POLITECNICO DI TORINO

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCANICA

SIMULAZIONE DINAMICA NON LINEARE DI SUPERFICI ESTESE COLLEGATE MEDIANTE CONTATTO PER ATTRITO

Relatore: Ing. Christian Maria Firrone

Tesi di Laurea di: Luca Rossetti

Matricola n°222144

DICEMBRE 2018

SOMMARIO

Il lavoro si propone di studiare l'analisi dinamica di superfici estese collegate mediante contatto per attrito. L'argomento trattato è tanto attuale quanto interessante a livello ingegneristico, infatti ogni sistema meccanico è composto da più parti, che sono collegate tra loro mediante degli elementi di collegamento. Un sistema meccanico in esercizio è sottoposto a sollecitazioni esterne che causano delle vibrazioni, ma la presenza degli elementi di collegamento deve essere considerata in fase di progettazione in quanto può indurre uno smorzamento aggiuntivo del sistema che riduce la risposta in frequenza, aumentando dunque la vita a fatica del sistema.

Dopo aver approfondito le criticità e i vari approcci risolutivi, relativi al problema in esame, è stato realizzato un modello semplificativo degli elementi di collegamento che tenesse in considerazione esclusivamente degli elementi di contatto in modo da studiare il comportamento dinamico non lineare del sistema eliminando ogni altra fonte di variabilità ed incertezza. I risultati ottenuti con l'approccio numerico sono stati poi confrontati con quanto ottenuto sperimentalmente per comprendere i limiti e le potenzialità di questo approccio.

INDICE:

1. INTRODUZIONE 1

2. STATO DELL'ARTE 7

2.1 L'ENERGIA DI DISSIPAZIONE NEI GIUNTI FLANGIATI 8

2.1.1 REGIME DI STRISCIAMENTO 8

2.1.2 MODELLI DI CONTATTO 10

2.1.2.1 SPOSTAMENTI RELATIVI TANGENZIALI 1-D E CARICO NORMALE COSTANTE 10

2.1.2.2 SPOSTAMENTI RELATIVI TANGENZIALI 1-D E CARICO NORMALE VARIABILE 13

2.1.2.3 SPOSTAMENTI RELATIVI TANGENZIALI 2-D E CARICO NORMALE COSTANTE 15

2.1.2.4 SPOSTAMENTI RELATIVI TANGENZIALI 2-D E CARICO NORMALE VARIABILE 18

2.1.3 MODELLI DI ATTRITO 20

2.1.3.1 DESCRIZIONE FENOMENOLOGICA 20

2.1.3.1.A MODELLI DI ATTRITO STATICO 20

2.1.3.1.B MODELLI DI ATTRITO DINAMICO 22

2.1.3.1.B.1 MODELLO LUGRE 22

2.1.3.1.B.2 MODELLO VANALIS 23

2.1.3.2 DESCRIZIONE COSTITUTIVA 24

2.1.3.3 FATTORI DI CONTROLLO 25

2.2 FATTORI DI INCERTEZZE E RILASSAMENTO NEL GIUNTO 27

2.2.1 L'INCERTEZZA NEI GIUNTI USANDO LA LOGICA FUZZY 28

2.2.2 INCERTEZZA RELATIVA ALLE CONDIZIONI AL CONTORNO 31

2.2.3 MECCANISMO DI RILASSAMENTO E ALLENTAMENTO NEI GIUNTI 33

2.3 VALUTAZIONE DELLE PROPRIETÀ DEI GIUNTI 34

2.3.1 IDENTIFICAZIONE DEI GIUNTI LINEARI 35

2.3.2 IDENTIFICAZIONE DI GIUNTI NON-LINEARI 38

2.3.2.1 FORCE-STATE MAPPING TECHNIQUE 41

2.4 ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA PROGETTAZIONE DEI GIUNTI 44

2.4.1 ANALISI DI SENSITIVITY SUI PARAMETRI DI UN GIUNTO 45

2.5 FENOMENI DI FATICA E CEDIMENTO NEI GIUNTI 46

3. APPROCCIO SPERIMENTALE AL PROBLEMA 47

3.1 LA STRUMENTAZIONE 47

3.2 DESCRIZIONE DEL SISTEMA DINAMICO 48

3.3 IL SISTEMA DI ECCITAZIONE 49

3.4 I trasduttori 50
3.5 SignalCalcMobilyzerII 51
3.6 Esecuzione dei test 51
4. Approccio numerico al problema 55
4.1 Ambiente di calcolo ANSYS 55
4.2 Costruzione del Modello della trave singola 55
4.3 Creazione del modello con travi accoppiate 63
4.4 Elementi di contatto 68
4.5 Analisi modale 73
4.6 Analisi Armonica 78
4.7 Analisi Statica 82
4.7.1 Confronto della pressione di contatto al variare di FKN 86
4.7.2 Confronto della pressione di contatto al variare del modello 87
4.8 Analisi Transitoria 88
4.8.1 Analisi Transitoria con spostamento imposto 88
4.8.1.1 Analisi di Sensitivity per FKN e FKT 91
4.8.2 Analisi Transitoria con Forzante imposta 94
4.8.2.1 Confronto tra i Modelli A e B 97
4.9 Funzione di Risposta in Frequenza – FRF 98
4.9.1 FRF con Forzante pari a 0.6 N 98
4.9.2 FRF con Forzanti pari a 0.2 N e 2 N 101
4.9.3 Confronto della FRF al variare della forzante 102
5. Confronto Numerico-Sperimentale 103
5.1 Analisi modale in condizioni Free-Free 103
5.1.1 Analisi modale Free-Free per i modelli della trave singola 103
5.1.2 Analisi modale Free-Free per i modelli delle travi accoppiate 105
5.2 Confronto tra le FRF 106
6. Conclusione 109
7. Bibliografia e Sitografia 111
8. Ringraziamenti 115

1. Introduzione

Questo lavoro di tesi è stato condotto per studiare ed analizzare il comportamento dinamico delle superfici estese, collegate mediante dei contatti per attrito, attraverso degli strumenti di calcolo per l'analisi numerica non lineare. L'argomento trattato è molto interessante a livello ingegneristico, infatti per ogni progetto di qualità è ormai necessario conoscere in maniera approfondita i metodi di collegamento tra le parti di un sistema meccanico e le loro prestazioni in ogni condizione di lavoro. I sistemi meccanici, da quelli più semplici fino ai più complessi, richiedono sempre l'uso di elementi di collegamento e nonostante nel corso degli anni l'innovazione nel campo dei collegamenti sia stata notevole, uno degli obiettivi principali della progettazione moderna è quello di ridurre il numero di elementi di collegamento; basti pensare che per la costruzione di un aeromobile Boeing 747 sono necessari circa 2.5 milioni di organi di collegamento [1]. Tuttavia, ci sarà sempre la necessità di questi elementi in modo da rendere sempre agevole lo smontaggio delle diverse parti.

Gli elementi di collegamento, noti più frequentemente come giunti, sono dunque dei dispositivi meccanici che permettono il collegamento solidale tra due parti adiacenti del sistema. Tra i giunti vi sono numerose e svariate soluzioni tecniche già ampiamente utilizzate che possono essere sinteticamente riassunte in:

- Giunti smontabili;
- Giunti fissi o permanenti;
- Accoppiamenti;
- Organi di trasmissione.

I giunti smontabili vengono utilizzati quando è previsto il montaggio e lo smontaggio delle parti in maniera non distruttiva, come nel caso dei collegamenti bullonati o elastici (anelli, spine, linguette, ecc.), mentre questo invece non avviene con i collegamenti fissi o permanenti (chiodatura, rivettatura, saldatura o incollaggio). Gli accoppiamenti prevedono l'unione di due parti senza l'interposizione di terzi elementi (come nel caso dell'accoppiamento albero-mozzo), mentre gli organi di trasmissione sono utilizzati per la trasmissione del moto attraverso una catena cinematica.

In ambito aeronautico, i giunti permanenti e smontabili sono i più utilizzati.

Attraverso la bullonatura (Fig. 1a) è possibile avere un collegamento robusto, affidabile e smontabile, infatti questa tecnica è usata per il collegamento delle parti principali, più spesse e maggiormente sollecitate. Per l'unione di lamiera o profilati poco spessi, in ambito aeronautico, si ricorre alla rivettatura o chiodatura (Fig. 1b), perché a causa del largo impiego delle leghe leggere in Alluminio risulta difficile ricorrere alla saldatura (Fig. 1c). L'incollaggio, a singola o doppia sovrapposizione (Fig. 1d), è una tecnica utilizzata perlopiù in applicazioni non di primaria importanza e garantisce comunque una buona affidabilità e un sensibile risparmio in termini di peso e anche in termini economici.

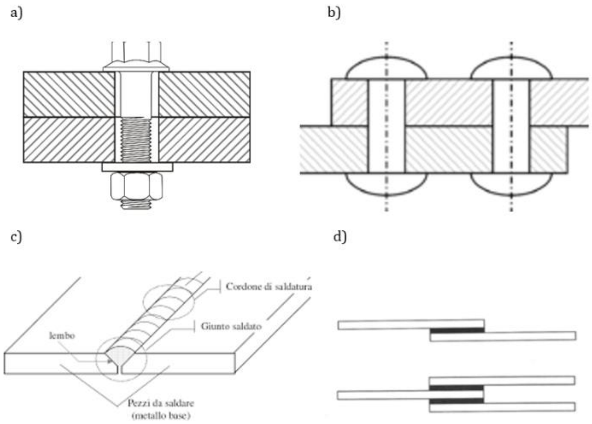


Fig. 1: varie tecniche di giunzioni: a) bullonatura, b) rivettatura, c) saldatura e d) incollaggio

Il giunto bullonato (Fig. 1a) è quindi un collegamento usato per unire in configurazione smontabile due parti grazie a dei bulloni, ovvero tramite una serie di viti passanti e dadi. Per ottenere un collegamento efficiente è fondamentale che le superfici d'appoggio della testa e del dado siano perpendicolari all'asse e che l'asse del foro e del bullone coincidano. È necessario, inoltre, che il foro passante sia di un diametro leggermente superiore al diametro del gambo della vite [2]. Il collegamento delle parti avviene tramite una coppia di serraggio applicata tramite delle apposite chiavi alla testa della vite passante e al dado, così che le parti collegate siano sottoposte ad una forza di compressione che le tiene unite mentre la vite è sottoposta ad un carico di trazione. Il carico di serraggio può discostarsi dal valore teorico per le incertezze dovute alla variabilità delle proprietà del materiale, per le incertezze legate alle tolleranze usate in fase di progettazione e di produzione delle varie parti e di conseguenza anche per l'incertezza relativa al momento applicato. Inoltre, la forza di serraggio può diminuire nel tempo come

diretta conseguenza dell’allentamento del collegamento dovuto alle vibrazioni a cui è sottoposto il giunto in fase operativa.
Gli elementi di collegamento sono dunque sede di non linearità che bisogna studiare per una consapevole progettazione. La rigidezza del sistema, così come lo smorzamento e la presenza di non linearità sono fortemente influenzate dalla tipologia e dalla posizione del giunto [3]. Inoltre, in funzione delle forze a cui è sottoposto il sistema, il giunto può essere sollecitato con carichi normali o tangenziali. Generalmente, lo smorzamento del sistema è dovuto principalmente alle deformazioni locali a livello microscopico delle asperità superficiali nelle zone di contatto. Queste irregolarità superficiali inducono delle deformazioni elasto-plastiche e dei micro-slittamenti, in particolar modo, se i materiali a contatto sono differenti. Se il giunto fosse sottoposto ad un carico tangenziale, si potrebbero verificare dei fenomeni di micro o macro-slittamento a seconda della superficie di contatto interessata. In entrambi i casi si affronta un problema non lineare e quindi non può essere utilizzato il principio di sovrapposizione degli effetti, però nel caso in cui l’ampiezza di eccitazione fosse piccola e non si verifichino dei fenomeni di slittamento diffuso si può osservare che il fenomeno si discosta poco dalla linearità.

Per comprendere a fondo la fisica del problema bisogna necessariamente far riferimento all’attrito. Il fenomeno dell’attrito (dal latino *attritus*, sfregare contro) è stato studiato per la prima volta da Leonardo da Vinci, seguito poi da Amontons e Coulomb [3]. Questi studi portano a studiare l’attrito con dei modelli classici o modelli quasi-statici, in quanto l’attrito è considerato solo in funzione della velocità relativa delle superfici di contatto. Altri approcci, invece, studiano l’attrito con modelli dinamici, dove l’attrito non è solo dipendente dalla velocità relativa della superficie di contatto ma dipende anche dal comportamento dinamico della struttura. Infine, con i modelli di attrito isteretici si studia il fenomeno dell’attrito considerando la teoria dell’elasticità che descrive l’energia dissipata e la deformazione nei giunti.

Tutte le strutture meccaniche in esercizio sono sottoposte a sollecitazioni esterne che causano delle vibrazioni. Con il termine vibrazione si indica l’oscillazione meccanica attorno ad un punto di equilibrio originate dalle condizioni operative o da disturbi esterni indesiderati e che si riducono nel tempo a causa dello smorzamento intrinseco dei corpi. L’oscillazione può essere periodica o casuale nel tempo e induce delle sollecitazioni negli organi meccanici coinvolti che generano delle deformazioni. Nelle oscillazioni periodiche, la frequenza, misurata in Hertz, indica il numero di volte, in un secondo, in cui si ripresenta la stessa configurazione. Al variare della frequenza di oscillazione l'ampiezza della deformazione cambia e la curva assume il suo picco massimo alla frequenza di risonanza. La condizione di risonanza è una condizione fisica che si verifica quando il sistema meccanico è sottoposto ad una oscillazione con frequenza pari alla frequenza propria del sistema. Questa condizione è assolutamente da evitare, in quanto comporta eccessive deformazioni del sistema che possono essere potenzialmente distruttive e che riducono la vita a fatica degli organi meccanici anche in maniera sensibile. Nella Fig. 2 viene mostrato come varia l'ampiezza di oscillazione adimensionalizzata rispetto al rapporto tra la frequenza di eccitazione e la frequenza naturale del sistema. Nella condizione di risonanza, $r = \frac{f}{f_r} = 1$, l'ampiezza raggiunge il suo massimo ed il suo valore dipende dallo smorzamento del sistema. Affinché il sistema non subisca eccessive deformazioni è necessario conoscere il range di frequenze critiche del sistema cercando di evitare di sottoporre gli organi meccanici a condizioni operative in questo range di frequenze o quantomeno di limitarne l'utilizzo in queste zone a dei ridotti transitori.

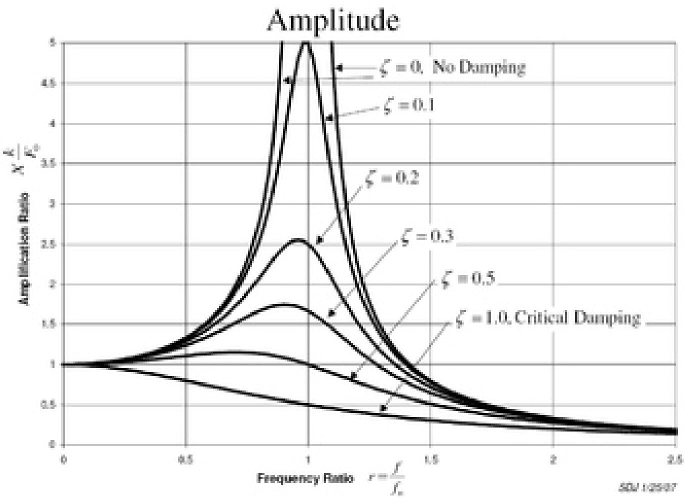


Fig. 2: grafico ampiezza di oscillazione-frequenza al variare dello smorzamento

La labilità degli elementi di collegamento deve essere quindi considerata in fase progettuale e può essere utile a ridurre l'ampiezza della sollecitazione, infatti la presenza di fenomeni di micro-slittamento all'interfaccia delle superfici di contatto portano ad avere uno smorzamento aggiuntivo del sistema dissipando una parte dell'energia, così che il sistema meccanico risulti essere maggiormente smorzato e di conseguenza si veda aumentare la vita a fatica degli organi meccanici coinvolti.

Per studiare un sistema soggetto a sollecitazioni periodiche nel tempo si fa ricorso alla dinamica strutturale. Un sistema complesso a n gradi di libertà può essere studiato come la combinazione lineare di n sistemi indipendenti a singolo grado di libertà (sdof, single degree of freedom).
Il sistema sdof è composto da tre elementi [4]:

- L'elemento massa è l'unico elemento dotato di massa, *m*, e rappresenta le proprietà inerziali del sistema ed è infinitamente rigido;
- L'elemento molla è privo di massa, è incapace di dissipare energia e produce una forza di richiamo elastico proporzionale, tramite la rigidezza *k*, allo spostamento rispetto al punto di equilibrio;
- L'elemento smorzamento viscoso rappresenta, invece, le proprietà dissipative del sistema con una forza risultante proporzionale, tramite lo smorzamento *c*, alla velocità relativa dei suoi estremi.

Il sistema complesso viene trattato in maniera del tutto analoga adottando la notazione matriciale.

Tramite l'analisi modale, il sistema viene considerato privo delle forzanti esterne e dello smorzamento e in questo modo si cerca la soluzione sincrona, dove tutte le masse degli n sistemi sdof si muovono con un'unica funzione del tempo. Il sistema viene così rappresentato da un polinomio caratteristico ed escludendo la soluzione banale si trovano gli zeri del polinomio, o autovalori, le cui n radici prendono il nome di pulsazione proprie o naturali del sistema. Andando a sostituire gli autovalori appena trovati è possibile calcolare gli autovettori o forme modali. I modi propri del sistema vengono così caratterizzati completamente dalla matrice diagonale degli autovalori e dalla matrice modale ottenuta ordinando i relativi autovettori per colonna e dipendono dalle caratteristiche geometriche strutturali e dalle condizioni al contorno (vincolo). La matrice modale permette il disaccoppiamento delle equazioni del moto ed in questo modo è possibile calcolare le ampiezze e gli spostamenti dei gradi di libertà del sistema, visualizzando graficamente il campo degli spostamenti (o deformate modali).
L'analisi della risposta in frequenza o risposta armonica è la descrizione del comportamento di un sistema dinamico sottoposto ad un'eccitazione esterna, riconducibile sempre ad una forzante di tipo armonico, tramite il suo output adimensionalizzato dalla forzante in input (funzione del tempo) nel dominio della frequenza. Il calcolo degli spostamenti a regime, tramite

il calcolo della matrice di recettanza, per esempio, permette così di valutare l'ampiezza della risposta del sistema in funzione della frequenza di eccitazione in modo da evitare la condizione di risonanza che può portare al cedimento della struttura. Tuttavia, un sistema con n gradi di libertà, a determinate frequenze di eccitazione, può trovarsi anche in condizioni di anti-risonanza, dove la combinazione dei contributi modali annulla la recettanza e tende ad annullare le vibrazioni del sistema.

2. STATO DELL'ARTE

La progettazione ingegneristica di sistemi meccanici sempre più complessi ha reso necessario lo studio in maniera sempre più approfondita e dettagliata di ogni componente. I sistemi meccanici spesso prevedono la presenza di elementi connessi tra loro tramite varie tecniche di giunzione. Lo studio di questo particolare aspetto è tanto importante quanto attuale ed è testimoniato dalle numerose ricerche presenti in letteratura. In particolare, il lavoro di R.A. Ibrahim e C.L. Pettit [5], con oltre cinquecento riferimenti bibliografici, è stata un'importante fonte di approfondimento nello studio del problema in esame.

In [5] vengono considerati principalmente due tipologie di giunti: giunti meccanici e giunti adesivi. I giunti meccanici (o mechanically fastened joints in inglese) comprendono bulloni, rivetti e pin, mentre la forma e le dimensioni dei giunti adesivi (o adhesive bonded joints) dipendono dalla struttura delle parti da collegare e dalla superficie minima richiesta per sopportare i carichi di progetto. I giunti adesivi sono però utilizzati in strutture secondarie e si cerca di evitarli negli elementi di collegamento principali a causa di maggiori problemi di affidabilità, resistenza ed effetti legati alle interazioni chimiche con le parti in gioco.

I giunti giocano così un ruolo molto importante nel comportamento dinamico complessivo del sistema influenzando in maniera importante le frequenze naturali del sistema, i modi di vibrare, la risposta del sistema all'eccitazione esterna. Anche la rigidezza della struttura e lo smorzamento sono condizionate dalla posizione e dalla natura del giunto scelto. I giunti rappresentano, dunque, una discontinuità del sistema per cui sono spesso la causa iniziale di fenomeni di cedimento a fatica.

La progettazione e l'analisi dei sistemi meccanici sono basati, ad oggi, essenzialmente su codici agli elementi finiti (FE) e multi-body, ma l'incertezza relativa ai parametri caratteristici del giunto insieme alle incertezze relative alla geometria e al materiale rendono difficile ipotizzare la risposta del sistema dovuta ad un'eccitazione esterna.

Vi sono numerose tipologie di problemi meccanici in cui l'incertezza di parametri caratteristici, delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno necessitano di un approccio stocastico, in quanto la valutazione deterministica di un singolo punto del sistema può risultare eccessivamente conservativa.

L'approccio probabilistico del metodo agli elementi finiti (FEM) è considerato uno strumento molto importante per le analisi di sistemi meccanici, a cui si è affiancato di recente l'implementazione di codici agli elementi finiti combinati alla teoria fuzzy set (o teoria

dell’insieme sfocato) per la valutazione dei parametri incerti. Alcuni sistemi non lineari, invece, sono molto sensibili a piccole variazioni dei parametri e si usa un metodo noto come metodo di biforcazione.
In questo capitolo viene messo in evidenza il ruolo delle incertezze e del rilassamento relative al giunto e il conseguente comportamento dinamico dell’intero sistema. È stata approfondita l’influenza dell’energia di dissipazione in un giunto sottoposto ad una forzante esterna, mentre l’incertezza nel giunto può essere affrontata con la teoria fuzzy. Infine, viene affrontata la trattazione del giunto in maniera lineare e non lineare.

2.1 L’ENERGIA DI DISSIPAZIONE NEI GIUNTI FLANGIATI

Lo studio dell’energia di dissipazione nei giunti, in particolare nei giunti flangiati o bullonati, permette di analizzare le cause e i meccanismi che concorrono al regime di slip (o condizione di strisciamento) oltre alla modellazione dell’attrito.
In letteratura sono presenti numerosi studi in cui sono presentati differenti modelli costitutivi e fenomenologici del problema in esame.

2.1.1 REGIME DI STRISCIAMENTO

La presenza dei giunti è considerata un’importante fonte di dissipazione di energia tra le superfici di contatto sottoposte al moto relativo, mentre la forza di attrito dipende dalle sollecitazioni torsionali e a taglio a cui è sottoposto il sistema oltre che dalla forza di serraggio e dal coefficiente di attrito. Tutto ciò comporta dei fenomeni di perdita di energia, usura e in alcuni casi anche dei fenomeni corrosivi.
Ungar [6] ha studiato l’influenza che la geometria, il numero e la spaziatura dei bulloni nel giunto hanno sull’energia di dissipazione senza trascurare l’aderenza, il materiale e la finitura superficiale degli elementi a contatto. Dai suoi studi si evince una dipendenza non lineare tra l’energia di dissipazione e l’ampiezza della forza applicata.
La pressione di chiusura del giunto generalmente diminuisce nel tempo, inducendo un rilassamento del precarico con una conseguente variazione del coefficiente di attrito causata dal cambiamento delle proprietà delle superfici a contatto durante lo slip. In molte applicazioni, come nel caso di travi sottoposte a vibrazioni, turbine a gas, strutture aerospaziali, è

vantaggioso aumentare lo smorzamento creato dalla presenza del giunto. Lo studio dell'energia di dissipazione dovuto al regime di slip nel giunto flangiato è stato oggetto di numerosi studi. Beards [7] ha mostrato nei suoi studi che il movimento relativo tra le superfici a contatto può ridurre la rigidezza complessiva del sistema e creare dei fenomeni corrosivi all'interfaccia tra le superfici del giunto. Le caratteristiche del giunto diventano sempre più rilevanti quando influenzano in maniera sostanziale la dinamica globale della struttura.

Lee [8] ha adottato un semplice modello dei giunti rappresentati da una connessione flessibile con una rigidezza e smorzamento lineare, che porta ad ottenere un sistema lineare con smorzamento non proporzionale.

Bowden [9], invece, ha effettuato delle analisi lineari e non lineari di un modello con una semplice trave a tre giunti (e ventuno gradi di libertà) per esaminarne il comportamento dinamico in assenza di gravità. Nell'analisi lineare si è notato che l'aumento dello smorzamento del giunto comporta un aumento della frequenza di risonanza e dello smorzamento modale. Quanto trovato da Bowden si discosta, però, dal caso in cui il giunto è modellato con smorzamento proporzionale. Nell'analisi non lineare, è stata calcolata la risposta forzata del modello precedente con l'aggiunta di non linearità localizzate nei giunti e viene mostrato come la non linearità coinvolga tutti i gradi di libertà del sistema.

Lo strisciamento è tanto più ampio quanto più la regione interessata è lontana dalla zona di serraggio. Se la forza tangenziale non è tale da instaurare lo strisciamento nelle zone vicine al serraggio, ci sarà comunque lo strisciamento in alcune zone della superficie di contatto, tuttavia il giunto non presenterà un completo strisciamento. Aumentando il carico tangenziale la regione sottoposta a strisciamento aumenterebbe la propria area fino ad ottenere un completo strisciamento [10].

Il giunto può dunque trovarsi in diverse configurazioni:

- Micro-slip: quando l'area di contatto sottoposta a slip è molto minore dell'area di contatto totale: $0 < A_s \ll A_c$;
- Partial slip: quando l'area di contatto sottoposta a slip è minore dell'area di contatto totale: $0 < A_s < A_c$;
- Macro-slip: quando si verifica una forza tangenziale tale che l'intera area di contatto è in condizioni di slip.

L'accuratezza della discretizzazione sarà dunque tanto più elevata quanto più i fenomeni di strisciamento solo localizzati [11].

Il giunto può entrare in una configurazione di strisciamento e dissipare energia se è sottoposto a dei carichi dinamici. Groper [12] ha sviluppato un modello che tiene conto della forza d'attrito e dello strisciamento in condizioni di carico che comportavano sia una situazione di partial slip sia full slip. Dallo studio si è notato che se il giunto è nella condizione slip, intermedia tra la condizione partial e full slip, il giunto può dissipare una rilevante quantità di energia vibrazionale.

2.1.2 Modelli di contatto

In letteratura, il problema della modellazione delle forze di contatto periodiche per l'implementazione in solutori numerici per il calcolo della risposta forzata del sistema è stato affrontato da diversi autori, che hanno proposto diversi modelli [13].

Vengono presentati i 4 principali modelli di contatto per il calcolo della risposta forzata di un sistema meccanico in presenza di contatti striscianti:
- Spostamenti relativi tangenziali 1-D e carico normale costante;
- Spostamenti relativi tangenziali 1-D e carico normale variabile;
- Spostamenti relativi tangenziali 2-D e carico normale costante;
- Spostamenti relativi tangenziali 2-D e carico normale variabile.
-

In questo paragrafo vengono descritti i modelli di contatto e viene calcolata la risposta forzata di un sistema a un grado di libertà (single degree of freedom, sdof) in modo tale da evidenziare il loro effetto sul sistema dinamico complessivo e compararne i risultati.

2.1.2.1 Spostamenti relativi tangenziali 1-D e carico normale costante

Questo modello di contatto (Fig. 3a) è stato descritto per la prima volta da Griffin [13].
Il modello è un sistema sdof sottoposto ad un carico normale costante agente sull'elemento strisciante (chiamato anche grattatore) in cui è possibile lo spostamento relativo monodimensionale lungo la direzione tangenziale.

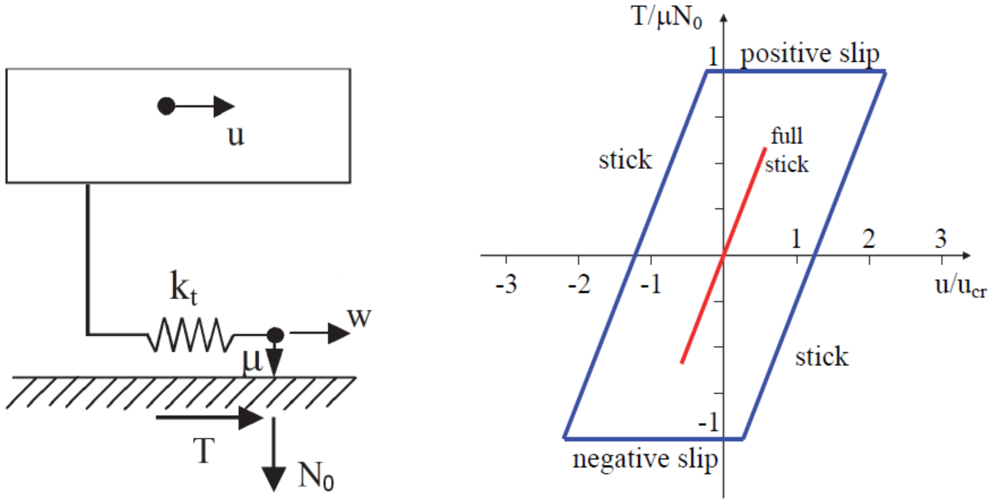


Fig. 3: a) modello di contatto e b) ciclo di isteresi

Il sistema ha una massa m ed è connesso con l'elemento strisciante tramite una rigidezza tangenziale, rappresentata da una molla di rigidezza k_t, che permette alla massa, sottoposta ad una forza esterna periodica u(t), di muoversi producendo una deformazione elastica all'interfaccia con l'elemento strisciante senza che vi sia strisciamento. L'elemento strisciante è dunque soggetto ad un pre-carico normale costante ed una forza tangenziale periodica T(t) e presenta uno strisciamento tangenziale w(t).
L'elemento strisciante si può quindi trovare in due stati:

- *Stick state* (adesione) se w=0;
- *Slip state* (strisciamento) se w≠0.

Quando vi è adesione (stick state) non vi è strisciamento e la forza tangenziale è pari a:

$$T = k_t(u - w) \qquad con\ \dot{w} = 0.$$

Nel caso di strisciamento (slip state) la forza tangenziale si oppone al moto e segue la legge di attrito Coulombiano. In questo caso la forza tangenziale sarà pari a:

$$T = sgn(\dot{w})\mu N_0$$

dove:

- μ è il coefficiente di attrito ed è un parametro fisico che racchiude la fisica del contatto, tendendo in considerazione il materiale della superficie e del grattatore e dell'area di contatto;
- $sgn(\dot{w})$ è la funzione segno ed assume i valori:

$$sgn(\dot{w}) = \begin{cases} -1 \; se \; \dot{w} < 0 \; (negative \; slip) \\ 1 \; se \; \dot{w} > 0 \; (positive \; slip) \end{cases}$$

Le condizioni di transizione tra lo stato di adesione e strisciamento in generale saranno:

Stato Iniziale	Stato Finale	Criterio di Transizione
Stick	Slip	$\lvert T \rvert = \mu N_0$
Slip	Stick	$\dot{w} = 0$

Tab. 1: condizioni di transizione

Se lo spostamento relativo tangenziale u(t) risulta minore del valore limite $u_{lim} = {}^{\mu N_0}/_{k_t}$, l'elemento strisciante si trova in una condizione di completa adesione (full stick state, linea rossa in Fig. 3b). In questo caso l'energia vibrazionale non è dissipata dall'attrito presente al contatto. Se lo spostamento u(t) supera il valore limite u_{lim}, l'elemento strisciante presenterà un'alternanza di condizioni di adesione e strisciamento nel tempo (linea blu in Fig. 3b) e il ciclo di isteresi rappresenta l'energia dissipata per ogni ciclo dal sistema.

Nella Fig. 4 si mette in evidenza la variazione del ciclo di isteresi al variare del pre-carico normale a cui è sottoposto l'elemento strisciante.

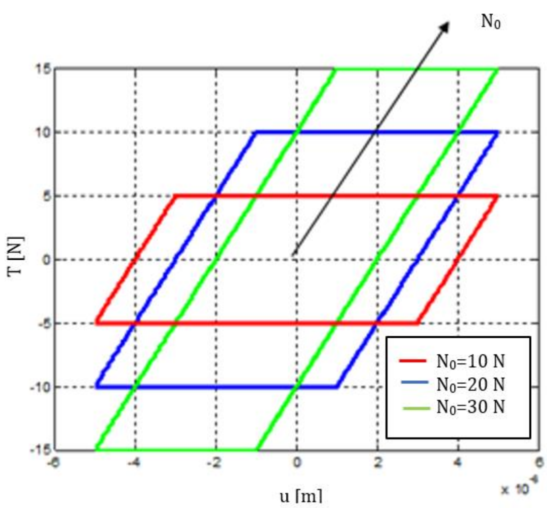


Fig. 4: variazione del ciclo di isteresi al variare del pre-carico

2.1.2.2 SPOSTAMENTI RELATIVI TANGENZIALI 1-D E CARICO NORMALE VARIABILE

Il modello di contatto qui presentato è una generalizzazione del modello esposto nel paragrafo 2.1.2.1. Grazie a questo modello, presentato per la prima volta da Yang [13], si analizza l'effetto della variazione del carico normale sul ciclo di isteresi e quindi sull'energia dissipata per attrito. La variazione del carico normale è dovuta ad uno spostamento periodico relativo rispetto il punto di contatto in direzione normale.

Il modello, mostrato in Fig. 5, presenta due gradi di libertà (double degree of freedom, ddof).

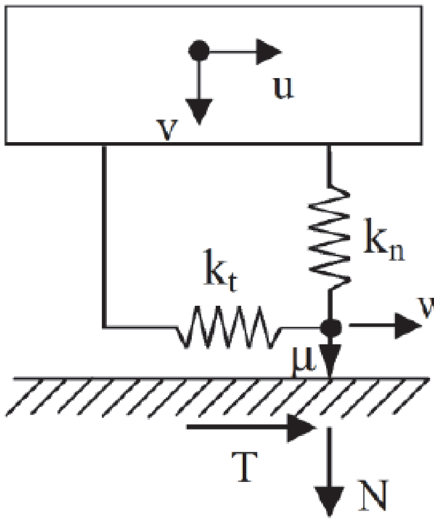


Fig. 5: modello di contatto con spostamenti relativi tangenziali 1-D e carico normale variabili

L'elemento di massa m può essere sottoposto a due spostamenti relativi periodici in direzione tangenziale e normale, rispettivamente u(t) e v(t), ed è connesso all'elemento strisciante tramite due rigidezze:

- k_t è la rigidezza tangenziale e permette la deformazione elastica tangenziale, avendo così l'assenza di fenomeni di slittamento, entro un determinato range di forza tangenziale;
- k_n è la rigidezza normale e permette la variazione del carico normale.

Le forze di contatto non lineari normali e tangenziali risultano quindi essere pari a:

$$N = \max(N_0 + k_n v , 0)$$

$$T = \begin{cases} k_t\,(u-w) & stick\ \ se\ T < \mu N \\ sgn(\dot{w})\mu N & slip\ \ se\ T \geq \mu N \\ 0 & lift\ off \end{cases}$$

Si noti che se N fosse positivo, i corpi sarebbe a contatto prima che la forzante esterna solleciti periodicamente il sistema; mentre invece se N fosse negativo i corpi avrebbero un gap iniziale, per cui il contatto avverrebbe solo dopo un certo istante di tempo.
Il sistema si può quindi trovare in 3 diverse possibili configurazioni:

- contatto totale per tutto il periodo di oscillazione (full contact);
- parziale distacco (partial lift off);
- totale distacco (full lift off).

Il sistema, sottoposto alle forzanti esterne, può evolvere nel tempo secondo i criteri di transizione mostrati in tabella (Tab. 2):

Stato Iniziale	Stato Finale	Criterio di Transizione
Stick	Slip	$T = \mu N$
	Lift Off	$N = 0\ \ \&\ \ \dot{N} < 0$
Slip	Stick	$\dot{w} = 0$
	Lift Off	$N = 0\ \ \&\ \ \dot{N} < 0$
Lift Off	Stick	$N = 0\ \ \&\ \ \dot{N} > 0\ \ \&\ \ \lvert\dot{T}\rvert < \mu\dot{N}$
	Slip	$N = 0\ \ \&\ \ \dot{N} > 0\ \ \&\ \ \lvert\dot{T}\rvert > \mu\dot{N}$

Tab. 2: condizione di transizione

L'effetto della variazione del carico normale N(t) incide sul valore assunto dalla forza tangenziale T(t) e di conseguenza modifica l'area del ciclo di isteresi.
A titolo esemplificativo, viene mostrata in Fig. 6 la variazione del ciclo di isteresi al variare del carico normale, dove le sollecitazioni periodiche esterne u(t) e v(t) sono in fase tra loro.

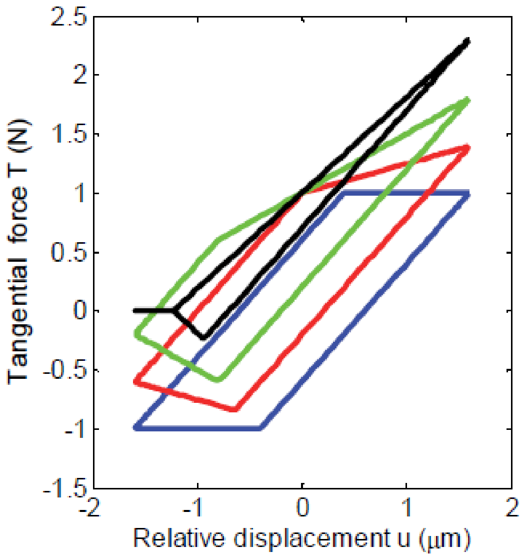


Fig. 6: variazione di ciclo di isteresi al variare del carico normale

Se la sollecitazione in direzione normale, v(t), fosse nulla si avrebbe un carico normale costante, si ritornerebbe così al modello presentato nel paragrafo precedente (linea blu). All'aumentare dell'ampiezza di sollecitazione v(t), il ciclo di isteresi assume un'area e una forma diversa; nel caso full contact (linea blu, rossa e verde), il contatto è sempre garantito e vi è dunque solo l'alternanza tra stato di adesione e strisciamento, mentre invece se l'ampiezza di sollecitazione v(t) supera il valore limite si verifica un parziale distacco (dove la forza tangenziale T(t) è nulla) e il ciclo di isteresi (linea nera) presenterà un tratto orizzontale nel momento del distacco e una forma triangolare.

2.1.2.3 Spostamenti relativi tangenziali 2-D e carico normale costante

Nei paragrafi precedenti sono stati presentati dei modelli di contatto dove lo spostamento relativo tangenziale era monodimensionale. Tuttavia, in alcuni casi, risulta necessario un modello di contatto in cui gli spostamenti tangenziali relativi siano bidimensionali.
Sono possibili due differenti approcci alla definizione del modello:

- utilizzare due elementi di contatto 1-D, precedentemente descritti nel paragrafo 2.1.2.1, posti ortogonalmente tra loro in modo da poter descrivere una traiettoria piana nel punto di contatto;

- utilizzare un elemento di contatto 2-D in cui vi è l'accoppiamento tra le due componenti ortogonali degli spostamenti relativi tangenziali.

Il modello di contatto, qui descritto, segue il secondo approccio [13] ed è caratterizzato da uno spostamento relativo tangenziale 2-D e un carico normale costante, come è mostrato in Fig. 7:

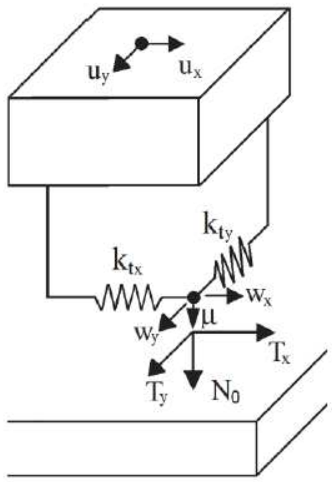


Fig. 7: modello di contatto con spostamenti relativi tangenziali 2-D e carico normale costante

Il modello presenta un piano di contatto (X,Y), una rigidezza complessiva rappresentata da due molle di rigidezza k_{tx} e k_{ty}, poste ortogonalmente tra loro, un coefficiente di attrito μ ed un carico normale costante N_0, che tiene i corpi sempre in contatto.

Imponendo una sollecitazione armonica u(t)={u_x(t); u_y(t)}, troveremo una forza tangenziale periodica T(t)={T_x(t); T_y(t)} ed uno strisciamento tangenziale tra le superfici di contatto pari a w(t)={w_x(t); w_y(t)}.

L'elemento strisciante, in questo modello, potrà trovarsi solo in due possibili configurazioni: adesione e strisciamento.

Quando si verifica lo stato di adesione, per esempio, non si verifica strisciamento tra le parti a contatto per cui la forza tangenziale sarà pari a:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{tx} & 0 \\ 0 & k_{ty} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} \right) \quad con \ \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Quando l'elemento strisciante si trova invece nella configurazione di strisciamento, implica che il modulo della forza tangenziale ha uguagliato il valore limite della forza di attrito Coulombiana:

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2} \; = \; \mu \, N_0$$

L'equazione rappresenta una circonferenza di raggio μN_0.

In Fig. 8 viene mostrato, a titolo esemplificativo, il modello di contatto con spostamenti relativi tangenziali 2-D sottoposto alle forzanti armoniche $u_x(t)$ e $u_y(t)$, sfasate di un angolo $\phi = \pi/2$ e con un rapporto tra le ampiezze pari a $u_{x0}/ u_{y0}=2.5$.

Le linee rosse si riferiscono ad alcuni casi in cui si verifica uno stato di adesione durante tutto il periodo e quindi lo strisciamento è assente. Le linee blu, invece, prendono in esame dei casi in l'ampiezza delle sollecitazioni è tale da indurre dei fenomeni di alternanza tra lo stato di adesione e strisciamento.

Nel momento in cui, l'elemento strisciante inizia a strisciare la curva si sovrappone alla linea nera, che rappresenta il limite che può essere solo uguagliato dalla forza tangenziale. Se l'ampiezza di sollecitazione cresce ancora, l'elemento strisciante si trova in una condizione di full slip (rappresentata dalla linea nera), condizione che non può verificarsi nel caso di spostamenti relativi tangenziali monodimensionali.

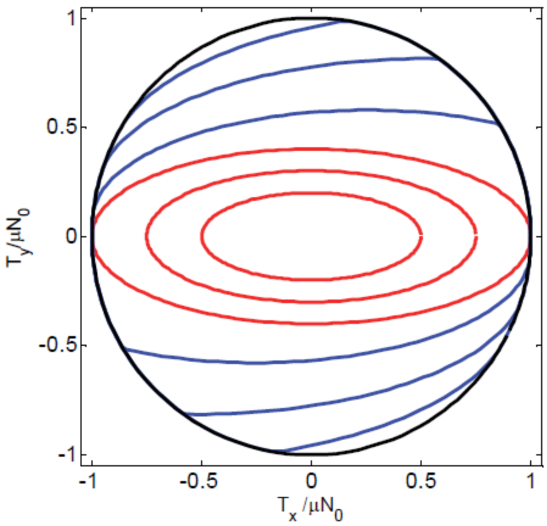


Fig. 8: ciclo di isteresi al variare delle condizioni di contatto

2.1.2.4 Spostamenti relativi tangenziali 2-D e carico normale variabile

Il modello di contatto descritto in questo paragrafo presenta la possibilità di sottoporre l'elemento strisciante a degli spostamenti relativi tangenziali agenti sul piano di contatto (2-D). Inoltre, la variabilità del carico normale rende questo modello come il più avanzato presente nella letteratura tecnica [13].

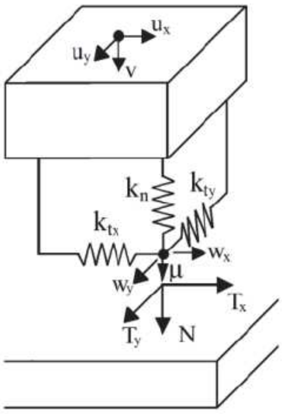


Fig. 9: modello di contatto con spostamenti relativi tangenziali 2-D e carico normale variabile

Il modello è analogo a quello precedentemente descritto nel paragrafo 2.1.2.3, ma presenta un carico normale variabile, definito come:

$$N = \max(N_0 + k_n v \, , 0 \,)$$

Data la variabilità del carico normale, il contatto tra i corpi non è sempre garantito, per cui l'elemento strisciante potrà trovarsi in tre differenti configurazioni: adesione, strisciamento e distacco.

Nel caso in cui l'elemento strisciante si trovi in condizione di adesione, non vi è strisciamento tra le superfici a contatto e la forza tangenziale è dunque pari a:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{tx} & 0 \\ 0 & k_{ty} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} \right) \quad con \ \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad e \ \ N \geq 0$$

Nel momento in cui il modello si trova in condizione di strisciamento, il modulo della forza tangenziale è pari alla forza di attrito Coulombiana e la sua direzione è parallela alla velocità di strisciamento $\dot{w}$.

Le componenti della forza tangenziale sono dunque pari a:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \frac{\mu N}{\|\dot{w}\|} \begin{Bmatrix} \dot{w}_x \\ \dot{w}_y \end{Bmatrix} \quad con \;\; \|\dot{w}\| = \sqrt{\dot{w}_x{}^2 + \dot{w}_y{}^2}$$

Quando il modello si trova in condizione di distacco, sia la forza normale sia la forza tangenziale assumeranno valore nullo.

Nella Fig. 10 vengono riportati gli andamenti delle forze tangenziali a cui è sottoposto il modello in 4 differenti casi al variare del carico normale.

La curva in nero rappresenta la curva limite Coulombiana mentre la linea blu rappresenta le forze tangenziali di contatto.

In particolare, si può osservare:

- caso a): carico normale costante $N=N_0$, esattamente come il modello di contatto presentato nel paragrafo 2.1.2.3;
- caso b): piccola variazione del carico normale, in cui è ancora possibile notare l'alternanza tra gli stati di adesione e strisciamento;
- caso c): grande variazione del carico normale, in cui viene a mancare un tratto nella condizione di adesione rispetto al caso b);
- caso d): variazione molto grande del carico normale che porta ad una condizione di separazione tra i corpi a contatto (visibile nel punto di origine).

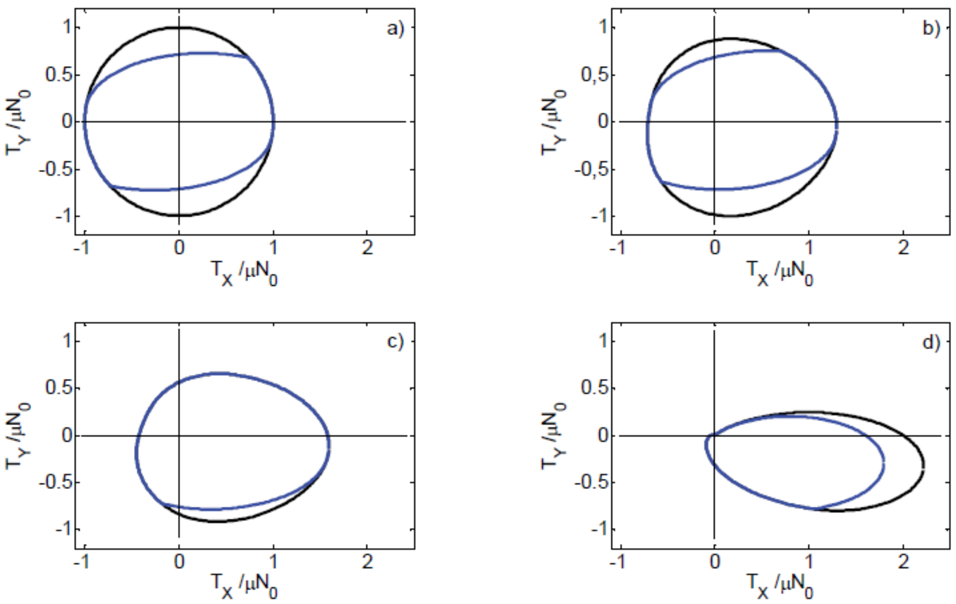


Fig. 10: andamento delle forze tangenziali al variare del carico normale

2.1.3 Modelli di Attrito

La modellazione del giunto deve essere sufficientemente accurata da rappresentare la fisica del problema cercando di essere il più semplice per non essere troppo onerosa in termini computazionali [14]. Per questa ragione, in molte applicazioni, la legge dell'attrito di Coulomb è scelta per la sua semplicità.

La descrizione del fenomeno di attrito può avvenire tramite un *modello fenomenologico* o c*ostitutivo* [15]. I *modelli fenomenologici*, come il modello di attrito di Coulomb, sono basati sull'osservazione sperimentale e descrivono la relazione tra forza tangenziale e spostamenti relativi all'interfaccia tra le superfici di contatto.

I *modelli costitutivi*, invece, descrivono il fenomeno fisico dell'attrito in modo locale.

Questo approccio è utilizzato nel caso di corpi flessibili, in quanto la legge di Coulomb è valida esclusivamente per il contatto tra corpi rigidi.

2.1.3.1 Descrizione fenomenologica

In un giunto l'attrito agisce come una forza interna in direzione tangenziale alla superficie di contatto. Al di sotto del valore critico non vi è il movimento relativo tra le superfici a contatto. Al raggiungimento del valore critico, la forza tangenziale uguaglia la legge d'attrito e agisce in direzione opposta alla velocità relativa. La forza richiesta per permettere lo strisciamento tra i corpi a contatto dipende dalla velocità relativa e da altri fattori.

2.1.3.1.a Modelli di attrito statico

I modelli di attrito statico sono il modo più semplice per descrivere la forza di attrito in funzione della velocità relativa tra le superfici di contatto.

Il modello di attrito più usato è la legge di attrito di Coulomb (Fig. 11a), dove la forza di attrito è pari a:

$$F = F_c \, sgn(v) = \mu \, N \, sgn(v)$$

Dove F_c è la forza di attrito limite, che è pari al prodotto tra il coefficiente di attrito μ e la forza normale N. Il modello di attrito è stato poi migliorato rendendo l'attrito viscoso, come mostrato in Fig. 11b, in quanto sperimentalmente si è notata la correlazione tra la velocità relativa e le forze F_c e N.

L'attrito di primo distacco (*stiction* in inglese) descrive la forza di contatto quando non vi è ancora il moto relativo tra i corpi a contatto. Lo svantaggio della formulazione precedente, basata sulla funzione segno *sgn(v)*, è che non spiega le possibili deformazioni che possono verificarsi prima della condizione di strisciamento.

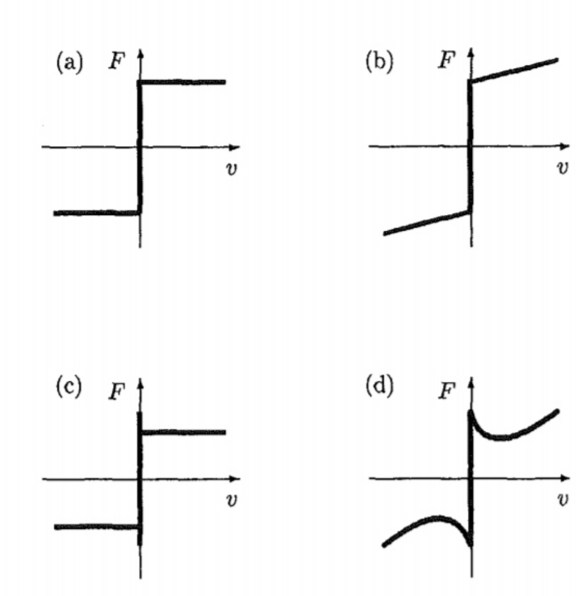


Fig. 11: modelli di attrito statico

Questo limite è stato superato descrivendo l'attrito all'interfaccia tra le superfici con un modello noto come *Jenkins o Masing element.* Questo elemento prevede una molla elastica c_i posta in serie ad un elemento di attrito Coulombiano ideale, con una forza limite pari a h_i. Il comportamento del giunto potrà così essere descritto da diversi Jenkins Element posti in parallelo (Fig. 12). Questo modello è anche noto come *Elasto Slip Model* e la forza di contatto sarà pari a:

$$F(u,\dot{u}) = c_o u + \sum_{i=1}^{m} \begin{cases} r_i(t) & |r_i(t)| < h_i \\ h_i \, sgn(\dot{u}) & \end{cases}$$

dove la forza dell'elemento i-esimo è pari a $|r_i| = |c_i \, (u - u^+) - h_i \, sgn(\dot{u}^+)|$.

Da questa formulazione si nota come lo spostamento relativo è pari a $u = u_k - u_l$, mentre u^+ rappresenta lo spostamento nell'istante di inversione della velocità.

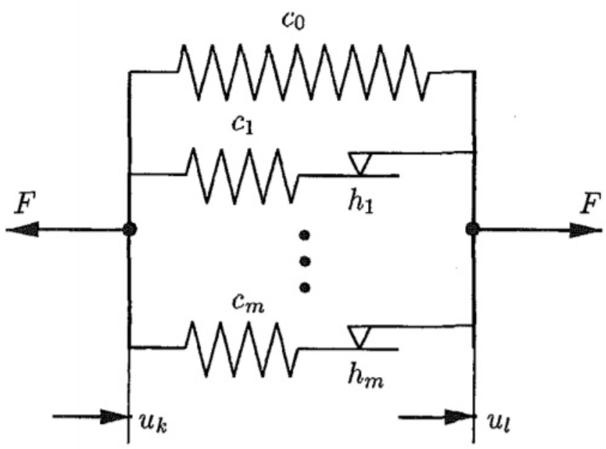


Fig. 12 elasto-slip model

La Fig. 11c descrive il modello in cui la forza di attrito di primo distacco è massima quando non vi è moto relativo tra i corpi a contatto e poi si attesta ad una forza di attrito minore e indipendente dalla velocità relativa del sistema.

Stribeck, in alcuni casi, ha osservato che l'attrito ha un andamento decrescente per basse velocità mentre ha un andamento opposto per velocità maggiori. Questo fenomeno prende il nome di effetto Stribeck, mostrato in Fig. 11d.

2.1.3.1.B MODELLI DI ATTRITO DINAMICO

In alcuni casi, l'attrito non può essere rappresentato con modelli che tengano conto solo della dipendenza con la velocità. Di seguito vengono presentati due modelli applicabili a sistemi dinamici.

2.1.3.1.B.1 MODELLO LUGRE

Il modello LuGre (Lund-Grenoble) è un modello di attrito dinamico [15]. Il contatto è solido – solito e l'interfaccia tra i corpi a contatto è rappresentata dal contatto tra due setole (bristles in inglese), di cui le setole della parte inferiore sono assunte come rigide per una maggiore semplicità del modello (Fig. 13):

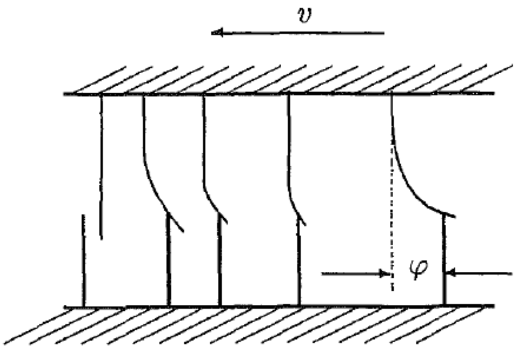


Fig. 13: modello LuGre

Il modello è usato per descrivere i carichi non lineari. La superficie a livello microscopico è molto irregolare, quindi è un fenomeno altamente random, che è ben rappresentata dalle setole che caratterizzano il modello LuGre. Le setole si comportano come delle molle e se vi è applicata una forza tangenziale tale da imporre un movimento relativo danno luogo alla forza di attrito al contatto.

Questo modello riesce a riprodurre tutti i fenomeni di attrito in un'ampia varietà di condizioni operative. Le equazioni caratteristiche del modello [15] sono:

$$F = \sigma_0\, \varphi + \sigma_1\, \dot{\varphi} + \sigma_2\, v = \mu(\varphi, \dot{\varphi}, v)$$

$$\dot{\varphi} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} \varphi \quad , \quad \varphi(t = 0) = \varphi_0$$

$$g(v) = F_C + F_\Delta \exp\left(-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2\right)$$

La forza di attrito, F, dipende dalla deflessione media delle setole φ e dalla velocità relativa di strisciamento all'interfaccia, v. La rigidezza delle setole è in funzione del parametro σ_0, mentre i parametri σ_1 e σ_2 sono funzione di velocità e attrito dinamico.

Il modello LuGre permette dunque lo studio analitico dove generalmente non è possibile con i modelli di attrito discontinui.

2.1.3.1.B.2 MODELLO VANALIS

Il modello Vanalis è un modello capace di spiegare il comportamento di un sistema sia a livello locale (fenomeni di micro-slip) ed a livello globale (macro-slip) simulando la risposta del sistema sotto carico ciclico oltre che la risposta al transitorio [15].

Il modello è governato da un'equazione differenziale del primo ordine:

$$F'(z) + \lambda F(z) = E_0\, q'(z) + \lambda\, E_t\, q(z)$$

Dove F è la forza generalizzata e q è lo spostamento generalizzato, mentre E_0 , E_t e λ sono parametri relativi al materiale. E_0 e E_t rappresentano rispettivamente il modulo elastico nella configurazione di adesione e nella configurazione di strisciamento.
La relazione tra la variabile interna $z(t)$ e il tempo è data da:

$$\dot{z}(t) = \left|\dot{q}(t) - \varsigma \frac{F(t)}{E_0}\right|$$

Dove ς è un parametro adimensionale, variabile tra 0 e 1, che influenza il micro-slip. Valori di ς prossimi all'unità indicano una bassa influenza sul micro-slip.
Questo modello può essere implementato in ambienti di simulazione multi-body e fem.

2.1.3.2 Descrizione Costitutiva

Il metodo agli elementi finiti (F.E.M.) è utilizzato per descrivere il comportamento locale tra le superfici a contatto. L'approccio costitutivo mette in relazione i campi di tensione e spostamento, che integrati su tutta l'area di contatto permettono un'analisi sul campo di forze e proprietà di deformazione [16].
Le leggi relative al contatto normale e tangenziale che includono l'attrito sono sviluppate su *base statistica*. La superficie dell'area di contatto è irregolare e quindi il contatto avviene solo sulle asperità della superficie, ragion per cui l'area di contatto reale è molto minore di quella ideale con conseguenti picchi di pressioni localizzati.
Alle superfici a contatto viene assunto sempre un iniziale contatto e viene anche attribuito un indice di plasticità, che misura la deformazione elastica dell'area di contatto reale.
Viene considerato un modello [16] che considera:

- il contatto iniziale elastico tra le superfici;
- superficie isotropica, a bassissima rugosità, con asperità solo sferiche;
- i punti di contatto non interagiscono;
- usura assente;
- assenza di lubrificazione.

Il contatto normale a livello microscopico è trattato con la teoria del contatto di Hertz, mentre le forze tangenziali sono considerate come la combinazione tra lo sforzo di taglio elastico (Mindlin) e lo sforzo di taglio costante τ_{max}.
Per valutare il modello macroscopico si considerano le relazioni a livello locale e si distribuiscono sull'area apparente di contatto, utilizzando dei metodi statistici che tengano conto delle irregolarità superficiali dell'area di contatto. Questi modelli usano il metodo delle differenze finite per l'approssimazione della pendenza e della curvatura delle irregolarità superficiali. Il principio dei lavori virtuali consente così di formulare algoritmi per il contatto da implementare in codici agli elementi finiti.
Alcuni autori hanno proposto il *modello frattale* per descrivere il contatto meccanico nei giunti; tra i modelli più importanti ricordiamo il modello Weierstrass-Mandelbrot (WM) [15]. La funzione WM descrive il profilo di rugosità superficiale e ipotizzando che il contatto sia elastico si calcola la pressione apparente agente su una porzione dell' area di contatto.
I modelli che trattano le superfici di contatto con approccio statistico possono non conseguire sempre dei risultati univoci a causa di differenti campionatura di lunghezze e intervalli analizzati. Questo problema può essere superato con un'efficiente azione di filtering della gamma di rugosità considerate che dipende dalla specifica applicazione. I modelli con superfici frattali non hanno questo svantaggio, ma le leggi di contatto dipendono da parametri di misurazione. Il modello statico è comunque preferito per il suo approccio modulare e per la sua semplicità.

2.1.3.3 FATTORI DI CONTROLLO

Gli elementi strutturali collegati tramite giunti trasmettono il carico tramite l'attrito interno del giunto. I vari giunti realizzati con collegamenti filettati realizzano il contatto tra le superfici tramite una pressione di serraggio sufficiente. La dissipazione di energia in questa tipologia di giunti dipende dalla finitura superficiale, dal carico massimo a cui è sottoposto il sistema e anche dalla storia di carico precedente [5], ma in tutti i casi analizzati l'energia persa per dissipazione non è linearmente dipendente con la forza tangenziale.
La pressione di serraggio nel giunto porta ad una variazione dell'area del ciclo di isteresi. Un'elevata pressione di serraggio genera un'area di contatto maggiore tra le superfici in quanto induce delle deformazioni plastiche delle asperità [17].

Nella Fig. 14 viene mostrato, a titolo di esempio, l'energia dissipata da un giunto con una forza di serraggio differente. La linea continua rappresenta l'energia dissipata dal 19esimo modo con una forza di serraggio di 25 KN, mentre per la linea continua la forza di serraggio è pari a 22 KN.

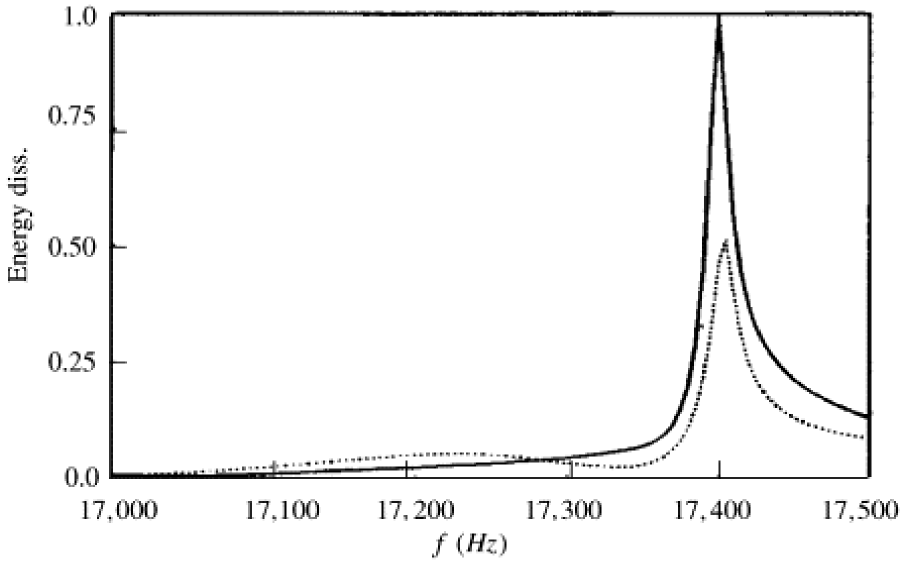


Fig. 14: energia di dissipazione del 19esimo modo al variare della forza di serraggio

Si nota che una diminuzione della forza di serraggio del 12% dimezza all'incirca il picco di energia dissipata dal sistema.

Lo strisciamento in un giunto sottoposto ad un'alta pressione di serraggio sarà piccolo, mentre invece una minore pressione di serraggio porta ad avere lo sforzo di taglio per attrito basso. La condizione di massima energia dissipata si trova tra questi due casi limiti. Beards [18] ha studiato lo smorzamento di strutture vibranti controllato dallo strisciamento tra le superfici di contatto del giunto, trovando la condizione ottimale di serraggio tale per cui l'energia dissipata è massima.

Shin et al. [19] ha studiato le relazioni che ci sono tra il precarico di serraggio e lo smorzamento. È stato analizzato il comportamento dello smorzamento valutando tre differenti approcci:

- variazione del precarico di serraggio tramite modifica della coppia di serraggio;
- aggiunta di un foglio (layer) di materiale visco-elastico tra le superfici di contatto del giunto;
- combinazione dei due precedenti approcci per trovare la condizione ottimale di smorzamento.

Esteban e Rogers [20] presentano un approccio analitico per determinare l'energia dissipata nel giunto eccitato ad alte frequenze. Per questa ragione le valutazioni teoriche preliminari sono fatte sulla base della teoria di propagazione delle onde.
Il sistema è composto da due travi, modellate seguendo la teoria di Timoshenko, connesse tramite un giunto bullonato e entrambe le travi con le estremità libere di vibrare (condizioni al contorno free-free). Il modello prevede anche un sistema attuatore-sensore piezo-ceramico (PZT) integrato, come si vede in Fig. 15.

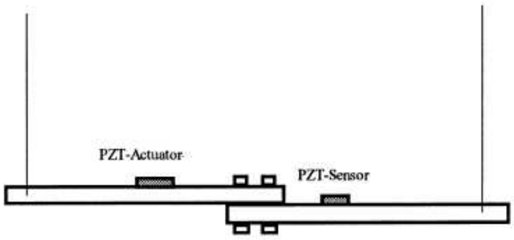


Fig. 15: sistema attuatore-sensore piezo-ceramico

Utilizzando le equazioni del moto si può identificare la matrice di rigidezza dinamica nel dominio delle frequenze. L'energia di dissipazione del giunto è modellata linearmente con un sistema massa-molla-smorzatore e non linearmente con le forze non conservative che vengono rappresentate da una molla cubica.
È stato verificato che l'onda incidente sul giunto ha un'energia significativamente superiore all'onda che si propaga dopo il giunto. Questo implica che un'importante quantità di energia dell'onda incidente è dissipata nel giunto.

2.2 Fattori di incertezze e rilassamento nel Giunto

Vi sono molti fattori che influenzano il comportamento dinamico dei giunti.
Tra i più importanti troviamo l'attrito, la durezza, la finitura superficiale, le dimensioni dell'area di contatto e lo scorrimento viscoso (creep) [21]. Questi fattori variano in maniera sostanziale a causa dei metodi utilizzati per la produzione delle parti del giunto o per le tolleranze adottate. Tutto questo si tramuta in delle incertezze parametriche per i giunti. I problemi incontrati nella progettazione e nell'analisi dei giunti con parametri di incertezza riguardano la risposta del sistema e la vita a fatica dei componenti. La progettazione di questi sistemi dovrebbe dunque tener conto delle non linearità a livello di geometria, di materiali e delle condizioni al contorno

[22]. Nelle applicazioni reali, molto spesso le condizioni al contorno sono lontane dalle condizioni ideali, per cui Wang e Chen [23] hanno determinato dei parametri di non idealità delle condizioni al contorno.
I giunti flangiati hanno quindi un importante effetto in termini di smorzamento e rigidezza del sistema. Lo smorzamento è creato dall'attrito nella filettatura tra vite e madrevite, dall'attrito dei materiali a contatto, dalla deformazione plastica. La rigidezza del giunto, invece, dipende dalla durezza e rugosità delle superfici a contatto.
In molti casi, questi valori non possono essere valutati accuratamente a causa delle incertezze relative alla produzione, alla variabilità delle proprietà del materiale, ai parametri geometrici e ai processi di rilassamento del giunto nel tempo.

2.2.1 L'INCERTEZZA NEI GIUNTI USANDO LA LOGICA FUZZY

I parametri di incertezza nei giunti possono essere rappresentati attraverso la logica fuzzy. La logica fuzzy è una teorica logico-matematica, sviluppata a partire dalla teoria degli insiemi dal professore di Berkeley, Lotfi A. Zadeh. Questa logica introduce il concetto della logica sfumata (fuzzy in inglese) per cui ad un determinato enunciato non corrisponde solo la verità o la falsità (logica binaria) ma un certo grado di verità (chiamato grado di appartenenza), a cui veniva attribuito un valore numerico [24].
La logica fuzzy tende a eliminare la discontinuità, che invece si presenta nella logica tradizionale binaria, introducendo una classe di appartenenza (fuzzy set) con un grado di appartenenza (membership), compreso sempre tra 0 e 1, e una funzione di appartenenza (membership function). La funzione di appartenenza μ definisce il grado di attivazione di ogni classe di appartenenza e possono avere forme differenti: a triangolo, a trapezio, gaussiane (Fig. 16).

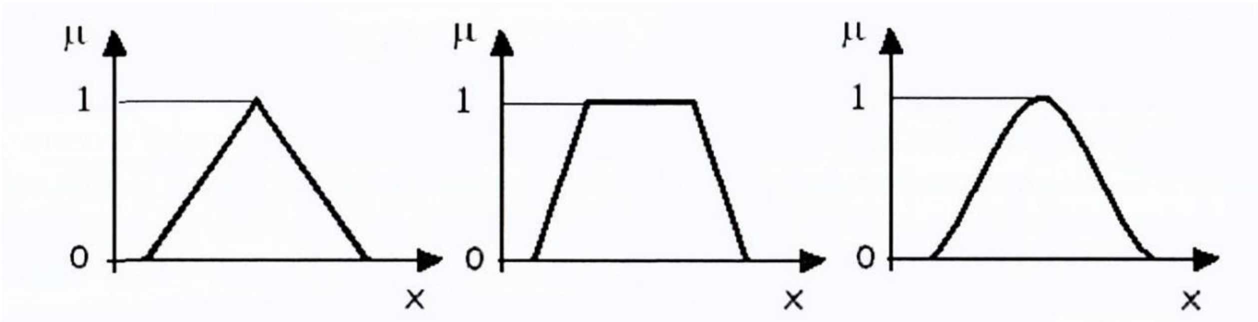


Fig. 16: esempi di funzioni di appartenenza

Il concetto alla base della logica fuzzy viene dunque utilizzato quando un parametro non è definito in maniera precisa ed è soggetto a una variazione dal suo valore ideale.
Se non si è certi dell'esattezza di un parametro del sistema si può verificare quale sia la probabilità che si verifichi proprio quel dato valore. Assegnando ad un valore un fuzzy set, imponendo una variabilità a tale parametro, si ricorre ad una distribuzione probabilistica che precisa il grado di probabilità di ottenere quel determinato valore. Quindi, la distribuzione probabilistica può rappresentare l'imprecisione di un parametro.
Hans et al. [25] ha rappresentato la rigidezza e lo smorzamento del giunto flangiato con i parametri che sono identificati sulla base dei dati sperimentali e valutati con la logica fuzzy. I fuzzy sets di un elemento, x con ($x \in \Re$), hanno un certo grado di appartenenza $\mu(x) \in [0,1]$, che si differenzia dai crisp sets che sono caratterizzati dal grado di appartenenza che può essere solo 0 o 1, come si vede in Fig. 17.

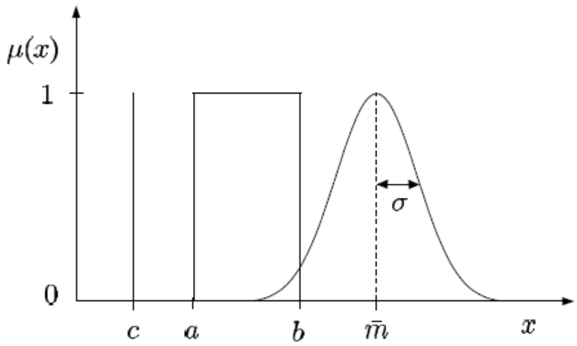


Fig. 17: crisp sets, intervallo [a,b] e funzione di appartenenza gaussiana

Le funzioni di appartenenza possono essere espresse come:

$$\mu_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & se\ a \leq x \leq b \\ 0 & se\ x < a\ o\ x > b \end{cases}$$

$$\mu_c = \begin{cases} 1 & se\ x = c \\ 0 & se\ x \neq c \end{cases}$$

La funzione di appartenenza Gaussiana (a destra nella Fig. 17) è definita come:

$$\mu(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\bar{m})^2}{2\,\sigma^2}} & se\ \left| x - e^{-\frac{(x-\bar{m})^2}{2\,\sigma^2}} \right| \leq 3\sigma \\ 0 & se\ x > \bar{m} + 3\sigma\ o\ x > \ \bar{m} - 3\sigma \end{cases}$$

dove $\overline{m}$ è il valore medio e σ è la deviazione standard della distribuzione Gaussiana.
Un numero fuzzy può essere rappresentato da un numero fuzzy discreto o decomposto in un numero di intervalli $[a^{(j)}, b^{(j)}]$, come si vede in Fig. 18, e avremo quindi:

$$\mu_j = \frac{j}{m} \quad con\ j = 0,1, \dots, m$$

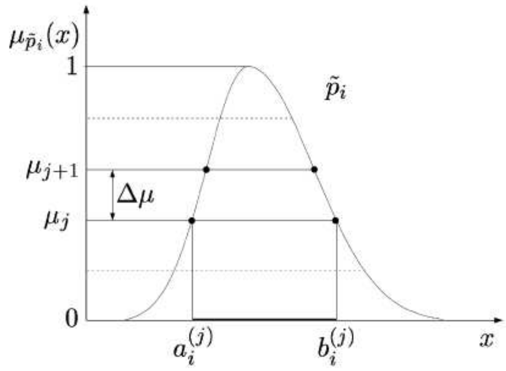


Fig. 18: fuzzy set discreto

Un numero fuzzy $\widetilde{p_1}$ può essere decomposto in $m + 1$ intervalli e discretizzato come:

$$P_1 = \{\left[a_1^{(0)}, b_1^{(0)}\right], \left[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}\right], \dots, [a_1^{(m)}, b_1^{(m)}]\}$$

Considerati due numeri fuzzy $\widetilde{p_1}$ e $\widetilde{p_2}$, si possono definire le operazioni binarie elementari: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione

$$\widetilde{p_1} + \widetilde{p_2} = \left[{a_1}^{(j)}, {b_1}^{(j)}\right] + \left[{a_2}^{(j)}, {b_2}^{(j)}\right] = \left[\left({a_1}^{(j)} + {a_2}^{(j)}\right), \left({b_1}^{(j)} + {b_2}^{(j)}\right)\right];$$

$$\widetilde{p_1} - \widetilde{p_2} = \left[{a_1}^{(j)}, {b_1}^{(j)}\right] - \left[{a_2}^{(j)}, {b_2}^{(j)}\right] = \left[\left({a_1}^{(j)} - {a_2}^{(j)}\right), \left({b_1}^{(j)} - {b_2}^{(j)}\right)\right];$$

$$\widetilde{p_1} * \widetilde{p_2} = \left[{a_1}^{(j)}, {b_1}^{(j)}\right] * \left[{a_2}^{(j)}, {b_2}^{(j)}\right] = \left[\min\left(M^{(j)}\right), \max\left(M^{(j)}\right)\right];$$

$$\frac{\widetilde{p_1}}{\widetilde{p_2}} = \frac{\left[{a_1}^{(j)}, {b_1}^{(j)}\right]}{\left[{a_2}^{(j)}, {b_2}^{(j)}\right]} = \left[\min\left(D^{(j)}\right), \max\left(D^{(j)}\right)\right]$$

dove:

$$M^{(j)} = \{a_1{}^{(j)} * a_2{}^{(j)}\ , a_1{}^{(j)} * b_2{}^{(j)}, b_1{}^{(j)} * a_2{}^{(j)}, b_1{}^{(j)} b_2{}^{(j)}\}$$

$$D^{(j)} = \left\{\frac{a_1{}^{(j)}}{a_2{}^{(j)}}, \frac{a_1{}^{(j)}}{b_2{}^{(j)}}, \frac{b_1{}^{(j)}}{a_2{}^{(j)}}, \frac{b_1{}^{(j)}}{b_2{}^{(j)}}\right\}\ con\ a_2{}^{(j)}, b_2{}^{(j)} \neq 0.$$

Hanss [26] ha però evidenziato un diverso risultato ottenuto per lo stesso problema in funzione del differente procedura di discretizzazione e per questa ragione ha proposto una trasformazione per correggere l'aritmetica fuzzy in modo da renderla indipendente dalla procedura usata e poterla quindi utilizzare per analizzare correttamente i sistemi con parametri incerti.

2.2.2 INCERTEZZA RELATIVA ALLE CONDIZIONI AL CONTORNO

I metodi agli elementi finiti sono utilizzati per l'analisi del problema della distribuzione probabilistica dei parametri nei sistemi meccanici usando tecniche di perturbazione e simulazione Monte Carlo. Possiamo trovarci di fronte a due differenti tipi di incertezza: probabilistica e fuzzy. L'incertezza di natura probabilistica nasce da errori di misurazione sperimentale oltre che ad errori di produzione, mentre invece l'incertezza dei parametri rappresentata dai fuzzy sets è imposta dal progettista che sceglie con l'esperienza determinati parametri [27].
Cherki et al. [28] ha considerato il problema di sensitivity delle condizioni al contorno, rappresentate da parametri fuzzy. La struttura è considerata sensibile all'incertezza degli spostamenti imposti se gli spostamenti imposti si propagano in altri punti della struttura amplificando il proprio valore.
L'equazione di equilibrio per il caso statico sarà dunque:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix}$$

Dove:

- K è la matrice di rigidezza;
- U_a è il vettore degli spostamenti incogniti;

- U_b è il vettore degli spostamenti imposti (rappresentati da numeri fuzzy);
- F_a è il vettore della forza applicata agli spostamenti incogniti;
- F_bè il vettore delle reazioni vincolari incognite.

L'equazione matriciale può essere scomposta in due equazioni, portando a primo membro le incognite del problema:

$$K_{aa}U_a = F_a - K_{ab}U_b = G_a$$
$$F_b = K_{ba}U_a + K_{bb}U_b$$

La prima equazione presenta a secondo membro un termine non omogeneo, in quanto è il prodotto tra un valore fuzzy U_be un valore crisp K_{ab}. È però possibile riscrivere l'equazione nella rappresentazione fuzzy:

$$K_{aa}\widetilde{U}_a = \tilde{G}_a$$

L'equazione è risolta discretizzando in livelli la funzione di appartenenza con il metodo α-cut, come mostrato in Fig. 19.

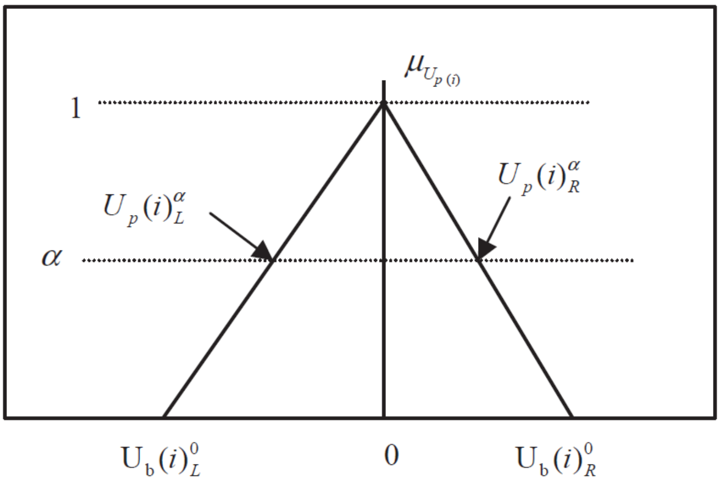


Fig. 19: funzione di appartenenza per l'i-esimo coefficiente dello spostamento U_p

Il limite inferiore e superiore dello spostamento imposto, $U_b(i)_L^0$ e $U_b(i)_R^0$, caratterizzano l'incertezza dello spostamento imposto $\widetilde{U}_b$. Il sistema fuzzy lineare è sostituito in intervalli lineari col il metodo α-cut. In questo modo è possibile trovare gli spostamenti incogniti $\widetilde{U}_a$, con i quali poi è possibile trovare le forze di reazione incognite F_b.

Se il metodo di soluzione del problema è basato sulla tecnica di perturbazione, $\widetilde{U}_a$ e $\tilde{G}_a$ possono essere riscritti con un valore medio ($\overline{U}_a$ e $\bar{G}_a$) e uno scostamento (ΔU_a e ΔG_a), e l'equazione può essere riscritta come:

$$K_{aa}\{\overline{U}_a + \Delta U_a\} = \{\bar{G}_a + \Delta G_a\}$$

Questo permette di dividere l'equazione in due equazioni distinte:

$$K_{aa}\overline{U}_a = \bar{G}_a \quad \text{e} \quad K_{aa}\Delta U_a = \Delta G_a$$

Da cui è possibile ricavare le soluzioni in $\overline{U}_a$ e ΔU_a:

$$\overline{U}_a = K_{aa}{}^{-1}\bar{G}_a \quad \text{e} \quad \Delta U_a = K_{aa}{}^{-1}\Delta G_a.$$

2.2.3 Meccanismo di rilassamento e allentamento nei giunti

Bickford [21] ha presentato una descrizione dettagliata dei fattori che possono portare al rilassamento nei giunti. I giunti sottoposti ad un carico variabile nel tempo possono perdere il loro precarico, ma anche fenomeni come l'usura o il martellamento possono causare il rilassamento del giunto. Il giunto avrà delle condizioni al contorno diverse da quelle ideali e aumenterà l'incertezza dei parametri analizzati. Se il precarico a cui è sottoposto il giunto è sufficientemente elevato il fenomeno del rilassamento potrebbe anche non verificarsi. Di solito, vengono previsti vari sistemi per prevenire l'allentamento del giunto, come sistemi anti-svitamento dei filetti, inserti, rondelle elastiche [29]. Le più comuni cause [30] che inducono il moto relativo nei filetti dei bulloni:

- L'attrito nella superficie di contatto può generare una componente flessionale della forza e se vi è strisciamento nel sotto-testa della vite e nei filetti questo può causare l'allentamento del giunto;
- Effetto termico differente tra i diversi materiali;
- Le forze applicate nel giunto possono indurre instabilità e quindi allentamento.

Il rilassamento causa una variazione nel tempo delle condizioni al contorno e dipende dalla vibrazione a cui è sottoposto l'intero sistema. Il sistema ha dunque due fonti di incertezza: l'incertezza legata alle condizioni al contorno e l'incertezza relativa ai parametri del sistema. Queste fonti di incertezza condizionano il sistema se è sottoposto ad un carico dinamico, mentre invece se il sistema è sottoposto ad un carico statico avremo solo l'incertezza relativa ai parametri.

Per esempio, Daabin e Chow [31] hanno studiato le caratteristiche elastiche e di smorzamento della filettatura in un giunto bullonato dove si evince che la forza di contatto è variabile a causa dall'irregolarità della superficie, temperatura, interazione chimica. L'allentamento dei giunti bullonati, indotto dalle vibrazioni a cui è sottoposto il sistema, è attribuibile allo strisciamento tra le superfici a contatto e alla riduzione della forza di chiusura.

2.3 VALUTAZIONE DELLE PROPRIETÀ DEI GIUNTI

L'obiettivo principale di identificare le proprietà dei giunti è minimizzare le differenze tra i risultati ottenuti analiticamente o numericamente, così da ottenere delle funzioni di risposta in frequenza (frequency response functions, FRFs) accettabili e ripetibili.
La valutazione delle proprietà dei giunti assume un ruolo sempre più fondamentale nella progettazione, in particolare in ambito strutturale e aerospaziale [5].
La risoluzione di problemi dinamici con tecniche numeriche, come l'analisi FEM, portano spesso a risultati differenti dalle analisi sperimentali e tali differenze sono da ricercare nelle incertezze del modello agli elementi finiti (FE), come la variabilità delle proprietà dei giunti e delle condizioni al contorno oltre alla presenza di non linearità.
Bisogna comprendere a fondo a cosa è dovuta la variabilità di questi fattori e tenerne conto in modo da realizzare dei modelli FE quanto più rispondenti alle condizioni operativi in cui i sistemi operano. I giunti sono considerati una fonte di incertezza che si evidenziano nei differenti risultati ottenuti tra l'analisi agli elementi finiti (finite element analysis, FEA) e le misure sperimentali. Nei sistemi meccanici, i principali parametri considerati sono le proprietà di rigidezze e smorzamento.

Diversi approcci sono stati utilizzati per la determinazione dei parametri dei giunti.
Yoshimure [32], attraverso la misura sperimentale delle FRF, ha valutato la rigidezza, lo smorzamento e le caratteristiche dinamiche in varie tipologie di giunti.
L'identificazione dei parametri strutturali dei giunti attraverso l'analisi modale è stata realizzata in diversi studi, ma questi metodi richiedono l'identificazione di parametri modali molto accurati, che sono difficilmente ottenibili, per esempio, in modi molto smorzati. Per superare queste difficoltà, in letteratura sono presenti dei metodi, come mostrato per esempio

in [33], per l'identificazione delle proprietà dei giunti basati sulle FRF. Questi metodi, però, non sono utilizzabili se non è misurabile la FRF in alcune parti del sistema.
Arruda e Santos [34] trattano il problema modellando il sistema agli elementi finiti con delle sottostrutture collegate attraverso il giunto, dove la rigidezza e lo smorzamento sono incogniti. I parametri incogniti sono stimati attraverso il processo di curve fitting delle FRF misurate usando il metodo dei minimi quadrati.
Con i metodi diretti, i parametri dei giunti possono essere identificati risolvendo le equazioni caratteristiche e dinamiche del sistema [35], mentre invece con la tecnica *penalty*, si minimizzano gli errori (o il residuo) tra i risultati ottenuti tramite FEM e le misure sperimentali. Questa tecnica è più flessibile e versatile rispetto ai metodi diretti [36].
Le proprietà dinamiche del giunto sono difficili da analizzare analiticamente attraverso modelli teorici dei giunti, così Ren e Beards [37] hanno proposto un approccio alternativo in cui i parametri del modello lineare del giunto sono estrapolati dai dati sperimentali. Con le FRF vengono identificate le proprietà delle sottostrutture del sistema senza il giunto e del sistema assemblato con il giunto. Le differenze tra le proprietà dinamiche dei due casi vengono imputate alla presenza del giunto, anche se vengono trascurati possibili errori di misura e l'incertezza sui parametri.

2.3.1 IDENTIFICAZIONE DEI GIUNTI LINEARI

Le proprietà del giunto sono ricavate dalla recettanza della struttura senza la necessità di introdurre dei modelli matematici per le matrici di massa, smorzamento e rigidezza. Di seguito, viene proposto un metodo per l'identificazione delle proprietà del giunto [33]. Si considerano due sotto-sistemi I e II collegate tramite l'interfaccia b. Il sotto-sistema I è caratterizzata dalla regione a e dall'interfaccia b, mentre invece il sotto-sistema II è caratterizzata dalla regione c e dall'interfaccia b.
Le equazioni matriciali che legano i vettori spostamenti ai vettori forza, in termini di recettanza, sono qui riportate:

$$\begin{Bmatrix} X_a^{(1)} \\ X_b^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{aa}^{(1)} & H_{ab}^{(1)} \\ H_{ba}^{(1)} & H_{bb}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_a^{(1)} \\ f_b^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} X_c^{(2)} \\ X_b^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{cc}^{(2)} & H_{cb}^{(2)} \\ H_{bc}^{(2)} & H_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_c^{(2)} \\ f_b^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Dove:

- $X_j^{(i)}$ è il vettore spostamento della regione j per il sotto-sistema i;
- $H_{jk}^{(i)}$ è la matrice di recettanza tra le regioni j e k per il sotto-sistema i;
- $f_j^{(i)}$ è il vettore forza agenti sulla regione j per il sotto-sistema i.

Al giunto è garantito l'equilibrio delle forze:

$$f_b^{(1)} + f_b^{(2)} = 0,$$

e in condizioni di compatibilità, $X_b^{(1)} = X_b^{(2)}$, si avrà:

$$f_b^{(1)} = H_B^{-1}\left\{H_{bc}^{(2)} f_c^{(2)} - H_{ba}^{(1)} f_a^{(1)}\right\}$$

dove $H_B = H_{bb}^{(1)} + H_{bb}^{(2)}$.

Andando a sostituire il vettore forza $f_b^{(1)}$ nelle due equazioni matriciali, avremo:

$$X_a^{(1)} = \left[H_{aa}^{(1)} - H_{ab}^{(1)} H_B^{-1} H_{ba}^{(1)}\right] f_a^{(1)} + H_{ab}^{(1)} H_B^{-1} H_{bc}^{(2)} f_c^{(2)}$$

$$X_c^{(2)} = \left[H_{cc}^{(2)} - H_{cb}^{(2)} H_B^{-1} H_{bc}^{(2)}\right] f_c^{(2)} + H_{cb}^{(2)} H_B^{-1} H_{ba}^{(1)} f_1^{(1)}.$$

Per un singolo giunto bullonato viene trascurata la sua massa, in quanto ritenuta trascurabile rispetto a quella dei due sotto-sistemi.

I vettori forza all'interfaccia b , agenti sui sotto-sistemi I e II, sono uguali in modulo e opposti in verso. Invece, i vettori spostamento, $X_b^{(1)}$ e $X_b^{(2)}$, non sono uguali ma sono legati dalla relazione:

$$X_b^{(2)} - X_b^{(1)} = H_{jt} f_b^{(1)},$$

dove H_{jt} è la recettanza del giunto.

Dalle due equazioni matriciali di partenza è possibile trovare i due vettori spostamento, che possono essere sostituiti nella relazione sopra riportata, e avremo:

$$H_{bc}^{(2)} f_c^{(2)} + H_{bb}^{(2)} f_b^{(2)} - \left(H_{ba}^{(1)} f_a^{(1)} + H_{bb}^{(1)} f_b^{(1)}\right) = H_{jt} f_b^{(1)}.$$

Dall'equazione appena trovata, considerando la condizione di equilibrio dei vettori delle forze, troviamo che:

$$f_b^{(1)} = \left[H_B + H_{jt}\right]^{-1}\left\{H_{bc}^{(2)} f_c^{(2)} - H_{ba}^{(1)} f_a^{(1)}\right\}.$$

L'equazione matriciale della struttura assemblata è pari a:

$$X^{(3)} = H^{(3)} f^{(3)}$$

Dove avremo:

$$X^{(3)} = \begin{Bmatrix} X_a^{(1)} \\ X_c^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$H^{(3)} = \begin{bmatrix} H_{aa}^{(1)} - H_{ab}^{(1)}\left[H_B + H_{jt}\right]^{-1} H_{ba}^{(1)} & H_{ab}^{(1)}\left[H_B + H_{jt}\right]^{-1} H_{bc}^{(2)} \\ H_{cb}^{(2)}\left[H_B + H_{jt}\right]^{-1} H_{ba}^{(1)} & H_{cc}^{(2)} - H_{cb}^{(2)}\left[H_B + H_{jt}\right]^{-1} H_{bc}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$f^{(3)} = \begin{Bmatrix} f_a^{(1)} \\ f_c^{(2)} \end{Bmatrix}$$

L'equazione è ottenuta partendo dalla formulazione di $X_a^{(1)}$ e $X_c^{(2)}$, considerando anche la recettanza del giunto H_{jt}.

La matrice $H^{(3)}$può essere riscritta nella forma:

$$H^{(\gamma)} = H^{(\alpha)}\left[H_B + H_{jt}\right]^{-1} H^{(\beta)}$$

Dove:

$$H^{(\gamma)} = H^{(3)} - \begin{bmatrix} H_{aa}^{(1)} & 0 \\ 0 & H_{cc}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad H^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} -H_{ab}^{(1)} \\ H_{cb}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad H^{(\beta)} = \begin{bmatrix} H_{ba}^{(1)} & -H_{bc}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Dall'equazione è possibile trovare le proprietà dinamiche del giunto H_{jt}.

Trascurando la massa del giunto, il giunto è rappresentato da una matrice di smorzamento lineare, C, e una matrice di rigidezza, K.

Partendo dall'equazione, $X_b^{(2)} - X_b^{(1)} = H_{jt} f_b^{(1)}$, con il sistema sottoposto ad una frequenza di eccitazione, Ω, l'equazione del giunto può essere scritta come:

$$[i\Omega C + K]\left[X_b^{(2)} - X_b^{(1)}\right] = f_b^{(1)}$$

Dove $i = \sqrt{-1}$.

Si nota dunque che:

$$H_{jt} = [K + i\Omega C]^{-1}.$$

Il numero delle incognite è $2\ x\ n^2$. Le due incognite sono C e K, mentre n è il numero di gradi di libertà dell'interfaccia del sotto-sistema.

Invertendo entrambi i membri dell'equazione $H^{(\gamma)} = H^{(\alpha)}\left[H_B + H_{jt}\right]^{-1} H^{(\beta)}$, si ha che:

$$H^{(c)} = H^{(\alpha)}[i\Omega C + K]H^{(\beta)}$$

Dove: $H^{(c)} = \left[{H^{(\gamma)}}^{-1} - {H^{(\beta)}}^{-1} H_B {H^{(\alpha)}}^{-1}\right]^{-1}$.

Se le FRFs misurate sono in termini di inertanza, invece, le proprietà del giunto sono espresse da:

$$H^{(c)} = -\frac{1}{\Omega^2} H^{(\alpha)}[i\Omega C + K]H^{(\beta)}.$$

Per ogni frequenza di eccitazione Ω, $H^{(c)}$ è costituita da $2\ x\ n^2$ incognite e se m sono le frequenze allora il numero totale di equazioni è $2\ x\ n^2\ x\ m$. Dato che il numero di equazioni è

superiore al numero di incognite, il problema può essere risolto con il metodo dei minimi quadrati. È opportuno trovare le proprietà del giunto nel range di frequenze operative del sistema, in quanto i valori potrebbero variare al variare delle condizioni operative [33].
In alcuni casi, quando i giunti sono rigidamente connessi al sistema e lo strisciamento tra le superfici a contatto non è permesso è possibile ignorare lo smorzamento e considerare come parametri significativi del giunto l'inerzia e la rigidezza.

2.3.2 IDENTIFICAZIONE DI GIUNTI NON-LINEARI

I giunti strutturali possono essere una fonte di non linearità del sistema. È quindi fondamentale comprendere come le non linearità del sistema cambino al variare dell'ampiezza e della frequenza di eccitazione. I giunti bullonati presentano delle non linearità dovuto al gioco tra gli elementi a contatto e alla rigidezza di contatto non lineare del giunto.
Solitamente, si assume che il carico agente sui giunti flangiati agisca lungo la direzione assiale al bullone, invece accade spesso che la forza agisca in un punto diverso, come si può vedere in Fig. 20. Questa forza è chiamata *prying load*, ed è stata analizzata nel dettaglio da Bickford [21].

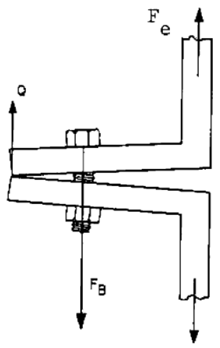


Fig. 20: prying load

La forza del giunto F_B deve essere tale da resistere al carico esterno F_e e al *prying load* Q, e si deve avere quindi che $F_B \geq F_e + Q$. Inoltre, è sempre auspicabile avere un rapporto piccolo tra la rigidezza del bullone e del giunto, K_B/K_j, in modo da ridurre la percentuale di carico esterno trasmesso dal bullone, migliorando la capacità di carico statico del giunto e allungando la vita a fatica dal giunto.
Quando il giunto è sottoposto ad un carico puramente assiale, all'aumentare del carico esterno la forza del giunto aumenterà di poco (linearmente), in quanto gran parte del carico esterno sarà assorbito dalla flangia. Raggiunto il valore critico, al momento della separazione, il giunto

assorbirà il carico esterno e la forza agente sul giunto, sarà sempre lineare ma con una pendenza maggiore, Fig. 21a.
Nel caso in cui il giunto è sottoposto ad un carico non assiale rispetto al bullone, come mostrato in Fig. 20, nel momento in cui il carico esterno è tale da deformare la flangia si avrà una forza agente sul giunto maggiore del caso in cui il carico fosse applicato assialmente. In questo caso, Fig 21b, l'andamento della forza agente sul giunto è fortemente non lineare. Si nota, inoltre, che rimuovendo il carico esterno, la forza agente sul giunto torna ad essere pari al pre-carico iniziale e quindi il sistema è fortemente non lineare ma puramente elastico.

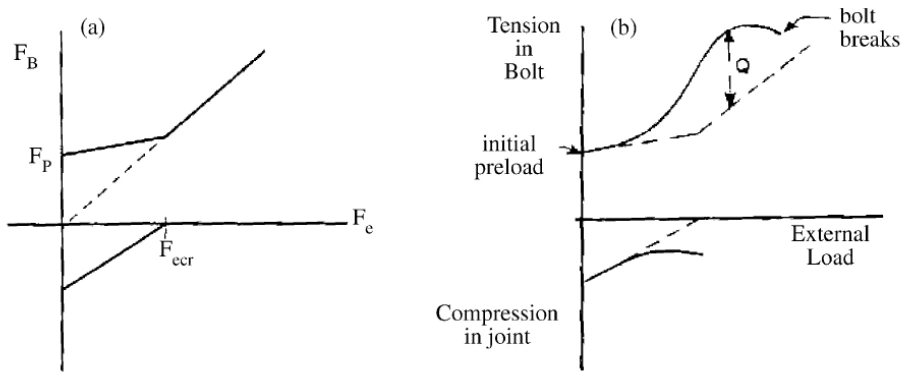


Fig. 21: dipendenza della forza del bullone in funzione del carico esterno: a) carico lungo l'asse del bullone b) prying load

I modelli non lineari possono rappresentare meglio il comportamento dei giunti bullonati rispetto ai modelli lineari. Masri e Caughey [38] hanno proposto un modello non parametrico per l'identificazione delle proprietà di un giunto non lineare, basato sul reforcing-force method (RFM), il quale adatta una funzione non lineare alla forza di ripristino, $f(x, \dot{x})$, nel giunto. Il modello del giunto è descritto da polinomi di Chebyshev per sfruttare la caratteristica di ortogonalità e adattare il modello nel dominio del tempo alle variabili del giunto (spostamento, velocità e accelerazione).
Crawley e O'Donnell [39] hanno sviluppato la "force-state mapping technique" per identificare le proprietà fortemente non lineari del giunto. Questa tecnica è semplice ed efficace se il giunto può essere isolato dall'intero sistema, ma richiede un'enorme quantità di dati nel dominio del tempo per estrapolare le proprietà del giunto.
Kim e Park [40] hanno esteso la tecnica proposta in [39]. Con questo approccio si stimano le FRF dei sottosistemi usando modelli FE oppure tramite l'analisi modale. In seguito, si misura la risposta dei gradi di libertà del giunto quando l'intera struttura è eccitata con una forzante

sinusoidale. Infine, il modello non lineare della forza viene adattato usando la risposta del giunto e le FRF dei sottosistemi.
Il controllo della forza normale all'interfaccia tra le superfici di contatto del giunto può migliorare lo smorzamento del sistema. Gaul e Nitsche [41] hanno studiato l'utilizzo del controllo attivo della forza di contatto normale nel giunto tramite un elemento piezoelettrico. Il modello consiste in due travi connesse da un singolo bullone. Tra il dado e la superficie inferiore della trave vi è una pila di dischi di materiale piezoelettrici per il controllo della forza normale che tramite la variazione del voltaggio provoca l'inspessimento della pila di dischi e quindi l'aumento della forza normale (Fig. 22). Il fenomeno dell'attrito è descritto tramite un modello in funzione della velocità.

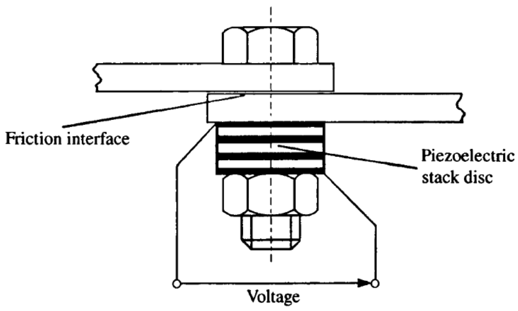


Fig. 22: controllo attivo della forza di contatto normale in un giunto mediante un elemento piezoelettrico

Sono stati sviluppati diversi modelli per descrivere il comportamento dinamico di giunti isolati con elementi di attrito Coulombiano. Questi modelli descrivono le condizioni di adesione e strisciamento dell'intera interfaccia (macro-slip).
Gaul e Bolhen [42] hanno misurato la dipendenza che lega la forza di reazione del giunto rispetto allo spostamento relativo e hanno così evidenziato la dipendenza del ciclo di isteresi rispetto l'ampiezza di eccitazione e la pressione media.
In Gaul et al. [43] si evidenzia che la distribuzione di pressione normale di contatto in un giunto caricato con una sollecitazione dinamica non è costante nel tempo e che l'interfaccia può trovarsi in condizione di adesione o di strisciamento in funzione della forza trasmessa. Lenz e Gaul [44] hanno sviluppato un modello di un giunto a tre parametri capace di descrivere le condizioni di stick e macro-slip. È così misurato il comportamento dinamico longitudinalmente e torsionalmente di un giunto bullonato isolato grazie a due risuonatori. La dipendenza dell'energia dissipata per ciclo dal giunto rispetto lo spostamento e la rotazione relativa forniscono i mezzi per distinguere i regimi di micro-slip e macro-slip

2.3.2.1 FORCE-STATE MAPPING TECHNIQUE

In Crawley e O'Donnell [39] viene proposto un force-state mapping technique per un oscillatore smorzato ad un solo grado di libertà (sdof, single degree of freedom). Lo stato del giunto viene descritto in funzione dello spostamento del giunto, x, e della sua velocità, $\dot{x}$.
Il modello può essere dunque descritto dall'equazione differenziale non-lineare:

$$M\ddot{x} + C(x,\dot{x})\dot{x} + K(x,\dot{x})x = F(t)$$

Dove:

- M è la massa del sotto-sistema (trave);
- $C(x,\dot{x})$ e $K(x,\dot{x})$ sono rispettivamente lo smorzamento e la rigidezza del giunto, che sono funzione dello stato in cui si trova il giunto.

La forza trasmessa dal giunto è pari a:

$$F_T = C(x,\dot{x})\dot{x} + K(x,\dot{x})x = F(t) - M\ddot{x}$$

Anche la forza F_T dipende dallo stato del giunto e il modello sdof, se non affetto da fenomeni di memoria, può essere rappresentato da un grafico in tre dimensioni, noto come force-state map. Nella Fig. 23 vengono mostrati due esempi tipici per la force-state map: a sinistra (Fig. 23a) si osserva l'esempio di un sistema massa-molla-smorzatore lineare, mentre a destra (Fig. 23b) viene mostrata il caso di un giunto non lineare che considera l'attrito come Coulombiano e con la presenza della dead band (o zona neutra) dovuta ai giochi nel giunto.

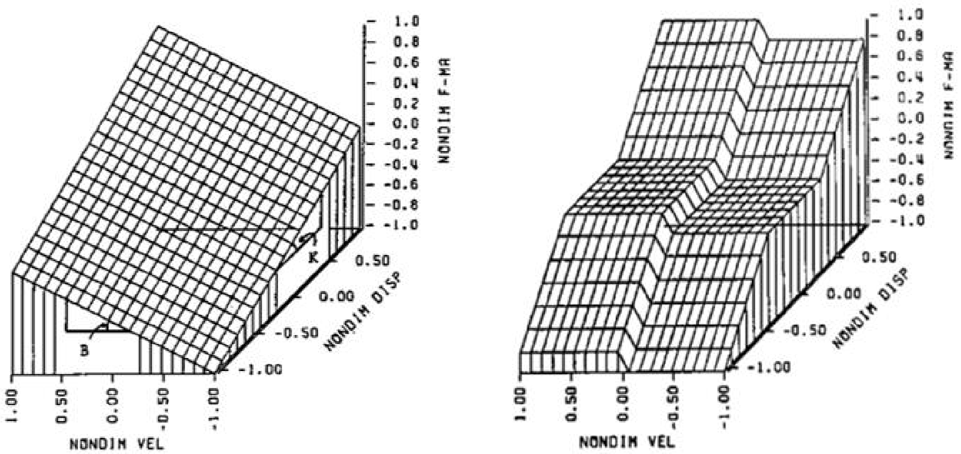


Fig. 23: force state map a) sistema massa-molla-smorzatore lineare, b) giunto non lineare

La Fig. 23a raffigura un piano inclinato, dove l'inclinazione rispetto lo spostamento è data dalla rigidezza K, mentre l'inclinazione rispetto la velocità è in funzione dello smorzamento C.
Invece, se la superficie della force-state map non è piana il giunto non lineare e la forza trasmessa è una combinazione di componenti lineari e non lineari.
La forza trasmessa può essere espressa come in [39]:

$$F_T = F_0 + K_1 x + K_n x^n + C_1 \dot{x} + C_n \dot{x}^n + K_{DB} + C_{DB} + F_f sgn(\dot{x}) + g|x|sgn(\dot{x})$$

dove

$$K_{DB} = \begin{cases} k_{DB}(x - x_{DB}) & se\ x \geq x_{DB} \\ 0 & se\ -x_{DB} \leq x \leq x_{DB} \\ k_{DB}(x + x_{DB}) & se\ x \leq -x_{DB} \end{cases}$$

e

$$C_{DB} = \begin{cases} c_{DB}(\dot{x}) & se\ x \geq x_{DB} \\ 0 & se\ -x_{DB} \leq x \leq x_{DB}. \\ c_{DB}(\dot{x}) & se\ x \leq -x_{DB} \end{cases}$$

La forza trasmessa è espressa, quindi, come la somma di vari componenti:

- F_0 è il pre-carico costante;
- $K_1 x$ è la forza lineare della molla;
- $C_1 \dot{x}$ è la forza lineare dovuta allo smorzamento;
- $K_n x^n$ e $C_n \dot{x}^n$ sono, rispettivamente, le forze non lineari dovute alla molla e allo smorzamento;
- K_{DB} e C_{DB} sono le bande morte delle molle e degli smorzatori;
- $F_f sgn(\dot{x})$ è la forza di attrito, nella sua formulazione Coulombiana;
- $g|x|sgn(\dot{x})$ è lo smorzamento isteretico del materiale.

Se le non linearità del giunto mostrano l'effetto memoria, la force state map può essere implementata per legare linearmente l'effetto memoria con lo stato del giunto. Per i casi in cui il legame tra l'effetto memoria e lo stato del giunto non è lineare, i parametri possono essere ottenuti a determinate frequenze e ampiezze di eccitazione.

In Kim e Park [40] viene estesa la force-state mapping technique per i sistemi a più gradi di libertà stimando le FRF dei sotto-sistemi con i modelli FE o l'analisi modale sperimentale. Con questo metodo si misura la risposta dei gradi di libertà del giunto quando l'intera struttura è eccitata con una forzante sinusoidale per poi adattare il modello non lineare della forza usando la risposta del giunto e le FRF dei sotto-sistemi.

L'equazione del moto del k-esimo sotto-sistema può essere scritta in forma matriciale come:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = f(t) + g(t)$$

dove M, C, K sono le matrici di massa, smorzamento e rigidezza della k-esima sotto-struttura, mentre $f(t)$ è il vettore della forzante esterna e $g(t)$ è il vettore delle forze del giunto che è composto da m componenti attive e da componenti nulle in tutti gli altri punti del sistema

$$g^T(t) = \{0, 0, \dots, 0, g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)\}.$$

La trasformata di Fourier dell'equazione del moto è pari a:

$$[K - \omega^2 M + i\omega C]X(\omega) = \{F(\omega) + G(\omega)\}.$$

La FRF della matrice della k-esima sottostruttura è

$$H_k(\omega) = [K - \omega^2 M + i\omega C]^{-1},$$

e quindi l'ampiezza della risposta del sistema è pari a:

$$X_k(\omega) = H_k(\omega)\{F(\omega) + G(\omega)\}.$$

La matrice della FRF può essere riscritta, separando le componenti relative al giunto:

$$\begin{Bmatrix} X(\omega) \\ X_j(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) + G(\omega) \end{Bmatrix}$$

Dove:

$$\{F(\omega)\} = \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad G(\omega) = \begin{Bmatrix} 0 \\ G(\omega) \end{Bmatrix}.$$

Il vettore delle forze del giunto, $G(\omega)$, può essere determinato dalla seconda riga della matrice appena trovata e avremo quindi:

$$H_{22}G(\omega) = X_j(\omega) - H_{21}F_1(\omega) - H_{22}F_2(\omega).$$

La trasformata di Fourier del vettore delle forze del giunto può essere scritta come:

$$G(t) = \begin{Bmatrix} G_{11}(\omega)\theta_{11} + G_{12}(\omega)\theta_{12} + \dots + G_{1n_1}(\omega)\theta_{1n_1} \\ G_{21}(\omega)\theta_{21} + G_{22}(\omega)\theta_{22} + \dots + G_{2n_2}(\omega)\theta_{2n_2} \\ \dots \\ G_{m1}(\omega)\theta_{m1} + G_{m2}(\omega)\theta_{m2} + \dots + G_{mn_m}(\omega)\theta_{mn_m} \end{Bmatrix}$$

Sostituendo il vettore appena trovato nell'equazione avremo $2m$ equazioni algebriche (m equazioni per la parte reale e altrettante equazioni per la parte immaginaria), nelle quali i coefficienti θ_{rs} sono determinati con la rilevazione della risposta del giunto nel dominio della frequenza.

Se le proprietà del giunto sono dipendenti dalla frequenza, le forze agenti sul giunto devono essere valutate alle frequenze operative del sistema e quindi il numero di equazioni necessarie per identificare i coefficienti della forza possono aumentare in funzione del range di frequenze necessarie. Questo metodo è valido solo se le proprietà del giunto sono stazionarie nel tempo. Nel caso vi sia il rilassamento del precarico o il cambiamento di qualche condizione esterna al sistema nel tempo, le proprietà del giunto risultano essere non stazionarie e risulta necessario applicare la FFT a intervalli discreti in modo da osservare la variazione delle proprietà del giunto nel tempo.

2.4 ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA PROGETTAZIONE DEI GIUNTI

La progettazione di sistemi meccanici complessi prevede la presenza di giunti, che idealmente possono essere suddivisi in due macro categorie:

- Giunti perfettamente rigidi;
- Giunti parzialmente labili.

Idealmente, I primi permettono un collegamento totalmente vincolato e solidale tra le parti del sistema, mentre i giunti parzialmente labili permettono di vincolare solo alcuni gradi di libertà del sistema. In realtà, queste condizioni sono difficilmente replicabili e il comportamento reale del sistema, mostrato sperimentalmente, differisce da quanto predetto.
La flessibilità del giunto, dunque, è stata oggetto di studio di diversi autori, tra cui [45]. Molti collegamenti strutturali mostrano delle caratteristiche non lineari momento-rotazione $M - \phi$, dove M è il momento applicato ed è espresso in Nm e ϕ è la rotazione relativa tra le parti del giunto ed è espressa in radianti. Diversi studi numerico-sperimentali hanno evidenziato le relazioni momento-rotazione sia lineari sia non-lineari usate per predire correttamente il comportamento dei giunti flessibili, dove si nota anche che la rigidezza del giunto diminuisce se il carico a cui è sottoposto il collegamento aumenta. In Monforton e Wu [45], la matrice di rigidezza di un elemento con vincolo elastico è derivata moltiplicando la matrice di rigidezza di un elemento connesso rigidamente per una matrice di correzione, dove i termini sono dei parametri bidimensionali. Sekulovic e Salatic [46] hanno evidenziato, invece, l'aumento delle non-linearità relative alla geometria con il carico applicato; questa influenza diventa ancor più marcata nei giunti semi-rigidi rispetto ai giunti rigidi.
Nella ricerca della configurazione ottimale di un sistema meccanico si deve necessariamente tener conto che la risposta della struttura è condizionata dalla variabilità dei valori e dalle non-linearità geometriche [47]. La flessibilità del collegamento influenza l'affidabilità strutturale

dell'intero sistema, quindi è fondamentale riconoscere la variabilità delle proprietà del collegamento.
In Hsu e Fafitis [48] vengono studiati i casi dove i collegamenti sono considerati viscoelastici e smorzati, mentre in Al-Bermani et al. [49] si analizzano i collegamenti flessibili non-lineari. Questi sono solo alcuni degli esempi che mostrano come le caratteristiche del collegamento modificano le proprietà dinamiche della struttura, come gli autovettori e gli autovalori. Le caratteristiche di rigidezza e smorzamento del collegamento possono essere regolate ampiamente, ma l'incertezza nella valutazione del comportamento del giunto può portare a condizioni critiche specialmente quando una piccola variazione dei coefficienti della rigidezza e dello smorzamento producono una variazione importante nella risposta del sistema.

2.4.1 ANALISI DI SENSITIVITY SUI PARAMETRI DI UN GIUNTO

La Sensitivity è un campo della matematica che studia il comportamento di un sistema al variare di alcuni parametri caratteristici [50]. In ambito strutturale, l'analisi di Sensitivity sulla variazione dei parametri di un giunto, per esempio, è un aspetto fondamentale per una progettazione ottimale del sistema.
La sensibilità delle proprietà fisiche di un sistema dinamico al variare di alcuni parametri può essere determinata calcolando le derivate parziali dei parametri rispetto ad un set di parametri che restano costanti. In alcuni casi, il set di parametri costanti varia in funzione delle condizioni operative del sistema, rendendo necessaria un'analisi globale dei parametri che complica l'interpretazione e la visualizzazione dei risultati. La valutazione delle derivate della risposta del sistema rispetto ai parametri come la rigidezza, la massa e lo smorzamento è funzionale per comprendere l'intervallo dei parametri in cui la variazione della risposta del sistema è piccola e quindi può essere trascurata. In presenza di un sistema eccitato in maniera random, invece, si rende necessario l'approccio stocastico alla sensitivity [51].

2.5 FENOMENI DI FATICA E CEDIMENTO NEI GIUNTI

In precedenza, nel paragrafo 2.2.2, era già stato affrontato l'argomento del meccanismo di rilassamento e dell'allentamento, indotto da un'eccitazione esterna, che si verifica in sistemi dove vi è la presenza di elementi di collegamento, come i giunti. Il comportamento del giunto sottoposto ad un carico dinamico dipende dal carico stesso, dal coefficiente di attrito tra le superfici a contatto, dalle proprietà strutturali del sistema, dal numero e dal posizionamento dei bulloni, nel caso di giunti bullonati. Il carico dinamico può causare dei fenomeni di fatica e culminare con un cedimento della struttura. L'analisi del cedimento a fatica di un sistema meccanico è fondamentale per una progettazione ottimale e per questa ragione in letteratura è stato ampiamente trattato da diversi autori.
Lazzarin et al. [52] hanno analizzato il cedimento a fatica di giunti bullonati in lega d'alluminio evidenziato che la forza di serraggio non è sufficiente ad impedire lo scorrimento. Con un alto numero di cicli, il cedimento a fatica inizia o vicino al diametro esterno del foro o sulla superficie di contatto. La dipendenza tra l'ampiezza dello stress e il numero di cicli si trova all'interno di una banda limite di valori che è funzione delle proprietà del materiale. In ambito automobilistico bisogna garantire il comfort e la sicurezza dei passeggeri e quindi i sistemi strutturali vengono progettati per resistere a sollecitazioni impulsive [53].
Nel caso in cui il sistema è sottoposto ad elevati carichi termici si rende necessario l'analisi del comportamento del collegamento allo scorrimento viscoso. Lo scorrimento viscoso, o creep in inglese, è la deformazione di un materiale sottoposto a sforzo costante per lunghi periodi di tempo ad elevata temperatura. Ellis et al. [54] ha sviluppato un modello analitico di previsione del ciclo vita per le turbine ad alta temperatura con un valore limite dello scorrimento viscoso pari al 1%.
Nell'industria automobilistica e aerospaziale, la dinamica del cedimento a fatica è un tema di grossa rilevanza. Per esempio, un aeromobile è soggetto a sollecitazione di carico ad ampiezza variabile nel tempo e molte sue parti sono giuntate tramite bulloni o rivetti e in Seliger [55] viene riscontrato che la resistenza a fatica dei rivetti aumenta se aumenta la distanza tra i due rivetti adiacenti. Nelle parti di un aeromobile sottoposte ad elevate temperatura si può notare una deformazione sensibilmente maggiore delle parti giuntate rispetto al caso monoscocca [56].

3. APPROCCIO SPERIMENTALE AL PROBLEMA

Nell'analisi sperimentale di strutture vibranti si ricorre spesso alla misura di funzioni di risposta in frequenza, o in inglese frequency responce funcion (FRF). Le FRF sono delle funzioni che mettono in relazione una quantità relativa al moto e una forza. Il moto di un sistema può essere visto in funzione dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione e, dunque, la FRF assume il nome, rispettivamente, di recettanza, di mobilità e di inertanza.
In fase di progettazione è spesso usata la recettanza, mentre nelle misurazioni si opta per l'inertanza, essendo gli accelerometri la tipologia di trasduttori di movimento più precisi [4].

3.1 LA STRUMENTAZIONE

Nella Fig. 24 viene mostrata la catena di misura, cioè l'insieme degli elementi necessari che permettono di trasformare la quantità fisica da misurare in una quantità più facile da trattare, spesso un segnale elettrico in tensione [4].
Lo schema prevede un sistema di eccitazione (composto da un generatore di segnale, un amplificatore ed un eccitatore), un insieme di trasduttori e un analizzatore del segnale.

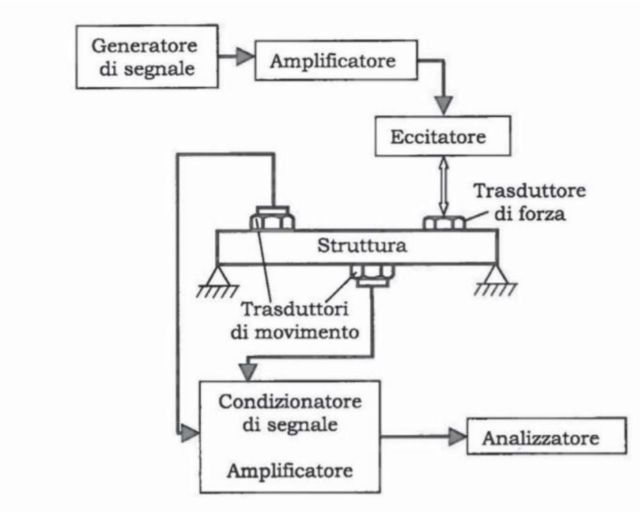


Fig. 24: schema di un sistema di misura della mobilità

Tramite il generatore di segnale si stabilisce l'andamento della forza con cui eccitare il sistema (per esempio, andamento armonico, impulsivo, periodico, ecc…). Il suo segnale, prima dell'ingresso nell'eccitatore, è amplificato e permette di mettere in oscillazione il sistema.

Un sistema di trasduttori, posti sulla struttura, permette di rilevare la forza e l'accelerazione, per esempio, e tramite un condizionatore di segnale e/o un amplificatore permette di trasformare i dati acquisiti da analogici a digitali per poterli importare nel sistema di analisi e lettura e calcolare infine la FRF della struttura.

3.2 DESCRIZIONE DEL SISTEMA DINAMICO

Il sistema meccanico è composto da due travi in alluminio di dimensioni 400 x 30 x 3 mm forate al centro per permettere il collegamento tramite una cella di carico allo shaker e vincolate tra loro da otto coppie di magneti permanenti che simulano la presenza dei bulloni [57]. Il sistema vuole essere una semplificazione di una flangia bullonata per l'analisi del modo di vibrare e della risposta in frequenza, come mostrato in Fig. 25. I magneti sono posti in maniera equi-spaziata in modo da preservare la simmetria della struttura garantendo una pressione di contatto pari a quella dei bulloni ma senza creare la discontinuità nelle travette dovuta ai fori necessari per permettere il serraggio del sistema mediante bulloni. Questa ipotesi semplificativa permette di analizzare quindi il comportamento dinamico delle travette permettendo di depurare l'analisi da tutti i fattori relativi al sistema di serraggio tradizionale. Per una corretta progettazione di un sistema di serraggio tradizionale vite-dado bisognerebbe tener conto e valutare molti fattori come, per esempio, il gioco tra il foro e il bullone, l'attrito sotto-testa della vita ma questi parametri sono difficili da ricavare e spesso comportano delle incertezze che influenzano il risultato.

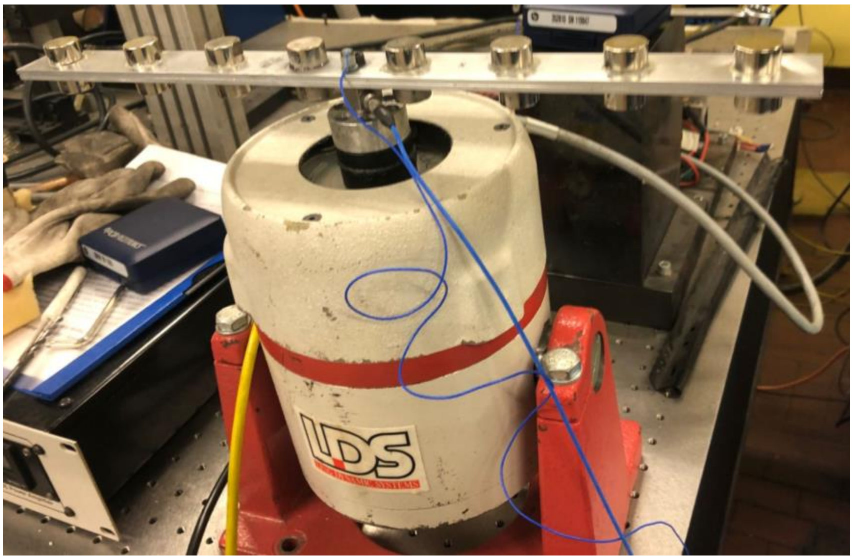


Fig. 25: shaker con sistema di travi

La struttura è sottoposta ad un test “step sine” in cui l’ampiezza della forzante è mantenuta costante per tutto il range di frequenze esplorate [57]. Il range di frequenze è scelto in modo tale da comprendere la zona di risonanza ed è discretizzato in maniera opportuna per apprezzare la risposta forzata del sistema. Le forzanti di eccitazione della struttura sono di natura armonica con l’ampiezza costante imposta tramite cella di carico.

Le travi sono vincolate allo shaker in posizione centrale per garantirne la simmetria ma il vincolo è infinitamente rigido solo idealmente e calcolare con precisione la rigidezza del vincolo, da cui dipendono le proprietà del sistema, può risultare difficile. Se possibile, è auspicabile, dunque, effettuare il test in condizioni operative. In condizioni operative, la struttura in esame risulta essere più fedele alle condizioni reali del sistema, ma molto spesso in questi casi non è possibile conoscere esattamente le forzanti che agiscono sul sistema e ciò può alterare le proprietà dinamiche della struttura [4]. Risulta quindi evidente che occorre trovare una soluzione di compromesso, studiando di volta in volta il sistema in esame e sfruttando l’esperienza pregressa.

3.3 Il sistema di eccitazione

L’eccitatore sollecita la struttura con l’ampiezza della forzante costante imposta tramite la cella di carico. Ogni misurazione viene effettuata con un set-up precedente in cui si stabilisce con quale forza deve essere eseguito il test [57]. Il generatore di segnale (DataPhisycs, mostrato in Fig. 26) invia il segnale in tensione, dove il livello di voltaggio massimo è limitato a 2V per garantire l’integrità della scheda di generazione del segnale.

Fig. 26: sistema d'acquisizione DataPhysics

Il segnale viene così amplificato tramite l'amplificatore, mostrato in Fig. 27, per eccitare la struttura con la forza controllata in ampiezza dalla cella di carico.

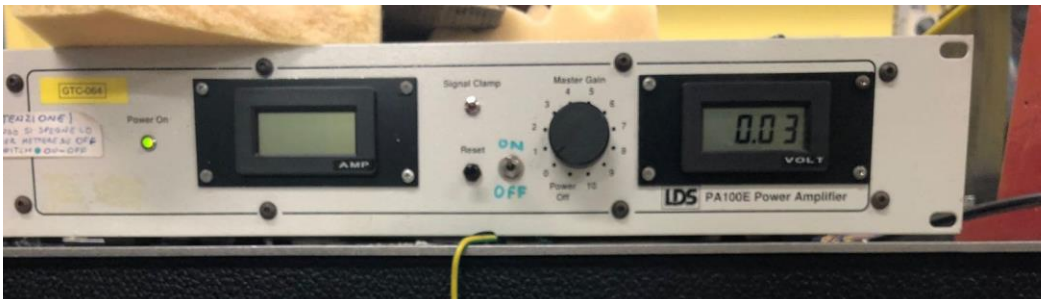


Fig. 27: amplificatore

L'ampiezza della forzante deve essere costante, in quanto il software di acquisizione dati SignalCalcMobilyzerII acquisisce i dati indipendentemente dalla forza agente sul sistema e dunque una variazione dell'ampiezza della forza altererebbe il test.

Il segnale amplificato giunge così allo shaker. Lo shaker, mostrato in Fig. 25, è un eccitatore elettromagnetico costituito da un magnete permanente, libero di oscillare assialmente, immerso in un campo magnetico variabile in funzione del segnale ricevuto in ingresso. Il magnete è solidale ad un elemento filettato, la tavola rotante, che permette il collegamento con la struttura in esame. Generalmente, lo shaker permette di applicare delle eccitazioni ad elevata frequenza (fino a 10000Hz) ma con forze e spostamenti abbastanza contenuti [4]. Si è osservato sperimentalmente che all'aumentare della forza il sistema eccita la struttura con un andamento differente da quello armonico con un conseguente errore di lettura e memorizzazione dei dati. Per elevata frequenze di eccitazione dunque è necessario progettare appositamente la tavola vibrante [57].

3.4 I TRASDUTTORI

I trasduttori di forza (Fig. 28a), o celle di carico, sono montati tra lo shaker e la struttura e sono costituiti da un cristallo piezoelettrico e controllano la forza di trazione-compressione agente lungo il loro asse. I trasduttori di accelerazione (Fig. 28b), o accelerometri, sono in genere piezoelettrici, sono posti sul sistema e posseggono una massa trascurabile che permette di non alterare la FRF del sistema [4]. Durante il test, il sistema è eccitato e il cristallo piezoelettrico posto all'interno dell'accelerometro è sottoposto a stress di trazione-compressione che trasforma la risposta in tensione. Il sistema di acquisizione trasforma poi il segnale analogico

in digitale. Nei test dinamici su strutture si usano raramente i trasduttori di velocità e spostamento perché hanno un campo di utilizzo in frequenza abbastanza limitato.
Sperimentalmente, l'accelerometro va collocato al centro della struttura per evitare che l'asimmetria della posizione influenzi la risposta dinamica del sistema [57].

Fig. 28: a) trasduttori di forza e b) trasduttori di accelerazione

3.5 SignalCalcMobilyzerII

I trasduttori sono collegati al sistema di acquisizione DataPhysics. I dati sono poi gestiti, memorizzati e processati grazie al software SignalCalcMobilyzerII. Il software permette di esportare i dati, per esempio in Matlab, per le successive fasi di post-processamento.
Il software permette di mostrare gli andamenti dell'accelerazione (m/s^2), di forza (N) ed infine la funzione di risposta in frequenza. La FRF è diagrammata in un grafico dove l'ordinata è la Magnitude $\left(\frac{m/s^2}{N}\right)$ e l'ascissa è la frequenza (Hz) [57].

3.6 Esecuzione dei test

La prova è stata effettuata sul sistema descritto in precedenza nel paragrafo 3.2.
A livello software viene discretizzato l'intervallo di frequenze da analizzare in 200 punti e una frequenza di campionamento di 1.344kHz. Per i test effettuati con ampiezze di eccitazione molto contenute è stata imposta una tolleranza sulla forza dell'1%, perché si è osservato che con piccole variazione dell'ampiezza della forzante si ha una sensibile variazione della risposta del sistema. Da varie prove preparatorie si è osservato che per ottenere dei risultati accettabili

bisogna impostare il parametro Avg=3, dove Avg indica il numero di medie utili che il programma effettua per ogni punto da calcolare. Inoltre, viene posto il SettlingTime pari a 0.2s, che corrisponde al tempo che intercorre tra la misura ad una data frequenza e la successiva.
Sono state effettuate diverse prove con l'ampiezza della forzante che varia tra 0.2N e 10N.
Ogni prova è stata ripetuta per verificare la robustezza dei valori ottenuti e tracciare una FRF con i valori mediati tra le prove effettuate. Per ogni ampiezza di oscillazione si è scelto di effettuare le prove in modalità Up (test effettuato a frequenze crescenti) e successivamente in modalità Down (test effettuato a frequenze decrescenti) per verificare la ripetibilità delle misure. Di seguito viene mostrato il confronto grafico tra le FRF con differenti ampiezze di eccitazione che variano tra 0.2N e 2N (Fig. 29 e 30).

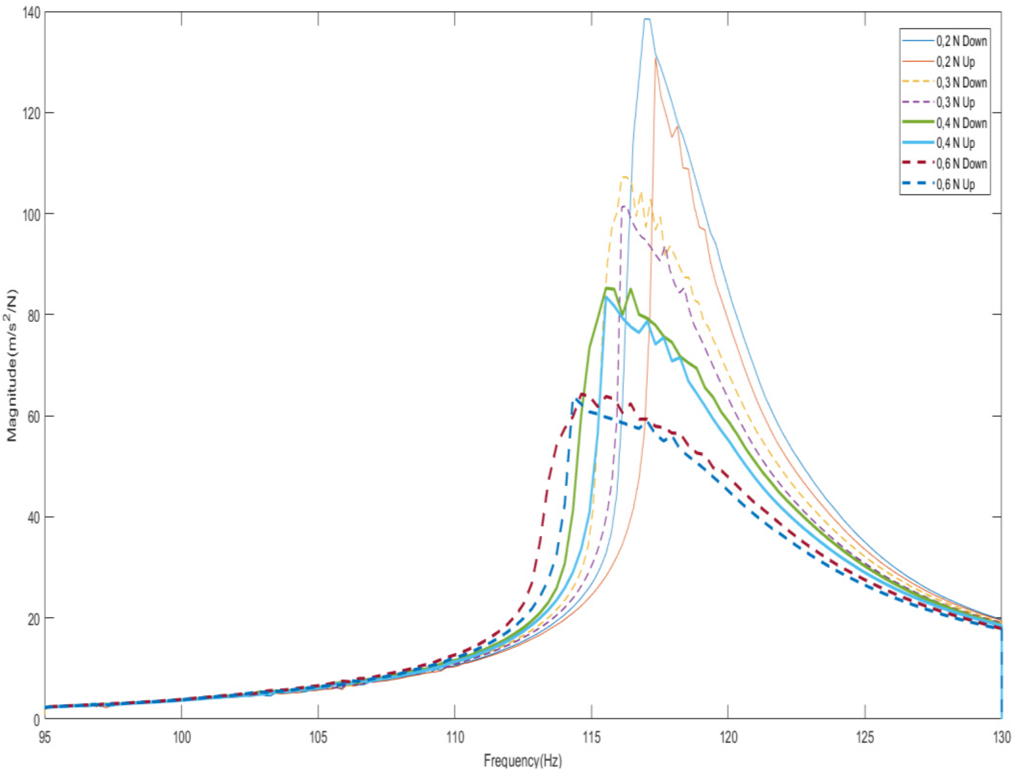


Fig. 29: confronto FRF con forze 0.2N, 0.4N e0.6N

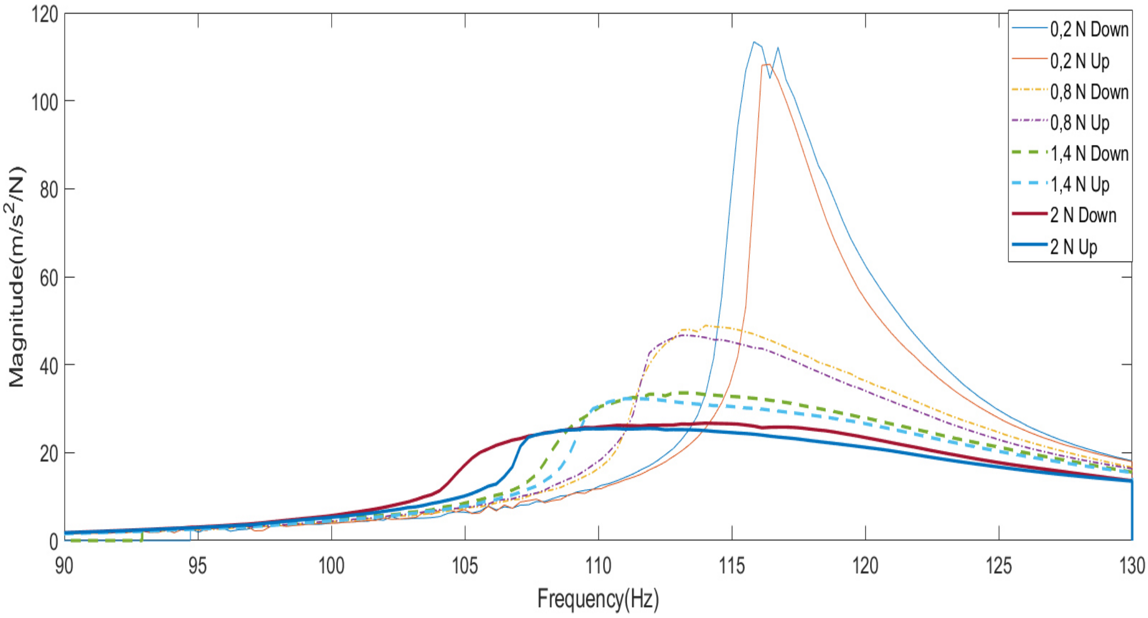


Fig. 30: confronto FRF con forze 0.2N, 0.8N, 1.4N e 2N

Le FRF sono riportate in diversi grafici per una migliore visualizzazione grafica.

Dalla Fig. 29 si osserva che a basse ampiezze di eccitazione è sufficiente una modesta variazione dell'ampiezza per ottenere grandi differenze in termini di FRF.

Inoltre, all'aumentare dell'ampiezza della forza, il picco dell'ampiezza di risonanza si sposta verso frequenze più basse e il valore della risposta si riduce. Ad ampiezze di eccitazione maggiori si nota un comportamento più stabile rispetto ai test effettuati con piccole ampiezze di eccitazione, dove un piccolo disturbo durante l'esecuzione della prova può provocare importanti variazioni della FRF.

I test effettuati in modalità Up producono un ritardo nel raggiungimento del picco di risonanza rispetto alle prove in modalità Down. Il sistema, eccitato in modalità Up, presenta dei comportamenti instabili a basse frequenze che ritardano il raggiungimento del picco di risonanza. Questa criticità non si presenta nelle prove in modalità Down, dove il sistema assume fin da subito un comportamento stabile [57].

4. APPROCCIO NUMERICO AL PROBLEMA

In questo capitolo viene affrontata l'analisi vibrazionale del sistema meccanico, precedentemente descritto nel paragrafo 3.2, con un approccio numerico. Dopo un breve cenno sulle caratteristiche del software utilizzato, si descrivono le fasi con cui si è giunti alla definizione del modello numerico agli elementi finiti a cui sono seguite differenti analisi numeriche del modello per caratterizzare il comportamento dinamico del sistema.

4.1 AMBIENTE DI CALCOLO ANSYS

Ansys (**An**alysis **Sys**tems Inc.) è una società americana che sviluppa e commercializza software per l'analisi agli elementi finiti (FEA, Finite Element Analisys) usati per la simulazione di moltissimi problemi ingegneristici.
Tramite il programma si possono ricreare dei modelli virtuali di componenti reali, oppure possono essere importati dei modelli CAD sviluppati su altri software, per poi effettuare delle analisi su strutture, componenti meccanici e valutarne i risultati confrontandoli con i risultati ottenuti tramite la sperimentazione in laboratorio dei campioni prova.
In questo lavoro di tesi è stato utilizzato Ansys Mechanical APDL 15.0, dove è possibile creare la geometria dei componenti analizzati partendo dalla definizione dei punti (keypoints) e delle linee utili alla creazione di aree e volumi, dove poi vengono assegnate le caratteristiche proprie del componente. La valutazione dei parametri inseriti nella fase immediatamente precedente alla simulazione e l'analisi critica dei risultati sono le basi per ottenere simulazioni il più possibile realistiche e vicine alla sperimentazione.

4.2 COSTRUZIONE DEL MODELLO DELLA TRAVE SINGOLA

Per la costruzione del modello agli elementi finiti si è partiti dal sistema utilizzato anche in fase di sperimentazione, mostrato precedentemente in Fig. 25 [57].
Inizialmente è stata modellata, per via parametrica, la singola trave accoppiata agli otto magneti, come mostrato in Fig. 31, in modo da poter variare le caratteristiche del modello con pochi parametri caratteristici [58]. Il modello della singola trave è racchiuso in un listato .txt da

far processare al software. Questo metodo di programmazione è noto con il termine programmazione batch.

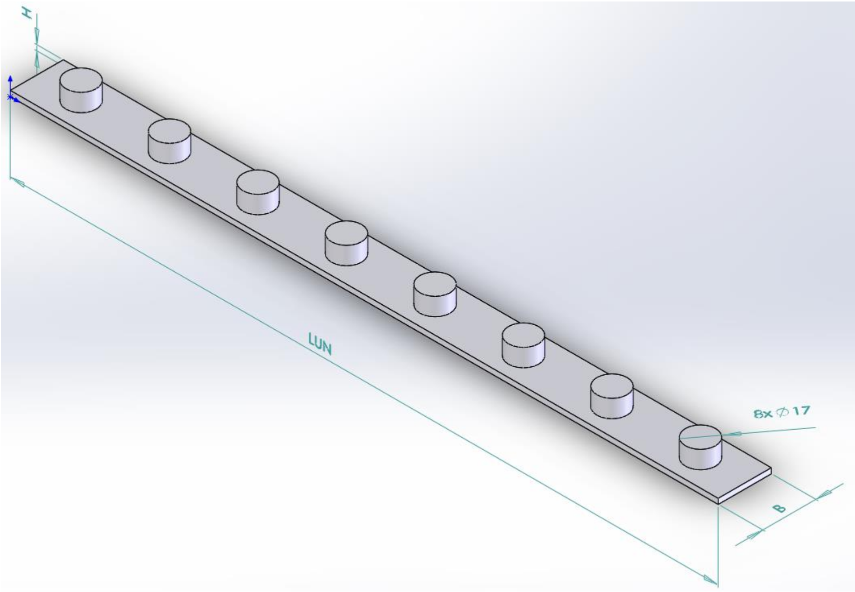


Fig. 31: modello della trave singola in 3D

La trave singola è stata modellata definendo, in prima battuta, gli elementi ed i materiali della trave e dei magneti, consultabili in Ansys nella sezione Preprocessor.

Gli elementi (element type o *et* in Ansys) considerati per definire le travi ed i magneti sono:

- Elementi MESH200 [59];
- Elementi SOLID186 [60].

Gli elementi MESH200, definiti come element type 1, sono degli elementi utilizzati per discretizzare la superficie dei corpi e facilitano anche la regolarità della mesh di volume. Per descrivere la nostra trave sono stati scelti degli elementi quadrilateri a 4 nodi (Keyopt(1)), mostrati in Fig. 32:

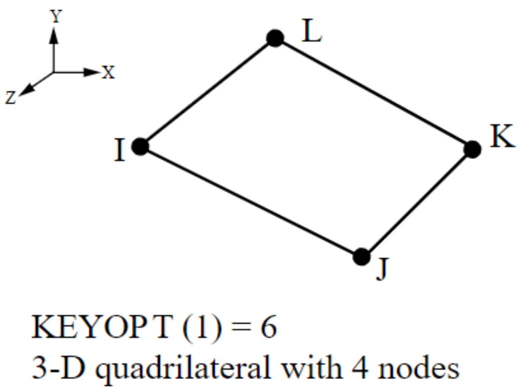


Fig. 32: elemento MESH200

L’elemento MESH200 è verificato, prima dello svolgimento di qualunque analisi, tramite l’analisi della forma degli elementi, come suggerito dal programma (Keyopt(2), K2=0) (Fig.), in modo da effettuare il controllo della mesh.

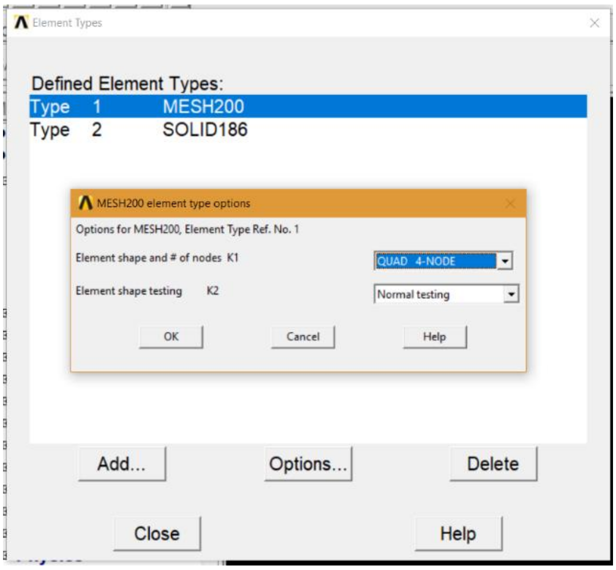


Fig. 33: opzioni dell'elemento MESH200

Gli elementi SOLID186, definiti come element type 2, sono degli elementi tridimensionali a venti nodi con ogni nodo con tre gradi di libertà traslazionali lungo i tre assi (x, y, z) e un esempio di questo elemento è mostrato in Fig. 34:

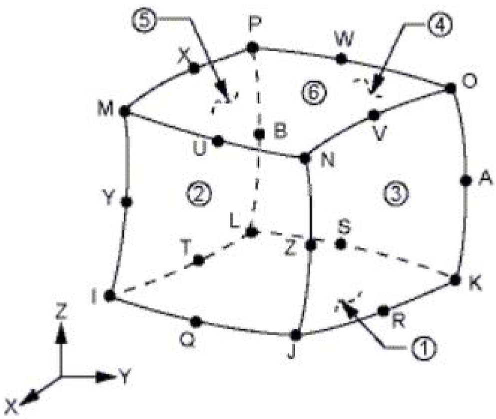


Fig. 34: elemento SOLID186

Gli elementi SOLID186 considerati sono caratterizzati da tre opzioni, Fig. 35.

L’opzione K2 permette di selezionare il metodo di integrazione (*full integration o uniform reduced integration method)* che è stato impostato sul metodo ridotto, come da default, per evitare delle criticità nella mesh di volume in condizioni di incomprimibilità. L'opzione K3, invece, permette di scegliere di considerare il solido come omogeneo o a strati. Considerando l'elemento SOLID186 come *homogeneous structural solid* si ha una buona rappresentazione del modello anche con delle mesh non propriamente regolari. Infine, l'opzione K6 permette di scegliere la trattazione degli elementi secondo la formulazione *pure displacement*, come da default, o *mixed*.

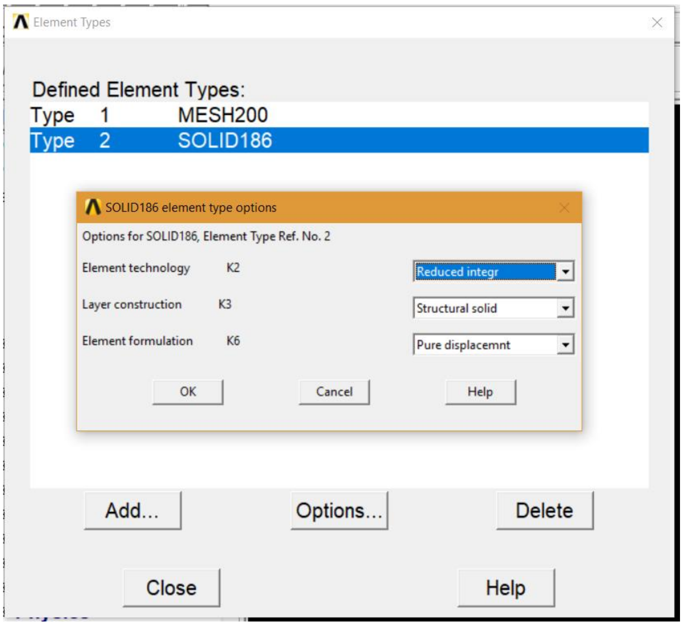


Fig. 35: opzioni dell'elemento SOLID186

Le proprietà dei materiali considerati per caratterizzare la trave ed i magneti sono riassunti nella Tab. 3:

Elemento	**Trave**	**Magneti**
Materiale	Alluminio	Neodimio, Ferro, Boro sintetizzato
Modulo di Young $[Pa]$	$6{,}4 * 10^{10}$	$6{,}4 * 10^{9}$
Coefficiente di Poisson	0,3	0,3
Densità $[kg/m^3]$	2800	7800

Tab. 3: proprietà dei materiali

Le informazioni riguardanti i materiali e le loro proprietà sono consultabili e modificabili in Ansys in *Preprocessor -> Material Props -> Material Models*.

La tabella di cui sopra evidenzia come l'ordine di grandezza del modulo di Young per i magneti è un ordine di grandezza inferiore rispetto alla trave e quindi non irrigidiscono la struttura. A livello sperimentale, i magneti sono semplicemente incollati alla trave mediante della colla e quindi tale vincolo è difficilmente paragonabile ad una perfetta saldatura dei corpi e non consente un aumento di rigidezza flessionale della trave. I magneti, a causa della densità maggiore rispetto l'alluminio, forniscono però un importante contributo in termini di massa e proprietà inerziali.

La geometria del sistema è stata definita per via parametrica, in modo da permettere di analizzare le proprietà del sistema al variare di pochi parametri caratteristici come: larghezza, lunghezza e spessore della trave, numero di magneti, interasse tra il centro dei magneti ecc.
La geometria è definita a partire dai keypoints principali del sistema. Per definire i keypoints in Ansys è sufficiente utilizzare il comando *k*, numerando in maniera sequenziale i keypoints e inserendo le coordinate spaziali x, y e z del punto da definire. Si definiscono, quindi, i quattro vertici della trave e i punti rappresentanti i centri dei magneti. Successivamente, vengono create le linee come unione di due keypoints tramite il comando *l*. Inoltre, per facilitare la creazione di una mesh quanto più regolare possibile i magneti, di forma circolare, sono inscritti in dei quadrati e le relative diagonali appositamente definiti per omogeneizzare la mesh della struttura. Tramite il comando *al* in Ansys è possibile creare un'area selezionando le linee di interesse. Al termine di questi comandi il modello appare come una superficie piana suddivisa in aree, come mostrato in Fig 36:

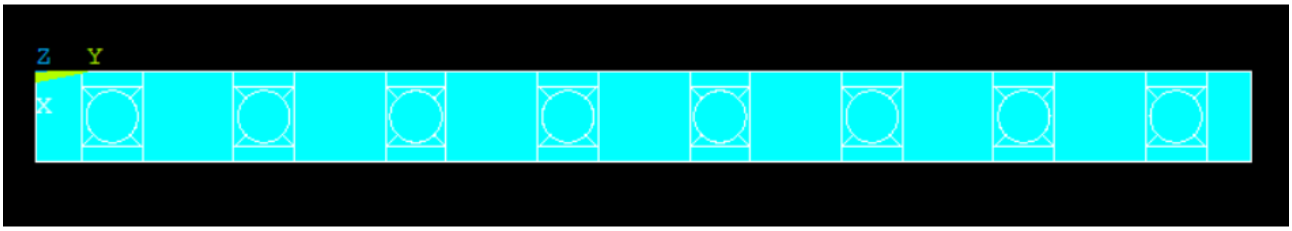


Fig. 36: suddivisione del modello trave singola

Tramite il comando *vext* si passa dal modello bidimensionale al modello tridimensionale estrudendo le aree nella direzione desiderata, come si evince in Fig. 37:

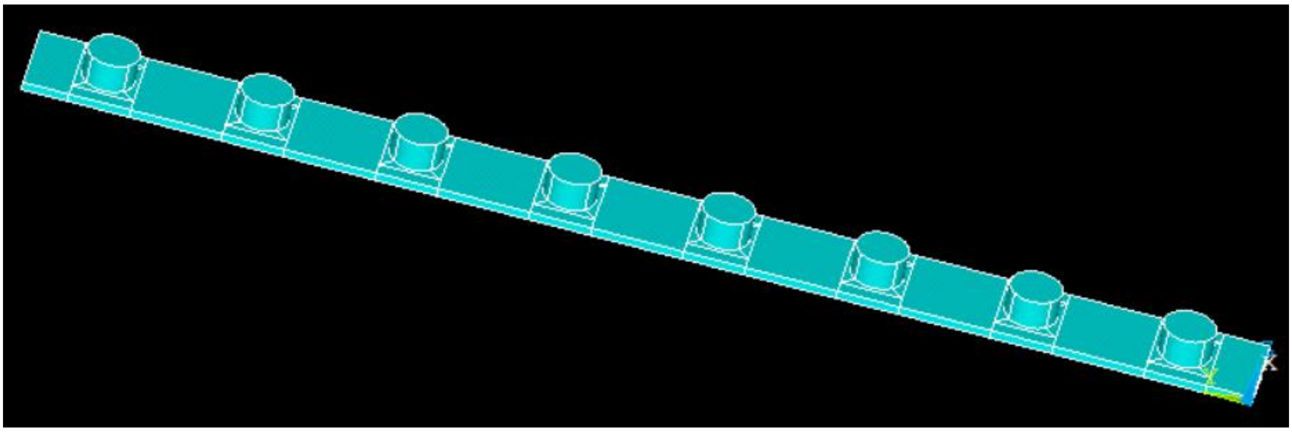


Fig. 37: aree del modello trave singola

Una volta creata la geometria di base, attraverso il comando *lesize,* sono state suddivise le linee presenti in modo da procedere all'operazione di discretizzazione (o meshing) delle aree e dei volumi, con i comandi *amesh* e *vmesh.* Gli elementi finiti sono definiti compiutamente con i comandi *mshape* e *mshkey*. Con il comando *mshape* si definisce la forma dell'elemento da utilizzare per creare la geometria, nel nostro caso si è scelto un elemento a 4 nodi (key=0 in Ansys), mentre invece con il comando *mshkey* permette di discretizzare la geometria in due differenti modi: free e mapped. Si è scelto una *mapped meshing* (key=1 in Ansys) che permette di ottenere una mesh più ordinata e regolare rispetto alla *free meshing*.

A titolo esemplificativo, nella Fig. 38, viene riportato come varia la discretizzazione di semplice elemento bidimensionale qualora si scegliesse una *free meshing* oppure una *mapped meshing:*

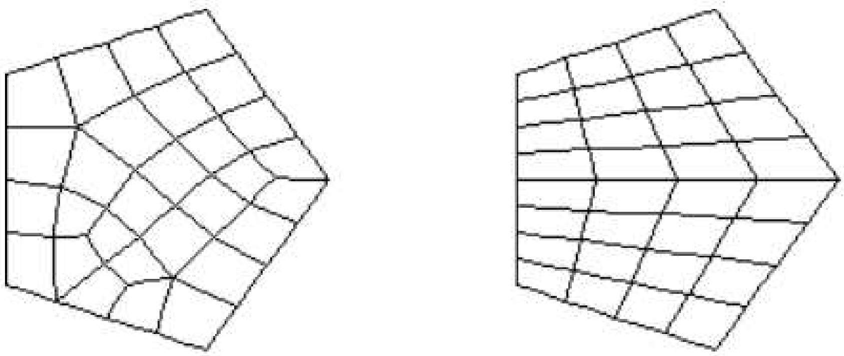


Fig. 38: free e mapped meshing

Con l'opzione *mapped meshing* si hanno delle restrizioni in termini geometrici che non ci sono con la *free meshing*, infatti una discretizzazione *mapped* dell'area avviene solo con elementi

quadrangolari o solo con elementi triangolari. Analogamente, una *mapped mesh* dei volumi avviene solo con elementi esaedrici.
Nella Fig. 39 viene così mostrata la discretizzazione del modello, che chiameremo modello A.

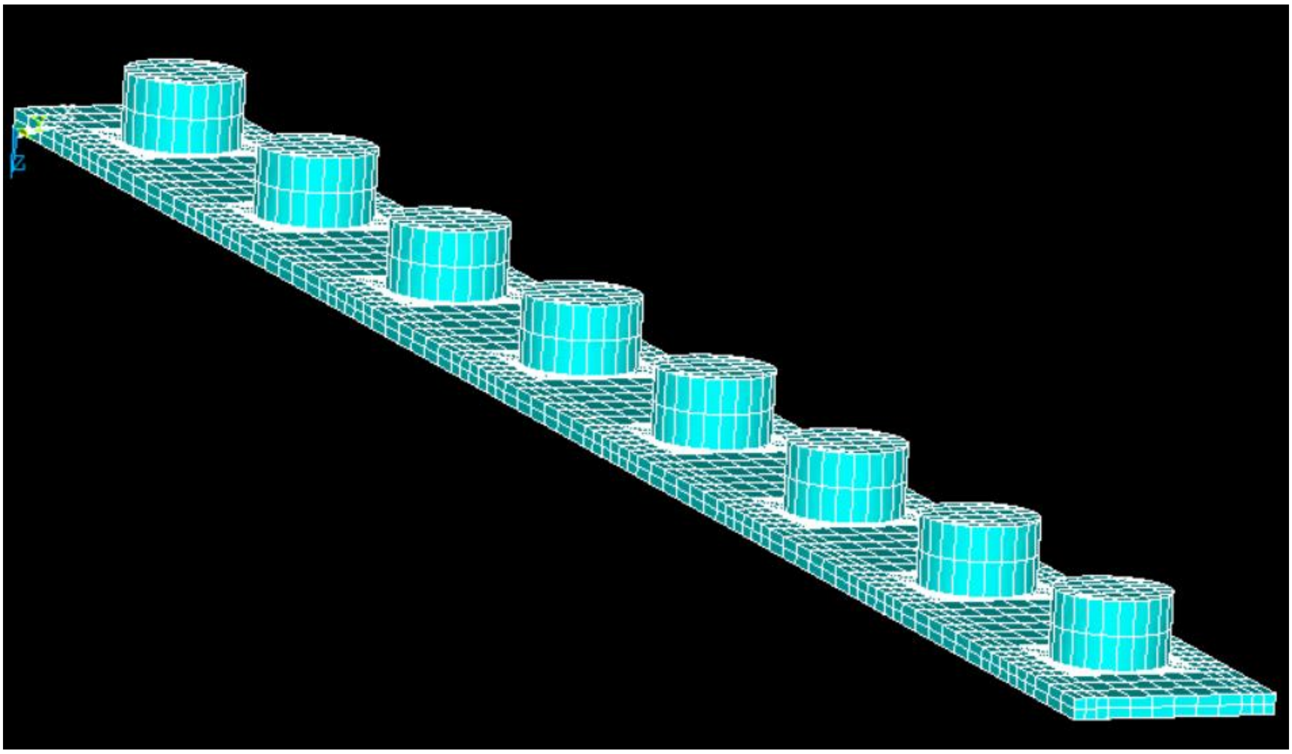


Fig. 39: modello A

La discretizzazione dello spessore della trave con più elementi, lungo l'asse Z, permette di cogliere il comportamento flessionale della struttura.
Nella Fig. 40, invece, viene evidenziata nel dettaglio la regolarità degli elementi nelle aree vicine ai magneti.

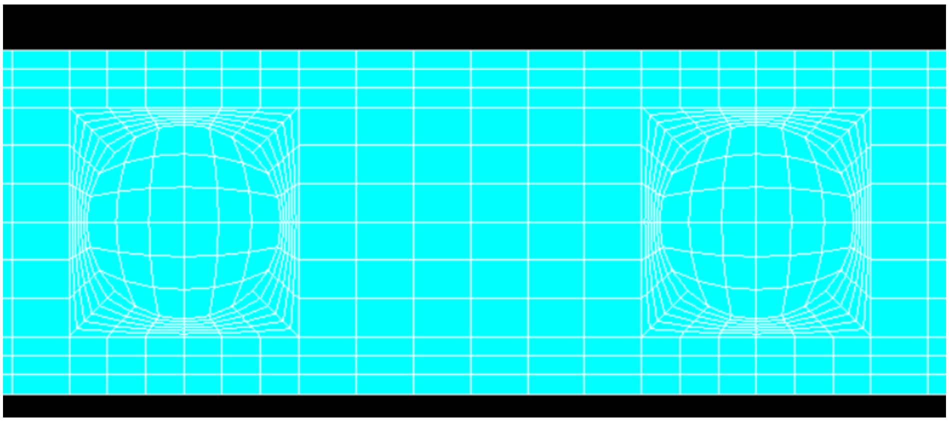


Fig. 40: dettaglio della discretizzazione del modello vicino ai magneti

In questo modello, la discretizzazione delle aree lungo lo spessore di tutta la trave non cambia. Si avrà, dunque, la medesima discretizzazione a livello di aree anche nella faccia inferiore della trave che dovrà poi essere a contatto con l'altra trave al momento dell'accoppiamento per creare il sistema completo.
Successivamente, la trave di partenza è stata rimodellata con una discretizzazione della superficie mediante una mesh ancora più regolare e fitta, avremo quindi il modello B (Fig. 41).

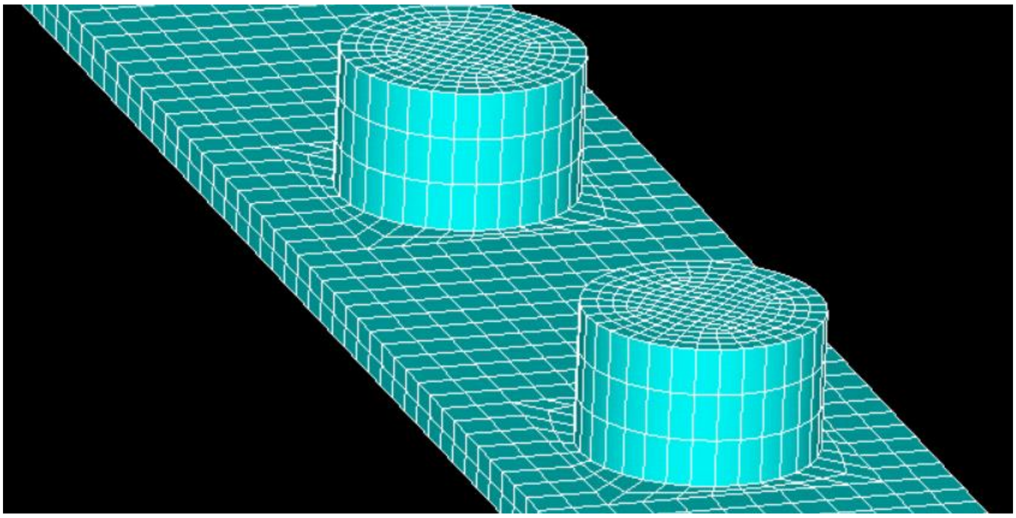


Fig. 41: modello B

In questo modello, inoltre, si ha una variazione della mesh lungo lo spessore della trave in modo da avere una mesh sulla faccia inferiore della trave assolutamente regolare, come si evince dal confronto tra la mesh della faccia superiore e quella della faccia inferiore (Fig. 42). Il sistema trave è stato poi discretizzato in maniera molto più regolare ma tale scelta si rivelerà essere troppo onerosa a livello computazionale, come si vedrà nel seguito.

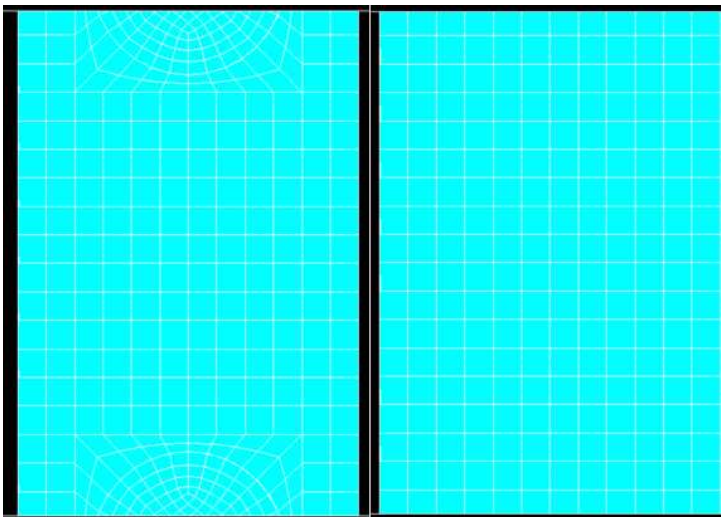


Fig. 42: confronto tra la discretizzazione della faccia superiore e della faccia inferiore della trave

Di seguito, in Fig.43, vengono messi a confronto i due modelli per apprezzare meglio la differente discretizzazione del sistema trave.

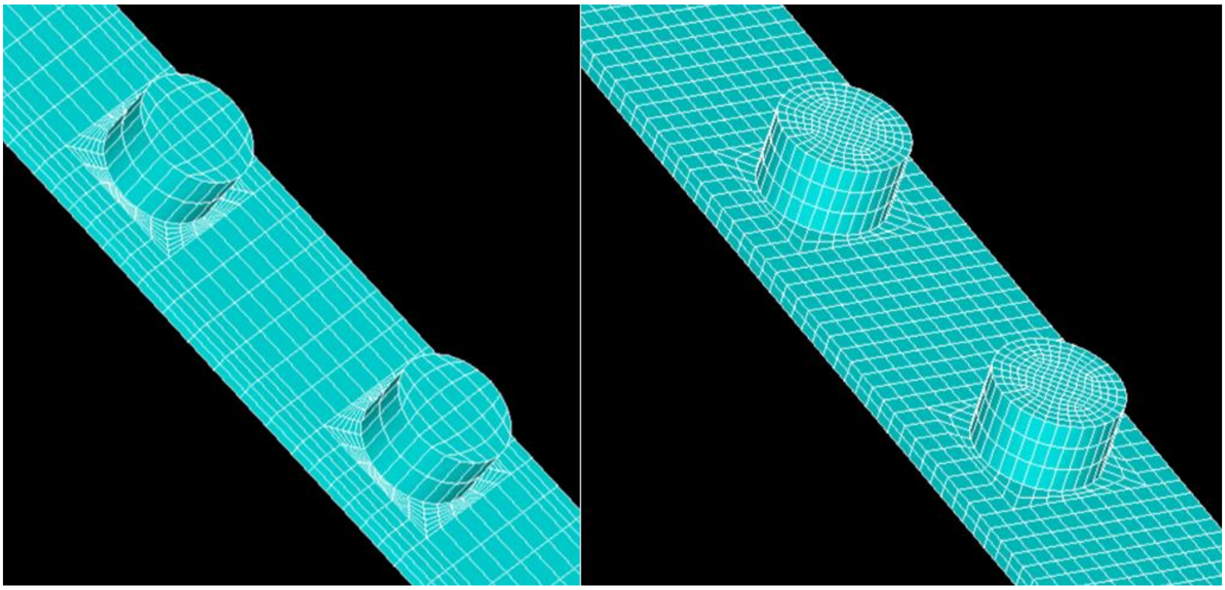


Fig. 43: confronto modello A e B

4.3 CREAZIONE DEL MODELLO CON TRAVI ACCOPPIATE

Successivamente, dopo aver modellato la singola trave con i relativi magneti, è possibile realizzare l'accoppiamento delle due travi in modo da creare il modello finale, Fig. 44.

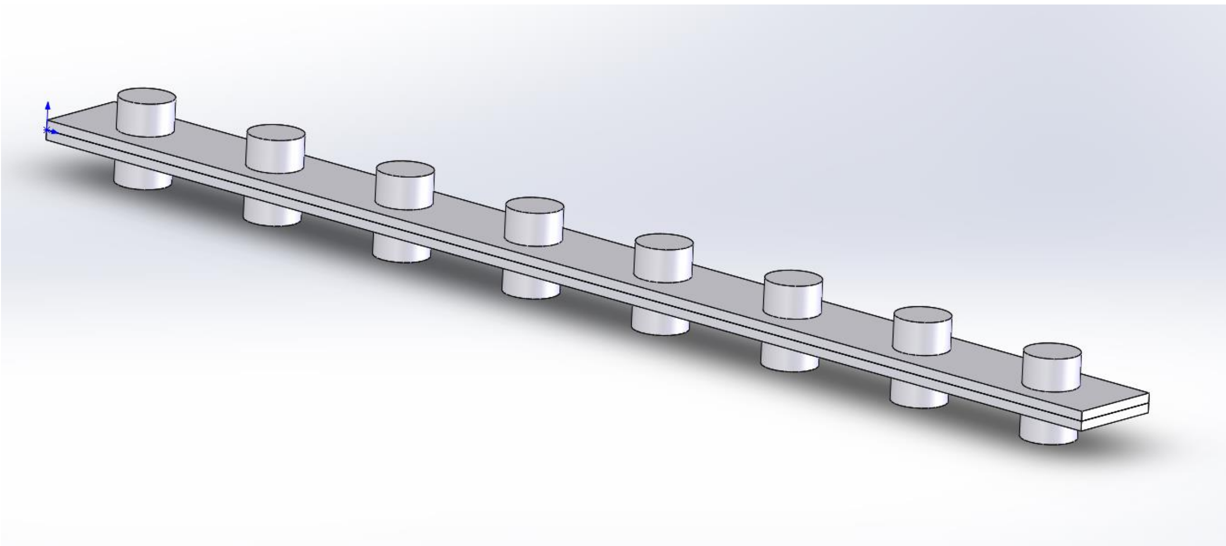


Fig. 44: modello con le travi accoppiate in 3D

Nella sezione *Preprocessor -> Modeling* in Ansys, è possibile utilizzare il comando *reflect* in modo da specchiare il modello, creato nel paragrafo 4.2, rispetto ad un piano di riferimento (nel nostro caso il piano utilizzato è stato il piano X-Y) (Fig. 45).

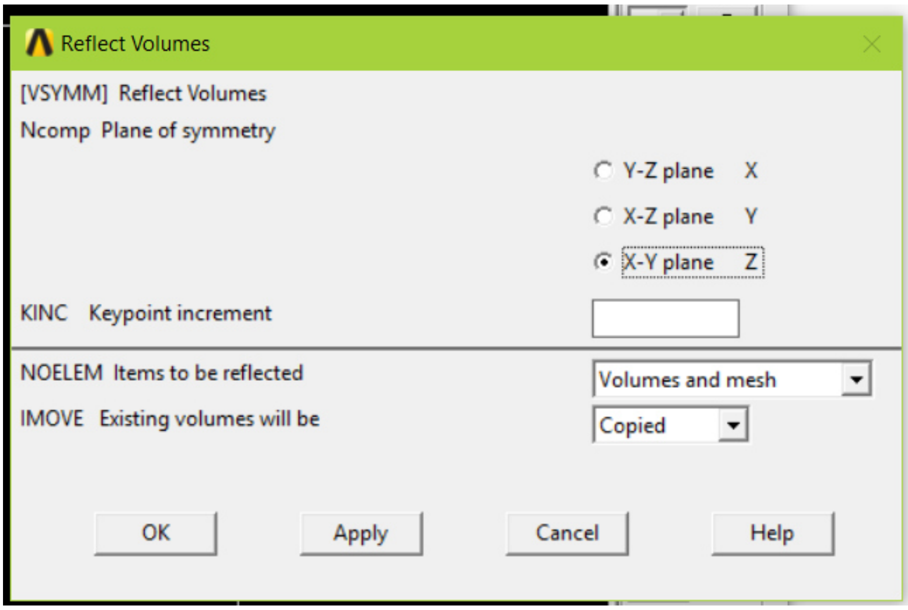


Fig. 45: comando Reflect

Il modello definitivo è ottenuto specchiando tutti gli elementi del modello della trave singola (keypoints, linee, aree, volumi e mesh) ed è visibile in Fig. 46:

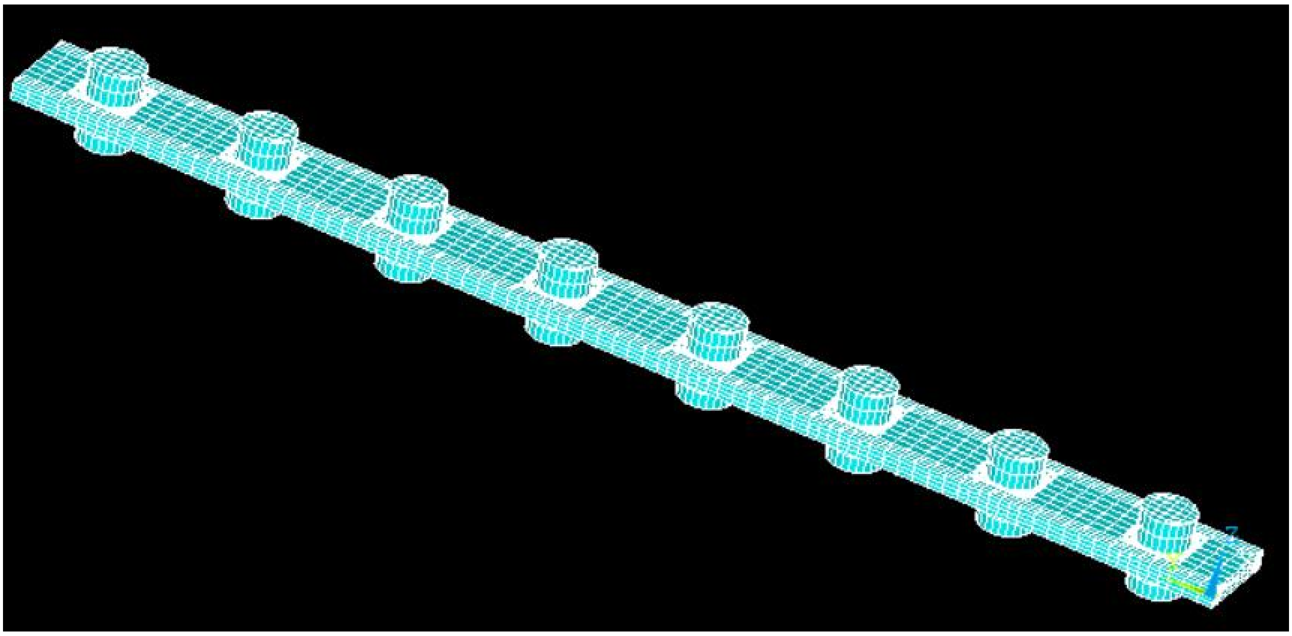


Fig. 46: modello A con le travi accoppiate

Viene qui riportato il confronto tra i modelli A e B nel caso delle travi accoppiate (Fig. 47) e le tabella riepilogativa degli elementi (Tab. 4):

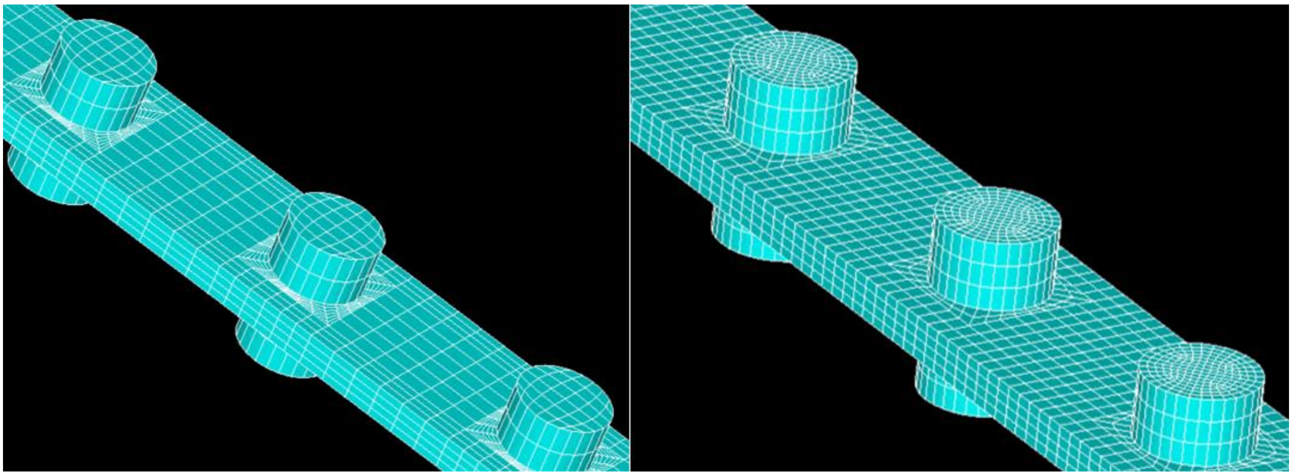


Fig. 47: confronto tra modelli A e B per le travi accoppiate

	Modello A	Modello B
#Elementi SOLID186	10368	111922
#Area Contact	2304	3840
#Area Target	2304	3840

Tab. 4: confronto tra modello A e B

Il sistema finale con le travi accoppiate è completato definendo le aree di contatto, denominate aree Target e Contact. Nel nostro caso, le aree della superficie di contatto della trave superiore sono state denominate come aree Target mentre le aree della superficie di contatto della trave inferiore sono denominate come aree Contact. Per fare ciò è possibile richiamare dalla GUI (Graphical User Interface) di Ansys il *Contact Wizard* tramite il comando *Preprocessor -> Modeling -> Create -> Contact Pair* (Fig. 48).

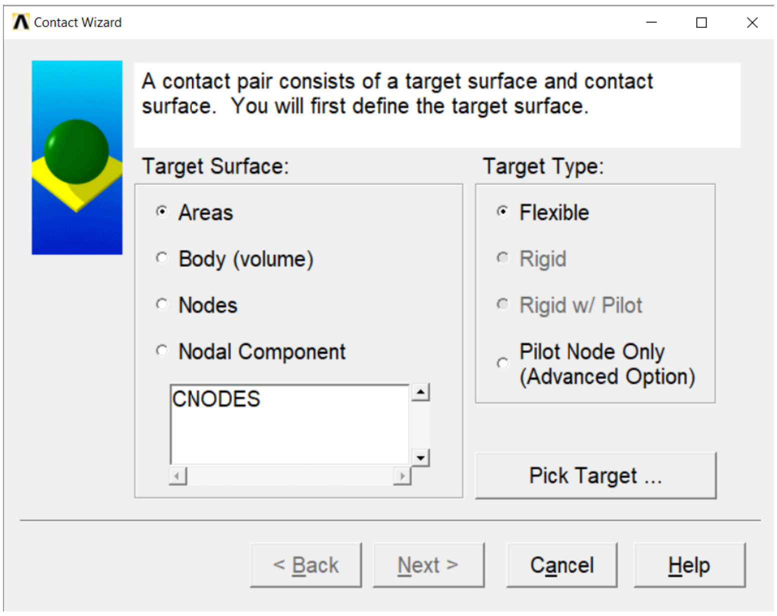


Fig. 48: definizione aree Target

Con il comando *Pick Target* è possibile selezionare da video le aree Target del modello.
Per fare ciò è necessario però isolare la trave superiore, in modo tale da rendere selezionabile solo le aree di contatto relative alla trave superiore, tramite il comando *Select -> Entities -> Areas -> Select Areas by Box -> Ok* (Fig. 49).

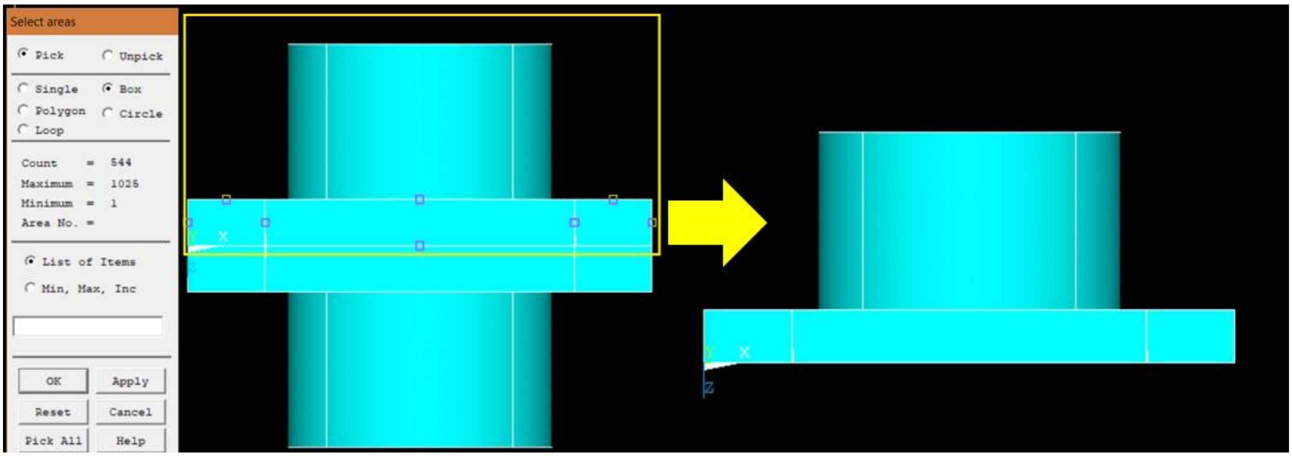


Fig. 49: comandi necessari per isolare la trave superiore

Dopo aver isolato le aree relative alla trave superiore è possibile selezionare le aree Target attraverso il comando Pick Target (Fig. 50):

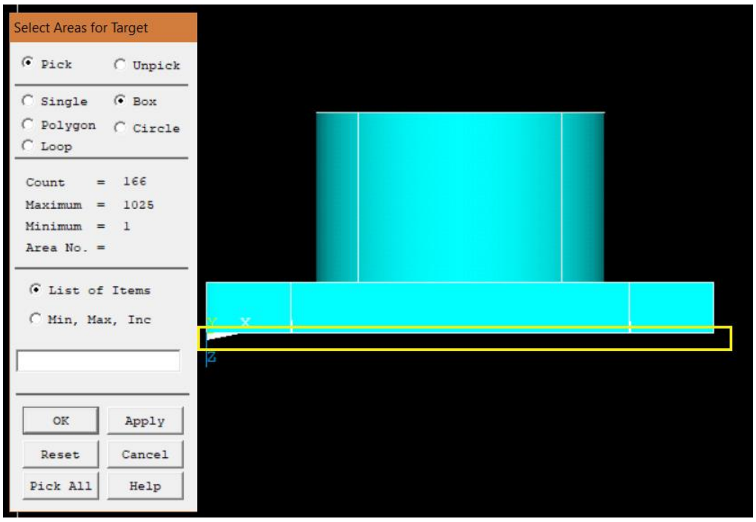


Fig. 50: selezione aree Target

Dopo aver selezionato nuovamente l'intero modello con il comando *Select -> Everything* è possibile selezionare le aree Contact isolando le aree relative alla trave inferiore ed eseguendo il medesimo procedimento.

Infine, avendo definito le aree Target e Contact è possibile definire le proprietà del contatto tramite le impostazioni mostrate in Fig. 51.

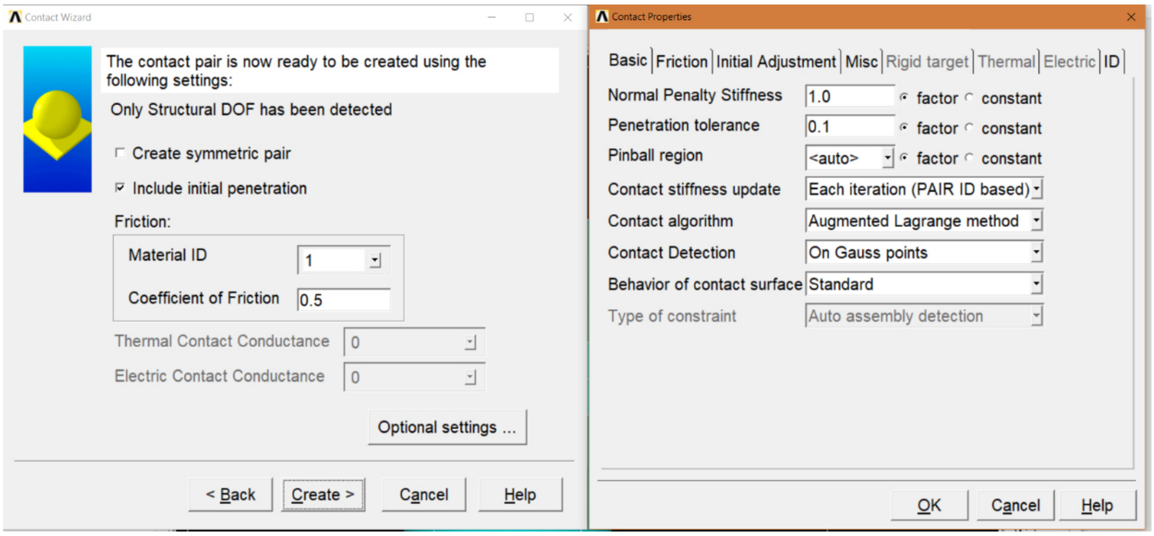


Fig. 51: proprietà del modello di contatto

Le proprietà del contatto sono consultabili ed eventualmente modificabili in ogni momento tramite il Contact Manger presente nella GUI di Ansys.

Nel caso delle travi accoppiate sarebbe possibile anche definire il modello di collegamento che rappresenta il contatto fisico tra le facce delle travi mediante un layer di elementi unidimensionali, *Combin14*, interposto tra le facce delle travi a contatto. Questo elemento collega le coppie di nodi sovrapposti appartenenti alle facce delle due travi ed è caratterizzato da una rigidezza, lineare o torsionale, ignota e che possiamo ricavare per tentativi in modo tale da ottenere dei risultati confrontabili con l'analisi sperimentale (Fig. 52).

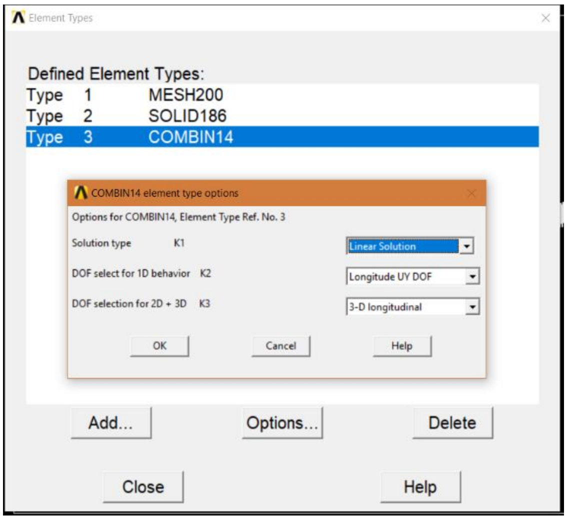


Fig. 52: elemento Combin14

Di seguito, dopo aver descritto i differenti algoritmi risolutivi degli elementi di contatto, verranno descritte nel dettaglio le analisi condotte sui modelli appena descritti.

4.4 ELEMENTI DI CONTATTO

Quando le superfici di due corpi separati si toccano si può dire che le due superfici sono a contatto. Nella realtà, due corpi non possono compenetrarsi ma possono trasmettersi vicendevolmente delle forze normali e tangenziali. La rigidezza del sistema cambia quindi se i corpi sono a contatto oppure separati [61].

Fisicamente, come detto, i corpi a contatto non possono compenetrarsi, perciò, in Ansys vengono definite delle relazioni tra le superfici dei corpi per impedire la compenetrazione dei corpi. La compenetrazione si verifica quando non è imposta la compatibilità del contatto tra le superfici, come è mostrato a destra in Fig. 53.

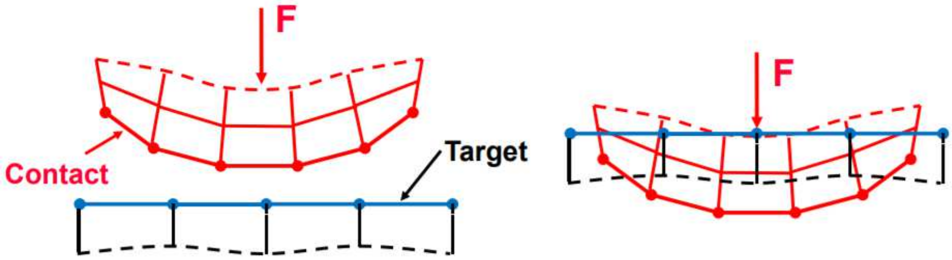


Fig. 53: a) superfici non a contatto b) superfici in compenetrazione

In Ansys sono presenti diverse formulazioni del contatto per imporre la compatibilità del contatto all'interfaccia tra le superfici dei due corpi. Per il contatto non lineare tra le facce dei corpi può essere usata la formulazione *Augmented Lagrange* o *Pure Penalty* [61]. Entrambe le formulazioni sono basate sul concetto di penalty.
La forza normale sarà quindi pari a:

- formulazione Pure Penalty $F_n = k_n x_{penetration}$
- formulazione Augmented Lagrange $F_n = k_n x_{penetration} + \lambda$

La differenza tra i due metodi è rappresentata dal termine λ, nel caso della formulazione Augmented Lagrange, che rende meno sensibile il calcolo al valore assunto dalla rigidezza di contatto normale.
In entrambi i casi, comunque, all'aumentare della rigidezza normale, k_n, la compenetrazione tra i corpi diminuisce x_p (Fig.54). Idealmente, per una rigidezza normale infinita la compenetrazione tra i corpi sarebbe nulla ma non è numericamente possibile per questi metodi. Ovviamente, un x_p piccolo o trascurabile permette di ottenere risultati più accurati.

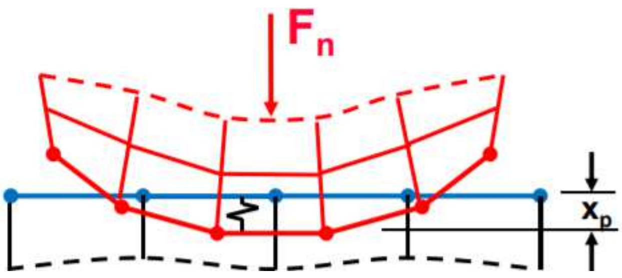


Fig. 54: compenetrazione x_p

La formulazione dei Moltiplicatori di Lagrange (nota come Lagrange Multiplier o Normal Lagrange formulation), invece, aggiunge degli ulteriori gradi di libertà per soddisfare la compatibilità del contatto per imporre una penetrazione nulla tra i corpi (Fig.55). Questo metodo, non richiede la definizione della rigidezza di contatto normale, ma risulta essere più oneroso in termini computazionali.

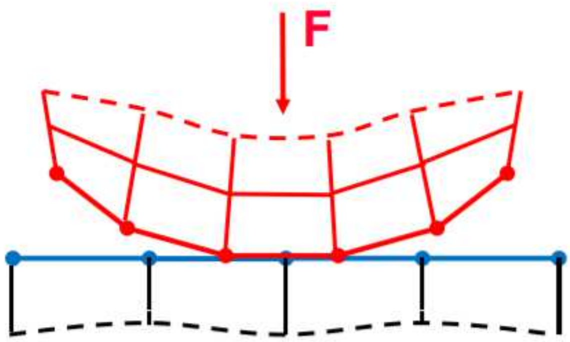


Fig. 55: metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

La rigidezza normale, k_n, è il parametro più importante ed influenza sia l'accuratezza e la convergenza del calcolo. Una rigidezza normale troppo elevata porta ad ottenere dei risultati più accurati ma può essere difficile la convergenza, mentre una rigidezza normale troppo bassa può portare il modello ad oscillare (Fig.56).

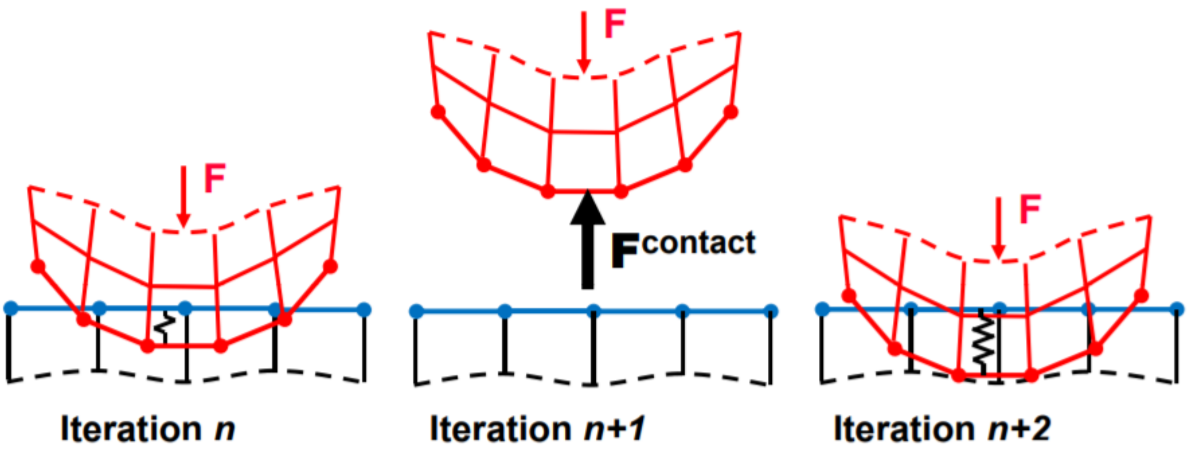


Fig. 56: comportamento del contatto in iterazioni successive

Il comportamento tangenziale dei due corpi a contatto è trattato in maniera del tutto analoga e la formulazione della forza tangenziale, con le superfici in configurazione di adesione, sarà pari a:

$$F_t = k_t x_{sliding}$$

La forza tangenziale dipende dal valore assunto dalla rigidezza tangenziale, k_t e dallo slittamento ($x_{sliding}$). Lo slittamento è idealmente nullo, in condizioni di adesione tra le superfici, sebbene qualche slittamento sia permesso nella risoluzione del sistema con il metodo penalty.

In Ansys, per la risoluzione di sistemi mediante i metodi Augmented Lagrange e Pure Penalty sono richieste le rigidezze di contatto normale e tangenziale. Il valore della compenetrazione tra le superfici Target e Contact dipende dalla rigidezza normale, mentre la quantità dello slittamento tra le superfici inizialmente in adesione dipende dalla rigidezza tangenziale. Elevati valori delle rigidezze portano a diminuire il valore di compenetrazione e slittamento mentre la matrice di rigidezza del sistema può essere mal condizionata e si possono incontrare difficoltà di convergenza, mentre invece bassi valori di rigidezza inducono un aumento della compenetrazione e slittamento giungendo a soluzioni poco accurate. Idealmente, sarebbe utile avere degli alti valori di rigidezza per avere compenetrazione e slittamento accettabilmente bassi e al contempo avere anche dei bassi valori di rigidezza per ottenere una convergenza agevole verso la soluzione [62]. È dunque possibile gestire gli elementi di contatto tramite le *Properties* nel Contact Manager. Nelle analisi svolte in questo lavoro si è valutato il comportamento degli elementi di contatto mediante il controllo delle rigidezze e delle relative tolleranze. In *Contact Properties -> Basic* (Fig. 57) è possibile definire le proprietà del contatto. La rigidezza normale (FKN o Normal Penalty Stiffness) è un fattore che varia tra 0.01 e 1.0 (1.0 è il valore di default e 0.01 è usato in caso di sistemi sottoposti a flessione), mentre invece la tolleranza di penetrazione (FTOLN, Penetration Tolerance) assume generalmente un valore minore di 1.0 (usualmente impostato a 0.2). La compatibilità del contatto è verificata se la compenetrazione tra i corpi è minore della tolleranza. Se la compenetrazione è maggiore della tolleranza, la soluzione globale del sistema è considerata non ancora convergente e il calcolo prosegue.

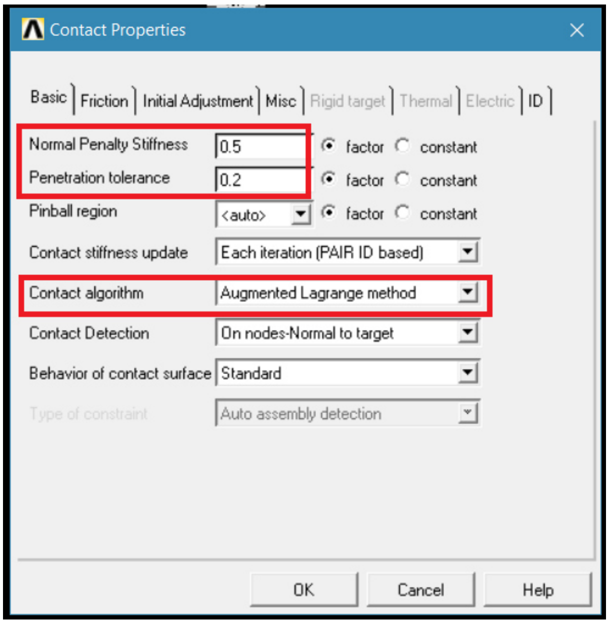


Fig. 57: parametri del modello di contatto

In *Contact Properties -> Friction* sono contenute le informazioni riguardanti l'attrito statico e dinamico alla superficie di contatto (Fig.):

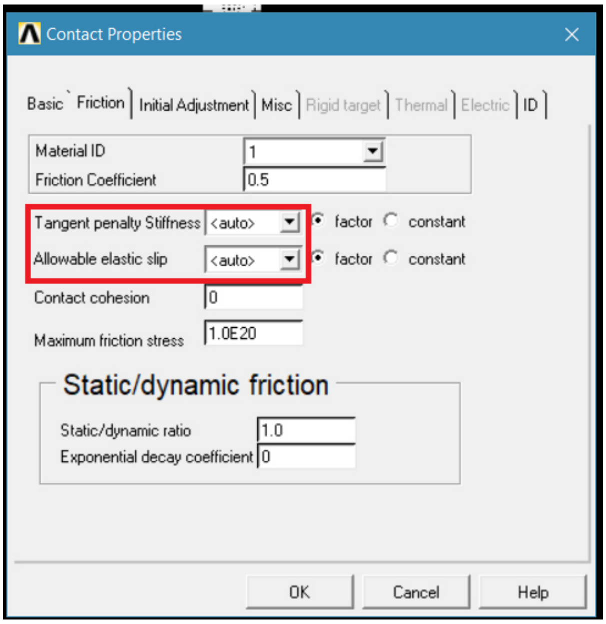


Fig. 58: parametri relativi all'attrito del modello di contatto

Ansys definisce automaticamente la rigidezza tangenziale (FKT o Tangent Penalty Stiffness) in funzione del coefficiente d'attrito e della rigidezza normale (FKN). Lo slittamento massimo permesso (SLTO, Allowable Elastic Slip) è usato per controllare lo slittamento del contatto quando il valore della rigidezza tangenziale (FKT) è aggiornata ad ogni iterazione. Un alto valore della tolleranza può facilitare la convergenza ma peggiorare la soluzione in termini di accuratezza.

4.5 ANALISI MODALE

L’analisi modale è lo studio del comportamento dinamico di una struttura sottoposta a vibrazione. Attraverso quest’analisi è possibile determinare le caratteristiche di una struttura vincolata o libera. L’analisi modale si pone quindi come il punto di partenza per delle analisi dinamiche più dettagliate, come l’analisi transitoria o l’analisi della risposta armonica.
L’analisi modale ci permette di determinare le frequenze naturali ed i modi di vibrare del sistema. Queste caratteristiche sono dei parametri molto importanti nella progettazione di strutture sottoposte a carichi dinamici.
In ANSYS, l’analisi modale è un’analisi lineare e le non-linearità, come la curva di plasticità e gli elementi di contatto, sono ignorati anche se sono presenti nel modello.
Il sistema in esame, presentato all’inizio del capitolo 4, è vincolato nel piano X-Y, mentre può muoversi lungo l’asse Z con un moto armonico imposto dallo shaker. Prima di procedere con l’analisi modale, si rende, quindi, necessario l’introduzione del vincolo nella parte centrale del modello delle travi accoppiate in modo tale da simulare il sistema con cui le travi sono state collegate allo shaker nelle analisi condotte per via sperimentale (Fig. 59).

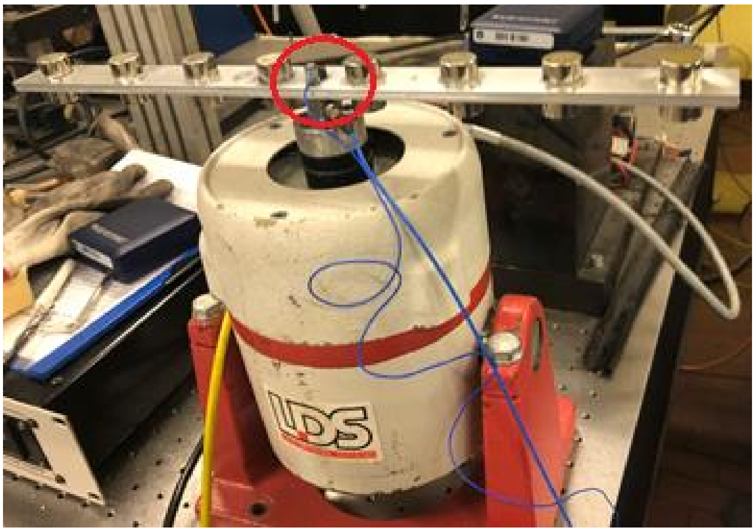


Fig. 59: dettaglio del vincolo lo shaker e il sistema di travi accoppiate

Nell’analisi condotta per via sperimentale le travi accoppiate sono state forate e poi sono state collegate allo shaker con un sistema dado e contro-dado. Al fine di semplificare l’operazione di imposizione dei vincoli in Ansys si è scelto di vincolare, lungo gli assi X e Y, le travi nella zona centrale. L’analisi modale è stata condotta sui due modelli (modello A e B), precedentemente descritti nel paragrafo 4.3, per apprezzare e valutare le eventuali discrepanze tra i risultati.

Il modello B è stato scelto come riferimento nelle operazioni di confronto dei risultati in quanto essendo discretizzato in maniera più regolare e fitta è più rispondente alla realtà.

L'imposizione dei vincoli in Ansys, avviene entrando nella sezione *Preprocessor -> Loads -> Define Loads -> Apply -> Structural -> Displacement -> On nodes* e selezionando un poligono contenente i nodi centrali è possibile vincolare i gradi di libertà desiderati (nel nostro caso U_x e U_y). In Fig. 60 viene mostrata il poligono scelto ed i gradi di libertà vincolati per il modello B:

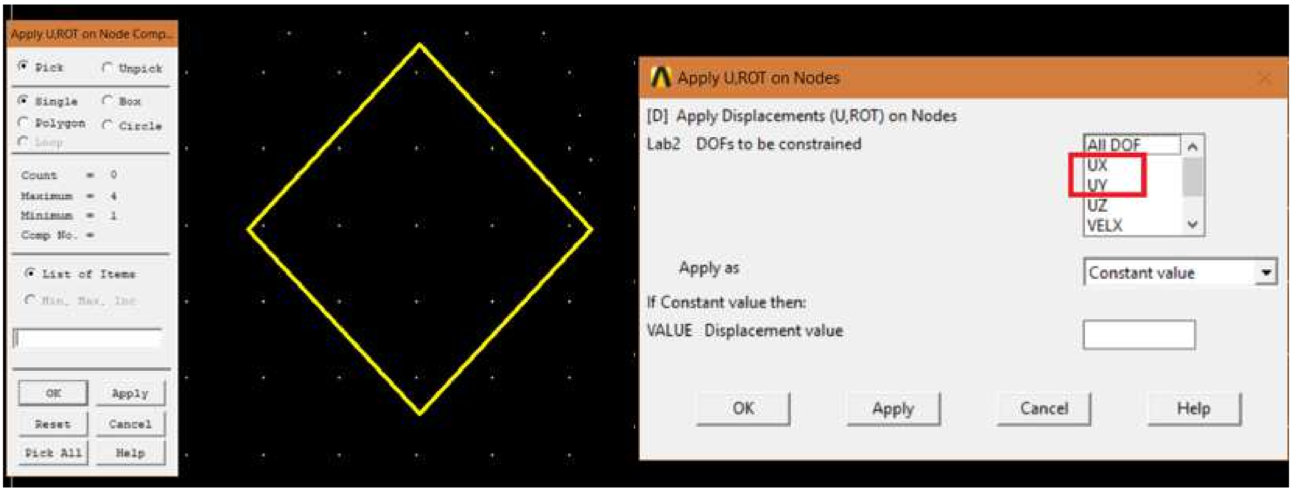


Fig. 60: dettaglio relativo al vincolo da imporre alle travi

Si ottiene così il vincolo (Fig. 61):

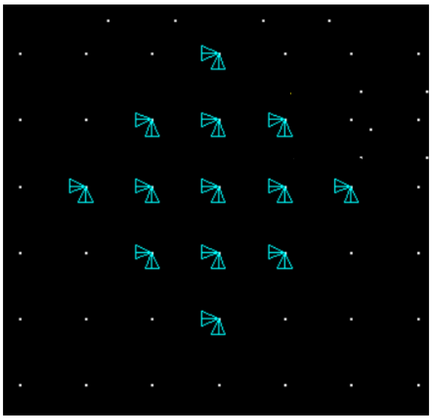


Fig. 61: vincolo in 3D nei nodi centrali

Si può procedere allo svolgimento dell'analisi modale, passando alla sezione *Solution -> Analysis Type -> New Analysis -> Modal Analysis*. Invece, nella sezione *Solution -> Analysis Type -> New Analysis -> Analysis Options* è possibile selezionare il metodo di calcolo dei modi di vibrare (Fig. 62):

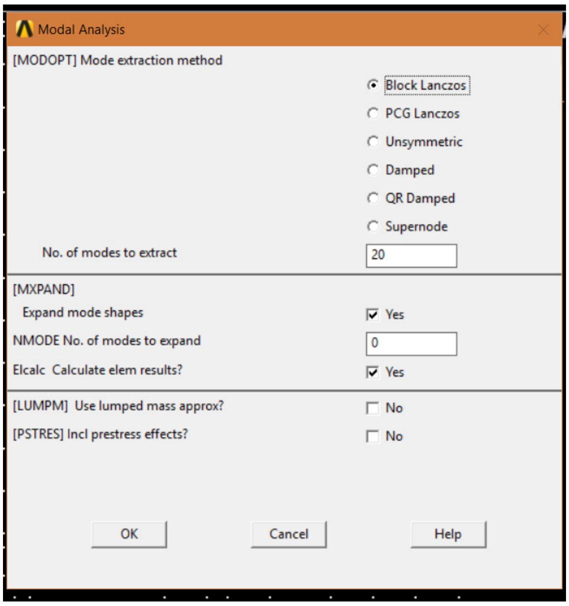


Fig. 62: opzione relative alla modalità di risoluzione dell'analisi modale

Successivamente, è possibile scegliere il range di frequenze su cui compiere l'analisi modale tramite la schermata (Fig. 63):

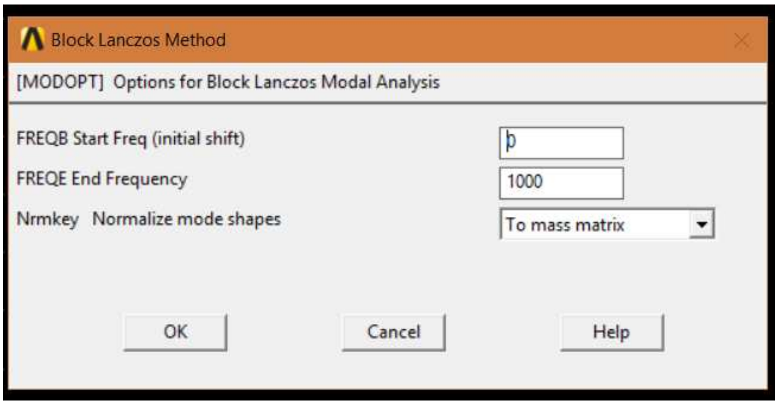


Fig. 63: range di frequenze dell'analisi modale

Infine, tramite la sezione Solve, è possibile dare inizio all'analisi modale.

Terminata l'analisi, nella sezione *General Postpro* troviamo i risultati (*Result Summary*), Fig. 64:

SET,LIST Command

File

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	0.18267E-02	1	1	1
2	72.735	1	2	2
3	123.24	1	3	3
4	174.50	1	4	4
5	370.56	1	5	5
6	458.18	1	6	6
7	666.88	1	7	7
8	839.08	1	8	8
9	869.31	1	9	9

Fig. 64: frequenze naturali del sistema

La prima frequenza rilevante risulta essere la seconda con una frequenza di 72.7 Hz.

Per poter visualizzare a video i risultati di un singolo modo di vibrare, bisogna entrare nella sezione *Read Results -> By Pick* e scegliere la frequenza di interesse.

Nella sezione *Plot Results -> Deformed Shape* è quindi possibile osservare il primo modo di vibrare (Fig. 65):

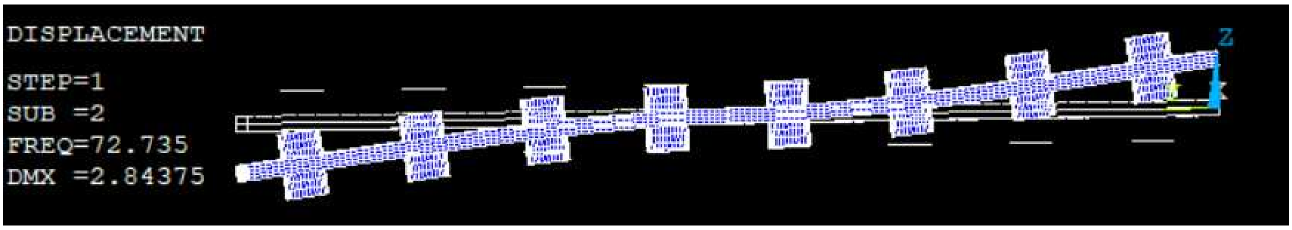


Fig. 65: deformata del primo modo di vibrare

Lo spostamento massimo si ha nei nodi posti alle estremità delle travi con un valore massimo di 2.84 mm. Analogamente, il terzo modo di vibrare, invece, si verifica ad una frequenza pari a 123.2 Hz e possiede una deformata apprezzabile nella Fig. 66:

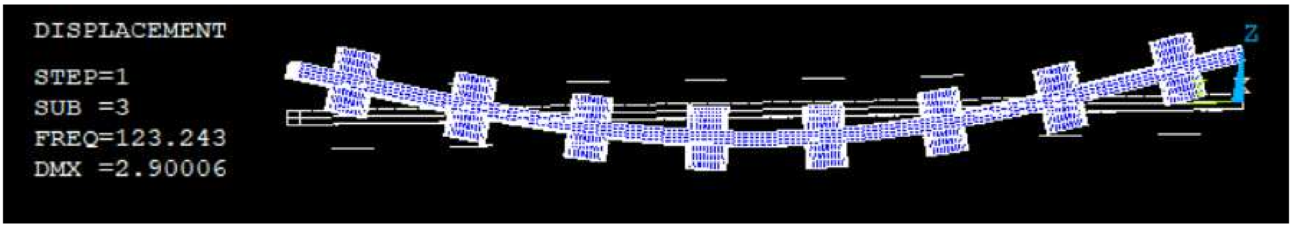


Fig. 66: deformata del secondo modo di vibrare

Successivamente, è stata eseguita la medesima analisi modale anche sul modello A e in Fig. 67 è possibile apprezzare sia il vincolo imposto al sistema sia le frequenze naturali ottenute:

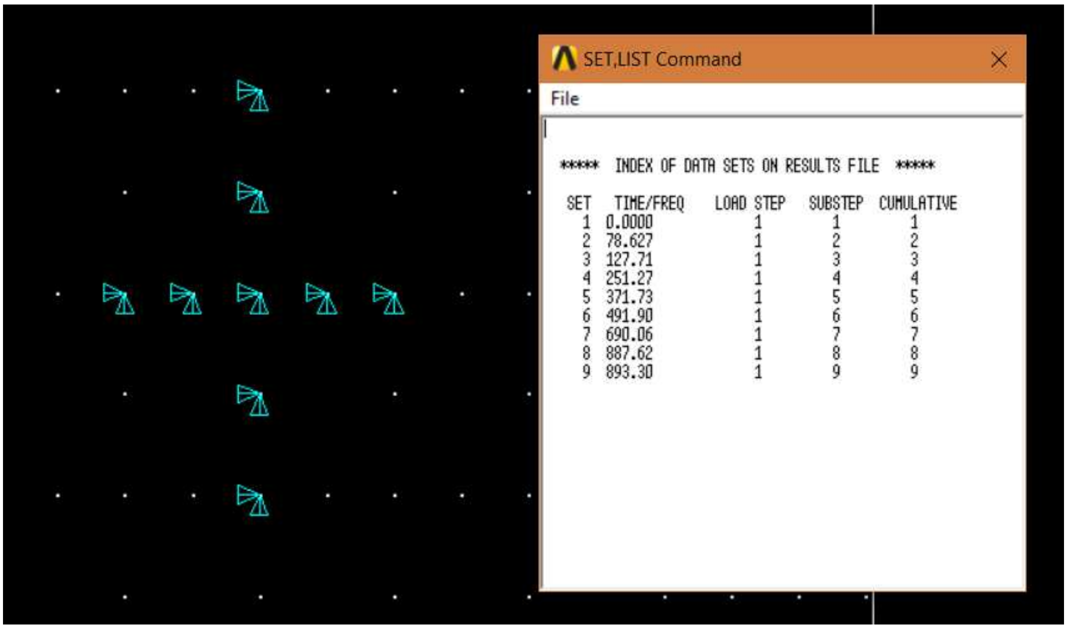


Fig. 67: vincolo e frequenze naturali del modello A

Le frequenze di interesse, anche in questo caso, sono paragonabili ai risultati ottenuti in precedenza così come anche i modi di vibrare. Come si evince dai risultati, il sistema discretizzato in maniera più grossolana risulta essere più rigido del modello discretizzato in maniera fitta, quindi le frequenze dei modi di vibrare assumono valori maggiori con un errore percentuale di circa l'8% sul primo modo di vibrare e del 3% sul secondo modo.

Sebbene il modello discretizzato in maniera più regolare (modello B) potrebbe fornire dei risultati più attendibili si è optato per il modello A in quanto le analisi transitorie che seguono richiederanno un onore computazionale notevole e l'utilizzo del modello più regolare appesantirebbe in maniera eccessiva il calcolo.

Inoltre, nel corso dello svolgimento dell'analisi modale nelle varie configurazioni si è evidenziato che impostando il comportamento delle superfici di contatto come vincolate (Bonded) (Fig. 68), nella sezione Contact Manager in Ansys, i risultati ottenuti sono differenti nonostante nell'analisi modale gli elementi di contatto, essendo una fonte di non-linearità, sono ignorati di default.

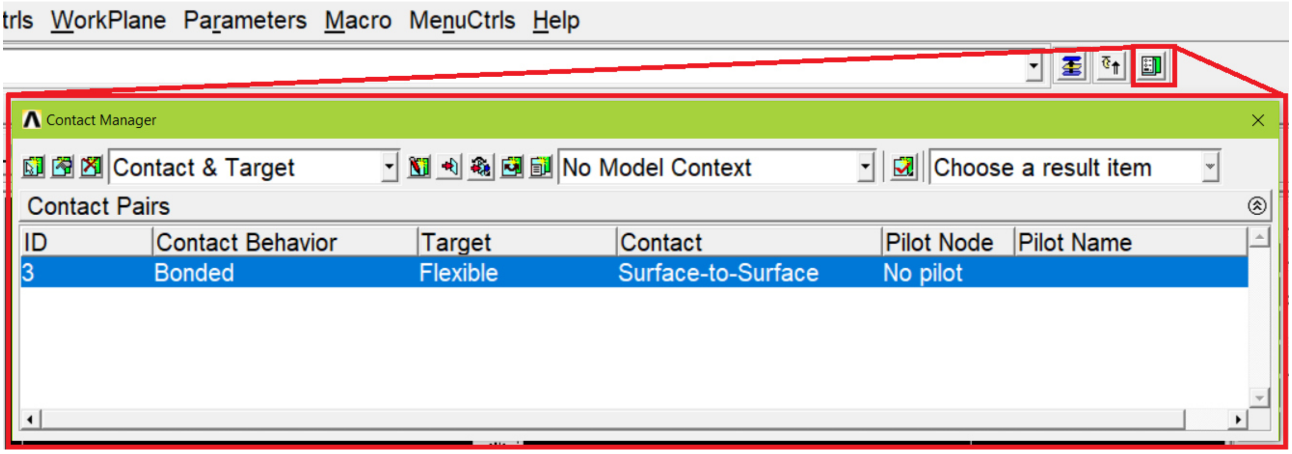


Fig. 68: comportamento "bonded" del modello di contatto

4.6 Analisi Armonica

L'analisi armonica è usata per determinare la risposta stazionaria di una struttura alla variazione sinusoidale del carico nel tempo, in modo da verificare la risposta del sistema alle vibrazioni forzate a cui è sottoposto [63]. L'analisi armonica è un'analisi lineare e quindi eventuali non-linearità del sistema sono ignorate, analogamente a quanto succede nell'analisi modale. Lo svolgimento di quest'analisi ha permesso di prendere confidenza con tale analisi ed inoltre ha permesso di verificare lo smorzamento della singola trave.

Lo svolgimento dell'analisi armonica presuppone l'analisi modale precedente della struttura.

Tale analisi risulta essere la più onerosa a livello computazionale ragion per cui nel caso sia necessario svolgere diverse analisi armoniche con differenti carichi è conveniente scomporre l'analisi in modo da riutilizzare gli stessi risultati dell'analisi modale per tutte le analisi armoniche.

L'analisi modale della trave singola è stata svolta, in maniera del tutto analoga a quanto descritto nel paragrafo 4.5, vincolando completamente la trave in posizione centrale (Fig. 69):

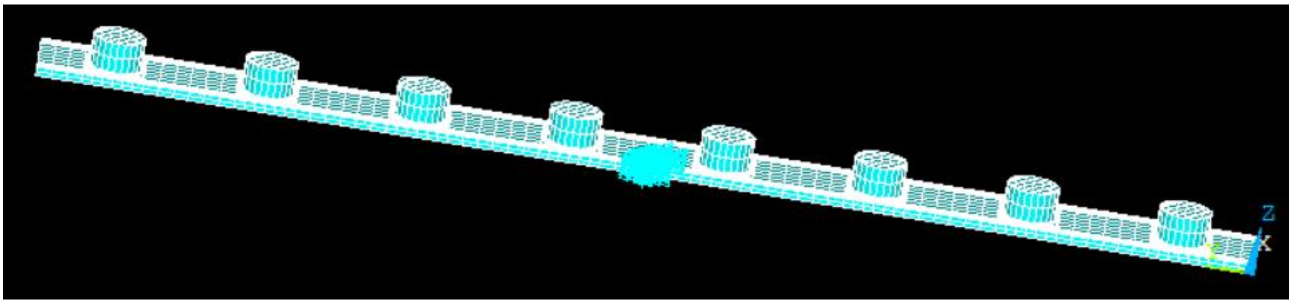


Fig. 69: vincolo della trave singola nei nodi centrali

Tra le frequenze naturali del sistema è stata scelta la frequenza f_3 =198.82 Hz, in quanto il modo di vibrare si sviluppa quasi totalmente nel piano X-Y. Nella Fig. 70 vengono evidenziati a sinistra i modi di vibrare e a destra la deformata del modo di vibrare.

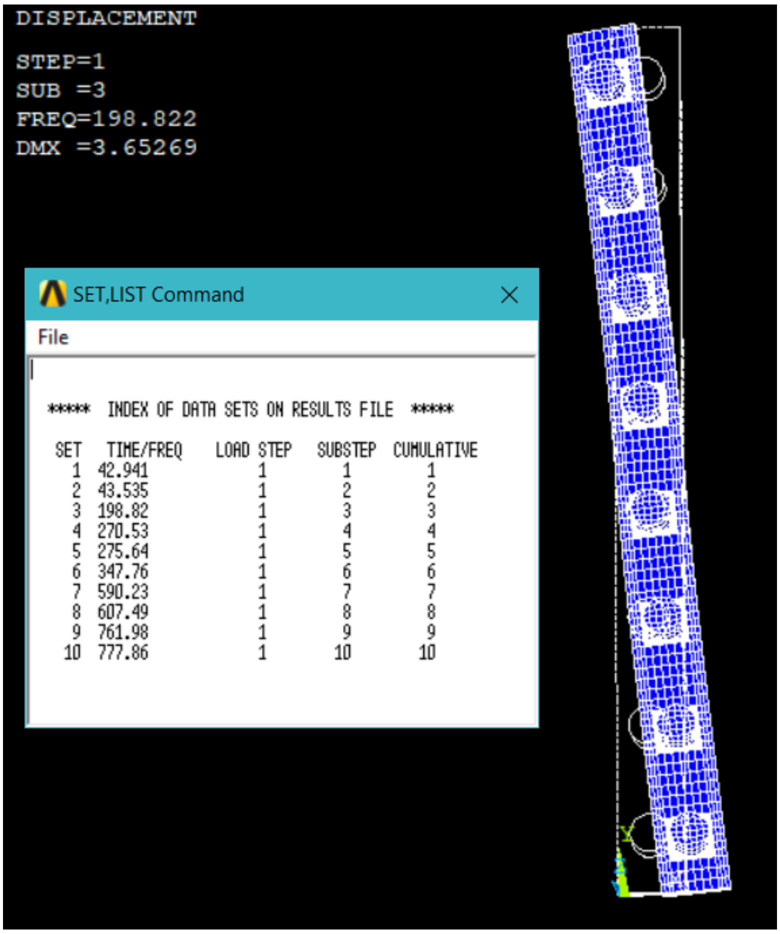


Fig. 70: frequenze naturali della trave singola e terzo modo di vibrare

Imponendo una forzante ad un'estremità della trave è dunque possibile svolgere l'analisi armonica nell'intorno della frequenza naturale scelta, f_3, in modo da osservare la risposta del sistema al range di frequenze analizzato.

Le forze scelte per eccitare il sistema agiscono lungo l'asse X (pari a 1N) e sono imposte in alcuni nodi dell'estremità inferiore della trave dalla sezione *Preprocessor -> Loads -> Define Loads -> Apply -> Structural -> Force* (Fig. 71):

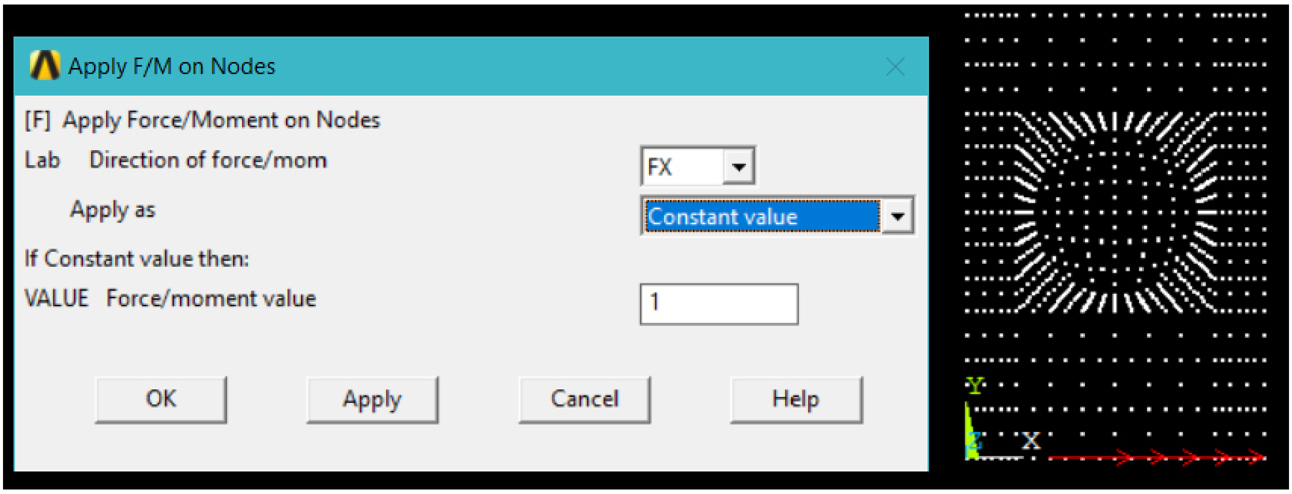


Fig. 71: imposizione della forzante sui nodi posti all'estremità della trave

Nella sezione Solution definiamo quindi la tipologia di analisi (Fig. 72a) e le relative opzioni (Fig. 72b):

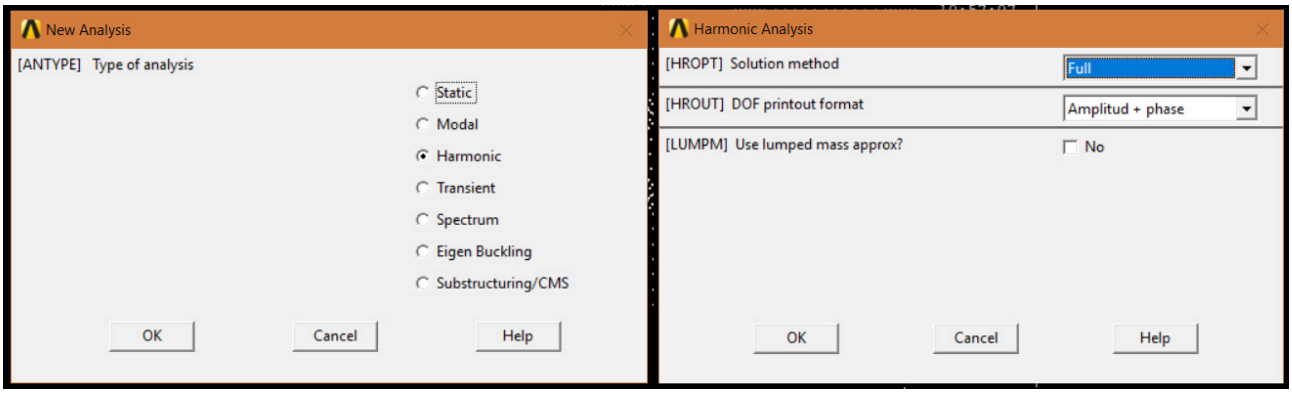


Fig. 72: a) tipologia di analisi, b) opzioni dell'analisi armonica

Inoltre, nella sezione *Solution -> Load Step Opts* viene definito il range delle frequenze nell'intorno della frequenza analizzata e il numero di substeps (Fig. 73a) e i valori dei parametri di smorzamento (α e β) (Fig. 73b).

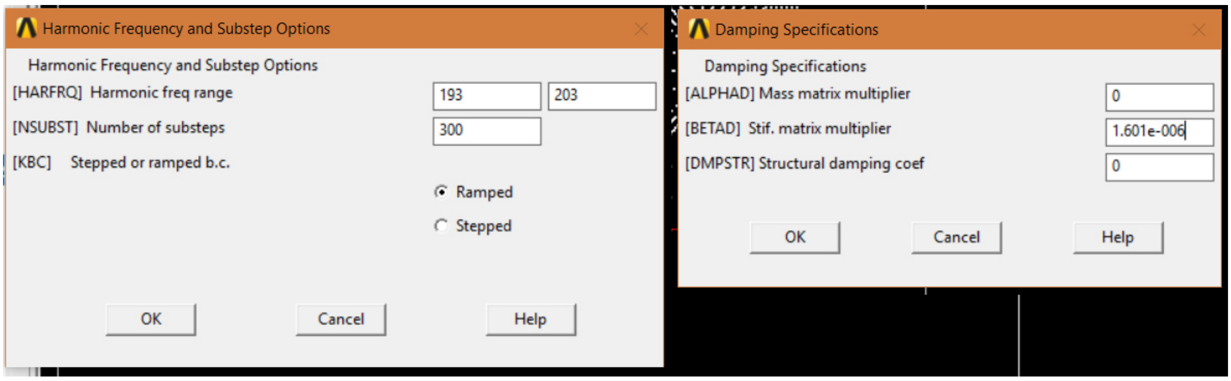


Fig. 73: a) range di frequenze e numero di substeps, b) parametri dello smorzamento

Per valutare lo smorzamento del sistema tramite i parametri richiesti dal software si è ipotizzato che lo smorzamento fosse proporzionale e quindi il fattore di smorzamento del modo r-esimo, ζ_r, sarà pari a

$$\zeta r = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\omega_r} + \frac{\beta}{2}\omega_r.$$

Il fattore di smorzamento in strutture metalliche assume plausibilmente dei valori pari a $\zeta = 0.001$ ed essendo la pulsazione pari a $\omega_r = 2\pi f_3 = 1249.2$ rad/s ,avremo un'equazione e due incognite (α e β). Ipotizzando $\alpha = 0$ rad/s, otteniamo che $\beta = 1.601e^{-6}$ s/rad e inseriamo tali valori che verificheremo al termine dell'analisi armonica.

Terminata l'analisi armonica, nella sezione *TimeHist Postpro* è possibile tracciare l'andamento nel dominio della frequenza dello spostamento di un nodo posto all'estremità della trave (lungo l'asse X nel nostro caso) ed esportare i risultati ottenuti in un file .lis ed importarli in Matlab.

In Fig. 74 viene appunto mostrata la risposta a regime dello spostamento del nodo scelto (nodo 4858) lungo l'asse X al variare della frequenza.

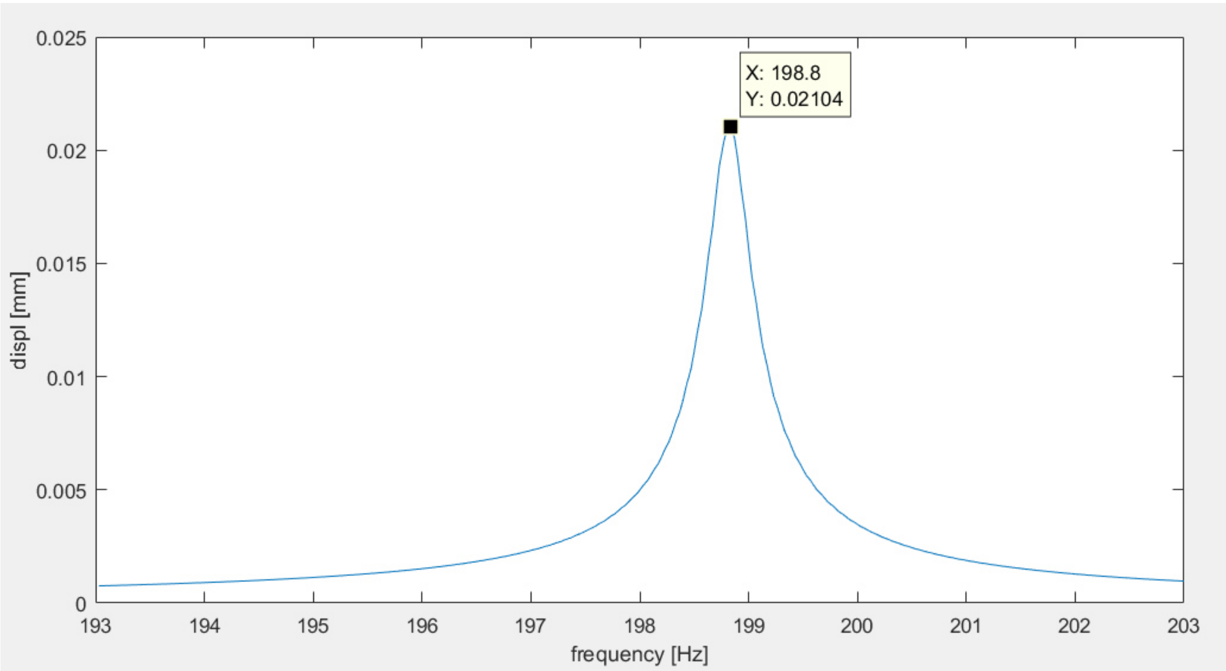


Fig. 74: andamento dello spostamento del nodo 4858 in funzione della frequenza

È dunque possibile ricavare la recettanza, al variare della frequenza, rapportando lo spostamento ottenuto rispetto alla forzante di input che ha generato tale spostamento. Tramite il metodo dei punti di metà potenza o dei -3dB [4] è possibile verificare l'effettivo valore del fattore di smorzamento. Tracciata la curva della recettanza si trova il valore massimo e da tale valore si scende di 3dB intercettando due punti (Ω_b e Ω_a) la cui ampiezza è ridotta di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al massimo. In [fas] si dimostra che lo smorzamento è pari a:

$$\zeta = \frac{\Omega_b - \Omega_a}{2\omega_r}$$

e andando a sostituire la semi-ampiezza di banda trovata $\frac{\Omega_b - \Omega_a}{2}$ otteniamo che lo smorzamento è pari a $9.99 * 10^{-4}$. Lo smorzamento ottenuto assume, quindi, un valore confrontabile con quello ipotizzato inizialmente. Questa verifica ci permette di validare il modello dal punto di vista dello smorzamento interno della singola trave.

4.7 Analisi Statica

L'analisi statica determina gli spostamenti, sforzi, deformazioni e forze agenti sulla struttura causate da carichi che non comportano fenomeni di inerzia o smorzamento. L'analisi statica può essere sia lineare che non lineare e sono ammesse tutte le tipologie di non linearità [64].
L'analisi statica è stata svolta vincolando completamente il modello A, descritto nel paragrafo 4.3, per impedire ogni spostamento lungo i tre assi e inserendo le forze di attrazione tra le otto coppie di magneti.

La forza di attrazione tra i magneti in esame è stata imposta pari a 40N ed è stata attribuita sui singoli nodi di superficie dei magneti. In *Preprocessor -> Loads* sono stati selezionati i nodi delle superfici dei magneti superiori (392 nodi totali) attribuendo ai singoli nodi una forza F_z=0.8163 N in modulo (Fig. 75):

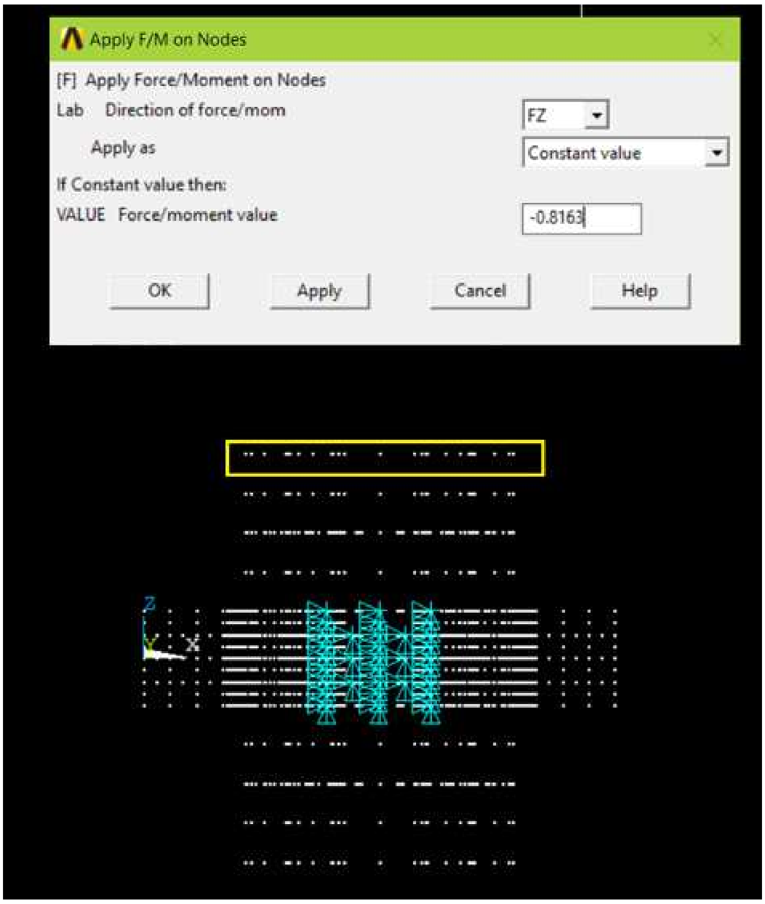


Fig. 75: applicazione della forza magnetica sulle facce del magnete superiore

Si procede analogamente per definire anche le forze nodali anche sulle superfici dei magneti inferiori, come viene mostrato in Fig. 76:

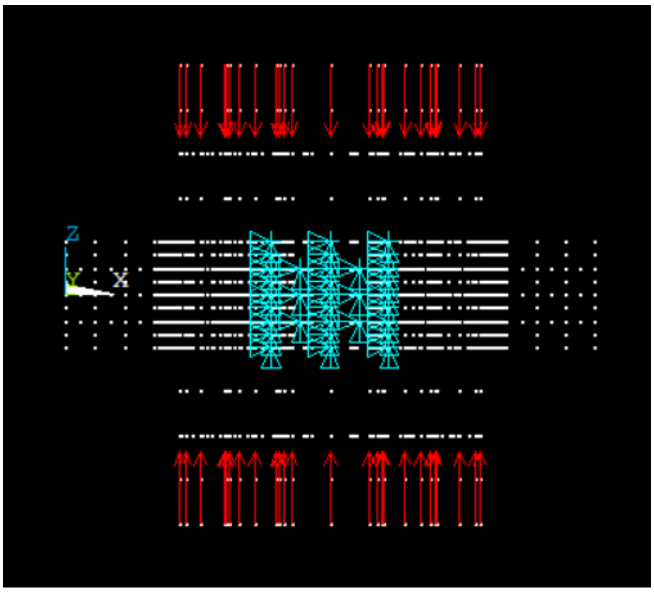


Fig. 76: applicazione delle forze magnetiche

Richiamando a video gli elementi, con il comando *eplot*, possiamo visualizzare il modello A aggiornato (Fig. 77) su cui verrà svolta l'analisi statica.

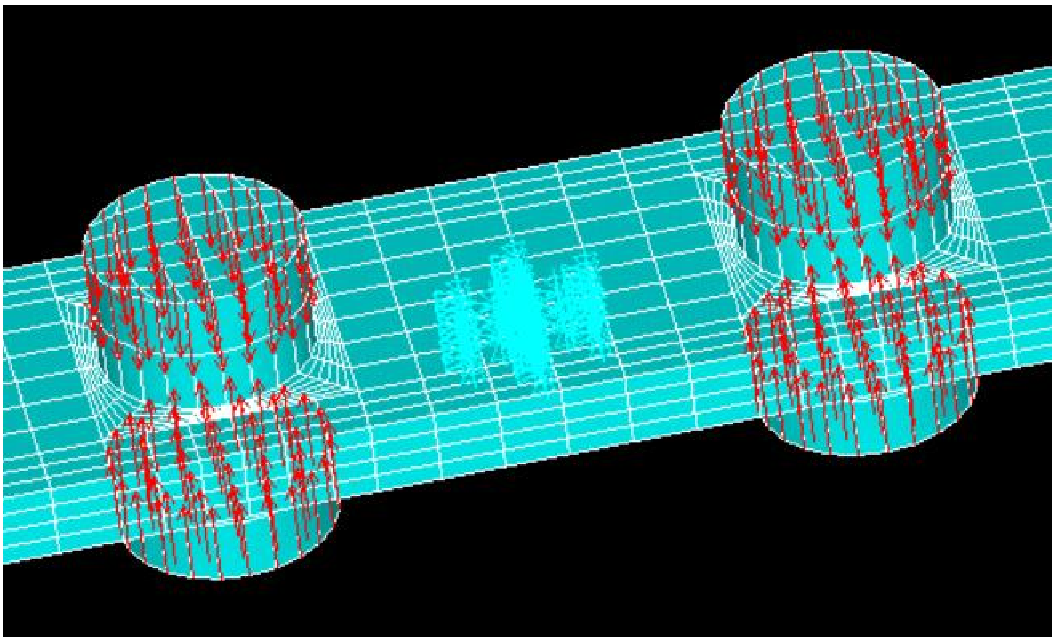


Fig. 77: vista di dettaglio del modello con vincoli e forze magnetiche agenti sul sistema

Nella sezione Solution è stata impostata la tipologia di analisi e le opzioni relative all'analisi da svolgere, scegliendo il tempo di analisi e gli intervalli di discretizzazione (Fig. 78):

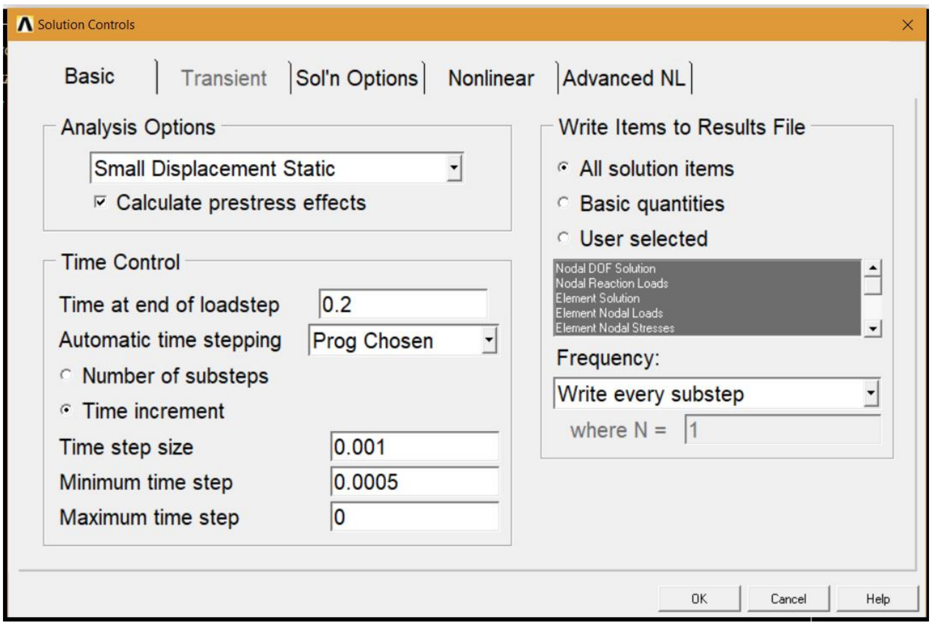


Fig. 78: opzioni relative all'analisi statica

In questa analisi statica, il modello di contatto presenta le caratteristiche evidenziate in Tab. 5:

Metodo di risoluzione	Augmented Lagrange formul.
Comportamento del contatto	Standard
FKN	1.0
FTOLN	0.1
FKT	default
SLTO	default

Tab. 5: caratteristiche principali usate per il modello di contatto

Terminata l'analisi statica, tramite il comando *General Postpro -> Read Results -> Last Set* è possibile caricare i risultati dell'ultimo substep di integrazione del calcolo. Tramite il comando *Plot Results -> Element solutions* è possibile caricare a video i risultati ottenuti.

Nella Fig. 79 viene mostrato la pressione di contatto agente sulle aree relative ai magneti:

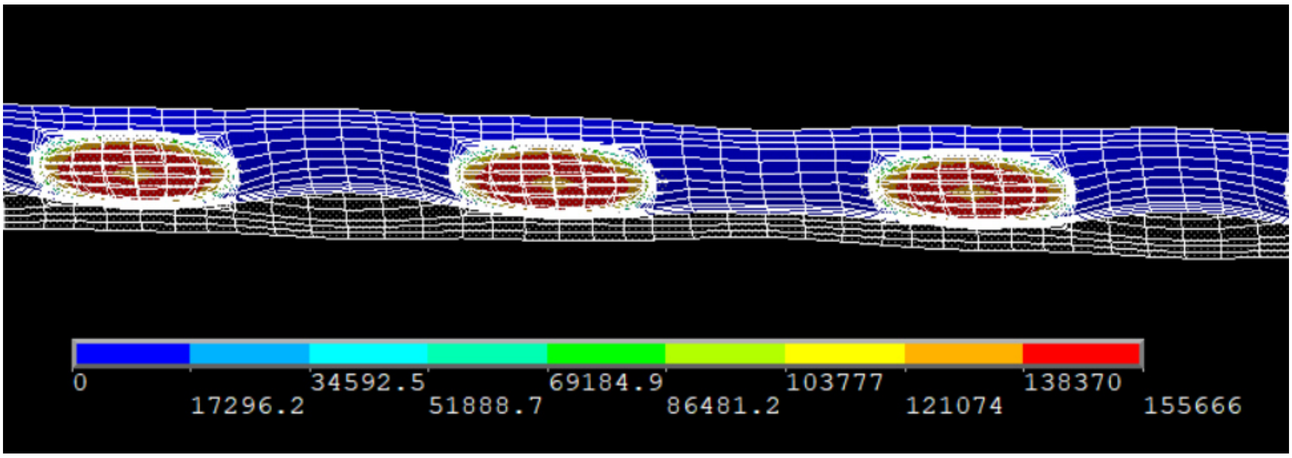


Fig. 79: mappa delle pressioni di contatto

Si nota che la pressione di contatto porta a comprimere le aree sottostanti delle travi e portando al distacco delle stesse nelle zone non soggette alla forza di attrazione dei magneti.

Il modello presenta quindi delle zone di adesione (sticking) e delle zone limitate di slittamento (sliding) (Fig. 80):

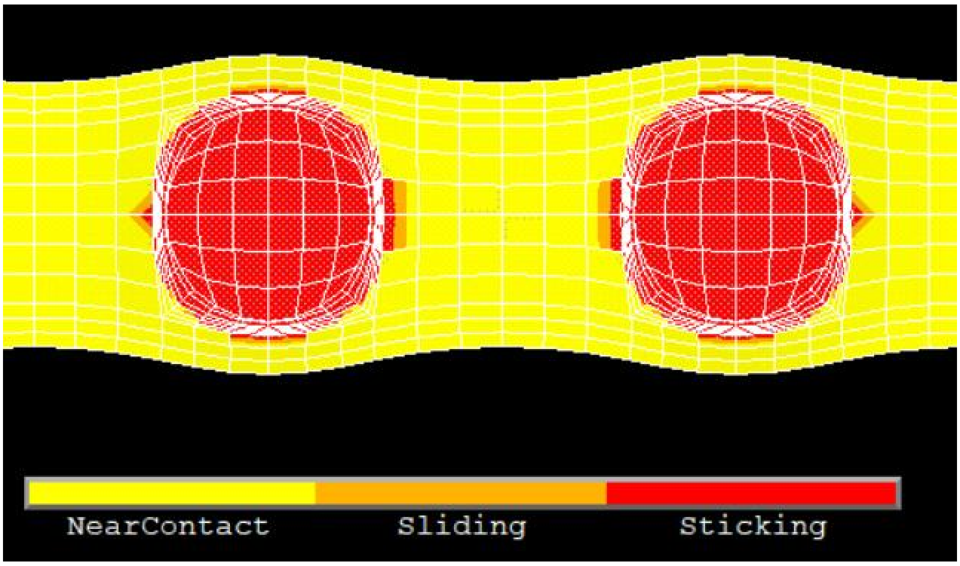


Fig. 80: mappa della condizione del modello di contatto

4.7.1 CONFRONTO DELLA PRESSIONE DI CONTATTO AL VARIARE DI FKN

In questo paragrafo vengono confrontati i risultati dell’analisi statica ottenuti al variare di FKN. Le analisi statiche sono state svolte imponendo FKN pari a 1.0 e 0.1 [62] e lasciando invariati tutti gli altri parametri.

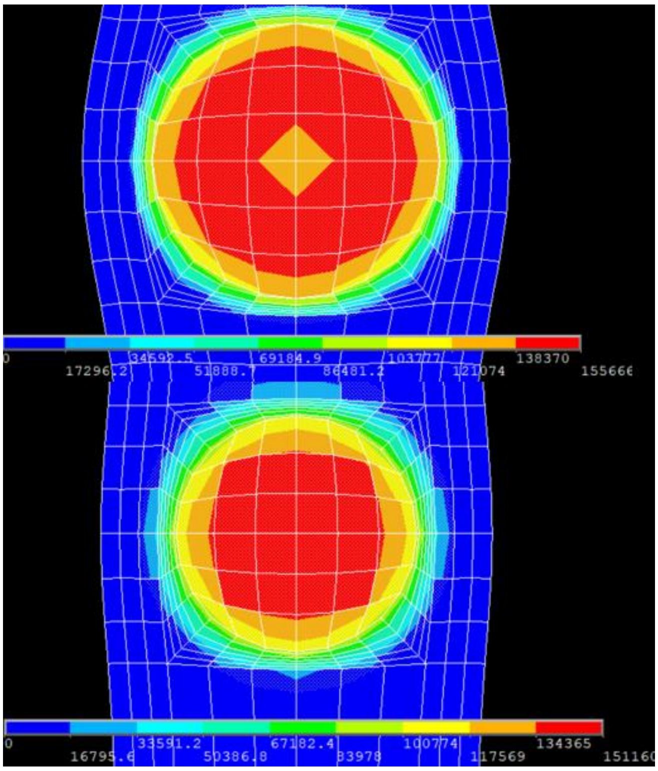


Fig. 81: confronto della pressione di contatto al variare di FKN

Nella Fig. 81 viene mostrato il dettaglio delle pressioni e si evidenzia come al diminuire del valore di FKN l’area di contatto sottoposta alla pressione dei magneti aumenti e al contempo il valore massimo di pressione diminuisca di circa il 3% tra i casi estremi.

4.7.2 CONFRONTO DELLA PRESSIONE DI CONTATTO AL VARIARE DEL MODELLO

In questo paragrafo viene evidenziato come varia la pressione e l’area di contatto svolgendo l’analisi statica con i due modelli A e B, descritti nel paragrafo 4.3. I risultati ottenuti con i due modelli sono paragonabili, con un errore percentuale della pressione di contatto massima intorno all’1%, nonostante l’analisi statica condotta con il modello B sia risultata essere più lunga a causa del maggior dettaglio della mesh (Fig. 82).

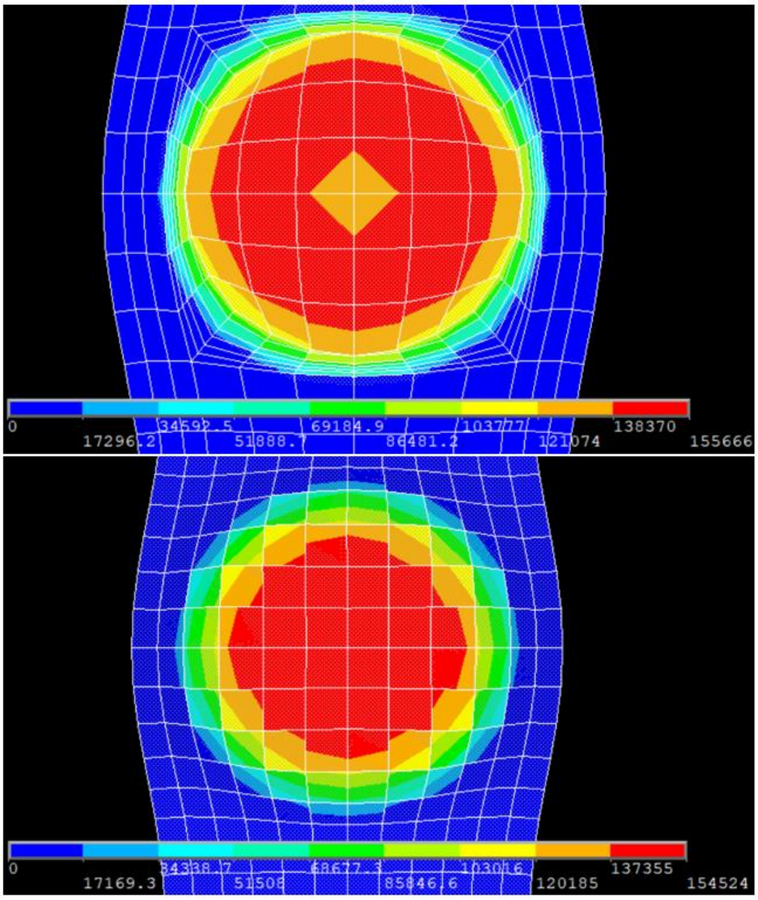


Fig. 82: confronto della mappa di pressione al variare del modello (A e B)

La maggior discretizzazione del modello B porta ad ottenere un picco di pressione massima più basso ma un’area sottoposta alla pressione di contatto più ampia.

4.8 Analisi Transitoria

L'analisi transitoria (Transient Analysis in inglese), per definizione, implica che il sistema in esame sia soggetto a dei carichi variabili in funzione del tempo [65]. Questo tipo di analisi ammette l'uso di tutte le tipologie di non linearità ed è usata per determinare la risposta dinamica di una struttura nel tempo. Se i fenomeni di inerzia e di smorzamento non sono considerati importanti si può scegliere di svolgere un'analisi statica, in quanto l'analisi transitoria è molto più complessa dell'analisi statica e richiede un onere computazionale molto superiore, soprattutto quando c'è la presenza di non linearità. Proprio per questa ragione, l'analisi transitoria è stata condotta sul modello A, descritto nel paragrafo 4.3.

4.8.1 Analisi Transitoria con spostamento imposto

L'analisi transitoria è stata dunque svolta sul modello A imponendo uno spostamento armonico nei nodi centrali tramite una funzione definita in Ansys.
Tale funzione è stata definita imponendo lo spostamento massimo ($s = 1e^{-4}[m]$) e la frequenza di eccitazione nella sezione *Parameters -> Functions -> Define/Edit* (Fig. 83):

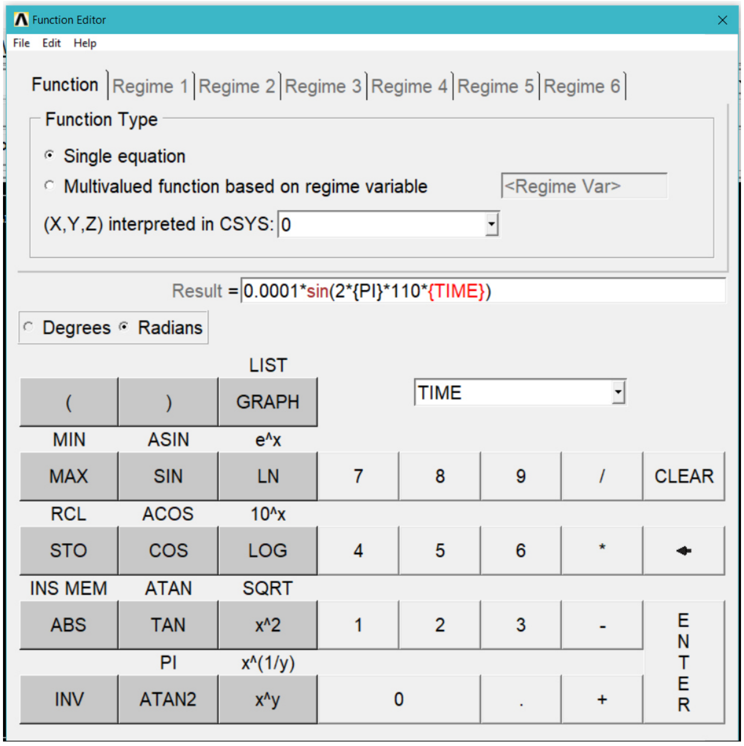


Fig. 83: definizione della funzione spostamento

La funzione può essere così salvata in un file con estensione .func. La funzione appena definita è caricata in Ansys con il comando *Parameters -> Functions -> Read from file*.
In questa analisi, il modello A viene vincolato nella zona centrale impedendo lo spostamento lungo gli assi X e Y e imponendo lo spostamento lungo l'asse Z con la funzione. Nella sezione *Solution -> Analysis Type* si imposta il metodo di risoluzione dell'analisi in *Full Transient Analisys*. Le opzioni presenti in *Solution Controls -> Basic* sono già state descritte nel paragrafo 4.7, ma nel corso delle varie analisi transitorie si è notato un notevole spazio di archiviazione richiesto per immagazzinare tutti i dati, ragion per cui sono state selezionate solo le voci necessarie con il comando *User Selected* (Fig. 78). Con l'analisi transitoria è selezionabile *il Tab Transient* (Fig. 84):

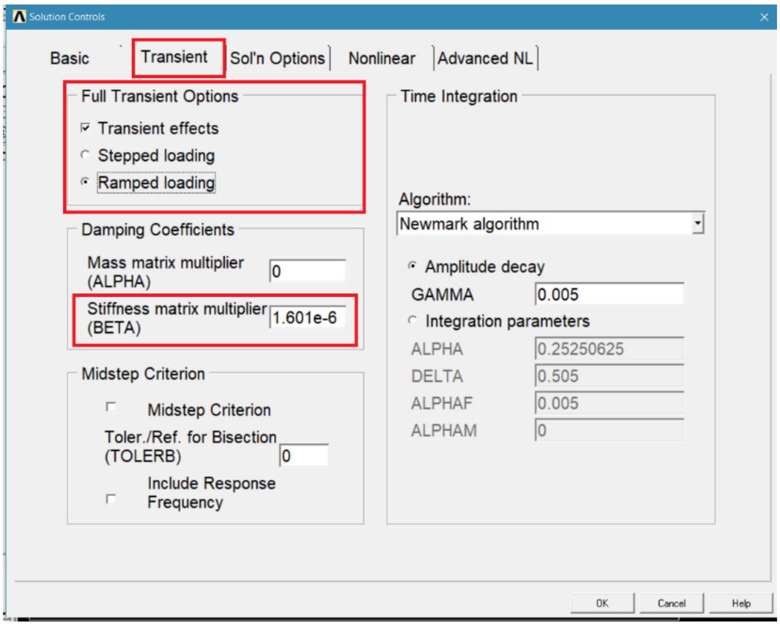


Fig. 84: opzioni relative al Tab Transient

Il carico sul modello può essere applicato in maniera Stepped o Ramped. Scegliendo l'opzione Stepped loading il carico viene applicato sul modello nel primo substep, mentre invece l'opzione Ramped loading permette di avere un carico che cresce linearmente in ogni substep. L'opzione Ramped loading è consigliata nelle analisi transitorie in cui si nota una difficoltà di convergenza verso la soluzione del modello. Inoltre, se è necessario analizzare la risposta steady del problema è possibile importare un'analisi con due loadstep: il primo loadstep risolto selezionando l'opzione Ramped ed il secondo loadstep risolto con l'opzione Stepped.

La matrice dello smorzamento viscoso [C] è funzione della matrice di massa [M] e della matrice di rigidezza [K] ed è pari a $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$, dove α e β sono i parametri che sono stati calcolati e verificati nel paragrafo dell'analisi armonica della singola trave (paragrafo 4.6).
Data la difficoltà riscontrata nella convergenza dell'analisi, il modello di contatto è risolto con il metodo di Lagrange Aumentato ed inoltre in *Solution Controls -> Non Linear* è stato attivato il comando *Line Search -> On* per facilitare la convergenza dell'analisi.
Terminata l'analisi, nella sezione *Time HistPostpro -> Variable Viewer* vengono selezionati gli andamenti della coordinata Z dei nodi 4998 (nodo centrale) e 4858 (nodo non vincolato e posto all'estremità delle travi) (Fig. 85 e 86):

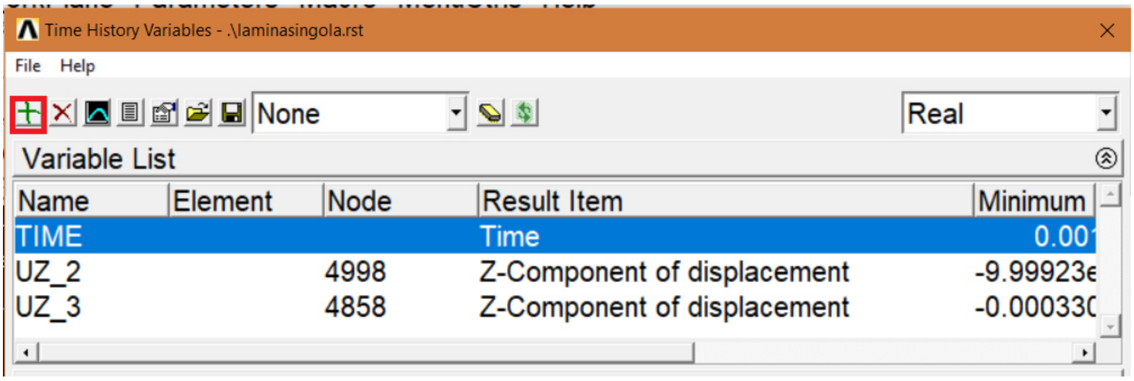


Fig. 85: caricamento dei risultati relativi agli andamenti dello spostamento dei nodi 4998 e 4858

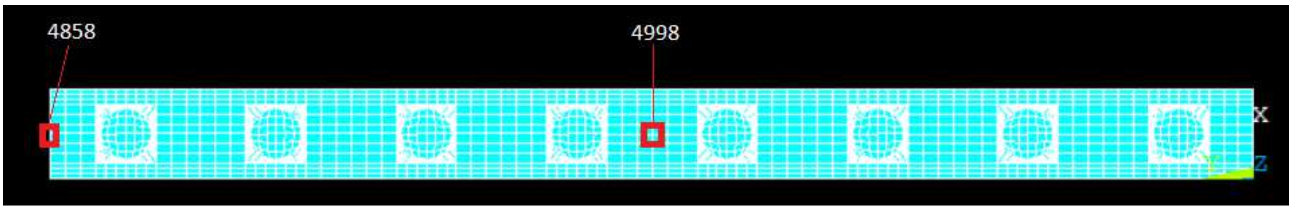


Fig. 86: posizione spaziale dei nodi 4998 e 4858

L'andamento dei nodi nel tempo può essere salvato ed esportato in Matlab per tracciare il grafico. Nella Fig. 87 viene mostrato l'andamento del nodo centrale (4998) e questo grafico ci conferma la correttezza del vincolo, mentre in Fig. 88 viene mostrato il transitorio relativo al nodo all'estremità (4858):

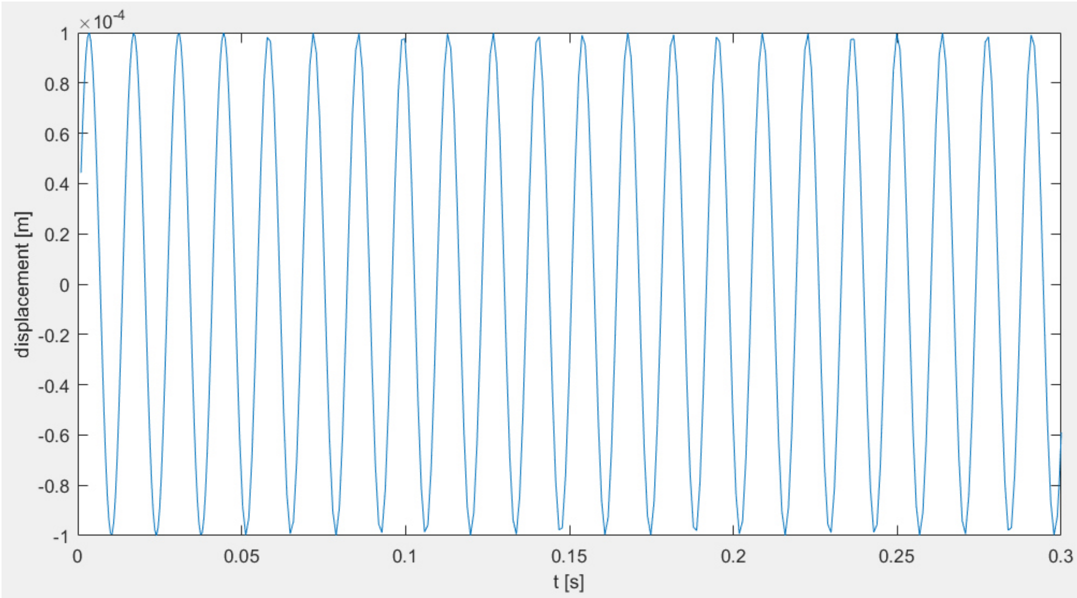


Fig. 87: andamento della coordinata Z del nodo 4998

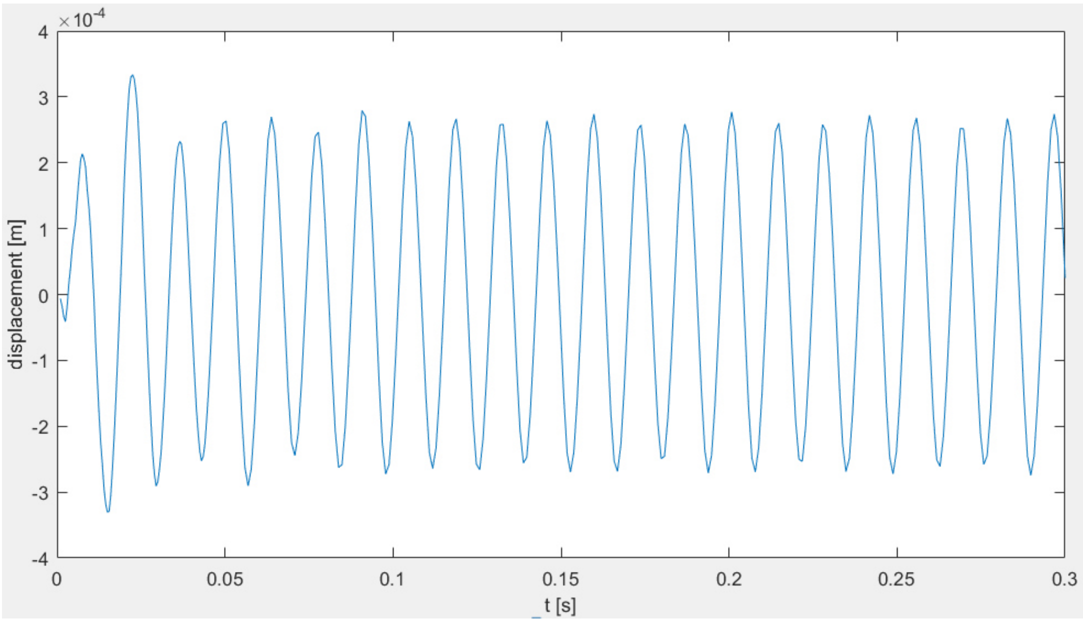


Fig. 88: andamento della coordinata Z del nodo 4858

4.8.1.1 Analisi di Sensitivity per FKN e FKT

L’analisi transitoria è stata svolta imponendo il metodo di Lagrange Aumentato per la soluzione degli elementi di contatto a causa della mancata convergenza con il metodo di Lagrange. Con l’introduzione del metodo di Lagrange Aumentato, il modello degli elementi di contatto è in funzione della rigidezza normale e tangenziale (FKN e FKT) e si è reso necessario valutare se l'andamento del transitorio nel nodo posto all'estremità delle travi dipendesse dal valore assunto dalla rigidezza normale e tangenziale.

È stata condotta un'analisi di sensitivity sul parametro FKN imponendo tre diversi valori al parametro FKN. FKN viene così imposto pari a 0.1, 0.5 e 1.0, dove i valori estremi sono consigliati dal programma stesso, e l'andamento del nodo 4858 al variare di FKN è mostrato in Fig. 89:

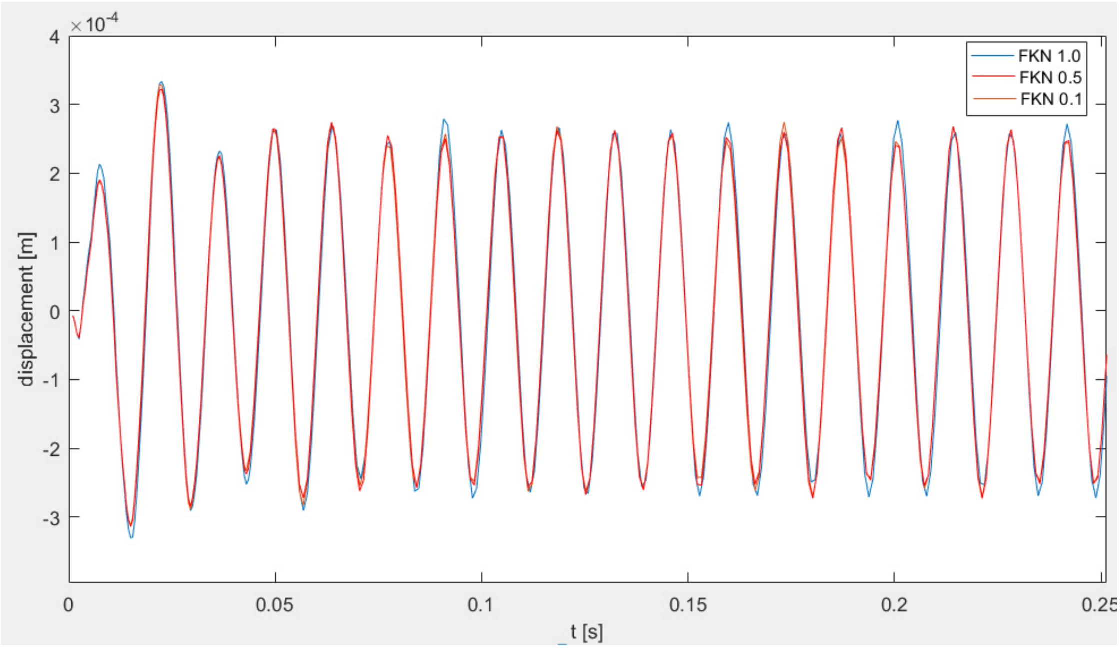


Fig. 89: andamento della coordinata Z del nodo 4858 al variare di FKN

Nella Fig. 90 viene mostrato il dettaglio di un picco dell'andamento dello spostamento in modo da evidenziare la differenza trascurabile ottenuta nei tre differenti casi.

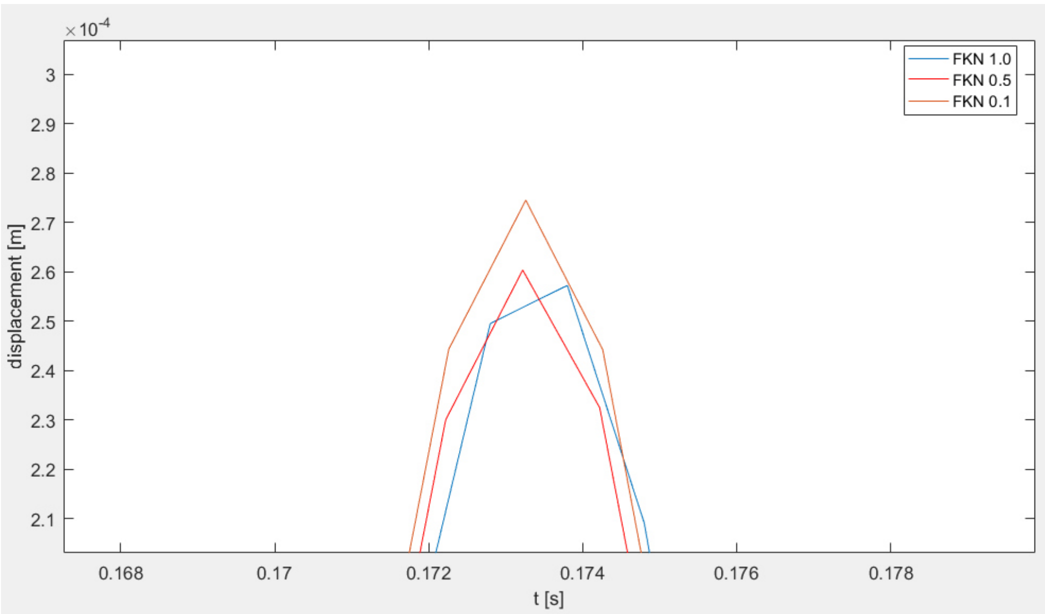


Fig. 90: dettaglio della Fig. 89

Analogamente, è stata svolta un'analisi di sensitivity anche sul parametro FKT e ottenendo l'andamento della coordinata Z del nodo 4858 (Fig. 91):

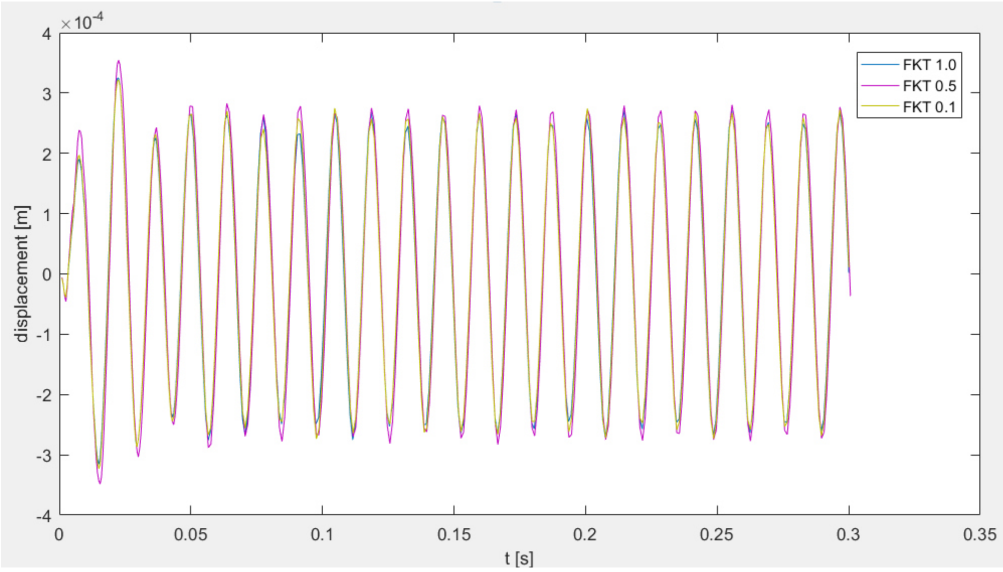


Fig. 91: andamento della coordinata Z del nodo 4858 al variare di FKT

Anche in questo caso viene mostrato in Fig. 92 il dettaglio del grafico precedente per evidenziare la differenza minima tra le tre curve negli andamenti a transitorio estinto:

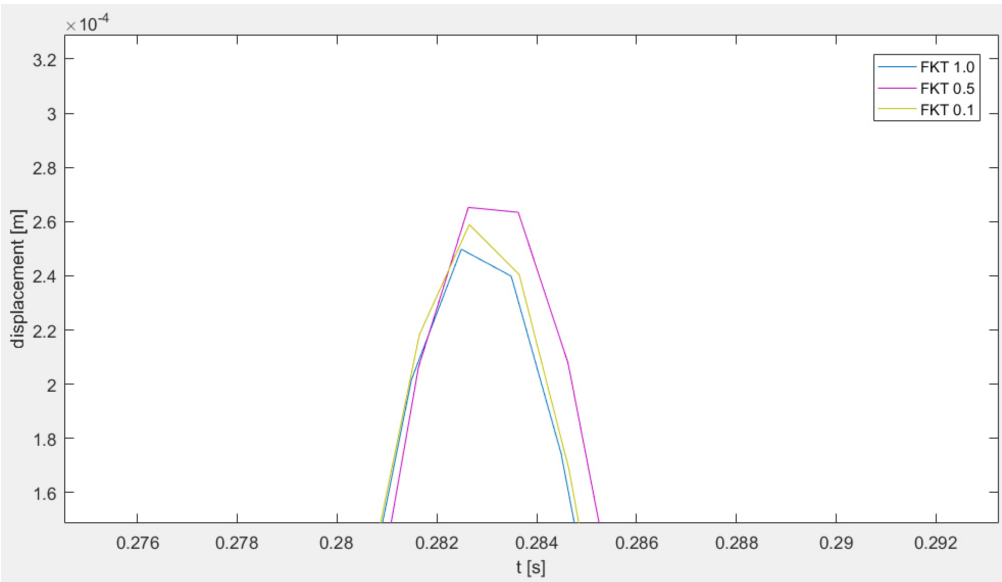


Fig. 92: dettaglio della Fig. 91

Tramite queste prove di sensitivity sui parametri FKN e FKT è stata così dimostrata l'indipendenza dell'andamento del transitorio al variare dei parametri FKN e FKT.

4.8.2 ANALISI TRANSITORIA CON FORZANTE IMPOSTA

Il lavoro prosegue svolgendo l'analisi transitoria sul modello A, descritto nel paragrafo 4.3, imponendo la forzante armonica di eccitazione al vincolo, che sperimentalmente è imposta tramite lo shaker. Quest'analisi ci permetterà di tracciare in maniera discreta la funzione di risposta forzata (FRF) in modo tale da confrontare i risultati ottenuti con la sperimentazione.
Il modello viene dunque vincolato, impedendo gli spostamenti lungo gli assi X e Y, mentre lungo l'asse Z viene imposta la forzante armonica, a differenza dell'analisi transitoria condotta nel paragrafo 4.8.1 in cui viene invece imposta la funzione armonica dello spostamento.
Il procedimento di definizione della funzione armonica della forzante è del tutto analogo a quanto descritto nel paragrafo 4.8.1 e quindi è stato possibile definire la forzante armonica come:

$$F = F_0 \sin(2\pi\ f\ t)$$

Dove:

- F_0 è la forzante armonica nodale da imporre ai nodi vincolati;
- f è la frequenza di eccitazione;
- t è la variabile tempo.

La forzante scelta per l'analisi transitoria in questione è 0.6N ed essendo il vincolo centrale composto da 66 nodi avremo una forza nodale pari a 0.00909N, mentre la frequenza di eccitazione è pari a 119Hz. Dopo aver definito e salvato la funzione, è necessario caricare la funzione e tale funzione viene imposta ai nodi centrali tramite il comando *Preprocessor -> Loads -> Define Loads -> Apply -> Structural -> Force/Moment -> On Nodes -> By Polygon* si selezionano i nodi a cui viene a attribuita la forzante F_z (Fig. 93):

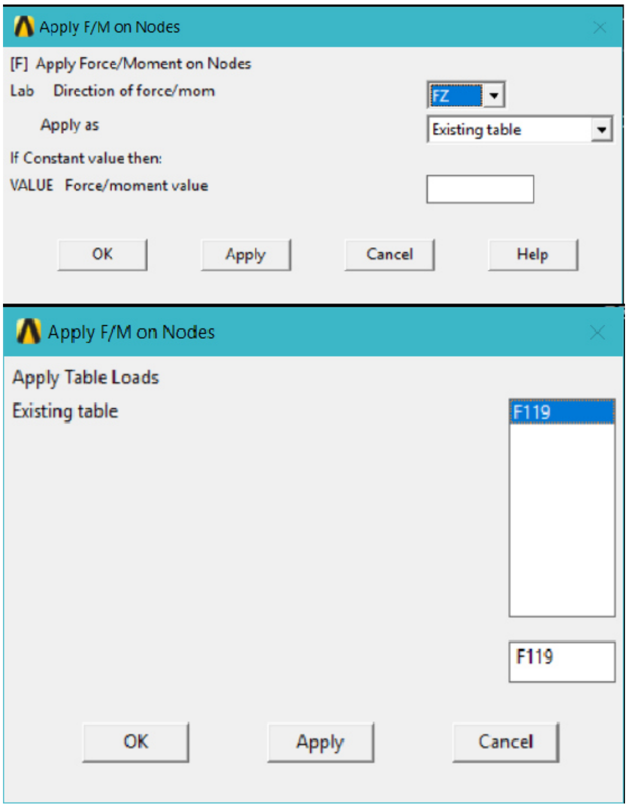


Fig. 93: applicazione della forzante Fz mediante funzione f119.func

Nel nodo centrale avremo dunque il vincolo mostrato in Fig. 94:

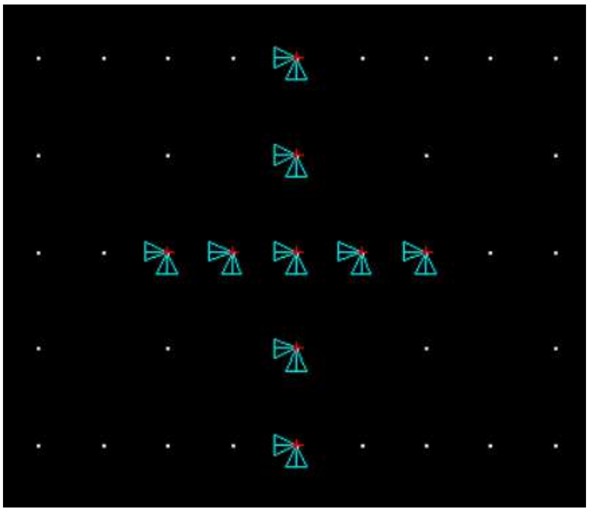


Fig. 94: vincolo del nodo centrale

Le opzioni relative all'analisi sono scelte in modo del tutto analogo a quanto descritto nel paragrafo 4.8.1. Terminata l'analisi, in *Time HistPostpro* è possibile tracciare l'andamento dell'accelerazione nel nodo centrale (Fig. 95):

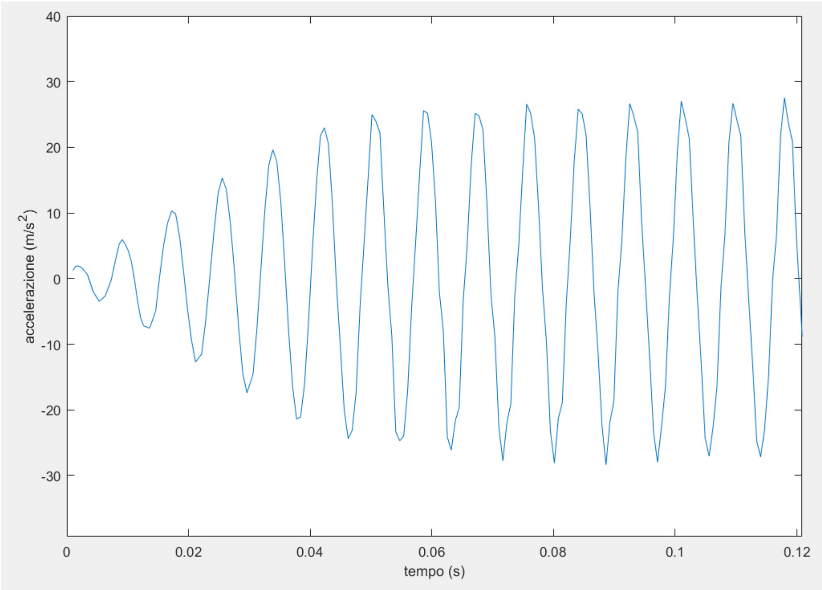


Fig. 95: andamento dell'accelerazione del nodo 4998 lungo z

In queste analisi si è rivelato complesso scegliere il tempo di analisi e l'intervallo di discretizzazione del tempo, in quanto ad alcune frequenze sono stati riscontrati dei fenomeni di battimento che impedivano il raggiungimento di una condizione steady (Fig. 96).

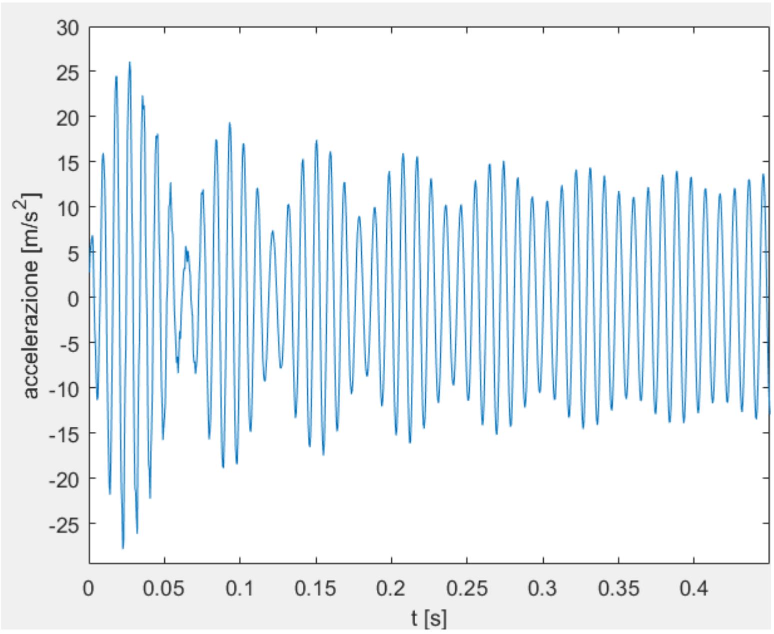


Fig. 96: andamento dell'accelerazione in presenza del fenomeno del battimento

Inoltre, l'intervallo di discretizzazione deve essere scelto dall'utente cercando un compromesso tra la ricerca di risultati accurati e l'onere computazionale necessario per svolgere le analisi.

Un intervallo di discretizzazione troppo grande porta ad ottenere una curva delle accelerazioni segmentata, come nel dettaglio mostrato a titolo esemplificativo (Fig. 97), che inficiano i risultati.

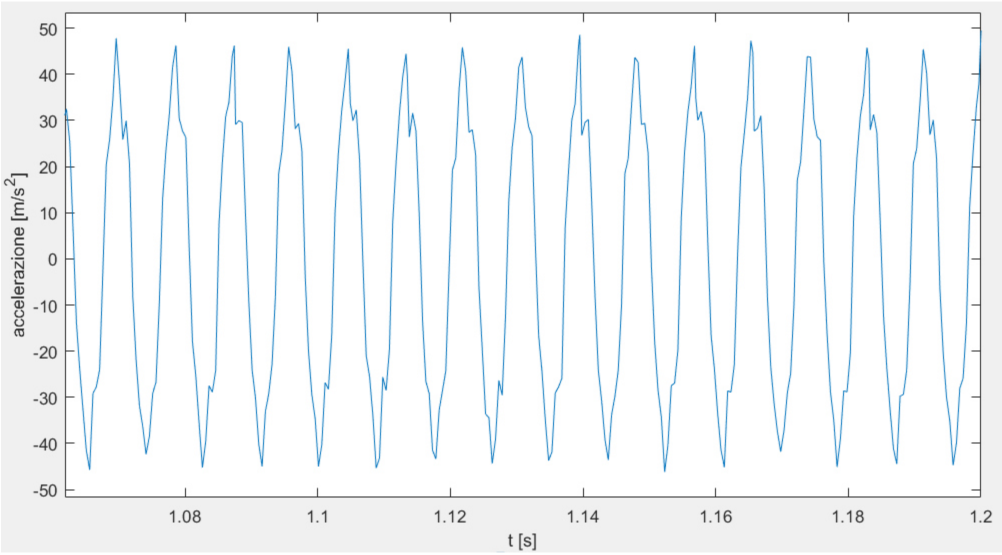


Fig. 97: andamento dell'accelerazione segmentato

Nel corso delle varie analisi è stato inoltre evidenziato che i risultati ottenuti con l'integrazione diretta nel tempo sono influenzati in maniera sensibile dal tempo di discretizzazione.

4.8.2.1 Confronto tra i Modelli A e B

Come precedentemente detto, l'analisi transitoria richiede un onere computazionale notevole e quindi le varie analisi sono state condotte sul modello A. Tuttavia, è stato effettuato un confronto tra i risultati ottenuti dai modelli A e B al fine di verificarne eventuali differenze.
La Fig. 98 mostra l'andamento dell'accelerazione del nodo centrale dei modelli nel caso di forzante pari a 0.6N e frequenza 119Hz.

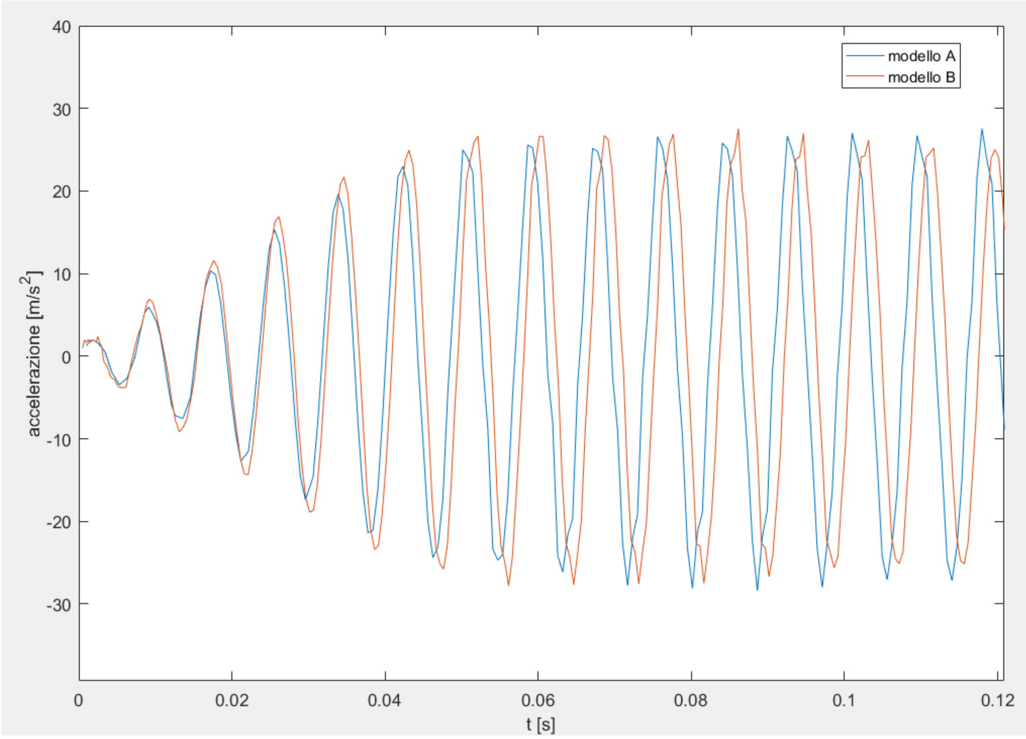


Fig. 98: confronto tra gli andamenti dell'accelerazione dei modelli A e B

Comparando le due curve non si osservano particolari differenze ragion per cui la scelta del modello A offre un ottimo compromesso tra un onere computazionale minore e dei risultati comunque accurati.

4.9 Funzione di Risposta in Frequenza - FRF

Tramite l'analisi transitoria di un sistema dinamico è possibile tracciare l'andamento nel tempo dell'accelerazione ad una data frequenza. L'output, così ottenuto, può essere scalato rispetto alla forzante in input in modo da tracciare la funzione di risposta in frequenza (FRF) in maniera discreta.

4.9.1 FRF con Forzante pari a 0.6 N

Al modello A è stata imposta una forzante di 0.6 N e sono stati ricavati gli andamenti dell'accelerazione al variare della frequenza nel range compreso tra 90 e 130 Hz.

La FRF del sistema con il modulo della forzante di 0.6N e il coefficiente d’attrito pari a 0.7 può essere tracciata partendo da una frequenza di 90Hz. L’andamento dell’accelerazione è mostrato in Fig. 99:

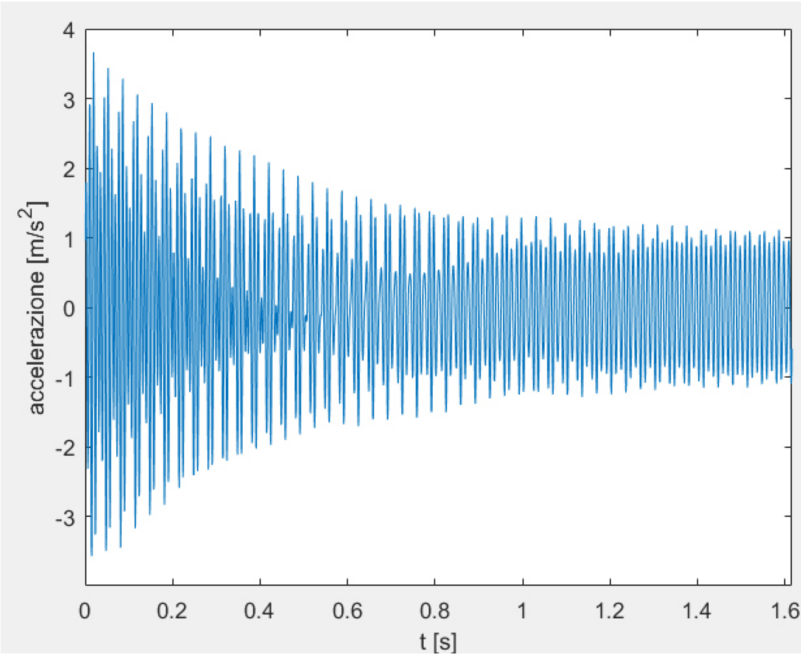


Fig. 99: andamento dell'accelerazione con forzante 0.6N e mu=0.7

Nella Fig. 100, invece, viene mostrato in dettaglio l’andamento dell’accelerazione a fine analisi.

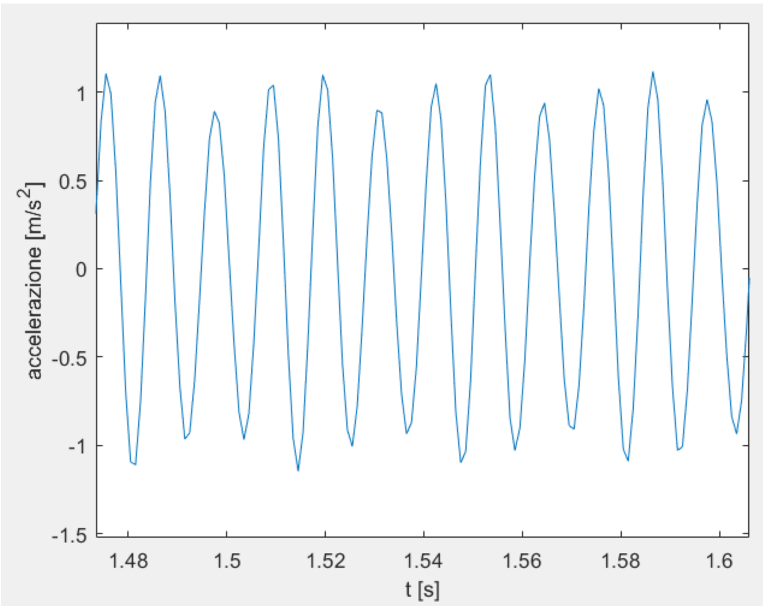


Fig. 100: dettaglio relativo alla fase finale dell'analisi transitoria con forzante 0.6N e mu=0.7

A fine analisi, si osserva un valore massimo di accelerazione abbastanza costante, intorno ad 1 $^{m}/_{s^2}$, e tale valore può essere assunto come stazionario. Il valore di accelerazione diviso la forzante porta ad ottenere l'inertanza, pari a 1.67 $\frac{m/_{s^2}}{N}$ alla frequenza di eccitazione di 90 Hz. Si procede in maniera analoga anche per le frequenze 100 Hz,113 Hz, 117 Hz, 119 Hz, 121 Hz, 123 Hz, 125 Hz, 127 Hz e 130 Hz. In Fig. 101 è così tracciata la FRF interpolando i valori di inertanza ottenuti alle varie frequenze.

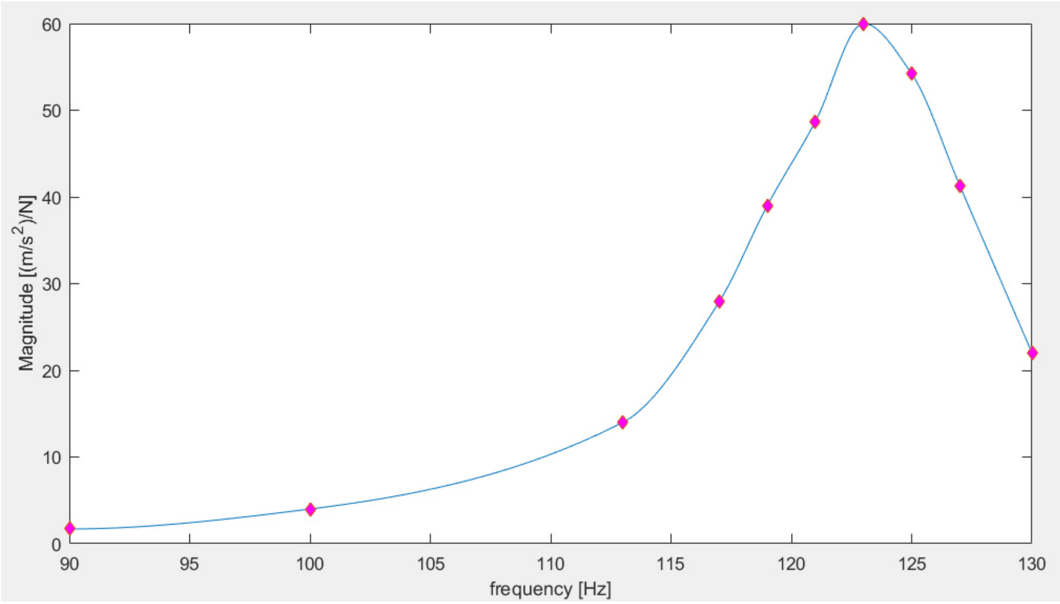


Fig. 101: FRF per la forzante 0.6N

È stato inoltre analizzato come varia la risposta in frequenza del sistema al variare del coefficiente d'attrito (Fig. 102).

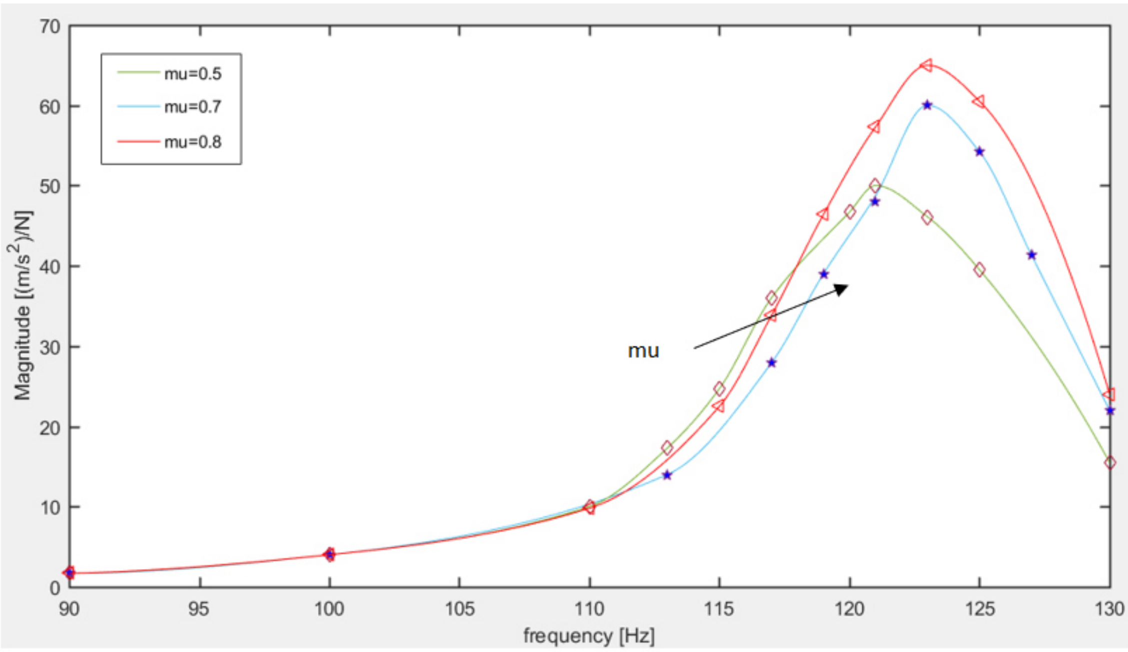


Fig. 102: variazione della FRF per la forzante 0.6N al variare del coefficiente d'attrito (mu=0.5,0.7 e 0.8)

Dalla Fig. 102 è possibile osservare che il valore del picco della risposta in frequenza aumenti di circa il 30% passando dal coefficiente d'attrito 0.5 a 0.8 ed inoltre tale picco si sposti verso frequenze più alte (da 121 Hz a 123 Hz, circa 1.6%).

4.9.2 FRF con Forzanti pari a 0.2 N e 2 N

Analogamente a quanto descritto nel paragrafo precedente, è possibile tracciare la FRF anche per le forzanti 0.2N e 2N. Di seguito vengono riportate le curve ottenute (Fig. 103 e 104).

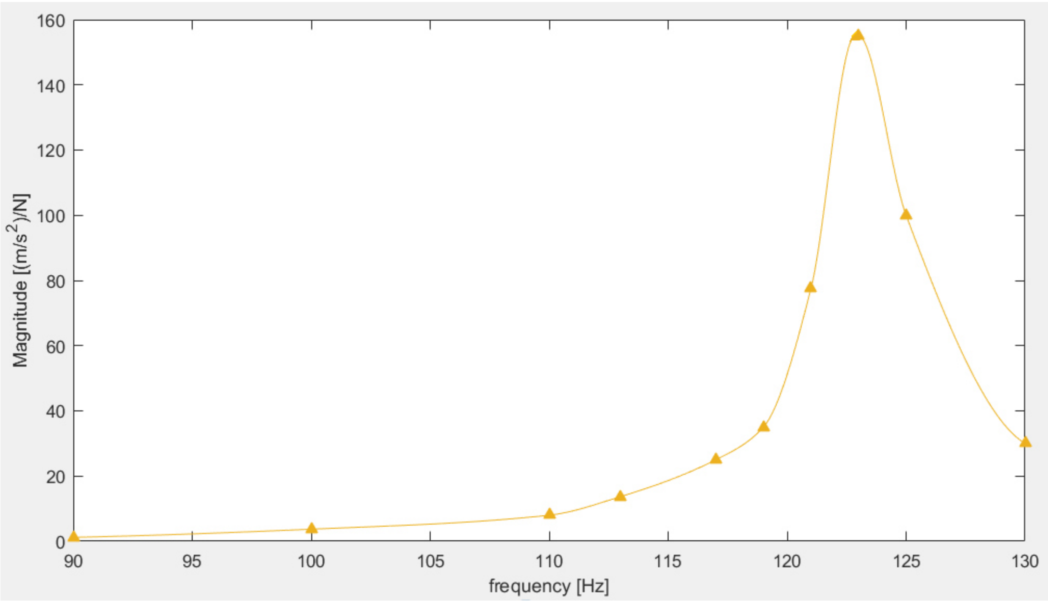


Fig. 103: FRF per la forzante 0.2N

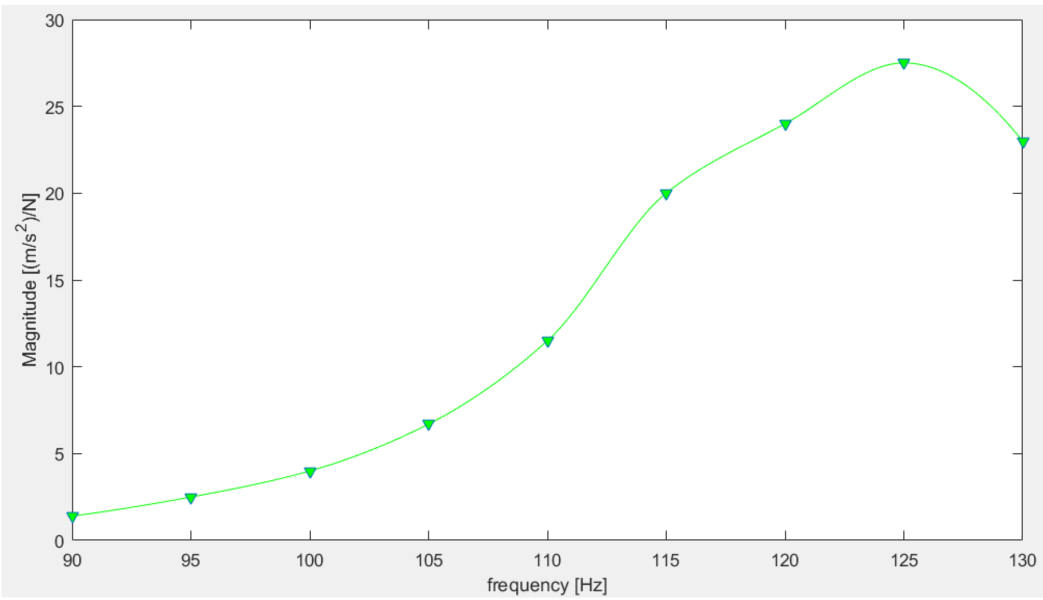


Fig. 104: FRF per la forzante 2N

4.9.3 CONFRONTO DELLA FRF AL VARIARE DELLA FORZANTE

Dopo aver ricavato le FRF relative alle forzanti 0.2 N e 2 N è stato possibile mettere a confronto le curve ricavate tramite l'analisi transitoria al variare della frequenza.

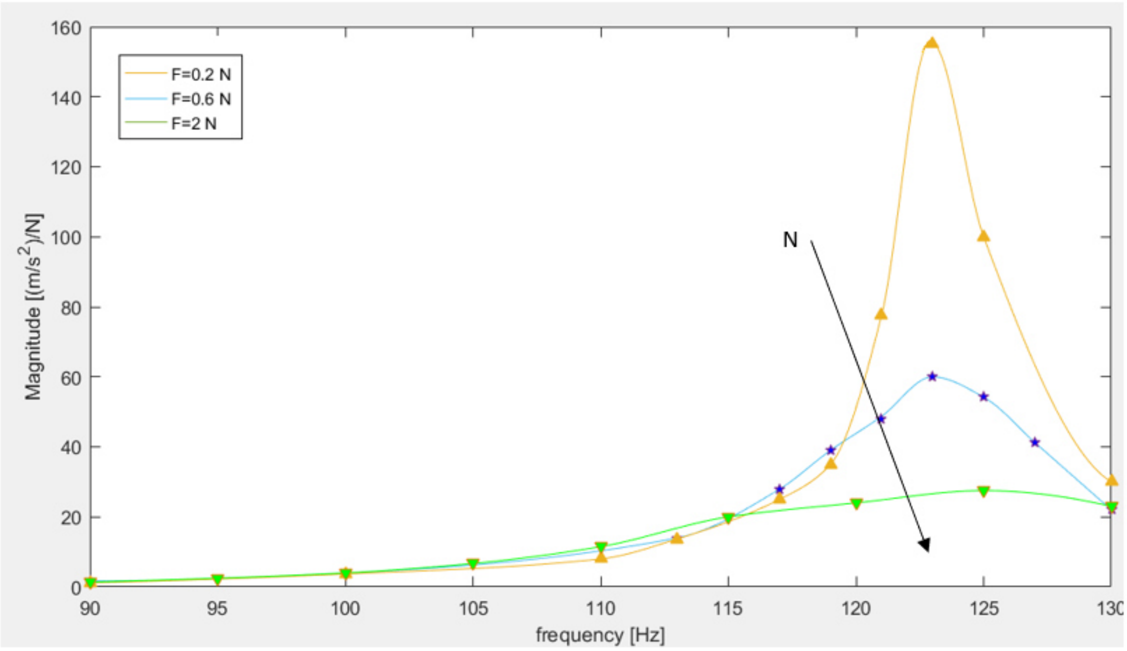


Fig. 105: confronto della variazione della FRF al variare della forzante (F=0.2N, 0.6N e 2N)

Dalla Fig. 105 si evince come all'aumentare dell'ampiezza della forzante il valore del picco della FRF si riduca e contestualmente l'ampiezza della campana tenda ad allargarsi. L'aumento di un ordine di grandezza della forzante porta a ridurre dunque il valore massimo della risposta in frequenza di circa sei volte.

5. Confronto Numerico-Sperimentale

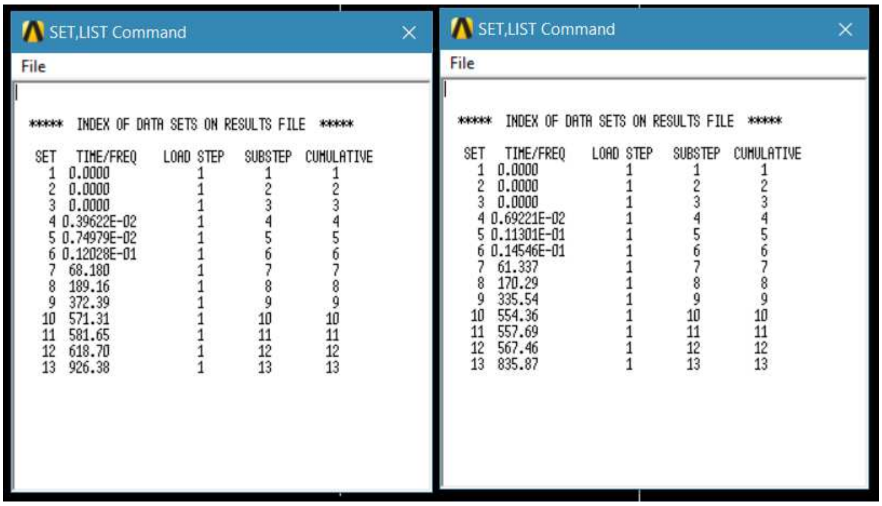
Dopo aver condotto le diverse analisi, descritte nel capitolo precedente, si è reso necessario confrontare i risultati ottenuti con l'approccio numerico a quelli provenienti dalla sperimentazione. Il confronto numerico-sperimentale ha così riguardato inizialmente il confronto tra le frequenze di risonanza, ottenute dall'analisi modale, per poi analizzare la risposta in frequenza del sistema al variare della forzante di eccitazione.

5.1 Analisi modale in condizioni Free-Free

L'analisi modale in condizioni Free-Free permette di valutare le frequenze naturali del sistema indipendentemente dal vincolo. Sperimentalmente, ciò è ottenuto vincolando il sistema tramite elastici, in modo tale da considerare ininfluente l'azione del vincolo sul sistema [4]. Tramite la prova ad impatto, o Hammer Test, si ottiene la funzione di risposta in frequenza (FRF) da cui è possibile ricavare la frequenza di risonanza del sistema [66].
In Ansys, l'analisi modale in condizioni free-free è condotta non vincolando in alcun modo il modello in esame. Tale analisi è stata svolta inizialmente sui modelli della trave singola (modelli A e B, paragrafo 4.2) e successivamente si è passati ad analizzare i modelli delle travi accoppiate (modelli A e B, paragrafo 4.3).

5.1.1 Analisi modale Free-Free per i modelli della trave singola

L'analisi modale free-free condotta in Ansys sui modelli A e B ha portato ad ottenere le frequenze mostrate in Fig. 106. È possibile osservare, in entrambi i modelli, sei frequenze con valori prossimi a 0 Hz. Un sistema non vincolato presenta, infatti, sei modi rigidi (tre relativi alla traslazione e tre relativi alla rotazione nello spazio) e queste frequenze ottenute confermano la correttezza dell'analisi svolta.



SET,LIST Command

File

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	0.0000	1	1	1
2	0.0000	1	2	2
3	0.0000	1	3	3
4	0.39622E-02	1	4	4
5	0.74979E-02	1	5	5
6	0.12028E-01	1	6	6
7	68.180	1	7	7
8	189.16	1	8	8
9	372.39	1	9	9
10	571.31	1	10	10
11	581.65	1	11	11
12	618.70	1	12	12
13	926.38	1	13	13

SET,LIST Command

File

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	0.0000	1	1	1
2	0.0000	1	2	2
3	0.0000	1	3	3
4	0.69221E-02	1	4	4
5	0.11301E-01	1	5	5
6	0.14546E-01	1	6	6
7	61.337	1	7	7
8	170.29	1	8	8
9	335.54	1	9	9
10	554.36	1	10	10
11	557.69	1	11	11
12	567.46	1	12	12
13	835.87	1	13	13

Fig. 106: a) frequenze naturali del modello A e b) frequenze naturali del modello B

Il primo modo di vibrare per il modello A, è mostrato in Fig. 107, con una deformata ed uno spostamento massimo del tutto analogo anche per il modello B. Dall'Hammer Test condotto in [66] è stata ottenuta una prima frequenza di risonanza pari a 66.75 Hz (Fig. 108), che è stato scelto come riferimento da cui ricavare l'errore percentuale per i modelli. L'errore percentuale relativo alla prima frequenza naturale è dunque pari al 2.1% per il modello A e si attesta invece intorno all'8% per il modello B.

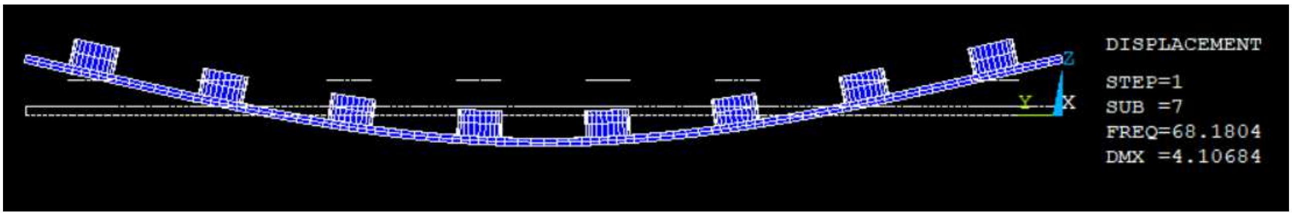


Fig. 107: deformata del primo modo di vibrare per il modello A

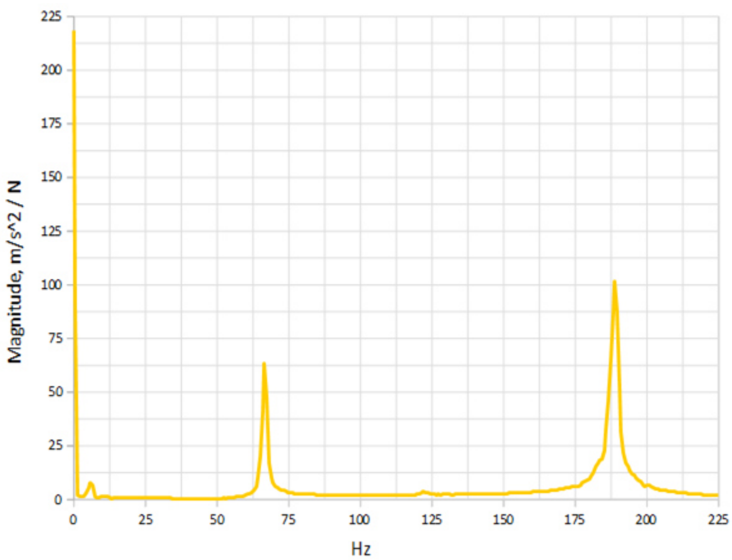
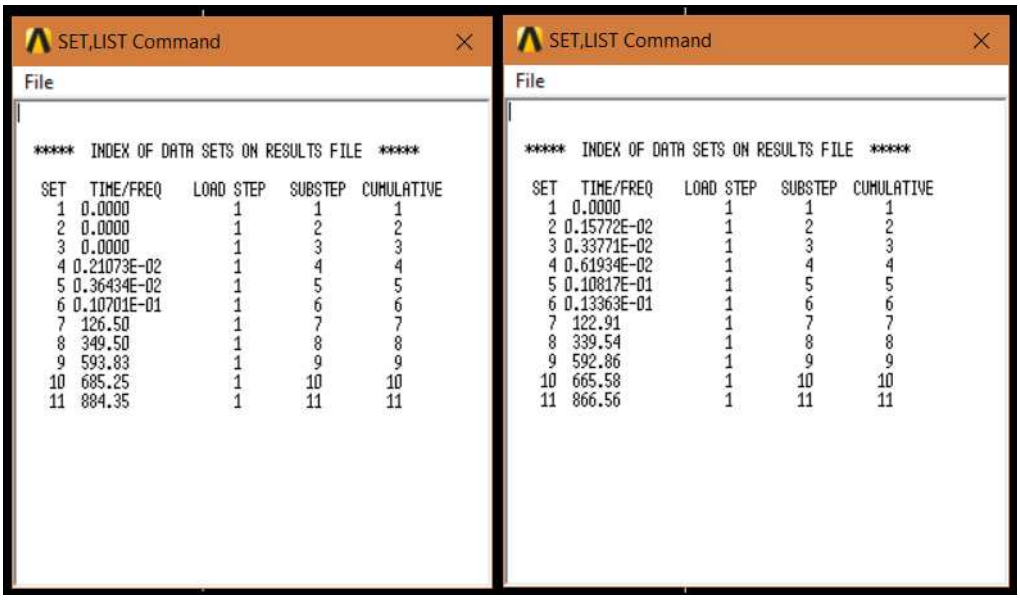


Fig. 108: FRF per la trave singola ottenuta dall' Hammer Test [66]

5.1.2 ANALISI MODALE FREE-FREE PER I MODELLI DELLE TRAVI ACCOPPIATE

Analogamente a quanto descritto nel paragrafo precedente è possibile confrontare le frequenze ottenute mediante l'analisi modale numerica per i modelli delle travi accoppiate (A e B) (Fig. 109) e la frequenza di risonanza ottenuta sperimentalmente, che è pari a 117 Hz [66].


SET,LIST Command

File

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	0.0000	1	1	1
2	0.0000	1	2	2
3	0.0000	1	3	3
4	0.21073E-02	1	4	4
5	0.36434E-02	1	5	5
6	0.10701E-01	1	6	6
7	126.50	1	7	7
8	349.50	1	8	8
9	593.83	1	9	9
10	685.25	1	10	10
11	884.35	1	11	11

SET,LIST Command

File

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	0.0000	1	1	1
2	0.15772E-02	1	2	2
3	0.33771E-02	1	3	3
4	0.61934E-02	1	4	4
5	0.10817E-01	1	5	5
6	0.13363E-01	1	6	6
7	122.91	1	7	7
8	339.54	1	8	8
9	592.86	1	9	9
10	665.58	1	10	10
11	866.56	1	11	11

Fig. 109: a) frequenze naturali per il modello A, b) frequenze naturali per il modello B

L'errore percentuale per i modelli delle travi accoppiate, rispetto ai risultati sperimentali, è del 8% per il modello A e del 5% per il modello B. Il modello B, essendo discretizzato in maniera più regolare e fitta, ha un comportamento più rispondente a quanto ottenuto nella sperimentazione.

5.2 Confronto tra le FRF

In questo paragrafo sono messe a confronto le curve della risposta in frequenza tracciate per via numerica ed i risultati ottenuti sperimentalmente in [57]. Nel caso della forzante di ampiezza 0.6 N avremo le curve mostrate in Fig. 110.

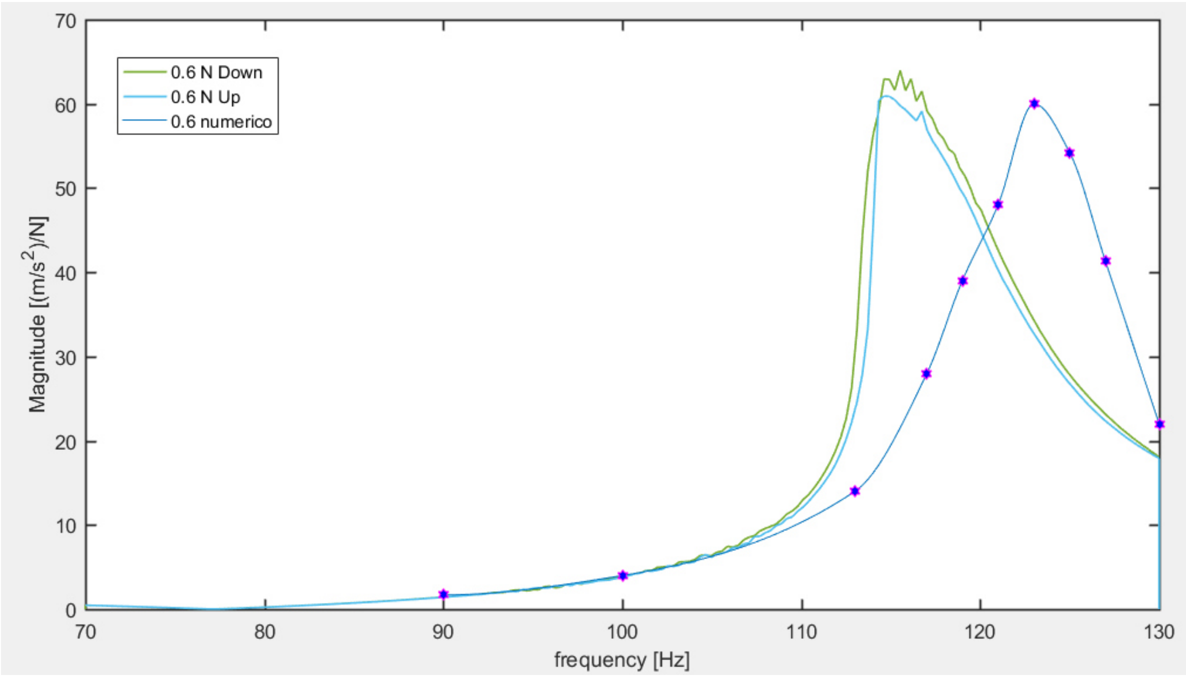


Fig. 110: confronto numerico-sperimentale per la forzante 0.6 N

Nella Fig. 110, sono riportate le curve sperimentali ricavate nelle modalità Up e Down. È possibile osservare che il valore del picco della risposta in frequenza è paragonabile in termini di valore assoluto, con una discrepanza di circa il 3%, mentre invece la frequenza di risonanza della curva tracciata per via numerica ha una frequenza di 123 Hz, maggiore del 7% rispetto alla frequenza delle curve sperimentali.

Analogamente, in seguito, sono riportati i confronti per le forzanti con modulo 0.2N e 2N (Fig. 111 e 112). Nel caso della forzante di ampiezza 0.2 N la curva tracciata per via numerica assume un valore del picco della risposta in frequenza superiore di circa il 37%. La discrepanza sul valore massimo del picco della curva può essere imputata alla presenza di fenomeni di battimento, a diverse frequenze di eccitazione a cui è stato sottoposto il sistema. Tali fenomeni di battimento, specialmente a questa forzante di eccitazione, si protraggono nel tempo e tendono a non estinguersi. Per ovviare a tale criticità sarebbe stato necessario allungare decisamente i tempi dell'analisi transitoria, in alcuni casi anche oltre un secondo, con un notevole allungamento dei tempi di calcolo, ragion per cui si è provato ad osservare la risposta del sistema al variare del coefficiente d'attrito. La diminuzione del coefficiente d'attrito, da 0.7 a 0.5, ha prodotto un abbassamento del valore del picco della FRF di circa un terzo ottenendo dei risultati comparabili alle curve sperimentali. Anche in questo caso, la frequenza di risonanza risulta essere superiore a quella ottenuta sperimentalmente di circa il 5%.

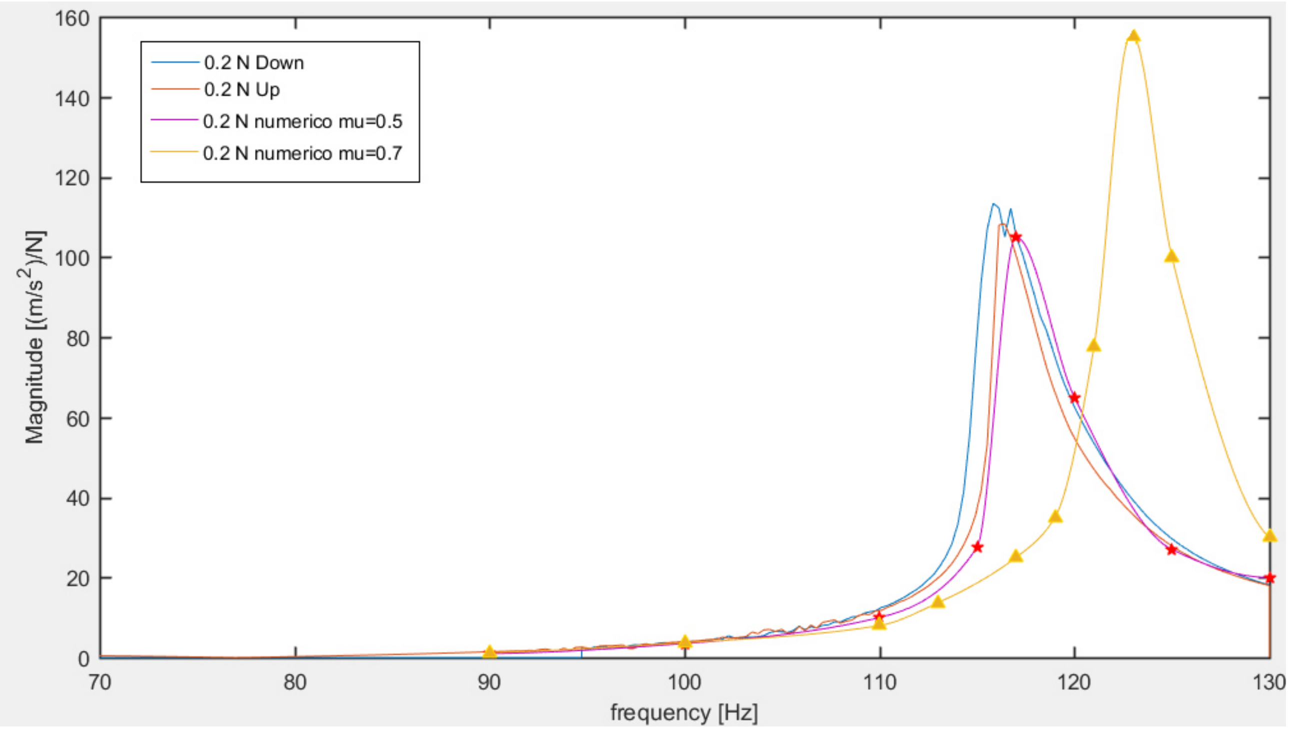


Fig. 111: confronto numerico-sperimentale per la forzante 0.2 N

Nel caso della curva tracciata per la forzante pari a 2 N (Fig.112), invece, è stato riscontato un valore del picco della frequenza di risonanza di poco inferiore al 3%, mentre la frequenza di risonanza è anche in questo caso superiore, di circa il 9%, alle frequenze di risonanza delle curve sperimentali. Questi risultati non sorprendono ed erano comunque prevedibile alla luce delle frequenze naturali superiori ricavate dall'analisi modale numerica rispetto alla sperimentazione. Inoltre, la scelta iniziale di svolgere le analisi transitorie con il modello A, nonostante il modello B fosse risultato più rispondente a quanto ottenuto per via sperimentale, è stata fatta come compromesso tra accuratezza dei risultati ed onere computazionale richiesto.

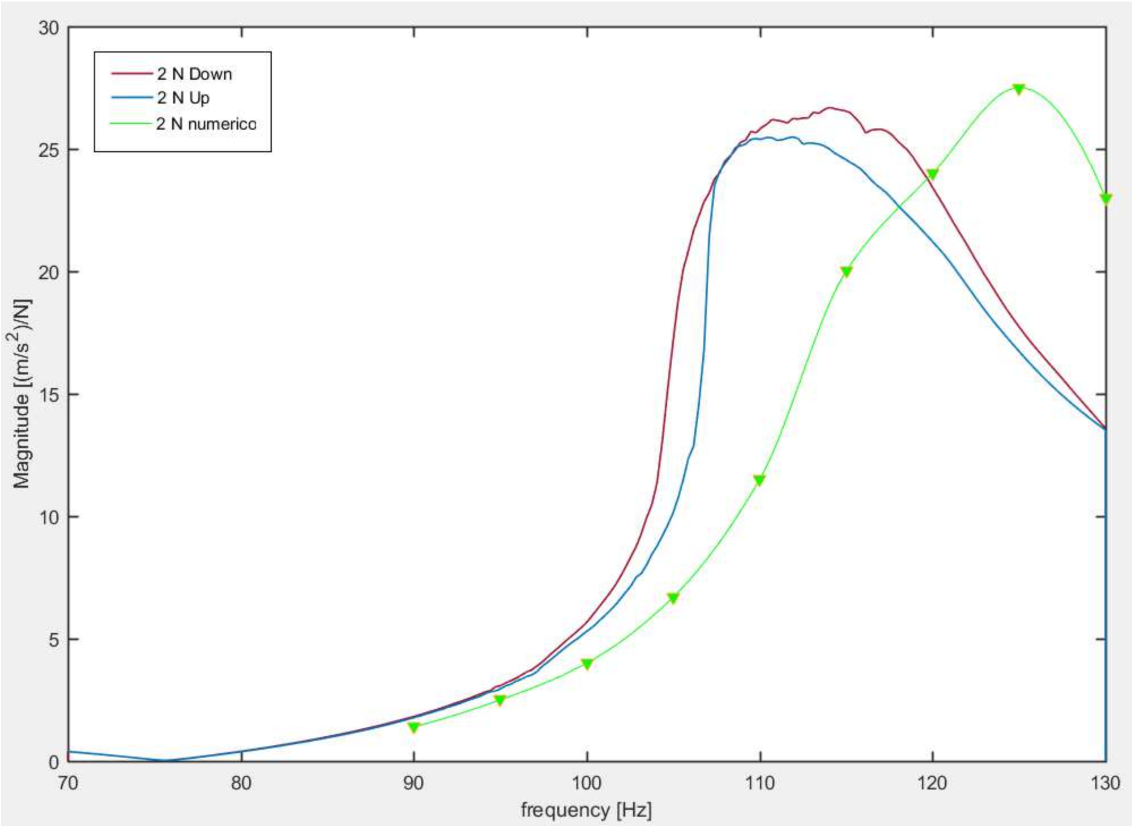


Fig. 112: confronto numerico-sperimentale per la forzante 2 N

6. Conclusione

In questo elaborato è stato affrontato lo studio del comportamento dinamico delle superfici estese collegate mediante contatto per attrito. L'argomento affrontato è di sicuro interesse in ambito ingegneristico, in quanto tutti i sistemi meccanici prevedono degli elementi di collegamento tra le varie parti del sistema e molti studi presenti in letteratura affrontano il problema con diversi approcci. Al fine di studiare il comportamento dinamico non lineare delle superfici estese collegate mediante contatto per attrito si è scelto di realizzare un modello semplificativo che trascurasse tutti gli aspetti che avrebbero sicuramente influito sul risultato in modo da focalizzare l'attenzione esclusivamente sul modello di contatto delle superfici di collegamento. L'elemento di collegamento è stato dunque rappresentato con due travi accoppiate mediante otto coppie di magneti, eliminando così le variabilità e le incertezze che si sarebbero avute anche nel caso di un semplice collegamento bullonato. In questo modo, è stato possibile analizzare nel dettaglio il comportamento del sistema in esame attraverso un approccio numerico mediante l'utilizzo di un software agli elementi finiti, Ansys, confrontando poi i risultati ottenuti con la sperimentazione. In Ansys è stato così possibile analizzare il comportamento dinamico del modello di contatto al variare del modello preso in esame; attraverso l'analisi modale del sistema è stato analizzare come cambiano le frequenze naturali del sistema e i modi di vibrare al variare del modello preso in esame, mentre invece con l'analisi statica si è studiato lo stato degli elementi di contatto mediante l'ausilio di mappe relative alle pressioni in gioco sulla superficie di contatto. Tramite l'analisi transitoria è stato possibile valutare il comportamento del sistema nel tempo, valutando inoltre l'influenza di parametri del modello risolutivo del contatto, come la rigidezza normale e tangenziale degli elementi di contatto, sulla risposta del sistema. Dall'analisi transitoria è stato poi possibile ottenere l'andamento delle accelerazioni da cui poter ricavare, a transitorio estinto, la funzione di risposta in frequenza in maniera discreta. È stato anche approfondito come la curva della risposta in frequenza vari al variare della forzante di eccitazione e del coefficiente d'attrito. Tramite questo lavoro si è evidenziato come le analisi svolte con un'integrazione diretta nel tempo richiedano un onere computazionale notevole ed è quindi parso opportuno compiere delle scelte semplificative che hanno condizionato il tempo di calcolo e l'accuratezza dei risultati.

7. Bibliografia e Sitografia

[1] Shigley, Progetto e Costruzione di macchine, III ed.;

[2] E. Chirone, S. Tornincasa, Disegno Tecnico Industriale, I ed. 2004;

[3] S. Bograd, P. Reuss, A. Schimdt, L. Gaul, M. Mayer, Modeling the dynamics of mechanical joints;

[4] A. Fasana, S. Marchesiello, Meccanica delle vibrazioni, CLUT Editrice, 2006;

[5] R.A. Ibrahim, C.L. Pettit, Uncertainties and dynamics problems of bolted joints and other fasteners, Journal of Sound and Vibration 279 (2005);

[6] E.E. Ungar, Energy dissipation at structural joints: mechanisms and magnitudes, Technical Documentary Report No. FDL-TDR-64-98, 1964;

[7] C.F. Beards, Damping in structural joints, The Shock and Vibration Digest;

[8] R.Y. Lee, Assessment of Linear and Nonlinear Joint Effects on Space Truss Booms, Department of Aeronautics and Astronautics, MIT, 1985;

[9] M.L. Bowden, Dynamics of Space Structures with Nonlinear Joints, Department of Aeronautics and Astronautics, MIT, 1988;

[10] M. Groper, J. Hemmye, The dissipation of energy in high strength friction grip bolted joints, Proceedings of SESA Spring Conference, Cleveland, 1983;

[11] D.J. Segalman, An initial overview of Iwan modeling for mechanical joints, Sandia Report, 2001;

[12] M. Groper, Microslip and macroslip in bolted joints, Experimental Mechanics 25 (1985);

[13] C.M. Firrone, S. Zucca, Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks;

[14] K. Popp, Non-smooth mechanical systems – an overview, Forschung im Ingenieurwesen 64, 1998;

[15] L. Gaul, R. Nitsche, R., The role of friction in mechanical joints, ASME, Applied Mechanics Reviews 54 (2001) 93–106;

[16] K. Willner, L. Gaul, A penalty approach for contact description by FEM based on interface physics, 1995;

[17] C. Dekoninch, Deformation properties of metallic contact surfaces of joints under the influence of dynamic tangential loads, International Journal of Machine Tool Design and Research 12 (1972);

[18] C.F. Beards, The damping of structural vibration by controlled interface slip in joints, ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress analysis, Reliability, and Design 105 (1983);

[19] Y.S. Shin, J.C. Iverson, K.S. Kim, Experimental studies on damping characteristics of bolted joints for plates and shells, ASME, Journal of Pressure Vessel Technology 113 (1991);
[20] J. Esteban, C.A. Rogers, Energy dissipation through joints: theory and experiments, Computers and Structures 75 (2000);
[21] J.H. Bickford, J.H., An Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints, II ed, 1990;
[22] T. Watanabe, Forced vibration of continuous system with non-linear boundary conditions, ASME, Journal of Mechanical Design 11 (1978);
[23] F. Wang, S. Chen, A method to determine the boundary condition of the finite element model of a slender beam using measured modal parameters, ASME, Journal of Vibration and Acoustics 118 (1996);
[24] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information Control 8 (1965);
[25] M. Hanss, S. Oexl, L. Gaul, Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact interface, Mechanical Research Communication 29 (2002);
[26] M. Hanss, K. Willner, A fuzzy arithmetical approach to the solution of finite element problems with uncertain parameters, Mechanical Research Communication 29 (2000);
[27] L. Chen, S.S. Rao, Fuzzy finite-element approach for the vibration analysis of imprecisely-defined systems, Finite Elements in Analysis and Design 27 (1997);
[28] A. Cherki, T. Son, T.M. Guerra, P. Level, On evaluating structures sensitivities to prescribed displacements uncertainties using fuzzy numbers, Engineering Computations (1997);
[29] W. Eccles, Bolted joint design, Engineering Design 10 (1984);
[30] Bolt Science, 1999–02, Vibration loosening of bolts and threaded fasteners, www.boltscience.com/pages/vibloose;
[31] A. Daadbin, Y.M. Chow, Theoretical models to study thread loosening, Mechanics and Machine Theory 27 (1992);
[32] M. Yoshimure, Measurement of dynamic rigidity and damping property of simplified joint models and simulation by computer, Annals CIRP 25 (1977);
[33] J.S. Tsai, Y.F. Chou, The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint, Journal of Sound and Vibration 125 (1988);
[34] J.R.F. Arruda, J.M.C. Santos, Model adjusting of structures with mechanical joints using modal synthesis, Proceedings of the Seventh International Modal Analysis Conference, Las Vegas, NV, 1989;
[35] J.M. Chapman, F.H. Shaw, W.C. Russell, Dynamics of trusses having nonlinear joints, 1986;

[36] W.L. Li, A new method for structural model updating and joint stiffness identification, Mechanical Systems and Signal Processing 16 (2002);
[37] Y. Ren, C.F. Beards, Identification of 'effective' linear joints using coupling and joint identification techniques, ASME, Journal of Vibration and Acoustics 120 (1998);
[38] S.F. Masri, T.K. Caughey, A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems, ASME, Journal of Applied Mechanics 46 (1979);
[39] E.F. Crawley, K.J. O'Donnell, Force-state mapping identification of nonlinear joints, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 25 (1987);
[40] W.J. Kim, Y.S. Park, Nonlinear joint parameter identification by applying the force-state mapping technique in the frequency domain, Mechanical Systems and Signal Processing 8 (1994);
[41] L. Gaul, R. Nitsche, Friction control for vibration suppression, Mechanical Systems and Signal Processing 14 (2000);
[42] L. Gaul, S. Bohlen, Identification of nonlinear structural joint models and implementation in discretized structure models, ASME Proceedings of the 11th Conference of Mechanical Vibration and Noise;
[43] L. Gaul, U. Nackenhorst, K. Willner, J. Lenz, Nonlinear vibration damping of structures with bolted joints, Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, 1994;
[44] L. Gaul, J. Lenz, Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints, Acta Mechanica 125 (1997);
[45] G.R. Monforton, T.S. Wu, Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames, American Society of Civil Engineers, Journal of Structure Division 90 (1963);
[46] M. Sekulovic, R. Salatic, Nonlinear analysis of frames with flexible connections, Computers and Structures 79 (2001);
[47] I. Yaghmai, D.A. Frohrib, A sensitive analysis of the effects of interconnection joint size, flexibility, and inertia on the natural frequencies of Timoshenko frames, Journal of Sound and Vibration 75 (1981);
[48] S.Y. Hsu, A. Fafitis, 1992, Seismic analysis design of frames with viscoelastic connections, American Society of Civil Engineers, Journal of Structure Division 118 (1992);
[49] F.G.A. Al-Bermani, B. Li, K. Zhu, S. Kitiponchai, Cyclic and seismic response of flexibility jointed frames, Engineering Structures 16 (1994);
[50] P.M. Frank, Introduction to System Sensitivity Theory, Academic Press, New York, 1978;

[51] L. Socha, The sensitivity analysis of stochastic nonlinear dynamical systems, Journal of Sound and Vibration 110 (1986);
[52] P. Lazzarin, V. Milani, M. Quaresimin, Scatter bands summarizing the fatigue strength of aluminum alloy bolted joints, International Journal of Fatigue 19 (1997);
[53] R.S. Birch, M. Alves, Dynamic failure of structural joint systems, Thin-Walled Structures 36 (2000);
[54] F.V. Ellis, D.R. Sielski, R. Viswanathan, An improved analytical method for life prediction of bolting, ASME, Journal of Pressure Vessel Technology 123 (2001);
[55] V. Seliger, Effect of Rivet Pitch Upon the Fatigue Strength of Single-Row Riveted Joints of 0.025 to 0.025-inch 24S-T ALCLAD, National Advisory Committee for Aeronautics NACA TN 900, 1943;
[56] L. Mordfin, Creep and creep-rupture characteristics of some riveted and spot-welded lap joints of aircraft materials, National Advisory Committee for Aeronautics NACA TN 3412, 1955;
[57] G. Glionna, Analisi vibrazionale di due flange collegate tramite giunti a pressione, 2018;
[58] E. Fogliasso, Analisi modale per lo studio preliminare di un giunto flangiato, 2017;
[59] https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_MESH200.html;
[60] https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_SOLID186.html;
[61] http://inside.mines.edu/~apetrell/ENME442/Labs/1301_ENME442_lab6_lecture.pdf;
[62] https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_ctec/Hlp_ctec_realkey.html#strdetsif3jla072099;
[63] https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/wb_sim/ds_harmonic_analysis_type.html;
[64] https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/wb_sim/ds_static_mechanical_analysis_type.html;
[65] https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/wb_sim/ds_transient_mechanical_analysis_type.html;
[66] M. Caruso, Hammer Test – Studio di strutture flangiate per il calcolo della frequenza di risonanza;

8. RINGRAZIAMENTI

Questo lavoro di tesi si pone a conclusione di un percorso universitario che mi ha permesso di crescere, giorno dopo giorno, come studente e come uomo. Vorrei, innanzitutto, ringraziare il mio relatore, l'Ing. Christian Maria Firrone, per la sua enorme disponibilità. Mi è impossibile non ringraziare la mia famiglia, in particolare mia madre, mio padre e mio fratello: è grazie al loro sostegno se questo traguardo è stato possibile. Vorrei inoltre ringraziare tutti gli amici che hanno condiviso con me una parte della loro vita; un grazie particolare va a Matteo, amico di una vita, Andrea e Costantino che, da semplici compagni di corso, sono poi diventati più che amici. Infine, un grazie speciale a Sara che, da quando è entrata nella mia vita, è stata la persona che più di tutte mi è stata accanto in ogni momento.