POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Approximate model for analysis of composites extending concepts behind 3D exact elasticity solutions

Relatori:

Prof. Ugo Icardi

Ing. Andrea Urraci

Candidato:

Gino Napoleone Capuani

Marzo 2019

Indice

1.Introduzione

Oggetto di studio della presente tesi è rappresentato dallo sviluppo di un modello che, partendo dalla teoria ZZA, potesse fornire risultati con la stessa accuratezza, semplificandone la formulazione. Si vuole dimostrare che, sviluppando una soluzione che descriva in modo appropriato la variazione degli spostamenti lungo lo spessore, è possibile assumere in modo arbitrario le funzioni globali e layerwise: ciò è possibile soddisfacendo in modo opportuno le condizioni di continuità delle tensioni, al contorno e di equilibrio. Si dimostra inoltre che la scelta delle funzioni zig-zag può non inficiare in alcun modo sui risultati ottenuti nel caso sia possibile ridefinire i coefficienti delle espressioni che descrivono l'andamento degli spostamenti lungo lo spessore; ciò è possibile imponendo il soddisfacimento di ulteriori vincoli fisici, garantendo inoltre la possibilità di trascurare del tutto i contributi forniti dalle funzioni zig-zag. Si sono analizzati diversi casi statici, nel campo di deformazione elastica, nei quali sono presente forti effetti layerwise, in modo tale da verificare l'accuratezza della formulazione sviluppata nella presente tesi.

1.1 Stato dell'arte

Lo sviluppo e l'implementazione di laminati rinforzati con fibre e compositi sandwich è stato fondamentale nell'ottica di sviluppo di veicoli aerospaziali in grado di aumentare la propria autonomia di volo, carico pagante, range di volo e velocità a fronte di una diminuzione dei pesi e dunque della potenza associata al sistema propulsivo e di consumo di combustibile. Ciò è conseguenza del fatto che tali materiali possiedono elevata resistenza specifica e proprietà di rigidezza che portano anche ad altri vantaggi. Contrariamente, date le scarse caratteristiche di rigidezza e resistenza dei materiali compositi in direzione trasversale, se comparate con quelle relative alle direzioni nel piano, è possibile che si verifichino complessi meccanismi di rottura, tra i quali effetti locali insiti nella struttura multi-fase che li caratterizza, cause di rotture catastrofiche o perdita di funzionalità della struttura; inoltre effetto di primaria importanza è l'instaurarsi di un campo di tensioni tridimensionale, il quale necessita di teorie accurate che lo descrivano il più fedelmente possibile.

Al fine di stabilire l'effettiva validità di tali teorie, sono state introdotti termini, nelle relative formulazioni, che coinvolgano effetti zig-zag e effetti layerwise. Gli spostamenti allora devono essere descritti da funzioni di classe C^0, continue attraverso le interfacce del materiale, atte a simulare e riprodurre in modo efficace l'effetto zig-zag, invece che utilizzare funzioni di classe C^1 continue; la scelta delle prime rende possibile la descrizione dell'inversione di pendenza degli spostamenti alle interfacce, soddisfacendo così le condizioni di equilibrio locale per il campo di tensioni, la continuità del taglio trasversale, degli sforzi normali trasversali e del gradiente di questi ultimi.

Attualmente sono disponibili diverse teorie per compositi sandwich e laminati le quali tengono conto dei diversi gradi di libertà che generano e del relativo costo computazionale. Le teorie in esame possono allora essere riassunte in tre categorie: teorie *equivalent single-layer* (si veda Whitney e Pagano[1], Reddy [2]), teorie *discrete-layer* (Reddy[3] e Yasin e Kapuria [4])e modelli piastra layerwise di ordine superiore (HLW, vedi Frostig [5] e Plagianakos e Saravanos [6]) ; queste ultime inoltre possono essere suddivise in due ulteriori gruppi, definiti come teorie *displacement-based* e teorie *mixed*. La distinzione effettuata tramite quest'ultima classificazione si basa sulla definizione del campo di spostamento: mentre nelle prime le tensioni sono calcolate dagli spostamenti tramite le equazioni costitutive, nelle seconde i campi di spostamento, deformazione e tensione possono essere considerati separati l'uno dall'altro; per maggior approfondimento è possibile far riferimento al libro di Reddy [7], agli scritti di Vasilive e Lur'e [8], Reddy e Robbins [9],Lur'e e Shumova [10], Carrera [11-13] [5-7], Kapuria e Nath [14], Khandan et al. [15], e Altenbach [16] Ulteriori studi, più recenti, a tal riguardo sono stati effettuati consultabili ai riferimenti [17-26]. Inoltre è possibile introdurre un'ulteriore classe di teorie, in tale ottica, definite *hierarchical theories* (HLT, vedi de Miguel et al. [27] e Catapano et al. [28]) nelle quali non sempre è possibile distinguere in modo chiaro la separazione o meno dei diversi campi sopra citati.

Il vantaggio più evidente nelle teorie ESL corrisponde al limitato costo computazionale; di contro si trascurano completamente gli effetti dovuti alla stratificazione al quale si può compensare con tecniche di post-processing, rendendo però inefficiente la risoluzione numerica. Comparazioni con le teorie ESL sono state effettuate rispetto i modelli ZZ avanti, come studiato da Icardi e Sola [29] e Icardi e Urraci [30,31], precedentemente già dimostrato da altri ricercatori, inclusi Zhen e Wanji[32], Kapuria et al. [33] e da Burlayenko et al. [34] in modo tale da evidenziare i limiti delle prime. Attualmente le teorie più utilizzate sono quelle DL e ZZ poiché permettono di definire campi di spostamento e tensione indipendentemente dal tipo di stratificazione, dalle proprietà degli strati, dalle condizioni di carico e al contorno. Le DL presentano un elevato numero di variabili poiché la descrizione dei campi avviene a livello di strato; tale tipo di formulazione permette un'accurata descrizione dei campi di spostamento e di tensione, anche per laminati estremamente spessi e dove gli effetti layerwise sono dominanti; di contro, l'elevato numero di incognite incide negativamente sul costo computazionale il quale può risultare eccessivo, soprattutto nell'analisi di strutture di interesse industriale. A fronte di un costo computazionale inferiore rispetto quello delle DL, si sono sviluppate le teorie ZZ le quali presentano costi computazionali intermedi tra quelli riscontrabili nelle ESL e nelle DL; tale caratteristica deriva dal fatto che le ZZ tengono conto della deformazione trasversale, offrendo pertanto un'analisi di stato tensionale nei laminati con un costo computazionale inferiore rispetto quello delle DL. Le teorie DL, molto utilizzate in passato, sono state soppiantate da teorie più recenti quali la CUF[7] e le refined ZZ [12-14,19], poiché il numero di variabili considerate dalle DL può superare le capacità computazionali nel caso di analisi di strutture di interesse industriale.

Le teorie ZZ più recenti, a fronte di un numero inferiore di gradi di libertà rispetto la CUF, dimostrano avere lo stesso grado di accuratezza, migliorando in tal modo il rapporto tra accuratezza e costo computazionale. Come mostrato in [13,14], i tempi di calcolo e il costo computazionale delle ZZ risultano essere dello stesso ordine delle ESL, ancor più vantaggioso se si considera un'accuratezza migliore rispetto gli elementi solidi/CUF nel caso di laminai spessi, con accentuata anisotropia trasversale, stratificazione arbitraria e condizioni di carico e al contorno generiche.

Le ZZ possono essere suddivise in physically-based, cioè le teorie Di Sciuva's like [35] (DZZ) o kinematich-based, cioè le teorie Muramaki's like [36] (MZZ). Le DZZ integrano contributi layerwise in una formulazione ESL dove i gradi di libertà sono costituiti dalle sole variabili cinematiche, il cui numero è fissato. Questi contributi sono espressi come prodotto di funzioni zig-zag lineari [35]o non lineari [37] e ampiezze zig-zag incognite. Tali ampiezze vengono espresse come funzioni dei gradi di libertà e delle proprietà del laminato, soddisfacendo le condizioni di continuità delle tensioni alle interfacce. Tali modelli sono leggermente più complicati da formulare ma forniscono risultati più precisi; si aggiungono funzioni del tipo:

$$\phi_j^k = (z+h)\left(\frac{G_j}{Q_{44}^k}-1\right)+\sum_{i=2}^{nl}\left[2h^{(i-1)}\left(\frac{G_j}{Q_{44}^{(i-1)}}-\frac{G_j}{Q_{44}^{i}}\right)\right]$$

dove

- il pedice j indica il contributo legato alla componente del modulo di taglio in direzione j;

Tnl indica il numero di strati che compongono il laminato/sandwich;

- l'ultimo termine tra parentesi tonde tiene conto della differenza di rigidezza a taglio tra i vari strati.

Le MZZ assumono a priori funzioni zig-zag che periodicamente inducano un'inversione di pendenza dell'andamento degli spostamenti alle interfacce, a prescindere dall'orientamento delle lamine, dalle proprietà dei materiali e dallo spessore degli strati, motivazione della definizione di modello kinematic-based. I campi di tensione sono definiti tramite il principio variazionale di Hellinger-Reissner (HR) le cui variabili sono pertanto costituite da quantità sia cinematiche che di tensione e il cui numero dipende dal numero degli strati fisici/computazionali. Prendendo in esempio la Muramaki zig-zag function (MZZF), si introducono allora delle funzioni del tipo:

$$MZZF = (-1)^k \xi_k(u_z, v_z, w_z)$$

le quali diventano gradi di libertà aggiunti.

Come mostrato negli scritti di Carrera [38-40], Demasi[41], Mattei e Bardella [42], Icardi et al. [43-44], Li e Liu[45], Zhen e Wanji[46-47] e Shariyat [48], la deformabilità trasversale normale, che solitamente è trascurata, deve essere invece considerata di primaria importanza, soprattutto per determinate condizioni al contorno quali ad esempio quelle di semplice appoggio, con variazioni importanti delle caratteristiche meccaniche lungo lo spessore e per carichi concentrati. In tale ottica, sono state sviluppate diverse teorie, complesse nella formulazione, con un numero sufficiente di parametri in modo da soddisfare i principali vincoli fisici, a seconda dei casi considerati. Sebbene spesso si utilizzano serie di Taylor e serie di potenze lungo lo spessore, può essere necessario utilizzare polinomi, funzioni trigonometriche, esponenziali, combinazioni tra queste o funzioni in coordinate cilindriche per meglio rappresentare le variabili.

Le improved ZZ, definite come teorie global-local, sono basate sulla sovrapposizione globale-locale dei campi di spostamento; tali teorie sono state proposte inizialmente da Li e Liu [49] e raffinate da Zhen e Wanji [50], rendendo possibile, a differenza delle prime formulazioni, la definizione del campo di tensioni, in modo accurato, dalle equazioni costitutive. Risulta possibile allora valutare l'accuratezza considerando specifici casi, comparando le mixed DZZ con altri studi nei quali gli spostamenti trasversali sono ottenuti in modo simile (HR o Hu-Washizu, HW). Tra questi studi si ricordano quelli di Vel e Batra [51] con condizioni al contorno arbitrarie, le travi incastrate di Tessler et al. [52]e Carrera et al., la trave sandwich incastrata-appoggiata di Mattei e Bardella [45], così come i carichi a step applicati localmente e altre condizioni che risaltino gli effetti di carichi non uniformi o condizioni di vincolo non di uso classico nelle varie teorie. Ulteriori studi, recentemente, sono stati effettuati al riguardo anche da Kim e Cho [53], Barut et al. [54] e Iurlaro et al. [55] i quali hanno formulato teorie DZZ mixed tramite HR; teorie DZZ mixed basate su HW sono invece state sviluppate da Zhen e Wanji [] dove le derivate di ordine superiore negli spostamenti sono stati eliminati, semplificando la cinematica.

Tali teorie non includono funzioni zig-zag esplicite mentre i coefficienti sono determinati tramite il soddisfacimento delle condizioni riguardo le tensioni trasversali alle facce esterne così come le condizioni di continuità, alle interfacce, degli spostamenti e delle tensioni trasversali a taglio. La CUF, che permette di considerare gli spostamenti in forme arbitrarie scelte come input dell'analisi, permette di considerare modelli strutturali ESL e mixed MZZ come particolarizzazioni ed è per tale motivo che la CUF è attualmente molto usata, in particolare per quei casi con condizioni di carico e al contorno generiche dove altre teorie con meno gradi di libertà non sono accurate.

Si è dimostrato, di contro, che le teorie ZZ con pochi gradi di libertà possono presentare lo stesso grado di accuratezza della CUF. Tali teorie mostrano la possibilità di cambiare la rappresentazione attraverso lo spessore, raggiungendo a volte un grado di generalità elevato; ciò permette, nonostante l'imposizione di vincoli fisici, caratteristici di base delle teorie ZZ, di non dover necessariamente considerare spostamenti arbitrari come invece accade nella CUF la quale, per definire gli spostamenti, spesso include funzioni zig-zag Muramaki's like mentre le tensioni interlaminari vengono definite a parte, tramite il principio di HR. Si nota allora che, riguardo la CUF, si necessita in un elevato numero di variabili e nonostante ciò il campo di spostamenti attraverso lo spessore non è sufficientemente accurato; a tal riguardo è possibile far riferimento agli studi di Brischetto et al. [57] (15 gradi di libertà per ogni sposamento) e [30] (solo 5 gradi di libertà) i quali presentano lo stesso grado di accuratezza. Il motivo per il quale le funzioni zig-zag incluse nelle MZZ forniscono una rappresentazione del campo di spostamenti inappropriata è da ricercare nella pendenza degli spostamenti alle interfacce la quale non deve necessariamente invertirsi, come invece è assunto nelle MZZ; a tal riguardo, sono stati compiuti studi da Gherlone [58], Groh e Waver [59] e Icardi e Urraci [30,31]. I risultati di [30,31] mostrano inoltre che l'accuratezza delle MZZ aumenta in modo appropriato se si sceglie il segno della pendenza, risultando comunque meno accurate rispetto le DZZ quando si tenta di rappresentare gli spostamenti con lo stesso basso ordine, come dimostrato inoltre da Zhen e Wanji [56].

Si osserva che si necessita di ulteriori ricerche per determinare nuovi benchmark, già definiti per le MZZ, nel caso delle DZZ poiché recenti sviluppi di quest'ultima hanno portato a tenere conto della deformabilità trasversale, in direzione normale, con possibilità di poterne aumentare il campo di applicabilità. Sarebbe importante analizzare meglio quando e in che modo l'introduzione di funzioni continue a tratti, per la descrizione dello spostamento trasversale, comporti vantaggi nella DZZ potendo contemporaneamente semplificare la cinematica se si recuperassero gli effetti della deformabilità trasversale, in direzione normale, e delle tensioni. Studi a tal proposito sono già stati in parte effettuati, già nel 2001, da Icardi il quale sviluppava un DZZ con funzione zig.zag del secondo ordine e una funzione continua a tratti del quarto ordine lungo lo spessore dello spostamento trasversale, che a priori soddisfa la continuità degli sforzi normali, trasversali, e del gradiente di questo alle interfacce, in modo da predire accuratamente il campo di spostamenti in laminati spessi con forti variazioni di proprietà lungo lo spessore e per sandwich con cuore a bassa rigidezza. Tale teoria negli anni successivi è stata estesa ai gusci e implementata, assumendo la definizione di "adattiva". Si intende affermare che tale teoria offre la possibilità di arricchire la rappresentazione lungo lo spessore, in modo da adattarsi alle variazioni delle proprietà meccaniche e dello spessore degli strati, mantenendo fissato il numero di incognite a cinque. Risulta allora possibile ottenere espressioni in forma chiusa che forniscano i coefficienti della cinematica e delle funzioni zig-zag, aumentando la velocità di calcolo.

2 Studio preliminare

Nei compositi laminati e sandwich, nell'ottica di una progettazione in sicurezza per strutture sottoposte a differenti condizioni di vincolo e di carico, è necessario poter determinare accuratamente le tensioni coinvolte. Le *Classical Laminated Theories* (CLT), cioè quelle teorie strutturali basate sulle ipotesi di Eulero-Bernoulli e di Kirchhoff, rispettivamente per travi e piastre/gusci, risultano essere inaccurate per descrivere laminati spessi poiché queste trascurano gli effetti di deformazione trasversale a taglio e normale. Si necessita pertanto della formulazione di un modello che in primis preveda l'esistenza di tali effetti con relativo aumento della complicazione analitica. Si introducono allora nuove condizioni (rispetto a quelle determinate dalla CLT), le quali, soddisfatte, permettono di determinare in forma chiusa e ben approssimata le grandezze coinvolte nell'analisi di modelli strutturali tridimensionali in materiale composito.

Nel presente capitolo si riportano due metodi tramite i quali è possibile implementare e calcolare le incognite del problema strutturale coinvolto, ai quali si aggiungono le note condizioni fisiche di continuità, al bordo e di soddisfacimento dell'equilibrio locale.

Successivamente si riporta una breve esposizione della soluzione esatta di Pagano [60] per travi laminate/sandwich, semplicemente appoggiate e sottoposte a flessione cilindrica, studio di partenza dal quale si è proceduto a definire il modello attuale sviluppato nella presente tesi.

2.1 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange viene impiegato nei problemi di estremo vincolato per caratterizzare gli estremanti di una funzione di due variabili, in presenza di un vincolo del tipo

$$C(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad\qquad \textit{sul bordo } \Omega \tag{1}$$

Specificatamente per il caso in esame, si vogliono allora determinare i valori numerici dei moltiplicatori di Lagrange che rendano stazionario il funzionale che descrive il problema. Si introduce allora il nuovo funzionale, espresso come

$$\widehat{\Pi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\boldsymbol{u}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T C(\boldsymbol{u}) d\Omega \tag{2}$$

indicando con **λ** i moltiplicatori di Lagrange. Procedendo allora al calcolo delle condizioni che determinano la stazionarietà del funzionale, si effettua la derivata del nuovo funzionale rispetto le variabili iniziali **u** del funzionale e rispetto i moltiplicatori di Lagrange

$$\delta\widehat{\Pi} = \partial\Pi + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \partial C(\boldsymbol{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \partial\boldsymbol{\lambda}^T C(\boldsymbol{u}) d\Omega \tag{3}$$

da cui segue la risoluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \partial\Pi + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \partial C(\boldsymbol{u}) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \partial\boldsymbol{\lambda}^T C(\boldsymbol{u}) d\Omega = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Osservando la prima riga del sistema, questa rappresenta la somma tra la variazione del potenziale di partenza e il contributo dei vincoli, i quali soddisfano le condizioni imposte nella seconda equazione del sistema. I moltiplicatori di Lagrange pertanto rappresentano nuovi gradi di libertà del sistema, con annesso aumento del costo computazionale ma permettono di soddisfare le condizioni al contorno tramite un approccio di tipo variazionale; inoltre, la potenza di tale metodo consiste nell'ottenere come risultato il valore numerico dei moltiplicatori, anche se questi non rappresentano delle incognite fisiche del problema.

Si osserva infine che tale metodo fornisce condizioni necessarie ma non sufficienti per la determinazione dei punti di stazionarietà del funzionale: può accadere infatti che vengano forniti punti che non rappresentano né il minimo né il massimo locale del funzionale.

2.2 Metodo di Rayleigh-Ritz

Il metodo di Rayleigh-Ritz è un metodo di tipo variazionale che permette di approssimare la soluzione esatta quando questa non può essere calcolata per via analitica. Sviluppando un'approssimazione della soluzione del tipo

$$u_N = \phi_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \tag{5}$$

tale metodo permette di calcolare le costanti di combinazione lineare $c_n$delle funzioni di tentativo ϕ_n. Si procede allora a sostituire l'approssimazione nell'espressione del funzionale $\Pi(\boldsymbol{u})$in modo tale che la condizione di stazionarietà del funzionale si trasformi in una condizione di stazionarietà di una funzione ordinaria nelle N variabili indipendenti c_n:

$$\frac{\partial \Pi(c_1, c_2, \dots, c_N)}{\partial c_n} = 0 \qquad n = 1,2, \dots., N \tag{6}$$

Si ottiene pertanto un sistema di N equazioni algebriche nelle N incognite $c_n$che consente di trovare la soluzione approssimata u_N.

Si osserva che le funzioni di forma devono soddisfare singolarmente le condizioni al contorno geometriche; specificatamente, le ϕ_n soddisfano alla parte omogenea delle stesse mentre ϕ_0 è scelta in modo da soddisfare la parte non omogenea delle condizioni al contorno geometriche. Le ϕ_n inoltre devono rappresentare uno spazio di funzioni completo e garantire un sufficiente grado di regolarità di modo che le condizioni di congruenza interna siano automaticamente soddisfatte.

Nel caso di un problema a carattere strutturale (lo stesso ragionamento può essere espresso in un ben più ampio campo di applicazioni), il funzionale va a rappresentare la definizione del potenziale totale del sistema (pertanto tale tipo di formulazione prende nome anche di metodo energetico), somma del potenziale totale dei carichi applicati e dell'energia di deformazione elastica.

2.3 Soluzione di Pagano

Uno dei primi studi effettuati riguardo la ricerca di soluzioni esatte per piastre 3D è stato elaborato da Pagano [60] il quale ha analizzato il problema di laminati [0°/90°/0°] sottoposti a flessione cilindrica, con carico sinusoidale sulla faccia superiore e semplicemente appoggiati. I risultati esposti sono stati poi confrontati rispetto la soluzione CPT (*Classical Plate Theory*), risultata inadatta per l'analisi di piastre con basso rapporto larghezza-spessore.

Si considera un laminato composto da N strati ortotropi in modo tale che gli assi di simmetria del materiale siano paralleli agli assi della piastra. La struttura è in uno stato di deformazione piana rispetto il piano xz (flessione cilindrica) e semplicemente appoggiata agli estremi. Si determina allora la risposta della piastra ad un carico normale a trazione $\sigma_z = q_0(x)$ applicato sulla faccia superiore.

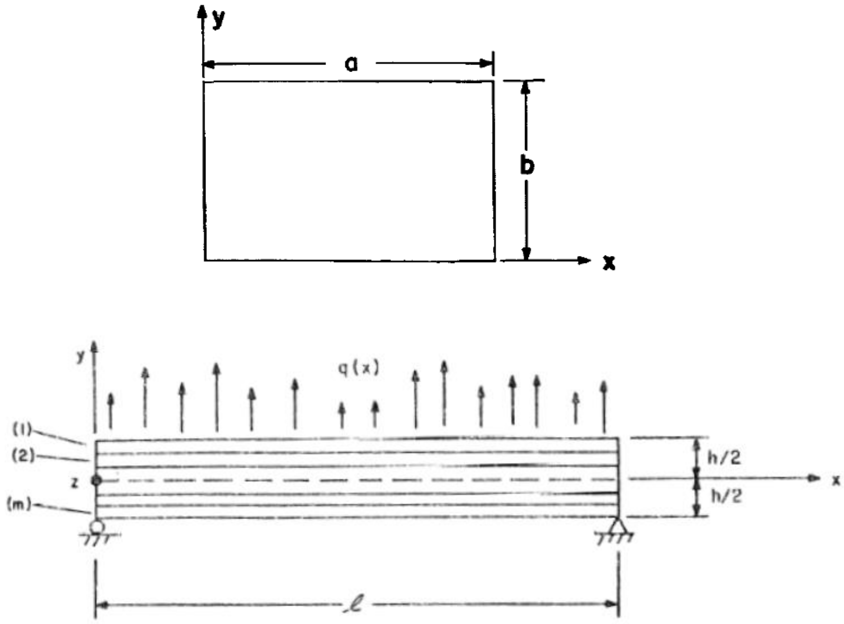

Figura 2.1 Configurazione caso Pagano

Rispetto a come indicato in Figura 2.1, la coordinata dello spessore è da riferirsi alla direzione z.

Le equazioni costitutive diventano

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = R_{11}\sigma_x + R_{13}\sigma_z \\ \varepsilon_z = R_{13}\sigma_x + R_{33}\sigma_z \\ \gamma_{xz} = R_{44}\tau_{xz} \end{gathered} \tag{7}$$

dove R_{ij} indicano i coefficienti di rigidezza ridotti per deformazione piana, definiti come

$$R_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \tag{8}$$

e S_{ij} sono i coefficienti di rigidezza rispetto gli assi di simmetria del materiale.

Si aggiunge inoltre, essendo il problema riferito al caso di deformazione piana, la componente di tensione

$$\sigma_y = -\frac{1}{S_{22}}(S_{12}\sigma_x + S_{23}\sigma_z) \tag{9}$$

Le equazioni di equilibrio risultano essere

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xz,z} = 0$$
$$\sigma_{z,z} + \sigma_{xz,x} = 0 \tag{10}$$

Le condizioni al contorno naturali, sulle facce superiori e inferiori, diventano

$$\sigma_z\left(x, \frac{h}{2}\right) = q(x)$$
$$\sigma_z\left(x, \frac{h}{2}\right) = 0 \tag{11}$$
$$\tau_{xz}\left(x, \pm\frac{h}{2}\right) = 0$$

mentre le condizioni di semplice appoggio sono espresse come

$$\sigma_x(0, z) = \sigma_x(l, z) = 0$$
$$w(0, z) = w(l, z) = 0 \tag{12}$$

Si introduce allora un'indicizzazione degli strati, dall'alto verso il basso, per la quale risulta che lo strato superiore avrà indice i=1; si costruisce inoltre un sistema di coordinate locale x_i, y_i, z_i centrato in x=0 e passante per il piano medio dell'i-esimo strato di spessore h_i. Si introducono le condizioni di continuità degli spostamenti e delle tensioni trasversali alle interfacce, esprimibili come

$$\sigma_z^i\left(x, \frac{h_i}{2}\right) = \sigma_z^{i+1}\left(x, -\frac{h_{i+1}}{2}\right)$$
$$\tau_{xz}^i\left(x, \frac{h_i}{2}\right) = \tau_{xz}^{i+1}\left(x, -\frac{h_{i+1}}{2}\right)$$
$$u^i\left(x, \frac{h_i}{2}\right) = u^{i+1}\left(x, -\frac{h_{i+1}}{2}\right) \tag{13}$$
$$w^i\left(x, \frac{h_i}{2}\right) = w^{i+1}\left(x, -\frac{h_{i+1}}{2}\right)$$

Si assume che il carico abbia un andamento sinusoidale, esprimibile come serie di Fourier

$$q(x) = q_0 \sin(px) \tag{14}$$

dove q_0 è una costante e

$$p = p(n) = \frac{n\pi}{l} \tag{15}$$

La soluzione del problema ai valori al contorno risulta essere calcolabile in forma chiusa, ponendo

$$\sigma_x^i = f_i''(z)\sin(px)$$
$$\sigma_z^i = -p^2 f_i(z)\sin(px) \tag{16}$$
$$\tau_{xz}^i = -pf_i(z)\cos(px)$$

la quale soddisfa le equazioni di equilibrio. Tramite le equazioni in (16), si osserva che le funzioni $f_i(z)$ sono definite tramite la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$R_{11}^i f_i''''(z) - \left(R_{44}^i + 2R_{13}^i\right) + p^2 f_i''(z) + R_{33}^i p^4 f_i(z) \tag{17}$$

ottenuta tramite sostituzione della soluzione, in forma generica, nell'equazione di compatibilità

$$\varepsilon_{x,zz} + \varepsilon_{z,xx} - \gamma_{xz,xz} = 0 \tag{18}$$

Dall'equazione differenziale, è possibile allora esprimere la funzione $f_i(z)$ come

$$f_i(z) = \sum_{j=1}^{4} A_{ji} e^{m_{ji} y_i}, \qquad i = 1,2, \dots, m \tag{19}$$

dove A_{ji} sono costanti, calcolate una volta che è stato dimostrato che le m_{ji} sono tutte distinte tra loro e appartenenti al campo dei numeri reali. Questi ultimi coefficienti sono espressi come

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix} m_{1i} \\ m_{2i} \end{matrix}\right\} &= \pm p \left(\frac{a_i + b_i}{c_i} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left.\begin{matrix} m_{3i} \\ m_{4i} \end{matrix}\right\} &= \pm p \left(\frac{a_i - b_i}{c_i} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{20}$$

con

$$\begin{gathered} a_i = R_{44}^i + 2R_{13}^i \\ b_i = \left(a_i^2 - 4R_{11}^i R_{33}^i \right)^{\frac{1}{2}} \\ c_i = 2R_{11}^i \end{gathered} \tag{21}$$

Sostituendo la funzione $f_i(z)$ così determinata nella soluzione in forma generica, si ottengono le componenti di tensione

$$\begin{gathered} \sigma_x^i = \sin(px) \sum_{j=1}^{4} A_{ji} m_{ji}^2 e^{m_{ji} z_i} \\ \sigma_z^i = -p^2 \sin(px) \sum_{j=1}^{4} A_{ji} e^{m_{ji} z_i} \\ \tau_{xz}^i = -p \cos(px) \sum_{j=1}^{4} A_{ji} m_{ji} e^{m_{ji} z_i} \end{gathered} \tag{22}$$

e quelle di spostamento

$$\begin{gathered} u_i = \frac{\cos(px)}{p} \sum_{j=1}^{4} A_{ji} \left(R_{13}^i p^2 - R_{11}^i m_{ji}^2 \right) e^{m_{ji} z_i} \\ w_i = \sin(px) \sum_{j=1}^{4} A_{ji} \left(R_{13}^i m_{ji} - \frac{R_{33}^i}{m_{ji}} p^2 \right) e^{m_{ji} z_i} \end{gathered} \tag{23}$$

Si ottiene allora un sistema di 4*m* incognite A_{ji}, determinabili tramite l'imposizione delle 4 condizioni al contorno e delle (4*m*-1) condizioni di continuità alle interfacce, che provvede a fornire una soluzione esatta, tridimensionale, per il caso di piastra in esame.

Pagano si propone di fornire una soluzione esatta, risultata valida, nel caso di laminati simmetrici o sandwich simmetrici. Le configurazioni analizzate, nello specifico, risultano essere:

- piastra unidirezionale con fibre orientate in direzione **x**;
- laminato bidirezionale con fibre disposte secondo le direzioni trasversale e longitudinale (entrambe nel piano); specificatamente, queste sono parallele alla direzione **x** solo sulle facce esterne; gli strati sono di ugual spessore;

- laminato a 3 strati, simmetrico, con spessore degli strati costante; gli strati esterni presentano fibre dirette secondo **x** mentre, nello strato centrale, queste sono dirette secondo **y**.

2.4 Implementazione su Matlab

La soluzione offerta da Pagano è stata utilizzata come punto di partenza per la successiva definizione del modello attuale, oggetto di studio della presente tesi. Di fatti, per verificare la bontà del codice implementato nel calcolatore, questo deve fornire risultati coincidenti con quelli di Pagano.

Successivamente, si è proceduto nella modifica dell'espressione della soluzione di Pagano nel tentativo di ottenere risultati, se non identici, che rispecchiassero con buona accuratezza i primi, come descritto nel Capitolo 4. L'aspetto su cui ci si è principalmente focalizzati risiede nella forma della soluzione di Pagano, che risulta essere prodotto di una funzione sinusoidale lungo la direzione **x** (nel piano, espandibile in serie di Fourier) e di un esponenziale in **z** (lungo lo spessore).

Procedendo in tal senso risulta ovvio che, modificando la formulazione della soluzione, è possibile che si aggiungano ulteriori gradi di libertà per i quali è necessario definire ulteriori condizioni da imporre.

Come precedentemente descritto, il primo step effettuato ha riguardato l'analisi di accuratezza del codice implementato, riprendendo fedelmente la soluzione proposta da Pagano; considerando il caso di laminazione a 3 strati, simmetrica [0°/90°/0°], si è proceduto a:

- definire il materiale utilizzato;
- definire il tipo di stratificazione;
- definire la geometria;
- costruire la matrice dei coefficienti elastici ridotti;
- definire il carico;
- definire, in simbolico, l'espressione del campo di spostamenti;
- definire, in simbolico, l'espressione del campo di tensioni;
- definire le condizioni al contorno;
- risolvere il sistema lineare;
- sostituire le soluzioni numeriche ottenute nelle relative espressioni simboliche.

Per l'analisi numerica si è utilizzata una formulazione simbolica la quale permette di implementare, in modo semplice, la scrittura delle formulazioni del campo di spostamento e delle condizioni da imporre.

Moduli elastici [GPa]		Coefficiente di Poisson		Moduli di taglio [GPa]		Geometria		BCS	Carico
E_1	$25\cdot10^3$	ν_{12}	0.25	G_{12}	$0.5\cdot10^3$	L_x/h	4	SS	Sinusoidale
E_2	$1\cdot10^3$	ν_{13}	0.25	G_{13}	$0.5\cdot10^3$	L_y/h	/		
E_3	$1\cdot10^3$	ν_{23}	0.25	G_{23}	$0.5\cdot10^3$				

Tabella 2.1 Materiali, geometria, vincolo e carico implementati nel codice

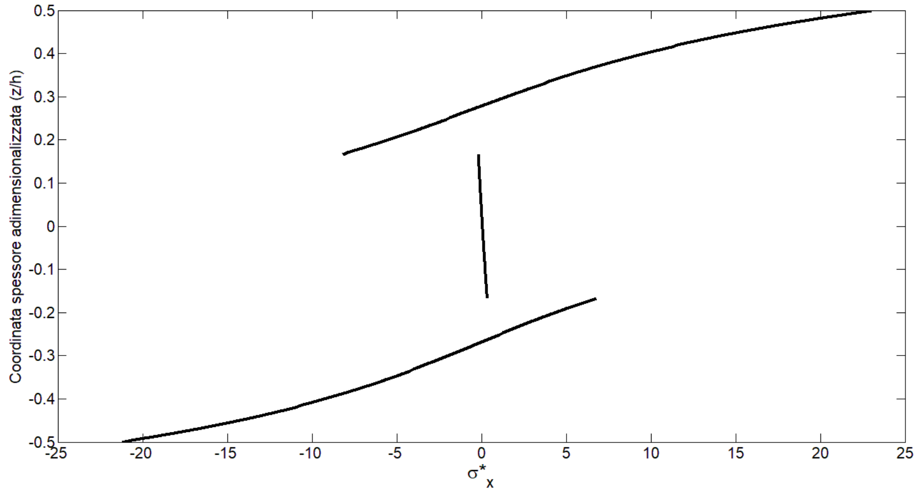

Figura 2.2 Andamento lungo z di σ_x^* per x=Lx/2

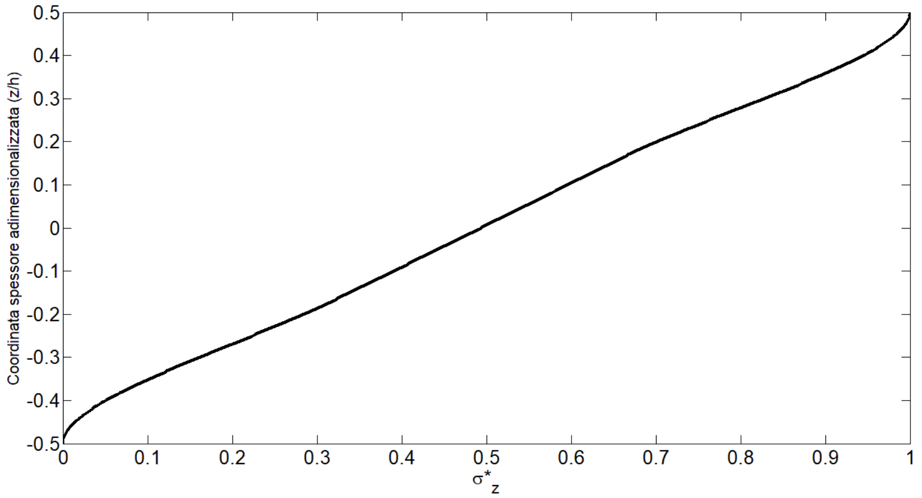

Figura 2.3 Andamento lungo z di σ_z^* per x=Lx/2

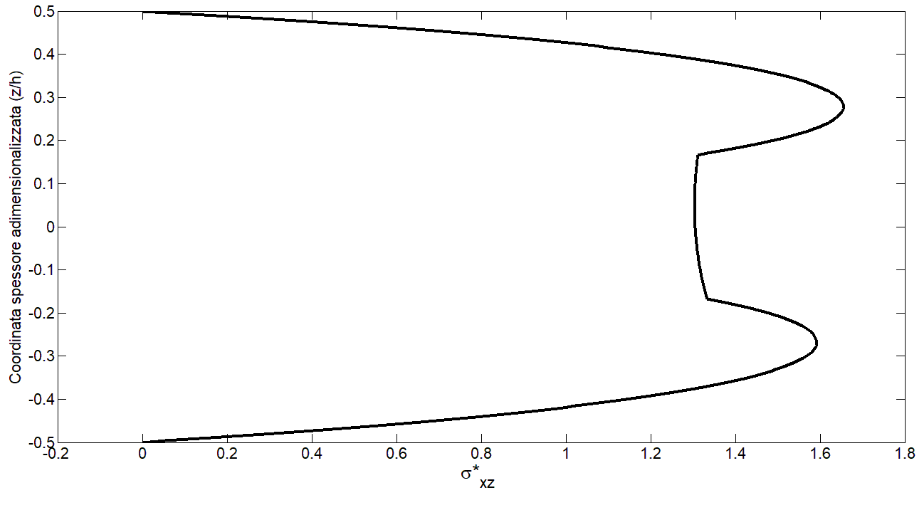

Figura 2.4 Andamento lungo z di σ_{xz}^* per x=0

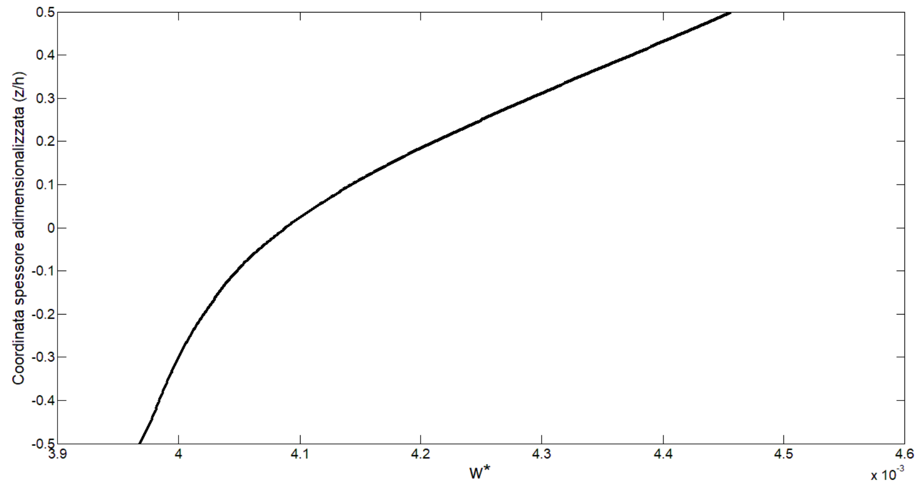

Figura 2.5 Andamento lungo z di w^* per x=Lx/2

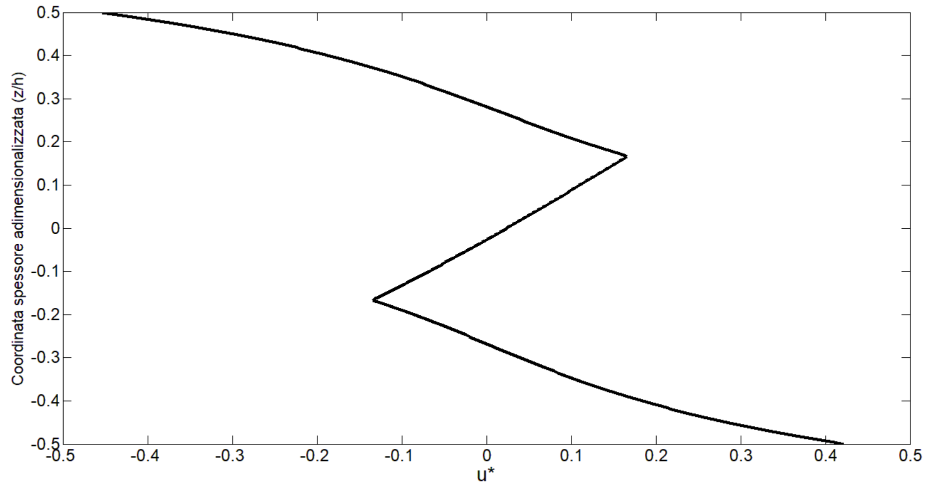

Figura 2.6 Andamento lungo z di u^* per x=0

Si riportano allora i risultati ottenuti; l'ordine di stratificazione parte dallo strato inferiore, procedendo verso l'alto.

	z/h	u*(x=0)	w*(x=Lx/2)	σ^*_x(x=Lx/2)	σ^*_z(x=Lx/2)	σ^*_{xz} (x=0)
Strato 1	-0.5	0.4215	0.0040	-21.1868	0.0	0.0
	-0.389	0.1645	0.0040	-8.2515	0.0615	1.2229
	-0.278	0.126	0.0040	-0.5857	0.1891	1.5904
	-0.167	-0.1337	0.0040	6.8033	0.3213	1.3330
Strato 2	-0.167	-0.1337	0.0040	0.3492	0.3213	1.330
	-0.056	-0.0260	0.0041	0.1614	0.4365	1.3109
	0.056	0.0727	0.0041	-0.0086	0.5505	1.3043
	0.167	0.1662	0.0042	-0.1680	0.6646	1.3121
Strato 3	0.167	0.1662	0.0042	-8.1873	0.6646	1.3121
	0.278	0.0047	0.0043	-0.0352	0.7992	1.6561
	0.389	-0.1648	0.0044	8.5149	0.9339	1.3069
	0.5	-0.4531	0.0045	23.0277	1.0	0.0

Tabella 2.2 Risultati implementazione Pagano

2.5 Osservazioni

La soluzione offerta da Pagano, per laminati simmetrici e sandwich sottoposti a flessione cilindrica, risulta essere esatta a fronte di limitazioni riguardo:

- i materiali utilizzati;
- il tipo di stratificazione;
- le condizioni al contorno applicate;
- tipo di carico applicato.

Di fatti, tale soluzione esatta, tridimensionale, vale solamente per piastre sottoposte ad un carico sinusoidale (esprimibile attraverso serie di Fourier), a trazione, su di una delle due facce e semplicemente appoggiata ai bordi; inoltre forti limitazioni sono imposte dal tipo di stratificazione e dei materiali utilizzati. Richiamando infatti lo studio del determinante della matrice che premoltiplica le componenti di spostamento $(U^{\circ}, V^{\circ}, W^{\circ})$, i coefficienti di tale matrice risultano essere funzione dai coefficienti elastici i quali appunto sono a loro volta funzione del materiale e della stratificazione considerata; è possibile allora che, per date configurazioni, si ottengano, dal polinomio caratteristico, soluzioni appartenenti al campo dei numeri complessi con conseguente perdita di significato fisico. Risulta, ad esempio, che la soluzione deve essere modificata (soluzione proposta comunque già dallo stesso Pagano) se il laminato presenta caratteristiche isotrope lungo lo spessore o nel piano oppure forte anisotropia lungo la direzione z.

Inoltre la forma generica della soluzione, dalla quale prende inizio la successiva definizione del campo di spostamenti, è fortemente legata al tipo di funzione descritto dal carico, sinusoidale, e dalle forma delle soluzioni ammesse dalla condizione di semplice appoggio, anch'essa sinusoidale.

Risulta ovvio allora che si necessita sviluppare soluzioni, anche approssimate, che possano descrivere modelli strutturali che meglio rappresentano le reali applicazioni pratiche, in campo industriale; lo studio proposto da Pagano infatti è limitato alle condizioni precedentemente citate le quali non trovano largo impiego.

Si osserva ulteriormente che il caso qui considerato prevede effetti layerwise deboli se confrontati con le casistiche che a seguire verranno descritte; la stratificazione qui presa in esame permette una formulazione relativamente semplice dato il numero limitato di strati, lo spessore di questi costante e l'impiego di un unico materiale composito; non si considerano eventuali danneggiamenti locali, modellizzati generalmente come componenti di spostamento non nulle nella configurazione a riposo.

Si riconosce comunque la novità di un approccio di tipo *discrete-layer*, a sostituire la CLT risultata inadatta per descrivere accuratamente anche i più semplici effetti layerwise. In ultimo, di contro, si osserva una difficoltà nella reale comprensione della procedura esposta da Pagano, lasciando presupporre che siano state utilizzate tecniche di post-processamento, non dichiaratamente esposte, per ottenere la ben nota formulazione.

3 Analisi di configurazioni non classiche

Per determinare l'accuratezza delle varie teorie prese in esame, si considerano modelli strutturali sottoposti a diverse condizioni di carico e vincolo, nonché differenti per materiali, laminazione, geometria e presenza o meno di danneggiamento; si osserva che tali configurazioni accentuano o meno, il grado di importanza degli effetti layerwise.

Lo scopo dell'analisi di tali configurazioni, rappresentate secondo le teorie qui esposte, è da ricercare nello studio delle funzioni layerwise e globali che vengono utilizzate e nelle condizioni di continuità delle tensioni, al contorno e di equilibrio che devono essere rispettate; di fatti si vuol dimostrare la possibilità che i risultati ottenuti, rispettivi per le varie teorie, risultino essere indipendenti dalla scelta delle funzioni sopra citate. Si dimostra allora che alcune teorie risultano essere indipendenti dalla scelta dei contributi legati alle funzioni zig-zag, procedendo contemporaneamente ad una ridefinizione delle funzioni globali e layerwise (tramite i coefficienti coinvolti) attraverso lo spessore, grazie al soddisfacimento dei vincoli fisici.

Si raggruppano nella Tabella 3.1 i casi analizzati e le teorie utilizzate per il confronto dei risultati così ottenuti.

Caso	Stratificazione	Spessore strati	Materiali	BCS	Carico	Lx/h	Ly/h
1	[90/0]	[0.5h/0.5h]	[r_2]	SS	Sinusoidale	4	-
2	[0/90/0]	[$(h/3)_3$]	[b13]	//	//	//	-
3	[$0/90/0_3/90]_s$	[$((0.0333h)_3/0.35h)_2/(0.0333h)_3$]	[$(b_{13}/q)_2/ b_{13}$]	//	//	5	-
4	[$90/0_5/90]_s$	[$0.1h_2/0.2h_3/0.1h_2$]	[pf_2/pvc/hh /pvc/pf_2]	//	//	8	-
5	[0/0/0]	[0.1h/0.7h/0.2h]	[$c_{11}/c_{11}/c_{11}$]	SSSS	Bisinusoidale	4	3
6	[0/0/0]	[0.2h/0.7h/0.1h]	[$c_{12}/c_{12}/c_{12}$]	//	//	4	3
7	[0/0/0]	[(2h/7)/(4h/7)/(h/7)]	[$c_1/c_1/c_1$]	CS	Uniforme	20	-
8	[0/0/0]	[0.05h/0.9h/0.05h]	[$i_1/i_2/i_1$]	SSSS	Step centrale	5	1
9	$[0]_{11}$	[0.01h/0.025h/0.015h /0.02h/0.03h/0.4h$]_s$	[$a_1/a_2/a_3$/ $a_1/a_3/a_4]_S$	SS	Sinusoidale	4	-
10	[0/0/0]	[0.05h/0.85h/0.10h]	[$b_1/b_2/b_1$]	SSSS	Bisinusoidale	//	1
11	$[0]_{11}$	[0.01h/0.025h/0.015h /0.02h/0.03h/0.4h]S	[$a_1/a_2/a_3$/ $a_1/a_3/a_4]_S$	SS	Uniforme (2 step)	//	-
12	[0/0/0]	[(2h/7)/(4h/7)/(h/7)]	[$c_1/c_1/c_1$]	//	2 step	25	-
13	[0/0/0]	[(2h/7)/(4h/7)/(h/7)]	[$c_1/c_1/c_1$]	CS	Uniforme	5.714	-

Tabella 3.1 Modelli strutturali analizzati

	E1 [GPa]	E2 [GPa]	E3 [GPa]	G12 [GPa]	G13 [GPa]	G23 [GPa]	ν12	ν13	ν23
a1	1	1	1	0.2	0.2	0.2	0.25	0.25	0.25
a2	33	1	1	0.8	0.8	0.8	0.25	0.25	0.25
a3	25	1	1	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25
a4	0.05	0.05	0.05	0.0217	0.0217	0.0217	0.15	0.15	0.15
b1	172.4	6.89	6.89	3.45	3.45	1.378	0.25	0.25	0.25
b2	0.1	0.1	0.1	0.04	0.04	0.04	0.25	0.25	0.25
c1(isotropo*)	*	*	*				0.33	0.33	0.33
c11(isotropo*)	**	**	**				0.34	0.34	0.34
c12(isotropo)*	***	***	***				0.34	0.34	0.34
hh	$250x10^{-3}$	$250x10^{-3}$	$2500x10^{-3}$	$1\ x10^{-3}$	$875\ x10^{-3}$	$1750\ x10^{-3}$	0.9	$3\ x10^{-5}$	$3\ x10^{-5}$
i1	6.89	6.89	6.89	2.59	2.59	2.59	0.33	0.33	0.33
i2	0.1	0.1	0.1	0.037	0.037	0.037	0.33	0.33	0.33
pf	$25x10^3$	$1x10^3$	$1x10^3$	$5x10^2$	$5x10^2$	$2x10^2$	0.25	0.25	0.25
pvc	$25x10^1$	$25x10^1$	$25x10^1$	$9.62x10^1$	$9.62x10^1$	$9.62x10^1$	0.3	0.3	0.3

q	0.273	0.273	0.273	0.1102	0.413	0.413	0.25	0.25	0.25
r	$25E_2$	E_2	E_2	$0.5\ E_2$	$0.5\ E_2$	$0.2\ E_2$	0.25	0.25	0.25
APPENDICE			isotropo* * ** ***	E $E_U/E_L=1.6$ $E_U/E_L=5/4$ $E_U/E_L=5/4$	E $E_U/E_C=166.6\text{x}10^5$ $E_U/E_C=10^5$ $E_U/E_C=10^4$	E	G	G	G

Tabella 3.2 Materiali utilizzati per i modelli strutturali

3.1 Tipologie di carico

3.1.1 Sinusoidale

La formula che esprime l'andamento del carico è

$$p^0(x) = p_u^0 \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \qquad se\ 0 \leq x \leq L_x$$

la quale soddisfa le condizioni al contorno di trave semplicemente appoggiata.

3.1.2 Uniforme (2 step)

La formula che esprime l'andamento del carico è espressa come

$$p^0(x) = \begin{cases} p_u^0 & se\ 0 \leq x \leq \dfrac{L_x}{2} \\ -p_u^0 & se\ \dfrac{L_x}{2} \leq x \leq L_x \end{cases}$$

la quale soddisfa le condizioni al contorno di trave semplicemente appoggiata.

3.1.3 Bisinusoidale

La formula che esprime l'andamento del carico è

$$p^0(x,y) = p_u^0 \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \qquad se\ 0 \leq x \leq L_x \quad e \quad 0 \leq y \leq L_y$$

la quale soddisfa le condizioni al contorno di piastra semplicemente appoggiata.

3.1.4 Step centrale

La formula che esprime l'andamento del carico è

$$p^0(x) = p_u^0 \qquad se \begin{cases} \dfrac{L_x}{4} \leq x \leq \dfrac{3L_x}{4} \\ \dfrac{L_y}{4} \leq y \leq \dfrac{3L_y}{4} \end{cases}$$

la quale soddisfa le condizioni al contorno di piastra semplicemente appoggiata.

3.2 Teorie utilizzate

3.2.1 Notazione utilizzata

Si considerino piastre laminate, in campo elastico, soggette a piccole deformazioni e rappresentative anche per strutture sandwich. Gli strati costituenti sono assunti lavorare in campo elastico, con spessore uniforme arbitrario e perfettamente legati l'uno con l'altro (si trascurano gli effetti di incollaggio tra i vari strati).

Si assume un sistema di riferimento Cartesiano ***x,y,z*** con piano di riferimento coincidente con la superficie media ***Ω*** della struttura; il sistema di riferimento inoltre è centrato in uno dei vertici della struttura. Si denotano con z_k^+ e z_k^- la posizione delle superficie al bordo superiore ed inferiore rispettivamente dello strato generico k, così come si denotano con pedice k le quantità relative al k-esimo strato. Si definiscono infine le componenti di spostamento come ***u,v,w*** rispettivamente nelle direzioni ***x,y*** e ***z***.

Descrizione	Lista
Elementi solidi 3D mixed	FEA-3D
Teoria zig-zag HW mixed	HWZZ
Teoria HWZZ modificata, M. like	HWZZM
Teoria HR, mixed, funzioni zig-zag M	MHR
Nuova teoria generale tipo zig-zag	NOZZG
Teoria ZZA modificata	PP23
Teoria zig-zag semplificata	ZS1
Teoria zig-zag semplificata	ZS1_1
Teoria zig-zag HR, mixed, semplificata	ZS1_2
Teoria zig-zag HR, mixed, semplificata	ZS1_3
Teoria zig-zag semplificata	ZS1_4
Teoria zig-zag semplificata, diversi DOF	ZS2
Teoria zig-zag semplificata	ZS3
Teoria zig-zag semplificata	ZS3_1
Teoria zig-zag HR, mixed, semplificata	ZS3_2
Teoria piastra con contributi zig-zag	ZZ
Teoria zig-zag adattiva	ZZA
Teoria ZZA modificata	ZZA*
Teoria ZZA modificata con contributi M.	ZZA_MHR
Teoria ZZA modificate	ZZA_X
Teoria ZZA modificata	ZZAM_P3P4
Teoria zig-zag semplificata	ZZAS1
Teoria zig-zag semplificata	ZZAS2
Teoria zig-zag semplificata	ZZAS3
Teoria ZZA modificata	ZZAS4

Tabella 3.3 Teorie utilizzate per l'analisi dei modelli strutturali

3.2.2 ZZA displacement-based theory

Il campo di spostamenti, attraverso lo spessore, viene rappresentato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} u_\alpha(x,y,z) &= \left[\; {u_\alpha}^0(x,y) + z(\Gamma_\alpha^0(x,y) - w^0(x,y)_{,\alpha}) \;\right]_0 + \left[\; F_\alpha^u(z) \;\right]_i \\ &\left[\; \sum_{k=1}^{n_i} \Phi_\alpha^k(x,y)(z-z_k)H_k(z) + \sum_{j=1}^{n_\Im} {}_\alpha C_u^j(x,y)H_j(z) \;\right]_c \\ u_\varsigma(x,y,z) &= \left[\; w^0(x,y) \;\right]_0 + \left[\; F^\zeta(z) \;\right]_i + \left[\; \sum_{k=1}^{n_i} \Psi^k(x,y)(z-z_k)H_k(z) + \right. \\ &\left. \sum_{k=1}^{n_i} \Omega^k(x,y)(z-z_k)^2 H_k(z) + \sum_{j=1}^{n_\Im} C_\varsigma^j(x,y)H_j(z) \;\right]_c \end{aligned} \tag{24}$$

osservando che la soluzione è espressa come somma di tre termini. Il primo termine $[\dots]_0$, con contributo lineare per u_α e costante per u_ζ, è lo stesso della teoria piastra di Reissner-Mindlin e introduce gli unici cinque gradi di libertà funzionali della ZZA: $u^0, v^0, w^0, \Gamma_x^0, \Gamma_y^0$. Il secondo contributo $[\dots]_i$ contiene termini di ordine superiore, assunti essere un'espansione di potenze attraverso lo spessore:

$$\left[\ F_\alpha^u(z)\ \right]_i = \left[\ C_\alpha^i(x,y)z^2 + D_\alpha^i(x,y)z^3 + (Oz^4 ...)\ \right]_i = \left[\ {}_3\widetilde{(.)}_\alpha\ \right]_i + \left[\ (Oz^4 ...)\ \right]_i$$

$$\left[\ F^\zeta(z)\ \right]_i = \left[\ b^i(x,y)z + c^i(x,y)z^2 + d^i(x,y)z^3 + e^i(x,y)z^4 + (Oz^5 ...)\ \right]_i =$$

$$\left[\ {}_4\widetilde{(.)}_\zeta\ \right]_i + \left[\ (Oz^5 ...)\ \right]_i$$

Tale tipo di formulazione abbandona l'interpolazione unica lungo lo spessore, a favore di un'interpolazione che valga solo all'interno di ogni singolo strato della struttura. Si mantengono comunque i cinque gradi di libertà funzionali e si calcolano i rimanenti coefficienti in funzione dei primi, tramite calcolo simbolico. Si osserva, dalla formulazione del modello, che l'appellativo "adattivo" deriva dalla possibilità di espandere la serie di potenze attraverso lo spessore, sia per la componente di spostamento u che w.

Le espressioni di C_α^i, D_α^i e dei coefficienti da b^i a e^i sono allora determinate tramite l'imposizione delle condizioni al contorno alle tensioni, sia per la faccia superiore che inferiore; è possibile inoltre inglobare anche condizioni non omogenee. Alle già descritte condizioni, considerando i termini di ordine ancora maggiore, si aggiungono il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio locale

$$\sigma_{\alpha\alpha,\alpha} + \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha z,z} = b_\alpha ; \quad \sigma_{\alpha\varsigma,\alpha} + \sigma_{\beta\varsigma,\varsigma} + \sigma_{\varsigma\varsigma,\varsigma} = b_\varsigma$$

per punti scelti attraverso lo spessore.

I contributi layerwise, inglobati nel terzo termine $[\dots]_c$, determinano la continuità delle tensioni fuori dal piano e del gradiente della tensione trasversale normale, lungo lo spessore, attraverso le interfacce. Si utilizza infatti contributi layerwise espressi come prodotto di funzioni zig-zag $(z - z_k)H_k(z)$ e $(z - z_k)^2 H_k(z)$ e di ampiezze zig-zag Φ_α^k, ψ^k e Ω^k. La prima ampiezza viene determinata imponendo la continuità della tensione a taglio trasversale, mentre le rimanenti vengono determinate applicando le condizioni di continuità della tensione trasversale normale e del suo gradiente, lungo lo spessore, attraverso le interfacce:

$$\sigma_{\alpha\varsigma}({}^{(k)}z^+) = \sigma_{\alpha\varsigma}({}^{(k)}z^-); \ \ \sigma_{\varsigma\varsigma}({}^{(k)}z^+) = \sigma_{\varsigma\varsigma}({}^{(k)}z^-); \ \sigma_{\varsigma\varsigma,\varsigma}({}^{(k)}z^+) = \sigma_{\varsigma\varsigma,\varsigma}({}^{(k)}z^-)$$

Le condizioni di continuità degli spostamenti alle interfacce sono legate ai termini ${}_\alpha C_u^j$ e C_ζ^j.i quali sono indipendenti dai gradi di libertà; tali condizioni possono essere espresse come

$$u_\alpha({}^{(k)}z^+) = u_\alpha({}^{(k)}z^-); \ \ u_\varsigma({}^{(k)}z^+) = u_\varsigma({}^{(k)}z^-)$$

Il termine $(z - z_k)$.è la funzione zig.zag di Di Sciuva mentre il termine $(z - z_k)^2$è la funzione zig-zag parabolica di Icardi; il termine $H_k(z)$ rappresenta la Heaviside unit step function. Le ampiezze zig-zag precedentemente descritte allora provvedono a garantire il giusto cambio di pendenza degli spostamenti alle interfacce degli strati con materiali e/o orientazione differente.

Il presente modello può essere reso consistente per l'analisi di strutture sottili e spesse, scegliendo in modo opportuno i coefficienti delle potenze di ordine superiore. Si osserva che, annullando le tensioni di taglio e quella normale in presenza di deformazioni flessionali non nulle, è possibile evitare il Poisson's locking; per evitare shear locking invece si deve imporre taglio nullo quando si osservano deformazioni flessionali non nulle.

Potenza di tale modello consiste inoltre nel fornire risultati accurati senza ricorrere a tecniche di post-processing bensì facendo utilizzo delle sole equazioni costitutive; pertanto è possibile affermare che il modello ben descrive l'energia di deformazione elastica.

Si osserva infine che le teorie che presentano una descrizione del campo di spostamenti simile a quello qui in esame, presentano problemi quando si analizzano strutture con incastro; a tal problema è possibile far fronte allora imponendo che il taglio assumi il giusto valore nel punto d'incastro anche se lo spostamento e le rotazioni si annullano.

3.2.3 Teorie HWZZ e HWZZM

La teoria HWZZ prevede l'utilizzo del teorema di Hu-Washizu in modo tale da poter considerare separatamente i contributi principali ai campi di spostamento, deformazione e tensione dello ZZA. Gli spostamenti derivano da quelli dello ZZA, trascurando però i contributi delle funzioni zig-zag quadratiche così come i contributi di ordine superiore e quelli adattivi.

Le tensioni nel piano sono ottenute dalle relazioni costitutive mentre quelle fuori dal piano integrando le prime attraverso le equazioni di equilibrio locale; in tal modo si recuperano le continuità delle tensioni lungo lo spessore.

La teoria HWZZM utilizza i contributi Murakami's like come funzioni layerwise; si ottiene una formulazione nella quale compare il prodotto di ampiezze zig-zag e funzioni zig-zag che risulta essere invariante nel processo di calcolo: a prescindere dalla formulazione considerata, la ZZA e la HWZZM forniscono gli stessi risultati se si utilizza la stessa descrizione della parte globale degli spostamenti.

3.2.4 ZZA displacement based*

Il campo di spostamenti assunto è simile a quello dello ZZA tranne che per la mancanza del contributo layerwise, inglobato in altri termini in modo che ulteriori coefficienti debbano essere calcolati, strato per strato, per garantire le condizioni la continuità delle tensioni interlaminari.

3.2.5 Teoria NOZZG

Il campo di spostamenti è espresso come serie infinita di prodotti di funzioni nella coordinata dello spessore e ampiezze incognite che, nelle applicazioni numeriche, posso essere limitate ad un numero finito garantendo un certo grado di accuratezza.

I coefficienti vengono determinati imponendo le condizioni al contorno delle tensioni fuori dal piano, la continuità del taglio trasversale e della tensione normale e del suo gradiente, così come la continuità degli spostamenti attraverso lo spessore; in ultimo si pone il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio locale in punti differenti attraverso lo spessore.

3.2.6 Teoria ZZA_X

La presente teoria è sviluppata assumendo il campo di spostamenti come prodotto di ampiezze incognite e una serie troncata di funzioni generiche in z. La scelta a priori del modello strutturale è legata al grado di accuratezza dei risultati da questo fornito, il quale risulta essere lo stesso della

ZZA, ZZA*, HWZZ e della HWZZM, con un ordine di espansione inferiore rispetto alla teoria NOZZG.

Le espressioni delle ampiezze sono determinate attraverso il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio locale, delle condizioni al contorno delle tensioni e alle interfacce di queste. I coefficienti rimanenti garantiscono inoltre la continuità degli spostamenti. Tale teoria rappresenta la possibilità di generalizzare la formulazione della ZZA*, attraverso una semplificazione del termine di ordine superiore sostituito con una rappresentazione generica dell'andamento lungo lo spessore degli spostamenti.

Le diverse denominazioni legate alla ZZA_X sono legate alle differenti definizioni delle funzioni lungo lo spessore. Tra queste compaiono la ZZA_PP34, ZZA_PT34, ZZA_PM34, ZZA_PMTP34 e la ZZA_PPM34.

3.2.7 Teorie con funzioni zig-zag Muramaki's like

A tale gruppo di teorie appartengono la MHR e la ZZA_MHR.

La prima considera un polinomio cubico per rappresentare gli spostamenti nel piano e un polinomio quartico per lo spostamento trasversale; la formulazione varia rispetto la ZZA poiché come funzioni zig-zag si considerano ora le Murakami's zig-zag functions a descrivere gli effetti layerwise delle componenti di spostamento nel piano mentre lo spostamento trasversale assume una forma polinomiale. Si applicano, per la determinazione dei coefficienti, il soddisfacimento delle condizioni al contorno per le tensioni e delle equazioni di equilibrio nel piano di riferimento del laminato.

La teoria ZZA_MHR è stata sviluppata per dimostrare la scarsa accuratezza della prima teoria qui descritta, quando gli effetti layerwise sono dominanti; di fatti, se nella MHR i coefficienti vengono determinati una volta per tutte, senza essere ridefiniti lungo lo spessore, nella ZZA_MHR si prevede una formulazione simile a quella della ZZA, per la quale i coefficienti vengono rideterminati strato per strato. Ciò dimostra inoltre che, come fatto per le altre teorie adattive, la scelta delle funzioni zig-zag è immateriale e la ridefinizione dei coefficienti (lungo lo spessore) migliora di molto i risultati.

3.2.8 Teoria ZZ

La teoria ZZ è una teoria displacement-based che prevede una rappresentazione polinomiale del quarto ordine, continua a tratti, simile a quella vista per la ZZA:

$$
\begin{aligned}
u_\alpha(x,y,z) &= \left[\ u_\alpha{}^0(x,y) + z(\Gamma_\alpha^0(x,y) - w^0(x,y)_{,\alpha})\ \right]_0 + \left[\ C_\alpha(x,y)z^2 + D_\alpha(x,y)z^3\ \right]_i \\
&\quad \left[\ \sum_{k=1}^{n_i} \Phi_\alpha^k(x,y)(z-z_k)H_k(z)\ \right]_c \\
u_\varsigma(x,y,z) &= \left[\ w^0(x,y)\ \right]_0 + \left[\ b\ (x,y)z + c\ (x,y)z^2 + d\ (x,y)z^3 + e\ (x,y)z^4\ \right]_i \\
&\quad + \left[\ \sum_{k=1}^{n_i} \Psi^k(x,y)(z-z_k)H_k(z) + \sum_{k=1}^{n_i} \Omega^k(x,y)(z-z_k)^2 H_k(z)\ \right]_c
\end{aligned}
\tag{25}
$$

A differenza della ZZA però le ampiezze zig-zag non vengono ridefiniti strato per strato.

Essendo le condizioni imposte uguali a quella della ZZA, il costo computazionale è simile ma l'accuratezza inferiore poiché non prevede caratteristiche adattive; inoltre si osserva che, definiti a priori i coefficienti, si necessita di un ordine di espansione maggiore per ottenere accuratezza comparabile con quella della ZZA.

3.2.9 Teoria PP23

Tale teoria rappresenta una versione ridotta della ZZA in cui il campo di spostamenti presenta polinomi di ordine inferiore nella coordinata dello spessore; si prevede infatti che lo spostamento nel piano sia parabolico in z mentre lo spostamento trasversale cubico.

Si dimostra allora che, nonostante l'ordine di espansione minore, non si ha perdita di accuratezza grazie al fatto che i coefficienti vengono ridefiniti strato per strato; in termini di accuratezza inoltre, è simile alla ZZA quando si hanno deboli effetti layerwise altrimenti, di contro, si necessiterebbe dell'integrazione delle tensioni fuori dal piano a partire dalle equazioni di equilibrio locale con un aumento del costo computazionale. Ciò comunque dimostra che, anche se presenta una formulazione di ordine inferiore, quando gli effetti layerwise sono forti e dunque la ZZ rischi di entrare in crisi, la PP23 comunque fornisce risultati simili, grazie al fatto che i coefficienti vengono riformulati strato per strato.

3.2.10 Teorie ZS1, ZS1_1, ZS1_2, ZS1_3 e ZS1_4

Volendo dimostrare che la ridefinizione dei coefficienti lungo lo spessore comporta un aumento di accuratezza anche per teorie con cinematica semplificata, si sono sviluppate ulteriori teorie.

La ZS1 prevede spostamenti nel piano lineari con ampiezze zig-zag, calcolate imponendo le condizioni di compatibilità delle tensioni trasversali alle interfacce. Lo spostamento trasversale, parabolico, include due set di ampiezze zig-zag, calcolate imponendo la continuità alle interfacce delle tensioni normali e del suo gradiente lungo lo spessore.

La ZS1_1 prevede una riformulazione del campo di spostamenti nel quale ora le funzioni zig-zag non sono più presenti, sostituite da funzioni layerwise, espresse come incognite. Queste vengono determinate imponendo la compatibilità delle tensioni trasversali e delle tensioni normali alle interfacce, così come per il gradiente di queste lungo lo spessore. Si aggiungono inoltre ulteriori coefficienti che garantiscono la continuità degli spostamenti lungo lo spessore.

La ZS1_2 è una variante di tipo mixed della ZS1; si assume lo stesso campo di spostamenti ma le tensioni fuori dal piano vengono determinate integrando le equazioni di equilibrio locale, utilizzando il teorema variazione di HR.

La ZS1_3 rappresentare un'ulteriore variante della ZS1, sempre nell'ottica delle teorie mixed, nella quale il campo di spostamenti è lo stesso della ZS1 ma le tensioni fuori dal piano vengono assunte a parte, come calcolate nella ZZA_P3P4.

La ZS1_4 considera lo stesso campo di spostamenti della ZS1 ma i contributi zig-zag vengono eliminati, inglobando ora funzioni layerwise implicite mentre il grado di libertà rotazionale è associato non più al piano medio della struttura bensì alla faccia superiore.

3.2.11 Teoria ZS2

Questa teoria considera come gradi di libertà gli spostamenti alle facce esterne superiore ed inferiore con contributi di tipo globale. Il grado di espansione degli spostamenti nel piano è assunto essere lineare a tratti e quadratico a tratti per gli spostamenti trasversali, con l'utilizzo di polinomi di Lagrange.

Le condizioni imposte riguardano il soddisfacimento della continuità delle tensioni trasversali a taglio e normali alle interfacce mentre il termine layerwise nella componente di spostamento trasversale garantisce la continuità del gradiente di sforzo normale attraverso lo spessore.

3.2.12 Teoria ZS3

Tale teoria rappresenta una particolarizzazione della ZZA, nella quale gli spostamenti nel piano sono assunti essere parabolici lungo lo spessore e lo spostamento trasversale costante, in modo tale da risaltare l'importanza di rappresentare gli spostamenti trasversali come funzione continua a tratti.

Si pongono allora le condizioni di continuità e al bordo delle tensioni trasversali a taglio, la condizione al contorno del taglio e il soddisfacimento della prima equazione di equilibrio locale in diversi punti lungo lo spessore. I coefficienti rimanenti vengono determinati imponendo la continuità degli spostamenti.

Tale modello è stato sviluppato per dimostrare la sua inapplicabilità a causa dello spostamento trasversale uniforme.

3.2.13 Teorie ZS3_1 e ZS3_2

La teoria ZS3_1 prevede entrambi i campi di spostamento definiti come funzioni paraboliche in z, inglobando le ampiezze zig-zag le quali vengono calcolate imponendo la continuità dello sforzo trasversale normale e del suo gradiente attraverso lo spessore mentre i rimanenti coefficienti sono calcolati imponendo la continuità degli spostamenti lungo lo spessore.

La teoria ZS3_2 prevede lo stesso campo di spostamento della ZS3_1 ma il campo di tensioni fuori dal piano è assunto separatamente, calcolato tramite integrazione delle equazioni di equilibrio locale.

Si osserva che la ZS3_1, prevedendo una spostamento parabolico in entrambe le componenti, fornisce risultati migliori rispetto la ZS3; inoltre la ZS3_2 risulta essere più accurata della ZS3_1 a causa della integrazione che fornisce le tensioni fuori dal piano; tuttavia i risultati ottenuti non sono comparabili in termini di accuratezza rispetto a quelli della ZZA, dimostrando che si necessita di una rappresentazione degli spostamenti almeno cubica-quartica in z.

3.2.14 Teoria ZZAS1

Tale teoria prevede che il campo di spostamento è fortemente legato allo strato che si vuole modellizzare.

Lo spostamento nel piano è assunto essere lineare per alcuni strati mentre per altri è assunto essere definito attraverso altre funzioni continue a tratti. Lo spostamento trasversale risulta essere definito allo stesso modo dello spostamento nel piano ma tramite comunque funzioni differenti: si osserva comunque che entrambe le componenti di spostamento risultano essere lineari o non negli stessi strati.

I coefficienti introdotti dalle funzioni lineari vengono calcolate imponendo le condizioni al contorno e il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio locale negli strati in cui queste si presentano;

le espressioni dei coefficienti delle funzioni non lineari vengono invece espresse attraverso il soddisfacimento della continuità delle tensioni fuori dal piano e degli spostamenti alle interfacce. Si aggiungono le condizioni di continuità degli spostamenti nel piano e trasversali mentre i coefficienti rimanenti soddisfano le condizioni di compatibilità delle tensioni.

Si osserva che, dove gli spostamenti risultano essere lineari, non è possibile soddisfare le condizioni di compatibilità e pertanto si richiede post-processing; tale teoria allora risulta essere fortemente dipendente dal tipo di stratificazione.

3.2.15 Teoria ZZAS2

La teoria ZZAS2 assume spostamento trasversale parabolico dove nella ZZAS1 era lineare mentre l'espressione della componente nel piano degli spostamenti rimane quella della ZZAS1.

L'aumento dell'ordine polinomiale della componente di spostamento trasversale dovrebbe garantire risultati migliori rispetto a quelli forniti dalla ZZAS1; è possibile in questo caso imporre ulteriormente la continuità del gradiente delle tensioni trasversali normali lungo lo spessore mentre le altre condizioni risultano essere uguali a quella della ZZAS1.

I risultati così ottenuti sono migliori rispetto a quelli della ZZAS1ma, per ottenere risultati confrontabili con quelli della ZZA, si richiede un post processamento delle tensioni che comunque non sempre garantiscono lo stesso livello di accuratezza.

3.2.16 Teoria ZZAS3

Come fatto in modo simile precedentemente, si assume ora un campo di spostamenti parabolico-cubico dove per la ZZAS1 si avevano funzioni lineari mentre i rimanenti strati presentano la stessa rappresentazione della ZZAS1 e della ZZAAS2.

I coefficienti incogniti sono allora calcolati imponendo il soddisfacimento delle condizioni citate in ZZAS1 e ZZAS2, aggiungendo ulteriormente il rispetto delle equazioni di equilibrio locale.

Si osserva che tale teoria fornisce risultati migliori della ZZAS1 e della ZZAS2 ma, anche se post processata, non garantisce la stessa accuratezza delle teorie di ordine superiore; ciò dimostra che si ha una sensibile perdita di accuratezza quando una parte delle condizioni fisiche da imporre viene omessa.

3.2.17 Teoria ZZAS4

La teoria ZZAS4 presenta la stessa descrizione degli spostamenti della ZZA dove nella ZZAS1 non si aveva linearità mentre per i rimanenti strati non presentano funzioni zig-zag perché i coefficienti presenti sono calcolati imponendo le stesse condizioni di continuità così come per le altre condizioni fisiche.

I risultati dimostrano che, a prescindere dagli strati nei quali vale o meno la rappresentazione della ZZA (ovvero omettendo o meno le funzioni zig-zag), le tensioni e gli spostamenti calcolati sono comunque molto accurati: ciò conferma la scelta immateriale delle funzioni zig-zag.

3.3 Casi 1, 2

I casi *1 e 2* rispettivamente rappresentano una trave laminata a due e tre strati cross-ply, semplicemente appoggiata sottoposta a carico sinusoidale.

Caso 1	Posizione	Esatta	FEA 3D	ZZA	PP23	ZS1	ZS1_1	ZS1_2	ZS1_3	ZS1_4
u_α	-h/2	4.5502	4.5539	4.5522	3.0632	2.8298	2.8298	4.1977	2.7314	4.1977
u_ζ	0	4.6952	4.6964	4.6888	3.5995	3.6733	3.6733	2.2692	4.7274	2.2692
$\sigma_{\alpha\alpha}$	h/2	30.0280	30.3910	30.3508	33.4942	29.4836	29.4836	26.4413	32.0039	26.4413
	-h/2	-3.8358	-3.8453	-3.8374	-2.4119	-2.3807	-2.3807	-3.5314	-3.6004	-3.5314
$\sigma_{\alpha\zeta}$	h/4	2.7061	2.6843	2.7067	3.1450	3.0828	3.0828	2.8152	2.4773	2.8152

		ZS2	ZS3	ZS3_1	ZS3_2	ZZAS1 (ij=1)	ZZAS2 (ij=1)	ZZAS3 (ij=1)	ZZAS4 (ij=1)
u_α	-h/2	2.9465	4.3283	4.3985	4.3037	3.4647	4.1399	3.4629	4.5522
u_ζ	0	3.8699	6.3324	6.2797	4.4635	4.1156	3.8696	3.9117	4.688
$\sigma_{\alpha\alpha}$	h/2	30.1351	24.8147	24.2780	24.2779	30.2271	31.6277	33.4623	30.3508
	-h/2	-2.2812	-3.6412	-3.7003	-3.6206	-2.7280	-3.2596	-2.7266	-3.8374
$\sigma_{\alpha\zeta}$	h/4	3.1203	2.9427	2.9356	2.8531	3.1906	3.5638	3.0510	-2.7067

Tabella 3.4 Risultati caso 1

Caso 2	Posizione	Esatta	FEA 3D	ZZA	PP23	ZS1	ZS1_1	ZS1_2	ZS1_3	ZS1_4
u_α	max	0.9352	0.9372	0.9362	1.0049	0.7700	0.7700	0.9279	0.4167	0.9279
	min	-0.9323	-0.9378	-0.9371	-1.0284	-0.7676	-0.7676	-1.1074	-0.5644	-1.1074
	-h/2	0.9352	0.9372	0.9362	1.0049	0.7700	0.7700	0.9279	0.4167	0.9279
	h/2	-0.9323	-0.9378	-0.9371	-1.0284	-0.7676	-0.7676	-1.1074	-0.5644	-1.1074
u_ζ	max		3.0224	3.0220	2.8757	2.8434	2.8434	3.7837	2.8586	3.7837
	min		2.8390	2.8386	2.7166	2.7786	2.7786	2.3387	2.4126	2.3387
	-h/2		2.8390	2.8386	2.7166	2.7786	2.7786	3.7837	2.8585	3.7837
	h/2		3.0224	3.0220	2.8757	2.8434	2.8434	2.3387	2.4126	2.3387
$\sigma_{\alpha\alpha}$	max	18.7664	18.9669	18.8549	20.5558	15.2840	15.2840	14.6695	19.7220	14.6695
	min	-18.6899	-18.4311	-18.4292	-19.7805	-15.2198	-15.2198	-18.3418	-16.2048	-18.3418
	-h/2	-18.6899	-18.4311	-18.4292	-19.7805	-15.2198	-15.2198	-18.3418	-16.2048	-18.3418
	h/2	18.7664	18.9669	18.8549	20.5558	15.2840	15.2840	14.6995	19.7220	14.6695
$\sigma_{\alpha\zeta}$	max	1.5918	1.5919	1.5902	1.6635	1.5971	1.5971	1.7143	1.6927	1.7143
	min	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{\zeta\zeta}$	max	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	min	1	1	1	1	1	1	1	1	1

		ZS2	ZS3	ZS3_1	ZS3_2	ZZAS1 (ij=2)	ZZAS2 (ij=2)	ZZAS3 (ij=2)	ZZAS4 (ij=2)
u_α	max	0.7712	1.1499	1.1379	1.1405	0.9119	0.9365	0.9496	0.9362
	min	-0.7619	-1.1499	-1.1596	-1.1570	-10.1696	-0.9571	-0.9705	-0.9371
	-h/2	0.7712	1.1499	1.1379	1.1405	-0.0129	0.9365	0.9496	0.9362
	h/2	-0.7619	-1.1499	-1.1596	-1.1570	-10.1696	-0.9571	-0.9705	-0.9371
u_ζ	max	2.8809	3.3602	3.4276	3.4268	36.2478	3.0221	3.0612	3.0220
	min	2.6998	3.3602	3.3344	3.3346	-1.1988	2.8389	2.8779	2.8386
	-h/2	2.6998	3.3602	3.3344	3.3346	-1.1988	2.8389	2.8779	2.8386
	h/2	2.8809	3.3602	3.4276	3.4268	29.0379	3.0221	3.0612	3.0220
$\sigma_{\alpha\alpha}$	max	15.2698	22.7300	23.0829	23.0286	163.9945	19.1525	19.4169	18.8549
	min	-15.1424	-22.7300	-22.4929	-22.5435	-17.8687	-18.4339	-18.6914	-18.4292
	-h/2	-15.1424	-22.7300	-22.4929	-22.5435	0.2547	-18.4339	-18.6914	-18.4292
	h/2	15.2698	22.7300	23.0289	23.0286	5.3289	19.1525	19.4169	18.8549
$\sigma_{\alpha\zeta}$	max	1.5918	1.5919	1.5902	1.6031	1.7112	1.7242	1.6325	1.5902
	min	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{\zeta\zeta}$	max	1	1	1	1	1	1	1	1
	min	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabella 3.5 Risultati caso 2

Si osserva che le funzioni zig-zag possono essere omesse senza perdita di accuratezza, come si nota dalla coincidenza dei risultati forniti dalla ZS1_1 e dalla ZS1, procedendo ad una corretta ridefinizione dei coefficienti. Tale osservazione si ripete inoltre comparando i risultati forniti dalla ZZAS4 e dalla ZZA, quasi coincidenti. Le teorie di ordine superiore risultano comunque essere più accurate, anche per queste due casistiche nei quali gli effetti layerwise sono meno importanti rispetto ai successivi casi; a tal proposito si osservano i risultati forniti dalle teorie ZS1_2, ZS1_3 e ZS3_2 le quali assumono le tensioni fuori dal piano a partire dall'integrazione delle equazioni di equilibrio locale. Buoni risultati si ottengono anche dalla ZS3 la quale, si ricorda, considera spostamento trasversale costante lungo lo spessore. Si osserva infine che i risultati delle teorie ZZAS2, ZZAS2 e ZZAS3, le quali assumono differenti rappresentazioni degli spostamenti per alcuni strati, non sono sufficientemente accurati e dimostrano inoltre una dipendenza dalla scelta di quali strati descrivere e in che modo.

3.4 Casi da 3 a 8

I casi *3* e *4* rappresentano una trave laminata, semplicemente appoggiata soggetta a carico sinusoidale; i casi si differenziano per il tipo di stratificazione, lo spessore degli strati e i materiali utilizzati.

I casi *5 e 6* rappresentano piastre sandwich semplicemente appoggiate sottoposte a carico bisinusoidale; la seconda presenta faccia inferiore danneggiata e cuore più rigido rispetto la prima.

Il caso *7* rappresenta l'analisi di una trave sandwich incastrata-appoggiata sottoposta a carico uniforme con rapporto lunghezza-spessore pari a 20.

Il caso *8* coinvolge una trave a sezione quadrata, sandwich, semplicemente appoggiata a cui è applicata un carico uniforme locale sulla faccia superiore.

Analizzando i risultati per il caso 3, si osserva che solamente le teorie PP23, ZZAS2, ZZAS3, ZZAS4 e ZS1_3 presentano livelli di accuratezza comparabili con le soluzioni offerte dalla FEA3D e dalla ZZA, mentre la ZZA, HWZZ e la HWZZM riportano risultati coincidenti.

Il caso 4 vede risultati accurati per le teorie ZZAS2, ZZAS3 e ZZAS4, a prescindere dagli strati scelti per la definizione particolarizzata del campo di spostamenti mentre la ZZAS1 fornisce risultati accurati o meno a seconda di tale scelta. Si osserva inoltre che i casi PP23, ZS1_2, ZS1_3 e ZS1_4 forniscono buoni risultati.

Osservando il caso 5, le uniche teorie che non forniscono buoni risultati sono la ZS3, ZS3_1, ZS3_2 e la ZZAS1.

Per il caso 6, le uniche teorie che non presentano errori non trascurabili sono la ZZAS2, ZZAS3, ZZAS4 e la ZZAS1 (quest'ultima scegliendo opportunamente la particolarizzazione della descrizione del campo di spostamenti); tale osservazione è legata al fatto che, essendo una faccia danneggiata e il cuore più rigido, gli effetti 3D sono ora più rilevanti rispetto al caso 5.

Il caso 7 vede le teorie di basso ordine fornire risultati lontani dall'accuratezza mentre la ZZAS4 e le altre teorie di ordine superiore ottengono risultati precisi, evidenziando la possibilità di trascurare l'utilizzo delle funzioni zig-zag senza compromettere l'accuratezza della soluzione ottenuta.

Il caso 8 viene ben descritto solo dalla ZZAS4 mentre le ZZAS3,ZZAS2 e la ZZAS1 non forniscono risultati sufficientemente accettabili.

Dai risultati si osserva che le teorie meno accurate forniscono risultati di gran lunga inesatti nel caso f, dove gli effetti tridimensionali sono amplificati dalla presenza del danno. Riguardo il caso g, le teorie di ordine inferiore risultano essere lontane da un minimo di accuratezza mentre le teorie di ordine superiore forniscono ottimi risultati grazie all'imposizione di tutte le condizioni necessarie, potendo così omettere l'utilizzo di funzioni zig-zag; si osserva comunque che anche i sandwich sottili risentono fortemente di effetti layerwise.

3.5 Caso 9

Il caso in esame considera una trave sandwich a 11 strati, semplicemente appoggiata, sottoposta a carico sinusoidale e con faccia inferiore danneggiata; tale tipo di configurazione rappresenta un test sull'accuratezza delle varie teorie a causa del fatto che il modulo elastico della faccia inferiore si riduce di un fattore pari a 10^{-2}. Anche se non realistico, questo caso permette di osservare quali teorie descrivono accuratamente la deformabilità normale trasversale.

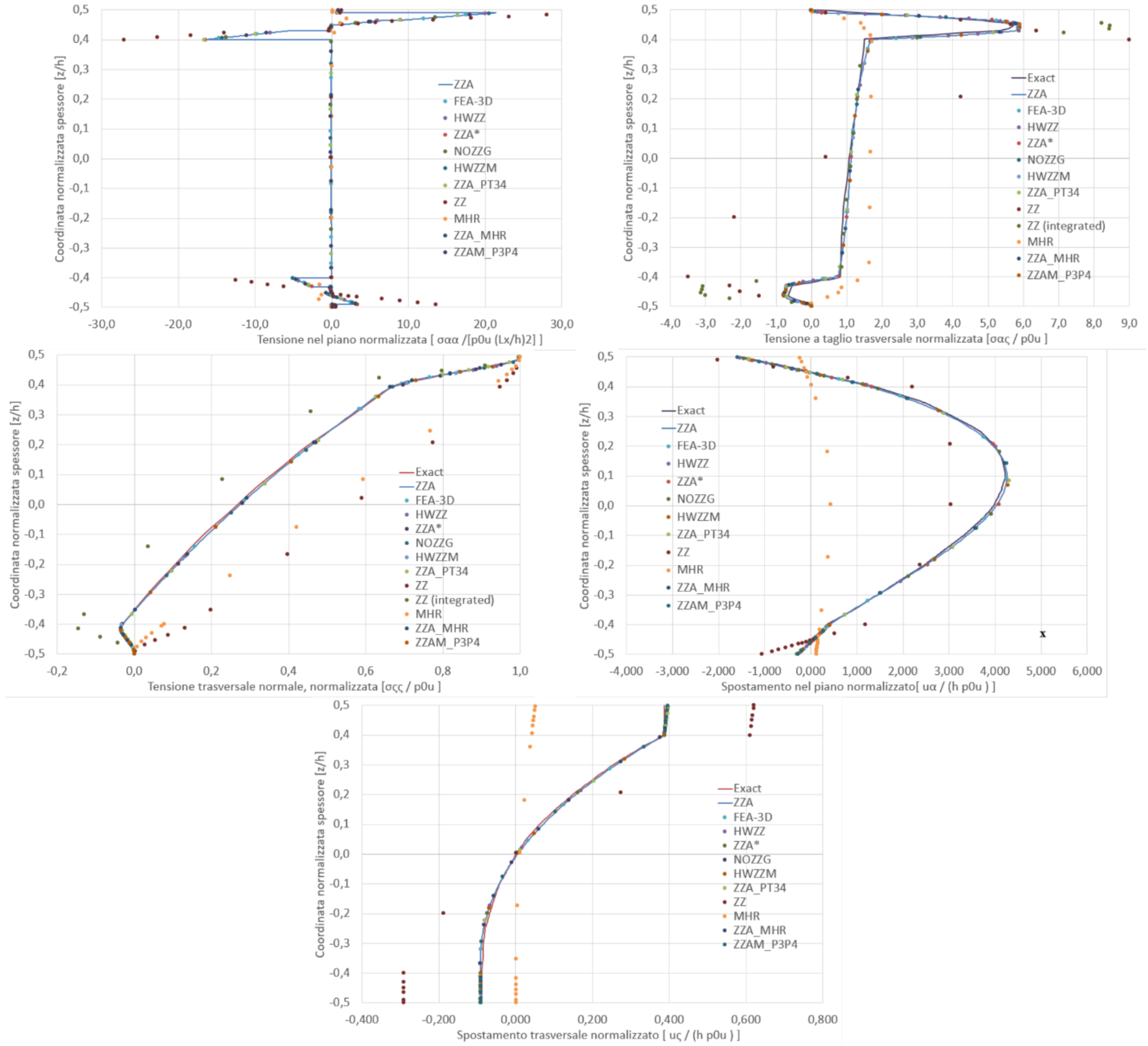

Figura 3.1 Risultati grafici, caso 9

Si riportano solamente i risultati ottenuti dalle teorie di ordine superiore dato che le teorie di ordine inferiore riportano soluzioni lontane dall'accuratezza.

Si osserva che le teorie di ordine superiore riescono ad ottenere risultati accurati. In particolare, prevedere spostamenti trasversali uniformi lungo lo spessore (ZS3) comporta risultati errati; inoltre è possibile ridefinire i coefficienti forniti da alcune delle teorie utilizzate aumentando la precisione dei risultati, potendo in contemporanea trascurare le funzioni zig-zag o assumerle arbitrariamente: si vede a tal proposito la maggior accuratezza della ZZA_MHR rispetto la MHR. Tale osservazione è confermata anche dai risultati forniti dalla ZZA*, ZZM, HWZZM e dalla HWZZM*.

Assunti nuovi gradi di libertà, è possibile utilizzare arbitrariamente una rappresentazione globale una volta che i coefficienti vengono ricalcolati (ZS2); si osserva nuovamente che è possibile trascurare le funzioni zig-zag, come dimostrato dalle teorie che utilizzano altre funzioni per descrivere il campo di spostamenti lungo lo spessore (si veda la serie di potenze nella ZZA_PT34). Inoltre, assumendo un campo di tensioni indipendente dagli spostamenti, le teorie meno accurate aumentano di precisione nei risultati (ZS1_2, ZS1_3, ZS3_2). Si osserva infine che le teorie di ordine superiore ottengono risultati accurati in tempi di processamento inferiori rispetto a quelli della FSDT e che le teorie meno precise, che ad esempio presentano un campo di spostamenti parabolico/cubico lungo lo spessore, aumento di accuratezza già ridefinendo i coefficienti.

3.6 Caso 10

Nel caso 10 si considera una piastra sandwich, semplicemente appoggiata e sottoposta a carico sinusoidale. La faccia inferiore è danneggiata mentre il cuore è parzialmente danneggiato.

Si osserva che le tensioni nel piano sono predette in modo accurato all'incirca da tutte le teorie mentre le tensioni fuori dal piano così come gli spostamenti sono inaccurati per la ZZ, se i risultati da questa forniti non vengono post-processati. Di contro, la ZZA, che prevede una ridefinizione dei coefficienti a differenza della ZZ, dimostra che l'accuratezza migliora.

Inoltre, si conferma che le funzioni globali e zig-zag possono essere scelte arbitrariamente, se non queste ultime addirittura omesse. Ciò è dimostrato ad esempio dal fatto che i risultati forniti da teorie che prevedono funzioni sinusoidali, serie di potenze o di esponenziali, sono pressoché uguali a quelli forniti dalla ZZA, dalla ZZA*, dalla HWZZ e dalla HWZZM. In tale ottica si inseriscono anche la PMTP34 che usa una rappresentazione globale differente per gli spostamenti e la PPM34 che utilizza serie di funzioni differenti per facce e cuore.

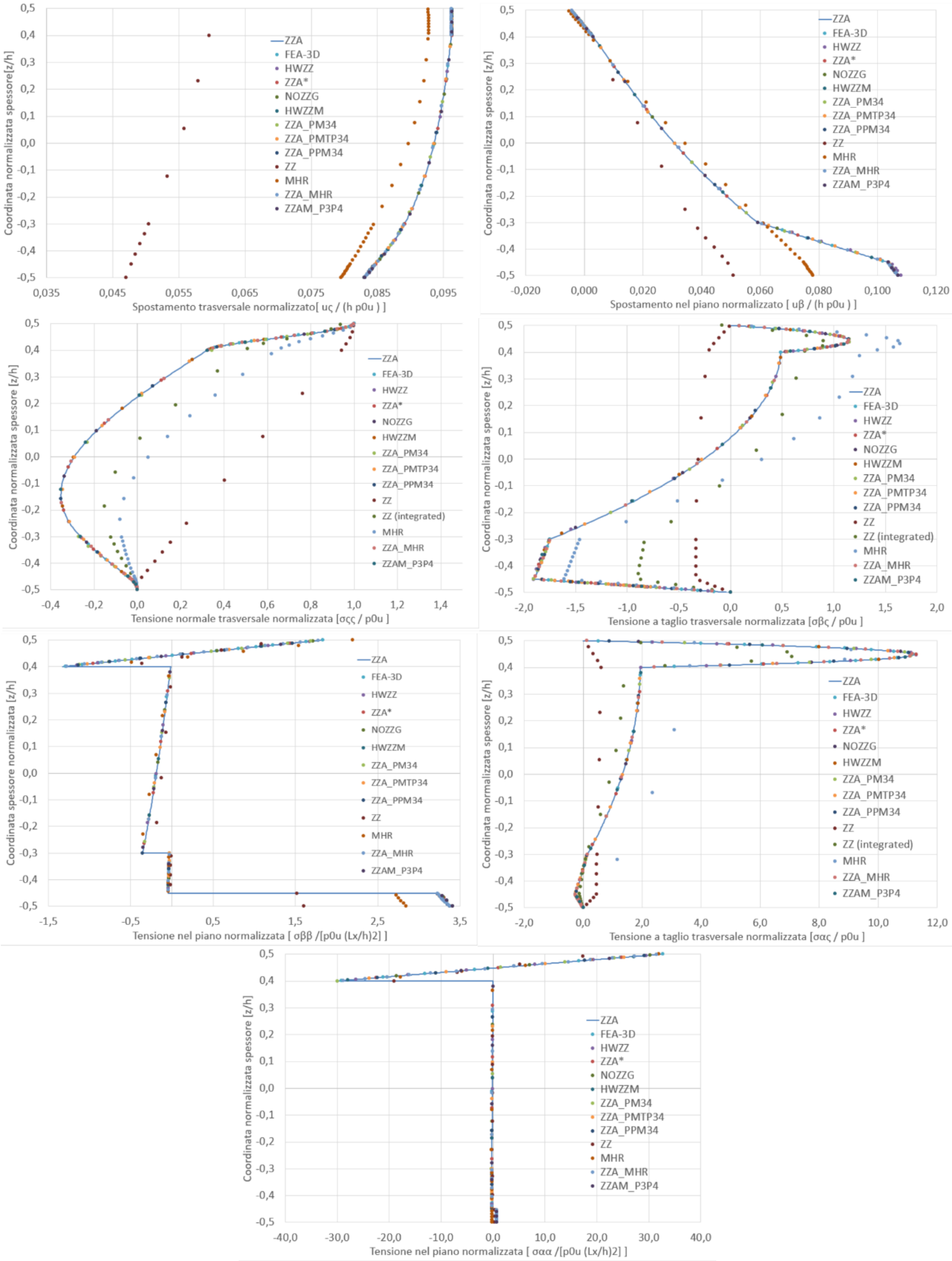

Figura 3.2 Risultati grafici, caso 10

3.7 Caso 11

Il caso 11 è ottenuto considerando una trave sandwich ad undici strati, semplicemente appoggiata, con faccia inferiore danneggiata e soggetta a un carico uniforme a compressione a due step.

Rispetto al caso 10, la variazione di carico accentua gli effetti della stratificazione, di modo che le tensioni a taglio non sono simmetriche rispetto lo spessore. Di conseguenza, le teorie che non prevedono un ricalcolo dei coefficienti, si veda la ZZ, ottengono buoni risultati per gli spostamenti e le tensioni nel piano ma non per le tensioni fuori dal piano; i risultati migliorano, senza però garantire precisione massime, se si procede a calcolare le tensioni tramite integrazione delle equazioni di equilibrio. Infine, si dimostra nuovamente che le funzioni zig-zag possono essere omesse senza perdere di accuratezza.

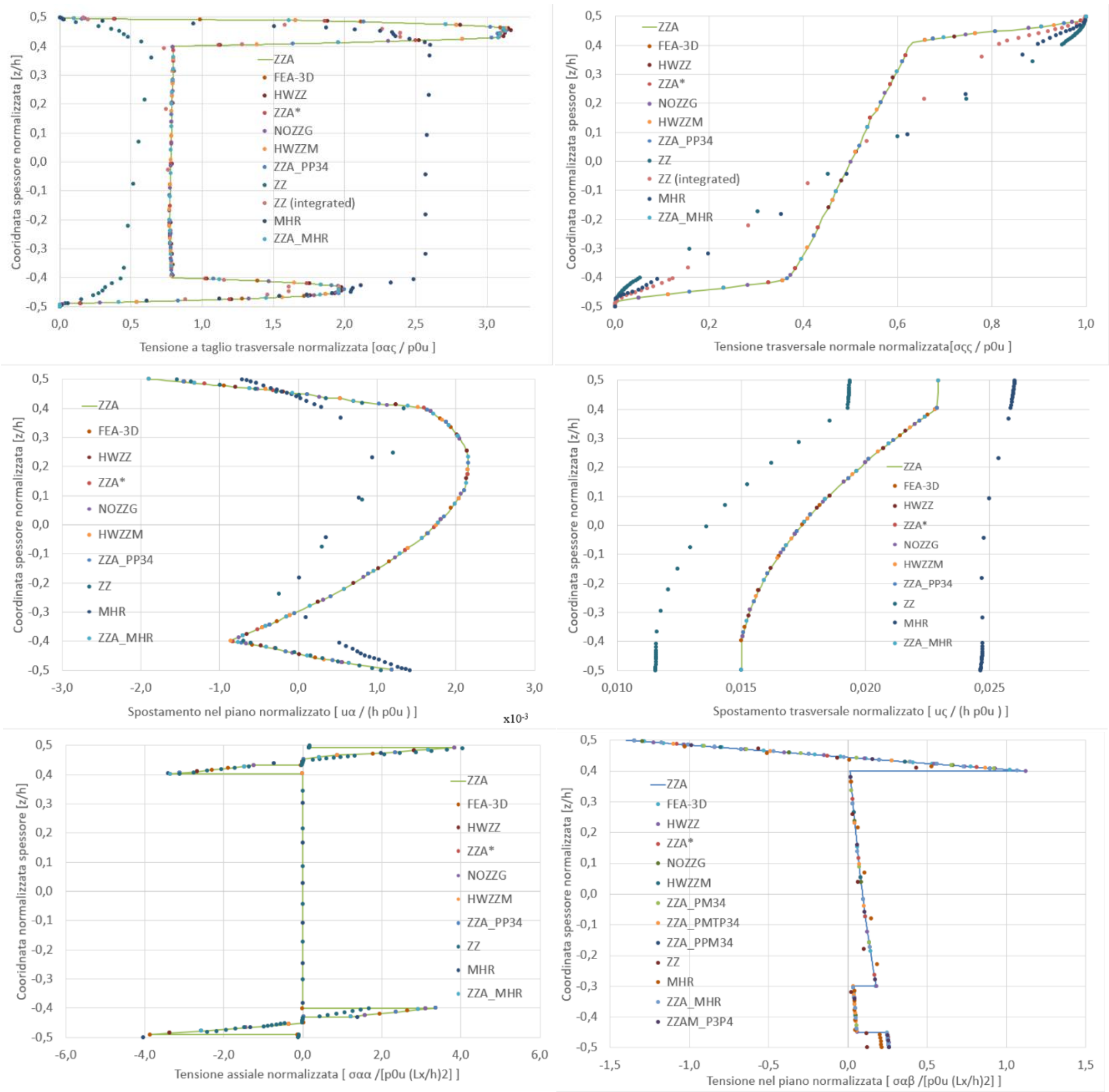

Figura 3.3 Risultati grafici, caso 11

3.8 Caso 12

Il caso in esame rappresenta una trave sandwich semplicemente appoggiata con carico uniforme a 2 step, nella quale il cuore e la faccia superiore sono danneggiati; inoltre si pone attenzione sul rapporto lunghezza-spessore, pari a 25.

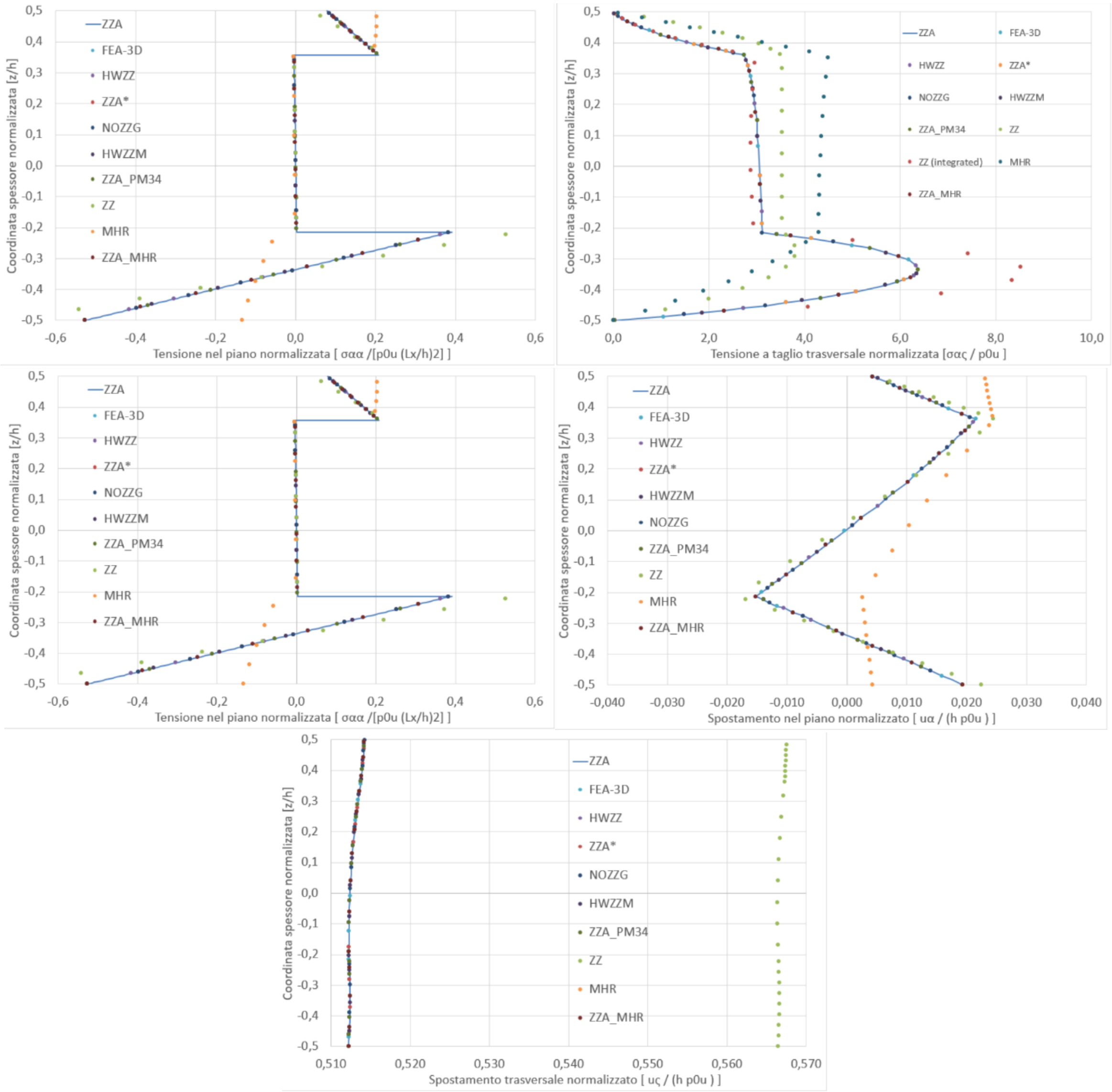

Figura 3.4 Risultati grafici, caso 12

Si osserva che, a causa della configurazione di carico, le teorie che non prevedono un ricalcolo dei coefficienti producono buoni risultati nel senso degli spostamenti e delle tensioni nel piano mentre perdono di significato i risultati riguardo le deformazioni trasversali nonché le tensioni trasversali a causa del fatto che si richiede necessariamente un'accurata descrizione dello spostamento trasversale. SI osserva infine che, anche utilizzando tecniche di post-processing, tali teorie non migliorano nell'accuratezza; inoltre la scelta delle funzioni zig-zag è immateriale ed è possibile utilizzare altre serie di funzioni per rappresentare la variazione degli spostamenti lungo lo spessore, ammettendo che i coefficienti possano essere ricalcolati.

3.9 Caso 13

In tale caso si analizza una trave sandwich incastrata-appoggiata con un carico trasversale uniforme sulla faccia superiore. La trave è incastrata all'estremo per x=0 e appoggiata, sulla faccia inferiore, all'estremo per x=L_x.

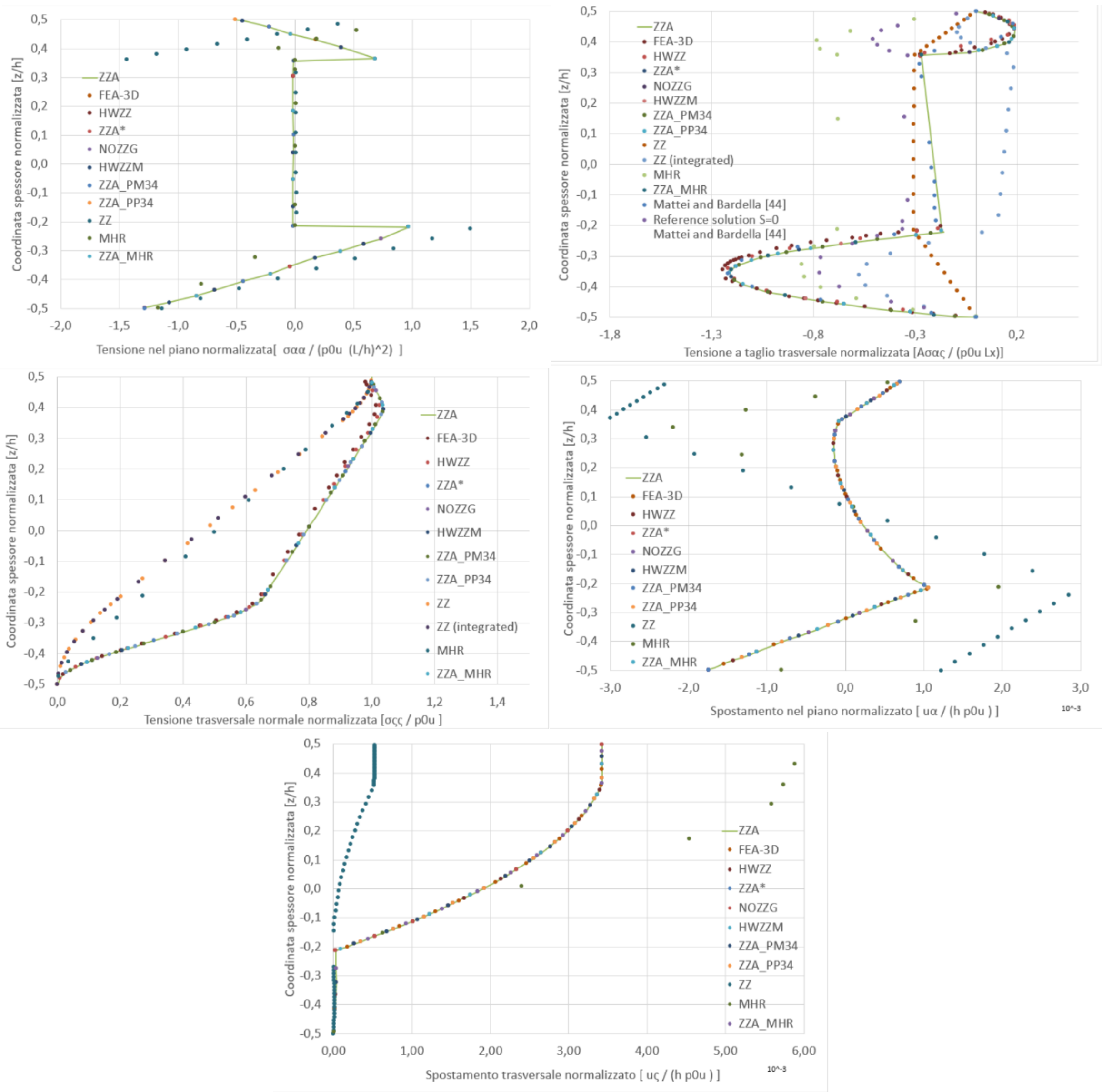

Figura 3.5 Risultati grafici, caso 13

Le proprietà del materiale, le condizioni di carico e di vincolo amplificano gli effetti layerwise e di conseguenza i campi di spostamento e tensione risultano essere fortemente asimmetrici lungo lo spessore. Si richiede una precisa descrizione della deformabilità trasversale normale poiché le tensioni a taglio trasversali assumono segno differente a seconda della faccia che si considera. Si ribadisce che il ricalcolo dei coefficienti permette di utilizzare funzioni zig-zag arbitrarie o di addirittura ometterle dalla formulazione.

4 Sviluppo del modello corrente

In tale trattazione si è voluto analizzare l'impiego di soluzioni 3D non esatte, approssimate come serie troncata, per risolvere condizioni di vincolo e carico che non consentono soluzioni complesse e/o localizzate. Di fatti, come si evince dalla letteratura sopra riportata, è disponibile un limitato numero di casi di studio nei quali vengono forniti risultati che rispecchiano l'accuratezza di calcolo rispetto a quelli tradotti dalla teoria.

L'intento è pertanto quello di sviluppare uno strumento migliore del metodo dei residui pesati che fornisca una soluzione di riferimento per il FEM, dato che questo si applica a casi di vincolo e carico diversi da quelli che generalmente forniscono soluzioni esatte, queste ultime riferenti a condizioni lontane da quelle reali di applicabilità.

Come primo caso si analizza il laminato [0°/90°0°] riportato nel capitolo precedente.

Successivamente, nell'osservare l'importanza degli effetti layerwise e della difficoltà che ne comporta la loro descrizione, si procede a mostrare la particolare casistica attraverso la quale è stato possibile generare un'ulteriore formulazione per il caso di trave sandwich già analizzato da Mattei e Bardella []. L'effetto tridimensionale e la difficoltà intrinseca nella sua descrizione vede amplificarsi nei risultati in termini della tensione di taglio trasversale la quale, se non si prevede una corretta definizione delle condizioni di continuità alle interfacce degli spostamenti e delle tensioni, porta a risultati lontani dall'accuratezza, come dimostrano soprattutto differenti approcci FEM 3D.

Si dimostra allora che è possibile fornire risultati migliori rispetto a quelli ottenuti attraverso diverse applicazioni FEM nonché che le teorie che prevedono l'utilizzo di funzioni zig-zag possono essere by-passate trascurando del tutto l'utilizzo stesso di tali funzioni; i modelli qui definiti rappresentano di fatti un'estremizzazione nella semplificazione della formulazione precedentemente sviluppata in altre teorie poiché, di fatti, non si fa utilizzo di un modello di spostamento inteso in senso classico: i gradi di libertà strutturali vengono sostituiti, nel loro insieme, dai coefficienti dei polinomio che descrivono l'andamento del campo di spostamento lungo lo spessore.

Ciò è stato possibile attraverso l'imposizione di condizioni fisiche appropriate, caso per caso, che permettono il calcolo del set di coefficienti sopra citato; la potenza di tale tipo di approccio risiede allora nel considerare una formulazione che non prevede modello di spostamento, che descriva le varie quantità fisiche strato per strato senza ricorrere a funzioni zig-zag e che grazie alla sua semplificazione, permette velocità di calcolo maggiori.

Si assume un sistema di riferimento Cartesiano, rettangolare, che abbia come superficie di riferimento (x,y) la superficie media Ω della piastra laminata e come coordinata z quella relativa allo spessore. Lx e Ly rappresentano la larghezza della piastra nelle direzioni x e y rispettivamente, mentre le coordinate $z^{(k)+}$ e $z^{(k)-}$ rappresentano la posizione superiore e inferiore all'interfaccia k-esima. Si indicano inoltre, tramite virgola, le derivate spaziali $(\cdot)_{,x}$.

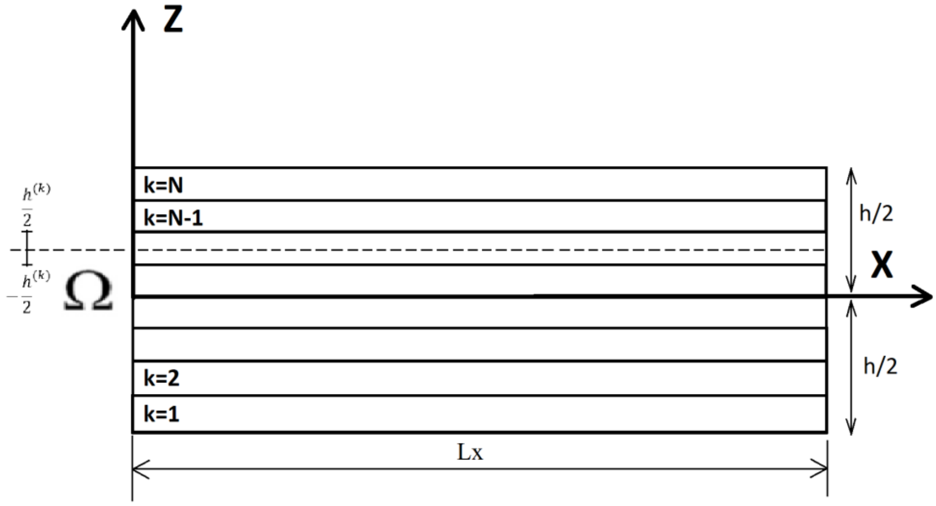

Figura 4.1

4.1 Caso laminato [0°/90°/0°]

Il modello generato vede una definizione delle componenti di spostamento nel piano e fuori dal piano come prodotto di funzioni a variabile singola le quali devono soddisfare condizioni di congruenza, compatibilità, al contorno e alle interfacce.

u^*	w^*	σ_x^*	σ_z^*	σ_{xz}^*
$\frac{u(0,z)}{h}$	$\frac{w\left(\frac{L_x}{2},z\right)}{h}$	$\frac{\sigma_x\left(\frac{L_x}{2},z\right)}{p^0}$	$\frac{\sigma_z\left(\frac{L_x}{2},z\right)}{p^0}$	$\frac{\sigma_{xz}(0,z)}{p^0}$

Tabella 4.1 Adimensionalizzazione caso [0°/90°0°]

Si considera una struttura multistrato con strati di spessore uniforme h^k e proprietà elastiche definite in Tabella 4.2.

Moduli elastici [GPa]		Coefficiente di Poisson		Moduli di taglio [GPa]		Geometria		BCS	Carico	Stratificazione	
										strato	spessore
E_1	$25\cdot10^3$	ν_{12}	0.25	G_{12}	$0.5\cdot10^3$	L_x/h	5	SS	Sinusoidale	1	h/3
E_2	$1\cdot10^3$	ν_{13}	0.25	G_{13}	$0.5\cdot10^3$					2	h/3
E_3	$1\cdot10^3$	ν_{23}	0.25	G_{23}	$0.2\cdot10^3$	L_y/h	/			3	h/3

Tabella 4.2 Materiali, geometria, vincolo e carico caso [0°/90°/0°]

La piastra, assunta per semplificazione come trave poiché in flessione cilindrica, è semplicemente appoggiata e i vari strati sono perfettamente incollati tra loro in modo tale da trascurare gli effetti di incollaggio tra le lamine.

La soluzione in forma chiusa si ottiene esprimendo le componenti di spostamento *u* e *w* come

$$\begin{cases} u^k = \cos(x)(a_0^{(k)} + a_1^{(k)}z + a_2^{(k)}z^2 + a_3^{(k)}z^3) \\ w^k = \sin(x)\left(b_0^{(k)} + b_1^{(k)}z + b_2^{(k)}z^2 + b_3^{(k)}z^3 + b_4^{(k)}z^4\right) \end{cases}$$

dove i gradi di libertà, per ogni singolo strato, sono definiti dai coefficienti delle polinomiali in z.

Si osserva allora che il numero di gradi di libertà totali risulta essere pari a 27, coinvolgendo 15 coefficienti della polinomiale per la w (5 per strato) e 12 coefficienti della polinomiale per la u (4 per strato); si osserva inoltre che le condizioni a contorno meccaniche sono automaticamente soddisfatte grazie all'espressione in x; la scelta di un polinomio cubico/quartico nello spessore riprende il campo di spostamenti dello ZZA.

Le incognite vengono allora determinate imponendo condizioni:

- al contorno per le componenti di tensione trasversali;
- alle interfacce per le componenti di tensione trasversali e per le componenti di spostamento (continuità);
- equilibri.

In modo più specifico, si è imposto:

- condizioni di continuità:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= \sigma_z^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \\
\tau_{xz}^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= \tau_{xz}^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \\
\sigma_{z,z}^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= \sigma_{z,z}^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \qquad per\ i = 1, \ldots\ldots, n_{interfacce} \\
u^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= u^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \\
w^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= w^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right)
\end{aligned}$$

- condizioni al bordo:

$$\begin{aligned}
\sigma_z\left(x,\frac{h}{2}\right) &= q(x) \\
\sigma_z\left(x,-\frac{h}{2}\right) &= 0 \\
\sigma_{z,z}\left(x,\pm\frac{h}{2}\right) &= 0 \\
\tau_{xz}\left(x,\pm\frac{h}{2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

- condizioni di equilibrio locale in determinati punti lungo lo spessore:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,x} + \sigma_{xz,z} &= 0 \\
\sigma_{z,z} + \sigma_{xz,x} &= 0
\end{aligned}$$

Il modello così definito definisce risultati accurati avendo totalmente trascurato funzioni e ampiezze zig-zag nonché si è effettuata una estremizzazione nella semplificazione del polinomio che descrive il campo di spostamenti. Si è voluto allora dimostrare che, almeno per il caso in esame, è stato possibile elidere i termini di tipo layerwise e le funzioni zig-zag, inglobando il tutto in una formulazione polinomiale che fornisce gli stessi risultati.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti:

	z/h	u*(x=0)	w*(x=Lx/2)	σ*$_x$(x=Lx/2)	σ*$_z$(x=Lx/2)	σ*$_{xz}$ (x=0)
Strato 1	-0.5	0.0016	1.2930	-24.9297	0	0
	-0.417	0.0010	1.2952	-15.6207	-0.0273	0.9879
	-0.333	0.0005	1.2969	-8.4297	-0.0975	1.6364
	-0.250	0.0002	1.2986	-2.4752	-0.1928	1.9468
	-0.167	-0.0002	1.3004	-3.1244	-02955	1.9199
Strato 2	-0.167	-0.0002	1.3004	0.1961	-0.2955	1.9109
	-0.083	-0.0001	1.3029	0.1481	-0.3958	1.9043
	0.0	0	1.3064	0.1031	-0.4957	1.8999
	0.083	0.0001	1.3107	0.0608	-0.5952	1.8978
	0.167	0.0002	1.3160	0.0209	-0.6947	1.9468
Strato 3	0.167	0.0002	1.3160	-3.6568	-0.6947	1.6489
	0.250	-0.0001	1.3219	2.1310	-0.7968	0.9989
	0.333	-0.0005	1.3280	8.2690	-0.8925	0
	0.417	-0.0010	1.3340	15.6295	-0.9633	0
	0.500	-0.0016	1.3396	25.0845	-0.9910	0
max	/	0.016	1.3396	25.0845	0.0	1.9468
min	/	-0.016	1.2930	-24.9297	-0.9910	0.0

Tabella 4.3 Risultati caso laminato [0°/90°/0°]

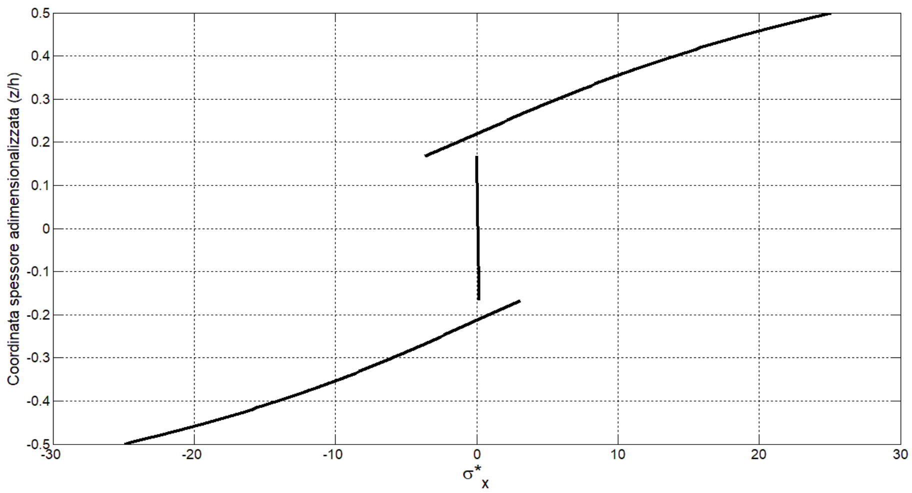

Figura 4.2 σ_x^* laminato [0°/90°/0°], x=Lx/2

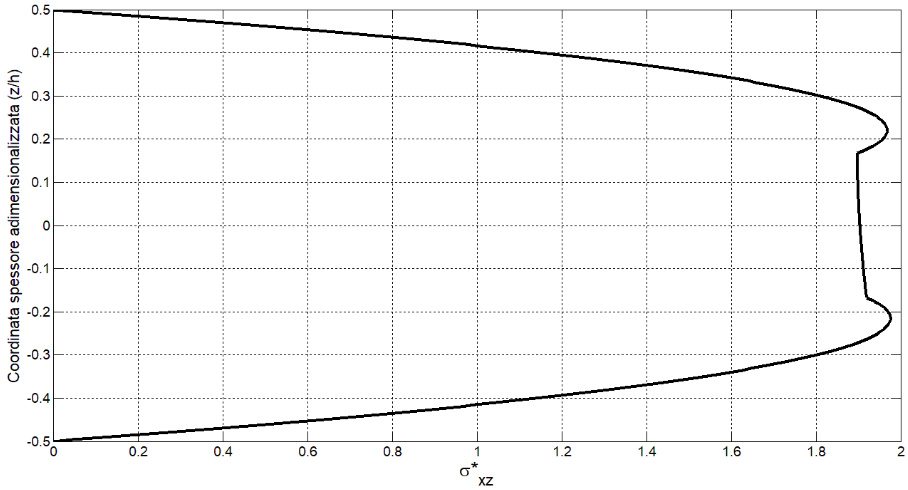

Figura 4.3 σ_{xz}^{*} laminato [0°/90°/0°], x=0

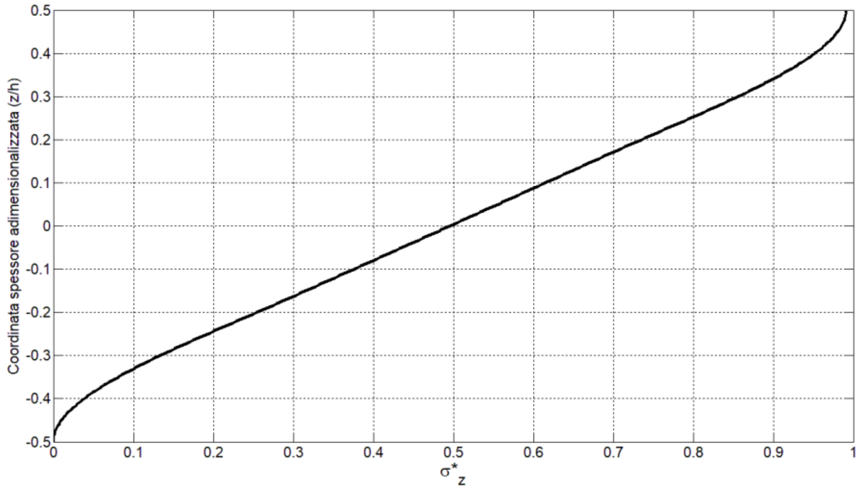

Figura 4.4 σ_{z}^{*} laminato [0°/90°/0°], x=Lx/2

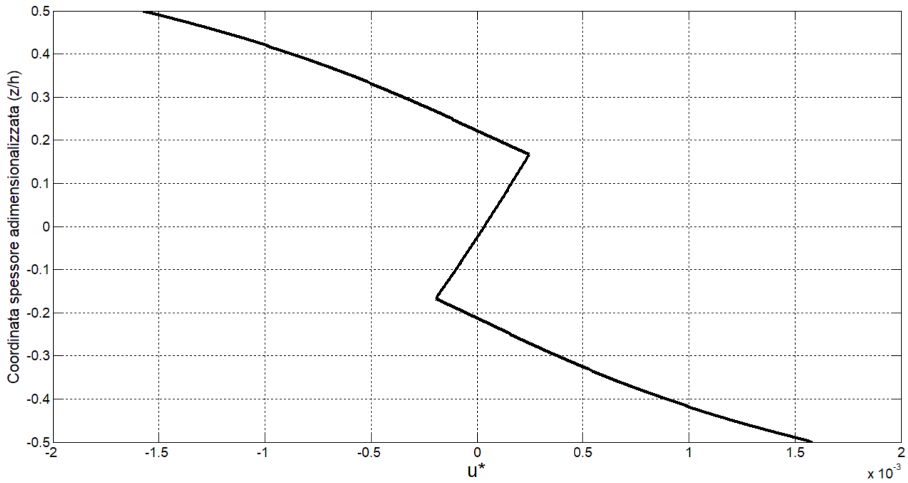

Figura 4.5 u^{*} laminato [0°/90°/0°], x=0

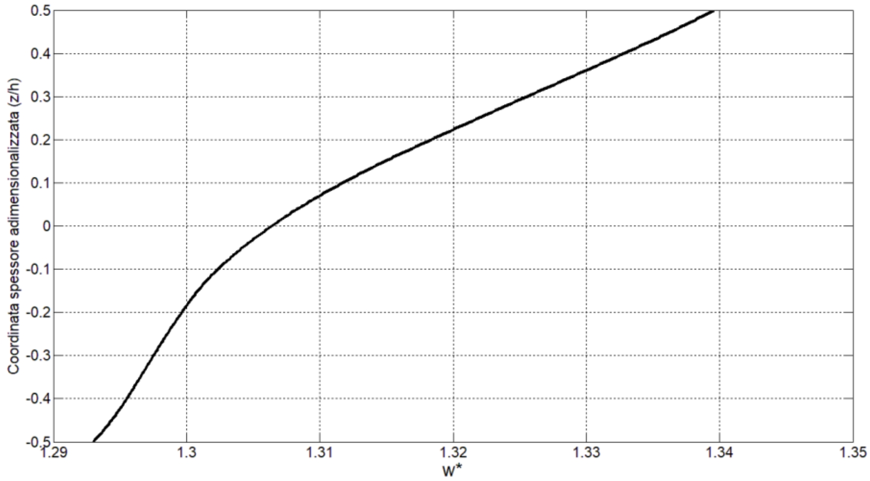

Figura 4.6 w^* laminato [0°/90°/0°], x=Lx/2

I risultati ottenuti appaiono essere molto accurati; la componente di spostamento nel piano u assume un comportamento di tipo zig-zag senza che nel modello matematico sia stata introdotta alcuna funzione zig-zag, confermando la possibilità di poter trascurare tali funzioni senza perdere di accuratezza nel modello. A supporto di tale affermazione si fa notare che il modello attuale addirittura non prevede gradi di libertà fisici (a differenza dei classici 5 gradi di libertà (u_0, w_0 ...) ma, imponendo come condizioni vincoli fisici, il loro rispetto garantisce un'ottima soluzione.

Si osserva che la σ_x è discontinua poiché il modello utilizzato non prevede condizioni di continuità della stessa lungo lo spessore, così come è stato fatto negli studi precedenti sullo stesso tipo di configurazione strutturale.

Guardando alla σ_{xz} il pronunciamento dei picchi alle interfacce è ridotto poiché si è considerato un rapport Lx/h pari a 4; all'aumentare di tale rapporto, il pronunciamento di tali picchi diminuisce, aumentando contemporaneamente il valore in modulo della σ_{xz}.

Le funzioni di forma soddisfano automaticamente le condizioni al contorno meccaniche e pertanto risulta superfluo utilizzare coefficienti di ordine superiore.

Nello sviluppo della formulazione, si sono poste inizialmente condizioni nel senso del metodo di Rayleigh-Ritz ma, dipendendo la soluzione dalla scelta dei coefficienti attraverso i quali minimizzare il potenziale totale, si è preferito abbandonare tale tipo di risoluzione.

4.2 Caso Mattei-Bardella: sandwich asimmetrico incastrato-appoggiato

Il sistema strutturale è caratterizzato da una trave appoggiata ad un'estremità, sulla faccia inferiore. e incastrata nell'altra; il carico, di punta, agisce sulla estremità in cui è presente l'appoggio, sulla faccia superiore. Data la particolare definizione dei vincoli, si è proceduto a definire il campo di spostamenti come prodotto di serie di potenze della variabile nel piano x e polinomi di ordine differente fuori dal piano, a seconda della componente di spostamento; più precisamente, si è definito

$$
\begin{cases}
u^k = \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{x}{L_x}\right)^i (a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + a_2^{(k)} z^2 + a_3^{(k)} z^3) \\
w^k = \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{x}{L_x}\right)^{i+1} \left(b_0^{(k)} + b_1^{(k)} z + b_2^{(k)} z^2 + b_3^{(k)} z^3 + b_4^{(k)} z^4\right)
\end{cases}
$$

L'importanza di tale tipo di configurazione risiede nell'asimmetria nella stratificazione e la forte anisotropia trasversale le quali determinano effetti layerwise dominanti così come le condizioni di vincolo comportano una scelta delle funzioni di forma particolareggiata.

u^*	w^*	σ_x^*	σ_z^*	σ_{xz}^*
$\frac{u(0,z)}{h}$	$\frac{w\left(\frac{L_x}{2},z\right)}{h}$	$\frac{\sigma_x\left(\frac{L_x}{2},z\right)}{p^0}$	$\frac{\sigma_z\left(\frac{L_x}{2},z\right)}{p^0}$	$\frac{\sigma_{xz}(0,z)}{p^0}$

Tabella 4.4 Adimensionalizzazione caso Mattei-Bardella

Moduli elastici [GPa]	Coefficiente di Poisson	Moduli di taglio [GPa]	Geometria	BCS	Carico	Stratificazione
E_1 $1\cdot10^3$	ν_{12} 0.25	G_{12} $0.2\cdot10^3$	L_x/h 5.71	SS	Sinusoidale	strato spessore
E_2 $1\cdot10^3$	ν_{13} 0.25	G_{13} $0.2\cdot10^3$				1 2h/7
E_3 $1\cdot10^3$	ν_{23} 0.25	G_{23} $0.2\cdot10^3$	L_y/h /			2 4h/7
						3 h/7

Tabella 4.5 Materiali, geometria, BCS, carico per caso Mattei-Bardella

Si è proceduto ad imporre le diverse condizioni, le quali coinvolgono inoltre il giusto valore del taglio all'incastro poiché, essendo in quella sezione nulli gli spostamenti e le rotazioni, risulterebbe nullo anche il taglio stesso; inoltre si impone nulla la componente di spostamento trasversale nel punto di appoggio, il momento e il taglio nulli nella sezione d'appoggio. Si osserva che le condizioni meccaniche sono state implementate nel calcolatore tramite il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange. L'insieme delle condizioni al contorno allora è definito come

- condizioni di continuità:

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= \sigma_z^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \\
\tau_{xz}^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= \tau_{xz}^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \qquad per\ i = 1, \ldots\ldots, n_{interfacce} \\
\sigma_{z,z}^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= \sigma_{z,z}^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \\
u^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= u^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right) \\
w^i\left(x,-\frac{h_i}{2}\right) &= w^{i+1}\left(x,\frac{h_{i+1}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

- condizioni al bordo:

$$\sigma_z\left(x,\frac{h}{2}\right) = q(x)$$
$$\sigma_z\left(x,\frac{h}{2}\right) = 0$$
$$\sigma_{z,z}\left(x,\pm\frac{h}{2}\right) = 0$$
$$\tau_{xz}\left(x,\pm\frac{h}{2}\right) = 0$$
$$w\left(L_x,-\frac{h}{2}\right) = 0$$

- condizioni di equilibrio locale in determinati punti lungo lo spessore:

$$\sigma_{x,x} + \sigma_{xz,z} = 0$$
$$\sigma_{z,z} + \sigma_{xz,x} = 0$$

- condizioni al contorno meccaniche

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = T^* \qquad in\ x = 0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = T^{**} \qquad in\ x = L_x$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz = 0 \qquad in\ x = L_x$$

Le condizioni meccaniche vanno a sostituire 3 condizioni imposte sul soddisfacimento dell'equazione di equilibrio locale.

Si riportano i grafici relativi ai risultati ottenuti.

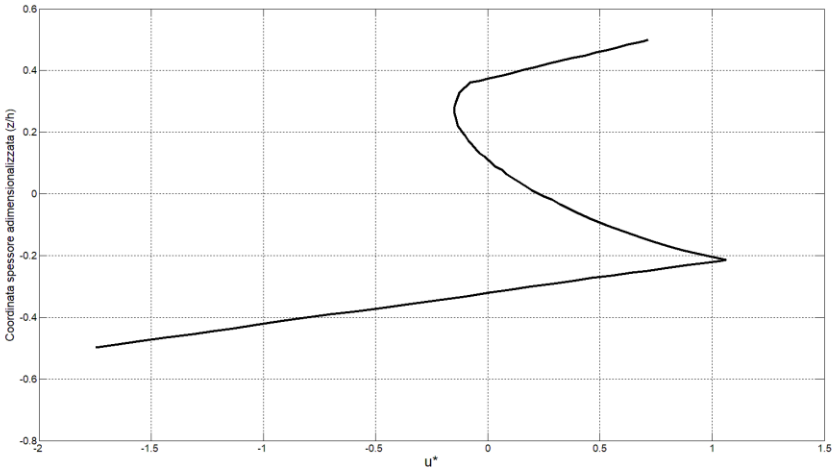

Figura 4.7 u^*, caso Mattei-Bardella, x=Lx

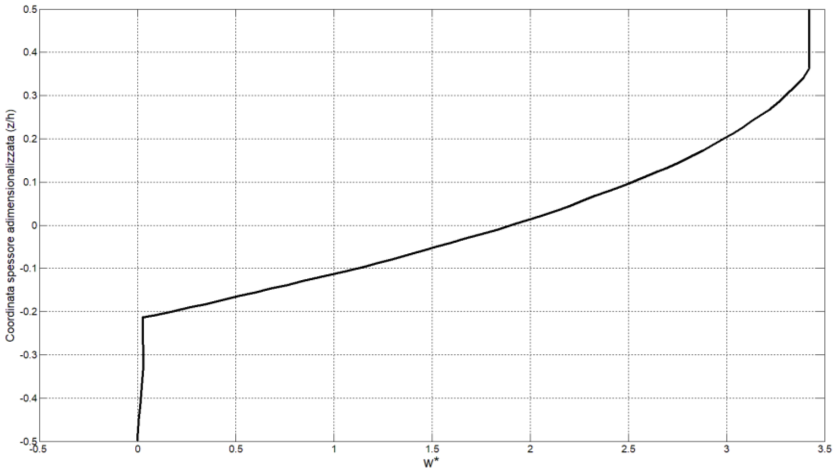

Figura 4.8 w^*, caso Mattei-Bardella, x=Lx

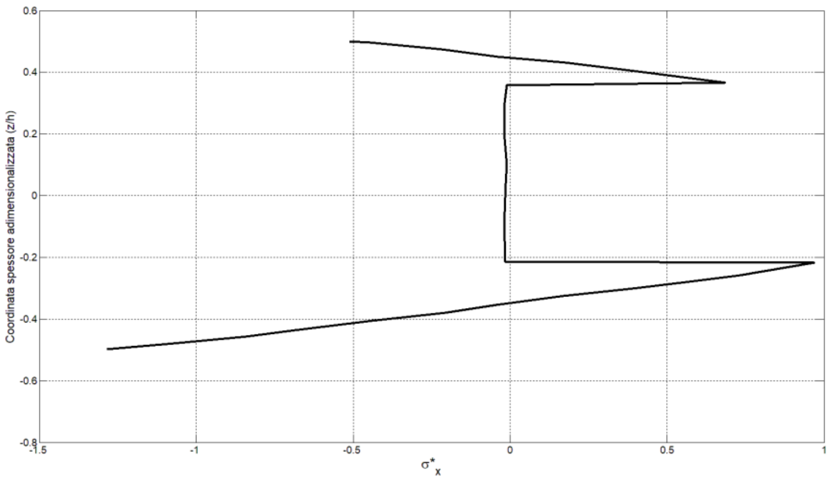

Figura 4.9 σ_x^*, caso Mattei-Bardella, x=Lx

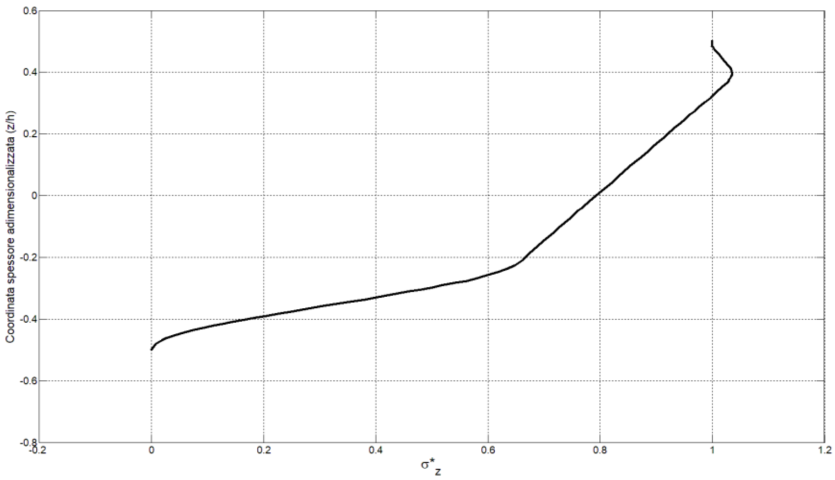

Figura 4.10 σ_z^*, caso Mattei-Bardella, x=Lx

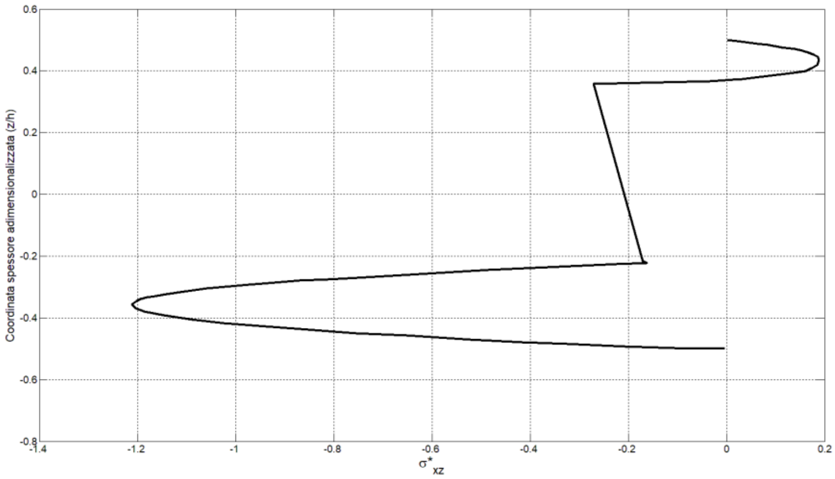

Figura 4.11 σ_{xz}^{*}, caso Mattei-Bardella, x=Lx

z/h	u*(x=0)	w*(x=Lx/2)	σ^*_x(x=Lx/2)	σ^*_z(x=Lx/2)	σ^*_{xz} (x=0)
-h/2	-1.7472	-0.008	-1.2840	-0.007	0.0024
0	0.2511	2.1351	-0.0172	0.7293	-0.6620
h/2	0.7165	3.4234	-0.5109	1.0	-0.0027
max	-1.7472	-0.008	-1.2840	-0.007	1.2117
min	1.0625	3.4245	0.9681	1.0359	0.1882

Tabella 4.6 Risultati caso Mattei-Bardella

5 Conclusioni

L'intento di tale studio è stato quello di dimostrare come sia possibile definire una formulazione, nella descrizione del campo di spostamento, che non solo ometta l'utilizzo delle funzioni zig-zag ma che possa anche definire nuovi gradi di libertà, da ricercarsi nei coefficienti delle polinomiali utilizzate.

La formulazione che è stata introdotta allora non prevede un modello di spostamento fisico la cui letteratura suggerisce un'evoluzione verso l'utilizzo dei cinque gradi di libertà classici: ciò rappresenta un vantaggio soprattutto in termini di rapidità nello svolgimento dei calcoli.

La difficoltà nel trovare una soluzione in forma chiusa e ben accurata risiede nel soddisfare le condizioni al contorno meccaniche le quali comportano problemi soprattutto nel caso in cui siano presenti vincoli d'incastro; inoltre la variazione del tipo di carico, della laminazione e dei materiali utilizzati, nonché la presenza o meno di danneggiamenti, comporta la comparsa di effetti layerwise anche molto pronunciati.

In tale ottica si è posta attenzione inizialmente nell'analisi di diverse teorie zig-zag *physically based* con gradi di libertà fissati in modo tale da dimostrare che la scelta delle funzioni zig-zag risulta essere immateriale, a prescindere dall'entità degli effetti interlaminari; come conseguenza, si evince allora la possibilità di poter rappresentare in modo arbitrario le varie grandezze lungo lo spessore come viene già fatto nelle teorie di tipo gerarchico (*hierarchical theories)* e in quelle assiomatiche/asintotiche.

Lo studio qui esposto si è mosso in tal senso, definendo un modello che addirittura elimini l'utilizzo dei gradi di libertà sopra definiti, sviluppando di contro una formulazione che non preveda un modello di spostamento e contemporaneamente rispetti intrinsecamente le condizioni al contorno meccaniche e i cui coefficienti, delle polinomiali in z, variabili strato per strato, soddisfino le condizioni fisiche quali continuità, condizioni al bordo e equilibri locali; si osserva che l'utilizzo del calcolo simbolico in ambiente Matlab^{TM} ha permesso un approccio più rapido al problema posto, a fronte di errori numerici e limitazioni di memoria.

Di conseguenza, si è effettuato un aggiornamento della formulazione, semplificando di molto il modello adattivo sviluppato da Icardi e Sola [29] il quale già fornisce comunque ottimi risultati; ciò è ben visibile nello studio dei casi sviluppati in letteratura.

L'obbiettivo non è stato quello di ottenere una formulazione direttamente applicabile per problemi di interesse industriale bensì di fornire un modello descrittivo che sia possibile implementare in futuro nei codici di calcolo commerciali. Risulta comunque che il costo computazionale derivante da tale formulazione è ridotto, comparabile ad esempio a quella di una FSDT, fornendo comunque dei risultati accurati.

Lista delle figure

Lista delle tabelle

Bibliografia

[1] J M Whitney and N J Pagano, "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates," ASME J. Appl. Mech., vol. 37, pp. 1031-1036, 1970.

[2] J N Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," ASME J. Appl. Mech., vol. 51, pp. 745-752, 1984.

[3] J N Reddy, "On refined computational models of composite laminates," *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 27, pp. 361 - 382, 1989.

[4] M Yaqoob Yasin and S Kapuria, "An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells," *Composite Structures*, vol. 98, pp. 202 - 214, 2013.

[5] Y Frostig, "Classical and higher-order computational models in the analysis of modern sandwich panels," Composites PartB: Engineering, vol. 34, pp. 83 - 100, 2003.

[6] T S Plagianakos and D A Saravanos, "Higher-order layerwise mechanics and finite element for the damped characteristics of sandwich composite beams," International Journal of Solids and Structures, vol. 41, pp. 6853 - 6871, 2004.

[7] Reddy, J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*, 2nd ed.; CRC Press: Boca 1093 Raton, United States, 2003.

[8] Vasilive, V.V.; Lur'e, S.A. On refined theories of beams, plates and shells. *J. Compos. Mat.* 1992, *26*, 422–430, 1095 https://doi.org/10.1177/002199839202600405.

[9] Reddy, J.N.; Robbins, D.H. Theories and computational models for composite laminates. *Appl. Mech. Rev*. 1097 1994, *47*, 147–165, https://doi.org/10.1115/1.3111076.

[10] Lur'e, S.A.; Shumova, N.P. Kinematic models of refined theories concerning composite beams plates and 1099 shells. *Int. J. Appl. Mech.* 1996, *32*, 422-430, https://doi.org/10.1007/BF02313861.

[11] Carrera, E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's mixed variational theorem in the 1105 modeling of multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Rev*. 2001, *54*, 301-329, 1106 https://doi.org/10.1115/1.1385512.

[12] Carrera, E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Rev*. 2003, 1108 *56*, 1-22, https://doi.org/10.1115/1.1557614.

[13] Carrera, E. On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. 1110 *Compos. Struct.* 2004, *82*, 541–554, https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.02.006.

[14] Kapuria, S.; Nath, J.K. On the accuracy of recent global–local theories for bending and vibration of 1114 laminated plates. *Compos. Struct.* 2013, *95*, 163–172, https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.06.018.

[15] Khandan, R.; Noroozi, S.; Sewell, P.; Vinney, J. The development of laminated composite plate theories: a 1112 review. *J. Mater. Sci.* 2012, *47*, 5901-5910, https://doi.org/10.1007/s10853-012-6329-y.

[16] H. Altenbach, Theories for laminated and sandwich plates. A review, Int Appl Mech 34 (1998), 243–252.

[17] L. Demasi, L. Refined multilayered plate elements based on Murakami zig-zag functions, Compos. Struct. 70 (2004), 308–316.

[18] L. Demasi, Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part IV: zig-zag theories, Compos. Struct. 87 (2009), 195–205.

[19] A.K. Noor, S.W. Burton, C.W. Bert, Computational model for sandwich panels and shells, Appl Mech Rev 49 (1996), 155–99.

[20] A Chakrabarti, H D Chalak, M A Iqbal, and A H Sheikh, "A new FE model based on higher order zig-zag theory for the analysis of laminated sandwich beam soft core," *Composite Structures*, vol. 93, pp. 271 - 279, 2011.

[21] H Matsunaga, "A comparison between 2-D single-layer and 3-D layerwise theories for computing interlaminar stresses of laminated composite and sandwich plates subjected to thermal loadings," *Composite Structures*, vol. 64, pp. 161 - 177, 2004.

[22] W J Chen and Z Wu, "A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories," *Recent Pat. Mech. Eng.*, vol. 1, pp. 29 - 44, 2008.

[23]I Kreja, "A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels," *Central European Journal of Engineering*, vol. 1, pp. 59 - 80, 2011.

[24] M Tahani, "Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories," *Composite Structures*, vol. 79, pp. 535 - 547, 2007

[25] A K Noor and M Malik, "An assessment of modelling approaches for thermo-mechanical stress analysis of laminated composite panels," *Comput. Mech.*, vol. 25, pp. 43 - 58, 2000.

[26] E Carrera, "Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 56, pp. 287 - 308, 2003.

[27] Catapano, A.; Giunta, G.; Belouettar, S.; Carrera, E. Static analysis of laminated beams via a unified 1162 formulation. *Compos. Struct.* 2011, *94*, 75-83, https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.015. 1163

[28] de Miguel, A.G.; Carrera, E.; Pagani, A.; Zappino, E. Accurate Evaluation of Interlaminar Stresses in 1164 Composite Laminates via Mixed One-Dimensional Formulation. *AIAA Journal*. 2018, *56*, 4582-4594, 1165 https://doi.org/10.2514/1.J057189.

[29] Icardi, U.; Sola, F. Development of an efficient zig-zag model with variable representation of 1116 displacements across the thickness. *J. of Eng. Mech.* 2014, *140*, 531-541, 1117 https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000673.

[30] Icardi, U.; Urraci, A. Free and forced vibration of laminated and sandwich plates by zig-zag theories 1119 differently accounting for transverse shear and normal deformability. *Aerosp. MDPI.* 2018, *5*, 1120 108, https://doi.org/10.3390/aerospace5040108. 1121

[31] Icardi, U.; Urraci, A. Novel HW mixed zig-zag theory accounting for transverse normal deformability and 1122 lower-order counterparts assessed by old and new elastostatic benchmarks. Aer. Sci. & Tech. 2018, *80*, 1123 541-571, https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.07.040.

[32] Zhen, W.; Wanji, C. Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global–local 1125 higher-order theory. *J. Sound Vib.* 2006, *298*, 333–349, https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.05.022. 1126

[33] Kapuria, S.; Dumir, P.C.; Jain N.K. Assessment of zig-zag theory for static loading, buckling, free and 1127 forced response of composite and sandwich beams. *Compos. Struct.* 2004, *64*, 317–327, 1128 https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.08.013. 1129

[34] Burlayenko, V.N.; Altenbach, H.; Sadowski, T. An evaluation of displacement-based finite element models 1130 used for free vibration analysis of homogeneous and composite plates. *J. Sound Vib.* 2015, *358*, 152–175, 1131 https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.08.010.

[35] M. Di Sciuva, A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered orthotropic plates, L'Aerotecnica Missili e Spazio 62 (1984), 84–92.

[36] H. Murakami, Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, ASME Appl Mech 53 (1986), 661–666.

[37] U. Icardi, Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations, Comp. Part B 32 (2001), 343-354.

[38] Carrera, E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Compos. Struct.* 2000, *50*, 183–198, doi:10.1016/S0263-8223(00)00099-4.

[39] Carrera, E. On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Compos. Struct.* 2004, *82*, 541–554, doi:10.1016/j.compstruc.2004.02.006.

[40] Brischetto, S.; Carrera, E.; Demasi, L. Improved response of asymmetrically laminated sandwich plates by using Zig-Zag functions. *J. Sand. Struct. Mat.* 2009, *11*, 257–267, doi:10.1177/1099636208099379.

[41] Demasi, L. Refined multilayered plate elements based on Murakami zig-zag functions. *Compos. Struct.* 2004, *70*, 308–316, doi:10.1016/j.compstruct.2004.08.036.

[42] Mattei, O.; Bardella, L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions. *Eur. J. Mech. Part A Solids* 2016, *58*, 172–186, doi:10.1016/j.euromechsol.2016.01.015.

[43] Icardi, U. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Compos. Part B* 2001, *32*, 343–354, doi:10.1016/S1359-8368(01)00016-6.

[44] Icardi, U.; Sola, F. Development of an efficient zig-zag model with variable representation of displacements across the thickness. *J. Eng. Mech.* 2014, *140*, 531–41,doi:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000673.

[45] Li, X.Y.; Liu, D. Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1997, *40*, 197–212, doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19970415)40:7<1197::AID-NME109>3.0.CO;2-B.

[46] Zhen, W.; Wanji, C. An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading. *Compos. Struct.* 2006, *73*, 99109, doi:10.1016/j. compstruct. 2005.01.034.

[47] Zhen, W.; Wanji, C. A study of global–local higher-order theories for laminated composite plates. *Compos.Struct.* 2007, *79*, 44–54, doi:10.1016/j.compstruct.2005.11.027.

[48] Shariyat, M. A generalized global-local high-order theory for bending and vibration analyses of sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads. *Compos. Struct.* 2010, *92*, 130–143, doi:10.1016/j.compstruct.2009.07.007.

[49] Li, X.Y.; Liu, D. Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis. *Int J Num Meth* 1145 *Eng.* 1997, *40*, 197–212, 1146 https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970415)40:7<1197::AID-NME109>3.0.CO;2-B. 1147

[50] Zhen W.; Wanji, C. A study of global–local higher-order theories for laminated composite plates. *Compos.* 1148 *Struct.* 2007, *79*, 44–54, https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.027.

[51] S.S. Vel, R. Batra, Analytical solution for rectangular thick plates subjected to arbitrary boundary conditions, AIAA J. 37 (1999) 1464–1473.

[52] A. Tessler, M. Di Sciuva, M. Gherlone, A refined zigzag beam theory for composite and sandwich beams, J. Compos. Mater. 43 (2009) 1051–1081.

[53] J.-S. Kim, M. Cho, Enhanced first-order theory based on mixed formulation and transverse normal effect, Int. J. Solids Struct. 44 (2007) 1256–1276.

[54] A. Barut, E. Madenci, A. Tessler, A refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates incorporating thickness stretch deformation, in: Proc. 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ACS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Hawaii, 2012.

[55] L. Iurlaro, M. Gherlone, M. Di Sciuva, The (3, 2)-mixed refined zigzag theory for generally laminated beams: theoretical development and C◦finite element formulation, Int. J. Solids Struct. 73–74 (2015) 1–19.

[56] Zhen W.; Wanji, C. A global higher-order zig-zag model in terms of the HW variational theorem for 1159 multi-layered composite beams. *Compos. Struct.* 2016, 158, 128–136, 1160 https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.09.021.

[57]. Brischetto, S.; Carrera, E.; Demasi, L. Improved response of asymmetrically laminated sandwich plates by 1150 using Zig-Zag functions. *J. Sand. Struct. & Mat.* 2009, *11*, 257-267, 1151 https://doi.org/10.1177/1099636208099379.

[58] Gherlone, M.; On the use of zigzag functions in equivalent single layer theories for laminated composite 1153 and sandwich beams: a comparative study and some observations on external weak layers. *ASME Appl.* 1154 *Mech.* 2013, 80, 1-19, 10.1115/1.4023690. 1155

[59] Groh, R.M.J.; Weaver, P.M. On displacement-based and mixed-variational equivalent single layer theories 1156 for modeling highly heterogeneous laminated beams. *Int. J. Solids & Struct.* 2015, *59*, 147-170, 1157 https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.01.020.

[60] N. J. Pagano, «Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates» *J.Compos. Mater.,* n. 4, pp. 20-34, 1970.