

POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Meccanica**

Tesi di Laurea Magistrale

**Progettazione e realizzazione di un banco
prova per il controllo del pendolo piano**



Relatori

Prof. Alessandro Vigliani

Prof. Elvio Bonisoli

Ing. Simone Venturini

Candidato

Pietro Barale

Aprile 2019

Indice

Indice	1
Sommario.....	3
1. Introduzione	4
2. Dinamica del veicolo a 2 ruote	6
2.1 Modello analitico ed equazioni del moto.....	6
2.2 Modello Simulink®	10
2.2.1 Comportamento libero	11
2.3 Controllo PID.....	12
2.3.1 Applicazione	14
2.4 Modello Simulink® sperimentale.....	20
2.4.1 IMU.....	21
2.4.2 Controllore di stabilità e sicurezza.....	22
2.4.3 Volano.....	23
2.5 Risultati sperimentali	25
2.6 Conclusioni	28
3. Banco prova pendolo	30
3.1 Modello classico ed equazioni del moto.....	32
3.1.1 Linearizzazione	34
3.1.2 Discretizzazione.....	36
3.1.3 Periodo di campionamento	38
3.2 Controllo PID.....	40
3.2.1 Risposta all'impulso e al gradino del pendolo semplice.....	43
3.2.2 Risposta all'impulso e al gradino del pendolo inverso	44
3.3 Modello motore BLDC	46
3.3.1 Modello elettrico e meccanico	48
3.3.2 Schema a blocchi	49
3.3.3 Funzione di trasferimento	50
3.4 Sistema di trasmissione.....	51
3.5 Modello Simulink® completo	59
3.5.1 Motori BLDC.....	59
3.5.2 Sistema di trasmissione.....	60
3.5.3 Equazioni del moto del sistema pendolo-carrello.....	60
3.6 Regolazione dell'angolo di inclinazione.....	62
3.7 Riposizionamento del carrello	70
3.8 Conclusioni	79
4. Progettazione	81
4.1 Carrello pendolo piano.....	81
4.1.1 Basamenti e staffe laterali.....	82
4.1.2 Cuscinetti	83
4.1.3 Albero di supporto	84
4.1.4 Asta rigida.....	85
4.1.5 Encoder	86
4.2 Conclusioni	86
5. Componenti hardware.....	88
5.1 Motore elettrico BLDC	88

5.2 Driver SCA-B4-70-10.....	92
5.3 Encoder HEDL-5540/5640 #A13	94
5.4 Cablaggio componenti	96
5.5 Conclusioni	98
6. Conclusioni	99
Appendice A - Tavole.....	101
A.1 - Basamento carrello pendolo piano	102
A.2 - Staffe laterali.....	103
A.3 - Albero di supporto asta rigida	104
A.4 - Asta rigida.....	105
A.5 - Massa sospesa.....	106
Appendice B - Cuscinetto SKF Explorer 628.....	107
Bibliografia	108

Sommario

Lo scopo di questa tesi è la modellizzazione e la realizzazione di un banco prova per lo studio della dinamica e delle tecniche di controllo del pendolo piano. Gli scenari della dinamica del pendolo oggetto di questo studio sono le risposte all'impulso e al gradino del sistema non lineare e linearizzato.

Il punto di partenza del lavoro è la modellizzazione del motociclo Arduino® che, in determinate condizioni di funzionamento, può essere paragonabile ad un pendolo inverso piano. Questo sistema utilizza la coppia di reazione generata da un volano per rimanere in posizione verticale.

Successivamente, si è effettuata un'analisi del banco prova formato da un pendolo incernierato ad un carrello mobile, movimentato da un sistema di trasmissione a cinghia. Diversamente dal precedente sistema, la posizione verticale viene garantita da una forza applicata dal carrello al fulcro del corpo sospeso. Viene progettato un controllore Proporzionale-Integrale-Derivativo (PID) per stabilizzare il sistema nei suoi punti di equilibrio. È stato quindi discretizzato il modello per implementarlo all'interno della componentistica hardware del banco prova.

Infine, vengono descritti i componenti hardware utilizzati per la realizzazione del banco e il rispettivo cablaggio per la progettazione della logica di controllo.

1. Introduzione

Il pendolo piano è uno dei sistemi fondamentali nello studio della dinamica dei sistemi meccanici per la ridotta quantità di caratteristiche e la loro intuitiva interpretazione. In ambito accademico, solitamente, viene analizzato il pendolo nel piano linearizzato per piccole oscillazioni. Tuttavia, per ottenere uno studio del fenomeno più completo e realistico è necessario eliminare la condizione di piccole oscillazioni al fine di ottenere la dinamica del sistema non lineare. La differenza principale del comportamento tra sistema non lineare e linearizzato è dovuta ai termini trigonometrici dipendenti dalla posizione angolare.

Il crescente interesse industriale nei veicoli auto-bilanciati è la principale motivazione di questa tesi. Il pendolo semplice piano viene utilizzato per progettare software per il controllo anti-pendolamento dei carichi su carroponte [1] mentre il pendolo inverso viene utilizzato come punto di riferimento nello studio dei controlli automatici come per il modello di bilanciamento umano [2] e su veicoli auto-bilanciati come Honda Riding Assist [3].

Per questo motivo, si è deciso di analizzare il comportamento di un modellino semplificato di motociclo prodotto da Arduino® [4] stabilizzato nella sua posizione di riposo per identificare le criticità nel controllo di un sistema pendolo piano. Un veicolo a due ruote fermo in posizione verticale, in determinate condizioni di funzionamento, può essere studiato come un pendolo inverso piano che, in presenza della sola forza gravitazionale agente nel suo baricentro, non riesce autonomamente a rimanere in equilibrio [5] [6].

Il secondo capitolo della tesi, quindi, è riservato alla modellizzazione del motociclo e alla progettazione di un sistema di controllo che utilizza la coppia di reazione generata da un volano per compensare la perdita di equilibrio. La coppia viene applicata al volano tramite un controllore Proporzionale-Derivativo (PD).

Le conclusioni su questo sistema sono poi state applicate su un banco prova didattico per lo studio della dinamica del pendolo.

In generale, è possibile affermare che il pendolo piano presenta due posizioni di equilibrio: quella in cui il baricentro si trova al di sotto dell'estremità vincolata dell'asta si dice stabile poiché, dopo essere stato perturbato, oscillerà intorno al suo punto di equilibrio. Il punto di equilibrio stabile viene raggiunto solamente nel caso reale in cui lo smorzamento viscoso del fulcro dissipa una porzione di energia potenziale. La configurazione in cui il baricentro si trova al di sopra dell'estremità vincolata dell'asta, si dice instabile poiché, a seguito di perturbazioni anche molto deboli, il pendolo non tornerà spontaneamente verso il suo punto di equilibrio ma tenderà ad allontanarsi sempre di più.

Il presente lavoro si focalizzerà, quindi, sulla realizzazione della logica di controllo del pendolo semplice e inverso nel piano; in particolare:

- il controllore del pendolo semplice ha il compito di riportare il sistema nel suo punto di equilibrio stabile con prestazioni superiori al sistema non controllato;
- il controllore del pendolo inverso ha il compito di stabilizzare il sistema nel suo punto di equilibrio instabile.

Nel terzo capitolo, vengono sviluppati i modelli matematici di pendolo piano semplice e inverso con fulcro movimentabile; il mantenimento della posizione verticale a seguito di

una perturbazione viene reso possibile grazie al suo spostamento. Questo sistema viene realizzato tramite un banco prova costituito da un pendolo incernierato ad un carrello mobile, movimentato da un sistema di trasmissione formato da due motori BLDC che agiscono su un'unica cinghia di distribuzione [7]. Il sistema permette 3 configurazioni di moto del carrello differenti che corrispondono a diverse condizioni di carico:

- movimento X: i due motori devono generare una coppia uguale in modulo e verso;
- movimento Y: i due motori devono generare una coppia uguale in modulo ma di segno opposto;
- movimento XY: è necessario un unico motore che fornisca coppia.

In questa tesi sarà analizzato solamente il caso in cui il carrello si sposta lungo la direzione Y all'interno del banco prova, ovvero il caso peggiore a livello di potenza richiesta ai motori per il movimento del sistema.

È stato quindi possibile ampliare lo studio della dinamica del pendolo piano analizzando il suo comportamento libero e in presenza di controllo PID; in particolare viene analizzata:

- la risposta libera all'impulso e al gradino del pendolo lineare semplice e inverso;
- la risposta all'impulso e al gradino del pendolo lineare semplice e inverso con controllo PID in retroazione;
- la risposta al gradino del motore BLDC;
- la regolazione del pendolo lineare semplice e inverso con controllore PID;
- la regolazione del pendolo non lineare semplice e inverso con controllore PID;
- il riposizionamento del carrello al centro del banco prova tramite controllore 2-PID.

Per ogni modello viene realizzata anche la sua controparte discreta per valutare il tempo di campionamento minimo necessario a evitare aliasing e perdita di informazione e per implementarlo all'interno della componentistica hardware utilizzata per il controllo.

Il periodo di campionamento viene scelto a partire dal Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon.

Successivamente, nel quarto capitolo, vengono descritte le scelte effettuate per modificare il carrello mobile, precedentemente progettato per lo studio del pendolo sferico, in modo da vincolare il moto del pendolo in un unico piano.

Infine, nel quinto capitolo, vengono elencati e descritti i componenti hardware utilizzati per la realizzazione del banco prova e il rispettivo cablaggio per la progettazione della logica di controllo.

Riassumendo, in determinate condizioni di funzionamento, è possibile modellare un motociclo come un pendolo inverso piano vincolato a muoversi solamente intorno all'asse immaginario che collega i punti di contatto delle ruote posteriore e anteriore con il terreno; questo sistema può essere stabilizzato tramite una coppia applicata ad un volano. Nel caso in cui si potesse anche traslare il veicolo lungo un asse perpendicolare all'asse ruota-terreno, sarebbe comunque possibile mantenere il sistema in posizione verticale. Questa è la soluzione adottata per il controllo del pendolo all'interno del banco prova che consente lo spostamento del fulcro per mezzo di un carrello mobile al quale viene applicata una forza tale da mantenere il pendolo in equilibrio e riposizionare il carrello al centro del banco in modo da ottenere una stabilizzazione duratura nel tempo.

2. Dinamica del veicolo a 2 ruote

La dinamica di un veicolo a due ruote, come una bicicletta o un motociclo, può essere studiata sotto molti aspetti ma si vuole restringere l'analisi al problema della stabilità, che consiste nel capire come mantenere il sistema nel suo punto di equilibrio instabile per un tempo arbitrariamente lungo a seguito di perturbazioni esterne. Questo è un sistema estremamente complesso da analizzare se si tengono in considerazione tutte le caratteristiche cinematiche e dinamiche del veicolo. Si adotterà quindi un modello semplificato ottenuto attraverso una serie di ipotesi semplificative in modo da studiare e modellizzare il veicolo come un pendolo inverso piano [6] [8].

In questo capitolo viene studiato il sistema di controllo del motociclo fornito da Arduino[®] che utilizza una ruota di reazione per compensare la coppia generata dal termine trigonometrico dipendente dall'accelerazione gravitazionale. In base all'angolo di piega del sistema, alla sua derivata e integrazione nel tempo, un controllore PID determina la coppia da applicare al volano necessaria a mantenere il veicolo nel suo punto di equilibrio instabile.

Per ottenere le equazioni del moto sarà utilizzato un bilancio di coppia rispetto all'asse immaginario che collega i punti di contatto ruota-terreno della ruota posteriore e anteriore del motociclo.

2.1 Modello analitico ed equazioni del moto

È necessario, quindi, effettuare alcune ipotesi semplificative prima di descrivere il modello analitico ed ottenere le equazioni del moto del sistema. Sono state fatte le seguenti assunzioni:

- l'intera massa del veicolo è concentrata nel suo centro di massa ad altezza h dal terreno (Figura 2.1.1);
- il sistema è libero di muoversi solamente intorno all'asse ruota-terreno, ovvero l'unico movimento consentito è il rollio;
- lo spessore delle ruote del motociclo è trascurabile: il contatto ruota-terreno viene considerato puntiforme;
- il sistema è privo di sterzo (angolo di sterzo δ nullo): la ruota anteriore è allineata con l'asse che collega i punti di contatto ruota-terreno;
- le sospensioni vengono considerate rigide;
- non vi è alcun attrito rotazionale tra la moto e il terreno o tra la moto e il volano;
- la resistenza dell'aria è trascurabile.

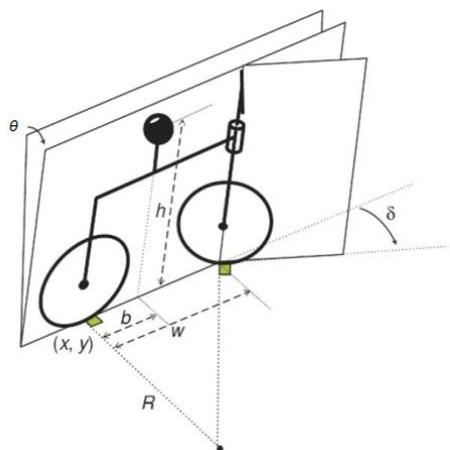


Figura 2.1.1 – Modello matematico del motociclo [8].

La Figura 2.1.2 mostra le principali grandezze fisiche utilizzate nelle equazioni del moto del sistema.

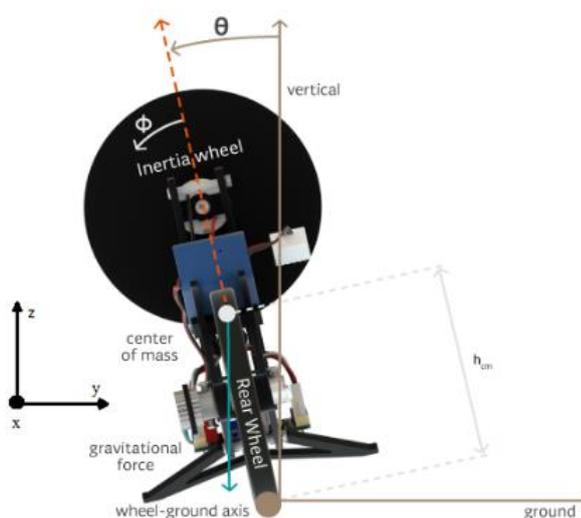


Figura 2.1.2 – Vista posteriore del motociclo Arduino[®] [4].

I simboli di Figura 2.1.2 rappresentano:

- θ : angolo di piega; è pari a 0° quando il motociclo è in posizione perfettamente verticale, positivo quando il motociclo si inclina in senso antiorario (vista posteriore) e negativo quando si inclina in senso orario;
- φ : è lo spostamento angolare del volante definito positivo in senso antiorario;
- h_{cm} : centro di massa dell'intero sistema motocicletta (incluso il volante) quando è perfettamente verticale ($\theta = 0$). È un parametro importante per la dinamica della moto perché la forza gravitazionale agisce direttamente in questo punto.

Il sistema è libero di ruotare attorno all'asse ruota-terreno (asse x di Figura 2.1.2). Il volano, invece, può ruotare intorno al proprio asse che passa direttamente nel centro della ruota stessa.

Per un dato asse di rotazione, esiste una coppia netta che è la somma di tutte le coppie che agiscono sul sistema intorno a quell'asse. La coppia netta è proporzionale all'accelerazione angolare del sistema rotante:

$$\tau_{sys} = \sum_i \tau_{i,sys} = I_{sys} \ddot{\theta}_{sys} \quad (2.1)$$

Dove:

- τ_{sys} : coppia netta applicata al sistema [Nm];
- I_{sys} : momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione ruota-terreno [kg·m²];
- $\ddot{\theta}_{sys}$: accelerazione angolare del motociclo attorno all'asse di rotazione ruota-terreno [rad/s²].

La coppia netta che agisce intorno all'asse ruota-terreno ha 3 componenti principali:

- Coppia gravitazionale ($\tau_{g,M}$);
- Coppia del volano ($\tau_{IW,M}$);
- Coppia esterna ($\tau_{ext,M}$).

La coppia gravitazionale è dovuta alla forza gravitazionale che agisce direttamente nel centro di massa del sistema e che fa cadere il motociclo quando il centro di massa non è allineato perfettamente all'asse ruota-terreno. Questa può essere calcolata tramite l'equazione (2.2).

$$\tau_{g,M} = M_M g h_{cm} \sin(\theta) \quad (2.2)$$

Dove:

- M_M : massa totale del sistema [kg];
- g : accelerazione gravitazionale [m/s²];
- h_{cm} : posizione centro di massa dell'intero sistema [m];
- θ : angolo di piega [rad].

È interessante notare che se il sistema è in posizione perfettamente verticale ($\theta = 0$) la coppia gravitazionale è nulla, mentre se il motociclo ha un certo angolo di piega la coppia gravitazionale è diversa da zero, ha la stessa direzione di θ e aumenta con l'aumentare dell'angolo di piega θ .

Se questa fosse l'unica coppia agente sul sistema, allora il motociclo avrebbe un punto di equilibrio instabile in $\theta = 0$. Ciò significa che una qualsiasi piccola perturbazione all'equilibrio della moto porta il sistema ad allontanarsi dalla posizione di stabilità invece di tornare verso di essa.

Quando si aziona il motore del volano, l'albero in uscita dal motore applicherà una coppia al volano che lo farà accelerare. La ruota, a sua volta, applicherà una coppia

uguale e opposta all'albero del motore per la conservazione del momento angolare. Questa coppia di reazione viene chiamata $\tau_{IW,M}$.

La coppia esterna $\tau_{ext,M}$ contiene tutte le sorgenti di coppia esterne che agiscono sul sistema e in questa discussione teorica assumeremo che sia nulla.

Dopo aver fatto tutte le ipotesi necessarie, è possibile scrivere un'unica equazione finale nel seguente modo:

$$I_M \ddot{\theta} = \tau_{g,M} + \tau_{IW,M} + \tau_{ext,M} \approx \tau_{g,M} + \tau_{IW,M} \quad (2.3)$$

Dove I_M è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse ruota-terreno.

Ora prendiamo come riferimento l'asse di rotazione passante per il centro del volano. Solamente il volano è libero di ruotare intorno a questo asse ed è possibile scrivere la seguente equazione (2.4):

$$I_{IW} \ddot{\phi} = \tau_{motor,IW} + \tau_{fric,IW} \approx \tau_{motor,IW} \quad (2.4)$$

Dove:

- $\tau_{motor,IW}$: coppia fornita dal motore che agisce sull'asse di rotazione passante per il centro del volano [Nm];
- $\tau_{fric,IW}$: coppia dovuta alle forze dissipative; per semplicità si assume che non ci siano resistenze meccaniche nel sistema e quindi questo termine assume un valore pari a zero;
- I_{IW} : momento di inerzia del volano rispetto all'asse che passa per il suo centro [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$];
- $\ddot{\phi}$: accelerazione angolare del volano [rad/s^2].

Ricordando che la coppia che il motore applica al volano è uguale e opposta alla coppia che il volano applica all'albero del motore:

$$\tau_{IW,M} = -\tau_{motor,IW} \quad (2.5)$$

È possibile scrivere un sistema finale che contiene le equazioni del moto del sistema e del volano:

$$\begin{aligned} I_M \ddot{\theta} &\approx M_M g h_{cm} \sin \theta - \tau_{motor,IW} \\ I_{IW} \ddot{\phi} &= \tau_{motor,IW} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nel caso di piccole oscillazioni è possibile riscrivere il sistema (eqs. (2.6)) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} I_M \ddot{\theta} &\approx M_M g h_{cm} \theta - \tau_{motor,IW} \\ I_{IW} \ddot{\phi} &= \tau_{motor,IW} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nel Capitolo 2.3 si studierà come variare $\tau_{motor, IW}$ in modo da mantenere in posizione verticale il motociclo e quindi riuscire a stabilizzare un sistema instabile.

2.2 Modello Simulink®

Dopo aver ottenuto le equazioni del moto, è stato creato un modello Simulink® (Figura 2.2.1) che descrive il comportamento dinamico libero del sistema.

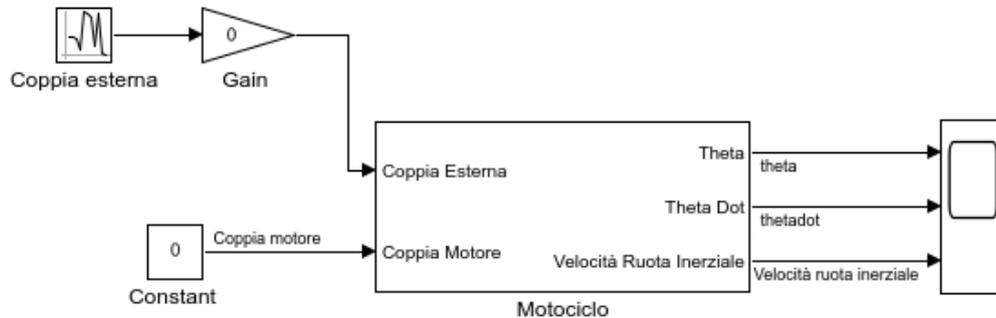


Figura 2.2.1 – Modello Simulink® del sistema senza controllore di stabilità [4].

Il modello contiene un sottosistema “Motociclo”, un blocco per rappresentare la coppia esterna, un blocco “Gain” che è un amplificatore di segnale e un blocco “Constant” che rappresenta la coppia che il motore del volano deve applicare ad esso.

È importante notare che gli input sono la coppia esterna che l’ambiente fornisce al sistema e la coppia che il motore collegato al volano applica al sistema, mentre gli output sono l’angolo di piega θ della moto, la sua derivata nel tempo $\dot{\theta}$ e la velocità angolare del volano $\dot{\phi}$.

Le dinamiche fisiche del motociclo vengono qui modellate usando Simscape Multibody™ (Figura 2.2.2). Questa è una parte del pacchetto software di modellazione Simscape™ e consente di simulare e animare sistemi multicomponente in cui le masse fisiche sono collegate da vincoli geometrici. È necessario notare che in questo sottosistema ci sono segnali colorati senza frecce. Questi sono segnali Simscape™ e, a differenza dei segnali Simulink® che rappresentano flussi di dati unidirezionali, rappresentano connessioni fisiche tra componenti. I blocchi che si connettono a questi segnali Simscape™ rappresentano componenti fisici e trasformazioni rotazionali e traslazionali tra loro e vari quadri di riferimento. Si può notare che ci sono blocchi per ciascuna delle 5 parti mobili indipendenti della motocicletta: il corpo del motociclo, le ruote posteriori e anteriori, il volano e il piantone dello sterzo. Questi blocchi contengono le geometrie dei componenti, le masse, i momenti di inerzia e le coordinate di riferimento per ciascuna delle 5 parti. I convertitori Simulink-PS e PS-Simulink, rappresentate nel modello come due frecce contigue, consentono di convertire i segnali Simscape da e verso i segnali Simulink, in modo che possa interfacciarsi con il resto del modello [4].

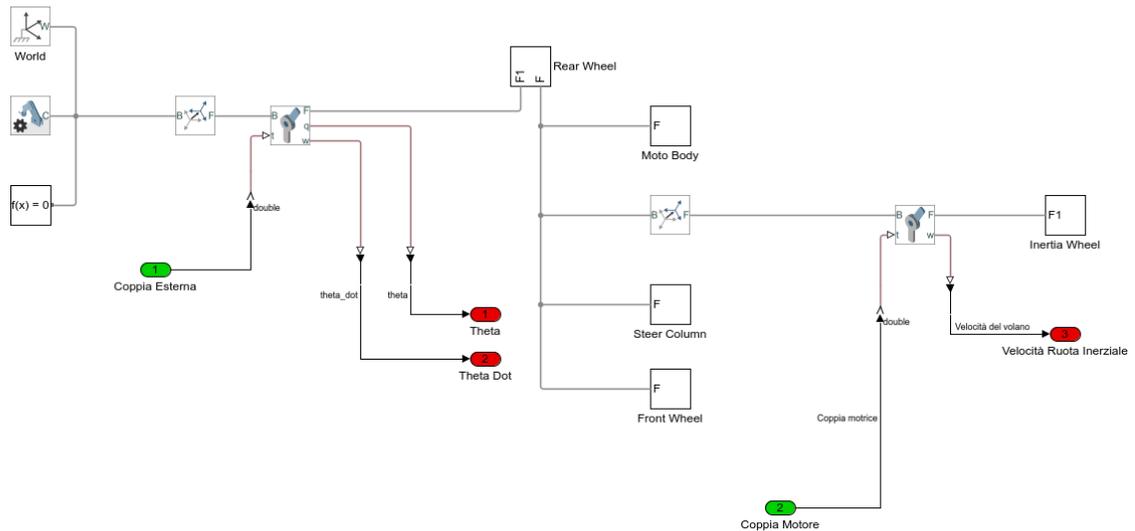


Figura 2.2.2 – Modello Simscape Multibody™ del sottosistema motociclo [4].

2.2.1 Comportamento libero

La Figura 2.2.1.1 e Figura 2.2.1.2 mostrano gli andamenti dell'angolo di piega, della sua derivata nel tempo e della velocità angolare del volano quando sul sistema agisce solamente la forza gravitazionale, mentre la coppia esterna e la coppia del motore collegato al volano sono poste pari a zero.

Le condizioni iniziali utilizzate per ottenere gli andamenti di Figura 2.2.1.1 sono $\theta = 1^\circ$ e $\dot{\theta} = 0^\circ/\text{s}$.

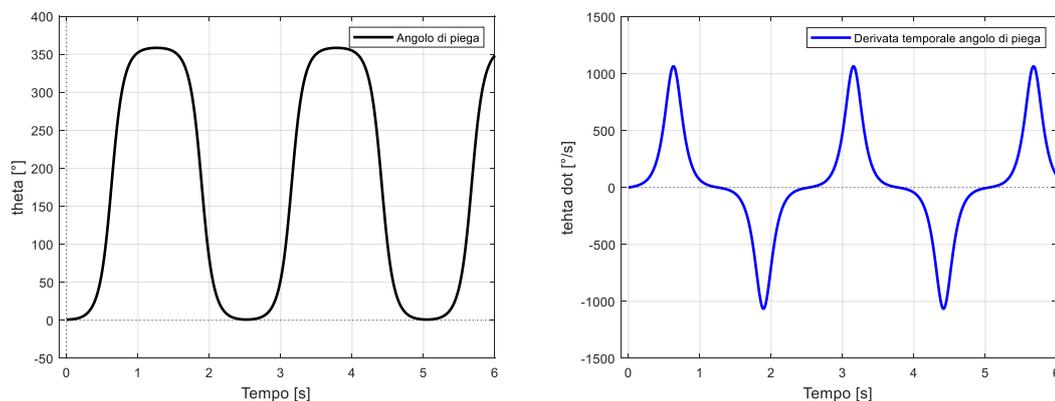


Figura 2.2.1.1 – Andamento dell'angolo di piega θ (sinistra) e della sua derivata nel tempo $\dot{\theta}$ (destra) con coppia esterna e coppia motore pari a zero.

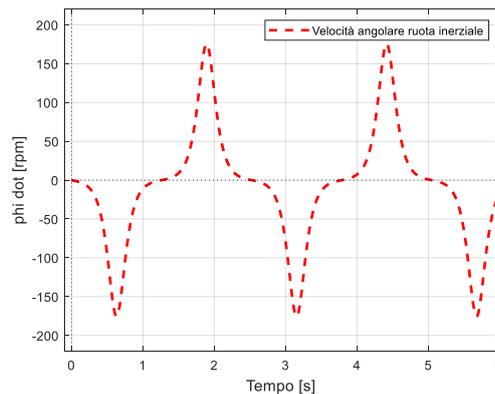


Figura 2.2.1.2 – Andamento della velocità angolare del volano $\dot{\phi}$ con coppia esterna e coppia motore pari a zero.

Come è possibile notare da Figura 2.2.1.1, senza alcun aiuto dal motore del volano, la motocicletta ruota semplicemente intorno all'asse ruota-terreno, oscillando verso il basso a causa della gravità. Si può osservare che il modello rappresenta il contatto ruota-terreno con una cerniera che non considera la presenza del terreno: la moto quindi continua a ruotare proprio dove dovrebbe esserci il terreno. Questo comportamento conferma quello che è stato detto in precedenza, ovvero che il sistema è instabile quando sul motociclo agisce solamente la coppia dovuta alla forza gravitazionale. L'angolo di piega oscilla intorno al valore di 180° poiché la moto a causa della sua inerzia e a causa dell'assenza del "terreno" fisico compie una rotazione intorno all'asse ruota-terreno per poi iniziare ad oscillare come un pendolo semplice nel piano; non è presente uno smorzamento delle oscillazioni poiché si è ipotizzato di trascurare l'attrito dell'aria e le resistenze meccaniche.

Infine, è interessante notare come il volano oscilli in risposta al movimento del sistema attorno all'asse ruota-terreno (Figura 2.2.1.2). La sua forma mostra lo stesso comportamento oscillatorio (stessa frequenza e forma simile, ma invertita rispetto a $\dot{\theta}$) che è possibile osservare per la derivata temporale dell'angolo di piega.

2.3 Controllo PID

Il controllore PID è un algoritmo di regolazione da impiegarsi in sistemi di controllo ad anello chiuso a retroazione negativa dove l'ingresso di controllo è dato dalla somma di tre componenti: una Proporzionale, una Integrale ed una Derivativa.

Si parla di retroazione negativa quando i risultati del sistema smorzano il funzionamento del sistema stesso stabilizzandolo. I sistemi con retroazione negativa sono in genere stabili e tipicamente portano il sistema a convergere o a oscillare intorno al segnale di riferimento [9].

Una semplice e schematica rappresentazione del controllore è mostrata in Figura 2.3.1, dove compaiono i seguenti segnali:

- $r(t)$: segnale di riferimento in ingresso;
- $y(t)$: segnale di uscita del sistema di controllo in retroazione;

- $e(t)$: errore dovuto alla differenza algebrica tra il segnale di riferimento in ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$;
- $u(t)$: ingresso di controllo.

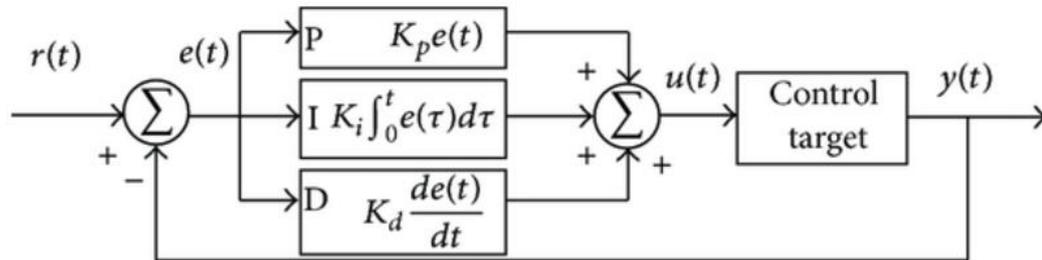


Figura 2.3.1 – Schema a blocchi del controllore PID in sistema di controllo a retroazione negativa.

L'errore $e(t)$ è pari a:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (2.8)$$

Il PID applica una correzione atta a minimizzare $e(t)$ basata su termini proporzionali, integrali e derivati. Quindi esso agisce sullo steady state error (SSE) della variabile di processo controllata.

La legge di controllo del regolatore PID nel dominio del tempo, cioè il legame tra $e(t)$ e $u(t)$, è la seguente:

$$u(t) = K_p + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.9)$$

Mentre nel dominio di Laplace:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.10)$$

È necessario approfondire la funzione di ciascun guadagno K :

- K_p è il guadagno proporzionale; cambia direttamente la grandezza in ingresso e questo significa che se il sistema ha un errore di stato stazionario non nullo, sarà ingrandito proporzionalmente;
- K_i è il guadagno integrale; l'azione integrale fa sì che il controllore abbia memoria dei valori passati del segnale d'errore e quindi il suo effetto è molto più potente se l'integrale dell'errore è grande, mentre diminuisce quando l'integrale dell'errore è basso. Questo solitamente è il motivo per cui in un sistema stabile asintoticamente il guadagno integrale è molto basso o trascurato [7];
- K_d è il guadagno derivativo; si basa sul tasso di variazione dell'errore: se l'errore aumenta rapidamente, allora l'azione derivativa sarà più forte.

Gli effetti sulle prestazioni sono qualitativamente riassunti in Tabella 2.3.1.

Tabella 2.3.1 – Effetto dell'aumento dei guadagni del PID sulle prestazioni [10].

Guadagni	Rising time	Overshoot	Settling time	SSE	Stabilità
K_p	Diminuisce	Aumenta	Piccola variazione	Diminuisce	Peggiora
K_i	Diminuisce	Aumenta	Aumenta	Eliminazione	Peggiora
K_d	Piccola variazione	Diminuisce	Diminuisce	-	Migliora

Gli indici di prestazione utilizzati per valutare la risposta del sistema controllato sono:

- **Rising time:** è un indice della velocità di risposta del controllo e rappresenta il tempo necessario al sistema per variare dal 10% al 90% del valore di regime dello stesso; l'uscita deve raggiungere tale valore senza compiere oscillazioni;
- **Settling time:** tempo necessario alla risposta per portarsi definitivamente a valori vicini al valore di regime. Più precisamente dato un riferimento a gradino in ingresso ad un sistema dinamico asintoticamente stabile, si definisce tempo di assestamento il tempo necessario perché la risposta entri in una certa fascia vicina al valore di regime (in genere si fa riferimento a scostamenti del 2% o 5%) senza più uscirne;
- **Overshoot:** valore percentuale di quanto un segnale superi il valore desiderato in uscita ovvero il valore di picco massimo della curva di risposta misurato a partire dalla risposta desiderata del sistema;
- **SSE:** se il valore desiderato in uscita per un sistema è r (costante) e l'uscita effettiva è $y(t)$, l'errore di stato stazionario è definito come [11]:

$$SSE = \lim_{t \rightarrow \infty} (r - y(t)) \quad (2.11)$$

2.3.1 Applicazione

Dopo aver espresso la dinamica del sistema in funzione di quantità fisiche misurabili (cioè masse, momenti di inerzia e lunghezze) (eqs (2.7)), è necessario chiedersi come variare $\tau_{motor,IW}$ in modo da stabilizzare il motociclo a un valore di $\theta = 0$.

Il modo più semplice per trasformare il punto di equilibrio instabile in un punto di equilibrio stabile è quello di applicare al volano una coppia proporzionale all'angolo di piega θ (eq. (2.12)):

$$\tau_{motor,IW} = K_p \theta \quad (2.12)$$

Dove K_p è un coefficiente costante il cui valore può essere determinato sperimentalmente. Sostituendo l'equazione (2.12) all'interno della prima equazione del sistema (2.7), si ottiene:

$$I_M \ddot{\theta} \approx -(K_p - M_M g h_{cm}) \theta \quad (2.13)$$

Se $K_p > M_M g \cdot h_{cm}$, allora l'accelerazione angolare del motociclo intorno all'asse ruota terreno sarà nella direzione opposta dell'angolo di piega. Nello specifico, quando la moto si piega in una direzione, accelererà nella direzione opposta e quindi, quando essa oscillerà intorno al punto di equilibrio, l'accelerazione angolare cambierà direzione in modo da riportare il motociclo stesso nel punto di instabilità.

Quindi, per bilanciare la moto si vuole mantenere l'angolo di piega $\theta = 0$: il modo più semplice è applicare una coppia proporzionale e opposta a $M_M g h_{cm} \theta$. Per far ciò il motore deve applicare al volano una coppia proporzionale e nella stessa direzione di θ poiché:

$$\tau_{IW,M} = -\tau_{motor,IW} \quad (2.14)$$

La Tabella 2.3.1.1 definisce le grandezze fisiche del sistema ottenute tramite Simscape Multibody™.

Tabella 2.3.1.1 – Proprietà fisiche del sistema.

Proprietà	Valore
g , accelerazione gravitazionale [m/s ²]	9.81
h_{cm} , altezza baricentro [m]	0.078
M_M , massa [kg]	0.364
I_M , momento di inerzia [kg·m ²]	$2.65 \cdot 10^{-3}$

In Figura 2.3.1.1 viene mostrato il modello del controllore Proporzionale (P): viene retroazionato il valore dell'angolo di piega e moltiplicato per un coefficiente che rappresenta il guadagno proporzionale. Questo valore è la coppia che deve essere applicata al volano per stabilizzare il sistema.

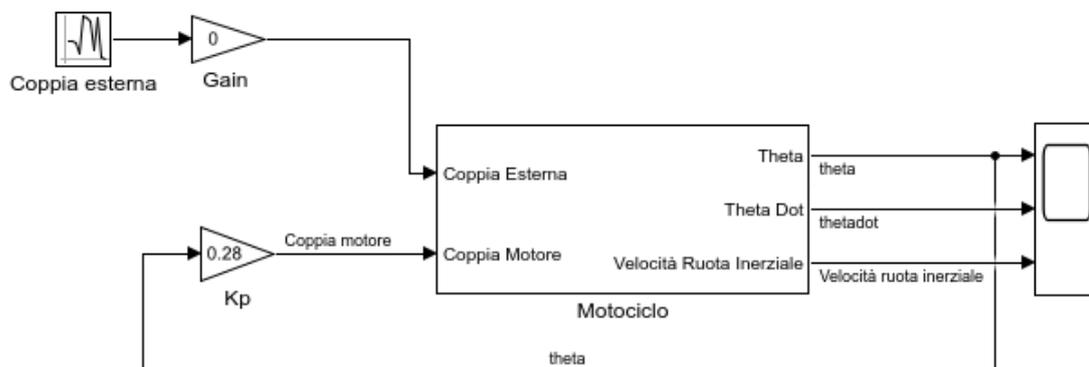


Figura 2.3.1.1 – Modello Simulink® del motociclo con controllore P [4].

Ritornando all'eq. (2.13), la condizione limite per trasformare il punto di equilibrio instabile in un punto di equilibrio stabile è:

$$K_p = M_M g h_{cm} = 0.28 \quad (2.15)$$

Per analizzare la stabilità del sistema con controllo P è necessario riscrivere l'eq. (2.13) nel seguente modo:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (2.16)$$

Dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \{\dot{\theta} \quad \theta\}^T \\ \dot{\mathbf{z}} &= \{\ddot{\theta} \quad \dot{\theta}\}^T \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{K_p - M_M g h_{cm}}{I_M} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilizzando il comando eig di Matlab® è possibile calcolare gli autovalori della matrice \mathbf{A} per controllarne la stabilità.

Tabella 2.3.1.2 – Autovalori del sistema con controllo P.

K_p	Autovalori	Sistema + controllo P
0.28	λ_1	$0 + j0.132$
	λ_2	$0 - j0.132$
0.279	λ_1	+0.6
	λ_2	-0.6

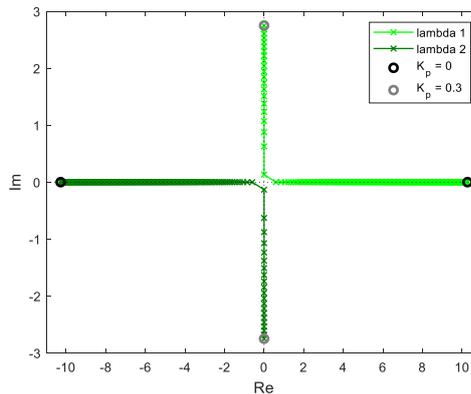


Figura 2.3.1.2 – Traiettoria degli autovalori del sistema con solo controllo P.

La Tabella 2.3.1.2 e la Figura 2.3.1.2 mostrano che:

- con un guadagno $K_p \geq 0.28$ il sistema è stabile poiché la matrice \mathbf{A} presenta una coppia di autovalori complessi e coniugati a parte reale nulla e questo significa che per $t \rightarrow \infty$ continuerà ad oscillare con ampiezza costante. Questo comportamento è dovuto al fatto che si considera il motociclo senza smorzamento; nella realtà il sistema controllato con solo controllo P non può

essere stabilizzato poiché, a causa dello smorzamento, non riesce a mantenere nel tempo il suo punto di equilibrio;

- Con un guadagno $K_p < 0.28$ il sistema è instabile come dimostrato dalla presenza di un autovalore con parte reale positiva.

In Figura 2.3.1.3 si può osservare il comportamento del sistema quando si utilizza come condizioni iniziali $\theta = 1^\circ$, $\dot{\theta} = 0^\circ/\text{s}$ e come guadagno proporzionale la condizione limite $K_p = 0.28$: il sistema oscilla indefinitamente intorno al punto di stabilità in un intervallo di θ compreso tra 1° e -1° .

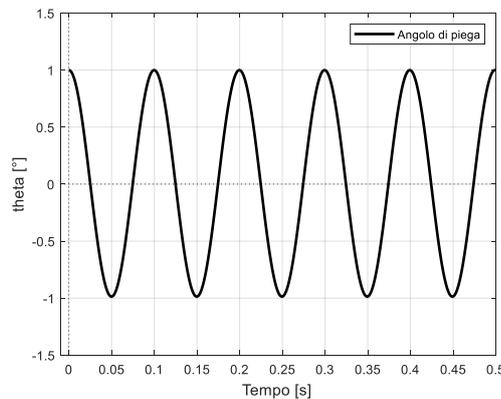


Figura 2.3.1.3 – Andamento dell'angolo di piega θ con controllo P.

Aumentando il valore di K_p , la frequenza e l'ampiezza di oscillazione aumentano. Se il guadagno ha un valore troppo basso, non vi sarà abbastanza coppia dal motore per mantenere il motociclo in equilibrio e contrastare la coppia gravitazionale. Se il guadagno proporzionale è troppo alto, il motociclo si sovracompenserà e spingerà troppo oltre il punto di equilibrio, causando la caduta del sistema.

Ora è necessario migliorare questo comportamento in modo che le oscillazioni decadano in ampiezza e si assestino ad un angolo di inclinazione costante $\theta = 0$ e il sistema non oscilli indefinitamente intorno a questo valore. Per far ciò è necessario controllare anche la velocità angolare dell'angolo di inclinazione.

Come si può osservare da Figura 2.3.1.4 e Figura 2.3.1.5, si è retroazionato il valore della velocità angolare dell'angolo di piega e si è moltiplicato per un coefficiente K_d chiamato guadagno derivativo.

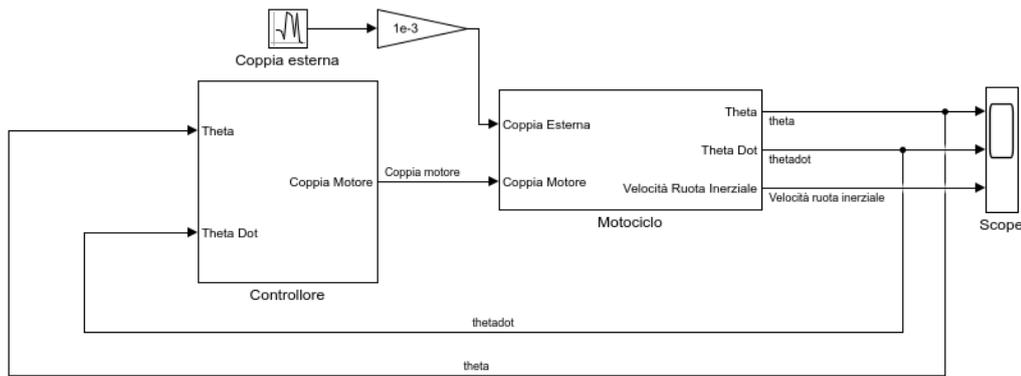


Figura 2.3.1.4 – Modello Simulink® del motociclo con controllore PD [4].

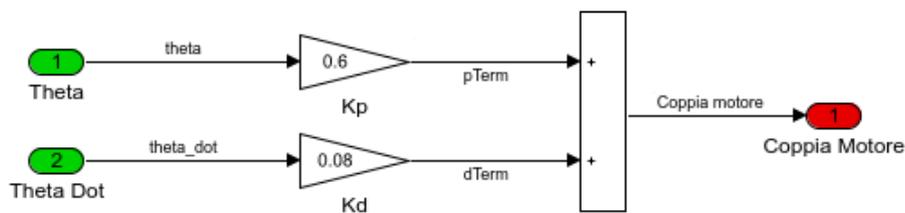


Figura 2.3.1.5 – Controllore PD.

I valori scelti dei guadagni proporzionale e derivativo sono riportati in Tabella 2.3.1.3.

Tabella 2.3.1.3– Guadagni del controllore PD.

Controllore	K_p	K_i	K_d
Motore volano	0.60	0	0.08

I valori presenti in Tabella 2.3.1.3 sono frutto di una procedura iterativa ottenuta variando inizialmente il guadagno proporzionale e poi quello derivativo in modo da migliorare l'andamento nel tempo dell'angolo di piega e gli indici di prestazione del controllo (Tabella 2.3.1). La traiettoria degli autovalori al variare di K_p e K_d riportata sul piano di Gauss viene mostrata in Figura 2.3.1.6.

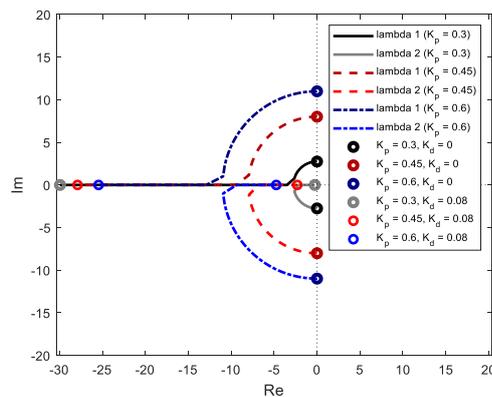


Figura 2.3.1.6 – Traiettoria degli autovalori del sistema con controllo PD.

Un controllore puramente PD soffre comunemente di SSE. È possibile risolvere questo problema aumentando il guadagno proporzionale o aggiungendo un termine integrale K_i al controllore che contrasta l'accumulo di errori nel tempo. L'accumulo di errori nel tempo può essere svantaggioso quando si tenta di bilanciare la moto in un secondo momento. Per questo motivo, si è deciso di utilizzare solamente un controllo Proporzionale-Derivativo.

▪ **Comportamento del modello**

In Figura 2.3.1.7 (sinistra) si può osservare che, con questo tipo di controllo, è possibile raggiungere e mantenere il punto di stabilità $\theta \approx 0$ in un tempo pari a 0.53 secondi, eliminando il comportamento oscillatorio del sistema.

La Figura 2.3.1.8 mostra l'andamento della velocità angolare del volano. Si può notare un aumento quasi costante e lineare che porterebbe al raggiungimento di velocità estremamente elevate che causerebbero la rottura del motore e dei componenti collegati ad esso.

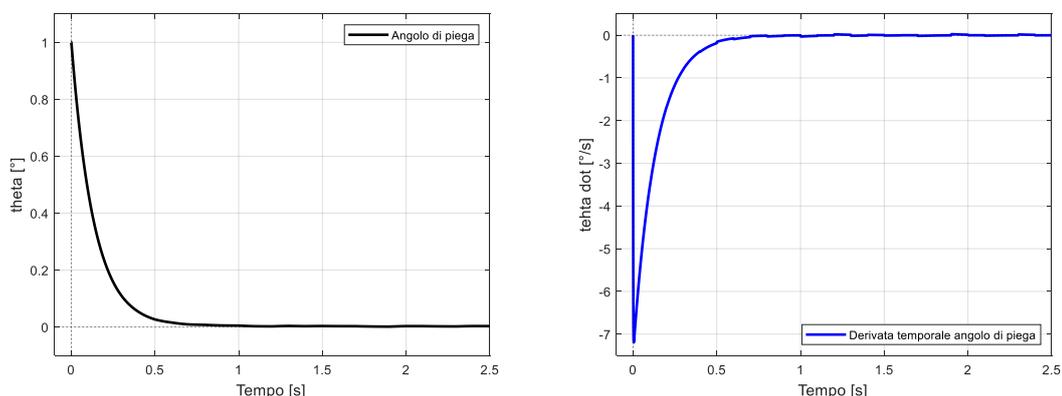


Figura 2.3.1.7 – Andamento dell'angolo di piega θ (sinistra) e della sua derivata nel tempo $\dot{\theta}$ (destra) del sistema con controllo PD e perturbazioni esterne non nulle.

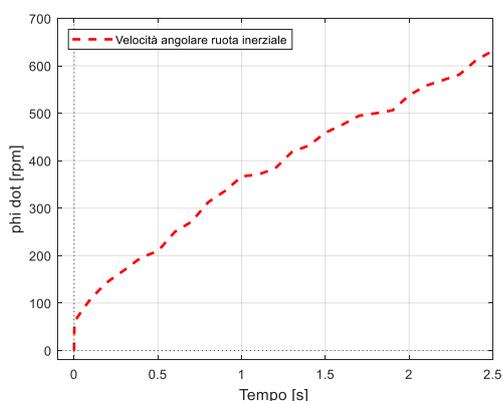


Figura 2.3.1.8 – Andamento della velocità angolare del volano $\dot{\phi}$ del sistema con controllo PD e perturbazioni esterne casuali non nulle.

Questo comportamento è dovuto al fatto che il sistema si stabilizza ad un valore dell'angolo di piega molto vicino al suo punto di equilibrio instabile $\theta = 0$ senza riuscire mai a raggiungerlo poiché, come detto in precedenza, è presente uno SSE. Questo comporta un'applicazione costante di coppia che fa accelerare il volano.

In questo studio è stato analizzato il sistema sottoposto a delle perturbazioni ambientali esterne casuali in modo da valutare il comportamento del controllore in condizioni pseudo-reali. Come si può vedere da Figura 2.3.1.7 e Figura 2.3.1.8, il controllore funziona molto bene anche nel caso di disturbi casuali: l'andamento dell'angolo di piega, della sua derivata nel tempo e della velocità angolare del volano presentano dei frastagliamenti dovuti alla risposta del controllore a queste perturbazioni.

Tabella 2.3.1.4 – Indicatori di prestazione del controllo PD dell'angolo di piega θ .

Ind. di prestazione	Valori
Rising time [s]	0.298
Settling time [s]	0.525
Overshoot [%]	-
NRMSE [%]	44.58

2.4 Modello Simulink[®] sperimentale

Il modellino di motociclo utilizzato per il controllo sperimentale della stabilità di un veicolo a due ruote è mostrato in Figura 2.4.1.



Figura 2.4.1 – Modellino del motociclo Arduino[®] utilizzato per le prove sperimentali [4].

È ora necessario implementare in Simulink[®] il modello completo (Figura 2.4.2) formato dall'unione di tutti i componenti hardware necessari a monitorare lo stato del sistema.

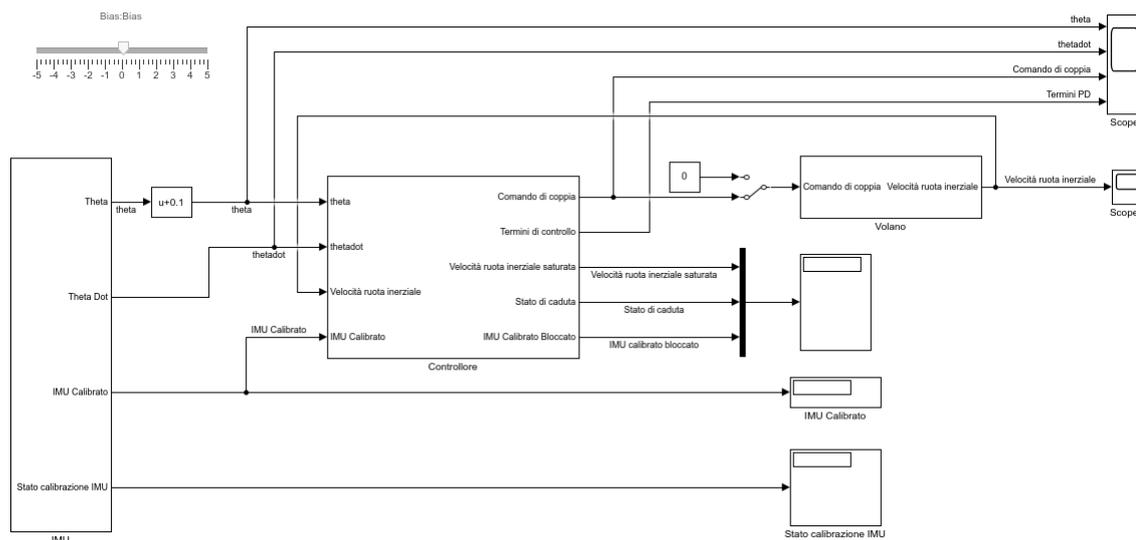


Figura 2.4.2 – Modello Simulink[®] completo del controllo di stabilità del motociclo Arduino[®] [4].

Il modello è formato da più sottosistemi descritti nei capitoli seguenti.

2.4.1 IMU

Per misurare l'angolo di piega θ e la sua derivata temporale, viene utilizzata un'unità di misurazione inerziale (IMU) (Figura 2.4.1.1). Sul motociclo è presente un sensore di orientamento assoluto a 9 assi BNO055 di Bosch [12]. Il BNO055 rileva il vettore gravitazionale e il campo magnetico e da tali quantità determina il movimento rotazionale e traslazionale del motociclo. In questo modello si utilizza il BNO055 per misurare l'orientamento e la velocità angolare della motocicletta intorno all'asse ruota-terreno.

Nella libreria Arduino di Simulink[®] è presente il blocco “BNO055 IMU Sensor” (Figura 2.4.1.1 – sinistra) che in base alla configurazione scelta mostrerà il suo orientamento assoluto relativo al campo magnetico e al vettore gravitazionale, nonché la velocità angolare lungo le coordinate locali del sensore IMU.

Affinché l'IMU fornisca risultati accurati, ciascun sensore deve essere inizializzato per individuare il vettore gravitazionale e il campo magnetico e compensare le coordinate di conseguenza. Gli elementi del vettore dello stato di calibrazione rappresentano rispettivamente:

- Sistema IMU;
- Giroscopio: rileva l'orientamento e utilizza la gravità per la misurazione delle rotazioni del sistema;
- Accelerometro: misura la velocità (velocità lineare) e le sue variazioni dell'oggetto a cui è collegato;
- Magnetometro: utilizzato per rilevare lo spostamento relativo in una particolare direzione in un campo magnetico e per fornire un riferimento di direzione per il dispositivo elettronico.

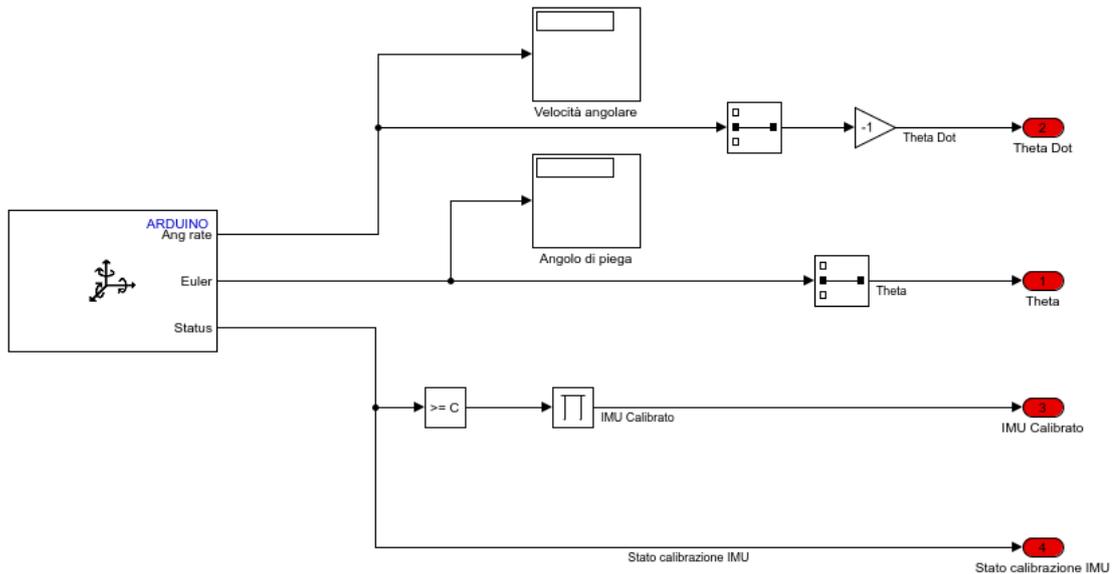


Figura 2.4.1.1 – Modello Simulink® dell'unità di misurazione inerziale (IMU) [4].

Ogni elemento del vettore dello stato di calibrazione può assumere un valore da 0 a 3 che indica il grado di calibrazione del sensore. Per la moto, è necessario che il giroscopio e il magnetometro siano completamente calibrati. È stato aggiunto anche un blocco “Compare to constant” e un blocco “Product of element” per valutare con un unico valore la calibrazione di tutti i componenti del sensore.

La prima e la seconda uscita del blocco “BNO055 IMU Sensor” forniscono un vettore formato da 3 elementi; rappresentano rispettivamente la velocità angolare e la posizione angolare del sistema rispetto all'asse ruota-terreno.

È stato aggiunto un blocco “Gain” pari a -1 poiché θ nelle equazioni del moto è stato definito opposto a quello convenzionale definito dalla regola della mano destra (terna sinistrorsa e non destrorsa).

2.4.2 Controllore di stabilità e sicurezza

Il sottosistema “Controllore” di Figura 2.4.1 contiene al suo interno il controllore PD che fornisce coppia al volano in base al segno dell'angolo di inclinazione. È stato aggiunto un interruttore manuale per poter spegnere il motore prima e dopo il bilanciamento e in caso di condizioni anomale, come la rotazione del volano troppo veloce o la caduta della motocicletta. È necessario aggiungere alcune funzioni di sicurezza all' algoritmo di controllo per disattivare automaticamente il volano nelle seguenti condizioni:

- Il volano ruota troppo velocemente (rischio di danneggiare il motore); la velocità limite massima è stata posta pari a 5500 rpm che corrisponde al 75% della velocità massima del motore;
- La motocicletta "cade" fuori da una gamma di angoli di inclinazione "normali" (rischio di danneggiare il volano o la superficie del terreno); l'intervallo di θ in cui si può considerare la moto non caduta è pari a $-6^\circ \leq \theta \leq 6^\circ$;

Tabella 2.4.3.1 – Motore a corrente continua TFK-280SA-16240-001 [13].

Caratteristiche	Proprietà	Valore
Parametri motore	Tensione nominale [V]	12
	Velocità a vuoto [rpm]	$7500 \pm 10\%$
	Corrente a vuoto [mA]	50 (80 max)
	Coppia di stallo [Nm]	0.0196
	Corrente di stallo [A]	1.6

In Figura 2.4.3.1 viene mostrato il modello formato dal blocco motore e dal tachimetro per monitorare la velocità angolare del volano.

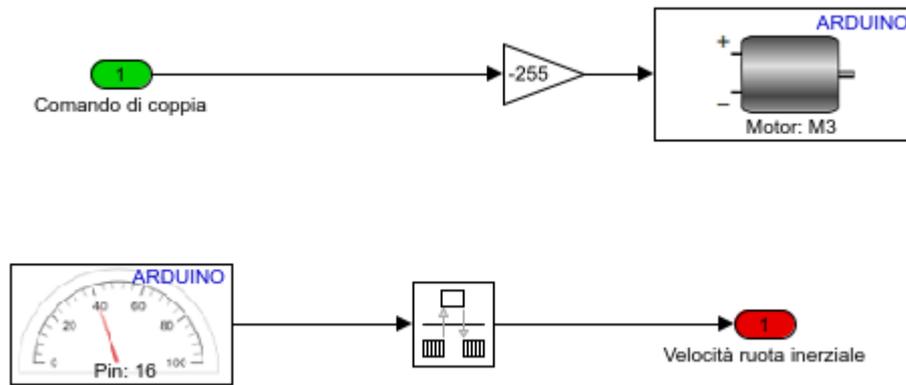


Figura 2.4.3.1 – Modello Simulink[®] rappresentante il blocco motore (in alto) e il blocco tachimetro (in basso) [4].

Il blocco motore ha un ingresso che indica sia la tensione da applicare ai cavi del motore sia la direzione in cui applicarla. Un ingresso positivo tra 1 e 255 indica che deve essere applicata al motore una coppia positiva, mentre un ingresso negativo da -255 a -1 indica una coppia negativa.

Nel modello di Figura 2.4.3.1 è stato utilizzato anche un tachimetro per il calcolo della velocità angolare del volano poiché il motore DC, collegato al volano, può girare estremamente veloce quando viene applicata una coppia elevata per un tempo sufficiente. Tuttavia, girare il volano troppo velocemente per troppo tempo può danneggiare in modo permanente molti componenti della motocicletta, incluso il motore a corrente continua (surriscaldamento e fusione), la portante del motore (danno da sovracorrente e surriscaldamento) e gli elementi strutturali (stress vibrazionale e distorsione del calore). Quindi, viene utilizzato un tachimetro con sensore ad effetto Hall [14] posto davanti al volano per poter calcolare la sua velocità angolare e spegnere il motore non appena si supera il limite massimo di velocità.

Il blocco “Rate transition” collegato al blocco tachimetro è necessario per mantenere l’uscita del sensore per 10 cicli di esecuzione del controllore poiché il tachimetro utilizza una frequenza di campionamento pari a 10 Hz mentre il resto del modello utilizza una frequenza di campionamento pari a 100 Hz.

2.5 Risultati sperimentali

I risultati sperimentali ottenuti permettono di affermare che la logica di controllo realizzata consente la stabilizzazione del sistema (Figura 2.5.1 e Figura 2.5.4). Si riesce però a mantenere la posizione verticale per un tempo massimo di 25 - 30 secondi e non per un tempo arbitrariamente lungo. Questo è dovuto a diversi fattori che influiscono sulla dinamica del sistema in modo casuale e non permettono di ottenere una buona ripetibilità delle misurazioni.

Il problema principale è dovuto a un fenomeno chiamato bias che influisce sulle grandezze rilevate dai sensori. I bias, in elettrotecnica, sono disturbi sistematici che alterano un valore di riferimento, la misura e la correzione (mediante dispositivi elettrici, magnetici o meccanici) degli stessi [15]. Nel caso del sensore IMU, potrebbe essere dovuto al modo in cui è montato o alla presenza di una forza esterna sulla motocicletta, come il cavo USB che spinge contro di essa. Utilizzando il motore del volano è possibile impostare il centro di equilibrio ed eliminare il bias. Agendo manualmente sul motociclo, bisogna regolare l'angolo di piega fino a trovare l'angolo θ con cui la coppia che il motore applica al volano è pari a zero: questo è il bias dell'IMU. In Simulink® è possibile inserire un blocco "bias" e uno slider manuale per tener conto di questo fenomeno.

Un secondo problema è legato alla posizione del cavo USB che collega il computer al motociclo. Questo agisce come una sorta di vincolo per il movimento della moto e quindi, siccome è impossibile riposizionare perfettamente il cavo in modo che vincoli il movimento del sistema sempre allo stesso modo, avrà un'influenza diversa per ogni prova sperimentale effettuata. Per risolvere il problema è possibile passare in modalità Wi-Fi ed eliminare il collegamento con cavo USB.

Un ulteriore fattore che influisce sulla dinamica del motociclo è il posizionamento della batteria che si trova sopra la ruota posteriore. Il suo spostamento, anche se piccolo, influisce enormemente sulla posizione del baricentro del sistema a causa del suo peso. Per cercare di ridurre questa variazione, è stata fissata la batteria alla sede.

Infine, è stata riscontrata un'elevata flessibilità della struttura che non consente di effettuare le varie prove su un modello rigido che rimanga tale nel tempo.

Sono state quindi effettuate due prove: la prima con il collegamento computer-motociclo tramite cavo USB e la seconda in modalità Wi-Fi in modo da eliminare il disturbo esterno del cavo sul sistema.

Il primo test (Figura 2.5.1) permette di osservare che è possibile mantenere il sistema in posizione verticale per un tempo pari a 25 s. La causa della caduta del motociclo è dovuta al raggiungimento della velocità massima consentita al volano posta, in questo caso, pari a 5500 rpm (Figura 2.5.2). Una volta raggiunta la velocità limite imposta dal controllore, il motore si spegne e sul sistema non agisce più la coppia necessaria a contrastare quella gravitazionale; l'andamento dell'angolo di inclinazione diverge fino ad un valore pari a 16° corrispondente al blocco fisico imposto dal cavalletto della moto.

La velocità angolare del volano diminuisce progressivamente a causa degli attriti interni al motore fino a raggiungere una velocità pari a 0 rpm. Essa presenta un valore pari a 0 rpm anche per i primi 3 secondi della storia temporale poiché non è stato ancora azionato il motore della ruota inerziale dall'interruttore del modello Simulink®; l'angolo di piega ha un valore che oscilla intorno allo zero poiché il motociclo è tenuto manualmente in posizione verticale.

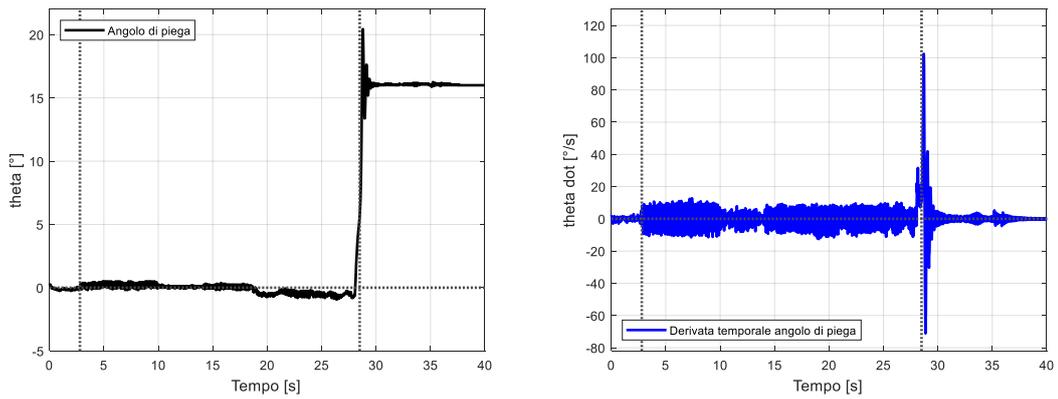


Figura 2.5.1 – Andamento sperimentale dell'angolo di piega θ (sinistra) e della sua derivata nel tempo $\dot{\theta}$ (destra). Collegamento computer-motociclo con cavo USB.

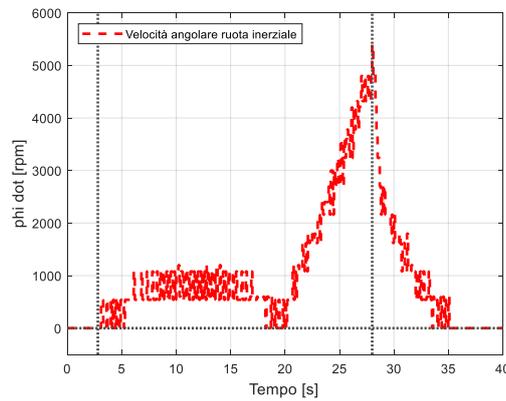


Figura 2.5.2 – Andamento sperimentale della velocità angolare del volano $\dot{\phi}$. Collegamento computer-motociclo con cavo USB.

È importante osservare la proporzionalità tra gli andamenti di Figura 2.5.1 e quelli di Figura 2.5.3.

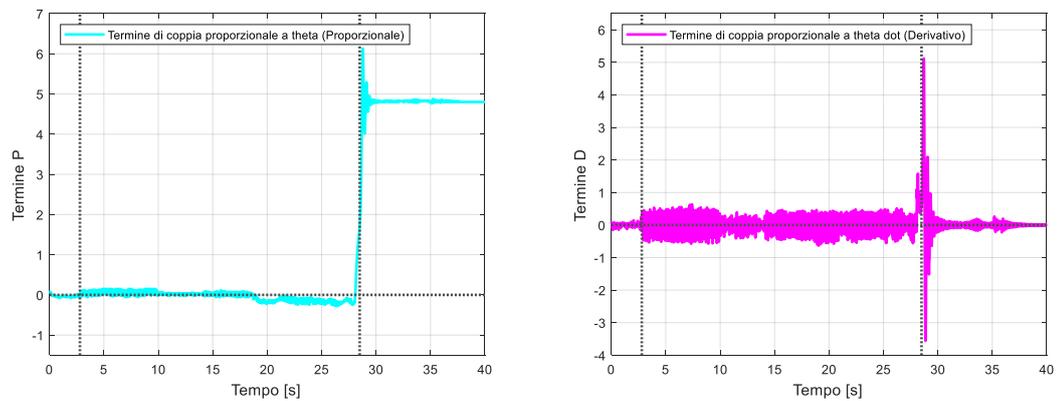


Figura 2.5.3 – Andamento sperimentale del termine di coppia P (sinistra) e del termine di coppia D (destra). Collegamento computer-motociclo con cavo USB.

L'andamento del termine Proporzionale è proporzionale all'andamento dell'angolo di piega di un fattore K_p (guadagno proporzionale), mentre l'andamento del termine Derivativo è proporzionale all'andamento della derivata temporale dell'angolo di piega di un fattore K_d (guadagno derivativo).

I valori dei guadagni proporzionale e derivativo del controllore PD sono elencati in Tabella 2.5.1.

La seconda prova sperimentale viene realizzata eliminando il cavo USB e connettendo il sistema al computer in modalità Wi-Fi per eliminare il problema descritto precedentemente. La Figura 2.5.4 (sinistra) mostra che è possibile stabilizzare la moto per un tempo pari a 17 s. Come nel test precedente, la causa della caduta del motociclo è dovuta al raggiungimento della velocità massima consentita al volano posta, in questo caso, pari a 6000 rpm (Figura 2.5.5). L'andamento dell'angolo di inclinazione diverge fino ad un valore pari a 16° corrispondente al blocco fisico imposto dal cavalletto della moto. Confrontando gli andamenti di Figura 2.5.4 con quelli di Figura 2.5.6, è possibile osservare il legame di proporzionalità già riscontrato nella prova precedente.

I valori dei guadagni proporzionale e derivativo utilizzati nella prova sperimentale con connessione Wi-Fi sono elencati in Tabella 2.5.1.

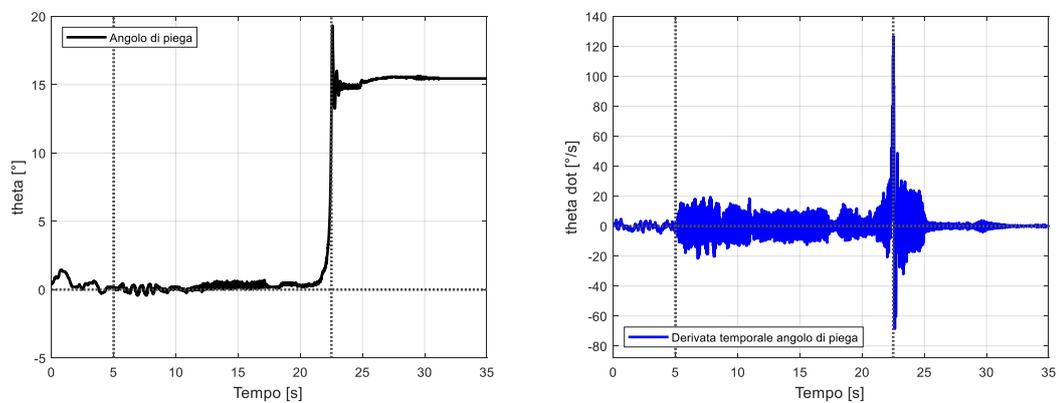


Figura 2.5.4 – Andamento sperimentale dell'angolo di piega θ (sinistra) e della sua derivata nel tempo $\dot{\theta}$ (destra). Collegamento Wi-Fi computer-motociclo.

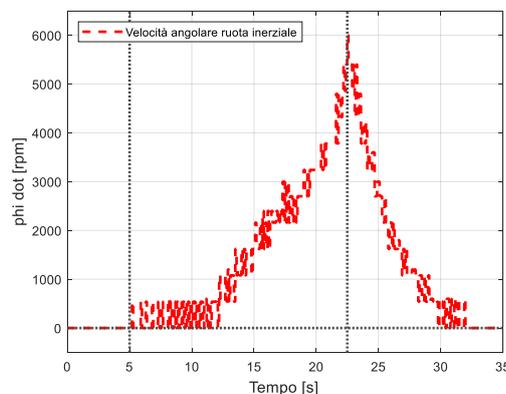


Figura 2.5.5 – Andamento sperimentale della velocità angolare del volano $\dot{\phi}$. Collegamento Wi-Fi computer-motociclo.

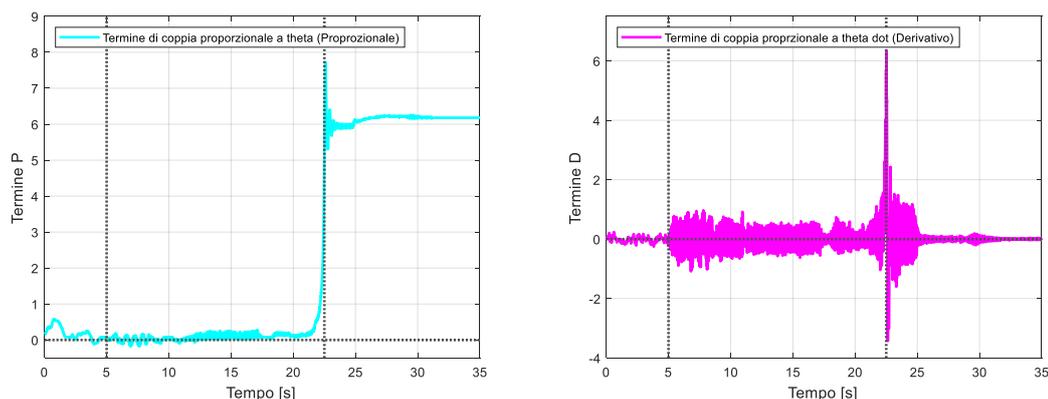


Figura 2.5.6 – Andamento sperimentale del termine di coppia P (sinistra) e del termine di coppia D (destra). Collegamento Wi-Fi computer-motociclo.

Tabella 2.5.1 – Guadagni del controllore PID.

Controllore	K_p	K_i	K_d
USB	0.3	0	0.05
Wi-Fi	0.4	0	0.05

In conclusione, a seguito di tutte le modifiche necessarie a migliorare il comportamento del sistema, è possibile mantenere il motociclo in posizione verticale solamente per un tempo massimo di 25 secondi poiché, anche eliminando il bias e mantenendo il baricentro in posizione, vengono riscontrate altre problematiche. La più importante è legata alla posizione del baricentro che potrebbe non essere allineato perfettamente all'asse ruota-terreno. Questo fa sì che il sistema raggiunga l'equilibrio per un valore di θ molto vicino alla condizione $\theta = 0$ senza mai raggiungerla; il motore, quindi, continua a produrre coppia e la velocità del volano aumenta fino al valore massimo impostato dal controllore PD. Una volta superato questo valore, il motore si spegne e sul sistema non agirà più la coppia necessaria a contrastare quella gravitazionale. Oltre a ciò, come detto in precedenza, la struttura presenta un'elevata flessibilità che porta ad ottenere una scarsa ripetibilità nelle misurazioni durante i test effettuati.

2.6 Conclusioni

È stata effettuata un'analisi della dinamica laterale di un motociclo fermo nella sua posizione verticale, privo di sterzo e libero di muoversi solamente intorno all'asse ruota-terreno. È stato preso come esempio il motociclo Arduino[®] che, in determinate condizioni di funzionamento, può essere studiato come un pendolo inverso che utilizza una coppia di reazione per mantenere la posizione verticale: è stato implementato un controllore PD che assume in ingresso l'angolo di inclinazione della moto insieme alla variazione dell'angolo nel tempo e fornisce in uscita una coppia da applicare al volano. A livello teorico, la velocità del volano aumenta linearmente nel tempo poiché il sistema si stabilizza ad un valore di θ molto vicino al suo punto di equilibrio ma non lo raggiunge; questo fa sì che il motore continui a produrre coppia.

Nella realtà, la velocità del volano non aumenta indefinitamente poiché è presente l'attrito. La maggior parte delle forze di attrito, incluso l'attrito solido-solido, hanno un termine che aumenta con la velocità relativa tra oggetti. All'aumentare della velocità del volano, la coppia di attrito nel motore aumenta anche fino al raggiungimento di una velocità angolare limite. In questo caso la coppia di attrito è uguale e opposta alla coppia applicata dal motore. Pertanto, non è possibile raggiungere una velocità angolare infinita. Tuttavia, quando la forza di attrito è elevata, il motore genera molto calore e può causare danni irreversibili. Quindi, una volta raggiunta una certa velocità limite massima, è necessario spegnere il motore per evitare la rottura del componente: sul sistema non agirà più la coppia necessaria a contrastare quella gravitazionale agente nel suo baricentro.

3. Banco prova pendolo

In questo capitolo viene presentato il banco prova e il relativo controllo utilizzato come alternativa al sistema pendolo piano analizzato nel Capitolo 2.

Inizialmente, per comprendere le principali analogie e differenze, è necessario considerare un generico pendolo piano inverso formato da un'asta rigida e da una massa sospesa, il cui fulcro può essere spostato solamente lungo l'asse y (Figura 3.1).

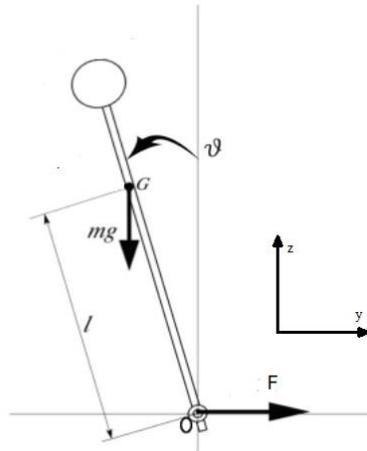


Figura 3.1 – Esempio di pendolo piano inverso con fulcro movimentabile.

Il modello di Figura 3.1 può essere paragonato a quello utilizzato per lo studio del bilanciamento del motociclo (Figura 2.1.2), dove θ rappresenta l'angolo di piega. Vengono apportate alcune modifiche:

- non è presente una coppia di reazione applicata al sistema da un volano;
- il sistema non è vincolato a muoversi solamente intorno all'asse x (o asse ruota-terreno) ma è consentita anche la traslazione lungo l'asse y .

In questo caso, l'unico modo per ottenere la stabilizzazione del pendolo è quello di muovere il fulcro a seguito di una variazione della posizione angolare.

Il banco prova realizzato (Figura 3.2) è formato da un telaio che supporta una struttura H-bridge per la movimentazione del carrello sul quale è incernierato il pendolo [7]. Questo layout utilizza un'unica cinghia di distribuzione per ottenere uno spostamento del carrello in più direzioni ed è quindi possibile effettuare un'analisi della dinamica del pendolo in 3 differenti configurazioni di moto: movimento X , movimento Y e movimento XY .

La configurazione di moto corrispondente allo spostamento lungo l'asse y è quella che permette di ottenere la stabilizzazione del pendolo piano poiché per ogni variazione dell'angolo di inclinazione corrisponde uno spostamento del carrello nella stessa direzione in modo da riportare il sistema nella sua posizione di equilibrio.

Questo design è molto utilizzato nel settore delle stampanti 3D grazie alla sua facile implementazione [16].

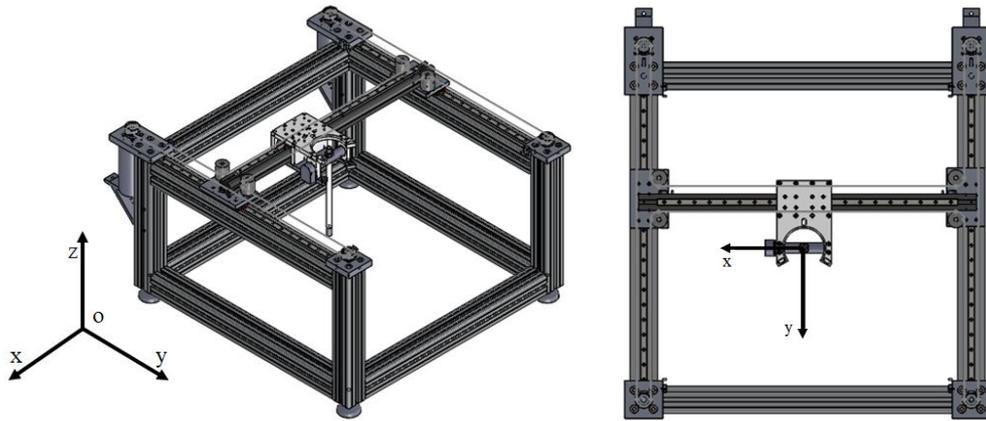


Figura 3.2 – Modello Solidworks® del banco prova. Vista isometrica (sinistra) e vista dall'alto (destra).

Quindi, la differenza principale tra i due modelli è rappresentata dal tipo di forza applicata al sistema per rimanere in posizione verticale: il motociclo utilizza una coppia di reazione applicata al volano funzione del solo angolo di piega θ mentre il banco prova utilizza una forza applicata al fulcro/carrello funzione dell'angolo di inclinazione θ e del suo spostamento y (eqs. (3.1)).

$$\begin{aligned} C &= \tau_{motor, IW} = bF_{moto} = f(\theta) \\ F_{fulcro} &= f(\theta, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dove:

- C è la coppia di reazione applicata al sistema dal volano e può essere espressa come il prodotto tra la forza F_{moto} e il braccio b che rappresenta la distanza tra l'asse di rotazione e il punto in cui viene applicata la forza;
- F_{fulcro} è la forza applicata al fulcro/carrello funzione dell'angolo di inclinazione e del suo spostamento [17].

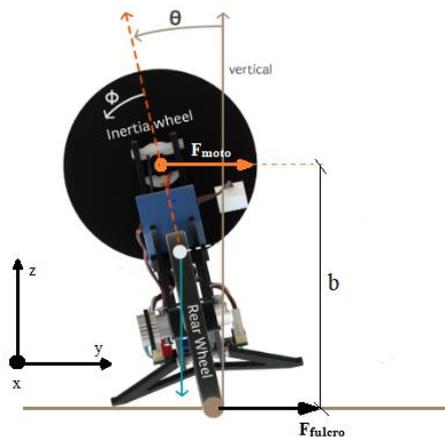


Figura 3.3 – Forza applicata su Motociclo Arduino® per la stabilizzazione.

Quindi, nel caso in cui il motociclo non fosse vincolato a ruotare solamente intorno all'asse ruota-terreno ma potesse anche traslare lungo un asse perpendicolare ad esso, sarebbe possibile progettare una logica di controllo che stabilizzi il sistema nel suo punto di equilibrio applicando una forza laterale F_{fulcro} in corrispondenza dei punti di contatto ruota-terreno (Figura 3.3).

Per ottenere la dinamica del pendolo all'interno del banco prova, verrà utilizzato l'approccio Lagrangiano. Sarà necessario considerare le seguenti caratteristiche del sistema per il calcolo delle equazioni del moto:

- Massa composta e non massa concentrata;
- Movimento del fulcro;
- Asta rigida, ovvero lunghezza del pendolo costante;
- Forze esterne.

3.1 Modello classico ed equazioni del moto

Viene considerato un pendolo semplice piano formato da un'asta rigida di lunghezza costante l e massa sospesa m . Il sistema di riferimento del fulcro è Oxyz. Le coordinate cartesiane della massa sospesa sono $[x_p(t), y_p(t), z_p(t)]$.

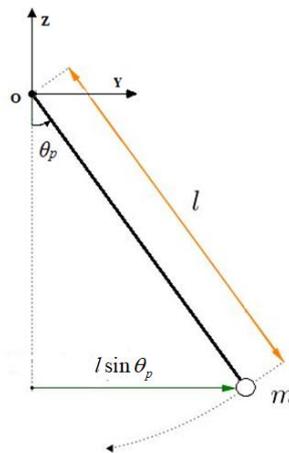


Figura 3.1.1 – Sistema di riferimento del pendolo piano.

Utilizzando il sistema di riferimento mostrato in Figura 3.1.1, si possono ottenere le coordinate cartesiane della posizione della massa sospesa (eqs. (3.2)).

$$\begin{aligned}
 x_p &= x \\
 y_p &= y + l \sin \theta_p \\
 z_p &= -l \cos \theta_p
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Derivando le equazioni (3.2), è possibile ottenere i termini di velocità.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_p &= \dot{x} \\
\dot{y}_p &= \dot{y} + l \cos \theta_p \dot{\theta}_p \\
\dot{z}_p &= l \sin \theta_p \dot{\theta}_p
\end{aligned} \tag{3.3}$$

L'approccio Lagrangiano richiede un bilanciamento dei termini descritti nell'eq. (3.3), portando così alla formulazione dell'equazione Lagrangiana (eq. (3.4)) dove le derivate parziali sono calcolate rispetto alle coordinate generalizzate (eq. (3.6)).

Quindi, tramite l'approccio Lagrangiano, è possibile ottenere 4 equazioni che descrivono il comportamento dinamico del pendolo semplice e inverso nel piano e lo spostamento del loro fulcro.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{3.4}$$

$$L = T - V \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
q &= \{x, y, \theta_p\} \\
\dot{q} &= \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}_p\}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

L'intenzione è quella di muovere il fulcro attraverso la presenza di un carrello mobile che può spostarsi sia in direzione X sia in direzione Y (Figura 3.3); in questo modo si ottengono masse diverse collegate a ciascun spostamento.

L'energia cinetica T e potenziale V possono essere scritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} M_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}_p^2 \\
V &= mgz_p = -mgl \cos \theta_p
\end{aligned} \tag{3.7}$$

L'equazione Lagrangiana finale può essere scritta come:

$$L = \frac{1}{2} (M_x + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (M_y + m) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}_p^2 + 2l \cos \theta_p \dot{\theta}_p \dot{y}) + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}_p^2 + mgl \cos \theta_p \tag{3.8}$$

Omettendo alcuni semplici passaggi matematici è possibile ottenere le equazioni finali del moto (eqs. (3.9)):

$$\begin{aligned}
(M_y + m) \ddot{y} + c \dot{y} - ml \sin \theta_p \dot{\theta}_p^2 + ml \cos \theta_p \ddot{\theta}_p &= F_y \\
J_0 \ddot{\theta}_p + mgl \sin \theta_p &= -ml \dot{y} \cos \theta_p \\
(M_x + m) \ddot{x} &= F_x
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dove:

- M_Y, M_X : massa equivalente del carrello Y e del carrello X [kg];
- m : massa del pendolo [kg];
- c : coefficiente di smorzamento viscoso del carrello [N·s/m];
- l : distanza tra fulcro e centro di massa [m];
- $J_0 = J_g + mL^2$ [kg·m²];
- J_g : momento di inerzia di massa del pendolo composto riferito al suo centro di massa [kg·m²];
- F_y, F_x : forza esterna applicata al pendolo in direzione x e y [N];
- g : accelerazione gravitazionale [m/s²].

3.1.1 Linearizzazione

Al fine di progettare il controllo, è necessario linearizzare le equazioni del moto nell'intorno dei punti di equilibrio. Vengono identificati due casi diversi. Il pendolo semplice, vicino al punto di stabilità asintotico, richiede una certa approssimazione dei termini trigonometrici (eqs. (3.10)).

$$\begin{aligned}\cos \theta_p &\approx 1 \\ \sin \theta_p &\approx \theta_p\end{aligned}\tag{3.10}$$

Il pendolo inverso, invece, vicino al suo punto di equilibrio instabile, richiede un'approssimazione dei termini trigonometrici del tipo:

$$\begin{aligned}\cos \theta_p &\approx -1 \\ \sin \theta_p &\approx -\theta_p\end{aligned}\tag{3.11}$$

Le equazioni del moto linearizzate risultanti sono le seguenti:

$$\begin{aligned}(M_Y + m) \ddot{y} + c \dot{y} \pm ml \ddot{\theta}_p &= F_y \\ J_0 \ddot{\theta}_p \pm mgl \theta_p &= \mp ml \ddot{y} \\ (M_X + m) \ddot{x} &= F_x\end{aligned}\tag{3.12}$$

Le equazioni del moto mostrano una variazione nel segno del termine relativo alla gravità e dei termini di accoppiamento.

Utilizzando il dominio di Laplace è possibile ottenere le funzioni di trasferimento. In matematica e nella teoria dei sistemi dinamici, la funzione di trasferimento è una funzione che caratterizza il comportamento di un sistema dinamico tempo-invariante nel dominio della frequenza, mettendo in relazione l'ingresso e l'uscita. Può essere definita per descrivere sia sistemi lineari che sistemi non-lineari.

Considerando nulla la forza F_x applicata al carrello, le equazioni (3.12) diventano:

$$\begin{aligned}
(M_Y + m)y(s)s^2 + cy(s)s \pm ml\theta_p(s)s^2 &= F_y(s) \\
J_0\theta_p(s)s^2 \pm mgl\theta_p(s) &= \mp mly(s)s^2
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

Le funzioni di trasferimento risultanti sono:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{y(s)}{F_y(s)} = \frac{J_0s^2 \pm mgl}{qs^4 + cJ_0s^3 \pm mgl(M_Y + m)s^2 \pm cmgl s} \\
G_2 &= \frac{\theta_p(s)}{F_y(s)} = \frac{\mp mls^2}{qs^4 + cJ_0s^3 \pm mgl(M_Y + m)s^2 \pm cmgl s}
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

Dove:

$$q = J_0(M_Y + m) - (ml)^2 \tag{3.15}$$

Ritornando alle eqs. (3.12), è possibile descrivere le stesse dinamiche nello spazio degli stati.

Un generico sistema dinamico lineare tempo-invariante può essere descritto, nello spazio degli stati, come:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}
\tag{3.16}$$

Dove \mathbf{z} è il vettore di stato, \mathbf{y} è il vettore di uscita e \mathbf{u} è il vettore di ingresso. La matrice \mathbf{D} , nella maggior parte dei casi, può non essere considerata ovvero si supporrà $\mathbf{D} = 0$.

È necessario quindi andare a definire l'insieme degli stati, input e output del sistema; nel caso del pendolo piano, essi sono:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \left\{ \dot{\theta}_p \quad \theta_p \quad \dot{y} \quad y \right\}^T \\
\mathbf{u} &= \left\{ F_y \right\} \\
\mathbf{y} &= \left\{ \theta_p \quad y \right\}^T
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

È necessario notare che la forza applicata al carrello è l'input, mentre gli output sono la posizione angolare del pendolo e la posizione del carrello (Sistema single input multiple output (SIMO)). Ora è possibile scrivere le equazioni del moto in forma canonica:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_p &= \mp \frac{(M_Y + m)mgl}{q} \theta_p \pm \frac{cml}{q} \dot{y} \mp \frac{ml}{q} F_y \\
\ddot{y} &= \frac{m^2l^2g}{q} \theta_p - \frac{cJ_0}{q} \dot{y} + \frac{J_0}{q} F_y
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

Quindi, le equazioni del moto (eqs. (3.18)) vengono riscritte in forma matriciale seguendo l'equazione (3.16):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} - & \mp \frac{(M_Y + m)mg l}{q} & \pm \frac{cml}{q} & - \\ 1 & - & - & - \\ - & \frac{m^2 l^2 g}{q} & - \frac{cJ_0}{q} & - \\ - & - & 1 & - \end{pmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mp \frac{ml}{q} & - & + \frac{J_0}{q} & - \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} - & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Le matrici (3.19) sono matrici sparse.

La Tabella 3.1.1.1 definisce le grandezze fisiche del sistema ottenute tramite una procedura di modellazione e progettazione del pendolo piano tramite Solidworks®.

Tabella 3.1.1.1 – Proprietà del pendolo piano.

Caratteristiche	Proprietà	Valore
Ambiente	g , accelerazione gravitazionale [m/s ²]	9.81
Pendolo	l , centro di massa [m]	0.09
	m , massa [kg]	0.0748
	J_g , momento di inerzia di massa [kg m ²]	5.3e-4
Carrello Y	M_Y , massa [kg]	3.72
	c , coefficiente di smorzamento [N s/m]	4.0e-3

3.1.2 Discretizzazione

In matematica, la discretizzazione rappresenta il processo di trasformazione di modelli matematici ed equazioni continue nelle controparti discrete. Questo processo è spesso necessario come primo passo per esaminare un problema fisico.

La discretizzazione delle equazioni del moto del pendolo piano, rappresentate nello spazio degli stati (eqs. (3.16)), può essere effettuata tramite il metodo di Eulero Esplicito.

Il metodo di Eulero è una procedura numerica del primo ordine utilizzata per risolvere equazioni differenziali ordinarie (ODE) una volta fornito un valore iniziale.

Questo metodo consente di approssimare numericamente una derivata nel tempo tramite un rapporto incrementale in avanti [18]:

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k)}{\Delta t} \tag{3.20}$$

Ciò significa che si selezionano $K > 0$ istanti temporali t_k , con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_K = T$ e per ciascuno dei quali si costruisce una approssimazione $\mathbf{z}(k) \approx \mathbf{z}(t_k)$ della soluzione esatta.

La situazione più semplice si ha quando si avanza con un passo temporale $\Delta t > 0$ costante (in tal caso si pone $K = T/\Delta t$, assumendo che questo quoziente sia intero); gli istanti temporali sono allora definiti come $t_k = k\Delta t$, per $k = 0, 1, 2, \dots, K$.

Andando a sostituire l'equazione (3.20) nell'eqs. (3.16) si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A})\mathbf{z}(k) + \Delta t \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{z}(k) \end{cases} \quad (3.21)$$

Il sistema (eqs. (3.21)) può essere riscritto in modo più compatto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{z}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{z}(k) \end{cases} \quad (3.22)$$

Il valore approssimato $\mathbf{z}(k)$ della soluzione esatta può essere facilmente esplicitato attraverso alcuni passaggi elementari:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{z}(0) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(0) \\ \mathbf{z}(2) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{z}(1) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(1) = \mathbf{\Phi}^2\mathbf{z}(0) + \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(0) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(1) \\ &\vdots \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{\Phi}^k\mathbf{z}(0) + \sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^{k-l-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(l) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Il risultato ottenuto (eqs. (3.23)) permette di affermare che lo stato del sistema è in ogni istante dato dalla somma di due contributi, il primo dipendente linearmente dallo stato iniziale e il secondo dipendente linearmente dall'ingresso. Questi due contributi al movimento di un sistema dinamico si chiamano, rispettivamente, movimento libero e movimento forzato. $\mathbf{\Phi}^k$ è chiamata matrice di transizione.

Le funzioni di trasferimento (eqs. (3.14)), invece, possono essere discretizzate tramite il metodo delle differenze finite all'indietro [19] applicando una semplice sostituzione:

$$\begin{aligned} s &= \frac{z-1}{Tz} \\ G(z) &= G(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dove T è il periodo di campionamento.

$$G_1(z) = \frac{T^2 z^2 [(J_0 \pm mglT^2)z^2 - 2J_0 z + J_0]}{z^4 (q + aT \pm bT^2 \pm dT^3) - z^3 (4q + 3aT \pm 2bT^2 \pm dT^3) + z^2 (6q + 3aT \pm bT^2) - z(4q + aT) + q} \quad (3.25)$$

$$G_1(z) = \frac{\mp T^2 z^2 ml(z^2 - 2z + 1)}{z^4 (q + aT \pm bT^2 \pm dT^3) - z^3 (4q + 3aT \pm 2bT^2 \pm dT^3) + z^2 (6q + 3aT \pm bT^2) - z(4q + aT) + q}$$

Dove:

$$\begin{aligned} a &= cJ_0 \\ b &= mgl(M_Y + m) \\ d &= cmgl \\ q &= J_0(M_Y + m) - (ml)^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Con questo metodo ogni funzione di trasferimento $G(s)$ stabile viene trasformata in una $G(z)$ stabile. Inoltre, anche poli instabili in s possono essere trasformati in poli stabili in z .

Una seconda soluzione prevede l'utilizzo della Trasformazione di Tustin [19]. Questo metodo discretizza le funzioni di trasferimento andando ad effettuare la seguente sostituzione:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$G(z) = G(s) \Bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (3.27)$$

Dove T è il periodo di campionamento.

La trasformazione bilineare (o di Tustin) trasforma una $G(s)$ stabile in una $G(z)$ discreta stabile e viceversa.

La discretizzazione delle funzioni di trasferimento con la trasformazione di Tustin viene fatta in ambiente Matlab[®] tramite il comando `c2d`.

3.1.3 Periodo di campionamento

Limitazione fondamentale sulla scelta del periodo di campionamento è data dal Teorema del campionamento di Nyquist-Shannon.

Il teorema definisce la minima frequenza, detta frequenza di Nyquist, necessaria per campionare un segnale analogico senza perdere informazioni, e per poter quindi ricostruire il segnale analogico tempo continuo originario. In particolare, il teorema afferma che, data una funzione la cui trasformata di Fourier sia nulla al di fuori di un certo intervallo di frequenze (ovvero un segnale a banda limitata), nella sua conversione analogico-digitale la minima frequenza di campionamento necessaria per evitare aliasing e perdita di informazione nella ricostruzione del segnale analogico originario (ovvero nella riconversione digitale-analogica) deve essere maggiore del doppio della sua frequenza massima, detta appunto frequenza di Nyquist [20].

Questo teorema può essere applicato al caso specifico del pendolo piano andando a considerare una frequenza di campionamento f_{camp} pari almeno al doppio della sua frequenza naturale di oscillazione f_n (eq. (3.28)):

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_g + ml^2}} = 1.214 \text{ Hz} \quad (3.28)$$

$$f_{camp} \geq 2f_n$$

La condizione $f_{camp} = 2 \cdot f_n$ vale solo se il segnale è rigorosamente a banda limitata, cioè se è possibile individuare nel suo spettro una frequenza massima; a parte le sinusoidi, nessun segnale reale di interesse pratico ha una banda limitata.

A partire da una frequenza di campionamento pari a $2 \cdot f_n$, si è aumentato il suo valore fino ad ottenere una frequenza tale da permettere la ricostruzione del segnale continuo originario (Figura 3.1.3.1).

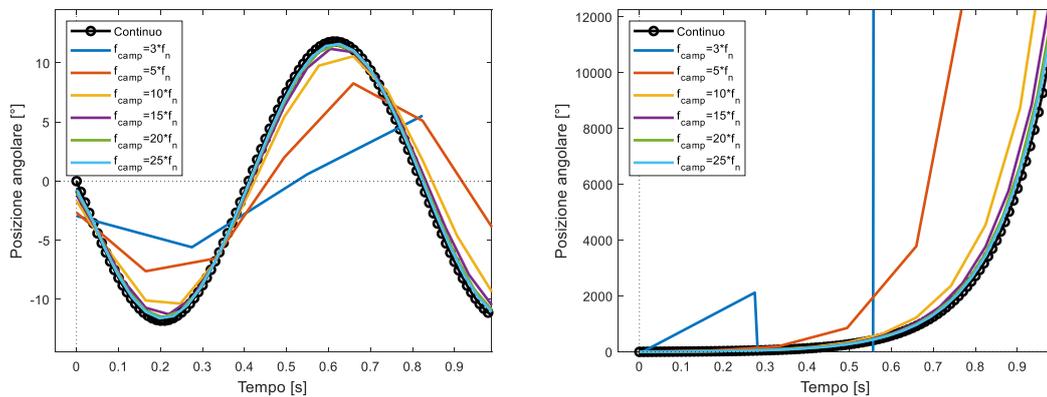


Figura 3.1.3.1 – Risposta libera all’impulso del pendolo semplice (sinistra) e inverso (destra) ($f_{camp} < 25 \cdot f_n$).

In Figura 3.1.3.2 è possibile osservare qualitativamente che la frequenza di campionamento minima per evitare aliasing e perdita di informazione del segnale originario è pari a $25 \cdot f_n$ ($T_{camp} = 0.033$ s). È stato scelto questo valore poiché, anche utilizzando una frequenza di campionamento doppia pari $50 \cdot f_n$, non è possibile riscontrare una variazione significativa dell’andamento discreto.

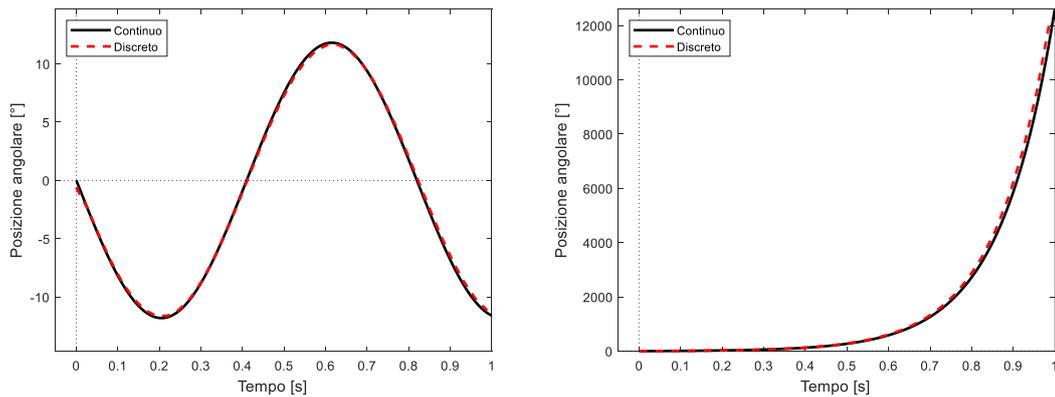


Figura 3.1.3.2 – Risposta libera all’impulso del pendolo semplice (sinistra) e inverso (destra) ($f_{camp} = 25 \cdot f_n$).

Siccome le schede di acquisizione dati possono lavorare a frequenze molto più elevate, si è deciso di utilizzare una $f_{camp} = 150 \cdot f_n$ per evitare problemi nell’acquisizione dei segnali. Quindi si è scelto di discretizzare le funzioni di trasferimento con la trasformazione di Tustin e con un periodo di campionamento pari a 0.0055 s, ovvero una $f_{camp} = 150 \cdot f_n$ (Figura 3.1.3.3).

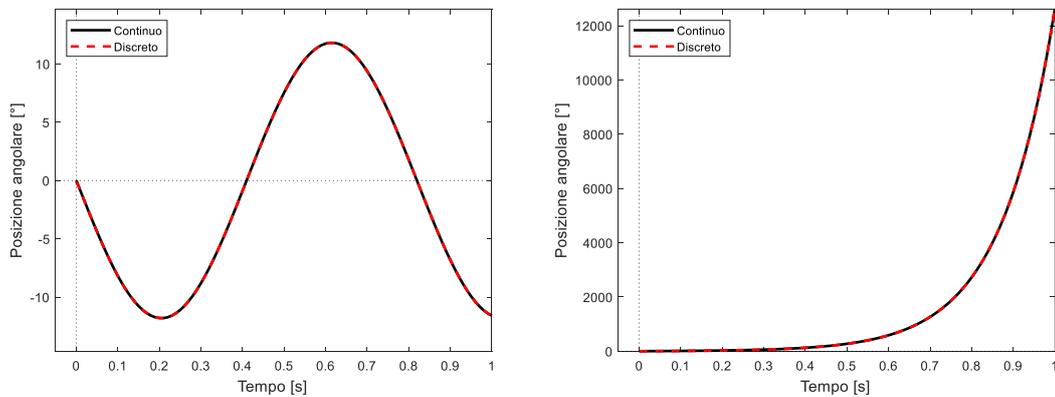


Figura 3.1.3.3 – Risposta libera all’impulso del pendolo semplice (sinistra) e inverso (destra) ($f_{camp} = 150 \cdot f_n$).

La scelta del periodo di campionamento dipende dal metodo di discretizzazione utilizzato per campionare le funzioni di trasferimento.

3.2 Controllo PID

Le funzioni di trasferimento continue e discrete (eqs. (3.14) e (3.25)) sono necessarie per la realizzazione del controllore PID.

Questa tecnica di controllo può essere utilizzata solamente per sistemi SISO; per cui se si volesse effettuare un controllo sia sulla posizione angolare del pendolo che sulla posizione del carrello sarebbe necessario utilizzare contemporaneamente due controllori

PID ma la loro sintonizzazione diventerebbe estremamente complicata. Per questo motivo, inizialmente, si è scelto di effettuare solamente l'analisi sul controllo della posizione angolare del pendolo e non quella sulla posizione del carrello.

I valori dei tre parametri K_p , K_i e K_d per il controllo della posizione del pendolo semplice e inverso nel piano sono riportati in Tabella 3.2.1 e in Tabella 3.2.2.

La scelta di questi coefficienti è stata fatta in modo da rispettare i seguenti requisiti di progettazione [7]:

- Rising time ≤ 0.5 secondi;
- Settling time ≤ 3 secondi;
- Overshoot $\leq 30\%$;
- SSE $\leq 5\%$.

Questi requisiti devono essere garantiti sia per la risposta al gradino sia per quella a impulso e verrà mostrato nel Capitolo 3.2.1 e Capitolo 3.2.2 come i valori dei guadagni scelti permettano di rispettarli.

Tabella 3.2.1 – Guadagni del controllore PID per il pendolo semplice.

Controllore	K_p	K_i	K_d
Pendolo	1700	4000	120

Tabella 3.2.2 – Guadagni del controllore PID per il pendolo inverso.

Controllore	K_p	K_i	K_d
Pendolo	1900	3700	150

Ricordando la legge di controllo del PID nel dominio di Laplace:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (3.29)$$

È possibile ricavare la funzione di trasferimento che collega il segnale di riferimento in ingresso $r(s)$ con il segnale di uscita $y(s)$:

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (3.30)$$

È importante notare, però, che la forza impulsiva (o a gradino) applicata al carrello può essere considerata come disturbo, per cui lo schema a blocchi con controllore in retroazione sarà simile a quello mostrato in Figura 3.2.1; il quale può essere riorganizzato come quello mostrato in Figura 3.2.2.

Controllare la posizione del pendolo, in modo da riportarlo sulla verticale dopo un impulso, implica che il segnale di riferimento $r(s)$ deve essere pari a zero.

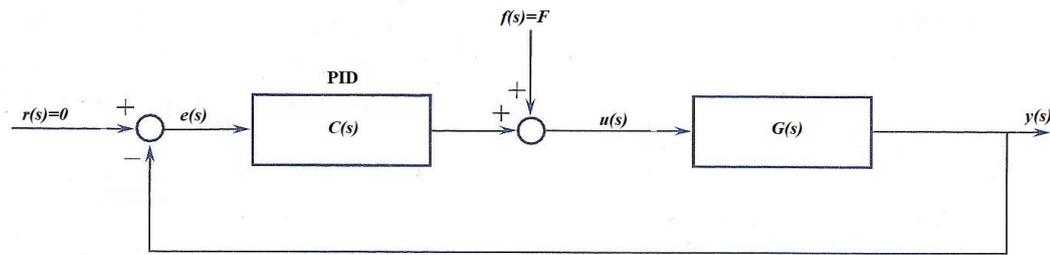


Figura 3.2.1 – Schema a blocchi del controllo PID in retroazione.

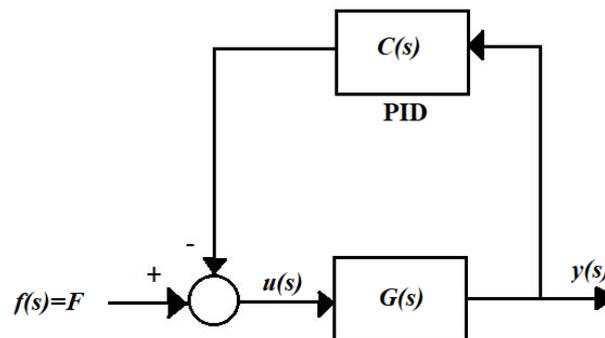


Figura 3.2.2 – Schema a blocchi equivalente del controllo PID in retroazione.

La funzione di trasferimento risultante rappresentativa dello schema a blocchi di Figura 3.2.2 sarà pari a:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} F(s) \quad (3.31)$$

Dove $G(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema e $C(s)$ la funzione di trasferimento del controllore.

Come detto in precedenza, per semplicità si è deciso di studiare solamente come varia la posizione angolare del pendolo sia nel caso di risposta libera sia nel caso in cui vi sia retroazione tramite controllo PID; l'eq. (3.31) può essere scritta come:

$$W(s) = \frac{\theta_p(s)}{F_y(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)C(s)} \quad (3.32)$$

L'equazione (3.32) è facilmente calcolabile in Matlab[®] tramite il comando `feedback`. In seguito, sono state utilizzate le funzioni Matlab[®] `impz` e `step` per valutare l'andamento nel tempo rispettivamente della risposta all'impulso e della risposta al gradino. Queste funzioni possono essere utilizzate sia in campo continuo che in campo discreto.

3.2.1 Risposta all'impulso e al gradino del pendolo semplice

Il pendolo semplice può essere considerato un sistema SDOF (single degree of freedom) MK, ovvero un sistema ideale costituito da una massa concentrata M che può spostarsi in un'unica direzione, vincolata da una molla di rigidità K . Questo sistema ideale oscillerà in eterno. Nella realtà è possibile osservare che il moto di un pendolo non continua all'infinito: la sua ampiezza si riduce man mano, finché esso si ferma del tutto. Ciò è dovuto alla dissipazione di energia provocata dalla resistenza dell'aria, dall'attrito dell'asta nel suo perno, ecc.

Il fenomeno dissipativo, in sé abbastanza complesso, viene schematizzato considerando presenti azioni viscosi, proporzionali alla variazione della posizione nel tempo. Quindi, dopo aver applicato un impulso, il pendolo oscillerà per un certo periodo di tempo intorno al suo punto di stabilità per poi raggiungerlo a causa della dissipazione di energia (e quindi dello smorzamento delle oscillazioni). Il compito del controllore è quello di portare il sistema nel suo punto di equilibrio in un certo tempo prestabilito dallo stesso controllore, inferiore al tempo che impiegherebbe per raggiungerlo in presenza di solo smorzamento delle oscillazioni.

La Figura 3.2.1.1 mostra la risposta impulsiva del pendolo piano semplice senza controllo (sinistra) e con controllo in retroazione (destra).

Osservando il grafico di sinistra di Figura 3.2.1.1, è possibile notare come dopo 5 secondi il sistema continui a oscillare intorno al suo punto di equilibrio che sarà raggiunto dopo un periodo di tempo dell'ordine di 10^5 secondi (questo avviene nel caso in cui si considera lo smorzamento del pendolo, altrimenti continuerebbe ad oscillare all'infinito); invece osservando il grafico di destra è possibile notare come il sistema raggiunga la stabilità in un tempo pari a circa 2 secondi.

Dall'analisi dell'andamento del grafico di destra di Figura 3.2.1.1 è possibile affermare che sono stati rispettati tutti i requisiti di progettazione precedentemente elencati (Tabella 3.2.1.1).

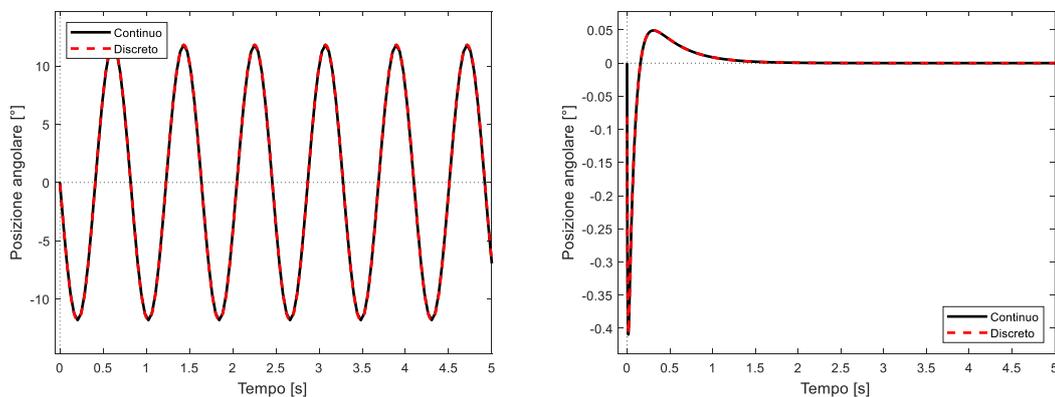


Figura 3.2.1.1 – Risposta all'impulso del pendolo semplice senza controllo (sinistra) e con controllo PID (destra) in retroazione.

La Figura 3.2.1.2 rappresenta invece la risposta al gradino del pendolo piano semplice senza controllo (sinistra) e con controllo in retroazione (destra).

È possibile sviluppare lo stesso ragionamento fatto per la risposta impulsiva ed è possibile osservare come il sistema controllato raggiunga la stabilità in un periodo di

tempo pari a 1.6 secondi. Anche in questo caso tutti i requisiti di progettazione vengono rispettati come mostrato in Tabella 3.2.1.1.

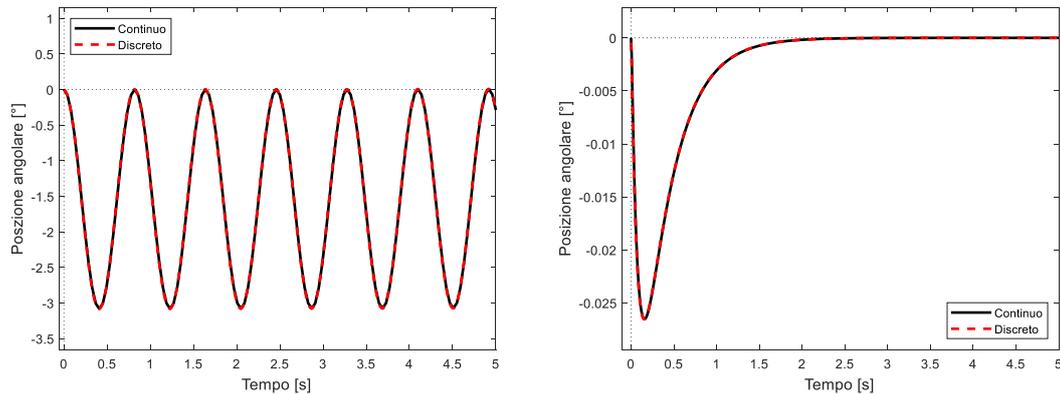


Figura 3.2.1.2 – Risposta al gradino del pendolo semplice senza controllo (sinistra) e con controllo PID (destra) in retroazione.

L’ottima sovrapposizione dell’andamento discreto rispetto a quello continuo, sia per la risposta impulsiva sia per quella al gradino, permette di affermare che la scelta del tempo di campionamento fatta ($T_{\text{camp}} = 0.0055$ secondi) consenta di ottenere un’ottima ricostruzione del segnale.

Tabella 3.2.1.1 – Indici di prestazione del controllo PID sulla posizione angolare θ_p del pendolo semplice.

Ind. di Prestazione	Risposta all’impulso		Risposta al gradino	
	Continuo	Discreto	Continuo	Discreto
Rising time [s]	-	-	-	-
Settling time [s]	1.025	1.026	1.615	1.612
Overshoot [%]	-	-	-	-
NRMSE [%]	19.45	19.29	57.87	58.90

3.2.2 Risposta all’impulso e al gradino del pendolo inverso

Gli stessi ragionamenti e le stesse osservazioni fatte per il pendolo semplice valgono per l’analisi degli andamenti della risposta impulsiva e al gradino del pendolo inverso.

La risposta libera del pendolo inverso, al contrario di quello semplice, è instabile come si può osservare dal grafico di sinistra di Figura 3.2.2.1 e di Figura 3.2.2.2 poiché, una volta perturbato, il sistema non tornerà spontaneamente verso il suo punto di equilibrio ma tenderà ad allontanarsi sempre di più. Il compito del controllore è quello di rendere stabile un sistema di natura instabile.

La Figura 3.2.2.1 mostra la risposta impulsiva di un pendolo piano inverso senza controllo (sinistra) e con controllo in retroazione (destra).

Confrontando i due grafici si può notare come il sistema diventi stabile nel momento in cui si applichi la retroazione di un controllore PID e raggiunga la stabilità in un tempo pari a circa 2 secondi.

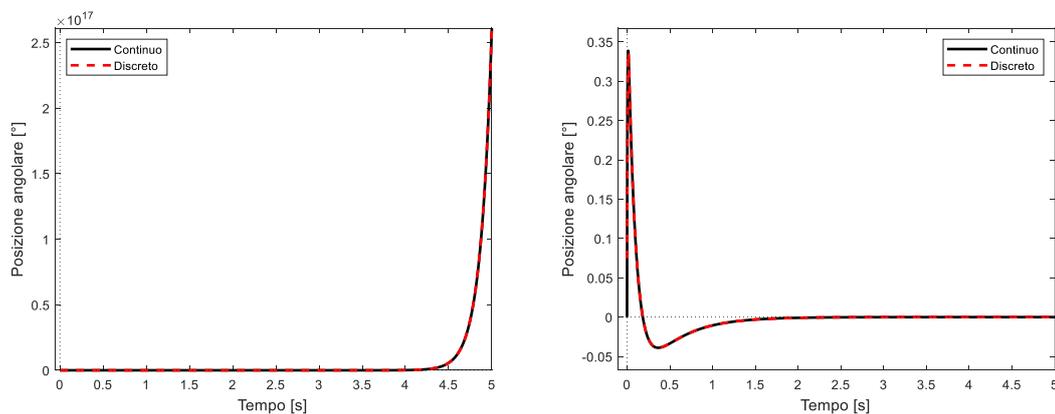


Figura 3.2.2.1 – Risposta all’impulso del pendolo inverso senza controllo (sinistra) e con controllo PID (destra) in retroazione.

La Figura 3.2.2.2 rappresenta invece la risposta al gradino di un pendolo piano inverso senza controllo (sinistra) e con controllo in retroazione (destra).

È possibile sviluppare lo stesso ragionamento fatto per la risposta impulsiva ed è possibile osservare come il sistema controllato raggiunga la stabilità in un periodo di tempo pari a 1.87 secondi. È stato utilizzato lo stesso PID progettato per la risposta al gradino.

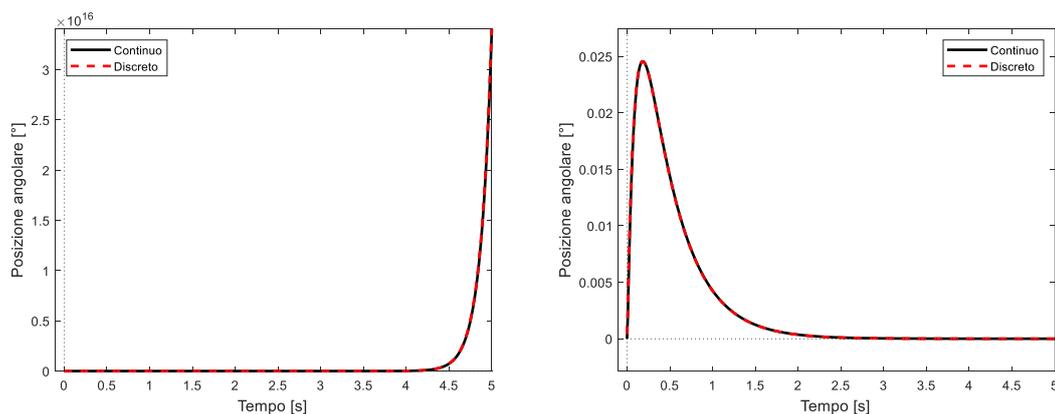


Figura 3.2.2.2 – Risposta al gradino del pendolo inverso senza controllo (sinistra) e con controllo PID (destra) in retroazione.

Anche in questo caso è possibile notare come tutti i requisiti di progettazione vengano rispettati sia per la risposta impulsiva sia per quella al gradino (Tabella 3.2.2.1).

L’ottima sovrapposizione dell’andamento discreto rispetto a quello continuo permette di affermare che la scelta del tempo di campionamento fatta ($T_{\text{camp}} = 0.0055$ secondi) sia corretta.

Tabella 3.2.2.1 – Indici di prestazione del controllo PID sulla posizione angolare θ_p del pendolo inverso.

Ind. di prestazione	Risposta all'impulso		Risposta al gradino	
	Continuo	Discreto	Continuo	Discreto
Rising time [s]	-	-	-	-
Settling time [s]	1.179	1.182	1.873	1.871
Overshoot [%]	-	-	-	-
NRMSE [%]	20.34	20.27	62.50	63.51

3.3 Modello motore BLDC

Il motore in corrente continua è una macchina elettrica rotante che converte energia elettrica in energia meccanica. L'uso dei motori DC brushless (o BLDC) è sempre più diffuso in settori quali automotive (in particolare nei veicoli elettrici), elettrodomestici e applicazioni industriali; la ragione principale è che questi motori abbandonano il commutatore meccanico a spazzole utilizzato nei motori tradizionali per sostituirlo con un dispositivo elettronico che migliora l'affidabilità e la durata dell'apparecchio [21].

Il tipo più semplice di motore elettrico è costituito da uno statore, un rotore e dal collettore a lamelle (Figura 3.3.1). Lo statore è la parte fissa della macchina e ha il compito di produrre il flusso magnetico necessario al suo funzionamento. Il rotore è costituito da un cilindro di materiale ferromagnetico posizionato all'interno dello statore ed è libero di ruotare intorno al proprio asse. Sul rotore sono presenti gli avvolgimenti di armatura ai capi dei quali, con rotore in movimento, si genera una forza elettromotrice. Montato sullo stesso albero del rotore è presente il collettore che ha lo scopo di fornire agli avvolgimenti la tensione di alimentazione.

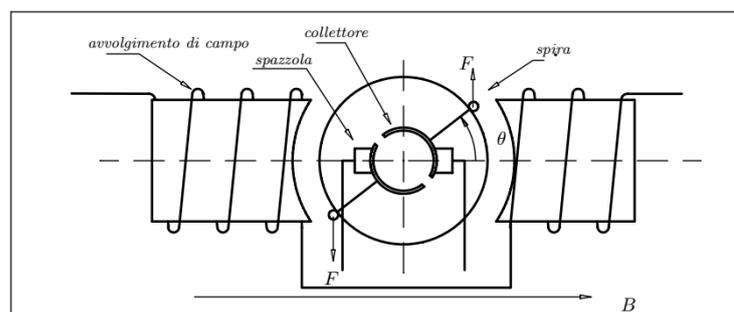


Figura 3.3.1 – Motore in corrente continua con commutatore a lamelle.

Il limite principale del motore a spazzole è proprio la presenza del commutatore a lamelle poiché è il componente più critico sia dal punto di vista termico sia da quello meccanico (usura). Si potrebbero evitare tutti i problemi scambiando il rotore con lo statore: se gli avvolgimenti venissero messi sulla parte fissa e i magneti fossero montati sul rotore, scomparirebbe il collettore a spazzole e gli avvolgimenti elettrici potrebbero smaltire più facilmente il calore generato. È quello che si fa nei motori brushless: il loro funzionamento è simile a quello del motore a spazzole ma, a differenza di un motore a lamelle, non ha bisogno di contatti elettrici striscianti sull'albero del rotore per

funzionare poiché il rotore è un magnete permanente e le bobine sono fissate in posizione sullo statore (Figura 3.3.2). La commutazione della corrente circolante negli avvolgimenti dello statore, e quindi la variazione dell'orientamento del campo magnetico da essi generato, avviene elettronicamente [22] grazie a tre sensori ad effetto Hall incorporati nello statore che indicano al microcontrollore le posizioni relative di statore e rotore per far sì che possa eccitare gli avvolgimenti nella sequenza giusta e al momento giusto.

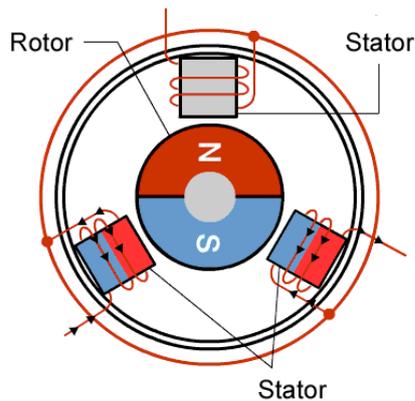


Figura 3.3.2 – Motore BLDC [23].

Il banco prova progettato per lo studio della dinamica del pendolo piano prevede l'utilizzo di due motori brushless a corrente continua per il movimento del carrello [7]. Ciò comporta una minore resistenza meccanica, elimina la possibilità che si formino scintille al crescere della velocità di rotazione, e riduce notevolmente la necessità di manutenzione periodica.

È stato scelto di utilizzare due motori BLDC BN34-25EU-02LH con caratteristiche riportate in Tabella 3.3.1.

Tabella 3.3.1 – Caratteristiche del motore BLDC BN34-25EU-02LH [24].

Caratteristiche	Proprietà	Valore
Parametri del motore	J , Inerzia del rotore [kg-m ²]	5.1e-5
	R , Resistenza terminale [Ω]	0.253
	L , Induttanza terminale [mH]	0.62
	Coppia di stallo continua [Nm]	0.66
Parametri nominali	Coppia nominale [Nm]	0.45
	Corrente nominale [A]	8
	Velocità angolare nominale [rpm]	7500
	Potenza nominale [W]	355
Costanti	K_t , costante di coppia [Nm/A]	0.06
	τ_m , costante di tempo meccanica [s]	0.00358
	τ_e , costante di tempo elettrica [s]	0.00245
	K_m , costante del motore [rad/Vs]	16.67
	K_e , costante di FCEM [V/(rad/s)]	0.06

Il problema principale dei motori a corrente continua è la necessità intrinseca di un sistema di controllo per ottenere il posizionamento. Questo potrebbe essere ottenuto con un encoder se è richiesto un posizionamento rigoroso.

I motori in CC possono essere controllati agendo sulla tensione e prendendo come uscita la velocità angolare o la coppia motrice.

3.3.1 Modello elettrico e meccanico

Per semplicità si è deciso di analizzare il modello matematico riguardante un motore DC; quello di un motore BLDC è del tutto analogo con l'aggiunta di alcuni accorgimenti: il cambiamento principale è rappresentato dalle fasi coinvolte che influiscono sulla disposizione delle resistenze e induttanze e quindi sul valore delle costanti di tempo meccaniche ed elettriche [22]. Nel nostro caso non è necessario apportare correzioni poiché il costruttore del motore fornisce già i valori di resistenza e induttanza ai capi del sistema trifase.

Il modello della parte elettrica si basa sul circuito equivalente mostrato in Figura 3.3.1.1.

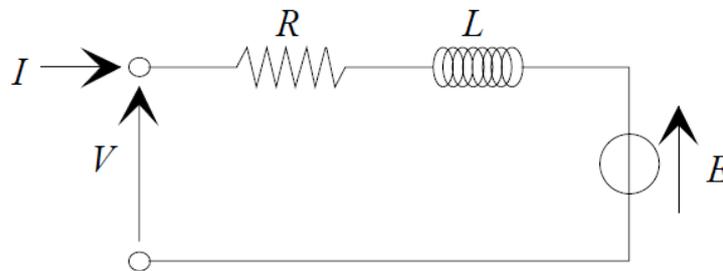


Figura 3.3.1.1 – Circuito elettrico equivalente di un motore DC.

Esso è descritto dalle seguenti equazioni:

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (3.33)$$

$$e(t) = K_e \omega(t)$$

Dove:

- R : resistenza di armatura;
- L : induttanza di armatura;
- $v(t)$: tensione applicata all'armatura quale variabile di controllo;
- $e(t)$: forza contro-elettromotrice generata dalla variazione del flusso di B per via della rotazione del rotore;
- $i(t)$: corrente circolante nell'armatura;
- K_e : costante di forza elettromotrice;
- $\omega(t)$: velocità angolare di rotazione del rotore.

L'equazione meccanica viene ottenuta a seguito di un bilancio di coppia (eqs. (3.34)):

$$\begin{aligned}
 C(t) &= C_m(t) - C_a(t) - C_r(t) \\
 C(t) &= J \frac{d\omega(t)}{dt} \\
 C_m(t) &= K_t i(t) \\
 C_a(t) &= \beta \omega(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

Dove:

- C_m : coppia motrice generata (coppia elettromeccanica);
- C_r : coppia resistente dovuta al carico posto in rotazione;
- C_a : coppia dovuta all'attrito;
- C : bilancio delle coppie (prima eq. (3.34));
- J : momento di inerzia del rotore;
- $i(t)$: corrente circolante nell'armatura;
- $\omega(t)$: velocità angolare di rotazione del rotore;
- K_t : costante di coppia;
- β : coefficiente di attrito viscoso.

3.3.2 Schema a blocchi

Nel caso in cui il flusso magnetico sia costante, si può scrivere:

$$\begin{cases}
 v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_e \omega(t) \\
 J \frac{d\omega(t)}{dt} = K_t i(t) - \beta \omega(t) - C_r
 \end{cases}
 \tag{3.35}$$

Nel dominio delle trasformate di Laplace, il sistema (eqs. (3.35)) può essere scritto come:

$$\begin{cases}
 V(s) = RI(s) + sLI(s) + K_e \Omega(s) \\
 C_m(s) = K_t I(s) = J\Omega(s)s + C_r(s) + \beta \Omega(s)
 \end{cases}
 \tag{3.36}$$

Il sistema (eqs.(3.36)) può essere riorganizzato nel seguente modo:

$$\begin{cases}
 V(s) - K_e \Omega(s) = (R + sL)I(s) \\
 K_t I(s) - C_r(s) = (Js + \beta)\Omega(s)
 \end{cases}
 \tag{3.37}$$

Dalle equazioni (3.37) è possibile tracciare lo schema a blocchi equivalente che presenta un anello di retroazione che regola la velocità del motore in corrispondenza di una data tensione in ingresso (Figura 3.3.2.1).

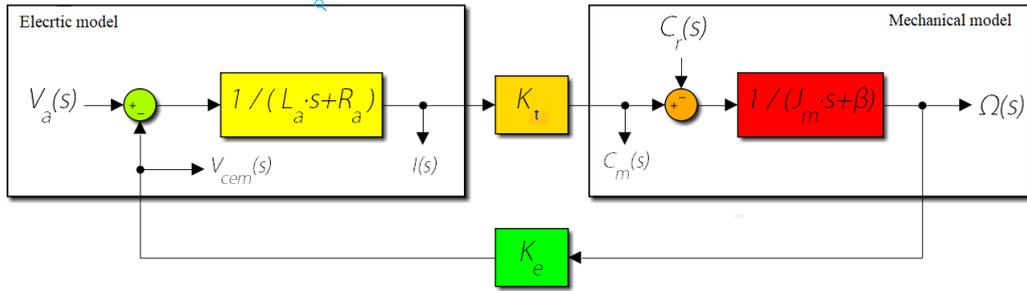


Figura 3.3.2.1 – Schema a blocchi del motore DC.

3.3.3 Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento (eq. (3.38)) che collega la tensione in ingresso al motore V con la velocità angolare del motore Ω , considerando nulla la coppia resistente C_r , si ottiene facendo alcune sostituzioni elementari all'interno delle equazioni (3.36).

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K_t}{K_e K_t + (R + Ls)(\beta + Js)} = \frac{K_t}{LJs^2 + (RJ + L\beta)s + (K_e K_t + R\beta)} \quad (3.38)$$

Il modello risultante è un modello del secondo ordine di difficile applicazione: in questo preciso caso non è disponibile la maggior parte delle proprietà e anche la loro identificazione mediante test sperimentali è complicata. È preferibile un modello del primo ordine. La funzione di trasferimento per un motore del primo ordine approssimato è:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K_t}{K_e K_t + RJ s} = \frac{K_m}{(1 + \tau_m s)} \quad (3.39)$$

Dove:

$$\tau_m = \frac{RJ}{K_e K_t} \quad (3.40)$$

$$K_m = \frac{1}{K_e}$$

I valori dei coefficienti e delle costanti utilizzate sono riportati in Tabella 3.3.1. Utilizzando la trasformazione bilineare (o di Tustin) è possibile discretizzare la funzione di trasferimento (eq. (3.39)) tramite il comando `c2d` di Matlab®.

$$G(z) = \frac{\Omega(z)}{V(z)} = \frac{\frac{K_m T}{T + 2\tau_m} (z + 1)}{z + \frac{T - 2\tau_m}{T + 2\tau_m}} \quad (3.41)$$

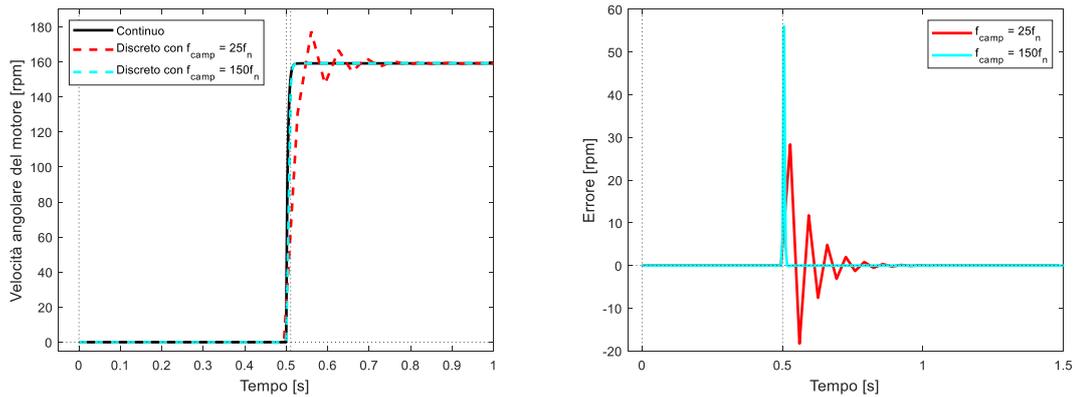


Figura 3.3.3.1 – Funzionamento ideale del motore BLDC senza carico in campo continuo e in campo discreto (sinistra) e relativo scostamento tra gli andamenti (destra). Frequenza di campionamento pari a $25 \cdot f_n$ e $150 \cdot f_n$.

La Figura 3.3.3.1 (sinistra) mostra la risposta al gradino del motore a un duty cycle completamente positivo sia in campo continuo che in campo discreto con un tempo di campionamento $T_s = 0.033$ secondi e $T_s = 0.0055$ secondi. È possibile notare che con una frequenza di campionamento pari a $25 \cdot f_n$ ($T_s = 0.033$ s) l'andamento discreto discosta rispetto a quello continuo: la velocità angolare si assesta a 0.0140 secondi (andamento continuo) e a 0.297 secondi (andamento discreto) alla velocità di 160 rpm. Aumentando la frequenza di campionamento a un valore pari a $150 \cdot f_n$ ($T_s = 0.0055$ s), si può osservare un netto miglioramento nella sovrapposizione dell'andamento discreto rispetto a quello continuo eccetto che per il secondo campionamento che presenta uno scostamento pari a 56 rpm.

3.4 Sistema di trasmissione

Si vuole ora unire il comportamento dinamico del motore con le dinamiche del pendolo e del carrello ottenute in precedenza (eqs. (3.12)); per far ciò è necessario analizzare il sistema di trasmissione del banco prova in modo da calcolare le masse, e quindi le inerzie, dei componenti collegati al motore stesso.

Il sistema di trasmissione utilizzato per trasmettere potenza ai carrelli è rappresentato in Figura 3.4.1. Esso è formato da due motori identici posti ai vertici del telaio che agiscono su un'unica cinghia di distribuzione.

Il vantaggio di utilizzare questo sistema di trasmissione consiste nell'assenza di componenti con elevata inerzia di rotazione: sul carrello Y, sono presenti solamente 4 pulegge folli, mentre sul carrello X non è presente nessun componente rotante.

Inoltre, è importante osservare che sono necessari entrambi i motori per lo spostamento lungo X e Y, mentre è necessario un unico motore per spostarsi diagonalmente. In Tabella 3.4.1 vengono elencate tutte le configurazioni di movimento possibili.

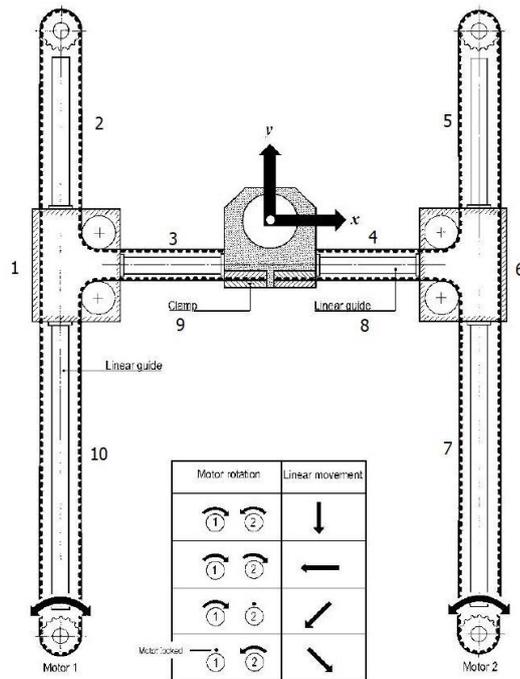


Figura 3.4.1 – Configurazione con una sola cinghia di distribuzione [25]. I numeri individuano i rami della cinghia.

Tabella 3.4.1 – Spostamento del carrello in diverse condizioni di moto.

Rotazione del motore		Spostamento del carrello	
Motore 1	Motore 2	X	Y
Orario	Orario	-	0
Orario	-	-	-
Orario	Antiorario	0	-
-	Orario	-	+
-	Antiorario	+	-
Antiorario	Orario	0	+
Antiorario	-	+	+
Antiorario	Antiorario	+	0

In Figura 3.4.2 viene proposto uno schema delle forze e dei componenti che contribuiscono al movimento (non sono state disegnate le inerzie delle porzioni di cinghia).

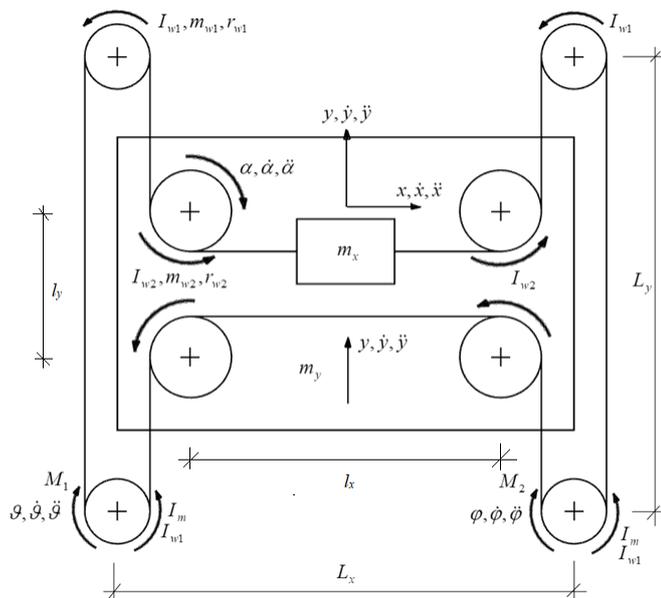


Figura 3.4.2 – Schema delle dinamiche del layout [7].

I simboli mostrati rappresentano:

- x, y : spostamento dei carrelli in orizzontale e verticale;
- θ, φ : spostamenti angolari del motore 1 e del motore 2;
- α : spostamento angolare delle pulegge folli;
- I_{w1}, I_{w2} : momenti di inerzia delle pulegge e delle pulegge folli;
- m_{w1}, m_{w2} : masse delle pulegge e delle pulegge folli;
- r_{w1}, r_{w2} : raggi delle pulegge e delle pulegge folli;
- I_m : momento di inerzia del motore (parametro dato dal costruttore);
- m_x, m_y : masse dei carrelli X e Y;
- M_1, M_2 : coppie motrici erogate da motore 1 e motore 2;
- L_x, L_y : distanza tra i centri delle pulegge;
- l_x, l_y : distanza tra i centri delle pulegge folli.

È possibile scrivere le equazioni del moto in funzione di x e y utilizzando l'approccio Lagrangiano.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (3.42)$$

$$L = T - V \quad (3.43)$$

$$q = \{x, y, \theta_p\} \quad (3.44)$$

$$\dot{q} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}_p\}$$

L'energia cinetica T e potenziale V possono essere scritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
T &= T_{Xcarrello} + T_{Ycarrello} + T_{motori} + T_{pulegge} + T_{p.folli} + T_{cinghia} + T_{pendolo} \\
V &= V_{pendolo}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Dove:

$$\begin{aligned}
T_{Xcarrello} &= \frac{1}{2} m_x (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\
T_{Ycarrello} &= \frac{1}{2} m_y \dot{y}^2 \\
T_{motori} &= \frac{1}{2} I_m (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\
T_{pulegge} &= I_{w1} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) \\
T_{p.folli} &= 2I_{w2} \dot{\alpha}^2 \\
T_{cinghia} &= \rho l_x \dot{x}^2 + 2\rho(2L_y - l_y) \dot{y}^2 + 2I_{b1} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + 2I_{b2} \dot{\alpha}^2 \\
T_{pendolo} &= \frac{1}{2} J_G \ddot{\theta}_p + \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) \\
V_{pendolo} &= -mgl \cos \theta_p
\end{aligned} \tag{3.46}$$

I termini non ancora specificati nelle equazioni (3.46) sono:

- m : massa del pendolo;
- J_G : momento di inerzia di massa del pendolo rispetto al suo centro di massa;
- l : distanza tra fulcro e centro di massa;
- θ_p : posizione angolare del pendolo;
- μ : coefficiente di attrito delle guide;
- g : accelerazione gravitazionale;
- ρ : peso per unità di lunghezza della cinghia di distribuzione;
- y_p : posizione della massa concentrata del pendolo in direzione Y (eq. (3.47));
- z_p : posizione della massa concentrata del pendolo in direzione Z (eq. (3.48));
- I_{b1}, I_{b2} : momenti di inerzia di massa della porzione di cinghia avvolta attorno alle pulegge e alle pulegge folli (eqs. (3.49)).

$$\begin{aligned}
y_p &= y + l \sin \theta_p \\
\dot{y}_p &= \dot{y} + l \cos \theta_p \dot{\theta}_p
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
z_p &= -l \cos \theta_p \\
\dot{z}_p &= +l \sin \theta_p \dot{\theta}_p
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
I_{b1} &= \frac{1}{16} \rho \pi r_{p1} (r_{p1}^2 - r_{w1}^2) \\
I_{b2} &= \frac{1}{16} \rho \pi r_{p2} (r_{p2}^2 - r_{w2}^2)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

L'eq. (3.45) è convertita in coordinate Cartesiane osservando che:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{(-x - y)}{r_{w1}} \\ \phi &= \frac{(-x + y)}{r_{w1}} \\ \alpha &= + \frac{x}{r_{w1}}\end{aligned}\quad (3.50)$$

Le equazioni (3.51) rappresentano i risultati ottenuti seguendo l'approccio Lagrangiano sopra descritto.

$$\begin{aligned}M_{eq,y}\ddot{y} + c\dot{y} + ml\ddot{\theta}_p - F_y &= 0 \\ M_{eq,x}\ddot{x} - F_x &= 0 \\ (J_G + ml^2)\ddot{\theta}_p + ml\ddot{y} + mgl\theta_p &= 0\end{aligned}\quad (3.51)$$

Dove:

$$\begin{aligned}M_{eq,x} &= (m_x + m) + \frac{4}{r_{w1}^2} \left(\frac{I_m}{2} + I_{w1} + 2I_{b1} \right) + \frac{4(I_{w2} + I_{b2})}{r_{w2}^2} + 2\rho l_x \\ M_{eq,y} &= (m_x + m) + m_y + \frac{4}{r_{w1}^2} \left(\frac{I_m}{2} + I_{w1} + 2I_{b1} \right) + 4\rho(2L_y - l_y)\end{aligned}\quad (3.52)$$

Tramite opportuni accorgimenti cinematici è possibile modificare l'eq. (3.51) sostituendo alle forze applicate ai carrelli F_x e F_y le coppie motrici fornite dai due motori tramite il sistema di trasmissione (eqs. (3.53)).

$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{1}{\eta} (-F_x - F_y - \mu(m_y + 2(m_x + m))g)r_{w1} \\ M_2 &= \frac{1}{\eta} (-F_x + F_y + \mu m_y g)r_{w1}\end{aligned}\quad (3.53)$$

Dove:

- η è l'efficienza meccanica considerata pari a 93% a causa dell'inevitabilità della cinghia di distribuzione;
- F_x è la forza applicata al carrello in direzione X;
- F_y è la forza applicata al carrello in direzione Y;
- c : coefficiente di smorzamento viscoso del carrello;
- l'ultimo termine della prima e seconda equazione (eqs. (3.53)) rappresenta la coppia resistente dovuta all'attrito statico tra guide carrelli e carrelli e viene considerata nulla per semplificare lo studio.

L'eq. (3.53) non considera le masse e le inerzie dei componenti collegati al motore poiché sono già state considerate all'interno delle equazioni (3.51).

A questo punto è possibile modificare la funzione di trasferimento del motore (eq. (3.39)) andando ad aggiungere alla sua inerzia $I_m = J$ (parametro dato dal costruttore) le inerzie dei componenti collegati al motore stesso in modo da valutare il suo comportamento sotto determinate condizioni di carico.

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K_t}{K_e K_t + R J_{eff} s} \quad (3.54)$$

Dove:

$$J_{eff} = \frac{1}{\eta} M_{eq} r_{wi}^2 \quad (3.55)$$

Viene comunemente applicata la seguente equazione per ottenere la costante di tempo:

$$\tau_m = \frac{R J_{eff}}{K_e K_t} \quad (3.56)$$

La valutazione dell'inerzia efficace al motore consta dell'effetto di tutte le componenti che subiscono variazione di velocità nel sistema (carrello Y, carrello X, rotori dei motori, pulegge, pulegge folli (idlers) e tratti di cinghia). In Tabella 3.4.2 sono riportate le percentuali delle inerzie dei singoli componenti calcolate rispetto all'inerzia totale in modo da valutare quali possono essere trascurati nel calcolo dell'inerzia efficace.

Tabella 3.4.2 – Apporto percentuale sull'inerzia agente sul sistema dei singoli componenti rispetto all'inerzia totale.

Componenti	%
Carrello Y	52.40
Carrello X	27.33
Inerzia motori	11.01
Pulegge	1.81
Pulegge folli	0.76
Tratti di cinghia	6.69

È quindi possibile ignorare gli effetti causati da pulegge e pulegge folli.

Ora, è possibile modificare la costante di tempo meccanica del motore in modo da considerare l'inerzia aggiuntiva dei carrelli e delle masse collegate al motore stesso.

È necessario distinguere 3 differenti configurazioni di moto che corrispondono a diverse condizioni di carico:

- movimento X, affetto principalmente dalla sola inerzia del carrello X (valore piccolo) e richiede la rotazione di entrambi i motori;
- movimento Y, affetto principalmente dalle inerzie di entrambi i carrelli e richiede la rotazione di entrambi i motori;
- movimento XY, affetto dalle inerzie di entrambi i carrelli e richiede la rotazione di un solo motore.

In base alle configurazioni di moto è possibile modificare il valore di M_{eq} , e di conseguenza il valore di J_{eff} , in modo da considerare le differenti condizioni di carico. In Tabella 3.4.3 e Tabella 3.4.4 sono riportate le formulazioni della massa equivalente al motore M_{eq} e della coppia resistente C_r per ogni motore e per ogni configurazione di moto.

Tabella 3.4.3 – M_{eq} e C_r del motore 1 nelle 3 differenti configurazioni di moto.

Configurazioni di moto	M_{eq}	C_r
X	$M_{eq,X}$	$\pm \frac{1}{\eta} (\mu(m_x + m)g)r_{wl}$
Y	$M_{eq,Y}$	$\pm \frac{1}{\eta} (\mu(m_x + m + m_y)g)r_{wl}$
XY	$M_{eq,X} + M_{eq,Y}$	$\pm \frac{1}{\eta} (\mu(2(m_x + m) + m_y)g)r_{wl}$

Tabella 3.4.4 – M_{eq} e C_r del motore 2 nelle 3 differenti configurazioni di moto.

Configurazioni di moto	M_{eq}	C_r
X	$M_{eq,X}$	$\pm \frac{1}{\eta} (\mu(m_x + m)g)r_{wl}$
Y	$M_{eq,Y}$	$\pm \frac{1}{\eta} (\mu(m_x + m + m_y)g)r_{wl}$
XY	$M_{eq,X} + M_{eq,Y}$	$\pm \frac{1}{\eta} (\mu m_y g)r_{wl}$

Per semplicità, sarà analizzato solamente il caso in cui il carrello si sposta lungo la direzione Y all'interno del banco prova (Figura 3.4.1), ovvero il caso in cui entrambi i motori forniscono al sistema una coppia uguale in modulo ma diversa in direzione (se un motore ruota in senso orario, l'altro ruoterà in senso antiorario e viceversa).

In Tabella 3.4.5 e in Figura 3.4.3 sono riportati i risultati e questi sono confrontati con quelli precedenti.

Tabella 3.4.5 – Calcolo della costante di tempo meccanica.

Caratteristica	Proprietà	Valore
Proprietà del carico	$M_{eq,Y}$, Massa equivalente al motore [kg]	4.588
	r_{wl} , Raggio della puleggia [m]	0.016
	J_{eff} , Momento di inerzia di massa effettivo [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]	0.0013
Costanti	τ_m , costante di tempo meccanica con carico [s]	0.0888
	τ_m , costante di tempo meccanica senza carico [s]	0.0036

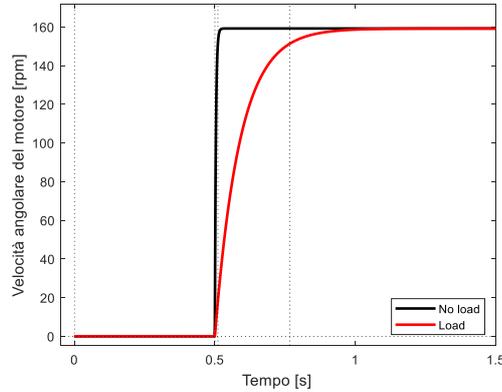


Figure 3.4.3 – Funzionamento ideale del motore BLDC con carico e senza carico.

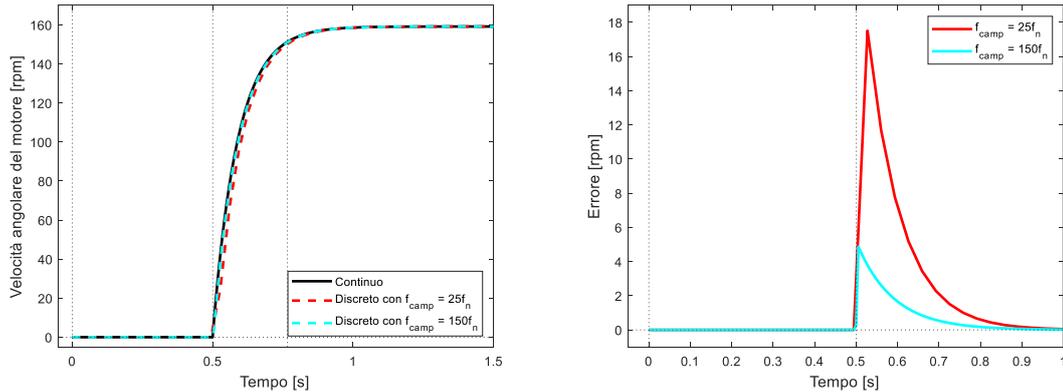


Figure 3.4.4 – Funzionamento ideale con carico del motore BLDC in campo continuo e in campo discreto (sinistra) e relativo scostamento tra gli andamenti (destra). Frequenza di campionamento pari a $25\cdot f_n$ e $150\cdot f_n$.

Il comportamento transitorio soffre drammaticamente l'aggiunta dell'inerzia del carrello e il tempo di assestamento, conseguentemente, aumenta a 0.347 secondi.

Il confronto tra la Figura 3.3.3.1 (sinistra) e la Figura 3.4.4 (sinistra) permette di osservare un netto miglioramento della sovrapposizione dell'andamento discreto rispetto a quello continuo con un tempo di campionamento $T_s = 0.033$ secondi. Tuttavia, come detto in precedenza, si è deciso di utilizzare una $f_{camp} = 150\cdot f_n$ ($T_s = 0.0055$ secondi) per evitare problemi nell'acquisizione dei segnali.

Lo scostamento tra andamento continuo e discreto diminuisce all'aumentare della frequenza di campionamento (Figura 3.4.4 – destra)

Quindi, da una prima analisi, si può affermare che il tempo di campionamento scelto $T_s = 0.0055$ secondi è ottimale anche per la discretizzazione della funzione di trasferimento che collega la tensione applicata al motore alla velocità angolare (o coppia motrice) in uscita.

3.5 Modello Simulink® completo

Il banco prova è formato da due motori BLDC, posti ai vertici del telaio, che agiscono su un'unica cinghia di distribuzione. Il telaio è formato da una struttura H-bridge (Figura 3.4.1) per lo spostamento X e Y dei carrelli.

Come detto nel capitolo precedente, si studierà solamente il caso in cui il carrello si muove lungo la direzione Y all'interno del banco prova, ovvero il caso in cui entrambi i motori forniscono al sistema una coppia uguale in modulo ma diversa in direzione.

In Figura 3.5.1 viene mostrato il modello Simulink®. In ingresso sono presenti le tensioni applicate ai due motori e un disturbo esterno casuale che agisce sulla posizione angolare del pendolo per rendere lo studio del sistema il più reale possibile; in uscita sono presenti l'angolo di inclinazione del pendolo e la posizione del carrello.

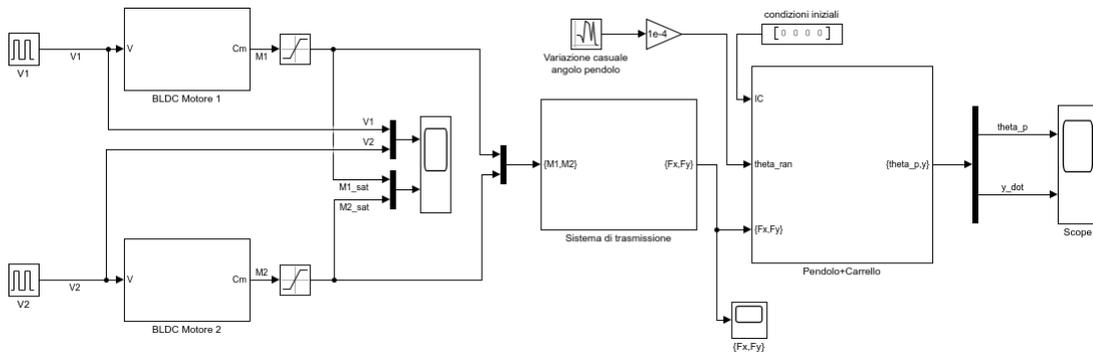


Figura 3.5.1 – Modello Simulink® del banco prova.

Il modello è formato da 4 sottosistemi descritti nei capitoli seguenti.

3.5.1 Motori BLDC

I primi 2 sottosistemi, a sinistra di Figura 3.5.1, rappresentano i due motori BLDC che trasmettono potenza al sistema tramite la cinghia di distribuzione: in ingresso sono presenti le tensioni applicate ai motori che nel caso specifico di questo report saranno uguali in modulo ma di segno opposto e in uscita sono presenti le coppie motrici erogate dai due motori.

In Figura 3.5.1.1 è rappresentato il modello del motore.

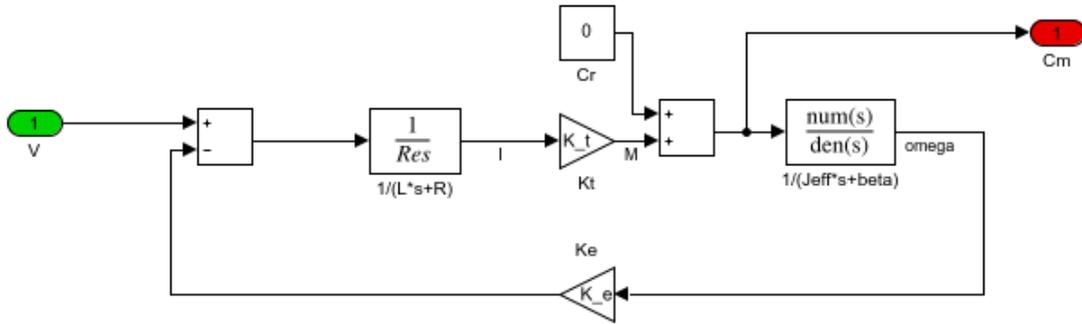


Figura 3.5.1.1 – Modello Simulink® motori BLDC.

Per creare questo modello è stata utilizzata l’eq. (3.37).

Per semplificare i calcoli si è considerato un modello del primo ordine in cui L (induttanza) e β (coefficiente di attrito viscoso) sono considerati trascurabili e la coppia resistente C_r nulla poiché viene considerata all’interno di J_{eff} come inerzia aggiuntiva al motore.

3.5.2 Sistema di trasmissione

Il sottosistema in centro di Figura 3.5.1 rappresenta il sistema di trasmissione di potenza utilizzato nel banco prova, ovvero descrive come le coppie generate dai due motori (input) possono essere trasformata in forze F_x e F_y (output) applicate al carrello X e al carrello Y tramite la cinghia di distribuzione.

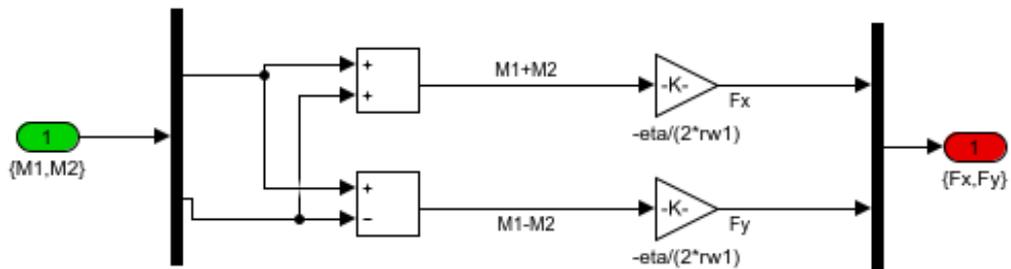


Figura 3.5.2.1 – Modello Simulink® del sistema di trasmissione.

Per generare il modello di Figura 3.5.2.1 sono state utilizzate le eqs. (3.53). Per semplificare lo studio del fenomeno si è deciso di trascurare la forza resistente dovuta all’attrito statico tra guide carrelli e carrelli. Le inerzie dei componenti collegati al sistema di trasmissione vengono considerate nel sottosistema “Pendolo + Carrello” che descrive le equazioni del moto del sistema.

3.5.3 Equazioni del moto del sistema pendolo-carrello

Il sottosistema “Pendolo + Carrello” di Figura 3.5.1 contiene le equazioni del moto del pendolo piano. In ingresso sono presenti le forze applicate al carrello dal sistema di

trasmissione del banco prova, le condizioni iniziali che possono essere introdotte come termine additivo per gli stati \mathbf{z} ma che potrebbero essere inviate anche tramite il blocco integratore e il disturbo esterno casuale che agisce sull'angolo di inclinazione del pendolo; in uscita si ottiene l'andamento della posizione angolare del pendolo e dello spostamento del carrello. Nel caso specifico preso in esame, in cui il carrello si sposta solamente lungo la direzione y , sarà presente la sola forza F_y mentre F_x sarà nulla. In base al modello analizzato, vengono utilizzate due diversi tipi di formulazioni. Le equazioni del moto non lineari vengono implementate in Simulink[®] come mostrato in Figura 3.5.3.1. In questo caso, in uscita dal sottosistema sono presenti anche la velocità angolare della posizione angolare del pendolo e la velocità del carrello.

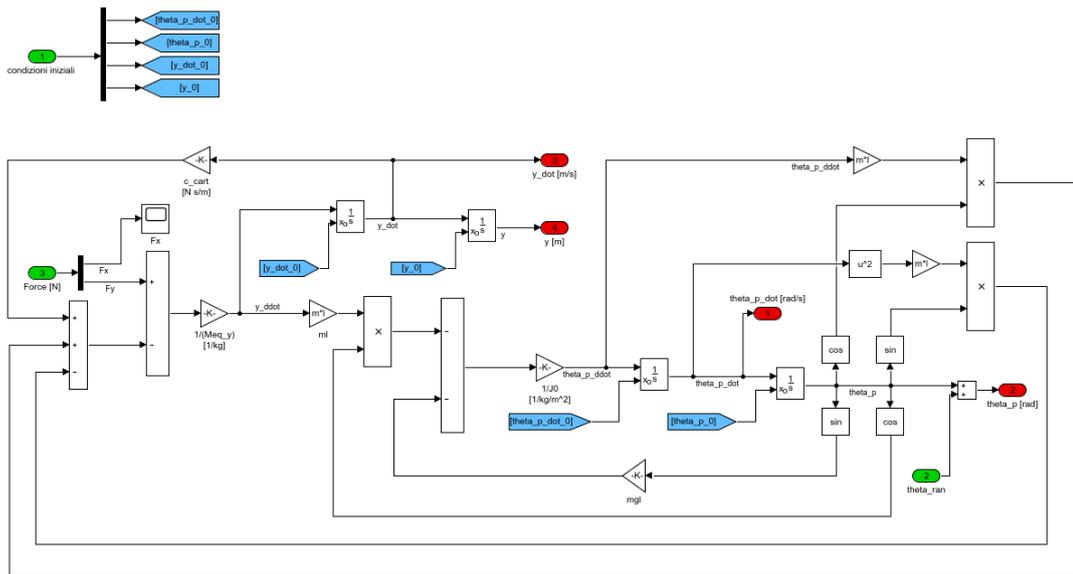


Figura 3.5.3.1 – Implementazione Simulink[®] delle equazioni del moto del pendolo non lineare.

Con le equazioni del moto linearizzate, è possibile descrivere il sistema utilizzando lo spazio degli stati (Figura 3.5.3.2). Per far ciò è necessario definire l'insieme degli stati, input e output del sistema stesso; nel caso del pendolo piano, essi sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \{\dot{\theta}_p \quad \theta_p \quad \dot{y} \quad y\}^T \\ \mathbf{u} &= \{F_y\} \\ \mathbf{y} &= \{\theta_p \quad y\}^T \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ora è possibile scrivere le equazioni del moto in forma canonica:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_p &= \mp \frac{M_{eq,y} mgl}{q} \theta_p \pm \frac{cml}{q} \dot{y} \mp \frac{ml}{q} F_y \\ \ddot{y} &= \frac{m^2 l^2 g}{q} \theta_p - \frac{cJ_0}{q} \dot{y} + \frac{J_0}{q} F_y \end{aligned} \quad (3.58)$$

Quindi, le equazioni del moto (eqs.(3.58)) vengono riscritte in forma matriciale:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mp \frac{M_{eq,Y}mgL}{q} & \pm \frac{cmL}{q} & - \\ 1 & - & - \\ -\frac{m^2L^2g}{q} & -\frac{cJ_0}{q} & - \\ - & - & 1 & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mp \frac{mL}{q} & - & +\frac{J_0}{q} & - \end{pmatrix}^T \quad (3.59)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} - & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

Dove:

$$q = (J_G + ml^2)M_{eq,Y} - (mL)^2 \quad (3.60)$$

Il termine $M_{eq,Y}$ contiene al suo interno tutte le masse dei componenti che influiscono sull'inertza globale del sistema.

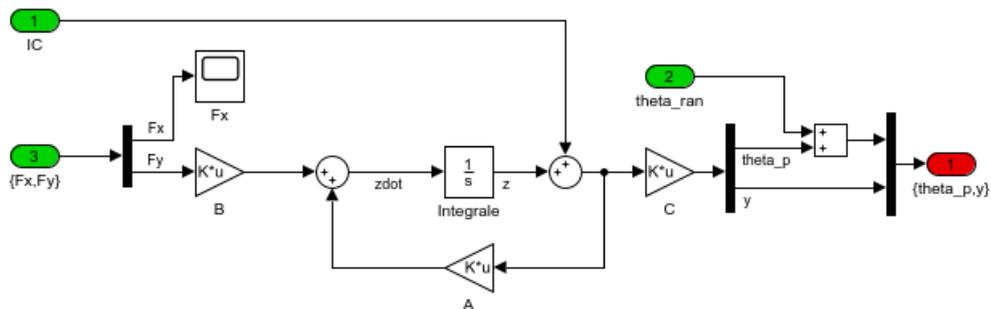


Figura 3.5.3.2 – Implementazioni Simulink® delle equazioni del pendolo lineare nello spazio degli stati.

3.6 Regolazione dell'angolo di inclinazione

La regolazione è una manovra di controllo che consiste nel portare tutti gli stati controllati ad un valore di riferimento pari a zero. Per semplificare lo studio, si è deciso inizialmente di controllare unicamente la posizione angolare del pendolo tramite un controllore PID. Viene realizzato un modello Simulink® (Figura 3.6.1) in cui la condizione iniziale della posizione angolare del pendolo viene posta pari a 0.2 rad e il segnale di riferimento desiderato in uscita pari a 0 rad. È importante ricordare che il sistema di riferimento deve essere cambiato in base al tipo di pendolo (semplice o inverso) preso in esame (Tabella 3.6.1).

Tabella 3.6.1 – Condizione iniziale e segnale di riferimento dell'angolo θ_p .

Sistema	Condizione iniziale	Segnale di riferimento
Pendolo semplice	0.2 rad = 11.46 °	0 rad = 0 °
Pendolo inverso	$\pi+0.2$ rad = 191.46 °	π rad = 180 °

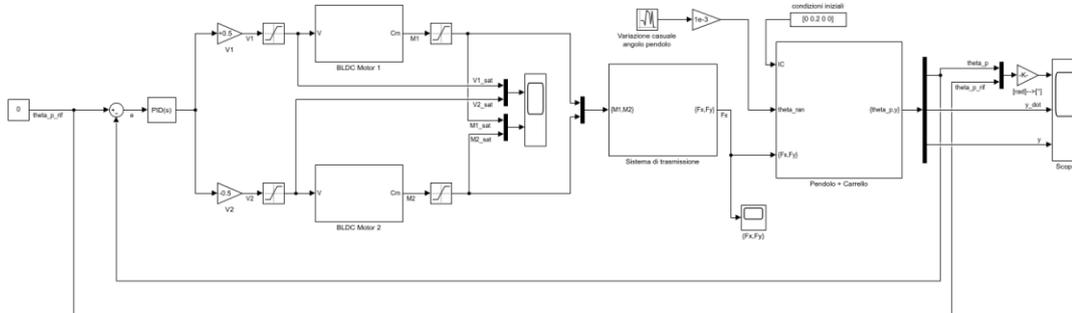


Figura 3.6.1 – Modello Simulink® con logica di controllo PID.

Il blocco centrale del modello di Figura 3.6.1 è uguale al modello di Figura 3.5.1. Sono stati aggiunti 4 blocchi “Saturazione” per limitare sia la tensione in ingresso ai motori sia la coppia in uscita da essi poiché:

- la tensione nominale dei motori è pari a 50 V;
- la coppia di picco (o coppia massima) che può fornire il singolo motore è pari a 2.19 Nm.

I valori dei guadagni proporzionale, integrale e derivativo scelti per il sistema lineare e per quello non lineare sono riportati in Tabella 3.6.2.

Tabella 3.6.2 – Guadagni del controllore PID per la regolazione del pendolo piano.

Sistema	Controllore	K_p	K_i	K_d	N
Pendolo semplice	Lineare	15	35	1	70
	Non lineare	15	35	1	80
Pendolo inverso	Lineare	30	130	1	50
	Non lineare	30	130	1	60

Per il controllo si è utilizzato il blocco “PID” di Simulink® che utilizza un filtro derivativo N per migliorare l’effetto del guadagno K_d . Quindi la funzione di trasferimento utilizzata è la seguente:

$$C(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \quad (3.61)$$

Le leggi di controllo (eq. (2.10) ed eq. (3.61)) differiscono tra loro solamente nel termine derivativo: se $N \rightarrow \infty$ le due equazioni diventano uguali. In campo discreto vengono utilizzati gli stessi guadagni scelti in campo continuo.

▪ Pendolo semplice lineare

I risultati ottenuti dallo studio del pendolo semplice lineare sono proposti in Figura 3.6.2 e Figura 3.6.3: con una posizione angolare iniziale del pendolo pari a 11° , è possibile effettuare la regolazione in un tempo pari a 0.77 secondi e con uno spostamento massimo del carrello pari a 0.025 m.

Si può notare (Figura 3.6.3) che le velocità angolari e le coppie erogate dai due motori sono uguali in modulo ma di segno opposto: è corretto poiché stiamo considerando il caso in cui è presente solo movimento Y ($X = 0$).

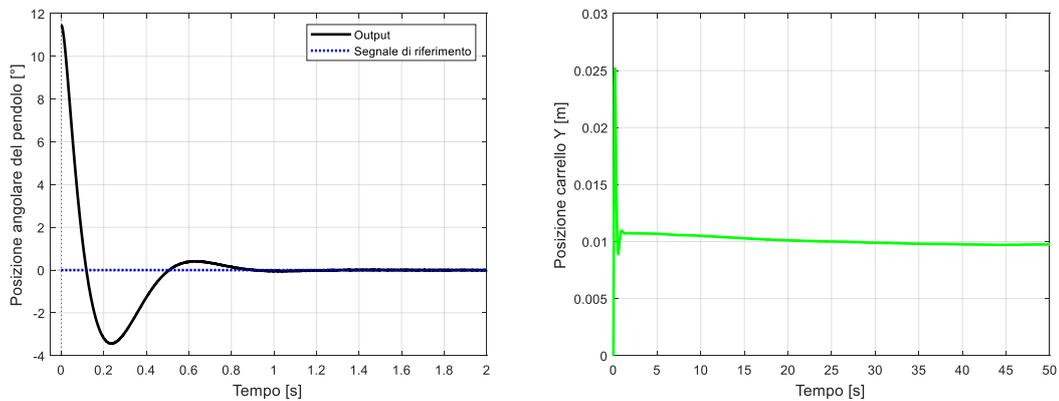


Figura 3.6.2 – Regolazione PID del pendolo semplice lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

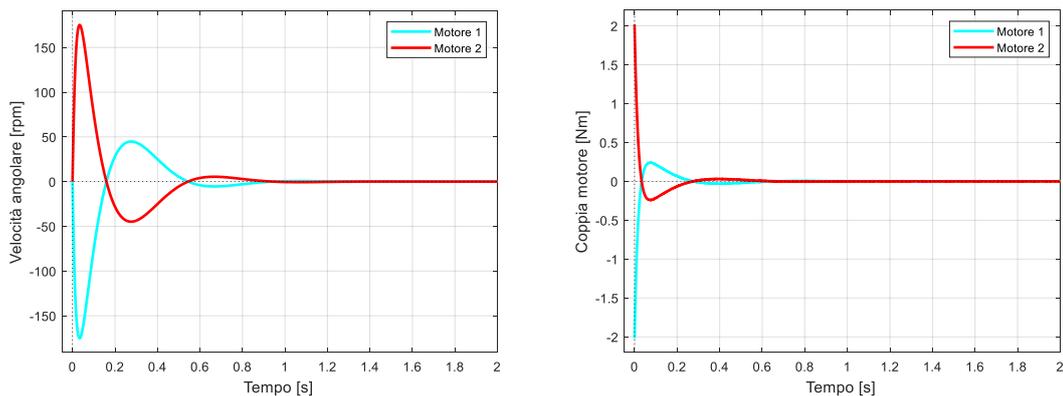


Figura 3.6.3 – Regolazione PID del pendolo semplice lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

È inoltre necessario monitorare la potenza che il singolo motore deve erogare per verificare che non sia superiore alla potenza massima erogabile e quindi evitare un sovraccarico che porterebbe alla rottura del motore. La potenza può essere calcolata elettricamente o meccanicamente con il medesimo risultato:

$$P = e(t)i(t) = \frac{C_m(t)\omega(t)}{\eta} \quad (3.62)$$

Dove:

- $e(t)$: forza contro-elettromotrice istantanea generata dalla variazione del flusso di B per via della rotazione del rotore;
- $i(t)$: corrente istantanea assorbita dal motore;
- $C_m(t)$: coppia motrice istantanea erogata dal motore;
- $\omega(t)$: velocità angolare istantanea di rotazione del rotore;
- η : rendimento del motore pari a 0.88.

La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per la regolazione della posizione angolare del pendolo semplice lineare è pari a 12.66 W. È quindi possibile effettuare il controllo del sistema poiché la potenza nominale del motore (parametro fornito dal costruttore) è pari a 355 W.

Tramite opportuni accorgimenti è possibile ottenere gli stessi andamenti in campo discreto utilizzando la trasformazione di Tustin e un tempo di campionamento $T_s = 0.0055$ secondi (Figura 3.6.4).

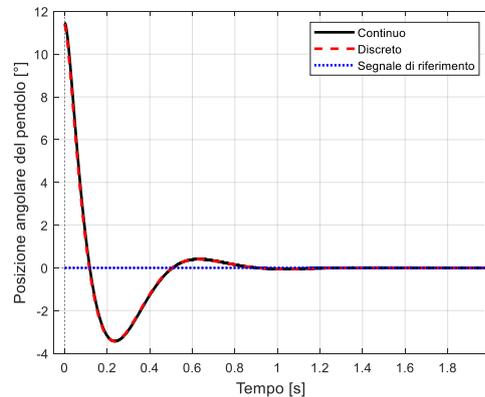


Figure 3.6.4 – Regolazione PID del pendolo semplice lineare discretizzato: posizione angolare del pendolo.

In Tabella 3.6.3 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo PID in campo continuo e in campo discreto.

Tabella 3.6.3 – Prestazioni del controllo PID sulla posizione angolare del pendolo semplice lineare θ_p .

Ind. di prestazione	Continuo	Discreto
Rising time [s]	0.081	0.080
Settling time [s]	0.756	0.763
Overshoot [%]	29.96	30.1
NRMSE [%]	18.38	18.33

▪ **Pendolo inverso lineare**

I risultati ottenuti dallo studio del pendolo inverso sono proposti in Figura 3.6.5 e Figura 3.6.6: con una posizione angolare iniziale del pendolo pari a 191° , è possibile effettuare la regolazione in un tempo pari a 0.8 secondi (superiore al pendolo semplice).

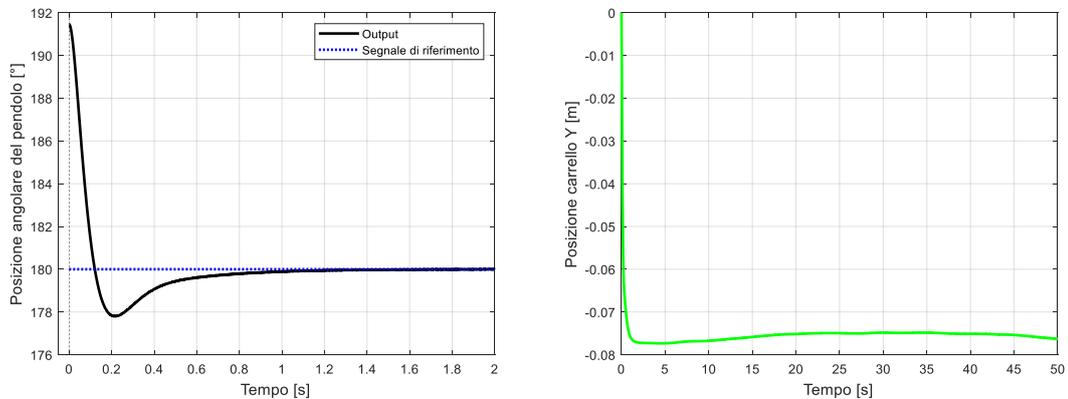


Figura 3.6.5 – Regolazione PID del pendolo inverso lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

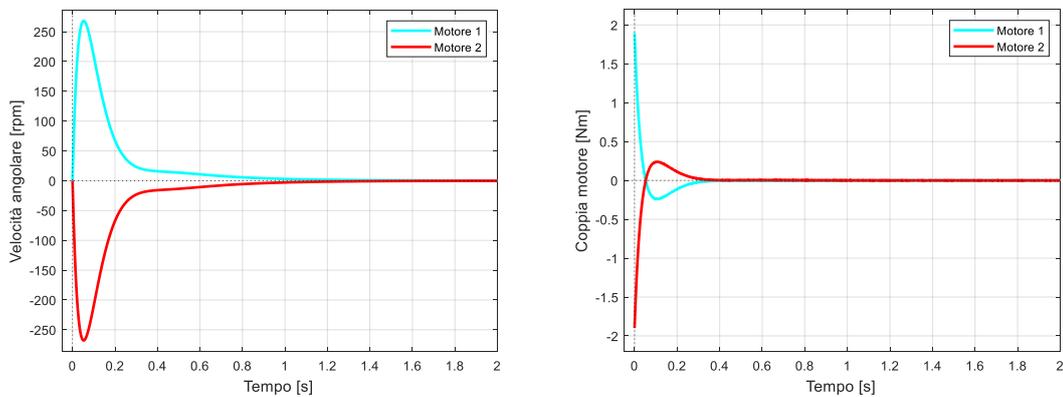


Figura 3.6.6 – Regolazione PID del pendolo inverso lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

Anche in questo caso è necessario controllare la potenza erogata dai motori per verificare l'assenza di sovraccarichi. La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per controllare la posizione angolare del pendolo inverso lineare è pari a 18.58 W. È quindi possibile effettuare il controllo del sistema poiché la potenza nominale del motore (parametro fornito dal costruttore) è pari a 355 W.

Si possono ottenere gli stessi andamenti in campo discreto utilizzando la trasformazione di Tustin e un tempo di campionamento $T_s = 0.0055$ secondi (Figura 3.6.7).

In Tabella 3.6.4 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo PID in campo continuo e in campo discreto.

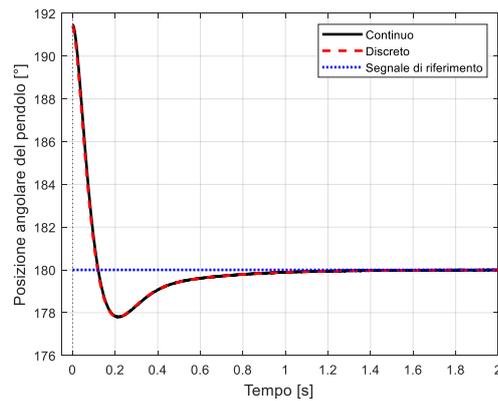


Figura 3.6.7 – Regolazione PID del pendolo inverso lineare discretizzato: posizione angolare del pendolo.

Tabella 3.6.4 – Prestazioni del controllo PID sulla posizione angolare del pendolo inverso lineare θ_p .

Ind. di prestazione	Continuo	Discreto
Rising time [s]	0.080	0.076
Settling time [s]	0.769	0.756
Overshoot [%]	19.26	19.27
NRMSE [%]	18.68	18.61

▪ Pendolo semplice non lineare

I risultati ottenuti dallo studio del pendolo semplice non lineare sono proposti in Figura 3.6.8 e Figura 3.6.9: con una posizione angolare iniziale del pendolo pari a 11° , è possibile effettuare la regolazione in un tempo pari a 0.77 secondi.

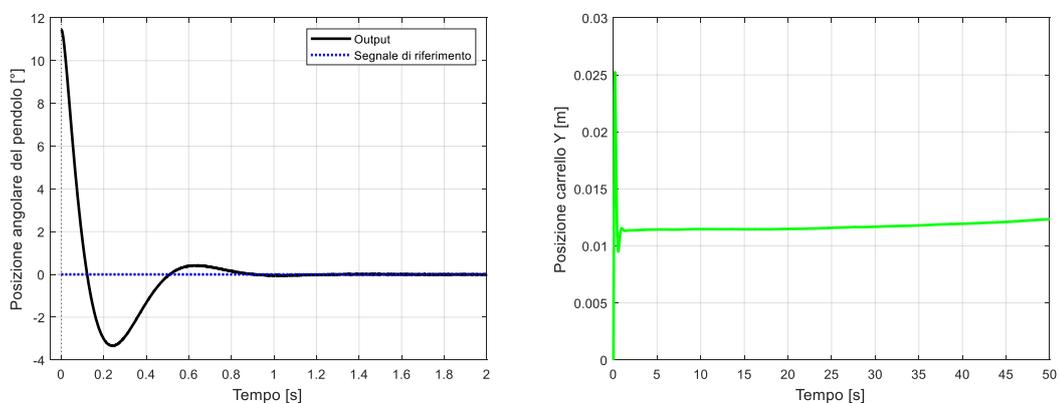


Figura 3.6.8 – Regolazione PID del pendolo semplice non lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

È importante notare che, quando il controllore riporta il pendolo in posizione verticale, è presente una deriva della posizione del carrello che si muove verso i lati del banco

prova a velocità costante (Figura 3.6.8 – destra). Questo comportamento è dovuto al fatto che la condizione necessaria affinché il pendolo sia considerato in equilibrio è che l'accelerazione del carrello sia nulla. Accelerazione nulla però non significa necessariamente velocità nulla, ma velocità costante; quindi non applicando il controllo sulla posizione del carrello, non è possibile stabilire se la condizione di accelerazione nulla corrisponda anche allo stato di velocità nulla del carrello. Questo comportamento è confermato dal fatto che la velocità angolare dei motori dopo la regolazione si stabilizza ad un valore costante diverso da zero (Figura 3.6.9 – sinistra). Sono stati fatti numerosi tentativi di regolazione dei parametri del PID, ma il problema non è stato risolto.

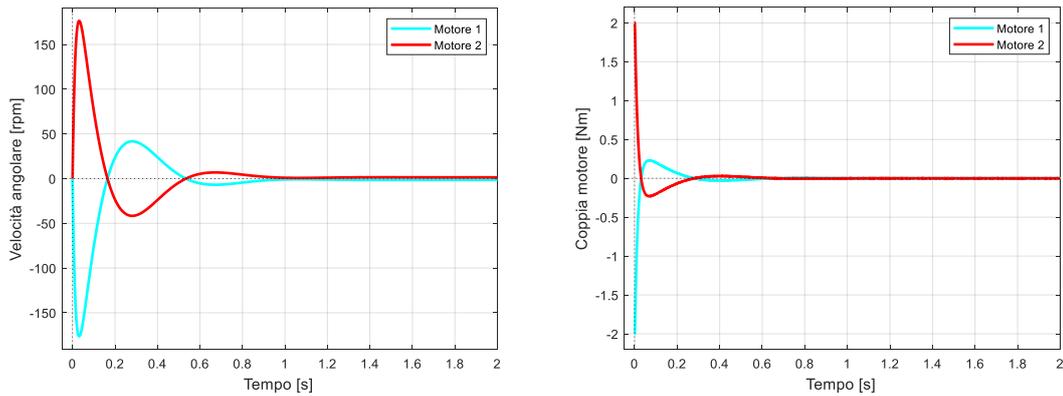


Figura 3.6.9 – Regolazione PID del pendolo semplice non lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per controllare la posizione angolare del pendolo semplice non lineare è pari a 13.98 W (< 355 W). Tramite opportuni accorgimenti è possibile ottenere gli stessi andamenti in campo discreto utilizzando la trasformazione di Tustin e un tempo di campionamento $T_s = 0.0055$ secondi (Figura 3.6.10).

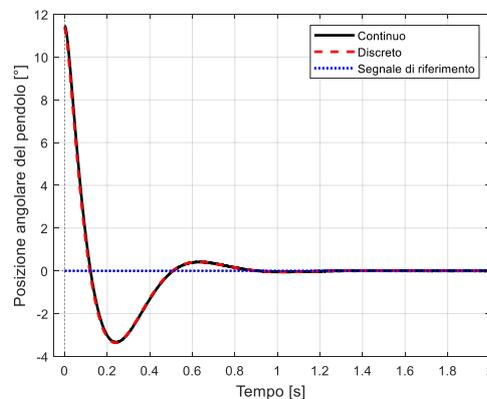


Figura 3.6.10 – Regolazione PID del pendolo semplice non lineare discretizzato: posizione angolare del pendolo.

In Tabella 3.6.5 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo PID in campo continuo e in campo discreto.

Tabella 3.6.5 – Prestazioni del PID sulla posizione angolare del pendolo semplice non lineare θ_p .

Ind. di prestazione	Continuo	Discreto
Rising time [s]	0.088	0.086
Settling time [s]	0.762	0.764
Overshoot [%]	29.13	29.52
NRMSE [%]	18.43	18.36

▪ Pendolo inverso non lineare

I risultati ottenuti dallo studio del pendolo inverso non lineare sono proposti in Figura 3.6.11 e Figura 3.6.12: con una posizione angolare iniziale del pendolo semplice pari a 191° , è possibile effettuare la regolazione in un tempo pari a 0.76 secondi.

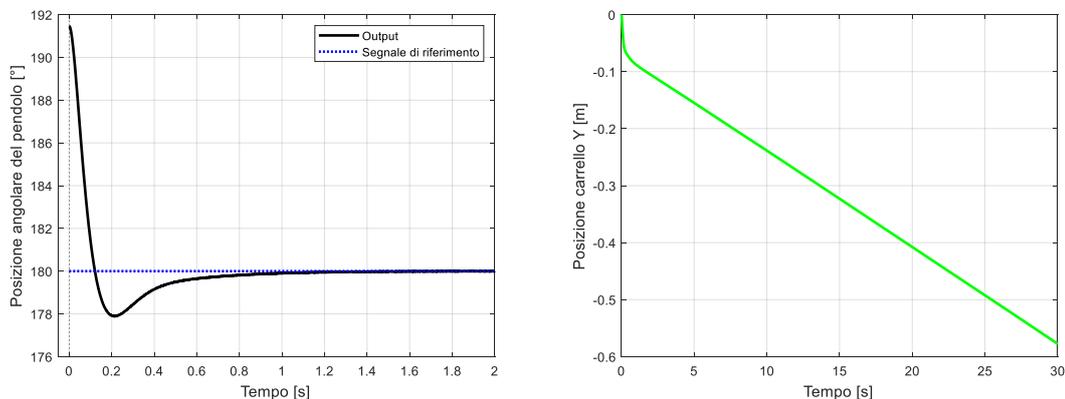


Figura 3.6.11 – Regolazione PID del pendolo inverso non lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

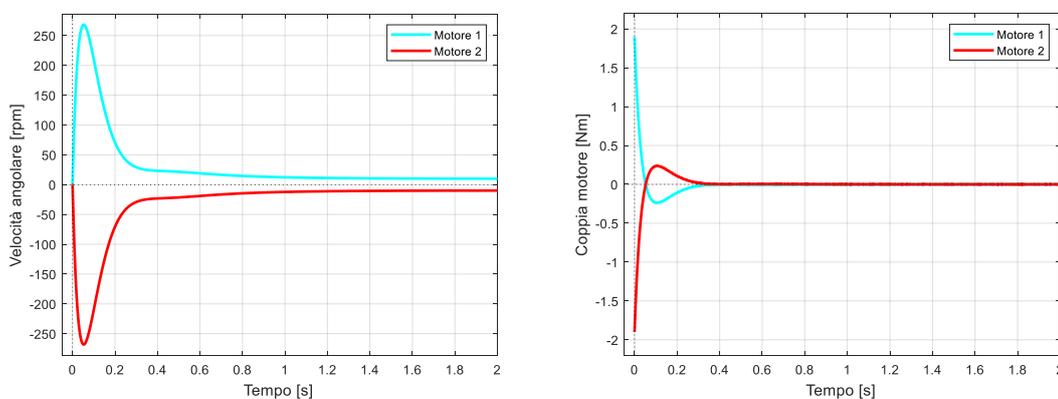


Figura 3.6.12 – Regolazione PID del pendolo inverso non lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

Anche in questo caso è possibile osservare una deriva del carrello dopo che il controllore ha stabilizzato il pendolo nel suo punto di equilibrio.

La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per controllare la posizione angolare del pendolo inverso non lineare è pari a 18.58 W (< 355 W).

È possibile ottenere gli stessi andamenti in campo discreto utilizzando la trasformazione di Tustin e un tempo di campionamento $T_s = 0.0055$ secondi (Figura 3.6.13).

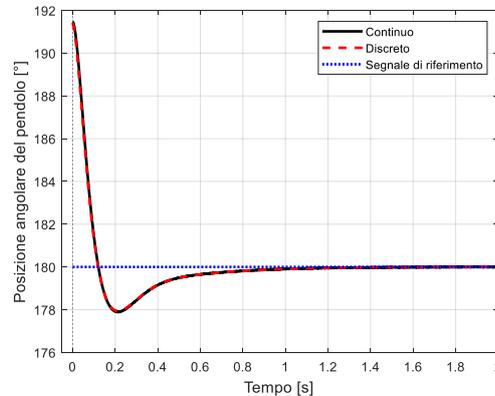


Figura 3.6.13 – Regolazione PID del pendolo inverso non lineare discretizzato: posizione angolare del pendolo.

In Tabella 3.6.6 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo PID in campo continuo e in campo discreto.

Tabella 3.6.6 – Prestazioni del PID sulla posizione angolare del pendolo inverso non lineare θ_p .

Ind. di prestazione	Contínuo	Discreto
Rising time [s]	0.083	0.082
Settling time [s]	0.758	0.727
Overshoot [%]	18.44	18.01
NRMSE [%]	18.67	18.75

Riassumendo, il caso peggiore a livello di potenza istantanea massima richiesta ai motori è la regolazione del pendolo inverso non lineare che richiede una potenza pari a 18.58 W, mentre il caso meno critico è il controllo del pendolo semplice lineare con una potenza richiesta massima pari a 12.66 W. In aggiunta, è possibile affermare che tutti i requisiti di progettazione vengono rispettati per ogni modello analizzato.

3.7 Riposizionamento del carrello

L'obiettivo dello studio è anche quello di creare una logica di controllo che riesca a mantenere l'asta in posizione verticale per un tempo arbitrariamente lungo.

Nel capitolo precedente è stato mostrato che, dopo una perturbazione, il controllore riesce a stabilizzare il sistema nel suo punto di equilibrio; si è anche visto però che è

presente una deriva della posizione del carrello che si muove a velocità costante in un'unica direzione.

Fino ad ora è stato effettuato solamente il controllo sulla posizione angolare del pendolo ipotizzando un piano infinito lungo cui il carrello può muoversi. Il controllore quindi è in grado di mantenere nel tempo il sistema in posizione verticale. Nella realtà, però, è necessario considerare il limite fisico del banco prova rappresentato dal raggiungimento dei finecorsa. In questo punto risulta impossibile mantenere il pendolo in equilibrio poiché il carrello non riesce più a muoversi e quindi a stabilizzare il sistema. Lo spostamento massimo consentito all'interno del banco prova è pari a 380 mm in direzione x e 380 mm in direzione y [7].

Quindi, per riuscire a eliminare questo problema è necessario cercare di mantenere il carrello nella posizione centrale del banco utilizzando un secondo controllore PID: dato un errore ($e(t) = (\text{posizione centrale}) - (\text{posizione attuale})$), ci si pone l'obiettivo di minimizzarlo o addirittura annullarlo.

Riassumendo il funzionamento basilare del controllo del pendolo piano, è possibile affermare che il controllore muove il carrello non appena rileva che il pendolo non si trova più in posizione verticale: si avrà uno spostamento verso sinistra se il pendolo è inclinato verso sinistra rispetto alla verticale e viceversa [17], come mostrato in Figura 3.7.1.

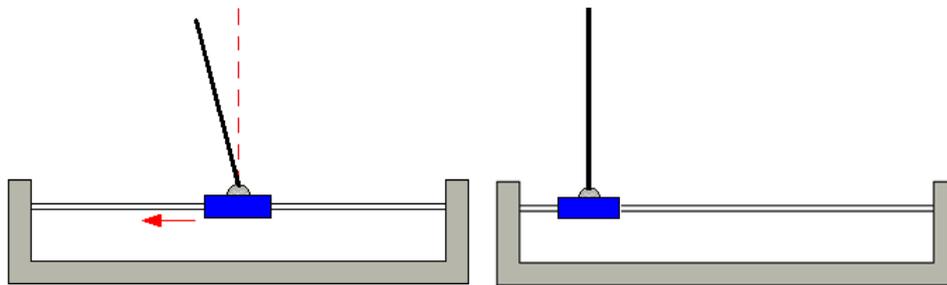


Figura 3.7.1 – Rappresentazione della reazione del carrello ad un eventuale scostamento dell'asta dalla posizione verticale.

Il problema nasce quando il carrello raggiunge il finecorsa del banco prova e il controllo non riesce più a compensare la variazione della posizione angolare del pendolo con uno spostamento del carrello.

Per riportare il carrello al centro del banco, mantenendo il pendolo in equilibrio, è necessario utilizzare un secondo controllore PID (PID secondario) (Figura 3.7.2) che modula l'errore tra la posizione centrale e quella attuale del carrello. Questo valore viene sommato al segnale di riferimento angolare che si vuole avere all'uscita (angolo di 0° corrispondente alla posizione verticale del pendolo): la loro somma rappresenta il riferimento della posizione angolare del pendolo in ingresso al PID primario. In questo modo è possibile ingannare il controllore poiché, anche se l'angolo di inclinazione del pendolo è nullo, il PID acquisisce come segnale di riferimento l'errore tra la posizione attuale e la posizione centrale del carrello. Di conseguenza il controllo sposterà il carrello in modo da raggiungere il target desiderato.

In Figura 3.7.2 viene mostrata la logica di controllo utilizzata per il riposizionamento del carrello.

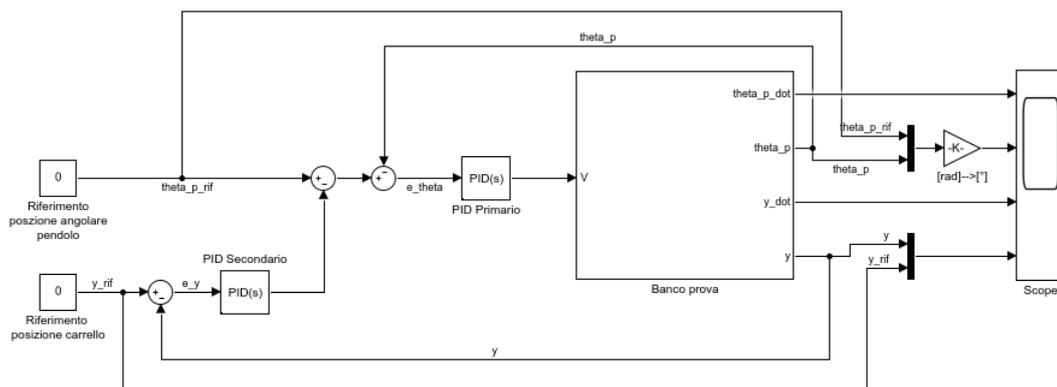


Figura 3.7.2 – Rappresentazione della logica di controllo per il riposizionamento del carrello al centro del banco prova.

La difficoltà principale riscontrata è stata la sintonizzazione e la regolazione dei parametri del PID secondario poiché, essendoci due controllori che agiscono in contemporanea, è necessario intervenire sui guadagni di entrambi. Quindi, per semplificare lo studio, dopo aver sintonizzato i controllori PID in campo continuo, si è deciso di assumere gli stessi coefficienti anche in campo discreto. I valori dei guadagni proporzionale, integrale e derivativo per il controllo della posizione angolare del pendolo semplice e inverso sono riportati in Tabella 3.7.1.

Tabella 3.7.1 – Guadagni del PID primario per il controllo della posizione angolare del pendolo.

Sistema	Controllore	K_p	K_i	K_d	N
Pendolo semplice	Lineare	15	35	1	70
	Non Lineare	15	35	1	70
Pendolo inverso	Lineare	30	130	1	50
	Non lineare	30	130	1	50

I valori dei guadagni proporzionale, integrale e derivativo per il controllo della posizione del carrello del pendolo semplice e inverso sono riportati in Tabella 3.7.2.

Tabella 3.7.2 – Guadagni del PID secondario per il controllo della posizione del carrello.

Sistema	Controllore	K_p	K_i	K_d	N
Carrello pendolo semplice	Lineare	1	0	1	3
	Non Lineare	1	0	1	3
Carrello pendolo inverso	Lineare	0.05	0	0.1	20
	Non lineare	0.05	0	0.1	20

Gli andamenti discreti, mostrati nei capitoli seguenti, vengono ottenuti discretizzando le funzioni di trasferimento con la trasformazione di Tustin e un tempo di campionamento $T_s = 0.0055$ secondi.

La logica di controllo mostrata in Figura 3.7.2 consente di ottenere da subito ottimi risultati sia per quanto riguarda la regolazione della posizione angolare del pendolo sia per il riposizionamento del carrello al centro del banco prova.

▪ Pendolo semplice lineare

La Figura 3.7.3 mostra che è possibile effettuare la regolazione dell'inclinazione del pendolo semplice lineare in un tempo pari a 1.29 secondi e riportare il carrello al centro del banco prova in un tempo pari a 2.3 secondi con uno spostamento massimo di 0.017 m.

La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare è pari a 12.25 W, inferiore alla massima potenza erogabile dal motore pari a 355 W (parametro fornito dal costruttore).

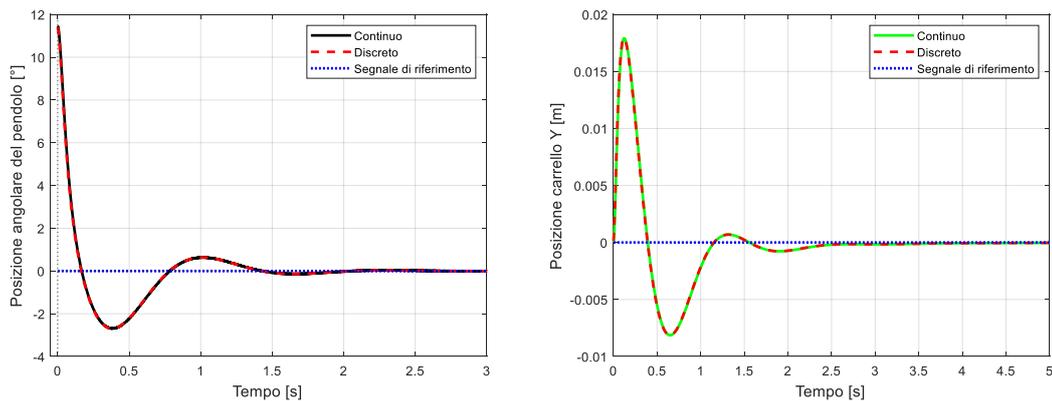


Figura 3.7.3 – Controllo 2-PID del pendolo semplice lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

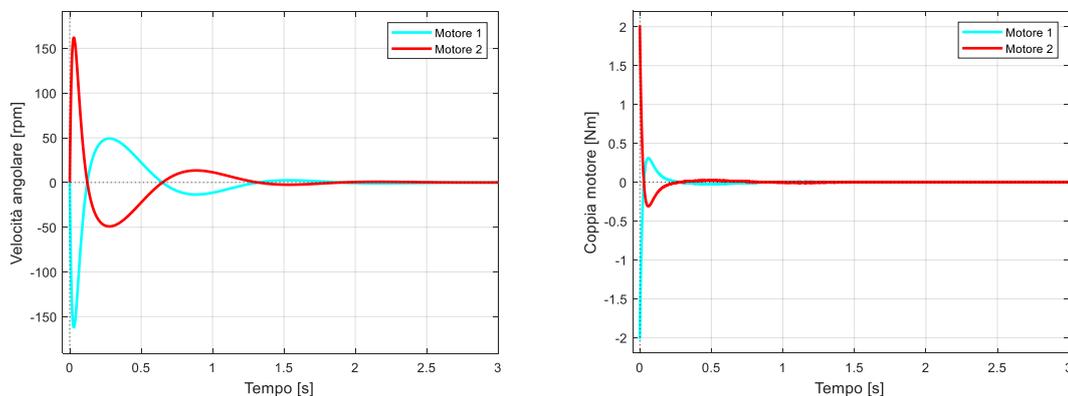


Figura 3.7.4 – Controllo 2-PID del pendolo semplice lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

Confrontando i risultati e gli indici di prestazione dell'andamento della posizione angolare del pendolo con quelli ottenuti senza il controllo della posizione del carrello, è possibile notare una leggera diminuzione della potenza istantanea massima erogata dal

singolo motore e dell'indice di overshoot a discapito di un aumento consistente del settling time e del rising time (Tabella 3.7.4).

In Tabella 3.7.3 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo 2-PID in campo continuo e in campo discreto.

Tabella 3.7.3 – Prestazioni del controllo 2-PID. Pendolo semplice lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo		Posizione carrello	
	Continuo	Discreto	Continuo	Discreto
Rising time [s]	0.106	0.103	-	-
Settling time [s]	1.29	1.29	2.27	2.26
Overshoot [%]	23.51	23.58	-	-
NRMSE [%]	20.15	20.12	33.80	33.73

Tabella 3.7.4 – Confronto tra controllo 2-PID e 1-PID. Pendolo semplice lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo	
	2-PID	1-PID
Rising time [s]	0.106	0.081
Settling time [s]	1.29	0.756
Overshoot [%]	23.51	29.96
NRMSE [%]	20.15	18.38
Potenza istantanea [W]	12.25	12.66

▪ Pendolo inverso lineare

In Figura 3.7.5 si può osservare che è possibile effettuare la regolazione dell'inclinazione del pendolo inverso lineare in un tempo pari a 1.61 secondi e riportare il carrello al centro del banco prova in un tempo pari a 5.12 secondi con uno spostamento massimo di 0.065 m.

La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per controllare il sistema è pari a 19.38 W (< 355 W).

È possibile notare una maggiore difficoltà, a livello di prestazioni, nel controllo del pendolo inverso lineare e del suo riposizionamento al centro del banco prova rispetto a quello del pendolo semplice: overshoot, settling time e potenza istantanea erogata dal motore presentano dei valori più elevati.

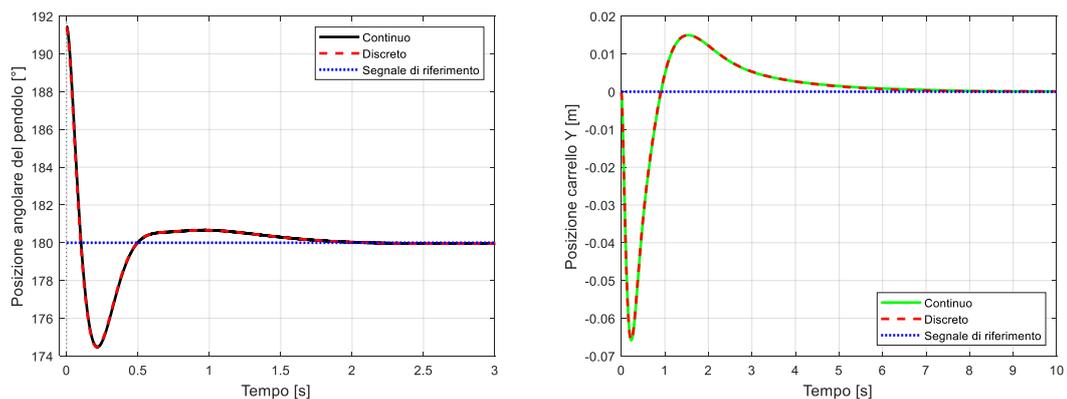


Figura 3.7.5 – Controllo 2-PID del pendolo inverso lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

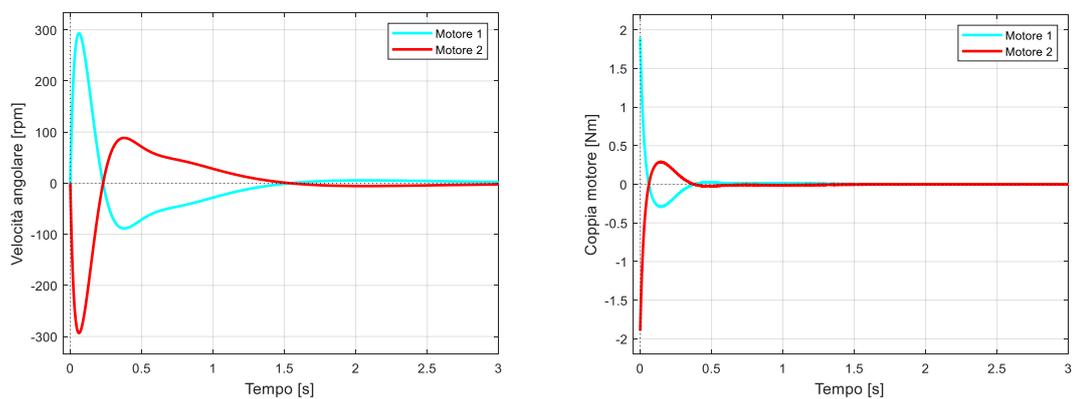


Figura 3.7.6 – Controllo 2-PID del pendolo inverso lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

In Tabella 3.7.5 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo 2-PID in campo continuo e in campo discreto.

Tabella 3.7.5 – Prestazioni del controllo 2-PID. Pendolo inverso lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo		Posizione carrello	
	Continuo	Discreto	Continuo	Discreto
Rising time [s]	0.071	0.070	-	-
Settling time [s]	1.61	1.60	5.12	5
Overshoot [%]	48.26	48.37	-	-
NRMSE [%]	19.05	19.01	52.45	52.21

Confrontando i risultati e gli indici di prestazione dell'andamento della posizione angolare del pendolo con quelli ottenuti senza il controllo della posizione del carrello, è possibile osservare una leggera diminuzione del rising time a discapito di un aumento consistente dell'overshoot, del settling time e della potenza istantanea erogata dal motore (Tabella 3.7.6).

Tabella 3.7.6 – Confronto tra controllo 2-PID e 1-PID. Pendolo inverso lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo	
	2-PID	1-PID
Rising time [s]	0.071	0.080
Settling time [s]	1.61	0.769
Overshoot [%]	48.26	19.26
NRMSE [%]	19.05	18.68
Potenza istantanea [W]	19.38	18.58

▪ **Pendolo semplice non lineare**

La Figura 3.7.7 mostra che è possibile effettuare la regolazione dell'inclinazione del pendolo semplice non lineare in un tempo pari a 1.29 secondi e riportare il carrello al centro del banco prova in un tempo pari a 2.23 secondi con uno spostamento massimo di 0.018 m.

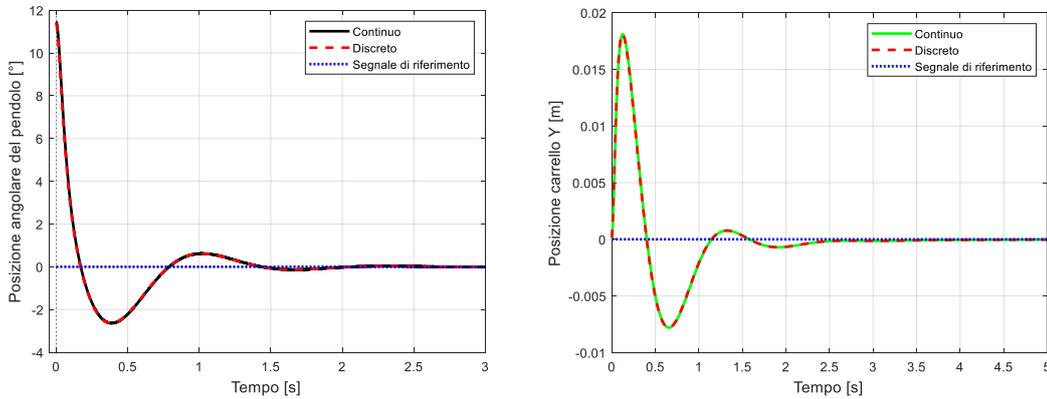


Figura 3.7.7 – Controllo 2-PID del pendolo semplice non lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

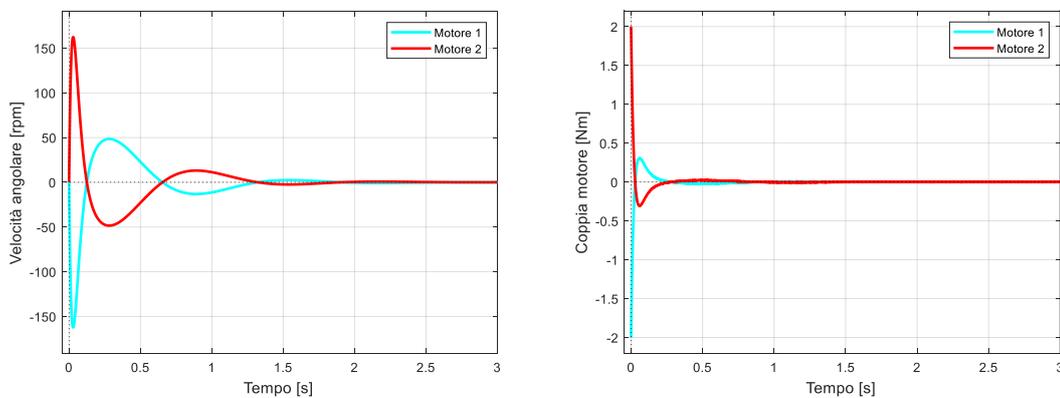


Figura 3.7.8 – Controllo 2-PID del pendolo semplice non lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

In Tabella 3.7.7 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo 2-PID in campo continuo e in campo discreto.

Tabella 3.7.7 – Prestazioni del controllo 2-PID. Pendolo semplice non lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo		Posizione carrello	
	Continuo	Discreto	Continuo	Discreto
Rising time [s]	0.119	0.116	-	-
Settling time [s]	1.29	1.29	2.23	2.23
Overshoot [%]	23.06	23.11	-	-
NRMSE [%]	20.23	20.21	34.06	33.99

La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per effettuare la regolazione del sistema è pari a 12.27 W.

Confrontando i risultati e gli indici di prestazione dell'andamento della posizione angolare del pendolo con quelli ottenuti senza il controllo della posizione del carrello, è possibile osservare una leggera diminuzione della potenza istantanea massima erogata dal singolo motore e dell'indice di overshoot a discapito di un aumento del settling time e del rising time (Tabella 3.7.8). Viene così eliminata la deriva del carrello.

Tabella 3.7.8 – Confronto tra controllo 2-PID e 1-PID. Pendolo semplice non lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo	
	2-PID	1-PID
Rising time [s]	0.119	0.088
Settling time [s]	1.29	0.762
Overshoot [%]	23.06	29.13
NRMSE [%]	20.23	18.43
Potenza istantanea [W]	12.27	13.98

▪ Pendolo inverso non lineare

I risultati ottenuti dallo studio del comportamento del pendolo inverso non lineare con controllo 2-PID sono mostrati in Figura 3.7.9 e Figura 3.7.10. È possibile effettuare le stesse considerazioni fatte per il pendolo inverso lineare.

La potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per regolare il sistema è pari a 19.40 W (< 355 W).

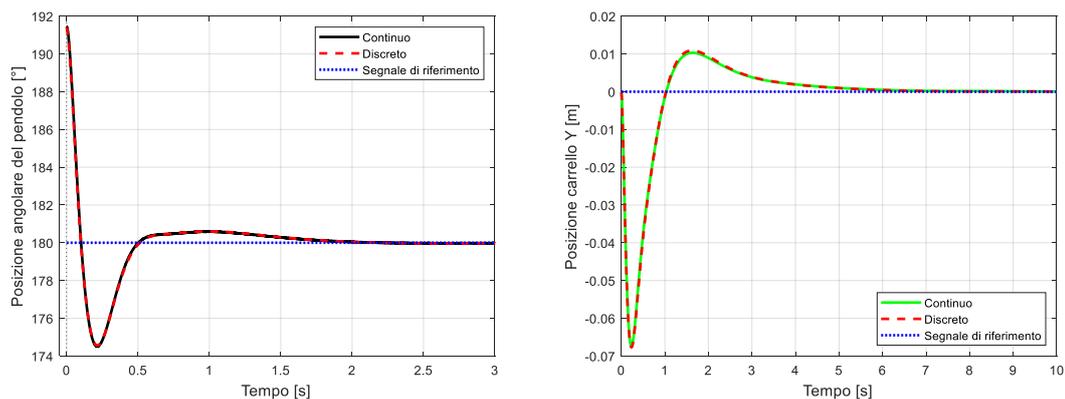


Figura 3.7.9 – Controllo 2-PID del pendolo inverso non lineare: posizione angolare del pendolo (sinistra) e posizione del carrello in direzione Y (destra).

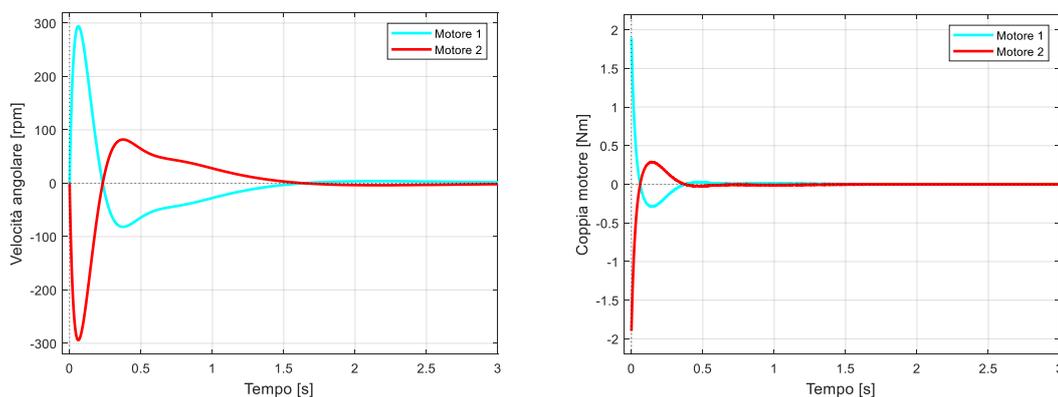


Figura 3.7.10 – Controllo 2-PID del pendolo inverso non lineare: velocità angolare (sinistra) e coppia erogata dai motori (destra).

In Tabella 3.7.9 sono riportati i valori degli indicatori di prestazione del controllo 2-PID in campo continuo e in campo discreto.

Tabella 3.7.9 – Prestazioni del controllo 2-PID. Pendolo inverso non lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo		Posizione carrello	
	Continuo	Discreto	Continuo	Discreto
Rising time [s]	0.072	0.07	-	-
Settling time [s]	1.59	1.62	4.53	4.45
Overshoot [%]	47.99	47.59	-	-
NRMSE [%]	18.96	19.06	58.03	58.48

È importante osservare che la deriva del carrello, estremamente accentuata nella regolazione del pendolo inverso non lineare senza il controllo del carrello (Figura 3.6.11 – destra), viene completamente eliminata grazie all'aggiunta del PID secondario a discapito di un aumento elevato dell'overshoot e del settling time dell'andamento della posizione angolare del pendolo (Tabella 3.7.10).

Tabella 3.7.10 – Confronto tra controllo 2-PID e 1-PID. Pendolo inverso non lineare.

Ind. di prestazione	Posizione angolare pendolo	
	2-PID	1-PID
Rising time [s]	0.072	0.082
Settling time [s]	1.59	0.727
Overshoot [%]	47.99	18.01
NRMSE [%]	18.96	18.75
Potenza istantanea [W]	19.40	18.58

Riassumendo:

- a livello di potenza istantanea massima richiesta ai motori, il caso peggiore è la regolazione del pendolo inverso non lineare che richiede una potenza pari a 19.40 W, mentre il caso meno critico è il controllo del pendolo semplice lineare con una potenza richiesta massima pari a 12.25 W;
- a livello di spostamento massimo del carrello, il caso peggiore è il pendolo inverso non lineare con uno spostamento pari a 69 mm. Questo valore soddisfa la condizione di spostamento massimo consentito pari a 380 mm imposta dal limite fisico del banco prova;
- Tutti i requisiti di progettazione vengono rispettati sia per il pendolo semplice lineare sia per quello non lineare (Tabella 3.7.11);
- Gli indici di prestazione del pendolo inverso mostrano che l'overshoot non rientra nei requisiti di progettazione poiché, in entrambi i casi, è superiore al valore limite di 30% (Tabella 3.7.11). Questo comportamento è dovuto alla difficoltà di sintonizzazione contemporanea dei 2 PID considerando il fatto che il motore non può erogare una coppia superiore a quella di picco.

Tabella 3.7.11 – Confronto tra requisiti di progettazione e indici di prestazione.

Ind. di prestazione	Requisiti di progettazione	Pendolo semplice lineare	Pendolo inverso lineare	Pendolo semplice non lineare	Pendolo inverso non lineare
Rising time [s]	0.5	0.106	0.071	0.119	0.072
Settling time [s]	3	1.29	1.61	1.29	1.59
Overshoot [%]	30	23.51	48.26	23.06	47.99
NRMSE [%]	-	20.15	19.05	20.23	18.96

3.8 Conclusioni

È stata applicata la tecnica di controllo PID per stabilizzare il sistema nei suoi punti di equilibrio. Siccome il sistema di trasmissione del banco prova consente 3 configurazioni di moto differenti, si è deciso di studiare solamente il caso in cui il carrello si muove in direzione y poiché è quello più gravoso a livello di potenza richiesta ai motori e consente la stabilizzazione del sistema. Questo significa che i due motori devono erogare una coppia uguale in modulo ma diversa in direzione.

Inizialmente è stato controllato, tramite PID, solamente l'angolo di inclinazione del pendolo, non curandosi dello spostamento del carrello a cui esso è collegato. Si è modellizzato il banco prova in Simulink®; esso è formato da 4 sottosistemi che rappresentano i 2 motori BLDC, il sistema di trasmissione e il sistema pendolo-carrello. La regolazione dei coefficienti del PID è stata fatta in modo da rispettare i parametri di progettazione considerando anche il valore limite della tensione nominale applicabile ai motori (50 V) e della coppia di picco erogabile (2.19 Nm). I parametri di progettazione vengono qui elencati:

- Rising time ≤ 0.5 secondi;
- Settling time ≤ 3 secondi;
- Overshoot $\leq 30\%$;
- SSE $\leq 5\%$.

I risultati ottenuti mostrano che i casi peggiori a livello di potenza istantanea massima richiesta ai motori sono il pendolo inverso non lineare e linearizzato, mentre il caso meno critico è il pendolo semplice lineare (Tabella 3.8.1). Viene riscontrata una deriva della posizione del carrello: questa è estremamente marcata nel caso di pendolo inverso non lineare.

Successivamente, è stato necessario considerare i limiti fisici del banco prova poiché, quando il sistema arriva a fine corsa a causa della deriva del carrello, il controllo non riuscirà più a compensare le variazioni della posizione angolare del pendolo. Quindi è stato inserito un secondo PID che consente il riposizionamento del carrello al centro del banco prova. In questo modo è possibile stabilizzare il sistema per un tempo arbitrariamente lungo.

I risultati ottenuti mostrano che il caso peggiore a livello di potenza istantanea massima richiesta è sempre il pendolo inverso non lineare (Tabella 3.8.1). Quindi, la potenza istantanea massima che il singolo motore deve generare per effettuare la regolazione (Tabella 3.8.1) rispetta, per tutti i modelli analizzati, il limite di potenza massima erogabile pari a 355 W (parametro fornito dal costruttore).

Tabella 3.8.1 – Potenza istantanea massima erogata dal singolo motore per i diversi sistemi.

Sistema	Potenza istantanea massima [W]	
	1-PID	2-PID
Pendolo semplice lineare	12.66	12.25
Pendolo inverso lineare	18.58	19.38
Pendolo semplice non lineare	13.98	12.27
Pendolo inverso non lineare	18.58	19.40

4. Progettazione

Il pendolo piano può essere costruito sospendendo una massa ad un'estremità di un'asta inestensibile e tenendo fissa l'altra estremità. Per effetto della forza di gravità, il corpo oscilla nel piano verticale descrivendo un arco di circonferenza che ha centro nel punto di sospensione dell'asta. Molto più complesso invece è il moto del pendolo sferico, che può essere schematizzato come un corpo che si muove su una superficie sferica.

In questo capitolo vengono descritti i vari procedimenti utilizzati per trasformare il carrello del banco prova progettato per lo studio del pendolo sferico, in un carrello per lo studio del pendolo nel piano (Figura 4.1). Le modifiche devono rispondere all'esigenza di vincolare il moto oscillatorio del pendolo in un piano e di fissare al carrello un encoder (trasduttore di posizione angolare) in modo da monitorare l'inclinazione dell'asta e utilizzarla come ingresso al controllore PID.

In particolare, sarà necessario eliminare il giunto sferico di supporto dell'asta rigida, formato da un componente sferico forato e da tre staffe disposte a 120° , poiché questo non garantisce i vincoli necessari.

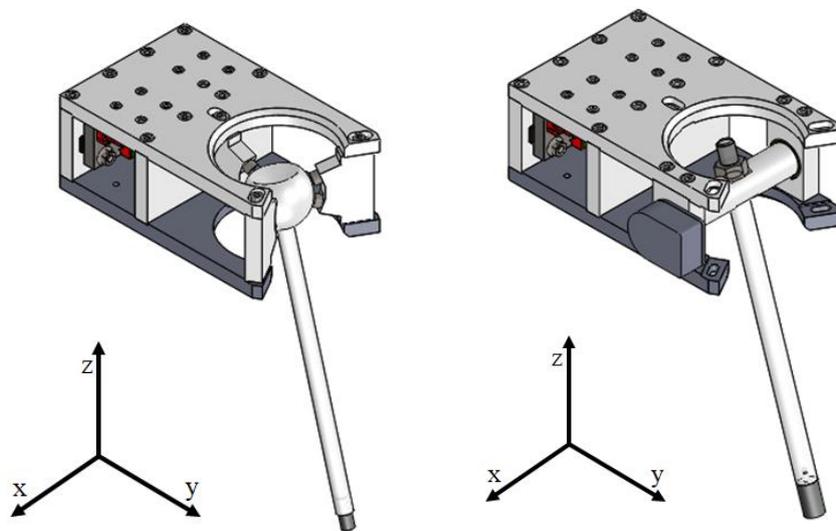


Figura 4.1 – Vista isometrica del carrello progettato per lo studio del pendolo sferico (sinistra) e per lo studio del pendolo piano (destra).

4.1 Carrello pendolo piano

Il carrello del pendolo sferico può essere suddiviso in due blocchi principali: il primo è formato da tutti i componenti necessari allo spostamento del carrello all'interno del banco prova come le guide e il sistema di serraggio della cinghia di distribuzione, mentre il secondo contiene il giunto sferico che consente il movimento del pendolo. È necessario quindi modificare solamente il blocco contenente il giunto, lasciando inalterata la parte riguardante lo scorrimento del carrello.

Un metodo semplice e intuitivo per realizzare un pendolo piano è quello di vincolare l'asta rigida ad un albero, il quale viene lasciato libero di ruotare intorno al proprio asse grazie al supporto di due cuscinetti alloggiati all'interno di due staffe laterali. È così possibile ottenere entrambe le configurazioni: pendolo piano semplice e pendolo piano inverso (Figura 4.1.1).

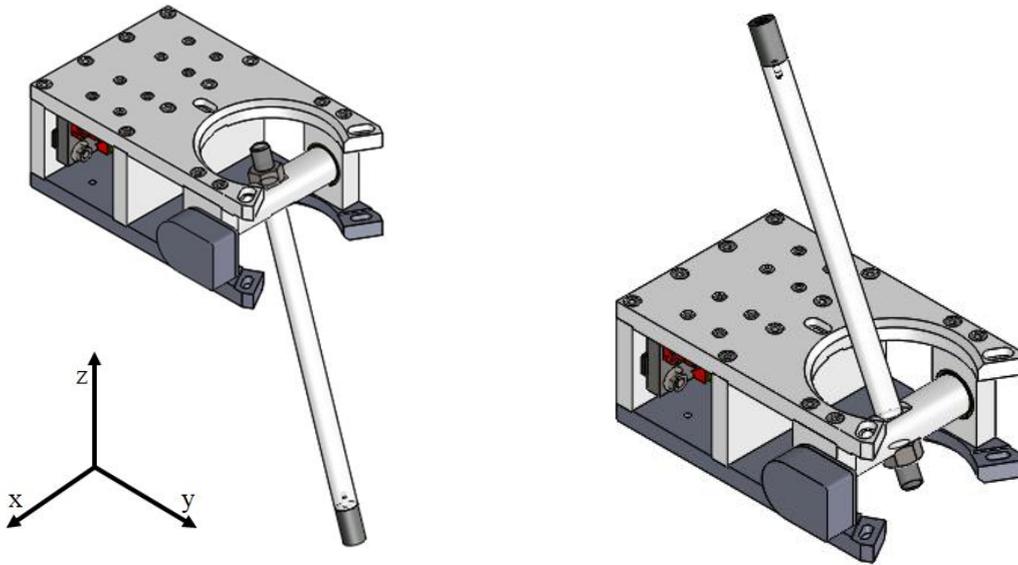


Figura 4.1.1 – Vista isometrica del carrello per lo studio del pendolo piano semplice (sinistra) e inverso (destra).

4.1.1 Basamenti e staffe laterali

Il giunto del pendolo sferico, come detto in precedenza, è costituito da tre staffe rimovibili e da un componente sferico di supporto dell'asta, ma non prevede alcun tipo di vincolo laterale.

Quindi, la prima modifica da effettuare consiste nella rimozione del giunto e nel montaggio di due staffe laterali all'interno delle quali vengono ricavate le sedi di alloggiamento per i due cuscinetti. È necessario ricavare delle scanalature sul basamento inferiore e superiore che fungono da sedi di alloggiamento per le staffe in modo da avere un'ottima precisione di posizionamento. Una volta posizionate, è necessario bloccarle con delle viti.

Il basamento superiore e inferiore presentano le seguenti caratteristiche dimensionali (Appendice A.1):

- scanalature: profondità = 1 mm, larghezza = 12 mm, lunghezza = 21.87 mm;
- per ogni staffa laterale vengono utilizzate 4 viti di serraggio (viti ISO 4762 M4x8): 2 su basamento inferiore e 2 su basamento superiore distanziate ognuna di 15.87 mm (20 °) e simmetriche rispetto al fulcro.

Per la staffa laterale destra e sinistra sono state fatte le seguenti scelte progettuali (Appendice A.2):

- altezza = 47 mm, spessore = 12 mm, lunghezza = 27.87 mm;
- viti ISO 4762 M4x8 (2 viti su basamento superiore e 2 viti su basamento inferiore).

La staffa laterale sinistra presenta inoltre 3 fori M1.6 disposti a 120° su una circonferenza di diametro pari a 20.90 mm per il montaggio a 3 viti dell'encoder [27]; le viti utilizzate sono le ISO 7045 M1.6x4.

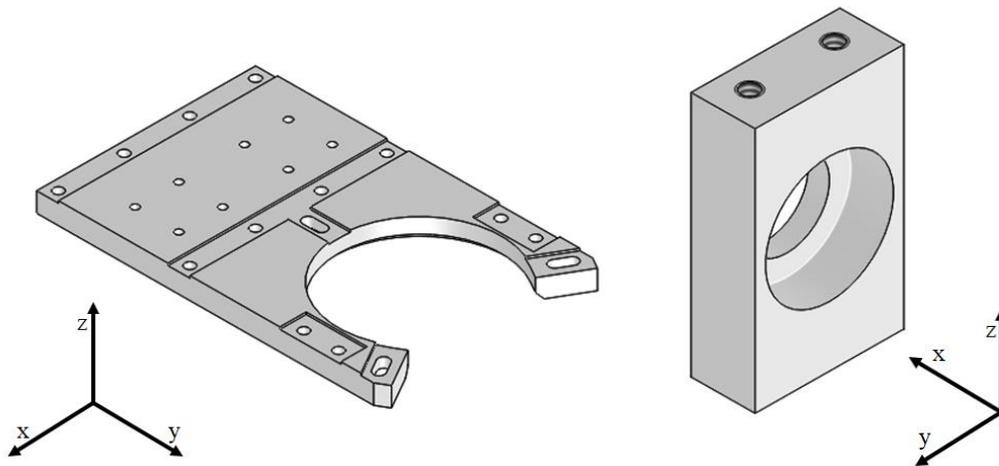


Figura 4.1.1.1 – Vista isometrica del basamento (sinistra) e delle staffe laterali (destra) del carrello.

Questa fase di progettazione viene condotta tenendo in considerazione le dimensioni di alcuni componenti già presenti nel carrello. In particolare, le scanalature e le viti di serraggio sono delle stesse dimensioni di quelle presenti nel progetto iniziale.

4.1.2 Cuscinetti

I cuscinetti sono necessari a consentire la rotazione dell'albero a cui è calettato il pendolo in modo da permetterne l'oscillazione. La loro scelta viene fatta considerando che:

- le forze assiali agenti sul sistema sono trascurabili;
- le forze radiali sono molto piccole: i cuscinetti devono solamente sopportare il peso del pendolo (~100 g).

Sovradimensionando la massa del pendolo (1 kg) per essere sicuri di scegliere un cuscinetto che sappia resistere alle forze agenti sul sistema, si è scelto di optare per un cuscinetto radiale a sfere.

È necessario rispettare alcuni vincoli progettuali dovuti al fatto che le sedi di alloggiamento dei cuscinetti sono ricavate all'interno delle staffe laterali:

- larghezza cuscinetto massima $B_{\max} = 12$ mm;
- diametro anello esterno massimo $D_{\max} = 27$ mm.

Non essendo possibile effettuare una lubrificazione periodica, si è scelto di utilizzare dei cuscinetti SKF Explorer:

- minore attrito, usura e generazione di calore;
- rifinitura superficiale elevata che riduce l'attrito;
- elevata robustezza e durabilità.

I cuscinetti vengono montati con interferenza sia sull'anello interno sia sull'anello esterno in modo da non avere usura dovuto allo strisciamento degli anelli con le rispettive sedi.

È necessario creare uno spallamento all'interno delle staffe laterali per vincolare assialmente il cuscinetto ed evitare la fuoriuscita dalle sedi. Teoricamente, solo uno deve essere vincolato assialmente sia sull'anello interno sia su quello esterno mentre l'altro deve essere lasciato libero di scorrere per poter compensare le dilatazioni dell'albero. Siccome lo spazio a disposizione per ricavare le sedi di alloggiamento è limitato, si è scelto di vincolare solo gli anelli esterni dei due cuscinetti e montare sia anello interno sia anello esterno con un'interferenza più marcata poiché:

- le velocità e le forze in gioco durante il funzionamento sono piccole;
- le dilatazioni dell'albero possono essere considerate trascurabili.

Infine, bisogna considerare che un'estremità dell'albero di supporto si accoppia con l'encoder HEDL 5540#A13 [27]. Questo significa che il diametro esterno dell'albero e quindi dell'anello interno del cuscinetto deve essere pari a 8 mm e che il diametro D_a deve essere pari a 16 mm in modo da avere materiale a sufficienza per riuscire a creare i fori per il montaggio a 3 viti dell'encoder poiché queste viti sono disposte su una circonferenza di diametro pari a 20.90 mm.

In seguito a queste considerazioni, il cuscinetto radiale a sfere scelto è il cuscinetto SKF Explorer 628 (Appendice B) [28].

4.1.3 Albero di supporto

L'albero di supporto dell'asta rigida è stato progettato a partire dalle dimensioni dei cuscinetti e presenta le seguenti caratteristiche (Appendice A.3):

- $d_{\min} = 8$ mm (parte albero che si accoppia con i cuscinetti);
- $d_{\max} = 20$ mm (parte centrale albero);
- $d_{\text{asta}} = 10$ mm (foro centrale);
- $L = 76$ mm (lunghezza albero parte centrale);
- $l = 26.5$ mm (lunghezza albero lato encoder);
- fresatura inferiore e superiore: larghezza = 16 mm, profondità = 3 mm;
- spianatura: lunghezza = 8 mm, profondità = 1 mm, raggio raccordo = 2 mm;
- $r = 0.3$ mm (raggio di raccordo spallamento).

Le dimensioni sopra elencate sono una conseguenza di vincoli fisici imposti dai componenti direttamente collegati all'albero e di grandezze limite dettate da catalogo SKF [28]; in particolare:

- il diametro minimo corrisponde al diametro dell'anello interno del cuscinetto;
- il raccordo dello spallamento è dato dal catalogo SKF ($r_{a,\max} = 0.3$);

- il diametro della parte centrale dell'albero è stato posto pari a 20 mm a causa dell'esigenza di forare l'albero al centro con un foro passante di diametro 10 mm (diametro dell'asta rigida); questo rispetta il vincolo di diametro minimo d_a imposto dal catalogo SKF (Appendice B);
- la lunghezza della parte centrale è stata posta pari alla distanza tra i lati interni delle due staffe laterali;
- la lunghezza dell'albero lato encoder è stata posta pari a 26.5 mm poiché l'encoder HEDL 5540#A13 [27] necessita di un albero di lunghezza pari a 14 ± 0.5 mm al quale si somma lo spessore della staffa laterale pari a 12 mm;
- la spianatura è necessaria per il collegamento dell'albero all'encoder;
- le fresature sono necessarie poiché è stato scelto di bloccare l'asta rigida all'albero con un dado: la larghezza della fresatura (16 mm) è pari alla distanza tra due facce parallele del dado in modo da riuscire a bloccare la sua rotazione (dado ISO 8673 M10x1.0).

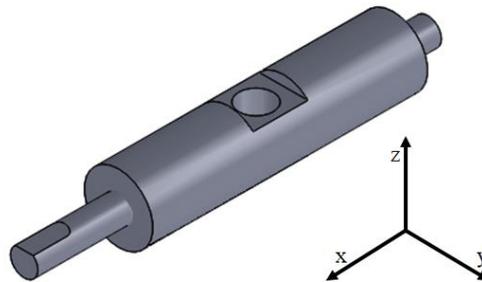


Figura 4.1.3.1 – Vista isometrica albero di supporto del pendolo piano.

4.1.4 Asta rigida

L'asta rigida è la parte che costituisce il pendolo vero e proprio. Essa è formata da un tubo cilindrico pieno in PC ad alta viscosità di diametro pari a 12 mm e presenta, ad una estremità, un foro M3 per il bloccaggio della massa sospesa tramite una vite ISO 7046 M3x25. La massa sospesa è in piombo ed è cava per consentire il passaggio della vite (Appendice A.5). All'estremità opposta, è presente un restringimento filettato di diametro pari a 10 mm e lunghezza pari a 35 mm per il calettamento dell'asta all'albero di supporto tramite un dado ISO 8673 M10x1.0 (Figura 4.1.4.1). A causa della filettatura (a passo fine M10x1.0x21) non è stato possibile progettare un'asta cava, come nel caso del pendolo sferico, per permettere la variazione del centro di massa [7].

La massa sospesa in piombo è necessaria per garantire una somiglianza accettabile con il modello, ovvero la distanza tra centro di massa e massa sospesa deve essere trascurabile.

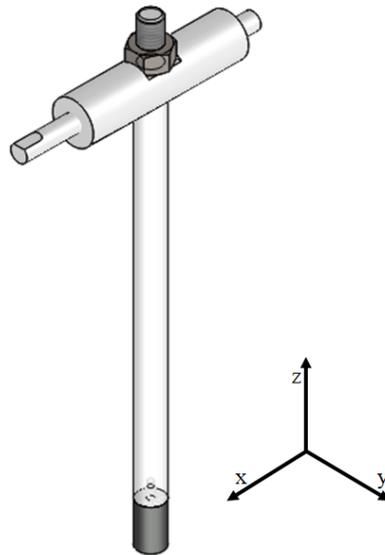


Figura 4.1.4.1 – Vista isometrica del pendolo piano.

4.1.5 Encoder

Il trasduttore di posizione angolare utilizzato è l'Encoder HEDL 5540#A13 [27]. Questo dispositivo può essere fissato in tre modi differenti: montaggio a 3 viti, montaggio a 2 viti e montaggio con orecchie esterne. Si è deciso di utilizzare il montaggio a 3 viti poiché:

- si è voluto mantenere le sedi di alloggiamento delle staffe per il supporto del pendolo sferico e quindi si è dovuto limitare la lunghezza delle staffe laterali;
- si è cercato di non aumentare in modo eccessivo la larghezza dello spallamento sul quale va in battuta il cuscinetto, cosa che si sarebbe dovuta fare nel caso si fosse scelto il montaggio a due viti.

Quindi, vengono utilizzate 3 viti ISO 7045 M1.6x4 disposte a 120° su una circonferenza di diametro pari a 20.90 mm (Appendice A.2).

Il posizionamento dell'encoder è ruotato di 90° rispetto al montaggio ideale poiché nella sua posizione originaria avrebbe creato problemi durante il funzionamento a causa del contatto con il supporto sinistro della puleggia, impedendo l'attivazione del finecorsa.

4.2 Conclusioni

Il pendolo piano, rispetto a quello sferico, è caratterizzato dal fatto di poter oscillare solamente in un piano. Non è stato quindi possibile utilizzare nella sua interezza il carrello inizialmente ideato per lo studio del pendolo sferico.

In particolare, è stato necessario modificare la parte di supporto dell'asta rigida, formata da tre staffe e da un componente sferico forato, poiché questa non garantiva i vincoli necessari a far oscillare il sistema in un unico piano.

È stato possibile riprogettare e modificare il sistema facilmente poiché il progetto iniziale prevedeva lo smontaggio e la rimozione delle staffe per riuscire a sostituire l'asta rigida con un'altra con caratteristiche di lunghezza e peso differenti per valutare l'influenza di queste proprietà sulla dinamica del pendolo.

Quindi la struttura esterna è stata interamente conservata mentre è stata modificata la parte riguardante il supporto dell'asta rigida.

5. Componenti hardware

Il sistema di trasmissione del banco prova è formato da due motori elettrici BLDC posti ai vertici del telaio che forniscono potenza al carello tramite un'unica cinghia di distribuzione. Ogni motore è collegato a sua volta a un driver che permette di controllare in maniera più accurata la tensione e la corrente applicata al motore stesso e di verificare eventuali errori durante il funzionamento.

Infine, sono presenti 3 trasduttori di posizione angolare, o encoder, collegati ai motori e al pendolo che convertono la posizione angolare dell'albero a cui sono calettati in brevi impulsi elettrici che necessitano di essere elaborati e inviati al sistema di controllo.

Il sistema di controllo, quindi, è costituito da tutti i componenti hardware, e dal rispettivo cablaggio, necessari a monitorare lo stato del sistema e ad elaborare queste informazioni per ottenere l'obiettivo desiderato.

5.1 Motore elettrico BLDC

Il motore elettrico è una macchina elettrica rotante che trasforma l'energia elettrica in ingresso applicata ai morsetti di alimentazione, in energia meccanica in uscita resa disponibile sull'asse del motore. L'uso dei motori DC brushless (o BLDC) è sempre più diffuso in settori quali automotive (in particolare nei veicoli elettrici), elettrodomestici e applicazioni industriali; la ragione principale è che questi motori abbandonano il commutatore meccanico a spazzole utilizzato nei motori tradizionali per sostituirlo con un dispositivo elettronico che migliora l'affidabilità e la durata dell'apparecchio [21].

Il tipo più semplice di motore elettrico è il motore DC spazzolato: la corrente elettrica passa attraverso una serie di bobine disposte all'interno di un campo magnetico fisso. La corrente circolante negli avvolgimenti di rotore genera a sua volta dei campi magnetici che fanno ruotare il gruppo bobina, poiché ogni bobina viene respinta dal polo simile e attratta verso il polo dissimile del campo magnetico fisso. Per mantenere la rotazione, è necessario invertire la corrente in modo che le polarità della bobina si ribaltino continuamente. L'alimentazione degli avvolgimenti di rotore viene fornita tramite spazzole conduttive fisse che entrano in contatto con un commutatore rotante: la rotazione del commutatore provoca l'inversione della corrente che attraversa le bobine. Il commutatore e le spazzole sono i componenti chiave che distinguono il motore a corrente continua spazzolato da altri tipi di motore. La Figura 5.1.1 illustra la struttura generale del motore spazzolato [23].

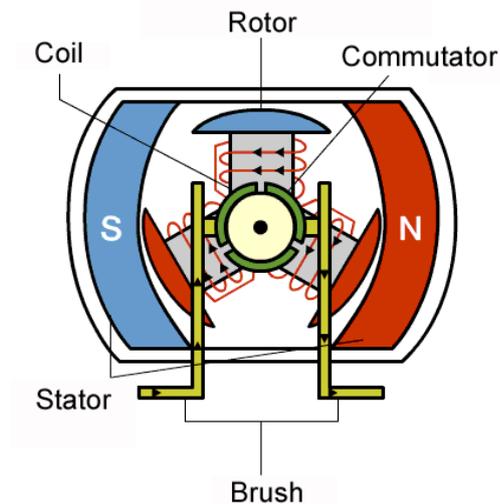


Figura 5.1.1 – Principio di funzionamento del motore DC spazzolato [23].

I motori BLDC, invece, non utilizzano spazzole poiché il rotore è un magnete permanente e le bobine sono fissate in posizione sullo stator (Figura 5.1.2).

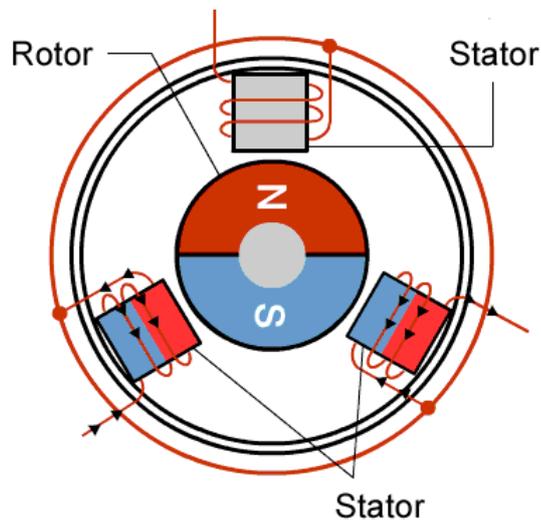


Figura 5.1.2 – Principio di funzionamento del motore BLDC [23].

Per comprendere il funzionamento del motore elettrico brushless, si può considerare per semplicità il caso in cui il rotore è formato da una sola coppia di poli e lo stator è formato da 3 bobine distanziate geometricamente di 120° . Ognuna di esse può generare un campo magnetico in due direzioni, a seconda della corrente che lo attraversa. Pertanto, con questa configurazione, si possono ottenere tre versi del vettore campo magnetico ciascuno in due direzioni diverse, cioè sei orientamenti possibili del campo magnetico; in Figura 5.1.3 viene mostrato uno dei 6 orientamenti possibili.

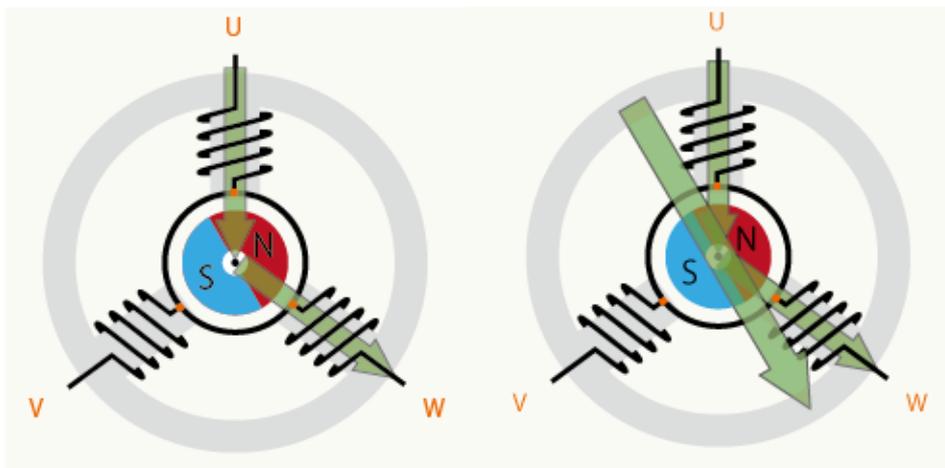


Figura 5.1.3 – Principio di rotazione del motore BLDC. La freccia ampia mostra il flusso risultante, ovvero la somma del flusso prodotto da U e W [23].

La rotazione viene mantenuta variando continuamente il flusso in modo che il magnete permanente inseguia costantemente il campo magnetico rotante indotto dalle bobine. Il commutatore elettronico del motore BLDC eccita in sequenza le bobine dello statore generando un campo elettrico rotante che trascina con sé il rotore. N rivoluzioni elettriche equivalgono a una rivoluzione meccanica, dove N è il numero di coppie polari di magneti. Quindi, per ruotare un motore BLDC nella direzione desiderata, è necessario controllare la direzione e i tempi della corrente nelle bobine in modo tale che l'orientamento del campo magnetico sia corretto in ogni istante.

A questo scopo si usano tre sensori a effetto Hall incorporati nello statore che comunicano con un microcontrollore e indicano le posizioni relative di statore e rotore per far sì che possa eccitare gli avvolgimenti nella sequenza giusta e al momento giusto. I sensori a effetto Hall sono generalmente montati sull'estremità opposta a quella di pilotaggio (Figura 5.1.4) [21].

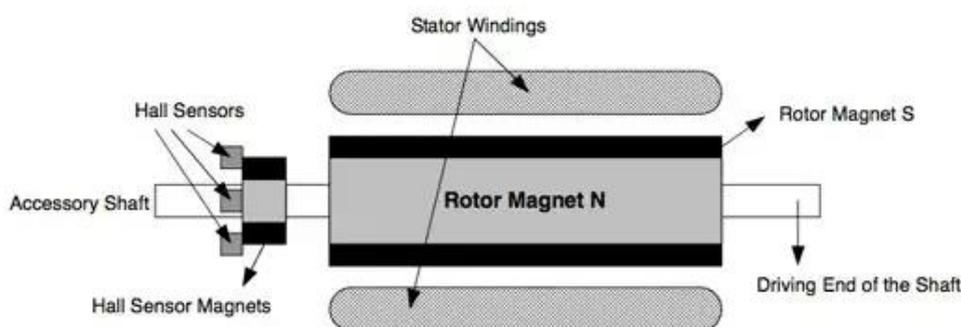


Figura 5.1.4 – Sensori Hall incorporati nello statore che permettono di determinare la sequenza di eccitazione degli avvolgimenti. [21].

Quando i poli magnetici del rotore passano davanti ai sensori Hall, viene generato un segnale: un valore pari a 1 significa ricevere un impulso degli stessi volt con cui

alimentiamo i sensori di posizione del rotore mentre un valore pari a 0 significa non ricevere alcuna tensione, cioè la stessa tensione di terra del nostro sistema. Combinando i segnali dei tre sensori è possibile determinare l'esatta sequenza di commutazione.

Fino ad ora è stato analizzato il caso in cui il rotore è formato da una sola coppia di poli ma in genere questo tipo di motore ne possiede diverse e nel nostro caso specifico 4. Tuttavia, per quanto riguarda la connessione e la programmazione del microcontrollore, non c'è differenza tranne che per il calcolo della velocità di rotazione poiché è necessario considerare che, quando riceve il segnale della posizione del rotore dai sensori ad effetto Hall, questo non è tornato nella stessa posizione iniziale ma avrà percorso solamente un quarto di giro [29].

È possibile spiegare questo comportamento poiché l'angolo elettrico pari a 360° ricevuto dal microcontrollore, corrisponde a $360^\circ / 4 = 90^\circ$ meccanici. In questo modo otteniamo un funzionamento più fine e continuo del motore perché, invece di avere 6 possibili posizioni di campo magnetico, si hanno $6 \cdot 4 = 24$ posizioni in un giro completo [29].

La seguente tabella (Figura 5.1.5) è un estratto dalla scheda tecnica del motore elettrico [30], utilizzato per movimentare il carello del banco prova, in cui si indica quali bobine bisogna alimentare ogni 180° meccanici. Il segno + indica la bobina in cui la corrente entra e il segno - la bobina in cui la corrente esce. Le bobine sono chiamate A, B e C. È possibile apprezzare la relazione esistente tra i gradi elettrici e i gradi meccanici quando esistono quattro coppie di poli:

DEGREES	ELEC												
	0	60	120	180	240	300	360	60	120	180	240	300	360
	MECH												
	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
S1 OUT													
S2 OUT													
S3 OUT													
A COIL	-	0	+	+	0	-	-	0	+	+	0	-	
B COIL	+	+	0	-	-	0	+	+	0	-	-	0	
C COIL	0	-	-	0	+	+	0	-	-	0	+	+	

Figura 5.1.5 – Relazione tra la posizione del rotore e l'alimentazione dello statore [30].

Il banco prova progettato per lo studio del pendolo piano prevede l'utilizzo di due motori brushless a corrente continua per il movimento del carrello. È stato scelto di utilizzare due motori BLDC BN34-25EU-02LH [24] con caratteristiche riportate in Tabella 5.1.1.

Tabella 5.1.1 – Caratteristiche del motore BLDC BN34-25EU-02LH [24].

Caratteristiche	Proprietà	Valore
Parametri del motore	J , Inerzia del rotore [kg-m ²]	5.1e-5
	R , Resistenza terminale [Ω]	0.253
	L , Induttanza terminale [mH]	0.62
	Coppia di stallo continua [Nm]	0.66
Parametri nominali	Coppia nominale [Nm]	0.45
	Corrente nominale [A]	8
	Velocità angolare nominale [rpm]	7500
	Potenza nominale [W]	355
Costanti	K_t , costante di coppia [Nm/A]	0.06
	τ_m , costante di tempo meccanica [s]	0.00358
	τ_e , costante di tempo elettrica [s]	0.00245
	K_m , costante del motore [rad/Vs]	16.67
	K_e , costante di FCEM [V/(rad/s)]	0.06

Il motore possiede 8 cavi di colore diverso che corrispondono a diversi segnali di input e output necessari al suo funzionamento. In Tabella 5.1.2 viene mostrata la corrispondenza tra colore del cavo e segnale.

Tabella 5.1.2 – Connessioni dei cavi del motore BLDC BN34-25EU-02LH [24].

Colore del cavo	Connessione
Giallo	V _{cc}
Grigio	Terra
Rosso	Bobina A
Nero	Bobina B
Verde	Bobina C
Blu	Uscita S2
Marrone	Uscita S1
Arancione	Uscita S3

5.2 Driver SCA-B4-70-10

Un driver (o servo amplificatore) è un dispositivo elettronico utilizzato per il pilotaggio e il controllo di un servo sistema.

Nel nostro caso specifico si è scelto di utilizzare 2 servo amplificatori (uno per ogni motore BLDC) per controllare e modulare il segnale di tensione e corrente in ingresso ai motori e per verificare problemi di funzionamento del sistema.

Il driver utilizzato è l'SCA-B4-70-10 [31] con proprietà meccaniche ed elettriche riportate in Tabella 5.2.1. È progettato per pilotare motori di tipo DC brushless e possiede le seguenti caratteristiche:

- richiede un singolo alimentatore DC per il funzionamento;
- gli azionamenti devono essere utilizzati per un solo motore;

- gli azionamenti sono protetti in caso di cortocircuiti, sottotensione, sovratemperatura e sovracorrente;
- possiede molteplici modalità di funzionamento e serve come scelta affidabile per le esigenze di controllo del movimento.

Tabella 5.2.1 – Caratteristiche del driver SCA-B4-70-10 [31].

Caratteristiche	Proprietà	Valore
Elettriche	Tensione di alimentazione [V]	+11 to +70 VDC
	Corrente nominale [A]	10
	Corrente di picco [A]	20
	Potenza massima [W]	700
	Frequenza di commutazione [Hz]	$49 \cdot 10^3$
	Efficienza [-]	0.95
Meccaniche	Dimensioni L x W x H [m]	0.18 x 0.1 x 0.04
	Peso [kg]	0.580
	Protezione da sovratemperatura [°C]	+80

Il driver dispone di 3 gruppi di connettori A, B, C e per ogni gruppo sono presenti delle porte numerate che identificano gli input e output del sistema. In questo modo è possibile cablare correttamente il motore al servo amplificatore poiché per ogni cavo in uscita dal motore corrisponde una porta in ingresso al servo amplificatore (Figura 5.4.1).

Oltre a ciò è presente un potenziometro necessario a modulare e correggere i valori di velocità e corrente massima utilizzabile durante il funzionamento e a bilanciare la posizione del motore quando è fermo tramite il comando *Offset*, agendo su apposite viti.

Esistono 3 diverse possibili modalità di funzionamento: modalità Hall, modalità Encoder e modalità coppia.

▪ Modalità Hall

In modalità Hall le informazioni di feedback per il controllo della velocità provengono dai sensori ad effetto Hall montati all'interno del motore o da un encoder Hall montato sul motore. La regolazione della velocità è buona per ogni condizione di carico e qualificata per controllare la velocità di un sistema in ogni applicazione, anche in quelle ad alta velocità.

▪ Modalità Encoder

La modalità encoder è una modalità a circuito chiuso che utilizza i segnali provenienti dall'encoder come informazioni di feedback per il controllo della velocità. L'encoder è montato sul motore. La regolazione della velocità ha prestazioni elevate in ogni condizione di carico e si adatta a ciascuna applicazione per controllare esattamente la velocità di un sistema, in particolare per le applicazioni a bassa velocità. La velocità massima raggiungibile in questa modalità è limitata dalla frequenza di ingresso dell'encoder. Gli encoder utilizzati per monitorare la velocità dei motori sono gli HEDL-5640#A13 [27].

▪ Modalità coppia

In modalità coppia, il driver controlla solo la corrente del motore. Questo ciclo di controllo è molto veloce ma la velocità di rotazione dipende dal carico a causa della corrente costante. Questa modalità è utilizzata in applicazioni con controllo di forza o come amplificatore di potenza per sistemi di posizionamento.

È importante effettuare alcune osservazioni riguardanti il cablaggio e il funzionamento del driver:

- L'input "Enable" B13 viene collegato all'output "+15V/20mA" C14 (Figura 5.4.1) poiché se l'ingresso "Enable" è a potenziale GND o non è cablato affatto, lo stadio di uscita rimane nello stato bloccato. Il motore si ferma o rallenta senza freno. Per riattivare lo stadio di uscita è necessario un segnale di tensione > 8 V. Il motore si avvia solo resettando "Enable". Ogni volta che si verifica un'anomalia del sistema (come per esempio una sovratemperatura), l'uscita "Ready/Error" C21 risponde e il LED verde sul pannello anteriore si spegne. Lo stadio di uscita del convertitore di frequenza viene disattivato e l'errore non viene ripristinato finché l'utente non azzeri il convertitore resettando l'ingresso "Enable". Questo serve come misura di sicurezza per evitare danneggiamenti del sistema;
- Gli output C20 e C19 vengono collegati rispettivamente ad un misuratore di velocità angolare e di corrente per monitorare la velocità di rotazione del motore e la corrente circolante in esso;
- Gli input analogici C17 e C18 vengono utilizzati per imporre ai motori un segnale esterno analogico $+10 / -10$ V di tensione (Figura 5.4.1). Il valore del segnale viene calcolato tramite la logica di controllo progettata. Se la tensione effettiva è 0 V, il motore si arresta. Se la tensione effettiva è positiva, il motore si muove in una direzione. Se l'ingresso è negativo, il motore di conseguenza si muoverà nella direzione opposta.

5.3 Encoder HEDL-5540/5640 #A13

Un trasduttore di posizione angolare (o encoder) è un dispositivo elettromeccanico in grado di convertire la posizione o il moto angolare del suo asse rotante in brevi impulsi elettrici che necessitano di essere elaborati da un circuito di analisi del segnale sotto forma di segnali numerici digitali [32].

Nella forma più semplice si possono distinguere due parti:

- il corpo, che costituisce la parte fissa, con all'interno la componentistica elettrica/elettronica (sensori, circuiti ecc.);
- il rotore, che costituisce la parte rotante, che normalmente termina con un albero da collegare all'asse di cui si desidera effettuare la lettura.

I segnali elettrici in uscita trasmettono le informazioni relative alla posizione o allo spostamento del rotore rispetto al corpo.

L'encoder utilizzato per valutare la posizione angolare del pendolo è l'encoder HEDL 5540 #A13 mentre quelli utilizzati per i motori sono gli encoder HEDL 5640 #A13. Il funzionamento è lo stesso, ciò che cambia è solamente il tipo di

montaggio: il primo utilizza un montaggio a 3 viti, il secondo un montaggio con orecchie esterne [27].

Essi sono formati da una sorgente LED, da una lente, da un circuito integrato con rivelatori e circuiteria di uscita e da una ruota codificatrice posta tra l'emettitore e il rivelatore. Come si può osservare nello schema a blocchi di Figura 5.3.1, è presente un solo diodo a emissione luminosa (LED) come sorgente luminosa. La luce viene collimata in un fascio parallelo mediante una lente in policarbonato posizionata direttamente sopra il LED.

Di fronte all'emettitore si trova il circuito del rivelatore integrato. Questo IC è costituito da più gruppi di foto rivelatori e dal circuito di elaborazione del segnale necessario per produrre le forme d'onda digitali.

La ruota codificatrice ruota tra l'emettitore e il rivelatore, causando l'interruzione del fascio di luce. I fotodiodi che rilevano queste interruzioni sono disposti secondo uno schema che corrisponde al raggio e al design della ruota. Questi rivelatori sono anche distanziati in modo tale che un periodo di luce su una coppia di rivelatori corrisponda ad un periodo buio sulla coppia adiacente. Le uscite del fotodiodo vengono quindi tradotte attraverso il circuito di elaborazione del segnale in A , \bar{A} , B , \bar{B} , I e \bar{I} . I comparatori ricevono questi segnali e producono gli output finali per i canali A e B . L'uscita finale del canale I è un indice di impulso P_0 che viene generato una volta per ogni rotazione completa della ruota codificatrice. Questo indice P_0 di uscita è un impulso coincidente con gli stati bassi dei canali A e B (Figura 5.3.2) [27].

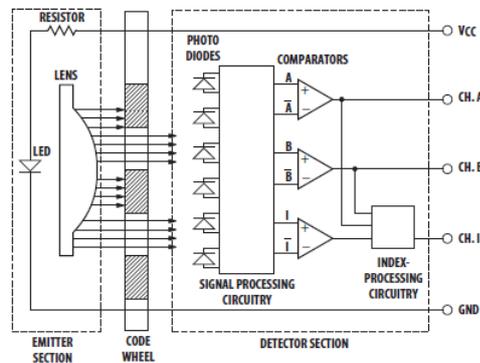


Figura 5.3.1 – Diagramma a blocchi dell'encoder HEDL [27].

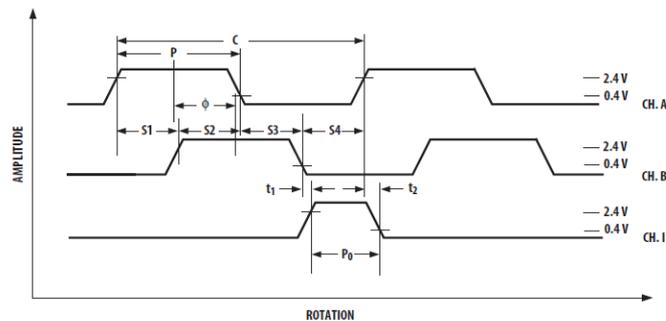
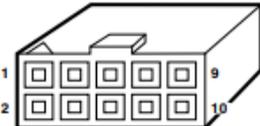


Figura 5.3.2 – Forme d'onda di uscita dell'encoder HEDL [27].

In Figura 5.3.3 viene invece mostrato il legame tra il colore/numero dei pin dell'encoder e il parametro corrispondente.

10-PIN CONNECTOR

NO.	COLOR	PARAMETER
1	BROWN	NC
2	RED	V _{CC} (+ 5 V)
3	ORANGE	GND
4	YELLOW	NC
5	GREEN	\bar{A}
6	BLUE	A
7	VIOLET	\bar{B}
8	GREY	B
9	WHITE	T (INDEX)
10	BLACK	I (INDEX)



The diagram shows a 10-pin connector with two rows of five pins. The top row is numbered 1 to 5 from left to right, and the bottom row is numbered 6 to 10 from left to right. Pin 10 is the rightmost pin in the bottom row.

Figura 5.3.3 – Connettore dei pin dell'encoder HEDL [27].

5.4 Cablaggio componenti

Dopo aver descritto i componenti hardware necessari a realizzare il controllo del pendolo, bisogna mostrare come cablarli correttamente tra loro (Figura 5.4.1). Quest'ultima operazione viene realizzata utilizzando le informazioni provenienti dai datasheet di ogni componente [27] [31] [24].

Oltre agli elementi visti precedentemente, sono stati aggiunti:

- due blocchi “Alimentazione” necessari al funzionamento dei driver che possono fornire una tensione compresa tra gli 11 V e i 70 V;
- un blocco “PC” e un blocco “PXI” rappresentanti i componenti utilizzati per la fase vera e propria di programmazione della logica di controllo. Il PXI è uno strumento che fornisce alimentazione, raffreddamento e un bus di comunicazione per strumenti modulari o moduli I/O. È possibile controllare questi moduli tramite un controller integrato o da un PC esterno, utilizzando uno o più strumenti di software engineering specializzati [33].

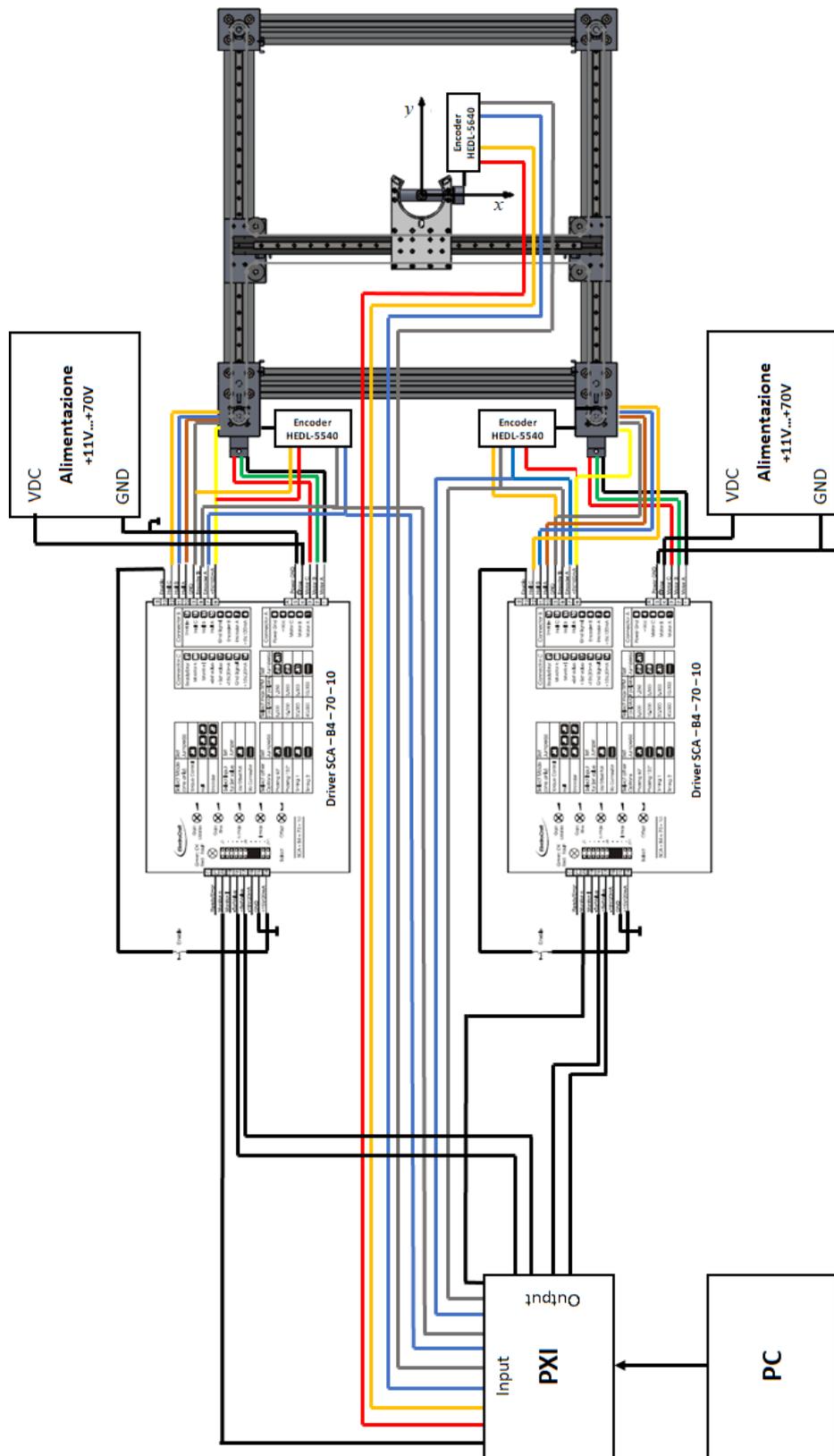


Figura 5.4.1 – Cablaggio dei componenti hardware per il controllo del pendolo piano.

5.5 Conclusioni

In questo capitolo è stato analizzato e descritto il funzionamento dei componenti hardware e del relativo cablaggio necessario a realizzare la logica di controllo del pendolo all'interno del banco prova. Ogni componente possiede delle porte analogiche e/o digitali di I/O che devono essere collegate correttamente per riuscire a far comunicare i diversi componenti tra loro in modo da ottenere il funzionamento del sistema.

6. Conclusioni

Il lavoro presentato nasce come progetto per la realizzazione di un sistema di controllo per l'auto-bilanciamento di un motociclo da fermo che, in determinate condizioni di funzionamento, può essere modellizzato come un pendolo inverso piano che oscilla intorno all'asse immaginario che collega i punti di contatto della ruota posteriore e anteriore con il terreno. Questo è un sistema che presenta un punto di equilibrio instabile e che necessita di una logica di controllo per rimanere in posizione verticale.

In questa tesi magistrale, viene approcciato il problema del bilanciamento del pendolo piano sotto due punti di vista differenti. Il primo utilizza una coppia di reazione applicata al sistema da un volano per compensare la perdita di equilibrio. La coppia viene applicata al volano tramite un controllore PD che fornisce un valore proporzionale all'angolo di inclinazione e alla sua velocità angolare. Le prove sperimentali effettuate hanno evidenziato un'elevata difficoltà nel mantenere il motociclo in posizione verticale per un tempo superiore a 25 s a causa di diversi fattori che agiscono sul sistema in modo casuale e che non possono essere controllati.

La seconda soluzione adottata viene sviluppata a partire da un lavoro svolto in una tesi precedente [7]. In questo caso, il pendolo non è vincolato a oscillare solamente intorno ad un asse, come nel caso precedente, ma il suo fulcro è incernierato ad un carrello mobile movimentato da un sistema di trasmissione formato da due motori BLDC e da un'unica cinghia di distribuzione. Il mantenimento della posizione verticale, quindi, non viene garantito da una coppia applicata ad un volano ma da una forza applicata al carrello. Il banco prova progettato permette tre configurazioni di moto differenti: movimento X, movimento Y e movimento XY. È stato analizzato solamente lo spostamento lungo l'asse y poiché è quello che richiede una maggiore potenza ai motori e consente il bilanciamento del sistema.

È stato progettato un controllore 2-PID in modo tale da regolare la posizione angolare del pendolo e riposizionare il carrello al centro del banco prova; è stato così possibile realizzare una logica di controllo tale da mantenere il pendolo in equilibrio per un tempo arbitrariamente lungo.

Il passo successivo è stato quello di montare il banco prova e di testare il funzionamento dei vari componenti hardware costituenti la logica di controllo necessaria a monitorare lo stato del sistema. Durante il montaggio è stato riscontrato un problema non trascurabile riguardante l'eccentricità delle pulegge collegate ai motori e al telaio. Le eccentricità causano la variazione nel tempo del tensionamento della cinghia di distribuzione che provoca, a sua volta, un movimento irregolare e oscillatorio del carrello durante lo spostamento. Questo problema è dovuto a imperfezioni dimensionali e geometriche presenti nei cuscinetti e nelle lavorazioni di foratura applicate alle pulegge.

Lo sviluppo futuro del progetto è indirizzato al funzionamento del banco prova e alla validazione dei risultati numerici ottenuti nel Capitolo 3 della presente tesi; per far ciò sarà necessario completare alcuni passaggi fondamentali:

- eliminazione dell'eccentricità delle pulegge per consentire un movimento regolare del carrello;
- cablaggio completo di tutti i componenti hardware come mostrato in Figura 5.4.1;

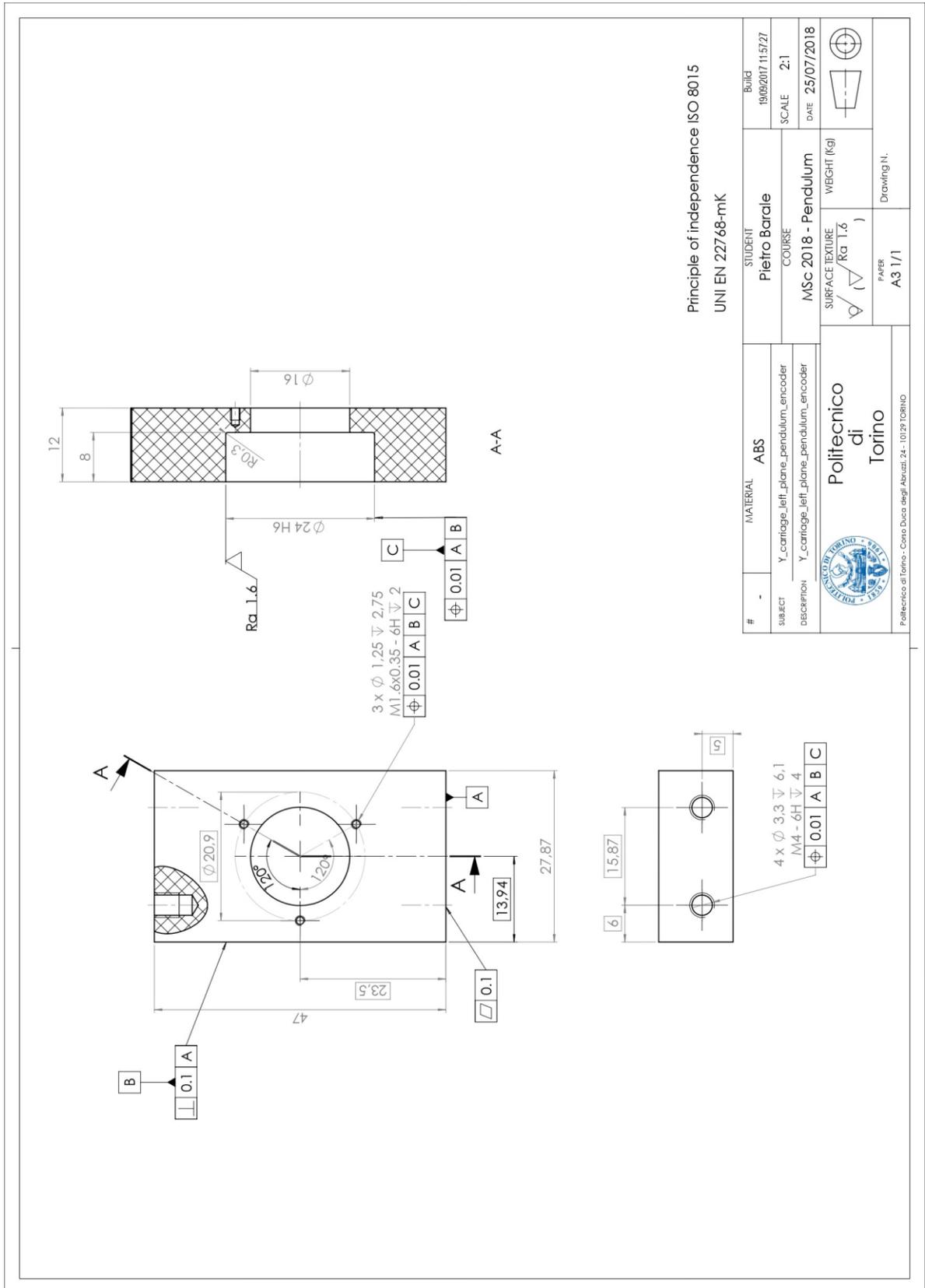
- implementazione della logica di controllo realizzata in Simulink® all'interno del PXI [33] tramite NI VeriStand®: un ambiente software per lo sviluppo di applicazioni avanzate di test real-time.

Un ulteriore passo che può essere effettuato in futuro riguarda l'ampliamento della logica di controllo a tutte le configurazioni di moto del sistema per garantire il bilanciamento del pendolo anche quando il carrello si sposta in direzione x e lungo la diagonale del banco prova.

Appendice A - Tavole

Sono qui di seguito riportate le tavole dei componenti progettati per la realizzazione del carrello del banco prova per lo studio del pendolo piano.

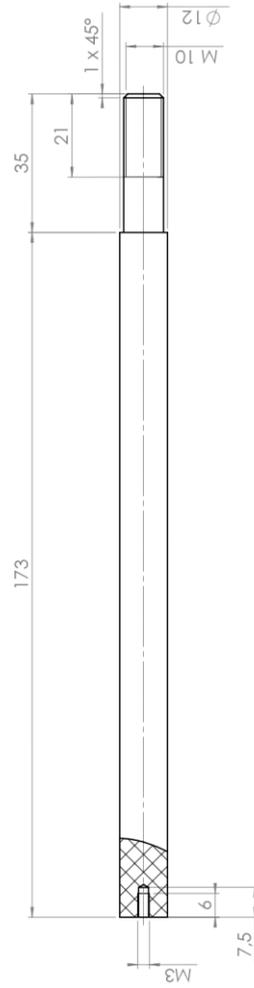
A.2 - Staffe laterali



Principle of independence ISO 8015
UNI EN 22768-mK

#	MATERIAL	ABS	STUDENT	Pietro Barale	Build	19/09/2017 11:57:27
SUBJECT	Y_carriage_left_plane_pendulum_encoder		COURSE	MSc 2018 - Pendulum	SCALE	2:1
DESCRIPTION	Y_carriage_left_plane_pendulum_encoder		SURFACE TEXTURE	$Ra 1.6$	DATE	25/07/2018
			PAPER	A3 1/1	WEIGHT (kg)	
		Politecnico di Torino	Drawing N.			
<small>Politecnico di Torino - Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 TORINO</small>						

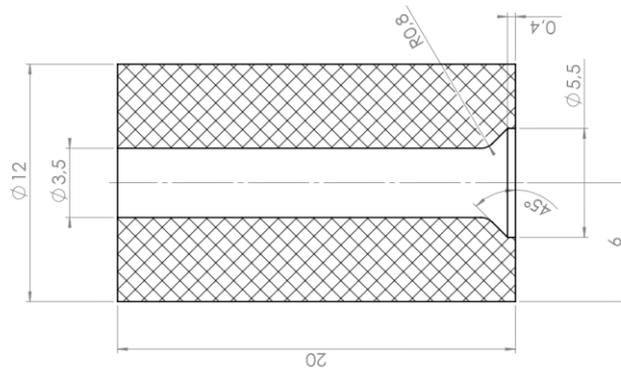
A.4 - Asta rigida



Principle of independence ISO 8015
UNI EN 22768-mK

#	MATERIAL	PC High viscosity	STUDENT	Pietro Barale	BUILD	18/09/2017 09:52:05
SUBJECT	plane_pendulum_rod		COURSE	MSC 2018 - Pendulum	SCALE	1:1
DESCRIPTION	plane_pendulum_rod		SURFACE TEXTURE		DATE	30/03/2019
 Politecnico di Torino <small>Politecnico di Torino - Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 TORINO</small>		WEIGHT (kg)				
		PAPER	A3 1/1	Drawing N.		

A.5 - Massa sospesa



A-A

Principle of independence ISO 8015
UNI EN 22768-mK

#	MATERIAL	STUDENT	BUILD
	Lead	Pietro Barale	2006/2018 11/24/58
SUBJECT	weight_plane_pendulum	COURSE	SCALE
DESCRIPTION	weight_plane_pendulum	MSc 2018 - Pendulum	5:1
		SURFACE TEXTURE	DATE
		WEIGHT (kg)	30/03/2019
		PAPER	Drawing N.
		A3 1/1	



Politecnico di Torino

Politecnico di Torino - Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 TORINO

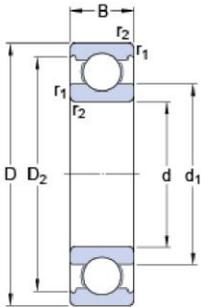
Appendice B - Cuscinetto SKF Explorer 628



628

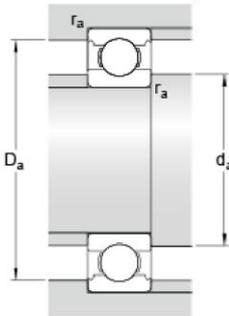
SKF Explorer

Dimensioni



d	8	mm
D	24	mm
B	8	mm
d ₁	≈ 14.45	mm
D ₂	≈ 21.2	mm
r _{1,2}	min. 0.3	mm

Dimensioni dello spallamento



d _a	min. 10.4	mm
D _a	max. 21.6	mm
r _a	max. 0.3	mm

Dati di calcolo

Coefficiente di carico dinamico	C	3.9	kN
Coefficiente di carico statico di base	C ₀	1.66	kN
Carico limite di fatica	P _u	0.071	kN
Velocità di riferimento		63000	r/min
Velocità limite		40000	r/min
Fattore di calcolo	k _r	0.025	
Fattore di calcolo	f ₀	13	

Massa

Massa cuscinetto	0.018	kg
------------------	-------	----

Bibliografia

- [1] <http://search-ext.abb.com/library/Download.aspx?DocumentID=9AKK107045A1336&LanguageCode=it&DocumentPartId=&Action=Launch>
Disponibile il 2019-02-07.
- [2] Eelhasariri A., Epechev A., “Humanoid robot balance using the spherical inverted pendulum model”, *Frontiers in Robotics and AI*, 2, 2015.
- [3] Araki M., Akimoto K., Takenaka, T., “Study of Riding Assist Control Enabling Self-standing in Stationary State”, *SAE Technical Paper* 2018-01-0576, 2018, doi:10.4271/2018-01-0576.
- [4] ‘Arduino Engineering Kit’, <https://create.arduino.cc/edu>
Disponibile il 2018-12-27.
- [5] K.J. Åström, R.E. Klein, A. Lennartsson, “Bicycle Dynamics and Control”, *IEEE Control Systems Magazine*, 25(4) August 2005, pp. 26-47.
- [6] D. Ambrosi, A. Bacciotti, G. Ropolo, *La matematica della bicicletta*, Dipartimento di meccanica, Politecnico di Torino, 2008.
- [7] Venturini S., Bonisoli E., “Design of a spherical pendulum didactic test rig”, *International Journal of Mechanics and Control*, Vol. 19, No. 01, 2018.
- [8] https://openi.nlm.nih.gov/detailedresult.php?img=PMC3649400_sensors-13-01510f2&req=4
Disponibile il 2019-02-16.
- [9] <https://it.wikipedia.org/wiki/Retroazione>
Disponibile il 2019-03-28.
- [10] Ang K.H., Chong G.C.Y, Li Y., “PID control system analysis, design, and technology”, *IEE Trans Control System Tech*, 13(4), 2005, pp. 559-576.
- [11] https://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/index.php/FAQ:_What_is_steady_state_error%3F
Disponibile il 2019-03-28.
- [12] ‘Datasheet IMU BNO055’, <https://www.robot-electronics.co.uk>
Disponibile il 2019-01-02.
- [13] <https://www.arduino.cc/documents/datasheets/DCmotor.PDF>
Disponibile il 2019-01-02.
- [14] <https://sensing.honeywell.com/honeywell-sensing-SL353-series-micropower-omnipower-digital-hall-effect-sensor-ics-datasheet-005935-2-en.pdf>
Disponibile il 2019-01-15.
- [15] Barbato G., *Misurare per decidere. Misure e statistica di base*, Esculapio, Bologna, 2011.
- [16] <https://www.edn.com/electronics-blogs/mechatronics-in-design/4368079/So-you-want-to-build-an-H-bot>
Disponibile il 2019-01-02.
- [17] Valic Igor, *Costruzione di un pendolo inverso e implementazione del sistema di controllo*, Tesi di laurea, Dipartimento di Ingegneria e Architettura Università degli studi di Trieste, 2017.

- [18] Canuto C., *Appunti per il corso di MODELLI e METODI NUMERICI (Ingegneria Meccanica)*, Politecnico di Torino, 2014.
- [19] http://www.automazione.ingre.unimore.it/pages/corsi/materiale didattico/ITSC0809/ITSC06-Progetto_per_Discretizzazione.pdf
Disponibile il 2018-08-18.
- [20] <http://www.elemania.altervista.org/adda/campionamento/shannon.html>
Disponibile il 2018-10-12.
- [21] Cavagnino A., *Appunti delle lezioni. Macchine Elettriche*, Politecnico di Torino, 2005.
- [22] <https://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/7467/Oludayo%20Oguntoyinbo.pdf>
Disponibile il 2018-12-11.
- [23] <https://www.elettroamici.org/nozioni-di-base-sui-motori-blcdc/>
Disponibile il 2019-01-30.
- [24] <http://www.moog.com/literature/MCG/BN34-BrushlessDCMotorsDtS.pdf>
Disponibile il 2018-10-30.
- [25] Perner R., Osborne I., *Handbook timing belts*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [26] Ostertag E., *Mono and multivariable control and estimation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [27] ‘Data Sheet Encoder HEDL-55xx/56xx’, 2008, <http://www.farnell.com>
Disponibile il 2019-30-03.
- [28] Cuscinetti volventi catalogo SKF, 2008.
- [29] Roa Prieto Pablo, *Diseño e implementación de un patinete eléctrico*, MSc Thesis, Scuola tecnica superiore di Ingegneria Università Pontificia Comillas, 2009.
- [30] <http://www.moog.com/literature/MCG/mosilencerseries.pdf>
Disponibile il 2019-01-30.
- [31] ‘SCA-B4-70-10 User Manual’, 2009, <https://www.electrocraft.com>
Disponibile il 2019-30-03.
- [32] https://it.wikipedia.org/wiki/Trasduttore_di_posizione_angolare
Disponibile il 2019-01-30.
- [33] <http://www.ni.com/it-it/shop/pxi.html>
Disponibile il 2019-03-02.