

POLITECNICO DI TORINO

**Corso di Laurea Magistrale
In Ingegneria Meccanica**

Tesi di Laurea Magistrale

**Sviluppo di un modello agli elementi finiti
per lo studio dell'interazione tra due pantografi e la catenaria
nei treni ad alta velocità**



Relatori

Prof. Stefano Marchesiello
Prof. Alessandro Fasana

Candidato

Alessandro Scarinzi

A.A.2017/2018

Alla mia famiglia.

Abstract

The pantograph-catenary interaction is one of the most critical issues in the field of railway engineering.

Its importance lays in the fact that it is the very foundation of the energy transfer from the overhead contact line to the attuation system of the train, strictly relating the quantity of the energy supply to the quality of the contact itself.

The will to improve as far as it is possible the velocity of the high-speed trains led to almost reach the critical wave propagation speed in the wires, making it harder and harder to obtain a smooth and continuous contact, and thus generating electrical arcs as well as unusual wear of components.

In the following work a non-linear finite element model has ben developed which implements the presence of two pantographs in order to study their interaction with the overhead contact line.

The modellization has been made paying particular attention to the numerical methods used and the non-linearity related issues, as not to obtain results that differ too much from the ones figuring in literature.

The model could be improved in the future by removing some of the simplifying hypothesis used as well as it could be used to investigate alternative constructive solutions, different from the ones nowadays utilised in the contact lines or in the design of pantographs.

Sommario

Lo studio dell'interazione tra pantografo-catenaria è uno degli aspetti più importanti dell'ingegneria in ambito ferroviario.

La sua importanza risiede nel fatto che essa è alla base del trasferimento di energia elettrica dalla linea aerea di contatto all'attuazione del treno, correlando strettamente la qualità di fruizione dell'energia alla bontà del contatto.

La necessità di aumentare sempre di più la velocità dei treni ha portato al suo avvicinamento alla velocità critica di propagazione delle onde nei cavi, rendendo sempre più difficile assicurare un contatto senza interruzioni, e causando di conseguenza archi elettrici ed usura anomala dei componenti.

Nel presente lavoro viene sviluppato un modello agli elementi finiti non lineare che implementa due pantografi per studiarne l'interazione con la catenaria soprastante.

La modellizzazione avviene prestando particolare attenzione alle soluzioni numeriche utilizzate ed alle non linearità presenti al fine di ottenere risultati conformi a quelli reperibili in letteratura.

Il modello potrà essere migliorato in futuro rimuovendo alcune delle ipotesi semplificative utilizzate oppure potrà indagare l'utilizzo di soluzioni alternative a quelle utilizzate attualmente nella costruzione delle linee aeree ferroviarie e nella progettazione dei pantografi.

INDICE

1	Introduzione.....	7
2	Dinamica Pantografo-Catenaria	8
2.1	La catenaria	8
2.2	Tipi di catenarie.....	9
2.3	Il pantografo	10
2.4	Normative di riferimento	11
3	Modello FEM	12
3.1	Matrici del sistema	12
3.1.1	Catenaria.....	12
3.1.2	Pantografo.....	20
3.1.3	Modello di contatto.....	21
3.2	Implementazione del modello di contatto.....	22
3.2.2	Configurazione statica	29
3.3	Metodo di integrazione numerica	31
3.3.1	Stabilità e convergenza.....	33
3.3.2	Esempio di applicazione del metodo	35
3.4	Analisi dinamica.....	41
3.4.1	Perdita di contatto.....	43
3.5	Simulazioni e risultati.....	43
3.5.1	Confronto con modello ad un solo pantografo	43
3.5.2	Dati generali	46
3.5.3	Risultati.....	50
3.5.4	Risultati algoritmo genetico per $v=275\text{ km/h}$	52
3.5.5	Risultati algoritmo genetico per $v=320\text{ km/h}$	56
4	Conclusioni.....	60
5	Bibliografia.....	61

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1 - Overhead Contact Line	8
Figura 2 - Tipologie di catenaria	9
Figura 3 - Sezione del filo di contatto	10
Figura 4 - Modello pantografo di riferimento	10
Figura 5 - Schema elemento Truss	13
Figura 6 - Schema elemento trave di Eulero-Bernoulli.....	15
Figura 7 - Schema rotazione sistemi di riferimento.....	17
Figura 8 - Sistema massa-molla-smorzatore equivalente al pantografo secondo normativa.....	20
Figura 9 - Schema del modello di contatto.....	21
Figura 10 - Visualizzazione grafica dei termini di accoppiamento	24
Figura 11 - Immagine pendino	25
Figura 12 - Tabella posizione e rigidezza pendini secondo normativa.....	26
Figura 13 - Tabella parametri concentrati pantografo secondo normativa.....	27
Figura 14 - Velocità del pantografo, velocità adimensionalizzata e relativa forza di contatto del pantografo	27
Figura 15- Catenaria in condizione statica	28
Figura 16 - Tabella risultati di riferimento	28
Figura 17 - Configurazione statica fune portante	30
Figura 18 - Schema pre-sag applicato	31
Figura 19 - Dissipazione numerica.....	35
Figura 20 - Due forze puntuali applicate su una corda in tensione.....	36
Figura 21 - Deformazione in corrispondenza del primo carico.....	36
Figura 22 - Deformazione in corrispondenza del secondo carico	37
Figura 23 - Deformazione in corrispondenza di un punto situato a $\pi/4$ di L.....	37
Figura 24 - Confronto metodo Bathe con vari step temporali	38
Figura 25 - Dettaglio confronto metodo Bathe con vari step temporali	39
Figura 26 - Confronto tra vari metodi di integrazione.....	40
Figura 27 - Dettaglio confronto tra vari metodi di integrazione.....	40
Figura 28 - Andamento forza su un pendino	42
Figura 29 - Confronto forze di contatto in presenza di un solo pantografo.....	44
Figura 30- Confronto con forza di contatto del secondo pantografo.....	45
Figura 31 - Confronto con entrambi i pantografi.....	46
Figura 32 - Dati catenaria da normativa	46
Figura 33 - Schema braccio di registrazione	47
Figura 34 - Esempio di popolazione iniziale	49
Figura 35 - Diagramma sintetico dei metodi di generazione dei figli	50
Figura 36 - Tabella riassuntiva dei risultati ottenuti per velocità di 275 km/h	51
Figura 37 - Tabella riassuntiva dei risultati per velocità di 320 km/h.....	51
Figura 38 - Forza media di contatto pantografo 1 e 2.....	52
Figura 39 - Deviazione standard 0-20 Hz per il pantografo 1 e 2	52
Figura 40 - Dettaglio deviazione standard 0-20 Hz pantografo 2.....	53
Figura 41 - Deviazione standard 5-20 Hz.....	53
Figura 42 - Deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2.....	53
Figura 43- Dettaglio deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2.....	54
Figura 44 - Forze massime pantografo 1 e 2	54
Figura 45 - Forze minime pantografo 1 e 2	54
Figura 46 - Spostamenti verticali dei punti di contatto pantografo 1 e 2.....	55

Figura 47 - Correlazione tra le varie grandezze oggetto di analisi	55
Figura 48 - Forza media di contatto pantografo 1 e 2.....	56
Figura 49 - Deviazione standard 0-20 Hz per il pantografo 1 e 2	56
Figura 50 - Deviazione standard 5-20 Hz.....	56
Figura 51 - Deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2.....	57
Figura 52 - Dettaglio deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2.....	57
Figura 53 - Forze massime pantografo 1 e 2	57
Figura 54 - Forze minime pantografo 1 e 2	58
Figura 55 - Spostamenti verticali dei punti di contatto pantografo 1 e 2.....	58
Figura 56 - Correlazione tra le varie grandezze in esame	59

1 INTRODUZIONE

Il contatto dinamico tra pantografo e catenaria è uno degli aspetti più critici per quanto concerne l'ingegneria ferroviaria.

Il problema nasce dal fatto che la velocità di strisciamento del pantografo sulla catenaria, è diventata, nei treni ad alta velocità, paragonabile a quella di propagazione delle onde nel mezzo, ovvero nelle funi costituenti la catenaria stessa. A causa di ciò nascono delle interazioni non desiderate dovute alla risposta dinamica dei cavi ed alla propagazione e riflessione delle onde, generate dal contatto con il pantografo, in corrispondenza, ad esempio, dei bracci di registrazione.

Lo scopo è quello di garantire la maggiore uniformità possibile nel contatto, per garantire il sufficiente apporto di energia elettrica al treno indipendentemente da tutte le sollecitazioni che nascono nel transito del treno stesso.

Esso rappresenta un limite tecnologico notevole nel raggiungimento di velocità sempre più elevate, anche a causa dell'usura generata sulle parti striscianti.

Nello studio di questa interazione si deve altresì tenere conto dell'interoperabilità tra i diversi sistemi ferroviari nei paesi europei.

L'obiettivo è di progettare pantografi che si adattino ad operare in linee diverse per corrente, tensione e geometrie, ma che mantengano comunque delle performance minime accettabili per quanto riguarda la qualità del contatto che si viene a generare.

E' quindi necessario uno studio approfondito della forza scambiata tra pantografo e catenaria lungo il contatto, che, a causa di vibrazioni e fenomeni di propagazione delle onde, è fortemente variabile.

Quando si verifica una perdita di contatto, si interrompe momentaneamente il flusso di corrente disponibile per il treno e vi è la possibilità che si verifichino archi elettrici tra la catenaria ed il pantografo determinando il deterioramento degli stessi.

Bisogna raggiungere un compromesso tra l'aver una forza scambiata sufficientemente elevata da evitare perdite di contatto e l'usura generata sulle parti, che è funzione della stessa forza.

Lo studio del fenomeno viene principalmente portato avanti tramite l'utilizzo di analisi agli elementi finiti, poiché le misure sul campo sono di difficile attuazione.

In questa tesi è stato sviluppato un modello agli elementi finiti non lineare per lo studio dell'interazione dinamica tra due pantografi e la catenaria soprastante.

Attraverso l'uso di questo software sarà quindi possibile, variando i parametri, avere una idea dell'impatto di soluzioni alternative a quelle utilizzate ad oggi.

2 DINAMICA PANTOGRAFO-CATENARIA

2.1 LA CATENARIA

La catenaria è un sistema di fili atto a garantire la disponibilità di corrente al pantografo sottostante.

Essa è formata da:

1. Corda portante (Catenary/messenger wire)
2. Filo di contatto (Contact wire)
3. Pendini (Droppers)

Il cavo di contatto è retto dai pendini, a loro volta collegati alla fune portante, a distanze normate.

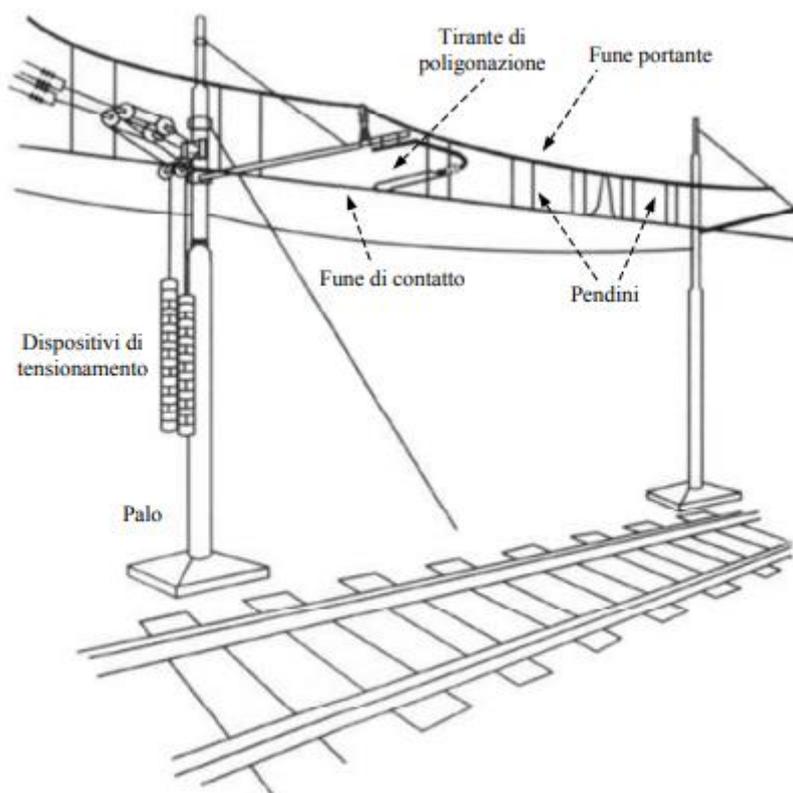


Figura 1 - Overhead Contact Line

La fune portante a sua volta è vincolata ai supporti, che si collegano al cavo di contatto tramite dei bracci di registrazione, necessari per non far giacere il cavo di contatto su di un unico piano verticale, per assicurare che il contatto con il pantografo avvenga su più punti e ridurre conseguentemente l'usura.

Le caratteristiche geometriche, quali ad esempio forma e lunghezza, sono normate, ed in generale tutti i cavi sono posti in tensione meccanicamente per una riduzione delle oscillazioni flessionali e dell'abbassamento per effetto del peso proprio.

2.2 TIPI DI CATENARIE

Le principali tipologie di catenaria sono le seguenti:

- Catenaria di tipo semplice
- Catenaria di tipo stitch
- Catenaria di tipo compound

Il modello di tipo compound è generalmente usato nelle linee giapponesi, e la sua caratteristica distintiva è quella di garantire una minore variazione di rigidità lungo il percorso, con l'intento di avere una interazione quanto più uniforme possibile con il pantografo.

Le catenarie di tipo stitch utilizzano un cavo "stitch" per migliorare l'uniformità della rigidità in corrispondenza dei supporti.

Infine le catenarie di tipo semplice utilizzano la posizione dei pendini come parametro da variare per ottenere diverse rigidità.

I primi due tipi di catenaria hanno naturalmente, in conseguenza della loro maggiore complessità, costi più elevati.

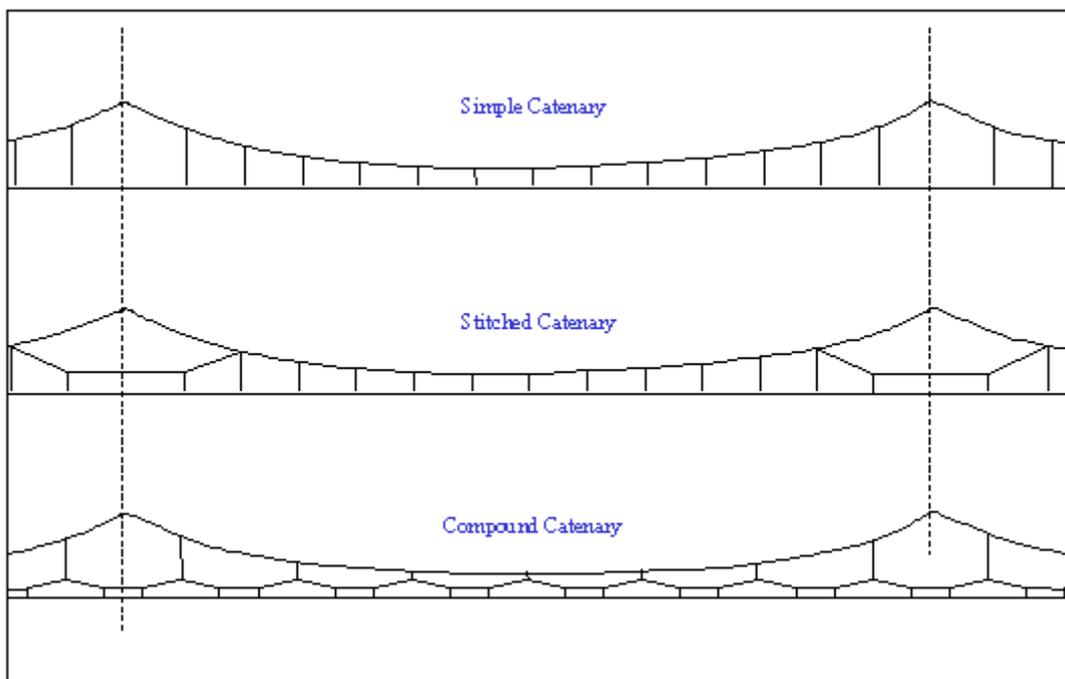


Figura 2 - Tipologie di catenaria

La sezione trasversale dei cavi ha, in generale, una geometria del seguente tipo:

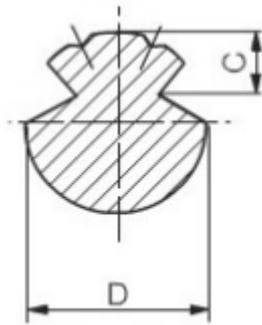


Figura 3 - Sezione del filo di contatto

2.3 IL PANTOGRAFO

I pantografi per le linee ad alta velocità sono del tipo a due stadi (quadrilatero inferiore e superiore), con la parte superiore (quadro) costituita da due pattini di contatto in grafite che si accoppiano al cavo di contatto.

Il cinematismo utilizzato permette solamente una traslazione verticale, la cui forza per l'attuazione è garantita da un motore elettrico che fornisce il precarico statico necessario al sollevamento.

La cerniera di collegamento tra i due quadrilateri è comunemente detta naso.

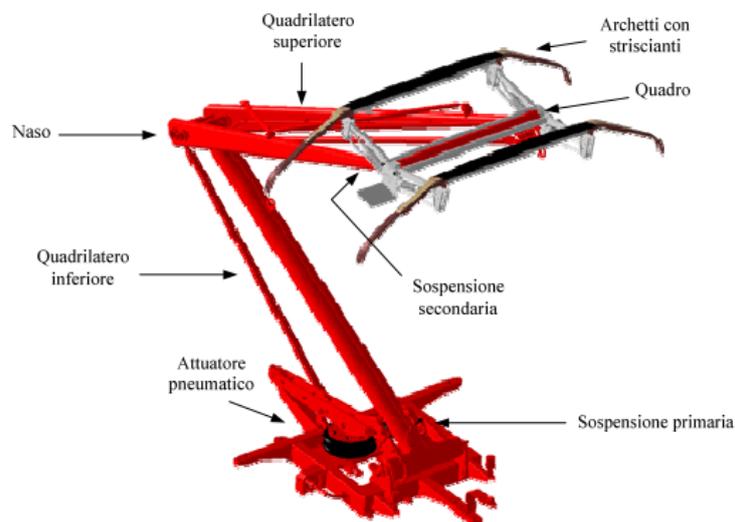


Figura 4 - Modello pantografo di riferimento

Come precedentemente detto, i pantografi generalmente vengono progettati per una specifica catenaria, tuttavia, negli ultimi anni è in atto uno sforzo condiviso per progettare pantografi quanto più possibile interoperabili, ovvero capaci di essere alimentati da reti con tensioni e correnti differenti nonché con diverse caratteristiche costruttive della catenaria.

Nei treni ad alta velocità attualmente in uso, la pratica è di montare due pantografi invece che uno, come conseguenza di ciò il programma sviluppato in questa tesi sarà in grado di studiarne la dinamica.

2.4 NORMATIVE DI RIFERIMENTO

Le norme di riferimento per quanto riguarda l'analisi effettuata sono:

1. EN50149 – Caratteristiche dei fili in rame e in lega di rame sagomati per linee aeree di contatto
2. EN50318 – Validazione della simulazione dell'interazione dinamica

3 MODELLO FEM

Si è scelto di analizzare il sistema preso in esame tramite l'utilizzo di un modello agli elementi finiti, creato in ambito Matlab.

Come è noto, per un'analisi di questo tipo è necessario scomporre il sistema nelle sue componenti fondamentali e procedere successivamente all'assemblaggio delle varie matrici per ottenere il sistema globale.

La forma canonica di un problema dinamico è la seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (3.01)$$

Dove \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} sono le matrici del sistema di massa, rigidità e smorzamento, \mathbf{f} è il vettore delle forzanti, e \mathbf{v} rappresenta il vettore delle coordinate generalizzate.

3.1 MATRICI DEL SISTEMA

3.1.1 Catenaria

Si suddividono la fune portante ed il filo di contatto in n elementi, ciascuno dei quali avrà due nodi, ed ognuno dei nodi avrà un numero di gradi di libertà congruente con il comportamento dell'elemento utilizzato. Il numero dei gradi di libertà utilizzati è strettamente connesso con il grado delle funzioni di forma che è possibile utilizzare, e, conseguentemente, con la "ricchezza descrittiva" che ogni tipo di elemento è in grado di garantire al problema, e la velocità di convergenza dello stesso.

Infatti i coefficienti dei vari monomi costituenti le funzioni di forma devono essere determinati imponendo che il loro valore, valutato sulle coordinate di un nodo, sia uguale allo spostamento in quel nodo.

Se questi coefficienti sono in numero superiore al numero degli spostamenti, il sistema non ammette soluzione in quanto sovradeterminato per il teorema di Rouché-Capelli.

A seconda del fatto che si tenga in considerazione il comportamento flessionale oppure no, abbiamo la possibilità di utilizzare rispettivamente il modello barra oppure il modello trave di Eulero-Bernoulli.

3.1.1.1 Modello barra

Gli elementi di questo tipo possono essere caricati solo nel piano e la loro deformazione rimane anch'essa nel piano, essi infatti non considerano il comportamento flessionale.

Il comportamento continuo è descritto dalla seguente equazione [Rif. 14]:

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (3.02)$$

Dove v è lo spostamento verticale della trave, μ è la massa per unità di lunghezza, T è la tensione assiale, $f(x, t)$ è la forza esterna.

Ogni nodo possiede 2 gradi di libertà, quindi ogni elemento possiede 4 gradi di libertà.

$$\mathbf{v} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2]^T \quad (3.03)$$

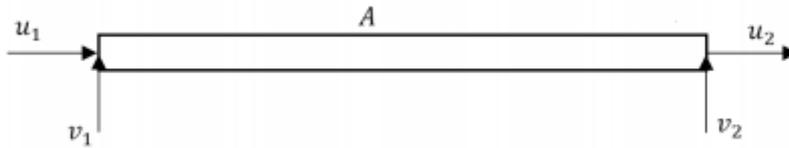


Figura 5 - Schema elemento Truss

Poiché ogni spostamento è indipendente, questo limita l'utilizzo delle possibili funzioni di forma a polinomi di grado 1, donando all'elemento la capacità di descrivere spostamenti che variano linearmente lungo l'elemento e deformazioni invece solamente costanti (che variano però a gradino da un elemento all'altro)

La matrice di massa di ciascun elemento di lunghezza l e densità ρ [Rif. 13]:

$$\mathbf{M}_{el} = \frac{\rho l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 \\ \text{Sym.} & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad (3.04)$$

Per quanto riguarda la matrice di rigidezza, essendo i cavi sottoposti ad una tensione costante, è la somma di un contributo K_{el}^e elastico ed uno K_{el}^g geometrico.

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_{el}^e + \mathbf{K}_{el}^g \quad (3.05)$$

Dove E è il modulo di Young e A è la sezione trasversale.

$$\mathbf{K}_{el}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.06)$$

Per quanto riguarda il contributo geometrico, esso si può ottenere applicando il principio dei lavori virtuali, ed utilizzando le funzioni di forma come funzioni interpolanti tra i valori che le variabili assumono nei nodi.

La matrice delle funzioni di forma dell'elemento ha il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} [N] &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \\ N_1 &= 1 - \frac{x}{l} \\ N_2 &= 1 - \frac{x}{l} \\ N_3 &= \frac{x}{l} \\ N_4 &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (3.07)$$

Dove l e x si riferiscono ad un singolo elemento.

Le funzioni di forma, come è facile notare, assumono sempre il valore 1 in un nodo e 0 in tutti quelli circostanti.

Ciascuna rigidezza $K_{el,ij}^g$ della matrice K_{el}^g è il risultato della seguente integrazione, nella quale si considera il carico assiale $T(x)$.

$$K_{el,ij}^g = \int_0^L T(x) \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} dx \quad (3.08)$$

Nel caso di forza assiale costante si ottiene quindi:

$$K_{el}^g = \frac{T}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ \text{Sym.} & & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.09)$$

La matrice risultante è :

$$K_{el} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ & \frac{T}{l} & 0 & -\frac{T}{l} \\ \text{Sym.} & & \frac{EA}{l} & 0 \\ & & & \frac{T}{l} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.1.1.2 Modello di trave di Eulero-Bernoulli:

Gli elementi di questo, caricati nel piano, possono ammettere spostamenti fuori dal piano stesso, essi, infatti, considerano il comportamento flessionale.

Il comportamento nel continuo è descritto dalla seguente equazione [Rif. 14]:

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (3.11)$$

Dove v è lo spostamento verticale della trave, μ è la massa per unità di lunghezza, E è il modulo di Young, I è il momento di inerzia, T è la tensione assiale, $f(x, t)$ è la forza esterna. Si nota che l'equazione si riduce a quella della barra se si elimina il contributo della rigidezza flessionale EI .

La discretizzazione tramite questo tipo di elementi finiti comporta un numero di gradi di libertà pari a 3 per ogni nodo, e quindi pari a 6 per ciascun elemento.

$$\mathbf{v} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T \quad (3.12)$$

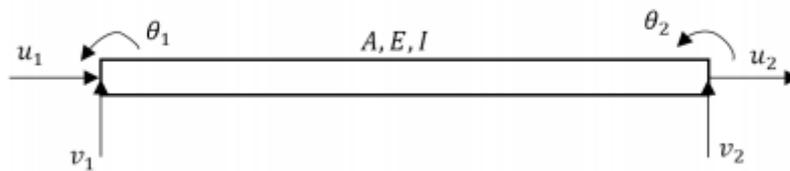


Figura 6 - Schema elemento trave di Eulero-Bernoulli

È molto importante notare come, essendo la deformazione definita come la derivata seconda dello spostamento per la teoria di Eulero-Bernoulli, sia possibile utilizzare funzioni di forma fino al 3° grado, permettendo quindi la descrizione di spostamenti che variano al quadrato e deformazioni che variano linearmente lungo l'elemento.

Questo fatto costituisce un fattore di maggiore “ricchezza descrittiva” dell'elemento, anche se ciò avviene al costo di appesantire il calcolo per l'introduzione di un grado di libertà in più per nodo rispetto alla barra.

È altresì importante ricordare che condizione fondamentale, per una descrizione fisicamente coerente con la realtà, è che l'elemento stesso sia “snello”, ovvero che la sua lunghezza sia maggiore di almeno 10 volte rispetto al raggio di inerzia della sezione trasversale; se così non dovesse essere si incorrerebbe in errore poiché la curvatura non sarebbe più uguale alla derivata seconda dello spostamento, ma conterrebbe un ulteriore fattore dovuto all'angolo di scorrimento.

Nella teoria della trave di Eulero-Bernoulli infatti si ammette come ipotesi che la sezione perpendicolare alla linea media della trave in configurazione indeformata, rimanga perpendicolare alla linea media anche nella configurazione deformata, e ciò è verificato solo per travi snelle.

Per considerare la descrizione di elementi più “tozzi”, si dovrebbe usare il modello di Timoshenko, il quale tuttavia è particolarmente complicato da implementare nei codici di calcolo, in quanto introduce una serie di problematiche aggiuntive, ed è in questo caso di scarso interesse.

La matrice di massa di ciascun elemento di lunghezza l , sezione A e densità ρ è [Rif. 13]:

$$\mathbf{M}_{el} = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ & & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 156 & -22l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La matrice di rigidezza è ancora la somma di due contributi:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_{el}^e + \mathbf{K}_{el}^g \quad (3.14)$$

La parte elastica, chiamata EI la rigidezza flessionale, è data da:

$$\mathbf{K}_{el}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Mentre per quanto riguarda il contributo geometrico, in analogia a quanto fatto precedentemente, si fa riferimento alle funzioni di forma, integrate sulla lunghezza dell'elemento:

$$\begin{aligned} [N] &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] & (3.16) \\ N_1 &= 1 - \frac{x}{l} \\ N_2 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3 &= x\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 \\ N_4 &= \frac{x}{l} \\ N_5 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_6 &= x\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l}\right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{el}^g = \frac{T}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ & & \frac{2l^2}{15} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{l^2}{30} \\ & & & 0 & \frac{0}{5} & 0 \\ \text{Sym.} & & & & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ & & & & & -\frac{l}{10} \\ & & & & & \frac{2l^2}{15} \\ & & & & & -\frac{l}{15} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

La matrice risultante è quindi:

$$\mathbf{K}_{el} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} + \frac{6T}{5l} & \frac{6EI}{l^2} + \frac{T}{10} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} - \frac{6T}{5l} & \frac{6EI}{l^2} + \frac{T}{10} \\ 0 & \frac{4EI}{l} + \frac{2Tl}{15} & \frac{2EI}{l} + \frac{Tl}{30} & 0 & \frac{6EI}{l^2} + \frac{T}{10} & \frac{2EI}{l} + \frac{Tl}{30} \\ \text{Sym.} & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{12EI}{l^3} + \frac{6T}{5l} & -\frac{6EI}{l^2} - \frac{T}{10} \\ 0 & & & 0 & -\frac{6EI}{l^2} - \frac{T}{10} & \frac{4EI}{l} + \frac{2Tl}{15} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Il momento di inerzia della sezione trasversale per entrambi i cavi è ricavabile dalla geometria degli stessi, cui fa riferimento la normativa EN50149.

3.1.1.3 Matrice di trasformazione

È necessario, successivamente, passare dalla descrizione del singolo elemento, alla descrizione dell'intero sistema; per fare ciò si utilizzano delle apposite matrici di trasformazione, per passare dalle coordinate locali a quelle globali.

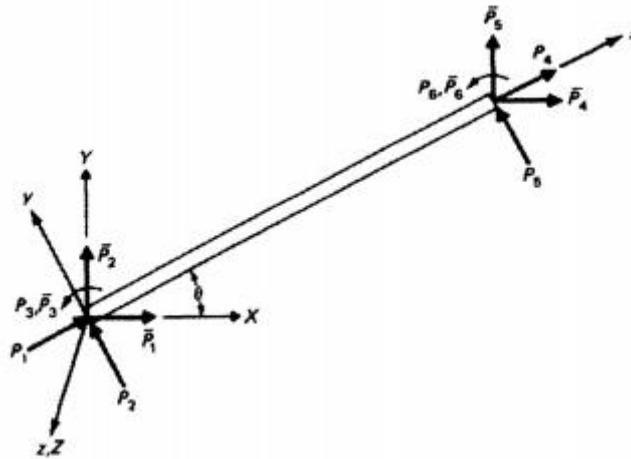


Figura 7 - Schema rotazione sistemi di riferimento

$$\mathbf{T}_{i,barra} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ 0 & 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{T}_{i,grave} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per valutare l'angolo di inclinazione si calcola la lunghezza $l_{el,i}$ dell'elemento:

$$l_{el,i} = \sqrt{(x_{el,i} - x_{el,i-1})^2 + (y_{el,i} - y_{el,i-1})^2} \quad (3.20)$$

Dove $x_{el,i}$ e $y_{el,i}$ sono le coordinate orizzontale e verticale dell'elemento i -esimo.

Noto $l_{el,i}$ l'angolo θ_i si calcola come:

$$\theta_i = \arcsin \left(\frac{y_{el,i} - y_{el,i-1}}{l_{el,i}} \right) \quad (3.21)$$

L'angolo di inclinazione deve essere comunque mantenuto piccolo durante la simulazione, poiché altrimenti si avrebbe un allungamento puramente fittizio dell'elemento.

Indicando con l'apice l le matrici in coordinate locali, le matrici di massa e rigidezza in coordinate globali saranno quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{el,i} &= \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{M}_{el,i}^l \mathbf{T}_i \\ \mathbf{K}_{el,i} &= \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{K}_{el,i}^l \mathbf{T}_i \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nel caso in esame non risulta necessario applicare tali matrici di trasformazione ai nodi del cavo di contatto, poiché questo si mantiene pressoché orizzontale.

È necessario tuttavia applicarle alla fune portante, dove è presente una inclinazione più consistente.

3.1.1.4 Assemblaggio delle matrici

Una volta definite le coordinate globali dei singoli elementi, le matrici possono essere assemblate per formare le matrici globali del cavo di contatto $\mathbf{M}_g^w, \mathbf{K}_g^w$ e fune portante $\mathbf{M}_g^m, \mathbf{K}_g^m$.

Le matrici vanno concatenate l'una con l'altra sommando i contributi relativi ad i nodi in comune.

$$K_g^m = \begin{bmatrix} \boxed{} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \boxed{} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \boxed{} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \boxed{} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \boxed{} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \boxed{} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \boxed{} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \boxed{} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \boxed{} & 0 \\ & & & & & & & & & \boxed{} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Le matrici relative ai singoli cavi così costruite vanno infine a definire quelle dell'intera catenaria :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \text{diag}\{\mathbf{M}_g^w, \mathbf{M}_g^m\} \\ \mathbf{K} &= \text{diag}\{\mathbf{K}_g^w, \mathbf{K}_g^m\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Lo smorzamento considerato, in accordo con la normativa, è di tipo proporzionale:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.25)$$

I coefficienti α e β sono anche essi definiti dalla norma.

Successivamente, anche i vettori di spostamento, velocità ed accelerazione, vengono concatenati nel medesimo modo.

$$\begin{cases} \mathbf{v}_d = \text{diag}(\mathbf{v}_w, \mathbf{v}_m) \\ \dot{\mathbf{v}}_d = \text{diag}(\dot{\mathbf{v}}_w, \dot{\mathbf{v}}_m) \\ \ddot{\mathbf{v}}_d = \text{diag}(\ddot{\mathbf{v}}_w, \ddot{\mathbf{v}}_m) \end{cases} \quad (3.26)$$

Otteniamo quindi l'equazione generale:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}_d + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}_d + \mathbf{K}\mathbf{v}_d = \mathbf{f} \quad (3.27)$$

3.1.1.5 Vincoli

La fune portante viene considerata vincolata come una trave appoggiata alle estremità, per cui i gradi di libertà iniziali e finali saranno vincolati secondo lo schema carrello-cerniera.

Per ogni campata verranno elise le righe e colonne relative alle coordinate generalizzate vincolate

Considerando la prima campata, chiamando 1 il primo nodo e n l'ultimo e ricordando che ogni nodo ha 3 gradi di libertà, le coordinate vincolate risulteranno per questa u_1, v_1, v_n .

Il filo di contatto invece si suppone vincolato rigidamente solo nel primo e ultimo nodo dell'intera struttura, lasciando gli altri nodi liberi di deformarsi.

3.1.2 Pantografo

Il modello suggerito dalla norma EN50318 è quello a parametri concentrati, il quale fa riferimento al sistema massa.molla-smorzatore in fig 8.

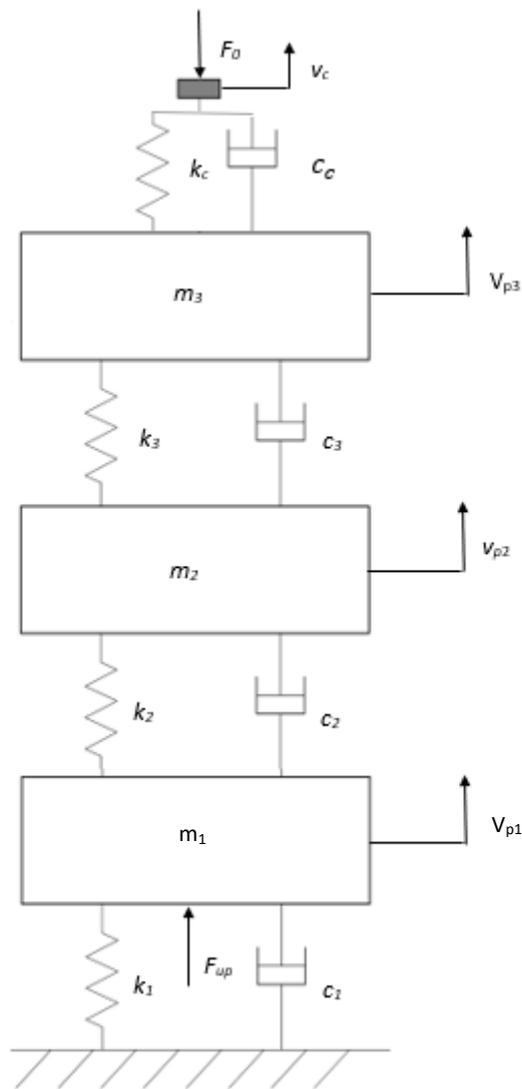


Figura 8 - Sistema massa-molla-smorzatore equivalente al pantografo secondo normativa

I valori delle masse, delle rigidzze e degli smorzamenti sono definiti dalla norma stessa.

Le 3 masse possono traslare solo verticalmente, e sono collegate tra di loro da un parallelo molla-smorzatore.

Una forza F_{up} permette il sollevamento delle masse in modo che si abbia un certo valore di precarico F_0 all'interfaccia pantografo-catenaria.

Tale precarico influisce sul valore medio della forza di contatto, funzione della velocità di percorrenza del treno, e viene scelto in modo che questo sia quanto più prossimo al valore ottimale.

Per valutare la forza di sollevamento F_{up} si esegue un calcolo statico sul pantografo, il cui risultato è [Rif. 15]:

$$F_{up} = (m_1 + m_2 + m_3)g + F_0 + k_1 \left(\frac{F_0 + m_3g + m_2g}{k_2} + \frac{F_0 + m_3g}{k_3} + \frac{F_0}{k_c} \right) \quad (3.28)$$

3.1.3 Modello di contatto

Particolarmente critica, ai fini della bontà del modello, è la definizione del contatto tra pantografo e catenaria.

Nel nostro caso faremo uso della definizione di una forza di contatto, intesa come forza scambiata tra pantografo e catenaria.

In particolare si è scelto di utilizzare il metodo penalty, che consiste nella valutazione di tale forza in funzione della penetrazione relativa delle due superfici tramite una fattore di penalità, che generalmente è una rigidità k_c .

Alcuni modelli più complessi fanno uso anche di uno smorzamento di contatto, il quale tuttavia risulta essere difficilmente quantificabile.

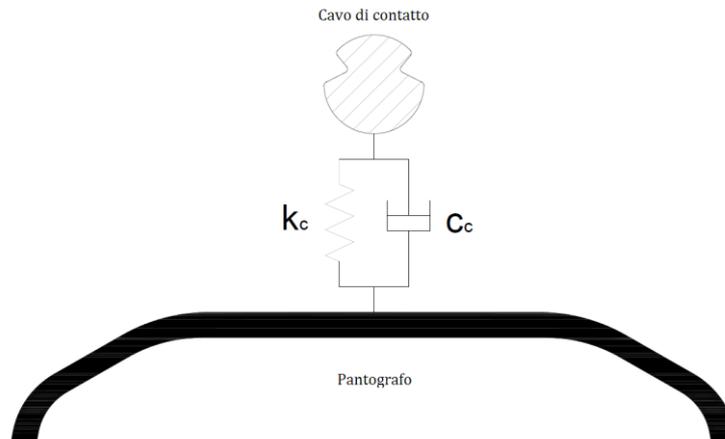


Figura 9 - Schema del modello di contatto

La forza di contatto F_c è quindi espressa come funzione del moto relativo di traslazione del cavo di contatto v_c e archetto del pantografo v_p , valutati nella posizione assunta dal pantografo lungo la catenaria all'istante di tempo considerato.

$$F_c(t) = k_c(v_p(t) - v_c(t)) + c_c(\dot{v}_p(t) - \dot{v}_c(t)) \quad (3.29)$$

Nel caso di perdita di contatto non vi sarà alcuna penetrazione tra i due corpi, per cui la forza di contatto assume un valore negativo.

$$F_c = 0 \quad \text{se} \quad v_p - v_w < 0 \quad (3.30)$$

Essa viene quindi posta in questo caso uguale a zero, con evidente senso fisico di assenza di contatto.

3.2 IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO DI CONTATTO

Per implementare il fattore di penalità, si è scelto di utilizzare l'approccio sviluppato da Y. H. Cho [Rif. 5]

Si considera quindi un pantografo massa-molla-smorzatore, riportato in figura 8, tenendo conto però della presenza anche di uno smorzamento di contatto c_c in parallelo alla molla k_c .

Si ottengono quindi le equazioni relative al solo sistema pantografo:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{v}_{p1} + k_2(v_{p1} - v_{p2}) + c_2(\dot{v}_{p1} - \dot{v}_{p2}) + k_1 v_{p1} + c_1 \dot{v}_{p1} = F_{up} - m_1 g \\ m_2 \ddot{v}_{p2} + k_2(v_{p2} - v_{p1}) + c_2(\dot{v}_{p2} - \dot{v}_{p1}) + k_3(v_{p2} - v_{p3}) + c_3(\dot{v}_{p2} - \dot{v}_{p3}) = -m_2 g \\ m_3 \ddot{v}_{p3} + k_c(v_{p3} - v_c) + c_c(\dot{v}_{p3} - \dot{v}_c) + k_3(v_{p3} - v_{p2}) + c_3(\dot{v}_{p3} - \dot{v}_{p2}) = -m_3 g \end{cases} \quad (3.31)$$

Nel termine di accoppiamento $k_c(v_{p1} - v_c) + c_c(\dot{v}_{p1} - \dot{v}_c)$ le coordinate espresse da v_c rappresentano gli spostamenti del filo di contatto in corrispondenza del punto di contatto con il pantografo

$$v_c(t) = v_w(x_p(t)) \quad (3.32)$$

dove $x_p(t)$ rappresenta la posizione del pantografo, che si muove con velocità v_p , all'istante t .

Scomponiamo ora il vettore v_c nella deformazione statica relativa alla catenaria v_{c_s} e quella dinamica $v_{c_d}(t)$:

$$v_c(t) = v_{c_s} + v_{c_d}(t) \quad (3.33)$$

La discretizzazione spaziale viene effettuata tramite elementi barra oppure travi di Eulero-Benoulli, per cui, tramite le funzioni di forma possiamo riscrivere il vettore v_{c_d} , in funzione del valore della variabile ai nodi.

$$v_{c_d} = N(x_p) \mathbf{v}_w|_{x_p} \quad (3.34)$$

Sostituendo nell'equazione di ottiene il sistema a seguire:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{v}_{p1} + k_2(v_{p1} - v_{p2}) + c_2(\dot{v}_{p1} - \dot{v}_{p2}) + k_1 v_{p1} + c_1 \dot{v}_{p1} = F_{up} - m_1 g \\ m_2 \ddot{v}_{p2} + k_2(v_{p2} - v_{p1}) + c_2(\dot{v}_{p2} - \dot{v}_{p1}) + k_3(v_{p2} - v_{p3}) + c_3(\dot{v}_{p2} - \dot{v}_{p3}) = -m_2 g \\ m_3 \ddot{v}_{p3} + k_c(v_{p3} - v_{c_s}(x_p) - \mathbf{N}(\mathbf{x}_p)\mathbf{v}_d|_{x_p}) + c_c(\dot{v}_{p3} - \mathbf{N}(\mathbf{x}_p)\dot{\mathbf{v}}_d|_{x_p}) + \dots \\ \dots + k_3(v_{p3} - v_{p2}) + c_3(\dot{v}_{p3} - \dot{v}_{p2}) = -m_3 g \end{cases} \quad (3.35)$$

Dove il termine $-k_c v_{c_s}(x_p)$, portato al secondo membro, può essere considerato come una forzante statica di accoppiamento :

$$f_{couple}^S = k_c v_{c_s}(x_p) \quad (3.36)$$

Da cui:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{v}_{p1} + k_2(v_{p1} - v_{p2}) + c_2(\dot{v}_{p1} - \dot{v}_{p2}) + k_1 v_{p1} + c_1 \dot{v}_{p1} = F_{up} - m_1 g \\ m_2 \ddot{v}_{p2} + k_2(v_{p2} - v_{p1}) + c_2(\dot{v}_{p2} - \dot{v}_{p1}) + k_3(v_{p2} - v_{p3}) + c_3(\dot{v}_{p2} - \dot{v}_{p3}) = -m_2 g \\ m_3 \ddot{v}_{p3} + k_c(v_{p3} - \mathbf{N}(\mathbf{x}_p)\mathbf{v}_d|_{x_p}) + c_c(\dot{v}_{p3} - \mathbf{N}(\mathbf{x}_p)\dot{\mathbf{v}}_d|_{x_p}) + \dots \\ \dots + k_3(v_{p3} - v_{p2}) + c_3(\dot{v}_{p3} - \dot{v}_{p2}) = f_{couple}^S - m_3 g \end{cases} \quad (3.37)$$

Le matrici di un singolo pantografo si ricavano quindi rimuovendo i termini relativi all'accoppiamento dei due sistemi:

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Le matrici totali del sistema comprendenti l'intera catenaria e i due pantografi, sono quindi ottenute come segue:

$$\mathbf{M}_{tot} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}_{p1}] & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{M}_{p2}] \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{tot} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}_{p1}] & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{C}_{p2}] \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{tot} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{K}_{p1}] & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{K}_{p2}] \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{v}_{tot} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_d \\ v_{p1} \\ v_{p2} \\ v_{p3} \\ v_{p1} \\ v_{p2} \\ v_{p3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_{tot} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ F_{up} - m_1 g \\ -m_2 g \\ -m_3 g \\ F_{up} - m_1 g \\ -m_2 g \\ -m_3 g \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

L'interazione tra il sistema pantografo e quello della catenaria è modellizzata utilizzando le funzioni di forma, poiché le coordinate spaziali del punto di contatto variano nel tempo.

Le seguenti matrici vanno quindi aggiunte alle matrici totali del sistema, per ognuno dei due pantografi, nelle posizioni adeguate:

$$\mathbf{K}_{couple} = k_c \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_p)\mathbf{N}(\mathbf{x}_p) & -\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_p) \\ -\mathbf{N}(\mathbf{x}_p) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{C}_{couple} = c_c \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_p)\mathbf{N}(\mathbf{x}_p) & -\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_p) \\ -\mathbf{N}(\mathbf{x}_p) & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici sopra mostrate, nel caso di elementi trave di Eulero-Bernoulli, presentano una dimensione di 7x7, poiché le sole matrici di forma sono composte da vettori di 6 elementi.

L'accoppiamento dei due sistemi si completa aggiungendo al vettore delle forzanti la parte relativa alle forze che nascono dalla deformazione statica della catenaria:

$$\mathbf{f}_{couple}^s = \begin{pmatrix} -k_c v_{c_s}(\mathbf{x}_p)\mathbf{N}^T(\mathbf{x}_p) \\ k_c v_{c_s}(\mathbf{x}_p) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Il sistema di equazioni totale può quindi essere scritto come:

$$\mathbf{M}_{tot}\ddot{\mathbf{v}}_{tot} + \mathbf{C}_{tot}\dot{\mathbf{v}}_{tot} + \mathbf{K}_{tot}\mathbf{v}_{tot} = \mathbf{f}_{tot} \quad (3.43)$$

Si nota che il sistema appena descritto è un sistema tempo-variante, poiché le matrici che lo compongono cambiano in relazione alla posizione dei pantografi.

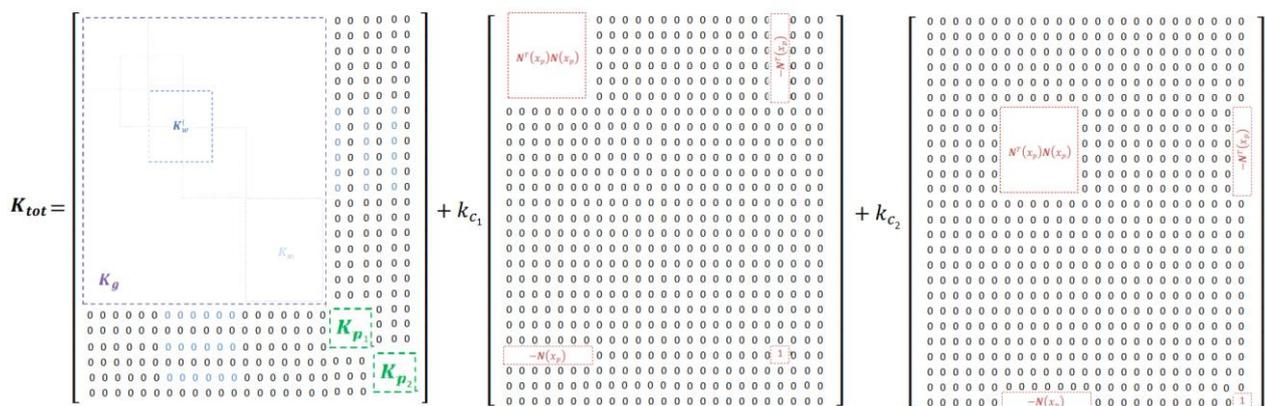


Figura 10 - Visualizzazione grafica dei termini di accoppiamento

Il cuore del programma che esegue la simulazione FEM in ambiente Matlab è l'integratore numerico.

In esso si è quindi proceduto ad aggiungere i cicli necessari a calcolare l'aggiornamento degli indici che permettono di sommare i contributi di accoppiamento nelle posizioni corrette.

Per quanto riguarda il secondo pantografo, esso è stato modellizzato come se esso agisse sul primo nodo della catenaria, che si ricorda essere vincolato, per il tempo necessario al primo pantografo a percorrere l'interasse.

Questo si traduce nella presenza di un certo numero di “passi vuoti”, ovvero una serie di zeri all'inizio dei vettori riguardanti il secondo pantografo, che verranno poi graficamente eliminati per dare risalto ai valori significativi di ogni grafico.

Inoltre il programma permette lo “spegnimento” di uno dei pantografi, in modo da verificare che i risultati ottenuti in questo caso siano uguali alla simulazione che ne contiene uno solo.

3.2.1.1 Pendini

I pendini sono modellizzati come molle non lineari, per cui il pendino i -esimo avrà una rigidezza pari a:

$$k_{d,i} = \begin{cases} \frac{E_d A_d}{l_{d,i}}, & \text{in tensione} \\ 0, & \text{in compressione} \end{cases} \quad (3.44)$$

Dove E_d è il modulo elastico del materiale e A_d è la sezione trasversale.

Il modello risulta essere non lineare proprio a causa dei pendini, infatti essi si comportano come una barra soggetta a sforzo assiale quando sono in tensione, mentre in compressione il loro contributo di rigidezza risulta essere nullo.

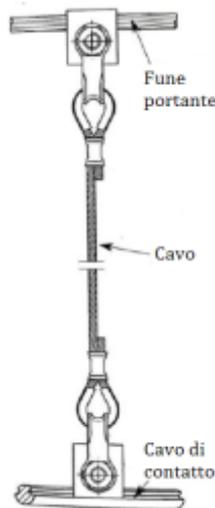


Figura 11 - Immagine pendino

Il contributo di rigidezza di ogni pendino è quindi rappresentato dalla matrice di rigidezza dell'elemento barra, quando in tensione:

$$\mathbf{K}_{d,i} = k_{d,i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Per quanto riguarda la matrice di massa di un pendino, essa viene costruita distribuendo ugualmente la massa su due nodi adiacenti, considerando una certa densità ρ_d e una certa massa dei morsetti di collegamento (masse sospese) con il cavo di contatto m_{sw} e con la fune portante m_{sm} .

$$M_{d,i} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_d A_d l_{d,i}}{2} + m_{sw} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_d A_d l_{d,i}}{2} + m_{sm} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Dropper	support	1	2	3	4	5	6	7	8	9	support
X [m]	0	4,5	10,25	16,0	21,75	27,5	33,25	39,0	44,75	50,5	55
sag [mm]	0	0	24	41	52	55	52	41	24	0	0
dropper stiffness for tension [kN/m]		197	223	247	264	269	264	247	223	197	
e [mm/N]	0,206	0,166	0,273	0,346	0,388	0,400	0,388	0,344	0,273	0,164	0,206
dropper length [m]		1,023	0,902	0,815	0,764	0,747	0,764	0,815	0,902	1,023	

Figura 12 - Tabella posizione e rigidezza pendini secondo normativa

In fig. 12 sono riportate, secondo normativa EN50318, le posizioni, le rigidezze e le lunghezze di ciascun pendino.

3.2.1.2 Normativa di riferimento

Per simulare correttamente il fenomeno dell'interazione tra il pantografo e la catenaria si fa riferimento alla norma CEI EN50318, che stabilisce i parametri della simulazione e i range di risultati accettabili per validare il modello utilizzato.

3.2.1.2.1 Pantografo

I dati del pantografo sono riassunti nella figura 13:

		AC	DC
Reduced dynamic mass [kg]	m_1	6,0	10,93
	m_2	9,0	11,28
	m_3	7,5	15,12
Damping [Ns/m]	c_1	100	121
	c_2	0,1	0
	c_3	45,0	20
Stiffness [N/m]	k_1	160,0	1
	k_2	15 500,0	10 600
	k_3	7 000,0	4 500

Figura 13 - Tabella parametri concentrati pantografo secondo normativa

Viene applicato dal pantografo un valore medio di forza di contatto dipendente dalla velocità in accordo alla curva speed-preload definita dal TSI (Technical Specifications for Interoperability) vigente in Europa.

Nella simulazione, considerando due pantografi, essi sono posti a 200 m, il quale è il minimo valore per applicazioni ad alta velocità in Europa secondo il TSI.

Con questa distanza, la velocità critica che cade nel range di interesse è 272 km/h, molto vicina ai 275 km/h della simulazione. Con “velocità critica” si intende una velocità alla quale il tempo che dista il passaggio dei due pantografi è un multiplo intero di uno dei periodi di oscillazione naturali della catenaria.

Speed (km/h)	V/V_w (%)	Mean contact force (N)
10		100, 200
230	50	121
275	60	143
320	70	169
365	80	169

Figura 14 - Velocità del pantografo, velocità adimensionalizzata e relativa forza di contatto del pantografo

3.2.1.2.2 Linea aerea di contatto

Il numero di campate nel modello è pari a 18, ciascuna delle quali lunga 55 m e avente 9 pendini di cui sono note le posizioni.

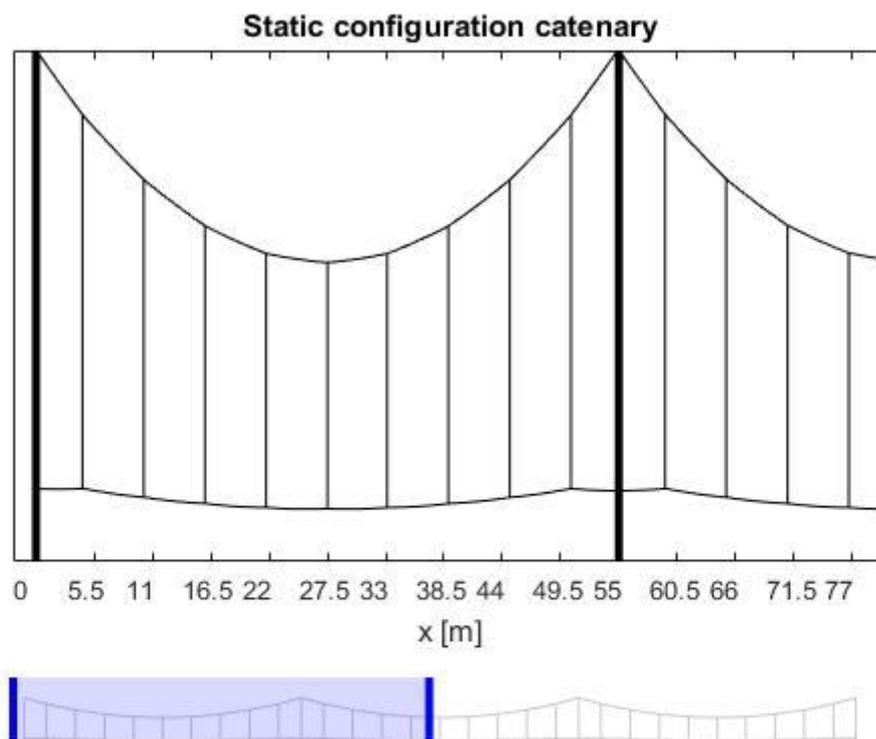


Figura 15- Catenaria in condizione statica

3.2.1.2.3 Risultati attesi

Al fine di validare il modello i risultati da esso prodotti devono ricadere tra i valori ammessi dalla tabella indicata nella normativa.

Reference model ID according to Table 3	Range of results			
	1		2	
Speed [km/h]	275		320	
Pantograph	1	2	1	2
Pantograph distance [m]	200		200	
F_m [N]	137–146	138–147	150–173	158,5–172,5
σ [N]	31,9–34,8	50,0–54,5	49–63	30–44
σ (0–5 Hz) [N]	25,6–28,9	41,2–45,4	38–44	14–23
σ (5–20 Hz) [N]	16,2–23,1	25,2–34,7	29–46	25–38
Actual maximum of contact force [N]	211–244	241–290	280–343	247–317
Actual minimum of contact force [N]	71–86	14–50	50–82	21–86
Range of vertical displacement of the point of contact [mm]	38–49	53–70	39–51	18–35
Maximum uplift at support [mm]	37–54		52–64	
Percentage of loss of contact [%]	0	0	0	0

Figura 16 - Tabella risultati di riferimento

Questi risultati sono ottenuti da vari metodi di simulazione indipendenti, e ciò spiega l'ampio range.

3.2.2 Configurazione statica

La configurazione statica della catenaria risulta essere particolarmente importante in questo tipo di simulazione poiché influenza fortemente il comportamento dinamico del sistema.

Nella normativa viene stabilito un valore fisso di rigidezza in trazione dei pendini, non dipendente dalla lunghezza degli stessi, che si ricorda essere variabile.

Questa assunzione ci permette di calcolare indipendentemente la deformata della fune portante e del filo di contatto, e di collegarle successivamente.

3.2.2.1 Fune portante

La fune portante è considerata come una serie di barre o di travi di Eulero-Bernoulli, vincolate all'estremità di ogni campata e soggette al peso proprio.

L'equazione del moto nel caso statico si riduce a:

$$K_g^m \mathbf{v}_{m_s} = \mathbf{f}_{m_s} \quad (3.47)$$

Dove con il pedice s si indicano le condizioni statiche. Analogamente a quanto fatto prima, anche il vettore delle forzanti globali \mathbf{f}_{tot} viene assemblato a partire dai vettori delle forzanti dei singoli elementi barra o trave di Eulero-Bernoulli:

Per elemento barra:

$$\mathbf{f}_{el,barra}^m = \left[-T_m \quad -\frac{\mu_m g l_m}{2} \quad T_m \quad -\frac{\mu_m g l_m}{2} \right]^T \quad (3.48)$$

Per elemento trave:

$$\mathbf{f}_{el,trave}^m = \left[-T_m \quad -\frac{\mu_m g l_m}{2} \quad -\frac{\mu_m g l_m^2}{12} \quad T_m \quad -\frac{\mu_m g l_m}{2} \quad \frac{\mu_m g l_m^2}{12} \right]^T \quad (3.49)$$

Al vettore delle forzanti andrà altresì aggiunto il contributo generato dal peso dei pendini e del cavo di contatto.

Poiché il peso si scarica lungo i pendini, esso verrà aggiunto ai gradi di libertà verticali dei nodi della fune portante in corrispondenza dei pendini stessi

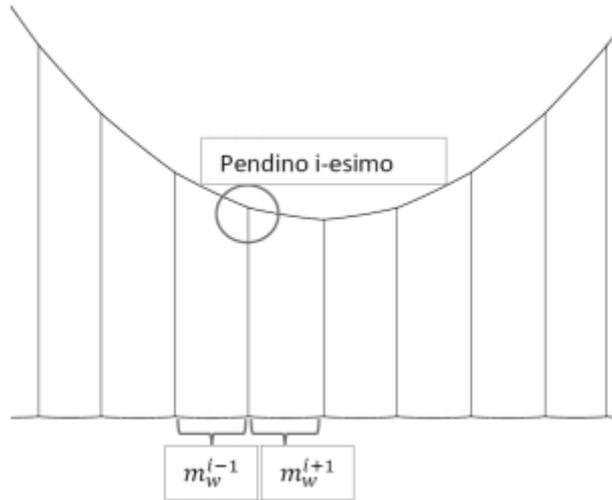


Figura 17 - Configurazione statica fune portante

Al nodo della fune portante relativo al pendino i-esimo andrà quindi aggiunta la quantità:

$$-g \frac{m_w^{i-1} + m_w^{i+1}}{2} - g(m_{s_w} + m_{s_m}) - \rho_d A_d l_{d,i} \quad (3.50)$$

Dove m^w indica la massa della porzione di cavo di contatto interessata.

3.2.2.2 Filo di contatto

Il cavo di contatto è costituito da elementi barra o trave di Eulero-Bernoulli ed è sorretto in determinati punti dai pendini.

La normativa suggerisce di considerare i punti di contatto con i pendini come giacenti su una retta orizzontale, e successivamente calcolare la lunghezza dei pendini stessi come abbassamento della fune portante, nota la deformata e la distanza iniziale tra i cavi, pari a 1,2 m.

Analogamente a quanto fatto in precedenza si parte dal vettore delle forzanti del singolo elemento, avente la stessa struttura di quello della fune portante, e successivamente si valuta la deformata statica dall'equazione:

$$K_g^w \mathbf{v}_{w_s} = \mathbf{f}_{w_s} \quad (3.51)$$

Si valuta inoltre la forza interna agente su ciascun pendino come:

$$R_{d,i} = g \left(\frac{m_w^{i-1} + m_w^{i+1}}{2} + m_{s_w} \right) \quad (3.52)$$

Tale forza è utile per conoscere l'allungamento di ciascun pendino, e quindi la sua lunghezza iniziale.

L'allungamento di ciascun pendino è dato da:

$$\Delta v_i = \frac{R_{d,i}}{K_d} \quad (3.53)$$

3.2.2.3 Pre-sag

Le variazioni di rigidità e la propagazione delle onde nelle catenarie ferroviarie sono le fonti principali di perdita di contatto tra pantografo e catenaria.

Si introduce quindi un “pre-sag” per cercare di compensare la variazione di rigidità, ovvero un abbassamento intenzionale del filo di contatto al centro della campata rispetto ai supporti.

In questo modo il pantografo deve sollevarsi di più al centro della campata a causa del pre-sag, e come risultato l’altezza a cui opera il pantografo varierà meno.

È stato dimostrato che per velocità inferiori ai 200 km/h esso garantisce una migliore qualità del contatto, poiché a tali velocità il comportamento statico è ancora dominante e l’elasticità è di grande importanza per il comportamento del sistema.

La quantità ottimale di pre-sag per minimizzare le variazioni della forza di contatto determinata da parametri quali la velocità, la lunghezza di una campata, l’uplift, e il coefficiente di variazione della rigidità.

Da normativa EN 50318, è previsto un pre-sag parabolico che presenta un massimo al centro pari all’1% della lunghezza della campata.

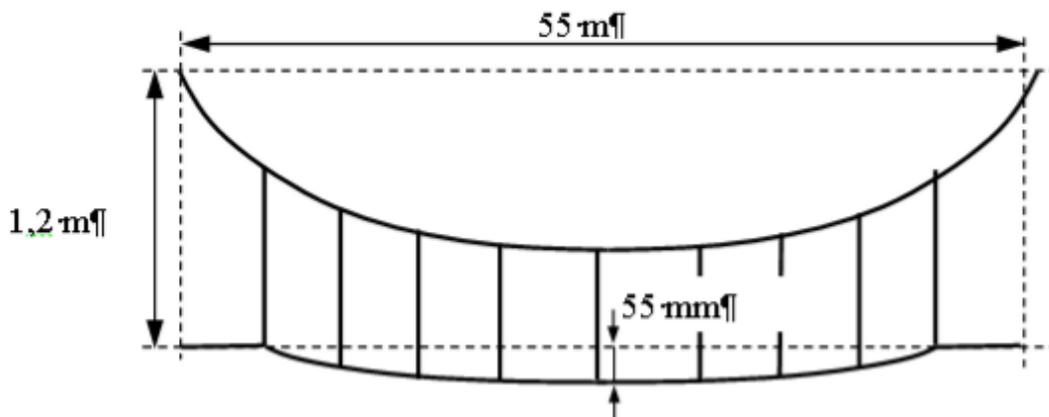


Figura 18 - Schema pre-sag applicato

3.3 METODO DI INTEGRAZIONE NUMERICA

Il sistema, come si ricorda, ha il seguente tipo di equazione:

$$M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = R(t) \quad (3.54)$$

Questo tipo di equazione può essere risolta in due modi differenti, attraverso l’analisi modale o attraverso metodi di integrazione diretta.

L’analisi modale lineare calcola la risposta dinamica in funzione della sovrapposizione dei modi propri di vibrare della struttura.

I metodi di integrazione diretta sono particolarmente indicati quando il numero e le frequenze dei modi propri sono considerevoli, tuttavia la loro bontà dipende strettamente dalla scelta dei parametri, che deve essere adeguata al tipo di problema preso in esame.

Tali metodi possono anche essere applicati a casi in cui vi siano presenti delle non linearità, come ad esempio nel nostro problema, nel quale la linearità viene meno a causa della definizione delle proprietà dei pendini, che presentano una rigidità a trazione ma nessuna resistenza alla compressione.

I metodi di integrazione diretta sono basati, anche se in misura diversa tra loro, sulle differenze finite temporali che prevedono la suddivisione dell'asse dei tempi in intervalli h , che, a seconda dei metodi possono essere tutti uguali oppure variare lungo l'asse dei tempi.

Essi possono essere espliciti o impliciti, nel primo caso, chiamato anche differenza finita in avanti, o metodo di Eulero in avanti, i valori ad un certo istante temporale sono calcolati in funzione di quelli al passo temporale precedente; nel secondo caso, invece, chiamato anche differenze finite all'indietro o metodo di Eulero all'indietro, i valori all'istante $n+1$ sono calcolati in funzione delle variabili valutate nello stesso istante.

Per l'integrazione nel tempo di tipo esplicito comunemente si usa il metodo delle differenze finite centrali. Per l'integrazione implicita, invece, sono stati proposti un grande numero di metodi, e tra questi quelli maggiormente utilizzati sono quello dei trapezi oppure i metodi alpha.

Considerando l'analisi lineare, è noto che il metodo dei trapezi sia incondizionatamente stabile, ovvero convergente ad una soluzione per qualsiasi valore del passo temporale, con una accuratezza del secondo ordine, ovvero con un errore proporzionale al quadrato del passo temporale.

Tuttavia, nel caso di problemi non lineari esso ha dimostrato di poter diventare instabile, non rispettando le condizioni sulla conservazione della quantità di moto e dell'energia.

Un approccio che è stato utilizzato è stato quello di introdurre dello "smorzamento" nel metodo di integrazione tramite l'introduzione di parametri aggiuntivi, e ciò ha portato alla nascita della famiglia dei metodi alpha.

L'inconveniente è che tali parametri devono essere attentamente calibrati in funzione del tipo di problema che ci si accinge a risolvere. Se la scelta dei parametri non è appropriata si potrebbe incappare in grossi errori nella soluzione.

In questa tesi verrà utilizzato un metodo che non richiede l'impostazione di parametri ma solamente un'adeguata scelta dello step temporale. Tale metodo combina l'uso del metodo dei trapezi e di Eulero all'indietro.

La scelta del passo temporale è sicuramente un fattore di criticità nell'applicazione dei vari metodi, in quanto il suo valore dipende dallo spettro di frequenze dell'eccitazione e deve essere adeguato rispetto alla velocità di propagazione dell'onda nel mezzo, onde evitare problemi di diffusione numerica (condizione di Courant).

Nel metodo proposto, l'intervallo temporale h è suddiviso in due sotto passi temporali uguali. Nel primo viene utilizzato il metodo dei trapezi mentre, successivamente viene utilizzato Eulero all'indietro applicato su 3 punti.

Le equazioni prendono le seguenti forme [Rif 16]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{v}}_n + \frac{h}{4}(\ddot{\mathbf{v}}_n + \ddot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}}) \\ \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_n + \frac{h}{4}(\dot{\mathbf{v}}_n + \dot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}}) \\ \dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \frac{1}{h}\mathbf{v}_n - \frac{4}{h}\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{h}\mathbf{v}_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{v}}_{n+1} = \frac{1}{h}\dot{\mathbf{v}}_n - \frac{4}{h}\dot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{h}\dot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.55)$$

Le equazioni della dinamica applicate allo step $n + \frac{1}{2}$ e $n + 1$ sono:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}} + C\dot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}} + K\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}} \\ M\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} + C\dot{\mathbf{v}}_{n+1} + K\mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{R}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} K^1 \cdot \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{R}^1 \\ K^2 \cdot \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{R}^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Quindi, usando le precedenti equazioni, il procedimento per ogni passo temporale, è il seguente:

Dove:

$$\begin{aligned} K^1 &= \frac{16}{h^2}M + \frac{4}{h}C + K \\ K^2 &= \frac{9}{h^2}M + \frac{3}{h}C + K \\ \mathbf{R}^1 &= \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}} + M\left(\frac{16}{h^2}\mathbf{v}_n + \frac{8}{h}\dot{\mathbf{v}}_n + \ddot{\mathbf{v}}_n\right) + C\left(\frac{4}{h}\mathbf{v}_n + \dot{\mathbf{v}}_n\right) \\ \mathbf{R}^2 &= \mathbf{R}_{n+1} + M\left(\frac{12}{h^2}\mathbf{v}_{n+1} - \frac{3}{h^2}\mathbf{v}_n + \frac{4}{h}\dot{\mathbf{v}}_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{h}\dot{\mathbf{v}}_n\right) + C\left(\frac{4}{h}\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{h}\mathbf{v}_n\right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Le equazioni vengono utilizzate successivamente ad ogni step temporale dell'intero dominio temporale considerato. Ovviamente la soluzione richiede la selezione di un time step adeguato, la fattorizzazione della matrice di "rigidezza effettiva", definita in eq 3.58, prima di procedere con l'integrazione temporale, ed il calcolo del vettore delle forzanti effettive, nonché le varie riduzioni in avanti e sostituzioni all'indietro.

Il metodo è incondizionatamente stabile, tuttavia per una soluzione migliore ovviamente l'intervallo temporale deve essere scelto adeguatamente, compatibilmente con la condizione di Courant e con una descrizione che riesca a cogliere le variazioni del sistema.

3.3.1 Stabilità e convergenza

Come riportato nel paper "Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics" di Klaus-Jürgen Bathe, Gunwoo Noh [Rif. 16], un'analisi di stabilità può essere eseguita utilizzando l'equazione:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}}^a + \mathbf{L}_{n+1}^b \quad (3.59)$$

Dove \mathbf{A} , $\mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}}^a$, \mathbf{L}_{n+1}^b sono rispettivamente le matrici di approssimazione dell'integrazione e gli operatori di carico, e ω e ε sono la frequenza naturale e il coefficiente di smorzamento.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \begin{bmatrix} -4\omega h(24\varepsilon + 7\omega h) & \omega(-288\varepsilon + 14\varepsilon\omega^2 h^2 - 144\omega h + 5\omega^3 h^3 + 48\varepsilon^2 \omega h) & \omega^2(24\varepsilon\omega h + 19\omega^2 h^2 - 144) \\ -4h(-12 + \omega^2 h^2) & 144 - 47\omega^2 h^2 - 8\varepsilon\omega^3 h^3 - 24\varepsilon\omega h & \omega^2 h(-96 - 24\varepsilon\omega h + \omega^2 h^2) \\ 4h^2(7 + 2\varepsilon\omega h) & h(144 - 5\omega^2 h^2 + 80\varepsilon\omega h + 16\varepsilon^2 \omega^2 h^2) & -19\omega^2 h^2 + 144 + 168\varepsilon\omega h + 48\varepsilon^2 \omega^2 h^2 - 2\varepsilon\omega^3 h^3 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{L}^a = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \begin{bmatrix} -4\omega h(24\varepsilon + 7\omega h) \\ -4h(-12 + \omega^2 h^2) \\ 4h^2(7 + 2\varepsilon\omega h) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^b = \frac{1}{\beta_2} \begin{bmatrix} 9 \\ 3h \\ h^2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = 16 + 8\varepsilon\omega h + \omega^2 h^2$$

$$\beta_2 = 9 + 6\varepsilon\omega h + \omega^2 h^2$$

Di importanza cruciale è il raggio spettrale $\rho(\mathbf{A})$ in funzione del h/T con $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Il raggio spettrale di una matrice è definito come il massimo tra i moduli degli autovalori, ed assume un valore compreso tra 0 e 1.

$$\rho = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_N|), \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (3.61)$$

Più piccolo è il valore del raggio spettrale, più sarà significativa la dissipazione numerica.

Di seguito si vuole comparare tale raggio spettrale utilizzando il metodo dei trapezi, due schemi di Newmark, e i metodi Wilson theta e Houbolt.

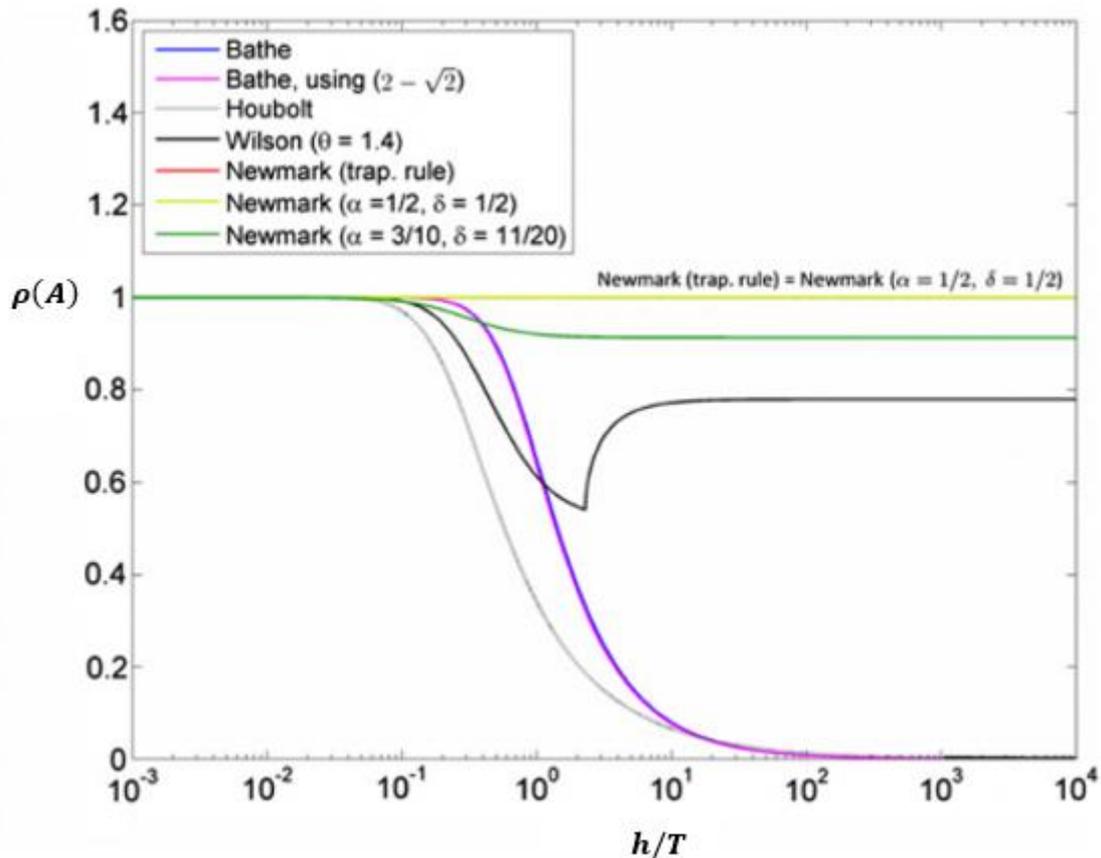


Figura 19 - Dissipazione numerica

È importante notare che lo schema di Bathe presenta un raggio spettrale $\rho(A)$ pari a 1 fino a che h/T è circa 0.1, e successivamente diminuisce rapidamente.

Questa è una proprietà particolarmente desiderabile perché assicura stabilità incondizionata e contemporaneamente assicura una grande accuratezza fino a che h/T è 0.1, con successivamente un forte smorzamento numerico per h/T più grande di circa 0.3.

3.3.2 Esempio di applicazione del metodo

Per una migliore comprensione del comportamento del metodo di integrazione numerica, al variare di parametri riguardanti la discretizzazione spaziale oppure lo step temporale utilizzato, si è scelto di applicarlo ad un caso più semplice del problema in esame: ovvero una corda in tensione su cui agiscono due forze puntuali, costanti in modulo ma non in punto di applicazione, il quale scorre lungo la corda a velocità costante.

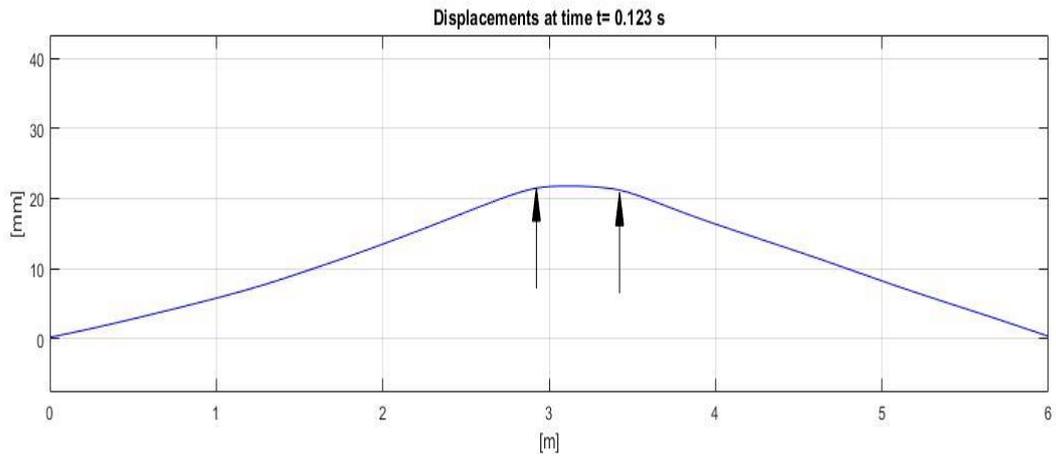


Figura 20 - Due forze puntuali applicate su una corda in tensione

A causa della discretizzazione temporale, i punti di applicazione delle due forze non sono sempre corrispondenti ai nodi della discretizzazione agli elementi finiti, quindi si è reso necessario ancora una volta l'utilizzo delle funzioni di forma, che si ricorda essere funzioni interpolanti che assumono valore 1 nel nodo a cui fanno riferimento e 0 in tutti i nodi adiacenti.

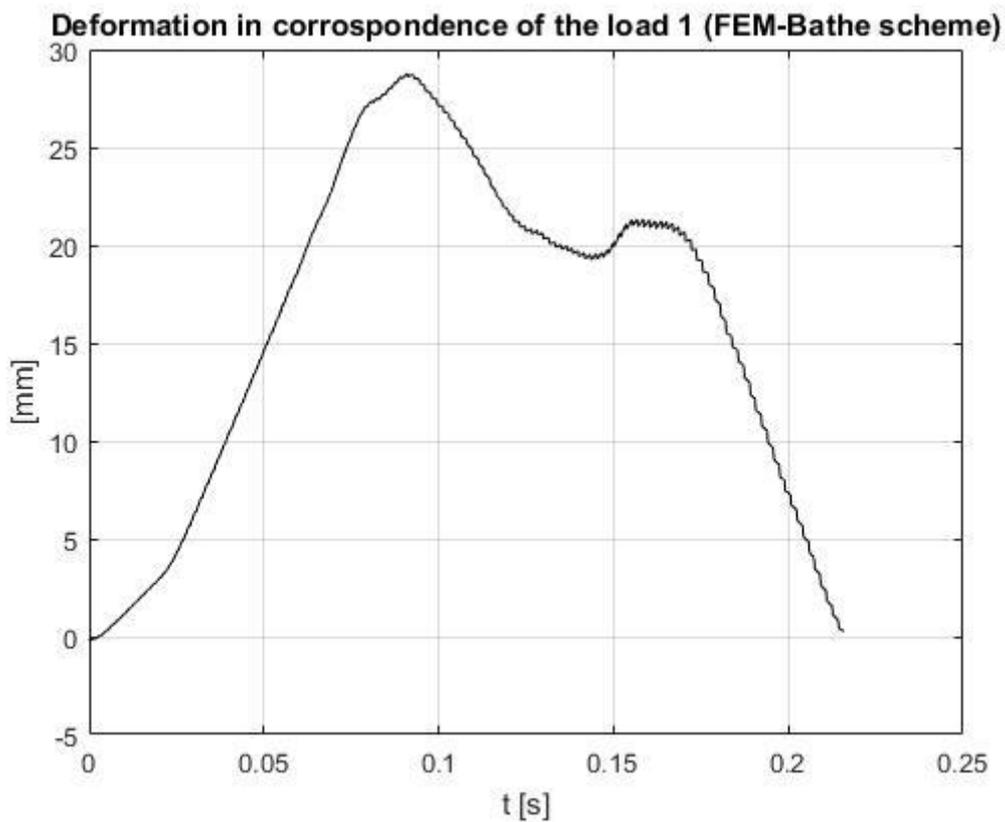


Figura 21 - Deformazione in corrispondenza del primo carico

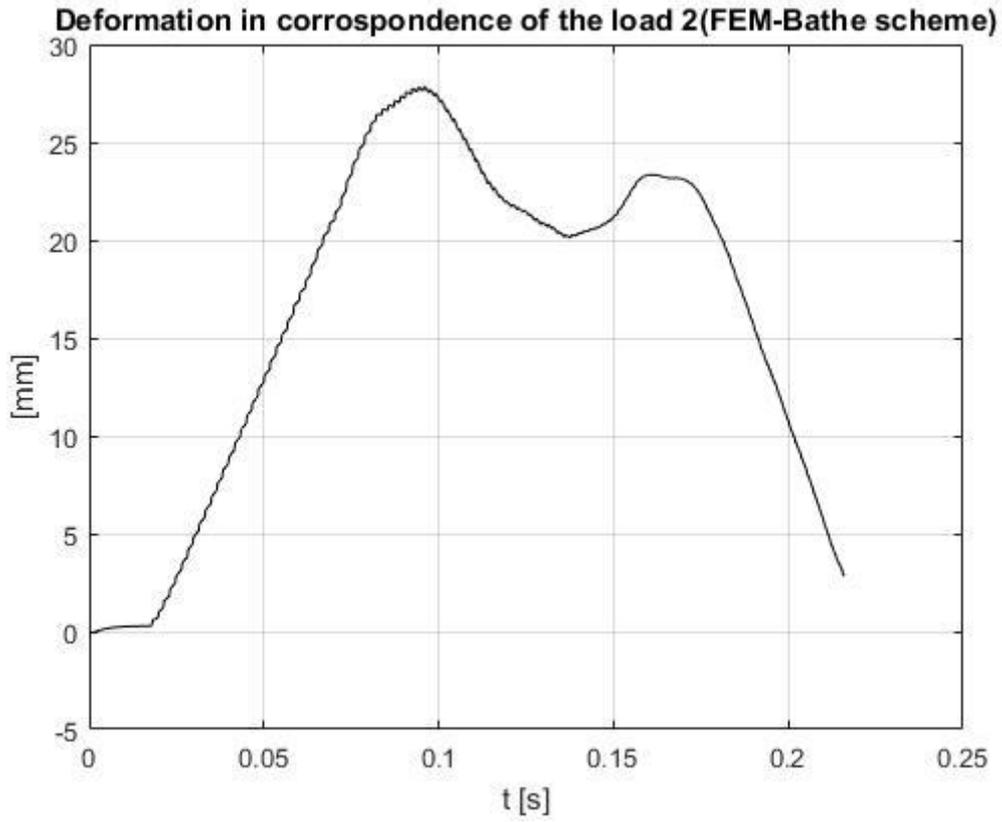


Figura 22 - Deformazione in corrispondenza del secondo carico

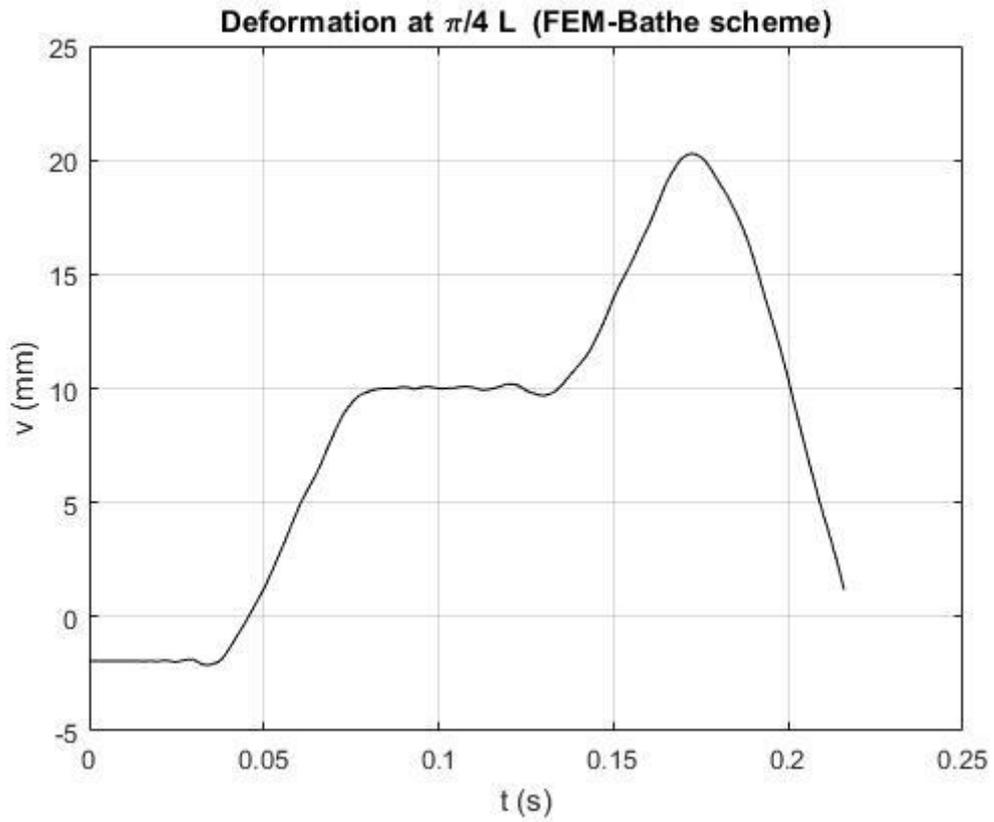


Figura 23 - Deformazione in corrispondenza di un punto situato a $\pi/4$ di L

Inoltre, per verificare la corretta soluzione del problema in esame, esso è stato risolto mediante applicazione simultanea dei due carichi alle matrici del problema stesso e mediante soluzione separata per il primo carico ed il secondo.

Le due soluzioni sono risultate identiche, verificando la linearità del problema, come era lecito aspettarsi dalla teoria.

Si è proceduto quindi ad analizzare il problema in esame con vari step temporali, via via decrescenti.

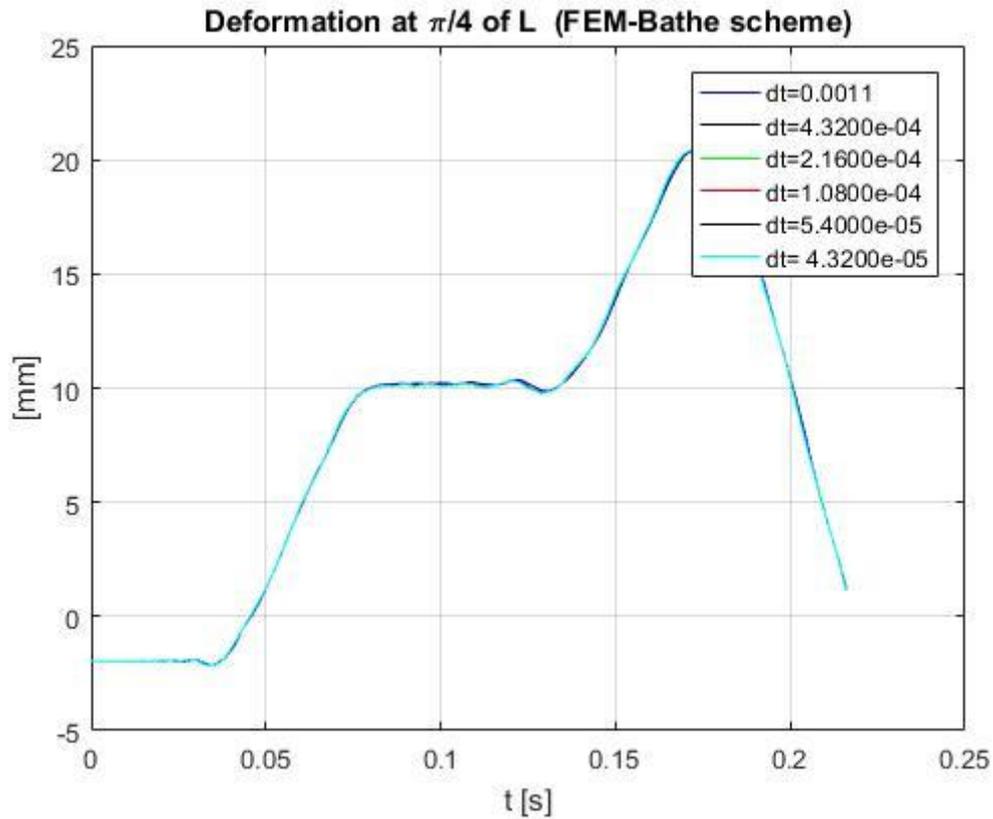


Figura 24 - Confronto metodo Bathe con vari step temporali

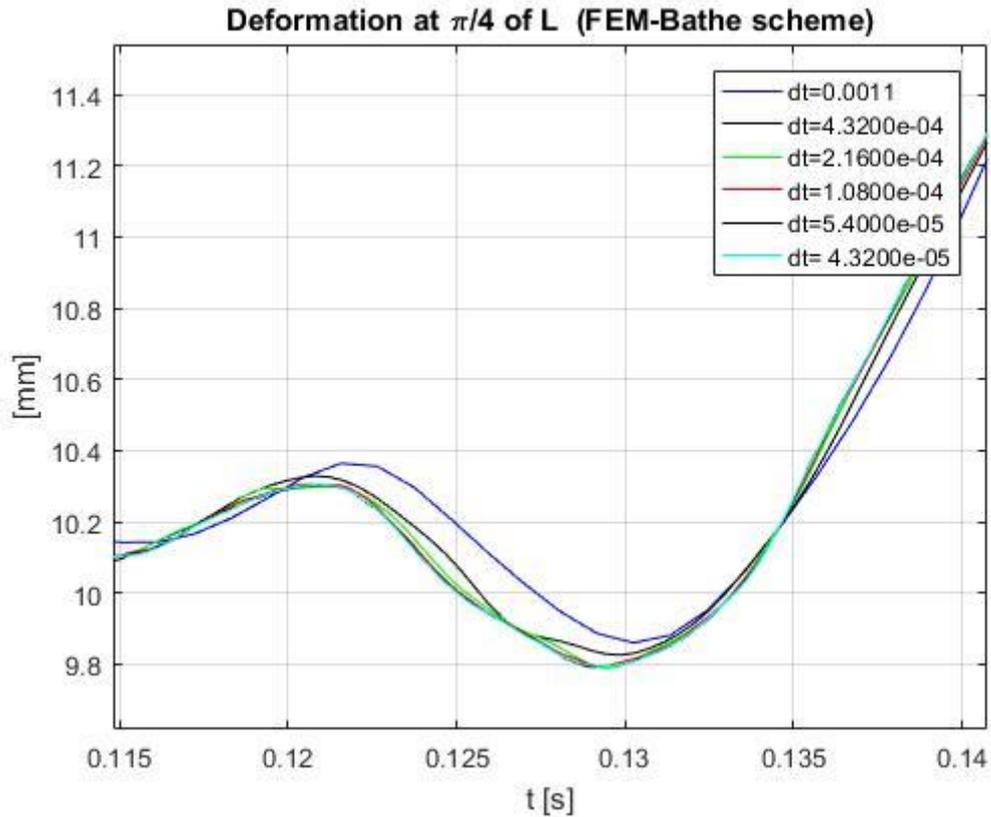


Figura 25 - Dettaglio confronto metodo Bathe con vari step temporali

È possibile notare che, come è naturale aspettarsi, al diminuire dell'intervallo temporale usato per discretizzare i tempi, il sistema tende a convergere verso una soluzione di cui tuttavia non possiamo dire se sia fisicamente accettabile o se rispecchia la realtà.

Utilizzando un passo temporale troppo elevato, la simulazione non riesce a riprodurre fedelmente la dinamica del sistema, fatto che si traduce nell'introduzione di un ritardo fittizio.

Si propone di seguito un confronto tra i vari metodi di integrazione numerica:

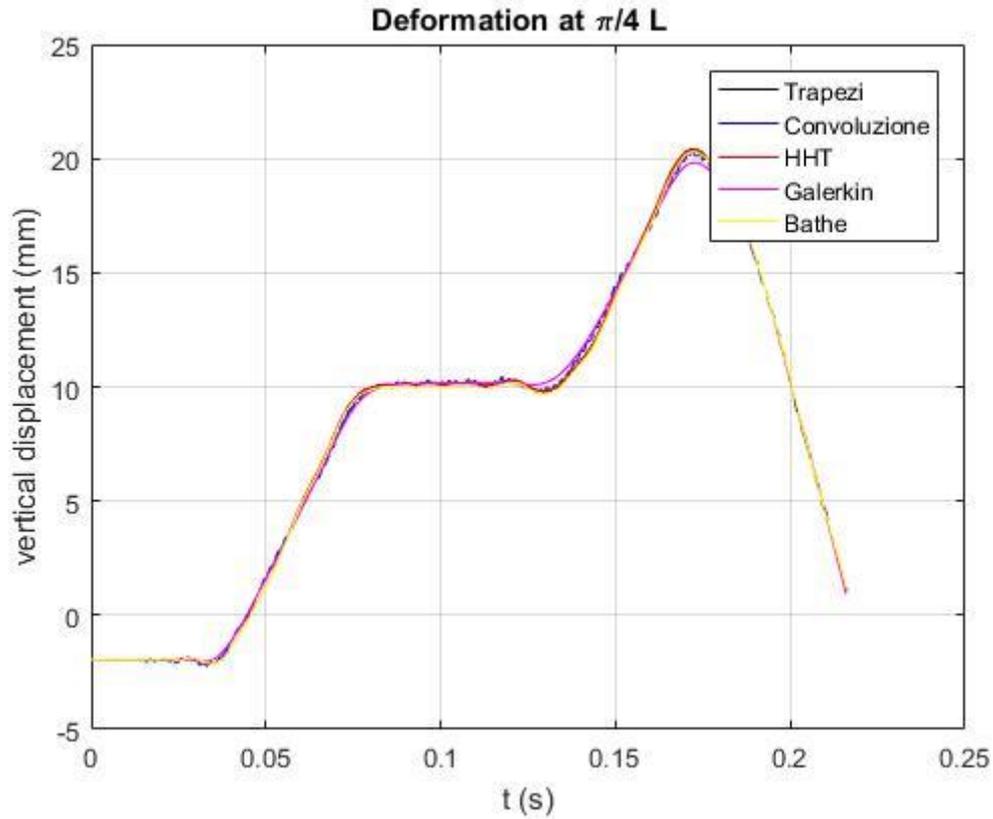


Figura 26 - Confronto tra vari metodi di integrazione

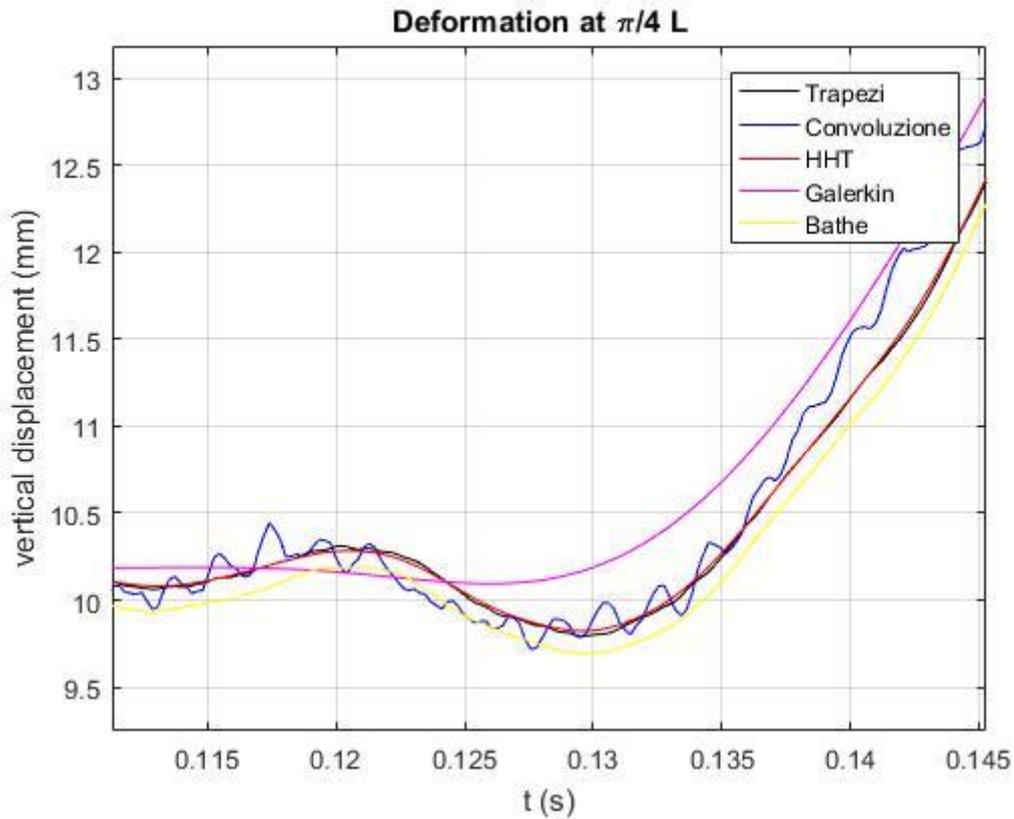


Figura 27 - Dettaglio confronto tra vari metodi di integrazione

Osservando il confronto si può notare come tutti i metodi offrano una descrizione consistente tra di loro, con tuttavia alcune differenze.

Ad esempio il comportamento descritto usando il prodotto di convoluzione e prendendo in considerazione i primi 10 modi, invece, presenta oscillazioni a frequenza molto più elevata rispetto alle altre metodologie.

Il metodo di Galerkin invece presenta un grafico più “smorzato” rispetto agli altri, i quali mostrano un andamento tra di loro consistente.

3.4 ANALISI DINAMICA

I pendini vengono implementati nel modello come molle non lineari, infatti il passaggio del pantografo sottostante può comportarne il passaggio da uno stato di trazione ad uno di compressione, nel qual caso il contributo alla rigidità totale del sistema di quel determinato pendino diventa trascurabile.

Questo fenomeno prende il nome di Slackening ed è la causa della non linearità del sistema in esame.

Di seguito è riportata la procedura sviluppata da Y. H. Cho per tenere questo fenomeno in considerazione.

Innanzitutto si definisce la forza interna di ciascun pendino:

$$\mathbf{f}_{drop} = \mathbf{R}_d + k_d(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_w) + c_d(\dot{\mathbf{v}}_m - \dot{\mathbf{v}}_w) \quad (3.62)$$

Dove \mathbf{R}_d è la forza statica agente sul pendino a causa del peso proprio e k_d e c_d sono i coefficienti di rigidità e smorzamento del pendino. Considerato che nel modello utilizzato i pendini non presentano alcuno smorzamento l'equazione precedente si riduce a:

$$\mathbf{f}_{drop} = \mathbf{R}_d + k_d(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_w) \quad (3.63)$$

Se $\mathbf{f}_{drop} < 0$ si verifica lo slackening, fatto che costituisce la necessità per l'integratore numerico di controllare se ciò avviene per ogni step temporale e per ogni pendino, e se ciò accade, esso dovrà ripetere l'iterazione eliminando il contributo in rigidità del pendino in slackening dalla matrice di rigidità totale.

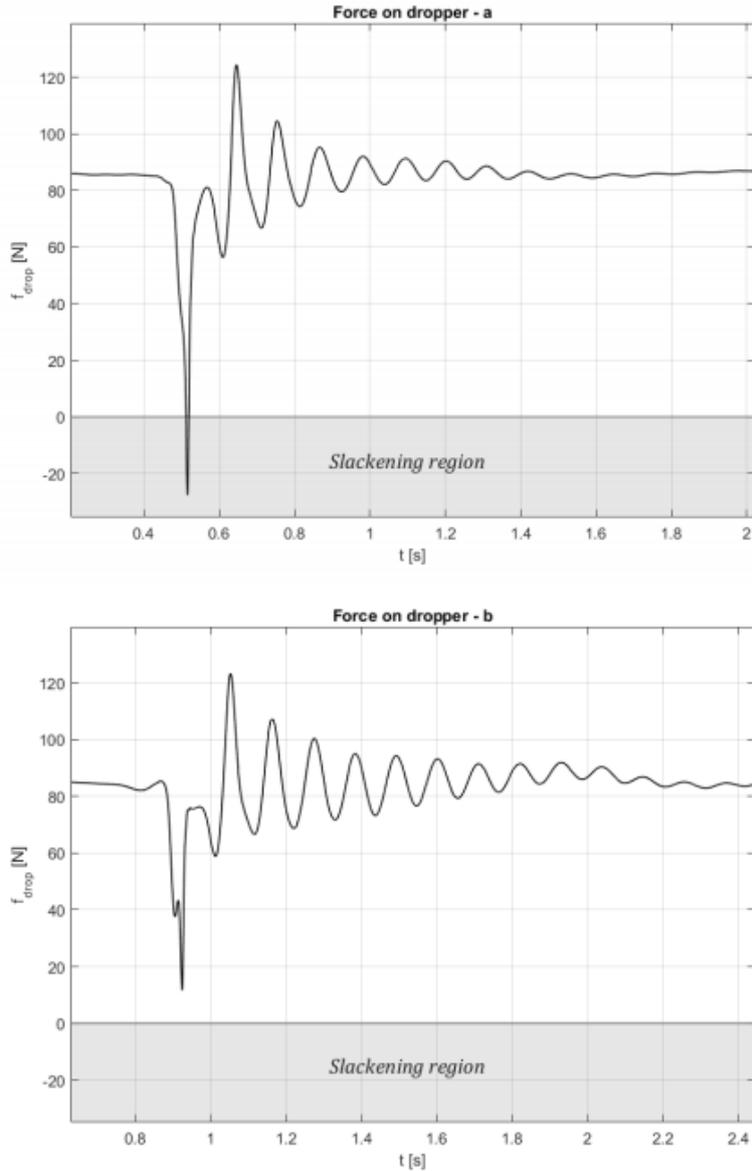


Figura 28 - Andamento forza su un pendino

Indicando con ns il numero di pendini in slackening ad ogni istante di tempo e con K_d la matrice di rigidità dei pendini si ha:

$$K_{tot} = K_{tot} - \sum_{j=1}^{ns} K_d^j \tag{3.64}$$

In aggiunta, anche il vettore delle forzanti globali andrà corretto nel seguente modo:

$$f_{tot} = f_{tot} - \sum_{j=1}^{ns} K_d^j v_{tot}^j \tag{3.65}$$

Dove si indicato con v_{tot}^j il vettore delle coordinate generalizzate relativo al j-esimo dropper in slackening.

3.4.1 Perdita di contatto

La perdita di contatto è l'ultimo step del metodo di integrazione, poiché richiede la conoscenza del vettore spostamento.

Come precedentemente detto, il modello utilizzato per descrivere il contatto ci permette di valutare la forza scambiata ad ogni istante temporale come:

$$F_c(t_{n+1}) = k_c[v_p(t_{n+1}) - v_c(t_{n+1})] + c_c[\dot{v}_p(t_{n+1}) - \dot{v}_c(t_{n+1})] \quad (3.66)$$

Se si ha perdita di contatto, tale forza diventa negativa, e viene quindi posta uguale a 0 nel programma poiché una forza negativa non avrebbe senso fisico.

In tale caso bisogna altresì rimuovere il contributo della rigidità di contatto dalle matrici totali del sistema, poiché esse posseggono dei termini tempo varianti legati all'accoppiamento pantografo-catenaria.

Si tornerà quindi indietro all'inizio della procedura di integrazione ponendo $k_c = 0.$, e ricalcolando K_{tot} e C_{tot} .

3.5 SIMULAZIONI E RISULTATI

3.5.1 Confronto con modello ad un solo pantografo

Per accertarsi del corretto funzionamento del modello FEM, sono stati effettuati dei confronti con il modello precedentemente disponibile che implementava un solo pantografo.

Per una migliore comprensione grafica, il confronto è stato effettuato solamente utilizzando un modello "ridotto" consistente di 6 campate.

Naturalmente sono stati impiegati gli stessi dati di input, corrispondenti alla nuova normativa.

Si è verificato che, eliminando il secondo pantografo dal modello FEM, esso generasse gli stessi medesimi risultati del modello ad un solo pantografo.

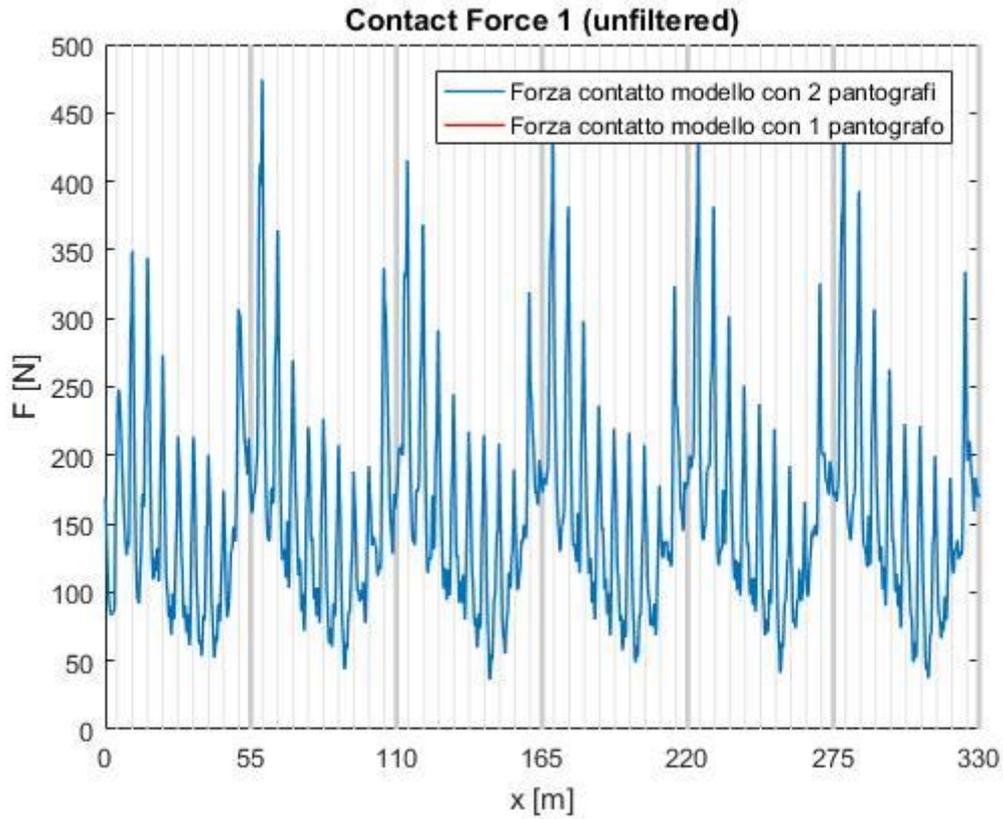


Figura 29 - Confronto forze di contatto in presenza di un solo pantografo

Come si può facilmente notare, le forze sono perfettamente sovrapposte.

Inoltre si è proceduto ad effettuare lo stesso controllo nel caso in cui ad essere “spento” fosse il primo pantografo, lasciando quindi attivo solo il secondo.

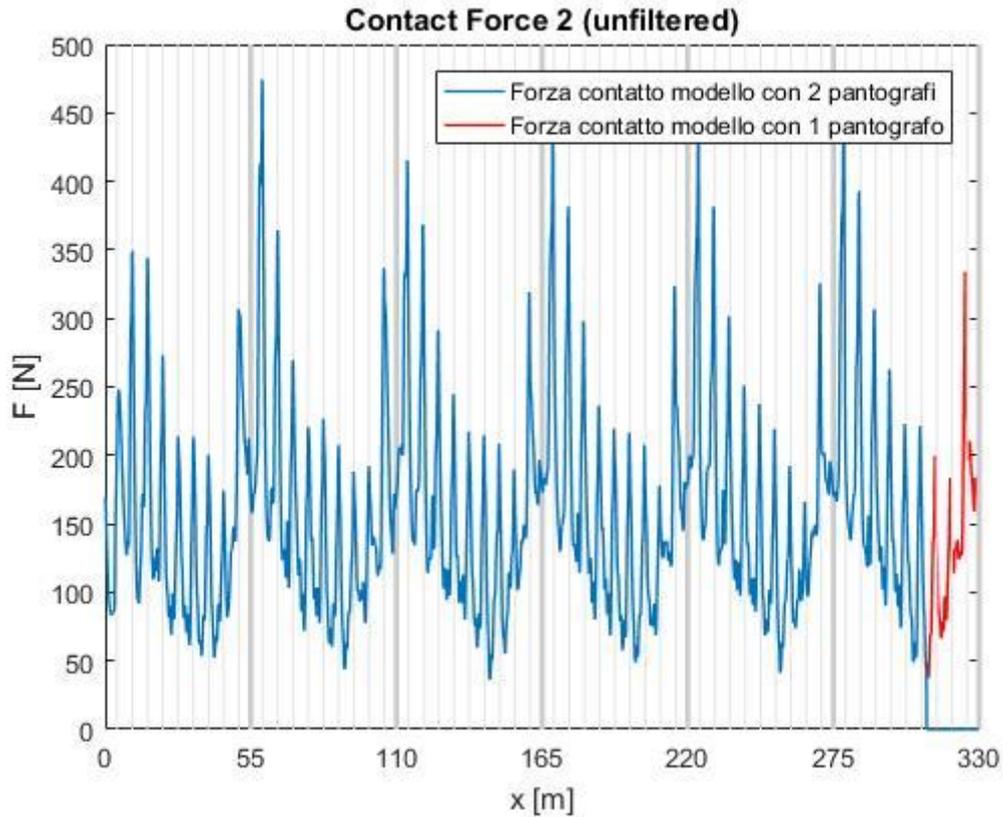


Figura 30- Confronto con forza di contatto del secondo pantografo

Anche in questo caso il grafico generato, seppur traslato della quantità pari al parametro che in presenza di due pantografi ne quantifica l'interasse, risulta perfettamente sovrapponibile al modello ad un solo pantografo. I valori nulli iniziali della forza di contatto del secondo pantografo sono stati spostati nella parte terminale del grafico per una questione di sovrapposizione visiva, infatti essi sono situati normalmente nella parte iniziale della simulazione, prima dell'ingresso del secondo pantografo stesso.

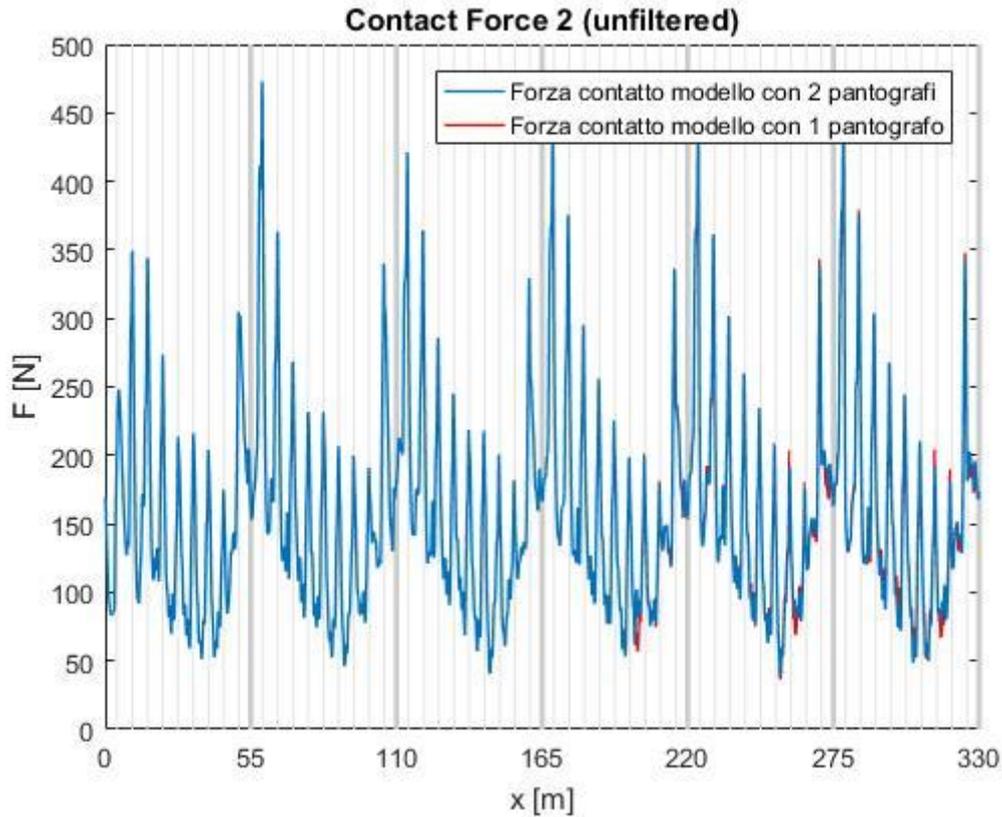


Figura 31 - Confronto con entrambi i pantografi

Infine è stato controllato che il programma contenente due pantografi restituisca gli stessi output del modello singolo per quanto concerne l'intervallo di tempo compreso tra l'inizio della simulazione e l'entrata del secondo pantografo. Come si può notare, le differenze iniziano a farsi notare a 200 m, ovvero dove inizia ad agire sulle matrici il secondo accoppiamento.

3.5.2 Dati generali

Il modello consiste in una sequenza di campate identiche. I risultati sono stati processati per le 10 span centrali.

Catenaria:

Span length:	55 m
Encumbrance:	1.2 m
Pre-sag at mid-span, h_c :	55 mm (1:1000 of the span length)
Stagger:	± 200 mm

Figura 32 - Dati catenaria da normativa

Lo smorzamento strutturale della catenaria è del tipo proporzionale:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.67)$$

Dove:

$$\alpha = 0.0125 \text{ s}^{-1}$$

$$\beta = 1 \cdot 10^{-4}$$

Filo di contatto:

Section, A_c :	150 mm ²
Mass/unit length, m_c :	1.35 kg/m
Tension, S_c :	22 kN
Young's module, E_c :	1.0 E11 N/m ²
Bending stiffness, $E_c J_c$:	195.0 N m ²

Corda portante:

Section, A_m :	120 mm ²
Mass/unit length, m_m :	1.08 kg/m
Tension, S_m :	16 kN
Young's module, E_m :	0.97 E11 N/m ²
Bending stiffness, $E_m J_m$:	131.7 N m ²

Pendini:

Mass per unit length, m_d :	0.117 kg/m
Axial stiffness parameter, EA:	200 kN
Mass of one clamp on the messenger wire, M_{cm} :	0.195 kg
Mass of one clamp on the contact wire, M_{cc} :	0.165 kg

Supporti:

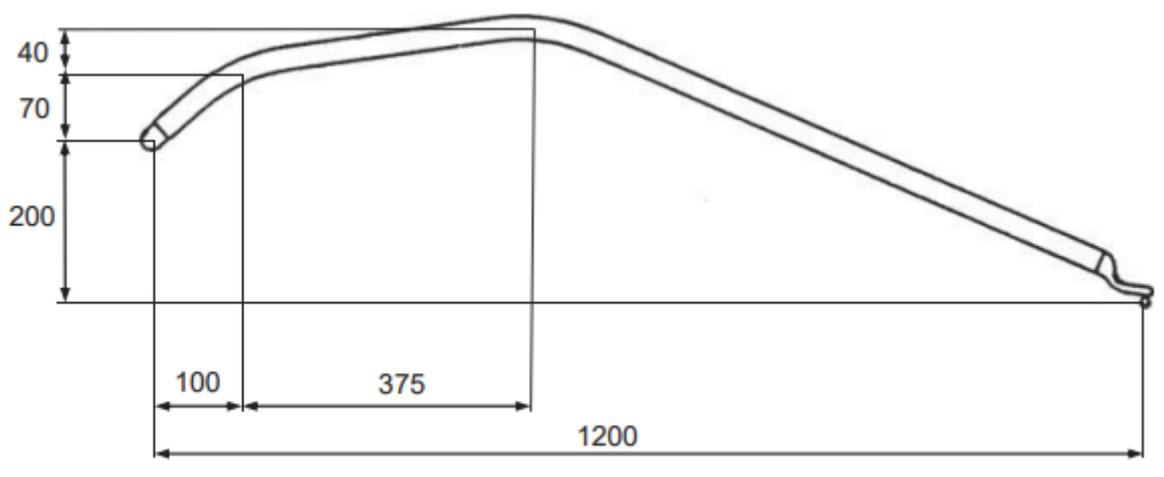


Figura 33 - Schema braccio di registrazione

Mass per unit length, m_a :	0.73 kg/m
Axial stiffness parameter, EA_a :	17,000 kN
Bending stiffness, EJ_a :	1100 Nm ²

3.5.2.1 *Algoritmo Genetico*

La rigidità di contatto, inserita nel modello per modellizzare il contatto tra i due pantografi e la catenaria soprastante, è un parametro molto difficile da stimare a priori essendo un artificio matematico insito nel modello di contatto Penalty.

Questo modello valuta la forza di contatto come proporzionale alla compenetrazione relativa dei due corpi, con un fattore di proporzionalità che è proprio la rigidità di contatto k_c .

Normalmente sarebbe necessario procedere tramite una ricerca per trial and error per trovare il valore ottimale che permette di rientrare nel range di valori imposto dalla normativa e conseguentemente validare il modello.

In questo caso, tuttavia, si è scelto di implementare un algoritmo genetico per la ricerca del punto di ottimo.

In particolare si tratta di un algoritmo genetico, ovvero un metodo per risolvere problemi di ottimizzazione sia vincolati che non vincolati, basato sul processo di selezione naturale che mima l'evoluzione biologica.

L'algoritmo modifica continuamente la popolazione di soluzioni individuali. Ad ogni passo, l'algoritmo genetico seleziona casualmente individui dalla popolazione attuale e li utilizza come genitori per produrre i figli che costituiranno la successiva generazione. Nel corso delle generazioni, la soluzione converge alla soluzione ottimale.

Si possono applicare gli algoritmi genetici per risolvere problemi che non sono adatti ai metodi di ottimizzazione standard, compresi problemi in cui le funzioni obiettivo sono discontinue, non differenziabili, stocastiche o altamente non lineari.

La principale differenza con un algoritmo classico è che mentre un algoritmo classico produce un singolo punto per ogni iterazione, gli algoritmi genetici producono una popolazione di punti, il cui miglior individuo si approssima alla soluzione ottima.

Inoltre il punto della successiva iterazione è calcolato in modo deterministico negli algoritmi classici, mentre in quelli genetici viene utilizzato un generatore di numeri random.

Metodo

- 1- L'algoritmo inizia con la creazione di una popolazione iniziale in modo casuale.
- 2- Successivamente crea una sequenza di nuove popolazioni. Ad ogni passo, l'algoritmo utilizza gli individui della popolazione attuale per generare la prossima. I passi applicati sono i seguenti:
 - i. Valuta ciascun membro della popolazione corrente calcolando il suo *fitness value*. Questi valori sono i punteggi di fitness grezzi.
 - ii. Scala detti valori per convertirli in range più facilmente utilizzabili. Questi valori sono detti *expectation values*.
 - iii. Seleziona i genitori in base al loro valore
 - iv. Alcuni degli individui con il migliore valore di fitness sono scelti come *elite*. Questi individui passano direttamente alla generazione successiva.
 - v. Produce figli dai genitori. Essi sono prodotti variando casualmente un singolo genitore (*mutation*) o combinando i valori dei vettori dei genitori (*crossover*).

- 3- Rimpiazza la generazione corrente con i figli.
- 4- L'algoritmo si ferma quando uno o più dei criteri di stop è stato raggiunto.

Popolazione iniziale

La popolazione iniziale è costituita in modo casuale. Nell'esempio seguente, la popolazione iniziale contiene 20 individui.

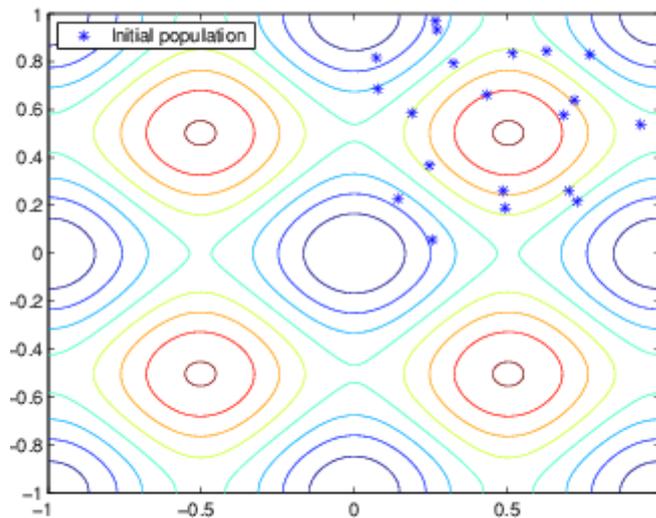


Figura 34 - Esempio di popolazione iniziale

Creazione della generazione successiva

L'algoritmo seleziona un gruppo di individui nella popolazione attuale, chiamati genitori, che passeranno i loro "geni" (i vari valori dei loro vettori) ai loro figli.

Normalmente in questo ruolo vengono selezionati gli individui con valori migliori di *fitness value*.

L'algoritmo crea tre tipologie di prole:

- *Elite children*, sono gli individui dell'attuale generazione con i migliori valori di fitness, ed essi sopravvivono in automatico fino alla generazione successiva.
- *Crossover children*, sono generati combinando i vettori di un paio di genitori. Per ogni coordinata del vettore figlio, il programma sceglie casualmente un gene alla stessa coordinata, di uno dei due genitori. Per problemi con vincoli lineari, la funzione di crossover di default crea un figlio dalla media casuale pesata dei genitori.
- *Mutation children*, sono creati introducendo delle variazioni random ad un solo genitore. Di default, per problemi non vincolati, si aggiunge un vettore random da una distribuzione gaussiana ad un genitore. Per problemi limitati o linearmente vincolati, il figlio rimane tra le soluzioni ammissibili.

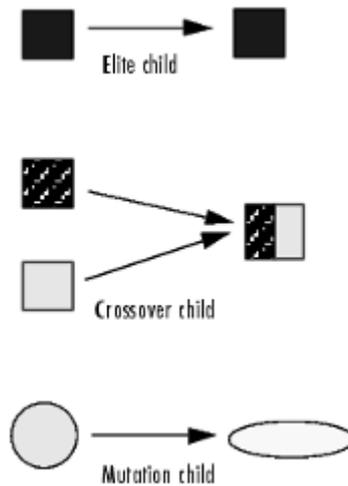


Figura 35 - Diagramma sintetico dei metodi di generazione dei figli

In generale gli algoritmi genetici vengono utilizzati per tentare di risolvere problemi di ottimizzazione per i quali non si conoscono algoritmi efficienti di complessità lineare o polinomiale.

Non è possibile sapere a priori tuttavia se tale algoritmo sarà in grado o meno di trovare una soluzione ottimale al problema considerato.

3.5.3 Risultati

Di seguito si riportano i risultati ottenuti dalla simulazione in ambiente Matlab. Per una validazione del programma essi dovrebbero rientrare negli intervalli specificati in fig. 14, ovvero dalla normativa EN50318.

Tuttavia, non tutti sono contenuti nei range previsti dalla norma, poiché bisognerebbe lasciare lavorare l'algoritmo genetico per molto tempo ed in aggiunta, i risultati stabiliti dalla norma sono derivati dall'utilizzo di 10 diversi software di simulazione, di cui non è possibile conoscere le specifiche tecniche.

I risultati di seguito presentati si riferiscono ai seguenti valori per i parametri di contatto:

- Rigidezza di contatto $k_c = 13213 \text{ N/m}$
- Smorzamento di contatto $c_c = 0 \text{ Ns/m}$

$v = 275 \text{ km/h}$	Pantografo 1	Pantografo 2
Forza media F_m [N]	138,1725 [137 – 146]	138,5781 [138 – 147]
Deviazione Standard σ [N]	36,3419 [31.9 – 34.8] X	39,3233 [50 – 54.5] X
Deviazione Standard σ (0 – 5 Hz)[N]	28,9236[25.6 – 28.9]	30,1921 [41.2 – 45.4] X
Deviazione Standard σ (5 – 20 Hz)[N]	12,7236 [16.2 – 23.1] X	14,2249 [25.2 – 34.7] X
Actual maximum of contact force [N]	242,4789 [211 – 244]	241,4736 [241 – 290]
Actual minimum of contact force [N]	70,2859 [71 – 86] X	77,4375 [14 – 50] X
Range of vertical displacement of the point of contact [mm]	50,8146 [38 – 49] X	51,0083 [53 – 70] X
Maximum uplift at support [mm]	46,536 [37 – 54]	
Percentage of loss of contact [%]	[0%]	[0%]

Figura 36 - Tabella riassuntiva dei risultati ottenuti per velocità di 275 km/h

$v = 320 \text{ km/h}$	Pantografo 1	Pantografo 2
Forza media F_m [N]	160,995 [150 – 173]	161,3948 [158,5 – 172,5]
Deviazione Standard σ [N]	50,3799 [49 – 63]	51,0914 [30 – 44] X
Deviazione Standard σ (0 – 5 Hz)[N]	42,234 [38 – 44]	41,4625 [14 – 23] X
Deviazione Standard σ (5 – 20 Hz)[N]	16,6668 [29 – 46] X	17,4627 [25 – 38] X
Actual maximum of contact force [N]	300,8581 [280 – 343]	313,5023 [247 – 317]
Actual minimum of contact force [N]	71,424 [50 – 82]	75,4146 [21 – 86]
Range of vertical displacement of the point of contact [mm]	66,0527 [39 – 51] X	53,8314 [18 – 35] X
Maximum uplift at support [mm]	60,0102 [52 – 64]	
Percentage of loss of contact [%]	[0%]	[0%]

Figura 37 - Tabella riassuntiva dei risultati per velocità di 320 km/h

Il fatto di avere due pantografi introduce molte fonti di incertezza riguardo ai vari modi di modellizzare le loro interazioni con la catenaria, e questo, può spiegare perché questo modello non sia esattamente allineato, a livello di output, a quelli che sono stati considerati dagli estensori della normativa.

3.5.4 Risultati algoritmo genetico per $v=275 \text{ km/h}$

Di seguito si riportano i risultati ottenuti dall'algoritmo genetico per un k_c che varia da 10000 a 40000 N/m , per le varie grandezze in esame.

-Forza media:

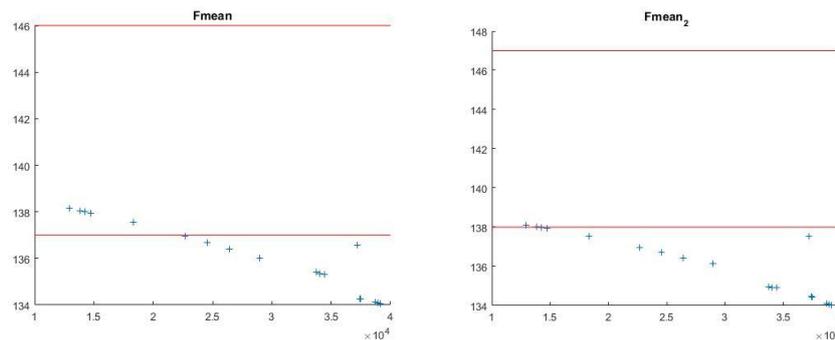


Figura 38 - Forza media di contatto pantografo 1 e 2

Il pedice “2” si riferisce alle grandezze riferite al secondo pantografo.

Come si può notare, per valori k_c superiori a circa 22000 esce dall'intervallo desiderato per il primo pantografo, mentre il secondo per valori minori.

-deviazione standard (tra 0 e 20 Hz):

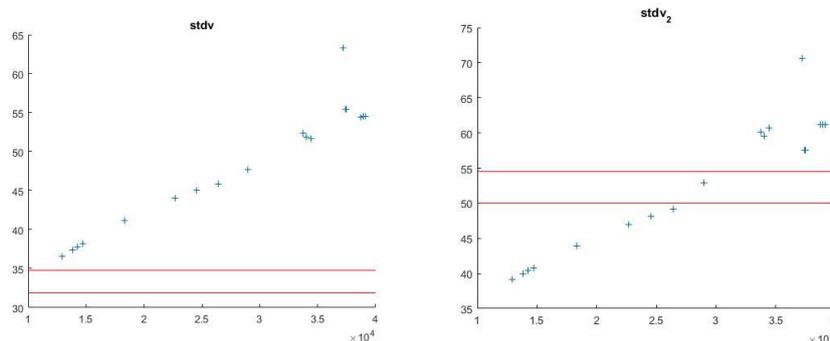


Figura 39 - Deviazione standard 0-20 Hz per il pantografo 1 e 2

Per maggiore chiarezza descrittiva si presenta di seguito un dettaglio riguardante i valori di k_c da 25000 a 35000 N/m per il secondo pantografo.

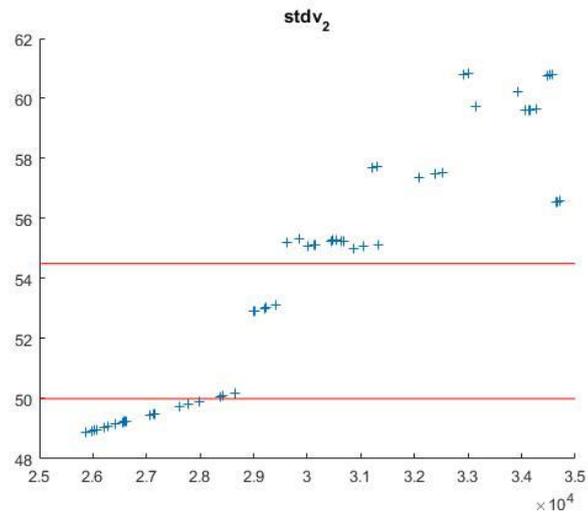


Figura 40- Dettaglio deviazione standard 0-20 Hz pantografo 2

-deviazione standard (tra 5 e 20 Hz):

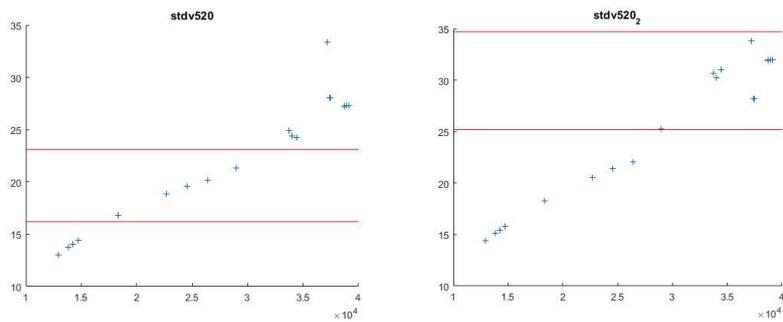


Figura 41- Deviazione standard 5-20 Hz

-deviazione standard (tra 0 e 5 Hz):

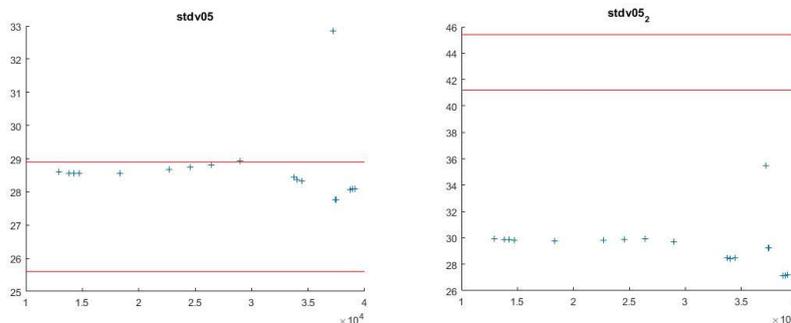


Figura 42- Deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2

Non è presente alcun trend apparente, quindi si dovrà valutare punto per punto se si rientra nella norma oppure no, per quanto riguarda il primo pantografo.

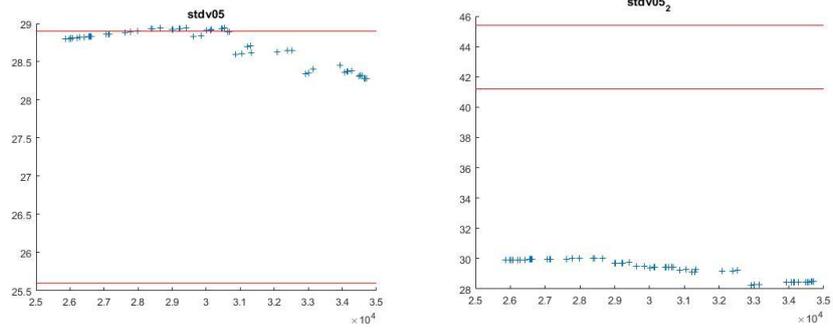


Figura 43- Dettaglio deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2

Come si può notare, invece, per il secondo pantografo questo range di valori non è adeguato per rientrare nel range di valori imposto dalla normativa.

-Forze massime e minime:

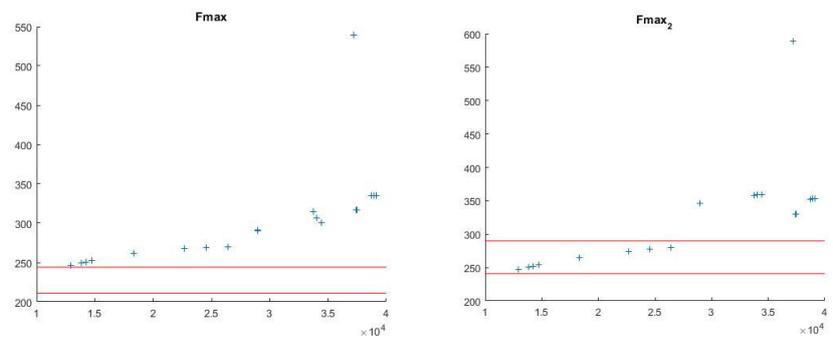


Figura 44 - Forze massime pantografo 1 e 2

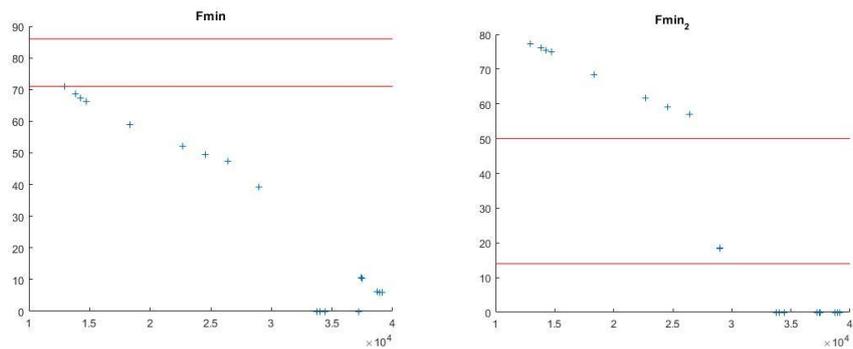


Figura 45 - Forze minime pantografo 1 e 2

Si può notare come, aumentando i valori di k_c , esse si allontanino progressivamente dall'intervallo desiderato.

-Spostamenti verticali dei punti di contatto:

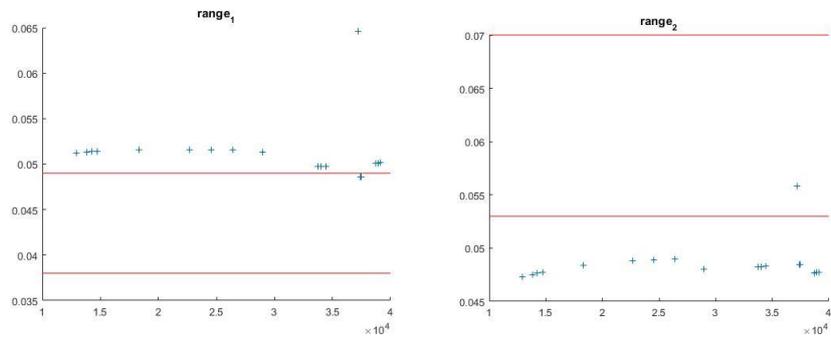


Figura 46 - Spostamenti verticali dei punti di contatto pantografo 1 e 2

-trend generali:

I seguenti grafici sono utili per farsi un'idea di come variano determinate grandezze modificando la rigidezza di contatto k_c .

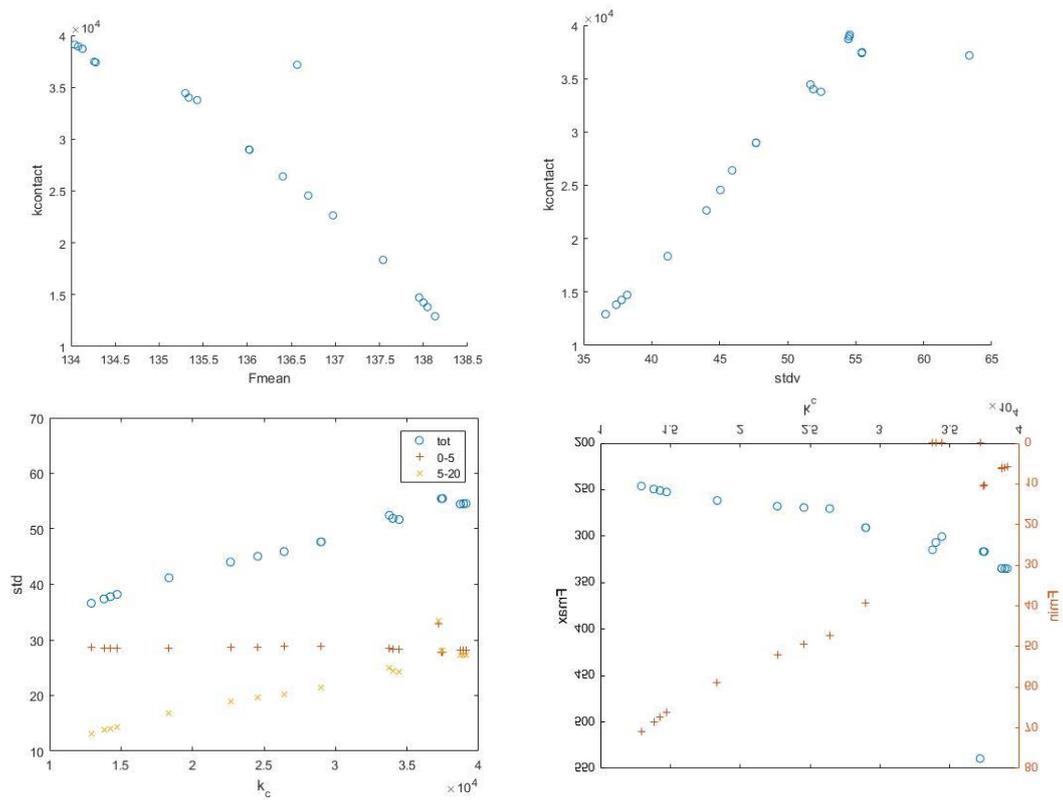


Figura 47 - Correlazione tra le varie grandezze oggetto di analisi

3.5.5 Risultati algoritmo genetico per $v=320 \text{ km/h}$

Di seguito si riportano i risultati ottenuti dall'algoritmo genetico per un k_c che varia da 10000 a 40000 N/m , per le varie grandezze in esame.

-Forza media:

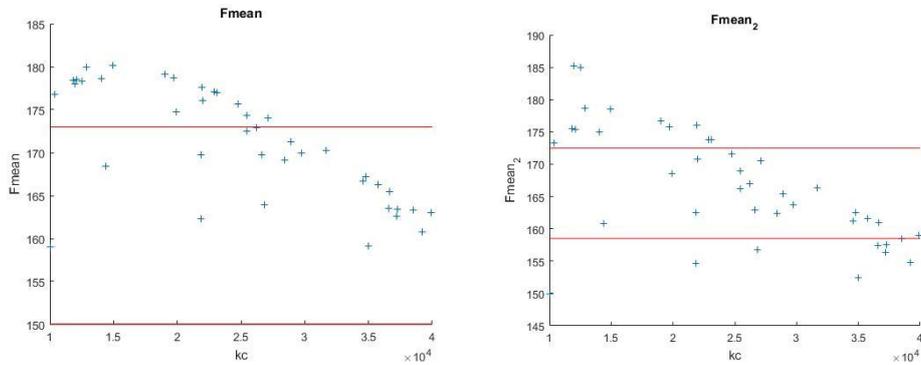


Figura 48 - Forza media di contatto pantografo 1 e 2

Il pedice “2” si riferisce alle grandezze riferite al secondo pantografo.

Come si può notare, vi sono valori di k_c intermedi nel range considerato che permettono ad entrambi i pantografi di rientrare nella norma.

-deviazione standard (tra 0 e 20 Hz):

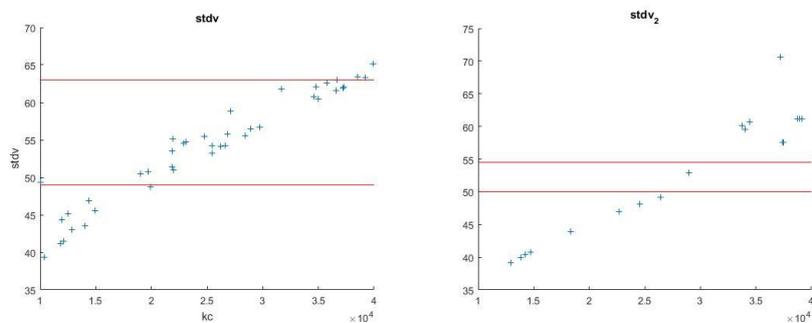


Figura 49 - Deviazione standard 0-20 Hz per il pantografo 1 e 2

-deviazione standard (tra 5 e 20 Hz):

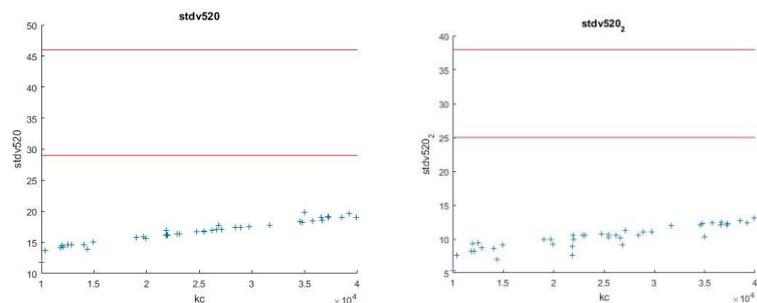


Figura 50 - Deviazione standard 5-20 Hz

Nell'intervallo di kc considerato non vi sono valori che permettano di rientrare nell'intervallo specificato.

-deviazione standard (tra 0 e 5 Hz):

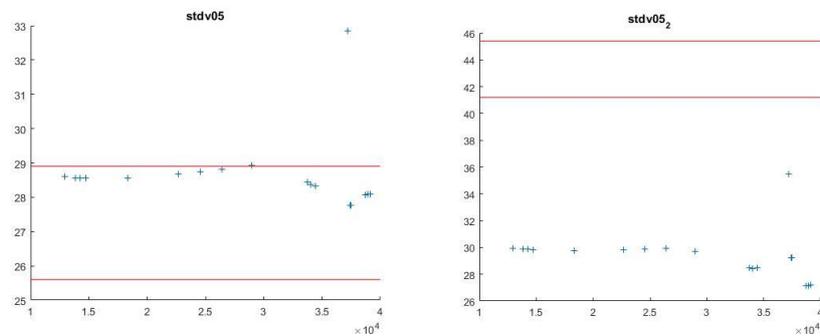


Figura 51 - Deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2

Non è presente alcun trend apparente, quindi si dovrà valutare punto per punto se si rientra nella normativa oppure no. Mentre per il secondo pantografo questo range di valori non è adatto a rientrare nella normativa.

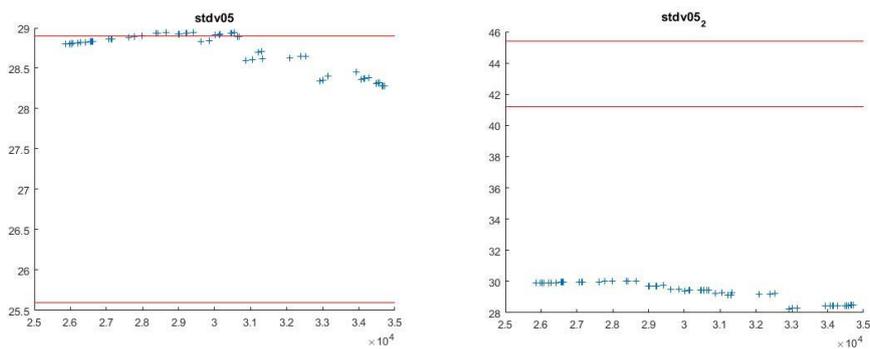


Figura 52 - Dettaglio deviazione standard 0-5 Hz pantografo 1 e 2

-Forze massime e minime:

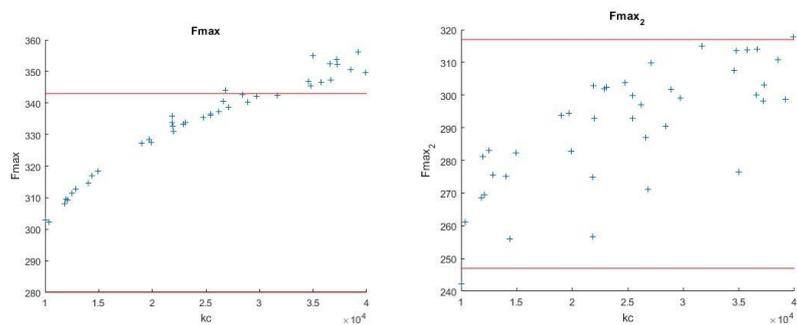


Figura 53 - Forze massime pantografo 1 e 2

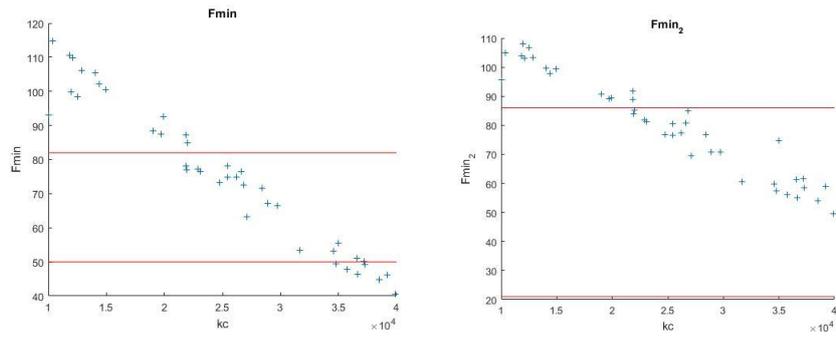


Figura 54 - Forze minime pantografo 1 e 2

Si può notare come, aumentando i valori di k_c , esse si allontanano progressivamente dall'intervallo desiderato.

-Spostamenti verticali dei punti di contatto:

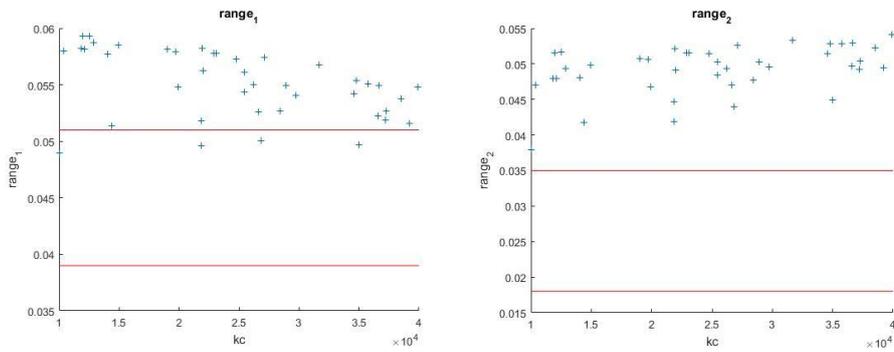


Figura 55 - Spostamenti verticali dei punti di contatto pantografo 1 e 2

Essi sono fuori dall'intervallo obiettivo per quasi tutti i valori di rigidezza di contatto considerati.

-trend generali:

I seguenti grafici sono utili per farsi un'idea di come variano determinate grandezze modificando la rigidità di contatto k_c .

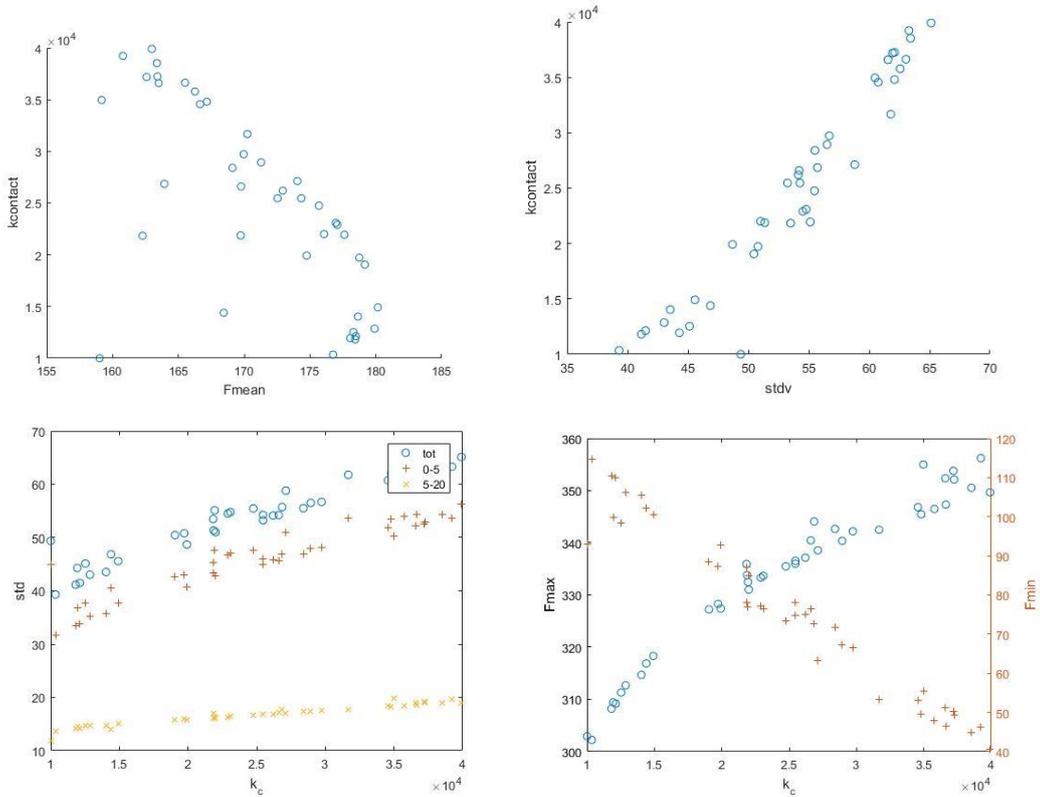


Figura 56 - Correlazione tra le varie grandezze in esame

Come è possibile notare dai grafici, la forza media di contatto, le deviazioni standard (seppur in modo diverso) e la forza massima di contatto, aumentano all'aumentare della rigidità di contatto, mentre la forza minima diminuisce.

Ciò può essere utile per individuare intervalli di valori della rigidità di contatto nei quali andare a cercare il valore ricercato, ovvero quello che permetta di rientrare all'interno dei range di valori imposti dalla normativa.

4 CONCLUSIONI

Lo scopo di questa tesi era di indagare il comportamento dinamico di un sistema a due pantografi, e di comprendere meglio le relazioni esistenti tra i fattori influenzanti e le performance risultanti, in modo da poter avere uno strumento per verificare nuove soluzioni che permettano di aumentare la velocità di operatività dei sistemi attuali e futuri.

Il lavoro include studi sulla struttura e sulla dinamica del sistema pantografo-catenaria, modello di contatto, e metodo di integrazione numerica e relativa stabilità e convergenza.

In generale lo studio è stato condotto sotto ipotesi ideali e semplicistiche di lavoro, ad esempio quella di contatto puntuale tra pantografo e catenaria, perciò uno sviluppo futuro potrebbe essere l'indagine più approfondita di questi aspetti, e di altri fattori influenzanti quali curvature, disturbi ed errori strutturali.

Inoltre i risultati delle simulazioni dovrebbero essere confrontati con quelli ottenuti da test sul campo per una validazione sperimentale del modello.

5 BIBLIOGRAFIA

1. A. Alberto, A high performance tool for the simulation of the dynamic pantograph-catenary interaction, *Mathematics and Computers in Simulation* 79.3 (2008)
2. J. Ambrósio, Computational procedure for the dynamic analysis of the catenary pantograph interaction in high-speed trains, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 50.3 (2012)
3. A. Collina, S. Bruni, Numerical simulation of pantograph overhead equipment interaction, *Vehicle System Dynamics* 38.4 (2002)
4. Y. H. Cho, Influence of contact wire pre-sag on the dynamics of pantograph railway catenary, *International journal of mechanical sciences* 52.11 (2010)
5. Y. H. Cho, Moving force on an axially loaded beam with applications to a railway overhead contact wire, *Vehicle System Dynamics* 44.8 (2006)
6. T. Dahlberg, Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper, *Journal of sound and vibration* 315.3 (2008)
7. A. Fasana, S. Marchesiello, *Meccanica delle vibrazioni*, Clut, 2006.
8. S. Marchesiello et al., Dynamics of multi-span continuous straight bridges subject to multi-degrees of freedom moving vehicle excitation, *Journal of Sound and Vibration* 224.3 (1999)
9. EN 50149, Railway applications- Fixed installations. Electric traction. Copper and copper alloy grooved contact wires , European Committee for Electrotechnical Standardization (2002)
10. D. Anastasio, Studio dell'interazione dinamica tra pantografo e catenaria tramite l'implementazione di un modello non lineare agli elementi finiti, Master Thesis, 2016
11. EN50318, Railway applications - Current collection systems - Validation of simulation of the dynamic interaction between pantograph and overhead contact line (2016)
12. Stefano Bruni, Jorge Ambrosio, Alberto Carnicero, Yong Hyeon Cho, Lars Finner, Mitsuru Ikeda, Sam Young Kwon, Jean-Pierre Massat, Sebastian Stichel, Manuel Tur & Weihua Zhang (2015) The results of the pantograph–catenary interaction benchmark, *Vehicle System Dynamics*, 53:3, 412-435, DOI: 10.1080/00423114.2014.953183
13. M. Paz, W. Leigh, *Structural Dynamics - Theory and Computation*, Springer, 2004
14. G. Poetsch et al., Pantograph/catenary dynamics and control, *Vehicle System Dynamics* 28.2-3 (1997)
15. A. Strauss, Development of numerical models for the dynamic analysis of pantograph-catenary interaction, Master Thesis, 2014.
16. Klaus-Jürgen Bathe , Gunwoo Noh, Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics, 2012.

