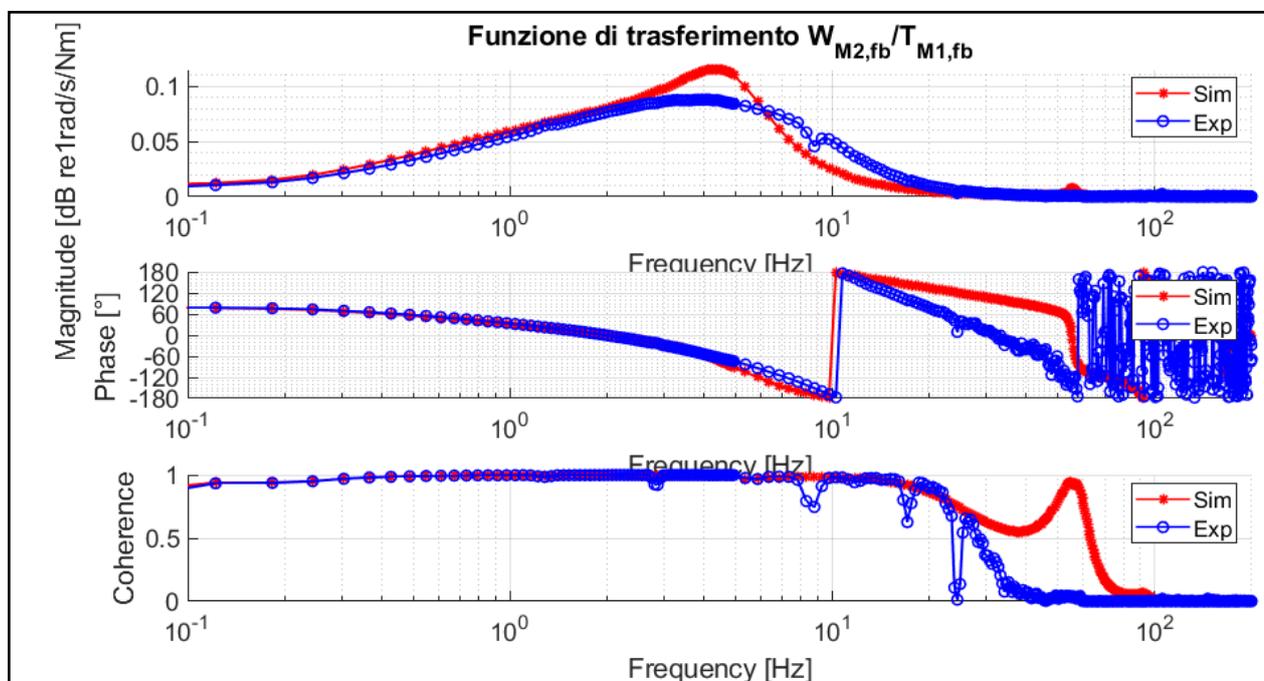


Figura 3.24 – Funzione di trasferimento del disturbo di coppia sperimentale e simulata

La seguente funzione di trasferimento è stata ottenuta con le stesse condizioni del controllore PID ma facendo una prova sperimentale diversa rispetto al caso della fig.3.23. Infatti, in questo caso è stata fatta variare la coppia M1 come un chirp di valor medio 50 Nm e di ampiezza 20 Nm. Ottenuta, quindi, in questo modo la funzione di trasferimento di disturbo, cioè la fig.3.24, è possibile vedere come essa presenta un picco di risonanza alle medie frequenze ma con un valore di ampiezza molto basso per poi avere un decadimento intorno allo 0, in maniera tale che, almeno in questa configurazione non si crei molto disturbo. La funzione di coerenza, come nel caso precedente, alle basse frequenze ha un valore unitario per poi abbassarsi alle alte frequenze dove si può notare anche una differenza di valore tra quella simulata e quella sperimentale.

CAPITOLO 4

Effetto dell'encoder sul banco prova

4. Effetto dell'encoder sulle prestazioni del banco prova

L'intero lavoro svolto fino a questo momento è stato basato su una modellazione di carattere lineare del sistema e del controllo basato su valori lineari e con semplificazioni. Per avvicinarsi, però, a ciò che effettivamente succede durante una prova, visto che all'aumentare di alcuni guadagni verso tarature che sembrano essere ideali durante la simulazione si riscontrano invece problemi di instabilità. Questa instabilità crea rumorosità che è associata ad una risoluzione finita dell'encoder che non ci consente di avere una variazione continua della misura ma una variazione discreta. Ciò comporta che, nel momento in cui il sistema si trova ad agire tra due tacche della risoluzione dell'encoder, il sistema riceve delle variazioni molto veloci che possono innescare dei problemi di instabilità.

4.1. Funzionamento dell'encoder

I sensori di posizione e di velocità rotativi sono ampiamente utilizzati ai fini delle prestazioni, monitoraggio e controllo nei processi industriali e manipolatori robotici. Gli encoder rotanti per alberi, tuttavia, sono i trasduttori che vengono utilizzati per misurare l'angolare posizione e velocità dell'albero rotante. Soggetto a applicazione e ambiente, diversi tipi di encoder sono disponibili sul mercato. Sulla base del design struttura e principio di funzionamento, ci sono tre tipi principali di posizione e velocità

- Encoder di retroazione
- Encoder assoluto elettromeccanico
- Incrementale

Il generatore di tachimetri e il resolver sono i due principali tipi di encoder elettromeccanici utilizzati per la posizione rotatoria e la misurazione della velocità. Convertono l'informazione rotazione meccanica in segnali elettrici analogici.

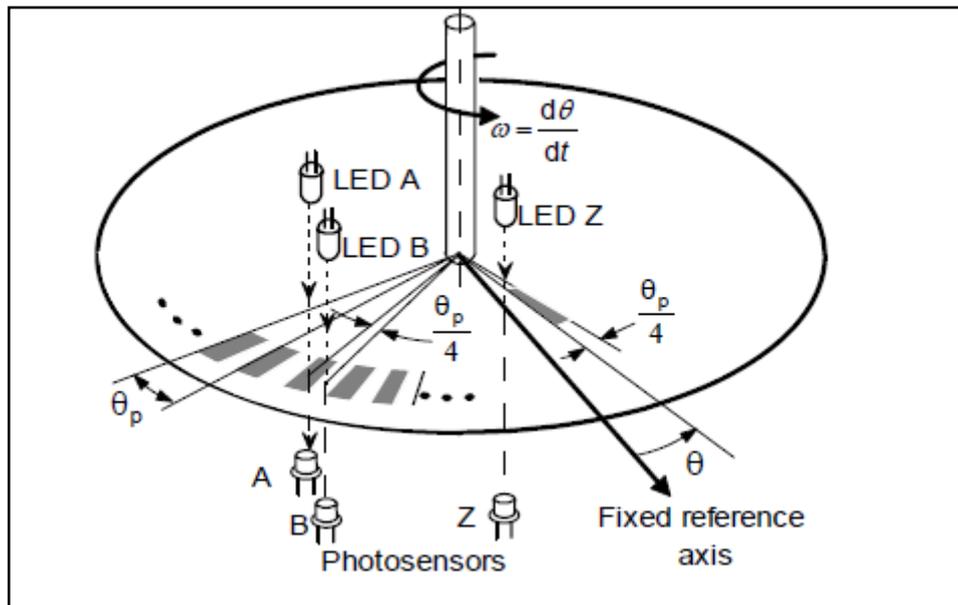


Figura 4.1 – Schema encoder

Sono presenti 3 canali a disposizione: A, B e Z. Questi sono i segnali fondamentali poiché consentono di ricostruire sia la velocità angolare che il verso di rotazione. È presente uno sfasamento di 90° tra A e B.

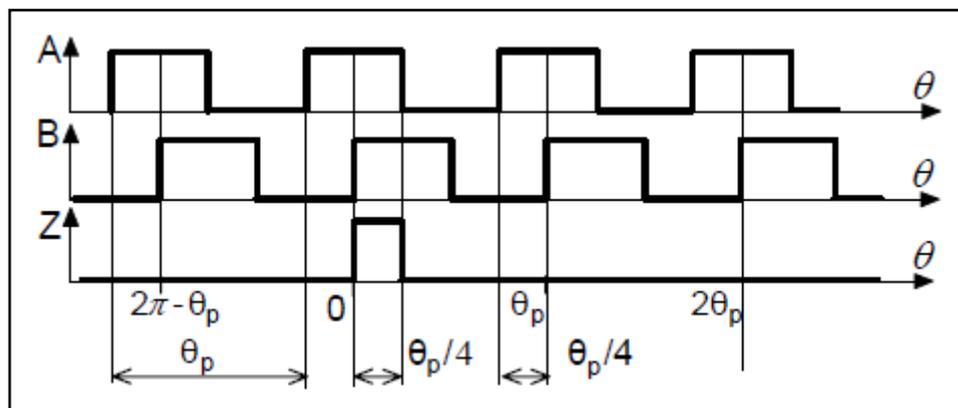


Figura 4.2 – Segnali canali encoder

A livello di elettronica il lavoro che viene svolto dall'encoder è quello di calcolare il tempo che intercorre tra due impulsi successivi che aggiorna l'informazione sul valore di velocità. Sono presenti dei canali che hanno la funzione di contare gli impulsi e misurano il tempo al quale l'impulso è arrivato. Risulta molto importante in questo caso il valore della frequenza del clock con la quale si riesce a misurare il tempo che ha una certa influenza sulla misura che si sta svolgendo. Altro fattore molto influente sulla misura è la risoluzione, ovvero il numero di tacche a giro. Ovviamente più tacche al giro si riesce ad ottenere e più si riesce ad ottenere una misura precisa ma al tempo stesso si avrà anche una misura più rumorosa poiché si è più soggetti a vibrazioni che si possono verificare nella misura stessa.

Normalmente se si necessita di misure molto stabili a livello di velocità media si cerca di usare un encoder con poche tacche al giro poiché il vantaggio di averne poche media il comportamento istantaneo del componente.

Altro problema è la presenza di un segnale quantizzato: avere dei diversi livelli a cui si aggiorna l'informazione può essere problematico in fase di controllo poiché quest'ultimo quando lavora molto vicino all'obiettivo, se lavora tra due estremi, satura il controllo poiché la risoluzione non è sufficiente.

4.2. Modello Simulink dell'encoder

Per riuscire a comprendere al meglio il funzionamento dell'encoder è stato utilizzato un modello Simulink opportunamente costruito affinché riuscisse possibile simulare il comportamento di un vero e proprio encoder e fosse anche capace di mostrare la sensibilità dello stesso al variare della frequenza del clock e della risoluzione.

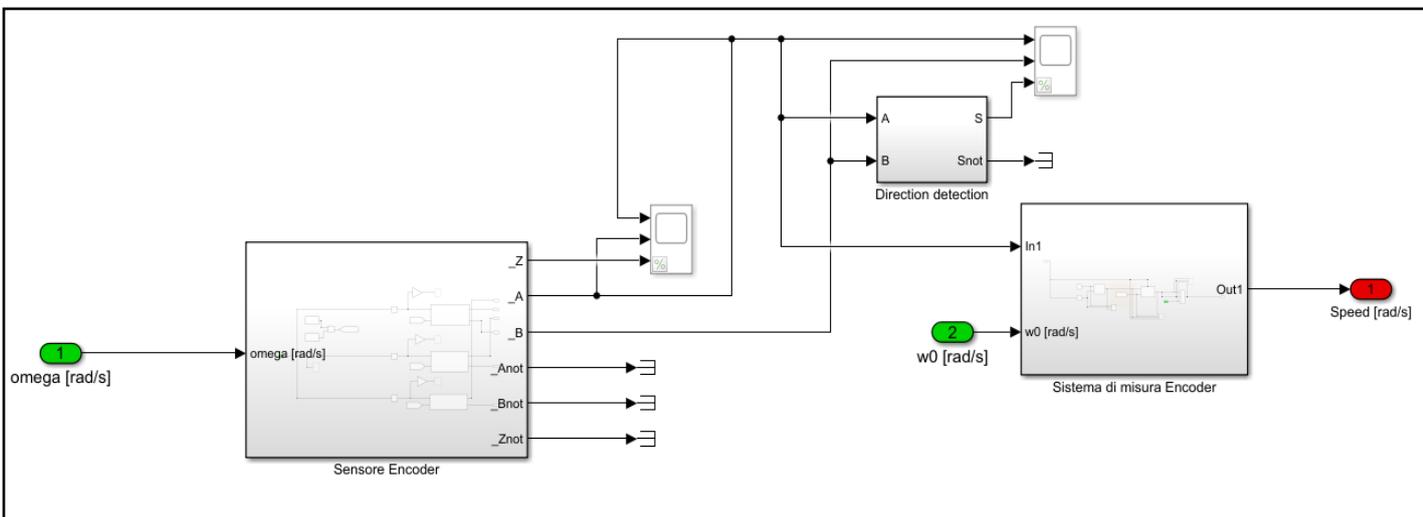


Figura 4.3 – Modello Simulink encoder

È possibile vedere dalla fig.4.3, che rappresenta la modellazione dell'encoder al suo interno, in ingresso in verde viene, ovviamente, richiesta la velocità angolare, che può essere scelta opportunamente nel sistema principale del modello:

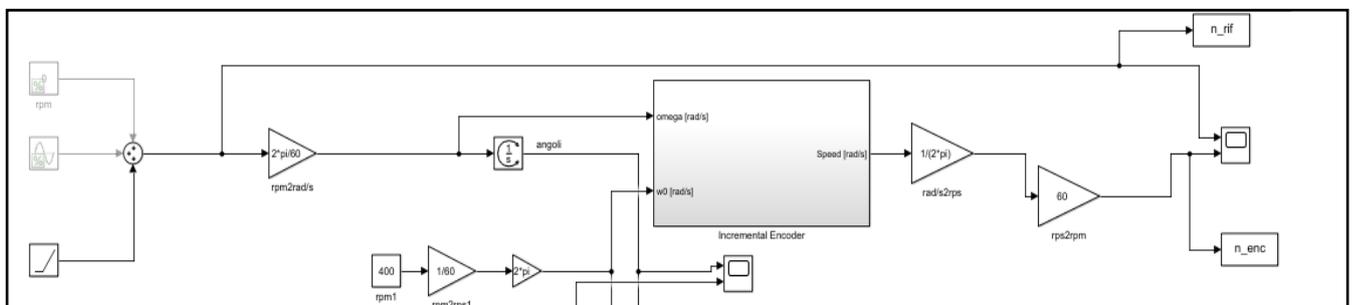


Figura 4.4 – Sistema principale modello Simulink encoder

Quindi, nel sistema principale è possibile scegliere se far variare la velocità angolare in maniera costante, secondo una funzione sinusoidale oppure attraverso una rampa. Dalla

fig.4.3. è possibile vedere come il modello Simulink dell'encoder sia suddiviso in due parti: una prima parte che simula il sensore dell'encoder ovvero dalla velocità in ingresso ai tre canali digitali, all'interno dei quali si stabilizza come parametro la risoluzione, ovvero il numero di tacche a giro.

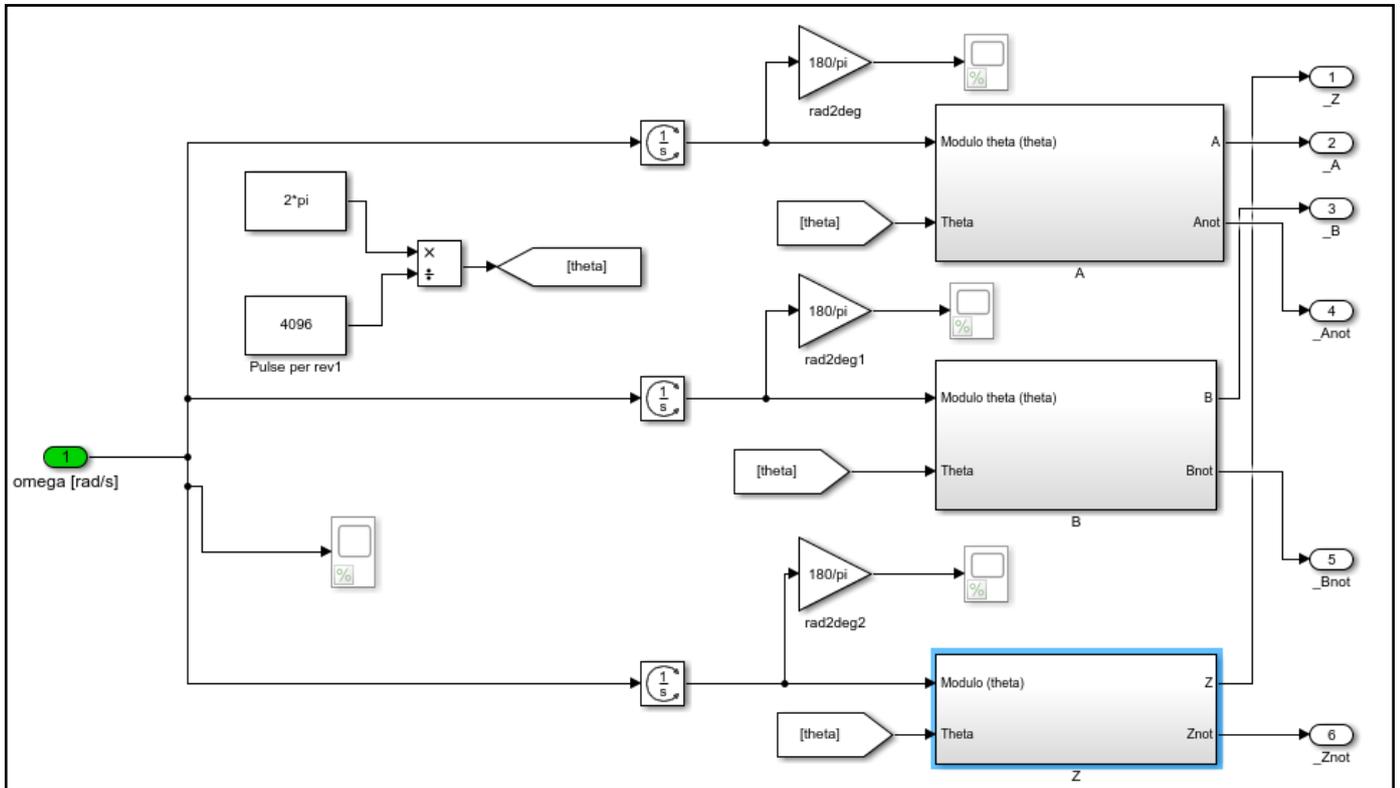


Figura 4.5 – Sottosistema sensore Encoder

Altro sottosistema presente nella fig.4.3 è quello che simula, invece, il sistema di misura dell'encoder dove si parte dalle uscite dei 3 canali digitali A, B e Z, fino al calcolo della velocità angolare misurata. All'interno i parametri calcolati sono la frequenza dell'encoder e il numero di bits del counter.

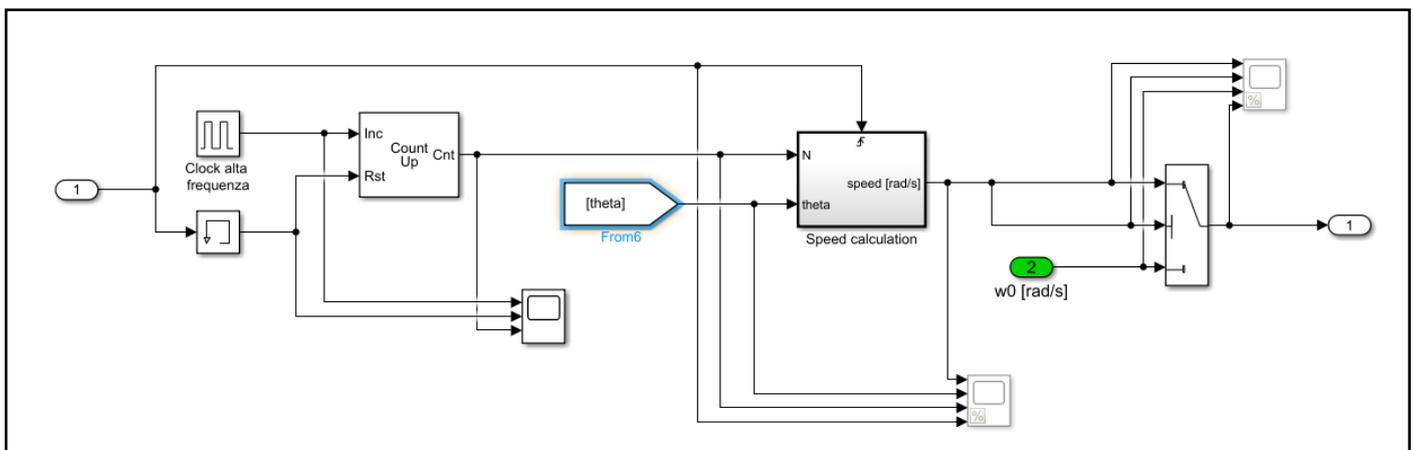


Figura 4.6 – Sottosistema di misura Encoder

Focalizzandosi sul primo sottosistema, risulta interessante capire come funzionano i tre canali digitali: la velocità angolare entra nei tre canali A, B e Z, come schematizzato in fig.4.2. Fondamentale è notare come ci sia la presenza del blocco integratore prima dell'ingresso all'interno dei canali digitali; questo è dovuto al fatto che all'interno dei blocchi si necessita come input la posizione angolare e non la velocità angolare.

Per il corretto funzionamento del modello Simulink è necessario impostare i due parametri fondamentali: il numero di tacche a giro Z e la frequenza del clock. In primis, nella schermata principale è fondamentale scegliere il modo in cui voler far variare la velocità angolare. Una volta scelto ciò bisogna inserire il numero di tacche a giro, in questo caso è stato scelto 4096, che oltre ai blocchi “pulsazione per rev” va inserito anche all'interno di tutti i blocchi integratori, in maniera tale da poter integrare in maniera corretta la velocità angolare. A questo punto, bisogna scegliere la frequenza del clock: essa è obbligatorio, per il corretto funzionamento del modello, inserirla sia all'interno del blocco del “clock ad alta frequenza”, dove bisogna inserirla sottoforma di periodo del clock, ma anche all'interno del sottosistema “speed calculation”.

Ritornando al primo sottosistema è interessante spiegare ed evidenziare la differenza tra le due posizioni angolari in ingresso:

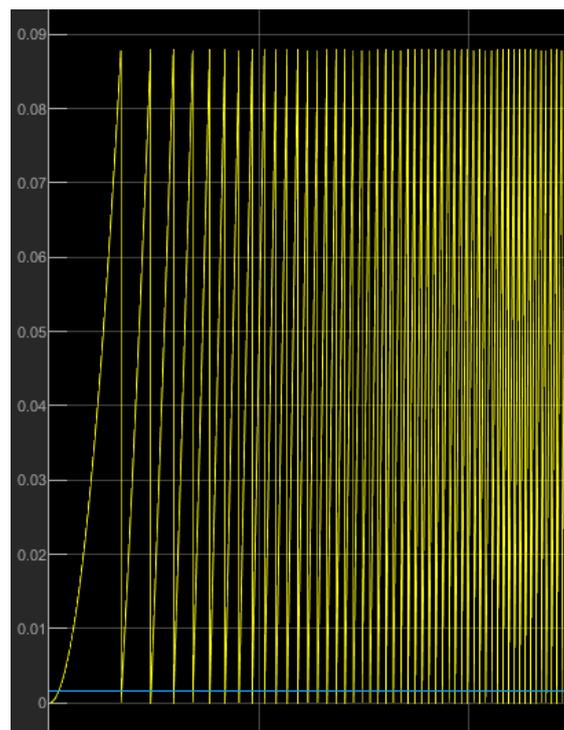


Figura 4.7 – Sottosistema di misura Encoder

È possibile vedere come in giallo viene riportata la prima posizione angolare, ovvero quella necessaria per il calcolo della velocità angolare: in base al numero di impulsi, che vengono inviati in base alla risoluzione dell'encoder, mentre in blu è possibile vedere la “risoluzione dell'encoder”, cioè la minima differenza di posizione angolare [rad] che può essere misurata con quel sensore, ottenuta come: $\frac{2\pi}{n_{tacche}}$. Vengono forniti 2 o 4 impulsi A B ed Anot Bnot e

quello che si definisce Z, che è possibile vedere da fig.4.5.

Questi due impulsi a seconda del tipo di encoder rotazione oraria o antioraria arrivano sfasati tra loro. A è in anticipo su B di 1 impulso mentre Z arriva sempre nello stesso punto di rilevazione dell'encoder, i segnali A/B vengono inviati ad ogni passo di rotazione dell'encoder a seconda della sua risoluzione. Vale a dire che un'encoder da 1000 impulsi X giro, ogni rotazione completa genera 1000 impulsi A + 1000 impulsi B, nel caso di encoders lineari si parla di impulsi X mm. La misura della velocità non è, quindi, altro che la misura della frequenza d'impulsi, che ovviamente richiede una determinazione molto precisa di T.

Quindi, i blocchi che simulano i canali digitali sono:

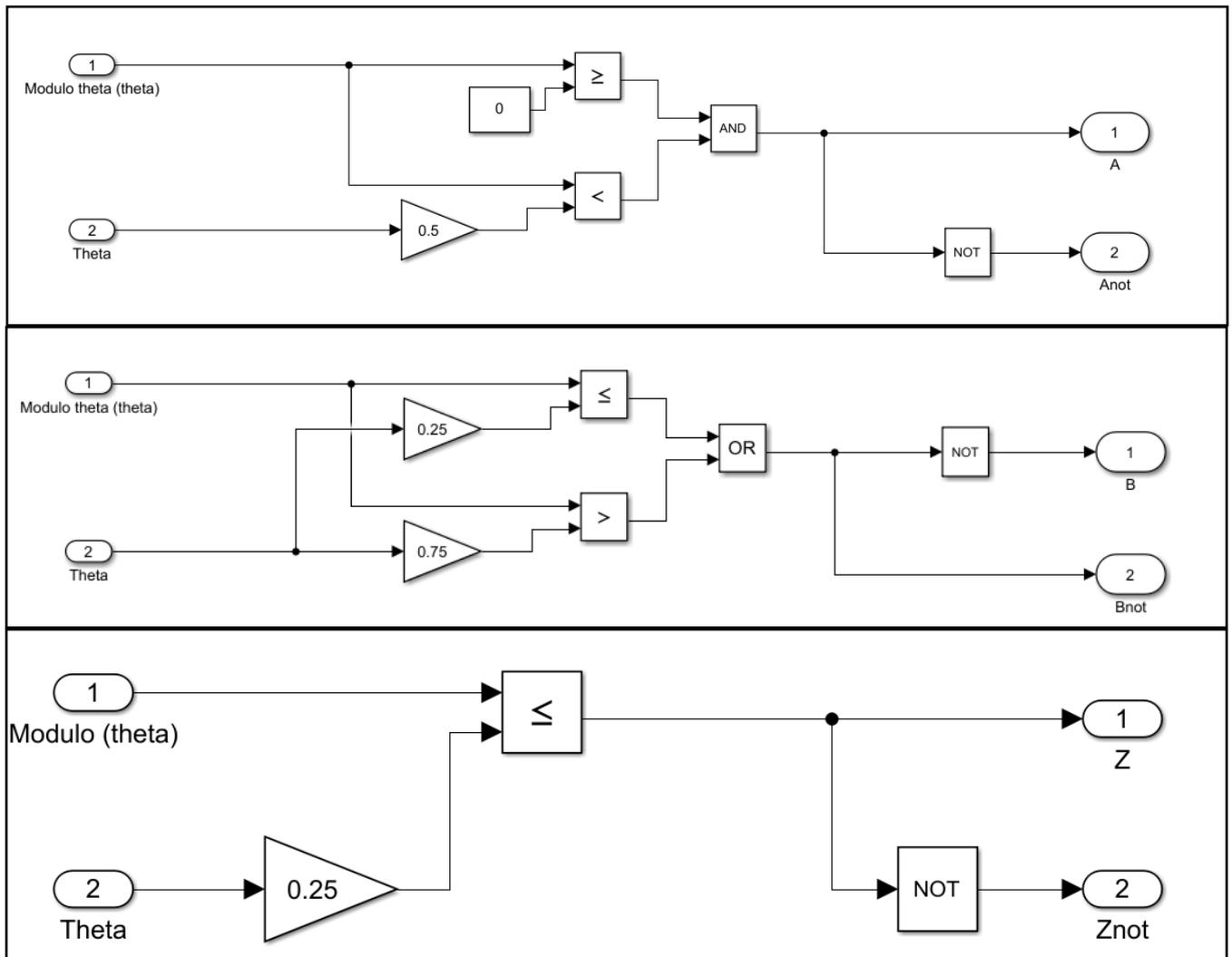


Figura 4.8 – Canali A, B e Z

Attraverso le condizioni, che vengono mostrate all'interno della fig.4.8, presenti in ogni singolo blocco che simula i canali A, B e Z è possibile ricostruire la velocità di rotazione avendo in input la posizione angolare. Infatti, la velocità angolare ricostruita da ogni singolo canale ha il seguente andamento:

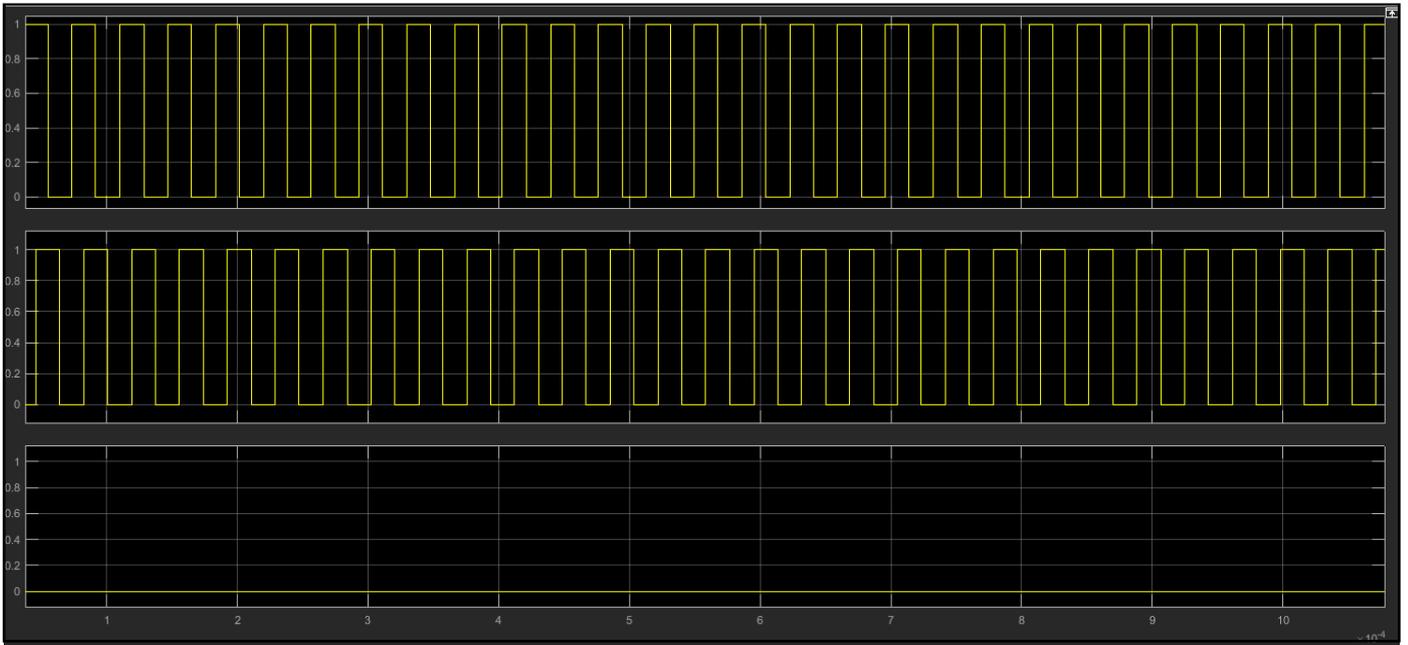


Figura 4.9 – Canali A, B e Z

È importante notare come sia presente la tacca dello zero nel grafico in basso proveniente dal canale Z.

Una volta ricostruita la velocità angolare dai canali, come spiegato precedentemente, viene utilizzato un blocchetto per determinare il verso di quest'ultima:

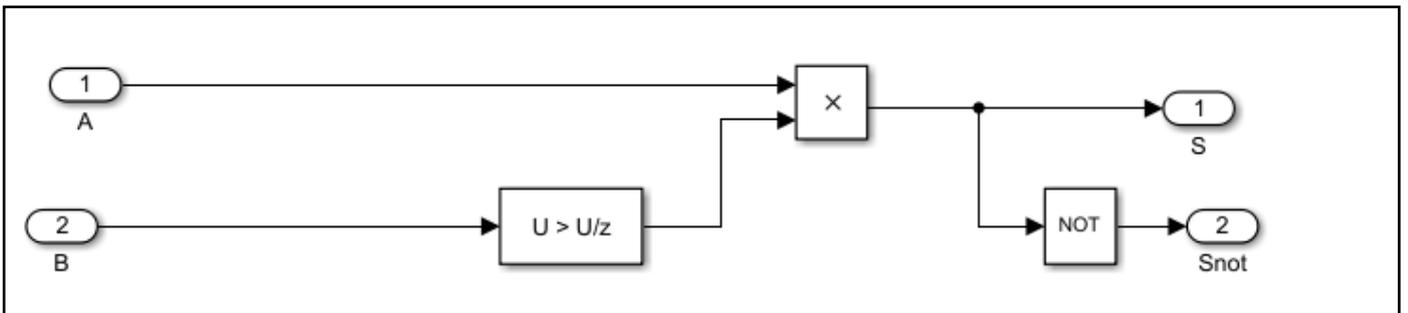


Figura 4.10 – Blocco per la determinazione del verso di rotazione

Infine, lavorata opportunamente la velocità di rotazione si simula il funzionamento della frequenza del clock attraverso un clock ad alta frequenza dove all'interno è possibile inserire il valore di frequenza a cui si vuole simulare l'encoder e il counter che appunto ha il compito di contare gli impulsi.

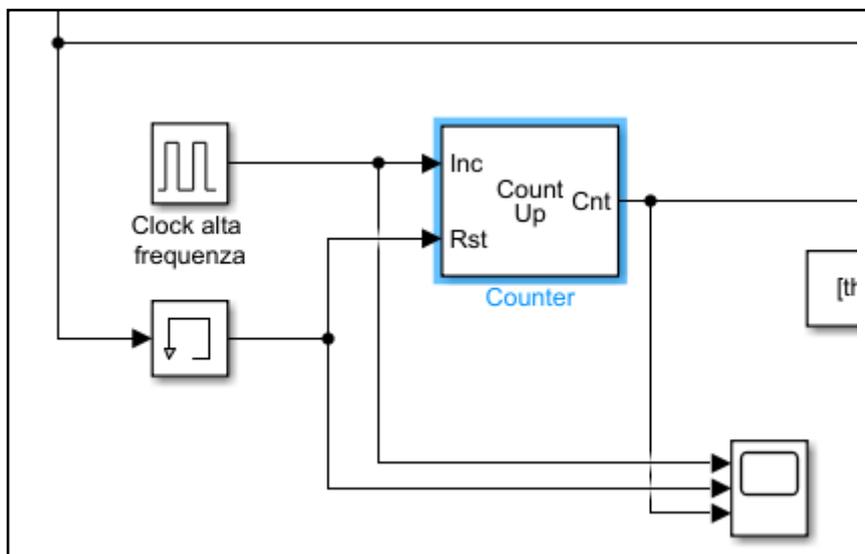


Figura 4.11 – *Clock ad alta frequenza e Counter*

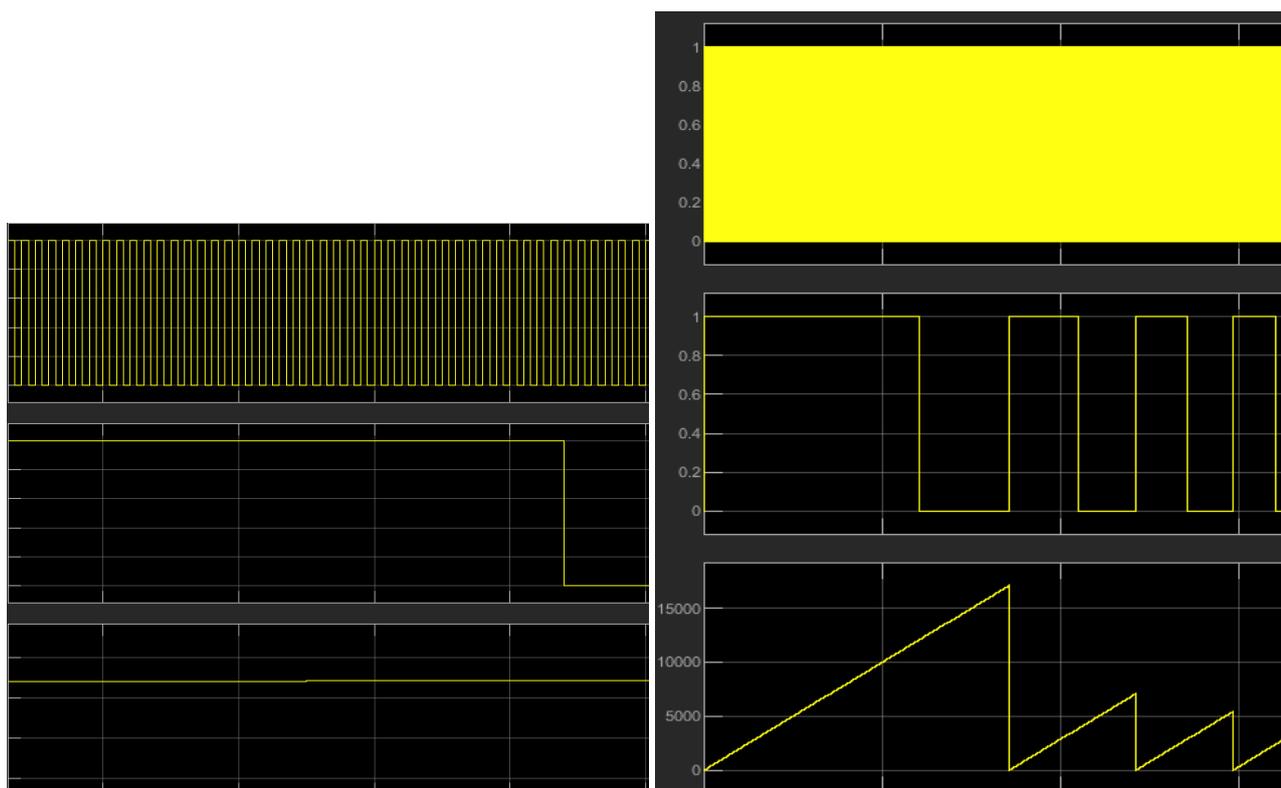


Figura 4.12 – *Funzionamento del clock e del counter*

In questo caso è possibile vedere come funziona il clock, dal primo grafico di fig.4.12 che in base alla frequenza che viene inserita esso crea degli step con il periodo derivante proprio dalla frequenza scelta. Il contatore, invece, conta il numero di impulsi del clock ad alta frequenza tra un impulso ed il successivo del canale A. Il counter size è il numero di bits del

contatore, cioè 2^{n_bit} è il numero massimo di impulsi che riesca a contare, come viene visto dal secondo blocco di fig.4.12.

Ultimo blocchetto è necessario per calcolare la velocità di rotazione finale tenendo conto della posizione angolare θ e del numero di tacche N:

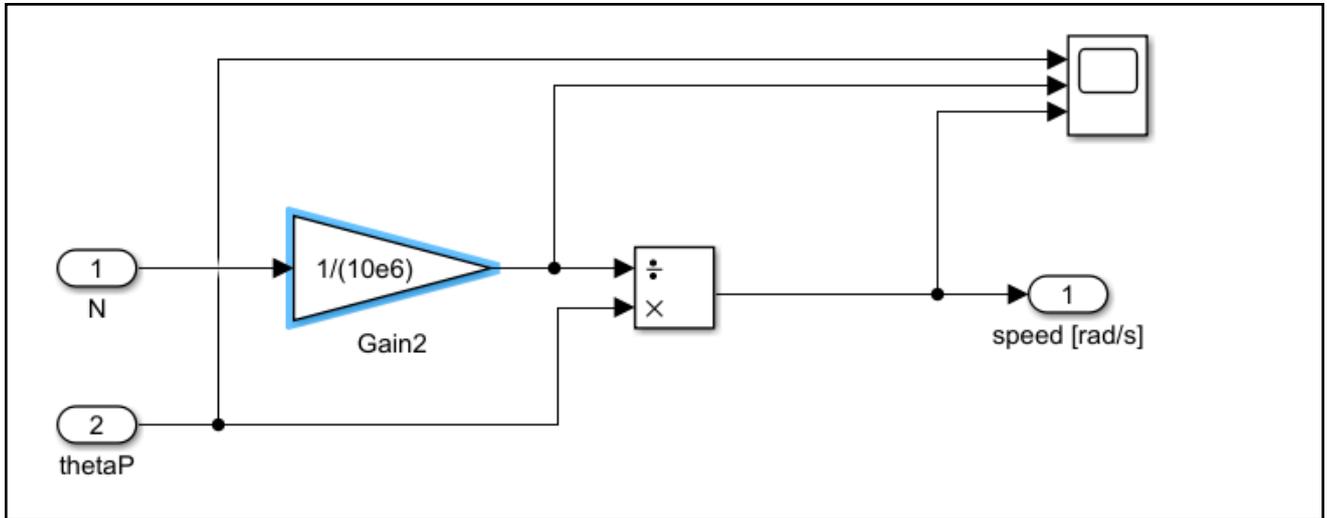


Figura 4.13 – Blocco per la determinazione del verso di rotazione

In questo caso, si sta calcolando la velocità angolare come rapporto incrementale:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta T} \quad (4.1)$$

Dove il numeratore è costante essendo la risoluzione angolare dell'encoder, mentre il denominatore è il risultato della misura del tempo che intercorre tra due impulsi consecutivi del canale A, con un livello di precisione dato dalla frequenza del clock.

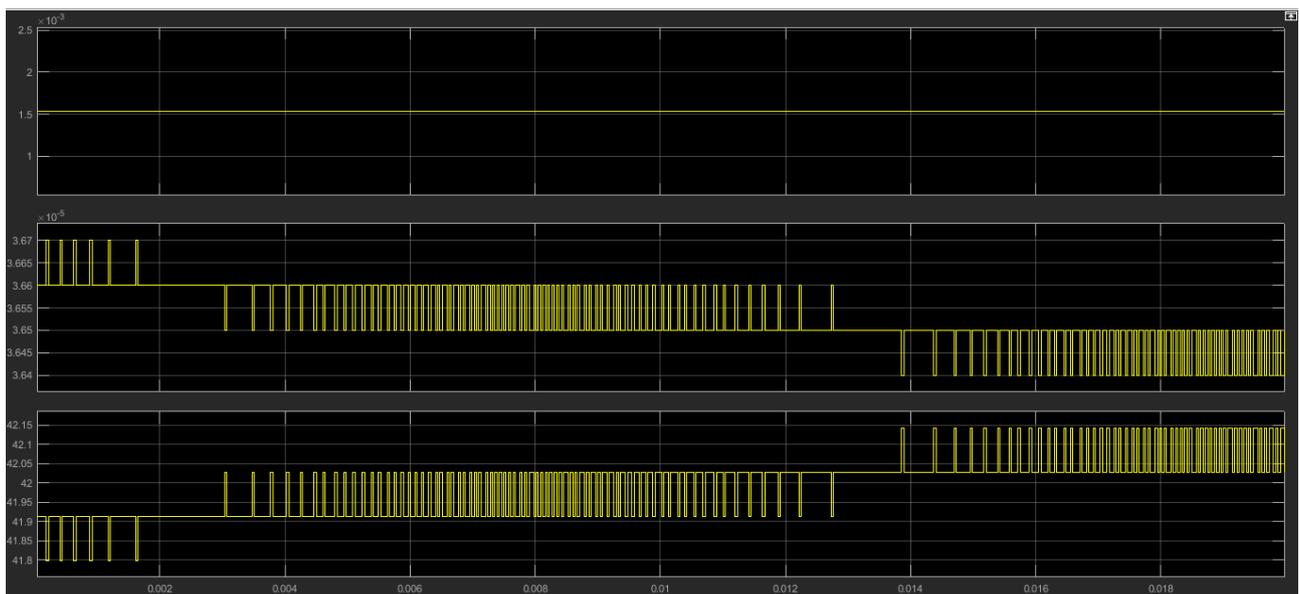


Figura 4.14 – Blocco per la determinazione del verso di rotazione

Calcolata nell'ultimo blocco la velocità effettiva di rotazione, si tiene conto, come è possibile notare da fig.4.2 anche della condizione iniziale che viene inizialmente scelta.

4.3. Effetti delle caratteristiche dell'encoder sul segnale

Per poter capire il funzionamento dell'encoder, e quindi, scoprire come esso può portare ad instabilità è utile ricavare le equazioni che lo governano e capire come, ogni singolo parametro influisce su un segnale.

Si consideri un segnale come quello in fig. 4.2 ovvero un treno di impulsi nel tempo, dove l'ampiezza è la tensione del segnale. Definito il fronte di salita per stimare la misura, bisogna calcolare il tempo ogni qual volta che il segnale attraversa lo zero nel fronte di salita che viene letto sull'asse delle ascisse. Supponendo che il sistema sia in grado di leggere tutti gli impulsi, allora avrò un $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ a cui sarò interessato ricavato da un contatore che conta appunto questi tempi partendo da una condizione iniziale stabilita.

Nota il numero di tacche a giro Z :

$$Z = \frac{N_{tacche}}{giro} \quad (4.2)$$

Posso ottenere anche la risoluzione dell'encoder angolare:

$$\Delta\theta = \frac{360}{Z} \left[\frac{\circ}{imp} \right] \quad (4.3)$$

In questo modo è possibile valutare la risoluzione, cioè ogni volta che arriva un impulso aumento di $\Delta\theta$. Questa è la codifica angolare.

Altro parametro importante risulta essere la velocità media, ovvero la velocità che impiega il segnale per passare da un impulso ad un altro.

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (4.4)$$

Ma è possibile ricavare che

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = N_i dt - N_{i-1} dt \quad (4.5)$$

Dove $dt = \frac{1}{f_c}$ ovvero la frequenza di clock del contatore.

Quindi, come si può capire da quest'ultima equazione, i tempi vengono misurati da un clock che ha una risoluzione finita. In definitiva è possibile ricavare che:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{ZNdt} \quad (4.6)$$

N può essere espresso, a partire dalla velocità effettiva ω , come:

$$N = \text{floor} \left(\frac{2\pi}{Zdt\omega} \right) \quad (4.7)$$

N viene calcolato in questo modo poiché il Δt deve essere un multiplo intero di dt , visto che viene misurato da un counter che ha una risoluzione finita e di conseguenza il Δt non può che essere appunto un multiplo intero. Nella (4.7), appunto, si arrotonda per difetto il numero di tacche essendo presente il dt .

Ma in realtà, quello a cui si è interessati è la più piccola variazione di velocità misurabile tra due impulsi successivi, che può essere espressa come:

$$\Delta\omega_m = \frac{2\pi}{ZNdt} - \frac{2\pi}{Z(N+1)dt} \quad (4.8)$$

Dall'equazione (4.7) si nota come la risoluzione è funzione della velocità di rotazione e, di conseguenza, anche la (4.8) sarà funzione della ω .

In definitiva la base dei tempi sarà fornita dal clock ovvero il dt , che sarà un multiplo intero della base tempi di riferimento. Quindi se l'encoder è più veloce rispetto al clock non si riesce più ad aggiornare l'informazione e si viene a creare un errore. Questa misura è influenzata quindi da due fattori principali: la risoluzione Z e la frequenza del clock.

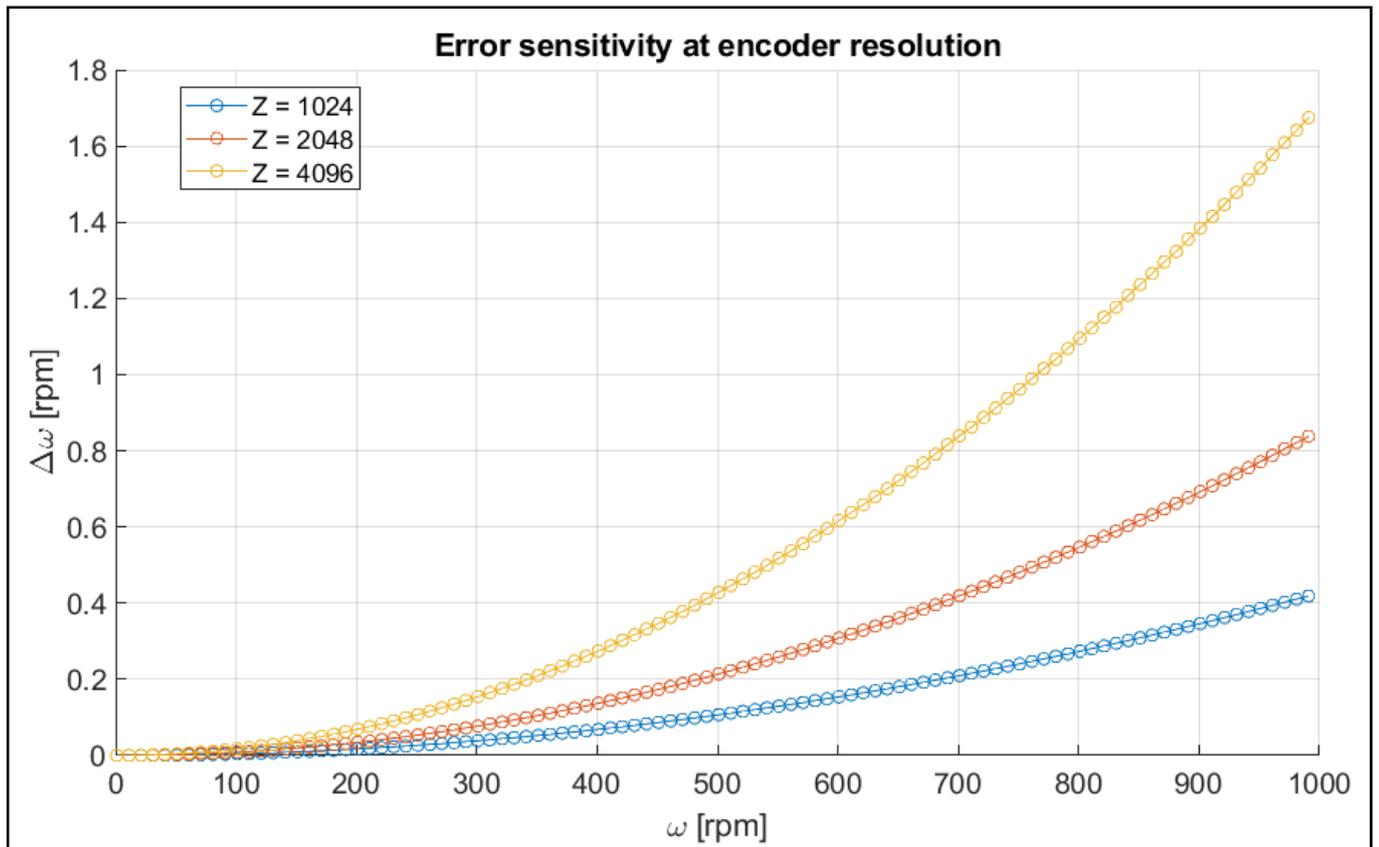


Figura 4.15 – Sensibilità al variare del numero di tacche dell'encoder con ω che varia da 1 a 1000

Dalla fig.4.15 si può notare quindi la variazione dell'errore al variare del numero di tacche, ovvero la risoluzione dell'encoder.

Come è possibile vedere dal grafico, all'aumentare del numero di tacche Z, l'errore che si crea sul clock tende a pesare di più. Questo perché avendo pochi colpi di clock tra un impulso e l'altro l'errore che si commette nella stima della velocità pesa di più.

Importante notare come alle alte velocità gli andamenti dell'errore variano in base alla risoluzione: maggiore sarà la risoluzione e maggiore sarà la velocità dell'errore di raggiungere valori sempre più alti. Ovvero che l'errore ha un andamento quasi iperbolico.

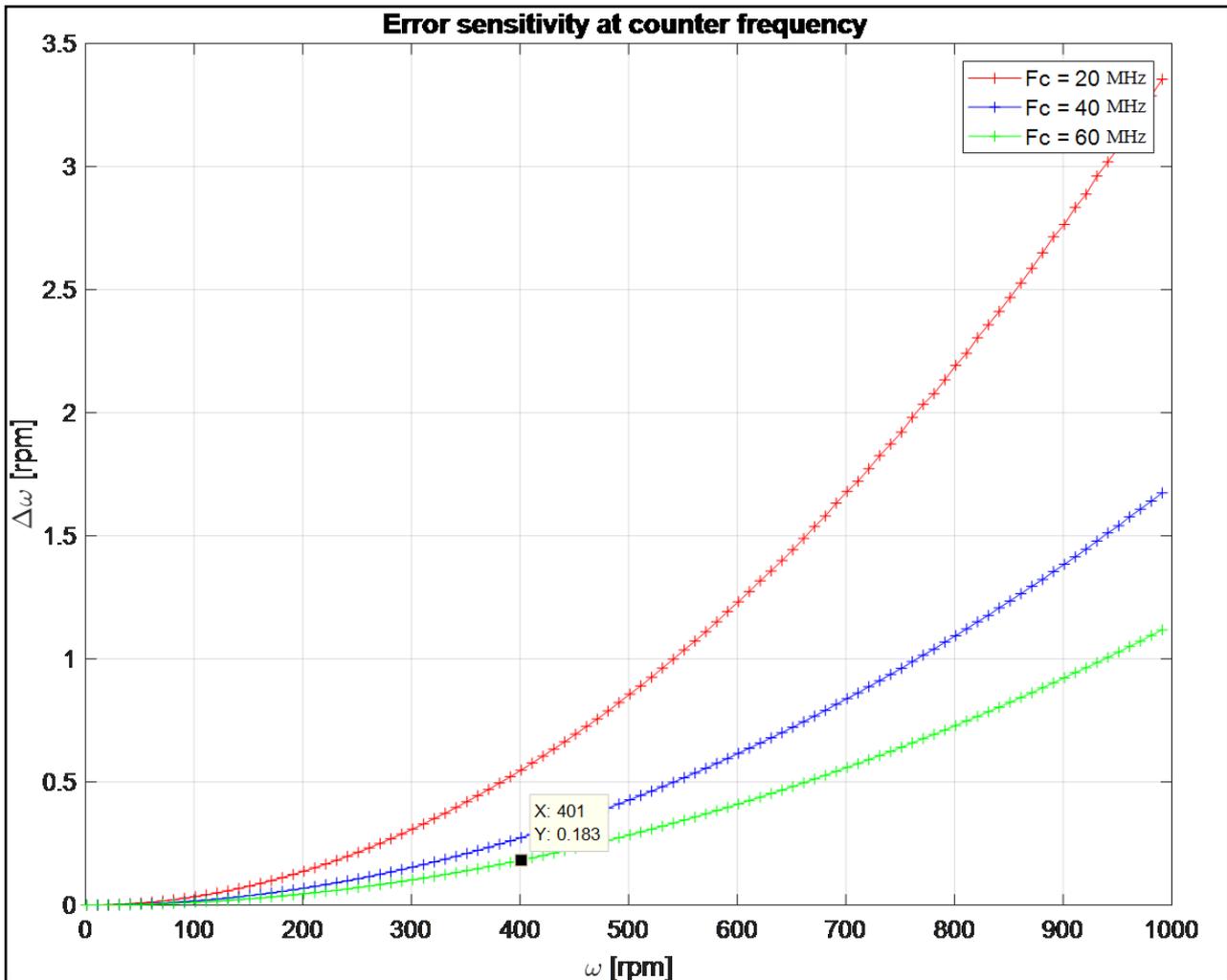


Figura 4.16 – Sensitività al variare della frequenza del clock

Analogo ragionamento fatto per la risoluzione, lo si può fare per la frequenza del clock. Come si nota dalla fig.4.16, anche in questo caso, all'aumentare della frequenza del clock l'errore tende a pesare meno, quindi si ha l'effetto opposto rispetto alla risoluzione.

Come nel caso precedente, alle alte velocità di rotazione e all'aumentare il valore della frequenza del clock, l'errore aumenta con velocità crescente, ovvero sembra avere un andamento quasi iperbolico.

È interessante riportare anche l'andamento dell'errore in maniera percentuale per spiegare il fenomeno. Per ottenere i grafici si è utilizzato Matlab, dove una volta stabiliti i valori di Z e della frequenza del clock, si è calcolato il $dt = \frac{1}{f_c}$. A questo punto, inseriti un numero crescente di valori di velocità media da 0 a 1000, è stato possibile ottenere tramite l'equazione (4.6) il ΔT . Infine, per riuscire a calcolare l'errore percentuale si è utilizzata la funzione *floor* di Matlab nel seguente modo:

$$err = floor\left(\frac{\Delta T}{dt}\right) * dt \quad (4.9)$$

Riportando sull'asse delle ascisse la velocità media e sull'asse delle ordinate l'errore percentuale calcolato per ogni valore di velocità media, si ottiene il seguente grafico:

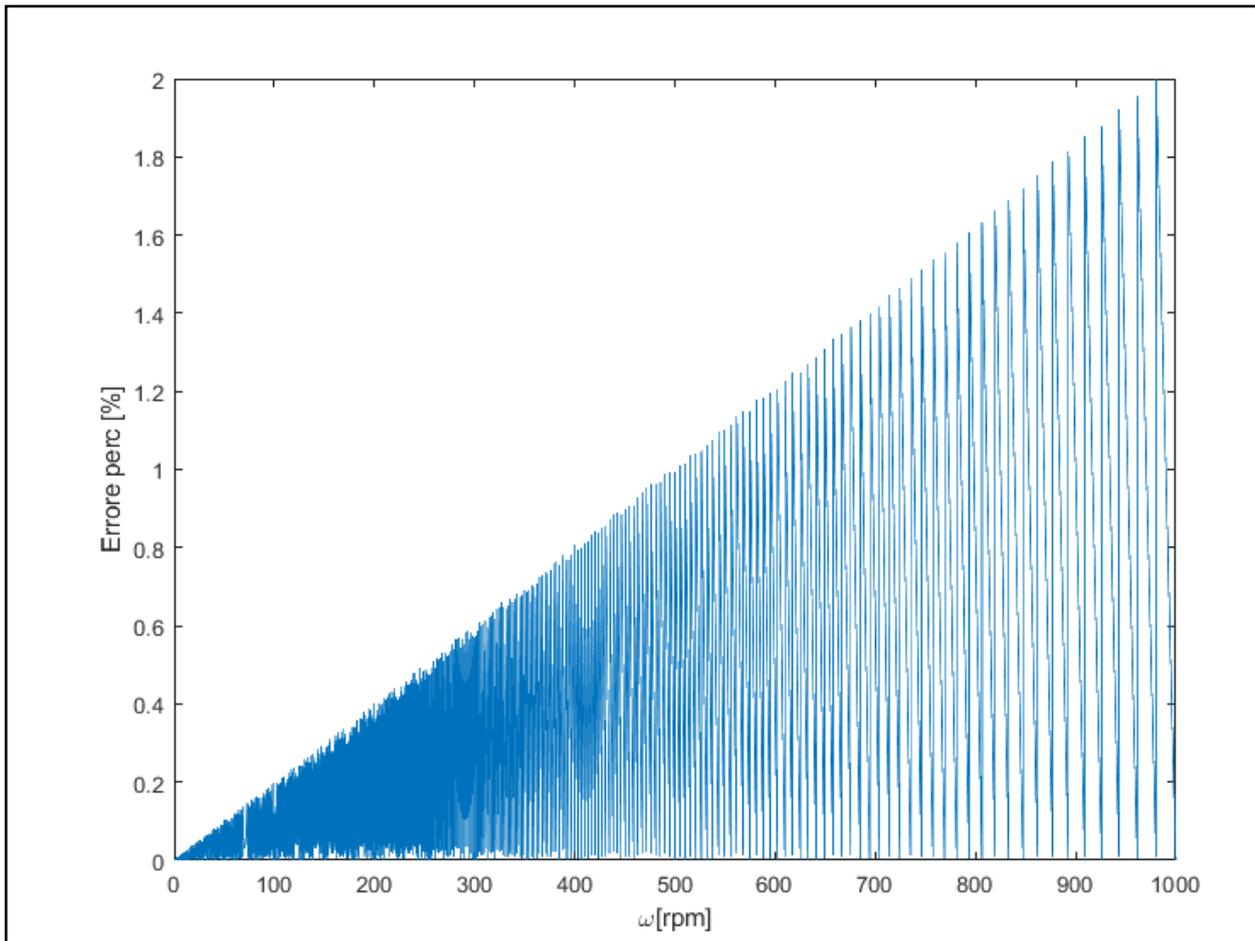


Figura 4.17 – *Variazione errore percentuale con $f=40$ MHz*

Dalla fig.4.17 è interessante notare come l'errore percentuale passi per lo 0. Questo fenomeno si ha quando la velocità che corrisponde alla risoluzione coincide con la velocità di ingresso allora l'errore è nullo. Ma quando si passa al valore successivo allora avrò un valore molto grande all'inizio che man mano tenderà a ridursi e a tendere a zero. Interessante notare quindi, sulla base dei risultati precedenti, come all'interno di un certo range si ha un valore costante, e quindi, man mano che ci si avvicina al valore vero di input, l'errore si riduce, ma appena lo si supera esso ricresce e da un valore gradinato.

Questo andamento può essere spiegato dalla seguente figura:

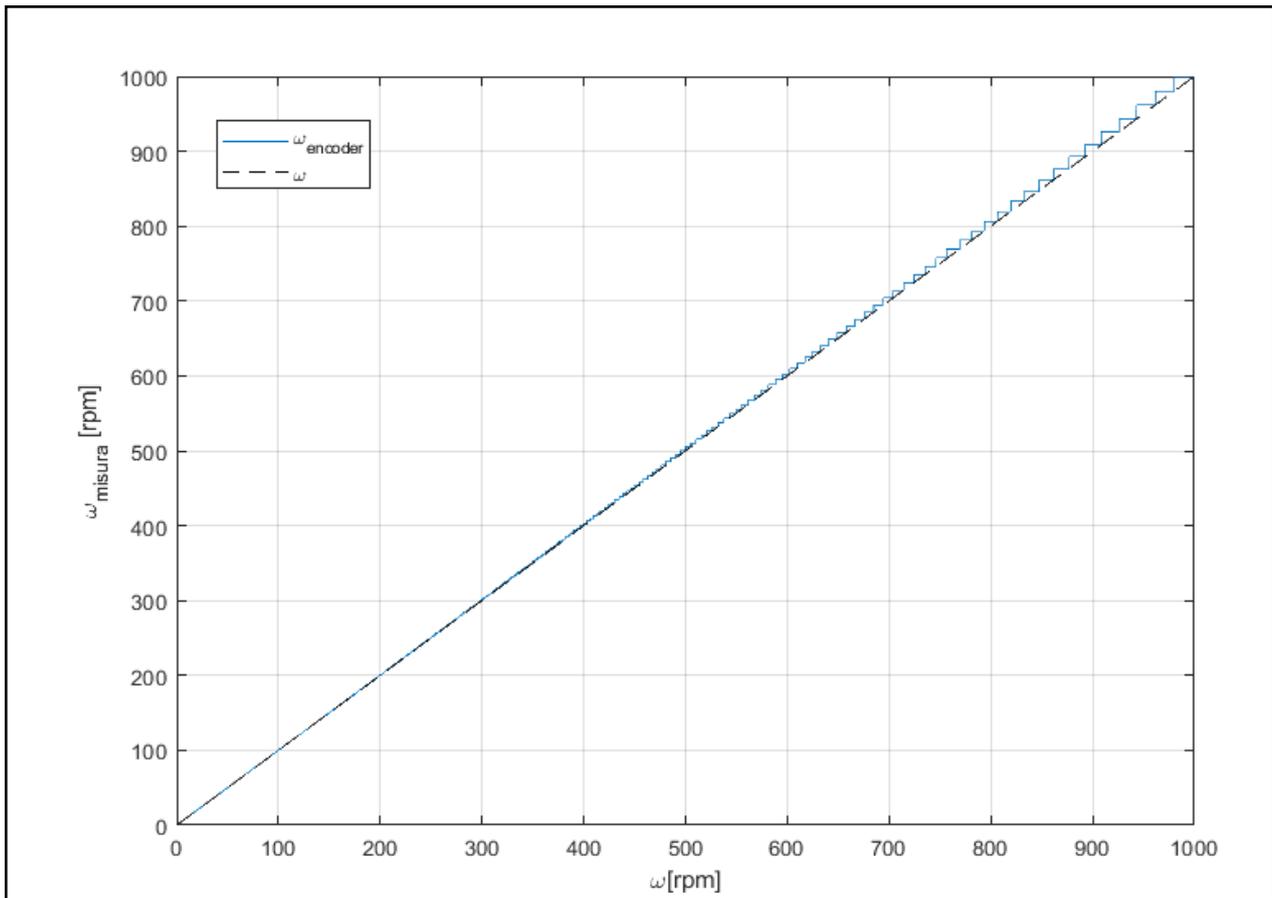


Figura 4.18 – Confronto ω misurata rispetto a ω riprodotta con $f = 40$ MHz e $Z = 1024$

In fig.4.18 viene riportato il confronto tra l'andamento della ω che dovrebbe essere tratteggiata confrontata con quella che ricostruisce l'encoder, ovvero quella che effettivamente riusciamo ad ottenere. La distanza dalla curva in azzurro rispetto a quella tratteggiata ci fornisce proprio l'errore.

A questo punto risulta interessante andar a valutare l'errore facendo variare i due parametri fondamentali: la risoluzione e la frequenza del clock.

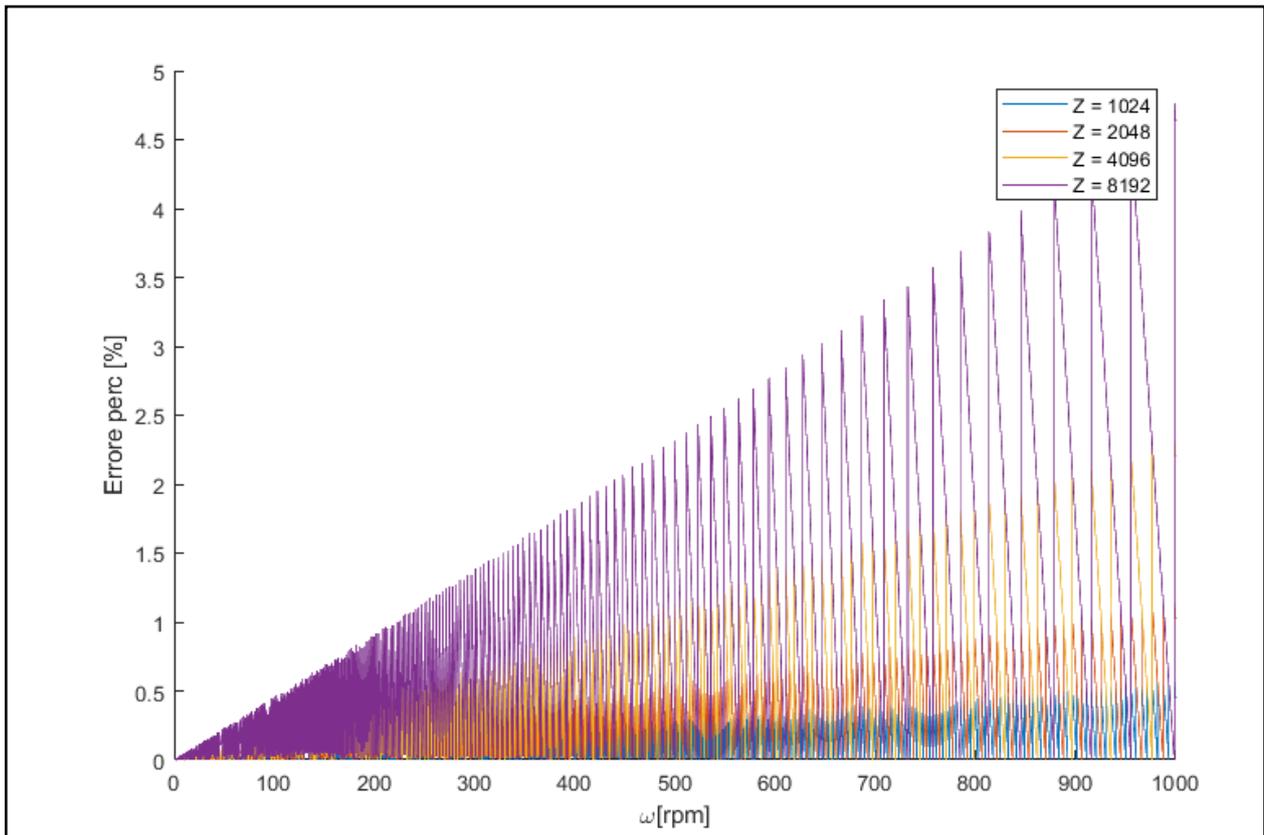


Figura 4.19 – *Variazione errore percentuale in funzione della risoluzione con $f = 40$ MHz*

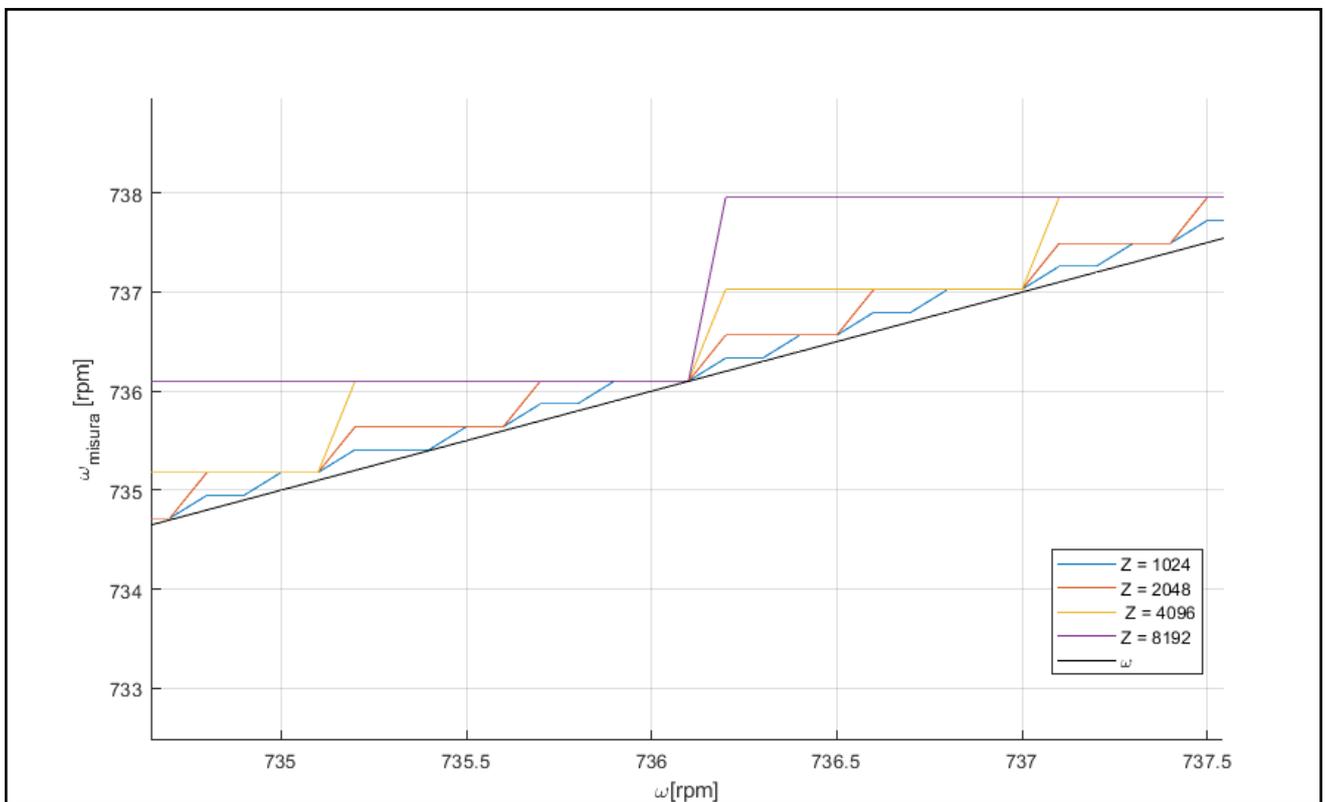


Figura 4.20 – *Confronto delle ω in funzione della risoluzione con $f = 40$ MHz*

Dalle fig. 4.19 e 4.20 si capisce chiaramente l'influenza della risoluzione che confermano i risultati ottenuti precedentemente. All'aumentare di quest'ultima infatti è possibile notare come, in primis, l'errore percentuale aumenta e questo ha influenza anche nella ricostruzione della velocità da parte dell'encoder che impiega un range di valori più alto affinché la velocità dell'encoder a quella risoluzione coincida con la velocità di input.

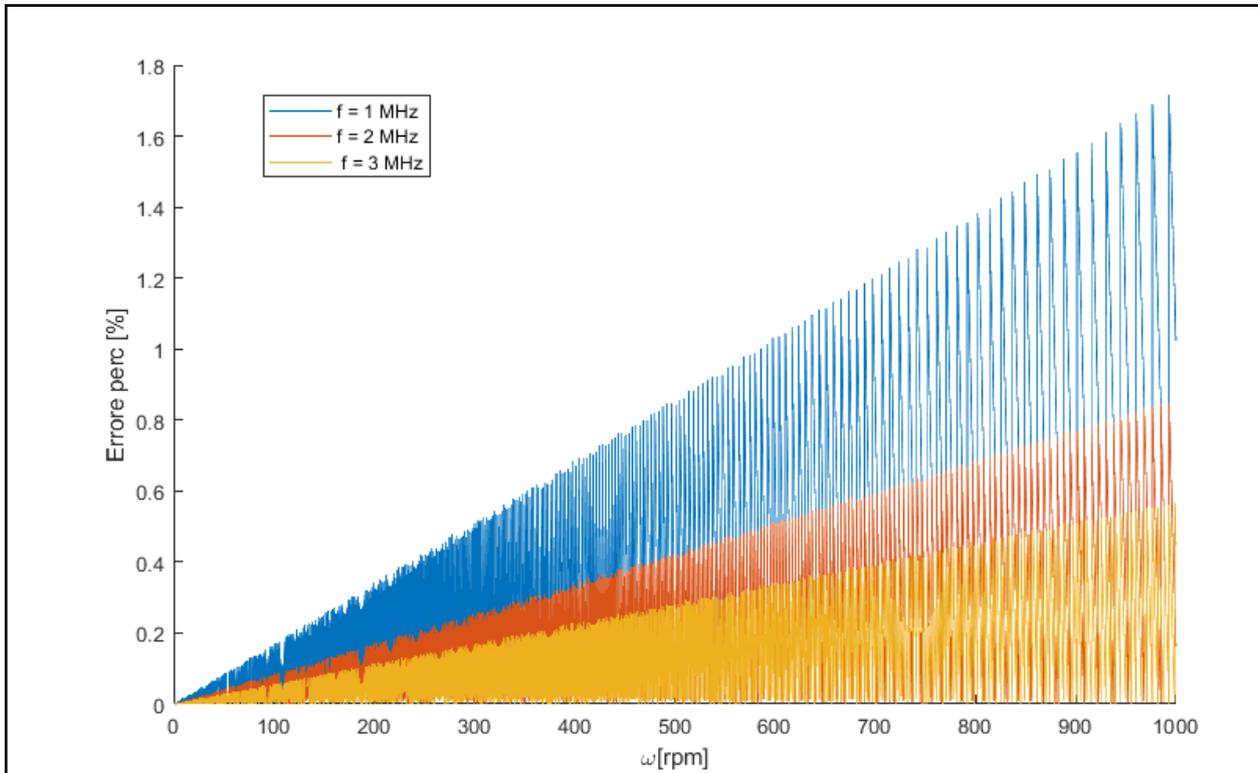


Figura 4.21 – *Errore percentuale in funzione della frequenza del clock con $Z = 1024$*

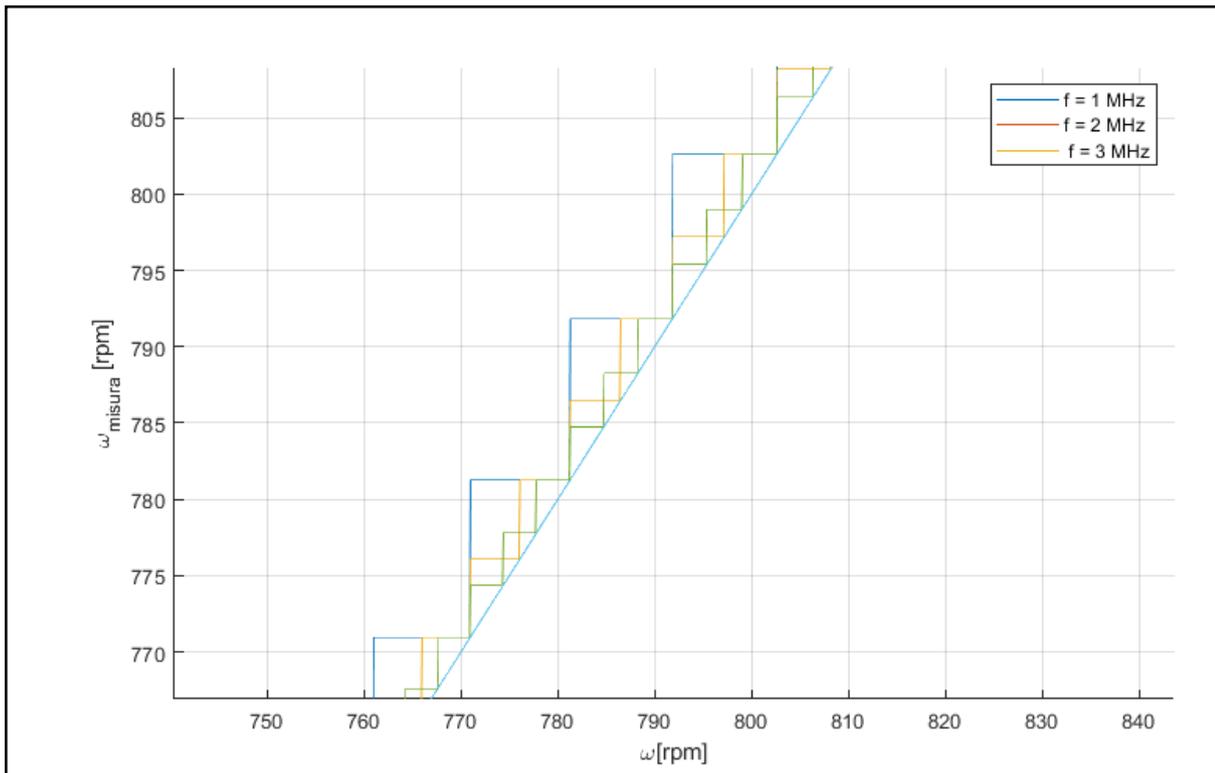


Figura 4.22 – Confronto delle ω in funzione della frequenza del clock con $Z = 1024$

Anche in questo caso, come visto precedentemente, l'effetto della frequenza del clock ha effetto opposto. Infatti, come si può vedere dalla fig. 4.21, avere una frequenza di 1 MHz porta ad un range di valori dell'errore percentuale più grande rispetto al caso di frequenze maggiori. Ovviamente questo ha effetto sulla ricostruzione della velocità da parte dell'encoder come è possibile notare in fig.4.22.

Questi effetti risultano più facilmente spiegati nel momento in cui si utilizza un modello simulink dell'encoder. Si valuta in questo caso, la velocità di riferimento che in questo caso è una rampa e la velocità che l'encoder riesce a seguire facendo variare di volta in volta i parametri

Nel caso in cui si scelga un numero di tacche $Z = 1024$, si ottengono i seguenti grafici al variare della frequenza del clock:

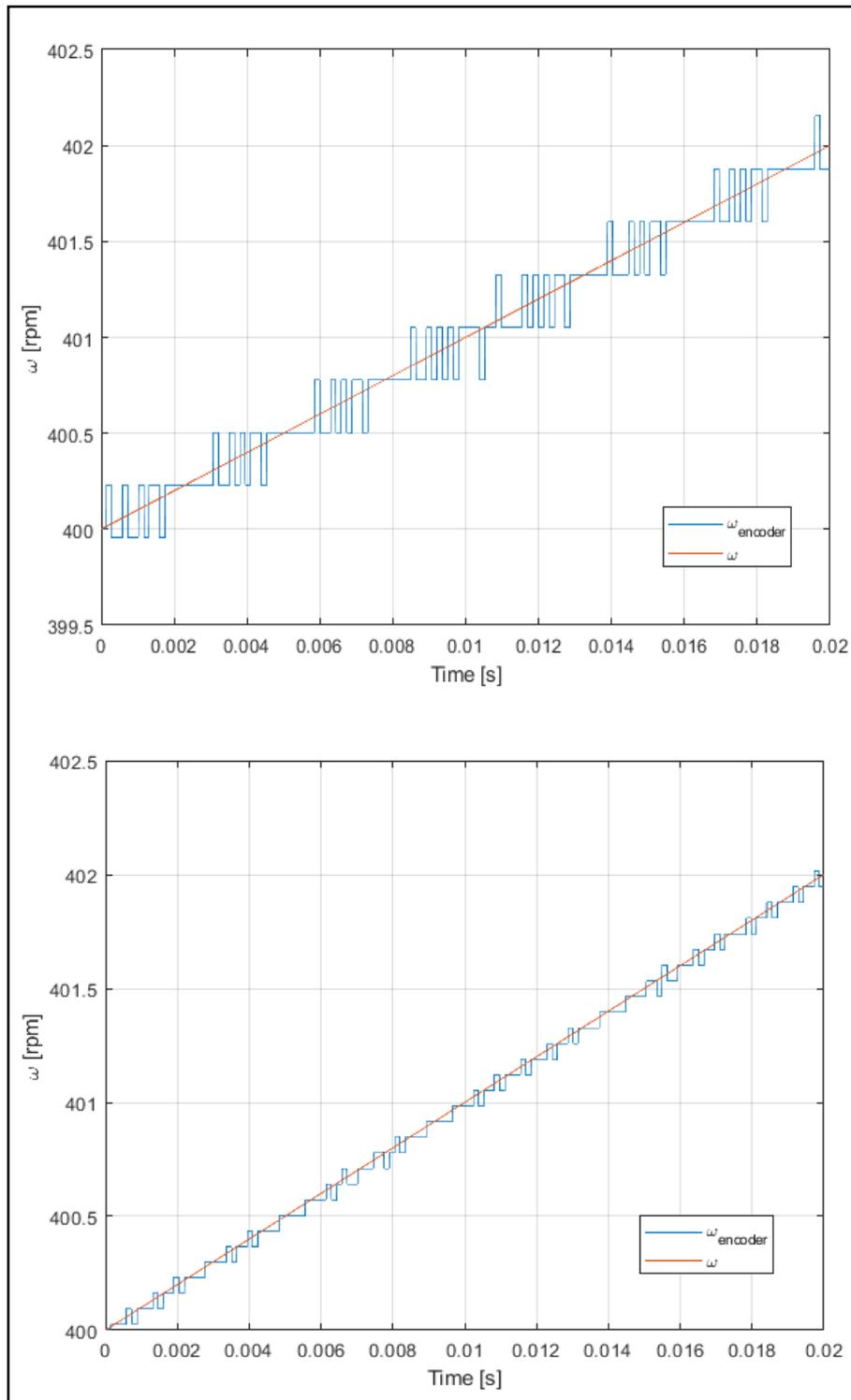


Figura 4.23 – a) $f = 10$ MHz b) $f = 40$ MHz

Nel caso in cui si scegli un numero di tacche $Z = 2048$, si ottengono i seguenti grafici al variare della frequenza del clock:

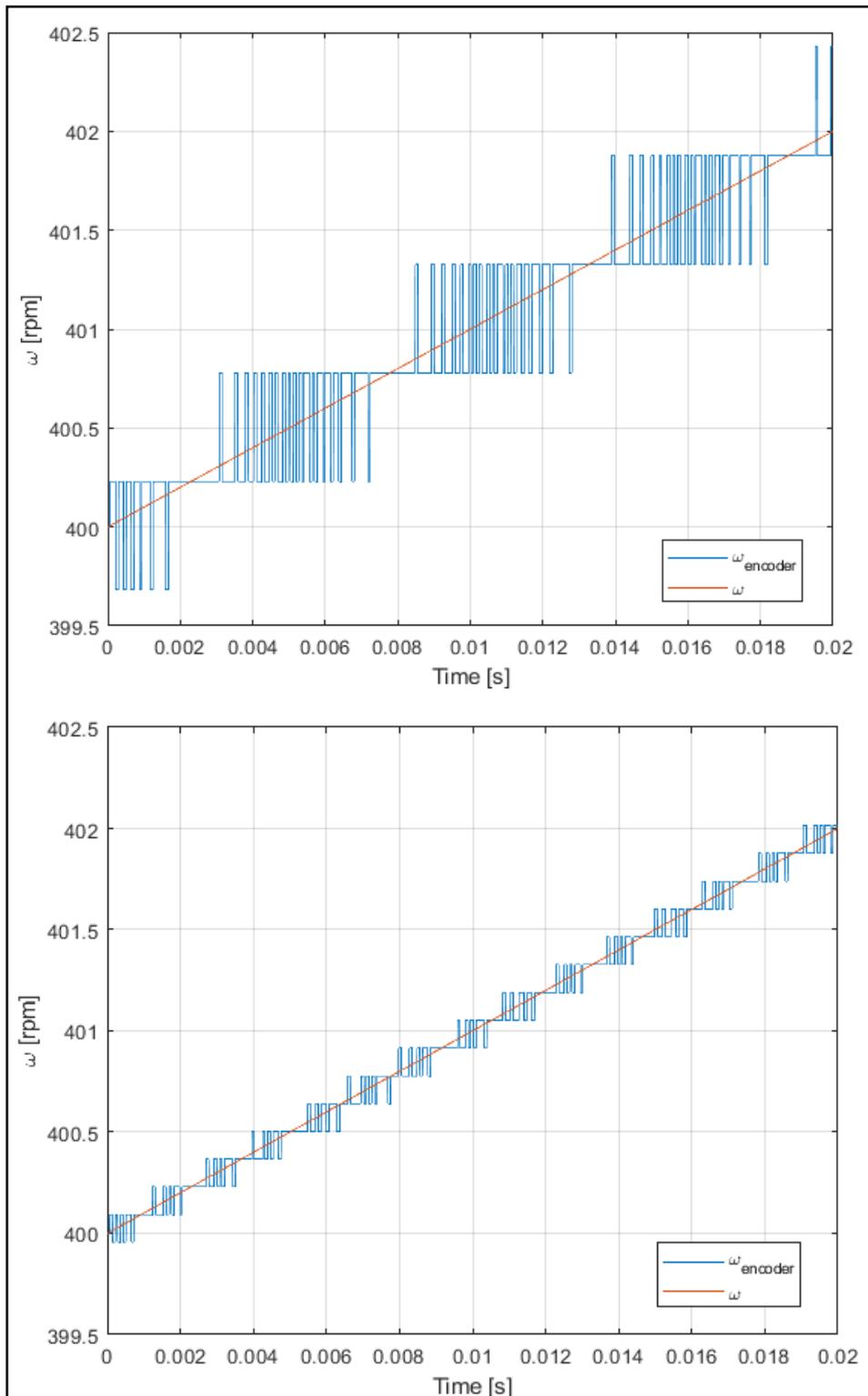


Figura 4.24 – a) $f = 10$ MHz b) $f = 40$ MHz

Nel caso in cui si scegli un numero di tacche $Z = 4096$, si ottengono i seguenti grafici al variare della frequenza del clock:

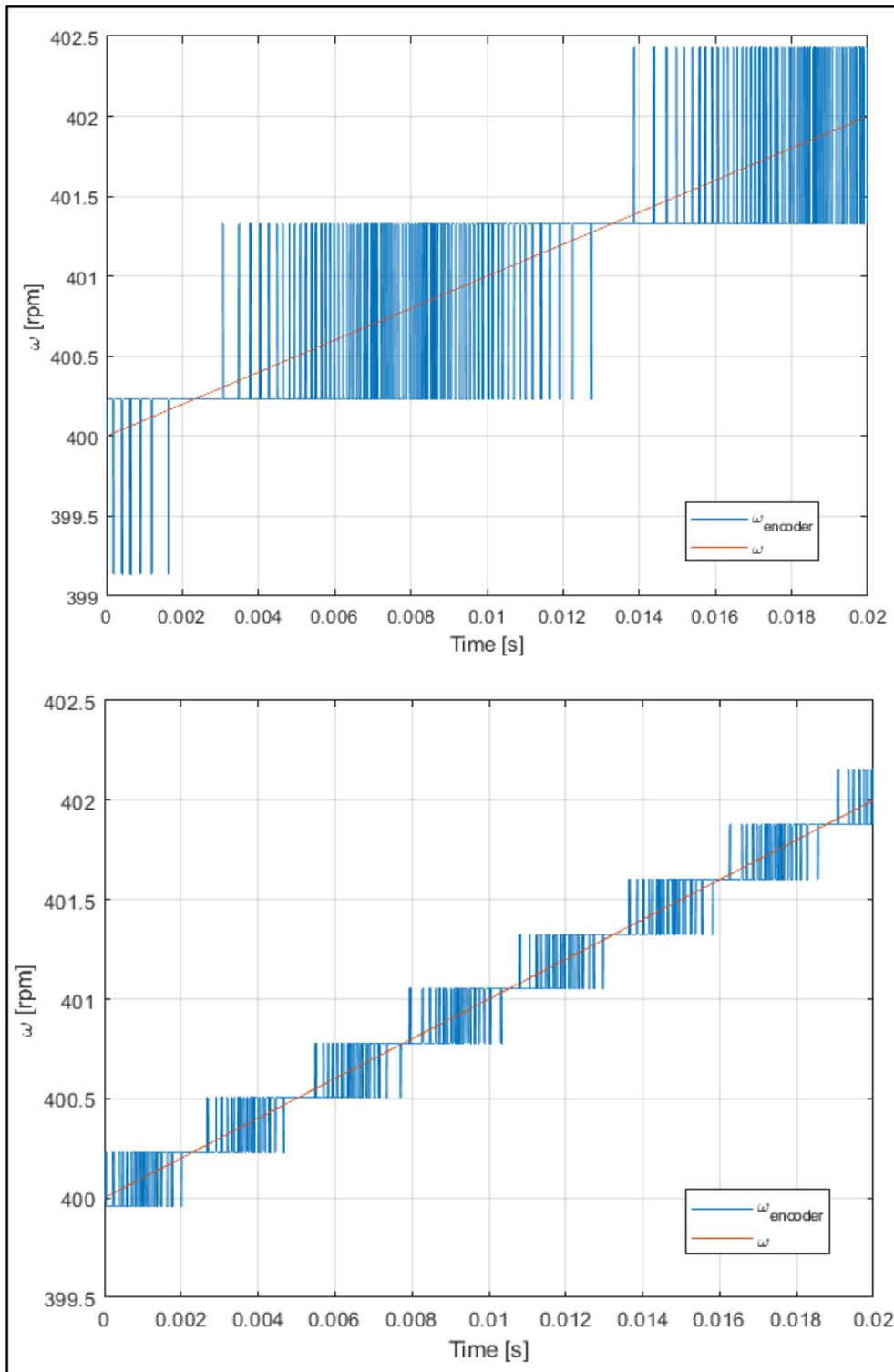


Figura 4.25 – a) $f = 10$ MHz b) $f = 40$ MHz

Molto interessante a questo punto, confrontare il modello analitico utilizzato inizialmente e quello simulato che ha fornito gli ultimi risultati:

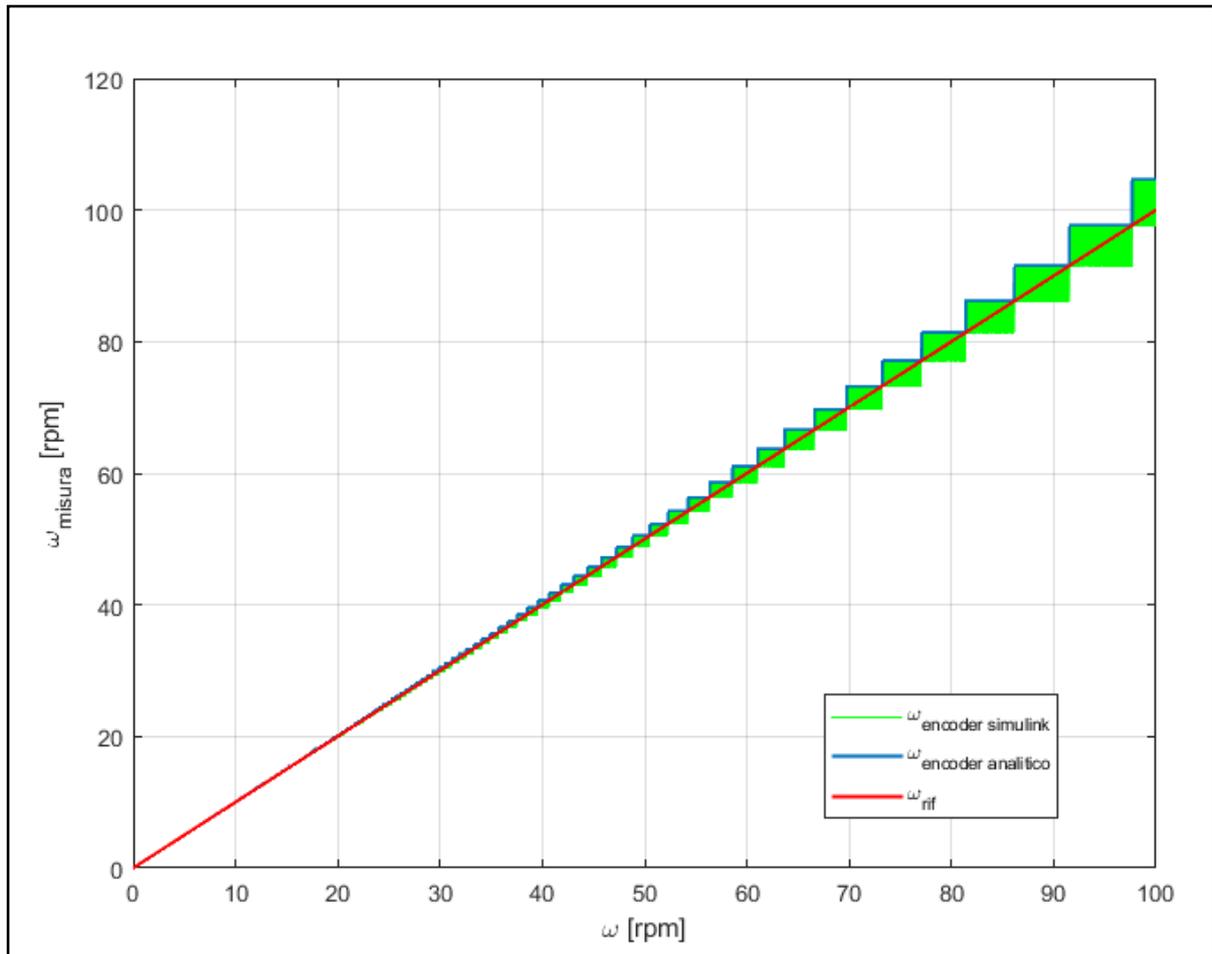


Figura 4.26 – Confronto modello Simulink e modello analitico con $Z = 4096$ e $f = 100$ KHz

In fig.4.26 vengono riportati gli andamenti della velocità angolare sia nel caso in cui si utilizza il modello Simulink, sia nel caso in cui si utilizza il modello analitico rispetto ad una velocità di riferimento che cresce in maniera lineare da 0 rpm fino a 100 rpm.

Come è possibile notare alle basse velocità l'azione dell'encoder è limitata, quasi nulla, infatti gli andamenti risultano essere sovrapposti e non è presente l'effetto dell'encoder, mentre inizia a divenire sempre più consistente all'aumentare della velocità di rotazione, dove la differenza tra la ω di riferimento e quella dell'encoder crescono.

Principale differenza tra i due modelli è fornita principalmente dal fatto che nel caso di modello Simulink viene modellizzato anche il lavoro che viene fatto dal clock, infatti è possibile vedere, anche dalle figure precedenti, come i due andamenti siano diversi: nel caso di modello analitico l'andamento della velocità viene rappresentato come un semplice step verso un valore superiore rispetto al riferimento, mentre nel caso di modello Simulink il clock media intorno alla velocità di riferimento

4.3. Effetti dell'encoder sulla rumorosità

Dopo aver analizzato nel dettaglio gli effetti della risoluzione e della frequenza del clock sull'errore e, quindi, sulle misurazioni, risulta molto interessante andare a studiare i loro effetti anche a livello sonoro, ovvero in che modo il loro valore può influenzare il segnale e la rumorosità del sistema. Ovviamente quest'ultima, può risultare un fattore importante nel momento in cui si svolgono delle misure dal punto di vista della rumorosità essi hanno degli effetti negativi sulla verifica e l'attendibilità delle misure.

Risulta avere un ruolo molto importante nell'analisi della rumorosità lo spettrogramma.

4.3.1. Spettrogramma

Gli spettrogrammi mostrano l'evoluzione nel tempo del contenuto in frequenze di un segnale.

Uno spettrogramma è la rappresentazione grafica dell'intensità di un suono in funzione del tempo e della frequenza o, in altre parole, è la rappresentazione grafica della funzione reale i delle variabili reali t ed f .

Di solito per gli spettrogrammi si usa un'altra rappresentazione grafica, nella quale:

- sull'asse delle ascisse è riportato il tempo in scala lineare, che mostra l'evoluzione temporale del segnale.
- sull'asse delle ordinate è riportata la frequenza in scala lineare o logaritmica, fornisce istante per istante il contenuto in frequenza del segnale.
- a ciascun punto di data ascissa e data ordinata è assegnata una tonalità di grigio, o un colore, rappresentante l'intensità del suono in un dato istante di tempo e a una data frequenza. Quindi ogni colore rappresenta l'ampiezza del segnale e della vibrazione.

Per ogni segnale quindi, si studia il comportamento armonico del segnale ad una determinata frequenza, che può anche essere stimata a livello grafico, in base al periodo delle sinusoidi. L'analisi in frequenza viene effettuata su un range di frequenze di interesse, ma quest'ultimo è tarato sulla frequenza di acquisizione del sistema nel dominio del tempo: fissato per esempio 10 kHz di acquisizione, allora il range di interesse andrà da 0 Hz fino alla metà della frequenza di acquisizione, ovvero della frequenza di Nyquist o frequenza di campionamento. Se si volesse un range più piccolo bisognerebbe ricampionare il segnale per avere una frequenza di Nyquist più bassa.

Per poter analizzare in frequenza il segnale al variare del tempo bisogna aprire una finestrazione temporale di durata limitata e piccola che viene scelta appositamente, che verrà spostata verso tempi sempre più alti ovvero si suddivide l'intervallo di tempo totale (cioè quello relativo all'intera forma d'onda da analizzare) in sottointervalli uguali (detti finestre temporali) di durata da 5 a 10 ms e calcolando la trasformata di Fourier della parte di forma d'onda contenuta in ciascuna finestra. Questa operazione significa operare tante funzioni di trasferimento in frequenza del segnale che però, man mano scorre verso tempi crescenti su tutto il segnale.

In questo modo non si analizza il segnale in una sola volta altrimenti si medierebbe in contenuto in frequenza, ma così facendo ad ogni finestra temporale si calcola lo spettro in

frequenza. Così facendo ogni riga e colonna dello spettrogramma è praticamente lo spettro in frequenza di ogni singola finestrazione.

Segnali impulsivi hanno uno spettro a banda larga, ovvero la banda di frequenza eccitata è molto grande ovvero la trasformata dell'impulso è tutto lo spettro, cioè un fenomeno con ampiezza molto grande ma con durata limitata. Questo tipo di segnale viene utilizzato per molte prove: se si vuole conoscere tutti i modi di vibrare di una struttura si applica una forza impulsiva alla struttura eccitando tutto il range di frequenze di interesse e, con un'unica manovra si riesce ad ottenere la risposta del sistema a tutte le frequenze.

Fin quando sarà presente una componente armonica, più essa è forte più l'intensità del colore sullo spettrogramma è elevata.

La lettura dello spettrogramma risulta molto importante al fine di riuscire a ricavare degli indici sonori che danno idea della tipologia di suoni che vengono riprodotti dal sistema. Infatti, se è presente, per esempio, una zona all'interno dello spettro molto marcata in un range di frequenza piccolo che dura nel tempo, essa individua un indice chiamato "tonality" cioè qualcosa che si percepisce in maniera continuativa come tono puro. Si cerca normalmente di evitare la tonality poiché crea un rumore fastidioso all'orecchio umano.

Altra grandezza è la roughness che fornisce la percezione di un rumore che è molto meno definito in frequenza.

4.4. Influenza encoder sul banco prova

Studiati e analizzati quelli che sono gli effetti dell'encoder è possibile, quindi, simulare il suo effetto anche sul banco prova trasmissioni, attraverso l'aiuto di Simulink, dove, facendo variare il numero di tacche e la frequenza del clock si nota come varia la forzante applicata e anche lo spettrogramma. Molto interessante in questa fase anche capire come l'influenza del PID e dell'encoder in simultanea abbiano influenza sulle prestazioni del banco anche dal punto di vista sonoro.

Quindi, nella seguente trattazione si andrà ad esaminare il comportamento del banco al variare dei parametri caratteristici dell'encoder, dei guadagni del PID e della velocità media.

Il primo caso che si considera è quello di confrontare, in prima analisi, i risultati nel caso in cui l'encoder non è presente e poi nel caso in cui si aziona anche l'encoder. La forzante è uno step da 500 rpm a 550 rpm sul motore M2, con $k_p = 0.25$, $k_i = 15$, $k_d = 0.005$, senza la presenza del segnale sull'encoder.

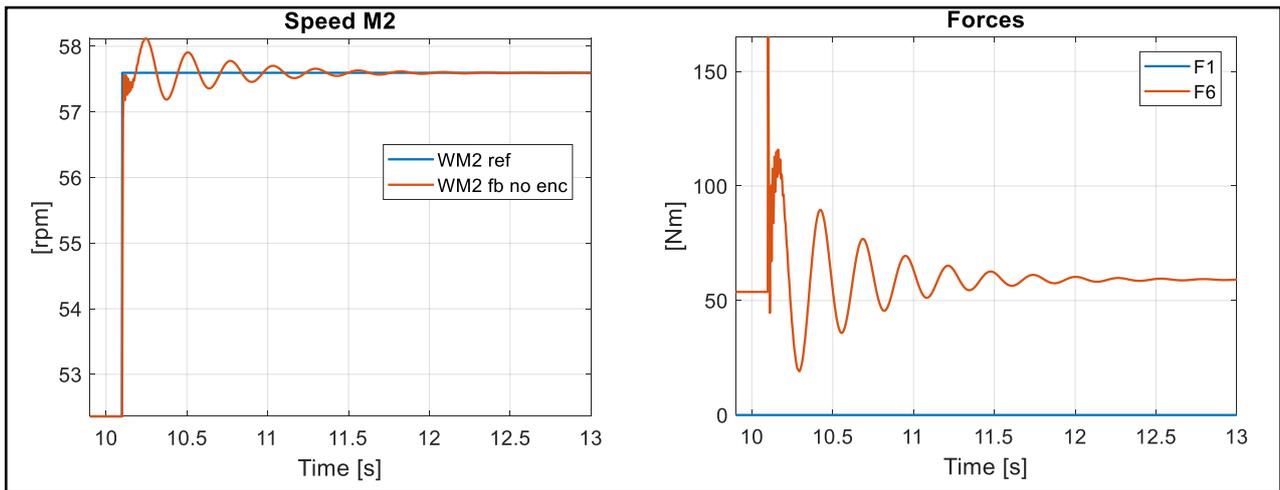


Figura 4.27 – *Andamento forzante applicata al banco prov*

Lo spettrogramma che si ottiene è il seguente:

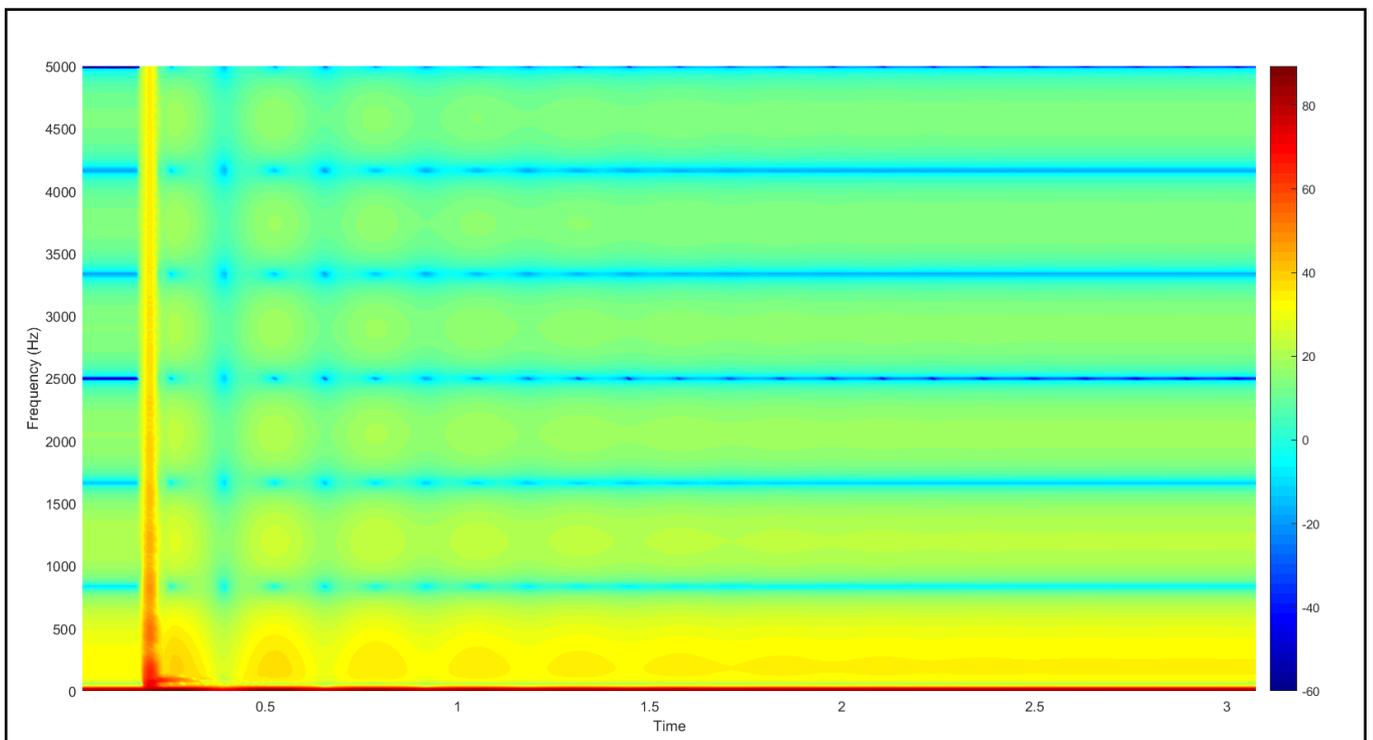


Figura 4.28 – *Spettrogramma ottenuto senza encoder attivo*

A questo punto, con le stesse configurazioni, risulta molto interessante studiare il caso in cui si attiva l'encoder.

Si valuti ora il caso in cui si introduce un encoder con $Z = 1024$.

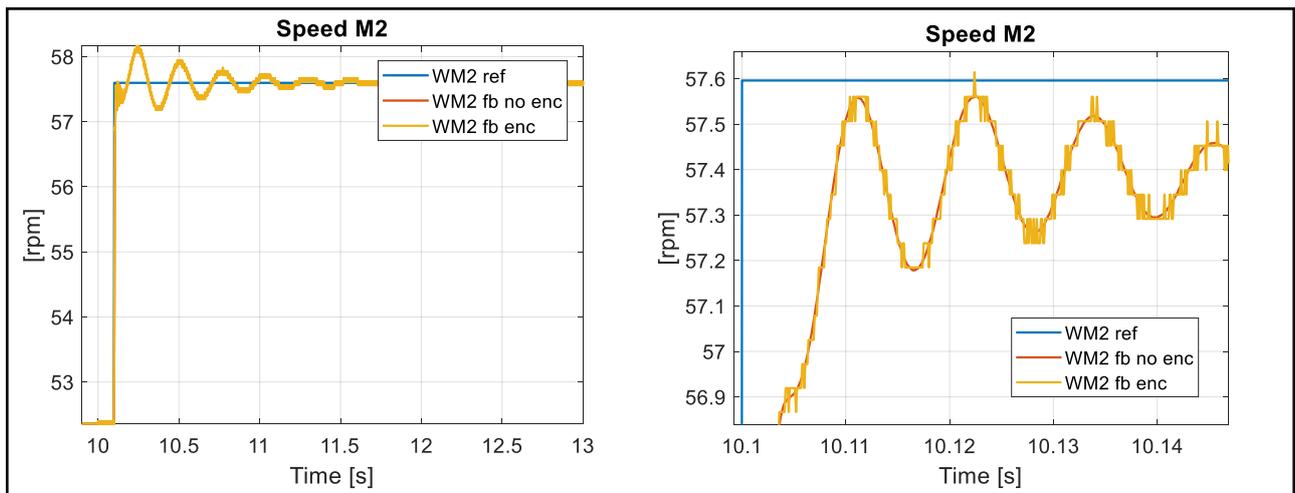


Figura 4.29 – Andamento della forzante con encoder attivo con $Z = 1024$

Confrontando la fig.4.29 con la fig.4.27, è visibile l'effetto dell'encoder. In particolare, dall'immagine a destra della fig.4.29 è possibile notare come è presente l'effetto della quantizzazione del segnale: quando il segnale misurato passa da un punto in cui l'errore è molto piccolo ad un punto diverso dove è presente uno step che il controllo sente come un incremento istantaneo dell'errore. Il sistema non riesce a scrivere in maniera continua la grandezza e quindi, crea uno step in positivo che poi successivamente diventerà negativo. Questo step crea delle oscillazioni poiché se il numero di tacche diminuisce ulteriormente allora il problema diventa ancora più grave.

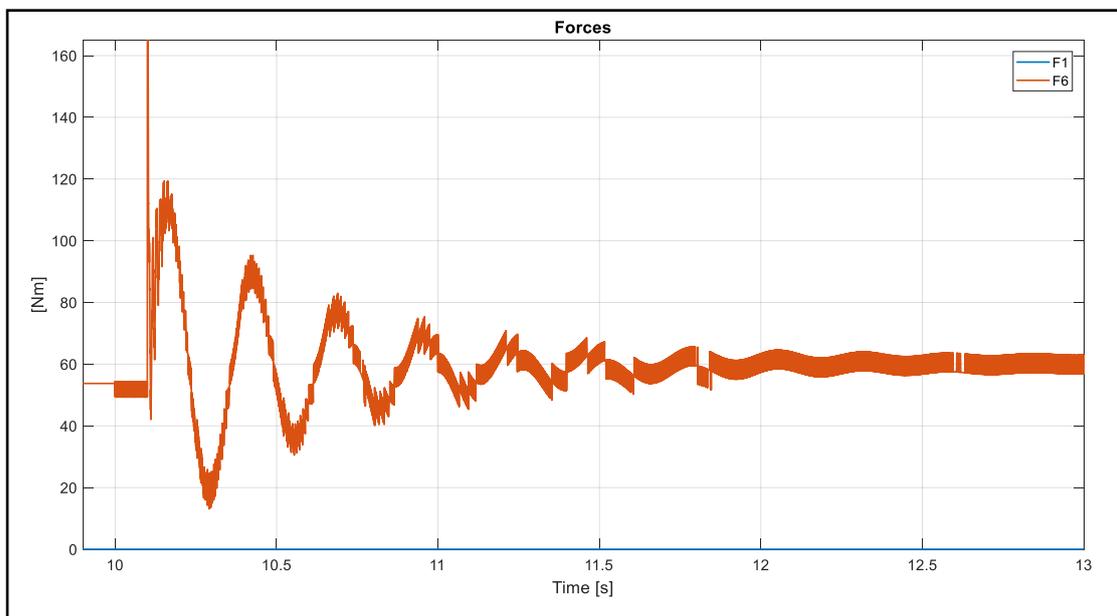


Figura 4.30 – Andamento nel tempo della forzante con $Z = 1024$

Importante anche in questo caso il confronto tra la fig.4.30 e la fig.4.27, ovvero il confronto tra le forze. Mentre senza encoder il contenuto armonico risultava molto pulito, in questo caso

è possibile vedere un andamento più a gradino dovuto appunto alla risoluzione finita dell'encoder. Questo effetto è possibile tradurlo anche in termini di spettro visto che lo rende molto più pieno e caotico di contenuti armonici.

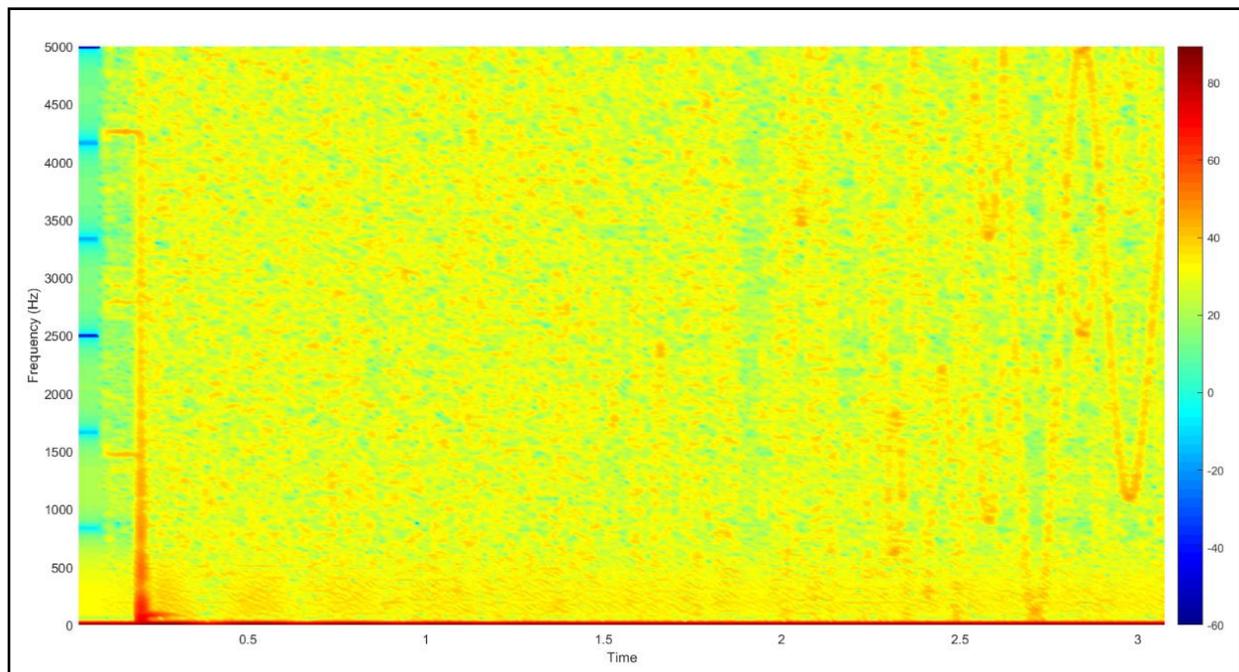


Figura 4.31 – Spettrogramma con $Z = 1024$

Infatti, molto chiara è la differenza tra i due spettri con e senza encoder. Mentre nel primo caso all'interno dello spettro si vedono, a fronte di una forzante impulsiva, si notano le frequenze proprie del sistema. Quindi, è possibile notare una dinamica di alta frequenza che si estingue subito e poi quelle di bassa frequenza che durano di più. Nel caso, invece, di encoder a causa delle variazioni a gradino si notano nuovamente le eccitazioni a banda larga. Ricordando che lo spettro di un gradino, non è pieno come quello dell'impulso poiché non coinvolge tutte le frequenze, ma ha tutte le armoniche di ordine dispari, quindi è uno spettro molto pieno ma non completo visto che mancano le armoniche pari.

Quindi il segnale presenta tanti gradini, ovvero tante variazioni istantanee che tradotte in frequenza offrono un contenuto a banda larga. Queste continue variazioni e la continua presenza di gradini si traduce in un problema a livello uditivo.

A questo punto vediamo l'effetto della variazione del numero di tacche al giro dell'encoder con $Z = 256$.

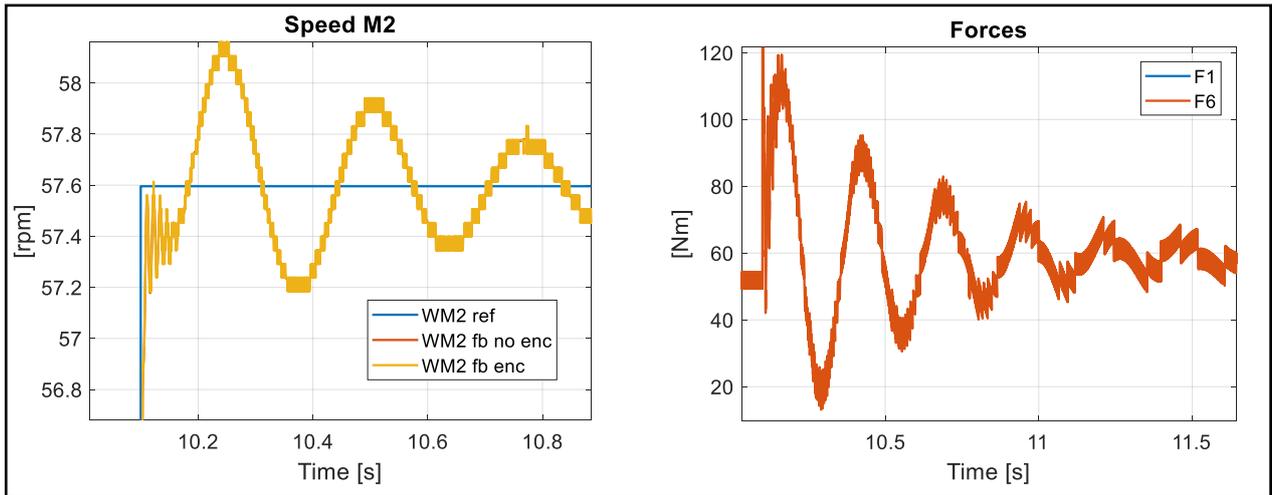


Figura 4.32 – *Andamento forzante con $Z = 256$*

Facendo un primo confronto tra i due andamenti nel tempo delle forzanti, si può notare come la riduzione del numero di tacche al giro porti ad avere degli step della forzante molto più marcati e netti, con un andamento della forzante nel tempo che non è del tutto continuo. Questo ovviamente, avrà dei riscontri anche sullo spettrogramma poiché tutti quei piccoli gradini che si formano avranno un'intensità superiore rispetto al caso precedente, e quindi porteranno il sistema a sollecitare con maggior intensità tutte le frequenze. Infatti, lo spettrogramma della forzante risulta essere:

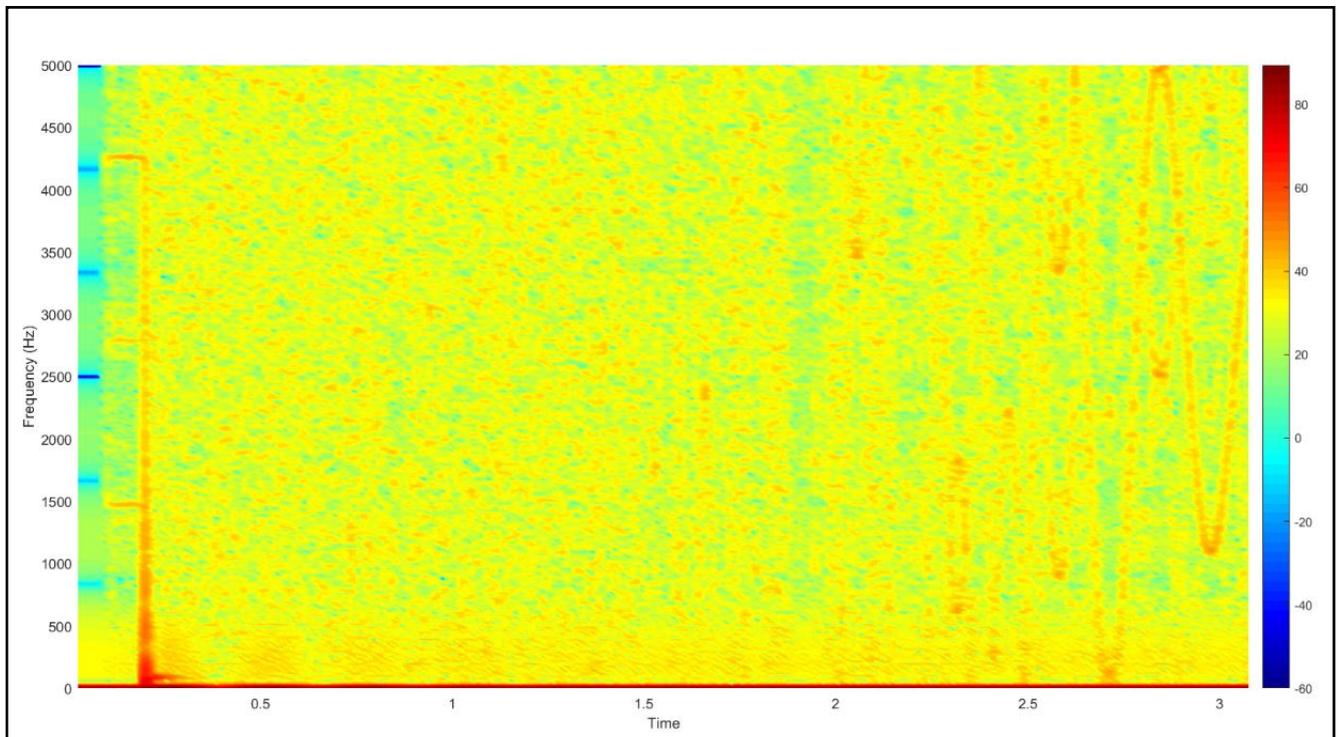


Figura 4.33 – *Spettrogramma forzante con $Z = 256$*

A questo punto, si valuti il caso di $Z = 4056$, cioè aumentando il numero delle tacche a giro dell'encoder:

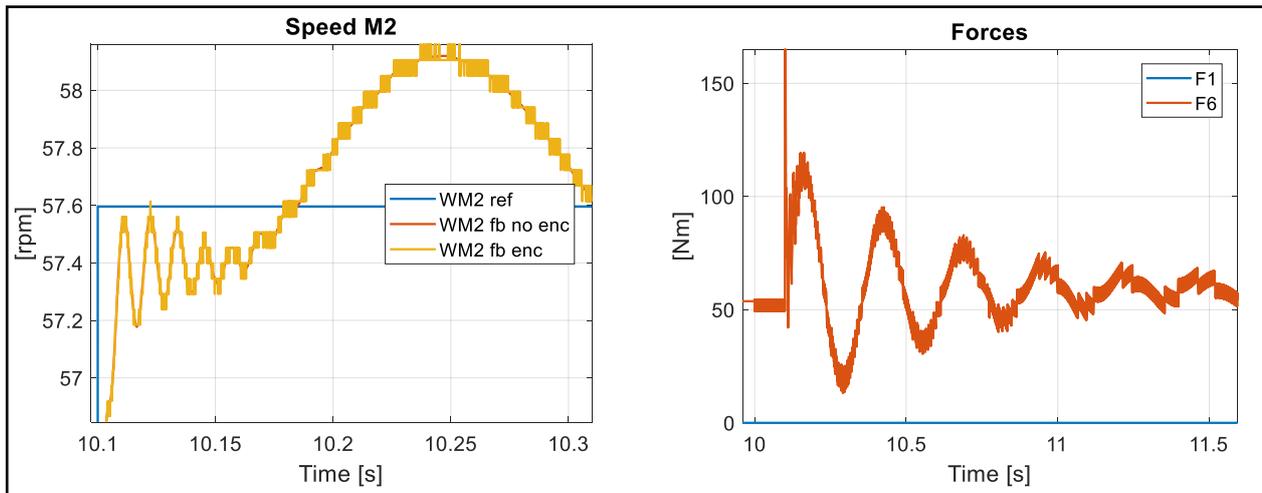


Figura 4.34 – Andamento forzante con $Z = 4056$

In questo caso lo spettrogramma della forzante risulta essere:

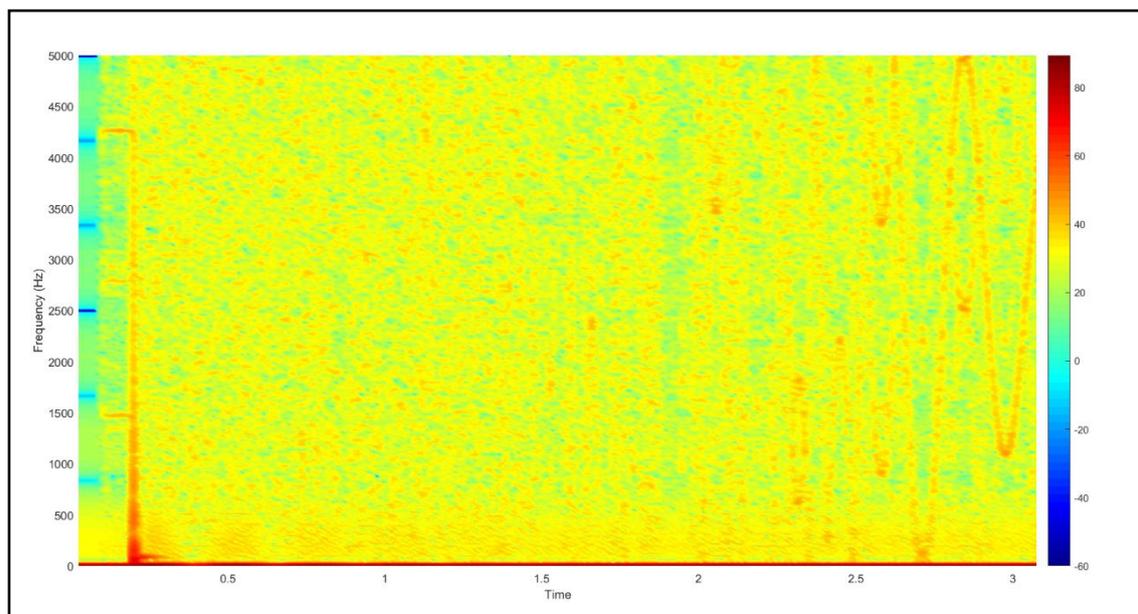


Figura 4.35 – Spettrogramma con $Z = 4096$

Dopo aver analizzato come varia il comportamento del banco al variare del numero di tacche al giro, si studia l'LPD effect, ovvero l'effetto di un filtro del primo ordine sul segnale dell'encoder. In questa simulazione si valuta applicando quindi un filtro con una costante $\tau = 1$ ms.

L'efficacia e l'effetto del filtro non si potrebbe valutare se non si simulasse l'encoder poiché il suo campo di azione non è quello di modificare la dinamica del sistema in campo lineare, ma di intervenire sul segnale cercando di renderlo più simile ad un segnale continuo.

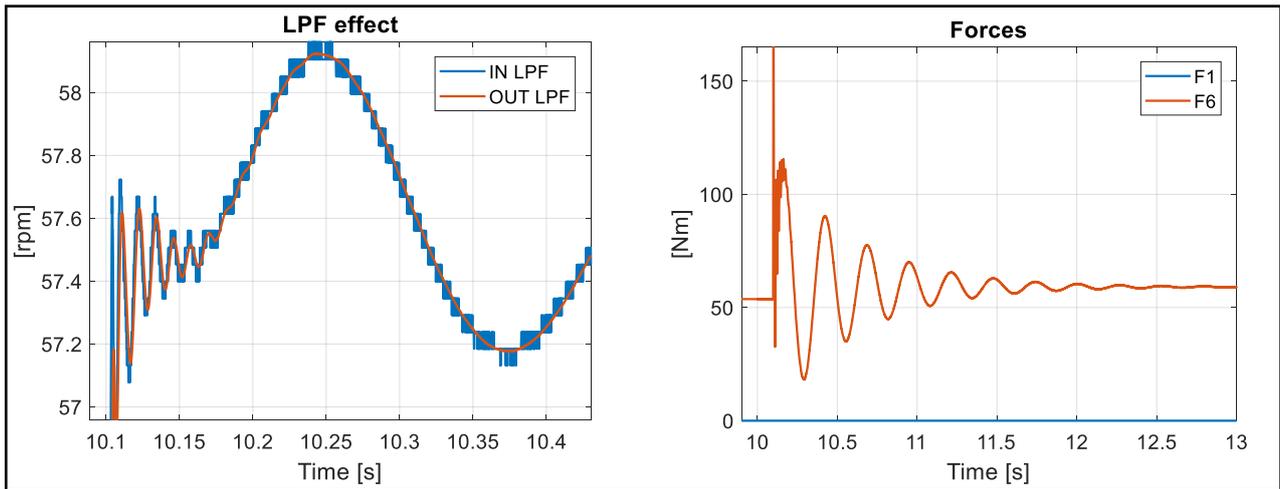


Figura 4.36 – *Andamento della forzante con filtro attivo*

Lo spettrogramma diviene:

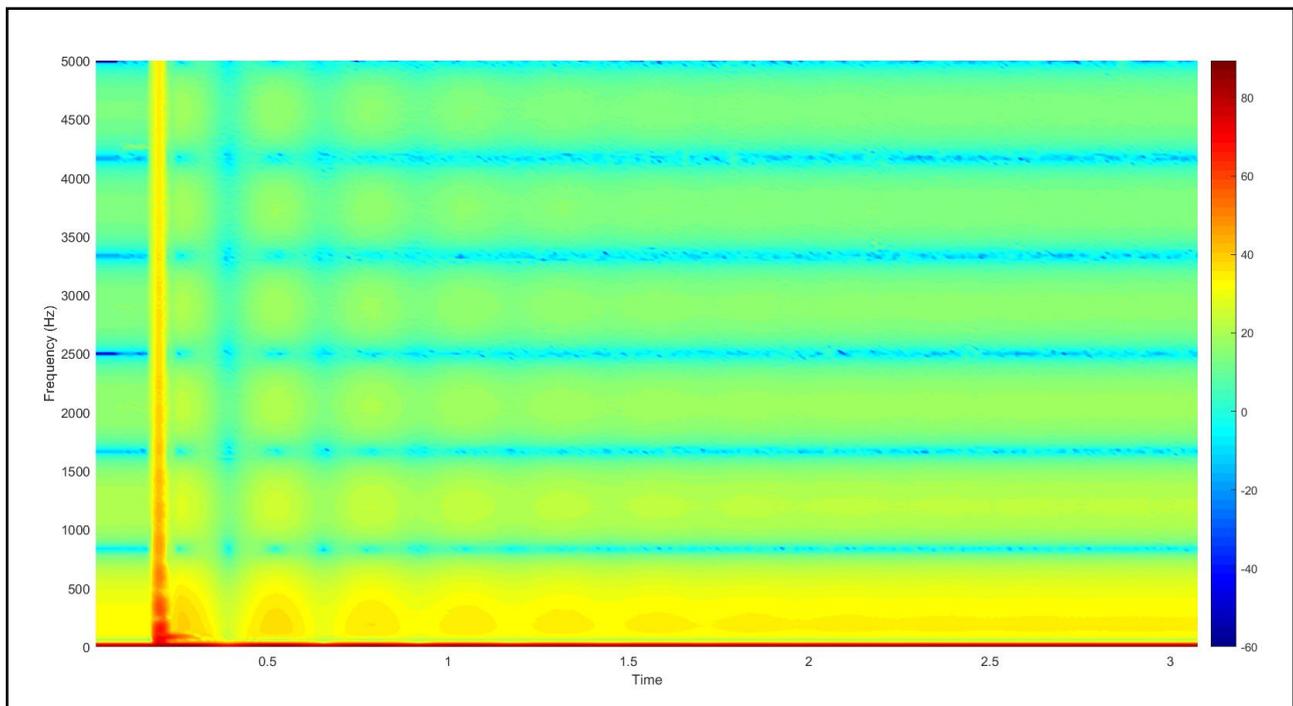


Figura 4.37 – *Spettrogramma con filtro attivo*

Si nota immediatamente una riduzione del contenuto in frequenza ad ampio spettro. Rispetto alle immagini precedenti, lo spettro risulta molto meno caotico e pulito e ciò è dovuto al fatto che si sta eccitando di meno fenomeni di tipo impulsivo e quindi, il sistema lavora in condizioni migliori con meno energia.

Effetto della riduzione dei guadagni del controllo. K_p 0.5 K_i 0.5

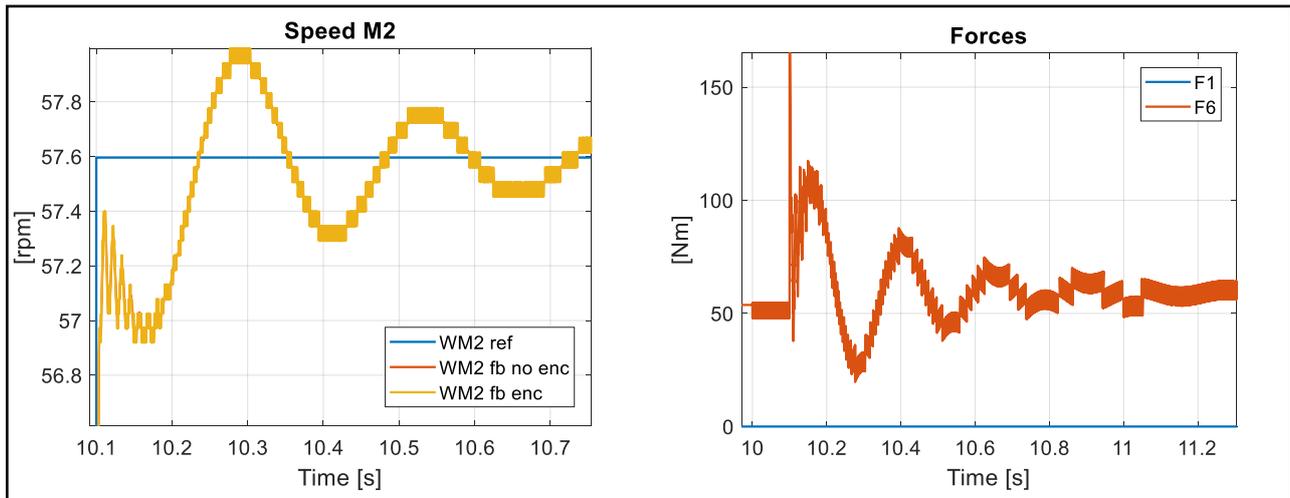


Figura 4.38 – Andamento della forzante riducendo i valori dei guadagni

Spettrogramma della forzante:

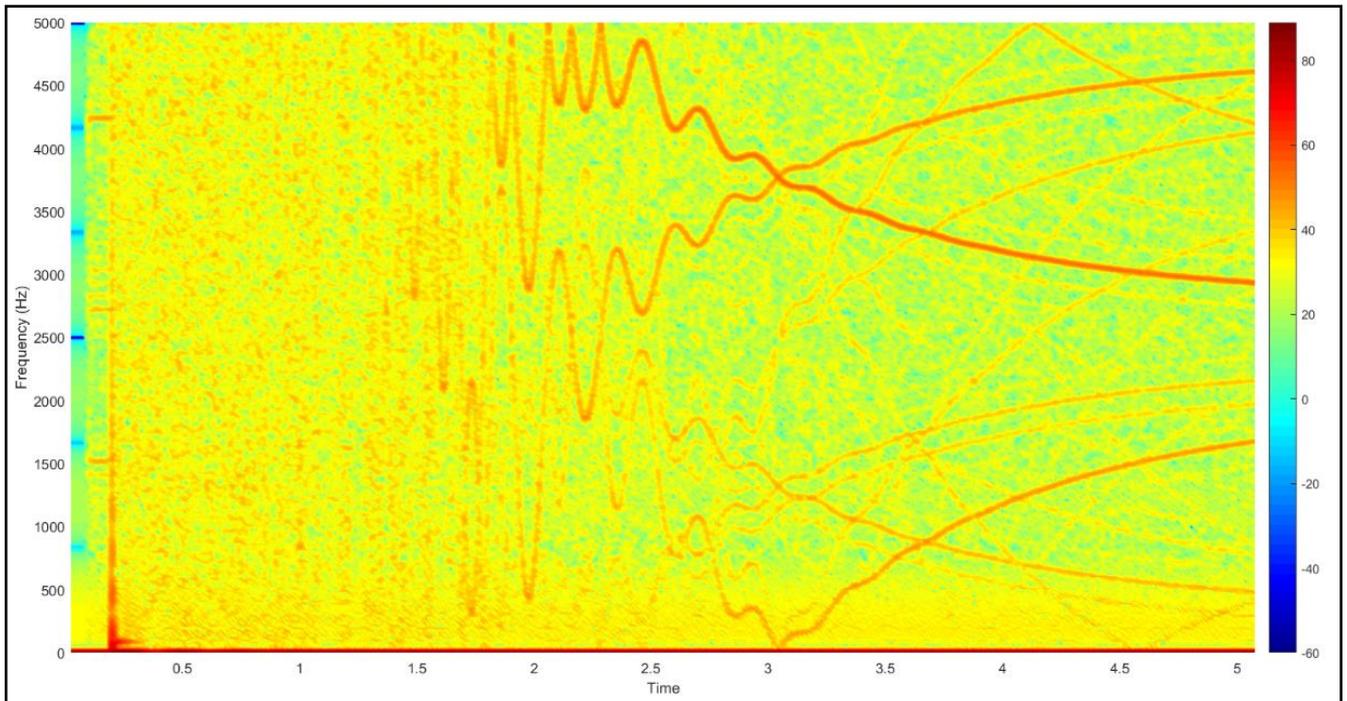


Figura 4.39 – Spettrogramma della forzante con valori dei guadagni ridotti

Riducendo i guadagni dalla fig.4.39 si può notare come lo spettro risulta essere molto più pieno e “sporco” soprattutto si può notare come si formino delle forzanti con un’intensità molto più elevata che si manifestano su tutto il range di frequenze. Questo comportamento è dovuto al fatto che non usando valori di guadagno proporzionale e integrativo ottimali, come visto nel capitolo 3, le funzioni di trasferimento presentano dei picchi molto più alti.

Conclusioni

Il seguente lavoro di tesi si basa sullo studio del banco prova trasmissioni HIL e in particolare il miglioramento delle prestazioni dinamiche del banco stesso per riuscire a trovare tutti i parametri ottimali per un efficiente utilizzo.

Una prima analisi è stata dedicata allo studio dinamico del banco prova attraverso una modellazione a parametri concentrati del banco nel caso di open loop control, dove, grazie all'ausilio di Matlab sono state trovate tutti i parametri dinamici del sistema complessivo. Successivamente, si è deciso di studiare il comportamento del banco stesso nel momento in cui venisse attivato il controllo di velocità sul motore M2 e anche in questa condizione sono stati ricavati tutti i parametri dinamici del banco. In particolare, si è focalizzata l'attenzione sull'influenza del controllore PID ovvero la sensitività ad ogni singolo guadagno e del filtro.

Infine, una volta trovati i parametri ottimali sono state fatte prove sperimentali per verificare la veridicità delle prove simulati attraverso il modello Simulink. Ultimo studio è stato dedicato all'encoder e alla sua influenza sulle prestazioni del banco prova. In particolare, si è utilizzato un modello che simulasse l'encoder per capire l'effetto prima della risoluzione e poi della frequenza del clock. Infine, attraverso prove sperimentali è stata studiata anche l'influenza di questi due parametri sulla rumorosità, oltre che sull'influenza che essi hanno sul segnale.

Nonostante i risultati raggiunti ci sono ancora molte attività che possono essere completate sul banco prova. Un'analisi da eseguire è sicuramente lo studio dei parametri ottimali nel momento in cui si attiva il controllo di coppia sul motore M1 con il controllo su M2 spento. Una volta ricavati i valori ottimali, sarebbe interessante vedere effettivamente il comportamento del sistema nel momento in cui si attivano contemporaneamente i controlli sui motori e capire se il sistema si comporta in maniera ottimale. Nel caso in cui il sistema non risponda nel modo in cui ci si aspetta, bisognerebbe studiare i veri valori dei parametri che permettono di far lavorare il banco nelle migliori condizioni possibili.

Successivamente risulterebbe interessante anche vedere l'effetto dei due encoder presenti sulla rumorosità complessiva dell'intero sistema e riuscire a trovare il giusto compromesso tra valori di rumorosità accettabili con prestazioni del banco efficienti.

Ulteriore studio interessante da fare sarebbe quello di sviluppare, sempre attraverso l'HIL, un modello di veicolo, per simulare il funzionamento del cambio in determinate condizioni di guida. Potrebbe essere molto valida l'idea di riuscire a simulare anche alcune traiettorie particolare dove magari l'intero organi trasmissione risulta essere molto sollecitato.

Altro lavoro che potrebbe essere la vera prosecuzione di questa tesi è riuscire ad individuare, attraverso l'analisi dinamica, i parametri dinamici che bisognerebbe cambiare affinché non si abbiano sollecitazioni eccessive nel momento in cui si lavori ad una velocità di rotazione pari o prossima ad un valore di risonanza per ottenere un miglior comportamento dinamico del sistema.

Bibliografia

- CIVALLERI, *Allestimento di un banco prova per cambi a doppia frizione*, Tesi di Laurea Magistrale - Politecnico di Torino, 2014
- N. VINCI, *Analisi sperimentale e modello torsionale di una trasmissione automobilistica*, Tesi di Laurea Magistrale - Politecnico di Torino, 2016.
- S. CIRESA, *Controllo Hardware-in-the-Loop di un banco di prova per cambi a doppia frizione*, Tesi di Laurea Magistrale – Politecnico di Torino, 2014
- M. MARTINENGO, *Banco prova cambi a doppia frizione: sviluppo software per prove HIL e caratterizzazione sperimentale dei componenti*, Tesi di Laurea Magistrale – Politecnico di Torino, 2017
- G. GENTA, *Vibration Dynamics and Control*, Springer, New York, 2009
- A. FASANA E S. MARCHESIELLO, *Meccanica delle vibrazioni*, CLUT, 2006
- E. GALVAGNO, M. VELARDOCCHIA, A. VIGLIANI, *Torsional oscillation in automotive transmission: experimental analysis and modelling*, Radoslaw Zimroz, 2015