

POLITECNICO DI TORINO

*Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale*

Tesi di laurea magistrale

**Ottimizzazione di manovre a bassa spinta in  
orbita bassa terrestre**



**POLITECNICO  
DI TORINO**

**Relatore:**  
Lorenzo Casalino

**Candidato:**  
Francesco Biondi

Marzo 2019



*“ So pensare, so aspettare, so digiunare. “*  
-Siddharta-  
H.Hesse

*Al professore Lorenzo Casalino per avermi sostenuto e per aver messo a disposizione la sua esperienza e competenza.*

*A tutti gli amici, in particolar modo quelli con cui ho condiviso le ultime esperienze universitarie i quali hanno impreziosito questo percorso.*

*Alla mia famiglia per avermi sempre incoraggiato a prescindere dalle difficoltà e dagli ostacoli, insegnandomi a trovare la forza per superarli e rendendo possibile tutto ciò.*



# Indice

<b>Elenco delle tabelle</b>	III
<b>Elenco delle figure</b>	v
<b>1 Introduzione</b>	2
<b>2 Richiami di astrodinamica</b>	5
2.1 Sistemi di Riferimento . . . . .	5
2.1.1 Sistema Geocentrico Equatoriale . . . . .	5
2.1.2 Sistema perifocale . . . . .	5
2.1.3 Sistema <i>RSW</i> . . . . .	6
2.2 Parametri orbitali classici . . . . .	8
2.3 Perturbazioni . . . . .	10
2.3.1 Perturbazione gravitazionale . . . . .	11
2.3.2 Perturbazione aerodinamica . . . . .	11
2.3.3 Pressione radiativa . . . . .	12
2.3.4 Perturbazione dovuta alla non sfericit� della terra . . . . .	13
2.4 Propulsione elettrica . . . . .	15
<b>3 Modello fisico, matematico e ottimizzazione</b>	17
3.1 Modello fisico . . . . .	17
3.2 Equazioni planetarie di Lagrange . . . . .	19
3.2.1 Modello dinamico . . . . .	22
3.3 Ottimizzazione indiretta e teoria del controllo ottimale . . . . .	24
3.4 Applicazione della OTC al sistema dinamico . . . . .	27
3.4.1 Caso con massa variabile e <i>SF</i> . . . . .	30
3.5 Problema differenziale ai limiti . . . . .	31

<b>4</b>	<b>Analisi e risultati con massa costante</b>	34
4.1	Caso $\Delta\Omega_0 = +20^\circ$ . . . . .	36
4.1.1	Variazione di $\Delta\Omega_0$ . . . . .	39
4.1.2	Variazione di $\Delta a_0$ . . . . .	42
4.2	Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ . . . . .	43
4.2.1	Variazione di $\Delta\Omega_0$ . . . . .	46
4.2.2	Variazione di $\Delta a_0$ . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Analisi e risultati con massa variabile</b>	49
5.1	Caso $\Delta\Omega_0 > 0$ . . . . .	51
5.1.1	Variazione di $\Delta a_0$ . . . . .	54
5.2	Caso $\Delta\Omega_0 < 0$ . . . . .	55
5.2.1	Variazione di $\Delta a_0$ . . . . .	58
5.3	Confronto con il caso a massa costante . . . . .	59
5.4	Controllo della spinta . . . . .	61
5.4.1	Valutazione della massa di propellente per $\Delta\Omega \geq 0^\circ$ . . . . .	65
5.4.2	Variazione dei parametri orbitali e confronto per $\Delta\Omega \geq 0^\circ$ . . . . .	69
5.4.3	Valutazione della $SF$ e della massa di propellente per $\Delta\Omega_0 < 0^\circ$ . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	82
	<b>Bibliografia</b>	83

# Elenco delle tabelle

2.1	Caratteristiche delle varie tipologie di propulsori elettrici, dove $I_s$ è l'impulso specifico e $T$ è la spinta generata. . . . .	16
4.1	Condizioni al contorno del problema e relativa variazione dei parametri. . . . .	36
4.2	Soluzione di tentativo utilizzata. . . . .	36
4.3	Risultati dell'analisi in termini di $\Delta V$ , massa di propellente e durata della missione. . . . .	36
4.4	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	39
4.5	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	42
4.6	Valori del $\Delta V$ , della massa di propellente $m_p$ e del tempo di trasferta totale $t_f$ in funzione della differenza di quota $\Delta a_0$ fra spacecraft e target. . . . .	42
4.7	Condizioni al contorno del problema e relativa variazione dei parametri. . . . .	43
4.8	Soluzione di tentativo utilizzata. . . . .	43
4.9	Risultati dell'analisi in termini di $\Delta V$ , massa di propellente e durata delle fasi di missione. . . . .	43
4.10	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	46
4.11	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	48
4.12	Valori del $\Delta V$ , della massa di propellente $m_p$ , della durata delle prime due fasi di missione $t_1$ e $t_2$ e del tempo di trasferta totale $t_f$ in funzione della differenza di quota $\Delta a_0$ fra spacecraft e target. . . . .	48
5.1	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	51
5.2	Soluzione di tentativo utilizzata. . . . .	51
5.3	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	54
5.4	Valori del $\Delta V$ , della massa di propellente $m_p$ e del tempo di trasferta totale $t_f$ in funzione della differenza di quota $\Delta a_0$ fra spacecraft e target. Confronto del $t_f$ e del $\Delta V$ con il caso a massa costante. . . . .	54
5.5	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	55
5.6	Soluzione di tentativo utilizzata. . . . .	55

5.7	Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri. . . . .	58
5.8	Valori del $\Delta V$ , della massa di propellente $m_p$ , della durata delle prime due fasi di missione $t_1$ e $t_2$ e del tempo di trasferta totale $t_f$ in funzione della differenza di quota $\Delta a_0$ fra spacecraft e target. Confronto del $t_f$ e del $\Delta V$ con il caso a massa costante. . . . .	58
5.9	Confronto di $\Delta V$ , accelerazione media e durata di missione per i due casi: massa costante e massa variabile. . . . .	61
5.10	Condizioni al contorno utilizzate per la valutazione della $SF$ . . . . .	62
5.11	Condizioni al contorno utilizzate per la valutazione della massa di propellente $m_p$ . . . . .	65

# Elenco delle figure

1.1	Visualizzazione LEO e densità dei detriti spaziali [17]. . . . .	3
1.2	Schema operativo ottimizzazione. . . . .	4
2.1	Sistema perifocale $PQW$ e visualizzazione del raggio-vettore $\vec{r}$ e delle sue componenti lungo $\vec{r}_P$ e $\vec{r}_Q$ . . . . .	5
2.2	Sistema $RSW$ . . . . .	6
2.3	Visualizzazione in due dimensione, sul piano $S-W$ , del sistema $RSW$ e dell'angolo di spinta $\beta$ nel caso di orbita circolare con $\vec{A}_R = 0$ . . . . .	7
2.4	Parametri orbitali classici. Immagine tratta da Bale <i>et al.</i> [1], Figura 2.3-1, pag.59	8
2.5	Effetti delle perturbazioni orbitali sugli elementi: secolari, corto periodo e lungo periodo. . . . .	10
2.6	Effetto di regressione nodale dovuto alla non sfericità della terra. Immagine tratta da: <i>Lezioni di astronomia</i> , E.Fabri, U.Penco, <a href="http://www.sagredo.eu/lezioni/astrologia/">http://www.sagredo.eu/lezioni/astrologia/</a> . . . . .	14
3.1	Schematizzazione del modello fisico oggetto dell'analisi. . . . .	18
4.1	Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore $a$ , dell'inclinazione $i$ e delle relative variabili aggiunte $\lambda_a$ e $\lambda_i$ . . . . .	37
4.2	Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente $\Omega$ e di $\theta_0$ .	38
4.3	Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta $\beta$ . . . . .	38
4.4	Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore $a$ , dell'inclinazione $i$ e delle relative variabili aggiunte $\lambda_a$ e $\lambda_i$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .	39
4.5	Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente $\Omega$ e di $\theta_0$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ . . . . .	40
4.6	Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta $\beta$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ . . . . .	40
4.7	Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore $a$ , dell'inclinazione $i$ e delle relative variabili aggiunte $\lambda_a$ e $\lambda_i$ . . . . .	44

4.8	Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente $\Omega$ e di $\theta_0$ .	44
4.9	Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta $\beta$ .	45
4.10	Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore $a$ , dell'inclinazione $i$ e delle relative variabili aggiunte $\lambda_a$ e $\lambda_i$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .	46
4.11	Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente $\Omega$ e di $\theta_0$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .	47
4.12	Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta $\beta$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .	47
5.1	Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore $a$ , dell'inclinazione $i$ , della massa $m$ e delle relative variabili aggiunte $\lambda_a$ , $\lambda_i$ e $\lambda_m$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .	52
5.2	Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente $\Omega$ e di $\theta_0$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .	53
5.3	Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta $\beta$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .	53
5.4	Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore $a$ , dell'inclinazione $i$ , della massa $m$ e delle relative variabili aggiunte $\lambda_a$ , $\lambda_i$ e $\lambda_m$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .	56
5.5	Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente $\Omega$ e di $\theta_0$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .	57
5.6	Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta $\beta$ per i casi in cui $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .	57
5.7	Andamento del $\Delta V$ in funzione di $\Delta\Omega_0$ per i due casi: massa variabile e massa costante.	59
5.8	Andamento della durata delle prime due fasi di missione $t_1$ e $t_2$ e del tempo totale $t_f$ in funzione di $\Delta\Omega_0$ per i due casi: massa variabile e massa costante.	60
5.9	Andamento della switch function $SF$ in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso $\Delta\Omega_0 = 0,6^\circ$ .	62
5.10	Andamento della switch function $SF$ in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso $\Delta\Omega_0 = 5^\circ$ .	63
5.11	Andamento della switch function $SF$ in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ .	63
5.12	Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore $a$ , dell'inclinazione $i$ , della massa $m$ e delle relative variabili aggiunte $\lambda_a$ , $\lambda_i$ e $\lambda_m$ per il caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100\text{km}$ , $\Delta i_0 = 0^\circ$ . Nella prima sottofigura è riportato anche l'andamento della differenza di RAAN istantanea fra spacecraft e target.	64
5.13	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = 0,6^\circ$ .	65
5.14	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = 5^\circ$ .	66

5.15	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ .	66
5.16	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ .	67
5.17	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = 30^\circ$ .	67
5.18	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = 50^\circ$ .	68
5.19	Massa di propellente in funzione della durata di missione per diversi valori della differenza iniziale di RAAN.	68
5.20	Confronto dell'andamento della massa di propellente in funzione della durata di missione per tre casi: variazione del solo RAAN, variazione combinata di RAAN e altitudine ed infine variazione combinata di tutti i parametri.	69
5.21	Confronto dell'andamento della massa di propellente in funzione della durata di missione per tre casi: variazione del solo RAAN, variazione combinata di RAAN e altitudine ed infine variazione combinata di tutti i parametri.	70
5.22	Effetto dovuto all'incremento di $\Delta a_0$ sulle tipologie di missione con variazione combinata dei parametri orbitali.	70
5.23	Andamento del semiasse maggiore nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	71
5.24	Ingrandimento della figura (5.23). Andamento del semiasse maggiore nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	71
5.25	Andamento dell'inclinazione nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	72
5.26	Ingrandimento della figura (5.25). Andamento dell'inclinazione nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	72
5.27	Andamento del RAAN nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	73
5.28	Ingrandimento della figura (5.27). Andamento del RAAN nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	73
5.29	Andamento dell'angolo di spinta nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	74
5.30	Ingrandimento della figura (5.29). Andamento dell'angolo di spinta nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ , $\Delta a_0 = 100$ km, $\Delta i_0 = 0^\circ$ .	74
5.31	Andamento della switch function $SF$ in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ .	75
5.32	Andamento della switch function $SF$ in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ , $\Delta a_0 = 200$ km.	76
5.33	Andamento della switch function $SF$ in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso $\Delta\Omega_0 = -30^\circ$ .	76
5.34	Andamento della switch function $SF$ in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso $\Delta\Omega_0 = -50^\circ$ .	77

5.35	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = -10^\circ$ .	77
5.36	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ .	78
5.37	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = -30^\circ$ .	78
5.38	Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso $\Delta\Omega_0 = -50^\circ$ .	79
5.39	Massa di propellente in funzione della durata di missione per diversi valori della differenza iniziale di RAAN. . . . .	79
5.40	Andamento del semiasse maggiore nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ, \Delta a_0 = 100 \text{ km}, \Delta i_0 = 0^\circ$ . . . . .	80
5.41	Andamento dell'inclinazione nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ, \Delta a_0 = 100 \text{ km}, \Delta i_0 = 0^\circ$ . . . . .	80
5.42	Andamento del RAAN nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ, \Delta a_0 = 100 \text{ km}, \Delta i_0 = 0^\circ$ . . . . .	81
5.43	Andamento dell'angolo di spinta nel tempo per diverse durate di missione. Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ, \Delta a_0 = 100 \text{ km}, \Delta i_0 = 0^\circ$ . . . . .	81



## Sommario

Lo spazio è un ambiente che nel tempo vede un incremento della sua appetibilità scientifica e commerciale e con essa aumenta anche l'interesse nel ridurre i costi e le barriere che limitano il suo sfruttamento. Ragion per cui, in questo settore, l'ottimizzazione ricopre un ruolo chiave.

Nel presente lavoro viene trattata l'ottimizzazione di trasferimenti orbitali tra orbite basse terrestri (LEO) traendo vantaggio dall'effetto della non sfericità della terra. Nello specifico si ricerca la struttura di missione ottimale che permette il trasferimento fra due orbite LEO: l'orbita di partenza, in cui si trova il satellite principale dotato di propulsione elettrica, e l'orbita di arrivo percorsa dal satellite target. In primo luogo, è stata condotta l'analisi con l'ipotesi di massa dello s/c costante nel tempo e successivamente si è aggiunto l'effetto dovuto all'espulsione di propellente. Lo scopo dell'ottimizzazione è quello di ridurre la durata della missione considerando la propulsione sempre attiva. In seguito, si è valutata una missione con durata superiore a quella minima, con la possibilità di controllare la propulsione attraverso l'accensione e lo spegnimento del motore. Quest'ultima analisi ha portato alla valutazione di un compromesso fra durata della missione e consumo di propellente.

L'elaborato è suddiviso in sei capitoli il primo dei quali è un'introduzione al problema trattato e alle sue possibili applicazioni.

Nel secondo vengono descritti i sistemi di riferimento utilizzati, i parametri orbitali e le principali perturbazioni che entrano in gioco in orbite terrestri. Il capitolo successivo è dedicato alla teoria fisica e matematica che supporta il problema. In primo luogo, vengono ricavate le equazioni planetarie di Lagrange che in seguito si adattano al problema trattato. Si descrive e si applica la teoria del controllo ottimale (OCT) al caso in esame ed infine viene mostrata la procedura iterativa necessaria per la risoluzione del problema differenziale ai limiti (BVP) che si è costituito.

I due capitoli che seguono riportano i risultati dell'analisi: nel primo relativi al caso con massa costante e nel secondo al caso con massa variabile. È descritta la struttura della missione e viene mostrata l'evoluzione dei parametri orbitali nel tempo e l'andamento delle variabili di controllo. Sono stati analizzati casi con diversi valori dei parametri orbitali relativi alle due orbite. Infine, si è valutata la missione con controllo della spinta e sono stati riportati i consumi, in termini di propellente, in funzione della durata di missione.

L'ultimo capitolo è relativo alle conclusioni sul lavoro effettuato, alla sintesi dei principali risultati e alla descrizione dei vari sviluppi futuri che possono portare avanti lo studio e approfondire gli aspetti di maggiore interesse.

# Capitolo 1

## Introduzione

Da sempre l'uomo volta lo sguardo verso nuove imprese e luoghi sconosciuti, passando dalla scoperta di interi continenti all'esplorazione dello spazio. Quest'ultimo è la nuova frontiera con la quale, negli ultimi decenni, l'uomo misura e supera i propri limiti. La ricchezza di questo ambiente seppur nota non è ancora del tutto compresa e fino ad ora esso ha contribuito in numerosi settori.

Il campo scientifico ha impreziosito il proprio bagaglio di conoscenza attraverso numerose missioni spaziali, basti pensare al famoso Hubble Space Telescope che fornisce immagini dettagliatissime dei corpi celesti o alla conquista della Luna che ha aiutato la sua comprensione. Tutt'ora molte missioni spaziali hanno natura scientifica che vanno dall'osservazione terrestre all'esplorazione del sistema solare ed oltre.

Anche l'evoluzione tecnologica e i risvolti commerciali legati allo sfruttamento dell'ambiente spaziale non sono da meno, come la possibilità di conoscere in tempo reale la propria posizione sul globo terrestre attraverso uno dei sistemi satellitari globali di navigazione (GPS, GLONASS, GALILEO, etc.) o il sempre crescente settore delle telecomunicazioni satellitari. Recentemente anche il settore privato mostra il suo interesse nello sviluppo spaziale, si veda ad esempio SpaceX.

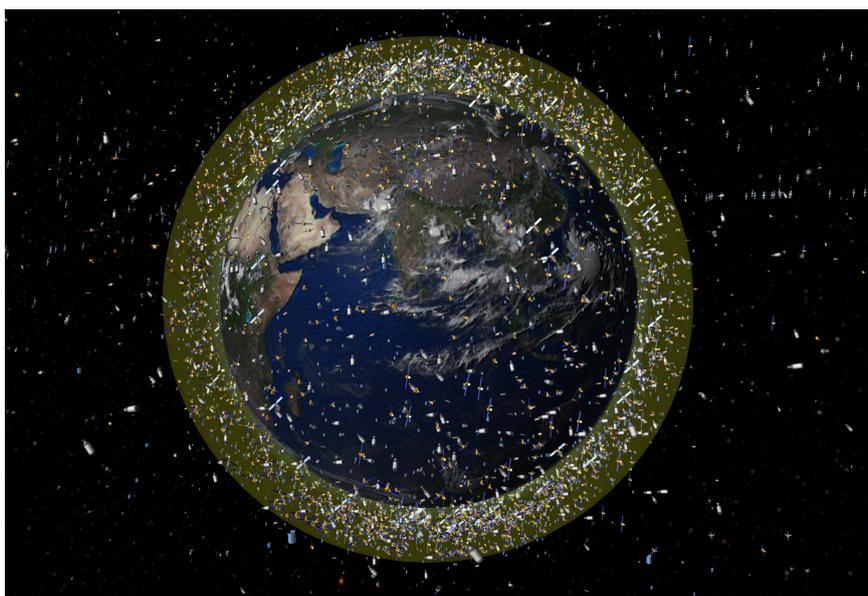
Detto ciò è chiaro che il settore spaziale ricopre e continuerà a ricoprire un importante ruolo nella vita dell'uomo e ciò comporta la necessità di sviluppare tecnologie, strategie e modelli sempre più efficaci ed efficienti.

Nel presente lavoro di tesi si è trattata l'ottimizzazione di trasferte fra orbite basse terrestri (LEO) considerando manovre a bassa spinta e sfruttando vantaggiosamente l'effetto dovuto alla non sfericità della terra. Il problema è trattato in modo adimensionale così da poter applicare la teoria ad un generico modello reale infine sono mostrati i risultati numerici per un micro-satellite.

La generica orbita LEO è definita come un'orbita con altitudine compresa fra i 200 km e i 2000 km. Tali limiti sono imposti da due fattori naturali: il limite inferiore di 200 km è imposto dalla presenza dell'atmosfera, la quale per altitudini inferiori provoca perturbazioni troppo intense mentre il limite superiore di 2000 km è imposto dalle fasce di Van Allen le quali rappresentano un ambiente eccessivamente radioattivo. La regione occupata dalle orbite LEO è di grande interesse per l'attività spaziale e questo è dimostrato dal fatto che il maggior numero di oggetti lanciati in orbita dall'uomo occupa tale regione. Tra i vantaggi si annovera: il basso livello di energia

richiesto per posizionare un satellite in questa regione, la facilità di comunicazione dovuta alla bassa latenza e alla vicinanza con la terra e l'accessibilità agli oggetti orbitanti. Esempi di utilizzi di tale regione sono: l'osservazione terrestre, il monitoraggio e le comunicazioni (es: Iridium) e attività scientifiche (es: Stazione Spaziale Internazionale, satelliti elio-sincroni e Telescopio di Hubble).

Uno dei problemi principali per i satelliti operativi in LEO è il possibile impatto con l'alto numero di debris presenti a queste altitudini, che negli ultimi anni congestionano l'ambiente. Si registrano circa 5250 lanci dall'inizio dell'attività spaziale e dei 42000 oggetti lanciati in orbita quasi 23000 sono ancora nello spazio. La composizione dei debris è varia: satelliti non operativi, stadi di lanciatori, polveri e micrometeoriti e frammenti causati da impatti con altri debris. La massima concentrazione di debris si registra fra gli 800 km e i 1400 km e quindi in piena regione LEO. La prospettiva per gli anni futuri mostra un aumento dei lanci per anno e conseguentemente un incremento del numero di detriti e delle collisioni, questo rende non di secondaria importanza un'azione di controllo e rimozione dei detriti orbitanti. Un esempio di missione in questo settore è *RemoveDEBRIS*, lanciata il 2 Aprile 2018 da SpaceX con lo scopo di testare tecnologie di rimozione. Ciò che ostacola la rimozione attiva dei debris è il costo dovuto al raggiungimento dei detriti, soprattutto se su piani orbitali differenti. In questo trova una possibile applicazione il presente lavoro finalizzato a rendere più efficienti le manovre di cambio piano in termini di RAAN.

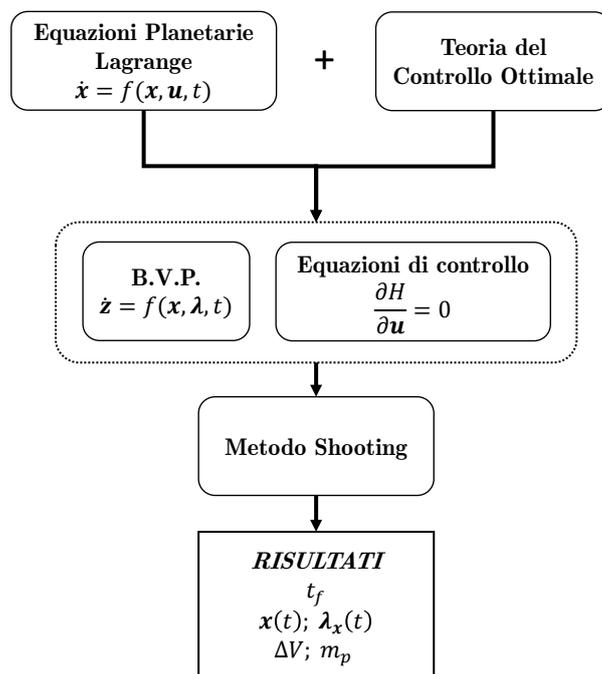


**Figura 1.1:** Visualizzazione LEO e densità dei detriti spaziali [17].

Altre possibili applicazioni possono ricadere su tutte le operazioni di manutenzione in orbita detta anche "*on-orbit servicing*", le quali hanno due effetti benefici: il primo è quello di allungare o ripristinare l'operatività dei satelliti ed il secondo, come diretta conseguenza, è quello di limitare la crescita di detriti. Di questa famiglia fanno parte le operazioni di rifornimento carburante, ispezione ravvicinata, riparazione e sostituzione di componenti, riposizionamento orbitale. Questo è un settore emergente che in futuro potrà rendere l'ambiente spaziale più accessibile e affidabile.

Il lavoro è partito adattando le equazioni planetarie di Lagrange al modello fisico preso in considerazione, successivamente si è aggiunto ad esse l'effetto perturbativo dovuto alla non sfericità della terra e infine si sono adimensionalizzate. Per condurre l'ottimizzazione è stata applicata al set di equazioni la Teoria del Controllo Ottimale, la quale ha generato un problema differenziale a limiti. La soluzione a tale problema è stata trovata numericamente, sfruttando il metodo Shooting, con l'ausilio di un codice scritto in Fortran. In figura(1.2) si riporta lo schema operativo seguito durante lo svolgimento del lavoro. I risultati numerici, come detto in precedenza sono relativi ad un micro-satellite. La scelta è dovuta ad un sempre crescente interesse nell'utilizzo di piccoli satelliti per varie finalità che mostrano vantaggi economici e logistici. L'oggetto dell'ottimizzazione è la durata finale della missione la quale viene influenzata dall'angolo di spinta che rappresenta il parametro di controllo del problema; successivamente sono state imposte durate maggiori di quella minima per osservarne l'effetto sul costo della missione. Riassumendo l'analisi è stata condotta per i seguenti casi:

- Analisi con propulsione costante e sempre attiva:
  - massa spacecraft costante
  - massa spacecraft variabile (si considera l'espulsione di propellente)
- Analisi con controllo della spinta di tipo on/off



**Figura 1.2:** Schema operativo ottimizzazione.

## Capitolo 2

# Richiami di astrodinamica

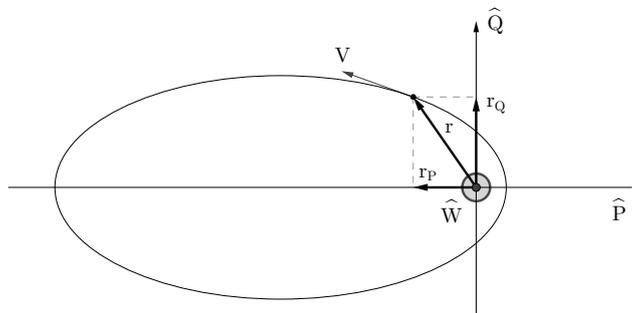
### 2.1 Sistemi di Riferimento

Durante lo studio e l'analisi che ha portato come risultato il lavoro di tesi attuale si è fatto uso di tre sistemi di riferimento, i quali verranno illustrati di seguito.

#### 2.1.1 Sistema Geocentrico Equatoriale

Il primo sistema di riferimento utilizzato è quello inerziale geocentrico equatoriale, il quale è comodo per satelliti in orbita terrestre. Tale sistema ha come origine il centro della terra e il suo piano fondamentale è identificato dalla massima circonferenza terrestre, l'equatore. I tre assi sono denominati **I**, **J** e **K** e i rispettivi versori sono  $\hat{\mathbf{I}}$ ,  $\hat{\mathbf{J}}$  e  $\hat{\mathbf{K}}$ . I due assi *I* e *J* giacciono sul piano fondamentale, la direzione principale, identificata da  $\hat{\mathbf{I}}$ , è quella diretta verso il punto vernale, mentre quella positiva di  $\hat{\mathbf{K}}$  punta verso Nord ed è ortogonale alle altre due.

#### 2.1.2 Sistema perifocale



**Figura 2.1:** Sistema perifocale  $PQW$  e visualizzazione del raggio-vettore  $\vec{r}$  e delle sue componenti lungo  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_Q$

Questo sistema è comodo per definire la posizione del satellite sulla sua orbita in 2D. Il piano principale è quello orbitale, l'origine coincide con il centro della terra e i tre assi sono denominati **P**, **Q** e **W**. I tre versori fondamentali sono  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}$  e  $\hat{\mathbf{W}}$ . La direzione principale è identificata da  $\hat{\mathbf{p}}$  ed unisce il centro della terra con il perigeo. Questa direzione coincide con quella del vettore  $\vec{e}$ , il cui modulo risulta essere l'eccentricità dell'orbita conica. La direzione di  $\hat{\mathbf{Q}}$  è ruotata di  $90^\circ$  rispetto a  $\hat{\mathbf{p}}$  e nel verso del moto orbitale del satellite. Infine  $\hat{\mathbf{W}}$  è ortogonale alle altre due e ha verso positivo concorde con il vettore momento angolare  $\vec{h}$ .

### 2.1.3 Sistema RSW

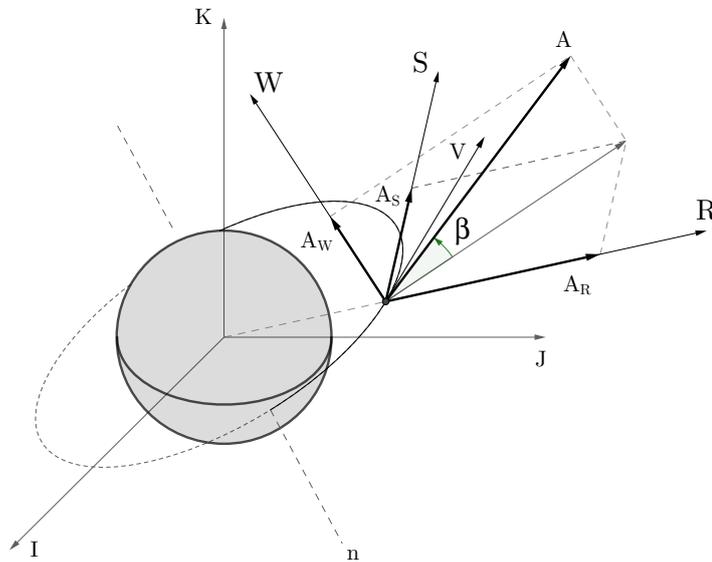


Figura 2.2: Sistema RSW

L'ultimo sistema di riferimento che è stato utilizzato non è inerziale ed è servito per analizzare la variazione dei parametri orbitali a causa delle perturbazioni. Il piano fondamentale coincide con quello orbitale e l'origine è il centro della terra. I tre assi sono **R**, **S** e **W** ed i rispettivi versori fondamentali  $\hat{\mathbf{R}}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  e  $\hat{\mathbf{W}}$ . La direzione principale del sistema è  $\hat{\mathbf{R}}$ , la quale è identificata dal raggio-vettore  $\vec{r}$  che va dal centro della terra al satellite. La direzione  $\hat{\mathbf{S}}$  è perpendicolare a quella di  $\hat{\mathbf{R}}$  con verso positivo concorde a quello del moto orbitale del satellite. Infine  $\hat{\mathbf{W}}$  è ortogonale ad entrambi e ha verso concorde al vettore  $\vec{h}$ . Questo sistema si può vedere come un perifocale che ruota insieme al satellite.

Si definisce, inoltre, l'angolo di spinta  $\beta$ . Esso è l'angolo formato fra la direzione della spinta  $T$  e il piano orbitale ed indica quanto la spinta sia diretta fuori dal piano dell'orbita. Chiamando  $\vec{A}$  l'accelerazione, dovuta alla spinta, a cui è soggetto il satellite, nel caso in cui  $e \neq 0$  e  $\vec{A}_R, \vec{A}_S, \vec{A}_W \neq 0$  si ha che:

$$\tan \beta = \frac{|\vec{A}_W|}{|\vec{A}_R + \vec{A}_S|} \quad (2.1)$$

Si nota che in questo caso la direzione  $\hat{S}$  non coincide con quella velocità orbitale  $\vec{V}$ , infatti:

$$\frac{\vec{A}_S}{|\vec{A}_S|} \neq \frac{\vec{A} \cdot \vec{V}}{|\vec{A} \cdot \vec{V}|} \quad (2.2)$$

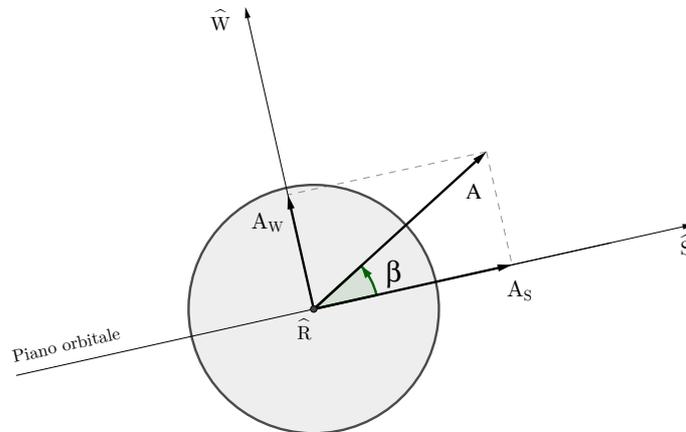
**Angolo di spinta con orbita circolare e  $\vec{A}_R = 0$**

Analizziamo ora un caso di maggiore interesse per l'analisi successiva, ossia quello di un'orbita circolare in cui solo la componente radiale della spinta è nulla  $\vec{A}_R = 0$ , si ha che:

$$\tan \beta = \frac{|\vec{A}_W|}{|\vec{A}_S|} \rightarrow \begin{cases} |\vec{A}_W| = |\vec{A}| \sin \beta \\ |\vec{A}_S| = |\vec{A}| \cos \beta \end{cases} \quad (2.3)$$

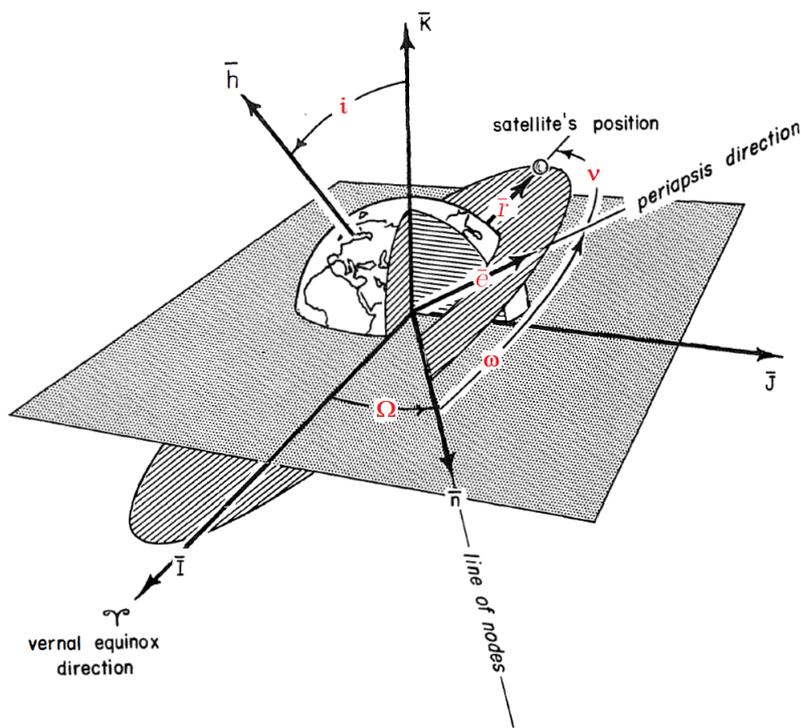
A differenza del caso precedente ora la direzione  $\hat{S}$  coincide con quella della velocità orbitale  $\vec{V}$  e quindi  $\vec{A}_S$  è l'accelerazione nella direzione della velocità:

$$\frac{\vec{A}_S}{|\vec{A}_S|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{V}}{|\vec{A} \cdot \vec{V}|} \quad (2.4)$$



**Figura 2.3:** Visualizzazione in due dimensioni, sul piano  $S-W$ , del sistema  $RSW$  e dell'angolo di spinta  $\beta$  nel caso di orbita circolare con  $\vec{A}_R = 0$ .

## 2.2 Parametri orbitali classici



**Figura 2.4:** Parametri orbitali classici. Immagine tratta da Bale *et al.*[1], Figura 2.3-1, pag.59

Per la definizione univoca di un'orbita si utilizzano gli elementi orbitali classici o elementi Kepleriani. Questo sistema è composto da un set di sei quantità indipendenti che descrivono la forma, la dimensione e l'orientamento di un'orbita nello spazio e la posizione di un satellite su tale orbita. Gli elementi sono riportati in figura (2.4) e, nel caso più generale, sono definiti come segue:

*a* *semiasse maggiore*, rappresenta la dimensione dell'orbita.

*e* *eccentricità*, definisce la forma dell'orbita e coincide con l'eccentricità della conica.

*i* *inclinazione*, rappresenta l'inclinazione del piano orbitale rispetto a quello equatoriale ed è definita dall'angolo compreso fra  $\hat{K}$  e  $\hat{h}$ .

$\Omega$  *longitudine del nodo ascendente*, è definito come l'angolo, misurato sul piano equatoriale, formato fra  $\hat{I}$  e  $\hat{n}$  nel verso del nodo ascendente.

$\omega$  *argomento del periastro*, è definito come l'angolo, misurato sul piano orbitale, fra  $\hat{n}$  e  $\hat{P}$ , che equivale all'angolo fra il nodo ascendente e il periastro.

*v* *anomalia vera*, rappresenta la posizione del satellite sull'orbita ed è definito come l'angolo, misurato sul piano orbitale, fra  $\hat{P}$  ed  $\vec{r}$ , che equivale all'angolo fra il periastro ed il satellite stesso.

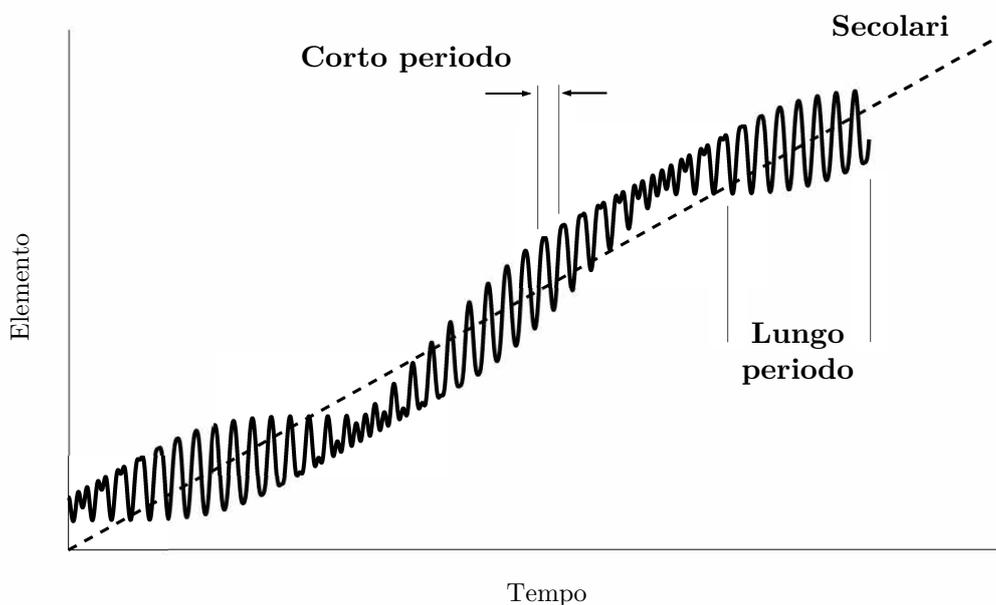
Il sistema di riferimento preso in considerazione è quello geocentrico equatoriale (IJK), descritto in precedenza. Nel caso di orbita circolare, l'argomento del periastro,  $\omega$ , non è ben definito, e si ricorre all'utilizzo di un altro parametro,  $\theta$ , chiamato *argomento della longitudine* e definito come l'angolo fra  $\hat{n}$  e  $\hat{r}$  che equivale all'angolo, misurato sul piano orbitale, fra il nodo ascendente ed il satellite:

$$\theta = \nu + \omega \quad (2.5)$$

Quando si ha a che fare con orbite equatoriali invece, la longitudine del nodo ascendente,  $\Omega$ , non è ben definita ed è necessario utilizzare un altro parametro,  $l$ , chiamato *longitudine vera*, definito come l'angolo fra  $\hat{I}$  e  $\vec{r}$ :

$$l = \Omega + \omega + \nu = \Omega + \theta \quad (2.6)$$

## 2.3 Perturbazioni



**Figura 2.5:** Effetti delle perturbazioni orbitali sugli elementi: secolari, corto periodo e lungo periodo.

Il modello matematico e fisico più semplice della meccanica orbitale è quello Kepleriano, secondo il quale le orbite assumono la forma di coniche. Tale modello è soddisfacente per avere un'idea del moto del corpo orbitante ma risulta inefficace nel caso in cui si renda necessaria una precisione maggiore dei risultati. Casi di questo tipo sono ad esempio le manovre di rendez vous, le manovre a bassa spinta o di lunga durata o la presenza di forze perturbative il cui effetto non sia trascurabile. In tali situazioni è necessario stimare le perturbazioni analiticamente o sperimentalmente per poi creare un modello fisico e matematico più accurato.

Le perturbazioni sono le alterazioni dell'orbita causate da vari fattori: l'interazione con l'atmosfera, la presenza e l'interazione con campi magnetici, elettrici o elettromagnetici, l'interazione con campi gravitazionali di altri corpi, la distribuzione di massa di un corpo celeste e così via. È possibile classificarle in base agli effetti che hanno sui parametri orbitali:

**Corto-periodo** Causano variazioni periodiche dei parametri con periodo minore di quello orbitale.

**Lungo-periodo** Causano variazioni periodiche dei parametri con periodo maggiore di quello orbitale.

**Secolari** Causano una variazione lineare dei parametri.

Per quanto riguarda orbite terrestri, gli elementi perturbativi di maggiore interesse ed intensità sono: la non sfericità della terra, la presenza dell'atmosfera, i campi gravitazionali di Luna e Sole e la radiazione solare.

Nella successiva analisi viene presa in considerazione solo la non sfericità della terra mentre, nella seguente sezione, si descrivono tutte le perturbazioni terrestri sopra citate.

### 2.3.1 Perturbazione gravitazionale

Tale perturbazione è dovuta all'influenza gravitazionale degli altri corpi celesti come ad esempio pianeti, stelle o comete. Nel caso di orbita terrestre le maggiori perturbazioni di questa natura sono dovute all'interazione di Sole e Luna e quindi ci si riconduce al problema del terzo corpo. L'accelerazione perturbativa  $a_p$  causata da un terzo corpo si può approssimare con la seguente espressione [2]:

$$\frac{a_p}{a} = 2 \frac{m_p}{m} \left( \frac{r}{r_p} \right)^3 \quad (2.7)$$

dove  $a$  è l'accelerazione gravitazionale causata dalla terra,  $m_p$  è la massa del terzo corpo,  $m$  è la massa della terra,  $r$  è la distanza fra centro della terra e satellite ed infine  $r_p$  è la distanza fra il centro del terzo corpo il satellite. Tale accelerazione genera perturbazioni periodiche su tutti gli elementi ma il maggior disturbo, dovuto a perturbazioni secolari, riguarda l'ascensione retta del nodo ascendente  $\Omega$  e l'argomento del perigeo  $\omega$ . Una stima dell'intensità perturbativa di Sole e Luna su un satellite in orbita circolare terrestre ci è fornita dalle seguenti espressioni[4][8]:

$$\begin{cases} \Delta\Omega_M &= -0,00338 \frac{\cos i}{n} \text{ [deg/giorno]} \\ \Delta\Omega_S &= -0,00154 \frac{\cos i}{n} \text{ [deg/giorno]} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \Delta\omega_M &= -0,00169 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{n} \text{ [deg/giorno]} \\ \Delta\omega_S &= -0,00077 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{n} \text{ [deg/giorno]} \end{cases} \quad (2.9)$$

dove  $i$  è l'inclinazione orbitale del satellite mentre  $n$  è il numero di rivoluzioni al giorno.

### 2.3.2 Perturbazione aerodinamica

Questa perturbazione è dovuta alla presenza dell'atmosfera terrestre, i suoi effetti diventano ragguardevoli per orbite al di sotto dei 200 km, motivo per cui, tale valore, è stato imposto come limite inferiore massimo per la successiva analisi. Il moto in un fluido genera forze aerodinamiche che si possono scomporre in due componenti principali: portanza e resistenza. Nel caso di un satellite la componente perturbativa principale è la resistenza aerodinamica la quale opponendosi al moto genera un'accelerazione che tende a rallentare il corpo con conseguente

riduzione dell'altitudine. Questo fenomeno è sfruttato vantaggiosamente durante le manovre di disposal. L'accelerazione perturbativa si può valutare analiticamente con la formula seguente:

$$a_D = \frac{1}{2} C_D \rho V_\infty^2 \frac{S}{m} \quad (2.10)$$

dove  $C_D$  è il coefficiente di resistenza aerodinamica,  $V_\infty$  è la velocità relativa al fluido,  $S$  è la superficie di riferimento,  $\rho$  è la densità atmosferica ed infine  $m$  è la massa dello spacecraft. La valutazione della densità è complicata in quanto essa dipende da molteplici fattori quali l'altitudine, l'attività solare e la stagione; conseguentemente risulta complesso esprimere anche il coefficiente di resistenza  $C_D$  il quale può assumere valori compresi fra 2 e 5. Una stima dell'effetto di tale perturbazione su una rivoluzione orbitale è dato dalle seguenti espressioni[6][9]:

$$(\Delta a)_{\theta=2\pi} = -2\pi C_D \frac{S}{m} \rho a^2 \quad (2.11)$$

$$(\Delta T)_{\theta=2\pi} = -2\pi \Delta a \frac{1}{V} \quad (2.12)$$

### 2.3.3 Pressione radiativa

Nell'ambiente spaziale sono presenti diverse tipologie di particelle in movimento sia cariche che neutre e un corpo in orbita terrestre è soggetto agli impatti con tali particelle. Le principali fonti di emissione sono il Sole, la Terra, l'albedo terrestre e lunare. Gli impatti con i satelliti coinvolgono dei trasferimenti di quantità di moto e ciò si traduce in pressione radiativa e conseguentemente in accelerazione perturbativa. I corpi più soggetti a tale disturbo sono quelli con un basso coefficiente balistico e con altitudini superiori agli 800 km. L'accelerazione perturbativa dovuta alla sola emissione solare può essere stimata attraverso la seguente espressione:

$$a_R = -4,510^{-6} (1 + K_r) \frac{S}{m} \quad (2.13)$$

dove  $S$  è la superficie esposta al Sole,  $m$  è la massa del satellite mentre  $K_r$  è il coefficiente di riflessione.

### 2.3.4 Perturbazione dovuta alla non sfericità della terra

Il potenziale gravitazionale semplificato nel problema dei due corpi,  $\mu/r$ , ha validità solo assumendo una distribuzione della massa terrestre perfettamente sferica. In realtà la forma della terra è più complessa, essa presenta uno schiacciamento in prossimità dei poli ed un rigonfiamento equatoriale inoltre non possiede assi di simmetria. Per prendere in considerazione gli effetti orbitali della non sfericità terrestre è necessario definire un nuovo potenziale gravitazionale. Una delle forme della potenziale è la seguente:

$$\phi = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_e}{r} \right)^n P_n \sin L \right] \quad (2.14)$$

dove  $\mu$  è il parametro gravitazionale terrestre,  $J_n$  rappresenta i coefficienti zonali determinati sperimentalmente,  $r_e$  è il raggio della terra,  $P_n$  rappresenta i polinomi di Legendre ed infine  $L$  è la latitudine. Considerando che il termine  $J_2$ , relativo allo schiacciamento terrestre, è tre ordini di grandezza più grande rispetto ai successivi, è possibile scrivere il potenziale trascurando tali termini:

$$\phi \cong \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 (3 \sin^2 L - 1) \right] \quad (2.15)$$

dove

$$J_2 = 1,08264 \pm 0,03 \cdot 10^{-3} \quad (2.16)$$

Come si vede il primo termine coincide con il potenziale semplificato dovuto alla presenza dei due corpi mentre il secondo rappresenta la correzione dovuta alla non sfericità della terra. Considerando che  $\sin L = z/r$  e che l'accelerazione a cui è soggetto il satellite vale

$$\vec{a} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{I} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{J} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{K} \quad (2.17)$$

è possibile trovare le tre accelerazioni:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3} x \left[ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \left( 5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \right] \quad (2.18)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3} y \quad (2.19)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3} z \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 \left( 3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right] \quad (2.20)$$

Gli effetti di tale perturbazione influenzano tutti i parametri sia in modo periodico che secolare ma queste ultime sono quelle più significative e riguardano la variazione della longitudine del

nodo ascendente  $\Omega$  e dell'argomento del perigeo  $\omega$ . Per orbite circolari  $\omega$  non è definito e quindi la perturbazione secolare incide solo su  $\Omega$  e può essere valutata attraverso la seguente equazione:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{J_2} = \dot{\Omega}_{J_2} = -3\mu r_e^2 \frac{\cos i \sin u^2}{r^3 \sqrt{\mu p}} \quad (2.21)$$

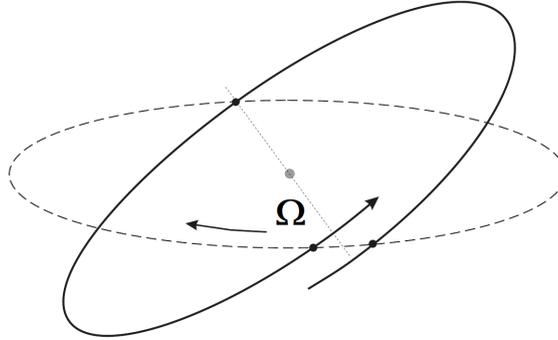
dove  $u = \omega_0 + \theta$  mentre  $p$  è il semilatus rectum. Questa espressione rappresenta la variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente nel tempo causata dalla non sfericità della terra. Come si vede, per un'orbita quasi circolare, essa è più intensa per distanze  $r$  minori inoltre si nota che inclinazioni positive  $i > 0$  causano variazioni negative  $\Delta\Omega < 0$  mentre al contrario, per  $i < 0$ , si ha  $\Delta\Omega > 0$ .

È possibile calcolare la variazione di  $\Omega$  dopo una rivoluzione integrando la (2.21) tra 0 e  $T$ :

$$(\Delta\Omega)_{\theta=2\pi} = \int_0^T \dot{\Omega}_{J_2} dt = -3\pi J_2 \left(\frac{r_e}{p_0}\right)^2 \cos i_0 \quad (2.22)$$

dove il pedice 0 indica il valore che assumono i parametri per  $t = 0$ . Un'espressione più comoda con la quale valutare la variazione della regressione nodale è la seguente [6]:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{J_2} = \dot{\Omega}_{J_2} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^2}{a^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos i \quad (2.23)$$



**Figura 2.6:** Effetto di regressione nodale dovuto alla non sfericità della terra. Immagine tratta da: *Lezioni di astronomia*, E.Fabri, U.Penco, <http://www.sagredo.eu/lezioni/astroinomia/>.

## 2.4 Propulsione elettrica

La propulsione spaziale, in generale, permette ad un corpo in orbita di effettuare manovre e quindi di variare la sua traiettoria imposta dall'interazione con i campi gravitazionali. In generale il moto di uno spacecraft è descritto dalla seguente equazione differenziale vettoriale:

$$m\dot{\vec{V}} = \dot{m}\vec{c} + \vec{F}_g + \vec{F}_p \quad (2.24)$$

dove  $\dot{\vec{V}}$  è l'accelerazione dello spacecraft,  $m$  la massa,  $\dot{m}$  la portata di propellente espulsa,  $\vec{c}$  è la velocità di scarico dei gas esausti,  $\vec{F}_g$  è la forza gravitazionale ed infine  $\vec{F}_p$  è la forza perturbativa totale. I tre termini dell'equazione precedente hanno diverse nature ed influiscono sulla traiettoria seguita dallo spacecraft. In particolare il primo termine rappresenta la forza propulsiva, infatti si ha che:

$$\vec{T} = -\dot{m}\vec{c} \quad (2.25)$$

Si vede, quindi, che la modalità per ottenere una forza propulsiva, al giorno d'oggi, è quella di variare la massa dello spacecraft espellendo propellente in opportune direzioni. Per ottenere un risparmio di propellente, a parità di spinta  $T$  è necessario aumentare, quanto possibile, la velocità di scarico dei gas esausti e questo è possibile con la propulsione elettrica.

Un parametro fondamentale nell'analisi di una missione spaziale è il costo in termini di variazione di velocità totale  $\Delta V$  a cui è soggetto lo spacecraft. Essa rappresenta il costo di una missione prefissata oppure, da un altro punto di vista, l'autonomia totale di uno spacecraft con determinate caratteristiche propulsive ( $c$  ed  $m_p$ ). È da notare che nel primo caso il costo dipende dalla missione in sè, ad esempio l'orbita da percorrere o la direzione di spinta. Tale quantità si lega alla massa di propellente attraverso l'equazione di Tsiolkovsky:

$$\Delta V = c \ln \frac{m_0}{m_0 - m_p} = c \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (2.26)$$

dove  $m_0$  è la massa iniziale dello spacecraft,  $m_p$  è la massa di propellente e  $m_f$  è la massa finale dello spacecraft. Riscivendo l'equazione in un altro modo si ottiene il rapporto fra massa finale ed iniziale:

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\Delta V/c} \quad (2.27)$$

Da questa espressione si nota facilmente che per missioni a fissato  $\Delta V$  è fondamentale ottenere alte velocità di scarico  $c$  in modo da massimizzare la massa finale e con essa la massa del payload.

Un altro importante parametro correlato ai propulsori spaziali è l'impulso specifico,  $I_s$ , il quale è calcolato come il rapporto fra l'impulso totale  $I_t$  e il peso del carburante utilizzato:

$$I_s = \frac{\int \dot{m}c}{mg_0} = \frac{c}{g_0} \quad (2.28)$$

L'impulso specifico si misura in secondi e rappresenta i Newton di spinta che si ottengono da ogni Newton di propellente per un secondo di spinta. Quindi un alto valore di tale parametro indica che a parità di propellente e di spinta è possibile mantenere la forza propulsiva per più tempo e di conseguenza compiere missioni con  $\Delta V$  maggiori. Per ottenere tali valori di velocità di scarico è necessario ricorrere alla propulsione elettrica in quanto quella chimica è limitata dall'energia interna dei vari propellenti e da varie perdite. Con la propulsione elettrica si accelerano le particelle di propellente mediante forze elettriche od elettromagnetiche. Tipicamente questa tipologia di propulsori sfrutta piccole portate di propellente e basse intensità di spinta ma in compenso si ottengono alti valori dell'efficienza propulsiva. Si distinguono tre principali famiglie:

**Propulsione elettrotermica** il propellente gassoso è riscaldato elettricamente, successivamente viene fatto espandere in un ugello ed espulso.

**Propulsione elettrostatica** il propellente gassoso ionizzato è accelerato da forze elettrostatiche, in seguito viene espulso e neutralizzato.

**Propulsione elettromagnetica** il propellente gassoso ionizzato è accelerato da forze elettromagnetiche, in seguito viene espulso e neutralizzato.

Le applicazioni di tali propulsori sono rivolte a missioni con medio o alto  $\Delta V$  come quelle interplanetarie, missioni di lunga durata come station keeping e mantenimento orbitale ed anche missioni dove è richiesta elevata accuratezza e bassi valori di spinta come spostamento di strutture orbitanti, rendez vous o controllo d'assetto.

<i>Famiglia</i>	<i>Tipologia</i>	<i>Propellente</i>	$I_s$ [s]	$T$ [mN]
Elettrotermici	Resistogetti	$N_2 / NH_3 / N_2H_4 / H_2$	200-700	5-500
	Arcoggetti	$NH_3 / N_2H_4 / H_2$	500-1500	50-500
Elettrostatici	Ioni	$Hg / A / Xe / Ls$	2000-6000	0,005-500
	Effetto Hall	Xe	1500-2500	0,005-100
Elettromagnetici	MPD	Argon	2000	$25 \cdot 10^3 - 200 \cdot 10^3$
	PP	Teflon	1500	0,005-5

**Tabella 2.1:** Caratteristiche delle varie tipologie di propulsori elettrici, dove  $I_s$  è l'impulso specifico e  $T$  è la spinta generata.

## Capitolo 3

# Modello fisico, matematico e ottimizzazione

### 3.1 Modello fisico

Il problema trattato nel seguente lavoro di tesi è quello di un'ottimizzazione di manovre a bassa spinta in orbita bassa terrestre sfruttando la non sfericità della terra. I tre elementi principali che costituiscono il modello fisico sono:

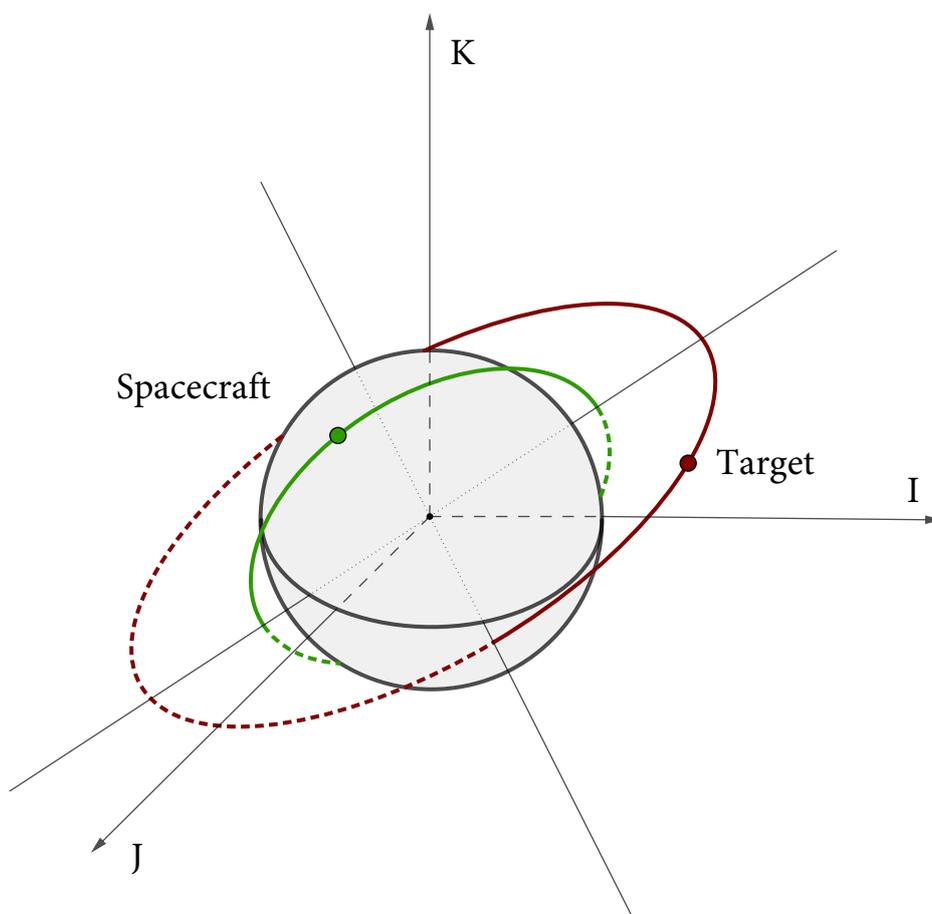
- Target in LEO
- Spacecraft in LEO
- Terra

Nello specifico il *target* è un generico corpo non propulso che segue un'orbita circolare LEO; lo *spacecraft* giace su un'orbita circolare LEO ed è dotato di propulsione elettrica ad intensità costante a bassa spinta, con la quale è possibile compiere la manovra che permette il raggiungimento del target ed infine la terra è il corpo centrale che genera il campo gravitazionale a cui sono soggetti target e spacecraft. Inoltre la distribuzione di massa della terra non è considerata sferica, di conseguenza la perturbazione che ne deriva influenza sia lo spacecraft che il target.

Come detto lo studio è adimensionale ma le caratteristiche dello spacecraft e del propulsore utilizzate per l'esempio numerico sono:

- $m_0 = 15$  kg
- $I_s = 2500$  s
- $T = 0,01$  N

dove  $m_0$  indica la massa iniziale totale,  $I_s$  è l'impulso specifico del propulsore mentre  $T$  è la spinta. Le orbite LEO di spacecraft e target presentano eccentricità nulla,  $e = 0$ , ma non sono fissate a priori, infatti si considerano casi con diversi set dei parametri orbitali iniziali e finali  $(a_0, i_0, \Omega_0)$  e  $(a_T, i_T, \Omega_T)$  dove il pedice 0 indica i parametri relativi allo spacecraft al tempo  $t = 0$  mentre il pedice  $T$  indica i parametri relativi al target al tempo  $t = 0$ . La successiva analisi si divide in due parti fondamentali: la prima in cui la massa dello spacecraft è considerata costante durante tutto il trasferimento e la seconda, più accurata, in cui si considera la massa variabile in seguito all'espulsione del propellente.



**Figura 3.1:** Schematizzazione del modello fisico oggetto dell'analisi.

## 3.2 Equazioni planetarie di Lagrange

Le equazioni planetarie di Lagrange, sono costituite da un sistema di equazioni differenziali che descrive la variazione dei parametri orbitali nel tempo a causa di un potenziale perturbativo  $\tilde{R}$ . Prima di ricavarle è utile introdurre il concetto di orbita osculatoria. Tale orbita è definita come una sezione di conica immaginaria tangente a quella reale in cui ad ogni istante i parametri orbitali variano a causa delle perturbazioni. Essa quindi può essere immaginata come l'orbita Kepleriana che sta percorrendo un satellite in un determinato istante e che continuerà a percorrere se tutte le perturbazioni svanissero istantaneamente. Le perturbazioni sono definite attraverso una funzione di disturbo  $\tilde{R} = -R$  dove  $R$  è il potenziale di disturbo. Nel caso in cui tutte le forze perturbative possono essere espresse attraverso un potenziale si ha che l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = \nabla\tilde{R} \quad (3.1)$$

Nel caso il potenziale e quindi la funzione di disturbo sia nulla  $\tilde{R} = 0$ , come nel caso dell'orbita osculatoria, si possono esprimere le coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$  in funzione del tempo  $t$  e dei parametri orbitali  $\alpha_i$ :

$$\vec{r} = f(t, \alpha_i) \quad (3.2)$$

Conseguentemente, differenziando rispetto al tempo, è possibile ricavare velocità e accelerazione per l'orbita osculatoria:

$$\dot{\vec{r}}_o = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\ddot{\vec{r}}_o = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \quad (3.4)$$

Ma considerando le proprietà dell'orbita osculatoria si ha che posizione e velocità istantanee sono uguali a quelle dell'orbita reale mentre non è così per l'accelerazione in quanto nell'orbita reale vengono prese in considerazione le forze perturbative. Riassumendo si ha che:

$$\begin{aligned} \vec{r}_o &= \vec{r}_r \\ \dot{\vec{r}}_o &= \dot{\vec{r}}_r \\ \ddot{\vec{r}}_o &\neq \ddot{\vec{r}}_r \end{aligned} \quad (3.5)$$

Per velocità e accelerazione relative all'orbita reale si ha:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha_i} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} + \sum_i \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\alpha_i\partial t} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} \quad (3.7)$$

Ora sfruttando le proprietà (3.5) ed eguagliando la (3.3) con la (3.6) si ottiene:

$$\sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} = 0 \quad (3.8)$$

e sostituendo la (3.4) e la (3.7) nella (3.1) si ottiene:

$$\sum_i \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_i \partial t} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} = \nabla \tilde{R} \quad (3.9)$$

Combinando la (3.8) e la (3.9) si ottiene il nuovo sistema di equazioni differenziali scritto in modo esplicito:

$$\sum_i \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_j \partial t} - \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_i \partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_j} \right] \frac{d\alpha_j}{dt} = \nabla \tilde{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_j} \quad (3.10)$$

Il termine fra parentesi quadre è chiamato *parentesi di Lagrange* e sarà scritto nella forma  $[\alpha_j, \alpha_i]$ . Per quanto riguarda il termine destro dell'equazione è possibile scriverlo come:

$$\nabla \tilde{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_j} \equiv \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \alpha_j} \quad (3.11)$$

Ora è possibile scrivere le (3.10) in forma compatta:

$$\sum_i [\alpha_j, \alpha_i] \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \alpha_j} \quad \forall j = 1, \dots, 6 \quad (3.12)$$

Quindi si hanno 6 equazioni differenziali ognuna delle quali contiene 6 parentesi di Lagrange. Di tutte le 36 parentesi è necessario calcolarne solo 15 a causa delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} [\alpha_j, \alpha_i] &= -[\alpha_i, \alpha_j] \\ [\alpha_j, \alpha_j] &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Al fine di trovare le parentesi di Lagrange è necessario scomporle nelle tre componenti  $x$  e  $z$ . Ad esempio per la scomposizione lungo  $x$  si ha:

$$[\alpha_j, \alpha_i]_x = \frac{\partial x}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_j \partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \quad (3.14)$$

La stessa cosa va fatta per  $y$  e  $z$ . Il secondo passo é esprimere tale parentesi in funzione degli elementi orbitali. Considerando che si può valutare in qualsiasi punto dell'orbita prescindendo dal tempo si sceglie, per comodità, il perigeo. Si esprimono le coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$  in funzione dei parametri orbitali attraverso le relazioni geometriche delle coniche ed infine si sostituiscono nelle parentesi di Lagrange ottenendo:

$$\begin{aligned}
 [a, r] &= \frac{\mu}{ra^2} \\
 [a, \omega] &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}(1-e^2)} \\
 [a, \Omega] &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}(1-e^2)} \cos i \\
 [e, \omega] &= \sqrt{\frac{\mu a}{i-e^2}} e \\
 [e, \Omega] &= \sqrt{\frac{\mu a}{i-e^2}} e \cos i \\
 [i, \Omega] &= \sqrt{\mu a (i-e^2)} \sin i
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si hanno solo 6 parentesi su 15 diverse da zero. Sostituendo queste equazioni nell'equazione (3.12) si ottengono le derivate nel tempo degli elementi orbitali in relazione alla funzione di disturbo:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -2 \frac{a^2}{\mu} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tau} \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{a(1-e^2)}{\mu e} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tau} - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)} \sin i} \left( \cos i \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Omega} \right) \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} \left( \frac{1}{e} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} - \frac{\cot i}{1-e^2} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} \right) \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)} \sin i} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} \\
 \frac{d\tau}{dt} &= 2 \frac{a^2}{\mu} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} + \frac{a(1-e^2)}{\mu e} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Questa forma delle equazioni è comoda per esprimere la perturbazione dovuta alla non sfericità della terra. La funzione di disturbo in questo caso vale:

$$\tilde{R}_{J_2} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_e}{r} \right)^n P_n \sin L \tag{3.17}$$

Esplicitando il polinomio di Legendre di secondo grado e considerando che il seno della latitudine  $L$  può essere scritto come:

$$\sin L = \sin i \sin \theta \tag{3.18}$$

si può riscrivere la funzione di disturbo in questo modo:

$$\tilde{R}_{J_2} = \frac{1}{2} \mu r_e^2 \frac{1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta}{r^3} \quad (3.19)$$

Dove si è introdotto il parametro  $\theta = \omega + \nu$  il quale è definito nel caso di orbite circolari. È necessario ricavare le derivate parziali della funzione di disturbo rispetto ai vari parametri orbitali e sostituirle nelle (3.16). Avendo l'ipotesi di orbite circolari le due equazioni differenziali relative all'argomento del periastro  $\omega$  e all'eccentricità  $e$  non hanno significato fisico e di conseguenza si trascurano. Inoltre la funzione di disturbo, in questo caso, non dipende da  $\tau$  e si può scrivere:

$$\frac{\partial \tilde{R}_{J_2}}{\partial \tau} = 0 \implies \dot{a}_{J_2} = 0 \quad (3.20)$$

Quindi il semiasse maggiore  $a$  non risente degli effetti di  $J_2$ . Non si ha dipendenza neanche dalla longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  e di conseguenza l'inclinazione  $i$  non subisce variazioni:

$$\frac{\partial \tilde{R}_{J_2}}{\partial \Omega} = 0 \implies \dot{i}_{J_2} = 0 \quad (3.21)$$

L'unica derivata parziale che non è nulla si ha rispetto ad  $i$  e vale:

$$\frac{\partial \tilde{R}_{J_2}}{\partial i} = -3\mu J_2 r_e^2 \frac{\sin i^2 \cos i \sin^2 \theta}{r^3} \quad (3.22)$$

Sostituendo la (3.22) nella (3.16) si ottiene la variazione della longitudine del nodo ascendente causata da  $J_2$ . Essa però può essere approssimata nella forma:

$$\dot{\Omega}_{J_2} = \left( \frac{d\Omega}{dt} \right)_{J_2} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^2}{a^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos i \quad (3.23)$$

Questa deve essere sommata alla variazione dei parametri dovuta alla spinta  $T$  (che non è esprimibile attraverso un potenziale). Per farlo è necessario riscrivere le (3.16) in un'altra forma e in un diverso sistema di riferimento.

### 3.2.1 Modello dinamico

Le equazioni planetarie di Lagrange viste precedentemente sono riferite al sistema geocentrico equatoriale ma è comodo esprimerle nel sistema di riferimento RSW. Inoltre nel caso di accelerazioni perturbative dovute alla propulsione e alla resistenza atmosferica non è possibile utilizzare il potenziale di disturbo e si ricorre alla sostituzione:

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \alpha_j} \longleftrightarrow A_R \cdot \frac{\partial x_R}{\partial \alpha_j} + A_S \cdot \frac{\partial x_S}{\partial \alpha_j} + A_Z \cdot \frac{\partial x_Z}{\partial \alpha_j} \quad (3.24)$$

Dove  $A_R$  è l'accelerazione lungo  $\hat{R}$ ,  $A_S$  è l'accelerazione lungo  $\hat{S}$  ed infine  $A_W$  è l'accelerazione lungo  $\hat{W}$ . Il sistema di equazioni differenziali quindi diventa:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= 2 \frac{a^2}{\sqrt{\mu p}} \left[ A_S e \sin \nu + A_R \frac{p}{r} \right] \\
 \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ A_S \sin \nu + A_R \frac{p}{r} (e \cos^2 \nu + 2 \cos \nu + e) \right] \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos(\omega + \nu) A_W \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p} \sin i} \sin(\omega + \nu) A_W \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dt} \cos i - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ A_S \cos \nu - A_R \sin \nu \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \right] \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2r}{\sqrt{\mu a}} A_S - \sqrt{1 - e^2} \left[ \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} \cos i \right]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dove nell'ultima equazione è stato sostituito il parametro  $\tau$  con l'anomalia media  $M$  la quale è definita come:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) \tag{3.26}$$

Questo set di equazioni è valido nel caso generale di orbita con un qualsiasi valore di eccentricità. Ricordando le ipotesi di orbite circolari è possibile trascurare  $\dot{e}$  e  $\dot{\omega}$ . Con tali ipotesi e considerando che le accelerazioni sono funzione dell'angolo di spinta  $\beta$

$$\begin{cases}
 A = \frac{T}{m} \\
 A_R = 0 \\
 A_S = A \cos \beta = \frac{T}{m} \cos \beta \\
 A_W = A \sin \beta = \frac{T}{m} \sin \beta
 \end{cases} \tag{3.27}$$

si ottiene il sistema di equazioni differenziali che fornisce il modello dinamico del problema trattato:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{cases}
 \frac{da}{dt} = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \cos \beta a^{3/2} \\
 \frac{di}{dt} = \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \\
 \frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \frac{\sin \beta \cos \theta_0}{\sin i} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_0^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{7/2}}
 \end{cases} \tag{3.28}$$

dove  $\mathbf{x}$  è il vettore delle variabili di stato.

### 3.3 Ottimizzazione indiretta e teoria del controllo ottimale

Per compiere l'ottimizzazione della manovra, in termini di tempo finale, è stata utilizzata la teoria del controllo ottimale ( da qui in poi OCT ). In generale l'ottimizzazione comporta la ricerca dei valori massimi o minimi di un determinato indice di prestazione e nel caso trattato si ricerca la legge di controllo che rende minimo il tempo di missione. La teoria viene applicata ad un sistema di equazioni differenziali nelle variabili di stato  $\mathbf{x}$ , il quale fornisce il modello dinamico descrivendo l'evoluzione nel tempo delle variabili stesse. Tale sistema viene indicato in forma compatta come:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.29)$$

Dove  $\mathbf{u}$  è il vettore che contiene le variabili di controllo. La traiettoria viene suddivisa in sottointervalli ed ogni sottointervallo è associato un tempo iniziale ad uno finale. Agli estremi di ogni intervallo sono definite le condizioni al contorno delle variabili di stato e del tempo, esse si riportano nella forma:

$$\chi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

dove  $n$  è il numero di sottointervalli, il pedice + indica l'estremo che segue il punto considerato mentre - indica l'estremo che precede il punto considerato. L'indice di prestazione di cui si ricercheranno i valori estremali ha la generica forma:

$$J = \varphi(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

Come si vede ci sono due termini: uno relativo al valore delle variabili  $\mathbf{x}$  negli estremi ed uno dato dell'integrale della funzione  $\Phi$  la quale dipende, oltre che dal tempo e dalle variabili  $\mathbf{x}$ , anche dai controlli  $\mathbf{u}$ . La forma più utile e comoda per questo tipo di analisi è quella dove si introducono due variabili ausiliarie:  $\boldsymbol{\mu}$  associate alle condizioni al contorno e  $\boldsymbol{\lambda}$  associate alle variabili di stato. L'indice  $J$  può essere quindi espresso come:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} [\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})] dt \quad j = 1, \dots, n \quad (3.32)$$

É necessario operare ancora sulla forma della (3.32) per eliminare la dipendenza dalle derivate  $\dot{\mathbf{x}}$  e ottenere un'espressione utile per la successiva differenziazione. Si integra per parti e si ottiene:

$$J^* = \varphi + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\chi} + \sum_j (\boldsymbol{\lambda}_{(j-1)+}^T \mathbf{x}_{(j-1)+} - \boldsymbol{\lambda}_{j-}^T \mathbf{x}_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt \quad (3.33)$$

Da queste è possibile ottenere la variazione del funzionale, infatti differenziando si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta J^* = & \left( -H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \\
 & + \left( H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} + \\
 & + \left( \boldsymbol{\lambda}_{(j-1)_+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} + \\
 & + \left( \boldsymbol{\lambda}_{j_-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j_-} + \\
 & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_j} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Dove si è introdotto l'Hamiltoniana  $H$  del modello dinamico, il quale vale:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \tag{3.35}$$

La variazione del funzionale  $J^*$  è fondamentale al fine dell'ottimizzazione, infatti condizione necessaria di ottimo è la stazionarietà del funzionale rispetto a qualsiasi valore assunto da  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{x}_{(j-1)_+}$ ,  $\delta \mathbf{x}_{j_-}$ ,  $\delta t_{(j-1)_+}$ ,  $\delta t_{j_-}$ ; riassumendo si deve avere:

$$\delta J^* = 0 \tag{3.36}$$

Per trovare tale condizione si devono annullare gli addendi della (3.34) ed in particolare i coefficienti di ciascuna variazione, questo è possibile grazie ad un'opportuna scelta delle variabili e delle costanti aggiunte. Le prime equazioni differenziali di ottimo sono ricavate annullando l'ultimo termine della (3.34) ed in particolare ponendo uguali a zero i coefficienti di  $\delta \mathbf{x}$  e  $\delta \mathbf{u}$ . Annullando il coefficiente di  $\delta \mathbf{x}$  si ottengono le equazioni differenziali Eulero-Lagrange :

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \tag{3.37}$$

In pratica la variazione nel tempo di una variabile aggiunta equivale all'opposto della derivata parziale dell'Hamiltoniano rispetto alla variabile di stato corrispondente. Annullando il coefficiente di  $\delta \mathbf{u}$  si ottengono le equazioni algebriche dei controlli:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \tag{3.38}$$

Annullando gli altri quattro termini della (3.34) si ottengono le seguenti equazioni relative alle condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}
 -\lambda_{j-}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} \right] &= 0 & j = 1, \dots, n \\
 \lambda_{j+}^T + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}_{j+}} \right] &= 0 & j = 1, \dots, n-1 \\
 H_{j-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j-}} &= 0 & j = 1, \dots, n \\
 -H_{j+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \chi}{\partial t_{j+}} &= 0 & j = 1, \dots, n-1
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Dove ci si riferisce al  $j$ -esimo intervallo della traiettoria. Riscrivendo tali equazioni dopo aver eliminato le costanti aggiunte  $\boldsymbol{\mu}$  si ottengono le condizioni al contorno di ottimo:

$$\sigma(\mathbf{x}_{(j-1)+}, \mathbf{x}_{j-}, \lambda_{(j-1)+}, \lambda_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \tag{3.40}$$

A questo punto si hanno tutte le equazioni che completano il sistema differenziale il quale vale:

$$\begin{cases}
 \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\
 \dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \\
 \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \\
 \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = 0
 \end{cases} \tag{3.41}$$

É da notare che uno o più controlli possono essere soggetti a vincoli e questo impone la condizione che essi appartengono al dominio di ammissibilità. I vincoli possono avere diversa natura come ad esempio la massima spinta raggiungibile da un propulsore. In presenza di tale vincolo il controllo deve assumere il valore estremo (massimo o minimo) se il risultato fornito dell'equazione (BOH) è al di fuori del dominio. Nel caso in cui ci sia un vincolo nel controllo e l'Hamiltoniana sia lineare rispetto al controllo stesso, ci sono ancora due possibilità:

- Le derivate dell'Hamiltoniana rispetto al controllo e quindi il coefficiente del controllo è diverso da zero allora:

$$(\mathbf{u})_{H_{max}} = \begin{cases} \mathbf{u}_{max} & \text{per } \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} > 0 \\ \mathbf{u}_{min} & \text{per } \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} < 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

- Se la durata dell'Hamiltoniana rispetto a  $\mathbf{u}$  è nulla allora è necessario annullare tutte le derivate successive rispetto al tempo fino a trovare una forma esplicita dal controllo e calcolarne il valore.

### 3.4 Applicazione della OTC al sistema dinamico

In questa sezione si applica la teoria del controllo ottimale al sistema differenziale (3.28) che modella il problema trattato. Si ha che il vettore delle variabili di stato è costituito da:

$$\mathbf{x} = [a, i, \Omega] \quad (3.43)$$

E quello delle variabili aggiunte  $\lambda$  e dei controlli  $\mathbf{u}$  valgono:

$$\mathbf{u} = [\beta, \theta_0] \quad (3.44)$$

$$\lambda = [\lambda_a, \lambda_i, \lambda_\Omega] \quad (3.45)$$

Sfruttando la (3.35) è possibile scrivere l'Hamiltoniano come:

$$\begin{aligned} H &= \lambda_a \dot{a} + \lambda_i \dot{i} + \lambda_\Omega \dot{\Omega} = \\ &= \lambda_a \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \cos \beta a^{3/2} \right) + \\ &+ \lambda_i \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \right) + \\ &+ \lambda_\Omega \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T \sin \beta \cos \theta_0}{m \sin i} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{7/2}} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ora è possibile ricavare le equazioni differenziali di ottimo, derivando l'Hamiltoniana rispetto a ciascuna delle variabili di stato  $\mathbf{x}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_a &= -\frac{\partial H}{\partial a} = -\left( \frac{3}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \cos \beta a^{1/2} \right) \lambda_a + \\ &- \left( \frac{1}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T \sin \beta \sin \theta_0}{m_0 \sin i} \frac{1}{a^{1/2}} + \frac{21}{4} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{9/2}} \right) \lambda_\Omega + \\ &- \left( \frac{1}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T \sin \beta \cos \theta_0}{m_0 \sin i} \frac{1}{a^{1/2}} \right) \lambda_i \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial i} = \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T \sin \beta \cos \theta_0 \cos i}{m_0 \sin i^2} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \sin i \frac{1}{a^{7/2}} \right) \lambda_\Omega \quad (3.48)$$

$$\dot{\lambda}_\Omega = -\frac{\partial H}{\partial \Omega} = 0 \quad (3.49)$$

Queste equazioni insieme a quelle del sistema dinamico costituiscono il sistema differenziale da risolvere. Ponendo uguale a zero la derivata dell'Hamiltoniana rispetto ai controlli si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_0} = \frac{\lambda_\Omega}{\sin i} \cos \theta_0 - \lambda_i \sin \theta_0 = 0 \quad (3.50)$$

Da qui si trova facilmente l'espressione della tangente di  $\theta_0$  che vale:

$$\tan \theta_0 = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = \frac{\lambda_\Omega / \sin i}{\lambda_i} \quad (3.51)$$

Considerando la proprietà delle due funzioni seno e coseno per la quale:

$$\sqrt{\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0} = 1 \quad (3.52)$$

E combinando con la (3.51) posso esprimere separatamente seno e coseno di  $\theta_0$  come:

$$\sin \theta_0 = \pm \frac{\lambda_\Omega}{\Lambda \sin i} \quad (3.53)$$

$$\cos \theta_0 = \pm \frac{\lambda_i}{\Lambda} \quad (3.54)$$

$$\Lambda = \sqrt{\left(\frac{\lambda_\Omega}{\sin i}\right)^2 + \lambda_i^2} \quad (3.55)$$

La stessa procedura è utilizzata per ricavare la legge di controllo di  $\beta$  e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \beta} = & -\lambda_a \frac{2T\sqrt{a}}{\pi\sqrt{\mu m}} \pi a \sin \beta + \lambda_\Omega \frac{2T\sqrt{a}}{\pi\sqrt{\mu m}} \frac{\cos \beta}{\cos i} \sin \theta_0 + \\ & + \lambda_i \frac{2T\sqrt{a}}{\pi\sqrt{\mu m}} \cos \beta \cos \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Semplificando e raccogliendo il  $\cos \beta$  si giunge all'espressione:

$$\lambda_a \pi a \sin \beta = \left( \lambda_\Omega \frac{\sin \theta_0}{\cos i} + \lambda_i \cos \theta_0 \right) \cos \beta \quad (3.57)$$

Di conseguenza la tangente di  $\beta$  vale:

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{\lambda_a \pi a} \left( \lambda_\Omega \frac{\sin \theta_0}{\cos i} + \lambda_i \cos \theta_0 \right) \quad (3.58)$$

Ma considerando la (3.53), la (3.54) e la (3.55), posso scrivere il termine fra parentesi come:

$$\lambda_\Omega \frac{\sin \theta_0}{\cos i} + \lambda_i \cos \theta_0 = \frac{1}{\Lambda} \left[ \left( \frac{\lambda_\Omega}{\cos i} \right)^2 + \lambda_i^2 \right] = \Lambda \quad (3.59)$$

E quindi:

$$\tan \beta = \frac{\Lambda}{\lambda_a \pi a} \quad (3.60)$$

Attraverso lo stesso procedimento utilizzato per  $\theta_0$  è possibile scrivere il seno ed il coseno di  $\beta$  come:

$$\sin \beta = \pm \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \quad (3.61)$$

$$\cos \beta = \pm \frac{\pi a \lambda_a}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \quad (3.62)$$

Analizzando la (3.46) si vede che per massimizzare l'Hamiltoniana sono necessarie due condizioni sui controlli:

- Il segno del  $\cos \beta$  deve essere concorde con  $\lambda_a$  e questo implica che

$$\cos \beta = + \frac{\pi a \lambda_a}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \quad (3.63)$$

- il segno del  $\sin \beta$  deve essere concorde con

$$\left( \frac{\lambda_\Omega}{\sin i} \sin \theta_0 + \lambda_i \cos \theta_0 \right) \quad (3.64)$$

di conseguenza se si sceglie  $\sin \beta > 0$  si deve avere  $\sin \theta_0$  concorde con  $\lambda_\Omega / \sin i$  e  $\cos \theta_0$  concorde con  $\lambda_i$  e quindi

$$\sin \beta = + \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \quad (3.65)$$

$$\cos \theta_0 = + \frac{\lambda_i}{\Lambda} \quad (3.66)$$

$$\sin \theta_0 = + \frac{\lambda_\Omega / \sin i}{\Lambda} \quad (3.67)$$

Il sistema di equazioni così composte non ha in generale soluzioni analitiche e quindi è necessario un metodo numerico per la sua approssimazione. Tale metodo sarà descritto in seguito e si utilizza un codice per l'esecuzione dei calcoli.

### 3.4.1 Caso con massa variabile e SF

Un altro caso preso in considerazione è quello in cui la massa dello spacecraft varia nel tempo. Questa nuova ipotesi modifica il sistema differenziale al quale è necessario aggiungere un'equazione. Il vettore delle variabili di stato diventa:

$$\mathbf{x} = [a, i, \Omega, m] \quad (3.68)$$

E l'equazione che si aggiunge al sistema (SISTEMA) è quello relativo alla perdita di massa:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c} \quad (3.69)$$

Dove  $T$  è la forza propulsiva mentre  $c$  è la velocità di scarico del propellente. Conseguentemente si ha un termine aggiuntivo nell'espressione dell'Hamiltoniano il quale diventa:

$$\begin{aligned} H &= +\lambda_a \dot{a} + \lambda_i \dot{i} + \lambda_\Omega \dot{\Omega} + \lambda_m \dot{m} = \\ &= +\lambda_a \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \cos \beta a^{3/2} \right) + \\ &+ \lambda_i \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \right) + \\ &+ \lambda_\Omega \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m} \frac{\sin \beta \cos \theta_0}{\sin i} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{7/2}} \right) + \\ &- \lambda_m \frac{T}{c} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Una variabile di stato in più comporta una nuova variabile aggiunta  $\lambda_m$ . Ad essa è associata una nuova equazione di ottimo che si aggiunge al (SIST BOH) e vale:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_m &= \frac{\partial H}{\partial m} = +\lambda_a \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m^2} \cos \beta a^{3/2} \right) + \\ &+ \lambda_i \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m^2} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \right) + \\ &+ \lambda_\Omega \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m^2} \frac{\sin \beta \cos \theta_0}{\sin i} a^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Il vettore dei controlli  $\mathbf{u}$  rimane invariato. Riassumendo si ha un sistema differenziale con due equazioni aggiuntive che richiedono due condizioni al contorno in più.

In seguito si è utilizzata la switch function  $SF$  per valutare l'utilizzo della propulsione in missioni con durata maggiore di quella calcolata durante l'ottimizzazione. Studiando il segno di tale funzione si hanno informazioni sul controllo della propulsione infatti quando essa è positiva si ha propulsione mentre se negativa si ha una fase non propulsa. Matematicamente  $SF$  si ricava derivando l'Hamiltoniano rispetto alla spinta propulsiva  $T$  e quindi si ha:

$$\begin{aligned}
 SF = \frac{\partial H}{\partial T} = & + \lambda_a \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{m} \cos \beta a^{3/2} \right) + \\
 & + \lambda_i \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{1}{m} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \right) + \\
 & + \lambda_\Omega \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{1}{m} \frac{\sin \beta \cos \theta_0}{\sin i} a^{1/2} \right) + \\
 & - \lambda_m \frac{1}{m}
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

### 3.5 Problema differenziale ai limiti

L'ottimizzazione indiretta del trasferimento orbitale è modellizzata da un sistema di equazioni differenziali che si traduce in un problema ai limiti; si hanno quindi condizioni al contorno definite sia all'istante iniziale sia a quello finale. Di conseguenza alcune variabili non sono definite all'istante iniziale e hanno valore incognito. Il problema si considera risolto trovando il valore iniziale di tali variabili che soddisfano (una volta integrato il sistema) tutte le condizioni al contorno (imposte e di ottimo). La soluzione di tale problema si trova applicando il metodo shooting il quale riduce il problema differenziale ai limiti in un problema ai valori iniziali. La procedura è iterativa e viene portata a convergenza utilizzando il metodo di Newton. Durante l'integrazione si discretizza la missione in sottointervalli ognuno con durata incognita e per ovviare a tale problema si sostituisce la variabile  $t$  con una adimensionale  $\xi$  in questo modo:

$$\xi = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \tag{3.73}$$

Dove con  $\tau_j$  si indica la durata dell'intervallo. Quindi considerando il sistema nel suo intero e le sostituzioni di  $t$  con  $\xi$  si ha:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\xi} = f(\mathbf{x}, \lambda, c) \tag{3.74}$$

Le condizioni al contorno globali (imposte e di ottimo) sono espresse nella forma:

$$\Psi(\mathbf{s}) = 0 \tag{3.75}$$

Con  $\mathbf{s}$  vettore che contiene i valori delle variabili ad ogni contorno e la durata dei sottointervalli:

$$\mathbf{s} = (x_0, \lambda_0, \dots, x_n, \lambda_n, c) \tag{3.76}$$

Come detto in precedenza alcune variabili  $z$  sono incognite all'istante iniziale e la soluzione consiste nel trovarne il valore che soddisfa l'equazione (3.75) e quindi si deve avere:

$$\mathbf{z}(0) : \Psi(\mathbf{s}) = 0 \quad (3.77)$$

Si suppone che tutti i valori iniziale  $\mathbf{z}(0)$  siano incogniti. La procedura iterativa ha inizio con la scelta di una soluzione di tentativo, la quale verrà corretta ad ogni iterazione fino ad arrivare a convergenza. L'integrazione del sistema all'iterazione successiva sfrutta nuovi valori iniziali trovati all'iterazione precedente, si ha quindi per la  $k$ -esima iterazione:

$$\mathbf{z}^1(0) = \text{valori di tentativo} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{z}^{k+1}(0) = \mathbf{p}^k \quad (3.79)$$

Dove  $\mathbf{p}^k$  è il vettore che contiene i nuovi valori iniziali calcolati al termine dell'iterazione  $k$ -esima. Ultimata l'integrazione si calcola l'errore sulle condizioni al contorno e quindi per ogni iterazione si ha un errore del tipo:

$$\epsilon^k = \Psi - \Psi^k \quad (3.80)$$

Dove  $\Psi$  è il vettore che contiene le condizioni al contorno imposte mentre  $\Psi^k$  contiene quelle calcolate all'iterazione  $k$ . Il criterio di arresto è dato dal raggiungimento della precisione desiderata e quindi:

$$\epsilon^k \leq \text{toll} \quad (3.81)$$

Al termine di ogni iterazione si apporta una correzione sui valori iniziali di  $\Delta p$  quindi:

$$\mathbf{p}^{k+1} = \Delta p + \mathbf{p}^k \quad (3.82)$$

Il valore della correzione  $\Delta p$  è stimato considerando che si vuole annullare l'errore  $\epsilon^k$ . Questo consiste nell'imporre una variazione dell'errore uguale all'errore stesso. La variazione, all'iterazione  $k$ , portata dalla correzione  $\Delta p$  vale:

$$\Delta \epsilon = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right] \Delta p^k \quad (3.83)$$

Quindi, per quanto detto prima, si impone che:

$$\Delta \epsilon = -\epsilon^k \quad (3.84)$$

Sostituendo le (CONDIZIONI) nelle (VARIABILI) e risolvendo rispetto a  $\Delta p$  si ottiene il valore della correzione per ogni iterazione:

$$\Delta p = - \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \epsilon^k \quad (3.85)$$

Dove la matrice delle derivate parziali rispetto a  $p$  viene calcolata come prodotto fra due matrici:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Con la (VARERR) si è introdotta una linearizzazione sull'errore che in alcuni casi può compromettere la convergenza del metodo. Per questo motivo, la correzione sui valori iniziali che si apporta, non è quello che risulta dalla (COPR) ma si moltiplica per un fattore di rilassamento. Si ha quindi che:

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + K_1 \Delta p \quad (3.87)$$

Dove  $K_1$  è il fattore di rilassamento il quale può valere  $K_1 = 0,1 \div 1$  a seconda dell'accuratezza della prima soluzione di tentativo. In genere il valore 1 viene imposto quando la soluzione di tentativo è molto vicina a quella reale. Inoltre ad ogni iterazione si confronta l'errore massimo ottenuto con quello dell'iterazione precedente e la procedura può continuare solo se tale errore è inferiore ad un multiplo dell'errore precedente cioè:

$$\max(\epsilon^{k+1}) < K_2 \cdot \max(\epsilon^k) \quad (3.88)$$

Il parametro  $K_2$  è un valore intero che in generale vale  $K_2 = 2 \div 3$  e questo perché nelle prime fasi della procedura l'errore deve poter aumentare. Nel caso in cui la condizione (3.88) non viene rispettata si applica la bisezione sulla correzione  $\Delta p$ , si integra e si calcolano i nuovi valori di  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + K_1 \frac{\Delta p}{2} \quad (3.89)$$

Si procede alla valutazione del nuovo errore e al confronto con quello dell'iterazione precedente. La bisezione può avvenire un numero massimo di volte superato il quale il codice si arresta ed è necessario cambiare la soluzione di tentativo iniziale la quale non ha una precisione tale da garantire la convergenza del metodo.

## Capitolo 4

### Analisi e risultati con massa costante

Il primo caso analizzato è quello in cui la massa dello spacecraft è considerata costante nel tempo, quindi la portata  $\dot{m}$  è nulla ed il sistema di equazioni differenziali che descrive il nostro problema è quello visto nel capitolo precedentemente ed è formato da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \cos \beta a^{3/2} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \sin \theta_0}{\sin i} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{7/2}} \\ \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \\ \frac{\partial \lambda_a}{\partial t} = - \left( \frac{3}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \cos \beta a^{1/2} \right) \lambda_a - \left( \frac{1}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \sin \theta_0}{\sin i} \frac{1}{a^{1/2}} + \frac{21}{4} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{9/2}} \right) \lambda_\Omega + \\ \quad - \left( \frac{1}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \cos \theta_0}{\sin i} \frac{1}{a^{1/2}} \right) \lambda_i \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \cos \theta_0 \cos i}{\sin i^2} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \sin i \frac{1}{a^{7/2}} \right) \lambda_\Omega \\ \frac{\partial \lambda_\Omega}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Le condizioni al contorno che supportano tale sistema sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0) = a_0 \\ i(0) = i_0 \\ \Omega(0) = \Omega_0 \\ a(t_f) = a_f \\ i(t_f) = i_f \\ \Omega(t_f) = \Omega_f \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Ed infine si riportano le equazioni algebriche di controllo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \\ \cos \beta = \frac{\pi a \lambda_a}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \\ \sin \theta_0 = \frac{\lambda_\Omega / \sin i}{\Lambda} \\ \cos \theta_0 = \frac{\lambda_i}{\Lambda} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Il costo in termini di  $\Delta V$  per il caso con massa costante non è calcolato con l'equazione del razzo ma si valuta considerando che l'accelerazione complessiva a cui è soggetto lo spacecraft vale:

$$\frac{T}{m} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (4.4)$$

dove  $T/m$  è l'accelerazione (in questo caso costante) e  $\Delta t$  è il tempo totale di spinta che nel caso di propulsione sempre attiva coincide con la durata della missione. Si ha quindi:

$$\Delta V = \frac{T}{m} t_f \quad (4.5)$$

### 4.1 Caso $\Delta\Omega_0 = +20^\circ$

Il primo caso analizzato vede un  $\Delta\Omega$  positivo ed una variazione positiva di  $a$  mentre mantiene la stessa inclinazione di partenza. Le condizioni al contorno e le relative variazioni dei parametri sono riportate in tabella(4.1):

$a_0$	$a_f$	$\Delta a$	$i_0$	$i_f$	$\Delta i$	$\Omega_0$	$\Omega_f$	$\Delta\Omega$
500 km	600 km	100 km	$51^\circ$	$51^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$20^\circ$	$20^\circ$

**Tabella 4.1:** Condizioni al contorno del problema e relativa variazione dei parametri.

Si riportano inoltre in tabella(4.2) i valori di tentativo adimensionali utilizzati per la risoluzione del problema differenziale ai limiti attraverso il metodo di shooting. I valori di tentativo delle variabili aggiunte  $\lambda_a$  e  $\lambda_i$  si riferiscono al tempo  $t = 0$  e il piccolo valore in modulo è giustificato dal fatto che il segno della soluzione può essere sia positivo che negativo ed è ignoto all’inizio dell’analisi. Il valore di  $\lambda_\Omega$ , a differenza degli altri, non dipende dal tempo mentre mostra una dipendenza dal segno di  $\Delta\Omega_0$ .

$t_f$	$\lambda_a(0)$	$\lambda_i(0)$	$\lambda_\Omega$
1000	0,1	0,1	+1

**Tabella 4.2:** Soluzione di tentativo utilizzata.

Analizzando la convergenza della soluzione si vede che dopo 146 iterazioni l’errore sulle condizioni al contorno raggiunge la precisione voluta, arrestando la procedura iterativa. In questo caso l’errore per ogni iterazione  $k$  è calcolato come:

$$\epsilon_k = \sqrt{(a_k - a_f)^2 + (i_k - i_f)^2 + (\Omega_k - \Omega_f)^2} \quad (4.6)$$

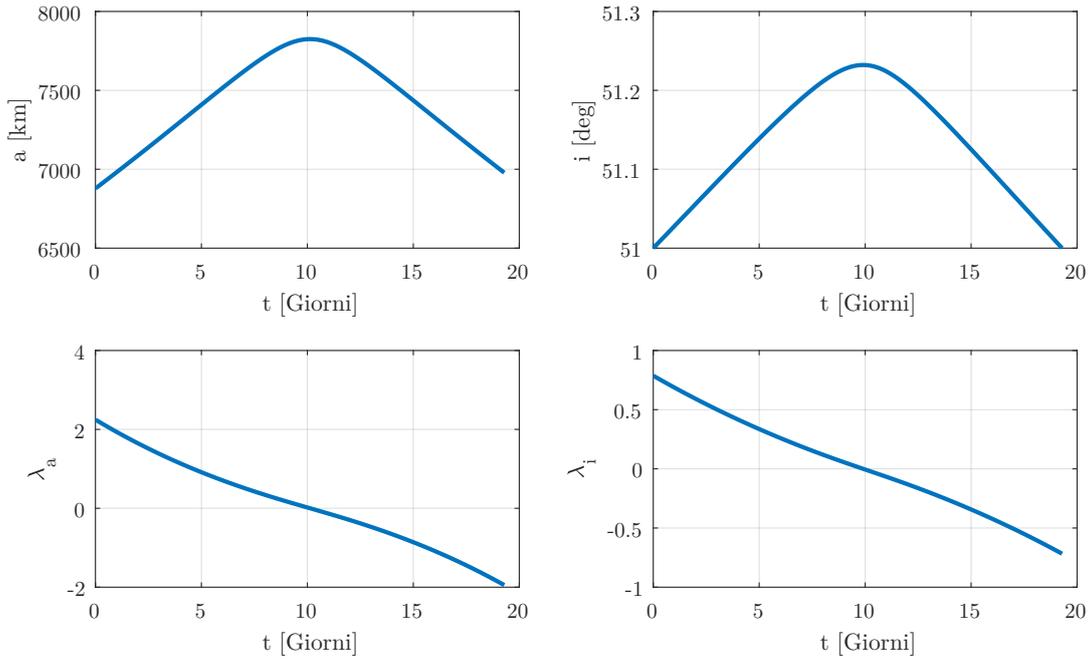
I risultati mostrano l’andamento dei tre parametri Kepleriani  $a$ ,  $i$ ,  $\Omega$  durante la missione; delle due variabili aggiunte  $\lambda a$  e  $\lambda i$  ed infine dei due parametri di controllo  $\beta$  e  $\theta_0$ . Si riportano in tabella(4.3) il  $\Delta V$ , la massa di propellente e la durata totale della missione risultanti dall’analisi.

$\Delta V$	$m_p$	$t_f$
1,1111 km/s	0,6651 kg	19,2901 giorni

**Tabella 4.3:** Risultati dell’analisi in termini di  $\Delta V$ , massa di propellente e durata della missione.

Analizzando la figura(4.1) si vede che in una prima fase della missione si ha un aumento dell’altitudine dello spacecraft che supera quella del target, ciò consente di risentire meno dell’effetto di  $J_2$  e di trarre vantaggio da essa. Infatti, essendo il target soggetto ad una variazione di RAAN  $(\dot{\Omega}_{J_2})_T$  maggiore di quella dello spacecraft, la differenza  $\Delta\Omega$  si riduce nel tempo. In altre parole la velocità di rotazione relativa, in termini di  $\Omega$ , è negativa e quindi i due corpi si avvicinano. Nella

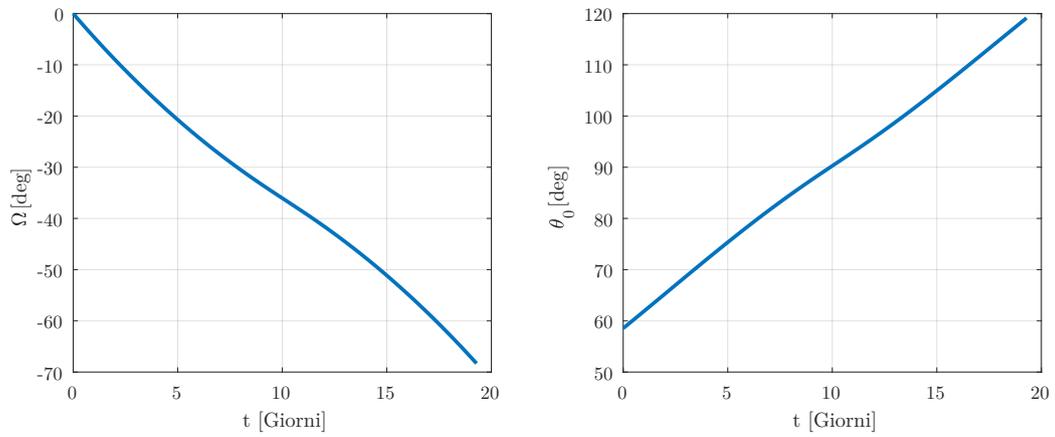
fase finale della missione l'altitudine decresce fino a raggiungere quella desiderata. L'andamento dell'inclinazione è simile a quello del semiasse uguale  $a$ . Le variabili aggiunte  $\lambda_a$  e  $\lambda_i$  indicano la convenienza nell'aumentare o nel diminuire il rispettivo parametro, nello specifico: un valore positivo di tali variabili indica una convenienza nell'incremento di tali parametri, al contrario, un valore negativo si traduce in una convenienza nella riduzione del parametro. Si vede che entrambi partono da un valore positivo e con andamento decrescente giungono ad un valore negativo.



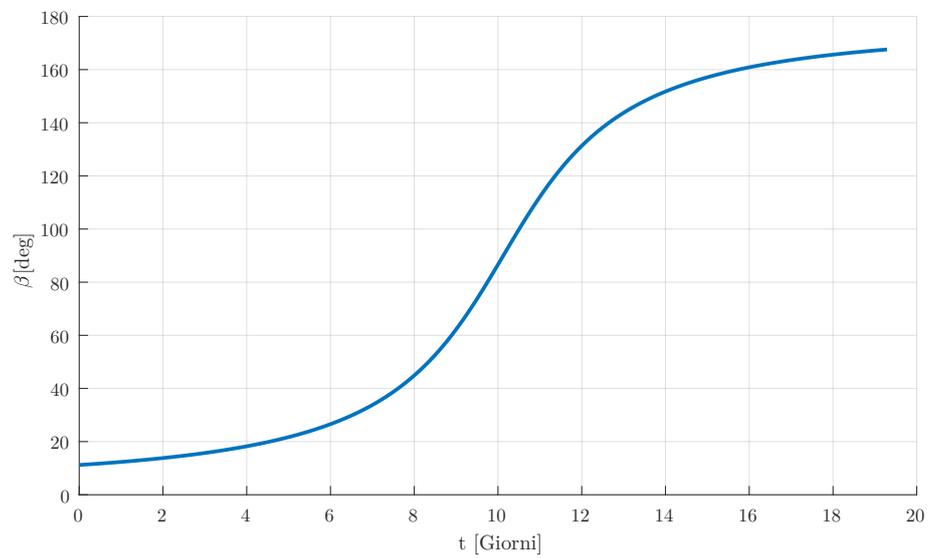
**Figura 4.1:** Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore  $a$ , dell'inclinazione  $i$  e delle relative variabili aggiunte  $\lambda_a$  e  $\lambda_i$ .

Passando all'analisi di  $\Omega$  e  $\theta_0$  si vede che l'andamento dell'ascensione retta del nodo ascendente è sempre decrescente, essa parte del valore  $\Omega_0$  e raggiunge  $\Omega_f$  che rappresenta il valore di  $\Omega$  dello spacecraft al momento del raggiungimento del target. I valori negativi sono giustificati del fatto che lo spacecraft sfrutta l'effetto di  $J_2$  sul target il quale causa una riduzione di  $\Omega$ .

In ultima analisi si osserva l'angolo di spinta  $\beta$  il quale ha un andamento in linea con ciò che è stato detto in precedenza. Si vede che in una prima fase si hanno bassi valori, in pratica il  $\Delta V$  iniziale è gran parte parallelo alla velocità orbitale e questo rende possibile l'aumento di quota. Nella fase centrale si ha un cambio di direzione di spinta più rapido, dimostrato da una maggiore pendenza della curva; in questa fase la componente maggiore del  $\Delta V$  è perpendicolare alla velocità orbitale. La fase finale è opposta a quella iniziale infatti l'angolo di spinta è tale da causare l'abbassamento di quota necessario.



**Figura 4.2:** Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  e di  $\theta_0$ .



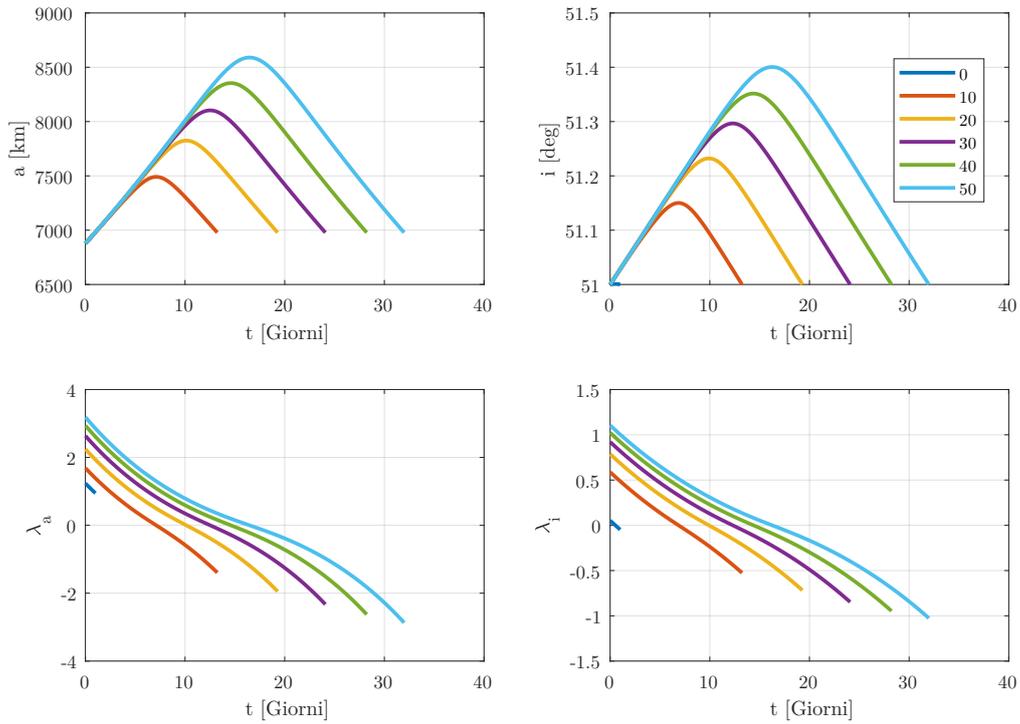
**Figura 4.3:** Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta  $\beta$ .

### 4.1.1 Variazione di $\Delta\Omega_0$

Al fine di coprire un maggior numero di casi studiati è stato variato il parametro  $\Delta\Omega_0$  mantenendo gli altri costanti. I dati utilizzati sono riportati in tabella(4.4).

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
500 km	100 km	51°	0°	0°	0° ÷ +50°

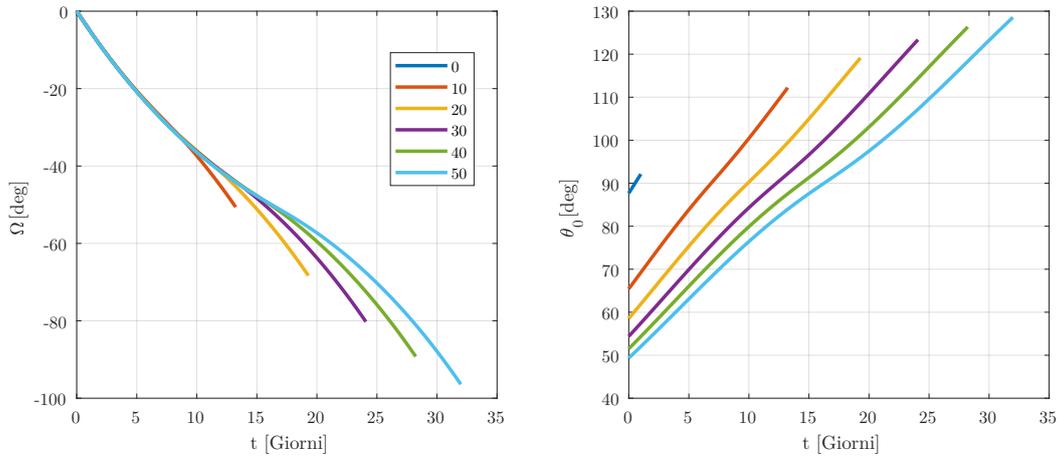
**Tabella 4.4:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.



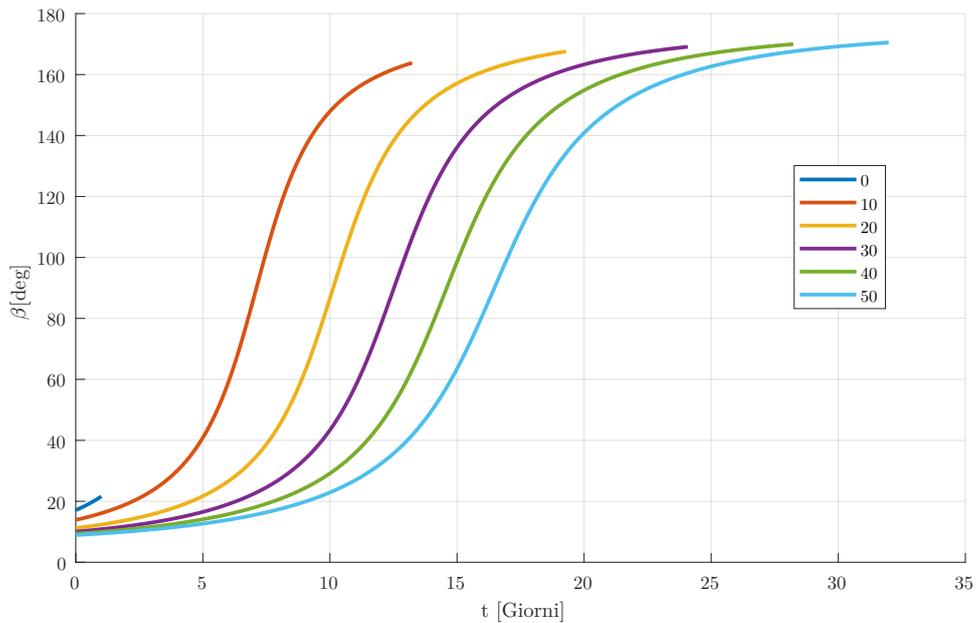
**Figura 4.4:** Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore  $a$ , dell'inclinazione  $i$  e delle relative variabili aggiunte  $\lambda_a$  e  $\lambda_i$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .

Questa struttura di missione, risultante dall'ottimizzazione, si manifesta nella maggior parte dei casi in cui il  $\Delta\Omega_0$  fra spacecraft e target è positivo. La prima osservazione riguarda il netto aumento dei tempi di trasferta al crescere del  $\Delta\Omega_0$ , dovuto alla maggior distanza da colmare prima di raggiungere il target e per lo stesso motivo è richiesto un incremento sempre maggiore della quota. In questo modo si minimizza l'effetto di  $J_2$  sullo spacecraft aumentando la velocità angolare relativa tra i piani orbitali  $\dot{\Omega}_{rel}$  e ottenendo tempi di trasferta minimi, dove:

$$\dot{\Omega}_{rel} = \dot{\Omega}_{s/c} - \dot{\Omega}_{target} \quad (4.7)$$



**Figura 4.5:** Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  e di  $\theta_0$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .



**Figura 4.6:** Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta  $\beta$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .

L'inclinazione  $i$  subisce lo stesso effetto della quota e si notano escursioni maggiori con l'aumentare del  $\Delta\Omega_0$ . Le due variabili aggiunte  $\lambda_a$  e  $\lambda_i$  hanno sempre un andamento decrescente partendo da valori positivi e giungendo a valori negativi. L'effetto di  $\Delta\Omega_0$  maggiori è quello di incrementare gli estremi di variazione di questi due parametri.

Il RAAN mantiene il suo andamento decrescente raggiungendo, però, valori sempre più grandi in modulo. Tale risultato ha come causa una maggior durata della missione. Il parametro di

controllo  $\theta_0$  assume valori iniziali sempre minori ma subisce escursioni positive maggiori.

In ultimo si analizza l'angolo di spinta  $\beta$  il quale per piccoli valori di  $\Delta\Omega$  presenta un andamento più ripido e breve, inoltre i rami a minore pendenza sono ridotti. Ciò è dovuto alla piccola variazione di altitudine necessaria per questi valori di  $\Delta\Omega$ . Al contrario per  $\Delta\Omega$  grandi si notano maggiormente i due estremi delle curve a pendenza ridotta, corrispondenti alla fasi della missione in cui la componente dell'accelerazione parallela alla velocità è preponderante. Si ha quindi un'antisimmetria della spinta durante la missione che si può riassumere in due fasi:

- *fase ascendente* durante la quale  $\beta < 90^\circ$ , lo spacecraft viene accelerato e si ha un aumento di quota.
- *fase discendente* durante la quale  $\beta > 90^\circ$ , lo spacecraft viene decelerato e si ha un abbassamento di quota.

### 4.1.2 Variazione di $\Delta a_0$

Si analizza, ora, l'effetto sulla missione di diversi valori della differenza di quota iniziale  $\Delta a_0$  tra i due corpi. In tal caso si ha:

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta \Omega_0$
500 km	-300 km ÷ +1500 km	51°	0°	0°	+20°

**Tabella 4.5:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.

In tabella (4.6) sono riportati i valori dei  $\Delta V$ , della massa di propellente  $m_p$  e della durata totale della missione  $t_f$ , per i  $\Delta a_0$  analizzati. Si vede che, in questo caso, tutti i parametri aumentano con la differenza di quota e infatti si ha il massimo valore di essi per il  $\Delta a_0 = 1500km$ . Tale comportamento conferma quanto visto in precedenza, infatti, per trarre vantaggio dall'effetto di  $J_2$ , nel caso di  $\Delta \Omega_0 > 0$ , è necessario che l'altitudine dello spacecraft sia maggiore di quella del target. In conclusione con  $\Delta a_0$  minori si ottengono tempi e consumi inferiori.

$\Delta a_0$ [km]	$\Delta V$ [km/s]	$m_p$ [kg]	$t_f$ [giorni]
-300	0,8339	0,5020	14,4777
-200	0,8938	0,5373	15,5166
-100	0,9602	0,5765	16,6693
0	1,0328	0,6192	17,9297
100	1,1111	0,6651	19,2901
200	1,1947	0,7139	20,7416
300	1,2830	0,7653	22,2748
400	1,3755	0,8189	23,8804
500	1,4716	0,8745	25,5495
600	1,5710	0,9316	27,2736
700	1,6730	0,9901	29,0453
800	1,7774	1,0497	30,8578
900	1,8838	1,1101	32,7051
1000	1,9919	1,1713	34,5821
1100	2,1015	1,2330	36,4842
1200	2,2123	1,2951	38,4075
1300	2,3241	1,3575	40,3486
1400	2,4367	1,4201	42,3044
1500	2,5501	1,4828	44,2724

**Tabella 4.6:** Valori del  $\Delta V$ , della massa di propellente  $m_p$  e del tempo di trasferta totale  $t_f$  in funzione della differenza di quota  $\Delta a_0$  fra spacecraft e target.

## 4.2 Caso $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$

Ora si prende in esame il caso in cui la differenza di RAAN fra spacecraft e target è negativa mentre rimangono invariati gli altri parametri. Si riassumono in tabella(4.7) i dati utilizzati per la seguente analisi.

$a_0$	$a_f$	$\Delta a$	$i_0$	$i_f$	$\Delta i$	$\Omega_0$	$\Omega_f$	$\Delta\Omega$
500 km	600 km	100 km	$51^\circ$	$51^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$-20^\circ$	$-20^\circ$

**Tabella 4.7:** Condizioni al contorno del problema e relativa variazione dei parametri.

Anche per questo caso si riportano, in tabella(4.8) i valori della soluzione di tentativo utilizzati per arrivare a convergenza. Si vede che il numero di parametri incogniti è maggiore del caso precedente e ciò è dovuto ad una diversa struttura della missione che viene approfondita nei paragrafi seguenti. Nello specifico si hanno due parametri aggiuntivi  $t_1$  e  $t_2$  i quali rappresentano, rispettivamente, la durata di prima e seconda fase della missione. Rimane invariato il significato di  $\lambda_a(0)$  e  $\lambda_i(0)$ , le quali però si prendono con segno negativo perché diversamente non si ha convergenza. Anche  $\lambda_\Omega$  ha segno negativo in quanto concorde con  $\Delta\Omega_0$ .

$t_1$	$t_2$	$t_f$	$\lambda_a(0)$	$\lambda_i(0)$	$\lambda_\Omega$
466	2215	2568	-0,1	-0,1	-1

**Tabella 4.8:** Soluzione di tentativo utilizzata.

La convergenza si ha dopo 153 iterazioni con il raggiungimento della precisione voluta ed anche per questo caso l'errore sulle condizioni al contorno, per ogni iterazione  $k$ , è calcolato come:

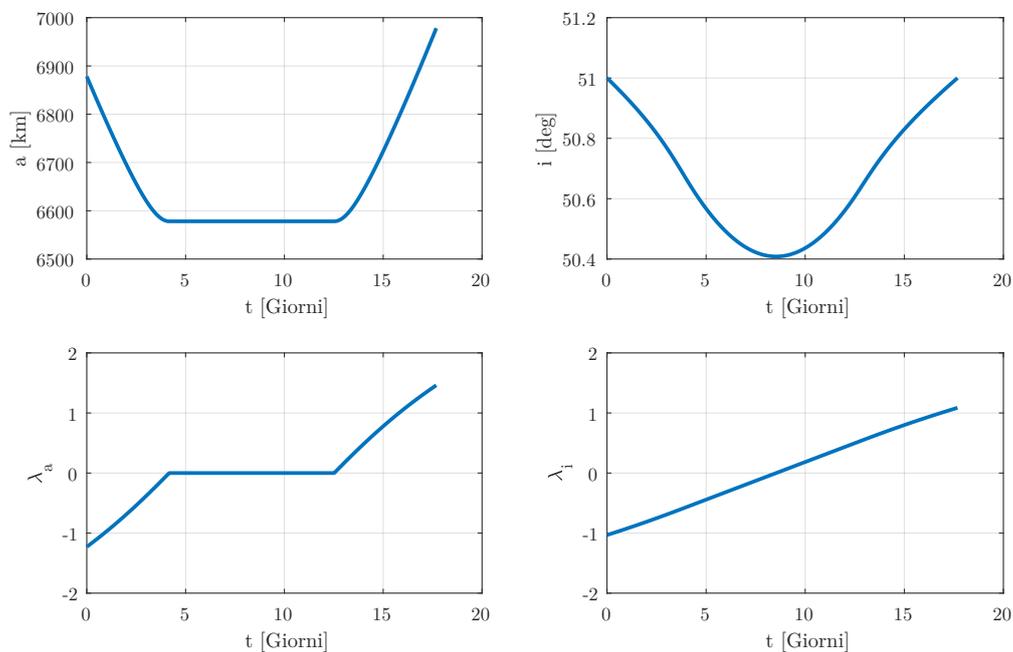
$$\epsilon_k = \sqrt{(a_k - a_f)^2 + (i_k - i_f)^2 + (\Omega_k - \Omega_f)^2} \quad (4.8)$$

In tabella(4.9) sono riportati i risultati dell'analisi in termini di  $\Delta V$ , di tempi totali delle prime due fasi di missione  $t_1$  e  $t_2$ , di durata totale della missione  $t_f$  e di massa di propellente necessaria  $m_p$ .

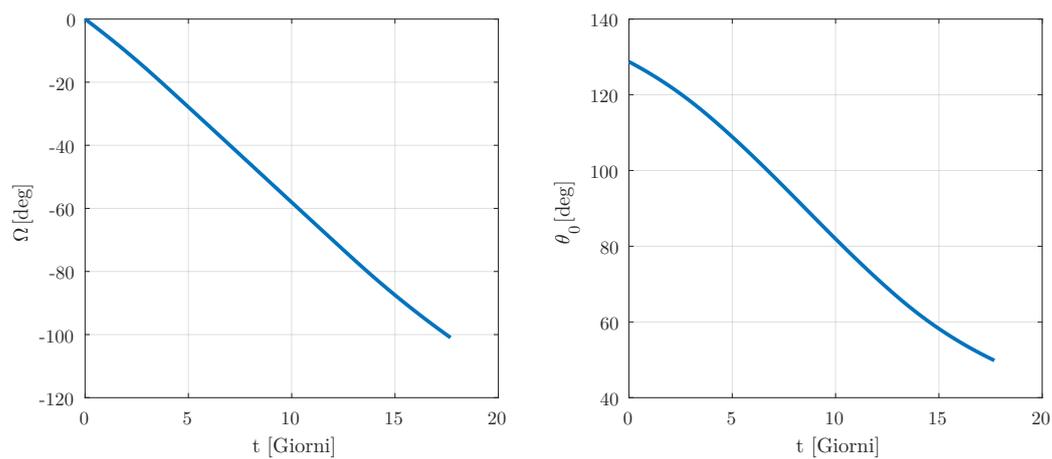
$\Delta V$	$m_p$	$t_1$	$t_2$	$t_f$
1,0186 km/s	0,6109 kg	4,1714 giorni	12,5198 giorni	17,6843 giorni

**Tabella 4.9:** Risultati dell'analisi in termini di  $\Delta V$ , massa di propellente e durata delle fasi di missione.

Si vede che, a differenza del caso precedente, la missione è composta da tre fasi distinte: in primo luogo si ha un abbassamento di quota fino al limite consentito, successivamente la quota rimane costante e pari al limite inferiore ed infine si incrementa l'altitudine fino a quella del target. Tale struttura è resa necessaria dalla presenza di una quota limite, al di sotto della quale gli effetti perturbativi dell'atmosfera sarebbero predominanti, causando il decadimento orbitale. Tale limite è imposto per  $h_{atm} = 200$  km.

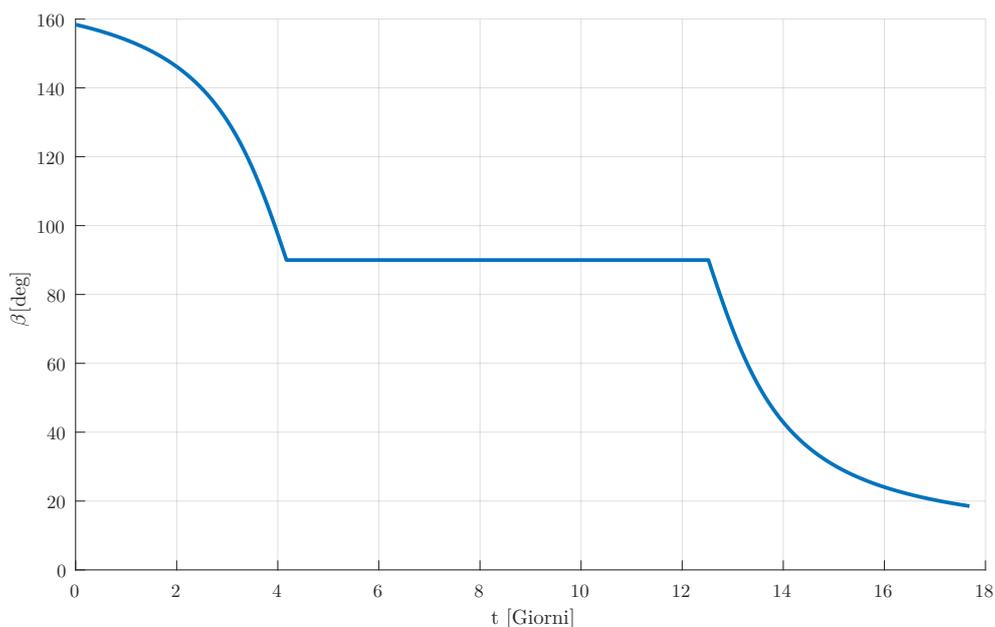


**Figura 4.7:** Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore  $a$ , dell'inclinazione  $i$  e delle relative variabili aggiunte  $\lambda_a$  e  $\lambda_i$ .



**Figura 4.8:** Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  e di  $\theta_0$ .

Il comportamento opposto al caso  $\Delta\Omega = +20^\circ$  è giustificato dal fatto che il RAAN del target è inferiore a quello dello spacecraft. Per sfruttare efficacemente l'effetto di  $J_2$ , dovuto alla non sfericità della terra, è necessario che lo spacecraft sia soggetto, con maggiore intensità a tale perturbazione. Dato che l'effetto di  $J_2$  è inversamente proporzionale al cubo del raggio  $r$ , è conveniente abbassare la quota fino al livello consentito. Come si vede dalla figura(4.7), la convenienza di questa manovra è confermata dall'andamento di  $\lambda_a$  il quale ha andamento crescente partendo da valori negativi per poi giungere a valori positivi. Parallelamente varia anche l'inclinazione la quale subisce un decremento iniziale per poi tornare al valore iniziale. Il cambio di inclinazione è dovuto alla componente dell'accelerazione perpendicolare alla velocità, mentre quella parallela, come è noto, è responsabile del cambio di quota. La longitudine del nodo ascendente ha sempre andamento decrescente e negativo. In ultima analisi si vede che l'angolo di spinta  $\beta$  parte da un valore maggiore di  $90^\circ$  data la necessità di frenare lo spacecraft e abbassare la quota. La parte centrale vede  $\beta = \text{cost}$  ed uguale a  $90^\circ$  dato che la quota deve rimanere costante. Infine  $\beta$  decresce gradualmente con valori inferiori a  $90^\circ$  al fine di accelerare lo spacecraft e alzare la quota.



**Figura 4.9:** Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta  $\beta$ .

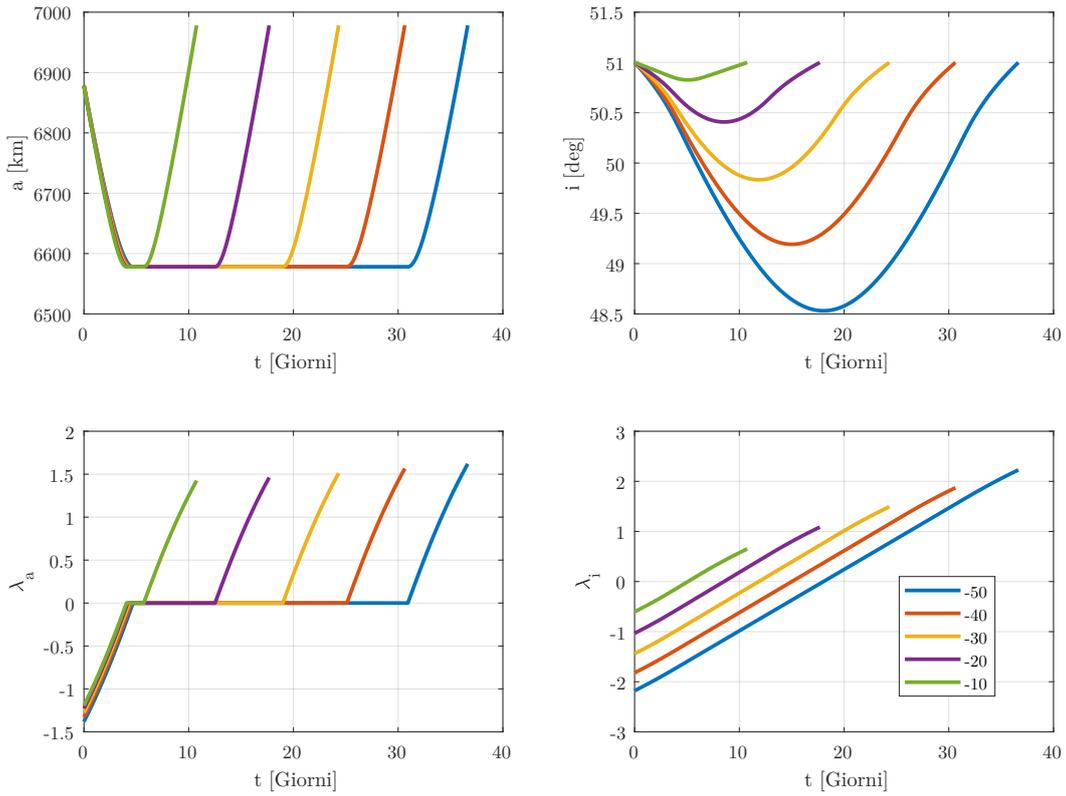
### 4.2.1 Variazione di $\Delta\Omega_0$

Per avere un quadro più approfondito si analizzano i casi con diversi valori di  $\Delta\Omega_0$ , mantenendo il resto invariato. In tabella (4.10) vengono mostrati i parametri dell'analisi:

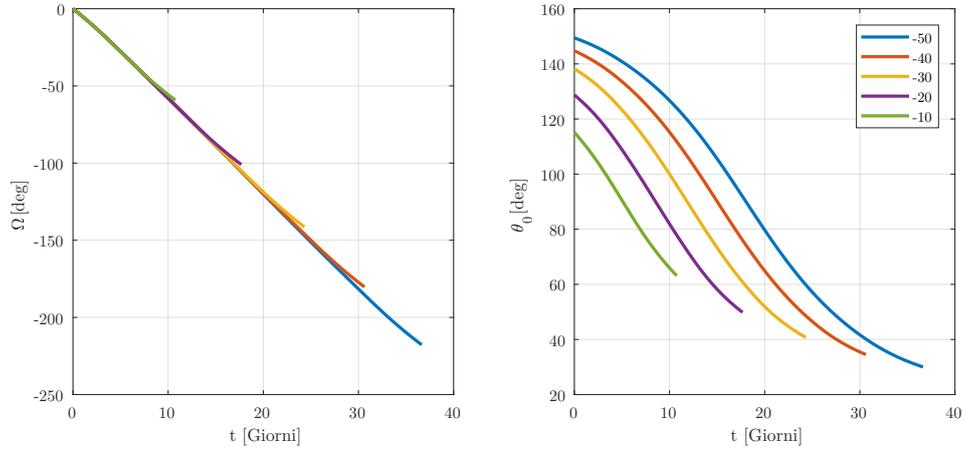
$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
500 km	100 km	51°	0°	0°	-10° ÷ -50°

**Tabella 4.10:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.

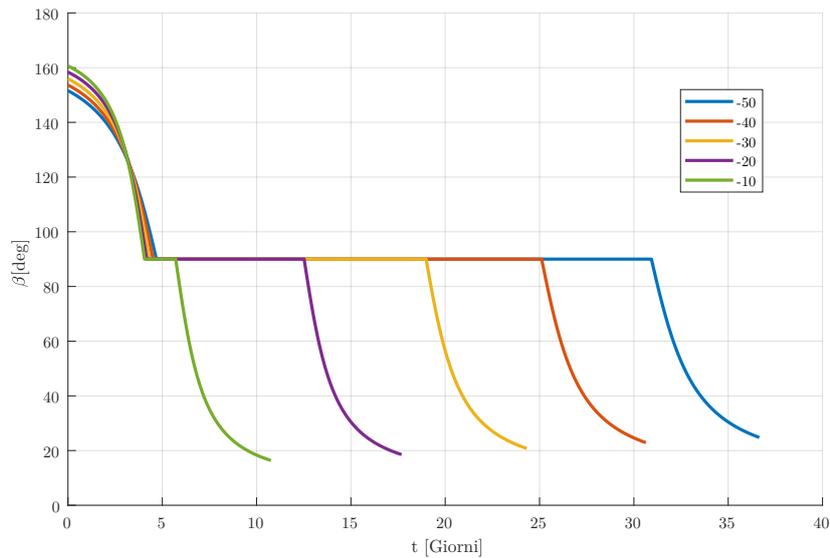
Come per il caso precedente in figura (4.10) vengono confrontati gli andamenti di  $a$  ed  $i$  per i diversi  $\Delta\Omega_0$ . Si nota che in tutti i casi si raggiunge la quota minima di 200 km e per valori più grandi in modulo di  $\Delta\Omega_0$ , la durata della fase ad  $a = a_{min}$  cresce. Il comportamento dell'inclinazione resta invariato: si ha una fase decrescente ed un successivo aumento. Si vede però che valori di  $\Delta\Omega_0$  maggiori in modulo causano escursioni maggiori di  $i$ . Il parametro  $\lambda_i$  assume valori estremi sempre più grandi in modulo, si annulla all'incirca a metà missione e ha una pendenza che non viene influenzata dal  $\Delta\Omega_0$ .



**Figura 4.10:** Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore  $a$ , dell'inclinazione  $i$  e delle relative variabili aggiunte  $\lambda_a$  e  $\lambda_i$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .



**Figura 4.11:** Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  e di  $\theta_0$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .



**Figura 4.12:** Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta  $\beta$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .

Nella figura (4.11) si vedono gli andamenti di  $\Omega$  dello spacecraft nel tempo per i vari  $\Delta\Omega_0$  e si nota che, in tutti i casi, la pendenza della curva subisce un lieve aumento iniziale mentre diminuisce nella parte finale. È da notare che tale pendenza rappresenta la variazione istantanea della longitudine del nodo ascendente e quindi, in caso di spinta cosante, è influenzata maggiormente dalla quota per effetto di  $J_2$ . In conclusione è riportato l'angolo di spinta  $\beta$  per i vari  $\Delta\Omega_0$ . Si vede che l'andamento generale e quindi la struttura della missione è la stessa e ricalca quella del caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ . Con il crescere in modulo di  $\Delta\Omega_0$  la fase a  $\beta = cost$  aumenta in durata, i valori di partenza  $\beta(t_0)$  diminuiscono in valore mentre quelli finali  $\beta(t_f)$  aumentano.

### 4.2.2 Variazione di $\Delta a_0$

Anche nel caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$  è stata condotta un'analisi per diversi valori di  $\Delta a_0$ , in tabella(4.11) si riportano i dati di input utilizzati mentre in tabella(4.12) vengono riportati i risultati in termini di  $\Delta V$ , di massa di propellente necessaria  $m_p$ , di durata delle prime due fasi di missione  $t_1$  e  $t_2$  e di durata totale della manovra  $t_f$ .

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
500 km	-300 km ÷ +1500 km	51°	0°	0°	-20°

**Tabella 4.11:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.

Osservando i risultati si nota subito il comportamento opposto al caso  $\Delta\Omega_0 = +20^\circ$ , infatti per  $a_f$  maggiori si ottengono durate e costi inferiori. Questo è valido fino ad un valore di  $\Delta a_0 = 900$  km. Dopo tale valore si registra un cambio di tendenza: sia durata che costi tendono ad aumentare. Questo comportamento è dovuto al fatto che, in questo caso, la manovra finalizzata all'incremento di altitudine incide maggiormente rispetto al cambio di piano  $\Delta\Omega_0$ . Si vede inoltre che non tutte le missioni hanno la stessa struttura infatti per  $\Delta a_0 \geq 700$  km non è presente la fase ad  $a = cost$ . e questo perché si ha un abbassamento di quota sempre minore.

$\Delta a$ [km]	$\Delta V$ [km/s]	$m_p$ [kg]	$t_1$ [giorni]	$t_2$ [giorni]	$t_f$ [giorni]
-300	2,4866	1,4477	4,9341	43,1663	43,1705
-200	1,7729	1,0471	4,5625	28,5129	30,7799
-100	1,3813	0,8223	4,3561	20,6855	23,9809
0	1,1557	0,6912	4,2399	15,8248	20,0647
100	1,0186	0,6109	4,1714	12,5198	17,6843
200	0,9320	0,5599	4,1289	10,1039	16,1810
300	0,8764	0,5271	4,1015	8,2372	15,2146
400	0,8408	0,5060	4,0835	6,7325	14,5967
500	0,8188	0,4930	4,0714	5,4792	14,2160
600	0,8066	0,4858	4,0634	4,4083	14,0033
700	0,8008	0,4824	/	/	13,9030
800	0,7982	0,4808	/	/	13,8568
900	0,7980	0,4807	/	/	13,8548
1000	0,8001	0,4820	/	/	13,8913
1100	0,8042	0,4844	/	/	13,9615
1200	0,8099	0,4878	/	/	14,0616
1300	0,8172	0,4921	/	/	14,1881
1400	0,8259	0,4972	/	/	14,3385
1500	0,8358	0,5031	/	/	14,5111

**Tabella 4.12:** Valori del  $\Delta V$ , della massa di propellente  $m_p$ , della durata delle prime due fasi di missione  $t_1$  e  $t_2$  e del tempo di trasferta totale  $t_f$  in funzione della differenza di quota  $\Delta a_0$  fra spacecraft e target.

## Capitolo 5

# Analisi e risultati con massa variabile

Il sistema differenziale che modella il problema di ottimizzazione è composto da due equazioni aggiuntive rispetto al caso precedente, si ha quindi:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \cos \beta a^{3/2} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \sin \theta_0}{\sin i} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{7/2}} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{T}{c} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_a}{\partial t} = & - \left( \frac{3}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \cos \beta a^{1/2} \right) \lambda_a - \left( \frac{1}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \sin \theta_0}{\sin i} \frac{1}{a^{1/2}} + \frac{21}{4} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \cos i \frac{1}{a^{9/2}} \right) \lambda_\Omega + \\ & - \left( \frac{1}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \cos \theta_0}{\sin i} \frac{1}{a^{1/2}} \right) \lambda_i \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m_0} \frac{\sin \beta \cos \theta_0 \cos i}{\sin i^2} a^{1/2} - \frac{3}{2} J_2 R_e^2 \sqrt{\mu} \sin i \frac{1}{a^{7/2}} \right) \lambda_\Omega \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \lambda_\Omega}{\partial t} = 0 \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_m}{\partial t} = & + \lambda_a \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \frac{T}{m^2} \cos \beta a^{3/2} \right) + \lambda_i \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m^2} \sin \beta \cos \theta_0 a^{1/2} \right) + \\ & + \lambda_\Omega \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\mu}} \frac{T}{m^2} \frac{\sin \beta \cos \theta_0}{\sin i} \right) a^{1/2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le condizioni al contorno che supportano tale sistema sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0) = a_0 \\ i(0) = i_0 \\ \Omega(0) = \Omega_0 \\ m(0) = m_0 \\ a(t_f) = a_f \\ i(t_f) = i_f \\ \Omega(t_f) = \Omega_f \\ SF(t_f) = SF_f \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Ed infine si riportano le equazioni algebriche di controllo, che sono identiche al caso con massa costante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \\ \cos \beta = \frac{\pi a \lambda_a}{\sqrt{\Lambda^2 + (\pi a \lambda_a)^2}} \\ \sin \theta_0 = \frac{\lambda_\Omega / \sin i}{\Lambda} \\ \cos \theta_0 = \frac{\lambda_i}{\Lambda} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Il costo in termini di  $\Delta V$  è calcolato con l'equazione del razzo e quindi si ha:

$$\Delta V = c \ln \frac{m_0}{m_0 - m_p} = c \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (5.11)$$

## 5.1 Caso $\Delta\Omega_0 > 0$

Si analizzano i risultati per diversi valori del  $\Delta\Omega_0$ , mantenendo gli altri parametri uguali al caso con massa costante, in modo da rendere più semplice il successivo confronto. In tabella (5.1) si riportano i dati dell'analisi.

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
500 km	100 km	51°	0°	0°	0° ÷ +50°

**Tabella 5.1:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.

La soluzione di tentativo utilizzata è riportata in tabella (5.2) e mostra un parametro aggiuntivo  $\lambda_m(0)$  mentre gli altri sono rimasti invariati.

$t_f$	$\lambda_a(0)$	$\lambda_i(0)$	$\lambda_m(0)$	$\lambda_\Omega$
1000	0,1	0,1	13	+1

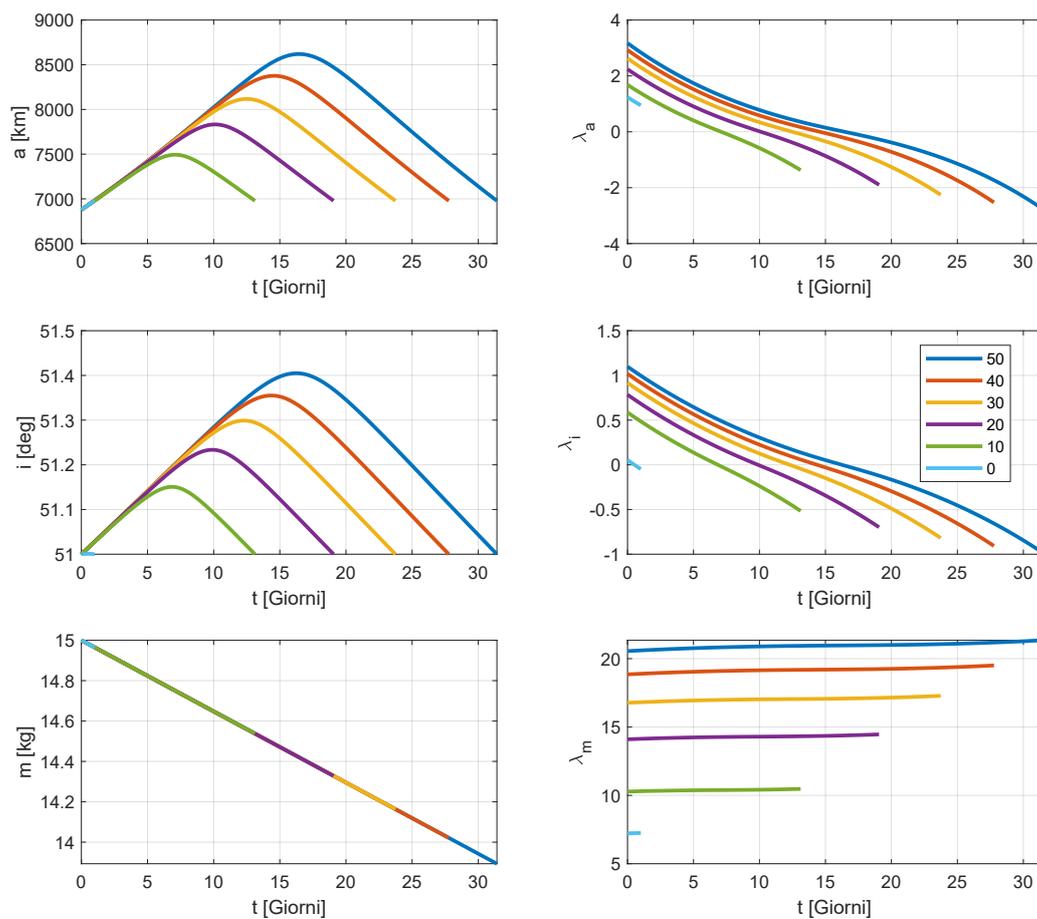
**Tabella 5.2:** Soluzione di tentativo utilizzata.

Con tale soluzione si ha la convergenza di tutti i casi entro le 160 iterazioni. L'errore ad ogni iterazione  $k$  prende in considerazione anche le condizioni al contorno della switch function ed è calcolato come:

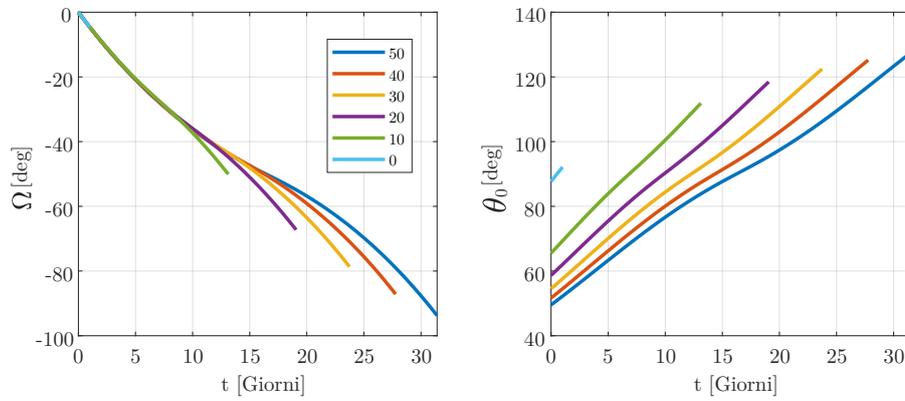
$$\epsilon_k = \sqrt{(a_k - a_f)^2 + (i_k - i_f)^2 + (\Omega_k - \Omega_f)^2 + (SF_k - SF_f)^2} \quad (5.12)$$

Dalla figura (5.1) si vede che la struttura della missione, rispetto al caso a massa costante, rimane invariata. Si ha infatti, per i  $\Delta\Omega > 0$ , una fase crescente in cui l'altitudine dello spacecraft aumenta ed una discendente con il raggiungimento della quota fissata. Tutto ciò è in linea con l'andamento della variabile aggiunta  $\lambda_a$ , la quale rappresenta la convenienza nell'aumentare o nel diminuire l'altitudine del satellite. Nello specifico il segno positivo di questa variabile indica la necessità di incrementare l'altitudine. Anche l'inclinazione non mostra variazioni rispetto al caso con massa costante, essa subisce un'escursione positiva per poi tornare al valore iniziale. L'andamento della massa è decrescente e lineare e questo è in linea con le attese in quanto si ha la costante espulsione della massa di propellente per tutta la durata della missione ( $\dot{m} = cost$ ). Si nota inoltre che valori di  $\Delta\Omega_0$  maggiori causano masse finali minori, aumentando i consumi. Ciò è dovuto a tempi maggiori di spinta.

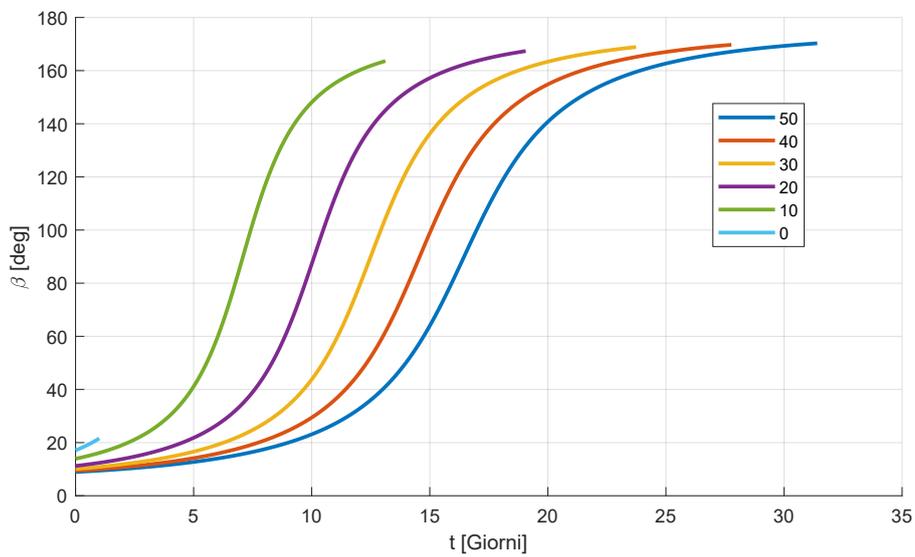
Il RAAN conserva il suo andamento decrescente dovuto allo sfruttamento dell'effetto di  $J_2$ . In figura (5.3) è riportato l'angolo di spinta il quale da un andamento coerente con la struttura di missione e, come nel caso a massa costante, si distinguono le due fasi: crescente quando  $\beta < 90^\circ$  e decrescente con  $\beta > 90^\circ$ .



**Figura 5.1:** Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore  $a$ , dell'inclinazione  $i$ , della massa  $m$  e delle relative variabili aggiunte  $\lambda_a$ ,  $\lambda_i$  e  $\lambda_m$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .



**Figura 5.2:** Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  e di  $\theta_0$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .



**Figura 5.3:** Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta  $\beta$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ .

### 5.1.1 Variazione di $\Delta a_0$

È stata condotta un'analisi anche sugli effetti causati da una diversa altitudine tra spacecraft e target e si riportano in tabella (5.3) i dati utilizzati.

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta \Omega_0$
500 km	-300 km ÷ +1500 km	51°	0°	0°	+20°

**Tabella 5.3:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.

I risultati sono riportati in tabella (5.4) e si nota che il comportamento generale di tutti i parametri è uguale al caso con massa costante; quindi sia i tempi che i  $\Delta V$  aumentano al crescere di  $\Delta a_0$ . Nelle ultime due colonne è riportato un confronto della durata totale e del  $\Delta V$  fra il caso con massa variabile e quello con massa costante. Si evince dai valori numerici che si ha una durata minore della missione per tutti i casi di  $\Delta a_0$  e ciò è dovuto ad un aumento, nel tempo, dell'accelerazione che agisce sullo spacecraft, causata dalla perdita di massa. In termini di  $\Delta V$ , al contrario, si registra una spesa maggiore.

$\Delta a$ [km]	$\Delta V$ [km/s]	$m_p$ [kg]	$t_f$ [giorni]	$t_f/(t_f)_{m=cost}$	$\Delta V/(\Delta V)_{m=cost}$
-300	0,8407	0,5060	14,3484	0,9911	1,0082
-200	0,9017	0,5420	15,3697	0,9905	1,0089
-100	0,9693	0,5819	16,5005	0,9899	1,0096
0	1,0434	0,6254	17,7340	0,9891	1,0103
100	1,1233	0,6722	19,0621	0,9882	1,0110
200	1,2087	0,7221	20,4756	0,987	1,0117
300	1,2990	0,7746	21,9646	0,9861	1,0124
400	1,3936	0,8294	23,5196	0,9849	1,0131
500	1,4921	0,8863	25,1315	0,9836	1,0139
600	1,5939	0,9448	26,7917	0,9823	1,0146
700	1,6987	1,0048	28,4927	0,9810	1,0153
800	1,8060	1,0660	30,2275	0,9796	1,0161
900	1,9156	1,1281	31,9903	0,9781	1,0169
1000	2,0270	1,1911	33,7759	0,9767	1,0176
1100	2,1401	1,2547	35,5796	0,9752	1,0184
1200	2,2547	1,3188	37,3976	0,9737	1,0192
1300	2,3704	1,3833	39,2264	0,9722	1,0199
1400	2,4872	1,4481	41,0630	0,9707	1,0207
1500	2,6049	1,5130	42,9049	0,9691	1,0215

**Tabella 5.4:** Valori del  $\Delta V$ , della massa di propellente  $m_p$  e del tempo di trasferta totale  $t_f$  in funzione della differenza di quota  $\Delta a_0$  fra spacecraft e target. Confronto del  $t_f$  e del  $\Delta V$  con il caso a massa costante.

## 5.2 Caso $\Delta\Omega_0 < 0$

Sono riportati anche i casi con  $\Delta\Omega_0$  negativi, i quali generalmente mostrano una diversa struttura di missione. In tabella (5.5) si riportano i dati dell'analisi.

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
500 km	100 km	51°	0°	0°	-50° ÷ -10°

**Tabella 5.5:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.

La soluzione di tentativo utilizzata è riportata in tabella (5.6) e si vede che, anche in questo caso, i valori di  $\lambda_a(0)$  e di  $\lambda_i(0)$  sono negativi. Il valore di  $\lambda_\Omega$  è costante e negativo (in quanto concorde con  $\Delta\Omega_0$ ) ed è stato scelto arbitrariamente.

$t_1$	$t_2$	$t_f$	$\lambda_a(0)$	$\lambda_i(0)$	$\lambda_m$	$\lambda_\Omega$
445	1340	1900	-1,21	-1,03	13	-1

**Tabella 5.6:** Soluzione di tentativo utilizzata.

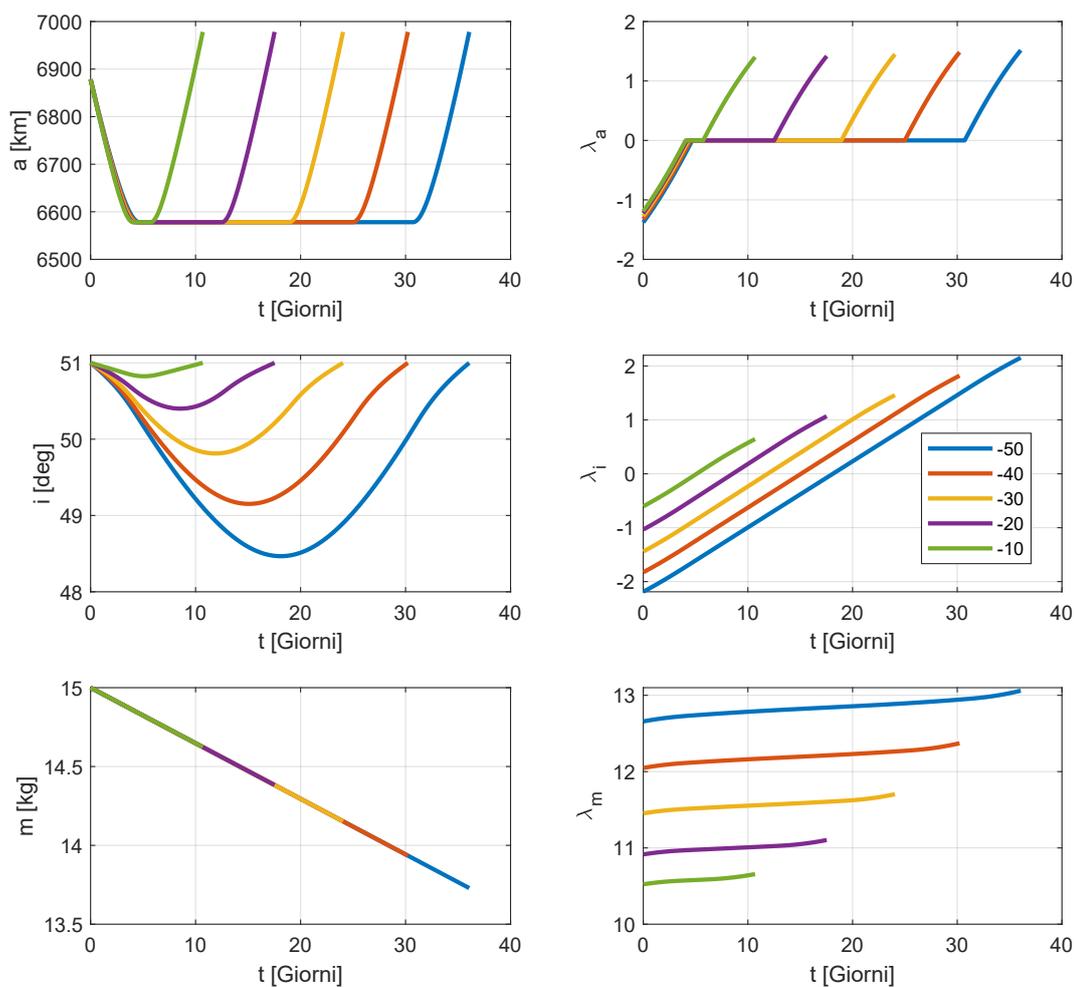
Il metodo si dimostra efficace anche in questo caso e si ha convergenza entro le 160 iterazioni per tutti i valori di  $\Delta\Omega_0$ . L'errore è calcolato come prima:

$$\epsilon_k = \sqrt{(a_k - a_f)^2 + (i_k - i_f)^2 + (\Omega_k - \Omega_f)^2 + (SF_k - SF_f)^2} \quad (5.13)$$

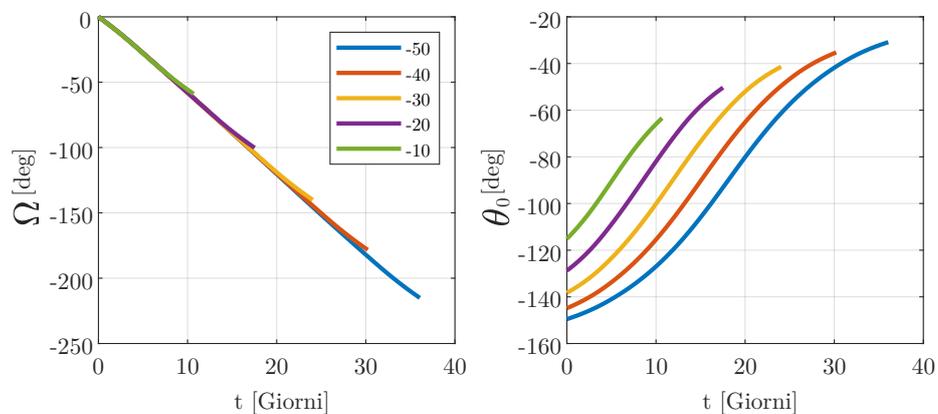
In figura (5.4) sono mostrati gli andamenti del raggio orbitale  $a$ , dell'inclinazione e della massa con le rispettive variabili aggiunte. Come nel caso a massa costante si ha una struttura di missione a tre fasi in cui il satellite raggiunge la quota minima di 200 km. La prima fase è discendente e permette allo spacecraft di trarre il massimo vantaggio dall'effetto di  $J_2$ . In seguito si mantiene la quota costante e la direzione di spinta rimane perpendicolare alla velocità. Durante l'ultima fase si aumenta l'altitudine fino a raggiungere quella del target. La massa, come ci si aspetta, diminuisce durante la missione in modo lineare seguendo la legge  $m = -(T/c) \cdot t$ .

Il RAAN è sempre decrescente, mostra concavità opposta al caso  $\Delta\Omega_0 > 0$  e raggiunge valori più alti in modulo. Si nota che per tutti i casi con  $\Delta\Omega_0$  negativo la velocità relativa  $\dot{\Omega}_{rel}$  è limitata dalla quota di 200 km.

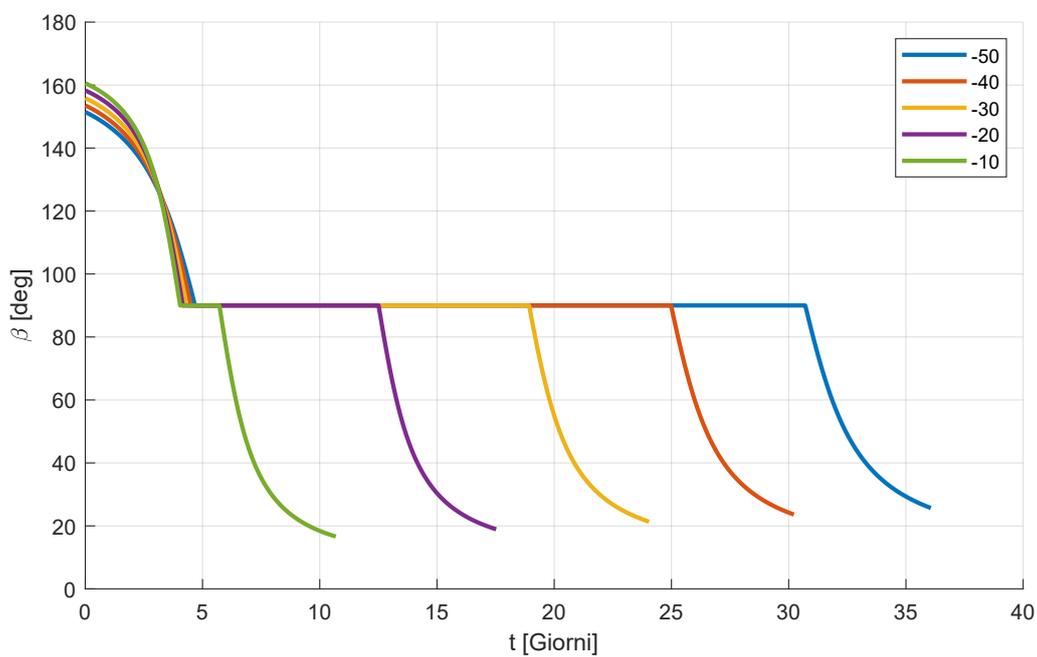
In ultimo si riporta l'angolo di spinta  $\beta$  in funzione del tempo. Anche questo risultato è coerente con quanto detto prima e mostra chiaramente le tre fasi di missione. Il tratto lineare ( $\beta = 90^\circ$ ) rende possibile il mantenimento di  $a = 200$  km variando solo l'inclinazione  $i$  e il RAAN.



**Figura 5.4:** Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore  $a$ , dell'inclinazione  $i$ , della massa  $m$  e delle relative variabili aggiunte  $\lambda_a$ ,  $\lambda_i$  e  $\lambda_m$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .



**Figura 5.5:** Andamento in funzione del tempo della longitudine del nodo ascendente  $\Omega$  e di  $\theta_0$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .



**Figura 5.6:** Andamento in funzione del tempo dell'angolo di spinta  $\beta$  per i casi in cui  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ, -50^\circ$ .

### 5.2.1 Variazione di $\Delta a_0$

Anche per  $\Delta\Omega_0 = -20$  è condotto uno studio con diversi valori di  $\Delta a_0$ , tutti gli altri parametri rimangono invariati e si riportano in tabella (5.7).

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
500 km	-300 km ÷ +1500 km	51°	0°	0°	-20°

**Tabella 5.7:** Condizioni al contorno del problema e variazione dei relativi parametri.

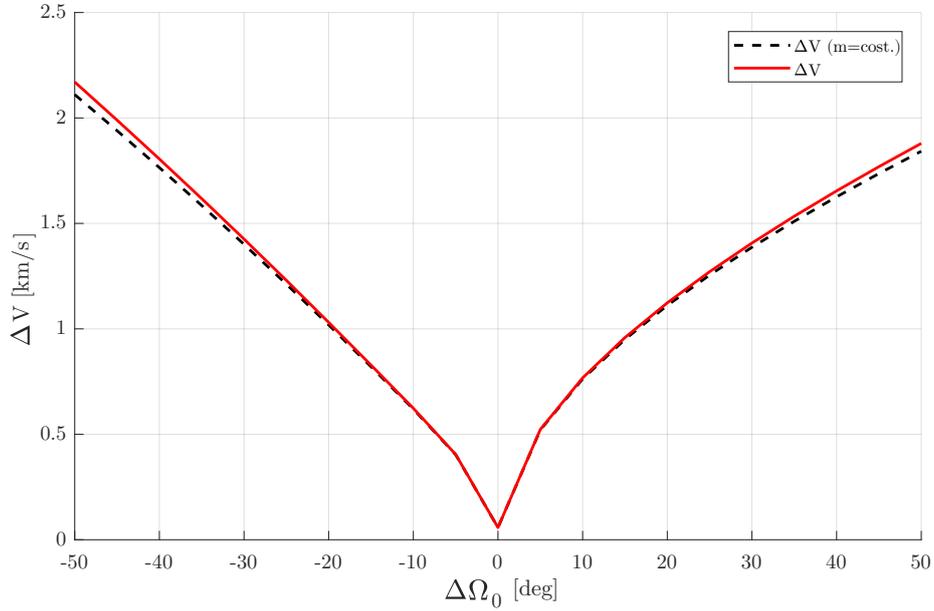
I valori di  $\Delta V$  e dei tempi di missione, riportati in tabella (5.8), hanno un andamento prima decrescente e successivamente (per  $\Delta a > 900$  km) subiscono un lieve innalzamento. Ciò è dovuto al maggior costo (in termini di  $\Delta V$ ) dell'incremento di quota rispetto al risparmio, nella variazione di  $\Omega$ , dato dall'effetto di  $J_2$ . Anche per il caso  $\Delta\Omega < 0$  i tempi globali della missione a massa variabile sono minori di quelli con massa costante, e questo vale per tutti i  $\Delta a_0$  considerati. In termini di  $\Delta V$ , come visto in precedenza, c'è un costo maggiore il quale tende a diminuire per valori maggiori di  $\Delta a_0$ .

$\Delta a$ [km]	$\Delta V$ [km/s]	$m_p$ [kg]	$t_1$ [gg]	$t_2$ [gg]	$t_f$ [gg]	$\frac{t_f}{(t_f)_{m=cost}}$	$\frac{\Delta V}{(\Delta V)_{m=cost}}$
-300	2,5277	1,4704	4,9024	41,696	41,6968	0,9659	1,0165
-200	1,8036	1,0646	4,5449	28,0334	30,1888	0,9808	1,0173
-100	1,4031	0,8349	4,3428	20,5076	23,6746	0,9872	1,0157
0	1,1716	0,7004	4,2279	15,7620	19,8621	0,9899	1,0137
100	1,0308	0,6180	4,1597	12,5094	17,5243	0,9910	1,0119
200	0,9417	0,5656	4,1174	10,1210	16,0395	0,9913	1,0104
300	0,8844	0,5318	4,0900	8,2704	15,0806	0,9912	1,0092
400	0,8476	0,5101	4,0719	6,7757	14,4646	0,9910	1,0082
500	0,8249	0,4966	4,0597	5,5291	14,0825	0,9906	1,0074
600	0,8120	0,4890	4,0516	4,4627	13,8664	0,9902	1,0067
700	0,8059	0,4854	/	/	13,7635	0,9900	1,0063
800	0,8030	0,4837	/	/	13,7154	0,9898	1,0061
900	0,8027	0,4835	/	/	13,7105	0,9896	1,0059
1000	0,8047	0,4847	/	/	13,7434	0,9894	1,0057
1100	0,8086	0,4870	/	/	13,8094	0,9891	1,0055
1200	0,8143	0,4903	/	/	13,9045	0,9888	1,0053
1300	0,8215	0,4946	/	/	14,0256	0,9885	1,0052
1400	0,8301	0,4997	/	/	14,1699	0,9882	1,0051
1500	0,8400	0,5055	/	/	14,3357	0,9879	1,0049

**Tabella 5.8:** Valori del  $\Delta V$ , della massa di propellente  $m_p$ , della durata delle prime due fasi di missione  $t_1$  e  $t_2$  e del tempo di trasferta totale  $t_f$  in funzione della differenza di quota  $\Delta a_0$  fra spacecraft e target. Confronto del  $t_f$  e del  $\Delta V$  con il caso a massa costante.

### 5.3 Confronto con il caso a massa costante

Come visto in precedenza, l'ipotesi di mantenere costante la massa (quindi  $\dot{m} = 0$ ) si rivela una buona approssimazione della realtà nel caso in cui i tempi di spinta o la perdita di massa siano piccoli. La struttura della missione non cambia e le maggiori differenze si notano in termini di  $\Delta V$  e di tempi di manovra. In figura (5.7) è riportato l'andamento del  $\Delta V$  per i due casi in funzione dei diversi valori del  $\Delta\Omega_0$ . Si vede che il caso a massa costante presenta dei  $\Delta V$  minori. Tale differenza si riduce notevolmente per  $-10^\circ < \Delta\Omega_0 < +10^\circ$ . Un risultato opposto si ha in termini di tempi di missione, dove considerando la perdita di massa si ottengono durate inferiori, come mostrato in figura (5.8). Anche in questo caso le differenze diminuiscono riducendo  $\Delta\Omega_0$ .

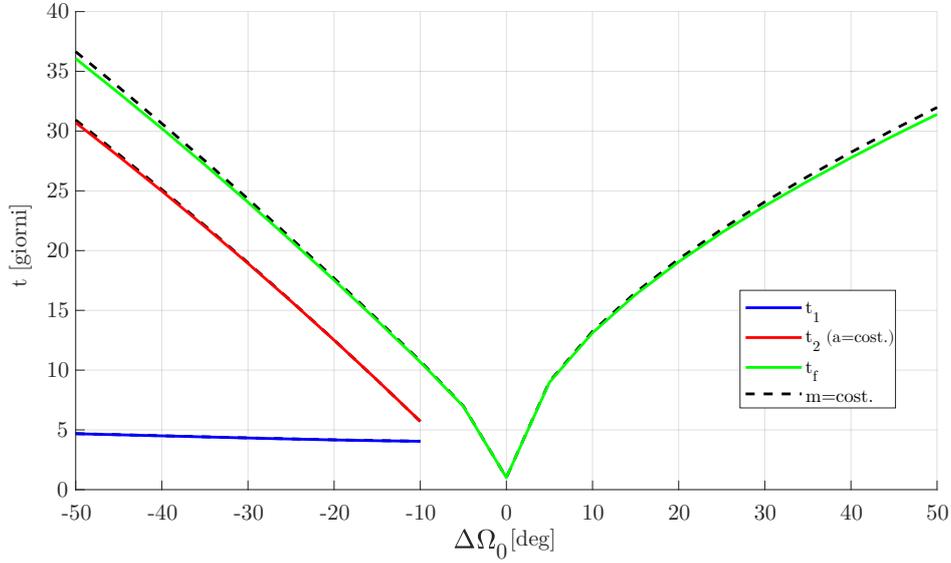


**Figura 5.7:** Andamento del  $\Delta V$  in funzione di  $\Delta\Omega_0$  per i due casi: massa variabile e massa costante.

Questo comportamento può essere giustificato valutando l'effetto di due fattori: tempo e accelerazione media. In particolare possiamo definire il  $\Delta V$  come prodotto fra l'accelerazione media dovuta alla spinta e il tempo totale di spinta:

$$\Delta V = \overline{\left(\frac{T}{m}\right)} \cdot t_f \quad (5.14)$$

È necessario valutare l'accelerazione media per entrambi i casi. Considerando che  $T = \text{cost}$ , si ha:



**Figura 5.8:** Andamento della durata delle prime due fasi di missione  $t_1$  e  $t_2$  e del tempo totale  $t_f$  in funzione di  $\Delta\Omega_0$  per i due casi: massa variabile e massa costante.

$$\begin{cases} \left(\frac{T}{m}\right) = \frac{T}{m_0} = cost \\ \left(\frac{T}{m}\right) = \frac{T}{\bar{m}} \end{cases} \quad (5.15)$$

Dove  $\bar{m}$  indica la massa media dello spacecraft che può essere valutata come:

$$\bar{m} = \frac{m_0 + m_f}{2} \quad (5.16)$$

Dalla tabella (5.9) si vede che, a causa della perdita di massa, l'accelerazione media aumenta e conseguentemente la missione termina in anticipo, con un calo del tempo finale  $t_f$ . L'effetto preponderante, però, è l'aumento dell'accelerazione media con conseguente aumento del  $\Delta V$  totale.

$$\left(\frac{T/m_0}{T/\bar{m}}\right) \cdot \frac{(t_f)_{m=cost.}}{(t_f)_{m=var.}} > 1 \Rightarrow \Delta V > \Delta V_{m=cost} \quad (5.17)$$

I risultati numerici di tale confronto sono riportati in tabella (5.9) per diversi valori del  $\Delta\Omega_0$  ed anche in questo caso si nota che le differenze si riducono per valori piccoli in modulo.

$\Delta\Omega_0$	$(\Delta V)_{m=cost.}$	$(\Delta V)_{m=var.}$	$\frac{\bar{a}_{m=cost.}}{\bar{a}_{m=var.}}$	$\frac{(\Delta t_f)_{m=cost.}}{(\Delta t_f)_{m=var.}}$	$\frac{(\Delta V)_{m=cost.}}{(\Delta V)_{m=var.}}$
-50	2.1108	2.1705	0.9576	1.0162	0.9731
-45	1.9399	1.9898	0.9610	1.0150	0.9754
-40	1.7647	1.8055	0.9645	1.0138	0.9778
-35	1.5851	1.6175	0.9681	1.0126	0.9803
-30	1.4009	1.4257	0.9718	1.0115	0.9829
-25	1.2120	1.2300	0.9755	1.0103	0.9856
-20	1.0186	1.0308	0.9794	1.0091	0.9884
-15	0.8209	0.8283	0.9834	1.0080	0.9912
-10	0.6196	0.6233	0.9874	1.0068	0.9942
-5	0.4033	0.4046	0.9918	1.0050	0.9968
0	0.0580	0.0580	0.9988	1.0013	1.0001
5	0.5207	0.5228	0.9895	1.0066	0.9960
10	0.7624	0.7676	0.9846	1.0088	0.9933
15	0.9503	0.9589	0.9808	1.0105	0.9911
20	1.1111	1.1233	0.9776	1.0120	0.9893
25	1.2550	1.2709	0.9747	1.0132	0.9876
30	1.3869	1.4068	0.9721	1.0144	0.9861
35	1.5099	1.5339	0.9697	1.0155	0.9847
40	1.6260	1.6542	0.9674	1.0165	0.9833
45	1.7364	1.7690	0.9652	1.0174	0.9820
50	1.8421	1.8793	0.9631	1.0183	0.9807

**Tabella 5.9:** Confronto di  $\Delta V$ , accelerazione media e durata di missione per i due casi: massa costante e massa variabile.

## 5.4 Controllo della spinta

Fin ora è stato analizzato il caso di ottimizzazione del tempo considerando la propulsione costante e sempre attiva durante la missione. Un possibile controllo sulla spinta è dato dalla possibilità di accendere o spegnere il propulsore per risparmiare carburante. Questa analisi può essere condotta attraverso la valutazione della switch function  $SF$  ed in particolare dalla valutazione del suo segno. La  $SF$  è definita come la derivata dell' Hamiltoniano rispetto alla forza propulsiva  $T$  quindi:

$$SF = \frac{\partial H}{\partial T} \quad (5.18)$$

$$H = H' + SF \cdot T \quad (5.19)$$

Dove in  $H'$  sono contenuti i termini che non dipendono dalla spinta, come ad esempio  $\dot{\Omega}_{J_2}$ . Al fine di massimizzare l'Hamiltoniana  $H$ , per il principio di Pontryagin, si ha che il controllo ottimale per la spinta è di tipo bang-bang e quindi:

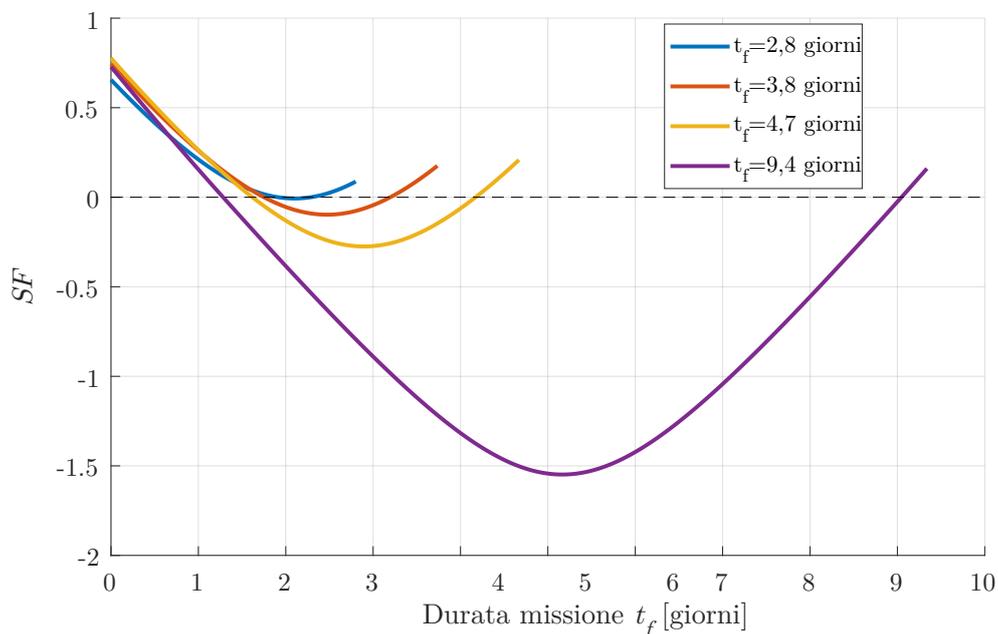
$$T = \begin{cases} T_{max} & \text{per } SF > 0 \\ 0 & \text{per } SF < 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

Una struttura di missione che comprende una fase non propulsa presenta una durata della missione maggiore rispetto ad una con propulsione sempre attiva. Tempi di trasferta maggiori sono giustificati da un guadagno in termini di massa finale e quindi di propellente. Per ogni specifica durata di missione si hanno archi di spinta di durata differente valutati, come detto prima, attraverso la  $SF$ . Nelle figure (5.9), (5.10) e (5.11) è riportato l'andamento della  $SF$  in funzione del tempo nei casi in cui la missione ha durate  $t_f$  sempre maggiori. La scelta del tempo finale, per questo tipo di analisi, è arbitraria ed è imposta a priori. I dati sono riportati in tabella (5.10).

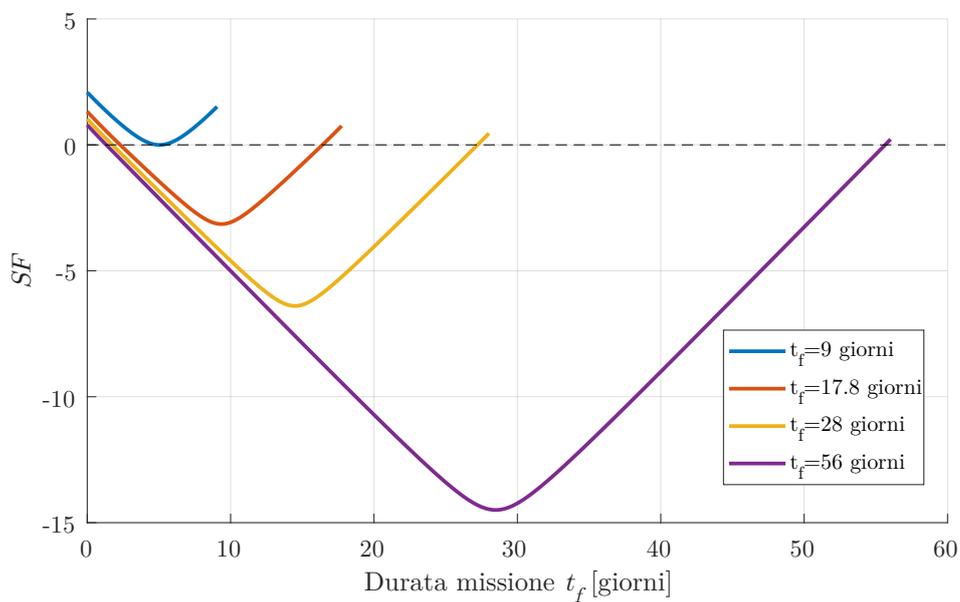
$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta \Omega_0$
500 km	100 km	51°	0°	0°	[0,6°; 5°; 20°]

**Tabella 5.10:** Condizioni al contorno utilizzate per la valutazione della  $SF$ .

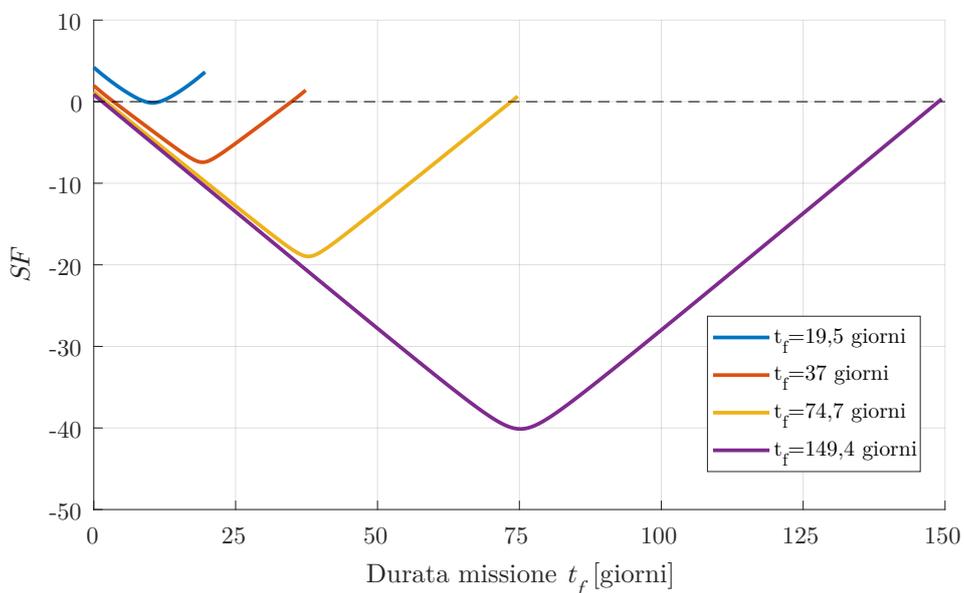
Si vede che aumentando il tempo disponibile per ultimare la manovra, la durata della fase non propulsa aumenta e questo incide sui consumi.



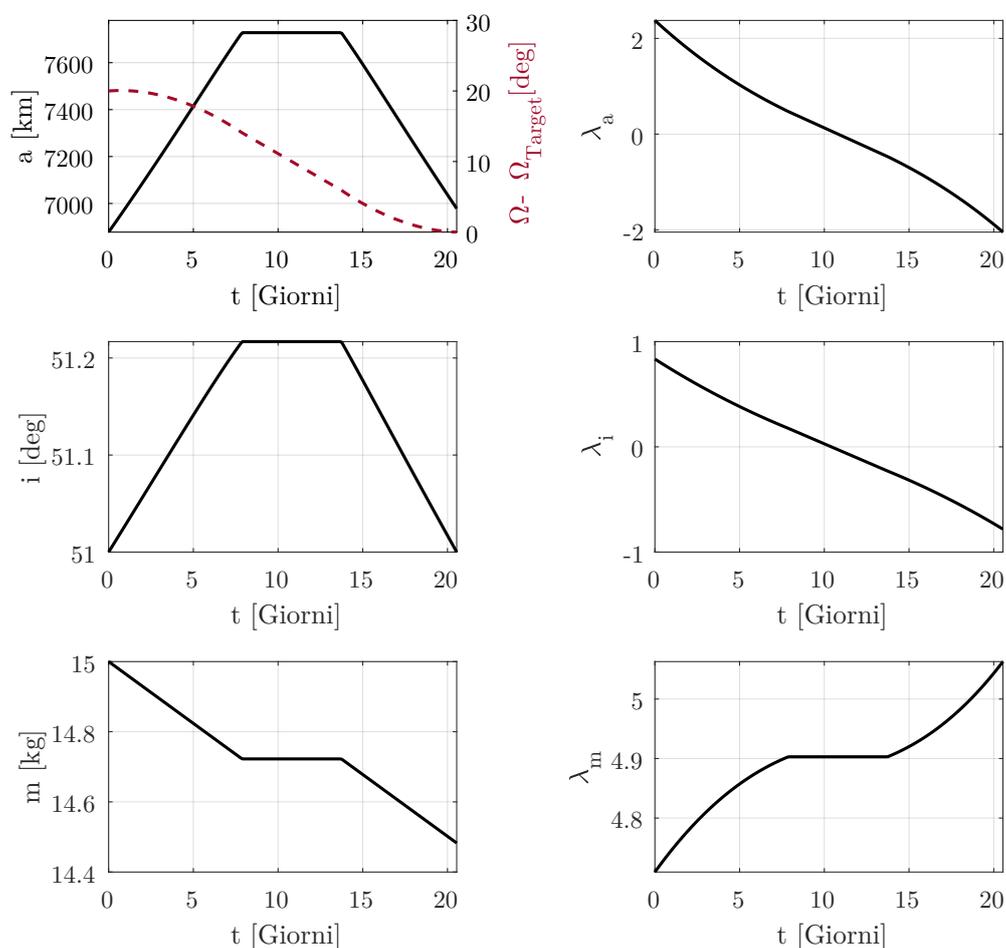
**Figura 5.9:** Andamento della switch function  $SF$  in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso  $\Delta \Omega_0 = 0,6^\circ$ .



**Figura 5.10:** Andamento della switch function  $SF$  in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso  $\Delta\Omega_0 = 5^\circ$ .



**Figura 5.11:** Andamento della switch function  $SF$  in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ .



**Figura 5.12:** Evoluzione durante la missione del semiasse maggiore  $a$ , dell'inclinazione  $i$ , della massa  $m$  e delle relative variabili aggiunte  $\lambda_a$ ,  $\lambda_i$  e  $\lambda_m$  per il caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100\text{km}$ ,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ . Nella prima sottofigura è riportato anche l'andamento della differenza di RAAN istantanea fra spacecraft e target.

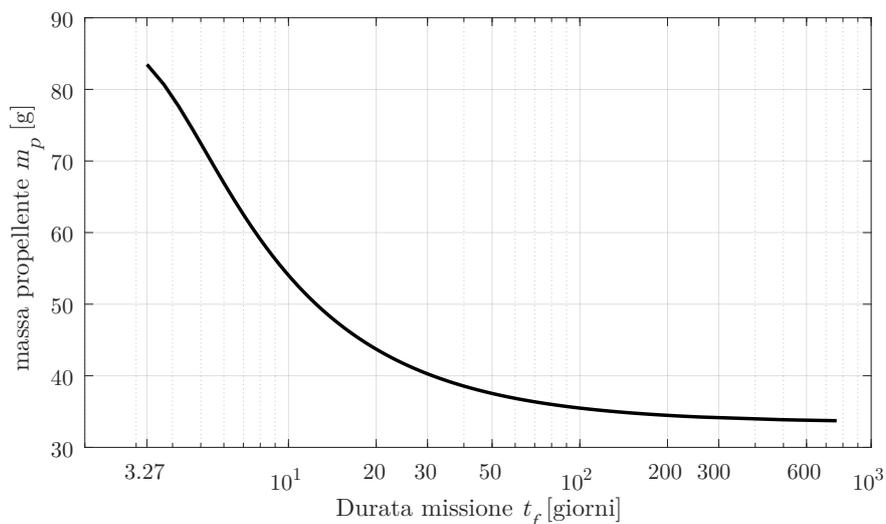
Analizzando la struttura di missione nel dettaglio si vede che, nel caso  $\Delta\Omega_0 > 0$ , la prima fase propulsa ha lo scopo di incrementare la quota dello spacecraft rendendo meno efficace l'effetto di  $J_2$  sullo s/c ed incrementando la velocità angolare  $\dot{\Omega}_{rel}$  fra i due piani orbitali. Successivamente si nota la fase non propulsa identificata dall'andamento costante di tutti i parametri. In questo caso l'unico effetto ad agire è quello di  $J_2$  che riduce la differenza  $\Delta\Omega$  fra i due satelliti, come si vede in figura (5.12). Ed infine si ha l'ultima fase con propulsore acceso che ha la funzione principale di ridurre la quota del satellite fino a quella del target. L'inclinazione dopo un'escursione positiva torna al valore iniziale e l'andamento delle variabili aggiunte è in linea con la struttura generale.

### 5.4.1 Valutazione della massa di propellente per $\Delta\Omega \geq 0^\circ$

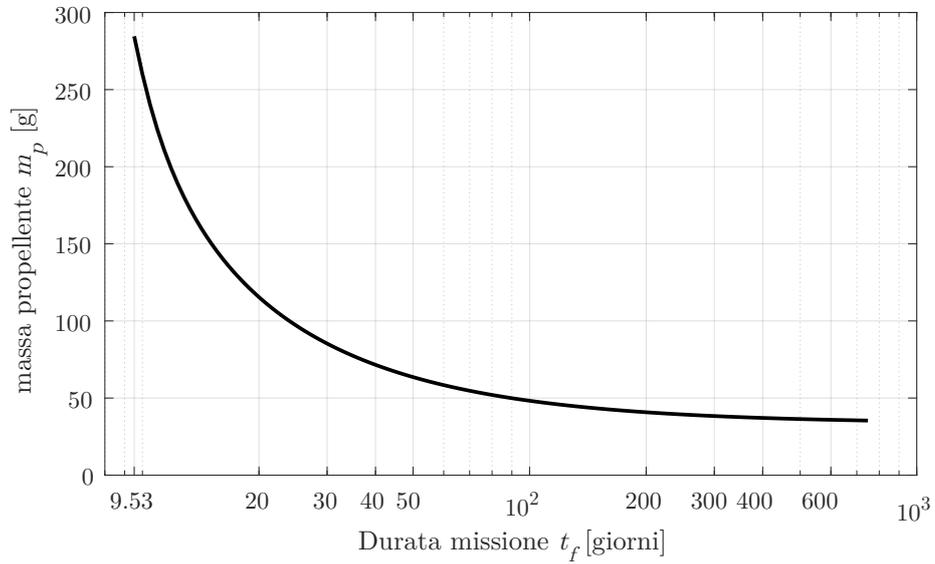
Nelle figure (5.13), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) ed (5.18) si riporta la massa di propellente in funzione della durata della missione. Si nota che il risultato è in linea con le attese infatti aumentando il tempo disponibile per il completamento della manovra si ha una riduzione del propellente necessario. I casi analizzati vedono differenti valori del  $\Delta\Omega_0$  per coprire un maggior numero di casi. Il comportamento generale è lo stesso per tutti i casi, ciò che cambia è la quantità di propellente e i tempi. Si nota inoltre che si ha un grande risparmio di carburante fino a durate della missione pari a circa dieci volte la durata minima, mentre un ulteriore incremento del tempo finale non comporta un grande vantaggio. Tutte le analisi sono state condotte fino ad un tempo finale di circa 800 giorni ed in ciascuna è stato riportato il tempo minimo risultante dall'ottimizzazione. Infine in figura (5.19) si riporta un confronto visivo dell'effetto del  $\Delta\Omega_0$  sui consumi di propellente in funzione della durata di missione.

$a_0$	$\Delta a_0$	$i_0$	$\Delta i_0$	$\Omega_0$	$\Delta\Omega_0$
500 km	100 km	$51^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$[0,6^\circ; 5^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 50^\circ]$

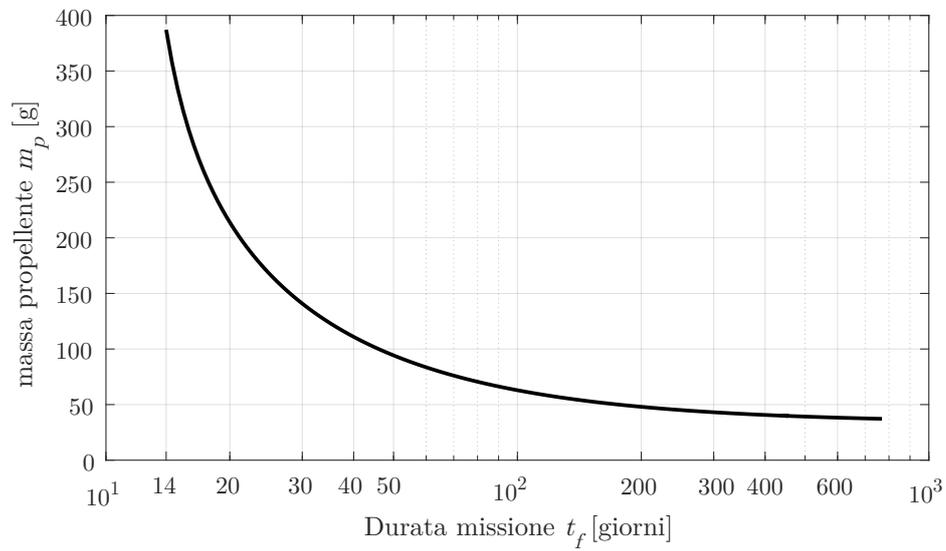
**Tabella 5.11:** Condizioni al contorno utilizzate per la valutazione della massa di propellente  $m_p$ .



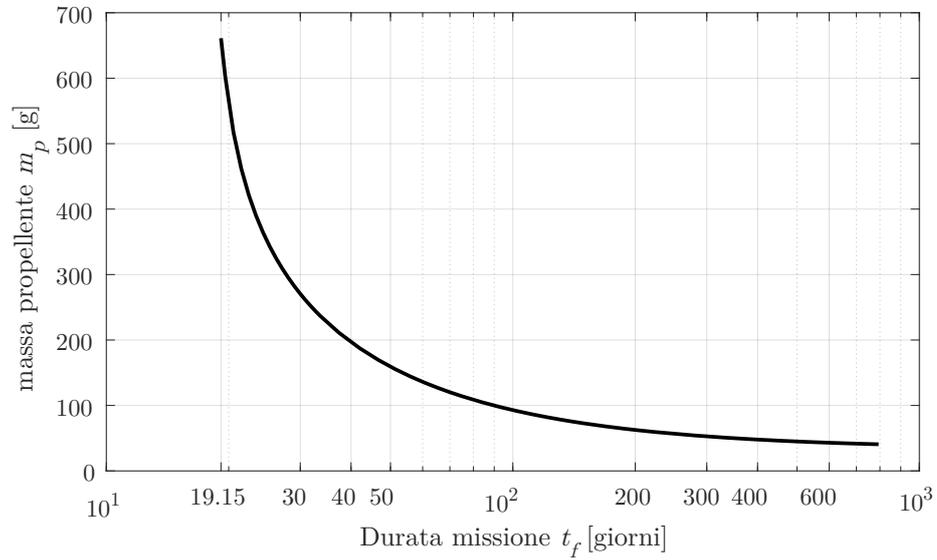
**Figura 5.13:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = 0,6^\circ$ .



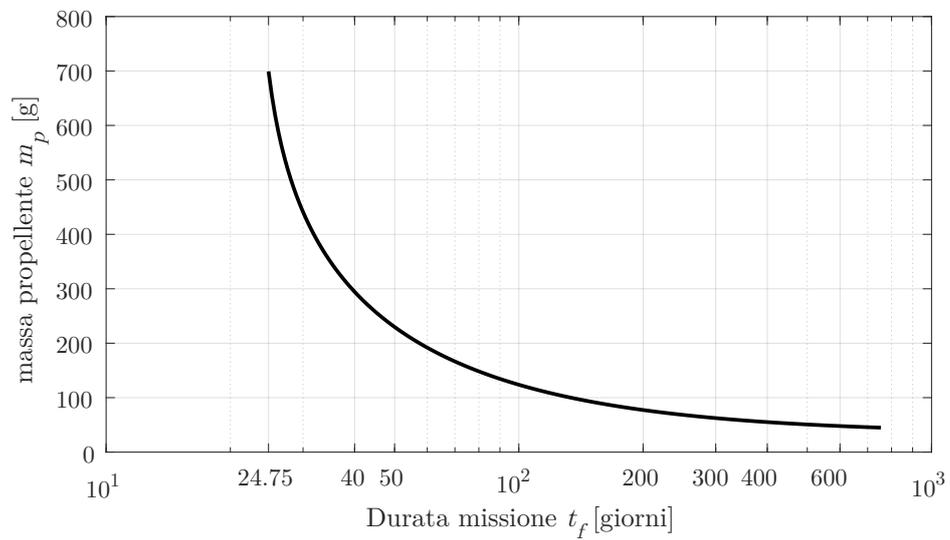
**Figura 5.14:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = 5^\circ$ .



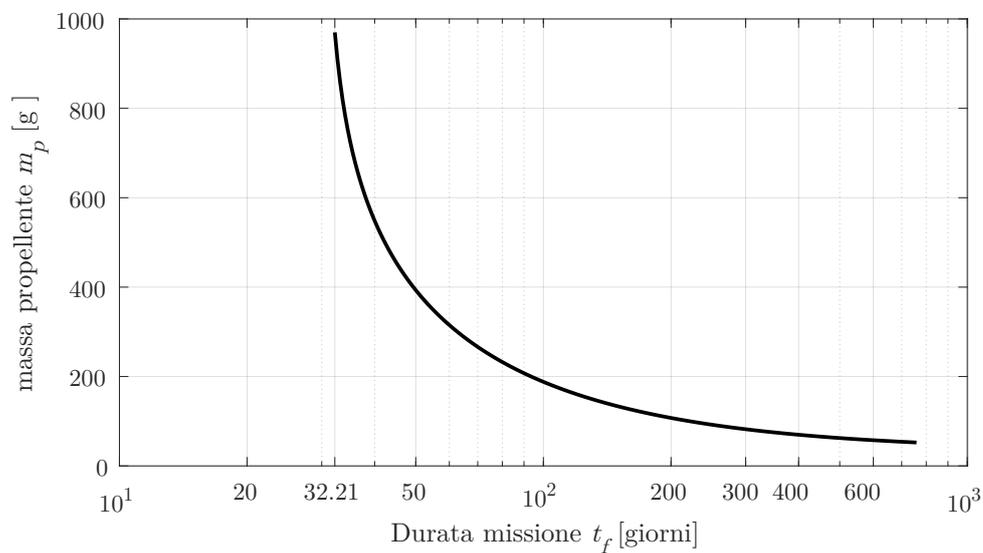
**Figura 5.15:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = 10^\circ$ .



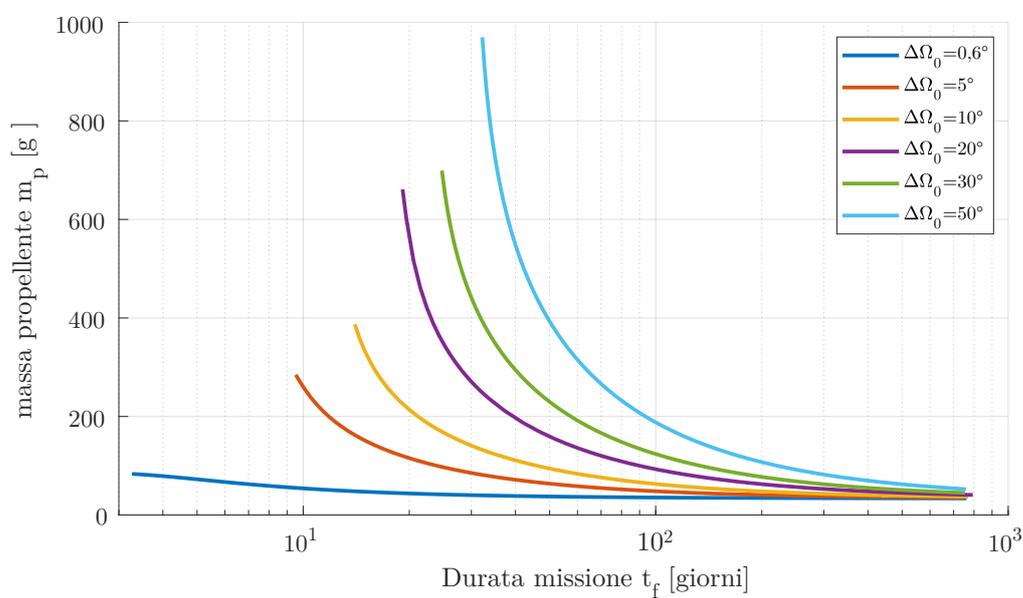
**Figura 5.16:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ .



**Figura 5.17:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = 30^\circ$ .



**Figura 5.18:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0=50^\circ$ .



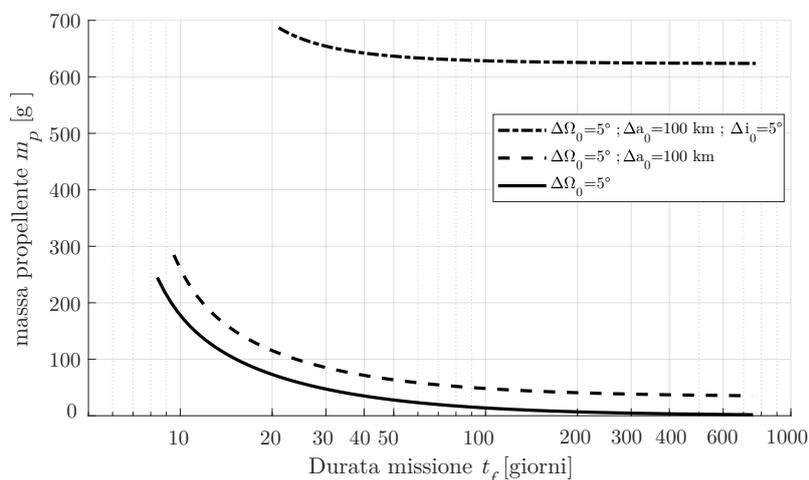
**Figura 5.19:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per diversi valori della differenza iniziale di RAAN.

### 5.4.2 Variazione dei parametri orbitali e confronto per $\Delta\Omega \geq 0^\circ$

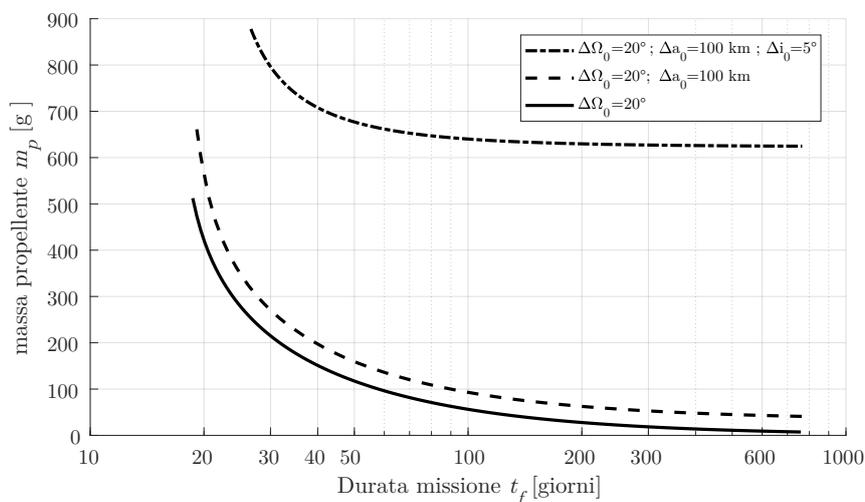
Si confrontano gli andamenti della massa di propellente in funzione della durata di missione per trasferte orbitali con target differenti. I casi presi in esame sono tre:

1. Variazione del solo RAAN:  $\Delta\Omega_0 \neq 0$ ,  $\Delta a_0 = 0$  e  $\Delta i_0 = 0$
2. Variazione combinata di RAAN e altitudine:  $\Delta\Omega_0 \neq 0$ ,  $\Delta a_0 \neq 0$  e  $\Delta i_0 = 0$
3. Variazione combinata di RAAN, altitudine e inclinazione:  $\Delta\Omega_0 \neq 0$ ,  $\Delta a_0 \neq 0$  e  $\Delta i_0 \neq 0$

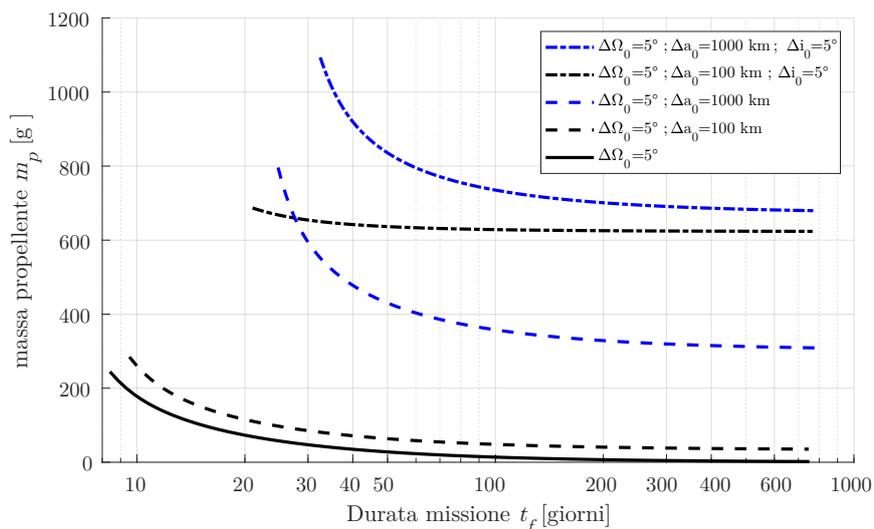
Inoltre il confronto fra le missioni è effettuato per due casi diversi del  $\Delta\Omega_0$ . In figura (5.20) è riportato il caso con piccola variazione di RAAN e si vede che le due curve relative ai casi che non prevedono la variazione di inclinazione hanno circa lo stesso andamento con la differenza che, fissata la durata di missione, il caso con variazione di altitudine mostra consumi maggiori. La curva che descrive la variazione combinata di tutti i parametri mostra consumi nettamente più elevati inoltre la riduzione di massa di propellente che si può ottenere è inferiore ai casi precedenti. Tutte e tre le curve presentano dei limiti quasi asintotici per durate elevate, ciò è visibile dal progressivo appiattimento delle tre curve. I valori della massa di propellente identificati da questi limiti rappresentano i consumi delle manovre su cui l'effetto  $J_2$  non porta vantaggi e quindi la variazione di altitudine e di inclinazione. Infine in figura (5.20) è riportato un confronto con i casi in cui la variazione di altitudine iniziale è maggiore, i risultati sono in linea con le attese infatti maggiori variazioni di altitudine comportano uno spostamento delle curve verso consumi maggiori. Inoltre si nota come l'incidenza del cambio di inclinazione sia minore con l'aumentare dell'altitudine.



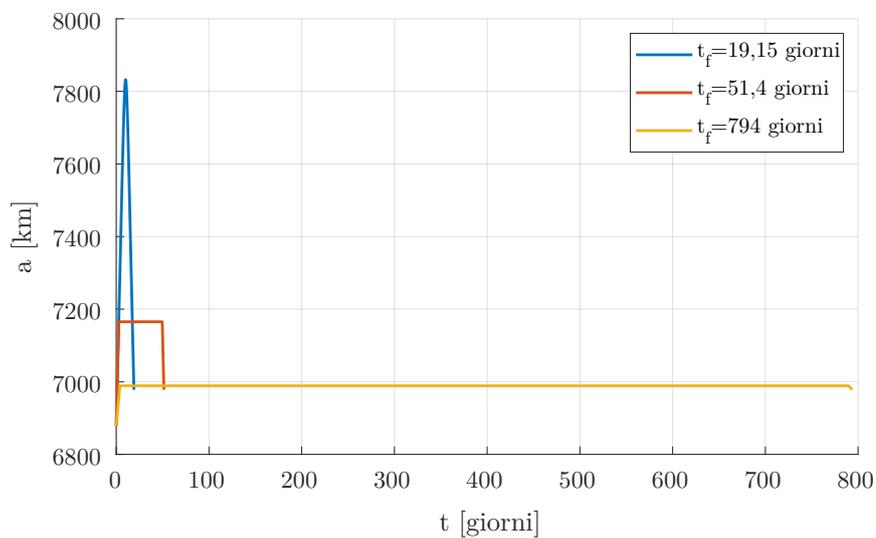
**Figura 5.20:** Confronto dell'andamento della massa di propellente in funzione della durata di missione per tre casi: variazione del solo RAAN, variazione combinata di RAAN e altitudine ed infine variazione combinata di tutti i parametri.



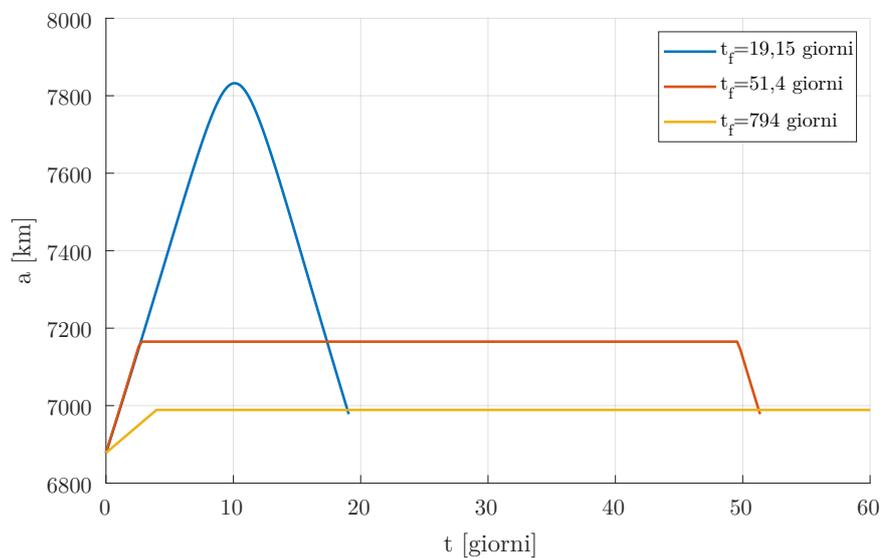
**Figura 5.21:** Confronto dell'andamento della massa di propellente in funzione della durata di missione per tre casi: variazione del solo RAAN, variazione combinata di RAAN e altitudine ed infine variazione combinata di tutti i parametri.



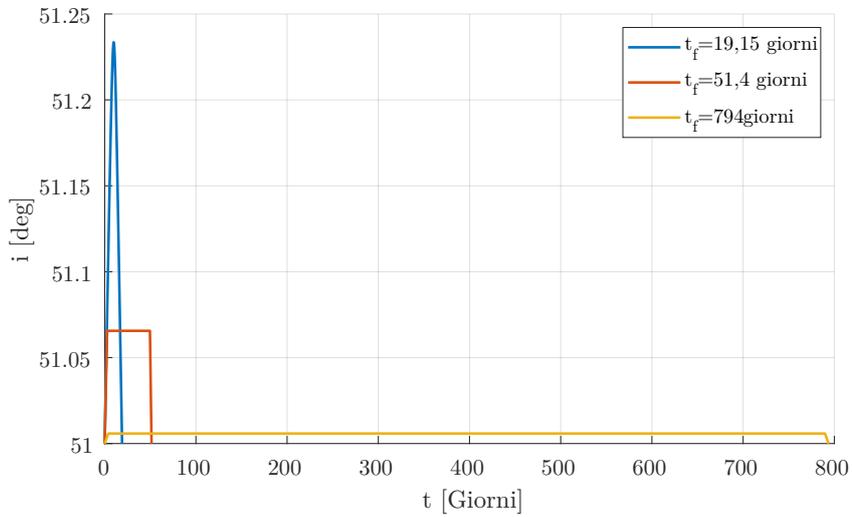
**Figura 5.22:** Effetto dovuto all'incremento di  $\Delta a_0$  sulle tipologie di missione con variazione combinata dei parametri orbitali.



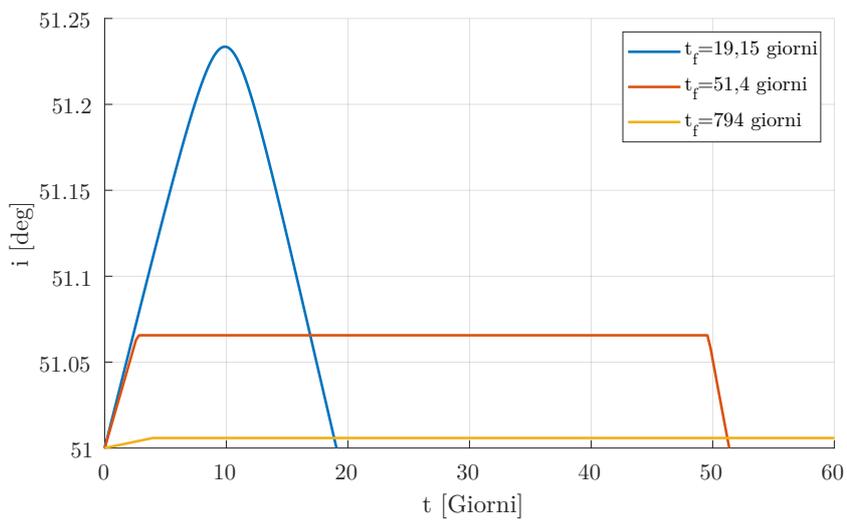
**Figura 5.23:** Andamento del semiasse maggiore nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



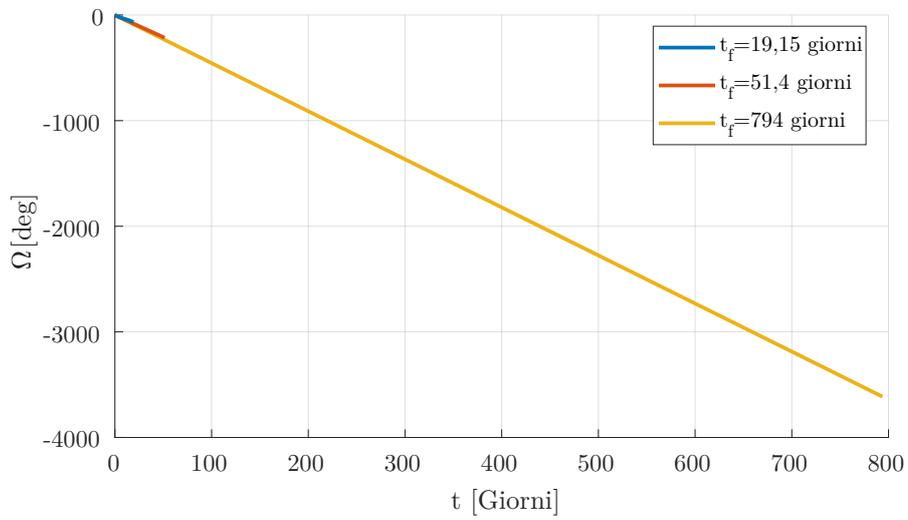
**Figura 5.24:** Ingrandimento della figura (5.23). Andamento del semiasse maggiore nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



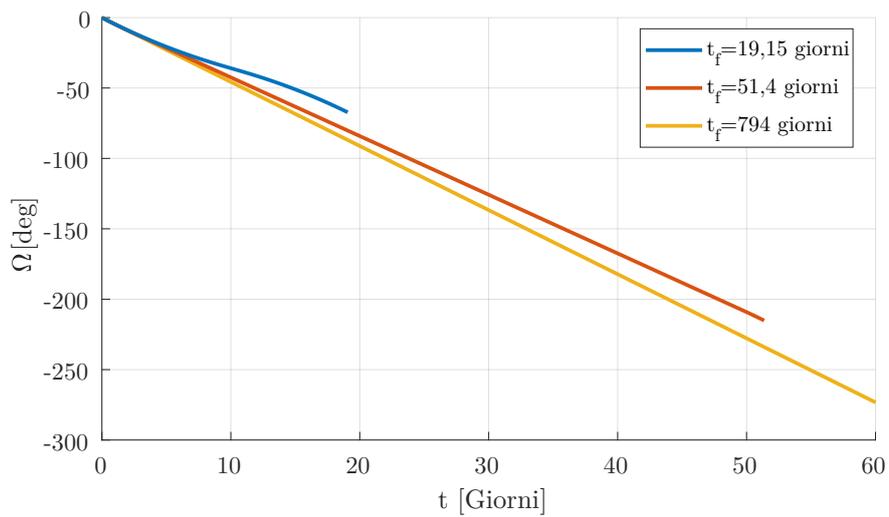
**Figura 5.25:** Andamento dell'inclinazione nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



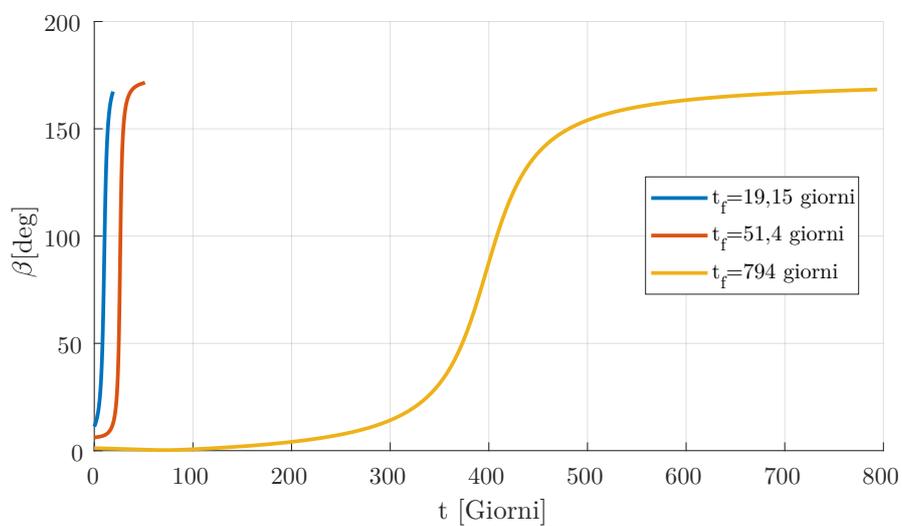
**Figura 5.26:** Ingrandimento della figura (5.25). Andamento dell'inclinazione nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



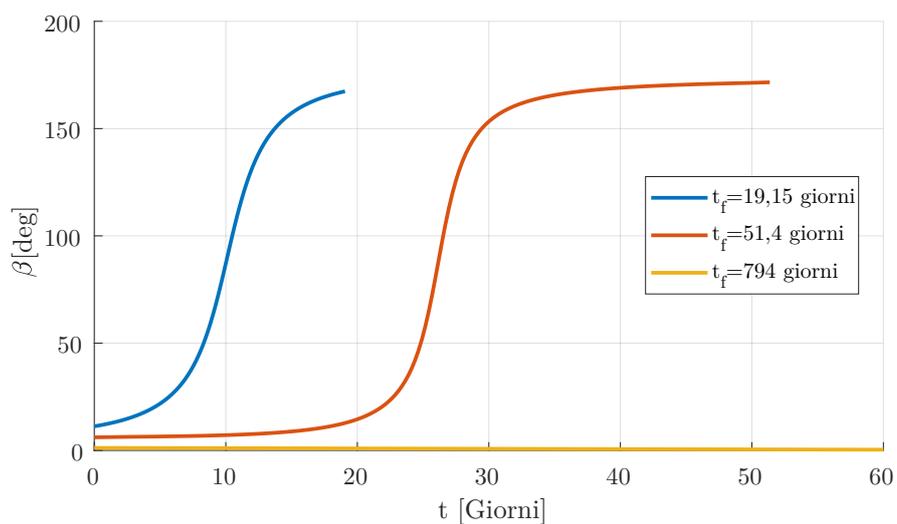
**Figura 5.27:** Andamento del RAAN nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



**Figura 5.28:** Ingrandimento della figura (5.27). Andamento del RAAN nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



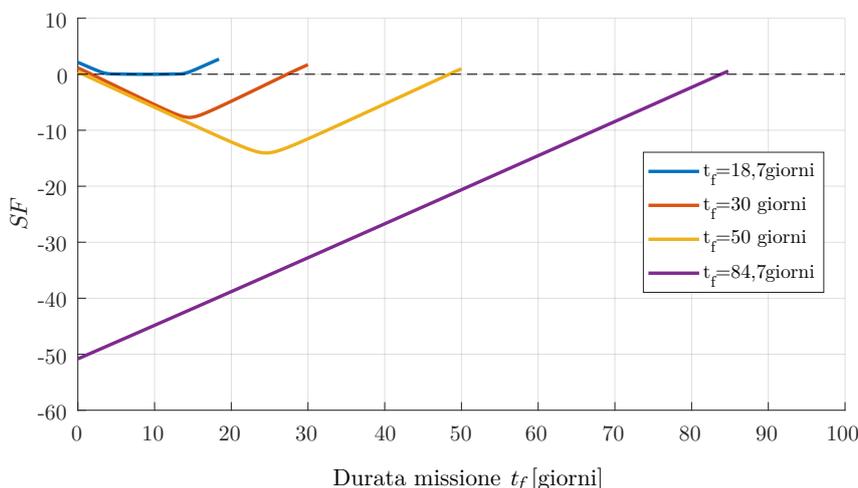
**Figura 5.29:** Andamento dell'angolo di spinta nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



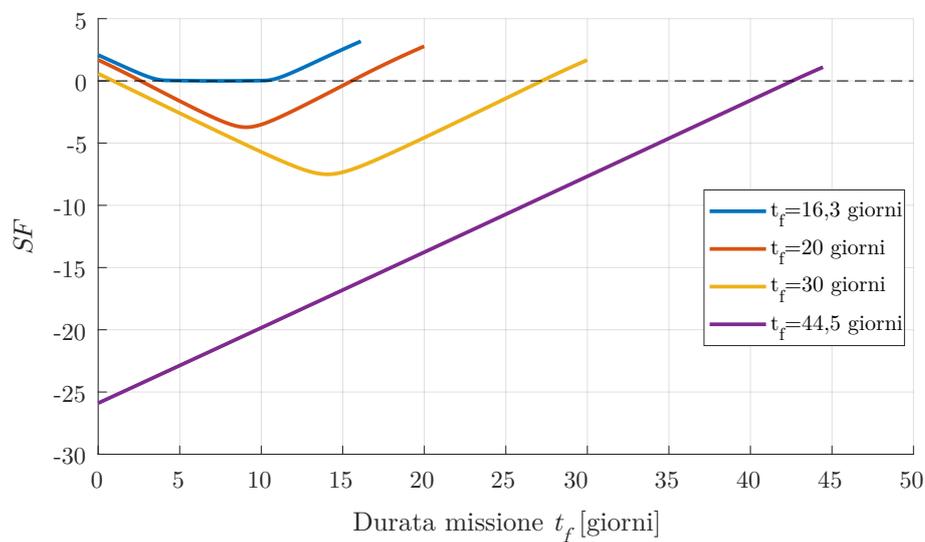
**Figura 5.30:** Ingrandimento della figura (5.29). Andamento dell'angolo di spinta nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = 20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .

### 5.4.3 Valutazione della $SF$ e della massa di propellente per $\Delta\Omega_0 < 0^\circ$

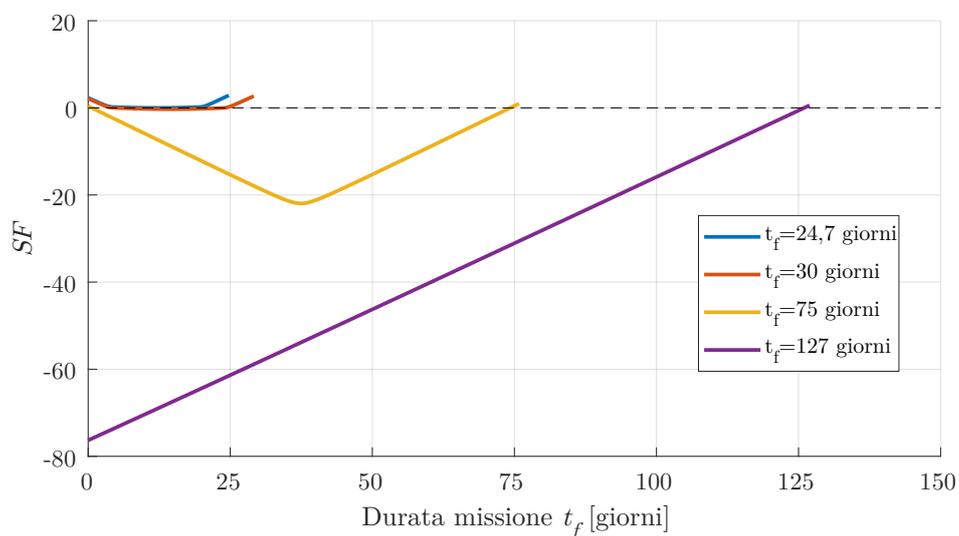
Un'analisi simile è stata condotta anche per i casi con una differenza di RAAN iniziale negativa. In tutti i casi riportati nelle figure (5.31), (5.32), (5.33) e (5.34) si nota che la *switching function* parte con segno positivo, successivamente assume segno negativo ed infine ritorna positiva. Questo vale per tutte le durate di missione eccetto quella limite per la quale la  $SF$  parte negativa ed infine assume segno positivo. Tali andamenti indicano che la struttura della missione può essere composta da un numero diverso di fasi: tre fasi o due fasi. Nel primo caso si ha una fase propulsa in cui lo s/c riduce la quota, successivamente una fase non propulsa di attesa, durante la quale l'effetto  $J_2$  opera sul cambio di piano ed infine una fase propulsa al fine di raggiungere l'altitudine del target. Nel secondo caso, invece, la prima fase non è propulsa e si attende il cambio di piano ad opera di  $J_2$  per poi attivare la propulsione al fine di raggiungere l'altitudine del target; questa è la soluzione che prevede il minor consumo di propellente ma è possibile solo nel caso ci sia disponibilità in termini di tempo. Le fasi di missione sono riportate nelle figure (5.40), (5.41), (5.42) e (5.43). Si vede dalle figure (5.35), (5.36), (5.37) e (5.38) che anche in questo caso con l'aumentare della durata di missione si riduce la massa di propellente necessario a prescindere dal valore di  $\Delta\Omega_0$  e ciò è giustificato, come detto in precedenza, da un cambio di altitudine sempre minore. Per  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$  è riportato anche un confronto con un cambio di quota maggiore e si vede come in questo caso, a parità di durata, i costi siano inferiori; questo accade perchè il target è meno soggetto all'effetto  $J_2$  e quindi il cambio di piano (dovuto a  $J_2$ ) avviene più rapidamente. Un'ultima osservazione è fatta sulla minima massa di propellente necessaria, la quale è uguale per tutti i casi analizzati (fissato il  $\Delta a_0$ ) a prescindere dalla differenza di RAAN iniziale e questo perchè l'unica manovra che si attua è relativa al cambio di quota mentre il cambio di piano è interamente compiuto da  $J_2$ , il quale in questo caso tende ad avvicinare i piani orbitali.



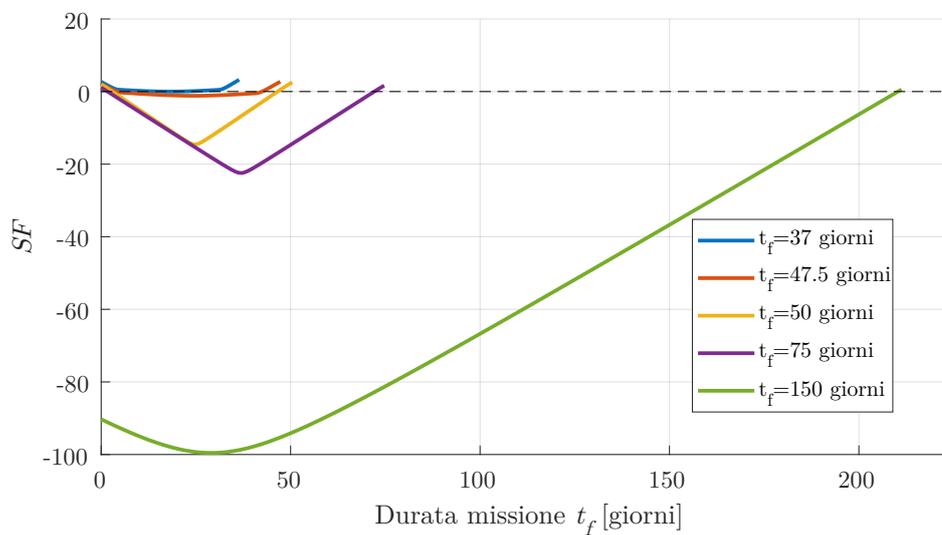
**Figura 5.31:** Andamento della switch function  $SF$  in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ .



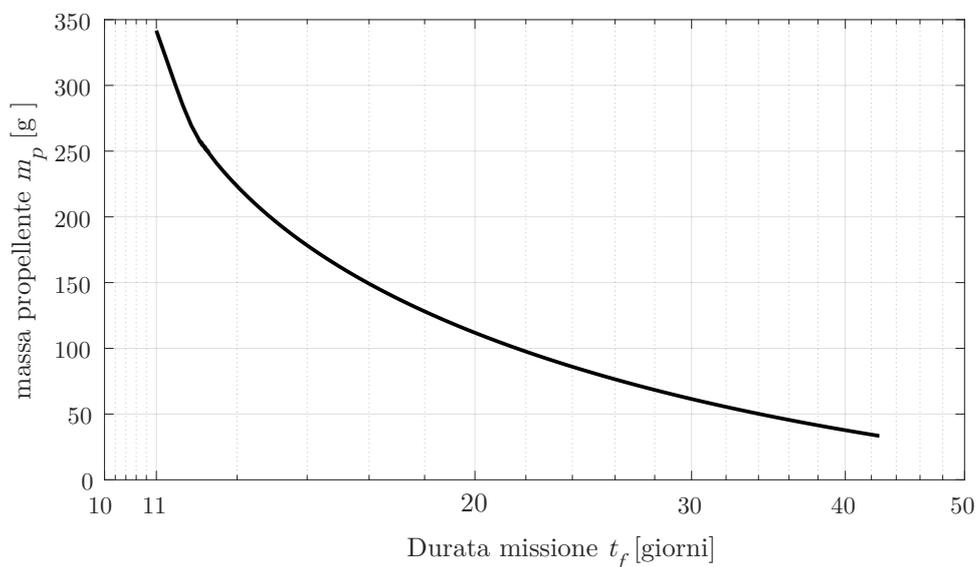
**Figura 5.32:** Andamento della switch function  $SF$  in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 200$  km.



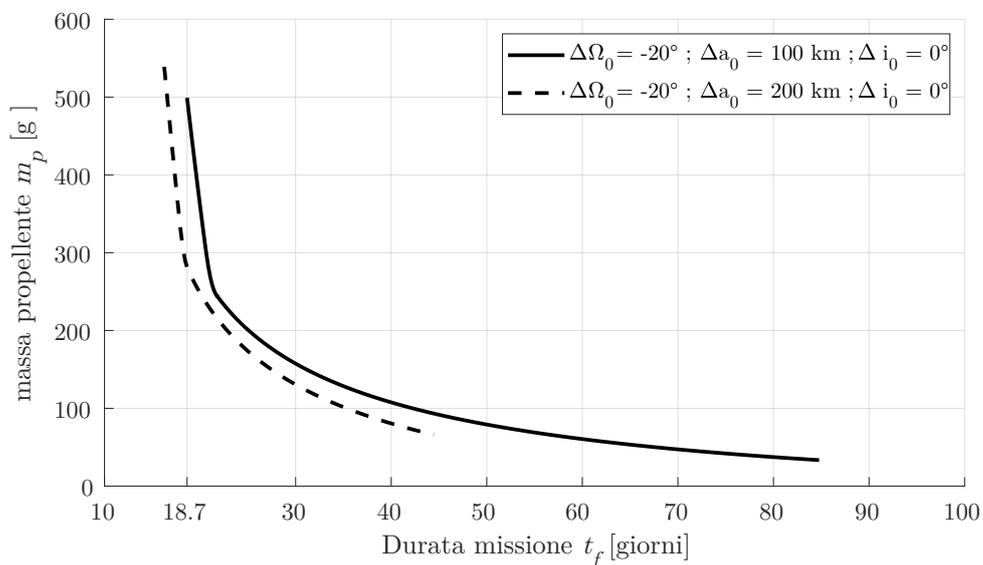
**Figura 5.33:** Andamento della switch function  $SF$  in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso  $\Delta\Omega_0 = -30^\circ$ .



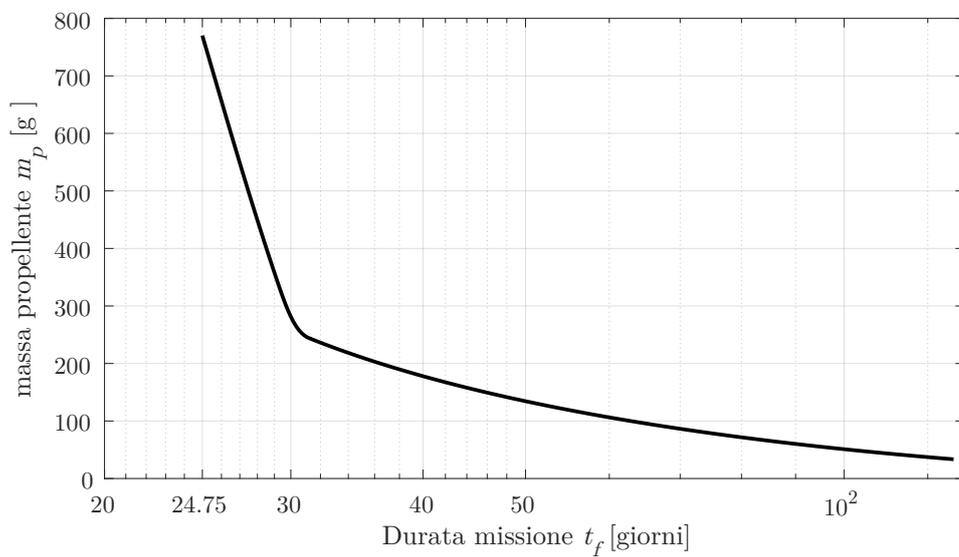
**Figura 5.34:** Andamento della switch function  $SF$  in funzione del tempo per missioni di durata differente. Caso  $\Delta\Omega_0 = -50^\circ$ .



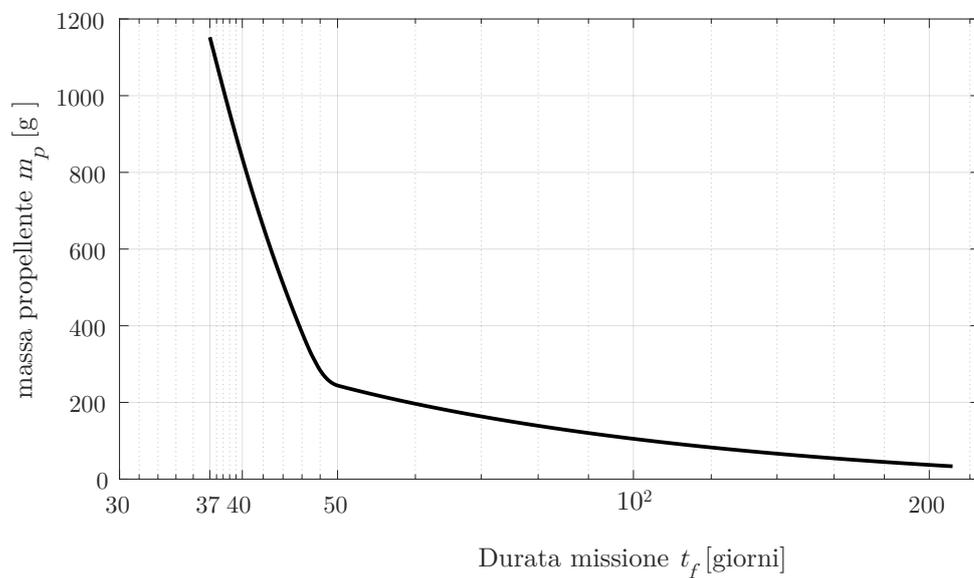
**Figura 5.35:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = -10^\circ$ .



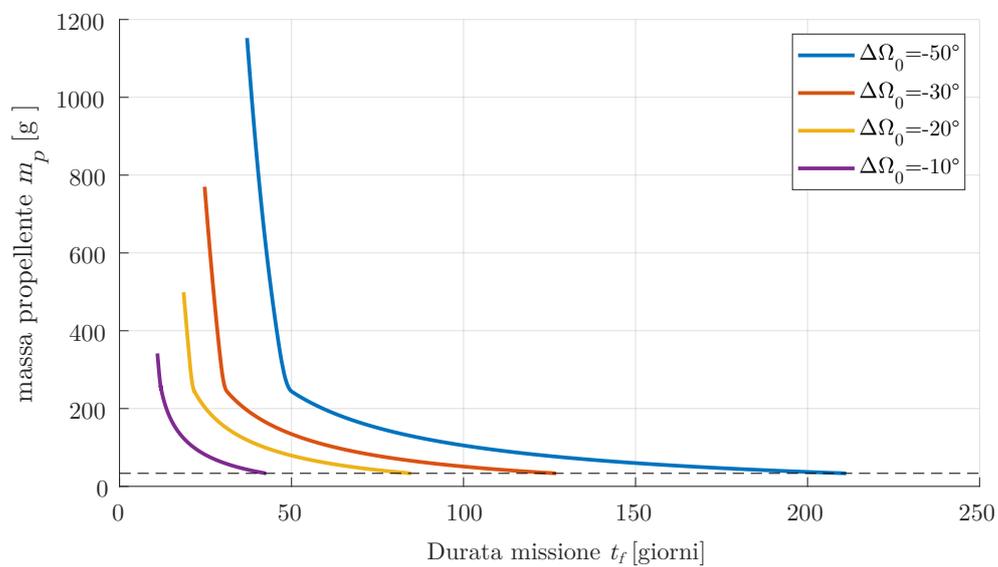
**Figura 5.36:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ .



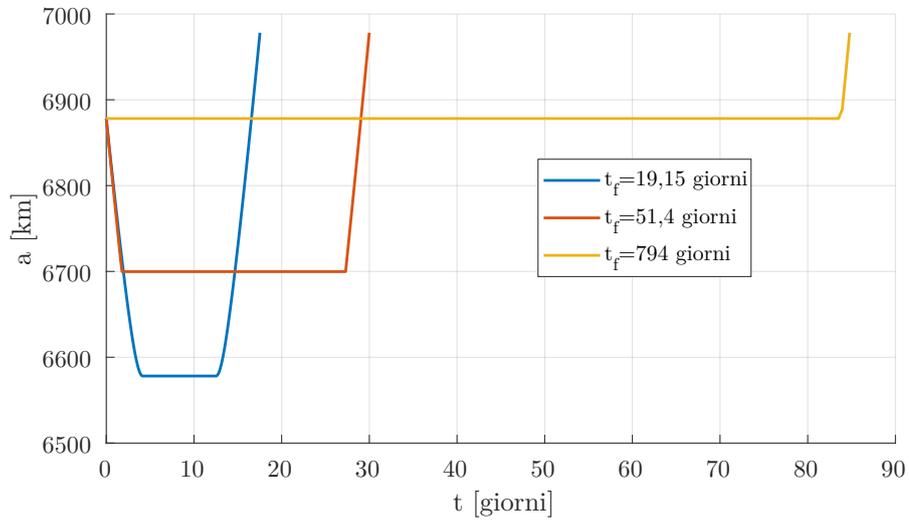
**Figura 5.37:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = -30^\circ$ .



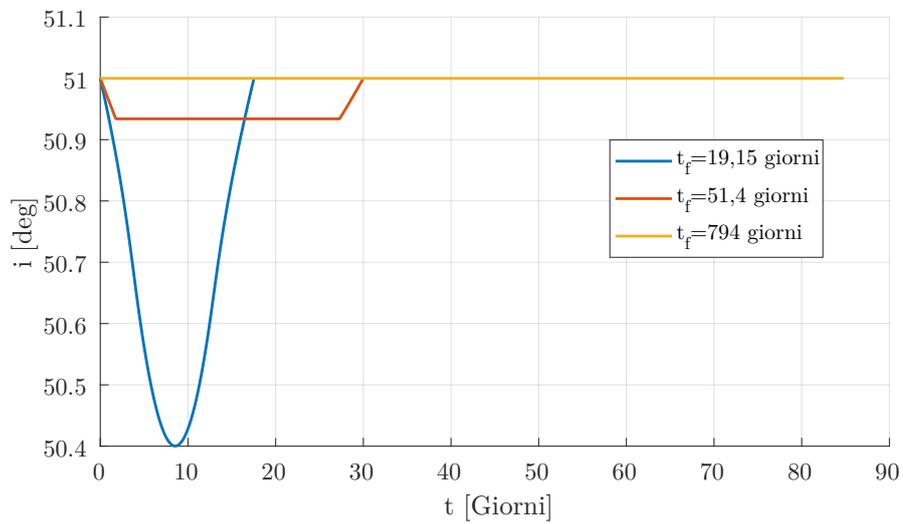
**Figura 5.38:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per il caso  $\Delta\Omega_0 = -50^\circ$ .



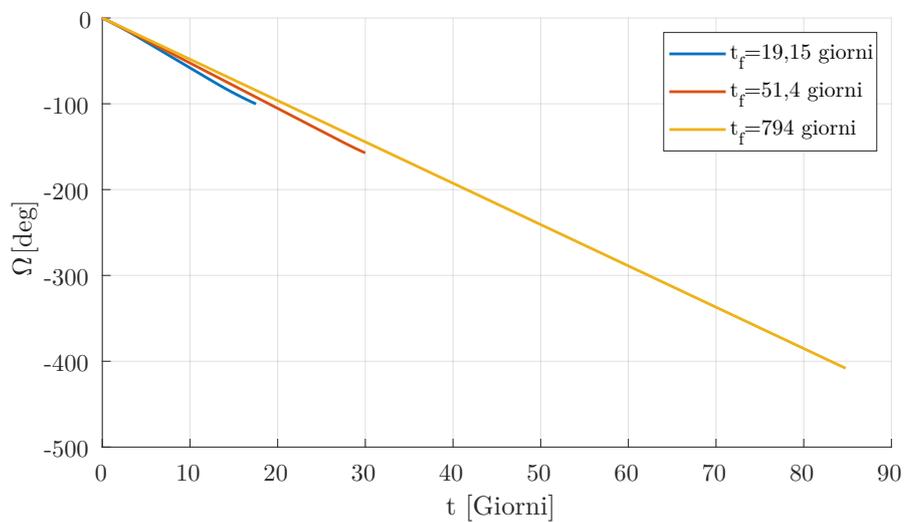
**Figura 5.39:** Massa di propellente in funzione della durata di missione per diversi valori della differenza iniziale di RAAN.



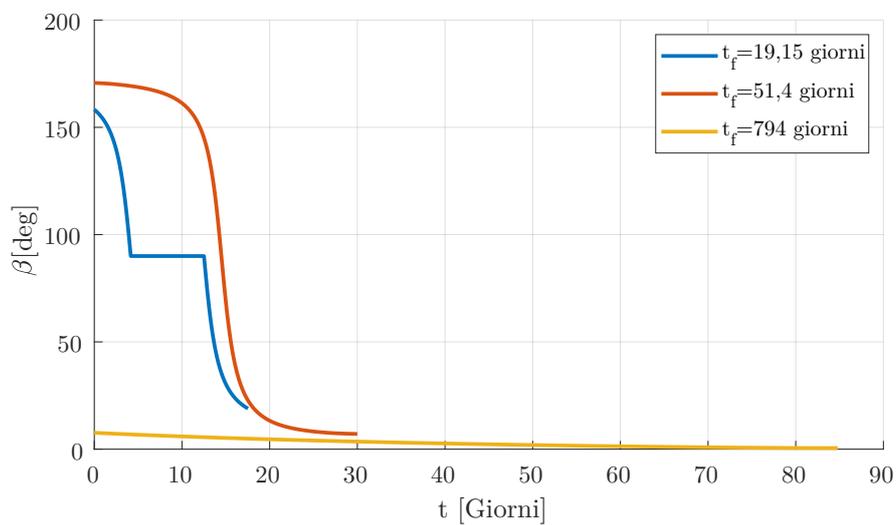
**Figura 5.40:** Andamento del semiasse maggiore nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



**Figura 5.41:** Andamento dell'inclinazione nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



**Figura 5.42:** Andamento del RAAN nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .



**Figura 5.43:** Andamento dell'angolo di spinta nel tempo per diverse durate di missione. Caso  $\Delta\Omega_0 = -20^\circ$ ,  $\Delta a_0 = 100$  km,  $\Delta i_0 = 0^\circ$ .

## Capitolo 6

# Conclusioni e sviluppi futuri

I risultati ottenuti durante il lavoro di tesi forniscono utili informazioni riguardo la struttura delle missioni ottimizzate in termini di durata minima traendo vantaggio dall'effetto della non sfericità della terra. Si trovano infatti le leggi di controllo che permettono ridotti tempi di trasferimento orbitale tra orbite basse circolari terrestri. In tutti i casi si evince l'importanza ricoperta dall'altitudine sia dello spacecraft che del target e come essa influenza la struttura della missione, la durata e il consumo di propellente. Si è visto come il caso a massa costante, il quale non considera l'espulsione di carburante, sia una buona approssimazione del caso, più realistico, che prevede l'espulsione di carburante. Si riconoscono due principali strutture di missione a seconda del segno della differenza di RAAN iniziale tra le due orbite, il che sottolinea l'importanza dell'orientamento del piano orbitale all'istante iniziale. Inoltre l'ultima parte del lavoro mostra un compromesso fra durata del trasferimento e consumo di carburante in quanto vengono analizzate le possibili strutture di missioni con durate superiori a quella minima, le quali prevedono fasi non propulse e consumi inferiori. Sulla base di questi risultati possono essere condotte analisi preliminari su tempi e consumi o, alternativamente, è possibile avere informazioni su missioni che prevedono il raggiungimento di un target.

L'analisi è stata condotta cercando di coprire il maggior numero di casi possibili, soprattutto in termini di variazione di RAAN e di altitudine mentre non sono stati analizzati casi con cambi di inclinazione. Quindi uno dei possibili sviluppi futuri è quello di analizzare missioni con variazione combinata dei parametri cercando di delineare l'influenza che hanno sull'evoluzione della missione. Un altro approfondimento si può trovare nel considerare orbite ad eccentricità differente eliminando l'ipotesi di orbite circolari. Altre analisi possono essere condotte per valori differenti di massa, spinta, impulso specifico ed orbita di partenza dello spacecraft. Infine è possibile ampliare il lavoro considerando trasferimenti multi-target con relativa ottimizzazione di tempo o massa.

# Bibliografia

- [1] Roger R. Bate, Donald D. Mueller, Jerry E. White, "*Fundamentals of Astrodynamics*", Dover Publications, 1971.
- [2] J.W. Cornelisse, H.F.R. Schöer, K.F. Wakker, "*Rocket propulsion and spaceflight dynamics*", Pitman, 1979.
- [3] Arthur E. Bryson, Yu-Chi Ho, "*Applied optimal control*", Taylor & Francis Group, 1975.
- [4] Wiley Larson, A.V. Wertz, "*Space Mission Analysis and Design*", Microcosm, 1999.
- [5] Hanspeter Schaub, John L. Junkins, "*Analytical Mechanics of Aerospace Systems*", AIAA Education Series, 2003.
- [6] Vladimir A. Chobotov, "*Orbital Mechanics*", AIAA Education Series, 1996.
- [7] Moronese G., "Reliability Based Design Optimization of a NACA 0012 Airfoil Subjected to Random Gusts", *Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale*, Università di Padova, 2014.
- [8] M.J. Fadhel, A. Baron, A.H. Farhan, "The effects the Earth , Sun and Moon attraction on satellite's orbital motion", *Journal of Kufa - Physics, Vol. I No. I*, 2009.
- [9] Jiyao Xu, Wenbin Wang, Jiuhou Lei, E.K. Sutton, Guangming Chen, "The effect of periodic variations of thermospheric density on CHAMP and GRACE orbits", *Journal of Geophysical Research Atmospheres, Vol. 116*, 2011.
- [10] L. Casalino, G. Colasurdo, D. Pastrone, "Optimal Low-Thrust Escape Trajectories Using Gravity Assist", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 5*, 1999, pp. 637-642.
- [11] Theodore N. Edelbaum, "Propulsion Requirements for Controllable Satellites", *ARS Journal, Vol. 31, No. 8* (1961), pp. 1079-1089.
- [12] King S., Walker M., Kluever C., "Small Satellite LEO Maneuvers with Low-Power Electric Propulsion", *44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 2008.
- [13] Mirko Leomanni, Andrea Garulli, Antonio Giannitrapani, Fabrizio Scortecci, "Propulsion Options for Very Low Earth Orbit Microsatellites", *Acta Astronautica, Vol. 133*, 2017, pp. 444-454.

- [14] Rebecca Reesman, "Assurance through insurance and on-orbit servicing", <http://aerospace.wpengine.netdna-cdn.com/wp-content/uploads/2018/02/OnOrbitServicing.pdf>, 2018.
- [15] Danielle Piskorz, Karen L. Jones, "On-orbit assembly of space assets: a path to affordable and adaptable space infrastructure", <http://aerospace.wpengine.netdna-cdn.com/wp-content/uploads/2018/02/OnOrbitAssembly.pdf>, 2018.
- [16] [https://www.esa.int/Our\\_Activities/Operations/Space\\_Debris/About\\_space\\_debris](https://www.esa.int/Our_Activities/Operations/Space_Debris/About_space_debris)
- [17] [http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/03/Debris\\_objects\\_in\\_low-Earth\\_orbit\\_LEO](http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/03/Debris_objects_in_low-Earth_orbit_LEO)