# **POLITECNICO DI TORINO**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

## Tesi di Laurea Magistrale

"Studio agli elementi finiti dell'effetto di intaglio in dispositivi MEMS"



Relatore Prof. Aurelio Somà Candidato Daniele Bombaci

Anno Accademico 2018/2019

1	Obiet	tivi	1
2	Stato	dell'arte	2
	2.1	Metodo di fabbricazione	2
	2.2	Tipo di attuazione	3
	2.3	Analisi dinamica	4
	2.4	Strumento di misura	8
	2.5	Tensioni residue	8
	2.6	Materiale impiegato nell'analisi	9
	2.7	Affidabilità meccanica2.7.1Fatica2.7.2Creep2.7.3Effetto di intaglio2.7.4Effetto della tensione media2.7.5Comportamento elasto-plastico	10 10 12 13 16 19
	2.8	Metodo agli elementi finiti 2.8.1 Elemento solido a 20 nodi	22 26
3	Mode	ello di studio preliminare: trave	29
	3.1	Implementazione del modello FEM 3.1.1 Geometria 3.1.2 Condizioni di bordo 3.1.3 Soluzione 3.1.4 Risultati	29 29 30 31 32
	3.2	<ul> <li>Studio di variabilità ad un parametro</li> <li>3.2.1 Effetto della lunghezza della trave</li> <li>3.2.2 Effetto delle tensioni residue</li> <li>3.2.3 Effetto dell'incertezza sul modulo di Young</li> </ul>	33 33 35 37
	3.3	<ul> <li>Studio di variabilità a più parametri</li> <li>3.3.1 Progettazione degli esperimenti</li> <li>3.3.2 Progettazione fattoriale 3<sup>3</sup></li> <li>3.3.3 Progettazione fattoriale 3<sup>2</sup></li> </ul>	39 39 40 43
	3.4	Confronto tra risultati analitici e sperimentali	52
4	Confi	gurazione di prova per lo studio del comportamento elasto-plastico del materiale	56
	4.1	Implementazione del modello FEM 4.1.1 Geometria 4.1.2 Condizioni di bordo	57 57 58

		4.1.3	Plasticità	59
		4.1.4	Risultati	62
5 6 Bibliog Append	Configurazione di prova per lo studio dell'effetto d'intaglio			
	5.1	Implem	nentazione del modello FEM	66
<ul> <li>4.1.3 Plasticità</li> <li>4.1.4 Risultati</li> <li>Configurazione di prova per lo stu</li> <li>Implementazione del model</li> <li>5.1 Implementazione del model</li> <li>5.1.1 Geometria</li> <li>5.1.2 Condizioni di bordo</li> <li>5.1.3 Risultati</li> <li>5.2 Validazione del modello an</li> <li>5.2.1 Comportamento el</li> <li>5.2 Validazione del modello an</li> <li>5.2.2 Comportamento el</li> <li>5.3 Fattori di intensificazione o</li> <li>5.4 Studio di variabilità a più p</li> <li>5.4.1 Progettazione fatto</li> <li>5.4 Studio di variabilità a più p</li> <li>5.4.2 Progettazione fatto</li> <li>5.5 Carico ciclico</li> <li>5.6 Analisi modale</li> <li>6 Conclusioni</li> <li>Bibliografia</li> <li>Testi</li> <li>Pubblicazioni</li> </ul> Appendice File di input (Ansys Mechanical API Modello di studio prelimini Configurazione di prova pe materiale	Geometria	66		
		5.1.2	Condizioni di bordo	67
		5.1.3	Risultati	68
	5.2	Validaz	ione del modello analitico	74
		5.2.1	Comportamento elastico del materiale	74
		5.2.2	Comportamento elasto-plastico del materiale	74
	5.3	Fattori	di intensificazione delle tensioni	75
		5.3.1	Comportamento elastico del materiale	75
		5.3.2	Comportamento elasto-plastico del materiale	75
	5.4	Studio	di variabilità a più parametri	79
		5.4.1	Progettazione fattoriale 3 <sup>3</sup>	79
		5.4.2	Progettazione fattoriale 3 <sup>2</sup>	82
	5.5	Carico o	ciclico	88
	5.6	Analisi	modale	93
6	Conclu	sioni		94
Bibliog	rafia			95
	Testi			95
	Pubblic	cazioni		95
Appen	dice			96
	File di	input (Ar	nsys Mechanical APDL)	96
		Modell	o di studio preliminare: trave	96
		Configu materia	irazione di prova per lo studio del comportamento elasto-plastico del ale	98
		Configu	irazione di prova per lo studio dell'effetto d'intaglio	102

### 1 Obiettivi

Il presente lavoro di tesi propone la modellazione di una configurazione di prova per un dispositivo RF MEMS.

Il modello FEM è finalizzato allo studio dell'effetto di intaglio, tramite la valutazione del fattore di concentrazione delle tensioni, sul provino in oro quando la struttura è soggetta ad un'attuazione elettrostatica. Il provino in esame presenta un singolo intaglio.

Parallelamente, si intende studiare il comportamento della microstruttura considerando, in prima analisi, un materiale perfettamente elastico e, successivamente, prendendo in considerazione la plasticità tramite la curva sforzo-deformazione del materiale e un modello di incrudimento cinematico.

Strumento utile, a tal fine, risulta la rappresentazione della curva di pull-in della struttura che riporta la massima deflessione verticale del provino in funzione della differenza di potenziale applicata.

Proprio la tensione di pull-in, in corrispondenza della quale la forza elastica legata alla rigidezza della struttura non risulta più sufficiente a bilanciare quella elettrostatica, si sceglie come risultato caratteristico per studiarne la sensibilità alla variazione di parametri geometrici significativi tramite una progettazione degli esperimenti.

In ultimo, la presente si prefigge l'obiettivo di valutare la variazione della zona plastica all'apice dell'intaglio nel provino soggetto ad un carico ciclico.

In tal modo, si vogliono costruire le fondamenta su cui poggiare futuri studi di meccanica della frattura finalizzati alla valutazione della tenacità a frattura e della crescita della cricca fino a rottura in presenza di carico ciclico.

## 2 Stato dell'arte

I Sistemi Micro Elettro-Meccanici (MEMS) sono dispositivi integrati di scala micrometrica che combinano elementi elettrici, elettronici, meccanici o anche di altra natura (magnetici, termici, ottici, fluidi). Sono sistemi progettati per interagire con l'ambiente esterno a diversi livelli assolvendo multiple funzioni: acquisizione e processo di segnali, attuazione, visualizzazione e controllo. Possono anche asservire da mezzo per eseguire reazioni chimiche o biochimiche.

Pertanto alcuni esempi di applicazione dei MEMS sono come sensori di pressione, accelerometri, giroscopi (negli smartphone), micro pompe, display mobili attuati in modo elettrostatico, interruttori a radio frequenza, sensori chimici basati sulla temperatura, dispositivi chimici microfluidi.

Si può notare come essi interessino numerosi ambiti: industriale, medico, militare.

In quanto sistemi veri e propri, seppur su scala micrometrica, assumono importanza alcuni aspetti quali il packaging, la suddivisione in componenti, la stabilità e l'affidabilità.

Nella presente, in particolare, si intende studiare l'affidabilità meccanica di tali dispositivi.

#### 2.1 Metodo di fabbricazione

Tali sistemi sono ottenuti tramite micro lavorazione basata su processi litografici standard, propri della microelettronica, migliorati tramite tecniche specifiche.

La produzione di serie propria dell'industria microelettronica garantisce la riduzione dei costi per levati volumi di produzione.

Di seguito sono riassunte le fasi del processo RF Switch Surface Micromachining della Bruno Kessler Foundation (Trento, Italia) impiegato per ottenere micro provini testati nell'ambito dell'attività di ricerca presso il Politecnico di Torino (*Figura* 1):

- Su un wafer di silicio, uno strato di ossido viene fatto crescere a 975 °C in ambiente umido fino a raggiungere 1000 nm di spessore. Segue un processo di ricottura con azoto alla medesima temperatura. Un layer spesso 630 nm viene depositato tramite LPCVD (Low Pressure Chemical Vapor Deposition) e modellato in seguito tramite taglio a secco.
- 2. Uno strato di ossido di silicio spesso 300 nm è depositato tramite LPCVD a 718 °C e di nuovo modellato tramite taglio a secco.
- 3. Un multistrato di metallo viene spruzzato e modellato tramite taglio a secco. Il profilo di temperatura è il seguente: 30 nm di Ti a 400 °c, 50 nm di TiN a 400 °C, 410 nm di Al/Si e 60 nm di Ti a temperatura ambiente e 80 nm di TiN a 300 °C. Infine uno strato di ossido spesso 100 nm è depositato a 430 °C. Per scoprire parti del multistrato di metallo, si rimuove l'ossido tramite taglio a secco.
- 4. Un layer d'oro spesso 150 nm è depositato tramite PVD e modellato tramite taglio ad acqua. Segue una ricottura per ridurre a zero le tensioni dovute ai passaggi precedenti. Infine uno strato superficiale fotoresistente spesso 3 μm viene depositato e modellato.
- 5. Un layer d'oro spesso 1,3 μm è elettrodepositato galvanicamente a 52 °C impiegando uno strato d'adesione di cromo-oro (PVD) detto "seed layer". Questo rappresenta la parte mobile e sospesa del micro dispositivo.
- 6. Un' ultima deposizione a 52 °C aggiunge uno strato d'oro per rinforzare le ancore. Poi viene eseguita una sinterizzazione a 190 °C per 30 minuti con un basso tasso di raffreddamento. Infine, si rimuove il layer sacrificale (fotoresisitivo di 3 μm della fase 4) tramite taglio al plasma assistito da

ossigeno a 200 °C e qualche mbar per 30 minuti. Il processo è isotropico e lo si ottiene collocando il wafer su un supporto riscaldato.



Figura 1 - Step rilevanti del processo di microlavorazione superficiale per RF Switch

#### 2.2 Tipo di attuazione

La trasduzione elettrostatica è uno dei più comuni metodi di attuazione e misura nei MEMS per via della sua semplicità ed elevato rendimento.

Esempi di dispositivi che impiegano questo tipo di metodo sono i seguenti: accelerometri per l'apertura di airbag, micro specchi nei display digitali per proiezione, interruttori RF.

Questa si basa su semplici condensatori a piatti paralleli (elettrodi) facilmente ottenibili tramite microlavorazione superficiale. Tale trasduzione non richiede materiali speciali, come quella piezoelettrica, la deposizione di alcuna patch, come la piezoresistiva, o sorgenti esterne, come la trasduzione magnetica.

Essa richiede una sorgente di tensione, facilmente disponibile, ed è caratterizzata da richieste di potenza molto basse.

L'attuazione elettrostatica si esplica come una forza attrattiva tra le due piastre del condensatore che genera uno spostamento. Questa offre elevate densità di energia, elevata flessibilità meccanica e buon controllo di forza. Si considera come un metodo di attuazione veloce, se paragonato a quello elettrotermico, dal momento che la costante di tempo per caricare il condensatore è piccola.

Nella misura elettrostatica, una quantità fisica, come la pressione o l'accelerazione, varia la capacità del condensatore e tramite un circuito elettronico è possibile legare tale variazione alla grandezza fisica da rilevare.

Lo svantaggio maggiore di questo metodo di trasduzione è la sua non linearità. Questa limita il range di controllo degli attuatori e può portare ad un cedimento imprevisto, corto circuito, attrito e rottura dal punto di vista funzionale. Anche l'elevata tensione di comando in attuazione, come negli interruttori RF, è una limitazione.

Le configurazioni più comuni sono quella di semplici condensatori a piatti paralleli o quella comb-drive con dita multiple interdigitali o meno.

Gli interruttori RF MEMS possiedono due comuni configurazioni: travi incastrate o ponte a doppio ancoraggio.

Il dimensionamento e la caratterizzazione dinamica sono resi complessi dalla non linearità dell'azione elettrostatica e dall'accoppiamento elettro-meccanico, che coinvolge la forza capacitiva e quella elastica.

La seconda configurazione prevede, in genere, due piastre parallele, una mobile capace di deformarsi e una fissa. La piastra superiore è sospesa tramite molle sull'elettrodo di attuazione inferiore e può essere forata per ridurre l'effetto di smorzamento dovuto alla pressione del gas interposto (aria) tra le piastre.

Quando si applica una tensione continua tra le due armature, la relativa forza causa la flessione della piastra mobile verso quella fissa. La variazione della distanza tra le piastre provoca la variazione della capacità del sistema.

Se la tensione aumenta fino a un valore tale che la forza di richiamo elastica è impossibilitata a bilanciare quella elettrostatica, la piastra mobile entra in contatto con quella fissa. Questo fenomeno prende il nome di "pull-in" e la tensione corrispondente "tensione di pull-in".

L'attuazione elettrica è caratterizzata da una componente statica e una alternata della tensione per cui ne risulta che la forza capacitiva presenta uno spettro di frequenza generalmente diverso da quello della tensione di attuazione. Questo spiega la presenza di picchi di risonanza accoppiati nella Frequency Response Function (FRF) del dispositivo. Inoltre, la componente statica della tensione può modificare la frequenza di risonanza del sistema provocando uno spostamento del picco corrispondente.

L'accoppiamento elettro-meccanico, pertanto, deve essere opportunamente analizzato e modellato.

Un altro aspetto da dover prendere in considerazione, è quello relativo alle tensioni o deformazioni residue dovute ai processi di fabbricazione che modificano la frequenza di risonanza e la deformata del sistema. I gradienti di tensione/deformazione sono dovuti alle variazioni di temperatura durante la fabbricazione quindi alle dilatazioni e contrazioni dei materiali. La struttura è caratterizzata da strati di diversi materiali con coefficienti di dilatazione termica differenti e alcune configurazioni strutturali presentano più vincoli contribuendo alla nascita delle suddette tensioni residue.

Per prevederne gli effetti, è possibile applicare un precarico statico alla struttura.

#### 2.3 Analisi dinamica

Seppur cresca la tendenza ad implementare modelli dettagliati ed elaborati sulla base del metodo agli elementi finiti al fine di studiare il comportamento statico e dinamico dei MEMS, modelli compatti basati su equazioni analitiche sono impiegati nell'analisi dinamica in quanto comportano un'implementazione più semplice e veloce (pochi gradi di libertà o anche uno solo) oltre che dei risultati immediati. L'equazione del sistema, in entrambi i casi, si basa sulla legge di Newton ed è la seguente:

in cui

 $[M]{\dot{x}} + [C]{\dot{x}} + [K]{x} = {Q(t)}$ 

(1)

[M], [C], [K] sono le matrici di massa, smorzamento e rigidezza rispettivamente

 $\{x\}$  è il vettore degli spostamenti generalizzati

 $\{Q(t)\}$  è il vettore delle forze generalizzate

Le fonti di non linearità della precedente equazioni sono le seguenti:

- La forza elettro-meccanica non lineare agente tra le armature del capacitore.
- La fase tra la tensione alternata di eccitazione e la forza elettrostatica.
- La rigidezza elettrostatica equivalente.
- Lo smorzamento dell'aria, fortemente dipendente dalla frequenza e non trascurabile date le dimensioni micrometriche del dispositivo.

Si prenda in considerazione un modello elettromeccanico a parametri concentrati con un singolo grado di libertà (sistema massa, molla e capacitore parallelo di *Figura 2*).



Figura 2 - Sistema massa, molla, capacitore

Si assumano le seguenti semplificazioni: la forza di richiamo elastica sia una funzione lineare dello spostamento, i campi elettrici di bordo e la curvatura iniziale della piastra siano trascurabili e si operi nel vuoto.

Si applica una tensione  $V_{dc}$  tra le armature, sia C la capacità del condensatore, sotto l'ipotesi di campo conservativo e valore costante di V imposta dal generatore, la forza elettrostatica si calcola come derivata rispetto allo spostamento dell'energia potenziale del condensatore:

$$F_e = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} C V_{dc}^2\right) = -\frac{1}{2} V_{dc}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\varepsilon_0 S}{d_0 - x}\right) = \frac{\varepsilon_0 S V_{dc}^2}{2 (d_0 - x)^2}$$
(2)

in cui

 $\epsilon_{0}$  è la costante dielettrica del vuoto

S è la superficie delle piastre

d<sub>0</sub> è la distanza iniziale tra le piastre

x è lo spostamento in direzione rappresentata in *Figura 2* 

La forza elastica è proporzionale allo spostamento tramite la rigidezza statica k<sub>st</sub>:

$$F_{st} = k_{st} x$$

La condizione di equilibrio statico è raggiunta quando le due forze si uguagliano.

$$F_{st} = F_e$$

$$k_{st} x = \frac{\varepsilon_0 \, S \, V_{dc}^2}{2 \, (d_0 - x)^2} \tag{4}$$

Derivando quest'ultima espressione rispetto allo spostamento si ottiene quanto segue:

(3)

$$k_{st} = \frac{\varepsilon_0 \, S \, V_{dc}^2}{(d_0 - x)^3}$$
(5)

E sostituendo il risultato nella precedente, si ottiene il valore dello spostamento critico corrispondente alla condizione critica di stabilità:

$$x_{pi} = \frac{1}{3}d_0\tag{6}$$

Di conseguenza, il valore di tensione di pull-in è il seguente:

$$V_{pi} = \sqrt{\frac{8 \ k \ d_0^3}{27 \ \varepsilon_0 \ S}}$$

(7)

Quando la tensione statica è minore di quella di pull-in, la curva rappresentante la forza elettrostatica rispetto allo spostamento ha un punto di intersezione con la curva della forza meccanica di richiamo elastico. In questo punto, la tangente della forza elettrostatica ha una pendenza minore rispetto alla pendenza della forza elastica, costante, ovvero l'aumento incrementale di quest'ultima supera quello della prima (*Figura 3*).

Quando la tensione è uguale a quella di pull-in, le due curve sono tangenti ovvero si toccano in un punto con pari gradiente.

Quando la tensione applicata è maggiore di quella di pull-in, la curva della forza elettrostatica non presenta intersezioni con quella della forza elastica, l'aumento incrementale di quest'ultima è minore di quello della prima per cui avviene il fenomeno di collasso della piastra mobile sulla quella fissa.



Figura 3 - Diagramma forza/spostamento normalizzati per V/ $V_{pi}$  = 0,8

Quando una piccola tensione alternata è sovrapposta a quella statica, la massa vibra secondo tale equazione, trascurando i fenomeni dissipativi:

$$m \ddot{x}(t) + k_{st} x(t) = \frac{\varepsilon_0 S [V(t)]^2}{2 [d_0 - x(t)]^2}$$
(8)

L'equazione differenziale del secondo ordine è non lineare, ma è possibile effettuare una linearizzazione tramite un'espansione in serie di Taylor intorno ad un punto  $x(t) = x_i$  (configurazione deformata) troncata al primo ordine:

$$F_{e} = \frac{\varepsilon_{0} S V_{dc}^{2}}{2 (d_{0} - x_{i})^{2}} \left( 1 + 2 \frac{x - x_{i}}{d_{0} - x_{i}} \right)$$

$$k_{e} = \frac{\varepsilon_{0} S V_{dc}^{2}}{(d_{0} - x_{i})^{3}}$$
(9)
(10)

$$m \ddot{x}(t) + (k_{st} - k_e) x(t) = \frac{\varepsilon_0 S V_{dc}^2}{2 (d_0 - x_i)^2} \left( 1 - \frac{2 x_i}{d_0 - x_i} \right)$$
(11)

Si noti come la rigidezza elettrostatica equivalente riduce la rigidezza globale del sistema ovvero esplica un effetto di softening.

Pertanto la pulsazione propria del sistema privo di carico è maggiore di quella del sistema caricato in modo elettrostatico, ovvero quando la struttura vibra intorno alla configurazione deformata x<sub>i</sub>.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{st}}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{st} - k_e}{m}} = \sqrt{\frac{k_{st}}{m} - \frac{\varepsilon_0 S V_{dc}^2}{m(d_0 - x_i)^3}}$$
(12)
(13)

Nel secondo caso, si noti come la pulsazione propria è dipendente dalla tensione statica applicata.

In precedenza, è stato accennato come la natura dell'eccitazione, ovvero una tensione che presenta sia una componente statica  $V_{dc}$  che una alternata  $V_{ac}$ , è responsabile della presenza di due picchi di risonanza accoppiati. Tale effetto si può modellare impiegando lo stesso sistema a un grado di libertà considerando entrambe le componenti di tensione.

 $V(t) = V_{dc} - \Delta V + V_{ac} \sin \omega t$ 

in cui

ΔV è una differenza di potenziale autoindotta

 $\boldsymbol{\omega}$  è la pulsazione dell'attuazione

La forza elettrostatica equivalente si può calcolare analogamente al caso precedente:

$$F_e(t) = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{S \left(V_{dc} - \Delta V + V_{ac} \sin \omega t\right)^2}{x^2}$$
(15)

e ricordando la relazione trigonometrica  $\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2$ :

7

(14)

$$F_e(t) = A + B\sin\omega t + C\cos 2\omega t$$

in cui

$$A = \varepsilon \frac{S}{x^2} \left[ \frac{1}{2} (V_{dc} - \Delta V)^2 + \frac{1}{4} V_{ac}^2 \right]$$
$$B = \varepsilon \frac{S}{x^2} (V_{dc} - \Delta V) V_{ac}$$
$$C = -\frac{1}{4} \varepsilon \frac{S}{x^2} V_{ac}^2$$

Si evidenzia come la forza sia data dalla sovrapposizione di due funzioni armoniche con pulsazione una doppia rispetto all'altra. Rispetto all'attuazione che presenta solo la componente con pulsazione  $\omega$ , la forza contiene anche un termine con pulsazione  $2\omega$ .

#### 2.4 Strumento di misura

L'analisi dinamica di strutture vibranti impiegate in applicazioni MEMS richiede setup sperimentali e metodi di prova specifici. Una delle tecniche sperimentali più utilizzate è l'interferometria ottica dal momento che garantisce elevate prestazioni in termini di accuratezza delle misure e tolleranze dimensionali per prove dinamiche nel dominio della frequenza e del tempo oltre che ottimi risultati nel rilevamento dei profili in ambito statico.

Tutte le misure sono state effettuate impiegando l'interferometria applicata alla microscopia, in particolare il microscopio ZoomSurf 3D è stato usato sia per la caratterizzazione dinamica sia per il rilevamento delle quote dei provini. Questo può effettuare misure da un minimo di  $100x100 \ \mu\text{m}^2$  a un massimo di  $2x2 \ \text{mm}^2$ , il fattore di ingrandimento dell'obiettivo di 20x garantisce risoluzioni laterali e verticali di 0,6  $\ \mu\text{m}$  e 0,1 nm rispettivamente, una singola misura può rilevare fino a 400  $\ \mu\text{m}$  di differenza in altezza. La radiazione luminosa è emessa da una sorgente a scelta (continua o stroboscopica, monocromatica o policromatica) ed è impiegata per produrre l'interferenza ottica e la ricostruzione 3d dei provini. Lo strumento è equipaggiato con una piattaforma piezoelettrica mobile lungo i tre assi e un generatore di tensione che va da 0 a 200 V e fino a 200 MHz di frequenza.

#### 2.5 Tensioni residue

Il processo di lavorazione introduce, come accennato, tensioni residue all'interno della struttura. Questo fenomeno spiega il motivo per cui nascano delle discrepanze tra il valore misurato di frequenza di risonanza e quello teorico ottenuto tramite l'ipotesi di Eulero-Bernoulli (micro travi con doppio incastro). Dal momento che le dimensioni delle travi rientrano nei limiti di Eulero-Bernoulli, è possibile trascurare la tensione di taglio vicino i supporti e approssimare la distribuzione di tensioni come puramente assiale. In presenza di una distribuzione bidimensionale dovuta al processo di lavorazione, si può considerare una

tensione assiale equivalente come segue:

$$\sigma_{eq} = \sigma \left( 1 - \nu \right)$$

in cui v rappresenta il modulo di Poisson (17)

(16)

Bisogna considerare l'effetto proprio delle piastre, ovvero l'aumento della rigidezza flessionale quando la larghezza w cresce rispetto allo spessore t per cui il modulo di Young deve essere corretto in accordo alle relazioni di Osterberg-Senturia:

$$\begin{cases} w \ge 5 \ t \to E_{eq} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ w < 5 \ t \to E_{eq} = E \end{cases}$$
(18)

Nel primo caso si ha uno stato di deformazione piano per cui si assume il modulo valido per le piastre, nel secondo caso si ha uno stato di tensione piano e si assume il normale valore del modulo di Young. La componente di tensione residua assiale non può essere rilasciata per via della configurazione iperstatica dei vincoli. Essa influenza il comportamento flessionale della struttura e può essere tenuta in conto attraverso la matrice di rigidezza geometrica che dipende oltre che dalla geometria anche dalla tensione interna iniziale:

$$[K] = [K_e] + [K_g]$$
(19)

in cui

[K] è la matrice di rigidezza globale

 $[K_e]$  è la matrice di rigidezza elastica

 $[K_q]$  è la matrice di rigidezza geometrica

La matrice di rigidezza geometrica comporta un aumento della rigidezza ovvero esplica un effetto di stiffening dal momento che si ha una tensione assiale (viceversa in caso di compressione).

#### 2.6 Materiale impiegato nell'analisi

L'oro è comunemente impiegato per la realizzazione di tali strutture per la bassa resistività elettrica e l'inerzia chimica.

Le proprietà di film sottili sono in genere diverse da quelle del materiale in massa a causa del processo di deposizione. La lavorazione introduce stress residui nel componente e ricerche sono condotte al fine di controllare tali stress agendo sui parametri di processo quali composizione del bagno, materiale del "seed layer" o tipo di deposizone.

Le tensioni residue sono anche dovute a differenze nelle proprietà termiche dei diversi materiali o tensioni interne dovute alla microstruttura dei film, dimensione del grano o variazione della velocità di crescita durante deposizione.

Le tensioni residue sono una delle fonti di variabilità dei dati in strutture apparentemente identiche ed è pratica comune quella di comparare i dati sperimentali con quelli teorici in modo tale da valutare le stesse.

Il modulo di Young per l'oro adottato è pari a 98,5 GPa. Tale modulo è un valor medio tra quelli ricavati dalla tensione di pull-in misurata sperimentalmente su differenti provini e diversi wafer. Tale valore appare leggermente superiore a quello di letteratura probabilmente a causa di un effetto di stiffening dovuto alla diffusione del cromo e relativa formazione di inclusioni di ossido o a causa dei parametri di processo come le condizione di deposizione e la ricottura.

#### 2.7 Affidabilità meccanica

L'affidabilità dei MEMS rappresenta un argomento fondamentale data la loro sempre crescente applicazione nei dispositivi odierni. Il numero di componenti interni mobili aumenta e di conseguenza la probabilità di rottura.

L'affidabilità del sistema è legata a quella dei singoli componenti e quindi al materiale di cui sono composti. L'affidabilità meccanica, in particolare, dipende da diversi meccanismi di danneggiamento quali la fatica (meccanica e termica), il creep, la resistenza meccanica, il degrado (corrosione, adesione superficiale, abrasione) e l'attrito statico (dovuto a forze di Van der Waals, tensioni residue, forze capillari).

L'affidabilità elettrica è associata a problemi come l'attrito (dovuto a carica elettrostatica), accumulo di carica (stress elettrico), corto circuito e circuito aperto (degradazione del dielettrico, ossidazione).

#### 2.7.1 Fatica

Per quanto concerne la fatica, solitamente si producono delle curve S-N o di Wöhler che rappresentano l'ampiezza di sollecitazione in funzione del numero di cicli in diagramma logaritmico. La relazione tensionedurata, applicata per un alto numero di cicli per cui la deformazione totale tende alla sola componente elastica, può essere modellata tramite un'equazione di potenza (equazione di Basquin):

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_f' (2N_f)^b$$

in cui

 $\Delta\sigma/2$  rappresenta l'ampiezza di sollecitazione

 $\sigma'_{f}$  è il coefficiente di resistenza a fatica legato alla resistenza a trazione

b è l'esponente di resistenza a fatica dipendente dal materiale e dalla geometria

2N<sub>f</sub> rappresenta la durata a fatica in alternanze

Lo svantaggio è dovuto alla necessità di diversi provini e prove sperimentali per determinare un solo punto del diagramma e alla variabilità dei provini causata da incertezze sulle caratteristiche del materiale e sul processo di fabbricazione.

Pertanto è stato proposto da A. Somà e G. De Pasquale nella pubblicazione [4], un metodo per determinare la perdita di resistenza del materiale sotto carico ciclico attraverso la valutazione della tensione di pull-in del dispositivo.

Si impiegano come provini delle micro travi d'oro attuate in modo elettrostatico.

Il dispositivo di prova deve garantire la possibilità di generare sollecitazioni alternate ad ampiezza variabile e la possibilità di monitorare il danno del materiale con l'aumentare il numero dei cicli cosi da identificare il numero di cicli a rottura e un criterio che stabilisca il cedimento finale.

La *Figura 4* mostra un'immagine SEM del dispositivo di prova.

(20)



Figura 4 - Dispositivo di prova

Questo include l'elettrodo di attuazione, la piastra forata, e il provino vero e proprio.

La trave è collegata ad un vincolo rigido ad un'estremità e alla piastra mobile dall'altra, questa è incastrata all'altra estremità rispetto al provino. Il movimento della piastra causa una sollecitazione di flessione fuori dal piano della trave. La sollecitazione possiede sia componente flessionale che di taglio ed è variabile lungo lo spessore della trave.

Inizialmente si misura la tensione di pull-in e di seguito si applica una tensione alternata la cui ampiezza è proporzionale a quella della sollecitazione. Il numero di cicli del blocco di eccitazione è facilmente determinato conoscendo la frequenza della tensione e il tempo di carico.

La procedura si ripete fino al cedimento del provino che, in questo caso, non è associato alla rottura dello stesso ma ad una riduzione (di almeno il 10%) della tensione di pull-in legata alla rigidezza della struttura.

La tensione di pull-in è misurata applicando un'attuazione statica (tensione statica), aumentata progressivamente a step. La condizione di pull-in è otticamente rilevata tramite il microscopio ZoomSurf3D.

La frequenza della tensione alternata è pari a 20 kHz inferiore a quella di risonanza di circa 28 kHz sia per evitare l'amplificazione in risonanza e che il danno progressivo del materiale sposti il picco di risonanza causando variazioni nella rigidezza o smorzamento.

Il limite di fatica è stimato col metodo "staircase". Fissati un numero di cicli di riferimento (2 10<sup>6</sup>), un livello di carico iniziale (15 V) e uno step di carico (1 V), si carica il primo provino con il livello iniziale per il numero di cicli di riferimento. Se questo collassa, il secondo provino è caricato con un livello pari a quello iniziale meno lo step, viceversa se non avviene la rottura, con un livello di carico pari a quello iniziale più lo step. La procedura si ripete per sei provini.

Il limite di fatica stimato applicando tale metodo è pari a 13 $\pm$ 0,7 V.

La variazione della tensione di pull-in in funzione del numero di cicli (*Figura 5*) per un dato livello di carico mostra come questa sia normalmente del 2,3% tra due misure consecutive mentre raggiunge valori compresi tra il 13% e il 23% circa dopo il cedimento del provino.

Anche il diagramma S-N conferma il valore del limite di fatica.



Figura 5 - Diagramma tensione di pull-in/numero di cicli

#### 2.7.2 Creep

Il creep associato agli RF MEMS è stato oggetto di studio per le elevate temperature e tempi di applicazione del carico tipici di questi dispositivi.

Il creep è l'aumento tempo dipendente di deformazione del materiale soggetto a sollecitazione ad elevate temperature, rapporto  $T/T_f$  (temperatura di fusione) di almeno 0,3-0,4. Si nota come questo sia un processo termicamente attivato ovvero bisogna fornire un'energia di attivazione pari a quella necessaria per l'auto diffusione.

Il cedimento è associato al raggiungimento di una deformazione plastica eccedente i limiti prescritti in fase di progetto per preservare la funzionalità del componente.

La valutazione sperimentale del creep è condotta a diversi livelli di carico e temperatura costante. I risultati sono rappresentati in un grafico che riportala deformazione plastica in funzione del tempo per ogni livello di carico e temperatura. Si può anche rappresentare il diagramma di creep che esibisce la sollecitazione in funzione del tempo a rottura per ogni temperatura.

Nelle figure sottostanti, sono mostrati il dispositivo di prova e i risultati ottenuti nell'ambito di uno studio di validità generale volto a dimostrare l'applicabilità della teoria del creep sui MEMS (pubblicazione [6]).



Figura 6 - Dispositivo di prova



Figura 7 - Spostamento verticale della piastra centrale in funzione del tempo

Le pendenze delle curve riportate in *Figura 6* sono in accordo con l'andamento previsto per la deformazione permanente associata al creep documentato in letteratura.

Per le prime tre ore, le curve mostrano un comportamento associabile al creep primario. Nelle successive quattro ore, si nota un aumento con pendenza costante della deformazione proprio del creep secondario. Infine, prima del cedimento, si ha un aumento della velocità di deformazione simile al creep terziario.

#### 2.7.3 Effetto d'intaglio

Gli intagli rappresentano più o meno brusche variazioni nella geometria del componente. Questi possono essere previsti per ragioni progettuali o essere causati dal processo di fabbricazione o dalle condizioni di esercizio.

Gli intagli causano una concentrazione locale delle sollecitazioni che può condurre alla rottura prematura se non tenuta in conto correttamente nella progettazione.

Si definisce un fattore di concentrazione delle tensioni o fattore di forma, in ambito lineare elastico, come il rapporto tra la tensione massima ottenuta applicando rigorosamente la teoria dell'elasticità (apice dell'intaglio) e la tensione nominale massima ottenuta semplicemente applicando la teoria di De S. Venant (provino liscio di pari sezione netta):

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

(21)

Teoricamente, per tensione massima, in caso di presenza di tre tensioni principali, si intende la tensione massima equivalente ottenuta secondo un'ipotesi di rottura.

Tuttavia, per rendere indipendente il fattore dal materiale, si fa riferimento al rapporto alla tensione nominale massima della tensione massima corrispondente, ovvero quella preponderante.

Questo fattore non è sufficiente per prevedere la rottura. Il fattore di effetto d'intaglio, rapporto tra le tensioni nominali di rottura senza e con intaglio, può apparire uguale al precedente, ma esso dipende in realtà dal materiale e dal tipo di sollecitazione oltre che dalla geometria.

In caso di sollecitazione statica e materiale praticamente mancante di plasticità, i due fattori sono effettivamente uguali (fattore di effetto d'intaglio maggiore di uno e uguale al fattore di forma).

Se il materiale possiede una certa plasticità, accade che nei punti in cui, secondo la teoria dell'elasticità, si verificano le punte massime di tensione, il materiale cede plasticamente e queste vengono ripartite in una zona di materiale più ampia. Pertanto le tensioni di rottura senza e con intaglio si equivalgono o addirittura il valore con intaglio risulta maggiore a causa di un effetto di incrudimento (fattore di effetto d'intaglio minore o uguale a uno).

In dinamica, la possibilità di deformazione plastica del materiale è bassa per cui il fattore di effetto d'intaglio è maggiore di uno, ma minore del fattore di forma.

Il fattore di effetto d'intaglio, in dinamica, può essere definito come il rapporto dei limiti di resistenza a fatica senza e con intaglio e si indica comunemente come fattore d'intaglio a fatica K<sub>f</sub>:

$$K_f = \frac{\sigma_E}{\sigma_{E,n}}$$
(22)

$$1 \le K_f \le K_t$$

(23)

Il limite di fatica del provino con intaglio è maggiore di quanto ci si aspetti impiegando il fattore K<sub>t</sub> proprio a causa della (23), seppur rimanga ovviamente inferiore al valore assunto nel provino privo di intaglio.

Il motivo è attribuibile al fatto che la cricca di fatica, che nasce solitamente sulla superficie, cresce verso una regione meno sollecitata e può parzialmente scaricarsi. La sollecitazione all'apice della cricca, fattore importante nella propagazione della stessa, si riduce e può portare al blocco dell'avanzamento.

Ciò dipende da quanto rapidamente tale sollecitazione decresce ovvero dal gradiente di sollecitazione relativo  $\chi$  definito come la derivata dell'ampiezza di sollecitazione rispetto alla direzione di variazione x calcolata alla radice dell'intaglio sull'ampiezza di sollecitazione massima alla radice dell'intaglio.

Si conclude ricordando che il fattore d'intaglio a fatica può essere calcolato a partire dal fattore di intensificazione delle tensioni, per cui si trovano molti grafici in letteratura (per ulteriori informazioni consultare il testo [5]) in funzione della geometria dell'intaglio, e al fattore di sensibilità all'intaglio q secondo la seguente relazione:

$$K_f = 1 + q \ (K_t - 1)$$

(24)

Nella pubblicazione [7], si sono implementati modelli FEM per studiare l'effetto di intagli di diverse dimensioni sulle proprietà a fatica di una microstruttura d'oro in termini di fattore di concentrazione delle tensioni e gradienti di tensione sviluppati.

Si sono considerate tre strutture: provino senza intaglio, con un singolo intaglio e con doppio intaglio, soggetti a carico di trazione.

Per ulteriori informazioni si rimanda al testo [5] cui si fa riferimento.

La *Figura 8* mostra un'immagine al microscopio ottico della struttura.



Figura 8 - Dispositivo di prova

Il provino è rappresentato dalla trave con doppio incastro di sezione rettangolare posta al centro del dispositivo di prova. Le due piastre mobili fungono da attuatori elettrostatici e sono vincolate tramite travi trapezoidali. Tale forma è stata scelta in modo da garantire una distribuzione uniforme di tensione nel materiale di tali cerniere. Quando le piastre sono attuate, le cerniere consentono la rotazione delle stesse intorno ad un asse corrispondente ai vincoli esterni e il provino è soggetto a trazione. Per evitare concentrazione delle tensioni, gli spigoli del provino sono stati raccordati.

La vita a fatica dei provini era stata già testata con diversi valori di sollecitazione media e la riduzione di rigidezza strutturale valutata tramite la tensione di pull-in similmente a quanto esplicato nella sezione "Fatica".

I modelli FEM sono stati implementati su un software commerciale (Ansys) impiegando elementi multifisici monodimensionali "Trans126" per rappresentare l'accoppiamento elettromeccanico non lineare.

Preliminarmente si è effettuato uno studio sull'influenza del rapporto tra raggio alla radice dell'intaglio e spessore dello stesso ( $\rho$ /t) e dell'angolo di apertura dell'intaglio sul fattore di concentrazione delle tensioni (*Figura 9*).

Questo ha evidenziato come l'angolo di apertura  $\omega$  (30°, 60° e 90°) influenzi poco il fattore a differenza del rapporto suddetto, il cui aumento produce una diminuzione sensibile del fattore di intensificazione.

Notch Thickness (t)	Notch root radius	( <sup>p</sup> / <sub>t</sub> )	Stress C	oncentratio (K <sub>t</sub> )	on factor
			30°	60°	90°
5 um	1 um	0.2	3.14	3.08	3.03
5 um	2 um	0.4	2.46	2.39	2.38
5 um	3 um	0.6	2.09	2.09	2.09
5 um	4 um	0.8	1.92	1.92	1.92
5 um	5 um	1	1.81	1.81	1.81

Figura 9 - Effetto di  $\rho/t \in \omega$  sul  $K_t$ 

In seguito si è simulato il comportamento del provino non intagliato in due configurazioni, diverse tra loro solo per la lunghezza del provino stesso, al fine di valutare la massima tensione assiale e lo spostamento verticale massimo in funzione della tensione applicata (da 80 V a 180 V).

Le stesse analisi sono state ripetute per i provini con un singolo intaglio, questa volta calcolando il fattore di intensificazione degli sforzi tramite la formula enunciata in precedenza e tramite una formula empirica (Peterson) per provini con un solo intaglio sottoposti a trazione e rapporto p/t pari a uno.

La massima tensione è registrata all'apice dell'intaglio e risulta maggiore al caso senza intaglio per entrambe le configurazioni.

Per i provini con doppio intaglio, si è proceduto in modo analogo registrando una tensione massima di nuovo all'apice dell'intaglio ma minore al caso precedente seppur maggiore al caso del provino privo di intagli. Si è calcolato il fattore di intensificazione con entrambe le formule evidenziando una leggera discrepanza dovuta probabilmente all'assunzione della sezione netta impiegata per il calcolo della tensione nominale e la lunghezza infinita del provino assunta nella formula empirica.

Infine si è rappresentata la sollecitazione normale al piano dell'intaglio in funzione della distanza dall'apice dell'intaglio, entrambi normalizzati. La *Figura 10* mostra come la sollecitazione decresca più rapidamente nel caso di singolo intaglio e raggiunge un valore pari circa al 30% di quello iniziale. Nel caso di doppio intaglio, la diminuzione è meno veloce e si raggiunge, al massimo, un valore pari al 50% di quello iniziale.

La velocità di diminuzione della sollecitazione, come spiegato in precedenza, è importante nella valutazione della possibilità di crescita della cricca a fatica.



Figura 10 - Sollecitazione in funzione della distanza dall'apice (normalizzate)

#### 2.7.4 Effetto della tensione media

Al fine di studiare la vita di micro travi soggette a carichi ciclici caratterizzati da diverse tensioni medie si impiega una procedura sperimentale sulla medesima struttura analizzata in precedenza (pubblicazione [8]). In **Figura 11** è visibile lo schema di attuazione del provino. Si definisce L<sub>s</sub> la lunghezza del provino e L<sub>P</sub> la distanza tra un'estremità del provino e l'asse di rotazione della piastra corrispondente. Quando le piastre ruotano di un angolo  $\alpha$ , il provino si muove di un valore pari a z nella direzione verticale e di  $\Delta$ L in quella orizzontale.



Figura 11 - Schema del principio cinematico di attuazione

La struttura viene eccitata tramite una tensione alternata tra elettrodi e piastre. Questa produce il movimento della stessa e il caricamento assiale del provino. La tensione applicata è identificata da tre parametri: l'ampiezza della tensione  $V_a$ , la tensione media  $V_m$  e la frequenza di eccitazione f. Il test di fatica consiste nell'applicazione di un carico ciclico caratterizzato da uno specifico set di parametri. La combinazione dei primi due determina l'entità di altre due grandezze: l'ampiezza di sollecitazione e sollecitazione media. La frequenza, invece, è mantenuta ad un valore costante pari a 30 kHz, opportunamente inferiore a quello di risonanza del dispositivo prossimo a 42 kHz. I motivi sono principalmente due: l'amplificazione in risonanza genera problemi nella valutazione delle sollecitazioni interne al materiale e il progressivo danneggiamento del materiale può causare uno spostamento del picco di risonanza e quindi del fattore di qualità del dispositivo conseguentemente alla variazione di rigidezza e smorzamento del sistema.

La procedura di prova può essere descritta come segue:

- Si applica una tensione statica inferiore al valore di pull-in e si misura lo spostamento verticale del provino.
- Si eccita il dispositivo tramite la tensione alternata desiderata per uno specifico intervallo di tempo, risultante in un certo numero di cicli di fatica.
- Si applica lo stesso valore di tensione statica precedente e si misura nuovamente lo spostamento verticale del provino.

Si ripete la procedura fino alla rottura del provino. Si osserva che quando il provino collassa, si raggiunge la condizione di pull-in non appena la tensione statica viene applicata.

Si possono definire due categorie di rottura: catastrofica che causa la completa separazione del provino in due parti rendendolo inutilizzabile o degradazione che determina la variazione dei parametri del dispositivo oltre i normali range. In questo caso, la rottura è legata ad una precisa variazione percentuale della rigidezza della struttura dal suo valore iniziale.

Il numero totale di cicli di fatica a rottura può essere calcolato come la somma del numero di cicli di carico per ogni step di eccitazione.

Il numero di cicli di carico è pari a quello della tensione alternata. Questo può essere calcolato, per ogni step, semplicemente moltiplicando il tempo di carico per la frequenza di eccitazione.

Spec.	σ <sub>m</sub> (MPa)	σ <sub>a</sub> (MPa)	σ <sub>max</sub> (MPa)	σ <sub>min</sub> (MPa)	$V_{m}\left(V\right)$	$V_{a}\left(V\right)$	N <sub>f</sub> (10 <sup>6</sup> )
I.1		50.0	100.0	0	98.2	98.2	37.2
I.2		46.7	96.8	3.4	114.5	78.5	19.2
I.3	50	43.8	93.8	6.2	119.5	70.5	28.2
I.4		40.7	90.8	9.4	123.5	63.5	> 45
I.5		36.0	86.0	14.0	127.8	54.3	> 45
II.1		41.4	101.4	18.7	141.3	56.4	1.8
II.2		37.7	97.8	22.3	143.3	50.7	8.4
II.3	60	32.7	92.8	27.3	145.8	43.3	6.6
II.4	60	28.9	88.9	31.1	147.3	37.8	28.2
II.5		23.9	83.9	36.2	148.9	30.9	> 45
II.6		19.5	79.6	40.5	149.9	25.1	> 45
III.1		10.0	75.1	55.0	157.7	12.2	-
III.2		4.0	69.0	61.0	158.1	4.8	19.2
III.3	65	2.4	67.5	62.6	158.2	2.9	28.2
III.4		1.5	66.5	63.5	158.2	1.8	> 45
III.5		0.8	65.8	64.2	158.2	1	> 45

Figura 12 - Livelli di sollecitazione ed eccitazione corrispondente

Una volta calcolati i valori della sollecitazione media e alternata a partire da quelli della sollecitazione massima e minima raggiunti localmente nel materiale in corrispondenza del massimo e minimo valore di eccitazione rispettivamente, si nota una significativa riduzione della vita a fatica all'aumentare della sollecitazione media come confermato dalla letteratura a parità di sollecitazione alternata.

Un modo per rappresentare la rottura a fatica in presenza di una sollecitazione media non nulla è impiegare il diagramma di Goodman-Smith, riportato in *Figura 13*.



Figura 13 - Diagramma di Goodman-Smith

Questo riporta la sollecitazione massima in funzione di quella media e rappresenta il confine tra le zone (combinazione di sollecitazione media e alternata) associate alla rottura e quelle relative a condizione di sicurezza. Il diagramma è rappresentato ad un numero di cicli costante, in questo caso quello riferito alla rottura. Ciò permette di comparare la variazione del limite di fatica per diversi valori di sollecitazione media. Si conferma che la condizione di sicurezza è raggiunta per valori di sollecitazione alternata decrescenti all'aumentare della sollecitazione media. La somma di questi due valori, pari alla sollecitazione massima, non è costante ma decresce avvicinandosi al valore corrispondente alla rottura statica.

Le prove sono condotte a tre diversi livelli di sollecitazione media, rispettivamente 50 V, 60 V e 65 V.

La tensione statica applicata per studiare la resistenza del materiale è pari a 100 V. Si è verificata in precedenza la sicurezza della struttura sotto tale carico riportando le curve di tensione- spostamento per due attuazioni statiche consecutive. Dal momento che queste si sovrappongono perfettamente, si evince che tale tensione non è responsabile di variazioni nella rigidezza della struttura o, in altre parole, la struttura risponde elasticamente non riportando danneggiamento del materiale per effetti di plasticità. La fatica meccanica è la sola responsabile della degradazione del materiale.

I risultati delle prove di fatica sono riportati anche in un diagramma S-N, in cui ogni punto della curva rappresenta il numero di cicli a rottura per una data sollecitazione alternata (a parità di sollecitazione media). Questo evidenzia un comportamento caratterizzato da un andamento asintotico corrispondente al limite di fatica e, come al solito, la vita a fatica è inversamente proporzionale alla sollecitazione alternata a parità di quella media. Le curve S-N sono rappresentate in *Figura 14*.



Figura 14 - Diagramma di Wohler

Un numero di cicli massimo pari a 45 10<sup>6</sup> è stato assunto come riferimento nell'identificazione dei provini sicuri, ovvero tutti i provini capaci di raggiungere tale numero di cicli si considerano insensibili alla fatica sotto le condizioni di carico applicate. Alcuni provini con livelli di sollecitazione inferiore al limite di fatica sono stati testati fino a 10<sup>9</sup> cicli per dimostrare l'andamento asintotico.

#### 2.7.5 Comportamento elasto-plastico

L'analisi dell'andamento tensione-deformazione di sottili film di metallo presenta molte difficoltà legate al metodo di prova a livello microscopico, l'applicazione di forze controllate con piccoli intervalli e la misura precisa degli spostamenti legati alle forze applicate.

Lo scopo del lavoro presentato nella pubblicazione [5] è la progettazione di una struttura di prova semplice rispetto a quelle presenti in letteratura al fine di indagare l'andamento tensione-deformazione e l'effetto del comportamento elasto-plastico sulla risposta statica di sottili film d'oro.

La struttura è realizzata dalla Bruno Kessler Foundation (Trento, Italia) attraverso il processo di microlavorazione superficiale per interruttori RF.

La *Figura 15* mostra la struttura da testare con il provino al centro. Esso è rappresentato da una trave con doppio incastro di sezione rettangolare. La forza è applicata alle piastre esterne attraverso un'attuazione elettrostatica. Quando si applica la tensione tra la piastra superiore e l'elettrodo inferiore, il provino si muove verso l'alto. L'elettrodo inferiore non si estende per tutta l'area della piastra superiore, il loro

rapporto superficiale è pari a 0,5. Ciò permette un maggior range di lavoro alla piastra garantendo uno spostamento massimo al centro del provino prima del pull-in.

La posizione dell'elettrodo inferiore rispetto alla piastra superiore è ottimizzata al fine di avere una deflessione massima al centro del provino attraverso un aumento della tensione di pull-in.

Il posizionamento dell'elettrodo inferiore dall'altra parte rispetto alle molle torsionali causerebbe una diminuzione della tensione di pull-in e conseguentemente della deflessione nel provino.

La distanza tra l'elettrodo inferiore e l'asse delle molle di torsione è uguale a 20  $\mu$ m per evitare lo snervamento delle stesse.



Figura 15 - Immagine ottica della struttura di prova

In *Figura 16* sono riportate le dimensioni fondamentali misurate otticamente attraverso il microscopio ZoomSurf3D (Fogale Nanotech).

Parameter	Nominal Dimensions	Measured Dimensions
Bottom electrode width	50 µm	49.5 µm
Top plate width	120 µm	120 µm
Top plate thickness	4.8 µm	5.2 μm
Torsion spring length	30 µm	28.5 µm
Torsion spring width	12 µm	11.5 µm
Torsion spring thickness	1.8 µm	1.95 µm
Specimen length	30 µm	27.5 µm
Specimen width	10 µm	10 µm
Specimen thickness	1.8 µm	1.8 µm
Hole size	8 µm	8.5 µm
Air gap	3 µm	3.55 µm

Figura 16 - Dimensioni della struttura di prova

Il modello FEM è implementato su un software commerciale (Ansys) impiegando elementi multifisici monodimensionali "Trans126" per rappresentare l'accoppiamento elettromeccanico non lineare.

La tensione di pull-in per tale struttura è pari a 110 V. Sono condotte delle analisi statiche, con tensione applicata variabile tra 0 V e 105 V, che rivelano come la sollecitazione sia per la maggior parte concentrata

al centro del provino sotto carico di trazione. La massima tensione assiale e spostamento nel provino a 105 V sono 135 MPa e 1,7  $\mu$ m rispettivamente.

Un'analisi dinamica, invece, rivela che la prima frequenza naturale del sistema è uguale a 17,8 kHz.

Le analisi sperimentali sono condotte impiegando il microscopio ottico interferometrico ZoomSurf3D (Fogale Nanotech).

La misura della frequenza naturale è condotta impiegando la tecnica Sine Sweep Spectrum.

La struttura è caricata attraverso una tensione sinusoidale fissa sovrapposta ad una statica e la frequenza è aumentata progressivamente a step discreti. La tensione di pull-in e la prima frequenza naturale misurate risultano 116 V e 22,8 kHz rispettivamente. La differenza con i risultati numerici può essere attribuita alla presenza di tensioni residue dovute alla micro fabbricazione.

Per la caratterizzazione sperimentale del comportamento elasto-plastico, la struttura è caricata fino a 105 V e scaricata per più cicli. La deflessione al centro del provino è misurata a intervalli a tensioni crescenti per ogni ciclo.

Per la struttura di prova I, l'attuazione ha raggiunto i 100 V con piccoli incrementi. L'andamento della deflessione del centro del provino per tre cicli consecutivi mostra come questo torni alla posizione iniziale dopo ogni ciclo evidenziando un comportamento perfettamente elastico. La deflessione, poi, presenta un andamento quasi uguale per ogni ciclo di carico.

La struttura di prova II è caricata fino a 105 V e la deflessione è misurata per quattro cicli consecutivi.

Durante il primo ciclo, la deflessione raggiunge 0,7  $\mu$ m a 105 V. Quando la struttura è scaricata e ricaricata si assiste al fenomeno del pull-in. Lo stesso accade per gli ultimi due cicli mostrando però una progressiva riduzione della tensione di pull-in tra il primo e il quarto ciclo da 110 V a 95 V

La struttura di prova III è caricata fino a 105 V e la deflessione è misurata per sei cicli consecutivi. L'andamento durante il primo ciclo è comparabile alle altre due prove, la deflessione aumenta nel secondo e terzo ciclo senza che si verifichi il pull-in. Questo si presenta al quarto fino al sesto ciclo di nuovo con tensione di pull-in progressivamente decrescente. Durante il sesto ciclo, si nota un aumento della deflessione visibilmente più veloce rispetto ai cicli precedenti.

Infine, per la struttura di prova IV, si applica una tensione fino a 105 V per sei cicli di nuovo. Durante il primo ciclo, la deflessione raggiunge 0,82 µm a 105 V. Questa volta, come nella prova II, si assiste al pull-in già dal secondo ciclo fino al sesto in corrispondenza di una tensione che si riduce ad ogni ciclo.

Precedentemente, autori avevano stimato il carico di snervamento di film sottili d'oro pari a 120 MPa. Come conferma, la struttura testata fino a 100 V a cui corrisponde una tensione massima minore al valore di snervamento, esibisce un comportamento elastico. Mentre le strutture caricate fino a 105 V a cui corrisponde una tensione massima di 135 V, esibiscono un comportamento elasto-plastico nei cicli successivi al primo con progressivo decremento della tensione di pull-in.

L'accumulo di deformazione permanente dovuto alla plasticità è correlato alla diminuzione di pull-in dal momento che modifica la rigidezza della struttura.

#### 2.8 Analisi FEM

Nell'ambito della progettazione assistita, si impiegano codici di calcolo per la risoluzione delle equazioni caratterizzanti il sistema tramite l'implementazione di un modello matematico dello stesso e una simulazione del suo comportamento in determinate condizioni.

Il metodo degli elementi finiti è indubbiamente uno dei più utilizzati dai codici commerciali per la soluzione di una grande varietà di problemi oltre all'analisi di applicazioni di meccanica strutturale.

Tale metodo si fonda sulla formulazione di un funzionale in forma integrale su un dominio finito a partire dalle equazioni differenziali, sulla discretizzazione del continuo tramite funzioni di approssimazione e successiva sostituzione delle stesse nel precedente funzionale per ottenere un problema matriciale. Questo, infatti, è più facilmente trattabile da un calcolatore rispetto ad un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Il problema elastico, ad esempio, è caratterizzato dalle tre equazioni differenziali indefinite di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Phi_i = 0 \tag{25}$$

le sei equazioni differenziali di congruenza:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
(26)

e le sei equazioni rappresentanti le leggi costitutive del materiale:

$$\sigma_{ij} = \lambda \, \delta_{ij} \, \varepsilon_{kk} + 2 \, \mu \, \varepsilon_{ij} \tag{27}$$

Si evidenzia come sia cruciale la scelta del funzionale oltre che della discretizzazione.

Per quanto concerne la scelta del funzionale, si possono distinguere metodi energetici e variazionali. In ambito statico, si preferisce impiegare il principio dei lavori virtuali tra i metodi energetici dal quale si ottiene un'unica equazione integrale.

$$\int_{A} \{\delta u\}^{T} \{t\} dA = \int_{V} \{\delta \varepsilon\}^{T} \{\sigma\} dV - \int_{V} \{\delta u\}^{T} \{\Phi\} dV$$
(28)

in cui

 $\{\delta u\}$  è il vettore degli spostamenti virtuali

 $\{t\}$  è il vettore delle forze di superficie

 $\{\delta \varepsilon\}$  è il vettore delle deformazioni associato al campo di spostamenti virtuali

 $\{\sigma\}$  è il vettore delle tensioni

 $\{\Phi\}$  è il vettore delle forze di volume

In seguito si scrive una funzione di interpolazione del campo di spostamenti ovvero si lega il vettore degli spostamenti a quello degli spostamenti nodali tramite una matrice delle funzioni di forma.

$$= [n]\{s\}$$

(29)

(31)

(32)

in cui

 $\{u\}$  è il vettore degli spostamenti

[n] è la matrice delle funzioni di forma

 $\{s\}$  è il vettore degli spostamenti nodali

Si riportano le seguenti relazioni:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][n]\{s\} = [b]\{s\}$$
(30)

$$\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{t\} = \{t^*\} + \{t_0\}$$

in cui

[E] è il tensore di elasticità

 $\{t^*\} \in \{t_0\}$  rappresentano la parte incognita e nota del vettore delle forze superficiali rispettivamente

 $\{u\}$ 

Inoltre, assegnando un campo di spostamento approssimato, l'equilibrio non è soddisfatto in ogni punto ovvero nasce una forza residuale nelle equazioni differenziali di equilibrio.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Phi_i = \rho_i \tag{33}$$

in cui

 $\rho_i$  è la componente secondo la direzione i della forza volumica residua di non equilibrio  $\rho$ 

Dopo l'inserimento nel funzionale della funzione di approssimazione e ricordando le precedenti relazioni, si passa da un'equazione integrale ad un sistema matriciale come preannunciato.

$$[k]\{s\} - \{f_e\}_{\varepsilon_0} + \{f_e\}_{\sigma_0} = \{f\} + \{f_e\}_{t_0} + \{f_e\}_{\phi}$$
(34)

in cui

 $[k] = \int_{V} [b]^{T}[E][b] dV$  è la matrice di rigidezza

 ${f_e}_{\varepsilon_0} = \int_V [b]^T [E][\varepsilon_0] dV$  è il vettore dei carichi generalizzati equivalenti ad una deformazione senza tensione

 ${f_e}_{\sigma_0} = \int_V [b]^T [\sigma_0] dV$  è il vettore dei carichi generalizzati equivalenti ad uno stato di tensione iniziale

 ${f} = \int_{A} [n]^{T}[t^{*}] dA - \int_{V} [n]^{T}[\rho] dV$  è il vettore delle forze generalizzate coniugate agli spostamenti generalizzati

 ${f_e}_{t_0} = \int_A [n]^T [t_0] dA$  è il vettore dei carichi generalizzati equivalenti ad una distribuzione di tensione superficiale nota

 ${f_e}_{\Phi} = \int_V [n]^T [\Phi] dV$  è il vettore dei carichi generalizzati equivalenti a forze volumiche

Il campo di spostamenti è normalmente espresso da funzioni polinomiali. La scelta del polinomio o funzioni di forma riveste una grande importanza dal momento che descrivere la cinematica dell'elemento mediante un numero finito di parametri comporta l'introduzione di vincoli cinematici.

Di conseguenza i risultati sono approssimati e il grado di approssimazione dipende dal grado del polinomio oltre che dal numero di elementi impiegati per discretizzare la struttura. Il residuo tende a zero, teoricamente, quando il numero di gradi di libertà del modello e quindi il numero di elementi tende a infinito.

Al fine di semplificare la caratterizzazione di elementi di forma geometrica complessa si introduce il concetto di elemento di riferimento, di forma geometrica semplice e definito in uno spazio naturale e adimensionale.

Si crea una corrispondenza biunivoca tra l'elemento di forma qualsiasi nel sistema cartesiano (x, y, z) e l'elemento di riferimento nel sistema naturale o locale ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ). Nel caso tridimensionale si hanno le seguenti relazioni:

$$x = \sum_{i=1}^{n} n_i(\xi, \eta, \zeta) x_i$$
(35)

$$y = \sum_{i=1}^{n} n_i (\xi, \eta, \zeta) y_i$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} n_i(\xi, \eta, \zeta) z_i$$
(37)

in cui

 $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  sono le coordinate cartesiane dei nodi dell'elemento

 $n_i$  sono le funzioni di forma definite nel sistema di coordinate naturale dell'elemento

Queste ultime sono in numero pari ai nodi dell'elemento e variano tra 0 e 1, in particolare assumono valore unitario in corrispondenza del nodo i e valore nullo in corrispondenza degli altri nodi.

Le leggi dello spostamento sono definite, analogamente, nel sistema di riferimento naturale e sono uguali alle precedenti dal punto di vista formale, ma dipendono dagli spostamenti nodali e non dalle coordinate.

Le sommatorie impiegate per definire gli spostamenti, però, possono essere estese ad un indice diverso da quello usato per definire la geometria. Nella formulazione isoparametrica, i due indici coincidono.

Per il calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento [k] è necessario calcolare la matrice [b] che lega le deformazioni agli spostamenti nodali. Questa è composta dalle derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate cartesiane, mentre le stesse dipendono esplicitamente dalle coordinate naturali.

Le derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate naturali possono essere espresse in funzione delle derivate delle stesse rispetto alle coordinate cartesiane tramite la matrice jacobiana [J]. Pertanto è necessario calcolare l'inversa di suddetta matrice.

Una volta ottenuta la matrice [b] in tal modo, si procede al calcolo della matrice di rigidezza [k] ricorrendo ad uno schema di integrazione numerica.

Uno degli schemi di integrazione numerica maggiormente impiegati è il metodo di Gauss.

(36)

Una volta definite le componenti dell'equazione matriciale nel sistema di riferimento locale, è necessario passare ad un sistema di riferimento globale o della struttura moltiplicando opportunamente i vettori per una matrice di rotazione contente i coseni direttori.

Infine bisogna assemblare tra loro gli elementi per costruire la struttura.

Immaginando di costituire idealmente un magazzino degli elementi caratterizzati dalle proprie variabili ovvero spostamenti e forze generalizzati ed equazioni che legano tali variabili, si definiscono le variabili struttura.

Per caratterizzare matematicamente la struttura, per ogni nodo, si impone l'uguaglianza tra le variabili cinematiche struttura e quelle elemento che concorrono al nodo oltre che l'equilibrio delle variabili statiche struttura e quelle elemento che concorrono al nodo.

Il procedimento può essere implementato in modo da ottenere un algoritmo direttamente utilizzabile nei programmi di calcolo. Si identificano i gradi di libertà, associati all'elemento e alla struttura, con un numero e si genera una mappa di corrispondenza tra gradi di libertà elemento e struttura.

La mappa individua la corrispondenza tra la posizione di un termine della matrice di rigidezza elemento con la sua nuova posizione nella matrice di rigidezza struttura.

Un procedimento analogo si esegue per assemblare anche gli altri termini dell'equazione matriciale ed ottenere la notazione di rigidezza per la struttura.

Per il calcolo delle tensioni, conoscendo il vettore degli spostamenti della struttura, si ricava quello relativo agli spostamenti nodali degli elementi tramite un'operazione inversa a quella impiegata per l'assemblaggio.

Da questo si ottiene facilmente il vettore di deformazione e successivamente il vettore delle tensioni tramite le relazioni precedenti.

Lo stato di tensione dipende dal punto all'interno dell'elemento poiché la matrice [b] dipende dalle coordinate. Questa deve essere calcolata nel punto in cui si vuole conoscere la tensione, ovvero i nodi dal momento che ad essi è associata una posizione geometrica nota.

Sfortunatamente i nodi sono i punti in cui lo stato di tensione risulta meno preciso, si ricorda che i termini dell'equazione matriciale sono ottenuti tramite integrazione numerica.

Lo stato di tensione viene pertanto calcolato in punti interni all'elemento ed estrapolato per valutare le tensioni nei nodi. Poiché solitamente un nodo è condiviso da più elementi e la tensione ad esso associata risulta in genere diversa in dipendenza dall'elemento considerato per calcolarla, si attribuisce al nodo una tensione media tra quelle derivanti dagli elementi che vi concorrono.

I punti ottimali per il calcolo delle tensioni sono quelli in cui queste sono valutate con lo stesso grado di precisione degli spostamenti nodali e possono essere determinati mediante quanto suggerito da Barlow.

Tali punti coincidono con i punti di Gauss di sottointegrazione e sono detti punti di Barlow.

Il numero dei punti e le relative coordinate dipendono dal tipo di elemento (dimensione, numero di nodi). Per ulteriori informazioni si rimanda al testo [7] cui si fa riferimento.

#### 2.8.1 Elemento solido a 20 nodi

Il Solid186 è un elemento solido a 20 nodi di ordine superiore che mostra un andamento quadratico dello spostamento. Ogni nodo presenta tre gradi di libertà: traslazione nelle direzioni x, y e z.

In *Figura 17* è rappresentato l'elemento sia nel sistema di riferimento cartesiano che naturale.



Figura 17 - Elemento solido a 20 nodi

Le funzioni di forma e le loro derivate sono le seguenti:

• per i nodi sui vertici dell'elemento (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

$$n_{i} = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_{i})(1 + \eta \eta_{i})(1 + \zeta \zeta_{i})(-2 \xi \xi_{i} + \eta \eta_{i} + \zeta \zeta_{i})$$

$$\frac{\partial n_{i}}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \xi_{i}(1 + \eta \eta_{i})(1 + \zeta \zeta_{i})(-1 + 2 \xi \xi_{i} + \eta \eta_{i} + \zeta \zeta_{i})$$

$$\frac{\partial n_{i}}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \eta_{i}(1 + \xi \xi_{i})(1 + \zeta \zeta_{i})(-1 + \xi \xi_{i} + 2 \eta \eta_{i} + \zeta \zeta_{i})$$

$$\frac{\partial n_{i}}{\partial \zeta} = \frac{1}{8} \zeta_{i}(1 + \xi \xi_{i})(1 + \eta \eta_{i})(-1 + \xi \xi_{i} + \eta \eta_{i} + 2 \zeta \zeta_{i})$$

• per i nodi con ξ=0 (9, 11, 13, 15)

Nodo	9	11	13	15
η	-1	1	-1	1
ζ	-1	-1	1	1

$$n_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i)$$
$$\frac{\partial n_i}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \xi (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i)$$

(38)

$$\frac{\partial n_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 - \xi^2) (1 + \zeta \zeta_i)$$
$$\frac{\partial n_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \zeta_i (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i)$$
(39)

• per i nodi con η=0 (10, 12, 14, 16)

Nodo	10	12	14	16
ξ	1	-1	1	-1
ζ	-1	-1	1	1

Tabella 2 - Coordinate naturali dei nodi 10, 12, 14, 16

$$n_{i} = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_{i})(1\eta^{2})(1 + \zeta \zeta_{i})$$

$$\frac{\partial n_{i}}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_{i}(1 - \eta^{2})(1 + \zeta \zeta_{i})$$

$$\frac{\partial n_{i}}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \eta (1 + \xi \xi_{i})(1 + \zeta \zeta_{i})$$

$$\frac{\partial n_{i}}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \zeta_{i}(1 + \xi \xi_{i})(1 - \eta^{2})$$
(40)

• per i nodi con ζ=0 (17, 18, 19, 20)

Nodo	17	18	19	20	
ξ	1	1	-1	-1	
η	-1	1	1	-1	
Tabella 3 - Coordinate naturali dei nodi 17, 18, 19, 20					

$n_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 - \zeta^2)$	
$\frac{\partial n_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta \eta_i) (1 - \zeta^2)$	

$$\frac{\partial n_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi \xi_i) (1 - \zeta^2)$$
$$\frac{\partial n_i}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \zeta (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i)$$
(41)

I termini appartenenti al vettore delle deformazioni e la matrice jacobiana sono i seguenti:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
  $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$   $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$ 

27

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

$$(42)$$

In *Tabella 4* sono riportati i punti di Barlow per l'elemento in esame.

Elemento	N° punti	Coordinate naturali			
Isoparametrico solido a 20 nodi	2x2x2	ξ=±a η=±a ζ=±a			
Tabella 4 - Punti di Barlow					

In cui **a** è pari a  $1/\sqrt{3}$ .

L'elemento solido a 20 nodi è quadratico per cui permette di ottenere risultati più soddisfacenti rispetto a quelli lineari (solido a 8 nodi), i quali non sono in grado di rappresentare correttamente uno stato di tensione con presenza di gradienti.

Tuttavia, per migliorarne il comportamento flessionale, vi sono diversi procedimenti come il metodo dell'integrazione selettiva o dell'aggiunta di modi incompatibili.

Il primo prevede l'uso di ordini di integrazione diversi per le diverse forme di energia di deformazione, il secondo corregge le funzioni di forma considerando i termini flessionali mancanti. Ciò comporta la nascita di gradi di libertà interni all'elemento che lo rendono incompatibile essendo questi definiti univocamente per ciascun elemento. Questi possono essere eliminati o condensati a livello elemento tramite una condensazione statica.

Per ulteriori informazioni si rimanda al testo [7] cui si fa riferimento.

## 3 Modello di studio preliminare: trave

Le prime due configurazioni di prova sono caratterizzate da una notevole semplicità geometrica se confrontate alle successive.

Queste rappresentano le tipiche microstrutture riscontrabili in un dispositivo MEMS ovvero una trave incastrata ad un'estremità e una trave a doppio incastro rispettivamente.

Tale scelta è legata principalmente alla necessità di ottenere una buona familiarità con il nuovo tipo di simulazione, caratterizzata da un accoppiamento elettro-meccanico e, allo stesso tempo, di garantire un'analisi dei risultati e un controllo delle unità di misura più facili ed immediati.

Lo studio del comportamento di tali strutture soggette ad un'attuazione elettrostatica tramite la rappresentazione della curva di pull-in e lo studio sulla sensibilità dei risultati ai parametri di processo tramite una progettazione degli esperimenti rappresentano gli ulteriori scopi della prima parte della presente.

#### 3.1 Implementazione del modello FEM

#### 3.1.1 Geometria

Per la costruzione del modello, visibile in *Figura 18*, bisogna entrare nel pre-processore ("/Prep7").



Figura 18 - Modello della trave

Tramite il comando "et" si definisce un elemento tra quelli presenti nel database. Gli input da fornire sono il numero arbitrario da associare all'elemento (posto pari a 1 per la presenza di un solo tipo di elemento per la presente simulazione), il nome dell'elemento presente in libreria (Solid186) e le Keyopt (da 1 a 6) per ogni elemento, mantenute ai valori di default.

Tramite il comando "mp" si definiscono le proprietà del materiale. Gli input sono il nome della proprietà da impostare, il numero arbitrario del materiale posto sempre pari a 1 perché l'oggetto è costituito da un solo materiale e infine il valore della proprietà.

Il modulo di Young (nome "ex") dell'oro risulta 98,5 GPa, il modulo di Poisson (nome "prxy") è 0,42 e la densità (nome "dens") è pari a 19,32  $10^{-15}$  kg/µm<sup>3</sup>.

Inizialmente, si definiscono le dimensioni caratteristiche della struttura espresse in micrometri e tramite il comando "block", si crea il volume (parallelepipedo) associato alla trave fornendo come input le coordinate lungo le direzioni x, y e z che lo delimitano.

Per generare la mesh del volume, inizialmente, bisogna scegliere tra una mesh libera o mappata, si definisce una mesh libera tramite "mshkey" con input zero.

Per gli elementi che supportano più forme, bisogna definire la forma dell'elemento usata per la mesh. Si scelgono elementi di forma tetraedrica tramite "mshape" con uno come primo input per scegliere la forma e 3D come secondo input per specificare che si tratta di una mesh di volume.

Il comando "smrtsize" definisce dei parametri per la dimensione degli elementi. Si fa uso solo del primo input che deve necessariamente essere un numero intero compreso tra uno (mesh fine) e 10 (mesh grossolana). Si è scelta una mesh intermedia come compromesso tra tempo di simulazione e forma degli elementi.

Infine, si generano i nodi e gli elementi della mesh tramite "vmesh".

L'elemento "Trans126" rappresenta un trasduttore che converte l'energia dal dominio statico a quello strutturale e viceversa, permettendo anche l'accumulo di energia. Questo permette di rappresentare l'accoppiamento elettromeccanico. L'elemento presenta due nodi, I e J, che non devono essere coincidenti e presenta due gradi di libertà per ogni nodo: la traslazione lungo la direzione x, y o z (direzione I-J) e il potenziale elettrico (Volt).

Tramite il comando "nsel", si selezionano i nodi appartenenti alla superficie inferiore della trave che si trovano in corrispondenza dell'elettrodo di attuazione.

Si definisce tale selezione di nodi con il nome di "actuation\_pad" tramite il comando "cm".

Per ultimo, il comando "emtgen" permette di generare gli elementi "Trans126" fornendo diversi input. In primis, il nome della precedente selezione di nodi e di seguito in ordine si hanno il nome degli elementi generati ("actuation\_pad\_elem"), il nome dei nodi generati a una distanza pari al gap da quelli selezionati precedentemente ("actuation\_pad\_ground"), il grado di libertà traslazionale degli elementi (lungo z in questo caso), il gap iniziale con segno negativo perché l'elettrodo di attuazione si trova sotto la trave, il minimo gap ammissibile, fattori di rigidezza di contatto posto pari a uno e la permettività magnetica del vuoto pari a 8,854 10<sup>-6</sup> in unità µMKS.

#### 3.1.2 Condizioni di bordo

Per la definizione dei vincoli, si selezionano i nodi appartenenti alla superficie o superfici incastrate della trave tramite il comando "nsel" e gli input: "s" ovvero nuova selezione, "loc" (localizzazione), "x" (coordinata) e i valori di tale coordinata corrispondenti.

Pertanto è possibile applicare il vincolo alla traslazione nelle direzioni x, y e z impiegando tre volte il comando "d" e gli input: "all" (tutti i nodi della nuova selezione), lo spostamento nella direzione voluta e zero ovvero il valore di tale spostamento.

Infine si selezionano nuovamente tutti i nodi del modello.

Si seleziona il set di nodi avente nome "actuation\_pad" precedentemente definito tramite "cmsel".

Si impone un valore di tensione pari a zero tramite il comando "d" e input "all" ovvero tutti i nodi selezionati, "volt" (grado di libertà elettrico) e il valore ovvero zero. Si impone un valore di tensione pari a zero anche come condizione iniziale tramite "ic" e gli stessi input.

Infine si selezionano i nodi appartenenti al gruppo denominato "actuation\_pad\_ground" sempre tramite "cmsel" e si impone nuovamente la tensione pari a zero sia come vincolo che come condizione iniziale. Questa volta, si impiega il comando "d" anche per imporre uno spostamento nullo nelle direzioni x, y e z di tale set di nodi perché corrispondenti, come detto, all'elettrodo di attuazione.

Solo per la configurazione di trave a doppio incastro, si definisce uno stato di tensione iniziale come segue. Tramite il comando "eslv" ed input "s" (nuovo set) si selezionano gli elementi associati al volume della trave.

Il comando "inistate" permette di definire i dati e i parametri dello stato iniziale e viene impiegato due volte consecutive.

La prima volta impostando "set" come azione, "dtyp" e "stress" come input ovvero si scelgono dati di tensione come tipo di dati da designare.

La seconda, invece, con "define" come azione e i valori di tensione espressi in MPa nelle direzioni x e y come input.

Nelle figure sottostanti sono mostrati i vincoli e gli elementi Trans126 nel caso di trave incastrata con elettrodo in punta e trave a doppio incastro con elettrodo distribuito rispettivamente.



Figure 19 e 20 - Vincoli ed elementi Trans126 per le due configurazioni di prova

#### 3.1.3 Soluzione

Per risolvere il problema strutturale, bisogna entrare nell'ambiente del solutore ("/Solu").

Inizialmente si specifica il tipo di analisi tramite il comando "antype" ed input pari a zero che identifica un'analisi statica.

Prima di avviare il calcolo tramite il comando "solve" si impostano alcuni parametri specifici della simulazione.

In particolare, "nsubst" permette di specificare il numero di substep da impiegare per lo step di carico in esame (incremento temporale o di frequenza) e il numero massimo e minimo di substep da considerare, mentre "neqit" specifica il massimo numero di iterazioni di equilibrio concesso ad ogni substep in analisi non lineari. Per il comando "nsubst", inoltre, si impone di usare l'ultimo passo temporale del precedente step di carico come instante iniziale immettendo "on" come input finale.

Tramite "nlgeom" ed input "on" si abilitano gli effetti connessi a grandi deflessioni o deformazioni, in accordo al tipo di elemento, in un'analisi statica.

Si specificano i parametri di convergenza in analisi non lineari con "cnvtol" selezionando lo spostamento "u", un valore tipico di riferimento pari a uno, una tolleranza pari a 0,5% e una norma infinito.

Infine, tramite il comando "outres", si controllano i dati scritti nel database. Per il caso di carico in esame in cui la differenza di potenziale tra elettrodo e piastra è posta a zero, si scrivono esclusivamente i risultati base (input "basic") dell'ultimo substep dello step di carico ("last").

Per risolvere il problema elettro-meccanico nel caso in cui sia imposta una differenza di potenziale non nulla tra elettrodo e trave si procede come segue.

Si selezionano i nodi appartenenti al gruppo denominato "Actuation\_pad\_ground" sempre tramite "cmsel" e si impone la tensione tramite il comando "d" ed input "all" ovvero tutti i nodi selezionati, "volt" (grado di libertà elettrico) e il valore voluto.

Tramite "solcontrol" ed input "on" si abilitano delle impostazioni ottimizzate per analisi non lineari.

Dopo aver impostato i parametri di simulazione attraverso i medesimi comandi descritti in precedenza con l'accortezza di scrivere tutti i risultati (input "all" nel comando "outres"), è possibile avviare il calcolo tramite "solve".

#### 3.1.4 Risultati

Per poter consultare i risultati delle simulazioni si rende necessario accedere al post-processore ("/Post1"). Il comando "pldisp" mostra la deformata della struttura e riporta il valore di massima deformazione, mentre "plnsol" mostra il risultato ai nodi quindi con un profilo continuo, il primo input specifica la grandezza voluta (ad esempio "u" per gli spostamenti o "s" per le sollecitazioni) e il secondo la componente nella direzione di interesse.

#### 3.2 Studio di variabilità ad un parametro

#### 3.2.1 Effetto della lunghezza della trave

In via preliminare, si è studiato l'effetto della lunghezza della trave sulla tensione di pull-in per le due seguenti configurazioni: trave incastrata con elettrodo in punta e trave a doppio incastro con elettrodo distribuito.

In *Figura 21* è mostrata la prima configurazione del sistema.



Figura 21 - Trave incastrata con elettrodo in punta

In *Tabella 5* sono riportate le principali dimensioni del sistema in esame estrapolate dalla pubblicazione [2].

Dimensione nominale	Valore [µm]
Lunghezza trave l	250/300/350
Larghezza trave w	35
Spessore trave t	4,8
Lunghezza elettrodo e	33
Gap g	3

Tabella 5 - Principali dimensioni

Si sono eseguite diverse analisi al fine di ricavare le curve di pull-in riportate in *Figura 22*.

Si noti come la tensione di pull-in diminuisca all'aumentare della lunghezza della trave. In **Tabella 6** sono riportati i valori della tensione di pull-in per le diverse travi.


Figura 22 - Tensione di pull-in microbeamin funzione della lunghezza della trave

47
31
29

Tabella 6 - Tensione di pull-in in funzione della lunghezza della trave

In *Figura 23* è mostrata la seconda configurazione del sistema.



Figura 23 - Trave a doppio incastro con elettrodo distribuito

In Tabella 7 sono riportate le principali dimensioni del sistema in esame estrapolate dalla pubblicazione [2].

Dimensione nominale	Valore [µm]
Lunghezza trave l	250/300/350
Larghezza trave w	35
Spessore trave t	1,8
Lunghezza elettrodo e	250/300/350
Gap g	3

Tabella 7 - Principali dimensioni

Si sono eseguite diverse analisi, di nuovo, al fine di ricavare i punti necessari a rappresentare le curve di pull-in di *Figura 24*.

Si noti come, anche per questa configurazione, la tensione di pull-in diminuisca all'aumentare della lunghezza della trave. In **Tabella 8** sono riportati i valori della tensione di pull-in per le diverse travi.



Figura 24 - Tensione di pull-in microbridgein funzione della lunghezza della trave

Lunghezza trave [µm]	Tensione di pull-in [V]
250	53
300	35
350	27

Tabella 8 - Tensione di pull-in in funzione della lunghezza della trave

### **3.2.2** Effetto della tensione iniziale

Sempre in via preliminare, si è studiato l'effetto della tensione iniziale della trave sulla tensione di pull-in per la seguente configurazione: trave a doppio incastro con elettrodo centrale.

In Tabella 9 sono riportate le principali dimensioni del sistema in esame estrapolate dalla pubblicazione [2].

Dimensione nominale	Valore [µm]
Lunghezza trave l	540
Larghezza trave w	32
Spessore trave t	3
Lunghezza elettrodo e	491
Gap g	3

Tabella 9 - Principali dimensioni

In *Figura 25* è mostrata la configurazione del sistema.



Figura 25 - Trave a doppio incastro con elettrodo centrale

Si sono eseguite numeroso simulazioni al fine di ricavare i punti necessari a rappresentare le curve di pull-in di *Figura 26*.

Si noti come la tensione di pull-in aumenti al crescere della tensione iniziale della trave. In **Tabella 10** è riportata la tensione di pull-in per i diversi valori assunti dallo stress residuo.



Figura 26 - Tensione di pull-in in funzione del valore iniziale dello stress

Stress iniziale [MPa]	Tensione di pull-in [V]
0	28
10	36
20	42
30	47

Tabella 10 - Tensione di pull-in in funzione del valore iniziale dello stress

### 3.2.3 Effetto del modulo di Young

Infine, si è studiato l'effetto del modulo di Young sulla tensione di pull-in per la configurazione di trave incastrata con elettrodo in punta

In *Figura 27* è mostrata la configurazione del sistema.



Figura 27 - Trave incastrata con elettrodo in punta

In *Tabella 11* sono riportate le principali dimensioni del sistema in esame estrapolate dalla pubblicazione [2].

Dimensione nominale	Valore [µm]
Lunghezza trave l	200
Larghezza trave w	32
Spessore trave t	1,8
Lunghezza elettrodo e	33
Gap g	3

Tabella 11 - Principali dimensioni

Il valore del modulo di Young per l'oro è scelto pari a 98,5 GPa. Si sono eseguite diverse simulazioni supponendo plausibilmente un errore sul valore del modulo di elasticità tangenziale sia del 2% che del 5%, i risultati sono visibili in *Figura 28*.

Si noti come la tensione di pull-in rimanga inalterata per una variazione del 2% del modulo di Young intorno al valore nominale, mentre mostra un'oscillazione minima pari a 1V per un errore del 5%. In **Tabella 12** sono riassunti i risultati di tali prove.



Figura 28 - Tensione di pull-in in funzione del modulo di Young

Modulo di Young [GPa]	Tensione di pull-in [V]
93,5	30
96,5	31
98,5	31
100,5	31
103,5	32

Tabella 12 - Tensione di pull-in in funzione del modulo di Young

### 3.3 Studio di variabilità a più parametri

### 3.3.1 Progettazione degli esperimenti

Per comprendere come la variazione dei fattori d'ingresso influenzi le variabili di uscita in un sistema è necessario condurre degli esperimenti.

Una progettazione degli esperimenti (design of experiments), ovvero l'esecuzione delle prove secondo una determinata logica, è importante per impiegare efficacemente le risorse di tempo e calcolo disponibili.

L'approccio più corretto nel caso in cui si abbiano diversi fattori è condurre un esperimento fattoriale, una strategia per la quale le variabili sono modificate insieme in modo da ottenere un risultato per ogni combinazione possibile.

In generale, se si hanno k<sub>i</sub> fattori ognuno dei quali può assumere l<sub>i</sub> livelli, tutte le combinazioni possibili sono date dal prodotto dei livelli l<sub>i</sub>. Di solito, però, il numero di livelli è uguale per tutti i fattori per cui si hanno l<sup>k</sup> combinazioni. Si nota facilmente come il numero di prove cresca esponenzialmente con quello dei fattori, pertanto ,nel caso di un numero elevato di variabili, si preferisce un esperimento fattoriale frazionario in cui si impiega solo un sotto gruppo delle possibili combinazioni.

Nel caso di variabili aleatorie, proprie di una prova sperimentale, l'altro aspetto da considerare, oltre la progettazione degli esperimenti, è l'analisi statistica dei dati per ottenere risultati obiettivi.

La progettazione sperimentale si fonda su tre principi: randomizzazione, replicazione ed esecuzione a blocchi.

Per randomizzazione si intende che la distribuzione dei provini e l'ordine di esecuzione delle prove siano determinati casualmente dal momento che i metodi statistici prevedono che le osservazione siano variabili casuali distribuite in modo indipendente.

La replicazione consiste nel ripetere più volte la prova con la medesima combinazione di fattori per poter trattare statisticamente i risultati stimando l'uscita come il valor medio e l'errore tramite la deviazione standard.

Infine, l'esecuzione a blocchi è una tecnica impiegata per migliorare la precisione riducendo la variabilità associata a variabili di disturbo. Consiste nel raggruppare in blocchi le prove eseguite in condizioni esterne omogenee.

Le linee guida da seguire per la progettazione di un piano sperimentale sono le seguenti:

- Identificazione e formulazione del problema
- Selezione della variabile di risposta
- Scelta dei fattori, livelli e range di variazione
- Scelta del piano sperimentale: numero di repliche, ordine adeguato per le prove, modello empirico per rappresentare i risultati (primo ordine, primo ordine con interazione, secondo ordine)
- Esecuzione delle prove
- Analisi statistica dei dati
- Conclusioni (grafici, superfici di risposta)

Nell'ambito della progettazione di esperimenti, di solito, si considerano esclusivamente due livelli che possono essere di tipo quantitativo (massimo e minimo del campo di variazione) o qualitativo ("alto" e "basso"). In tali casi si parla di progettazione fattoriale 2<sup>k</sup>.

Se il numero di fattori è pari a due (A e B) allora si hanno quattro combinazioni.

L'effetto medio di un fattore può essere calcolato come differenza tra la media dei responsi quando il fattore è al livello alto mentre l'altro varia e la media dei responsi quando lo stesso fattore è al livello basso e l'altro varia.

L'interazione dei due fattori, invece, può essere ottenuta calcolando la differenza tra i responsi quando un fattore passa dal livello alto al basso mentre l'altro si trova al livello alto e la stessa differenza quando questo ultimo fattore si trova al livello basso, infine se ne esegue la semi differenza.

Se i livelli sono quantitativi, si può impiegare un modello di regressione del tipo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

in cui

y è la variabile di uscita

i  $\beta$  rappresentano i coefficienti del polinomio interpolante

le variabili x si riferiscono ai due fattori e sono definite in una scala che va da -1 a +1.

ε rappresenta l'errore

In particolare,  $\beta_0$  rappresenta la media dei quattro responsi,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono pari alla metà dell'effetto medio riferito al relativo fattore e  $\beta_{12}$  è pari alla metà dell'interazione dei due fattori.

In questo modo, è possibile rappresentare una superficie di risposta nello spazio che si configura come un piano se il termine di interazione è trascurabile o assume una certa curvatura nel caso contrario.

Per ulteriori informazioni si rimanda al testo [8] cui si fa riferimento.

# **3.3.2** Progettazione fattoriale 3<sup>3</sup>

Una progettazione fattoriale 3<sup>3</sup>, per quanto spiegato in precedenza, indica la presenza di tre fattori ognuno dei quali può assumere tre livelli distinti.

La configurazione studiata è quella di trave incastrata con elettrodo in punta.

Si sceglie la tensione di pull-in come output perché significativa nel descrivere il comportamento di tale microstruttura soggetta ad un'attuazione elettrostatica. Come input, invece, si sono scelti i parametri geometrici che, almeno in teoria, presentano maggiore influenza sulla tensione di pull-in ovvero lo spessore della trave e il gap tra gli elettrodi oltre che la lunghezza dell'elettrodo.

I livelli sono scelti in modo coerente in base alle dimensioni tipiche di questo tipo di dispositivi. Il livello centrale (zero) rappresenta la media tra gli estremi del campo di variazione ovvero i livelli -1 ed 1.

La **Tabella 13** riassume i fattori considerati e i relativi livelli.

Fattore		Livelli [µm]	
Spessore trave t	1,8	2	2,2
Gap tra gli elettrodi g	2	3	4
Lunghezza elettrodo e	16	33	50

# Tabella 13 - Fattori di input e relativi livelli

Una progettazione fattoriale 3<sup>k</sup> facilita l'adeguamento di un modello di regressione ai dati sperimentali dal momento che permette di tener conto della curvatura. Nel caso di tre fattori, infatti, le 27 combinazioni a disposizione permettono il calcolo dei dieci coefficienti di regressione necessari per un modello del secondo ordine.

(44)

Tuttavia, tale piano non risulta il metodo più efficace per modellare una relazione quadratica, ma esistono progettazioni delle superfici di risposta migliori come il piano composito centrale.

Questo prevede di impiegare una progettazione fattoriale 2<sup>k</sup> con l'aggiunta dei punti centrali. Per cui, se i due livelli si definiscono come -1 ed 1, si considerano anche i valori della risposta per un livello zero di tutti i fattori (punto centrale) e quelli ottenuti facendo variare un fattore per volta tra i due livelli mentre i restanti si fissano ad un livello zero (punti assiali). Ad esempio, nel caso di tre fattori, si conducono oltre ai canonici otto esperimenti, un'ulteriore prova per il punto centrale e sei prove per ottenere i punti assiali per un totale di 15 prove sufficienti a calcolare i dieci coefficienti di un modello del secondo ordine.

Si nota come tale metodo risulti più efficiente dal momento che, considerando tre fattori, si conducono 15 prove anziché 27.

Nel caso di studio in esame, si sceglie un piano fattoriale 3<sup>3</sup> poiché si tratta di simulazioni tramite software che necessitano relativamente di poco tempo e portano ad ottenere degli intervalli di confidenza più stretti a parità di livello di confidenza aumentando il numero dei gradi di libertà.

In ambito sperimentale, invece, una riduzione di 12 prove sarebbe senza dubbio significativa sia in termini economici che di tempo legittimando la riduzione di precisione.

е		-1			0			1	
		g			g			g	
t	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1
-1	20	36	55	15	27	41	13	23	35
0	23	43	65	17	31	47	15	27	41
1	27	50	76	20	36	55	17	31	47

I risultati per tutte le possibili combinazioni sono riportati in Tabella 14.

Tabella 14 - Tensione di pull-in in funzione di t, g ed e

Per interpolare i dati sperimentali, si adotta un modello di regressione lineare del secondo ordine in tre variabili con l'aggiunta di un termine di terzo grado per rappresentare l'interazione tra i tre fattori:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \beta_3 x_3^2 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \varepsilon$$

in cui

x1 rappresenta lo spessore della trave

x<sub>2</sub> rappresenta il gap tra gli elettrodi

x3 rappresenta la lunghezza dell'elettrodo

La precedente si può scrivere anche in forma matriciale come segue:

$$= \beta X + \varepsilon$$

in cui

y è un vettore riga (1,27) che contiene tutti i risultati in *Tabella* 14

 $\beta$  è un vettore riga (1,11) contenente i coefficienti di regressione

X è una matrice (11,27) delle combinazioni dei livelli delle variabili indipendenti

 $\epsilon$  è un vettore riga (1,27) contenente gli errori per ogni prova

La matrice dei coefficienti di regressione  $\beta$  si può stimare, trascurando gli errori, tramite formula inversa secondo il calcolo matriciale ed è riportata in **Tabella 15**.

y

(45)

(46)

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{0}$	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\beta}_{12}$	$\widehat{\beta}_{13}$	$\widehat{\beta}_{23}$	$\widehat{\beta}_{11}$	$\widehat{\beta}_{22}$	$\widehat{\beta}_{33}$	$\widehat{\beta}_{123}$
31,11	5,22	16,39	-8,11	2,58	-1,5	-4	0,33	1,17	3,67	-0,75

Tabella 15 - Coefficienti di regressione del modello

In seguito, si calcola un vettore di risposta  $y' = \hat{\beta} X$  tramite i coefficienti stimati e si ottiene il vettore degli errori tramite la differenza:

$$\varepsilon = y - y' \tag{47}$$

Per poter stimare la varianza  $\sigma^2$ , si calcola la somma dei quadrati dei residui e si divide per i gradi di libertà associati ad esso:

$$SS_E = \varepsilon \ \varepsilon' = 17,75$$
 (48)  
 $\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(27 - 11)} = 1,11$  (49)

Il metodo dei minimi quadrati produce uno stimatore imparziale di  $\beta$ , ovvero il suo valore atteso coincide col valore vero. La matrice di covarianza di  $\hat{\beta}$  è espressa dalla relazione:

$$Cov(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X X')^{-1}$$
(50)

Le radici quadrate dei termini sulla diagonale principale di tale matrice rappresentano gli errori standard dei parametri del modello, visibili in *Tabella 16*.

ε0	ε <sub>1</sub>	ε <sub>2</sub>	<b>E</b> 3	ε <sub>12</sub>	ε <sub>13</sub>	ε <sub>23</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>	ε <sub>33</sub>	ε <sub>123</sub>
0,54	0,25	0,25	0,25	0,3	0,3	0,3	0,43	0,43	0,43	0,37

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 16 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (27-11) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,16} = 2,12$$

Dal momento che la stima di  $\beta$  è normalmente distribuita, si calcolano gli intervalli di confidenza dei coefficienti di regressione:

$$\hat{\beta}_i - t_{0.025,16} \varepsilon_i \le \beta_i \le \hat{\beta}_i + t_{0.025,16} \varepsilon_i$$

(51)

	β <sub>0</sub>	β <sub>1</sub>	β2	β3	β <sub>12</sub>	β <sub>13</sub>	β <sub>23</sub>	β <sub>11</sub>	β22	β <sub>33</sub>	β <sub>123</sub>
L	29,97	4,7	15,86	-8,64	1,94	-2,14	-4,64	-0,58	0,26	2,76	-1,54
Ls	32,25	5,75	16,92	-7,58	3,23	-0,86	-3,36	1,24	2,08	4,58	0,04

Tabella 17 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

In *Tabella* 17 sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza.

Si osserva come il secondo fattore ovvero il gap tra gli elettrodi abbia la maggiore influenza sulla tensione di pull-in. La lunghezza dell'elettrodo mostra un effetto sulla risposta pari a circa la metà del precedente, mentre risulta ancora inferiore quello relativo allo spessore della trave.

Considerando le interazioni tra i fattori, queste mostrano in generale minore influenza. Osservando i coefficienti relativi, si nota come l'effetto combinato sia maggiormente evidente nel caso in cui uno dei due fattori sia il gap tra gli elettrodi.

L'interazione tra tutti e tre i fattori possiede, invece, un'influenza trascurabile.

# **3.3.3** Progettazione fattoriale 3<sup>2</sup>

Studiando l'effetto di tre fattori contemporaneamente non è possibile ottenere una rappresentazione grafica poiché si tratta di un'ipersuperficie in uno spazio 4-dimensionale. Tuttavia, è possibile fissare un fattore ad un certo livello e ottenere la rappresentazione tridimensionale della variabile d'uscita in funzione degli altri due ingressi sfruttando i coefficienti di regressione già calcolati.

Nel caso in esame, si è preferito studiare l'effetto di due variabili di input fissando la terza al livello centrale tramite un nuovo modello di regressione lineare del secondo ordine per una migliore interpolazione dei dati:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \varepsilon$$

La precedente si può scrivere nuovamente in forma matriciale secondo l'equazione (46):

in cui

$$y=\beta\,X+\varepsilon$$

y è un vettore riga (1,9) che contiene tutti i risultati

 $\beta$  è un vettore riga (1,6) contenente i coefficienti di regressione

X è una matrice (6,9) delle combinazioni dei livelli delle variabili indipendenti

 $\epsilon$  è un vettore riga (1,9) contenente gli errori per ogni prova

# Spessore della trave - gap tra gli elettrodi

Inizialmente, si decide di studiare l'effetto combinato di spessore del provino e gap tra gli elettrodi sulla tensione di pull-in mantenendo la lunghezza dell'elettrodo pari a 33  $\mu$ m.

In Tabella 18 sono riportati i risultati delle simulazioni.

		g	
t	-1	0	1
-1	15	27	41
0	17	31	47
1	20	36	55

#### Tabella 18 - Tensione di pull-in in funzione di t e g

Come in precedenza, si possono stimare i coefficienti di regressione  $\beta$ , riportati in **Tabella 19**.

(52)

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{0}$	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$	$\widehat{\beta}_{12}$	$\widehat{\beta}_{11}$	$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{22}$
30,89	4,67	15,17	2,25	0,67	1,17

Tabella 19 - Coefficienti di regressione del modello

Si noti come i coefficienti siano variati solo di qualche decimo rispetto ai corrispondenti del modello precedente.

Dopo aver calcolato la somma dei quadrati dei residui, si stima la varianza:

$$SS_E = \varepsilon \varepsilon' = 0,194$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(9-6)} = 0,065$$

Gli errori standard dei coefficienti del modello sono riportati in Tabella 20.

ε <sub>0</sub>	ε <sub>1</sub>	ε2	ε <sub>12</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>
0,19	0,10	0,10	0,13	0,18	0,18

Tabella 20 - Errori standard dei coefficienti di regressione del modello

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 3 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (9 - 6) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,3} = 3,182$$

In *Tabella 21* sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza calcolati tramite la (51).

	β <sub>0</sub>	$\beta_1$	β2	β <sub>12</sub>	β <sub>11</sub>	β <sub>22</sub>
L	30,29	4,36	14,84	1,84	0,09	0,59
Ls	31,49	5	15,5	2,66	1,24	1,74

Tabella 21 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

Seppur gli intervalli di confidenza siano maggiori rispetto al modello con tre fattori poiché sono coinvolti meno gradi di libertà, la somma dei quadrati dei residui e la varianza stimata sono inferiori indicando una migliore interpolazione dei dati nel range di interesse.

In Figura 29 è mostrata la superficie di risposta.



Figura 29 - Superficie di risposta spessore trave - gap

La tensione di pull-in cresce notevolmente al variare del gap tra gli elettrodi. Tale crescita è accentuata nel tratto compreso tra il valor medio e il limite superiore dell'intervallo di variazione del parametro.

L'andamento qualitativo del risultato al variare dello spessore della trave è analogo al precedente, ma l'entità della crescita è, al contrario, modesta.

Seppur questi andamenti siano indipendenti dal valore assunto dall'altro parametro, un termine di interazione non nullo indica che l'aumento della tensione di pull-in sia accentuato al crescere del secondo parametro, sia considerando il gap tra gli elettrodi che lo spessore della trave.

### Spessore della trave - lunghezza dell'elettrodo

In un secondo tempo, si decide di studiare l'effetto combinato di spessore del provino e raggio dell'intaglio sulla tensione di pull-in mantenendo il gap tra gli elettrodi al livello 0 ovvero pari a 3  $\mu$ m. In **Tabella 22** sono riportati i risultati delle simulazioni.

		е	
t	-1	0	1
-1	36	27	23
0	43	31	27
1	50	36	31

Tabella 22 - Tensione di pull-in in funzione di t ed e

Come in precedenza, si possono stimare i coefficienti di regressione  $\beta$ , riportati in **Tabella 23**.

β <sub>0</sub>	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\beta}_{13}$	$\widehat{\beta}_{11}$	$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{33}$
31,22	5,17	-8	-1,5	0,17	3,67

Tabella 23 - Coefficienti di regressione del modello

L'interazione tra i due fattori mostra lo stesso valore assunto nel modello a tre variabili. Dopo aver calcolato la somma dei quadrati dei residui, si stima la varianza:

$$SS_E = \varepsilon \ \varepsilon' = 1,44$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(9-6)} = 0,48$$

Gli errori standard dei coefficienti del modello sono riportati in Tabella 24.

ε <sub>0</sub>	ε <sub>1</sub>	ε2	ε <sub>12</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>
0,52	0,28	0,28	0,35	0,49	0,49

Tabella 24 - Errori standard dei coefficienti di regressione del modello

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 3 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (9 - 6) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,3} = 3,182$$

In **Tabella 25** sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza calcolati tramite la (51).

	β <sub>0</sub>	β1	β2	β <sub>12</sub>	β <sub>11</sub>	β <sub>22</sub>
L	29,58	4,27	-8,9	-2,6	-1,39	2,11
Ls	32,87	6,07	-7,1	-0,4	1,73	5,23

Tabella 25 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

Seppur gli intervalli di confidenza siano peggiori rispetto al modello precedente, la somma dei quadrati dei residui e la varianza stimata risultano ancora inferiori rispetto al modello con tre fattori indicando una migliore interpolazione dei dati nel range di interesse.

In Figura 30 è mostrata la superficie di risposta.



Figura 30 - Superficie di risposta spessore trave - lunghezza elettrodo

La tensione di pull-in cresce quasi linearmente all'aumentare dello spessore della trave, seppur tale crescita sia di lieve entità.

Come prevedibile, il risultato decresce all'aumentare della lunghezza dell'elettrodo, in modo più marcato tra il limite inferiore e il valor medio dell'intervallo di variazione.

Di nuovo, a causa di un effetto combinato, l'entità della variazione dipende dal valore assunto dall'altro parametro. La tensione di pull-in decresce più velocemente al crescere della lunghezza dell'elettrodo per spessori maggiori e cresce più lentamente all'aumentare dello spessore della trave per elettrodi più estesi.

### Gap tra gli elettrodi - lunghezza dell'elettrodo

Infine, si studia l'effetto combinato di gap tra gli elettrodi e raggio dell'intaglio sulla tensione di pull-in mantenendo lo spessore della trave pari a 2 μm.

In *Tabella 26* sono riportati i risultati delle simulazioni.

		е	
g	-1	0	1
-1	23	17	15
0	43	31	27
1	65	47	41

Tabella 26 - Tensione di pull-in in funzione di g ed e

Come in precedenza, si possono stimare i coefficienti di regressione  $\beta$ , riportati in **Tabella 27**.

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{0}$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\beta}_{23}$	$\widehat{\beta}_{22}$	$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{33}$
31	16,33	-8	-4	1	4

Tabella 27 - Coefficienti di regressione del modello

Dopo aver calcolato la somma dei quadrati dei residui, si stima la varianza:

$$SS_E = \varepsilon \varepsilon' = 5,33$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(9-6)} = 1,78$$

Gli errori standard dei coefficienti del modello sono riportati in Tabella 28.

ε <sub>0</sub>	ε <sub>1</sub>	ε2	ε <sub>12</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>
0,99	0,54	0,54	0,67	0,94	0,94

Tabella 28 - Errori standard dei coefficienti di regressione del modello

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 3 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (9 - 6) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,3} = 3,182$$

In *Tabella 29* sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza calcolati tramite la (51).

	β <sub>0</sub>	β1	β2	β <sub>12</sub>	β <sub>11</sub>	β <sub>22</sub>
L	27,84	14,6	-9,73	-6,12	-2	1
Ls	34,16	18,07	-6,27	-1,88	4	7
	_ / //					

Tabella 29 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

Seppur gli intervalli di confidenza siano peggiori rispetto ai due modelli precedenti, la somma dei quadrati dei residui è inferiore al modello con tre variabili indicando una migliore interpolazione dei dati nel range di interesse.

In Figura 31 è mostrata la superficie di risposta.



Figura 31 - Superficie di risposta gap - lunghezza dell'elettrodo

La tensione di pull-in cresce in modo analogo a quanto descritto nel primo caso all'aumentare del gap tra gli elettrodi.

Il risultato decresce all'aumentare della lunghezza dell'elettrodo analogamente al caso precedente.

Di nuovo, a causa di un effetto combinato, l'entità della variazione dipende dal valore assunto dall'altro parametro. La tensione di pull-in decresce più velocemente al crescere della lunghezza dell'elettrodo per gap maggiori e cresce più lentamente all'aumentare del gap per elettrodi più estesi.

### Lunghezza dell'elettrodo - posizione dell'elettrodo

Separatamente, si è deciso di studiare la sensibilità del risultato alla variazione contemporanea della posizione e lunghezza dell'elettrodo di attuazione, fissando i restanti parametri geometrici al valor medio. La posizione dell'elettrodo è definita dall'asse dello stesso. Il livello -1 indica una posizione centrale in cui l'asse dell'elettrodo coincide con quello della trave, mentre il livello 1 indica un elettrodo in punta. In **Tabella 30** sono riportati i risultati delle simulazioni.

		р	
е	-1	0	1
-1	119	68	43
0	79	47	31
1	62	39	27

Tabella 30 - Tensione di pull-in in funzione di p ed e

Come in precedenza, si possono stimare i coefficienti di regressione  $\beta$ , riportati in **Tabella 31**.

$\hat{\beta}_0$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\beta}_{23}$	$\widehat{\beta}_{22}$	$\widehat{\beta}_{33}$		
46,44	-17	-26,5	10,25	7,33	8,83		
Tabella 31 - Coefficienti di regressione del modello							

Dopo aver calcolato la somma dei quadrati dei residui, si stima la varianza:

$$SS_E = \varepsilon \varepsilon' = 38,19$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(9-6)} = 12,73$$

Gli errori standard dei coefficienti del modello sono riportati in Tabella 32.

ε <sub>0</sub>	ε <sub>1</sub>	ε2	ε <sub>12</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>
2,66	1,46	1,46	1,78	2,52	2,52

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 3 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (9 - 6) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,3} = 3,182$$

In *Tabella 33* sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza calcolati tramite la (51).

	β <sub>0</sub>	$\beta_1$	β <sub>2</sub>	β <sub>12</sub>	β <sub>11</sub>	β <sub>22</sub>
L	37,98	-21,64	-31,14	4,57	-0,7	0,8
Ls	54,91	-12,36	-21,86	15,93	15,36	16,86

Tabella 33 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

In Figura 32 è mostrata la superficie di risposta.



Figura 32 - Superficie di risposta lunghezza dell'elettrodo - posizione

La tensione di pull-in decresce molto velocemente all'aumentare della lunghezza dell'elettrodo dall'estremo inferiore al valor medio. In seguito, tale crescita rallenta fino al raggiungimento dell'estensione massima dell'elettrodo.

Lo stesso andamento caratterizza la variazione del risultato allo spostamento dell'elettrodo dalla posizione centrale a quella in punta, seppur l'entità della stessa sia leggermente superiore.

A differenza dei casi analizzati in precedenza, il termine di interazione è abbastanza elevato per cui è presente un forte effetto combinato dei due parametri. La diminuzione della tensione di pull-in al crescere della lunghezza dell'elettrodo risulta sempre meno forte al variare della posizione dello stesso verso l'estremità della trave. Analogamente, la diminuzione del risultato dovuta allo spostamento dell'elettrodo verso la punta è meno intensa per lunghezze dello stesso maggiori.

### 3.4 Confronto tra i risultati analitici e sperimentali

Al fine di validare il modello FEM di tali microstrutture, si sono confrontati i valori della tensione di pull-in ottenuti sperimentalmente (pubblicazione [2]) con quelli calcolati tramite il software Ansys. In particolare, si sono studiate due configurazioni di trave incastrata, con elettrodo in punta ed elettrodo distribuito rispettivamente.

Per la prima configurazione, si analizzano tre set di sei campioni ciascuno caratterizzati dalle medesime dimensioni nominali delle travi. All'interno di ogni set, i provini si differenziano esclusivamente per la lunghezza della trave.

In realtà, a causa delle tolleranze di lavorazione, vi è una notevole variabilità dimensionale che si rispecchia in quella dei risultati.

In *Tabella 34*, sono riportate sia le dimensioni nominali dei provini che le relative tensioni di pull-in, sperimentali e calcolate.

Din	nensio [	ne no [µm]	mina	le	Set 1		Set 2		Set 3	
1	W	t	g	е	V <sub>pi</sub> exp.	$V_{pi}$ FEM	V <sub>pi</sub> exp.	$V_{pi}$ FEM	V <sub>pi</sub> exp.	V <sub>pi</sub> fem
					[V]	[V]	[V]	[V]	[V]	[V]
150	35	4,8	3	33	165	106	179	111	172	88
250	35	4,8	3	33	56	47	62	49	60	38
300	35	4,8	3	33	40	31	53	32	38	28
350	35	4,8	3	33	27	29	39	23	20	21
400	35	4,8	3	33	19	21	16	19	19	18
450	35	4,8	3	33	14	15	14	15	15	15

Tabella 34 - Trave incastrata con elettrodo in punta

Si intuisce facilmente come la diminuzione progressiva della tensione di pull-in al crescere della lunghezza della trave, dimostrata precedentemente tramite Ansys, sia supportata anche dalle evidenze sperimentali.

Per una lunghezza della trave compresa tra 150 e 350 micron, è evidente un'importante sensibilità dei risultati ai parametri geometrici, in altre parole, piccole variazioni dovute alle tolleranze dimensionali, causano differenze nella tensione di pull-in anche superiori a una decina di volt.

Una lunghezza elevata della trave (superiore a 400 micron) rende meno sensibile il risultato dalla geometria.

Si evidenzia altresì che i set 1 e 3 mostrano tendenzialmente dei risultati maggiormente conformi tra loro, a differenza del set 2. Le cause sono dovute ai valori di gap e spessore delle travi, i quali mostrano valori più simili proprio nei set 1 e 3, allo stesso tempo è doveroso ricordare l'inevitabile presenza di errori sperimentali nella misura della tensione di pull-in.

Gli errori sperimentali si hanno anche nella misura delle dimensioni caratteristiche. In particolare, il gap di aria tra la faccia inferiore della trave e l'elettrodo di attuazione è caratterizzato da una certa incertezza. La trave presenta una curvatura iniziale dovuta alle tensioni residue di lavorazione per cui il gap non è costante rispetto alla lunghezza e si rende necessario considerare un valore medio.

Questo può spiegare le differenze riscontrate nei valori dei risultati sperimentali e calcolati, superiori per basse lunghezze di trave (inferiori a 300 micron) alle quali, come detto, i parametri geometrici presentano maggiore influenza.

In *Figura 33* è riportata la tensione di pull-in (sperimentale e FEM) in funzione della lunghezza della trave per il primo set di campioni.



Figura 33 - Trave incastrata con elettrodo in punta

Per la seconda configurazione, si analizzano due set di sei campioni ciascuno caratterizzati dalle medesime dimensioni nominali delle travi. Di nuovo, all'interno di ogni set, i provini si differenziano esclusivamente per la lunghezza della trave.

In *Tabella 35*, sono riportate sia le dimensioni nominali dei provini che le relative tensioni di pull-in, sperimentali e calcolate.

Din	nensio [	ne no [µm]	mina	le		Set 1			Set 2	
1	w	t	g	е	V <sub>pi</sub> exp.	$V_{pi}$ FEM	V <sub>pi</sub> teo.	V <sub>pi</sub> exp.	$V_{pi}$ FEM	V <sub>pi</sub> teo.
					[V]	[V]	[V]	[V]	[V]	[V]
150	35	4,8	3	33	143	86	74	150	105	90
250	35	4,8	3	33	41	28	24	48	33	29
300	35	4,8	3	33	24	20	18	33	23	20
350	35	4,8	3	33	18	16	14	20	14	13
400	35	4,8	3	33	15	14	12	16	12	11
450	35	4,8	3	33	11	10	9	12	11	10

Tabella 35 - Trave incastrata con elettrodo distribuito

La diminuzione progressiva della tensione di pull-in al crescere della lunghezza della trave, dimostrata precedentemente tramite Ansys, è supportata dalle evidenze sperimentali anche per tale configurazione di prova.

I parametri geometrici influenzano in modo meno marcato la tensione di pull-in rispetto al caso precedente, ma permane il medesimo effetto della lunghezza della trave su tale influenza, ovvero, decresce all'aumentare della stessa.

Le differenze riscontrate nei valori dei risultati sperimentali e calcolati è da imputare nuovamente agli errori di misura sulle dimensioni caratteristiche.

Le discrepanze risultano superiori per basse lunghezze di trave (inferiori a 300 micron) alle quali, come detto, i parametri geometrici presentano maggiore influenza.

Per questa seconda configurazione, è stato possibile confrontare i risultati anche con quelli forniti dalla seguente formula teorica, valida esclusivamente per trave incastrata con elettrodo distribuito:

$$V_{pi} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{E t^3 g^3}{\varepsilon_0 L^4}}$$

(53)

Si nota come tale formula approssimi in modo abbastanza soddisfacente la tensione di pull-in calcolata tramite analisi FEM, superiore di una percentuale che varia tra l'8% e il 17%.

In *Figura 34* sono riportati i risultati (sperimentali, FEM e teorici) in funzione della lunghezza della trave per il primo set di campioni.



Figura 34 - Trave incastrata con elettrodo distribuito

In ultima analisi, si effettua un'operazione di reverse engineering per conoscere i valori di tensione iniziale presente in travi a doppio incastro con elettrodo distribuito. In particolare, dopo aver misurato la tensione di pull-in dei provini (pubblicazione [2]), si agisce sul valore di stress iniziale dei modelli per far coincidere il risultato dell'analisi con quello sperimentale.

Si considera il primo set costituito da quattro campioni che si differenziano esclusivamente per la lunghezza della trave.

In **Tabella 36** sono visibili le dimensioni nominali, la tensione di pull-in sperimentali e quella ottenuta tramite software in assenza di tensione iniziale, infine il valore di pre-stress relativo.

	Dimensi	one nominale	Set				
I	W	t	g	е	V <sub>pi</sub> exp.	V <sub>pi</sub> FEM	Pre-stress
					[V]	[V]	[MPa]
250	35	4,8	3	33	48	43	9
300	35	4,8	3	33	35	26	20
350	35	4,8	3	33	31	18	35
400	35	4,8	3	33	29	16	34

Tabella 36 - Trave a doppio incastro con elettrodo distribuito

Risulta interessante notare come la tensione residua nei provini, dovuta al processo di lavorazione, cresca all'aumentare della lunghezza della trave. Lo stress iniziale assume un valore vicino a 10 MPa per la trave più corta e raggiunge un valore maggiore di 30 MPa per lunghezze di 350 micron o superiori.

Anche per questa configurazione, è possibile confrontare la tensione di pull-in analitica con quella fornita dalla seguente formula teorica, valida per trave a doppio incastro con elettrodo distribuito:

$$V_{pi} = \sqrt{\frac{128}{27}} \sqrt{\frac{E t^3 g^3}{\varepsilon_0 L^4}}$$

(54)

In *Tabella 37* sono riportati i risultati per un agile confronto.

Set					
V <sub>pi</sub> FEM [V]	V <sub>pi</sub> teorica [V]				
43	25				
26	15				
18	10				
16	9				

Tabella 37 - Confronto tra tensioni di pull-in

Si nota come la formula teorica fornisca un valore della tensione di pull-in di poco superiore alla metà rispetto a quello suggerito dall'analisi FEM.

# 4 Configurazione di prova per lo studio del comportamento elastoplastico del materiale

Il dispositivo analizzato, visibile in *Figura 35*, rappresenta una configurazione di prova già impiegata per lo studio del comportamento elasto-plastico nella pubblicazione [5].

Questa è composta da due piastre, forate per ridurre l'inerzia, che costituiscono gli elettrodi superiori e sostengono un provino con asse maggiore parallelo a quello delle stesse. Tale provino si configura, quindi, come una trave a doppio incastro. Quattro elementi travati, con asse maggiore parallelo a quello minore delle piastre, rappresentano i vincoli della struttura e sono chiamati molle torsionali.

I due elettrodi inferiori di attuazione sono disposti simmetricamente rispetto al provino centrale, al di sotto delle piastre ed esternamente rispetto alle molle ovvero dal lato più lontano rispetto al campione. In tal modo, la trave centrale subisce la massima deflessione nella direzione positiva dell'asse y (verso l'alto).

Il fine dello studio di tale dispositivo risulta semplicemente la rappresentazione della curva di pull-in sia in ambito perfettamente elastico che elasto-plastico, la valutazione delle sollecitazioni massime di Von Mises nei due casi e, infine, la validazione di una formula empirica, sviluppata per tale configurazione di prova, per stimare la tensione di pull-in.



Figura 35 - Dispositivo di prova per lo studio del comportamento plastico del materiale

### 4.1 Implementazione del modello FEM

### 4.1.1 Geometria

La definizione del tipo di elemento come delle proprietà del materiale avviene in modo analogo a quanto illustrato per il modello precedente.

Le dimensioni caratteristiche della struttura espresse in micrometri sono riportate in Tabella 38.

Parametro	Dimensioni misurate [µm]
Lunghezza della piastra superiore	212
Larghezza della piastra superiore	120
Spessore della piastra superiore	8,2
Lunghezza della trave	27,5
Larghezzadella trave	10
Spessore della trave	3,2
Lunghezza della molla di torsione	28,5
Larghezzadella molla di torsione	11,5
Spessore della molla di torsione	3,2
Diametro dei fori	8,5
Raggio di raccordo	2,5

Tabella 38 - Dimensioni principali della struttura di prova

Tramite il comando "Block", si creano dei volumi (parallelepipedi) associati ai componenti principali della struttura ovvero provino, molle e piastre fornendo come input le coordinate lungo le direzioni x, y e z che li delimitano.

In particolare, ogni piastra è composta da tre parallelepipedi adiacenti in cui quello centrale rappresenta esattamente la proiezione dell'elettrodo inferiore sulla piastra stessa. Così è possibile effettuare una mesh separata su tale volume identificando più precisamente i nodi interessati dall'accoppiamento elettromeccanico.

Al fine di generare i raccordi tra provino centrale e le piastre adiacenti, si impiegano alcuni semplici input per la costruzione di linee prima e volumi successivamente.

Nello specifico, il comando "k" crea dei punti nello spazio dopo aver definito il numero associato ad esso e le sue coordinate. I comandi "larc" ed "l" creano rispettivamente linee circolari o dritte specificando il centro, i punti estremi dell'arco e il raggio nel primo caso o semplicemente i punti iniziale e finale nel secondo. Infine, il comando "al" permette di generare un'area a partire dalle linee che la delimitano e "va", similarmente, un volume a partire dalle aree che lo delimitano.

Il comando "cyl4" permette di generare dei volumi cilindrici conoscendo la posizione del centro sul piano xy, il raggio, gli angoli di inizio e fine del settore espressi in gradi e l'altezza.

Dal momento che i fori presentato tutti lo stesso raggio, si impiega il comando "vgen" per duplicare i cilindri precedentemente creati stabilendo il numero di volumi da generare, compresi quelli di partenza, il set di volumi di partenza e la spaziatura nella direzione voluta.

Tramite "vsel" si selezionano i volumi cilindrici per poterli successivamente sottrarre al volume delle piastre così da ottenere effettivamente dei fori. Bisogna indicare il tipo di selezione attraverso un'opportuna lettera o parola ad esempio "s" indica una nuova selezione, "r" riseleziona un set dalla selezione, "a" aggiunge un set alla selezione, "u" sottrae un set dalla selezione e "all" seleziona tutti gli elementi. Si definisce il tipo di elemento in questo caso volumi ("volu") e il numero ad essi associato.

"vsbv" permette di sottrarre da un volume, indicato dal numero corrispondente, il set di volumi selezionato in precedenza, mentre "vsymm" consente di generare volumi simmetrici a quelli indicati rispetto ad un piano di cui si specifica la normale (l'asse x nel caso in esame).

Dopo aver selezionato tutti gli elementi, si incollano tra loro tutti i volumi, aree o linee per evitare qualunque inconsistenza geometrica ("vglue", "aglue" e "lglue").

La generazione della mesh e degli elementi Trans126 comporta l'impiego dei medesimi comandi descritti per il modello precedente.

In *Tabella 39* sono riportate la dimensione dell'elettrodo di attuazione, il valore del gap e altre informazioni fondamentali.

Parametro	Dimensioni misurate [µm]
Larghezzadell'elettrodo inferiore	49,5
Distanza tra l'asse dell'elettrodo e quello della molla	50
Gap	2,8
Gap minimo	0,01

Tabella 39 - Valori fondamentali per definire gli elementi "Trans126"

# 4.1.2 Condizioni di bordo

Per la definizione dei vincoli, si selezionano i nodi appartenenti alla superficie incastrata delle quattro molle tramite il comando "nsel" e gli input: "s" ovvero nuova selezione, "loc" (localizzazione), "y" (coordinata) e i valori di tale coordinata corrispondenti.

Pertanto è possibile applicare il vincolo alla traslazione nelle direzioni x, y e z impiegando tre volte il comando "d" come descritto per il primo modello.

Infine, si applicano i medesimi vincoli descritti in precedenza sulle selezioni denominate "actuation\_pad" e "actuation\_pad\_ground".

Le superfici vincolate e gli elementi Trans126 generati sono mostrati in *Figura 36*.



Figura 36 - Vincoli ed elementi Trans126 per la seconda struttura

### 4.1.3 Plasticità

Al fine di immettere le proprietà plastiche del materiale, in particolare la curva sforzo-deformazione, si fa uso del comando "tb", il quale permette di attivare una tabella di dati.

Si sceglie il tipo di dati in funzione del modello del materiale, nello specifico l'input selezionato è "kinh" che rappresenta un incrudimento cinematico multilineare.

Gli ulteriori input da inserire sono i seguenti: il numero identificativo del materiale ovvero uno, il numero di temperature per cui sono forniti i dati (di nuovo uno in quanto si fa riferimento ad una sola temperatura), il numero di punti specificati per ogni temperatura (dieci punti della curva stress-strain) e, infine, un numero relativo alle opzioni posto pari a zero (si definisce il legame tra tensione e deformazione totale, non esclusivamente la componente plastica della stessa).

Per definire la temperatura a cui si riferiscono i dati del materiale, si impiega "tbtemp" con input la temperatura espressa in gradi Celsius pari a 25°C.

La curva tensione-deformazione del materiale è riportata in *Figura 37*. Si noti come si abbia un andamento lineare fino ad una tensione di 110 MPa (comportamento elastico).

Il tratto corrispondente ad una deformazione plastica può essere approssimato dalla legge di Ramberg-Osgood:

$$\sigma = K\varepsilon^n$$

in cui K è pari a 276,7043 n, l'esponente di incrudimento, risulta pari a 0,1212 (55)



Figura 37 - Curva tensione-deformazione totale

I criteri di snervamento descrivono la transizione tra il comportamento elastico e plastico per stati di tensione arbitrari.

Nel caso di stato di tensione multi assiale, è possibile calcolare una tensione equivalente  $\sigma_{eq}$  dalle sei componenti del tensore delle tensioni e compararla con una tensione critica  $\sigma_{crit}$ . Il materiale snerva se la tensione equivalente supera il valore critico.

$$\sigma_{eq}(\sigma_{ij}) = \sigma_{crit}$$

$$f(\sigma_{ii}) = \sigma_{eq}(\sigma_{ii}) - \sigma_{crit}$$
(56)

$$(\sigma_{ij})=0$$

(58)

Dal momento che le tensioni principali descrivono completamente uno stato di tensione, eccetto la sua orientazione, la precedente funzione dipende esclusivamente dalle tensioni principali per un materiale isotropo.

f

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

(59)

Tale funzione rappresenta una superficie, detta di snervamento, nello spazio delle tensioni principali. Per stati di tensione entro tale superficie, il materiale si comporta elasticamente, in caso contrario, il materiale snerva.

In generale, lo spazio delle tensioni possiede sei dimensioni e la funzione precedente diventa una ipersuperficie a cinque dimensioni.

Nella realtà, è impossibile ottenere stati di tensione che superano la superficie di snervamento. Per i materiali soggetti a incrudimento, ciò si traduce nel fatto che la superficie stessa cambia durante il carico per assicurare che lo stato di tensione rimanga sempre su di essa.

La deformazione plastica nei metalli è basata su processi di scorrimento nei piani cristallini all'interno dei grani. Lo scorrimento può avvenire su più piani contemporaneamente e la deformazione plastica è causata da tensioni di taglio.

Un metallo non varia il volume durante tale deformazione, ovvero è coinvolta solo la componente deviatorica del tensore delle tensioni. Ciò implica che la superficie di snervamento racchiude la diagonale dello spazio  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , rappresentante uno stato di tensione idrostatico.

Durante la deformazione plastica, la tensione aumenta per via dell'incrudimento e, come accennato in precedenza, la superficie di snervamento varia durante tale deformazione. Questa può cambiare la sua forma, dimensione e posizione nello spazio. Per tenere conto di tale fenomeno, si modifica il criterio di snervamento inserendo termini addizionali:

$$g\!\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{pl}, k_l\right) = 0$$

in cui

 $\varepsilon_{ii}^{pl}$  rappresenta la deformazione plastica corrente

 $k_l$  è un set di parametri di incrudimento che possono dipendere dalla storia della deformazione, il tasso di deformazione o la temperatura

Per tener conto dell'incrudimento, quindi, bisogna definire una quantità che tenga in conto della storia deformativa del materiale. Frequentemente si impiega la deformazione plastica equivalente  $\varepsilon_{eq}^{pl}$  e i parametri di incrudimento sono funzione di tale quantità.

In un materiale caratterizzato da incrudimento cinematico, la superficie di snervamento si muove nello spazio delle tensioni mantenendo inalterate sia la propria forma che dimensione. Dal punto di vista matematico, ciò può essere realizzato sottraendo un backstress cinematico dal tensore delle tensioni nel criterio di snervamento:

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{kin}
ight) = 0$$

Geometricamente, il backstress rappresenta la distanza della superficie di snervamento dall'origine.

g

Dal momento che tale superficie, come detto, trasla nello spazio, il materiale diventa anisotropo in quanto il valore di tensione dipende dalla direzione spaziale. Di conseguenza, il criterio di snervamento non può essere formulato impiegando le tensioni principali.

Il valore del backstress cinematico dipende dalla storia della deformazione del materiale che, poiché anisotropo, non dipende solo dalla deformazione plastica equivalente.

Se si deforma un materiale con incrudimento cinematico in tensione e compressione uniassiale, dopo l'inversione di carico, questo snerva ad una tensione pari a quella relativa all'inversione diminuita di due volte la tensione di snervamento.

Spesso si impiega il termine "effetto Bauschinger" per definire il fenomeno per cui la tensione di snervamento a compressione è inferiore di quella a trazione, come nel caso di incrudimento cinematico.

(60)

(61)

In Ansys, sono disponibili tre modelli di incrudimento cinematico: bilineare, multilineare e non lineare. Ciascuno di essi impiega il criterio di snervamento di Von Mises a meno che non si definisca un criterio di Hill anisotropo e si includa una flow rule associata.

Per incrudimento cinematico multilineare, si intende che il tensore di backstress evolve in modo tale che la relazione tra tensione e deformazione effettive sia multilineare, ovvero la curva sia formata da segmenti i cui estremi sono i punti definiti dall'utente.

Per ulteriori informazioni si rimanda al testo [6] cui si fa riferimento.

# 4.1.4 Risultati

I comandi necessari ad avviare la soluzione e alla consultazione dei risultati coincidono con quelli visti in precedenza trattandosi nuovamente di analisi statica.

Si sono svolte diverse simulazioni con valori crescenti di tensione applicata tra gli elettrodi fino al manifestarsi del fenomeno del pull-in, in corrispondenza del quale l'analisi non perviene a convergenza.

In tal modo, è possibile costruire la curva di pull-in della struttura che riporta il massimo spostamento in direzione z, che coincide con quello del provino, in funzione della differenza di potenziale applicata.

In *Figura 38*, sono rappresentate le curve di pull-in del dispositivo sia per un comportamento del materiale perfettamente elastico che per uno elasto-plastico.



Figura 38 - Curve di pull-in

Come prevedibile, entrambe le curve sono crescenti per cui all'aumentare della differenza di potenziale applicata tra gli elettrodi aumenta anche la massima deformazione. La crescita, inizialmente lenta, accelera con l'approssimarsi della tensione di pull-in, in corrispondenza della quale lo spostamento passa istantaneamente ad un valore pari al gap tra gli elettrodi.

Il massimo spostamento ammissibile prima del manifestarsi del pull-in (a 143 V) è di 1,66  $\mu$ m per un materiale elastico, mentre diminuisce leggermente per uno plastico a 1,46  $\mu$ m (a 141 V).

Per cui la tensione di pull-in calcolata, riferendosi ad un materiale elastico, è pari a 144 V, di poco superiore a quella che si ottiene considerando un materiale elasto-plastico, pari a 142 V.

Il motivo è dovuto al fatto che il materiale plastico presenta una rigidezza inferiore al materiale elastico una volta superato il carico di snervamento dal momento che la pendenza della tangente alla curva di plasticità diminuisce progressivamente dal valore iniziale costante (modulo di elasticità tangenziale E).

Una minore rigidezza è responsabile della diminuzione della tensione di pull-in.

Tale diminuzione è di esigua entità poiché il materiale plasticizza poco dal momento che le sollecitazioni necessarie si raggiungono per una differenza di potenziale superiore a 130 V che è prossima a quella per cui avviene il fenomeno del pull-in.

Questo è evidente dall'osservazione della Figura 39.

A differenza della massima deflessione, che assume valori pressoché identici fino al pull-in indipendentemente dal comportamento del materiale, le curve relative alla massima sollecitazione di Von Mises divergono completamente per una tensione superiore a 130 V.

È risaputo, infatti, che un materiale plasticizza nelle zone in cui si hanno i picchi di sollecitazione riducendoli.

La massima sollecitazione equivalente in prossimità del pull-in, che si manifesta proprio in corrispondenza del provino, risulta pari a 186,75 MPa (a 143 V) per un materiale elastico e 143,73 MPa (a 141 V) tenendo conto della plasticità.



Figura 39 - Sollecitazione di Von Mises nel provino in funzione della tensione applicata

Per tale configurazione di prova, infine, è stata proposta da A. Somà e M. M. Saleem la seguente relazione per stimare la tensione di pull-in:

$$V_{pi} = Y_s \sqrt{\frac{E t^3 g^3}{\varepsilon_0 (L_e + L_p)^4}}$$

in cui

 $Y_s$  è un fattore di forma

E rappresenta il modulo di Young

t rappresenta lo spessore del provino

g rappresenta il gap

 $arepsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto

 $L_e$  rappresenta la distanza tra l'asse della piastra e quello dell'elettrodo inferiore

 $L_p$  rappresenta la distanza tra un'estremità del provino e l'asse di una piastra

Tale relazione è ricavata a partire dalla formula teorica valida per il caso semplice di travi introducendo un fattore di forma incognito.

Questo può essere valutato tramite formula inversa considerando la tensione di pull-in calcolata tramite analisi fem di 144 V (caso elastico).

Il valore delle grandezze di interesse e il risultato sono riassunti in Tabella 40.

E [MPa]	t [µm]	g [µm]	$L_e[\mu m]$	$L_p[\mu m]$	$ε_0$ [μMKS]	<i>V<sub>pi</sub></i> [V]	Y <sub>s</sub>
98500	3,2	2,8	50	106	8,854 10 <sup>-6</sup>	144	1,24
Tabolla 40 Fattore di forma del dianositivo							

Tabella 40 - Fattore di forma del dispositivo

Il presente fattore di forma assume un valore intermedio tra il caso di trave incastrata per cui è pari a 0,47 ( $\sqrt{2}/3$ ) e quello di trave a doppio incastro per cui vale 2,18 ( $\sqrt{128/27}$ ).

Per tener conto della plasticità, la relazione deve essere corretta come segue:

$$V_{pi} = Y_s \sqrt{\frac{\left[E\beta^3 t^3 + E_t(1-\beta^3)t^3\right]g^3}{\varepsilon_0(L_e + L_p)^4}}$$

in cui

 $\beta$  è il rapporto tra la distanza della cerniera plastica dall'asse del provino

 $E_t$  rappresenta la pendenza della retta che approssima l'effetto di incrudimento dopo il limite di snervamento

Calcolando il valore di  $E_t$  come il coefficiente angolare della retta passante per l'ultimo punto della curva di plasticità e il punto corrispondente allo snervamento, è possibile ricavare, sempre per formula inversa, il fattore  $\beta$  considerando la tensione di pull-in calcolata di 142 V (caso plastico).

Il valore delle grandezze di interesse e il risultato sono riassunti in Tabella 41.

$E_t$ [MPa]	V <sub>pi</sub> [V]	β
871,806	142	0,99

### Tabella 41 - Fattore βdel dispositivo

Come intuibile dall'osservazione della formula, un fattore  $\beta$  pari a uno indica che il provino è completamente elastico, viceversa se fosse pari a 0 indicherebbe uno stato puramente plastico. Nel caso specifico,  $\beta$  risulta pari a 0,99 per cui il provino si trova quasi del tutto in ambito elastico. Ciò è la prova quantitativa della conclusione a cui si era pervenuto in precedenza.

(63)

# 5 Configurazione di prova per lo studio dell'effetto di intaglio

La microstruttura, mostrata in *Figura 40*, rappresenta la configurazione di prova già impiegata per lo studio dell'effetto d'intaglio nella pubblicazione [7].

La struttura è composta da due piastre, forate per ridurre l'inerzia, che costituiscono gli elettrodi superiori e che sostengono un provino con asse maggiore parallelo a quello minore delle stesse. Tale provino si configura, quindi, come una trave a doppio incastro con un intaglio posto sul bordo superiore. Otto elementi trapezoidali, quattro per lato ed equidistanti, rappresentano i vincoli della struttura e sono chiamati molle torsionali.

I due elettrodi inferiori di attuazione sono disposti simmetricamente rispetto al provino centrale, al di sotto delle piastre e con asse coincidente a quello maggiore delle piastre. In tal modo, la trave centrale subisce la massima deflessione nella direzione negativa dell'asse y (verso il basso) ed una sollecitazione quasi costante (variabile solo con lo spessore).

Lo studio di tale dispositivo si prefigge come obiettivo l'analisi del comportamento del campione sia in ambito perfettamente elastico che elasto-plastico e la valutazione dell'effetto d'intaglio sul provino.

A tal fine, si rappresentano le curve di pull-in e si valutano le sollecitazioni massime di Von Mises oltre ai fattori di intensificazione delle tensioni in corrispondenza del pull-in per entrambe le condizioni.

Inoltre, si effettua uno studio di sensibilità del risultato, ovvero la tensione di pull-in, al variare di importanti parametri geometrici quale ad esempio il raggio dell'intaglio tramite una progettazione degli esperimenti.

Infine, si applica una tensione ciclica dallo zero al fine di studiare l'avanzamento della zona plastica all'apice dell'intaglio.



Figura 40 - Dispositivo di prova per lo studio dell'effetto di intaglio

### 5.1 Implementazione del modello FEM

### 5.1.1 Geometria

La definizione del tipo di elemento e delle proprietà del materiale è analoga ai casi precedenti. I dati sul materiale come la curva di plasticità sono analoghi a quelli del secondo modello.

Inizialmente, si definiscono le dimensioni caratteristiche della struttura espresse in micrometri e riportate in **Tabella 42**.

Parametro	Dimensioni misurate [µm]
Lunghezza della piastra superiore	85
Larghezza della piastra superiore	350
Spessore della piastra superiore	5,2
Lunghezza della trave	28,5
Larghezzadella trave	20
Spessore della trave	1,8
Lunghezza della molla di torsione	48,2
Larghezzaminore della molla di torsione	14,8
Larghezza maggiore della molla di torsione	24,8
Spessore della molla di torsione	5,2
Diametro dei fori	7,8
Raggio di raccordo	4
Raggio dell'intaglio	5

Tabella 42 - Dimensioni principali della struttura di prova

Tramite il comando "block", si creano dei volumi (parallelepipedi) associati ai componenti principali della struttura ovvero provino epiastrefornendo come input le coordinate lungo le direzioni x, y e z che li delimitano.

Anche per quest'ultimo modello, ogni piastra è composta da tre parallelepipedi adiacenti in cui quello centrale rappresenta esattamente la proiezione dell'elettrodo inferiore sulla piastra stessa.

La generazione dei raccordi tra provino centrale e le piastre adiacenti prevede l'impiego dei medesimi comandi per la costruzione di entità geometriche descritti per il modello della struttura 2.

Tali comandi sono sfruttati, anche, per la costruzione di una molla a base trapezoidale. Tramite il comando "vgen", tale componente viene duplicato imponendo il numero di volumi da generare, compresi quelli di partenza, il numero associato ai volumi da moltiplicare e la spaziatura nella direzione voluta. Infine "vsymm" consente di generare volumi simmetrici a quelli indicati rispetto ad un piano di cui si specifica la normale (l'asse x nel caso in esame).

Infine, si creano i fori nelle piastre come visto in precedenza dal momento che, nuovamente, questi presentano tutti lo stesso raggio.

Dopo aver selezionato tutti gli elementi, si incollano tra loro i volumi, le aree e le linee per evitare qualunque inconsistenza geometrica ("vglue", "aglue" e "lglue").

La generazione della mesh e degli elementi Trans126 segue lo stesso iter visto per i casi precedenti.

In *Tabella 43* sono riportate la dimensione dell'elettrodo di attuazione, il valore del gap e altre informazioni fondamentali.

Parametro	Dimensioni misurate [µm]	
Larghezzadell'elettrodo inferiore	35	
Distanza tra l'asse dell'elettrodo ed estremità della	42,5	
piastra		
Gap	3,2	
Gap minimo	0,01	

Tabella 43 - Valori fondamentali per definire gli elementi "Trans126"

# 5.1.2 Condizioni di bordo

Per la definizione dei vincoli, si selezionano i nodi appartenenti alla superficie incastrata delle quattro molle tramite il comando "nsel" e gli input: "s" ovvero nuova selezione, "loc" (localizzazione), "x" (coordinata) e i valori di tale coordinata corrispondenti.

Pertanto è possibile applicare il vincolo alla traslazione nelle direzioni x, y e z impiegando tre volte il comando "d" come descritto per i modelli precedenti.

Infine, si applicano i medesimi vincoli descritti in precedenza sulle selezioni denominate "actuation\_pad" e "actuation\_pad\_ground".

Le superfici vincolate e gli elementi Trans126 generati sono mostrati in Figura 41.



Figura 41 - Configurazione di vincolo ed elementi Trans126

### 5.1.3 Risultati

I comandi necessari ad avviare la soluzione e alla consultazione dei risultati coincidono con quelli visti in precedenza trattandosi nuovamente di analisi statica.

Si sono svolte diverse simulazioni con valori crescenti di tensione applicata tra gli elettrodi fino al manifestarsi del fenomeno del pull-in, in corrispondenza del quale l'analisi non perviene a convergenza. In tal modo, è possibile costruire la curva di pull-in della struttura che riporta il massimo spostamento in

direzione z, che coincide con quello del provino, in funzione della differenza di potenziale applicata.

In *Figura 42*, sono rappresentate le curve di pull-in del dispositivo sia per un comportamento del materiale perfettamente elastico che per uno elasto-plastico.



Figura 42 - Curva di pull-in per un materiale elastico ed elasto-plastico

Come prevedibile, entrambe le curve sono crescenti per cui all'aumentare della differenza di potenziale applicata tra gli elettrodi aumenta anche la massima deformazione. La crescita, inizialmente lenta, accelera con l'approssimarsi della tensione di pull-in, in corrispondenza della quale lo spostamento passa istantaneamente ad un valore pari al gap tra gli elettrodi.

La tensione di pull-in calcolata, riferendosi ad un materiale elastico, è pari a 215 V, di poco superiore a quella che si ottiene considerando un materiale elasto-plastico, pari a 211 V.

Come spiegato per il precedente dispositivo, il motivo di una minore tensione di pull-in, quando viene presa in considerazione la plasticità, è da attribuire ad una diminuzione di rigidezza della struttura.

Questa volta, tuttavia, la diminuzione, seppur sempre modesta, è maggiore rispetto al caso precedente poiché il materiale plasticizza di più dal momento che le sollecitazioni necessarie si raggiungono per una differenza di potenziale superiore a 150 V che è abbastanza lontana da quella per cui avviene il fenomeno del pull-in.

Questo è evidente dall'osservazione della Figura 43.

A differenza della massima deflessione, che assume valori pressoché identici fino al pull-in indipendentemente dal comportamento del materiale, le curve relative alla massima sollecitazione di Von Mises divergono completamente per una tensione superiore a 150 V.

È risaputo, infatti, che un materiale plasticizza nelle zone in cui si hanno i picchi di sollecitazione riducendoli.

La massima sollecitazione equivalente in prossimità del pull-in, che si manifesta proprio in corrispondenza del provino, risulta pari a 433,97 MPa (a 214 V) per un materiale elastico e 153,56 MPa (a 210 V) tenendo conto della plasticità.



Figura 43 - Massima sollecitazione di Von Mises per un materiale elastico ed elasto-plastico

In seguito verranno presentati gli andamenti nel provino delle grandezze di interesse per un comportamento elastico e plastico del materiale appena prima del manifestarsi del pull-in (a 214 V e 210 V rispettivamente).

Nelle due figure sottostanti, è rappresentato l'andamento dello spostamento lungo z nel dispositivo tramite aree colorate nei due casi.

Gli andamenti risultano identici al contrario dell'entità dello spostamento e quindi dei valori della scala cromatica.

Lo spostamento del provino, in ambito elastico, risulta 1,74  $\mu$ m, mentre si riduce a 1,64  $\mu$ m considerando la plasticità.

La deformazione risulta prossima allo zero negli elementi vincolati e cresce quasi indipendentemente dalla coordinata y lungo l'asse x raggiungendo il massimo nella zona delle piastre prossima al provino oltre che nello stesso.


Figura 44 - Spostamento lungo z alla tensione di pull-in (materiale elastico)



Figura 45 - Spostamento lungo z alla tensione di pull-in (materiale plastico)

Nelle figure sottostanti, invece, è rappresentato l'andamento della sollecitazione di Von Mises nel provino sempre tramite aree colorate.

Anche questa volta, gli andamenti si differenziano solo in termini quantitativi e non nella forma.

Per un materiale elastico, si ottiene il massimo della sollecitazione all'apice dell'intaglio sulla faccia inferiore del provino. Partendo da tale punto di hot spot, la sollecitazione decresce in modo circonferenziale fino a raggiungere un valore compreso tra 193 e 241 MPa (colore verde) in una zona centrale della faccia inferiore allungata verso i raggi di raccordo. Qui, sempre a causa di un certo effetto d'intaglio, la sollecitazione raggiunge un massimo relativo compreso tra 289 e 337 MPa (colore giallo). Lo stress diminuisce progressivamente verso le piastre fino a valori pressoché nulli.

Sulla faccia superiore, l'andamento è analogo, ma caratterizzato da sollecitazioni inferiori. Infatti, a causa della configurazione di carico e di vincolo, il provino risulta soggetto a trazione sulla faccia inferiore e a compressione su quella superiore come confermato dalla prima tensione principale riportata in seguito.

Analogamente per un materiale plastico, le sollecitazioni raggiungono il massimo all'apice dell'intaglio sulla faccia inferiore e si estende lungo tutto lo spessore del provino e verso il centro dello stesso con valori compresi tra 136 e 153 MPa, superiori al carico di snervamento di 110 MPa.

La zona plastica si estende dall'apice dell'intaglio verso i raggi di raccordo sulla faccia inferiore, punti in cui le sollecitazioni raggiungono un massimo relativo sempre per un certo effetto d'intaglio, prosegue lungo lo spessore verso i raggi di raccordo sul bordo superiore. Un'altra piccola zona plastica si trova nei pressi dell'apice dell'intaglio sulla faccia superiore. Da qui, le sollecitazioni decrescono progressivamente verso le piastre, in modo più veloce sulla faccia superiore rispetto a quella inferiore per quanto spiegato in precedenza.



Figura 46 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (materiale elastico, retro)



Figura 47 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (materiale elastico, fronte)



Figura 48 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (materiale plastico, retro)



Figura 49 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (materiale plastico, fronte)

#### 5.2 Validazione del modello analitico

#### 5.2.1 Comportamento elastico del materiale

Valutando gli spostamenti orizzontale e verticale di un estremo del provino per una tensione di 214 V è possibile calcolare la sollecitazione agente come segue (testo [9]):

$$u = 0,02 \ \mu m$$

$$v = 1,65 \ \mu m$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = 0,012 \ rad$$

$$F = \frac{EA}{l}u = 1,493 \ 10^{-3} \ N$$

$$\sigma_a = \frac{F}{A} = 69,12 \ MPa$$
(64)
(65) e (66)

$$M = \frac{4EI}{l}\alpha = 9,772 \ 10^{-4} \ N\mu m \qquad \sigma_f = \frac{M}{W_f} = 150,81 \ MPa$$

$$\sigma_{tot} = \sigma_a + \sigma_f = 219,93 \ MPa$$
(67) e (68)

(69)

Considerando un fattore di intensificazione delle tensioni K<sub>t</sub> in ambito elastico pari a 1,9 (paragrafo 5.3.1):

 $\sigma_{apice} = K_t \sigma_{tot} = 417,87 MPa$ 

(70) Von Mises calcolata

Tale valore di sollecitazione all'apice dell'intaglio risulta prossimo alla sollecitazione di Von Mises calcolata dal software pari a 420,48 MPa.

#### 5.2.2 Comportamento elasto-plastico del materiale

Valutando l'estensione della zona elastica lungo lo spessore del provino t' per una tensione di 210 V è possibile calcolare la sollecitazione agente come segue (testo [9]):

$$t' = 1,62 \, \mu m$$

$$M = \sigma_y \frac{bt}{2} \frac{t}{2} - \frac{\sigma_y}{2} b \frac{t'}{2} \frac{t'}{3} = 780,516 \ 10^{-6} \ N\mu m$$
(71)

Tramite l'equazione (68):

$$\sigma_f = \frac{M}{W_f} = 120,45 MPa$$

Considerando il fattore di intensificazione delle tensioni  $K_{t,\sigma}$  in ambito plastico pari a 1,2 (paragrafo 5.3.2) e l'equazione (70):

$$\sigma_{apice} = K_{t,\sigma}\sigma_{tot} = 144,54 MPa$$

Tale valore di sollecitazione all'apice dell'intaglio risulta prossimo alla sollecitazione di Von Mises calcolata dal software pari a 153,18 MPa.

### 5.3 Fattori di intensificazione delle tensioni

Uno degli obiettivi della presente è quello di studiare l'effetto introdotto da un intaglio sul provino quando il dispositivo è soggetto ad un'attuazione elettrostatica.

A tal scopo, si è costruito un modello della struttura simile al precedente, ma con un provino centrale privo dell'intaglio e con una sezione resistente equivalente a quella del provino intagliato.

## 5.3.1 Comportamento elastico del materiale

Nel caso di un materiale elastico, il provino non intagliato presenta una tensione di pull-in pari a 213 V per cui si sceglie la prima tensione possibile, ovvero 212 V, per confrontare le massime sollecitazioni raggiunte al centro del provino liscio con quelle verificatesi all'apice dell'intaglio.

Si fa riferimento al valori della prima tensione principale perché esprime la massima sollecitazione nel materiale.

In *Tabella 44* sono riportati i valori delle sollecitazione e il fattore di intensificazione calcolato tramite l'equazione (21).

	Provino liscio	Provino intagliato	Fattore di intensificazione delle tensioni K <sub>t</sub>
Prima tensione principale 212 V	207	393,51	1,9
[MPa]			

Tabella 44 - Fattore di in	tensificazione delle	tensioni	(elastico)	)

## 5.3.2 Comportamento elasto-plastico del materiale

Per un materiale plastico, invece, si sceglie una tensione di 209 V per confrontare sia la massima sollecitazione che la massima deformazione al centro del provino liscio con quelle sviluppatesi all'apice dell'intaglio.

In ambito lineare elastico, il rapporto tra le sollecitazioni coincide con quello tra le deformazione poiché è valida la legge di Hook. In ambito plastico, il rapporto tra le sollecitazioni si riduce a causa di un parziale scaricamento locale con conseguente diminuzione della massima sollecitazione, mentre la massima deformazione aumenta rispetto al caso elastico. Per cui il rapporto tra le sollecitazioni risulta minore a quello tra le deformazioni, ma Neuber suggerisce che il significato geometrico di tali rapporti non cambia se il materiale snerva:

$$K_{t,\sigma} * K_{t,\varepsilon} = K_t^2$$

(72)

In *Tabella 45* sono riportati i valori delle sollecitazioni, delle deformazioni e il fattore di intensificazione.

	Provino liscio	Provino intagliato	$K_{t,\sigma}$ e $K_{t,arepsilon}$	Fattore di intensificazione K <sub>t</sub>
Prima tensione principale 209 V [MPa]	132	158,34	1,2	1 74
Prima deformazione principale 209 V	0,19224 10 <sup>-2</sup>	0,48513 10 <sup>-2</sup>	2,52	1,74

Tabella 45 - Fattore di intensificazione delle tensioni (plastico)

Nelle figure sottostanti, sono riportati gli andamenti della prima tensione principale nel provino tramite aree colorate sia per un comportamento elastico che plastico, appena prima del pull-in (a 214 V e 210 V rispettivamente).

Non si indugia nella descrizione di tali andamenti in quanto simili a quelli relativi alla sollecitazione di Von Mises.

In termini quantitativi, invece, i valori assunti dalla prima tensione principale sono superiori.

Una tensione equivalente, infatti, tiene conto di tutte le sei componenti del tensore delle tensioni secondo un'ipotesi di rottura (quella di Von Mises nei casi di studio presenti) e pertanto può risultare inferiore alla prima tensione principale.



Figura 50 - Prima tensione principale nel provino (materiale elastico, retro)



Figura 51 - Prima tensione principale nel provino (materiale elastico, fronte)



Figura 52 - Prima tensione principale nel provino (materiale plastico, retro)



Figura 53 - Prima tensione principale nel provino (materiale plastico, fronte)

### 5.4 Studio di variabilità a più parametri

#### 5.4.1 Progettazione fattoriale 3<sup>3</sup>

In questa sezione, si studia la sensibilità di una variabile d'uscita alla variazione di alcuni parametri d'ingresso.

Nello specifico, si sceglie la tensione di pull-in come output perché significativa nel descrivere il comportamento di tale dispositivo soggetto ad un'attuazione elettrostatica. Come input, invece, si sono scelti i parametri geometrici che, almeno in teoria, presentano maggiore influenza sulla tensione di pull-in ovvero lo spessore del provino e il gap tra gli elettrodi oltre che il raggio dell'intaglio.

Una progettazione fattoriale 3<sup>3</sup>, come spiegato nella sezione dedicata alla progettazione degli esperimenti, indica la presenza di tre fattori ognuno dei quali può assumere tre livelli distinti.

I livelli sono scelti in modo coerente in base alle dimensioni tipiche di questo tipo di dispositivi. Il livello centrale (zero) rappresenta la media tra gli estremi del campo di variazione ovvero i livelli -1 ed 1.

La Tabella 46 riassume i fattori considerati e i relativi livelli.

Fattore		Livelli [µm]				
Spessore provino t	1,8	3,3	4,8			
Gap tra gli elettrodi g	2	3	4			
Raggio d'intaglio r	1	3	5			

Tabella 46 - Fattori di input e relativi livelli

I risultati per tutte le possibili combinazioni sono riportati in *Tabella* 47.

r		-1		0				1			
		g			g			g			
t	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1		
-1	105	197	311	105	196	310	104	194	306		
0	106	198	312	105	197	311	104	195	308		
1	110	203	317	109	202	316	108	200	313		

Tabella 47 - Tensione di pull-in in funzione di t, g ed r

Per interpolare i dati sperimentali, si adotta l'equazione (45):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \beta_3 x_3^2 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \varepsilon$$

in cui

x1 rappresenta lo spessore del provino

x<sub>2</sub> rappresenta il gap tra gli elettrodi

x<sub>3</sub> rappresenta il raggio dell'intaglio

La precedente si può scrivere anche in forma matriciale tramite l'equazione (46):

$$y = \beta X + \varepsilon$$

in cui

y è un vettore riga (1,27) che contiene tutti i risultati in Tabella 47

 $\beta$  è un vettore riga (1,11) contenente i coefficienti di regressione

X è una matrice (11,27) delle combinazioni dei livelli delle variabili indipendenti

 $\epsilon$  è un vettore riga (1,27) contenente gli errori per ogni prova

La matrice dei coefficienti di regressione  $\beta$  si può stimare, trascurando gli errori, tramite formula inversa secondo il calcolo matriciale ed è riportata in **Tabella 48**.

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{0}$	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\beta}_{12}$	$\widehat{\beta}_{13}$	$\widehat{\beta}_{23}$	$\widehat{\beta}_{11}$	$\widehat{\beta}_{22}$	$\widehat{\beta}_{33}$	$\widehat{\beta}_{123}$
197,15	2,78	102,67	-1,5	0,5	0	-0,67	1,89	10,89	-0,61	0,25

In seguito, si calcola un vettore di risposta  $y' = \hat{\beta} X$  tramite i coefficienti stimati e si ottiene il vettore degli errori tramite l'equazione (47):

$$\varepsilon = y - y'$$

Per poter stimare la varianza  $\sigma^2$ , si calcola la somma dei quadrati dei residui e si divide per i gradi di libertà associati ad esso. In seguito si riportano le equazioni (48) e (49):

$$SS_E = \varepsilon \varepsilon' = 1,91$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(27 - 11)} = 0,12$$

Il metodo dei minimi quadrati produce uno stimatore imparziale di  $\beta$ , ovvero il suo valore atteso coincide col valore vero. La matrice di covarianza di $\hat{\beta}$  è espressa dall'equazione (50):

$$Cov(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^{2} (X X')^{-1}$$

Le radici quadrate dei termini sulla diagonale principale di tale matrice rappresentano gli errori standard dei parametri del modello, visibili in **Tabella 49**.

ε0	ε1	ε2	ε3	ε <sub>12</sub>	ε <sub>13</sub>	ε <sub>23</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>	ε <sub>33</sub>	ε <sub>123</sub>
0,18	0,08	0,08	0,08	0,1	0,1	0,1	0,14	0,14	0,14	0,12
	_						-			

Tabella 49 - Errori standard dei coefficienti di regressione del modello

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 16 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (27-11) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,16} = 2,12$$

Dal momento che la stima di  $\beta$  è normalmente distribuita, si calcolano gli intervalli di confidenza dei coefficienti di regressione tramite la relazione (51):

$$\hat{\beta}_i - t_{0.025,16} \varepsilon_i \le \beta_i \le \hat{\beta}_i + t_{0.025,16} \varepsilon_i$$

	β <sub>0</sub>	β1	β2	β <sub>3</sub>	β <sub>12</sub>	β <sub>13</sub>	β <sub>23</sub>	β <sub>11</sub>	β22	β <sub>33</sub>	β <sub>123</sub>
L	196,78	2,61	102,49	-1,67	0,29	-0,21	-0,88	1,59	10,59	-0,91	-0,01
Ls	197,52	2,95	102,84	-1,33	0,71	0,21	-0,46	2,19	11,19	-0,31	0,51
	Tabella 50. Estuami degli internalli di confidenza dei coefficienti del modello										

Tabella 50 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

In *Tabella 50* sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza.

Si osserva come il secondo fattore ovvero il gap tra gli elettrodi abbia la maggiore influenza sulla tensione di pull-in. Questa risulta poco sensibile allo spessore del provino per tale configurazione di prova e ancor meno al raggio dell'intaglio.

Considerando le interazioni tra i fattori, queste mostrano in generale poca influenza. Osservando i coefficienti relativi, si nota come l'interazione tra gap e raggio d'intaglio abbia leggermente più effetto sull'uscita rispetto a quella tra gap e spessore del provino. L'interazione tra tutti e tre i fattori risulta, invece, trascurabile.

Interessante notare come il coefficiente associato all'interazione tra spessore del provino e raggio dell'intaglio si trovi in un intervallo intorno allo zero. Infatti, dall'analisi dei risultati si osserva che le tensioni di pull-in variano di pochi volt modificando tali parametri d'input.

### 5.4.2 Progettazione fattoriale 3<sup>2</sup>

Studiando l'effetto di tre fattori contemporaneamente non è possibile ottenere una rappresentazione grafica poiché si tratta di un'ipersuperficie in uno spazio 4-dimensionale. Tuttavia, è possibile fissare un fattore ad un certo livello e ottenere la rappresentazione tridimensionale della variabile d'uscita in funzione degli altri due ingressi sfruttando i coefficienti di regressione già calcolati.

Nel caso in esame, si è preferito studiare l'effetto di due variabili di input fissando la terza ad un determinato livello tramite l'equazione (52):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \varepsilon$$

La precedente si può scrivere anche in forma matriciale secondo l'equazione (51):

$$y = \beta X + \varepsilon$$

in cui

y è un vettore riga (1,9) che contiene tutti i risultati  $\beta$  è un vettore riga (1,6) contenente i coefficienti di regressione X è una matrice (6,9) delle combinazioni dei livelli delle variabili indipendenti  $\epsilon$  è un vettore riga (1,9) contenente gli errori per ogni prova

## Spessore del provino - gap tra gli elettrodi

Inizialmente, si decide di studiare l'effetto combinato di spessore del provino e gap tra gli elettrodi sulla tensione di pull-in mantenendo il raggio dell'intaglio al livello 1 ovvero pari a 5  $\mu$ m. In **Tabella 51** sono riportati i risultati delle simulazioni.

		g	
t	-1	0	1
-1	104	194	306
0	104	195	308
1	108	200	313

Tabella 51 - Tensione di pull-in in funzione di t e g (r = 5  $\mu$ m)

Come in precedenza, si possono stimare i coefficienti di regressione  $\beta$ , riportati in **Tabella 52**.

$\widehat{\beta}_0$	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_{12}$	$\widehat{\beta}_{11}$	$\widehat{\beta}_{22}$
195,11	2,83	101,83	0,75	1,83	10,83

Tabella 52 - Coefficienti di regressione del modello

Si noti come i coefficienti siano variati di qualche decimo o addirittura centesimo, ad eccezione del termine costante che rappresenta il valore che il risultato assume al centro. L'interazione tra i due fattori mostra nuovamente uno scarso effetto sul risultato.

Dopo aver calcolato la somma dei quadrati dei residui, si stima la varianza:

$$SS_E = \varepsilon \varepsilon' = 0,194$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(9-6)} = 0,065$$

Gli errori standard dei coefficienti del modello sono riportati in Tabella 53.

ε <sub>0</sub>	ε <sub>1</sub>	ε2	ε <sub>12</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>
0,19	0,10	0,10	0,13	0,18	0,18

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 3 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (9 - 6) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,3} = 3,182$$

Dal momento che la stima di  $\beta$  è normalmente distribuita, si calcolano gli intervalli di confidenza dei coefficienti di regressione:

$$\hat{\beta}_i - t_{0.025,16} \varepsilon_i \le \beta_i \le \hat{\beta}_i + t_{0.025,16} \varepsilon_i$$

	β <sub>0</sub>	$\beta_1$	β2	β <sub>12</sub>	β <sub>11</sub>	β22
L	194,51	2,50	101,50	0,34	1,26	10,26
Ls	195,72	3,16	102,16	1,16	2,41	11,41

Tabella 54 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

In *Tabella 54* sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza.

Seppur gli intervalli di confidenza siano maggiori rispetto al modello con tre fattori poiché sono coinvolti meno gradi di libertà, la somma dei quadrati dei residui e la varianza stimata sono inferiori indicando una migliore interpolazione dei dati nel range di interesse.

In *Figura 54* è mostrata la superficie di risposta.



Figura 54 - Superficie di risposta spessore provino - gap

La tensione di pull-in cresce quasi linearmente all'aumentare del gap tra gli elettrodi triplicando il suo valore per una variazione del gap da 2 a 4 micron.

Al contrario, il risultato cresce lentamente per uno spessore del provino da 1,8 a 3,3 micron, per poi accelerare leggermente fino all'estremo superiore di 4,8 micron.

Tali comportamenti sono pressoché indipendenti tra di loro, da qui il termine di interazione quasi nullo, si può notare una maggiore crescita della tensione al variare dello spessore per gap crescenti e analogamente una maggiore crescita al variare del gap per spessori crescenti.

### Spessore del provino - raggio dell'intaglio

In un secondo tempo, si decide di studiare l'effetto combinato di spessore del provino e raggio dell'intaglio sulla tensione di pull-in mantenendo il gap tra gli elettrodi al livello 0 ovvero pari a 3  $\mu$ m. In **Tabella 55** sono riportati i risultati delle simulazioni.

		r	
t	-1	0	1
-1	197	196	194
0	198	197	195
1	203	202	200

Tabella 55 - Tensione di pull-in in funzione di t e r (g = 3  $\mu$ m)

Come in precedenza, si possono stimare i coefficienti di regressione  $\beta$ , riportati in **Tabella 56**.

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{0}$	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\beta}_{13}$	$\widehat{\beta}_{11}$	$\widehat{\beta}_{33}$
197	3	-1,5	0	2	-0,5

L'interazione tra i due fattori mostra nuovamente un valore nullo per cui non esiste un effetto combinato di spessore del provino e raggio d'intaglio sulla tensione di pull-in per tale configurazione di prova.

I punti si distribuiscono esattamente su una superficie per cui la somma dei quadrati dei residui e la stima della varianza assumono valori nulli. Per questo motivo, non ha senso definire errori standard dei coefficienti di regressione e intervalli di confidenza.

In *Figura 55* è mostrata la superficie di risposta.



Figura 55 - Superficie di risposta spessore provino - raggio d'intaglio

La tensione di pull-in decresce lentamente all'aumentare del raggio dell'intaglio fino al livello 0 (3 micron) per accelerare leggermente per valori crescenti (fino all'estremo superiore pari a 5 micron).

Al contrario, il risultato cresce lentamente per uno spessore del provino da 1,8 a 3,3 micron, per poi accelerare di poco fino all'estremo superiore di 4,8 micron.

Tali comportamenti sono indipendenti tra di loro, da qui il termine di interazione nullo.

### Gap tra gli elettrodi - raggio dell'intaglio

Infine, si studia l'effetto combinato di gap tra gli elettrodi e raggio dell'intaglio sulla tensione di pull-in mantenendo lo spessore del provino al livello -1 ovvero pari a 1,8 μm. In **Tabella 57** sono riportati i risultati delle simulazioni.

		g	
t	-1	0	1
-1	105	105	104
0	197	196	194
1	311	310	306

Tabella 57 - Tensione di pull-in in funzione di g e r (t =  $1,8\mu m$ )

Come in precedenza, si possono stimare i coefficienti di regressione  $\beta$ , riportati in **Tabella 58**.

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{0}$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\beta}_3$	$\widehat{\beta}_{23}$	$\widehat{\beta}_{22}$	$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{33}$
196,22	102,17	-1,5	-1	11,17	-0,83

```
Tabella 58 - Coefficienti di regressione del modello
```

Dopo aver calcolato la somma dei quadrati dei residui, si stima la varianza:

$$SS_E = \varepsilon \varepsilon' = 0.44$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{(9-6)} = 0.15$$

Gli errori standard dei coefficienti del modello sono riportati in Tabella 59.

ε <sub>0</sub>	ε <sub>1</sub>	ε2	ε <sub>12</sub>	ε <sub>11</sub>	ε <sub>22</sub>
0,29	0,16	0,16	0,19	0,27	0,27

#### Tabella 59 - Errori standard dei coefficienti di regressione del modello

Infine, si considera una funzione di probabilità t di Student per 3 gradi di libertà ovvero il numero di prove diminuito del numero dei coefficienti del modello (9 - 6) ed un livello di confidenza pari al 95% ( $\alpha$  = 0,025):

$$t_{0.025,3} = 3,182$$

Dal momento che la stima di  $\beta$  è normalmente distribuita, si calcolano gli intervalli di confidenza dei coefficienti di regressione:

$$\hat{\beta}_i - t_{0.025,16}\varepsilon_i \le \beta_i \le \hat{\beta}_i + t_{0.025,16}\varepsilon_i$$

	β <sub>0</sub>	β1	β2	β <sub>12</sub>	β <sub>11</sub>	β22
L	195,31	101,67	-2	-1,61	10,3	-1,7
Ls	197,14	102,67	-1	-0,39	12,03	0,03

Tabella 60 - Estremi degli intervalli di confidenza dei coefficienti del modello

In *Tabella 60* sono riportati il limite inferiore e superiore degli intervalli di confidenza.

Seppur gli intervalli di confidenza siano nuovamente maggiori rispetto al modello con tre fattori poiché sono coinvolti meno gradi di libertà, la somma dei quadrati dei residui è inferiore indicando una migliore interpolazione dei dati nel range di interesse.

In *Figura 56* è mostrata la superficie di risposta.



Figura 56 - Superficie di risposta gap - raggio d'intaglio

La tensione di pull-in cresce notevolmente all'aumentare del gap tra gli elettrodi, come visto nel primo caso, ma con una velocità crescente.

Al contrario, il risultato decresce lentamente per uno raggio dell'intaglio tra 1 a 3 micron, per poi accelerare leggermente fino all'estremo superiore di 5 micron.

Tali comportamenti sono pressoché indipendenti tra di loro, da qui il termine di interazione quasi nullo, si può notare una maggiore crescita della tensione al variare del gap per raggi d'intaglio decrescenti e analogamente una maggiore diminuzione al variare del raggio tra 3 e 5 micron per gap crescenti.

### 5.5 Carico ciclico

Nella presente sezione, si studiano gli effetti sul provino quando il dispositivo è soggetto ad un carico ciclico.

In particolare, si applica una differenza di potenziale tra gli elettrodi pari a 180 V e successivamente viene ridotta ad un valore nullo in modo alternativo. Si ottiene una sollecitazione pulsante con rapporto di carico pari a zero.

L'evoluzione del danno fino alla rottura nei metalli sotto carico ciclico è caratterizzata da diversi stage:

- Iniziazione della cricca
- Propagazione della cricca sotto carico ciclico
- Rottura finale del componente

La frattura di fatica ha origine nelle zone maggiormente caricate del componente. Una locale concentrazione delle tensioni è dovuta, come dissertato in precedenza, alla presenza di intagli.

Una volta generatasi, se il componente era inizialmente privo di difetti, la cricca cresce preferenzialmente nei grani con piani di scorrimento disposti a 45° rispetto alla prima tensione principale.

La microcricca è soggetta al modo II o III di apertura nel primo stage di propagazione. La crescita in questa fase è lenta e, quando raggiunge un bordo di grano, la cricca deve propagarsi di solito in un grano con sistemi di scorrimento orientati meno favorevolmente e questo può anche fermare definitivamente l'avanzamento.

Se la cricca raggiunge una lunghezza tale per cui la sollecitazione all'apice permette l'attivazione dei sistemi di scorrimento meno ben orientati, questa cambia orientazione al modo I di apertura perpendicolare alla prima tensione principale. La microcricca diventa una macrocricca e si passa al secondo stage di propagazione.

A causa della concentrazione delle tensioni, si forma una zona plastica all'apice della cricca causando una lieve apertura e propagazione. Durante lo scaricamento la cricca si chiude e, a causa della locale plasticizzazione, si formano delle tensioni residue di compressione.

Se il carico esterno è maggiore di tale stress residuo, la cricca subisce un certo incremento e la sua lunghezza cresce per ogni ciclo di carico. La propagazione è stabile.

La frattura finale avviene quando la cricca raggiunge una dimensione tale che il fattore di concentrazione raggiunge la tenacità a frattura del materiale causandone la propagazione instabile.

Per ulteriori informazioni si rimanda al testo [6] cui si fa riferimento.

La tensione da applicare agli elettrodi è scelta in modo tale per cui il materiale subisca una certa deformazione plastica, ma non si trovi in prossimità del pull-in.



Figure 57 e 58 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (primo ciclo di carico a 180 V)

Per il primo ciclo di carico, si osserva come il materiale ceda plasticamente in una piccola zona sulla faccia inferiore (zona colorata in rosso delle *Figure 57 e 58*) con epicentro proprio l'apice dell'intaglio e in corrispondenza dei raggi di raccordo sul bordo opposto per un ulteriore effetto d'intaglio.

Dopo il secondo ciclo, la zona plastica sul retro del provino si è estesa lungo tutto lo spessore all'apice dell'intaglio come osservabile nelle *Figure 59 e 60*.



Figure 59 e 60 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (secondo ciclo di carico a 180 V)

Con il terzo ciclo di carico, la deformazione plastica raggiunge la faccia superiore del provino all'apice dell'intaglio e cresce lungo lo spessore a partire dai raggi di raccordo sul bordo inferiore. Sulla faccia inferiore, la zona plastica centrale avanza verso il bordo opposto.



Figure 61 e 62 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (terzo ciclo di carico a 180 V)

Dal quarto al settimo ciclo di carico, si assiste ad una convergenza delle zone plastiche sulla faccia inferiore (una all'apice e due in corrispondenza dei raggi di raccordo), fino al congiungimento in corrispondenza del settimo ciclo di carico (*Figure 69 e 70*).

Sulla faccia superiore, si osserva un aumento delle sollecitazioni tra l'apice e i raggi di raccordo con veloce avanzamento della deformazione plastica, fino a completo congiungimento tra il settimo e l'ottavo ciclo di carico (*Figure 71 e 72*).



Figure 63 e 64 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (quarto ciclo di carico a 180 V)



Figure 65 e 66 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (quinto ciclo di carico a 180 V)



Figure 67 e 68 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (sesto ciclo di carico a 180 V)



Figure 69 e 70 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (settimo ciclo di carico a 180 V)

Nelle figure seguenti, sono riportati i risultati ottenuti fino al decimo ciclo di carico. Si presume che il provino pervenga a rottura meccanica dal momento che tutta la sezione resistente, dall'apice dell'intaglio verso i raggi di raccordo sul bordo opposto, risulta deformata plasticamente.



Figure 71 e 72 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (ottavo ciclo di carico a 180 V)



Figure 73 e 74 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (nono ciclo di carico a 180 V)



Figure 75 e 76 - Sollecitazione di Von Mises nel provino (decimo ciclo di carico a 180 V)

### 5.6 Analisi modale

Nel presente capitolo si riporta il procedimento seguito per lo studio dinamico del modello realizzato. Nello specifico, si è studiato il comportamento libero del dispositivo.

All'interno del solutore ("/Solu"), si impiega, come in precedenza, il comando "antype" per specificare il tipo di analisi. Questa volta, però, il primo e solo input fornito è pari a due che identifica un'analisi modale. Il comando "modopt" permette di specificare le opzioni di un'analisi modale. In particolare, il metodo di estrazione dei modi ovvero il block Lanczos ("lanb"), il numero di modi da estrarre (6),gli estremi inferiore e superiore dell'intervallo di frequenze di interesse (0 Hz e 100 kHz rispettivamente).

Al fine di rappresentare i modi di vibrare, si specifica il numero di modi da espandere e scrivere tramite "mxpand", nello specifico si sono scelti i sei modi.

Si preferisce impiegare nell'analisi la matrice di massa globale consistente piuttosto che quella concentrata ("lumpm, off") ed escludere l'effetto di eventuali tensioni precedenti ("pstres,off").

Dopo aver inserito il comando per salvare in un file di testo le frequenze proprie e relativi fattori di partecipazioni per gli spostamenti generalizzati nelle tre direzioni principali, infine, è possibile avviare la soluzione tramite "Solve".

La prima frequenza naturale risulta pari a 58,9 kHz. Il corrispettivo modo di vibrare è caratterizzato da un'oscillazione sincrona delle due piastre. Queste ruotano intorno all'asse y, vincolate alle molle, producendo il massimo spostamento al centro del provino (*Figura 77*).



Figura 77 - Prima frequenza naturale della microstruttura

# 6 Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha proposto la modellazione FEM di una configurazione di prova per dispositivi RF MEMS.

Si è analizzato l'effetto di intaglio in un provino d'oro sottoposto ad un'attuazione elettrostatica tramite il calcolo del fattore di intensificazione delle tensioni  $K_t$  in prossimità del pull-in.

I risultati mostrano che tale fattore di concentrazione è pari a 1,9 e 1,2 per un comportamento del materiale elastico e plastico rispettivamente.

Come prevedibile teoricamente, il K<sub>t</sub> decresce una volta superato il limite elastico del materiale. Si è studiato il comportamento dell'intera microstruttura all'applicazione di una differenza di potenziale crescente tra gli elettrodi di attuazione tramite la rappresentazione della curva di pull-in.

In ambito elastico, la tensione di pull-in risulta pari a 215 V e la massima sollecitazione di Von Mises all'apice dell'intaglio in prossimità del pull-in raggiunge 434 MPa circa.

Prendendo in considerazione la curva sforzo-deformazione del materiale e un modello di incrudimento cinematico, la tensione di pull-in risulta pari a 211 V e la massima sollecitazione di Von Mises all'apice dell'intaglio in prossimità del pull-in raggiunge 153,6 MPa.

Sulla base di tali risultati, è stato possibile validare modelli analitici per il calcolo della sollecitazione all'apice dell'intaglio nel provino.

Lo studio sulla sensibilità della tensione di pull-in al variare di tre parametri geometrici fondamentali della microstruttura (spessore del provino, gap tra gli elettrodi e raggio dell'intaglio) ha portato ai seguenti risultati.

Il gap tra gli elettrodi mostra di avere la maggiore influenza sul risultato rispetto ai restanti parametri geometrici. In particolare l'entità di tale influenza risulta circa 37 volte superiore rispetto a quella dovuta allo spessore del provino. La variazione del raggio dell'intaglio mostra la minore influenza sulla tensione di pull-in.

L'effetto combinato di due o più fattori risulta quasi trascurabile.

In particolare, l'effetto combinato di spessore del provino e raggio dell'intaglio non rivela alcuna influenza sulla tensione di pull-in.

Infine, l'applicazione di un carico ciclico, variabile tra 0 V e 180 V, ha evidenziato una crescita e un avanzamento della zona plastica all'apice dell'intaglio come previsto dagli studi teorici.

Dopo il primo ciclo, il materiale supera il limite elastico esclusivamente in corrispondenza dell'apice dell'intaglio sulla faccia inferiore (sollecitata a trazione). Successivamente, si creano altre zone plastiche in corrispondenza dei raggi di raccordo sul lato opposto rispetto all'intaglio, di nuovo sulla faccia inferiore. All'aumentare dei cicli di carico, le suddette zone plastiche crescono e avanzano fino a congiungersi con quella principale sviluppatasi all'apice dell'intaglio.

Il congiungimento avviene prima sulla faccia inferiore (settimo ciclo) e poco dopo anche su quella superiore (decimo ciclo) definendo una zona plastica che si estende lungo tutta la sezione resistente del provino.

Il presente si configura come un'analisi preliminare volta a fornire le basi fondamentali per i successivi studi di meccanica della frattura.

In ambito lineare elastico, sarà possibile calcolare la tenacità a frattura in presenza di una cricca all'apice dell'intaglio o l'integrale J, nel caso di un comportamento plastico del materiale, attraverso l'applicazione di un carico statico.

Applicando un carico ciclico, invece, sarà possibile studiare l'avanzamento della cricca e determinare il numero di cicli a rottura in presenza di determinati rapporto di carico e sollecitazione alternata.

# Bibliografia

# Testi

- [1] "Micro Electro Mechanical Systems", Qing-An Huang (2018)
- [2] "MEMS Reliability", Allyson L. Hartzell Mark G. da Silva Herbert R. Shea (2011)
- [3] "MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics", Mohammad I. Younis (2011)
- [4] "Microsystem Design", Stephen D. Senturia (2001)
- [5] "Costruzione di macchine vol. I", R. Giovannozzi (1980)
- [6] "Mechanical behaviour of engineering materials", J. Rösler H. Harders M. Bäker (2006)
- [7] "Elementi finiti", A. Gugliotta (2002)
- [8] "Design and Analysis of Experiments", Douglas C. Montgomery (2012)
- [9] "Scienza delle costruzioni vol. 3", Odone Belluzzi (1980)

# Pubblicazioni

[1] "Dynamic identification of electrostatically actuated MEMS in the frequency domain", G. De Pasquale - A. Somà (2010)

[2] "Effect of residual stress on the mechanical behavior of microswitches at pull-in", A. Somà - G. De Pasquale - E. Brusa - A. Ballestra (2009)

[3] "Residual stress measurement method in MEMS microbeams using frequency shift data", A. Somà - A. Ballestra (2009)

[4] "MEMS mechanical fatigue: experimental results on gold microbeams", A. Somà - G. De Pasquale (2009)

[5] "Experimental characterization of elastic-plastic behavior of MEMS electroplated gold specimens", A. Somà - M. M. Saleem, B. Margesin (2017)

[6] "Creep in MEMS", A. Somà - G. De Pasquale - M. M. Saleem (2014)

[7] "Design and FEM modeling of notch effect in gold microbeams", M. M. Saleem - A. Somà - G. De Pasquale (2014)

[8] "MEMS mechanical fatigue: effect of mean stress on gold microbeams", A. Somà - G. De Pasquale (2011)

# Appendice

#### File di input (ANSYS Mechanical APDL)

#### Modello di studio preliminare: trave

/PREP7 **!ELEMENT TYPE** ET,1,SOLID186 **IMATERIAL PROPERTIES** *MP,EX,1,98.5\*10\*\*(3)* MP,PRXY,1,0.42 MP, DENS, 1, 1.932\*10\*\*(-14) **!GEOMETRY** BEAM L=200 BEAM\_W=32 BEAM T=2 **!SPECIMEN** BLOCK,-BEAM\_L/2,BEAM\_L/2,-BEAM\_W/2,BEAM\_W/2,0,BEAM\_T !MESH ALLSEL VSEL,ALL MSHKEY,0 MSHAPE,1,3D SMRTSIZE,5 VMESH,ALL !TRANS126 ELEC\_D=27.8 ELEC\_W=33 GAP=3 GAP\_MIN=0.01 !NSEL,S,LOC,X,BEAM\_L/2-ELEC\_W,BEAM\_L/2 !per trave incastrata con elettrodo in punta !NSEL,S,LOC,X,-BEAM\_L/2+ELEC\_D,-BEAM\_L/2+ELEC\_D+ELEC\_W *!per trave con elettrodo non centrale* !NSEL,S,LOC,X,-ELEC\_W/2,ELEC\_W/2 *!per trave con elettrodo centrale* NSEL,S,LOC,X,-BEAM L/2,BEAM L/2 *!per trave con elettrodo distribuito* NSEL,R,LOC,Y,BEAM\_W/2,-BEAM\_W/2 NSEL,R,LOC,Z,0 CM, ACTUATION\_PAD, NODE EMTGEN, 'ACTUATION\_PAD', 'ACTUATION\_PAD\_ELEM', 'ACTUATION\_PAD\_GROUND', 'UZ',-GAP,GAP\_MIN,1,8.854\*10\*\*(-6)

**!BOUNDARY CONDITIONS** 

NSEL,ALL NSEL,S,LOC,X,-BEAM\_L/2 D,ALL,UX,O D,ALL,UY,0 D,ALL,UZ,O NSEL,S,LOC,X,BEAM\_L/2 D,ALL,UX,O D,ALL,UY,O D,ALL,UZ,0 **!INITIAL STRESS** ALLSEL VSEL,ALL ESLV,S INISTATE,SET,DTYP,STRESS INISTATE, DEFINE,,,,,30,30 ALLSEL CMSEL,S,ACTUATION\_PAD,NODE D,ALL,VOLT,0 IC,ALL,VOLT,0 ALLSEL CMSEL, S, ACTUATION\_PAD\_GROUND, NODE D,ALL,UX,O D,ALL,UY,0 D,ALL,UZ,0 D,ALL,VOLT,0 IC,ALL,VOLT,0 ALLSEL FINISH /SOLU ANTYPE,0 NEQIT,10 NSUBST, 10, 20, 10, ON NLGEOM,ON CNVTOL,U,1,0.005 OUTRES, BASIC, LAST SOLVE /POST1 PLDISP PLESOL,S,1 /SOLU

ALLSEL

*!per trave a doppio incastro* 

*!per trave a doppio incastro* 

CMSEL,S,ACTUATION\_PAD\_GROUND,NODE D,ALL,VOLT,20 SOLCONTROL,ON ALLSEL NEQIT,10 NSUBST,10,20,10,ON NLGEOM,ON CNVTOL,U,1,0.005 OUTRES,ALL,ALL SOLVE

/POST1 PLDISP PLESOL,S,1

#### Configurazione di prova per lo studio del comportamento elasto-plastico del materiale

/PREP7 **!ELEMENT TYPE** ET,1,SOLID186 **!MATERIAL PROPERTIES** *MP,EX,1,98.5\*10\*\*(3) MP,PRXY,1,0.42* MP, DENS, 1, 1.932\*10\*\*(-14) **!PLASTICITY** TB,KINH,1,1,10,0 TBTEMP,25 TBPT,,0.001116,110 TBPT,,,0.001318,120 TBPT,,0.001722,130 TBPT,,0.00253,140 TBPT,,0.004147,150 TBPT,,0.007379,160 TBPT,,0.013844,170 TBPT,,0.026773,180 TBPT,,0.052631,190 TBPT,,,0.10435,200 **!GEOMETRY** ANGLE\_RADIUS=2.5 SPEC L=22.5 SPEC\_W=5 SPEC\_T=3.2 PLATE\_L=212 PLATE\_W=120 PLATE\_T=8.2

SPRING\_L=28.5 SPRING\_W=11.5 SPRING T=3.2 ELEC\_D=50 ELEC W=49.5 **!SPECIMEN** BLOCK,-SPEC L/2,SPEC L/2,-SPEC W/2,SPEC W/2,0,SPEC T K,9,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS,SPEC W/2+ANGLE RADIUS,0 K,10,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,0 K,11,SPEC L/2+ANGLE RADIUS,SPEC W/2+ANGLE RADIUS,0 K,12,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,0 K,13,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS,SPEC W/2+ANGLE RADIUS,SPEC T K,14,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS,-SPEC W/2-ANGLE RADIUS,SPEC T *K*,15,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,16,SPEC L/2+ANGLE RADIUS,-SPEC W/2-ANGLE RADIUS,SPEC T K,17,-SPEC\_L/2,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,0 K,18,-SPEC L/2,-SPEC W/2-ANGLE RADIUS,0 K,19,SPEC\_L/2,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,0 K,20,SPEC\_L/2,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,0 K,21,-SPEC\_L/2,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,22,-SPEC\_L/2,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,23,SPEC\_L/2,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,24,SPEC L/2,-SPEC W/2-ANGLE RADIUS,SPEC T LARC, 1, 9, 17, ANGLE\_RADIUS LARC,2,10,18,ANGLE RADIUS LARC, 3, 11, 19, ANGLE\_RADIUS LARC,4,12,20,ANGLE RADIUS LARC,8,13,21,ANGLE RADIUS LARC, 5, 14, 22, ANGLE RADIUS LARC, 7, 15, 23, ANGLE\_RADIUS LARC, 6, 16, 24, ANGLE\_RADIUS L,9,13 L,10,14 L,11,15 L,12,16 L,9,10 L,13,14 L,11,12 L,15,16 AL,25,22,26,21 AL,1,14,25,13 AL,8,18,26,17 AL,9,14,22,18 AL,12,13,21,17 AL,27,23,28,24 AL,27,16,3,15

AL,28,20,6,19 AL,10,16,24,20 AL,11,15,23,19 VA,5,7,8,9,10,11 VA,6,12,13,14,15,16 **!SPRINGS** BLOCK,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L/2-SPRING W/2,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L/2+SPRING W/2,-PLATE W/2,-PLATE W/2-SPRING L,0,SPRING T BLOCK,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS-PLATE\_L/2-SPRING\_W/2,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS-PLATE L/2+SPRING W/2,PLATE W/2,PLATE W/2+SPRING L,O,SPRING T VSYMM,X,4,5 **!PLATES** BLOCK,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L/2-ELEC D-ELEC W/2,-PLATE\_W/2,PLATE\_W/2,0,PLATE\_T BLOCK,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L/2-ELEC D-ELEC W/2,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L/2-ELEC\_D+ELEC\_W/2,-PLATE\_W/2,PLATE\_W/2,O,PLATE\_T BLOCK,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L/2-ELEC D+ELEC W/2,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS,-PLATE W/2,PLATE W/2,0,PLATE T **!HOLES** CIRCLE DIST=16 CIRCLE\_SPACE=20 CIRCLE RADIUS=4.25 CYL4,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L+CIRCLE DIST,-CIRCLE SPACE\*2, CIRCLE RADIUS, 0, CIRCLE RADIUS, 360, PLATE T VGEN,5,11,,,,CIRCLE SPACE VGEN,10,11,15,,CIRCLE\_SPACE VSEL,S,VOLU,,8,15 VSEL,U,VOLU,,9,10 VSEL,R,VOLU,11,15 VSBV,8,ALL VSEL,ALL VSEL,S,VOLU,,9,30 VSEL,U,VOLU,,10 VSEL,R,VOLU,16,30 VSBV,9,ALL VSEL,ALL VSEL, S, VOLU,, 10, 60 VSEL,U,VOLU,,11,30 VSEL,R,VOLU,31,60 VSBV,10,ALL VSEL,ALL VSYMM,X,8,61 VGLUE,ALL AGLUE,ALL LGLUE,ALL

!MESH ALLSEL VSEL,S,VOLU,,1,7 MSHKEY,0 MSHAPE,1,3D SMRTSIZE,6 VMESH,ALL ALLSEL VSEL,S,VOLU,,8,16 MSHKEY,0 MSHAPE,1,3D SMRTSIZE,6 VMESH,ALL ALLSEL !TRANS126 GAP=2.8 GAP\_MIN=0.01 VSEL,S,VOLU,,8,10 NSLV,S,1 NSEL,R,LOC,Z,O CM, ACTUATION PAD, NODE EMTGEN, 'ACTUATION\_PAD', 'ACTUATION\_PAD\_ELEM', 'ACTUATION\_PAD\_GROUND', 'UZ',-GAP,GAP\_MIN,1,8.854\*10\*\*(-6) **!BOUNDARY CONDITIONS** NSEL,ALL NSEL,S,LOC,Y,PLATE\_W/2+SPRING\_L D,ALL,UX,0 D,ALL,UY,O D,ALL,UZ,O NSEL,S,LOC,Y,-PLATE\_W/2-SPRING\_L D,ALL,UX,O D,ALL,UY,O D,ALL,UZ,O **!SPECIMEN INITIAL STRESS** ALLSEL !VSEL,S,VOLU,,8 !ESLV,S !INISTATE,SET,MAT,1 !INISTATE, DEFINE,,,,,20,20

/SOLU ALLSEL CMSEL, S, ACTUATION\_PAD, NODE D,ALL,VOLT,0 IC,ALL,VOLT,0 ALLSEL CMSEL, S, ACTUATION\_PAD\_GROUND, NODE D,ALL,UX,0 D,ALL,UY,0 D,ALL,UZ,0 IC,ALL,VOLT,0 D,ALL,VOLT,141 SOLCONTROL,ON ALLSEL NEQIT,10 NSUBST,10,20,10,ON NLGEOM,ON *CNVTOL,U,1,0.005* OUTRES,ALL,ALL SOLVE

/POST1 PLDISP PLESOL,S,1

#### Configurazione di prova per lo studio dell'effetto di intaglio

/PREP7 **!ELEMENT TYPE** ET,1,SOLID186 **!MATERIAL PROPERTIES** *MP,EX,1,98.5\*10\*\*(3) MP,PRXY,1,0.42* MP, DENS, 1, 1.932\*10\*\*(-14) **!PLASTICITY** TB,KINH,1,1,10,0 TBTEMP,25 TBPT,,0.001116,110 TBPT,,0.001318,120 TBPT,,0.001722,130 TBPT,,0.00253,140 TBPT,,0.004147,150 TBPT,,,0.007379,160 TBPT,,0.013844,170 TBPT,,0.026773,180 TBPT,,0.052631,190 TBPT,,0.10435,200

**!GEOMETRY** SPEC\_L=20.5 SPEC W=12 SPEC\_T=1.8 PLATE L1=25 PLATE L2=35 PLATE L3=25 PLATE L=PLATE L1+PLATE L2+PLATE L3 PLATE\_W=350 PLATE T=5.2 SPRING\_L=48.2 SPRING WI=14.8 SPRING WE=24.8 SPRING\_WDIF=SPRING\_WE-SPRING\_WI SPRING T=5.2 ANGLE\_RADIUS=4 **!SPECIMEN** BLOCK,-SPEC\_L/2,SPEC\_L/2,-SPEC\_W/2,SPEC\_W/2,0,SPEC\_T K,9,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,0 K,10,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,0 K,11,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,0 K,12,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,0 K,13,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS,SPEC W/2+ANGLE RADIUS,SPEC T K,14,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,15,SPEC L/2+ANGLE RADIUS,SPEC W/2+ANGLE RADIUS,SPEC T K,16,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,17,-SPEC L/2,SPEC W/2+ANGLE RADIUS,0 K,18,-SPEC\_L/2,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,0 K,19,SPEC L/2,SPEC W/2+ANGLE RADIUS,0 K,20,SPEC\_L/2,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,0 K,21,-SPEC\_L/2,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,22,-SPEC\_L/2,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,23,SPEC\_L/2,SPEC\_W/2+ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T K,24,SPEC\_L/2,-SPEC\_W/2-ANGLE\_RADIUS,SPEC\_T LARC,1,9,17,ANGLE RADIUS LARC, 2, 10, 18, ANGLE\_RADIUS LARC, 3, 11, 19, ANGLE RADIUS LARC,4,12,20,ANGLE\_RADIUS LARC,8,13,21,ANGLE RADIUS LARC, 5, 14, 22, ANGLE\_RADIUS LARC,7,15,23,ANGLE RADIUS LARC, 6, 16, 24, ANGLE\_RADIUS L,9,13 L,10,14 L,11,15 L,12,16

L,9,10 L,13,14 L,11,12 L,15,16 AL,25,22,26,21 AL,1,14,25,13 AL,8,18,26,17 AL,9,14,22,18 AL,12,13,21,17 AL,27,23,28,24 AL,27,16,3,15 AL,28,20,6,19 AL,10,16,24,20 AL,11,15,23,19 VA,5,7,8,9,10,11 VA,6,12,13,14,15,16 **!SPRINGS** k,25,SPEC L/2+ANGLE RADIUS+PLATE L,PLATE W/2,0 k,26,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS+PLATE\_L,PLATE\_W/2,SPRING\_T k,27,SPEC L/2+ANGLE RADIUS+PLATE L,PLATE W/2-SPRING WI,0 k,28,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS+PLATE\_L,PLATE\_W/2-SPRING\_WI,SPRING\_T K,29,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS+PLATE\_L+SPRING\_L,PLATE\_W/2+SPRING\_WDIF/2,0 K,30,SPEC L/2+ANGLE RADIUS+PLATE L+SPRING L,PLATE W/2+SPRING WDIF/2,SPRING T K,31,SPEC L/2+ANGLE RADIUS+PLATE L+SPRING L,PLATE W/2-SPRING WI-SPRING WDIF/2,0 K,32,SPEC L/2+ANGLE RADIUS+PLATE L+SPRING L,PLATE W/2-SPRING WI-SPRING WDIF/2,SPRING T A,25,26,28,27 A,25,27,31,29 A,26,28,32,30 A,25,26,30,29 A,27,28,32,31 A,29,30,32,31 VA,17,18,19,20,21,22 SPRING\_SPACE1=111.4 SPRING SPACE2=112.4 VGEN,2,4,,,,-SPRING SPACE1 VGEN,2,5,,,,-SPRING\_SPACE2 VGEN,2,6,,,,-SPRING SPACE1 *VSYMM,X,4,7* **!PLATES** BLOCK,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L1,-PLATE W/2,PLATE W/2,0,PLATE T BLOCK,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L1,-SPEC L/2-ANGLE RADIUS-PLATE L1-PLATE L2,-PLATE W/2,PLATE W/2,0,PLATE T BLOCK,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS-PLATE\_L1-PLATE\_L2,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS-PLATE\_L,-PLATE\_W/2,PLATE\_W/2,0,PLATE\_T **!HOLES** CIRCLE DISTX=23.4

CIRCLE\_DISTY=12.6 CIRCLE\_SPACE=20.3 CIRCLE RADIUS=3.9 CYL4,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS-PLATE\_L/2-CIRCLE\_DISTX,-PLATE W/2+CIRCLE DISTY,CIRCLE RADIUS,0,CIRCLE RADIUS,360,PLATE T VGEN,17,15,,,,CIRCLE\_SPACE VGEN,3,15,31,,CIRCLE DISTX VSEL, S, VOLU,, 14, 31 VSEL,R,VOLU,15,31 VSBV,14,ALL VSEL,ALL VSEL,S,VOLU,,13,48 VSEL,U,VOLU,,14,31 VSEL,R,VOLU,32,48 VSBV,13,ALL VSEL,ALL VSEL, S, VOLU,, 12, 65 VSEL,U,VOLU,,13,48 VSEL,R,VOLU,49,65 VSBV,12,ALL VSEL,ALL VSYMM,X,13,66 NOTCH RADIUS=5 CYL4,0,SPEC\_W/2,INTAGLIO\_RADIUS,0,INTAGLIO\_RADIUS,-180,SPEC\_T VSEL,S,VOLU,,1,17 VSEL,U,VOLU,,2,16 VSBV,1,17 VSEL,ALL VGLUE,ALL AGLUE,ALL LGLUE,ALL !MESH ALLSEL VSEL,S,VOLU,,2,11 VSEL,A,VOLU,,18 MSHKEY,0 MSHAPE,1,3D SMRTSIZE,6 VMESH,ALL ALLSEL VSEL,S,VOLU,,1 VSEL,A,VOLU,,17 VSEL,A,VOLU,,19,22 MSHKEY,0
MSHAPE,1,3D SMRTSIZE,6 VMESH,ALL ALLSEL !TRANS126 GAP=3.2 GAP\_MIN=0.01 VSEL,S,VOLU,,1 VSEL,A,VOLU,,17 NSLV,S,1 NSEL,R,LOC,Z,O CM, ACTUATION PAD, NODE EMTGEN, 'ACTUATION\_PAD', 'ACTUATION\_PAD\_ELEM', 'ACTUATION\_PAD\_GROUND', 'UZ',-GAP, GAP MIN, 0.9, 8.854\*10\*\*(-6) **!BOUNDARY CONDITIONS** NSEL,ALL NSEL,S,LOC,X,SPEC\_L/2+ANGLE\_RADIUS+PLATE\_L+SPRING\_L D,ALL,UX,O D,ALL,UY,O D,ALL,UZ,O NSEL,S,LOC,X,-SPEC\_L/2-ANGLE\_RADIUS-PLATE\_L-SPRING\_L D,ALL,UX,O D,ALL,UY,O D,ALL,UZ,0 **!SPECIMEN INITIAL STRESS** ALLSEL !VSEL,S,VOLU,,1 !ESLV,S *!INISTATE,SET,DTYP,STRESS* !INISTATE, DEFINE,,,,,50,50 /SOLU ALLSEL CMSEL,S,ACTUATION\_PAD,NODE D,ALL,VOLT,0 IC,ALL,VOLT,0 ALLSEL CMSEL, S, ACTUATION\_PAD\_GROUND, NODE D,ALL,UX,0 D,ALL,UY,O D,ALL,UZ,O IC,ALL,VOLT,0 D,ALL,VOLT,180

SOLCONTROL,ON ALLSEL NEQIT,10 NSUBST,10,20,10,ON NLGEOM,ON CNVTOL,U,1,0.005 OUTRES,ALL,ALL INISTATE, WRITE, 1,,,,0,S SOLVE /POST1 PLDISP PLESOL,S,1 /SOLU INISTATE, READ, FILE, IST INISTATE,LIST **!MODAL ANALYSIS** /SOLU ANTYPE,2 MODOPT,LANB,6,0,100000,,OFF EQSLV,SPARSE MXPAND,6,,,0 LUMPM,OFF

PSTRES,OFF OUTRES,ALL,ALL

SOLVE

/POST1 SET,LIST SET,FIRST PLDISP

ANMODE,10,0.5,,0

/OUTPUT,AN\_MODALE\_MEMS,TXT

107