

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

**Metodologia avanzata per la
simulazione aeromeccanica di LPT
per motori aeronautici
commerciali**



Relatori

Prof. Christian Maria Firrone

Ing. Marco Moletta

Candidato

Riccardo Scarpulla

Marzo 2019

A mamma, papà e Ica

A Giulia

Ringraziamenti

Un sincero ringraziamento è dedicato a tutte le persone che hanno contribuito con il loro aiuto al raggiungimento di questo mio obiettivo.

Ringrazio l'Ing. Marco Moletta per l'opportunità concessami e per avermi guidato durante l'attività di tesi con i suoi numerosi consigli. Ringrazio l'Ing. Paride Mesaglio Chittaro, l'Ing. Edoardo Peradotto e l'Ing. Witold Szwed per il fondamentale aiuto ricevuto durante l'esperienza in GE Avio Aero .

Un sentito ringraziamento va al Prof. Christian Firrone per i preziosi insegnamenti, la disponibilità, la cordialità e l'interesse mostrato in questi mesi nei confronti del mio lavoro. Vorrei inoltre ringraziare l'Ing. Giuseppe Battiato, per aver condiviso le sue conoscenze ed essere stato per me uno dei punti di riferimento al Greatlab.

Ringrazio tutti i colleghi del Greatlab con i quali ho trascorso un periodo importante della mia carriera e vissuto un'esperienza lavorativa non priva di difficoltà. Un ringraziamento è rivolto in particolare a Simone, Davide, Gianluca, Domenico e Amedeo, persone con le quali si è creato un legame che va oltre gli aspetti lavorativi.

Ringrazio tutti gli amici e i colleghi incontrati durante il percorso di studi, con i quali ho vissuto l'impegnativa carriera universitaria, ma anche condiviso momenti da ricordare.

Ringrazio i miei amici più cari, con i quali è sempre un piacere ritrovarsi, ridere, ricordare i bei momenti vissuti insieme e confrontarsi sulle strade intraprese. A loro auguro il meglio.

I ringraziamenti più sentiti e profondi vanno alla mia famiglia. Per avermi dato la possibilità di studiare, che non ho mai ritenuto scontata o dovuta. Per gli insegnamenti, l'educazione, il senso del dovere che mi è stato trasmesso, l'affetto e il supporto quotidiani, senza i quali probabilmente non avrei raggiunto questo traguardo. Poche parole non bastano per esprimere tutta la mia gratitudine, sappiate che mi sento fortunato. Spero di avervi reso orgogliosi.

Desidero ringraziare con tutto il cuore Giulia, con la quale condivido la mia vita ormai da sette anni. Ti ringrazio per essermi stata accanto sempre, soprattutto

nei momenti di difficoltà, che non sono mancati in questi anni; per esserci stata nonostante io non sia riuscito a dedicarti tutto il tempo che meriti. Ti ringrazio per l'amore sincero e la felicità che sai regalarmi ogni giorno, per gli incoraggiamenti e la sicurezza che sai infondermi. Un grazie sincero va anche alla tua famiglia, nella quale ormai trovo una seconda casa.

Sommario

Le vibrazioni costituiscono una problematica fondamentale nella progettazione di una turbomacchina: esse alimentano il fenomeno della fatica ad alto numero di cicli (HCF) e possono condurre, se non opportunamente controllate, a cedimenti catastrofici delle strutture. Risulta quindi di estrema importanza la previsione della risposta dinamica di un sistema vibrante quale un motore aeronautico, al fine di produrre nuovi design in grado di migliorarne le prestazioni, senza tuttavia incorrere in problemi strutturali.

La presente tesi si pone come continuazione dell'attività di ricerca intrapresa da GE Avio Aero^{[1][2]} nell'ambito del progetto GREAT 2020 ed ha come obiettivo lo sviluppo di un software dedicato all'analisi preliminare aeromeccanica di dischi palettati appartenenti a stadi di turbina di bassa pressione per valutarne la risposta di ciclo limite. Il problema aeroelastico non lineare del flutter in presenza di contatti in grado di dissipare energia grazie all'attrito prodotto dallo strisciamento tra la radice della pala e la cavità del disco è risolto grazie all'utilizzo di una metodologia precedentemente sviluppata. Partendo da questa base, è stata progettata un'interfaccia grafica in ambiente MatLab per facilitare l'esecuzione delle analisi, migliorare la gestione dei parametri di input e poter eseguire in modo efficace la fase di post-processing. Ciò ha richiesto un iniziale studio del software esistente per comprenderne il funzionamento, le potenzialità e gli aspetti migliorabili. In un secondo momento l'attenzione è stata focalizzata sulla modellazione e l'analisi di differenti distribuzioni di precarico dovuto a forza centrifuga nella zona di contatto pala-disco e all'influenza che esso ha sulla risposta di ciclo limite, confrontando i valori numerici con i dati sperimentali.

Summary

Vibrations represent a fundamental problem for the design of turbomachinery: they contribute to the phenomenon of high-cycle fatigue (HCF) and they can cause, if not opportunely controlled, catastrophic failures of the structures. Hence, the forecast of the dynamic behaviour of a vibrating system, as like an aeronautic engine, is really important to produce new design, improve performances and avoid structural problems.

This thesis is the continuation of the research activity began by Avio Aero^{[1][2]} in the context of GREAT 2020 project and it aims to the development of a software for the preliminary aero-mechanical analysis of LPT bladed disks and the evaluation of the Limit Cycle Oscillation (LCO) response. The non-linear aeroelastic problem of flutter, considering friction contacts that dissipate energy as a consequence of the relative displacements between blade's root and disk's slot, is solved thank to the utilization of a previously developed methodology. Starting from this base, a totally new graphic user interface (GUI) has been designed in MatLab to make analyses performing easier, to improve the management of input parameters and to be able to efficiently operate post-processing. It required an initial study of the existing software to understand its functioning, potentialities and improvable aspects. Then, the attention was focused on modelling and analysis of different pre-load distributions in the contact zone and their influence on LCO response, comparing numerical values with experimental data.

Indice

Elenco delle figure	x
Elenco delle tabelle	XIII
1 Introduzione	1
1.1 GREAT 2020	1
1.1.1 Aziende ed enti coinvolti	1
1.1.2 Emissioni	3
1.2 Architetture motore	5
1.2.1 Turbojet	5
1.2.2 Turboshaft	6
1.2.3 Turboprop	6
1.2.4 Turbofan	6
1.2.5 Nuove architetture motore	9
1.3 Turbina	10
1.3.1 Stadio di turbina assiale	10
1.3.2 Palettatura LPT	14
1.3.3 Sollecitazioni	15
2 Dinamica dei rotori	17
2.1 Simmetria ciclica	17
2.1.1 Diametri e cerchi nodali	24
2.2 Analisi modale	25
2.2.1 Famiglie modali e diagrammi FreND	28
2.3 Tecniche di riduzione	29
2.3.1 Riduzione statica di Guyan	31
2.3.2 Sintesi dei modi componenti di Craig-Bampton	33
2.3.3 Riduzione di Tran	35
2.3.4 Riduzione modale	39

3	Aeroelasticità e vibrazioni nelle turbomacchine	41
3.1	Risposta forzata	44
3.2	Flutter	47
3.2.1	Studio dell'instabilità mediante analisi agli autovalori	48
3.2.2	Analisi classica a flutter	52
3.2.3	Metodo- k	53
3.2.4	Metodo- pk	55
3.2.5	Aerodinamica instazionaria	55
3.3	Flutter nelle turbomacchine	57
3.3.1	Limit cycle oscillations (LCOs)	60
4	Analisi a flutter di un bladed disk	65
4.1	Linearizzazione e strategia di risoluzione del problema aeroelastico	65
4.1.1	Modello di contatto	67
4.1.2	Reduced Order Model	70
4.1.3	Harmonic Balance Method	71
4.1.4	Strategia di risoluzione del problema aeroelastico	72
4.2	Caso di studio	74
4.2.1	Approccio fisico	76
4.2.2	Approccio modale	78
4.2.3	Validazione e sensitivity	80
4.2.4	Over-stiffening del contatto	82
4.3	Interfaccia grafica (GUI)	86
4.4	Distribuzione del precarico sulle superfici di contatto	93
5	Conclusioni	101
	Bibliografia	103

Elenco delle figure

1.1	Esempi di motori aeronautici con differenti architetture.	7
1.2	GE90 Turbofan ^[14]	8
1.3	Schema di uno stadio di turbina assiale ^[15, p. 370] (a) e cross-section dell'intera macchina ^[16] (b).	11
1.4	Rappresentazione schematica di uno stadio di turbina a reazione a velocità assiale costante e relativi triangoli di velocità ^[15, p. 374]	13
1.5	Esempio di pale statoriche e rotoriche ^[18]	15
1.6	Compensazione del momento aerodinamico M_{flow} agente alla radice della pala mediante il momento M_c generato dalla forza centrifuga ^[17]	16
2.1	Esempio di strutture in simmetria ciclica ^[19]	18
2.2	Modi di vibrare di un bladed disk semplificato composto da dodici settori ^[20]	21
2.3	Rappresentazione di un'onda stazionaria per una struttura in simmetria ciclica.	22
2.4	Rappresentazione di un'onda rotante per una struttura in simmetria ciclica.	23
2.5	Modi di vibrare di un bladed disk semplificato al variare del numero di diametri nodali (ND) e di circonferenze nodali (NC) ^[21]	25
2.6	Partizione dei gradi di libertà dell' n -esimo settore fondamentale.	26
2.7	Esempio di diagramma FreND ^[22]	29
2.8	Modi di vibrare di un bladed disk ^[14]	30
3.1	Triangolo di Collar ^[26]	42
3.2	Cambiamento di variabili per il passaggio da un sistema di riferimento fisso ad uno rotante.	45
3.3	Forzanti forward e backward ^[14]	46
3.4	Diagramma di Campbell ^[1]	46

3.5	Risposta dinamica di un sistema aeroelastico al variare dello smorzamento modale.	51
3.6	Mappa di un compressore e rappresentazione delle ragioni di flutter ^[1]	59
3.7	Interpretazione della frequenza ridotta secondo Platzer e Carta ^[31]	60
3.8	Differenti tipologie di friction contacts ^[34]	61
3.9	Energia <i>vs</i> ampiezza di vibrazione. La curva tratteggiata indica l'energia aerodinamica introdotta nel sistema, la linea continua rappresenta l'energia dissipata per attrito.	63
4.1	Modello di contatto.	67
4.2	Diagramma qualitativo forza <i>vs</i> spostamento per la determinazione della rigidità di contatto normale.	69
4.3	Diagramma qualitativo forza <i>vs</i> spostamento per la determinazione della rigidità di contatto tangenziale.	69
4.4	Applicazione dello spostamento u_t per la determinazione della rigidità di contatto tangenziale.	69
4.5	bladed disk (test case 1).	74
4.6	Diagramma FreND.	75
4.7	Smorzamento aerodinamico ζ_{aer} e rigidità aerodinamica η_{aer} al variare del diametro nodale.	75
4.8	Risposta di ciclo limite per due differenti analisi; il marker \times indica il dato di riferimento. Nella tabella adiacente sono riportate le differenze percentuali rispetto al target.	81
4.9	Sensitivity al variare dello smorzamento aerodinamico ($ \zeta_2 = 1.2 \zeta_1 $, $ \zeta_3 = 1.6 \zeta_1 $) e del coefficiente di attrito ($\mu_2 = 1.2\mu_1$, $\mu_3 = 1.4\mu_1$).	82
4.10	Risposta di ciclo limite calcolata con l'approccio fisico (marker \times) e con l'approccio modale (marker \circ) al variare del numero n di modi considerati nella riduzione; n diminuisce spostandosi da sinistra verso destra.	82
4.11	Ampiezza dell'LCO al variare del parametro di riduzione della rigidità di contatto.	84
4.12	Frequenza dell'LCO al variare del parametro di riduzione della rigidità di contatto.	84
4.13	Frequenza naturale della forma modale 1FW al variare del numero di MPCs tra dovetail e disk slot.	86
4.14	Blade root joint: definizione dell'angolo α	90
4.15	Output dell'analisi statica non lineare.	92
4.16	Allocazioni nodali equivalenti ^[43]	92

4.17	Esempi di distribuzione del precarico sulla superficie di contatto. . .	94
4.18	Risposta di ciclo limite per diverse distribuzioni di precarico fissate le rigidezze di contatto per una determinata condizione operativa. . .	96
4.19	Risposta di ciclo limite per diverse distribuzioni di precarico a fre- quenza fissata per una determinata condizione operativa.	97
4.20	Ampiezza di vibrazione dell'LCO in funzione dell'energia dissipata dalle diverse distribuzioni di precarico.	97
4.21	Confronto tra i dati numerici (marker \circ) valutati alla frequenza speri- mentale media e i dati sperimentali (marker \times) per diverse condizioni operative.	99
4.22	Confronto tra i dati numerici (marker \circ) e sperimentali (marker \times) valutati alla frequenza sperimentale massima per diverse condizioni operative.	99

Elenco delle tabelle

3.1	Tipologie di moto e caratteristiche di stabilità al variare dello smorzamento e della frequenza modali.	51
4.1	MAC calcolato rispetto alla forma modale 1FW di riferimento per diversi gruppi di nodi al variare del numero di MPCs.	85
4.2	Unità di misura nel Sistema Internazionale ed Imperiale.	89
4.3	Energia dissipata per effetto del blade root joint per diverse distribuzioni di precarico e rigidzze di contatto fissate.	95
4.4	Energia dissipata per effetto del blade root joint al variare delle rigidzze di contatto per una distribuzione di precarico parabolica in direzione assiale.	98

Capitolo 1

Introduzione

1.1 GREAT 2020

GREAT 2020^[3] (Green Engine for Air Traffic 2020) è un programma di ricerca promosso dal Comitato Distretto Aerospaziale Piemonte e finanziato dalla Regione Piemonte, il cui scopo è lo sviluppo di tecnologie innovative per i motori aeronautici di nuova generazione.

Il progetto nasce nel 2009 con l'intento di offrire nuove soluzioni per un trasporto aereo efficiente ed ecocompatibile, nel rispetto degli obiettivi posti per il 2020 e il 2050 dalla Commissione Europea insieme all'Advisory Council for Aviation Research and Innovation (ACARE) in termini di emissioni e rumore percepito.

1.1.1 Aziende ed enti coinvolti

La stretta collaborazione tra aziende presenti sul territorio ed enti pubblici ha permesso di sviluppare nell'ambito del GREAT 2020 una struttura permanente per la ricerca e lo sviluppo di tecnologie aeronautiche. Avio Aero, il Politecnico di Torino e l'Unità di Torino dell'Istituto di Scienza e Tecnologia dei Materiali Ceramici assumono un ruolo di primo piano all'interno del progetto.

Avio Aero Avio Aero^[4], acquisita da General Electric nel 2012, è un'azienda leader nel design, nella produzione e manutenzione di turbine a bassa pressione, gearbox e combustori per motori aeronautici destinati a velivoli civili e militari, nonché nello sviluppo di nuovi materiali destinati all'additive manufacturing. Nata nel 1908, conta oggi oltre 4800 persone, di cui 4200 lavorano in Italia. La sede principale è situata a Rivalta di Torino ed ospita il maggiore centro produttivo. Brindisi, Pomigliano d'Arco e Cameri ospitano gli altri stabilimenti italiani. Per

quanto riguarda l'estero, l'azienda possiede uno stabilimento produttivo e un test centre in Polonia.

Politecnico di Torino Il Politecnico di Torino è conosciuto a livello mondiale per le attività di formazione e di ricerca nel campo dell'ingegneria. Diversi sono i dipartimenti impegnati nell'ambito del progetto GREAT 2020, in particolare: il Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, Scienza Applicata e Tecnologia, Energia, Ingegneria Gestionale e della Produzione.

Il Politecnico di Torino collabora in modo attivo con Avio Aero sulle tematiche di ricerca citate in precedenza: da questa partnership sono nati nel 2008 il Great Lab e, più recentemente, il TAL (Turin Additive Laboratory).

ISTEC-CRN L'Istituto di Scienza e Tecnologia dei Materiali Ceramici^{[5][6]} effettua attività di ricerca indirizzate all'innovazione di materiali e processi per il soddisfacimento delle emergenti richieste del comparto industriale e scientifico, sia nazionale che internazionale. Le tematiche di interesse sono molteplici e riguardano in particolare i settori aerospaziale, biomedicale, mecatronico e i beni culturali.

L'Unità di Torino dell'ISTEC svolge nell'ambito del progetto GREAT 2020 attività di ricerca mirate allo sviluppo di sistemi di lavorazione ecocompatibili sulle leghe di impiego aeronautico.



Laboratori Per concretizzare l'attività del progetto GREAT 2020 sono presenti sul territorio piemontese sei laboratori, ognuno dei quali è composto da ingegneri di Avio Aero, da ricercatori provenienti dalle istituzioni citate in precedenza e dal personale delle imprese del territorio. Essi si occupano dello sviluppo di differenti tecnologie strategiche per la realizzazione di propulsori di nuova generazione. Ciascun laboratorio si focalizza su un aspetto specifico del motore aeronautico, come descritto di seguito.

- Lift Lab: dedicato allo sviluppo di materiali innovativi per strutture a bassa densità ed alta resistenza, alla loro produzione e certificazione per l'impiego nei motori di nuova generazione. Esso si concentra sullo sviluppo di acciai ad alta resistenza per ingranaggi e sulla realizzazione di componenti di turbina e combustore in leghe di titanio-alluminio e cromo cobalto mediante additive manufacturing. Inoltre le attività del Lift comprendono lo studio dei fenomeni dinamici della turbina, per garantire controllo e massima affidabilità.
- Aereonflux Lab: destinato al progetto aerodinamico avanzato di turbina, all'ottimizzazione dei flussi di raffreddamento e alla riduzione delle emissioni acustiche, si focalizza sui fenomeni di aerodinamica instazionaria e sulla gestione ed efficienza dei fenomeni termici.
- Ageades Lab: ha come oggetto di studio sistemi di trasmissione avanzati per architetture motore innovative, quali Geared Turbofan e Geared Open Rotor. In questo laboratorio si progettano sistemi di riduzione epicicloidale, ponendo attenzione agli effetti dinamici; sono inoltre studiati strumenti per la previsione del comportamento di cuscinetti e collegamenti scanalati al fine di massimizzarne prestazioni ed affidabilità.
- Zec Lab: si occupa dello sviluppo e della realizzazione di sistemi di combustione innovativi, a basse emissioni e funzionanti con combustibili alternativi ecocompatibili. Sono analizzati in particolare le prestazioni e l'impatto ambientale di questi ultimi, oltre allo sviluppo di configurazioni di iniettori Low-NOX e di processi di fabbricazione avanzati per nuovi combustori.
- MC Lab: il laboratorio ha come obiettivo lo sviluppo di sistemi intelligenti di diagnostica per la trasmissione meccanica e di generatori elettrici integrati per velivoli *more electric*. La ricerca mira alla creazione di algoritmi e di elettronica avanzata in grado di monitorare lo stato di salute del motore e di anticiparne eventuali guasti.
- ECOPRO Lab: si focalizza sullo studio di sistemi produttivi innovativi flessibili e intelligenti, con limitata supervisione umana, sullo sviluppo di utensili e sistemi per processi produttivi a basso impatto ambientale e sull'integrazione di metodologie per l'ispezione delle leghe Ti-Al.

1.1.2 Emissioni

Le emissioni dei gas serra dovute all'industrializzazione e alla crescita dei trasporti hanno importanti conseguenze sull'ambiente: le principali sono l'aumento della

temperatura terrestre e la riduzione dello strato di ozono. Il livello di anidride carbonica è raddoppiato nell'ultimo secolo rispetto al precedente. L'80% delle emissioni di CO₂ deriva dalla combustione di petrolio, metano e carbone.

Il trasporto aereo incide in minima parte sull'inquinamento globale, come testimoniato dall'Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), secondo il quale esso contribuisce solamente al 2% delle emissioni di CO₂ prodotte dall'uomo; anche considerando la produzione di ossidi di azoto e di vapore acqueo la percentuale si attesta al di sotto del 5%. Tuttavia le previsioni di crescita del traffico aereo per gli anni a venire (si stima che la flotta aerea mondiale raggiunga i 40 mila velivoli nei prossimi vent'anni) obbliga il settore a prendere delle precauzioni per limitare l'impatto ambientale che si avrà in futuro.

Come detto in precedenza, l'Unione Europea e gli esperti ACARE^[7] hanno definito gli obiettivi da raggiungere entro il 2020 (Vision^[8] e SRIA 2020) e il 2050 (Flightpath 2050) per ridurre l'impatto ambientale dei velivoli. In particolare sono richiesti i seguenti miglioramenti rispetto alle tecnologie degli anni 2000:

- riduzione del 50% delle emissioni di anidride carbonica;
- riduzione dell'80% delle emissioni di ossidi di azoto;
- riduzione di 10 decibel del rumore percepito.

Emissioni del motore aeronautico

Le principali emissioni dei motori aeronautici sono il biossido di carbonio e l'ossido di azoto derivanti dalla combustione. La CO₂ generata dipende dalla quantità di combustibile bruciato, mentre la produzione di NO_x è legata alle condizioni termiche in camera di combustione. Le emissioni crescono all'aumentare della temperatura e sono quindi massime durante la fase di decollo. Un ulteriore problema a cui far fronte è costituito dall'inquinamento acustico prodotto da un sempre maggior numero di velivoli presenti in prossimità degli aeroporti.

Per ridurre le emissioni di anidride carbonica possono essere adottate due soluzioni:

- incrementare l'efficienza complessiva del motore;
- ridurre il peso dei sotto-sistemi.

Le emissioni di NO_x prodotte durante la combustione sono il risultato della combinazione di azoto e ossigeno ad alte temperature. Una delle tecnologie più interessanti per l'incremento dell'efficienza di combustione è nota come "Lean-Burn":

essa si basa su un alto rapporto tra aria e combustibile, che permette di limitare la temperatura di picco e il tempo di permanenza in condizioni termiche critiche. Tuttavia la stabilità della fiamma e la riaccensione in quota rappresentano i maggiori ostacoli allo sviluppo di questa tecnologia.

1.2 Architetture motore

L'attività di ricerca nell'ambito del progetto GREAT 2020 si inserisce nel processo di sviluppo delle tecnologie aerospaziali. L'evoluzione dei motori aeronautici è stata dettata in un primo momento dalla ricerca delle prestazioni, mentre tutt'ora sono l'efficienza, la riduzione dei consumi e delle emissioni i principali aspetti che ne guidano lo sviluppo, in particolare per quanto riguarda l'aviazione civile.

La propulsione è basata sulla terza legge di Newton, meglio nota come principio di azione e reazione: nel caso di propulsori esotermici, il moto nella direzione voluta è ottenuto accelerando una grande portata d'aria in verso opposto.

Fino al termine della Seconda Guerra Mondiale la propulsione era affidata unicamente a motori alternativi accoppiati ad eliche e compressori. Per evitare la separazione del flusso e la nascita di onde d'urto sulle pale dell'elica, la velocità di volo era limitata intorno a Mach 0,6. La ricerca delle prestazioni portò quindi alla comparsa dei motori a getto. Fondamentali per la nascita di questa tecnologia furono gli studi del cadetto della RAF Frank Whittle e del fisico tedesco Hans von Ohain^[9], che svilupparono i loro progetti parallelamente negli anni '30.

Di seguito verranno descritte brevemente le principali architetture motore^[10] esistenti. Particolare attenzione sarà dedicata al turbofan, motore che equipaggia la maggior parte dei velivoli.

1.2.1 Turbojet

I principali componenti dell'architettura a turbogetto semplice sono: presa d'aria, compressore, combustore, turbina ed ugello. Si tratta della configurazione più diffusa ed utilizzata in campo aeronautico a partire dalla seconda metà degli anni '40, grazie alle prestazioni raggiungibili mediante il suo impiego. La portata d'aria richiesta, convogliata nella presa, è opportunamente rallentata e indirizzata verso il compressore, il quale, azionato dalla turbina, compie lavoro sul fluido, incrementandone pressione e temperatura. La presa deve garantire basse perdite pneumatiche ed evitare eccessive distorsioni del flusso. Successivamente alla compressione adiabatica avviene la combustione: questa fase ha come obiettivo l'ulteriore aumento di energia del fluido mediante l'apporto di calore. Segue quindi l'espansione, durante

la quale l'energia dei gas combusti è trasformata in energia meccanica e ceduta alla turbina, che fornisce potenza al compressore. La diminuzione di pressione è accompagnata ad un aumento di energia cinetica, che prosegue nell'ugello così da generare un'elevata differenza di quantità di moto e quindi spinta.

1.2.2 Turboshaft

Il turboshaft, o turboalbero, è una turbina a gas che produce potenza sfruttando il ciclo Brayton. Questo propulsore trova applicazione sugli elicotteri. La configurazione è del tutto simile a quello del turbogetto, fatta eccezione per l'ugello, sostituito dall'utilizzatore di potenza, vale a dire l'elica (collegata all'albero tramite un riduttore). Esistono inoltre due differenti schemi: il turboshaft monoalbero e il turboshaft bialbero a turbina libera di potenza. Nel primo caso l'utilizzatore è collegato direttamente alla turbina, nel secondo invece il gruppo compressore-combustore-turbina di alta pressione agisce da *gas generator* per la turbina libera di bassa pressione. Questo tipo di impianto garantisce una notevole flessibilità di impiego, poiché la turbina libera è meccanicamente indipendente.

1.2.3 Turboprop

Il turboprop (turboelica) è un'evoluzione del turboshaft: lo schema più diffuso è nuovamente il bialbero con turbina libera di potenza. A differenza del precedente è presente anche un ugello per la generazione di spinta. Tra l'albero della turbina che fornisce potenza e l'elica è presente un riduttore. I vantaggi di questa architettura consistono nei consumi, più bassi rispetto ad ogni altra configurazione, turbofan compreso. Il ridotto consumo specifico è frutto dell'elevata portata d'aria elaborata dall'elica: ciò permette, a parità di spinta, di dover accelerare in quantità minore il flusso. Tuttavia l'elica presenta dei problemi di funzionamento per Mach superiori a 0,5. Un ulteriore sviluppo di questa tecnologia, noto come Propfan, prevede di agire sul profilo delle eliche per raggiungere Mach dell'ordine di 0,7.

1.2.4 Turbofan

Il turbofan è l'architettura motore attualmente più diffusa. Rispetto al turbogetto essa vede l'introduzione di una seconda turbina che produce potenza sfruttando l'energia posseduta dal fluido prima dell'espansione nell'ugello. Tale potenza è quindi utilizzata per azionare un compressore di bassa pressione che comprime un fluido freddo. Con questo schema è possibile diminuire notevolmente il consumo specifico q_s , il quale dipende sia dalla velocità di uscita del flusso w_e che dal rendimento

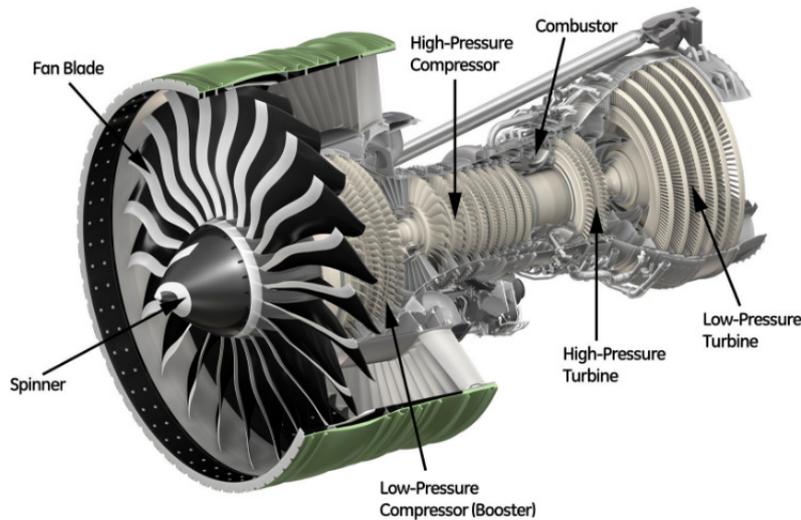
(a) GE J85-17a Turbojet^[11].(b) GE T700 Turboshaft^[12].(c) GE CT7-9 Turboprop^[13]

Figura 1.1: Esempi di motori aeronautici con differenti architetture.

termodinamico η_θ . All'aumentare della prima il consumo specifico cresce, mentre al crescere del rendimento avviene l'opposto. In un turbogetto la diminuzione della velocità w_e comporterebbe un decremento della temperatura massima in ingresso turbina e di conseguenza un minor rendimento termodinamico. Il turbofan consente di svincolare η_θ dalla velocità di uscita del flusso, poiché si introducono nuovi gradi di libertà oltre alla *turbine inlet temperature* (TIT) e all'*overall pressure ratio* (OPR). Esistono due tipologie di turbofan:

- a flussi separati, caratterizzati da un alto rapporto tra la portata di flusso freddo che viene accelerata dal fan nel condotto di by-pass ed espulsa e la portata di flusso caldo e veloce elaborata dal core del motore. Tale rapporto prende il nome di BPR (by-pass ratio). Questo schema è impiegato per i motori che equipaggiano velivoli subsonici per via del ridotto consumo.
- a flussi miscelati (by-pass turbofan), si distinguono per un basso BPR e sono utilizzati per il volo supersonico, grazie alla ridotta sezione frontale a parità di spinta.

I moderni turbofan hanno configurazioni multialbero, al fine di garantire buone prestazioni durante tutte le fasi di missione. Di seguito è mostrato e descritto lo

Figura 1.2: GE90 Turbofan^[14].

schema di un turbofan bialbero. Il propulsore è composto, procedendo lungo il suo asse, dai seguenti componenti:

- presa d'aria o inlet, posta a monte del compressore di bassa pressione, è generalmente costituita da un condotto divergente per la decelerazione del flusso, indispensabile in particolare per i velivoli supersonici;
- fan, accelera il fluido e contribuisce alla spinta fornita dal motore;
- compressore di bassa pressione (LPC), costituito da una schiera di pale rotanti seguita dallo statore. Esso è calettato sull'albero di bassa pressione, azionato dalla corrispondente turbina (LPT, low pressure turbine). La palettatura statorica, fissata sul casing, indirizza il flusso assialmente e permette, grazie al design del condotto interpalare, di comprimere ulteriormente il fluido;
- compressore di alta pressione (HPC), composto da più stadi calettati sull'albero di alta pressione, consente una forte compressione del flusso caldo, con conseguente incremento della temperatura fino a circa 900 K. Fissata la portata, all'aumentare della pressione e della densità del fluido l'area della corona circolare tra il casing e l'albero motore diminuisce gradualmente, al fine di mantenere la velocità assiale costante all'interno del compressore;
- combustore, realizzato con materiali in grado di resistere ad elevate temperature (fino a 1900 K), quali superleghe di nichel-cobalto, realizza la combustione di una notevole quantità di aria e combustibile. Il rapporto tra aria e

combustibile dipende dalle temperature che si vogliono raggiungere. Si ottiene quindi un flusso fortemente energizzato prima dell'ingresso in turbina;

- turbina di alta pressione (HPT), ha la funzione di convertire l'energia del fluido in energia meccanica, azionando il compressore e gli organi accessori. Al contrario del compressore, la presenza di un gradiente di pressione favorevole permette contenere il numero di stadi senza che insorgano particolari problemi di separazione del flusso;
- turbina di bassa pressione (LPT), pone in rotazione il compressore di bassa pressione e il fan;
- ugello, espelle i gas di scarico con velocità e direzione tali da ottimizzare la spinta. Il design di questo componente determina la temperatura e la portata del flusso entrante in turbina, la velocità e la pressione del getto in uscita.

All'aumentare del rapporto di by-pass, fissato il rapporto di compressione e la temperatura massima di ingresso turbina, si ha una riduzione sia del consumo specifico che della spinta specifica, accompagnata però ad una crescita delle dimensioni e del peso del motore. Occorre pertanto trovare il compromesso tra questi due aspetti in modo tale da massimizzare l'efficienza. Il trend evolutivo dei turbofan si muove nella direzione di motori con by-pass ratio sempre più elevati. I propulsori di ultima generazione hanno BPR nell'ordine di 10 e sono in fase di sviluppo configurazioni con portate fredde fino a venti volte superiori a quelle elaborate dal core del motore. Tale incremento è limitato dall'aumento della resistenza aerodinamica causato dalle crescenti dimensioni del motore installato sul velivolo, dall'incremento del peso degli organi di bassa pressione e dalla ridotta efficienza della turbina di bassa pressione vincolata a un numero di giri non ottimale nel caso di fan con diametri elevati.

1.2.5 Nuove architetture motore

Il contenimento dei consumi e la riduzione delle emissioni nel rispetto degli obiettivi ACARE ha condotto i ricercatori allo studio di nuove architetture motore ad alto by-pass ratio. Tra le più promettenti si annoverano:

- l'Advanced Turbofan Engine, che vede l'introduzione di materiali a bassa densità per i componenti di bassa pressione (si pensi ad esempio alle palette LPT realizzate in TiAl mediante additive manufacturing) e la ricerca della massima efficienza termica, al fine di aumentare ulteriormente il BPR;

- l'Open Rotor o Propfan, dotato di eliche esterne contro-rotanti per la massima efficienza propulsiva. L'impiego di questa soluzione presenta però considerevoli difficoltà per quanto riguarda la limitazione delle emissioni acustiche;
- il Geared Turbofan, provvisto di un sistema di riduzione integrato per svincolare le velocità della turbina di bassa pressione e del fan, così da porre entrambi i componenti nelle condizioni di massima efficienza.

1.3 Turbina

Le turbine possono essere classificate come macchine radiali, assiali e miste. A parità di diametro le turbine assiali sono in grado di elaborare una portata d'aria considerevolmente maggiore rispetto alle turbine radiali. Inoltre permettono di raggiungere agevolmente elevati pressure ratios mediante configurazioni a più stadi. Per questi motivi, i motori aeronautici che equipaggiano la maggior parte dei velivoli commerciali e militari utilizzano turbine e compressori assiali.

Le turbine presentano di norma una maggiore efficienza rispetto ai compressori, sebbene il processo di design non sia più complesso. Ciò accade in quanto il fluido è sottoposto ad una diminuzione di pressione in turbina, mentre nel compressore avviene l'opposto: pressione, temperatura e densità aumentano. La caduta di pressione in turbina è sufficiente per mantenere lo strato limite del fluido aderente al profilo delle palette. Di conseguenza il problema della separazione del flusso, rilevante nei compressori, può essere evitato in modo relativamente facile. Il gradiente di pressione favorevole si traduce in maggior lavoro e pressure ratio per stadio rispetto ai compressori.

Tuttavia gli svantaggi rispetto ai compressori sono costituiti dalle sollecitazioni: le turbine sono infatti esposte a temperature molto elevate, pertanto la geometria delle palette dipende maggiormente dalle considerazioni riguardanti il raffreddamento e gli stress, piuttosto che dall'aerodinamica. La ricerca delle prestazioni ha portato al giorno d'oggi a notevoli risultati nell'ambito del raffreddamento e della metallurgia dei materiali con cui le palette sono costruite.

1.3.1 Stadio di turbina assiale

La turbina ha la funzione di convertire l'energia potenziale del fluido in energia meccanica necessaria ad azionare il compressore e ad alimentare gli organi accessori. Ogni stadio è costituito da una schiera di palette stazionarie (statore) seguita dal rotore. A causa della importante caduta di pressione per stadio, l'altezza delle

palette di statore e rotore cresce procedendo verso l'ugello del motore, così da mantenere la velocità assiale del flusso costante durante l'espansione dei gas. I condotti

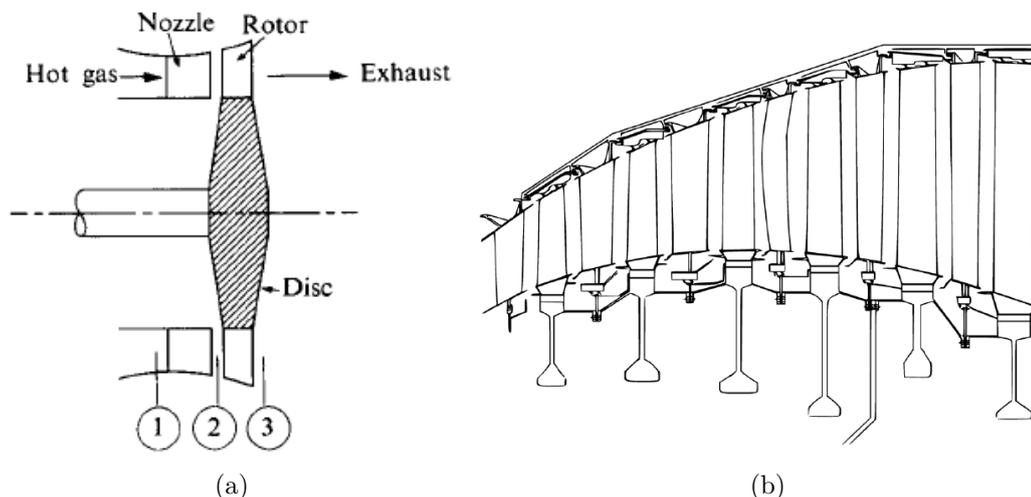


Figura 1.3: Schema di uno stadio di turbina assiale^[15, p. 370] (a) e cross-section dell'intera macchina^[16] (b).

convergenti dello statore accelerano il flusso, impartendo un aumento alla componente tangenziale di velocità. I diagrammi di velocità della turbina differiscono rispetto a quelli del compressore in quanto la variazione della componente tangenziale nel rotore ha direzione opposta rispetto alla velocità periferica delle pale. La conseguenza della variazione di momento tangenziale del fluido è una coppia sul rotore nella direzione del moto, quindi il flusso compie lavoro sul rotore. Applicando l'equazione di conservazione del momento angolare, è possibile ricavare la seguente espressione per la potenza fornita:

$$P = \dot{m} (U_2 c_{\theta 2} - U_3 c_{\theta 3}) \quad (1.1)$$

dove per convenzione con i pedici 1, 2 e 3 indicano rispettivamente le sezioni di ingresso statore, ingresso rotore e uscita rotore; U rappresenta la velocità periferica delle pale, c_{θ} la velocità tangenziale del fluido. In una turbina assiale $U_2 \simeq U_3 = U$. Il lavoro per unità di massa risulta allora

$$W_T = U(c_{\theta 2} - c_{\theta 3}) = c_p(T_{01} - T_{03}) \quad (1.2)$$

con c_p calore specifico a pressione costante per unità di massa del fluido e

$$\Delta T_0 = T_{01} - T_{03} = T_{02} - T_{03}$$

salto di temperatura per stadio. Si ricava quindi il *work ratio* per stadio:

$$\frac{\Delta T_0}{T_{01}} = \frac{U(c_{\theta 2} - c_{\theta 3})}{c_p T_{01}} \quad (1.3)$$

Si osserva da quest'ultima equazione come il lavoro sia limitato dai seguenti fattori:

- *pressure ratio* (e di conseguenza $\Delta T_0/T_{01}$);
- velocità periferica U delle pale e Δc_θ del fluido.

La massima velocità delle pale dipende dagli stress inerziali che esse sono in grado di sopportare alla temperatura operativa, mentre il limite alla variazione della componente tangenziale è imposto dall'efficienza che si intende raggiungere. Al fine di minimizzare le perdite occorre che all'interno della schiera il fluido subisca una grande accelerazione (che si traduce in una notevole caduta di pressione). La velocità di rotazione è dettata da aspetti strutturali, termici e aerodinamici. Massimizzare U significa incrementare il lavoro estratto dal fluido. A questo, per avere un'alta efficienza e un basso peso, si associa la riduzione del numero di stadi. Poiché le turbine di alta e bassa pressione sono calettate sui medesimi alberi dei corrispettivi compressori, la minore delle due velocità di rotazione rappresenta il fattore limitante per il design. In generale, per lo spool di bassa pressione il limite strutturale è dato dal fan, mentre per lo spool di alta pressione è la turbina ad imporre restrizioni.

Nonostante la pressione diminuisca nel passaggio attraverso il canale interpale, localmente, sulla *suction surface* del profilo, possono presentarsi zone con gradiente avverso, dipendenti dalla curvatura e dalla spaziatura delle pale. Ciò comporta l'accrescimento dello strato limite o perfino la separazione, a svantaggio dell'efficienza della turbina.

In ambito ingegneristico il *work ratio* della turbina è più sovente calcolato come segue:

$$\frac{W_T}{U^2} = \frac{c_{\theta 2} - c_{\theta 3}}{U} \quad (1.4)$$

A differenza del compressore, le prestazioni della turbina non sono così sensibili alle condizioni dello strato limite sui profili delle pale, pertanto i progettisti hanno maggiore libertà nella ripartizione del salto di pressione totale dello stadio tra statore e rotore. Si dicono:

- ad *azione* (o *impulso*) le turbine in cui l'intera variazione di pressione avviene all'interno dello statore;
- a *reazione* le turbine in cui il Δp è suddiviso tra statore e rotore.

Si introduce quindi il *grado di reazione* R , parametro adimensionale definito come il rapporto fra il salto di entalpia del rotore e quello totale di un intero stadio della turbomacchina:

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_{01} - h_{03}} \quad (1.5)$$

Poiché in una turbina ad azione l'entalpia attraverso il rotore è costante, si ha $R = 0$. Qualora invece nello statore non vi sia alcuna variazione di pressione statica, ma solo una variazione della direzione del flusso, si parla di macchine a *reazione pura* ($R = 1$). Le turbine ad azione sono utilizzate in motori ad elevato rapporto spinta/peso, perché permettono di ridurre il numero di stadi, tuttavia il loro rendimento è inferiore rispetto alle macchine a reazione, motivo per cui i motori che equipaggiano i velivoli da trasporto sono dotati di turbine con $R = 0.3 \div 0.5$.

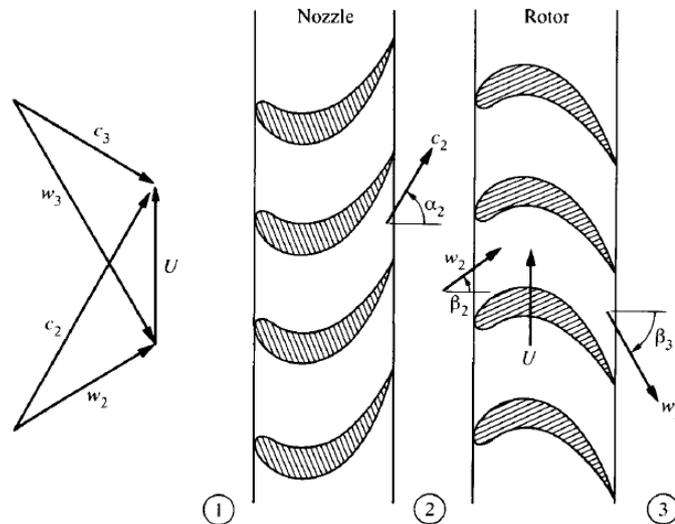


Figura 1.4: Rappresentazione schematica di uno stadio di turbina a reazione a velocità assiale costante e relativi triangoli di velocità^[15, p. 374].

La progettazione di una turbina è un processo iterativo che mira al miglior compromesso tra i vincoli aerodinamici e strutturali, fortemente influenzato dai risultati dell'analisi del ciclo termodinamico e dal design del compressore. Generalmente è quest'ultimo a determinare la velocità di rotazione Ω dell'albero ed il massimo diametro della turbina. Teoricamente sarebbe possibile svincolare turbina e compressore mediante una trasmissione meccanica, tuttavia questa opzione comporterebbe un notevole aggravio di peso e difficoltà progettuali, per cui non è attualmente impiegata.

Lo studio del ciclo termodinamico determina in prima approssimazione la portata d'aria, la pressione totale e la temperatura in ingresso. Inoltre, la turbina è

progettata cosicché il diametro massimo non ecceda quello del compressore. Gli aspetti principali da definire durante la fase preliminare di design sono la sezione massima, il rapporto tra lo span all'hub e al tip, gli angoli di progetto dei triangoli di velocità al variare del raggio e la velocità periferica delle pale. L'obiettivo è massimizzare il rapporto di espansione mantenendo allo stesso tempo un'alta efficienza. Inoltre si cerca di avere il massimo stress alla radice della pala, compatibilmente con la resistenza dei materiali disponibili e delle possibilità di raffreddamento.

Dal punto di vista aerodinamico occorre innanzitutto definire il *flowpath*, ossia il percorso che il fluido segue attraverso il canale interpalare durante l'espansione alla condizione operativa di design. Una volta stabilito il flowpath si procede con il design delle pale nelle condizioni di lavoro (*hot condition*). Si determinano in un primo momento i profili aerodinamici bidimensionali che garantiscono l'ottimizzazione dei triangoli di velocità ad ogni raggio. Dalla loro interpolazione in direzione radiale si ottiene la geometria tridimensionale dell'*airfoil*. Con opportuni criteri di svergolamento si garantisce la conservazione del lavoro al variare del raggio.

Un aspetto di notevole importanza nel design di una turbina è costituito dal cosiddetto *hot to cold scaling*^[17]: poiché il flowpath è definito in condizioni di lavoro, ma i componenti sono assemblati a freddo, è necessario posizionare correttamente i profili della palettatura al fine di garantire il corretto funzionamento a regime. A questo scopo si adottano le tecniche di *scaling, twisting e positioning*.

1.3.2 Palettatura LPT

Come detto, ogni stadio di turbina è composto, nell'ordine, da statore e rotore. Il primo è costituito da una schiera di palette fisse, anche dette *vanes*, la cui funzione è accelerare il flusso, riducendone la pressione. Ogni pala può essere considerata come una trave incastrata alle estremità. Al tip e all'hub del profilo sono collegati i giunti, chiamati rispettivamente *outer band vane* (OBV) e *inner band vane* (IBV). La pressione dei gas produce una flessione dei vanes, che inoltre devono essere in grado di resistere ai carichi termici.

Le pale della schiera rotorica trasferiscono la potenza dal fluido all'albero e sono costituite dai seguenti elementi:

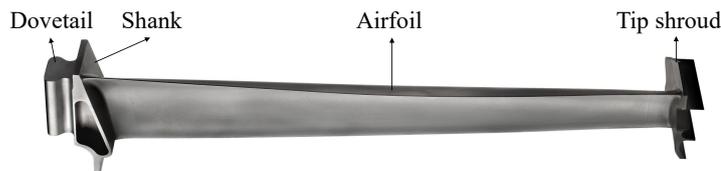
- airfoil, la cui forma è definita dai requisiti aerodinamici e ottenuta interpolando lungo l'asse radiale i profili aerodinamici bidimensionali;
- tip shroud, costituisce il tettuccio della pala ed è situato all'estremità superiore. Il contatto tra pale adiacenti avviene all'interlock, la superficie di interfaccia dello shroud. Lo strisciamento che si ha in questa zona smorza

le oscillazioni a cui le pale sono sottoposte. La forma dello shroud è tale da garantire un contatto ottimale, cosicché si abbia un'elevata efficienza di smorzamento;

- shank, ovvero la piattaforma posta all'hub che sostiene la paletta;
- dovetail/firtree, rappresenta l'elemento di collegamento tra la pala e lo slot del disco.



(a) Pale statoriche



(b) Pala rotorica

Figura 1.5: Esempio di pale statoriche e rotoriche^[18].

1.3.3 Sollecitazioni

Le principali sollecitazioni a cui sono sottoposte le palette di un rotore di turbina sono costituite da:

- carichi inerziali, dovuti all'elevata velocità di rotazione. Essa comporta un irrigidimento delle palette, noto come *stress-stiffening*, che contribuisce all'aumento delle frequenze naturali. Per tener conto di questo effetto, si esegue un'analisi modale prestressata, ovvero preceduta da un'analisi statica con la quale è possibile includere gli effetti del carico centrifugo. La forza centrifuga agente sulle pale è data dalla seguente formula:

$$F_c = \int_r^R dF_c = \rho\omega^2 \int_r^R r dV = \rho\omega^2 \int_r^R r A(r) dr \quad (1.6)$$

con r coordinata radiale, R raggio massimo, ρ densità dei gas, ω velocità angolare e $A(r)$ sezione della pala al raggio r ;

- carichi termici, generati dall'elevata temperatura dei gas che espandono in turbina. Questa causa l'espansione dei componenti coinvolti, in particolare nei i primi stadi della turbina di alta pressione, con la conseguente nascita di tensioni che possono provocare danneggiamenti. Si rende dunque necessario l'utilizzo di materiali in grado di resistere ad elevate temperature, di rivestimenti ceramici noti come *thermal barrier coating* e di opportune tecniche di raffreddamento;
- carichi aerodinamici, generati dall'interazione tra le pale e la componente stazionaria del fluido. Le forze aerodinamiche sono responsabili di un momento flettente agente sui profili a causa dei gas agenti sul *pressure side*. Per ovviare a questo problema le pale sono inclinate di qualche grado rispetto al loro centro di gravità: in questo modo la forza centrifuga genera un momento flettente opposto che compensa il momento aerodinamico (figura 1.6).

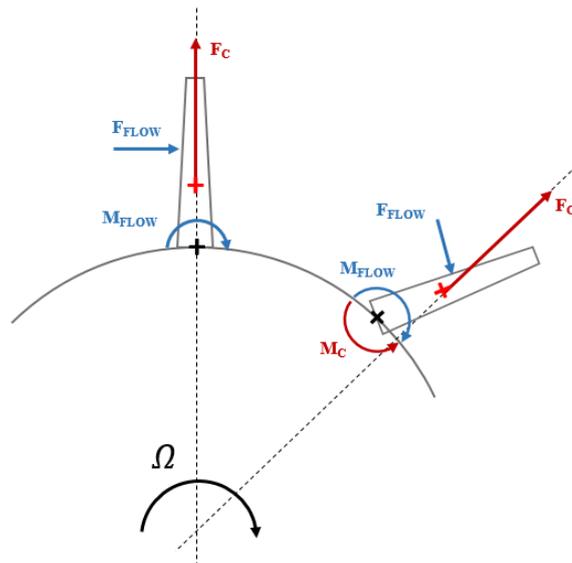


Figura 1.6: Compensazione del momento aerodinamico M_{flow} agente alla radice della pala mediante il momento M_c generato dalla forza centrifuga^[17].

Capitolo 2

Dinamica dei rotori

I rotori presenti in un motore aeronautico sono comunemente definiti *bladed disks* o *blisks*, in quanto costituiti, nella configurazione più semplice, da un disco al quale sono collegate le palette. I dischi palettati sono caratterizzati dalla proprietà di simmetria ciclica^[17]: la struttura si compone di un settore fondamentale, ripetuto periodicamente lungo la circonferenza del rotore per un numero finito di volte.

Il disco ha una funzione puramente strutturale, deve supportare le palette e trasferire la coppia tra queste e l'albero motore. Partecipa inoltre al moto vibratorio dell'assieme, presentando modi di vibrare che differiscono per diametro e circonferenza nodale. Tali modi possono essere stazionari o viaggiare lungo la circonferenza in verso concorde o discorde rispetto alla rotazione del rotore. Le palette rappresentano i componenti aerodinamici; lo studio delle loro caratteristiche dinamiche (frequenze naturali e forme modali) è cruciale per il calcolo della risonanza e del flutter. Tali aspetti sono influenzati dalla velocità di rotazione, dalla temperatura, dallo smorzamento, dal mistuning e dall'accoppiamento tra le pale dovuto alla presenza di shrouds e/o altre strutture di supporto.

2.1 Simmetria ciclica

Per il calcolo delle frequenze naturali e delle forme modali si esegue la discretizzazione del bladed disk mediante FE (Finite Elements). Si ottiene quindi un sistema costituito da più gradi di libertà, la cui equazione del moto è:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2.1)$$

$\{x\}$ indica il vettore dei gradi di libertà (gdl) e descrive gli spostamenti modali del sistema, dipendenti dal tempo; $[M]$ e $[K]$ rappresentano rispettivamente la matrice



Figura 2.1: Esempio di strutture in simmetria ciclica ^[19].

di massa e rigidezza del sistema, infine $\{F\}$ costituisce il vettore delle forzanti esterne, anch'esse variabili in funzione del tempo. Il numero di nodi n_n derivante dalla discretizzazione della struttura determina le dimensioni dei vettori e delle matrici che compaiono nell'equazione del moto: $[M]$ e $[K]$ sono matrici quadrate $3n_n \times 3n_n$, $\{x\}$ e $\{F\}$ vettori colonna $3n_n \times 1$.

Come detto in precedenza, le strutture in simmetria ciclica possono essere suddivise in un numero finito N di settori, ad ognuno dei quali corrispondono n_s gradi di libertà. Definito quindi un sistema di riferimento cilindrico di assi ρ , θ e z (coincidente con l'asse motore), l'equazione del moto può essere riscritta e ordinata in modo tale che gli n_s gradi di libertà di un settore siano seguiti dai gdl del settore successivo. Adottando la stessa convenzione anche per il vettore delle forze esterne, si ottiene:

$$\{x\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \quad \{F\} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$\{x\}$ ed $\{F\}$ risultano pertanto costituiti da N subvettori, ognuno dei quali contiene i gdl del settore a cui si riferisce. Se i gdl omologhi occupano la stessa posizione all'interno di ogni subvettore $\{x_i\}$, con $i = 1, \dots, N$ le matrici di massa e rigidezza

presentano una struttura simmetrica a blocchi:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \dots & M_2 & M_1 \\ M_1 & M_0 & M_1 & \dots & M_3 & M_2 \\ M_2 & M_1 & M_0 & \dots & M_4 & M_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_2 & M_3 & M_4 & \dots & M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_1 & M_0 \end{bmatrix} \quad (2.3a)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & \dots & K_2 & K_1 \\ K_1 & K_0 & K_1 & \dots & K_3 & K_2 \\ K_2 & K_1 & K_0 & \dots & K_4 & K_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_2 & K_3 & K_4 & \dots & K_0 & K_1 \\ K_1 & K_2 & K_3 & \dots & K_1 & K_0 \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$

I blocchi $[M_h]$ e $[K_h]$ (con $h = 0, \dots, N/2$ per N pari e $h = 0, \dots, (N-1)/2$ se N è dispari), sono a loro volta matrici simmetriche di dimensione $n_s \times n_s$.

Trattandosi di una struttura in simmetria ciclica, ogni settore del bladed disk è vincolato a quello adiacente: in termini matematici, ciò si traduce in elementi non nulli fuori dalla diagonale principale.

Per calcolare le frequenze naturali e le forme modali del rotore occorre risolvere il seguente problema agli autovalori:

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{u_i\} = 0 \quad (2.4)$$

con $i = 1, \dots, Nn_s$. I termini ω_i^2 e $\{u_i\}$ rappresentano rispettivamente l' i -esimo autovalore e autovettore. Quest'ultimo può essere riscritto adottando la partizione dei gradi di libertà esposta in precedenza:

$$\{u_i\} = [\{u_{1i}\}^T \quad \{u_{2i}\}^T \quad \dots \quad \{u_{Ni}\}^T]^T \quad (2.5)$$

Il subvettore $\{u_{ni}\}$, con $n = 1, \dots, N$ contiene gli n_s spostamenti modali dell' n -esimo settore al presentarsi della forma modale i -esima.

I modi di vibrare di una struttura in simmetria ciclica sono per la maggior parte ortogonali a coppie, dipendono dal moto relativo tra i settori e si suddividono in tre classi, di seguito elencate.

- *Modi stazionari*: i settori vibrano tutti con la stessa fase, di conseguenza punti analoghi giacenti su settori differenti subiscono un identico spostamento

al medesimo istante di tempo. Dal punto di vista matematico, ciò implica che

$$\{u_{ni}\} = \{u_{(n+1)i}\} \quad \forall n \quad (2.6)$$

Poiché $\{u_i\} = [\{u_{1i}\}^T \quad \{u_{2i}\}^T \quad \dots \quad \{u_{1i}\}^T]^T$ rappresenta la forma modale dell'intera struttura, la rotazione della forma modale di un numero arbitrario di settori non produce alcuna variazione del modo. I modi stazionari sono descritti da un solo autovalore e da un unico autovettore.

- *Modi stazionari in antifase*: ogni settore presenta la stessa forma modale dei settori adiacenti, tuttavia vibra in opposizione di fase rispetto ad essi.

$$\{u_{ni}\} = -\{u_{(n+1)i}\} \quad \forall n \quad (2.7)$$

Al massimo spostamento del settore n -esimo corrisponde il minimo dei settori precedente e successivo. La forma modale della struttura è descritta dall'autovettore $\{u_i\} = [\{u_{1i}\}^T \quad -\{u_{1i}\}^T \quad \{u_{1i}\}^T \quad \dots \quad \{u_{1i} \quad -\{u_{1i}\}^T]^T$: il modo rimane inalterato se si ruota la forma modale di un numero pari di settori. La rotazione di un numero dispari di settori comporta invece che i modi siano uguali a $-\{u_i\}$. La forma modale non cambia, tuttavia si verifica un cambiamento di fase nella vibrazione pari a π . Anche i modi stazionari in antifase sono descritti da un singolo autovalore ed autovettore.

- *Modi rotanti*: i settori si muovono con fasi differenti, ogni forma modale di questo tipo è descritta da una coppia di autovettori ortogonali corrispondenti al medesimo autovalore.

$$\{u_{ni}\} \neq \pm\{u_{(n+1)i}\} \quad \forall n \quad (2.8)$$

Essendo il disco palettato costituito da settori identici, ad una rotazione pari all'angolo di settore α_n della forma modale $\{u_i\}$ corrisponde un nuovo modo $\{u'_i\}$ associato allo stesso autovalore. Quindi, definito $\{\bar{u}_i\}$ l'autovettore ortogonale a $\{u_i\}$ corrispondente al medesimo autovalore ω_i^2 , tale che

$$\{u_i\}^T \{\bar{u}_i\} = 0 \quad (2.9)$$

il nuovo modo può essere definito come una combinazione lineare degli autovettori ortogonali:

$$\{u'_i\} = c\{u_i\} + s\{\bar{u}_i\} \quad (2.10)$$

Assumendo che gli autovettori siano normalizzati come segue:

$$\{u_i\}^T \{u_i\} = 1 \quad \{\bar{u}_i\}^T \{\bar{u}_i\} = 1 \quad \{u'_i\}^T \{u'_i\} = 1 \quad (2.11)$$

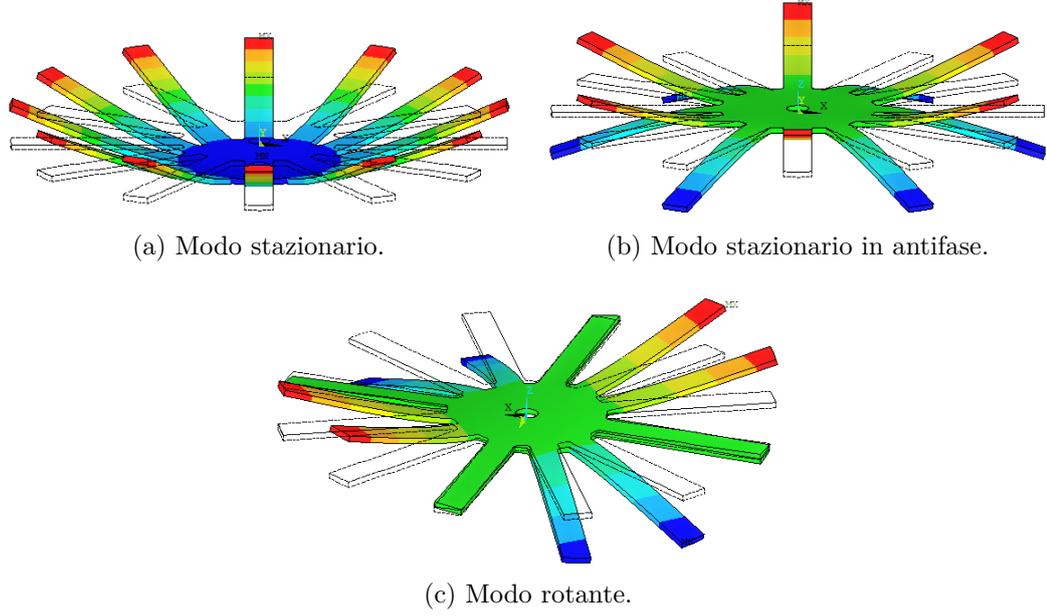


Figura 2.2: Modi di vibrare di un bladed disk semplificato composto da dodici settori^[20].

si dimostra che i coefficienti c ed s possono essere scritti come

$$c = \cos \varphi_h \quad s = -\sin \varphi_h \quad (2.12)$$

φ_h è l'angolo di rotazione rispetto al quale ruotare $\{u_i\}$ così da ottenere $\{u'_i\}$:

$$\varphi_h = \pm \frac{2\pi}{N} h \quad (2.13)$$

con h numero intero che misura la periodicità della forma modale. Analogamente, l'autovettore $\{\bar{u}'_i\}$ ortogonale a $\{u'_i\}$, ottenuto ruotando l'autovettore $\{\bar{u}_i\}$ dell'angolo di settore α_n , è dato dalla combinazione lineare seguente:

$$\{\bar{u}'_i\} = c\{\bar{u}_i\} - s\{u_i\} \quad (2.14)$$

Le equazioni (2.10) e (2.14) possono essere riscritte in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ \bar{u}'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cI_{Nn_s} & sI_{Nn_s} \\ -sI_{Nn_s} & cI_{Nn_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \bar{u}_i \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} u_i \\ \bar{u}_i \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$[I_{Nn_s}]$ è la matrice identità di ordine Nn_s ; $[R]$ è la matrice di rotazione ed esprime la relazione tra i modi di due settori adiacenti:

$$\begin{Bmatrix} u_{(n-1)i} \\ \bar{u}_{(n-1)i} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} u_{ni} \\ \bar{u}_{ni} \end{Bmatrix} \quad \forall n \quad (2.16)$$

Poiché ogni combinazione lineare di modi è soluzione del problema agli autovalori, anche gli autovettori complessi seguenti soddisfano tale condizione:

$$\{z_i\} = \{u_i\} + i\{\bar{u}_i\} \quad \{\bar{z}_i\} = \{u_i\} - i\{\bar{u}_i\} \quad (2.17)$$

L'interpretazione fisica di autovettori reali e complessi di un sistema in simmetria ciclica è legata alla loro evoluzione temporale. Le onde stazionarie e stazionarie in antifase sono rappresentate da autovettori reali. La deformata (ODS, *operative deflection shape*) del modo stazionario $\{u_i\}$ all'istante di tempo t è data dalla parte reale di $u_i e^{i\omega t}$:

$$\Re[\{u_i\}e^{i\omega t}] = \Re[\{u_i\} \cos(\omega t) + i\{u_i\} \sin(\omega t)] = \{u_i\} \cos(\omega t) \quad (2.18)$$

L'equazione mostra che tutti i gradi di libertà pulsano nello stesso modo nel medesimo istante, senza alcun ritardo temporale l'uno rispetto all'altro. Ipotizzando che al tempo $t = 0$ si abbia una deformata non nulla, tale che $\|\{u_i\}\| \neq 0$, al tempo $t = \pi/(2\omega)$, tutti i gdl presenteranno contemporaneamente uno spostamento nullo.

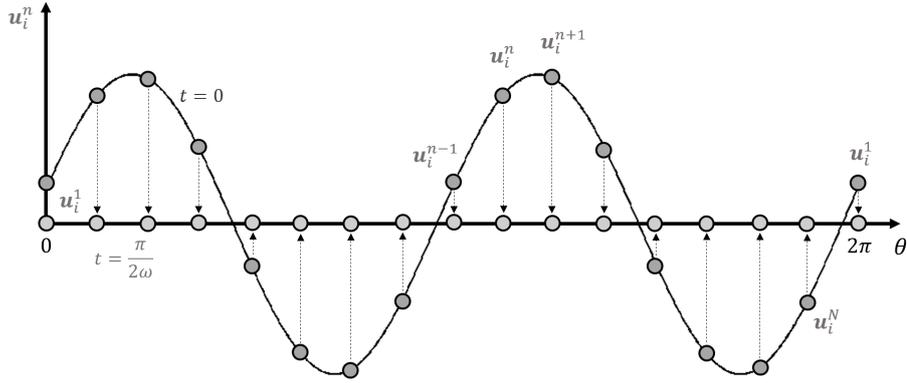


Figura 2.3: Rappresentazione di un'onda stazionaria per una struttura in simmetria ciclica.

Per quanto riguarda gli autovettori complessi, la ODS è definita come la parte reale di $\{z_i\}e^{i\omega t}$:

$$\begin{aligned} \Re[\{z_i\}e^{i\omega t}] &= \Re\left\{(\{u_i\} + i\{\bar{u}_i\}) [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]\right\} = \\ &= \Re\left\{\{u_i\} \cos(\omega t) - \{\bar{u}_i\} \sin(\omega t) + i[\{u_i\} \sin(\omega t) + \{\bar{u}_i\} \cos(\omega t)]\right\} = \\ &= \{u_i\} \cos(\omega t) - \{\bar{u}_i\} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

All'istante $t = 0$ si ottiene nuovamente la deformata $\{u_i\}$, mentre per $t = \varphi_h/\omega$ essa coincide con $\{u'_i\}$:

$$\Re\{\{z_i\}e^{i\omega t}\} = \{u_i\} \cos \varphi_h - \{\bar{u}_i\} \sin \varphi_h = \{u'_i\} \quad (2.20)$$

Pertanto l'autovettore complesso $\{z_i\}$ descrive un'onda rotante: fissato un qualsiasi grado di libertà di un generico settore, il corrispondente gdl del settore successivo presenterà la stessa ampiezza dopo un intervallo di tempo $t = \varphi_h/\omega$. L'autovettore complesso $\{z_i\}$ contiene informazioni su entrambi i modi $\{u_i\}$ e $\{\bar{u}_i\}$. Se $\{z_i\}$ corrisponde ad un autovettore rotante in senso orario, l'autovettore $\{\bar{z}_i\}$ ad esso ortogonale ruota in verso antiorario. La relazione tra le deformate di due settori adiacenti, espressa dall'equazione (2.16), può essere riscritta come:

$$\{z'_i\} = \{z_i\}e^{i\varphi_h} \quad (2.21)$$

Per il generico settore n -esimo risulta allora:

$$\{z_{(n-1)_i}\} = \{z_{n_i}\}e^{i\varphi_h} \quad (2.22)$$

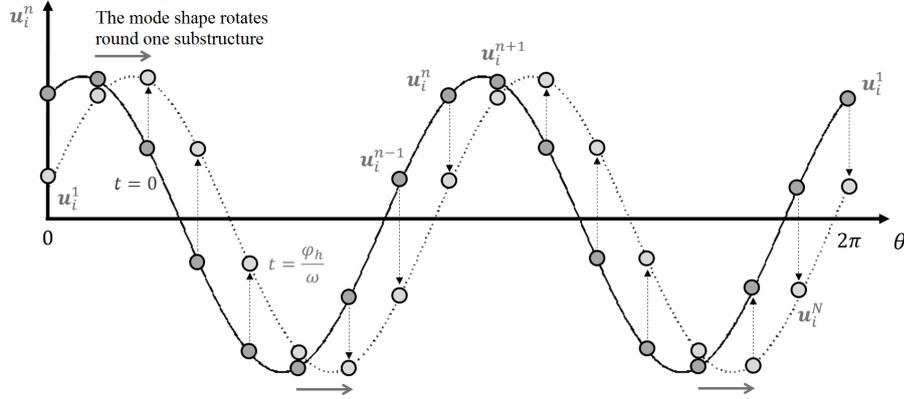


Figura 2.4: Rappresentazione di un'onda rotante per una struttura in simmetria ciclica.

Riferendosi ad un disco palettato, l'angolo φ_h prende il nome di *Inter-Blade Phase Angle* (IBPA): esso indica il ritardo di fase tra due settori vibranti adiacenti. Convenzionalmente, se i settori da 1 a N sono numerati in senso orario, a valori negativi di IBPA corrisponde un'onda che si propaga nella struttura in senso orario, poiché il settore $(n-1)$ esimo vibra con un ritardo di fase pari a φ_h rispetto al settore n -esimo. Al contrario, l'onda percorre il bladed disk in senso antiorario se l'IBPA è positivo.

L'equazione (2.22) è valida anche per i modi stazionari: in assenza di modi ortogonali l'autovettore complesso $\{z_i\}$ coincide con $\{u_i\}$:

$$\{u_{(n-1)_i}\} = \{u_{n_i}\}e^{i\varphi_h} \quad (2.23)$$

2.1.1 Diametri e cerchi nodali

La deformata di una forma modale, indipendentemente dalla classe a cui essa appartiene, è sempre descritta dalla somma di funzioni armoniche del tipo $\sin(h\theta)$ e $\cos(h\theta)$. Si indica con θ la coordinata tangenziale lungo la struttura in simmetria ciclica; h fornisce invece un'informazione circa la periodicità del modo e prende il nome di *diametro nodale* (anche indicato con la sigla *ND*). Esso rappresenta il numero di linee passanti per il centro della struttura lungo le quali gli spostamenti modali sono nulli. La forma modale di un componente in simmetria ciclica può essere ulteriormente descritta dai *cerchi nodali* (*NC*), ossia le circonferenze concentriche su cui gli spostamenti della deformata sono nulli.

Il numero di diametri nodali in un rotore dipende dal numero di settori N in simmetria ciclica da cui esso è costituito, secondo la regola:

$$\begin{cases} 0 \leq h \leq \frac{N}{2} & \text{se } N \text{ è pari} \\ 0 \leq h \leq \frac{N-1}{2} & \text{se } N \text{ è dispari} \end{cases} \quad (2.24)$$

Assegnato il diametro nodale h , l'IBPA si calcola mediante l'equazione (2.13), ne consegue che per le tre classi modali definite in precedenza valgono le considerazioni seguenti:

- per i modi stazionari i settori vibrano in fase, quindi $\varphi_h = 0$ e $e^{i\varphi_h} = 1$ (autovettori reali). Il numero di diametri nodali per questa classe di modi è nullo.
- i modi della seconda classe vibrano in opposizione di fase, per cui $\varphi_h = \pm\pi$ solamente se e solo se N è pari. In questa condizione il numero di diametri nodali corrispondente a φ_h è uguale a $N/2$. Ancora, gli autovettori sono reali, poiché $e^{i\varphi_h} = -1$. La classe dei modi stazionari in antifase non esiste se il numero di settori della struttura in simmetria ciclica è dispari.
- nel caso di modi rotanti vale quanto riportato dalla (2.24).

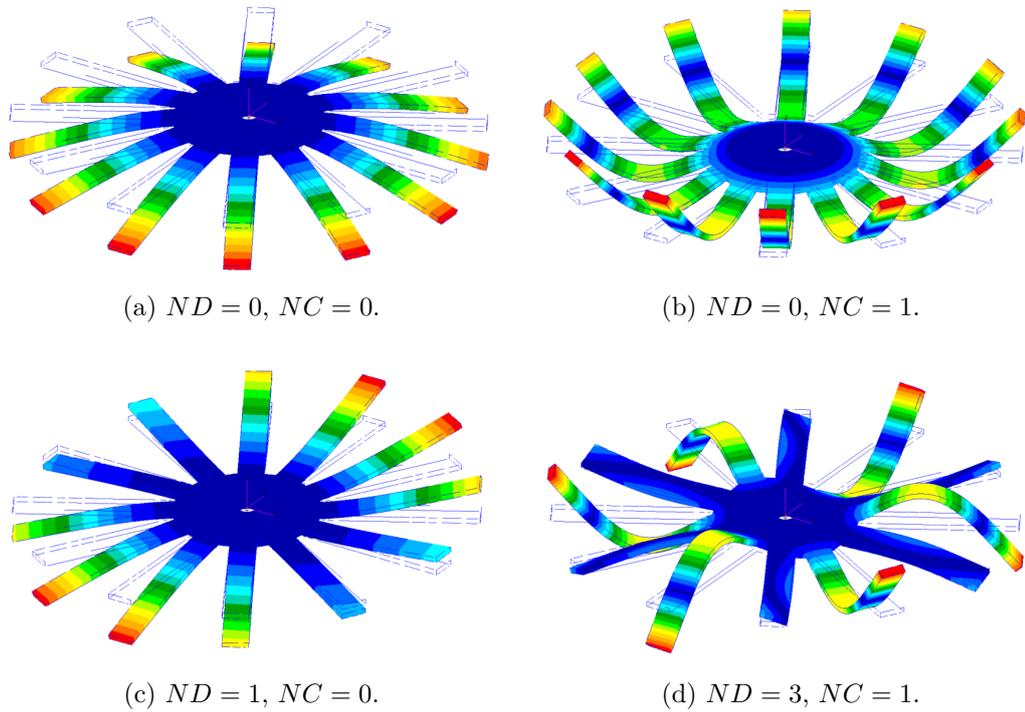


Figura 2.5: Modi di vibrare di un bladed disk semplificato al variare del numero di diametri nodali (ND) e di circonferenze nodali (NC)^[21].

2.2 Analisi modale

L'analisi modale permette di determinare le frequenze naturali e i modi di vibrare della struttura. Date le proprietà di simmetria ciclica di rotor quali i bladed disks, è possibile svolgere l'analisi di un unico settore, imponendo i vincoli di simmetria ciclica descritti nel paragrafo precedente, così che esso rappresenti il comportamento dinamico dell'intera struttura. Questa ed altre tecniche di riduzione (Reduced Order Modeling, ROM), che saranno descritte più avanti in questo capitolo, permettono di diminuire drasticamente il costo computazionale che l'analisi modale di un intero rotore comporterebbe.

Esistono diversi metodi per svolgere l'analisi modale di una struttura in simmetria ciclica, tra questi vi è l'approccio suggerito da D. J. Mead. Si indichi con $\{x_s\}$ il vettore dei gradi di libertà del settore fondamentale n -esimo, così costituito (si veda figura 2.6):

$$\{x_s\} = \begin{Bmatrix} x_l \\ x_i \\ x_r \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$\{x_l\}$ rappresenta il vettore dei $3n_l$ gradi di libertà dell'interfaccia sinistra del settore considerato, condivisi con con il settore $(n - 1)$ esimo; con $\{x_l\}$ ci si riferisce ai $3n_r$ gdl dell'interfaccia destra del settore fondamentale; infine $\{x_i\}$ denota i $3n_i$ gdl interni, appartenenti esclusivamente al settore n -esimo. Al fine di imporre la simmetria ciclica, il numero di gradi di libertà dell'interfaccia destra deve eguagliare il numero di gdl dell'interfaccia sinistra, ossia $3n_r = 3n_l$.

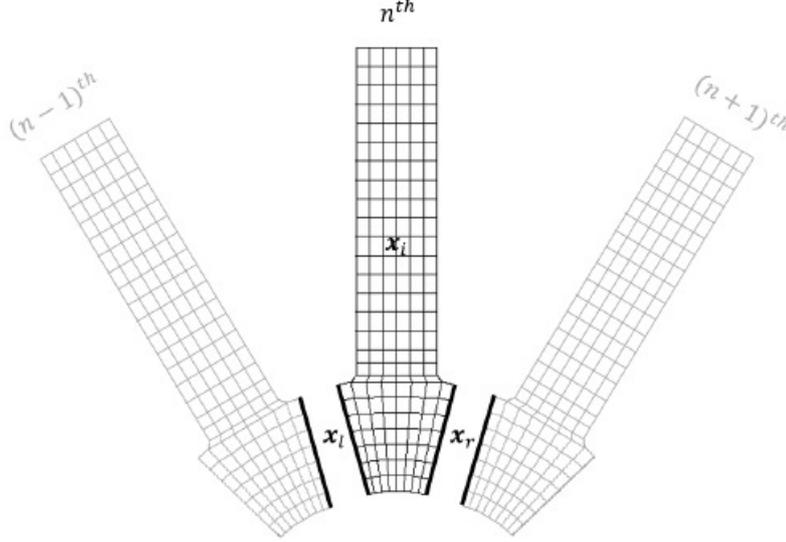


Figura 2.6: Partizione dei gradi di libertà dell' n -esimo settore fondamentale.

Il vettore delle forze esterne è partizionato allo stesso modo del vettore dei gradi di libertà:

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_l \\ f_i \\ f_r \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Le matrici di massa e rigidezza del singolo settore che compaiono nell'equazione del moto (2.1) sono quindi riscritte rispettando la partizione dei gdl:

$$[M_s] = \begin{bmatrix} M_{ll} & M_{li} & M_{lr} \\ M_{il} & M_{ii} & M_{ir} \\ M_{lr} & M_{ri} & M_{rr} \end{bmatrix} \quad [K_s] = \begin{bmatrix} K_{ll} & K_{li} & K_{lr} \\ K_{il} & K_{ii} & K_{ir} \\ K_{lr} & K_{ri} & K_{rr} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Si impongono poi le condizioni di:

- continuità, gli spostamenti dell'interfaccia destra del settore n -esimo devono eguagliare gli spostamenti dell'interfaccia sinistra del settore successivo.

$$\{x_r\}_n = \{x_l\}_{n+1} \quad (2.28)$$

- equilibrio, dato dalla seguente relazione tra le forze

$$\{f_r\}_n = -\{f_l\}_{n+1} \quad (2.29)$$

La proprietà di simmetria ciclica del rotore impone che i corrispettivi nodi appartenenti alle interfacce destra e sinistra oscillino l'uno rispetto all'altro con una differenza di fase pari all'IBPA. Considerando i gdl dell'interfaccia sinistra come indipendenti, si ottiene la seguente relazione:

$$\{x_r\} = \{x_l\}e^{i\varphi_h} \quad (2.30)$$

I gdl indipendenti sono mantenuti anche dopo la riduzione. Considerazioni analoghe valgono per le forze, da cui deriva:

$$\{f_r\} = -\{f_l\}e^{i\varphi_h} \quad (2.31)$$

Il vettore dei gradi di libertà può pertanto essere riscritto:

$$\{x_s\} = \begin{Bmatrix} x_l \\ x_i \\ x_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ Ie^{i\varphi_h} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_l^h \\ x_i^h \end{Bmatrix} = [T^h] \begin{Bmatrix} x_l^h \\ x_i^h \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

dove:

- $[T^h]$ è la matrice di trasformazione;
- $[(x_l^h)^T \quad (x_i^h)^T]^T$ è il vettore dei gradi di libertà ridotto in simmetria ciclica riferito al diametro nodale h .

La trasformazione porta alla riscrittura dell'autoproblema per un determinato φ_h :

$$([K^h] - \omega_i^2[M^h])\{z_i^h\} = 0 \quad (2.33)$$

con

$$[M^h] = [T^h]^T[M][T^h] \quad [K^h] = [T^h]^T[K][T^h] \quad (2.34)$$

Il costo computazionale diminuisce significativamente, poiché il numero di gradi di libertà passa da $3(2n_l + n_i)$ a $3(n_l + n_i)$ per il problema ridotto. Il valore di φ_h determina lo sfasamento tra i settori. Ad ogni IBPA corrispondono più forme modali, ognuna delle quali presenta lo stesso sfasamento tra i settori. Variando φ_h all'interno dei suoi valori ammissibili, si ottengono tutte le forme modali della struttura, pur analizzando un singolo settore.

2.2.1 Famiglie modali e diagrammi FreND

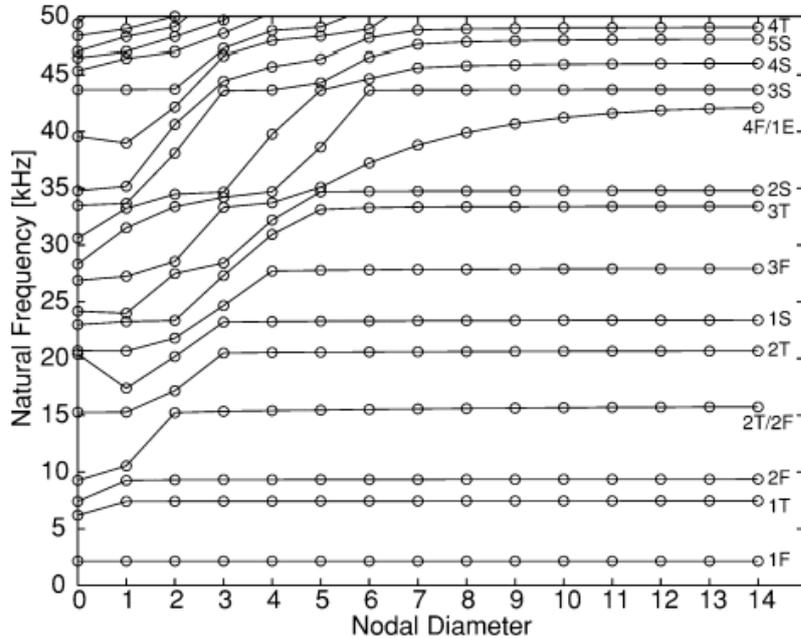
Un sistema continuo presenta infiniti gradi di libertà, di conseguenza un bladed disk reale ha infiniti modi di vibrare, ognuno dei quali è associato ad una frequenza e ad un diametro nodale. Modellando il rotore mediante FE si ottiene un numero finito di gradi di libertà (e quindi di frequenze e modi), determinato dal numero di nodi derivante dalla discretizzazione. Per descrivere con buona approssimazione la dinamica di un bladed disk si considerano generalmente i modi con frequenze di risonanza più basse e fattori di partecipazione modale elevati. La rappresentazione del comportamento dinamico avviene mediante l'utilizzo del cosiddetto diagramma *FreND* (Frequency vs. Nodal Diameter): esso mostra la frequenza in funzione del diametro nodale per diversi modi. Un esempio di diagramma FreND è riportato in figura 2.7. Al crescere del diametro nodale si assiste generalmente ad un aumento delle frequenze proprie dei modi di vibrare fino al raggiungimento di un asintoto orizzontale. Infatti, poiché il diametro nodale indica il numero di linee a spostamento nullo passanti per il centro della circonferenza, al crescere di tale parametro la struttura si irrigidisce, presentando forme modali sempre più complesse. Per bassi valori di diametro nodale si ha la prevalenza di modo di disco, al contrario per *ND* elevati si assiste a modi di pala. Nel primo caso il disco, deformandosi, trascina con sé le pale indeformate. Ad elevati diametri nodali invece, a causa dell'irrigidimento del disco stesso, sono le pale a deformarsi.

La classificazione dei risultati di un'analisi modale mediante diagramma FreND può avvenire in base alla frequenza o alla forma modale. Nel primo caso, a parità di diametro nodale, il modo è individuato dalla frequenza. La classificazione modale associa invece le frequenze ad una determinata famiglia modale, individuata dalla deformata della struttura. In alcuni casi il diagramma FreND può presentare la cosiddetta regione di *veering*, in corrispondenza della quale due famiglie modali si scambiano mutuamente i modi, presentando un incrocio delle frequenze proprie.

I modi di pala più comuni sono:

- edgewise (EW), il tip della pala tende a muoversi in direzione dell'asse motore rispetto all'hub;
- flapwise (FW), il tip subisce uno spostamento in direzione tangenziale;
- flessionale (F), la deformazione massima si ha circa a metà dello span;
- torsionale (T), la pala si torce attorno all'asse radiale.

La nomenclatura delle forme modali indica l'ordine e il numero di semionde o coppie di lobi della deformata: ad esempio, con la notazione 1F si indica la prima flessionale

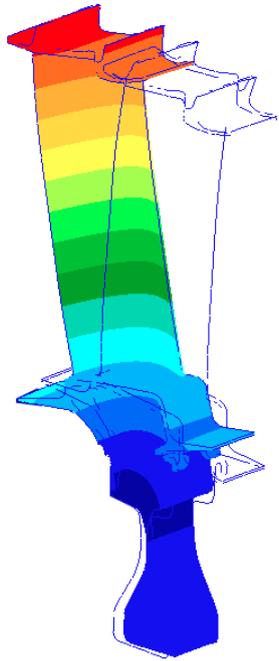
Figura 2.7: Esempio di diagramma FreND^[22].

ad una semionda, con 1F2 la seconda flessionale ad una semionda, 2F si riferisce ad una flessionale con due semionde. Esistono inoltre modi di vibrare dati dalla sovrapposizione di più forme modali principali, motivo per cui la classificazione delle famiglie modali può risultare non così immediata.

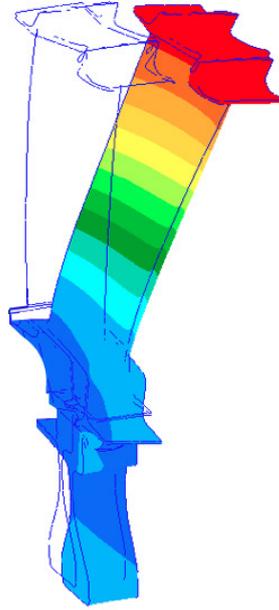
2.3 Tecniche di riduzione

Le tecniche di riduzione consistono nella riduzione del numero di gradi di libertà di sistemi modellati agli elementi finiti, al fine di diminuire il costo computazionale delle analisi. Si pensi ad esempio al calcolo della risposta a flutter oggetto della presente tesi, nel quale si considera anche l'effetto dissipativo dovuto al contatto tra il dovetail della pala e il disco. Dipendendo dagli spostamenti, le forze di contatto costituiscono a loro volta un'incognita del problema, pertanto si ricorre a metodi numerici iterativi per definire la soluzione. Ciò si traduce in tempi di analisi elevati, specialmente per modelli FE con migliaia di gradi di libertà. Le tecniche di riduzione, tuttavia, non devono causare la perdita di informazioni fondamentali per la descrizione del comportamento dinamico del sistema.

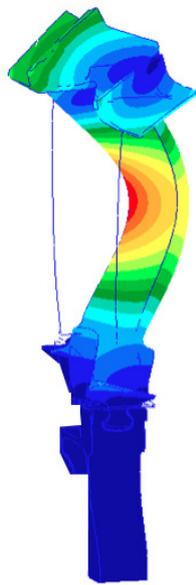
In questo paragrafo sono descritte le principali tecniche di riduzione^[23] applicate a modelli FEM in simmetria ciclica.



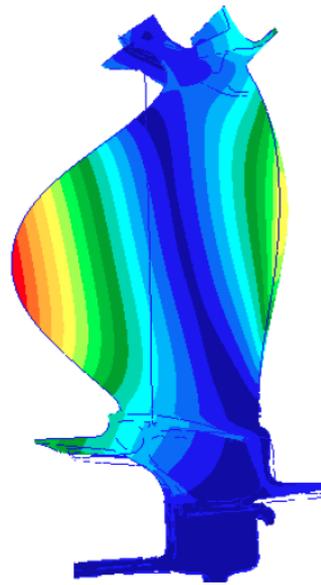
(a) Modo edgewise (EW)



(b) Modo flapwise (FW)



(c) Modo flessionale (1F)



(d) Modo torsionale (1T)

Figura 2.8: Modi di vibrare di un bladed disk^[14].

2.3.1 Riduzione statica di Guyan

Si indichi con $\{x\}$ il vettore dei gradi di libertà del modello considerato, suddivisi tra i gdl liberi $\{x_l\}$ e i gdl vincolati $\{x_v\}$. Tra i gdl liberi si distinguono poi i gdl $\{x_m\}$ di analisi da mantenere durante la riduzione, anche detti *master*, e i gdl *slave* $\{x_s\}$ che verranno omessi. Risulta quindi:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_l \\ x_v \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\{x_l\} = \begin{Bmatrix} x_a \\ x_o \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

L'equazione del moto da risolvere è:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} \quad (2.37)$$

Eliminando i gdl vincolati, essa diventa:

$$[M_l] \{\ddot{x}_l\} + [C_l] \{\dot{x}_l\} + [K_l] \{x_l\} = \{F_l\} \quad (2.38)$$

L'equazione può essere riscritta evidenziando il prodotto tra la matrice di rigidità e il vettore dei gradi di libertà liberi:

$$[K_l] \{x_l\} = \{F_l\} - [M_l] \{\ddot{x}_l\} - [C_l] \{\dot{x}_l\} \quad (2.39)$$

Il termine a destra dell'uguale, chiamato *vettore dei carichi statici equivalenti* $\{P_l\}$, è dato dalla somma dei carichi statici e dinamici, delle forze di inerzia, di smorzamento ed eventuali altre forze che non dipendono linearmente dagli spostamenti:

$$\{P_l\} = \{F_{l,s}\} + \{F_{l,d}\} - [M_l] \{\ddot{x}_l\} - [C_l] \{\dot{x}_l\} \quad (2.40)$$

Nel caso di un'analisi statica, le derivate prime e seconde degli spostamenti si annullano, così come le forze dinamiche, per cui:

$$[K_l] \{x_l\} = \{P_l\} = \{F_{l,s}\} \quad (2.41)$$

Tale equazione può essere riscritta in funzione dei gdl master e slave:

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_m \\ P_s \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Considerando la seconda riga dell'equazione (2.42):

$$[K_{sm}] \{x_m\} + [K_{ss}] \{x_s\} = \{P_s\} \quad (2.43)$$

si ottiene il vettore dei gradi di libertà slave:

$$\{x_s\} = - [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \{x_m\} + [K_{ss}]^{-1} \{P_s\} \quad (2.44)$$

Si introduce a questo punto la *matrice di Guyan*, così definita:

$$[G_{sm}] = - [K_{ss}]^{-1} [K_{sm}] \quad (2.45)$$

riscrivendo l'ultimo termine dell'equazione (2.45) come

$$\{x_s^s\} = [K_{ss}]^{-1} \{P_s\} \quad (2.46)$$

si ottiene

$$\{x_s\} = - [G_{sm}] \{x_m\} + \{x_s^s\} \quad (2.47)$$

Sostituendo l'equazione (2.47) nella (2.42), il moto del sistema risulta essere funzione dei soli gradi di libertà master. Qualora si svolga un'analisi statica, il vettore $\{P_s\}$ è un termine noto contenente i carichi statici, per cui l'equazione del moto è completamente indipendente dai gdl slave. Se si effettua un'analisi dinamica invece, in $\{P_s\}$ vi sono anche termini noti rappresentativi dei carichi dinamici, incognite funzione di $\{\ddot{x}_s\}$ e $\{\ddot{x}_m\}$, oltre a termini non lineari legati ai gdl slave, motivo per il quale non è possibile eliminare la dipendenza da questi ultimi.

Si obbligano quindi i gdl slave a muoversi secondo la deformata imposta dagli spostamenti master, considerando il vettore $\{P_s\}$ nullo e trascurando $\{x_s^s\}$. Questa approssimazione porta a scrivere

$$\{x_s\} = [G_{sm}] \{x_m\} \quad (2.48)$$

Le colonne della matrice di Guyan rappresentano le deformate della struttura in condizioni statiche e gli elementi di ciascuna colonna indicano gli spostamenti dei gdl slave per quella deformata. L'approssimazione è tanto migliore quanto più numerosi e ben distribuiti sono i gdl master. Sostituendo l'equazione (2.48) nella (2.36), si ottiene:

$$\{x_l\} = \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ G_{sm} \end{bmatrix} \{x_m\} = [\Psi_G] \{x_m\} \quad (2.49)$$

Si moltiplica quindi l'equazione (2.38) per $[\Psi_G]^T$ e si sostituisce $\{x_l\}$ con l'espressione appena ricavata:

$$[\Psi_G]^T \left([M_l] [\Psi_G] \{\ddot{x}_l\} + [C_l] [\Psi_G] \{\dot{x}_l\} + [K_f] [\Psi_G] \{x_l\} \right) = [\Psi_G]^T \{F_l\} \quad (2.50)$$

Ponendo

$$\begin{aligned}
 [M_G] &= [\Psi_G]^T [M_l] [\Psi_G] \\
 [C_G] &= [\Psi_G]^T [C_l] [\Psi_G] \\
 [K_G] &= [\Psi_G]^T [K_l] [\Psi_G] \\
 [F_G] &= [\Psi_G]^T [F_l]
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

l'equazione del moto diventa:

$$[M_G] \{\ddot{x}_l\} + [C_G] \{\dot{x}_l\} + [K_G] \{x_l\} = \{F_G\}
 \tag{2.52}$$

Premoltiplicare per $[\Psi_G]^T$ elimina le singolarità e assicura che le matrici trasformate siano quadrate e simmetriche se le matrici di partenza $[M_l]$, $[C_l]$ e $[K_l]$ sono simmetriche. L'accuratezza cresce all'aumentare dei gdl contenuti nel vettore $\{x_m\}$.

Per ridurre un sistema garantendone la buona approssimazione del comportamento dinamico complessivo, è opportuno:

- includere in $\{x_m\}$ i nodi con la massa maggiore;
- includere in $\{x_s\}$ i nodi che apportano un contributo trascurabile all'energia cinetica e allo smorzamento;
- distribuire uniformemente sul modello i gradi di libertà master;
- applicare i carichi solamente ai nodi master.

2.3.2 Sintesi dei modi componenti di Craig-Bampton

La sintesi dei modi componenti (CMS) è una tecnica di riduzione che permette di ottenere una migliore approssimazione dei gradi di libertà slave rispetto alla riduzione di Guyan. Essa è basata sul concetto di *sottostrutturazione*, vale a dire la suddivisione della struttura in un insieme di sistemi di minori dimensioni. Il primo metodo CMS fu presentato da Hurty nel 1960, mentre l'idea di applicare la sottostrutturazione per l'analisi dinamica di un sistema fu esposta da Gladwell nel 1964^[24].

La simmetria ciclica rappresenta un esempio di sottostrutturazione: il comportamento del sistema nel suo complesso è infatti simulato studiando un singolo settore. La CMS prevede che i gradi di libertà di ogni sottostruttura siano divisi tra gdl *interni* e gdl *al contorno*: i primi appartengono esclusivamente al singolo settore e possono essere considerati come *slave*, i secondi sono condivisi tra settori

adiacenti in corrispondenza delle interfacce e costituiscono i gdl *master*. E' quindi possibile eseguire una sottostrutturazione statica applicando la riduzione di Guyan. Quest'ultima tuttavia non è efficace nel descrivere il comportamento del sistema, motivo per cui nacque la più raffinata tecnica di sintesi dei modi componenti.

Durante la riduzione CMS alcune forme modali, che con la riduzione di Guyan sarebbero state omesse, vengono considerate. Di conseguenza i gradi di libertà slave possono essere scritti come:

$$\{x_s\} = [G_{sm}] \{x_m\} + [\Phi_s] \{\eta_s\} \quad (2.53)$$

Per calcolare le forme modali omesse $[\Phi_s]$, i nodi di interfaccia si suppongono vincolati ($\{x_m\} = \{0\}$), e si risolve il seguente problema agli autovalori:

$$[M_{ss}] \{\dot{x}_s\} + [K_{ss}] \{x_s\} = \{0\} \quad (2.54)$$

La cui soluzione è:

$$\{x_s\} = [\Phi_s^{tot}] \{\eta_s^{tot}\} \quad (2.55)$$

dove $[\Phi_s^{tot}]$ è la matrice di *trasformazione modale*, le cui colonne sono costituite dai modi di vibrare della struttura (autovettori). Il vettore $\{\eta_s^{tot}\}$ contiene le coordinate modali. Se tutti i modi di vibrare fossero considerati, non si eseguirebbe alcuna riduzione: il numero di gdl rimarrebbe invariato e il risultato sarebbe un mero cambiamento di coordinate, da $\{x_s\}$ a $\{\eta_s^{tot}\}$. All'estremo opposto, se il numero di autovettori fosse nullo, si ricadrebbe nella sottostrutturazione statica di Guyan. Al crescere del numero di modi che compaiono nella riduzione aumenta la bontà dell'approssimazione.

Quindi sostituendo l'equazione (2.53) nella (2.36), si ottiene:

$$\{x_f\} = \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ G_{sm} & \Phi_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ \eta_s \end{Bmatrix} = [\Psi] \begin{Bmatrix} x_m \\ \eta_s \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

In questo modo i gdl master includono sia i gdl fisici di interfaccia sia alcuni gdl slave espressi in funzione delle coordinate modali. L'equazione del moto diviene allora:

$$[\Psi]^T \left([M_f] [\Psi] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [C_f] [\Psi] \begin{Bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [K_f] [\Psi] \begin{Bmatrix} x_m \\ \eta_s \end{Bmatrix} \right) = [\Psi]^T \{F_f\} \quad (2.57)$$

Ponendo

$$\begin{aligned} [M_{cms}] &= [\Psi]^T [M_f] [\Psi] \\ [C_{cms}] &= [\Psi]^T [C_f] [\Psi] \\ [K_{cms}] &= [\Psi]^T [K_f] [\Psi] \\ [F_{cms}] &= [\Psi]^T [F_f] \end{aligned} \quad (2.58)$$

essa può essere riscritta come:

$$[M_{cms}] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [C_{cms}] \begin{Bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [K_{cms}] \begin{Bmatrix} x_m \\ \eta_s \end{Bmatrix} = \{F_{cms}\} \quad (2.59)$$

2.3.3 Riduzione di Tran

Nella maggior parte dei metodi CMS l'accoppiamento delle sottostrutture avviene attraverso gli spostamenti di interfaccia. Nel caso di strutture tridimensionali complesse, come ad esempio i bladed disks, le dimensioni del sistema risultano quindi importanti, poiché tali spostamenti devono essere inclusi nei gradi di libertà master. La tecnica di Tran permette di ridurre anche i gdl di interfaccia, sostituendoli con una combinazione lineare di forme modali, senza compromettere la successiva applicazione della simmetria ciclica.

Calcolo delle forme modali di interfaccia per modelli senza simmetria ciclica

Si supponga di includere nel vettore master anche alcuni gradi di libertà interni x_i ed i gdl x_{ef} sui quali è applicata una forza esterna:

$$\{x_m\} = \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \\ x_{ef} \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

Sostituendo tale notazione all'equazione (2.56), quest'ultima diventa:

$$\{x_m\} = \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \\ x_{ef} \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ G_{sm}^l & G_{sm}^r & G_{sm}^i & G_{sm}^{ef} & \Phi_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} = [\Psi] \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

Allo stesso modo, l'equazione (2.59) assume la forma:

$$[M_{cms}] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_l \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_{ef} \\ \ddot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [C_{cms}] \begin{Bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{x}_r \\ \dot{x}_i \\ \dot{x}_{ef} \\ \dot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [K_{cms}] \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} = \{F_{cms}\} \quad (2.62)$$

Per ridurre ulteriormente il modello, agendo sui gdl di interfaccia, la tecnica di Tran prevede i seguenti passaggi.

1. Riduzione di Guyan del sistema iniziale, considerando come master solo i gradi di libertà di interfaccia, ottenendo:

$$[M_G] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_l \\ \ddot{x}_r \end{Bmatrix} + [C_G] \begin{Bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{x}_r \end{Bmatrix} + [K_G] \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \end{Bmatrix} = \{F_G\} \quad (2.63)$$

2. Analisi modale del modello così ridotto, mediante risoluzione del problema agli autovalori:

$$[M_G] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_l \\ \ddot{x}_r \end{Bmatrix} + [K_G] \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.64)$$

la cui soluzione è:

$$\begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \end{Bmatrix} = [\Phi_G^{tot}] \{\eta_G^{tot}\} \quad (2.65)$$

dove $[\Phi_G^{tot}]$ è la matrice contenente le forme modali di interfaccia e $\{\eta_G^{tot}\}$ il vettore con le relative ampiezze.

3. Approssimazione dei gdl di interfaccia mediante l'utilizzo di un set scelto di forme modali di interfaccia, indicato con

$$[\Phi_G] = \begin{bmatrix} \Phi_G^l \\ \Phi_G^r \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Il vettore che compare nell'equazione (2.61) diventa pertanto:

$$\begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_G^l & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_G^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_G \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} \eta_G \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

Quest'ultima, sostituita nell'equazione (2.61) premoltiplicata per $[\Gamma]^T$, restituisce:

$$\begin{aligned} & [\Gamma]^T [M_{cms}] [\Gamma] \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_G \\ \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_{ef} \\ \ddot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [\Gamma]^T [C_{cms}] [\Gamma] \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_G \\ \dot{x}_i \\ \dot{x}_{ef} \\ \dot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [\Gamma]^T [K_{cms}] [\Gamma] \begin{Bmatrix} \eta_G \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} = \\ & = [\Gamma]^T \{F_{cms}\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ponendo

$$\begin{aligned}
 [\hat{M}] &= [\Gamma]^T [M_{cms}] [\Gamma] \\
 [\hat{C}] &= [\Gamma]^T [C_{cms}] [\Gamma] \\
 [\hat{K}] &= [\Gamma]^T [K_{cms}] [\Gamma] \\
 [\hat{F}] &= [\Gamma]^T [F_{cms}]
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

l'equazione (2.68) diviene:

$$[\hat{M}] \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_G \\ \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_{ef} \\ \ddot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [\hat{C}] \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_G \\ \dot{x}_i \\ \dot{x}_{ef} \\ \dot{\eta}_s \end{Bmatrix} + [\hat{K}] \begin{Bmatrix} \eta_G \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{Bmatrix} = \{\hat{F}\} \tag{2.70}$$

In conclusione, la riduzione avviene mediante l'applicazione in sequenza delle matrici di trasformazione $[\Psi]$ e $[\Gamma]$. Si ottiene quindi:

$$[\hat{M}] = [\Gamma]^T [M_{cms}] [\Gamma] = [\Gamma]^T [\Psi]^T [M_f] [\Psi] [\Gamma] = [Q]^T [M_f] [Q] \tag{2.71}$$

con

$$[Q] = [\Psi] [\Gamma] = \begin{bmatrix} \Phi_G^l & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_G^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ G_{sm}^l \Phi_G^l + G_{sm}^r \Phi_G^r & G_{sm}^i & G_{sm}^{ef} & \Phi_s \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

Calcolo delle forme modali di interfaccia per modelli in simmetria ciclica

Si applica ora la condizione di simmetria ciclica, data dalla relazione:

$$\begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ e^{\mu} \end{bmatrix} \{x_l\} = [T] \{x_l\} \tag{2.73}$$

Si sostituisce quindi l'equazione (2.73) nella (2.65) premoltiplicata per $[T]^T$, ottenendo:

$$[T]^T [M_G] [T] \{\ddot{x}_l\} + [T]^T [K_G] [T] \{x_l\} = [M_{Gsc}] \{\ddot{x}_l\} + [K_{Gsc}] \{x_l\} = \{0\} \tag{2.74}$$

In questo modo le forme modali di interfaccia del settore in simmetria ciclica possono essere definite calcolando gli autovettori del modello descritto dall'equazione (2.74). Si ricava:

$$\{x_l\} = [\Phi_{sc}^{tot}] \{\eta_{sc}^{tot}\} \tag{2.75}$$

dove $[\Phi_{sc}^{tot}]$ è la matrice delle forme modali di interfaccia e η_{sc}^{tot} il vettore delle relative ampiezze. E' ora possibile scegliere un sottoinsieme della base modale, chiamato $[\Phi_{sc}]$, e applicare la simmetria ciclica. Così facendo il vettore che compare nell'equazione (2.62) diventa:

$$\begin{pmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ e^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_l \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{sc} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{sc} e^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{sc} \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{pmatrix} = [\Gamma_{sc}] \begin{pmatrix} \eta_{sc} \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

Ancora, si sostituisce l'equazione (2.76) nella (2.63) premoltiplicata per $[\Gamma_{sc}]^T$:

$$[M_{sc}] \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_{sc} \\ \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_{ef} \\ \ddot{\eta}_s \end{pmatrix} + [C_{sc}] \begin{pmatrix} \dot{\eta}_{sc} \\ \dot{x}_i \\ \dot{x}_{ef} \\ \dot{\eta}_s \end{pmatrix} + [K_{sc}] \begin{pmatrix} \eta_{sc} \\ x_i \\ x_{ef} \\ \eta_s \end{pmatrix} = \{F_{sc}\} \quad (2.77)$$

con

$$\begin{aligned} [M_{sc}] &= [\Gamma_{sc}]^T [M_{cms}] [\Gamma_{sc}] \\ [C_{sc}] &= [\Gamma_{sc}]^T [C_{cms}] [\Gamma_{sc}] \\ [K_{sc}] &= [\Gamma_{sc}]^T [K_{cms}] [\Gamma_{sc}] \\ [F_{sc}] &= [\Gamma_{sc}]^T [F_{cms}] \end{aligned} \quad (2.78)$$

Il passaggio dall'equazione (2.38) alla (2.77) è possibile applicando la matrice $[Q_{sc}]$, così definita:

$$\begin{aligned} [Q_{sc}] &= [\Psi] [\Gamma_{sc}] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ G_{sm}^l & G_{sm}^r & G_{sm}^i & G_{sm}^{ef} & \Phi_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{sc} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{sc} e^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{sc} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{sc} e^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ G_{sm}^l \Phi_{sc}^l + G_{sm}^r \Phi_{sc}^r & G_{sm}^i & G_{sm}^{ef} & \Phi_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Anche in questo caso se le matrici $[\Phi_s]$ e $[\Phi_{sc}]$ fossero utilizzate interamente, non si avrebbe alcuna riduzione.

2.3.4 Riduzione modale

L'equazione del moto può essere riscritta nel dominio modale approssimando gli spostamenti fisici con una combinazione lineare di un numero limitato di modi, applicando il *principio di sovrapposizione modale*:

$$\{x\} \simeq [\Psi] \{q\} \quad (2.80)$$

La matrice $[\Psi]$ costituisce la base modale, mentre il vettore $\{q\}$ contiene le coordinate modali. Mediante questa formulazione è possibile riscrivere le matrici di massa, smorzamento e rigidità che compaiono nell'equazione del moto, nonché il vettore delle forze:

$$\begin{aligned} [M_{mod}] &= [\Psi]^T [M] [\Psi] \\ [C_{mod}] &= [\Psi]^T [C] [\Psi] \\ [K_{mod}] &= [\Psi]^T [K] [\Psi] \\ [F_{mod}] &= [\Psi]^T [F] \end{aligned} \quad (2.81)$$

Il risultato di questa operazione è la riduzione del costo computazionale necessario alla risoluzione del sistema. Indicando infatti con N il numero di gradi di libertà del modello e con n il numero di forme modali considerate nella riduzione, la dimensione delle matrici modali risulta essere $n \times n$, mentre per le matrici di partenza è $N \times N$. Inoltre, le prime sono quadrate e diagonali. L'equazione del moto diviene pertanto:

$$[M_{mod}] \{\ddot{q}\} + [C_{mod}] \{\dot{q}\} + [K_{mod}] \{q\} = \{F_{mod}\} \quad (2.82)$$

con

$$\begin{aligned} [M_{mod}] &= [I] \\ [C_{mod}] &= \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix} \\ [K_{mod}] &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.83)$$

ζ ed ω indicano rispettivamente lo smorzamento modale e la frequenza naturale del sistema.

Capitolo 3

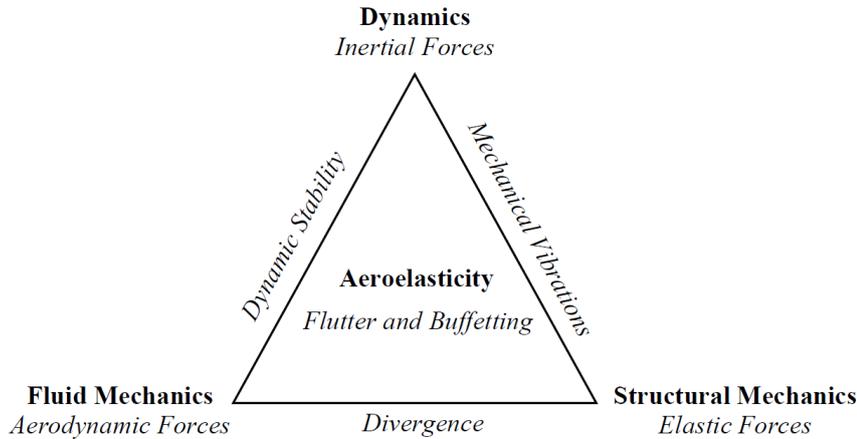
Aeroelasticità e vibrazioni nelle turbomacchine

L'aeroelasticità^[25] è la materia che studia l'interazione tra la deformazione di una struttura elastica investita da un flusso e la risultante forza aerodinamica. L'interdisciplinarietà della materia è illustrata in modo esplicativo dal triangolo di Collar (figura 3.1), il quale mostra l'interazione tra aerodinamica, dinamica ed elasticità. L'aerodinamica fornisce una previsione delle forze agenti su un corpo avente una certa geometria, la dinamica comprende gli effetti delle forze di inerzia, l'elasticità descrive la deformazione di un corpo elastico soggetto ad un determinato carico. Si distinguono quindi diverse discipline, a seconda dell'interazione tra:

- aerodinamica ed elasticità (aeroelasticità statica);
- aerodinamica e dinamica (meccanica del volo);
- dinamica ed elasticità (dinamica strutturale);
- aerodinamica, dinamica ed elasticità (aeroelasticità dinamica).

In ambito aerospaziale lo studio dei fenomeni aeroelastici è di fondamentale importanza: nei casi più critici infatti le vibrazioni causano il danneggiamento delle strutture, provocandone il cedimento a fatica. E' quindi facile intuire come tali effetti, se non controllati, possano avere conseguenze catastrofiche per la sicurezza dei passeggeri di un velivolo, oltre ad incidere più o meno positivamente sulle prestazioni dell'aeromobile stesso. Come verrà descritto dettagliatamente nel prosieguo, i fenomeni aeroelastici ricoprono un ruolo rilevante anche nel campo delle turbomacchine.

I principali temi che l'aeroelasticità affronta riguardano la stabilità di un sistema. Quando le forze aerodinamiche risultano predominanti sulle forze elastiche di

Figura 3.1: Triangolo di Collar^[26].

ripristino di una struttura ed i carichi inerziali sono trascurabili, si parla di instabilità aeroelastica statica, anche nota come *divergenza*. Qualora invece gli effetti inerziali siano importanti, l'instabilità dinamica risultante è detta *flutter*. Altre problematiche sono poi costituite dalla previsione del comportamento del velivolo in condizioni di volo fissate o in presenza di raffiche, dalla determinazione dei massimi carichi agenti sulle strutture e dall'efficacia delle superfici di comando.

I fenomeni aeroelastici interessano in particolar modo le moderne turbomacchine: l'abbattimento delle emissioni e del consumo di carburante è infatti raggiungibile mediante la riduzione del peso ed il contemporaneo aumento dell'efficienza dei motori aeronautici, caratteristiche che si traducono in forti stress dinamici dei componenti. Contenere la massa significa progettare turbomacchine con il minor numero di stadi possibile, per questa ragione si realizzano palette i cui profili presentano un elevato *aspect ratio*, al fine di massimizzare la portata d'aria elaborata. Lo svantaggio di questo design è dato dalla riduzione della frequenza naturale delle pale e dall'aumento dell'ampiezza di vibrazione, con conseguente diminuzione della vita a fatica.

Le due principali tipologie di vibrazioni che interessano un bladed disk di turbina sono causate rispettivamente dai seguenti fattori:

- l'eccitazione di forze variabili nel tempo causate dalla disomogeneità del flusso che attraversa le palette. Essa è legata all'architettura della turbomacchina, al numero di pale statoriche che precedono e seguono il rotore e alla velocità angolare dell'albero;
- l'auto-eccitazione che si verifica in assenza delle forze suddette quando il

lavoro instazionario compiuto dal fluido prevale sull'energia dissipata dalla struttura per smorzamento, portando all'insorgere del flutter.

Le vibrazioni appartenenti alla prima famiglia si presentano a frequenze multiple della velocità di rotazione dell'albero motore e per questo sono definite *sincrone*; ciò non avviene per le seconde, catalogate quindi come *asincrone*. L'instabilità a flutter costituisce un serio problema in fase di progettazione, poiché, se non considerata, può provocare la failure dei componenti rotorici, particolarmente soggetti a HCF (*high cycle fatigue*). Lo studio delle vibrazioni sincrone avviene attraverso analisi di risposta forzata, mentre l'effetto delle vibrazioni asincrone è valutato con analisi a flutter. Poiché si assume che le oscillazioni causate dal flutter siano molto maggiori rispetto all'effetto delle forze aeromeccaniche esterne, queste ultime non sono considerate durante le analisi a flutter. A loro volta entrambe le analisi possono essere lineari o non lineari. Le non-linearità considerate in un'analisi a risposta forzata sono di natura sia strutturale che meccanica e risiedono nella presenza di smorzatori per attrito quali ad esempio blade root joints, under-platform dampers o part-span shrouds. Per quanto riguarda il flutter invece, le non-linearità interessano anche il flusso e sono rappresentate da turbolenza, onde d'urto e fenomeni transonici.

L'interazione tra il fluido e la struttura (FSI, *fluid-structure interaction*) può essere analizzata avvalendosi di differenti metodi, la cui nomenclatura indica come essa è trattata. Nell'ambito dell'instabilità aeroelastica si utilizzano metodi *one-way coupled* e *two-ways coupled*. Il termine "coupled" indica appunto l'accoppiamento tra i campi aerodinamico e strutturale. La distinzione tra "one-way" e "two-ways" riguarda invece l'interazione tra le due sfere di ricerca: se vi è un mutuo scambio di informazioni, il metodo si definisce a due vie. Ciò significa ad esempio che gli output del calcolo aerodinamico divengono input per l'analisi strutturale (CSD), la quale a sua volta produrrà dati influenti per le analisi CFD. D'altra parte il metodo one-way impiegato per il calcolo a flutter nella presente tesi utilizza i risultati delle analisi aerodinamiche unicamente come input per il calcolo strutturale. I metodi a una via non raggiungono la stessa accuratezza dei two-ways, tuttavia offrono minori tempi di calcolo.

Ancora, le analisi possono essere effettuate nel dominio delle frequenze o nel dominio del tempo. Il primo approccio riduce i tempi di calcolo, in quanto le equazioni da risolvere sono algebriche e non differenziali; lo svantaggio è costituito da una maggiore approssimazione della soluzione. Esso implica inoltre che il moto della struttura sia armonico, periodico e stazionario: le pale del rotore si muovono quindi con una differenza di fase le une rispetto alle altre (IBPA). Le analisi nel

dominio del tempo, più accurate e computazionalmente costose, non necessitano dell'ipotesi di moto armonico.

3.1 Risposta forzata

Nell'ambito delle turbomacchine lo studio della risposta forzata è essenziale per prevenire failures delle palette dovute a HCF. Le forze variabili nel tempo che agiscono sulla turbina di un motore aeronautico sono causate dai disturbi generati dai componenti a monte e a valle della palettatura rotorica. Esse sono rappresentate come una combinazione di eccitanti armoniche viaggianti lungo la circonferenza del bladed disk, la quale può essere suddivisa in un numero intero di lunghezze d'onda, detto *engine order* (EO), per ciascuna forza armonica viaggiante. Ogni pala rotorica è quindi soggetta ad un ampio spettro di sollecitazioni; lo stesso accade per le pale statoriche, investite dalle *travelling forces* generate dalle scie dei rotori adiacenti.

L'engine order è definito come il rapporto tra la frequenza della forza eccitante e la velocità di rotazione del disco:

$$EO = \frac{\omega}{\Omega} \quad (3.1)$$

In un sistema di riferimento fisso o solidale con la pala si ha una forzante statica. Si consideri un bladed disk giacente sul piano xy eccitato nel punto fisso θ^* da una forzante armonica normale ad esso, diretta secondo l'asse z . La forzante è descritta dalla seguente espressione:

$$\begin{cases} f_{\theta=\theta^*}(t) = F_0 \cos(\omega t) = F_0 \cos(N\Omega t) \\ f_{\theta \neq \theta^*}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

dove N indica il numero di pale. La periodicità della forzante permette di scomporla in serie di Fourier come somma di infiniti contributi armonici di indice h :

$$f_{\theta}(t) = \frac{F_0}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \cos[h(\theta - \theta^*)] \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

Qualora si consideri un sistema di riferimento rotante, occorre effettuare un cambiamento di variabile come rappresentato in figura 3.2, pertanto si ha:

$$\theta = \theta_r + \Omega t \quad (3.4)$$

Lo sviluppo in serie di Fourier si modifica come segue:

$$f_{\theta,r}(t) = \frac{F_0}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\cos[(\omega - h\Omega)t] \cos(h\theta_r) + \sin[(\omega - h\Omega)t] \sin(h\theta_r) + \\ &+ \cos[(\omega + h\Omega)t] \cos(h\theta_r) - \sin[(\omega + h\Omega)t] \sin(h\theta_r) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

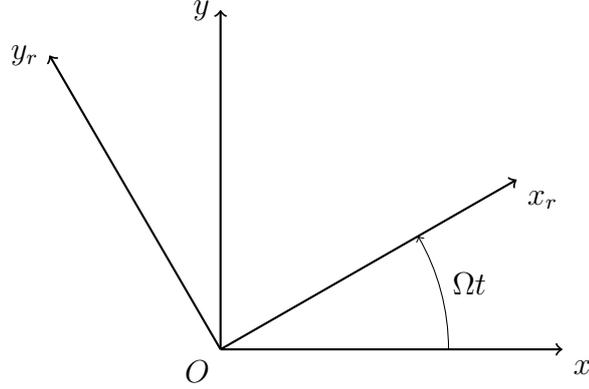


Figura 3.2: Cambiamento di variabili per il passaggio da un sistema di riferimento fisso ad uno rotante.

La singola pala risulta essere eccitata da due diverse forzanti per ogni EO:

- *forward travelling force* concorde con la velocità di rotazione del bladed disk;
- *backward travelling force* rotante in verso opposto rispetto alla velocità di rotazione del disco.

Le frequenze delle forzanti valgono rispettivamente

$$\omega_f = \omega - h\Omega \quad (3.6a)$$

$$\omega_b = \omega + h\Omega \quad (3.6b)$$

Le frequenze di eccitazione sono quindi funzione della pulsazione della forzante ω , del numero di settori N e dell'indice armonico h :

$$\Omega_f = \omega(N - h) \quad (3.7a)$$

$$\Omega_b = \omega(N + h) \quad (3.7b)$$

Gli engine orders corrispondenti assumono pertanto la seguente forma:

$$EO_f = \frac{\Omega_f}{\omega} = N - h \quad (3.8a)$$

$$EO_b = \frac{\Omega_b}{\omega} = N + h \quad (3.8b)$$

Un importante contributo allo studio della risposta forzata fu dato da Wilfred Campbell. L'omonimo diagramma permette di identificare le condizioni di risonanza di una turbomacchina. Questo fenomeno si verifica quando la frequenza della

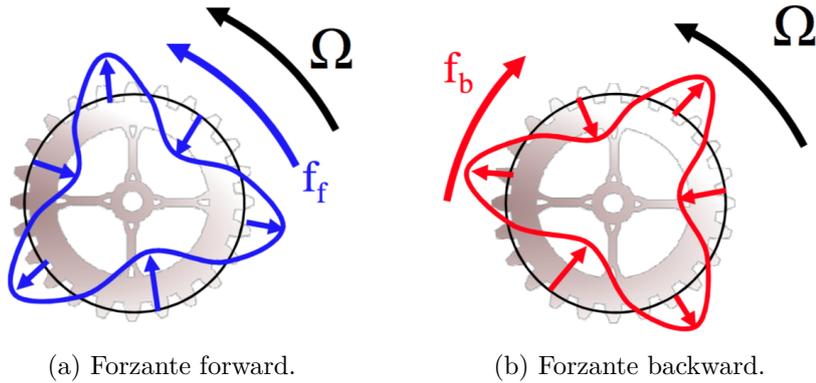


Figura 3.3: Forzanti forward e backward^[14].

forzante periodica agente sul sistema meccanico è prossima alla frequenza naturale del sistema stesso: ne conseguono vibrazioni di ampiezza elevata particolarmente dannose per il componente. Il diagramma di Campbell riporta sull'asse delle ascisse la velocità di rotazione del rotore e sull'asse delle ordinate la frequenza. Le frequenze naturali del bladed disk sono pertanto rappresentate da linee orizzontali, mentre l'andamento della frequenza delle forze eccitanti è descritto da rette con inclinazione crescente all'aumentare dell'EO.

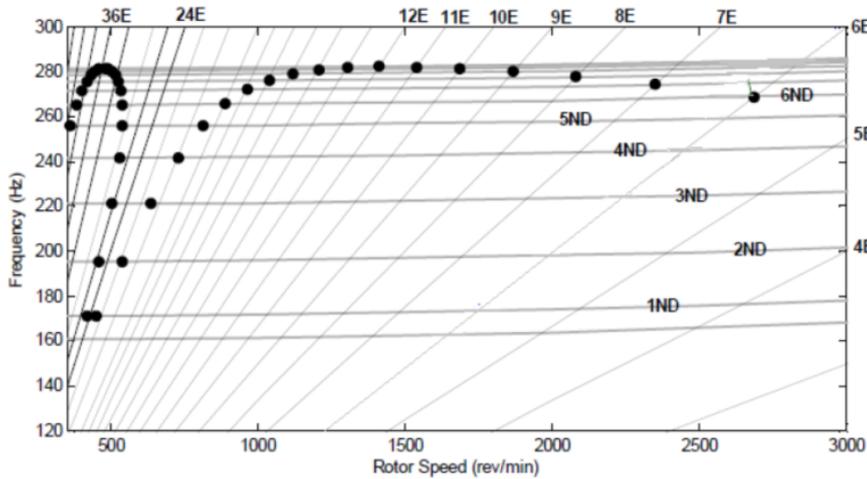


Figura 3.4: Diagramma di Campbell^[1].

Si veda il grafico riportato in figura 3.4: i punti evidenziati all'intersezione tra l'andamento delle frequenze naturali e le rette che raffigurano le eccitanti indicano le condizioni di risonanza, identificate sul diagramma dalla seguente espressione:

$$EO = mN \pm h \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

dove h è il diametro nodale ed N il numero di pale. L'obiettivo degli ingegneri è evitare che le intersezioni di risonanza ricadano in prossimità delle velocità alle quali il motore si trova ad operare per la maggior parte del tempo, cosicché non si instaurino vibrazioni potenzialmente dannose. A tale scopo si interviene modificando la velocità di rotazione o le frequenze naturali. Solitamente si ha maggiore flessibilità nel manipolare il secondo parametro. Si modificano quindi le dimensioni dei componenti critici in modo che le loro frequenze naturali non coincidano con gli engine orders alla velocità operativa^[27].

Infine, i problemi di risposta forzata si distinguono in:

- high engine order forced response (HEO);
- low engine order forced response (LEO).

La prima tipologia si riferisce alla classica risposta forzata associata alle interazioni tra gli statori e le pale rotoriche, dovuta alle forze eccitanti generate dalla rotazione del bladed disk attraverso un campo di pressione non uniforme. Il secondo problema si presenta invece per alte velocità di rotazione e temperatura elevata. Esso è correlato alla distribuzione di pressione nella regione tra le schiere statorica e rotorica: armoniche di ordine inferiore eccitano modi ai diametri nodali più bassi.

3.2 Flutter

In questo paragrafo sarà analizzato il fenomeno del *flutter*: poiché esso interessa numerosi campi dell'ingegneria, sarà fornita una prima descrizione generale; in un secondo momento ci si concentrerà sugli aspetti riguardanti in particolare le turbomacchine.

In ambito aeronautico flutter è un fenomeno aeroelastico formalmente definito come l'instabilità dinamica di un velivolo associata all'interazione tra forze aerodinamiche, elastiche e inerziali. Più specificamente si tratta di oscillazioni auto-eccitate con ampiezza crescente e potenzialmente distruttive dovute all'accoppiamento tra le forze aerodinamiche agenti su un corpo flessibile ed i suoi modi naturali di vibrare^[25].

Per evitare l'insorgere del flutter, le strutture soggette a forze aerodinamiche devono essere opportunamente progettate. Nel caso in cui le proprietà aerodinamiche o meccaniche non siano pienamente comprese a causa della complessità del sistema, l'eliminazione dell'instabilità aeroelastica avviene mediante prove sperimentali. Il flutter interessa particolarmente le superfici adibite alla generazione di portanza e spesso comporta il danneggiamento catastrofico delle stesse. La separazione del

flusso dalla superficie portante in presenza di vibrazioni è descritta da equazioni non-lineari e causa un'instabilità nota come *stall flutter* (flutter di stallo). Questo fenomeno si manifesta con maggior frequenza nei compressori dei motori a getto e sulle pale dei rotori degli elicotteri.

3.2.1 Studio dell'instabilità mediante analisi agli autovalori

Il flutter genera, in risposta alle piccole perturbazioni che interessano la struttura, delle forze dinamiche che si sommano alla componente stazionaria di portanza e di momento di beccheggio. Quando una superficie portante statisticamente stabile è perturbata al di sotto della velocità di flutter, si instaura un moto oscillatorio la cui ampiezza decresce esponenzialmente fino ad estinguersi: l'aria fornisce quindi lo smorzamento necessario ad evitare l'instabilità dinamica. Tuttavia, oltre la velocità di flutter avviene l'opposto: il segno del coefficiente di smorzamento si inverte e il moto vibratorio presenta ampiezza crescente nel tempo.

Le caratteristiche di stabilità di una superficie portante possono essere dedotte mediante un'analisi agli autovalori. Si consideri una superficie portante di un velivolo modellata come una piastra. Si indichino con $w(x, y, t)$ gli spostamenti in direzione z normale al piano xy della piastra, con $\phi(x, y)$ le forme modali normali e con ω le frequenze naturali ad esse associate. Gli spostamenti possono essere scritti mediante il principio di sovrapposizione modale (paragrafo 2.3.4):

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \phi_i(x, y) \quad (3.10)$$

con $\xi(t)$ coordinata dell' i -esimo modo. L'equazione del moto del velivolo diviene:

$$M_i(\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i) = \Xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.11)$$

dove M_i e Ξ_i sono rispettivamente la massa e la forza generalizzate, calcolate mediante integrazione della distribuzione di massa $m(x, y)$ e del carico esterno $F(x, y, t)$ sulla superficie della piastra :

$$M_i = \iint_{\text{piastra}} m(x, y) \phi_i^2(x, y) dx dy \quad (3.12)$$

$$\Xi_i(t) = \iint_{\text{piastra}} F(x, y, t) \phi_i(x, y) dx dy \quad (3.13)$$

Al fine di esaminare le proprietà di stabilità del velivolo, deve essere considerato solamente il carico aerodinamico, rappresentato da una funzione lineare dello

spostamento $w(x, y, t)$ e delle sue derivate parziali, più dei termini utili a descrivere alcuni aspetti pertinenti il campo di moto del fluido. Altri eventuali disturbi esterni non sono considerati. Per quanto detto, la distribuzione di pressione indotta $\Delta p(x, y, t)$ può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \Delta p(x, y, t) = & \sum_{j=1}^n \left[a_j(x, y) \xi_j(t) + b_j(x, y) \dot{\xi}_j(t) + c_j(x, y) \ddot{\xi}_j(t) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^N d_j(x, y) \lambda_j(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove il termine λ costituisce la j -esima variabile associata al flusso; essa ha la stessa unità di misura delle coordinate generalizzate. Il numero totale di queste variabili è pari a N . La forza generalizzata corrispondente diviene quindi

$$\begin{aligned} \Xi_i(t) = & \iint_{\text{piastra}} \Delta p(x, y, t) \phi_i(x, y) dx dy = \\ & = \rho_\infty \frac{U^2}{b^2} \left[\sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \xi_j + \frac{b}{U} b_{ij} \dot{\xi}_j + \frac{b^2}{U^2} c_{ij} \ddot{\xi}_j \right) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \lambda_j \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove ρ_∞ indica la densità del flusso indisturbato a monte della superficie portante, b la semi-corda di riferimento ed U la velocità di volo. Appare evidente dall'equazione come tutti gli effetti aerodinamici dipendano in modo direttamente proporzionale dalla densità: essi diventano trascurabili per ρ_∞ tendente 0. E' ora possibile riscrivere l'equazione 3.11:

$$\begin{aligned} & \frac{b^2}{U^2} \left(M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i \right) - \rho_\infty \frac{b^2}{U^2} \sum_{j=1}^n c_{ij} \ddot{\xi}_j - \rho_\infty \frac{b}{U} \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{\xi}_j + \\ & - \rho_\infty \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j - \rho_\infty \sum_{j=1}^N d_{ij} \lambda_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.16)$$

In presenza di termini relativi al campo di moto del fluido ($N > 0$), sono necessarie delle equazioni aggiuntive per risolvere il sistema. Esse hanno la seguente forma:

$$[A] \{ \dot{\lambda} \} + \frac{U}{b} \left\{ \{ \lambda \} - [E] \{ \xi \} \right\} = 0 \quad (3.17)$$

Le matrici $[A]$ ed $[E]$ si ottengono da simulazioni CFD (computational fluid dynamics), da test sperimentali o da teorie di aerodinamica instazionaria.

Il sistema dunque è costituito da $n + N$ (il numero di modi strutturali sia elastici che rigidi più il numero di variabili aerodinamiche) equazioni differenziali

lineari omogenee, la cui soluzione è rappresentata da una funzione esponenziale dipendente dal tempo:

$$\xi_i(t) = \bar{\xi}_i e^{\nu t} \quad (3.18a)$$

$$\lambda_i(t) = \bar{\lambda}_i e^{\nu t} \quad (3.18b)$$

Sostituendo nelle equazioni 3.16 e 3.17, si ottiene un sistema di $n + N$ equazioni algebriche, lineari ed omogenee, che di seguito sono riportate in forma matriciale:

$$\begin{cases} [p^2[M] + \frac{b^2}{U^2}[M\omega^2]] - \rho_\infty [p^2[c] + p[b] + [a]] \{\bar{\xi}\} - \rho_\infty [d] \{\bar{\lambda}\} = \{0\} \\ [p[A] + [I]] \{\bar{\lambda}\} - [E] \{\bar{\xi}\} = \{0\} \end{cases} \quad (3.19)$$

con $p = b\nu/U$ autovalore adimensionale ed $[M]$ matrice diagonale contenente gli elementi M_i . La soluzione non banale si ricava annullando il determinante del vettore formato da $\bar{\xi}_i$ e $\bar{\lambda}_i$. Si ottiene quindi un polinomio di grado $2n + N$, le cui soluzioni sono costituite da n_c radici complesse coniugate e n_r radici reali (tali che $2n + N = 2n_c + n_r$). Le radici complesse hanno la seguente forma:

$$\nu_k = \frac{Up_k}{b} = \Gamma_k \pm i\Omega_k \quad k = 1, 2, \dots, n_c \quad (3.20)$$

Lo stesso vale per le radici reali, per le quali tuttavia $\Omega_k = 0$. Gli spostamenti in direzione z si calcolano allora come:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n_c+n_r} \left\{ w_k(x, y) e^{(\Gamma_k + i\Omega_k)t} + \bar{w}_k(x, y) e^{(\Gamma_k - i\Omega_k)t} \right\} \quad (3.21)$$

con

$$w_k(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i(k) \phi_i(x, y) \quad k = 1, 2, \dots, n_c + n_r \quad (3.22)$$

e \bar{w}_k suo complesso coniugato. Ogni addendo della sommatoria che compare nell'equazione 3.21 rappresenta un'oscillazione armonica modificata dalla funzione esponenziale. La risposta dinamica del sistema è strettamente legata al segno di ciascun termine Γ_k . Il significato fisico di Γ_k e Ω_k è il seguente:

- il valore negativo di Γ_k è noto come smorzamento modale del modo k -esimo;
- Ω_k rappresenta la frequenza modale.

Per valori di frequenza modale non nulli si hanno oscillazioni convergenti, divergenti o armoniche per valori di Γ_k rispettivamente negativi, positivi o nulli: tale comportamento è illustrato in figura 3.5. Dal punto di vista della stabilità ciò si traduce in una risposta dinamicamente stabile ($\Gamma_k < 0$) o instabile ($\Gamma_k > 0$). Valori

nulli di smorzamento modale costituiscono il limite di stabilità. Riferendosi ad un sistema aeroelastico, la risposta dinamica instabile indica il flutter, mentre il limite di stabilità corrispondente al moto puramente armonico è detto *flutter boundary* (limite a flutter). In tabella 3.1 sono riportate tutte le possibili combinazioni di smorzamento modale e frequenza modale, con le corrispondenti tipologie di moto e caratteristiche di stabilità. Si noti che la risposta dinamica è caratterizzata da $\Omega_k \neq 0$. Tuttavia le equazioni generalizzate del moto forniscono anche le soluzioni al problema aeroelastico statico della divergenza, caratterizzato da valori di frequenza modale nulli.

Γ_k	Ω_k	Tipo di moto	Caratteristiche di stabilità
< 0	$\neq 0$	oscillazioni convergenti	stabile
$= 0$	$\neq 0$	puramente armonico	limite di stabilità
> 0	$\neq 0$	oscillazioni divergenti	instabile
< 0	$= 0$	convergenza continua	stabile
$= 0$	$= 0$	indipendente dal tempo	limite di stabilità
> 0	$= 0$	divergenza continua	instabile

Tabella 3.1: Tipologie di moto e caratteristiche di stabilità al variare dello smorzamento e della frequenza modali.

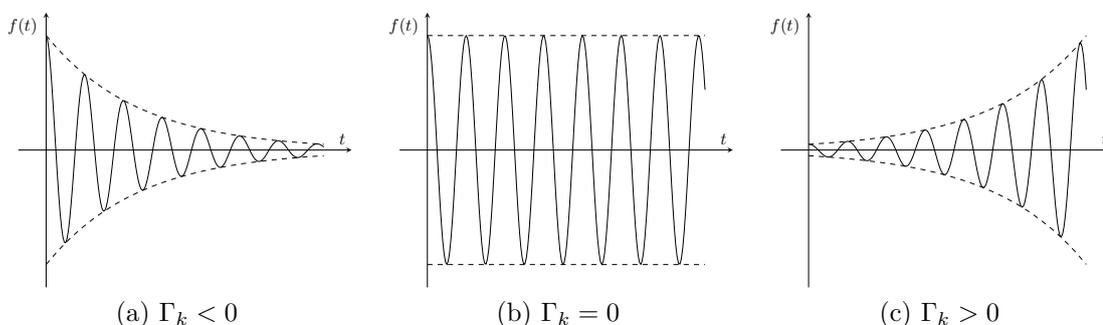


Figura 3.5: Risposta dinamica di un sistema aeroelastico al variare dello smorzamento modale.

Il metodo illustrato in questo paragrafo per la determinazione delle caratteristiche di stabilità di un sistema aeroelastico è conosciuto come metodo- p . Questa definizione è dovuta alla presenza dell’autovalore complesso adimensionale o autovalore ridotto $p = b\nu/U$ nell’equazione 3.19. L’introduzione di una teoria aerodinamica in grado di descrivere accuratamente i carichi indotti dal moto delle superfici portanti è necessaria al fine di predire con buona approssimazione il fenomeno del flutter.

Nel seguito saranno descritti i principali metodi di analisi utilizzati per prevedere l'insorgere dell'instabilità dinamica e le sue caratteristiche.

3.2.2 Analisi classica a flutter

L'analisi classica a flutter fu utilizzata nell'industria aeronautica per la determinazione del flutter delle superfici portanti fino alla seconda metà degli anni '70, con l'obiettivo di individuare le condizioni di volo corrispondenti al limite di stabilità dinamica. Come descritto in precedenza, il limite a flutter è caratterizzato da un moto puramente armonico dei modi di vibrare. Si assume inoltre che a velocità inferiori la risposta dinamica sia convergente e quindi il sistema stabile.

L'ipotesi su cui è fondata l'analisi classica a flutter è che la soluzione sia rappresentata da un moto puramente armonico. Essendo questa specificata, le equazioni del moto sono risolte per le condizioni di volo corrispondenti alla soluzione stessa. Diversamente dal metodo- p quindi, il quale prevede di risolvere il problema agli autovalori per diverse condizioni operative, l'analisi classica a flutter non permette di ricavare lo smorzamento modale per qualsiasi velocità di volo. Di conseguenza è possibile determinare unicamente la locazione del limite di stabilità, mentre non si ha alcuna informazione sulle caratteristiche a flutter. Ciò costituisce ovviamente una carenza del metodo, d'altro canto esso richiede i carichi aerodinamici instazionari solamente per il moto puramente armonico della superficie portante. Poiché l'ampiezza del moto oscillatorio è relativamente contenuta, tali carichi possono essere calcolati ricorrendo ad una teoria aerodinamica lineare: si assume allora che il moto e lo spessore della struttura portante creino un disturbo del flusso tale che la perturbazione della velocità del flusso sia molto inferiore rispetto alla velocità indisturbata a monte.

A titolo di esempio, si consideri un profilo alare giacente sul piano xz . Si indichino con h (traslazione in direzione z) e θ (rotazione attorno all'asse elastico) i suoi gradi di libertà. Poiché si ipotizza che il moto sia puramente armonico, essi sono rappresentati dalle seguenti espressioni in funzione del tempo:

$$h(t) = \bar{h}e^{i\omega t} \quad (3.23a)$$

$$\theta(t) = \bar{\theta}e^{i\omega t} \quad (3.23b)$$

dove ω è la frequenza. Pur avendo la medesima frequenza, h e θ potrebbero non essere in fase. Matematicamente è possibile descrivere questa condizione rappresentando l'ampiezza $\bar{\theta}$ come un numero reale e \bar{h} come un numero complesso. La teoria aerodinamica lineare impone che la portanza L ed il momento di beccheggio

M siano anch'essi funzioni armoniche di frequenza ω :

$$L(t) = \bar{L}e^{i\omega t} \quad (3.24a)$$

$$M(t) = \bar{M}e^{i\omega t} \quad (3.24b)$$

Le ampiezze \bar{L} e \bar{M} dipendono dalla densità ρ_∞ del flusso indisturbato a monte, dalla semi-corda del profilo b , dai gradi di libertà del sistema e dalle funzioni complesse ℓ_h , ℓ_θ , m_h e m_θ rappresentanti i coefficienti aerodinamici adimensionali. Questi dipendono dalla frequenza ridotta k e dal Mach M_∞ del flusso indisturbato a monte, calcolati come:

$$k = \frac{b\omega}{U} \quad (3.25)$$

$$M_\infty = \frac{U}{c_\infty} \quad (3.26)$$

La dipendenza dal Mach è correlata agli effetti della compressibilità sui coefficienti aerodinamici. La frequenza ridotta è una misura dell'instabilità del flusso ed ha un valore compreso tra 0 e 1 per i velivoli convenzionali. La velocità alla quale insorge il flutter corrisponde a specifici valori di k e M_∞ ed è calcolata iterativamente. Questo metodo di risoluzione fu introdotto da Theodorsen nel 1934: egli presentò la prima analisi a flutter di un'ala bidimensionale immersa in un flusso compressibile comprensiva di carichi aerodinamici instazionari.

Dal punto di vista ingegneristico le limitazioni dell'analisi classica sono principalmente due: l'impossibilità di stabilire un margine di stabilità alle condizioni di volo nell'intorno del limite a flutter e l'incapacità di comprendere il meccanismo fisico responsabile dell'instabilità. Queste informazioni sono indispensabili al fine di apportare modifiche al design tali da alleviare o eliminare l'instabilità. Se il modello di aerodinamica instazionaria è sufficientemente evoluto, il metodo p è in grado di soddisfare i requisiti descritti. Metodi alternativi utilizzati in ambito ingegneristico sono di seguito esposti.

3.2.3 Metodo- k

Successivamente all'analisi presentata da Theodorsen furono sviluppate numerose tecniche per l'individuazione del limite di stabilità. Fu introdotto nelle analisi a flutter un parametro utile a simulare l'effetto dello smorzamento strutturale. Le prime osservazioni evidenziarono come l'energia dissipata ad ogni ciclo durante un'oscillazione puramente armonica fosse proporzionale al quadrato dell'ampiezza ma indipendente dalla frequenza. Questo comportamento può essere descritto da una forza di smorzamento proporzionale allo spostamento e in fase con la velocità.

Considerando nuovamente una sezione tipica (il profilo alare) si introducono nelle equazioni del moto i termini di smorzamento strutturale così definiti:

$$D_h = \overline{D}_h e^{i\omega t} = -ig_h m \omega_h^2 \overline{h} e^{i\omega t} \quad (3.27a)$$

$$D_\theta = \overline{D}_\theta e^{i\omega t} = -ig_\theta I_p \omega_\theta^2 \overline{\theta} e^{i\omega t} \quad (3.27b)$$

con

- m massa del sistema;
- I_p momento di inerzia della sezione calcolato rispetto all'asse elastico;
- $\omega_h = \sqrt{h_h/m}$, $\omega_\theta = \sqrt{k_\theta/I_p}$ frequenze naturali disaccoppiate a velocità nulla;
- g_h , g_θ coefficienti di smorzamento, con valori compresi tra 0,01 e 0,05.

Il valore dei coefficienti di smorzamento può essere stabilito a priori o divenire un'incognita al pari della frequenza ω . In quest'ultimo caso è necessario applicare un metodo iterativo per ricavare la soluzione. L'output dell'analisi è costituito da due coppie di numeri reali (ω_1, g_1) e (ω_2, g_2) , che possono essere diagrammati in funzione della velocità dell'aria U o della velocità ridotta $1/k$.

I grafici dei coefficienti di smorzamento g_1 e g_2 al variare della velocità possono indicare il margine di stabilità nei pressi del limite a flutter. L'importanza di questi diagrammi fu tale che inizialmente si parlò di “metodo $U-g$ ”. I valori di g_1 e g_2 corrispondenti ad ogni frequenza ridotta k possono essere interpretati come i coefficienti di smorzamento richiesti per avere un moto puramente armonico (ipotesi alla base del metodo) rispettivamente alle frequenze ω_1 e ω_2 . Lo smorzamento introdotto è un artificio per ottenere il moto desiderato. L'informazione sul meccanismo fisico che causa l'instabilità è fornita dal diagramma frequenza-velocità, in aggiunta ai grafici di smorzamento. I valori di frequenza lungo l'asse $U = 0$ corrispondono ai modi accoppiati del sistema strutturale dinamico di partenza. All'aumentare della velocità dell'aria, l'andamento delle frequenze può indicare il trasferimento di energia da un modo all'altro.

Il metodo- k è ancora oggi utilizzato in ambito industriale per la sua velocità. Tuttavia imporre un moto puramente armonico con l'introduzione di uno smorzamento strutturale artificiale costituisce una formulazione matematica impropria. Ciò comporta in alcuni casi una rappresentazione non corretta del comportamento dinamico del sistema, con conseguenze critiche sul design. Nel 1971 Hassig dimostrò attraverso risultati numerici che il metodo- k per l'analisi a flutter può indicare un accoppiamento improprio tra i diversi modi. Per questa ragione è preferibile ricorrere a metodi alternativi, quali il metodo- pk descritto di seguito.

3.2.4 Metodo- pk

Il metodo- pk è un compromesso tra i metodi descritti in precedenza. Esso è basato infatti sul metodo- p , imponendo però che la matrice $[AIC]$ dei termini aerodinamici instazionari, anche noti come coefficienti di influenza aerodinamica, sia calcolata considerando un moto puramente armonico. Utilizzando un valore arbitrario di frequenza ridotta $k = b\omega/U$ per il calcolo della matrice $[AIC(ik)]$, il determinante del sistema contenente le equazioni del moto generalizzate diviene:

$$\left| p^2 [M] + \frac{b^2}{U^2} [M] [\omega^2] - \rho_\infty [AIC(ik)] \right| = 0 \quad (3.28)$$

Dato un set di valori iniziali di tentativo per k , ad esempio $k_0 = b\omega_i/U$ per l' i -esima radice, l'equazione 3.28 costituisce un classico problema agli autovalori e può essere risolta rispetto a p . Il risultato è generalmente costituito da una serie di coppie di radici complesse coniugate e alcune radici reali. Selezionando una delle radici complesse e indicando la soluzione iniziale con

$$k_1 = |\Im(p)| \quad \gamma_1 = \frac{\Re(p)}{k_1} \quad (3.29)$$

è possibile calcolare la nuova matrice $[AIC(ik)]$, che sostituita nell'equazione 3.28 conduce a nuovi valori di p , tali che

$$k_2 = |\Im(p)| \quad \gamma_2 = \frac{\Re(p)}{k_2} \quad (3.30)$$

Seguendo questo schema iterativo si giunge a convergenza per ogni radice. Questa tecnica fu presentata per la prima volta nel 1965 da Irwin e Guyett.

Il maggior vantaggio del metodo- pk è la possibilità di utilizzare carichi aerodinamici formulati per un moto puramente armonico. Inoltre occorre considerare il costo computazionale: a differenza del metodo- k non sono richieste numerose iterazioni a densità costante per assicurare la corrispondenza tra numero di Mach, velocità e altitudine di volo. In conclusione, benché il metodo- k sia diffuso per via della sua velocità, qualora sia richiesta una buona accuratezza e il metodo- p non sia applicabile, gli ingegneri ricorrono al metodo- pk .

3.2.5 Aerodinamica instazionaria

Per un'analisi aeroelastica dettagliata è necessario ricorrere a modelli aerodinamici instazionari che considerino tutti i fenomeni fisici che si manifestano durante il moto oscillatorio di una superficie portante.

La portanza e il momento di beccheggio sono costituiti da due contributi, dovuti a effetti circolatori e non circolatori. I vortici sono parte integrante del processo di generazione della componente circolatoria della portanza. Fondamentalmente, poiché vi è una differenza di velocità tra il ventre ed il dorso di un profilo alare, il profilo di velocità attorno ad esso può essere rappresentato come la somma di un termine costante e di un vortice. L'intensità di quest'ultimo cambia nel tempo, sia in modulo che in direzione, a causa del moto del profilo. Le teorie aerodinamiche stazionarie non includono nelle forze circolatorie gli effetti dei vortici. Secondo il teorema di Helmholtz, la vorticità totale calcolata entro una linea chiusa contenente un insieme di particelle fluide deve essere nulla. Ciò significa che, se un vortice rotante in senso orario si sviluppa sul profilo, nel flusso si formerà un vortice con la stessa intensità e rotante in senso opposto. La presenza del vortice comporta un cambiamento del campo di moto, generando un flusso instazionario sul profilo. Questo comportamento dipende dall'intensità del vortice e dalla sua distanza dal profilo.

Minor importanza hanno gli effetti non circolatori, anche noti come effetti di inerzia e di massa apparente. Essi sono dovuti ad un'accelerazione non nulla della superficie portante, che trascina con sé le particelle d'aria che la circondano. Poiché l'aria ha una massa finita, si generano delle forze inerziali che si oppongono all'accelerazione.

Ricapitolando, le teorie aerodinamiche instazionarie devono includere gli effetti di tre principali fenomeni fisici:

- il cambiamento dell'angolo di attacco del profilo (e quindi della portanza) dovuto al moto relativo rispetto alla corrente che lo investe;
- la modifica dell'angolo di attacco dovuto al *downwash* indotto dai vortici generati in prossimità del bordo di fuga del profilo a causa del moto del profilo stesso;
- gli effetti inerziali apparenti che influiscono sulla portanza e sul momento di beccheggio, senza tuttavia modificare l'angolo di attacco.

Altri fenomeni che incidono sul flutter sono la compressibilità, gli effetti tridimensionali, lo spessore del profilo, la separazione del flusso e lo stallo. La “unsteady thin-airfoil theory” di Theodorsen e la “finite-state unsteady thin-airfoil theory” di Peters costituiscono due esempi di modelli di aerodinamica instazionaria, entrambi basati sulla teoria del flusso potenziale e comprensivi degli effetti della vorticità, del moto relativo del profilo rispetto all'aria e degli effetti inerziali apparenti.

3.3 Flutter nelle turbomacchine

Le prime indicazioni sul manifestarsi del flutter nelle turbomacchine apparirono nella letteratura tecnica a partire dalla seconda metà degli anni '40^[28]. I primi reports descrivevano come i cedimenti delle palette fossero dovuti a modi di vibrare flessionali piuttosto che torsionali. Inizialmente ci si concentrò sulle condizioni operative in prossimità dello stallo. I rimedi più diffusi consistevano nell'irrigidire le palette così da garantire uno smorzamento meccanico sufficiente o nell'utilizzare tip-shrouds. Le moderne turbomacchine, caratterizzate da palette con aspect ratio elevato e in alcuni casi, specialmente per il fan, da campi di moto transonici, sono maggiormente soggette al flutter. Tuttavia è difficile trovare in letteratura testimonianze di failures dovute a flutter. Ciò avviene, ovviamente, poiché pubblicizzare eventi simili comporterebbe un danno per l'immagine delle aziende produttrici. Rare descrizioni di problemi aeroelastici riguardanti le turbomacchine si possono trovare in forma di brevi note su riviste scientifiche specializzate. Alcuni esempi di failures sono di seguito riportate. Negli anni '70 furono eseguiti degli studi sul motore F100 sviluppato per il velivolo militare F-15 che evidenziarono cedimenti dovuti a problemi aeroelastici. Nel Gennaio 1989 un Boeing 737-400 precipitò nei pressi dell'East Midlands Airport in Gran Bretagna: secondo l'*Air Accidents Investigation Branch* il motivo dell'incidente fu il cedimento a fatica di una pala del fan, che innescò l'incendio di uno dei motori. Alcune cricche furono rinvenute nel terzo stadio del compressore del motore Volvo progettato per il velivolo militare svedese SAAB JAS (1990). L'innescò di cricche sulle pale del quarto stadio di turbina del motore F100-229 fu anche la causa della limitata vita operativa di questo propulsore (1991). Sempre nello stesso anno due motori F101 che equipaggiavano i bombardieri B-1B dell'aeronautica statunitense presentarono il cedimento del primo stadio del fan.

Come detto in precedenza, il flutter è una vibrazione instabile auto-eccitata di un corpo immerso in una corrente, derivante dall'interazione continua tra il fluido e la struttura. Il fenomeno del flutter a cui sono soggette le pale di una turbomacchina si differenzia dall'instabilità che coinvolge altre superfici portanti, come ad esempio l'ala di un velivolo^[29]. L'elevato rapporto tra la massa della schiera di pale e la massa d'aria che la investe fa sì che il flutter nelle turbomacchine sia un fenomeno che coinvolge un singolo modo di vibrare: le forze aerodinamiche, inferiori rispetto alle forze inerziali, non sono infatti in grado di causare un accoppiamento dei modi. Il flutter di un'ala è invece il risultato dell'accoppiamento tra i modi flessionale e torsionale. Inoltre in quest'ultimo caso i modi aeroelastici differiscono significativamente, sia in frequenza che per forma modale, dai modi strutturali.

Questo solitamente non avviene nelle turbomacchine. Il fenomeno del flutter nelle turbomacchine è un problema di difficile previsione e interpretazione: le distorsioni del flusso dovute alle schiere palettate, l'accoppiamento dei modi e la perdita di periodicità della vibrazione dovuta agli effetti aerodinamici e alle differenze di manifattura delle pale (caratteristica nota come *mistuning*) sono infatti aspetti ancora oggi non del tutto compresi.

Le turbomacchine sono soggette a quattro tipologie di flutter, che si manifestano in diverse condizioni operative (figura 3.6):

- flutter classico, si presenta quando il flusso è aderente alla pala e vi è un ritardo di fase tra le forze aerodinamiche e l'ampiezza di vibrazione. Se il flusso immette energia in una struttura non smorzata, si instaurano oscillazioni incontrollate (instabilità). Viceversa, se il flusso assorbe energia dalla struttura, il risultato è una condizione di stabilità. Ancora, nel caso in cui l'energia introdotta dal flusso sia bilanciata dall'energia dissipativa del sistema, si originano le cosiddette *oscillazioni di ciclo limite* (LCO);
- flutter di stallo, si verifica quando le condizioni operative sono prossime al limite di stallo della turbomacchina. Questo fenomeno interessa in particolare il primo stadio del fan ed è dovuto ad un aumento di incidenza della pala, con conseguente separazione del flusso;
- flutter supersonico non stallato, interessa particolarmente le pale “shrouded” del fan. Avviene in presenza di un flusso supersonico, ma aderente alla pala e non stallato. Le vibrazioni indotte coinvolgono solitamente il modo torsionale del bladed disk;
- choke flutter. Tipico degli ultimi stadi dei compressori, è causato dalla diminuzione di incidenza della pala: ciò comporta la separazione del flusso attraverso un'onda d'urto che può eccitare i modi di vibrare della pala. Questa tipologia di flutter si incontra per condizioni operative vicine alla *choke line* della turbomacchina.

Essendo un fenomeno aeroelastico, il flutter è influenzato da numerosi parametri di natura aerodinamica e strutturale: un elenco dettagliato è riportato da Srinivasan^[30]. Chiaramente alcuni di essi sono predominanti in certe specifiche condizioni. I parametri più influenti sono:

- frequenza ridotta (equazione 3.25). Questo parametro può essere interpretato come il rapporto tra il tempo necessario alla particella fluida per percorrere una distanza pari alla semi-corda b ed il tempo impiegato dal profilo per

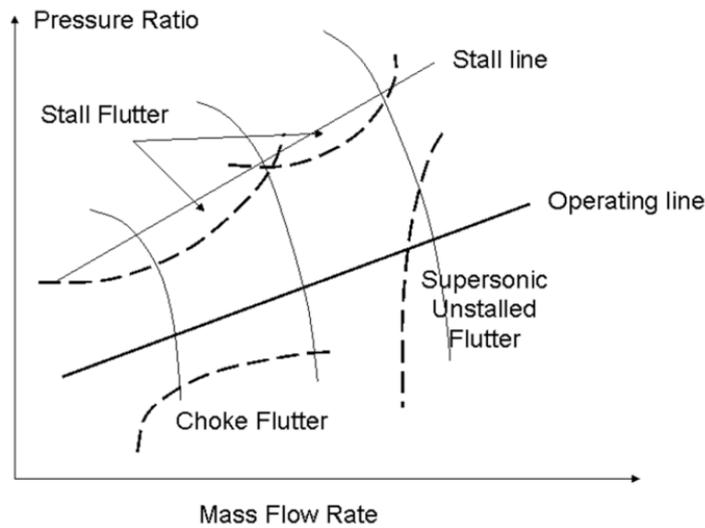


Figura 3.6: Mappa di un compressore e rappresentazione delle ragioni di flutter^[1].

compiere un'oscillazione. Una definizione alternativa fu data da Platzer e Carta^[31], secondo i quali la frequenza ridotta è il rapporto tra la circonferenza di un cerchio di raggio b e la lunghezza d'onda λ della scia (figura 3.7):

$$k = \frac{2\pi b}{\lambda} \quad (3.31)$$

Dall'equazione 3.31 è facile osservare come la frequenza ridotta diminuisca all'aumentare della lunghezza d'onda della scia. Per piccoli valori di k il flusso è quasi-stazionario, mentre per valori elevati predominano gli effetti instazionari. Per $k \sim 1$ occorre considerare sia i fenomeni stazionari che instazionari. Nel 1960 Armstrong e Stevenson stabilirono alcune regole empiriche secondo le quali, per evitare lo *stall flutter*, il parametro k dovesse essere minore di 0,33 per la frequenza flessionale e superiore a 1,6 per la frequenza torsionale. Diverse regole empiriche sono oggi utilizzate per una progettazione sicura delle palette delle turbomacchine;

- pressione di ingresso. Alcuni test condotti nella seconda metà degli anni '70 dimostrarono che le condizioni di ingresso influenzano il limite a flutter. La pressione di ingresso è direttamente proporzionale alla densità del fluido, che a sua volta influisce sul lavoro instazionario. All'aumentare della pressione si verifica quindi un incremento del lavoro instazionario e, di conseguenza, dello



Figura 3.7: Interpretazione della frequenza ridotta secondo Platzler e Carta^[31].

smorzamento aerodinamico. pertanto, a seconda del segno dello smorzamento aerodinamico, la crescita della pressione di ingresso può avere un effetto stabilizzante o destabilizzante;

- interblade phase angle. Considerando un modo rotante ben definito, il moto di una pala è identico al moto delle pale adiacenti, ad eccezione di una differenza di fase. Ogni pala descrive quindi lo stesso moto, ma in tempi differenti rispetto alle altre. L'IBPA rappresenta dunque una relazione tra le fasi. Questo parametro, caratteristico delle strutture in simmetria ciclica, è così definito:

$$IBPA = \frac{2\pi ND}{N} \quad (3.32)$$

con ND diametro nodale e N numero di settori;

- mistuning, ovvero la mancanza di simmetria in una struttura reale idealmente simmetrica, come ad esempio un bladed disk. Il mistuning può essere intrinseco a causa delle differenze tra le pale rispetto alla geometria nominale, delle disomogeneità del materiale e delle superfici di contatto dei giunti oppure indotto intenzionalmente. Il mistuning interrompe la simmetria ciclica tipica delle turbomacchine e previene l'insorgere del flutter. La conseguenza è una perturbazione della risposta dinamica della pala in termini di uniformità dell'ampiezza di oscillazione e di differenza di fase tra pale adiacenti. Ciò può produrre una variazione dello smorzamento aerodinamico.

3.3.1 Limit cycle oscillations (LCOs)

Per limitare le vibrazioni delle forze eccitanti a cui le turbomacchine sono soggette e incrementarne la vita a fatica, si utilizzano dei sistemi smorzanti costituiti da *friction dampers* o giunti che dissipano energia per mezzo delle forze di attrito. I principali dispositivi di smorzamento progettati per i dischi palettati di turbina sono:

- *blade root joints*. Lo scorrimento tra le superfici di contatto della pala e del disco nella zona di incastro genera delle forze di attrito che permettono la dissipazione di energia^[32]. La forza centrifuga genera la pressione necessaria a mantenere la pala in contatto con il disco, mentre gli spostamenti relativi sono dovuti alle forze eccitanti dei gas agenti sull'airfoil;
- *underplatform dampers* (UPDs), componenti metallici posti al di sotto dello shank della pala e mantenuti in contatto con essa dalla forza centrifuga dovuta alla rotazione dell'albero. L'energia è dissipata per mezzo delle forze di attrito al contatto tra la pala e lo smorzatore^[33];
- il contatto tra due pale adiacenti collegate per interferenza allo shroud o mediante *snubber*.

Inoltre, questi possono essere impiegati per evitare l'insorgere di oscillazioni instabili dovute a flutter. I sistemi maggiormente utilizzati a tal fine sono le interfacce pala-disco e gli UPDs.

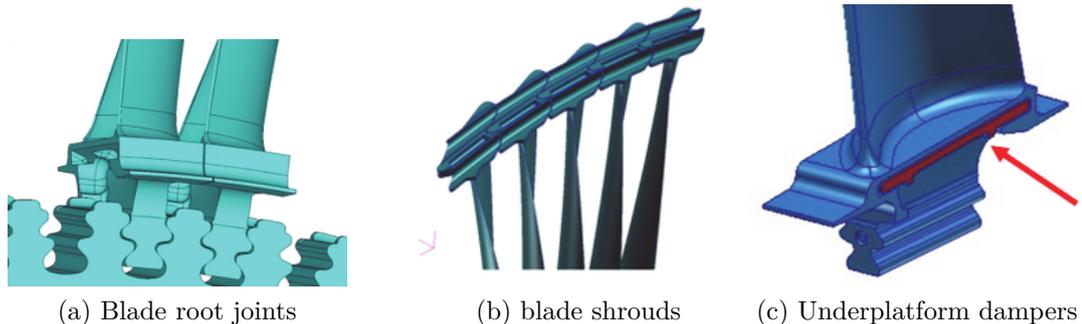


Figura 3.8: Differenti tipologie di friction contacts^[34].

Le frequenze ed i modi di vibrare dipendono dalle condizioni di contatto^[35]. Gli effetti non lineari dovuti al contatto tra le interfacce possono eliminare la crescita esponenziale dell'ampiezza di oscillazione a flutter e dare origine ad un moto periodico caratterizzato dalle cosiddette *limit cycle oscillations* (LCOs). I parametri di contatto determinano la frequenza, la forma modale e l'ampiezza delle vibrazioni di ciclo limite. La scelta opportuna di questi parametri consente di evitare l'immediato cedimento a flutter della struttura e di aumentarne la vita a fatica. Di seguito sono riportate alcune proprietà delle LCOs:

- le oscillazioni di ciclo limite si instaurano quando l'energia immessa nel sistema eguaglia l'energia che esso cede;

- un sistema può presentare diverse tipologie di LCOs;
- ogni LCO ha la propria “zona di attrazione”. Se gli spostamenti e le velocità del sistema raggiungono valori che cadono all’interno di questa zona, si avranno vibrazioni periodiche stabili di ciclo limite dopo un transitorio;
- il periodo e l’ampiezza di ogni LCO dipendono unicamente dalle proprietà dinamiche del sistema e non dai valori iniziali di spostamento e velocità;
- le oscillazioni stabili di ciclo limite sono spesso separate da LCOs instabili che definiscono i limiti della zona di attrazione.

Le caratteristiche delle LCOs sono il risultato del bilancio energetico tra l’energia introdotta nel sistema dal flusso e l’energia dissipata per attrito a causa dello strisciamento delle superfici di contatto. In figura 3.9 sono rappresentate alcune possibili configurazioni di bilancio energetico: la curva tratteggiata indica l’energia aerodinamica, mentre la linea continua si riferisce all’energia dissipata. Se l’energia aerodinamica è maggiore dell’energia di dissipazione, il sistema è instabile (figura 3.9c). Viceversa, quando a prevalere è l’energia dissipata, il sistema è sempre stabile (figura 3.9d). All’intersezione tra le due curve si hanno invece le LCOs. Si può notare in figura 3.9b che se l’intensità delle vibrazioni è minore del livello di oscillazione stabile di ciclo limite, la loro ampiezza aumenta fino al raggiungimento dell’LCO. Al contrario, se il livello di vibrazione è maggiore, l’energia immessa nel sistema è inferiore rispetto all’energia dissipata e l’ampiezza diminuisce fino al raggiungimento dell’LCO.

A causa della difficoltà nel modellizzare il sistema in presenza di effetti non lineari, gli studi sull’LCO sono solitamente realizzati considerando teorie aerodinamiche linearizzate e metodi one-way coupled. Questi ultimi a loro volta si suddividono in aerodinamici e strutturali. Le potenzialità ed i benefici dei metodi strutturali sono facilmente intuibili: la capacità di prevedere il comportamento dinamico di un bladed disk in presenza di dispositivi di smorzamento in grado di limitare o eliminare l’instabilità permette infatti la progettazione di nuove architetture più efficienti e di minor peso, a beneficio delle prestazioni e della diminuzione di combustibile.

Un importante contributo alla ricerca e alla comprensione del fenomeno delle LCOs è stato dato da Griffin e Sinha, i quali hanno utilizzato un modello a parametri concentrati ad un grado di libertà includendo un contatto con attrito ed uno smorzamento viscoso negativo per simulare l’accoppiamento aerodinamico. Da citare sono inoltre gli studi di Corral, Gallardo e Martel, basati su un modello a parametri concentrati di un intero bladed disk con blade root joint: il calcolo dell’ampiezza dell’LCO avviene mediante bilancio energetico. Lo stesso Corral ha

presentato un metodo basato sull'integrazione nel tempo delle equazioni del moto e delle RANS (Reynolds average Navier-Stokes), risolvendo la non linearità dovuta al contatto mediante il metodo di Newton-Raphson. Petrov ha proposto nello stesso periodo un metodo generale basato sulle proprietà dell'*Harmonic Balance Method* (HBM)^[36]. Infine, Krack ha utilizzato un sistema dinamico a parametri concentrati per il calcolo dell'LCO di una struttura in simmetria ciclica considerando più modi con differenti valori di diametro nodale.

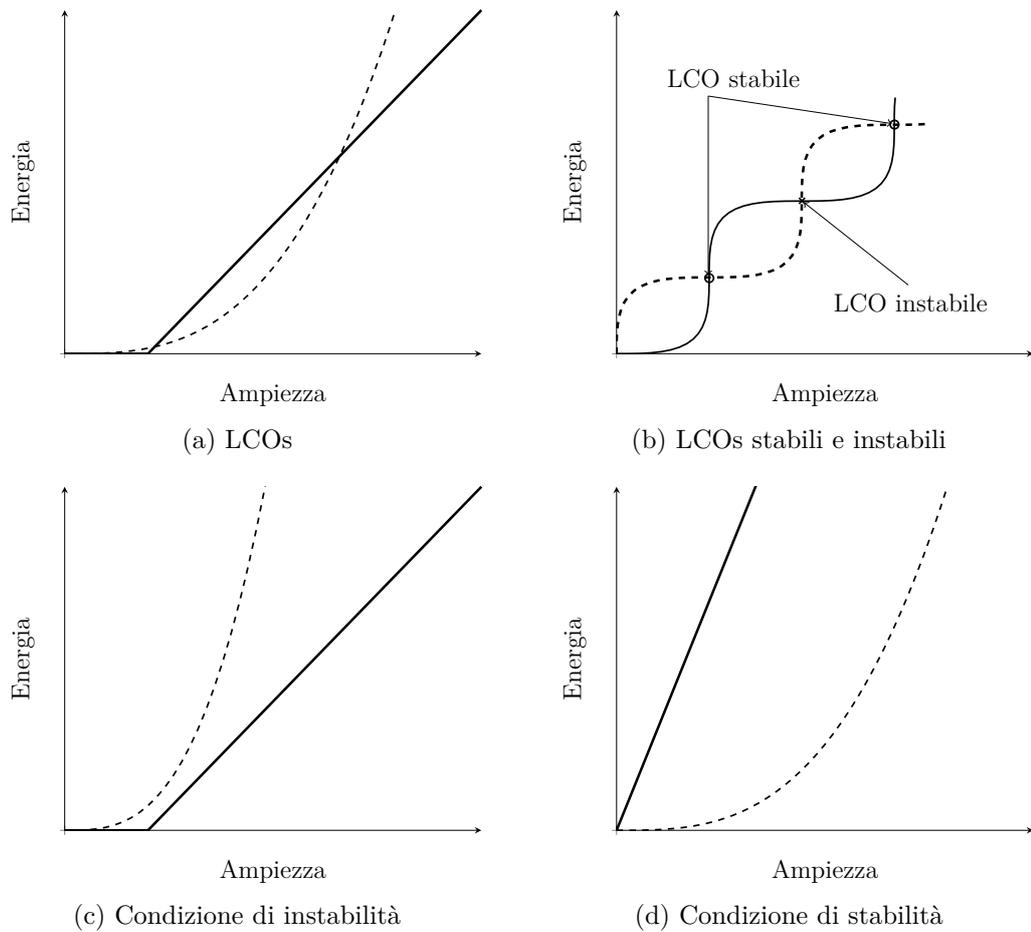


Figura 3.9: Energia *vs* ampiezza di vibrazione. La curva tratteggiata indica l'energia aerodinamica introdotta nel sistema, la linea continua rappresenta l'energia dissipata per attrito.

Capitolo 4

Analisi a flutter di un bladed disk

Nel presente capitolo verrà descritta la metodologia^{[1][2]} su cui si basa il software utilizzato durante l'attività di tesi per il calcolo delle oscillazioni di ciclo limite di un bladed disk. Si tratta di un metodo strutturale *one-way coupled* nel quale i coefficienti aeroelastici sono calcolati a priori mediante un solutore delle equazioni di Navier-Stokes e divengono gli input per l'analisi strutturale; tuttavia l'interazione non avviene nel senso opposto. L'obiettivo è la riduzione del costo computazionale necessario per la risoluzione delle equazioni del moto in presenza delle non linearità dovute al contatto tra pala e disco. A tale scopo sono state implementate due tecniche comunemente utilizzate per il calcolo della risposta forzata di strutture con friction contacts: il Reduced Order Model (ROM) e l'Harmonic Balance Method (HBM).

4.1 Linearizzazione e strategia di risoluzione del problema aeroelastico

Il software ha come obiettivo la risoluzione dell'equazione del moto per ogni grado di libertà del bladed disk. al fine di determinare la risposta dinamica del sistema. Per il problema aeroelastico in questione, l'equazione assume la forma seguente:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F_{eo}\} + \{F_{aer}(x)\} + \{F_{nl}(x)\} \quad (4.1)$$

$[M]$, $[C]$ e $[K]$ sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidità del bladed disk; $\{x\}$ è il vettore degli spostamenti. Per quanto riguarda i termini a destra dell'uguale, $\{F_{eo}\}$ rappresenta il vettore delle forze aerodinamiche periodiche dovute all'architettura del motore, determinate quindi dal numero di pale statoriche

e rotoriche di ogni stadio, con $\{F_{aer}\}$ si indica invece il vettore delle forze aerodinamiche periodiche non lineari dipendenti dal moto della pala. Come riportato all’inizio di questo capitolo, le prime sono legate all’engine order e catalogate come sincrone, mentre le seconde sono dette asincrone. Infine, il vettore $\{F_{nl}\}$ contiene le forze non lineari originate dallo scorrimento relativo delle superfici di contatto tra pala e disco in presenza di attrito. Poiché si pone l’attenzione sull’analisi a flutter per il calcolo dell’LCO, il contributo delle forze sincrone non è tenuto in considerazione, in quanto trascurabile rispetto alle forze $\{F_{aer}\}$. Per il calcolo delle forze aerodinamiche non lineari si ricorre all’ipotesi di piccole perturbazioni, che permette la linearizzazione delle equazioni RANS:

$$\{F_{aer}(x)\} = [AM] \{x\} \quad (4.2)$$

$[AM]$ è la matrice aerodinamica comprendente i coefficienti di smorzamento e rigidità aerodinamici (rispettivamente ζ_{aer} e η_{aer}). La matrice è quindi costituita da due termini, che definiscono lo smorzamento di isteresi:

$$[K_{aer}] = -\Re[AM] \quad (4.3)$$

include i termini che descrivono la rigidità aerodinamica agente sui gradi di libertà della pala;

$$[C_{aer}] = -\frac{\Im[AM]}{\omega} \quad (4.4)$$

si riferisce allo smorzamento aerodinamico agente anche in questo caso sulla pala. La matrice aerodinamica linearizzata può dunque essere riscritta come

$$[AM] = -[K_{aer}] - i\omega [C_{aer}] \quad (4.5)$$

Introducendo tale matrice nell’equazione del moto, nell’ipotesi di forze aerodinamiche sincrone trascurabili, essa diviene:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} + [AM] \{x\} = \{F_{nl}(x)\} \quad (4.6)$$

Poiché nel dominio del tempo le equazioni del moto risultano essere differenziali e non lineari, si preferisce risolverle nel dominio delle frequenze. Essendo tuttavia la frequenza un’ulteriore incognita, è necessaria un’equazione aggiuntiva per risolvere il problema. Quest’ultima è costituita dal bilancio energetico tra l’energia introdotta nel sistema dall’aerodinamica e l’energia dissipata dai blade root joints. Il lavoro che il fluido esegue sull’airfoil può essere calcolato per ogni nodo della discretizzazione FE per ogni ciclo di oscillazione come:

$$E_{aer} = \pi \Im\{\bar{x}\}^H \{\bar{F}_{aer}\} \quad (4.7)$$

4.1.1 Modello di contatto

Il termine $\{F_{nl}\}$ che compare nell'equazione 4.1 rappresenta le forze di attrito che nascono per effetto dello spostamento relativo tra le superfici di contatto di pala e disco. Queste costituiscono delle non linearità, poiché dipendono dalla soluzione stessa dell'equazione del moto. Il modello di contatto implementato nel software per il calcolo dell'ampiezza e della frequenza dell'LCO è basato sulla legge di attrito di Coulomb:

$$f_t(t) = \mu n(t) \quad (4.8)$$

$f_t(t)$ costituisce la generica forza di attrito, il cui valore massimo si ha in caso di slittamento tra le superfici di contatto ed è pari al prodotto tra il carico normale $n(t)$ ed il coefficiente di attrito μ . Il modello di contatto utilizzato^[37] è rappresentato in figura 4.1. Durante il moto vibratorio, gli elementi di contatto possono trovarsi nelle condizioni di aderenza (stick state), scivolamento (slip state) o separazione (lift-off). I criteri di transizione da uno stato all'altro sono dettagliatamente descritti da Yang, Chu e Menq^[38]. Si indicano con k_n e k_t rispettivamente la rigidezza normale e la rigidezza tangenziale; k_n permette di poter variare il carico normale una volta definito il precarico normale n_0 :

$$n(t) = n_0 + k_n v(t) \quad (4.9)$$

dove $v(t)$ è lo spostamento normale relativo. Il precarico n_0 , se negativo, rappresenta la distanza iniziale tra i due corpi e il suo valore in modulo è dato da $k_n e$,

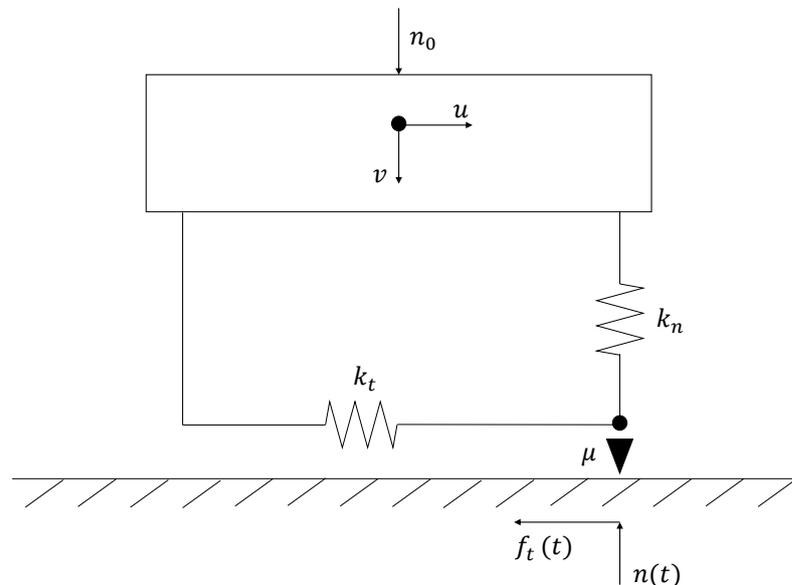


Figura 4.1: Modello di contatto.

prodotto tra la rigidità normale ed il gap iniziale. La separazione delle superfici avviene quando la forza normale di contatto è nulla, condizione che si realizza per:

$$v(t) < -\frac{n_0}{k_n} \quad (4.10)$$

Quando pala e disco si muovono l'una rispetto all'altro senza strisciare, il contatto è in condizione di aderenza (stick). Questa può essere considerata grazie alla rigidità tangenziale k_t :

$$f_t(t) = f_0 + k_t (u(t) - u_0) \quad (4.11)$$

$u(t)$ è lo spostamento relativo tra i due corpi in direzione tangenziale, u_0 e f_0 indicano rispettivamente lo spostamento relativo e la forza di contatto in direzione tangenziale quando avviene la transizione dalla condizione di scivolamento (slip state) a quella di aderenza. Al fine di considerare gli spostamenti relativi delle superfici di contatto in entrambe le direzioni, si utilizzano due modelli di contatto ortogonali con lo stesso precarico e la medesima rigidità normale. Il moto tangenziale dei componenti è quindi suddiviso in due oscillazioni indipendenti su piani ortogonali definiti dai due elementi di contatto.

I parametri di contatto (rigidità normale e tangenziale, coefficiente di attrito) possono essere determinati sperimentalmente, effettuando misurazioni sul ciclo di isteresi, o numericamente mediante opportuni software FEM e specifici modelli di contatto. Le rigidità possono essere calcolate come il rapporto tra una forza e lo spostamento corrispondente. La rigidità normale k_n varia in base al punto di funzionamento. Si faccia riferimento al diagramma di figura 4.2: a parità di spostamento si ottengono forze normali differenti e di conseguenza, diverse rigidità. Occorre pertanto misurare k_n considerando uno spostamento in prossimità del punto di funzionamento. Nell'ipotesi che non vi sia accoppiamento tra le rigidità, k_t deve essere calcolata in condizione di incipiente contatto, prima che si verifichi lo scivolamento (figura 4.3). Anch'essa dipende dal punto di applicazione dello spostamento. Si veda a tal proposito la figura 4.4: u_t deve essere sufficientemente lontano dalla superficie di contatto affinché la presenza dello smusso non influisca sulla misurazione. Tuttavia, per valori eccessivi della distanza d non si ottiene la misura della rigidità di contatto, ma della rigidità a flessione del corpo. Per i motivi ora esposti, stabilire le rigidità di contatto risulta essere un problema di difficile soluzione. In un sistema complesso come un bladed disk occorre inoltre considerare l'accoppiamento tra la rigidità normale e la rigidità tangenziale, dovuto alla deformazione della pala e del disco. Si ricorre quindi all'utilizzo di software in grado di svolgere analisi non lineari per la determinazione delle rigidità di contatto.

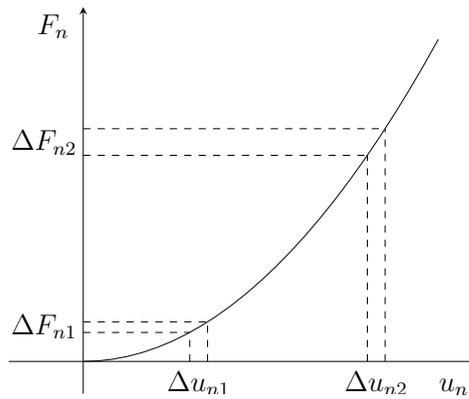


Figura 4.2: Diagramma qualitativo forza *vs* spostamento per la determinazione della rigidità di contatto normale.

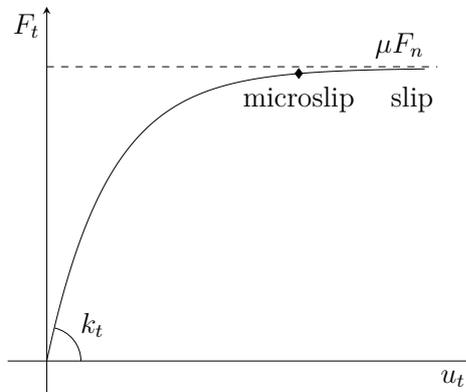


Figura 4.3: Diagramma qualitativo forza *vs* spostamento per la determinazione della rigidità di contatto tangenziale.

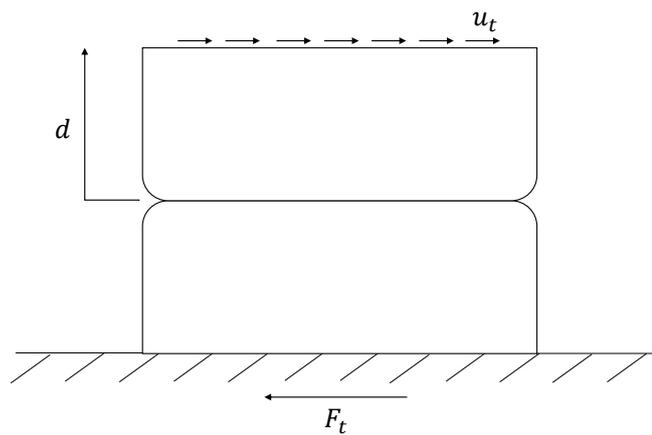


Figura 4.4: Applicazione dello spostamento u_t per la determinazione della rigidità di contatto tangenziale.

4.1.2 Reduced Order Model

La riduzione del bladed disk avviene grazie all'applicazione della simmetria ciclica, descritta in modo approfondito nel paragrafo 2.1. La struttura è infatti considerata *tuned*, si assume cioè che tutti i settori siano identici tra loro. Ogni settore, per effetto delle forze periodiche auto-eccitate che agiscono su di esso, vibra allo stesso modo dei settori adiacenti con una differenza di fase definita dall'IBPA (equazione 3.32). Queste ipotesi sono coerenti con il calcolo dei coefficienti aerodinamici, basato anch'esso sulla condizione di simmetria ciclica. Ricordando che i vettori dei gradi di libertà delle interfacce destra e sinistra del disco, $\{x_r\}$ e $\{x_l\}$, sono legati tra loro da una relazione del tipo:

$$\{x_l\} = \{x_r\} e^{iIBPA} \quad (4.12)$$

il vettore dei gradi di libertà del sistema può essere scritto come:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_l \\ x_r \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{iIBPA} & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ x_i \end{Bmatrix} = [T_{cs}] \{x_{cs}\} \quad (4.13)$$

dove $\{x_i\}$ è il vettore dei gradi di libertà interni del disco che non giacciono sulle interfacce, $[T_{cs}]$ è la matrice di riduzione e $\{x_{cs}\}$ il vettore dei gdl ridotti. Assegnato un certo diametro nodale, le matrici del settore appartenente alla struttura in simmetria ciclica diventano:

$$\begin{aligned} [m_{cs}] &= [T_{cs}]^H [m] [T_{cs}] \\ [c_{cs}] &= [T_{cs}]^H [c] [T_{cs}] \\ [k_{cs}] &= [T_{cs}]^H [k] [T_{cs}] \\ [am_{cs}] &= [T_{cs}]^H [AM] [T_{cs}] \\ \{f_{nl,cs}\} &= [T_{cs}]^H \{f_{nl}\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

con $[m]$, $[c]$ e $[k]$ matrici di massa, smorzamento e rigidità del singolo settore. $[T_{cs}]^H$ è l'hermitiana della matrice di trasformazione. L'equazione del moto si modifica come segue:

$$[m_{cs}] \{\ddot{x}_{cs}\} + [c_{cs}] \{\dot{x}_{cs}\} + [k_{cs}] \{x_{cs}\} + [am_{cs}] \{x_{cs}\} = \{f_{nl,cs}(x_{cs})\} \quad (4.15)$$

Il passaggio dal dominio fisico al dominio modale può essere effettuato riscrivendo gli spostamenti fisici come combinazione lineare di un numero finito di modi (paragrafo 2.3.4):

$$\{x_{cs}\} \simeq [\Psi_{cs}] \{q\} \quad (4.16)$$

$[\Psi_{cs}]$ rappresenta la matrice modale del settore per un determinato diametro nodale. Le matrici e i vettori che compaiono nell'equazione 4.15 possono essere riscritti introducendo gli spostamenti modali:

$$\begin{aligned}
 [I] &= [\Psi_{cs}]^H [m_{cs}] [\Psi_{cs}] \\
 [\Lambda_{cs}] &= [\Psi_{cs}]^H [c_{cs}] [\Psi_{cs}] \\
 [Z_{cs}] &= [\Psi_{cs}]^H [k_{cs}] [\Psi_{cs}] \\
 [Z_{aer,cs}] &= [\Psi_{cs}]^H [am_{cs}] [\Psi_{cs}] \\
 \{\Phi_{nl,cs}\} &= [\Psi_{cs}]^H \{f_{nl,cs}\}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Si ottiene quindi un set di equazioni disaccoppiate in forma modale in cui compaiono esclusivamente matrici diagonali:

$$[I] \{\ddot{q}\} + [Z_{cs}] \{\dot{q}\} + [\Lambda_{cs}] \{q\} + [Z_{aer,cs}] \{q\} = \{\Phi_{nl,cs}\} \tag{4.18}$$

con

$$[Z_{cs}] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \tag{4.19a}$$

$$[\Lambda_{cs}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{4.19b}$$

$$[Z_{aer,cs}] = \begin{bmatrix} \eta_{aer,1} + i\xi_{aer,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{aer,n} + i\xi_{aer,n} \end{bmatrix} \tag{4.19c}$$

e $[I]$ matrice identità. $\{\Phi_{nl,cs}\}$ costituisce infine il vettore delle forze di contatto modali per uno specifico diametro nodale.

4.1.3 Harmonic Balance Method

L'Harmonic Balance Method permette di ridurre il tempo di calcolo necessario per la risoluzione delle equazioni del moto non lineari. L'applicazione del metodo è possibile in quanto la periodicità delle forze aerodinamiche implica spostamenti e forze non lineari periodiche. Grazie a questa proprietà le grandezze al variare

del tempo si scrivono in serie di Fourier di ordine H (con H massimo numero di armoniche considerate). Di conseguenza, gli spostamenti e le forze divengono:

$$\{x\} = \{x\}^{(0)} + \Re \left(\sum_{h=1}^H \{\bar{x}\}^{(h)} e^{ih\omega t} \right) \quad (4.20)$$

$$\{f_{nl}\} = \{f_{nl}\}^{(0)} + \Re \left(\sum_{h=1}^H \{\bar{f}_{nl}\}^{(h)} e^{ih\omega t} \right) \quad (4.21)$$

dove ω è la frequenza di eccitazione e l'apice (0) indica le componenti statiche; $\{\bar{x}\}^{(h)}$ e $\{\bar{f}_{nl}\}^{(h)}$ sono i coefficienti di Fourier complessi.

Così facendo, l'equazione del moto differenziale del secondo ordine nel dominio del tempo si trasforma in un set di equazioni algebriche complesse nel dominio delle frequenze:

$$\left(-[I] \omega^2 + i\omega [Z_{cs}] + [\Lambda_{cs}] + i\omega [Z_{aer}] \right) = \{\Phi_{nl,cs}^{(1)}\} \quad (4.22)$$

4.1.4 Strategia di risoluzione del problema aeroelastico

Il primo passo per risolvere le equazioni del moto non lineari è la definizione di una opportuna soluzione iniziale di tentativo, in modo da facilitare la convergenza. Questa si ottiene da bilancio tra l'energia aerodinamica e l'energia dissipata dalle forze di attrito e dallo smorzamento strutturale, facendo variare l'ampiezza della coordinata modale del primo ordine $q^{*(1)}$ che moltiplica il solo modo instabile del bladed disk, nell'ipotesi che esso fornisca il maggior contributo energetico al flutter. L'intersezione tra la curva dell'energia aerodinamica e quella dell'energia dissipata nel punto stabile costituisce il punto iniziale di tentativo q_{tent} per la risoluzione iterativa del problema aeroelastico. L'espressione dell'energia aerodinamica in forma modale diviene:

$$E_{aer} = \pi \left(2q^{*(1)2} \omega_n^2 \xi_{aer} \right) \quad (4.23)$$

Analogamente per l'energia dissipata per effetto dello smorzamento strutturale della pala si ha:

$$E_{diss,str} = \pi \left(2q^{*(1)2} \omega_n^2 \xi \right) \quad (4.24)$$

Applicando l'HBM, l'energia dissipata dalle forze di attrito in serie di Fourier troncata al primo ordine è la somma di tutti i contributi prodotti dagli elementi di contatto:

$$E_{diss,c} = \sum_{i=1}^{N_c} \pi |\bar{u}_i^{(1)}| \Im \left(\bar{f}_{t,i}^{(1)} \right) \quad (4.25)$$

$\bar{u}_i^{(1)}$ rappresenta lo spostamento tangenziale relativo del primo ordine riferito all' i -esimo elemento di contatto. La soluzione iniziale di tentativo è un vettore di dimensioni $N_m \times 1$, con N_m numero di modi della riduzione modale. Le coordinate modali rappresentano l'incognita del problema e sono calcolate iterativamente, partendo appunto dal vettore di tentativo, mediante un algoritmo basato sul metodo di Newton-Raphson. Poiché per determinare le forze di contatto si è obbligati ad utilizzare le coordinate fisiche, all'interno dell'algoritmo occorre effettuare la trasformazione da spostamenti modali a fisici:

$$\{x^{(1)}\} = [\Psi_{cs}] \{\bar{q}^{(1)}\} \quad (4.26)$$

Devono poi essere calcolati gli spostamenti relativi cosicché gli input del modello di contatto siano i coefficienti di Fourier degli spostamenti relativi $\{\bar{u}^{(1)}\}$ e $\{\bar{v}^{(1)}\}$. Inoltre, le equazioni del moto sono formulate nel dominio delle frequenze, mentre il modello di contatto opera nel dominio del tempo: il passaggio da un dominio all'altro avviene grazie ad un metodo noto come Alternating Frequency Time (AFT). Nel dettaglio, si eseguono i seguenti passaggi:

- si applica l'Inverse Fast Fourier Transformation (IFFT) per il calcolo degli spostamenti relativi $u(t)$ e $v(t)$ a partire dai coefficienti di Fourier $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$;
- il modello di contatto descritto nel paragrafo 4.1.1 consente di determinare le forze $n(t)$ e $f_t(t)$;
- infine da queste ultime, mediante Fast Fourier Transformation (FFT), si calcolano i coefficienti di Fourier $n^{(1)}$ e $f_t^{(1)}$.

Si assembla quindi il vettore delle forze di contatto $\{f_{nl,cs}^{(1)}\}$, che in forma modale

$$\Phi_{nl,cs}^{(1)} = [\Psi_{cs}]^H \{f_{nl,cs}^{(1)}\} \quad (4.27)$$

verrà utilizzato per la risoluzione delle equazioni non lineari. Tuttavia il numero di incognite del problema è pari a $N_m + 1$: oltre alle coordinate modali è necessario ricavare la frequenza di vibrazione, poiché essa è conseguenza dell'LCO e non viene stabilita a priori. Pertanto le equazioni del moto non sono sufficienti: occorre introdurre un'ulteriore equazione costituita dal bilancio energetico tra l'energia introdotta nel sistema dall'aerodinamica e l'energia dissipata sia dalle forze di contatto che dallo smorzamento strutturale della pala:

$$E_{aer} = E_{diss,str} + E_{diss,c} \quad (4.28)$$

Sviluppando i termini che compaiono nell'equazione 4.28, si ottiene:

$$\pi \mathfrak{S} \left(\{\bar{q}\}^H [Z_{aer}] \{\bar{q}\} \right) = \pi \mathfrak{S} \left(\{\bar{q}\}^H [Z] \{\bar{q}\} \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \pi |\bar{u}_i^{(h)}| \mathfrak{S} \left(\bar{f}_{t,i}^{(h)} \right) \quad (4.29)$$

Quest'ultima è risolta insieme al set di equazioni 4.22 utilizzando le differenze finite per il calcolo delle derivate che compaiono nel metodo di Newton-Raphson.

4.2 Caso di studio

Per le analisi a flutter è stato utilizzato il modello agli elementi finiti di un bladed disk indicato come “test case 1”. Il sistema è stato studiato nella configurazione tip-free, vale a dire senza alcun vincolo allo shroud. La dissipazione di energia è quindi affidata agli elementi di contatto al dovetail. Inoltre, non è stato applicato alcun carico termico, poiché i dati sperimentali sono stati ottenuti in condizione di cold flow.

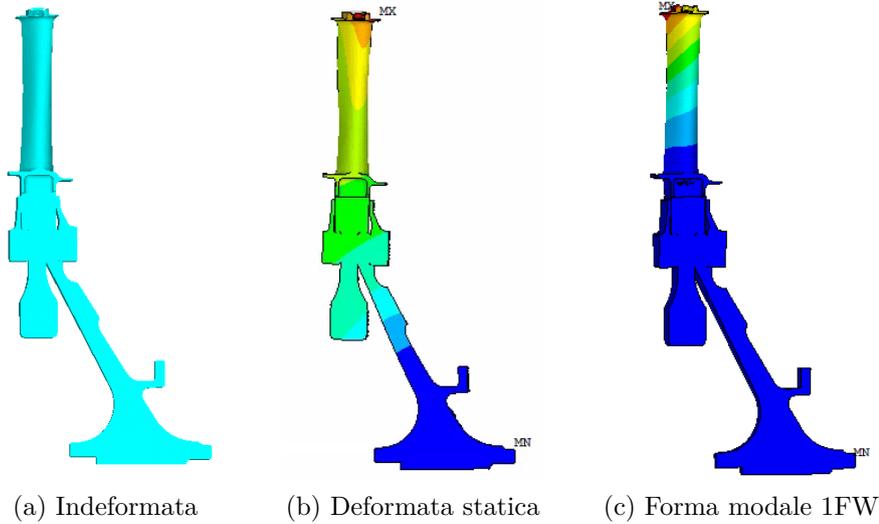


Figura 4.5: bladed disk (test case 1).

Il comportamento dinamico è descritto dal diagramma FreND (figura 4.6), dal quale si evince come i primi tre modi di vibrare - nell'ordine flap-wise, edge-wise e torsionale - abbiano frequenze ben distanziate e presentino un asintoto orizzontale per i valori più elevati di diametro nodale. I parametri aerodinamici di input necessari all'analisi strutturale sono stati calcolati mediante il codice LARS^[39]. L'analisi a flutter dei modi di vibrare ha indicato come instabile solamente il primo modo

(1FW), mentre le forme modali edge-wise e torsionale risultano stabili. I diagrammi dello smorzamento aerodinamico ζ_{aer} e della rigidezza aerodinamica η_{aer} al variare del diametro nodale sono riportate in figura 4.7. Lo smorzamento aerodinamico presenta un un minimo per valori positivi di diametro nodale, a cui corrisponde pertanto la massima energia aerodinamica introdotta nel sistema. Poiché questa rappresenta la condizione più instabile per il bladed disk, le analisi a flutter sono state eseguite considerando il valore di diametro nodale per cui si ha il minimo smorzamento aerodinamico.

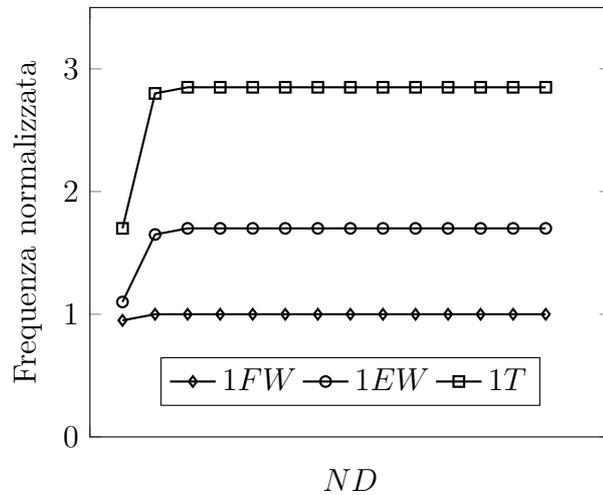


Figura 4.6: Diagramma FreND.

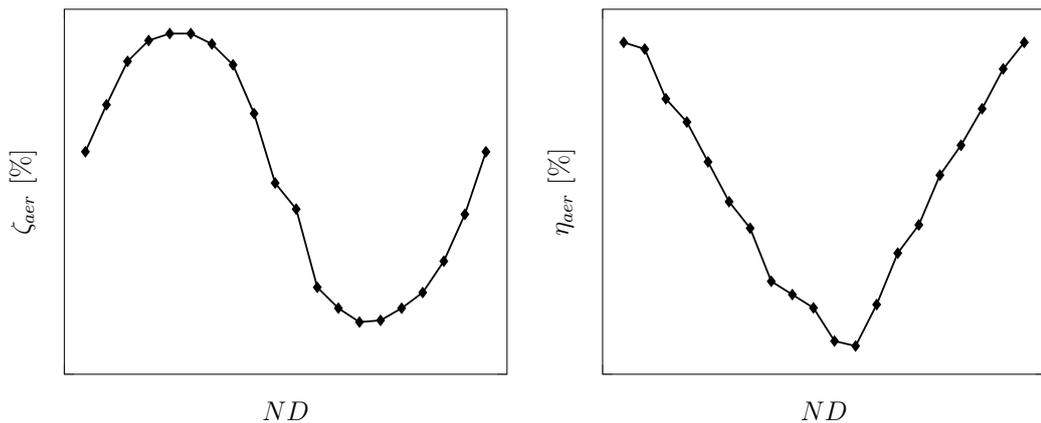


Figura 4.7: Smorzamento aerodinamico ζ_{aer} e rigidezza aerodinamica η_{aer} al variare del diametro nodale.

Per il calcolo dell’LCO sono stati implementati nel software due differenti approcci, entrambi basati sulle tecniche ROM per la riduzione del costo computazionale dell’analisi a flutter:

- approccio fisico;
- approccio modale.

4.2.1 Approccio fisico

Il calcolo dell’LCO avviene mediante l’analisi a flutter di un singolo settore del bladed disk al quale è applicato il vincolo di simmetria ciclica. Si ipotizza quindi che i settori siano identici tra loro, ovvero che il sistema sia *tuned*. Al fine di considerare l’energia dissipata per attrito dal blade root joint, i nodi di contatto derivanti dalla discretizzazione FE appartenenti alla pala e al disco devono poter scorrere l’uno rispetto all’altro e non essere fissati rigidamente. In quest’ultimo caso infatti i nodi della pala ed i corrispondenti nodi del disco avrebbero spostamenti identici, spostamenti relativi nulli, e di conseguenza non si terrebbe conto dell’energia dissipata per attrito dagli elementi di contatto. Gli spostamenti relativi sono dati dalla differenza tra gli spostamenti dei nodi di contatto della pala, x_b , e del disco, x_d :

$$u = x_b - x_d \quad (4.30)$$

La riduzione dei gradi di libertà del sistema avviene utilizzando il software ANSYS Mechanical APDL, con il quale è possibile eseguire la riduzione CMS-CB. Si riducono separatamente la pala e il disco. Per la pala si considerano come nodi master tutti i nodi delle superfici di contatto del blade root joint e alcuni nodi accessori che descrivono il moto dell’airfoil. I nodi delle superfici di contatto e di interfaccia sono invece i nodi master per la riduzione del disco. Per una migliore approssimazione del comportamento dinamico si tiene conto del carico centrifugo agente. Il sistema viene ulteriormente ridotto in MatLab applicando la simmetria ciclica ai gradi di libertà di interfaccia del disco (la pala è in configurazione tip-free) e la tecnica di Tran considerando un numero sufficiente di modi di interfaccia. Sempre in MatLab, dopo aver letto le matrici ridotte di massa e rigidezza, si aggiungono gli elementi di contatto in condizione stick. Ciò è possibile poiché pala e disco sono ridotti separatamente. Questo modo di procedere presenta anche il vantaggio di poter costruire diverse matrici di rigidezza facendo variare le rigidezze di contatto, senza dover eseguire una nuova riduzione CMS-CB.

L’equazione del moto da risolvere nel dominio delle frequenze è la seguente:

$$\left(-(h\omega)^2 [M] + ih\omega ([C] + [C_{aer}]) + [K] + [K_{aer}] \right) \{\bar{x}\}^{(h)} = \{\bar{F}_{nl}\}^{(h)} \quad (4.31)$$

per $h = 1, \dots, H$. L'assemblaggio della matrice di smorzamento $[C]$ e della matrice aerodinamica linearizzata $[AM]$ avviene a partire dalle matrici ridotte:

$$[C] = \left([\Psi]^H \right)^{-1} \left(2\zeta_m [\omega_n] \right) [\Psi]^{-1} \quad (4.32)$$

con ζ_m smorzamento strutturale modale, $[\omega_n]$ matrice delle pulsazioni naturali del sistema e $[\Psi]$ matrice degli autovettori del sistema in condizione di contatto stick.

$$[AM] = \left([\Psi]^H \right)^{-1} [am_{mod}] [\Psi]^{-1} \quad (4.33)$$

con $[am_{mod}]$ matrice aerodinamica linearizzata in forma modale:

$$[am_{mod}] = \begin{bmatrix} -2m_1\omega_1^2(\eta_{aer,1} + i\zeta_{aer,1}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -2m_n\omega_n^2(\eta_{aer,n} + i\zeta_{aer,n}) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

ζ_{aer} e η_{aer} sono i coefficienti aeroelastici espressi come rapporti modali, m è la massa modale, ω la pulsazione naturale e il pedice $i = 1, \dots, n$ indica l' i -esima forma modale.

Le matrici $[K_{aer}]$ e $[C_{aer}]$ sono legate alla matrice aerodinamica linearizzata $[AM]$ secondo le equazioni 4.3 e 4.4. Poiché la connessione tra la pala e il disco avviene introducendo gli elementi di contatto durante il calcolo delle forze non lineari, la matrice di rigidità $[K]$ ha la forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{\text{disk}} & 0 \\ 0 & k_{\text{blade}} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Il punto iniziale di tentativo per il calcolo non lineare è determinato dal bilancio energetico tra l'energia aerodinamica e l'energia dissipata. Nonostante la riduzione, si ha ancora un numero considerevole di gradi di libertà. Il tempo di calcolo per l'ottenimento dell'ampiezza e della frequenza di vibrazione dell'LCO risulta pertanto nell'ordine delle 10-12 ore.

La riduzione può essere inoltre eseguita considerando l'intero sistema pala-disco, modellando gli elementi di contatto come molle poste al blade root joint con rigidità pari alla rigidità di contatto. Questo metodo presenta tuttavia degli svantaggi rispetto al precedente: infatti occorre effettuare una nuova riduzione per ogni valore di rigidità di contatto; inoltre le analisi hanno mostrato difficoltà nella convergenza e conseguenti tempi di calcolo non accettabili.

4.2.2 Approccio modale

L'approccio modale è basato sulla riduzione modale del bladed disk e utilizza coordinate modali, che devono poi essere trasformate mediante l'equazione 2.80 per ottenere i risultati nel dominio fisico. Questo approccio consente rispetto all'approccio fisico una notevole diminuzione del tempo di calcolo necessario per lo svolgimento delle analisi a flutter. Esso varia a seconda del numero di modi considerati per la riduzione modale. Ciò comporta ovviamente dei notevoli vantaggi qualora si debbano svolgere analisi di sensitività al fine di determinare l'influenza dei diversi parametri sull'ampiezza e la frequenza dell'LCO. Per estrarre la matrice $[\Psi]$ si esegue in ANSYS un'analisi modale pre-stressata del bladed disk in configurazione tip-free. Le dimensioni della base modale $[\Psi]$ dipendono dal numero di modi e di nodi considerati. Questi ultimi comprendono i nodi di contatto appartenenti sia alla pala che al disco ed alcuni nodi accessori utili a descrivere il moto dell'airfoil. L'equazione del moto da risolvere nel dominio della frequenza assume la forma:

$$\begin{aligned} & - (h\omega)^2 [m_{mod}] \{\bar{q}\}^{(h)} + ih\omega ([c_{mod}] + [c_{aer,mod}]) \{\bar{q}\}^{(h)} + \\ & + ([k_{mod}] + [k_{aer,mod}]) \{\bar{q}\}^{(h)} = \{f_{nl,mod}\}^{(h)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

con $h = 1, \dots, H$ indice dell'armonica considerata nell'HBM. Le matrici modali di massa, smorzamento e rigidezza si calcolano come:

$$\begin{aligned} [m_{mod}] &= [\Psi]^H [M] [\Psi] \\ [c_{mod}] &= [\Psi]^H [C] [\Psi] \\ [k_{mod}] &= [\Psi]^H [K] [\Psi] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Per quanto riguarda le matrici aerodinamiche:

$$\begin{aligned} [k_{aer,mod}] &= \begin{bmatrix} 2m_1\omega_1^2\eta_{aer,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2m_n\omega_n^2\eta_{aer,n} \end{bmatrix} \\ [c_{aer,mod}] &= \begin{bmatrix} 2m_1\omega_1\zeta_{aer,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2m_n\omega_n\zeta_{aer,n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Per la risoluzione del problema aeroelastico è nuovamente necessaria un'ulteriore equazione, data dal bilancio energetico. Il modello di contatto implementato richiede che si lavori con coordinate fisiche nel dominio del tempo: si procede quindi con

l'applicazione del metodo AFT (Alternate Frequency Time), con il quale è possibile passare dal dominio delle frequenze a quello del tempo, mentre il cambio di coordinate avviene grazie all'equazione 2.80 per gli spostamenti e all'equazione 2.83 per le forze non lineari.

La base modale deve essere rappresentativa del comportamento dinamico del sistema: la metodologia inizialmente sviluppata prevedeva di inserire in ANSYS degli elementi di contatto (MATRIX27) al blade root joint e di eseguire un'analisi modale prestressata del modello siffatto. Tuttavia il sistema risultava essere eccessivamente rigido, poiché le rigidità di contatto comparivano due volte nell'equazione del moto: all'interno della matrice di rigidità e nel vettore delle forze non lineari assemblato in MatLab. Questo problema non si presenta con l'approccio fisico, perché pala e disco sono ridotti separatamente e la connessione avviene tramite il vettore delle forze non lineari. La soluzione impiegata consisteva quindi nell'applicazione delle cosiddette “forze fittizie”, con le quali si eliminava la dipendenza delle rigidità di contatto dalla matrice di rigidità del sistema.

Si consideri l'equazione del moto:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K_s] \{x\} = \{F_{aer}(x)\} + \{F_{nl}(x)\} \quad (4.39)$$

$[K_s]$ è la matrice di rigidità con il contatto in condizione stick. Essa è la somma di due contributi: la matrice di rigidità del bladed disk e la matrice delle rigidità di contatto.

$$[K_s] = [K_{bd}] + [K_c] \quad (4.40)$$

Si osserva ora chiaramente come sostituendo quest'ultima nell'equazione 4.39, gli elementi di contatto compaiano sia nella matrice $[K_s]$ che nel vettore $\{F_{nl}\}$. Per eliminare l'over-stiffening si introduce nell'equazione del moto il vettore delle forze fittizie, così calcolato:

$$\{F_{fit}\} = -[K_c] \{x\} \quad (4.41)$$

Le forze fittizie rappresentano le forze di reazione agenti sui nodi di contatto quando gli elementi di contatto sono in condizione stick. L'equazione del moto risultante diviene pertanto:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K_s] \{x\} = \{F_{aer}(x)\} + \{F_{nl}(x)\} - \{F_{fit}\} \quad (4.42)$$

Si applica poi la trasformazione modale come descritto nel paragrafo 2.3.4, con matrice modale e pulsazioni naturali risultanti dall'analisi modale del modello in condizione stick. Si ottiene dunque:

$$[m_{mod}] \{\ddot{q}\} + [c_{mod}] \{\dot{q}\} + [k_{mod,s}] \{q\} = \{f_{mod,aer}\} + \{f_{mod,nl}\} - \{f_{mod,fit}\} \quad (4.43)$$

La procedura esposta ha permesso di superare il problema dell'over-stiffening del sistema.

4.2.3 Validazione e sensitivity

Durante il periodo iniziale dell'attività di tesi, ci si è focalizzati sulla procedura per lo svolgimento delle analisi a flutter, sul funzionamento del codice MatLab e del software ANSYS Mechanical APDL. Si è quindi proceduto cercando di replicare alcuni risultati di riferimento, considerando in un primo momento l'approccio modale, poiché esso consente tempi di calcolo ridotti. Il processo si articola in tre fasi fondamentali:

1. creazione del modello FEM in ANSYS;
2. riduzione del modello;
3. analisi a flutter.

Il primo punto consiste nella creazione della mesh del bladed disk, nella definizione dei nodi “master” necessari alla successiva riduzione, nell'imposizione dei carichi e dei vincoli. La struttura è soggetta al solo carico inerziale centrifugo, il disco è vincolato al bordo di attacco. Dovetail e disk slot sono collegati mediante elementi di contatto; infine si impone il vincolo di simmetria ciclica, che interessa i nodi di interfaccia del disco.

Si effettua poi la riduzione dei gradi di libertà del sistema. La riduzione modale è possibile solo in seguito ad un'analisi modale. Per quanto riguarda la riduzione fisica invece, si considerano separatamente la pala ed il disco. Si esegue in ANSYS la riduzione distinta dei due modelli utilizzando la tecnica di Craig-Bampton, dopodiché si assemblano in MatLab le matrici di massa e rigidezza dell'intero sistema, si applica la simmetria ciclica e si esegue la riduzione di Tran.

L'analisi a flutter rappresenta il processing vero e proprio, durante il quale vengono risolte le equazioni della dinamica, con particolare attenzione ai gradi di libertà del contatto che necessitano del calcolo iterativo. L'analisi restituisce in output l'ampiezza e la frequenza di vibrazione dell'LCO. Per la validazione del metodo sono state eseguite diverse analisi, facendo variare il numero di modi della riduzione modale, lo smorzamento aerodinamico e il coefficiente di attrito. In figura 4.8 è riportato un esempio di calcolo a flutter (approccio modale): per entrambi i casi le differenze percentuali di frequenza e ampiezza rispetto ai dati di riferimento sono inferiori allo 0,6%, pertanto l'applicazione della procedura per il calcolo dell'LCO è da considerarsi corretta.

Ulteriori analisi sono state svolte per verificare il comportamento della risposta di ciclo limite al variare dei diversi parametri di input. In figura 4.9 è mostrata l'influenza dello smorzamento aerodinamico e del coefficiente di attrito. Fissati gli

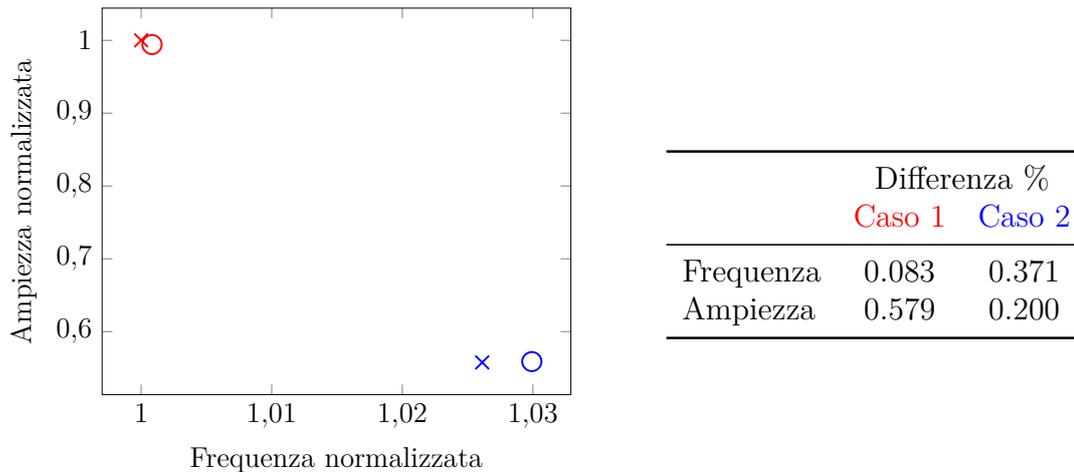


Figura 4.8: Risposta di ciclo limite per due differenti analisi; il marker \times indica il dato di riferimento. Nella tabella adiacente sono riportate le differenze percentuali rispetto al target.

altri parametri, al crescere del modulo dello smorzamento aerodinamico l'ampiezza dell'LCO aumenta, mentre la frequenza si riduce. Ciò accade in quanto la maggior quantità di energia aerodinamica immessa nel sistema deve essere bilanciata da una quantità di energia dissipativa altrettanto grande. Di conseguenza si hanno vibrazioni con ampiezza maggiore, il contatto risulta meno rigido e la frequenza diminuisce. Incrementando il coefficiente di attrito invece, il contatto diviene più rigido, sono quindi necessarie oscillazioni di ampiezza maggiore al fine di produrre lo scivolamento tra le superfici del disco e della pala necessario a dissipare energia. L'impatto di questo parametro sulla frequenza è trascurabile.

Il grafico in figura 4.18 descrive la risposta di ciclo limite al variare del numero di modi considerati nella riduzione modale: all'aumentare dei modi la frequenza di oscillazione aumenta e l'ampiezza diminuisce. La giustificazione di questo comportamento risiede nell'incremento di rigidità del sistema dovuto alla riduzione modale. Per un numero elevato di modi l'LCO è caratterizzato da ampiezza e frequenza prossime a quelle calcolate utilizzando la riduzione fisica. La durata dell'analisi a flutter aumenta con il numero di modi considerati, tuttavia il vantaggio in termini di tempo rispetto all'approccio fisico resta considerevole anche impiegando centinaia di modi.

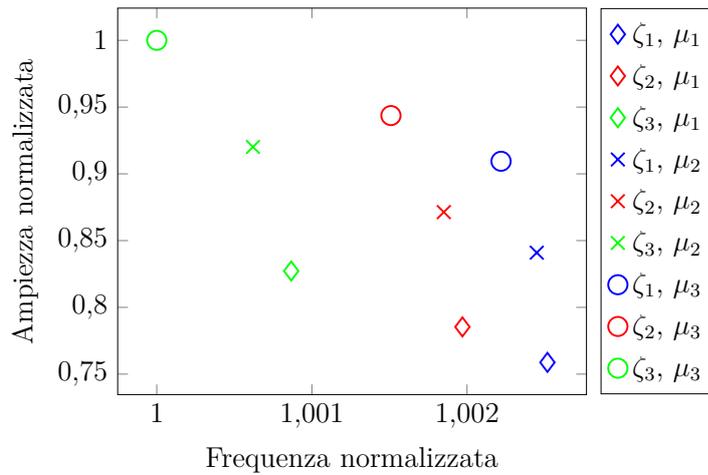


Figura 4.9: Sensitivity al variare dello smorzamento aerodinamico ($|\zeta_2| = 1.2|\zeta_1|$, $|\zeta_3| = 1.6|\zeta_1|$) e del coefficiente di attrito ($\mu_2 = 1.2\mu_1$, $\mu_3 = 1.4\mu_1$).

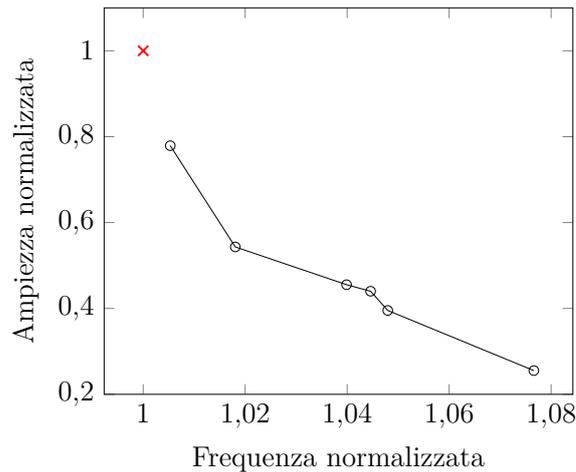


Figura 4.10: Risposta di ciclo limite calcolata con l'approccio fisico (marker \times) e con l'approccio modale (marker \circ) al variare del numero n di modi considerati nella riduzione; n diminuisce spostandosi da sinistra verso destra.

4.2.4 Over-stiffening del contatto

Come detto in precedenza, l'approccio modale si basa sulla riduzione modale del sistema, la quale necessita di una base modale per poter essere eseguita. Utilizzando il software ANSYS, si pongono in corrispondenza di ogni nodo del blade root joint degli elementi di contatto modellizzati come delle molle le cui rigidezze equivalgono alle rigidezze di contatto risultanti da un'analisi non lineare. Tuttavia è possibile

che la base modale risulti avere un contatto eccessivamente rigido: in queste condizioni l'energia dissipata è sempre minore dell'energia aerodinamica immessa nel sistema e l'analisi a flutter non può convergere fino al raggiungimento del punto stabile. Occorre pertanto ridurre la rigidità di contatto rispetto al valore nominale, cosicché il blade root joint sia più cedevole e possa dissipare una maggiore quantità di energia. Ciò avviene introducendo un parametro non fisico, un numero intero indicato con d , tale che:

$$K_{c,ANSYS} = \frac{K_c}{d} \quad (4.44)$$

dove $K_{c,ANSYS}$ rappresenta la rigidità di contatto inserita nel software FE e K_c la rigidità di contatto nominale. All'aumentare del parametro d la rigidità di contatto diminuisce, gli spostamenti relativi tra il dovetail e lo slot del disco sono quindi maggiori, con essi aumentano le forze d'attrito e l'energia dissipata, di conseguenza si avranno oscillazioni di ciclo limite caratterizzate da ampiezze minori in direzione tangenziale e frequenze maggiori.

Per verificare quanto detto, sono state eseguite delle analisi a flutter al variare del parametro d per differenti condizioni operative. Nei grafici seguenti sono riportati gli andamenti dell'ampiezza e della frequenza di oscillazione di ciclo limite per d crescenti: i valori sono normalizzati rispetto ai dati sperimentali. Si osserva dal diagramma in figura 4.11 un andamento non lineare dell'ampiezza di vibrazione dell'LCO al crescere del parametro di riduzione della rigidità di contatto. Per $d = 1$ non è stato possibile calcolare la risposta di ciclo limite a causa dell'eccessiva rigidità; la curva poi decresce, presenta un minimo in corrispondenza di $d = 5$ per poi crescere nuovamente. Per quanto riguarda la frequenza (figura 4.12), essa aumenta al crescere di d , allontanandosi dal dato sperimentale. Un andamento simile si osserva per diverse condizioni operative.

I dati suggeriscono quindi di utilizzare un valore di d tale da avvicinarsi il più possibile all'ampiezza e alla frequenza sperimentali, per cui si potrebbe scegliere $d = 4 \div 5$. Tuttavia il parametro non ha significato fisico, si tratta di un artificio numerico per superare il problema dell'over-stiffening del sistema. Per questo motivo si è scelto di eliminare la dipendenza del calcolo dell'LCO da questo parametro.

L'over-stiffening del sistema deriva dalla presenza degli elementi di contatto nel modello FE dal quale si estrae la base modale. La soluzione adottata consiste nel rimuovere tali elementi, vincolando pala e disco mediante MPCs (multi-point constraints) che interessano alcuni nodi posti sulla parte inferiore del dovetail ed i corrispondenti nodi sullo slot del disco. Così facendo, i nodi di contatto appartenenti ai due corpi sono liberi di muoversi l'uno rispetto all'altro - condizione necessaria per la dissipazione di energia - ed è inoltre garantito il vincolo tra pala e disco

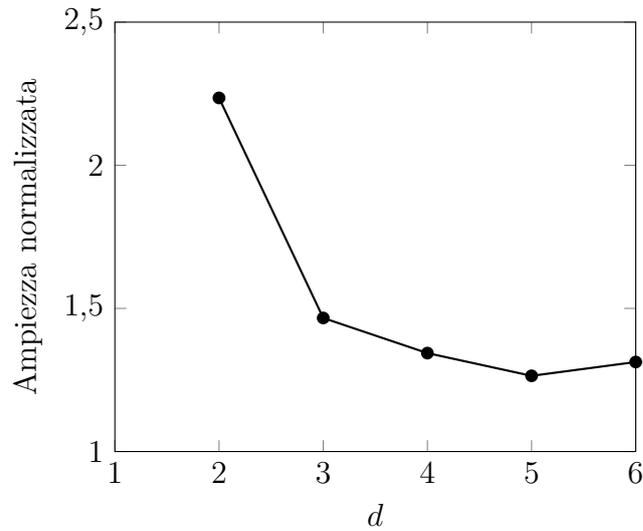


Figura 4.11: Ampiezza dell'LCO al variare del parametro di riduzione della rigidità di contatto.

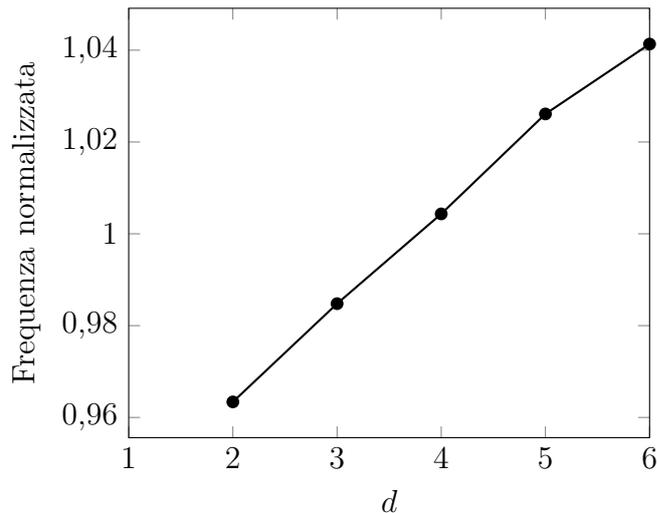


Figura 4.12: Frequenza dell'LCO al variare del parametro di riduzione della rigidità di contatto.

necessario per mantenere la prima in posizione sotto l'effetto del carico centrifugo. Dopo aver imposto i nuovi vincoli, si procede quindi con l'analisi modale del bladed disk. Il numero e il posizionamento dei nodi sui quali imporre gli MPCs influenzano ovviamente i risultati dell'analisi. Un importante parametro a cui fare riferimento ai fini della scelta è il MAC (Modal Assurance Criterion), un indicatore statistico che permette di rilevare la consistenza tra due forme modali. Esso si calcola come:

$$MAC = \frac{|\{\Psi_A\}^T \{\Psi_B\}|^2}{(\{\Psi_A\}^T \{\Psi_A\})(\{\Psi_B\}^T \{\Psi_B\})} \quad (4.45)$$

dove $\{\Psi_A\}$ e $\{\Psi_B\}$ sono le forme modali da confrontare. È opportuno specificare che il *MAC* compara la forma e non gli spostamenti assoluti delle deformate: se queste sono identiche, si ha $MAC=1$, mentre $MAC=0$ indica due forme modali completamente differenti. Il *MAC* è stato quindi utilizzato per stabilire quale fosse la configurazione di MPCs in grado di produrre, a seguito dell'analisi modale eseguita in ANSYS, le forme modali più simili rispetto a quelle ottenute studiando il modello FE con elementi di contatto. Al fine di comprendere nel dettaglio l'effetto dei differenti vincoli sulla deformata modale, il *MAC* è stato calcolato considerando diversi gruppi di nodi appartenenti alle aree di contatto, alle superfici adiacenti ad esse, al dovetail e alla pala nella sua interezza. Si veda a tal proposito la tabella 4.1: vincolando dovetail e disco piuttosto che le superfici di contatto, la deformazione modale della pala risulta praticamente inalterata (MAC blade sempre $>0,95$), considerazioni analoghe valgono anche per il dovetail. Lo stesso non si può dire per la zona di contatto, caratterizzata da *MAC* compresi tra 0,6 e 0,78: tuttavia, questo comportamento è atteso, in quanto gli elementi di contatto sono stati eliminati.

n. MPCs	MAC blade	MAC contact	MAC dovetail
0.05	0.9581	0.6140	0.9467
0.17	0.9899	0.6051	0.9281
0.32	0.9961	0.6593	0.9531
0.55	1.0000	0.7339	0.9410
1.00	1.0000	0.7409	0.9360
1.17	1.0000	0.7415	0.9381
1.51	1.0000	0.7485	0.9363
2.51	1.0000	0.7503	0.9358
4.09	0.9999	0.7831	0.9223

Tabella 4.1: *MAC* calcolato rispetto alla forma modale 1FW di riferimento per diversi gruppi di nodi al variare del numero di MPCs.

Al contempo sono state messe a confronto anche le frequenze dei modi di vibrare. Il grafico seguente (figura 4.13) mostra l'influenza del numero di MPCs sulla frequenza naturale del modo di vibrare 1FW; i valori sono normalizzati rispetto alla frequenza della stessa forma modale del modello con elementi di contatto. All'aumentare del numero di vincoli (definiti in ANSYS come CE, Constraint Equations) si ha un incremento significativo della frequenza naturale, che tende ad assumere

valori prossimi alla frequenza di riferimento; ciò si traduce in una maggiore rigidità del sistema. Oltre al numero di vincoli, anche la loro posizione sul dovetail risulta influente: a parità di MPCs si nota infatti come la curva descritta dal marker \diamond presenti delle frequenze maggiori rispetto alla spezzata definita dal marker \circ .

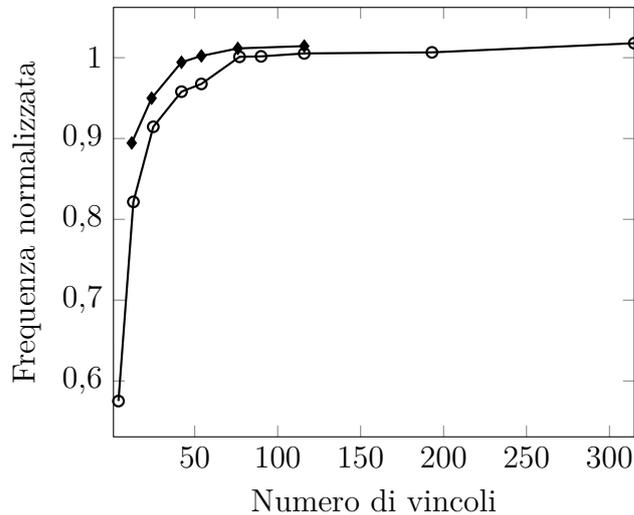


Figura 4.13: Frequenza naturale della forma modale 1FW al variare del numero di MPCs tra dovetail e disk slot.

Sulla base di quanto detto è stata individuata una opportuna configurazione di vincoli tra il dovetail e lo slot del disco. La rigidità di contatto è ora determinata in modo tale che la frequenza della risposta di ciclo limite calcolata numericamente coincida con il dato sperimentale. Questa soluzione è applicabile solamente in fase di verifica, quando si hanno a disposizione i dati sperimentali e permette di individuare e quantificare la dipendenza dell'ampiezza di vibrazione dalla frequenza. Tuttavia non è possibile estendere lo stesso ragionamento a scopi predittivi, poiché le frequenze non sarebbero note.

La metodologia ora esposta rappresenta un'alternativa all'introduzione delle forze fittizie nell'equazione della dinamica, che sono dunque rimosse. Inoltre, si evita l'over-stiffening del contatto e di conseguenza non è più necessario ridurre la rigidità in modo artificiale mediante l'introduzione del parametro d precedentemente descritto.

4.3 Interfaccia grafica (GUI)

Fondamentale durante l'attività di tesi è stata la progettazione in ambiente MatLab di un'interfaccia grafica per lo svolgimento delle analisi a flutter. Il codice esistente

non disponeva di questa funzionalità: gli input erano forniti all'algoritmo per lo svolgimento del processing mediante un file di testo unico per entrambi gli approcci, modale e fisico. In base all'approccio scelto, alcuni parametri erano ignorati, pur essendo presenti. Questa organizzazione degli input non risultava particolarmente intuitiva per un nuovo utente. La struttura del codice imponeva poi una specifica organizzazione delle cartelle e dei file in esse contenuti per la lettura di questi ultimi. Inoltre, la difficoltà nel risalire agli input di un'analisi precedentemente effettuata era considerevole, poiché il codice non generava alcun report. Si comprende quindi la necessità di creare un'interfaccia grafica. Essa permette di gestire distintamente le analisi a flutter svolte con i due differenti approcci ed è strutturata in tre pannelli, dedicati rispettivamente alle fasi di pre-processing, processing e post-processing.

Pre-processing

Il pre-processing è essenziale per l'interazione con il database ANSYS APDL contenente il modello agli elementi finiti del bladed disk dal quale si ricavano le coordinate dei nodi che costituiscono i gradi di libertà del sistema, la base modale e le matrici ridotte. Dall'interfaccia è possibile generare le macro che verranno lette in ANSYS per:

- impostare le constraint equations (CE) tra il dovetail e il disco per le ragioni descritte nel paragrafo precedente;
- eseguire l'analisi modale ed estrarre successivamente la base modale;
- effettuare le riduzioni di Guyan e di Craig-Bampton il cui output è costituito dalle matrici ridotte di massa e rigidità;
- estrarre i dati relativi alla distribuzione di pressione sull'area di contatto del blade root joint risultanti da un'analisi statica non lineare (l'argomento sarà affrontato dettagliatamente nel seguito).

Per quanto riguarda il primo punto, i nodi da vincolare sono selezionati graficamente in MatLab grazie ad un tool appositamente progettato; nella macro compariranno poi gli ID dei nodi scelti. Se il processo non fosse automatizzato, la scrittura delle equazioni di vincolo risulterebbe piuttosto onerosa. Eventualmente si potrebbe effettuare la selezione dei nodi direttamente in ANSYS, tuttavia il tool MatLab permette di ridurre i tempi dell'operazione, è intuitivo e facilmente utilizzabile anche da chi non possiede dimestichezza con il software FEM.

Un'ulteriore funzionalità dell'interfaccia durante la fase di pre-processing consiste nella conversione dei documenti di testo prodotti in output da ANSYS in files con estensione *.mat facilmente leggibili in MatLab.

Processing

Il processing costituisce la fase fondamentale dell'analisi a flutter. I dati di input sono utilizzati per costruire le matrici che compaiono nell'equazione della dinamica, dopodiché si procede con il calcolo non lineare che restituisce come output il vettore degli spostamenti dei gradi di libertà coinvolti, che saranno poi opportunamente post-processati per ottenere l'ampiezza di vibrazione delle oscillazioni di ciclo limite. Al fine di facilitare l'implementazione della GUI e rendere più agevole il debug, il codice iniziale è stato modificato, rimuovendo le numerose variabili globali richiamate dalle functions in MatLab. I dati così ottenuti sono stati confrontati con i precedenti, in modo da assicurarsi che i cambiamenti apportati non avessero alcun impatto sui risultati, ma solamente un beneficio dal punto di vista funzionale.

Il pannello della GUI che gestisce il processing è stato concepito per presentare i parametri di input con la massima chiarezza. A differenza di quanto avveniva con la prima versione del codice, non è necessaria una rigida organizzazione dell'albero delle cartelle di lavoro: l'utente ha la possibilità di specificare di volta in volta il path della directory in cui sono allocati i files richiesti. Il salvataggio degli output avviene in modo analogo. La finestra del processing è a sua volta suddivisa in pannelli, di seguito descritti, ognuno dei quali contiene i dati relativi ad una specifica famiglia di parametri. La prima scelta che l'utente deve effettuare riguarda l'approccio da utilizzare: al momento della selezione i campi non necessari all'analisi si disattivano automaticamente. Scegliendo l'approccio modale, occorrerà caricare la base modale precedentemente estratta da ANSYS: il software restituisce l'informazione circa il massimo numero di modi che possono essere impiegati per la riduzione. Inoltre, calcolando il MAC, viene individuata la forma modale più instabile: l'utente ha comunque la possibilità di considerare come instabile un modo differente da quello suggerito.

Nel pannello adiacente è possibile scegliere il sistema di misura (Sistema Internazionale o Imperiale); le grandezze sono espresse nelle unità di misura indicate in tabella 4.2. Le opzioni successive riguardano il punto iniziale di tentativo del calcolo non lineare per la risoluzione delle equazioni del moto. Questo può essere imposto o determinato attraverso un bilancio energetico per facilitare la convergenza del metodo iterativo; varia in base al numero di modi considerati, alle rigidità di contatto e ai parametri aerodinamici introdotti. Ancora, è possibile selezionare

il numero di termini armonici che compaiono nel MBHM (Multi Balance Harmonic Method), al crescere dei quali corrisponde un notevole incremento dei tempi di calcolo.

Grandezza	SI	Imperial
Massa	kg	lb
Lunghezza	m	inch
Forza	N	lbf
Energia	J	BTU
Rigidità	N/m	lbf/inch

Tabella 4.2: Unità di misura nel Sistema Internazionale ed Imperiale.

Successivamente è richiesto di caricare i dati del modello FEM e, nel caso si segua l'approccio fisico, le matrici ridotte di massa e rigidità. Seguono poi diversi pannelli nei quali si inseriscono i dati necessari allo svolgimento dell'analisi a flutter. Si pone l'attenzione in particolare sui parametri di contatto: è stata implementata infatti la possibilità - solo per l'approccio modale - di selezionare i nodi di contatto. Questa opzione non è disponibile se si adotta l'approccio fisico: in questo caso infatti il modello è stato precedentemente ridotto e i nodi di contatto sono già stati definiti: da questi dipendono le dimensioni e la struttura delle matrici ridotte, pertanto una nuova selezione dei nodi non sarebbe coerente con la riduzione effettuata.

La selezione dei nodi avviene nuovamente mediante un tool grafico, simile a quello descritto in precedenza. Si conferisce all'utente la possibilità di configurare indipendentemente il contatto destro e sinistro, ovvero la posizione e il numero di nodi scelti può differire da una superficie di contatto all'altra. Al termine dell'operazione viene scritto un file di testo contenente l'ID dei nodi, che può essere utilizzato in un secondo momento per replicare quanto fatto.

La finestra del processing dispone infine di un pannello per la scelta della distribuzione del precarico. Esso rappresenta la forza che si scarica sulle superfici di contatto per effetto del carico centrifugo agente sulla pala. Quest'ultimo è calcolato come:

$$F_c = m_b r_b \omega^2 \quad (4.46)$$

con m_b e r_b rispettivamente massa e coordinata radiale del baricentro della pala ed ω velocità di rotazione. In direzione normale ad ognuna delle due superfici di contatto agisce il seguente precarico:

$$N_0 = \frac{F_c}{2(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \quad (4.47)$$

dove α è l'angolo di inclinazione del blade root joint (figura 4.14) e μ il coefficiente di attrito.

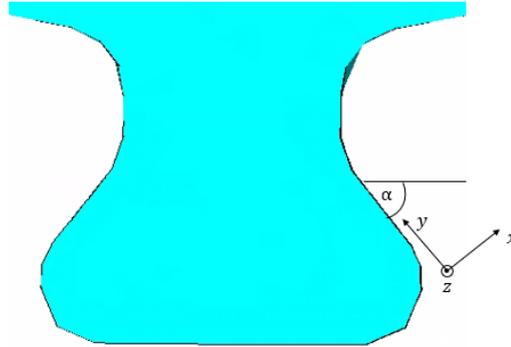


Figura 4.14: Blade root joint: definizione dell'angolo α .

Le superfici di contatto sono suddivise in un numero finito di elementi, ai quali è associato un numero finito di nodi. Occorre quindi calcolare il carico nodale $n_{0,i}$ per ognuno degli n_c nodi di contatto in modo tale che la loro somma sia pari al precarico N_0 :

$$\sum_{i=1}^{n_c} n_{0,i} = N_0 \quad (4.48)$$

Questa logica è estesa a differenti tipologie di distribuzione:

- uniforme;
- lineare;
- parabolica;
- custom.

La distribuzione uniforme consiste nell'associare ad ogni nodo il medesimo precarico:

$$n_{0,i} = \frac{N_0}{n_c} \quad (4.49)$$

Con “lineare” e “parabolico” si intende l'andamento del precarico lungo una direzione preferenziale (tangenziale o assiale) decisa dall'utente. Si consideri una mesh regolare della superficie di contatto alla quale sono associati n_c nodi: nel piano θz ogni nodo può essere inteso come l'elemento di una matrice avente n_θ colonne ed n_z righe, per un totale di $n_\theta \times n_z = n_c$ elementi. Individuati i carichi nodali lungo una riga di questa matrice, essi sono ripetuti identicamente per le restanti colonne,

o viceversa. Nel complesso tali distribuzioni descrivono un piano inclinato ed un paraboloide. La distribuzione lineare può essere simmetrica o asimmetrica rispetto all'asse z , il gradiente è specificato dall'utente. Vi è inoltre la possibilità di imporre un iniziale lift-off (distacco) di alcuni nodi, sui quali il precarico sarà nullo. In questo caso, poiché il valore massimo di precarico che soddisfa l'equazione 4.48 non è noto a priori, è necessario eseguire un calcolo iterativo. Un ragionamento analogo è esteso alla distribuzione parabolica. I carichi nodali sono ottenuti per interpolazione, ciò pone alcune restrizioni alla metodologia descritta, dovute al numero e alla disposizione dei nodi di contatto selezionati. Qualora non sia possibile distribuire il precarico secondo gli andamenti descritti, esso è considerato uniforme.

Selezionando la voce “custom” l'utente ha invece la possibilità di specificare una distribuzione bidimensionale specificando i coefficienti del polinomio

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \quad (4.50)$$

con $F(x, y)$ generica funzione dipendente dalle coordinate x e y che individuano la superficie contatto. In questo caso per rispettare l'equazione 4.48 occorre scalare opportunamente il valore di $F(x, y)$ associato ad ogni nodo. Alcuni esempi di distribuzione di precarico sulla superficie di contatto sono riportati in figura 4.17. L'implementazione del tool per la distribuzione del precarico permette di simulare facilmente gli effetti che esso ha sulla risposta di ciclo limite.

Per avere un riferimento riguardo alla distribuzione delle pressioni sulle superfici di contatto, è stata svolta in ANSYS un'analisi statica non lineare del bladed disk soggetto unicamente al carico inerziale. Il software dispone di un apposito tool per la simulazione dei contatti, noto come “Contact Wizard”. Una volta selezionati i nodi, le superfici di contatto sono meshate automaticamente utilizzando elementi CONTA174^[40] e TARGE170^[41]. Gli elementi “contact” non sono in grado di compenetrare gli elementi “target”, tuttavia è ammessa la condizione opposta^[42]. Per contatti che vedono coinvolti un corpo rigido ed uno flessibile, il primo rappresenta il target. Nel caso di due corpi flessibili invece la scelta della superficie designata come contact o target è fondamentale, poiché essa comporta una compenetrazione di differente entità che influisce sull'accuratezza della soluzione. L'help di ANSYS fornisce dettagliate informazioni e criteri a proposito; in generale, il corpo più rigido costituisce il target. Considerando il bladed disk, è dunque il disco ad essere definito come tale. Una volta impostato il contatto, si esegue l'analisi statica non lineare, utilizzando come solutore l'Augmented Lagrangian Method. In figura 4.15a è evidenziato lo stato del contatto, mentre in figura 4.15b è mostrata la distribuzione di pressione. Essa appare non uniforme, l'area di contatto risulta più sollecitata

alle estremità, con gradienti nelle direzioni θ e z . La deformata del bladed disk è invece riportata in figura 4.5b.

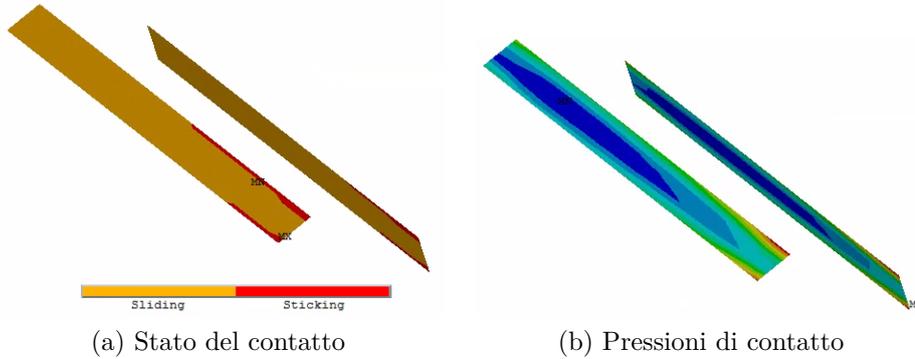


Figura 4.15: Output dell'analisi statica non lineare.

L'estrapolazione dei carichi nodali sui nodi di contatto ha richiesto un'attenta attività di post-processing dei risultati. In ANSYS è possibile stampare un report contenente i nodal loads, tuttavia è facile accorgersi che questi dati non sono coerenti con la colormap riportata in precedenza. I carichi in corrispondenza dei corner nodes degli elementi CONTA174 sono infatti prossimi al valore nullo, a differenza delle forze sui mid-side nodes, notevolmente maggiori. Questa caratteristica è dovuta al modo in cui il software ripartisce le forze elementali sui nodi, come riportato in figura 4.16c. Per risolvere il problema, si è proceduto come descritto

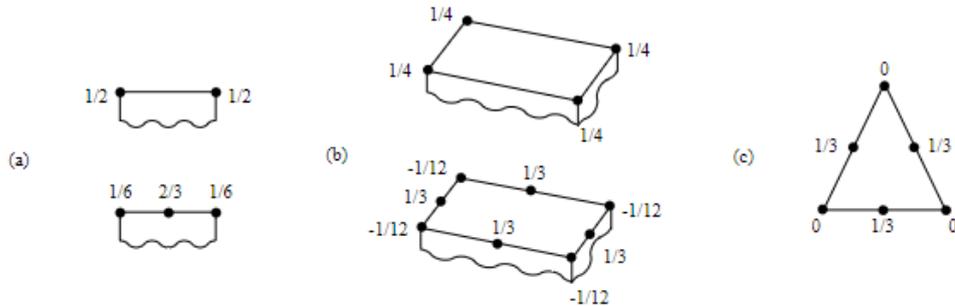


Figura 4.16: Allocations nodali equivalenti^[43].

nel seguito. Prima di tutto, è stata verificata la congruenza tra le forze calcolate analiticamente e quelle restituite dal software. In particolare, è stato confrontato il precarico agente su entrambe le superfici di contatto ($2N_0$) con la somma delle componenti radiali dei nodal loads: la comparazione ha confermato la validità delle ipotesi fatte, poiché la differenza percentuale si attesta intorno all'1%. Successivamente le forze nodali sono state ridistribuite in modo tale da avere valori non nulli

sia sui corner che sui mid-side nodes. Le pressioni sui corner nodes sono calcolate ripartendo su di essi la pressione agente sull'elemento, sulla base delle informazioni deducibili dagli outputs di ANSYS; tali pressioni sono poi convertite in forze. Mediante interpolazione si ottengono i carichi sui mid-side nodes e infine si effettua uno scalamento così da rispettare l'equazione 4.48.

Post-processing

Il pannello della GUI dedicato al post-processing permette all'utente di visualizzare diverse informazioni, riportate in forma di grafici:

- ampiezza e frequenza delle oscillazioni di ciclo limite;
- energia dissipata ed energia aerodinamica in funzione dello spostamento in direzione tangenziale;
- ampiezza e frequenza dell'LCO in funzione dello smorzamento aerodinamico;
- ampiezza e frequenza dell'LCO in funzione della rigidità aerodinamica;
- energia dissipata per attrito (area del ciclo di isteresi), stato del contatto (stick, slip, lift-off), componente statica e dinamica delle forze di contatto di ogni nodo.

L'utente ha la possibilità di selezionare il nodo di cui vuole conoscere queste grandezze grazie ad una listbox. Cliccando sull'ID del nodo desiderato, il codice esegue il post-processing dei dati per fornire gli output descritti.

4.4 Distribuzione del precarico sulle superfici di contatto

Una volta realizzata l'interfaccia grafica si è indagato sull'influenza della distribuzione del precarico sulla risposta a flutter. Partendo dalla distribuzione uniforme, le rigidità di contatto sono state tarate in modo tale che la frequenza dell'LCO corrispondesse alla media delle frequenze rilevate dagli strain gauges in fase sperimentale. Partendo dal punto operativo corrispondente alla condizione di progetto e fissate le rigidità, sono state considerate diverse distribuzioni di precarico: uniforme, lineare simmetrica e asimmetrica con gradiente fissato, lineare con lift-off, parabolica e custom come in figura 4.17b. Per minimizzare i tempi di calcolo si è deciso di utilizzare la riduzione modale.

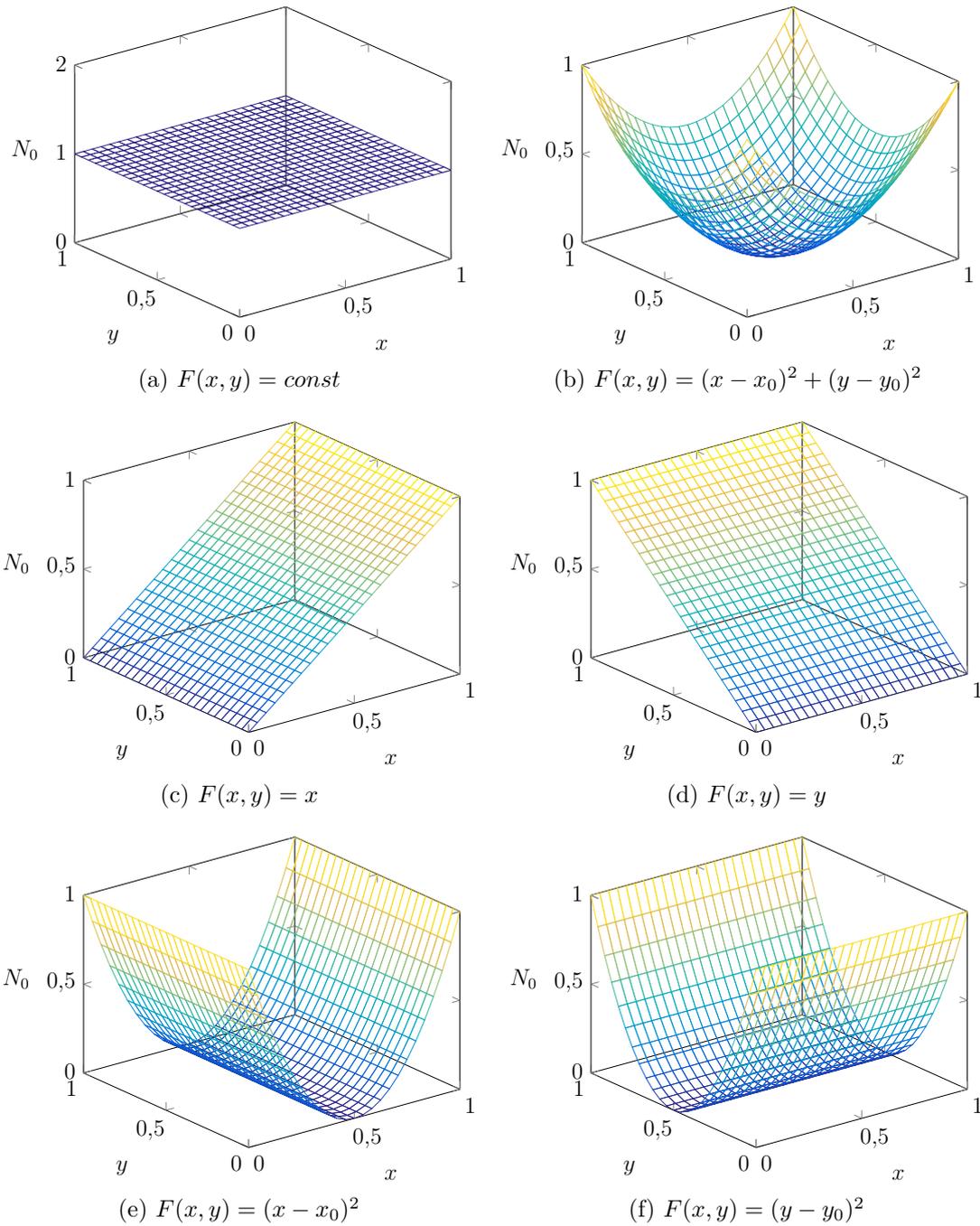


Figura 4.17: Esempi di distribuzione del precarico sulla superficie di contatto.

I risultati dell'analisi a flutter sono riportati nel grafico seguente (figure 4.18). Le rigidzze di contatto sono state tarate sulla distribuzione uniforme, di conseguenza questa è l'unica ad avere una frequenza normalizzata pari a 1; le restanti

presentano frequenze minori. L'errore sulle ampiezze rispetto ai dati sperimentali è considerevole, con errori percentuali nel migliore dei casi superiori al 100% rispetto al massimo sperimentale. Per giustificare questo comportamento sono state osservate le colormaps relative agli output del contatto, considerando in particolare lo stato del contatto e l'area del ciclo di isteresi nodo per nodo. Il post-processing ha evidenziato come all'aumentare dell'energia dissipata aumenti anche l'ampiezza di vibrazione. Una maggiore energia dissipata implica che gli elementi di contatto si trovino prevalentemente nello stato "slip". Nella condizione di aderenza essi non sono in grado di dissipare energia (l'area del ciclo di isteresi è nulla), mentre in presenza di lift-off divengono meno efficienti. Sono quindi necessarie maggiori oscillazioni affinché l'energia aerodinamica introdotta nel sistema eguagli l'energia dispersa per effetto dello strisciamento tra pala e disco e si raggiunga il punto stabile, vale a dire l'LCO.

Si consideri ad esempio la distribuzione di carico parabolica orientata secondo la direzione assiale. In questo caso si ha un'ampia zona al centro della superficie di contatto a cui è associato un basso precarico; questo aumenta gradualmente fino ad assumere valori elevati alle estremità, così da rispettare l'equazione 4.48. A seguito dell'analisi a flutter si osserva quindi che il numero di nodi di contatto in condizione stick, slip e slip con parziale lift-off è circa equivalente. L'energia dissipata risulta minore rispetto agli altri casi analizzati, poiché solamente i nodi nello stato di slip sono in grado di dissipare una quantità di energia considerevole. Al contrario, una distribuzione di precarico uniforme permette di avere carichi nodali sufficientemente alti da evitare il lift-off, ma tali da non comportare la condizione di aderenza, di conseguenza la maggior parte dei nodi si troverà nello stato di slip e l'energia dissipativa sarà elevata. In tabella 4.3 sono riportati i valori normalizzati dell'energia dissipata per effetto del contatto disco-pala per le distribuzioni di precarico descritte.

Distribuzione	Energia dissipata (norm)
Uniforme	1.00
Parabolica lungo θ	0.92
Lineare asimmetrica	0.87
Lineare simmetrica	0.77
Custom	0.74
Parabolica lungo z	0.64

Tabella 4.3: Energia dissipata per effetto del blade root joint per diverse distribuzioni di precarico e rigidezze di contatto fissate.

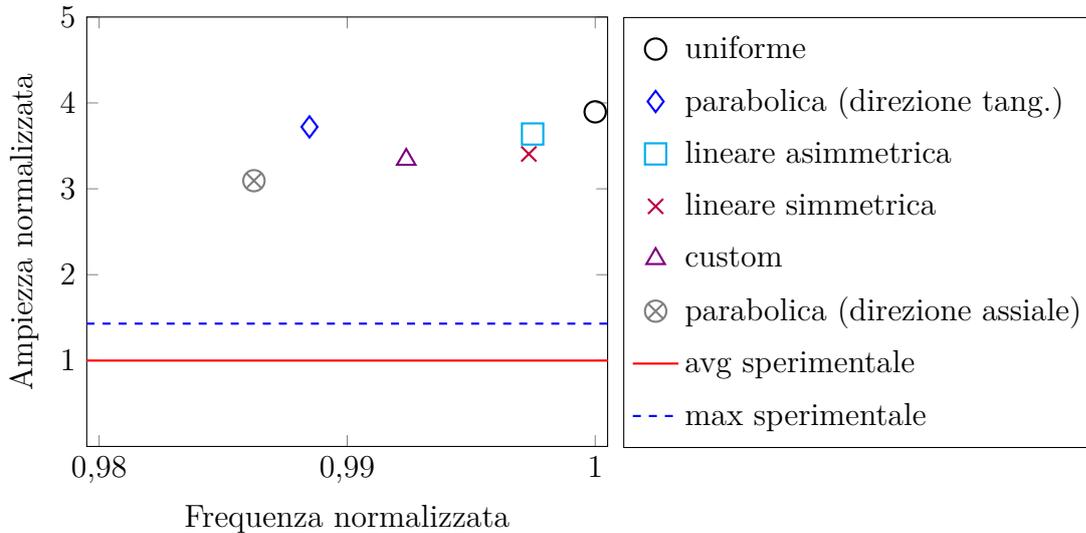


Figura 4.18: Risposta di ciclo limite per diverse distribuzioni di precarico fissate le rigidezze di contatto per una determinata condizione operativa.

Successivamente è stata fissata la frequenza, incrementando le rigidezze di contatto in modo da ottenere la frequenza sperimentale (valor medio rilevato dai diversi strain-gauges). Tale aumento è proporzionale alla differenza in frequenza Δf misurata rispetto al valore di riferimento derivante dai calcoli precedenti. Le analisi (figura 4.19) hanno evidenziato una forte dipendenza delle caratteristiche dell’LCO dalla rigidezza di contatto: ad esempio, nel caso del carico parabolico in direzione assiale è stato necessario un aumento del 50% per ottenere una variazione in frequenza minore del 2%. Ne risultano ampiezze di vibrazione minori, la cui riduzione è anch’essa proporzionale a Δf . Inoltre ci si avvicina significativamente ai dati sperimentali: l’errore rispetto al valor medio si attesta intorno al 65%, più che accettabile considerando il grado di approssimazione del metodo. L’andamento dell’ampiezza al variare della rigidezza può essere spiegato nuovamente mediante il bilancio energetico. È stato osservato infatti che al crescere delle rigidezze di contatto l’energia dissipata diminuisce, di conseguenza l’ampiezza di oscillazione di ciclo limite si riduce; al contrario, si ha un incremento della frequenza. Si veda a proposito la tabella 4.4, relativa ad una distribuzione di precarico parabolica.

Visto il buon riscontro con i dati sperimentali, la distribuzione parabolica in direzione assiale è stata impiegata per ulteriori analisi, considerando diverse condizioni operative, differenti per smorzamento aerodinamico e velocità di rotazione delle pale. Per ognuna di esse sono state ricavate le frequenze media e massima derivanti dalla lettura degli strain-gauges. Si è quindi proceduto come descritto

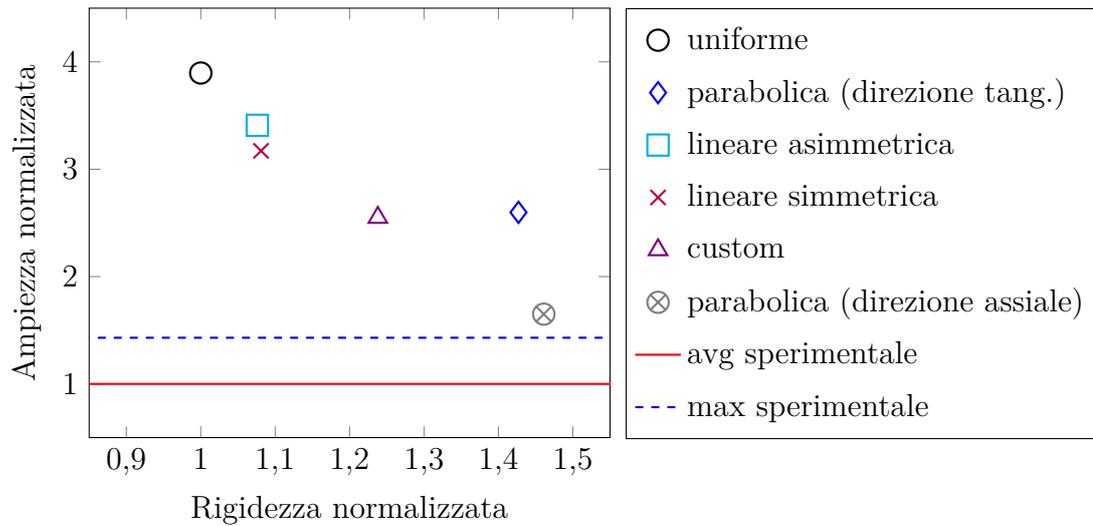


Figura 4.19: Risposta di ciclo limite per diverse distribuzioni di precarico a frequenza fissata per una determinata condizione operativa.

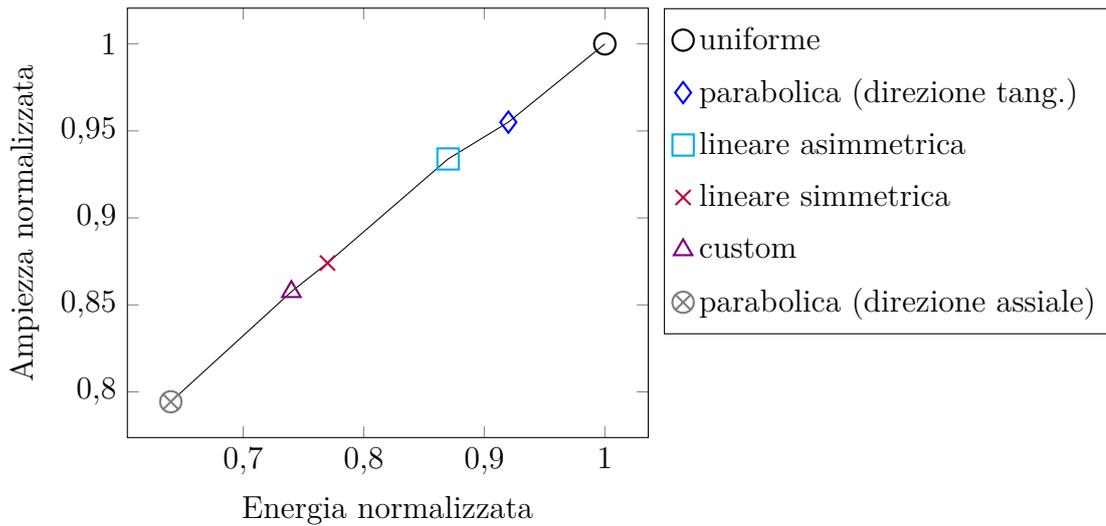


Figura 4.20: Ampiezza di vibrazione dell'LCO in funzione dell'energia dissipata dalle diverse distribuzioni di precarico.

in precedenza per tarare le rigidezze degli elementi di contatto. I grafici seguenti mostrano i risultati del confronto numerico-sperimentale, in particolare:

- ampiezza di ciclo limite corrispondente alla frequenza media sperimentale vs media delle ampiezze rilevate dagli strain-gauges (figura 4.21);

Frequenza (norm)	Rigidezza (norm)	Energia dissipata (norm)
1.000	1.000	1.000
1.002	1.068	0.779
1.014	1.461	0.282
1.052	3.892	0.041

Tabella 4.4: Energia dissipata per effetto del blade root joint al variare delle rigidezze di contatto per una distribuzione di precarico parabolica in direzione assiale.

- ampiezza di ciclo limite corrispondente alla frequenza massima sperimentale vs ampiezza rilevata dallo strain-gauge a cui è associata la lettura della massima frequenza (figura 4.22).

La risposta di ciclo limite è nuovamente influenzata dalle rigidezze di contatto necessarie per raggiungere la frequenza sperimentale. Al crescere delle rigidezze (e quindi della frequenza) l'energia globalmente dissipata per effetto del contatto si riduce ed il punto stabile si sposta verso ampiezze di vibrazione minori. Il confronto tra i dati sperimentali e numerici corrispondenti alla massima frequenza sperimentale risulta particolarmente indicativo, poiché si considera l'effettivo spostamento dello strain-gauge a cui è associata la massima frequenza. Si osserva che, ad eccezione della condizione operativa OC4, il metodo numerico sviluppato restituisce ampiezze maggiori rispetto ai valori misurati. Se si esclude la condizione operativa OC4, le differenze percentuali delle ampiezze numeriche rispetto alle sperimentali sono inferiori al 55%. Occorre precisare che la condizione OC4 non differisce dalle successive per la velocità di rotazione utilizzata durante il test in cold flow: tuttavia la sua frequenza sperimentale è significativamente inferiore rispetto alla frequenza delle condizioni operative della stessa famiglia, differenza ancor più marcata se si considera il valore massimo. Data la forte dipendenza dell'ampiezza numerica dalla rigidezza di contatto, a sua volta determinata dalla frequenza target, la risposta di ciclo limite calcolata risulta distante dal dato sperimentale. Al contrario, i valori numerici delle condizioni operative OC6 e OC7 sono particolarmente vicini ai dati sperimentali, essendo la differenza percentuale prossima all'1% per entrambe.

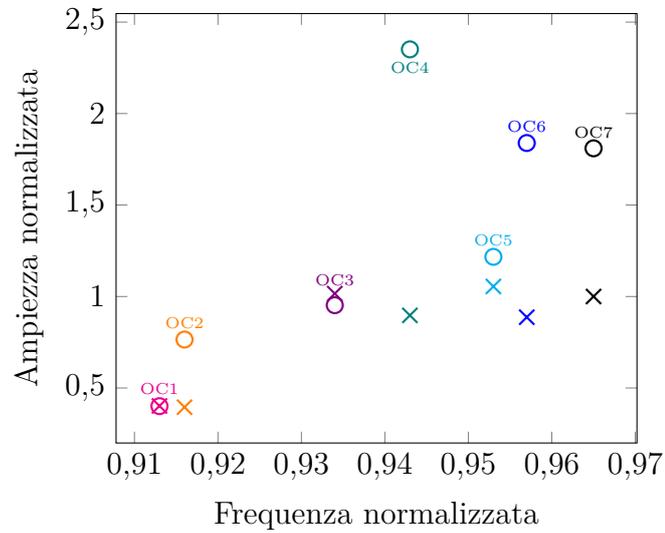


Figura 4.21: Confronto tra i dati numerici (marker \circ) valutati alla frequenza sperimentale media e i dati sperimentali (marker \times) per diverse condizioni operative.

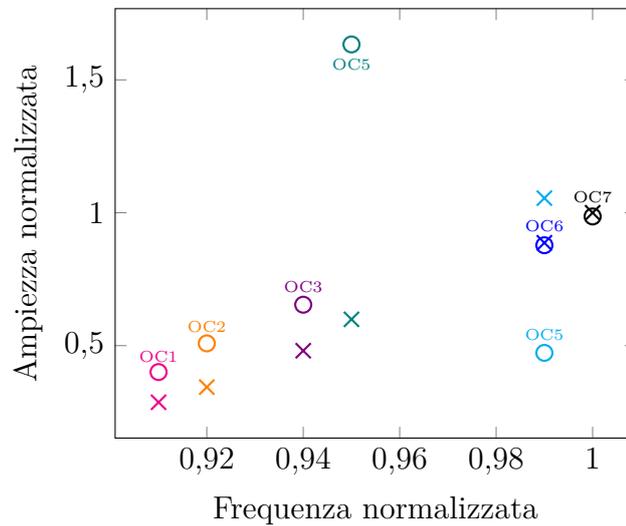


Figura 4.22: Confronto tra i dati numerici (marker \circ) e sperimentali (marker \times) valutati alla frequenza sperimentale massima per diverse condizioni operative.

Capitolo 5

Conclusioni

L'attività di tesi ha avuto come principale obiettivo lo sviluppo di un software per la determinazione della risposta di ciclo limite di componenti LPT. Per l'analisi a flutter si utilizza un approccio accoppiato ad una via: lo studio aerodinamico fornisce i parametri di input per il calcolo strutturale, tuttavia non avviene alcuna interazione in verso opposto. La risoluzione delle equazioni del moto costituisce un problema aeroelastico non lineare, complicato ulteriormente dalla presenza degli elementi di contatto posti tra il dovetail e lo slot del disco al fine di simulare l'effetto smorzante dovuto alla dissipazione di energia per effetto dello strisciamento tra i due corpi. La metodologia implementa inoltre due differenti approcci, basati rispettivamente sulla riduzione modale e sulle tecniche di Guyan, Craig-Bampton e Tran. Rispetto all'approccio fisico, l'approccio modale consente tempi di calcolo decisamente ridotti. Per questo motivo esso è stato maggiormente impiegato.

In primo luogo il codice esistente è stato analizzato per comprenderne il funzionamento e verificare il comportamento della risposta dell'LCO al variare di parametri quali l'aerodamping, il coefficiente di attrito ed il numero di modi considerati. Successivamente è stata apportata una modifica alla metodologia, con l'obiettivo di eliminare i parametri non fisici (coefficiente di riduzione della rigidità di contatto, forze fittizie) che consentivano il superamento del problema dell'over-stiffening del contatto nel caso di riduzione modale. A questo scopo è stato rivisto il modello FEM utilizzato per l'analisi modale (da cui si ricava la base modale necessaria alla riduzione), modificando i vincoli tra dovetail e disk slot.

Per facilitare le analisi, è poi stata interamente sviluppata un'interfaccia grafica in grado di gestire la fase di pre-processing riguardante la preparazione e riduzione del modello FEM, il processing, ossia l'analisi aeromeccanica vera e propria, ed infine il post-processing, fase cruciale per la piena comprensione della fisica del problema. Inoltre è stato implementato un tool per la scelta della distribuzione di

precarico sulla superficie di contatto. Grazie ad esso è stato possibile studiare il comportamento della risposta di ciclo limite al variare di tale distribuzione. I risultati numerici sono stati confrontati con i dati sperimentali per diverse condizioni operative, ottenendo dei buoni riscontri considerando il livello di approssimazione che le ipotesi adottate implicano.

Sviluppi futuri riguardano l'ulteriore upgrade dell'interfaccia grafica, in particolare del post-processing, per una comprensione ancora più approfondita della fisica del problema. Attualmente si sta lavorando ad esempio sulla possibilità di plottare il ciclo di isteresi dei nodi di contatto selezionati graficamente dall'utente. Occorre inoltre approfondire la determinazione delle rigidità di contatto, poiché esse risultano molto influenti sulla risposta di ciclo limite, sia in termini di ampiezza che di frequenza. Un'ulteriore perfezionamento della metodologia vedrebbe poi l'introduzione di una rigidità aerodinamica opportunamente tarata.

Riferimenti bibliografici

Materiale cartaceo

- [1] Marco Lassalle. «Self-excited vibrations controlled by damping at blade root joints of turbine disks». Tesi di Dottorato. Politecnico di Torino, 2018.
- [2] C. M. Firrone e M. Lassalle. «A parametric study of Limit Cycle Oscillation of a bladed disk caused by flutter and friction at the blade root joints». In: *Journal of Fluid and Structures* 76 (2018), pp. 349–366.
- [8] Philippe Busquin et al. *European aeronautics: a vision for 2020*. Report. European Commission, 2011.
- [10] Lorenzo Casalino e Dario Pastrone. «Fondamenti di macchine e propulsione». Appunti accademici. Politecnico di Torino, 2016.
- [14] Amedeo Ramieri. «Analisi e comparazione di diversi modelli di contatto all’interlocking per rotori di turbine di bassa pressione». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2017.
- [15] Philip G. Hill e Carl R. Peterson. *Mechanics and thermodynamics of propulsion*. Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [16] Davide Prino. «Automatic Preliminary Assessment of the mechanical response of LPT stages». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2018.
- [17] Giuseppe Battiato. «Vibrations prediction and measurement of multi-stage bladed disks with non-linear behavior due to friction contacts». Tesi di Dottorato. Politecnico di Torino, 2017.
- [18] Andrea Ferrante. «Sviluppo di un tool per studio dinamico automatizzato relativo a palette di turbine di bassa pressione». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2018.
- [20] Eleonora Caponio. «Calcolo della risposta forzata di componenti per motori aeronautici in presenza di contatti per attrito». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2018.
- [21] Fabio Bellacicco. «Stabilizzazione di uno stadio di LPT bladed-disk in presenza della condizione di instabilità a flutter mediante mistuning intenzionale». Tesi di Laurea Magistrale. Politecnico di Torino, 2016.
- [22] M. P. Castaner e C. Pierre. «Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: status and emerging directions». In: *Journal of Propulsion and Power* 22.2 (2006).

- [23] Giovanna Girini. «Tecniche di riduzione di modelli FEM con simmetria ciclica». Report. Università Politecnica delle Marche.
- [24] D. M. Tran. «Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry». In: *Computers and Structures* 79 (2001), pp. 209–222.
- [25] Dewey H. Hodges e G. Alvin Pierce. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. A cura di Wei Shyy e Michael J. Rycroft. Cambridge University Press, 2011.
- [27] D. J. Ewins. «Control of vibration and resonance in aero engines and rotating machinery - An overview». In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 87 (2010), pp. 504–510.
- [28] T. H. Fransson. *Aeroelasticity in axial flow turbomachines*. VKI LS, 1999.
- [29] J. G. Marshall e M. Imregun. «A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications». In: *Journal of Fluid and Structures* 10 (1996), pp. 237–267.
- [30] A. V. Srinivasan. «Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades». In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 119 (1997), pp. 741–775.
- [31] M. F. Platzer e F. O. Carta. *Manual on aero-elasticity in axial-flow turbomachines*. Vol. 2 – Structural dynamics and aero-elasticity. AGARD, 1988.
- [32] S. Zucca, C. M. Firrone e M. M. Gola. «Numerical assessment of friction damping at turbine blade root joints by simultaneous calculation of the static and dynamic contact loads». In: *Nonlinear Dynamics* 67 (2012), pp. 1943–1955.
- [33] C. M. Firrone, S. Zucca e M. M. Gola. «The effect of underplatform dampers on the forced response of bladed disks by a coupled static/dynamic harmonic balance method». In: *International Journal of Non-linear Mechanics* 46 (2011), pp. 363–375.
- [35] E. P. Petrov. «Analysis of flutter-induced limit cycle oscillations in gas-turbine structures with friction, gap, and other nonlinear contact interfaces». In: *Journal of Turbomachinery* 134(6) (2012).
- [36] E. P. Petrov e D. J. Ewins. «Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks». In: *Journal of Turbomachinery* 125 (2003), pp. 364–371.

- [37] C. Siewert et al. «Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces». In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 132(8) (2010).
- [38] B. D. Yang, M. L. Chu e C. H. Menq. «Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load». In: *Journal of Sound and Vibration* 210(4) (1998), pp. 461–481.
- [39] F. Poli et al., cur. *A 3D Time-Linearized Method for Turbomachinery Blade Flutter Analysis*. 11th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics e Aeroelasticity of Turbomachines (ISUAAAT). Mosca, Russia, 4-8 Settembre 2006.

Sitografia

- [3] *GREAT 2020, nasce il motore aeronautico del futuro*. URL: <http://www.great2020.it>.
- [4] *Avio Aero: who we are*. URL: <https://www.avioaero.com/Who/Avio-Aero>.
- [5] *Consiglio Nazionale delle Ricerche*. URL: <https://www.cnr.it>.
- [6] *Istituto di Scienza e Tecnologia dei Materiali Ceramici*. URL: <http://www.istec.cnr.it>.
- [7] *ACARE*. URL: <https://www.acare4europe.org>.
- [9] *Turbojet: history*. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Turbojet#History>.
- [11] *Turbojet GE J85-17a*. URL: https://it.m.wikipedia.org/wiki/File:J85_ge_17a_turbojet_engine.jpg.
- [12] *Turboshaft GE T700*. URL: <https://airandspace.si.edu/collection-objects/general-electric-xt700-ge-700-turboshaft-engine>.
- [13] *Turboprop GE CT7-9*. URL: <https://www.geaviation.com/commercial/engines/ct7-engine>.
- [19] *Blisk*. URL: <https://www.avioaero.com/What/Turbomachinery>.
- [26] *Triangolo di Collar*. URL: <https://aerospaceengineeringblog.com>.
- [34] C. M. Firrone e S. Zucca. *Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks*. 2011. URL: https://www.researchgate.net/figure/Different-types-of-friction-contacts-in-turbine-bladed-disks-blade-root-joints-blade_fig1_221915902.

- [40] ANSYS: *CONTA174 Element Description*. URL: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_CONTA174.html.
- [41] ANSYS: *TARGE170 Element Description*. URL: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_TARGE170.html.
- [42] ANSYS: *Designating Contact and Target Surfaces*. URL: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.2/en-us/help/ans_ctec/Hlp_ctec_dessurf.html.
- [43] ANSYS: *Choosing Between Linear and Higher Order Elements*. URL: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_mod/Hlp_G_MOD2_4.html.