

POLITECNICO DI TORINO



Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica e Astronautica

Tesi di Laurea Magistrale

Missioni per il trasporto di Asteroidi in orbita cycloer Terra-Marte

Relatore: Prof. *Lorenzo* Casalino

Candidato: *Fernando* Potenza

Marzo 2019

Indice

SOMMARIO	11
1. CAPITOLO INTRODUTTIVO (VERSO MARTE)	13
1.1. CYCLER TERRA-MARTE.....	14
1.1.1. <i>Cos'è un cycler</i>	14
1.1.2. <i>Utilità del cycler</i>	15
1.1.3. <i>Quali sono i cycler di interesse</i>	16
1.1.4. <i>Cyclers S1L1</i>	23
1.2. TRASPORTO DI ASTEROIDI	25
1.2.1. <i>L'importanza di alcuni asteroidi</i>	27
1.2.2. <i>Strategia di inserimento</i>	29
1.3. ACCENNO ALLA SOLUZIONE TECNOLOGICA DEL TRASPORTO DI ASTEROIDI NEL CYCLER TERRA-MARTE	31
2. MODELLO E FISICA DEL PROBLEMA	33
2.1. FISICA DEL PROBLEMA	33
2.1.1. <i>Sistema di riferimento eliocentrico</i>	33
2.1.2. <i>Problema dei 2 corpi</i>	35
2.1.3. <i>Elementi orbitali classici, leggi di Keplero e periodo dell'orbita</i>	36
2.1.4. <i>Velocità caratteristiche e velocità cosmiche</i>	38
2.2. MANOVRE E TRAIETTORIE INTERPLANETARIE.....	39
2.2.1. <i>Patched Conic Approximation</i>	39
2.2.2. <i>Flyby</i>	40
2.3. MISURA DEL TEMPO	42
3. METODOLOGIA GENERALE: METODI INDIRECTI PER L'OTTIMIZZAZIONE DI TRAIETTORIE SPAZIALI	43
3.1. INTRODUZIONE AL METODO	43
3.2. CARATTERISTICHE DEI METODI INDIRECTI	44
3.3. FORMULAZIONE DEL METODO.....	44
3.3.1. <i>Teoria del controllo ottimale e scrittura del sistema di equazioni</i>	44
3.3.2. <i>Risoluzione del problema di ottimo e problema differenziale ai limiti</i>	47
3.3.3. <i>Procedura di calcolo</i>	48
3.4. METODI INDIRECTI NELLO SPECIFICO: OTTIMIZZAZIONE DI TRAIETTORIA	50
3.4.1. <i>Ipotesi di base</i>	50
3.4.2. <i>Variabili di stato ed adimensionalizzazione</i>	51
3.4.3. <i>Equazioni del moto e condizioni al contorno</i>	53
3.5. CONDIZIONI DI OTTIMO	55
4. METODOLOGIA SPECIFICA: PROGETTO DELLA MISSIONE DI TRASPORTO DI UN ASTEROIDE IN ORBITA CYCLER TERRA – MARTE	57
4.1. LOGICA DI PROCEDIMENTO.....	57
4.2. MISSIONE DI TRASPORTO ASTEROIDI IN S1L1: METODO E FASI DI REALIZZAZIONE	59
4.2.1. <i>Tratto Asteroide – Terra 1</i>	61
4.2.2. <i>Tratto Terra 1 – Terra 2, studio sulle orbite risonanti e non-risonanti</i>	62
4.2.3. <i>Tratto Terra 2 – Terra 3: aggiustamento della velocità, della data di arrivo e costruzione della soluzione di tentativo</i>	67
4.2.4. <i>Tratto Terra 0 – Asteroide</i>	68
4.3. LOGICA DI CALCOLO	69
4.3.1. <i>Programmi di calcolo</i>	69
4.3.2. <i>Soluzioni di tentativo e struttura della soluzione</i>	72
5. RISULTATI	74

5.1.	IPOTESI, ASTEROIDI, INSERIMENTI IN S1L1 E CONDIZIONI DI OTTIMO.....	74
5.2.	DATI E PRESTAZIONI IMPOSTI	77
5.3.	2006 UQ216 (CASO 1)	79
5.3.1.	<i>Inbound leg: reindirizzamento ed inserimento nel cycler di 2006 UQ216.....</i>	81
5.3.2.	<i>Outbound leg: recupero di 2006 UQ216.....</i>	96
5.3.3.	<i>Missione di trasporto di 2006 UQ216 nel cycler Terra – Marte S1L1</i>	103
5.4.	2011 CL50 (CASO 2).....	104
5.4.1.	<i>Inbound leg: reindirizzamento ed inserimento nel cycler di 2011 CL50.....</i>	106
5.4.2.	<i>Outbound leg: recupero di 2011 CL50.....</i>	118
5.4.3.	<i>Missione di trasporto di 2011 CL50 nel cycler Terra – Marte S1L1.....</i>	125
5.5.	2008 LD (CASO 3)	126
5.5.1.	<i>Inbound leg: reindirizzamento ed inserimento nel cyler di 2008 LD - inserimento diretto</i>	128
5.5.2.	<i>Outbound leg: recupero di 2008 LD</i>	134
5.5.3.	<i>Missione di trasporto di 2008 LD nel cycler Terra – Marte S1L1</i>	140
5.6.	RIEPILOGO DEI RISULTATI OTTENUTI E CONFRONTO MISSIONI	141
6.	CONCLUSIONI E PROSPETTIVE FUTURE	142
	RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.....	144

Indice delle figure

Figura 1: A sinistra la meravigliosa vista dell'Italia dall'ISS. A destra la vista della Terra e della Luna dal veicolo spaziale in viaggio verso Marte.....	14
Figura 2: Esempio di Problema di Lambert, con configurazione iniziale di Terra e Marte	15
Figura 3: S1L1 cycler Terra – Marte. Periodo di completamento corrispondente a 2 periodi sinodici terrestre-marziani.	18
Figura 4: Immagine stilizzata dell'intersezione delle orbite dell'asteroide Fetonte e della Terra	26
Figura 5: Orbita di 2013TX68 in azzurro. L'8 marzo del 2016 è entrato in flyby terrestre. Valutato rischioso per un evento pericoloso del 28/9/2017, il JPL ha calcolato la probabilità dell'impatto in questa data in meno di 1 su 250 milioni. (foto da NASA.gov).....	26
Figura 6: Orbita risonante che interseca quella terrestre in due punti. Nel punto rosso avviene il periodico incontro ($T = Tres \cdot m$).....	30
Figura 7: Sistema di riferimento eliocentrico. In evidenza le caratteristiche dell'orbita	34
Figura 8: Rappresentazione del problema dei due corpi che viene considerato	35
Figura 9: Parametri orbitali angolari classici per un corpo secondario orbitante attorno al Sole (in blu gli angoli notevoli).	37
Figura 10: Definizione di sfera di influenza di un corpo celeste	40
Figura 11: Schema di un flyby terrestre. Si conserva il modulo del vettore velocità.	41
Figura 12: j-esimo arco	45
Figura 13: Schema della suddivisione in sotto-tratti dell'inbound leg	60
Figura 14: Tratto asteroide-Terra 1 (esempio).....	61
Figura 15: Esempio di orbita risonante N:M con la Terra. Le due orbite presentano due punti di intersezione, ma solo un incontro, poiché il passaggio dei due corpi nel secondo punto di intersezione orbitale avviene in date diverse.	63
Figura 16: Orbite non-risonanti di tipo (1) e (2). L'incontro con la Terra avviene in entrambi i punti di intersezione orbitale.	64
Figura 17: Tratto Terra 0 – Asteroide (0) (esempio)	68
Figura 18: Diagramma di flusso che riassume la logica di realizzazione del tratto inbound (2° tratto) della missione.....	71
Figura 19: Diagramma di flusso che riassume la logica di realizzazione del tratto outbound (1° tratto) della missione. Esso completa la realizzazione della traiettoria dell'intera missione di recupero e trasporto di un asteroide in S1L1.	71
Figura 20: Procedura e logica di calcolo generale dei programmi ARM, per il calcolo della traiettoria: mostra una sessione per il raggiungimento di una soluzione soddisfacente.	72
Figura 21: Caratteristica del singolo propulsore del rimorchiatore spaziale	78
Figura 22: Orbite della Terra e di 2006 UQ216.....	80
Figura 23: Studio relativo alla traiettoria Asteroide – Terra 1: andamento della massa finale in termini della durata della missione	82
Figura 24: Studio relativo all'andamento dell'eccesso iperbolico di velocità in arrivo alla Terra, in termini della durata del viaggio.	83
Figura 25: Tratto 2006 UQ216 – Terra 1 (l'asteroide fa 2 giri e mezzo spinto dallo spacecraft)	84
Figura 26: Traiettoria inbound di 2006 UQ216 e del rimorchiatore spingente. La traiettoria viene effettuata in quasi 8 anni.	92
Figura 27: Andamento della spinta durante il tratto inbound della missione 2006 UQ216.....	93

Figura 28: Andamenti delle componenti della spinta nelle tre direzioni x, y, z al variare del tempo.	94
Figura 29: Andamento della potenza usata dal propulsore nel corso dell'inbound leg.	95
Figura 30: Andamenti della massa finale in funzione della durata del tratto Terra-2006 UQ216 (outbound leg), e al variare della data di arrivo (in rosso il punto di ottimo).	97
Figura 31: Traiettoria relativa al tratto outbound della missione 2006 UQ216. Lo spacecraft percorre quasi due giri di spirale completi, prima di arrivare sull'asteroide.	99
Figura 32: Valore assoluto della spinta, al progredire della missione	100
Figura 33: Componenti della spinta per l'outbound leg della missione 2006 UQ216. Spinta in funzione del tempo.	101
Figura 34: Potenza complessiva in funzione del tempo di missione. Tratto outbound della missione 2006 UQ216.	102
Figura 35: Orbita di 2011 CL50 (confronto con l'orbita terrestre).....	105
Figura 36: Studio condotto per massimizzare la massa finale, al variare di durata di missione e massa di propellente.	107
Figura 37: Tratto 2011 CL50 – Terra 1 (l'asteroide compie una traiettoria di 4 giri e mezzo attorno al Sole, spinto dallo spacecraft)	108
Figura 38: Non-risonanti formanti la traiettoria Terra 1 – Terra 3: la 4 5 (1) (sopra) seguita dalla 2 2 (2) che porta all'inserimento cycler (sotto).	113
Figura 39: Traiettoria inbound di 2011 CL50. La traiettoria viene effettuata in quasi 11 anni.....	115
Figura 40: Andamento della spinta totale durante l'inbound leg della missione 2011CL50.....	116
Figura 41: Andamenti delle componenti della spinta nelle tre direzioni x, y, z al variare del tempo	117
Figura 42: Andamento della potenza usata dal propulsore nel corso dell'inbound leg.....	118
Figura 43: Andamenti della massa finale in funzione della data di arrivo all'asteroide, al variare della durata della tratta Terra-2011 CL50 (in rosso il punto di ottimo, e $t_{limite} = 164.4$).	119
Figura 44: Traiettoria relativa al tratto outbound della missione 2011 CL50. Lo spacecraft percorre un giro e mezzo di traiettoria a spirale intorno al Sole, prima di arrivare sull'asteroide.	121
Figura 45: Spinta complessiva all'avanzare del tempo di missione	122
Figura 46: Componenti della spinta all'avanzare del tempo per l'inbound leg della missione 2011 CL50.....	123
Figura 47: Potenza complessiva in funzione del tempo di missione. Tratto outbound della missione 2011 CL50.....	124
Figura 48: Orbite della Terra e di 2008 LD	127
Figura 49: Studio preliminare dell'andamento della massa finale in termini di durata del tratto 2008 LD – Terra, al variare della massa di propellente usata. Si è approfondito lo studio con $M_{prop} = 3600 \text{ kg}$	129
Figura 50: Traiettoria inbound percorsa da 2008 LD e dal rimorchiatore spingente. La traiettoria viene effettuata in poco più di 4 anni.	131
Figura 51: Andamento della spinta durante il tratto inbound della missione 2008 LD.....	132
Figura 52: Componenti della spinta nelle tre direzioni x, y, z nel tempo. Si noti l'importanza della componente T_z	133
Figura 53: Andamento della potenza usata dal propulsore nel corso dell'inbound leg (2008 LD) .	134
Figura 54: Traiettoria relativa al tratto outbound della missione 2008 LD. Lo spacecraft percorre quasi quattro giri di spirale completi, prima di arrivare sull'asteroide.	137

Figura 55: Traiettoria outbound 3D per la missione 2008 LD. Si mostra l'accentuata inclinazione dell'orbita dell'asteroide ($\approx 6^\circ$).....	137
Figura 56: Valore assoluto della spinta, al progredire della missione	138
Figura 57: Componenti della spinta per l'outbound leg della missione 2008LD. Spinta in funzione del tempo.....	139
Figura 58: Potenza complessiva in funzione del tempo di missione. Tratto outbound della missione 2008 LD.	139

Indice delle tabelle

Tabella 1: Soluzioni del problema di Lambert del tipo (nLr).....	17
Tabella 2: Soluzioni del problema di Lambert del tipo (nSr).....	17
Tabella 3: Caratteristiche del cycler S1L1	19
Tabella 4: Itinerario del veicolo #1 data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo outbound)	20
Tabella 5: Itinerario del veicolo #2, data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo outbound)	21
Tabella 6: Itinerario del veicolo #3, data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo inbound)	21
Tabella 7: Itinerario del veicolo #4, data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo inbound)	22
Tabella 8: Inserimenti possibili nel cycler S1L1 dal 2019 al 2039. Ordinati secondo la data di inserimento.....	23
Tabella 9: Elenco di asteroidi potenzialmente utili per le missioni di trasporto in orbita cycler Terra – Marte (in grigio quelli che sono ancora poco visibili)	28
Tabella 10: Grandezze adimensionali fondamentali utilizzate nelle equazioni del problema di ottimizzazione di traiettoria	52
Tabella 11: Logica di procedimento per la costruzione della soluzione di tentativo per la traiettoria completa.....	62
Tabella 12: Esempio di tabulazione di orbite non-risonanti disponibili. In questo caso sono quelle energeticamente accessibili con $V_{\infty} = 4.00 \text{ km/s}$	65
Tabella 13: Possibili casistiche di guida nella variazione della data di incontro con la Terra e della velocità per il giusto inserimento nel cycler.	67
Tabella 14: Asteroidi classificati per missioni di trasporto nel cycler S1L1 (ripresa da tab. 9).....	74
Tabella 15: Inserimenti in S1L1 disponibili, una delle discriminanti per la scelta tra gli asteroidi candidati per le missioni di recupero e trasporto.	75
Tabella 16: Caratteristiche assunte per lo spacecraft.....	78
Tabella 17: Condizioni iniziali e condizioni al contorno comuni alle tre missioni	78
Tabella 18: Parametri orbitali di 2006 UQ216 (risalenti al 4 agosto 2018).....	79
Tabella 19: Caratteristiche fisiche di 2006 UQ216.....	80
Tabella 20: Informazioni calcolate circa la posizione di 2006 UQ216 in data 6/11/2026.....	81
Tabella 21: Risultato dell'analisi del tratto 2006 UQ216 – Terra 1.....	84
Tabella 22: Inserimenti cycler raggiungibili per l'ingresso di 2006 UQ216	85
Tabella 23: Tabella delle orbite non-risonanti sfruttabili per l'inserimento in S1L1 di 2006 UQ216	86
Tabella 24: Cycler e strategie di inserimento. Le strategie sono riportate nella parte inferiore della tabella.....	87
Tabella 25: Caratteristiche delle orbite della strategia usata.....	89
Tabella 26: Dati della traiettoria soluzione trovata per il tratto Terra 1 - Terra 3	90
Tabella 27: Caratteristiche e prestazioni della traiettoria inbound per 2006 UQ216.....	91
Tabella 28: Dati delle soluzioni trovate dalla soluzione di ottimizzazione di traiettoria del tratto Terra-2006 UQ216 (in rosso la configurazione ottimale).....	96
Tabella 29: Risultati della soluzione ottenuta per il tratto di andata verso 2006 UQ216	97

Tabella 30: Dati sulla posizione e velocità di 2006 UQ216 in forma adimensionale, rispettivamente il 3/12/2022 e il 15/5/2025. I pedici 0 e 1 sono rispettivamente per indicare le grandezze i giorni di partenza e di arrivo.....	98
Tabella 31: Riepilogo missione di trasporto di 2006 UQ216 nel cycler Terra – Marte S1L1.....	103
Tabella 32: Parametri orbitali di 2011 CL50 (risalenti al 28 febbraio 2018).....	104
Tabella 33: Caratteristiche fisiche di 2011 CL50	104
Tabella 34: Posizione e caratteristiche cinematiche di 2011 CL50 in data 20/02/2028.	106
Tabella 35: Caratteristiche del tratto di missione 2011 CL50 – Terra 1	108
Tabella 36: Tabella delle orbite non-risonanti sfruttabili per l’inserimento in S1L1 di 2011 CL50 (in evidenza le orbite utilizzate)	110
Tabella 37: Strategia con combinazione di non-risonanti di inserimento nel cycler per la missione 2011 CL50.....	111
Tabella 38: Dati della traiettoria soluzione trovata per il tratto Terra 1 – Terra 3.....	112
Tabella 39: Caratteristiche e prestazioni della traiettoria inbound per 2011 CL50	114
Tabella 40: Risultati della soluzione ottenuta per il tratto di andata verso 2011 CL50	120
Tabella 41: Dati sulla posizione e velocità di 2011 CL50 in forma adimensionale, rispettivamente il 13/9/2024 e il 18/2/2026. I pedici 0 e 1 indicano le grandezze nei giorni di partenza e di arrivo...	120
Tabella 42: Riepilogo missione di trasporto di 2011 CL50 nel cycler Terra – Marte S1L1	125
Tabella 43: Parametri orbitali di 2008 LD (risalenti al 4 marzo 2018).....	126
Tabella 44: Caratteristiche fisiche di 2006 UQ216.....	127
Tabella 45: Informazioni calcolate circa la posizione di 2008 LD in data 29/07/2032.	128
Tabella 46: Requisiti per l’inbound leg della missione 2008 LD	129
Tabella 47: Caratteristiche e prestazioni della traiettoria inbound per 2008 LD	130
Tabella 48: Soluzioni ottenute dall’ottimizzazione del tratto di andata verso 2008 LD (Prima Via e Seconda Via).....	135
Tabella 49: Dati sulla posizione e velocità di 2008 LD in forma adimensionale, rispettivamente il 24/11/2026 e il 11/7/2030. I pedici 0 e 1 sono rispettivamente per indicare le grandezze i giorni di partenza e di arrivo.....	136
Tabella 50: Riepilogo missione di trasporto dell’asteroide 2008 LD nel cycler Terra – Marte S1L1 (Prima Via per l’outbound leg)	140
Tabella 51: Riepilogo e confronto delle missioni di trasporto di 2006 UQ216, 2011 CL50 e 2008 LD in orbita cycler Terra – Marte.....	141

Sommario

Scopo di questa tesi è quello di studiare e progettare, dal punto di vista della meccanica del volo e della richiesta propulsiva, tre diverse missioni di trasporto di asteroidi in orbita cycler Terra-Marte, utilizzando la tecnologia studiata per le missioni ARM, al fine di fornire alle future missioni umane marziane una adeguata protezione dalle radiazioni solari e cosmiche durante il viaggio spaziale. Nel corso dello studio si è inoltre messa a punto una procedura standard per la progettazione di questo tipo di missioni, che può essere riutilizzata come linea guida di costruzione per altri casi.

La tesi è stata organizzata in sei capitoli. Nel primo capitolo si riporta un quadro generale sulle problematiche delle missioni umane marziane e sui cycler, necessario per introdurre il problema di recuperare e trasportare un asteroide in suddetta orbita. Il secondo capitolo riporta la teoria e gli elementi di meccanica del volo spaziale utilizzati nel lavoro. Nel terzo capitolo si riportano i metodi matematici utilizzati per affrontare il problema di ottimizzazione di traiettoria: essi vengono trattati prima in generale, e poi nello specifico, applicati al problema in questione. Il quarto ed il quinto capitolo costituiscono il vero e proprio cuore del lavoro svolto, in quanto rispettivamente riportano la metodologia con cui si è affrontato il problema di recupero e trasporto dell'asteroide fino al momento dell'inserimento nel cycler e i risultati veri e propri dello studio, ovvero le tre missioni costruite. Segue un capitolo conclusivo e ricapitolativo con considerazioni sui possibili sviluppi futuri.

Il lavoro svolto è stato spinto dai risultati ottenuti in studi passati sulla fattibilità di missioni di recupero di un asteroide¹, e dal progetto di due prime missioni di reindirizzamento e di trasporto nel cycler di due asteroidi, in missioni separate² ([1] e [2]).

Gli studi qui esposti sono stati effettuati per tre asteroidi scelti da un elenco di quelli in naturale avvicinamento alla Terra, con particolari caratteristiche. Nel corso del lavoro verrà dimostrata la fattibilità delle tre missioni progettate, in termini di ECONOMICITÀ PROPULSIVA e di MECCANICA DEL VOLO SPAZIALE, nel trasportare gli asteroidi 2006 UQ216, 2011 CL50 e 2008 LD nell'orbita cycler S1L1 che permette il collegamento periodico di Terra e Marte.

L'uso della propulsione elettrica e della tipologia di missione fa sì da preferire l'utilizzo di un approccio basato sui metodi indiretti, applicati al problema di ottimizzazione di traiettoria spaziale. Con questo procedimento si attua l'ottimizzazione di traiettoria che permette la costruzione delle missioni di trasporto degli asteroidi in orbita cycler Terra-Marte.

Inoltre, si è voluta sottolineare l'importanza di un limitato utilizzo della propulsione, con il conseguente controllato impatto economico, che può essere una carta vincente nella scelta di utilizzare gli asteroidi come importante mezzo di protezione dell'uomo dalle radiazioni. Nel corso del lavoro verranno mostrati altri, non meno importanti, vantaggi che si ottengono dal trasporto di asteroidi in orbita cycler.

Concludo sperando che queste missioni vengano dimostrate fattibili anche dalle altre discipline ingegneristiche, e che presto possano essere messe in pratica per godere degli indubbi vantaggi di questa strategia di azione, con la speranza di essere riuscito a dare un contributo, seppur piccolo,

¹ Missioni ARM (Asteroid Redirect Mission), studiate dalla NASA et al, e poi cancellate, che avevano come oggetto il trasporto di piccoli asteroidi in orbita lunare.

² Trasporto degli asteroidi 2013 UX2 (Nathan Strange et al) e 2010 UY7 (Simeoni e Casalino) nel cycler S1L1.

nell'importante e difficile intento di far considerare Marte sempre un po' meno lontano dalla nostra amata Terra.

Fernando Potenza

Torino, febbraio 2019

1. Capitolo Introduttivo (Verso Marte)

Fin dai tempi antichi l'uomo è stato spinto da un incolmabile desiderio di scoperta e di esplorazione. Questo motore ha spinto il progresso e la ricerca di espansione di nuovi orizzonti, nuove frontiere: esso ha spinto l'uomo in lungo e in largo, dalle esplorazioni oltremare alle vere e proprie circumnavigazioni di continenti, dalle esplorazioni subacquee all'utilizzo di sommergibili, dal volo atmosferico all'esplorazione spaziale. Quest'ultima rappresenta esattamente quell' "*Ultima Frontiera*" di cui si parla anche negli storici film di genere.

Dopo la "conquista" della Luna, la naturale focalizzazione dell'attenzione dell'esplorazione umana è stata guardare verso Marte.

I problemi, nell'affrontare una missione umana verso Marte, sono però molteplici. Lo studio di questi, che non sono oggetto principale di questa tesi, è di fondamentale importanza per sottolineare i limiti e i requisiti entro cui bisogna operare nella progettazione di questi viaggi interplanetari.

Per arrivare a pensare all'esplorazione di Marte, mirata ad una sua futura, e per il momento solo auspicabile, colonizzazione umana, bisogna studiare, dimostrare e progettare la sua "facile" raggiungibilità. Uno dei problemi maggiori che si presenta sotto questa prospettiva è il viaggio. Esso costituisce un problema da diversi punti di vista.

- Da un punto di vista economico, il viaggio per Marte può costituire un notevole costo: questo si presenta sia come combustibile da imbarcare per permettere la traversata interplanetaria, sia come tecnologia da dispiegare. Altri costi, inoltre, sono costituiti dal sistema propulsivo, dalle strutture, ecc.
- Da un punto di vista umano, il viaggio può essere ostile per molti motivi: la lunghezza del viaggio è uno dei più importanti. Un lungo viaggio nello spazio può essere deleterio per l'uomo. Il problema maggiore è costituito dalle **radiazioni**. Essere esposti per lungo tempo a radiazioni solari, raggi cosmici ed altre particelle, può essere letale³. Un altro aspetto deleterio per l'uomo della lunghezza del viaggio spaziale è quello psicologico: stare chiusi per molto tempo (mesi e mesi) in uno spazio più o meno ridotto (anche qui il discorso strutturale) fa entrare in gioco il fattore "lontananza da casa". Il viaggio verso Marte non vuol dire solo stare nello spazio per diversi mesi, ma anche non vedere la Terra nitidamente per diverso tempo⁴. Vedere dagli oblò lo spazio profondo per la maggior parte del viaggio, o vedere la Terra lontanissima può essere un problema da non sottovalutare (fig. 1)

³ Ogni astronauta può essere esposto durante la sua vita ad un numero limitato di radiazioni (dipendentemente dal sesso e dall'età). L'entità delle radiazioni massime consentite, durante il lungo viaggio verso Marte, verrebbe ampiamente superato senza adeguate protezioni (es. mediamente un astronauta maschio di 45 anni può resistere a 325 REM in tutta la sua attività nello spazio [3]). Si ricorda che 325 REM corrispondono a 3.25 Sv nel Sistema Internazionale; si rammenti, inoltre, che 1 REM corrisponde a circa 50 radiografie al torace.

⁴ Astronauti sull'ISS sono stati diverso tempo prima di riatterrare, alcuni anche per tempi simili rispetto alla durata di un eventuale viaggio umano verso Marte (es. la nostra Samantha Cristoforetti). Un fattore molto rassicurante in tal caso però è quello di poter sempre godere di una meravigliosa vista dagli oblò dei moduli, oltre al fatto di essere protetti dalla magnetosfera terrestre.



Figura 1: A sinistra la meravigliosa vista dell'Italia dall'ISS. A destra la vista della Terra e della Luna dal veicolo spaziale in viaggio verso Marte.

- Da un punto di vista tecnologico, tutti i problemi accennati fino adesso, rendono davvero complessa la realizzazione di mezzi e strutture in grado di far arrivare un equipaggio su Marte, effettuare l'*ammartaggio* con precisione e senza rischi, e realizzare una stabile rete di comunicazione, in tempo più o meno reale.

Si è studiato ampiamente negli ultimi decenni (continuando a farlo oggi) un sistema per ovviare a questi problemi, tenendo in conto le esigenze delle varie missioni umane e non umane. Si è compreso che un modo per ottenere delle missioni marziane a basso costo è quello di sfruttare i *cycler* Terra-Marte [4].

Nel corso dei diversi studi, è stata dimostrata l'importanza dei *cycler* in questo tipo di missione. Essi sono fondamentali per costruire una rete di trasporto stabile, continua e programmabile tra Terra e Marte, che permetta una continua comunicazione di andata e ritorno tra i due pianeti, tramite orbite che possano fornire un ben pianificato elenco di arrivi e partenze.

1.1. Cycler Terra-Marte

Si introducono in questo capitolo le orbite *cycler*, importanti perché è in una di esse, denominata S1L1, in cui si vogliono inserire gli asteroidi al termine delle missioni progettate in questo lavoro di tesi.

1.1.1. Cos'è un *cycler*

I *cycler* sono traiettorie che incontrano ripetutamente gli stessi pianeti, senza sosta e seguendo una regolare tempistica. Di particolare interesse per questo motivo, quindi, sono i *cycler* Terra-Marte, che permettono il ripetuto collegamento della Terra e di Marte nel tempo, seguendo la stessa traiettoria caratterizzata da una particolare durata, ciclicamente. L'idea basilare che ha spinto la ricerca passata verso l'approfondimento dell'analisi di queste particolari traiettorie interplanetarie, è stata quella di ottenere una specie di taxi spaziale, che possa supportare delle pianificate "corse" tra i due pianeti, unendoli così periodicamente nel tempo.

Si può distinguere tra due tipi di cycler:

- cycler propulsi: traiettorie cycler che necessitano di grandi quantità di propellente
- cycler balistici: non necessitano di grosse spinte per permettere la traiettoria ripetuta caratterizzante del cycler

Di particolare interesse sono i cycler balistici, per mantenere l'impatto economico più basso possibile sulla missione marziana. Vista la definizione di questo tipo di traiettoria, un'importante strategia di missione economica per viaggiare verso Marte è utilizzare un percorso base che periodicamente incontra Terra e Marte. In passato si pensava che i cycler potessero verificarsi unicamente ogni periodo sinodico dei due pianeti in questione, ma più di recente si è dimostrata l'esistenza di diverse soluzioni per la traiettoria cycler. Una prima fase nella storia degli studi sui cycler ha visto quindi la ricerca di tutte le possibili traiettorie che potessero avere le funzioni e le caratteristiche sopra descritte.

Trovare dette traiettorie significa affrontare un Problema di Lambert. Esso consiste nel ricercare le soluzioni (traiettorie) che uniscano due punti appartenenti a due coniche diverse, in un certo tempo di volo, determinabile come differenza tra un dato istante finale t_2 e un istante iniziale t_1 (fig. 2).

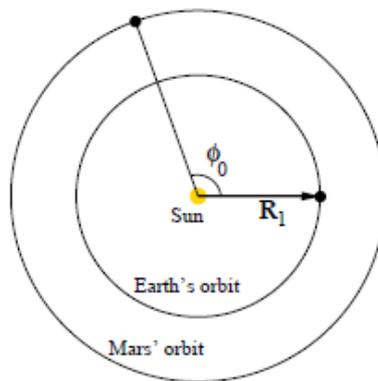


Figura 2: Esempio di Problema di Lambert, con configurazione iniziale di Terra e Marte

Il problema mostrato nella figura è un esempio di problema di Lambert, riguardante Terra e Marte. Dato un numero intero, che indichi il numero di rivoluzioni che accadono per la Terra durante l'esecuzione della manovra, si vuole trovare una traiettoria che funzioni da soluzione al problema dei due corpi per il sistema Terra-Marte. Nota la velocità angolare della Terra si costruisce il raggio vettore che individua nel tempo il luogo dei punti formanti la traiettoria, che è la soluzione del problema.

1.1.2. Utilità del cycler

Il vantaggio di usare cycler balistici rispetto a traiettorie che necessitano di manovre molto onerose dal punto di vista propulsivo, è quello di sfruttare appieno il potenziale delle manovre di *fly-by* (aiuto gravitazionale), per ottenere i giusti guadagni di velocità (ΔV) e spinta (ΔT) fondamentali per il corretto svolgimento della traiettoria.

La strategia di utilizzo dei cycler, come accennato in precedenza, è quella di utilizzare delle sorte di vie di *taxing* spaziale per i futuri viaggi umani tra Terra e Marte.

I diversi studi che si sono svolti (vedere [5]), hanno identificato diversi cycler, che si differenziano tra loro per durata, inserimenti, tipo di traiettoria, spesa di inserimento ($\Delta v, \Delta m$)⁵ e di mantenimento, altezza dei flyby, numero di veicoli coinvolti nell'attività di trasporto, ecc.

Più precisamente, un cycler viene caratterizzato dai seguenti parametri:

- Un numero intero n , che identifica il **multiplo di periodi sinodici** dopo il quale si ripeterà il cycler.
- Il **tipo di traiettoria soluzione** del problema di Lambert: lungo periodo (L), corto periodo (S), o periodo unico (U).
- Un numero intero r , che identifica il **numero di rivoluzioni** (per approssimazione all'intero più vicino) che esegue un corpo durante un preciso cycler.

In aggiunta, altri parametri influiscono sull'utilità o meno di un cycler, e sulla scelta che si effettua per una data missione:

- Il minimo numero di veicoli necessari per sfruttare al massimo il cycler
- Il raggio dell'afelio del cycler (che deve essere maggiore di quello dell'orbita di Marte)
- L'eccesso iperbolico di velocità (V_∞) alla Terra e a Marte
- L'angolo di rotazione massimo possibile al flyby dei due pianeti: se la V_∞ richiesta fosse maggiore di quella possibile, questo si tradurrebbe in un flyby troppo basso, sensibile all'azione della resistenza atmosferica (nel caso della Terra⁶) e ad una troppo forte azione della gravità del pianeta.

Un modo di identificare i cycler è utilizzare la tripletta (nLr).

1.1.3. Quali sono i cycler di interesse

Diversi studi sono stati effettuati nell'indagine per trovare tutti i possibili cycler [5]. Nel corso delle analisi, sono state individuate diverse famiglie di traiettorie, ognuna avente propria caratterizzazione in base agli elementi descritti nel precedente paragrafo, ovvero n , tipo di traiettoria (S, L, U) ed r . Rispettivamente in tab. 1 e in tab. 2 sono riportati i cycler di lungo periodo e corto periodo con $1 \leq n \leq 4, 1 \leq r \leq 9$.

⁵ Strettamente collegati, la variazione di velocità e di massa costituiscono il "conto da pagare" per ottenere un trasferimento orbitale, o anche semplicemente una manovra. Grandi cambiamenti di velocità impongono un considerevole consumo di propellente, con il conseguente aumento del costo della missione.

⁶ In caso di flyby terrestre, si assume una quota minima di soglia di 200 km, generalmente. Nel corso del lavoro, invece, i flyby terrestri sono considerati liberi. Il vincolo viene imposto indirettamente sulla rotazione massima possibile del vettore velocità, come si vedrà in seguito.

Tabella 1: Soluzioni del problema di Lambert del tipo (nLr)

	n=1	n=2	n=3	n=4
r = 1				
r = 2				
r = 3				
r = 4	N.S. ^b			
r = 5	N.S.	N.S.		
r = 6	N.S.	N.S.		
r = 7	N.S.	N.S.	N.S.	
r = 8	N.S.	N.S.	N.S.	
r = 9	N.S.	N.S.	N.S.	N.S.

^a Aldrin cycler.

^b No solution.

Tabella 2: Soluzioni del problema di Lambert del tipo (nSr)

	n=1	n=2	n=3	n=4
r = 1				
r = 2				
r = 3				
r = 4	N.S. ^a			
r = 5	N.S.	N.S.		
r = 6	N.S.	N.S.		
r = 7	N.S.	N.S.	N.S.	
r = 8	N.S.	N.S.	N.S.	
r = 9	N.S.	N.S.	N.S.	N.S.

^a No solution.

Una naturale estensione dei cycler trovati e classificati in base ai precedenti criteri, è derivata dall'intuizione di poter usare più flyby nella realizzazione della traiettoria. Questa strategia si è resa necessaria per spalmare meglio (in più fasi) la variazione di eccesso iperbolico di velocità nei pressi di un pianeta su diversi aiuti gravitazionali in successione.

Questi passaggi intermedi permettono la realizzazione di grandi rotazioni della linea dei nodi, altrimenti non realizzabili, poiché con singoli flyby sarebbe richiesta una quota di manovra troppo bassa. Sfruttando queste traiettorie composite, si ottengono dei promettenti cycler balistici, resi possibili tramite intermedi flyby. Tra questi tipi di traiettoria, si è evidenziata l'importanza del **cycler balistico S1L1**. Ripetendosi ogni 2 periodi sinodici⁷ (circa $4+2/7$ anni), il cycler è formato da un primo tratto di tipo corto periodo (*S*), che porta al flyby intermedio della Terra, e da un successivo tratto di tipo lungo periodo (*L*) che completa la traiettoria. Entrambi i tratti avvengono tra una e due rivoluzioni dello *spacecraft* attorno al Sole ("*S1L1*", $r = 1$). In fig. 3 è riportata la traiettoria caratteristica di S1L1 cycler.

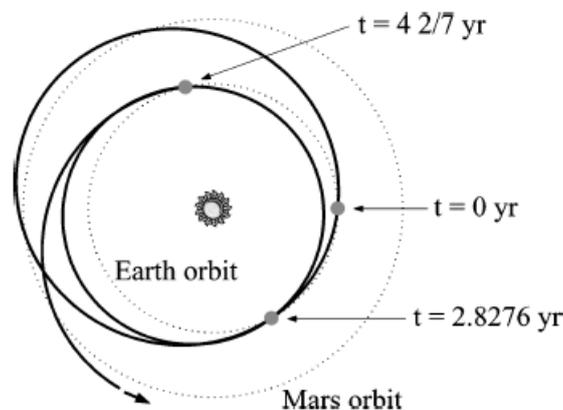


Figura 3: S1L1 cycler Terra – Marte. Periodo di completamento corrispondente a 2 periodi sinodici terrestre-marziani.

Nel corso degli studi operati da T. Troy McConaghy, et al. sul cycler S1L1 [4], si sono trovati risultati che lo hanno reso un punto di partenza molto importante per la futura progettazione di missioni umane su Marte. Dopo una prima analisi di fattibilità, questi risultati sono stati in seguito confermati in buona misura da analisi più approfondite⁸. In tab. 3 si sono riportate le caratteristiche di S1L1, ottenute

⁷ Quindi nel cycler S1L1 $n=2$. Secondo la nomenclatura sopra esposta dovrebbe essere 2(S1L1), ma il 2 viene ommesso.

⁸ Inizialmente si è studiato S1L1 con un modello di orbite di Terra e Marte circolari e complanari. Si è in seguito approfondita l'analisi utilizzando modelli di effemeridi del Sistema Solare, in cui le posizioni e le velocità dei pianeti sono stati ottenuti da effemeridi integrate dal JPL della NASA.

sfruttando il modello semplificato ad **orbite circolari e complanari** dei due pianeti in questione. Le assunzioni alla base del modello sono:

- Il periodo sinodico Terra-Marte è esattamente di 2,14286 anni (2 anni e 1/7)
- L'orbita terrestre, quella marziana e la traiettoria cycler sono complanari
- Terra e Marte hanno orbite circolari
- Il cycler è una conica, soluzione del problema dei due corpi Sole-Spacecraft
- I flyby avvengono solo nella sfera di influenza terrestre (viene trascurata l'influenza gravitazionale di Marte)
- i flyby avvengono istantaneamente, visti come discontinuità del vettore velocità

I risultati ottenuti con questo grado d'approssimazione sono riportati nella seguente tabella:

Tabella 3: Caratteristiche del cycler S1L1

ΔV richiesto	0 km/s
$V_{\infty Terra}$	$4.7 \frac{km}{s}$
Altezza di flyby	31809 km
$V_{\infty Marte}$	5.0 km/s
Tempo di trasferimento Terra-Marte	153.15 <i>giorni</i>
Minimo tempo di stazionamento su Marte	604.63 <i>giorni</i>
Tempo di trasferimento Marte-Terra	153.15 <i>giorni</i>
Periodo del cycler	$4\frac{2}{7}$ <i>anni</i>

Approfondendo lo studio sfruttando le effemeridi integrate dal JPL (vedere nota 8), gli stessi autori [4] hanno confermato la bontà del cycler, dimostrandone la buona tolleranza delle caratteristiche⁹.

In un successivo studio si sono prese in considerazione diverse configurazioni di missione, per analizzare quale potesse sfruttare al meglio le caratteristiche della traiettoria ciclica, permettendo l'implementazione teorica delle potenzialità di trasporto umano date da S1L1. Considerando una lunghezza massima del viaggio (di sola andata e solo ritorno) di 180 giorni¹⁰, si è trovato che la migliore configurazione di veicoli cycler in grado di sfruttare al massimo la traiettoria (minimizzando

⁹ Considerando i cambiamenti di piano e il Problema dei Tre Corpi solo in prossimità di Terra e Marte durante i flyby è stata confermata l'importanza di questo cycler.

¹⁰ Preso come limite indicativo di sopportazione psicofisico dell'equipaggio, dato lo stress cui si è accennato ad inizio capitolo.

il ΔV totale della missione), seguendo il modello basato sulle effemeridi JPL, sarà utilizzare quattro veicoli: due veicoli *inbound* e due veicoli *outbound*¹¹.

Veicoli inbound

Sono veicoli che permettono il più breve tragitto Marte->Terra, considerate tutte le intersezioni tra orbita terrestre e traiettoria S1L1.

Veicoli outbound

Sono veicoli che permettono il più breve tragitto Terra->Marte, considerate tutte le intersezioni tra orbita terrestre e traiettoria S1L1.

L'utilizzo dei quattro veicoli consente di rendere minimo anche il tempo del viaggio interplanetario, sfruttando tutte le leve Marte-Terra in uscita e in entrata, fatto altrimenti impossibile da realizzare. Si riportano le tabelle riguardanti i rendezvous con i pianeti dei quattro veicoli, dal 2019 fino al 2039.

Tabella 4: Itinerario del veicolo #1 data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo outbound)

Encounter	Date, mm/dd/yyyy	V_{∞} , km/s	Closest approach altitude, km	Leg TOF, days
Earth-9	02/04/2019	3.99	22,600	924
Earth-10	07/18/2020	3.99	4,300	530
Mars-11	12/19/2020	4.36	5,100	154 ^a
Earth-12	05/25/2023	6.09	20,000	887
Earth-13	11/13/2024	6.09	27,400	538
Mars-14	06/01/2025	3.71	16,100	200 ^a
Earth-15	08/09/2027	6.73	25,900	799
Earth-16	01/31/2029	6.73	41,500	541
Mars-17	06/27/2029	6.61	16,600	148 ^a
Earth-18	11/15/2031	4.43	31,800	871
Earth-19	04/30/2033	4.43	26,900	531
Mars-20	08/20/2033	7.34	10,700	113 ^a
Earth-21	03/13/2036	4.25	22,000	936
Earth-22	08/25/2037	4.25	8,900	531

^aCrew transfer time from Earth to Mars.

¹¹ Sia chiaro che questi veicoli cycler non c'entrano affatto con il veicolo tipico che viene impiegato per intraprendere le missioni di recupero e trasporto degli asteroidi trattate in questa tesi. Essi potranno essere importanti, invece, per i futuri viaggi umani spaziali che coinvolgeranno Terra e Marte, e potranno sfruttare gli asteroidi come mezzo di protezione dalle radiazioni.

Tabella 5: Itinerario del veicolo #2, data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo outbound)

Encounter	Date, mm/dd/yyyy	V_{∞} , km/s	Closest approach altitude, km	Leg TOF, days
Earth-9	04/06/2021	4.61	23,000	934
Earth-10	09/20/2022	4.61	14,800	532
Mars-11	05/01/2023	2.77	7,600	223 ^a
Earth-12	07/02/2025	7.09	23,800	793
Earth-13	12/26/2026	7.09	35,200	542
Mars-14	06/14/2027	5.27	13,700	170 ^a
Earth-15	09/21/2029	5.78	26,800	830
Earth-16	03/12/2031	5.78	39,200	537
Mars-17	07/15/2031	7.69	10,700	125 ^a
Earth-18	01/16/2034	3.75	22,600	915
Earth-19	06/28/2035	3.75	10,000	529
Mars-20	11/14/2035	4.65	16,200	139 ^a
Earth-21	05/08/2038	5.53	27,100	906
Earth-22	10/26/2039	5.53	23,900	536

^aCrew transfer time from Earth to Mars.

Tabella 6: Itinerario del veicolo #3, data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo inbound)

Encounter	Date, mm/dd/yyyy	V_{∞} , km/s	Closest approach altitude, km	Leg TOF, days
Earth-10	03/27/2020	3.79	25,800	529
Mars-11	09/29/2022	7.72	12,500	916
Earth-12	01/28/2023	6.06	43,300	121 ^b
Earth-13	07/19/2024	6.06	11,200	538
Mars-14	11/04/2026	5.58	2,100	838
Earth-15	04/17/2027	7.16	31,100	165 ^b
Earth-16	10/11/2028	7.15	24,300	542
Mars-17	12/08/2030	2.76	9,700	788
Earth-18	07/21/2031	4.67	17,300	225 ^b
Earth-19	01/03/2033	4.67	21,700	532
Mars-20	07/27/2035	6.34	9,300	934
Earth-21	11/19/2035	3.99	19,800	115 ^b
Earth-22	05/01/2037	3.99	26,700	530

^aDeep space ΔV . ^bCrew transfer time from Mars to Earth.

Tabella 7: Itinerario del veicolo #4, data, eccesso iperbolico di velocità, altezza del flyby, durata della singola tappa (veicolo inbound)

Encounter	Date, mm/dd/yyyy	V_{∞} , km/s	Closest approach altitude, km	Leg TOF, days
Mars-8	08/20/2020	7.19	10,500	938
Earth-9	12/06/2020	4.68	31,200	108 ^a
Earth-10	05/23/2022	4.68	16,000	532
Mars-11	10/16/2024	6.64	3,800	877
Earth-12	03/11/2025	6.74	40,800	146 ^a
Earth-13	09/03/2026	6.74	22,400	541
Mars-14	11/11/2028	3.80	11,900	800
Earth-15	05/24/2029	6.74	27,000	194 ^a
Earth-16	11/16/2030	6.74	9,000	541
Mars-17	04/13/2033	3.96	2,000	879
Earth-18	09/22/2033	3.86	6,800	162 ^a
Earth-19	03/05/2035	3.86	24,600	529
Mars-20	09/17/2037	7.81	12,100	927
Earth-21	01/09/2038	5.52	39,800	114 ^a
Earth-22	06/29/2039	5.52	14,400	536
Maneuver	12/01/2039	0.27 ^b	—	—

^aCrew transfer time from Mars to Earth. ^bDeep space ΔV .

I tempi di cui bisogna tenere conto, costruendo questo tipo di missione, sono quelli di viaggio sui veicoli cycler (andata dalla Terra e ritorno da Marte) ed il tempo di stazionamento su Marte, in attesa di un'opportunità di prelevamento con un incontro con uno dei veicoli cycler inbound. Progettando missioni con questa strategia¹², sarebbe possibile ottenere missioni di andata e ritorno da Marte con durata totale di 2.43 anni circa¹³, sfruttando i veicoli outbound per il trasporto verso Marte (minimizzando la durata dell'andata, si vedano i viaggi con la durata contrassegnata dall'apice *a* nelle tabelle dei veicoli inbound) e quelli inbound per il ritorno sulla Terra (minimizzando la durata della fase di ritorno, si vedano i viaggi con gli apici *b* e *a* rispettivamente nella penultima e ultima tabella) [6].

L'ascesa e la discesa da Marte si potrebbero, invece, eseguire tramite un lanciatore recuperabile che permetta il rendezvous con il veicolo cycler in prossimità del pianeta, in analogia con un ascensore spaziale.

¹² Quattro veicoli cycler: due inbound più due outbound, usati per percorrere il cycler SIL1. (Fonte delle tabelle degli itinerari dei veicoli [4]).

¹³ Come esposto da Damon F. Landau e James M. Longuski, sarebbe opportuno lasciare un numero di astronauti fisso nella base su Marte. Questo dettaglio potrebbe essere cruciale per il progetto dei veicoli cycler.

1.1.4. Cyclers SIL1

Scelta la traiettoria cyclers SIL1 come possibile rotta per i futuri viaggi spaziali Terra – Marte, bisogna trovare un modo per riuscire ad inserirvisi. Una finestra di inserimento cyclers non è altro che una data di contatto tra l'orbita di SIL1 e un'orbita terrestre. Questo contatto deve avvenire con una precisa velocità relativa, senza la quale il corpo in questione non riuscirebbe ad inserirsi in quella precisa data, caratterizzata da ben precise effemeridi. Dalle tab. 4, tab. 5, tab. 6, tab. 7 si sono potute estrapolare le date di inserimento nel cyclers con rispettivi eccessi iperbolici di velocità, utili per il corretto inserimento (tab. 8). Questa tabella riporta tutte le date utili (fino al 2039) all'inserimento in SIL1, ordinate secondo la data di inserimento (dalla più recente alla meno recente).

Tabella 8: Inserimenti possibili nel cyclers SIL1 dal 2019 al 2039. Ordinati secondo la data di inserimento.

Inserimenti cyclers possibili fino al 2037				
# Veicolo/incontro	Data (dd/mm/yyyy)	Vinf [km/s]	quota flyby [km]	TOF volo singola tappa [giorni]
#1/Earth 9	04/02/2019	3.99	22600	924
#3/Earth 10	27/03/2020	3.79	25800	529
#1/Earth 10	18/07/2020	3.99	4300	530
#4/Earth 9	06/12/2020	4.68	31200	108
#2/Earth 9	06/04/2021	4.61	23000	934
#4/Earth 10	23/05/2022	4.68	16000	532
#2/Earth 10	20/09/2022	4.61	14800	532
#3/Earth 12	28/01/2023	6.06	43300	121
#1/Earth 12	25/05/2023	6.09	20000	887
#3/Earth 13	19/07/2024	6.06	11200	538
#1/Earth 13	13/11/2024	6.09	27400	538
#4/Earth 12	11/03/2025	6.74	40800	146
#2/Earth 12	02/07/2025	7.09	23800	793
#4/Earth 13	03/09/2026	6.74	22400	541
#2/Earth 13	26/12/2026	7.09	35200	542
#3/Earth 15	17/04/2027	7.16	31100	165
#1/Earth 15	09/08/2027	6.73	25900	799
#3/Earth 16	11/10/2028	7.16	24300	542
#1/Earth 16	31/01/2029	6.73	41500	541
#4/Earth 15	24/05/2029	6.74	27000	194
#2/Earth 15	21/09/2029	5.78	26800	830
#4/Earth 16	16/11/2030	6.74	9000	541
#2/Earth 16	12/03/2031	5.78	39200	537
#3/Earth 18	21/07/2031	4.67	17300	225
#1/Earth 18	15/11/2031	4.43	31800	871
#3/Earth 19	03/01/2033	4.67	21700	532
#1/Earth 19	30/04/2033	4.43	26900	531
#4/Earth 18	22/09/2033	3.86	6800	162
#2/Earth 18	16/01/2034	3.75	22600	915

#4/Earth 19	05/03/2035	3.86	24600	529
#2/Earth 19	28/06/2035	3.75	10000	529
#3/Earth 21	19/11/2035	3.99	19800	115
#1/Earth 21	13/03/2036	4.25	22000	936
#3/Earth 22	01/05/2037	3.99	26700	530
#1/Earth 22	25/08/2037	4.25	8900	531
#4/Earth 21	09/01/2038	5.52	39800	114
#2/Earth 21	08/05/2038	5.53	27100	906
#4/Earth 22	29/06/2039	5.52	14400	536
#2/Earth 22	26/10/2039	5.53	23900	536

Rispettando una delle date di inserimento riportate nella tabella precedente, un corpo riesce ad introdursi nel cyclus SIL1, incominciando il suo moto periodico di collegamento tra Terra e Marte. La caratteristica principale dei cyclus, ed in particolar modo dei cyclus balistici, è quella di permettere questo moto periodico con una spesa minima, in quanto il lavoro viene fatto dalla forza gravitazionale dei pianeti¹⁴. I cyclus quindi, alla luce degli studi presenti in letteratura e riassunti fin qui, permetteranno di introdurre una certa “economia” nelle missioni future, rispondendo ad una delle due grandi problematiche sollevate ad inizio capitolo riguardanti gli ostacoli che si dovranno affrontare progettando missioni umane verso Marte.

L'altro problema, che renderebbe impossibile le missioni umane su Marte, si è visto essere costituito dalle radiazioni. La riflessione che sorge spontanea pensando a questo problema è proteggere l'equipaggio con uno scudo, o qualcosa del genere. Si rende necessario quindi il trasporto di qualcosa che debba svolgere questa funzione, e che magari possa essere anche usato, in futuro, per testare la bontà delle orbite cyclus. Rispondendo all'esigenza dell'uomo di proteggersi dalle radiazioni cosmiche e solari, la ricerca ha concentrato il suo interesse anche verso un altro tipo di missione: il recupero di asteroidi con successivo re-indirizzamento controllato. Lo studio di queste missioni, denominate inizialmente missioni ARM¹⁵, ha costituito la base di partenza per questo lavoro di tesi, ovvero per il progetto di missioni di recupero di asteroidi che promettono di essere di fondamentale importanza per il futuro dell'esplorazione umana dello spazio, ed in particolare della fondazione di una base umana su Marte. La loro importanza sarà “vitale” per il fondamentale ruolo di protezione dalle radiazioni per l'uomo. La strategia innovativa, che promette di assolvere questa funzione di protezione, consisterebbe perciò nell'utilizzo degli asteroidi e del materiale che li compone come rivestimento e barriera protettiva per i futuri veicoli abitati dall'uomo. È perciò questo il panorama verso cui si è volto il lavoro di tesi.

Il recupero degli asteroidi e il loro trasporto in orbita cyclus si mostra perciò di primaria importanza, per poter in futuro assolvere alla funzione di protezione dei viaggi spaziali umani Terra – Marte.

Dopo questo paragrafo introduttivo sui cyclus, necessario per spiegare e meglio comprendere il contesto e le motivazioni per cui sia importante progettare missioni di recupero e controllato

¹⁴ La spesa totale è minima e non nulla, poiché solo dopo un periodo di tempo di qualche decennio occorre manovrare per ricalibrare l'orbita cyclus. Questa manovra, definita di spazio profondo (*deep space manoeuvre*), presenta un costo minimo corrispondente ad un $\Delta V=0.27$ km/s (come si può vedere da tab. 7, nell'ultima riga).

¹⁵ Queste missioni consistevano nel recupero di piccoli asteroidi (circa di 10 t) con successivo reindirizzamento verso la Luna. Invece in questo lavoro di tesi ci si occupa del recupero e reindirizzamento di asteroidi meno piccoli verso la Terra.

inserimento degli asteroidi in S1L1, si introducono gli stessi asteroidi, soggetto centrale dell'attenzione del lavoro di tesi qui discusso.

1.2. Trasporto di asteroidi

Si è già accennata l'importanza degli asteroidi per il futuro sviluppo di missioni umane su Marte. Non unici i motivi precedentemente descritti, anche se sicuramente i principali, altre possibilità si affacciano all'alba di queste missioni. Sicuramente un motivo ulteriore per cui sarebbero importantissime le missioni di recupero di asteroidi è quello di permettere una sorta di deposito spaziale di materiale, utile per la costruzione o riparazione sul campo, senza dover lanciare dalla Terra pesanti e costosi carichi¹⁶.

Un altro motivo assai importante è dettato dal fatto che determinati asteroidi possano essere classificati come rischiosi e pericolosi per un possibile futuro impatto con la Terra, nella loro rotta naturale. Alcuni di essi – dotati di un'orbita naturale di avvicinamento alla Terra – potrebbero entrare in atmosfera (col passare del completamento delle orbite) e causare effetti disastrosi. A questo proposito il trasporto di asteroidi in orbita cyclo Terra – Marte potrebbe essere determinante anche per eliminare alcuni di questi rischi (sicuramente non per asteroidi immensi), ridefinendo la traiettoria che l'asteroide potrebbe essere destinato naturalmente a seguire, guidandolo su un'altra traiettoria che in questo caso porterebbe nel cyclo S1L1.

In fig. 4 è riportato, a titolo esemplificativo, un esempio lampante di potenziale pericolosità di asteroide da impatto. Si tratta di Fetonte¹⁷, enorme asteroide che nel dicembre del 2017 ha sfiorato la

¹⁶ Attualmente un lanciatore riesce a lanciare peso nello spazio con un prezzo specifico di 5000 €/kg in LEO. Più nello specifico, Delta IV Heavy lancia con un costo specifico di 4000 \$/kg in LEO e 50000 \$/kg in GEO, equivalente circa rispettivamente a 3534 €/kg e 44173€/kg.

(Fonte [7]: <https://space.stackexchange.com/questions/8047/cost-breakdown-of-delta-iv-heavy-launch>)

¹⁷ L'esempio riportato di Fetonte è fuori dall'interesse applicativo del reindirizzamento di asteroidi. Dotato di un'accelerazione di gravità di $g = 0.0014 \frac{m}{s^2}$ e di un raggio di $R = 3 \text{ km}$, se ne può stimare la massa come $M = g \cdot \frac{R^2}{G} \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ kg}$, dove G è la costante di gravitazione universale. In un futuro avvicinamento di Fetonte, quindi, con i correnti mezzi tecnologici a disposizione, al massimo se ne potrebbe staccare un masso.

Terra, da cui rimarrà lontano fino al 2093, mantenendosi comunque anche allora con ogni probabilità a distanza di sicurezza.

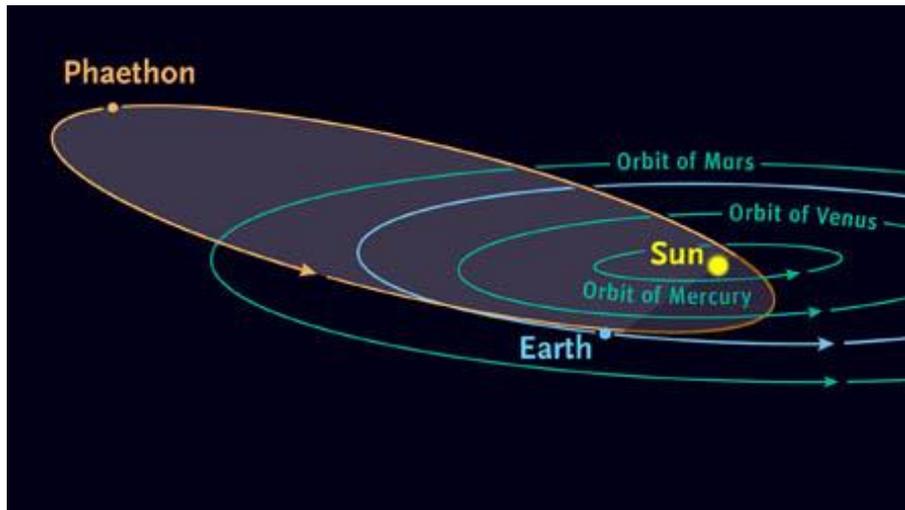


Figura 4: Immagine stilizzata dell'intersezione delle orbite dell'asteroide Fetonte e della Terra

Molto più alla portata del trasporto in S1L1 è invece ad esempio l'asteroide 2013 TX68, di cui è riportata l'orbita in fig. 5; si stima il diametro esterno in 30 m.

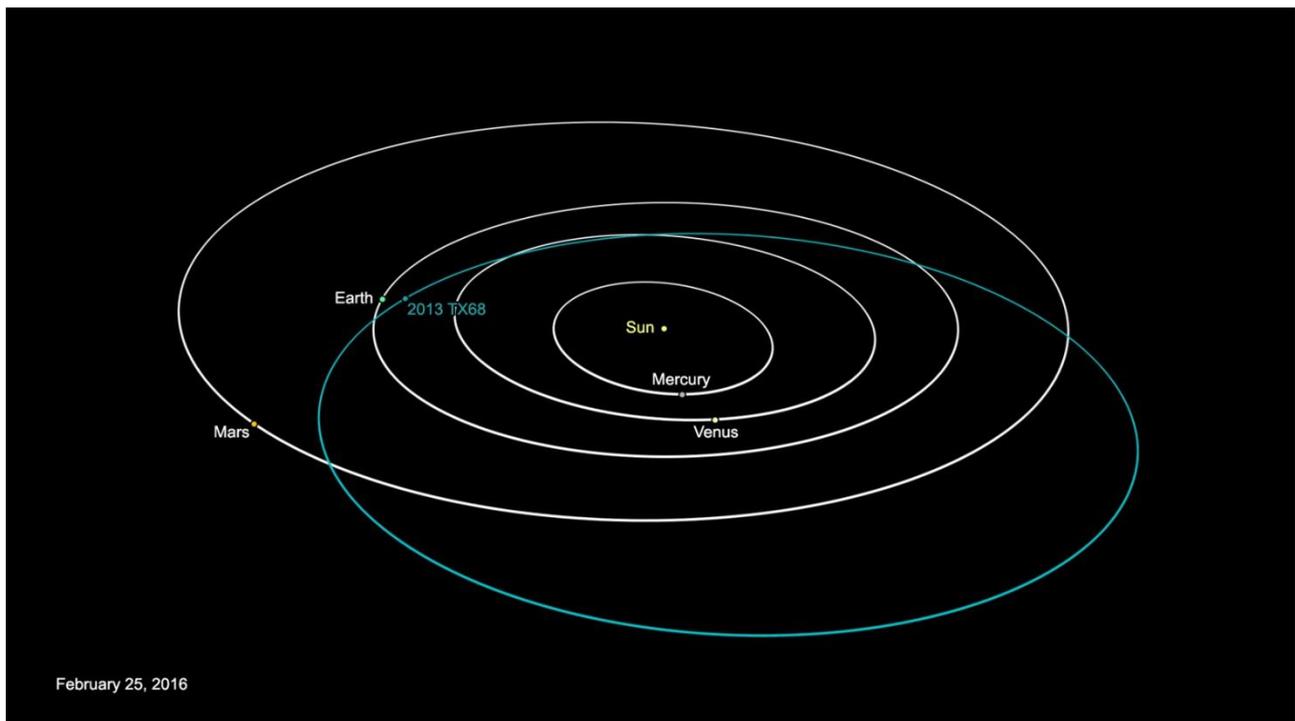


Figura 5: Orbita di 2013TX68 in azzurro. L'8 marzo del 2016 è entrato in flyby terrestre. Valutato rischioso per un evento pericoloso del 28/9/2017, il JPL ha calcolato la probabilità dell'impatto in questa data in meno di 1 su 250 milioni. (foto da NASA.gov)

Si lascia alla parte successiva del capitolo la descrizione delle caratteristiche che gli asteroidi devono avere per essere appetibili dal punto di vista del trasporto in orbita cycler Terra – Marte.

1.2.1. L'importanza di alcuni asteroidi

Si è parlato di come il progetto di missioni ARM sia una pietra miliare molto importante per le future missioni umane interplanetarie, visto che costituisce la base di partenza tecnologica per lo studio di missioni di trasporto di asteroidi più grossi, oggetto di studio di questo lavoro.

È stato anche accennato al fatto che non tutti gli asteroidi possono essere prelevati e trasportati per l'utilizzo e l'inserimento in orbita cycler Terra-Marte. Un altro aspetto fondamentale è il come si possa adempiere ad un simile compito: le tecnologie da sfruttare, la propulsione... tutti aspetti di cui bisogna tenere conto, e di cui verrà illustrato lo schema, nel prosieguo di questo capitolo introduttivo. Innanzitutto, occorre fare una distinzione tra due diverse linee di azione nei confronti degli asteroidi con cui effettuare il rendezvous: essi possono essere prelevati per intero oppure parzialmente prendendone solo un masso, staccandolo dall'asteroide principale. In questo lavoro ci si è concentrati sulla prima strategia, cioè si è guardato a quegli asteroidi che presentano caratteristiche tali da essere prelevati interamente.

Da studi condotti nel 2011 dal KISS (Keck Institute of Space Studies) [2] si è provata teoricamente la fattibilità del recupero di asteroidi tramite propulsione elettrico-solare. Tali asteroidi devono essere “piccoli” in maniera tale da non presentare un'inerzia troppo grande, ma “grandi” abbastanza per essere identificati e tracciati con radar da Terra. In questo paragrafo verranno discusse le caratteristiche che devono avere tali asteroidi, in modo da poter essere prelevati e spinti nell'orbita eliocentrica costituita dal cycler. Per prima cosa bisogna ricordare la parola chiave di questo tipo di missione, ovvero ECONOMICITÀ. La missione di recupero e reindirizzamento dell'asteroide deve essere eseguita limitando l'impatto economico del combustibile utilizzato. È questo che influenza principalmente le dimensioni degli asteroidi di interesse.

Un secondo aspetto di cui bisogna tenere conto riguarda le velocità di rotazione (*spin velocity*) e soprattutto di traslazione dell'asteroide. La prima concernerà il problema della cattura dell'asteroide dopo il suo rendezvous (aspetto secondario in questo lavoro), mentre la velocità di traslazione influisce direttamente sull'eccesso iperbolico di velocità V_∞ che presenta l'asteroide al momento dell'ingresso nella sfera di influenza di un pianeta, e del successivo inserimento nel cycler.

Si può asserire in prima battuta che¹⁸:

- se $V_\infty < 2 \frac{km}{s}$, allora l'asteroide sarà catturabile e reindirizzabile da una fase di flyby lunare (LGA, *Lunar Gravity Assist*).
- Se $V_\infty > 2 \frac{km}{s}$, allora sarà necessaria l'azione gravitazionale più importante data dalla Terra, con flyby terrestri.

Tralasciando gli asteroidi più lenti, appartenenti al primo caso, in questo lavoro si è focalizzata l'attenzione su quelli appartenenti alla seconda classe; quindi **la missione richiede la cattura degli asteroidi, tramite uno o più flyby della Terra, in modo tale da permettere l'inserimento nel cycler S1L1, con una specifica opportunità di ingresso.**

¹⁸ Per maggiori dettagli si veda in bibliografia la fonte [2].

Le caratteristiche necessarie che devono presentare gli asteroidi per il tipo di missione qui studiato sono le seguenti.

- La *dimensione* dell'asteroide, la quale non deve superare una certa soglia. Le dimensioni di un corpo nello spazio dipendono fortemente da come esso appare agli strumenti che lo analizzano, ovvero dalla **magnitudine** che presenta; più risulta chiaro e visibile un corpo, più è alta la precisione con cui lo si può misurare, e più la stima avrà delle tolleranze minori su un valore nominale. Trattando l'asteroide come un corpo sferico in prima approssimazione, sono di interesse pratico quegli asteroidi che presentano un diametro esterno massimo appartenente al seguente intervallo¹⁹: $3 m < D_{est} < 40 m$
- La *massa* dell'asteroide è un aspetto legato dalla **densità** con le dimensioni dello stesso. Considerando con un primo calcolo le densità degli asteroidi uguali tra loro, si può dire che: $M \propto D^3$. Quindi, soggetta anch'essa dalla magnitudine assoluta con cui appare ai radar, è misurata come appartenente ad un intervallo di valori. Di interesse pratico per le missioni di trasporto in orbita cycler Terra – Marte sono quegli asteroidi con: $29 t < M < 42000t$.
- Un altro aspetto fondamentale è la **vicinanza alla Terra**. L'asteroide deve avere una *rotta di naturale avvicinamento alla Terra*, per cui, stimatane la data di naturale incontro con la sfera di influenza terrestre, si possa operare (con la minima spesa) alla sua spinta, per guidarne il flyby terrestre.
- L'*eccesso iperbolico di velocità* V_{∞} , come già detto, è di fondamentale importanza per poter stimare i ΔV che entrano in gioco nella missione. Generalmente si giudicano accettabili manovre per cui $\Delta V \approx 200 \frac{m}{s}$.

Seguendo le linee guida riportate sopra, in tab. 9 è riportata una lista stilata per alcuni asteroidi di interesse per le missioni di trasporto nel cycler.

Tabella 9: Elenco di asteroidi potenzialmente utili per le missioni di trasporto in orbita cycler Terra – Marte (in grigio quelli che sono ancora poco visibili)

ID Asteroide	Magnitudine assoluta	Diametro esterno [m]	Massa stimata [t]	Data flyby naturale \oplus	$V_{\infty} \left[\frac{km}{s} \right]$	ΔV stimati $\left[\frac{m}{s} \right]$
2013 UX2	29.2	3 – 14	29 – 2600	Ott. 2026	3.68	99
2008 LD	29.8	3 – 16	44 – 4000	Giu. 2035	4.13	36
2010 UY7	28.5	4 – 19	77 – 6900	Ott. 2027	3.96	136
2011 CL50	27.6	6 – 28	270 – 24000	Feb. 2031	3.59	90
2006 UQ216	27.3	7 – 33	400 – 36000	Nov. 2028	3.79	89
2009 HD	27.2	8 – 34	470 – 42000	Ott. 2028	4.01	128
2011 HG2	27.0	8 – 37	610 – 55000	Feb. 2025	3.36	39
2011 PB50	24.9	22 – 98	11000 – 10^6	Feb. 2025	4.02	121
2003 LN6	24.7	24 – 108	110 – $1.3 \cdot 10^6$	Apr. 2026	3.98	66

¹⁹ Gli estremi dell'intervallo sono da prendere come soglia. Un asteroide di 3 metri di diametro è troppo piccolo per essere interessante. Le stime, in quanto tali, hanno un estremo inferiore che indica lo scarto massimo da un valore medio, indice della precisione. Viceversa, un asteroide di 40 metri di diametro può presentare alcuni problemi economici per il trasporto, a meno che non sia in una posizione e rotta naturale ideale che implichino l'uso di poco propellente per la spinta.

1.2.2. Strategia di inserimento

La strategia che adotta la missione di recupero e di trasporto nel cycler di asteroidi in naturale avvicinamento alla Terra, consiste nella ricerca di traiettorie ottimali, da un punto di vista di alcuni controlli, quali sono la spinta e la massa finale (nel dettaglio più avanti nel capitolo descrittivo della Teoria del Controllo Ottimale). La ricerca di queste soluzioni permette la realizzazione dell'obiettivo, nella maniera meno dispendiosa possibile e precisa, di inserire un determinato asteroide nel cycler S1L1.

Rimandando la parte tecnica del metodo, che verrà ampiamente descritta successivamente, la missione qui studiata si compone delle seguenti fasi²⁰:

- Una **fase di andata** o *outbound leg*, che consiste nel raggiungimento dell'asteroide bersaglio, partendo dall'orbita terrestre (orbita dove approssimativamente il veicolo ARM si è staccato dal lanciatore) e che termina nel rendezvous con l'asteroide.
- Una fase intermedia che consiste in un periodo generalmente di alcuni mesi, utile alla cattura, al *de-spinning* e alla preparazione al ritorno (questa fase non viene studiata, poiché non concerne la problematica propulsiva e la meccanica del volo qui discussa)
- Una **fase di ritorno**, che consiste nella partenza dall'asteroide e nel suo reindirizzamento, con spinta bassa e continua dello spacecraft, fino al flyby finale della Terra con inserimento dell'asteroide nel cycler.

Quindi si ha un problema strutturato sostanzialmente secondo due fasi: una prima di andata e una seconda di ritorno che partirà dopo un certo periodo dalla fine della prima.

La fase di andata presenta sempre la stessa dinamica: il raggiungimento di un corpo orbitante attorno al Sole. Quindi sostanzialmente questa fase presenta la stessa struttura per tutti gli asteroidi, cambiando solo il punto da raggiungere, la durata del viaggio e la data di partenza.

La fase di ritorno è sicuramente la più critica tra le due, poiché sarà composta da diversi rami di traiettoria a seconda dell'asteroide scelto. L'ostacolo principale è quello di rispettare le date e gli eccessi iperbolici di velocità delle finestre d'inserimento cycler disponibili (visti in tab. 8). A questo proposito, viene in aiuto la Terra con la sua forza gravitazionale. La strategia di base consiste nello sfruttare uno o più flyby della Terra per arrivare al momento giusto e con la giusta velocità all'inserimento in S1L1, per indirizzare l'asteroide nella sua periodica orbita cycler intorno a Marte e la Terra.

Utili a questo scopo, vi sono alcune orbite notevoli dette *orbite risonanti* che permettono l'incontro della Terra dopo un numero intero di anni dal precedente incontro. Il corpo che percorre quest'orbita, compie una rivoluzione in un tempo che è un numero q volte il tempo di rivoluzione terrestre (anno). Questo implica che, inserito nell'orbita risonante tramite flyby della Terra, dopo un multiplo intero n di anni terrestri un corpo incontra la Terra nello stesso punto dello spazio, senza consumare propellente. Allora si può definire così un'orbita risonante: date m rivoluzioni di un corpo attorno al Sole, e n le rivoluzioni della Terra intorno al Sole percorse nello stesso periodo di tempo, se n anni

²⁰ Si utilizza la propulsione elettrica, e quindi la spinta non è impulsiva, ma bassa e continua. Si discute brevemente quest'aspetto nel paragrafo conclusivo di questo capitolo.

dopo l'incontro Terra-corpo essi si rincontrano nello stesso punto originario dell'orbita, allora l'orbita che percorre il corpo è detta **risonante $n:m$ della Terra**²¹. Si ha perciò che:

$$T_{res} \cdot m = n \text{ [anni]} \quad (1)$$

Una raffigurazione di tale orbita è riportata in fig. 6. Si può vedere come qualsiasi orbita di questo genere abbia due punti di intersezione, ma date le caratteristiche risonanti solo in uno dei due vi è effettivamente l'incontro dei due corpi.

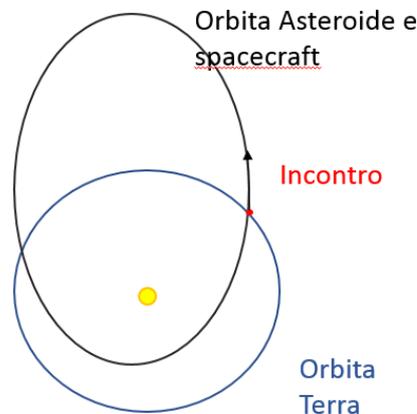


Figura 6: Orbita risonante che interseca quella terrestre in due punti. Nel punto rosso avviene il periodico incontro ($T = T_{res} \cdot m$)

Il problema di questo tipo di orbita è che permette solo di determinare la data di inserimento con spostamenti in avanti ed indietro nel tempo di un numero n intero di anni²². L'idea che nasce come naturale estensione delle orbite risonanti è sfruttare quel secondo punto di intersezione tra le due orbite, modificando l'orbita risonante, per incontrare la Terra anche in quel secondo punto. Così facendo si ottengono le *orbite non-risonanti*. Esse permettono di cambiare la data di incontro tra Terra e asteroide, poiché si sblocca anche il secondo punto di incontro. Esistono molte orbite non risonanti, raggiungibili a seconda dell'eccesso iperbolico di velocità che riesce ad ottenere il corpo in uscita dal flyby della Terra.

Quindi, ricapitolando ciò che è stato visto finora, la tattica utilizzata nella missione di trasporto di asteroidi in S1L1 è la seguente.

- Raggiungere l'asteroide con un veicolo ARM
- Effettuare la cattura dell'asteroide designato, con stazionamento di un certo periodo di tempo nei pressi dello stesso
- Ripartire con una data spinta, necessaria al reindirizzamento dell'asteroide per un controllato primo flyby con la Terra
- Se questa data corrisponde con l'inserimento del cycler, effettuare l'inserimento, aggiustando con piccole spinte la V_{∞} , se necessario.

²¹ Per chiarire il discorso, $q = \frac{n}{m}$, ed è il periodo orbitale (in anni) della risonante; il razionale q in generale non è un numero intero.

²² Il massimo che si possa ottenere è spingere leggermente di più per cambiare di qualche giorno la data, indietro o in avanti, ma non oltre.

- Se il giorno è giusto, ma manca un certo numero di anni all'inserimento, basterà far compiere un flyby terrestre all'asteroide (e spacecraft) in modo da farlo inserire in un'orbita risonante adeguata, in modo da rincontrare la Terra opportunamente, nell'anno giusto.
- Se il giorno non corrisponde in alcun modo, bisogna cercare una o più non-risonanti, affinché si riesca a raggiungere l'inserimento nel giorno giusto. Questo caso, che è il più comune, è anche il più complicato e presenta un numero maggiore di manovre, poiché bisogna adattare data (giorno, mese e anno) e velocità ai requisiti imposti dall'inserimento nel cycler.

Nel capitolo di metodologia specifica verrà spiegato nel dettaglio la procedura di costruzione della missione.

1.3. Accenno alla soluzione tecnologica del trasporto di asteroidi nel cycler Terra-Marte

Fin qui si è spiegato in cosa consiste la missione, senza accennare ai dettagli di avvicinamento all'asteroide (fine fase di andata), né alla propulsione da utilizzare. In questo paragrafo si accenna alle possibili tecniche utilizzabili per il prelevamento dell'asteroide, nonché al tipo di propulsore adatto alla missione²³[2].

Il progetto della missione ARM utilizzava un veicolo spaziale dotato di propulsione elettrica, in particolare un propulsore sostenuto da un sistema elettrico-solare (SEP, Solar Electric Power system²⁴). Questo sistema propulsivo permetterebbe la spinta direzionata, lenta e progressiva necessaria per il reindirizzamento degli asteroidi. Si adotta, quindi, lo stesso veicolo studiato per le missioni ARM anche nelle missioni di trasporto di asteroidi in orbita cycler Terra – Marte.

La funzione di cattura dell'asteroide è sotto responsabilità del progetto di un sistema che si occupa anche del suo de-spinning. Per gli asteroidi più piccoli, vi è a tal funzione il progetto di una *struttura a "borsa" gonfiabile* che permette di circondare l'asteroide e di ancorarlo in essa. Il de-spinning avviene per mezzo di un sistema di controllo di reazione monopropellente, atto anche a dare all'asteroide il corretto assetto per il reindirizzamento (inizio seconda fase). Questo sistema è di difficile applicazione per gli asteroidi maggiori, poiché la sacca di contenimento presenterebbe delle difficoltà strutturali sia alla realizzazione, che al dispiegamento, che per il de-spinning. A tal fine viene progettato un sistema di diversa tecnologia che si sta studiando sotto due possibilità:

- Fascio di ioni deflettente
- Ablazione laser

Il *fascio di ioni* impatta sull'asteroide, dandogli un impulso che lo porta ad annullare la sua velocità di rotazione; il sistema propulsivo provvederebbe con una funzione secondaria a mantenere durante l'operazione la posizione relativa tra asteroide e spacecraft.

L'*ablazione laser* permette il de-spinning dell'asteroide per mezzo di un laser ad alta potenza, che viene sparato su un punto ben preciso dell'asteroide con azione di vaporizzazione superficiale che ne fermerebbe la rotazione. Quest'ultima tecnica è molto promettente, poiché potenzialmente in grado

²³ Come già accennato, nel lavoro di tesi non si è considerato il problema tecnologico di recupero dell'asteroide al rendezvous, ma unicamente le problematiche della meccanica del volo e della richiesta propulsiva. Comunque sia si vuole dare un'idea di come si possa agire anche in quel frangente, visto che questo tipo di missione non è stato ancora implementato nella pratica.

²⁴ Propulsore ad effetto Hall, con alto impulso specifico I_{sp} .

di fermare la rotazione degli asteroidi di più grandi dimensioni, ma è ancora in fase di sviluppo; viceversa, la tecnologia a fascio di ioni è la più matura²⁵. In entrambi i casi, comunque, si tratta di tecnologie che permetterebbero di adempiere alla funzione di cattura dell'asteroide, prima di iniziarne il reindirizzamento.

Dopo questa introduzione alla problematica motrice di questo lavoro, nei prossimi capitoli verrà illustrato il lavoro di tesi che si è svolto, presentandone i principi fisici alla base, i modelli usati, la metodologia e le ipotesi con cui si è affrontato il problema. In ultimo verranno le tre missioni di trasporto di asteroidi in orbita cycloer S1L1 che si sono progettate.

²⁵ Si è pensato anche di usare un *thruster* ad effetto Hall, ma la sua azione sarebbe meno concentrata rispetto al *thruster* a ioni.

2. Modello e fisica del problema

In questo capitolo vengono ripresi i concetti fisici e ingegneristici alla base del lavoro di tesi che si è svolto. Viene introdotto il sistema di riferimento eliocentrico utilizzato, dopodiché si parlerà del modo di misurare il tempo, di manovre ed equazioni del moto. Inoltre, si introdurrà la *Patched Conic Approximation*, importantissima per definire il problema dei due corpi che ci si accinge a studiare nei capitoli successivi.

2.1. Fisica del problema

2.1.1. Sistema di riferimento eliocentrico

In qualsiasi campo della fisica o ingegneria, per poter effettuare delle misure, è necessario stabilire un *sistema di riferimento*.

Ogni sistema di riferimento utilizzato è caratterizzato da tre parametri:

- L'origine degli assi
- Il piano fondamentale di collocazione nello spazio
- Il verso positivo della coordinata di quota (o comunque della terza coordinata, se non provvisto della coordinata di quota²⁶)

Il sistema di riferimento utilizzato nel corso del lavoro è il *sistema di riferimento eliocentrico-eclittico*.

L'eclittica è il piano di riferimento scelto generalmente per lo studio dei fenomeni spaziali, e corrisponde al piano orbitale su cui orbita la Terra attorno al Sole. Questo piano corrisponde al piano fondamentale del sistema di riferimento.

L'origine degli assi ha luogo nel centro del Sole, mentre il verso positivo della coordinata di quota z punta verso l'emisfero che contiene la Stella Polare (*Polaris*).

In fig. 7 è mostrato il sistema di riferimento eliocentrico, il quale è utilizzato come riferimento per le misurazioni e in generale in tutto il lavoro di tesi. In figura sono riportate le caratteristiche e gli aspetti principali che denotano questo sistema:

- L'eclittica corrisponde al piano orbitale della Terra. L'asse di rotazione terrestre presenta un'inclinazione di circa 23° rispetto alla perpendicolare dell'eclittica. Questo impone che piano equatoriale terrestre e eclittica abbiano come luogo dei punti di intersezione una retta. L'asse X è in direzione della retta di intersezione tra piano equatoriale terrestre e eclittica, ed il suo verso è quello in cui si vede il Sole verso la costellazione di Ariete (*Aries* ♈). Il segmento spaziale che così prende forma, prende il nome di *linea degli equinozi*²⁷.

²⁶ Ad esempio, un sistema di riferimento che utilizzi coordinate sferiche non presenta la coordinata di quota, ma la terza coordinata è comunque legata alla quota, ed è chiamata *distanza zenitale*.

²⁷ La *linea degli equinozi* è data dall'intersezione dell'orbita terrestre con il piano equatoriale della Terra. Il suo nome, equi-nozi (da *aequa nox*), deriva dal fatto che i suoi punti estremali sono punti in cui la durata del giorno e della notte si equivalgono: infatti detti punti vengono occupati dalla Terra nel giorno di equinozio di primavera (nel punto vernale o punto dell'Ariete) e equinozio d'autunno (nel punto della Bilancia), rispettivamente nei giorni 21/03 e 21/09.

- Sull'eclittica, perpendicolarmente all'asse X , si trova l'asse Y . Su questa direzione giace il segmento che unisce altri due punti notevoli dell'orbita terrestre. Tali punti prendono il nome di *solstizio d'inverno* e *solstizio d'estate*, mentre la linea che li unisce è la *linea dei solstizi*²⁸. L'asse Y ha il verso che punta dal solstizio d'estate a quello d'inverno.
- Circa 13 giorni dopo il solstizio d'inverno si trova il punto in cui la Terra è maggiormente vicina al Sole (fuoco dell'orbita terrestre): il punto prende il nome di *perielio*. Diametralmente opposto al perielio si trova l'*afelio* (il punto in cui la Terra è più lontana dal Sole). La linea che unisce questi due punti è la *linea degli apsidi*.

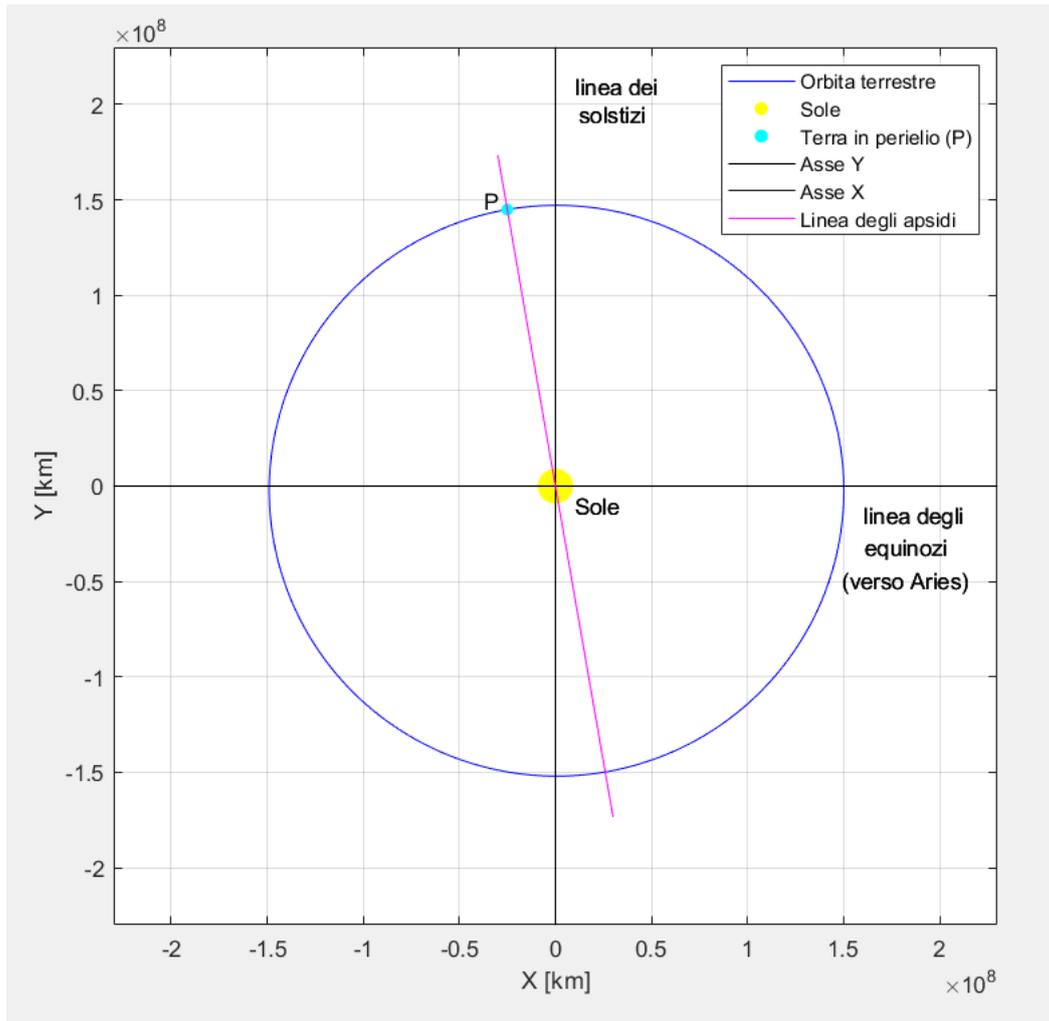


Figura 7: Sistema di riferimento eliocentrico. In evidenza le caratteristiche dell'orbita

Il sistema di riferimento eliocentrico-ellittica è considerato con ottima approssimazione inerziale, per la missione che si studia e per gli archi temporali di tempo che trovano impiego.

²⁸ La *linea dei solstizi* (da *Solis statio*, arresto del Sole) collega il giorno in cui le ore di luce sono le più brevi dell'anno (solstizio d'inverno 21/12) con quello in cui le ore di luce sono le maggiori (solstizio d'estate 21/06). Il perielio si trova nella posizione dell'orbita in cui la Terra transita circa 13 giorni dopo il solstizio d'inverno.

2.1.2. Problema dei 2 corpi

Il problema dinamico che si va ad analizzare è essenzialmente un problema dei 2 corpi²⁹, schematizzato nel seguente modo:

- Il Sole è sempre il corpo principale (i flyby sono le uniche fasi nelle quali la Terra sarebbe il corpo principale, ma sono in questo lavoro considerate istantanee, come verrà spiegato nei prossimi capitoli).
- Lo spacecraft o il sistema spacecraft/asteroide costituisce il corpo secondario.

Il problema descritto viene rappresentato in un sistema eliocentrico di coordinate cartesiane (fig. 8), centrato quindi sul corpo principale. Come già accennato, esso può a ragione essere considerato inerziale, date le scale dei tempi ridotte che entrano in gioco³⁰.

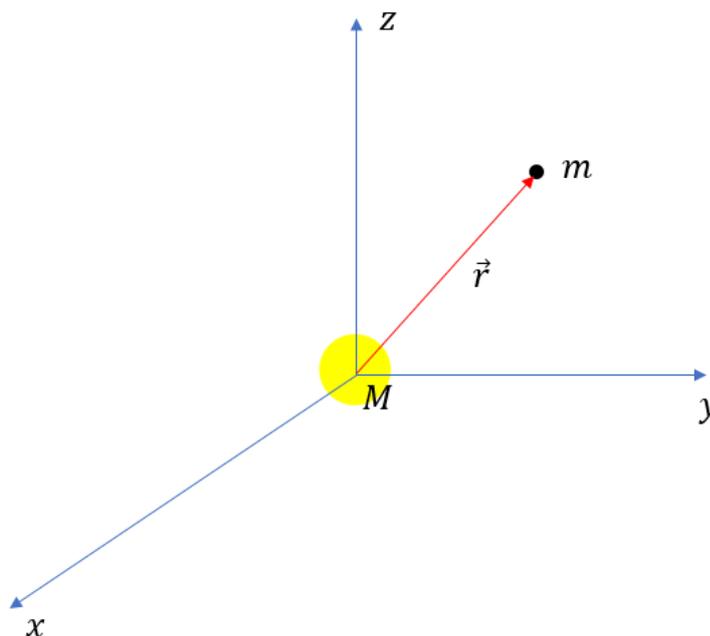


Figura 8: Rappresentazione del problema dei due corpi che viene considerato

Siano m la massa del corpo secondario ed M la massa del Sole (corpo principale). Una forza gravitazionale \vec{F} attrarrà il corpo secondario a quello principale, mentre una uguale e contraria attrarrà quello principale al secondario. La forza \vec{F} presenta la stessa direzione e verso contrario del vettore distanza \vec{r} (si veda la figura). Scrivendo l'equazione della forza gravitazionale che agisce sul corpo secondario, riferendosi al corpo principale:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -GMm \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2)$$

²⁹ Semplificazione notevole del più generale problema degli N-corpi, di cui non esiste soluzione analitica.

³⁰ Il Sole, con tutto il Sistema Solare, orbita attorno al centro della Via Lattea a una v_{media} di 828000 km/h, compiendo un giro attorno al centro galattico in circa 230 milioni di anni [9]. Si capisce bene che, analizzando missioni ed archi di tempo dell'ordine di grandezza della decina d'anni, il sistema di riferimento centrato nel Sole è da considerare per i nostri scopi perfettamente inerziale.

da cui facilmente si ottiene:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (3)$$

che costituisce l'equazione del moto del corpo secondario nei confronti del corpo principale.

In quest'equazione $\mu = \mu_{\odot} = GM$, e rappresenta la *costante di gravitazione solare della Terra*³¹, mentre G è la *costante di gravitazione universale*; esse valgono rispettivamente:

$$\mu_{\odot} = 132500 \cdot 10^6 \frac{km^3}{s^2}, G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}.$$

2.1.3. Elementi orbitali classici, leggi di Keplero e periodo dell'orbita

2.1.3.1. Elementi orbitali classici

Per riuscire ad individuare un corpo secondario nella sua orbita attorno al corpo principale, è necessario fare riferimento ai suoi parametri orbitali. I parametri orbitali classici sono:

- *Eccentricità (e)*: parametro che dà un'informazione sulla forma dell'orbita
- *Semiassse maggiore (a)*: parametro che definisce la dimensione dell'orbita
- *Anomalia vera (v)*: definisce la posizione sull'orbita del corpo secondario al tempo t
- *Argomento del periastro (ω)*: fornisce la direzione della linea degli apsi
- *Longitudine del nodo ascendente (Ω)*: dà una misura della posizione dell'orbita nello spazio, fornendo l'angolo tra la linea dei nodi³² e l'asse X del sistema eliocentrico.
- *Inclinazione dell'orbita (i)*: indica l'angolo di inclinazione dell'orbita del corpo secondario rispetto all'eclittica.

Conoscendo questi sei parametri orbitali, si è in grado di identificare e conoscere completamente l'orbita di un corpo attorno al suo corpo principale.

In casi particolari alcuni degli angoli notevoli definiti sopra risultano indeterminati. Di seguito si riportano queste particolari situazioni.

- Orbite circolari: il periastro non è definito, quindi $\omega \neq 0$, ed è *indeterminato*.
- Orbite giacenti sull'eclittica: $i = 0$.
- Orbite equatoriali e circolari: $i = 0, e = 0$ per cui $\omega \neq 0$ ed indeterminato.

³¹ Si noti che nel problema canonico dei 2-corpi, entrambi i corpi descriverebbero un'orbita ellittica attorno al baricentro del sistema. Nel caso di orbite eliocentriche il baricentro, con ottima approssimazione, corrisponde al centro del Sole, e si trascura il moto orbitale del Sole attorno al centro di massa del sistema "Sole + corpo secondario". Con questa "giustificata" approssimazione, le costanti di gravitazione planetaria sono tutte uguali, per pianeti del Sistema Solare. Altrimenti varrebbe $\mu = G \cdot (M + m)$, per essere più esatti. Vista la massa insignificante dell'asteroide rispetto al Sole, è ancora più giustificata la semplificazione: $\mu \simeq \mu_{\odot}$.

³² La *linea dei nodi* è la linea di intersezione che si forma tra il piano orbitale del corpo secondario e l'eclittica. Essa unisce il *nodo ascendente*, con il *nodo discendente*, punti notevoli dell'orbita di un corpo, in quanto indicano il punto in cui rispettivamente il moto del pianeta segue l'orbita passando sopra l'eclittica e quello in cui discende sotto l'eclittica. Se il corpo secondario in questione è la Terra, o un satellite terrestre in orbita equatoriale, allora la linea dei nodi si sovrappone all'asse X e quindi alla linea degli equinozi; in tal caso $\Omega = 0$.

In questi casi può essere utile introdurre altri parametri:

- *Longitudine del periastro*³³ (π) = $\omega + \Omega$, (o molto più comune in inglese RAAN=*Right Ascension of Ascending Node*)
- *Longitudine vera* (L) = $\omega + \Omega + \nu$
- *Argomento della latitudine* (u) = $\omega + \nu$

In fig. 9 vengono riportati i parametri orbitali angolari classici per un generico corpo orbitante attorno al Sole.

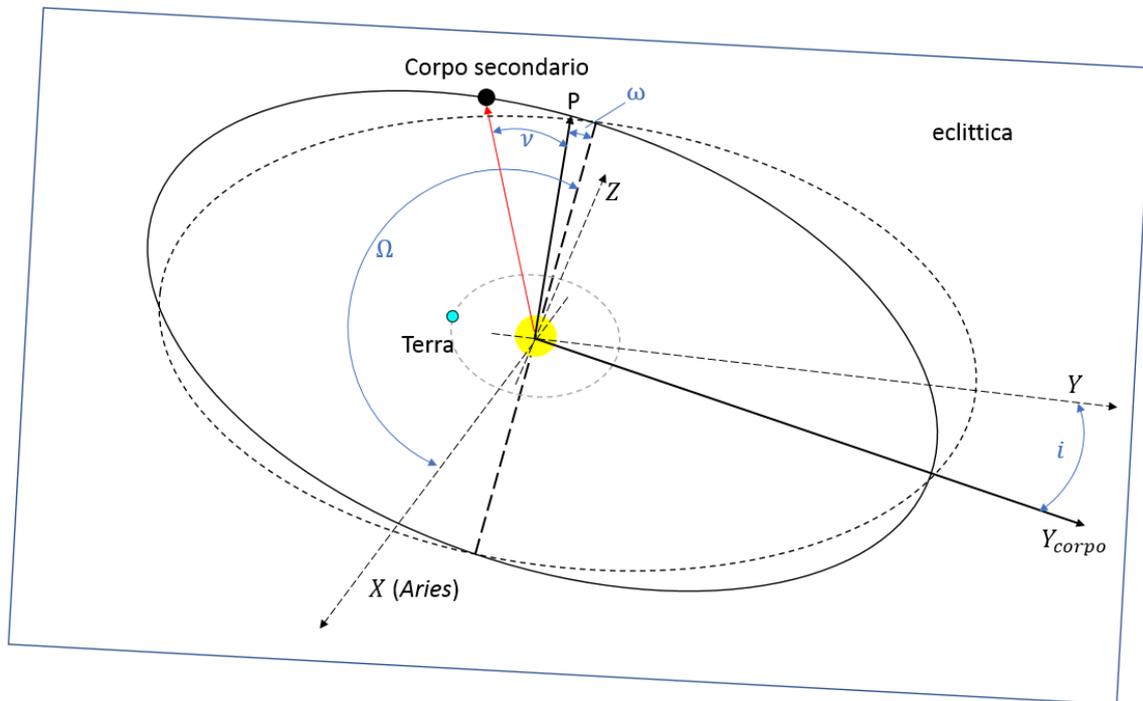


Figura 9: Parametri orbitali angolari classici per un corpo secondario orbitante attorno al Sole (in blu gli angoli notevoli).

2.1.3.2. Leggi di Keplero e periodo dell'orbita

Le leggi di Keplero stanno alla base della Meccanica Celeste; su esse si fonda l'astrodinamica e il progetto di qualsiasi missione spaziale, tenendo anche conto del moto reciproco dei corpi celesti che possono influenzare la missione stessa.

- 1^a legge: "L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi"
- 2^a legge: "Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali"
- 3^a legge: "I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali ai cubi delle loro distanze medie dal Sole"

³³ Si noti che la longitudine del periastro non è un vero e proprio angolo, ma viene definita come la somma di due angoli appartenenti a due differenti piani orbitali. Essa quindi è una quantità che ha due componenti angolari su piani diversi (eclittica e piano orbitale del corpo secondario).

Conoscendo il semiasse maggiore a , si può calcolare il periodo dell'orbita di un corpo secondario attorno al Sole, tramite la terza legge di Keplero. Il periodo orbitale del corpo con orbita ellittica di semiasse maggiore a , è dato dalla seguente formula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\odot}}} \quad (4)$$

2.1.4. Velocità caratteristiche e velocità cosmiche

Si riportano le definizioni di alcune velocità tipiche dei fenomeni che si vanno a studiare e, per completezza, delle velocità cosmiche.

- *Velocità circolare (V_C)*: è la velocità che ha un corpo secondario in orbita circolare attorno al corpo principale. Se r raggio dell'orbita:

$$V_C = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

- *Velocità di evasione (o di fuga) (V_E)*: è la minima velocità che permette al corpo di evadere dall'influenza gravitazionale del corpo principale. Si definisce come la velocità che permette di viaggiare su una traiettoria parabolica che porta a distanza infinita con velocità nulla ($V_{\infty} = 0$), dove V_{∞} è l'eccesso iperbolico di velocità. È dimostrabile che:

$$V_E = \sqrt{2} V_C$$

da notare che se $V > V_E$ allora $V_{\infty} > 0$, ed è la velocità che il corpo secondario avrà a distanza infinita³⁴.

- *Prima velocità cosmica (V_I)*: è la velocità circolare che lo spacecraft deve avere per poter orbitare attorno alla Terra con un'orbita di raggio $r = R_{\oplus} = 6378 \text{ km}$. Essa è:

$$V_I = [V_C]_{r=R_{\oplus}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 7.91 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

- *Seconda velocità cosmica (V_{II})*: è la velocità di fuga che lo spacecraft deve avere per sfuggire dall'orbita circolare di raggio R_{\oplus} . Essa è:

$$V_{II} = [V_E]_{r=R_{\oplus}} = \sqrt{2} V_I = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

- *Terza velocità cosmica (V_{III})*: è la minima velocità che lo spacecraft deve avere per abbandonare il Sistema Solare. Essa quindi permetterà di uscire dalla sfera di influenza terrestre con una traiettoria iperbolica, ed uscirà da quella del Sole con una traiettoria parabolica. La terza velocità cosmica è data dalla seguente espressione:

$$V_{III} = \sqrt{V_{II}^2 + V_{\infty}^2} = 16.65 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Questa è valida se il lancio avviene in direzione e verso del moto della Terra attorno al Sole. Esso infatti costituisce un minimo tra i valori che può avere generalmente V_{III} .

Nella precedente espressione, $V_{\infty} = |V_{E\oplus}| - |V_{C\oplus}|$ rappresenta l'eccesso iperbolico di velocità della nave spaziale in uscita dalla sfera di influenza terrestre per uscire dal Sistema Solare,

³⁴ Con distanza infinita si intende la distanza tale da uscire dalla sfera di influenza del corpo principale.

mentre $V_{E\oplus}$ e $V_{C\oplus}$ sono rispettivamente la velocità di evasione e la velocità circolare della Terra attorno al Sole.

2.2. Manovre e traiettorie interplanetarie

Lo spazio interplanetario è una regione molto difficile da analizzare dal punto di vista della meccanica del volo spaziale. Le missioni che prevedono il viaggio di navicelle che partono da un pianeta per arrivare ad un altro, richiedono lo studio di una dinamica soggetta a varie forze, di diversa origine. Si pensi che ogni corpo del sistema solare, teoricamente, esercita la sua forza attrattiva gravitazionale sulla navicella in viaggio. Per fare i conti esatti sulla dinamica spaziale di questa missione, bisognerebbe affrontare un complicatissimo problema ad N-corpi di cui non esiste soluzione analitica, e su cui si dovrebbe agire con metodi numerici con difficili e lente soluzioni.

Un metodo analitico che permette un'analisi preliminare di missione ottimamente accurato è il metodo delle *Patched Conic Approximation*, di cui si parla nel primo paragrafo.

Nello svolgimento di missioni interplanetarie, è necessario agire con manovre particolari per sfruttare tutto ciò che la natura mette a disposizione per eseguire determinati spostamenti e cambiamenti di direzioni di moto, che altrimenti sarebbero a carico dello spacecraft. Tra queste manovre sono di fondamentale importanza i *flyby*, ovvero fasi di *aiuto gravitazionale* nel quale il lavoro di cambio di direzione del moto e del vettore velocità viene fornito dalla forza di gravità di un corpo celeste.

2.2.1. Patched Conic Approximation

Il ragionamento alla base del metodo è quello di semplificare il modo di vedere lo spazio dal punto di vista dell'azione gravitazionale dei pianeti sullo spacecraft. Data una traiettoria che una navicella deve seguire:

- Si divide lo spazio in *sfere d'influenza*, in ognuna delle quali agisce unicamente la forza di gravità di un determinato pianeta, trascurando tutte le altre.
- Così facendo si ottengono una serie di problemi dei 2-corpi collegabili in serie l'uno dopo l'altro. La missione può essere vista come una successione di problemi dei 2-corpi, e vista come una traiettoria composta da una serie di coniche.
- Ogni conica è contenuta in una sfera di influenza

La sfera di influenza di un corpo è quella zona nella quale si risente esclusivamente della forza di gravità di quel corpo. Una sfera d'influenza finisce quando inizia quella successiva. In zone di frontiera, le azioni gravitazionali dei corpi principali in questione si equivalgono.

È evidente che in una missione interplanetaria la maggior parte del viaggio dello spacecraft avverrà nella sfera d'influenza del Sole.

Immaginando un viaggio Terra → Marte semplice, la missione interplanetaria sarà così costituita:

1. Partenza dalla sfera d'influenza terrestre (prima conica)
2. Passaggio nella sfera di influenza solare (seconda conica)
3. Arrivo nella sfera di influenza marziana (terza conica)

Il raggio della sfera di influenza di un pianeta si definisce così (vedasi fig. 10):

$$r_2 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot r_{12} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot r_{12} \quad (5)$$

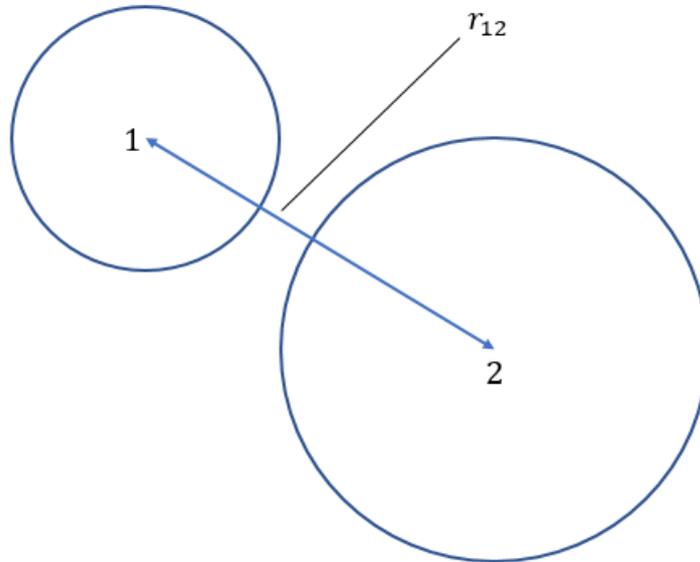


Figura 10: Definizione di sfera di influenza di un corpo celeste

Riportando il discorso all'esempio di prima, così verrebbe a costituirsi la missione:

- Fase di fuga dalla sfera di influenza terrestre
- Fase eliocentrica
- Fase di cattura nella sfera di influenza marziana

Questo era un esempio di semplice missione interplanetaria. Vi possono essere dei casi, però, in cui vi sono passaggi intermedi in sfere di influenza di corpi celesti a scopo di guadagno di velocità, cambio di direzione di moto o frenata gravitazionale.

A questo proposito, in questo lavoro è stato molto importante l'utilizzo di flyby multipli, che hanno permesso di cambiare la direzione e verso del vettore velocità del corpo secondario, ad opera dell'azione gravitazionale del corpo principale.

2.2.2. Flyby

Come già accennato, il flyby è una manovra spaziale che permette di cambiare la direzione ed il verso del vettore eccesso iperbolico di velocità, mantenendone inalterato il modulo. Questo viene effettuato entrando nella sfera di influenza del corpo principale di cui si vuole effettuare il flyby, avvicinandosi progressivamente al pianeta e facendo ruotare la V_{∞} dell'angolo voluto. Più la rotazione è ampia, più la quota del flyby sarà bassa, poiché si necessita di maggior lavoro gravitazionale.

Facendo riferimento allo schema in fig. 11, si vuole mostrare un esempio di flyby della Terra.

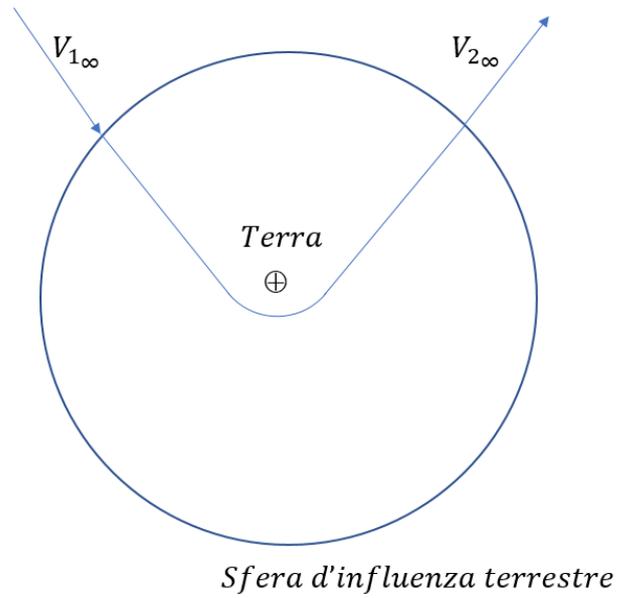


Figura 11: Schema di un flyby terrestre. Si conserva il modulo del vettore velocità.

Considerando l'esempio mostrato in figura, si può asserire che:

$$|\mathbf{V}_{1\infty}| = |\mathbf{V}_{2\infty}|, \text{ ma } \mathbf{V}_{1\infty} \neq \mathbf{V}_{2\infty}$$

a causa del fatto che i due vettori hanno diversa direzione.

2.3. Misura del tempo

In questo lavoro viene fatto uso di diverse unità di misura del tempo. Le misurazioni di ricerca della soluzione ottimale per le traiettorie spaziali, ovvero i calcoli svolti durante il processo iterativo della procedura, vengono svolti utilizzando un sistema di misura adimensionale³⁵, discusso nel capitolo successivo.

Nel resto del lavoro, si fa uso di altri due sistemi di misura del tempo:

- Unità di misura del S.I. (*secondo*)
- Giorno giuliano (*Julian Day [JD]*) e *Modified Julian Day [MJD]*)

Il sistema di misura del tempo basato sul giorno giuliano è utile perché fornisce un sistema in grado di gestire date provenienti da misurazioni di diversi calendari. Allo stesso modo di un denominatore comune, fornisce un sistema di misurazione internazionale, in cui ad ogni unità corrisponde un giorno.

Il JD corrisponde al numero intero di giorni che si contano a partire dal mezzogiorno del 1° gennaio 4713 a. C. Per ottenere la data giuliana intera, si combina il giorno giuliano con la frazione di giorno trascorso a partire dal mezzogiorno del tempo universale (U.T.).

Il MJD, ovvero il giorno giuliano modificato, deriva dal JD nella seguente maniera:

$$MJD = JD - 2400000.5$$

Esso misura il tempo a partire dal 18 novembre 1858 (corrispondente a MJD=1); viene introdotto come sistema di misurazione del tempo per maneggiare più agevolmente le date giuliane, altrimenti troppo lunghe a causa dell'enorme numero di giorni che conta per le date più recenti.

Viene ora illustrata la procedura per convertire le date giuliane alle date gregoriane normalmente utilizzate.

$$\text{Siano: } \begin{cases} a = JD + 32044 \\ b = \text{floor} \left[\frac{4 \cdot a + 3}{146097} \right] \\ c = a - \text{floor} \left[\frac{146097}{4} b \right] \\ d = \text{floor} \left[\frac{4 \cdot c + 3}{1461} \right] \\ e = c \cdot \text{floor} \left[\frac{1461 \cdot d}{4} \right] \\ m = \text{floor} \left[\frac{5 \cdot e + 2}{153} \right] \end{cases}, \quad \text{dove } \text{floor}(n) \text{ indica la parte intera di } n. \quad (6)$$

Se la data gregoriana è *gg/mm/aa* allora il calcolo è questo:

$$\begin{cases} gg = e + \text{floor} \left[\frac{153 \cdot m + 2}{5} \right] \\ mm = m + 3 - 12 \cdot \text{floor} \left[\frac{m}{10} \right] \\ aa = 100 \cdot b + d - 4800 + \text{floor} \left[\frac{m}{10} \right] \end{cases}, \quad \text{per cui si ottiene la data } gg/mm/aa. \quad (7)$$

³⁵ Questo sistema, che coinvolge l'adimensionalizzazione di tempo, lunghezza, massa e velocità, viene discusso nel dettaglio nel capitolo di metodologia generale.

3. Metodologia generale: metodi indiretti per l'ottimizzazione di traiettorie spaziali

In questo capitolo viene discussa la tecnica di ottimizzazione di traiettoria spaziale utilizzata in questo lavoro, cioè l'impiego dei metodi indiretti applicati alla teoria del controllo ottimale.

In breve, viene presentata un'introduzione al metodo evidenziandone le caratteristiche salienti e i principali punti di forza rispetto ad altre tipologie di approccio matematico. Successivamente viene spiegato il funzionamento del metodo in generale, presentando la scrittura delle equazioni da risolvere per arrivare alla soluzione del problema di ottimizzazione.

Spiegato il funzionamento del metodo in generale, si presenta il caso specifico costituito dal problema di ottimizzazione di traiettorie a bassa spinta continua, che coinvolgono l'utilizzo di flyby multipli della Terra per il trasporto di asteroidi in orbita cyclo Terra – Marte.

3.1. Introduzione al metodo

La metodologia alla base del lavoro svolto è fondata sui metodi indiretti applicati nella teoria del controllo ottimale. In questa sezione verrà illustrato brevemente questo metodo, applicabile in svariati campi dell'ingegneria e particolarmente efficace nel caso dell'ottimizzazione di traiettorie di corpi spaziali.

La teoria del controllo ottimale permette l'ottimizzazione della traiettoria di un veicolo spaziale, minimizzando o massimizzando certe grandezze peculiari del problema (rispettivamente il propellente e quindi la spinta, o la massa finale), e legate al costo della missione. La scelta di utilizzare l'approccio indiretto applicato alla teoria del controllo per la soluzione del problema permette un'ottima gestione di caratteristiche e variabili proprie delle missioni spaziali. Quindi, l'utilizzo di questi metodi favorisce una naturale trattazione di problemi peculiari delle missioni spaziali. I problemi in questione, citandone i più rappresentativi, possono essere:

- problemi di spinta impulsiva
- problemi di bassa spinta continua (fornita da propulsione elettrica, utilizzata anche nel caso in esame di trasporto di asteroidi)
- manovre di *flyby*, (di fondamentale importanza per le missioni di trasporto di asteroidi in orbita cyclo Terra – Marte di cui tratta questa tesi)
- volo in orbita bassa con influenza della resistenza atmosferica

I metodi indiretti usano la teoria del controllo per trasformare il problema di ottimo in un problema al contorno, risolto mediante una procedura di *shooting* [10]. Questo tipo di approccio fa uso di una soluzione di tentativo di partenza, da cui cominciare le iterazioni per la risoluzione delle equazioni differenziali. Perché il metodo funzioni, la condizione iniziale deve necessariamente essere "vicina" alla soluzione reale, finale del problema.

I metodi indiretti agiscono, come verrà illustrato più nel dettaglio nel seguito, dividendo la missione complessiva in sotto archi, ognuno dei quali diventa un problema al contorno nella procedura iterativa. È di principale importanza la corretta imposizione delle condizioni al contorno, garantendo la continuità delle grandezze agli estremi degli archi laddove il problema lo impone.

3.2. Caratteristiche dei metodi indiretti

I metodi indiretti presentano particolari caratteristiche e vantaggi, rispetto ad altre tecniche. Le caratteristiche vantaggiose sono:

- forniscono soluzioni numeriche “esatte”, in accordo con i modelli e le semplificazioni alla base della trattazione e degli esperimenti
- richiedono un minore costo computazionale rispetto ai metodi diretti, trattando un numero limitato di variabili
- permettono di acquisire anche importanti informazioni di carattere teorico, riguardanti il problema in esame

D'altra parte, i metodi indiretti presentano anche degli aspetti problematici:

- nei problemi più complessi può essere molto difficile la scrittura delle espressioni analitiche necessarie per la scrittura delle condizioni al contorno
- l'aggiunta di variabili che non hanno un significato fisico (**variabili aggiunte**) che complicano il problema e la ristretta regione di convergenza dell'algoritmo di shooting.
- La necessità di indovinare la sequenza di sotto archi vincolati e non vincolati nei problemi di cammino irregolare.

In ogni caso, la bontà dei risultati forniti dipende in larga misura dalla scelta della soluzione di tentativo, che è indubbiamente la criticità principale del problema.

3.3. Formulazione del metodo

L'obiettivo della teoria del controllo ottimale è quello di risolvere il problema di ottimo legato alla realizzazione di traiettorie orbitali, riuscendo ad ottenere il massimo possibile dalla fisica del problema. Gli indici di prestazione e gli approcci di stazionarietà che si usano notoriamente nella ottimizzazione indiretta di traiettorie spaziali sono:

- Massimizzazione della massa finale del problema, fissata la massa iniziale
- Minimizzazione della spinta (e quindi del propellente) necessaria alle manovre e traiettorie spaziali

Il fine comune è quello di abbassare i costi, ricercando la strategia giusta per rendere massimo o minimo un determinato indice di prestazione.

3.3.1. Teoria del controllo ottimale e scrittura del sistema di equazioni

L'utilizzo dei metodi indiretti applicati alla teoria del controllo ottimale implica l'impiego di un metodo basato sui seguenti punti:

- Principi del calcolo variazionale
- Determinazione dei controlli dal problema differenziale ai limiti
- Determinazione di una curva (traiettoria) per cui risultano soddisfatte sia le equazioni differenziali, sia le condizioni algebriche agli estremi

- Massimizzazione o minimizzazione di un funzionale J , che permetta la scrittura di tutte le equazioni, ed il calcolo della condizione di ottimo
- Utilizzo della formulazione di Mayer di stazionarietà di un funzionale J dipendente dai valori delle variabili agli estremi della curva

L'espressione di un generico sistema di equazioni al quale viene applicata la teoria del controllo ottimale può essere così sintetizzata:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (8)$$

dove x è il vettore delle variabili di stato del sistema, u il vettore dei controlli, e t la variabile indipendente tempo.

Si suddivide la traiettoria in un numero di archi n , all'interno dei quali si suppongono continue le variabili in gioco, mentre agli estremi possono non esserlo. Ogni arco risulta, quindi, caratterizzato come in fig. 12, dove $-$ e $+$ indicano rispettivamente i valori assunti subito prima o dopo il punto considerato.



Figura 12: j -esimo arco

Si impongono le condizioni al contorno, generalmente non lineari, che possono coinvolgere sia le variabili di stato che quella indipendente. Esse vengono impostate nella seguente forma di vettore colonna:

$$\chi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) = 0 \quad (9)$$

Per risolvere il problema di ottimo, si ricercano i valori di massimo (o di minimo) di un funzionale J , che generalmente avrà forma:

$$J = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

Come si può vedere dalla (10), J è funzione di due termini: φ , che dipende dai valori assunti dalle variabili di stato e dal tempo agli estremi degli archi, e l'integrale di una funzione ausiliaria Φ , esteso all'intera traiettoria, dipendente dalle variabili di stato x , dai controlli u e dal tempo t (in ogni punto). Si preferisce, per utilità, riscrivere il funzionale introducendo i moltiplicatori di Lagrange μ e le variabili aggiunte λ , associati alle equazioni di stato. Così facendo si ottiene l'espressione del funzionale J^* riportata nella (11), che è il funzionale analizzato nello studio.

$$J^* = \varphi(x_{(j-1)+}, x_{j-}, t_{(j-1)+}, t_{j-}) + \mu^T \chi + \sum_j \int_{t_{(j-1)+}}^{t_{j-}} (\Phi + \lambda^T (f - \dot{x})) dt \quad (11)$$

La sostituzione di J con J^* è assolutamente lecita, poiché i due funzionali coincidono se le condizioni al contorno e le equazioni di stato sono soddisfatte. In tal caso, quindi, ricercare massimi o minimi di J^* è la stessa cosa che ricercare i corrispondenti estremali di J .

Integrando per parti la (11), e differenziando rispetto alle variazioni di \mathbf{x} e t sui contorni degli archi e di \mathbf{u} e \mathbf{x} all'interno di ogni arco, si ottiene la variazione prima del funzionale, indicata con δJ^* :

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \left(-H_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{(j-1)_+}} \right) \delta t_{(j-1)_+} + \left(H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} \right) \delta t_{j_-} \\ & + \left(\boldsymbol{\lambda}^T_{(j-1)_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{(j-1)_+}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{(j-1)_+} \\ & + \left(-\boldsymbol{\lambda}^T_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] \right) \delta \mathbf{x}_{j_-} \\ & + \sum_j \int_{t_{(j-1)_+}}^{t_{j_-}} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) dt \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

dove si è introdotto l'Hamiltoniano del sistema:

$$H = \Phi + \boldsymbol{\lambda}^T f \quad (13)$$

che per la formulazione di Mayer ($\Phi = 0$) qui utilizzata, diventa $H = \boldsymbol{\lambda}^T f$.

La condizione di ottimo che si vuole cercare è quella per cui si ha la stazionarietà del funzionale J^* , e questo avviene con l'annullamento di δJ^* , con le variazioni $\delta t_{(j-1)_+}$, δt_{j_-} , $\delta \mathbf{x}_{(j-1)_+}$, $\delta \mathbf{x}_{j_-}$, $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$ scelte arbitrariamente.

Al fine di ottenere la condizione di stazionarietà sopra descritta, si effettua una scelta opportuna delle variabili aggiunte e dei moltiplicatori di Lagrange, per cui si ottiene l'annullamento dei coefficienti di ciascuna delle variazioni nella (12) contemporaneamente.

Così facendo si ottengono:

- le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili aggiunte (14):

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (14)$$

- le equazioni algebriche per i controlli (15):

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = 0 \quad (15)$$

- le condizioni al contorno di ottimo (16):

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\lambda}^T_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_-}} \right] &= 0 & j = 1, \dots, n \\ \boldsymbol{\lambda}^T_{j_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{j_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}_{j_+}} \right] &= 0 & j = 0, \dots, n-1 \\ H_{j_-} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_-}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_-}} &= 0 & j = 1, \dots, n \\ -H_{j_+} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_{j_+}} + \boldsymbol{\mu}^T \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t_{j_+}} &= 0 & j = 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (16)$$

Le leggi che regolano la ricerca delle condizioni di ottimo e le osservazioni che ne derivano sono schematizzabili attraverso i seguenti punti:

- le legge di controllo è formalmente indipendente dal cercare i minimi o i massimi di J
- il controllo ottimale può essere determinato anche sfruttando il Principio di Massimo di Pontryagin: il controllo ottimale è quello che tra tutti i controlli ammissibili massimizza H (per J da massimizzare)
- se una variabile è assegnata a t_0 o t_f la corrispondente variabile aggiunta è libera in quel punto
- se una variabile a t_0 o t_f non compare nelle condizioni la corrispondente variabile aggiunta è nulla in quel punto
- se una variabile è continua e libera in un punto interno la corrispondente variabile aggiunta è anch'essa continua in quel punto
- se una variabile è continua e assegnata in un punto interno la corrispondente variabile aggiunta ha una discontinuità libera in quel punto
- se il tempo iniziale o finale è libero, l'Hamiltoniano è lì nullo
- se il tempo iniziale o finale è assegnato, l'Hamiltoniano è lì libero
- se un tempo intermedio è libero (e continuo) l'Hamiltoniano è continuo in quel punto
- se un tempo intermedio è assegnato, l'Hamiltoniano ha una discontinuità libera in quel punto

Le regole che vigono se vi sono vincoli sui controlli stabiliscono che:

- la variabile di controllo deve essere compresa tra un valore minimo ed un valore massimo
- a seconda del valore ottenuto risolvendo le equazioni algebriche sui controlli (15) si ha:
 - il valore ottenuto è nel dominio ammissibile ed è quindi quello ottimale
 - il valore ottenuto non è ammissibile: il controllo ottimale è quello minimo o massimo (in base al Principio di Pontryagin)
- particolarità: H lineare rispetto ad un controllo:
 - da prendere il massimo se il coefficiente di H è positivo
 - un valore intermedio da determinarsi annullando le derivate del coefficiente (rispetto al tempo) nel caso il coefficiente sia nullo in un intervallo di tempo. In tal caso si parla di *arco singolare*.

3.3.2. Risoluzione del problema di ottimo e problema differenziale ai limiti

Per la risoluzione del problema di ottimo applicato al sistema generico di equazioni (8), la teoria del controllo ottimale esprime il problema sotto la forma di un nuovo sistema di equazioni differenziali al contorno, in cui alcune delle variabili in gioco vedono il loro valore iniziale incognito.

Il problema quindi viene esposto come la ricerca dell'insieme di questi valori iniziali che consentono il soddisfacimento di tutte le condizioni al contorno mediante integrazione numerica.

Quindi si ha:

- Un problema differenziale BVP³⁶ con equazioni date dai sistemi di equazioni (8) e (14), ovvero sulle variabili di stato e sulle variabili aggiunte
- I controlli di dato sistema sono determinati dalle equazioni (15), supportate dalle condizioni al contorno imposte (9) e quelle di ottimo, ottenibili eliminando i moltiplicatori di Lagrange dal sistema costituito dalle (16)

Il problema così costituito ha il compito della ricerca della soluzione ai limiti, tipico dell'applicazione di tecniche indirette. Si ottiene la soluzione del BVP riducendo il problema ad una successione di problemi ai valori iniziali, portata a convergenza dall'applicazione del metodo di Newton. In generale ogni fase del problema ai valori iniziali ha una durata incognita, così come è incognito il valore delle variabili in dato punto. L'indeterminatezza della durata di ciascuna fase è critica ai fini dell'integrazione; per ovviare a questo problema, si effettua un cambio di variabile temporale, definita nel j -esimo sottointervallo secondo la seguente relazione:

$$\varepsilon = j - 1 + \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j} \quad (17)$$

Dove ε è la nuova variabile temporale, t è la variabile tempo vecchia e τ_j è la durata (incognita generalmente) del sottointervallo.

3.3.3. Procedura di calcolo

Unendo i sistemi di equazioni (8) e (14), e sostituendo le espressioni dei controlli tramite le condizioni sui controlli presenti nelle (15), si ottiene un problema differenziale nelle variabili di stato e aggiunte, identificate complessivamente con il vettore \mathbf{y} :

$\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, per cui si ottiene il problema differenziale:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}, t) \quad (18)$$

Applicando il cambio di variabile indipendente descritto nella (17), la (18) diventa:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \varepsilon), \text{ che sostituisce il problema originale (8).} \quad (19)$$

Il nuovo vettore \mathbf{z} contiene variabili di stato, variabili aggiunte, ma anche i parametri costanti del problema (che possiamo classificare in un vettore \mathbf{c} , contenuto in \mathbf{z}), che non dipenderanno dal tempo. Introducendo un ulteriore vettore \mathbf{s} , contenente i valori che le variabili assumono ad ogni contorno e i parametri incogniti \mathbf{c} , definito come

$$\mathbf{s} = (y_0, y_1, \dots, y_n, \mathbf{c}) \quad (20)$$

permette di riscrivere le intere condizioni al contorno tramite il sistema:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{s}) = 0 \quad (21)$$

Per determinare i valori incogniti delle variabili iniziali, si opera con una procedura iterativa che calcola di quali valori si necessita per soddisfare le condizioni al contorno (21). La r -esima iterazione inizia con l'integrazione delle equazioni (19), con i valori iniziali \mathbf{p}^r trovati al termine dell'iterazione

³⁶ Problema differenziale al contorno (Boundary Value Problem).

precedente. Così procedendo si integrano le equazioni lungo tutta la traiettoria, tenendo in conto le eventuali discontinuità ai contorni interni³⁷.

Calcolato il valore delle variabili in ognuno dei contorni, al termine dell'integrazione, si calcola l'errore sulle condizioni al contorno $\boldsymbol{\psi}^r$ all' r -esima iterazione. Se si opera con una variazione $\Delta \mathbf{p}$ sui valori trovati, si fa variare l'errore di una quantità $\Delta \boldsymbol{\psi}$, che, considerando solo termini di primo ordine, assume espressione:

$$\Delta \boldsymbol{\psi} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{p}} \right] \Delta \mathbf{p} \quad (22)$$

L'algoritmo quindi corregge i valori iniziali ad ogni iterazione, dovendo arrivare ad annullare l'errore sulle condizioni al contorno. Per ogni iterazione la variazione $\Delta \mathbf{p}$ sarà:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{r+1} - \mathbf{p}^r = - \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \boldsymbol{\psi}^r \quad (23)$$

e si attuerà finché le condizioni al contorno non saranno verificate con la precisione cercata.

La matrice $\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{p}} \right]$ è ottenuta come:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{s}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (24)$$

Nella (24), la prima matrice viene calcolata derivando le condizioni al contorno ($\boldsymbol{\psi}$) rispetto alle grandezze che vi compaiono (\mathbf{s}). La seconda matrice viene calcolata come parte dalla matrice $\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right]$, che non è altro che la derivata di tutti i parametri, costanti (quelli che ci interessano) e variabili (aggiunte e di stato) rispetto ai valori iniziali delle variabili stesse, assunti ai contorni, rispettivamente per $\varepsilon = 0, 1, \dots, n$.

Nel dettaglio, $\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right]$ è ottenuta come integrazione del sistema di equazioni differenziali ottenuto derivando il sistema principale \mathbf{z} rispetto a ciascuno dei valori iniziali ai contorni:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = |\mathbf{g}(\varepsilon)|, \text{ dove } \mathbf{g}(\varepsilon) \text{ è calcolabile integrando } |\dot{\mathbf{g}}|:$$

$$|\dot{\mathbf{g}}| = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} \right) \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] |\mathbf{g}| \quad (25)$$

La (25) si è scritta esplicitando lo Jacobiano del sistema principale.

Altri aspetti importanti da osservare nell'applicazione dei metodi indiretti sono:

- Il metodo permette di trattare discontinuità nelle variabili, poiché, per una discontinuità nel punto i , è sufficiente aggiornare il vettore \mathbf{z} e la matrice \mathbf{g} , con l'opportuna relazione \mathbf{h} che lega i valori delle variabili prima e dopo la discontinuità:

$$\mathbf{z}_{i+} = \mathbf{h}(\mathbf{z}_{i-})$$

$$[\mathbf{g}_{i+}] = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}} \right] [\mathbf{g}_{i-}] \quad (26)$$

- La precisione richiesta per il soddisfacimento delle condizioni al contorno è di 10^{-7} , per cui l'errore massimo su dette condizioni deve essere inferiore a questa soglia.
- La matrice $\left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{p}} \right]$ può essere ottenuta numericamente operando così:

³⁷ All'inizio della procedura, alla prima integrazione, è necessario scegliere valori di tentativo \mathbf{p}^1 .

- i. Variando uno dei parametri p_i di una piccola quantità Δp_i
 - ii. Si integra il sistema principale e si valuta la variazione degli errori $\Delta\psi(\Delta p_i)$
 - iii. Si può ottenere l' i -esima riga della matrice dalla relazione linearizzata $\frac{\Delta\psi^T}{\Delta p_i}$
- Si opera con una correzione di volta in volta, che è in realtà una frazione di quella calcolata nella (23), per ovviare ai problemi di convergenza possibili, dati da una linearizzazione dell'errore. Il valore iniziale alla nuova iterazione quindi sarà:

$$\mathbf{p}^{r+1} = \mathbf{p}^r + K_1 \Delta \mathbf{p} \quad (27)$$

dove $K_1 = 0.1 \div 1$

- Ad ogni iterazione si vede se l'errore massimo è inferiore ad un multiplo di quello precedente (multipli tra 2 e 3), in modo da stabilire se procedere o meno con la nuova iterazione.
- Se l'errore è troppo grande rispetto alla precedente, si procede alla bisezione della correzione apportata, dimezzandola, ottenendo così una correzione complessiva di $\frac{K_1 \Delta \mathbf{p}}{2}$. Si opera con la bisezione della correzione fino ad un massimo di cinque volte, dopodiché (non dovessero bastare per la diminuzione dell'errore) si pone termine al processo, decretando la non convergenza con quella data soluzione di tentativo \mathbf{p}^0 .

3.4. Metodi indiretti nello specifico: ottimizzazione di traiettoria

Nei paragrafi precedenti è stato presentato il metodo generale di risoluzione del problema di ottimo con l'approccio indiretto alla teoria del controllo ottimale.

In questa sezione, si entra nello specifico del lavoro parlando del metodo applicato al problema in questione. Verranno scritte le equazioni alla base del problema da affrontare, ovvero il problema dei 2 corpi. Si presenta l'adimensionalizzazione delle variabili di stato, importante mezzo per preservare la precisione delle misurazioni e dei calcoli e si scriveranno quindi le equazioni del problema, a cui si affiancheranno le condizioni al contorno sulle variabili di stato e sui controlli. Seguirà poi una presentazione di tutte le variabili che entrano in gioco per ogni tratto di traiettoria da ottimizzare, ed infine si perverrà alla scrittura delle condizioni di ottimo, linea guida per l'ottimizzazione di traiettoria. Si inizia con le ipotesi alla base del lavoro svolto.

3.4.1. Ipotesi di base

La missione di raggiungimento, cattura e inserimento nel cycler dell'asteroide è un problema alquanto complicato da studiare. Vista la considerevole complessità dovuta alla dinamica del problema considerato, si necessita di ipotesi semplificative³⁸.

Le **ipotesi** alla base del modello con cui si sono condotte le analisi sono:

- Si utilizza un sistema di riferimento eliocentrico.
- È lecito considerare le fasi di navigazione spaziale tali per cui si possa utilizzare la *Patched Conic Approximation*.

³⁸ Le ipotesi fatte non stravolgono la fisica del problema, ma la rendono più facilmente gestibile per trovarne una soluzione, che poi potrà essere in futuro indagata più approfonditamente.

- La sfera di influenza della Terra entra in gioco solo durante le fasi dei suoi flyby.
- Le fasi di flyby intervengono istantaneamente per variare e ruotare il vettore della velocità dello spacecraft, ad opera della forza di gravità dei pianeti.
- L'altezza a cui avvengono i flyby dei pianeti (nella fattispecie trattasi unicamente della Terra) deve sempre essere maggiore di un valore soglia³⁹, in modo da poter trascurare l'azione della resistenza aerodinamica data dall'atmosfera del pianeta.
- Si considera così un problema ai due corpi dove, eccetto per i flyby, il corpo principale è sempre il Sole.

Si introducono ora l'adimensionalizzazione dei parametri e le equazioni del problema.

3.4.2. Variabili di stato ed adimensionalizzazione

In questo paragrafo si mostra la procedura di adimensionalizzazione delle variabili che entrano in gioco nelle equazioni del problema e nella procedura di ottimizzazione.

Per preservare una soddisfacente precisione nei calcoli derivanti dalle integrazioni della procedura iterativa di ottimizzazione, si usa lavorare con variabili adimensionali⁴⁰. Al termine della procedura le grandezze adimensionali contenute nella soluzione ottenuta potranno essere riconvertite nel loro valore dimensionale originale.

Le grandezze fondamentali che entrano in gioco nella procedura di ottimizzazione sono:

- Tempo
- Massa
- Velocità
- Distanza

Queste quattro variabili vengono divise per determinate notevoli quantità, in modo da avere anche un approccio più intuitivo nella costruzione di soluzioni di tentativo.

Da esse poi deriva l'adimensionalizzazione di altre quantità, durante la procedura di calcolo. Per maggior chiarezza espositiva, le grandezze adimensionali vengono indicate con un asterisco all'apice (*). Come divisori si utilizzano rispettivamente: la durata dell'anno tropico terrestre diviso 2π , per cui il divisore del tempo risulta essere $\left(\frac{T_{\oplus}}{2\pi} = 58.13244394 \text{ giorni}\right)$, la massa iniziale del problema (10000 t, come verrà spiegato in seguito), la velocità circolare della Terra $\left(V_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus}}} = 29.78469294 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$ e infine il raggio medio dell'orbita terrestre attorno al Sole ($r_{\oplus} = 1 \text{ AU}$).

L'adimensionalizzazione delle suddette variabili avviene così:

³⁹ La quota limite per il flyby è di 300 km. Il vincolo non è reso esplicito (si usano tutti flyby liberi e non vincolati), ma se la quota dovesse essere inferiore a questo vincolo, l'azione del flyby verrebbe spalmata su più flyby meno estremi.

⁴⁰ Con l'utilizzo di parametri adimensionali si evita di "sporcare" le integrazioni prendendo solo un certo numero di cifre significative, che introdurrebbero grossi errori, dato che distanze, masse, ecc. in gioco sono molto grandi (es. non si andrebbero ad integrare distanze con la precisione del singolo km, dato che si parla di 10^6 km, e quindi si perderebbe la precisione della misura sulla distanza). L'uso di parametri adimensionali quindi permette di mantenere una certa "pulizia" di misura, evitando di buttare via pezzi importanti e riconvertendo tutte le grandezze a fine calcolo.

$$t^* = \frac{t [\text{giorni}]}{58.13244394} \rightarrow t_{365\text{giorni}}^* \approx 2\pi$$

$$M^* = \frac{M}{M_0}, \text{ con } M_0 = 10000 \text{ kg} = 10 \text{ t}$$

$$V^* = \frac{V \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]}{V_{ref}}, \text{ con } V_{ref} = V_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus}}} = 29.78469294 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$r^* = \frac{\text{distanza}}{r_{\oplus}}, \text{ con } r_{\oplus} = 1 \text{ AU} = 149597870.700 \text{ km}$$

In tab. 10 si riporta uno specchietto per riferimento immediato con le relazioni appena viste.

Tabella 10: Grandezze adimensionali fondamentali utilizzate nelle equazioni del problema di ottimizzazione di traiettoria

Grandezze adimensionali	Espressione
Tempo adimensionale (t^*)	$\frac{t (\text{giorni})}{58.13244394}$
Massa adimensionali (m^*)	$\frac{m (\text{kg})}{10000}$
Velocità adimensionale (V^*)	$\frac{V \left(\frac{\text{km}}{\text{s}} \right)}{29.78469294}$
Distanza adimensionale (r^*)	$\frac{\text{distanza (km)}}{149597870.700} = \frac{\text{distanza (AU)}}{1}$

3.4.3. Equazioni del moto e condizioni al contorno

3.4.3.1. Scrittura delle equazioni

Il problema che si affronta è quello della dinamica dei 2 corpi, riferite al sistema di riferimento eliocentrico, utilizzando il metodo delle Patched Conics. Le equazioni che entrano in gioco sono:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{T}}{m} \\ \dot{m} = -\frac{T}{c} = -q \end{cases}$$

dove \mathbf{r} e \mathbf{V} sono rispettivamente la posizione e la velocità dello spacecraft, $-\frac{\mu}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{g}$ è l'accelerazione di gravità, \mathbf{T} la spinta data dal propulsore e q la portata in massa del propellente. Da notare anche che $c = \frac{T}{q} = g_0 I_{sp}$ è la velocità efficace dei gas di scarico ed è proporzionale all'impulso specifico del propulsore. Apportando le adimensionalizzazioni, le equazioni precedenti legano tra loro le variabili di stato adimensionalizzate in precedenza (per non appesantire le notazioni, vengono omessi gli asterischi introdotti prima), e sono le equazioni che governano il moto.

Al fianco delle equazioni del moto, si aggiungono le condizioni al contorno sulle variabili di stato; esse riguardano le condizioni sulla partenza dalla Terra, sui flyby terrestri, e sull'arrivo finale alla Terra (per l'inserimento nel cyclor).

Definendo uno schema generale per la traiettoria trattata nella missione di trasporto di un asteroide nel cyclor S1L1, si presentano le seguenti tappe:

0. Partenza dalla Terra (inizio outbound leg)
1. Arrivo all'asteroide (fine outbound leg)
2. Ripartenza dall'asteroide (inizio inbound leg)
3. Arrivo alla Terra (1° flyby, generalmente ce ne possono essere più di uno, intervallati da una traiettoria derivante dallo studio sulle non-risonanti)
- f. Arrivo finale sulla Terra/inserimento nel cyclor (fine inbound leg)

Le condizioni al contorno sono:

Partenza – asteroide (il pedice 0 si riferisce alla partenza dalla Terra, 1 all'arrivo all'asteroide)

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_E(t_0)$$

$$[\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_E(t_0)]^2 = \mathbf{V}_{\infty 0}^2 = (0.0436)^2 = \left(1.3 \frac{km}{s}\right)^2$$

$$m_0 = 1$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_A(t_1)$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_A(t_1)$$

$$t_1 = k_1$$

Flyby (il pedice 2 si riferisce alla ripartenza dall'asteroide, 3 ad un qualsiasi flyby)

$$t_2 = k_2$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_A(t_2)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_A(t_2)$$

$$\mathbf{r}_{3-} = \mathbf{r}_{3+} = \mathbf{r}_E(t_3)$$

$$[\mathbf{V}_{3-} - \mathbf{V}_E(t_3)]^2 = [\mathbf{V}_{3+} - \mathbf{V}_E(t_3)]^2 = \mathbf{V}_{\infty 3}^2$$

Arrivo (il pedice f si riferisce all'arrivo a Terra ed inserimento nel cyclor)

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_E(t_f)$$

$$t_f = k_f$$

$$[\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_E(t_f)]^2 = \mathbf{V}_{\infty f}^2$$

$$m_f - m_2 = 0.4 = (4000 \text{ kg})$$

Da queste, si possono rendere esplicite alcune imposizioni:

- Nella fase iniziale la posizione dello spacecraft a $t = 0$, coincide con quella della Terra, così come alla fine dell'outbound leg coincide con quella dell'asteroide.
- Si impone allo spacecraft un tempo di attesa di alcuni mesi presso l'asteroide, in modo da poter effettuare diverse analisi con un tempo sufficiente ($t_2 - t_1 = \sim 5 \text{ mesi}$).
- Alla partenza dell'inbound leg, la posizione e la velocità della nave spaziale coincidono con quelle dell'asteroide.
- Ad ogni flyby terrestre la posizione dello spacecraft corrisponde a quella della Terra, e il modulo del suo eccesso iperbolico di velocità è continuo (e costante) lungo il flyby.
- All'arrivo sulla Terra finale, la data di incontro con la Terra e la V_{∞} sono imposte uguali ai requisiti dati dallo specifico inserimento nel cyclor.
- Il propellente utilizzato durante l'inbound leg è fissato a 4000 kg

A questo punto, si hanno le equazioni a cui si sono associate le condizioni al contorno sulle variabili di stato. Mancano ancora le condizioni sui controlli, e sulle variabili aggiunte (derivanti dall'applicazione dei metodi indiretti al problema). Richiamando il funzionale da analizzare J^* di cui si vogliono cercare i punti stazionari, introducendo l'Hamiltoniano del sistema⁴¹, dall'equazione (12) applicata alle variabili di stato e alle condizioni al contorno, si ottengono le condizioni sui controlli, sulle variabili aggiunte al problema e le condizioni al contorno di ottimo⁴², che chiudono il problema. Si ottiene così un certo numero di variabili, a cui bisogna associare un valore iniziale per poter dare il via alla procedura iterativa di calcolo di ottimizzazione di traiettoria.

⁴¹ Si ricorda che per la formulazione di Mayer l'Hamiltoniano è $H = \lambda^T f$, con λ vettore delle variabili aggiunte e f espressione delle derivate delle variabili di stato.

⁴² Per la scrittura di queste condizioni, si richiama l'attenzione del lettore alla trattazione sui metodi indiretti scritta precedentemente: in particolare le equazioni (14), (15), (16).

3.4.3.2. Variabili e incognite di calcolo

L'ottimizzazione della traiettoria di un determinato tratto di spazio che collega due punti necessita della conoscenza dei valori iniziali delle variabili che entrano in gioco nelle equazioni. È così che si rende necessaria la creazione di una soluzione di tentativo per la procedura indiretta di ottimizzazione di traiettorie spaziali.

Le variabili incognite (in forma adimensionale) che si presentano per ogni tratto sono:

- t_0 è la data di partenza del tratto
- t_1 è la data di arrivo
- λ_{θ_0} è la variabile aggiunta alla longitudine
- u_0 è la componente lungo x (nel piano dell'eclittica) della velocità assoluta⁴³
- v_0 è la componente lungo y (nel piano dell'eclittica) della velocità assoluta
- w_0 è la componente lungo z (perpendicolare al piano dell'eclittica) della velocità assoluta
- λ_{r_0} è variabile aggiunta associata alla velocità nella componente radiale
- λ_{φ_0} è variabile aggiunta associata alla latitudine
- λ_{u_0} è la variabile aggiunta associata alla componente u
- λ_{v_0} è la variabile aggiunta associata alla componente v
- λ_{w_0} è la variabile aggiunta associata alla componente w
- V_{∞_0} è l'eccesso iperbolico di velocità rispetto al pianeta da cui parte lo spacecraft
- r_0 è la distanza dal Sole
- θ_0 è la longitudine del punto rispetto al sistema di riferimento eliocentrico
- φ_0 è la latitudine del punto rispetto al sistema di riferimento eliocentrico
- m_0 è la massa iniziale

Se la traiettoria da ottimizzare è composta da diverse fasi e tratti, allora il numero delle incognite della soluzione di tentativo presentate sopra sarà da moltiplicare per il numero di singoli tratti componenti la traiettoria, poiché ogni tratto necessita del valore iniziale delle incognite.

3.5. Condizioni di ottimo

Le condizioni di ottimo che si devono soddisfare nel calcolo di ottimizzazione riguardano il Primer Vector (λ_V) e sono:

- $\lambda_V // V_{\infty}$ alla partenza e all'arrivo alla Terra, se V_{∞} è assegnata in modulo, ma non in direzione
- $\lambda_V // V_{\infty}$ ai flyby

L'imposizione della condizione ottimale viene esplicitata nel lavoro come condizione di parallelismo in una data fase i tra velocità e Primer. Date le componenti del Primer Vector (λ_V) e della velocità (V), la condizione di ottimalità da rispettare è:

$$\lambda_v \cdot u - \lambda_u \cdot v = 0 \quad (28)$$

⁴³ La velocità assoluta è somma della velocità circolare della Terra (di riferimento) e dell'eccesso iperbolico di velocità: $V = V_{\oplus} + V_{\infty}$.

I controlli ottimali massimizzano l'Hamiltoniano (H) in ogni punto della traiettoria. Nello specifico del problema di traiettoria a bassa spinta continua, esso si presenta così:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_v^T \mathbf{g} + TS_F \quad (29)$$

Il coefficiente della spinta prende il nome di *switching function*. Date le condizioni di ottimo citate ad inizio paragrafo, la S_F assume la seguente forma:

$$S_F = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} \quad (30)$$

La S_F (strettamente collegata al primer vector) svolge il ruolo di indicatore della spinta: quando $S_F > 0$, la spinta è massima, quando $S_F < 0$, la spinta è nulla. Questo tipo di controllo prende il nome di *bang-bang control*.

4. Metodologia specifica: progetto della missione di trasporto di un asteroide in orbita cycler Terra – Marte

In questo capitolo si vuole spiegare la complessa procedura di calcolo per arrivare a definire la missione di trasporto di asteroidi in S1L1. Essa consiste nel raggiungimento di un determinato asteroide (tratto di andata, o *outbound leg*⁴⁴), il suo reindirizzamento tramite spinta verso Terra (dopo un sufficiente tempo di stazionamento in loco), il successivo controllato flyby terrestre, ed infine i successivi tratti di traiettoria o immediato inserimento nel cycler (tratto di ritorno, o *inbound leg*), dipendentemente dalle caratteristiche del problema.

L'esposizione che segue, presenta le operazioni nell'ordine cronologico di svolgimento. Si presenta prima un paragrafo che introduce la strategia di missione utilizzata, spiegando per punti i vari step che si sono affrontati. I seguenti capitoli, invece, mostreranno nel dettaglio le varie operazioni, mostrando il loro impiego nella costruzione della traiettoria dello spacecraft. Le missioni, nello specifico, verranno invece mostrate e spiegate nel capitolo dei "Risultati".

4.1. Logica di procedimento

La missione che si vuole studiare costituisce un problema di traiettoria a bassa spinta con flyby multipli. Esso è un problema fortemente non-lineare di difficile soluzione. Per poter operare con l'ottimizzazione e la ricerca della soluzione ottimale serve quindi una soluzione di tentativo vicina a quella cercata per portare a buon fine la procedura di calcolo iterativa. Per creare la soluzione di tentativo, si necessita del calcolo di tratti di traiettoria più semplici, per poi metterli insieme in un'operazione di assemblaggio.

Come verrà spiegato nel dettaglio nel prosieguo del capitolo, nel caso più generale, detti tratti corrispondono alle seguenti fasi:

- Terra – Asteroide (outbound leg)
- Asteroide – Terra 1 (inizio inbound leg)
- Terra 1 – Terra 2
- Terra 2 – Terra 3 (fine inbound leg e inserimento nel cycler)

La logica con cui si è affrontato il problema di prelevare, reindirizzare e trasportare un asteroide nel cycler S1L1 è schematizzata per punti nell'elenco seguente, e costituisce la **procedura standard** sviluppata per questo tipo di missioni.

1. Il problema si presenta così: si vuole trasportare un asteroide nel cycler S1L1, per il quale esistono diverse finestre di inserimento. Ogni finestra di inserimento, sfruttabile tramite flyby della Terra, è caratterizzata da:
 - a. Una certa V_∞
 - b. Una certa data di ingresso

Questo è ciò che ci permette di entrare nel cycler. Per il momento è solo da prendere in considerazione il problema, senza scegliere a priori nessun ingresso in particolare.

⁴⁴ Si parla di outbound leg, in quanto si esce dall'orbita terrestre, "scappando" dalla Terra; inbound viceversa perché si procede verso la Terra.

2. Dall'elenco degli asteroidi interessanti e disponibili per il trasporto su cyclo Terra – Marte si scelgono i candidati. Ognuno presenta il suo naturale incontro con la Terra, con le seguenti caratteristiche:

- a. Una certa V_∞
- b. Una certa data di incontro naturale con la Terra

L'unico modo di reindirizzare l'asteroide a Terra con lo spacecraft è sfruttare il suo naturale incontro con la Terra, data la sua notevole mole (si parla infatti di *close encounter*). Quindi, scelto l'asteroide da recuperare, si sa che più o meno le caratteristiche del primo flyby terrestre controllato saranno quelle del naturale incontro.

Così facendo si conoscono già approssimativamente la data e la V_∞ con cui arriva a Terra l'asteroide dopo il reindirizzamento, e si conoscono le date e le V_∞ di ingresso nel cyclo delle varie finestre di inserimento.

3. Generalmente, considerata la V_∞ di arrivo a Terra, posso già scartare quegli inserimenti che presentano un'eccessiva differenza di velocità (maggiore di 200 m/s).
4. Il passo successivo è sfruttare l'idea di partire dall'arrivo dell'asteroide a Terra, dopo il reindirizzamento, per arrivare all'inserimento cyclo utilizzando orbite risonanti e non-risonanti.

Occorrerà fare ricorso alle non-risonanti se le due date non corrispondono, mentre basteranno le risonanti se le date trovano corrispondenza (in modulo 365 giorni).

Questa procedura si implementa attraverso 3 stadi:

- a. Si ricercano le possibili non-risonanti, accessibili con una certa V_∞ di tentativo (quella di arrivo a Terra). Ottenuto l'elenco di orbite non-risonanti disponibili, si costruisce una strategia che porti lo spacecraft a spingere l'asteroide nel cyclo in una data finestra di inserimento (si fissano quindi V_∞ e data finali)
 - b. Una volta costruita "sulla carta" questa strategia, si implementa il processo di ottimizzazione tramite metodi indiretti sui singoli pezzi di traiettoria, costituenti la totale combinazione di non-risonanti stabilite, imponendo data di arrivo e la V_∞ dell'incontro finale con la Terra, coincidente con l'inserimento scelto.
 - c. Infine, si determina la traiettoria finale, ottimizzando la traiettoria che si ottiene assemblando i tratti componenti ottenuti al passo precedente e quello relativo al tratto Asteroide – Terra 1.
5. Ottenuto il tratto inbound Asteroide – Terra 3, si studia il tratto di raggiungimento dell'asteroide nella sua orbita naturale (outbound leg: tratto Terra – Asteroide).

Come spiegato, l'analisi vera e propria inizia con la scelta dell'asteroide bersaglio (nel capitolo dei risultati si spiegano in dettaglio i criteri di scelta). Date le condizioni iniziali, e la necessità di economicità della missione, si sfrutta la seguente base di consumo:

- Dati 10000 kg di propellente iniziali, circa 5000 kg sono disponibili per la missione, tra raggiungimento dell'asteroide, reindirizzamento tramite accelerazione dello stesso da parte della navicella spaziale, inserimento nel cyclo dell'asteroide e propellente di riserva per le operazioni on-board.
- Un'analisi preliminare di missione stabilisce che per il tratto outbound in genere sono sufficienti 1000 kg di propellente. Si decide, così, di riservare 4000 kg per il ritorno. In tutto questo, lo scopo è quello di massimizzare la massa finale (ovvero quella trasportata).

- La massa finale deve NECESSARIAMENTE rientrare nel range di previsione della massa dell'asteroide scelto, perché lo studio di ottimizzazione possa essere di interesse pratico e scientifico per essere utilizzato per progetti più approfonditi sull'argomento.

Si mostra ora nello specifico come si presenta la costruzione della missione in ordine cronologico nei diversi tratti componenti.

4.2. Missione di trasporto asteroidi in S1L1: metodo e fasi di realizzazione

Prima di entrare nel dettaglio della metodologia, si discutono brevemente gli strumenti computazionali utilizzati.

Nella ricerca della traiettoria ottimale per la missione si sono utilizzate quattro diverse classi di programmi. Questi programmi svolgono i seguenti compiti:

- Massimizzazione della massa finale nel tratto Terra – Asteroide
- Massimizzazione della massa trasportata nel tratto Asteroide – Terra 1, oppure Asteroide – Terra 1 – Terra 2 (con un flyby intermedio)
- Massimizzazione della massa finale del tratto Terra – Terra
- Massimizzazione della massa finale dell'inbound leg completa, permettendo quindi, l'ottimizzazione di traiettoria finale.

Ognuno di questi tipi di programma ha diverse varianti, che si differenziano tra loro per i parametri lasciati liberi, e per la tipologia di controllo usato. Tutti i programmi utilizzati sono scritti in codice fortran. Il loro utilizzo, scandito dalla strategia illustrata in precedenza e combinato con la costruzione di buone soluzioni di tentativo, permette di costruire la missione di trasporto di asteroidi in orbita cycler.

Si è già detto che lo studio di traiettoria vera e propria comincia con la scelta dell'asteroide bersaglio dall'elenco di quelli disponibili per la missione.

Una volta scelto l'asteroide bersaglio, si parte con la fase più difficile: l'inbound leg. Data la grande complessità del problema, si divide la traiettoria di trasporto dell'asteroide nel cycler (Asteroide – incontro con la Terra finale) nel calcolo di ottimizzazione della traiettoria di diversi sotto-tratti, per ottenere poi una traiettoria composita, che formerà alla fine la soluzione di tentativo per il problema di ottimo.

In fig. 13 viene mostrato uno schema che mostra questa procedura di suddivisione di traiettoria di inbound leg.

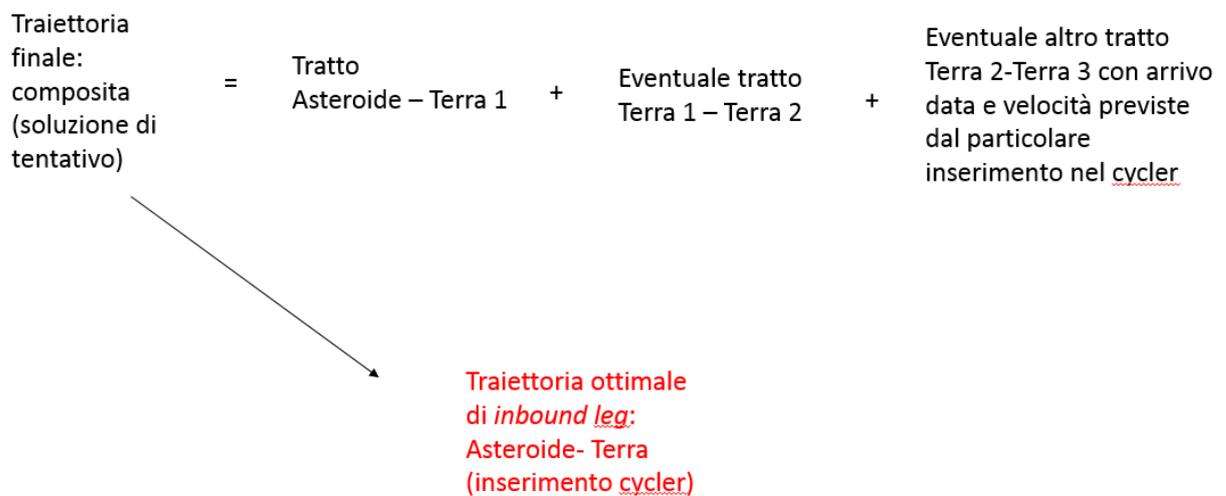


Figura 13: Schema della suddivisione in sotto-tratti dell'inbound leg

Calcolata questa fase, si passa all'outbound leg, molto più semplice, poiché trattasi del calcolo di una traiettoria che collega la Terra con l'asteroide, in modo da arrivare nei pressi di quest'ultimo. Sempre massimizzando la massa finale, l'incontro deve avvenire prima di un tempo sufficiente per poter operare per il suo reindirizzamento (generalmente alcuni mesi prima, per poter effettuare analisi varie ed altre operazioni utili al perfetto de-spinning dell'asteroide e successiva spinta).

Si riassume l'effettiva procedura di come si è affrontato il problema dinamico:

1. Scelto l'asteroide bersaglio, si ottengono immediatamente la data di naturale avvicinamento alla Terra e la V_{∞} relativa ad esso.
2. Si effettua uno studio per calcolare la traiettoria ottimale di reindirizzamento controllato dell'asteroide verso Terra (tratto Asteroide – Terra 1)
3. Si crea un database di orbite non-risonanti e di finestre di inserimento nel cycler, al fine di costruire tutte le possibili strategie di inserimento costruendo traiettorie con combinazioni di non-risonanti.
4. Si ottimizzano prima le traiettorie Terra – Terra risonanti, da cui poi si ottengono le non-risonanti cercate. Successivamente si impongono le traiettorie non-risonanti con la data di rendezvous finale e V_{∞} dettate dall'inserimento nel cycler scelto.
5. Si assembla la soluzione di tentativo dell'inbound leg con i tratti semplici trovati ai punti precedenti.
6. Con la soluzione di tentativo si calcola la soluzione ottimizzata che presenta la massa finale massima per l'inbound leg (Asteroide – incontro finale con la Terra/inserimento cycler)
7. Si calcola la traiettoria di andata (outbound leg), che permetta allo spacecraft di andare a prendere l'asteroide, in tempo per l'inizio dell'inbound leg (circa 5 mesi prima).

Nei successivi paragrafi viene spiegata nel dettaglio la procedura descritta sopra.

4.2.1. Tratto Asteroide – Terra 1

Si inizia con lo studio del primo tratto di traiettoria inbound: quello che collega l'asteroide, dalla sua posizione di naturale orbita eliocentrica, al primo flyby della Terra. Questa traiettoria viene effettuata prevalentemente spingendo: è necessario, in generale, stabilire la quantità di propellente da utilizzare; più propellente si usa, più grande sarà la massa finale trasportabile.

L'utilizzo di un programma specifico ha consentito di massimizzare la massa finale (in questo caso la massa di arrivo al 1° flyby terrestre), fissati la massa di propellente e la durata del tratto di missione. Si è deciso di provare ad usare inizialmente 2000 kg di propellente in questa fase, come tentativo. Nel capitolo dei risultati verrà mostrato lo studio di ricerca della migliore soluzione per questo tratto, avvenuto poi anche variando la massa di propellente. Poiché la massa trasportata è di centinaia di tonnellate, la variazione della traiettoria che si può apportare è molto limitata; di conseguenza l'incontro con la Terra dovrà avvenire obbligatoriamente quando l'asteroide passa naturalmente in prossimità della Terra (il *close approach* già accennato in precedenza). Questi eventi di naturale avvicinamento degli asteroidi alla Terra sono noti, e si conoscono: data di close approach, eccesso iperbolico di velocità (V_∞), ed altri importanti parametri, di cui si parlerà più avanti.

Trovando la traiettoria ottimale di incontro con la Terra, partendo dall'originale posizione dell'asteroide, si ottengono i parametri di rendezvous che vengono poi utilizzati come condizioni iniziali per la sotto-fase successiva. In questa fase di controllato reindirizzamento dell'asteroide verso la Terra, fissato il propellente utilizzato nella spinta, si ottengono la precisa data di primo incontro con la Terra, la V_∞ e la massa finale massimizzata. In fig. 14 si mostra questa fase per una traiettoria esemplare, con uno schema riassuntivo, affiancato dalla tab. 11.

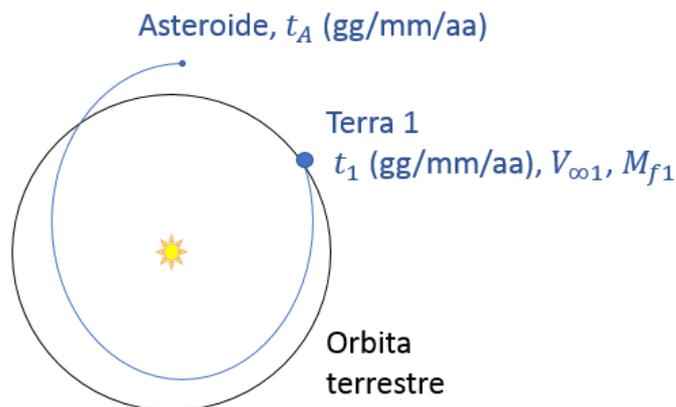


Figura 14: Tratto asteroide-Terra 1 (esempio)

Tabella 11: Logica di procedimento per la costruzione della soluzione di tentativo per la traiettoria completa.

Output tratto A-T1	Input tratto T1-T2	Output tratto T1-T2
t_1	t_1	t_2
$V_{\infty 1}$	$V_{\infty 1}$	$V_{\infty 2}$
M_{f1}	M_{f1}	M_{f2}

Ottenuto questo primo tratto Asteroide – Terra 1 occorre fare una considerazione: la data di arrivo in orbita terrestre che si è appena trovata è prossima a quella di uno degli inserimenti cycler accessibili (tab. 8), guardando solo giorno e mese e tenuto conto della $V_{\infty 1}$ di arrivo al flyby terrestre? Se la risposta è affermativa, si ha a che fare con un caso particolarmente fortunato, per cui non bisogna operare con trasferimenti in orbite non-risonanti (come citato nel capitolo introduttivo), ma si può operare con un trasferimento su un'orbita risonante N:M, dipendentemente dagli anni che intercorrono tra l'inserimento cycler scelto e l'arrivo (Terra 1). Il caso più fortunato sarebbe quello in cui si ottiene la data t_1 corrispondente all'inserimento nel cycler (tenendo conto anche dell'anno): in questo caso, tramite un unico flyby della Terra, ci si immetterebbe direttamente nel cycler. Il caso, invece, che generalmente occorre è quello in cui bisogna adoperare un trasferimento su un'orbita non-risonante per aggiustare la data di arrivo. In questo caso è opportuno arrivare al flyby terrestre con un buon margine di anticipo (un buon numero di anni, almeno 5-6 se possibile), in modo da poter combinare, se necessario, più non-risonanti insieme. Esse, unite da molteplici aiuti gravitazionali terrestri, permettono di aggiustare velocità e data di incontro finale con la Terra utilizzando meno combustibile possibile⁴⁵, in accordo con il vincolo di consumo che ci si è imposti.

4.2.2. Tratto Terra 1 – Terra 2, studio sulle orbite risonanti e non-risonanti

In uscita dal primo flyby generalmente ci si immette in un'orbita non-risonante per sfruttare il secondo incontro (Terra 2) allo scopo di modificare la data di arrivo e la velocità. Prima di illustrare nei particolari la procedura di costruzione del tratto Terra 1 – Terra 2, si spiega in maggior dettaglio cosa sono le orbite non-risonanti.

4.2.2.1. Orbite risonanti e orbite non-risonanti

Le orbite non-risonanti, come già accennato in precedenza, sono orbite ottenute modificando le cosiddette orbite risonanti terrestri. Un'orbita risonante con la Terra, permette di re-incontrare la Terra nello stesso punto, dopo N rivoluzioni della Terra intorno al Sole.

Un'orbita risonante permette quindi un solo incontro ogni N anni, in un punto dell'orbita terrestre caratterizzato sempre dalla stessa posizione e dallo stesso giorno e mese. Guardando però la struttura

⁴⁵ L'utilizzo del combustibile in questa fase non è dato in sé dalla percorrenza dell'orbita non-risonante, ma dagli inevitabili aggiustamenti di velocità e di data ulteriori di cui si necessita per il corretto inserimento nel cycler. È difficile che anche con l'aiuto delle non-risonanti si arrivi all'inserimento perfetto. Si considerano accettabili correzioni dell'ordine di $\Delta V \approx 10 \text{ m/s}$, e per un massimo di 5 giorni di anticipo o ritardo (a cui corrisponde circa un utilizzo di 200 – 300 kg di propellente).

di un'orbita risonante (fig. 15), si vede subito che le intersezioni tra l'orbita percorsa dall'asteroide (e dallo spacecraft) e quella terrestre sono due. L'orbita non-risonante è quell'orbita che permette l'incontro con la Terra anche nel secondo punto di intersezione. Quindi l'orbita non-risonante, vedendo modificati semiasse maggiore e eccentricità rispetto alla risonante da cui deriva, permette di sfruttare anche la seconda data di incontro, ovvero il punto dato dalla seconda intersezione orbitale. È da notare che l'orbita non-risonante rimane simmetrica rispetto la linea degli apsi nei confronti dell'orbita terrestre, se si trascura l'eccentricità dell'orbita della Terra. Le caratteristiche orbitali dell'orbita non-risonante dipendono fortemente dall'eccesso iperbolico di velocità con cui ci si immette in detta orbita.

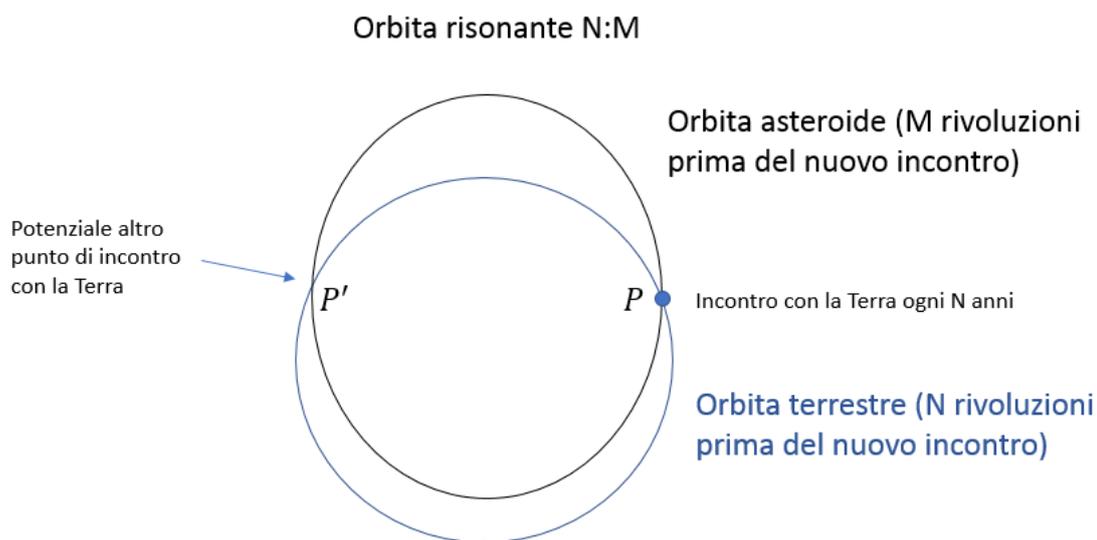


Figura 15: Esempio di orbita risonante N:M con la Terra. Le due orbite presentano due punti di intersezione, ma solo un incontro, poiché il passaggio dei due corpi nel secondo punto di intersezione orbitale avviene in date diverse.

Quindi, con le orbite non-risonanti si sfrutta il tratto di orbita $\widehat{PP'}$ (in più o in meno) per incontrare la Terra in un'altra data rispetto a quella di partenza. La data in cui avviene questo incontro dipenderà dalle caratteristiche della non-risonante.

Le orbite non-risonanti possono essere di due tipi: *inbound-outbound* e *outbound-inbound*, definite in questo lavoro rispettivamente come non-risonanti di tipo 1 e 2.

- Le orbite *non-risonanti inbound-outbound (tipo 1)* sono definite così perché vedono l'asteroide (alla partenza) percorrere un tratto di orbita interno all'orbita terrestre prima del re-incontro con la Terra.
- Le orbite *non-risonanti outbound-inbound (tipo 2)* invece vedono alla partenza il raggio vettore Asteroide – Sole maggiore rispetto alla distanza della Terra dal Sole, facendo sì che l'asteroide percorra il primo tratto di orbita fuori dall'orbita terrestre prima del secondo

incontro con la Terra. In fig. 16 si riportano degli esempi di orbite non-risonanti outbound-inbound ed inbound-outbound.

Da ogni orbita risonante, si possono costruire rispettivamente un'orbita non-risonante inbound-outbound, e una outbound-inbound. Per maggior semplicità ci si riferisce ad esse anche come non-risonante inbound e non-risonante outbound.

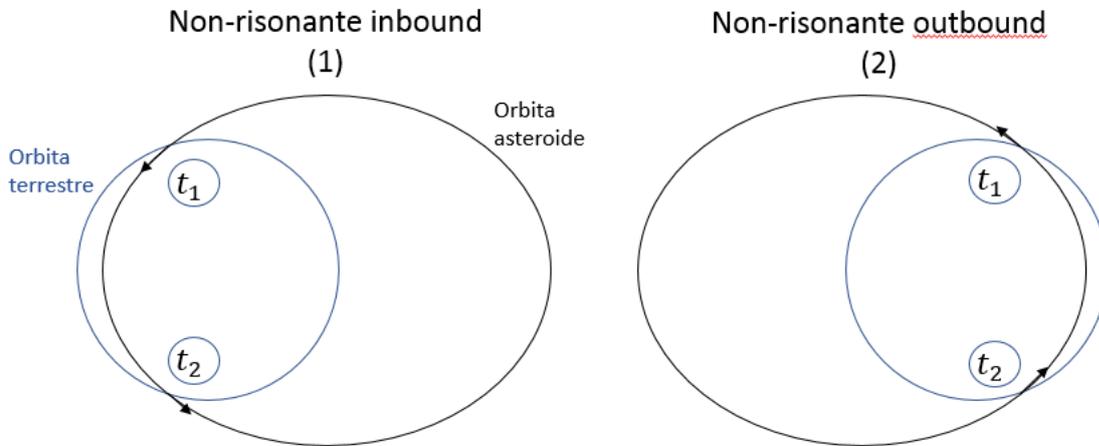


Figura 16: Orbite non-risonanti di tipo (1) e (2). L'incontro con la Terra avviene in entrambi i punti di intersezione orbitale.

4.2.2.2. Tratto Terra 1 – Terra 2, procedura di calcolo

La procedura di calcolo delle non-risonanti per la costruzione della traiettoria Terra 1 – Terra 2 viene effettuata nella maniera seguente.

Innanzitutto si opera con il calcolo delle orbite non-risonanti disponibili data una certa velocità. Esso viene effettuato tramite una routine che fornisce in output le caratteristiche di queste orbite, ma soprattutto **i tempi che intercorrono tra i successivi incontri**. In generale, date le velocità e le energie tipiche che entrano in gioco, sono disponibili orbite contraddistinte da N ed M fino a circa $N = 6, M = 6$, aumentando con l'aumentare dell'eccesso iperbolico di velocità in input⁴⁶.

Si ottengono così dei database con le varie orbite non-risonanti accessibili con varie V_∞ . In tab. 12 si riporta un esempio di classificazione di orbite non-risonanti disponibili, con una certa V_∞ iniziale (in figura $V_\infty = 4.00 \text{ km/s}$).

⁴⁶ Più l'asteroide è veloce, più energia ha a disposizione per raggiungere diverse orbite.

Tabella 12: Esempio di tabulazione di orbite non-risonanti disponibili. In questo caso sono quelle energeticamente accessibili con $V_{\infty} = 4.00 \text{ km/s}$.

Orbite non-risonanti raggiungibili con $V_{\infty} = 4.000 \text{ km/s}$							
# orbita	N° rivoluzioni della Terra (N)	N° rivoluzioni dell'asteroide (M)	In-Out (1) / Out-In (2)	Periodo (T) [giorni]	Δt_{NR} [giorni]	e	a
1	1	1	1	387.9	164.5	0.137	1.041
2	2	2	2	344	132.6	0.14	0.961
3	3	2	2	545.5	322.2	0.245	1.306
4	2	2	1	378.2	178.4	0.135	1.023
5	3	3	2	352.8	146.8	0.136	0.977
6	2	3	1	275.2	331.1	0.223	0.828
7	3	2	1	550.2	40.6	0.248	1.314
8	4	3	2	484.2	290.5	0.199	1.207
9	3	3	1	374.4	184.1	0.134	1.017
10	4	4	2	356.4	152.6	0.135	0.984
11	3	4	1	293.9	305.8	0.191	0.865
12	4	5	2	272.8	30.4	0.227	0.823
13	4	3	1	489.7	71.3	0.203	1.216
14	5	4	2	453.9	270	0.176	1.156
15	4	4	1	372.3	187.3	0.134	1.013
16	5	5	2	358.3	155.8	0.135	0.987
17	4	5	1	306.1	289.3	0.174	0.889
18	5	6	2	290.7	54.9	0.196	0.859
19	4	6	1	261.2	364.4	0.251	0.8
20	6	4	2	456.7	322.8	0.246	1.308
21	5	4	1	459.1	91.1	0.18	1.165
22	6	5	2	435.7	255	0.163	1.125
23	5	5	1	371	189.3	0.134	1.01
24	6	6	2	359.6	157.8	0.135	0.99
25	5	6	1	314.9	277	0.163	0.906
26	6	7	2	302.7	71.1	0.178	0.882
27	5	7	1	274.6	332	0.224	0.827
28	6	8	2	261.2	0	0.251	0.8

Nella precedente tabella, Δt_{NR} è il tempo che intercorre tra un incontro della Terra ed il successivo, mentre T indica il periodo orbitale dell'orbita non-risonante; i parametri identificativi N e M indicano rispettivamente i giri approssimati al più vicino intero che la Terra e l'asteroide compiono prima di re-incontrarsi.

Trovate le orbite non-risonanti bisogna trovare quella, o una loro combinazione (parlando direttamente del caso di necessità di traiettoria Terra 1 – Terra 3), che permetta l'incontro con la Terra in una certa data contraddistinta da:

- Giorno e mese corrispondenti, o quantomeno vicini, a quelli di un preciso inserimento nel cycler
- Anno ovviamente anteriore o uguale all'inserimento scelto

I Δt delle non-risonanti (Δt_{NR}) sono fondamentali per capire se l'orbita in questione è utile per spostare l'incontro con la Terra ad una certa data voluta. Calcolato il $\Delta t_{necessario}$ (in modulo 365 giorni) tra l'arrivo a Terra dell'asteroide (Terra 1) e un determinato inserimento cycler, si possono calcolare le strategie di inserimento costruendole in base alla relazione:

$$\Delta t_{combinazione\ NR} - \Delta t_{necessario} \leq 5\ \text{giorni}, \quad (\text{cfr. Nota}^{45})$$

dove $\Delta t_{combinazione\ NR} = \sum_i \Delta t_{NR_i}$ (sempre in modulo 365 giorni), con Δt_{NR_i} che è il tempo che trascorre tra un incontro e l'altro dello spacecraft con la Terra per la singola non-risonante componente della combinazione.

È necessario seguire precise regole nella scelta di strategia:

- Se si ottiene una combinazione di orbite, devono essere alternate (1) e (2), per non avere rotazioni del vettore di velocità troppo elevate durante i flyby della Terra che permettono il passaggio da un'orbita all'altra⁴⁷.
- Controllando il tratto asteroide-Terra, la prima orbita non-risonante deve seguire la regola precedente, sempre per evitare angoli di rotazione troppo elevati anche per il primo flyby.
- Se si vogliono combinare due orbite dello stesso tipo in successione, allora bisogna intraprendere un'orbita risonante 1:1 intermedia fuori del piano orbitale per spalmare il ΔV in più passaggi, aumentando necessariamente la durata della missione di un anno.

Un utilizzo moderato del propellente può aiutare a correggere non perfette coincidenze di date e magnitudine dell'eccesso iperbolico di velocità per l'inserimento nel cycler (così si spiegano i 5 giorni massimi di soglia della relazione precedente).

Costruita la strategia, che nel caso più generale di questo studio è costituita da due non-risonanti, si procede con l'ottimizzazione con i metodi indiretti della prima non-risonante per ottenere il tratto Terra 1 – Terra 2.

⁴⁷ Maggiore è l'angolo di rotazione, minore è l'altitudine di flyby. Oltre una certa soglia, si hanno problemi di resistenza atmosferica e di eccessiva gravità, come già spiegato.

4.2.3. Tratto Terra 2 – Terra 3: aggiustamento della velocità, della data di arrivo e costruzione della soluzione di tentativo

Sempre ipotizzando di dover adottare una strategia di combinazione di due non-risonanti, l'ottimizzazione della seconda permetterà di percorrere il tratto Terra 2 – Terra 3, con imposizione nel punto di incontro finale delle condizioni di inserimento in S1L1.

Nella costruzione della soluzione di tentativo, si può pensare, appunto, di spingere in questo tratto per aggiustare eventuali discrepanze di velocità e di data di arrivo. In particolare, si è osservato che, se si agisce variando la data di incontro della Terra in una non-risonante seguendo alcune regole, si riesce a variare sia la data che la V_∞ compatibilmente, spendendo pochissimo combustibile. Le regole in questione sono:

- Se si considera una non-risonante di tipo (1), si mostra un aumento della V_∞ quando si anticipa la data di incontro con la Terra e il semiasse maggiore è minore di 1 AU (ovvero $N < M$)
- Stesso effetto sulla V_∞ si ottiene sempre considerando un'orbita di tipo (1), ma ritardando la data di incontro con la Terra e con $N > M$, cioè quando il semiasse maggiore dell'orbita non-risonante percorsa dall'asteroide è maggiore di 1 AU.
- La V_∞ viceversa diminuisce se alle due affermazioni precedenti si fa una qualsiasi variazione di segno: es. orbita (1) + ritardo data di incontro + $a < 1 AU$, oppure orbita di tipo (2) + anticipo data di incontro + $a < 1 AU$, ecc...

Nella tab. 13 si mostra uno specchio in cui si riassumono le precedenti linee guida di strategia.

Tabella 13: Possibili casistiche di guida nella variazione della data di incontro con la Terra e della velocità per il giusto inserimento nel cyclus.

caso	orbita (1 o 2)	V_∞	a	data di incontro con la Terra (rispetto a quella di default)
1	1	$\Delta V_\infty > 0$	$a < 1 AU$	In anticipo
2	1	$\Delta V_\infty < 0$	$a > 1 AU$	In anticipo
3	1	$\Delta V_\infty < 0$	$a < 1 AU$	In ritardo
4	1	$\Delta V_\infty > 0$	$a > 1 AU$	In ritardo
5	2	$\Delta V_\infty < 0$	$a < 1 AU$	In anticipo
6	2	$\Delta V_\infty > 0$	$a > 1 AU$	In anticipo
7	2	$\Delta V_\infty > 0$	$a < 1 AU$	In ritardo
8	2	$\Delta V_\infty < 0$	$a > 1 AU$	In ritardo

Seguendo le linee guida descritte nella tabella soprastante, si riesce a variare la velocità e la data di incontro con la Terra utilizzando pochissimo combustibile per la correzione⁴⁸. L'ottimizzazione delle non-risonanti viene effettuata tramite una classe di programmi che permette il calcolo di traiettorie non spingenti (o quasi, se c'è qualche modifica da apportare) che facciano tratti Terra – Terra. Per l'ottimizzazione di queste traiettorie, si sono fissate in un primo momento unicamente le condizioni

⁴⁸ La variazione che si ottiene è al massimo di circa 100 m/s per giorno.

iniziali e la durata del viaggio, successivamente anche la velocità finale, per l'uniformità completa ai requisiti del cycler.

Controllando il consumo totale di propellente (ottenuto sommando quello di ciascuna sotto-fase, e vincolato dal requisito di essere di circa 4000 kg) e assemblando le tratte singole fin qui mostrate, si ottiene in questa maniera la soluzione di tentativo per il calcolo di ottimizzazione dell'inbound leg (Asteroide-Terra 3). Portato a convergenza il calcolo di questa traiettoria, operato con un programma che permette di trattare missioni che considerano fino a 2 flyby, si è così riusciti a trovare l'inbound leg ottimale.

L'ultima parte del lavoro di progettazione della missione riguarda l'ottimizzazione dell'outbound leg che permetta di arrivare con buon anticipo all'asteroide, per il corretto recupero e trasporto nel cycler dell'asteroide.

4.2.4. Tratto Terra 0 – Asteroide

Nella ricerca di questo tratto di traiettoria si agisce in un primo momento lasciando libero l'arrivo all'asteroide (considerando il tempo un'incognita libera), e poi vincolandolo fissandone la data, in modo da lasciare un buon margine di tempo allo spacecraft per stazionare nei pressi dell'asteroide, e catturarlo. Il programma usato permette di simulare il tratto di missione Terra 0 – asteroide, nella maniera appena descritta.

L'obiettivo è quello di arrivare all'asteroide utilizzando x kg di propellente (con $x < 1000$ kg) in modo da avere $1000 - x$ kg di propellente di riserva per operazioni *on-board*. In fig. 17 è rappresentato un esempio di questo tratto di missione.

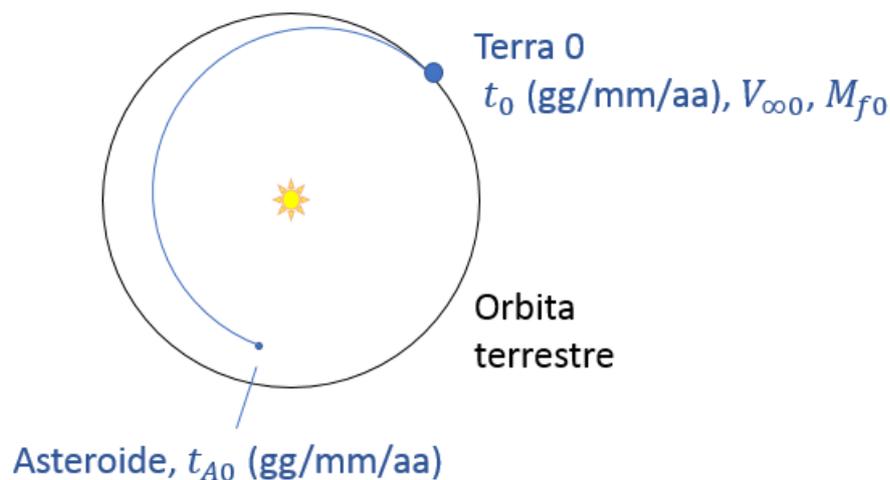


Figura 17: Tratto Terra 0 – Asteroide (0) (esempio)

Completata anche l'outbound leg, l'intera missione di recupero e di trasporto dell'asteroide nel cycler S1L1 è costruita.

4.3. Logica di calcolo

In questa sezione si spiega brevemente il compito dei programmi sull'ottimizzazione di traiettoria per il trasporto di asteroidi in orbita cycler, utilizzando veicoli ARM. I diversi programmi utilizzano una logica di lavoro con variabili **adimensionali**, secondo la tecnica vista nel capitolo precedente; si ribadisce come questa tecnica permetta un'ottimale gestione dei dati e dei calcoli, altrimenti problematica data i conseguenti enormi errori di integrazione che ne deriverebbero.

4.3.1. Programmi di calcolo

Nei paragrafi precedenti si è spiegato in generale come si opera a livello di procedura logica, permettendo l'ottimizzazione di traiettoria.

I programmi utilizzati hanno permesso l'ottimale maneggevolezza del problema dinamico. Affiancate alle condizioni di base del problema⁴⁹, alcune condizioni assegnate di volta in volta, ottenute talvolta anche manipolando il codice, hanno permesso di trovare le soluzioni migliori; da queste, dapprima si è ottenuta la migliore configurazione per ogni tratto di missione, poi, ripetendo l'operazione di ottimizzazione, si è ottenuta la configurazione migliore per la missione completa.

Le varie condizioni imposte di volta in volta sono state:

- Assegnazione o ottimizzazione della massa finale (m_f) di un tratto di missione.
- Assegnazione della variabile velocità finale ($V_{\infty f}$), che nelle fasi preliminari di studio è stata lasciata libera
- Imposizione del tempo di fine fase, tramite assegnazione del tempo iniziale e della durata del tratto di missione, o ricerca della durata di missione ottimale, ricercando la configurazione di massa finale massima.

Inoltre, si sono utilizzate diverse versioni di codice che hanno permesso di raggiungere diversi obiettivi:

- Utilizzo di una versione che considera solo una fase propulsa.
- Utilizzo di versioni del codice che ammettono una fase di flyby o due fasi di flyby intervallate da fasi propulse: aumento delle condizioni al contorno considerate.
- Utilizzo di una versione del codice che permette di studiare l'outbound leg (missione di andata all'asteroide), con condizioni iniziali relative alla Terra al tempo t_0 .
- Utilizzo di una versione del codice che permette di studiare l'inbound leg, nei suoi tratti componenti e nella sua totalità, con condizioni iniziali relative all'asteroide al tempo di ripartenza dallo stesso.
- Una serie di programmi ha permesso di calcolare i tratti di missione Terra – Terra dati dalle non-risonanti e non-risonanti modificate, per il giusto inserimento nel cycler. Come si è visto, partendo dal calcolo della pura non-risonante (“pura” nel senso che non utilizza propellente), si è poi agito correggendo la traiettoria per arrivare alla modifica della data di incontro finale con la Terra e della V_{∞} , uniformandole a quella dell'ingresso cycler scelto.

⁴⁹ Ci si riferisce qui alle condizioni iniziali e a quelle al contorno, riportate nel precedente capitolo.

Per la correzione di traiettoria concernente quest'ultimo punto, a meno che non si sia reso necessario fare altrimenti dallo scarso tempo a disposizione per l'inserimento nel cycler⁵⁰, si è agito correggendo ad un tempo la velocità e la data di incontro della Terra, sfruttando le osservazioni relative alla forma dell'orbita fatte in precedenza per limitare al minimo il quantitativo di propellente necessario.

Quando tutti gli ingredienti sono stati individuati, l'assemblaggio della soluzione di tentativo completa a partire dai tratti ottimizzati permette l'ottimizzazione finale del tratto inbound completo. Il programma usato a tal fine permette la gestione di una missione complessa del tipo: *tratto propulso (Asteroide – Terra (1) + flyby 1 + Terra (1) – Terra (2) + flyby 2 + Terra (2) – Terra (3))* al termine del quale avviene l'inserimento nel cycler (idealmente, attraverso un ulteriore flyby della Terra).

Nel modo in cui si è operato, l'ottimizzazione di traiettoria ha permesso la massimizzazione del controllo “massa finale”, direttamente collegata con la massa di asteroide “catturabile”.

Per quanto riguarda la costruzione del tratto di andata (outbound leg), si è utilizzata la versione del codice opportuna, che ha permesso di massimizzare la massa di propellente finale. Fissando l'eccesso iperbolico di velocità in uscita dalla Terra (che è un dato di progetto, ipotizzando il lanciatore che porta in orbita terrestre il veicolo ARM) e la durata della missione Terra 0 – Asteroide si è così ottenuta la traiettoria di rendezvous con l'asteroide⁵¹.

Quindi la missione finale calcolata di cattura e reindirizzamento dell'asteroide nel cycler si compone di due soluzioni: una soluzione di ritorno e una di andata, che insieme formano la missione completa di recupero e trasporto di un asteroide nell'orbita cycler Terra – Marte per missioni marziane.

⁵⁰ Un esempio di questo genere è costituito dall'ultimo caso preso in esame nel lavoro di ricerca in questa tesi: il reindirizzamento dell'asteroide 2008 LD a Terra avviene già tardi, e quindi troppo poco tempo rimarrebbe per approntare diverse strategie di azione per inserirlo in SIL1 (vedasi il capitolo “RISULTATI”, paragrafo “2008 LD (caso 3)”).

⁵¹ Al rendezvous con l'asteroide, la V_{∞} è nulla, ed è un dato di progetto.

In fig. 18 e in fig. 19 sono riportati gli schemi che riassumono le fasi di lavoro sopra descritte. Questo schema semplifica la forte interazione tra input e output dei programmi: in realtà, infatti, altri punti possono necessitare di ricalcolare la missione dal principio, o di costruirne un'altra in parallelo.

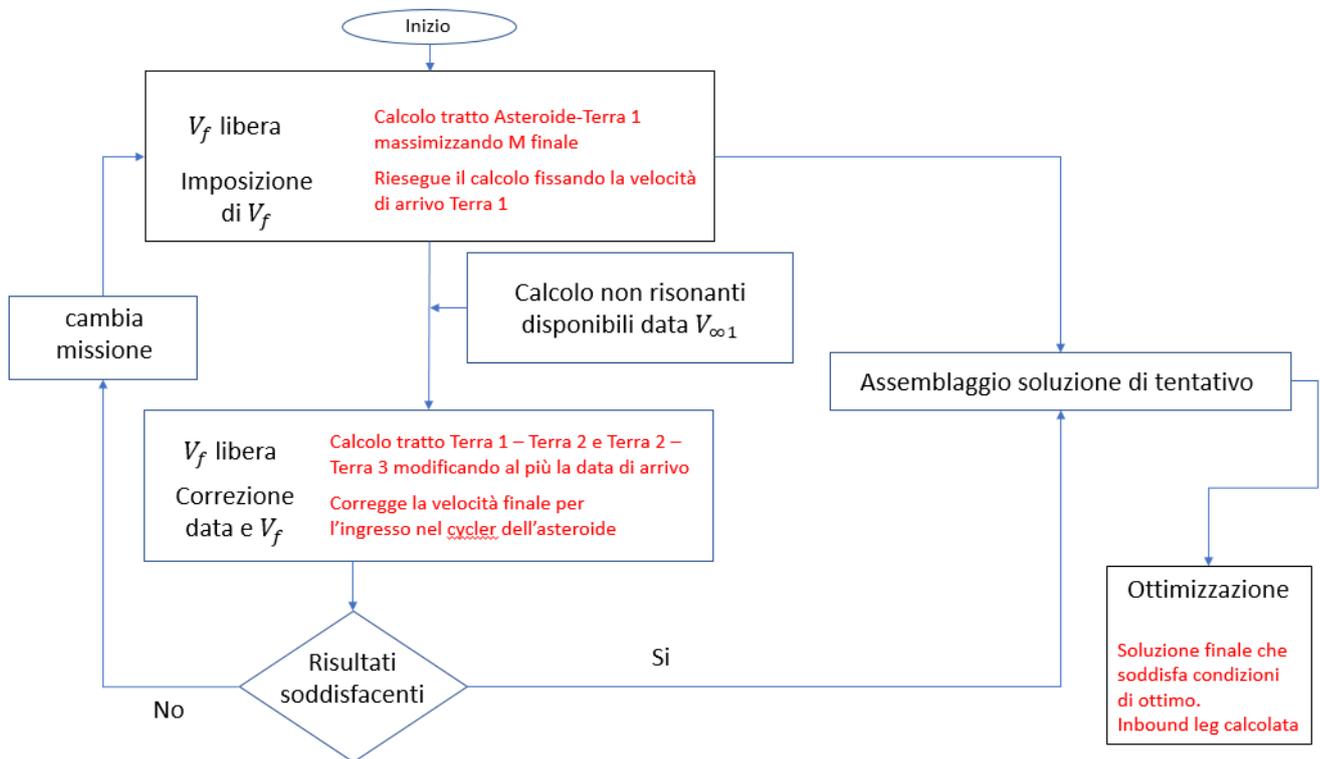


Figura 18: Diagramma di flusso che riassume la logica di realizzazione del tratto inbound (2° tratto) della missione.

N.B. : verifica che la massa finale dell'inbound leg sia sufficientemente alta al trasporto dell'asteroide.

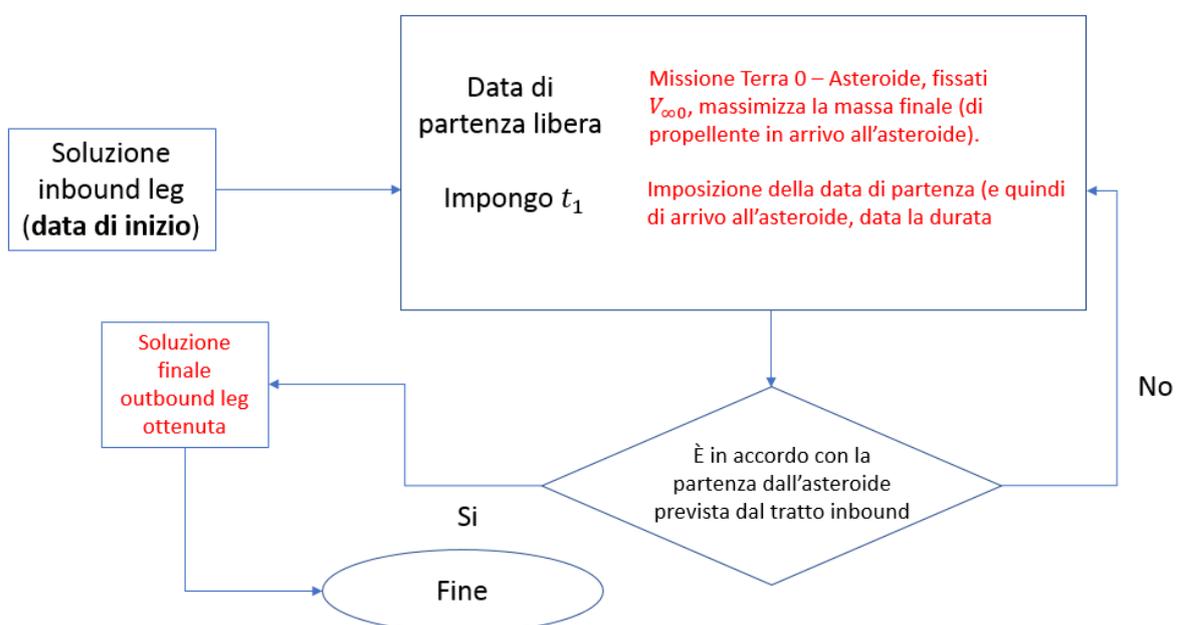


Figura 19: Diagramma di flusso che riassume la logica di realizzazione del tratto outbound (1° tratto) della missione. Esso completa la realizzazione della traiettoria dell'intera missione di recupero e trasporto di un asteroide in SIL1.

4.3.2. Soluzioni di tentativo e struttura della soluzione

Ricordando l'introduzione delle variabili adimensionali, si presenta in questo paragrafo la struttura di una soluzione di traiettoria per un certo tratto.

Per arrivare alla soluzione finale, si parte da una soluzione di tentativo. Per costruirla, si necessita di:

- Tempo di inizio e di fine per ogni arco
- Variabili di stato (posizione, velocità e massa) ad inizio di ogni arco
- Variabili aggiunte ad inizio di ogni arco

È importante ribadire che per ogni singolo tratto, si necessita di una soluzione di tentativo per arrivare a quella relativa ottimale. La soluzione di tentativo della tratta inbound completa si ottiene dall'assemblaggio delle soluzioni ottimali di ciascun tratto componente.

Nella costruzione di una soluzione di tentativo generica, alcune osservazioni utili sono:

- Tempi e variabili di stato sono immediatamente stimabili dall'analisi sulle orbite non-risonanti, e da semplici assunzioni o misure (come la data di partenza dall'asteroide, o la posizione di partenza dell'inbound leg)
- Dalla condizione di ottimo, si sa che il vettore aggiunto alle velocità è parallelo alla V_{∞}
- Le rimanenti variabili (quelle aggiunte alla posizione) rimangono ignote, ma in genere basta assegnare valori piccoli per avere convergenza nelle missioni semplici. Noti i valori delle missioni semplici, si costruiscono da queste quelle complicate

Una volta costruita la soluzione di tentativo, si potrà arrivare alla soluzione di traiettoria. In fig. 20 si riporta uno schema che mostra la procedura di calcolo per un qualsiasi segmento di traiettoria.

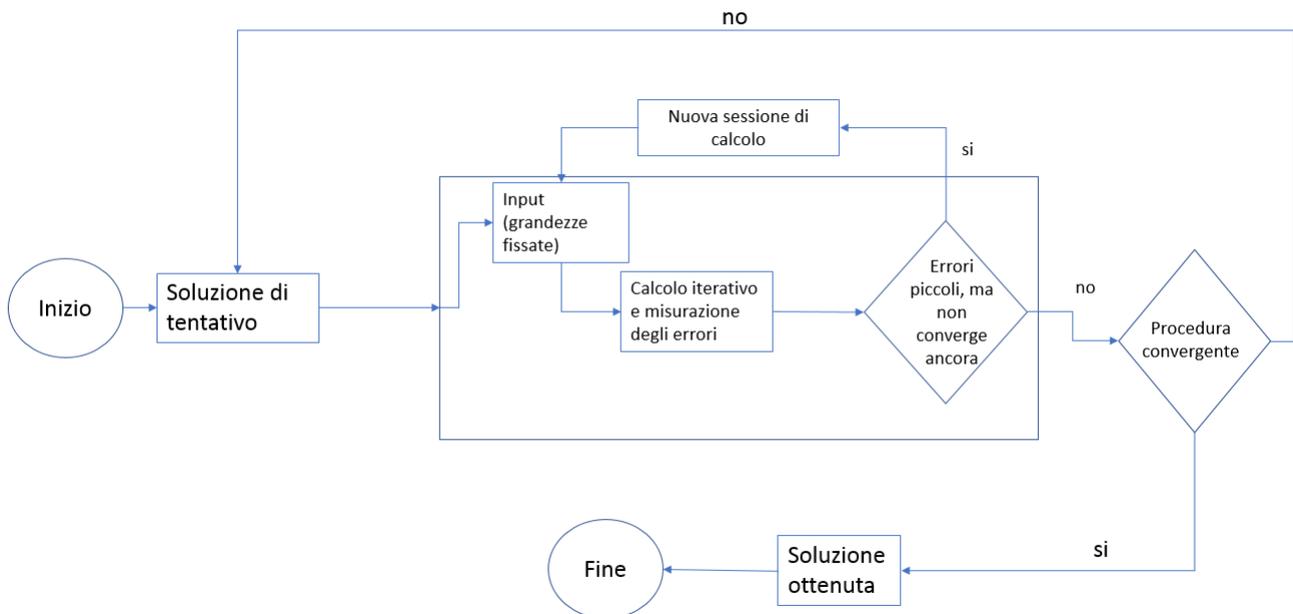


Figura 20: Procedura e logica di calcolo generale dei programmi ARM, per il calcolo della traiettoria: mostra una sessione per il raggiungimento di una soluzione soddisfacente.

Essendo dello stesso tipo della soluzione di tentativo, la soluzione ottenuta può essere (e viene fatto di frequente) utilizzata a sua volta come tentativo per trovarne un'altra.

In ogni tratto di missione studiata vi sono 16 variabili a cui bisogna assegnare il valore ai contorni per poter iniziare la procedura iterativa con cui ottimizzare la soluzione della traiettoria⁵². Più è complicata la traiettoria che si sta studiando, più si hanno variabili da gestire. Se si sta analizzando una traiettoria di 5 fasi (2 flyby e 3 fasi propulse) vi saranno $16 \cdot 3$ variabili da gestire, dovute alle tre fasi propulse. Quindi, il numero di variabili a cui dare il valore iniziale quando si considera il tratto inbound completo, è tre volte quello dei singoli tratti componenti, complicando di molto il calcolo.

In generale, con il codice utilizzato si sono gestite:

- Fasi di spinta o di *coasting* (ovvero a propulsori spenti, una singola fase può essere composta da tratti propulsi e a propulsori spenti)
- Fasi di flyby non vincolato. Esso avviene istantaneamente, con una rotazione del vettore velocità.

In base al numero di fasi considerate, come spiegato sopra, ci sarà un diverso numero di variabili, di cui si deve trovare il valore iterativamente per arrivare alla soluzione finale ottimizzata, partendo dalla soluzione iniziale.

Nel capitolo successivo vengono riportati gli studi eseguiti sulle missioni di trasporto di asteroidi nel cyclus S1L1.

⁵² Le 16 variabili in questione sono quelle mostrate e commentate nella parte finale del capitolo di Metodologia Generale.

5. Risultati

In questo capitolo vengono presentate le missioni dei tre asteroidi scelti per il trasporto nel cycler S1L1 Terra – Marte. Le missioni 2006 UQ216, 2011 CL50 e 2008 LD, omonime degli asteroidi protagonisti, verranno presentate nel dettaglio con particolare attenzione ai risultati dello studio di ottimizzazione, caso per caso, seguendo l'ordine cronologico di costruzione della missione presentato nel precedente capitolo. In un paragrafo ricapitolativo presentato alla fine di ogni missione verrà riportata la stessa nel suo ordine di *timeline*: outbound leg, inbound leg. Il paragrafo finale presenterà un confronto delle tre missioni progettate, mettendo in luce i punti di forza di ciascuna delle tre.

5.1. Ipotesi, Asteroidi, inserimenti in S1L1 e condizioni di ottimo

È già stato chiarito come la missione completa di raggiungimento, cattura e inserimento nel cycler dell'asteroide sia un problema alquanto complicato da studiare. Vista la considerevole complessità dovuta alla dinamica del problema considerato, si sono introdotte le ipotesi semplificative discusse nel capitolo di Metodologia Generale⁵³.

Nella scelta degli asteroidi da utilizzare come bersaglio di missione, si è agito seguendo una determinata logica. È già stato accennato come in questo lavoro si considerino asteroidi di un certo tipo, seguenti traiettorie di naturale avvicinamento alla Terra, aventi una certa massa. Adesso si tratta di capire quali, effettivamente, sono i migliori candidati per esser trasportati in orbita cycler terrestre-marziana S1L1. Per chiarezza, si riporta nel seguito (tab. 14) l'elenco degli asteroidi giudicati interessanti, come candidati per essere trasportati nel cycler, da cui si è partiti per la scelta.

Tabella 14: Asteroidi classificati per missioni di trasporto nel cycler S1L1 (ripresa da tab. 9)

ID Asteroide	Magnitudine assoluta	Diametro esterno [m]	Massa stimata [t]	Data flyby naturale ⊕	V_{∞} [$\frac{km}{s}$]	ΔV stimati [$\frac{m}{s}$]
2013 UX2	29.2	3 – 14	29 – 2600	Ott. 2026	3.68	99
2008 LD	29.8	3 – 16	44 – 4000	Giu. 2035	4.13	36
2010 UY7	28.5	4 – 19	77 – 6900	Ott. 2027	3.96	136
2011 CL50	27.6	6 – 28	270 – 24000	Feb. 2031	3.59	90
2006 UQ216	27.3	7 – 33	400 – 36000	Nov. 2028	3.79	89
2009 HD	27.2	8 – 34	470 – 42000	Ott. 2028	4.01	128
2011 HG2	27.0	8 – 37	610 – 55000	Feb. 2025	3.36	39
2011 PB50	24.9	22 – 98	11000 – 10^6	Feb. 2025	4.02	121
2003 LN6	24.7	24 – 108	110 – $1.3 \cdot 10^6$	Apr. 2026	3.98	66

⁵³ Le ipotesi fatte non stravolgono la fisica del problema, ma la rendono più facilmente indagabile per trovarne una soluzione, che potrà poi essere in futuro indagata più approfonditamente.

Nell'elenco precedente tutti gli asteroidi sono in potenza recuperabili allo scopo preposto. Alcuni sono stati analizzati nel corso del lavoro, altri scartati a priori e altri ancora sono stati scartati dopo alcune analisi preliminari.

Nella scelta si è operato tenendo conto di alcuni fattori, come la precisione delle previsioni sulle dimensioni e massa (come già accennato nel capitolo introduttivo), la vicinanza dell'asteroide, la velocità V_{∞} (che preferibilmente deve essere simile a quella del maggior numero di inserimenti nel cycler, così da avere più finestre di ingresso in S1L1 e limitando la spinta necessaria a farlo):

- Gli asteroidi **2013 UX2** e **2010 UY7** sono già stati analizzati e se n'è già mostrato il progetto della missione di trasporto in S1L1 in due lavori precedenti, dimostrando la fattibilità e la bontà di queste missioni in generale⁵⁴.
- Si sono esclusi dalla scelta gli asteroidi **2011 PB50** e **2003 LN6** principalmente per la loro scarsa visibilità e lontananza. Conseguentemente, la loro magnitudine assoluta è ridotta, e non permette di identificare con sufficiente precisione le dimensioni e la massa dei suddetti asteroidi. Perciò, prima di poter essere scelti come possibili protagonisti delle missioni di recupero e trasporto in S1L1, è consigliabile aspettare una loro caratterizzazione con maggior chiarezza.
- I rimanenti asteroidi sono stati analizzati più a fondo, poiché tutti presentano caratteristiche promettenti:
 - **2009 HD** è stato accantonato per un fatto di non vicinanza alla Terra: la sua orbita non è ideale per una cattura gravitazionale da parte di essa. Grazie a più recenti misurazioni derivanti da effemeridi [12], si è mostrato che 2009 HD non è così facile da raggiungere, in quanto sembrerebbe troppo lontano (i calcoli di ottimizzazione infatti non sono riusciti a convergere, anche sul semplice tratto Asteroide-Terra).
 - **2011 HG2** è molto promettente, ma purtroppo svariati tentativi di costruzione della missione, svolti durante lo studio, hanno mostrato che il suo basso eccesso iperbolico di velocità impone una spinta troppo onerosa per le possibili opportunità di inserimento nel cycler. Si riporta nel seguito per maggior chiarezza la tab. 15 con gli inserimenti in S1L1 considerati.

Tabella 15: Inserimenti in S1L1 disponibili, una delle discriminanti per la scelta tra gli asteroidi candidati per le missioni di recupero e trasporto.

Inserimenti cycler possibili fino al 2037				
# Veicolo/incontro	Data (dd/mm/yyyy)	Vinf [km/s]	quota flyby [km]	TOF volo singola tappa [giorni]
#1/Earth 9	04/02/2019	3.99	22600	924
#3/Earth 10	27/03/2020	3.79	25800	529
#1/Earth 10	18/07/2020	3.99	4300	530
#4/Earth 9	06/12/2020	4.68	31200	108
#2/Earth 9	06/04/2021	4.61	23000	934
#4/Earth 10	23/05/2022	4.68	16000	532
#2/Earth 10	20/09/2022	4.61	14800	532

⁵⁴ Si vedano a tal proposito rispettivamente le fonti in Bibliografia [2] e [1].

#3/Earth 12	28/01/2023	6.06	43300	121
#1/Earth 12	25/05/2023	6.09	20000	887
#3/Earth 13	19/07/2024	6.06	11200	538
#1/Earth 13	13/11/2024	6.09	27400	538
#4/Earth 12	11/03/2025	6.74	40800	146
#2/Earth 12	02/07/2025	7.09	23800	793
#4/Earth 13	03/09/2026	6.74	22400	541
#2/Earth 13	26/12/2026	7.09	35200	542
#3/Earth 15	17/04/2027	7.16	31100	165
#1/Earth 15	09/08/2027	6.73	25900	799
#3/Earth 16	11/10/2028	7.16	24300	542
#1/Earth 16	31/01/2029	6.73	41500	541
#4/Earth 15	24/05/2029	6.74	27000	194
#2/Earth 15	21/09/2029	5.78	26800	830
#4/Earth 16	16/11/2030	6.74	9000	541
#2/Earth 16	12/03/2031	5.78	39200	537
#3/Earth 18	21/07/2031	4.67	17300	225
#1/Earth 18	15/11/2031	4.43	31800	871
#3/Earth 19	03/01/2033	4.67	21700	532
#1/Earth 19	30/04/2033	4.43	26900	531
#4/Earth 18	22/09/2033	3.86	6800	162
#2/Earth 18	16/01/2034	3.75	22600	915
#4/Earth 19	05/03/2035	3.86	24600	529
#2/Earth 19	28/06/2035	3.75	10000	529
#3/Earth 21	19/11/2035	3.99	19800	115
#1/Earth 21	13/03/2036	4.25	22000	936
#3/Earth 22	01/05/2037	3.99	26700	530
#1/Earth 22	25/08/2037	4.25	8900	531
#4/Earth 21	09/01/2038	5.52	39800	114
#2/Earth 21	08/05/2038	5.53	27100	906
#4/Earth 22	29/06/2039	5.52	14400	536
#2/Earth 22	26/10/2039	5.53	23900	536

Si sono presi in considerazione i rimanenti tre asteroidi: **2006 UQ216**, **2011 CL50**, e **2008 LD**. Di caratteristiche diverse, essi hanno rappresentato il punto di partenza per una riflessione: quali caratteristiche li rendono più appetibili degli altri? Si evidenziano anche gli elementi problematici venuti a galla anche per questi tre esemplari:

- *2006 UQ 216* è quello che dei tre si presenta come il più massivo e il più grande; quindi è l'asteroide che necessita di una capacità di trasporto maggiore da parte delle navicelle ARM. La missione quindi deve cercare di essere costruita per avere una massa finale tale da rendere possibile il suo trasporto. La data del suo naturale avvicinamento alla Terra presenta un buon vantaggio, poiché essendo a dieci anni circa dall'ultimo inserimento utile (il flyby naturale è previsto per il Novembre del 2028, mentre l'ultimo inserimento riguarda ottobre 2039),

permette di considerare diverse strategie di inserimento. Fortunatamente l'eccesso iperbolico di velocità previsto di $3.79 \frac{km}{s}$ è tale da poter considerare a priori diversi di questi inserimenti.

Un fattore estremamente importante da sottolineare, che contribuisce a rendere 2006 UQ216 un candidato importante, è il fatto che esso figura come possibile pericolo per la Terra a seguito di rischio da impatto⁵⁵. Questo è un motivo in più per stimolare il suo guidato reindirizzamento ed inserimento in S1L1.

- *2011 CL50* è più piccolo del precedente, e quindi più facile da spostare, ma a causa del suo più tardo arrivo (febbraio del 2031) permette un numero minore di strategie di azione. Si è stimato un eccesso iperbolico di velocità di $3.59 \frac{km}{s}$, che potrebbe voler dire una spinta maggiore necessaria per il suo inserimento.
- *2008 LD* arriva al flyby naturale della Terra molto tardi: giugno del 2035. A causa dello scarso tempo disponibile, non presenta possibilità di inserimento nel cycler con la strategia canonica delle orbite non-risonanti (prima del 2039) accennata in precedenza⁵⁶. Considerando le sue ridotte dimensioni, però, si è resa possibile un'altra strategia, consistente nel diretto raggiungimento dell'inserimento nell'orbita cycler. Inoltre, un altro vantaggio è rappresentato dal maggior eccesso iperbolico di velocità, stimato $4.15 \frac{km}{s}$, che permette di considerare senza esclusione i pochi inserimenti disponibili.

In questo lavoro si sono perciò costruite le missioni di trasporto nel cycler S1L1 degli asteroidi: **2006 UQ216, 2011 CL50 e 2008 LD.**

Si è quindi svolto un procedimento di ottimizzazione di traiettoria per il trasporto dei tre asteroidi sopra menzionati nell'orbita del cycler S1L1⁵⁷.

Nel seguito verranno mostrate le condizioni e le prestazioni in comune nelle tre missioni; successivamente si esporranno, caso per caso, i risultati del problema di ottimizzazione di traiettoria riguardanti il trasporto in orbita cycler S1L1 dei tre asteroidi scelti come bersaglio: 2006 UQ216, 2011 CL50 e 2008 LD.

5.2. Dati e prestazioni imposti

Come è stato studiato in letteratura, si assume che per tutte e tre le missioni si possa utilizzare una navicella ARM che funzioni da rimorchiatore spaziale con le seguenti caratteristiche tecniche, riportate in tab. 16.

⁵⁵ È valutato pericoloso, ed inserito nella lista stilata dal centro di ricerca dell'Università di Pisa, sponsorizzata da ESA. Si veda "Neodym" [13].

⁵⁶ Considerando inserimenti posteriori al 2039 aumentano le strategie disponibili, e quindi probabilmente si potrebbe operare con la strategia di utilizzo di orbite non-risonanti di trasferimento nel cycler. In questo lavoro comunque non si sono considerati inserimenti posteriori al 2039, privilegiando *design* di missioni in tempi più vicini a noi.

⁵⁷ Le tecniche di ottimizzazione utilizzate sono quelle discusse nel capitolo 3 di metodologia generale, in particolar modo si vedano le condizioni di ottimo a fine di quel capitolo.

Tabella 16: Caratteristiche assunte per lo spacecraft.

Potenza disponibile totale SEP ⁵⁸	47 kW @ 1 AU
Potenza riservata per le operazioni on-board	5 kW
Numero di propulsori e tipologia	3 propulsori ad effetto Hall
Duty Cycle del propulsore	90%

Dei 47 kW totali disponibili, 5 kW sono riservati per le operazioni on-board che non hanno a che fare con le operazioni propulsive. La potenza disponibile data dal SEP è funzione proporzionale all'inverso della radice quadrata della distanza del rimorchiatore dal Sole. Il sistema di propulsione avrà quindi nominalmente a disposizione 42 kW per produrre spinta. Il sistema è composto da tre identici propulsori ad effetto Hall, la cui spinta e portata sono funzioni polinomiali della potenza in ingresso (tra i 7 kW e i 13.95 kW). La caratteristica dei propulsori è riportata in fig. 21.

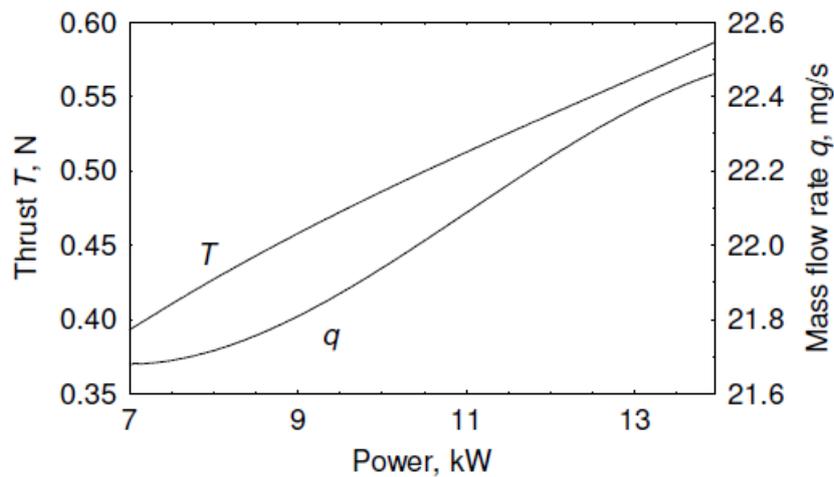


Figura 21: Caratteristica del singolo propulsore del rimorchiatore spaziale

Prima di esporre i risultati del lavoro, si richiamano in tab. 17 le condizioni del problema, comuni in tutte e tre le missioni. Esse vedono lo spacecraft equipaggiato sempre con una quantità di propellente sufficiente per l'andata, per il ritorno, per la spinta dell'asteroide atto al reindirizzamento guidato verso l'orbita terrestre e per l'inserimento dell'asteroide nel cycler S1L1.

Tabella 17: Condizioni iniziali e condizioni al contorno comuni alle tre missioni

Condizione sul raggio vettore orbitale	$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_E(t_0)$
Condizione sulle velocità ⁵⁹	$[\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_E(t_0)]^2 = \mathbf{V}_{\infty 0}^2 = \left(1.3 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2$

⁵⁸ SEP = Solar Electric Power system.

⁵⁹ L'eccesso iperbolico è imposto in accordo con quello che si ottiene da un lanciatore Delta IV Heavy, necessario per sfuggire alla cattura gravitazionale della Luna.

Condizione sulla massa del propellente	$m_0 = 1 = 10000 \text{ kg}$
Condizione sul raggio di arrivo all'asteroide	$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_A(t_1)$
Condizione sulla velocità all'asteroide	$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_A(t_1)$
Condizione sul raggio vettore distanza alla partenza dall'asteroide (inizio inbound leg)	$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_A(t_2)$
Condizione sulla velocità alla partenza dell'asteroide	$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_A(t_2)$
Condizione sul raggio vettore ai flyby	$\mathbf{r}_{3-} = \mathbf{r}_{3+} = \mathbf{r}_E(t_3)$
Condizione sul modulo di V_∞ ai flyby	$[\mathbf{V}_{3-} - \mathbf{V}_E(t_3)]^2 = [\mathbf{V}_{3+} - \mathbf{V}_E(t_3)]^2 = V_{\infty 3}^2$
Condizione sul raggio vettore all'arrivo finale alla Terra (inserimento nel cycler)	$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_E(t_f)$
Condizione sulla V_∞ all'inserimento cycler	$[\mathbf{v}_f - \mathbf{V}_E(t_f)]^2 = V_{\infty f}^2$
Condizione sulla quantità di propellente da usare nell'inbound leg	$m_f - m_2 = 0.4 = (4000 \text{ kg})$

Date le caratteristiche del rimorchiatore, e le condizioni enunciate sopra, si considerano i tre casi studiati nel seguito.

5.3. 2006 UQ216 (caso 1)

Lo studio della missione di trasporto di un asteroide è troppo complesso per essere progettato direttamente in due fasi, una di andata e una di ritorno. Mentre la fase di andata si presenta come un semplice problema di collegamento di due punti, da ottimizzare secondo le tecniche viste in precedenza, il ritorno necessita di una suddivisione in traiettorie intermedie. L'unione di questi semplici tratti forma una traiettoria composta che viene poi utilizzata, già si è visto, come soluzione di tentativo per il problema di ottimo costituito dal trasporto dell'asteroide fino al suo inserimento nel cycler.

I parametri orbitali fondamentali di 2006 UQ216, forniti dal JPL, sono riportati nella seguente tab. 18, mentre in tab. 19 vengono riprese per comodità le caratteristiche fisiche stimate dell'asteroide.

Tabella 18: Parametri orbitali di 2006 UQ216 (risalenti al 4 agosto 2018)

Parametri Orbitali di 2006 UQ216	
Semiassse maggiore (a) [AU]	1.10358121067
Eccentricità (e)	0.16247808335
Inclinazione orbitale rispetto all'eclittica (i) [deg]	0.47349042136

RAAN ⁶⁰ (Ω) [<i>deg</i>]	217.77482309210
Argomento del periastro (ω) [<i>deg</i>]	247.52536275933
Anomalia vera (M) [<i>deg</i>]	246.00018455513

Tabella 19: Caratteristiche fisiche di 2006 UQ216

2006 UQ216	
Dimensioni (diametro esterno) [m]	7 – 33
Massa [t]	400 – 36000

In fig. 22 sono riportate le orbite della Terra e di 2006 UQ216.

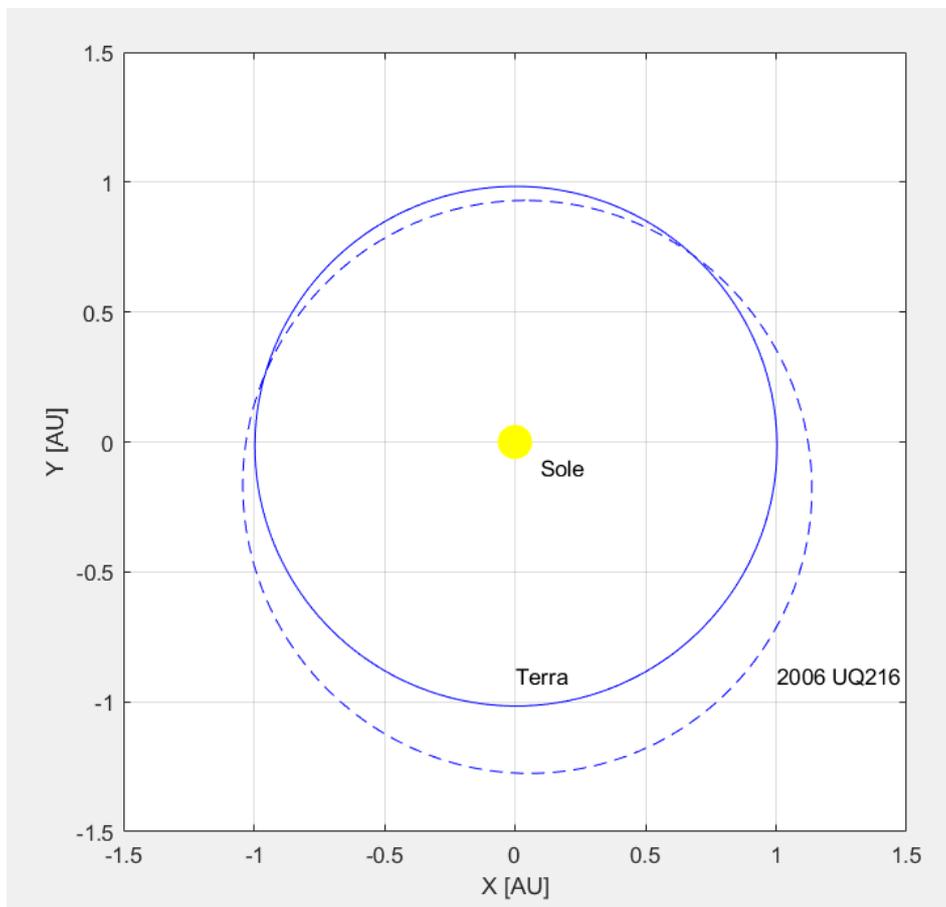


Figura 22: Orbite della Terra e di 2006 UQ216

⁶⁰ RAAN = *Right Ascension of the Ascending Node*, parametro che identifica la Longitudine del Nodo Ascendente nel caso in cui il piano di riferimento sia quello equatoriale terrestre (si veda il “Capitolo 2” per maggiori informazioni).

È utile calcolare il periodo orbitale dell'asteroide 2006 UQ216:

$$T_{2006\ UQ216} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{2006\ UQ216}^3}{\mu_{\odot}}} = 423.7920\ \text{giorni} \approx 1.161\ T_{\oplus}$$

A questo punto si mostrano separatamente i risultati degli studi di ottimizzazione di traiettoria sulle tratte di andata (outbound leg) e di ritorno (inbound leg) per l'asteroide. Seguendo il procedimento con cui è stato svolto il lavoro, come spiegato nel capitolo “Metodologia specifica: progetto della missione di trasporto di un asteroide in orbita cycler Terra – Marte”, si mostreranno prima i risultati per l'inbound leg.

5.3.1. Inbound leg: reindirizzamento ed inserimento nel cycler di 2006 UQ216

2006 UQ216 – Terra 1

La prima tappa è consistita nel raggiungimento della Terra, col reindirizzamento dell'asteroide dalla sua orbita naturale.

Si è cominciato con l'individuazione della posizione dell'asteroide al momento della partenza, ovvero di inizio spinta verso l'orbita terrestre. Guardando i dati di naturale avvicinamento dell'asteroide alla Terra, in tab. 14, si vede che la data prevista di arrivo è novembre 2028. Calcolando una durata plausibile di due anni per questo tratto di missione, si è calcolata la posizione dell'asteroide circa due anni prima, come punto di partenza per la procedura. Noti i parametri orbitali dell'asteroide, si è quindi calcolata la posizione che esso avrà in data 6/11/2026 (tab. 20).

Tabella 20: Informazioni calcolate circa la posizione di 2006 UQ216 in data 6/11/2026.

Posizione di 2006 UQ216 @ 6/11/2026	
distanza dal Sole (r)	0.993525009644327
Longitudine (θ)	2.88354902883193
Latitudine (φ)	$-6.561533540641138 \cdot 10^{-3}$
Componente velocità (u)	0.135630087673220
“ “ (v)	1.04329791972129
“ “ (w)	$5.241491275811418 \cdot 10^{-3}$

Nota la posizione dell'asteroide in una certa data, è stato possibile ottenere un punto di partenza per lo studio della ricerca di convergenza per ottenere la traiettoria Asteroide – Terra 1. Una volta ottenuta la prima traiettoria fisicamente utile, si è proceduto facendo variare durata della missione e massa di propellente utilizzata, registrando tutte le varie soluzioni del problema, discostanti ogni volta di poco dalla precedente di tentativo.

Si è quindi eseguito uno studio di analisi sull'andamento delle soluzioni di traiettoria per questo tratto di missione, confrontando le soluzioni ottenute. I risultati di questo studio sono riportati in fig. 23.

In fig. 24 invece si è riportato lo studio relativo ai cambiamenti di eccesso iperbolico di velocità all'arrivo al flyby terrestre. Come si può vedere, gli andamenti delle curve $V_\infty - Dt$ non sono regolari come quelli relativi alla massa.

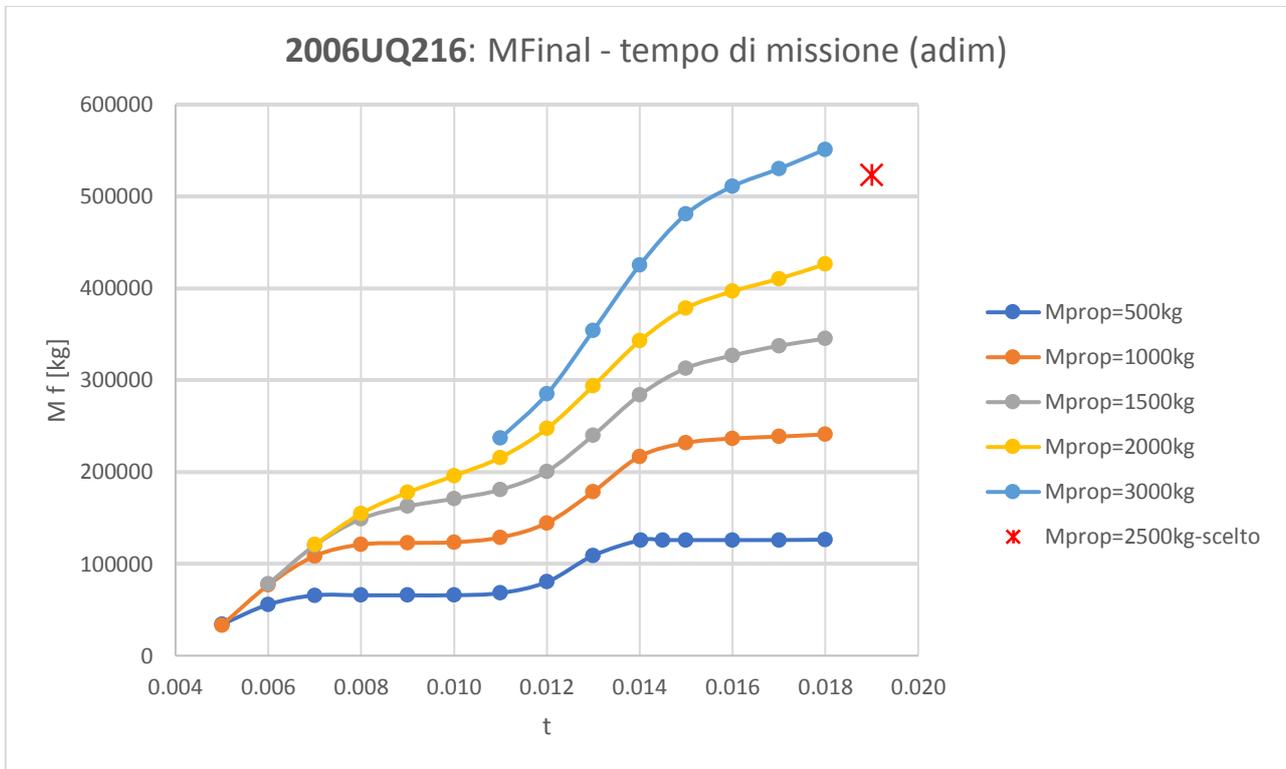


Figura 23: Studio relativo alla traiettoria Asteroide – Terra 1: andamento della massa finale in termini della durata della missione

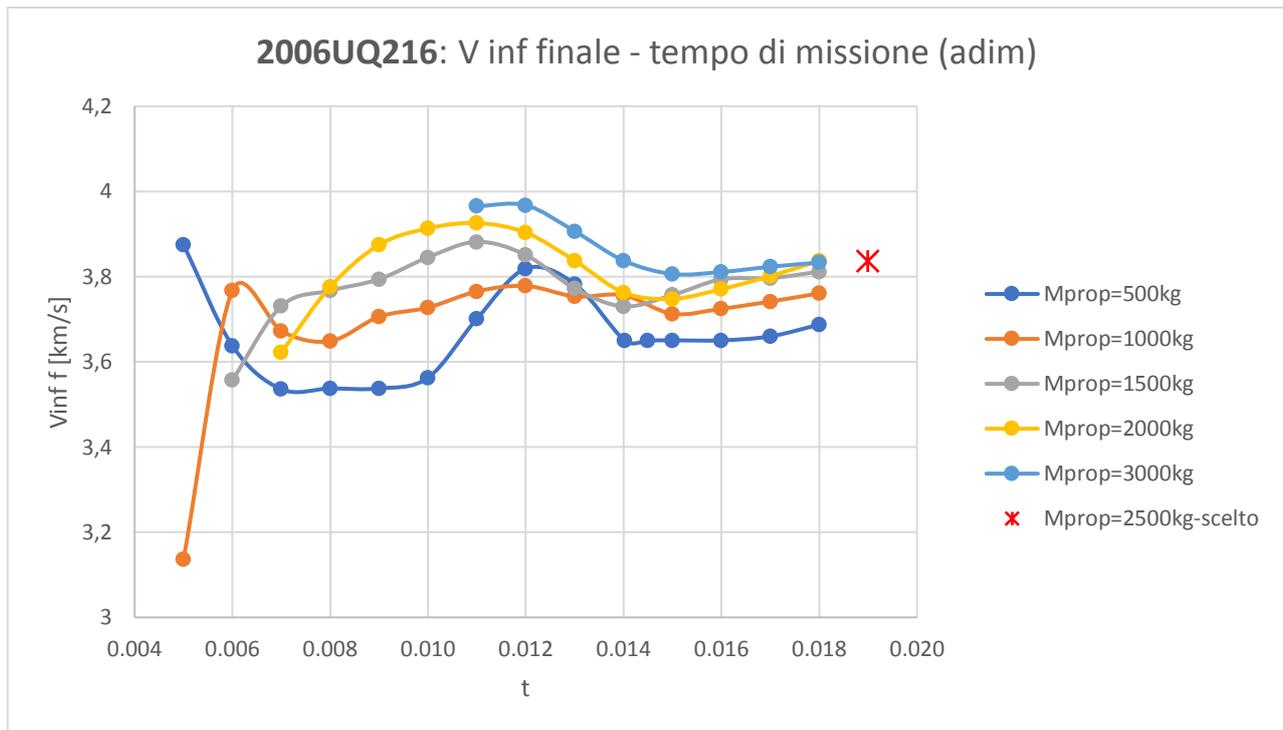


Figura 24: Studio relativo all'andamento dell'eccesso iperbolico di velocità in arrivo alla Terra, in termini della durata del viaggio.

Leggendo i grafici riportati nelle figure precedenti, appare evidente come, in generale, aumentando la durata del viaggio si riesca a trasportare una massa maggiore (M_f) nell'operazione di recupero. Questa tendenza è tanto più accentuata quanto più propellente si utilizza in questa fase. Quindi, schematizzando per punti ciò che si è evidenziato da questo primo studio:

- Fissata la massa di propellente M_p , la M_f aumenta, aumentando la durata della tratta
- Facendo aumentare M_p , l'aumento di M_f discusso al punto precedente è più repentino

Nel grafico si sono riportate le curve facendo variare il Dt tra 4.00 e 18.00, che corrispondono rispettivamente a durate di 0.637 anni e 2.867 anni. Si è comunque ampliato lo studio con durate maggiori di 18, e con M_p anche diverse rispetto a quelle riportate nel grafico: esse non sono state riportate in figura, perché questi dati non apportavano alcuna informazione utile al grafico, confermando semplicemente gli andamenti mostrati.

Di primo acchito si è istintivamente pensato ad iniziare la missione spingendo con l'utilizzo di 3000/4000 kg di propellente, in modo da portare masse maggiori. Portare masse molto grandi, però, vuol dire avere spinte più onerose a parità di correzioni necessarie. Quindi spingere con più propellente in questa fase è la strategia corretta se si è fortunati e non si devono apportare molte correzioni successive in termini di velocità e cambiamento di data di incontro della Terra.

Per quanto riguarda la velocità (ultimo grafico), ad una prima occhiata l'andamento di V_∞ in termini della durata del viaggio e della massa di propellente sembrerebbe casuale. In realtà, il controllo della massimizzazione della massa finale limitata al tratto studiato, causa la presenza di un massimo che si sposta al variare della M_p . Questo effetto è del tutto secondario alla più marcata dipendenza della M_f nei confronti di Dt , ma comunque ha influito nella scelta della massa di propellente da utilizzare in questa fase, in quanto si è cercato di aumentare la V_∞ rispetto ai 3.79 km/s previsti del naturale flyby terrestre, avvicinandola a valori più appetibili per gli inserimenti cycler.

Si è perciò visto che, utilizzando $M_p = 2500 \text{ kg}$, si reindirizza 2006 UQ216 al flyby della Terra con:

- $M_f = 523345 \text{ kg} \approx 524 \text{ t}$
- $V_{\infty 1} = 3.837 \text{ km/s}$

Il risultato dell'analisi di ottimizzazione del tratto 2006 UQ216 – Terra 1 è riportato nel dettaglio in tab. 21, mentre in fig. 25 è riportata la sua traiettoria.

Tabella 21: Risultato dell'analisi del tratto 2006 UQ216 – Terra 1

Data di partenza	27/10/2025
Durata del viaggio	$\approx 1105 \text{ giorni}$
Data di arrivo	4/11/2028
Massa finale	$\approx 524 \text{ t}$
Propellente utilizzato	2500 kg
Velocità finale $V_{\infty 1}$	3.837 km/s

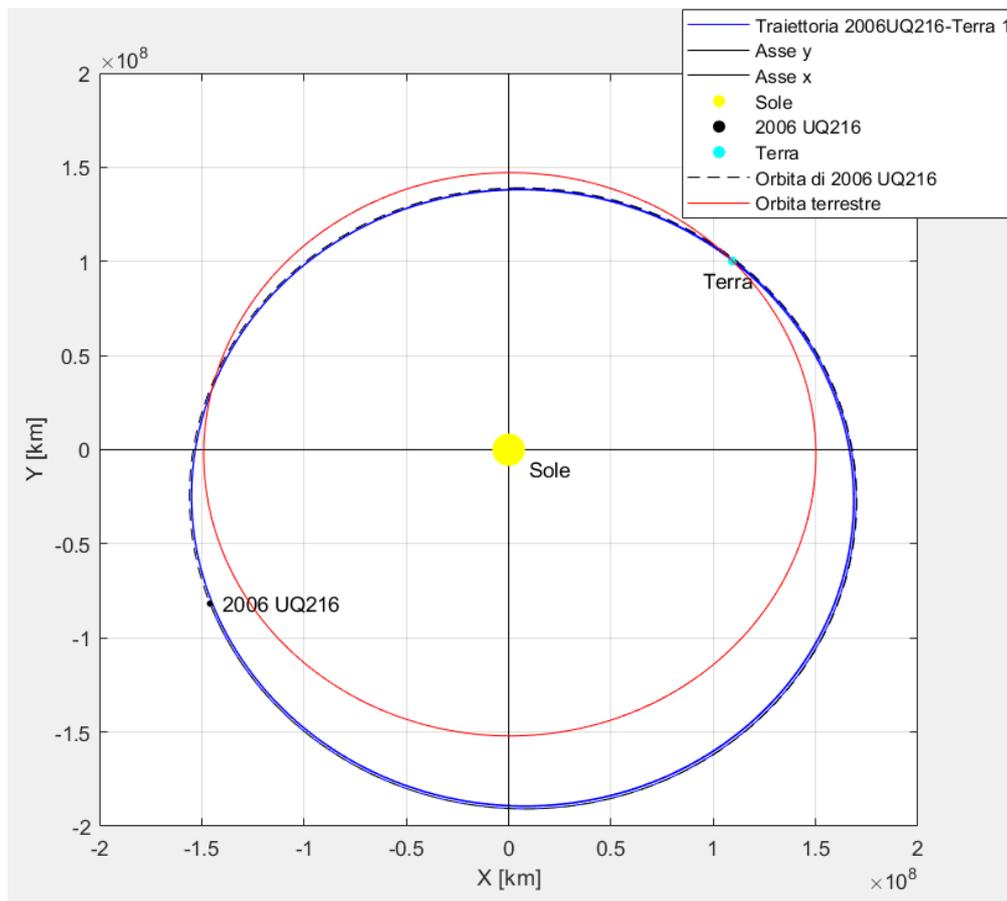


Figura 25: Tratto 2006 UQ216 – Terra 1 (l'asteroide fa 2 giri e mezzo spinto dallo spacecraft)

Terra 1 – Terra 2

Il passo successivo è stato quello di trovar le orbite non-risonanti disponibili ed accessibili data la velocità di ingresso di $V_{\infty} = 3.837 \text{ km/s}$.

Con la tratta 2006 UQ216 – Terra 1, si è portato l'asteroide ad un primo flyby terrestre il 4/11/2028. Volendo sfruttare uno degli inserimenti cycler a disposizione mostrati ad inizio capitolo, si hanno circa dieci anni di inserimenti disponibili.

Quando si sono illustrate le strategie alla base dell'inserimento, si è spiegato come sono di interesse pratico solo gli inserimenti che presentano delle V_{∞} con differenze dell'ordine di 100 m/s. Si è perciò stilata una tabella con gli inserimenti cycler appetibili per la missione 2006 UQ216, presentata nella seguente tab. 22.

Tabella 22: Inserimenti cycler raggiungibili per l'ingresso di 2006 UQ216

Asteroide 2006 UQ216			
Arrivo a Terra			
Data	4-nov-28		
V_{∞} [km/s]	3.837		
Cyclers interessanti			
$V_{\infty f}$ [km/s]	Inserimento	Δt (days)	365- Δt
3.75	16/01/2034	73	292
3.75	28/06/2035	236	129
3.99	19/11/2035	11	354
3.99	01/05/2037	178	187
3.86	22/09/2033	322	43
3.86	05/03/2035	121	244

Per poter vedere quale degli inserimenti cycler sopra descritti è il più conveniente, si inizia l'analisi delle orbite non-risonanti. Si procede come mostrato nel precedente capitolo: si sono calcolate le orbite non-risonanti accessibili ad una velocità di 3.837 km/s , con una routine di Matlab, e si sono riportate in tab. 23.

Tabella 23: Tabella delle orbite non-risonanti sfruttabili per l'inserimento in SIL1 di 2006 UQ216

Orbite non-risonanti raggiungibili con $V_{\infty} = 3.837$							
# orbita	N° rivoluzioni della Terra (N)	N° rivoluzioni dell'asteroide (M)	In-Out (1) / Out-In (2)	Periodo (T) [giorni]	Δt_{NR} [giorni]	e	a
1	1	1	1	386.9	163.8	0.131	1.039
2	2	2	2	344.8	133.3	0.134	0.962
3	3	2	2	545.9	328.2	0.242	1.307
4	2	2	1	377.6	177.7	0.129	1.022
5	3	3	2	353.3	147.4	0.131	0.978
6	2	3	1	275	335.5	0.219	0.828
7	3	2	1	549.8	34.8	0.245	1.313
8	4	3	2	484.5	295	0.195	1.207
9	3	3	1	374	183.5	0.129	1.016
10	4	4	2	356.7	153.2	0.13	0.984
11	3	4	1	293.7	309	0.187	0.865
12	4	5	2	273	26.2	0.223	0.824
13	4	3	1	489.4	67	0.199	1.215
14	5	4	2	454.1	274.2	0.172	1.156
15	4	4	1	372	186.6	0.128	1.012
16	5	5	2	358.6	156.4	0.129	0.988
17	4	5	1	306	292	0.169	0.889
18	5	6	2	290.8	52.1	0.192	0.859
19	5	4	1	458.9	87.2	0.176	1.164
20	5	5	1	370.8	188.6	0.128	1.01
21	5	6	1	314.7	279.4	0.159	0.905
22	5	7	1	274.5	336.4	0.22	0.827

Le caratteristiche delle orbite seguono le indicazioni date in precedenza, Δt_{NR} è il tempo che intercorre tra un incontro della Terra ed il successivo, mentre T indica il periodo orbitale dell'orbita. N e M indicano rispettivamente i giri, approssimati al più vicino intero, che la Terra e l'asteroide compiono prima di rincontrarsi.

Si sottolinea ancora una volta che i Δt delle non-risonanti (Δt_{NR}) sono fondamentali per capire se l'orbita in questione è utile per spostare l'incontro con la Terra in una certa data, e se si possa costruire una strategia in grado di permettere l'inserimento dell'asteroide in S1L1 in una certa data. Calcolato il Δt (in modulo 365 giorni) tra un inserimento cycler e il 4/11/2028 ($\Delta t_{necessario}$), si possono calcolare le strategie di inserimento, costruendole in base alla relazione:

$$\Delta t_{combinazione\ NR} - \Delta t_{necessario} \leq 5\ \text{giorni}$$

dove $\Delta t_{combinazione\ NR} = \sum_i \Delta t_{NR_i}$ (sempre in modulo 365 giorni), con Δt_{NR_i} che è il tempo prima del re-incontro della Terra della singola non-risonante componente della combinazione.

Come già detto, raramente si trova una non-risonante che da sola permette di soddisfare la condizione sopra scritta; nella maggior parte dei casi si rende necessaria la combinazione di due orbite, tenuto conto delle regole enunciate nel paragrafo riguardante le non-risonanti del capitolo precedente.

Dati gli inserimenti riportati in tab. 22, si sono potute elaborare diverse strategie per l'inserimento in S1L1 dell'asteroide 2006 UQ216; queste non sfruttano tutte la stessa finestra di inserimento, ma è stata condotta un'analisi che ha abbracciato ogni possibilità. In tab. 24 si riportano tutte le strategie di costruzione della traiettoria che possano permettere l'ingresso dell'asteroide nel cycler.

Tabella 24: Cycler e strategie di inserimento. Le strategie sono riportate nella parte inferiore della tabella.

Classificazione cycler e strategie di inserimento					
Inserimento 1	Inserimento 2	Inserimento 3	Inserimento 4	Inserimento 5	Inserimento 6
22/09/2033	05/03/2035	16/01/2034	28/06/2035	19/11/2035	01/05/2037
3.86 km/s	3.86 km/s	3.75 km/s	3.75 km/s	3.99 km/s	3.99 km/s
$\Delta t_{nec} = 322\ gg$	$\Delta t_{nec} = 121\ gg$	$\Delta t_{nec} = 73\ gg$	$\Delta t_{nec} = 236\ gg$	$\Delta t_{nec} = 11\ gg$	$\Delta t_{nec} = 178\ gg$
# inserimento	sequenza non risonanti	$\Delta t_{comb\ NR} - \Delta t_{nec}$ [giorni]	data finale	note	inconvenienti
1	1 1 1 + 4 4 2	-5	18/09/2033	-	-
1	3 2 2	6.2	29/09/2031	unica orbita	$dt > 5$ giorni
1	2 2 1 + 3 3 2	3.1	25/09/2033	-	-
2	2 3 1 + 3 3 2	-3.1	02/03/2035	-	2 3 1 non utilizzabile
2	2 3 1 + 4 4 2	2.7	08/03/2035	-	2 3 1 non utilizzabile
3	3 4 1 + 2 2 2	4.3	21/01/2034	-	-
4	1 1 1 + 6 7 2	-3.6	24/06/2035	-	-
6	2 2 1	0.3	02/05/2031	unica orbita, e arriva molto vicina	il ΔV_∞ è circa 160 m/s

Come si può vedere dalla tabella precedente, le diverse strategie sono otto, ognuna delle quali potenzialmente utile per raggiungere lo scopo, mantenendo intatto l'intento dell'economicità⁶¹ di

⁶¹ Si ripete che vi sono circa 4000 kg di propellente disponibili per la fase inbound, non di più.

missione. Nessuna di esse sfrutta un'orbita risonante 1:1 fuori piano, giacché si sfruttano combinazioni di orbite di tipo (1) + (2), in conformità alle regole esposte.

Strategie

Tra le otto strategie costruite, due di esse sfruttano una singola non-risonante e sei sfruttano una combinazione di una risonante di tipo (1) seguita da una non-risonante di tipo (2)⁶².

- Tre strategie riguardano quello che in tabella è stato chiamato inserimento #1 (22/09/2033):
 - La prima strategia si basa sulla sequenza di non-risonanti 1 1 (1) seguita da una 4 4 (2). Essa è stata portata avanti nell'analisi poiché le non-risonanti portano all'ultimo flyby con la Terra (pronto per l'inserimento) il 18/09/2033, mostrando una differenza di giorni compatibile con il relativo inserimento. Non è stata scelta come strategia vincente, perché nel coordinare velocità e data di incontro con la Terra si utilizza troppo propellente: 2600 kg contro i 1500 kg rimasti dal tratto asteroide-Terra 1: ne risulterebbe un consumo totale di 5100 kg.
 - La seconda strategia è stata presa in considerazione perché particolarmente semplice, in quanto contempla una sola orbita non-risonante (una 3 2 (2)). L'inconveniente sta nel fatto che la data finale di incontro con la Terra avviene più di 6 giorni dopo la data prevista; si è perciò scartata, alla fine, perché richiedente un consumo eccessivo. Oltretutto necessiterebbe anche di una risonante 1 1 fuori dal piano, per spalmare bene la rotazione del vettore velocità altrimenti esageratamente grande da compiere solo con il primo flyby, essendo di tipo (2), ed incompatibile con l'arrivo Terra 1.
 - La terza strategia è quella vincente che poi si è studiata ed ottimizzata per la traiettoria finale. Se ne parlerà successivamente nel dettaglio.
- Due strategie riguardano l'inserimento #2 (05/03/2035):
 - La prima strategia (2 3 (1) seguita da una 3 3 (2)) e la seconda strategia (2 3 (1) + 4 4 (2)) sono potenzialmente buone da mettere in atto, poiché il Δt complessivo risulta essere minore di 5 giorni, oltre al fatto di presentare velocità già simili con quella di ingresso cycler (3.86 km/s). Tuttavia, l'orbita 2 3 (1) non si riesce a raggiungere nella pratica con un eccesso iperbolico di velocità così basso, ma richiede energie più alte.
- Una strategia è stata trovata per l'ingresso #3 nel cycler (16/1/2034). Essa è costituita da due orbite, in particolare 3 4 (1) + 2 2 (2). Il $\Delta t \approx 4$ giorni, ma presenta un'incompatibilità con la variazione di eccesso iperbolico di velocità (necessaria una $V_\infty = 3.75$ km/s) che non permette la convergenza dei calcoli ad una traiettoria soluzione compatibile con l'inserimento.
- La settima strategia è per l'inserimento #4 (28/6/2035). Si ha una traiettoria costruita con la sequenza 1 1 (1) + 6 7 (2). Correggendo la traiettoria naturale che porterebbe ad un flyby finale della Terra il 24/06/2035, con questa strategia si porta l'asteroide nel cycler con un consumo di 2324 kg di propellente, da sommare ai 2500 del tratto precedente. Si ottengono così 4800 kg di consumo che sono ancora inaccettabili. Provando a diminuire i consumi del primo tratto, si diminuisce troppo la massa finale, vanificando la missione.
- L'ultima strategia è quella che inizialmente presentava la maggior potenzialità. Essa, costituita da una non-risonante sola (una 2 2 (1)), porta all'inserimento #6 esattamente il giorno giusto (2/5/2031). Si è presentato il problema costituito dalla $V_\infty \approx 3.80$ km/s alla fine della traiettoria: la correzione necessaria di $\Delta V \approx 200$ m/s ($V_\infty = 3.99$ km/s per

⁶² Le non-risonanti vengono identificate d'ora in poi con 3 numeri: $N M$ (tipo).

l'inserimento #6), porta inevitabilmente a variare di molto il giorno di incontro con la Terra, invece già coincidente, per cui si è stati costretti ad abbandonare questa possibilità.

Da notare che è stato impossibile costruire una strategia per l'inserimento #5.

Si analizza ora nel dettaglio la strategia utilizzata.

Non risonanti 2 2 (1) + 3 3 (2) ed inserimento nel cycler (Terra 3)

La strategia utilizzata permette l'ingresso di 2006 UQ216 in S1L1 il 22/09/2033. Le orbite non-risonanti in questione hanno le seguenti caratteristiche (tab. 25):

Tabella 25: Caratteristiche delle orbite della strategia usata.

Orbita	Periodo (T) [giorni]	Δt_{NR} [giorni]	e	a
1 ^a non – risonante: 2 2 (1)	377.6	177.7	0.129	1.022
2 ^a non – risonante: 3 3 (2)	353.3	147.4	0.131	0.978
Traiettoria TOTALE	$Dt \approx 1786$ giorni			

La durata del tratto costituito da 2 2 (1) + 3 3 (2), è calcolato così:

$$Dt = T_1 \cdot M_1 + \Delta t_{NR1} + T_2 \cdot (M_2 - 1) + \Delta t_{NR2} = 1786.3 \text{ giorni}$$

Questo perché le non-risonanti di tipo 1 contemplano M giri più una frazione di giro, quelle di tipo 2 contemplano M giri meno una frazione di giro. Così per calcolare i giri interi completati dall'asteroide su questi tipi di orbita: $M_{interi(1)} = M_{(1)}$, $M_{interi(2)} = M_{(2)} - 1$.

Adottando questa strategia, le non-risonanti pure porterebbero ad un incontro finale con la Terra il 25/09/2033, esattamente tre giorni dopo la data di inserimento. Apportando piccole modifiche alla traiettoria e correzioni con piccole spinte calibrate si riesce ad anticipare la data di incontro con la Terra al 22/09/2033: così, per mezzo di un flyby finale, si spinge nel cycler S1L1 l'asteroide 2006 UQ216, in maniera efficace, rispettando i vincoli di utilizzo del propellente alla base del lavoro.

I dati salienti di questa strategia vengono riportati nella successiva tab. 26.

Tabella 26: Dati della traiettoria soluzione trovata per il tratto Terra 1 - Terra 3

1 ^a non-risonante: 2 2 (1)	Data di inizio fase	4/11/2028
	Durata	≈ 908 <i>giorni</i>
	Data di fine fase	2/5/2031
	Consumo	0 <i>kg</i>
	Velocità finale ($V_{\infty f}$)	3.8369 <i>km/s</i>
2 ^a non-risonante: 3 3 (2)	Data di inizio fase	2/5/2031
	Durata	≈ 875 <i>giorni</i>
	Data di fine fase	22/9/2033
	Consumo	≈ 1500 <i>kg</i>
	Velocità finale ($V_{\infty f}$)	3.8600 <i>km/s</i>
TOTALE	Data di inizio fase	4/11/2028
	Durata	≈ 1783 <i>giorni</i>
	Data di fine fase	22/9/2033
	Consumo	≈ 1500 <i>kg</i>

Tratto inbound completo

Una volta ottenute le soluzioni parziali dei vari pezzi in cui si è divisa la traiettoria di ritorno dall'asteroide, si può assemblare la soluzione di tentativo per l'ottimizzazione dell'inbound leg.

La logica con cui si costruisce la soluzione di tentativo è quella spiegata nel capitolo precedente. Assemblando la soluzione di tentativo unendo le tratte componenti ottimizzate, si arriva all'ottimizzazione della traiettoria inbound completa, la quale permette il trasporto di 2006 UQ216 al flyby finale della Terra, il giorno dell'inserimento cycler scelto. La soluzione ottenuta è riportata in tab. 27. Essa mostra la soluzione di traiettoria ottimizzata per la tratta completa 2006 UQ216 – Terra 3, il giorno esatto di inserimento nel cycler.

Tabella 27: Caratteristiche e prestazioni della traiettoria inbound per 2006 UQ216

Inbound leg: traiettoria ottimizzata 2006 UQ216	
Timeline e prestazioni	
Data di partenza (da 2006 UQ216)	27/10/2025
Data di arrivo (Terra 1, flyby 1, ripartenza)	04/11/2028
Data di arrivo (Terra 2, flyby 2, ripartenza)	30/04/2031
Data di arrivo e inserimento in S1L1 (Terra 3)	22/09/2033
Durata TOTALE	≈ 2888 giorni (2887.729)
Consumo TOTALE	4000 kg di propellente
Massa finale (capacità di carico)	556.218 t
Ripartizione ΔV	
ΔV_{01}	0.1263612 km/s
ΔV_{12}	0.0351188 km/s
ΔV_{23}	0.0212255 km/s
ΔV_{TOT}	0.1827055 km/s
Caratteristiche flyby	
Angolo di rotazione V_{∞} flyby 1	82.70°
Angolo di rotazione V_{∞} flyby 2	84.81°

Come mostrano le caratteristiche della soluzione di missione, la traiettoria inbound dura circa 2888 giorni, che equivalgono a circa 7.91 anni. Si arriva all'ingresso nel cycler con una capacità di trasporto massima di 556.218 tonnellate, valore perfettamente inseribile nell'intervallo di massa previsto dalle misure attuali.

L'arrivo è perfettamente sincronizzato con l'inserimento, non c'è quindi bisogno di percorrere orbite risonanti di attesa per aspettare l'anno giusto.

La traiettoria della missione 2006 UQ216 – Terra 3 è riportata in fig. 26. Lo spacecraft (assieme all'asteroide) percorre quasi 8 giri prima di arrivare all'inserimento nel cyclor.

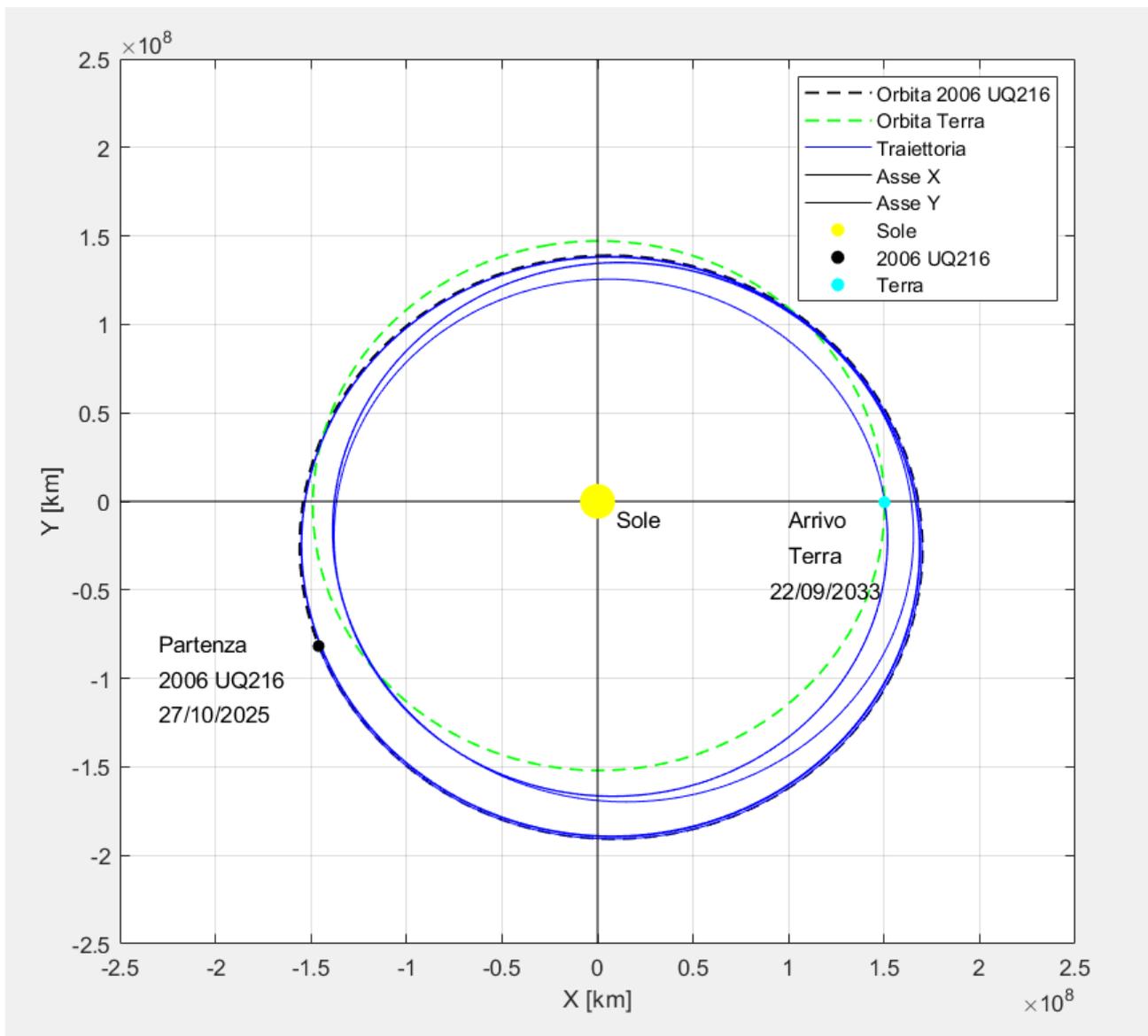


Figura 26: Traiettoria inbound di 2006 UQ216 e del rimorchiatore spingente. La traiettoria viene effettuata in quasi 8 anni.

La traiettoria segue un tratto propulso fino al primo incontro con la Terra (4/11/2028), dove avviene il primo flyby, con rotazione di circa 83° del vettore velocità. Si intraprende l'orbita non-risonante 2 2 (1), che permette il successivo incontro con la Terra il 30/04/2031. Il secondo flyby permette la rotazione del vettore velocità di circa 85° , che porta rimorchiatore e asteroide a percorrere un'orbita non-risonante di tipo 3 3 (2). Questa permette l'incontro finale con la Terra esattamente nella data stabilita di ingresso nel cyclor S1L1, il 22/09/2033.

Nelle figure seguenti (fig. 27, fig. 28) sono mostrati gli andamenti della spinta in valore assoluto e nelle sue componenti al passare del tempo di missione dalla partenza dall'asteroide.

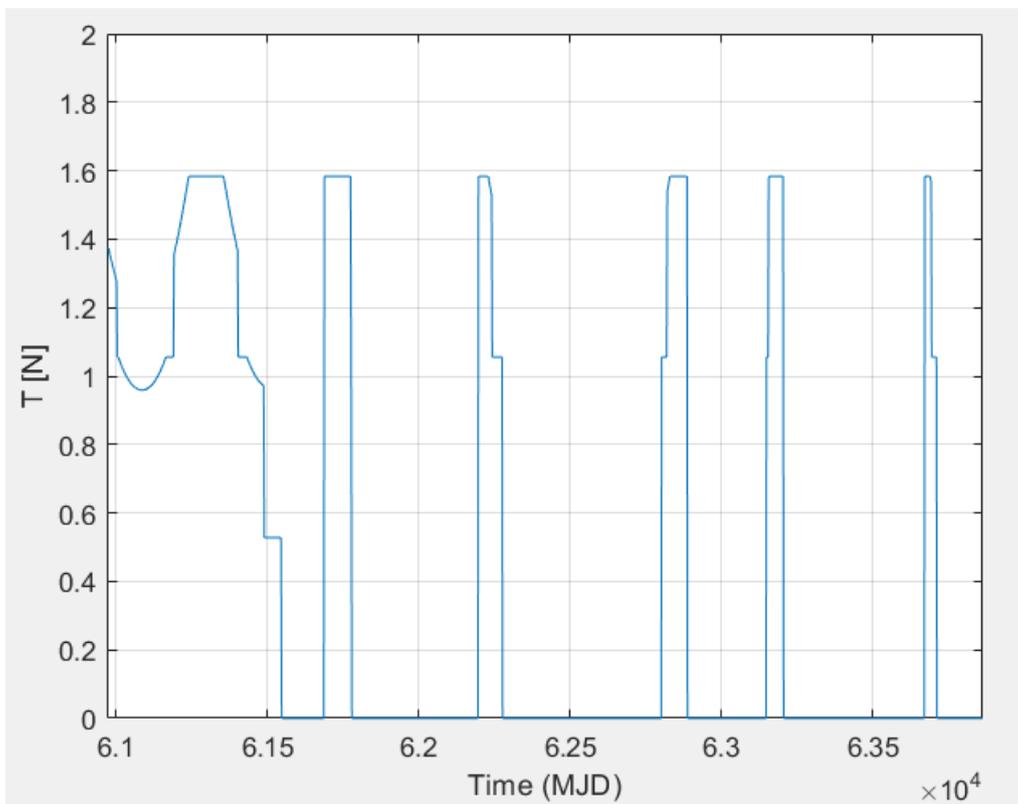


Figura 27: Andamento della spinta durante il tratto inbound della missione 2006 UQ216

- Come si può vedere ci sono diversi tratti non-propulsi. I tratti di spinta sono ottimizzati in maniera da spostare la massima massa possibile, consumando il minor quantitativo di propellente. Giustamente, la tappa 2006 UQ216 – Terra 1 è quella con il maggior dispendio di propellente, essendo quasi totalmente propulsa (l'asteroide viene spinto fino a MJD=61776.94, equivalente al 06/01/2028, mentre il primo flyby terrestre avviene il 04/11/2028, corrispondente al MJD=62079).
- I brevi tratti di spinta successivi consistono nelle correzioni alle orbite non-risonanti, atte a permettere il programmato incontro finale con la Terra il giorno prestabilito: il 22/09/2033, che corrisponde a MJD=63862.99.

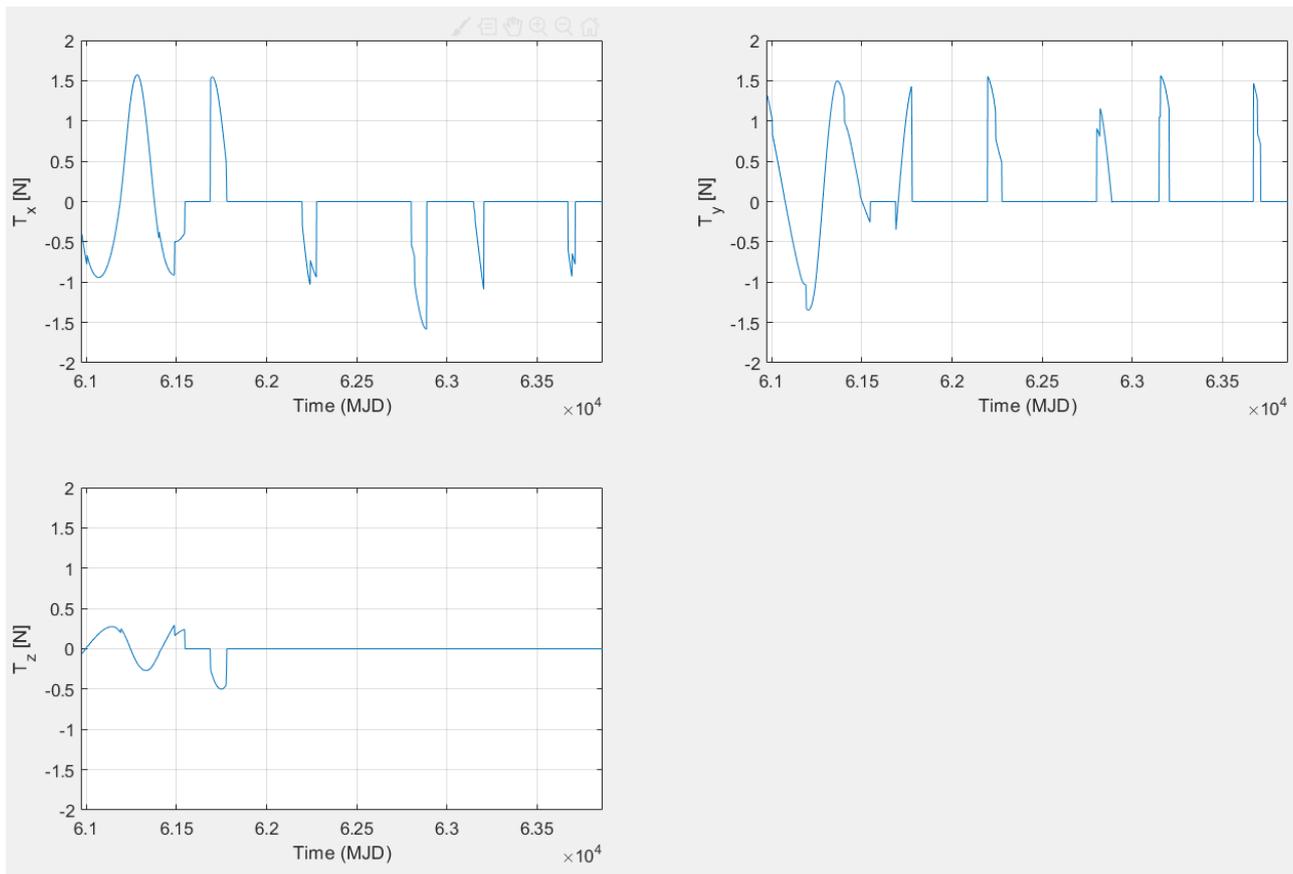


Figura 28: Andamenti delle componenti della spinta nelle tre direzioni x , y , z al variare del tempo.

- L'ultima figura mostra invece l'andamento delle tre componenti della spinta nel tempo. Le componenti più importanti sono T_x e T_y . La componente T_z è molto meno influente sulla spinta complessiva; infatti, eccetto nella prima fase durante la quale bisogna passare dal piano orbitale dell'asteroide a quello dell'eclittica, nella strategia non vengono messe in atto manovre di cambiamento di piano, né orbite risonanti 1:1 fuori dal piano intermedie. T_z è perciò nulla nel tratto Terra 1 – Terra 3.

Nella successiva fig. 29 viene riportato l'andamento della potenza sfruttata dallo spacecraft per spingere l'asteroide nel tempo. Si noti la stretta correlazione tra il grafico della spinta e quello della potenza: essi sono praticamente scalati di un fattore moltiplicativo.

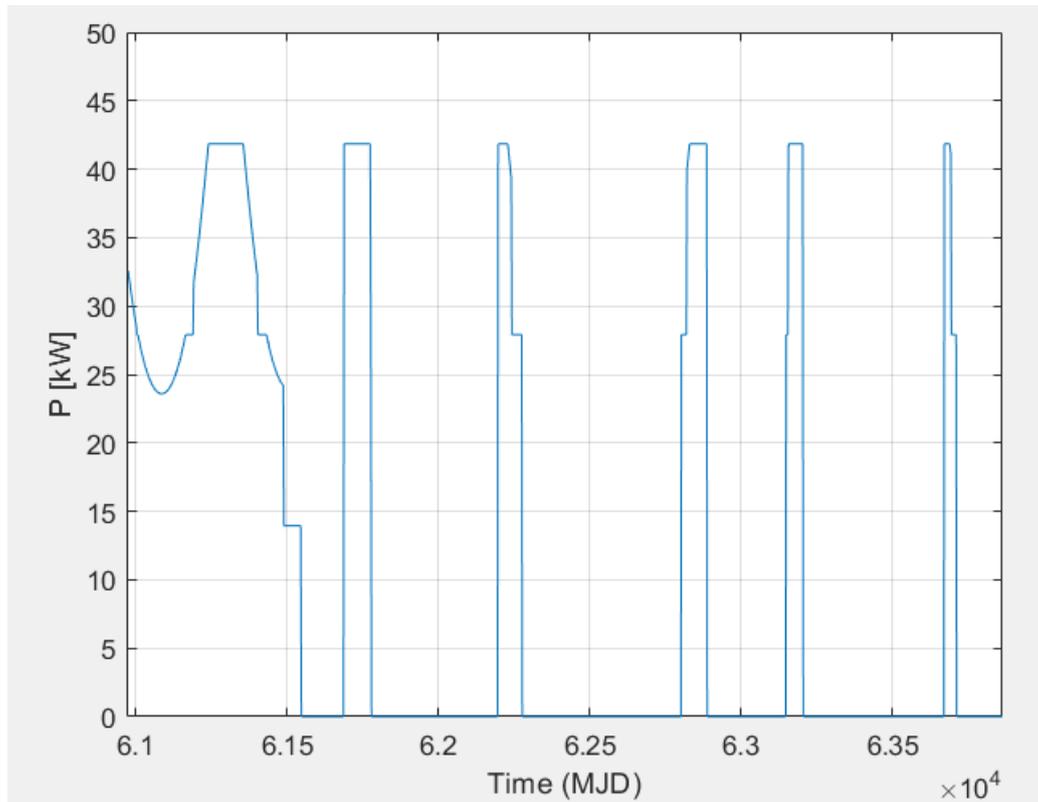


Figura 29: Andamento della potenza usata dal propulsore nel corso dell'inbound leg.

Analogamente alla spinta, anche la potenza è maggiormente sfruttata nel primo tratto di missione. Successivamente occorrono solo le saltuarie operazioni di correzione di traiettoria, in modo da arrivare all'incontro finale con la Terra esattamente il 22/09/2033.

In questo lavoro non si è tenuto in conto dell'andamento della potenza necessaria alle operazioni on-board, né di quella di riserva, stabilendo a questo proposito a priori solo il duty cycle del propulsore (90%) e la potenza riservata per suddette operazioni di routine⁶³. Questa osservazione è valida per tutti e tre i casi studiati.

Così la fase di trasporto di 2006 UQ216 nel cyclor S1L1 è stata completamente progettata.

⁶³ Richiamando al lettore i dati stabiliti per il propulsore del veicolo ARM: duty cycle=90% e potenza per le operazioni on-board di 5 kW. Quindi dei 47 kW totali di potenza, solo 42 kW sono disponibili alla missione.

5.3.2. Outbound leg: recupero di 2006 UQ216

Per la fase di andata, valgono le condizioni iniziali descritte all'inizio del §5.1 (primo paragrafo di questo capitolo); quindi, imposte massa iniziale ed eccesso iperbolico di velocità, si è trattato di eseguire uno studio di traiettoria per arrivare all'asteroide. Concordemente a quanto descritto nel capitolo 4 di metodologia della missione, questa fase si è costruita a posteriori del progetto della fase di ritorno, cioè, stabilita la traiettoria di ritorno (*inbound leg*), si calcola la tratta di andata (*outbound leg*).

Noti i parametri orbitali di 2006 UQ216 (si riveda tab. 18), nota la posizione precisa della Terra in un dato giorno di partenza, si affrontato il problema di studio e ottimizzazione dell'outbound leg. In quest'analisi si sono fatte variare la durata della missione e la data di arrivo all'asteroide, osservandone gli effetti sulla massa di propellente finale (controllo da massimizzare). Usando il massimo così ottenuto come soluzione di tentativo, si è poi ottenuta la soluzione ottimale, lasciando liberi i parametri di durata missione e tempo finale. In tab. 28 si sono riportati i dati delle soluzioni trovate, che hanno poi permesso di arrivare a quella ottimale (riportata in rosso). In fig. 30 si è riportato il grafico con le curve salienti, evidenziando il punto di ottimo.

È importante ribadire che il rimorchiatore deve necessariamente arrivare in prossimità dell'asteroide un certo tempo prima di partire per l'inbound leg, in modo da avere un tempo necessario di sosta prima della ripartenza.

Tabella 28: Dati delle soluzioni trovate dalla soluzione di ottimizzazione di traiettoria del tratto Terra-2006 UQ216 (in rosso la configurazione ottimale)

Outbound leg: 2006 UQ216					
durata	V_{∞} [km/s]	M_f [kg]	Dt [days]	Dt	t_f
12	1.300	8282.98	697.59	12	158
13	1.300	8874.35	755.72	13	158
13.5	1.300	9063.27	784.79	13.5	158
13.8	1.300	9104.46	802.23	13.8	158
14	1.300	9114.21	813.85	14	158
14.3	1.300	9120.43	831.29	14.3	158
14.3537	1.300	9120.89	834.42	14.3537	158
14.41	1.300	9120.75	837.69	14.41	158
15	1.300	9054.63	871.98	15	158
14	1.300	9130.16	813.85	14	158.2
14.8575	1.300	9210.51	863.70	14.8575	158.4
14	1.300	9074.54	813.85	14	158.6
14	1.300	8878.35	813.85	14	159
15.1191	1.300	9326.68	878.91	15.1191	159
15.4	1.300	9303.44	895.24	15.4	159
15.1815	1.300	9356.47	882.54	15.1815	159.2
15.3706	1.300	9365.50	893.53	15.3706	159.4

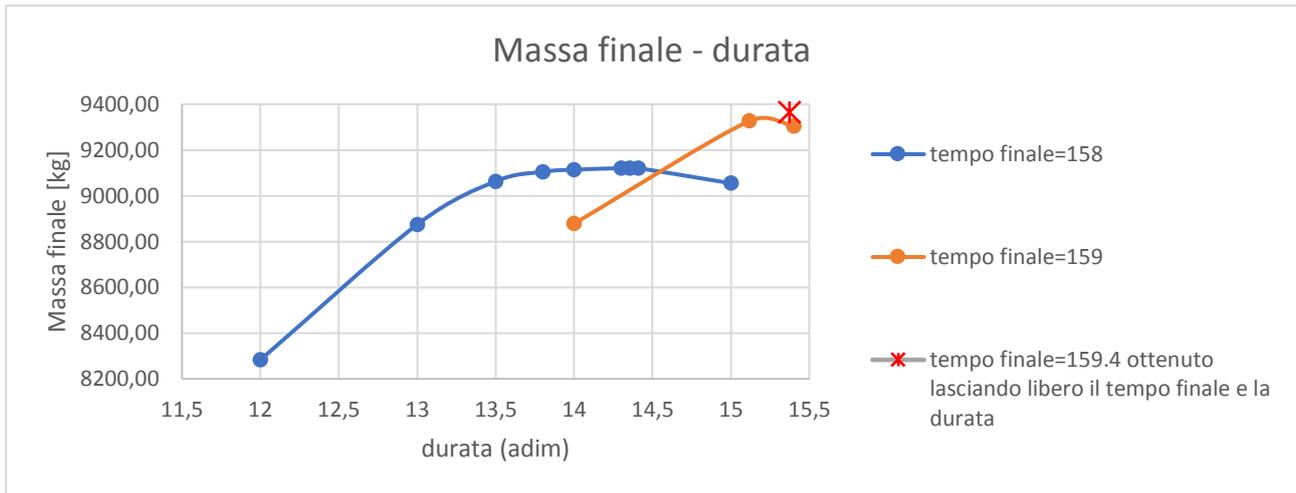


Figura 30: Andamenti della massa finale in funzione della durata del tratto Terra-2006 UQ216 (outbound leg), e al variare della data di arrivo (in rosso il punto di ottimo).

La soluzione per l'outbound leg trovata ottimizzando la traiettoria Terra-2006 UQ216 è riportata in tab. 29.

Tabella 29: Risultati della soluzione ottenuta per il tratto di andata verso 2006 UQ216

Caratteristiche outbound leg: Terra-2006 UQ216	
Data di partenza dalla Terra [gg/mm/aa]	3/12/2022
$V_{\infty 0}$ (rispetto alla Terra)	$1.3 \frac{km}{s}$
Massa iniziale	10000 t
Data di arrivo al 2006 UQ216 [gg/mm/aa]	15/5/2025
$V_{\infty 0}$ (rispetto a 2006 UQ216)	0
Massa finale [t]	9365.5 kg
Durata del viaggio	893.532 giorni
Propellente consumato	634.5 kg

I dati relativi alle posizioni dell'asteroide rispettivamente alla data di partenza dalla Terra e alla data di arrivo sono riportate in tab. 30, mentre in fig. 31 viene mostrata la traiettoria seguita dallo spacecraft per raggiungere l'asteroide.

Tabella 30: Dati sulla posizione e velocità di 2006 UQ216 in forma adimensionale, rispettivamente il 3/12/2022 e il 15/5/2025. I pedici 0 e 1 sono rispettivamente per indicare le grandezze i giorni di partenza e di arrivo.

Inizio tratta 3/12/2022	r_0	1.14551346439584
	θ_0	6.15846945910724
	φ_0	$5.83546152074597 \cdot 10^{-3}$
	u_0	-0.144871895799285
	v_0	0.904867505187043
	w_0	$-5.294960359874166 \cdot 10^{-3}$
Fine tratta 15/5/2025	r_1	1.02256252987508
	θ_1	0.584643738546038
	φ_1	$6.163569898119039 \cdot 10^{-4}$
	u_1	-0.148908588971619
	v_1	1.01364995188751
	w_1	$-8.353628068896651 \cdot 10^{-3}$

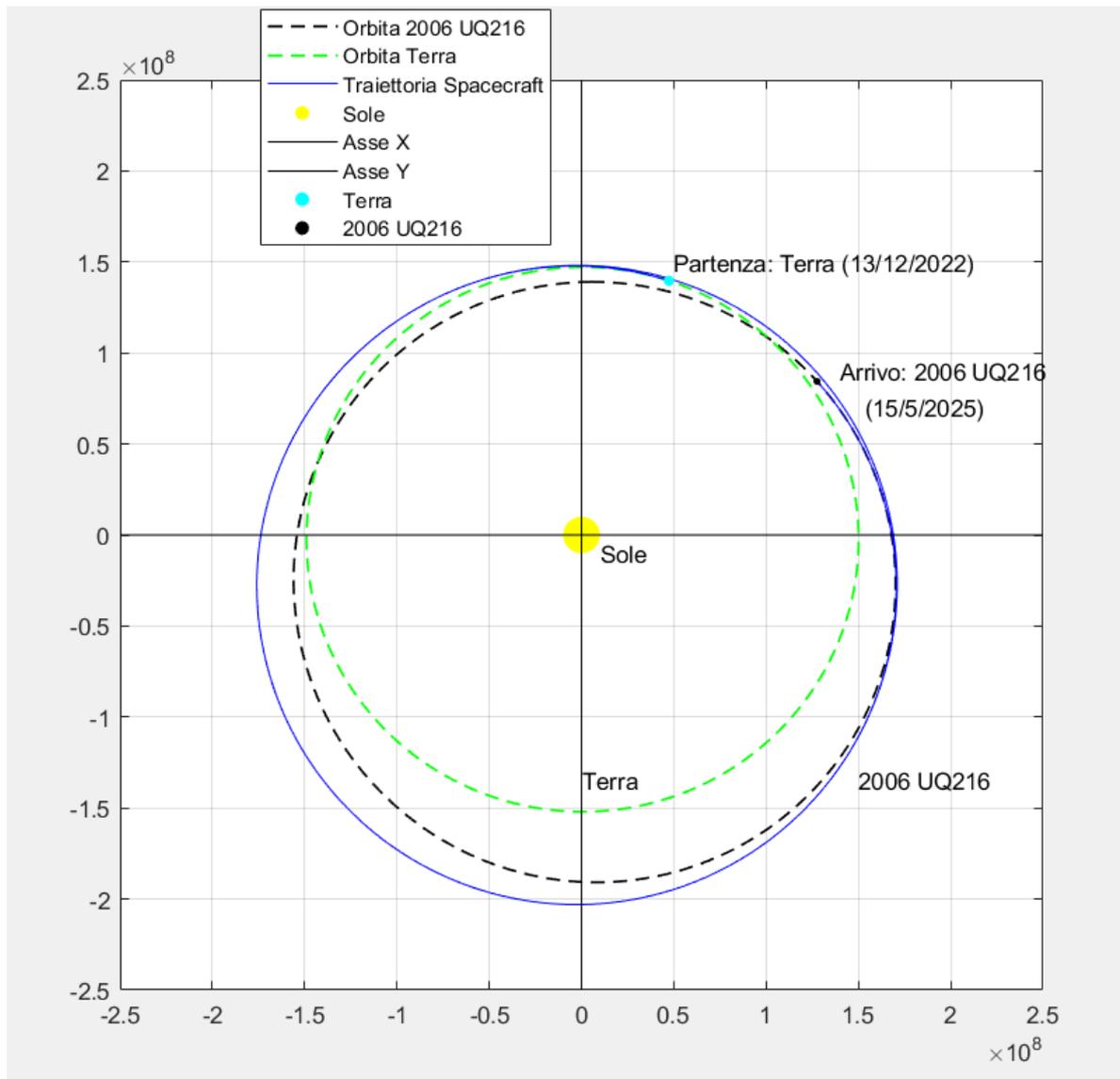


Figura 31: Traiettoria relativa al tratto outbound della missione 2006 UQ216. Lo spacecraft percorre quasi due giri di spirale completi, prima di arrivare sull'asteroide.

Come si può vedere dal grafico, lo spacecraft percorre quasi due giri di spirale completi prima di arrivare in prossimità dell'asteroide, ed effettuare le operazioni di cattura. L'arrivo avviene circa 6 mesi prima dell'inizio dell'inbound leg.

Nelle figure successive sono riportati gli andamenti della spinta complessiva, delle sue componenti e della potenza utilizzata in funzione del tempo.

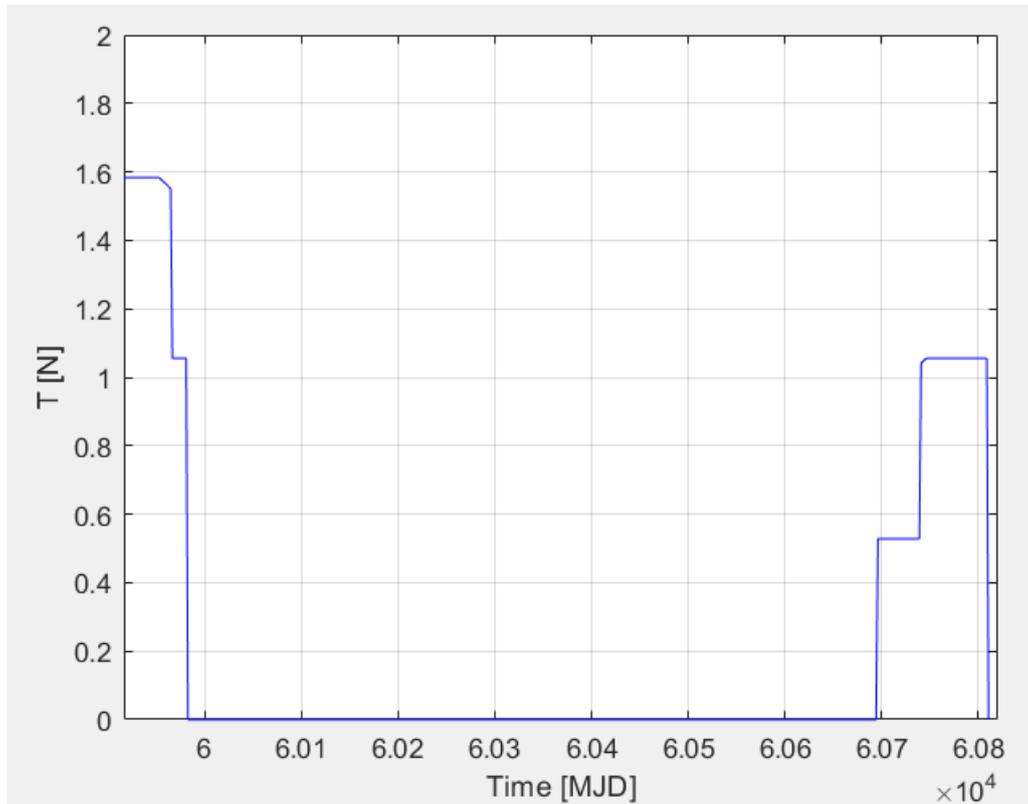


Figura 32: Valore assoluto della spinta, al progredire della missione

In fig. 32 è riportato l'andamento della spinta durante l'outbound leg. Come si può vedere dal grafico, il rimorchiatore spinge solo in due piccoli periodi di tempo: il primo alla partenza, per conferire la giusta traiettoria di raggiungimento di 2006 UQ216, e il secondo all'arrivo, per correggere la traiettoria e uniformare il proprio eccesso iperbolico di velocità a quello dell'asteroide⁶⁴. Più in particolare, lo spacecraft spinge con spinta pressappoco costante di 1.58 N, dall'inizio della missione e poi con spinta minore fino in data MJD=59981 (equivalente al 06/02/2023). Segue un lungo tratto di *coasting*⁶⁵ fino al MJD=60696 (21/01/2025), in cui lo spacecraft comincia la sua fase di spinta correttiva per il rendezvous finale. La spinta in questo ultimo tratto è prima di 0.55 N e poi di circa 1 N. Poco prima di arrivare all'asteroide, lo spacecraft spegne nuovamente i motori, giungendo al rendezvous con una fase di *coasting* finale.

⁶⁴ Si ricorda infatti che l'eccesso iperbolico di velocità, entrando nel riferimento dell'asteroide, è sempre nullo: quindi $V_{\infty A} = 0$.

⁶⁵ I *Coast arcs* sono archi di traiettoria a motore spento: in questi tratti la navicella non spinge.

In fig. 33 invece sono riportati i grafici delle componenti della spinta in direzione x, y, z . Analogamente a quello che si è osservato per l'inbound leg, le componenti più importanti sono T_x e T_y ; T_z in questo caso è ancora meno influente che nella fase di ritorno, in quanto fornisce un contributo quasi nullo alla spinta. In generale, comunque, gli andamenti delle componenti non sono costanti a tratti come quelli della spinta complessiva.

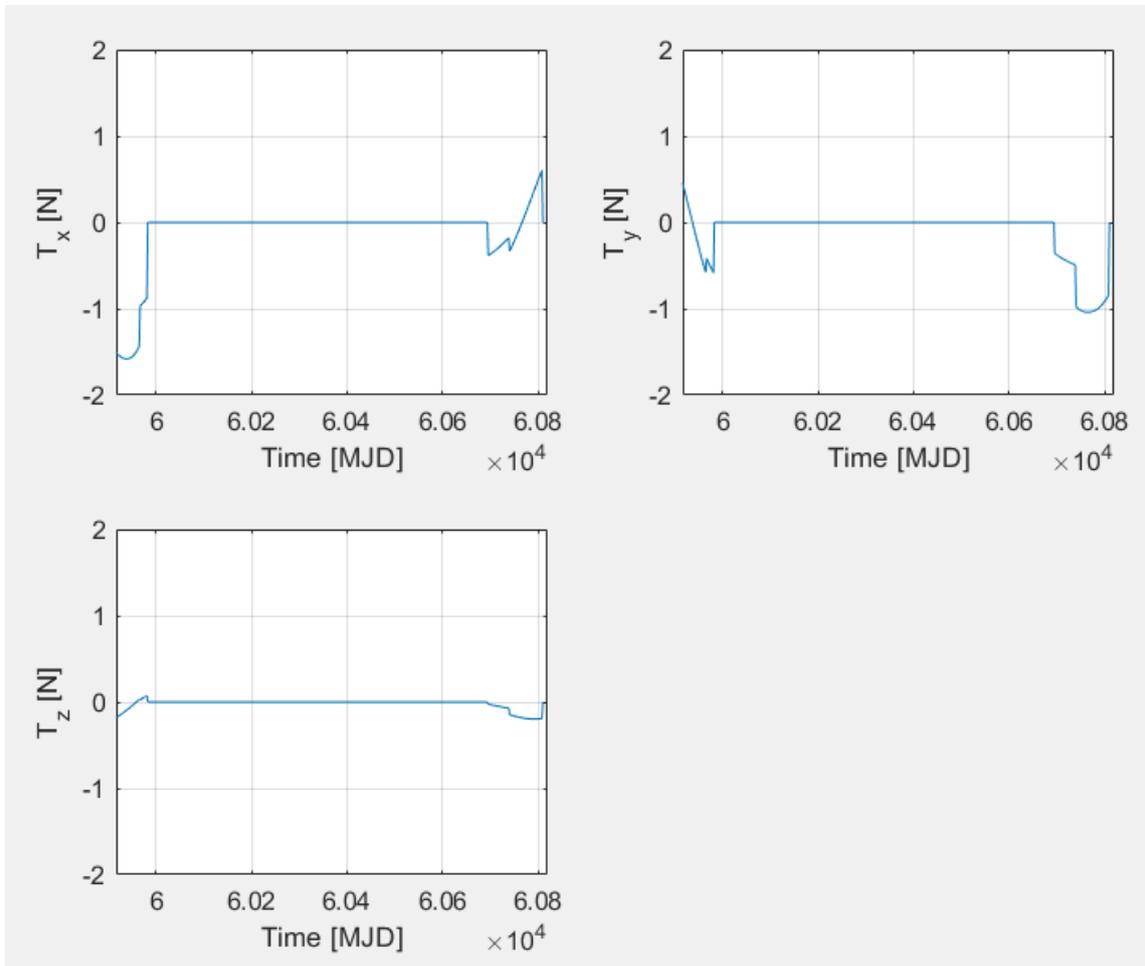


Figura 33: Componenti della spinta per l'outbound leg della missione 2006 UQ216. Spinta in funzione del tempo.

Nel prossimo grafico (fig. 34), viene mostrata la potenza in funzione del tempo. Essa segue in tutto e per tutto l'andamento della spinta. I due picchi di potenza vengono raggiunti negli stessi periodi temporali, e raggiungono rispettivamente i 42 kW e i 28 kW . Le stesse osservazioni presentate sulla spinta complessiva sono applicabili alla potenza. Si ripete, inoltre, che è stato riportato l'andamento della potenza esclusivamente utilizzata per la meccanica del volo della missione e per la propulsione,

non si è tenuto conto della variazione nel tempo di quella riservata per le operazioni on-board (semplicemente tenuta da parte come riserva di potenza).

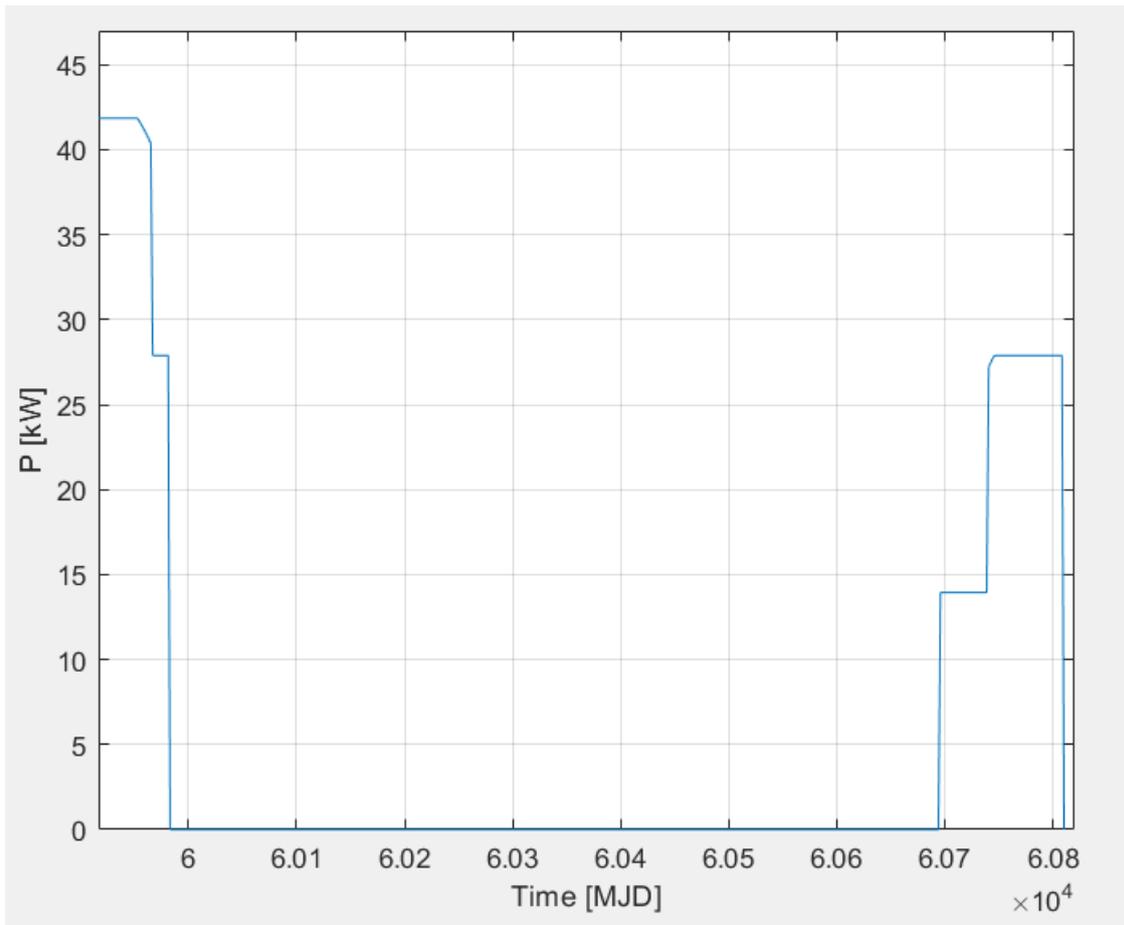


Figura 34: Potenza complessiva in funzione del tempo di missione. Tratto outbound della missione 2006 UQ216.

5.3.3. Missione di trasporto di 2006 UQ216 nel cycler Terra – Marte S1L1

Riepilogando i risultati ottenuti, si riportano nella successiva tab. 31 le caratteristiche salienti della missione completa di trasporto dell'asteroide 2006 UQ 216 nel cycler Terra – Marte S1L1.

Tabella 31: Riepilogo missione di trasporto di 2006 UQ216 nel cycler Terra – Marte S1L1.

Missione 2006 UQ216		
Outbound leg	Inizio missione (Terra 0)	3/12/2022
	Arrivo all'asteroide	15/5/2025
	Consumo / durata viaggio	$\approx 634 \text{ kg} / \approx 894 \text{ giorni}$
Inbound leg	Partenza dall'asteroide	27/10/2025
	1° flyby della Terra	4/11/2028
	2° flyby della Terra	30/4/2031
	Fine missione (Terra 3 – inserimento nel cycler S1L1)	22/9/2033
	Massa finale	556.218 t
	Consumo / durata viaggio	$4000 \text{ kg} / \approx 2888 \text{ giorni}$
Tempo di attesa all'asteroide	Durata stop	$\approx 168 \text{ giorni}$
TOTALE missione	Consumo / durata viaggio	$\approx 4634 \text{ kg} / \approx 3950 \text{ giorni}$

Da ribadire il fatto che l'asteroide 2006 UQ216 figura nella lista degli asteroidi pericolosi per possibili impatti e danni per la Terra. Questo conferisce ulteriore importanza alla missione, per cui, pilotando l'ingresso di 2006 UQ216 nel cycler S1L1 si scongiurerebbe del tutto il possibile pericolo costituito da questo asteroide per il nostro pianeta.

5.4. 2011 CL50 (caso 2)

Viene adesso analizzata la missione di trasporto dell'asteroide 2011 CL50 in S1L1. Come per il caso precedente verranno mostrati e commentati i risultati ottenuti nella costruzione della missione, presentando prima il tratto inbound e successivamente il tratto outbound.

Seguirà un riepilogo in cui saranno riportati per intero (e in maniera compatta) i risultati finali peculiari della missione.

I parametri orbitali fondamentali di 2011 CL50, forniti dal JPL, sono riportati nella seguente tab. 32, mentre in tab. 33 vengono riprese per comodità le caratteristiche fisiche stimate dell'asteroide.

Tabella 32: Parametri orbitali di 2011 CL50 (risalenti al 28 febbraio 2018)

Parametri Orbitali di 2011 CL50	
Semiassse maggiore (a) [AU]	0.88618074684
Eccentricità (e)	0.14456231245
Inclinazione orbitale rispetto all'eclittica (i) [deg]	0.18837109742
RAAN (Ω) [deg]	12.57866504100
Argomento del periastro (ω) [deg]	293.11491886383
Anomalia vera (M) [deg]	27.35087245890

Tabella 33: Caratteristiche fisiche di 2011 CL50

2006 UQ216	
Dimensioni (diametro esterno) [m]	6 – 28
Massa [t]	270 – 24000

Noti i parametri orbitali, è possibile tracciare l'orbita naturale dell'asteroide, confrontandola con quella della Terra. Questo confronto è riportato in fig. 35, in cui si possono vedere l'orbita terrestre e quella di 2011 CL50.

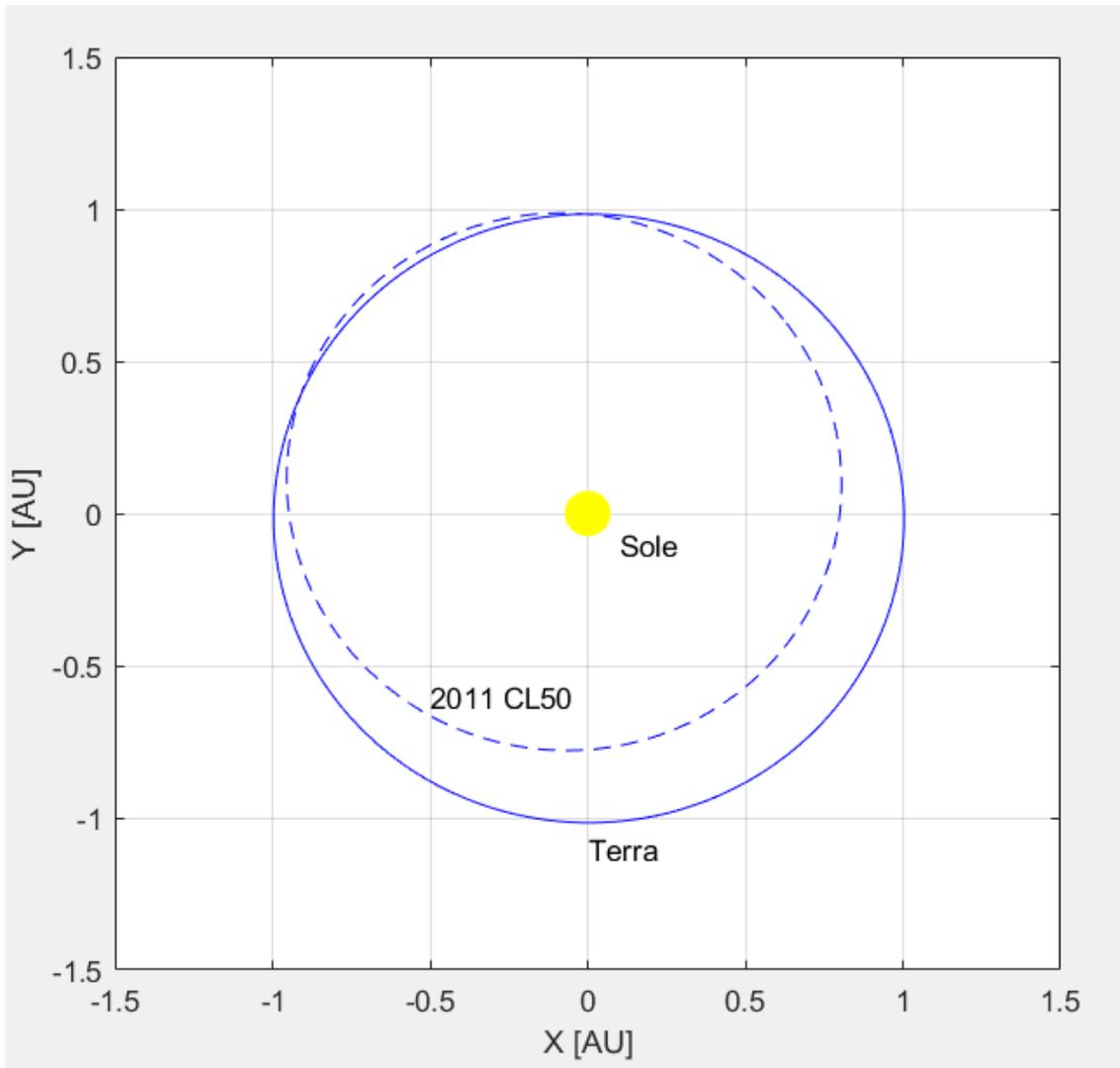


Figura 35: Orbita di 2011 CL50 (confronto con l'orbita terrestre)

Si valuta il periodo orbitale dell'asteroide 2011 CL50:

$$T_{2011\ CL50} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{2011\ CL50}^3}{\mu_{\odot}}} = 304.9512 \text{ giorni} \approx 0.835 T_{\oplus},$$

il che mostra un periodo orbitale piuttosto breve; ciò non deve sorprendere, dato le dimensioni contenute dell'orbita dell'asteroide ($a \approx 0.886 \text{ AU}$, come si può vedere dalla figura precedente).

Si presentano ora, in quest'ordine, l'inbound leg e l'outbound leg per la missione 2011 CL50.

5.4.1. Inbound leg: reindirizzamento ed inserimento nel cycler di 2011 CL50

L'asteroide 2011 CL50, come spiegato ad inizio capitolo, presenta caratteristiche e problematiche diverse dal precedente caso esaminato. Esso è meno massivo e meno esteso, il che ne fa un obiettivo più facilmente spostabile, poiché a parità di consumi e di spinta, un corpo più leggero subisce uno spostamento maggiore; allo stesso tempo, però, le misurazioni della data di arrivo mostrano che il suo naturale avvicinamento alla Terra è previsto solo per il 2031, data più lontana nel tempo rispetto al precedente caso. Questo mostra difficoltà maggiori se si vogliono sfruttare gli inserimenti nel cycler mostrati in precedenza, poiché si hanno meno possibilità a disposizione. Inoltre, a rendere ancora più difficile la missione, l'asteroide 2011 CL50 mostra un eccesso iperbolico di velocità abbastanza basso al naturale flyby terrestre ($V_{\infty} = 3.59 \text{ km/s}$). Questi aspetti influenzano negativamente il numero di strategie potenzialmente sfruttabili per il trasporto dell'asteroide nel cycler, poiché si ha meno tempo a disposizione per la preparazione del suo inserimento e un divario di velocità più consistente da colmare.

Quanto detto sopra è stato ciò che ha maggiormente influenzato la scelta della data di partenza dall'orbita naturale di 2011 CL50, per il suo reindirizzamento guidato a Terra.

2011 CL50 – Terra 1

Esattamente come per la missione 2006 UQ216, si è iniziato con la tratta asteroide – Terra 1, la tappa in cui avviene la maggior parte dei consumi di propellente, al fine di spingere l'asteroide al guidato flyby terrestre. In questo caso è ancora più decisivo per il successo della missione stabilire sia un'ottimale data di partenza dall'asteroide, che la durata della tratta stessa, in modo da massimizzare la massa finale e arrivare al primo flyby terrestre ad una data ideale per rendere efficace una delle poche strategie con non-risonanti che si riescono a costruire per l'inserimento nel cycler.

Osservando le previsioni per il naturale incontro tra la Terra e l'asteroide, si apprende che la data di arrivo è prevista per febbraio 2031. Procedendo come già visto, si è calcolata la posizione di 2011 CL50 tenendo conto di una durata plausibile del tratto 2011 CL50 – Terra 1; pensando ad una missione di circa 3 anni, in tab. 34 sono riportate le caratteristiche della posizione di 2011 CL50 in data 20/02/2028.

Tabella 34: Posizione e caratteristiche cinematiche di 2011 CL50 in data 20/02/2028.

Posizione di 2011 CL50 @ 20/02/2028	
distanza dal Sole (r)	0.762954092692753
Longitudine (θ)	5.01569619773790
Latitudine (φ)	$-3.276167790102924 \cdot 10^{-3}$
Componente velocità (u)	$-4.876988350024945 \cdot 10^{-2}$
“ “ (v)	1.22089029772284
“ “ (w)	$3.358444285510256 \cdot 10^{-4}$

Grazie all'individuazione della posizione dell'asteroide in una certa data, si è potuta guidare la soluzione di tentativo di inizio costruzione ed analisi di questo tratto di missione. Procedendo con uno studio simile a quello condotto per il caso in esame precedente, ma tenendo conto del vincolo ulteriore del minore tempo a disposizione per la missione completa, si è condotto lo studio sull'andamento delle prestazioni di missione al variare di durata di viaggio e massa di propellente utilizzata. I risultati di quest'analisi sono riportati in fig. 36.

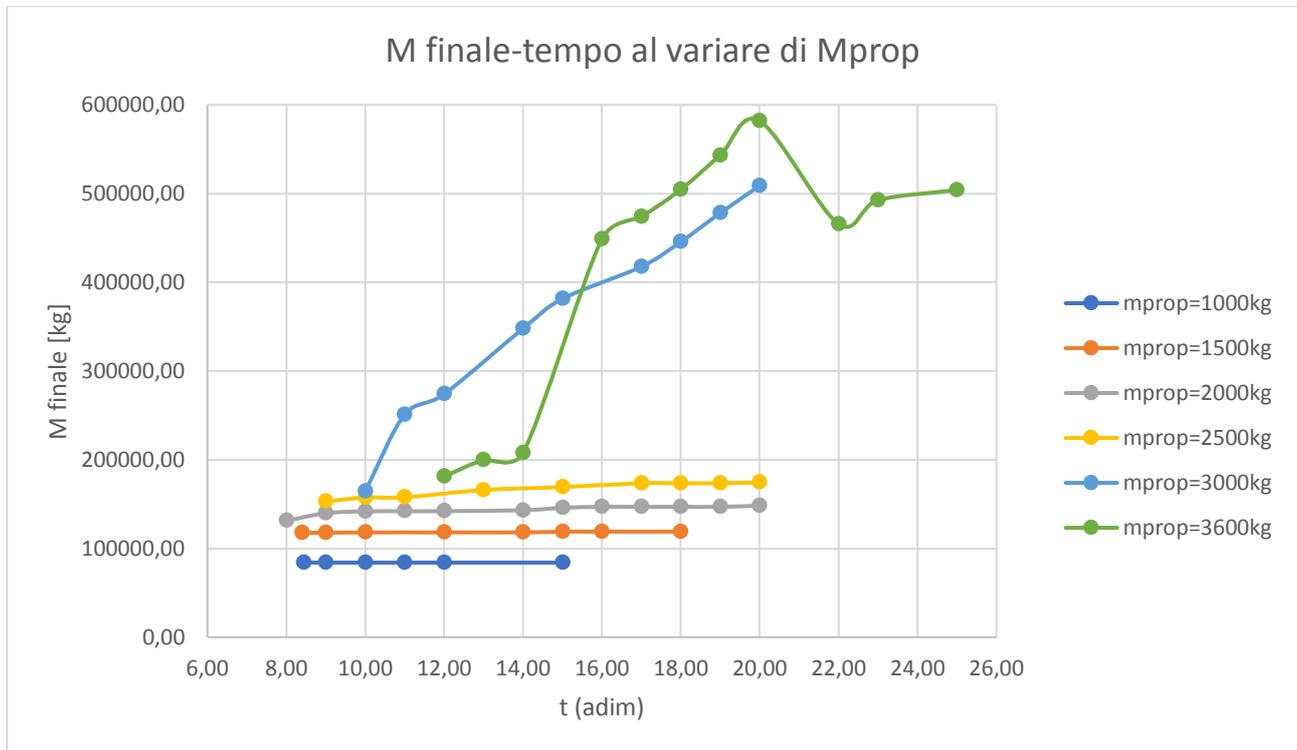


Figura 36: Studio condotto per massimizzare la massa finale, al variare di durata di missione e massa di propellente.

Guardando i grafici, è chiaro che aumentando la massa di propellente, aumenta la massa finale trasportata. Questo aumento è decisamente più marcato con una massa di propellente maggiore di 3000 kg. L'andamento non monotono delle curve è dovuto al vincolo imposto di non andare oltre un certo periodo di arrivo, per conservare un margine sufficiente per l'intera missione. Oltretutto, visto che in questo caso non si può fare affidamento su diverse opportunità di inserimento, bisogna mirare ad arrivare già con i requisiti più o meno giusti al primo flyby terrestre. Ciò implica di avere eccesso iperbolico di velocità e data di arrivo di ingresso alla prima non-risonante già compatibili con l'inserimento nel cycler, stabilita la strategia con non-risonanti da utilizzare⁶⁶. Si è perciò deciso di spingere maggiormente per ottenere già dopo questa prima fase una condizione favorevole all'inserimento. Usufruento di tutti i 4000 kg disponibili in questa fase, si è visto che si reindirizza 2011 CL50 alla Terra con le seguenti caratteristiche:

- $M_f = 300939 \text{ kg} \approx 301 \text{ t}$
- $V_{\infty_1} = 4.000 \text{ km/s}$

⁶⁶ Questo fornisce un altro esempio di come possano essere concatenate le fasi di realizzazione della missione: una volta studiata la strategia Terra 1 – Terra 3 da usare, si può tornare indietro e calcolare il tratto 2011 CL50 – Terra 1.

L'eccesso iperbolico di velocità di 4 km/s permette la compatibilità con i pochi inserimenti nel cycloer a disposizione.

Si riportano le caratteristiche principali della soluzione trovata per questa fase in tab. 35, mentre in fig. 37 invece è riportata la relativa traiettoria seguita da asteroide e spacecraft.

Tabella 35: Caratteristiche del tratto di missione 2011 CL50 – Terra 1

Data di partenza	24/7/2026
Durata del viaggio	$\approx 1685 \text{ giorni}$
Data di arrivo	6/3/2031
Massa finale	$\approx 301 \text{ t}$
Propellente utilizzato	4000 kg
Velocità finale $V_{\infty 1}$	4.000 km/s

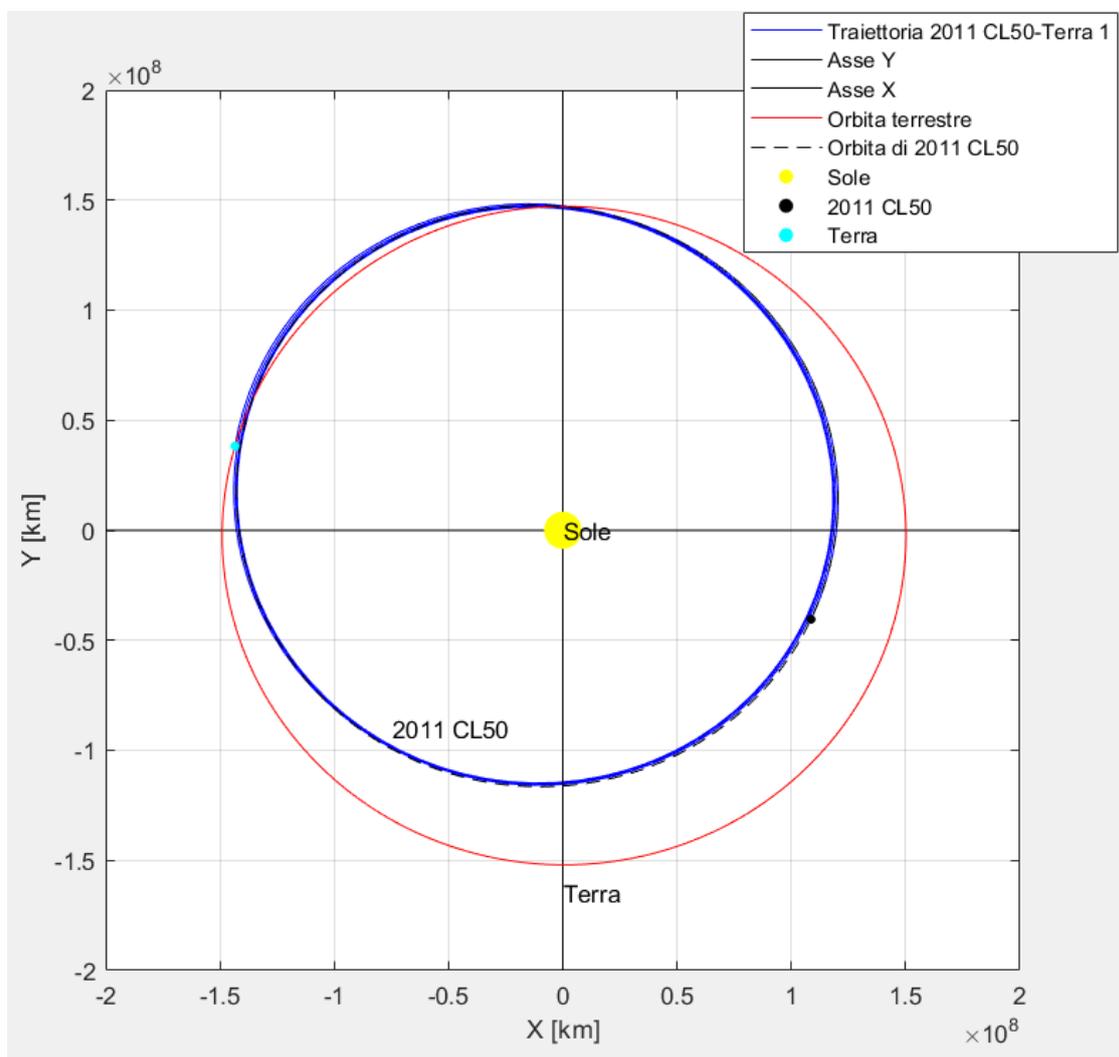


Figura 37: Tratto 2011 CL50 – Terra 1 (l'asteroide compie una traiettoria di 4 giri e mezzo attorno al Sole, spinto dallo spacecraft)

Terra 1 – Terra 2

Una volta stabilito il tratto Asteroide – Terra 1, si procede con il calcolo delle non-risonanti per raggiungere l'inserimento nel cycler voluto. L'arrivo alla Terra (per il primo flyby) avviene il 6/3/2031; così facendo si hanno circa 6 anni di tempo per raggiungere l'ultimo inserimento cycler utile descritto in precedenza.

Come già spiegato, in questo caso non vi è una scelta di strategie con cui raggiungere il cycler, anzi, dato il poco tempo a disposizione prima dell'inserimento si è costruita la fase 2011 CL50 – Terra 1 proprio per arrivare correttamente all'inserimento del 1/5/2037 con l'unica strategia possibile: una combinazione delle non-risonanti 4 5 (1) + 2 2 (2). Calcolando il tempo necessario che intercorre tra il flyby Terra 1 (6/3/2031) e la data di inserimento cycler imposta, si ottiene un tempo totale di 2246 giorni: è questo il tempo di riferimento per costruire questo tratto di missione.

Le orbite non-risonanti raggiungibili con un eccesso iperbolico di velocità in uscita flyby di 4.00 km/s sono riportate in tab. 36. Esse sono calcolate, in questo caso, come già osservato, prima di fissare il tratto 2011 CL50 – Terra 1; in tabella⁶⁷ si mostra come l'unica possibilità per riuscire a trasportare nel cycler l'asteroide 2011 CL50 sia di ricorrere alla strategia sopra menzionata.

⁶⁷ Nella tabella nella pagina seguente, le caratteristiche delle orbite seguono sempre le indicazioni fornite in precedenza, e i simboli ai capisaldi delle colonne in tabella hanno sempre lo stesso significato spiegato.

Tabella 36: Tabella delle orbite non-risonanti sfruttabili per l'inserimento in SIL1 di 2011 CL50 (in evidenza le orbite utilizzate)

Orbite non-risonanti raggiungibili con $V_{\infty} = 4.000 \text{ km/s}$							
# orbita	N° rivoluzioni della Terra (N)	N° rivoluzioni dell'asteroide (M)	In-Out (1) / Out-In (2)	Periodo (T) [giorni]	Δt_{NR} [giorni]	e	a
1	1	1	1	387.9	164.5	0.137	1.041
2	2	2	2	344	132.6	0.14	0.961
3	3	2	2	545.5	322.2	0.245	1.306
4	2	2	1	378.2	178.4	0.135	1.023
5	3	3	2	352.8	146.8	0.136	0.977
6	2	3	1	275.2	331.1	0.223	0.828
7	3	2	1	550.2	40.6	0.248	1.314
8	4	3	2	484.2	290.5	0.199	1.207
9	3	3	1	374.4	184.1	0.134	1.017
10	4	4	2	356.4	152.6	0.135	0.984
11	3	4	1	293.9	305.8	0.191	0.865
12	4	5	2	272.8	30.4	0.227	0.823
13	4	3	1	489.7	71.3	0.203	1.216
14	5	4	2	453.9	270	0.176	1.156
15	4	4	1	372.3	187.3	0.134	1.013
16	5	5	2	358.3	155.8	0.135	0.987
17	4	5	1	306.1	289.3	0.174	0.889
18	5	6	2	290.7	54.9	0.196	0.859
19	4	6	1	261.2	364.4	0.251	0.8
20	6	4	2	456.7	322.8	0.246	1.308
21	5	4	1	459.1	91.1	0.18	1.165
22	6	5	2	435.7	255	0.163	1.125
23	5	5	1	371	189.3	0.134	1.01
24	6	6	2	359.6	157.8	0.135	0.99
25	5	6	1	314.9	277	0.163	0.906
26	6	7	2	302.7	71.1	0.178	0.882
27	5	7	1	274.6	332	0.224	0.827
28	6	8	2	261.2	0	0.251	0.8

La strategia di inserimento nel cycler e l'inserimento stesso che si è scelto sono riportati nella seguente tabella (tab. 37).

Tabella 37: Strategia con combinazione di non-risonanti di inserimento nel cycler per la missione 2011 CL50

Strategia NR⁶⁸ di inserimento in S1L1 dell'asteroide 2011 CL50				
Inserimento (data velocità)	1/5/2037		3.99 km/s	
Tempo necessario ⁶⁹ dall'arrivo Terra 1 (Δt_{nec})	56 giorni			
Strategia (orbite NR) ↓	Periodo (T) [giorni]	Δt_{NR} [giorni]	<i>e</i>	<i>a</i>
1 ^a non – risonante: 4 5 (1)	306.1	289.3	0.174	0.889
2 ^a non – risonante: 2 2 (2)	344.0	132.6	0.14	0.961
Traiettoria TOTALE	<i>Dt</i> ≈ 2247 giorni			

Come spiegato e mostrato nel precedente caso, la durata del tratto costituito da 4 5 (1) + 2 2 (2), è calcolato così:

$$Dt = T_1 \cdot M_1 + \Delta t_{NR1} + T_2 \cdot (M_2 - 1) + \Delta t_{NR2} = 2246.9 \text{ giorni}$$

Osservando la durata del tratto che entra in gioco, ci si accorge di un fatto curioso: come detto, per il trasporto di 2011 CL50 si ha meno tempo per la meccanica di inserimento nel cycler (di quanto se ne avesse per 2006 UQ216), ma l'unica strategia possibile richiede un tempo maggiore di quella utilizzata nel caso precedente citato. Ciò accade perché si sfrutta tutto il tempo a disposizione per la missione, programmando l'ingresso in S1L1 nell'ultimo inserimento disponibile della lista⁷⁰.

Facendo la differenza tra il tempo totale richiesto prima calcolato, e il tempo sopra mostrato, necessario al compimento della traiettoria, si ottiene uno scarto di 0.9 giorni. Tenendo in conto che è necessaria anche una minima correzione della velocità per ottenere il corretto inserimento, questo scarto occorre per adattare l'eccesso iperbolico di velocità di inizio traiettoria (4.00 km/s) a quello di inserimento (3.99 km/s). In realtà, considerando l'ora della partenza (Terra 1) e l'ora di arrivo (Terra 3) si ottiene un tempo nominale di circa 58 giorni (in modulo 365 giorni), per cui invece dei 2246 giorni si hanno circa 2248 giorni richiesti di viaggio, prima del flyby finale con la Terra, di introduzione nel cycler. Questa osservazione implica che, a conti fatti, si debba posticipare l'incontro con la Terra di circa un giorno.

Osservando le regole di variazione di velocità riportate al capitolo precedente, si possono riuscire ad ottenere dette correzioni, ad un tempo solo, variando la data di incontro finale con la Terra (si abbassa di 10 m/s la velocità, ritardando il rendezvous con la Terra di ≈ 1 giorno). Si sottolinea il fatto che nuovamente si riesce ad operare sulla traiettoria di 2011 CL50 senza dover ricorrere a orbite risonanti di tipo 1 1 fuori dal piano orbitale. In tab. 38 si riportano i dati salienti del tratto Terra 1 – Terra 3

⁶⁸ Non Risonanti (NR).

⁶⁹ Si ricorda che il Δt_{nec} è calcolato in modulo 365 giorni.

⁷⁰ In realtà, guardando la lista di inserimenti nel cycler, ci sarebbero altre due finestre di inserimento, ma entrambe hanno una $V_\infty > 5.00 \text{ km/s}$, e quindi molto fuori portata della missione 2011 CL50.

dell'inbound leg, operato con la strategia vista, e che permette il corretto inserimento dell'asteroide 2011 CL50 nel cycler S1L1, il 1/5/2037.

Tabella 38: Dati della traiettoria soluzione trovata per il tratto Terra 1 – Terra 3

1 ^a non-risonante: 4 5 (1)	Data di inizio fase	6/3/2031
	Durata	≈ 1750 <i>giorni</i>
	Data di fine fase	20/12/2035
	Consumo	0 <i>kg</i>
	Velocità finale ($V_{\infty f}$)	3.9907 <i>km/s</i>
2 ^a non-risonante: 2 2 (2)	Data di inizio fase	20/12/2035
	Durata	≈ 498 <i>giorni</i>
	Data di fine fase	1/5/2037
	Consumo	≈ 0 <i>kg</i> (22 <i>kg</i>)
	Velocità finale ($V_{\infty f}$)	3.9900 <i>km/s</i>
TOTALE	Data di inizio fase	6/3/2031
	Durata	≈ 2248 <i>giorni</i> ⁷¹
	Data di fine fase	1/5/2037
	Consumo	≈ 0 <i>kg</i>

Si riportano in fig. 38 le traiettorie non-risonanti percorse in questa fase. A causa del fatto che esse vengano percorse praticamente senza l'utilizzo della propulsione (22 kg di propellente usati in totale),

⁷¹ Il tempo di missione differisce dai 2246 giorni nominali contati precedentemente, poiché i programmi di soluzione usati tengono conto anche dei momenti della giornata nei quali avvengono la partenza e l'arrivo. Quindi, alla fine dei conti, mettendo assieme la traiettoria Terra 1 – Terra 3, si hanno circa 2248 giorni di viaggio, che portano correttamente all'inserimento nel cycler il 1/5/2037.

equivalgono praticamente a delle non-risonanti pure, rispettivamente alle 4 5 (1) e 2 2 (2) di cui si è parlato prima.

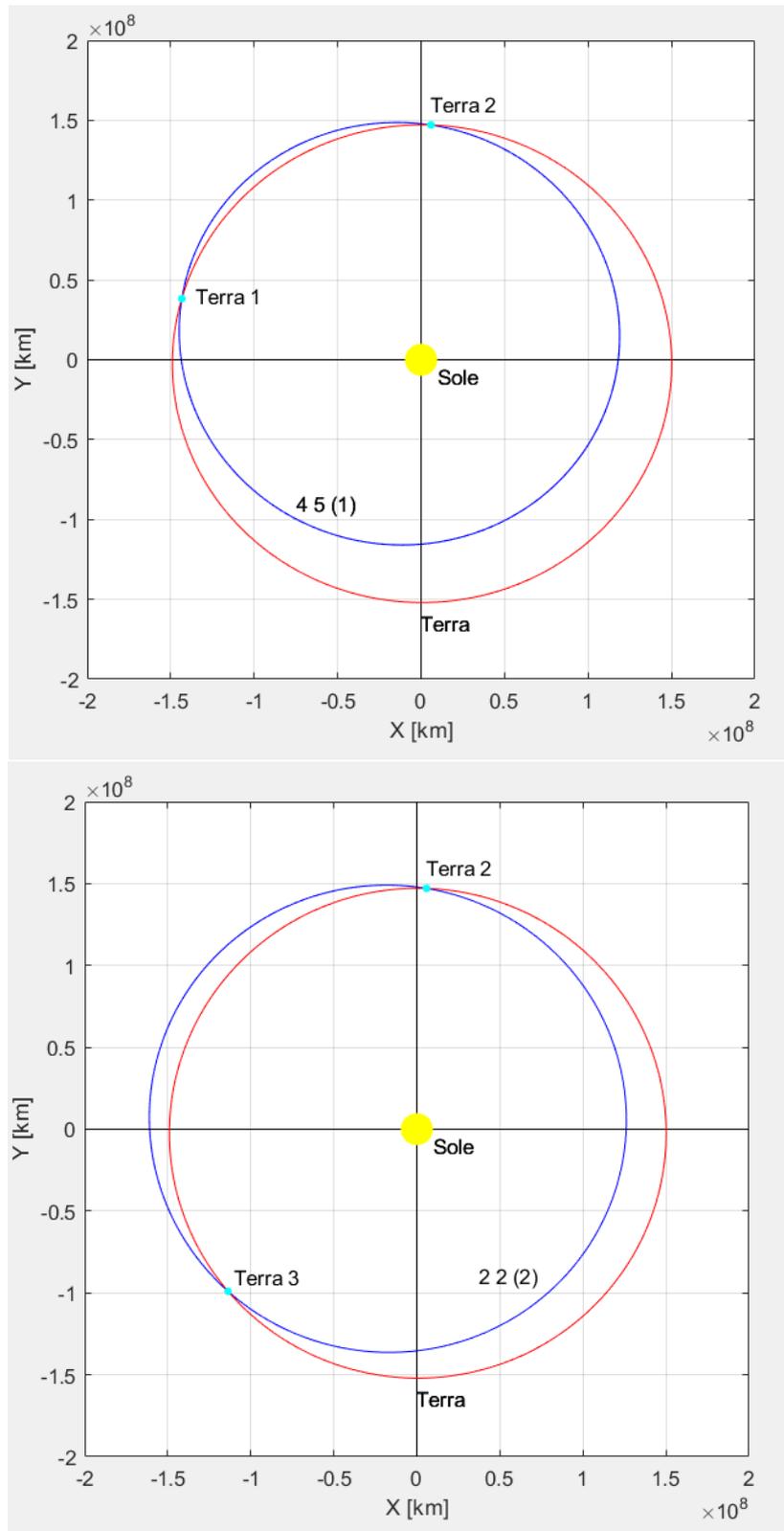


Figura 38: Non-risonanti formanti la traiettoria Terra 1 – Terra 3: la 4 5 (1) (sopra) seguita dalla 2 2 (2) che porta all'inserimento cyclers (sotto).

Tratto inbound completo

Una volta calcolate le soluzioni delle traiettorie parziali componenti, si segue la procedura di assemblaggio della soluzione finale di tentativo. Costruita questa, si procede con l'ottimizzazione di traiettoria ottenendo l'inbound leg della missione di trasporto di 2011 CL50 in S1L1. La procedura è esattamente quella descritta per il caso precedente.

La soluzione ottenuta è riportata in tab. 39. Essa mostra la soluzione di traiettoria ottimizzata per l'intero tratto inbound: 2011 CL50 – Terra 3 (momento di inserimento nel cycler S1L1).

Tabella 39: Caratteristiche e prestazioni della traiettoria inbound per 2011 CL50

Inbound leg: traiettoria ottimizzata 2011 CL50	
Timeline e prestazioni	
Data di partenza (da 2011 CL50)	24/07/2026
Data di arrivo (Terra 1, flyby 1, ripartenza)	28/02/2031
Data di arrivo (Terra 2, flyby 2, ripartenza)	19/12/2035
Data di arrivo e inserimento in S1L1 (Terra 3)	01/05/2037
Durata TOTALE	≈ 3934 giorni (3934.138)
Consumo TOTALE	4000 kg di propellente
Massa finale (capacità di carico)	362.451 t
Ripartizione ΔV	
ΔV_{01}	0.1675620 km/s
ΔV_{12}	0.0851105 km/s
ΔV_{23}	0.0271020 km/s
ΔV_{TOT}^{72}	0.279775 km/s
Caratteristiche flyby	
Angolo di rotazione V_{∞} flyby 1	89.33°
Angolo di rotazione V_{∞} flyby 2	80.42°

Come mostrano le caratteristiche e la soluzione della missione, la traiettoria inbound dura circa 3934 giorni, che equivalgono a circa 10.78 anni. Si arriva all'ingresso nel cycler con una capacità di trasporto massima di 362.451 tonnellate, valore perfettamente inseribile nell'intervallo di massa previsto dalle misure attuali.

L'arrivo è perfettamente sincronizzato con l'inserimento, non c'è quindi bisogno di percorrere orbite risonanti di attesa per aspettare l'anno giusto. Si noti che l'inserimento utilizzato è diverso da quello

⁷² La spesa in termini di ΔV è perfettamente accettabile, nonostante sia di poco maggiore dei 200 m/s che ci si era posti come soglia limite di manovra per queste missioni.

usato per il trasporto di 2011 UQ216, quindi le due missioni possono essere svolte contemporaneamente (con due veicoli ARM diversi).

La traiettoria che compie l'asteroide durante l'inbound leg 2011 CL50 – Terra 3 è riportata nella fig. 39. Il rimorchiatore spaziale e l'asteroide percorrono quasi 13 giri prima di arrivare al flyby finale di inserimento nel cycler.

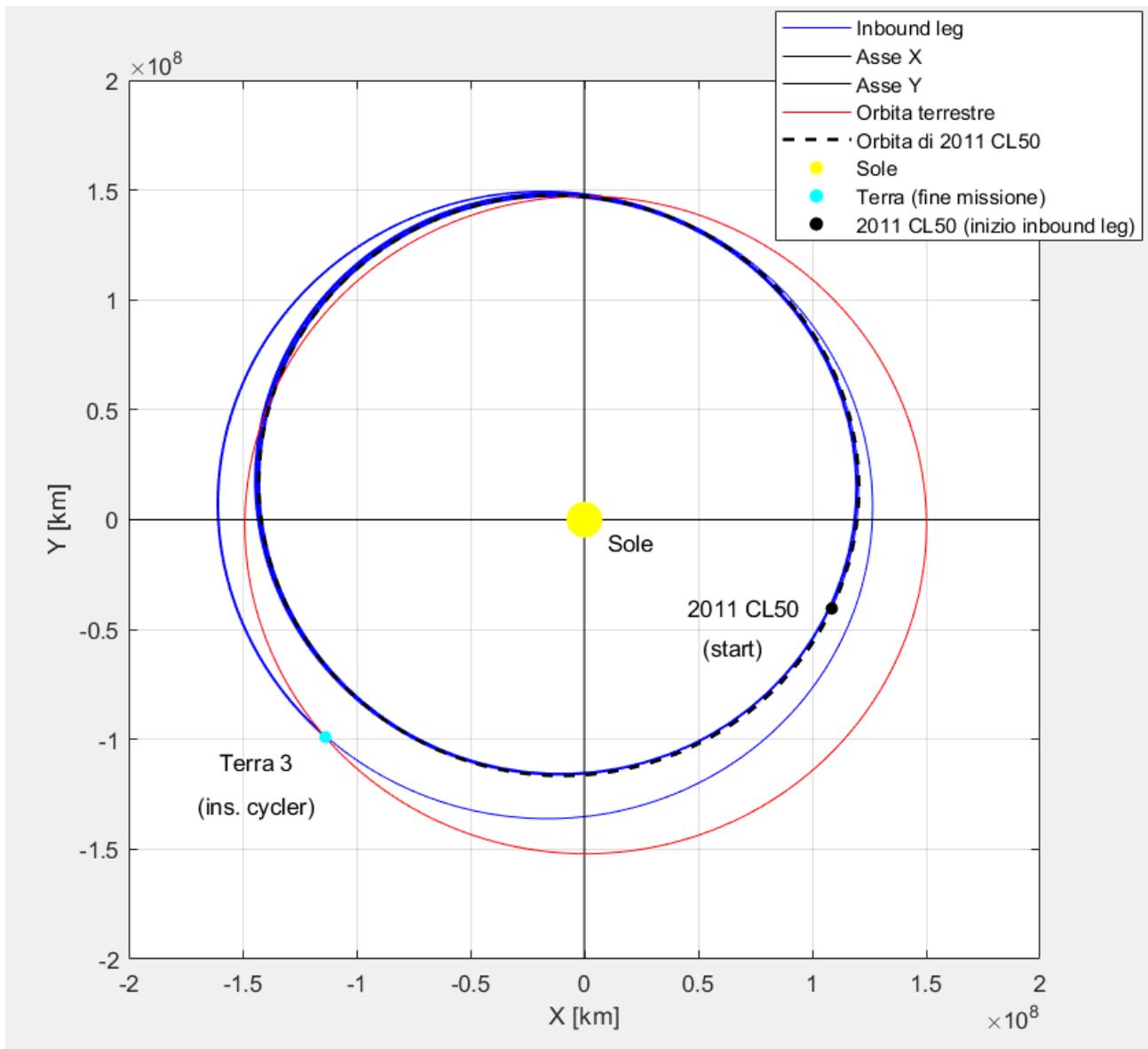


Figura 39: Traiettoria inbound di 2011 CL50. La traiettoria viene effettuata in quasi 11 anni

Il tratto inbound della missione di recupero comincia il 24/07/2026. La traiettoria vede un tratto propulso di reindirizzamento dell'asteroide fino al primo incontro con la Terra, che avviene il 28/02/2031. Un primo flyby (rotazione di $V_\infty = 89.33^\circ$) permette ad asteroide e rimorchiatore l'immissione nell'orbita non-risonante 4 5 (1). In realtà, come si vedrà meglio nel grafico successivo della spinta complessiva in funzione dell'avanzamento di missione, l'ottimizzazione di traiettoria

operata ha mostrato che è più efficiente (in questo caso) spingere anche durante quest'orbita⁷³. Modificando quindi la 4 5 (1) da cui deriva, 2011 CL50 arriva al secondo flyby della Terra il 19/12/2035, spinto dal rimorchiatore spaziale. Con una rotazione di $80,42^\circ$, si passa su un'orbita non-risonante 2 2 (2) praticamente non modificata, poiché quasi non propulsa. Si termina la traiettoria rincontrando per la terza volta la Terra, il giorno esatto dell'ingresso nel cyclo del 1/5/2037.

Nelle figure seguenti (fig. 40, fig. 41) sono mostrati gli andamenti della spinta in valore assoluto e nelle sue componenti all'avanzare del tempo di missione dalla partenza dall'asteroide.

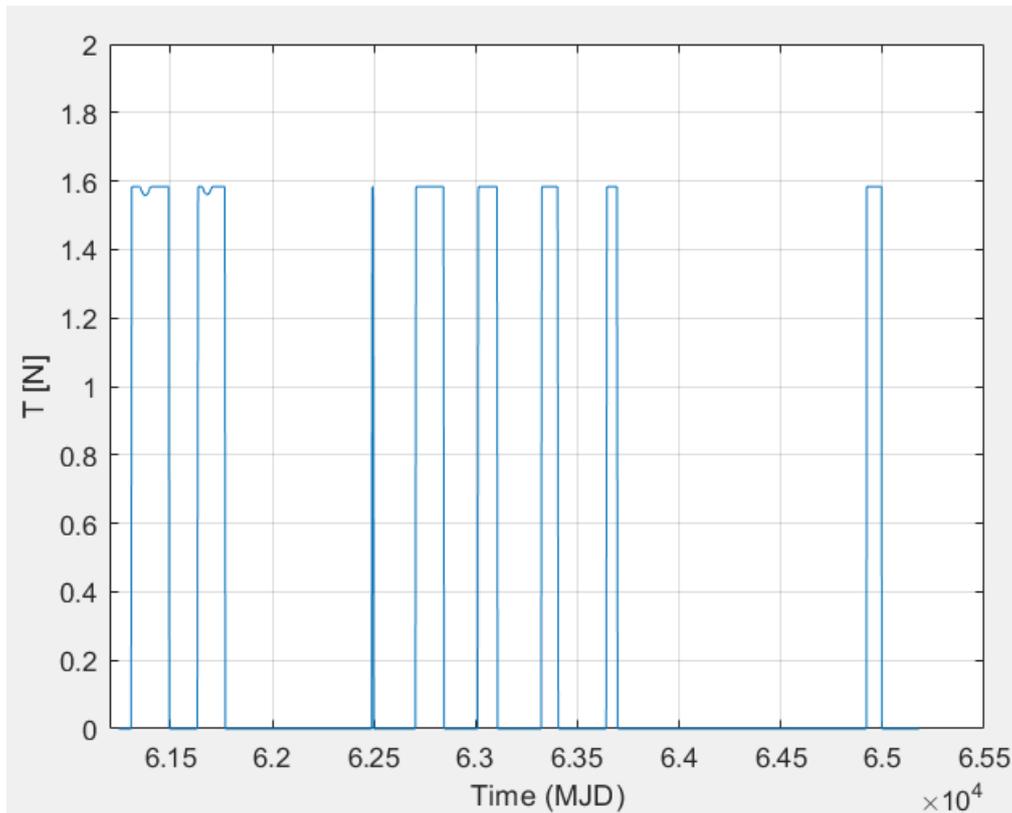


Figura 40: Andamento della spinta totale durante l'inbound leg della missione 2011CL50

È interessante fare alcune considerazioni.

- Analogamente a quanto visto per il precedente asteroide, anche in questo caso si può notare che ci sono diversi tratti della missione in cui non si fa utilizzo di propulsione. L'ottimizzazione avviene sempre per ottenere la configurazione di traiettoria che presenti la massima massa finale, impostato il quantitativo di propellente da utilizzare.
- Il tratto 2011 CL50 – Terra 1 è la parte del viaggio più dispendiosa, poiché necessita di reindirizzare l'asteroide verso la Terra. In questo passaggio vi è anche un cambiamento di piano, dovuto al fatto che asteroide e Terra orbitano attorno al Sole su piani orbitali differenti. Questa fase ha termine nel $MJD = 62925$. Rispetto al precedente caso studiato, questa fase presenta una spinta minore, infatti vi è un lungo tratto di traiettoria non propulso (dal $MJD =$

⁷³ Si tratta comunque di una spinta totale inferiore rispetto a quella agente durante il tratto 2011 CL50 – Terra 1.

61769 fino al $MJD = 62703$ si viaggia a propulsore spento, salvo una piccola finestra temporale propulsa in $MJD = 62492$ che dura 4 giorni circa).

- Dopo il primo flyby segue un tratto di orbita propulso a tratti, derivante dalla non-risonante 4/5 (1) di cui si è discusso precedentemente. Dal grafico si può notare un'onda quadra, descrivente la spinta in questo tratto (da $MJD=62925$): essa mostra tre fronti, prima di esaurirsi, e terminare con un lungo periodo a motore spento. I tre fronti di spinta, di entità di quasi $1.6 N$, durano rispettivamente e approssimativamente 90 giorni, 80 giorni e 50 giorni; il primo di questi inizia in $MJD=63013$, e l'ultimo termina nel $MJD=63694$, segnando un periodo propulso a tratti di circa 681 giorni.
- Nel $MJD=64680$ (corrispondente al 19/12/2035) avviene il secondo flyby terrestre, tramite il quale si comincia l'ultima parte di traiettoria. In quest'ultimo tratto si fa un utilizzo molto limitato della propulsione, limitando ad una finestra temporale di soli 73 giorni la spinta necessaria alle ultime correzioni di traiettoria. Il rendezvous finale con la Terra avviene il 1/5/2037, ovvero nel $MJD=65179$.

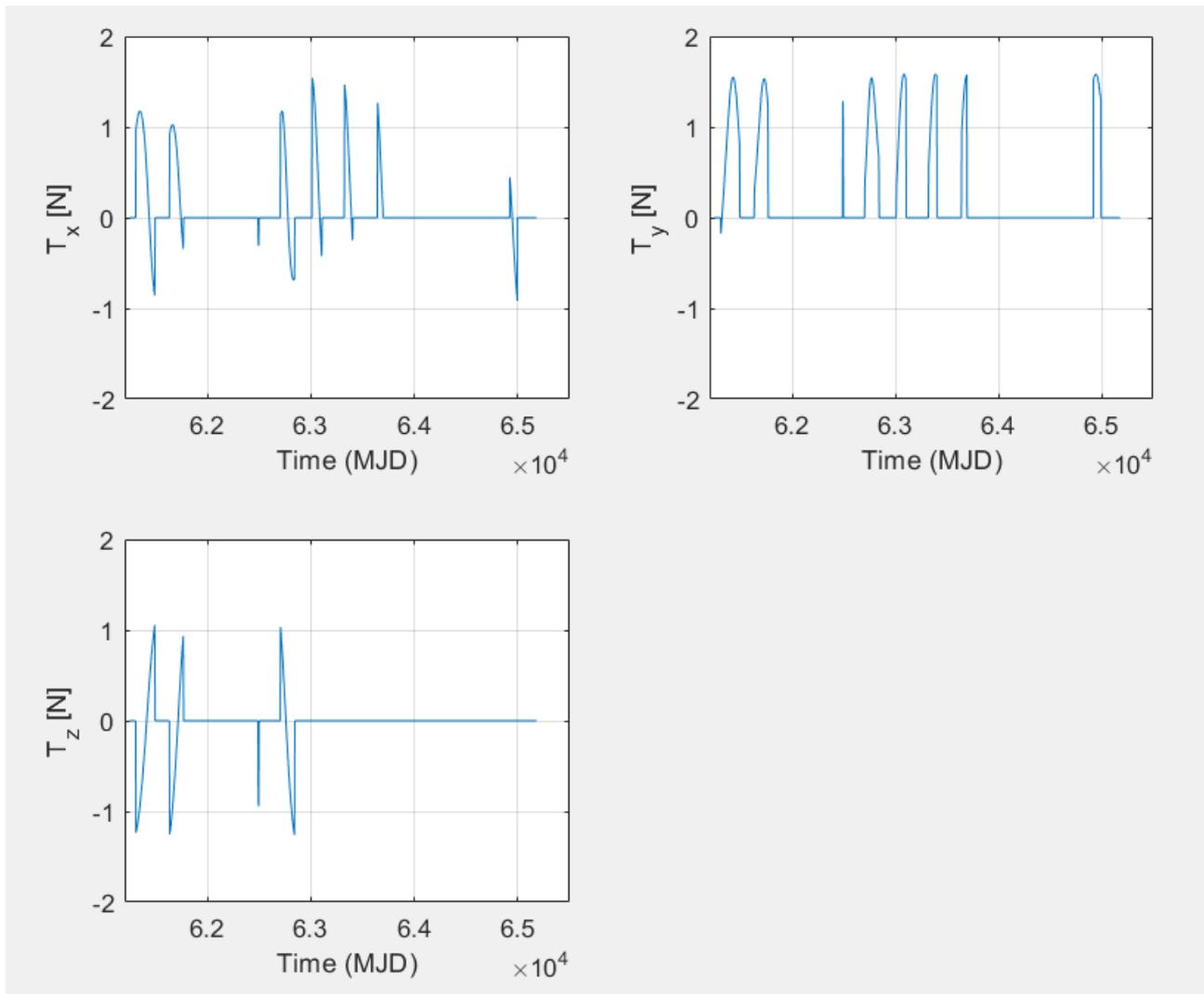


Figura 41: Andamenti delle componenti della spinta nelle tre direzioni x, y, z al variare del tempo

- Nell'ultima figura si esplicita la spinta nelle sue componenti lungo x , y , z . Come già detto in precedenza, la componente lungo z della spinta è presente esclusivamente durante la fase 2011 CL50 – Terra 1, per gli aggiustamenti di piano orbitale necessari, per altro maggiori rispetto a quelli necessari nella missione 2006 UQ216. Nella parte restante della traiettoria, la spinta agisce solo attraverso le componenti T_x e T_y , non dovendo operare con nessuna risonante 1:1 fuori del piano.

Nella successiva fig. 42, invece, viene riportato l'andamento della potenza nel tempo, sfruttata dallo spacecraft durante la spinta dell'asteroide.

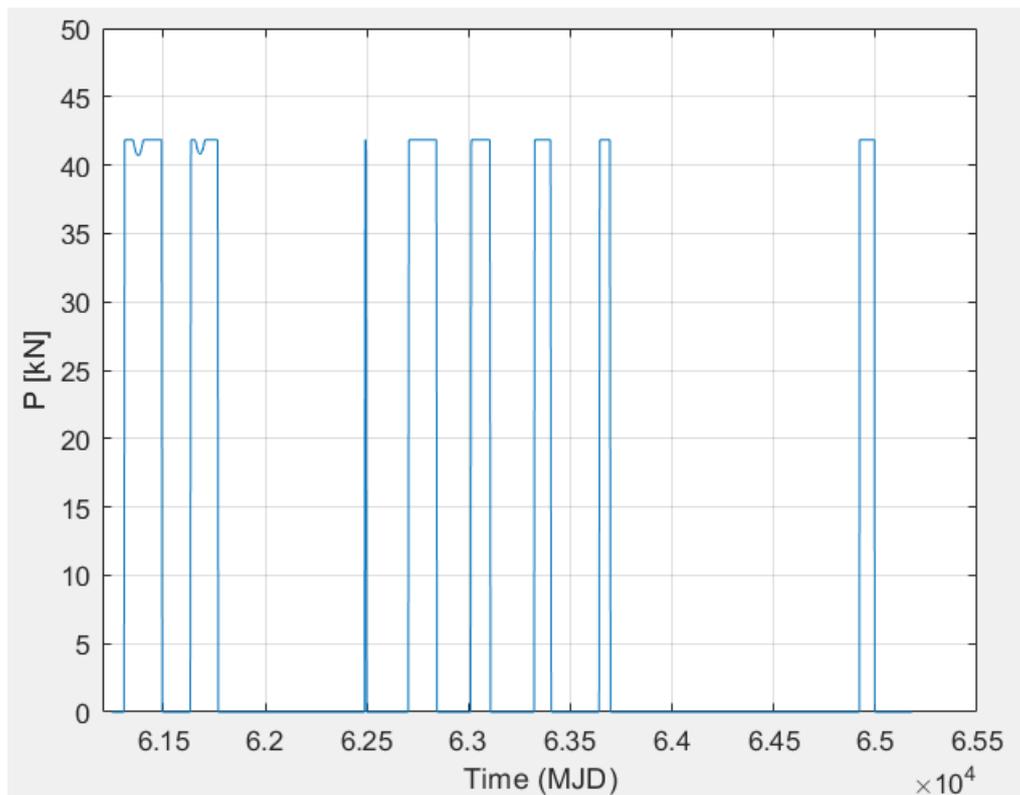


Figura 42: Andamento della potenza usata dal propulsore nel corso dell'inbound leg

Rispetto al primo caso studiato, in questa missione vi è un più uniforme utilizzo della potenza, con i diversi picchi che arrivano a circa 42 kW.

Si è presentata l'inbound leg della missione di recupero e trasporto nel cycler S1L1 dell'asteroide 2011 CL50. Si passa ora all'outbound leg.

5.4.2. Outbound leg: recupero di 2011 CL50

La fase di andata per il rendezvous con 2011 CL50, al solito, viene costruita una volta stabilita la fase di ritorno. Le condizioni iniziali sono descritte ad inizio capitolo, come condizioni comuni a tutte le missioni qui trattate.

È utile ripetere che svolgere l'ottimizzazione di traiettoria dell'outbound leg equivale a trovare il viaggio di incontro con l'asteroide che permetta di consumare la minor quantità di propellente possibile, arrivando al rendezvous in tempo per eseguire tutte le operazioni di studio e cattura. Questo studio di ottimo si effettua considerando le missioni al variare della durata e della data di partenza, essendo l'eccesso iperbolico di velocità di inizio e fine missione fissato. Lo studio, compiuto in questa operazione di analisi, è riportato nella fig. 43.

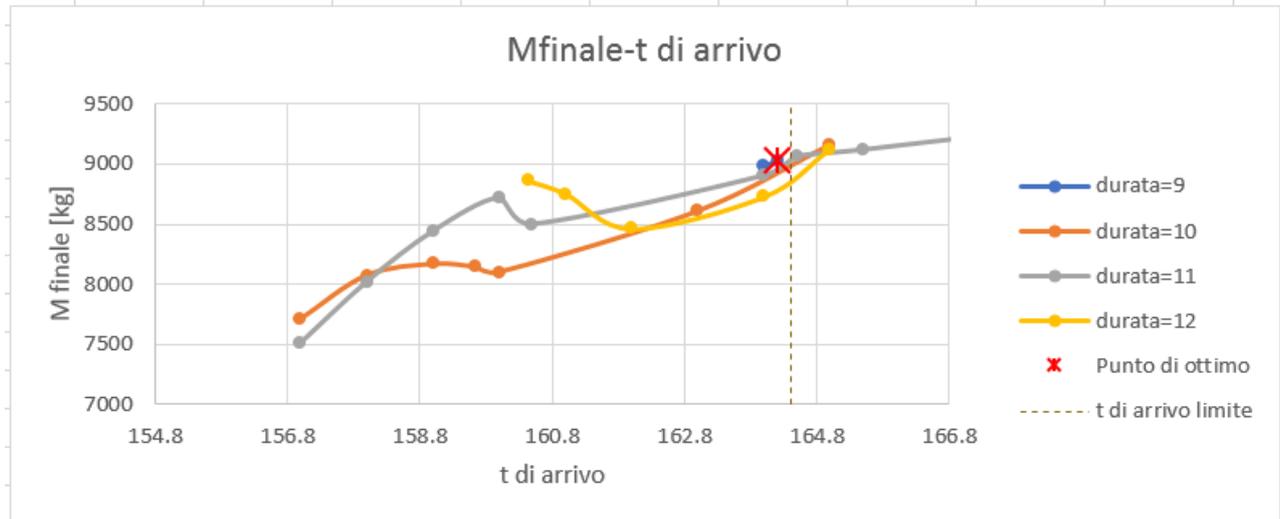


Figura 43: Andamenti della massa finale in funzione della data di arrivo all'asteroide, al variare della durata della tratta Terra-2011 CL50 (in rosso il punto di ottimo, e $t_{limite} = 164.4$).

Per concisione si omette la tabella con i dati da cui è stato tratto il grafico. La soluzione ottimale in questo caso è il miglior compromesso tra la massa finale risultante all'arrivo all'asteroide (necessariamente si vuole che sia $M_f > 9000 \text{ kg}$, per avere un po' di propellente di riserva), e la data di arrivo che non deve essere successiva a $t_{limite} = 164.4$, in modo da permettere le operazioni accennate sopra. Le due necessità infatti sono contrastanti, poiché lo studio mostra che posticipando la data di arrivo diminuiscono i consumi; arrivando, però, troppo in là nel tempo, fissata la data di ripartenza ed inizio inbound leg si avrebbe troppo poco tempo per la sosta (si vogliono lasciare almeno 5 mesi di tempo). La soluzione per l'outbound leg, trovata ottimizzando la traiettoria Terra-2011 CL50, è riportata in tab. 40.

Tabella 40: Risultati della soluzione ottenuta per il tratto di andata verso 2011 CL50

Caratteristiche della tratta outbound: Terra-2011 CL50	
Data di partenza dalla Terra [$gg/mm/aa$]	13/09/2024
$V_{\infty 0}$ (rispetto alla Terra)	$1.3 \frac{km}{s}$
Massa iniziale	10000 t
Data di arrivo al 2011 CL50 [$gg/mm/aa$]	18/02/2026
$V_{\infty 0}$ (rispetto a 2011 CL50)	0
Massa finale [t]	9030.1 kg
Durata del viaggio	523.19 <i>giorni</i>
Propellente consumato	969.9 kg

I dati relativi alle posizioni dell'asteroide rispettivamente alla data di partenza dalla Terra, e alla data di arrivo sono riportate in tab. 41, mentre in fig. 44 viene riportata la traiettoria seguita dallo spacecraft per raggiungere l'asteroide.

Tabella 41: Dati sulla posizione e velocità di 2011 CL50 in forma adimensionale, rispettivamente il 13/9/2024 e il 18/2/2026. I pedici 0 e 1 indicano le grandezze nei giorni di partenza e di arrivo.

Inizio tratta 13/09/2024	r_0	0.83123875875923
	θ_0	4.07250540020574
	φ_0	$-2.146458508838327 \cdot 10^{-3}$
	u_0	-0.14789517517754
	v_0	1.12059307440724
	w_0	$-2.790635867194126 \cdot 10^{-3}$
Fine tratta 18/02/2026	r_1	1.00774182583426
	θ_1	2.47195731374189
	φ_1	$2.553070154302672 \cdot 10^{-3}$
	u_1	$-4.261887562076285 \cdot 10^{-2}$
	v_1	0.92432532057552
	w_1	$-1.914670095611467 \cdot 10^{-3}$

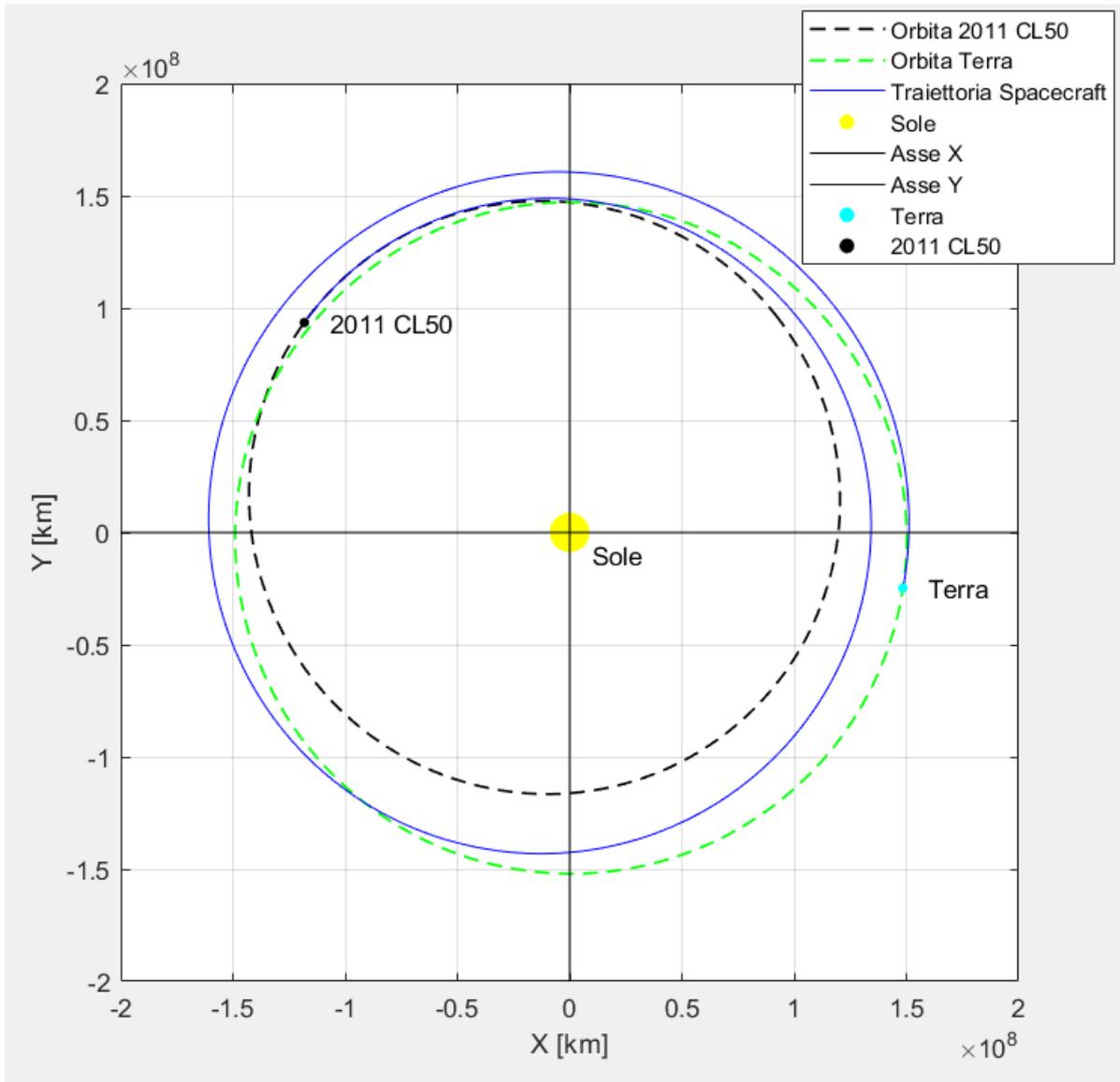


Figura 44: Traiettoria relativa al tratto outbound della missione 2011 CL50. Lo spacecraft percorre un giro e mezzo di traiettoria a spirale intorno al Sole, prima di arrivare sull'asteroide.

Nelle figure successive si riportano gli andamenti della spinta complessiva, delle componenti della spinta e della potenza all'avanzare del tempo di missione, per quest'outbound leg.

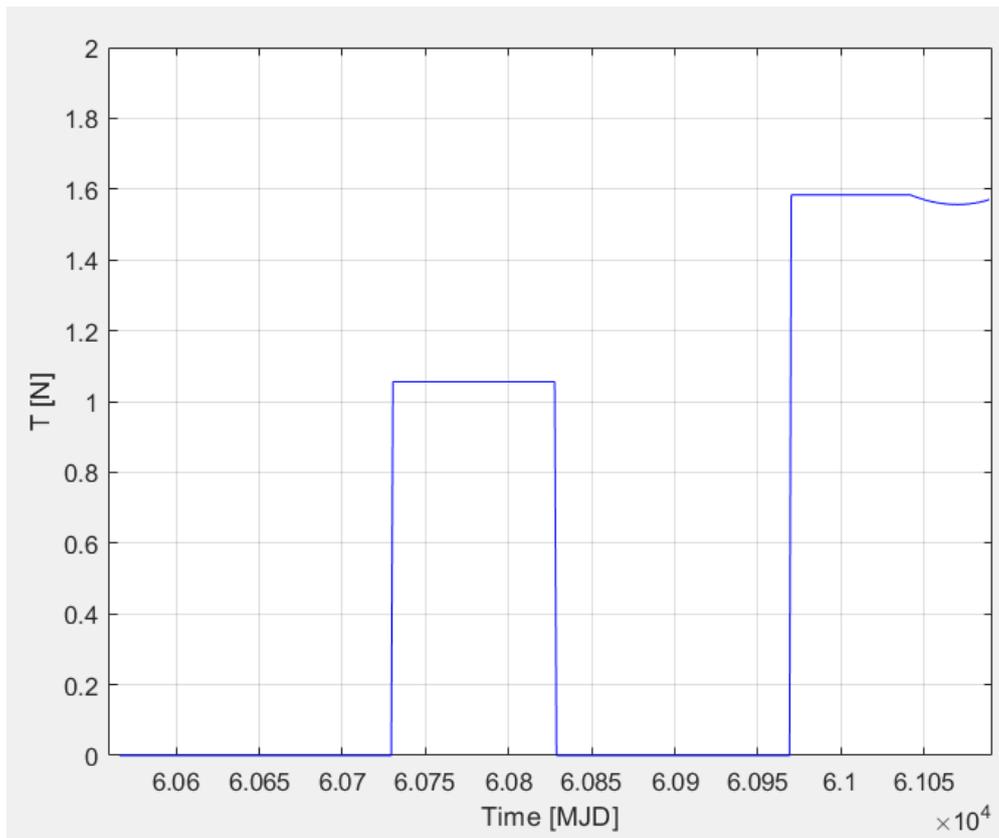


Figura 45: Spinta complessiva all'avanzare del tempo di missione

In fig. 45 è riportato l'andamento della spinta in valore assoluto durante l'outbound leg. Il rimorchiatore spaziale spinge solo in due periodi di tempo. Vi è un lungo tratto al principio in cui il rimorchiatore, a motore spento, si fa trascinare dall'eccesso iperbolico di velocità iniziale⁷⁴. In data MJD=60730 il rimorchiatore inizia a spingere per apportare le correzioni di rotta necessarie. In questo primo tratto la spinta è costante e pari a circa 1.05 N. Dopo circa 100 giorni il rimorchiatore spegne nuovamente i propulsori, per poi riaccenderli fino al rendezvous con 2011 CL50. In questo secondo tratto di spinta (da MJD=60970 a MJD=61089⁷⁵), inizialmente essa è costante con $T \approx 1.58 N$, fino a variare in prossimità dell'asteroide per manovrare meglio in fase di rendezvous.

In fig. 46 invece sono riportati i grafici delle componenti della spinta in direzione x, y, z . L'azione delle componenti T_x e T_y prevale, mentre invece non si utilizza quasi la propulsione nella direzione z . Si può notare dal grafico che, in corrispondenza dei due tratti di spinta mostrati, le componenti non

⁷⁴ Dato dal lanciatore ($V_{\infty 0} = 1.3 \text{ km/s}$).

⁷⁵ Quindi per 119 giorni.

hanno un andamento costante: esse quindi, combinandosi, danno vita al modulo della spinta complessiva costante.

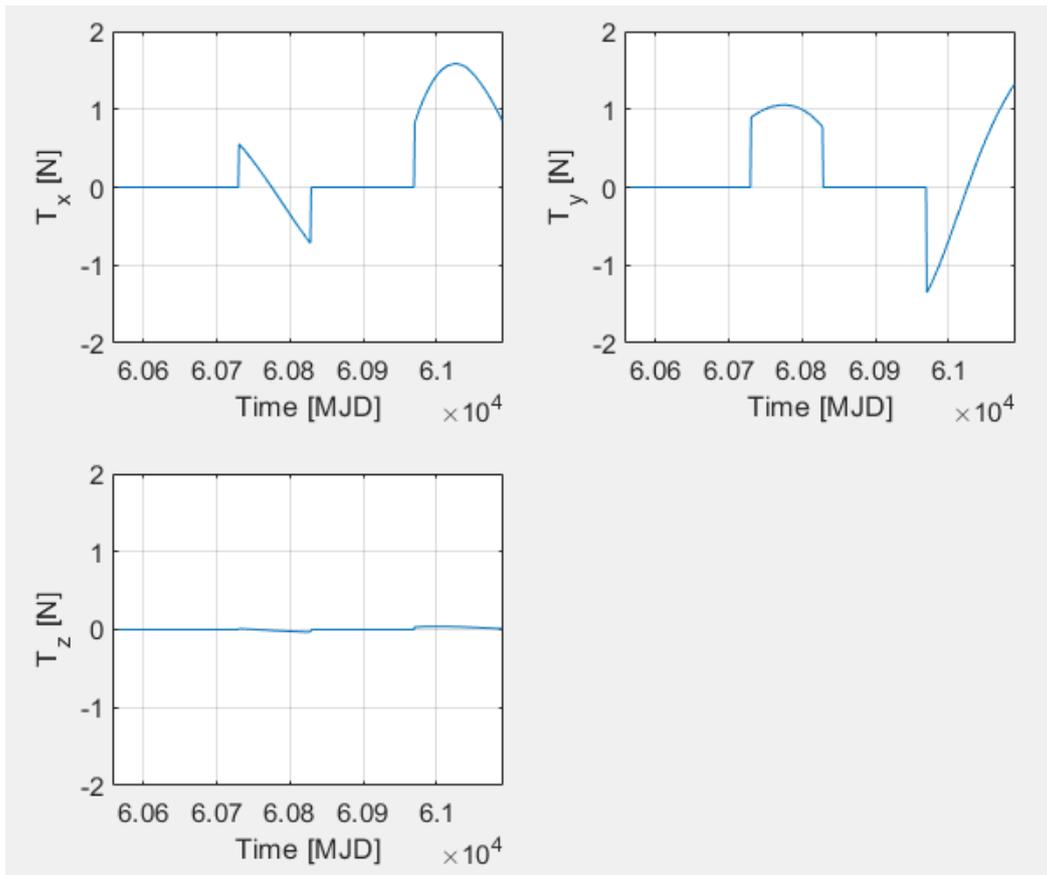


Figura 46: Componenti della spinta all'avanzare del tempo per l'inbound leg della missione 2011 CL50

Infine, in fig. 47 si mostra il grafico che riporta la potenza utilizzata in questa traiettoria di rendezvous con l'asteroide in funzione del tempo.

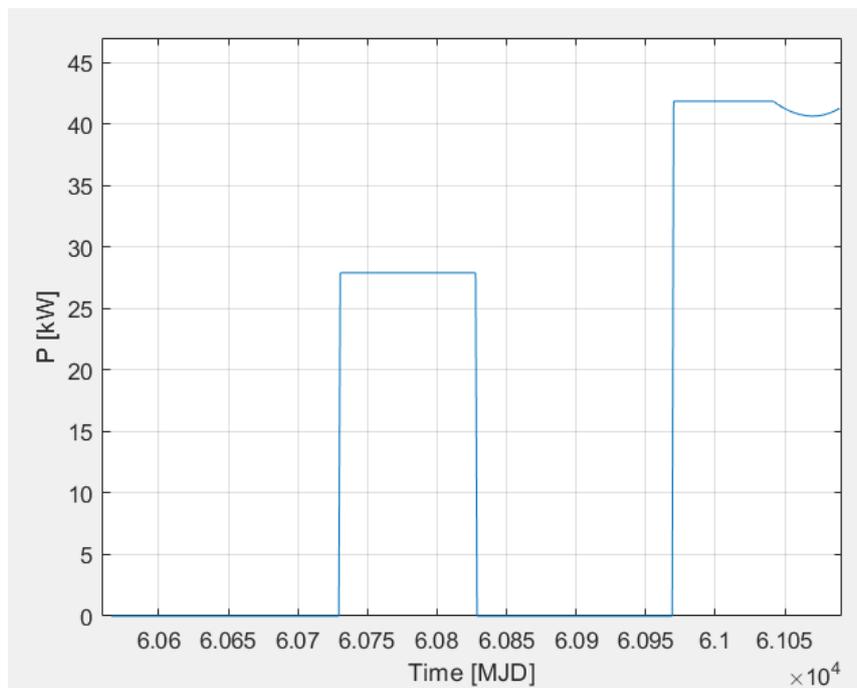


Figura 47: Potenza complessiva in funzione del tempo di missione. Tratto outbound della missione 2011 CL50.

I due massimi di potenza sono esattamente conformi a quelli di spinta, e sono rispettivamente di circa 28 kW e 42 kW.

Si presenta ora un riassunto della missione 2011 CL50, ricapitolando le sue caratteristiche salienti.

5.4.3. Missione di trasporto di 2011 CL50 nel cycler Terra – Marte S1L1

Riepilogando i risultati trovati in una tabella riassuntiva, la missione di trasporto di 2011 CL50 in S1L1, presenta le seguenti caratteristiche (tab. 42):

Tabella 42: Riepilogo missione di trasporto di 2011 CL50 nel cycler Terra – Marte S1L1

Missione 2011 CL50		
Outbound leg	Inizio missione (Terra 0)	13/9/2024
	Arrivo all'asteroide	18/2/2026
	Consumo / durata viaggio	$\approx 970 \text{ kg} / \approx 523 \text{ giorni}$
Inbound leg	Partenza dall'asteroide	24/7/2026
	1° flyby della Terra	28/2/2031
	2° flyby della Terra	19/12/2035
	Fine missione (Terra 3 – inserimento nel cycler S1L1)	1/5/2037
	Massa finale	362.450 t
	Consumo / durata viaggio	$4000 \text{ kg} / \approx 3934 \text{ giorni}$
Tempo di attesa all'asteroide	Durata stop	$\approx 125 \text{ giorni}$
TOTALE missione	Consumo / durata viaggio	$\approx 4970 \text{ kg} / \approx 4457 \text{ giorni}$

5.5. 2008 LD (caso 3)

L'asteroide 2008 LD costituisce il terzo ed ultimo caso trattato in questo lavoro. Esso estremizza le problematiche del caso precedente, in quanto le previsioni del suo naturale flyby terrestre ne indicano la data nel giugno 2035. Si ha così un tempo insufficiente per costruire una strategia basata su non-risonanti, e su combinazioni di non-risonanti⁷⁶, poiché l'ultimo inserimento di interesse è previsto per il 2037. Questo asteroide però presenta un grande vantaggio: osservazioni e misure a distanza ne hanno rilevato una massa limitata rispetto agli altri due esemplari analizzati. Questo fattore ha permesso di pensare ad un altro tipo di strategia per l'ingresso di 2008 LD nel cycler: spingerlo con il rimorchiatore direttamente in S1L1, con un unico tratto asteroide – Terra in modo da effettuare la missione di trasporto con un solo, singolo flyby.

Volendo chiarire la strategia, si è fatto in modo da spingere l'asteroide ad un unico flyby terrestre, con un diretto tratto propulso asteroide – Terra, aggiustando, ad un tempo, data di incontro ed eccesso iperbolico di velocità, in modo da permetterne il corretto inserimento. Questo permette di ottenere una missione molto breve e più semplice rispetto alle precedenti, ma con capacità di carico minore. Un'altra caratteristica importante di 2008 LD è che presenta naturalmente un eccesso iperbolico di velocità abbastanza elevato: la stima è di 4.13 km/s. Questa caratteristica, insieme agli altri aspetti evidenziati, ne permette il trasporto rimanendo nei canoni di consumi e di massa finale imposti dai requisiti e dalle previsioni di massa dell'asteroide.

I parametri orbitali fondamentali di 2008 LD, forniti dal JPL, sono riportati nella seguente tab. 43, mentre in tab. 44 vengono riprese per comodità le caratteristiche fisiche stimate dell'asteroide.

Tabella 43: Parametri orbitali di 2008 LD (risalenti al 4 marzo 2018)

Parametri Orbitali di 2008 LD	
Semiassse maggiore (a) [AU]	0.89204314592
Eccentricità (e)	0.15462370196
Inclinazione orbitale rispetto all'eclittica (i) [deg]	6.54163965174
RAAN (Ω) [deg]	250.85646465198
Argomento del periastro (ω) [deg]	201.43050709954
Anomalia vera (M) [deg]	22.40936255564

Si nota dalla tabella precedente che l'orbita di 2008 LD è maggiormente inclinata rispetto all'orbita terrestre in confronto ai due casi analizzati. Questo influenzerà la direzione della spinta, che dovrà agire in modo più importante anche lungo la componente z degli assi, per adattare la traiettoria ed il moto dell'asteroide al piano orbitale terrestre sull'eclittica.

⁷⁶ L'unica orbita di inserimento utilizzabile sarebbe una 1 1 (1), ma sfortunatamente non si ha una corrispondenza positiva di data di arrivo sulla Terra con quella di una finestra di inserimento nel cycler.

Tabella 44: Caratteristiche fisiche di 2006 UQ216

2008 LD	
Dimensioni (diametro esterno) [m]	3 – 16
Massa [t]	44 – 4000

Come si può vedere, la massa dell'asteroide è assai ridotta, cosa che permette di adottare la strategia accennata prima.

In fig. 48 si riportano le orbite della Terra e di 2008 LD. Il periodo dell'orbita eliocentrica dell'asteroide è facilmente calcolabile, noto il semiasse maggiore della sua orbita:

$$T_{2008 LD} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\odot}}} = 307.9818 \text{ giorni}$$

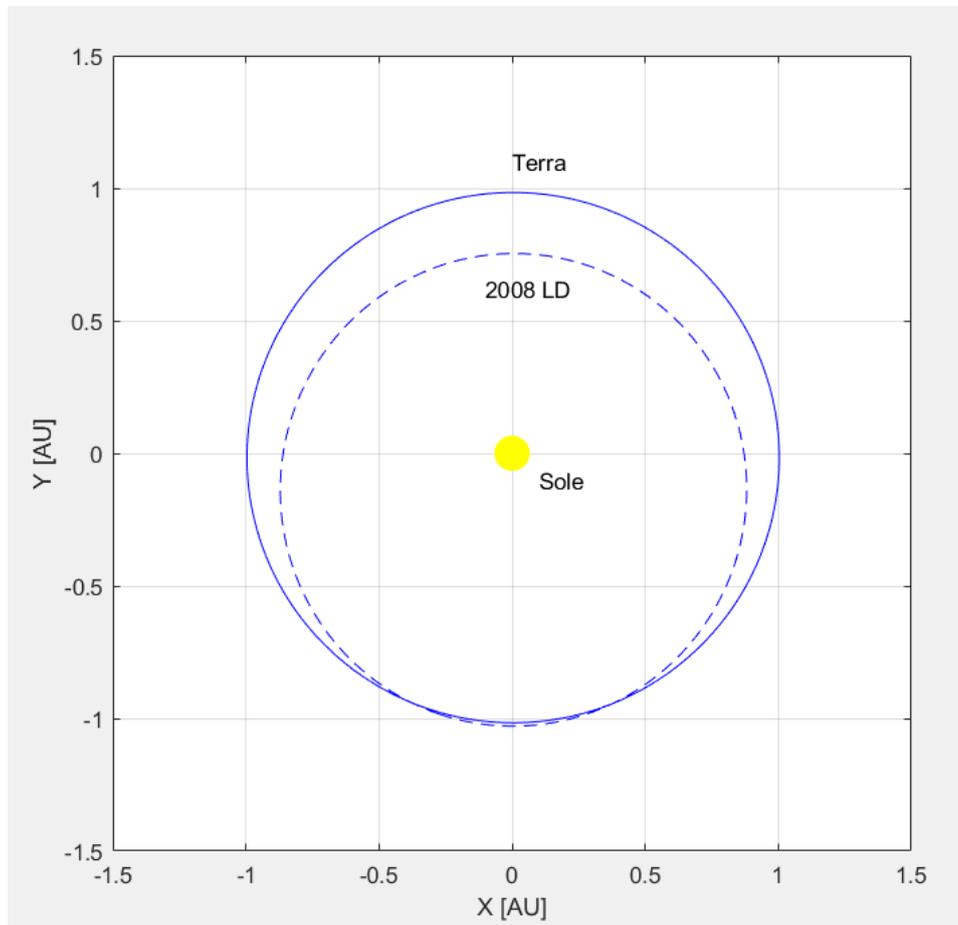


Figura 48: Orbite della Terra e di 2008 LD

Procedendo con l'ormai noto ordine cronologico di lavoro, si mostra ora la missione 2006 LD.

5.5.1. Inbound leg: reindirizzamento ed inserimento nel cyler di 2008 LD - inserimento diretto

La missione 2008 LD è molto più semplice (da un punto di vista dinamico) di quelle viste in precedenza, poiché l'unico modo per trasportare l'asteroide in S1L1 è quello di spingerlo tramite una traiettoria diretta nel cyler, senza l'utilizzo di flyby intermedi. Se da una parte lo schema della missione è molto semplice tale non è invece la progettazione; infatti, è necessario apportare spinte cospicue per indirizzare nella giusta maniera l'asteroide verso la Terra, in modo da giungerne al flyby il giorno esatto dell'inserimento nel cyler, senza però influenzare troppo negativamente sulla capacità di trasporto del veicolo ARM. È necessario quindi cercare un inserimento cyler il più vicino possibile al naturale flyby terrestre di 2008 LD. A tal proposito, siccome l'asteroide vede il suo arrivo naturale a Terra nel giugno 2035, si è scelto l'inserimento nel cyler del 28/6/2035.

Si è individuata la posizione dell'asteroide circa 3 anni prima dell'inserimento, per dare inizio alla procedura di ottimizzazione con un fondato punto di partenza: perciò si sa che il 29/07/2032 l'asteroide ha le seguenti caratteristiche (tab. 45):

Tabella 45: Informazioni calcolate circa la posizione di 2008 LD in data 29/07/2032.

Posizione di 2008 LD @ 29/07/2032	
distanza dal Sole (r)	0.78731101101890
Longitudine (θ)	2.42447669941783
Latitudine (φ)	-0.10596529668512
Componente velocità (u)	0.120704751296853
“ “ (v)	1.18412601564495
“ “ (w)	$-5.045896300526671 \cdot 10^{-2}$

Il diretto inserimento nel cyler con l'unico tratto aseroide – Terra ha richiesto uno studio preliminare sulla fattibilità della strategia. Questo studio è stato effettuato con la stessa logica delle singole tratte dei casi precedenti, seppur con una maggiore severità di giudizio, data la criticità di avere una capacità di trasporto minore del veicolo. Si è prima svolta l'analisi sulla variazione della massa finale in funzione del tempo di missione. Una volta accertato il punto che garantisce l'ottimo per quanto riguarda la massa finale (sufficiente per il trasporto dell'asteroide dato il propellente utilizzato), si rende necessario modificare la data di arrivo dell'asteroide a Terra e il suo eccesso iperbolico di

velocità, imponendoli uguali a quelli dell'inserimento nel cycler scelto⁷⁷. Si riportano i risultati dello studio preliminare (prima delle correzioni di data e velocità) nel grafico in fig. 49.

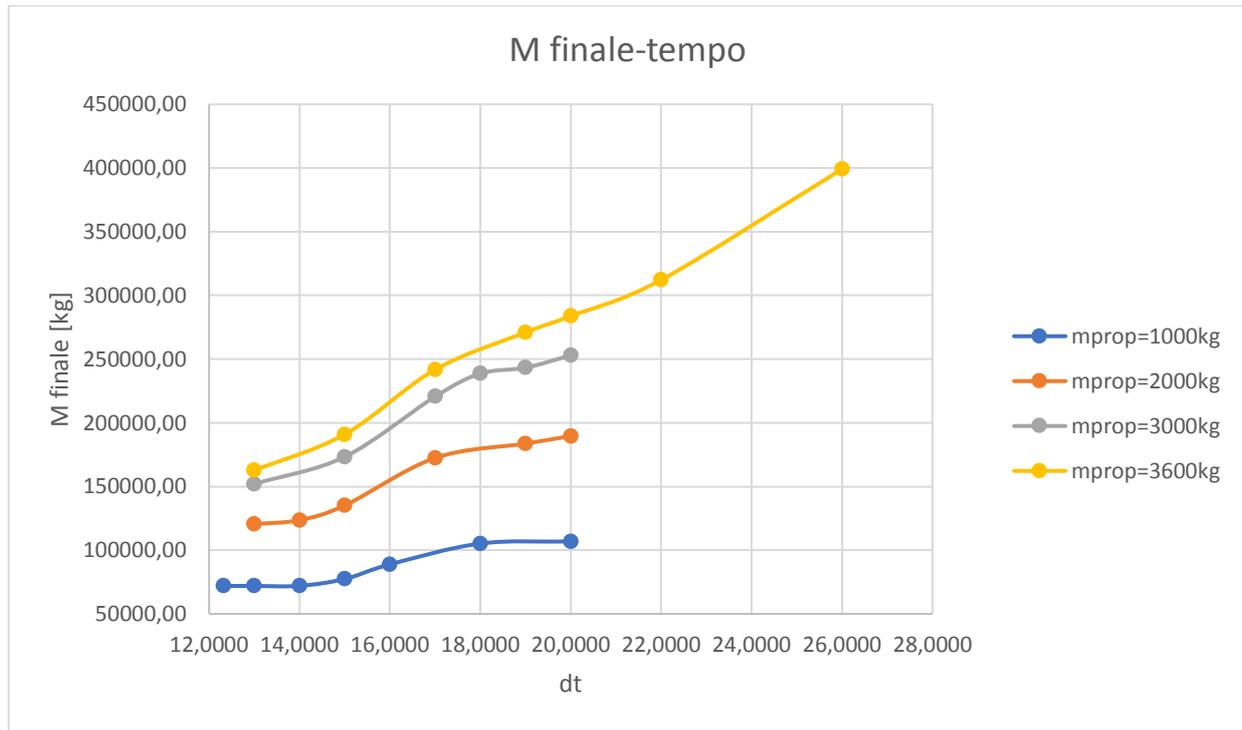


Figura 49: Studio preliminare dell'andamento della massa finale in termini di durata del tratto 2008 LD – Terra, al variare della massa di propellente usata. Si è approfondito lo studio con $M_{prop} = 3600$ kg.

Assodata la sufficiente capacità di trasporto del rimorchiatore, si è seguita la strategia che si è accennata: usare i 4000 kg di propellente in un'unica fase, adattando data di arrivo ed eccesso iperbolico di velocità per il diretto ingresso nel cycler. Questo abbatte notevolmente la capacità di trasporto del veicolo ARM, poiché con tali (necessarie) correzioni da apportare alla traiettoria ottimale di base non è possibile spingere masse molto grandi. È importante ripetere che questo si è reso necessario perché manca fisicamente il tempo per l'utilizzo di orbite non-risonanti entro il termine temporale che ci si è posto (2039 massimo). Le caratteristiche ed i requisiti del trasporto di 2008 LD in S1L1, usando l'ingresso del 28/6/2035, sono:

Tabella 46: Requisiti per l'inbound leg della missione 2008 LD

Data di inserimento	28/6/2035
V_{∞}	3.75 km/s
Massa asteroide	44 t – 4000 t

⁷⁷ Questo è stato reso possibile imponendo anche la data di partenza e la $V_{\infty f}$, oltre alla durata di missione e la massa finale. Imponendo t_{inizio} e dt , si impone indirettamente t_{fin} .

Imponendo i requisiti di tab. 46, e partendo dallo studio dell'andamento di M_f in termini di dt , si è trovata la seguente soluzione, che mostra la traiettoria ottimale per l'inbound leg della missione di trasporto di 2008 LD in S1L1 (tab. 47).

Tabella 47: Caratteristiche e prestazioni della traiettoria inbound per 2008 LD

Inbound leg: traiettoria ottimizzata 2008 LD	
Timeline e prestazioni	
Data di partenza (da 2008 LD)	8/5/2031
Data di arrivo e inserimento in S1L1	28/6/2035
Durata TOTALE	≈ 1511 giorni (1511.44)
Consumo TOTALE	4000 kg di propellente
Massa finale (capacità di carico)	57.856 t
Ripartizione ΔV	
$\Delta V_{01} = \Delta V_{TOT}^{78}$	≈ 0.380 km/s

Come mostrato sopra, la traiettoria inbound dura circa 1511 giorni, equivalenti a circa 4.14 anni. Rispetto alle missioni trattate nei paragrafi precedenti, la capacità di carico è limitata (circa 58 tonnellate). In difesa di questo, però, ci sono alcune osservazioni da evidenziare:

- la massa finale trasportata nel cycler rientra in ogni caso nel range previsto dalle osservazioni astronomiche di 2008 LD, rendendo la missione valida, ed utile. L'asteroide infatti è notevolmente più piccolo degli altri due visti in precedenza.
- la tipologia di inbound leg è completamente diversa dalle precedenti, più semplice e più breve: la filosofia alla sua base è infatti diversa: economicità (comunque si rientra nei 4000 kg di propellente stabiliti), ma anche brevità e tempestività di trasporto (non solo entro il 2037, ma addirittura entro il 2035, sfruttando il naturale avvicinamento a Terra in prossimità dell'inserimento nel cycler).
- la notevole correzione di velocità (circa 380 m/s, quasi il doppio rispetto ai 200 m/s indicati come soglia massima indicativa) e di data di arrivo permettono comunque la riuscita del progetto.

Quindi si può a ragione sostenere la notevole importanza che riveste anche questa terza missione.

Nelle successive figure si riportano traiettoria ed andamento di spinta e potenza dell'inbound leg della missione 2008 LD.

⁷⁸ In questo caso è da considerare come differenza tra V_∞ di naturale incontro con la Terra (≈ 4.13 km/s) e quella imposta dal cycler (≈ 3.75 km/s).

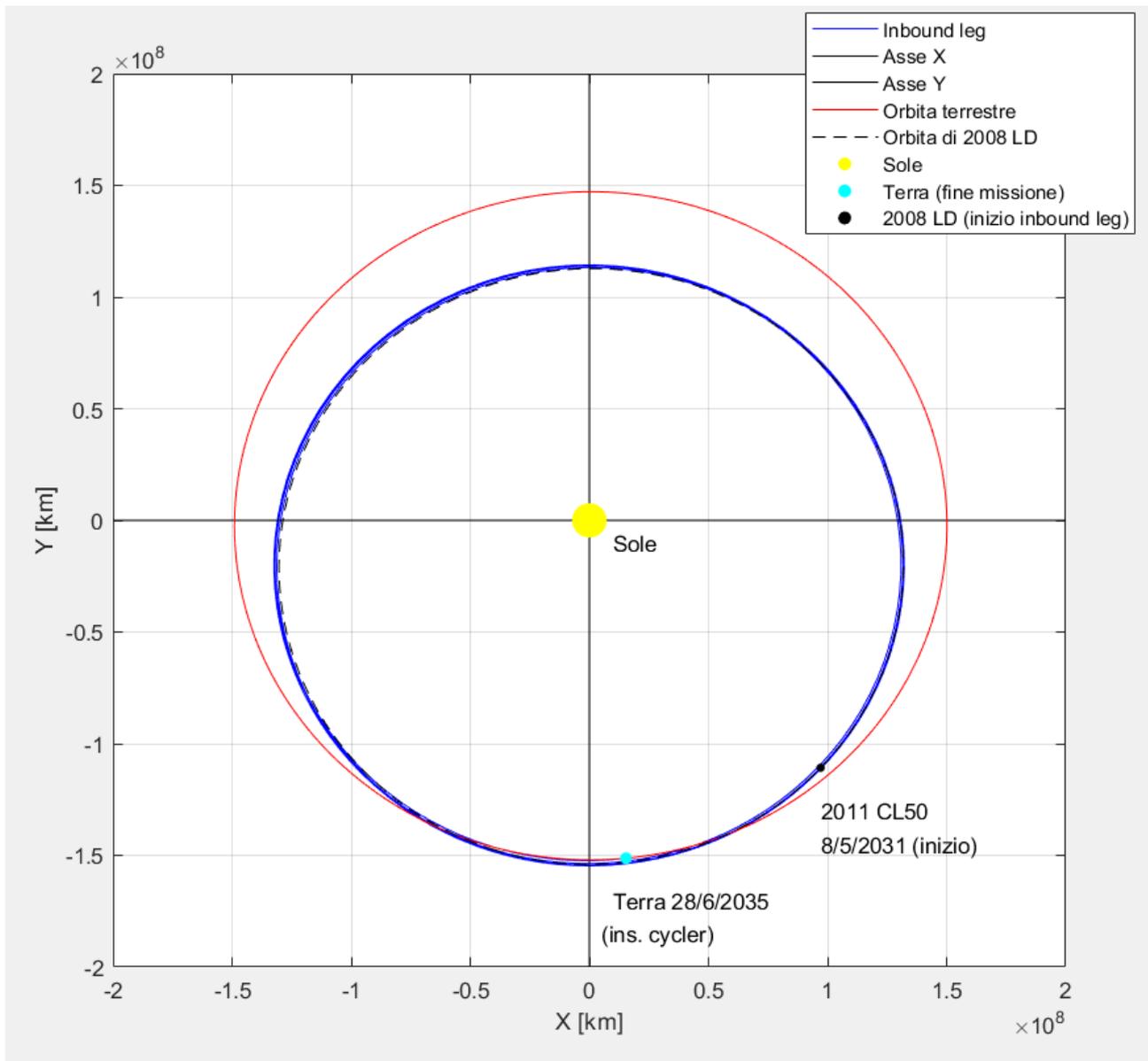


Figura 50: Traiettoria inbound percorsa da 2008 LD e dal rimorchiatore spingente. La traiettoria viene effettuata in poco più di 4 anni.

La traiettoria mostrata in fig. 50 riporta il diretto inserimento nel cyclor dell'asteroide 2008 LD. La partenza avviene l'8/5/2031, e l'inserimento a fine traiettoria il 28/6/2035. La traiettoria impiega poco più di 4 anni ad essere percorsa.

In fig. 51 viene riportata la spinta complessiva all'avanzamento di missione. Si noti come la spinta è molto più consistente e distribuita rispetto alle precedenti missioni. Inoltre, la spinta è maggiore complessivamente, a parità di propellente utilizzato, a fronte di una massa minore da accelerare (il consumo infatti è sempre di 4000 kg). I picchi di spinta sono sempre di circa 1.6 N: questo poiché correzioni maggiori di traiettoria necessitano di una spinta più importante.

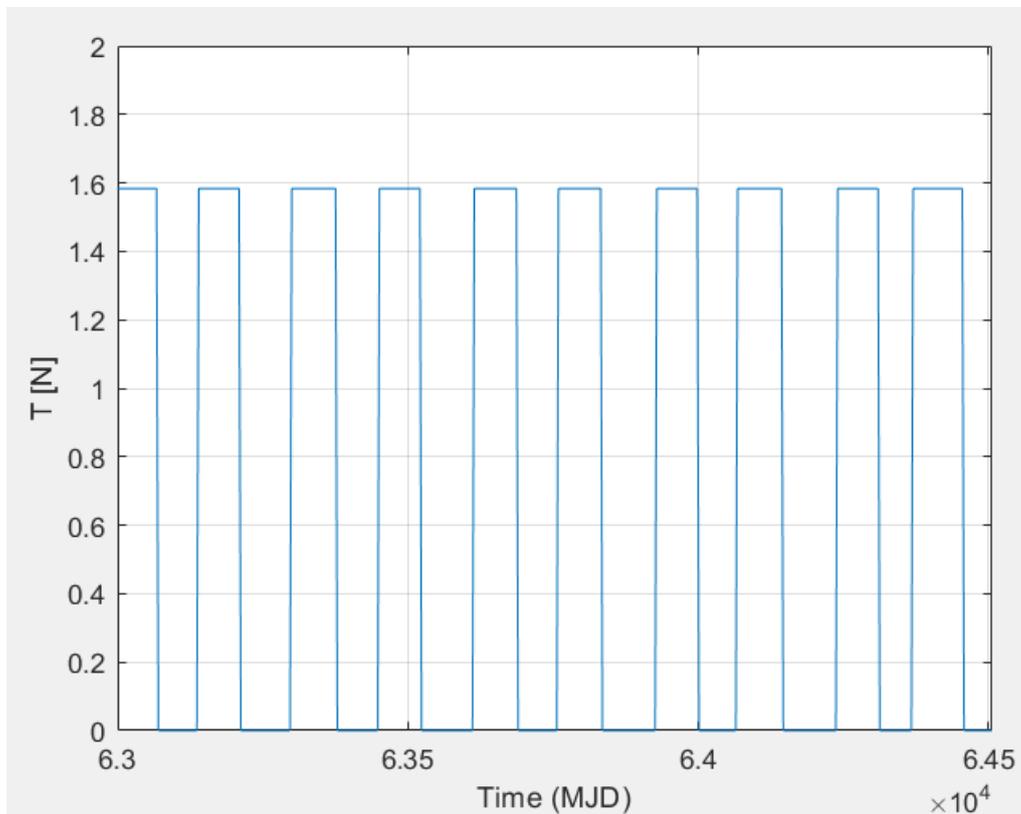


Figura 51: Andamento della spinta durante il tratto inbound della missione 2008 LD

In fig. 52 si riporta l'andamento della spinta nelle sue componenti. **Si evidenzia che la componente di spinta più importante è quella lungo z.** Questo è un fatto completamente discordante con ciò che si è visto nelle precedenti missioni, ma è spiegabile tenendo conto di quello che si è detto ad inizio paragrafo, presentando l'orbita di 2008 LD: questa è fortemente inclinata rispetto all'orbita terrestre,

quindi T_z deve necessariamente agire per adattare l'asteroide al rendezvous con la Terra, nel piano dell'eclittica.

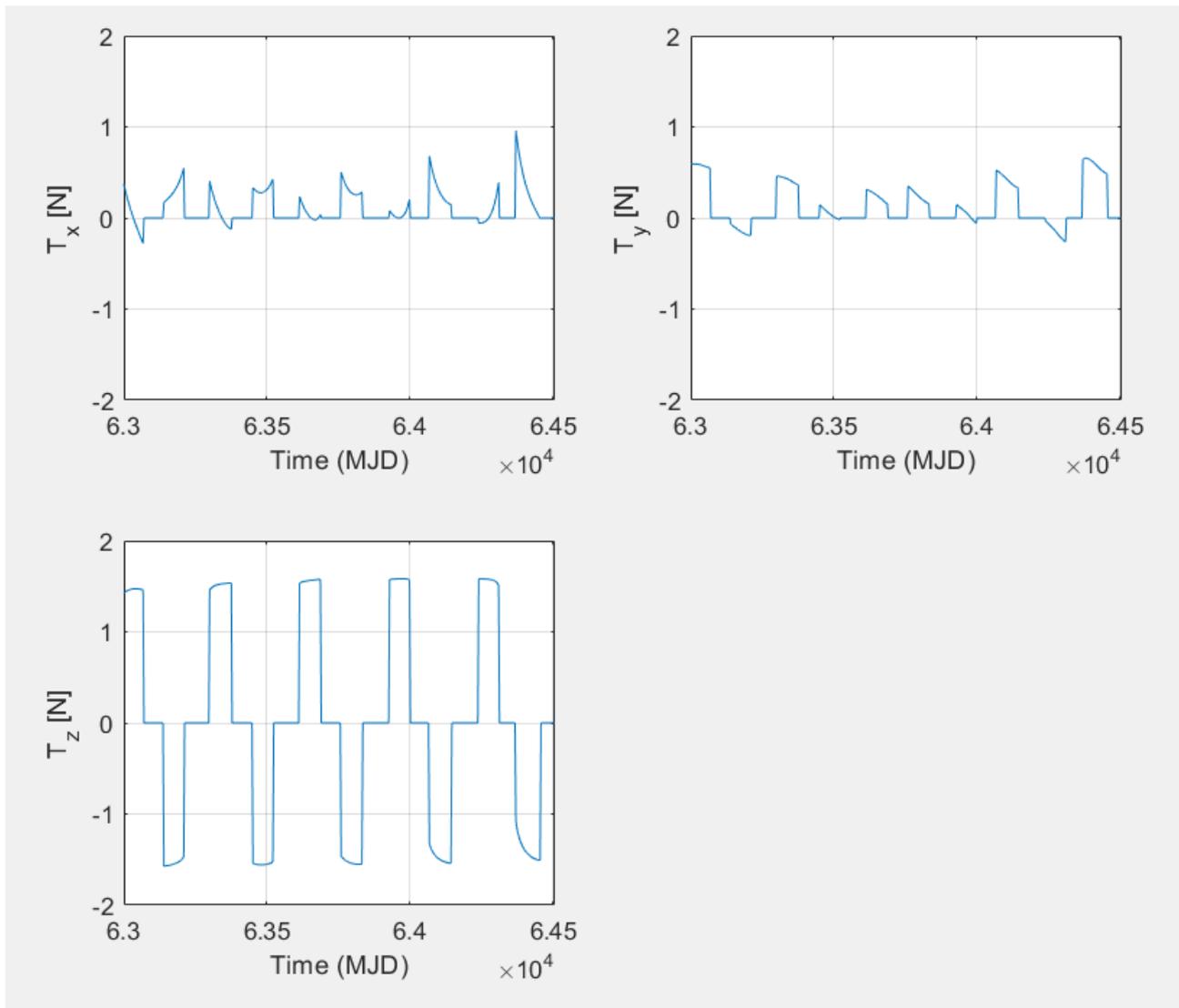


Figura 52: Componenti della spinta nelle tre direzioni x, y, z nel tempo. Si noti l'importanza della componente T_z .

Nella successiva fig. 53, invece, viene riportato l'andamento della potenza sfruttata dallo spacecraft, spingendo l'asteroide, nel tempo.

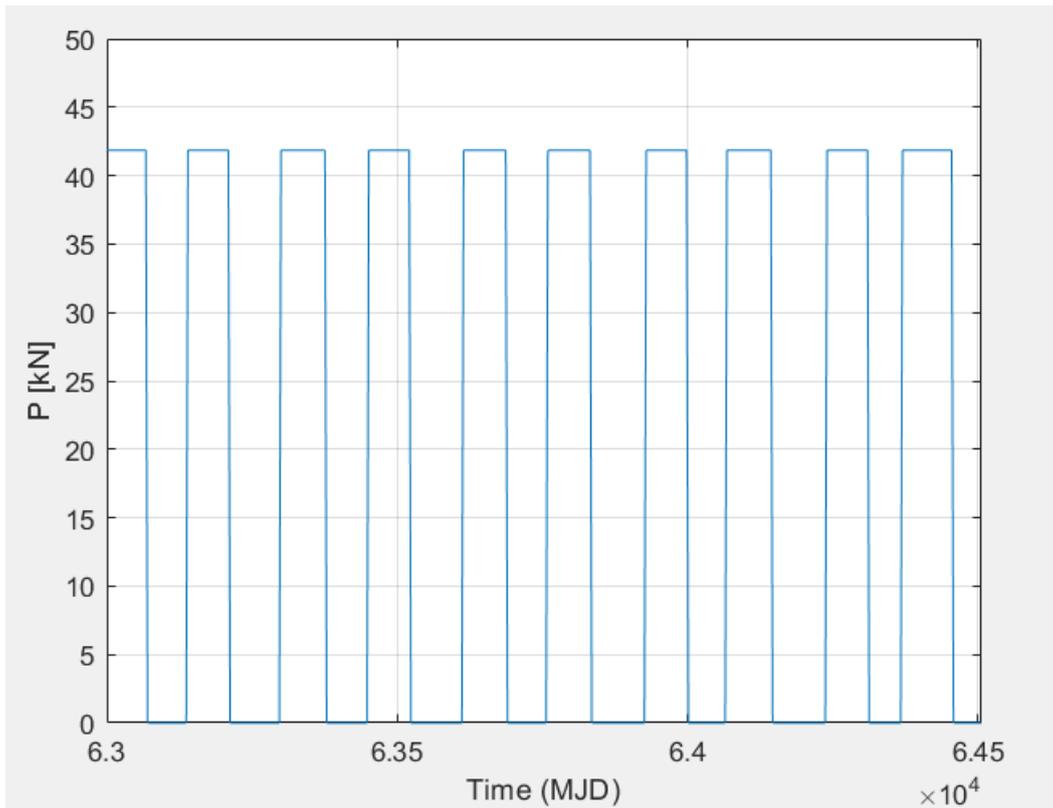


Figura 53: Andamento della potenza usata dal propulsore nel corso dell'inbound leg (2008 LD)

Tutti i picchi di potenza sfiorano i 42 kW, ovvero la potenza massima disponibile per le operazioni di propulsione.

5.5.2. Outbound leg: recupero di 2008 LD

Per la fase di andata, valgono le condizioni iniziali descritte all'inizio del primo paragrafo di questo capitolo; quindi, imposte massa iniziale ed eccesso iperbolico di velocità, si è trattato di eseguire uno studio di ottimizzazione di traiettoria per arrivare all'asteroide. Nota la data di partenza dall'asteroide per l'inizio dell'inbound leg, si costruisce la fase di outbound, per arrivare in tempo a 2008 LD. Si è operato sempre nella stessa maniera, ricercando la traiettoria che permette di arrivare all'asteroide consumando il minor propellente possibile, controllando la data di arrivo. In questo caso si è però incontrata una problematica: a causa della forte inclinazione orbitale della traiettoria naturale dell'asteroide, è necessario un maggior consumo di propellente del normale per raggiungere 2008 LD in tempo utile. Si aprono così due possibili strade:

- L'utilizzo effettivo di una maggiore quantità di propellente, rendendo un po' meno economica la missione. La chiamiamo "Prima Via".
- Lo sfruttamento di un eccesso iperbolico di velocità maggiore in partenza ($V_{\infty 0} > 1.3 \text{ km/s}$), per consumare meno durante il tragitto verso 2008 LD. La chiamiamo "Seconda Via".

Massimizzando la massa finale, in un arco di circa 6 anni sono state studiate tutte le possibili traiettorie di andata verso l'asteroide: le due configurazioni risultanti migliori sono le seguenti (tab. 48).

Tabella 48: Soluzioni ottenute dall'ottimizzazione del tratto di andata verso 2008 LD (Prima Via e Seconda Via)

Soluzioni per la tratta outbound: Terra-2008 LD		
Prima Via	Data di partenza dalla Terra [gg/mm/aa]	23/11/2026
	$V_{\infty 0}$ (rispetto alla Terra)	$1.3 \frac{km}{s}$
	Massa iniziale	10000 t
	Data di arrivo al 2008 LD [gg/mm/aa]	1/7/2030
	$V_{\infty 0}$ (rispetto a 2008 LD)	0
	Massa finale [t]	8861.1 kg
	Durata del viaggio	1315.519 giorni
	Propellente consumato	1138.9 kg
Seconda Via	Data di partenza dalla Terra [gg/mm/aa]	25/11/2026
	$V_{\infty 0}$ (rispetto alla Terra)	$1.8 \frac{km}{s}$
	Massa iniziale	10000 t
	Data di arrivo al 2008 LD [gg/mm/aa]	23/7/2030
	$V_{\infty 0}$ (rispetto a 2008 LD)	0
	Massa finale [t]	9000.0 kg
	Durata del viaggio	1336.3 giorni
	Propellente consumato	1000.0 kg

Confrontando le due soluzioni, si possono osservare alcuni aspetti importanti:

- La soluzione trovata seguendo la prima via di ragionamento permette di partire con le stesse condizioni iniziali delle altre missioni, ma vede un consumo di circa 1140 kg di propellente, contro i massimi 1000 kg contemplati (in teoria sarebbe auspicabile lasciare anche una riserva).
- La soluzione riguardante la seconda via di ragionamento non parte con le stesse condizioni iniziali viste ad inizio capitolo, ma necessita di un eccesso iperbolico di velocità di 1.8 km/s. Così facendo, però, permette di raggiungere 2008 LD con 1000 kg di propellente, il massimo permesso dalle specifiche precedentemente esposte.
- Entrambe le soluzioni, comunque, sono fattibili dal punto di vista del tempo: infatti arrivano con un preavviso di più di dieci mesi rispetto alla ripartenza per l'inbound leg.

La posizione dell'asteroide nei giorni di partenza e di arrivo (medi) è data in tab. 49.

Tabella 49: Dati sulla posizione e velocità di 2008 LD in forma adimensionale, rispettivamente il 24/11/2026 e il 11/7/2030. I pedici 0 e 1 sono rispettivamente per indicare le grandezze i giorni di partenza e di arrivo.

<p>≈ Inizio tratta 24/11/2026</p>	r_0	0.98982686847254
	θ_0	4.07524109089166
	φ_0	$-3.420626662497572 \cdot 10^{-2}$
	u_0	0.10405652580537
	v_0	0.93712233898898
	w_0	0.102505255475256
<p>≈ Fine tratta 11/7/2030</p>	r_1	0.97619163365899
	θ_1	5.54705935600073
	φ_1	0.10514074371926
	u_1	-0.11853505968019
	v_1	0.95492931875406
	w_1	$4.260850831524862 \cdot 10^{-2}$

Si noti la non trascurabile velocità in direzione z dell'asteroide. Questa differenza è proprio la causa del maggior consumo per raggiungere 2008 LD.

Supponendo di scegliere la soluzione relativa alla prima via, si mostrano rispettivamente nelle prossime figure traiettoria, spinta (complessiva e in componenti) e potenza utilizzata al progredire dell'outbound leg. In fig. 54 è riportata la traiettoria compiuta dallo spacecraft per raggiungere 2008 LD. Si mostra la traiettoria nel piano dell'eclittica, trascurando la componente z del moto: lo spacecraft compie quasi 4 giri di traiettoria a spirale completi prima del rendezvous con l'asteroide. In fig. 55 è riportata la traiettoria tridimensionale di rendezvous del veicolo ARM con l'asteroide 2008 LD. Si notino le differenti inclinazioni orbitali della Terra e dell'asteroide: questo rende più difficoltoso il raggiungimento di 2008 LD, dovendo spingere molto anche in direzione z .

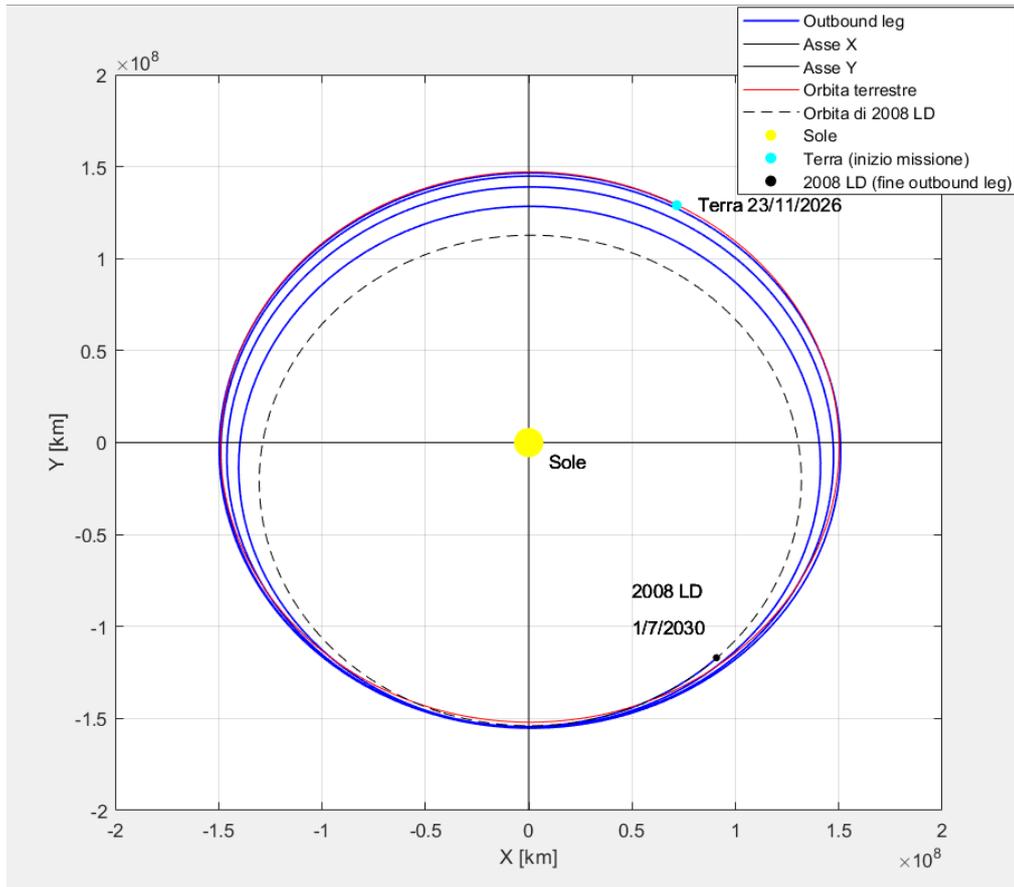


Figura 54: Traiettoria relativa al tratto outbound della missione 2008 LD. Lo spacecraft percorre quasi quattro giri di spirale completi, prima di arrivare sull'asteroide.

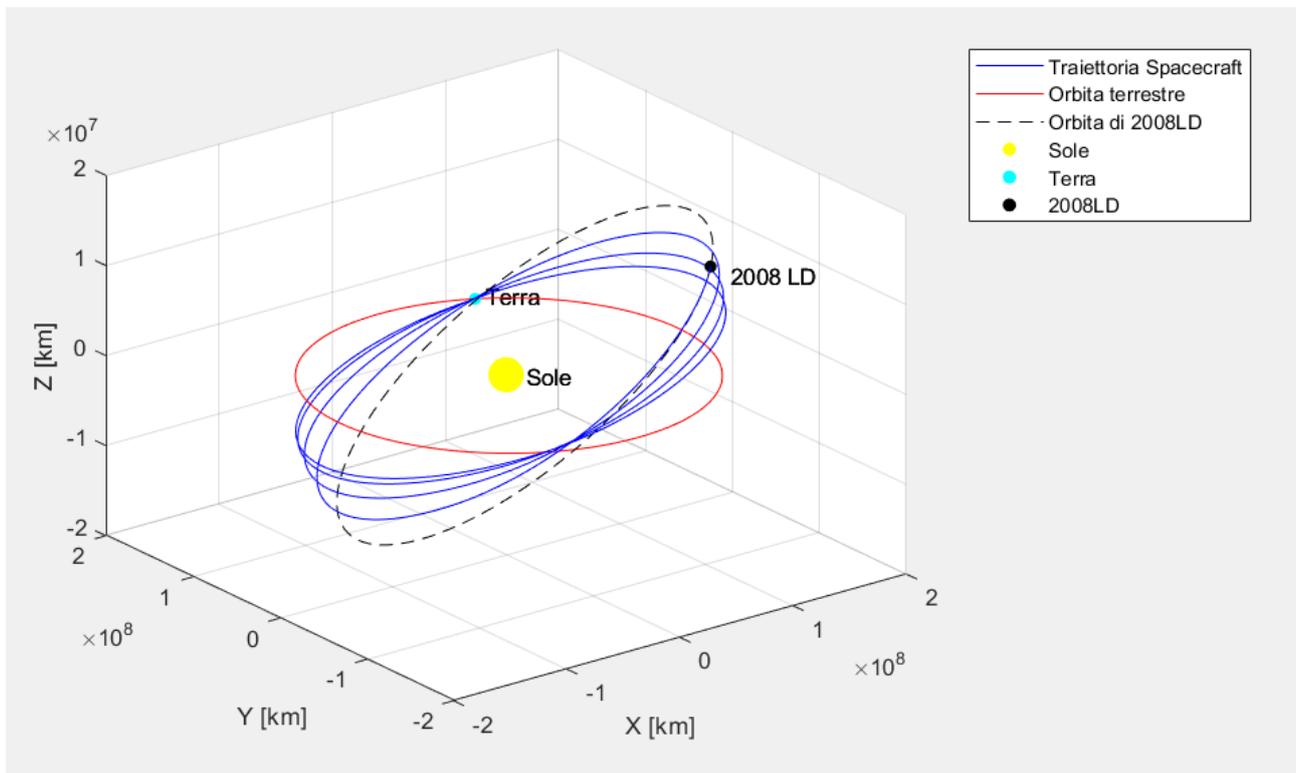


Figura 55: Traiettoria outbound 3D per la missione 2008 LD. Si mostra l'accentuata inclinazione dell'orbita dell'asteroide ($\approx 6^\circ$).

In fig. 56 si riporta l'andamento della spinta complessiva all'avanzamento del tratto outbound, mentre in fig. 57 sono mostrate le componenti della stessa nel tempo.

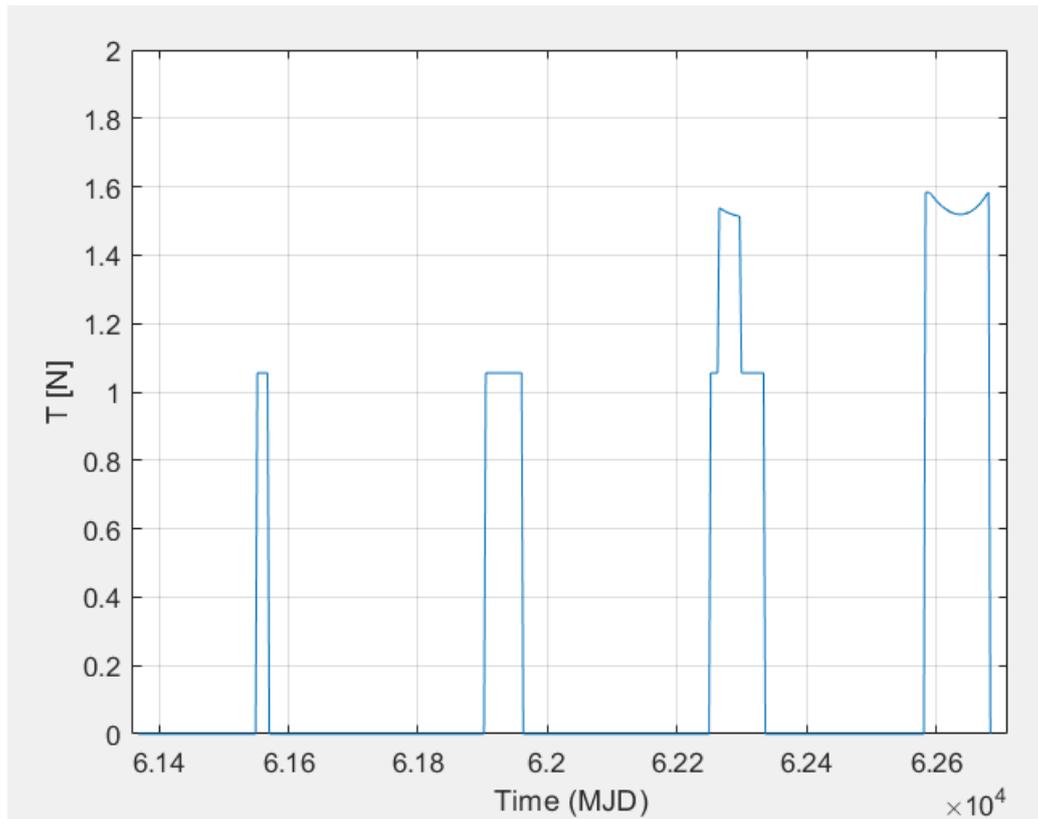


Figura 56: Valore assoluto della spinta, al progredire della missione

Nella figura precedente si possono vedere i periodi di tempo in cui lo spacecraft spinge per correggere la rotta di rendezvous con 2008 LD. In quasi quattro anni di missione, lo spacecraft spinge in quattro periodi di tempo, più o meno lunghi un centinaio di giorni. I primi due periodi di spinta arrivano a sfiorare i 1.1 N. Gli ultimi due sfiorano una spinta di 1.6 N. A causa della necessaria correzione di piano orbitale, lo spacecraft deve spingere anche perpendicolarmente al piano XY. Infatti, dalla figura successiva si può notare come la componente T_z sia tutt'altro che trascurabile, arrivando a superare in alcuni tratti il valore di 1 N.

In fig. 58, invece, si mostra l'andamento della potenza utilizzata dalla navicella durante questa tratta spaziale. L'andamento, nuovamente, ricalca quello della spinta complessiva.

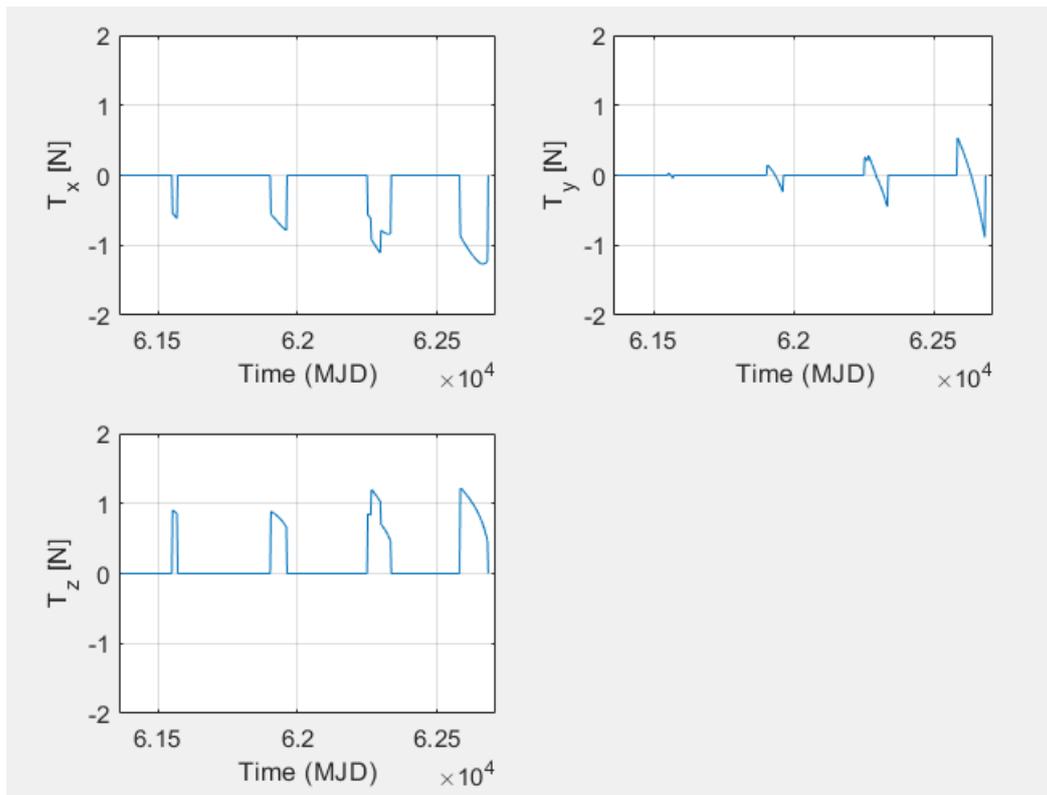


Figura 57: Componenti della spinta per l'outbound leg della missione 2008LD. Spinta in funzione del tempo.

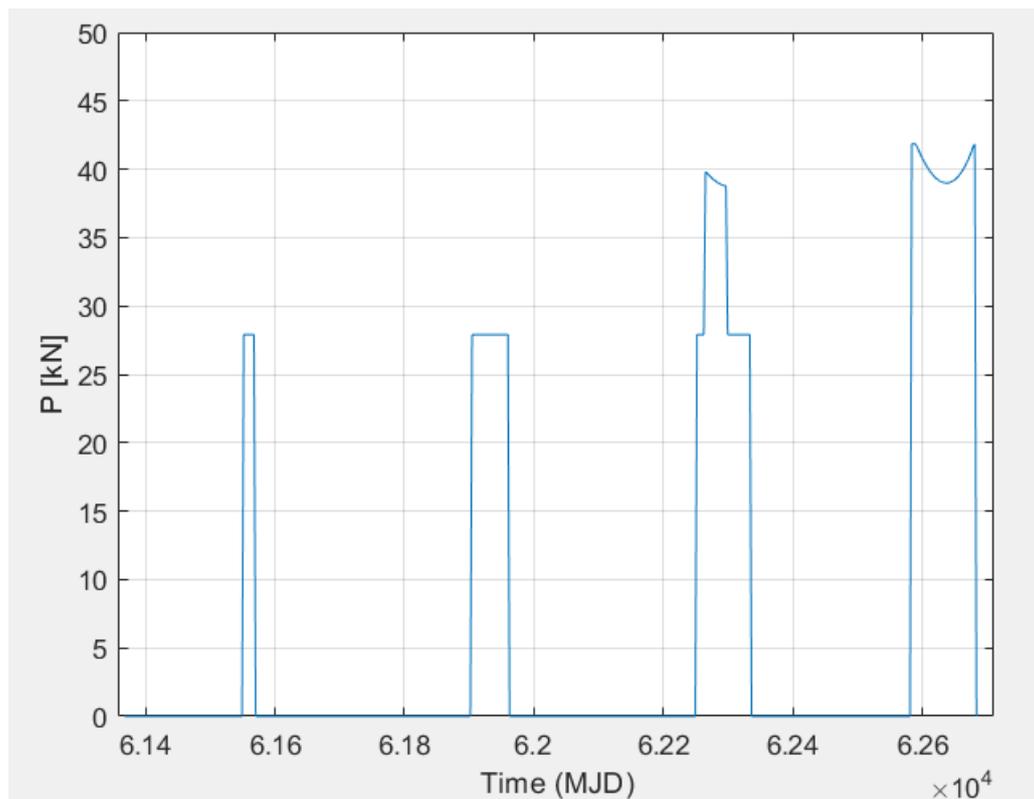


Figura 58: Potenza complessiva in funzione del tempo di missione. Tratto outbound della missione 2008 LD.

5.5.3. Missione di trasporto di 2008 LD nel cycler Terra – Marte S1L1

Riepilogando i risultati trovati in una tabella di sintesi, seguendo la prima via esposta in precedenza per l'outbound leg, la missione completa di trasporto dell'asteroide 2008 LD nel cycler Terra – Marte S1L1, presenta le seguenti caratteristiche (tab. 50):

Tabella 50: Riepilogo missione di trasporto dell'asteroide 2008 LD nel cycler Terra – Marte S1L1 (Prima Via per l'outbound leg)

Missione 2008 LD		
Outbound leg	Inizio missione (Terra 0)	23/11/2026
	Arrivo all'asteroide	1/7/2030
	Consumo / durata viaggio	≈ 1139 kg / ≈ 1316 giorni
Inbound leg	Partenza dall'asteroide	8/5/2031
	Fine missione (diretto inserimento nel cycler S1L1)	28/6/2035
	Massa finale	57.856 t
	Consumo / durata viaggio	4000 kg / ≈ 1511 giorni
Tempo di attesa all'asteroide	Durata stop	≈ 311 giorni
TOTALE missione	Consumo / durata viaggio	≈ 5139 kg / ≈ 3138 giorni

5.6. Riepilogo dei risultati ottenuti e confronto missioni

Concludendo, in quest'ultimo paragrafo si vogliono riassumere le tre missioni progettate di trasporto di asteroidi nel cycler S1L1, confrontandole, e mettendo in luce alcuni importanti aspetti. In tab. 51 si pongono a confronto le tre missioni.

Tabella 51: Riepilogo e confronto delle missioni di trasporto di 2006 UQ216, 2011 CL50 e 2008 LD in orbita cycler Terra – Marte

# Missione	Missione 2006 UQ216	Missione 2011 CL50	Missione 2008 LD
Partenza	3/12/2022	13/9/2024	23/11/2026
Arrivo (inserimento cycler scelto)	22/9/2033	1/5/2037	28/6/2035
Durata totale del viaggio	≈ 3950 <i>giorni</i>	≈ 4457 <i>giorni</i>	≈ 3138 <i>giorni</i>
Consumo totale (propellente)	≈ 4634 <i>kg</i>	≈ 4970 <i>kg</i>	≈ 5139 <i>kg</i>
Massa finale	556.218 <i>t</i>	362.450 <i>t</i>	57.856 <i>t</i>
Velocità finale di inserimento (V_{∞})	3.86 <i>km/s</i>	3.99 <i>km/s</i>	3.75 <i>km/s</i>

- La missione migliore dal punto di vista della massa finale è certamente la 2006 UQ216. Essa deve anche trasportare l'asteroide più grosso, quindi la sua maggiore capacità di trasporto è giustamente la più elevata. Inoltre, è anche la missione che usa meno propellente, il che ne fa anche la più economica.
- La missione 2008 LD è la più breve, poiché sfrutta l'inserimento diretto nel cycler senza fare uso di non-risonanti. Purtroppo, presenta l'inconveniente di essere quella meno economica, dato che non riesce a rimanere nei 5000 kg di propellente (seppur di poco, seguendo la "Prima Via") previsti per le missioni di questo genere.
- La missione 2011 CL50 vede il viaggio più lungo (4457 giorni circa). Essa sfrutta l'ultimo inserimento cycler utile, nel 2037.
- In generale, tutte e tre le missioni sono state progettate con successo, poiché riescono a trasportare un carico sufficiente in linea con le previsioni fornite sulla massa dei rispettivi asteroidi.
- Un fattore estremamente importante è che tutte e tre le missioni possono essere svolte contemporaneamente, poiché sfruttano diverse finestre di inserimento in S1L1. Non si rischiano perciò interferenze o manovre azzardate che possano metterne in pericolo il successo.
- In generale, il trasporto di asteroidi non è solo utile per lo scopo fondamentale di protezione dalle radiazioni per le future missioni umane su Marte o per le altre principali ragioni spiegate, ma anche per scongiurare pericoli da impatto verso la Terra. Questo vale specialmente per 2006 UQ216, il quale figura come pericolo per la Terra.

6. Conclusioni e prospettive future

Si sono esposti i risultati degli studi di progettazione di tre missioni di trasporto di asteroidi nell'orbita cycler Terra – Marte S1L1. Le tre missioni riguardano il trasporto degli asteroidi 2006 UQ216, 2011 CL50 e 2008 LD. Ognuna, con i suoi punti di forza, promette di poter essere implementata nella pratica con successo.

Alcuni aspetti fondamentali ed originali evidenziati nell'ambito del lavoro sono i seguenti.

- Si sono progettate le missioni di trasporto nel cycler S1L1 di tre asteroidi in naturale avvicinamento alla Terra. Questi studi sono tappe fondamentali per lo studio di future missioni umane su Marte.
- Ogni missione progettata rispetta il requisito di economicità presentato ad inizio tesi, in quanto si prevede un consumo di propellente inferiore ai 5000 kg posti come limite. Nel caso di 2008 LD, il consumo è di poco superiore a questa soglia, senza inficiare esageratamente sull'economia della missione.
- Un grande vantaggio è rappresentato dal fatto che le tre missioni possano essere svolte contemporaneamente, con l'utilizzo di tre veicoli ARM diversi, giacché sfruttano differenti inserimenti nel cycler. Questo permetterebbe di provvedere ad un maggior quantitativo di materiale protettivo per le radiazioni per future missioni umane verso Marte.
- Tutte e tre le missioni prevedono il trasporto di asteroidi entro il 2037, sfruttando al massimo le opportunità di inserimento discusse in questo lavoro. Ciò fornirebbe la protezione dalle radiazioni in tre punti diversi dell'orbita cycler in tempi brevi.
- Il materiale fornito dagli asteroidi riveste fondamentale importanza anche da altri punti di vista. In generale si tratta di materiale portato in orbita periodica Terra – Marte senza far fronte al costo che si avrebbe dovendolo lanciare dalla Terra.
- Le missioni qui studiate sono importantissime anche per scongiurare possibili impatti di asteroidi con la Terra (2006 UQ216 figura come pericolo potenziale a tal proposito).
- L'utilizzo con successo di un approccio di ottimizzazione basato sui metodi indiretti rafforza la dimostrazione della sua efficacia nell'affrontare problemi di traiettoria a bassa spinta continua con utilizzo di flyby multipli.
- Si è sviluppata e presentata una strategia standard per affrontare problemi di dinamica del volo spaziale di trasporto di asteroidi in orbita cycler Terra – Marte con propulsione elettrica, utilizzabile anche per altri casi di questo genere.

Si evidenziano inoltre alcuni aspetti riguardo a possibili sviluppi futuri, prima di applicazioni dirette verso Marte:

- Si è dimostrata la fattibilità di queste missioni dal punto di vista della meccanica del volo e della propulsione. In futuro potranno essere esaminati anche altri aspetti ingegneristici, quali quelli strutturale, sistemistico e l'impiego di particolari materiali, per poter progettare in maniera interdisciplinare le missioni in questione.
- Lo studio di sistemi innovativi di cattura degli asteroidi potrebbe essere fondamentale per accorciare il periodo di sosta che intercorre tra outbound leg ed inbound leg, permettendo un'ulteriore ottimizzazione della missione.
- Si è detto che le tre missioni qui esposte sono possibili entro il 2037, condotte da tre veicoli ARM diversi. Potrebbe essere interessante progettare la realizzazione delle tre missioni ad

opera di un unico veicolo, magari calcolando anche altri inserimenti cyclers, posteriori al 2039. Uno studio di trade-off finale permetterebbe di fare un bilancio di vantaggi e svantaggi nell'utilizzare più veicoli o un veicolo solo nel trasporto dei tre asteroidi.

Concludo rinnovando la speranza che questo lavoro di tesi possa contribuire alla spinta dello studio di nuove missioni spaziali, sempre più ardite e approfondite, riguardo la tematica di una futura colonizzazione umana di Marte, per rendere sempre meno fantascientifica la frase *“laddove nessun uomo è mai giunto prima”*.

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Simeoni, L. Casalino, “*Missions for Asteroid Insertion into Earth-Mars Cyclers*”, 69th International Astronautical Congress, Brema (Germania), 2018.
- [2] N. Strange, D. Landau, P. Chodas, “*Identification of Retrievable Asteroids with the Tisserand Criterion*”, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Agosto 2014.
- [3] <https://srag.jsc.nasa.gov/Publications/TM104782/techmemo.htm>
- [4] T. T. McConaghy et al, “*Notable Two-Synodic-Period Earth-Mars Cyclers*”, Journal of Spacecraft and Rockets, Marzo/Aprile 2006.
- [5] T. T. McConaghy, J.M. Lunguski, D. V. Byrnes, “*Analysis of a Broad Class of Earth-Mars Cyclers Trajectories*”, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Monterey (California), Agosto 2002.
- [6] D. F. Landau, J. M. Longuski, B. Aldrin, “*Continuous Mars Habitation with a Limited Number of Cyclers Vehicles*”, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Keystone (Colorado), Agosto 2006.
- [7] <https://space.stackexchange.com/questions/8047/cost-breakdown-of-delta-iv-heavy-launch>
- [8] Cap. 2: [fonte] - Appunti del Corso di Meccanica del Volo Spaziale, dalle lezioni della Prof.ssa M. Battipede, Politecnico di Torino, 2016.
- [9] <http://archive.oapd.inaf.it/othersites/sc/starchild/questions/question18.html>
- [10] G. Colasurdo, L. Casalino, “*Indirect Methods for the Optimization of Spacecraft Trajectories*”, comunicazione privata.
- [11] L. Casalino, “*Ottimizzazione Indiretta di Traiettorie Spaziali*”, comunicazione privata.
- [12] <https://newton.spacedys.com/neodys/>
- [13] <https://newton.spacedys.com/neodys/index.php?pc=1.1.0&n=2006+UQ216>
- [14] R. R. Bate, D. D. Mueller, J. E. White, “*Fundamentals of Astrodynamics*”, Dover Publications, Inc.